

**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN**

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

LABEL-MUSTER IN MARKIERTEN BÄUMEN

ausgeführt am Institut für

Diskrete Mathematik und Geometrie

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

AO.UNIV.PROF. DIPL.-ING. DR.TECHN. ALOIS PANHOLZER

durch

Stefanie Pichler, B.Sc.

Steinhagegasse 10/3

1120 Wien

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Vorbereitung	3
	2.0.1 Wichtige Resultate	4
3	Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen	5
3.1	Einführung	5
3.2	Mustervermeidung in Bäumen und Permutationen/Wörtern/Folgen . . .	10
	3.2.1 Zusammenhängende Muster in Permutationen	10
	3.2.2 Zusammenhängende Muster in Wörtern	12
	3.2.3 Muster in Folgen	13
3.3	Wilfklassen	16
	3.3.1 Verallgemeinerte Inversionsformel	16
	3.3.2 Binärbäume ohne Markierung der inneren Knoten	17
	3.3.3 Binärbäume mit Markierung der inneren Knoten	32
3.4	Asymptotische Resultate	43
3.5	Ausblick	50
	3.5.1 Zusammenhang Shuffle Operads und Mustervermeidung in Bäumen	52
4	Labelmuster in Bäumen	54
4.1	Einführung	54
	4.1.1 Verwandte Resultate für Permutationen	58
	4.1.2 Wichtige Resultate	61
4.2	Lokale Minima in Bäumen	63
	4.2.1 Ungeordnete Bäume	63
	4.2.2 Geordnete Bäume	70
4.3	Up-down alternierende Bäume	78
4.4	Maximal-aufsteigende Unterbäume	84
	4.4.1 Ungeordnete Bäume	84
	4.4.2 Geordnete Bäume	89
4.5	Maximal-aufsteigende Ketten in Bäumen	93

1

Einleitung

Das Auftreten diverser zusammenhängender Muster in Permutationen ist bereits ausführlich erforscht worden. Da ist es nur natürlich zu versuchen, gewisse Resultate für Bäume zu verallgemeinern bzw. diese Untersuchungen auf Bäume auszuweiten.

Es werden in dieser Arbeit Resultate für zwei verschiedene Arten von markierten Bäumen betrachtet. Zum einen Bäume, für welche die Vorschrift für die Markierung der inneren Knoten unabhängig von der Vorschrift der Markierung der Blätter ist. Zum anderen werden Baumfamilien untersucht in denen zwischen den Labels der Blätter und der inneren Knoten nicht unterschieden wird.

Untersucht werden verschiedene Arten von zusammenhängenden Mustern.

Kapitel 2: Dieses Kapitel dient dazu grundlegende Begriffe zu definieren. Außerdem werden wichtige Resultate angeführt, welche vor allem in Beweisen des Öfteren verwendet werden.

Kapitel 3: In diesem Kapitel werden Bäume betrachtet, in welchen nach bestimmten Vorschriften die Blätter mit natürlichen Zahlen markiert sind und die inneren Knoten mit Elementen aus einem Alphabet X . Es geht hauptsächlich darum Bäume zu betrachten, welche eine gegebene Menge von zusammenhängenden Mustern vermeiden. Dabei wird auch gezeigt, dass es sich dabei um eine Verallgemeinerung von Vermeidung zusammenhängender Muster in Permutationen, Wörtern und gewissen Folgen handelt. Der Begriff der Wilf-Äquivalenz - eigentlich für Permutationen definiert - wird für diese Bäume eingeführt und spielt eine sehr wichtige Rolle.

Neben der genauen Beschreibung von Wilfklassen für Musterbäume mit einer kleinen Anzahl von Blättern, werden auch einige asymptotische Resultate bzw. Vermutungen angegeben und gezeigt, dass diese Resultate in der Operad-Theorie eine wichtige Rolle spielen können.

Das Kapitel baut hauptsächlich auf der Arbeit [Dot, 2012] von Vladimir Dotsenko auf.

Kapitel 4: Hier werden verschiedene Parameter in markierten Bäumen betrachtet. Im Unterschied zu Kapitel 3 werden Baumfamilien, in welchen die inneren Knoten und Blätter mit paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen markiert sind, betrachtet.

Zunächst wird die Anzahl lokaler Minima in ungeordneten sowie geordneten Bäumen untersucht, dabei werden Resultate über die exakte Verteilung für eine fixe Baumgröße sowie über das Grenzverhalten gezeigt. Weiters wird gezeigt, dass es für Bäume mit n Knoten einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der lokalen Minima und der Anzahl der Blätter bzw. zu up-down alternierenden Bäumen gibt.

Außerdem wird die Anzahl maximal aufsteigender Unterbäume in ungeordneten sowie geordneten Bäumen betrachtet und ein Zusammenhang zu Pfaden in speziellen Matrizen hergestellt.

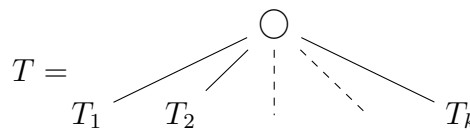
Im letzten Abschnitt wird das Musterkonzept der maximal aufsteigenden Ketten in ungeordneten Bäumen untersucht.

Die Resultate in diesem Kapitel basieren hauptsächlich auf den Arbeiten [Sei, 2011], [BaPaSe] und [BrPa].

2 | Vorbereitung

Definition 2.0.1. Ein **Baum** ist ein kreisfreier, zusammenhängender Graph. Bäume in welchen die Knoten Labels tragen, werden **markierte Bäume** genannt. Bäume ohne Labels heißen **unmarkierte Bäume**.

Definition 2.0.2. Ein **Wurzelbaum** T ist entweder ein externer Knoten \square , auch **Blatt** genannt oder es gibt einen ausgezeichneten inneren Knoten \circ , genannt **Wurzel**, mit $k \in \mathbb{N}$ Unterbäumen.



Das bedeutet $T = \square$ oder $T = \circ$ mit Wurzelbäumen T_1, \dots, T_k .

In einem Wurzelbaum ist es möglich, den Baum von der Wurzel weg zu durchlaufen.

Jeder Knoten außer der Wurzel besitzt genau einen **Elternknoten**.

Knoten mit gleichem Elternknoten v werden **Kinder** von v genannt.

Alle Knoten welche auf dem kürzesten Pfad von der Wurzel zu einem Knoten v liegen, heißen **Vorgänger** von v . Alle Knoten, welche auf dem Pfad von v zu einem Blatt liegen, heißen **Nachfolger** von v .

Knoten, die mindestens ein Kind besitzen, werden **innere Knoten** genannt, solche ohne Kinder **Blätter**.

Eine Menge von Bäumen wird **Wald** genannt.

Eine geordnete Menge von Bäumen heißt **geordneter Wald**.

Wir verwenden folgende Notation:

- Sei $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ eine formale Potenzreihe, dann bezeichne $[z^n]A(z) = a_n$.
- $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$.
- S_n bezeichnet die symmetrische Gruppe, also die Menge aller Permutationen der Länge n .

2.0.1 Wichtige Resultate

In Beweisen werden des Öfteren die Lagrange Inversionsformel (Beweis siehe z.B. [FlOd, 1990] und [Sta, 1999]) und das darauf folgende Lemma - eine Folgerung der Cauchy'schen Integralformel (Beweis siehe z.B. [FlSe, 2009]) - benötigt:

Satz 2.0.1 (Inversionsformel von Lagrange). *Seien $T(z)$ und $\phi(z)$ formale Potenzreihen mit $T(z) = z \cdot \phi(T(z))$ und $[z^0]\phi(z) \neq 0$. Dann gilt für jede formale Potenzreihe $f(x)$*

$$[z^n]f(T(z)) = \begin{cases} \frac{1}{n}[T^{n-1}]f'(T)(\phi(T))^n, & n > 0, \\ [T^0]f(T), & n = 0. \end{cases}$$

Außerdem gilt

$$[z^n](T^{(-1)}(z))^k = \frac{k}{n}[z^{n-k}] \left(\frac{z}{T(z)} \right)^n.$$

Lemma 2.0.1. *Sei $A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Dann gilt*

$$[z^n]A(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{A(z)}{z^{n+1}} dz,$$

mit dem Integral entlang einer einfach geschlossenen, gegen den Uhrzeigersinn gerichteten Kurve um den Ursprung, welche komplett innerhalb des Konvergenzbereiches von $A(z)$ liegt.

3

Mustervermeidung in X -markierten Wurzelbäumen

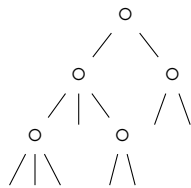
3.1 Einführung

Dieser Abschnitt enthält einige grundlegende Definitionen speziell für dieses Kapitel und einige erklärende Beispiele.

Bei allen Bäumen, welche in diesem Kapitel betrachtet werden, ist die Reihenfolge der Unterbäume zu beachten.

Definition 3.1.1. Ein *planarer Wurzelbaum*, ist ein Wurzelbaum, gemeinsam mit einer Totalordnung auf der Menge der Kinder jedes einzelnen Knotens.

Beispiel 3.1.1. Folgender Baum ist ein Beispiel für einen planaren Wurzelbaum:



Notation:

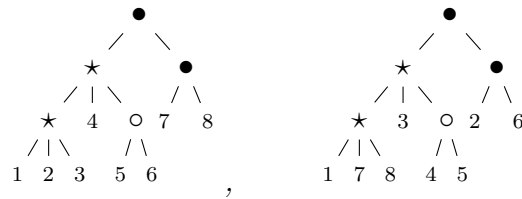
$X = \bigcup_{n \geq 2} X_n$ bezeichnet im gesamten Kapitel ein endliches Alphabet, dargestellt als disjunkte Vereinigung der Teilmengen X_n , $n \geq 2$.

Definition 3.1.2. Ein *planarer X -markierter Wurzelbaum* T ist ein planarer Wurzelbaum, in dem jeder innere Knoten mindestens zwei Kinder besitzt und die Knoten derart markiert sind, dass Folgendes erfüllt wird:

- Jeder innere Knoten v mit m Kindern ist markiert mit einem Element $x_v \in X_m$.

- Jedes Blatt von T ist markiert mit einer positiven Zahl, sodass folgende Bedingungen gelten:
 1. **Labelling-set-condition:** Sei l die Anzahl der Blätter von T , dann entspricht die Menge der Blattlabels genau der Menge $\{1, 2, \dots, l\}$.
 2. **Local-increasing-condition:** Wenn jedem inneren Knoten v das kleinste Blattlabel, jener Blätter, welche Nachfolger von v in T sind, zugeordnet wird (temporär hat also auch jeder innere Knoten eine zugehörige positive Zahl), dann gilt für jeden inneren Knoten, dass die Zahlen welche seinen Kindern zugeordnet sind, von links nach rechts ansteigen.

Beispiel 3.1.2. Sei $X_2 = \{\bullet, \circ\}$, $X_3 = \{\star\}$ und $X = X_2 \cup X_3$. Dann sind folgende Bäume Beispiele für planare X -markierte Wurzelbäume:



In weiterer Folge verwenden wir folgende Notation:

Seien $i \geq 0$, $l \geq 1$ dann bezeichnet

- $\mathcal{LT}_{i,l}(X)$... die Menge aller X -markierten Wurzelbäume mit i inneren Knoten und l Blättern.
Dabei gilt $\mathcal{LT}_{0,l}(X) = \emptyset$, $\forall l > 1$.
 $\mathcal{LT}_{0,1}(X)$ besteht aus einem Element - einem Baum mit nur einem Knoten ohne Kanten.
- $\mathcal{LT}_l(X) = \bigcup_{i \geq 1} \mathcal{LT}_{i,l}(X)$... die Menge aller X -markierten Wurzelbäume mit l Blättern und
- $\mathcal{LT}(X) = \bigcup_{i,l \geq 1} \mathcal{LT}_{i,l}(X)$... die Menge aller X -markierten Wurzelbäume.

Die Bäume aus Beispiel 3.1.2 sind also Elemente von $\mathcal{LT}_{5,8}(X)$.

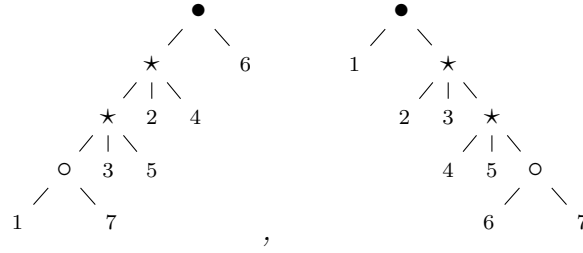
Definition 3.1.3. Ein planarer Wurzelbaum T wird **Linkskamm** genannt, wenn für jeden inneren Knoten v gilt, dass nur das Kind von v welches am weitesten links ist eventuell kein Blatt ist.

Analog wird ein planarer Wurzelbaum T **Rechtskamm** genannt, wenn für jeden inneren Knoten v gilt, dass nur das Kind von v welches am weitesten rechts ist eventuell kein Blatt ist.

Beispiel 3.1.3. Sei wieder $X_2 = \{\bullet, \circ\}$, $X_3 = \{\star\}$ und $X = X_2 \cup X_3$.

Dann sind folgende X -markierte Wurzelbäume Beispiele für einen Links- und einen Rechtskamm:

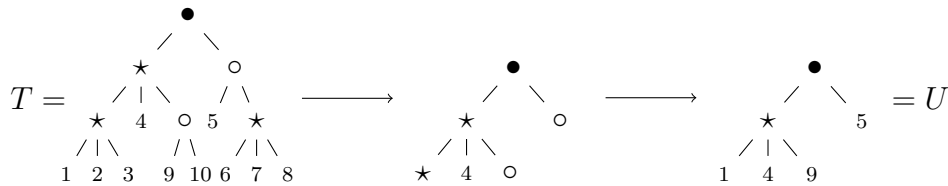
3 Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen



Bemerkung 3.1.1. Bei planaren X -markierten Wurzelbäumen gibt es einen großen Unterschied zwischen Rechts- und Linkskämmen: Durch die Local-increasing-condition gibt es bei einem Linkskamm nur eine einzige Einschränkung für das Labelling der Blätter - das Blatt am weitesten Links muss mit 1 markiert sein. Hingegen gibt es bei einem Rechtskamm nur genau eine Möglichkeit die Blätter zu markieren - von der Wurzel absteigend sind die Blätter aufsteigend zu markieren.

Definition 3.1.4. Ein **Unterbaum** eines planaren X -markierten Wurzelbaumes T ist ein Unterbaum U mit Wurzel an einem der inneren Knoten von T , sodass für jeden inneren Knoten v von U gilt, dass alle Kinder von v in T auch Kinder von v in U sind. Die Blätter von U sind mit den - der Local-increasing-condition in T - entsprechenden Zahlen markiert.

Beispiel 3.1.4. Beispielsweise ist U ein Unterbaum des Baumes $T \in \mathcal{LT}(X)$:



Bemerkung 3.1.2. Durch die Bedingung an die inneren Knoten wird garantiert, dass die Labels der inneren Knoten von U Sinn machen. Dass also jeder innere Knoten mit m Kindern mit einem Element aus X_m markiert ist.

Bemerkung 3.1.3. Die Local-increasing-condition ist für einen Unterbaum U eines X -markierten Wurzelbaumes T laut Definition erfüllt.

Damit U zu einem Element aus $\mathcal{LT}(X)$ wird, muss also nur noch die Labelling-set-condition erfüllt werden. Dies geschieht, indem die Blattlabels durch Elemente der Menge $\{1, 2, \dots, l_U\}$ ordnungserhaltend ersetzt werden, mit l_U als Anzahl der Blätter von U .

Der Baum mit diesen neuen Labels wird **Standardisierung** von U genannt und im Folgenden mit $st(U)$ bezeichnet. Klarerweise gilt $st(U) \in \mathcal{LT}(X)$.

Definition 3.1.5. Es heißt, ein planarer X -markierter Wurzelbaum $T \in \mathcal{LT}(X)$ enthält einen Baum $M \in \mathcal{LT}(X)$ als **Muster**, wenn es einen Unterbaum U von T gibt, mit $M = st(U)$.

Andernfalls heißt es, T **vermeidet** M .

Beispiel 3.1.5. Der Baum $T \in \mathcal{LT}(X)$ enthält beispielsweise das Muster $M \in \mathcal{LT}(X)$. Dabei sei X wie in den vorhergehenden Beispielen definiert:

3 Mustervermeidung in X -markierten Wurzelbäumen

- von X : $f_X(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{|X_n|z^n}{n!}$,
- von \mathcal{M} : $f_{\mathcal{M}}(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{|\mathcal{M} \cap \mathcal{L}\mathcal{T}_n(X)|z^n}{n!}$,
- der \mathcal{M} vermeidenden Menge: $f_{no-\mathcal{M}}(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{|\mathcal{L}\mathcal{T}_{n,no-\mathcal{M}}(X)|z^n}{n!}$.

Aus Gründen der besseren Lesbarkeit, wird in diesem Kapitel ab sofort - wenn nicht anders angegeben - anstatt von planaren X -markierten Wurzelbäumen nur mehr von Bäumen und anstatt von Mustern eines planaren X -markierten Wurzelbaumes nur mehr von Mustern die Rede sein.

3.2 Mustervermeidung in Bäumen und Permutationen/Wörtern/Folgen

Eingangs wurde bereits angedeutet, dass Mustervermeidung in X -markierten Wurzelbäumen eine Verallgemeinerung von Mustervermeidung in Permutationen sowie Wörtern darstellt. Genau dieser Zusammenhang wird in diesem Abschnitt genauer erläutert. Außerdem beschäftigen wir uns kurz mit einem Zusammenhang von gewissen Mustern in Bäumen und Mustern in gewissen Folgen.

Im gesamten Abschnitt sei $X = X_2$ vorausgesetzt.

3.2.1 Zusammenhängende Muster in Permutationen

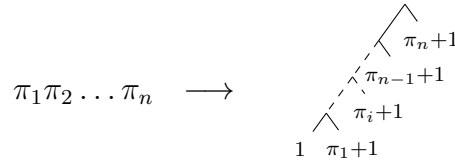
Zusätzlich sei hier $|X| = 1$ angenommen. Wir betrachten also ausschließlich Binärbäume mit nur einem möglichen Label für die inneren Knoten, daher wird in Skizzen darauf verzichtet.

Lemma 3.2.1. *Die Menge aller Permutationen ist natürlich, als Menge von Linkskämmen, in $\mathcal{LT}(X)$ eingebettet.*

Beweis:

Bei einem Linkskamm gibt es keine Einschränkungen für die Anordnung der Blattlabels $\{2, \dots, n\}$. Daher kann eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller Permutationen der Länge n und der Menge aller Linkskämme in $\mathcal{LT}(X)$ mit $n + 1$ Blättern definiert werden.

Eine mögliche Bijektion die für eine Permutation $\pi \in S_n$ Gewünschtes liefert, ist etwa folgende Abbildung, mit $1 \leq i \leq n$:



□

Bemerkung 3.2.1. *Sei $\sigma \in S_n$ und $T(\sigma)$ der σ -entsprechende Linkskamm. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Muster von $T(\sigma)$ und der Menge der zusammenhängenden Muster von σ .*

Daher sind in diesem Fall die Begriffe „Muster eines Baumes“ für Linkskämme und „zusammenhängendes Muster einer Permutation“ für Permutationen äquivalent.

Satz 3.2.1. *Sei Π eine Menge zusammenhängender Muster von Permutationen und \mathcal{M}_Π die Menge aller den Permutationen in Π entsprechenden Linkskämmen gemeinsam mit dem einzigen Rechtskamm mit drei Blättern.*

Dann gilt

$$|\{\mathcal{LT}_{n, \text{no-}\mathcal{M}_\Pi}(X)\}| = |\{\pi \in S_{n-1} | \pi \text{ vermeidet } \sigma, \forall \sigma \in \Pi\}|.$$

Dies ergibt folgende Gleichung

$$\begin{aligned} f'_{no-T(\sigma)}(z) &= \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!} f_{no-T(\sigma)}(z) + \frac{a_2}{2!} (f_{no-T(\sigma)}(z))^2 + \frac{a_3}{3!} (f_{no-T(\sigma)}(z))^3 + \dots \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{a_k}{k!} (f_{no-T(\sigma)}(z))^k = A(f_{no-T(\sigma)}(z)). \end{aligned}$$

□

3.2.2 Zusammenhängende Muster in Wörtern

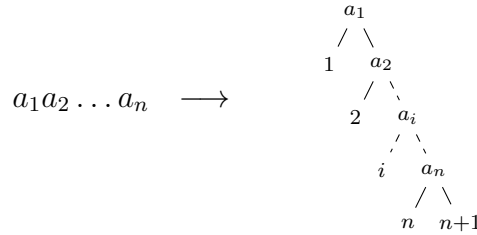
Sei A ein festes Alphabet und $X = X_2 = A$. Wir betrachten also wieder Binärbäume, allerdings mit $|A|$ Möglichkeiten die inneren Knoten zu markieren.

Lemma 3.2.2. *Die Menge aller möglichen Wörter über A ist in natürlicher Weise, als Menge von Rechtskämmen, in $\mathcal{LT}(X)$ eingebettet.*

Beweis:

Das Labelling der Blätter ist, wegen der Local-increasing-condition, bei Rechtskämmen eindeutig. Als Label für einen inneren Knoten kann ein beliebiges Element aus A gewählt werden. Es kann daher eine Bijektion zwischen der Menge aller Wörter der Länge n und der Menge aller Rechtskämme in $\mathcal{LT}(X)$ mit $n + 1$ Blättern (d.h. n inneren Knoten) definiert werden.

Einem Wort $a_1 a_2 \dots a_n$ über A kann beispielsweise durch folgende Abbildung bijektiv ein Rechtskamm zugeordnet werden:



□

Bemerkung 3.2.2. *Sei ω ein Wort der Länge n über A und $T(\omega)$ der ω entsprechende Rechtskamm. Dann gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen den Unterbäumen von $T(\omega)$ und den Teilwörtern von ω .*

Daher sind in diesem Fall die Begriffe „Muster eines Baumes“ für Rechtskämme und „Teilwörter von Wörtern“ äquivalent.

Satz 3.2.3. *Sei \mathcal{W} eine Menge von Wörtern über A und $\mathcal{M}_{\mathcal{W}}$ die Menge aller den Wörtern in \mathcal{W} entsprechenden Rechtskämmen gemeinsam mit allen möglichen Linkskämmen mit drei Blättern in $\mathcal{LT}(X)$.*

Dann gilt

$$|\mathcal{LT}_{n, no-\mathcal{M}_{\mathcal{W}}}(X)| = |\{\text{Wörter } \omega \text{ der Länge } n - 1 \mid \omega \text{ enthält kein Wort aus } \mathcal{W} \text{ als Teilwort}\}|.$$

Beweis:

Aufgrund der Voraussetzungen sind alle erlaubten Bäume Rechtskämme und entsprechen daher Wörtern.

Der Beweis folgt somit sofort aus obiger Bemerkung. □

3.2.3 Muster in Folgen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass wenn $|X| = 1$ gilt, Baummuster auf natürlichem Weg geplättet werden können und ein Zusammenhang zwischen Mustern in Bäumen und Mustern spezieller Permutationen, sogenannten Stirling-Permutationen, hergeleitet werden kann.

In diesem Abschnitt gilt $X = X_2 = \{\circ\}$.

Wir benötigen folgendes Korollar:

Korollar 3.2.1. *Sei T ein Baum mit k inneren Knoten, wobei jeder dieser Knoten genau d Kinder hat.*

Dann gilt: T hat $kd - k + 1$ Blätter.

Beweis:

Sei B_k die Anzahl der Blätter eines Baumes mit k inneren Knoten.

Vollständige Induktion:

$k = 1$: $B_1 = d = d - 1 + 1$ ✓

$k \rightarrow k + 1$: Es wird $B_k = kd - k + 1$ vorausgesetzt.

Aus einem Baum mit k inneren Knoten wird ein Baum mit $k + 1$ inneren Knoten erzeugt, indem ein Blatt durch einen inneren Knoten mit d Blättern als Kindern ersetzt wird. Es kommen daher $d - 1$ Blätter hinzu, somit gilt

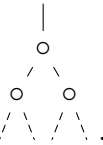
$$B_{k+1} = B_k + (d - 1) = kd - k + d = (k + 1)d - (k + 1) + 1 \quad \checkmark.$$

□

Satz 3.2.4. *Es gibt genau $(2(n - 1) - 1)!! = \frac{(2(n-1))!}{2^{n-1}(n-1)!}$ verschiedene Bäume in $\mathcal{LT}_n(X)$.*

Beweis:

Wir betrachten Bäume aus $\mathcal{LT}(X)$, versehen mit einer zusätzlichen Kante, welche von der Wurzel „hinaufführt“.



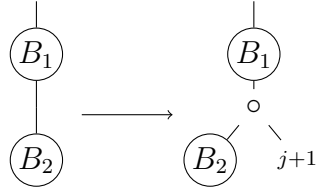
Wir betrachten also Bäume der Gestalt $\begin{matrix} | \\ \circ \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \end{matrix}$.

Dadurch ist eine rekursive Konstruktion aller Bäume aus $\mathcal{LT}(X)$ möglich.

Bäume mit n Blättern, also $n - 1$ inneren Knoten, können folgendermaßen in $n - 1$ Schritten erzeugt werden:

Schritt 0: $\begin{array}{c} | \\ 1 \end{array}$.

Schritt $j \geq 1$: An einer der $2j - 1$ Kanten wird der j -te innere Knoten eingefügt, gemeinsam mit einem nach rechts-schauenden Blatt, welches das Label $j + 1$ trägt:



Klarerweise gibt es nach dem $(n - 1)$ -ten Schritt insgesamt

$$1 \cdot 3 \cdots (2n - 3)(2n - 1) = (2(n - 1) - 1)!! \text{ Möglichkeiten.}$$

□

Lemma 3.2.3. *Es gibt genau $(2n - 1)!!$ verschiedene Permutationen der Multimenge $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$, sodass für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: Alle Elemente zwischen den beiden Vorkommen von k sind echt größer als k .*

*Diese Permutationen werden auch **Stirling-Permutationen** genannt.*

Beweis:

Sei π eine solche Permutation einer wie oben beschriebenen Multimenge mit $2n$ Elementen.

Es ist klar, dass die zwei Vorkommen von n nebeneinander stehen müssen. Werden beide n aus π entfernt, bleibt eine Permutation der Länge $2n - 2$ mit $n - 1$ als maximalen Elementen, in welcher zwischen zwei gleichen Elementen nur größere Elemente vorkommen. Es gibt nun $2n - 1$ Möglichkeiten die beiden n in diese Permutation einzufügen, um eine laut Voraussetzung gültige Permutation der Länge $2n$ zu erhalten. Dies kann rekursiv fortgesetzt werden.

Die Anzahl aller gültigen Permutationen ist daher

$$(2n - 1)(2n - 3) \cdots 1 = \frac{(2n)!}{(2n)(2n - 2) \cdots 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

□

Folgerung 3.2.1. *Es gilt also*

$$|\mathcal{LT}_{n+1}(X)| = \text{Anzahl aller Stirling-Permutationen von } \{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}.$$

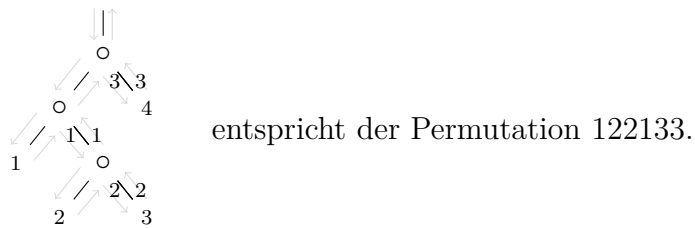
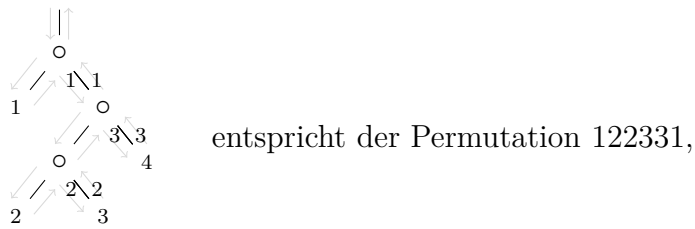
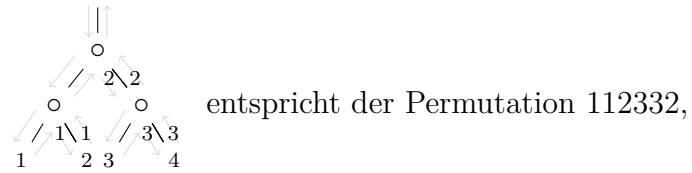
Eine Bijektion der Menge aller Bäume aus $\mathcal{LT}_n(X)$ auf die Menge aller Stirling-Permutationen der Länge $2(n - 1)$ kann mittels Traversierung erhalten werden:

Sei $T \in \mathcal{LT}(X)$. Bei der Traversierung von T wird jede nach rechts-schauende Kante mit dem Label des zuletzt besuchten Blattes markiert. Anschreiben dieser Kantenlabels

3 Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen

in der Reihenfolge, in welcher sie bei der Traversierung besucht werden, ergibt die dem Baum T entsprechende Stirling-Permutation.

Einige Beispiele sollen veranschaulichen, wie dies funktioniert:



Bemerkung 3.2.3.

- *Das Label einer nach rechts-schauenden Kante kann leicht konstruiert werden: Geht man vom Blatt $j+1$ in Richtung Wurzel, trägt das erste nach rechts-schauende Blatt, welches erreicht wird, das Label j .*
- *Die Labels der Kanten entlang jedes Pfades von einem Blatt zur Wurzel sind nach dieser Traversierung immer absteigend.*

3.3 Wilfklassen

In diesem Abschnitt geht es hauptsächlich darum, die Wilfklassen ausgewählter Mustermengen aus Bäumen mit nur wenigen Blättern und wenigen Labelmöglichkeiten für die inneren Knoten zu finden.

Davor wird aber noch ein sehr wichtiger Satz angeführt, welcher später des Öfteren von großer Bedeutung ist.

3.3.1 Verallgemeinerte Inversionsformel

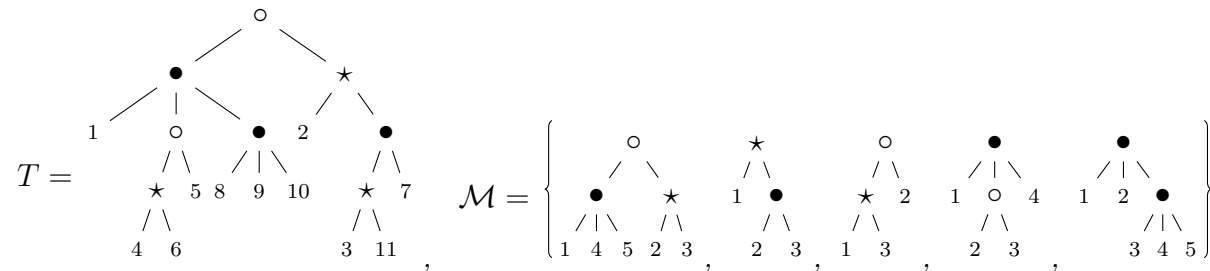
Definition 3.3.1. Sei \mathcal{M} eine Menge von Mustern aus $\mathcal{LT}(X)$. Eine Menge von Unterbäumen $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ eines Baumes $T \in \mathcal{LT}(X)$ wird **k -Bündel** aus \mathcal{M} von T genannt, wenn

- jeder Unterbaum T_i , $1 \leq i \leq k$, einem Muster aus \mathcal{M} entspricht, also $st(T_i) \in \mathcal{M}$ gilt.
- jede Kante zwischen zwei inneren Knoten in T auch eine Kante zwischen zwei inneren Knoten eines Unterbaumes T_i ist.

