Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

Unterschrift des Betreuers

Diplomarbeit

Topologie und Messbarkeit
Konvergenzbegriffe in der Maßtheorie

Ausgeführt am Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Klaus Felsenstein

durch

Florian Kren
Landstraßer Haupstrasse 95, 1030 Wien

20.10.2015 Florian Kren

Topologie und Messbarkeit

Über Konvergenzbegriffe in der Maßtheorie

Florian Kren

Diplomarbeit

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Konvergenzbegriffe der Maßtheorie

Kapitel 1

Konvergenz im Komplement

In diesem Abschnitt werden die Begriffe der punktweisen bzw. der gleichmäßigen Konvergenz für Folgen messbarer Funktionen dahingehend verallgemeinert, dass auch dann noch von Konvergenz gesprochen werden kann, wenn die jeweiligen Konvergenzbedingungen nur auf Mengen mit Maß Null bzw. beliebig kleinen Maßes verletzt sind. Die Betrachtung von Konvergenz auf den Komplementen jener Mengen liefert für die Maßtheorie äußerst brauchbare Konvergenzbegriffe, die allerdings nicht als Konvergenz im topologischen Sinne aufgefasst werden können.

1.1 Konvergenz μ-fast überall

Die Konvergenz μ-fast überall entspricht der punktweisen Konvergenz auf dem Komplement von μ-Nullmengen.

1.1.1 Definition. Ist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und ist für alle $x \in X$ die Eigenschaft E sinnvoll, so sagt man, die Eigenschaft E gilt *μ-fast überall* (*μ-f.ü.*), wenn es ein $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$ gibt, sodass für alle $x \in N^c$ die Eigenschaft E gilt.

Wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels nicht explizit etwas anderes angegeben, so sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ der zugrunde liegende Maßraum. Weiters sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\hat{\mathbb{K}} = \overline{\mathbb{R}}$ oder $\mathbb{C}$.

1.1.2 Definition. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : X \to \hat{\mathbb{K}}$ *konvergiert μ-f.ü.* gegen die Funktion $f : X \to \hat{\mathbb{K}}$ genau dann, wenn es eine μ-Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$ gibt, sodass $f_n|_{N^c} \to f|_{N^c}$ punktweise gilt. Man schreibt dafür

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \ \mu\text{-f.ü.} \quad \text{oder} \quad f_n \longrightarrow f \ \mu\text{-f.ü.} \quad \text{oder auch} \quad f_n \xrightarrow{[\mu]} f.$$

Das folgende Lemma liefert eine Charakterisierung der Konvergenz μ-fast überall.

1.1.3 Lemma. *Sind $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar, dann gilt:*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f μ-f.ü. genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$*
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$
gilt.

2. *Ist für alle $\varepsilon > 0$*
$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0,$$
so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. gegen f.

3. *Ist $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und gilt $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü., so ist für alle $\varepsilon > 0$*
$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$
Speziell gilt für endliches Maß μ dann für alle $\varepsilon > 0$
$$f_n \longrightarrow f \ \mu\text{-f.ü.} \iff \lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Beweis. 1. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann nicht gegen f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass es für alle $N_0 \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m > N_0$ so gibt, dass $|f_m(x) - f(x)| \geq \varepsilon$ ist. Also konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann μ-fast überall gegen f, wenn
$$\mu(\{\exists\, \varepsilon > 0 \,:\, \forall\, N_0 \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, m > N_0 \,:\, |f_m(x) - f(x) \geq \varepsilon\}) = 0$$
ist bzw. genau dann, wenn
$$\mu(\{\,\exists\, \varepsilon > 0 \,:\, \forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, |f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}) = 0$$
gilt, was gleichbedeutend damit ist, dass
$$\mu\left(\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$
ist. Defniert man
$$A_\varepsilon := \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\},$$
so gilt für alle $\varepsilon > 0$, dass $A_\varepsilon \subseteq \bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$ und daher $\mu(A_\varepsilon) \leq \mu\left(\bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon\right)$ ist. Insgesamt konvergiert also die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann μ-fast überall gegen f, wenn
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = \mu(A_\varepsilon) = 0$$
ist.

2. Gelte für alle $\varepsilon > 0$, dass
$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k}-f| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$
ist und sei angenommen, dass $f_n \overset{[\mu]}{\not\longrightarrow} f$ gilt. Dies gilt nach Punkt 1. genau dann, wenn es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, sodass
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{f_{n+k}-f| \geq \varepsilon_0\}\right) = c > 0$$
ist, wobei die Konstante c nur von f und ε_0 abhängt, also $c = c(f, \varepsilon_0)$. Nun ist für alle $n \in \mathbb{N}$ sicher
$$\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{l+k}-f| \geq \varepsilon_0\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k}-f| \geq \varepsilon_0\},$$
woraus folgt, dass
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k}-f| \geq \varepsilon_0\}\right) \geq \mu\left(\bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{l+k}-f| \geq \varepsilon_0\}\right) = c(f, \varepsilon_0)$$
ist. Da die rechte Seite von n unabhängig ist, sieht man durch Bildung des Grenzwertes $n \to \infty$, dass dann
$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k}-f| \geq \varepsilon_0\}\right) \geq c(f, \varepsilon_0) > 0$$
gilt, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

3. Ist $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$, $f_n \overset{[\mu]}{\longrightarrow} f$ und
$$A_n^{\varepsilon} := \bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k}-f| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k\geq n}\{|f_k - f| \geq \varepsilon\},$$
so ist zu zeigen, dass $\mu(A \cap A_n^{\varepsilon}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Definiert man
$$A^{\varepsilon} := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n}\{|f_k - f| \geq \varepsilon\},$$
so gilt $A^{\varepsilon} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\varepsilon}$ und da die Folge $(A_n^{\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, ergibt sich
$$\lim_{n\to\infty} A_n^{\varepsilon} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\varepsilon} = A^{\varepsilon}.$$
Da $\mu(A) < \infty$ ist, kann die *Stetigkeit von oben* des Maßes μ angewandt werden und weil $f_n \longrightarrow f$ μ-f.ü. nach 1.1.3 Punkt 1. äquivalent zu $\mu(A^{\varepsilon}) = 0$ ist, erhält man
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n^{\varepsilon} \cap A) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} A_n^{\varepsilon} \cap A\right) = \mu(A^{\varepsilon} \cap A) \leq \mu(A^{\varepsilon}) = 0,$$
was den ersten Teil beweist. Die Aussage für endliche Maße μ ist jetzt offensichtlich.

❑

Auch für die Konvergenz μ-f.ü. ist der Begriff einer Cauchy-Folge sinnvoll.

1.1.4 Definition. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ heißt *Cauchy-Folge für die Konvergenz μ-f.ü.*, wenn eine Menge $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(N) = 0$ existiert, sodass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in N^c$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist.

1.1.5 Bemerkung. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz μ-f.ü., so existiert wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ für alle $x \in N^c$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Definiert man $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \cdot \chi_{N^c}(x)$, so konvergiert für alle $x \in N^c$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$, was wegen $\mu(N) = 0$ gleichbedeutend damit ist, dass $f_n \longrightarrow f$ μ-fast überall.
Konvergiert umgekehrt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall gegen eine Funktion f, so ist - wieder wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$ - für alle $x \in N^c$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ und damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz μ-fast überall.

Erwartungsgemäß lassen sich Cauchy-Folgen für die Konvergenz μ-f.ü. analog zu Lemma 1.1.3 charakterisieren.

1.1.6 Lemma. *Sind $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ messbar, dann gilt:*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge für die Konvergenz μ-f.ü. genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \,:\, \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

2. *Ist für alle $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f_n| \geq \varepsilon\}\right) = 0,$$

so ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz μ-fast überall.

3. *Ist $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz μ-f.ü., so ist für alle $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Speziell gilt für endliches Maß μ dann für alle $\varepsilon > 0$, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz μ-f.ü. genau dann ist, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f_n| \geq 0\}\right) = 0.$$

1.2 Fast gleichmäßige Konvergenz

Beim schwächeren Begriff der fast gleichmäßigen Konvergenz betrachtet man Folgen von Funktionen, die auf dem Komplement von Mengen beliebig kleinen positiven Maßes gleichmäßig konvergieren.

1.2.1 Definition. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ heißt *fast gleichmäßig konvergent* gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$, wenn

$$\forall\, \delta > 0 \,:\, \exists\, A \in \mathfrak{A} \,:\, \mu(A) < \delta \,:\, f_n|_{A^c} \longrightarrow f|_{A^c} \text{ gleichmäßig.}$$

1.2.2 Lemma. *Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ fast gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{K}$, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch μ-fast überall gegen f.*

Beweis. Konvergiert $f_n \longrightarrow f$ fast gleichmäßig, so gilt per Definition

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, A_k \in \mathfrak{A} \,:\, \mu(A_k) < \frac{1}{k} \,:\, f_n|_{A_k^c} \longrightarrow f|_{A_k^c} \text{ gleichmäßig.}$$

Definiert man $A := \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, so folgt $A \in \mathfrak{A}$ und da für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass $A \subseteq A_k$ ist, erhält man

$$\mu(A) \le \mu(A_k) < \frac{1}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

und damit also $\mu(A) = 0$. Außerdem gilt

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, \forall\, x \in A_k^c \,:\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

das heißt insgesamt, dass für alle $x \in A^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c$ mit $\mu(A) = 0$ konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f, also konvergiert $f_n \longrightarrow f$ μ-fast überall. ❑

Die umgekehrte Implikation gilt nur für endliche Maße und dies ist die Aussage des *Satzes von Jegorow.*

1.2.3 Satz (Jegorow)**.** *Ist μ ein endliches Maß, $\mu(X) < \infty$, und konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ μ-fast überall gegen eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch fast gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$, sodass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. gegen eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ konvergiert. Wegen der Endlichkeit des Maßes μ ist die Konvergenz μ-fast-überall von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f nach Lemma 1.1.3 Punkt 3. äquivalent dazu, dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \{|f_{n+l} - f| \ge \varepsilon\}\right) = 0$$

bzw. für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{l\ge n} \left\{|f_l - f| \ge \frac{1}{k}\right\}\right) = 0 \tag{1.1}$$

ist. Ist $\delta > 0$ und $A_{n,k}$ definiert als

$$A_{n,k} := \bigcup_{i=n}^{\infty} \left\{|f_i - f| \ge \frac{1}{k}\right\},$$

dann folgt aus (1.1), dass

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \,:\, \exists\, n_k \in \mathbb{N} \,:\, \mu(A_{n_k,k}) < \frac{\delta}{2^k}$$

gilt. Setzt man $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k,k}$, so ist $A \in \mathfrak{A}$ und wegen der σ-Subadditivität von μ ist

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k,k}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(A_{n_k,k}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

Seien $x \in A^c$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist per Definition $x \notin A_{n_k,k}$, was äquivalent dazu ist, dass für alle $i \geq n_k$

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$$

ist. Da $x \in A^c$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig waren, folgt die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f auf A^c und damit die fast gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f. ❑

Tatsächlich kann nur im Falle, dass der Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ endlich ist, von der Konvergenz fast überall auf fast gleichmäßige Konvergenz geschlossen werden, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt.

1.2.4 Beispiel. Sei der Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ gleich $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ und betrachte die Funktionenfolge

$$f_n := \chi_{[n,n+1]}$$

Offensichtlich konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Folge gegen Null, daher konvergiert sie λ−f.ü. gegen Null.
Damit die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f(x) := 0$ konvergiert, muss sie auf dem Komplement einer Menge B beliebig kleinen Maßes gleichmäßig konvergieren. Da allerdings für festes $n \in \mathbb{N}$ für alle $x \in [n; n+1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = 1$$

gilt, müsste die Menge B alle Intervalle $[n; n+1]$ enthalten und damit $\lambda(B) = \infty$ gelten. Daher konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf dem Komplement einer beliebigen Menge endlichen Maßes.

Kapitel 2

Konvergenz (lokal) nach Maß

2.1 Konvergenz nach Maß und lokal nach Maß

2.1.1 Definition. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktion $f_n : X \to \mathbb{K}$ *konvergiert nach Maß* gegen eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

gilt. Man schreibt dafür

$$f_n \longrightarrow f \text{ n.M.} \quad \text{oder auch} \quad f_n \xrightarrow{(\mu)} f.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert lokal nach Maß*, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \cap A\right) = 0$$

ist. Man schreibt dafür

$$f_n \longrightarrow f \text{ lokal n.M.} \quad \text{oder auch} \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Offensichtlich konvergiert jede nach Maß konvergente Folge auch lokal nach Maß, die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

2.1.2 Definition. Sind f und g zwei messbare Funktionen $f, g : X \to \mathbb{K}$, so heißen f und g *lokal μ-f.ü. gleich*, wenn für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt, dass $f \cdot \chi_A = g \cdot \chi_A$ μ-fast überall.

2.1.3 Lemma. *Sind f_n, f, g_n und g für alle $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen, dann gilt*

1. *Gilt $f_n \xrightarrow{(\mu)} f$ und $f_n \xrightarrow{(\mu)} g$, so ist $f = g$ μ-fast überall. Umgekehrt gilt, dass wenn $f_n \xrightarrow{(\mu)} f$ und $f = g$ μ-f.ü. ist, dann konvergiert $f_n \xrightarrow{(\mu)} g$.*
2. *Gilt $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{\mu} g$, so ist $f = g$ lokal μ-fast überall. Umgekehrt gilt, dass wenn $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f = g$ lokal μ-f.ü. ist, dann konvergiert $f_n \xrightarrow{\mu} g$.*

3. *Gilt* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *und* $g_n \xrightarrow{\mu} g$*, so folgt* $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$ *und für alle* $a \in \mathbb{K}$ *folgt* $af_n \xrightarrow{\mu} af$*. Diesselbe Aussage gilt für die Konvergenz lokal nach Maß.*

Beweis. Seien $f_n, f, g_n, g : X \to \mathbb{K}$ messbare Funktionen.

1. Sei $\varepsilon > 0$ und $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{\mu} g$. Da für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}|f(x) - g(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - g(x)| \leq \\ \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)|\end{aligned}$$

ist, gilt für jene $x \in X$, für die $|f(x) - g(x)| \geq \varepsilon$ ist auch $|f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon$, weshalb dann $|f_n(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ oder $|f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ sein muss. Damit hat man erhalten, dass

$$\Big\{|f - g| \geq \varepsilon\Big\} \subseteq \left\{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

ist, woraus man aus der Monotonie des Maßes μ dann

$$\mu\Big(\Big\{|f - g| \geq \varepsilon\Big\}\Big) \leq \mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \quad \textbf{(2.1)}$$

folgt. Bildet man den Grenzwert $n \to \infty$, so erhält man

$$\mu\left(\{|f - g| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\mu\left(\left\{|f - g| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$$

ist. Es folgt

$$\mu\Big(\Big\{|f - g| > 0\Big\}\Big) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{|f - g| \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$

also ist $f = g$ μ-fast überall.

Für den Beweis der Umkehrung konvergiere $f_n \longrightarrow f$ n.M., sei $f = g$ μ-fast überall und $\varepsilon > 0$. Da für alle $x \in X$ gilt, dass

$$\begin{aligned}|f_n(x) - g(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - g(x)| \leq \\ \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - g(x)|\end{aligned}$$

ist, erhält man analog zu (2.1), dass

$$\mu\Big(\Big\{|f_n - g| \geq \varepsilon\Big\}\Big) \leq \mu\left(\left\{|f_n - f \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{|f - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

gilt. Für den Grenzübergang $n \to \infty$ konvergiert der erste Summand auf der rechten Seite nach Voraussetzung gegen Null, der zweite Summand ist ebenfalls nach Voraussetzung gleich Null, sodass man insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{|f_n - g| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

erhält, also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Maß gegen f.

2. Sei $\varepsilon > 0$ und gelte $f_n \xrightarrow{\mu} f$ und $f_n \xrightarrow{\mu} g$. Ausgehend von Gleichung (1.) erhält man, dass für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$

$$\mu\Big(\Big\{|f-g| \geq \varepsilon\Big\} \cap A\Big) \leq \mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap A\right) + \\ + \mu\left(\left\{|f_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap A\right)$$

erfüllt ist und damit wieder in analoger Schlußweise, dass

$$\mu\Big(\Big\{|f-g| > 0\Big\} \cap A\Big) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{|f-g| \geq \frac{1}{k}\right\} \cap A\right) = 0$$

ist, was äquivalent dazu ist, dass auf A $f = g$ μ-f.ü. ist. Also ist $f = g$ lokal μ-fast überall.

3. Diese Aussage beweist man in analoger Schlussweise zu den Punkten 1. und 2., wobei man verwendet, dass

$$\Big\{|(f_n + g_n) - (f+g)| \geq \varepsilon\Big\} \subseteq \left\{|f_n - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cup \left\{|g_n - g| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

bzw. für alle $a \in \mathbb{K}$

$$\{|af_n - af| \geq \varepsilon\} = \{|a| \cdot |f_n - f| \geq \varepsilon\}$$

gilt. ❑

2.1.4 Satz. *Sind $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ messbar und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen f, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nach Maß gegen f.*

Beweis. Die fast gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f ist äquivalent dazu, dass für alle $\delta > 0$ und alle $\varepsilon > 0$ es eine Menge $A \in \mathfrak{A}$ und ein $n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ gilt, dass

$$\sup_{x \in A^c} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist. Daher ist für alle $n \geq n_0$ dann $\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \subseteq A$ und damit für alle $n \geq n_0$

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \mu(A) < \delta.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, gilt $f_n \xrightarrow{\mu} f$. ❑

2.1.5 Satz. *Ist μ ein endliches Maß und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ μ-f.ü. gegen die messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch im Maß gegen f. Für nicht beschränkte Maße kann man aus der Konvergenz μ-f.ü. die Konvergenz lokal nach Maß folgern.*

Beweis. Ist μ ein endliches Maß und gilt $f_n \xrightarrow{[\mu]} f$, so folgt aus dem Satz von Jegorow (Satz 1.2.3), dass $f_n \longrightarrow f$ fast gleichmäßig konvergiert. Damit erhält man aus Satz 2.1.4, dass f_n auch im Maß gegen f konvergiert.

