Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Vergleich von EKF und UKF zur Fahrzustandsschätzung anhand des Zweiradmodells

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Priv.-Doz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl
E 325 / A1
Institut für Mechanik und Mechatronik
Abteilung für Technische Dynamik und Fahrzeugdynamik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften
von

Lisa Mayr
Matrikelnummer: 0926279
Nachtigallgasse 4
3100 St. Pölten

Wien, im Juni 2014

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit handelt vom Thema Zustandsbeobachtung der Querdynamik eines Automobils. Als Fahrzeugmodell wird ein ebenes Zweiradmodell verwendet, bei dem die beiden Spuren des Autos auf eine Spur in der Symmetrieebene des Fahrzeugs zusammengefasst werden. Betrachtet wird ein fünfdimensionales Zustandsraumsystem mit der Längs- und Quergeschwindigkeit des Schwerpunkts, der Gierrate und den beiden Radwinkelgeschwindigkeiten als Zustandsgrößen.
Als Eingangsgrößen fungieren der Lenkwinkel des Vorderrades, Antriebs- und Bremsmoment.
Ziel dieser Arbeit ist ein Vergleich unterschiedlicher Zustandsbeobachter in Bezug auf deren Aufbau, Funktionsweise und Fähigkeiten. Verglichen werden sollen dabei drei unterschiedliche diskrete Kalman Filter, Linearer Kalman Filter, Extended Kalman Filter und Unscented Kalman Filter, bei unterschiedlichen Fahrmanövern und bei unterschiedlichen Abtastzeiten.

Abstract

This diploma thesis deals with the topic of state observation of the lateral dynamics of an automobile. A planar two-wheel vehicle model is used, where the two tracks of the car are grouped together on a single track in the plane of symmetry of the vehicle. A five-dimensional state space system is considered. The state variables are the longitudinal and lateral velocity of the center of gravity, the yaw rate and the wheel angular velocities. The steering angle of the front wheel and the drive and braking torque act as input variables. The aim of this thesis is a comparison of different state observers in terms of their structure and functionality. This analysis compares three different discrete Kalman Filters, Linear Kalman Filter, Extended Kalman Filter and Unscented Kalman Filter, by means of different maneuvers and different sampling times.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis **6**

1 Vorwort **8**

2 Einleitung **9**

3 Grundlagen **13**

3.1 Zustandsraumsysteme 13

3.2 Linearisierung um einen stationären Zustand 14

3.3 Stabilität kontinuierlicher linearer Zustandsraumsysteme 17

3.4 Zustandsbeobachtbarkeit kontinuierlicher Zustandsraumsysteme 18

3.4.1 Zustandsbeobachtbarkeit kontinuierlicher nichtlinearer Zustandsraumsysteme 18

3.4.2 Zustandsbeobachtbarkeit kontinuierlicher linearer Zustandsraumsysteme 20

3.5 Diskretisierung 23

3.6 Diskrete Zustandsraumsysteme 24

3.7 Zustandsbeobachtbarkeit diskreter Zustandsraumsysteme 25

3.7.1 Zustandsbeobachtbarkeit diskreter nichtlinearer Zustandsraumsysteme 25

3.7.2 Zustandsbeobachtbarkeit diskreter linearer Zustandsraumsysteme . 25

4 Kalman Filter **27**

4.1 Linearer Kalman Filter 27

4.1.1 LKF Filtergleichungen 34

4.2 Extended Kalman Filter 35

4.2.1 EKF Filtergleichungen 37

4.3 Unscented Kalman Filter 38

4.3.1 UKF Filtergleichungen 40

5 Fahrzeugmodell **43**
5.1 Nichtlineares Reifenmodell 59

6 Implementierung **69**

7 Ergebnisse **71**
7.1 Lenkwinkelrampe mit moderater Querbeschleunigung 73
7.2 Lenkwinkelrampe mit hoher Querbeschleunigung 80
7.2.1 Lenkwinkelrampe mit hoher Querbeschleunigung mit zusätzlichem Bremsen 85
7.2.2 Einfluss der Abtastzeit 91
7.3 Lenkwinkelsprung 94

8 Zusammenfassung und Ausblick **99**

Literaturverzeichnis **100**

Abbildungsverzeichnis

5.1 Zweiradmodell 43
5.2 erweitertes Zweiradmodell 49
5.3 Vorderrad 50
5.4 F_y über Schräglaufwinkel 63
5.5 F_x über Schlupf 63
5.6 F_y über F_x mit β als Schräglaufwinkel 64
5.7 Handlingdiagramm δ 65
5.8 Handlingdiagramm Schwimmwinkel 66
5.9 α_R über a_n 67
5.10 α_F über a_n 68

7.1 δ bei Lenkwinkelrampe mit moderatem a_y 74
7.2 Lenkradwinkel bei Lenkwinkelrampe mit moderatem a_y 75
7.3 Zustandsgrößen bei Lenkwinkelrampe mit moderatem a_y 76
7.4 a_y bei Lenkwinkelrampe mit moderatem a_y 77
7.5 Schräglaufwinkel und Schlupf bei LW-Rampe mit moderatem a_y 78
7.6 δ bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y 80
7.7 Lenkradwinkel bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y 81
7.8 Zustandsgrößen bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y 82
7.9 a_y bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y 83
7.10 Schräglaufwinkel und Schlupf bei LW-Rampe mit hohem a_y 84
7.11 Bremsmoment bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y mit Bremsen 86
7.12 Zustandsgrößen bei LW-Rampe mit hohem a_y mit Bremsen 87
7.13 a_y bei LW-Rampe mit hohem a_y mit Bremsen 88
7.14 a_x bei LW-Rampe mit hohem a_y mit Bremsen 88
7.15 Schräglaufwinkel u. Schlupf bei LW-Rampe mit hohem a_y mit Br. 89
7.16 Zustandsgrößen, LW-Rampe mit hohem a_y, T=0.01s 92
7.17 Zustandsgrößen, LW-Rampe mit hohem a_y, T=0.05s 93

7.18 δ bei Lenkwinkelsprung mit moderatem a_y 94
7.19 Lenkradwinkel bei Lenkwinkelsprung mit moderatem a_y 95
7.20 Zustandsgrößen, LW-Sprung mit moderatem a_y, T=0.01s 96
7.21 Zustandsgrößen, LW-Sprung mit moderatem a_y, T=0.05s 97

1 Vorwort

Diese Diplomarbeit entstand im Zuge meiner Tutor-Tätigkeiten am Institut für Mechanik und Mechatronik an der TU Wien. Mein großes Interesse an Fahrzeugdynamik und Regelungstechnik und die Tatsache, dass mein Diplomarbeitsbetreuer Herr Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl mir ein Diplomarbeitsthema vorschlug, das eben diese beiden Bereiche miteinander verknüpft, war ein glücklicher Zufall.

Viele Stunden des Lesens, Berechnens, Tüftelns und Diskutierens wurden in diese Arbeit gerne investiert. Ich möchte mich an dieser Stelle herzlich bei Herrn Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Plöchl für sein wunderbares Engagement, für seine Bereitschaft und seine große Unterstützung bedanken. Nicht zu vergessen seine große Begeisterung an der Thematik selbst, die mich umso mehr motivierte. Ein weiterer Dank geht an Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Edelmann und Herrn Dipl.-Ing. Martin Haudum, die mir immer mit Rat und Tat zur Seite standen.

Bedanken möchte ich mich auch ganz besonders bei meiner Familie, die mich in meinen Vorhaben immer unterstützte und mir Rückhalt gab.

2 Einleitung

Das wissenschaftliche Gebiet der Zustandsbeobachtung ist noch relativ jung. War es vor etwa 50 Jahren noch weitgehend unbekannt, so hat es seither zunehmend an Interesse gewonnen. Meine Begeisterung für diese Thematik wurde im Zuge einiger Vorlesungen und Übungen im Rahmen des Vertiefungsmoduls *Automatisierungstechnik* meines Masterstudiums geweckt. In diesem Sinne sollte nun meine Diplomarbeit das Thema Zustandsbeobachtung behandeln. Sinn und Zweck eines Zustandsbeobachters soll im Folgenden allgemein erklärt werden.

Betrachtet man ein physikalisches System, so ist es nicht immer möglich, alle das System beschreibenden Zustandsgrößen problemlos zu messen. Ein Problem, das in der Messtechnik relativ häufig auftritt, ist sogenanntes Messrauschen. Dieses durch das Messgerät oder den Messvorgang hervorgerufene Rauschen bewirkt eine Verfälschung des wahren Signals, sodass dieses je nach Grad des Verrauschens auch vollkommen unbrauchbar werden kann. In vielen Fällen ist die messtechnische Erfassung aller Systemgrößen des weiteren auch sehr aufwendig. Um dennoch das Verhalten dieser schwer oder nicht messbaren Systemgrößen betrachten zu können, verwendet man sogenannte Zustandsbeobachter.

Zustandsbeobachter gibt es sowohl für kontinuierliche als auch diskrete Systeme. Beispiele für kontinuierliche Zustandsbeobachter wären jene nach *Luenberger* und *Kalman-Bucy*. Beim Luenberger Beobachter entspricht der Zustandsbeobachter einem Modell des wahren Systems. In diesem Modell erfolgt eine *Prädiktion* des geschätzten Zustandsvektors $\dot{\underline{\hat{x}}}$ mit anschließender Korrektur dieses Wertes. Diese Korrektur erfolgt durch Addition eines sogenannten *Innovationsterms*, der sich aus der Differenz zwischen gemessenem Ausgang der Strecke und dem im Modell bestimmten geschätzten Ausgang, gewichtet mit einer Verstärkungsmatrix, zusammensetzt.

Der Kalman-Bucy Filter ist analog zum Luenberger Beobachter aufgebaut, allerdings mit dem Unterschied, dass nun auch stochastische Störungen bezüglich Strecke und Messung

berücksichtigt werden können.

Betrachtet man nun zeitdiskrete Systeme, so kann unter anderem mit dem *diskreten Kalman Filter* als Zustandsbeobachter gearbeitet werden. Diskrete Filter nach Kalman gibt es sowohl für lineare als auch nichtlineare Systeme. Wie der Name bereits impliziert, wird der *LKF - Lineare Kalmanfilter* für lineare Systeme verwendet. Filter wie *EKF - Extended Kalman Filter* und *UKF - Unscented Kalman Filter* finden bei nichtlinearen Systemen Verwendung. Der Extended Kalman Filter ergibt sich unter anderem aus Taylorreihenentwicklungen der ursprünglich nichtlinearen System- bzw. Messgleichungen und arbeitet mit lokalen Linearisierungen des Systems um zuvor berechnete Zustandsgrößen.

Da Linearisierungen prinzipiell Fehler mit sich ziehen, kann als Alternative zum Extended Kalman Filter der Unscented Kalman Filter verwendet werden. Beim UKF werden sogenannte *Sigma Points* zur besseren Abbildung des Mittelwerts und der Kovarianz zufolge der Nichtlinearität des Systems berechnet, die sich aus einer zuvor geschätzten Zustandsgröße vergrößert respektive vermindert um einen anhand einer Kovarianzmatrix der Zustandsgröße und der Dimension des Zustandsraums bestimmten Wert zusammensetzen. Diese Sigma Points werden anschließend in die Systemgleichung eingesetzt, um die jeweiligen Punkte zum nächsten Zeitschritt zu prädizieren. Durch das Berechnen eines gewichteten Mittelwertes über all diese Sigma Points gelangt man zur Prädiktion der Zustandsgröße.

Bezüglich UKF existieren mehrere unterschiedliche Typen. Es soll nun auf zwei davon genauer eingegangen werden: den sogenannten *2n-UKF* und *2n+1-UKF*. Die Größe n bezeichnet darin die Dimension des Zustandsraums. Beim 2n-UKF wird mit $2n$ Sigma Points gearbeitet. Beim 2n+1-UKF werden dementsprechend $2n+1$ Sigma Points bestimmt.

Im Bereich des Automobils wurden neben Kalman Filtern bereits auch andere Zustandsbeobachter zur Fahrzustandsschätzung untersucht. In [15] wird beispielsweise der Schwimmwinkel eines nichtlinearen, zweispurigen Fahrzeugmodells mit Hilfe eines *AQF-Observers* (Observer with Adaption of a Quality Function) bestimmt. Dabei wird die Dynamik des nichtlinearen Schätzfehlers an die Dynamik eines linearen Ersatzsystems angepasst. In [4] wird zur Schätzung der Längs- und Quergeschwindigkeit eines zweispurigen Fahrzeugmodells ein kaskadierter Beobachter verwendet, bei dem die zuerst geschätzte Längsgeschwindigkeit als Eingangsgröße in den Beobachter für die Schätzung der Quergeschwindigkeit eingeht. In [1] erfolgt die Schätzung der Reifenkräfte und des Schwimmwinkels durch Kombination eines *Sliding Mode Observers* mit einem EKF. In [7], [17] und [8] wird der EKF, teilweise adaptiert, zur Fahrzustandsschätzung eines nichtlinearen Fahrzeugmodells ver-

wendet. In [8] wird zum EKF ein integrierender Term hinzugefügt (PI-EKF). In [17] werden zwei EKFs parallel verwendet, was als *DEKF- (Dual Extended Kalman Filter)* Technik bezeichnet wird.
In [16] und [18] werden mithilfe eines Unscented Kalman Filters Geschwindigkeitsschätzungen eines Fahrzeugs durchgeführt. In [18] wird dazu, wie in dieser Diplomarbeit, das *HSRI*-Reifenmodell verwendet.

Es wurden auch bereits Vergleiche zwischen EKF und UKF angestellt. In [9], beispielsweise, findet im Zuge einer *RFID - Radio Frequency Identification*, sprich einer Lokalisierung von Objekten mit Hilfe von Radiowellen, ein Vergleich der Lokalisierungsgenauigkeit zwischen dem Unscented und Extended Kalman Filter statt. Simulationsergebnisse zeigen dabei eine höhere Genauigkeit des UKF gegenüber dem EKF. In [14] wird ein Vergleich zwischen EKF und UKF in Bezug auf integrierte Navigations-Informationssysteme angestellt. Es wurde eine leicht bessere Performance des Unscented Kalman Filters festgestellt, jedoch die höhere Rechenzeit des UKF kritisiert. In [2] werden der Extended und Unscented Kalman Filter verglichen bezüglich zeitdiskreter Systeme mit nichtdifferenzierbaren Dynamiken. Als Resultat ergab sich, dass bei nicht allzu großen Nichtlinearitäten die Performances von EKF und UKF ähnlich gut sind, während bei starken Nichtlinearitäten der UKF besser abschneidet.

Ziel dieser Diplomarbeit ist ein Vergleich des Linearen, Extended und 2n-Unscented Kalman Filters, angewandt auf die Schätzung der Quergeschwindigkeit eines Automobils, in Bezug auf deren Aufbau bzw. Funktionsweise und deren Fähigkeiten. Eine Fähigkeit wäre bei bekanntem Mess- und Systemrauschen und damit bekannten Mess- und Systemrauschkovarianzmatrizen eine möglichst hohe Übereinstimmung zwischen dem wahren und dem mit dem Kalman Filter beobachteten Signal. Diese Fähigkeit soll bei unterschiedlichen Fahrmanövern in Bezug auf unterschiedliche Abtastzeiten des Systems hin untersucht und die Filter qualitativ bezüglich ihrer Performance verglichen werden.
Als Fahrzeugmodell wird ein nichtlineares Zweiradmodell verwendet, bei dem die beiden Spuren des Automobils auf eine Spur in der Symmetrieebene des Fahrzeugs zusammengefasst werden. Bezüglich dieses Modells werden diverse Annahmen getroffen und Vereinfachungen vorgenommen, die in Kapitel 5 beschrieben sind. Für das Referenzsystem, dessen Systemgrößen mit den beobachteten Ergebnissen der Kalman Filter verglichen werden sollen, wird dasselbe Fahrzeugmodell verwendet, das auch in den Filtern implementiert wird. Durch Verrauschen der Signale des Referenzsystems wird dieses gezielt abgeändert. Die Simulation des Referenzsystems liefert dann Ausgangsdaten y, die im Zuge der Korrektur

(*Innovation*) der *prädizierten* Zustandsgrößen im Kalman Filter verwendet werden.

Aufgrund der Linearisierung der System- und Messgleichungen um die Geradeausfahrt wird bezüglich Übereinstimmung zum Referenzsignal ein schlechteres Abschneiden des Linearen Kalman Filters gegenüber dem EKF bzw. UKF erwartet. Im Zuge einer Vergrößerung der Abtastzeit wird ein Unterschied zwischen EKF und UKF bezüglich ihrer Performance vermutet.

Im folgenden Kapitel 3 werden Grundlagen bezüglich Zustandsraumsystemen, wie beispielsweise deren Struktur, sowie auch Begriffe wie Beobachtbarkeit erklärt. Anschließend folgen in Kapitel 4 die Herleitungen für den Linearen, Extended und Unscented Kalman Filter und in Abschnitt 5 die Beschreibung des Fahrzeugmodells. In Kapitel 6 folgen Anmerkungen bezüglich der Implementierung des Fahrzeugmodells und in Kapitel 7 werden die Ergebnisse unterschiedlicher Fahrmanöver präsentiert und diskutiert. Im letzten Abschnitt 8 folgen eine kurze Zusammenfassung der Diplomarbeit sowie ein Ausblick.

3 Grundlagen

3.1 Zustandsraumsysteme

Arbeitet man im Bereich der Fahrzeugdynamik, so hat man es meist mit Bewegungsgleichungen in der Form von Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu tun. Diese Gleichungen, allgemein n-ter Ordnung, können allerdings auch durch Systeme von n -meist gekoppelten- Differentialgleichungen erster Ordnung dargestellt werden. Man spricht dabei dann von Zustandsraumsystemen.

Für ein kontinuierliches nichtlineares System ergeben sich folgende Zustandsgleichungen:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{z}) \tag{3.1}$$

$$\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u}, \underline{z}) \tag{3.2}$$

$\underline{x}$ ...	Zustandsvektor	$(n \times 1)$
$\underline{u}$ ...	Eingangsvektor	$(r \times 1)$
$\underline{z}$ ...	Störgrößenvektor	$(q \times 1)$
$\underline{y}$ ...	Ausgangsgrößenvektor	$(m \times 1)$.

Der Zustandsvektor $\underline{x}$ respektive die Zustandsvariablen x_i mit $i = 1 \ldots n$ seien folgendermaßen definiert:

"Unter den Zustandsvariablen x_i, $i = 1 \dots n$ eines dynamischen Systems versteht man die kleinstmögliche Anzahl von inneren Systemgrößen, aus denen sich bei Kenntnis ihrer Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt t_0 das Verhalten des Systems für $t \geq t_0$, bei in diesem Zeitraum bekanntem Steuervektor $\underline{u}$ (bekannter Stellgröße u), eindeutig bestimmen lässt" [5].

Der Zustandsvektor wird dabei wie folgt gewählt: "Unter der Zustandsvektorwahl versteht man die Festlegung der Zustandsvariablen, d.h. jener Größen, die als Komponenten des Zustandsvektors zur Beschreibung des Systemzustandes verwendet werden" [5].

3.2 Linearisierung um einen stationären Zustand

Um das nichtlineare Zustandsraumsystem aus den Gleichungen (3.1) und (3.2) zu linearisieren, kann wie folgt vorgegangen werden:

Die Funktionen $\underline{f}(\cdot)$ und $\underline{g}(\cdot)$, bzw. der Zustands-, Eingangs-, und Störgrößenvektor aus (3.1) respektive (3.2) seien definiert durch

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} \quad . \tag{3.4}$$

Das linearisierte Zustandsraumsystem ergibt sich nun zu:

$$\Delta\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\Delta\underline{x} + \underline{B}\,\Delta\underline{u} + \underline{E}\,\Delta\underline{z} \tag{3.5}$$

$$\Delta\underline{y} = \underline{C}\,\Delta\underline{x} + \underline{D}\,\Delta\underline{u} + \underline{F}\,\Delta\underline{z} \tag{3.6}$$

mit $\Delta\underline{\dot{x}} = \underline{\dot{x}} - \underline{\dot{x}}_0 = \underline{\dot{x}}$, $\Delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}_0$, $\Delta\underline{u} = \underline{u} - \underline{u}_0$, $\Delta\underline{z} = \underline{z} - \underline{z}_0$, $\Delta\underline{y} = \underline{y} - \underline{y}_0$

$\underline{x}$ ...	Zustandsvektor	$(n \times 1)$
$\underline{u}$ ...	Eingangsvektor	$(r \times 1)$
$\underline{z}$ ...	Störgrößenvektor	$(q \times 1)$
$\underline{y}$ ...	Ausgangsgrößenvektor	$(m \times 1)$
$\underline{A}$ ...	Systemmatrix	$(n \times n)$
$\underline{B}$ ...	Eingangsmatrix	$(n \times r)$
$\underline{C}$ ...	Ausgangsmatrix	$(m \times n)$
$\underline{D}$ ...	Durchgangsmatrix	$(m \times r)$
$\underline{E}$ ...	Systemstörmatrix	$(n \times q)$
$\underline{F}$ ...	Ausgangsstörmatrix	$(m \times q)$.

Die mit 0 indizierten Größen stellen dabei Werte im stationären Zustand dar. Die Matrizen des linearisierten Zustandsraumsystems berechnen sich wie folgt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial z_q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \frac{\partial f_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial z_q} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial u_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial u_1} & \frac{\partial g_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial u_r} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_q} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial z_q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial z_1} & \frac{\partial g_m}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial z_q} \end{bmatrix} . \tag{3.12}$$

Die Matrizen (3.7) bis (3.12) seien im stationären Zustand ausgewertet.

3.3 Stabilität kontinuierlicher linearer Zustandsraumsysteme

Die charakteristische Gleichung eines linearen Zustandsraumsystems ist von großer Bedeutung im Zuge einer Systemanalyse. Sie gibt beispielsweise Auskunft über die Stabilität von Zustandsraumsystemen.

Gegeben sei das lineare Zustandsraumsystem

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} \ . \tag{3.13}$$

Die charakteristische Gleichung des Systems (3.13) sieht allgemein folgendermaßen aus:

$$\det(s\underline{I} - \underline{A}) = 0 \tag{3.14}$$

mit $\underline{I}$ als Einheits- und $\underline{A}$ als Systemmatrix.

Gleichung (3.14) stellt ein Eigenwertproblem dar. Ein Lösen dieser Gleichung ergibt folglich die Eigenwerte der Systemmatrix $\underline{A}$. Diese sind ausschlaggebend für das Stabilitätsverhalten der Lösungen der Zustandsraumsysteme:

"Das [...] System [...] [(3.13)] ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix $\underline{\mathrm{A}}$ in der linken Halbebene liegen.
Das [...] System [...] [(3.13)] wird grenzstabil genannt, wenn alle Eigenwerte der Systemmatrix $\underline{\mathrm{A}}$ in der linken Halbebene liegen außer einem einfachen Eigenwert im Ursprung oder einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar auf der Imaginärachse.
Das [...] System [...] [(3.13)] ist instabil, wenn Eigenwerte von $\underline{\mathrm{A}}$ in der rechten Halbebene, oder mehrfache Eigenwerte auf der Imaginärachse liegen" [5].

Wird in der obigen Definition eine Halbebene erwähnt, so ist damit eine Halbebene in der komplexen s-Ebene gemeint. Die s-Ebene wird aufgespannt durch eine Realachse als Abszisse und eine Imaginärachse als Ordinate.

3.4 Zustandsbeobachtbarkeit kontinuierlicher Zustandsraumsysteme

Ein Charakteristikum von Zustandsraumsystemen, das entweder erfüllt sein kann oder nicht, ist die Beobachtbarkeit. Sie ist vor allem dann essentiell, wenn aufgrund von Ausgangsgrößen, Messungen, auf die Zustandsgrößen des Systems zurück geschlossen werden soll.

3.4.1 Zustandsbeobachtbarkeit kontinuierlicher nichtlinearer Zustandsraumsysteme

Gegeben sei folgendes nichtlineare System

$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{m} g_j(x)u_j\,, \quad u = (u_1, ..., u_m)$

$$y_i = h_i(x)\,, \tag{3.15}$$

mit $h = (h_1, ..., h_p)^{\mathrm{T}}$ als Ausgangsgleichungssystem. "Two states $x_1, x_2 \in M$ are said to be indistinguishable (denoted $x_1 I x_2$) for [...] [(3.15)] if for every admissible input function u the output function $t \to y(t, 0, x_1, u)$, $t \geq 0$, of the system for initial state $x(0) = x_1$, and the output function $t \to y(t, 0, x_2, u)$, $t \geq 0$, of the system for initial state $x(0) = x_2$, are identical on their common domain of definition. The system is called observable if $x_1 I x_2$ implies $x_1 = x_2$" [10].
Die obige Definition sagt aus, dass zwei Anfangszustände x_1 und x_2 nicht unterscheidbar sind, wenn sie nach $t \geq 0$ zum selben Ausgang y führen. Das System ist genau dann beobachtbar, wenn diese beiden Anfangszustände identisch sind, sprich $x_1 = x_2$. Denn, bei der Beobachtbarkeit geht es darum, durch einen Ausgang auf Systemzustände allgemein bzw. Anfangszustände zurückschließen zu können. Führen zwei Anfangszustände x_1 und x_2 zum selben Ausgang y, so kann ausgehend von y nicht eindeutig auf einen der beiden Anfangszustände gezielt zurückgeschlossen werden. Sind die Anfangszustände x_1 und x_2 jedoch identisch, ist dies möglich, das System ist beobachtbar.

Der Vektorraum V respektive die Bezeichnung *V-indistinguishable* seien definiert durch: "Let $V \subset M$ be an open set containing x_1 as well as x_2. We say that x_1 and x_2 are V-indistinguishable denoted as $x_1 I^V x_2$, if for every admissible constant control $u : [0, T] \to U$, $T > 0$ arbitrary, with the property that the solutions $x(t, 0, x_1, u)$, and $x(t, 0, x_2, u)$ both remain in V for $t \leq T$ on their common domain of definition" [10].

