
Manfried Faber



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

Diplomarbeit

SOLITONEN IN DER SU2

ausgeführt am
Atominstitut
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao. Univ. Prof. i. R. Dipl.-Ing. Dr. techn. Manfred Faber

durch

Peter Werkmann
Castellezgasse 4/17
1020 Wien

11. Februar 2014

Peter Werkmann

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Algebra	1
1.1	Algebraische Basiselemente	1
1.1.1	Gruppen	1
1.1.2	Ringe	1
1.1.3	Körper	1
1.1.4	Strukturerhaltende Abbildungen	2
1.2	Vektorräume	2
1.2.1	Der lineare Vektorraum	2
1.2.2	Lineare Abbildungen	3
1.2.3	Der Dualraum	4
1.2.4	Der euklidische\pseudoeuklidische Vektorraum	6
1.2.5	Der unitäre Vektorraum	7
1.2.6	Spezielle lineare Abbildungen	8
1.3	Tensoren	9
1.3.1	Arten von Tensoren	9
1.3.2	Spezielle Tensoren	10
1.3.3	Verknüpfungen von Tensoren	10
1.3.4	Die Darstellung von Tensoren	11
1.3.5	Tensoroperationen	12
2	Differentialgeometrie	13
2.1	Ebene Räume	13
2.1.1	Der affine Raum	13
2.1.2	Felder von Tensoren	14
2.1.3	Spezielle Felder von Tensoren	15
2.1.4	Die Differentiation von Tensoren	16
2.1.5	Die Integration von Tensoren im \mathbb{R}^N	16
2.1.6	Die Integration von Tensoren auf Bereichen im \mathbb{R}^N	18
2.1.7	Integralsätze für Felder von Tensoren	19
2.2	Gekrümmte Räume	21
2.2.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	21
2.2.2	Felder von Tensoren	23
2.2.3	Die kovariante Ableitung	24
2.2.4	Der Krümmungstensor	26
2.2.5	Der Riemannsche Raum	26
3	Lie-Gruppen	29
3.1	Abstrakte Lie-Gruppen	29
3.1.1	Definition	29
3.1.2	Eigenschaften	29
3.1.3	Die Darstellung von Lie-Gruppen durch Matrizen	30
3.2	Matrixgruppen	30
3.2.1	Die lineare Gruppe	30
3.2.2	Die spezielle orthogonale\unitäre Gruppe	32
3.2.3	Exkurs: Die Sphäre S^3	33

3.3	Die Gruppe SO_3	34
3.3.1	Der Tangentialraum von $\mathbb{1}$	34
3.3.2	Die Darstellung der SO_3	34
3.3.3	Allgemeine Eigenschaften	35
3.3.4	Eulerwinkel	35
3.3.5	Konjugationsklassen	36
3.3.6	Der Riemannsche Raum	36
3.3.7	Tangentialbasen	37
3.3.8	Die Parametrisierung von Kurven, Flächen, Volumina	37
3.3.9	Die kovariante Ableitung	38
3.3.10	Der Krümmungstensor	39
3.4	Die Gruppe SU_2	40
3.4.1	Der Tangentialraum von $\mathbb{1}$	40
3.4.2	Die Darstellung der SU_2	41
3.4.3	Allgemeine Eigenschaften	41
3.4.4	Eulerwinkel	42
3.4.5	Konjugationsklassen	42
3.4.6	Der Riemannsche Raum	43
3.4.7	Tangentialbasen	44
3.4.8	Die Parametrisierung von Kurven, Flächen, Volumina	44
3.4.9	Die kovariante Ableitung	45
3.4.10	Der Krümmungstensor	46
4	Die klassische Feldtheorie	49
4.1	Die nichtrelativistische Mechanik	49
4.1.1	Das D'Alembertsche Prinzip	49
4.1.2	Das Hamiltonsche Prinzip	49
4.1.3	Die Euler-Lagrange-Gleichungen	50
4.1.4	Der Hamilton-Formalismus	50
4.1.5	Das Noether-Theorem	51
4.2	Die relativistische Mechanik	52
4.2.1	Der Minkowski-Raum M^4	52
4.2.2	Punktteilchen	53
4.3	Die relativistische Feldtheorie	54
4.3.1	Definition eines Feldes	54
4.3.2	Die Euler-Lagrange-Gleichungen	54
4.3.3	Der Hamilton-Formalismus	55
4.3.4	Das Noether-Theorem	55
4.4	Die relativistische Elektrodynamik	56
4.4.1	Grundgleichungen	56
4.4.2	Die Euler-Lagrange-Gleichungen	59
4.4.3	Der Hamilton-Formalismus	60
4.4.4	Das Noether-Theorem	60
4.4.5	Duale Transformationen	61

5	Solitonen	63
5.1	Das allgemeine Soliton	63
5.1.1	Die Nichtlinearität	63
5.1.2	Die Dispersion	63
5.1.3	Definition	64
5.2	Sinus-Gordon-Solitonen	64
5.2.1	Die Sinus-Gordon-Wellengleichung	64
5.2.2	Das mechanische Analogon	65
5.2.3	Analytische Lösungen	65
5.2.4	Lorentztransformationen	67
5.2.5	Energie und Impuls	68
5.2.6	Die Wechselwirkung zwischen Solitonen	69
5.3	Reale Teilchen als Solitonen	71
6	Das Elektron als SU2-Soliton	73
6.1	Der Dirac-Monopol	73
6.1.1	Duale Transformation	73
6.1.2	Definition	74
6.1.3	Das topologische Analogon	74
6.1.4	Der Zusammenhang Ortsraum und innerer Raum	75
6.1.5	Eichungen	76
6.1.6	Folgerungen	77
6.2	Der Wu-Yang-Monopol	77
6.2.1	Definition	77
6.2.2	Grundgleichungen	78
6.2.3	Eichungen	79
6.2.4	Die Parallel-Eichung	80
6.2.5	Das farbskalare Viererpotential	80
6.2.6	Der farbskalare Feldstärketensor	81
6.2.7	Die Energiedichte	81
6.2.8	Die Abelsche Eichfreiheit	82
6.3	Der SU2-Monopol	82
6.3.1	Definition	82
6.3.2	Grundgleichungen	83
6.3.3	Das E-Feld	83
6.3.4	Die Energie	84
6.3.5	Die Stabilisierung	85
6.3.6	Lorentztransformationen	86
6.3.7	Der Viererimpuls	87
7	Allgemeine SU2-Felder	89
7.1	Fundamentale Beziehungen	89
7.1.1	Grundgleichungen	89
7.1.2	Bewegungsgleichungen	89
7.1.3	Quantenzahlen	90
7.1.4	Arten von Solitonen	92
7.1.5	Feldgleichungen	93

7.1.6	Der kanonische Energie-Impuls-Tensor	94
7.1.7	Die Trennung Teilchen und Feld	94
7.1.8	Der Viererimpuls	95
7.1.9	Kraftgleichungen	96
7.1.10	Bilanzgleichungen	97
7.2	Der elektrodynamische Grenzfall	98
7.2.1	Definition	98
7.2.2	Grundgleichungen	99
7.2.3	Bewegungsgleichungen	99
7.2.4	Quantenzahlen	100
7.2.5	Feldgleichungen	101
7.2.6	Maxwellgleichungen	101
7.2.7	Der kanonische Energie-Impuls-Tensor	102
7.2.8	Der Viererimpuls	103
7.2.9	Kraftgleichungen	104
7.2.10	Bilanzgleichungen	104
7.2.11	Coulombkräfte und Lorentzkräfte	105
8	Conclusio	107
	Literatur	109

1 Lineare Algebra

Die Algebra beschäftigt sich grundsätzlich mit Mengen, mit Operationen zwischen Elementen dieser Mengen und mit den dadurch entstehenden Strukturen, zu denen auch die algebraischen Basiselemente gehören.

1.1 Algebraische Basiselemente

1.1.1 Gruppen

Eine Gruppe G besteht aus einer Menge M und aus einer Verknüpfung “ \times ”, welche die Menge M auf sich selbst abbildet: $M \times M \rightarrow M$

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- Assoziativgesetz: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Es existiert ein neutrales Element $n \in M$: $n \times a = a \times n = a$
- Es existiert ein inverses Element $i \in M$: $i \times a = a \times i = n$

Gilt zusätzlich auch das Kommutativgesetz: $a \times b = b \times a$, so spricht man von einer abelschen Gruppe.

1.1.2 Ringe

Ein Ring R besteht aus einer Menge M , und aus zwei Verknüpfungen, der Addition “ $+$ ” und der Multiplikation “ \cdot ”, welche die Menge M auf sich selbst abbilden: $M + \setminus \cdot M \rightarrow M$

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- M und “ $+$ ” bilden eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element “0”
- Für M und “ \cdot ” gilt das Assoziativgesetz
- Für M und “ \cdot ” existiert ein neutrales Element “1”
- Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Gilt zusätzlich auch das Kommutativgesetz für die Verknüpfung “ \cdot ”, so spricht man von einem kommutativen Ring.

1.1.3 Körper

Ein Körper K besteht aus einer Menge M , und aus zwei Verknüpfungen “ $+$ ” und “ \cdot ”, welche die Menge M auf sich selbst abbilden: $M + \setminus \cdot M \rightarrow M$

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- M sowie “ $+$ ” und “ \cdot ” bilden einen Ring
- Für $M \setminus \{0\}$ und “ \cdot ” existiert ein inverses Element

Gilt zusätzlich auch das Kommutativgesetz für die Verknüpfung “ \cdot ”, so spricht man von einem kommutativen Körper.

1.1.4 Strukturerehaltende Abbildungen

Gegeben seien zwei algebraische Strukturen S_A und S_B . Eine Abbildung von S_A auf S_B , welche die algebraische Struktur von S_A auf die Bildmenge in S_B überträgt, wird Homomorphismus genannt. Ist die Abbildung zusätzlich bijektiv, so spricht man von einem Isomorphismus. Isomorphe Strukturen sind aus algebraischer Sicht gleich. Ein Homomorphismus innerhalb der gleichen algebraischen Struktur heißt Endomorphismus. Ein Isomorphismus innerhalb der gleichen algebraischen Struktur wird als Automorphismus bezeichnet.

1.2 Vektorräume

1.2.1 Der lineare Vektorraum

Ein linearer Vektorraum ist bereits eine etwas komplexere Struktur, die sich aus mehreren algebraischen Basiselementen zusammensetzt.

Definition: Der lineare Vektorraum V über dem Skalarkörper K besteht aus einer Menge M , deren Elemente Vektoren “ \vec{v} ” genannt werden. Zwischen den Vektoren ist eine Verknüpfung “+” definiert, welche die Menge auf sich selbst abbildet: $M + M \rightarrow M$. Zwischen den Elementen des Skalarkörpers und den Vektoren ist eine Multiplikation “ \cdot ” definiert, deren Resultat wiederum ein Vektor ist: $K \cdot M \rightarrow M$.

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- M und “+” bilden eine abelsche Gruppe mit dem neutralen Element “ $\vec{0}$ ”
- Assoziativgesetz: $(a \cdot b) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$
- Distributivgesetze: $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$ $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$
- Für das neutrale Element “1” von K gilt: $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

Besteht der Skalarkörper aus der Menge \mathbb{R} oder aus der Menge \mathbb{C} , wird der Vektorraum reell beziehungsweise komplex genannt.

Lineare Abhängigkeit: Seien die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ Elemente eines Vektorraums V über K . Diese Vektoren werden als linear abhängig bezeichnet, falls Skalare $s^1, s^2, \dots, s^k \in K$ existieren - wobei zumindest ein $s^i \neq 0$ sein muß - sodass die sich daraus ergebende Linearkombination den Nullvektor ergibt

$$\vec{0} = s^1 \vec{v}_1 + s^2 \vec{v}_2 + \dots + s^k \vec{v}_k = s^i \vec{v}_i. \quad (1.1)$$

Ansonsten gelten die Vektoren als linear unabhängig.

Basis: Seien die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ linear unabhängige Elemente eines Vektorraums V über K . Diese Vektoren bilden eine Basis B von V , falls jeder Vektor $\vec{v} \in V$ eindeutig als Linearkombination von $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ mit Koeffizienten $v^1, v^2, \dots, v^n \in K$ dargestellt werden kann

$$\vec{v} = v^1 \vec{b}_1 + v^2 \vec{b}_2 + \dots + v^n \vec{b}_n = v^i \vec{b}_i. \quad (1.2)$$

Dimension: Die Größe n gibt die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren \vec{v} eines Vektorraums V an. Sie wird Dimension von V genannt. Ein Vektorraum V ist somit entweder endlichdimensional oder unendlichdimensional.

Kontravariante Koordinaten: Jeder Vektor ist grundsätzlich ein von der Beschreibung unabhängiges Element eines Vektorraumes. Die für jeden Vektor \vec{v} durch eine frei gewählte Basis B eindeutig bestimmten Koeffizienten v^i , $i = 1 \dots n$, werden kontravariante Koordinaten des Vektors \vec{v} bezüglich der Basis B genannt.

Basiswechsel: In einem Vektorraum V über K sind alle möglichen Basen gleichgestellt. Seien nun B und B' zwei Basen von V . Man kann nun die Basisvektoren einer Basis als Linearkombination der jeweils anderen Basisvektoren darstellen

$$\vec{b}'_j = a^i_j \vec{b}_i = a^{Tj}_i \vec{b}_i, \quad \vec{b}_i = \check{a}^j_i \vec{b}'_j = \check{a}^{Tj}_i \vec{b}'_j. \quad (1.3)$$

Die doppelt indizierten Größen $a^i_j \in K$ und $\check{a}^i_j \in K$ können als Matrizen mit konstanten Elementen aufgefaßt werden, wobei der erste Index für die Zeilen und der zweite Index für die Spalten steht. Für die Transformation der Koordinaten ergibt sich

$$\vec{v} = v'^j \vec{b}'_j = v'^j a^i_j \vec{b}_i = v^i \vec{b}_i, \quad \vec{v} = v^i \vec{b}_i = v^i \check{a}^j_i \vec{b}'_j = v'^j \vec{b}'_j, \quad (1.4)$$

$$v^i = a^i_j v'^j, \quad v'^j = \check{a}^j_i v^i, \quad (1.4)$$

$$v^i = a^i_j \check{a}^j_k v^k \rightarrow a^i_j \check{a}^j_k = \delta^i_k. \quad (1.5)$$

Die beiden Matrizen a^i_j und \check{a}^i_j sind also zueinander invers.

Ist nun $a^{Ti}_j = a^{-1i}_j$, so transformieren die ungestrichenen Basisvektoren und Koordinaten mit der gleichen Matrix \check{a}^i_j und die gestrichenen Basisvektoren und Koordinaten mit der gleichen Matrix a^i_j .

1.2.2 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen stellen Beziehungen zwischen Vektorräumen her, wobei die lineare Struktur der Vektorräume erhalten bleibt.

Definition: Gegeben seien zwei Vektorräume V und W über dem gleichen Skalar-körper K . Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ wird lineare Abbildung genannt, wenn gilt

$$f(s^1 \vec{v}_1 + s^2 \vec{v}_2) = s^1 f(\vec{v}_1) + s^2 f(\vec{v}_2). \quad (1.6)$$

Darstellung durch Matrizen: Gegeben seien der Vektorraum V mit der Basis B_V und der Dimension m , der Vektorraum W mit der Basis B_W und der Dimension n , beide über K , sowie eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$. Dann existiert eine eindeutige $n \times m$ Matrix a^i_j , sodass für die Koordinaten aller Vektoren $\vec{v} \in V$ und die Koordinaten ihrer Bildvektoren $\vec{w} \in W$ gilt

$$w^j = a^j_i v^i. \quad (1.7)$$

Der Basiswechsel kann somit als eine lineare Abbildung innerhalb eines Vektorraums verstanden werden. Jeder Vektor wird auf sich selbst abgebildet.

Komposition: Werden mehrere lineare Abbildungen nacheinander ausgeführt, so ist das Ergebnis wieder eine lineare Abbildung

$$f_1 : U^l \rightarrow V^m, \quad f_2 : V^m \rightarrow W^n, \quad f_2 \circ f_1 : U^l \rightarrow W^n. \quad (1.8)$$

Die zugeordnete Matrix ergibt sich aus der Multiplikation der Matrizen der einzelnen linearen Abbildungen

$$f_1 : a^m_l, \quad f_2 : b^n_m, \quad f_2 \circ f_1 : b^n_m a^m_l. \quad (1.9)$$

Ähnlichkeit von Matrizen: Gegeben sei ein Vektorraum V mit den Basen B und B' sowie eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ mit der zugehörigen $n \times n$ Matrix a^i_j bezüglich B . Zwischen den Koordinaten gelte die Transformation: $v'^j = t^{-1j}_i v^i$. Die $n \times n$ Matrix a'^i_j der Abbildung f bezüglich B' ergibt sich folgendermaßen

$$a'^i_j = t^{-1i}_k a^k_l t^l_j. \quad (1.10)$$

Der Koordinaten eines Vektors in B' werden zuerst in die Basis B transformiert. Dort findet die Abbildung f mit bekannter Matrix a^i_j statt. Es folgt die Rücktransformation in die Basis B' .

Matrizen a^i_j und a'^i_j , die diese Relation mit beliebiger invertierbarer Matrix t^i_j , die immer einer Basistransformation entspricht, erfüllen, werden zueinander ähnlich genannt. Ähnliche Matrizen besitzen die selben Eigenwerte und die gleiche Spur.

Diagonalisierbarkeit von Matrizen: Eine beliebige $n \times n$ Matrix a^i_j wird diagonalisierbar genannt, wenn eine diagonale $n \times n$ Matrix d^i_j existiert, zu der sie ähnlich ist. Es gilt also

$$d^i_j = t^{-1i}_k a^k_l t^l_j. \quad (1.11)$$

Die Eigenwerte von a^i_j und d^i_j sind die Diagonalelemente von d^i_j .

1.2.3 Der Dualraum

Jedem linearen Vektorraum kann ohne Definition von zusätzlicher Struktur ein weiterer linearer Vektorraum, der sogenannte Dualraum zugeordnet werden.

Bilinearformen: Gegeben seien zwei Vektorräume V und W über dem gemeinsamen Körper K , sowie eine Funktion $\varphi : V \times W \rightarrow K$. Diese Funktion φ wird Bilinearform genannt, wenn sie in beiden Argumenten linear ist

$$\varphi(s^1 \vec{v}_1 + s^2 \vec{v}_2, \vec{w}) = s^1 \varphi(\vec{v}_1, \vec{w}) + s^2 \varphi(\vec{v}_2, \vec{w}), \quad (1.12)$$

$$\varphi(\vec{v}, s^1 \vec{w}_1 + s^2 \vec{w}_2) = s^1 \varphi(\vec{v}, \vec{w}_1) + s^2 \varphi(\vec{v}, \vec{w}_2). \quad (1.13)$$

Skalarprodukte: Sei φ eine Bilinearform über V und W . Sei V_0 die Menge aller Vektoren von V , die, gepaart mit allen Elementen von W , das Resultat 0 ergeben und sei W_0 die Menge alle Vektoren von W , die, gepaart mit allen Elementen von V , das Resultat 0 ergeben. Ist nun $V_0 = \{\vec{0}\}$ und $W_0 = \{\vec{0}\}$, so wird die Bilinearform φ ausgeartet genannt. Man spricht dann von einem Skalarprodukt und schreibt

$$\varphi(\vec{v}, \vec{w}) \rightarrow \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Die Vektorräume V und W sind dann bezüglich des Skalarproduktes zueinander dual.

Definition: Sei \tilde{M} die Menge der Linearformen $\vec{\alpha} : V \rightarrow K$, die den Vektorraum V linear auf seinen Körper K abbilden. Definiert man auf dieser Menge \tilde{M} eine Addition und eine Multiplikation mit einem Skalar $s \in K$

$$(\vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_2)(\vec{v}) := \vec{\alpha}_1(\vec{v}) + \vec{\alpha}_2(\vec{v}), \quad (1.14)$$

$$(s \cdot \vec{\alpha})(\vec{v}) := s \vec{\alpha}(\vec{v}), \quad (1.15)$$

so ergibt die dadurch entstehende Struktur \tilde{M} mit “+” und “ \cdot ” - einen neuen Vektorraum \tilde{V} über K . Definiert man weiters eine Bilinearform $\varphi : \tilde{V} \times V \rightarrow K$ gemäß

$$\varphi(\vec{\alpha}, \vec{v}) := \vec{\alpha}(\vec{v}), \quad (1.16)$$

so weist diese Bilinearform die Eigenschaften eines Skalarproduktes $\langle \vec{\alpha}, \vec{v} \rangle$ auf. Die Vektorräume \tilde{V} und V sind somit bezüglich dieses Skalarproduktes zueinander dual, und der Vektorraum \tilde{V} wird im weiteren als der “eigentliche” Dualraum von V bezeichnet.

Duale Basis: Die Vektorräume \tilde{V} und V besitzen die gleiche Dimension n . Ist nun in dem Vektorraum V eine Basis B festgelegt, so kann man durch eine Vorschrift gleichzeitig auch eine Basis \tilde{B} in \tilde{V} auszeichnen. Die Forderung

$$\vec{b}^i(\vec{v}) = \vec{b}^i(v^j \vec{b}_j) = v^j \vec{b}^i(\vec{b}_j) := v^i \quad (1.17)$$

ist gleichbedeutend mit

$$\vec{b}^i(\vec{b}_j) := \delta_j^i. \quad (1.18)$$

Dies ist die Definition der zur Basis B dualen Basis \tilde{B} . Sie bildet den Vektor \vec{v} auf seine kontravarianten Koordinaten v^i ab.

Jeder Vektor $\vec{\alpha}$ des Dualraums \tilde{V} läßt sich eindeutig als Linearkombination von $\vec{b}^1, \vec{b}^2, \dots, \vec{b}^n$ mit Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ darstellen

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \vec{b}^1 + \alpha_2 \vec{b}^2 + \dots + \alpha_n \vec{b}^n = \alpha_i \vec{b}^i. \quad (1.19)$$

Kovariante Koordinaten: Die für jeden Vektor $\vec{\alpha}$ des Dualraums \tilde{V} durch eine duale Basis \tilde{B} eindeutig bestimmten Koeffizienten α_i , $i = 1 \dots n$, werden kovariante Koordinaten des Vektors $\vec{\alpha}$ bezüglich der Basis \tilde{B} genannt.

Basiswechsel: Aus den Transformationsformeln der Basisvektoren von V bei einem Basiswechsel lassen sich die entsprechenden Transformationsrelationen für die jeweils dualen Basisvektoren von \tilde{V} und für die kovarianten Koordinaten berechnen

$$\begin{aligned} \vec{b}'_j &= a^i_j \vec{b}_i, & \vec{b}_i &= \check{a}^j_i \vec{b}'_j, \\ \vec{b}^i(\vec{b}_j) &:= \delta_j^i, & \vec{b}^i(\vec{b}'_j) &:= \delta_j^i, \\ \rightarrow \vec{b}'^j &= \check{a}^j_i \vec{b}^i, & \vec{b}^i &= a^i_j \vec{b}'^j, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\rightarrow \alpha'_j = a^i_j \alpha_i, \quad \alpha_i = \check{a}^j_i \alpha'_j. \quad (1.21)$$

Dualraum des Dualraums von V : Jeder Dualraum \tilde{V} besitzt als Vektorraum wiederum einen Dualraum $\tilde{\tilde{V}}$, das ist die Menge der Linearformen auf \tilde{V} . Die Vektoren \vec{v} des ursprünglichen Vektorraums V können durch die Definition

$$\vec{v}(\vec{\alpha}) := \vec{\alpha}(\vec{v}) \quad (1.22)$$

als die gesuchten Linearformen auf \tilde{V} interpretiert werden. Der Vektorraum V ist also zum Vektorraum $\tilde{\tilde{V}}$ isomorph. Es gilt

$$\vec{b}_i(\vec{\alpha}) = \vec{b}_i(\alpha_j \vec{b}^j) = \alpha_j \vec{b}_i(\vec{b}^j) = \alpha_j \vec{b}^j(\vec{b}_i) = \alpha_j \delta_i^j = \alpha_i. \quad (1.23)$$

Somit bildet die Basis von V die Linearformen $\vec{\alpha}$ auf ihre Koordinaten ab. Es existiert eine Art von Symmetrie zwischen V und \tilde{V} .

1.2.4 Der euklidische\pseudoeuklidische Vektorraum

Um in einem reellen Vektorraum Längen und Winkel messen zu können, muss er mit einer zusätzlichen Struktur, dem reellen inneren Produkt ausgestattet werden.

Reelle innere Produkte: Gegeben sei ein reeller Vektorraum V und eine Bilinearform $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, die symmetrisch ist

$$\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \varphi(\vec{v}_2, \vec{v}_1). \quad (1.24)$$

Sei weiters V_0 die Menge aller Vektoren, die, gepaart mit allen Elementen von V , das Resultat 0 ergeben. Ist nun $V_0 = \{\vec{0}\}$, so wird die Bilinearform ausgeartet genannt. Eine derartige Bilinearform heißt reelles inneres Produkt und man schreibt

$$\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2). \quad (1.25)$$

Gilt für die quadratische Form (\vec{v}, \vec{v})

$$(\vec{v}, \vec{v}) > 0, \text{ oder } (\vec{v}, \vec{v}) < 0, \text{ oder } ((\vec{v}, \vec{v}) > 0 \vee (\vec{v}, \vec{v}) < 0), \quad \forall \vec{v} \setminus \{\vec{0}\},$$

so spricht man von einem positiv definiten, negativ definiten oder indefiniten reellen inneren Produkt.

Definition: Ein reeller Vektorraum V , auf dem ein positiv definites\indefinites reelles inneres Produkt definiert ist, wird euklidischer\pseudoeuklidischer Vektorraum E genannt.

Als Norm oder Länge eines Vektors \vec{v} definiert man

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})} \quad \setminus \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{|(\vec{v}, \vec{v})|}. \quad (1.26)$$

Als Winkel α zwischen zwei Vektoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 bezeichnet man

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}. \quad (1.27)$$

Für eine Orthonormalbasis gilt

$$(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = +\delta_{ij} \quad \setminus \quad (\vec{b}_i, \vec{b}_j) = \pm\delta_{ij}. \quad (1.28)$$

Die Basisvektoren sind auf die Länge $+1 \setminus \pm 1$ normiert und zueinander orthogonal. Die Winkel zwischen ihnen betragen jeweils $\frac{\pi}{2}$.

Euklidischer\Pseudoeuklidischer Vektorraum und Dualraum: Gegeben sei ein euklidischer\Pseudoeuklidischer Vektorraum E und sein Dualraum \tilde{E} . Durch die Definition

$$\vec{\alpha}(\vec{v}) := (\vec{v}_\alpha, \vec{v}) \quad (1.29)$$

kann man eine Abbildung $\tau : E \rightarrow \tilde{E}$

$$\vec{\alpha} := \tau \vec{v}_\alpha \quad (1.30)$$

kreieren. Sie ist linear und bijektiv und stellt daher einen Isomorphismus dar. Für das dazugehörige Skalarprodukt ergibt sich

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{v} \rangle = \langle \tau \vec{v}_\alpha, \vec{v} \rangle = \vec{\alpha}(\vec{v}) = (\vec{v}_\alpha, \vec{v}). \quad (1.31)$$

Definiert man weiters die folgenden symmetrischen Matrizen

$$g_{ij} := (\vec{b}_i, \vec{b}_j), \quad g^{ij} := (\tau^{-1} \vec{b}^i, \tau^{-1} \vec{b}^j), \quad (1.32)$$

so kann man eine Beziehung zwischen dem Bild der Basis B und der dualen Basis \tilde{B} , zwischen dem Urbild der dualen Basis \tilde{B} und der Basis B sowie zwischen den kontravarianten Koordinaten eines Vektors in E und den kovarianten Koordinaten seines Bildes in \tilde{E} herstellen

$$\tau \vec{b}_i = g_{ij} \vec{b}^j, \quad \tau^{-1} \vec{b}^i = g^{ij} \vec{b}_j, \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_\alpha &= v_\alpha^i \vec{b}_i, & \vec{\alpha} &= \alpha_i \vec{b}^i, \\ \rightarrow v_\alpha^i &= g^{ij} \alpha_j, & \alpha_i &= g_{ij} v_\alpha^j. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Für die Transformation von g_{ij} und g^{ij} bei einem Basiswechsel errechnet man

$$g'_{ij} = (\vec{b}'_i, \vec{b}'_j) = a^k{}_i a^l{}_j g_{kl} \quad g'_{ij} = \check{a}^k{}_i \check{a}^l{}_j g'_{kl}, \quad (1.35)$$

$$g'^{ij} = (\tau^{-1} \vec{b}'^i, \tau^{-1} \vec{b}'^j) = \check{a}^i{}_k \check{a}^j{}_l g^{kl} \quad g'^{ij} = a^i{}_k a^j{}_l g'^{kl}. \quad (1.36)$$

Das innere Produkt zweier Vektoren \vec{u} und \vec{v} ergibt sich somit zu

$$(\vec{u}, \vec{v}) = u^i v^j (\vec{b}_i, \vec{b}_j) = u^i v^j g_{ij} = u^i v_i = u'^i v'^j (\vec{b}'_i, \vec{b}'_j) = u'^i v'^j g'_{ij} = u'^i v'_i. \quad (1.37)$$

Es ist unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem.

1.2.5 Der unitäre Vektorraum

Eine Verallgemeinerung des euklidischen Vektorraums von den reellen Zahlen in den Bereich der komplexen Zahlen führt zum Begriff des unitären Vektorraums.

Komplexe innere Produkte: Gegeben sei ein komplexer Vektorraum V und eine im ersten Argument lineare Abbildung $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, mit der Eigenschaft

$$\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \overline{\varphi(\vec{v}_2, \vec{v}_1)}. \quad (1.38)$$

Ist diese Abbildung zusätzlich ausgeartet, so definiert man dadurch ein komplexes inneres Produkt und man schreibt

$$\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2). \quad (1.39)$$

Gilt für die quadratische Form (\vec{v}, \vec{v}) , die gemäß Definition reell sein muss

$$(\vec{v}, \vec{v}) > 0, \text{ oder } (\vec{v}, \vec{v}) < 0, \text{ oder } ((\vec{v}, \vec{v}) > 0 \vee (\vec{v}, \vec{v}) < 0), \quad \forall \vec{v} \setminus \{\vec{0}\},$$

so spricht man von einem positiv definiten, negativ definiten oder indefiniten komplexen inneren Produkt.

Definition: Ein komplexer Vektorraum V , auf dem ein positiv definites komplexes inneres Produkt definiert ist, wird unitärer Vektorraum U genannt. Als Norm oder Länge eines Vektors \vec{v} definiert man wieder

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})}. \quad (1.40)$$

Für eine Orthonormalbasis gilt wieder

$$(\vec{b}_i, \vec{b}_j) = \delta_{ij}. \quad (1.41)$$

Die Basisvektoren sind auf die Länge 1 normiert und zueinander orthogonal. Von Winkeln kann man beim unitären Vektorraum nicht mehr sprechen.

1.2.6 Spezielle lineare Abbildungen

Ausgehend von der Struktur euklidischer\unitärer Vektorräume lassen sich lineare Abbildungen mit besonderen Eigenschaften finden.

Adjungierte Abbildungen: Gegeben sei ein euklidischer\unitärer Vektorraum mit einem beliebigen inneren Produkt (\vec{v}_1, \vec{v}_2) . Sei weiters $\varphi : E \rightarrow E \setminus U \rightarrow U$ eine lineare Abbildung innerhalb des Vektorraums. Diejenige eindeutig definierte lineare Abbildung φ^* , welche die Forderung

$$(\varphi(\vec{v}_1), \vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \varphi^*(\vec{v}_2)) \quad (1.42)$$

erfüllt, wird die zu φ adjungierte Abbildung φ^* genannt.

Die Matrixdarstellung von φ und φ^* bezüglich einer Orthonormalbasis zeigt folgenden Zusammenhang

$$\varphi \equiv a^i_j \quad \rightarrow \quad \varphi^* \equiv a^{Ti}_j \setminus \varphi^* \equiv \overline{a^{Ti}_j} = a^{\dagger i}_j. \quad (1.43)$$

Gilt weiters

$$\varphi^* = \varphi \quad \rightarrow \quad a^{Ti}_j = a^i_j \setminus \overline{a^{Ti}_j} = a^{\dagger i}_j = a^i_j, \quad (1.44)$$

so spricht man von einer selbstadjungierten Abbildung φ . Die dazugehörigen Matrizen a^i_j bezüglich einer Orthonormalbasis sind symmetrisch\hermitesch.

Orthogonale\Unitäre Abbildungen: In einem euklidischen\unitären Vektorraum mit einem beliebigen inneren Produkt (\vec{v}_1, \vec{v}_2) können bestimmte lineare Abbildungen $\varphi : E \rightarrow E \setminus U \rightarrow U$ definiert werden, für die gilt

$$(\varphi(\vec{v}_1), \varphi(\vec{v}_2)) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2). \quad (1.45)$$

Das innere Produkt zweier Vektoren bleibt also nach der Transformation unverändert. Das hat zur Folge, dass Orthonormalbasen auf Orthonormalbasen abgebildet werden. Derartige lineare Abbildungen werden orthogonal\unitär genannt.

Für die entsprechenden Matrizen a^i_j bezüglich einer Orthonormalbasis gilt

$$a^i_j a^{Tj}_k = \delta^i_k \quad \setminus \quad a^i_j a^{\dagger j}_k = \delta^i_k. \quad (1.46)$$

Sie sind also orthogonale\unitäre Matrizen.

1.3 Tensoren

Eine Verallgemeinerung der Bilinearformen auf euklidischen\pseudoeuklidischen Vektorräumen E zu Multilinearformen auf euklidischen\pseudoeuklidischen Vektorräumen E führt zum Begriff des Tensors.

1.3.1 Arten von Tensoren

Kovariante Tensoren: Gegeben sei ein Vektorraum E mit der Basis B und der Dimension N sowie eine Multilinearform $\varphi : (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m) \rightarrow \mathbb{R}$. Sie wird kovarianter Tensor m -ter Stufe genannt. Es gilt

$$\varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m) = v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_m^{i_m} \varphi(\vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \dots, \vec{b}_{i_m}) = A_{i_1 i_2 \dots i_m} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_m^{i_m}. \quad (1.47)$$

Die Größen $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$ werden als kovariante Koordinaten des Tensors φ bezüglich der Basis B bezeichnet. Bei einem Basiswechsel $B \rightarrow B'$ ändern sich die Koordinaten wie folgt

$$A'_{j_1 j_2 \dots j_m} = \varphi(\vec{b}'_{j_1}, \vec{b}'_{j_2}, \dots, \vec{b}'_{j_m}) = a^{i_1}_{j_1} a^{i_2}_{j_2} \dots a^{i_m}_{j_m} A_{i_1 i_2 \dots i_m}. \quad (1.48)$$

Im Spezialfall $m = 1$ geht die Multilinearform φ in eine Linearform φ , also in einen Vektor $\vec{\alpha}$ des Dualraums \tilde{E} über

$$\varphi(\vec{v}_1) = v_1^{i_1} \varphi(\vec{b}_{i_1}) = A_{i_1} v_1^{i_1} = A_{i_1} \vec{b}^{i_1}(\vec{v}_1) \quad \rightarrow \quad \varphi = A_{i_1} \vec{b}^{i_1} = \alpha_i \vec{b}^i = \vec{\alpha}. \quad (1.49)$$

Kontravariante Tensoren: Gegeben sei ein Vektorraum E mit der Basis B und der Dimension N sowie eine Multilinearform $\varphi : (\tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2 \times \dots \times \tilde{E}_n) \rightarrow \mathbb{R}$. Sie wird kontravarianter Tensor n -ter Stufe genannt. Es gilt

$$\varphi(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2, \dots, \vec{\alpha}^n) = \alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \dots \alpha_{i_n}^n \varphi(\vec{b}^{i_1}, \vec{b}^{i_2}, \dots, \vec{b}^{i_n}) = B^{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2 \dots \alpha_{i_n}^n. \quad (1.50)$$

Die Größen $B^{i_1 i_2 \dots i_n}$ werden als kontravariante Koordinaten des Tensors φ bezüglich der Basis \tilde{B} bezeichnet. Bei einem Basiswechsel $\tilde{B} \rightarrow \tilde{B}'$ ändern sich die Koordinaten wie folgt

$$B'^{j_1 j_2 \dots j_n} = \varphi(\vec{b}'^{j_1}, \vec{b}'^{j_2}, \dots, \vec{b}'^{j_n}) = \check{a}^{j_1}_{i_1} \check{a}^{j_2}_{i_2} \dots \check{a}^{j_n}_{i_n} B^{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (1.51)$$

Im Spezialfall $n = 1$ geht die Multilinearform φ in eine Linearform φ , also in einen Vektor \vec{v} des Vektorraums E über

$$\varphi(\vec{\alpha}^1) = \alpha_{i_1}^1 \varphi(\vec{b}^{i_1}) = B^{i_1} \alpha_{i_1}^1 = B^{i_1} \vec{b}_{i_1}(\vec{\alpha}^1) \quad \rightarrow \quad \varphi = B^{i_1} \vec{b}_{i_1} = v^i \vec{b}_i = \vec{v}. \quad (1.52)$$

Gemischte Tensoren: Gegeben sei ein Vektorraum E mit der Basis B und der Dimension N sowie eine Multilinearform $\varphi : (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_m \times \tilde{E}_1 \times \tilde{E}_2 \times \dots \times \tilde{E}_n) \rightarrow \mathbb{R}$. Sie wird gemischter Tensor ($m+n$)-ter Stufe genannt. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m, \vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2, \dots, \vec{\alpha}^n) &= v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_m^{i_m} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \dots \alpha_{j_n}^n \varphi(\vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \dots, \vec{b}_{i_m}, \vec{b}^{j_1}, \vec{b}^{j_2}, \dots, \vec{b}^{j_n}) \\ &= T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_n} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_m^{i_m} \alpha_{j_1}^1 \alpha_{j_2}^2 \dots \alpha_{j_n}^n. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Die Größen $T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_n}$ werden als gemischte Koordinaten des Tensors φ bezüglich der Basen B und \tilde{B} bezeichnet. Bei einem Basiswechsel $B \rightarrow B'$ und $\tilde{B} \rightarrow \tilde{B}'$ ändern sich die Koordinaten wie folgt

$$\begin{aligned} T'_{k_1 k_2 \dots k_m}^{l_1 l_2 \dots l_n} &= \varphi(\vec{b}'_{k_1}, \vec{b}'_{k_2}, \dots, \vec{b}'_{k_m}, \vec{b}'^{l_1}, \vec{b}'^{l_2}, \dots, \vec{b}'^{l_n}) \\ &= a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2} \dots a_{k_m}^{i_m} \check{a}_{j_1}^{l_1} \check{a}_{j_2}^{l_2} \dots \check{a}_{j_n}^{l_n} T_{i_1 i_2 \dots i_m}^{j_1 j_2 \dots j_n}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Skalare: Gegeben sei ein Vektorraum E mit der Basis B und der Dimension N sowie ein beliebiges Element s des Körpers \mathbb{R} . Es wird Tensor 0-ter Stufe oder Skalar genannt. Bei einem Basiswechsel $B \rightarrow B'$ und $\tilde{B} \rightarrow \tilde{B}'$ bleibt dieser Tensor unverändert.

1.3.2 Spezielle Tensoren

Symmetrische Tensoren: Dies sind kovariante\kontravariante Tensoren, die bei einer Vertauschung zweier beliebiger Argumente ihren Wert nicht ändern

$$\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_m) = \varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_m) \rightarrow A_{i_1, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_m} = A_{i_1, \dots, i_i, \dots, i_j, \dots, i_m}, \quad (1.55)$$

$$\varphi(\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^j, \dots, \vec{\alpha}^i, \dots, \vec{\alpha}^n) = \varphi(\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^i, \dots, \vec{\alpha}^j, \dots, \vec{\alpha}^n) \rightarrow B^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_n} = B^{i_1, \dots, i_i, \dots, i_j, \dots, i_n}. \quad (1.56)$$

Antisymmetrische Tensoren: Dies sind kovariante\kontravariante Tensoren, die bei einer Vertauschung zweier beliebiger Argumente das Vorzeichen ändern

$$\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_m) = -\varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_m) \rightarrow A_{i_1, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_m} = -A_{i_1, \dots, i_i, \dots, i_j, \dots, i_m}, \quad (1.57)$$

$$\varphi(\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^j, \dots, \vec{\alpha}^i, \dots, \vec{\alpha}^n) = -\varphi(\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^i, \dots, \vec{\alpha}^j, \dots, \vec{\alpha}^n) \rightarrow B^{i_1, \dots, i_j, \dots, i_i, \dots, i_n} = -B^{i_1, \dots, i_i, \dots, i_j, \dots, i_n}. \quad (1.58)$$

1.3.3 Verknüpfungen von Tensoren

Addition\Subtraktion: Gegeben seien zwei gemischte Tensoren φ_1 und φ_2 mit gleicher Struktur der Argumente. Die Summe\Differenz von φ_1 und φ_2 ist ein Tensor und wird folgendermaßen definiert

$$(\varphi_1 \pm \varphi_2)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^n) := \varphi_1(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^n) \pm \varphi_2(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^n). \quad (1.59)$$

Für die Koordinaten ergibt sich

$$T_3_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} = T_1_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \pm T_2_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}. \quad (1.60)$$

Multiplikation: Gegeben seien zwei gemischte Tensoren φ_1 und φ_2 mit jeweils beliebiger Struktur der Argumente. Das Tensorprodukt von φ_1 und φ_2 ist ein Tensor und wird folgendermaßen definiert

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m+s}, \vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^{m+t}) := \varphi_1(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^m) \cdot \varphi_2(\vec{v}_{m+1}, \dots, \vec{v}_{m+s}, \vec{\alpha}^{m+1}, \dots, \vec{\alpha}^{m+t}). \quad (1.61)$$

Für die Koordinaten ergibt sich

$$T_3^{j_1 \dots j_n l_1 \dots l_t}_{i_1 \dots i_m k_1 \dots k_s} = T_1^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_m} \cdot T_2^{l_1 \dots l_t}_{k_1 \dots k_s}. \quad (1.62)$$

Äußere Multiplikation: Gegeben seien zwei kovariante\kontravariante antisymmetrische Tensoren φ_1 und φ_2 der Stufen m und $s \setminus n$ und t . Das äußere Produkt von φ_1 und φ_2 ist wieder ein kovarianter\kontravarianter antisymmetrischer Tensor und wird folgendermaßen definiert

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{m+s}) := \frac{1}{m!} \frac{1}{s!} \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\vec{v}_{\pi(1)}, \dots, \vec{v}_{\pi(m+s)}), \quad (1.63)$$

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^{m+t}) := \frac{1}{n!} \frac{1}{t!} \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\vec{\alpha}^{\pi(1)}, \dots, \vec{\alpha}^{\pi(n+t)}). \quad (1.64)$$

Die Abbildung π stellt dabei eine Permutation der natürlichen Zahlen $1..(m+s) \setminus 1..(n+t)$ dar. Das Signum einer Permutation ist im Ausgangszustand $+1$ und ändert sich immer beim Vertauschen zweier Elemente.

1.3.4 Die Darstellung von Tensoren

Allgemeine Darstellung: Mit Hilfe des Tensorproduktes lassen sich Tensoren in eine sehr anschauliche Darstellung bringen. Sei φ ein gemischter Tensor mit beliebiger Struktur der Argumente

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^n) &= T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} v_1^{i_1} \dots v_m^{i_m} \alpha_{j_1}^1 \dots \alpha_{j_n}^n \\ &= T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \vec{b}^{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_m} \otimes \vec{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_n}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m, \vec{\alpha}^1, \dots, \vec{\alpha}^n), \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\rightarrow \varphi = T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n} \vec{b}^{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_m} \otimes \vec{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_n}. \quad (1.66)$$

Die Koordinaten und Basisvektoren transformieren bei einem Basiswechsel invers. Der Tensor φ ist also eine von der Beschreibung durch Basen unabhängige Größe.

Spezielle Darstellung: Kovariante\kontravariante antisymmetrische Tensoren können speziell durch das äußere Produkt dargestellt werden

$$\varphi = \frac{1}{m!} A_{i_1, i_2, \dots, i_m} \vec{b}^{i_1} \wedge \vec{b}^{i_2} \wedge \dots \wedge \vec{b}^{i_m} \setminus \varphi = \frac{1}{n!} B^{i_1, i_2, \dots, i_n} \vec{b}_{i_1} \wedge \vec{b}_{i_2} \wedge \dots \wedge \vec{b}_{i_n}. \quad (1.67)$$

1.3.5 Tensoroperationen

Verjüngung: Gegeben sei ein gemischter Tensor $(m + n)$ -ter Stufe φ

$$\varphi = T_{i_1 \dots i_i \dots i_m}^{j_1 \dots j_j \dots j_n} \vec{b}^{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_i} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_m} \otimes \vec{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_j} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_n}.$$

Anstatt nun wie bisher alle Basisvektoren auf die nachfolgenden Argumente des Tensors wirken zu lassen, kann man verlangen, dass im Tensor selbst ein bestimmter kovarianter Basisvektor \vec{b}^{i_i} direkt auf einen bestimmten kontravarianten Basisvektor \vec{b}_{j_j} wirken soll und die dazugehörigen Argumente gestrichen werden. Dadurch entsteht ein gemischter Tensor $((m - 1) + (n - 1))$ -ter Stufe $\bar{\varphi}$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= T_{i_1 \dots i_{i-1} i_{i+1} \dots i_m}^{j_1 \dots j_{j-1} j_{j+1} \dots j_n} \delta_{j_j}^{i_i} \vec{b}^{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_{i-1}} \otimes \vec{b}^{i_{i+1}} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_m} \otimes \vec{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_{j-1}} \otimes \vec{b}_{j_{j+1}} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_n} \\ &= \bar{T}_{i_1 \dots i_{i-1} i_{i+1} \dots i_m}^{j_1 \dots j_{j-1} j_{j+1} \dots j_n} \vec{b}^{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_{i-1}} \otimes \vec{b}^{i_{i+1}} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_m} \otimes \vec{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_{j-1}} \otimes \vec{b}_{j_{j+1}} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_n}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Für die Koordinaten dieser beiden Tensoren ergibt sich folgende Relation

$$\bar{T}_{i_1 \dots i_{i-1} i_{i+1} \dots i_m}^{j_1 \dots j_{j-1} j_{j+1} \dots j_n} = T_{i_1 \dots i_{i-1} i_i i_{i+1} \dots i_m}^{j_1 \dots j_{j-1} j_j j_{j+1} \dots j_n}. \quad (1.69)$$

Wird diese Prozedur auf ein Tensorprodukt zweier Tensoren angewandt, wobei die beiden betroffenen Basisvektoren von jeweils einem Tensorfaktor stammen, so spricht man von einer Überschiebung der beiden Tensoren.

Transformation Kovarianz-Kontravarianz: Gegeben sei ein gemischter Tensor $(m + n)$ -ter Stufe φ . Durch den Isomorphismus τ zwischen einem euklidischen Vektorraum E und seinem Dualraum \tilde{E} kann man dem Tensor φ für jedes seiner Argumente ein duales Gegenstück $\tilde{\varphi}$ zuordnen. Betrachtet man zum Beispiel das m -te Argument von φ , so gilt

$$\tilde{\varphi}(\vec{v}_{\alpha^1}, \dots, \vec{v}_{\alpha^{m-1}}, \vec{\alpha}^m, \vec{\alpha}^{m+1}, \dots, \vec{\alpha}^{m+n}) := \varphi(\vec{v}_{\alpha^1}, \dots, \vec{v}_{\alpha^{m-1}}, \vec{v}_{\alpha^m}, \vec{\alpha}^{m+1}, \dots, \vec{\alpha}^{m+n}). \quad (1.70)$$

Für die Koordinaten dieser beiden Tensoren ergibt sich folgende Relation

$$\tilde{T}_{i_1 \dots i_{m-1}}^{j_m j_{m+1} \dots j_{m+n}} = g^{j_m i_m} T_{i_1 \dots i_{m-1} i_m}^{j_{m+1} \dots j_{m+n}}. \quad (1.71)$$

2 Differentialgeometrie

Dieses Teilgebiet der Mathematik beschäftigt sich mit der Geometrie von verallgemeinerten gekrümmten Räumen und der damit verbundenen Messung von Längen, Flächen und Volumina durch Elemente der Differentialrechnung und Integralrechnung.