Ist das Maß μ nicht beschränkt, so kann noch immer die erste Aussage von Lemma 1.1.3 Punkt 3. angewandt werden und man erhält aus der μ-f.ü. Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f, dass

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k}-f|\geq\varepsilon\}\cap A\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k\geq n}\{|f_k-f|\geq\varepsilon\}\cap A\right)=0$$

ist. Da für alle $n\in\mathbb{N}$ die Inklusion $\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}\subseteq\bigcup_{k\geq n}\{|f_k-f|\geq\varepsilon\}$ gilt, erhält man, dass für alle $A\in\mathfrak{A}$ mit $\mu(A)<\infty$ folgt, dass

$$\mu(A\cap\{|f_n-f|\geq\varepsilon\}\leq\mu\left(A\cap\bigcup_{k\geq n}\{|f_k-f|\geq\varepsilon\}\right)$$

ist, woraus durch Bildung des Grenzübergangs $n\to\infty$ die Konvergenz lokal nach Maß folgt.

❑

2.2 Cauchy-Folgen der Konvergenz nach Maß

2.2.1 Definition. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_n:X\to\mathbb{K}$ heißt eine *Cauchy-Folge für die Konvergenz n.M.*, wenn für alle $\varepsilon>0$ ein $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m,n\geq n_0$ gilt, dass

$$\mu(\{|f_m-f_n|\geq\varepsilon\})<\varepsilon$$

ist.

2.2.2 Satz. *Ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz nach Maß, dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die fast gleichmäßig gegen eine messbare Funktion $f:X\to\mathbb{K}$ konvergiert.*

Beweis. Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz nach Maß, dann kann zunächst ein $n_1\in\mathbb{N}$ gewählt werden, sodass für alle $n,m\in\mathbb{N}$ mit $n,m\geq n_1$

$$\mu\left(\left\{\left|f_n-f_m\right|\geq\frac{1}{2}\right\}\right)\leq\frac{1}{2}$$

gilt. Daraus folgt, wenn für $k\in\mathbb{N}$ bereits $n_{k-1}>n_1$ gewählt wurde, dass ein $n_k\in\mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n,m\geq n_k$

$$\mu\left(\left\{\left|f_n-f_m\right|\geq\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

ist. Daher existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die

$$\mu\left(\left\{\left|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right|\geq\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}\right)\leq\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

erfüllt. Sei

$$A_k:=\left\{|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|\geq\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}\qquad\text{und}\qquad B_l:=\bigcup_{k=l}^{\infty}A_k,$$

und $\delta > 0$. Wegen der σ-Subadditivität des Maßes μ gilt

$$\mu(B_l) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=l}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1},$$

also existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $l \geq m$ dann $\mu(B_l) < \delta$ ist. Offensichtlich gilt für alle $1 \leq j < i$ und alle $x \in X$, dass

$$f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x) = \sum_{l=1}^{i-j} f_{n_{i-l+1}}(x) - f_{n_{i-l}}(x) = \sum_{l=j}^{i-1} f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x),$$

ist, woraus man für alle $l > k > m$ und alle $x \in B_m^c$ erhält, dass

$$|f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{j=k}^{l-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| < \sum_{j=k}^{l-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j < \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \quad \mathbf{(2.2)}$$

ist, das heißt, dass für alle $l > k > m$ und alle $x \in B_m^c$ die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ ist und daher für alle $x \in B_m^c$ gegen die messbare Funktion

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \cdot \chi_{B_m{}^c}(x)$$

konvergiert. Aus (2.2) folgt für alle $x \in B_m^c$ und alle $j \geq m$ wegen

$$|f(x) - f_{n_k}(x)| = \lim_{l\to\infty} |f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| < \left(\frac{1}{2}\right)^j,$$

dass die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in B_m^c$ gleichmäßig konvergiert und da $\mu(B_m) < \delta$ ist, konvergiert $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fast gleichmäßig gegen f. ❑

2.2.3 Korollar. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ ist eine Cauchy-Folge für die Konvergenz nach Maß genau dann, wenn es eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$ gibt, sodass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Maß gegen f konvergiert.*

Beweis. Konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Maß gegen f. Für alle $x \in X$ gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f(x) - f_n(x)|$$

und daher ist - analog zu beispielsweise dem Beweis von Lemma 2.1.3 Punkt 1.

$$\mu\Big(\Big\{|f_m - f_n| \geq \varepsilon\Big\}\Big) \leq \mu\left(\left\{|f - f_m| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}\right) + \mu\left(\left\{|f - f_n| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right).$$

Da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Maß gegen f konvergiert folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz im Maß ist.
Ist umgekehrt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz nach Maß, so existiert nach Satz 2.2.2 eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und eine messbare Funktion f, sodass $f_{n_k} \longrightarrow f$ fast gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt mit Satz 2.1.4, dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auch im Maß gegen f konvergiert. Außerdem gilt für alle $x \in X$ wegen der Dreiecksungleichung

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f(x)|,$$

woraus man wieder

$$\mu\Big(\Big\{|f_m - f| \geq \varepsilon\Big\}\Big) \leq \mu\left(\left\{|f_n - f_{n_k}| \geq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}\right) + \mu\left(\left\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right)$$

erhält. Da $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ im Maß gegen f konvergiert und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz nach Maß ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Maß gegen f. ❑

Zusammen mit Satz 2.2.2 liefert Korollar 2.2.3 das folgende Resultat:

2.2.4 Korollar. *Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$ nach Maß gegen eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{K}$, so existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die fast gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Da nach Lemma 1.2.2 aus der fast gleichmäßigen Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Konvergenz μ-f.ü. folgt, erhält man aus Satz 2.2.2 die erste Aussage des folgenden Korollars und zusammen mit Korollar 2.2.3 die zweite Behauptung:

2.2.5 Korollar. *Sind $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ messbare Funktionen dann gilt:*

1. *Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge für die Konvergenz nach Maß, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die μ-fast überall gegen f konvergiert.*

2. *Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Maß gegen die Funktion f, so gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die μ-fast überall gegen f konvergiert.*

2.3 Teilfolgen nach Maß konvergenter Folgen

2.3.1 Satz. *Sind die Funktionen $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ messbar, so konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Maß gegen f genau dann, wenn jede Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ hat, die fast gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Maß gegen die Funktion f, so gilt per Definition

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$. Die Folge der Maße der Mengen $\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}$ konvergiert also in $\mathbb{R}$ gegen Null. Daher konvergiert auch jede Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ im Maß gegen f und Korrolar 2.2.4 liefert die Existenz einer Teilfolge $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die fast gleichmäßig gegen f konvergiert.
Sei nun die Teilfolgenbedingung erfüllt und $\varepsilon > 0$, es existiere also eine Teilfolge $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ einer beliebigen Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die fast gleichmäßig gegen f konvergiere. Wegen Satz 2.1.4 konvergiert $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ auch nach Maß gegen f, das heißt, dass für jede beliebige Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ exisitiert, sodass

$$\lim_{j\to\infty} \mu(\{|f_{n_{k_j}} - f| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ist. Da in metrischen Räumen aus der Konvergenz von Teilfolgen $(a_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von beliebigen Teilfolgen (a_{n_k}) einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schon die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, hat man erhalten, daß

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ist und damit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Maß gegen f konvergiert. ❑

2.3.2 Korollar. *Sind die Funktionen $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ messbar, dann gilt*

1. *Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Maß gegen f, dann hat jede Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, die μ-fast überall gegen f konvergiert.*

2. *Ist das Maß μ endlich, so gilt auch die umgekehrte Inklusion.*

Beweis.

1. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Maß gegen f, so existiert nach Satz 2.3.1 für jede Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die fast gleichmäßig gegen f konvergiert. Wegen Lemma 1.2.2 konvergiert diese Teilfolge dann auch μ-fast überall gegen f.

2. Hat jede Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die μ-fast überall gegen f konvergiert und ist das Maß μ endlich, so folgt aus dem Satz von Jegorow (Satz 1.2.3), dass die Teilfolge auch fast gleichmäßig gegen f konvergiert. Satz 2.3.1 liefert das Ergebnis. ❑

Kapitel 3

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzarten

3.1 Der allgemeine Fall

Im Allgemeinen besteht kein Zusammenhang zwischen der Konvergenz einer Folge messbarer Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem Maße nach und der Konvergenz fast-überall derselben Folge. Der folgende Abschnitt soll dies anhand von Beispielen illustrieren, was eine kurze Einführung der Räume $\mathcal{L}^p(\mu)$ und der Konvergenz in diesen Räumen sinnvoll erscheinen lässt, da sich über diesen Umweg sehr anschauliche Beispiele konstruieren lassen.

3.1.1 Die Räume $\mathcal{L}^p(\mu)$ und $L^p(\mu)$

Für den Abschnitt 3.1.1 gelte folgende Konvention: $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum und die Mengen $\mathbb{R}$ bzw. $\overline{\mathbb{R}}$ seien - sofern nichts anderes angegeben ist - mit der σ-Algebra $\mathfrak{B}$ bzw. $\overline{\mathfrak{B}}$ versehen.
Ist eine Funktion $f : X \to \hat{\mathbb{K}}$ messbar, so zeigt man elementar, dass auch $|f|^p$ messbar und damit folgende Definition sinnvoll ist:

3.1.1 Definition. Ist $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$ und $f : X \to \hat{\mathbb{K}}$ messbar, so sei

$$N_p(f) := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

im Fall $p = \infty$ sei

$$N_\infty(f) := \operatorname{ess} \sup_{x \in X} |f(x)| := \inf \{\alpha \in [0, \infty] : |f| \leq \alpha \quad \mu\text{-f.ü.}\}.$$

3.1.2 Definition. Für $p \in \overline{\mathbb{R}}$, $p > 0$ sei

$$\mathcal{L}^p(X, \mathfrak{A}, \mu) := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p = \{f : X \to \mathbb{K} : f \text{ messbar und } N_p(f) < \infty\}$$

und für $f \in \mathcal{L}^p$ sei

$$\|f\|_p := N_p(f).$$

3.1.3 Lemma. *Sind $f, g : X \to \hat{\mathbb{K}}$ messbar und $0 < p \leq 1$, dann gilt:*

$$N_p^p(f+g) \leq N_p^p(f) + N_p^p(g).$$

Beweis. Für $t \geq 0$, $a > 0$ und $0 < p \leq 1$ sei $\varphi(t) := a^p + t^p - (a+t)^p$. Dann ist φ differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(t) = pt^{p-1} - p(a+t)^{p-1} = p(t^{p-1} - (a+t)^{p-1}) \geq 0,$$

also ist φ monoton wachsend. Deshalb und wegen $\varphi(0) = 0$ gilt $\varphi \geq 0$ und damit erhält man für alle $a, b \geq 0$

$$(a+b)^p \leq a^p + b^p. \tag{3.1}$$

Dies gilt insbesondere auch für $a := |f|$ und $b := |g|$ und daraus folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} N_p^p(f+g) &= \int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)^p d\mu \overset{(3.1)}{\leq} \int_X (|f|^p + |g|^p)\, d\mu = \\ &= \int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu = N_p^p(f) + N_p^p(g). \end{aligned}$$

❑

3.1.4 Satz. *Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\mathcal{L}^p$ ein halbnormierter Vektorraum bezüglich $\|\cdot\|_p$ und für $0 < p < 1$ und $f, g \in \mathcal{L}^p$ ist*

$$d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p$$

eine Halbmetrik auf $\mathcal{L}^p$.

Beweis. Die Vektorraumstruktur des $\mathcal{L}^p$ ist trivial nachzurechnen und die algebraische Abgeschlossenheit des $\mathcal{L}^p$ ist ebenfalls leicht einzusehen, denn einerseits ist, wenn $f \in \mathcal{L}^p$ ist, auch $af \in \mathcal{L}^p$ für alle $a \in \mathbb{R}$, andererseits gilt für $f, g \in \mathcal{L}^p$

$$\begin{aligned} |f+g|^p &\leq (|f| + |g|)^p \leq 2^p (\max(|f|, |g|))^p = 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \leq \\ &\leq 2^p (|f|^p + |g|^p) \end{aligned}$$

und damit

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq 2^p \left(\int_X |f|^p d\mu + \int_X |g|^p d\mu \right) < \infty,$$

also ist $f + g \in \mathcal{L}^p$. Dass $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ für $1 \leq p \leq \infty$ ein halbnormierter und $(\mathcal{L}^p, d_p)$ für $0 < p < 1$ ein pseudometrischer Raum ist, ergibt sich - bis auf die Dreiecksungleichung - ebenso elementar. Die Dreiecksungleichung wiederrum folgt für den $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ direkt aus der Minkowskischen Ungleichung und für den $(\mathcal{L}^p, d_p)$ aus Lemma 3.1.3, denn für $f, g, h \in \mathcal{L}^p$ ist

$$\begin{aligned} d_p(f, g) &= \int_X |f - g|^p = \int_X |f - h + h - g|^p d\mu \leq \int_X (|f - h| + |h - g|)^p\, d\mu \leq \\ &\overset{3.1.3}{\leq} \int_X |f - h|^p d\mu + \int_X |h - g|^p d\mu = d_p(f, h) + d_p(h, g). \end{aligned}$$

❑

Um zu sehen, dass der $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$ i.A. kein normierter Raum ist, betrachte man folgende Situation. Sei $N \in \mathfrak{A}$ so, dass $N \neq \emptyset$ und $\mu(N) = 0$ ist. Dann gilt

$$\|\chi_N\|_p = \left(\int_X |\chi_N|^p d\mu\right)^{1/p} = \left(\int_N 1 d\mu\right)^{1/p} = 0,$$

aber $\chi_N \neq 0$. Das heißt, $\|\cdot\|_p$ ist genau dann eine Norm, wenn die einzige Menge N mit $\mu(N) = 0$ die leere Menge ist. Man erhält die Struktur eines normierten Raumes für $1 \leq p \leq \infty$ bzw. eines metrischen Raumes für $0 < p < 1$ aber durch folgende Definition:

3.1.5 Definition. Für $0 < p \leq \infty$ sei

$$\mathcal{N}^p := \{f \in \mathcal{L}^p : f = 0 \quad \mu\text{-f.ü.}\},$$

dann ist $\mathcal{N}^p$ offensichtlich ein Unterraum von $\mathcal{L}^p$ und damit ist

$$L^p := \mathcal{L}^p / \mathcal{N}^p$$

ein wohldefinierter Vektorraum.

Zwei Elemente $f, g \in \mathcal{L}^p$ sind also genau dann äquivalent, wenn $f - g = 0$ μ-f.ü., also genau dann, wenn $f = g$ μ-f.ü. ist. Für $\tilde{f} \in L^p$ hat $\|f\|_p$ für alle Vertreter $f \in \mathcal{L}^p$ denselben Wert, sodass die Definition

$$\|\tilde{f}\|_p := \|f\|_p$$

sinnvoll ist. Jetzt gilt auch

$$\|\tilde{f}\|_p = 0 \Rightarrow \tilde{f} = 0$$

für jedes $\tilde{f} \in L^p$, damit ist also $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ein normierter Raum.

3.1.2 Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\mu)$

3.1.6 Definition. Ist $0 < p \leq \infty$ und $f_n \in \mathcal{L}^p$, $n \in \mathbb{N}$, dann heißt die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent im p-ten Mittel* oder *konvergent in* $\mathcal{L}^p$ gegen $f \in \mathcal{L}^p$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$

bzw. in anderer Notation

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f.$$

Analog wird die Konvergenz in L^p erklärt.

3.1.7 Proposition (Markov'sche Ungleichung)**.** *Ist* $f : X \to \hat{\mathbb{K}}$ *messbar,* $g : \operatorname{ran} f \to \overline{\mathbb{R}}$ *eine nicht-negative, auf* $\operatorname{ran} f$ *monoton wachsende messbare Funktion und* $t > 0$*, so ist*

$$\mu\left(\{|f| \geq t\}\right) \leq \frac{1}{g(t)} \int_X g \circ f d\mu.$$

Beweis. Bezeichnet $A_t := \{|f| > t\}$, so ist für alle $t > 0$

$$0 \leq g(t)\chi_{A_t} \leq (g \circ f)\chi_{A_t} \leq g \circ f,$$

wobei die erste Ungleichung wegen der nicht-Negativität von g erfüllt ist und die zweite Ungleichung auf Grund der Monotonie von g gilt. Daraus erhält man

$$g(t) \cdot \mu(A_t) = \int_X g(t) \cdot \chi_{A_t} \leq \int_X (g \circ f) d\mu,$$

woraus durch Division durch $g(t)$ die Behauptung folgt. ❑

Der folgende Satz stellt die zentrale Aussage dieser kurzen Einführung der Räume $\mathcal{L}^p(\mu)$ bzw. $L^p(\mu)$ dar, da er einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\mu)$ bzw. in $L^p(\mu)$ und der Konvergenz dem Maße nach herstellt:

3.1.8 Satz. *Ist $0 < p \leq \infty$, $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ mit $f_n, f \in \mathcal{L}^p$ für $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p$ gegen f, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch nach Maß gegen f.*

Beweis. Ist $p = \infty$, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Komplement einer μ-Nullmenge gleichmäßig gegen f, also gilt $f_n \longrightarrow f$ fast gleichmäßig. Aus Satz 2.1.4 folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Maß gegen f konvergiert.
Ist $0 < p < \infty$ und $\varepsilon > 0$ beliebig, so folgt durch Setzung von $g(t) := t^p$ aus der Markov'schen Ungleichung (Proposition 3.1.7), dass

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f_n - f|^p d\mu = \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p$$

gilt und damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p = 0,$$

also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f nach Maß. ❑

3.2 Gegenbeispiele

Das folgende Beispiel zeigt, dass von der Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem Maße nach nicht auf Konvergenz fast überall geschlossen werden kann.