Damit gilt für die Definition von lokaler Beobachtbarkeit:
"The system [...] [(3.15)] is called locally observable at x_0 if there exists a neighborhood W of x_0 such that for every neighborhood $V \subset W$ of x_0 the relation $x_0 I^V x_1$ implies that $x_1 = x_0$. If the system is locally observable at each x_0 then it is called locally observable" [10].

Betrachtet man das nichtlineare System (3.15), so bezeichnet O den sogenannten Beobachtungsraum der Funktionen des Raumes M mit $h_1, ..., h_p$ sowie den Lie-Ableitungen

$$L_{X1} L_{X2} \cdots L_{Xk} h_j \,, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.16}$$

mit X_i in $\{f, g_1, ..., g_m\}$. X_i bezeichnet darin Vektorfelder des Sets an Vektorfeldern $\{f, g_1, ..., g_m\}$. Diese Lie-Ableitungen ergeben Vektoren, sprich Richtungen, in diesem Beobachtungsraum.

Lie-Ableitungen berechnen sich allgemein nach folgendem Schema:

$$L_f \lambda(x) = \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x} f(x) \ . \tag{3.17}$$

"The observation space O defines the observability codistribution, denoted as dO, by setting

$$\mathrm{d}O(q) = \mathrm{span}\{\mathrm{d}H(q) | H \in O\} \,, \quad q \in M \text{ "[10].} \tag{3.18}$$

H bezeichnet darin die Ausgangsgleichung, respektive das Ausgangsgleichungssytem.

Für lokale Beobachtbarkeit an der Stelle x_0 muss folgende Bedingung erfüllt sein:
"Consider the system [...] [(3.15)] with $\dim M = n$. Assume that

$$\dim \mathrm{d}O(x_0) = n\,, \tag{3.19}$$

then the system is locally observable at x_0" [10].

3.4.2 Zustandsbeobachtbarkeit kontinuierlicher linearer Zustandsraumsysteme

Die Zustandsbeobachtbarkeit linearer kontinuierlicher Systeme ist im Vergleich zu nichtlinearen Systemen relativ einfach zu überprüfen und sei wie folgt definiert:

"Das [...] [lineare System]

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u}; \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \tag{3.20}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u} \tag{3.21}$$

wird vollständig zustandsbeobachtbar genannt, wenn aus der Kenntnis des Einganges $\underline{u}(t)$ und des Ausganges $\underline{y}(t)$ in einem endlichen Zeitintervall $t_0 \leq t \leq t_1$ jeder Anfangszustand $\underline{x}_0$ eindeutig bestimmt werden kann" [5].

Beobachtbarkeitskriterium nach KALMAN

"Das System [...] [(3.20)] und [...] [(3.21)] ist dann und nur dann vollständig zustandsbeobachtbar, wenn die $(mn \times n)$-Beobachtbarkeitsmatrix den vollen Rang n besitzt:

$$\text{Rang}(\underline{Q}_B) = \text{Rang} \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \\ . \\ . \\ . \\ \underline{C}\,\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \text{ “[5].} \tag{3.22}$$

Die Größe n stellt wiederum die Anzahl der Zustandsvariablen dar, $\underline{Q}_B$ bezeichnet die sogenannte Beobachtbarkeitsmatrix, $\underline{C}$ die Messmatrix und $\underline{A}$ die Systemmatrix.

Beobachtbarkeitskriterium nach HAUTUS

“Das System [...] [(3.20)] und [...] [(3.21)] ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} \lambda_i \underline{I} - \underline{A} \\ \underline{C} \end{bmatrix} = n \tag{3.23}$$

für alle Eigenwerte λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der Matrix $\underline{A}$ erfüllt ist“ [5].

Beobachtungsnormalform

Der Zugang zur Zustandsraumdarstellung über die n Differentialgleichungen erster Ordnung eines Systems ist, bei Verständnis der Thematik, relativ intuitiv. Ein alternativer Zugang wäre über die Übertragungsfunktion des Systems, die Eingangs- und Ausgangsverhalten miteinander in Verbindung setzt, und das System somit in einer sogenannten *Normalform* darzustellen.

Eine Übertragungsfunktion zwischen Eingang $u(s)$ und Ausgang $y(s)$ hätte dabei folgende

allgemeine Form:

$$F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_n s^n + ... + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} \quad . \tag{3.24}$$

Bei der Auslegung von Zustandsbeobachtern beispielsweise bietet sich also die Möglichkeit, das Zustandsraumsystem aus der entsprechenden Übertragungsfunktion heraus in der sogenannten *Beobachtungsnormalform* darzustellen.

Die Zustandsgleichungen in der Beobachtungsnormalform ergeben sich aus den Koeffizienten der Übertragungsfunktion zwischen Eingang und Ausgang des Systems, hier gegeben mit (3.24), und sehen allgemein aus wie folgt:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}_B \, \underline{x} + \underline{b}_B \, u \tag{3.25}$$

$$y = \underline{c}_B^{\mathrm{T}} \, \underline{x} + d \, u \tag{3.26}$$

mit

$$\underline{A}_B = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & ... & .. \\ -a_1 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

$$\underline{b}_B = \begin{bmatrix} c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$\underline{c}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

$$d = b_n \tag{3.30}$$

$$c_i = b_i - a_i b_n; \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \ . \tag{3.31}$$

Zur Bestimmung von $\underline{b}_B$ wird hier der Zusammenhang (3.31) verwendet [3].

3.5 Diskretisierung

Da im Zuge dieser Arbeit das Fahrzeugmodell und die Kalman Filter auf einem digitalen Rechner implementiert werden sollen, müssen die ursprünglich kontinuierlichen Bewegungs-

gleichungen des Modells diskretisiert werden. Um kontinuierliche Systeme zu diskretisieren gibt es unterschiedliche Algorithmen. Auf eine Art der Diskretisierung soll an dieser Stelle eingegangen werden. Eine nach der Zeit abgeleitete Größe $\dot{x}$ wird dabei folgendermaßen approximiert:

$$\dot{x} \sim \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} \quad . \tag{3.32}$$

Die Variable $k = 1, 2, \ldots$ in Gleichung (3.32) bezeichnet die Diskretisierungslaufvariable. T steht für die Abtastzeit.

3.6 Diskrete Zustandsraumsysteme

Diskrete nichtlineare Zustandsraumsysteme haben allgemein folgende Form:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{f}(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{z}_k) \tag{3.33}$$

$$\underline{y}_k = \underline{h}(\underline{x}_k, \underline{u}_k, \underline{z}_k) \quad . \tag{3.34}$$

Ein diskretes lineares Zustandsraumsystem sieht in allgemeiner Form
aus wie folgt:

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{F}\,\underline{x}_k + \underline{G}\,\underline{u}_k + \underline{J}\,\underline{z}_k \tag{3.35}$$

$$\underline{y}_k = \underline{H}\,\underline{x}_k + \underline{K}\,\underline{u}_k + \underline{L}\,\underline{z}_k \quad . \tag{3.36}$$

3.7 Zustandsbeobachtbarkeit diskreter Zustandsraumsysteme

3.7.1 Zustandsbeobachtbarkeit diskreter nichtlinearer Zustandsraumsysteme

Definitionen bezüglich Zustandsbeobachtbarkeit diskreter nichtlinearer Zustandsraumsysteme gelten in Analogie zu jenen für kontinuierliche nichtlineare Systeme, siehe Abschnitt 3.4.1.

3.7.2 Zustandsbeobachtbarkeit diskreter linearer Zustandsraumsysteme

Bei zeitdiskreten linearen Systemen ist eine Überprüfung der Zustandsbeobachtbarkeit genau wie bei kontinuierlichen linearen Systemen relativ einfach.

“A discrete-time system

$$\underline{x}[(k+1)T] = \underline{G}\,\underline{x}(kT) \tag{3.37}$$

$$y(kT) = \underline{c}^{\mathrm{T}}\,\underline{x}(kT) \tag{3.38}$$

is completely state observable, if every initial state $\underline{x}(0)$ can be determined from the observation of $y(kT)$ over n sampling periods.

The necessary and sufficient condition for complete state observability is:

$$\operatorname{rank} \underline{Q}_O = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \underline{c}^{\mathrm{T}} \\ \underline{c}^{\mathrm{T}} \underline{G} \\ \vdots \\ \underline{c}^{\mathrm{T}} \underline{G}^{n-1} \end{bmatrix} = n \text{ “[6].} \tag{3.39}$$

4 Kalman Filter

In diesem Kapitel folgen die Herleitungen des Linearen, Extended und Unscented Kalman Filters. Nach jeder Herleitung sind jeweils die Gleichungen des jeweiligen Filters zusammengefasst angeführt.

4.1 Linearer Kalman Filter

Gegeben sei ein lineares zeitdiskretes System:

$$x_k = F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1} \tag{4.1}$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \ . \tag{4.2}$$

System- und Messrauschen w respekive v stellen jeweils weißes Rauschen, mittelwertfrei, unkorreliert dar und besitzen Q bzw. R als Kovarianzmatrizen.

$$w_k \sim (0, Q_k) \tag{4.3}$$
$$v_k \sim (0, R_k) \tag{4.4}$$
$$E[w_k w_j^{\mathrm{T}}] = Q_k \delta_{k-j} \tag{4.5}$$
$$E[v_k v_j^{\mathrm{T}}] = R_k \delta_{k-j} \tag{4.6}$$
$$E[v_k w_j^{\mathrm{T}}] = 0 \tag{4.7}$$

mit δ_{k-j} als Kronecker Delta Impuls, für den folgendes gilt: $\delta_{k-j} = 1$ für $k = j$ und $\delta_{k-j} = 0$ für $k \neq j$. Ziel ist nun die Bestimmung eines Schätzwertes für x_k (der Schätzwert sei dargestellt mit einem Dach, sprich $\hat{x}_k$). Dies kann durch Berechnen des Erwartungswerts von x_k bedingt durch bisher bekannte Ausgangswerte geschehen. In Abhängigkeit dieser Ausgangswerte unterscheidet man zwei Arten von Schätzungen:

Kennt und verwendet man alle Ausgangswerte bis k, erhält man

$$\hat{x}_k^+ = E[x_k | y_1, y_2, ..., y_k] \tag{4.8}$$

als *a posteriori* Schätzung.

Kennt man y nur bis zum Schritt k-1, gelangt man zu

$$\hat{x}_k^- = E[x_k | y_1, y_2, ..., y_{k-1}] \tag{4.9}$$

als *a priori* Schätzung.

Je nachdem ob man den a posteriori oder a priori Schätzwert betrachtet ergeben sich zwei unterschiedliche Schätzfehlerkovarianzmatrizen:

$$P_k^- = E[(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^{\mathrm{T}}] \tag{4.10}$$

$$P_k^+ = E[(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^{\mathrm{T}}] \ . \tag{4.11}$$

Betrachtet man die Gleichung (4.1), worin w mittelwertfreies weißes Rauschen darstellt, so propagiert der Erwartungswert von x_k folgendermaßen:

$$E(x_k) = \bar{x}_k = F_{k-1}\bar{x}_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} \ . \tag{4.12}$$

Nachdem gelten soll:

$$\hat{x}_1^- = E(x_1) \tag{4.13}$$

bzw. für den Startwert der geschätzten Zustandsgröße

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0) \tag{4.14}$$

ergibt sich für k=1

$$\hat{x}_1^- = F_0\,\hat{x}_0^+ + G_0\,u_0 \tag{4.15}$$

bzw. allgemein

$$\hat{x}_k^- = F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1}u_{k-1} \ . \tag{4.16}$$

Gleichung (4.16) wird als *Time Update Equation* bezeichnet, da die geschätzte Zustandsgröße zum nächsten Zeitschritt prädiziert wird.

Für die Startkovarianzmatrix ergibt sich

$$P_0^+ = E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}] \tag{4.17}$$
$$= E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^{\mathrm{T}}] \ . \tag{4.18}$$

Betreffend Schätzfehlerkovarianzmatrix bezüglich wahrem Wert x_k und Mittelwert $\bar{x}_k$ gilt wiederum mit w als mittelwertfreiem weißen Rauschen:

$$(x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)^{\mathrm{T}} = (F_{k-1}x_{k-1} + G_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1} - \bar{x}_k)(\cdots)^{\mathrm{T}} \tag{4.19}$$
$$= [F_{k-1}(x_{k-1} - \bar{x}_{k-1}) + w_{k-1}][\cdots]^{\mathrm{T}} \tag{4.20}$$
$$= F_{k-1}(x_{k-1} - \bar{x}_{k-1})(x_{k-1} - \bar{x}_{k-1})^{\mathrm{T}}F_{k-1}^{\mathrm{T}} + w_{k-1}w_{k-1}^{\mathrm{T}} + \tag{4.21}$$
$$F_{k-1}(x_{k-1} - \bar{x}_{k-1})w_{k-1}^{\mathrm{T}} + w_{k-1}(x_{k-1} - \bar{x}_{k-1})^{\mathrm{T}}F_{k-1}^{\mathrm{T}} \tag{4.22}$$

$$P_k = E[(x_k - \bar{x}_k)(\cdots)^{\mathrm{T}}] \tag{4.23}$$
$$= F_{k-1}P_{k-1}F_{k-1}^{\mathrm{T}} + Q_{k-1} \ . \tag{4.24}$$

Es gilt also für $k = 1$

$$P_1^- = F_0\, P_0^+\, F_0^{\mathrm{T}} + Q_0 \tag{4.25}$$

bzw. allgemein

$$P_k^- = F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^{\mathrm{T}} + Q_{k-1} \ . \tag{4.26}$$

Gleichung (4.26) wird als *Time Update* Gleichung der Schätzfehlerkovarianzmatrix bezeichnet.

Mit (4.16) und (4.26) haben wir die *Time Update* Gleichungen für die Zustandsgröße bzw. die Schätzfehlerkovarianzmatrix. Wir benötigen nun die *Measurement Update* Gleichungen, bei denen Schätzgröße respektive Schätzfehlerkovarianzmatrix anhand von Messdaten korrigiert werden. Diese Gleichungen sollen mithilfe eines rekursiven *Least Squares* Algorithmus hergeleitet werden.

Ein linearer rekursiver Least Squares Schätzer kann allgemein geschrieben werden als:

$$y_k = H_k x + v_k \tag{4.27}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k-1}) \ . \tag{4.28}$$

Die Korrektur der Schätzgröße erfolgt unter anderem mithilfe einer Verstärkungsmatrix K_k, die durch Minimieren der Summe der Varianzen des Schätzfehlers optimal gewählt werden soll.

Diese Summe ergibt sich zu:

$$J_k = E[(x_1 - \hat{x}_1)^2] + ... + E[(x_n - \hat{x}_n)^2] \tag{4.29}$$

$$= E(e_{x1,k}^2 + ... + e_{xn,k}^2) \tag{4.30}$$

$$= E(e_{x,k}^{\mathrm{T}} e_{x,k}) \tag{4.31}$$

$$= E[\mathrm{Tr}(e_{x,k} e_{x,k}^{\mathrm{T}})] \tag{4.32}$$

$$= \mathrm{Tr}(P_k) \ . \tag{4.33}$$

Tr steht in (4.32) und (4.33) für *trace*, zu Deutsch *Spur*. Die Spur einer Matrix

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

sei definiert durch:

$$\mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} s_{ii} = s_{11} + s_{22} + ... + s_{nn} \ . \tag{4.35}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} E(e_{x,k}) &= E(x - \hat{x}_k) && (4.36)\\ &= E[x - \hat{x}_{k-1} - K_k(y_k - H_k\hat{x}_{k-1})] && (4.37)\\ &= E[e_{x,k-1} - K_k(H_k x + v_k - H_k\hat{x}_{k-1})] && (4.38)\\ &= E[e_{x,k-1} - K_k H_k(x - \hat{x}_{k-1}) - K_k v_k] && (4.39)\\ &= (I - K_k H_k)E(e_{x,k-1}) - K_k E(v_k) && (4.40) \end{aligned}$$

und somit ergibt sich die Schätzfehlerkovarianzmatrix P_k aus Gleichung (4.33) zu:

$$\begin{aligned} P_k &= E(e_{x,k}e_{x,k}^{\mathrm{T}}) && (4.41)\\ &= E\{[(I - K_k H_k)e_{x,k-1} - K_k v_k][\cdots]^{\mathrm{T}}\} && (4.42)\\ &= (I - K_k H_k)E(e_{x,k-1}e_{x,k-1}^{\mathrm{T}})(I - K_k H_k)^{\mathrm{T}} - && (4.43)\\ K_k E(v_k e_{x,k-1}^{\mathrm{T}})(I - K_k H_k)^{\mathrm{T}} &- (I - K_k H_k)E(e_{x,k-1}v_k^{\mathrm{T}})K_k^{\mathrm{T}} + && (4.44)\\ &K_k E(v_k v_k^{\mathrm{T}})K_k^{\mathrm{T}} \ . && (4.45) \end{aligned}$$

Nachdem v_k mittelwertfreies weißes Rauschen darstellt und der Erwartungswert des Schätzfehlers zum Zeitpunkt k-1 im Idealfall 0 ist, gilt

$$E(v_k e_{x,k-1}^{\mathrm{T}}) = E(v_k)E(e_{x,k-1}) = 0 \tag{4.46}$$

und ergibt

$$P_k = (I - K_k H_k)P_{k-1}(I - K_k H_k)^{\mathrm{T}} + K_k R_k K_k^{\mathrm{T}} \tag{4.47}$$

mit R_k als Kovarianzmatrix von v_k.

Ziel ist nun, ein K_k zu finden, das die Kostenfunktion (4.29) minimiert.

Die Gleichung

$$\frac{\partial J_k}{\partial K_k} = 2(I - K_k H_k)P_{k-1}(-H_k^{\mathrm{T}}) + 2K_k R_k \tag{4.48}$$

wird 0 gesetzt um ein Minimum von J_k zu erreichen. Anschließendes Umformen und Explizit machen von K_k ergibt

$$K_k R_k = (I - K_k H_k)P_{k-1}H_k^{\mathrm{T}} \tag{4.49}$$

$$K_k(R_k + H_k P_{k-1} H_k^{\mathrm{T}}) = P_{k-1}H_k^{\mathrm{T}} \tag{4.50}$$

$$K_k = P_{k-1}H_k^{\mathrm{T}}(H_k P_{k-1} H_k^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} \quad . \tag{4.51}$$

Zusammengefasst gilt:

$$K_k = P_{k-1}H_k^{\mathrm{T}}(H_k P_{k-1} H_k^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} \tag{4.52}$$

$$= P_k H_k^{\mathrm{T}} R_k^{-1} \tag{4.53}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k(y_k - H_k \hat{x}_{k-1}) \tag{4.54}$$

$$P_k = (I - K_k H_k)P_{k-1}(I - K_k H_k)^{\mathrm{T}} + K_k R_k K_k^{\mathrm{T}} \tag{4.55}$$

$$= (P_{k-1}^{-1} + H_k^{\mathrm{T}} R_k^{-1} H_k)^{-1} \tag{4.56}$$

$$= (I - K_k H_k)P_{k-1} \tag{4.57}$$

bzw. für den Linearen Kalman Filter mit den Analogien:

$\hat{x}_{k-1} \rightarrow \hat{x}_k^-$
$P_{k-1} \rightarrow P_k^-$
$\hat{x}_k \rightarrow \hat{x}_k^+$
$P_k \rightarrow P_k^+$

$$K_k = P_k^- H_k^{\mathrm{T}} (H_k P_k^- H_k^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} \tag{4.58}$$
$$= P_k^+ H_k^{\mathrm{T}} R_k^{-1} \tag{4.59}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) \tag{4.60}$$

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^{\mathrm{T}} + K_k R_k K_k^{\mathrm{T}} \tag{4.61}$$
$$= [(P_k^-)^{-1} + H_k^{\mathrm{T}} R_k^{-1} H_k]^{-1} \tag{4.62}$$
$$= (I - K_k H_k) P_k^- \quad [13]. \tag{4.63}$$

4.1.1 LKF Filtergleichungen

Im Folgenden sind die Gleichungen für den Linearen Kalman Filter zusammengefasst dargestellt.

1.

$$x_k = F_{k-1} x_{k-1} + G_{k-1} u_{k-1} + w_{k-1} \tag{4.64}$$
$$y_k = H_k x_k + v_k \tag{4.65}$$
$$E(w_k w_j^{\mathrm{T}}) = Q_k \delta_{k-j} \tag{4.66}$$
$$E(v_k v_j^{\mathrm{T}}) = R_k \delta_{k-j} \tag{4.67}$$
$$E(w_k v_j^{\mathrm{T}}) = 0 \tag{4.68}$$

2.

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0) \tag{4.69}$$

$$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^{\mathrm{T}}] \tag{4.70}$$

3.

$$P_k^- = F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^{\mathrm{T}} + Q_{k-1} \tag{4.71}$$

$$K_k = P_k^- H_k^{\mathrm{T}} (H_k P_k^- H_k^{\mathrm{T}} + R_k)^{-1} = P_k^+ H_k^{\mathrm{T}} R_k^{-1} \tag{4.72}$$

$$\hat{x}_k^- = F_{k-1} \hat{x}_{k-1}^+ + G_{k-1} u_{k-1} \tag{4.73}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-) \tag{4.74}$$

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- \quad [13] \tag{4.75}$$

4.2 Extended Kalman Filter

Der Extended Kalman Filter wird, wie in Kapitel 2 bereits erwähnt, für nichtlineare Systeme verwendet. Im Folgenden soll die Vorgehensweise des EKF bezüglich Taylorreihenentwicklung und lokaler Linearisierung um zuvor geschätzte Zustandsgrößen gezeigt werden.

Folgendes nichtlineare Modell sei gegeben:

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \tag{4.76}$$

$$y_k = h_k(x_k, v_k) \tag{4.77}$$

$$w_k \sim (0, Q_k) \tag{4.78}$$

$$v_k \sim (0, R_k) \ . \tag{4.79}$$

Eine Taylorreihen Entwicklung um $x_{k-1} = \hat{x}_{k-1}^+$ und $w_{k-1} = 0$ führt zu

$$x_k = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x}|_{\hat{x}_{k-1}^+}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + \frac{\partial f_{k-1}}{\partial w}|_{\hat{x}_{k-1}^+} w_{k-1} \tag{4.80}$$

$$= f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) + F_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + L_{k-1}w_{k-1} \tag{4.81}$$

$$= F_{k-1}x_{k-1} + [f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) - F_{k-1}\hat{x}_{k-1}^+] + L_{k-1}w_{k-1} \tag{4.82}$$

$$= F_{k-1}x_{k-1} + \tilde{u}_{k-1} + \tilde{w}_{k-1} \tag{4.83}$$

mit

$$\tilde{u}_k = f_k(\hat{x}_k^+, u_k, 0) - F_k\hat{x}_k^+ \tag{4.84}$$

$$\tilde{w}_k \sim (0, L_k Q_k L_k^{\mathrm{T}}) \ . \tag{4.85}$$

Führt man ebenso eine Taylorreihen Entwicklung bezüglich der Messgleichung $h_k(\cdot)$ um $x_k = \hat{x}_k^-$ und $v_k = 0$ durch, gelangt man zu

$$y_k = h_k(\hat{x}_k^-, 0) + \frac{\partial h_k}{\partial x}|_{\hat{x}_k^-}(x_k - \hat{x}_k^-) + \frac{\partial h_k}{\partial v}|_{\hat{x}_k^-} v_k \tag{4.86}$$

$$= h_k(\hat{x}_k^-, 0) + H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + M_k v_k \tag{4.87}$$

$$= H_k x_k + [h_k(\hat{x}_k^-, 0) - H_k\hat{x}_k^-] + M_k v_k \tag{4.88}$$

$$= H_k x_k + z_k + \tilde{v}_k \tag{4.89}$$

mit

$$z_k = h_k(\hat{x}_k^-, 0) - H_k\hat{x}_k^- \tag{4.90}$$

$$\tilde{v}_k \sim (0, M_k R_k M_k^{\mathrm{T}}) \ . \tag{4.91}$$

Die Gleichungen (4.83) und (4.89) sind nun linear, weshalb auch die Standard Kalman Filter Gleichungen für die Zustandsschätzung verwendet werden können:

$$P_k^- = F_{k-1}P_{k-1}^+F_{k-1}^{\mathrm{T}} + L_{k-1}Q_{k-1}L_{k-1}^{\mathrm{T}} \tag{4.92}$$
$$K_k = P_k^- H_k^{\mathrm{T}}(H_k P_k^- H_k^{\mathrm{T}} + M_k R_k M_k^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{4.93}$$
$$\hat{x}_k^- = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) \tag{4.94}$$
$$z_k = h_k(\hat{x}_k^-, 0) - H_k\hat{x}_k^- \tag{4.95}$$
$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^- - z_k) \tag{4.96}$$
$$= \hat{x}_k^- + K_k[y_k - h_k(\hat{x}_k^-, 0)] \tag{4.97}$$
$$P_k^+ = (I - K_kH_k)P_k^- \quad [13]. \tag{4.98}$$

4.2.1 EKF Filtergleichungen

Es folgt eine Übersicht der Filtergleichungen des Extended Kalman Filters.

1.

$$x_k = f_{k-1}(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \tag{4.99}$$
$$y_k = h_k(x_k, v_k) \tag{4.100}$$
$$w_k \sim (0, Q_k) \tag{4.101}$$
$$v_k \sim (0, R_k) \tag{4.102}$$

2.