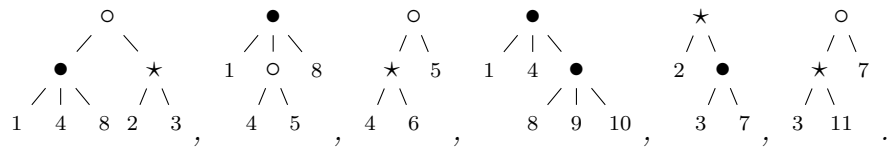
Per Definition sei die Menge der 0-Bündel genau die Labelmenge X .

Weniger formal ausgedrückt ist ein k -Bündel ein Baum, welcher komplett durch k -Kopien von Elementen einer vorgegebenen Mustermenge \mathcal{M} überdeckt wird.

Beispiel 3.3.1. Seien T und \mathcal{M} wie folgt gegeben:



Dann stellen folgende Unterbäume ein 6-Bündel (bevor sie standardisiert wurden) aus \mathcal{M} von T dar:



Nachfolgend bezeichnet $b_{n,k}(\mathcal{M})$ die **Anzahl der k -Bündel** von Bäumen mit n Blättern.

Auch auf der Menge der Permutationen kann der Begriff des Bündels definiert werden. Obige Definition ist eine Verallgemeinerung der von Goulden und Jackson eingeführten Begriffe der Bündel auf Permutationen und Wörtern.

Diese spezialisierte Definition wird später noch von Bedeutung sein.

Definition 3.3.2. Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation der Länge n .

Dann wird π **k-Bündel der Permutationen** $\sigma_1 \in S_{j_1}, \sigma_2 \in S_{j_2}, \dots, \sigma_k \in S_{j_k}$ genannt, wenn

- es $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ gibt, mit $\sigma_l = \pi_{i_l} \pi_{i_l+1} \dots \pi_{i_l+j_l-1}, \forall 1 \leq l \leq k$ und
- (oBdA sei angenommen, dass $i_1, i_2 \dots i_k$ aufsteigend angeordnet sind) gilt, dass $i_1 + j_1 > i_2, i_2 + j_2 > i_3, \dots, i_{k-1} + j_{k-1} > i_k, i_1 = 1$ und $i_k + j_k - 1 = n$.

Ein Beispiel soll dies veranschaulichen.

Beispiel 3.3.2. Sei $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Dann stellen die Permutationen $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ein 4-Bündel von π dar.

Folgende Darstellung zeigt, dass π von den Permutationen überdeckt wird und es nicht möglich ist, diese einfach voneinander zu trennen.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & & & & \\ & 4 & 1 & 3 & 2 & & \\ & & & 3 & 1 & 2 & \\ & & & & & 1 & 2 \end{array}$$

Ein sehr wichtiges und später des Öfteren verwendetes Resultat, ist folgender Satz. Der Beweis beruht auf homologischer Algebra und wird daher an dieser Stelle nicht angeführt. Interessierte Leser finden den Beweis in [DoKh, 2009].

Satz 3.3.1 (Verallgemeinerte Inversionsformel). *Das bezüglich der Komposition Inverse von $f_{no-\mathcal{M}}(z)$ kann mittels Bündel folgendermaßen erhalten werden:*

$$f_{no-\mathcal{M}}^{(-1)}(z) = z - \sum_{n \geq 1, k \geq 0} \frac{(-1)^k b_{n,k}(\mathcal{M}) z^n}{n!}.$$

Auch für Permutationen und Wörter gibt es ein sehr ähnliches Resultat, die sogenannte Kluster-Inversionsformel von Goulden und Jackson, siehe z.B. [NoZe, 1999].

3.3.2 Binärbäume ohne Markierung der inneren Knoten

Es werden also nur Bäume, für dessen Alphabet $X = X_2$, mit $|X| = 1$, betrachtet. Daher schreiben wir zwecks besserer Lesbarkeit statt $\mathcal{LT}_n(X)$ hier nur \mathcal{LT}_n und statt $\mathcal{LT}_{no-p}(X)$ nur \mathcal{LT}_{no-p} .

Lemma 3.3.1. *Folgende drei Muster sind zueinander Wilf-äquivalent:*

$$p_1 = \begin{array}{c} \wedge \\ 1 \quad 3 \\ \wedge \end{array} 2, \quad p_2 = \begin{array}{c} \wedge \\ 1 \quad 2 \\ \wedge \end{array} 3, \quad p_3 = \begin{array}{c} \wedge \\ 1 \quad 2 \\ \wedge \end{array} 3$$

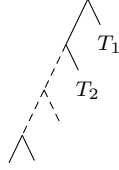
3 Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen

Für jedes dieser Muster und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau $(n - 1)!$ Bäume mit n -Blättern welche das Muster vermeiden.

Beweis:

- Behauptung: Die Menge aller p_1 vermeidenden Bäume kann bijektiv auf die Menge aller p_2 vermeidenden Bäume abgebildet werden.

Dazu wird ein Baum $T \in \mathcal{LT}_{n, no-p_1}$ als Linkskamm dargestellt, wobei die Blätter T_1, \dots, T_k Unterbäume von T sind, welche von der Wurzel aufsteigend angeordnet sind.



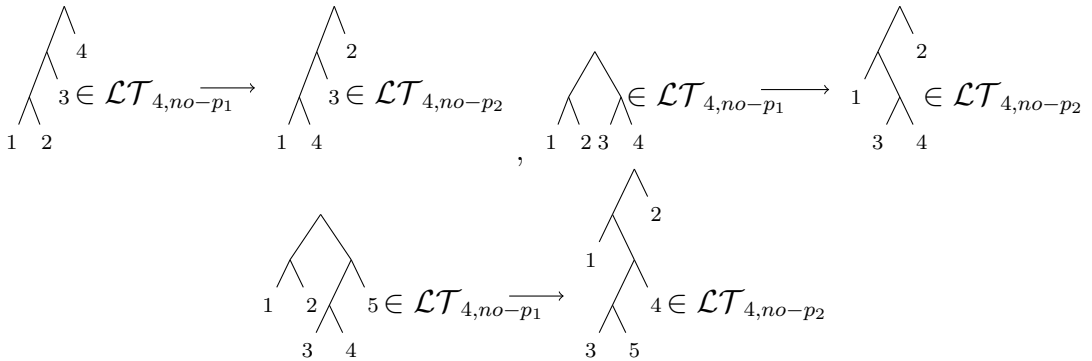
Es gilt also $T = \begin{matrix} & & & & \\ & & & & T_1 \\ & & & & / \backslash \\ & & & & T_2 \\ & & & & / \backslash \\ & & & & \vdots \\ & & & & T_k \end{matrix}$.

Weiters wird eine rekursive Abbildung ρ definiert:

$$\rho : \mathcal{LT}_{no-p_1} \longrightarrow \mathcal{LT}_{no-p_2} : \rho(1) = 1, \quad \rho\left(\begin{matrix} & & \\ & 1 & 2 \\ & / \backslash \\ & & \end{matrix}\right) = \begin{matrix} & & \\ & 1 & 2 \\ & / \backslash \\ & & \end{matrix}, \quad \rho(T) = \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \rho(T_k) \\ & & & & / \backslash \\ & & & & \rho(T_{k-1}) \\ & & & & / \backslash \\ & & & & \vdots \\ & & & & \rho(T_1) \end{matrix}.$$

Es wird also ρ auf jeden Unterbaum angewendet und in umgekehrter Reihenfolge wieder in den Baum eingepflanzt.

Einige Beispiele sollen die Funktionsweise der Rekursion veranschaulichen:



Aus der Definition von p_1 und p_2 folgt sofort, dass $\rho(T) \in \mathcal{LT}_{n, no-p_2}$ gilt.

- Behauptung: Die Menge aller p_1 vermeidenden Bäume kann bijektiv auf die Menge aller p_3 vermeidenden Bäume abgebildet werden.

Wie im vorigen Fall stellen wir einen Baum $T \in \mathcal{LT}_{n, no-p_1}$ als Linkskamm dar,

3 Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen

wobei die Blätter T_1, \dots, T_k Unterbäume von T sind.

Weiters sei $n_i := |T_i|$ die Anzahl der Blätter des Baumes T_i .

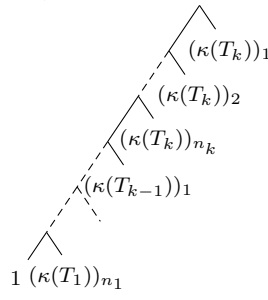
Sei L ein Linkskamm mit b Blättern, dann bezeichne $(L)_i$, $1 \leq i \leq b-1$ das i -te nach rechts-schauende Blatt - von der Wurzel abwärts gezählt und $(L)_b$ das einzig, nach links schauende Blatt.

Anzumerken ist noch, dass $\mathcal{LT}_{n, no-p_3}$ genau die Menge aller Linkskämme ist. Es muss also jeder Baum aus \mathcal{LT}_{no-p_1} eindeutig auf einen Linkskamm abgebildet werden.

Wir definieren die rekursive Abbildung:

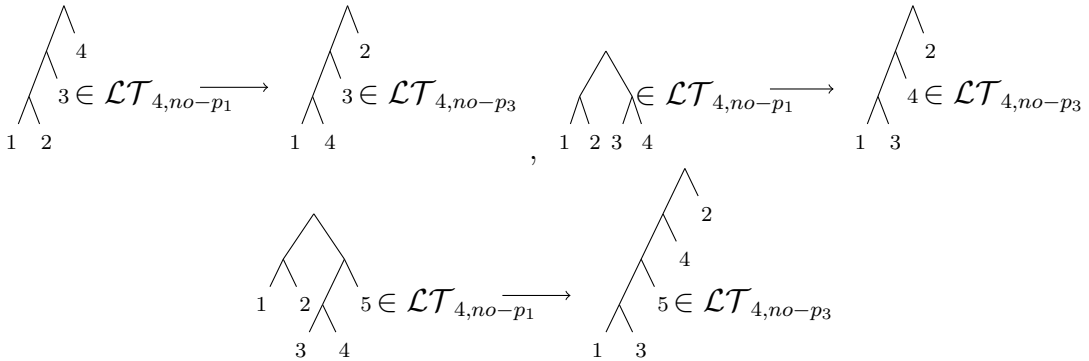
$$\kappa : \mathcal{LT}_{no-p_1} \longrightarrow \mathcal{LT}_{no-p_3} : \kappa(1) = 1, \quad \kappa \left(\begin{array}{c} \wedge \\ 1 \quad 2 \end{array} \right) = \begin{array}{c} \wedge \\ 1 \quad 2 \end{array} .$$

Um $\kappa(T)$ zu beschreiben, sei angenommen, dass die Linkskämme $\kappa(T_1), \dots, \kappa(T_k)$



bereits bekannt sind. Dann sei $\kappa(T) = \begin{array}{c} \wedge \\ 1 \quad (\kappa(T_1))_{n_1} \end{array}$.

$\kappa(T)$ ist also der Linkskamm, bei welchem die nach rechts-schauenden Blätter von der Wurzel abwärts der Reihe nach die Blätter von $\kappa(T_k), \kappa(T_{k-1}), \dots, \kappa(T_1)$ sind. Einige Beispiele sollen wieder helfen die Rekursion zu veranschaulichen:



Das κ eindeutig umkehrbar ist, folgt auf Grund der Tatsache, dass in $\kappa(T)$ das Label des rechts-schauenden Blattes, welches am weitesten weg von der Wurzel ist, das kleinste Blattlabel von T_1 ist. Das nächste Element (Richtung Wurzel) welches kleiner ist, ist dann das kleinste Blattlabel von T_2 usw..

- Es bleibt zu zeigen, dass es $(n-1)!$ Bäume mit n Blättern gibt, welche je eine dieser Mengen vermeiden.

Wie bereits angemerkt, besteht \mathcal{LT}_{no-p_3} genau aus allen Linkskämmen. Linkskämme mit n Blättern gibt es genau $(n-1)!$, da nur das Label des einzigen Linksblattes fix bestimmt ist.

□

Lemma 3.3.2. *Die folgenden drei Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:*

$$p_1 = \left\{ \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ \quad 2 \end{array} \right\}, \quad p_2 = \left\{ \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \quad \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, \quad p_3 = \left\{ \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \quad \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}.$$

Für jede dieser Mengen und jedes $n \geq 3$ gibt es genau einen Baum, welcher die Menge vermeidet.

Beweis:

- Für jedes $n \geq 3$ besteht die Menge \mathcal{LT}_{no-p_1} genau aus dem eindeutigen Rechtskamm mit n Blättern.
- Für jedes $n \geq 3$ besteht die Menge \mathcal{LT}_{no-p_2} genau aus dem eindeutigen Linkskamm mit n Blättern und von der Wurzel abwärts ansteigenden Blattlabeln.
- Für jedes $n \geq 3$ besteht die Menge \mathcal{LT}_{no-p_3} genau aus dem eindeutigen Linkskamm mit n Blättern und von der Wurzel abwärts absteigenden Blattlabeln.

□

Aus diesen beiden Lemmata folgt unmittelbar folgender Satz:

Satz 3.3.2. *Für $X = X_2$ mit $|X| = 1$ gibt es genau 4 Wilf-Klassen zu Mengen von Mustermengen, welche aus Mustern mit 3 Blättern bestehen.*

Beweis:

Außer den 2 Klassen, welche durch Lemma 3.3.1 und Lemma 3.3.2 beschrieben werden, gibt es noch

- die Wilf-Klasse, welche von der Mustermenge $\mathcal{M} = \emptyset$ erzeugt wird. Dies ist klarerweise die Menge aller Bäume in $\mathcal{LT}(X)$ und
- die Wilf-Klasse der Mustermenge aller Bäume mit drei Blättern, also aller Bäume

welche,
$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \quad \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ \quad 3 \end{array} \right\}$$
 vermeiden.

Klarerweise sind in dieser Klasse keine Bäume mit drei oder mehr Blättern.

□

Wir beschäftigen uns jetzt mit Mustern aus Bäumen mit vier Blättern. Dafür werden folgende 2 Korollare benötigt.

Korollar 3.3.1. *Sei $X = X_2$ und seien \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 zwei zueinander komplementäre Mengen von Mustern mit 3 Blättern, also $\mathcal{M}_1 \dot{\cup} \mathcal{M}_2 = \mathcal{LT}_3(X)$.*

Dann gilt folgende Gleichung

$$f_{no-\mathcal{M}_1}(-f_{no-\mathcal{M}_2}(-z)) = f_{no-\mathcal{M}_2}(-f_{no-\mathcal{M}_1}(-z)) = z$$

Beweis:

Aufgrund der Inversionsformel, Satz 3.3.1, genügt es zu zeigen, dass

$$-f_{no-\mathcal{M}_2}(-z) = -\sum_{l \geq 1} \frac{|\mathcal{LT}_{l, no-\mathcal{M}_2}|(-z)^l}{l!} \stackrel{!}{=} z - \sum_{n \geq 1, k \geq 0} \frac{(-1)^k b_{n,k}(\mathcal{M}_1) z^n}{n!} = f_{no-\mathcal{M}_1}^{(-1)}(z).$$

Da $|\mathcal{LT}_{1, no-\mathcal{M}_2}(X)| = 1$, gilt

$$-\sum_{l \geq 1} \frac{|\mathcal{LT}_{l, no-\mathcal{M}_2}|(-z)^l}{l!} = z - \sum_{l \geq 2} \frac{|\mathcal{LT}_{l, no-\mathcal{M}_2}|z^l}{l!} (-1)^l.$$

Zu zeigen bleibt also

$$\sum_{l \geq 2} \frac{|\mathcal{LT}_{l, no-\mathcal{M}_2}|z^l}{l!} (-1)^l = \sum_{n \geq 1, k \geq 0} \frac{(-1)^k b_{n,k}(\mathcal{M}_1) z^n}{n!}.$$

Für $[z^2]$ gilt diese Gleichung, da laut Definition die Anzahl der 0-Bündel mit $|X| = |X_2|$ übereinstimmt und sowohl \mathcal{M}_1 also auch \mathcal{M}_2 nur aus Bäumen mit drei Blättern bestehen.

Für $[z^n]$, $n \geq 2$ ist anzumerken, dass eine Bijektion der k -Bündel für \mathcal{M}_1 und der Bäume welche \mathcal{M}_2 vermeiden existiert, denn für jeden solchen Baum gibt es genau eine Möglichkeit durch Bäume aus \mathcal{M}_1 überdeckt zu werden.

Dass die Vorzeichen übereinstimmen folgt aus $X = X_2$, denn dadurch hat laut Korollar 3.2.1 jeder zu einem k -Bündel gehörige Baum genau $k + 2$ Blätter.

□

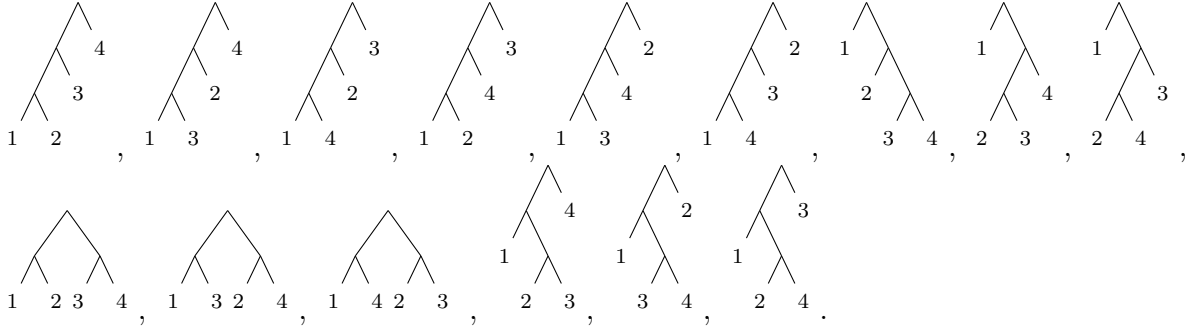
Bemerkung 3.3.1. *Bereits in Abschnitt 3.2.1 wurde der Zusammenhang von zusammenhängenden Mustern in Permutationen und gewissen Linkskämmen gezeigt. Weiters gilt, dass die Bündel von Linkskämmen, welche zusammenhängenden Permutationsmuster entsprechen, genau die Linkskämme sind, welche den Gouldon-Jackson Bündeln dieser Permutationsmuster (siehe Definition 3.3.2) entsprechen.*

Korollar 3.3.2. *Seien \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 zwei Wilf-äquivalente Mengen zusammenhängender Permutationsmuster. Dann sind auch die zwei Mustermengen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 der zugehörigen Linkskämme zueinander Wilf-äquivalent.*

Beweis:

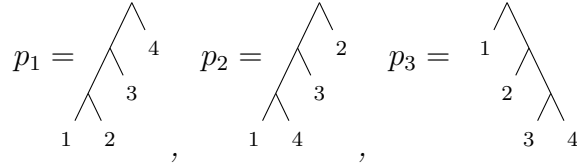
Dies folgt sofort aus obiger Bemerkung. □

Es gibt 15 verschiedene Bäume mit vier Blättern:



Alle Wilf-Klassen von Mustermengen mit 4-blättrigen Bäumen aufzulisten ist also schwierig, da $2^{15} = 32768$ verschiedene Mengen betrachtet werden müssten. Wir beschränken uns daher auf Wilf-Klassen von Bäumen, welche jeweils nur ein Muster vermeiden.

Lemma 3.3.3. *Folgende drei Muster sind zueinander Wilf-äquivalent:*

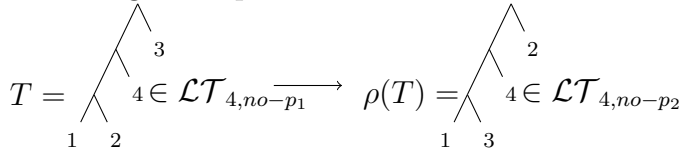


Beweis:

Der Beweis funktioniert ähnlich zum Beweis von Lemma 3.3.1:

- Behauptung: $p_1 \sim_W p_2$

Es kann die gleiche Rekursion ρ wie im Beweis von Lemma 3.3.1 verwendet werden. Dadurch gilt beispielsweise für einen Baum

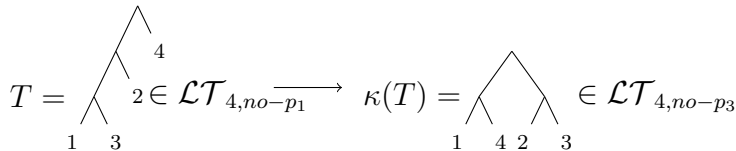


- Behauptung: $p_1 \sim_W p_3$

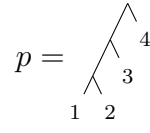
Hier kann die Rekursion aus Lemma 3.3.1 fast übernommen werden.

Um auch wirklich alle Bäume aus $\mathcal{LT}_{n, no-p_3}$ zu treffen, ist die einzig nötige Änderung die Vorschrift, dass κ das Muster $\begin{matrix} & & 3 \\ & \swarrow & \searrow \\ 1 & 2 & \end{matrix}$ abbildet auf das Muster $\begin{matrix} & & 3 \\ & \swarrow & \searrow \\ 1 & & 2 \end{matrix}$.

Um den Unterschied zu Lemma 3.3.1 zu verdeutlichen hier ein Beispiel:



□



Bemerkung 3.3.2. Dem Baum p entspricht die Permutation $\sigma = 123$. Sei $A_\sigma(t) := \sum_{k \geq 0} a_k \frac{t^k}{k!}$ die exponentiell erzeugende Funktion der σ -vermeidenden Permutationen.

Laut [Eli, 2006] gilt

$$A(t) = \frac{\sqrt{3}e^{\frac{t}{2}}}{2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3})}.$$

Mit Satz 3.2.2 folgt

$$f'_{no-p}(z) = \frac{\sqrt{3}e^{\frac{f_{no-p}(z)}{2}}}{2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}f_{no-p}(z) + \frac{2\pi}{3})}.$$

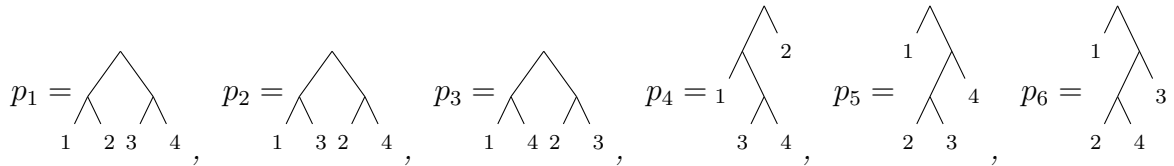
Eine implizite Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch

$$z + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{f_{no-p}(z)}{2}} \sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}f_{no-p}(z) + \frac{\pi}{3}\right) - e^{-\frac{f_{no-p}(z)}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}f_{no-p}(z) + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Auflösen dieser Gleichung nach $f_{no-p}(z)$ und Entwicklung in eine Taylorreihe um $z = 0$, ergibt für die Koeffizienten von $f_{no-p}(z)$ eine Folge, welche wie folgt startet:

$$|\mathcal{LT}_{1,no-p}| = 1, |\mathcal{LT}_{2,no-p}| = 1, |\mathcal{LT}_{3,no-p}| = 3, |\mathcal{LT}_{4,no-p}| = 14, |\mathcal{LT}_{5,no-p}| = 91, \\ |\mathcal{LT}_{6,no-p}| = 756, |\mathcal{LT}_{7,no-p}| = 7657, |\mathcal{LT}_{8,no-p}| = 91504, |\mathcal{LT}_{9,no-p}| = 1260441, \dots$$

Lemma 3.3.4. Die folgenden sechs Muster sind zueinander Wilf-äquivalent:



Beweis:

- Behauptung: $p_1 \sim_W p_2$:

Es wird eine Bijektion $\alpha : \mathcal{LT}_{no-p_1} \rightarrow \mathcal{LT}_{no-p_2}$ konstruiert, welche p_1 -vermeidende Bäume auf p_2 -vermeidende Bäume abbildet und zwar nach folgendem Schema:

Sei ein Baum $T \in \mathcal{LT}_{no-p_1} \cap \mathcal{LT}_{no-p_2}$, dann gelte $\alpha(T) = T$.

Sei ein Baum $T \in \mathcal{LT}_{no-p_1} \setminus \mathcal{LT}_{no-p_2}$, T enthält also das Muster p_2 aber nicht p_1 . Dann kann o.B.d.A. davon ausgegangen werden, dass die Wurzel von T in einem der vorkommenden p_2 enthalten ist. Denn sollte dem nicht so sein, wird α rekursiv auf jenen Unterbaum angewandt, deren Wurzel am nächsten zur Wurzel von T liegt und Teil des Musters p_2 ist.



Sei also $T = T_1 T_2 T_3 T_4$, weiters sei $S_i = \alpha(T_i), i = 1, \dots, 4$.

3 Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen



Dann gelte $\alpha(T) = \begin{matrix} & \wedge & \\ s_1 & & s_3 & s_2 & s_4 \end{matrix}$.

α ist also eine Bijektion, welche Bäume die p_1 vermeiden und p_2 enthalten, auf Bäume die p_2 vermeiden und p_1 enthalten abbildet.

- Behauptung: $p_1 \sim_W p_3$:

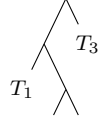
Dies funktioniert nach dem genau gleichen Prinzip wie im vorigen Fall.

- Behauptung: $p_1 \sim_W p_4$:

Dazu wird eine Bijektion $\beta : \mathcal{LT}_{no-p_1} \rightarrow \mathcal{LT}_{no-p_4}$ folgendermaßen konstruiert:

Sei ein Baum $T \in \mathcal{LT}_{no-p_1} \cap \mathcal{LT}_{no-p_4}$, dann gelte $\beta(T) = T$.

Sei ein Baum $T \in \mathcal{LT}_{no-p_1} \setminus \mathcal{LT}_{no-p_4}$, d.h. T enthält das Muster p_4 , aber nicht p_1 . Wieder kann o.B.d.A. davon ausgegangen werden, dass die Wurzel von T in einem auftretenden p_4 enthalten ist. Ist dem nicht so, wird β rekursiv auf jenem Unterbaum angewendet, deren Wurzel der Wurzel von T am nächsten ist und Teil des Musters p_4 ist.



Sei also $T = \begin{matrix} & \wedge & \\ T_1 & & T_2 \\ & \wedge & \\ T_2 & & T_4 \end{matrix}$, weiters sei $S_1 = \beta(\begin{matrix} & \wedge & \\ T_1 & & T_2 \end{matrix})$ und $S_2 = \beta(\begin{matrix} & \wedge & \\ T_3 & & T_4 \end{matrix})$.

Dann sei $\beta(T) = \begin{matrix} & \wedge & \\ S_1 & & S_2 \end{matrix}$.

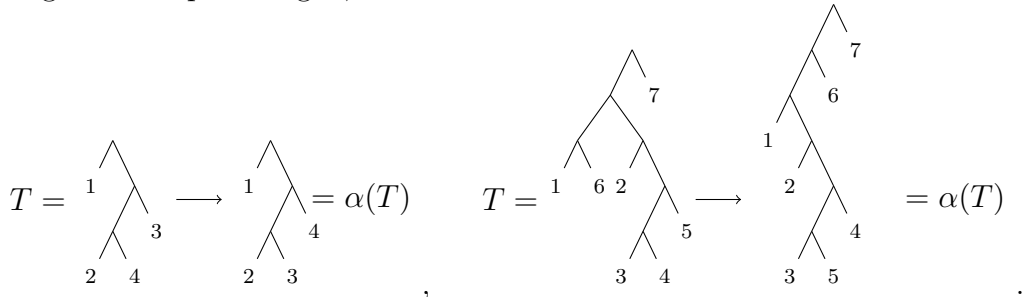
Der einzige Knoten in $\beta(T)$ welcher als Wurzel für p_4 in Frage käme ist die Wurzel. Das würde allerdings bedeuten, dass p_1 in T enthalten ist und stellt somit einen Widerspruch zur Annahme, dass T p_1 vermeidend ist dar.

- Behauptung: $p_5 \sim_W p_6$:

Dies gelingt durch eine Bijektion $\alpha : \mathcal{LT}_{no-p_5} \rightarrow \mathcal{LT}_{no-p_6}$.

Ein Baum $T \in \mathcal{LT}_{no-p_5}$ wird dabei von der Wurzel abwärts durchlaufen. Wird das Muster p_6 entdeckt, wird auf diesen Unterbaum die Rekursion ρ aus Lemma 3.3.1 angewendet. Danach wird α auf diesen Unterbaum erneut angewendet.

Folgende Beispiele zeigen, wie α funktioniert:

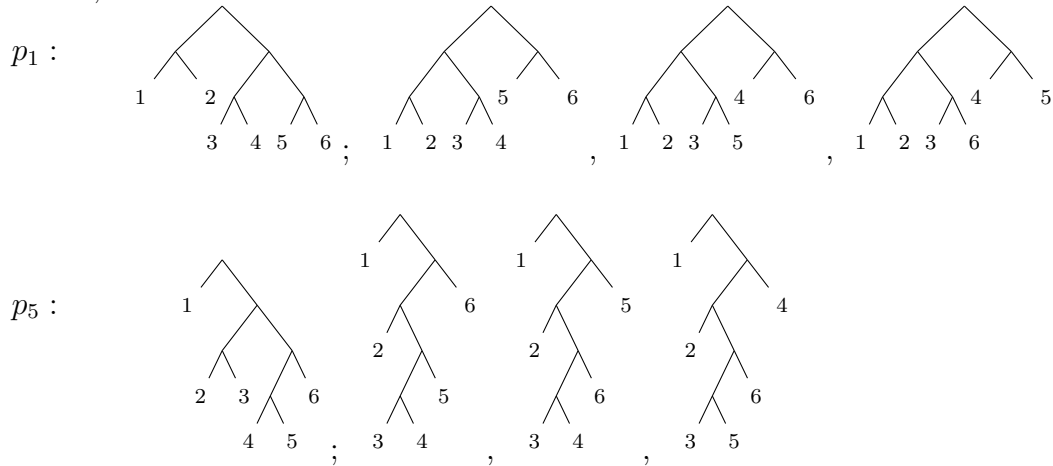


- Behauptung: $p_1 \sim_W p_5$:

Dieser Beweis ist eine Folgerung der Inversionsformel, Satz 3.3.1. Denn es wird gezeigt, dass $b_{n,k}(p_1) = b_{n,k}(p_5)$, $\forall n \geq 1, k \geq 0$. Dafür ist anzumerken, dass beide

Muster die gleiche Struktur von Selbstüberlappungen haben:

Für ein 2-Bündel, welches nur aus dem Muster p_1 bzw. p_5 besteht, gibt es je zwei mögliche Überlappungen, wobei eine davon nur ein erlaubtes Labelling der Blätter besitzt, das andere drei:



Weiteres Vorgehen:

Schritt 1: Wir betrachten zunächst Bäume ohne Blattlabels und konstruieren eine Bijektion α von Bündel des Musters p_1 (ohne Labels) auf Bündel des Musters p_5 (ohne Labels).

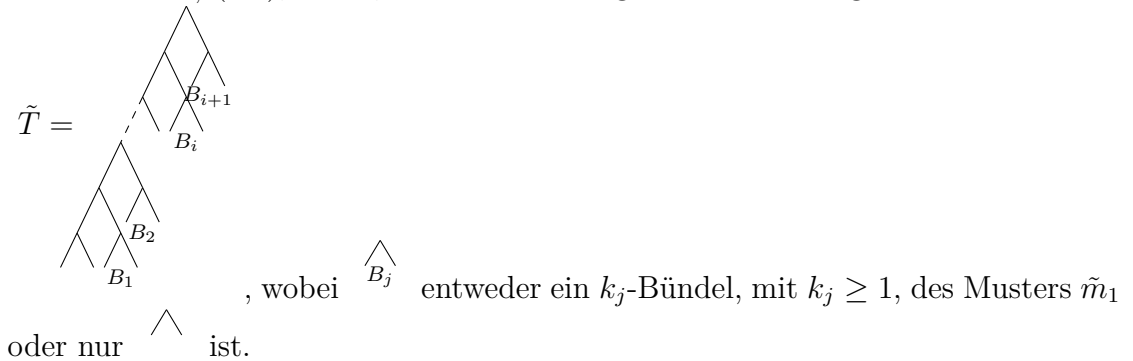
Schritt 2: Danach wird gezeigt, dass es je gleich viele Möglichkeiten gibt, die Blätter eines Baumes \tilde{T} mit n Blättern zu markieren um Bäume aus $b_{n,k}(p_1)$ zu erhalten, wie es Möglichkeiten gibt, die Blätter von $\alpha(\tilde{T})$ zu markieren um Bäume aus $b_{n,k}(p_5)$ zu erhalten.