3.2.1 Beispiel. Sei der Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ gleich $([0;1], \mathcal{P}(X) \cap \mathfrak{B}, \lambda)$, wobei λ das Lebesgue-Maß auf den Borel-meßbaren Teilmengen von $[0;1]$ ist. Seien die Mengen $E_{n,j}$ definiert durch

$$E_{n,j} = \left[\tfrac{j-1}{n}; \tfrac{j}{n}\right] \text{ für } 1 \leq j \leq n$$

und damit die Mengenfolge $\Big((E_{n,j})_{1\leq j\leq n}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleich

$$\Big((E_{n,j})_{1\leq j\leq n}\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \left([0;1], \left[0;\tfrac{1}{2}\right], \left[\tfrac{1}{2};1\right], \left[0;\tfrac{1}{3}\right], \left[\tfrac{1}{3};\tfrac{2}{3}\right], \left[\tfrac{2}{3};1\right], \ldots\right)$$

Sei weiters $\chi_{n,j} := \chi_{E_{n,j}}$ die Indikatorfunktion auf $E_{n,j}$ und definiere die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((\chi_{n,j})_{1\le j\le n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = (\chi_{1,1}, \chi_{2,1}, \chi_{2,2}, \chi_{3,1}, \chi_{3,2}, \chi_{3,3}, \dots)$$

Nun wird gezeigt, dass zwar $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} 0$ für $1 \le p \le \infty$ und damit wegen Satz 3.1.8 auch $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ gilt, die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber für kein $x \in X$ punktweise und damit auch nicht λ-f.ü. konvergiert.
Aus der Definition ergibt sich direkt, dass für ein festes $k \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \chi_{k,l}(x) \text{ mit } \tfrac{k(k-1)}{2} < n \le \tfrac{k(k+1)}{2} \text{ und } 1 \le l \le k$$

gilt, da es nach Konstruktion k Intervalle der Länge $\frac{1}{k}$ gibt. Ebenso ist nach Konstruktion klar, dass

$$\lambda(E_{k,l}) = \tfrac{1}{k}$$

für alle $l \in \{1, \dots, k\}$ gilt. Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X |f_n - 0|^p d\mu\right)^{1/p} = \lim_{k\to\infty} \left(\int_{[0;1]} \chi_{k,l}\, d\lambda\right)^{1/p} = \lim_{k\to\infty} \left(\lambda(E_{k,l})\right)^{1/p} =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(\tfrac{1}{k}\right)^{1/p} = 0$$

und damit gilt $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.
Sei nun $x \in X$ beliebig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $j_{(n)} \in \mathbb{N}$ so, dass $\chi_{n,j(n)}(x) = 1$ ist. Dies ist trivial für $x = 0$ und $x = 1$, sonst wähle $j_{(n)} = \lceil nx \rceil$. Daher existiert eine unendliche Teilfolge $(j_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $f_{n_{j(n)}}(x) = 1$ ist. Andererseits gilt für beliebiges $x \in (0;1]$, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ so gibt, dass $\frac{1}{m} < x$. Das bedeutet, dass für alle $j \ge m$ dann $\chi_{j,1}(x) = 0$ ist. Also existiert eine unendliche Teilfolge $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ so, dass $f_{n_j}(x) = 0$ für $x \in (0;1]$ ist und für $x = 0$ ist die Aussage trivial. Daher konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für kein $x \in X$ punktweise und damit auch nicht λ-f.ü.. ❑

Satz 2.1.5 besagt, dass aus der Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall nur dann auf Konvergenz dem Maße nach geschlossen werden kann, wenn das Maß endlich ist. Das folgende Beispiel zeigt, dass dieser Schluss für ein unendliches Maß tatsächlich nicht zulässig ist.

3.2.2 Beispiel. Sei der Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ gleich $([0;\infty), \mathcal{P}(X) \cap \mathfrak{B}, \lambda)$ und definiere die Funktionenfolge

$$f_n := \chi_{[n;n+1]}$$

Ist $x \in X$ beliebig, so existiert genau ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $f_{n_0}(x) = 1$. Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{n_0\}$, dass $f_n(x) = 0$ und damit $f_n \xrightarrow{[\lambda]} 0$.
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \ne n$ und betrachte die Menge

$$\{|f_n - f_m| \ge \tfrac{1}{2}\} = [n; n+1] \cup [m; m+1]$$

Offensichtlich gilt

$$\lambda\left(|f_n - f_m| \ge \tfrac{1}{2}\right) = 2$$

damit ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge für die Konvergenz dem Maße nach und daher, nach Korollar 2.2.3, auch nicht nach Maß konvergent. ❑

Teil II

Maße auf topologischen Räumen

Kapitel 4

Topologie und Messbarkeit

Ist eine Menge X mit der zusätzlichen Struktur einer Topologie versehen, so ergeben sich aus maßtheoretischer Sicht viele interessante Konsequenzen und Möglichkeiten. In Anhang A sind die wichtigsten topologischen Grundlagen angegeben, Anhang B gibt einige benötigte maßtheoretische Aussagen, die im folgenden benötigt werden - beispielsweise das Konzept der Initial-σ-Algbra bezüglich einer Funktionenfamilie, siehe Satz B.1.5. Weiters wird folgende Notation eingeführt:

Notation. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet einen topologischen Raum. Dabei ist $\mathcal{T}$ eine Topologie, also das System der offenen Teilmengen der Menge X. Weiters bezeichnet $\mathcal{A}$ das System der abgeschlossenen und $\mathcal{K}$ das System der kompakten Teilmengen der Grundmenge X.
Die Symbole $\mathcal{C}(X)$ bzw. $\mathcal{C}^+(X)$ bzw. $\mathcal{C}_c(X)$ bzw. $\mathcal{C}_b(X)$ bezeichnen die Menge der stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$ bzw. die Menge der positiven stetigen Funktionen bzw. den Raum der $f \in \mathcal{C}(X)$ mit kompakten Träger bzw. den Raum der beschränkten Funktionen aus $\mathcal{C}(X)$.
Das Paar $(X, \mathfrak{A})$ bezeichnet ein Messraum. Dabei ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algbra, also das System der messbaren Teilmengen der Menge X. Ist weiters $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so bezeichnet $\sigma(\mathcal{M})$ die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra, siehe dazu Lemma B.1.4.

4.1 Borel- und Bairemengen

4.1.1 Die Borel'sche σ-Algebra

4.1.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Dann wird die σ-Algebra, die von den offenen Teilmengen $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von X erzeugt wird, die *σ-Algebra der Borelmengen* $\mathfrak{B}(X)$ genannt. Es ist also

$$\mathfrak{B}(X) = \sigma(\mathcal{T}).$$

Da σ-Algebren abgeschlossen bezüglich der Bildung von Komplementen sind, gilt offensichtlich auch

$$\mathfrak{B}(X) = \sigma(\mathcal{A}).$$

Ist es erheblich, bezüglich welcher Topologie die Borelmengen gebildet werden, so schreibt man $\mathfrak{B}(X, \mathcal{T})$.

Der folgende Satz gibt eine Charakterisierung der σ-Algebra der Borelmengen auf den reellen Zahlen.

4.1.2 Satz. *Ist $\mathbb{A}$ eine beliebige überall dichte Teilmenge der rellen Zahlen oder gilt $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, dann ist jedes der folgenden Mengensysteme ein Erzeuger der σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen auf $\mathbb{R}$:*

(i) $\mathcal{T}_d$

(ii) $\mathcal{A}_d$

(iii) $\mathcal{I}_o^{\mathbb{A}} := \big\{(a,b) \bigm| a \leq b,\, a,b \in \mathbb{A}\big\}$

(iv) $\mathcal{I}_l^{\mathbb{A}} := \big\{(a,b] \bigm| a \leq b,\, a,b \in \mathbb{A}\big\}$

(v) $\mathcal{I}_c^{\mathbb{A}} := \big\{[a,b] \bigm| a \leq b,\, a,b \in \mathbb{A}\big\} \cup \{\varnothing\}$

(vi) $\mathcal{S}_{lo}^{\mathbb{A}} := \big\{(a,+\infty) \bigm| a \in \mathbb{A}\big\}$

(vii) $\mathcal{S}_{lc}^{\mathbb{A}} := \big\{[a,+\infty) \bigm| a \in \mathbb{A}\big\}$

Beweis. Per Definition wird $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ von den offenen Teilmengen (bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie $\mathcal{T}_d$) erzeugt, also gilt (i). Da die Komplemente der offenen Mengen gerade die abgeschlossenen Mengen bez. $\mathcal{T}_d$ sind und eine σ-Algebra abgeschlossen bezüglich der Bildung von Komplementen ist, folgt (ii). Weiters kann jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen mit Eckpunkten in $\mathbb{A}$ dargestellt werden, also gilt $\sigma(\mathcal{I}_o^{\mathbb{A}}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und damit (iii). Offensichtlich ist $\sigma(\mathcal{I}_c^{\mathbb{Q}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_c^{\mathbb{R}}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ und da $(a,b) = \bigcup \big\{[r,s] \bigm| a < r \leq s < b,\, r,s \in \mathbb{Q}\big\}$, ist $\sigma(I_o^{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_c^{\mathbb{Q}})$. Insgesamt gilt also

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I}_o^{\mathbb{R}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_c^{\mathbb{Q}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_c^{\mathbb{R}}) \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

und es folgt (v). Weiters ist einerseits jedes Intervall $(a,b] \in \mathcal{I}_l^{\mathbb{A}}$ darstellbar als

$$(a,b] = [a,b] \setminus [a-\varepsilon, a], \quad \varepsilon > 0$$

also ist $\sigma(\mathcal{I}_l^{\mathbb{A}}) \subseteq (\mathcal{I}_c^{\mathbb{A}})$. Andererseits gilt für jedes abgeschlossene Intervall $[a,b] \in \mathcal{I}_c^{\mathbb{A}}$, dass

$$[a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b]$$

ist, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, gegen a konvergente Folge in $\mathbb{A}$ ist. Daher ist auch $\sigma(\mathcal{I}_c^{\mathbb{A}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_l^{\mathbb{A}})$ und es gilt (iv). Ist $(a,+\infty) \in \mathcal{S}_{lo}^{\mathbb{A}}$, so ist $(a,+\infty) = \bigcup \big\{(a,b) \bigm| b > a,\, b \in \mathbb{A}\big\}$, also gilt $\sigma(\mathcal{S}_{lo}^{\mathbb{A}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_o^{\mathbb{A}})$. Umgekehrt ist jedes $(a,b] \in \mathcal{I}_l^{\mathbb{A}}$ darstellbar durch $(a,b] = (a,+\infty) \setminus (b,+\infty)$. Das heißt, es gilt

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{I}_l^{\mathbb{A}}) \subseteq \sigma(\mathcal{S}_{lo}^{\mathbb{A}}) \subseteq \sigma(\mathcal{I}_o^{\mathbb{A}}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

daher ist (vi) erfüllt. Punkt (vii) folgt analog. ❑

4.1.3 Definition. Seien $(X,\mathcal{T})$ und $(X',\mathcal{T}')$ topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt *Borel* oder genauer *Borel meßbar*, wenn $f^{-1}(B') \in \mathfrak{B}(X,\mathcal{T})$ für alle $B' \in \mathfrak{B}(X',\mathcal{T}')$ gilt.

4.1.4 Lemma. *Sind $(X,\mathcal{T})$ und $(X,\mathcal{T}')$ topologische Räume, so ist jede stetige Funktion $f : X \to X'$ Borel meßbar.*

Beweis. Die stetige Abbildung $f : X \to Y$ erfüllt die Beziehung $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$. Da einerseits $\sigma(f^{-1}(\mathcal{T}')) \subseteq \sigma(\mathcal{T}) = \mathfrak{B}(X)$ und andererseits wegen Lemma B.1.7 auch $\sigma(f^{-1}(\mathcal{T}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{T}')) = f^{-1}(\mathfrak{B}(X'))$ gilt, ist $f^{-1}(\mathfrak{B}(X')) \subseteq \mathfrak{B}(X)$. ❑

4.1.2 Die Baire'sche σ-Algebra

Lemma 4.1.4 zeigt, dass jede stetige Funktion meßbar bezüglich der Borel'schen σ-Algebra ist. Die kleinste σ-Algebra, bezüglich derer jede stetige Funktion meßbar ist, heißt Bair'sche σ-Algebra.

4.1.5 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Die Initial-σ-Algebra $\mathfrak{B}_a(X)$ (siehe Satz B.1.5) bezüglich $\mathcal{C}(X)$ heißt *Bair'sche σ-Alegbra* auf X. Ist es von Belang, bezüglich welcher Topologie $\mathcal{C}(X)$ betrachtet wird, so schreibt man $\mathfrak{B}_a(X, \mathcal{T})$.

Für eine umfassende Charakterisierung der Baire'schen σ-Algebra wird folgendes Lemma benötigt:

4.1.6 Lemma. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $C \subseteq X$ abgeschlossen und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Funktion $g_C \in \mathcal{C}(X)$ so, dass $g_C(C) = \{0\}$, $g_C(x) = 1$ für $\delta(x, C) \geq \varepsilon$ und $0 \leq g_C(x) \leq 1$ für alle $x \in X$ gilt. Dabei bezeichnet $\delta(x, A)$ für $A \subseteq X$ die stetige Distanzfunktion $\delta(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$.*

Beweis. Definiere die Hilfsfunktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ über

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

Es gilt $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ und die Funktion

$$g_C(x) := \varphi\left(\frac{1}{\varepsilon}\delta(x, C)\right)$$

leistet das Gewünschte, denn $g_C(x)$ ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig - genauer ist sie sogar gleichmäßig stetig. Die restlichen geforderten Eigenschaften gelten offensichtlich nach der angegebenen Konstruktion. ❑

4.1.7 Satz. *Ist X eine Menge, so ist jedes der folgenden Mengensysteme ein Erzeugendensystem der Baire'schen σ-Algebra $\mathfrak{B}_a(X)$:*

(i) $\{x \in X \mid f(x) > c,\ f \in \mathcal{C}(X),\ c \in \mathbb{R}\}$

(ii) $\{x \in X \mid f(x) > c,\ f \in \mathcal{C}^+(X),\ c \in \mathbb{R}^+\}$

(iii) $\{x \in X \mid f(x) > 0,\ f \in \mathcal{C}(X)\}$

(iv) $\{Z \subseteq X \mid Z = f^{-1}(A),\ f \in \mathcal{C}(X),\ A \in \mathcal{A}\}$

(v) $\{U \subseteq X \mid U = f^{-1}(O),\ f \in \mathcal{C}(X),\ O \in \mathcal{T}\}$

(vi) $\{f^{-1}(\{0\}) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$

Beweis. Gemäß dem Beweis von Satz B.1.5 ist

$$\mathfrak{B}_a(X) = \bigcap \left\{\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X) \mid f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}}) \subseteq \mathfrak{A}',\ f \in \mathcal{C}(X)\right\}, \qquad \textbf{(4.1)}$$

dabei bezeichnet $\mathbb{A}(X)$ die Menge aller σ-Algebren auf X. In Satz 4.1.2 (vi) wurde gezeigt, dass die Menge der Halbstrahlen $S_{lo}^{\mathbb{R}}$ ein Erzeugendensystem der Borel'schen σ-Algebra $\mathfrak{B}$ auf $\mathbb{R}$ ist. Weiters gilt nach Lemma B.1.8 für eine

Funktion $f : (X, \mathfrak{A}) \to (X', \mathfrak{A}')$ von einem Messraum $(X, \mathfrak{A})$ in einen Messraum $(X', \mathfrak{A}')$, wobei $\mathcal{C}'$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}'$ ist:

$$f^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A} \iff f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq \mathfrak{A}$$

Dies angewandt auf Gleichung 4.1 ergibt zusammen mit Lemma B.1.4 (ii)

$$\mathfrak{B}_a(X) = \bigcap \left\{ \mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X) \;\middle|\; f^{-1}(S^{\mathbb{R}}_{ol}) \subseteq \mathfrak{A}',\, f \in \mathcal{C}(X) \right\} = \sigma(S^{\mathbb{R}}_{ol}),$$

also gilt (i), denn

$$\{x \in X \mid f(x) > c,\, c \in \mathbb{R}\} = \{f^{-1}\left((c, \infty)\right) \mid c \in \mathbb{R}\} = f^{-1}(S^{\mathbb{R}}_{ol}).$$

Nach Satz 4.1.2 sind auch die - bezüglich der von der Metrik d induzierten Topologie - offenen Mengen $\mathcal{T}_d$ und abgeschlossenen Mengen $\mathcal{A}_d$ Erzeugendensysteme der Borel'schen σ-Algebra $\mathfrak{B}$. Eine analoge Argumentation zeigt, dass die Punkte (iv) und (v) gelten.
Um (ii) und (iii) einzusehen stellt man zunächst fest, dass sicher

$$\bigcup_{f \in \mathcal{C}^+(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}}) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{C}(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}})$$

gilt, also

$$\sigma\Big(\bigcup_{f \in \mathcal{C}^+(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}})\Big) \subseteq \sigma\Big(\bigcup_{f \in \mathcal{C}(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}})\Big).$$

Andererseits kann jede Funktion f aus $\mathcal{C}(X)$ in ihren Positivteil $f^+ := \max(0, f)$ und ihren Negativteil $f^- := \max(f, 0)$ gemäß $f = f^+ - f^-$ zerlegt werden. Dabei sind $f^+,\ f^- \in \mathcal{C}^+(X)$ und $f^+,\ f^-$ sind genau dann messbar, wenn f messbar ist. Daher ist auch

$$\bigcup_{f \in \mathcal{C}(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}}) \subseteq \bigcup_{f \in \mathcal{C}^+(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}}),$$

also insgesamt

$$\sigma\Big(\bigcup_{f \in \mathcal{C}^+(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}})\Big) = \sigma\Big(\bigcup_{f \in \mathcal{C}(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}})\Big) = \mathfrak{B}_a(X),$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen wegen Satz B.1.5 (I$\mathfrak{A}$2) gilt. Aus der Beziehung $\bigcup_{f \in \mathcal{C}^+(X)} f^{-1}(\overline{\mathfrak{B}}) = \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) > c,\, f \in \mathcal{C}^+(X),\, c \in \mathbb{R}^+\right\}$ folgt damit (ii). Weiters ist

$$\left\{x \in X \;\middle|\; f(x) > c,\, c \in \mathbb{R}^+,\, f \in \mathcal{C}^+(X)\right\} = \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) > 0,\, f \in \mathcal{C}^+(X)\right\}$$

und da für $f \in \mathcal{C}(X)$ gilt, dass $f^+ \in \mathcal{C}(X)$ und $f^- \in \mathcal{C}^+(X)$, folgt (iii).
Zum Beweis von Punkt (vi) sei $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ eine beliebige abgeschlossene Menge. Nach Lemma 4.1.6 existiert eine Funktion $g_A \in \mathcal{C}(\overline{\mathbb{R}})$ so, dass $A = g_A^{-1}(\{0\})$ ist. Daher kann im Erzeugendensystem aus Punkt (iv) die abgeschlossene Menge $A \in \mathcal{A}$ durch $g_A^{-1}(\{0\})$ ersetzt werden und die Funktion $F(x) := f^{-1}(g_A^{-1}(A)) = (g_A \circ f)^{-1}(A)$ ist stetig, also erzeugen die Mengensysteme aus Punkt (iv) und Punkt (vi) die gleiche σ-Algebra, nämlich $\mathfrak{B}_a(X)$. ❑

Das folgende Lemma liefert eine weitere Charakterisierung der Baire'schen σ-Algebra.