2.1 Ebene Räume

Diese Art von Räumen zeichnet sich dadurch aus, dass ihre innere Struktur global, also vom Ort unabhängig, als konstant angesehen werden kann. Ebene Räume stellen also einen Spezialfall von verallgemeinerten gekrümmten Räumen dar.

2.1.1 Der affine Raum

Algebraische Definition: Gegeben sei eine Menge \mathcal{A} von Punkten, ein reeller Vektorraum V mit der Basis B und der Dimension N sowie eine Abbildung $\gamma : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow V$, die jeweils zwei Punkten P und Q einen Vektor \vec{v} zuordnet. Man schreibt

$$\vec{v} = \gamma(P, Q) = \overrightarrow{PQ}. \quad (2.1)$$

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

- Für alle P und alle \vec{v} existiert ein Q , sodass $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$
- $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

Man spricht dann von einem affinen Raum \mathcal{A} über dem Vektorraum V , der auch als Tangentialraum T von \mathcal{A} bezeichnet wird. Die Dimension von \mathcal{A} wird der Dimension N von T gleichgesetzt.

Ist T nun ein euklidischer\pseudoeuklidischer Vektorraum E , so wird der affine Raum \mathcal{A} speziell euklidischer\pseudoeuklidischer Raum \mathcal{E} genannt. Durch die Einführung des reellen inneren Produkts im Tangentialraum T ist in weiterer Folge die Messung von Abständen und anderen Größen auch im affinen Raum \mathcal{A} möglich.

Affine Koordinaten: Um Punkte P von \mathcal{A} eindeutig identifizieren zu können, muß man zunächst ein Koordinatensystem K definieren. Man wählt dafür einen beliebigen Punkt aus \mathcal{A} , bezeichnet ihn als Nullpunkt O und legt eine dazugehörige Basis B in T fest. Der sich ergebende Vektor

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x^i \vec{b}_i \quad (2.2)$$

wird Ortsvektor von P genannt. Seine Koordinaten x^i werden als affine Koordinaten des Punktes P bezüglich des Koordinatensystem K bezeichnet. Die implizit definierte Abbildung $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^N : P \rightarrow x^i$ nennt man Karte κ von \mathcal{A} bezüglich K .

Wechsel des Koordinatensystems: Bei einer Veränderung des Koordinatensystems von K zu K' kann es abgesehen von einem Basiswechsel in T auch zu einem Verschieben des Nullpunktes O in \mathcal{A} kommen. Skalare und Tensoren in T werden von der Wahl des Koordinatenursprungs in \mathcal{A} nicht beeinflusst, ihre Koordinaten transformieren weiterhin linear und invers zu den Basisvektoren mit den Transformationsmatrizen

$$a^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}, \quad \check{a}^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}. \quad (2.3)$$

Der Punkt P ist auch ein von der Art der Beschreibung unabhängiges Element. Der Ortsvektor hingegen ist von der Position des Nullpunktes abhängig. Die affinen Koordinaten weisen daher im Allgemeinen ein nichtlineares Transformationsverhalten $x'^j(x^i)$ auf.

2.1.2 Felder von Tensoren

In der Feldtheorie wird jedem Punkt eines Raumes eine Größe zugeordnet. In diesem speziellen Fall handelt es sich dabei um einen euklidischen\pseudoeuklidischen Raum und um Skalare oder Tensoren des Tangentialraumes.

Skalarfelder: Gegeben sei ein euklidischer\pseudoeuklidischer Raum \mathcal{E} der Dimension N über E mit dem Körper \mathbb{R} sowie ein Koordinatensystem K . Eine Abbildung der Punkte von \mathcal{E} auf Elemente des Körpers von E $\sigma : P \rightarrow s$ wird Skalarfeld $\sigma(P)$ genannt. Durch die zusammengesetzte Abbildung $s : \sigma \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow s$ werden also den Koordinaten eines Punktes Elemente des Körpers $s(x^i)$ zugeordnet.

Bei einem Wechsel des Koordinatensystems von K zu K' transformiert sich die Funktion κ , das Skalarfeld $\sigma(P)$ bleibt definitionsgemäß unabhängig und somit ändert sich auch die Funktion $s(x^i)$. Man schreibt

$$s'(x'^j) = s(x^i). \quad (2.4)$$

Felder von eigentlichen Tensoren: Gegeben sei wieder ein euklidischer\pseudoeuklidischer Raum \mathcal{E} der Dimension N über E mit dem Körper \mathbb{R} sowie ein Koordinatensystem K . Eine Abbildung der Punkte von \mathcal{E} in die Menge der Tensoren von E mit gleicher Struktur der Argumente $\tau : P \rightarrow \varphi$ wird eigentliches Tensorfeld $\tau(P)$ genannt. Durch die zusammengesetzte Abbildung $\varphi : \tau \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \varphi$ werden also den Koordinaten eines Punktes Tensoren gleicher Stufe zugeordnet

$$\varphi(x^i) = T^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_m}(x^i) \vec{b}^{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_m} \otimes \vec{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_n}. \quad (2.5)$$

Bei einem Wechsel des Koordinatensystems von K zu K' transformiert sich die Funktion κ , das Tensorfeld $\tau(P)$ bleibt definitionsgemäß unabhängig und somit ändern sich auch die zu $\varphi(x^i)$ gehörenden Tensorkoordinaten als Funktionen der Koordinaten der Punkte. Man schreibt

$$\begin{aligned} \varphi'(x'^j) &= T''^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m}(x'^j) \vec{b}'^{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}'^{k_m} \otimes \vec{b}'_{l_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}'_{l_n} \\ &= T'^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m}(x^i) \vec{b}'^{k_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}'^{k_m} \otimes \vec{b}'_{l_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}'_{l_n} \\ &= T^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_m}(x^i) \vec{b}^{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_m} \otimes \vec{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_n} = \varphi(x^i) \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit der äußeren Transformation $T \rightarrow T'$ \inneren Transformation $T' \rightarrow T''$

$$T'^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m}(x^i) = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}} \dots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x'^{k_m}} \frac{\partial x'^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x'^{l_n}}{\partial x^{j_n}} T^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_m}(x^i), \quad (2.7)$$

$$T''^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m}(x'^j) = T'^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m}(x^i). \quad (2.8)$$

2.1.3 Spezielle Felder von Tensoren

Differentiale: Gegeben sei ein Skalarfeld $s(x^i)$ und ein kontravariantes Vektorfeld $w(x^i)$. Durch die Definition

$$ds(x^i)w(x^i) := \frac{\partial s(x^i)}{\partial x^j} w^j(x^i) \rightarrow ds(x^i) = \frac{\partial s(x^i)}{\partial x^j} \vec{b}^j \quad (2.9)$$

wird an jedem Punkt P von \mathcal{E} eine Linearform $ds(x^i)$ konstruiert. Man nennt sie das Differential $ds(x^i)$ des Skalarfeldes $s(x^i)$.

Bei einem Wechsel des Koordinatensystems von K zu K' gilt

$$ds'(x'^j) = \frac{\partial s'(x'^j)}{\partial x'^i} \vec{b}'^i = \frac{\partial s(x^i)}{\partial x^j} \vec{b}^j = ds(x^i). \quad (2.10)$$

Nimmt man nun als spezielles Skalarfeld die Koordinatenfunktionen x^i selbst

$$dx^i(x^k)w(x^k) := \frac{\partial x^i(x^k)}{\partial x^j} w^j(x^k) = w^i(x^k) \rightarrow dx^i(x^k) = \frac{\partial x^i(x^k)}{\partial x^j} \vec{b}^j = \vec{b}^i, \quad (2.11)$$

so spricht man von Koordinatendifferentialen dx^i . Sie können mit den Basisvektoren \vec{b}^i der dualen Basis identifiziert werden, und transformieren definitionsgemäß gleich wie diese

$$dx'^j = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} dx^i. \quad (2.12)$$

Differentialformen: Ein kovariantes antisymmetrisches Tensorfeld m -ter Stufe $\varphi(x^i)$ kann durch Koordinatendifferentiale dargestellt werden

$$\varphi(x^i) = \frac{1}{m!} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}, \quad (2.13)$$

und wird deshalb Differentialform m -ten Grades genannt.

Differentialformen vom Grad N kann man auf Grund der antisymmetrischen Eigenschaften noch weiter vereinfachen

$$\varphi(x^i) = \frac{1}{N!} A_{i_1, i_2, \dots, i_N}(x^i) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_N} = A_{1, 2, \dots, N}(x^i) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^N. \quad (2.14)$$

Ein Skalarfeld kann man auch als Differentialform 0-ten Grades ansehen.

2.1.4 Die Differentiation von Tensoren

Ableitung: Gegeben seien zunächst zwei kontravariante Vektorfelder $v(x^i)$ sowie $w(x^i)$. Die Ableitung des Vektorfeldes $v(x^i)$ in Richtung von $w(x^i)$ ist nun wie folgt definiert

$$\begin{aligned}\nabla_w v(x^i) &:= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [v^j(x^i + \epsilon w^i(x^i)) \vec{b}_j - v^j(x^i) \vec{b}_j] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [v^j(x^i) \vec{b}_j + \frac{\partial v^j(x^i)}{\partial x^k} \epsilon w^k \vec{b}_j - v^j(x^i) \vec{b}_j] = \frac{\partial v^j(x^i)}{\partial x^k} w^k \vec{b}_j.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Die Ableitung entspricht dabei einem neuen Vektorfeld, das entsteht, wenn man das Vektorfeld $v(x^i)$ an jedem Punkt P in Richtung von $w(x^i)$ zum Nachbarpunkt P' parallelverschiebt, dort mit dem ursprünglichen Vektorfeld $v(x^i)$ vergleicht, den Differenzvektor bildet und diesen wieder dem Punkt P zuordnet.

Durch Verallgemeinerung gelangt man zur Ableitung eines eigentlichen Tensorfeldes: Sei $\varphi(x^i)$ ein eigentliches Tensorfeld beliebiger Stufe und $w(x^i)$ ein kontravariantes Vektorfeld. Die allgemeine Ableitung $\nabla_w \varphi(x^i)$ von $\varphi(x^i)$ in Richtung von $w(x^i)$ ist ein Tensorfeld der gleichen Stufe wie $\varphi(x^i)$ und ist folgendermaßen definiert

$$\nabla_w \varphi(x^i) := \frac{\partial T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}(x^i)}{\partial x^k} w^k \vec{b}^{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}^{i_m} \otimes \vec{b}_{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{b}_{j_n}.\quad (2.16)$$

Für ein Skalarfeld ergibt sich sinngemäß

$$\nabla_w s(x^i) := \frac{\partial s(x^i)}{\partial x^k} w^k.\quad (2.17)$$

Die Ableitung eines Skalarfeldes in Richtung eines Vektorfeldes ist also ident mit der Wirkung des Differential des Skalarfeldes auf den Vektor.

Äußere Ableitung: Eine Differentialform $\varphi(x^i)$ m -ten Grades besitzt zusätzlich zur normalen Ableitung noch eine äußere Ableitung. Das Ergebnis ist wiederum eine Differentialform nun aber mit dem Grad $(m + 1)$. Man schreibt

$$d\varphi(x^i) := \frac{1}{m!} \frac{\partial A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m}.\quad (2.18)$$

Für eine Differentialform 0-ten Grades, also ein Skalarfeld, gilt analog

$$ds(x^i) := \frac{\partial s(x^i)}{\partial x^k} dx^k.\quad (2.19)$$

Die äußere Ableitung eines Skalarfeldes ist ident mit dem Differential des Skalarfeldes. Diese Tatsache rechtfertigt die gleiche Schreibweise.

2.1.5 Die Integration von Tensoren im \mathbb{R}^N

Determinantenfunktionen: Gegeben sei zunächst ein euklidischer/pseudoeuklidischer Vektorraum E der Dimension N mit dem Körper \mathbb{R} und der Basis B . Eine multilineare antisymmetrische Funktion $d : (E_1 \times E_2 \times \dots \times E_N) \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_N) = v_1^{i_1} \dots v_N^{i_N} d(\vec{b}_{i_1}, \dots, \vec{b}_{i_N}) = -d(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_N)\quad (2.20)$$

wird Determinantenfunktion genannt. Nur wenn die N Vektoren im Argument linear unabhängig sind, also eine Basis $B_{\vec{v}}$ bilden, ist diese Funktion auf Grund der Antisymmetrie ungleich 0. Ihre Koordinaten können unter Verwendung des Operators "P", der eine beliebige Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, N$ beschreibt, folgendermaßen zerlegt werden

$$d(\vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \dots, \vec{b}_{i_N}) = \delta_{i_1, i_2, \dots, i_N} d(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_N), \quad (2.21)$$

$$\delta_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \text{sign}(P) \setminus 0 \quad \text{für} \quad i_1, i_2, \dots, i_N = P \setminus i_1, i_2, \dots, i_N \neq P. \quad (2.22)$$

Bei einem Basiswechsel ergibt sich

$$\begin{aligned} v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_N^{i_N} \delta_{i_1, i_2, \dots, i_N} d(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_N) &= v_1^{i_1} v_2^{i_2} \dots v_N^{i_N} \delta_{i_1, i_2, \dots, i_N} d(\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \dots, \vec{b}'_N), \\ \rightarrow d(\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, \dots, \vec{b}'_N) &= \det(a^i_j) d(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_N). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Orientierung von Basen: Alle möglichen Basen des \mathbb{R}^N kann man in zwei disjunkte Mengen B^+ und B^- einteilen. Man nennt sie willkürlich positiv/negativ orientiert. Sie sind durch das Vorzeichen der Determinanten der Transformationsmatrizen zwischen ihren Elementen eindeutig definiert

$$B_1, B_2 \in B^+ \rightarrow \text{sign}(\det(a^i_j)) = 1, \quad B_1, B_2 \in B^- \rightarrow \text{sign}(\det(a^i_j)) = -1, \quad (2.24)$$

$$B_1 \in B^+, B_2 \in B^- \rightarrow \text{sign}(\det(a^i_j)) = -1. \quad (2.25)$$

Ist also das Vorzeichen der Determinante der Transformationsmatrix zweier Basen positiv, bleibt die Orientierung erhalten. Es zeigt sich, dass Determinantenfunktionen angewandt auf Basen gleicher Orientierung das Vorzeichen nicht wechseln.

Euklidische\Pseudoeuklidische Volumenelemente: Gegeben sei nun ein euklidischer\pseudoeuklidischer Raum \mathcal{E} der Dimension N über E mit dem Körper \mathbb{R} sowie ein Koordinatensystem K mit der Basis B . Betrachtet man das Kreuzprodukt als Volumenelement des \mathbb{R}^2 und das Spatprodukt als Volumenelement des \mathbb{R}^3 , so sieht man, dass das Volumen einerseits von Vektoren abhängt, die es definieren und weiters eine antisymmetrische Größe darstellt. Es liegt daher nahe, als Ansatz für das euklidische\pseudoeuklidische Volumenelement des \mathbb{R}^N eine Determinantenfunktion $d(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N)$ einzuführen. Diese ist auch durch eine vom Ort unabhängige Differentialform N -ten Grades $\epsilon(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N)$ darstellbar

$$\epsilon = g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^N, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \epsilon(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N) &= v_1^{i_1} \dots v_N^{i_N} \delta_{i_1, \dots, i_N} g dx^1 \wedge \dots \wedge dx^N(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_N) \\ &= v_1^{i_1} \dots v_N^{i_N} \delta_{i_1, \dots, i_N} g \det(dx^i(\vec{b}_j)) = v_1^{i_1} \dots v_N^{i_N} \delta_{i_1, \dots, i_N} g. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Zur Bestimmung von g läßt man ϵ auf eine Orthonormalbasis B wirken und fordert, dass das Volumens des von diesen Vektoren aufgespannten verallgemeinerten Einheitswürfels je nach Orientierung gleich $+ \setminus - 1$ ist. Es ergibt sich

$$g = + \setminus - \sqrt{|\det(g_{ij})|} \quad \text{für} \quad B \in B^+ \setminus B^-. \quad (2.28)$$

Integrale: Um nun das Volumen eines beliebigen N -dimensionalen Bereiches \mathcal{B} des \mathbb{R}^N messen zu können, lässt man das Volumenelement auf kleine verallgemeinerte Parallelepipede wirken, die von Vektoren $\Delta x^i \vec{b}_i$ parallel zu den Basisvektoren gebildet werden. Nach Summation über den Bereich und nach Grenzübergang ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{B}) &:= \int_{\mathcal{B}} g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^N \\
&:= \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \sum_{\Delta \mathcal{B}} g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^N (\Delta x^1 \vec{b}_1, \Delta x^2 \vec{b}_2, \dots, \Delta x^N \vec{b}_N) \\
&= \lim_{\Delta x^i \rightarrow 0} \sum_{\Delta \mathcal{B}} g \Delta x^1 \Delta x^2 \dots \Delta x^N \\
&= \int_{\mathcal{B}} g dx^1 dx^2 \dots dx^N. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Positiv\negativ orientierten Basen wird ein positives\negatives Volumen zugeordnet. Bei einem Wechsel des Koordinatensystems $K \rightarrow K'$ ergibt sich

$$\mathcal{V}'(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} \det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right) g \left| \det\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) \right| dx^1 dx^2 \dots dx^N = \pm \mathcal{V}(\mathcal{B}). \tag{2.30}$$

Bis auf den Vorzeichenwechsel bei einer Änderung der Orientierung der Basis ist das Volumen vom verwendeten Koordinatensystem unabhängig. Jede Differentialform $\varphi(x^i)$ vom Grad N lässt sich nun in zwei Faktoren zerlegen

$$\varphi(x^i) = A(x^i) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^N = \left(\frac{A(x^i)}{g}\right) (g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^N).$$

Die Größe $\frac{A(x^i)}{g}$ wird dabei als ortsabhängige Tensordichte bezeichnet. $A(x^i)$ und g transformieren gleich, die Dichte ist daher ein Skalar. In Anlehnung an das Integral des euklidischen\pseudoeuklidischen Volumenelements definiert man nun das Integral einer Differentialform $\varphi(x^i)$ vom Grad N

$$\int_{\mathcal{B}} A(x^i) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^N := \int_{\mathcal{B}} \frac{A(x^i)}{g} g dx^1 dx^2 \dots dx^N = \int_{\mathcal{B}} A(x^i) dx^1 dx^2 \dots dx^N. \tag{2.31}$$

Das Integral einer Differentialform vom Grad N über einen Bereich ergibt somit das mit der invarianten Tensordichte gewichtete Volumen des Bereichs. Es ist vom verwendeten Koordinatensystem komplett, also auch von dessen Orientierung, unabhängig.

2.1.6 Die Integration von Tensoren auf Bereichen im \mathbb{R}^N

Gegeben sei weiterhin ein euklidischer\pseudoeuklidischer Raum \mathcal{E} der Dimension N über E sowie eine Differentialform $\varphi(x^i)$ vom Grad m . Zusätzlich sei \mathcal{B} ein Bereich der Dimension m , der durch $x^i(u^j)$ parametrisiert ist. Man kann nun an jedem Punkt des Bereichs ein kleines verallgemeinertes Parallelepipid aufbauen. Seine Kanten sind ident mit den Tangenten an die Parameterlinien an diesem Punkt

$$\Delta x_{u^j}^i \vec{b}_i := \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \Delta u^j \vec{b}_i. \quad (2.32)$$

Lässt man nun die Differentialform auf das verallgemeinerte Parallelepiped wirken, ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} (\Delta x_{u^1}^{j_1} \vec{b}_{j_1}, \Delta x_{u^2}^{j_2} \vec{b}_{j_2}, \dots, \Delta x_{u^m}^{j_m} \vec{b}_{j_m}) \\ &= \frac{1}{m!} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i) \Delta x_{u^1}^{j_1} \Delta x_{u^2}^{j_2} \dots \Delta x_{u^m}^{j_m} \det(dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_m} (\vec{b}_{j_1} \vec{b}_{j_2} \dots \vec{b}_{j_m})) \\ &= \frac{1}{m!} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i) \det\left(\frac{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_m}}{\partial u^1 \partial u^2 \dots \partial u^m}\right) \Delta u^1 \Delta u^2 \dots \Delta u^m. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nach Summenbildung über den Bereich und nach Grenzübergang erhält man

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} \int_{\mathcal{B}} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_m} \\ &:= \frac{1}{m!} \lim_{\Delta u^j \rightarrow 0} \sum_{\Delta \mathcal{B}} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i) \det\left(\frac{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_m}}{\partial u^1 \partial u^2 \dots \partial u^m}\right) \Delta u^1 \Delta u^2 \dots \Delta u^m \\ &= \frac{1}{m!} \int_{\mathcal{B}} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i) \det\left(\frac{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_m}}{\partial u^1 \partial u^2 \dots \partial u^m}\right) du^1 du^2 \dots du^m \\ &= \text{sign}(\det\left(\frac{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \dots \partial x^{i_m}}{\partial u^1 \partial u^2 \dots \partial u^m}\right)) \frac{1}{m!} \int_{\mathcal{B}} \frac{A_{i_1, i_2, \dots, i_m}(x^i)}{g_{i_1, i_2, \dots, i_m}} g_{i_1, i_2, \dots, i_m} dx^{i_1} dx^{i_2} \dots dx^{i_m}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

mit $g_{i_1, i_2, \dots, i_m} = +\sqrt{|\det((g_{i_1, i_2, \dots, i_m})_{ij})|}$.

Das Integral einer Differentialform vom Grad m über einen Bereich ergibt somit eine Summe von Integralen über Projektionen dieses Bereichs auf alle möglichen Koordinatenbereiche der gleichen Dimension m . Bei diesen Subintegralen handelt es sich um die mit den jeweiligen Tensordichten im ursprünglichen Bereich gewichteten Volumina der Projektionen. Das Integral ist vom verwendeten Koordinatensystem komplett, also auch von dessen Orientierung, unabhängig.

2.1.7 Integralsätze für Felder von Tensoren

Satz von Stokes im \mathbb{R}^N : In einem euklidischen/pseudo-euklidischen Raum \mathcal{E} der Dimension N über E sei $\varphi(x^i)$ eine Differentialform 1-ten Grades. \mathcal{F} sei eine beliebige Fläche parametrisiert durch $x^i(u^j)$ sowie \mathcal{S} eine zur Gänze auf dieser Fläche liegende geschlossene Kurve parametrisiert durch $x^i(u^j(s))$. An jedem Punkt der Kurve wird ein kleiner Tangentialvektor an die Kurve definiert

$$\Delta x_s^i \vec{b}_i := \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial s} \Delta s \vec{b}_i. \quad (2.35)$$

Lässt man nun die Differentialform auf den Tangentialvektor wirken, so erhält man nach Summenbildung und Grenzübergang

$$\oint_{\mathcal{S}} A_{i_1}(x^i) dx^{i_1} := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{\Delta \mathcal{S}} A_{i_1}(x^i) dx^{i_1} (\Delta x_s^{j_1} \vec{b}_{j_1})$$

$$= \oint_S A_{i_1}(x^i) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{j_1}} \frac{\partial u^{j_1}}{\partial s} ds = \text{sign}(\det(\frac{\partial u^{j_1}}{\partial s})) \oint_S T_{j_1}(x^i) du^{j_1}. \quad (2.36)$$

Der Satz von Stokes im System der Parameter u^j führt zu

$$\text{sign}(\det(\frac{\partial u^{j_1}}{\partial s})) \oint_S T_{j_1}(x^i) du^{j_1} = + \setminus - \int_{\mathcal{F}_{in}} (\frac{\partial T_2(x^i)}{\partial u^1} - \frac{\partial T_1(x^i)}{\partial u^2}) du^1 du^2 \quad (2.37)$$

mit dem Vorzeichen $+ \setminus -$ wenn die Orientierung der Kurve mit \setminus gegen die Orientierung des Parametersystems der Fläche gewählt ist. Dieses Integral kann wieder auf Subintegrale über Projektionen auf alle möglichen Koordinatenflächen zurückgeführt werden und man erhält den koordinatenunabhängigen Ausdruck für das Ringintegral

$$\begin{aligned} \oint_S A_{i_1}(x^i) dx^{i_1} &= + \setminus - \text{sign}(\det(\frac{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2}}{\partial u^1 \partial u^2})) \int_{\mathcal{F}_{in}} \frac{\partial A_{i_2}(x^i)}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} dx^{i_2} \\ &= + \setminus - \int_{\mathcal{F}_{in}} \frac{\partial A_{i_2}(x^i)}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Das Integral einer Differentialform über eine geschlossene Kurve ist also, abgesehen vom variablen Vorzeichen, ident mit dem Integral der äußeren Ableitung der Differentialform über eine beliebige eingeschlossene Fläche.

Satz von Gauß im \mathbb{R}^N : In einem euklidischen \setminus pseudoeuklidischen Raum \mathcal{E} der Dimension N über E sei $\varphi(x^i)$ eine Differentialform 2-ten Grades. \mathcal{V} sei ein beliebiges Volumen parametrisiert durch $x^i(u^j)$ sowie \mathcal{F} eine zur Gänze in diesem Volumen liegende geschlossene Fläche parametrisiert durch $x^i(u^j(a^k))$. An jedem Punkt der Fläche wird ein kleines Parallelogramm bestehend aus zwei Tangentialvektoren an die Parameterlinien der Fläche definiert

$$\Delta x_{a^k}^i \vec{b}_i := \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \frac{\partial u^j}{\partial a^k} \Delta a^k \vec{b}_i. \quad (2.39)$$

Lässt man nun die Differentialform auf das Parallelogramm wirken, so erhält man nach Summenbildung und Grenzübergang

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2!} \oint_{\mathcal{F}} A_{i_1, i_2}(x^i) dx^{i_2} \wedge dx^{i_1} \\ &:= \frac{1}{2!} \lim_{\Delta a^k \rightarrow 0} \sum_{\Delta \mathcal{F}} A_{i_1, i_2}(x^i) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} (\Delta x_{a^1}^{j_1} \vec{b}_{j_1}, \Delta x_{a^2}^{j_2} \vec{b}_{j_2}) \\ &= \frac{1}{2!} \oint_{\mathcal{F}} A_{i_1, i_2}(x^i) \frac{\partial x^{i_1}}{\partial u^{j_1}} \frac{\partial x^{i_2}}{\partial u^{j_2}} (\frac{\partial u^{j_1}}{\partial a^1} \frac{\partial u^{j_2}}{\partial a^2} - \frac{\partial u^{j_1}}{\partial a^2} \frac{\partial u^{j_2}}{\partial a^1}) da^1 da^2 \\ &= \text{sign}(\det(\frac{\partial u^{j_1} \partial u^{j_2}}{\partial a^1 \partial a^2})) \frac{1}{2!} \oint_{\mathcal{F}} T_{j_1, j_2}(x^i) du^{j_1} du^{j_2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Der Satz von Gauß im System der Parameter u^j führt zu

$$\begin{aligned} & \text{sign}(\det(\frac{\partial u^{j_1} \partial u^{j_2}}{\partial a^1 \partial a^2})) \frac{1}{2!} \oint_{\mathcal{F}} T_{j_1, j_2}(x^i) du^{j_1} du^{j_2} \\ &= + \setminus - \int_{\mathcal{V}_{in}} (\frac{\partial T_{2,3}(x^i)}{\partial u^1} + \frac{\partial T_{3,1}(x^i)}{\partial u^2} + \frac{\partial T_{1,2}(x^i)}{\partial u^3}) du^1 du^2 du^3 \end{aligned} \quad (2.41)$$

mit dem Vorzeichen $+ \setminus -$ wenn die Orientierung der Fläche mit \setminus gegen die Orientierung des Parametersystems des Volumens gewählt ist. Dieses Integral kann wieder auf Subintegrale über Projektionen auf alle möglichen Koordinatenvolumina zurückgeführt werden und man erhält den koordinatenunabhängigen Ausdruck für das Flächenintegral

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \oint_{\mathcal{F}} A_{i_1, i_2}(x^i) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} &= + \setminus - \text{sign}(\det(\frac{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \partial x^{i_3}}{\partial u^1 \partial u^2 \partial u^3})) \frac{1}{2!} \int_{\mathcal{V}_{in}} \frac{\partial A_{i_2, i_3}(x^i)}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} dx^{i_2} dx^{i_3} \\ &= + \setminus - \frac{1}{2!} \int_{\mathcal{V}_{in}} \frac{\partial A_{i_2, i_3}(x^i)}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge dx^{i_3}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Das Integral einer Differentialform über eine geschlossene Fläche ist also, abgesehen vom variablen Vorzeichen, ident mit dem Integral der äußeren Ableitung der Differentialform über ein beliebiges eingeschlossenes Volumen.

2.2 Gekrümmte Räume

Diese Art von Räumen zeichnet sich dadurch aus, dass ihre innere Struktur von Punkt zu Punkt, also lokal, unterschiedlich sein kann. Gekrümmte Räume stellen eine Verallgemeinerung von gekrümmten Flächen dar.

2.2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Topologischer Raum: Gegeben sei eine Menge M von Punkten und die Menge \mathcal{X} , die eine unechte Teilmenge der Potenzmenge von M darstellt. Die Menge M wird topologischer Raum \mathcal{T} genannt, wenn die zu ihr gehörende Menge \mathcal{X} die Anforderungen an eine Topologie erfüllt:

- Die leere Menge und die Menge M sind Element von \mathcal{X}
- Der Durchschnitt von endlich vielen Elementen von \mathcal{X} ist wieder Element von \mathcal{X}
- Die Vereinigung von beliebig vielen Elementen von \mathcal{X} ist wieder Element von \mathcal{X}

Durch diese Einschränkungen wird eine beliebige Menge M mit einer Grundstruktur versehen. Ein Element einer Topologie wird offene Menge \mathcal{O} genannt. Ihr Komplement bezüglich \mathcal{T} heißt geschlossene Menge \mathcal{G} . Eine Teilmenge von \mathcal{T} kann sowohl offen als auch geschlossen sein. Die Menge aller offenen Mengen, die ein bestimmtes Element X_0 enthalten, wird als offene Umgebung von X_0 , $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(X_0)$, bezeichnet.

Standardtopologie des \mathbb{R}^N : Als Basis dieser Topologie wird die Menge aller Kugeln K um Punkte X_0 , offene Umgebungen von X_0 , bezeichnet, die folgendermaßen definiert sind

$$K(X_0, \epsilon) := \{X \in \mathbb{R}^N \mid |x^i - x_0^i| < \epsilon\}. \quad (2.43)$$

Die Menge aller beliebigen Vereinigungen aller möglichen Kugeln um alle möglichen Punkte ergibt dann die Standardtopologie \mathcal{S} des \mathbb{R}^N .

Konvergenz: Eine Folge von Elementen von \mathcal{T} , X_n , konvergiert gegen den Punkt X_0 , wenn zu jeder offenen Menge \mathcal{O} , die Element von $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(X_0)$ ist, eine natürliche Zahl $N(\mathcal{O})$ existiert, sodass für alle $n \geq N(\mathcal{O})$ die Folge X_n in \mathcal{O} verläuft. Dies ist die Verallgemeinerung des klassischen Konvergenzbegriffs aus dem \mathbb{R}^N .

Stetigkeit: Gegeben seien zwei topologische Räume $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ mit den entsprechenden Topologien $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$. Eine Abbildung $f: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ wird stetig am Punkt X_0 genannt, wenn für alle Elemente $\mathcal{O}_{f(X_0)}$ von $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(f(X_0))$ ein Element \mathcal{O}_{X_0} von $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(X_0)$ existiert, sodass das Bild von \mathcal{O}_{X_0} eine unechte Teilmenge von $\mathcal{O}_{f(X_0)}$ ist. Eine Abbildung, die an jedem Punkt von \mathcal{T} stetig ist, heißt global stetig auf \mathcal{T} . Auch dies ist die Verallgemeinerung des klassischen Stetigkeitsbegriffs aus dem \mathbb{R}^N .

Homöomorphismus: Seien $f: \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ und $g: \mathcal{T}_2 \rightarrow \mathcal{T}_1$ zwei global stetige Abbildungen auf \mathcal{T}_1 beziehungsweise \mathcal{T}_2 . Gilt zusätzlich $g \circ f = id_{\mathcal{T}_1}$ und $f \circ g = id_{\mathcal{T}_2}$, so sind f und g bijektiv mit $g = f^{-1}$. Die beiden Räume sind dann topologisch nicht unterscheidbar also homöomorph.

Hausdorff-Raum: An einen topologischen Raum \mathcal{T} und seine Topologie \mathcal{X} kann nun eine zusätzliche Bedingung gestellt werden. Das sogenannte Trennungsaxiom verlangt folgendes: Seien X_1 und X_2 zwei beliebige ungleiche Punkte von \mathcal{T} . Dann existiert ein Element \mathcal{O}_{X_1} von $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(X_1)$ und ein Element \mathcal{O}_{X_2} von $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(X_2)$, sodass der Durchschnitt von \mathcal{O}_{X_1} und \mathcal{O}_{X_2} leer ist. Der topologische Raum gilt dann als separiert, und wird Hausdorff-Raum \mathcal{H} genannt. In diesem Fall können Folgen X_n nur gegen einen Grenzwert konvergieren.

Definition: Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist nun ein Hausdorff-Raum \mathcal{H} , an den zwei weitere Forderungen gestellt werden:

- Jeder Punkt von \mathcal{H} ist Element von zumindest einer offenen Menge \mathcal{O} der Topologie \mathcal{X} mit der folgenden speziellen Eigenschaft: Diese offene Menge ist einem affinen Raum \mathcal{A} homöomorph. Der von \mathcal{O} abgedeckte Bereich $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}$ von \mathcal{H} kann daher durch ein Koordinatensystem K im Tangentialraum T von \mathcal{A} lokal parametrisiert werden. Die dazugehörige Abbildung $\kappa: \mathcal{B}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}^N: P \rightarrow x^i$ nennt man wie schon im flachen Raum Karte κ von $\mathcal{B}_{\mathcal{O}}$ bezüglich K . Man spricht in diesem Fall von einer offenen Überdeckung von \mathcal{H} .

- Für jeden Punkt, der in einem Überlappungsbereich von zumindest zwei bei einer offenen Überdeckung beteiligten offenen Mengen \mathcal{O} liegt, gilt: Die Übergangsfunktion $\kappa_{\beta\alpha} = \kappa_{\beta} \circ \kappa_{\alpha}^{-1}$ zwischen seinen Koordinaten in den betroffenen Tangentialräumen ist glatt, also beliebig oft differenzierbar. Sie ist im allgemeinen nichtlinear.

Die Dimension der differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist ident mit der konstanten Dimension N ihrer Tangentialräume.

Atlas: Eine Vereinigung von Karten von offenen Mengen \mathcal{O} , die \mathcal{M} überdecken, wird Atlas A genannt. Um die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit komplett

zu erfassen, genügt es, einen beliebigen Atlas zusammen mit den Übergangsfunktionen zwischen seinen Karten in den Überlappungsbereichen zu kennen. Die Kenntnis eines höherdimensionalen Einbettungsraumes ist bei Vorhandensein eines Atlas zur Beschreibung der differenzierbaren Mannigfaltigkeit nicht notwendig, manchmal existiert so ein Raum auch überhaupt nicht. Im Extremfall reicht zur vollständigen Überdeckung eine einzige offene Menge \mathcal{O} mit Karte aus. Die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} degeneriert in diesem Fall zu einem flachen, also affinen Raum \mathcal{A} .

Differenzierbare Untermannigfaltigkeit: Gegeben seien zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten \mathcal{M} und \mathcal{N} der Dimension M und N mit $M < N$. Die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} wird differenzierbare Untermannigfaltigkeit von \mathcal{N} genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Der zu \mathcal{M} gehörende Raum ist topologisch gesehen ein Unterraum des zu \mathcal{N} gehörenden Raumes. Das bedeutet, die offenen Mengen von \mathcal{M} ergeben sich als alle möglichen Schnittmengen von offenen Mengen von \mathcal{N} mit \mathcal{M} .
- Für jeden Punkt $P \in \mathcal{M}$ existiert eine Inklusionsabbildung $I: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, wobei die dazugehörige Übergangsfunktion $\kappa_{\mathcal{N}\mathcal{M}} = \kappa_{\mathcal{N}} \circ \kappa_{\mathcal{M}}^{-1}$ zwischen beliebigen Karten in \mathcal{M} und \mathcal{N} unendlich oft differenzierbar ist.
- Für jeden Punkt $P \in \mathcal{M}$ bildet das Differential der Inklusionsabbildung $I: dI: T_P(\mathcal{M}) \rightarrow T_P(\mathcal{N})$ den Tangentialraum $T_P(\mathcal{M})$ injektiv in den Tangentialraum $T_P(\mathcal{N})$ ab.

2.2.2 Felder von Tensoren

Eigentlicher Tangentialraum: Gegeben sei ein Punkt X_0 auf \mathcal{M} und eine Kurve $X(t)$ auf \mathcal{M} , die durch den Punkt X_0 führt: $X(0) = X_0$. Der Punkt X_0 möge im Überlappungsbereich zweier Karten mit den Koordinatensystemen K und K' liegen, in welchen die Kurve mit $x^i(t)$ und $x'^i(t)$ beschrieben wird. Durch die Größe

$$v^i := \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} \quad (2.44)$$

wird ein am Punkt X_0 liegender, vom Koordinatensystem unabhängiger Vektor \vec{v} definiert. Er wird Tangentenvektor der Kurve in X_0 genannt. Die Summe aller möglichen Tangentenvektoren an einem Punkt P von \mathcal{M} bildet einen linearen Vektorraum, den eigentlichen Tangentialraum T_P des Punktes. Seine Dimension ist gleich der Dimension N der Tangentialräume von \mathcal{M} . Der zum eigentlichen Tangentialraum eines Punktes T_P gehörende affine Raum \mathcal{A}_P "berührt" die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} im Normalfall nur an diesem Punkt. Bei einem Wechsel des Koordinatensystems gilt

$$v'^j = \left. \frac{dx'^j(x^i)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial x'^j(x^i)}{\partial x^i} \right|_{x^i=x_0^i} \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial x'^j(x^i)}{\partial x^i} \right|_{x^i=x_0^i} v^i. \quad (2.45)$$

Eine spezielle Basis im Tangentialraum T_P bilden die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien im Punkt P . Diese Basis wird als Koordinatenbasis mit den Basisvektoren ∂_{x^i} $i = 1..N$ bezeichnet. Die dazugehörige duale Basis wird von den Basisvektoren dx^i $i = 1..N$ gebildet. Die Bezeichnung der Basisvektoren stammt daher, dass sich die Ableitungsoperatoren und die Differentiale bei einem Basiswechsel gleich wie die Basisvektoren transformieren

$$\partial_{x^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \partial_{x^j}, \quad dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} dx^j. \quad (2.46)$$

Durch die Einführung eines Tangentialraums an einem Punkt von \mathcal{M} ergibt sich folglich eine Vektorraumstruktur mit verschiedenen Koordinatensystemen, die aus verschiedenen Karten resultieren und die ein lineares Transformationsverhalten aufweisen. Das bedeutet, man kann punktweise viele Konzepte des flachen Raumes, wie den Aufbau gewisser Elemente der Tensorrechnung, auf die differenzierbare Mannigfaltigkeit \mathcal{M} übertragen.

Skalarfelder: Durch eine Abbildung der Punkte von \mathcal{M} auf Elemente des Körpers der jeweiligen Tangentialräume T_P , $\sigma : P \rightarrow s(T_P)$ wird ein Skalarfeld $\sigma(P)$ auf \mathcal{M} definiert. Für das Bild der zusammengesetzten Abbildung $s : \sigma \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow s$ in verschiedenen Koordinatensystemen ergibt sich wieder die Relation

$$s'(x'^j) = s(x^i). \quad (2.47)$$

Felder von eigentlichen Tensoren: Durch eine Abbildung der Punkte von \mathcal{M} auf Tensoren der jeweiligen Tangentialräume T_P mit gleicher Struktur der Argumente, $\tau : P \rightarrow \varphi(T_P)$ wird ein Tensorfeld $\tau(P)$ auf \mathcal{M} definiert. Für die Koordinaten des Bildes der zusammengesetzten Abbildung $\varphi : \tau \circ \kappa^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \varphi$ in verschiedenen Koordinatensystemen ergeben sich wieder die Relationen

$$T'^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m}(x^i) = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{k_1}}(x'^j) \dots \frac{\partial x^{i_m}}{\partial x'^{k_m}}(x'^j) \frac{\partial x'^{l_1}}{\partial x^{j_1}}(x^i) \dots \frac{\partial x'^{l_n}}{\partial x^{j_n}}(x^i) T^{j_1 \dots j_n}_{i_1 \dots i_m}(x^i), \quad (2.48)$$

$$T''^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m}(x'^j) = T'^{l_1 \dots l_n}_{k_1 \dots k_m}(x^i). \quad (2.49)$$

Im Unterschied zu den Verhältnissen im flachen Raum sind die Transformationsmatrizen nun vom Ort abhängig.

2.2.3 Die kovariante Ableitung

Die einzelnen Tangentialräume einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} existieren grundsätzlich völlig unabhängig voneinander. Um nun Tensoren aus verschiedenen Tangentialräumen miteinander vergleichen zu können, ist es notwendig auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} eine zusätzliche Struktur, den affinen Zusammenhang, einzuführen. Durch ihn wird die Art der Krümmung der Mannigfaltigkeit festgelegt. Weiters kann aus dem affinen Zusammenhang ein Operator abgeleitet werden, welcher die Tensoren benachbarter Tangentialräume zueinander in Beziehung setzt, die kovariante Ableitung.

Affiner Zusammenhang: Um die Richtungsableitung $\nabla_w v(x^i)$ in einem affinen Raum auf gekrümmte Räume verallgemeinern zu können führt man den affinen Zusammenhang ∇ ein, der wie folgt definiert ist

$$\nabla_{\partial_{x^j}} \partial_{x^i}(x^l) := \Gamma_{ij}^k(x^l) \partial_{x^k}. \quad (2.50)$$

Er beschreibt, wie sich der Basisvektor ∂_{x^i} in Richtung von ∂_{x^j} in der Nähe des Punktes P mit den Koordinaten x^l , ausgedrückt in der Basis von T_P , ändert. Mit dieser abstrakten Definition der $\Gamma_{ij}^k(x^l)$ wird einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} eine eindeutige Krümmung eingeprägt. Auch wenn normalerweise der Basisvektor ∂_{x^i} entlang von ∂_{x^j}

auch Änderungen in Komponenten aufweist, die sich nicht im Tangentialraum T_P befinden, reicht diese Art der Definition des affinen Zusammenhangs zur eindeutigen Beschreibung der Art der Krümmung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} vollkommen aus. Umgekehrt benötigt man bei einer vorgegebenen gekrümmten Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit vorgegebenen Koordinatenbasen aus Sicht eines höherdimensionalen Einbettungsraumes zur Bestimmung der $\Gamma_{ij}^k(x^l)$ eine (geometrische) Regel. Sehr gebräuchlich ist die Projektion der Basen der benachbarten Tangentialräume in den Tangentialraum des Punktes P . Die Krümmung selbst ist wiederum eine Eigenschaft absolut unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem in T_P , die $\Gamma_{ij}^k(x^l)$ allerdings sind keine Tensoren und weisen ein etwas komplizierteres Transformationsverhalten auf.

Die Abbildung $\nabla : v_1, v_2 \rightarrow v_3$ kann als äußere Ableitung einer vektorwertigen 0-Form v_1 , also eines Vektors, dessen Koordinatenfunktionen gewöhnliche 0-Formen sind, angewendet auf einen Vektor v_2 verstanden werden. Daraus ergeben sich mit den Skalarfeldern $s(x^i), t(x^i)$ und den Vektorfeldern $u(x^i), v(x^i), w(x^i)$ folgende Regeln

$$\nabla_w(su + tv) = ds(w)u + s\nabla_w u + dt(w)v + t\nabla_w v, \quad (2.51)$$

$$\nabla_{(sv+tw)}u = s\nabla_v u + t\nabla_w u. \quad (2.52)$$

Somit kann schließlich die Richtungsableitung eines Vektors v entlang von w in der Nähe eines Punktes P berechnet werden

$$\begin{aligned} \nabla_w v(x^i) &:= w^k \nabla_{\partial_{x^k}}(v^j \partial_{x^j}) = (dv^j(\partial_{x^k}) \partial_{x^j} + v^j \nabla_{\partial_{x^k}} \partial_{x^j}) w^k \\ &= \left(\frac{\partial v^j(x^i)}{\partial x^k} \delta_k^l \partial_{x^j} + \Gamma_{jk}^l \partial_{x^l} v^j \right) w^k = \left(\frac{\partial v^j(x^i)}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^j v^l \right) w^k \partial_{x^j}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

In einem flachen Raum verschwinden die Koeffizienten Γ_{ij}^k des affinen Zusammenhangs ∇ und die Formel geht in die normale Richtungsableitung eines Vektors v entlang w über.

Definition: Ebenso wie schon im affinen Raum kann nun die Richtungsableitung für Vektorfelder auf eine Richtungsableitung für Tensorfelder erweitert werden. Es ergibt sich die kovariante Ableitung. Sie lautet für ein gemischtes Tensorfeld $\varphi(x^i)$

$$\begin{aligned} \nabla_w \varphi(x^i) &:= \left[\frac{\partial T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}(x^i)}{\partial x^k} - \Gamma_{i_1 k}^l T_{l \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}(x^i) - \dots - \Gamma_{i_m k}^l T_{i_1 \dots l}^{j_1 \dots j_n}(x^i) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{lk}^{j_1} T_{i_1 \dots i_m}^{l \dots j_n}(x^i) + \dots + \Gamma_{lk}^{j_n} T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots l}(x^i) \right] w^k dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_m} \otimes \partial_{x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{j_n}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Für ein Skalarfeld ergibt sich sinngemäß

$$\nabla_w s(x^i) := \frac{\partial s(x^i)}{\partial x^k} w^k. \quad (2.55)$$

Parallelverschiebung: Wird ein Tensor φ entlang eines Vektors w an einem Punkt P parallelverschoben so erfüllt er folgende Gleichung

$$\nabla_w \varphi(x^i) = 0. \quad (2.56)$$

Er ändert dabei seine Koordinaten in den verschiedenen Tangentialräumen gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}(x^i)}{\partial x^k} w^k = & \left[+ \Gamma_{i_1 k}^l T_{l \dots i_m}^{j_1 \dots j_n}(x^i) + \dots + \Gamma_{i_m k}^l T_{i_1 \dots l}^{j_1 \dots j_n}(x^i) \right. \\ & \left. - \Gamma_{l k}^{j_1} T_{i_1 \dots i_m}^{l \dots j_n}(x^i) - \dots - \Gamma_{l k}^{j_n} T_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots l}(x^i) \right] w^k. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Gilt weiters

$$\nabla_w \varphi(x^i) = 0, \quad \forall w, \quad (2.58)$$

so wird das Tensorfeld $\varphi(x^i)$ in der Nähe des Punktes P als konstant bezeichnet.