Schritt 1: Um eine rekursive Bijektion α , von Bündel des Musters $\tilde{m}_1 = \begin{array}{c} \wedge \\ \wedge \end{array}$

auf Bündel des Musters $\tilde{m}_5 = \begin{array}{c} \wedge \\ \wedge \end{array}$ zu konstruieren, wird folgende Notation eingeführt:

$\tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_1)$, $k \geq 1 \dots$ Menge aller Bäume, welche als k -Bündel des Musters \tilde{m}_1 dargestellt werden können und n Blätter besitzen.

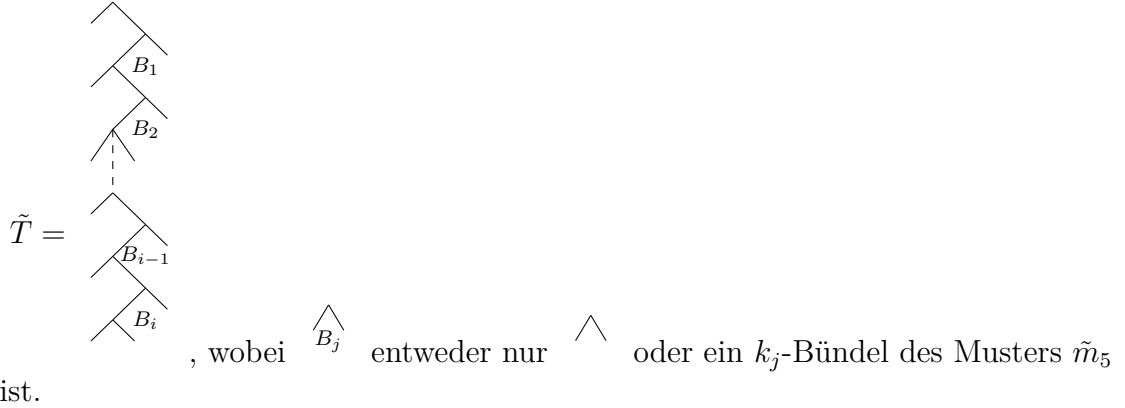
Sei $\tilde{T} \in \tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_1)$, $k \geq 1$, dann kann \tilde{T} folgendermaßen dargestellt werden:



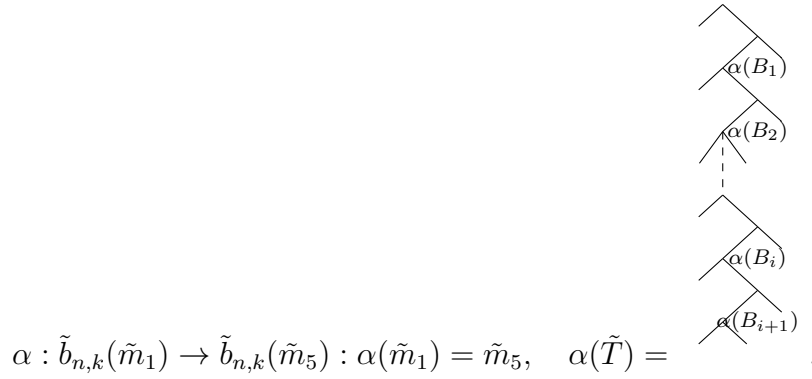
3 Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen

$\tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_5)$, $k \geq 1$ ist die Menge aller Bäume mit n Blättern, welche als k -Bündel des Musters \tilde{m}_5 dargestellt werden können.

Ein Baum $\tilde{T} \in \tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_5)$ besitzt die Darstellung:



Unter Verwendung obiger Baumdarstellungen wird α für einen Baum $\tilde{T} \in \tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_1)$, $k \geq 1$, wie folgt definiert:

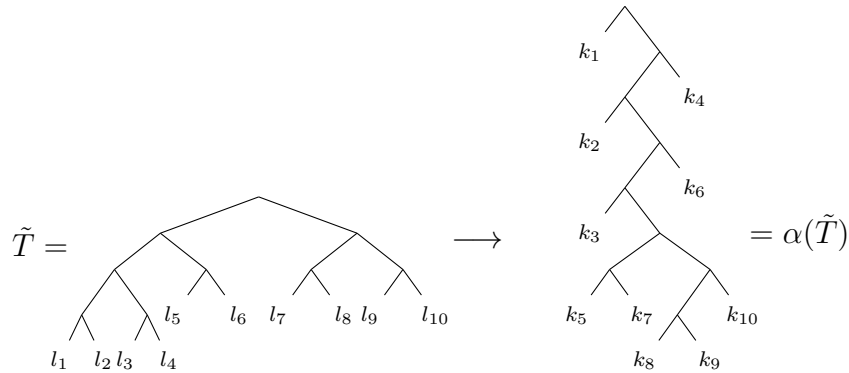


Schritt 2: Anhand einiger Beispiele wird gezeigt, dass es für einen Baum $\tilde{T} \in \tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_1)$ genauso viele Möglichkeiten gibt, die Blätter zu markieren um einen Baum aus $b_{n,k}(p_1)$ zu erhalten, wie es Möglichkeiten gibt, die Blätter von $\alpha(\tilde{T}) \in \tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_5)$ zu markieren um einen Baum aus $b_{n,k}(p_5)$ zu erhalten.

Dabei gilt für einen Baum $\tilde{T} \in \tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_1)$:

l_i , $1 \leq i \leq n$, sind Platzhalter für die Blattlabels $\{1, 2, \dots, n\}$ von \tilde{T} und k_i , $1 \leq i \leq n$, sind Platzhalter für die Blattlabels $\{1, 2, \dots, n\}$ des Baumes $\alpha(\tilde{T}) \in \tilde{b}_{n,k}(\tilde{m}_5)$.

Beispiel 1:



Anzahl Möglichkeiten, die Blätter des Baumes \tilde{T} zu markieren um einen Baum aus $b_{10,4}(p_1)$ zu erhalten:

l_1 : Klarerweise gilt $l_1 = 1$ (Bedingung für jeden X-markierten Wurzelbaum).

l_2, l_3 : Es muss $l_2 = 2$ und $l_3 = 3$ gelten, da sonst $T \notin b_{10,4}(p_1)$.

l_4 : Es sind alle $10 - 3$ Labels $\{4, 5, \dots, 10\}$ möglich.

l_5 : Es muss $l_5 = \min \{4, 5, \dots, 10\} \setminus \{l_4\}$ gelten, da sonst $T \notin b_{10,4}(p_1)$.

l_6 : Es sind alle $10 - 5$ Labels $\{5, \dots, 10\} \setminus \{l_4, l_5\}$ möglich.

l_7, l_8, l_9, l_{10} : Die einzige Möglichkeit um einen gültigen Baum aus $b_{10,4}(p_1)$ zu erhalten, ist l_7, l_8, l_9, l_{10} mit den 4 noch nicht verwendeten Labels der Reihe nach aufsteigend zu versehen.

Anzahl Möglichkeiten, die Blätter des Baumes $\alpha(\tilde{T})$ zu markieren um einen Baum T aus $b_{10,4}(p_5)$ zu erhalten:

k_1, k_2, k_3 : Aus den selben Gründen wie im vorigen Fall muss $k_1 = 1, k_2 = 2$ und $k_3 = 3$ gelten.

k_4 : Das Label an der Stelle k_4 hat als einzige Einschränkung, dass es größer sein muss als k_1, k_2 und k_3 , es gibt also $10 - 3$ Möglichkeiten.

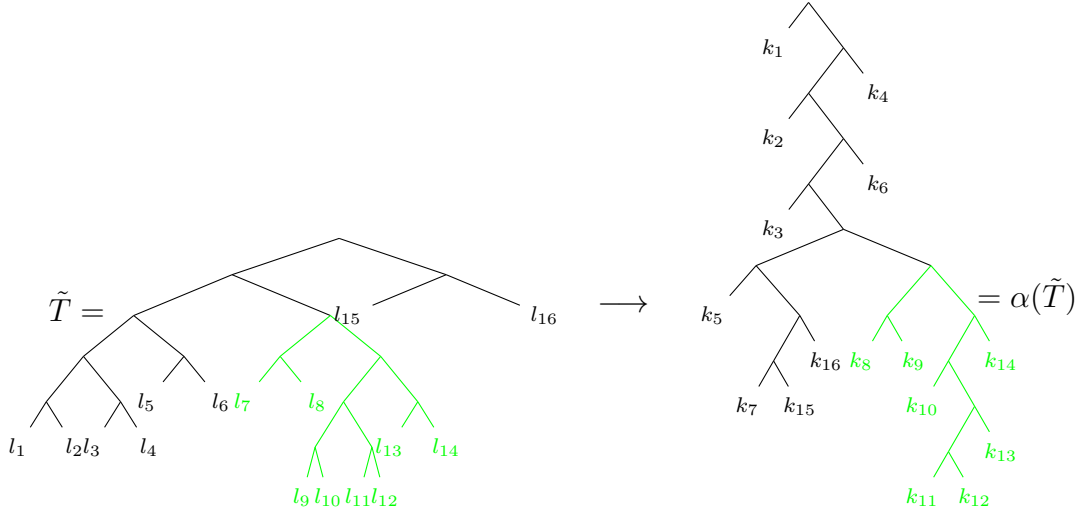
k_5 : Es muss $k_5 = \min \{4, 5, \dots, 10\} \setminus \{k_4\}$ gelten, damit $T \in b_{10,4}(p_5)$.

k_6 : Es sind alle $10 - 5$ Labels $\{5, \dots, 10\} \setminus \{k_4, k_5\}$ möglich.

k_7, k_8, k_9, k_{10} : Die einzige Möglichkeit einen gültigen Baum aus $b_{10,4}(p_1)$ zu erhalten, ist k_7, k_8, k_9, k_{10} mit den 4 noch nicht verwendeten Labels aufsteigend der Reihe nach zu versehen.

Gesamt: Es gibt somit $(10 - 3) \cdot (10 - 5) = 35$ Möglichkeiten die Blätter des Baumes \tilde{T} sowie des Baumes $\alpha(\tilde{T})$ gültig zu markieren.

Beispiel 2:



Anzahl Möglichkeiten, die Blätter des Baumes \tilde{T} zu markieren um einen Baum T aus $b_{16,7}(p_1)$ zu erhalten:

l_1, l_2, l_3 : Es muss $l_1 = 1, l_2 = 2$ und $l_3 = 3$ gelten.

l_4, l_6 : Alle $16 - 3$ Labels $\{4, 5, \dots, 16\}$ bzw. alle $16 - 5$ Labels $\{4, 5, \dots, 16\} \setminus \{l_4, l_5\}$ sind möglich.

l_5, l_7 : Es muss $l_5 = \min \{4, 5, \dots, 16\} \setminus l_4$ und $l_7 = \min \{5, \dots, 16\} \setminus \{l_4, l_5, l_6\}$ gelten.

l_6 : Es sind alle $16 - 5$ Labels $\{5, \dots, 16\} \setminus l_4$ möglich.

l_8, \dots, l_{14} : Es können beliebige sechs noch nicht verwendete Labels gewählt werden, die vier kleinsten müssen dann der Reihe nach aufsteigend auf die Plätze l_8 bis l_{11} gesetzt werden, für l_{12} gibt es dann keine weitere Einschränkung. Die übrigen beiden werden aufsteigend auf l_{13} und l_{14} gesetzt. Insgesamt gibt es somit für den grünen Unterbaum $\binom{16-7}{7} \cdot 3$ mögliche Markierungen.

l_{15}, l_{16} : Die zwei noch übrigen Labels werden aufsteigend darauf gesetzt.

Anzahl Möglichkeiten, die Blätter des Baumes $\alpha(\tilde{T})$ zu markieren, um einen Baum aus $b_{16,7}(p_5)$ zu erhalten:

k_1, k_2, k_3 : Es muss wieder $k_1 = 1, k_2 = 2$ und $k_3 = 3$ gelten.

k_4, k_6 : Alle $16 - 3$ bzw. $16 - 5$ Labels $\{4, 5, \dots, 16\}$ bzw. $\{4, 5, \dots, 16\} \setminus \{k_4, k_5\}$ möglich.

k_5, k_7 : Es muss $k_5 = \min \{4, 5, \dots, 10\} \setminus \{k_4\}$ und $k_7 = \min \{4, 5, \dots, 10\} \setminus \{k_4, k_5, k_6\}$ gelten.

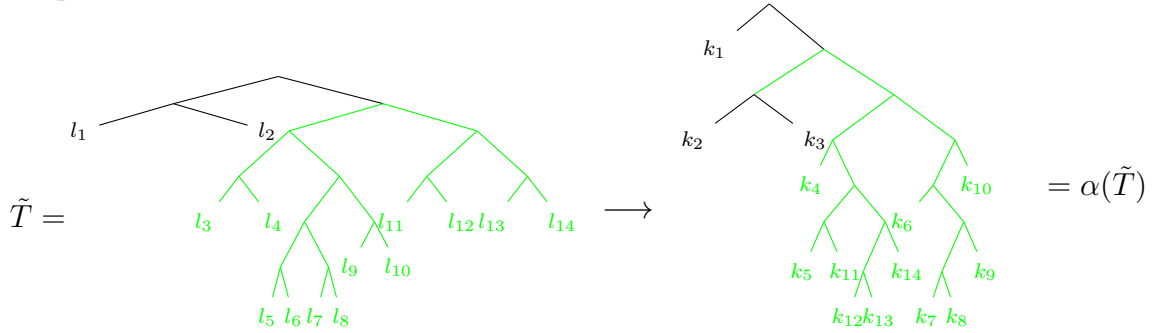
k_8, \dots, k_{14} : Es können beliebige sechs noch nicht verwendete Labels gewählt werden, die vier kleinsten davon werden dann der Reihe nach aufsteigend auf die Plätze k_8 bis k_{11} gesetzt, für k_{14} gibt es dann keine Einschränkung. Die übrigen beiden werden aufsteigend auf k_{12} und k_{13} gesetzt. Insgesamt gibt es also für den grünen Unterbaum $\binom{16-7}{7} \cdot 3$ mögliche Markierungen.

Gesamt: Es gibt also in beiden Fällen

$$(16 - 3)(16 - 5) \left(\binom{16 - 7}{7} \cdot 3 \right) = (16 - 3)(16 - 7) \left(\binom{16 - 9}{|\{\text{Knoten grüner Unterbaum}\} - 1} \right) \cdots |\{\text{gültige Markierungen des grünen Baumes}\}| = 15.444$$

Möglichkeiten die Blätter des Baumes \tilde{T} bzw. $\alpha(\tilde{T})$ gültig zu markieren.

Beispiel 3:



Anzahl Möglichkeiten, die Blätter des Baumes \tilde{T} bzw. $\alpha(\tilde{T})$ zu markieren, um einen Baum aus $b_{14,6}(p_1)$ bzw. $b_{14,6}(p_5)$ zu erhalten:

Wie in den vorigen Fällen muss $l_1 = k_1 = 1, l_2 = k_2 = 2, l_3 = k_3 = 3$ gelten.

l_4, k_4, l_5, k_5 : Um Bäume zu erhalten, welche Bündel des entsprechenden Musters sind, muss weiters $l_4 = k_4 = 4$ und $l_5 = k_5 = 5$ gelten.

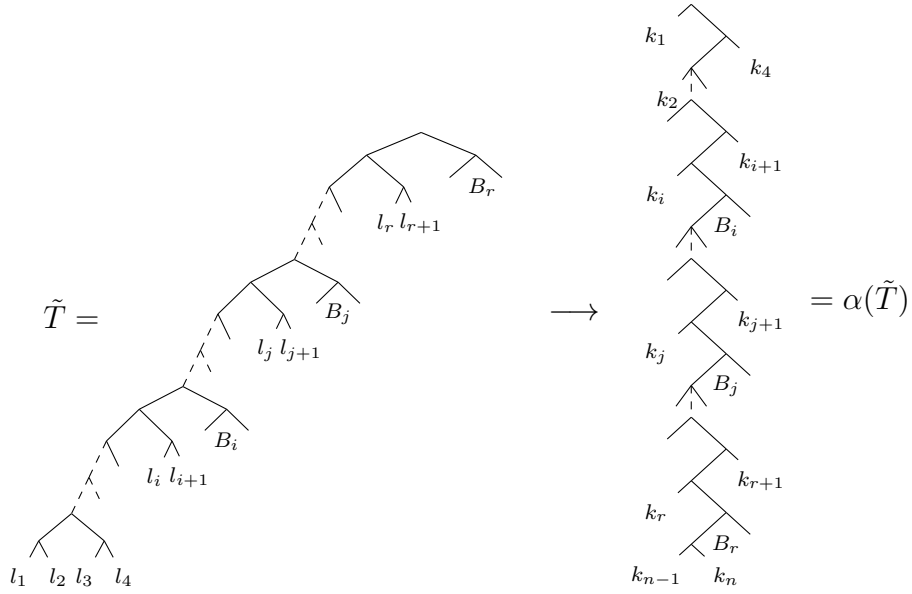
l_6, \dots, l_{10} bzw. k_6, \dots, k_{10} : Diese Plätze können mit beliebigen 5 noch nicht verwendeten Labels markiert werden und zwar wie folgt: l_6, l_7 bzw. k_6, k_7 werden mit den zwei kleinsten davon markiert, für l_8 bzw. k_{10} gibt es dann wieder keine Einschränkung - also drei Möglichkeiten. Mit den restlichen beiden Labels werden dann aufsteigend die Plätze l_9, l_{10} bzw. k_8, k_9 belegt. Es gibt daher für diese 5 Blätter $\binom{14-5}{5} \cdot 3$ Möglichkeiten diese zu markieren.

Die restlichen 4 Labels können nur aufsteigend auf die 4 verbleibenden Plätze vergeben werden.

Gesamt: Es gibt daher in beiden Fällen

$$\binom{14-5}{5} \cdot 3 = |\{\text{gültige Markierung des grünen Baumes}\}| = 126 \text{ Möglichkeiten die Blätter dieser Bäume gültig zu markieren.}$$

Beispiel 4:



Sei $a(B_i)$, $1 \leq i \leq r$, die Anzahl der Möglichkeiten, die Blätter des Baumes B_i gültig zu markieren.

Dann geht aus den obigen Überlegungen hervor, dass die Anzahl der Möglichkeiten, die Blätter des Baumes \tilde{T} bzw. $\alpha(\tilde{T})$ zu markieren, um einen Baum aus $b_{14,6}(p_1)$ bzw. $b_{14,6}(p_5)$ zu erhalten in beiden Fällen

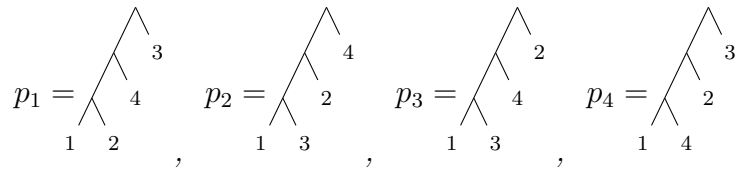
$$(n-3)(n-5) \dots (n-i) \binom{n-i-2}{|B_i|} a(B_i) (n-i-|B_i|-4) (n-i-|B_i|-6) \dots$$

$$(n-j) \binom{n-j-2}{|B_j|} a(B_j) (n-j-2-|B_j|-2) \dots (n-r) a(B_r)$$

ergibt.

□

Lemma 3.3.5. *Folgende vier Muster sind zueinander Wilf-äquivalent:*



Beweis:

Die zugehörigen Permutationsmuster sind zueinander Wilf-äquivalent:

p_1 entspricht der Permutation $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, p_2 entspricht $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, p_3 entspricht

$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und p_4 entspricht der Permutation $\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Zwischen diesen Permutationen gibt es folgenden Zusammenhang:

$$\pi_1^r = \pi_3, \pi_2^r = \pi_4, \pi_1^c = \pi_4 \text{ und } \pi_2^c = \pi_3.$$

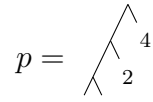
Wobei für eine Permutation $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n \in S_n$ mit σ^r die zu σ reverse Permutation, also $\sigma^r = \sigma_n\sigma_{n-1} \dots \sigma_1$ bezeichnet wird.

Mit σ^c wird das Komplement von σ bezeichnet. Das heißt $\sigma^c = (n+1-\sigma_1)(n+1-\sigma_2) \dots (n+1-\sigma_n)$.

Klarerweise gilt: Vermeidet eine Permutation σ ein Permutationsmuster τ , dann vermeidet aus Symmetriegründen σ^r auch τ^r und σ^c vermeidet τ^c .

Daher ist dieses Lemma eine Folgerung von Korollar 3.3.2. □

Bemerkung 3.3.3.



- Dem Baum p entspricht die Permutation $\sigma = 213$.
 Sei $A_\sigma(t) := \sum_{k \geq 0} a_k \frac{t^k}{k!}$ die exponentiell erzeugende Funktion der σ -vermeidenden Permutationen.
 Aus [Eli, 2006] folgt

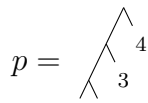
$$A(t) = \frac{1}{1 - \int_0^t e^{-\frac{u^2}{2}} du}.$$

Satz 3.2.2 ergibt

$$f'_{no-p}(z) = \frac{1}{1 - \int_0^{f_{no-p}(z)} e^{-\frac{u^2}{2}} du}.$$

In diesem Fall ergibt die Entwicklung der Lösung der Differenzialgleichung in eine Taylorreihe um $z = 0$ folgende Resultate für kleine n :

$$|\mathcal{LT}_{1,no-p}| = 1, |\mathcal{LT}_{2,no-p}| = 1, |\mathcal{LT}_{3,no-p}| = 3, |\mathcal{LT}_{4,no-p}| = 14, |\mathcal{LT}_{5,no-p}| = 90, \\ |\mathcal{LT}_{6,no-p}| = 738, |\mathcal{LT}_{7,no-p}| = 7364, |\mathcal{LT}_{8,no-p}| = 86610, |\mathcal{LT}_{9,no-p}| = 1173330, \dots$$



- Sei p , dann folgt aus [Eli, 2006] außerdem:

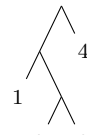
$$[z^n]f_{no-m}(z) > [z^n]f_{no-p}(z), \quad \forall n \geq 4.$$

Satz 3.3.3. Es gibt genau fünf Wilf-Klassen von einelementigen Mustermengen von Bäumen mit vier Blättern.

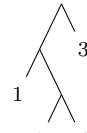
Beweis:

Dies konnte durch Kombination der obigen fünf Lemmata bzw. Bemerkungen und weiteren computergestützten Berechnungen gezeigt werden:

1. Zählt man die Bäume mit gleicher Blattanzahl, welche je ein Muster aus Lemma 3.3.3 vermeiden, erhält man eine Folge, welche wie folgt startet: 1, 1, 3, 14, 91, 756.
2. Zählt man die Bäume mit gleicher Blattanzahl, welche je ein Muster aus Lemma 3.3.4 vermeiden, erhält man eine Folge, welche wie folgt startet: 1, 1, 3, 14, 90, 739.
3. Zählt man die Bäume mit gleicher Blattanzahl, welche je ein Muster aus Lemma 3.3.5 vermeiden, erhält man eine Folge, welche wie folgt startet: 1, 1, 3, 14, 91, 738.



4. Zählt man die Bäume welche das Muster $2\ 3$ vermeiden, erhält man eine Folge, welche wie folgt startet: 1, 1, 3, 14, 90, 737.



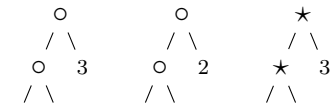
5. Zählt man die Bäume welche das Muster $2\ 4$ vermeiden, erhält man eine Folge, welche wie folgt startet: 1, 1, 3, 14, 90, 740.

□

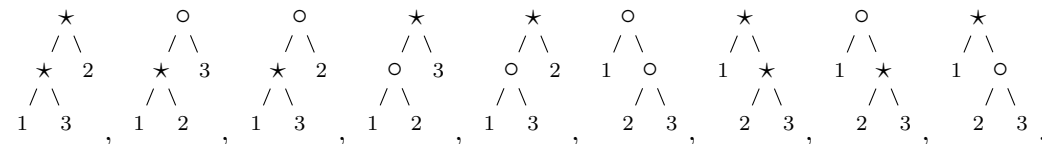
3.3.3 Binärbäume mit Markierung der inneren Knoten

In diesem Abschnitt betrachten wir Bäume, für welche $X = X_2 = \{\circ, \star\}$ gilt. Wir beschäftigen uns also mit Binärbäumen, deren innere Knoten zwei mögliche Labels tragen können.

Wieder schreiben wir statt $\mathcal{LT}_n(X)$ nur \mathcal{LT}_n und statt $\mathcal{LT}_{n, no-p}(X)$ nur $\mathcal{LT}_{n, no-p}$.



Es gibt insgesamt 12 Bäume dieser Art mit drei Blättern: $1\ 2$, $1\ 3$, $1\ 2$,



Bemerkung 3.3.4. Wir werden in diesem Abschnitt Mustermengen mit einem oder zwei Mustern betrachten. Aufgrund der verallgemeinerten Inversionsformel, Satz 3.3.1,

ist es äquivalent, anstatt Bäumen, welche ein oder zwei Muster vermeidend sind, Bäume zu betrachten, welche elf ($= 12 - 1$) bzw. zehn ($= 12 - 2$) Muster vermeidend sind.

Satz 3.3.4. *Es gibt genau zwei Wilf-Klassen von Mustermengen, welche je aus einem Baum mit drei Blättern bestehen.*

Beweis:

Es werden wegen Bemerkung 3.3.4 Bäume betrachtet, welche 11 Muster vermeiden. Es gibt daher folgende zwei Möglichkeiten:

- Die inneren Knoten des einzig erlaubten Musters tragen dasselbe Label. Dies ist dann der Fall von Lemma 3.3.2, d.h. es gibt für jedes n nur einen möglichen Baum.
- Die inneren Knoten des einzig erlaubten Musters tragen verschiedene Labels. Dann gibt es es für alle $n \geq 4$ keinen Baum, der die restlichen 11 Muster vermeidet.

Denn wäre beispielsweise $\begin{matrix} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{matrix}$ das einzig erlaubte Muster, dann würde bereits

in $\begin{matrix} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 4 \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{matrix}$ das verbotene Muster $\begin{matrix} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{matrix}$ enthalten sein.

□

Jetzt werden Mustermengen, welche aus je zwei Bäumen mit drei Blättern bestehen betrachtet. Insgesamt gibt es davon $66 \left(= \binom{12}{2} \right)$. Um diese Menge auf Wilf-Äquivalenz zu untersuchen, können wir, aufgrund von Bemerkung 3.3.4, 10 Muster vermeidende Bäume betrachten und zwar jene, welche in der Menge aller Bäume mit drei Blättern komplementär zu den jeweiligen Mustermengen sind.

Lemma 3.3.6. *Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern, jener folgender sechs Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:*

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \left\{ \begin{matrix} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{matrix}, \begin{matrix} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{matrix} \right\}, & p_2 &= \left\{ \begin{matrix} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{matrix}, \begin{matrix} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{matrix} \right\}, & p_3 &= \left\{ \begin{matrix} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{matrix}, \begin{matrix} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{matrix} \right\}, \\
 p_4 &= \left\{ \begin{matrix} \star \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{matrix}, \begin{matrix} \star \\ / \backslash \\ \star \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{matrix} \right\}, & p_5 &= \left\{ \begin{matrix} \star \\ / \backslash \\ \star \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{matrix}, \begin{matrix} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{matrix} \right\}, & p_6 &= \left\{ \begin{matrix} \star \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{matrix}, \begin{matrix} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{matrix} \right\}.
 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Bäume mit n Blättern, welche eine dieser Mengen vermeiden, ist $(n-1)!$ für alle $n \geq 4$.

Beweis:

Dass $p_1^c \sim_W p_4^c$, $p_2^c \sim_W p_5^c$ und $p_3^c \sim_W p_6^c$ gilt, ist klar.

Zu zeigen bleibt:

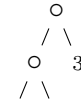
- $p_1^c \sim_W p_2^c$

Dies geschieht mittels einer Rekursion α , welche Bäume die nur aus Mustern der Menge p_1 bestehen, auf Bäume welche nur aus Mustern der Menge p_2 bestehen, abbildet.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} & \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \end{array}$$

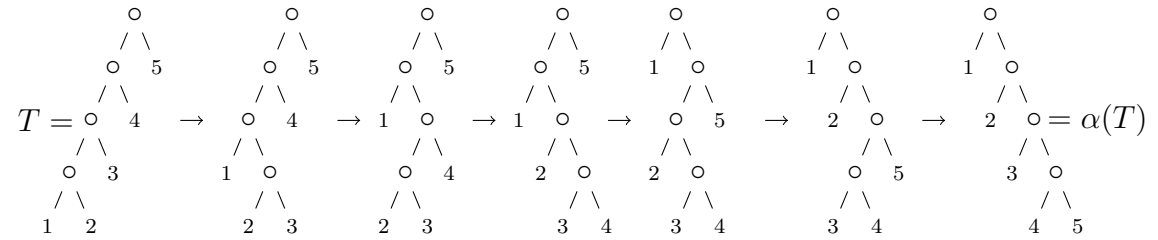
Es gelte $\alpha\left(\begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}$ und $\alpha\left(\begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array}$.

Sei also T ein beliebiger Linkskamm. Gestartet wird bei jenem Rechtsblatt, welches am weitesten von der Wurzel weg ist. Dann werden die Blätter der Reihe nach



Richtung Wurzel aufwärts betrachtet. Wird das Muster $\begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}$ entdeckt, wird α an dieser Stelle rekursiv auf dieses Muster und den gesamten „darunter“ liegenden Baum angewendet.

Ein kleines Beispiel soll veranschaulichen wie α am Baum T funktioniert:



- $p_1^c \sim_W p_3^c$

Dies funktioniert nach dem genau gleichen Prinzip wie im vorigen Fall.

Es gibt genau $(n - 1)!$ verschiedene Linkskämme, bei welchen alle inneren Knoten dieselben Labels tragen.

□

Lemma 3.3.7. *Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern, jener folgenden zwei Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:*

$$p_1 = \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, \quad p_2 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}.$$

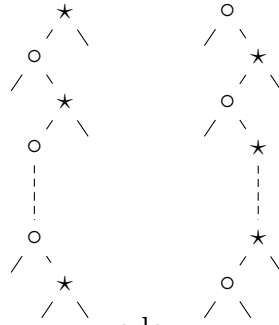
Die Anzahl aller Bäume mit n Blättern welche je eine dieser Mengen vermeiden ist

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \binom{n}{2}!, & \text{für } n \geq 4 \text{ gerade,} \\ \binom{n-1}{2}! + \frac{1}{2} \binom{n+1}{2}!, & \text{für } n \geq 3 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis:

Es ist klar, dass $p_1 \sim_W p_2$.

Betrachten wir Bäume in $\mathcal{LT}_{no-p_1^c}$:



- Fall n gerade: Es sind nur Bäume der Bauart oder erlaubt.
Es gilt

$$|\mathcal{LT}_{n,no-p_1^c}| = \frac{3}{2} \binom{n}{2}! = \binom{n}{2}! + \frac{1}{2} \binom{n}{2}!$$

Erklärung der Komponenten:

Die nach links schauenden Blätter müssen von der Wurzel abwärts absteigend mit den Labels $\{1, \dots, \frac{n}{2}\}$ markiert werden.