4.1.8 Lemma. *Jede Baire-Menge $B_a \in \mathfrak{B}_a(X)$ hat die Darstellung*

$$B_a = \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B\}, \tag{4.2}$$

wobei $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ und $f_i \in \mathcal{C}(X)$ ist. Weiters ist jede Menge dieser Form Baire und es kann die Einschränkung $f_i \in \mathcal{C}_b(X)$ vorgenommen werden.

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass für alle $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ und alle $f_i \in \mathcal{C}_b(X)$ die Mengen der Form

$$\{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B\}$$

Baire sind. Sei zunächst $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ abgeschlossen und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{C}_b(X)$. Dann existiert ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty)$ mit $B = \psi^{-1}(\{0\})$. Definiert man

$$\Phi_{(f_n)}(x) := \begin{cases} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \psi((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}) \end{cases}$$

so ist $\Phi_{(f_n)}$ stetig und es gilt

$$\begin{aligned}\Phi_{(f_n)}^{-1}(\{0\}) &= (f_n)_{n\in\mathbb{N}}^{-1}(\psi^{-1}(\{0\}) = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}^{-1}(B) = \{x \in X \mid (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in B\} = \\ &= \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B\} = B_a\end{aligned}$$

Also ist B_a funktional abgeschlossen und damit in $\mathfrak{B}_a(X)$. Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine feste Folge in $\mathcal{C}_b(X)$ und definiere die Mengenfamilie

$$\mathfrak{B}_0 := \big\{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty) \mid \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B\} \in \mathfrak{B}_a(X)\big\},$$

dann ist $\mathfrak{B}_0(X)$ eine σ-Algebra, denn: Offensichtlich ist $\mathbb{R}^\infty \in \mathfrak{B}_0$. Ist weiters $B_0 \in \mathfrak{B}_0$, so gilt per Definition

$$\{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B_0\} \in \mathfrak{B}_a(X).$$

Da $\mathfrak{B}_a(X)$ eine σ-Algebra ist, ist auch

$$\{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B_0\}^c \in \mathfrak{B}_a(X)$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B_0\}^c &= \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \notin B_0\} = \\ &= \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B_0^c\},\end{aligned}$$

also ist $B_0^c \in \mathfrak{B}_0$. Ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{B}_0$, so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B_n\}$ in $\mathfrak{B}_a(X)$ und damit auch $\bigcup_n \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B_n\} \in \mathfrak{B}_a(X)$. Wegen

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B_n\} = \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\}$$

ist $\bigcup_n B_n \in \mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ eine σ-Algebra. Nach dem ersten Beweisschritt ist

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{R}^\infty} := \{B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty) \mid B \text{ abgeschlossen}\} \subseteq \mathfrak{B}_0$$

und mit $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(\mathfrak{A}_{\mathbb{R}^\infty})$ erhält man

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty) = \sigma(\mathfrak{A}_{\mathbb{R}^\infty}) \subseteq \sigma(\mathfrak{B}_0) = \mathfrak{B}_0$$

Da andererseits sicher $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ gilt, ist insgesamt $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Um einzusehen, dass jede Baire-Menge gemäß (4.2) dargestellt werden kann definiert man

$$\mathfrak{C} := \{C \in \mathfrak{B}_a(X) \mid C = \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B\}\}.$$

für $f_i \in \mathcal{C}_b(X)$ und $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$. Wie $\mathfrak{B}_0$ im ersten Teil ist $\mathfrak{C}$ eine σ-Algebra, die alle Mengen der Form $\{x \in X \mid f(x) > 0, f \in \mathcal{C}_b(X)\}$ enthält. Diese Mengen bilden nach Satz 4.1.7 ein Erzeugendensystem der Baire'schen σ-Algebra, also gilt $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}_a(X)$. ❑

Nun soll kurz das Verhältnis zwischen der Borel'schen und der Baire'schen σ-Algebra untersucht werden.

4.1.9 Proposition. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so gilt $\mathfrak{B}_a(X) \subseteq \mathfrak{B}(X)$.*

Beweis. Nach Lemma 4.1.4 ist jede Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$ Borel messbar. Da per Definition die Baire'sche σ-Algebra die Initial-σ-Algebra bezüglich $\mathcal{C}(X)$ ist, folgt $\mathfrak{B}_a(X) \subseteq \mathfrak{B}(X)$. ❑

Auf Grund der engen Beziehung zwischen der Borel'schen und der Baire'schen σ-Algebra stellt sich die Frage, ob es Situationen gibt, in denen die beiden σ-Algebren übereinstimmen. Es zeigt sich, dass dies im Falle perfekt normaler Räume (siehe A.1.23) zutrifft.

4.1.10 Lemma. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein perfekt normaler Raum, dann gilt $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}_a(X)$.*

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein perfekt normaler Raum und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist $A \in \mathfrak{B}(X)$ und da $(X, \mathcal{T})$ perfekt normal ist, existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$, sodass $A = f^{-1}(\{0\})$ ist. Also gilt $\mathcal{A} \subseteq \{f^{-1}(\{0\}) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}$, woraus mit Satz 4.1.7 (vi)

$$\mathfrak{B}(X) = \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\{f^{-1}(\{0\}) \mid f \in \mathcal{C}(X)\}) = \mathfrak{B}_a(X)$$

folgt. Zusammen mit Proposition 4.1.9 ergibt sich $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}_a(X)$. ❑

4.1.11 Korollar. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer und ist $(X, \mathcal{T})$ ein metrischer Raum, so gilt $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}_a(X)$.*

Beweis. Lemma 4.1.6 besagt gerade, dass ein metrischer Raum perfekt normal ist. Nach Lemma 4.1.10 gilt also $\mathfrak{B}(X) = \mathfrak{B}_a(X)$. ❑

4.2 Borel-, Baire- und Radonmaße

Im gesamten Abschnitt 4.2 werden nur Hausdorff-Räume betrachtet. Dies dient hauptsächlich der Bequemlichkeit, da einige Aussagen auch für topologische Räume gelten, die nicht Hausdorff'sch sind. Weiters ist, wenn von einem Maß μ die Rede ist, immer ein Maß endlicher Variation gemeint.

4.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

1.) Ein Maß auf der Borel'schen σ-Algebra $\mathfrak{B}(X)$ heißt *Borelmaß* auf X. Die Menge der Borelmaße wird mit $\mathcal{M}(X)$ bezeichnet.
2.) Ein Maß auf der Baire'schen σ-Algebra $\mathfrak{B}_a(X)$ heißt *Bairemaß* auf X. Die Menge der Bairemaße wird mit $\mathcal{M}_a(X)$ bezeichnet.
3.) Ein Borelmaß μ auf X heißt *Radonmaß*, wenn es für alle $B \in \mathcal{B}(X)$ und alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq X$ gibt, sodass $|\mu|(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt. Die Menge der Radonmaße wird mit $\mathcal{M}_r(X)$ bezeichnet.

Borel-Maße sind durch ihre Werte auf den offenen Teilmengen eines topologischen Raumes eindeutig bestimmt:

4.2.2 Lemma. *Sind μ, $\nu \in \mathcal{M}(X)$ zwei Borel-Maße, die auf den offenen Teilmengen eines topologischen Raumes übereinstimmen, so stimmen μ und ν auf ganz $\mathfrak{B}(X)$ überein.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass ein Borel-Maß, das auf den offenen Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ verschwindet, auf ganz $\mathcal{B}(X)$ gleich Null ist. Sei $\mu(\mathcal{T}) = 0$. Dann gilt $\mu^+(\mathcal{T}) = \mu^-(\mathcal{T})$ und aus Satz über monotone Klassen folgt $\mu^+ = \mu^-$ auf ganz $\mathfrak{B}(X)$. Da μ^+ und μ^- zu einander singulär sind muss $\mu^+ = \mu^- = 0$ gelten. ❏

4.2.3 Definition. Eine nicht-negative Mengenfunktion μ auf einem System $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$ heißt *straff auf* $\mathcal{A}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq X$ existiert, so dass $\mu(A) < \varepsilon$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $A \cap K_\varepsilon = \varnothing$ ist.
Eine additive Mengenfunktion μ von beschränkter Variation auf einer Algebra oder einem Ring heißt *straff*, wenn ihre Totalvariation straff ist.

Offensichtlich ist in einem kompakten Raum jedes Maß straff. Außerdem ist ein Borel-Maß offensichtlich genau dann straff, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K_ε existiert, sodass $|\mu|(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt. Die folgende Eigenschaft macht straffe Borelmaße zu Radonmaßen.

4.2.4 Definition. Eine nicht-negative Mengenfunktion μ auf einem System $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen eines topologischen Raums heißt *regulär*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jede Menge $A \in \mathcal{A}$ eine abgeschlossene Menge F_ε existiert, so dass $F_\varepsilon \subseteq A$, $A \setminus F_\varepsilon$ und $\mu(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.
Eine additive Mengenfunktion μ von beschränkter Variation auf einer Algebra oder einem Ring heißt *regulär*, wenn ihre Totalvariation regulär ist.

4.2.5 Bemerkung. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Hausdorff-Raum, so ist jedes Radonmaß auf $\mathfrak{B}(X)$ straff und regulär. Ist μ straffes und reguläres Borelmaß, so ist μ Radon.

Beweis. Die erste Behauptung folgt direkt aus der Tatsache, dass in T_2-Räumen kompakte Mengen abgeschlossen sind. Um die zweite Behauptung einzusehen stellt man eine beliebige Menge $B \in \mathfrak{B}(X)$ gemäß

$$B = (B \cap K_\varepsilon) \cup (B \setminus K_\varepsilon)$$

dar. Aus der Straffheit und der Regularität folgt nun, dass μ Radon ist, da der Schnitt einer kompakten mit einer abgeschlossenen Menge wieder kompakt ist. ❏

4.2.6 Satz. *Ist (X,d) ein metrischer Raum, dann ist jedes Borel-Maß auf X regulär. Ist X vollständig und seperabel, dann ist jedes Borel-Maß Radon.*

Beweis. Gemäß der Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu \geq 0$. Die erste Aussage - die Regularität des Borel-Maßes μ - wird in Satz C.1.3 gezeigt.
Sei $\varepsilon > 0$. Da $(X,\mathcal{T})$ separabel ist existiert eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge von X. Sei $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von D und seien für alle $n \in \mathbb{N}$

$$U_n(x_j) := \{y \in X \bigm| d(x_j,y) \leq \varepsilon 2^{-n}\}$$

die abgeschlossenen Kugeln mit Radius $\varepsilon 2^{-n}$. Sei weiters $W_{n,k} := \bigcup_{j=1}^k U_n(x_j)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $W_{n,k} \subseteq W_{n,k+1}$ und $W_n := \bigcup_{j=1}^\infty U_n(x_j) = X$. Damit konvergiert $\mu(W_{n,k})$ für $k \to \infty$ gegen $\mu(X)$, also existiert ein Index $k_n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\mu(X \setminus W_{n,k_n}) < \varepsilon 2^{-n}.$$

Sei nun $K_n := \bigcap_{m=n}^\infty W_{m,k_m}$, dann ist $K_n \subseteq X$ abgeschlossen. Da $K_n \subseteq W_{m,k_m}$ für alle $m \geq n$ gilt ist K_n total beschränkt. Auf Grund der Vollständigkeit von $(X,\mathcal{T})$ ist K_n damit kompakt. Weiters gilt

$$\mu(X \setminus K_n) = \mu\Big(\bigcup_{m=n}^\infty (X \setminus W_{m,k_m})\Big) \leq \sum_{m=n}^\infty \varepsilon 2^{-m} < \varepsilon.$$

Damit hat man erhalten, dass das Maß μ straff ist. Da ein metrischer Raum T_2 ist, ist K_n abgeschlossen und damit ist μ auch regulär. Aus Bemerkung 4.2.5 folgt, dass μ Radon ist. ❑

4.2.7 Korollar. *Ist $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer Raum, so ist jedes Baire-Maß μ regulär. Insbesonders existiert für jede Baire-Menge $E \in \mathfrak{B}_a(X)$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$, so dass $f^{-1}(\{0\}) \subseteq E$ und $|\mu|(E \setminus f^{-1}(\{0\})) < \varepsilon$ gilt.*
Allgemein gilt für jede Familie $\mathcal{F}$ stetiger Funktionen auf X, dass jedes Maß μ auf der Initial-σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F})$ regulär ist.

Beweis. Gemäß der Zerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit wieder $\mu \geq 0$. Sei weiters $E \in \mathfrak{B}_a(X)$ eine Bairemenge und $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 4.1.8 existieren eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_i \in \mathcal{C}(X)$ und eine Menge $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ so, dass E die Darstellung

$$E = \{x \in X \bigm| (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B\} \qquad \textbf{(4.3)}$$

hat. Definiere die stetige Abbildung

$$\varphi := \begin{cases} X \to \mathbb{R}^\infty \\ x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots) \end{cases}$$

und sei μ_0 das Bildmaß unter der Abbildung φ, also

$$\mu_0 := \mu \circ \varphi^{-1} = \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty) \to \mathbb{R} \\ B \mapsto \mu\big(\varphi^{-1}(B)\big) \end{cases}$$

Da $\mathbb{R}^\infty$ perfekt normal ist gilt nach Lemma 4.1.10, dass $\mathfrak{B}_a(\mathbb{R}^\infty) = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ ist. Also ist μ_0 ein Borelmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ und wegen Satz 4.2.6 ist μ_0 regulär. Daher existiert eine Funktion $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^\infty)$ und eine abgeschlossene Menge $F \subseteq B$, sodass

$$\mu_0(B \setminus F) = \mu_0(B \setminus g^{-1}(\{0\})) < \varepsilon$$

ist. Sei $f(x) := g(f_1(x), f_2(x), \dots)$. Dann ist $f \in \mathcal{C}(X)$ und es gilt

$$\mu_0\big(B \setminus g^{-1}(\{0\})\big) = \mu\big(\varphi^{-1}(B) \setminus \varphi^{-1}(g^{-1}(\{0\})\big)$$

Der rechte Ausdruck ist wegen

$$\varphi^{-1}(B) = \{x \in X \mid \varphi(x) \in B\} = \{x \in X \mid (f_1(x), f_2(x), \dots) \in B\} = E$$

und

$$\varphi^{-1}\big(g^{-1}(\{0\})\big) = (g \circ \varphi)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\})$$

gleich $\mu\big(E \setminus f^{-1}(\{0\})\big)$, also hat man

$$\mu\big(E \setminus f^{-1}(\{0\})\big) < \varepsilon$$

erhalten und damit ist jedes Bairemaß auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ regulär. Ist $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(X)$, so ist per Definition der Initial-σ-Algebra jede Bairemenge E gemäß (4.3) mit $f_i \in \mathcal{F}$ darstellbar. Infolgedessen ist jedes Maß auf $\sigma(\mathcal{F})$ regulär. ❑

Nach Lemma 4.1.10 stimmen auf perfekt normalen Räumen die Baire- und Borelmaße überein. Das folgende Korollar ist also nicht überraschend.

4.2.8 Korollar. *Auf einem perfekt normalen Raum* $(X, \mathcal{T})$ *ist jedes Borelmaß* $\mu \in \mathcal{B}(X)$ *regulär.*

Die folgende Eigenschaft ist stärker als der bisher eingeführte Regularitätsbegriff und doch noch schwächer als die Eigenschaft eines Maßes, Radon zu sein.