2.2.4 Der Krümmungstensor

Gegeben seien auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} zwei Vektorfelder $v(x^i)$ und $w(x^i)$ um einen Punkt P . Weiters sei u ein Vektor in P . Die Parallelverschiebung auf einer Mannigfaltigkeit ist auf Grund der Krümmung grundsätzlich vom Weg abhängig. Um nun ein Maß für die Krümmung von \mathcal{M} um den Punkt P zu erhalten, verschiebt man den Vektor u entlang einer infinitesimal kleinen geschlossenen Kurve von P zu P parallel und betrachtet den dabei entstehenden Differenzvektor:

Von P gelangt man über den Vektor $\Delta a v(P)$ zum Punkt P_a und von dort über den Vektor $\Delta b w(P_a)$ zum Punkt P_{ab} . Umgekehrt gelangt man von P über den Vektor $\Delta b w(P)$ zum Punkt P_b und von dort über den Vektor $\Delta a v(P_b)$ zum Punkt P_{ba} . Damit dadurch eine geschlossene Kurve entsteht, muß gelten

$$P_{ab} = P_{ba} \quad \iff \quad [v, w] |_P := \left(v^j \frac{\partial w^i(x^k)}{\partial x^j} - w^j \frac{\partial v^i(x^k)}{\partial x^j} \right) \partial_{x^i} |_P = 0. \quad (2.59)$$

Für den Weg $P \rightarrow P_a \rightarrow P_{ab} = P_{ba} \rightarrow P_b \rightarrow P$ ergibt sich in der Koordinatenbasis von T_P folgender Differenzvektor

$$\begin{aligned} u_1 - u_0 = \Delta u^i \partial_{x^i} &= \Delta a \Delta b w^j v^l w^k \left(\partial_{x^k} \Gamma_{j l}^i(x^p) - \partial_{x^l} \Gamma_{j k}^i(x^p) + \Gamma_{h k}^i \Gamma_{j l}^h - \Gamma_{h l}^i \Gamma_{j k}^h \right) \partial_{x^i} \\ &= \Delta a \Delta b w^j v^l w^k R_{j k l}^i \partial_{x^i}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dieses Ergebnis gilt für beliebige infinitesimal kleine geschlossene Kurven. Hierbei sind die Größen $R_{j k l}^i$ die Koordinaten eines dreifach kovarianten und einfach kontravarianten Tensors. Er wird Krümmungstensor des affinen Zusammenhangs ∇ genannt. In einem flachen Raum verschwindet er.

2.2.5 Der Riemannsche Raum

Um auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} Längen und Winkel messen zu können, wird an jedem Punkt von \mathcal{M} ein positiv definites inneres Produkt eingeführt

$$g_{ij}(x^k) := (\partial_{x^i}, \partial_{x^j})(x^k). \quad (2.61)$$

Der dazugehörige kovariante Tensor zweiter Stufe wird als Maßtensor bezeichnet

$$g(x^k) := g_{ij}(x^k) dx^i \otimes dx^j. \quad (2.62)$$

Der Riemannsche Raum stellt somit eine Verallgemeinerung des euklidischen Raums dar. Die kovariante Ableitung und der Maßtensor sind nicht unabhängig voneinander. Bei einer Parallelverschiebung zweier Vektoren u und v müssen Längen und Winkel erhalten bleiben

$$\nabla_w u(x^k) = 0 \quad \nabla_w v(x^k) = 0 \quad \rightarrow \quad \nabla_w (u, v)(x^k) = \nabla_w (u^i v^j g_{ij})(x^k) = \nabla_w (g(u, v))(x^k) = 0. \quad (2.63)$$

Da die kovariante Ableitung aus Gründen der Eindeutigkeit mit einer Verjüngung vertauscht, ergibt sich

$$\nabla_w g(x^k) = 0, \quad \forall w. \quad (2.64)$$

Der Maßtensor ist also bezüglich der kovarianten Ableitung konstant. Diese Forderung wird Verträglichkeitsbedingung genannt.

Ist eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} zusammen mit einem Maßtensor g gegeben, so existiert genau ein torsionsfreier, also symmetrischer affiner Zusammenhang ∇ , der die Verträglichkeitsbedingung erfüllt. Dies ist der Riemann-Zusammenhang.

3 Lie-Gruppen

Dieser Bereich der Mathematik ist von enormer Bedeutung für die Beschreibung von dem in der Physik häufig auftretenden Phänomen der Symmetrie.

3.1 Abstrakte Lie-Gruppen

3.1.1 Definition

Eine abstrakte Lie-Gruppe G ist eine Gruppe, deren Elemente g gleichzeitig eine unendlich oft differenzierbare Mannigfaltigkeit bilden, mit folgenden Eigenschaften:

- Die Gruppenbildung $G \times G \rightarrow G : (g, h) \rightarrow g \cdot h$
- Die Inversenbildung $G \rightarrow G : g \rightarrow g^{-1}$

sind unendlich oft differenzierbare Funktionen.

3.1.2 Eigenschaften

Eine auf diese Art definierte Lie-Gruppe G weist automatisch folgende zusätzliche Eigenschaften auf:

- Es existiert eine offene Umgebung des Punktes $\mathbb{1} \in G$, $\overset{o}{\mathcal{U}}(\mathbb{1}) = U$, die einem affinen Raum \mathcal{A} homöomorph ist, mit einer dazugehörigen Kartenabbildung $\kappa_U : \mathcal{B}_U \rightarrow \mathbb{R}^N : g \rightarrow x^i$, sodass gilt

$$\kappa_U(\mathbb{1}) = 0, \quad \kappa_U(g^{-1}) = -\kappa_U(g), \quad \forall g \in \mathcal{B}_U. \quad (3.1)$$

- Durch sogenannte Linkstranslationen \setminus Rechtstranslationen

$$U_h^L := h \cdot U \quad \setminus \quad U_h^R := U \cdot h, \quad \forall h \in G \quad (3.2)$$

wird U bijektiv auf andere offene Mengen $U_h^L \setminus U_h^R$ von G abgebildet, die somit ebenfalls einem affinen Raum \mathcal{A} homöomorph sind und ganz G überdecken. Für diese Bereiche kann man folgende Kartenabbildungen $\kappa_{U_h^L} : \mathcal{B}_{U_h^L} \rightarrow \mathbb{R}^N : g \rightarrow x^i \setminus \kappa_{U_h^R} : \mathcal{B}_{U_h^R} \rightarrow \mathbb{R}^N : g \rightarrow x^i$ definieren

$$\kappa_{U_h^L}(g) := \kappa_U(h^{-1} \cdot g) \quad \setminus \quad \kappa_{U_h^R}(g) := \kappa_U(g \cdot h^{-1}). \quad (3.3)$$

- Die Übergangsfunktion der Koordinaten eines Punktes, der im Überlappungsbereich mehrerer dieser zuvor definierten Bereiche liegt, $\kappa_{\beta\alpha} = \kappa_{U_{h_\beta}^L \setminus R} \circ \kappa_{U_{h_\alpha}^L \setminus R}^{-1}$, ist unendlich oft differenzierbar.

3.1.3 Die Darstellung von Lie-Gruppen durch Matrizen

Es ist häufig sinnvoll, die Struktur einer abstrakten Lie-Gruppe G an Hand einer Darstellung zu untersuchen. Hierbei wird die Lie-Gruppe G durch einen Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(S)$ in die Gruppe der Automorphismen auf einer mathematischen Struktur S abgebildet. Es gilt also

$$\varphi(g) \circ \varphi(h) = \varphi(g \cdot h). \quad (3.4)$$

Zu einer bestimmten Lie-Gruppe G kann es mehrere Möglichkeiten der Darstellung geben. Handelt es sich bei der mathematischen Struktur S um einen linearen Vektorraum V der Dimension N über dem Skalarkörper K , so werden die Automorphismen durch invertierbare $N \times N$ Matrizen A , deren Koeffizienten a_{ij} Elemente des Körpers sind, beschrieben. Diese Matrizen bilden eine Gruppe.

3.2 Matrixgruppen

3.2.1 Die lineare Gruppe

Definition: Die lineare Gruppe besteht aus der Menge aller invertierbaren $N \times N$ Matrizen A mit reellen/komplexen Koeffizienten a_{ij} und wird mit $GL(N, \mathbb{R}) \setminus GL(N, \mathbb{C})$ bezeichnet.

Eigenschaften einer Gruppe: Für beliebige Elemente der linearen Gruppe gilt:

- $GL \times GL \rightarrow GL$: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Assoziativgesetz: $(AB)C = A(BC)$
- Neutrales Element: $\mathbb{1}$
- Inverses Element: A^{-1}

Darstellung: Jedes Element A der linearen Gruppe läßt sich durch die Exponentialabbildung $\exp: N \times N \rightarrow N \times N$ invertierbar, darstellen

$$A = \exp(X) := \sum_n \frac{X^n}{n!}, \quad A^{-1} = \exp(-X). \quad (3.5)$$

Speziell können Matrizen $A \in GL(N, \mathbb{R})$ mit positiver Determinante in der Exponentialabbildung durch $N \times N$ Matrizen mit reellen Koeffizienten dargestellt werden.

Der Tangentialraum von $\mathbb{1}$: Gegeben sei die Menge aller differenzierbaren Kurven $A(t)$ in der linearen Gruppe für die gilt: $A(0) = \mathbb{1}$. Dann bildet die Menge aller Tangentenvektoren im Einselement $A'(t)|_{t=0}$ einen linearen Vektorraum über \mathbb{R} . Er wird Tangentialraum von $\mathbb{1}$, $T_{\mathbb{1}}GL(N, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{R}) \setminus T_{\mathbb{1}}GL(N, \mathbb{C}) = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ genannt. Dies ist gleichbedeutend mit folgender Definition

$$T_{\mathbb{1}}GL(N, \mathbb{R}) \setminus T_{\mathbb{1}}GL(N, \mathbb{C}) := \{X \mid \exp(tX) \in GL(N, \mathbb{R}) \setminus GL(N, \mathbb{C}) \quad \forall t \}. \quad (3.6)$$

Die Mengen $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{R}) \setminus \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ bestehen somit aus allen $N \times N$ Matrizen mit reellen/komplexen Koeffizienten. Die Dimension des Tangentialraums im Einselement beträgt daher $N^2 \setminus 2N^2$.

Eigenschaften einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit: Betrachtet man alle Elemente von $GL(N, \mathbb{R})$ und $gl(N, \mathbb{R}) \setminus GL(N, \mathbb{C})$ und $gl(N, \mathbb{C})$ als Vektoren in einem $\mathbb{R}^{N^2} \setminus \mathbb{R}^{2N^2}$ mit der Standardtopologie des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, so kann die lineare Gruppe $GL(N, \mathbb{R}) \setminus GL(N, \mathbb{C})$ als Lie-Gruppe angesehen werden. Sie erfüllt alle erforderlichen Eigenschaften einer abstrakten Lie-Gruppe.

Insbesondere bildet die Exponentialfunktion $\exp(X)$ eine offene Umgebung V von 0 in $gl(N, \mathbb{R}) \setminus gl(N, \mathbb{C})$ auf eine offene Umgebung U von $\mathbb{1}$ in $GL(N, \mathbb{R}) \setminus GL(N, \mathbb{C})$ ab. Die dazugehörige Kartenabbildung $\kappa_U : \mathcal{B}_U \rightarrow \mathbb{R}^{N^2} \setminus \mathbb{R}^{2N^2}$ ist also durch die Umkehrfunktion $\log(Y)$ gegeben. Man spricht in diesem Fall von einer logarithmischen Karte. Es gilt wie gefordert

$$\log(\mathbb{1}) = 0, \quad \log(Y^{-1}) = -\log(Y). \quad (3.7)$$

Durch Linkstranslationen und Rechtstranslationen gelangt man schließlich zu einem Atlas für ganz $GL(N, \mathbb{R}) \setminus GL(N, \mathbb{C})$. Die Übergangsfunktionen zwischen den betreffenden Karten sind unendlich oft differenzierbar.

Die innere “Multiplikation” im Tangentialraum von $\mathbb{1}$: Gegeben sei die Abbildung $\text{Kon}(Y)(X) : GL \rightarrow GL$, genannt die Konjugation. Sie ordnet für ein festes $Y \in GL$ jedem $X \in GL$ wiederum ein Element der Gruppe GL zu

$$\text{Kon}(Y)(X) := YXY^{-1}, \quad \text{mit } Y \in GL. \quad (3.8)$$

Bildet man von der Konjugation das Differential $d\text{Kon}(Y)(dX) : T_X \rightarrow T_{\text{Kon}(Y)(X)}$

$$d\text{Kon}(Y)(dX) = YdXY^{-1}, \quad \text{mit } Y \in GL. \quad (3.9)$$

so wird dadurch der Tangentialraum von X auf den Tangentialraum von $\text{Kon}(Y)(X)$ abgebildet. Das Differential der Konjugation in Einselement $d\text{Kon}(Y)(dX) |_{X=\mathbb{1}} : T_{\mathbb{1}} \rightarrow T_{\mathbb{1}}$ wird adjungierte Darstellung der Lie-Gruppe GL genannt

$$\text{Ad}(Y)(dX) := d\text{Kon}(Y)(dX) |_{X=\mathbb{1}} = (YdXY^{-1}) |_{X=\mathbb{1}}, \quad \text{mit } Y \in GL. \quad (3.10)$$

Sie bildet den Tangentialraum von $\mathbb{1}$ auf sich selbst ab.

In einem weiteren Schritt kann man das Differential der adjungierten Darstellung von GL nach dem bisher festen $Y \in GL$ im Einselement, $d\text{Ad}(dY)(dX) |_{Y=\mathbb{1}} : T_{\mathbb{1}} \times T_{\mathbb{1}} \rightarrow T_{\mathbb{1}}$, bilden. Das Resultat wird adjungierte Darstellung des Tangentialraums von $\mathbb{1}$, $T_{\mathbb{1}}GL$, genannt

$$\begin{aligned} \text{ad}(dY)(dX) &:= d\text{Ad}(dY)(dX) |_{Y=\mathbb{1}} = (dYdXY^{-1} + YdXd(Y^{-1})) |_{X,Y=\mathbb{1}} \\ &= (dYdX - dXdY) |_{X,Y=\mathbb{1}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Man erhält eine innere “Multiplikation” von Elementen des Tangentialraums von $\mathbb{1}$, dY und dX . Die normale Matrizenmultiplikation hingegen kann auch aus dem Tangentialraum von $\mathbb{1}$ herausführen.

Die Lie-Algebra: Ein Vektorraum V über $\mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$, auf dem eine innere Verknüpfung $V \times V \rightarrow V$ definiert ist, wird Algebra genannt. Im Speziellen spricht man von einer Lie-Algebra, wenn die innere Verknüpfung, in diesem Fall dargestellt durch die Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ folgende Forderungen erfüllt:

- Bilinearität: $[a_i X^i, b_j Y^j] = a_i b_j [X^i, Y^j]$
- Antisymmetrie: $[Y, X] = -[X, Y]$
- Jacobi-Identität: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Der Tangentialraum der linearen Gruppe GL im Einselement $T_{\mathbb{1}}GL$ erfüllt mit der inneren "Multiplikation" alle diese Voraussetzungen und bildet somit eine Lie-Algebra.

3.2.2 Die spezielle orthogonale \ unitäre Gruppe

Definition: Die spezielle orthogonale \ unitäre Gruppe besteht aus der Menge aller invertierbaren $N \times N$ Matrizen mit reellen \ komplexen Koeffizienten mit den besonderen Eigenschaften:

- $AA^T = \mathbb{1} \setminus AA^\dagger = \mathbb{1}$
- $\det(A) = 1$

Diese Gruppe wird mit $SO(N) \setminus SU(N)$ bezeichnet und bildet eine in Bezug auf die Standardtopologie des \mathbb{R}^N abgeschlossene Untergruppe von $GL(N, \mathbb{R}) \setminus GL(N, \mathbb{C})$.

Eigenschaften einer Untergruppe: Für beliebige Elemente von $SO(N) \setminus SU(N)$ gilt:

- $SO(N) \times SO(N) \rightarrow SO(N): \quad (AB)(AB)^T = ABB^T A^T = \mathbb{1}$
 - $SU(N) \times SU(N) \rightarrow SU(N): \quad (AB)(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger = \mathbb{1}$
- jeweils mit: $\det(AB) = \det(A) \det(B) = 1$

Der Tangentialraum von $\mathbb{1}$: Die Menge aller Tangentenvektoren im Einselement von differenzierbaren Kurven in der Gruppe $SO(N) \setminus SU(N)$ bildet einen Untervektorraum des $gl(N, \mathbb{R}) \setminus gl(N, \mathbb{C})$. Dies ist der Tangentialraum von $\mathbb{1}$, der mit $T_{\mathbb{1}}SO(N) = so(N) \setminus T_{\mathbb{1}}SU(N) = su(N)$ bezeichnet wird.

Auch hier gilt die entsprechende Definition

$$T_{\mathbb{1}}SO(N) \setminus T_{\mathbb{1}}SU(N) := \{X \mid \exp(tX) \in SO(N) \setminus SU(N) \quad \forall t \}. \quad (3.12)$$

Die speziellen Eigenschaften der Gruppe $SO(N) \setminus SU(N)$ schränken die Elemente von $so(N) \setminus su(N)$ folgendermaßen ein

$$A(t)A^T(t) = \mathbb{1} \setminus A(t)A^\dagger(t) = \mathbb{1} \quad \rightarrow \quad A'(0) = -A'(0)^T \setminus A'(0) = -A'(0)^\dagger, \quad (3.13)$$

$$\det(A(t)) = \mathbb{1} \quad \rightarrow \quad \text{spur}(A'(0)) = 0. \quad (3.14)$$

Die Dimension des Tangentialraums von $\mathbb{1}$ beträgt daher $\frac{1}{2}N(N-1) \setminus N^2 - 1$.

Die Exponentialabbildung ist speziell bei der Gruppe $SO(N) \setminus SU(N)$ surjektiv. Das bedeutet jedes Element der Gruppe $SO(N) \setminus SU(N)$ kann als Bild der Funktion $\exp(X)$ mit $X \in so(N) \setminus X \in su(N)$ dargestellt werden.

Eigenschaften einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit: Die Gruppe $SO(N) \setminus SU(N)$ bildet als abgeschlossene Untergruppe von $GL(N, \mathbb{R}) \setminus GL(N, \mathbb{C})$ ebenfalls eine Lie-Gruppe. Die Exponentialfunktion $\exp(X)$ bildet nun eine offene Umgebung V von 0 in $so(N) \setminus su(N)$ auf eine offene Umgebung U von $\mathbb{1}$ in $SO(N) \setminus SU(N)$ ab. Daraus ergibt sich wieder eine logarithmische Karte und in weiterer Folge ein Atlas, mit unendlich oft differenzierbaren Übergangsfunktionen zwischen den betreffenden Karten.

Die Lie-Algebra: Der Tangentialraum von $\mathbb{1}$, $so(N) \setminus su(N)$, bildet mit der inneren "Multiplikation" seiner Elemente wiederum eine Lie-Algebra.

3.2.3 Exkurs: Die Sphäre S^3

Definition: Die Sphäre S^3 beschreibt die Menge aller Punkte in einem \mathbb{R}^4 , die vom Ursprung oder einem beliebigen Mittelpunkt m die gleiche Entfernung $R = 1$ besitzen

$$S_{m,R}^3 := \{q^i \in \mathbb{R}^4 \mid |q^i - m^i| = R = 1\}. \quad (3.15)$$

Führt man vierdimensionale Kugelkoordinaten $r, \alpha, \vartheta, \varphi$ ein, mit dem Parameterbereich

$$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3.16)$$

so ergeben sich die folgenden Relationen

$$\begin{aligned} q^0 &= R \cos \alpha, \\ q^1 &= R \sin \alpha \sin \vartheta \cos \varphi, \\ q^2 &= R \sin \alpha \sin \vartheta \sin \varphi, \\ q^3 &= R \sin \alpha \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Für die Funktionaldeterminante erhält man

$$\left| \frac{\partial q^0 \partial q^1 \partial q^2 \partial q^3}{\partial R \partial \alpha \partial \vartheta \partial \varphi} \right| = R^3 \sin^2 \alpha \sin \vartheta. \quad (3.18)$$

Eigenschaften: Die wichtigsten geometrischen Größen Volumen (4-dimensional), Oberfläche (3-dimensional) und Umfang eines Kleinkreises (2-dimensional) werden folgendermaßen berechnet

$$V = \int_0^R dr \int_0^\pi d\alpha \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^3 \sin^2 \alpha \sin \vartheta = \frac{1}{2} \pi^2 R^4, \quad (3.19)$$

$$O = \int_0^\pi d\alpha \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi R^3 \sin^2 \alpha \sin \vartheta = 2\pi^2 R^3, \quad (3.20)$$

$$U = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi R^2 \sin^2 \alpha \sin \vartheta = 4\pi R^2 \sin^2 \alpha. \quad (3.21)$$

3.3 Die Gruppe SO3

Die Gruppe SO3 besteht aus der Menge aller invertierbaren 3x3 Matrizen O mit reellen Koeffizienten für die gilt: $OO^T = 1$ und $\det(O) = 1$.

3.3.1 Der Tangentialraum von $\mathbb{1}$

Die Menge aller reeller 3x3 Matrizen T_O , für die gilt: $T_O = -T_O^T$ und $\text{spur}(T_O) = 0$, bildet den Tangentialraum von $\mathbb{1}$, so3.

Der Ansatz

$$T_O := -i\omega^i L_i = -i\vec{\omega} \vec{L}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

führt zu einer möglichen 3-dimensionalen reellen Basis $-iL_i$ mit den imaginären Matrizen L_i . Diese Basis erfüllt die Forderung einer Lie-Algebra

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k, \quad (3.24)$$

$$\text{spur}(L_i L_j) = 2\delta_{ij}. \quad (3.25)$$

Betrachtet man den Epsilontensor ϵ_{ijk} als Komposition dieser 3x3 Matrizen, so gilt

$$(L_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}. \quad (3.26)$$

3.3.2 Die Darstellung der SO3

Jedes Element O der SO3 kann mittels der Exponentialfunktion durch Elemente des Tangentialraums von $\mathbb{1}$, so3, dargestellt werden

$$O(\vec{\omega}) = e^{T_O} = e^{-i\vec{\omega} \vec{L}} = e^{-i\omega \vec{e}_\omega \vec{L}} = e^{-i\omega L_\omega}. \quad (3.27)$$

Auf Grund der zyklischen Eigenschaften der Potenzen von L_ω gilt

$$O(\vec{\omega}) = e^{-i\omega L_\omega} = \mathbb{1} - iL_\omega \sin \omega - L_\omega^2 (1 - \cos \omega). \quad (3.28)$$

Explizit ausgerechnet ergibt sich für die allgemeine Darstellung einer SO3-Matrix somit folgende Form

$$O(\vec{\omega}) = \begin{pmatrix} 1 - ((e_\omega^2)^2 + (e_\omega^3)^2)(1 - \cos \omega) & e_\omega^1 e_\omega^2 (1 - \cos \omega) - e_\omega^3 \sin \omega & e_\omega^1 e_\omega^3 (1 - \cos \omega) + e_\omega^2 \sin \omega \\ e_\omega^1 e_\omega^2 (1 - \cos \omega) + e_\omega^3 \sin \omega & 1 - ((e_\omega^1)^2 + (e_\omega^3)^2)(1 - \cos \omega) & e_\omega^2 e_\omega^3 (1 - \cos \omega) - e_\omega^1 \sin \omega \\ e_\omega^1 e_\omega^3 (1 - \cos \omega) - e_\omega^2 \sin \omega & e_\omega^2 e_\omega^3 (1 - \cos \omega) + e_\omega^1 \sin \omega & 1 - ((e_\omega^1)^2 + (e_\omega^2)^2)(1 - \cos \omega) \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Diese Darstellung ist allerdings mehrdeutig

$$O(\omega, \vec{e}_\omega) = e^{-i\omega \vec{e}_\omega \vec{L}} = O(\omega + 2\pi k, \vec{e}_\omega) = e^{-i(\omega + 2\pi k) \vec{e}_\omega \vec{L}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.30)$$

$$O(\omega, \vec{e}_\omega) = e^{-i\omega \vec{e}_\omega \vec{L}} = O(2\pi - \omega, -\vec{e}_\omega) = e^{-i(2\pi - \omega)(-\vec{e}_\omega) \vec{L}}. \quad (3.31)$$

Man beschränkt sich daher für eine eindeutige Darstellung auf folgenden Parameterbereich für $\vec{\omega}(\vartheta, \varphi, \omega)$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \omega \leq \pi. \quad (3.32)$$

Für $\omega = \pi$ bleibt eine Zweideutigkeit in der Wahl von \vec{e}_ω .
Nachbarelemente von $O(\vec{\omega} = 0) = \mathbb{1}$ können als $O(d\vec{\omega})$ identifiziert werden

$$O(d\vec{\omega}) = e^{-id\vec{\omega}\vec{L}} = \mathbb{1} - id\vec{\omega}\vec{L}. \quad (3.33)$$

3.3.3 Allgemeine Eigenschaften

Drehungen im \mathbb{R}^3 : Fasst man die Elemente der SO3 als Automorphismen des linearen Vektorraums \mathbb{R}^3 auf, so impliziert die Orthogonalität, dass die Länge der Vektoren und die Winkel zwischen den Vektoren bei der Abbildung erhalten bleiben. Orthonormalbasen werden also auf Orthonormalbasen abgebildet. Durch das positive Vorzeichen der Determinante bleibt auch die Orientierung der betreffenden Basisvektoren erhalten. Ein Element der SO3 angewendet auf eine Orthonormalbasis kann somit als reine Drehung dieser Orthonormalbasis interpretiert werden. Aus geometrischen Überlegungen erkennt man, dass dabei \vec{e}_ω die Drehachse beschreibt und ω den dazugehörigen Drehwinkel angibt.

Beziehung zur Sphäre S^3 : Setzt man fälschlicherweise $\omega = \alpha$, so haben die S^3 und die Gruppe SO3 den gleichen Parameterbereich. Versucht man nun dementsprechend die Elemente der SO3 kontinuierlich auf der S^3 zu platzieren, so gelingt dies an allen Punkten der S^3 mit Ausnahme des Südpols. Er besitzt die Parameter $\alpha = \pi$, ϑ und φ beliebig. Alle SO3-Matrizen, die eine Drehung um $\omega = \pi$ mit unterschiedlichen Drehachsen \vec{e}_ω beschreiben, entsprechen diesem Punkt. Die Gruppe SO3 ist also einer Sphäre S^3 nicht homöomorph, und kann somit auch keine S^3 in einem \mathbb{R}^9 bilden.

Setzt man hingegen $\omega = 2\alpha$, so ist es möglich, alle Elemente der SO3 kontinuierlich auf der S^3 zu platzieren, da dem Südpol nun nur ein Element der SO3, nämlich eine Drehung um $\omega = 2\pi$ um eine beliebige Drehachse, also die Identität $\mathbb{1}$, entspricht. Gegenüberliegende Punkte auf der S^3 sind dann mit den gleichen SO3-Matrizen besetzt.

Wegzusammenhang: Alle Elemente der SO3 können gemäß der Parametrisierung in ϑ , φ und $\omega = r$ kontinuierlich in einer Vollkugel mit dem Radius π platziert werden. Elemente mit $\omega = \pi$ liegen an der Oberfläche dieser Vollkugel, und kommen, jeweils gespiegelt am Zentrum der Vollkugel, doppelt vor. Ein Weg in der SO3, der an ein flächenelement führt, kann auch an der entsprechenden Antipode fortgesetzt werden.

Demzufolge gibt es 2 Klassen von geschlossenen Schleifen in der SO3: Einerseits jene mit keiner oder einer geraden Anzahl von Antipodensprüngen. Sie können durch kontinuierliche Verformung auf einen Punkt reduziert werden. Andererseits jene mit einer ungeraden Anzahl von Antipodensprüngen. Bei einer Reduktion verbleibt immer genau ein Antipodensprung. Die SO3 ist somit zweifach wegzusammenhängend.

3.3.4 Eulerwinkel

Eine SO3-Drehmatrix benötigt 3 Parameter zu ihrer eindeutigen Bestimmung, den Betrag und die Richtung von $\vec{\omega}$. Eine derartige Drehung ist jedoch auch durch 3 einzelne auf-

einanderfolgende Drehungen um raumfeste Achsen darstellbar. So lässt sich eine Orthonormalbasis durch 3 Drehungen um zunächst körperfeste Achsen in jede andere beliebige Position transformieren

$$O(\vec{\omega}) = e^{-i\psi L_{3'}} e^{-i\vartheta L_{2'}} e^{-i\varphi L_3}. \quad (3.34)$$

Führt man diese Drehungen auf raumfeste Achsen zurück, so erhält man

$$O(\vec{\omega}) = e^{-i\varphi L_3} e^{-i\vartheta L_2} e^{-i\psi L_3}. \quad (3.35)$$

Die Winkel ψ , ϑ und φ werden die Eulerwinkel einer Drehung $O(\vec{\omega})$ genannt. Sie lassen sich aus $\vec{\omega}$ berechnen. Die Wahl der Achsen und die sich daraus ergebenden Winkel sind nicht eindeutig.

3.3.5 Konjugationsklassen

Die Drehachse eines beliebigen SO3-Elements, $\vec{e}_\omega = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, kann durch eine Koordinatentransformation im Sinne einer SO3-Drehung um die Achse $\vec{e} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$ mit dem Winkel ϑ auf die Form $\vec{e}_\omega' = (0, 0, 1)$ gebracht werden. Die dazugehörigen Elemente der SO3 liegen am Nullmeridian der oberen Hälfte der S^3 , beziehungsweise am Zentrum gespiegelt. Diese Koordinatentransformation ist nicht eindeutig, da man zusätzlich \vec{e}_ω und \vec{e}_ω' noch um die eigene Achse rotieren lassen kann. Das führt zu einer Veränderung von Drehachse und Drehwinkel der Gesamtdrehung. Somit kann jede SO3-Drehung auf eine Drehung um die z-Achse zurückgeführt werden

$$O(\vec{\omega}) = e^{i\vartheta(\sin \varphi L_1 - \cos \varphi L_2)} O(\vec{e}_z, \omega) e^{-i\vartheta(\sin \varphi L_1 - \cos \varphi L_2)}. \quad (3.36)$$

Eine derartige Ähnlichkeitstransformation oder Konjugation bildet auf der Menge der SO3-Matrizen eine Äquivalenzrelation, denn sie ist reflexiv, symmetrisch und transitiv. Die Spur einer SO3-Matrix, $1 + 2 \cos \omega$, bleibt dabei konstant. Somit lässt sich die Gruppe SO3 in disjunkte Äquivalenzklassen, sogenannte Konjugationsklassen, einteilen, die durch den Wert der Spur ihrer Elemente eindeutig charakterisiert sind. Sie liegen jeweils auf einem Breitenkreis der S^3 .

In der Konjugationsklasse zum Winkel $\omega = \pi$, dem Äquator der S^3 , das sind die symmetrischen SO3-Matrizen mit Ausnahme von $\mathbb{1}$, liegen alle Diagonalelemente der SO3 mit Ausnahme von $\mathbb{1}$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Daher sind genau die symmetrischen SO3-Matrizen inklusive $\mathbb{1}$ innerhalb der SO3 diagonalisierbar.

3.3.6 Der Riemannsche Raum

Betrachtet man die SO3-Matrizen als Vektoren in einem \mathbb{R}^9 , so bildet die Gruppe SO3 eine dreidimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^9 . Dieser \mathbb{R}^9 bildet mit dem standardmäßigen konstanten inneren Produkt

$$g_{ij}(x^k) = \mathbb{1}^9 \quad (3.38)$$

einen Riemannschen Raum.

Für das innere Produkt zweier SO3-Matrizen O_1 und O_2 gilt somit

$$O_1 \cdot O_2 = O_2 \cdot O_1 = O_{1ij}O_{2ij} = \text{sp}(O_1^T O_2) = \text{sp}(O_2^T O_1). \quad (3.39)$$

Die Länge einer SO3-Matrix O ergibt sich zu

$$\| O \| = \sqrt{\text{sp}(O^T O)} = \sqrt{3}. \quad (3.40)$$

Die Elemente der SO3 liegen daher auf einer S^8 mit dem Radius $R = \sqrt{3}$. Die Matrizen im Tangentialraum eines Gruppenelementes der SO3 stehen somit auf dieses Element normal. Um auch auf einer SO3 Längen und Winkel messen zu können, liegt es nahe, das innere Produkt des \mathbb{R}^9 auf die Tangentialräume der SO3 zu übertragen. Die SO3 wird damit ebenfalls zu einem Riemannschen Raum.

3.3.7 Tangentialbasen

Die Basisvektoren des Tangentialraums von $\mathbb{1}$, $e_{\mathbb{1},i} = -iL_i$, stehen wie gefordert normal auf $\mathbb{1}$. Sie sind zusätzlich auch zueinander orthogonal und besitzen die Länge $\sqrt{2}$

$$e_{\mathbb{1},i} \cdot \mathbb{1} = -i \text{sp}(L_i^T \mathbb{1}) = 0, \quad (3.41)$$

$$(e_{\mathbb{1},i}) \cdot (e_{\mathbb{1},j}) = -\text{sp}(L_i^T L_j) = 2\delta_{ij}. \quad (3.42)$$

Die Gruppeneigenschaften der differenzierbaren Untermannigfaltigkeit SO3 erlauben es, direkt aus der Tangentialbasis von $\mathbb{1}$ mögliche Orthogonalbasen für den Tangentialraum jedes beliebigen Gruppenelementes O abzuleiten.

Die rechtsinvariante\linksinvariante Tangentialbasis des Elementes O wird folgendermaßen definiert

$$e_{O,i}^R := e_{\mathbb{1},i}O = -iL_iO \quad \setminus \quad e_{O,i}^L := Oe_{\mathbb{1},i} = -iOL_i. \quad (3.43)$$

Diese Basis steht wie gefordert normal auf O und ist ihrerseits ebenfalls orthogonal mit der Länge $\sqrt{2}$

$$e_{O,i}^R \cdot O = -i \text{sp}((L_iO)^T O) = 0 \quad \setminus \quad e_{O,i}^L \cdot O = -i \text{sp}((OL_i)^T O) = 0, \quad (3.44)$$

$$e_{O,i}^R \cdot e_{O,j}^R = -\text{sp}((L_iO)^T (L_jO)) = 2\delta_{ij} \quad \setminus \quad e_{O,i}^L \cdot e_{O,j}^L = -\text{sp}((OL_i)^T (OL_j)) = 2\delta_{ij}. \quad (3.45)$$

Im Folgenden wird nur mehr die rechtsinvariante Tangentialbasis $e_{O,i}^R \rightarrow e_{O,i}$ verwendet.

3.3.8 Die Parametrisierung von Kurven, Flächen, Volumina

Eine Kurve auf der Mannigfaltigkeit der SO3 wird folgendermaßen festgelegt

$$O(t) := e^{-i\vec{\omega}(t)\vec{L}}. \quad (3.46)$$

Der dazugehörige Tangentenvektor an einem Punkt kann als Linearkombination der Tangentialbasis der SO3 desselben Punktes dargestellt werden

$$\partial_t O(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{O(t+dt) - O(t)}{dt} = \Omega_{Ot}^i(t) e_{O,i}(t) = -i\Omega_{Ot}^i(t) L_i O(t) = -i\vec{\Omega}_{Ot}(t) \vec{L} O(t). \quad (3.47)$$

Somit dreht sich die Matrix $O(t)$ bei einer Bewegung auf der Kurve von $O(t)$ zu $O(t + dt)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}_{O_t}(t)\vec{L}$

$$O(t + dt) = O(t) + \partial_t O(t)dt = (\mathbb{1} - i\vec{\Omega}_{O_t}(t)\vec{L}dt)O(t) = e^{-i\vec{\Omega}_{O_t}(t)\vec{L}dt}O(t). \quad (3.48)$$

Die Koordinaten $\vec{\Omega}_{O_t}(t)$ ergeben sich dabei zu

$$\vec{\Omega}_{O_t}(t) = \dot{\omega}(t)\vec{e}_\omega(t) + \sin \omega(t)\dot{\vec{e}}_\omega(t) + (1 - \cos \omega(t))(\vec{e}_\omega(t) \times \dot{\vec{e}}_\omega(t)). \quad (3.49)$$

Damit können nun die Längen von Kurven, sowie der Inhalt von positiv orientierten Flächen und Volumina auf der SO3 berechnet werden

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\det(\partial_i O(t) \cdot \partial_j O(t))} = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{2} \|\vec{\Omega}_{O_t}(t)\|, \quad i, j = t, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} ds dt \sqrt{\det(\partial_i O(s, t) \cdot \partial_j O(s, t))} \quad i, j = s, t, \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} ds dt \sqrt{2}^2 \|\vec{\Omega}_{O_s}(s, t) \times \vec{\Omega}_{O_t}(s, t)\|, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{r_1}^{r_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} dr ds dt \sqrt{\det(\partial_i O(r, s, t) \cdot \partial_j O(r, s, t))} \quad i, j = r, s, t. \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} dr ds dt \sqrt{2}^3 \|\vec{\Omega}_{O_r}(r, s, t) \cdot (\vec{\Omega}_{O_s}(r, s, t) \times \vec{\Omega}_{O_t}(r, s, t))\|, \end{aligned} \quad (3.52)$$

Wählt man im Speziellen die drei Parameterkurven $O(\omega)$, $O(\vartheta)$ und $O(\varphi)$, so folgt für das gesamte Tangentialvolumen der SO3

$$V(\text{SO3}) = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\omega d\vartheta d\varphi \sqrt{2}^3 \|\vec{\Omega}_{O_\omega} \cdot (\vec{\Omega}_{O_\vartheta} \times \vec{\Omega}_{O_\varphi})\| = 16\sqrt{2}\pi^2. \quad (3.53)$$

3.3.9 Die kovariante Ableitung

Affiner Zusammenhang: Aus der Definition von Kurven auf der SO3 und deren Ableitung kann die ‘‘Veränderung’’ der Tangentialbasis bei einer Bewegung entlang einer Kurve berechnet werden. Dabei wird, um die einzelnen Tangentialbasen miteinander vergleichbar zu machen, die Differenz der Tangentialbasen der Punkte $O(t)$ und $O(t + dt)$ auf den Tangentialraum des Ausgangspunktes $O(t)$ projiziert. Der durch diese Vorgangsweise im Folgenden definierte affine Zusammenhang ist verträglich mit dem aus dem \mathbb{R}^9 induzierten Maßtensor der SO3

$$\begin{aligned} \partial_t(L_i O(t)) &= L_i(-i\Omega_{O_t}^j(t)L_j O(t)) = -i\Omega_{O_t}^j(t)\frac{1}{2}([L_i, L_j] + \{L_i, L_j\})O(t) \\ &= -i\Omega_{O_t}^j(t)\frac{1}{2}(i\epsilon_{ijk}L_k + \{L_i, L_j\})O(t). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Der erste Summand liegt im Tangentialraum von $O(t)$, der zweite Summand steht normal darauf. Diese Normalkomponente der Differenz wird also in der weiteren Rechnung einfach weggelassen und man erhält für den gesuchten affinen Zusammenhang $\Gamma_{O_t}(t)$

$$\partial_t(L_i O(t)) = -i\Omega_{O_t}^j(t) \frac{1}{2}(L_j)_{ik} L_k O(t) = -i\frac{1}{2}\vec{\Omega}_{O_t}(t)\vec{L}_{ik} L_k O(t) = -i\Gamma_{O_t}(t)_{ik} L_k O(t), \quad (3.55)$$

$$\Gamma_{O_t}(t) := \vec{\Gamma}_{O_t}(t)\vec{L} := \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{O_t}(t)\vec{L}. \quad (3.56)$$

Somit dreht sich der Vektor der Tangentialbasen $L_k O(t)$ bei einer Bewegung auf der Kurve von $O(t)$ zu $O(t+dt)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\Gamma_{O_t}(t) = \vec{\Gamma}_{O_t}(t)\vec{L}$. Er dreht sich also halb so schnell wie das zugrundeliegende SO3-Element $O(t)$

$$\begin{aligned} L_i O(t+dt) &= L_i O(t) + \partial_t(L_i O(t))dt = (\mathbb{1}_{ik} - i\Gamma_{O_t}(t)_{ik}dt)L_k O(t) \\ &= e^{-i\Gamma_{O_t}(t)_{ik}dt} L_k O(t). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Definition: Aus der Definition des affinen Zusammenhangs kann nun die kovariante Ableitung $D_{O_t}(t)$ eines Vektorfeldes $v(t) = \vec{v}(t)(-i\vec{L}O(t))$ entlang der Kurve $O(t)$ berechnet werden

$$\begin{aligned} \partial_t v(t) &= \partial_t \vec{v}(t) (-i\vec{L}O(t)) + \vec{v}(t) \partial_t (-i\vec{L}O(t)) \\ &= (\partial_t \mathbb{1} + i\Gamma_{O_t}(t))\vec{v}(t) (-i\vec{L}O(t)) \\ &= D_{O_t}(t)\vec{v}(t) (-i\vec{L}O(t)). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Für den Paralleltransport eines Vektors gilt daher

$$D_{O_t}(t)\vec{v}(t) = (\partial_t \mathbb{1} + i\Gamma_{O_t}(t))\vec{v}(t) = 0. \quad (3.59)$$

3.3.10 Der Krümmungstensor

Wie bei einer allgemeinen Mannigfaltigkeit wird auch auf der SO3 das Maß der Krümmung durch die Parallelverschiebung eines Vektors entlang einer infinitesimal kleinen geschlossenen Kurve definiert. Hierfür legt man in die 3 dimensionale Mannigfaltigkeit der SO3 eine beliebige 2 dimensionale Fläche parametrisiert durch $O(s, t)$. Ausgehend von einem bestimmten Punkt $O(s, t)$ bewegt man sich dann auf der Schleife $O(s, t) \rightarrow O(s+ds, t) \rightarrow O(s+ds, t+dt) \rightarrow O(s, t+dt) \rightarrow O(s, t)$. Für eine beliebiges Teilstück dieser Schleife gilt der allgemeine Ansatz für die Parallelverschiebung

$$\vec{v}(r+dr) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(\mathbb{1} - i\Gamma_{O_r}(r + k\frac{dr}{n}) \frac{dr}{n} \right) \vec{v}(r) = dO(r)\vec{v}(r). \quad (3.60)$$

Entwickelt man nun jedes Teilstück bis zur zweiten Ordnung und reiht alle 4 Teilstücke chronologisch aneinander, so erhält man implizit die Definition für die gesuchte Matrix des Krümmungstensors $R_{O_{st}}(s, t) := \vec{R}_{O_{st}}(s, t)\vec{L}$

$$\vec{v}_1(s, t) = (dO(s, t+dt) dO(s+ds, t+dt) dO(s+ds, t) dO(s, t)) \vec{v}_0(s, t)$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbb{1} - i(\partial_s \Gamma_{Ot}(s, t) - \partial_t \Gamma_{Os}(s, t) + i\Gamma_{Os}(s, t)\Gamma_{Ot}(s, t) - i\Gamma_{Ot}(s, t)\Gamma_{Os}(s, t)) dsdt) \vec{v}_0(s, t) \\
&= (\mathbb{1} - i(\partial_s \vec{\Gamma}_{Ot}(s, t) - \partial_t \vec{\Gamma}_{Os}(s, t) - \vec{\Gamma}_{Os}(s, t) \times \vec{\Gamma}_{Ot}(s, t)) \vec{L} dsdt) \vec{v}_0(s, t) \\
&= (\mathbb{1} - iR_{Ost}(s, t) dsdt) \vec{v}_0(s, t) \\
&= (\mathbb{1} - i\vec{R}_{Ost}(s, t) \vec{L} dsdt) \vec{v}_0(s, t). \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Der Differenzvektor in der Tangentialbasis des Punktes $O(s, t)$ lautet somit in kovarianter Form (siehe Gl. 2.60)

$$v_1(s, t) - v_0(s, t) = \Delta v^i(s, t) (-iL_i O(s, t)) = v_0^j(s, t) dsdt (iR_{Ojts}^i(s, t)) (-iL_i O(s, t)). \tag{3.62}$$

Der Krümmungstensor $R_{Ost}(s, t)$ kann auch direkt aus der kovarianten Ableitung berechnet werden

$$R_{Ost}(s, t) = -i[D_{Os}(s, t), D_{Ot}(s, t)]. \tag{3.63}$$

Die Gruppenelemente der SO_3 drehen sich bei einer Bewegung entlang einer Kurve $O(r)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $2\vec{\Gamma}_{Or}(r)\vec{L}$ im Vergleich zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Gamma}_{Or}(r)\vec{L}$ der parallel verschobenen Vektoren. Die Forderung, dass man nach dem Umlauf einer geschlossenen Schleife wieder das ursprüngliche Gruppenelement erreicht, führt auf eine Einschränkung für die Koordinaten des affinen Zusammenhangs $\vec{\Gamma}_{Or}(r)$, die sogenannte Maurer Cartan Beziehung

$$\partial_s 2\vec{\Gamma}_{Ot}(s, t) - \partial_t 2\vec{\Gamma}_{Os}(s, t) - 2\vec{\Gamma}_{Os}(s, t) \times 2\vec{\Gamma}_{Ot}(s, t) = 0. \tag{3.64}$$

Die Koordinaten des Krümmungstensors $\vec{R}_{Ost}(s, t)$ erhalten folglich eine besonders einfache Form

$$\begin{aligned}
\vec{R}_{Ost}(s, t) &= \partial_s \vec{\Gamma}_{Ot}(s, t) - \partial_t \vec{\Gamma}_{Os}(s, t) - \vec{\Gamma}_{Os}(s, t) \times \vec{\Gamma}_{Ot}(s, t) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_s \vec{\Gamma}_{Ot}(s, t) - \partial_t \vec{\Gamma}_{Os}(s, t)) = \vec{\Gamma}_{Os}(s, t) \times \vec{\Gamma}_{Ot}(s, t). \tag{3.65}
\end{aligned}$$

3.4 Die Gruppe SU2

Die Gruppe SU2 besteht aus der Menge aller invertierbaren 2x2 Matrizen U mit komplexen Koeffizienten für die gilt: $UU^\dagger = 1$ und $\det(U) = 1$.

3.4.1 Der Tangentialraum von $\mathbb{1}$

Die Menge aller komplexer 2x2 Matrizen T_U , für die gilt: $T_U = -T_U^\dagger$ und $\text{spur}(T_U) = 0$, bildet den Tangentialraum von $\mathbb{1}$, \mathfrak{su}_2 .

Der Ansatz

$$T_U := -i\omega^i s_i = -i\vec{\omega}\vec{s}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.66}$$

führt zu einer möglichen 3-dimensionalen komplexen Basis $-is_i$ mit den Pauli Matrizen σ_i . Diese Basis erfüllt die Forderung einer Lie-Algebra

$$s_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \frac{1}{2}\sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{3.67}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad [s_i, s_j] = i\epsilon_{ijk}s_k, \tag{3.68}$$

$$\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}, \quad s_i s_j = \frac{1}{2} i \epsilon_{ijk} s_k + \frac{1}{4} \delta_{ij}. \quad (3.69)$$

In Analogie zur SO3 wird im Weiteren auf Grund des gleichen Kommutators $-is_i$ und nicht $-i\sigma_i$ als Basis des Tangentialraums von $\mathbb{1}$ herangezogen.

3.4.2 Die Darstellung der SU2

Jedes Element U der SU2 kann mittels der Exponentialfunktion durch Elemente des Tangentialraums von $\mathbb{1}$, su_2 , dargestellt werden

$$U(\vec{\omega}) = e^{TU} = e^{-i\vec{\omega}\vec{s}} = e^{-i\omega\vec{e}_\omega\vec{s}} = e^{-i\omega s_\omega}. \quad (3.70)$$

Auf Grund der zyklischen Eigenschaften der Potenzen von s_ω gilt

$$U(\vec{\omega}) = e^{-i\omega s_\omega} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - i2s_\omega \sin\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (3.71)$$

Explizit ausgerechnet ergibt sich für die allgemeine Darstellung einer SU2-Matrix somit folgende Form

$$U(\vec{\omega}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} - ie_\omega^3 \sin\frac{\omega}{2} & -e_\omega^2 \sin\frac{\omega}{2} - ie_\omega^1 \sin\frac{\omega}{2} \\ e_\omega^2 \sin\frac{\omega}{2} - ie_\omega^1 \sin\frac{\omega}{2} & \cos\frac{\omega}{2} + ie_\omega^3 \sin\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

Diese Darstellung ist allerdings mehrdeutig

$$U(\omega, \vec{e}_\omega) = e^{-i\omega\vec{e}_\omega\vec{s}} = U(\omega + 4\pi k, \vec{e}_\omega) = e^{-i(\omega+4\pi k)\vec{e}_\omega\vec{s}}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (3.73)$$

$$U(\omega, \vec{e}_\omega) = e^{-i\omega\vec{e}_\omega\vec{s}} = U(4\pi - \omega, -\vec{e}_\omega) = e^{-i(4\pi-\omega)(-\vec{e}_\omega)\vec{s}}. \quad (3.74)$$

Man beschränkt sich daher für eine eindeutige Darstellung auf folgenden Parameterbereich für $\vec{\omega}(\vartheta, \varphi, \omega)$

$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi. \quad (3.75)$$

Für $\omega = 2\pi$ bleibt die Wahl von \vec{e}_ω vollkommen unbestimmt.