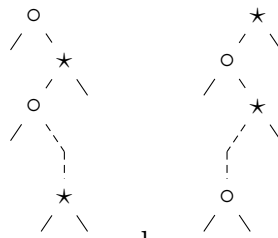
$\binom{n}{2}!$: Sei die Wurzel Teil des erlaubten Linkskammes, dann können die $\frac{n}{2}$ nach rechts schauende Blätter in beliebiger Reihenfolge die Labels $\frac{n}{2} + 1, \dots, n$ tragen.

$\frac{1}{2} \binom{n}{2}!$: Sei die Wurzel Teil des erlaubten Rechtskammes, dann tragen die $\frac{n}{2}$ Rechtsblätter wieder die Labels $\frac{n}{2} + 1, \dots, n$. Allerdings gilt in diesem Fall die Einschränkung, dass das Label jenes nach rechts schauenden Blattes welches am weitesten von der Wurzel weg ist, kleiner sein muss, als das Label des Rechtsblattes direkt darüber. Die restlichen $\frac{n}{2} - 2$ Rechtsblätter tragen die verbliebenen Labels in beliebiger Reihenfolge.

Dadurch gibt es

$$\binom{n}{2} - 2)! \left(1 + 2 + \dots + \binom{n}{2} - 1\right) = \binom{n}{2} - 2)! \binom{n}{2} - 1) \frac{n}{2} \frac{1}{2} = \binom{n}{2}! \frac{1}{2}$$

verschiedene Bäume, welche zu gegebenem n in Frage kommen.



- Fall n ungerade: Es sind nur Bäume der Bauart oder erlaubt.
 $\binom{n-1}{2}!$: Trägt die Wurzel \circ als Label (ist sie also Teil des erlaubten Rechtskammes), dann können alle $\frac{n-1}{2}$ Rechtsblätter in beliebiger Reihenfolge mit $\frac{n+1}{2}, \dots, n$ gelabelt werden.

$\frac{1}{2} \binom{n+1}{2}!$: Ist die Wurzel hingegen mit \star markiert (ist sie also Teil des erlaubten Linkskammes), dann gibt es $\frac{n+1}{2}$ Rechtsblätter und das Labelling funktioniert analog zum entsprechenden Fall für n gerade.

□

Lemma 3.3.8. *Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern, jener folgenden zehn Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:*

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_2 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\}, & p_3 &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_4 &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\}, \\
 p_5 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_6 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\}, & p_7 &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_8 &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\}, \\
 & & p_9 &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_{10} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Für jedes $n \geq 4$ gibt es genau $n - 1$ Bäume mit n Blättern welche genau eine dieser Mengen vermeiden.

Beweis:

- Ein Baum $T \in \mathcal{LT}_{n, no-p_1^c}$ ist ein Linkskamm mit folgenden Möglichkeiten wie die inneren Knoten gelabelt sein können:
 - Jener innere Knoten welcher am weitesten von der Wurzel weg ist, trägt \star als Label und alle anderen \circ . Dann kann jenes nach rechts-schauende Blatt, welches am weitesten von der Wurzel weg ist, ein Element der Menge $\{3, \dots, n\}$ als Label tragen. Für die anderen Blätter ist das Label fest und zwar 1 für das einzige nach links-schauende Blatt. Alle anderen Blätter tragen die restlichen Labels von der Wurzel abwärts absteigend. Daher gibt es $n - 2$ solche Bäume.
 - Alle inneren Knoten tragen \circ als Label und die nach rechts-schauenden Blätter sind von der Wurzel abwärts absteigend nummeriert.

Insgesamt gibt es also $n - 1$ Bäume, welche nur aus Mustern der Menge p_1 bestehen. Ganz analog funktioniert es für die Mengen p_2, p_3 und p_4 .

- Für einen Baum $T \in \mathcal{LT}_{n, no-p_5^c}$ gibt es dieselben Möglichkeiten wie vorhin, nur dass die Wurzel der einzige Knoten ist, für welchen das Label \star in Frage kommt. Analog funktioniert es für die Mengen p_6, p_7 und p_8 .
- Ein Baum $T \in \mathcal{LT}_{n, no-p_9^c}$ kann folgendermaßen aussehen:



- Der Baum hat folgende Gestalt: , wobei für das der Wurzel nächste Rechtsblatt alle Elemente der Menge $\{3, \dots, n\}$ als Label in Frage kommen und die restlichen Blätter von der Wurzel abwärts aufsteigend gelabelt werden müssen.
- T ist der einzige Rechtskamm, bei welchem alle inneren Knoten das Label o tragen.

Insgesamt also wieder $n - 1$ verschiedene Bäume.
Für die Menge p_{10} funktioniert dies analog.

□

Lemma 3.3.9. *Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern, je-
ner folgenden 32 Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:*

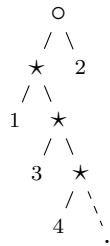
$$\begin{aligned}
 p_1 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} , & p_2 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_3 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_4 &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , \\
 p_5 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_6 &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_7 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_8 &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , \\
 p_9 &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_{10} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} , & p_{11} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} , & p_{12} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} , \\
 p_{13} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_{14} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_{15} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_{16} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , \\
 p_{17} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_{18} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_{19} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_{20} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} , \\
 p_{21} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} , & p_{22} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} , & p_{23} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} \right\} , & p_{24} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_{25} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \star \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \star \quad 2 \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_{26} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \circ \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad 2 \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_{27} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \circ \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad 3 \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 1 \quad 2 \end{array} \right\}, & p_{28} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \star \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ \star \quad 3 \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 1 \quad 2 \end{array} \right\}, \\
 p_{29} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \circ \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad 2 \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_{30} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \star \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ \star \quad 2 \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_{31} &= \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \star \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad 2 \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 1 \quad 3 \end{array} \right\}, & p_{32} &= \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad \circ \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \star \quad 2 \\ \quad / \quad \backslash \\ \quad 1 \quad 3 \end{array} \right\}.
 \end{aligned}$$

Für jedes $n \geq 4$ gibt es exakt 2 Bäume mit n Blättern, welche genau eine dieser Mengen vermeiden.

Beweis:

- Bäume aus $\mathcal{LT}_{n, no-p_1^c}$ sind genau der Linkskamm mit von der Wurzel absteigenden Blattlabels und \star als Label für alle inneren Knoten sowie der Linkskamm mit absteigenden Blattlabels und \circ als Label für alle inneren Knoten. Analog funktioniert es für die Mengen p_2, \dots, p_9 .
- Bäume mit $n \geq 4$ Blättern, welche nur aus Mustern der Menge p_{10} entstehen, sind entweder der Linkskamm, bei welchem alle inneren Knoten das Label \star tragen und die Blätter von der Wurzel abwärts gelabelt sind oder jener Linkskamm, bei welchem die Wurzel mit \circ gelabelt, alle anderen inneren Knoten das Label \star tragen und die Blätter von der Wurzel abwärts absteigend markiert sind. Analog funktionieren die Fälle mit den Mustern p_{11}, \dots, p_{21} .
- Bäume aus $\mathcal{LT}_{n, no-p_{22}^c}$ können konstruiert werden, indem die beiden Muster aus p_{22} abwechselnd aneinander gehängt werden. Daher gibt es zwei mögliche Fälle, welches Label die Wurzel trägt. In beiden Fällen ist das Labelling der inneren Knoten und Blätter eindeutig. Analog funktioniert es für die Mengen p_{23} und p_{24} .
- Bäume welche nur aus Mustern der Menge p_{25} bestehen, sind entweder der Rechtskamm, bei welchem alle inneren Knoten mit \star markiert sind oder ein Baum fol-



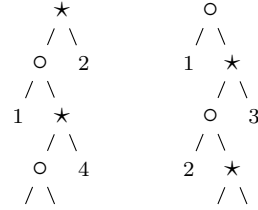
gender Gestalt

Analog ist es für die Mengen p_{26}, \dots, p_{30} .

- Für den Fall, dass Bäume nur aus Mustern der Menge p_{31} aufgebaut sind, gilt Ähnliches wie für den Fall der Mustermenge p_{22} . Auch hier sind die einzig erlaubten Bäume jene, welche durch abwechselndes Hintereinanderketten der zwei erlaubten Muster entstehen. Für die Wurzel gibt es zwei Möglichkeiten, welches Label sie

3 Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen

trägt. Die Labels der Blätter sind bei fester Wahl des Startmusters eindeutig bestimmt. Daher gibt es für festes n nur 2 Bäume in $\mathcal{LT}_{n, no-p_{31}^c}$.



Für $n = 5$ sind die erlaubten Bäume: $\begin{array}{c} 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \\ / \backslash \\ \circ \quad 4 \\ / \backslash \\ 5 \end{array}$ und $\begin{array}{c} 4 \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 2 \quad \star \\ / \backslash \\ 5 \end{array}$.
 Analog funktioniert der Fall mit der Mustermenge p_{32} .

□

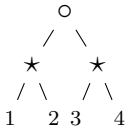
Lemma 3.3.10. *Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern, jener folgenden zwei Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:*

$$p_1 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, \quad p_2 = \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}, \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}.$$

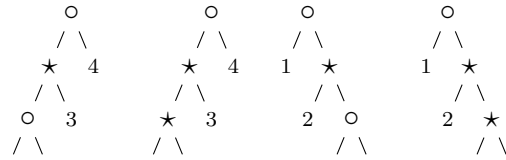
Es gibt für jede dieser Mengen genau einen Baum mit vier Blättern, welcher diese Menge vermeidet. Für jedes $n \geq 5$ gibt es keinen Baum mit n Blättern, welcher genau eine dieser Mengen vermeidet.

Beweis:

Dass beide Mengen Wilf-äquivalent sind, folgt sofort aus Symmetriegründen. Betrachten wir Bäume, welche nur Muster aus p_1 enthalten:



Der einzige erlaubte Baum mit 4 Blättern ist:



Da keiner der Bäume $\begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 4 \\ / \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}$, $\begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 4 \\ / \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}$, $\begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad \circ \\ / \backslash \\ 3 \quad 4 \end{array}$, $\begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad \star \\ / \backslash \\ 3 \quad 4 \end{array} \in \mathcal{LT}_{no-p_1^c}$, gibt es auch keine Bäume in $\mathcal{LT}_{n, no-p_1^c}$ für alle $n \geq 5$.

□

Lemma 3.3.11. *Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern jener folgenden zwei Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:*

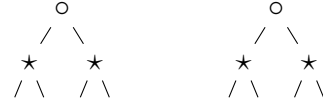
$$p_1 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, \quad p_2 = \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array}, \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}.$$

Es gibt für jede Menge genau zwei Bäume mit vier Blättern, welche diese Menge vermeiden. Für jedes $n \geq 5$ gibt es keinen Baum mit n Blättern welcher genau eine dieser Mengen vermeidet.

Beweis:

Wieder ist offensichtlich, dass beide Mengen Wilf-äquivalent sind.

Betrachten wir Bäume, welche nur Muster aus p_1 enthalten:



Die erlaubten Bäume mit 4 Blättern sind $1 \ 3 \ 2 \ 4$ und $1 \ 4 \ 2 \ 3$.

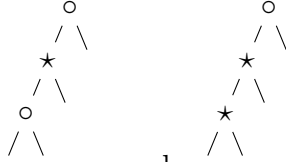
Dass es keine erlaubten Bäume mit mehr als vier Blättern gibt, folgt auf Grund der selben Tatsache wie im vorigen Lemma. □

Lemma 3.3.12. Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern, jener folgenden zwei Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:

$$p_1 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 3 \quad 2 \end{array} \right\}, \quad p_2 = \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 3 \quad 2 \end{array} \right\}.$$

Für jedes $n \geq 4$ gibt es genau 0 Bäume mit n Blättern, welche genau eine dieser Mengen vermeiden.

Beweis:



Da weder noch bei beliebigen Blattlabels p_1^c vermeidend ist, gibt es auch keine Bäume mit mehr als drei Blättern, welche nur aus Mustern der Menge p_1 bestehen.

Analoges gilt für p_2 . □

Lemma 3.3.13. Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern, jener folgenden sechs Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:

$$p_1 = \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, \quad p_2 = \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 3 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, \quad p_3 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 2 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\},$$

$$p_4 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \circ \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 3 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, \quad p_5 = \left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ \circ \quad \star \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 3 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \backslash \\ 1 \quad \star \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}, \quad p_6 = \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \star \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 1 \ 3 \quad 2 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ 1 \quad \circ \\ / \backslash \quad / \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right\}.$$

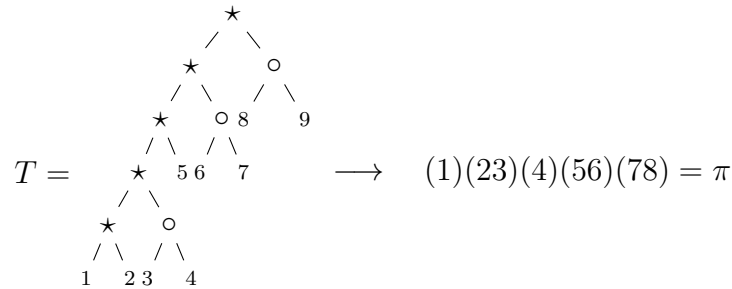
Für jedes $n \geq 4$ gibt es genau die Anzahl an Involutionen in S_{n-1} viele Bäume, welche genau eine der Menge vermeiden.

Beweis:

Für jede Menge sind die erlaubten Bäume entweder Rechtskämme oder Linkskämme mit auf- oder absteigenden Blattlabels, wobei die inneren Knoten nur ein Label tragen können und Blätter durch Paare von Blättern ersetzt werden können. Werden bei einem solchen Linkskamm, bei jedem Knoten die Labels der Blätter rechts davon zu einem Zyklus zusammengefasst, erhält man eine Bijektion auf die Menge aller Involutionen der Länge $n - 1$, da ein solcher Zyklus maximal 2 Elemente enthalten kann.

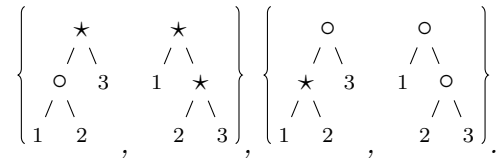
Analog funktioniert es mit den Rechtskämmen.

Sei $T \in \mathcal{LT}_{9, no-p_1^c}$, dann entspricht T beispielsweise folgender Permutation $\pi \in S_8$:



□

Lemma 3.3.14. Die Komplementärmenge bezüglich aller Bäume mit drei Blättern jener folgenden zwei Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:



Die Anzahl aller Bäume mit n Blättern, welche genau eine dieser Mengen vermeiden, ist die n -te Fibonacci-Zahl F_n für jedes $n \geq 3$ ($F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$).

Beweis:

Die Menge aller Bäume, welche nur Muster der Menge p_1 enthalten, sind Rechtskämme,

wobei alle inneren Knoten das Label \star tragen und einzelne Blätter durch $\begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array}$ (mit entsprechend richtigem Label der Blätter natürlich) ersetzt werden können.

Die Blattlabels müssen global von der Wurzel abwärts ansteigen - für jeden Baum ist daher nur ein Labelling der Blätter möglich.

Sei T ein Baum mit n Blättern, welcher nur aus Mustern der Menge p_1 besteht. Dann gibt es somit für jeden inneren Knoten im Rechtskamm die Möglichkeit ein oder zwei nach links-schauende Blätter zu haben. In Summe gibt es $n - 1$ solcher nach links-schauender Blätter.

Das heißt die Anzahl aller erlaubten Bäume mit n Blättern, stimmt mit der Anzahl aller möglichen Folgen von 1ern und 2ern überein, welche in Summe $n - 1$ ergeben müssen. Sei A_n , mit $n \geq 0$, die Anzahl aller Folgen von 1ern und 2ern, deren Summe $n - 1$ ergibt. Dann gilt $A_0 = 0$ und $A_1 = 1$, außerdem gilt für $n \geq 1$: $A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$. Denn die Anzahl aller Folgen von 1ern und 2ern deren Summe n ist, entspricht genau der Anzahl aller solcher Folgen, von denen die Summe der Elemente $n - 1$ ist und am Ende ein 1er daran gehängt wird, plus der Anzahl aller dieser Folgen, mit Summe der Elemente gleich $n - 2$ und einem zusätzlichen 2er am Ende.

□

Lemma 3.3.15. *Die Komplementärmengen bezüglich aller Bäume mit drei Blättern, jener folgenden zwei Mengen sind zueinander Wilf-äquivalent:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \star \quad 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} , \left\{ \begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ \star \quad 2 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 3 \end{array} , \begin{array}{c} \star \\ / \quad \backslash \\ \circ \quad 3 \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 2 \end{array} \right\} .$$

Die Anzahl aller Bäume mit n Blättern welche genau eine dieser Mengen vermeiden, ist das Doppelte der Anzahl alternierender Permutationen in S_{n-1} für alle $n \geq 3$.

Dabei heißt eine Permutation $\sigma \in S_n$ alternierend, wenn $\sigma_i < \sigma_{i+1}$, für $1 \leq i \leq n$ gerade und $\sigma_i > \sigma_{i+1}$, für $1 \leq i \leq n$ ungerade, wenn also $\sigma_1 > \sigma_2 < \sigma_3 > \dots$ gilt.

Eine konkrete Abzählformel für A_n folgt etwas später in Abschnitt 4.1.1.

Beweis:

Dass beide Mengen Wilf-äquivalent sind, ist wieder offensichtlich.

Jeder erlaubte Baum ist ein Linkskamm, bei welchem die Labels der inneren Knoten, \star und \circ , abwechselnd auftreten sowie die Labels der Blätter von der Wurzel abwärts abwechselnd an- bzw. absteigen - je nachdem welches Label die Wurzel trägt.

Laut Bemerkung 4.1.4 gibt es gleich viele Permutationen $\sigma \in S_n$ für welche $\sigma_1 > \sigma_2 < \sigma_3 \dots$, wie Permutationen $\pi \in S_n$ für welche $\pi_1 < \pi_2 > \pi_3 \dots$ gilt.

Für $n \geq 4$ erfüllen somit $2A_{n-1}$ verschiedene Bäume die nötigen Bedingungen.

□

Satz 3.3.5. *Es gibt genau 10 Wilf-Klassen mit Mengen aus zwei Mustern mit je drei Blättern.*

Beweis:

Dies ist eine unmittelbare Folgerung der Lemmata 3.3.6 bis 3.3.15.

□

3.4 Asymptotische Resultate

In diesem Abschnitt werden verschiedene Resultate in Bezug auf das asymptotische Verhalten von Bäumen mit einer sehr großen Anzahl von Knoten behandelt, welche gewisse Muster vermeiden.

Dazu wird folgendes Lemma benötigt.

Lemma 3.4.1. *Seien \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 zwei Mengen planarer X -markierter Wurzelbäume. Dann sei \mathcal{M} die Menge aller Bäume $T \in \mathcal{LT}(X)$ für die gilt:*

- *T enthält einen Unterbaum U , in welchem auch die Wurzel von T enthalten ist, mit $st(U) = m_1$ für ein Muster $m_1 \in \mathcal{M}_1$ und*
- *jeder Unterbaum von T mit einem Blatt von U als Wurzel entspricht einem Muster aus \mathcal{M}_2 .*

Dann gilt

$$f_{\mathcal{M}}(z) = f_{\mathcal{M}_1}(f_{\mathcal{M}_2}(z)).$$

Beweis:

Laut Definition gilt

$$f_{\mathcal{M}_1}(f_{\mathcal{M}_2}(z)) = \sum_{l \geq 1} \frac{|\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{LT}_l(X)| (f_{\mathcal{M}_2}(z))^l}{l!}.$$

Der Koeffizient von z^n in $(f_{\mathcal{M}_2}(z))^l$ entspricht genau der Anzahl aller geordneten Wälder mit l Bäumen aus \mathcal{M}_2 , wobei die Blätter der Bäume die Labels $\{1, \dots, n\}$ tragen.

$[z^n] \frac{(f_{\mathcal{M}_2}(z))^l}{l!}$ entspricht also der Anzahl aller geordneten Wälder, in welchen die Bäume aufsteigend nach ihren kleinsten Blattlabeln angeordnet sind (wichtig, damit die Local-increasing-condition erfüllt wird). □

Sehr wichtig für die Ergebnisse in diesem Abschnitt ist folgender Satz:

Satz 3.4.1. *Für jede beliebige Mustermenge \mathcal{M} über dem Alphabet X gilt folgende koeffizientenweise Ungleichung der zugehörigen Potenzreihen:*

$$f_{\mathcal{M}}(f_{no-\mathcal{M}}(z)) - f_X(f_{no-\mathcal{M}}(z)) + f_{no-\mathcal{M}}(z) \geq z.$$

Beweis:

Wir definieren zwei endliche Mengen:

$B_n \dots$ Menge aller $T \in \mathcal{LT}_n(X)$, sodass kein Unterbaum von T dessen Wurzel ein Kind der Wurzel von T ist, ein Muster aus \mathcal{M} enthält.

$C_n \dots$ Menge aller Paare (M, T) mit $M \in \mathcal{M}$ und $T \in \mathcal{LT}_n(X)$, sodass ein Unterbaum T_1 von T existiert, mit Wurzel von T_1 gleich Wurzel von T , $st(T_1) = M$ und kein

Unterbaum mit einem Blatt von T_1 als Wurzel enthält ein Muster aus \mathcal{M} .
Aus Lemma 3.4.1 folgt

$$f_X(f_{no-\mathcal{M}}(z)) = \sum_{n \geq 1} \frac{|B_n|}{n!} z^n,$$

$$f_{\mathcal{M}}(f_{no-\mathcal{M}}(z)) = \sum_{n \geq 1} \frac{|C_n|}{n!} z^n.$$

Zu zeigen bleibt daher

- Fall $n \geq 2$:

$$|C_n| - |B_n| + |\mathcal{L}\mathcal{T}_{n,no-\mathcal{M}}(X)| \geq 0, \quad n \geq 2.$$

Dies folgt unmittelbar aus der Existenz einer surjektiven Abbildung von $C_n \cup \mathcal{L}\mathcal{T}_{n,no-\mathcal{M}}(X)$ nach B_n : Für einen Baum $B \in B_n$ gilt entweder B enthält kein Muster aus \mathcal{M} oder B enthält ein Muster $M \in \mathcal{M}$ dessen Wurzel mit der Wurzel von B übereinstimmt.

- Fall $n = 1$: In diesem Fall gilt $B_n = C_n = 0$, und $\mathcal{L}\mathcal{T}_{1,no-\mathcal{M}}$ besteht aus dem einzig möglichen Baum mit nur einem Blatt.

□

Außerdem werden folgende Lemmata und Satz 3.4.2 für den Beweis von Satz 3.4.3 benötigt:

Lemma 3.4.2. Sei $h(z) = \frac{1}{1 - \frac{f_X(z)}{z} + \frac{f_{\mathcal{M}}(z)}{z}}$ eine Potenzreihe mit nicht-negativen Koeffizienten.

Dann gilt

$$\frac{|\mathcal{L}\mathcal{T}_{n,no-\mathcal{M}}(X)|}{n!} \geq \frac{1}{n} [z^{n-1}] h(z)^n.$$

Beweis:

Sei $g(z) = z - f_X(z) + f_{\mathcal{M}}(z)$. Mit Hilfe der Lagrangen Inversionsformel, Satz 2.0.1, können die Koeffizienten der bezüglich Komposition Inversen $g^{(-1)}(z)$ berechnet werden. Dies ergibt

$$[z^n] g^{(-1)}(z) = \frac{1}{n} [z^{n-1}] \left(\frac{z}{g(z)} \right)^n = \frac{1}{n} [z^{n-1}] h(z)^n.$$

Aufgrund der Voraussetzung sind diese Koeffizienten ebenfalls nicht-negativ. Aus Satz 3.4.1 folgt, dass auch

$$g(f_{no-\mathcal{M}}(z)) = f_{\mathcal{M}}(f_{no-\mathcal{M}}(z)) - f_X(f_{no-\mathcal{M}}(z)) + f_{no-\mathcal{M}}(z) \geq z$$

nur nicht-negative Koeffizienten hat.

Es gilt also folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} f_{no-\mathcal{M}}(z) &= g^{(-1)}(g(f_{no-\mathcal{M}}(z))) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} [z^{n-1}] h(z)^n \right) g(f_{no-\mathcal{M}}(z))^n \\ &\geq \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} [z^{n-1}] h(z)^n \right) z^n. \end{aligned}$$

Für jedes $n \geq 1$ gilt daher:

$$[z^n] f_{no-\mathcal{M}}(z) = \frac{|\mathcal{LT}_{n, no-\mathcal{M}}(X)|}{n!} \geq \frac{1}{n} [z^{n-1}] h(z)^n.$$

□

Dieser Satz wird ohne Beweis angeführt. Interessierte Leser finden diesen in [Sta, 1999].

Satz 3.4.2. Sei $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{N}^{m+1}$, mit $\sum_{i=0}^m r_i = n$ und $\sum_{i=0}^m (1-i)r_i = k > 0$. Weiters sei $F(\mathbf{r})$ die Anzahl aller planaren unmarkierten geordneten Wälder mit n Knoten und k Bäumen als Komponenten, wobei es genau r_i Knoten mit i Kindern gibt. Dann gilt

$$F(\mathbf{r}) = \frac{k}{n} \binom{n}{r_0, r_1, \dots, r_m}.$$

Lemma 3.4.3. Sei T_n die Anzahl planarer Wurzelbäume mit n Blättern, wobei jeder innere Knoten genau d Kinder hat und kein Label trägt.

Dann gilt

$$T_{kd-k+1} = \frac{1}{kd-k+1} \binom{kd}{k}.$$

Beweis:

Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.4.2.

Aus Korollar 3.2.1 folgt, dass laut Voraussetzung ein Baum mit $kd - k + 1$ Blättern genau k innere Knoten hat.

Unter Verwendung der Notation von Satz 3.4.2 gilt also in diesem Fall

$$\mathbf{r} = (kd - k + 1, 0, \dots, 0, k) \in \mathbb{N}^{d+1}, \quad n = kd + 1 \quad \text{und} \quad t = 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} T_{kd-k+1} &= \frac{1}{kd+1} \binom{kd+1}{k, (kd-k+1)} = \frac{(kd)!}{k!(kd-k+1)!} \\ &= \frac{1}{kd-k+1} \binom{kd}{k}. \end{aligned}$$

□

Lemma 3.4.4. Für $X = X_d$ gilt

$$|\mathcal{LT}_{kd-k+1}(X)| = |X_d|^k \frac{(kd)!}{(d!)^k \cdot k!}.$$

Beweis:

Folgende Notation wird verwendet:

$\bar{T}_n(X)$... Anzahl planarer Wurzelbäume mit n Blättern, wobei die inneren Knoten d Kinder haben und Labels aus X tragen.

$T_n(X)$... Anzahl planarer Wurzelbäume mit n Blättern, wobei die inneren Knoten d Kinder haben, Labels aus X tragen und die Blätter mit paarweise verschiedenen Elementen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ in beliebiger Reihenfolge markiert sind.

Sei $X = X_d = \{\circ\}$, dann folgt aus Lemma 3.4.3: $\bar{T}_{kd-k+1} = \frac{1}{kd-k+1} \binom{kd}{k}$

Daher gilt für X_d allgemein: $\bar{T}_{kd-k+1} = \frac{1}{kd-k+1} \binom{kd}{k} |X_d|^k$.

Weiters gilt

- $|\mathcal{LT}_{kd-k+1}(X)| = \frac{1}{(d!)^k} \cdot T_{kd-k+1}(X)$.

Der Faktor $\frac{1}{(d!)^k}$ kommt hinzu, da für jeden der k inneren Knoten nur eine der $d!$ Permutationen der Labels der Kinder die Local-increasing-condition erfüllen.

- $T_{kd-k+1} = (kd - k + 1)! \cdot \bar{T}_{kd-k+1}(X)$.

Der Faktor $(kd - k + 1)!$ entspricht der Anzahl der möglichen Labels der $kd - k + 1$ Blätter.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |\mathcal{LT}_{kd-k+1}(X)| &= \frac{1}{(d!)^k} (kd - k + 1)! \frac{1}{kd - k + 1} \binom{kd}{k} |X_d|^k \\ &= |X_d|^k \frac{(kd - k)! (kd)!}{(kd - k)! k! (d!)^k} = |X_d|^k \frac{(kd)!}{k! (d!)^k}. \end{aligned}$$

□

Durch den nachfolgenden Satz ist es möglich, eine Reihe von Beispielen zu finden, in welchen die Menge aller Bäume mit n Blättern, welche eine gegebene Mustermenge \mathcal{M} vermeiden, viel schneller wächst, als die Menge aller Bäume mit n Blättern und zwar C^n , mit $C > 0$, mal.

Satz 3.4.3. Sei $X = X_d$, für ein $d \geq 2$ und sei

$$h(z) = 1 - \frac{|X_d| z^{d-1}}{d!} + \frac{f_{\mathcal{M}}(z)}{z}$$

eine Potenzreihe mit einer Nullstelle $\alpha > 0$.

Dann gilt

$$|\mathcal{LT}_{n, no-\mathcal{M}}(X)| \geq \left(\frac{(d!)^{\frac{1}{d-1}}}{|X_d|^{\frac{1}{d-1}} \alpha} \right)^{n-1} |\mathcal{LT}_n(X)|.$$

Beweis:

Wegen der Voraussetzung $X = X_d$ und Korollar 3.2.1, sind in $\mathcal{LT}(X)$ nur Bäume mit $n = kd - k + 1 = k(d - 1) + 1$ Blättern, mit $k \in \mathbb{N}$.

Daher ist $h(z)$ eine Potenzenreihe in z^{d-1} .

Sei

$$\tilde{h}(t) = 1 - t + \sum_{k \geq 2} a_k t^k$$

und

$$h(z) = \tilde{h}\left(\frac{|X_d|}{d!} z^{d-1}\right).$$

Da die Koeffizienten a_k positive Vielfache der Anzahl gewisser Bäume mit k inneren Knoten sind, sind alle a_k nicht negativ. Laut Voraussetzung hat $h(t)$ eine Nullstelle $\alpha > 0$, daher hat $\tilde{h}(t)$ die positive Nullstelle $\beta = \frac{|X_d|}{d!} \alpha^{d-1}$.

Sei $(\tilde{h}(t))^{-1} := \sum_{j \geq 0} b_j t^j$ das multiplikativ Inverse von $\tilde{h}(t)$.

Offensichtlich gilt $b_0 = 1$ und $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = b_n - b_{n-1} + \sum_{k=2}^n a_k b_{n-k} = 0$ für $n \geq 1$.

Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $b_n \geq \beta^{-1} b_{n-1}$:

Da $\beta > 0$ und $a_k \geq 0$ gilt, folgt sofort aus der Definition von $\tilde{h}(t)$, dass $\beta \geq 1$.

$n = 1$: $b_1 \geq \beta^{-1} b_0$ ✓, da $b_0 = b_1$.

$n - 1 \rightarrow n$: Die Induktionsvoraussetzung lautet: $b_{n-1} \geq \beta^{1-k} b_{n-k}$

Außerdem gilt $\beta - \sum_{k \geq 2} a_k \beta^k = 1$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} b_n &= b_{n-1} - \sum_{k=2}^n a_k b_{n-k} \geq b_{n-1} - \sum_{k=2}^n a_k \beta^{k-1} b_{n-1} \geq \\ &\geq b_{n-1} - \sum_{k \geq 2} a_k \beta^{k-1} b_{n-1} = \beta^{-1} b_{n-1} \left(\beta - \sum_{k \geq 2} a_k \beta^k \right) = \beta^{-1} b_{n-1}. \end{aligned}$$

Es folgt daher, dass $[t^k](\tilde{h}(t))^{-1} \geq \beta^{-k}$ ist.