4.2.9 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und μ ein Borel-Maß auf X. Das Maß μ heißt *τ-additiv*, wenn für jedes monoton wachsende Netz offener Mengen $(O_i)_{i\in I}$ in $(X, \mathcal{T})$ die Beziehung

$$|\mu|\left(\bigcup_{i\in I} O_i\right) = \lim_{i\in I} |\mu|(O_i)$$

gilt. Gilt diese Beziehung für alle Netze mit $\bigcup_i U_i = X$, dann heißt μ *τ_0-additiv* oder *schwach-τ-additiv.*

Die folgende Proposition zeigt, dass die τ-Additivität zwischen der Regularität und der Radoneigenschaft liegt. Ebenso sieht man, dass die Straffheit eines Maßes μ ausreicht, damit ein τ-additives Maß Radon ist.

4.2.10 Proposition. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum. Es gilt:*

1.) Jedes Radon-Maß ist τ-additiv.

2.) Ist $(X, \mathcal{T})$ regulär, so ist jedes τ-additive Maß regulär. Insbesonders ist jedes τ-additive Maß auf einem kompakten Raum Radon.

3.) Jedes straffe τ-additive Maß ist Radon.

4.) Ist (X,d) ein seperabler metrischer Raum, so ist jedes Borel-Maß τ-additiv.

Beweis. 1.) Sei $\mu \in \mathfrak{B}(X)$ ein Radonmaß, $(O_i)_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz offener Mengen und sei $\varepsilon > 0$. Setze $O := \bigcup_i O_i$. Da μ Radon ist existiert eine kompakte Menge $K \subseteq O$, sodass $|\mu|(O \setminus K) = |\mu|((\bigcup_i O_i) \setminus K) < \varepsilon$ ist. Auf Grund der Kompaktheit von K existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass schon $\bigcup_{j=1}^n O_{i_j} \supseteq K$ ist. Damit ist auch

$$|\mu|\Big((\bigcup_{i\in I} O_i) \setminus (\bigcup_{j=1}^n O_{i_j}) \Big) = |\mu|\Big(X \setminus (\bigcup_{j=1}^n O_{i_j}) \Big) < \varepsilon$$

und daher, da das Netz $(O_i)_{i\in I}$ wachsend ist,

$$|\mu|(X) - \lim_{i\in I} |\mu|(O_i) < \varepsilon.$$

2.) Sei $(X,\mathfrak{T})$ ein regulärer Raum und μ ein τ-additives Maß auf $\mathfrak{B}(X)$. Sei weiters $\mathfrak{E}$ die Menge aller Borelmengen $E \subseteq \mathfrak{B}(X)$, für die

$$|\mu|(E) = \sup\{|\mu|(Z) \mid Z \subseteq E, Z \text{ abgeschlossen}\} = \inf\{|\mu|(O) \mid O \supseteq E, O \text{ offen}\}$$

gilt. Der Beweis von Satz C.1.3 zeigt, dass $\mathfrak{E}$ eine σ-Algebra ist. Lässt sich zeigen, dass $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{E}$ gilt, so ist der Beweis abgeschlossen, denn die offenen Mengen sind ein Erzeugendensystem der Borel'schen σ-Algebra.
Sei $O \in \mathfrak{T}$. Nach Lemma A.1.7 existiert für alle $x \in O$ ein $U_x \in \mathfrak{U}(x)$ mit $x \in U_x \subseteq O$. Daher lässt sich O in der Form $O = \bigcup_{x\in O} U_x$ schreiben. Aus der Regularität von $(X,\mathfrak{T})$ erhält man, dass sich O als Vereinigung von Mengen aus

$$\mathcal{V} := \{V \in \mathfrak{U}(x) \mid x \in U_x \subseteq O, \overline{V} \subseteq U_x\}$$

schreiben lässt. Definiert man

$$\mathcal{V}_0 := \{V_n := \bigcup_{i=1}^n V_i \mid V_i \in \mathcal{V}, n \in \mathbb{N}\},$$

so kann O auch durch Mengen aus $\mathcal{V}_0$ gemäß $O = \bigcup_{V\in\mathcal{V}_0} V$ dargestellt werden, wobei $V_n \subseteq V_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da μ τ-additiv ist, existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und $V_n \in \mathcal{V}_0$ so, dass $|\mu|(O \setminus V_n) < \varepsilon$ ist. Nach Konstruktion gilt $\overline{V}_i \subseteq O$ für alle $V_i \in \mathcal{V}_0$ und daher auch $|\mu|(O \setminus \overline{V}_n) < \varepsilon$, also ist $O \in \mathfrak{E}$.
Ist $(X,\mathfrak{T})$ kompakt, so ist $(X,\mathfrak{T})$ ein regulärer Raum und das τ-additive Maß μ also regulär. Auf einem kompakten Raum sind weiters alle Maße straff, daher ist nach Bemerkung 4.2.5 das Maß μ Radon.

3.) Ist μ ein τ-additives Maß auf $\mathfrak{B}(X)$, so ist μ nach Punkt (2) auf jedem kompakten Teilraum von X Radon. Ist das Maß μ nun zusätzlich straff, so findet man für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $A \in \mathfrak{B}(X)$ eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq X$ mit $K_\varepsilon \cap A = \varnothing$ und $\mu(A) < \varepsilon$. Also ist μ Radon auf ganz X.

4.) Sei $(X,\mathfrak{T})$ ein separabler metrischer Raum und μ ein Maß auf $\mathfrak{B}(X)$. Jeder separable metrische Raum erfüllt bekanntlich das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Ist $(O_i)_{i\in I}$ ein monoton wachsendes Netz offener Mengen und $O := \bigcup_{i\in I} O_i$, so existiert daher eine höchstens abzählbare Teilmenge J mit $O = \bigcup_{j\in J} O_j$. Sei

$\varepsilon > 0$. Aus der σ-Additivität folgt die Stetigkeit von unten des Maßes μ, daher gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ und $O_n := \bigcup_{k=1}^n O_k$ dann

$$|\mu|(O \setminus O_n) = |\mu|(O) - |\mu|(O_n) < \varepsilon$$

gilt, also ist μ ein τ-additives Maß auf $\mathfrak{B}(X)$.

❑

4.2.11 Korollar. *Sind μ und ν zwei τ-additive Maße auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, die auf einem Mengensystem $\mathcal{U}$ übereinstimmen, das eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie enthält und abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte ist, so stimmen μ und ν schon auf ganz $\mathfrak{B}(X)$ überein.*

Beweis. Sei $O \in \mathcal{T}$. Definiere die Menge

$$I := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B} \mid \mathcal{F} \text{ ist endlich}, \forall B \in \mathcal{F} : B \subseteq O\}.$$

Dann ist I offensichtlich gerichtet. Definiert man $O_{\mathcal{F}} := \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$, so hat man wegen $O_{\mathcal{F}} \subseteq O_{\mathcal{G}}$ für $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ mit $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in I$ und $\bigcup_{\mathcal{F} \in I} O_{\mathcal{F}} = O$ erhalten, dass O eine Darstellung als wachsendes Netz offener Mengen hat, die jeweils eine endliche Vereinigung von Elementen aus der Basis $\mathcal{B}$ und damit von Elementen aus $\mathcal{U}$ sind. Damit gilt $\mu(O_{\mathcal{F}}) = \nu(O_{\mathcal{F}})$ für alle $O_{\mathcal{F}}$, da μ und ν auf $\mathcal{U}$ und damit auch auf $\mathcal{B}$ übereinstimmen. Da laut Voraussetzung μ und ν τ-additiv sind folgt daraus $\mu(O) = \nu(O)$. Lemma 4.2.2 zeigt nun, dass μ und ν auf ganz $\mathfrak{B}(X)$ übereinstimmen, denn τ-additive Maße sind definitionsgemäß Borel-Maße. ❑

4.2.12 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei μ ein reguläres τ-additives Maß auf X und sei $(f_i)_{i \in I}$ ein monoton wachsendes Netz unterhalbstetiger nicht-negativer Funktionen, so dass die Funktion $f = \lim\limits_{i \in I} f_i$ beschränkt ist. Dann gilt*

$$\lim_{i \in I} \int_X f_i(x)\, \mu(dx) = \int_X f(x)\, \mu(dx).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, dass $\mu \geq 0$ gilt - andernfalls betrachtet man die Jordan-Hahn Zerlegung. Da nach Voraussetzung die Funktion f beschränkt ist, gelte weiters $f < 1$.
Definiere die Folgen

$$f_{i,n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{f_i > \frac{k-1}{n}\}} \quad \text{und} \quad f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{f > \frac{k-1}{n}\}}$$

Per Definition sind die Mengen $\{f_i > \frac{k-1}{n}\}$ offen und da der Grenzwert einer Folge oder eines Netzes unterhalbstetiger Funktionen selbst wieder unterhalbstetig ist, ist auch die Menge $\{f > \frac{k-1}{n}\}$ offen, daher ist $(\{f_i > \frac{k-1}{n}\})_{i \in I}$ ein monoton wachsendes Netz offener Mengen, das gegen die offene Menge $\{f > \frac{k-1}{n}\}$ wächst. Auf Grund der τ-Additivität von μ gilt somit

$$\lim_{i \in I} \mu\Bigg(\bigg\{f_i > \frac{k-1}{n}\bigg\}\Bigg) = \mu\Bigg(\bigg\{f > \frac{k-1}{n}\bigg\}\Bigg).$$

und daher

$$\lim_{i \in I} \int_X f_{i,n}\, d\mu = \int_X f_n\, d\mu$$

Sind $x \in X$ und $i \in I$ so, dass $f_i(x) = c < 1$, so existieren $k_1, k_2, n \in \mathbb{N}$, $k_1 < k_2$, sodass $\frac{k_1-1}{n} < f_i(x) < \frac{k_2-1}{n}$. Daraus folgt, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{f_i > \frac{k-1}{n}\}} = \frac{k_1}{n}$$

und somit

$$|f_{i,n}(x) - f_i(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{f_i > \frac{k-1}{n}\}}(x) - f_i(x)\right| \leq \left|\frac{k_1}{n} - \frac{k_1-1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

für alle $x \in X$, $i \in I$ und $n \in \mathbb{N}$. Genau so zeigt man auch

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
\lim_{i\in I}\int_X |f_i(x) - f(x)|\,\mu(dx) &= \lim_{i\in I}\int_X |f_i(x) - f_{i,n}(x) + f_{i,n}(x) - f(x)|\,\mu(dx) = \\
&\leq \lim_{i\in I}\int_X |f_i(x) - f_{i,n}(x)|\,\mu(dx) + \lim_{i\in I}\int_X |f_{i,n}(x) - f(x)|\,\mu(dx) \leq \\
&\leq \int_X \frac{2}{n}\,\mu(dx) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

❑

4.2.13 Korollar. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, sei μ ein reguläres τ-additives Maß auf X und sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz von Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$, das monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{i\in I}\int_X f_i(x)\,\mu(dx) = 0$$

Beweis. Ist $i_0 \in I$ fest, so konvergiert das Netz $(f_{i_0} - f_i)_{i \rhd i_0}$ monoton wachsend gegen f_{i_0} und $f_{i_0} - f_i \geq 0$ für alle $i \rhd i_0$. Außerdem ist für alle $i \rhd i_0$ die Funktion $f_{i_0} - f_i$ unterhalbstetig. Damit erhält man aus Lemma 4.2.12, dass

$$\int_X f_{i_0}\,d\mu = \lim_{i\in I}\int_X f_{i_0}\,d\mu = \lim_{i\in I}\int_X f_{i_0} - f_i\,d\mu$$

und daher

$$0 = \lim_{i\in I}\int_X f_{i_0} - f_i - f_{i_0}\,d\mu$$

und isgesamt

$$\lim_{i\in I}\int_X f_i\,d\mu = 0$$

❑

4.2.14 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorff-Raum und $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Algebra von Teilmengen von X, die eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ enthält. Sei weiters μ eine reguläre additive Mengenfunktion von beschränkter Variation auf $\mathfrak{A}$.*

1.) Ist μ straff, so kann μ eindeutig zu einem Radon-Maß auf X fortgesetzt werden.

2.) Ist $(X, \mathcal{T})$ regulär und gilt für jedes monoton wachsende Netz $(O_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen aus $\mathfrak{A}$ mit $\bigcup_i O_i = X$, dass $|\mu|(X) = \lim_i |\mu|(O_i)$ ist, dann kann μ eindeutig zu einem τ-additiven Maß auf $\mathfrak{B}(X)$ fortgesetzt werden.

Ist μ nicht-negativ, so hat in beiden Fällen die Fortsetzung $\hat{\mu}$ für alle $B \in \mathfrak{B}(X)$ die Darstellung

$$\hat{\mu}(B) = \inf\{\mu_*(O) \mid O \in \mathcal{T}, O \supseteq B\}$$

Beweis. Zunächst sei festgestellt, dass der Positiv- und der Negativteil eines Maßes μ, das die Eigenschaften aus Punkt (1) oder Punkt (2) erfüllt, diese Eigenschaften dann ebenfalls erfüllen. Also genügt es, sich auf nichtnegative Maße zu beschränken.
Im Beweis wird das durch eine additive Mengenfunktion auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ erzeugte innere Maß μ_* verwendet, das für $E \subseteq X$ durch

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(A) \mid A \in \mathfrak{A}, A \subseteq E\}$$

definiert ist. Zuerst wird Punkt (2) bewiesen. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

Schritt I. Es wird gezeigt, dass

$$\lim_{i\in I} \mu(O_i) = \mu_*(O) \tag{4.4}$$

für jedes wachsende Netz $(O_i)_{i\in I}$ offener Mengen $O_i \in \mathfrak{A}$ mit $O = \bigcup_i O_i$ gilt. Sei angenommen, (4.4) trifft nicht zu. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\mu_*(O) - \lim_{i\in I} \mu(O_i) \geq \varepsilon.$$

Das Maß μ ist laut Annahme regulär, also existiert eine abgeschlossene Menge $Z \subseteq O$ mit $Z \in \mathfrak{A}$ und $\mu(Z) > \mu_*(O) - \frac{\varepsilon}{2}$. Definiere $W := X \setminus Z$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\lim_{i\in I} \mu(O_i \cup W) \leq \lim_{i\in I} \mu(O_i) + \mu(X) - \mu(Z) \leq \lim_{i\in I} \mu(O_i) + \mu(X) - \mu_*(O) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ \leq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2} < \mu(X).\end{aligned}$$

Andererseits gilt aber $X = \bigcup_i (O_i \cup W)$ und daher laut Voraussetzung und der Annahme $\mu \geq 0$

$$\mu(X) = \lim_{i\in I} \mu(O_i \cup W),$$

was ein Widerspruch ist.

Schritt II. Nun wird gezeigt, dass

$$\lim_{i\in I} \mu_*(O_i) = \mu_*(O) \tag{4.5}$$

für jedes wachsende Netz offener Mengen $O_i \subseteq X$ mit $\bigcup_i O_i = O$ gilt. Dazu zeigt man zunächst, dass

$$\lim_{i \in I} \mu_*(O_i) \geq \mu(V) \tag{4.6}$$

für alle offenen Mengen $V \subseteq O$ mit $V \in \mathfrak{A}$ gilt. Sei dazu

$$\mathcal{W} := \{W \in \mathfrak{A} \mid W \in \mathcal{T},\, \exists i \in I : W \subseteq O_i\}$$

Offensichtlich ist $\mathcal{W}$ eine gerichtete Familie offener Mengen, deren Vereinigung gleich O ist. Daher lässt sich (4.4) anwenden und es folgt

$$\mu_*(O) = \sup\{\mu(W) \mid W \in \mathcal{W}\}.$$

Da V als $V = \bigcup_{W \in \mathcal{W}} (V \cap W)$ schreiben lässt erhält man analog

$$\mu(V) = \mu_*(V) = \sup\{\mu(V \cap W) | W \in \mathcal{W}\}. \tag{4.7}$$

Für jedes $W \in \mathcal{W}$ existiert ein $i \in I$, so dass $W \subseteq O_i$. Damit ist auch $V \cap W \subseteq O_i$ und daher $\mu(V \cap W) \leq \mu(W) \leq \mu_*(O_i)$. Also gilt $\mu(V \cap W) \leq \lim_i \mu_*(O_i)$. Wegen (4.7) folgt daraus (4.6). Bildet man nun das Supremum über alle offenen Mengen $V \subseteq O$ mit $V \in \mathfrak{A}$, so erhält man

$$\mu_*(O) = \sup\{\mu(V) \mid V \in \mathcal{T},\, V \in \mathfrak{A}\} \leq \lim_i \mu_*(O_i).$$

Da sicher $O_i \subseteq O$ für alle $i \in I$ gilt auch

$$\lim_i \mu_*(O_i) \leq \mu_*(O),$$

also ist (4.5) gezeigt.

Schritt III. Es werden zwei weitere Eigenschaften von μ_* gezeigt: Sind O_1 und O_2 offen, so gilt

$$\mu_*(O_1 \cup O_2) \leq \mu_*(O_1) + \mu_*(O_2). \tag{4.8}$$

Sind die Mengen O_1 und O_2 zusätzlich disjunkt, so hat man

$$\mu_*(O_1 \cup O_2) = \mu_*(O_1) + \mu_*(O_2). \tag{4.9}$$

Da die Algebra $\mathfrak{A}$ laut Voraussetzung eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$ enthält existieren zwei Netze $(U_i^1)_{i \in I}$ und $(U_j^2)_{j \in J}$, sodass $U_i^1,\, U_j^2 \in \mathfrak{A}$, $U_i^1,\, U_j^2 \in \mathcal{T}$ und $O_1 = \bigcup_i U_i^1$, $O_2 = \bigcup_j U_j^2$. Daraus erhält man

$$\mu(U_i^1 \cup U_j^2) \leq \mu(U_i^1) + \mu(U_j^2) \leq \mu_*(O_1) + \mu_*(O_2)$$

Ist $i \in I$ fest folgt durch Anwendung von $\lim_j$ aus (4.4) damit $\mu_*(U_i^1 \cup O_2) \leq \mu_*(O_1) + \mu_*(O_2)$. Wendet man darauf (4.5) an, so erhält man (4.8). Gleichung (4.9) zeigt man analog.