Nachbarelemente von $U(\vec{\omega} = 0) = \mathbb{1}$ können als $U(d\vec{\omega})$ identifiziert werden

$$U(d\vec{\omega}) = e^{-id\vec{\omega}\vec{s}} = \mathbb{1} - id\vec{\omega}\vec{s}. \quad (3.76)$$

3.4.3 Allgemeine Eigenschaften

Drehungen im \mathbb{C}^2 : Fasst man die Elemente der SU2 als Automorphismen des linearen Vektorraums \mathbb{C}^2 auf, so impliziert die Unitarität, dass die Länge und das innere Produkt der abgebildeten Vektoren erhalten bleiben. Orthonormalbasen werden also auf Orthonormalbasen abgebildet. In Analogie zur SO3 spricht man dann von abstrakten Drehungen im \mathbb{C}^2 indem man mit \vec{e}_ω die abstrakte Drehachse und mit ω den dazugehörigen Drehwinkel bezeichnet.

Beziehung zur Sphäre S^3 : Der Parameterbereich von α , ϑ und φ auf einer S^3 ist mit $\omega = 2\alpha$ ident mit dem Parameterbereich von ω , ϑ und φ auf der SU2. Versucht man nun, dementsprechend die Elemente der SU2 kontinuierlich auf der S^3 zu platzieren, so gelingt dies im Gegensatz zur SO3 an allen Punkten der S^3 . Dies ist deshalb möglich, weil alle Elemente der SU2 mit $\omega = 2\pi$ und beliebiger Drehachse durch die negative Einheitsmatrix $-\mathbb{1}$ repräsentiert werden, welche mit dem Südpol der S^3 identifiziert werden kann. Die Gruppe der SU2 ist also einer S^3 homöomorph.

Wegzusammenhang: Alle Elemente der SU2 können gemäß der Parametrisierung in ϑ , φ und $\omega = r$ kontinuierlich in einer Vollkugel mit dem Radius 2π platziert werden. Elemente mit $\omega = 2\pi$ liegen an der Oberfläche dieser Vollkugel, und entsprechen alle der negativen Einheit $-\mathbb{1}$. Ein Weg in der SU2, der an die Oberfläche führt, kann an einem beliebigen anderen Punkt der Oberfläche fortgesetzt werden, ohne dass man in diesem Bild von einem Sprung sprechen muss, da die Verbindung zweier Oberflächenpunkte durch einen beliebigen Weg auf der Oberfläche immer der gleichen Matrix $-\mathbb{1}$ entspricht. Demzufolge gibt es nur eine Klassen von geschlossenen Schleifen, die alle auf einen Punkt reduziert werden können. Die SU2 ist somit einfach wegzusammenhängend.

3.4.4 Eulerwinkel

Eine SU2-Drehmatrix benötigt 3 Parameter zu ihrer eindeutigen Bestimmung, den Betrag und die Richtung von $\vec{\omega}$. Eine derartige Drehung ist jedoch auch durch 3 einzelne aufeinanderfolgende Drehungen um raumfeste Achsen darstellbar. Eine direkte Analogie zur SO3 ermöglicht die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. Für zwei Matrizen X und Y lautet sie folgendermaßen

$$e^X e^Y = e^{Z(X,Y)}, \quad (3.77)$$

$$Z(X, Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots \quad (3.78)$$

Die nicht angeschriebenen Glieder der unendlichen Reihe $Z(X, Y)$ enthalten ausschließlich Verschachtelungen von Kommutatoren von X und Y . Da die $L_i \in \text{SO3}$ und die $s_i \in \text{SU2}$ die gleichen Kommutatorbeziehungen erfüllen, ist die resultierende Drehung $\vec{\omega}_3$ zweier aufeinanderfolgenden Drehungen mit $\vec{\omega}_1$ und $\vec{\omega}_2$ in beiden Gruppen ident. Somit kann das Ergebnis für die Eulerwinkel der SO3 direkt in die SU2 übernommen werden

$$U(\vec{\omega}) = e^{-i\varphi s_3} e^{-i\vartheta s_2} e^{-i\psi s_3}. \quad (3.79)$$

Die Winkel ψ , ϑ und φ werden die Eulerwinkel einer Drehung $U(\vec{\omega})$ genannt. Sie lassen sich aus $\vec{\omega}$ berechnen. Die Wahl der Achsen und die sich daraus ergebenden Winkel sind nicht eindeutig.

3.4.5 Konjugationsklassen

Die Drehachse eines beliebigen SU2-Elements, $\vec{e}_\omega = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, kann in Analogie zur SO3 durch eine Koordinatentransformation im Sinne einer SU2-Drehung ebenfalls um die anschauliche Achse $\vec{e} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$ mit dem anschaulichen Winkel ϑ auf die Form $\vec{e}'_\omega = (0, 0, 1)$ gebracht werden. Die dazugehörigen Elemente der SU2 liegen am Nullmeridian der S^3 . Diese Koordinatentransformation ist nicht eindeutig. Eine zusätzliche Rotation von \vec{e}_ω und/oder \vec{e}'_ω um die eigene Achse verändert wieder Achse und Winkel der resultierenden Gesamtdrehung.

Somit kann jede SU2-Drehung auf eine Drehung um die z-Achse zurückgeführt werden

$$U(\vec{\omega}) = e^{i\vartheta(\sin \varphi s_1 - \cos \varphi s_2)} U(\vec{e}_z, \omega) e^{-i\vartheta(\sin \varphi s_1 - \cos \varphi s_2)}. \quad (3.80)$$

Die durch derartige Ähnlichkeitstransformationen gebildeten Äquivalenzklassen oder Konjugationsklassen sind wiederum durch die Spur ihrer Elemente, $2 \cos \frac{\omega}{2}$, eindeutig charakterisiert und liegen jeweils auf einem Breitenkreis der S^3 .

In der Konjugationsklasse zum einem Winkel ω liegen jeweils 2 Diagonalelemente der SU2

$$D_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\omega}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\omega}{2}} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Für $\omega = 0, 2\pi$ fallen diese beiden Elemente zusammen. Daher sind alle SU2-Matrizen innerhalb der SU2 diagonalisierbar.

3.4.6 Der Riemannsche Raum

Betrachtet man die SU2-Matrizen als Vektoren in einem \mathbb{R}^8 , so bildet die Gruppe SU2 eine dreidimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^8 . Dieser \mathbb{R}^8 bildet mit dem standardmäßigen konstanten inneren Produkt

$$g_{ij}(x^k) = \mathbb{1}^8 \quad (3.82)$$

einen Riemannschen Raum.

Für das innere Produkt zweier SU2-Matrizen U_1 und U_2 gilt somit

$$U_1 \cdot U_2 = U_2 \cdot U_1 = \text{Re}(\text{sp}(U_1^\dagger U_2)) = \text{Re}(\text{sp}(U_2^\dagger U_1)). \quad (3.83)$$

Die Länge einer SU2-Matrix U ergibt sich zu

$$\|U\| = \sqrt{\text{Re}(\text{sp}(U^\dagger U))} = \sqrt{2}. \quad (3.84)$$

Die Elemente der SU2 liegen daher grundsätzlich auf einer S^7 mit dem Radius $R = \sqrt{2}$. Die Matrizen im Tangentialraum eines Gruppenelementes der SU2 stehen somit auf dieses Element normal. Durch das Übertragen des inneren Produkts des \mathbb{R}^8 auf die Tangentialräume der SU2 wird diese selbst zu einem Riemannschen Raum.

Zusätzlich kann jede SU2-Matrix als Linearkombination von 4 linear unabhängigen Vektoren des \mathbb{R}^8 dargestellt werden

$$U(\vec{\omega}) = \cos \frac{\omega}{2} (\mathbb{1}) + \vec{e}_\omega \sin \frac{\omega}{2} (-i\vec{\sigma}) = q_0 (\mathbb{1}) + \vec{q}(-i\vec{\sigma}), \quad (3.85)$$

$$q_0^2 + \vec{q}^2 = 1. \quad (3.86)$$

Diese 4 linear unabhängigen Vektoren b_0, b_1, b_2 und b_3 bilden eine Orthogonalbasis eines \mathbb{R}^4 und besitzen die Länge $\sqrt{2}$

$$b_0 \cdot b_0 = \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \text{Re}(\text{sp}(\mathbb{1}^\dagger \mathbb{1})) = 2, \quad (3.87)$$

$$b_0 \cdot b_i = \mathbb{1} \cdot (-i\sigma_i) = \text{Re}(-i \text{sp}(\mathbb{1}^\dagger \sigma_i)) = 0, \quad (3.88)$$

$$b_i \cdot b_j = (-i\sigma_i) \cdot (-i\sigma_j) = \text{Re}(\text{sp}(\sigma_i^\dagger \sigma_j)) = 2\delta_{ij}. \quad (3.89)$$

Die Gruppe der SU2 liegt daher im Speziellen in einem \mathbb{R}^4 , in dem sie eine verallgemeinerte S^3 mit dem Radius $R = \sqrt{2}$ bildet. Die Elemente der SU2, $U(\vec{\omega})$, werden daher häufig auch mit $Q(\vec{\alpha})$, mit $\vec{\omega} = 2\vec{\alpha}$, bezeichnet, um diese Identität zu betonen.

3.4.7 Tangentialbasen

Die Basisvektoren des Tangentialraums von $\mathbb{1}$, $e_{\mathbb{1},i} = -is_i$, stehen wie gefordert normal auf $\mathbb{1}$. Sie sind zusätzlich auch zueinander orthogonal und besitzen die Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$e_{\mathbb{1},i} \cdot \mathbb{1} = \text{Re}(\text{isp}(s_i^\dagger \mathbb{1})) = 0, \quad (3.90)$$

$$(e_{\mathbb{1},i}) \cdot (e_{\mathbb{1},j}) = \text{Re}(\text{sp}(s_i^\dagger s_j)) = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (3.91)$$

Die Gruppeneigenschaften der differenzierbaren Untermannigfaltigkeit SU2 erlauben es, direkt aus der Tangentialbasis von $\mathbb{1}$ mögliche Orthogonalbasen für den Tangentialraum jedes beliebigen Gruppenelementes U abzuleiten.

Die rechtsinvariante\linksinvariante Tangentialbasis des Elementes U wird folgendermaßen definiert

$$e_{U,i}^R := e_{\mathbb{1},i}U = -is_iU \quad \setminus \quad e_{U,i}^L := Ue_{\mathbb{1},i} = -iUs_i. \quad (3.92)$$

Diese Basis steht wie gefordert normal auf U und ist ihrerseits ebenfalls orthogonal mit der Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$e_{U,i}^R \cdot U = \text{Re}(\text{isp}((s_iU)^\dagger U)) = 0 \quad \setminus \quad e_{U,i}^L \cdot U = \text{Re}(\text{isp}((Us_i)^\dagger U)) = 0, \quad (3.93)$$

$$e_{U,i}^R \cdot e_{U,j}^R = \text{Re}(\text{sp}((s_iU)^\dagger (s_jU))) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \setminus \quad e_{U,i}^L \cdot e_{U,j}^L = \text{Re}(\text{sp}((Us_i)^\dagger (Us_j))) = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (3.94)$$

Im Folgenden wird nur mehr die rechtsinvariante Tangentialbasis $e_{U,i}^R \rightarrow e_{U,i}$ verwendet.

3.4.8 Die Parametrisierung von Kurven, Flächen, Volumina

Eine Kurve auf der Mannigfaltigkeit der SU2 wird folgendermaßen festgelegt

$$U(t) := e^{-i\vec{\omega}(t)\vec{s}}. \quad (3.95)$$

Der dazugehörige Tangentenvektor an einem Punkt kann wieder als Linearkombination der Tangentialbasis der SU2 desselben Punktes dargestellt werden

$$\partial_t U(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{U(t+dt) - U(t)}{dt} = \Omega_{Ut}^i(t) e_{U,i}(t) = -i\Omega_{Ut}^i(t) s_i U(t) = -i\vec{\Omega}_{Ut}(t)\vec{s}U(t). \quad (3.96)$$

Somit dreht sich die Matrix $U(t)$ bei einer Bewegung auf der Kurve von $U(t)$ zu $U(t+dt)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}_{Ut}(t)\vec{s}$

$$U(t+dt) = U(t) + \partial_t U(t)dt = (\mathbb{1} - i\vec{\Omega}_{Ut}(t)\vec{s}dt)U(t) = e^{-i\vec{\Omega}_{Ut}(t)\vec{s}dt}U(t). \quad (3.97)$$

Die Koordinaten $\vec{\Omega}_{Ut}(t)$ ergeben sich dabei zu

$$\vec{\Omega}_{Ut}(t) = \dot{\omega}(t)\vec{e}_\omega(t) + \sin \omega(t) \dot{\vec{e}}_\omega(t) + (1 - \cos \omega(t)) (\vec{e}_\omega(t) \times \dot{\vec{e}}_\omega(t)). \quad (3.98)$$

Damit können nun die Längen von Kurven, sowie der Inhalt von positiv orientierten Flächen und Volumina auf der SU2 berechnet werden

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\det(\partial_i U(t) \cdot \partial_j U(t))} = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \|\vec{\Omega}_{Ut}(t)\|, \quad i, j = t, \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned}
A &= \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} ds dt \sqrt{\det(\partial_i U(s, t) \cdot \partial_j U(s, t))} \quad i, j = s, t, \\
&= \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} ds dt \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \|\vec{\Omega}_{Us}(s, t) \times \vec{\Omega}_{Ut}(s, t)\|, \tag{3.100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{r_1}^{r_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} dr ds dt \sqrt{\det(\partial_i U(r, s, t) \cdot \partial_j U(r, s, t))} \quad i, j = r, s, t. \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} dr ds dt \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \|\vec{\Omega}_{Ur}(r, s, t) \cdot (\vec{\Omega}_{Us}(r, s, t) \times \vec{\Omega}_{Ut}(r, s, t))\|, \tag{3.101}
\end{aligned}$$

Wählt man im Speziellen die drei Parameterkurven $U(\omega)$, $U(\vartheta)$ und $U(\varphi)$, so folgt für das gesamte Tangentialvolumen der SU2

$$V(\text{SU2}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} d\omega d\vartheta d\varphi \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \|\vec{\Omega}_{U\omega} \cdot (\vec{\Omega}_{U\vartheta} \times \vec{\Omega}_{U\varphi})\| = 4\sqrt{2}\pi^2. \tag{3.102}$$

Dies entspricht der 3-dimensionalen Oberfläche einer verallgemeinerten S^3 mit dem Radius $R = \|U\| = \sqrt{2}$.

3.4.9 Die kovariante Ableitung

Affiner Zusammenhang: Aus der Definition von Kurven auf der SU2 und deren Ableitung kann analog zur SO3 die ‘‘Veränderung’’ der Tangentialbasis bei einer Bewegung entlang einer Kurve berechnet werden. Dabei wird, um die einzelnen Tangentialbasen miteinander vergleichbar zu machen, die Differenz der Tangentialbasen der Punkte $U(t)$ und $U(t + dt)$ auf den Tangentialraum des Ausgangspunktes $U(t)$ projiziert. Der durch diese Vorgangsweise im Folgenden definierte affine Zusammenhang ist verträglich mit dem aus dem \mathbb{R}^8 induzierten Maßtensor der SU2

$$\begin{aligned}
\partial_t(s_i U(t)) &= s_i(-i\Omega_{Ut}^j(t)s_j U(t)) = -i\Omega_{Ut}^j(t)\frac{1}{2}([s_i, s_j] + \{s_i, s_j\})U(t) \\
&= -i\Omega_{Ut}^j(t)\frac{1}{2}(i\epsilon_{ijk}s_k + \frac{1}{2}\delta_{ij})U(t). \tag{3.103}
\end{aligned}$$

Der erste Summand liegt im Tangentialraum von $U(t)$, der zweite Summand steht normal darauf. Diese Normalkomponente der Differenz wird also in der weiteren Rechnung einfach weggelassen und man erhält für den gesuchten affinen Zusammenhang $\Gamma_{Ut}(t)$

$$\partial_t(s_i U(t)) = -i\Omega_{Ut}^j(t)\frac{1}{2}(L_j)_{ik}s_k U(t) = -i\frac{1}{2}\vec{\Omega}_{Ut}(t)\vec{L}_{ik}s_k U(t) = -i\Gamma_{Ut}(t)_{ik}s_k U(t), \tag{3.104}$$

$$\Gamma_{Ut}(t) := \vec{\Gamma}_{Ut}(t)\vec{L} := \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{Ut}(t)\vec{L}. \tag{3.105}$$

Somit dreht sich der Vektor der Tangentialbasen $s_k U(t)$ bei einer Bewegung auf der Kurve von $U(t)$ zu $U(t+dt)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\Gamma_{Ut}(t) = \vec{\Gamma}_{Ut}(t)\vec{L}$. Er dreht sich also "halb" so schnell wie das zugrundeliegende SU2-Element $U(t)$

$$\begin{aligned} s_i U(t+dt) &= s_i U(t) + \partial_t(s_i U(t))dt = (\mathbb{1}_{ik} - i\Gamma_{Ut}(t)_{ik}dt)s_k U(t) \\ &= e^{-i\Gamma_{Ut}(t)_{ik}dt}s_k U(t). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Definition: Aus der Definition des affinen Zusammenhangs kann nun wiederum die kovariante Ableitung $D_{Ut}(t)$ eines Vektorfeldes $v(t) = \vec{v}(t)(-i\vec{s}U(t))$ entlang der Kurve $U(t)$ berechnet werden

$$\begin{aligned} \partial_t v(t) &= \partial_t \vec{v}(t)(-i\vec{s}U(t)) + \vec{v}(t)\partial_t(-i\vec{s}U(t)) \\ &= (\partial_t \mathbb{1} + i\Gamma_{Ut}(t))\vec{v}(t)(-i\vec{s}U(t)) \\ &= D_{Ut}(t)\vec{v}(t)(-i\vec{s}U(t)). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Für den Paralleltransport eines Vektors gilt daher

$$D_{Ut}(t)\vec{v}(t) = (\partial_t \mathbb{1} + i\Gamma_{Ut}(t))\vec{v}(t) = 0. \quad (3.108)$$

3.4.10 Der Krümmungstensor

Verschiebt man nun wiederum einen Vektor entlang einer infinitesimal kleinen geschlossenen Kurve auf der SU2, die durch $U(s, t) \rightarrow U(s+ds, t) \rightarrow U(s+ds, t+dt) \rightarrow U(s, t+dt) \rightarrow U(s, t)$ parametrisiert ist, parallel, so lässt sich daraus ein Maß für die Krümmung der SU2 ableiten.

Für ein beliebiges Teilstück dieser Schleife gilt der allgemeine Ansatz für die Parallelverschiebung

$$\vec{v}(r+dr) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (\mathbb{1} - i\Gamma_{Ur}(r + k\frac{dr}{n})\frac{dr}{n})\vec{v}(r) = dO(r)\vec{v}(r). \quad (3.109)$$

Entwickelt man nun jedes Teilstück bis zur zweiten Ordnung und reiht alle 4 Teilstücke chronologisch aneinander, so erhält man implizit die Definition für die gesuchte Matrix des Krümmungstensors $R_{Ust}(s, t) := \vec{R}_{Ust}(s, t)\vec{L}$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(s, t) &= (dO(s, t+dt)dO(s+ds, t+dt)dO(s+ds, t)dO(s, t))\vec{v}_0(s, t) \\ &= (\mathbb{1} - i(\partial_s \Gamma_{Ut}(s, t) - \partial_t \Gamma_{Us}(s, t) + i\Gamma_{Us}(s, t)\Gamma_{Ut}(s, t) - i\Gamma_{Ut}(s, t)\Gamma_{Us}(s, t))dsdt)\vec{v}_0(s, t) \\ &= (\mathbb{1} - i(\partial_s \vec{\Gamma}_{Ut}(s, t) - \partial_t \vec{\Gamma}_{Us}(s, t) - \vec{\Gamma}_{Us}(s, t) \times \vec{\Gamma}_{Ut}(s, t))\vec{L}dsdt)\vec{v}_0(s, t) \\ &= (\mathbb{1} - iR_{Ust}(s, t)dsdt)\vec{v}_0(s, t) \\ &= (\mathbb{1} - i\vec{R}_{Ust}(s, t)\vec{L}dsdt)\vec{v}_0(s, t). \end{aligned} \quad (3.110)$$

Für den Differenzvektor in der Tangentialbasis des Punktes $U(s, t)$ ergibt sich in kovarianter Schreibweise (siehe Gl. 2.60)

$$v_1(s, t) - v_0(s, t) = \Delta v^i(s, t)(-is_i U(s, t)) = v_0^j(s, t)dsdt(iR_{Ujts}^i(s, t))(-is_i U(s, t)). \quad (3.111)$$

Eine alternative Darstellung des Krümmungstensors liefert wieder der Kommutator der kovarianten Ableitung

$$R_{Ust}(s, t) = -i[D_{Us}(s, t), D_{Ut}(s, t)]. \quad (3.112)$$

Die Gruppenelemente der SU2 drehen sich bei einer Bewegung entlang einer Kurve $U(r)$ mit der Winkelgeschwindigkeit $2\vec{\Gamma}_{Ur}(r)\vec{s}$ im Vergleich zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Gamma}_{Ur}(r)\vec{L}$ der parallel verschobenen Vektoren. Damit die Veränderung eines SU2-Elementes $U(r)$ wegunabhängig ist, muss wieder die Maurer Cartan Beziehung gelten

$$\partial_s 2\vec{\Gamma}_{Ut}(s, t) - \partial_t 2\vec{\Gamma}_{Us}(s, t) - 2\vec{\Gamma}_{Us}(s, t) \times 2\vec{\Gamma}_{Ut}(s, t) = 0. \quad (3.113)$$

Die Koordinaten des Krümmungstensors $\vec{R}_{Ust}(s, t)$ nehmen damit eine besonders einfache Form an

$$\begin{aligned} \vec{R}_{Ust}(s, t) &= \partial_s \vec{\Gamma}_{Ut}(s, t) - \partial_t \vec{\Gamma}_{Us}(s, t) - \vec{\Gamma}_{Us}(s, t) \times \vec{\Gamma}_{Ut}(s, t) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_s \vec{\Gamma}_{Ut}(s, t) - \partial_t \vec{\Gamma}_{Us}(s, t)) = \vec{\Gamma}_{Us}(s, t) \times \vec{\Gamma}_{Ut}(s, t). \end{aligned} \quad (3.114)$$

4 Die klassische Feldtheorie

Teilchen können in der Physik durch mathematische Punkte mit gewissen Eigenschaften, aber auch durch zeitlich und räumlich unendlich ausgedehnte Felder mit den gleichen Eigenschaften beschrieben werden.

4.1 Die nichtrelativistische Mechanik

Zur Beschreibung eines mechanischen Systems stehen mehrere gleichwertige Modelle zur Verfügung, die voneinander abgeleitet werden können, und je nach konkreter Aufgabenstellung ihre Anwendung finden.

4.1.1 Das D'Alembertsche Prinzip

Betrachtet man ein beliebiges mechanisches System zu einem Zeitpunkt t , so kann man gedanklich an jedem Systempunkt eine infinitesimal kleine lokale virtuelle Verschiebung $\delta\vec{x}(t, \vec{x})$ durchführen, die jedoch zumindest physikalisch möglich sein muss. Multipliziert man nun diese Verschiebung mit dem Newtonschen Kraftgesetz in einem Inertialsystem, $\vec{f}(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x})\ddot{\vec{x}}(t, \vec{x})$, und integriert über das gesamte Volumen, so erhält man

$$\delta A(t) = \int_V d^3x \vec{f}(t, \vec{x}) \delta\vec{x}(t, \vec{x}) = \int_V d^3x \rho(t, \vec{x}) \ddot{\vec{x}}(t, \vec{x}) \delta\vec{x}(t, \vec{x}) = \int_m dm(t, \vec{x}) \ddot{\vec{x}}(t, \vec{x}) \delta\vec{x}(t, \vec{x}). \quad (4.1)$$

Die bei der virtuellen Verschiebung von inneren und äußeren Kräften geleistete Arbeit $\delta A(t)$ entspricht dem Masseintegral über das Inprodukt von lokaler Beschleunigung und lokalem Verschiebungsvektor.

4.1.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Ein Spezialfall des D'Alembertschen Prinzips ergibt sich, wenn eine stationäre Kraftdichte $\vec{f}(\vec{x})$ aus einer stationären Potentialdichte $v(\vec{x})$ ableitbar ist

$$\vec{f}(\vec{x}) = -\text{grad } v(\vec{x}) \quad \iff \quad \text{rot } \vec{f}(\vec{x}) = 0. \quad (4.2)$$

Man spricht dann von einem konservativen System. Die bei der virtuellen Verschiebung geleistete Arbeit $\delta A(t)$ entspricht nun der Abnahme der potentiellen Energie des Körpers $-\delta V(t)$, und man erhält mit der kinetischen Energie des Körpers $T(t)$

$$\delta A(t) = -\delta V(t) = \int_m dm(t, \vec{x}) \ddot{\vec{x}}(t, \vec{x}) \delta\vec{x}(t, \vec{x}) = \frac{d}{dt} \int_m dm(t, \vec{x}) \dot{\vec{x}}(t, \vec{x}) \delta\vec{x}(t, \vec{x}) - \delta T(t). \quad (4.3)$$

Integriert man nun über die Zeit und lässt die Variation zum Anfangszeitpunkt t_0 und zum Endzeitpunkt t_1 verschwinden, so ergibt sich für die Wirkung S und die Lagrangefunktion $L(t)$

$$\delta\vec{x}(t_0, \vec{x}) = 0, \quad \delta\vec{x}(t_1, \vec{x}) = 0, \quad (4.4)$$

$$\delta S := \delta \int_{t_0}^{t_1} dt L(t) := \delta \int_{t_0}^{t_1} dt T(t) - V(t) = 0. \quad (4.5)$$

Ein beobachtbares Verhalten eines beliebigen mechanischen Systems weist also bei gegebenen Anfangswerten und Endwerten ein Minimum der Wirkung S auf.

4.1.3 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Gegeben sei ein beliebiges mechanisches System. Etwaige Zwangsbedingungen können die Freiheitsgrade dieses Systems einschränken. Man geht in diesem Fall von den Ortskoordinaten \vec{x} zu verallgemeinerten Ortskoordinaten \vec{q} über, die diese Zwangsbedingungen bereits berücksichtigen, und die verbleibenden Freiheitsgrade beschreiben. Ein System mit n Freiheitsgraden besitzt dann im allgemeinen Fall folgende Lagrange-Funktion L

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad i = 1 \dots n. \quad (4.6)$$

Variiert man nun die dazugehörige Wirkung S bei an den Rändern festgehaltenen Werten q_i nach den verallgemeinerten Koordinaten q_i und deren Ableitungen \dot{q}_i und setzt das Ergebnis gleich Null, so lassen sich daraus, unter der Voraussetzung, dass die $\delta q_i(t)$ ebenso wie die $q_i(t)$ voneinander unabhängig sind, die Bewegungsgleichungen des Systems ableiten

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta L(q_i, \dot{q}_i, t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0, \quad (4.7)$$

$$\rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \quad (4.8)$$

Das sind die Euler-Lagrange-Gleichungen. Sie bestehen aus n Differentialgleichungen 2. Ordnung.

4.1.4 Der Hamilton-Formalismus

Zu jedem verallgemeinerten Freiheitsgrad q_i kann man einen verallgemeinerten Impuls p_i definieren

$$p_i := \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.9)$$

Unterzieht man nun die Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ diesbezüglich einer Legendre Transformation, so gelangt man zur Hamilton-Funktion $H(q_i, p_i, t)$. Sie beschreibt die Gesamtenergie $E(q_i, p_i, t)$ des Systems

$$E(q_i, p_i, t) := H(q_i, p_i, t) := p_k \dot{q}_k(q_i, p_i, t) - L(q_i, \dot{q}_i(q_i, p_i, t), t). \quad (4.10)$$

Durch partielle Ableitungen von H nach q_i und p_i erhält man alternative Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_i} = \dot{q}_i. \quad (4.12)$$

Das sind die Hamilton-Gleichungen. Sie bestehen aus $2n$ Differentialgleichungen 1. Ordnung, und gelten genau dann, wenn die Euler-Lagrange-Gleichungen gelten.

4.1.5 Das Noether-Theorem

Für das Wirkungsintegral S eines mechanischen Systems gilt der folgende Satz:

“Jede differenzierbare Transformationsgruppe, also Lie-Gruppe, die das Wirkungsintegral S unverändert lässt, bedingt eine dazugehörige Erhaltungsgröße.”

Bei dieser abstrakten Transformation mit dem kontinuierlichen Symmetrieparameter α gehen t und q_i in t' und q'_i über

$$t' = t + \delta t(q_i, \dot{q}_i, t) = t + T(q_i, \dot{q}_i, t) \delta \alpha, \quad (4.13)$$

$$q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(q_i, \dot{q}_i, t) = q_i(t) + Q_i(q_i, \dot{q}_i, t) \delta \alpha. \quad (4.14)$$

Ausgehend von der wie folgt definierten Invarianz unter einer derartigen Transformation erhält man

$$S' = \int_{t'_1}^{t'_2} dt' L(q'_i, \dot{q}'_i, t') = S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (4.15)$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \delta t - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) = 0. \quad (4.16)$$

Da der Integrationsbereich beliebig ist, muss der Integrand ident Null sein. Dies führt zum Erhalt des Noetherstromes j_N

$$\frac{d}{dt} j_N = \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) T - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} Q_i \right) = 0. \quad (4.17)$$

Die Physik eines abgeschlossenen Systems und damit auch dessen Wirkung S sind unter Translationen in der Zeit und im Ort invariant. Die Lagrangefunktion eines derartigen Systems hängt nur von \dot{q}_i ab, $L = L(\dot{q}_i)$. Eingesetzt in die Gleichungen des Noether-Theorems ergibt sich bei einer Translation in der Zeit $\delta t = \text{const}$ und $\delta q_i = 0$ und daraus folgt der Erhalt der Gesamtenergie E

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = \frac{d}{dt} (p_i \dot{q}_i - L) = \frac{d}{dt} E = 0. \quad (4.18)$$

Im Fall der Translation des Ortes sind die erhaltenen Größen mit $\delta t = 0$ und $\delta q_i = \text{const}$ gleich den verallgemeinerten Impulsen p_i des Systems

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} p_i = 0. \quad (4.19)$$

4.2 Die relativistische Mechanik

4.2.1 Der Minkowski-Raum \mathbb{M}^4

Ausgangspunkt sei ein beliebiges Inertialsystem S , mathematisch beschrieben durch einen 4-dimensionalen reellen Raum, parametrisiert durch die Koordinaten ct, x, y, z . Jedes physikalische Ereignis kann einem Punkt dieses Raumes zugeordnet werden. Vektoren in diesem Raum, $x = x^\mu \partial_\mu$, mit dem Koordinatenvektor

$$x^\mu := (ct, x, y, z)^T, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.20)$$

und einer globalen Basis ∂_μ werden Vierervektoren genannt. Alle Punktteilchen des Universums durchlaufen eine individuelle Weltlinie, parametrisiert durch ρ , die durch den Vierervektor

$$x^\mu(\rho) := (ct(\rho), x(\rho), y(\rho), z(\rho))^T \quad (4.21)$$

eindeutig charakterisiert ist. Die Beziehungen zwischen den Weltlinien aller Punkte werden durch die Gesetze der Physik bestimmt.

In diesem Inertialsystem S gilt für die Ausbreitung des Lichts

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0. \quad (4.22)$$

In einem anderen Inertialsystem S' , das sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit v gegenüber dem ursprünglichen Inertialsystem S bewegt und zum Zeitpunkt $t = 0$ mit S synchronisiert ist, gilt ebenfalls, experimentell unterlegt

$$(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0. \quad (4.23)$$

Eine Koordinatentransformation, beschrieben durch die Matrizen Λ^μ_ν und Λ^ν_μ , die diese Forderung erfüllt, nennt man Lorentz-Transformation

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu. \quad (4.24)$$

Speziell für eine Bewegung von S' gegenüber S in positive x -Richtung mit der Geschwindigkeit v erhält man

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta := \frac{v}{c}, \quad \gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \det(\Lambda^\mu_\nu) = 1. \quad (4.25)$$

Die Lorentz-Transformation lässt also die Orientierung von Basen gleich.

Im Weiteren definiert man in diesem Vektorraum ein inneres Produkt (x, x) . Um nun den Ausdruck $((ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2))$ zu einem Lorentz-Skalar werden zu lassen, ergibt sich für die Koordinaten $g_{\mu\nu}$ dieses inneren Produktes

$$g_{\mu\nu} = (\partial_\mu, \partial_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Daraus folgt

$$(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = (x, x) = x'^\mu x'^\nu g'_{\mu\nu} = (ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2), \quad (4.27)$$

$$g'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\tau g_{\sigma\tau} = g_{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

Die Metrik $g_{\mu\nu}$ ist also in allen Inertialsystemen konstant.

Der Minkowski-Raum \mathbb{M}^4 ist somit ein 4-dimensionaler flacher pseudo-euklidischer Vektorraum mit den Orthonormalbasen ∂_μ und ∂'_μ , die verschiedenen Inertialsystemen entsprechen, und durch Lorentz-Transformationen ineinander übergeführt werden können.

4.2.2 Punktteilchen

Die mit t parametrisierte Weltlinie eines Punktteilchens, $x^\mu(t) = (ct, x(t), y(t), z(t))^T$, sei gegeben. Für das dazugehörige infinitesimale Wegelement $dx^\mu(t)$ gilt

$$dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = (cdt')^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2), \quad (4.29)$$

$$d\tau := \sqrt{\frac{dx^\mu dx_\mu}{c^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt \frac{1}{\gamma} = dt' \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} = dt' \frac{1}{\gamma'}. \quad (4.30)$$

Im Ruhesystem des Punktteilchens wird also $d\tau$ zu dt' . Die neu definierte Invariante $d\tau$ entspricht daher der verstrichenen Eigenzeit des Punktteilchens.

Davon ausgehend werden nun die Vierergeschwindigkeit v^μ und die Viererbeschleunigung a^μ des Punktteilchens mit der neu parametrisierten Weltlinie $x^\mu(t(\tau))$ folgendermaßen definiert

$$v^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}, \quad a^\mu := \frac{dv^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (4.31)$$

Dieses Punktteilchen mit der Lorentz-invarianten Masse m besitzt den Viererimpuls p^μ

$$p^\mu := m v^\mu = m \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{frei}} \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad p^\mu p_\mu = m^2 c^2. \quad (4.32)$$

Die zeitliche Veränderung des Viererimpulses p^μ führt zur Definition der Viererkraft F^μ

$$F^\mu := \frac{d}{d\tau} p^\mu = m a^\mu = \gamma \frac{d}{dt} p^\mu = \gamma \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{frei}} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \right) = \gamma \left(\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{frei}} \\ \vec{F} \end{pmatrix} \right). \quad (4.33)$$

Aus dem Lorentz-Skalar $F^\mu dx_\mu = 0$ lässt sich für ein konservatives System die Erhaltung der Gesamtenergie eines Punktteilchens herleiten

$$F^\mu dx_\mu = \gamma (dE_{\text{frei}} - \vec{F} d\vec{x}) = \gamma (dE_{\text{frei}} - dA) = 0, \quad (4.34)$$

$$E_{\text{frei}} := E_0 + E_{\text{kin}} = mc^2 + m(\gamma - 1)c^2. \quad (4.35)$$

In einem konservativen System entspricht die am Teilchen geleistete Arbeit dA der Abnahme der potentiellen Energie $-dE_{\text{pot}}$ und man erhält nach Integration über die Zeit

$$dE_{\text{frei}} + dE_{\text{pot}} = 0 \quad \rightarrow \quad E_{\text{ges}} := E_{\text{frei}} + E_{\text{pot}} = \text{const.} \quad (4.36)$$

4.3 Die relativistische Feldtheorie

Ausgehend von der nichtrelativistischen Mechanik können alle dort geltenden Gesetze durch Analogien auf nichtrelativistische Felder übertragen werden. Definiert man diese Gesetze für Felder gleichzeitig kovariant, also als Vierervektor\ Vierertensor Gleichungen, so wird die Feldtheorie automatisch relativistisch.

4.3.1 Definition eines Feldes

Gegeben sei ein mechanisches System mit n Freiheitsgraden, die durch die verallgemeinerten Ortskoordinaten $q_i(t)$ $i = 1, 2, \dots, n$ beschrieben werden. In einem ersten Schritt lässt man die Anzahl n der Freiheitsgrade gegen unendlich gehen und ordnet sie Punkten des \mathbb{M}^4 zu

$$q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \rightarrow \quad q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, \infty.$$

In einem zweiten Schritt passt man die Anzahl der Freiheitsgrade so an, dass jedem Punkt des \mathbb{M}^4 genau ein Freiheitsgrad zugeordnet werden kann

$$q_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, \infty \quad \rightarrow \quad \phi(t, \vec{x}).$$

Man erhält somit ein kontinuierliches Skalarfeld $\phi(x^\mu)$. Ordnet man jedem Punkt des \mathbb{M}^4 mehrere Freiheitsgrade zu, so ergeben sich Vektorfelder $T^\mu(x^\mu)$ und Tensorfelder $T^{\mu\nu}(x^\mu)$.

4.3.2 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Gegeben sei ein Vektorfeld $T^\nu(x^\mu)$. Die zugehörige, nun von unendlich vielen Freiheitsgraden abhängige Lagrangefunktion $L(t)$ lässt sich als Integral über eine Lagrangedichte $\mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu), x^\mu)$ anschreiben

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu), x^\mu). \quad (4.37)$$

Eine weitere Integration über die Zeit ergibt wiederum die Wirkung S des Systems

$$S = \int dt L(t) = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu), x^\mu). \quad (4.38)$$

Um die Feldtheorie relativistisch korrekt zu formulieren, muss die Lagrangedichte \mathcal{L} so gewählt werden, dass die Wirkung unter Lorentztransformationen forminvariant bleibt. Denn nur dann ist gewährleistet, dass die sich ergebenden Bewegungsgleichungen ebenfalls, wie gefordert, forminvariant sind. Es muss also gelten

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu), x^\mu) = S' = \frac{1}{c} \int d^4x' \mathcal{L}(T'^\nu(x'^\mu), \partial'_\mu T'^\nu(x'^\mu), x'^\mu), \quad (4.39)$$

$$d^4x' = |\det(\Lambda^\mu_\nu)| d^4x = d^4x,$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu), x^\mu) = \mathcal{L}(T'^\nu(x'^\mu), \partial'_\mu T'^\nu(x'^\mu), x'^\mu). \quad (4.40)$$

Variiert man nun die Wirkung S , bei an den Rändern festgehaltenen Werten von $T^\nu(x^\mu)$, nach den verallgemeinerten Freiheitsgraden $T^\nu(x^\mu)$ und deren Ableitungen $\partial_\mu T^\nu(x^\mu)$ und setzt das Ergebnis gleich Null, so lassen sich unter der Voraussetzung, dass die $\delta T^\nu(x^\mu)$

ebenso wie die $T^\nu(x^\mu)$ unabhängig sind, daraus die Bewegungsgleichungen des Feldes ableiten

$$\delta S = \frac{1}{c} \int d^4x \delta \mathcal{L}(T^\nu, \partial_\mu T^\nu, x^\mu) = \frac{1}{c} \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu T^\nu} \right) \delta T^\nu = 0, \quad (4.41)$$

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial T^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu T^\nu} = 0. \quad (4.42)$$

Das sind die Euler-Lagrange-Gleichungen des Vektorfeldes $T^\nu(x^\mu)$.

4.3.3 Der Hamilton-Formalismus

In Analogie zu einem mechanischen System kann man zu jedem verallgemeinerten Freiheitsgrad $T^\nu(x^\mu)$ wieder eine verallgemeinerte Impulsdichte $\pi_\nu(x^\mu)$ definieren

$$\pi_\nu(x^\mu) := \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu), x^\mu)}{\partial \partial_0 T^\nu(x^\mu)}. \quad (4.43)$$

Eine Legendretransformation der Lagrangedichte $\mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu), x^\mu) \rightarrow \mathcal{H}(x^\mu)$ führt zur Hamiltondichte $\mathcal{H}(x^\mu)$

$$\mathcal{H}(x^\mu) := c\pi_\nu(x^\mu)\partial_0 T^\nu(x^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu). \quad (4.44)$$

Die Gesamtenergie des Vektorfeldes $E(t)$ erhält man durch Integration der Hamiltondichte $\mathcal{H}(x^\mu)$ über die Ortskoordinaten

$$E(t) := \int d^3x \mathcal{H}(x^\mu). \quad (4.45)$$

4.3.4 Das Noether-Theorem

Ausgangspunkt ist wieder ein zu einem Vektorfeld $T^\nu(x^\mu)$ gehöriges Wirkungsintegral S , dessen Variable x^μ und $T^\nu(x^\mu)$ einer abstrakten Transformation mit den konstanten Symmetrieparametern α^ρ unterzogen werden

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(T^\nu, \partial_\mu T^\nu, x^\mu) = x^\mu + X^\mu_\rho \delta \alpha^\rho, \quad (4.46)$$

$$T'^\nu(x'^\mu) = T^\nu(x^\mu) + \delta T^\nu(T^\nu, \partial_\mu T^\nu, x^\mu) = T^\nu(x^\mu) + Y^\nu_\rho \delta \alpha^\rho. \quad (4.47)$$

Um nun Erhaltungsgrößen des Vektorfeldes $T^\nu(x^\mu)$ zu generieren, muss die Wirkung S unter derartigen Transformationen auf folgende Art und Weise unverändert bleiben

$$S' = \frac{1}{c} \int_{x_1^\mu}^{x_2^\mu} d^4x' \mathcal{L}(T'^\nu(x'^\mu), \partial'_\mu T'^\nu(x'^\mu), x'^\mu) = S = \frac{1}{c} \int_{x_1^\mu}^{x_2^\mu} d^4x \mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu), x^\mu), \quad (4.48)$$

$$\rightarrow \frac{1}{c} \int_{x_1^\mu}^{x_2^\mu} d^4x \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu T^\nu} \partial_\lambda T^\nu - g^\mu_\lambda \mathcal{L} \right) \delta x^\lambda - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu T^\nu} \delta T^\nu \right) = 0. \quad (4.49)$$

Der Integrationsbereich kann beliebig gewählt werden. Also muss der Integrand ident Null sein. Dies führt zum Erhalt der Noetherströme $j_{N\rho}^\mu$

$$\partial_\mu j_{N\rho}^\mu := \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu T^\nu} \partial_\lambda T^\nu - g^\mu_\lambda \mathcal{L} \right) X^\lambda_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu T^\nu} Y^\nu_\rho = 0. \quad (4.50)$$

Die Physik eines abgeschlossenen Systems, in der Feldtheorie also die Physik eines freien Feldes, und damit auch die dazugehörige Wirkung S , sind unter Translationen des Feldes in der Zeit und im Ort invariant. Die Lagrangedichte \mathcal{L} eines derartigen Feldes hängt nicht explizit von x^μ ab, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(T^\nu(x^\mu), \partial_\mu T^\nu(x^\mu))$. In der Notation des Noether-Theorems impliziert eine Translation in der Zeit und im Ort $\delta x^\mu = \text{const}$ und $\delta T^\nu = 0$. Dies führt zu einer Erhaltungsgröße $\Theta^{\mu\nu}(x^\mu)$, die man als kanonischen Energie-Impuls-Tensor bezeichnet. Dieser ist grundsätzlich nicht symmetrisch

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} := \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu T^\rho} \partial^\nu T^\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0. \quad (4.51)$$

Aus dem kanonischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}(x^\mu)$ lässt sich der kanonische Viererimpuls des freien Feldes $p_{\text{kan}}^\mu(t)$ definieren

$$p_{\text{kan}}^\mu(t) := \frac{1}{c} \int d^3x \Theta^{0\mu} = \frac{1}{c} \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 T^\rho} \partial^0 T^\rho - g^{0\mu} \mathcal{L}, \quad (4.52)$$

$$p_{\text{kan}}^0(t) = \frac{1}{c} \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 T^\rho} \partial^0 T^\rho - \mathcal{L} = \frac{1}{c} \int d^3x c \pi_\rho \partial^0 T^\rho - \mathcal{L} = \frac{1}{c} E(t), \quad (4.53)$$

$$p_{\text{kan}}^i(t) = \frac{1}{c} \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 T^\rho} \partial^i T^\rho = \frac{1}{c} \int d^3x c \pi_\rho \partial^i T^\rho = \vec{p}(t). \quad (4.54)$$

Die Ausdrücke in den Integralen von $\frac{1}{c}E(t)$ und $\vec{p}(t)$ können sich von den tatsächlichen Energiedichten und Impulsdichten des freien Feldes um Divergenzterme unterscheiden. Diese Divergenzterme fallen allerdings unter der Annahme von natürlichen Randbedingungen bei der Integration weg.