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0) \tag{4.103}$$
$$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^{\mathrm{T}}] \tag{4.104}$$

3. k = 1,2,...,

   a)

$$F_{k-1} = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x} \mid_{\hat{x}_{k-1}^+} \tag{4.105}$$
$$L_{k-1} = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial w} \mid_{\hat{x}_{k-1}^+} \tag{4.106}$$

b)

$$P_k^- = F_{k-1} P_{k-1}^+ F_{k-1}^{\mathrm{T}} + L_{k-1} Q_{k-1} L_{k-1}^{\mathrm{T}} \tag{4.107}$$

$$\hat{x}_k^- = f_{k-1}(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, 0) \tag{4.108}$$

c)

$$H_k = \frac{\partial h_k}{\partial x} \mid_{\hat{x}_k^-} \tag{4.109}$$

$$M_k = \frac{\partial h_k}{\partial v} \mid_{\hat{x}_k^-} \tag{4.110}$$

d)

$$K_k = P_k^- H_k^{\mathrm{T}} (H_k P_k^- H_k^{\mathrm{T}} + M_k R_k M_k^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{4.111}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k [y_k - h_k(\hat{x}_k^-, 0)] \tag{4.112}$$

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- \quad [13] \tag{4.113}$$

4.3 Unscented Kalman Filter

Der Unscented Kalman Filter stellt, wie in Kapitel 2 bereits beschrieben, eine Alternative zum Extended Kalman Filters dar und wird, wie der EKF, generell für nichtlineare Systeme verwendet. Da der EKF bei stark nichtlinearen Systemen versagen kann, kann als Alternative der UKF verwendet werden. Die Schwäche des EKF liegt darin, dass angenommen wird, dass eine linearisierte Transformation von Kovarianz und Mittelwert etwa der wahren nichtlinearen Transformation entspricht, was aufgrund von Linearisierungsfehlern allerdings nicht unbedingt zufriedenstellend erfüllt ist.

Beim UKF werden nun deterministische Vektoren, Sigma Points, bestimmt, deren Mittelwert und Kovarianz jenen des wahren Zustands entsprechen. Diese Sigma Points werden schließlich anhand der Gleichung $y = h(x)$ transformiert. Der Mittelwert und die Kovarianz der transformierten Sigma Points ergeben eine gute Schätzung des wahren Mittelwerts und der wahren Kovarianz von y. Dies ist die Stärke des UKF gegenüber dem EKF.

Diese sogenannten *Unscented Transformations* sollen im Folgenden kurz gezeigt werden:

Die $2n$ Sigma Points $x^{(i)}$ sollen folgendermaßen gewählt werden, mit $\bar{x}$ als Mittelwert der Zustandsgröße x und n als Dimension des Zustandsraums:

$$x^{(i)} = \bar{x} + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, ..., 2n \tag{4.114}$$

$$\tilde{x}^{(i)} = (\sqrt{nP})_i^{\mathrm{T}} \quad i = 1, ..., n \tag{4.115}$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = -(\sqrt{nP})_i^{\mathrm{T}} \quad i = 1, ..., n \tag{4.116}$$

mit $(\sqrt{nP})_i$ als i-te Reihe des Ausdrucks $\sqrt{nP}$.

Angenommen man kennt den Mittelwert $\bar{x}$ der Zustandsgröße, eine Kovarianz P und möchte den Mittelwert der nichtlinearen Funktion $y = h(x)$ approximieren, so kann wie folgt vorgegangen werden:

Es soll nun nicht die Zustandsgröße x selbst, sondern die Sigma Points $x^{(i)}$ mittels der Gleichung $h(\cdot)$ transformiert werden:

$$y^{(i)} = h(x^{(i)}) \quad i = 1, ..., 2n \ . \tag{4.117}$$

Der wahre Mittelwert von y sei mit $\bar{y}$ und der approximierte mit $\bar{y}_u$ bezeichnet. Für den Letztgenannten ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\bar{y}_u = \sum_{i=1}^{2n} W^{(i)} y^{(i)} \tag{4.118}$$

mit

$$W^{(i)} = \frac{1}{2n} \quad i = 1, ..., 2n \tag{4.119}$$

als Gewichtungskoeffizienten, sodass folgt:

$$\bar{y}_u = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} y^{(i)} \quad . \tag{4.120}$$

Dieser über die transformierten Sigma Points bestimmte Mittelwert ergibt nun eine gute Schätzung für den wahren Mittelwert von y.

Die approximierte Kovarianzmatrix von y wird nach folgender Gleichung berechnet:

$$P_u = \sum_{i=1}^{2n} W^{(i)} (y^{(i)} - y_u)(y^{(i)} - y_u)^{\mathrm{T}} \tag{4.121}$$

$$= \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (y^{(i)} - y_u)(y^{(i)} - y_u)^{\mathrm{T}} \ \ [13] \tag{4.122}$$

und ergibt wiederum eine zufriedenstellende Schätzung der wahren Kovarianz von y.

4.3.1 UKF Filtergleichungen

Im Folgenden sind die Filtergleichungen des 2n-UKF zusammengefasst dargestellt.

1.

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, t_k) + w_k \tag{4.123}$$

$$y_k = h(x_k, t_k) + v_k \tag{4.124}$$

$$w_k \sim (0, Q_k) \tag{4.125}$$

$$v_k \sim (0, R_k) \tag{4.126}$$

2.

$$\hat{x}_0^+ = E(x_0) \tag{4.127}$$

$$P_0^+ = E[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^{\mathrm{T}}] \tag{4.128}$$

3. a)

$$\hat{x}_{k-1}^{(i)} = \hat{x}_{k-1}^+ + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, ..., 2n \tag{4.129}$$

$$\tilde{x}^{(i)} = (\sqrt{nP_{k-1}^+})_i^{\mathrm{T}} \quad i = 1, ..., n \tag{4.130}$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = -(\sqrt{nP_{k-1}^+})_i^{\mathrm{T}} \quad i = 1, ..., n \tag{4.131}$$

b)

$$\hat{x}_k^{(i)} = f(\hat{x}_{k-1}^{(i)}, u_{k-1}, t_k) \tag{4.132}$$

c)

$$\hat{x}_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{x}_k^{(i)} \tag{4.133}$$

d)

$$P_k^- = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^-)(\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^-)^{\mathrm{T}} + Q_{k-1} \tag{4.134}$$

4. a)

$$\hat{x}_k^{(i)} = \hat{x}_k^- + \tilde{x}^{(i)} \quad i = 1, ..., 2n \tag{4.135}$$

$$\tilde{x}^{(i)} = (\sqrt{nP_k^-})_i^{\mathrm{T}} \quad i = 1, ..., n \tag{4.136}$$

$$\tilde{x}^{(n+i)} = -(\sqrt{nP_k^-})_i^{\mathrm{T}} \quad i = 1, ..., n \tag{4.137}$$

b)

$$\hat{y}_k^{(i)} = h(\hat{x}_k^{(i)}, t_k) \tag{4.138}$$

c)

$$\hat{y}_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \hat{y}_k^{(i)} \tag{4.139}$$

d)

$$P_y = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)^{\mathrm{T}} + R_k \tag{4.140}$$

e)

$$P_{xy} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} (\hat{x}_k^{(i)} - \hat{x}_k^{-})(\hat{y}_k^{(i)} - \hat{y}_k)^{\mathrm{T}} \tag{4.141}$$

f)

$$K_k = P_{xy} P_y^{-1} \tag{4.142}$$

$$\hat{x}_k^{+} = \hat{x}_k^{-} + K_k(y_k - \hat{y}_k) \tag{4.143}$$

$$P_k^{+} = P_k^{-} - K_k P_y K_k^{\mathrm{T}} \ \ [13] \tag{4.144}$$

5 Fahrzeugmodell

Als Fahrzeugmodell wird ein ebenes, nichtlineares Zweiradmodell verwendet. Nick- und Rollbewegung seien vernachlässigt. Die beiden Spuren des Autos werden auf eine Spur in der Symmetrieebene des Fahrzeugs zusammengefasst. Die Aufstandskräfte der beiden Räder seien als konstant angenommen, sodass Radlastschwankungen vernachlässigt werden. Es sei weiters angenommen, dass die Radkräfte im Aufstandspunkt, der sich vertikal unterhalb des Radmittelpunkts befindet, angreifen.
Dieses Fahrzeugmodell dient sowohl als Referenz-, als auch als Beobachtermodell, siehe auch Kapitel 6.

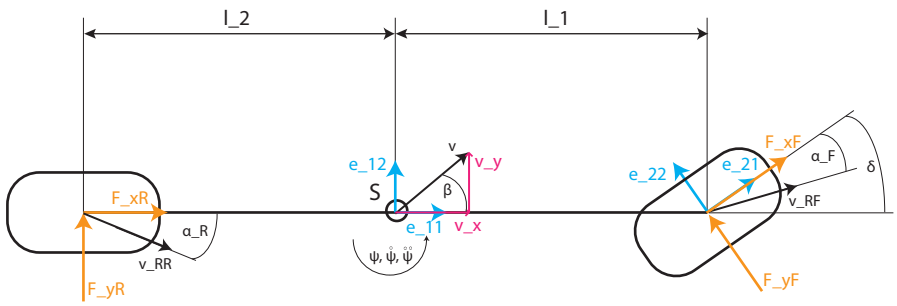

Abbildung 5.1: Zweiradmodell

In Abbildung 5.1 bezeichnen F_{yR} bzw. F_{yF} die Seitenkräfte, F_{xR} bzw. F_{xF} die Längskräfte, α_R bzw. α_F die Schräglaufwinkel der Achsen, v_{RR} bzw. v_{RF} die Geschwindigkeiten der in der Symmetrieebene zusammengefassten Räder, δ den Lenkwinkel am Vorderrad, β den Schwimmwinkel, $\dot{\psi}$ die Gierrate und v die Geschwindigkeit des Schwerpunkts.

Es folgen die zwei Bewegungsgleichungen des Fahrzeugmodells:

Schwerpunktsatz in $\vec{e}_{12}$-Richtung:

$$m\,a_y = F_{yR} + F_{yF}\,cos(\delta) + F_{xF}\,sin(\delta) \tag{5.1}$$

Drallsatz um den Schwerpunkt des Gesamtsystems:

$$I_S\,\ddot{\psi} = -F_{yR}\,l_2 + F_{yF}\,cos(\delta)\,l_1 + F_{xF}\,sin(\delta)\,l_1 \ . \tag{5.2}$$

Für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a des Schwerpunkts ergibt sich:

$$\underline{v}_{|1} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$\underline{a}_{|1} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_y\,\dot{\psi} \\ v_x\,\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_x - v_y\,\dot{\psi} \\ \dot{v}_y + v_x\,\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} \ . \tag{5.5}$$

Durch Einsetzen der Querbeschleunigung a_y in den Schwerpunktsatz (5.1) folgt:

$$m(\dot{v}_y + v_x\,\dot{\psi}) = F_{yR} + F_{yF}\,cos(\delta) + F_{xF}\,sin(\delta) \ . \tag{5.6}$$

Weiters gilt für die Geschwindigkeit am Vorderrad v_{RF} mit den Größen

$$\underline{\omega}_{|1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

$$\underline{r}_{F|1} = \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

$$\vec{v}_{RF} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_F \tag{5.9}$$

$$\underline{v}_{RF|1} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

$$= \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\,\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y + l_1\,\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{5.11}$$

Die Transformationsmatrix zwischen dem 1-er und 2-er Koordinatensystem in Abbildung 5.1 sieht folgendermaßen aus:

$$\underline{A}_{12} = \begin{bmatrix} cos(\delta) & -sin(\delta) & 0 \\ sin(\delta) & cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

bzw.

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{12}^T = \begin{bmatrix} cos(\delta) & sin(\delta) & 0 \\ -sin(\delta) & cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{5.13}$$

Somit ergibt sich für die Geschwindigkeit des Vorderrades dargestellt im 2-er Koordinatensystem:

$$\underline{v}_{RF|2} = \underline{A}_{21}\,\underline{v}_{RF|1} \tag{5.14}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(\delta) & sin(\delta) & 0 \\ -sin(\delta) & cos(\delta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y + l_1\,\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

$$= \begin{bmatrix} v_x\,cos(\delta) + (v_y + l_1\,\dot{\psi})sin(\delta) \\ -v_x\,sin(\delta) + (v_y + l_1\,\dot{\psi})cos(\delta) \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{5.16}$$

Für den Schräglaufwinkel des Vorderrades gilt somit:

$$tan(\alpha_F) = \frac{-(-v_x\,sin(\delta) + (v_y + l_1\,\dot{\psi})cos(\delta))}{(v_x\,cos(\delta) + (v_y + l_1\,\dot{\psi})sin(\delta))} . \tag{5.17}$$

Bezüglich der Geschwindigkeit am Hinterrad ergibt sich:

$$\underline{r}_{R|1} = \begin{bmatrix} -l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.18}$$

$$\vec{v}_{RR} = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_R \tag{5.19}$$

$$\underline{v}_{RR|1} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

$$= \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -l_2\,\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y - l_2\,\dot{\psi} \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{5.21}$$

Für den Schräglaufwinkel α_R folgt somit:

$$tan(\alpha_R) = \frac{-(v_y - l_2\,\dot{\psi})}{v_x} \quad . \tag{5.22}$$

Linearisierung bezüglich der Geradeausfahrt

Für einen kleinen Winkel δ gilt:

$sin(\delta) \sim \delta$
$cos(\delta) \sim 1$
$tan(\delta) \sim \delta \quad .$

Es soll nun eine Linearisierung der Bewegungsgleichungen (5.2) und (5.6) um eine Geradeausfahrt stattfinden. Die Geschwindigkeit v_x sei als konstant angenommen.
Durch die Linearisierung werden Terme der Form $F_{xF}\,\delta$ bzw. $F_{xF}\,\delta\,l_1$ auftreten. Diese können vernachlässigt werden, da angenommen wird, dass F_{xF} sehr klein ist.
Die linearisierten Schräglaufwinkel am Vorder- und Hinterrad ergeben sich nun zu:

$$\alpha_F = \frac{-(-v_x\,\delta + (v_y + l_1\,\dot{\psi}))}{v_x} \tag{5.23}$$

respektive

$$\alpha_R = \frac{-(v_y - l_2\,\dot{\psi})}{v_x} \quad . \tag{5.24}$$

Durch die Linearisierung der Achscharakteristik bezüglich der Geradeausfahrt berechnen sich die Seitenkräfte nach folgender Gleichung:

$$F_{yi} = C_i\,\alpha_i \quad i = F, R \quad . \tag{5.25}$$

Durch Einsetzen des Schräglaufwinkels aus Gleichung (5.23) folgt mit der Achs-Schräglaufsteifigkeit C_F für die Seitenkraft vorne:

$$F_{yF} = C_F \, \frac{-(-v_x \, \delta + (v_y + l_1 \, \dot{\psi}))}{v_x} \quad . \tag{5.26}$$

Für die Seitenkraft F_{yR} gilt in Analogie mit dem Schräglaufwinkel des Hinterrades aus Gleichung (5.24):

$$F_{yR} = C_R \, \frac{-(v_y - l_2 \, \dot{\psi})}{v_x} \quad . \tag{5.27}$$

Durch Einsetzen der Seitenkräfte aus Gleichung 5.26 bzw. 5.27 ergibt sich für die beiden linearisierten Bewegungsgleichungen:

$$m(\dot{v}_y + v_x \, \dot{\psi}) = -C_R \frac{(v_y - l_2 \, \dot{\psi})}{v_x} - C_F \frac{(-v_x \, \delta + (v_y + l_1 \, \dot{\psi}))}{v_x} \tag{5.28}$$

$$I_S \, \ddot{\psi} = -(-C_R \frac{(v_y - l_2 \, \dot{\psi})}{v_x}) l_2 + (-C_F \frac{(-v_x \, \delta + (v_y + l_1 \, \dot{\psi}))}{v_x}) l_1 \quad . \tag{5.29}$$

Umformen ergibt

$$\dot{v}_y = -C_R \frac{(v_y - l_2 \, \dot{\psi})}{m \, v_x} - C_F \frac{(-v_x \, \delta + (v_y + l_1 \, \dot{\psi}))}{m \, v_x} - v_x \, \dot{\psi} \tag{5.30}$$

$$\ddot{\psi} = -(-C_R \frac{(v_y - l_2\,\dot{\psi})}{I_S\,v_x})l_2 + (-C_F \frac{(-v_x\,\delta + (v_y + l_1\,\dot{\psi}))}{I_S\,v_x})l_1 \ . \tag{5.31}$$

Somit folgt das zweidimensionale Zustandsraumsystem für den Zustandsvektor $\underline{x} = \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$ und der Eingangsgröße $u = \delta$ zu:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{C_R}{m\,v_x} - \frac{C_F}{m\,v_x}) & (\frac{C_R\,l_2}{m\,v_x} - \frac{C_F\,l_1}{m\,v_x} - v_x) \\ (\frac{C_R\,l_2}{I_S\,v_x} - \frac{C_F\,l_1}{I_S\,v_x}) & (-\frac{C_R\,l_2^2}{I_S\,v_x} - \frac{C_F\,l_1^2}{I_S\,v_x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_F}{m} \\ \frac{C_F\,l_1}{I_S} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

Erweitertes Fahrzeugmodell

Das Fahrzeugmodell wird nun erweitert um den Schwerpunktsatz in $\vec{e}_{11}$-Richtung und den Drallsatz des Vorder- bzw. Hinterrades. Wir erhalten damit ein fünfdimensionales Zustandsraumsystem mit den Zustandsgrößen v_x, v_y, $\dot{\psi}$, ω_F, ω_R und den Eingangsgrößen δ, M_{AF1} als Antriebsmoment am Vorderrad und M_B als Bremsmoment, aufgeteilt auf Vorder- und Hinterrad.

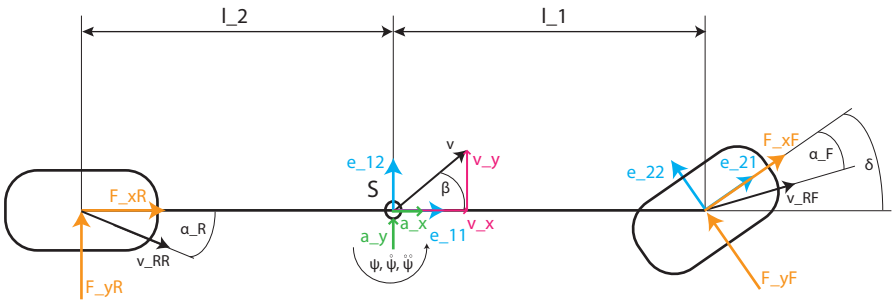

Abbildung 5.2: erweitertes Zweiradmodell

In Abbildung 5.2 ist das erweiterte Zweiradmodell dargestellt.

Annahme: Vorderradantrieb

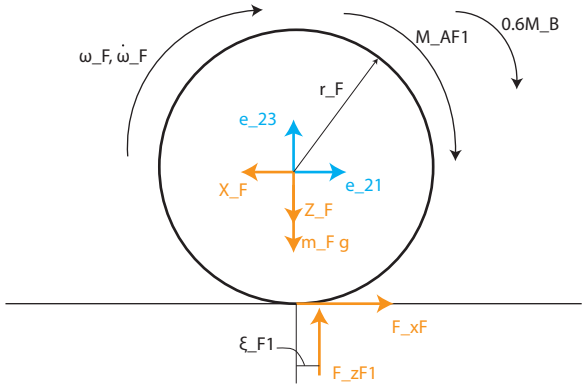

Abbildung 5.3: Vorderrad

Das Bremsmoment M_B ist in Abbildung 5.3 positiv eingezeichnet, um mit Gleichung (5.33) konsistent zu sein. Als Inputgröße für das Fahrzeugmodell wird M_B später in der Rechnung mit einem negativen Wert vorgegeben, damit es als Bremsmoment wirkt. Das Bremsmoment am Vorderrad sei allgemein mit $\nu \cdot M_B$ und das Bremsmoment am Hinterrad mit $(1-\nu) \cdot M_B$ gegeben.

Für die Drallsätze des Vorder- bzw. Hinterrades gilt:

Drallsatz Vorderrad:

$$I_{F1}\,\dot{\omega}_F = M_{AF1} + \nu M_B - F_{zF1}\,\xi_{F1} - F_{xF}\,r_F \tag{5.33}$$

Drallsatz Hinterrad:

$$I_{R2}\,\dot{\omega}_R = (1-\nu)M_B - F_{xR}\,r_R - F_{zR2}\,\xi_{R2}\ . \tag{5.34}$$

Gemeinsam mit dem Schwerpunktsatz in $\vec{e}_{11}$- Richtung ergeben sich die fünf Bewegungsgleichungen zu:

SPS in $\vec{e}_{12}$-Richtung:

$$m\,a_y = F_{yR} + F_{yF}\,cos(\delta) + F_{xF}\,sin(\delta) \tag{5.35}$$

SPS in $\vec{e}_{11}$-Richtung:

$$m\,a_x = F_{xR} - F_{yF}\,sin(\delta) + F_{xF}\,cos(\delta) \tag{5.36}$$

Drallsatz um die $\vec{e}_{13}$-Achse:

$$I_S\,\ddot{\psi} = -F_{yR}\,l_2 + F_{yF}\,cos(\delta)\,l_1 + F_{xF}\,sin(\delta)\,l_1 \tag{5.37}$$

Drallsatz des Vorderrades:

$$I_{F_1}\,\dot{\omega}_F = M_{AF1} + \nu M_B - F_{zF1}\,\xi_{F1} - F_{xF}\,r_F \tag{5.38}$$

Drallsatz des Hinterrades:

$$I_{R2}\,\dot{\omega}_R = (1-\nu)M_B - F_{xR}\,r_R - F_{zR2}\,\xi_{R2}\ . \tag{5.39}$$

Setzt man

$$a_y = \dot{v}_y + v_x\,\dot{\psi} \tag{5.40}$$

$$a_x = \dot{v}_x - v_y\,\dot{\psi} \tag{5.41}$$

in die Bewegungsgleichungen ein, vernachlässigt den Rollwiderstand zufolge der Terme $F_{zF1}\,\xi_{F1}$ bzw. $F_{zR2}\,\xi_{R2}$ und macht die zeitlichen Ableitungen der Zustandsgrößen v_x, v_y, $\dot{\psi}$, ω_F und ω_R explizit, ergibt sich:

$$\dot{v}_y = \frac{1}{m}(F_{yR} + F_{yF}\,cos(\delta) + F_{xF}\,sin(\delta) - m\,v_x\,\dot{\psi}) \tag{5.42}$$

$$\dot{v}_x = \frac{1}{m}(F_{xR} - F_{yF}\, sin(\delta) + F_{xF}\, cos(\delta) + m\, v_y \dot{\psi}) \tag{5.43}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{1}{I_S}(-F_{yR}\, l_2 + F_{yF}\, cos(\delta)\, l_1 + F_{xF}\, sin(\delta)\, l_1) \tag{5.44}$$

$$\dot{\omega}_F = \frac{1}{I_{F1}}(M_{AF1} + \nu M_B - F_{xF}\, r_F) \tag{5.45}$$

$$\dot{\omega}_R = \frac{1}{I_{R2}}((1-\nu)M_B - F_{xR}\, r_R) \ . \tag{5.46}$$

Diese obigen Gleichungen sollen nun nach Kapitel 3.5 diskretisiert werden:

$$\begin{aligned} \frac{v_y((k+1)T) - v_y(kT)}{T} &= \frac{1}{m}(F_{yR}(kT) + F_{yF}(kT)\, cos(\delta(kT)) \\ &+F_{xF}(kT)\, sin(\delta(kT)) - m\, v_x(kT)\, \dot{\psi}(kT)) \end{aligned} \tag{5.47}$$

bzw. nach dem Umformen

$$\begin{aligned} v_y((k+1)T) &= \frac{T}{m}(F_{yR}(kT) + F_{yF}(kT)\, cos(\delta(kT)) \\ +F_{xF}(kT)\, sin(\delta(kT)) &- m\, v_x(kT)\, \dot{\psi}(kT)) + v_y(kT) \ . \end{aligned} \tag{5.48}$$

In Analogie gilt nun für die anderen Zustandsgrößen:

$$\begin{aligned} v_x((k+1)T) &= \frac{T}{m}(F_{xR}(kT) - F_{yF}(kT)\, sin(\delta(kT)) \\ +F_{xF}(kT)\, cos(\delta(kT)) &+ m\, v_y(kT)\, \dot{\psi}(kT)) + v_x(kT) \end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\dot{\psi}((k+1)T) = \frac{T}{I_S}(-F_{yR}(kT)\,l_2 + F_{yF}(kT)\,cos(\delta(kT))\,l_1 \\ +F_{xF}(kT)\,sin(\delta(kT))\,l_1) + \dot{\psi}(kT) \tag{5.50}$$

$$\omega_F((k+1)T) = \frac{T}{I_{F1}}(M_{AF1}(kT) + \nu M_B(kT) - F_{xF}(kT)\,r_F) + \omega_F(kT) \tag{5.51}$$

$$\omega_R((k+1)T) = \frac{T}{I_{R2}}((1-\nu)M_B(kT) - F_{xR}(kT)\,r_R) + \omega_R(kT)\ . \tag{5.52}$$

Linearisierung um die Geradeausfahrt

Es soll nun eine Linearisierung der Bewegungsgleichungen um die Geradeausfahrt stattfinden. Die Terme $F_{xF}\,\delta$, bzw. $F_{xF}\,\delta\,l_1$ sind wiederum vernachlässigbar, da F_{xF} klein angenommen wird.