Schritt IV. Nun wird ein Maß konstruiert, das letztendlich zur gesuchten Fortsetzung führt. Dazu betrachtet man die Mengenfunktion ν auf X mit

$$\nu(A) := \inf\{\mu_*(O) \mid O \in \mathcal{T},\, A \subseteq O\},$$

definiert für alle $A \subseteq X$. Wegen (4.5) und (4.8) ist ν ein äußeres Maß. Lemma C.1.2 zeigt, dass

$$\mathfrak{A}_\nu := \{A \subseteq X \mid \nu(A \cap B) + \nu((X \setminus A) \cap B) = \nu(B),\, B \subseteq X\}$$

eine σ-Algebra auf X und ν σ-additiv auf $\mathfrak{A}_\nu$ ist.

Schritt V. Es wird gezeigt, dass die σ-Algebra der Borelmengen $\mathfrak{B}(X)$ in $\mathfrak{A}_\nu$ liegt, d.h., dass $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}_\nu$.
Da $\mathfrak{B}(X)$ von den offenen Mengen erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass jede offene Menge O in $\mathfrak{A}_\nu$ liegt. Also muss gezeigt werden, dass

$$\nu(O \cap B) + \nu((X \setminus O) \cap B) = \nu(B)$$

für alle Mengen $O \in \mathfrak{T}$ und alle $B \subseteq X$ gilt. Da

$$\nu(O \cap B) + \nu((X \setminus O) \cap B) \geq \nu(B)$$

aus (4.8) und der Definition von ν folgt, bleibt

$$\nu(O \cap B) + \nu((X \setminus O) \cap B) \leq \nu(B) \tag{4.10}$$

zu zeigen. Sei dazu zunächst B ebenfalls offen. Dann kann (4.10) zu

$$\mu_*(O \cap B) + \nu((X \setminus O) \cap B) \leq \mu_*(B) \tag{4.11}$$

umgeschrieben werden. Da $O \in \mathfrak{T}$ existiert ein wachsendes Netz $(O_i)_{i \in I}$ offener Mengen mit $O = \bigcup_i O_i$. Der Raum X ist laut Voraussetzung regulär, also gilt für alle $i \in I$, dass $Z_i := \overline{O_i} \subseteq O$. Daraus folgt

$$B = (B \cap O_i) \cup (B \cap (X \setminus O_i)) \supseteq (B \cap O_i) \cup (B \cap (X \setminus Z_i)).$$

Die Menge $B \cap (X \setminus Z_i)$ ist offen, also folgt aus (4.9), dass

$$\mu_*(B) \geq \mu_*(B \cap O_i) + \mu_*(B \cap (X \setminus Z_i)).$$

Weiters gilt für alle $i \in I$, dass $B \cap (X \setminus O) \subseteq B \cap (X \setminus Z_i))$. Daraus erhält man - zusammen mit $B \cap (X \setminus Z_i) \in \mathfrak{T}$ - dass $\mu_*(B \cap (X \setminus O_i)) \geq \nu(B \cap (X \setminus O))$. Daher gilt

$$\mu_*(B) \geq \mu_*(B \cap O_i) + \nu(B \cap (X \setminus O)).$$

Wendet man darauf (4.5) an, so folgt (4.11). Um nun (4.10) zu zeigen sei $B \subseteq X$ beliebig und $W \supseteq B$ offen. Dann gilt wegen (4.11)

$$\begin{aligned}\mu_*(W) &\geq \mu_*(W \cap O) + \nu(W \cap (X \setminus O)) = \nu(W \cap O) + \nu(W \cap (X \setminus O)) \geq \\ &\geq \nu(B \cap O) + \nu(B \cap (X \setminus O))\end{aligned}$$

Da $W \supseteq B$ beliebig war erhält man daraus (4.10).

Schritt VI. Nun definiert man die gesuchte Fortsetzung $\tilde{\mu} := \nu|_{\mathfrak{B}(X)}$. Wegen (4.5) und $\nu(O) = \mu_*(O)$ für alle $O \in \mathfrak{T}$ ist $\tilde{\mu}$ τ-additiv. Ist O offen und gleichzeitig in $\mathfrak{A}$, so gilt $\nu(O) = \mu(O)$. Es bleibt zu zeigen, dass ν auf ganz $\mathfrak{A}$ mit μ übereinstimmt. Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathfrak{A}$. Die Mengenfunktion μ ist nach Voraussetzung regulär auf $\mathfrak{A}$, also existiert eine abgeschlossene Menge F_ε mit $F_\varepsilon \subseteq A$, $A \setminus F_\varepsilon \in \mathfrak{A}$ und $\mu(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Dann findet man eine offene Menge O_ε mit $O_\varepsilon \in \mathfrak{A}$, $O_\varepsilon \supseteq A$ und $\mu(O_\varepsilon) - \mu(A) < \varepsilon$. Daher gilt

$$\mu(A) > \mu(O_\varepsilon) - \varepsilon = \nu(O_\varepsilon) - \varepsilon \geq \nu(A) - \varepsilon$$

und deswegen $\mu(A) \geq \nu(A)$. Da mit A auch $X \setminus A$ in $\mathfrak{A}$ liegt, folgt $\mu(X \setminus A) \geq \nu(X \setminus A)$. Also ist auch $-\mu(A) \geq -\nu(A)$ und daher insgesamt $\mu(A) = \nu(A)$.
Die Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt aus Korollar 4.2.11.

Zum Beweis von (1) sei zunächst bemerkt, dass unter den Voraussetzungen des Satzes eine straffe additive Mengenfunktion μ automatisch die Bedingung aus Punkt (2) erfüllt. Sei dazu $(O_i)_{i\in I}$ ein wachsendes Netz offener Mengen aus $\mathfrak{A}$ mit $X = \bigcup_i O_i$ und $\varepsilon > 0$. Ist μ straff auf $\mathfrak{A}$, so existiert definitionsgemäß für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\varepsilon \subseteq X$ so, dass $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ mit $A \cap K_\varepsilon = \varnothing$. Da in Hausdorff-Räumen kompakte Mengen abgeschlossen sind, ist für jedes kompakte K_ε die Menge $X \setminus K_\varepsilon$ offen und damit laut Voraussetzung in $\mathfrak{A}$ enthalten. Da insbesondere $K_\varepsilon \cap (X \setminus K_\varepsilon) = \varnothing$ gilt, folgt also aus der Straffheit von μ auf $\mathfrak{A}$, dass für alle $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K_ε existiert, sodass $\mu(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ ist. Daher lässt sich der Beweis von Punkt (1) in Proposition 4.2.10 wiederholen und man sieht, dass μ die geforderte Eigenschaft aus Punkt (2) erfüllt.
Wäre der Raum X regulär, so ließe sich nach Punkt (2) μ zu einem τ-additiven Maß auf $\mathfrak{B}(X)$ fortsetzen. Da μ auch straff ist würde dann aus Punkt (3) von Proposition 4.2.10 folgen, dass μ Radon ist und der Beweis wäre in diesem Fall abgeschlossen. Nun muss laut Voraussetzung X nicht regulär sein. Betrachtet man den Beweis von Punkt (2), so sieht man, dass die Regularität von X nur in Schritt V. verwendet wurde, wo gezeigt wird, dass $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}_\nu$, genauer gesagt dort, wo die Existenz eines Netzes Z_i abgeschlossener Mengen mit $Z_i := \overline{O_i} \subseteq O$ für eine beliebige offene Menge O gezeigt wird. Nun lässt sich nicht zeigen, dass $\mathfrak{A}_\nu$ alle offenen Mengen enthält, aber $\mathfrak{A}_\nu$ enthält alle offenen Mengen O, sodass $X \setminus O$ kompakt ist, denn bekanntlich (siehe z.B. [6, Satz 3.1.6]) kann jeder Punkt $x \in O$ von einem kompakten Komplement durch offene Umgebungen getrennt werden. Daher gilt weiterhin $Z_i := \overline{O_i} \subseteq O$ und Schritt V. im Beweis von Punkt (2) kann durgeführt werden. Also enthält $\mathfrak{A}_\nu$ alle offenen Mengen O, sodass $X \setminus O$ kompakt ist. Ist K eine beliebige kompakte Menge, so ist K im Hausdorff-Raum X auch abgeschlossen und $X \setminus K$ deswegen offen. Wählt man nun $O := X \setminus K$, so ist auch das Komplement von O in $\mathfrak{A}_\nu$, also $K \in \mathfrak{A}_\nu$. Also enthält $\mathfrak{A}_\nu$ alle kompakten Mengen. Dies reicht allerdings noch nicht, um zu zeigen, dass $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}_\nu$ gilt, da die Borelmengen $\mathfrak{B}(X)$ nur dann vom System der kompakten Mengen erzeugt werden, wenn der zugrundeliegende Raum σ-kompakt ist, wovon hier nicht ausgegangen werden kann. Aber es lässt sich duch $K \in \mathfrak{A}_\nu$ für alle kompakten K zeigen, dass $\mathfrak{A}_\nu$ alle abgeschlossenen Mengen enthält.
Sei dazu $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen so, dass

$$\mu^*(K_n) > \mu(X) - \frac{1}{n}, \tag{4.12}$$

wobei

$$\mu^*(A) := \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; A_n \in \mathfrak{A},\, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

das äußere Maß zu μ ist. Eine Folge K_n wie in (4.12) existiert auf Grund der Straffheit von μ. Sei weiters $K := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Es wird nun gezeigt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $\nu(K_n) = \mu^*(K_n)$ gilt. Ist $n \in \mathbb{N}$, V eine offene Menge mit $V \supseteq K_n$ und $x \in K_n$, so existiert eine offene Menge $W_x \in \mathfrak{A}$ mit $x \in W_x \subseteq V$. Die Vereinigung über alle $x \in K_n$ der W_x überdeckt nun K_n und da K_n kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $W_1, \ldots, W_k$, sodass $W := \bigcup_{i=1}^{k} W_k \supseteq K_n$. Damit ist W offen, liegt in $\mathfrak{A}$ und erfüllt $W \subseteq V$. Also gilt $\mu^*(K_n) \leq \mu(W) \leq \mu_*(V)$ und, da V beliebig mit $V \subseteq K_n$ war, $\mu^*(K_n) \leq \nu(K_n)$.

Andererseits folgt aus der Regularität von μ, dass

$$\mu^*(K_n) = \inf\{\mu(W) \mid W \in \mathfrak{A},\, W \supseteq K_n\}$$

Da $\mu(W) \geq \nu(K_n)$ wegen $W \in \mathfrak{T}$ folgt daraus $\mu^*(K_n) \geq \nu(K_n)$ und damit dann insgesamt $\nu(K_n) = \mu^*(K_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma C.1.2 ist die σ-Algegra $\mathfrak{A}_\nu$ vollständig. Dies liefert zusammen mit (4.12), dass $\nu(X \setminus K) = 0$ gilt. Ist nun Z eine abgeschlossene Menge, so stimmt Z mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Z \cap K_n)$ bis auf eine ν-Nullmenge überein. Da $\mathfrak{A}_\nu$ alle kompakten Mengen enthält, $Z \cap K_n$ kompakt für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und die Vereinigung abzählbar vieler Mengen ebenfalls in $\mathfrak{A}_\nu$ liegt, ist $Z \in \mathfrak{A}_\nu$ und damit insgesamt $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{A}_\nu$, was zu zeigen war.
Die gesuchte Fortsetzung erhält man wieder durch $\tilde{\mu} := \nu|_{\mathfrak{B}(X)}$. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung erhält man nun aus der Tatsache, dass jede offene Umgebung einer kompakten Menge eine offene Umgebung enthält, die eine endliche Vereinigung von Elementen der Basis der Topologie ist. Stimmen also zwei Fortsetzungen $\tilde{\mu_1}$ und $\tilde{\mu_2}$ auf $\mathfrak{A}$ und damit auch - da $\mathfrak{A}$ eine Basis der Topologie enthält - auf allen endlichen Vereinigungen von Elementen der Basis überein, so stimmen sie auch auf allen kompakten Mengen überein. Nun wurde gezeigt, dass sich jede abgeschlossene Menge als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen schreiben lässt, also stimmen $\tilde{\mu_1}$ und $\tilde{\mu_2}$ auf einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}(X)$ und damit auf ganz $\mathfrak{B}(X)$ überein. ❑

4.2.15 Korollar. *Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein vollständig regulärer Raum. Dann gilt*

1.) Jedes straffe Baire-Maß μ auf X kann eindeutig zu einem Radon-Maß fortgesetzt werden.

2.) Jedes Baire-Maß μ auf X, das τ_0-additiv auf $\mathfrak{B}_a(X)$ in dem Sinne ist, dass $|\mu|(X) = \sup_i |\mu|(O_i)$ für alle monoton wachsenden Netze funktional offener Mengen O_i mit $X = \bigcup_i O_i$, kann eindeutig zu einem τ-additiven Borel-Maß auf $\mathfrak{B}(X)$ fortgesetzt werden.

Beweis. Nach Korollar 4.2.7 ist jedes Baire-Maß regulär. In einem vollständig regulären Raum bilden die funktional offenen Mengen eine Basis der Topologie, also erfüllt jedes Baire-Maß alle Voraussetzungen in Satz 4.2.14. ❑

4.3 Das Daniell-Integral

4.3.1 Definition. Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ eine Menge auf X definierter reeller Funktionen. Ist $\mathcal{F}$ mit punktweisen Operationen ein reeller Vektorraum, so nennt man $\mathcal{F}$ einen *Funktionenraum* auf X. Hat $\mathcal{F}$ die Eigenschaft, dass für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{F}$ auch das Maximum $\max(f, g)$ in $\mathcal{F}$ ist, so heißt $\mathcal{F}$ ein *Verband* und falls $\mathcal{F}$ zusätzlich die *Stone'sche Bedingung* $f \in \mathcal{F} \Rightarrow \min(f, 1) \in \mathcal{F}$ erfüllt, ein *Stone'scher Verband.* Ein Funktionenraum, der zugleich ein Verband bzw. ein Stone'scher Verband ist, heißt *Vektorverband* bzw. *Stone'scher Vektorverband.*

4.3.2 Proposition. *Ist $\mathcal{F}$ ein reeller Funktionenraum, so sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

1.) $\mathcal{F}$ *ist ein Verband.*

2.) $f,\, g \in \mathcal{F} \Rightarrow \max(f,g) \in \mathcal{F}$.

3.) $f,\, g \in \mathcal{F} \Rightarrow \min(f,g) \in \mathcal{F}$.

4.) $f \in \mathcal{F} \Rightarrow f^+ \in \mathcal{F}$.

5.) $f \in \mathcal{F} \Rightarrow f^- \in \mathcal{F}$.

6.) $f \in \mathcal{F} \Rightarrow |f| \in \mathcal{F}$.

Beweis. Seien $f,\, g \in \mathcal{F}$. Da $\min(f,g) = -\max(-f,-g)$ und daher dann auch $\max(f,g) = -\min(-f,-g)$ gilt, sind die Äquivalenzen (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) klar. Aus $f^+ = \max(f,0)$, $f^- = -\min(f,0)$, $0 \in \mathcal{F}$ und $|f| = f^+ + f^-$ folgen die restlichen Aussagen. ❑

4.3.3 Satz. *Sei* $\mathcal{F}$ *ein Vektorverband über einer Menge* Ω *mit* $1 \in \mathcal{F}$ *und sei* L *ein lineares Funktional auf* $\mathcal{F}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

i.) $L(f) \geq 0$, *wenn* $f \geq 0$.

ii.) $L(1) = 1$.

iii.) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathcal{F}$, *die monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert, so gilt* $L(f_n) \to 0$.

Dann existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ *auf der Initial-*σ*-Algebra* $\mathfrak{A} = \sigma(\mathcal{F})$, *sodass* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ *und*

$$L(f) = \int_\Omega f \, d\mu, \quad \forall\, f \in \mathcal{F} \tag{4.13}$$

Beweis. Der Beweis wird in vier Teile gegliedert.

Teil I. Definiere $\mathcal{L}^+$ als die Menge aller beschränkten Funktionen f der Form $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, wobei $f_n(x) \in \mathcal{F}$ nichtnegative Funktionen sind und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Offensichtlich ist eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \nearrow f$ gleichmäßig beschränkt und nach den Eigenschaften von L ist die Folge $(L(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt.
Das lineare Funktional L soll nun auf $\mathcal{L}^+$ fortgesetzt werden. Dies erfolgt durch die Definition

$$f \in \mathcal{L}^+ : L_*(f) := \lim_{n\to\infty} L(f_n)$$

Zunächst wird gezeigt, dass L_* wohldefiniert ist und dass die Einschränkung von L_* auf beschränkte, nichtnegative Funktionen aus $\mathcal{F}$ mit L übereinstimmt. Weiters wird gezeigt, dass L_* die folgenden Eigenschaften hat:

1.) Für alle $f,\, g \in \mathcal{L}^+$ mit $f \leq g$ gilt $L_*(f) \leq L_*(g)$.