Integriert man die Divergenz des kanonischen Energie-Impuls-Tensors über den gesamten Ortsraum und über einen bestimmten Zeitraum und setzt wieder die Endlichkeit des Feldes $T^\nu(x^\mu)$ voraus, so wird auch der Viererimpuls $p_{\text{kan}}^\mu(t)$ zu einer Erhaltungsgröße

$$\int_{t_1}^{t_2} c dt \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \rightarrow p_{\text{kan}}^\mu(t_2) = p_{\text{kan}}^\mu(t_1) = \text{const}. \quad (4.55)$$

4.4 Die relativistische Elektrodynamik

4.4.1 Grundgleichungen

Feldgleichungen und Kraftgleichung: Die Basis dieser relativistischen Feldtheorie bilden die Maxwellgleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung, die in mikroskopischer Sicht folgendermaßen lauten

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\partial V} d\vec{A} \vec{D} = \int_V d^3x \rho, \quad (4.56)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\partial V} d\vec{A} \vec{B} = 0, \quad (4.57)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A d\vec{A} \vec{B}, \quad (4.58)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{H} = \int_A d\vec{A} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \int_A d\vec{A} \vec{D}, \quad (4.59)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho \quad \Longleftrightarrow \quad \oint_{\partial V} d\vec{A} \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3x \rho, \quad (4.60)$$

$$\text{mit} \quad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}, \quad \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2, \quad \vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (4.61)$$

Dazu kommt die Gleichung für die Lorentzkraft \vec{f} auf eine Ladungsdichte ρ in einem elektromagnetischen Feld

$$\vec{f} = \rho (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.62)$$

Potentiale: Die Felder \vec{E} und \vec{B} lassen sich aus einem Skalarpotential ϕ und einem Vektorpotential \vec{A} ableiten. Diese Potentiale sind nicht eindeutig festgelegt, sondern unterliegen einer Eichfreiheit

$$\vec{E} := -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} := \operatorname{rot} \vec{A}, \quad (4.63)$$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda. \quad (4.64)$$

Feldstärketensor: Aus diesen Größen lassen sich eine Viererstromdichte j^μ , ein Viererpotential A^μ und ein antisymmetrischer Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ definieren

$$j^\mu := \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \rho \vec{v} \end{pmatrix} = \frac{\rho}{\gamma} v^\mu = \rho_0 v^\mu, \quad A^\mu := \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}, \quad (4.65)$$

$$F^{\mu\nu} := \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} E^x & -\frac{1}{c} E^y & -\frac{1}{c} E^z \\ \frac{1}{c} E^x & 0 & -B^z & B^y \\ \frac{1}{c} E^y & B^z & 0 & -B^x \\ \frac{1}{c} E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Lorentztransformationen: Als zweistufiger kontravarianter Tensor im M^4 transformiert sich der Feldstärketensor folgendermaßen

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma F^{\rho\sigma}. \quad (4.67)$$

Speziell bei einer Bewegung von S' gegenüber S in positiver x -Richtung mit der Geschwindigkeit v erhält man

$$E'^x = E^x, \quad E'^y = \gamma(E^y - vB^z), \quad E'^z = \gamma(E^z + vB^y), \quad (4.68)$$

$$B'^x = B^x, \quad B'^y = \gamma(B^y + \frac{v}{c^2}E^z), \quad B'^z = \gamma(B^z - \frac{v}{c^2}E^y). \quad (4.69)$$

Feldgleichungen und Kraftgleichung kovariant: Die Maxwellgleichungen und die Kontinuitätsgleichung können nunmehr in relativistischer Notation angeschrieben werden, die homogenen Maxwellgleichungen sind dabei automatisch durch die Definition des Feldstärketensors $F^{\mu\nu}$ erfüllt

$$\partial^\sigma F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} = 0, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (4.70)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (4.71)$$

Die Lorentzkraftdichte \vec{f} auf eine Ladungsverteilung ρ kann man wiederum in den Viererkraftvektor F^μ integrieren

$$\begin{aligned} F^\mu &= \frac{d}{d\tau} p_{1a}^\mu = \gamma \frac{d}{dt} p_{1a}^\mu = \gamma \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} E_{1a} \right) \right) = \gamma \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{c} \vec{E}_{1a} \right) \right) \\ &= \gamma \int d^3x \left(\frac{1}{c} \rho \vec{v} \vec{E} \right) = \gamma \int d^3x F^{\mu\nu} j_\nu = \gamma \int d^3x f^\mu. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Energie-Impuls-Tensor und Viererimpuls: Die hier implizit definierte Viererkraftdichte f^μ , welche auf die Ladungen wirkt, lässt sich als Divergenz eines zweistufigen symmetrischen Tensors $T^{\mu\nu}$ darstellen. Er wird symmetrischer Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes genannt

$$f^\mu = -\partial_\nu T^{\nu\mu} = -\partial_\nu \left(-\frac{1}{\mu_0} F^\nu{}_\rho F^{\mu\rho} + \frac{1}{4\mu_0} g^{\nu\mu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right). \quad (4.73)$$

Die Komponenten dieses Tensors beinhalten die Energiedichte ω_{em} , die Impulsdichte \vec{g}_{em} , die Energiestromdichte \vec{S}_{em} sowie den Maxwell'schen Spannungstensor T_{Mij}

$$T^{00} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) = \omega_{\text{em}}, \quad (4.74)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \epsilon_0 c (\vec{E} \times \vec{B})^i = c g_{\text{em}}^i = \frac{1}{c} S_{\text{em}}^i, \quad (4.75)$$

$$T^{ij} = T^{ji} = -(\epsilon_0 E^i E^j + \frac{1}{\mu_0} B^i B^j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2)) = -T_{Mij}. \quad (4.76)$$

Das räumliche Integral über die Energiedichte ω_{em} und die Impulsdichte \vec{g}_{em} ergibt den Viererimpuls des elektromagnetischen Feldes $p_{\text{em}}^\mu(t)$

$$p_{\text{em}}^\mu(t) := \frac{1}{c} \int d^3x T^{\mu 0} = \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega_{\text{em}} \\ c \vec{g}_{\text{em}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{em}}(t) \\ \vec{p}_{\text{em}}(t) \end{pmatrix}. \quad (4.77)$$

Kovarianter Viererimpuls: Der so definierte Viererimpuls $p_{\text{em}}^\mu(t)$ ist aber nur für das freie elektromagnetische Feld ein Vierervektor. Bei einem Vorhandensein von Quellen muss die Definition kovariant durchgeführt werden. Man sucht zu diesem Zweck ein Ruhesystem des Feldes, in dem der Dreierimpuls $\vec{p}_{\text{em}}(t)$ verschwindet, kontrahiert den Energie-Impuls-Tensor $T_0^{\mu\nu}$ mit einem in die positive Zeitrichtung weisenden Vierervektor der Länge 1, n_0^μ , und integriert über die invarianten Ortskoordinaten \vec{x}_0 dieses Systems

$$p_{\text{kov}0}^\mu(t_0) := \frac{1}{c} \int d^3x_0 T_0^{\mu\nu} n_{0\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{kov}0}(t_0) \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad n_0^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (4.78)$$

$$p_{\text{kov}}^{\prime\mu}(t_0) := \frac{1}{c} \int d^3x_0 T^{\prime\mu\nu} n'_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E'_{\text{kov}}(t_0) \\ \vec{p}'_{\text{kov}}(t_0) \end{pmatrix} = \Lambda^\mu_\rho p_{\text{kov}0}^\rho(t_0). \quad (4.79)$$

Nur im quellenfreien Fall stimmen also die Energien E'_{em} und E'_{kov} sowie die Impulse \vec{p}'_{em} und \vec{p}'_{kov} überein.

Durch die Einführung einer invarianten elektromagnetischen Masse $m_{\text{em}0}(t_0)$ im gewählten Ruhesystem des Feldes kann der kovariante Viererimpuls des Feldes analog dem eines Teilchens angeschrieben werden

$$m_{\text{em}0}(t_0) := \frac{1}{c^2} E_{\text{kov}0}(t_0), \quad (4.80)$$

$$p_{\text{kov}0}^\mu(t_0) = \begin{pmatrix} m_{\text{em}0}(t_0)c \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad p_{\text{kov}}^{\prime\mu}(t_0) = \begin{pmatrix} m_{\text{em}0}(t_0)\gamma c \\ -m_{\text{em}0}(t_0)\gamma\vec{v} \end{pmatrix}, \quad (4.81)$$

$$p_{\text{kov}0}^\mu(t_0) p_{\text{kov}0\mu}(t_0) = p_{\text{kov}}^{\prime\mu}(t_0) p'_{\text{kov}\mu}(t_0) = m_{\text{em}0}^2(t_0)c^2. \quad (4.82)$$

Bilanzgleichungen: Somit können auch die Bilanzgleichungen der Elektrodynamik in relativistischer Notation angegeben werden. In Integralform lauten sie wie folgt

$$\int d^3x (\partial_\nu T^{\nu\mu} + F^{\mu\nu} j_\nu) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} p_{\text{em}}^\mu + \frac{d}{dt} p_{\text{la}}^\mu = - \int d^3x \partial_j T^{j\mu}, \quad (4.83)$$

$$\mu = 0 : \quad \frac{d}{dt} E_{\text{em}} + \frac{d}{dt} E_{\text{la}} = - \oint_{\partial V} d\vec{A} \vec{S}_{\text{em}} \quad \text{Energiesatz}, \quad (4.84)$$

$$\mu = i : \quad \frac{d}{dt} p_{\text{em}}^i + \frac{d}{dt} p_{\text{la}}^i = \oint_{\partial V} dA n^j T_{Mji} \quad \text{Impulssatz}. \quad (4.85)$$

Der Viererimpuls $p_{\text{em}}^\mu(t)$ eines freien Feldes bleibt also erhalten.

4.4.2 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

Die relativistische Elektrodynamik kann man als relativistische Feldtheorie des Eichfeldes $A^\nu(x^\mu)$ auffassen. Eine geeignete Lagrangedichte \mathcal{L} dieses Eichfeldes $A^\nu(x^\mu)$, das in Wechselwirkung mit einem Quellterm $j^\nu(x^\mu)$ steht, als Funktion von $A^\nu(x^\mu)$, $\partial_\mu A^\nu(x^\mu)$ und $j^\nu(x^\mu)$ lässt sich folgendermaßen konstruieren

$$\mathcal{L}(A^\nu(x^\mu), \partial_\mu A^\nu(x^\mu), j^\nu(x^\mu)) := -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - A^\mu j_\mu. \quad (4.86)$$

Durch Variation der dazugehörigen Wirkung S

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \mathcal{L}(A^\nu(x^\mu), \partial_\mu A^\nu(x^\mu), j^\nu(x^\mu)) \quad (4.87)$$

nach den verallgemeinerten Freiheitsgraden $A^\nu(x^\mu)$ und deren Ableitungen $\partial_\mu A^\nu(x^\mu)$ erhält man wiederum die Bewegungsgleichungen des Eichfeldes $A^\nu(x^\mu)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A^\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu. \quad (4.88)$$

Explizit ausgerechnet ergeben die Euler-Lagrange-Gleichungen des Eichfeldes $A^\nu(x^\mu)$ die inhomogenen Maxwellgleichungen. Die homogenen Maxwellgleichungen sind keine Bewegungsgleichungen im eigentlichen Sinn.

4.4.3 Der Hamilton-Formalismus

Am Beginn wird wieder eine zum verallgemeinerten Freiheitsgrad $A^\nu(x^\mu)$ gehörige verallgemeinerte Impulsdichte $\pi_\nu(x^\mu)$ definiert

$$\pi_\nu(x^\mu) := \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{L}(A^\nu(x^\mu), \partial_\mu A^\nu(x^\mu), j^\nu)}{\partial \partial_0 A^\nu(x^\mu)} = -\frac{1}{\mu_0 c} F^0_\nu. \quad (4.89)$$

Zur Hamiltondichte $\mathcal{H}(x^\mu)$ gelangt man wiederum über eine Legendretransformation der Lagrangedichte $\mathcal{L}(A^\nu(x^\mu), \partial_\mu A^\nu(x^\mu), j^\nu(x^\mu)) \rightarrow \mathcal{H}(x^\mu)$

$$\mathcal{H}(x^\mu) := c\pi_\nu(x^\mu)\partial_0 A^\nu(x^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu) = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) + \epsilon_0 \vec{E} \text{ grad } \phi + A^\mu j_\mu. \quad (4.90)$$

Die Integration der Hamiltondichte $\mathcal{H}(x^\mu)$ über die Ortskoordinaten liefert schließlich die Gesamtenergie des elektromagnetischen Feldes $E(t)$

$$E(t) := \int d^3x \mathcal{H}(x^\mu) = \int d^3x \frac{1}{2}(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) - \int d^3x \vec{A} \vec{j} = E_{\text{em}}(t) + E_{\text{ww}}(t). \quad (4.91)$$

Die Gesamtenergie setzt sich also zusammen aus einem Term für die Energie des elektromagnetischen Feldes, für sich alleine betrachtet, und einem Term, der die Wechselwirkung dieses Feldes mit den Ladungen beschreibt.

4.4.4 Das Noether-Theorem

Betrachtet man nun ein freies elektromagnetisches Feld, so hängt dessen Lagrangedichte \mathcal{L} nicht explizit von x^μ ab, da der Quellterm $j^\nu(x^\mu)$ verschwindet, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A^\nu(x^\mu), \partial_\mu A^\nu(x^\mu))$. Die dazugehörige Wirkung S muss unter Translationen in der Zeit und im Ort invariant sein. Das Noether-Theorem liefert in diesem Fall den kanonischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}(x^\mu)$ als Erhaltungsgröße

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} &:= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A^\rho} \partial^\nu A^\rho - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \\ &= \partial_\mu \left(-\frac{1}{\mu_0} F^\mu_\rho \partial^\nu A^\rho + \frac{1}{4\mu_0} g^{\mu\nu} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \right) = \partial_\mu (T^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu_0} F^\mu_\rho \partial^\rho A^\nu) = 0. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Der kanonische Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ unterscheidet sich also vom symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ durch den Term $\frac{1}{\mu_0} F^\mu{}_\rho \partial^\rho A^\nu$. Der mit Hilfe des kanonischen Energie-Impuls-Tensors $\Theta^{\mu\nu}$ definierte Viererimpuls des freien Feldes $p_{\text{kan}}^\mu(t)$ sieht folgendermaßen aus

$$p_{\text{kan}}^\mu(t) := \frac{1}{c} \int d^3x \Theta^{0\mu} = \frac{1}{c} \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A^\rho} \partial^\mu A^\rho - g^{0\mu} \mathcal{L}, \quad (4.93)$$

$$p_{\text{kan}}^0(t) = \frac{1}{c} \int d^3x \left(\frac{1}{2} (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) + \epsilon_0 \operatorname{div}(\vec{E}\phi) \right) = \frac{1}{c} E_{\text{em}}(t) = \frac{1}{c} E(t), \quad (4.94)$$

$$p_{\text{kan}}^i(t) = \frac{1}{c} \int d^3x (\epsilon_0 c (\vec{E} \times \vec{B})^i + \epsilon_0 c \operatorname{div}(\vec{E} A^i)) = \vec{p}_{\text{em}}(t) = \vec{p}(t). \quad (4.95)$$

Da die beiden Divergenzterme bei der Integration unter natürlichen Randbedingungen verschwinden, ist also der kanonische Viererimpuls $p_{\text{kan}}^\mu(t)$ des freien Feldes ident dem zuvor definierten Viererimpuls $p_{\text{em}}^\mu(t)$ des freien Feldes.

4.4.5 Duale Transformationen

Definition: Gegeben sei ein elektromagnetisches Feld ohne Quellen \vec{E} und \vec{B} mit den dazugehörigen Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}. \quad (4.96)$$

Man kann nun eine Transformation der physikalischen Größen \vec{E} und \vec{B} auf die zunächst rein mathematischen Größen \vec{E}' und \vec{B}' definieren

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}. \quad (4.97)$$

Sollen diese Größen \vec{E}' und \vec{B}' physikalische Felder beschreiben, so müssen sie ebenfalls die quellenfreien Maxwellgleichungen erfüllen

$$\operatorname{div} \vec{E}' = 0, \quad \operatorname{div} \vec{B}' = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}' = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}', \quad \operatorname{rot} \vec{B}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}'. \quad (4.98)$$

Dies schränkt die möglichen Elemente der Transformationsmatrix folgendermaßen ein

$$\gamma = -\beta, \quad \delta = \alpha. \quad (4.99)$$

Sollen weiters alle physikalisch relevanten Größen des neuen Feldes, $\omega'_{\text{em}}, cg'^i_{\text{em}} = \frac{1}{c} S'^i_{\text{em}}$ und T'_{Mij} mit den entsprechenden Größen des ursprünglichen Feldes übereinstimmen, so erhält man eine Transformationsmatrix mit nur einem verbleibenden Freiheitsgrad, dem Winkel φ

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ c\vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{E}' \\ c\vec{B}' \end{pmatrix}. \quad (4.100)$$

Eine derartige Transformation wird duale Transformation genannt.

Alternative Darstellung der Elektrodynamik ohne Quellen: Somit ist es möglich, das Viererpotential des ursprünglichen Feldes $A^\mu(\vec{E}, \vec{B})$ und Funktionen dieses Viererpotentials als Funktionen des neuen Feldes \vec{E}' und \vec{B}' , gekennzeichnet mit dem hochgestellten Index “d”, anzugeben

$$A^\mu(\vec{E}, \vec{B}) = {}^dA^\mu(\vec{E}', \vec{B}'), \quad F^{\mu\nu}(\vec{E}, \vec{B}) = {}^dF^{\mu\nu}(\vec{E}', \vec{B}'), \quad \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{B}) = {}^d\mathcal{L}(\vec{E}', \vec{B}'). \quad (4.101)$$

Alle physikalisch relevanten Größen des ursprünglichen Feldes \vec{E} und \vec{B} lassen sich aus dem Viererpotential $A^\mu(\vec{E}, \vec{B}) = {}^dA^\mu(\vec{E}', \vec{B}')$ berechnen. Da sich diese Größen bei einer dualen Transformation nicht ändern, können auch die physikalisch relevanten Größen des neuen Feldes \vec{E}' und \vec{B}' mit den gewohnten Formeln durch das Viererpotential ${}^dA^\mu(\vec{E}', \vec{B}')$ dargestellt werden. Eine duale Transformation führt somit zu einer alternativen Darstellung der Elektrodynamik ohne Quellen durch ein unterschiedliches Viererpotential A^μ .

Duale Transformationen mit $\frac{\pi}{2}$: Ein Spezialfall ergibt sich für den Transformationswinkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Dabei gehen die Felder \vec{E} und \vec{B} komplett ineinander über

$$\vec{E} = c\vec{B}', \quad c\vec{B} = -\vec{E}'. \quad (4.102)$$

Für das duale Viererpotential ${}^dA^\mu(\vec{E}', \vec{B}') \rightarrow {}^dA^\mu(\vec{E}, \vec{B})$ und den dualen Feldstärketensor ${}^dF^{\mu\nu}(\vec{E}', \vec{B}') \rightarrow {}^dF^{\mu\nu}(\vec{E}, \vec{B})$ erhält man

$$c\vec{B} = -\text{grad } {}^d\phi - \frac{\partial}{\partial t} {}^d\vec{A}, \quad -\frac{1}{c}\vec{E} = \text{rot } {}^d\vec{A}, \quad (4.103)$$

$${}^dA^\mu(\vec{E}, \vec{B}) = \begin{pmatrix} {}^d\phi(\vec{E}, \vec{B}) \\ {}^d\vec{A}(\vec{E}, \vec{B}) \end{pmatrix}, \quad (4.104)$$

$${}^dF^{\mu\nu}(\vec{E}, \vec{B}) = \partial^\mu {}^dA^\nu(\vec{E}, \vec{B}) - \partial^\nu {}^dA^\mu(\vec{E}, \vec{B}) = \begin{pmatrix} 0 & -B^x & -B^y & -B^z \\ B^x & 0 & \frac{1}{c}E^z & -\frac{1}{c}E^y \\ B^y & -\frac{1}{c}E^z & 0 & \frac{1}{c}E^x \\ B^z & \frac{1}{c}E^y & -\frac{1}{c}E^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.105)$$

Dieser spezielle duale Feldstärketensor ${}^dF^{\mu\nu}$ kann auch direkt mit Hilfe des vierstufigen komplett antisymmetrischen Epsilontensors $\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ aus dem normalen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ berechnet werden. Er wird in der Literatur allgemein mit $*F^{\mu\nu}$ bezeichnet

$${}^dF^{\mu\nu} = *F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}, \quad \text{mit } \epsilon^{0123} = 1. \quad (4.106)$$

In weiterer Folge beziehen sich alle mit “d” indizierten Größen speziell auf duale Transformationen mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

5 Solitonen

5.1 Das allgemeine Soliton

Es gibt zwei Voraussetzungen, die vorhanden sein müssen, um ein Soliton bilden zu können: Nichtlinearität und Dispersion

5.1.1 Die Nichtlinearität

Ausgangspunkt seien bestimmte nichtlineare partielle Differentialgleichungen in t und \vec{x} , welche analytische Lösungen $\psi(t, \vec{x})$ besitzen. Weiters sollen diese Differentialgleichungen linearisiert werden können. Man erhält dabei die Lösungen $\psi_1(t, \vec{x})$ als Näherung für kleine Werte von $\psi(t, \vec{x})$. Als Ansatz für diese linearisierte Lösung $\psi_1(t, \vec{x})$ wählt man die kontinuierliche Superposition von ebenen Wellen, $\tilde{\psi}(\omega, \vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}$, mit den jeweiligen Amplituden $\tilde{\psi}(\omega, \vec{k})$

$$\psi_1(t, \vec{x}) := \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega \int d^3k \tilde{\psi}_1(\omega, \vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})}. \quad (5.1)$$

Dies entspricht einer 4-dimensionalen Fouriertransformation. Eingesetzt in die linearisierte Differentialgleichung erhält man eine Gleichung in ω und \vec{k} , die sogenannte Dispersionsrelation

$$\omega = \omega(\vec{k}). \quad (5.2)$$

Als Lösung der linearisierten Differentialgleichung ergibt sich somit eine Superposition von ebenen Wellen mit beliebigen Wellenvektoren \vec{k} und beliebigen Amplituden, wobei die Winkelgeschwindigkeit ω der einzelnen Wellen die Dispersionsrelation erfüllen muss.

5.1.2 Die Dispersion

Jede ebene Welle, $\tilde{\psi}_1(\omega(\vec{k}), \vec{k}) e^{-i(\omega(\vec{k})t - \vec{k}\vec{x})}$, die Lösung der linearisierten Differentialgleichung ist, breitet sich mit der Phasengeschwindigkeit $c_{\vec{k}} = \frac{\omega(\vec{k})}{k}$ in Richtung von \vec{k} aus. Je nach Art der Funktion $\omega(\vec{k})$ unterscheidet man nun zwei Fälle:

$$- \quad \omega(\vec{k}) = \omega(k) = \text{const} \cdot k \quad \rightarrow \quad c_{\vec{k}} = \text{const} \quad \text{keine Dispersion} \quad (5.3)$$

Das durch die linearisierte Differentialgleichung beschriebene Ausbreitungsmedium ist isotrop und die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_{\vec{k}}$ ist zusätzlich unabhängig von k . Ein beliebiges, durch Superposition derartiger gleichgerichteter ebener Wellen zusammengestelltes Wellenpaket bleibt also erhalten und breitet sich mit der Geschwindigkeit $c_{\vec{k}}$ in Richtung von \vec{k} aus.

$$- \quad \omega(\vec{k}) = f(\vec{k}) \cdot k \quad \rightarrow \quad c_{\vec{k}} = f(\vec{k}) \quad \text{Dispersion} \quad (5.4)$$

Das Ausbreitungsmedium muss nun nicht mehr isotrop sein. Auf jeden Fall ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_{\vec{k}}$ zumindest abhängig von k . Jedes beliebige gleichgerichtete Wellenpaket zerfließt.

5.1.3 Definition

Die analytischen Lösungen einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung in t und \vec{x} , $\psi(t, \vec{x})$, können ebenfalls durch eine Fouriertransformation als kontinuierliche Superposition von ebenen Wellen dargestellt werden. Im Gegensatz zur linearisierten Differentialgleichung sind die einzelnen Wellen nun keine Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung mehr und sie erfüllen auch nicht die Dispersionsrelation der linearisierten Differentialgleichung. Bei Vorliegen von Dispersion kann es nun Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung geben, die im zeitlichen Verlauf ihre Form beibehalten, also nicht zerfließen. Betrachtet man in diesem Zusammenhang als Anfangsbedingung einen beliebigen Zustand, der sich im Überschneidungsgebiet der Zustandsräume der nichtlinearen und der linearisierten Differentialgleichung befindet, so wird dieser Zustand im linearisierten Fall auf Grund der Dispersion immer zerfließen. Bestimmte Zustände dieses Überlappungsgebietes sind allerdings so beschaffen, dass sich nichtlineare Effekte und Dispersion gerade neutralisieren, das heißt, durch die gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Wellen des Wellenpaketes in Folge der Nichtlinearität werden sozusagen die im linearisierten Fall schnelleren Wellen verlangsamt und die langsameren Wellen beschleunigt und das alles genau auf einen exakten Wert der Geschwindigkeit. Derartige Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung mit Dispersion, $\psi_S(t, \vec{x})$, können als sich bewegende Teilchen interpretiert werden. Sie werden Solitonen genannt.

5.2 Sinus-Gordon-Solitonen

Es existiert eine sehr große Anzahl nichtlinearer Differentialgleichungen in t und \vec{x} mit Dispersion. Dies lässt wiederum auf eine Vielzahl verschiedenster Solitonen schließen. Einen wichtigen und bekannten Vertreter dieser Gattung stellen die Sinus-Gordon-Solitonen dar.

5.2.1 Die Sinus-Gordon-Wellengleichung

Dies ist eine partielle Differentialgleichung von 2.Ordnung in t und \vec{x} mit einem nichtlinearen Sinusterm. Im 1-dimensionalen Fall lautet sie in allgemeiner Form

$$\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \psi(t, x) = 0. \quad (5.5)$$

Durch die Einführung der dimensionslosen Größen T und X erhält man die normalisierte Form

$$\frac{\partial^2 \psi(T, X)}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \psi(T, X)}{\partial X^2} + \sin \psi(T, X) = 0, \quad \text{mit } T := \omega_0 t, \quad X := \frac{\omega_0}{c_0} x. \quad (5.6)$$

Die dazugehörige linearisierte Differentialgleichung mit der Lösung $\psi_1(t, x)$ weist Dispersion auf

$$\frac{\partial^2 \psi_1(t, x)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \psi_1(t, x)}{\partial x^2} + \omega_0^2 \psi_1(t, x) = 0, \quad (5.7)$$

$$\psi_1(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega \int dk \tilde{\psi}_1(\omega, k) e^{-i(\omega t - kx)}, \quad (5.8)$$

$$\rightarrow \quad \omega(k) = \pm \sqrt{\omega_0^2 + c_0^2 k^2} = \pm \omega_0 \sqrt{1 + \frac{c_0^2 k^2}{\omega_0^2}}, \quad (5.9)$$

$$\rightarrow \quad c_k = \frac{\omega(k)}{k} = \pm \sqrt{c_0^2 + \frac{\omega_0^2}{k^2}} = \pm c_0 \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{c_0^2 k^2}}. \quad (5.10)$$

Die Voraussetzungen für solitonische Lösungen sind also erfüllt.

5.2.2 Das mechanische Analogon

Das durch die Sinus-Gordon-Wellengleichung beschriebene nichtlineare Medium kann gut durch ein mechanisches Modell veranschaulicht werden. Man betrachtet dazu eine Kette aus Pendeln mit der Masse m und der Länge l , die durch Drehfedern mit der Federkonstante β mit ihren jeweiligen Nachbarn gekoppelt sind. Der Abstand zwischen den Pendeln betrage a . Auf die einzelnen Pendel wirken also Torsionskräfte und die Schwerkraft. Bezeichnet man mit $\Theta(t)$ den Winkel der Auslenkung, so liefert der Drallsatz für das n -te Pendel

$$ml^2 \frac{d^2 \Theta_n(t)}{dt^2} = -\beta(\Theta_n(t) - \Theta_{n-1}(t)) - \beta(\Theta_n(t) - \Theta_{n+1}(t)) - mgl \sin \Theta_n(t), \quad (5.11)$$

$$\frac{d^2 \Theta_n(t)}{dt^2} - \frac{c_0^2}{a^2} (\Theta_{n-1}(t) - 2\Theta_n(t) + \Theta_{n+1}(t)) + \omega_0^2 \sin \Theta_n(t) = 0, \quad (5.12)$$

$$\text{mit} \quad c_0^2 := \frac{a^2 \beta}{ml^2}, \quad \omega_0^2 := \frac{mgl}{ml^2}. \quad (5.13)$$

Für den Fall, dass sich die Auslenkung $\Theta(t)$ von Pendel zu Pendel nur geringfügig unterscheidet, $\beta \gg mgl$, kann man die Differenzgleichung in eine Differentialgleichung umwandeln, $\Theta_n(t) \rightarrow \Theta(t, x)$, und man erhält nach Normalisierung wiederum die normalisierte Sinus-Gordon-Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta(T, X)}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \Theta(T, X)}{\partial X^2} + \sin \Theta(T, X) = 0, \quad \text{mit} \quad T := \omega_0 t, \quad X := \frac{\omega_0}{c_0} x. \quad (5.14)$$

5.2.3 Analytische Lösungen

Grundsätzlich existiert zur Sinus-Gordon-Wellengleichung eine Vielzahl an analytischen Lösungen. Zwei davon sollen im Folgenden kurz dargestellt werden, nämlich Lösungen für einzelne Solitonen und Lösungen für eine Kombination von zwei Solitonen.

Ein-Soliton-Lösungen: Kink \ Antikink: Für ein einzelnes Soliton muss die betreffende Lösung $\Theta_{\text{Sol}}(T, X)$ durch ein lokales Wellenpaket, das entweder steht oder sich mit konstanter normierter Geschwindigkeit $u = \frac{dX}{dT} = \frac{1}{c_0} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{c_0} v$ bewegt und dabei im zeitlichen Verlauf seine Form beibehält, dargestellt werden können

$$\Theta_{\text{Sol}}(T, X) := \Theta_{\text{Sol}}(X - uT) = \Theta_{\text{Sol}}(S). \quad (5.15)$$

Lässt man die Sinus-Gordon-Wellengleichung auf einen derartigen Ansatz wirken, so erhält man als Lösung

$$\Theta_{\text{Sol}}(S) = 4 \arctan\left(\exp\left(\pm \frac{S - S_0}{\sqrt{1 - u^2}}\right)\right), \quad \text{mit} \quad S_0 = X_0 - uT_0, \quad \Theta(S_0) = \pi. \quad (5.16)$$

Die normierte Geschwindigkeit u liegt also im Bereich $-1 < u < +1$. Die tatsächliche Geschwindigkeit des Solitons erreicht daher die Werte $-c_0 < v < +c_0$. Diese Grenzgeschwindigkeit c_0 ist die Geschwindigkeit von ebenen Wellen, die sich als Lösungen der allgemeinen Sinus-Gordon-Wellengleichung bei einem Fehlen des Sinusters, der die Schwerkraft berücksichtigt, ergeben. Sie ist auf Grund des Versuchsaufbaus mit massebehafteten Federn und Pendeln auch ohne vorhandene Schwerkraft immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c . Die Konstante S_0 wird im Weiteren auf Null gesetzt. Je nach Vorzeichen im Exponenten spricht man von einem Kink (+) oder einem Antikink (-)

$$\Theta_{\text{K}\backslash\text{A}}(S) = 4 \arctan(\exp(\pm \gamma_{\text{Sol}} S)), \quad \text{mit} \quad \gamma_{\text{Sol}} := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\text{Sol}}^2}}, \quad \beta_{\text{Sol}} := \frac{v}{c_0}. \quad (5.17)$$

Der Winkel $\Theta_{\text{K}\backslash\text{A}}(S)$ eines Kinks\Antikinks bewegt sich also von $\Theta_{\text{K}\backslash\text{A}}(S) = 0 \setminus 2\pi$ bei $S = -\infty$ zu $\Theta_{\text{K}\backslash\text{A}}(S) = 2\pi \setminus 0$ bei $S = +\infty$. Hierbei wird einem Kink\Antikink definitionsgemäß eine negative\positive Helizität zugeordnet. Die Funktionen $\Theta_{\text{K}\backslash\text{A}}(S) - \pi$, also die Auslenkungen bezogen auf die Auslenkung π bei $S_0 = 0$, sind antisymmetrisch

$$\Theta_{\text{K}\backslash\text{A}}(S) - \pi = -(\Theta_{\text{K}\backslash\text{A}}(-S) - \pi). \quad (5.18)$$

Streng mathematisch gesehen ist ein Soliton somit über den ganzen 1-dimensionalen Raum verteilt. In einer physikalischen Näherung kann man es aber als lokalisiert betrachten. Die gewohnte Unterscheidung zwischen einem Teilchen und seinem Feld existiert allerdings nicht mehr.

Zwei-Solitonen-Lösungen: Um nun Lösungen für mehrere Solitonen zu erhalten, wird als neuer Ansatz $\Theta_{\text{Allg}}(T, X)$ eine Verallgemeinerung der Lösung $\Theta_{\text{Sol}}(S)$ für ein Soliton gewählt. Die Arcustangens-Funktion, die als dämpfender Faktor für die Lokalisierung der Solitonen verantwortlich ist, wird beibehalten

$$\Theta_{\text{Allg}}(T, X) := 4 \arctan \frac{F(X)}{G(T)}. \quad (5.19)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Sinus-Gordon-Wellengleichung ein, so ergeben sich nach Trennung der Variablen T und X zwei charakteristische Differentialgleichungen

$$\left(\frac{dG}{dT}\right)^2 = q^2 G^4 + (b^2 - 1)G^2 - n^2, \quad (5.20)$$

$$\left(\frac{dF}{dX}\right)^2 = -q^2 F^4 + b^2 F^2 + n^2. \quad (5.21)$$

Die Wahl der Konstanten q , b und n , die von der Trennung der Variablen und von der Integration stammen, bestimmt im Weiteren die Art der Lösung.

Kink-Kink-Lösungen: Für $q = 0$, $b > 1$ und $n \neq 0$ erhält man die Lösung $\Theta_{\text{KK}}(T, X)$, welche die Kollision zweier Kinks beschreibt

$$\Theta_{\text{KK}}(T, X) = 4 \arctan(u \sinh(\gamma_{\text{Sol}} X) \operatorname{sech}(\gamma_{\text{Sol}} u T)), \quad \text{mit } 0 < u < 1. \quad (5.22)$$

Diese Funktion ist antisymmetrisch in X und symmetrisch in T . Zur Zeit $T = -\infty$ laufen zwei Kinks von $X = -\infty \setminus X = +\infty$ mit den anfänglichen Geschwindigkeiten $+u \setminus -u$ aufeinander zu. Diese beiden Kinks drehen immer von $\Theta_K = -2\pi \rightarrow 0 \setminus \Theta_K = 0 \rightarrow +2\pi$. Zum Zeitpunkt $T = 0$ treffen sie sozusagen bei $X = 0$ aufeinander, um dann wieder in Richtung ihrer Ausgangspositionen $X = -\infty \setminus X = +\infty$ zurückzulaufen, die sie zur Zeit $T = +\infty$ mit den letztendlichen Geschwindigkeiten $-u \setminus +u$ erreichen. Die beiden Solitonen werden zwar auf Grund gegenseitiger Beeinflussung in der Nähe von $X = 0$ merklich deformiert, können einander jedoch nicht durchdringen, da sie gleiche Helizität besitzen. Sie prallen also aneinander ab.

Antikink-Kink-Lösungen: Für $q \neq 0$, $b > 1$ und $n = 0$ erhält man die Lösung $\Theta_{\text{AK}}(T, X)$, welche die Kollision eines Antikinks mit einem Kink beschreibt

$$\Theta_{\text{AK}}(T, X) = 4 \arctan\left(\frac{1}{u} \operatorname{sech}(\gamma_{\text{Sol}} X) \sinh(\gamma_{\text{Sol}} u T)\right), \quad \text{mit } 0 < u < 1. \quad (5.23)$$

Diese Funktion ist symmetrisch in X und antisymmetrisch in T . Zur Zeit $T = -\infty$ läuft ein Antikink\Kink von $X = -\infty \setminus X = +\infty$ mit den anfänglichen Geschwindigkeiten $+u \setminus -u$ auf den Ursprung zu. Das Antikink\Kink dreht von $\Theta_A = 0 \rightarrow -2\pi \setminus \Theta_K = -2\pi \rightarrow 0$. Die entgegengesetzte Helizität bewirkt, dass sich dabei das Antikink und das Kink beim aufeinander Zulaufen immer mehr auflösen. Zum Zeitpunkt $T = 0$, dem theoretischen Treffpunkt, existieren die beiden Solitonen als solche überhaupt nicht mehr, sie haben sich zur Gänze annihiliert, denn es gilt: $\Theta_{\text{AK}}(T = 0, X) = 0$. All ihre Energie steckt zu diesem Zeitpunkt in der kinetischen Energie der Drehfederpendelkette. Auf Grund der Antisymmetrie der Lösung in der Zeit, bildet sich für $T > 0$ wieder ein Antikink\Kink, nun aber im gegenüberliegenden Bereich $X > 0 \setminus X < 0$. Beide entfernen sich wieder vom Ursprung. Das Antikink\Kink dreht jetzt allerdings von $\Theta_A = +2\pi \rightarrow 0 \setminus \Theta_K = 0 \rightarrow +2\pi$. Bei $T = +\infty$ befinden sich nun die beiden Solitonen bei $X = +\infty \setminus X = -\infty$ mit den letztendlichen Geschwindigkeiten $+u \setminus -u$. Das Antikink und das Kink haben sich also bis auf eine Phasenverschiebung quasi ungestört durchdrungen.

Weitere Zwei-Solitonen-Lösungen: Abschließend wäre noch zu sagen, dass zu jeder beliebigen Lösung der Sinus-Gordon-Wellengleichung $\Theta_+(T, X)$ auf Grund der ungeraden Sinus Funktion eine weitere Lösung $\Theta_-(T, X) := -\Theta_+(T, X)$ existiert. Im Falle von solitonischen Lösungen vertauschen dabei Kink und Antikink ihre Rollen.

5.2.4 Lorentztransformationen

Die Sinus-Gordon-Wellengleichung in ihrer allgemeinen Form ist invariant gegenüber einer speziellen Lorentztransformation, $\Lambda_{\text{Sol}}^\mu{}_\nu$, die in der Welt der Drehfederpendelkette die Grenzgeschwindigkeit c_0 besitzt

$$\frac{\partial^2 \Theta(t, x)}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \Theta(t, x)}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin \Theta(t, x) = 0, \quad (5.24)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Theta'(t', x')}{\partial t'^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \Theta'(t', x')}{\partial x'^2} + \omega_0^2 \sin \Theta'(t', x') = 0, \quad \text{mit } x'^{\mu} = \Lambda_{\text{Sol}}^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}. \quad (5.25)$$

Die auf diese Weise definierten Systeme S' sind allerdings rein mathematisch und keinesfalls reale Inertialsysteme. Diese Invarianz führt jedoch dazu, dass ein im Laborsystem bewegtes Soliton gegenüber einem im Laborsystem ruhenden Soliton im Sinne dieser Transformation mit c_0 lorentzkontrahiert ist

$$\Theta_{\text{Sol}}(t, x) = 4 \arctan(\exp(\pm \gamma_{\text{Sol}} \frac{\omega_0}{c_0} (x - vt))), \quad (5.26)$$

$$\Theta_{\text{Sol}} |_{t=0, v \neq 0} = \Theta_{\text{Sol}} |_{v=0} \rightarrow x |_{t=0, v \neq 0} = \frac{1}{\gamma_{\text{Sol}}} x |_{v=0}. \quad (5.27)$$

Für $v \rightarrow c_0$ degeneriert die Funktion der Auslenkungen Θ_{Sol} zu einer Stufenfunktion. Um nun die tatsächliche Ausdehnung eines mit der Geschwindigkeit v bewegten Solitons in dessen Ruhesystem zu ermitteln, muss die mit c_0 lorentzkontrahierte Länge eines im Laborsystem ruhenden Solitons mit der Lichtgeschwindigkeit c wieder distrahert werden

$$x_{\text{Ruhe}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} x_{\text{Lab}} < x_{\text{Lab}}. \quad (5.28)$$

Da die Grenzggeschwindigkeit c_0 immer kleiner als c ist, wird auch im Ruhesystem des bewegten Solitons dessen Ausdehnung mit $v \rightarrow c_0$ verschwindend klein.

5.2.5 Energie und Impuls

Drei Terme bilden die Gesamtenergie eines Gliedes der Drehfederpendelkette: Die kinetische Energie der Pendelmasse auf Grund der Rotation, die potentielle Energie der Feder auf Grund der Torsion und die potentielle Energie der Pendelmasse auf Grund der Schwerkraft. Die Energie der gesamten Kette mit N Gliedern lautet somit

$$E = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\Theta_n(t)}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta (\Theta_{n+1}(t) - \Theta_n(t))^2 + m g l (1 - \cos \Theta_n(t)). \quad (5.29)$$

Falls die Auslenkung von Pendel zu Pendel wieder nur geringfügig variiert, $\beta \gg m g l$, lässt sich die Summe in ein Integral umwandeln, $\Theta_n(t) \rightarrow \Theta(t, x)$, und man erhält nach Normierung

$$E = \frac{m l^2}{a} c_0 \omega_0 \int_{X_1}^{X_2} dX \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Theta(T, X)}{\partial T} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Theta(T, X)}{\partial X} \right)^2 + (1 - \cos \Theta(T, X)). \quad (5.30)$$

Für ein freies Soliton mit der bekannten Lösung $\Theta_{\text{Sol}}(S)$ ergibt sich somit folgende Gesamtenergie E_{Sol}

$$E_{\text{Sol}} = 8 \frac{m l^2}{a} \frac{\omega_0}{c_0} \gamma_{\text{Sol}} c_0^2 = m_{0 \text{ Sol}} \gamma_{\text{Sol}} c_0^2 = E_{0 \text{ Sol}} \gamma_{\text{Sol}}. \quad (5.31)$$

Hierbei wurde dem Soliton in der Welt der Drehfederpendelkette mit der Grenzgeschwindigkeit c_0 eine Ruhemasse $m_{0\text{Sol}}$ und eine Ruheenergie $E_{0\text{Sol}}$ zugeteilt, die sich aus dem Vergleich mit den entsprechenden Größen eines freien Teilchens in der realen Welt ergeben. In diesem Sinne lässt sich für ein Soliton auch ein Impuls \vec{p}_{Sol} definieren

$$\vec{p}_{\text{Sol}} := m_{0\text{Sol}}\gamma_{\text{Sol}}\vec{v}. \quad (5.32)$$

5.2.6 Die Wechselwirkung zwischen Solitonen

Da, mathematisch gesehen, ein Soliton unendliche Ausdehnung besitzt, impliziert ein gleichzeitiges Vorhandensein von zwei Solitonen mit endlichem Abstand immer gegenseitige Beeinflussung mit daraus resultierender Deformation. Es existieren dann, streng genommen, nicht mehr zwei richtige Solitonen, sondern es gibt nur mehr Auslenkungsmuster, die, in Abhängigkeit von Solitonenart und von gegenseitigem Abstand, Ähnlichkeiten mit zwei Solitonen aufweisen. In einer einfachen Betrachtungsweise werden nun die Aufenthaltsorte der Solitonen mit den Amplituden $\Theta = \pm\pi$ identifiziert, sofern derartige Auslenkungen überhaupt existieren.

Wechselwirkung zwischen zwei gleichartigen Solitonen: Ausgangspunkt der Betrachtung ist zum Beispiel die Lösung $\Theta_{\text{KK}}(T, X)$, bei der zwei Kinks aufeinander zulau-
fen, aneinander abprallen und sich dann wiederum voneinander entfernen. Zum Zeitpunkt $T = 0$, dem Umkehrzeitpunkt, gilt

$$\frac{\partial\Theta_{\text{KK}}(T, X)}{\partial T} \Big|_{T=0} = 0. \quad (5.33)$$

Alle Pendel, und somit auch die beiden Kinks, ruhen. Wenn man den ruhenden deformierten Kinks weiterhin die Ruhemasse $m_{0\text{Sol}}$ zuordnet, so ist die anfängliche kinetische Energie der Kinks T_{K} zur Gänze in potentielle Energie V_{K} übergegangen

$$2V_{\text{K}} \Big|_{T=0} = 2T_{\text{K}} \Big|_{T=-\infty} = 2m_{0\text{Sol}}(\gamma_{\text{Sol}} - 1)c_0^2. \quad (5.34)$$

Die beiden Kinks befinden sich zum Zeitpunkt $T = 0$ an den Stellen $\pm X_0$

$$\Theta_{\text{KK}}(0, X) = 4 \arctan(u \sinh(\gamma_{\text{Sol}}X)) = \pi, \quad (5.35)$$

$$\rightarrow X_0 = \frac{1}{\gamma_{\text{Sol}}} \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{u}\right). \quad (5.36)$$

Eine charakteristische Größe für die gegenseitige Abstoßung ist nun durch die potentielle Energie beider Kinks zum Zeitpunkt $T = 0$, $2V_{\text{K}} \Big|_{T=0}$, in Abhängigkeit vom dazugehörigen Abstand, $D = 2X_0$, gegeben. Durch die Elimination von u aus den Bestimmungsgleichungen für $2V_{\text{K}} \Big|_{T=0}$ und X_0 erhält man die gewünschte Verknüpfung beider Größen

$$u = \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2V_{\text{K}}}{2E_{0\text{Sol}}}\right)^2}}, \quad (5.37)$$

$$\rightarrow D = 2X_0 = 2 \frac{1}{1 + \frac{2V_{\text{K}}}{2E_{0\text{Sol}}}} \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{2V_{\text{K}}}{2E_{0\text{Sol}}}\right)^2}}}\right). \quad (5.38)$$

Dies ist nun die Umkehrfunktion der gesuchten Funktion $2V_K(D)$. Diese potentielle Energie lässt sich allerdings nur für zwei Grenzfälle explizit darstellen:

$$\begin{aligned}
& - 2V_K(D) \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad D \rightarrow 0 : \\
& \quad D \approx 2 \frac{1}{\frac{2V_K}{2E_{0\text{Sol}}}} \operatorname{arsinh}(1) \quad \rightarrow \quad 2V_K(D) \approx 4E_{0\text{Sol}} \operatorname{arsinh}(1) \frac{1}{D} \tag{5.39} \\
& - 2V_K(D) \rightarrow 0 \quad \rightarrow \quad D \rightarrow \infty : \\
& \quad D \approx 2 \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \frac{2V_K}{E_{0\text{Sol}}})}}}}\right) \quad \rightarrow \quad 2V_K(D) \approx E_{0\text{Sol}} \frac{1}{(\sinh^2(\frac{D}{2}) - 1)} \approx 4E_{0\text{Sol}} e^{-D} \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Die von vielen realen Teilchen gewohnte $\frac{1}{D}$ -Abhängigkeit der potentiellen Energie geht also für größere Distanzen in eine exponentielle Abhängigkeit über.

Wechselwirkung zwischen zwei verschiedenartigen Solitonen: Als Ausgangspunkt der Betrachtung wählt man nun zum Beispiel die Lösung $\Theta_K(T, X)$, bei der sich ein Kink mit der Geschwindigkeit u in Richtung steigender X -Werte bewegt, sowie die Lösung $\Theta_{KA}(T, X) := -\Theta_{AK}(T, X)$, bei der sich ein Kink \ Antikink von $X = -\infty \setminus X = +\infty$ kommend begegnen und danach quasi ungestört weiterlaufen.

Eine charakteristische Größe für die gegenseitige Anziehung ist nun der Zeitvorsprung, den ein in $X = -\infty$ mit der Geschwindigkeit u startendes Kink mit entgegenkommendem Antikink gegenüber einem gleichzeitig in $X = -\infty$ ebenfalls mit der Geschwindigkeit u weglaufenden freien Kink gewinnt, wenn beide in $x = +\infty$ mit der gleichen Geschwindigkeit u ankommen. Für das kollidierende Kink kann man nur für die Zeit $-\infty < T \leq -T^*$ und $+T^* \leq T < +\infty$ mit der noch zu bestimmenden Größe T^* einen Ort angeben, denn in der Zeit $-T^* < T < +T^*$ existiert die Amplitude des Kinks π für $T < 0$ und $-\pi$ für $T > 0$ nicht, da sich die beiden Solitonen gegenseitig auflösen

$$\Theta_{KA(T,X)} = -4 \arctan\left(\frac{1}{u} \operatorname{sech}(\gamma_{\text{Sol}} X) \sinh(\gamma_{\text{Sol}} u T)\right) = -\pi, \tag{5.41}$$

$$\cosh(\gamma_{\text{Sol}} X) = \frac{1}{u} \sinh(\gamma_{\text{Sol}} u T) \geq 1, \tag{5.42}$$

$$T \geq \frac{1}{\gamma_{\text{Sol}} u} \operatorname{arsinh}(u) = T^*. \tag{5.43}$$

Man erhält somit für die Ortsfunktion des kollidierenden Kinks $X_{K\text{koll}}(T)$

$$X_{K\text{koll}}(T) = -\frac{1}{\gamma_{\text{Sol}}} \operatorname{arcosh}\left(-\frac{1}{u} \sinh(\gamma_{\text{Sol}} u T)\right), \quad T \leq -T^*, \tag{5.44}$$

$$X_{K\text{koll}}(T) = \frac{1}{\gamma_{\text{Sol}}} \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{u} \sinh(\gamma_{\text{Sol}} u T)\right), \quad T \geq +T^*, \tag{5.45}$$

$$X_{K\text{koll}}(-T^*) = X_{K\text{koll}}(+T^*) = 0. \tag{5.46}$$

Das kollidierende Kink verschwindet also in dieser Betrachtungsweise zu $T = -T^*$ im Nullpunkt und taucht zu $T = +T^*$ ebendort wieder auf.

Die Ortsfunktion des freien Kinks $X_{K\text{frei}}(T)$ ist zu jeder Zeit definiert. Man erhält

$$\Theta_K(T, X) = 4 \arctan(\exp(\gamma_{\text{Sol}}(X - uT))) = \pi, \tag{5.47}$$

$$X_{\text{K frei}}(T) = uT. \quad (5.48)$$

Um nun das kollidierende und das freie Kink zu synchronisieren, wählt man als Vergleichszeitpunkt aus Symmetriegründen zunächst $T = 0$, einen Zeitpunkt, zu dem sich beide Kinks im Punkt $X = 0$ befinden. Bildet man nun in den beiden Ortsfunktionen den Limes $T \rightarrow \infty$, so sieht man, dass das kollidierende Kink dem freien Kink um ΔT vorausseilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} X_{\text{K koll}}(T) = \frac{1}{\gamma_{\text{Sol}}} \ln\left(\frac{1}{u} \exp(\gamma_{\text{Sol}} u T)\right) = uT + \frac{1}{\gamma_{\text{Sol}}} \ln \frac{1}{u} = uT + \Delta X, \quad (5.49)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} X_{\text{K frei}}(T) = uT, \quad (5.50)$$

$$\Delta T = \frac{\Delta X}{u} = \frac{1}{\gamma_{\text{Sol}} u} \ln \frac{1}{u} > 0. \quad (5.51)$$

Würde man nun beide Kinks im Punkt $X = -\infty$ gleichzeitig starten lassen, so ergäbe sich für das kollidierende Kink beim Vergleich bis zum Punkt $X = +\infty$ ein doppelter Zeitvorsprung von $2 \Delta T$.