Die Gleichungen ergeben sich zu:

$$v_y((k+1)T) = \frac{T}{m}(F_{yR}(kT) + F_{yF}(kT) - m\,v_x(kT)\,\dot{\psi}(kT)) + v_y(kT) \tag{5.53}$$

$$v_x((k+1)T) = \frac{T}{m}(F_{xR}(kT) - F_{yF}(kT)\,\delta(kT) + F_{xF}(kT)) + v_x(kT) \tag{5.54}$$

$$\dot{\psi}((k+1)T) = \frac{T}{I_S}(-F_{yR}(kT)\,l_2 + F_{yF}(kT)\,l_1) + \dot{\psi}(kT) \tag{5.55}$$

$$\omega_F((k+1)T) = \frac{T}{I_{F1}}(M_{AF1}(kT) + \nu M_B(kT) - F_{xF}(kT)\, r_F) + \omega_F(kT) \tag{5.56}$$

$$\omega_R((k+1)T) = \frac{T}{I_{R2}}((1-\nu)M_B(kT) - F_{xR}(kT)\, r_R) + \omega_R(kT) \ . \tag{5.57}$$

Durch Linearisierung um die Geradeausfahrt der Reifen-, bzw. Achscharakteristik nach Kapitel 5.1 berechnen sich die Kräfte nach

$F_{yF} = C_{\alpha F}\, \alpha_F$
$F_{yR} = C_{\alpha R}\, \alpha_R$
$F_{xF} = C_{sF}\, s_F$
$F_{xR} = C_{sR}\, s_{Rear}$

mit α_F aus Gleichung (5.23), α_R aus (5.24) und den Schlüpfen nach der Definition $s = \frac{\omega\, r - v_{xF/R}}{v_{xF/R}}$ mit $v_{xF/R}$ aus (5.16) bzw. (5.21), den Achs-Schräglauf- und Schlupfsteifigkeiten $C_{\alpha F}$, $C_{\alpha R}$, C_{sF} und C_{sR}

und sehen aus wie folgt:

$$F_{yF} = C_{\alpha F}\, \frac{-(-v_x\, \delta + (v_y + l_1\, \dot{\psi}))}{v_x} \tag{5.58}$$

$$F_{yR} = C_{\alpha R} \frac{-(v_y - l_2 \dot{\psi})}{v_x} \tag{5.59}$$

$$F_{xF} = C_{sF} \frac{(\omega_F\, r_F - v_x)}{v_x} = C_{sF}(\frac{\omega_F\, r_F}{v_x} - 1) \tag{5.60}$$

$$F_{xR} = C_{sR}\frac{(\omega_R\, r_R - v_x)}{v_x} = C_{sR}(\frac{\omega_R\, r_R}{v_x} - 1) \ . \tag{5.61}$$

Das fünfdimensionale linearisierte, nach Abschnitt 3.7.2 vollständig zustandsbeobachtbare, Zustandsraumsystem ergibt sich somit zu:

$$
\begin{bmatrix} v_x((k+1)T) - v_{x0} \\ v_y((k+1)T) - v_{y0} \\ \dot{\psi}((k+1)T) - \dot{\psi}_0 \\ \omega_F((k+1)T) - \omega_{F0} \\ \omega_R((k+1)T) - \omega_{R0} \end{bmatrix} =
$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{T}{m}(-C_{sR}\frac{(\omega_{R0}\, r_R)}{v_{x0}^2} - \delta_0\, C_{\alpha F}\frac{(v_{y0}+l_1\,\dot{\psi}_0)}{v_{x0}^2} - C_{sF}\frac{(\omega_{F0}\, r_F)}{v_{x0}^2}) + 1 & \frac{T}{m}(\delta_0\frac{C_{\alpha F}}{v_{x0}}) & \frac{T}{m}(\delta_0\frac{C_{\alpha F}\, l_1}{v_{x0}}) & \frac{T}{m}(\frac{C_{sF}\, r_F}{v_{x0}}) & \frac{T}{m}(\frac{C_{sR}\, r_R}{v_{x0}}) \\
\frac{T}{m}(C_{\alpha R}\frac{(v_{y0}-l_2\,\dot{\psi}_0)}{v_{x0}^2} + C_{\alpha F}\frac{(v_{y0}+l_1\,\dot{\psi}_0)}{v_{x0}^2} - m\,\dot{\psi}_0) & T\frac{(-C_{\alpha R}-C_{\alpha F})}{m\, v_{x0}} + 1 & T(\frac{(l_2\, C_{\alpha R}-l_1\, C_{\alpha F})}{m\, v_{x0}} - v_{x0}) & 0 & 0 \\
\frac{T}{I_S}(-C_{\alpha R}\frac{(v_{y0}-l_2\,\dot{\psi}_0)}{v_{x0}^2}l_2 + C_{\alpha F}\frac{(v_{y0}+l_1\,\dot{\psi}_0)}{v_{x0}^2}l_1) & T\frac{(C_{\alpha R}\, l_2-C_{\alpha F}\, l_1)}{I_S\, v_{x0}} & T\frac{(-C_{\alpha R}\, l_2^2-C_{\alpha F}\, l_1^2)}{I_S\, v_{x0}} + 1 & 0 & 0 \\
\frac{T}{I_{F1}}(r_F\, C_{sF}\frac{(\omega_{F0}\, r_F)}{v_{x0}^2}) & 0 & 0 & T\frac{-C_{sF}\, r_F^2}{I_{F1}\, v_{x0}} + 1 & 0 \\
\frac{T}{I_{R2}}(r_R\, C_{sR}\frac{(\omega_{R0}\, r_R)}{v_{x0}^2}) & 0 & 0 & 0 & T\frac{-C_{sR}\, r_R^2}{I_{R2}\, v_{x0}} + 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} v_x(kT) - v_{x0} \\ v_y(kT) - v_{y0} \\ \dot{\psi}(kT) - \dot{\psi}_0 \\ \omega_F(kT) - \omega_{F0} \\ \omega_R(kT) - \omega_{R0} \end{bmatrix}
$$

$$
+ \begin{bmatrix}
\frac{T}{m}(-C_{\alpha F}(-(-2\delta_0 + \frac{(v_{y0}+l_1\,\dot{\psi}_0)}{v_{x0}}))) & 0 & 0 \\
\frac{T\, C_{\alpha F}}{m} & 0 & 0 \\
\frac{T\, C_{\alpha F}\, l_1}{I_S} & 0 & 0 \\
0 & \frac{T}{I_{F1}} & \frac{\nu T}{IF1} \\
0 & 0 & \frac{(1-\nu)T}{I_{R2}}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} \delta(kT) - \delta_0 \\ M_{AF1}(kT) - M_{AF10} \\ M_B(kT) - M_{B0} \end{bmatrix}
\tag{5.62}
$$

Die Ausgangsgrößen des Systems seien die Gierrate $\dot{\psi}$, die Querbeschleunigung a_y und die Radwinkelgeschwindigkeiten ω_F und ω_R.
Das Messgleichungssystem lautet somit:

$$\underline{y}((k+1)T) = \begin{bmatrix} \dot{\psi}((k+1)T) \\ \dot{v}_y((k+1)T) + v_x((k+1)T)\,\dot{\psi}((k+1)T) \\ \omega_F((k+1)T) \\ \omega_R((k+1)T) \end{bmatrix} \tag{5.63}$$

Durch Linearisieren der Messgleichungen gilt für den Ausgang y:

$$\underline{y}((k+1)T) - \underline{y}_0 =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}\left(C_{\alpha R}\frac{(v_{y0}-l_2\,\dot{\psi}_0)}{v_{x0}^2} + C_{\alpha F}(-1)\frac{(-\delta_0 v_{x0} - (-v_{x0}\,\delta_0 + v_{y0} + l_1\dot{\psi}_0))}{v_{x0}^2}\right) & \frac{1}{m}\left(\frac{-C_{\alpha R}}{v_{x0}} - \frac{C_{\alpha F}}{v_{x0}}\right) & \frac{1}{m}\left(\frac{C_{\alpha R}\,l_2}{v_{x0}} - \frac{C_{\alpha F}\,l_1}{v_{x0}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x((k+1)T) - v_{x0} \\ v_y((k+1)T) - v_{y0} \\ \dot{\psi}((k+1)T) - \dot{\psi}_0 \\ \omega_F((k+1)T) - \omega_{F0} \\ \omega_R((k+1)T) - \omega_{R0} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{\alpha F}}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta((k+1)T) - \delta_0 \\ M_{AF1}((k+1)T) - M_{AF10} \\ M_B((k+1)T) - M_{B0} \end{bmatrix} \tag{5.64}$$

An dieser Stelle seien noch Fahrzeugmodelldaten angeführt:

$m = 1400$ kg Fahrzeugmasse
$l_F = 1.4346\ m$ Abstand Schwerpunkt zur Vorderachse
$l_R = 1.4831\ m$ Abstand Schwerpunkt zur Hinterachse
$I_z = 2.9787 \cdot 10^3\ kg \cdot m^2$ Gier-Massenträgheitsmoment des Fahrzeuges
$i_L = 14.97$ Lenkübersetzung
$I_{F1} = 10.3\ kg \cdot m^2$ Massenträgheitsmoment beider Vorderreifen um die Reifenachse
$I_{R2} = 3\ kg \cdot m^2$ Massenträgheitsmoment beider Hinterreifen um die Reifenachse
$\nu = 0.6$ Faktor bezüglich Bremsmoment

Tabelle 5.1: Fahrzeugmodelldaten

5.1 Nichtlineares Reifenmodell

Als Reifenmodell wurde das *HSRI*-Modell verwendet, z.B. [11]. Dieses Reifenmodell gilt nur für einen Reifen eines Fahrzeugs, nicht die Achse, nachdem wir ein Zweiradmodell behandeln, bei dem wir die beiden Vorderreifen auf einen Reifen bzw. die beiden Hinterreifen ebenfalls auf einen Reifen reduzieren, müssen die aus dieser Reifenkraftroutine resultierenden Längs- und Seitenkräfte mit dem Faktor 2 multipliziert werden, um näherungsweise die Achskräfte für unser Modell zu erhalten.

Als Vorder- und Hinterreifen wurden Reifen mit der Dimension 185/70 HR 14 mit 2.0 bar Innendruck verwendet. Für diesen Reifen gelten folgende Daten:

F_{Zref}	3000	N	Referenzradlast
f_{00}	1.35	-	Kraftschlusspotential (Grundwert)
f_{01}	0.15	-	Kraftschlusspotential (Radlasteinfluss)
k_{R0}	0.1	-	Kraftschlussabnahmefaktor (Grundwert)
k_{R1}	0.03	-	Kraftschlussabnahmefaktor (Radlasteinfluss)
$C_{\alpha 1}$	25.6	1/rad	normierter Seitenkraftbeiwert (Grundwert)
$C_{\alpha 2}$	-5.73	1/rad	normierter Seitenkraftbeiwert (Radlasteinfluss)
C_{s1}	10	-	norm. Umfangskraftbeiwert (Grundwert)
C_{s2}	20	-	norm. Umfangskraftbeiwert (Radlasteinfluss)
v_{μ}	7	m/s	Bezugsgleitgeschwindigkeit
l_{L0}	0.14	m	Latschlänge (Grundwert)
l_{L1}	$3 \cdot 10^{-6}$	m/N	Latschlänge (Radlasteinfluss)
c_y	$15 \cdot 10^4$	N/m	Karkassenseitensteifigkeit
r	0.3	m	Reifenradius

Tabelle 5.2: Reifendaten

Mit $v_{xF/R}$ als Radumfangsgeschwindigkeit gilt:

Umfangsschlupf (gilt für Treiben und Bremsen)

$$s = \frac{\omega\, r - v_{xF/R}}{v_{xF/R}} \tag{5.65}$$

Gleitgeschwindigkeit

$$v_G = v_{xF/R}\sqrt{s^2 + tan^2\alpha} \tag{5.66}$$

Kraftschlusspotential

$$f_0 = f_{00} - f_{01}\frac{F_Z}{F_{Zref}} \tag{5.67}$$

Kraftschlussabnahmefaktor

$$k_R = k_{R0} + k_{R1}\frac{F_Z}{F_{Zref}} \tag{5.68}$$

Reibschlussbeiwert

$$\mu = f_0 - k_R\frac{v_G}{\sqrt{v_G^2 + v_\mu^2}} \tag{5.69}$$

Schräglaufsteifigkeit

$$C_\alpha = (C_{\alpha 1} + C_{\alpha 2}\frac{F_Z}{F_{Zref}})F_Z \tag{5.70}$$

Schlupfsteifigkeit

$$C_s = (C_{s1} + C_{s2}\frac{F_Z}{F_{Zref}})F_Z \tag{5.71}$$

halbe Latschlänge

$$l_L = \frac{l_{L0} + l_{L1}\,F_Z}{2} \tag{5.72}$$

Hilfsgröße

$$s_R = \frac{\sqrt{(C_s\, s)^2 + (C_\alpha\, tan\, \alpha)^2}}{\mu(1+s)F_Z} \tag{5.73}$$

Fallunterscheidung

$s_R \leq 0.5$ (nur Haften)		$s_R > 0.5$ (Haften u. Gleiten)
$S = C_\alpha \frac{tan\, \alpha}{1+s}$	Seitenkraft	$S = C_\alpha \frac{tan\, \alpha}{1+s}\, \frac{s_R - 0.25}{s_R^2}$
$U = C_s \frac{s}{1+s}$	Umfangskraft	$U = C_s \frac{s}{1+s}\, \frac{s_R - 0.25}{s_R^2}$
$r_{nl} = \frac{l_L}{3}$	Reifennachlauf	$r_{nl} = l_L \frac{3 - \frac{1}{s_R}}{12 s_R - 3}$
$a_s = \frac{4}{3} l_L\, tan\, \alpha$	seitl. Protektorauslenkung	$a_s = 4 l_L\, tan\, \alpha \frac{3 - \frac{1}{s_R}}{12 s_R - 3}$
$M_R = (U\, a_s + U \frac{S}{c_y} + S\, r_{nl})$	Rückstellmoment	$M_R = 0$

[11]

Die Rad-(nicht Achs-)Aufstandskraft vorne beträgt im betrachteten Fahrzeugmodell $F_{ZF} = 3492N$, bzw. hinten $F_{ZR} = 3374N$. Damit ergeben sich nach dem Reifenmodell nach Richter folgende Rad-(nicht Achs-)Schräglauf- und Schlupfsteifigkeiten:

$C_{\alpha F} = 6.6109 \cdot 10^4\ N/rad$
$C_{\alpha R} = 6.4639 \cdot 10^4\ N/rad$
$C_{sF} = 1.1623 \cdot 10^5\ N$
$C_{sR} = 1.0967 \cdot 10^5\ N$

Mit obigem Reifenmodell ergibt sich folgender Verlauf der Rad-Seitenkraft F_y am Vorderreifen aufgetragen über dem Schräglaufwinkel für unterschiedliche Radaufstandskräfte:

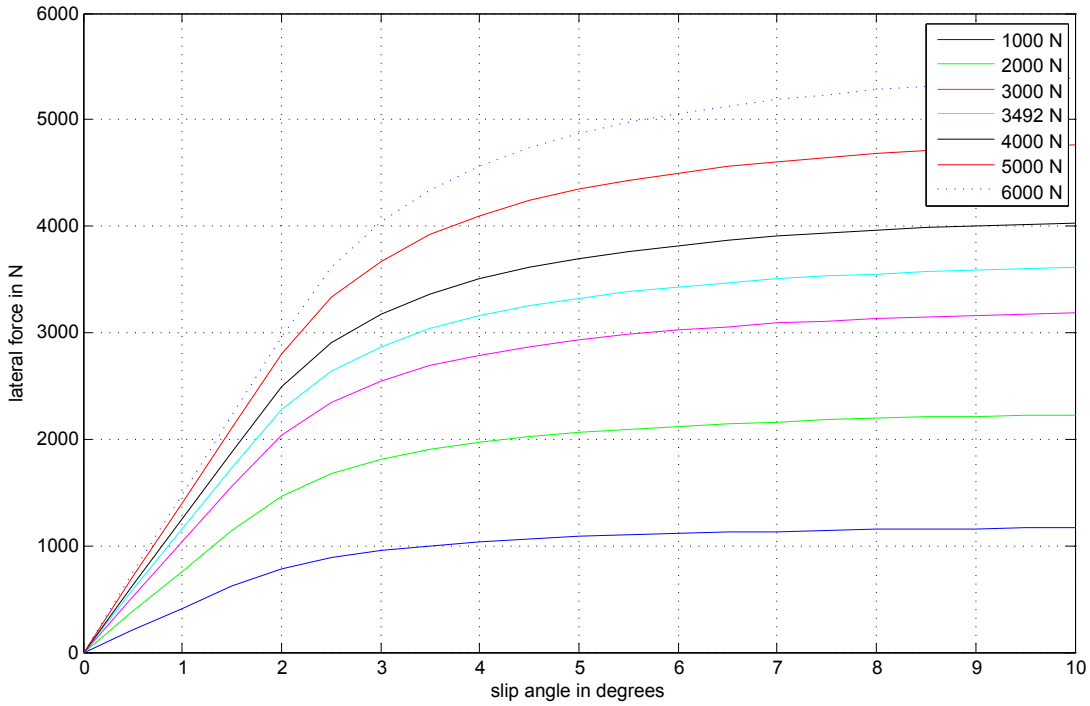

Abbildung 5.4: F_y über Schräglaufwinkel

Rad-Längskraft F_x am Vorderreifen aufgetragen über dem Schlupf:

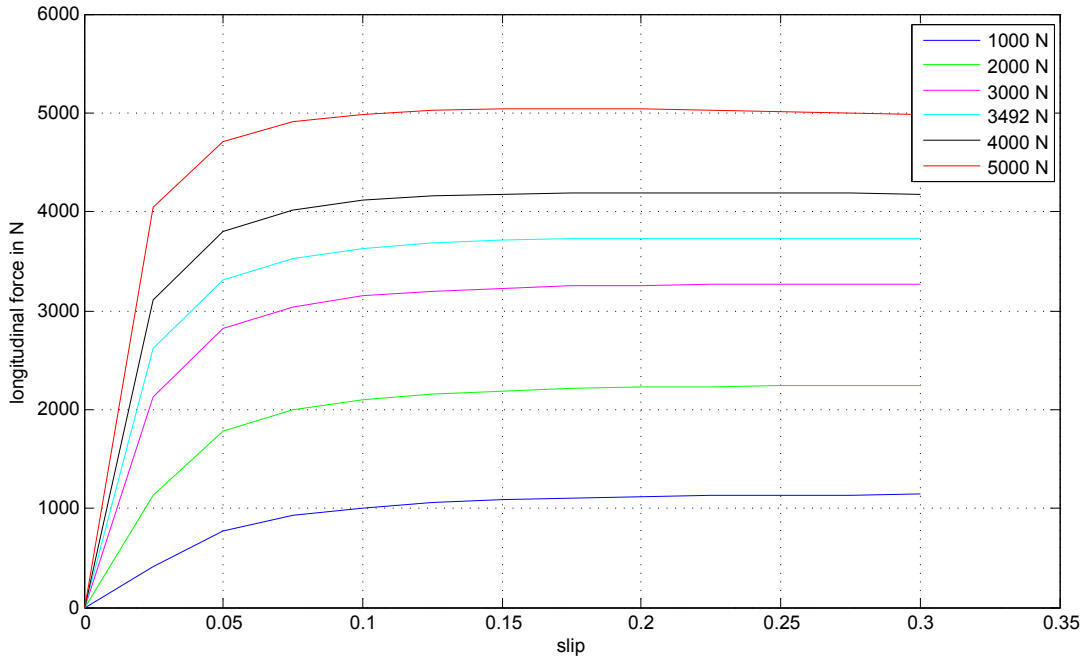

Abbildung 5.5: F_x über Schlupf

In Abbildung 5.4 und 5.5 gehört die cyanblaue Kurve zu dem in der Diplomarbeit verwendeten Fahrzeugmodell.

Rad-Seitenkraft F_y am Vorderreifen aufgetragen über der Rad-Längskraft F_x am Vorderreifen bei einer Rad-Aufstandskraft von $F_z = 3492$ N:

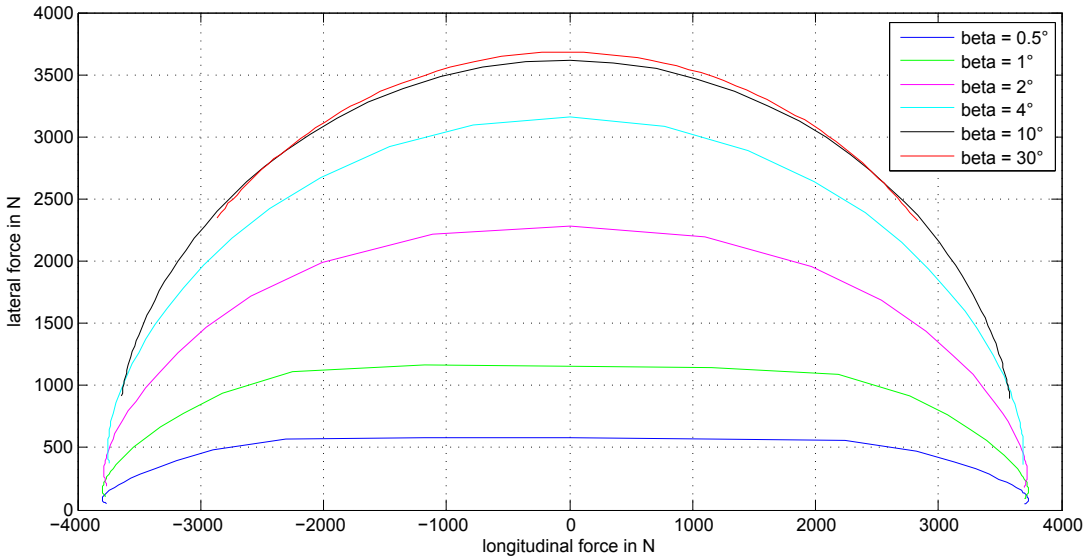

Abbildung 5.6: F_y über F_x mit β als Schräglaufwinkel

Handlingdiagramme

Es wurden Handlingdiagramme unter Vorgabe der Geschwindigkeit v und eines konstanten Kurvenradius ρ durch stationäre Lösungen der Bewegungsgleichungen sowie durch Lösung der Gleichung $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ erzeugt. Handlingdiagramme werden verwendet um stationäres Fahrzeugverhalten zu charakterisieren.

Für den Lenkwinkel am Vorderrad δ und den Schwimmwinkel β folgt in den Abbildungen 5.7 bzw. 5.8 das jeweilige Handlingdiagramm für einen konstanten Kurvenradius $\rho = 100m$.

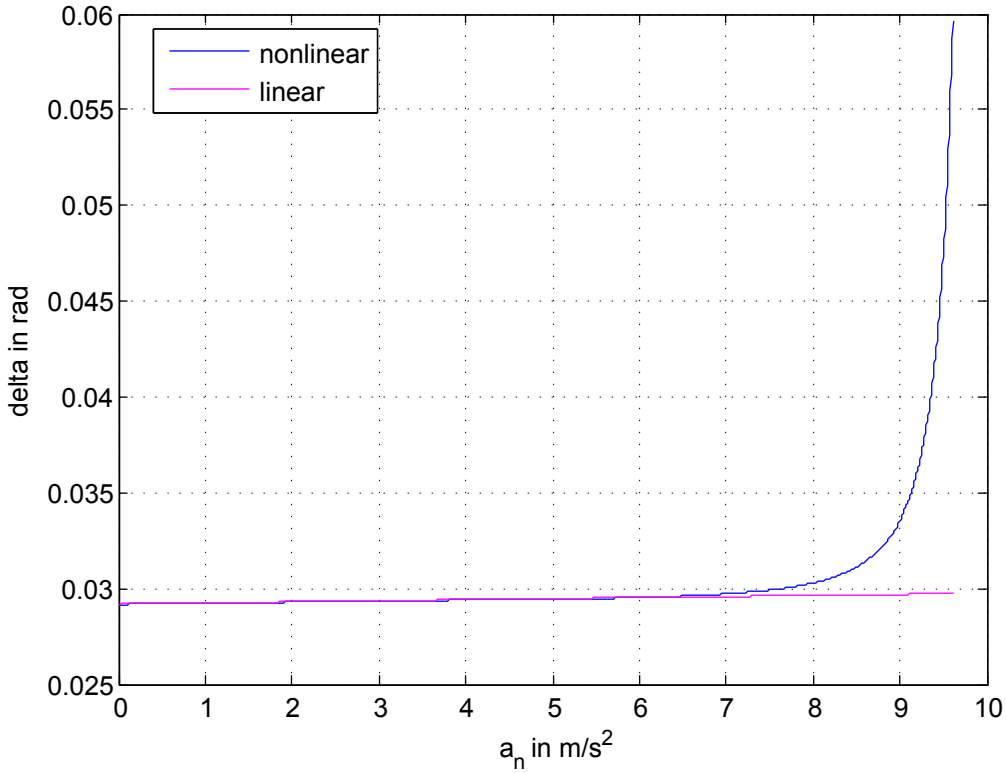

Abbildung 5.7: Handlingdiagramm δ

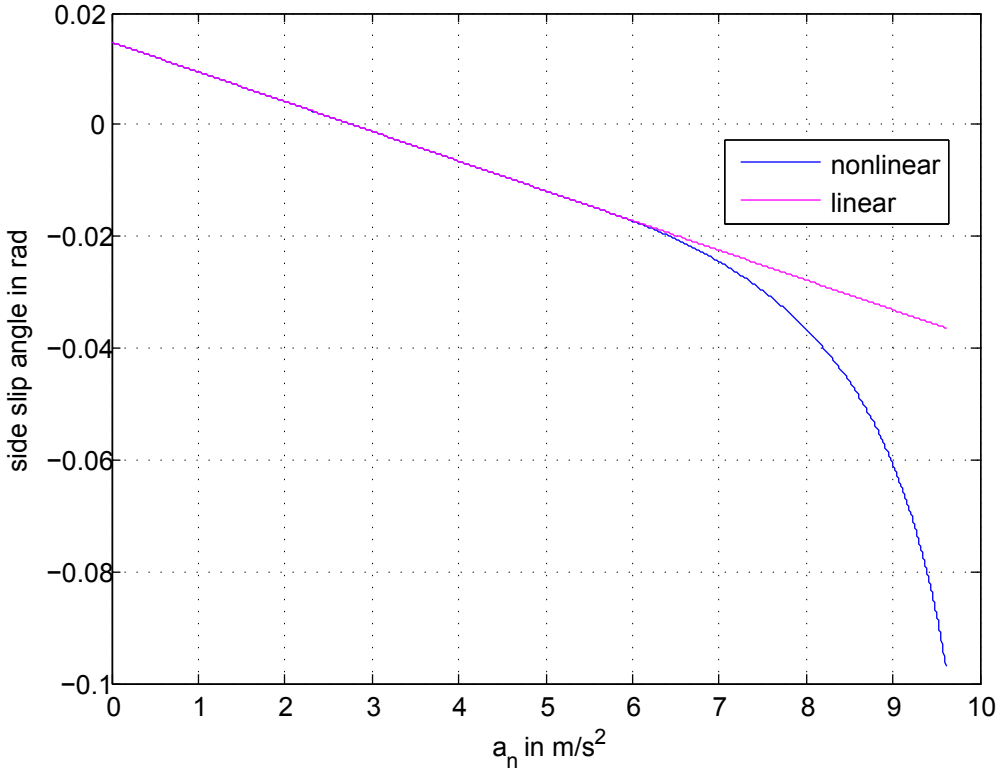

Abbildung 5.8: Handlingdiagramm Schwimmwinkel

In den Abbildungen 5.7 und 5.8 ist jeweils ein Vergleich zwischen nichtlinearem (blaue Kurve) und linearem System (magenta-farbene Kurve) angeführt. Durch die Abweichungen der zwei Kurven werden Linearisierungsfehler des linearen gegenüber dem nichtlinearen System sichtbar.
In beiden Abbildung 5.7 und 5.8 ist eine sehr gute Übereinstimmung des linearisierten mit dem nichtlinearen Modell bis etwa $a_n = 6\frac{m}{s^2}$ zu erkennen.
In Abbildung 5.7 ist weiters ein untersteuerndes Fahrzeugverhalten des nichtlinearen und linearisierten Modells erkennbar. In Abbildung 5.8 ist zu sehen, dass der Schwimmwinkel zu Beginn positiv ist und dann bei etwa $a_n = 3\frac{m}{s^2}$ negativ wird.