2.) Für alle $f,\, g \in \mathcal{L}^+$ und alle $c \in [0,\infty)$ gilt $L_*(f+g) = L_*(f) + L_*(g)$ und $L_*(cf) = cL_*(f)$.

3.) Für alle $f,\, g \in \mathcal{L}^+$ ist $\min(f,g) \in \mathcal{L}^+$, $\max(f,g) \in \mathcal{L}^+$ und es gilt

$$L_*(f) + L_*(g) = L_*(\min(f,g)) + L_*(\max(f,g))$$

4.) Für jede monoton wachsende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkter Funktionen $f_n \in \mathcal{L}^+$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}^+$ und es gilt

$$L_*(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} L(f_n).$$

Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathcal{F}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \leq \lim\limits_{k\to\infty} g_k$. Die Folge $(\min(f_n, g_k))_{k\in\mathbb{N}}$ geht dann monoton wachsend gegen f_n. Daher ist

$$L(f_n) = \lim_{k\to\infty} L(\min(f_n, g_k)) \leq \lim_{k\to\infty} L(g_k).$$

Bildet man den Limes $n \to \infty$, so sieht man, dass $\lim\limits_{n\to\infty} L(f_n) \leq \lim\limits_{k\to\infty} L(g_k)$ gilt. Daraus erhält man die Wohldefiniertheit von L_* auf $\mathcal{L}^+$, denn ist $f \in \mathcal{L}^+$ mit $f_n \nearrow f$ und $g_m \nearrow f$, so gilt wegen $f \leq f$ dann

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) \leq \lim_{m\to\infty} L(g_m) \quad \text{und} \quad \lim_{m\to\infty} L(g_m) \leq \lim_{n\to\infty} L(f_n)$$

und L_* ist auf $\mathcal{L}^+$ unabhängig von der Wahl der gegen ein $f \in \mathcal{L}^+$ monoton steigend konvergenten Folge aus $\mathcal{F}$. Auf Grund der Linearität und der Eigenschaft (iii) des Funktionals L konvergiert $L(\psi_n) \searrow L(\psi)$ wenn nichtnegative Funktionen ψ_n in $\mathcal{F}$ monoton fallend gegen eine nichtnegative Funktion $\psi \in \mathcal{F}$ konvergieren. Daher ist für $f \in \mathcal{L}^+ \cap \mathcal{F}$

$$L_*(f) = \lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f),$$

also stimmt L_* auf $\mathcal{L}^+ \cap \mathcal{F}$ mit L überein.
Die Eigenschaften (1) und (2) folgen nun direkt aus der Tatsache, dass diese Eigenschaften für Funktionen aus $\mathcal{F}$ gelten. Um Eigenschaft (3) einzusehen beachte man

$$\lim_{n\to\infty} \min(f_n, g_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n + g_n - |f_n - g_n|}{2} = \frac{f + g - |f + g|}{2} = \min(f, g)$$

und ebenso $\lim_n \max(f_n, g_n) = \max(f, g)$ für $f,\ g \in \mathcal{L}^+$. Daher ist $\min(f, g)$, $\max(f, g) \in \mathcal{L}^+$. Aus Eigenschaft (2) und der Tatsache

$$f + g = \min(f, g) + \max(f, g)$$

folgt nun

$$L_*(f) + L_*(g) = L_*(\min(f, g)) + L_*(\max(f, g)).$$

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}})$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{L}^+$ und $f_{n,k}$ Folgen nicht-negativer Funktionen aus $\mathcal{F}$, die für $k \to \infty$ monoton wachsend gegen f_n konvergieren. Setze $g_m := \max\limits_{n\leq m} f_{m,n}$, dann ist $g_m \in \mathcal{F}$, $g_m \leq g_{m+1}$ und für $n \leq m$ gilt

$$f_{m,n} \leq g_m \leq f_m. \tag{4.14}$$

Damit ist auch $L_*(g_m) \leq L_*(g_{m+1})$ und

$$L_*(f_{m,n}) \leq L_*(g_m) \leq L_*(f_m). \tag{4.15}$$

Aus Gleichung (4.14) ergibt sich durch den Grenzübergang $m \to \infty$ erst

$$f_n \leq \lim_{m\to\infty} g_m \leq \lim_{m\to\infty} f_m$$

und $n \to \infty$ zeigt $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = \lim\limits_{m\to\infty} g_m \in \mathcal{L}^+$. Wiederholt man dies für Gleichung (4.15), so erhält man

$$\lim_{m\to\infty} L_*(f_m) = \lim_{m\to\infty} L(g_m) = L(\lim_{m\to\infty} g_m) = L_*(\lim_{m\to\infty} f_m)$$

und Eigenschaft (4) ist bewiesen.

Teil II. Nun wird das gesuchte Wahrscheinlichkeitsmaß μ konstruiert. Das fortgesetzte Funktional L_* aus Teil **I** wird ab jetzt mit L bezeichnet. Definiere

$$\mathcal{G} := \{G \mid \mathbf{1}_G \in \mathcal{L}^+\}$$

und

$$\mu := \begin{cases} \mathcal{G} \to \mathbb{R} \\ G \mapsto L(\mathbf{1}_G). \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\mathbf{1}_{G_1 \cap G_2} = \min(G_1, G_2)$ und $\mathbf{1}_{G_1 \cup G_2} = \max(G_1, G_2)$, also ist $\mathcal{G}$ nach Eigenschaft (3) aus Teil **I** abgeschlossen bezüglich endlicher Vereinigungen und Durchschnitte. Ist $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{G}$, ist $G := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ und ist $G^k := \bigcup_{n=1}^k G_n$, so gilt $G^k \nearrow_k G$ und daher $\mathbf{1}_{G^k} \nearrow_k \mathbf{1}_G$. Wegen Eigenschaft **I**.(4) ist $\mathbf{1}_G \in \mathcal{L}^+$ und daher $G \in \mathcal{G}$, also ist $\mathcal{G}$ auch abgeschlossen bezüglich abzählbarer Vereinigungen.
Weiters ist wegen $\mathbf{1}_G \geq 0$ dann $\mu(G) = L(\mathbf{1}_G) \geq 0$ und für G_1, $G_2 \in \mathcal{G}$ mit $G_1 \subseteq G_2$ gilt wegen **I**.(1) auch $\mu(G_1) \leq \mu(G_2)$, also ist die Mengenfunktion μ positiv und monoton. Sind $G_1, \ldots, G_n$ paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{G}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n G_i\right) = L(\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^n G_i}) = L(\max_{i=1,\ldots,n} \mathbf{1}_{G_i}) \overset{\mathbf{I}.(3)}{=} \sum_{i=1}^n L(\mathbf{1}_{G_i}) = \sum_{i=1}^n \mu(G_i),$$

μ ist also auch additiv. Aus den Eigenschaften **I**.(3) bzw. **I**.(4) ergibt sich außerdem, dass

$$\mu(G_1 \cap G_2) + \mu(G_1 \cup G_2) = \mu(G_1) + \mu(G_2) \quad \forall\, G_1, G_2 \in \mathcal{G}$$

bzw. $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(G_n) = \mu(G)$, wenn Mengen $G_n \in \mathcal{G}$ monoton wachsend gegen G konvergieren. Zu guter Letzt folgt aus Eigenschaft (ii) des linearen Funktionals $\mu(\Omega) = 1$. Nach Lemma C.1.2 ist die Mengenfunktion

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) \mid G \in \mathcal{G}, A \subseteq G\}$$

ein abzählbar-additives Maß auf der Mengenfamilie

$$\mathfrak{B} = \{B \subseteq \Omega \mid \mu^*(B) + \mu^*(\Omega \setminus B) = 1\}.$$

Die Einschränkung von μ^* auf $\mathfrak{B}$ wird von nun an mit μ bezeichnet.

Teil III. Es wird $\mathfrak{A} = \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{B}$ gezeigt. Die Indikatorfunktion $\mathbf{1}_{\{f>c\}}$ hat für alle $c \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\mathbf{1}_{\{f>c\}} = \lim_{n \to \infty} \min(1, n \cdot \max(f - c, 0)),$$

also ist für $f \in \mathcal{L}^+$ die Menge

$$\mathcal{H}_c := \{x \in \Omega \mid f(x) > c\} = f^{-1}((c, \infty)) \in \mathcal{G}. \qquad \mathbf{(4.16)}$$

Infolge dessen ist für jedes $f \in \mathcal{L}^+$ die Beziehung $f^{-1}(\mathcal{H}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$ erfüllt und nach Lemma B.1.8 ist also jede Funktion $f \in \mathcal{L}^+$ $\sigma(\mathcal{G})$-messbar. Da $\sigma(\mathcal{L}^+)$ die gröbste σ-Algebra ist, sodass alle $f \in \mathcal{L}^+$ messbar sind, gilt sicher $\sigma(\mathcal{L}^+) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$. Andererseits sind alle Funktionen $f \in \mathcal{F}$ nach Definition der Initial-σ-Algebra

bezüglich $\sigma(\mathcal{F})$ messbar. Damit sind auch alle $f \in \mathcal{L}^+$ als Grenzwerte messbarer Funktionen $\sigma(\mathcal{F})$-messbar, also $\sigma(\mathcal{L}^+) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Umgekehrt kann jede Funktion $f \in \mathcal{F}$ als Summe ihres Positivteils $f^+ \geq 0$ und ihres Negativteils $f^- \geq 0$ dargestellt werden, die jeweils als konstante Folge $f_n^\pm := f^\pm$ sicher $\sigma(\mathcal{L}^+)$-messbar sind. Man hat $\sigma(\mathcal{L}^+) = \sigma(\mathcal{F})$ erhalten.
Weiters gilt per Definition von $\mathcal{G}$ genau dann $G \in \mathcal{G}$, wenn $\mathbf{1}_G \in \mathcal{L}^+$ ist. Aus der Tatsache, dass für einen Messraum $(X, \mathfrak{A})$ genau dann $A \in \mathfrak{A}$ gilt, wenn $\mathbf{1}_A$ $\mathfrak{A}$-messbar ist, erhält man $\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{L}^+)$. Insgesamt hat man

$$\mathcal{G} \subseteq \sigma(\mathcal{L}^+) = \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{G})$$

erhalten, also ist $\sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F})$ und es genügt der Nachweis von $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{B}$ um $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{B}$ zu zeigen.
Sei $G \in \mathcal{G}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, dass $f_n \in \mathcal{F}$, $f_n \geq 0$ und $f_n \nearrow \mathbf{1}_G$. Dann ist

$$\mu^*(G) = \mu(G) = L(\mathbf{1}_G) = L\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big) \overset{\mathbf{I}.(4)}{=} \lim_{n\to\infty} L(f_n).$$

Zu zeigen ist $\mu^*(G) + \mu^*(\Omega \setminus G) = 1$. Einerseits ist offensichtlich

$$\mu^*(G)+\mu^*(\Omega\setminus G) = \mu(G)+\inf\{\mu(G') \mid G' \in \mathcal{G}, \Omega\setminus G \subseteq G'\} \geq \mu(G)+\mu(\Omega) \geq 1.$$

Um die umgekehrte Relation einzusehen bemerke man zunächst

$$\mu^*(G) + \mu^*(\Omega \setminus G) \leq 1 \iff \mu^*(\Omega \setminus G) \leq 1 - \mu(G) = \lim_{n\to\infty} L(1 - f_n). \quad (\mathbf{4.17})$$

Nach Definition der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $1 - f_n \searrow 1 - \mathbf{1}_G = \mathbf{1}_{\Omega\setminus G}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $c \in (0,1)$ und definiere $U_c := \{x \in \Omega \mid 1 - f_n > c\}$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist $1 - f_n \in \mathcal{L}^+$, also ist wegen Gleichung (4.16) die Menge $U_c \in \mathcal{G}$. Ist $x \in \Omega \setminus G$, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ dann

$$1 - f_n(x) \geq 1 - \mathbf{1}_G(x) = 1$$

also $\Omega \setminus G \subseteq U_c$. Da nach Konstruktion $\mathbf{1}_{U_c} \leq \frac{1}{c}(1 - f_n)$ gilt, folgt daraus

$$\mu^*(\Omega \setminus G) \leq \mu^*(U_c) \overset{U_c\in\mathcal{G}}{=} \mu(U_c) = L(\mathbf{1}_{U_c}) \leq \frac{1}{c} L(1 - f_n).$$

Bildet man nun den Grenzübergang $c \to 1$ und betrachtet anschließend $n \to \infty$, so hat man Gleichung (4.17)

$$\mu^*(\Omega \setminus G) \leq \lim_{n\to\infty} L(1 - f_n)$$

und damit insgesamt $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathfrak{B}$ erhalten.

Teil IV. Es bleibt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ und Gleichung (4.13) zu zeigen. Der Beweis von (4.13) erfolgt in mehreren Schritten.
<u>Schritt 1</u> : Schon bekannt ist, dass alle Funktionen $f \in \mathcal{L}^+$ messbar bezüglich $\sigma(\mathcal{F})$ sind. Ist $G \in \mathcal{G}$ und $f = \mathbf{1}_G$, so gilt

$$\int_\Omega \mathbf{1}_G \, d\mu = \mu(G) = L(\mathbf{1}_G)$$

per Definition.

Schritt 2 : Da L linear ist, gilt Gleichung (4.13) für alle endlichen Linearkombinationen von Indikatorfunktionen $\mathbf{1}_G$ von Mengen $G \in \mathcal{G}$.
Schritt 3 : (4.13) gilt für alle $f \in \mathcal{L}^+$ mit $f \leq 1$, denn f kann in diesem Fall als Grenzwert der monoton wachsenden Funktionenfolge

$$f_n := \sum_{j=1}^{2^n-1} j2^{-n}\mathbf{1}_{\{j2^{-n}<f\leq(j+1)2^{-n}\}} = 2^{-n}\sum_{j=1}^{2^n-1}\mathbf{1}_{\{f>j2^{-n}\}}$$

dargestellt werden. Wegen Schritt 2 gilt daher zunächst

$$L(f_n) = \int_\Omega f_n\, d\mu.$$

Eigenschaft **I**.(4) und der Satz von der monotonen Konvergenz zeigen dann

$$L(f) = L\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big) = \lim_{n\to\infty} L(f_n) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu.$$

Schritt 4 : Ist $f \in \mathcal{F}$ mit $f \geq 0$, so gilt Gleichung (4.13) auch für f, denn f ist dann in $\mathcal{L}^+$ und daher ist auch $\min(f,n) \in \mathcal{L}^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters ist $f = \lim\limits_{n\to\infty} \min(f,n)$. Eine zu Schritt 3 analoge Argumentation zeigt dann

$$L(f) = \int_\Omega f\, f\mu.$$

Schritt 5 : Gleichung (4.13) gilt nun auch für jede beliebige Funktion $f \in \mathcal{F}$, denn f ist durch $f = \max(f,0) - \max(-f,0)$ darstellbar, wobei $0 \in \mathcal{F}$ und $\max(f,0), \max(-f,0) \in \mathcal{F}$ gilt. Damit ist (4.13) gezeigt.
Die Tatsache $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ folgt nun direkt aus der Konstruktion aus Schritt 4 bzw. Schritt 5. Da μ auf $\mathcal{G}$ eindeutig definiert ist und $\mathcal{G}$ ein bezüglich endlicher Durchschnitte abgeschlossener Erzeuger von $\mathfrak{A} = \sigma(\mathcal{F})$ ist, ist μ auf $\mathfrak{A}$ eindeutig bestimmt. ❑

4.3.4 Definition. Ein Funktional L mit den Eigenschaften aus Satz 4.3.3 heißt *Daniell-Integral* auf einem Vektorverband $\mathcal{F}$ mit $1 \in \mathcal{F}$.

4.3.5 Satz. *Sei $\mathcal{F}$ ein Vektorverband über einer Menge Ω mit $1 \in \mathcal{F}$. Sei L ein lineares Funktional auf $\mathcal{F}$, das stetig bezüglich der Norm $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f(x)|$ ist. Dann hat L die Darstellung $L = L^+ - L^-$ mit $L^+ \geq 0$, $L^- \geq 0$ und für alle $f \in \mathcal{F}$ mit $f \geq 0$ gilt*

$$L^+(f) = \sup_{0\leq g\leq f} L(g) \quad \textit{und} \quad L^-(f) = -\inf_{0\leq g\leq f} L(g). \tag{4.18}$$

Setzt man $|L| := L^+ - L^-$, so gilt für alle $f \in \mathcal{F}$ mit $f \geq 0$

$$|L|(f) = \sup_{0\leq |g|\leq f} |L(g)| \quad \textit{und} \quad \|L\| = L^+(1) + L^-(1) \tag{4.19}$$

Beweis. Zunächst wird folgende Behauptung bewiesen:

Behauptung. Sind f und $g \in \mathcal{F}$ mit $f \geq 0$ und $g \geq 0$ und $h \in \mathcal{F}$ so, dass $0 \leq h \leq f + g$, dann hat h die Darstellung $h = h_1 + h_2$, wobei h_1, $h_2 \in \mathcal{F}$, $0 \leq h_1 \leq f$ und $0 \leq h_2 \leq g$ gilt.

Beweis der Behauptung. Setze $h_1 := \min(f,h)$ und $h_2 := h - h_1$. Dann gilt offensichtlich $h_1,\ h_2 \in \mathcal{F}$, $0 \leq h_1 \leq f$, $h = h_1 + h_2$ und $h_2 \geq 0$. Um $h_2 \leq g$ einzusehen, betrachtet man zunächst den Fall, dass $h_1(x) = h(x)$ ist. Dann gilt $h_2(x) = 0 \leq g$. Im Fall $h_1(x) = f(x)$ ist $h_2(x) = h(x) - f(x) \leq g(x)$.