Im Grenzfall $u \rightarrow 1$ wird $2 \Delta T$ verschwindend klein. Das kollidierende Kink kann durch die anziehende Wechselwirkung mit dem Antikink nicht mehr beschleunigt werden, oder, anders ausgedrückt, die Ruheenergie des kollidierenden Kinks, $E_{0 \text{ Sol}} = m_{0 \text{ Sol}} c_0^2$, die bei dessen Auflösung und späterer Neubildung für zusätzliche Geschwindigkeit sorgt, ist bei unendlicher Gesamtenergie $E_{\text{Sol}} = m_{0 \text{ Sol}} \gamma_{\text{Sol}} c_0^2$ bedeutungslos.

5.3 Reale Teilchen als Solitonen

Die zuvor angeführten analytischen Lösungen der normierten eindimensionalen Sinus-Gordon-Wellengleichung, welche ein oder mehrere lokalisierte Wellenpakete beschreiben, sind zunächst rein mathematischer Natur.

Das mechanische Analogon erlaubt es, diese Solitonen, topologisch gesehen, als Verwindung einer Drehfederpendelkette um 2π mit einer, je nach Geschwindigkeit, eindeutigen Struktur zu interpretieren. Ein einzelnes Soliton kann somit durch kontinuierliche Verformung der Drehfederpendelkette bei festgehaltenen Enden nicht eliminiert werden. Des Weiteren wird es durch das mechanische Modell möglich, den Solitonen wichtige Teilcheneigenschaften wie Energie, Masse und Impuls zuzuschreiben. Trotzdem handelt es sich dabei immer um fiktive Teilchen, da die Grenzgeschwindigkeit der Teilchen in dieser zweidimensionalen Welt auf Grund des mechanischen Versuchsaufbaus immer um vieles kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c ist.

Um nun ein reales Teilchen durch ein Soliton zu beschreiben, sind die folgenden notwendigen Bedingungen zu erfüllen:

- Zur Beschreibung eines Teilchens in $1 + 1$ Dimensionen benötigt man einen inneren Freiheitsgrad, die Variable $\psi(T, X)$. Jedem Zeit-Raum-Punkt in dieser zweidimensionalen Welt wird durch diesen inneren Freiheitsgrad ein Element einer S^1 zugeordnet, wobei für ein freies Teilchen diese S^1 genau einmal abgedeckt wird. Eine derartige Beschreibung ist frei von etwaigen Singularitäten. Ein reales Teilchen in $1 + 3$ Dimensionen wird daher drei von der Zeit und vom Ort abhängige innere Freiheitsgrade, $\psi^i(T, \vec{X})$ $i = 1, 2, 3$, besitzen müssen. Ein möglicher Kandidat für diese Freiheitsgrade wären in Analogie zum Sinus-Gordon-Modell Elemente einer S^3 .

- Die dazugehörigen drei Wellengleichungen müssen als Bewegungsgleichungen des Teilchens invariant gegen die Lorentztransformation mit der Lichtgeschwindigkeit c sein.

- Alle bekannten Teilcheneigenschaften und Kräfte zwischen den Teilchen müssen sich, wie beim mechanischen Analogon, direkt aus den drei inneren Freiheitsgraden $\psi^i(T, \vec{X})$ ableiten lassen.

Eine Möglichkeit, ein reales Teilchen, im Speziellen ein Elektron\Positron, auf diese Art und Weise zu konstruieren, wird im Weiteren beschrieben.

6 Das Elektron als SU2-Soliton

Ein Elektron kann als Soliton mit drei inneren Freiheitsgraden aufgefasst werden. Dabei wird jedem Punkt des \mathbb{M}^4 ein Element der Lie-Gruppe SU2, die einer verallgemeinerten S^3 entspricht, zugeordnet. Damit erhält man eine Verallgemeinerung des 1 + 1 dimensional Sinus-Gordon-Modells auf 1 + 3 Dimensionen. Die wichtigsten Entwicklungsschritte, die zu diesem Modell führen, sollen im Folgenden analysiert werden. Im Unterschied zu den Sinus-Gordon-Solitonen sind zunächst die Wellengleichungen nicht bekannt, sondern ergeben sich im weiteren Verlauf aus den an die physikalische Realität angepassten inneren Freiheitsgraden des Systems.

6.1 Der Dirac-Monopol

6.1.1 Duale Transformation

Ausgangspunkt sei ein freies Elektron, das im Ursprung ruht. Das herkömmliche Modell, in dem dieses Elektron als Punktladung $\rho(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x})$ angesehen wird, ist mit dem Aufbau eines Solitons, das ohne eigentliches Zentrum nur als Feld der inneren Freiheitsgrade räumlich unendlich ausgedehnt existieren soll, nicht vereinbar. Der Raum muss daher als ladungsfrei angenommen werden. Im statischen Fall gilt dann

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{x}) = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) = 0. \quad (6.1)$$

Das bestehende messbare radiale E -Feld, $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, bleibt natürlich erhalten und muss in weiterer Folge, wie alle anderen messbaren Teilcheneigenschaften, aus den noch zu definierenden inneren Freiheitsgraden ableitbar sein.

Diese Konstellation entspricht der Aufgabenstellung, mit der sich Paul Dirac konfrontiert sah, als er versuchte, einen radialsymmetrischen magnetischen Monopol auf Basis der Maxwellgleichungen, also ohne existierende magnetische Ladungen, zu konstruieren. Da sich die Ausgangssituation im Vakuum befindet, liegt es nahe, zuerst eine duale Transformation mit dem Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ durchzuführen (siehe Gl. 4.102), und dann der Argumentation von Paul Dirac zu folgen. Für das Potential des E -Feldes ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{x}) = -c \operatorname{rot} \overset{d}{A}(\vec{x}). \quad (6.2)$$

Das Feld des elektrischen Monopols wird also durch das duale Vektorpotential $\overset{d}{A}(\vec{x})$ beschrieben, das somit als einziges mögliches Bindeglied zu den drei inneren Freiheitsgraden verbleibt. Das eigentliche Potential des elektrischen Monopols $\phi(\vec{x})$ wird in dieser Hinsicht im Weiteren keine Rolle spielen.

6.1.2 Definition

Um nun ein Vektorpotential $\mathcal{A}(\vec{x})$ zu erhalten, das ein E -Feld eines im Ursprung ruhenden elektrischen Monopols erzeugt, berechnet man den elektrischen Fluss $\Phi(r, h)$ einer Punktladung durch eine Kugelkalotte in Abhängigkeit von deren Radius r und der Höhe $h = r(1 - \cos \vartheta)$

$$\Phi(r, h) = \int_{A(r, h)} d\vec{A} \vec{E}(\vec{x}) = - \int_0^{\vartheta(h)} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \vartheta \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -c \int_{A(r, h)} d\vec{A} \operatorname{rot} \mathcal{A}(\vec{x}) = -c \oint_{\partial A(r, h)} d\vec{s} \mathcal{A}(\vec{x}), \quad (6.3)$$

$$\rightarrow \quad \mathcal{A}^\varphi(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 - \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin \vartheta}{r(1 + \cos \vartheta)}. \quad (6.4)$$

Dieses Vektorpotential $\mathcal{A}(\vec{x})$ und somit auch das resultierende E -Feld $\vec{E}(\vec{x})$ sind im Bereich $\vartheta = \pi$ nicht definiert. Dies ist verständlich, denn das E -Feld ist als Rotor des Vektorpotentials quellenfrei. Der elektrische Fluss, der in eine fast geschlossene Kugelkalotte eintritt, muss diese auch irgendwo wieder verlassen. Genau das passiert im Bereich der negativen z -Achse. Man sieht das, wenn man das Vektorpotential $\mathcal{A}(\vec{x})$ mit dem Parameter ϵ regularisiert und danach das E -Feld berechnet

$$\mathcal{A}^{\text{R}\varphi}(\vec{x}, \epsilon) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\sin \vartheta}{r(1 + \epsilon + \cos \vartheta)}, \quad (6.5)$$

$$\vec{E}^{\text{R}}(\vec{x}, \epsilon) = -c \operatorname{rot} \mathcal{A}^{\text{R}}(\vec{x}, \epsilon) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{2\epsilon + \epsilon^2}{(1 + \epsilon + \cos \vartheta)^2}\right) \vec{e}_r = \vec{E}_{\text{nor}}(\vec{x}) + \vec{E}_{\text{str}}(\vec{x}, \epsilon). \quad (6.6)$$

Das regularisierte E -Feld $\vec{E}^{\text{R}}(\vec{x}, \epsilon)$ teilt sich also auf in das normale E -Feld eines Elektrons $\vec{E}_{\text{nor}}(\vec{x})$ und ein zusätzliches E -Feld $\vec{E}_{\text{str}}(\vec{x}, \epsilon)$, das nur im Bereich der negativen z -Achse ungleich Null ist und entgegengesetzte Orientierung aufweist. Dies ist der Dirac-String. Er führt den, zur nicht vorhandenen negativen elektrischen Ladung des Elektrons laufenden, elektrischen Fluss entlang der negativen z -Achse wieder ins Unendliche ab, wie man aus dem Fluss Φ_{tot} von $\vec{E}^{\text{R}}(\vec{x}, \epsilon)$ durch eine geschlossene Kugeloberfläche erkennt

$$\Phi_{\text{tot}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial V} d\vec{A} \vec{E}^{\text{R}}(\vec{x}, \epsilon) = \oint_{\partial V} d\vec{A} \vec{E}_{\text{nor}}(\vec{x}) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial V} d\vec{A} \vec{E}_{\text{str}}(\vec{x}, \epsilon) = -\frac{e}{\epsilon_0} + \frac{e}{\epsilon_0} = 0. \quad (6.7)$$

Eine derartige Feldkonstellation wird Dirac-Monopol genannt.

6.1.3 Das topologische Analogon

Die Existenz des Dirac-Strings macht es erforderlich, dass man zur Beschreibung des E -Feldes eines elektrischen Monopols zumindest zwei nichtregularisierte Vektorpotentiale benötigt. Das könnten zum Beispiel folgende Vektorpotentiale sein

$$\mathcal{A}^{\text{N}}(r, \vartheta, \varphi) := \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 - \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\varphi, \quad \mathcal{A}^{\text{S}}(r, \vartheta, \varphi) := -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 + \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\varphi. \quad (6.8)$$

Das so definierte Vektorpotential $\mathcal{A}^{\text{N}}(r, \vartheta, \varphi) \setminus \mathcal{A}^{\text{S}}(r, \vartheta, \varphi)$ besitzt den Dirac-String auf der negativen \setminus positiven z -Achse.

Diese Situation erinnert stark an die Verhältnisse, die man vorfindet, wenn man versucht, eine Kugel mit Radius R zu parametrisieren. Es bedarf wieder zumindest zweier Karten. Man kann zu diesem Zweck die Methode der stereographischen Projektion wählen. Dabei werden, ausgehend von einem Projektionszentrum auf der Oberfläche, alle anderen Punkte der Kugel durch geradlinige Projektion auf die Tangentialebene des dem Projektionszentrum gegenüberliegenden Punktes abgebildet. Definiert man nun als Projektionszentrum den Südpol\Nordpol, so erhält man zwei Karten, κ_N und κ_S , die jeweils nur am Südpol\Nordpol eine Singularität aufweisen. Dies ist der entscheidende Hinweis auf einen möglichen Zusammenhang zwischen den physikalischen Feldgrößen im \mathbb{M}^4 und topologischen Verhältnissen auf einer Kugeloberfläche in einem inneren Raum \mathbb{R}^3 . Er wird in weiterer Folge zur Definition der inneren Freiheitsgrade und den daraus ableitbaren physikalischen Größen des elektrischen Monopols führen.

6.1.4 Der Zusammenhang Ortsraum und innerer Raum

Sucht man nun nach topologischen Größen, die in Analogie zum nicht regularisierten Vektorpotential $\vec{A}^N(r, \vartheta, \varphi) \setminus \vec{A}^S(r, \vartheta, \varphi)$ überall auf dieser Kugel außer am Südpol\Nordpol definiert sind, so bieten sich als Ausgangspunkt zwei Mengen von lokalen Koordinatensystemen an: Man legt dabei zwei beliebige zueinander parallele Koordinatensysteme in den Tangentialraum der beiden Pole und verschiebt sie dann bis zum jeweilig gegenüberliegenden Pol, indem man den Winkel zum betreffenden Meridian konstant lässt. Man erhält so für jeden Punkt der Kugel außer für die Pole zwei lokale Koordinatensysteme e_i^N und e_i^S . Eine fundamentale Größe, die sich aus dieser Konstellation ableiten lässt, ist die Winkelgeschwindigkeit $\Gamma_s^N(s)_{ik}$ und $\Gamma_s^S(s)_{ik}$, mit der die Koordinatensysteme bei einer Bewegung entlang eines Weges $s(\vartheta, \varphi)$ auf der Kugeloberfläche rotieren, wenn man sie analog der Vorgehensweise bei der SO_3 und SU_2 durch Weglassen der Normalkomponente bei der Differenzbildung miteinander vergleichbar macht (siehe Gl. 3.54 und 3.103). Im vorliegenden Fall führt dieser Ansatz zu einer SO_2 -Rotation der lokalen Koordinatensysteme, und man erhält speziell für die Koordinatensysteme des Nordpols

$$e_i^N(s + ds) = e^{-i\Gamma_s^N(s)_{ik} ds} e_k^N(s) = \begin{pmatrix} \cos(\Gamma_s^N(s) ds) & -\sin(\Gamma_s^N(s) ds) \\ \sin(\Gamma_s^N(s) ds) & \cos(\Gamma_s^N(s) ds) \end{pmatrix}_{ik} e_k^N(s), \quad (6.9)$$

$$\text{mit } \Gamma_s^N(s)_{ik} := \Gamma_s^N(s) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_{ik}. \quad (6.10)$$

Um nun $\Gamma_s^N(s)$ zu erhalten, berechnet man zuerst $\Gamma_\theta^N(\theta, \phi)$ und $\Gamma_\phi^N(\theta, \phi)$. Dazu rollt man den einen Meridian tangierenden Zylinder beziehungsweise den einen Breitenkreis tangierenden Kegel in einer Ebene ab und kann dann die Rotation der lokalen Koordinatensysteme direkt ablesen. Es ergibt sich

$$\Gamma_\theta^N(\theta, \phi) = 0, \quad \Gamma_\phi^N(\theta, \phi) = 1 - \cos \theta, \quad (6.11)$$

$$\Gamma_{s\theta}^N(R, \theta, \phi) = \frac{\Gamma_\theta^N(\theta, \phi)}{R} = 0, \quad \Gamma_{s\phi}^N(R, \theta, \phi) = \frac{\Gamma_\phi^N(\theta, \phi)}{R \sin \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{R \sin \theta}, \quad (6.12)$$

$$\Gamma_s^N(R, \theta, \phi) ds = \Gamma_{s\theta}^N(R, \theta, \phi) ds_\theta + \Gamma_{s\phi}^N(R, \theta, \phi) ds_\phi. \quad (6.13)$$

Auf Grund der Ähnlichkeit von $\Gamma_{s\theta}^N(R, \theta, \phi)$ mit $dA^{N\vartheta}(r, \vartheta, \varphi)$ und von $\Gamma_{s\phi}^N(R, \theta, \phi)$ mit $dA^{N\varphi}(r, \vartheta, \varphi)$ kann man nun jedem Punkt im \mathbb{R}^3 des ruhenden elektrischen Monopols mit den Ortskoordinaten r, ϑ und φ einen Punkt auf der Einheitskugel S^2 im inneren Raum mit den gleichen Winkelkoordinaten $\theta = \vartheta$ und $\phi = \varphi$ zuordnen. Das den Punkten im \mathbb{R}^3 zugeordnete Element der S^2 wird üblicherweise durch seinen Ortsvektor im inneren Raum, $\vec{n}(\vec{x})$, mit der Länge 1 ausgedrückt. Für die eben definierte Konstellation gilt also

$$\vec{n}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}. \quad (6.14)$$

Dieses Feld wird auf Grund seiner besonderen Form Dirac-Igel genannt.

Bewegt man sich nun im Ortsraum vom Punkt \vec{x} zum Punkt $\vec{x} + d\vec{x}$, so durchläuft man gleichzeitig einen infinitesimalen Weg auf der Oberfläche der Einheitskugel und die an diesen Oberflächenpunkten definierten lokalen Koordinatensysteme führen eine, dem Weg entsprechende, infinitesimale Rotation aus

$$\begin{aligned} e_i^N(\vec{x} + d\vec{x}) &= e^{-i\Gamma_{x^j}^N(\vec{x})_{ik} dx^j} e_k^N(\vec{x}) \\ &= e^{-i(\Gamma_{sr}^N(r, \vartheta, \varphi)_{ik} ds_r + \Gamma_{s\vartheta}^N(r, \vartheta, \varphi)_{ik} ds_\vartheta + \Gamma_{s\varphi}^N(r, \vartheta, \varphi)_{ik} ds_\varphi)} e_k^N(\vec{x}), \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\Gamma_{sr}^N(r, \vartheta, \varphi) = 0, \quad \Gamma_{s\vartheta}^N(r, \vartheta, \varphi) = \Gamma_{s\theta}^N(r, \vartheta, \varphi), \quad \Gamma_{s\varphi}^N(r, \vartheta, \varphi) = \Gamma_{s\phi}^N(r, \vartheta, \varphi). \quad (6.16)$$

Daraus folgt die gesuchte Abhängigkeit der Größen des Ortsraums von Größen des inneren Raums

$$d\vec{A}^N(r, \vartheta, \varphi) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{\Gamma}^N(r, \vartheta, \varphi). \quad (6.17)$$

Eine analoge Rechnung für die Koordinatensysteme des Südpols liefert das Ergebnis

$$d\vec{A}^S(r, \vartheta, \varphi) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{\Gamma}^S(r, \vartheta, \varphi). \quad (6.18)$$

Hierbei handelt es sich um ein statisches Problem. Die kovariante Verallgemeinerung der obigen Zusammenhänge lautet folgendermaßen

$$e_i^{N\setminus S}(x^\mu + dx^\mu) = e^{-i\Gamma_\mu^{N\setminus S}(x^\mu)_{ik} dx^\mu} e_k^{N\setminus S}(x^\mu), \quad (6.19)$$

$$dA^{N\setminus S\mu}(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \Gamma^{N\setminus S\mu}(x^\mu), \quad \text{mit } \Gamma_\mu^{N\setminus S} := \begin{pmatrix} \Gamma_0^{N\setminus S} \\ \vec{\Gamma}^{N\setminus S} \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

6.1.5 Eichungen

Auch die dualen Potentiale $dA^{N\setminus S\mu}(x^\mu)$ können lokal umgeicht werden

$$dA^{N\setminus S'\mu}(x^\mu) = dA^{N\setminus S\mu}(x^\mu) + \partial^\mu X(x^\mu). \quad (6.21)$$

Eine Umeichung im Ortsraum darf die zugeordneten Elemente der S^2 nicht verändern. Die Form des Dirac-Igels bleibt auch nach der Eichung erhalten

$$\vec{n}'(x^\mu) = \vec{n}(x^\mu). \quad (6.22)$$

Weiters muss die Proportionalität zwischen $dA^{N\setminus S^\mu}(x^\mu)$ und $\Gamma^{N\setminus S^\mu}(x^\mu)$ eichunabhängig sein, um physikalische Relevanz zu besitzen

$$dA^{N\setminus S^\mu}(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \Gamma^{N\setminus S^\mu}(x^\mu), \quad (6.23)$$

$$\rightarrow \Gamma^{N\setminus S^\mu}(x^\mu) = \Gamma^{N\setminus S^\mu}(x^\mu) - \frac{4\pi\epsilon_0 c}{e} \partial^\mu X(x^\mu). \quad (6.24)$$

Eine lokale Umeichung im Ortsraum führt also zu einem Verdrehen der lokalen Tangentialbasen der Punkte auf der S^2 , die den Punkten im Ortsraum eichunabhängig zugeordnet sind. Ein und dasselbe lokale Koordinatensystem auf der S^2 kann somit, je nach Ortszugehörigkeit, unterschiedlich gedreht werden. Umgekehrt entspricht ein, über den Ortsraum kontinuierliches, lokales Verdrehen der Tangentialbasen von $\vec{n}(x^\mu)$ automatisch einer lokalen Umeichung der dualen Potentiale $dA^{N\setminus S^\mu}(x^\mu)$.

6.1.6 Folgerungen

Der Dirac-Igel beschreibt bereits die fundamentale Beziehung zwischen den Feldgrößen eines elektrischen Monopols im Ortsraum, $\vec{E}(\vec{x}) = -c \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x})$, und zugeordneten geometrischen Größen $\vec{\Gamma}(\vec{x})$ in einem inneren Raum. Er besitzt allerdings einen Makel: Die verwendeten Vektorpotentiale $d\vec{A}^{N\setminus S}(\vec{x})$ sind auf der negativen\positiven z -Achse nicht definiert. Dies entspricht im inneren Raum der Tatsache, dass es unmöglich ist, auf einer S^2 2-dimensionale Koordinatensysteme kontinuierlich zu platzieren. Die Einheitskugel selbst ist jedoch vollkommen symmetrisch, und so liegt es nahe, in einer unzulänglichen Beschreibung der S^2 durch 2-dimensionale Tangentialbasen die Ursache für die auftretenden Singularitäten auszumachen.

6.2 Der Wu-Yang-Monopol

6.2.1 Definition

Um die Singularität des Dirac-Strings zu eliminieren, bietet es sich an, ein 3-dimensionales lokales Koordinatensystem zur Beschreibung der Tangentialräume der S^2 zu verwenden. Die Mannigfaltigkeit der $SU(2)$, in diesem Zusammenhang in weiterer Folge auch Farbraum genannt, bietet mit ihrem Äquator, also mit allen Elementen $U(\vec{\omega})$ mit $\omega = \pi$, eine Möglichkeit, diese Forderung zu erfüllen (siehe Gl. 3.71)

$$U(\vec{\omega})|_{\omega=\pi} = Q(\vec{\alpha})|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \mathbb{1} \cos \alpha - i\vec{n}\vec{\sigma} \sin \alpha|_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = -i\vec{n}\vec{\sigma}, \quad \text{mit } \omega = 2\alpha, \quad \vec{n}^2 = 1. \quad (6.25)$$

Alle Elemente des Äquators liegen auf einer verallgemeinerten S^2 mit dem Radius $R = \sqrt{2}$. In der Orthogonalbasis dieses inneren Raums, $-i\vec{\sigma}$, mit der Länge $\sqrt{2}$, besitzt der Vektor \vec{n} wie gefordert die Länge 1. Die lokalen orthogonalen Tangentialbasen der $SU(2)$, $e_{Q,i} = -i\frac{1}{2}\sigma_i Q$, mit der Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$, sind 3-dimensional und überall auf der $SU(2)$ kontinuierlich definiert. Jedes Element des Äquators wird wiederum durch den Vektor \vec{n} ausgedrückt. Die Zuordnung zum Ortsraum bleibt gleich. Es gilt also weiterhin

$$\vec{n}(x^\mu) := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}. \quad (6.26)$$

Diese Funktion ist nun überall im Ortsraum, also auch auf der gesamten z -Achse sinnvoll, weil die betreffenden Tangentialbasen existieren. Dieses Feld wird Wu-Yang-Igel genannt.

6.2.2 Grundgleichungen

Im Unterschied zur S^2 führen die lokalen Koordinatensysteme bei einer Bewegung auf der SU_2 keine SO_2 -Rotationen, sondern SO_3 -Rotationen aus. Am Äquator lauten die Formeln für die entsprechenden Drehungen der SU_2 -Elemente $Q(x^\mu)$ und der dazugehörigen Tangentialbasen $e_{Q,i}(x^\mu)$ sowie für die Koordinaten des Krümmungstensors $\vec{R}_{\mu\nu}(x^\mu)$ (siehe Gl. 3.96, 3.97, 3.98, 3.104, 3.105, 3.106, 3.114)

$$\vec{\Omega}_\mu = 2\vec{n} \times \partial_\mu \vec{n}, \quad (6.27)$$

$$\partial_\mu Q = -i\frac{1}{2}\vec{\Omega}_\mu \vec{\sigma} Q \quad \rightarrow \quad \partial_\mu n_i = -i\frac{1}{2}\vec{\Omega}_\mu \vec{L}_{ik} n_k, \quad (6.28)$$

$$Q(x^\mu + dx^\mu) = e^{-i\frac{1}{2}\vec{\Omega}_\mu(x^\mu)\vec{\sigma}dx^\mu} Q(x^\mu) \quad \rightarrow \quad n_i(x^\mu + dx^\mu) = e^{-i\frac{1}{2}\vec{\Omega}_\mu(x^\mu)\vec{L}_{ik}dx^\mu} n_k(x^\mu), \quad (6.29)$$

$$\vec{\Gamma}_\mu = \vec{n} \times \partial_\mu \vec{n}, \quad (6.30)$$

$$\partial_\mu e_{Q,i} = -i\Gamma_{\mu ik} e_{Q,k}, \quad (6.31)$$

$$e_{Q,i}(x^\mu + dx^\mu) = e^{-i\Gamma_{\mu ik}(x^\mu)dx^\mu} e_{Q,k}(x^\mu), \quad (6.32)$$

$$\vec{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\Gamma}_\nu - \partial_\nu \vec{\Gamma}_\mu) = \vec{\Gamma}_\mu \times \vec{\Gamma}_\nu = \partial_\mu \vec{n} \times \partial_\nu \vec{n}. \quad (6.33)$$

Es zeigt sich, dass $\vec{n}(x^\mu)$ mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit $\Gamma_{\mu}(x^\mu)_{ik}$ rotiert, wie der Vektor $\vec{e}_Q(x^\mu)$ der entsprechenden Tangentialbasen. Setzt man die Drehung von $\vec{n}(x^\mu)$ allgemein an, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{n}(x^\mu + dx^\mu) &= \vec{n}(x^\mu) + \partial_\mu \vec{n}(x^\mu) dx^\mu = e^{-i\vec{\Omega}_{\vec{n}\mu}(x^\mu)\vec{L}dx^\mu} \vec{n}(x^\mu) = \vec{n}(x^\mu) - i(\vec{\Omega}_{\vec{n}\mu}(x^\mu)\vec{L}) \vec{n}(x^\mu) dx^\mu, \\ &\rightarrow \quad \vec{\Omega}_{\vec{n}\mu} = \vec{\Omega}_{\vec{n}\mu\parallel} + \vec{\Omega}_{\vec{n}\mu\perp} = \vec{n}(\vec{n}\vec{\Omega}_{\vec{n}\mu}) + \vec{n} \times \partial_\mu \vec{n}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Die Koordinaten $\vec{\Gamma}_\mu(x^\mu) = \vec{n}(x^\mu) \times \partial_\mu \vec{n}(x^\mu)$ entsprechen also dem Normalanteil von $\vec{\Omega}_{\vec{n}\mu}(x^\mu)$ bezüglich $\vec{n}(x^\mu)$. Die Drehung von $\vec{n}(x^\mu)$ erfolgt somit auf dem kürzest möglichen Weg, also ohne Rotation um die eigene Achse.

Aus der Proportionalität zwischen den farbskalaren Größen ${}^dA^\mu(x^\mu)$ und $\Gamma^\mu(x^\mu)$ wird nun eine Abhängigkeit zwischen farbvektoriellen Größen (siehe Gl. 6.20)

$${}^d\vec{A}^\mu(x^\mu) := -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{\Gamma}^\mu(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{n}(x^\mu) \times \partial^\mu \vec{n}(x^\mu). \quad (6.35)$$

Es ist somit möglich, direkt aus dem Feld $\vec{n}(x^\mu)$ das neu definierte farbvektorielle Viererpotential ${}^d\vec{A}^\mu(x^\mu)$ des elektrischen Monopols zu berechnen. Man erhält das sogenannte Wu-Yang-Potential

$${}^d\vec{A}^0(x^\mu) = 0, \quad {}^d\vec{A}^r(x^\mu) = 0, \quad {}^d\vec{A}^\vartheta(x^\mu) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi(x^\mu), \quad {}^d\vec{A}^\varphi(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta(x^\mu). \quad (6.36)$$

Diese farbvektoriellen Größen müssen im Weiteren zu farbskalaren Größen umgeformt werden, um sie mit dem bekannten farbskalaren Viererpotential ${}^dA^\mu(x^\mu)$ einer elektrischen Punktladung vergleichen zu können. Eine Eichtransformation ist ein Mechanismus, der genau das bewerkstelligen kann.

6.2.3 Eichungen

Jedem Punkt des M^4 wird dabei eine $SO(3)$ -Matrix $\Omega_E(x^\mu)$ zugeordnet, die den Vektor der Paulimatrizen $\vec{\sigma}$ lokal dreht

$$\vec{\sigma}'(x^\mu) = \Omega_E(x^\mu)\vec{\sigma}, \quad \text{mit } \Omega_E(x^\mu) = e^{-i\omega_E(x^\mu)\vec{e}_{\omega_E}(x^\mu)\vec{L}}. \quad (6.37)$$

Dies führt einerseits dazu, dass sich das Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 , in dem sich das zum Punkt x^μ gehörige $SU(2)$ -Element $Q(x^\mu)$ befindet, dreht. $Q(x^\mu)$ selbst bleibt dabei unverändert

$$Q = -i\vec{n}'\vec{\sigma}' = -i\vec{n}\vec{\sigma} \quad \rightarrow \quad \vec{n}' = \Omega_E\vec{n}. \quad (6.38)$$

Andererseits kommt es auch im Tangentialraum von $Q(x^\mu)$ zu einer Rotation der Basis

$$e'_{Q,i} = -i\frac{1}{2}\vec{\sigma}'_i Q = \Omega_{Eij}(-i)\frac{1}{2}\sigma_j Q = \Omega_{Eij}e_{Q,j}. \quad (6.39)$$

Das Drehen der lokalen Koordinatensysteme im Tangentialraum von $Q(x^\mu)$ entspricht wiederum einem kontinuierlich veränderten $\vec{I}'^\mu(x^\mu)$ und somit einer Umeichung des farbvektoriellen Viererpotentials $\vec{A}'^\mu(x^\mu)$.

Für die Veränderung von $Q(x^\mu)$ erhält man

$$\partial_\mu Q = -i\frac{1}{2}\vec{\Omega}'_\mu\vec{\sigma}'Q = -i\frac{1}{2}\vec{\Omega}_\mu\vec{\sigma}Q \quad \rightarrow \quad \vec{\Omega}'_\mu = \Omega_E\vec{\Omega}_\mu. \quad (6.40)$$

Aus der Veränderung der gedrehten Tangentialbasen $e'_{Q,i}(x^\mu)$ wird $\Gamma'^\mu(x^\mu)$ definiert

$$\partial_\mu e'_{Q,i} = -i\Gamma'_{\mu ik} e'_{Q,k}. \quad (6.41)$$

Die Forderung, dass die Parallelverschiebung eines Vektors v von der Eichung unbeeinflusst bleiben muss, führt zur expliziten Darstellung von $\Gamma'^\mu(x^\mu)$ und $\vec{I}'^\mu(x^\mu)$

$$D_\mu \vec{v} = (\partial_\mu \mathbb{1} + i\Gamma_\mu)\vec{v} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad D'_\mu \vec{v}' = (\partial_\mu \mathbb{1} + i\Gamma'_\mu)\vec{v}' = 0, \quad (6.42)$$

$$\rightarrow \Gamma'_\mu = \Omega_E(\Gamma_\mu - i\partial_\mu \mathbb{1})\Omega_E^T, \quad (6.43)$$

$$\rightarrow \vec{I}'_\mu = \Omega_E\vec{I}_\mu + \vec{\Omega}_{E\mu}, \quad (6.44)$$

$$\vec{\Omega}_{E\mu} = \partial_\mu \omega_E \vec{e}_{\omega_E} + \sin \omega_E \partial_\mu \vec{e}_{\omega_E} + (1 - \cos \omega_E)(\vec{e}_{\omega_E} \times \partial_\mu \vec{e}_{\omega_E}). \quad (6.45)$$

Daraus lässt sich nun die Veränderung von $\vec{n}'(x^\mu)$ ableiten

$$\partial_\mu \vec{n}' = -i\Gamma'_\mu \vec{n}'. \quad (6.46)$$

Die Gleichung für die Entwicklung von $\vec{n}'(x^\mu)$ ist also forminvariant unter Eichtransformationen. Die Koordinaten $\vec{I}'^\mu(x^\mu)$ werden nun allerdings generell nicht mehr normal auf $\vec{n}'(x^\mu)$ stehen. Der Ansatz für $\vec{I}'^\mu(x^\mu)$ in Bezug auf $\vec{n}'(x^\mu)$ muss daher ein Allgemeiner sein (siehe Gl. 6.34)

$$\vec{I}'_\mu = \vec{n}'(\vec{n}'\vec{I}'_\mu) + \vec{n}' \times \partial_\mu \vec{n}' = \vec{n}'(\vec{n}'\vec{\Omega}_{E\mu}) + \vec{n}' \times \partial_\mu \vec{n}'. \quad (6.47)$$

Bei der Berechnung von $R'_{\mu\nu}(x^\mu)$ muss man berücksichtigen, dass die Proportionalität $\vec{I}'_\mu(x^\mu) = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_{E\mu}(x^\mu)$ nach der Eichung nicht mehr existiert. Damit gilt auch die Maurer

Cartan Gleichung nicht mehr (siehe Gl. 3.114), und man muss auch für $R'_{\mu\nu}(x^\mu)$ auf den allgemeinen Ansatz zurückgreifen (siehe Gl. 3.110)

$$R'_{\mu\nu} = \vec{R}'_{\mu\nu} \vec{L} = (\partial_\mu \vec{F}'_\nu - \partial_\nu \vec{F}'_\mu - \vec{F}'_\mu \times \vec{F}'_\nu) \vec{L} = \Omega_E \vec{R}_{\mu\nu} \vec{L} \Omega_E^T = \Omega_E R_{\mu\nu} \Omega_E^T, \quad (6.48)$$

$$\rightarrow \vec{R}'_{\mu\nu} = \Omega_E \vec{R}_{\mu\nu}. \quad (6.49)$$

Die Koordinaten des Krümmungstensors $\vec{R}'_{\mu\nu}(x^\mu)$ verhalten sich also unter Eichtransformationen wie die Koordinaten eines Vektors.

6.2.4 Die Parallel-Eichung

Diese spezielle Eichung ermöglicht es, das farbvektorielle Viererpotential $\vec{d}A^\mu(x^\mu)$ in ein farbskalares Viererpotential $dA^\mu(x^\mu)$ zu transformieren. Man dreht dabei lokal den Vektor der Paulimatrizen $\vec{\sigma}$ derart, dass die resultierenden Vektoren $\vec{n}'(x^\mu)$ in die Z -Richtung des inneren Raumes zeigen. Verwendet man wieder die inneren Winkelkoordinaten $\theta(x^\mu)$ und $\phi(x^\mu)$, so ergibt sich

$$\vec{n}' = \Omega_E \vec{n} = e^{i\theta \vec{e}_\phi \cdot \vec{L}} \vec{n} = \vec{e}_Z, \quad (6.50)$$

$$\vec{F}'_\mu = \vec{n}' (\vec{n}' \vec{\Omega}_{E\mu}) = (1 - \cos \theta) \partial_\mu \phi \vec{e}_Z, \quad (6.51)$$

$$\vec{R}'_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{F}'_\nu - \partial_\nu \vec{F}'_\mu = \sin \theta (\partial_\mu \theta \partial_\nu \phi - \partial_\nu \theta \partial_\mu \phi) \vec{e}_Z. \quad (6.52)$$

Die Größe $\vec{F}'^\mu(x^\mu)$, die ja die Veränderung von $\vec{n}'(x^\mu)$ beschreibt, kann nur mehr eine zu $\vec{n}'(x^\mu)$ parallele Komponente aufweisen, die einer gegenseitigen Verdrehung der parallelen Vektoren $\vec{n}'(x^\mu)$ entspricht. Somit zeigt auch $\vec{R}'_{\mu\nu}(x^\mu)$ in die innere Z -Richtung. Die Parallel-Eichung ist allerdings eine singuläre Eichung, da sie für Vektoren $\vec{n}(x^\mu)$, die in die zur Eichung entgegengesetzte innere Richtung weisen, nicht definiert ist.

6.2.5 Das farbskalare Viererpotential

Führt man nun die Parallel-Eichung speziell für den Wu-Yang-Igel durch, so erhält man

$$\vec{F}'_\mu(x^\mu) = \left(\frac{1 - \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} \right) \vec{e}_Z. \quad (6.53)$$

Unterstellt man wiederum gleichbleibende Proportionalität zwischen $\vec{d}A'^\mu(x^\mu)$ und $\vec{F}'^\mu(x^\mu)$, so kann man jetzt ein farbskalares Viererpotential $dA^\mu(x^\mu)$ aus der einzig verbleibenden inneren Z -Komponente von $\vec{F}'^\mu(x^\mu)$ definieren

$$\vec{d}A'^\mu(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{F}'^\mu(x^\mu), \quad (6.54)$$

$$\rightarrow dA^\mu(x^\mu) := \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{1 - \cos \vartheta}{r \sin \vartheta} \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = dA^{N\mu}(x^\mu). \quad (6.55)$$

Das so erhaltene farbskalare Viererpotential $dA^\mu(x^\mu)$ ist also exakt gleich dem früher definierten Viererpotential $dA^{N\mu}(x^\mu)$, das beim Dirac-Monopol für den gesamten \mathbb{M}^4 mit Ausnahme der negativen z -Achse definiert wurde. Eine Umeichung aller Vektoren $\vec{n}(x^\mu)$

in Richtung der negativen inneren Z -Achse führt analog zu einem farbskalaren Viererpotential ${}^dA'^\mu(x^\mu)$, das dem Viererpotential ${}^dA^{S\mu}(x^\mu)$ entspricht. Im Unterschied zum Dirac-Monopol entsteht aber beim Wu-Yang-Monopol die Singularität nicht durch die Art der Beschreibung selbst, sondern findet ihre Ursache in der Singularität der Parallel-Eichung. Das am Beginn der Eichung stehende Wu-Yang-Potential beschreibt den elektrischen Monopol mit Ausnahme des Nullpunkts singularitätenfrei.

6.2.6 Der farbskalare Feldstärketensor

Motiviert durch die besondere Form der Koordinaten des Krümmungstensors in der Parallel-Eichung, $\vec{R}'_{\mu\nu}(x^\mu) = \partial_\mu \vec{I}'_\nu(x^\mu) - \partial_\nu \vec{I}'_\mu(x^\mu)$, lassen sich auf eine, unter Eichtransformationen notwendig forminvariante Art und Weise die farbvektoriellen Feldstärketensoren ${}^d\vec{F}'^{\mu\nu}(x^\mu)$ sowie ${}^d\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ und damit auch die farbvektoriellen Feldgrößen \vec{E}'^i und \vec{B}'^i sowie \vec{E}^i und \vec{B}^i definieren (siehe Gl. 4.105)

$${}^d\vec{F}'^{\mu\nu} := -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{R}'^{\mu\nu} = \partial^\mu {}^d\vec{A}'^\nu - \partial^\nu {}^d\vec{A}'^\mu, \quad (6.56)$$

$${}^d\vec{F}^{\mu\nu} := -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{R}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\mu {}^d\vec{A}^\nu - \partial^\nu {}^d\vec{A}^\mu), \quad (6.57)$$

$${}^d\vec{F}'^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & -\vec{B}'^x & -\vec{B}'^y & -\vec{B}'^z \\ \vec{B}'^x & 0 & \frac{1}{c}\vec{E}'^z & -\frac{1}{c}\vec{E}'^y \\ \vec{B}'^y & -\frac{1}{c}\vec{E}'^z & 0 & \frac{1}{c}\vec{E}'^x \\ \vec{B}'^z & \frac{1}{c}\vec{E}'^y & -\frac{1}{c}\vec{E}'^x & 0 \end{pmatrix}, \quad {}^d\vec{F}^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & -\vec{B}^x & -\vec{B}^y & -\vec{B}^z \\ \vec{B}^x & 0 & \frac{1}{c}\vec{E}^z & -\frac{1}{c}\vec{E}^y \\ \vec{B}^y & -\frac{1}{c}\vec{E}^z & 0 & \frac{1}{c}\vec{E}^x \\ \vec{B}^z & \frac{1}{c}\vec{E}^y & -\frac{1}{c}\vec{E}^x & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

Analog der Vorgehensweise beim farbskalaren Viererpotential ${}^dA'^\mu(x^\mu)$ lässt sich auch hier der farbskalare Feldstärketensor ${}^dF'^{\mu\nu}(x^\mu)$ aus der einzig verbliebenen inneren Z -Komponente des farbvektoriellen Feldstärketensors ${}^d\vec{F}'^{\mu\nu}(x^\mu)$ ablesen.

Um nun, im allgemeinen Fall unabhängig von einer speziellen Eichung, aus dem farbvektoriellen Feldstärketensor ${}^d\vec{F}'^{\mu\nu}(x^\mu)$ auf wieder forminvariante Weise den farbskalaren eichinvarianten Feldstärketensor ${}^dF'^{\mu\nu}(x^\mu) = {}^dF^{\mu\nu}(x^\mu)$ zu erhalten, bietet es sich an, das innere Produkt von ${}^d\vec{F}'^{\mu\nu}(x^\mu)$ mit $\vec{n}'(x^\mu)$ sowie von ${}^d\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ mit $\vec{n}(x^\mu)$ zu bilden, denn beide Multiplikatoren zeigen unter Eichtransformationen ein einfaches vektorielles Transformationsverhalten (siehe Gl. 6.38, 6.49)

$${}^dF'^{\mu\nu} := {}^d\vec{F}'^{\mu\nu} \vec{n}', \quad (6.59)$$

$${}^dF^{\mu\nu} := {}^d\vec{F}^{\mu\nu} \vec{n} = {}^d\vec{F}'^{\mu\nu} \vec{n}' = {}^dF'^{\mu\nu}. \quad (6.60)$$

6.2.7 Die Energiedichte

Ausgehend von der relativistischen Elektrodynamik folgt für die eichunabhängige Lagrangedichte ${}^d\mathcal{L}_{\text{em}}(x^\mu)$ und daraus für die eichunabhängige Energiedichte $\mathcal{H}_{\text{em}}(x^\mu) = {}^d\mathcal{H}_{\text{em}}(x^\mu)$ für den M^4 ohne den Ursprung

$$\begin{aligned}
d\mathcal{L}_{\text{em}} &= d\mathcal{T}_{\text{em}} - d\mathcal{V}_{\text{em}} = -\frac{1}{4\mu_0} dF^{\mu\nu} dF_{\mu\nu} = -\frac{\epsilon_0}{2} E^i E^i \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} (d\vec{F}^{\mu\nu} \vec{n})(d\vec{F}_{\mu\nu} \vec{n}) = -\frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^i \vec{n})(\vec{E}^i \vec{n}) \\
&= -\frac{1}{4\mu_0} d\vec{F}^{\mu\nu} d\vec{F}_{\mu\nu} = -\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^i \vec{E}^i, \tag{6.61}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = d\mathcal{T}_{\text{em}} + d\mathcal{V}_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0}{2} E^i E^i = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^i \vec{n})(\vec{E}^i \vec{n}) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^i \vec{E}^i. \tag{6.62}$$

6.2.8 Die Abelsche Eichfreiheit

Ein Feld $\vec{n}'(x^\mu)$ in beliebiger Eichung besitzt immer noch einen speziellen verbleibenden Eichfreiheitsgrad, nämlich lokale abelsche Rotationen mit der SO3-Matrix $\Omega_{\text{Ea}}(x^\mu)$ um die eigene Achse

$$\vec{\sigma}''(x^\mu) = \Omega_{\text{Ea}}(x^\mu) \vec{\sigma}'(x^\mu), \quad \text{mit } \Omega_{\text{Ea}}(x^\mu) = e^{-i\omega_{\text{Ea}}(x^\mu) \vec{n}'(x^\mu) \vec{L}}, \tag{6.63}$$

$$\vec{n}'' = \Omega_{\text{Ea}} \vec{n}' = \vec{n}', \tag{6.64}$$

$$\vec{\Gamma}''_\mu = \vec{\Gamma}'_\mu + \partial_\mu \omega_{\text{Ea}} \vec{n}', \tag{6.65}$$

$$\vec{R}''_{\mu\nu} = \Omega_{\text{Ea}} \vec{R}'_{\mu\nu} = \vec{R}'_{\mu\nu}. \tag{6.66}$$

Die Vektoren $\vec{n}'(x^\mu)$ und $\vec{R}'_{\mu\nu}(x^\mu)$ bleiben also unverändert, und $\vec{\Gamma}'_\mu(x^\mu)$ erhält einen weiteren Term, welcher die zusätzliche gegenseitige Verdrehung der Vektoren \vec{n}' berücksichtigt. In der Parallel-Eichung erhält man daraus für das farbskalare Viererpotential $dA''^\mu(x^\mu)$ die gewohnte Eichfreiheit aus der Elektrodynamik

$$dA''^\mu = dA'^\mu - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \partial^\mu \omega_{\text{Ea}}. \tag{6.67}$$

In Anlehnung an diese Zusammenhänge werden die farbvektoriellen Größen auch als nicht abelsch bezeichnet, und diejenigen farbskalaren Größen, welche sich als Projektion der farbvektoriellen Größen auf $\vec{n}(x^\mu)$ ergeben, werden auch abelsch genannt.

6.3 Der SU2-Monopol

6.3.1 Definition

Um die verbleibende Singularität des Wu-Yang-Monopols im Ursprung des \mathbb{M}^4 zu eliminieren, bietet es sich an, statt nur des Äquators der SU2, die gesamte obere Halbkugel der SU2 zur Beschreibung eines elektrischen Monopols heranzuziehen

$$U(\vec{\omega}) = Q(\vec{\alpha}) = \mathbb{1} \cos \alpha - i \vec{n} \vec{\sigma} \sin \alpha, \quad \text{mit } \omega = 2\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \vec{n}^2 = 1. \tag{6.68}$$

Die Zuordnung des Vektors $\vec{n}(x^\mu)$ zum \mathbb{M}^4 bleibt gleich

$$\vec{n}(x^\mu) := \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}. \tag{6.69}$$

Die rotationssymmetrische Funktion $\alpha(x^\mu) = \alpha(|\vec{x}|)$ wird so definiert, dass der Ursprung frei von Singularitäten ist, und dass der SU2-Monopol für große Entfernungen in einen Wu-Yang-Monopol übergeht

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(\infty) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.70)$$

Der genaue Funktionsverlauf von $\alpha(|\vec{x}|)$ ergibt sich aus der Minimierung der Gesamtenergie des Monopols, wie später gezeigt werden wird. Dieses Feld wird SU2-Igel genannt.