Somit gilt

$$[z^{k(d-1)}](h(z))^{-1} \geq \left(\frac{|X_d|}{d!}\right)^k \cdot \left(\frac{|X_d| \alpha^{d-1}}{d!}\right)^{-k} = \alpha^{-k(d-1)},$$

es folgt

$$(h(z))^{-1} \geq \sum_{k \geq 0} \alpha^{-k(d-1)} z^{k(d-1)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{d-1}}$$

sowie

$$(h(z))^{-n} \geq \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{d-1}}\right)^n = \left(1 - \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{d-1}\right)^{-n}.$$

Da für $(h(z))^{-1}$ die Voraussetzungen von Lemma 3.4.2 erfüllt sind, gilt weiters für $n = kd - k + 1 = k(d - 1) + 1$

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{LT}_{kd-k+1, no-\mathcal{M}}(X)|}{(kd - k + 1)!} &\geq \frac{1}{kd - k + 1} [z^{k(d-1)}] h(z)^{-(kd-k+1)} \geq \\ &\geq \frac{1}{kd - k + 1} \binom{-(kd - k + 1)}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k(d-1)} = \\ &= \frac{1}{kd - k + 1} \binom{kd - k + 1 + k - 1}{k} \alpha^{-k(d-1)} = \frac{1}{kd - k + 1} \binom{kd}{k} \alpha^{-k(d-1)}. \end{aligned}$$

Mittels Lemma 3.4.4 erhalten wir das Gewünschte, da

$$\begin{aligned} |\mathcal{LT}_{kd-k+1, no-\mathcal{M}}(X)| &\geq (kd - k + 1)! \frac{1}{kd - k + 1} \binom{kd}{k} \alpha^{-k(d-1)} = \frac{(kd)!}{k!} \alpha^{-k(d-1)} \\ &= \left(\frac{d!}{\alpha^{d-1}}\right)^k \frac{(kd)!}{k! d!^k} = \left(\frac{d!}{|X_d| \alpha^{d-1}}\right)^k |\mathcal{LT}_{kd-k+1}(X)|. \end{aligned}$$

□

Obiges Lemma ermöglicht Abschätzungen für den Spezialfall $|X| = 1$, d.h. für den Fall bei welchem alle inneren Knoten das gleiche Label tragen und die gleiche Anzahl von Kindern haben.

Satz 3.4.4. *Sei $X = X_d$ für ein $d \geq 2$ und $|X| = 1$. Weiters sei \mathcal{M} eine Mustermenge mit genau einem Muster M mit $k \geq 2$ inneren Knoten.*

Dann gilt: Für jedes Paar (d, k) außer $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ und $(3, 2)$ existiert ein $C > 0$, welches von d und k aber nicht vom tatsächlichen Muster abhängig ist, sodass

$$|\mathcal{LT}_{n, no-M}(X)| \geq C^{n-1} |\mathcal{LT}_n(X)|.$$

Beweis:

Laut Voraussetzung hat das Muster M genau $k(d-1)+1$ Blätter. Nach Satz 3.4.3 genügt es zu zeigen, dass für alle Paare (d, k) außer $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ und $(3, 2)$ das Polynom

$$h(z) = 1 - \frac{z^{d-1}}{d!} + \frac{z^{k(d-1)}}{(kd - k + 1)!}$$

eine positive Nullstelle hat.

Sei $t = \frac{z^{d-1}}{d!}$, dann reicht es zu zeigen, dass das Polynom $\tilde{h}(t) = 1 - t + \frac{d!^k t^k}{(kd - k + 1)!}$ eine positive Nullstelle hat.

Um das nachzuweisen, betrachten wir die Ableitung $\tilde{h}'(t) = -1 + \frac{kd!^k t^{k-1}}{(kd - k + 1)!}$. Dieses Ableitungspolynom hat eine einzige positive Nullstelle $t_0 = \left(\frac{(kd - k + 1)!}{kd!^k}\right)^{\frac{1}{k-1}}$.

Für den Nachweis einer positiven Nullstelle von $\tilde{h}(t)$ reicht es also zu zeigen, dass $\tilde{h}(t)$ an der Stelle t_0 ein Minimum annimmt und dieses negativ ist.

3 Mustervermeidung in X -markierten Wurzelbäumen

Es gilt $t_0^{k-1} = \frac{(kd-k+1)!}{kd!k}$ und $\tilde{h}(t_0) = 1 - t_0 + \frac{t_0}{k}$.
Zu zeigen bleibt daher $t_0 > \frac{k}{k-1}$, also

$$\frac{(kd - k + 1)!(k - 1)^{k-1}}{d!k^k} > 1.$$

Die Ungleichung stimmt für die Paare $(d, k) = (2, 5)$, $(d, k) = (3, 3)$ und $(d, k) = (4, 2)$. Da die linke Seite sowohl in k als auch in d wächst, stimmt es somit auch für alle anderen geforderten Paare. □

Definition 3.4.1. Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{LT}(X)$ eine Menge von Mustern. Die **Wachstumsrate** von \mathcal{M} wird definiert als

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|\mathcal{LT}_{n, no-\mathcal{M}}(X)|}{|\mathcal{LT}_n(X)|} \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Vermutung 3.4.1. Für jede beliebige Labelmenge X existiert eine natürliche Zahl d , sodass für jedes Muster $M \in \mathcal{LT}(X)$ mit mindestens d inneren Knoten und Zahlen $c(M) > 0, \lambda(M) > 1$ gilt:

$$\frac{|\mathcal{LT}_{n, no-M}(X)|}{|\mathcal{LT}_n(X)|} \sim c(M)\lambda(M)^{-n}.$$

Diese Vermutung existiert auf Grund von Computerexperimenten und ist eine Verallgemeinerung der Warlimont's Vermutung [War, 2003] für zusammenhängende Muster in Permutationen, welche vor Kurzem in [Eli, 2006] bewiesen wurde. Der dort angegebene Beweis wird an dieser Stelle aber nicht angeführt.

Satz 3.4.5 (Ehemalige Warlimont's Vermutung, bewiesen durch S. Elizalde). Sei p ein aufeinanderfolgendes Permutationsmuster und $S_n(p)$ die Anzahl aller p -vermeidenden Permutationen der Länge n .

Dann gilt

$$S_n(p) \sim \gamma \cdot \rho^n \cdot n!,$$

mit Konstanten γ und ρ , welche nur vom Muster p abhängen.

3.5 Ausblick

Es existiert ein Zusammenhang zwischen dem Problem der Mustervermeidung in Bäumen und der Operad Theorie. Da detaillierte Erläuterungen den Rahmen der Arbeit sprengen würden, erfolgt hier nur eine grobe Skizze des Zusammenhanges. Genauere Informationen dazu sind beispielsweise in [DotKh, 2013], [DotKho, 2009] oder [DoJo, 2011] zu finden.

Um den Zusammenhang zu erläutern ist allerdings ein Exkurs in die Kategorientheorie nötig, daher folgen zuerst entsprechende Definitionen und Bemerkungen.

Definition 3.5.1. Eine **Kategorie** \mathcal{C} besteht aus

- einer Klasse, deren Elemente **Objekte** heißen.
- Mengen $\mathcal{C}(A, B)$ zu je zwei Objekten $A, B \in \mathcal{C}$, deren Elemente **Morphismen** von A nach B heißen. Für $f \in \mathcal{C}(A, B)$ schreibt man auch $A \xrightarrow{f} B$.
Es gilt $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') \neq \emptyset$ genau dann wenn $A = A'$ und $B = B'$.
- Abbildungen $\circ : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, C)$ zu je drei Objekten $A, B, C \in \mathcal{C}$, die **Kompositionen** heißen und für $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ das Assoziativgesetz $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ gilt.
Außerdem gibt es zu jedem Objekt $A \in \mathcal{C}$ einen Morphismus $A \xrightarrow{1_A} A$ mit $1_A \circ f = f$, für alle $f : X \rightarrow A$ und $g \circ 1_A = g$, für alle $g : A \rightarrow Y$.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & A \\
 & \searrow f & \downarrow 1_A \\
 & & A \\
 & & \xrightarrow{g} Y
 \end{array}$$

1_A heißt **Einheit** auf A und ist eindeutig bestimmt.

Definition 3.5.2. Seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ zwei Kategorien.

Ein **Funktor** $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ ist eine Abbildung welche

- jedem Objekt $A \in \mathcal{C}_1$ ein Objekt $F(A) \in \mathcal{C}_2$ zuordnet und
- jedem Morphismus $f \in \mathcal{C}_1(A, A')$ einen Morphismus $F(f) \in \mathcal{C}_2(F(A), F(A'))$ zuordnet, sodass
 - $F(1_A) = 1_{F(A)}$ für alle $A \in \mathcal{C}_1$ und
 - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}_1(A_1, A_2), g \in \mathcal{C}_1(A_2, A_3)$.

Wird jedem Morphismus $f \in \mathcal{C}_1(A, A')$ ein Morphismus $F(f) \in \mathcal{C}_2(F(A'), F(A))$ zugeordnet, sodass

- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ für alle $A \in \mathcal{C}_1$ und
- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ für alle $f \in \mathcal{C}_1(A_1, A_2), g \in \mathcal{C}_1(A_2, A_3)$,

wird der Funktor **kontravariant** genannt.

Notation:

Ord bezeichne die Kategorie deren Objekte nichtleere geordnete endliche Mengen und deren Morphismen ordnungserhaltende Bijektionen sind.

$Vect$ bezeichne die Kategorie deren Objekte Vektorräume und deren Morphismen lineare Abbildungen sind.

Definition 3.5.3. Eine (nicht-symmetrische) **Kollektion** ist ein kontravarianter Funktor von Ord nach $Vect$. Die Bilder von einzelnen Mengen werden **Komponenten** der Kollektion genannt.

Definition 3.5.4. Seien \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 zwei nicht-symmetrische Kollektionen. Das **Shuffle-Kompositions-Produkt** von \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 ist die nicht-symmetrische Kollektion $\mathcal{C}_1 \circ_{sh} \mathcal{C}_2$, welche wie folgt definiert ist

$$(\mathcal{C}_1 \circ_{sh} \mathcal{C}_2)(I) := \bigoplus_k \mathcal{C}_1(k) \otimes \left(\bigoplus_{f:I \rightarrow [k]} \mathcal{C}_2(f^{-1}(1)) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}_2(f^{-1}(k)) \right),$$

wobei die Summe über alle Surjektionen f läuft, für die $\min f^{-1}(i) < \min f^{-1}(j)$ wann immer $i < j$ ist gilt.

Definition 3.5.5. Sei \mathcal{C} eine Kategorie mit einem Funktor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ und Einheitsobjekt $I \in \mathcal{C}$, also einem Objekt, für welches $I \otimes A \cong A$ und $A \otimes I \cong A$ für alle Objekte $A \in \mathcal{C}$ gilt.

Weiters seien $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \rightarrow A \otimes (B \otimes C)$, $\lambda : I \otimes A \rightarrow A$ und $\rho : A \otimes I \rightarrow A$ natürliche Isomorphismen.

Ein **Monoid in der Kategorie \mathcal{C}** ist ein Objekt $M \in \mathcal{C}$ gemeinsam mit zwei Abbildungen $\mu : M \otimes M \rightarrow M$ und $\eta : I \rightarrow M$, sodass folgende kommutative Diagramme gültig sind:

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes M) \otimes M & \xrightarrow{\alpha} & M \otimes (M \otimes M) \xrightarrow{\mu} (M \otimes M) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ M \otimes M & \xrightarrow{\mu} & M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} I \otimes M & \xrightarrow{\eta \otimes 1} & M \otimes M & \xleftarrow{1 \otimes \eta} & M \otimes I \\ & \searrow \lambda & \downarrow \mu & \swarrow \rho & \\ & & M & & \end{array}$$

Definition 3.5.6. Ein **Shuffle-Operad** ist ein Monoid in der Kategorie der nicht-symmetrischen Kollektionen gemeinsam mit dem Shuffle-Kompositions-Produkt. Das Einheitsselement ist der Funktor, welcher auf allen nichtleeren Objekten verschwindet und eindimensional für die leere Menge ist.

Bemerkung 3.5.1. *Monoide in der monoidalen Kategorie der Vektorräume, gemeinsam mit dem Tensorprodukt, sind assoziative Algebren.*

Assoziative Algebren können durch Erzeuger und Relationen dargestellt werden. Sind alle Relationen darstellbar als Monome von Generatoren, so existiert eine Basis bestehend aus allen Monomen, außer jenen der Menge der Relationen. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht möglich eine solche Basis zu generieren. Es bietet sich aber die Möglichkeit eine Gröbner Basis zu konstruieren.

Es ist natürlich zu versuchen, eine entsprechende Gröbner Basis Theorie auch für Operads zu finden. Für Shuffle Operads ist dies auch machbar.

Ein Shuffle Operad kann durch Erzeuger und Relationen dargestellt werden. Sei V der Raum der Generatoren (dieser stellt selbst eine nicht-symmetrische Kollektion dar), dann kann der Shuffle Operad dargestellt werden als Quotient des von V frei erzeugten Operads $\mathcal{F}(V)$.

Sei X die Kollektion geordneter Basen der Komponenten von V , also ein Funktor von der Kategorie Ord nach Ord . Dann besitzt der von V frei erzeugte Shuffle Operad eine Basis von „Baummonomen“. Dies sind Bäume deren Knoten mit Elementen der Kollektion X markiert sind, also genau planare X - markierte Wurzelbäume.

Es gilt:

- Jede Shuffle Komposition von Baummonomen ergibt wieder ein Baummonom.
- Auf Shuffle Operads ist es möglich Totalordnungen auf Monomen einzuführen. Das bedeutet, wird ein Monom im Produkt durch ein „höheres“ Monom ersetzt, ist auch das Ergebnis von höherer Ordnung.

Die algebraische Aussage, ein Baummonom T wird durch die Shuffle-Komposition mit einem Baum-Monom S erhalten, bedeutet kombinatorisch: T enthält S als Muster.

3.5.1 Zusammenhang Shuffle Operads und Mustervermeidung in Bäumen

Sei G eine Gröbner Basis eines Ideals I eines freien Shuffle Operads, also ein System von Erzeugern von I für welche gilt, dass jedes Element von I teilbar ist durch eines der führenden Terme von Elementen aus G .

Baummonome, welche die führenden Terme von G vermeiden, bilden eine Basis des Quotienten durch I . Das bedeutet also Shuffle-Operads können durch Monome erzeugt werden.

Es folgt: Die Aufgabe, Bäume, welche eine gegebene Mustermenge vermeiden, abzuzählen, steht in direktem Zusammenhang mit der Berechnung der Dimension der Komponenten von Operads, welche durch Erzeuger und Relationen dargestellt werden können.

3 Mustervermeidung in X-markierten Wurzelbäumen

Bei der Arbeit mit Quotienten von Operads welche assoziative Algebren beschreiben, kommen natürlich auch einige Fragen zum asymptotischen Verhalten (z.B. Wachstum der Kodimension) auf. Es wird erwartet, dass es einen engen Zusammenhang zur asymptotischen Abzählung von mustervermeidenden Bäumen gibt, welcher dafür sehr hilfreich wäre.

4

Labelmuster in Bäumen

4.1 Einführung

Wir werden in diesem Kapitel Ergebnisse auf markierten geordneten bzw. ungeordneten Wurzelbäumen T mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten betrachten, welche die Labels $\{1, \dots, n\}$ tragen. Es wird daher nicht, wie im vorigen Kapitel, zwischen den Labels innerer Knoten und Labels von Blättern unterschieden.

In weiterer Folge sprechen wir des Öfteren einfach nur von Bäumen mit n Knoten und meinen markierte Wurzelbäume mit n Knoten, welche die Labels $\{1, \dots, n\}$ tragen.

Außerdem werden des Öfteren die Knoten mit ihren Labels identifiziert.

Im gesamten Kapitel gehen wir davon aus, dass jeder Baum mit $n \in \mathbb{N}$ Knoten der betrachteten Baumfamilie mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.

Für die genaue Beschreibung solcher Bäume benötigen wir folgende Definition. Dabei steht \square für den Leerbaum, also einem Baum ohne Knoten.

Definition 4.1.1. Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Mengen markierter Objekte, deren Elemente der Größe $n \in \mathbb{N}$ die Labels $\{1, \dots, n\}$ tragen.

Für zwei Elemente $\alpha \in \mathcal{A}$ und $\beta \in \mathcal{B}$ mit $|\alpha| = n_1 \geq 0$, $|\beta| = n_2 \geq 0$ und $n_1 + n_2 = n$ sei:

$\alpha * \beta :=$

$\{(\alpha', \beta') \mid n_1 \text{ Elemente aus } [n] \text{ ersetzen ordnungserhaltend Labels in } \alpha, \text{ die restlichen } n_2 \text{ die in } \beta\}.$

Dann heißt $\mathcal{A} * \mathcal{B} := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}, \beta \in \mathcal{B}} (\alpha * \beta)$ **Partitionsprodukt** von \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Definition 4.1.2. Ein **ungeordneter Baum** ist ein Wurzelbaum ohne Ordnung auf der Reihenfolge der Kinder jedes Knoten.

Jeder ungeordnete Baum besteht also aus einem Wurzelknoten und einer Menge ungeordneter Bäume.

4 Labelmuster in Bäumen

Sei \mathcal{T} die Menge aller ungeordneten Bäume, dann gilt

$$\mathcal{T} = \circ * \left(\{\square\} \dot{\cup} \mathcal{T} \dot{\cup} \frac{\mathcal{T}}{2!} \dot{\cup} \frac{\mathcal{T}}{3!} \dots \right).$$

Sei $T \in \mathcal{T}$ ein Baum mit n Knoten, dann heißt T **markierter ungeordneter Baum**, wenn seine Knoten die Labels $\{1, \dots, n\}$ tragen.

Bemerkung 4.1.1. Aus obiger Definition ergibt sich folgende Funktionalgleichung für die erzeugende Funktion $T(z) = \sum_{n \geq 1} T_n \frac{z^n}{n!}$ von T_n , der Anzahl aller markierter ungeordneter Bäume mit n Knoten:

$$T(z) = z \cdot e^{T(z)}.$$

Definition 4.1.3. Ein **geordneter Baum** ist ein Wurzelbaum, in welchem die Kinder jedes Knoten linear geordnet sind.

Jeder geordnete Baum besteht also aus einem Wurzelknoten und einer Folge geordneter Bäume.

Sei \mathcal{T} die Menge aller geordneten Bäume, dann gilt

$$\mathcal{T} = \circ * \left(\{\square\} \dot{\cup} \mathcal{T} \dot{\cup} \mathcal{T}^2 \dot{\cup} \mathcal{T}^3 \dots \right).$$

Sei $T \in \mathcal{T}$ ein Baum mit n Knoten, dann heißt T **markierter geordneter Baum**, wenn seine Knoten die Labels $\{1, \dots, n\}$ tragen.

Bemerkung 4.1.2. Aus obiger Definition ergibt sich folgende Funktionalgleichung für die erzeugende Funktion $T(z) = \sum_{n \geq 1} T_n \frac{z^n}{n!}$ von T_n , der Anzahl aller markierter geordneter Bäume mit n Knoten:

$$T(z) = \frac{z}{1 - T(z)}.$$

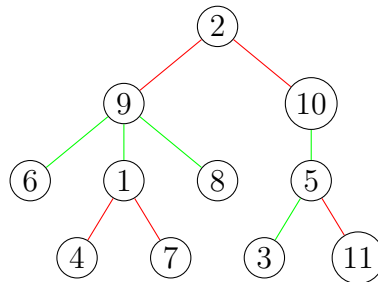
Später wird folgende Definition des Öfteren verwendet:

Definition 4.1.4. Sei T ein markierter Baum mit Knotenmenge V und Kantenmenge E . Weiters bezeichne $l(u)$ das Label des Knoten $u \in V$. Sei $(u, v) \in E$ eine Kante, sodass u Vorgänger von v ist (d.h. am Pfad von der Wurzel zu v liegt).

Dann heißt (u, v) **up-Kante**, wenn $l(u) < l(v)$.

Gilt $l(u) > l(v)$, heißt (u, v) **down-Kante**.

Beispiel 4.1.1. Im folgenden Baum sind alle down-Kanten grün und alle up-Kanten rot gefärbt:



Notation:

Wir untersuchen im Folgenden ungeordnete sowie geordnete Bäume in Bezug auf die Anzahl ihrer lokalen Minima, maximal aufsteigenden Unterbäume und maximal aufsteigenden Ketten.

Folgende Notation wird dabei verwendet:

T_n ...Anzahl von ungeordneten bzw. geordneten Bäumen mit n Blättern.

$T_{n,m}$...Anzahl von ungeordneten bzw. geordneten Bäumen mit n Blättern, die genau m lokale Minima, maximal aufsteigende Unterbäume bzw. maximal aufsteigende Ketten haben. Es geht aus dem Kontext klar hervor, welche Parameter gerade untersucht werden.

Außerdem werden folgende exponentiell erzeugende Funktionen benötigt:

$$T(z) = \sum_{n \geq 1} T_n \frac{z^n}{n!},$$

$$T(z, v) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} T_{n,m} \frac{z^n}{n!} v^m.$$

Speziell von Bedeutung ist auch folgendes Polynom, denn es enthält die gesamte Information über die Verteilung der Anzahl des untersuchten Parameters in einem beliebigen Baum mit n Knoten:

$$T_n(v) := \sum_{m \geq 0} T_{n,m} v^m.$$

Satz 4.1.1. *Bezeichne T_n die Anzahl der ungeordneten Bäume mit n Blättern.*

Dann gilt

$$T_n = n^{n-1}.$$

Beweis:

Laut Bemerkung 4.1.1 gilt

$$T(z) = z \cdot e^{T(z)} \text{ mit } T(z) = \sum_{n \geq 0} T_n \frac{z^n}{n!}.$$

Aus dem Cauchy'schen Integralsatz, Lemma 2.0.1, folgt

$$[z^n]T(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{T(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Umformen der Funktionalgleichung ergibt

$$z = T \cdot e^{-T} \text{ und } dz = e^{-T}(1 - T)dT.$$

Somit folgt, abermals mittels Lemma 2.0.1

$$\begin{aligned} [z^n]T(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{T}{T^{n+1}} e^{(n+1)T} \cdot e^{-T}(1 - T)dT = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{nT}}{T^n} (1 - T)dT \\ &= [T^{n-1}]e^{nT}(1 - T) = [T^{n-1}]e^{nT} - [T^{n-2}]e^{nT} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{n^{n-2}}{(n-2)!} \\ &= \frac{n^{n-2}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$T_n = n![z^n]T(z) = n! \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} = n^{n-1}.$$

□

Satz 4.1.2. Sei T_n die Anzahl aller geordneten Bäume mit n Knoten.

Dann gilt

$$T_n = (n-1)! \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

Beweis:

Sei \mathcal{T} die Menge aller unmarkierten geordneten Bäume.

Dann gilt laut Bemerkung 4.1.2: $T(z) = \frac{z}{1-T(z)}$.

Es gilt also

$$T(z)^2 - T(z) + z = 0.$$

Da $T_0 = 0$ gilt, folgt

$$T(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2}.$$

Etwas später im Beweis benötigen wir folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} [z^n] \frac{1}{\sqrt{1-4z}} &= [z^n] (1-4z)^{-\frac{1}{2}} = \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-4)^n \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n \cdot 2^n \cdot 2^n \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2}}{n!} \cdot 2^n \cdot 2^n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n! \cdot n!} \cdot n! \cdot 2^n \\ &= \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Somit gilt für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} [z^n]T(z) &= [z^n] \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2} = \frac{1}{2} [z^n] (1 - \sqrt{1-4z}) = \frac{1}{2} [z^n] (-\sqrt{1-4z}) \\ &= \frac{1}{2} [z^n] \frac{4z-1}{\sqrt{1-4z}} = 2[z^{n-1}] \frac{1}{\sqrt{1-4z}} - \frac{1}{2} [z^n] \frac{1}{\sqrt{1-4z}} = 2 \binom{2(n-1)}{n-1} - \frac{1}{2} \binom{2n}{n} \\ &= 2 \cdot \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{1}{2} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!(n-1)!} \left(2 - \frac{2n-1}{n}\right) \\ &= \binom{2(n-1)}{n-1} \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Da bei geordneten markierten Bäumen jedes Labelling einen anderen Baum beschreibt, gibt es für einen Baum mit n Knoten $n!$ verschiedene Möglichkeiten diese zu markieren.

Somit gilt

$$T_n = n! \cdot \binom{2(n-1)}{n-1} \cdot \frac{1}{n} = (n-1)! \cdot \binom{2(n-1)}{n-1}.$$

□

4.1.1 Verwandte Resultate für Permutationen

Wie auch im vorigem Kapitel, sind viele ähnliche Probleme, welche in den folgenden Abschnitten behandelt werden, bereits für Permutationen erforscht worden. Es folgen hier einige Resultate.

Definition 4.1.5. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation der Länge n .

Dann ist $\sigma_i, 2 \leq i \leq n-1$, ein **Maximum der Permutation**, wenn $\sigma_i > \sigma_{i-1}$ und $\sigma_i > \sigma_{i+1}$.

Weiters heißt σ_1 Maximum, wenn $\sigma_1 > \sigma_2$ und σ_n heißt Maximum, wenn $\sigma_n > \sigma_{n-1}$.

Analog ist ein **Minimum einer Permutation** definiert.

Wir bezeichnen mit $P(n, k)$ die Anzahl aller Permutationen der Länge n mit genau k Maxima.

Für $P(n, k)$ gilt folgende Rekursion

$$P(n+1, k) = (n-2k+3)P(n, k-1) + 2kP(n, k).$$

Erklärung:

Wird das Element $n+1$ in einer Permutation der Länge n mit k Maxima eingefügt, gibt es folgende Möglichkeiten:

- Das Element $n+1$ wird direkt links oder rechts neben einem Maximum eingefügt. Dies ändert nichts an der Gesamtanzahl der Maxima.
- $n+1$ wird an irgendeiner anderen Stelle eingefügt. Dann erhöht sich die Gesamtanzahl der Maxima um 1.

In [Car, 1947] bzw. [Ess, 1984] wurden folgende Aussagen gezeigt, welche hier nicht bewiesen werden:

Satz 4.1.3. Es gilt

$$\sum_{n,j=0}^{\infty} P(n+2j+1, j+1) \frac{z^n v^j}{(n-2j)!} = \left(\cosh(\sqrt{z^n - v}) - \frac{z}{\sqrt{z^2 - v}} \sinh(\sqrt{z^2 - v}) \right)^{-2}.$$

Sei Z_n die Zufallsvariable, welche die Anzahl der Maxima einer beliebigen Permutation der Länge n zählt.

Dann gilt:

Z_n ist normalverteilt mit Parametern

- $\mathbb{E} \sim \frac{n+1}{3}$ und

• $\mathbb{V} \sim \frac{2(n+1)}{45}$.

Bemerkung 4.1.3. Sei $\sigma \in S_n$ eine beliebige Permutation der Länge n und sei $\tilde{\sigma} \in S_n$ jene Permutation, für welche $\tilde{\sigma}_{n+1-j} = \sigma_j$ gilt, mit $1 \leq j \leq n$.

Dann gilt für $1 \leq j \leq n$:

$$\sigma_j \text{ ist lokales Maximum} \iff \tilde{\sigma}_{n+1-j} \text{ ist lokales Minimum.}$$

Es ist daher äquivalent, die Anzahl lokaler Minima oder die Anzahl lokaler Maxima in Permutationen zu untersuchen.

Definition 4.1.6. Sei $\sigma \in S_n$.

Dann heißt σ **alternierend**, wenn $\sigma_i < \sigma_{i+1}$, für $1 \leq i \leq n$ gerade und $\sigma_i > \sigma_{i+1}$, für $1 \leq i \leq n$ ungerade, wenn also $\sigma_1 > \sigma_2 < \sigma_3 > \dots$ gilt.

Gilt $\sigma_1 < \sigma_2 > \sigma_3 < \dots$, heißt σ **revers alternierend**.

Bemerkung 4.1.4. Sei $\sigma \in S_n$ eine alternierende Permutation und $\sigma^c = (n+1-\sigma_1)(n+1-\sigma_2)\dots(n+1-\sigma_n)$ das Komplement von σ . Dann ist σ^c reverse alternierend. Es gibt daher gleich viele alternierende wie revers alternierende Permutationen.

Satz 4.1.4. Sei A_n die Anzahl aller alternierenden Permutationen der Länge n . Dann gilt

$$\sum_{n \geq 0} A_n \frac{z^n}{n!} = \sec(z) + \tan(z).$$

Deswegen werden die Zahlen A_n des Öfteren auch als **Tangentenzahlen** bezeichnet. Außerdem gilt

$$A_{2n} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{j+n} \binom{2k}{k-j} \frac{j^{2n}}{2^{k-1}} \text{ und}$$

$$A_{2n+1} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n (-1)^{j+n} \binom{2k}{k-j} (k+1) \frac{j^{2n}}{2^{k-1}}.$$

Es folgt eine Beweisskizze:

Beweis:

Sei $n \in \mathbb{N}$, M_k eine Teilmenge von $[n]$ mit $1 \leq k \leq n$ Elementen und \tilde{M}_k sei $[n] - M_k$. Weiters sei σ eine alternierende Permutation der Menge M_k und π eine alternierende Permutation der Menge \tilde{M}_k . Dann ist $\rho = \sigma_k^c \sigma_{k-1}^c \dots \sigma_1^c, n+1, \pi^c$, je nachdem ob k gerade oder ungerade ist, eine alternierende oder revers alternierende Permutation.

Es gilt daher

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k}.$$

Daraus folgt laut [Stan, 2010]

$$\sum_{n \geq 0} A_n \frac{z^n}{n!} = \sec(z) + \tan(z).$$

Da $\sec(z)$ eine gerade und $\tan(z)$ eine ungerade Funktion ist, gilt

$$\sum_{n \geq 0} A_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sec(z) \quad \text{und} \quad \sum_{n \geq 0} A_{2n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \tan(z).$$

Daraus folgen mit [Com, 1974] die weiteren Ergebnisse. □

Definition 4.1.7. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation der Länge n .

Dann heißt $\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_j$, mit $1 \leq i \leq j \leq n$, **maximal-ansteigende Kette**, wenn

- $\sigma_i < \sigma_{i+1} < \dots < \sigma_j$,
- $\sigma_i < \sigma_{i-1}$ für $i > 1$ und
- $\sigma_j > \sigma_{j+1}$ für $j < n$ gilt.

Wir bezeichnen mit $E(n, k)$ die Anzahl aller Permutationen der Länge n mit genau k maximal-aufsteigenden Ketten.

$E(n, k)$ werden auch **Euler-Zahlen** genannt.

Beispiel 4.1.2. Beispielsweise besteht die Permutation $4\ 8\|5\|2\ 3\ 7\|6\|1$ aus 5 maximal-aufsteigenden Ketten.

Bemerkung 4.1.5. Wie am obigen Beispiel einfach zu sehen ist, gilt für eine Permutation $\sigma \in S_n$ klarerweise:

$$|\{\text{maximal-aufsteigende Ketten in } \sigma\}| - 1 = |\{\text{Abstiege in } \sigma\}|.$$

Dabei ist $\sigma_i \sigma_{i+1}$ ein Abstieg, wenn $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ gilt.

Für $E(n, k)$ gilt folgende Rekursion:

$$E(n+1, k) = (n-k+2)E(n, k-1) + kE(n, k).$$

Erklärung:

Wird das Element $n+1$ in einer Permutation der Länge n mit genau k maximal-aufsteigenden-Ketten eingefügt, gibt es folgende Möglichkeiten:

- Das Element $n+1$ wird rechts neben einer maximal aufsteigenden Kette eingefügt. Dies ändert nichts an der Gesamtanzahl der maximal-aufsteigenden Ketten.
- Das Element $n+1$ wird an einer der restlichen $n+1-k$ Stellen eingefügt. Dadurch erhöht sich die Gesamtanzahl der Ketten um 1.

Folgender Satz wird an dieser Stelle ohne Beweis angeführt. Interessierte Leser finden ihn in [Foa, 2010].