In Abbildung 5.9 ist weiters der Schräglaufwinkel α_R über der Normalbeschleunigung a_n aufgetragen dargestellt. In Abbildung 5.10 folgt eine analoge Darstellung des Schräglaufwinkels des Vorderrades.

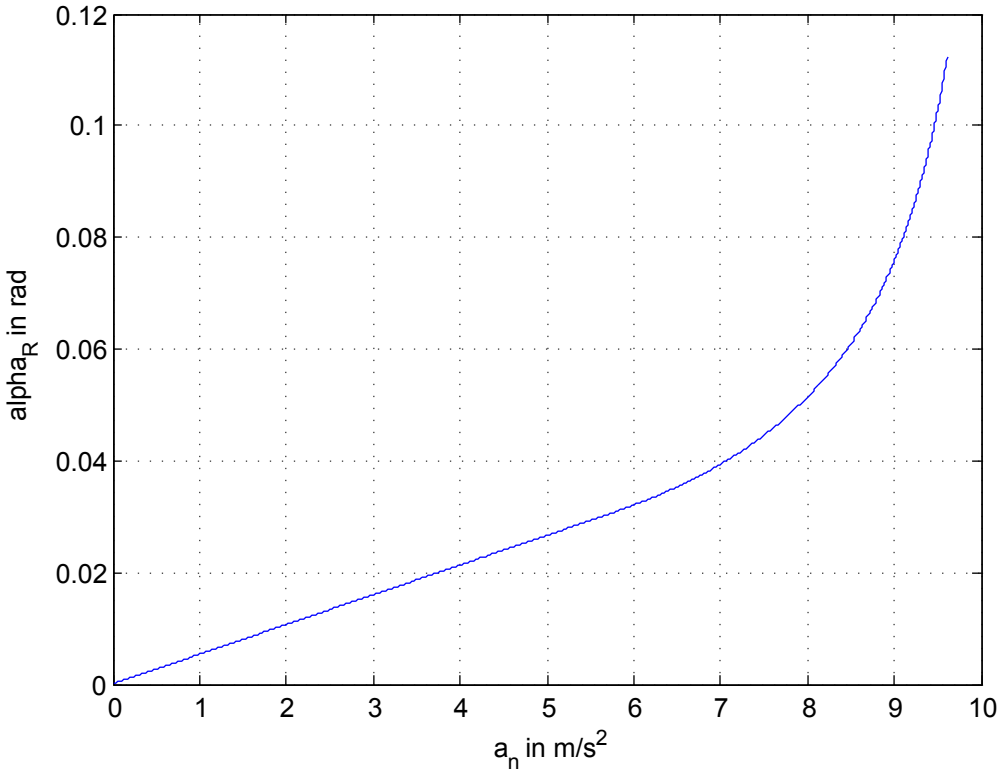

Abbildung 5.9: α_R über a_n

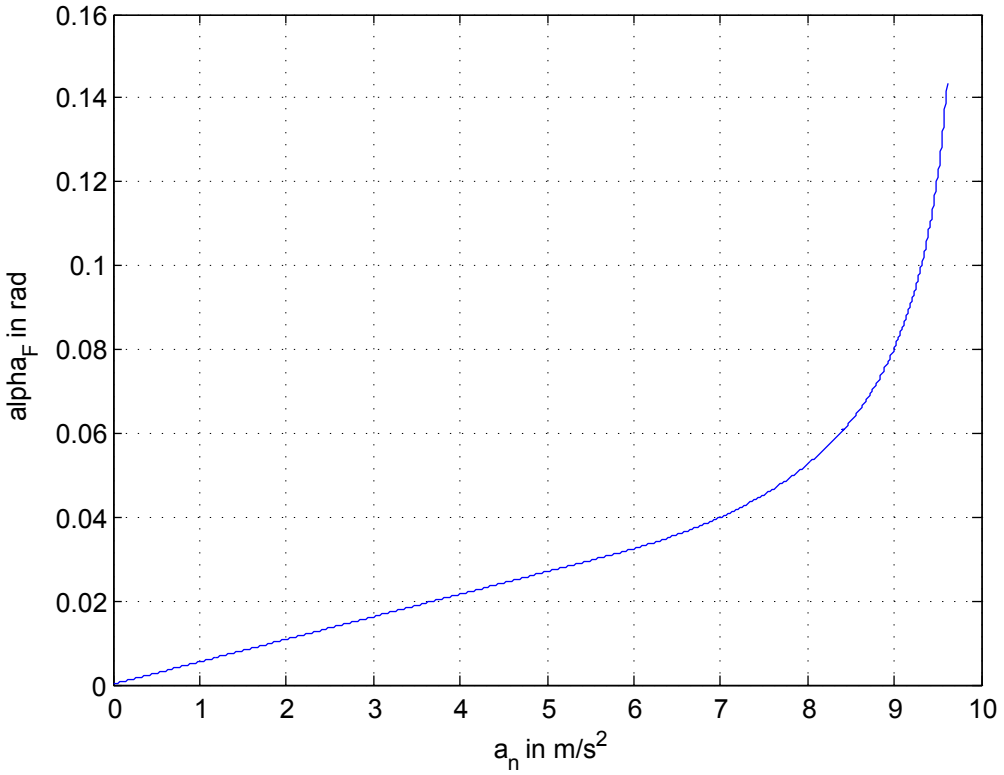

Abbildung 5.10: α_F über a_n

Bezüglich der Schräglaufwinkel α_R und α_F ist in den Abbildungen 5.9 und 5.10 wieder ein linearer Verlauf der Kurven bis etwa $a_n = 6\frac{m}{s^2}$ zu erkennen.

6 Implementierung

Mit den verwendeten Parametern aus den Tabellen 5.1 und 5.2 wurde im Zuge der Implementierung des Fahrzeugmodells in MATLAB bezüglich der Drallsätze von Vorder- und Hinterrad festgestellt, dass mit der Eulerdiskretisierung nach Abschnitt 3.5 in niedrigeren Geschwindigkeitsbereichen, siehe z.B. auch [12], keine stabile Integration für die Zustandsgrößen v_x, ω_F und ω_R möglich ist. Um dem entgegenzuwirken wurde eine alternative Diskretisierung für die beiden Drallsätze der Räder nach einem modifizierten Eulerverfahren, beschrieben in [12], gewählt.

Für die Drallsätze von Vorder- respektive Hinterrad gilt nun:

$$\omega_F((k+1)T) = \omega_F(kT) + T\frac{1}{1 - T\frac{\partial \dot{\omega}_F(kT)}{\partial \omega_F}}\dot{\omega}_F(kT) \tag{6.1}$$

$$\omega_R((k+1)T) = \omega_R(kT) + T\frac{1}{1 - T\frac{\partial \dot{\omega}_R(kT)}{\partial \omega_R}}\dot{\omega}_R(kT) \tag{6.2}$$

mit $\dot{\omega}_F$ nach Gleichung (5.45) und $\dot{\omega}_R$ nach (5.46).

Die restlichen drei Bewegungsgleichungen für v_y, v_x und $\dot{\psi}$ blieben unverändert und seien an dieser Stelle nochmals angeführt:

$$v_y((k+1)T) = \frac{T}{m}(F_{yR}(kT) + F_{yF}(kT)\,cos(\delta(kT))$$
$$+F_{xF}(kT)\,sin(\delta(kT)) - m\,v_x(kT)\,\dot{\psi}(kT)) + v_y(kT) \tag{6.3}$$

$$v_x((k+1)T) = \frac{T}{m}(F_{xR}(kT) - F_{yF}(kT)\,sin(\delta(kT))$$
$$+F_{xF}(kT)\,cos(\delta(kT)) + m\,v_y(kT)\,\dot{\psi}(kT)) + v_x(kT) \tag{6.4}$$

$$\dot{\psi}((k+1)T) = \frac{T}{I_S}(-F_{yR}(kT)\,l_2 + F_{yF}(kT)\,cos(\delta(kT))\,l_1$$
$$+F_{xF}(kT)\,sin(\delta(kT))\,l_1) + \dot{\psi}(kT)\ . \tag{6.5}$$

Die obigen Gleichungen (6.1) bis (6.5) wurden sowohl als Modell für das Referenzsystem als auch den Beobachter implementiert. Damit wird erreicht, dass die Rauschkovarianzmatrizen R und Q bei selber Diskretisierungsschrittweite von Referenz und Beobachter bekannt sind.

7 Ergebnisse

Um den Linearen, den Extended und den Unscented Kalman Filter vergleichen zu können, wurden unterschiedliche Fahrmanöver durchgeführt. In diesem Abschnitt seien die Ergebnisse dieser Manöver dargestellt und diskutiert.
Zuerst wird eine Lenkwinkelrampe mit moderater Querbeschleunigung gefahren. Der Verlauf des Lenkwinkels δ am Vorderreifen bzw. des Lenkradwinkels ist in Abbildung 7.1 bzw. 7.2 dargestellt. In Abbildung 7.1 ist ersichtlich, dass δ von 0 bis 4 Sekunden gleich 0 rad beträgt, dann in einer Rampe mit einer Steigung von $0.07\frac{rad}{s}$ bzw. $4\frac{Grad}{s}$ bis 0.035 rad bzw. 2 Grad ansteigt und dann konstant bleibt. Die Lenkradwinkelgeschwindigkeit ist dabei relativ langsam mit $60\frac{Grad}{s}$.

Es folgt im Vergleich dazu ein ähnliches Fahrmanöver, nun aber mit hoher Querbeschleunigung. Die dazugehörige Lenkwinkelrampe aus Abbildung 7.6 hat hierbei dieselbe Steigung wie beim zuvor beschriebenen Manöver, geht nun allerdings bis auf einen Wert von ca. 0.122 rad bzw. 7 Grad und bleibt dann konstant auf diesem Wert.

Anschließend folgt ein Fahrmanöver mit dem selben Lenkwinkeleingang, wobei nun nach etwa 9 Sekunden zusätzlich ein Bremsmoment aufgebracht wird, um die Filter bei einem Manöver mit gegenseitiger Beeinflussung von Umfangs- und Seitenkraft zu betrachten. Der Bremsvorgang entspricht dabei einer durchschnittlichen Bremsung mit einer Verzögerung von etwa $4\frac{m}{s^2}$. Der Verlauf des Bremsmoments ist in Abbildung 7.11 dargestellt.

Der Einfluss der Abtastzeit wird abschließend nur beim EKF und UKF betrachtet. Einerseits im Zuge des oben beschriebenen Fahrmanövers *Lenkwinkelrampe mit hoher Querbeschleunigung*, andererseits bei einem synthetischen Lenkwinkelsprung nach etwa 4 Sekunden von δ=0 Grad auf δ=2 Grad, Abbildung 7.18, was wiederum einem Fahrmanöver mit moderater Querbeschleunigung entspricht. Diese Manöver bieten sich an um Vergleiche zwischen EKF und UKF anzustellen, da die Lenkwinkelrampe eine langsamere Dynamik hervorruft als der synthetische Lenkwinkelsprung.

Wie bereits in Kapitel 6 erwähnt, liegt dem Modell des Kalman Filters und den Referenzsignalen das selbe Fahrzeugmodell zu Grunde. Die Referenzsignale beinhalten definiertes Mess- und/oder Prozessrauschen, siehe z.B. (4.64) bzw. (4.65), sodass die Kovarianzmatrizen bei der selben Samplingrate bei der Berechnung des Referenzsignals und des Kalman Filters nun bekannt sind. Im Folgenden wird unterstellt, dass die Kovarianzmatrizen nur Einträge in der Hauptdiagonale haben. [1] Die Standardabweichungen des Prozess- und Messrauschens w bzw. v des wahren Systems sind nachfolgend angeführt. Die Prozessrauschkovarianzmatrix Q und die Messrauschkovarianzmatrix R des Kalman Filters ergeben sich zufolge der unterstellten Unkorreliertheit direkt durch Quadrieren der Standardabweichungen von w und v.

Im Folgenden bezeichnet der Ausdruck *randn* mittelwertfreies weißes Rauschen mit Standardabweichung 1. Das Systemrauschen für die fünf Zustandsgrößen v_x, v_y, $\dot{\psi}$, ω_F und ω_R, dargestellt durch $w_1 \cdots w_5$, wurde unabhängig voneinander gewählt und ist gegeben durch
$w_1 = 0.001 \cdot randn...$
$w_2 = 0.0001 \cdot randn...$
$w_3 = 0.0001 \cdot randn...$
$w_4 = 0.001 \cdot randn...$
$w_5 = 0.001 \cdot randn...$
also weißes Rauschen mit einer Standardabweichung von 0.001 bzw. 0.0001 und das Messrauschen für die vier Ausgangsgrößen $\dot{\psi}$, a_y, ω_F und ω_R mit
$v_1 = 0.0001 \cdot randn...$
$v_2 = 0.0001 \cdot randn...$
$v_3 = 0.0001 \cdot randn...$
$v_4 = 0.0001 \cdot randn...$
wiederum weißes Rauschen mit einer Standardabweichung von 0.0001.

Durch Quadrieren der Standardabweichungen ergeben sich die Rauschkovarianzmatrizen Q und R für die Filter zu:

$$R = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$$

[1] Damit sind sowohl das Messrauschen als auch das Prozessrauschen unkorreliert.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} .$$

Die Zustandsgrößen v_x, v_y, $\dot{\psi}$, ω_F und ω_R weisen unterschiedliche Einheiten und Größenordnungen auf. Die Standardabweichungen des weißen Rauschens wurden willkürlich gewählt, damit einerseits ein signifikanter Unterschied des wahren Systems zum zur Prädiktion im Filter herangezogenen Modell gegeben ist, aber andererseits so, dass der Signalverlauf noch deutlich zu erkennen ist und das Signal nicht unbrauchbar wird.

Beim Linearen Kalman Filter erfolgte die Linearisierung um die Geradeausfahrt mit den dazugehörigen Werten $v_{x0} = 18\frac{m}{s}$, $v_{y0} = 0\frac{m}{s}$, $\dot{\psi}_0 = 0\frac{rad}{s}$, $\omega_{F0} = 60\frac{rad}{s}$ und $\omega_{R0} = 60\frac{rad}{s}$.

7.1 Lenkwinkelrampe mit moderater Querbeschleunigung

Wie zu Beginn des Kapitels 7 bereits angekündigt, seien nun die Ergebnisse des durch eine Lenkwinkelrampe erzeugten Fahrmanövers mit moderater Querbeschleunigung dargestellt.

Der Verlauf des Lenkwinkels δ am Vorderreifen ist in Abbildung 7.1 dargestellt:

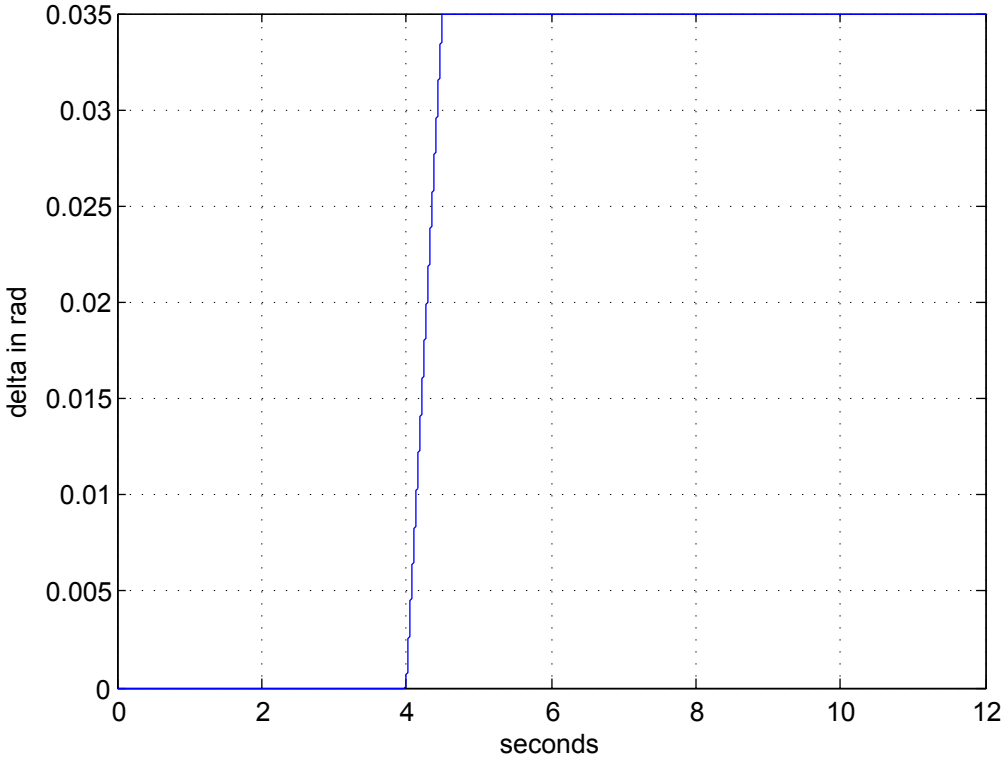

Abbildung 7.1: δ bei Lenkwinkelrampe mit moderatem a_y

respektive der Lenkradwinkel mit der Lenkübersetzung von $i_L = 14.97$ in Abbildung 7.2:

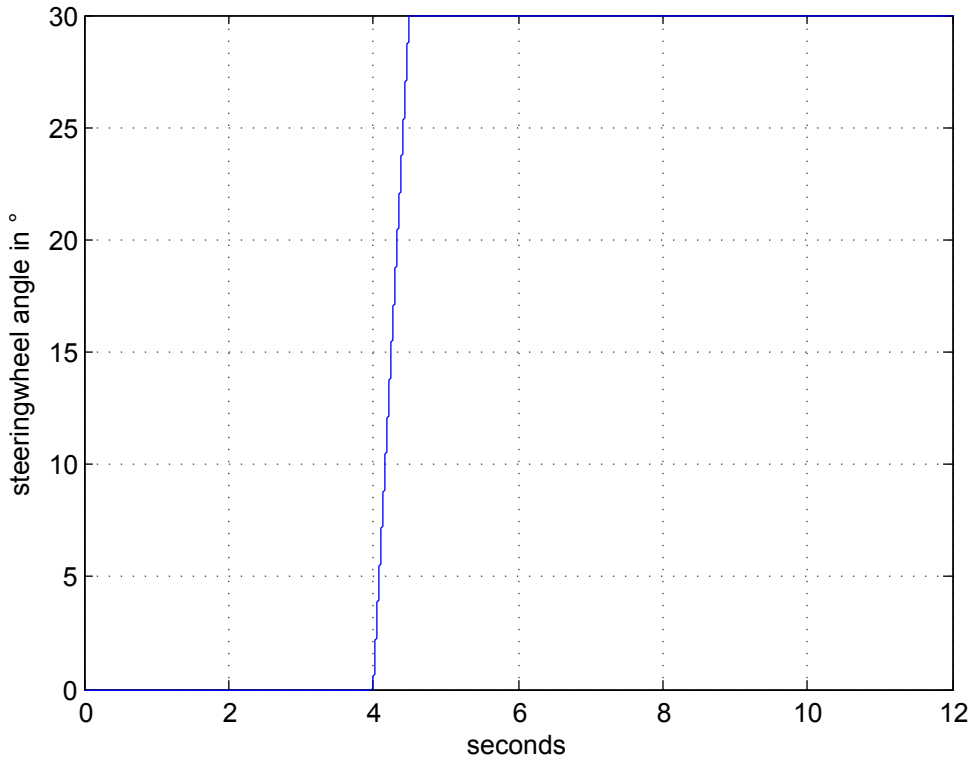

Abbildung 7.2: Lenkradwinkel bei Lenkwinkelrampe mit moderatem a_y

Die anderen Eingangsgrößen Antriebs- und Bremsmoment betragen bei diesem Manöver konstant 0 Nm. Die Abtastzeit ist bei dieser Simulation mit $T = 0.001s$ gegeben.