6.3.2 Grundgleichungen

Alle Gleichungen, die beim Wu-Yang-Monopol zur Beschreibung seiner physikalischen Eigenschaften aus der Topologie hergeleitet wurden, müssen nicht nur in weiter Entfernung gelten, sondern müssen sich auch auf den Kern des SU2-Monopols übertragen lassen. Ausgehend von dem nun allgemeinen $\vec{I}^\mu(x^\mu)$ der SU2 sind dies folgende Formeln (siehe Gl. 6.35, 6.57, 6.60, 6.61, 6.62)

$$\vec{I}_\mu = \partial_\mu \alpha \vec{n} + \sin \alpha \cos \alpha \partial_\mu \vec{n} + \sin^2 \alpha (\vec{n} \times \partial_\mu \vec{n}), \quad (6.71)$$

$$d\vec{A}^\mu := -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{I}^\mu, \quad (6.72)$$

$$d\vec{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2} (\partial^\mu d\vec{A}^\nu - \partial^\nu d\vec{A}^\mu), \quad dF^{\mu\nu} := d\vec{F}^{\mu\nu} \vec{n}, \quad (6.73)$$

$$d\mathcal{L}_{\text{em}} = d\mathcal{T}_{\text{em}} - d\mathcal{V}_{\text{em}} := -\frac{1}{4\mu_0} d\vec{F}^{\mu\nu} d\vec{F}_{\mu\nu} = -\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^i \vec{E}^i, \quad (6.74)$$

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = d\mathcal{T}_{\text{em}} + d\mathcal{V}_{\text{em}} := \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^i \vec{E}^i. \quad (6.75)$$

Im Gegensatz zu der Situation in weiten Entfernungen vom Zentrum gilt die Gleichheit von $(d\vec{F}^{\mu\nu} \vec{n})(d\vec{F}_{\mu\nu} \vec{n})$ und $d\vec{F}^{\mu\nu} d\vec{F}_{\mu\nu}$ im Innenraum des SU2-Monopols nicht mehr, da hier die Größen $d\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ und $\vec{n}(x^\mu)$ im Allgemeinen nicht mehr zueinander parallel stehen. Daher ist der nun getroffene Ansatz für $d\mathcal{L}_{\text{em}}(x^\mu)$ und somit auch für $\mathcal{H}_{\text{em}}(x^\mu)$ prinzipiell eine freie Wahl. Bemerkenswert dabei ist, dass die Komponenten von $d\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$, die normal auf $\vec{n}(x^\mu)$ stehen, im farbskalaren Feldstärketensor $dF^{\mu\nu}(x^\mu)$ keine Berücksichtigung finden, aber gleichzeitig einen Beitrag zur Lagrangedichte $d\mathcal{L}_{\text{em}}(x^\mu)$ und Energiedichte $\mathcal{H}_{\text{em}}(x^\mu)$ leisten. Ein SU2-Monopol in der nun getroffenen Definition besteht also aus mehr, als nur aus seinem farbskalaren elektromagnetischen Feld.

6.3.3 Das E-Feld

Für das farbvektorielle E-Feld $\vec{E}^i(x^\mu)$ erhält man in Kugelkoordinaten folgende Werte

$$\vec{E}^r = c d\vec{F}^{r\vartheta} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} (\vec{I}^{s\vartheta} \times \vec{I}^{s\varphi}) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \sin^2 \alpha \vec{e}_r, \quad (6.76)$$

$$\vec{E}^\vartheta = c d\vec{F}^{\varphi r} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} (\vec{I}^{s\varphi} \times \vec{I}^{sr}) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} \sin \alpha \vec{e}_\xi, \quad (6.77)$$

$$\vec{E}^\varphi = c d\vec{F}^{r\vartheta} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} (\vec{I}^{sr} \times \vec{I}^{s\vartheta}) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} \sin \alpha \vec{e}_\eta, \quad (6.78)$$

$$\text{mit } \vec{e}_\xi = \cos \alpha \vec{e}_\vartheta + \sin \alpha \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\eta = -\sin \alpha \vec{e}_\vartheta + \cos \alpha \vec{e}_\varphi.$$

Im Limes $r \rightarrow 0 \setminus r \rightarrow \infty$, und bei Verwendung einer Profilfunktion $\alpha(r) = \arctan \frac{r}{r_0}$, die später hergeleitet wird, ergibt sich folgendes Bild

$$\lim_{r \rightarrow 0} \vec{E}^r(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0^2} \vec{e}_r \quad \setminus \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E}^r(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad (6.79)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \vec{E}^\vartheta(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0^2} \vec{e}_\vartheta \quad \setminus \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E}^\vartheta(x^\mu) = 0, \quad (6.80)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \vec{E}^\varphi(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0^2} \vec{e}_\varphi \quad \setminus \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E}^\varphi(x^\mu) = 0. \quad (6.81)$$

Von den farbskalaren E-Feldgrößen $E^i(x^\mu) = \vec{E}^i(x^\mu) \vec{n}(x^\mu)$ bleibt überall nur $E^r(x^\mu)$ erhalten. Dieses Feld strebt für kleine Abstände im Gegensatz zur herkömmlichen Elektrodynamik nicht gegen unendlich sondern gegen einen endlichen Wert, ist somit allerdings im Ursprung weiterhin nicht definiert. Für große Abstände erhält man das gewohnte E-Feld eines elektrischen Monopols

$$\lim_{r \rightarrow 0} \vec{E}(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0^2} \vec{e}_r \quad \setminus \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{E}(x^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r. \quad (6.82)$$

6.3.4 Die Energie

Die elektromagnetische Feldenergie des Monopols $E_{\text{em}}(t)$ kann auf Grund der sphärischen Symmetrie durch ein Integral über r dargestellt werden

$$\begin{aligned} E_{\text{em}} &= \int d^3x \mathcal{H}_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3x (\vec{E}^r \vec{E}^r + \vec{E}^\vartheta \vec{E}^\vartheta + \vec{E}^\varphi \vec{E}^\varphi) \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int dr \left(\frac{\sin^4 \alpha}{2r^2} + \left(\frac{d}{dr} \cos \alpha \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (6.83)$$

Eine Streckung der Profilfunktion $\alpha(r) \rightarrow \alpha(\frac{r}{\lambda})$ mit $\lambda > 1$ führt zu einer Verringerung der Energie $E_{\text{em}}(t)$

$$E_{\text{em}\lambda} := \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \int dr \left(\frac{\sin^4 \alpha(\frac{r}{\lambda})}{2r^2} + \left(\frac{d}{dr} \cos \alpha(\frac{r}{\lambda}) \right)^2 \right) = \frac{1}{\lambda} E_{\text{em}}. \quad (6.84)$$

Ein derartiger Monopol kann daher nicht stabil sein. So wie beim Sinus-Gordon-Soliton die potentielle Energie der Schwerkraft ein Zerfließen des Solitons verhindert, benötigt auch der SU2-Monopol einen potentiellen Energieterm $E_{\text{pot}}(x^\mu)$ zu seiner Stabilisierung. Eine potentielle Energiedichte $\mathcal{H}_{\text{pot}}(x^\mu)$ muss für große Abstände gegen Null gehen, damit die gesamte potentielle Energie nach oben beschränkt ist und muss weiters immer positiv sein, damit eine Streckung der Profilfunktion $\alpha(r)$ zu einer Erhöhung der potentiellen Energie führt und damit einem Auseinanderlaufen des Monopols entgegenwirkt. Der folgende Ansatz als Funktion der Topologie berücksichtigt diese Forderungen

$$\mathcal{H}_{\text{pot}}(x^\mu) := \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \Lambda(q_0(x^\mu)) := \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{q_0^{2m}(x^\mu)}{r_0^4} = \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{\cos^{2m} \alpha(r)}{r_0^4}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (6.85)$$

Die Größe r_0^4 gewährleistet die richtige Dimension von $\mathcal{H}_{\text{pot}}(x^\mu)$. Somit können nun die Funktionen ${}^d\mathcal{L}(x^\mu)$, $\mathcal{H}(x^\mu)$ und $E(t)$ für den SU2-Monopol in ihrer entgeltigen Form angeschrieben werden

$${}^d\mathcal{L} = {}^d\mathcal{T}_{\text{em}} - {}^d\mathcal{V}_{\text{em}} - \mathcal{H}_{\text{pot}} := -\frac{1}{4\mu_0} {}^d\vec{F}^{\mu\nu} {}^d\vec{F}_{\mu\nu} - \mathcal{H}_{\text{pot}} = -\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^i \vec{E}^i - \mathcal{H}_{\text{pot}}, \quad (6.86)$$

$$\mathcal{H} = {}^d\mathcal{T}_{\text{em}} + {}^d\mathcal{V}_{\text{em}} + \mathcal{H}_{\text{pot}} := \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^i \vec{E}^i + \mathcal{H}_{\text{pot}}, \quad (6.87)$$

$$E = m_0 c^2 = E_{\text{em}} + E_{\text{pot}} = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int d\rho \left(\frac{\sin^4 \alpha^*}{2\rho^2} + \left(\frac{d}{d\rho} \cos \alpha^* \right)^2 + \rho^2 \cos^{2m} \alpha^* \right), \quad (6.88)$$

$$\text{mit } \rho := \frac{r}{r_0}, \quad \alpha^*(\rho) := \alpha(r).$$

Hierbei wurde dem SU2-Monopol eine Ruhemasse $m_0(t)$ zugeordnet.

Die tatsächliche Energiefunktion $E_\lambda(t)$ mit bestimmtem $\alpha^*(\rho)$ findet ihr Minimum als Funktion von λ bei $\lambda = 1$. Daraus lässt sich eine Beziehung zwischen $E_{\text{em}}(t)$ und $E_{\text{pot}}(t)$ im Energieminimum ableiten. Sie wird Hobart-Derrick-Theorem genannt

$$\frac{d}{d\lambda} E_\lambda |_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda} (E_{\text{em}\lambda} + E_{\text{pot}\lambda}) |_{\lambda=1} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} E_{\text{em}} + \lambda^3 E_{\text{pot}} \right) |_{\lambda=1} = 0, \quad (6.89)$$

$$\rightarrow E_{\text{em}} = 3E_{\text{pot}}. \quad (6.90)$$

6.3.5 Die Stabilisierung

Die einzige variierbare Bestimmungsgröße für die Energie $E(t)$ eines SU2-Monopols ist die Funktion $\alpha^*(\rho)$. Um nun diese Energie für eine stabile Solionenkonfiguration zu minimieren, muss man die Variation des Energiefunktional $\delta E[\alpha^*(\rho)]$ gleich Null setzen

$$\delta E[\alpha^*(\rho)] := \int dq \frac{\delta E[\alpha^*(\rho)]}{\delta \alpha^*(q)} \delta \alpha^*(q) := E[\alpha^*(\rho) + \delta \alpha^*(\rho)] - E[\alpha^*(\rho)] = 0, \quad (6.91)$$

$$\rightarrow \int d\rho \left(\frac{d^2}{d\rho^2} \cos \alpha^* + \frac{(1 - \cos^2 \alpha^*) \cos \alpha^*}{\rho^2} - m\rho^2 \cos^{2m-1} \alpha^* \right) \sin \alpha^* \delta \alpha^* = 0. \quad (6.92)$$

Da die Variationen $\delta \alpha^*(\rho)$ voneinander unabhängig sind, erhält man als Bestimmungsgleichung für die Funktion $\alpha^*(\rho)$, die einer Minimumenergie entspricht

$$\frac{d^2}{d\rho^2} \cos \alpha^* + \frac{(1 - \cos^2 \alpha^*) \cos \alpha^*}{\rho^2} - m\rho^2 \cos^{2m-1} \alpha^* = 0, \quad (6.93)$$

$$\rightarrow \alpha^*(\rho) = \arctan \rho, \quad \text{mit } m = 3. \quad (6.94)$$

Ein mögliches Ergebnis für $\alpha^*(\rho)$ ist also die bereits für das Sinus-Gordon-Soliton charakteristische Arcustangens-Funktion (siehe Gl. 5.16).

Für die Energie eines SU2-Monopols $E(t)$ ergibt sich somit explizit

$$E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{\pi}{4} = 0,511 \text{ MeV} \quad \rightarrow \quad r_0 = 2,21 \text{ fm}. \quad (6.95)$$

Die Energieanteile des radialen E-Feldes, des tangentialen E-Feldes und der potentiellen Energie stehen dabei in einem Verhältnis von 2 : 1 : 1. Die radialen Energiedichten des tangentialen E-Feldes und der potentiellen Energie sind sehr stark in der Nähe des Zentrums konzentriert und fallen dann verhältnismäßig schnell asymptotisch gegen Null ab. Integriert man nun diese Anteile zum Beispiel nur bis zu einem Wert von $\rho = 10$, was einem Radius $r = 10 r_0$ entspricht, so vernachlässigt man dabei lediglich 0,08 % der Gesamtenergie eines Solitons. Die Energieanteile des radialen E-Feldes sind im Gegensatz dazu allerdings langreichweitig.

6.3.6 Lorentztransformationen

Die SU2-Elemente $Q(\vec{\alpha}(x^\mu))$ werden den Punkten im \mathbb{M}^4 unabhängig vom verwendeten Koordinatensystem zugeordnet. Die Koordinaten $q_a(\vec{\alpha}(x^\mu))$ $a = 1, 2, 3, 4$ von $Q(\vec{\alpha}(x^\mu))$ sind daher Lorentzskalare. Speziell für ein, gegenüber einem ruhenden Soliton mit der Geschwindigkeit v in positive x -Richtung bewegtes System S' erhält man

$$Q(\vec{\alpha}(x, y, z)) = Q(\vec{\alpha}(\gamma(x' + vt'), y', z')) = Q(\vec{\alpha}''((x' + vt'), y', z')) = Q(\vec{\alpha}'(ct', x', y', z')), \quad (6.96)$$

$$\rightarrow \quad \vec{\alpha}'(x'^\mu) = \vec{\alpha}(x^\mu), \quad \alpha'(x'^\mu) = \alpha(x^\mu), \quad \vec{n}'(x'^\mu) = \vec{n}(x^\mu). \quad (6.97)$$

Der SU2-Monopol ist im System S' lorentzkontrahiert und bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in negative x' -Richtung. Das bewegte Teilchen bleibt also rein auf Grund der Relativitätstheorie in seiner Form erhalten. Eine weitere wichtige Eigenschaft von Solitonen ist somit erfüllt.

Die topologischen Größen des Solitons transformieren sich wie folgt

$$\partial'_\mu Q'(x'^\mu) = -i \vec{\Gamma}'_\mu(x'^\mu) \vec{\sigma} Q'(x'^\mu), \quad (6.98)$$

$$\rightarrow \quad \vec{\Gamma}'^\mu(x'^\mu) = \Lambda^\mu_\nu \vec{\Gamma}^\nu(x^\mu). \quad (6.99)$$

Aus den transformierten topologischen Größen des Solitons lassen sich nun die farbvektoriellen und farbskalaren elektromagnetischen Feldgrößen im System S' ableiten, wenn man den diesbezüglichen Formeln die notwendige Lorentzinvarianz unterstellt

$$d\vec{A}'^\mu(x'^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{\Gamma}'^\mu(x'^\mu) = \Lambda^\mu_\nu d\vec{A}^\nu(x^\mu), \quad (6.100)$$

$$d\vec{F}'^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial'^\mu d\vec{A}'^\nu - \partial'^\nu d\vec{A}'^\mu) = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma d\vec{F}^{\rho\sigma}, \quad (6.101)$$

$$\vec{E}'^x = \vec{E}^x, \quad \vec{E}'^y = \gamma \vec{E}^y, \quad \vec{E}'^z = \gamma \vec{E}^z, \quad (6.102)$$

$$\vec{B}'^x = 0, \quad \vec{B}'^y = \beta \gamma \frac{1}{c} \vec{E}^z, \quad \vec{B}'^z = -\beta \gamma \frac{1}{c} \vec{E}^y, \quad (6.103)$$

$$d\vec{F}'^{\mu\nu} = d\vec{F}'^{\mu\nu} \vec{n}' = \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma d\vec{F}^{\rho\sigma}, \quad (6.104)$$

$$E'^x = E^x, \quad E'^y = \gamma E^y, \quad E'^z = \gamma E^z, \quad (6.105)$$

$$B'^x = 0, \quad B'^y = \beta \gamma \frac{1}{c} E^z, \quad B'^z = -\beta \gamma \frac{1}{c} E^y. \quad (6.106)$$

Das Ergebnis steht in Einklang mit den Transformationsformeln der Elektrodynamik für elektromagnetische Felder (siehe Gl. 4.68 und 4.69).

6.3.7 Der Viererimpuls

Die Berechnung der Energie $E'(t')$ des Solitons im System S' erfolgt wieder über die betreffenden forminvarianten Gleichungen aus dem Ruhesystem

$${}^d\mathcal{L}' = {}^d\mathcal{T}'_{\text{em}} - {}^d\mathcal{V}'_{\text{em}} - \mathcal{H}'_{\text{pot}} = -\frac{1}{4\mu_0} {}^d\vec{F}'^{\mu\nu} {}^d\vec{F}'_{\mu\nu} - \mathcal{H}'_{\text{pot}} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}'^i \vec{B}'^i - \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}'^i \vec{E}'^i - \mathcal{H}'_{\text{pot}}, \quad (6.107)$$

$$\mathcal{H}' = {}^d\mathcal{T}'_{\text{em}} + {}^d\mathcal{V}'_{\text{em}} + \mathcal{H}'_{\text{pot}} = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}'^i \vec{B}'^i + \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}'^i \vec{E}'^i + \mathcal{H}'_{\text{pot}}. \quad (6.108)$$

Integriert man zu fester Zeit t' und benützt das Hobart-Derrick-Theorem (siehe Gl. 6.90), so erhält man folgendes Transformationsverhalten von $E(t)$

$$E' = \int d^3x' \mathcal{H}' = \gamma \int d^3x \mathcal{H} = \gamma E = m_0 \gamma c^2. \quad (6.109)$$

Im Vergleich mit der Energie eines Sinus-Gordon-Solitons entspricht dabei die magnetische Feldenergie der kinetischen Energie der Pendel, die elektrische Feldenergie der Torsionsenergie der Drehfeder und die potentielle Energie ist, wie schon erwähnt, das Analogon zur Energie der Schwerkraft.

Für die Definition des Impulses eines Solitons $\vec{p}'(t')$ im System S' macht man einen zur Definition der Energie $E'(t')$ folgerichtigen Ansatz. Bei Integration zu fester Zeit t' und wieder unter Verwendung des Hobart-Derrick-Theorems (siehe Gl. 6.90) ergibt sich

$$\begin{aligned} p'^x &= \int d^3x' g'^x := \int d^3x' \epsilon_0 (\vec{E}'^y \vec{B}'^z - \vec{E}'^z \vec{B}'^y) \\ &= -\frac{v}{c^2} \gamma \int d^3x \mathcal{H} = -\frac{v}{c^2} \gamma E = -m_0 \gamma v, \end{aligned} \quad (6.110)$$

$$\rightarrow \vec{p}' = -m_0 \gamma \vec{v}. \quad (6.111)$$

Der dazugehörige Viererimpuls $p'^\mu(t')$ des Solitons ist vergleichbar mit dem eines realen freien Teilchens und transformiert auch dementsprechend

$$p'^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E' \\ \vec{p}' \end{pmatrix}^\mu = \begin{pmatrix} m_0 \gamma c \\ -m_0 \gamma \vec{v} \end{pmatrix}^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu = \Lambda^\mu_\nu \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}^\nu = \Lambda^\mu_\nu \begin{pmatrix} m_0 c \\ \vec{0} \end{pmatrix}^\nu, \quad (6.112)$$

$$p'^\mu p'_\mu = p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2. \quad (6.113)$$

7 Allgemeine SU2-Felder

Im Folgenden werden zuerst die Verhältnisse in allgemeinen SU2-Feldkonstellationen untersucht, um dann in einem letzten Schritt einen Spezialfall dieser SU2-Felder, den sogenannten elektrodynamischen Grenzfall, der einer bestimmten Menge von Anfangsbedingungen entspricht, mit der herkömmlichen Elektrodynamik vergleichen zu können.

7.1 Fundamentale Beziehungen

7.1.1 Grundgleichungen

Ausgehend von dem Feld eines SU2-Monopols können folgende Relationen auf allgemeine SU2-Feldkonstellationen übertragen werden (siehe Gl. 6.72, 6.73, 6.86)

$$d\vec{A}^\mu = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{F}^\mu, \quad (7.1)$$

$$d\vec{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\mu d\vec{A}^\nu - \partial^\nu d\vec{A}^\mu), \quad dF^{\mu\nu} = d\vec{F}^{\mu\nu} \vec{n}, \quad (7.2)$$

$$\vec{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d\vec{F}_{\rho\sigma}, \quad F^{\mu\nu} = \vec{F}^{\mu\nu} \vec{n}, \quad (7.3)$$

$$d\mathcal{L} = d\mathcal{T}_{\text{em}} - d\mathcal{V}_{\text{em}} - \mathcal{H}_{\text{pot}} = -\frac{1}{4\mu_0} d\vec{F}^{\mu\nu} d\vec{F}_{\mu\nu} - \mathcal{H}_{\text{pot}}. \quad (7.4)$$

7.1.2 Bewegungsgleichungen

Die Variation der Lagrangedichte eines SU2-Feldes, $d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})$, erfolgt generell nach den verallgemeinerten Freiheitsgraden des Systems und nach deren Ableitungen, $\vec{\alpha}$ und $\partial_\mu \vec{\alpha}$

$$\delta d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}) = d\mathcal{L}(\vec{\alpha} + \delta\vec{\alpha}, \partial_\mu(\vec{\alpha} + \delta\vec{\alpha})) - d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}). \quad (7.5)$$

Hierbei wird lokal für jedes $Q(\vec{\alpha})$ der Winkel $\vec{\alpha}$ variiert

$$\delta Q(\vec{\alpha}) = Q(\vec{\alpha} + \delta\vec{\alpha}) - Q(\vec{\alpha}). \quad (7.6)$$

Alternativ dazu kann man auch lokal $Q(\vec{\alpha})$ mit einem Nachbarelement von $\mathbb{1}$, $Q(\delta\vec{\beta})$, multiplizieren, und man erhält

$$\delta Q(\vec{\alpha}) = Q(\delta\vec{\beta})Q(\vec{\alpha}) - Q(\vec{\alpha}). \quad (7.7)$$

Daraus ergibt sich eine alternative Variation der Lagrangedichte $d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})$

$$\begin{aligned} \delta d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}, \delta\vec{\beta}, \partial_\mu \delta\vec{\beta}) &= d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}, \delta\vec{\beta}, \partial_\mu \delta\vec{\beta}) - d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}) \\ &= \frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} ((\vec{q} \delta\vec{\beta}) \frac{d}{dq_0} \Lambda - \partial_\mu \delta\vec{\beta} (\vec{I}_\nu \times (\vec{I}^\mu \times \vec{I}^\nu))). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Die Bewegungsgleichungen des Systems errechnet man wieder durch Variation der dazugehörigen Wirkung dS

$$\delta^d S = \frac{1}{c} \int d^4x \delta^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}, \delta \vec{\beta}, \partial_\mu \delta \vec{\beta}) = 0, \quad (7.9)$$

$$\rightarrow \vec{q} \frac{d}{dq_0} \Lambda + \partial_\mu (\vec{I}_\nu \times (\vec{I}^\mu \times \vec{I}^\nu)) = 0. \quad (7.10)$$

Um das Ergebnis in eine anschauliche Form zu bringen, bietet es sich an, eine farbvektoruelle Impulsdichte $\vec{\pi}_\alpha(x^\mu)$ und ihre verallgemeinerte Form $\vec{\pi}_\alpha^\mu(x^\mu)$ zu definieren (siehe Gl. 4.43)

$$\vec{\pi}_\alpha(x^\mu) := \frac{\partial^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})}{\partial \partial_0 \vec{\alpha}}, \quad (7.11)$$

$$\rightarrow \vec{\pi}_\alpha^\mu(x^\mu) := \frac{\partial^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})}{\partial \partial_\mu \vec{\alpha}} = \frac{\partial \delta^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})}{\partial \delta \partial_\mu \vec{\alpha}} = \frac{\partial \delta^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})}{\partial \partial_\mu \delta \vec{\alpha}}. \quad (7.12)$$

Aufgrund der alternativen Variation der Lagrangedichte ${}^d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})$ lautet die entgeltige Definition der Impulsdichte $\vec{\pi}^\mu(x^\mu)$ folgendermaßen

$$\vec{\pi}^\mu(x^\mu) := \frac{\partial \delta^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}, \delta \vec{\beta}, \partial_\mu \delta \vec{\beta})}{\partial \partial_\mu \delta \vec{\beta}} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} (\vec{I}_\nu \times (\vec{I}^\mu \times \vec{I}^\nu)). \quad (7.13)$$

Diese Impulsdichte $\vec{\pi}^\mu(x^\mu)$ kann auch direkt aus der Lagrangedichte ${}^d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})$ berechnet werden

$$\delta^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}, \delta \vec{\beta}, \partial_\mu \delta \vec{\beta}) = \delta^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}, \delta \vec{\beta}, (\partial_\mu \delta \vec{\beta} - 2\vec{I}_\mu \times \delta \vec{\beta})) = \delta^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}, \delta \vec{\beta}, \delta \vec{I}_\mu), \quad (7.14)$$

$$\rightarrow \vec{\pi}^\mu(x^\mu) = \frac{\partial \delta^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha}, \delta \vec{\beta}, \delta \vec{I}_\mu)}{\partial \delta \vec{I}_\mu} = \frac{\partial^d \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})}{\partial \vec{I}_\mu}. \quad (7.15)$$

Die Größe $\vec{I}_\mu(x^\mu)$, die ja proportional zu $\partial_\mu Q(x^\mu)$ ist, kann somit als verallgemeinerte Geschwindigkeit interpretiert werden.

Die Bewegungsgleichungen lauten schließlich in ihrer anschaulichen Form

$$\partial_\mu \vec{\pi}^\mu(x^\mu) = -\frac{d}{d\vec{\alpha}} \mathcal{H}_{\text{pot}}(x^\mu). \quad (7.16)$$

7.1.3 Quantenzahlen

Topologische Ladung: Betrachtet man nun eine beliebige S1-Feldkonfiguration im Sinus-Gordon-Modell, so ist die Anzahl der Umdrehungen der Pendelkette bei endlicher Ausdehnung der Verteilung der potentiellen Energie zu einem Zeitpunkt gequantelt. Solange das Feld endlich bleibt, ist diese Quantenzahl zeitlich stabil. Diese Überlegung kann auf beliebige, in Bezug auf die potentielle Energie endliche SU2-Feldkonfigurationen übertragen werden. Man erhält dabei die zeitlich konstante Quantenzahl Q_{top} , die topologische Ladung. Sie gibt an, wie oft beim Durchlaufen des gesamten Ortsraumes zu einem Zeitpunkt t das dazugehörige Tangentialvolumen der SU2 bedeckt wird (siehe Gl. 3.101 und 3.102)

$$Q_{\text{top}} := \frac{1}{V(\text{SU2})} \int dx dy dz \frac{1}{2\sqrt{2}} \vec{\Omega}_x (\vec{\Omega}_y \times \vec{\Omega}_z) = \frac{1}{2\pi^2} \int dx dy dz \vec{F}_x (\vec{F}_y \times \vec{F}_z), \quad (7.17)$$

$$\rightarrow Q_{\text{top}} \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}_0. \quad (7.18)$$

Dadurch kann man der gesamten SU2-Feldkonfiguration einen Spin s zuordnen, der somit ebenfalls quantisiert ist

$$s := |Q_{\text{top}}| = \frac{1}{2\pi^2} \left| \int dx dy dz \vec{F}_x (\vec{F}_y \times \vec{F}_z) \right|, \quad (7.19)$$

$$\rightarrow s \in \frac{1}{2} \mathbb{N}_0. \quad (7.20)$$

In kovarianter Formulierung wird die topologische Ladung Q_{top} auch zu einem Lorentzskalar

$$Q_{\text{top}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{3!} \int \vec{F}_\mu (\vec{F}_\nu \times \vec{F}_\rho) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho. \quad (7.21)$$

Durch den Vergleich mit der allgemeinen kovarianten Definition einer Ladung lässt sich eine topologische Viererstromdichte j_{top}^μ definieren, die, bedingt durch die zeitliche Konstanz von Q_{top} , automatisch die Kontinuitätsgleichung erfüllt

$$Q_{\text{top}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{3!} \int \vec{F}_\mu (\vec{F}_\nu \times \vec{F}_\rho) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = \frac{1}{c} \frac{1}{3!} \int \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j_{\text{top}}^\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \quad (7.22)$$

$$\rightarrow j_{\text{top}}^\sigma = \begin{pmatrix} c\rho_{\text{top}} \\ \vec{j}_{\text{top}} \end{pmatrix} = \frac{c}{2\pi^2} \frac{1}{3!} \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \vec{F}_\mu (\vec{F}_\nu \times \vec{F}_\rho) = -\frac{2}{3e\pi} \frac{1}{\mu_0} \vec{F}_\mu \vec{F}^{\mu\sigma}, \quad (7.23)$$

$$\rightarrow \partial_\mu j_{\text{top}}^\mu = 0. \quad (7.24)$$

Die topologische Ladung eines endlichen Volumens V , $Q_{\text{top}V}(t)$, ist nicht gequantelt und auch zeitlich nicht konstant, da topologische Ströme, $\vec{j}_{\text{top}} d\vec{A}$, in das Volumen eindringen können, und es auch wieder verlassen können. Das kovariant definierte Integral ist allerdings weiterhin ein Lorentzskalar

$$Q_{\text{top}V}(t) := \frac{1}{c} \frac{1}{3!} \int_V \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j_{\text{top}}^\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho. \quad (7.25)$$

Elektrische Ladung: Im Gegensatz zum Sinus-Gordon-Modell besitzen allgemeine, in Bezug auf die potentielle Energie endliche SU2-Felder auf Grund der höheren Anzahl an Freiheitsgraden noch eine weitere charakteristische Quantenzahl, nämlich die Windungszahl Z . Sie gibt an, wie oft beim Durchlaufen einer beliebigen geschlossenen Fläche im Ortsraum zu einem Zeitpunkt t , welche den gesamten potentiellen Feldanteil umschließt, die dazugehörige Äquatorfläche der SU2 bedeckt wird (siehe Gl. 3.100). Die Windungszahl Z ist ebenfalls zeitlich konstant und lautet mit nach außen gerichteter Fläche $F(u, v)$

$$\begin{aligned} Z &:= \frac{1}{A_{\text{Äqu}}(\text{SU2})} \oint_{F(u,v)} du dv \frac{1}{2} \vec{n} (\vec{\Omega}_u \times \vec{\Omega}_v) = \frac{1}{4\pi} \oint_{F(u,v)} du dv \vec{n} (\vec{F}_u \times \vec{F}_v) \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{F(u,v)} du dv \vec{n} ((\vec{n} \times \partial_u \vec{n}) \times (\vec{n} \times \partial_v \vec{n})) = \frac{1}{4\pi} \oint_{F(u,v)} du dv \vec{n} (\partial_u \vec{n} \times \partial_v \vec{n}), \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$\rightarrow Z \in \mathbb{Z}_0. \quad (7.27)$$

Dadurch kann man der gesamten SU2-Feldkonfiguration eine elektrische Ladung Q_{el} zuordnen, die ebenfalls quantisiert ist

$$Q_{\text{el}} := -eZ = -\frac{e}{4\pi} \oint_{F(u,v)} du dv \vec{n}(\vec{\Gamma}_u \times \vec{\Gamma}_v), \quad (7.28)$$

$$\rightarrow Q_{\text{el}} \in -e\mathbb{Z}_0. \quad (7.29)$$

In kovarianter Formulierung wird die elektrische Ladung Q_{el} ebenfalls zu einem Lorentzskalar. Dieses Flächenintegral kann dann mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Volumintegral umgewandelt werden (siehe Gl. 2.42). Die nach außen orientierte Fläche $F(u, v)$ und ein rechtshändig orientiertes inneres Volumen $V_{\text{in}}(r, s, t)$ verlangen dabei ein positives Vorzeichen

$$Q_{\text{el}} = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{2!} \oint_{F(u,v)} \vec{n}(\vec{\Gamma}_\mu \times \vec{\Gamma}_\nu) dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{2!} \int_{V_{\text{in}}(r,s,t)} \partial_\mu (\vec{n}(\vec{\Gamma}_\nu \times \vec{\Gamma}_\rho)) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho. \quad (7.30)$$

Durch den Vergleich mit der allgemeinen kovarianten Definition einer Ladung lässt sich wieder eine elektrische Viererstromdichte j_{el}^μ definieren, die, bedingt durch die zeitliche Konstanz von Q_{el} , automatisch die Kontinuitätsgleichung erfüllt

$$Q_{\text{el}} = -\frac{e}{4\pi} \frac{1}{2!} \int_{V_{\text{in}}(r,s,t)} \partial_\mu (\vec{n}(\vec{\Gamma}_\nu \times \vec{\Gamma}_\rho)) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho = \frac{1}{c} \frac{1}{3!} \int_{V_{\text{in}}(r,s,t)} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j_{\text{el}}^\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho, \quad (7.31)$$

$$\rightarrow j_{\text{el}}^\sigma = \begin{pmatrix} c\rho_{\text{el}} \\ \vec{j}_{\text{el}} \end{pmatrix} = -\frac{3ec}{4\pi} \frac{1}{3!} \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \partial_\mu \vec{n}(\vec{\Gamma}_\nu \times \vec{\Gamma}_\rho) = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\sigma}, \quad (7.32)$$

$$\rightarrow \partial_\mu j_{\text{el}}^\mu = 0. \quad (7.33)$$

Die elektrische Ladung eines endlichen Volumens V , $Q_{\text{el}V}(t)$, ist nicht gequantelt und auch zeitlich nicht konstant, da elektrische Ströme, $\vec{j}_{\text{el}} d\vec{A}$, in das Volumen eindringen können, und es auch wieder verlassen können. Das kovariant definierte Integral ist allerdings weiterhin ein Lorentzskalar

$$Q_{\text{el}V}(t) := \frac{1}{c} \frac{1}{3!} \int_V \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} j_{\text{el}}^\sigma dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\rho. \quad (7.34)$$

Homöomorphie: Beliebige SU2-Feldkonfigurationen, die durch kontinuierliche Deformation bei endlicher Gesamtenergie, also bei festgehaltenen Feldwerten im Unendlichen, ineinander überführbar sind, können topologisch nicht voneinander unterschieden werden. Sie sind homöomorph und weisen damit den gleichen Satz von Quantenzahlen Q_{top} und Q_{el} auf. Umgekehrt stellt auch die Gleichheit der beiden Quantenzahlen bereits eine hinreichende Bedingung für die Homöomorphie dar.

7.1.4 Arten von Solitonen

Alle stabilen elektrischen SU2-Monopole können durch die 4 möglichen Kombinationen der jeweils betragsmäßig kleinsten von Null verschiedenen Quantenzahlen $Q_{\text{top}} = \pm \frac{1}{2}$ und

$Q_{\text{el}} = \pm e$ charakterisiert werden:

$$\begin{aligned}
Q_{\text{top}} = +\frac{1}{2} \setminus Q_{\text{el}} = -e &\longrightarrow \text{Monopol: } q_0 > 0 \setminus \vec{n}(x^\mu) = +\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \text{ Elektron mit Spin up} \\
Q_{\text{top}} = -\frac{1}{2} \setminus Q_{\text{el}} = -e &\longrightarrow \text{Monopol: } q_0 < 0 \setminus \vec{n}(x^\mu) = +\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \text{ Elektron mit Spin down} \\
Q_{\text{top}} = +\frac{1}{2} \setminus Q_{\text{el}} = +e &\longrightarrow \text{Monopol: } q_0 < 0 \setminus \vec{n}(x^\mu) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \text{ Positron mit Spin up} \\
Q_{\text{top}} = -\frac{1}{2} \setminus Q_{\text{el}} = +e &\longrightarrow \text{Monopol: } q_0 > 0 \setminus \vec{n}(x^\mu) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \text{ Positron mit Spin down}
\end{aligned}$$

Stabile magnetische Monopole sind bei Verwendung von dualen Potentialen durch SU2-Felder nicht darstellbar.

7.1.5 Feldgleichungen

Ausgehend von der Darstellung der beiden farbvektoriellen Feldstärketensoren $\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ und ${}^d\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ können für beliebige SU2-Feldkonfigurationen jeweils zwei farbvektorielle Viererstromdichten $\vec{j}_{\text{el}}^\mu(x^\mu)$ und $\vec{j}_{\text{mag}}^\mu(x^\mu)$ definiert werden, welche auf Grund der Antisymmetrie der beiden Feldstärketensoren automatisch die Kontinuitätsgleichung erfüllen, und zu den farbvektoriellen Feldgleichungen führen

$$j_{\text{el}_a}^\nu := \begin{pmatrix} c\rho_{\text{el}_a} \\ \vec{j}_{\text{el}_a} \end{pmatrix} := \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F_a^{\mu\nu} = -\frac{3ec}{4\pi} \frac{1}{3!} \epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu (\vec{\Gamma}_\rho \times \vec{\Gamma}_\sigma)_a = 0, \quad \partial_\nu j_{\text{el}_a}^\nu = 0, \quad (7.35)$$

$$\rightarrow \quad \text{div } \vec{E}_a = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{el}_a} = 0, \quad \text{rot } \vec{B}_a = \mu_0 \vec{j}_{\text{el}_a} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}_a = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}_a, \quad (7.36)$$

$$j_{\text{mag}_a}^\nu := \begin{pmatrix} c\rho_{\text{mag}_a} \\ \vec{j}_{\text{mag}_a} \end{pmatrix} := c \partial_\mu {}^d F_a^{\mu\nu} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \partial_\mu (\vec{\Gamma}^\mu \times \vec{\Gamma}^\nu)_a, \quad \partial_\nu j_{\text{mag}_a}^\nu = 0, \quad (7.37)$$

$$\rightarrow \quad \text{div } \vec{B}_a = \rho_{\text{mag}_a}, \quad \text{rot } \vec{E}_a = -\vec{j}_{\text{mag}_a} - \partial_t \vec{B}_a. \quad (7.38)$$

Die dazugehörigen zwei farbskalaren Viererstromdichten $j_{\text{el}}^\mu(x^\mu)$ und $j_{\text{mag}}^\mu(x^\mu)$ und die farbskalaren Feldgleichungen erhält man wiederum durch Divergenzbildung der farbskalaren Feldstärketensoren $F^{\mu\nu}(x^\mu)$ und ${}^d F^{\mu\nu}(x^\mu)$

$$j_{\text{el}}^\nu := \begin{pmatrix} c\rho_{\text{el}} \\ \vec{j}_{\text{el}} \end{pmatrix} := \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{3ec}{4\pi} \frac{1}{3!} \epsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu ((\vec{\Gamma}_\rho \times \vec{\Gamma}_\sigma) \vec{n}), \quad \partial_\nu j_{\text{el}}^\nu = 0, \quad (7.39)$$

$$\rightarrow \quad \text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{el}}, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{el}} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}, \quad (7.40)$$

$$j_{\text{mag}}^\nu := \begin{pmatrix} c\rho_{\text{mag}} \\ \vec{j}_{\text{mag}} \end{pmatrix} := c \partial_\mu {}^d F^{\mu\nu} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \partial_\mu ((\vec{\Gamma}^\mu \times \vec{\Gamma}^\nu) \vec{n}), \quad \partial_\nu j_{\text{mag}}^\nu = 0, \quad (7.41)$$

$$\rightarrow \quad \text{div } \vec{B} = \rho_{\text{mag}}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\vec{j}_{\text{mag}} - \partial_t \vec{B}. \quad (7.42)$$

Diese Feldgleichungen sind linear. Es gilt also das Superpositionsprinzip. Aus einer Invarianten der farbvektoriellen Feldstärketensoren lässt sich eine Beziehung zwischen den farbvektoriellen Feldgrößen ableiten

$$\vec{F}^{\mu\nu} \mathop{d}\vec{F}_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E}^i \vec{B}^i = 0. \quad (7.43)$$

7.1.6 Der kanonische Energie-Impuls-Tensor

Der Ansatz für den kanonischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}(x^\mu)$ entspricht dem eines Vektorfeldes in der relativistischen Feldtheorie, wobei man nun $\vec{\alpha}(x^\mu)$ und $\partial_\mu \vec{\alpha}(x^\mu)$ in der Lagrangedichte ${}^d\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \partial_\mu \vec{\alpha})$ als verallgemeinerte Freiheitsgrade des Systems interpretiert (siehe Gl. 4.51)

$$\begin{aligned} \Theta^{\mu\nu} &:= \frac{\partial {}^d\mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \vec{\alpha}} \partial^\nu \vec{\alpha} - g^{\mu\nu} {}^d\mathcal{L} = \frac{\partial {}^d\mathcal{L}}{\partial \vec{I}_\mu} \vec{I}^\nu - g^{\mu\nu} {}^d\mathcal{L} = -\frac{e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} (\vec{I}^\mu \times \vec{I}_\rho) (\vec{I}^\nu \times \vec{I}^\rho) - g^{\mu\nu} {}^d\mathcal{L} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \mathop{d}\vec{F}_\rho{}^\mu \mathop{d}\vec{F}^{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4\mu_0} \mathop{d}\vec{F}^{\rho\sigma} \mathop{d}\vec{F}_{\rho\sigma} + \mathcal{H}_{\text{pot}} \right). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Der kanonische Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}(x^\mu)$ ist bereits symmetrisch und somit ident dem dazugehörigen symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}(x^\mu)$. Seine Koordinatenfunktionen sehen folgendermaßen aus

$$T^{00} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^i \vec{E}^i + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^i \vec{B}^i + \mathcal{H}_{\text{pot}} = \omega, \quad (7.45)$$

$$T^{0i} = T^{i0} = \epsilon_0 c \epsilon_{ijk} \vec{E}^j \vec{B}^k = cg^i = \frac{1}{c} S^i, \quad (7.46)$$

$$T^{ij} = T^{ji} = -(\epsilon_0 \vec{E}^i \vec{E}^j + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^i \vec{B}^j - \delta_{ij} (\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^i \vec{E}^i + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^i \vec{B}^i - \mathcal{H}_{\text{pot}})) = -T_{Mij}. \quad (7.47)$$

7.1.7 Die Trennung Teilchen und Feld

Zunächst gibt es auch bei den SU2-Solitonen wie bei den Sinus-Gordon-Solitonen keinen Unterschied zwischen einem Teilchen und seinem Feld. Es gelten die Bewegungsgleichungen für das gesamt SU2-Feld. Sie sind ein 1 + 3 dimensionales Analogon zur Sinus-Gordon-Wellengleichung. Auf Grund der höheren Anzahl innerer Freiheitsgrade ist es jedoch möglich, den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}(x^\mu)$ in zwei Summanden $T_{\text{T}}^{\mu\nu}(x^\mu)$ und $T_{\text{F}}^{\mu\nu}(x^\mu)$, die ebenfalls Tensoren sind, für Teilchen und Feld aufzuspalten. Zu diesem Zweck zerlegt man zunächst die farbvektoriellen Felder ${}^d\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ und $\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ überall in die Komponenten normal und parallel zu $\vec{n}(x^\mu)$

$$\mathop{d}\vec{F}^{\mu\nu} = \mathop{d}\vec{F}_\perp^{\mu\nu} + \mathop{d}\vec{F}_\parallel^{\mu\nu}, \quad \vec{F}^{\mu\nu} = \vec{F}_\perp^{\mu\nu} + \vec{F}_\parallel^{\mu\nu}. \quad (7.48)$$

Die normalen Anteile $\mathop{d}\vec{F}_\perp^{\mu\nu}(x^\mu)$ und $\vec{F}_\perp^{\mu\nu}(x^\mu)$ sowie die potentielle Energiedichte $\mathcal{H}_{\text{pot}}(x^\mu)$ werden dem Subsystem “Teilchen” zugerechnet, während die parallelen Anteile $\mathop{d}\vec{F}_\parallel^{\mu\nu}(x^\mu)$ und $\vec{F}_\parallel^{\mu\nu}(x^\mu)$ dem Subsystem “Feld” zugeschrieben werden. Man erhält somit

$$T^{\mu\nu} = T_{\text{T}}^{\mu\nu} + T_{\text{F}}^{\mu\nu}, \quad (7.49)$$

$$T_{\mathbb{T}}^{\mu\nu} := -\frac{1}{\mu_0} d\vec{F}_{\perp}^{\mu} d\vec{F}_{\perp}^{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4\mu_0} d\vec{F}_{\perp}^{\rho\sigma} d\vec{F}_{\perp\rho\sigma} + \mathcal{H}_{\text{pot}} \right), \quad (7.50)$$

$$T_{\mathbb{T}}^{00} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{\perp}^i \vec{E}_{\perp}^i + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_{\perp}^i \vec{B}_{\perp}^i + \mathcal{H}_{\text{pot}} = \omega_{\mathbb{T}}, \quad (7.51)$$

$$T_{\mathbb{T}}^{0i} = T_{\mathbb{T}}^{i0} = \epsilon_0 c \epsilon_{ijk} \vec{E}_{\perp}^j \vec{B}_{\perp}^k = c g_{\mathbb{T}}^i = \frac{1}{c} S_{\mathbb{T}}^i, \quad (7.52)$$

$$T_{\mathbb{T}}^{ij} = T_{\mathbb{T}}^{ji} = -(\epsilon_0 \vec{E}_{\perp}^i \vec{E}_{\perp}^j + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_{\perp}^i \vec{B}_{\perp}^j - \delta_{ij} (\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{\perp}^i \vec{E}_{\perp}^i + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}_{\perp}^i \vec{B}_{\perp}^i - \mathcal{H}_{\text{pot}})) = -T_{\mathbb{M},\mathbb{T}ij}, \quad (7.53)$$

$$T_{\mathbb{F}}^{\mu\nu} := -\frac{1}{\mu_0} dF_{\rho}^{\mu} dF^{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \frac{1}{4\mu_0} dF^{\rho\sigma} dF_{\rho\sigma}, \quad (7.54)$$

$$T_{\mathbb{F}}^{00} = \frac{\epsilon_0}{2} E^i E^i + \frac{1}{2\mu_0} B^i B^i = \omega_{\mathbb{F}}, \quad (7.55)$$

$$T_{\mathbb{F}}^{0i} = T_{\mathbb{F}}^{i0} = \epsilon_0 c \epsilon_{ijk} E^j B^k = c g_{\mathbb{F}}^i = \frac{1}{c} S_{\mathbb{F}}^i, \quad (7.56)$$

$$T_{\mathbb{F}}^{ij} = T_{\mathbb{F}}^{ji} = -(\epsilon_0 E^i E^j + \frac{1}{\mu_0} B^i B^j - \delta_{ij} (\frac{\epsilon_0}{2} E^i E^i + \frac{1}{2\mu_0} B^i B^i)) = -T_{\mathbb{M},\mathbb{F}ij}. \quad (7.57)$$

7.1.8 Der Viererimpuls

Man kann nun wiederum einen allgemeinen Viererimpuls $p^{\mu}(t)$ des SU2-Feldes definieren, der einerseits in Einklang steht mit der entsprechenden Definition in der Elektrodynamik, und andererseits auch die getroffenen Ansätze bei der speziellen Feldkonfiguration des SU2-Monopols bestätigt (siehe Gl. 4.77, 6.108, 6.109, 6.110)

$$p^{\mu}(t) := \frac{1}{c} \int d^3x T^{\mu 0} = \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega \\ c\vec{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}. \quad (7.58)$$

Auf Grund der Divergenzfreiheit von $T^{\mu\nu}(x^{\mu})$, wie später gezeigt werden wird, ist $p^{\mu}(t)$ ein Vierervektor und zusätzlich Erhaltungsgröße.

Der kovariante Viererimpuls $p_{\text{kov}}^{\mu}(t)$ eines SU2-Feldes lautet in Analogie zu den entsprechenden Gleichungen der Elektrodynamik (siehe Gl. 4.78, 4.79, 4.80)

$$p_{\text{kov}0}^{\mu}(t_0) := \frac{1}{c} \int d^3x_0 T_0^{\mu\nu} n_{0\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{kov}0}(t_0) \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0(t_0)c \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (7.59)$$

$$p_{\text{kov}}^{\prime\mu}(t_0) = \frac{1}{c} \int d^3x_0 T^{\prime\mu\nu} n_{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E'_{\text{kov}}(t_0) \\ \vec{p}'_{\text{kov}}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0(t_0)\gamma c \\ -m_0(t_0)\gamma\vec{v} \end{pmatrix}, \quad (7.60)$$

$$p_{\text{kov}0}^{\mu}(t_0) p_{\text{kov}0\mu}(t_0) = p_{\text{kov}}^{\prime\mu}(t_0) p_{\text{kov}\mu}'(t_0) = m_0^2(t_0)c^2. \quad (7.61)$$

Beide Viererimpulse sind in allen Systemen ident.