Satz 4.1.5. Es gilt

$$E(n, k) = \left\langle \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rangle,$$

mit $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} (k-j+1)^n$.

4.1.2 Wichtige Resultate

Für Beweise einiger Ergebnisse werden später folgende Definitionen bzw. Resultate benötigt, welche ohne Beweis angeführt werden.

Definition 4.1.8. Sei X eine diskrete Zufallsvariable auf dem Merkmalsraum \mathbb{N} und

$$C_X(t) := \log \left(\mathbb{E}(e^{tX}) \right) = \sum_{l \geq 0} \kappa_l(X) \frac{t^l}{l!}.$$

Dann heißt κ_l die l -te **Kumulante** von X .

Details zu Kumulanten bzw. den zugehörigen Resultaten sind beispielsweise in [Bil, 1984] zu finden.

Bemerkung 4.1.6. Folgende Eigenschaften von Kumulanten werden später benötigt:

- Es gilt $\kappa_1(X) = \mathbb{E}(X)$ und $\kappa_2(X) = \mathbb{V}(X)$.
- Sei X normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ .
Dann gilt $\kappa_1(X) = \mu$, $\kappa_2(X) = \sigma$ und $\kappa_r(X) = 0$ für $r \geq 3$.
Außerdem legen die Kumulanten eindeutig diese Verteilung fest.
- Kumulanten sind homogen, d.h. es gilt $\kappa_n(cX) = c^n \kappa(X)$ für $n \geq 1$.
- Kumulanten sind additiv, d.h. für zwei unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2 , mit $Y = X_1 + X_2$ gilt: $\kappa_n(Y) = \kappa_n(X_1) + \kappa_n(X_2)$.

Definition 4.1.9. Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen und $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörigen Verteilungsfunktionen. Weiters sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x)$.

Dann heißt es die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvertiert in Verteilung** gegen X , wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

und schreiben

$$X_n \xrightarrow{(d)} X.$$

Folgender Satz wurde in [Loè, 1977] bewiesen.

Satz 4.1.6. Seien X und X_1, X_2, \dots, X_n Zufallsvariablen.

Außerdem gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n^r) = \mathbb{E}(X^r)$ für alle $r \in \mathbb{N}$ und die Folge $(\mathbb{E}(X_n^r))$ bestimme eindeutig die Verteilung von X .

Dann gilt

$$X_n \xrightarrow{(d)} X.$$

Lemma 4.1.1. Sei X eine Zufallsvariable.

Dann gilt

4 Labelmuster in Bäumen

- Die Folge $(\mathbb{E}(X_n^r))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\mathbb{E}(X^r)$ für alle $r \in \mathbb{N}$ dann und nur dann, wenn $(\kappa_r(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $(\kappa_r(X))$ für alle $r \in \mathbb{N}$ konvergiert.
- Die Folge $(\mathbb{E}(X^r))_{r \in \mathbb{N}}$ legt die Verteilung von X eindeutig fest dann und nur dann, wenn die Folge der Kumulanten $(\kappa_r(X))_{r \in \mathbb{N}}$ dies tut.

Bemerkung 4.1.7. Um Satz 4.1.6 anzuwenden, reicht es also auch die Konvergenz der Kumulanten nachzuweisen.

4.2 Lokale Minima in Bäumen

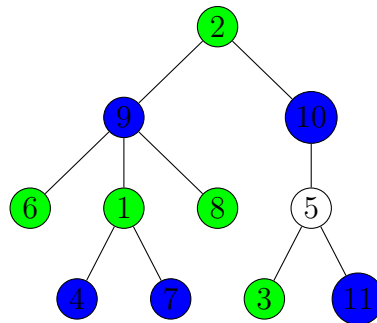
Das erste Labelmuster, welches in diesem Kapitel betrachtet wird, sind lokale Minima in Bäumen. Es werden sowohl exakte, wie auch asymptotische Resultate erarbeitet.

Definition 4.2.1. Sei T ein Baum.

Ein Knoten v heißt **lokales Minimum** in T , wenn für jeden Nachbarknoten w von v gilt $w > v$.

Analog heißt ein Knoten v **lokales Maximum** in T , wenn für jeden Nachbarknoten w von v gilt, dass $w < v$.

Beispiel 4.2.1. In diesem Baum sind alle lokalen Minima grün und alle lokalen Maxima blau markiert:



Bemerkung 4.2.1. Sei T ein Baum mit n Knoten. Wird jedes Label eines Knoten j , mit $1 \leq j \leq n$ ersetzt durch $j \mapsto n + 1 - j$, wird jedes lokale Minimum zu einem lokalen Maximum und umgekehrt. Es ist daher äquivalent, die Anzahl lokaler Minima in Bäumen oder die Anzahl lokaler Maxima in Bäumen zu untersuchen.

Den Zusammenhang zur Mustervermeidung zeigt folgende Bemerkung.

Bemerkung 4.2.2. Sei

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{array}{c} d \\ | \\ \circ \\ / \quad \backslash \\ u \quad u/w \quad u \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ u \quad u/w \quad u \end{array} \right\},$$

wobei der grüne Knoten für die Wurzel steht sowie d für eine down-Kante und u für eine up-Kante.

Dann entspricht die Anzahl der lokalen Minima in einem Baum T genau der Anzahl der Vorkommen von Mustern aus \mathcal{M} in diesem Baum.

4.2.1 Ungeordnete Bäume

In diesem Abschnitt ist, sofern nicht anders angegeben, unter dem Begriff Baum ein ungeordneter markierter Baum gemeint.

Satz 4.2.1. Sei M_n die Zufallsvariable, welche die Anzahl der lokalen Minima eines beliebigen Baumes mit n Knoten zählt.

Dann gilt:

Die exakte Verteilung von M_n , für $1 \leq m \leq n$, ist

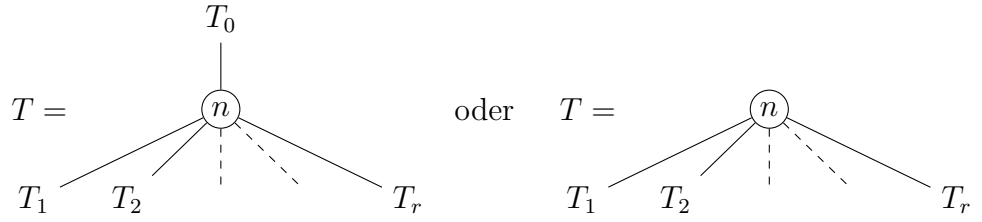
$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{\binom{n}{m}}{n^{n-1}} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} j^{n-1} (-1)^{n-m-j}.$$

Beweis:

Wir betrachten für jeden Baum T mit n inneren Knoten folgende Zerlegung anhand des Knotens n :

Sei r die Anzahl der Kinder des Knoten n und seien T_1, \dots, T_r jene Unterbäume von T mit n als Wurzel. Weiters sei, wenn n nicht Wurzel ist, T_0 jener Unterbaum von T , welcher die Wurzel von T enthält, also „über“ n liegt.

Dann kann ein Baum T , je nachdem ob n die Wurzel von T ist oder nicht, folgendermaßen eindeutig, bis auf Reihenfolge, zerlegt werden:



Natürlich gilt, dass für $n > 1$, der Knoten mit dem größten Label n kein lokales Minimum sein kann. Außerdem ist ein Knoten einer Komponente T_j dann und nur dann ein lokales Minimum in T_j , $0 \leq j \leq r$, wenn er auch ein lokales Minimum in T ist.

Für das Polynom $T_n(v) = \sum_{m \geq 0} T_{n,m} v^m$ gilt daher folgende rekursive Darstellung:

$$\begin{aligned}
 T_n(v) &= \sum_{r \geq 0} \sum_{\substack{n_0, n_1, \dots, n_r \geq 1, \\ n_0 + \dots + n_r = n-1}} \binom{n-1}{n_0, \dots, n_r} \frac{T_{n_1}(v) T_{n_2}(v) \cdots T_{n_r}(v)}{r!} n_0 T_{n_0}(v) + \\
 &+ \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 1, \\ n_1 + \dots + n_r = n-1}} \binom{n-1}{n_1, \dots, n_r} \frac{T_{n_1}(v) T_{n_2}(v) \cdots T_{n_r}(v)}{r!}, \quad \text{für } n \geq 2, \\
 T_1(v) &= v.
 \end{aligned}$$

Erklärung der einzelnen Komponenten:

- $\binom{n-1}{n_0, \dots, n_r}, \binom{n-1}{n_1, \dots, n_r}$: Anzahl der Möglichkeiten die Labels $\{1, 2, \dots, n-1\}$ auf die Unterbäume T_0, \dots, T_r bzw. T_1, \dots, T_r zu verteilen.
- $\frac{1}{r!}$: Wir betrachten ungeordnete Bäume, daher ist die Reihenfolge der Kinder von n egal.

4 Labelmuster in Bäumen

- n_0 : Im Fall, dass n nicht die Wurzel von T ist, gibt es n_0 verschiedene Möglichkeiten n als Kind an einen Knoten von T_0 anzuhängen.

Wird obige Gleichung für $n \geq 2$ mit $\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$ multipliziert und über $n \geq 2$ aufsummiert, erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} T_n(v) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{n \geq 2} \sum_{r \geq 0} \sum_{\substack{n_0, n_1, \dots, n_r \geq 1, \\ n_0 + \dots + n_r = n-1}} \frac{1}{r!} \frac{T_{n_1}(v) z^{n_1}}{n_1!} \frac{T_{n_2}(v) z^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{T_{n_r}(v) z^{n_r}}{n_r!} \cdot \frac{n_0 T_{n_0}(v) z^{n_0}}{n_0!} \\ &+ \sum_{n \geq 2} \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 1, \\ n_1 + \dots + n_r = n-1}} \frac{1}{r!} \frac{T_{n_1}(v) z^{n_1}}{n_1!} \frac{T_{n_2}(v) z^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{T_{n_r}(v) z^{n_r}}{n_r!}. \end{aligned}$$

Daraus und wegen $T_1(v) = v$ erhalten wir folgende partielle Differentialgleichung:

$$T_z(z, v) = e^{T(z, v)} z T_z(z, v) + e^{T(z, v)} - 1 + v, \quad \text{mit Randbedingung } T(0, v) = 0.$$

Wobei die Randbedingung direkt aus der Definition von $T(z, v)$ folgt.

Es kann sofort nachgerechnet werden, dass die Lösung dieser Gleichung folgendermaßen gegeben ist:

$$T(z, v) = z \cdot e^{T(z, v)} - z + vz = z(e^{T(z, v)} - 1 + v).$$

Es gilt natürlich, dass

$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{T_{n, m}}{T_n}.$$

Mit Hilfe der Lagrangen Inversionsformel, Satz 2.0.1, ist es möglich, die Koeffizienten von $T(z, v)$ zu berechnen.

Für $n \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} [z^n]T(z, v) &= \frac{1}{n} [T^{n-1}] (e^T - 1 + v)^n = \frac{1}{n} [T^{n-1}] \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} e^{Tj} (v-1)^{n-j} \\ &= \frac{1}{n} [T^{n-1}] \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (v-1)^{n-j} \sum_{k \geq 0} \frac{(jT)^k}{k!} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (v-1)^{n-j} \frac{j^{n-1}}{n!}. \end{aligned}$$

Daher gilt, für $1 \leq m \leq n$, weiters

$$\begin{aligned} T_{n, m} &= n! [z^n v^m] T(z, v) = [v^m] \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (v-1)^{n-j} j^{n-1} \\ &= [v^m] \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} j^{n-1} \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} v^k (-1)^{n-j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n}{j} \binom{n-j}{m} j^{n-1} (-1)^{n-m-j} = \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} j^{n-1} (-1)^{n-m-j}. \end{aligned}$$

Es folgt mit Satz 4.1.1

$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{1}{n^{n-1}} \binom{n}{m} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{n-m}{j} j^{n-1} (-1)^{n-m-j}.$$

□

Definition 4.2.2. Sei T ein Baum mit n Knoten.

Dann bezeichne

$d_j^+(T)$...die Anzahl aller Knoten von T mit genau j Kindern. Die Anzahl der Blätter von T ist somit $d_0^+(T)$.

$l_j(T)$...die Anzahl aller Knoten von T deren Label größer ist, als exakt j seiner Nachbarn. Die Anzahl der lokalen Minima entspricht somit $l_0(T)$.

Lemma 4.2.1. Sei $T_{n,m}$ die Anzahl aller ungeordneten Bäume mit n Knoten und m lokalen Minima und $L_{n,m}$ die Anzahl aller ungeordneten Bäume mit n Knoten und m Blättern.

Dann gilt

$$T_{n,m} = L_{n,m}.$$

Sei \mathcal{T}_n die Menge aller ungeordneten Bäume mit n Knoten und $T \in \mathcal{T}_n$.

Dann gilt:

Es gibt eine Bijektion $\alpha_n : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$, sodass für fixe $j, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$l_j(T) = m \Leftrightarrow d_j^+(\alpha(T)) = m.$$

Beweis:

- Behauptung: $T_{n,m} = L_{n,m}$:
 \mathcal{T}_n ist die Menge aller ungeordneten Bäume mit n Knoten, welche die Labels $\{1, 2, \dots, n\}$ tragen.
 Sei $\tilde{\mathcal{T}}_n$ die Menge aller ungeordneten Bäume mit n Knoten, welche mit beliebigen paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen markiert sind.
 Wir konstruieren eine Bijektion $\tilde{\alpha}_n : \tilde{\mathcal{T}}_n \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_n$, welche einen Baum mit m lokalen Minima auf einen Baum mit derselben Labelmenge und m Blättern abbildet.
 $\tilde{\alpha}_n$ eingeschränkt auf \mathcal{T}_n ist dann eine Bijektion $\alpha_n : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$, welche das Gewünschte leistet.

Wir konstruieren die Bijektion $\tilde{\alpha}_n$ induktiv:

$n = 1$: In dem Fall ist die Bijektion trivial, da jeder Baum von $\tilde{\mathcal{T}}_1$ aus genau einem Knoten besteht, welcher natürlich gleichzeitig ein lokales Minimum und Blatt ist.

$n > 1$: Sei angenommen, dass für $1 \leq j < n$ die Bijektionen $\tilde{\alpha}_j$ bereits definiert wurden.

Bezeichne m die Anzahl der lokalen Minima in T , W das Label der Wurzel von T und G das größte Label von T . Dann definieren wir $\tilde{\alpha}_n(T)$ für einen Baum $T \in \tilde{\mathcal{T}}_n$ folgendermaßen:

1. T wird so „gedreht“, dass der Knoten G zur neuen Wurzel von T wird. Dies hat zur Folge, dass alle lokalen Minima in den Unterbäumen mit Kindern von G als Wurzel enthalten sind.
2. Wir wenden auf alle diese Unterbäume mit j Knoten die Bijektion $\tilde{\alpha}_j$ an, wobei natürlich $1 \leq j < n$ gilt. Da die Anzahl der lokalen Minima in diesen Unterbäumen insgesamt m ist, ist nach diesem Schritt laut Induktionsvoraussetzung die Gesamtanzahl der Blätter ebenfalls m .
3. Zum Schluss werden noch die Labels G und W vertauscht. Der so erhaltene Baum ist dann $\tilde{\alpha}_n(T)$.

Laut Voraussetzung sind alle $\tilde{\alpha}_j$ für $1 \leq j < n$ Bijektionen, daher folgt sofort, dass auch $\tilde{\alpha}_n$ eine Bijektion ist. Da alle $\tilde{\alpha}_j$ die Menge der Labels nicht verändern, gilt dies auch für $\tilde{\alpha}_n$. Daraus folgt, dass die Einschränkung von $\tilde{\alpha}_n$ auf \mathcal{T}_n eine Bijektion $\alpha_n : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ ist, welche jeden Baum mit m lokalen Minima auf einen Baum mit m Blättern abbildet.

- Behauptung: Für fixe $j, m \in \mathbb{N}$ und einem Baum $T \in \mathcal{T}_n$ mit $l_j(T) = m$ gilt, dass T unter $\tilde{\alpha}_n$ auf einen Baum $\tilde{\alpha}_n(T)$ abbildet wird, mit $d_j^+(\tilde{\alpha}_n(T)) = m$.

Dies folgt wiederum mittels Induktion:

$n = 1$: trivial

$n > 1$: Wir unterscheiden zwei Fälle nach der Anzahl der Nachbarn des Knotens mit dem größten Label G von T :

- 1. Fall: Die Anzahl der Nachbarn von G ist ungleich j . Dann gilt $l_j(T) = m$ genau dann, wenn alle m Knoten deren Labels größer als exakt j ihrer Nachbarn sind, in einem der Unterbäume mit einem der Kinder von G als Wurzel liegen, sobald Schritt 1 der Konstruktion von $\tilde{\alpha}_n$ ausgeführt wurde. Laut Induktionsvoraussetzung enthalten diese Unterbäume nach Schritt 2 genau m Knoten mit j Kindern. Laut Voraussetzung hat der Knoten G (bzw. W nach Schritt 3) ungleich j Kinder.
- 2. Fall: Der Knoten G hat genau j Kinder. Da G das größte Label trägt, gilt natürlich, dass G einer der m Knoten ist, welcher genau j Nachbarn mit kleinerem Label hat. Das bedeutet, dass es $m - 1$ solche Knoten in den Unterbäumen mit Kindern von G als Wurzel gibt. Nach der Durchführung von Schritt 2 in der Konstruktion von $\tilde{\alpha}_n$ gibt es also $m - 1$ Knoten mit j Kindern in diesen Unterbäumen. Außerdem hat der Knoten G bzw. nach Schritt 3 der Knoten W ebenfalls m Kinder.

□

Beispiel 4.2.2. Hier soll die Funktionsweise von α_n anhand einiger Beispiele mit kleinen n gezeigt werden.

Um einen besseren Überblick zu gewährleisten, sind die lokalen Minima grün gefärbt und die Blätter durch ein Rechteck hervorgehoben.

4 Labelmuster in Bäumen

$n = 1 :$

$$T = \begin{array}{c} \textcircled{1} \end{array} \longrightarrow \boxed{1} = \alpha(T)$$

$n = 2 :$

$$T = \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{1\triangleright} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\triangleright} \boxed{1} \xrightarrow{3\triangleright} \boxed{1} = \alpha(T), \quad T = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \xrightarrow{1\triangleright} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\triangleright} \boxed{1} \xrightarrow{3\triangleright} \boxed{2} = \alpha(T)$$

$n = 3 :$

$$T = \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \xrightarrow{1\triangleright} \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ | \\ \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \xrightarrow{2\triangleright} \boxed{1} \xrightarrow{3\triangleright} \boxed{1} = \alpha(T), \quad T = \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ | \\ \textcircled{2} \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \end{array} \xrightarrow{1\triangleright} \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\triangleright} \boxed{2} \xrightarrow{3\triangleright} \boxed{3} = \alpha(T),$$

$$T = \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{1\triangleright} \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \xrightarrow{2\triangleright} \boxed{3} \xrightarrow{3\triangleright} \boxed{2} = \alpha(T)$$

$n = 4 :$

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \end{array} \xrightarrow{1\triangleright} \begin{array}{c} \textcircled{4} \\ | \\ \textcircled{2} \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \end{array} \xrightarrow{2\triangleright} \boxed{4} \xrightarrow{3\triangleright} \boxed{4}, \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \end{array} \xrightarrow{1\triangleright} \begin{array}{c} \textcircled{4} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\triangleright} \boxed{4} \xrightarrow{3\triangleright} \boxed{3},$$

$$T = \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \xrightarrow{1\triangleright} \begin{array}{c} \textcircled{4} \\ / \quad \backslash \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\triangleright} \boxed{2} \xrightarrow{3\triangleright} \boxed{2} = \alpha(T)$$

Definition 4.2.3. Sei T ein Baum.

Dann heißt

$(d_0^+(T), d_1^+(T), \dots, d_{n-1}^+(T))$ **Out-degree-profile** und
 $(l_0(T), l_1(T), \dots, l_{n-1}(T))$ **Label-relation-profile**.

Korollar 4.2.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m_0, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}_0$ beliebig.

Dann gilt:

Die Anzahl der Bäume mit n Knoten und Out-degree-profile (m_0, \dots, m_{n-1}) entspricht genau der Anzahl der Bäume mit n Knoten und Label-relation-profile (m_0, \dots, m_{n-1}) .

Beweis:

Ist eine unmittelbare Folgerung von Lemma 4.2.1. □

Lemma 4.2.2. Sei M_n die Zufallsvariable welche die Anzahl der lokalen Minima eines beliebigen Baumes mit n Knoten zählt.

Dann gilt:

M_n ist normalverteilt mit Parametern

- $\mathbb{E}(M_n) \sim \frac{n}{e}$,
- $\mathbb{V}(M_n) \sim \left(\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2}\right)n$ und
- $\frac{M_n - \mathbb{E}(M_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(M_n)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, 1)$.

Für den Beweis dieses Lemmas verwenden wir folgenden Satz aus [DrGb, 1999], welcher hier ohne Beweis angeführt wird.

Satz 4.2.2. Sei L_{nk_i} die Anzahl aller Knoten mit k_i Nachbarknoten eines beliebigen ungeordneten markierten Baumes mit n Knoten, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_M)$ ein Vektor mit M positiven ganzen Zahlen und $\mathbf{L}_{n\mathbf{k}} := (L_{nk_1}, \dots, L_{nk_M})$.

Weiters sei

$$\mu_{\mathbf{k}} = (\mu_{k_i})_{i=1, \dots, M} = \left(\frac{1}{e} \frac{1}{(k_i - 1)!} \right),$$

$$\Sigma = (\sigma_{i,j})_{i,j=1, \dots, M} = \left(-\frac{1 + (k_i - 2)(k_j - 2)}{e^2 (k_i - 1)! (k_j - 1)!} + \delta_{ij} \frac{1}{e (k_i - 1)!} \right).$$

Dann gilt, dass $\det \Sigma > 0$ und $\mathbf{L}_{n\mathbf{k}}$ asymptotisch normalverteilt ist.

Außerdem gilt für den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix

$$\mathbb{E}(\mathbf{L}_{n\mathbf{k}}) \sim \mu_{\mathbf{k}} n \quad \text{und} \quad \text{Cov}(\mathbf{L}_{n\mathbf{k}}) \sim \Sigma n.$$

Beweis: [Lemma 4.2.2]

Aus Lemma 4.2.1 ist klar, dass es äquivalent ist, statt M_n die Anzahl aller Blätter eines beliebigen Baumes zu betrachten (= Knoten mit genau einem Nachbarknoten). Mittels Satz 4.2.2 und dessen Notation (sei oBdA $k_1 = 1$) folgt somit

$$\mathbb{E}(M_n) = \mu_{1,1} n = \frac{n}{e}$$

$$\mathbb{V}(M_n) = \sigma_{1,1} = \left(-\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e} \right) n.$$

Da \mathbf{L}_{nk} normalverteilt ist, gilt dies auch für M_n .

Daher gilt außerdem

$$\frac{M_n - \mathbb{E}(M_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(M_n)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, 1).$$

□

4.2.2 Geordnete Bäume

Wenn wir in diesem Kapitel von Bäumen reden, sind - sofern nicht anders angegeben - geordnete markierte Bäume gemeint.

Satz 4.2.3. *Sei M_n die Zufallsvariable, welche die Anzahl der lokalen Minima in einem beliebigen Baum mit n Knoten zählt.*

Dann ist M_n gleich in Verteilung, wie die direkte Summe n unabhängiger Bernoulli verteilter Zufallsvariablen:

$$M_n \stackrel{(d)}{=} M_n^{(1)} \oplus M_n^{(2)} \oplus \dots \oplus M_n^{(n)}.$$

Dabei gilt für $1 \leq k \leq n$, dass $M_n^{(k)}$ $\binom{n-k}{n+k-2}$ -Bernoulli verteilt ist.

Außerdem gilt

$$M_n^{(k)} \stackrel{(d)}{=} \mathbb{1}(\mathcal{M}_n^{(k)}).$$

Wobei $\mathcal{M}_n^{(k)}$ jenes Ereignis beschreibt, bei welchem in einem Baum mit n Knoten der Knoten mit Label k ein lokales Minimum ist.

$\mathbb{1}(\mathcal{M}_n^{(k)})$ ist die entsprechende Indikatorfunktion.

Beweis:

- Behauptung: $M_n \stackrel{(d)}{=} M_n^{(1)} \oplus M_n^{(2)} \oplus \dots \oplus M_n^{(n)}$.

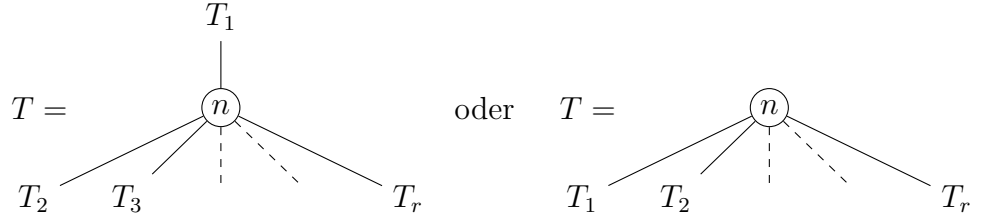
Wir betrachten für jeden Baum T mit n inneren Knoten folgende Zerlegung anhand des Knotens n , dabei sei r die Anzahl der Nachbarn von n .

Im geordneten Fall müssen nur die zwei simplen Fälle unterschieden werden:

1. Die Wurzel von T ist n : Dann bilden die Unterbäume T_1, \dots, T_r von T , mit den Kindern von n als Wurzel, einen geordneten Wald.
2. Die Wurzel von T ist nicht n : Dann sei T_1 jener Unterbaum von T , welcher die Wurzel von T enthält, also „über“ n liegt und T_2, \dots, T_r seien jene Unterbäume mit Kindern von n als Wurzel. Wieder bilden die Unterbäume T_1, \dots, T_n einen geordneten Wald.

Das bedeutet, für einen beliebigen Baum T gilt

4 Labelmuster in Bäumen



Die lokalen Minima von T liegen alle in diesen Unterbäumen. Somit kann für die Polynome $T_n(v) = \sum_{m \geq 0} T_{n,m} v^m$ folgende rekursive Darstellung gewählt werden:

$$T_n(v) = \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 1 \\ n_1 + \dots + n_r = n-1}} \binom{n-1}{n_1, \dots, n_r} 2n_1 T_{n_1}(v) T_{n_2}(v) \cdots T_{n_r}(v), \quad n \geq 2,$$

$$T_1(v) = v.$$

Erklärung der Komponenten:

$2n_1$: Anzahl der Möglichkeiten den Knoten n mit T_1 zu verbinden, dabei ist die Anordnung der Kinder jedes Knotens zu beachten:

Sei n_1 die Anzahl der Kinder von T_1 , dann gibt es

$$\# \{\text{Knoten in } T_1\} + \# \{\text{Kanten in } T_1\} = n_1 + n_1 - 1 = 2n_1 - 1$$

Möglichkeiten n an einen der n_1 Knoten als Kind und eine Möglichkeit n als neue Wurzel von T_1 anzuhängen.

Wieder erweitern wir obige Gleichung um $\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$ und summieren über $n \geq 1$ auf. Dies ergibt folgende partielle Differentialgleichung für $T(z, v)$

$$\begin{aligned} T_z(z, v) &= \sum_{n \geq 1} T_n(v) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geq 2} \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 1 \\ n_1 + \dots + n_r = n-1}} \frac{2n_1 T_{n_1}(v) T_{n_2}(v) \cdots T_{n_r}(v)}{n_1! n_2! \cdots n_r!} z^{n-1} + v \\ &= \sum_{n \geq 2} \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 1 \\ n_1 + \dots + n_r = n-1}} \frac{2n_1 T_{n_1}(v) z \cdot z^{n_1-1} T_{n_2}(v) z^{n_2} \cdots T_{n_r}(v) z^{n_r}}{n_1! n_2! \cdots n_r!} + v \\ &= \frac{2z T_z(z, v)}{1 - T(z, v)} + v, \quad \text{mit Randbedingung } T(0, v) = 0. \end{aligned}$$

Eine einfache Umformung mit $T := T(z, v)$ und $T_z := T_z(z, v)$ ergibt

$$(T + 2z - 1)T_z + v(1 - T) = 0.$$

4 Labelmuster in Bäumen

Diese Gleichung ist nicht exakt, da

$$\frac{\partial(T + 2z - 1)}{\partial z} \neq \frac{\partial(v(1 - T))}{\partial T}.$$

Daher wird ein integrierender Faktor $I = I(T)$ mit $I(T)(T + 2z - 1)T_z = I(T)v(1 - T)$ benötigt.

Es soll also gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial(I(T)(T + 2z - 1))}{\partial z} &= \frac{\partial(I(T)v(1 - T))}{\partial T} && \implies \\ 2I(T) &= I_T(T)v(1 - T) - I(T)v. \end{aligned}$$

Umformen ergibt

$$I_T(T) = \frac{I(T) \cdot (2 + v)}{v(1 - T)},$$

woraus folgt

$$I(T) = (1 - T)^{-\frac{2+v}{v}}.$$

Wir erhalten die exakte Differentialgleichung

$$\underbrace{(-(1 - T)^{-\frac{2-v+v}{v}} + (1 - T)^{-\frac{2-v}{v}} 2z)T_z}_{(X)} + \underbrace{(1 - T)^{-\frac{2-v+v}{v}} v}_{(XX)} = 0.$$

Somit ist eine zugehörige Potentialfunktion $F(z, T)$ gegeben durch

$$F(z, T) = vz(1 - T)^{-\frac{2}{v}} + \frac{v(1 - T)^{-\frac{2}{v}+1}}{-2 + v}.$$

(Wie leicht zu überprüfen ist, gilt $\frac{\partial F}{\partial T} = (X)$ und $\frac{\partial F}{\partial z} = (XX)$.)

Eine allgemeine Lösung ist also implizit gegeben durch

$$C(v) = F(z, T(z, v)),$$

mit einer beliebigen Funktion $C(v)$.

Mittels Randbedingung, $T(0, v) = 0$, folgt

$$C(v) = \frac{v}{v - 2}.$$

Es gilt also

$$\frac{v}{v - 2} = vz(1 - T)^{-\frac{2}{v}} + \frac{v(1 - T)^{-\frac{2}{v}+1}}{-2 + v}.$$

Umformung ergibt

$$z = \frac{1 - T(z, v) - (1 - T(z, v))^{\frac{2}{v}}}{2 - v} = \frac{T(z, v)}{\frac{(2-v)T(z,v)}{1 - T(z,v) - (1 - T(z,v))^{\frac{2}{v}}}}.$$

Aus obiger Gleichung erhält man die Darstellung $T(z, v) = z \cdot \phi(T(z, v))$. Dass obiger Ausdruck für $T(z, v) = 0$ und $v = 2$ definiert ist, ist einfach mit der Regel von de l'Hospital nachzuprüfen.

Dass die Voraussetzungen für die Lagrange Inversionsformel erfüllt sind, also $[x^0]\phi(x) \neq 0$ gilt, folgt aus

$$\frac{(2 - v)x}{1 - x - (1 - x)^{\frac{2}{v}}} = \frac{(2 - v)x}{1 - x - \sum_{k \geq 0} \binom{\frac{2}{v}}{k} (-1)^k x^k} = \frac{(2 - v)}{1 - \sum_{k \geq 1} \binom{\frac{2}{v}}{k} (-1)^k x^{k-1}}.$$

In der Reihenentwicklung des Ausdrucks bleibt also ein konstanter Term ungleich 0 erhalten.

Um $T_n(v) = n![z^n]T(z, v)$ zu berechnen kann somit die Lagrange Inversionsformel, Satz 2.0.1, angewendet werden.