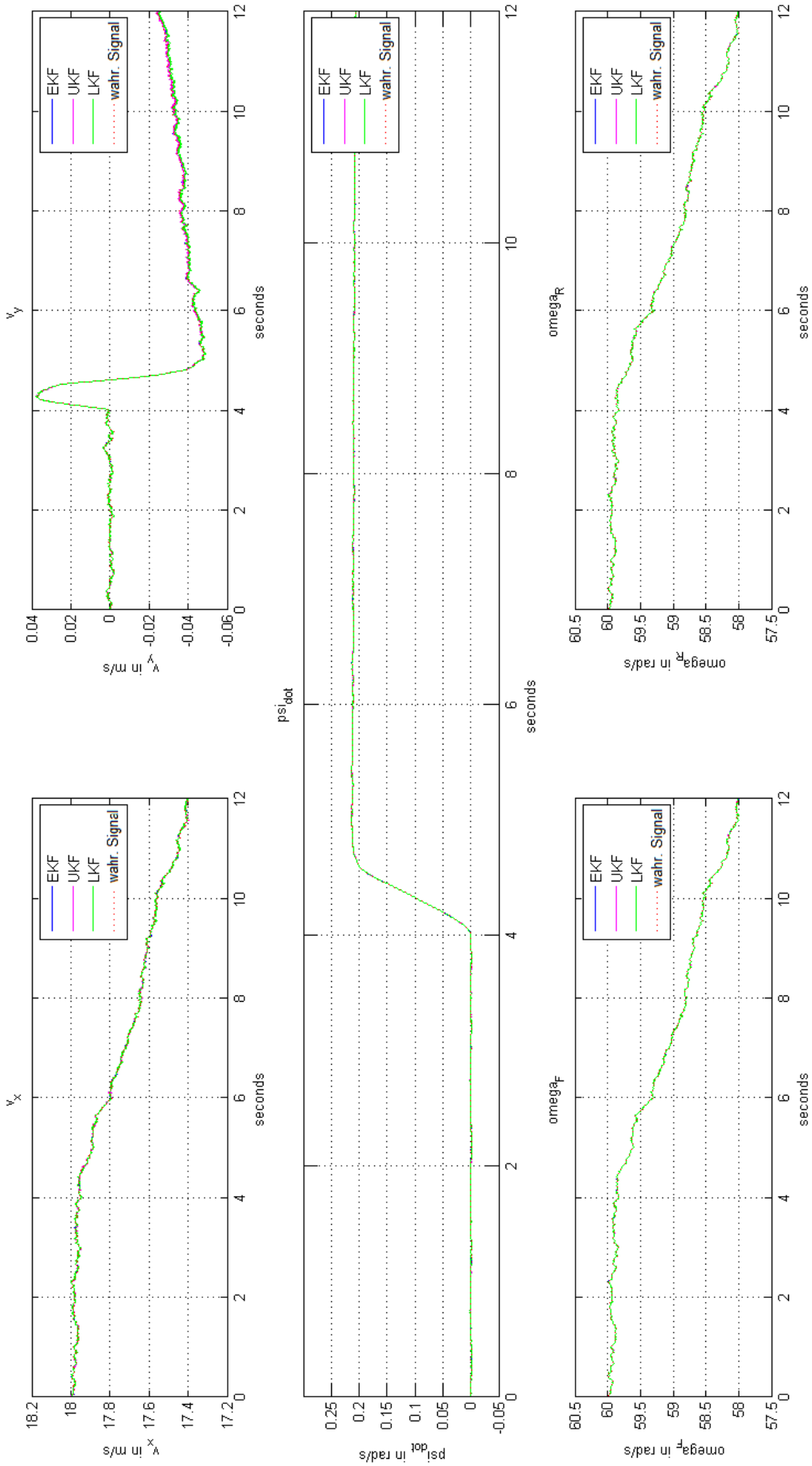

Abbildung 7.3: Zustandsgrößen bei Lenkwinkelrampe mit moderatem a_y

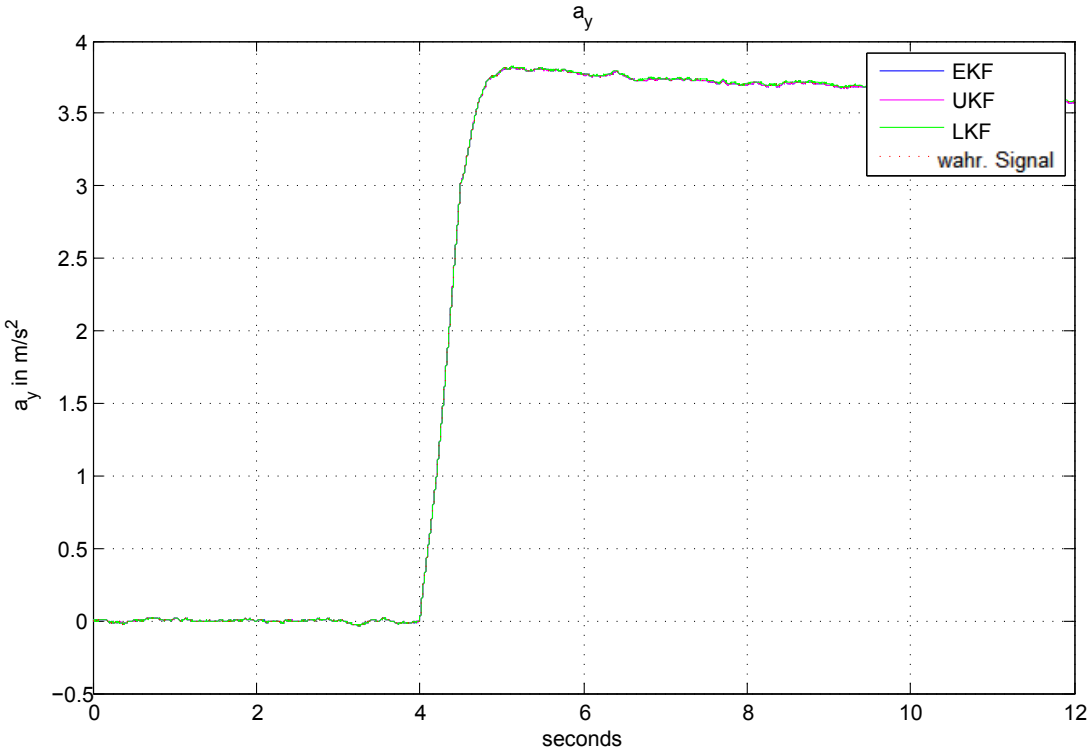

Abbildung 7.4: a_y bei Lenkwinkelrampe mit moderatem a_y

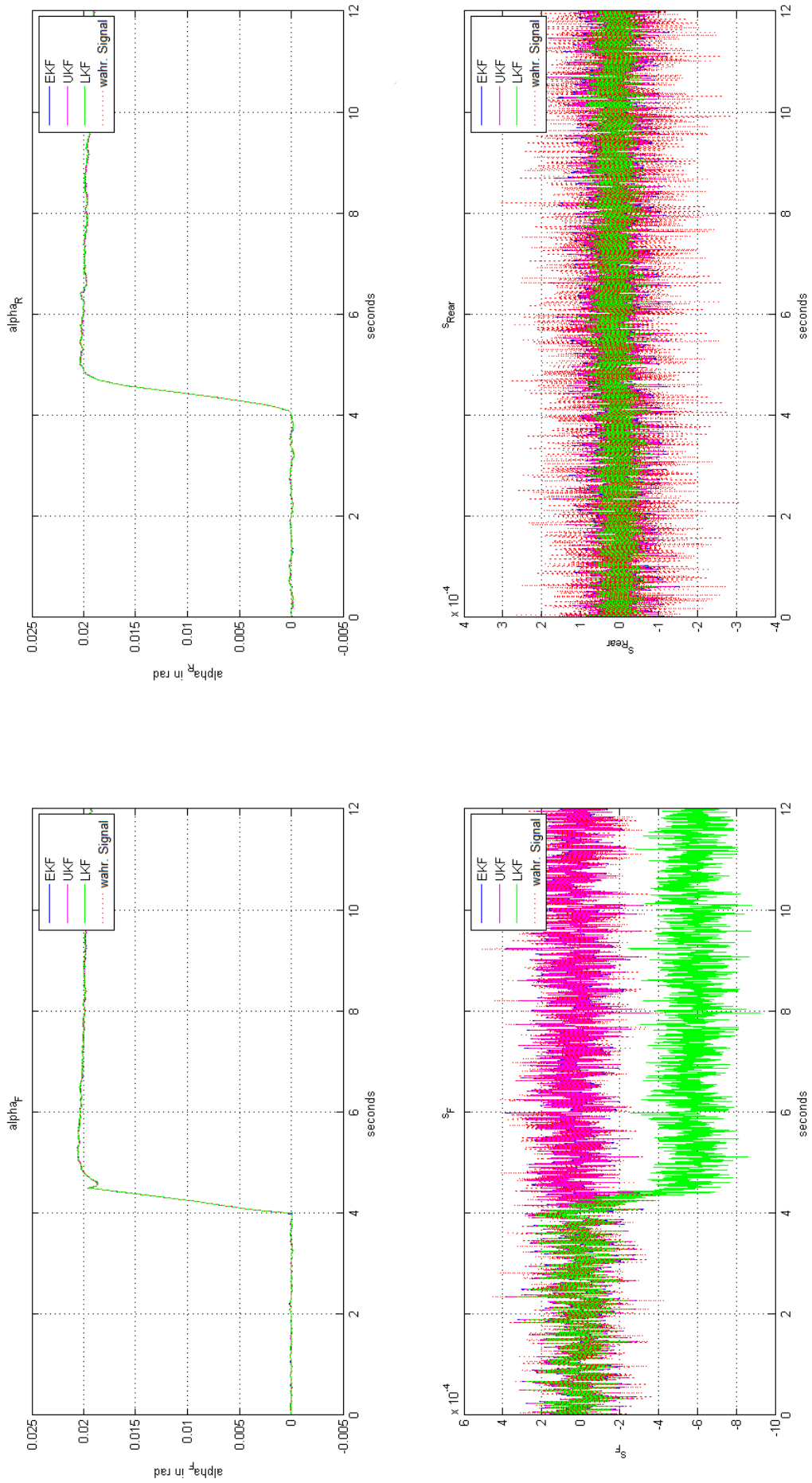

Abbildung 7.5: Schräglaufwinkel und Schlupf bei LW-Rampe mit moderatem a_y

In Abbildung 7.3 sind die Zustandsgrößen v_x, v_y, $\dot{\psi}$, ω_F und ω_R jeweils über der Simulationszeit in Sekunden aufgetragen dargestellt. Die blaue Linie gehört zum Extended Kalman Filter, die magenta-farbene Linie zum Unscented Kalman Filter, die grüne zum Linearen Kalman Filter und die rot-gepunktete Linie zum wahren System. Betrachtet man die Abbildung von v_x, so erkennt man, dass die Längsgeschwindigkeit zufolge des Lenkens abnimmt. Dies ist auf den Kurvenwiderstand, sprich eine Seitenkraftkomponente in Längsrichtung zufolge des Lenkwinkels, zurückzuführen. Würde das System im Linearen Kalman Filter nicht durch den Innovationsterm im Beobachter korrigiert werden, wäre die Längsgeschwindigkeit beim LKF konstant $18\frac{m}{s}$. In jedem der fünf Graphen aus Abbildung 7.3 liegen die vier Kurven der Filter bzw. des wahren Systems sehr gut übereinander. Allein bei der Abbildung von v_y ist ab etwa 6 Sekunden eine kleine Abweichung des Linearen Kalman Filters (grün) zu den restlichen Kurven, die wieder sehr gut übereinander liegen, zu erkennen.

In Abbildung 7.4 ist die Querbeschleunigung a_y über der Simulationszeit aufgetragen. Sie ist in der Kurvenfahrt mit etwa $3.7\frac{m}{s^2}$ relativ moderat. Es ist zu erkennen, dass wieder alle Filterkurven und die des wahren Systems sehr gut übereinander liegen, bis auf einen sehr kleinen Drift beim Linearen Kalman Filter nach ca. 6 Sekunden, wie er schon in Abbildung 7.3 bei der Quergeschwindigkeit zu erkennen war.

In Abbildung 7.5 sind die Schräglaufwinkel α_F bzw. α_R und die Schlüpfe s_F bzw. s_{Rear} über der Simulationszeit dargestellt. Nachdem bei den Schlüpfen die y-Achse jeweils mit dem Faktor 10^{-4} skaliert wird, ist das Rauschen der Signale deutlich sichtbar. Es stimmen wieder alle Filterkurven mit jener des wahren Systems in allen Graphen gut überein, allein beim Schlupf s_F ist wieder eine kleine Abweichung (Größenordnung in etwa $5{\cdot}10^{-4}$) des Linearen Kalman Filters zufolge des Lenkens gegenüber den restlichen Kurven zu verzeichnen.

Die durchwegs sehr kleinen Abweichungen des Linearen Kalman Filters sind hauptsächlich auf Linearisierungsfehler zurückzuführen. Durch die Linearisierung kommt es zu Systemunterschieden gegenüber dem nichtlinearen System, die dann sichtbar werden, wenn von der Geradeausfahrt, um die linearisiert wird, weggelenkt wird.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die wenigen Abweichungen des Linearen Kalman Filters sehr klein sind und somit der LKF beim Manöver mit moderater Querbeschleunigung praktisch eine ebenso gute Performance liefert wie EKF und UKF.

7.2 Lenkwinkelrampe mit hoher Querbeschleunigung

Der Verlauf des Lenkwinkels δ am Vorderreifen ist in Abbildung 7.6 ersichtlich, wobei die Lenkwinkelgeschwindigkeit gegenüber der Lenkwinkelrampe mit moderater Querbeschleunigung unverändert bleibt:

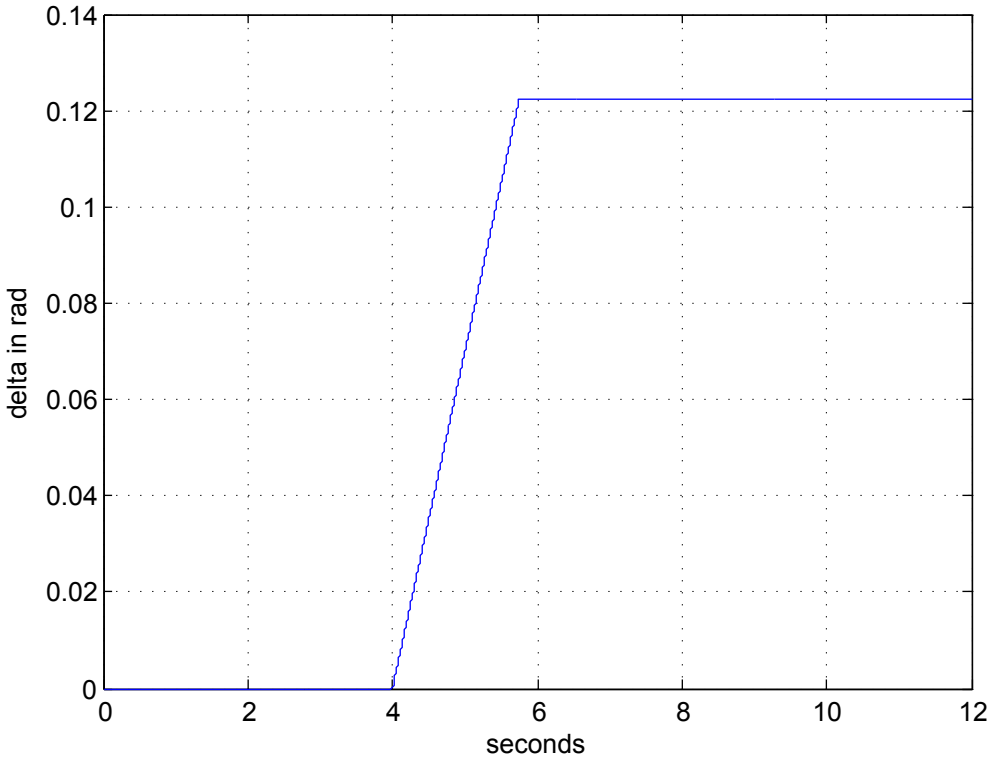

Abbildung 7.6: δ bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y

bzw. wiederum der Lenkradwinkelverlauf in Abbildung 7.7:

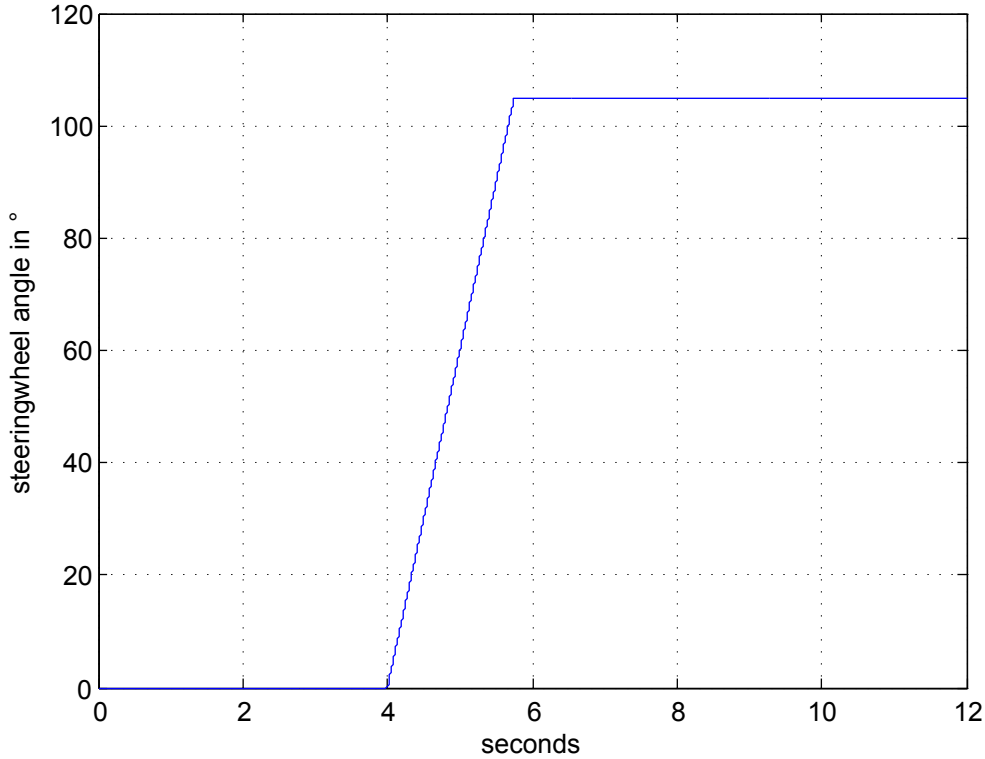

Abbildung 7.7: Lenkradwinkel bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y

Die Eingangsgrößen Antriebs- und Bremsmoment betragen bei diesem Manöver konstant 0 Nm. Die Abtastzeit sei bei dieser Simulation wiederum mit $T = 0.001s$ gegeben.

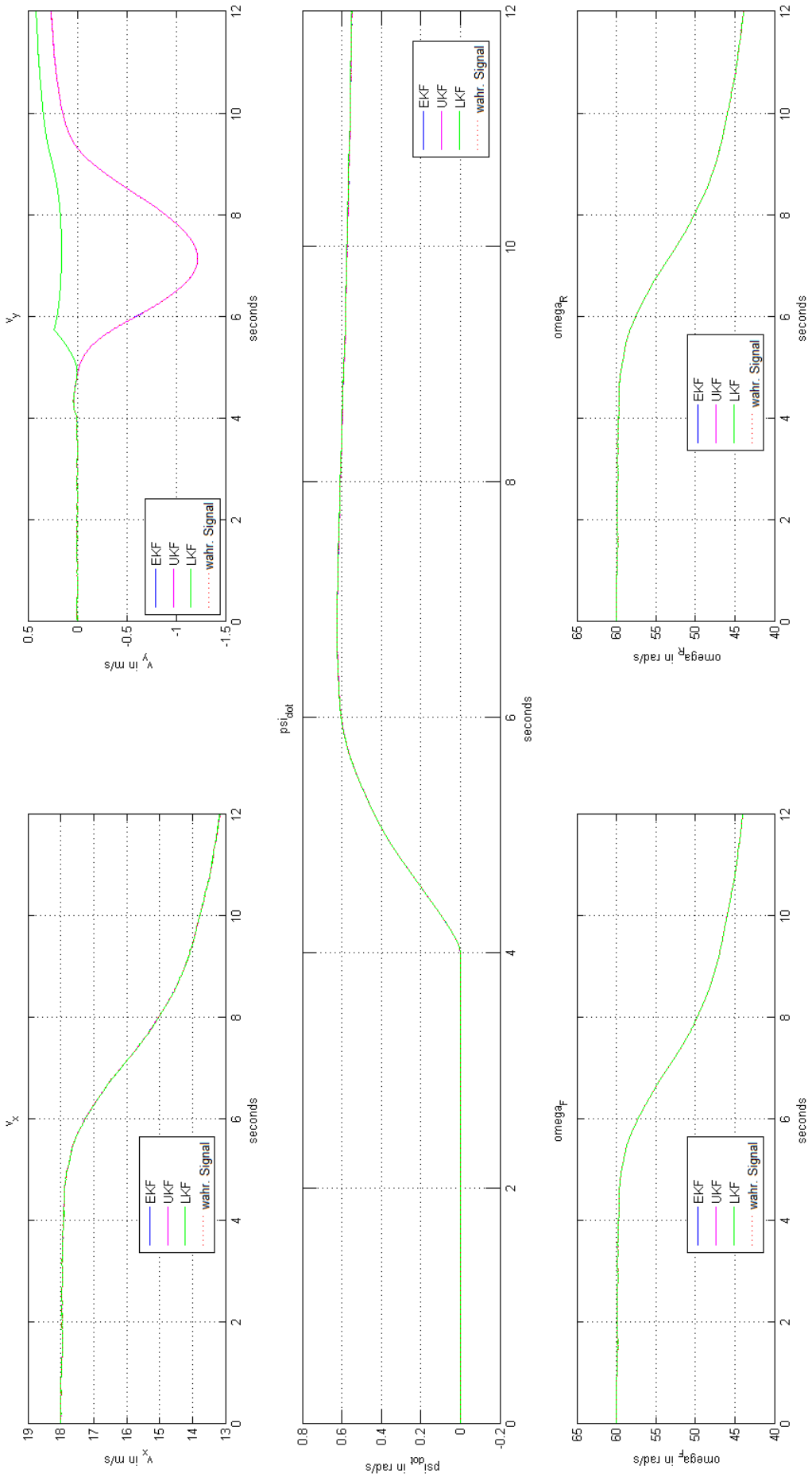

Abbildung 7.8: Zustandsgrößen bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y

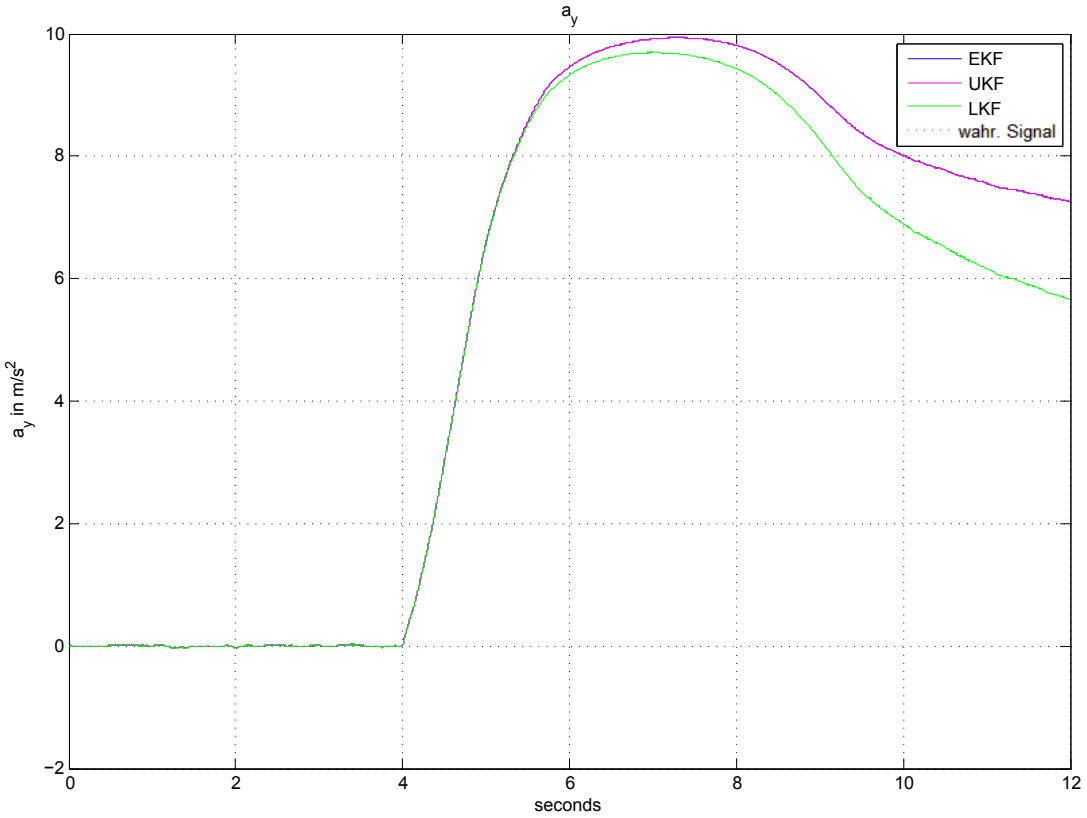

Abbildung 7.9: a_y bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y

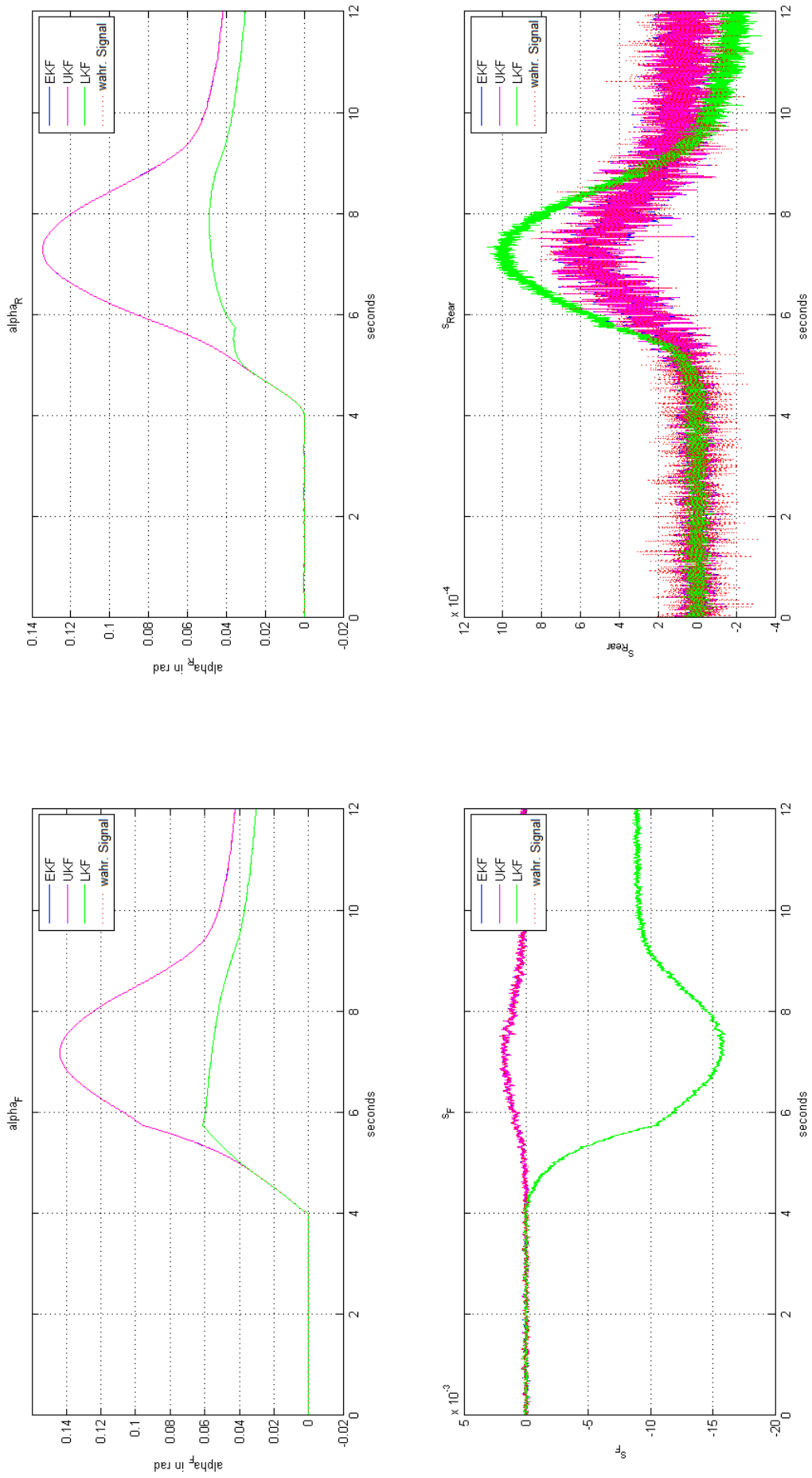

Abbildung 7.10: Schräglaufwinkel und Schlupf bei LW-Rampe mit hohem a_y

In Abbildung 7.8 sind alle Zustandsgrößen über der Simulationszeit aufgetragen. Bei den Größen v_x, $\dot{\psi}$, ω_F und ω_R liegen die Kurven von EKF, UKF, LKF und wahrem System sehr gut übereinander. Bei der Zustandsgröße v_y ist nun eine große Abweichung des Linearen Kalman Filters (grün) zum EKF, UKF bzw. dem wahren Signal, deren Kurven wieder fast identisch verlaufen, zu erkennen. Auch bei der Querbeschleunigung a_y in Abbildung 7.9 ist eine derartige Abweichung des LKF zu den restlichen Filtern respektive wirklichem System sichtbar. Betrachtet man Abbildung 7.10, so sind bezüglich α_F, α_R, s_F und s_{Rear} ebenfalls Unterschiede zwischen der Kurve des Linearen Kalman Filters gegenüber den Kurven von EKF, UKF bzw. dem wahren Signal, die wieder fast identisch sind, zu erkennen.
Beim Linearen Kalman Filter wurde dann weiters die Systemrauchkovarianzmatrix Q variiert, beispielsweise vergrößert auf $Q{=}10^{-2}{\cdot}eye(5)$ mit $eye(5)$ als 5×5-Einheitsmatrix, um die aufgrund der Linearisierung erzeugte höhere Systemunsicherheit beim LKF miteinzubeziehen. Dies brachte jedoch keine signifikanten Veränderungen im Vergleich zu den bisher gezeigten und diskutierten Simulationen des Filters.