Dementsprechend können auch den beiden Subsystemen, Teilchen und Feld, die allgemeinen Viererimpulse $p_{\mathbb{T}}^{\mu}(t)$ beziehungsweise $p_{\mathbb{F}}^{\mu}(t)$ zugeordnet werden

$$p^{\mu}(t) = p_{\mathbb{T}}^{\mu}(t) + p_{\mathbb{F}}^{\mu}(t), \quad (7.62)$$

$$p_{\text{T}}^{\mu}(t) := \frac{1}{c} \int d^3x T_{\text{T}}^{\mu 0} = \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega_{\text{T}} \\ c\vec{g}_{\text{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{T}}(t) \\ \vec{p}_{\text{T}}(t) \end{pmatrix}, \quad (7.63)$$

$$p_{\text{F}}^{\mu}(t) := \frac{1}{c} \int d^3x T_{\text{F}}^{\mu 0} = \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega_{\text{F}} \\ c\vec{g}_{\text{F}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{F}}(t) \\ \vec{p}_{\text{F}}(t) \end{pmatrix}. \quad (7.64)$$

Die Energie-Impuls-Tensoren $T_{\text{T}}^{\mu\nu}(x^{\mu})$ und $T_{\text{F}}^{\mu\nu}(x^{\mu})$ sind, wie später gezeigt werden wird, grundsätzlich nicht divergenzfrei. Daher sind die so definierten Vierergrößen von Teilchen und Feld keine Vierervektoren mehr und auch von der Zeit abhängig.

Das Ruhesystem eines beliebigen Feldes in Wechselwirkung ist nicht mehr eindeutig, sondern frei wählbar. Darüber hinaus sind die Mengen der möglichen Ruhesysteme der Systeme Teilchen und Feld, $S_{0'}$ und $S_{0''}$, nicht unbedingt ident. Das führt dazu, dass die kovariant definierten Viererimpulse der beiden Subsysteme, $p_{\text{kovT}}^{\mu}(t)$ und $p_{\text{kovF}}^{\mu}(t)$, generell nicht mehr zum kovarianten Viererimpuls des Gesamtsystems addiert werden können

$$p_{\text{kovT}0'}^{\mu}(t_{0'}) := \frac{1}{c} \int d^3x_{0'} T_{\text{T}0'}^{\mu\nu} n_{0'\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{kovT}0'}(t_{0'}) \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\text{T}0'}(t_{0'})c \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (7.65)$$

$$p_{\text{kovF}0''}^{\mu}(t_{0''}) := \frac{1}{c} \int d^3x_{0''} T_{\text{F}0''}^{\mu\nu} n_{0''\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{kovF}0''}(t_{0''}) \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\text{F}0''}(t_{0''})c \\ \vec{0} \end{pmatrix}. \quad (7.66)$$

In einem beliebigem System S' lauten diese kovarianten Viererimpulse folgendermaßen

$$p'_{\text{kovT}}{}^{\mu}(t_{0'}) = \frac{1}{c} \int d^3x_{0'} T'_{\text{T}}{}^{\mu\nu} n'_{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E'_{\text{kovT}}(t_{0'}) \\ \vec{p}'_{\text{kovT}}(t_{0'}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\text{T}0'}(t_{0'})\gamma c \\ -m_{\text{T}0'}(t_{0'})\gamma\vec{v} \end{pmatrix}, \quad (7.67)$$

$$p'_{\text{kovF}}{}^{\mu}(t_{0''}) = \frac{1}{c} \int d^3x_{0''} T'_{\text{F}}{}^{\mu\nu} n'_{\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E'_{\text{kovF}}(t_{0''}) \\ \vec{p}'_{\text{kovF}}(t_{0''}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\text{F}0''}(t_{0''})\gamma c \\ -m_{\text{F}0''}(t_{0''})\gamma\vec{v} \end{pmatrix}, \quad (7.68)$$

$$p_{\text{kovT}0'}^{\mu}(t_{0'}) p_{\text{kovT}0'\mu}(t_{0'}) = p'_{\text{kovT}}{}^{\mu}(t_{0'}) p'_{\text{kovT}\mu}(t_{0'}) = m_{\text{T}0'}^2(t_{0'}) c^2, \quad (7.69)$$

$$p_{\text{kovF}0''}^{\mu}(t_{0''}) p_{\text{kovF}0''\mu}(t_{0''}) = p'_{\text{kovF}}{}^{\mu}(t_{0''}) p'_{\text{kovF}\mu}(t_{0''}) = m_{\text{F}0''}^2(t_{0''}) c^2. \quad (7.70)$$

7.1.9 Kraftgleichungen

Definiert man nun in Analogie zur Elektrodynamik eine Viererkraftdichte $f^{\mu}(x^{\mu})$ des SU2-Feldes, so lässt sich mit Hilfe der Bewegungsgleichungen zeigen, dass diese verschwindet

$$f^{\mu}(x^{\mu}) := -\partial_{\nu} T^{\nu\mu}(x^{\mu}) = 0. \quad (7.71)$$

Die vom SU2-Feld lokal pro Zeiteinheit abgegebene Energiedichte und Impulsdichte ist Null. Umgekehrt kann man unter der Annahme, dass das SU2-Feld frei ist, die Bewegungsgleichungen direkt, also ohne Variation der Lagrangedichte, herleiten. Die Gleichungen für die Kraftdichte und die Bewegungsgleichungen sind also äquivalent.

Durch die Aufteilung der Viererkraftdichte $f^{\mu}(x^{\mu})$ in die entsprechenden Summanden für Teilchen und Feld gelangt man zu den Viererkraftdichten $f_{\text{T}}^{\mu}(x^{\mu})$ und $f_{\text{F}}^{\mu}(x^{\mu})$, die beide Subsysteme aufeinander ausüben. Es handelt sich dabei um interne Kräfte

$$f^{\mu} = f_{\text{T}}^{\mu} + f_{\text{F}}^{\mu} := -\partial_{\nu} T_{\text{T}}^{\nu\mu} - \partial_{\nu} T_{\text{F}}^{\nu\mu}. \quad (7.72)$$

Unter Einbeziehung der Feldgleichungen erhält man explizit für die vom Feldsystem auf das Teilchensystem wirkende Viererkräftdichte $f_{\text{F}}^{\mu}(x^{\mu})$

$$f_{\text{F}}^{\mu} = F^{\mu\nu} j_{\text{el}\nu} + \frac{1}{\mu_0 c} dF^{\mu\nu} j_{\text{mag}\nu}, \quad (7.73)$$

$$f_{\text{F}}^0 = \frac{1}{c} \vec{E} \vec{j}_{\text{el}} + \frac{1}{\mu_0 c} \vec{B} \vec{j}_{\text{mag}}, \quad (7.74)$$

$$f_{\text{F}}^i = \vec{E} \rho_{\text{el}} + \vec{j}_{\text{el}} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 c} (c \vec{B} \rho_{\text{mag}} - \frac{1}{c} \vec{j}_{\text{mag}} \times \vec{E}). \quad (7.75)$$

Die Kraftgleichungen sind also in Bezug auf die elektromagnetischen Felder und deren Quellen symmetrisch.

7.1.10 Bilanzgleichungen

Allgemeine Betrachtung: An jedem Punkt im Ortsraum herrscht ein dynamisches Gleichgewicht

$$f_{\text{F}}^{\mu} = -f_{\text{T}}^{\mu}, \quad (7.76)$$

$$-\frac{1}{c} \partial_t \omega_{\text{F}} - \frac{1}{c} \partial_i S_{\text{F}}^i = \frac{1}{c} \partial_t \omega_{\text{T}} + \frac{1}{c} \partial_i S_{\text{T}}^i, \quad (7.77)$$

$$-\frac{1}{c} \partial_t c g_{\text{F}}^i + \partial_j T_{\text{M},\text{F}ji} = \frac{1}{c} \partial_t c g_{\text{T}}^i - \partial_j T_{\text{M},\text{T}ji}. \quad (7.78)$$

Diese Gleichungen repräsentieren Kontinuitätsgleichungen für Energiedichten und Impulsdichten in beiden Subsystemen mit der zusätzlichen Möglichkeit des Austausches zwischen den Systemen. Ein Überschuss an Energiedichte\Impulsdichte im System Feld an einem Punkt erhöht entweder die Energiedichte\Impulsdichte am selben Punkt im System Teil, oder wird in Form von Quellen von Energiestromdichten\Impulsstromdichten im System Teil an Nachbarpunkte weitergegeben, oder umgekehrt.

In Integralform lauten die Bilanzgleichungen unter der Annahme von natürlichen Randbedingungen folgendermaßen

$$\int d^3x f_{\text{F}}^{\mu} = - \int d^3x f_{\text{T}}^{\mu}, \quad (7.79)$$

$$-\frac{d}{dt} p_{\text{F}}^{\mu} = -\frac{d}{dt} \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega_{\text{F}} \\ c \vec{g}_{\text{F}} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} p_{\text{T}}^{\mu} = \frac{d}{dt} \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega_{\text{T}} \\ c \vec{g}_{\text{T}} \end{pmatrix}. \quad (7.80)$$

Die internen Energiestromdichten\Impulsstromdichten in jeweils beiden Systemen gleichen sich also aus. Auch in einer Gesamtbetrachtung tauschen die Subsysteme Teilchen und Feld Energie\Impuls aus. Was bleibt, ist allerdings die Energieerhaltung\Impulserhaltung des Gesamtsystems.

Beispiel Monopol: Betrachtet man zum Beispiel einen freien, positiv geladenen SU2-Monopol, so können die zuvor beschriebenen Verhältnisse gut illustriert werden. Im Ruhesystem dieses Solitons gilt

$$f_{\text{F}}^0 = 0 = -f_{\text{T}}^0 = 0, \quad (7.81)$$

$$f_{\text{F}}^i = E^i \rho_{\text{el}} = -f_{\text{T}}^i = -\partial_j (\epsilon_0 \vec{E}_{\perp}^j \vec{E}_{\perp}^i - \delta_{ji} (\frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}_{\perp}^i \vec{E}_{\perp}^i - \mathcal{H}_{\text{pot}})), \quad (7.82)$$

$$\int d^3x f_{\text{F}}^{\mu} = 0 = -\int d^3x f_{\text{T}}^{\mu} = 0. \quad (7.83)$$

Die Energie des Solitons ist in dessen Ruhesystem im Verhältnis 1 : 1 auf das System Teil und das System Feld aufgeteilt (siehe Gl. 6.95). Daran ändert sich auch nichts, denn es wird lokal keine Energiedichte pro Zeiteinheit ausgetauscht. Das System Teilchen wird allerdings vom eigenen E-Feld auf Grund einer positiven Ladungsdichte radial nach außen gedrückt. Die dazugehörige Dichte der Gegenkraft wird durch die Divergenz des Spannungstensors des Teilchens aufgebaut. Es handelt sich dabei um Normalspannungen und Schubspannungen, die von der Normalkomponente des farbvektoriellen E-Feldes und von der potentiellen Energiedichte gebildet werden. Das Integral über die Viererkräftdichten beider Systeme verschwindet. In Summe wird also weder Leistung ausgetauscht noch wird gegenseitig Kraft aufeinander ausgeübt. Die Subsysteme Teilchen und Feld bleiben zeitlich unverändert.

Im Laborsystem sehen die Verhältnisse folgendermaßen aus

$$f_{\text{F}}^{\prime 0} = \frac{1}{c} E^{\prime i} j_{\text{el}}^{\prime i} = -f_{\text{T}}^{\prime 0}, \quad (7.84)$$

$$f_{\text{F}}^{\prime i} = E^{\prime i} \rho'_{\text{el}} + \epsilon_{ijk} j_{\text{el}}^{\prime j} B^{\prime k} = -f_{\text{T}}^{\prime i}, \quad (7.85)$$

$$\int d^3x' f_{\text{F}}^{\prime \mu} = 0 = -\int d^3x' f_{\text{T}}^{\prime \mu} = 0. \quad (7.86)$$

Das Feld gibt in der, in Bewegungsrichtung gesehen, vorderen Hälfte des Solitons Leistung ab und nimmt in der hinteren Hälfte die gleiche Leistung wieder auf. Die von einer positiven Ladungsdichte verursachten expansiven Kräfte existieren auch im Laborsystem. Dazu kommen nun noch Kräfte, die von der Wechselwirkung des eigenen B-Feldes mit der elektrischen Stromdichte stammen. Ganz allgemein fließen dabei die Energieströme und die Impulsströme innerhalb und zwischen den beiden Subsystemen derart, dass die Form des bewegten Teilchens und des mitbewegten Feldes unverändert bleibt. Die Integrale über die beiden Viererkräftdichten verschwinden wieder. Energie und Impuls sowohl vom Teilchen als auch vom Feld bleiben somit konstant.

7.2 Der elektrodynamische Grenzfall

7.2.1 Definition

Um das Modell der allgemeinen SU2-Felder mit der geltenden Elektrodynamik vergleichbar zu machen, muss man eine Näherung durchführen. Zunächst wählt man die Anfangsbedingungen eines SU2-Feldes, in diesem Fall Ort und Geschwindigkeit von beteiligten Solitonen, derart, dass die einzelnen Teilchen noch als quasi frei angesehen werden können. Der Anteil an der Ruheenergie eines freien Solitons, der vom Subsystem Teilchen stammt, ist, im Gegensatz zum Anteil, der dem Subsystem Feld zuzurechnen ist, lokal stark begrenzt (siehe Gl. 6.95). Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, legt man um das Zentrum jedes beteiligten Monopols in dessen anfänglichen Ruhesystem eine Sphäre mit einem Radius

von einigen r_0 und definiert die eingeschlossenen Innenräume als Kerne der Solitonen. Im gesamten verbleibenden Außenraum, der im Weiteren als Limes bezeichnet wird, vernachlässigt man alle Größen, die zum Subsystem Teilchen dieses speziellen SU2-Feldes gehören, in dem man dort $\alpha(x^\mu)$ ident auf $\frac{\pi}{2}$ setzt. Es gilt dann, wie im Folgenden gezeigt werden wird, in jedem Inertialsystem

$$\alpha(x^\mu) = \frac{\pi}{2} \rightarrow Q(\vec{\alpha}(x^\mu)) = -i\vec{n}(x^\mu)\vec{\sigma} \rightarrow {}^d\vec{F}_\perp^{\mu\nu}(x^\mu) = 0, \quad \vec{F}_\perp^{\mu\nu}(x^\mu) = 0, \quad \mathcal{H}_{\text{pot}}(x^\mu) = 0. \quad (7.87)$$

Das Subsystem Feld der gesamten SU2-Feldkonfiguration bleibt also unverändert, während das gesamte Subsystem Teilchen durch einzelne, räumlich voneinander getrennte Subsysteme genähert wird.

Weiters sei vorausgesetzt, dass die Solitonen durch eine weitere Einschränkung der Anfangsbedingungen während des gesamten Streuprozesses als solche erhalten bleiben, dass also die Kernbereiche der einzelnen Solitonen nie überlappen, sodass immer ein geschlossener Limesbereich um die Kerne bestehen bleibt. Darüber hinaus soll der Abstand zwischen den Solitonen immer zumindest eine Größenordnung über den Kernabmessungen liegen. Die Monopole werden unter diesen zusätzlichen Voraussetzungen nach der Streuung wieder als quasi freie Teilchen im Unendlichen landen.

In einem letzten Schritt betrachtet man die gesamte Anordnung aus einer Entfernung, in der die Ausdehnung der Solitonenkerne zu Punkten degeneriert.

7.2.2 Grundgleichungen

Im Limesbereich vereinfachen sich diese Gleichungen folgendermaßen

$${}^d\vec{A}^\mu = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \vec{I}^\mu = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} (\vec{n} \times \partial^\mu \vec{n}), \quad (7.88)$$

$${}^d\vec{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\mu {}^d\vec{A}^\nu - \partial^\nu {}^d\vec{A}^\mu) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} (\partial^\mu \vec{n} \times \partial^\nu \vec{n}), \quad {}^dF^{\mu\nu} = {}^d\vec{F}^{\mu\nu} \vec{n} \leftrightarrow {}^d\vec{F}^{\mu\nu} = {}^dF^{\mu\nu} \vec{n}, \quad (7.89)$$

$$\vec{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} {}^d\vec{F}_{\rho\sigma} = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 c} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\rho \vec{n} \times \partial_\sigma \vec{n}), \quad F^{\mu\nu} = \vec{F}^{\mu\nu} \vec{n} \leftrightarrow \vec{F}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} \vec{n}, \quad (7.90)$$

$${}^d\mathcal{L} = {}^d\mathcal{T}_{\text{em}} - {}^d\mathcal{V}_{\text{em}} = -\frac{1}{4\mu_0} {}^dF^{\mu\nu} {}^dF_{\mu\nu}. \quad (7.91)$$

7.2.3 Bewegungsgleichungen

Existenz einer farbskalaren magnetischen Viererstromdichte: Das Wegfallen der potentiellen Energiedichte $\mathcal{H}_{\text{pot}}(x^\mu)$ im reinen Feldbereich zwischen den Solitonenkernen macht die Bewegungsgleichungen homogen, und führt zu 3 Gleichungen für den Vektor $\vec{n}(\vartheta(x^\mu), \varphi(x^\mu))$

$$\partial_\mu \vec{\pi}^\mu = \frac{ec}{4\pi} \partial_\mu (\vec{I}_\nu \times {}^d\vec{F}^{\mu\nu}) = 0, \quad (7.92)$$

$$\rightarrow \quad \partial_\nu \vec{n} c \partial_\mu \text{d}F^{\mu\nu} = \partial_\nu \vec{n} j_{\text{mag}}^\nu = 0. \quad (7.93)$$

Betrachtet man im Folgenden ein reines \vec{n} -Feld, so sind als Anfangsbedingungen zu einem Zeitpunkt t_0 auf den ersten Blick $\vartheta(t, \vec{x})|_{t_0}$ und $\varphi(t, \vec{x})|_{t_0}$ sowie die 1.Ableitungen $\partial_t \vartheta(t, \vec{x})|_{t_0}$ und $\partial_t \varphi(t, \vec{x})|_{t_0}$ frei wählbar. Daraus ergeben sich im Weiteren die restlichen 1.Ableitungen $\partial_i \vartheta(t, \vec{x})|_{t_0}$ und $\partial_i \varphi(t, \vec{x})|_{t_0}$, sowie die 2.Ableitungen $\partial_j \partial_t \vartheta(t, \vec{x})|_{t_0}$, $\partial_j \partial_t \varphi(t, \vec{x})|_{t_0}$, $\partial_j \partial_i \vartheta(t, \vec{x})|_{t_0}$ und $\partial_j \partial_i \varphi(t, \vec{x})|_{t_0}$. Zu bestimmen bleiben also lediglich die 2.Ableitungen in der Zeit $\partial_t^2 \vartheta(t, \vec{x})|_{t_0}$ und $\partial_t^2 \varphi(t, \vec{x})|_{t_0}$.

Die aus diesen 3 Gleichungen resultierenden Bedingungen für $\vartheta(x^\mu)$ und $\varphi(x^\mu)$ sind im Folgenden aufgelistet

$$\partial_\mu \vartheta \partial_\nu \varphi (\partial^\mu \vartheta \partial^\nu \varphi - \partial^\nu \vartheta \partial^\mu \varphi) = 0, \quad (7.94)$$

$$\partial_\mu \vartheta \partial_\nu (\partial^\mu \vartheta \partial^\nu \varphi - \partial^\nu \vartheta \partial^\mu \varphi) = 0, \quad (7.95)$$

$$\partial_\mu \varphi \partial_\nu (\partial^\mu \vartheta \partial^\nu \varphi - \partial^\nu \vartheta \partial^\mu \varphi) = 0. \quad (7.96)$$

Die erste Gleichung enthält keine 2.Ableitungen in der Zeit, muss aber auf der Trajektorie des \vec{n} -Feldes überall und jederzeit gelten, und führt somit zu einer Einschränkung der generell möglichen Anfangsbedingungen. Von den ursprünglich angenommenen 4 Freiheitsgraden sind also letztendlich maximal 3 Freiheitsgrade frei wählbar. Die anderen beiden Gleichungen stellen die eigentlichen Bewegungsgleichungen zur Bestimmung von $\partial_t^2 \vartheta(t, \vec{x})|_{t_0}$ und von $\partial_t^2 \varphi(t, \vec{x})|_{t_0}$ dar.

Verschwinden der farbskalaren magnetischen Viererstromdichte: Ein Spezialfall der allgemeinen Lösung der im Limes homogenen Bewegungsgleichungen ergibt sich aus einem Vergleich mit der Elektrodynamik durch die zusätzliche Forderung

$$c \partial_\mu \text{d}F^{\mu\nu} = j_{\text{mag}}^\nu = 0. \quad (7.97)$$

Betrachtet man wieder ein reines \vec{n} -Feld, so muss man, um die magnetische Viererstromdichte $j_{\text{mag}}^\mu(x^\mu)$ zum Verschwinden zu bringen, die oben angeführten 3 Bestimmungsgleichungen für $\vartheta(x^\mu)$ und $\varphi(x^\mu)$ folgendermaßen spezifizieren

$$\partial_\mu \vartheta (\partial^\mu \vartheta \partial^\nu \varphi - \partial^\nu \vartheta \partial^\mu \varphi) = 0, \quad (7.98)$$

$$\partial_\nu (\partial^\mu \vartheta \partial^\nu \varphi - \partial^\nu \vartheta \partial^\mu \varphi) = 0. \quad (7.99)$$

Die erste Gleichung besteht nun aus 4 Einzelgleichungen, welche die möglichen Anfangsbedingungen stark einschränken. Auch die zweite Gleichung besitzt 4 Bestandteile. Für $\mu = 0$ erhält man eine zusätzliche Gleichung ohne 2. Ableitungen in der Zeit und somit eine weitere Beschränkung der Anfangsbedingungen. Von den verbleibenden 3 eigentlichen Bewegungsgleichungen für $\mu = i$ zur Bestimmung von $\partial_t^2 \vartheta(t, \vec{x})|_{t_0}$ und von $\partial_t^2 \varphi(t, \vec{x})|_{t_0}$ muss eine Gleichung redundant sein.

7.2.4 Quantenzahlen

Die topologische Viererstromdichte $j_{\text{top}}^\sigma(x^\mu)$ sowie die elektrische Viererstromdichte $j_{\text{el}}^\sigma(x^\mu)$ verschwinden im Außenraum der Solitonenkerne

$$j_{\text{top}}^\sigma = \frac{c}{2\pi^2} \frac{1}{3!} \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} (\vec{n} \times \partial_\mu \vec{n}) (\partial_\nu \vec{n} \times \partial_\rho \vec{n}) = 0, \quad (7.100)$$

$$j_{\text{el}}^\sigma = -\frac{3ec}{4\pi} \frac{1}{3!} \epsilon^{\sigma\mu\nu\rho} \partial_\mu \vec{n} (\partial_\nu \vec{n} \times \partial_\rho \vec{n}) = 0. \quad (7.101)$$

Die topologische\elektrische Ladung $Q_{\text{top}_i} \setminus Q_{\text{el}_i}$ der einzelnen beteiligten Monopole bleibt somit während des gesamten Streuprozesses erhalten. Außerdem sind diese Ladungen unabhängig vom gewählten Bezugssystem

$$Q_{\text{top}_i} = \int_{V_{\text{Kern}_i}} dx dy dz \rho_{\text{top}} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{V_{\text{Kern}_i}} dx dy dz \vec{\Gamma}_x (\vec{\Gamma}_y \times \vec{\Gamma}_z) = Q'_{\text{top}_i} = \int_{V'_{\text{Kern}_i}} dx' dy' dz' \rho'_{\text{top}}, \quad (7.102)$$

$$Q_{\text{el}_i} = \int_{V_{\text{Kern}_i}} dx dy dz \rho_{\text{el}} = -\frac{3e}{4\pi} \int_{V_{\text{Kern}_i}} dx dy dz \partial_x ((\vec{\Gamma}_y \times \vec{\Gamma}_z) \vec{n}) = Q'_{\text{el}_i} = \int_{V'_{\text{Kern}_i}} dx' dy' dz' \rho'_{\text{el}}. \quad (7.103)$$

Die Quantenzahlen der gesamten SU2-Feldkonfiguration Q_{top} und Q_{el} ergeben sich somit immer als Summe der entsprechenden Quantenzahlen der beteiligten Solitonen.

7.2.5 Feldgleichungen

Auch die farbvektoriellen Feldgleichungen sowie die farbskalaren Feldgleichungen weisen im Limes Vereinfachungen auf

$$\vec{j}_{\text{el}}^\nu = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu \vec{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (7.104)$$

$$\vec{j}_{\text{mag}}^\nu = c \partial_\mu {}^d\vec{F}^{\mu\nu} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \partial_\mu (\partial^\mu \vec{n} \times \partial^\nu \vec{n}), \quad (7.105)$$

$$j_{\text{el}}^\nu = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (7.106)$$

$$j_{\text{mag}}^\nu = c \partial_\mu {}^dF^{\mu\nu} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \partial_\mu ((\partial^\mu \vec{n} \times \partial^\nu \vec{n}) \vec{n}). \quad (7.107)$$

Ein freier elektrischer Monopol besitzt im Außenbereich zwar eine farbvektorielle magnetische Viererstromdichte $\vec{j}_{\text{mag}}^\mu(x^\mu)$, die farbskalare magnetische Viererstromdichte $j_{\text{mag}}^\mu(x^\mu)$ verschwindet dort allerdings. Unterstellt man nun, dass dies auch im Limesbereich von miteinander wechselwirkenden Solitonen zutrifft, so wird dieser Außenbereich der Solitonen komplett frei von farbskalaren Ladungen und Strömen, die farbskalaren Feldgleichungen werden homogen.

Aus einer Invarianten der farbskalaren Feldstärketensoren lässt sich nun eine Beziehung zwischen den farbskalaren Feldgrößen ableiten

$$F^{\mu\nu} {}^dF_{\mu\nu} = 0 \quad \rightarrow \quad E^i B^i = 0. \quad (7.108)$$

Die farbskalaren Felder \vec{E} und \vec{B} stehen also überall im Limes aufeinander normal.

7.2.6 Maxwellgleichungen

Grundsätzlich gelten im Model der SU2-Solitonen überall die Feldgleichungen mit den kontinuierlichen farbvektoriellen und farbskalaren Viererstromdichten $\vec{j}_{\text{el}}^\mu(x^\mu)$, $\vec{j}_{\text{mag}}^\mu(x^\mu)$, $j_{\text{el}}^\mu(x^\mu)$ und $j_{\text{mag}}^\mu(x^\mu)$. Unter den im elektrodynamischen Grenzfall definierten Voraussetzungen und unter der zuvor getroffenen Annahme des vollständigen Verschwindens von

farbskalaren Ladungen und Stömen im Limesbereich, lassen sich diese Feldgleichungen in eine anschauliche makroskopische Form bringen.

Die als quasi freie Solitonen startenden Teilchen besitzen in ihren Kernen je nach Art und jeweils vom Bezugssystem unabhängig eine farbskalare elektrische Ladung $Q_{\text{el}_i} = \pm e$ und eine farbskalare magnetische Ladung $Q_{\text{mag}_i} = 0$

$$Q_{\text{el}_i} = \int_{V_{\text{Kern}_i}} dx dy dz \rho_{\text{el}} = -\frac{3e}{4\pi} \int_{V_{\text{Kern}_i}} dx dy dz \partial_x ((\vec{\Gamma}_y \times \vec{\Gamma}_z) \vec{n}) = Q'_{\text{el}_i} = \int_{V'_{\text{Kern}_i}} dx' dy' dz' \rho'_{\text{el}} = \pm e, \quad (7.109)$$

$$Q_{\text{mag}_i} = \int_{V_{\text{Kern}_i}} dx dy dz \rho_{\text{mag}} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c} \int_{V_{\text{Kern}_i}} dx dy dz \partial_i ((\vec{\Gamma}^i \times \vec{\Gamma}^0) \vec{n}) = Q'_{\text{mag}_i} = \int_{V'_{\text{Kern}_i}} dx' dy' dz' \rho'_{\text{mag}} = 0. \quad (7.110)$$

Diese elektromagnetischen Ladungen bleiben auf Grund der angenommenen fehlenden farbskalaren elektromagnetischen Viererstromdichten im Außenraum im zeitlichen Verlauf für jedes Soliton erhalten. Farbskalare elektrische oder magnetische Ströme sind in den jeweiligen Ruhesystemen zu Beginn der Streuung ebenfalls nicht vorhanden.

Sobald sich die Teilchen nun gegenseitig beeinflussen, und ihre geradlinigen Bahnen verlassen, können sich in den Kernen paarweise neue farbskalare elektromagnetische Ladungen bilden. Auch interne farbskalare elektromagnetische Ströme können nun auftreten. Dabei müssen die Kontinuitätsgleichungen gewahrt bleiben. Diese zusätzlichen Effekte in den Kernen können, solange sich die Monopole nicht zu nahe kommen, vernachlässigt werden, da sie auf die, von den Solitonen erzeugten elektromagnetischen Felder in ausreichender Entfernung keinerlei Einfluss haben. Ein Beobachter, der sich gemäß Voraussetzung in, im Vergleich zu den Kernabmessungen großer Entfernung zu den Solitonen befindet, kann diese Effekte nicht einmal direkt registrieren, er sieht nur Punktladungen, die sich auf ihren Bahnen $\vec{x}_i(t)$ bewegen.

In dieser Sichtweise werden die zunächst kontinuierlichen farbskalaren Viererstromdichten $j_{\text{el}}^\mu(x^\mu)$ und $j_{\text{mag}}^\mu(x^\mu)$ nun diskret, und die für allgemeine SU2-Felder geltenden farbskalaren Feldgleichungen degenerieren zu den Maxwellgleichungen

$$j_{\text{D}_{\text{el}}}^\nu(x^\mu) := \begin{pmatrix} c\rho_{\text{D}_{\text{el}}}(x^\mu) \\ \vec{j}_{\text{D}_{\text{el}}}(x^\mu) \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} cQ_{\text{el}_i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \\ Q_{\text{el}_i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} \end{pmatrix} = \sum_i c \int d\tau_i Q_{\text{el}_i} \delta^4(x^\mu - x_i^\mu(\tau_i)) v_i^\mu(\tau_i), \quad (7.111)$$

$$j_{\text{D}_{\text{mag}}}^\nu(x^\mu) := \begin{pmatrix} c\rho_{\text{D}_{\text{mag}}}(x^\mu) \\ \vec{j}_{\text{D}_{\text{mag}}}(x^\mu) \end{pmatrix} = \sum_i \begin{pmatrix} cQ_{\text{mag}_i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \\ Q_{\text{mag}_i} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} \end{pmatrix} = 0, \quad (7.112)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j_{\text{D}_{\text{el}}}^\nu, \quad \partial_\mu {}^d F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j_{\text{D}_{\text{mag}}}^\nu = 0. \quad (7.113)$$

7.2.7 Der kanonische Energie-Impuls-Tensor

Auf Grund der im elektrodynamischen Grenzfall herrschenden Bedingungen mit n wechselwirkenden Solitonen ist es möglich, den kanonischen Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}(x^\mu)$ des SU2-Feldes noch etwas genauer zu spezifizieren.

Zuallererst zerlegt man die farbvektoriellen Feldstärketensoren ${}^d \vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ und $\vec{F}^{\mu\nu}(x^\mu)$ gemäß dem Superpositionsprinzip, sowie die potentielle Energiedichte $\mathcal{H}_{\text{pot}}(x^\mu)$ auf Grund der räumlichen Trennung, in die zu den einzelnen Solitonen gehörenden Bestandteile

$$d\vec{F}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n d\vec{F}_i^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n d\vec{F}_{i\perp}^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^n d\vec{F}_{i\parallel}^{\mu\nu}, \quad \vec{F}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i\perp}^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_{i\parallel}^{\mu\nu}, \quad (7.114)$$

$$\mathcal{H}_{\text{pot}} = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}_{\text{pot}_i}. \quad (7.115)$$

Der Energie-Impuls-Tensor des Subsystems Teilchen $T_{\text{T}}^{\mu\nu}(x^\mu)$ setzt sich somit aus n Summanden $T_{\text{T}_i}^{\mu\nu}(x^\mu)$ zusammen, die den einzelnen Solitonenkernen zugeordnet werden können. Gemischte Terme treten keine auf, da sich die Bereiche der Kerne nicht überlappen

$$T_{\text{T}}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n T_{\text{T}_i}^{\mu\nu}, \quad (7.116)$$

$$T_{\text{T}_i}^{\mu\nu} := -\frac{1}{\mu_0} d\vec{F}_{i\perp}^{\mu}{}_{\rho} d\vec{F}_{i\perp}^{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4\mu_0} d\vec{F}_{i\perp}^{\rho\sigma} d\vec{F}_{i\perp\rho\sigma} + \mathcal{H}_{\text{pot}_i} \right). \quad (7.117)$$

Für den Energie-Impuls-Tensor des Subsystems Feld $T_{\text{F}}^{\mu\nu}(x^\mu)$ erhält man somit neben den n Termen für die einzelnen Monopole $T_{\text{F}_i}^{\mu\nu}(x^\mu)$ zusätzlich auch noch die, allerdings nur mehr paarweise symmetrischen Wechselwirkungsterme $T_{\text{F}_{ij}}^{\mu\nu}(x^\mu)$

$$T_{\text{F}}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^n T_{\text{F}_i}^{\mu\nu} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n T_{\text{F}_{ij}}^{\mu\nu}, \quad (7.118)$$

$$T_{\text{F}_i}^{\mu\nu} := -\frac{1}{\mu_0} dF_i^{\mu}{}_{\rho} dF_i^{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \frac{1}{4\mu_0} dF_i^{\rho\sigma} dF_{i\rho\sigma}, \quad (7.119)$$

$$T_{\text{F}_{ij}}^{\mu\nu} := -\frac{1}{\mu_0} dF_i^{\mu}{}_{\rho} dF_j^{\nu\rho} + g^{\mu\nu} \frac{1}{4\mu_0} dF_i^{\rho\sigma} dF_{j\rho\sigma}. \quad (7.120)$$

Schließlich kann man mit diesen Definitionen auch einem Soliton in Wechselwirkung einen Energie-Impuls-Tensor $T_i^{\mu\nu}(x^\mu)$ zuweisen

$$T_i^{\mu\nu} := T_{\text{T}_i}^{\mu\nu} + T_{\text{F}_i}^{\mu\nu}. \quad (7.121)$$

7.2.8 Der Viererimpuls

Für die zuvor im elektrodynamischen Grenzfall neu definierten Subsysteme lassen sich sofort die dazugehörigen Viererimpulse angeben

$$p_{\text{T}}^{\mu}(t) = \sum_{i=1}^n p_{\text{T}_i}^{\mu}(t), \quad (7.122)$$

$$p_{\text{T}_i}^{\mu}(t) := \frac{1}{c} \int d^3x T_{\text{T}_i}^{\mu 0} = \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega_{\text{T}_i} \\ c\vec{g}_{\text{T}_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{T}_i}(t) \\ \vec{p}_{\text{T}_i}(t) \end{pmatrix}, \quad (7.123)$$

$$p_{\text{F}}^{\mu}(t) = \sum_{i=1}^n p_{\text{F}_i}^{\mu}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n p_{\text{F}_{ij}}^{\mu}(t), \quad (7.124)$$

$$p_{\text{F}_i}^{\mu}(t) := \frac{1}{c} \int d^3x T_{\text{F}_i}^{\mu 0} = \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega_{\text{F}_i} \\ c\vec{g}_{\text{F}_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{F}_i}(t) \\ \vec{p}_{\text{F}_i}(t) \end{pmatrix}, \quad (7.125)$$

$$p_{\text{F}_{ij}}^{\mu}(t) := \frac{1}{c} \int d^3x T_{\text{F}_{ij}}^{\mu 0} = \frac{1}{c} \int d^3x \begin{pmatrix} \omega_{\text{F}_{ij}} \\ c\vec{g}_{\text{F}_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_{\text{F}_{ij}}(t) \\ \vec{p}_{\text{F}_{ij}}(t) \end{pmatrix}, \quad (7.126)$$

$$p_i^\mu(t) := p_{T_i}^\mu(t) + p_{F_i}^\mu(t). \quad (7.127)$$

Alle die hier dargestellten Viererimpulse sind grundsätzlich keine Vierervektoren. Nach Auswahl der jeweils entsprechenden Ruhesysteme können allerdings wieder für alle diese Subsysteme kovariante Viererimpulse definiert werden.

7.2.9 Kraftgleichungen

Auch die Viererkraftdichten für die Subsysteme Teilchen und Feld, $f_T^\mu(x^\mu)$ und $f_F^\mu(x^\mu)$, lassen sich im elektrodynamischen Grenzfall noch weiter aufteilen

$$f_T^\mu = \sum_{i=1}^n f_{T_i}^\mu := - \sum_{i=1}^n \partial_\nu T_{T_i}^{\nu\mu}, \quad (7.128)$$

$$f_F^\mu = \sum_{i=1}^n f_{F_i}^\mu + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n f_{F_{ij}}^\mu := - \sum_{i=1}^n \partial_\nu T_{F_i}^{\nu\mu} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \partial_\nu T_{F_{ij}}^{\nu\mu}. \quad (7.129)$$

Unter Einbeziehung der farbskalaren Feldgleichungen für jeden Monopol, gelangt man explizit zu den Viererkraftdichten $f_{F_i}^\mu(x^\mu)$ und $f_{F_{ij}}^\mu(x^\mu)$, die von den einzelnen Subsystemen Feld auf die Subsysteme Teilchen ausgeübt werden

$$j_{\text{el}_i}^\nu = \frac{1}{\mu_0} \partial_\mu F_i^{\mu\nu}, \quad j_{\text{mag}_i}^\nu = c \partial_\mu {}^d F_i^{\mu\nu}, \quad (7.130)$$

$$f_{F_i}^\mu = F_i^{\mu\nu} j_{\text{el}_i\nu} + \frac{1}{\mu_0 c} {}^d F_i^{\mu\nu} j_{\text{mag}_i\nu}, \quad (7.131)$$

$$f_{F_{ij}}^\mu + f_{F_{ji}}^\mu = F_i^{\mu\nu} j_{\text{el}_j\nu} + \frac{1}{\mu_0 c} {}^d F_i^{\mu\nu} j_{\text{mag}_j\nu} + F_j^{\mu\nu} j_{\text{el}_i\nu} + \frac{1}{\mu_0 c} {}^d F_j^{\mu\nu} j_{\text{mag}_i\nu}. \quad (7.132)$$

7.2.10 Bilanzgleichungen

Setzt man die Bilanzgleichungen an einem beliebigen Punkt im Ortsraum zunächst ganz allgemein an, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n f_{F_i}^\mu + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n f_{F_{ij}}^\mu = - \sum_{i=1}^n f_{T_i}^\mu. \quad (7.133)$$

Diese Gleichungen können im Bereich des Kernes eines bestimmten Solitons, bezeichnet mit dem Index i , erheblich vereinfacht werden

$$f_{F_i}^\mu + \sum_{j=1, i \neq j}^n (f_{F_{ij}}^\mu + f_{F_{ji}}^\mu) = - f_{T_i}^\mu. \quad (7.134)$$

Die Viererkraftdichte des Gesamtfeldes im Kern i setzt sich somit zusammen aus der Viererkraftdichte des Eigenfeldes $f_{F_i}^\mu(x^\mu)$ und der Summe der Viererkraftdichten aus allen möglichen Wechselwirkungsanteilen des Eigenfeldes mit den Fremdfeldern $f_{F_{ij}}^\mu(x^\mu)$.

Ausgehend von der Integralform der Bilanzgleichungen, erstellt für den Kern mit Index i , und nach Zusammenfassung der farbskalaren elektromagnetischen Felder ${}^d F_j^{\mu\nu}(x^\mu)$ und $F_j^{\mu\nu}(x^\mu)$ aller anderen Solitonen zu einem Fremdfeld ${}^d F_{\text{fr}}^{\mu\nu}(x^\mu)$ und $F_{\text{fr}}^{\mu\nu}(x^\mu)$, erhält man

eine allgemeine Bestimmungsgleichung für die zeitliche Entwicklung des Viererimpulses des betreffenden Solitons $p_i^\mu(t)$

$$- \int_{V_{\text{Kern } i}} d^3x \partial_\nu T_{F_i}^{\nu\mu} + \int_{V_{\text{Kern } i}} d^3x \sum_{j=1, i \neq j}^n (f_{F_{ij}}^\mu + f_{F_{ji}}^\mu) = \int_{V_{\text{Kern } i}} d^3x \partial_\nu T_{T_i}^{\nu\mu}, \quad (7.135)$$

$$dF_{\text{fr}}^{\mu\nu} := \sum_{j=1, i \neq j}^n dF_j^{\mu\nu}, \quad F_{\text{fr}}^{\mu\nu} := \sum_{j=1, i \neq j}^n F_j^{\mu\nu}, \quad (7.136)$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} p_i^\mu = \frac{d}{dt} p_{T_i}^\mu + \frac{d}{dt} p_{F_i}^\mu = \int_{V_{\text{Kern } i}} d^3x (F_{\text{fr}}^{\mu\nu} j_{\text{el},\nu} + \frac{1}{\mu_0 c} dF_{\text{fr}}^{\mu\nu} j_{\text{mag},\nu}). \quad (7.137)$$

Betrachtet man also den gesamten Kern eines Solitons, so werden dabei Energie und Impuls pro Zeiteinheit, die auf das Subsystem Teil des Solitons von den entsprechenden Wechselwirkungsanteilen des Feldes übertragen werden, teilweise an das Subsystem Feld des Solitons weitergegeben. Dies ist auch notwendig, damit das Eigenfeld die erforderliche Energieänderung\Impulsänderung pro Zeiteinheit erfährt, und somit die Maxwellgleichungen immer erfüllt bleiben.

7.2.11 Coulombkräfte und Lorentzkräfte

Solange sich, wie in der Definition des elektrodynamischen Grenzfalles vorausgesetzt, die einzelnen Monopole bei der Wechselwirkung nicht zu nahe kommen, können die Bestimmungsgrößen der Veränderung des Viererimpulses eines Solitons noch weiter spezifiziert werden. Das Fremdfeld ist dann im Verhältnis zum Eigenfeld verschwindend klein und kann im Bereich des Kernes als konstant angenommen werden. Das zuvor beschriebene stabile lokale dynamische Gleichgewicht in Bezug auf die Viererkraftdichte zwischen dem Teilchenanteil und dem Feldanteil eines freien Solitons erfährt nun durch das Fremdfeld aller anderen Solitonen eine nur schwache Störung. Es bildet sich ein neues Gleichgewicht. Ein Monopol in Wechselwirkung mit einer variablen Geschwindigkeit seines Zentrums-elementes wird sich, bildlich gesprochen, im Vergleich zu einem, zu jedem Zeitpunkt gleich schnell und in die gleiche Richtung bewegten freien Monopol auf Grund seiner, durch das Eigenfeld verursachten starken Vorspannung in jedem Inertialsystem nur geringfügig deformieren. Etwaige marginale Verschiebungen der bestehenden farbskalaren elektrischen Ladungsdichte, sowie mögliche farbskalare elektromagnetische Ladungspaarbildungen mit den dazugehörigen neuen farbskalaren elektromagnetischen Viererstromdichten können somit schon alleine auf Grund ihrer geringen Größe vernachlässigt werden. Auch die Geschwindigkeit der verbleibenden farbskalaren elektrischen Ladungsdichte kann überall im Kern mit der momentanen Geschwindigkeit des Zentrums-elementes gleichgesetzt werden. Alle diese Abschätzungen für das Soliton in Wechselwirkung führen zu einer Veränderung des Viererimpulses des Monopols, die man bei einem realen Elektron oder Positron in einem Fremdfeld beobachten kann

$$\frac{d}{dt} p_i^\mu = \int_{V_{\text{Kern } i}} d^3x (F_{\text{fr}}^{\mu\nu} j_{\text{el},\nu} + \frac{1}{\mu_0 c} dF_{\text{fr}}^{\mu\nu} j_{\text{mag},\nu}) \approx \int_{V_{\text{Kern } i}} d^3x F_{\text{fr}}^{\mu\nu} j_{\text{el},\nu}$$

$$= \int_{V_{\text{Kern } i}} d^3x \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{E}_{\text{fr}} \vec{j}_{\text{el}_i} \\ \vec{E}_{\text{fr}} \rho_{\text{el}_i} + \vec{j}_{\text{el}_i} \times \vec{B}_{\text{fr}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \vec{E}_{\text{fr}} Q_{\text{el}_i} \vec{v}_i \\ \vec{E}_{\text{fr}} Q_{\text{el}_i} + Q_{\text{el}_i} \vec{v}_i \times \vec{B}_{\text{fr}} \end{pmatrix}. \quad (7.138)$$

Nachdem der allgemeine Viererimpuls eines Solitons in Wechselwirkung im elektrodynamischen Grenzfall zu jeder Zeit durch den kovarianten Viererimpuls eines gleich bewegten freien Solitons angenähert werden kann, werden sich auch die Bahnen der an der Streuung beteiligten Monopole denen von realen Teilchen mit der Ruhemasse eines freien Solitons bei gleichen Anfangsbedingungen angleichen.

8 Conclusio

SU2-Feldkonfigurationen mit drei zusätzlichen inneren Freiheitsgraden ermöglichen den Aufbau einer symmetrischen Elektrodynamik auf klassischer Basis mit der grundsätzlichen Gleichstellung von elektrischen und magnetischen Viererstromdichten in den Feldgleichungen. Eichtransformationen der dazugehörigen Viererpotentiale finden dabei ihren Ursprung in der Geometrie und werden durch Drehungen lokaler Koordinatensysteme im inneren Raum erzeugt. Die 4 möglichen stabilen Monopole sind alle elektrischer Natur und können im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie als Solitonen mit, auf Grund der Reichweite ihres dazugehörigen Gesamtfeldes, theoretisch unendlicher Ausdehnung betrachtet werden. Elektronen und Positronen sind somit keine Punktteilchen mehr, sondern besitzen eine innere Struktur, die quasi frei von Singularitäten ist. Die Quantelung von Ladung und Spin ergibt sich ebenfalls aus der Geometrie. Durch die Verknüpfung der magnetischen Feldgrößen mit zeitlichen Änderungen des SU2-Feldes, können in diesem Modell stabile magnetische Monopole allerdings nicht existieren.

Grundsätzlich ist jedes SU2-Feld, und somit auch ein Soliton immer Teilchen und Feld zugleich. Eine generelle Aufspaltung des Energie-Impuls-Tensors einer beliebigen SU2-Feldkonfiguration in zwei Summanden, die man als Teilchenanteil und als Feldanteil interpretieren kann, führt speziell für einen Monopol zu einem näherungsweise räumlich begrenzten Teilchen und zu einem dazugehörigen langreichweitigen Feld. Die Kraftgleichungen zwischen diesen beiden Subsystemen sind ebenfalls symmetrisch.

Die Maxwellsche Elektrodynamik ergibt sich im SU2-Feldmodell als Spezialfall, der ganz bestimmten Anfangsbedingungen genügen muss, bei denen existierende elektrische Monopole in ausreichender Entfernung aneinander gestreut werden. Unter diesen Voraussetzungen können dann die symmetrischen linearen Feldgleichungen, makroskopisch gesehen, zu den Maxwellgleichungen vereinfacht werden und aus den symmetrischen Kraftgleichungen sind die Formeln für die Coulombkräfte und Lorentzkräfte ableitbar. Auch die Bahnen der gestreuten Solitonen gleichen denen von realen Teilchen mit konstanter Ruhemasse. Somit lassen sich in diesem speziellen Fall auch die nichtlinearen Bewegungsgleichungen eines SU2-Feldes näherungsweise lösen, und zwar indirekt durch die Analyse der makroskopischen Bewegungen der beteiligten Monopole.

Literatur

- DIRAC, Paul Adrien Quantised Singularities in the Electromagnetic Field
Proc. Roy. Soc. A 133 60 1931
- DIRSCHMID, Hans Jörg Tensoren und Felder
Springer Verlag Wien 1996
- FABER, Manfred Solitonen, Differentialgeometrie und Topologie
Skriptum TU Wien Atominstitut 2010
- FECKO, Marián Differential Geometry and Lie Groups for Physicists
Cambridge University Press New York 2006
- JACKSON, John David Klassische Elektrodynamik
Walter de Gruyter Verlag Berlin 2002
- KÜHNEL, Wolfgang Matrizen und Lie-Gruppen: Eine geometrische Einführung
Vieweg und Teubner Verlag Wiesbaden 2011
- REMOISSENET, Michel Waves Called Solitons: Concepts and Experiments
Springer Verlag Berlin 1999
- WU, Tai Tsun
YANG, Chen Ning Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global
Formulation of Gauge Fields
Phys. Rev. D 12 3845 1975