Dies ergibt

$$\begin{aligned} [z^n]T(z, v) &= \frac{1}{n} [T^{n-1}] \left(\frac{(2 - v) \cdot T}{1 - T - (1 - T)^{\frac{2}{v}}} \right)^n \\ &= \frac{(2 - v)^n}{n} [T^{-1}] \frac{1}{(1 - T - (1 - T)^{\frac{2}{v}})^n}. \end{aligned}$$

Anwendung von Lemma 2.0.1 ergibt weiters:

$$\begin{aligned} [z^n]T(z, v) &= \frac{(2 - v)^n}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dT}{(1 - T - (1 - T)^{\frac{2}{v}})^n} \\ &= \frac{(2 - v)^n}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dT}{(1 - T)^n \cdot (1 - (1 - T)^{\frac{2-v}{v}})^n}. \end{aligned}$$

Wir verwenden folgende Substitution:

$$S = 1 - (1 - T)^{\frac{2-v}{v}}, \text{ also } T = 1 - (1 - S)^{\frac{v}{2-v}} \text{ und } 1 - T = (1 - S)^{\frac{v}{2-v}}.$$

Somit ist

$$dT = \frac{v}{2 - v} (1 - S)^{\frac{-2+2v}{2-v}} dS.$$

Daraus resultiert abermals mit Lemma 2.0.1

$$\begin{aligned}
 [z^n]T(z, v) &= v \frac{(2-v)^{n-1}}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(1-S)^{\frac{-2+2v}{2-v}}}{S^n(1-S)^{\frac{vn}{2-v}}} dS \\
 &= v \frac{(2-v)^{n-1}}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{S^n(1-S)^{\frac{2-2v+vn}{2-v}}} dS \\
 &= v \frac{(2-v)^{n-1}}{n} [S^{n-1}] \frac{1}{(1-S)^{\frac{2-2v+vn}{2-v}}} \\
 &= v \frac{(2-v)^{n-1}}{n} \binom{n-1 + \frac{2-2v+vn-2+v}{2-v}}{n-1} = v \frac{(2-v)^{n-1}}{n} \binom{n-1 + \frac{vn-v}{2-v}}{n-1}.
 \end{aligned}$$

Nun lässt sich $T_n(v)$ einfach berechnen, denn

$$\begin{aligned}
 T_n(v) &= n! [z^n]T(z, v) \\
 &= v(2-v)^{n-1} \binom{n-1 + \frac{v(n-1)}{2-v}}{n-1} \binom{n-2 + \frac{v(n-1)}{2-v}}{n-2} \cdots \binom{1 + \frac{v(n-1)}{2-v}}{1} \\
 &= v(2(n-1)) \cdot (2(n-2) + v) \cdots (2 + v(n-2)) \\
 &= v \prod_{k=1}^{n-1} (2k + v(n-k-1)).
 \end{aligned}$$

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $p_n(v)$ der Zufallsvariable M_n ist gegeben durch $p_n(v) = \frac{T_n(v)}{T_n}$.

Aus Satz 4.1.2 ist bekannt, dass $T_n = (n-1)! \binom{2(n-1)}{n-1}$.

Somit gilt

$$\begin{aligned}
 p_n(v) &= \frac{v}{(n-1)! \binom{2(n-1)}{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} (2k + v(n-k-1)) = v \frac{\prod_{k=2}^n (2(k-1) + v(n-k))}{(2n-2)(2n-3) \cdots n} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^n (2(k-1) + v(n-k))}{(2n-2)(2n-3) \cdots (n-1)} = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2(k-1)}{n+k-2} + \frac{n-k}{n+k-2} v \right).
 \end{aligned}$$

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $p(t)$ einer (p)-Bernoulli verteilten Zufallsvariablen ist $p \cdot t + (1-p)$.

Sei $M_n^{(k)}$, mit $1 \leq k \leq n$, eine $\left(\frac{n-k}{n+k-2}\right)$ -Bernoulli verteilte Zufallsvariable. Dann ist der k -te Faktor von $p_n(v)$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von $M_n^{(k)}$.

Daraus folgt unmittelbar, dass

$$M_n \stackrel{(d)}{=} M_n^{(1)} \oplus M_n^{(2)} \oplus \dots \oplus M_n^{(n)}.$$

- Wir zeigen $M_n^{(k)} \stackrel{(d)}{=} \mathbb{1}(\mathcal{M}_n^{(k)})$:
Zu zeigen ist also, dass $\mathbb{P}\{\mathcal{M}_n^{(k)}\} = \frac{n-k}{n+k-2}$.

$\mathcal{M}_n^{(k)}$ beschreibt das Event, dass der Knoten mit Label k in einem Baum mit n Knoten ein lokales Minimum ist.

Es gilt also folgende Zerlegung:

$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_n^{(k)}\} = \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}\{\mathcal{M}_n^{(k)} | k \text{ hat } m \text{ Nachbarknoten}\} \mathbb{P}\{k \text{ hat } m \text{ Nachbarknoten}\}$$

Einfache Überlegung ergibt

$$\mathbb{P}\{\mathcal{M}_n^{(k)} | k \text{ hat } m \text{ Nachbarknoten}\} = \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n-1}{m}},$$

denn damit k lokales Minimum ist, müssen aus den $n - k$ verschiedenen Knoten mit Labels echt größer k , m als Nachbarknoten von k ausgewählt werden.

Sei $A_{n,k,m}$ die Anzahl aller Bäume mit n Knoten, bei welchen der Knoten k genau m Nachbarknoten hat.

Dann gilt

$$\mathbb{P}\{k \text{ hat } m \text{ Nachbarknoten}\} = \frac{A_{n,k,m}}{T_n}.$$

Natürlich ist $A_{n,k,m}$ unabhängig vom Knoten k , daher genügt es in weiterer Folge mit $A_{n,n,m}$ zu rechnen.

Um die Notation zu vereinfachen, gilt ab sofort

$$A_{n,m} := A_{n,n,m}.$$

Weiters definieren wir $A(z, v) := \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} A_{n,m} \frac{z^n}{n!} v^m$.

Wir verwenden die gleiche Zerlegung der Bäume, anhand des Knotens mit größtem Label, wie am Beginn des Beweises.

Da $A_{1,m} = \delta_{0,m}$ gilt, folgt

$$A_z(z, v) = \frac{2vT'(z)z}{1 - vT(z)}.$$

Wir verwenden, dass $\log\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!}$.

Somit gilt

$$\begin{aligned} A_{n,m} &= (n-1)! [z^{n-1} v^m] A_z(z, v) \quad \iff \\ \frac{A_{n,m}}{(n-1)!} &= [z^{n-2} v^m] \frac{A_z(z, v)}{z} = (n-1) [z^{n-1} v^m] \int_0^z \frac{A_\zeta(\zeta, v)}{\zeta} d\zeta \\ &= (n-1) [z^{n-1} v^m] \int_0^z \frac{2vT'(\zeta)}{1 - vT(\zeta)} d\zeta = -2(n-1) [z^{n-1} v^m] \log(1 - vT(z)) \\ &= 2(n-1) [z^{n-1} v^m] \log\left(\frac{1}{1 - vT(z)}\right) = 2(n-1) [z^{n-1}] \frac{T(z)^m}{m}. \end{aligned}$$

Aus Bemerkung 4.1.2 folgt $T(z) = \frac{z}{1-T(z)}$. Somit kann die Lagrange Inversionsfor-

mel, Satz 2.0.1, angewendet werden.

Dies ergibt

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2(n-1)}{n-1} [T^{n-2}] \frac{m \cdot T^{m-1}}{m} \frac{1}{(1-T)^{n-1}} \\
 &= 2 [T^{n-m-1}] \frac{1}{(1-T)^{n-1}} = 2 \binom{n-1+n-m-1-1}{n-m-1} \\
 &= 2 \binom{2n-m-3}{n-2}.
 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\mathbb{P} \left\{ \mathcal{M}_n^{(k)} \mid k \text{ hat } m \text{ Nachbarknoten} \right\} = \frac{A_{n,m}}{T_n} = \frac{2 \binom{2n-m-3}{n-2}}{\binom{2(n-1)}{n-1}}$$

und mit der Eigenschaft von Binomialkoeffizienten $\sum_{k=0}^m \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$ folgt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left\{ \mathcal{M}_n^{(k)} \right\} &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n-1}{m}} \cdot \frac{2 \binom{2n-m-3}{n-2}}{\binom{2(n-1)}{n-1}} = \frac{2(n-1)(n-k)!}{(2(n-1))!} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(2n-m-3)!}{(n-k-m)!} \\
 &= \frac{1}{\binom{2n-3}{n+k-3}} \sum_{m=1}^{n-k} \binom{2n-m-3}{n+k-3} = \frac{1}{\binom{2n-3}{n+k-3}} \sum_{m=0}^{n-k-1} \binom{n+k-3+m}{n+k-3} \\
 &= \frac{\binom{2n-3}{n+k-2}}{\binom{2n-3}{n+k-3}} = \frac{n-k}{n+k-2}.
 \end{aligned}$$

□

Satz 4.2.4. Sei M_n die Zufallsvariable, welche die Anzahl der lokalen Minima in einem beliebigen Baum mit n Knoten zählt.

Es gilt:

M_n ist normalverteilt mit folgenden Parametern:

- $\mathbb{E}(M_n) \sim (1 - 2 \log 2)n$,
- $\mathbb{V}(M_n) \sim (-4 + 6 \log 2)n$ und
- $\frac{M_n - \mathbb{E}(M_n)}{\sqrt{\mathbb{V}(M_n)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, 1)$.

Beweis:

Wir verwenden die im vorigen Satz gezeigten Eigenschaften von M_n , nämlich dass $M_n \stackrel{(d)}{=} M_n^{(1)} \oplus M_n^{(2)} \oplus \dots \oplus M_n^{(n)}$, mit $1 \leq k \leq n$ und dass $M_n^{(k)} \left(\frac{n-k}{n+k-2} \right)$ -Bernoulli verteilt ist.

- Dadurch gilt

$$\mu_n := \mathbb{E}(M_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(M_n^{(k)}) = \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n+k-2}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n+k-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} dx = -1 + 2 \log 2. \end{aligned}$$

- Ähnlich funktioniert es auch mit der Varianz σ_n^2 :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n^2}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n+k-2} \left(1 - \frac{n-k}{n+k-2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n-k}{n+k} \left(1 - \frac{n-k}{n+k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} \left(1 - \frac{1 - \frac{k}{n}}{1 + \frac{k}{n}} \right) \\ &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} \left(1 - \frac{1-x}{1+x} \right) dx = -4 + 6 \log 2. \end{aligned}$$

- Wir zeigen $\frac{M_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, 1)$, durch Beweis, dass die Kumulanten $\kappa_i(\tilde{M}_n)$, $i \in \mathbb{N}$, der normalisierten und zentralisierten Zufallsvariable $\tilde{M}_n := \frac{M_n - \mu_n}{\sigma_n}$ gegen die Kumulanten der Standardnormalverteilung ($\kappa_1 = 0, \kappa_2 = 1, \kappa_i = 0, \forall i \geq 3$) konvergieren.

Laut Definition der Kumulanten, Definition 4.1.8, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\kappa_1(\tilde{M}_n) = \mathbb{E}(\tilde{M}_n) = 0, \quad \kappa_2(\tilde{M}_n) = \mathbb{V}(\tilde{M}_n) = 1.$$

Sei $m \geq 3$ und X_p eine (p) -Bernoulli verteilte Zufallsvariable.

Dann gilt

$$\kappa_m(X_p) = [t^m] \log \left(\mathbb{E}(e^{tX_p}) \right) = [t^m] \log \left(1 + p(e^t - 1) \right).$$

Das bedeutet $\kappa_m(X_p)$ ist ein Polynom in p und als solches für $0 \leq p \leq 1$ gleichmäßig beschränkt.

Aufgrund der Homogenität und Additivität von Kumulanten und der Tatsache, dass $M_n \stackrel{(d)}{=} M_n^{(1)} \oplus M_n^{(2)} \oplus \dots \oplus M_n^{(n)}$ folgt weiters

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_m(\tilde{M}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\kappa_m(M_n)}{\sigma_n^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \kappa_m(M_n^{(k)})}{\sigma_n^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{O}(n)}{\sigma_n^m} = 0$$

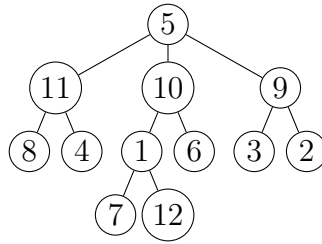
Die letzte Gleichung gilt, da $\sigma_n^m = (c \cdot n)^m \gg n$ mit $c > 0$.

□

4.3 Up-down alternierende Bäume

Definition 4.3.1. Ein Baum T mit v_1 als Label der Wurzel heißt **up-down alternierend**, wenn die Labels v_1, v_2, \dots auf jedem Pfad von der Wurzel abwärts die Bedingung $v_1 < v_2 > v_3 < v_4 > \dots$ erfüllen.

Beispiel 4.3.1. Dies ist ein Beispiel eines up-down alternierenden Baumes mit 12 Knoten:



Satz 4.3.1. Sei T ein beliebiger unmarkierter geordneter Baum mit n Knoten.

Bezeichne

$u(T)$...die Anzahl der markierten up-down alternierenden Kopien von T und
 $l_m(T)$...die Anzahl der markierten Kopien von T mit m lokalen Minima.

Dann gilt

$$2^n u(T) = \sum_{m \geq 0} 2^m l_m(T).$$

Beweis:

Folgende Notation wird verwendet:

\mathcal{U}_T ...Familie aller zweifärbigen up-down alternierenden Kopien von T , also die Menge aller markierten up-down alternierenden Kopien von T , deren Knoten die Labels $1, \dots, n$ tragen und mit einer von zwei Farben (z.B. grün und weiß) gefärbt sind.

\mathcal{L}_T ...Familie aller markierten zweifärbigen Kopien von T , mit der Einschränkung, dass nur Knoten welche lokales Minimum sind, auch die Farbe grün tragen dürfen. Alle anderen tragen die Farbe weiß.

Damit gelten folgende Zusammenhänge:

$$2^n u(T) = |\mathcal{U}(T)| \text{ und } \sum_{m \geq 0} 2^m l_m(T) = |\mathcal{L}(T)|.$$

Um den Satz zu beweisen, genügt es also eine Bijektion der beiden Familien \mathcal{U}_T und \mathcal{L}_T anzugeben.

Wir zeigen, dass eine solche Bijektion $\phi_T : \mathcal{L}_T \rightarrow \mathcal{U}_T$ existiert.

Dazu verwenden wir eine Hilfsbijektion $\tilde{\phi}_T : \tilde{\mathcal{L}}_T \rightarrow \tilde{\mathcal{U}}_T$ mit

$\tilde{\mathcal{L}}_T$...Familie welche wie \mathcal{L}_T konstruiert wird, mit dem Unterschied, dass die Knoten

mit beliebigen paarweise disjunkten ganzen Zahlen markiert sind und

$\tilde{\mathcal{U}}_T$...Familie welche wie \mathcal{U}_T konstruiert wird, mit dem Unterschied, dass die Knoten mit beliebigen paarweise disjunkten ganzen Zahlen markiert sind.

Wir konstruieren die Bijektion $\tilde{\phi}_T$ so, dass sich die Menge der Knotenlabels unter der Abbildung nicht ändert.

Die gesuchte Bijektion ϕ_T ist somit die Einschränkung von $\tilde{\phi}_T$ auf \mathcal{L}_T .

Wir erzeugen $\tilde{\phi}_T$ durch Induktion:

$n = 1$:

Sei T ein Baum aus nur einem Knoten. In diesem Fall gilt natürlich $\tilde{\mathcal{U}}_T = \tilde{\mathcal{L}}_T$, da jeder einzelne Knoten sowohl lokales Minimum als auch ein up-down alternierender Baum ist und somit in beiden Fällen in beiden Farben gefärbt werden kann.

$\tilde{\phi}_T$ ist in dem Fall also die Identitätsabbildung.

$n > 1$:

Sei T ein Baum mit n Knoten.

Induktionsvoraussetzung: Wir kennen bereits die Bijektionen $\tilde{\phi}_{T'}$ aller geordneten Bäume T' mit weniger als n Knoten.

Für T definieren wir dann für jede zweifarbige markierte Kopie $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{L}}_T$ von T den Baum $\tilde{\phi}(\tilde{T})$ wie folgt:

1. Wir zerlegen \tilde{T} in eine Folge von Unterbäumen:

Sei G das größte Label in \tilde{T} . Klarerweise ist G weiß gefärbt, da es unmöglich lokales Minimum sein kann.

Wird der Knoten G von \tilde{T} entfernt, zerfällt \tilde{T} in einen geordneten Wald $(\tilde{T}_0, \dots, \tilde{T}_r)$ mit $r + 1$ Bäumen. Dabei seien $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_r$ (falls vorhanden) die Unterbäume mit den Kindern von G als Wurzel und \tilde{T}_0 sei jener Unterbaum (sofern G nicht Wurzel von \tilde{T} ist) welcher die Wurzel von \tilde{T} enthält.

Für $0 \leq k \leq r$ ist $\tilde{T}_k \in \tilde{\mathcal{L}}_{T_k}$. T_k sei der \tilde{T}_k entsprechende unmarkierte Baum. Klarerweise hat T_k weniger als n Knoten. Somit existiert laut Voraussetzung eine Abbildung $\tilde{\phi}_{T_k}$ mit $\tilde{\phi}_{T_k}(\tilde{T}_k) \in \tilde{\mathcal{U}}_{T_k}$.

Dadurch erhalten wir einen geordneten Wald mit $r + 1$ zweifarbigen up-down alternierenden Bäumen $(\tilde{\phi}_{T_0}(\tilde{T}_0), \dots, \tilde{\phi}_{T_r}(\tilde{T}_r))$.

2. Diese Bäume müssen jetzt so zusammengefügt werden, dass insgesamt ein up-down alternierenden Baum entsteht. Dazu wird folgende Fallunterscheidung benötigt:

- a) Auf dem Pfad von der Wurzel bis zum Knoten G gibt es ungerade viele Kanten:

In diesem „einfachen“ Fall kann der Wald $(\tilde{\phi}_{T_0}(\tilde{T}_0), \dots, \tilde{\phi}_{T_r}(\tilde{T}_r))$ einfach zu einem Baum verschmolzen werden, indem die Bäume $\tilde{\phi}_{T_1}(\tilde{T}_1), \dots, \tilde{\phi}_{T_r}(\tilde{T}_r)$ in der gleichen Reihenfolge wie im ursprünglichen Baum \tilde{T} mit G verbunden werden. Sei (sofern vorhanden) v der Elternknoten von G in \tilde{T} - hier wird der Knoten nicht mit seinem Label sondern mit seiner Position identifiziert - dann wird G wieder zu einem Kind von v , an der genau selben Position wie

in \tilde{T} .

Somit wurde ein Baum aus $\tilde{\mathcal{U}}_T$ erzeugt.

Um nachvollziehen zu können welcher Fall eingetreten ist, wird der Knoten G grün gefärbt.

- b) Auf dem Pfad von der Wurzel bis zum Knoten G gibt es gerade viele Kanten: In diesem etwas komplizierteren Fall ist einfaches Zusammenschmelzen der Bäume nicht zielführend.

Folgende Schritte werden durchgeführt:

- i. Wir erzeugen einen down-up alternierenden Baum: Im Baum $\tilde{\phi}_{T_0}(\tilde{T}_0)$ wird das größte Label mit dem kleinsten vertauscht, das zweitgrößte Label mit dem zweitkleinsten usw.. Der so erhaltene Baum sei $\hat{\phi}_{T_0}(\tilde{T}_0)$. Dann wird der Wald $(\hat{\phi}_{T_0}(\tilde{T}_0), \tilde{\phi}_{T_1}(\tilde{T}_1), \dots, \tilde{\phi}_{T_r}(\tilde{T}_r))$ nun wie im Punkt a) zu einem Baum verschmolzen.
- ii. Um aus diesem Baum einen up-down alternierenden zu machen, wird nun das größte Label mit dem kleinsten vertauscht, das zweitgrößte mit dem zweitkleinsten usw..
Das Resultat sei $\tilde{\phi}_T(\tilde{T})$ - ein Baum aus $\tilde{\mathcal{U}}_T$. Um hervorzuheben, dass dieser Fall eingetreten ist, bleibt der Knoten G weiß gefärbt.

Dass $\tilde{\phi}_T$ injektiv ist, folgt sofort aus der Tatsache, dass dies alle $\tilde{\phi}_{T_k}$, mit $1 \leq k \leq r$, sind.

Die Surjektivität von $\tilde{\phi}_T$ folgt aus der Surjektivität der Abbildungen $\tilde{\phi}_{T_k}$, mit $1 \leq k \leq r$ und der Tatsache, dass wir je nach Fall den Knoten G unterschiedlich färben.

Außerdem folgt aus der Induktionvoraussetzung, dass unter $\tilde{\phi}_{T_k}$, mit $1 \leq k \leq r$, die Menge der Labels nicht geändert wird. Somit gilt das auch für $\tilde{\phi}_T$.

Deshalb ist ϕ_T als Einschränkung von $\tilde{\phi}_T$ auf \mathcal{U}_T eine Bijektion, welche das Gewünschte leistet.

□

Beispiel 4.3.2. Einige Beispiele sollen die Funktionsweise obiger Rekursion für kleine n veranschaulichen:

$n = 1$:

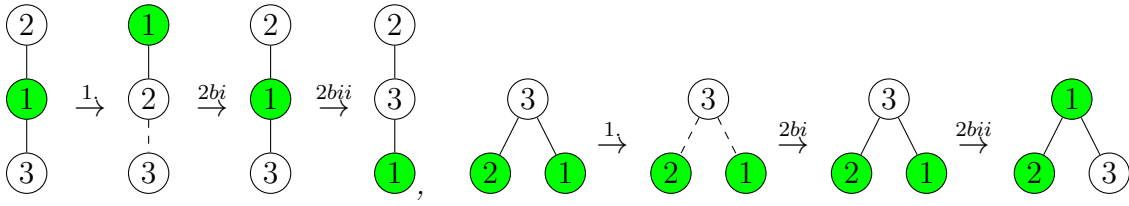
$$\tilde{T} = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} = \phi_T(\tilde{T}), \quad \tilde{T} = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} = \phi_T(\tilde{T})$$

$n = 2$:

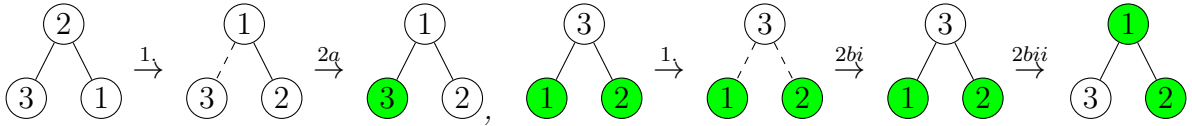
$$\begin{array}{l} \tilde{T} = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \xrightarrow{1\downarrow} \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \xrightarrow{2\uparrow} \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} = \phi_T(\tilde{T}), \quad \tilde{T} = \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{1\downarrow} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\uparrow} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\uparrow} \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} = \phi_T(\tilde{T}) \\ \tilde{T} = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \xrightarrow{1\downarrow} \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \xrightarrow{2\uparrow} \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} = \phi_T(\tilde{T}), \quad \tilde{T} = \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{1\downarrow} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\uparrow} \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \xrightarrow{2\uparrow} \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} = \phi_T(\tilde{T}) \end{array}$$

4 Labelmuster in Bäumen

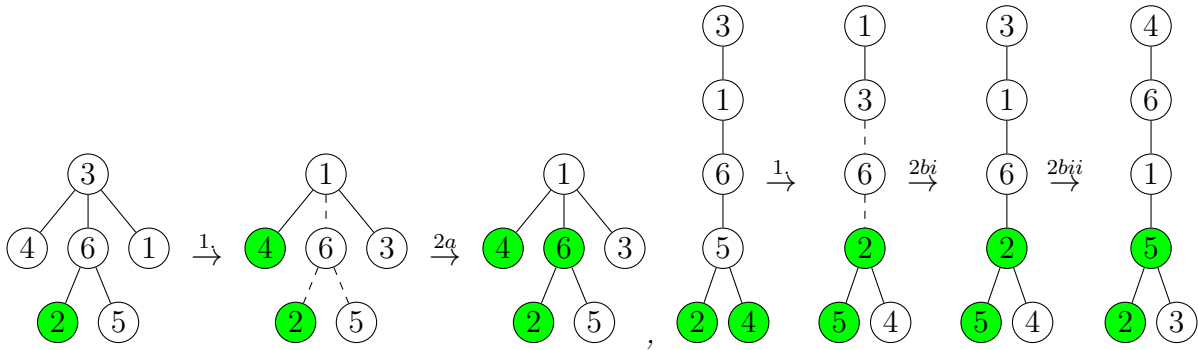
$n = 3$:



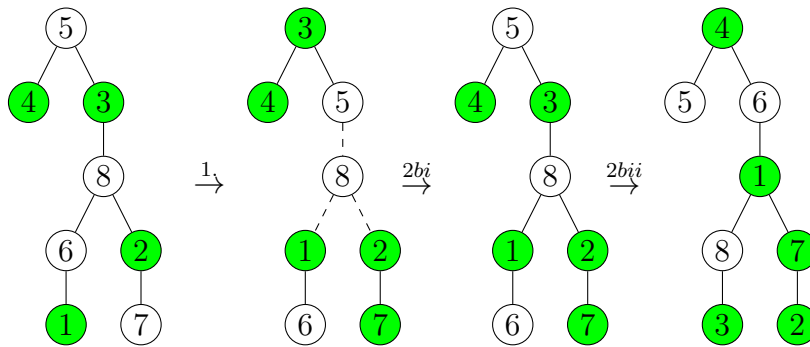
,



$n = 6$:



$n = 8$:



Aus obigen Ergebnissen folgt folgendes wichtiges Resultat, welches auch den Zusammenhang zwischen der Anzahl alternierender up-down Bäume und der Anzahl von Bäumen mit einer gewissen Anzahl lokaler Minima aufzeigt:

Lemma 4.3.1. *Sei U_n die Anzahl der alternierenden up-down geordneten bzw. ungeordneten Bäumen mit n Knoten.*

Dann gilt

$$U_n = \sum_{m \geq 0} T_{n,m} 2^{m-n}.$$

$T_{n,m}$ bezeichne hier, je nachdem ob geordnete oder ungeordnete Bäume betrachtet werden, die Anzahl der geordneten bzw. ungeordneten Bäume mit n Knoten und genau m lokalen Minima.

Beweis:

Sei T ein beliebiger unmarkierter Baum.

$u(T)$... die Anzahl geordneter markierter up-down alternierender Kopien von T ,

\mathcal{N}_n ... die Menge aller unmarkierter geordneter Wurzelbäume mit n Knoten.

$l_m(T)$...die Anzahl der markierten Kopien von T mit m lokalen Minima.

Wir unterscheiden folgende Fälle:

- Fall 1: ungeordnete Bäume

Für einen Knoten $v \in T$ definieren wir weiters:

$d(v)$... Anzahl der Kinder von v in T ,

$\psi_{d(v)} := \frac{1}{d(v)!}$ und

$g(T) := \prod_{v \in T} \psi_{d(v)}$.

Dann folgt mit Satz 4.3.1

$$\begin{aligned} 2^n U_n &= 2^n \sum_{T \in \mathcal{N}_n} g(T) u(T) = \sum_{T \in \mathcal{N}_n} g(T) \cdot 2^n u(T) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{N}_n} g(T) \sum_{m \geq 0} 2^m l_m(T) = \sum_{m \geq 0} 2^m \sum_{T \in \mathcal{N}_n} g(T) l_m(T) \\ &= \sum_{m \geq 0} 2^m T_{n,m}. \end{aligned}$$

- Fall 2: geordnete Bäume

Es folgt ebenfalls mit Satz 4.3.1

$$\begin{aligned} 2^n U_n &= \sum_{T \in \mathcal{N}_n} 2^n u(T) = \sum_{T \in \mathcal{N}_n} \sum_{m \geq 0} 2^m l_m(T) \\ &= \sum_{m \geq 0} 2^m T_{n,m}. \end{aligned}$$

□

In [KuPa, 2010] wird folgender Satz gezeigt:

Satz 4.3.2. Sei U_n die Anzahl aller ungeordneten alternierenden up-down Bäume mit n Knoten und G_n die Anzahl aller geordneten alternierenden up-down Bäume mit n Knoten.

Dann gilt

$$U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^{n-1} \text{ und}$$
$$G_n = (n-1)^{n-1}.$$

4.4 Maximal-aufsteigende Unterbäume

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Anzahl maximal aufsteigender Unterbäume in Bäumen.

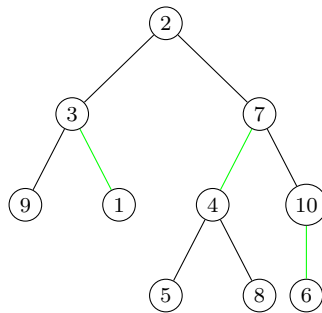
Definition 4.4.1. Sei T ein Baum mit n Knoten und \tilde{T} ein Unterbaum von T . Dann heißt \tilde{T} **maximal aufsteigender Unterbaum** von T , wenn die Labels in jedem Pfad von einem Blatt zur Wurzel in \tilde{T} ansteigen und kein weiterer Knoten von T zu \tilde{T} hinzugefügt werden kann, um diese Eigenschaft zu erhalten.

Bemerkung 4.4.1. Jeder markierte Wurzelbaum (mit paarweise verschiedenen Labels für die Knoten) besitzt eine eindeutige Zerlegung in maximal-aufsteigende Unterbäume.

Bemerkung 4.4.2. Jede down-Kante (siehe Definition 4.1.4) in einem Baum generiert einen neuen maximal-aufsteigenden Unterbaum. Es gilt daher für einen Baum T

$$|\{\text{down-Kanten von } T\}| + 1 = |\{\text{maximal aufsteigende Unterbäume in } T\}|.$$

Beispiel 4.4.1. Folgender Baum lässt sich eindeutig in vier maximal-aufsteigende Unterbäume zerlegen. Die drei down-Kanten sind grün gefärbt:



4.4.1 Ungeordnete Bäume

In diesem Abschnitt ist - sofern nicht anders angegeben - unter dem Begriff Baum ein ungeordneter markierter Baum gemeint.

Um die genaue Anzahl der maximal aufsteigenden Unterbäume zu berechnen, benötigen wir zunächst folgende Definition sowie den darauf folgenden Satz aus [ElKh, 1984].

Definition 4.4.2. Sei A_n eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$, mit $i, j = 1, \dots, n$, sodass $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} = i$. Dann heißt eine Folge von Einträgen $(\alpha_{1j_1}, \alpha_{2j_2}, \dots, \alpha_{nj_n})$, mit $j_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, **Pfad der Ordnung** k , mit $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, wenn

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij_i} = k.$$

Wir verwenden in diesem Abschnitt folgende Notation:

$s(n, m)$... bezeichne die Stirling Zahlen erster Art.

Es gilt also $\sum_{m=0}^n s(n, m)x^m = x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-n+1)$, sowie die Rekursionsformel $s(n+1, m) = s(n, m-1) - n \cdot s(n, m)$.

$g^k(n)$... bezeichne die Anzahl aller Pfade der Ordnung k .

Satz 4.4.1. *Es gilt*

$$g^k(n) = (-1)^k \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} s(n+1, n+1-m) \cdot n^{n-m}, \text{ für } k = 0, \dots, n$$

sowie

$$G(v) := \sum_{k=0}^{n+1} g^k(n)v^k = \prod_{j=1}^n (n-j(1-v)).$$

Beweis:

Sei $K \subset [n]$ mit $|K| = k \leq n$.