Die Abweichungen des Linearen Kalman Filters zum EKF, UKF und wahren System sind hauptsächlich auf Linearisierungsfehler zurückzuführen. Die Linearisierung führt zu Systemunterschieden zwischen LKF und wahrem System. Durch diese Unterschiede kommt es im Innovationsterm des Linearen Kalman Filters zu einer Differenz zwischen wahrem Ausgang und im LKF prädizierten Ausgang und somit zu einer Korrektur im LKF. Durch große Systemunterschiede kann es zu einer starken Korrektur kommen, sodass wie bei beispielsweise v_y in Abbildung 7.8 sogar in eine entgegengesetzte Richtung zum wahren Kurvenverlauf korrigiert werden kann.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass der Lineare Kalman Filter beim Manöver mit hoher Querbeschleunigung deutliche Schwächen gegenüber dem EKF und UKF zeigt. Aufgrund des großen Lenkwinkels ist der Linearisierungspunkt (Geradeausfahrt) sehr weit entfernt sodass es beim LKF durch Linearisierungsfehler zu deutlichen Abweichungen vom EKF, UKF und wahren System kommt.

7.2.1 Lenkwinkelrampe mit hoher Querbeschleunigung mit zusätzlichem Bremsen

Der Verlauf der Eingangsgröße δ bleibt gleich wie in Abbildung 7.6 und das Antriebsmoment beträgt nach wie vor 0 Nm. Der Verlauf des Bremsmoments sieht nun allerdings aus

wie folgt:

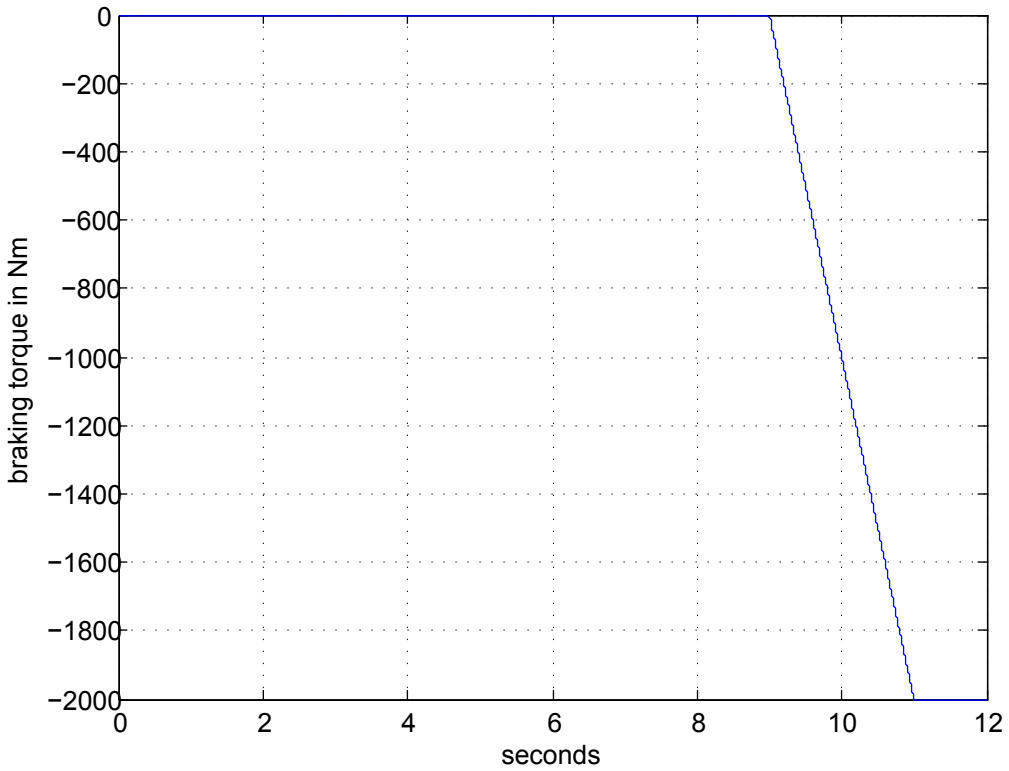

Abbildung 7.11: Bremsmoment bei Lenkwinkelrampe mit hohem a_y mit Bremsen

Das Bremsmoment aus Abbildung 7.11 beträgt bis 9s Simulationszeit 0 Nm, danach sinkt es innerhalb von 2s in einer Rampe auf −2000 Nm und bleibt dann bis 12s konstant auf diesem Wert. Damit stellt sich ab etwa 11s eine Verzögerung von ca. $4\frac{m}{s^2}$ ein.

Damit ergeben sich mit einer Abtastzeit $T = 0.001s$ folgende Simulationsergebnisse:

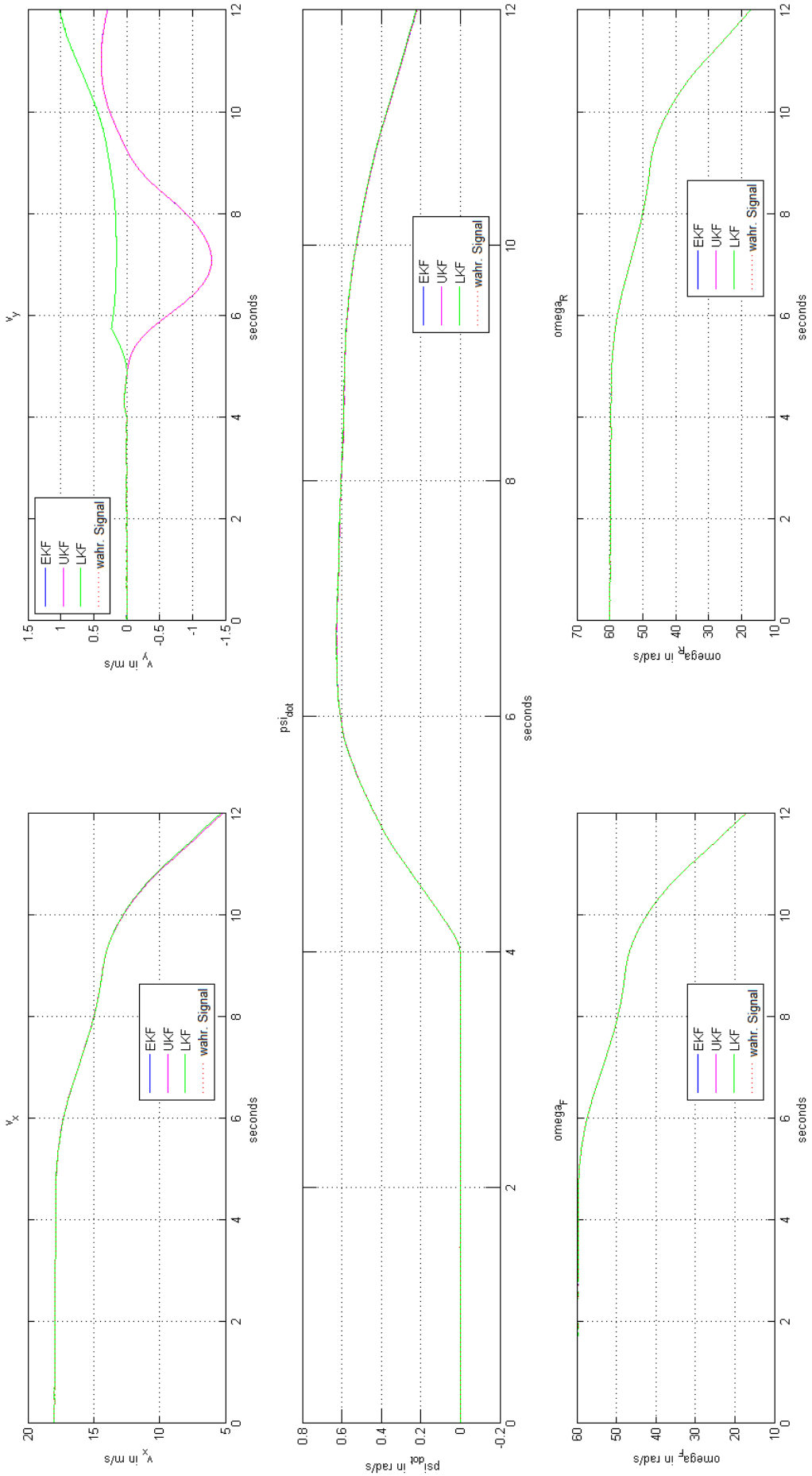

Abbildung 7.12: Zustandsgrößen bei LW-Rampe mit hohem a_y mit Bremsen

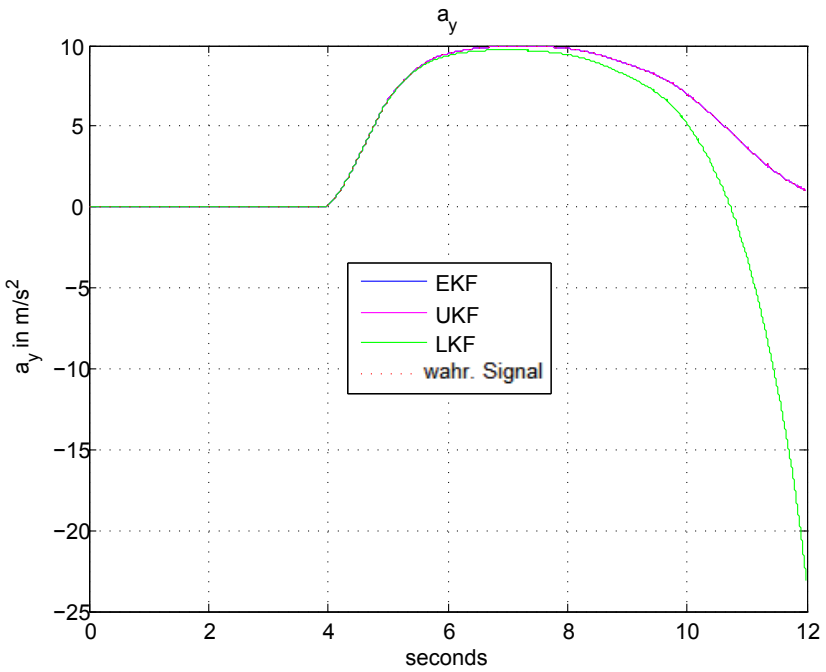

Abbildung 7.13: a_y bei LW-Rampe mit hohem a_y mit Bremsen

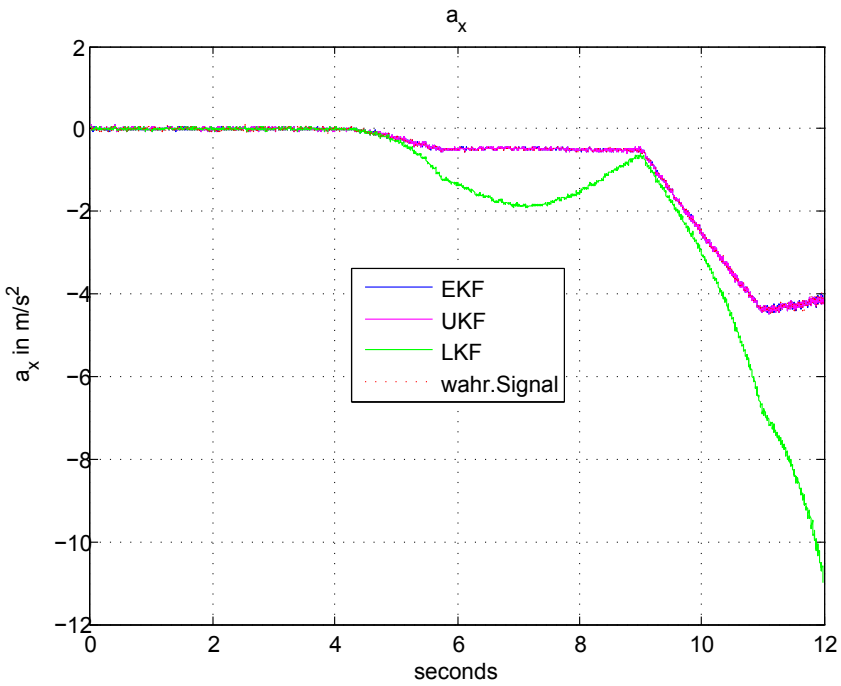

Abbildung 7.14: a_x bei LW-Rampe mit hohem a_y mit Bremsen

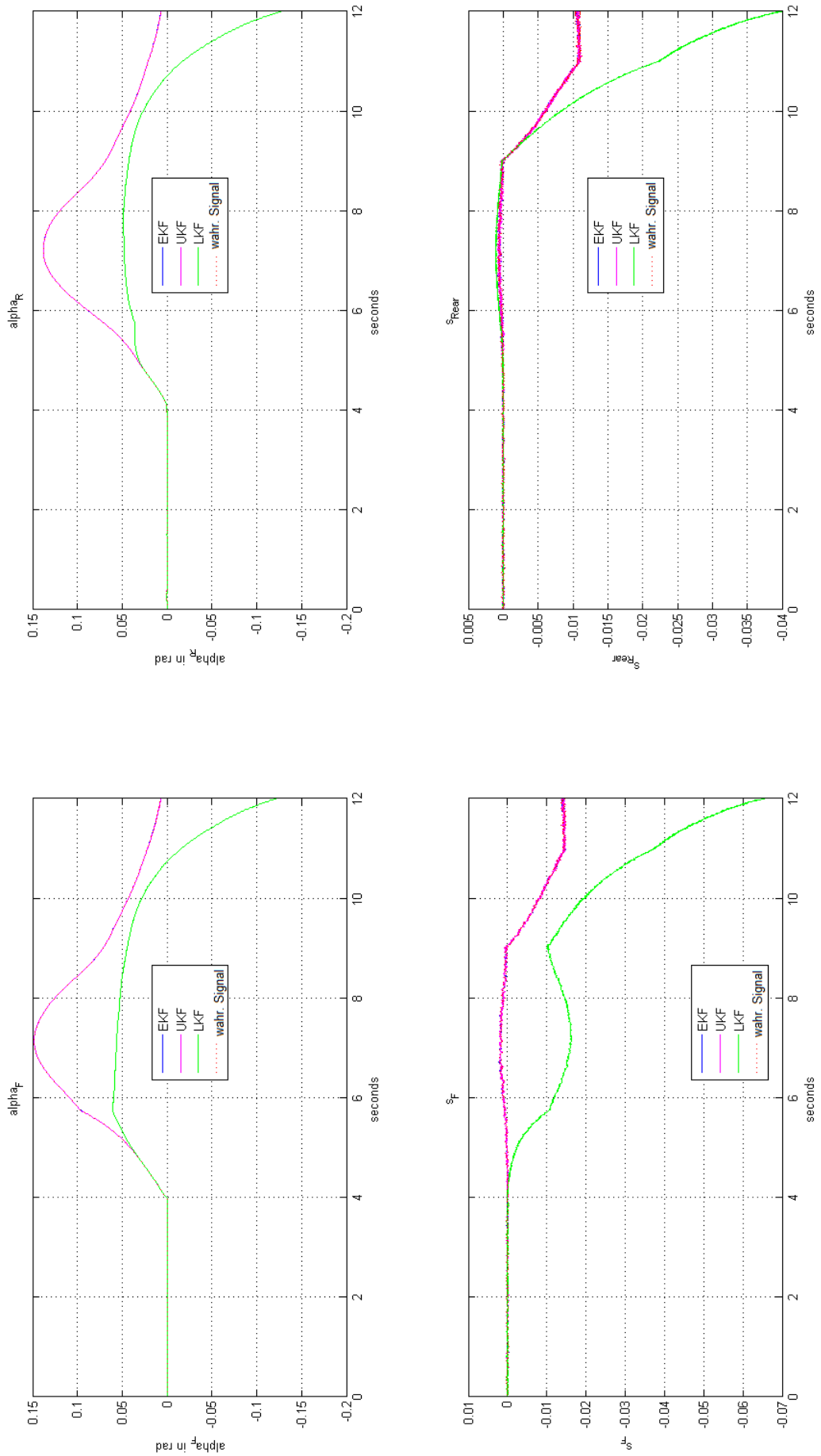

Abbildung 7.15: Schräglaufwinkel u. Schlupf bei LW-Rampe mit hohem a_y mit Br.

In Abbildung 7.12 sind wieder die Zustandsgrößen über der Simulationszeit aufgetragen dargestellt. Durch das Bremsen sinken die Werte von v_x, ω_F und ω_R relativ stark. Bezüglich v_x, $\dot{\psi}$, ω_F und ω_R stimmen alle Filterkurven mit jener des wahren Systems sehr gut überein. Betrachtet man v_y, so erkennt man, dass die Kurven von EKF und UKF mit dem wahren Signalverlauf fast identisch sind. Bezüglich LKF (grün) zeigt sich allerdings analog zum Manöver ohne zusätzlichem Bremsmoment eine große Abweichung vom EKF, UKF bzw. dem wahren Signal.
Vergleicht man den Graph von v_y in Abbildung 7.12 mit jenem aus Abbildung 7.8, so sieht man, dass der Lineare Kalman Filter aufgrund des Bremsens ab etwa 9 Sekunden in Abbildung 7.12 stärker vom EKF, UKF und dem wahren Signal abweicht als in Abbildung 7.8.

In Abbildung 7.13 ist die Querbeschleunigung dargestellt. Vergleicht man Abbildung 7.13 mit Abbildung 7.9, so sieht man in Abbildung 7.13 durch das Bremsmoment eine deutlich größere Abweichung des LKF von den restlichen Kurven (EKF,UKF und wahres Signal), die wieder fast identisch sind, als in Abbildung 7.9.

In Abbildung 7.14 ist die Längsbeschleunigung dargestellt. Bis 4 Sekunden beträgt sie $0\frac{m}{s^2}$. Sobald gelenkt wird, wird sie negativ und wenn das Bremsmoment nach 9 Sekunden einsetzt, sinkt sie auf etwa $-4\frac{m}{s^2}$. Die Kurve des LKF (grün) weicht wiederum stark von den fast identischen Kurven des EKF, UKF und wahren Signals ab.

In Abbildung 7.15 sind die Kurven des EKF und UKF mit jener des wahren Systems in allen vier Graphen wiederum fast identisch. Bezüglich LKF (grün) ergeben sich wieder deutliche Abweichungen gegenüber dem EKF, UKF und wahren Signal. Vergleicht man Abbildung 7.15 mit Abbildung 7.10, so erkennt man ebenfalls größere Abweichungen des LKF in Abbildung 7.15 von den Kurven der anderen Filter bzw. des wahren Systems nach Einsetzen des Bremsmoments als in Abbildung 7.10.

Zusammengefasst kann festgehalten werden, dass aufgrund des Bremsens der Lineare Kalman Filter weiter von den Kurven des EKF, UKF und wahren Systems abweicht als ohne Bremsen. Durch das Bremsen kommt es zu einem Schlupf und somit zu einer Längskraft. Da beispielsweise bezüglich der Bewegungsgleichung von v_y, Gleichung (5.48), der Längskraftterm im Zuge einer Linearisierung um die Geradeausfahrt wegfällt und durch die Verzögerung eine größere Abweichung vom Arbeitspunkt des LKF auftritt, kommt es mit Bremsen zu größeren Unterschieden zwischen LKF und wahrem System als ohne Bremsen.

7.2.2 Einfluss der Abtastzeit

Der Einfluss der Abtastzeit wird im Folgenden nur noch beim EKF und UKF betrachtet und zwar bei größeren Abtastzeiten, $T = 0.01s$ und $T = 0.05s$ bei dem Manöver *Lenkwinkelrampe mit hoher Querbeschleunigung*. Es soll gezeigt werden, ob zwischen EKF und UKF bei größeren Abtastzeiten Unterschiede sichtbar werden. Das Bremsmoment sei fortan wieder konstant 0 Nm.

Die Integrationsschrittweite des Referenzmodells (wahres Modell) bleibt dabei $0.001s$. Nachdem die Integrationsschrittweite im Referenzmodell ($0.001s$) und die Abtastzeit in den Filtern ($T = 0.01s$ bzw. $T = 0.05s$) nun nicht mehr identisch sind, entsteht ein Diskretisierungsfehler zwischen Referenzmodell und Beobachtermodell. Dieser Fehler hat Auswirkungen auf die Kovarianzmatrizen, welche dementsprechend angepasst werden müssten. Es soll im Zuge dieser Arbeit allerdings nicht genauer darauf eingegangen werden.

Die Ergebnisse für eine Abtastzeit von $T = 0.01$s bzw. $T = 0.05$s sind in Abbildung 7.16 bzw. Abbildung 7.17 dargestellt:

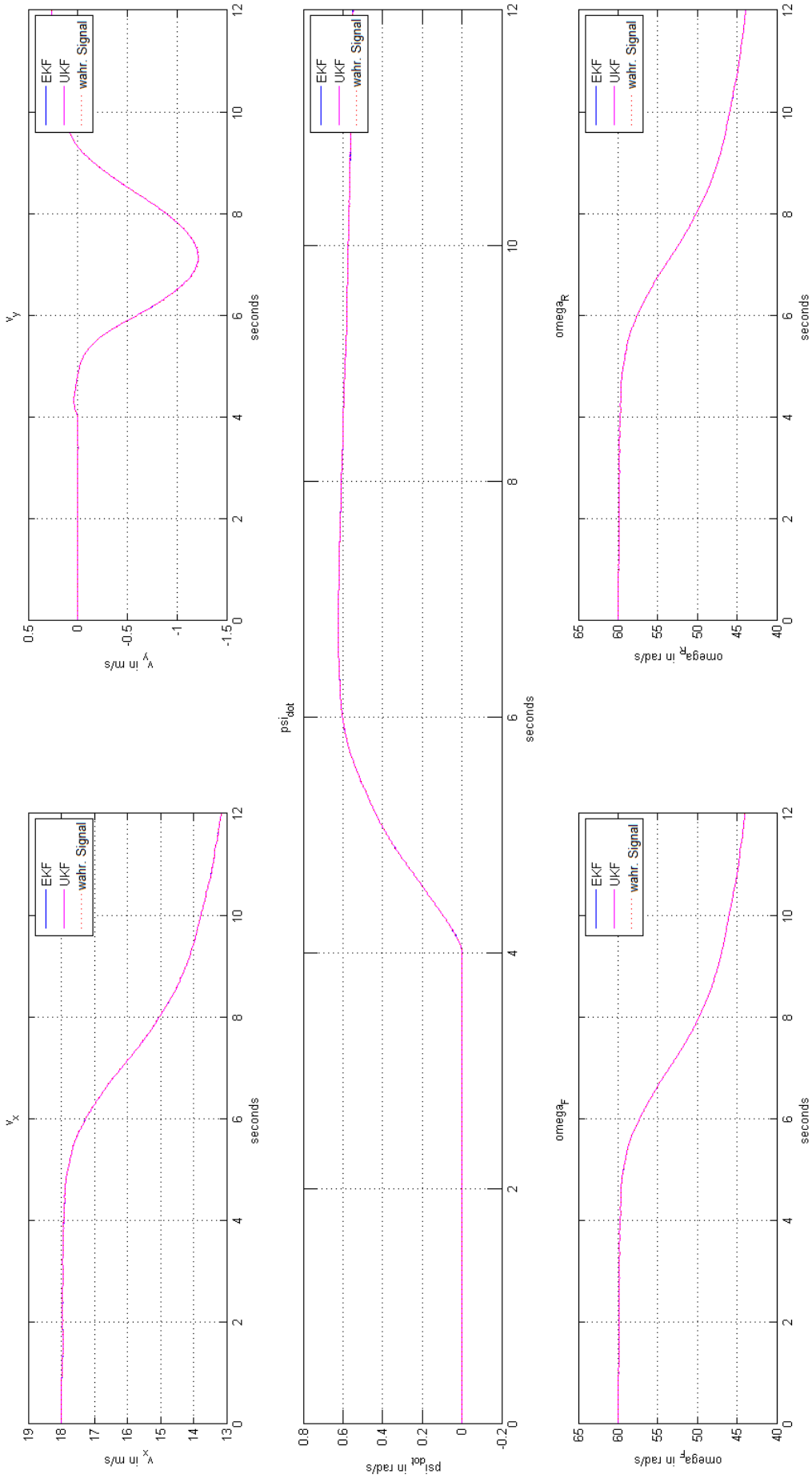

Abbildung 7.16: Zustandsgrößen, LW-Rampe mit hohem a_y, T=0.01s

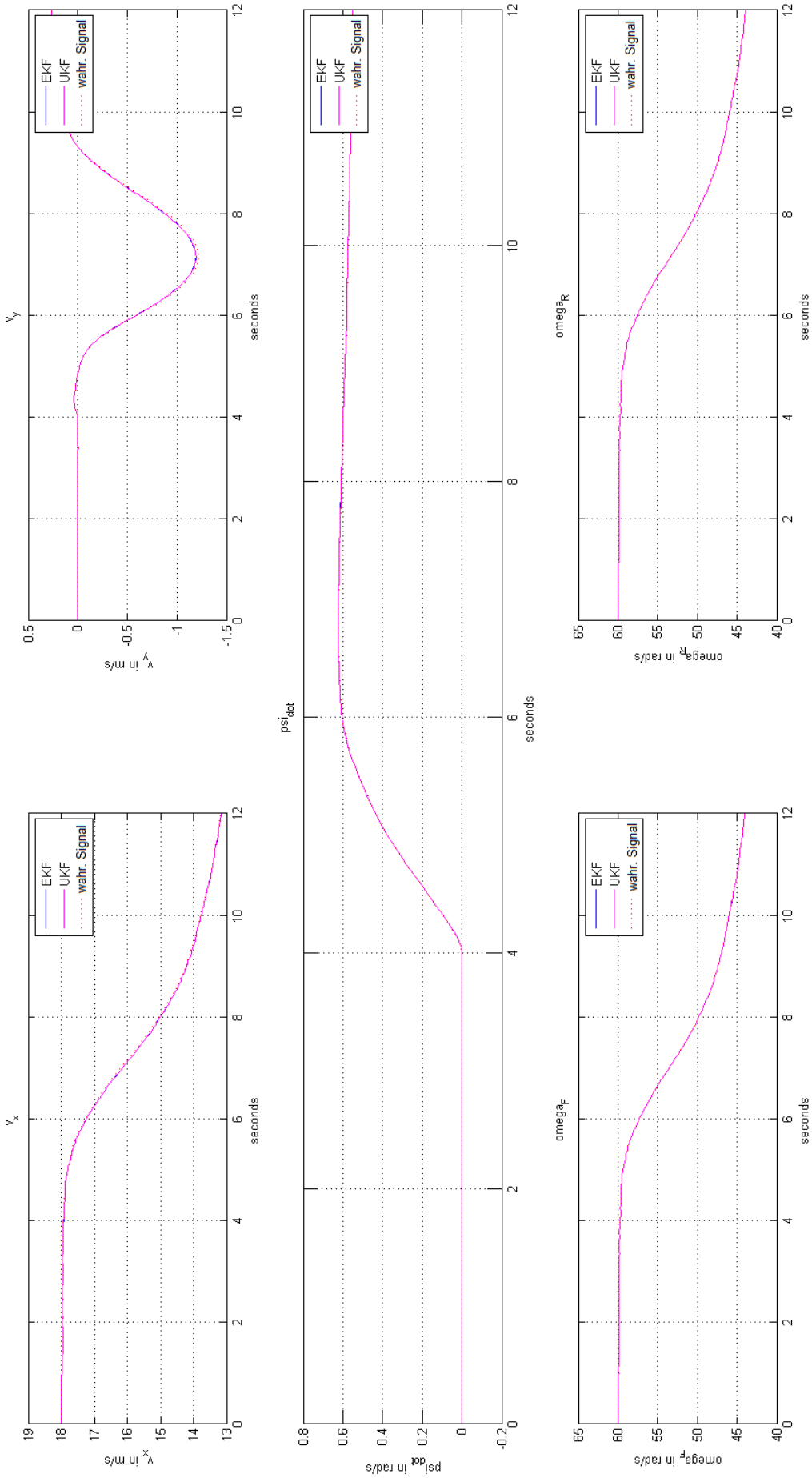

Abbildung 7.17: Zustandsgrößen, LW-Rampe mit hohem a_y, T=0.05s

In den Abbildungen 7.16 und 7.17 ist kein signifikanter Unterschied zwischen EKF und UKF zu erkennen. Die Kurven der beiden Filter und jene des wahren Systems sind fast identisch. Es ist anzunehmen, dass die Dynamik des Systems bei diesem Manöver zu langsam ist, sodass EKF und UKF gleich gut funktionieren.
Es soll daher ein Vergleich zwischen dem Extended und dem Unscented Kalman Filter bei einem synthetischen Sprung des Lenkwinkels δ auf 2 Grad, womit wir es wieder mit einem Manöver mit moderater Querbeschleunigung zu tun haben, durchgeführt werden, um zu sehen, ob dabei ein Unterschied der beiden Filter zu erkennen ist.

7.3 Lenkwinkelsprung

Der Verlauf des Lenkwinkel δ am Vorderreifen sieht bei diesem Sprung-Manöver aus wie folgt, Abbildung 7.18:

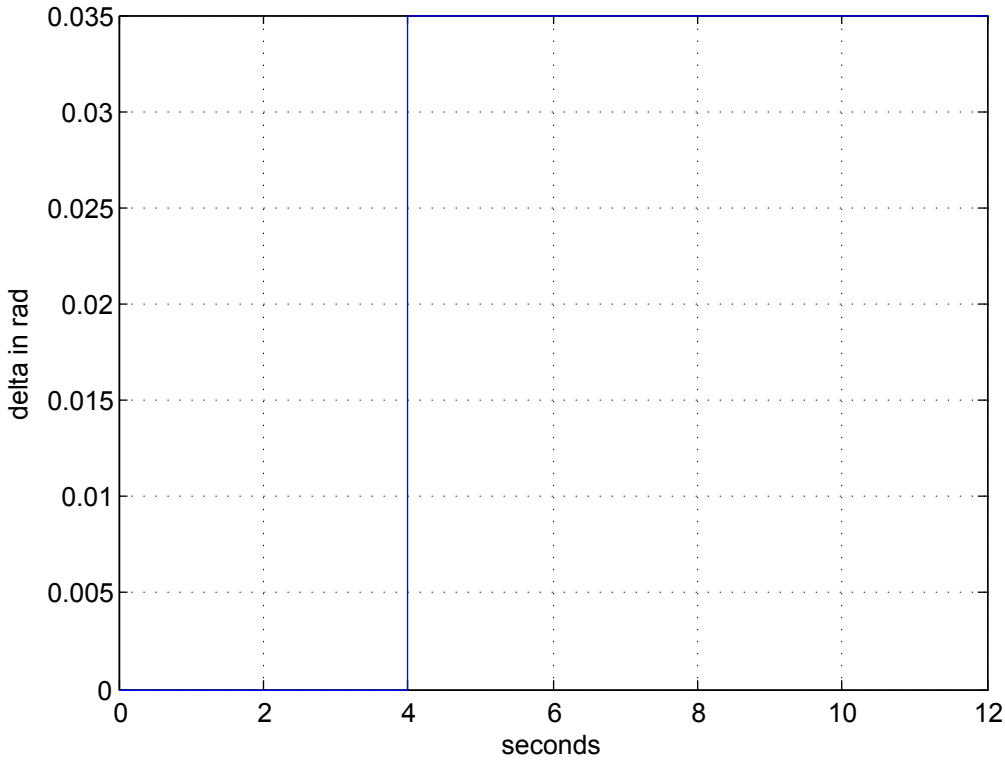

Abbildung 7.18: δ bei Lenkwinkelsprung mit moderatem a_y

bzw. der Lenkradwinkel in Abbildung 7.19:

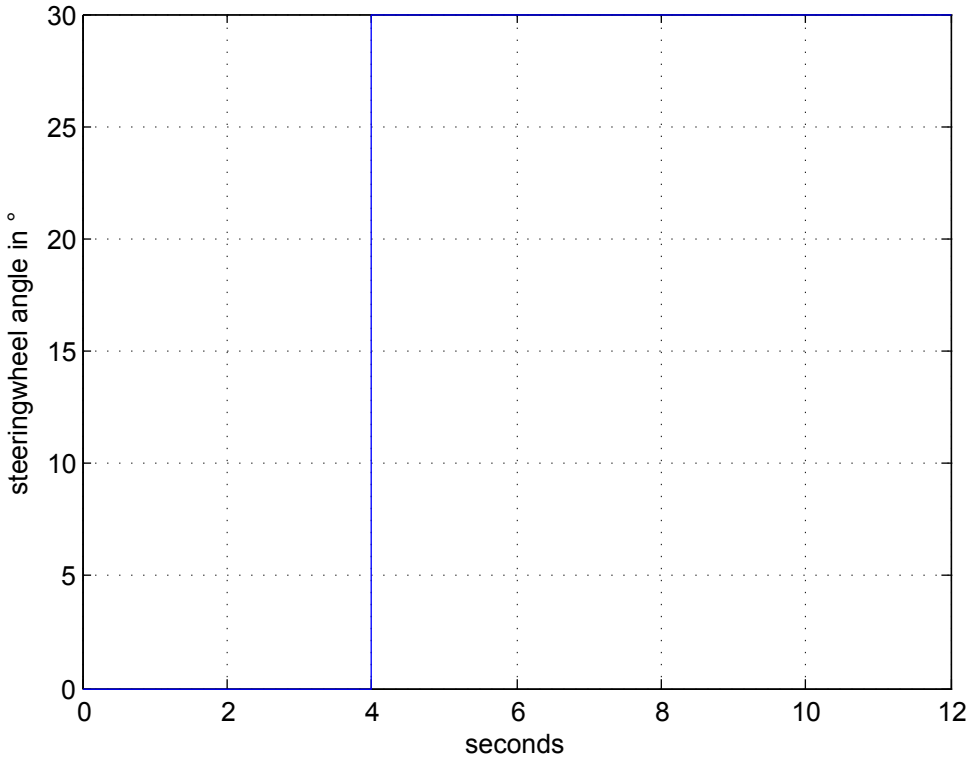

Abbildung 7.19: Lenkradwinkel bei Lenkwinkelsprung mit moderatem a_y

Die Eingangsgrößen Antriebs- und Bremsmoment betragen bei diesem Manöver wiederum konstant 0 Nm.
Das Ergebnis für eine Abtastzeit von $T = 0.01$s ist in Abbildung 7.20 und jenes für die Abtastzeit $T = 0.05s$ in Abbildung 7.21 dargestellt.

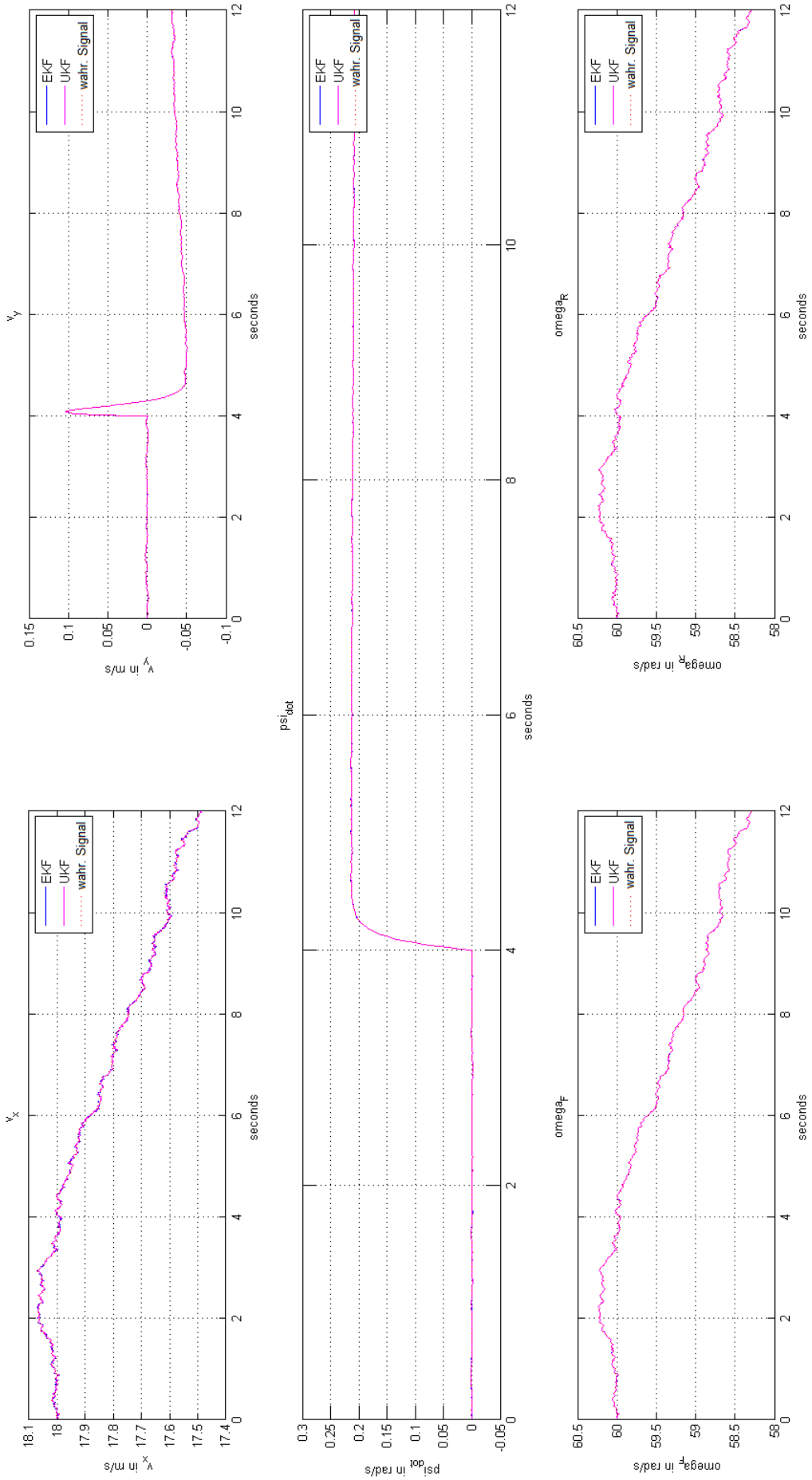

Abbildung 7.20: Zustandsgrößen, LW-Sprung mit moderatem a_y, T=0.01s

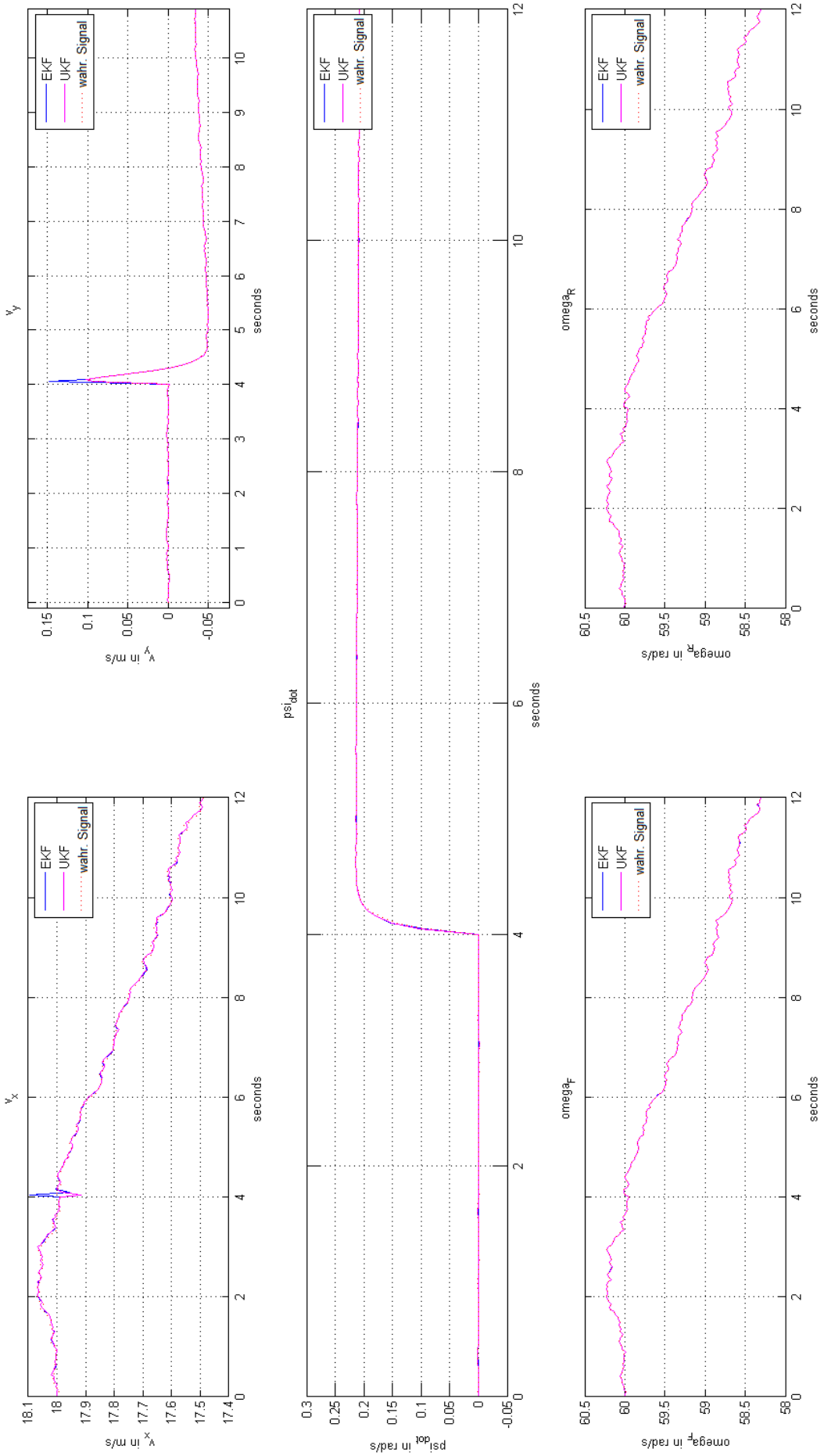

Abbildung 7.21: Zustandsgrößen, LW-Sprung mit moderatem a_y, T=0.05s

In Abbildung 7.20, wo beim EKF und UKF mit einer Abtastzeit von $T = 0.01s$ gearbeitet wurde, sind keine signifikanten Unterschiede der beiden Filter zu erkennen. In Abbildung 7.21 wurde eine Abtastzeit von $T = 0.05s$ verwendet und es ist ein Unterschied zwischen EKF und UKF sichtbar. Betrachtet man die Quergeschwindigkeit v_y, so ist eine Schwäche des EKF gegenüber dem UKF zum Zeitpunkt des Sprungs zu erkennen. Während die Kurve des UKF und jene des wahren Systems fast identisch übereinander liegen, weicht der EKF deutlich davon ab.
Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass EKF und UKF bei den hier betrachteten Manövern mit langsamer Systemdynamik unabhängig von der Abtastzeit gleich gut funktionieren. Bei Manövern mit sehr schneller Systemdynamik und geringeren Abtastzeiten ($T = 0.01s$) gibt es noch keine signifikanten Unterschiede zwischen EKF und UKF, jedoch bei größeren Abtastzeiten ($T = 0.05s$) sind Schwächen des EKF gegenüber dem UKF im transienten Bereich zu erkennen.
Der Grund für die Schwäche des EKF bei sehr schneller Systemdynamik ist, dass im EKF quasistationär lokal linearisiert wird. Verändert sich das System von einem Schritt auf den nächsten nicht zu schnell, liefert der EKF ein ähnlich gutes Ergebnis wie der UKF. Verändert sich das System jedoch sehr schnell, führen Linearisierungsfehler beim EKF zu einem schlechteren Abschneiden im Vergleich zum UKF.

In Abbildung 7.21 gibt es bei v_x zum Zeitpunkt des Sprungs bei ca. 4 Sekunden Abweichungen des EKF und UKF vom wahren Signal. Durch Diskretisierungsunterschiede zwischen Referenzmodell und Beobachtermodell kommt es zu Unterschieden im wahren Ausgang und im vom Beobachter prädizierten Ausgang, speziell bei der Ausgangsgröße a_y, da diese sich additiv und multiplikativ aus Zustandsgrößen ergibt und der Diskretisierungsfehler somit noch stärker eingehen kann. Durch den Unterschied der Ausgänge kommt es im Innovationsterm des Beobachters zu einer Differenz und damit zu einer Korrektur im Beobachter. Zum Zeitpunkt des Sprunges ist diese Differenz, speziell wiederum bei a_y, relativ groß, es kommt daher bei v_x, nachdem v_x zu einem relativ hohen Grad über die Querbeschleunigung korrigiert wird, zu einer zu starken Korrektur in den Beobachtern und damit zu den Abweichungen der Filterkurven.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Diplomarbeit wurde die Thematik der Zustandsbeobachtung mittels Kalman Filter, angewandt auf ein Modell eines Automobils, behandelt. Nach einer kurzen Literaturübersicht wurden Grundlagen zum Thema Zustandsraumsysteme und Zustandsbeobachtung beschrieben. Darauf folgten die Beschreibungen des Linearen, des Extended und des Unscented Kalman Filters. Im Anschluss wurde das in dieser Arbeit verwendete nichtlineare Zweirad-Fahrzeugmodell hergeleitet.

Der Vergleich vom LKF, EKF und UKF zeigt, dass bei moderaten Abweichungen vom Arbeitspunkt des LKF und bei nicht allzu schneller Systemdynamik alle diese Kalman Filter die Zustände praktisch gleich gut schätzen. Mit zunehmender Abweichung vom Arbeitspunkt des LKF zeigt dieser deutliche Schwächen gegenüber dem EKF und UKF.

Bei Variation der Abtastzeit zeigt sich, dass bei Manövern mit langsamer Systemdynamik EKF und UKF unabhängig von der Abtastzeit qualitativ gleich gut funktionieren. Bei Manövern mit sehr schneller Systemdynamik und geringeren Abtastzeiten (z.B. $T = 0.01s$) gibt es noch keine signifikanten Unterschiede zwischen EKF und UKF, jedoch bei größeren Abtastzeiten (z.B. $T = 0.05s$) sind Schwächen des EKF gegenüber dem UKF zu erkennen.

Eine Abweichung des Referenzmodells vom Beobachtermodell, wie sie z.B. durch Linearisierung, unterschiedliche Abtastzeiten zwischen Referenz und Beobachter oder Modellfehler entsteht, führt dazu, dass die Kovarianzmatrizen Q und R nicht mehr optimal gewählt sind. Um die Abweichung zwischen Referenz und Beobachter jedoch zu berücksichtigen und somit eine stärkere Aussagekraft der Ergebnisse zu erhalten, müssten Q und R angepasst werden. Dies kann im Zuge einer weiterführenden Arbeit in Form einer systematischen Optimierung von Q und R geschehen, wobei dann die Unterschiede der verschiedenen Kalman Filter auch an einem komplexeren Fahrzeugmodell als Referenz mit quantitativen Gütemaßen untersucht werden können.

Literaturverzeichnis

[1] G. BAFFET, A. CHARARA, and D. LECHNER. *Estimation of vehicle sideslip, tire force and wheel cornering stiffness.* Control Engineering Practice, pp. 1255-1264, 2009.

[2] J. CHANDRASEKAR, A.J. RIDLEY, and D.S. BERNSTEIN. *A Comparison of the Extended and Unscented Kalman Filters for Discrete-Time Systems with Nondifferentiable Dynamics.* IEEE, pp. 4431-4436, 2007.

[3] P. HIPPE and CH. WURMTHALER. *Zustandsregelung - Theoretische Grundlagen und anwendungsorientierte Regelungskonzepte.* Springer Verlag, 1985.

[4] L. IMSLANDA, T.A. JOHANSENA, T.I. FOSSENA, H.F. GRIPA, J.C. KALKKUHLB, and A. SUISSAB. *Vehicle velocity estimation using nonlinear observers.* Automatica, 2006.

[5] S. JAKUBEK. *Zustandsregelung von Mehrgrößensystemen.* Skriptum, 2011.

[6] S. JAKUBEK. *Digital Control.* Skriptum, 2012.

[7] C. LIN, G. WANG, W. CAO, and F. ZHOU. *Estimation of Vehicle State and Road Coefficient for Electric Vehicle through Extended Kalman Filter and RLS Approaches.* EMEIT-12, 2012.

[8] J. MATUSKO, I. PETROVIC, and N. PETRIC. *Application of Extended Kalman Filter for Road Condition Estimation.* Automatica, pp. 59-65, 2003.

[9] T. NICK, J. GOETZE, W. JOHN, and G. STOENNER. *Comparison of Extended and Unscented Kalman Filter for Localization of Passive UHF RFID Labels.* IEEE, pp. 1-4, 2011.

[10] H. NIJMEIJER and A.J. VAN DER SCHAFT. *Nonlinear Dynamical Control Systems.* Springer Verlag, 1990.

[11] B. RICHTER. *Schwerpunkte der Fahrzeugdynamik.* Fahrzeugtechnische Schriftenreihe, TÜV Rheinland, 1990.

[12] G. RILL. *A Modified Implicit Euler Algorithm for Solving Vehicle Dynamic Equations.* Multibody System Dynamics, Vol. 15, pp. 1-24, 2006.

[13] D. SIMON. *Optimal State Estimation.* John Wiley and Sons, Inc., 2006.

[14] M. ST-PIERRE and D. GINGRAS. *Comparison between the unscented Kalman filter and the extended Kalman filter for the position estimation module of an integrated navigation information system.* IEEE, pp. 831-835, 2004.

[15] A. VON VIETINGHOFF, M. HIEMER, and U. KIENCKE. *Nonlinear observer design for lateral vehicle dynamics.* 16th IFAC World Congress, 2005.

[16] G. ZHUO and F. ZHANG. *Estimation of the Real Vehicle Velocity Based on UKF and PSO.* SAE International, 2014.

[17] C. ZONG, P. SONG, and D. HU. *Estimation of vehicle states and tire-road friction using parallel extended Kalman filtering.* Journal of Zhejiang University SCIENCE A, pp. 446-452, 2011.

[18] X. ZONG and W. DENG. *Study on Velocity Estimation for Four-Wheel Independent Drive Electric Vehicle by UKF.* IEEE, pp. 1111-1114, 2013.