Es wird folgende Eigenschaft der Stirlingzahlen erster Art verwendet:

$$s(n, k) = (-1)^{n-k} \sum_{0 < i_1 \leq \dots \leq i_{n-k} < n} i_1 i_2 \dots i_{n-k}.$$

$$\text{Sei } L_{n,k} := \sum_K n^{n-k} \prod_{i \in K} i = (-1)^k n^{n-k} s(n+1, n+1-k).$$

Aus dem Inklusions-Exklusions Prinzip folgt

$$g^k(n) = \sum_{m=k}^n (-1)^{m-k} \binom{m}{k} L_{n,m} = (-1)^k \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} s(n+1, n+1-m) \cdot n^{n-m}.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} G(v) &= \sum_{k=0}^{n+1} g^k(n)v^k = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k v^k \sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} s(n+1, n+1-m) \cdot n^{n-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} s(n+1, n+1-m) \cdot n^{n-m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} v^k \\ &= \sum_{m=0}^{n+1} s(n+1, n+1-m) n^{n-m} (1-v)^m = \sum_{j=0}^{n+1} s(n+1, j) n^{j-1} (1-v)^{n+1-j} \\ &= \frac{(1-v)^{n+1}}{n} \sum_{j=0}^{n+1} s(n+1, j) \left(\frac{n}{1-v} \right)^n \\ &= \frac{(1-v)^{n+1}}{n} \left(\frac{n}{1-v} \right) \left(\frac{n}{1-v} - 1 \right) \dots \left(\frac{n}{1-v} - n \right) \\ &= \frac{(1-v)^{n+1}}{n} \left(\frac{n}{1-v} \right) \left(\frac{n-(1-v)}{1-v} \right) \dots \left(\frac{n-n(1-v)}{1-v} \right) \\ &= \prod_{j=1}^n (n-j(1-v)). \end{aligned}$$

□

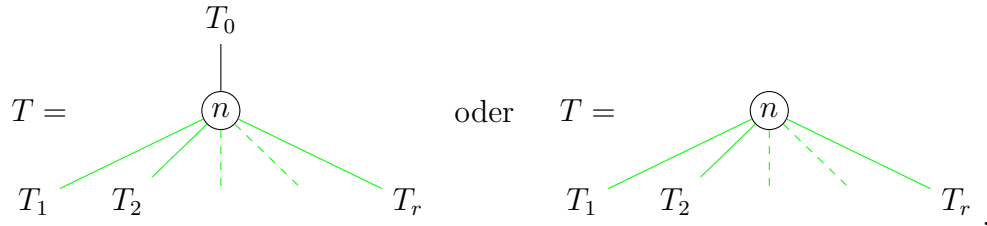
Satz 4.4.2. Sei M_n die Zufallsvariable, welche die Anzahl der maximalen Unterbäume in einem zufälligen Baum mit n Knoten zählt.

Dann gilt

$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{(-1)^{m-1}}{n^{n-1}} \sum_{j=m-1}^{n-1} \binom{j}{m-1} s(n, n-j) \cdot (n-1)^{n-1-j}.$$

Beweis:

Sei T ein Baum mit n Knoten. Wie im Fall der lokalen Minima, siehe Satz 4.2.1, wird folgende Zerlegung anhand des Knoten n betrachtet, wobei r wieder für die Anzahl der Kinder von n steht:



Dabei sind alle grünen Kanten sicher down-Kanten.

Im ersten Fall ist der Knoten n Teil eines maximalen Unterbaumes von T_0 , in welchem sicher kein Kind von n enthalten ist.

Im Fall, dass n Wurzel ist, ist sicher der Knoten n alleine ein maximaler Unterbaum.

Daher gilt für das Polynom $T_n(v) = \sum_{m \geq 0} T_{n,m} v^m$ folgende rekursive Darstellung:

$$\begin{aligned} T_n(v) &= \sum_{r \geq 0} \sum_{\substack{n_0, n_1, \dots, n_r \geq 1, \\ n_0 + \dots + n_r = n-1}} \binom{n-1}{n_0, \dots, n_r} n_0 T_{n_0} \frac{T_1(v) \cdot \dots \cdot T_r(v)}{r!} \\ &\quad + v \cdot \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 1, \\ n_1 + \dots + n_r = n-1}} \binom{n-1}{n_1, \dots, n_r} \frac{T_1(v) \cdot \dots \cdot T_r(v)}{r!}, \quad n \geq 2, \\ T_1(v) &= v. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir, analog zu Satz 4.2.1, die folgende partielle Differentialgleichung:

$$T_z(z, v) = ze^{T(z,v)} T_z(z, v) + ve^{T(z,v)} + v - v, \text{ mit Randbedingung } T(0, v) = 0.$$

Umformen ergibt die nicht exakte Differentialgleichung

$$T_z(z, v)(-1 + ze^{T(z,v)}) + ve^{T(z,v)} = 0.$$

4 Labelmuster in Bäumen

Deshalb verwenden wir einen integrierenden Faktor $I = I(T)$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{\partial(I(T)(ze^T - 1))}{\partial z} &= \frac{\partial(I(T)(ve^T))}{\partial T} \iff \\ e^T \cdot I(T) &= I(T)_T \cdot v \cdot e^T + I(T) \cdot v \cdot e^T \\ I(T)_T &= I(T) \frac{1-v}{v}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$I(T) = e^{\frac{1-v}{v}T}.$$

Dies ergibt folgende exakte Differenzialgleichung

$$\left(-e^{\frac{1-v}{v}T} + ze^{\frac{1}{v}T}\right) T_z + ve^{\frac{1}{v}T} = 0.$$

Eine zugehörige Potentialfunktion $F(z, T)$ ist gegeben durch

$$F(z, T) = zve^{\frac{1}{v}T} - \frac{v}{1-v}e^{\frac{1-v}{v}T}.$$

Eine allgemeine Lösung ist implizit gegeben durch

$$C(v) = F(z, T(z, v)) = zve^{\frac{1}{v}T(z, v)} - \frac{v}{1-v}e^{\frac{1-v}{v}T(z, v)}.$$

Unter Verwendung der Randbedingung $T(0, v) = 0$ folgt

$$C(v) = -\frac{v}{1-v}.$$

Es gilt also

$$-\frac{v}{1-v} = zve^{\frac{1}{v}T(z, v)} - \frac{v}{1-v}e^{\frac{1-v}{v}T(z, v)}.$$

Woraus folgt

$$z = \frac{e^{-T(z, v)} - e^{-\frac{1}{v}T(z, v)}}{1-v} = \frac{T(z, v)}{\frac{(1-v)T(z, v)}{e^{-T(z, v)} - e^{-\frac{1}{v}T(z, v)}}}.$$

Durch Umformung erhalten wir die Form $T(z, v) = z \cdot \phi(T(z, v))$.

Die Regel von L'Hospital zeigt, dass der Ausdruck für $T(z, v) = 0$ und $v = 1$ definiert ist.

Außerdem gilt

$$\frac{(1-v)x}{e^{-x} - e^{-\frac{x}{v}}} = \frac{(1-v)x}{\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} (-1)^n - \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \frac{1}{v^n} (-1)^n} = \frac{1-v}{\sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n!} (-1)^n - \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{n!} \frac{1}{v^n} (-1)^n}.$$

Daher folgt

$$[x^0] \frac{(1-v)x}{e^{-x} - e^{-\frac{x}{v}}} = \frac{1-v}{-1 + \frac{1}{v}} = v^2.$$

Somit sind alle Voraussetzungen für die Lagrange Inversionsformel, Satz 2.0.1, erfüllt.

Um $T_n(v) = n![z^n]T(z, v)$ zu berechnen, kann diese also angewendet werden:

$$[z^n]T(z, v) = \frac{1}{n} [T^{n-1}] \left(\frac{(1-v)T}{e^{-T} - e^{-\frac{T}{v}}} \right)^n = \frac{(1-v)^n}{n} [T^{-1}] \frac{1}{(e^{-T} - e^{-\frac{T}{v}})^n}.$$

Anwendung von Lemma 2.0.1 ergibt

$$[z^n]T(z, v) = \frac{(1-v)^n}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dT}{(e^{-T} - e^{-\frac{T}{v}})^n} = \frac{(1-v)^n}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dT}{(e^{-T})^n (1 - e^{-\frac{T}{v}+T})^n}.$$

Folgende Substitution wird verwendet:

$$S = 1 - e^{T(1-\frac{1}{v})}, \text{ also gilt } e^{-T} = (1-S)^{\frac{v}{1-v}} \text{ und } dS = -e^{T(1-\frac{1}{v})} \frac{v-1}{v} dT.$$

Somit ist

$$dT = \frac{v}{(1-S)(1-v)} dS.$$

Einsetzen und erneute Anwendung von Lemma 2.0.1 ergibt

$$\begin{aligned} [z^n]T(z, v) &= \frac{(1-v)^{n-1} \cdot v}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dS}{S^n \cdot (1-S)^{\frac{nv}{1-v}+1}} \\ &= \frac{(1-v)^{n-1} \cdot v}{n} [S^{n-1}] \frac{1}{(1-S)^{\frac{nv}{1-v}+1}} \\ &= \frac{(1-v)^{n-1} \cdot v}{n} \binom{n-1 + \frac{nv}{1-v} + 1 - 1}{n-1} = \frac{(1-v)^{n-1} \cdot v}{n} \binom{n-1 + \frac{nv}{1-v}}{n-1}. \end{aligned}$$

Es folgt weiters

$$\begin{aligned} T_n(v) &= n![z^n]T(z, v) = v(n-1)!(1-v)^{n-1} \cdot \frac{\frac{(n-1)(1-v)+nv}{1-v} \frac{(n-2)(1-v)+nv}{1-v} \dots \frac{1 \cdot (1-v)+nv}{1-v}}{(n-1)!} \\ &= v \cdot (n-1+v) \cdot (n-2+2v) \cdot \dots \cdot (n-(n-1) + (n-1)v) \\ &= v \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (n-k+kv). \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} [z^n]T(z, v) &= \frac{v}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} (n + k(v-1)) = \frac{v \cdot (v-1)^{n-1}}{n!} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{v-1} + k \right) \\ &= \frac{v(1-v)^{n-1}}{n} \binom{\frac{n}{v-1} + n - 1}{n-1}. \end{aligned}$$

Also ist

$$T(z, v) = \frac{v}{v-1} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{\frac{n}{v-1} + n - 1}{n-1} (z \cdot (1-v))^n.$$

Um $T_{n,m}$ zu berechnen, verwenden wir das Resultat aus dem vorigen Satz:

$$\prod_{j=1}^n (n - j(1-v)) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} s(n+1, n+1-j) n^{n-j} v^k.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} T_{n,m} &= n! [z^n v^m] T(z, v) = [v^m] v \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j}{k} \cdot s(n, n-j) (n-1)^{n-1-j} v^k \\ &= (-1)^{m-1} \sum_{j=m-1}^{n-1} \binom{j}{m-1} s(n, n-j) (n-1)^{n-1-j}. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort

$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{(-1)^{m-1}}{n^{n-1}} \sum_{j=m-1}^{n-1} \binom{j}{m-1} s(n, n-j) (n-1)^{n-1-j}.$$

□

Wir erhalten folgenden interessanten Zusammenhang:

Folgerung 4.4.1. *Aus den beiden obigen Sätzen folgt*

$$g^{m-1}(n-1) = T_{n,m},$$

wobei die Notation aus Satz 4.4.1 übernommen wird.

4.4.2 Geordnete Bäume

Sofern nicht anders angegeben, ist unter dem Begriff Baum ein markierter geordneter Baum gemeint.

Satz 4.4.3. *Sei M_n die Zufallsvariable, welche die Anzahl der maximalen Unterbäume in einem zufälligen Baum mit n Knoten zählt.*

Dann gilt

$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^{n-1}}.$$

Beweis:

Sei T ein beliebiger Baum mit n Knoten. Wir betrachten dieselbe Zerlegung anhand des Knoten mit größtem Label n , wie im Beweis zu Satz 4.4.2 für den ungeordneten Fall. Ist n Wurzel von T gilt, dass der Knoten n alleine ein maximal aufsteigender Unterbaum von T ist.

In jedem anderen Fall ist n sicher Teil eines maximalen Unterbaumes von T_0 , in welchem kein Kind von n enthalten ist.

Es gibt $2n_0 - 1$ Möglichkeiten den Knoten n mit dem Unterbaum T_0 zu verbinden. Für das Polynom $T_n(v) = \sum_{m \geq 0} T_{n,m} v^m$ gilt daher die rekursive Darstellung:

$$\begin{aligned} T_n(v) &= \sum_{r \geq 0} \sum_{\substack{n_0, n_1, \dots, n_r \geq 1, \\ n_0 + \dots + n_r = n-1}} \binom{n-1}{n_0, \dots, n_r} (2n_0 - 1) T_0(v) T_1(v) \cdot \dots \cdot T_r(v) \\ &\quad + v \cdot \sum_{r \geq 1} \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r \geq 1, \\ n_1 + \dots + n_r = n-1}} \binom{n-1}{n_1, \dots, n_r} T_1(v) \cdot \dots \cdot T_r(v), \quad n \geq 2, \\ T_1(v) &= v. \end{aligned}$$

Dies führt zu folgender partieller Differentialgleichung für $T(z, v)$:

$$\begin{aligned} T_z(z, v) &= \frac{2zT_z(z, v)}{1 - T(z, v)} - \left(\frac{1}{1 - T(z, v)} - 1 \right) + \left(\frac{v}{1 - T(z, v)} - v \right) + v \\ &= \frac{2zT_z(z, v)}{1 - T(z, v)} + \frac{v-1}{1 - T(z, v)} + 1, \text{ mit Randbedingung } T(0, v) = 0. \end{aligned}$$

Umformen ergibt, mit $T := T(z, v)$ und $T_z(z, v) = T_z$, die nicht exakte Differentialgleichung

$$(2z + T - 1)T_z + v - T = 0.$$

Sei $I(T)$ ein integrierender Faktor, für welchen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(I(T)(2z + T - 1))}{\partial z} &= \frac{\partial(I(T)(v - T))}{\partial T} \iff \\ 2I(T) &= I_T(T)(v - T) - I(T) \\ I(T)_T &= \frac{3I(T)}{v - T} \end{aligned}$$

Woraus folgt

$$I(T) = (T - v)^{-3}.$$

4 Labelmuster in Bäumen

Es resultiert folgende exakte Differentialgleichung

$$\left(2z(T-v)^{-3} + (T-1)(T-v)^{-3}\right) T_z - (T-v)^{-2} = 0.$$

Eine zugehörige Potentialfunktion ist

$$F(z, T) = -z(T-v)^{-2} + (T-v)^{-2} \left(\frac{1-v}{2}\right) - (T-v)^{-1}.$$

Eine allgemeine Lösung lautet

$$C(v) = F(z, T(z, v)) = -z(T(z, v) - v)^{-2} + (T(z, v) - v)^{-2} \left(\frac{1-v}{2}\right) - (T(z, v) - v)^{-1}.$$

Mithilfe der Randbedingung $T(0, v) = 0$ erhalten wir als spezielle Lösung

$$C(v) = \frac{1-v}{2v^2} + \frac{1}{v} = \frac{1+v}{2v^2}.$$

Somit gilt

$$\frac{1+v}{2v^2} = -z(T(z, v) - v)^{-2} + (T(z, v) - v)^{-2} \left(\frac{1-v}{2}\right) - (T(z, v) - v)^{-1}.$$

Es folgt

$$T(z, v)^2(-1-v) + 2vT(z, v) - z2v^2 = 0.$$

Mit der Randbedingung folgt, dass die Lösung dieser quadratischen Gleichung lautet

$$T(z, v) = \frac{v}{1+v} - \sqrt{\frac{v^2}{(1+v)^2} - \frac{2zv^2}{1+v}} = \frac{v(1 - \sqrt{1 - 2z(1+v)})}{1+v}.$$

Um die Koeffizienten dieser Gleichung abzulesen, wird folgendes Resultat, für $n \in \mathbb{N}$, verwendet

$$\begin{aligned} [z^n] \frac{1}{\sqrt{1-2z(1+v)}} &= \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n 2^n (1+v)^n \\ &= (1+v)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-1)^n 2^n \\ &= (1+v)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{n!} \frac{2^n \cdot n!}{2^n \cdot n!} = \frac{(1+v)^n}{2^n} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

4 Labelmuster in Bäumen

Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned}
 [z^n]T(z, v) &= \frac{v}{1+v} [z^n] \left(-\sqrt{1-2z(1+v)} \right) = \frac{v}{1+v} [z^n] \frac{2z(1+v) - 1}{\sqrt{1-2z(1+v)}} \\
 &= \frac{v}{1+v} \left([z^{n-1}] \frac{2(1-v)}{\sqrt{1-2z(1+v)}} - [z^n] \frac{1}{\sqrt{1-2z(1+v)}} \right) \\
 &= \frac{v}{1+v} \left(\binom{2(n-1)}{n-1} \frac{(1+v)^n}{2^{n-2}} - \binom{2n}{n} \frac{(v+1)^n}{2^n} \right) \\
 &= \frac{v(1+v)^{n-1}}{2^{n-2}} \binom{2(n-1)}{n-1} \left(1 - \frac{2n-1}{2n} \right).
 \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 T_{n,m} &= n! [z^n v^m] T(z, v) = n! [v^m] \frac{v(1+v)^{n-1}}{2^{n-2}} \binom{2(n-1)}{n-1} \frac{1}{2n} \\
 &= \binom{n-1}{m-1} \binom{2(n-1)}{n-1} \frac{(n-1)!}{2^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Mithilfe von Satz 4.1.2 folgt

$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{T_{n,m}}{(n-1)! \binom{2(n-1)}{n-1}} = \frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^{n-1}}.$$

□

4.5 Maximal-aufsteigende Ketten in Bäumen

In diesem Abschnitt wird ein weiteres Label-Muster in ungeordneten Bäumen untersucht und zwar die Anzahl der aufsteigenden Ketten.

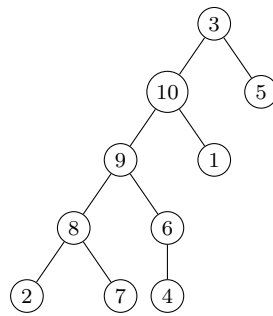
In weiterer Folge ist unter dem Begriff Baum mit n Knoten - sofern nicht anders angegeben - ein ungeordneter Baum gemeint, dessen Knoten paarweise verschiedene Labels $\{1, 2, \dots, n\}$ tragen.

Definition 4.5.1. Sei T ein Baum mit n Knoten v_1, \dots, v_n und zur Wurzel gerichteten Kanten. Wir identifizieren die Knoten mit ihren Labels.

Dann ist $K = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_j})$, mit $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_j \leq n$ und paarweise verschiedenen i_k , eine **maximal aufsteigende Kette** in T , wenn $v_{i_1} \rightarrow v_{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow v_{i_j}$ einen Pfad vom Knoten v_{i_1} in Richtung Wurzel zum Knoten v_{i_j} darstellt, mit $v_{i_1} < v_{i_2} < \dots < v_{i_j}$ und es keine weiteren Knoten in T gibt, welche den Pfad verlängern würden, sodass diese Vorschrift erhalten bleibt.

Beispiel 4.5.1.

Es folgt ein Beispiel eines Baumes mit 6 maximal aufsteigenden Ketten. Es wird an dieser Stelle auf das Einzeichnen gerichteter Kanten verzichtet:



Die maximal aufsteigenden Ketten sind:

$$\{2 - 8 - 9 - 10, 7 - 8 - 9 - 10, 4 - 6 - 9 - 10, 1 - 10, 5, 3\}.$$

Satz 4.5.1. Sei M_n die Zufallsvariable, welche die Anzahl maximaler Ketten in einem zufälligen Baum mit n Knoten zählt.

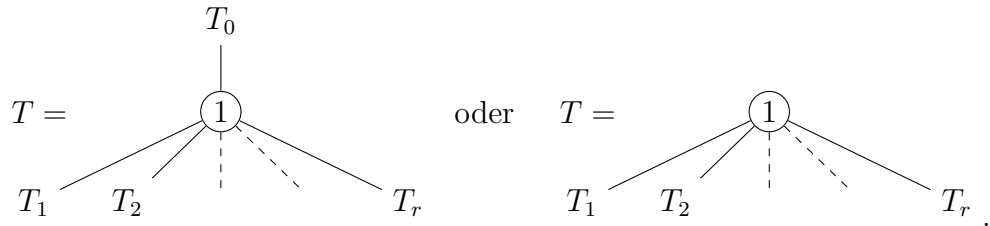
Dann gilt

$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{1}{n^{n-1}} \binom{n-1}{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^{n-1} (-1)^{m-1-k} \binom{m-1}{k}.$$

Beweis:

Um dies zu zeigen, werden wir die Zerlegung eines Baumes anhand des Knotens mit Label 1 betrachten. Dabei sei r die Anzahl der Kinder des Knoten 1 und T_0 sei jener Unterbaum von T , welcher die Wurzel von T enthält, also „über“ dem Knoten 1 liegt. Jeder ungeordnete Baum T lässt sich - bis auf die Reihenfolge - eindeutig darstellen als:

4 Labelmuster in Bäumen



Wobei es für die Anzahl der maximalen Ketten von T folgende Möglichkeiten gibt:

- Der Knoten 1 ist Wurzel von T : Ist der Knoten 1 in einer maximalen Kette enthalten, ist dieser natürlich von allen Knoten der Kette am weitesten von der Wurzel entfernt. Daher ist in diesem Fall der Knoten 1 alleine eine maximale Kette und die Anzahl der maximalen Ketten in T ist

$$1 + \sum_{i=1}^r |\{\text{maximale Ketten in } T_i\}|.$$

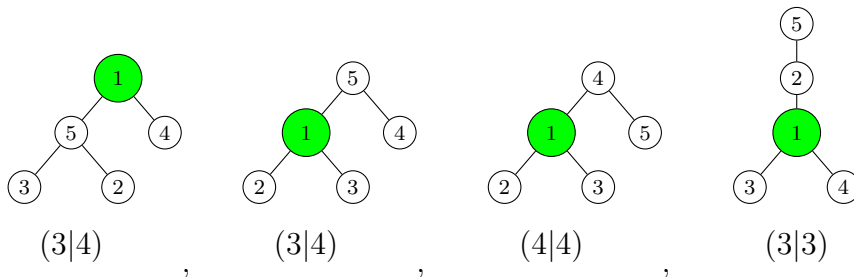
- Der Knoten 1 ist nicht die Wurzel von T : In dem Fall muss zwischen 2 Fällen unterschieden werden:
 - Der Knoten 1 ist am Beginn einer maximalen Kette des Baumes in T_0 : Die Anzahl der maximalen Ketten von T ist dann

$$\sum_{i=0}^r |\{\text{maximale Ketten in } T_i\}|.$$

- Der Knoten 1 ist nicht am Beginn einer maximalen Kette des Baumes T_0 : In dem Fall kommt zu den maximalen Ketten der Unterbäume noch die maximale Kette, in welcher der Knoten 1 enthalten ist dazu. Die Anzahl aller maximalen Ketten von T ist daher

$$1 + \sum_{i=0}^r |\{\text{maximale Ketten in } T_i\}|.$$

Einige Beispiele sollen dies veranschaulichen. Dabei steht in $(a|b)$, a für die Anzahl der Ketten der Unterbäume und b für die Gesamtanzahl aller maximalen Ketten:



4 Labelmuster in Bäumen

Dies führt uns zu folgender partieller Differentialgleichung:

$$T_z(z, v) = \underbrace{v e^{T(z, v)}}_{\text{Fall: 1 ist Wurzel}} + \underbrace{zvT_z(z, v) - v^2 e^{T(z, v)} T_v(z, v) + v e^{T(z, v)} T_v(z, v)}_{\text{Fall: 1 ist nicht Wurzel}}.$$

Wieder gilt $T(0, v) = 0$.

Behauptung: Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$z = \frac{\ln\left(\frac{e^{T(z, v)} - 1 + v}{v}\right)}{e^{T(z, v)}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$T_z(z, v) = \frac{e^{T(z, v)}(e^{T(z, v)} - 1 + v)}{e^{T(z, v)} - \ln\left(\frac{e^{T(z, v)} - 1 + v}{v}\right)(e^{T(z, v)} - 1 + v)}$$

und

$$T_v(z, v) = \frac{e^{T(z, v)} - 1}{v\left(e^{T(z, v)} - \ln\left(\frac{e^{T(z, v)} - 1 + v}{v}\right)(e^{T(z, v)} - 1 + v)\right)}.$$

Dass die Behauptung stimmt und obige Gleichung eine Lösung ist, zeigt das Einsetzen dieser Resultate in die Differentialgleichung.

Es gilt also

$$z = \frac{\ln\left(\frac{e^{T(z, v)} - 1 + v}{v}\right)}{e^{T(z, v)}} = \frac{T(z, v)}{\frac{e^{T(z, v)} T(z, v)}{\ln\left(\frac{e^{T(z, v)} - 1 + v}{v}\right)}}.$$

Die Voraussetzungen für die Lagrange Inversionsformel, Satz 2.0.1, sind erfüllt. Somit gilt

$$[z^n]T(z, v) = \frac{1}{n} [T^{n-1}] \left(\frac{e^T T}{\ln\left(\frac{e^T - 1 + v}{v}\right)} \right)^n = \frac{1}{n} [T^{-1}] \left(\frac{e^T}{\ln\left(\frac{e^T - 1 + v}{v}\right)} \right)^n.$$

Anwendung von Lemma 2.0.1 ergibt weiter

$$[z^n]T(z, v) = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{nT}}{\ln\left(\frac{e^T - 1 + v}{v}\right)^n} dT.$$

Wir betrachten folgende Substitution:

$$S = \ln\left(\frac{e^T - 1 + v}{v}\right), \text{ somit gilt } e^S = \frac{e^T - 1 + v}{v} \text{ und } e^T = v \cdot e^S + 1 - v.$$

Daraus folgt

$$dS = \frac{e^T}{e^T - 1 + v} dT = \frac{v \cdot e^S + 1 - v}{v \cdot e^S} dT \quad \text{und} \quad dT = \frac{v \cdot e^S}{ve^S + 1 - v} dS.$$

Einsetzen und erneute Anwendung von Lemma 2.0.1 ergibt

$$\begin{aligned} [z^n]T(z, v) &= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(v \cdot e^S + 1 - v)^{n-1} \cdot v \cdot e^S}{S^n} dS = \frac{v}{n} [S^{n-1}] (v \cdot e^S + 1 - v)^{n-1} \cdot e^S \\ &= \frac{v}{n} [S^{n-1}] \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} v^k \cdot e^{S(k+1)} \cdot (1-v)^{n-1-k} \\ &= \frac{v}{n} [S^{n-1}] \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sum_{j \geq 0} \frac{S^j (k+1)^j}{j!} \cdot v^k \cdot (1-v)^{n-1-k} \\ &= \frac{v}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (k+1)^{n-1} \cdot v^k \cdot (1-v)^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} T_{n,m} &= n! [z^n v^m] T(z, v) = [v^m] \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (k+1)^{n-1} \cdot v^{k+1} \cdot (1-v)^{n-1-k} \\ &= [v^m] \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (k+1)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-k} \binom{n-1-k}{j} v^{j+k+1} (-1)^j \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{k} \binom{n-1-k}{m-k-1} (k+1)^{n-1} (-1)^{m-k-1} \\ &= \binom{n-1}{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (k+1)^{n-1} (-1)^{m-k-1}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.1.1 folgt sofort

$$\mathbb{P}\{M_n = m\} = \frac{T_{n,m}}{n^{n-1}} = \frac{1}{n^{n-1}} \binom{n-1}{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} (k+1)^{n-1} (-1)^{m-1-k}.$$

□

5

Literaturverzeichnis

- [BaSc, 2005] R. Bacher und G. Schaeffer. On generating series of coloured planar trees. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire*, 55:B55e, 2005.
- [BaPaSe] C. Banderier, A. Panholzer und G. Seitz. Three problems related to label patterns in trees. In Vorbereitung.
- [Bax, 2013] A.M. Baxter. Shape-Wilf-equivalences for vincular patterns. *Advances in Applied Mathematics*, 50(5), 2013.
- [Bil, 1984] P. Billingsley. *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, New York, second edition, 1984.
- [BrPa] M.-L. Bruner und A. Panholzer. Label Patterns in Mappings. In Vorbereitung.
- [Car, 1947] L. Carlitz. Permutations and sequences. *Advances in Mathematics*, 14:92-120, 1947.
- [Com, 1974] L. Comtet. *Advanced Combinatorics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1974.
- [DrGb, 1999] M. Drmota und B. Gittenberger. The distribution of nodes of given degree in random trees. *Journal of Graph Theory*, 31:227-253, 1999.
- [Dot, 2012] V. Dotsenko. Pattern avoidance in labelled trees. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, B67b, 2012.
- [DoJo, 2011] V. Dotsenko und M. Vejdemo-Johansson. Implementing Gröbner bases for operads. *Séminaires et Congrès*, 26: 77-98.
- [DoKh, 2009] V. Dotsenko und A. Khoroshkin. Free resolutions via Gröbner bases, eprint arXiv:0912.4895, 2009.

5 Literaturverzeichnis

- [DotKh, 2013] V. Dotsenko und A. Khoroshkin. Shuffle algebras, homology, and consecutive pattern avoidance. *Algebra and Number Theory*, 7(3): 673-700, 2013.
- [DotKho, 2009] V. Dotsenko und A. Khoroshkin. Gröbner bases for operads. *Duke Mathematical Journal*, 153(2): 363-396, 2010.
- [ElKh, 1984] B. S. El-Desouky und A. M. Khidr. A Symmetric Sum Involving the Stirling Numbers of the First Kind. *European Journal of Combinatorics*, 5:51-54, 1984.
- [Eli, 2006] S. Elizalde. Asymptotic enumeration of permutations avoiding generalized patterns. *Advances in Mathematics*, 36:138-155, 2006.
- [Ess, 1984] C.-G. Esseen. On the application of the theory of probability to two combinatorial problems involving permutations. In *Probability theory, Proc. 7th Conf.*, pages 137-147, 1984.
- [FlOd, 1990] P. Flajolet und A. M. Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3:216-240, 1990.
- [FlSe, 2009] P. Flajolet und R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [Foa, 2010] D. Foata. Eulerian Polynomial: From Euler's Time to the Present. *The Legacy of Alladi Ramakrishnan in the Mathematical Sciences*, Springer Science+Business Media, pages 253-273, LLC 2010.
- [GoDa, 1979] I.P. Goulden und D.M. Jackson. An inversion theorem for cluster decompositions of sequences with distinguished subsequences, *Journal London Mathematical Society*, 20:567-576, 1979.
- [Kri, 2008] A. Kriegl. *Kategorientheorie*. Vorlesungsskript, University of Vienna, 2008.
- [KuPa, 2010] M. Kuba und A. Panholzer. Enumeration results for alternating tree families. *European Journal of Combinatorics* 31(7):1751-1780, 2010.
- [Loè, 1977] M. Loève. *Probability Theory I*. Springer, New Yourk, 4th edition, 1977.
- [Nak, 2011] B. Nakamura. Computational approaches to consecutive pattern avoidance in permutations. *Pure Mathematics and Applications*, 22(2):253-268, 2011.
- [Net, 1901] E. Netto. *Lehrbuch der Combinatorik*. B. G. Teubner, Leipzig, 1901.

5 Literaturverzeichnis

- [NoZe, 1999] J. Noonan und D. Zeilberger. The Goulden-Jackson cluster method: extensions, applications and implementations. *Journal of Difference Equations and Applications*, 5(4-5):355-377, 1999.
- [Par, 1993] S.F. Parker. The combinatorics of functional compositions and inversion. Ph.D. thesis, Brandeis, 1993.
- [Sei, 2011] G. Seitz. Analysis of various parameters in labelled trees and tree-like structures. Ph.D. thesis, Vienna, 2011.
- [Sta, 1999] R. Stanley. *Enumerative combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Stan, 2010] R. Stanley. A Survey of Alternating Permutations. *Contemporary Mathematics*, 531:165-196, 2010.
- [War, 2003] R. Warlimont. Permutations avoiding consecutive patterns. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Computatorica*, 22:373-393, 2003.