Beweis des Satzes. Definiere $L^+(f) := \sup\{L(g) \mid 0 \leq g \leq f\}$. Zunächst ist $|L^+(f)| < \infty$, da $|L^+(f)| = |L(h)| \leq \|L\|\|h\| \leq \|L\|\|f\|$. Für $f \in \mathcal{F}$, $f \geq 0$ und $t \geq 0$ gilt wegen

$$\begin{aligned}\sup\{L(g) \mid 0 \leq g \leq ft\} &= \sup\left\{L\left(t \cdot \frac{g}{t}\right) \mid 0 \leq \frac{g}{t} \leq f\right\} = \\ &= \sup\{L(th) \mid 0 \leq h \leq f\}\end{aligned}$$

weiters $L^+(tf) = tL^+(f)$. Sind $f,\ g \in \mathcal{F}$ mit $f \geq 0$ und $g \geq 0$, so folgt nach oben bewiesener Behauptung

$$\begin{aligned}L^+(f+g) &= \sup\{L(h) \mid 0 \leq h \leq f + g\} = \\ &= \sup\{L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2) \mid 0 \leq h_1 \leq f, 0 \leq h_2 \leq g\} = \\ &= L^+(f) + L^+(g).\end{aligned}$$

Um jetzt L auf nichtnegative $f \in \mathcal{F}$ fortzusetzen definiere

$$L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-).$$

Zunächst gilt

$$L^+(-f) = L^+(-f^+) + L^-(-f^-) = L^+(f^-) - L^+(f^+) = -L^+(f),$$

also $L^+(tf) = tL^+(f)$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Um die Additivität von L^+ auf ganz $\mathcal{F}$ einzusehen bemerke man zunächst: Lässt sich $f \in \mathcal{F}$ darstellen als $f = f_1 - f_2$, wobei $f_1,\ f_2 \geq 0$, so gilt wegen $f = f^+ - f^- = f_1 - f_2$

$$L^+(f_1) + L^+(f^-) = L^+(f_2) + L^+(f^+),$$

also

$$L^+(f) = L^+(f^+) - L^+(f^-) = L^+(f_1) - L^+(f_2).$$

Sind nun $f,\ g \in \mathcal{F}$, so ist $f + g = f^+ + g^+ - (f^- + g^-)$ und daher

$$\begin{aligned}L^+(f+g) &= L^+(f^+ + g^+) - L^+(f^- + g^-) = \\ &= L^+(f^+) - L^+(f^-) + L^+(g^+) - L^+(g^-) = \\ &= L^+(f) - L^+(g).\end{aligned}$$

Setze $L^- := L^+ - L$. Per Definition ist $L^+(f) \geq L(f)$ für $f \geq 0$, also ist $L^- \geq 0$. Wegen

$$\begin{aligned}L^-(f) = L^+(f) - L(f) &= \sup_{0 \leq g \leq f} L(g) - L(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} L(g - f) = \\ &= -\inf_{0 \leq g \leq f} L(f - g) = -\inf_{0 \leq f - h \leq f} L(h) = -\inf_{0 \leq h \leq f} L(h)\end{aligned}$$

gilt für L^- die in (4.18) angegebene Formel. Betrachtet man (4.19), so ist einerseits wegen $L^+(f_1) \geq L^+(f_2)$ für $f_1 \geq f_2$

$$\begin{aligned}\|L\| &= \|L^+ - L^-\| \leq \|L^+\| + \|L^-\| = \\ &= \sup\{|L^+(f)| \mid f \in \mathcal{F}, f \geq 0, \|f\| = 1\} + \\ &+ \sup\{|L^-(f)| \mid f \in \mathcal{F}, f \geq 0, \|f\| = 1\} = L^+(1) + L^-(1).\end{aligned}$$

Umgekehrt gilt

$$\begin{aligned}L^+(1) + L^-(1) = 2L^+(1) - L(1) &= 2 \sup_{0 \leq \varphi \leq 1} L(\varphi) - L(1) = \\ &= \sup\{L(2\varphi - 1) \mid 0 \leq \varphi \leq 1\} = \sup\{L(h) \mid -1 \leq h \leq 1\} \leq \\ &\leq \sup\{|L(h)| \mid \|h\| = \sup_{x \in \Omega} |h(x)| \leq 1\} = \|L\|.\end{aligned}$$

Um die zweite Gleichung in (4.18) einzusehen bemerke man zunächst, dass für alle $f \in \mathcal{F}$, $f \geq 0$, die Beziehungen

$$|L|(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} L(g) + \sup_{-f \leq h \leq 0} L(h) = \sup_{-f \leq h \leq 0 \leq g \leq f} L(g + h)$$
$$\sup_{0 \leq |g| \leq f} |L(g)| = \sup_{-f \leq g \leq f} |L(g)|$$

bestehen. Gilt $-f \leq h \leq 0 \leq g \leq f$, so ist $-f \leq g + h \leq f$, also folgt $|L|(f) \leq \sup_{-f \leq g \leq f} |L(g)|$. Andererseits gilt für alle $g \in \mathcal{F}$ mit $-f \leq g \leq f$ sicher $-f \leq g^- \leq 0 \leq g^+ \leq f$ und da $L(g) = L(g^+ + (-g^-))$ ist, folgt insgesamt $|L|(f) = \sup_{0 \leq |g| \leq f} |L(g)|$. ❑

4.3.6 Korollar. *Sei angenommen, in der Situation von Satz 4.3.5 hat das lineare Funktional L die zusätzliche Eigenschaft, dass $L(f_n) \to 0$ für jede monoton gegen die Nullfunktion fallende Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{F}$ gilt. Dann haben auch die linearen Funktionale L^+ und L^- diese zusätzliche Eigenschaft.*

Beweis. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}$ mit $f_n \searrow 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Per Definition von L^+ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so, dass $\varphi_n \in \mathcal{F}$, $0 \leq \varphi_n \leq f_n$ und sicher $L(\varphi_n) \geq L^+(f_n) - \varepsilon 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Sei $g_n := \min(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, dann ist $g_n \in \mathcal{F}$. Per Induktion wird gezeigt, dass

$$L^+(f_n) \leq L(g_n) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \tag{4.20}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $n = 1$ trifft diese Aussage zu. Sei angenommen, die Aussage gilt für $n = 1, \ldots, m$. Offensichtlich bestehen die Gleichungen

$$g_{m+1} = \min(g_m, \varphi_{m+1})$$
$$\max(g_m, \varphi_{m+1}) + \min(g_m, \varphi_{m+1}) = g_m + \varphi_{m+1},$$

daher ist

$$\begin{aligned}L(\max(g_m, \varphi_{m+1})) + L(g_{m+1}) &= L(g_m) + L(\varphi_{m+1}) \geq \\ &\geq L(g_m) + L^+(f_{m+1}) - \varepsilon 2^{-(m+1)}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Andereseits bestehen die Beziehungen

$$g_m \le \varphi_m \le f_m \quad \text{und} \quad \varphi_{m+1} \le f_{m+1} \le f_m,$$

also gilt nach Induktionsannahme

$$L(\max(g_m, \varphi_{m+1})) \le L^+(f_m) \le L(g_m) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} 2^{-i}. \qquad \textbf{(4.22)}$$

Fügt man (4.21) und (4.22) zusammen erhält man

$$L(g_m) + L^+(f_{m+1}) - \varepsilon 2^{-(m+1)} - L(g_{m+1}) \le L(\max(g_m, \varphi_{m+1}) \le$$
$$\le L(g_m) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} 2^{-i},$$

also ist

$$L^+(f_{m+1}) \le L(g_{m+1}) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m+1} 2^{-i}$$

und daher gilt Beziehung (4.20) für alle $n \in \mathbb{N}$. Da für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $g_n \le f_n$ und $f_n \searrow 0$ gilt, folgt $g_n \searrow 0$. Nach Vorraussetzung muss dann auch $L(g_n) \to 0$ gelten. Betrachtet man in Gleichung (4.20) den Grenzübergang $n \to \infty$, so folgt, dass $\limsup_{n\to\infty} L^+(f_n) \le \varepsilon$ ist. Beachtet man, dass $L^+(f) \ge 0$ für $f \ge 0$ ist und ε beliebig war, so hat man wie behauptet erhalten, dass $L^+(f_n) \to 0$. Der Beweis für L^- verläuft analog. ❑

Das folgende Korollar stellt die zentrale Aussage dieses Kapitels dar.

4.3.7 Korollar. *Sei $\mathcal{F}$ ein Vektorverband beschränkter Funktionen über einer Menge Ω mit $1 \in \mathcal{F}$ und sei L ein lineares Funktional auf $\mathcal{F}$ mit der Eigenschaft, dass $L(f_n) \to 0$ für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Funktionen $f_n \in \mathcal{F}$, die monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert. Dann hat L die Darstellung $L = L^+ - L^-$ aus Satz 4.3.5 und es existieren eindeutige nichtnegative σ-additive Maße μ^+ und μ^- auf $\sigma(\mathcal{F})$, sodass*

$$L^+(f) = \int_\Omega f\, d\mu^+ \quad \text{und} \quad L^-(f) = \int_\Omega f\, d\mu^-$$

gilt. Insbesonders hat L die Darstellung

$$L(f) = \int_\Omega f\, d\mu,$$

wobei $\mu := \mu^+ - \mu^-$ ein σ-additives signiertes Maß ist. Außerdem gilt $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$.

Beweis. Die Existenz der eindeutig bestimmen Maße μ^+ und μ^- folgt aus den Sätzen 4.3.3 und 4.3.5, ebenso die Darstellung $L = L^+ - L^-$ und die Tatsache $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$. Wegen

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) = \int_\Omega f^+\, d\mu^+ - \int_\Omega f^+\, d\mu^- + \int_\Omega f^-\, d\mu^- - \int_\Omega f^-\, d\mu^+ =$$
$$= \int_\Omega f^+\, d\mu - \int_\Omega f^-\, d\mu = \int_\Omega f\, d\mu$$

gilt auch die behauptete Darstellung von L. ❑

Die Aussage von Satz 4.3.3 lässt sich auch auf monoton fallende Netze erweitern.

4.3.8 Satz. *Sei $\mathcal{F}$ ein Vektorverband von Funktionen über einer Menge Ω mit $1 \in \mathcal{F}$. Sei weiters L ein lineares Funktional auf $\mathcal{F}$, das folgende Eigenschaften erfüllt:*

i.) $L(f) \geq 0$, *wenn* $f \geq 0$.

ii.) $L(1) = 1$.

iii.) *Ist* $(f_i)_{i \in I}$ *ein Netz in* $\mathcal{F}$, *das monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert, so gilt* $L(f_i) \to 0$.

Dann existiert ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf der σ-Algebra $\mathfrak{A} := \sigma(\mathcal{F})$, sodass $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ und (4.13) gilt. Zusätzlich gil $\mu(G_i) \to \mu(\bigcup_i G_i)$ for jedes monoton wachsende Netz von Mengen G_i mit $\mathbf{1}_{G_i} \in \mathcal{L}^+$, wobei $\mathcal{L}^+$ die Menge aller beschränkten Funktionen auf Ω ist, die Grenzwert eines monoton wachsenden Netzes nichtnegativer Funktionen aus $\mathcal{F}$ sind.

Beweis. Der Beweis von Satz 4.3.3 kann zum größten Teil direkt übernommen werden. Man definiert $\mathcal{L}^+$ die Menge aller beschränkten Funktionen f, die als Grenzwert monoton wachsender Netze $(f_i)_{i \in I}$ nichtnegativer Funktionen $f_i \in \mathcal{F}$ darstellbar sind. Die Fortsetzung L_* des Funktionals L auf $\mathcal{L}^+$ wird analog zu Satz 4.3.3 durch

$$L_*(f) := \lim_{i \in I} L(f_i)$$

für $f \in \mathcal{L}^+$ definiert. Die folgenden Beweisschritte können analog übernommen werden und zeigen, dass L_* die Eigenschaft hat, dass wenn ein Netz von Funktionen $(f_i)_{i \in I}$ mit $f_i \in \mathcal{L}^+$ monoton wachsend gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^+$ konvergiert, so konvergiert auch $L_*(f_i)$ gegen $L(f)$. Daraus erhält man wieder ein σ-additives Maß μ auf der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{L}^+)$, so dass $\mu(G) = L_*(\mathbf{1}_G)$ für alle $G \in \mathcal{G} := \{G \subseteq \Omega \mid \mathbf{1}_G \in \mathcal{L}^+$ und $\mu(B) = \inf\{\mu(G) \mid G \in \mathcal{G}, B \subseteq G\}$ und letztendlich

$$\int_\Omega f \, d\mu = L(f) \tag{4.23}$$

für alle $f \in \mathcal{L}^+$. Außerdem erhält man analog $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ und die Tatsache, dass (4.23) auch für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt. Außerdem gilt durch die Konstruktion von μ offensichtlich, dass für ein monoton wachsendes Netz $(G_i)_{i \in I}$ mit $\bigcup_i G_i = G$ dann $\lim_i \mu(G_i) = \lim L(\mathbf{1}_{G_i}) = L(\mathbf{1}_G) = \mu(G)$ gilt. ❑

4.3.1 Über die Beziehung des Daniell-Integrals zur Maßtheorie

4.3.9 Definition. Ein Tripel $(X, \mathcal{U}, \varphi)$ heißt *Daniell-System*, falls X eine nichtleere Menge, $\mathcal{U}$ ein Verband reellwertiger Funktionen auf X und φ ein lineares Funktional auf $\mathcal{U}$ ist, das folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

1.) Für $f \in \mathcal{U}$ mit $f \geq 0$ gilt $\varphi(f) \geq 0$.

2.) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{U}$, die monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert, so gilt $\varphi(f_n) \to 0$.

Ein Daniell-System $(X, \mathcal{U}, \varphi)$ heißt vollständig, wenn für eine reelweertige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ aus $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ für alle $x \in X$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(f_n)| < \infty$ mit Funktionen $f_n \in \mathcal{U}$ folgt, dass $f \in \mathcal{U}$.

4.3.10 Bemerkung. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, L)$ aus Satz 4.3.3 und Korollar 4.3.7 bildet nach Konstruktion ein vollständiges Daniell-System.

4.3.11 Definition. Ist $X, \mathfrak{A})$ ein Meßraum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, so heißt f *Treppenfunktion*, falls f nur endlich viele verschiedene relle Werte annimmt. Die Menge aller Treppenfunktionen auf $(X, \mathfrak{A})$ wird mit $\mathcal{T}(X, \mathfrak{A})$ bezeichnet.

4.3.12 Bemerkung. Ist $f \in \mathcal{T}(X)$ und $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ mit verschiedenen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, so sind die Mengen $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$, $j = 1, \dots, m$ disjunkt, $A_j \in \mathfrak{A}$ für $j = 1, \dots, m$ und f hat dann die Darstellung $f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbf{1}_{A_j}$. Sind umgekehrt $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathfrak{A}$, so ist $g := \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$ eine Treppenfunktion.

4.3.13 Lemma. *Hat eine Funktion $f \in \mathcal{T}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ die Darstellung*

$$f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$$

dann gilt

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j)$$

Beweis. Definiere $A_{m+1} := B_1, \dots, A_{m+n} := B_n$ und

$$\mathcal{M} := \left\{ \bigcap_{i=1}^{m+n} M_i \;\middle|\; M_i \in \{A_i, X \setminus A_i\}, i = 1, \dots, m+n \right\}.$$

Offensichtlich sind zwei verschiedene Mengen aus $\mathcal{M}$ disjunkt und jede Menge A_i ist gleich der Vereinigung aller Elemente von $\mathcal{M}$ mit $M_i = A_i$. Sind $C_1, \dots, C_r$ die verschiedenen Elemente von $\mathcal{M}$, so hat f genau eine Darstellung $f = \sum_{l=1}^r \gamma_l \mathbf{1}_{C_l}$ und es genügt zu zeigen, dass

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{l=1}^r \gamma_l \mu(C_l)$$

gilt. Per Definition gilt für alle $l = 1, \dots, r$

$$\gamma_l = \sum_{\substack{j=1,\dots,m\,: \\ C_l \subseteq A_j}} \alpha_j$$

und es folgt

$$\sum_{l=1}^r \gamma_l \mu(C_l) = \sum_{l=1}^r \Bigg(\sum_{\substack{j=1,\dots,m: \\ C_l \subseteq A_j}} \alpha_j \Bigg) \mu(C_l) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{\substack{l=1,\dots,r: \\ C_l \subseteq A_j}} \mu(C_l) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j),$$

da jede Menge A_j gleich der disjunkten Vereinigung der in A_j enthaltenen Mengen C_l ist. ❑

4.3.14 Korollar. *Ist* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum, dann ist*

$$\int := \begin{cases} \mathcal{T}(X, \mathfrak{A}, \mu) \to \mathbb{R} \\ \qquad\qquad f \mapsto \int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) \end{cases}$$

ein wohldefiniertes lineares Funktional auf $\mathcal{T}(X, \mathfrak{A}, \mu)$.

Beweis. Die Linearität ist offensichtlich und nach Lemma 4.3.13 ist das Funktional wohldefiniert. ❑

4.3.15 Lemma. *Mit den Bezeichnungen aus Korollar 4.3.14 ist das Tripel* $(X, \mathcal{T}(X, \mathfrak{A}, \mu), \int)$ *ein Daniell-System.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\mu \geq 0$ angenommen werden, da man sich gegebenenfalls auf die Hahn-Jordan Zerlegung zurückziehen kann. Da für λ, $\mu \in \mathbb{R}$ offensichtlich mit f, $g \in \mathcal{T}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ auch $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\min(f, g)$ und $\max(f, g) \in \mathcal{T}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ gilt, ist $\mathcal{T}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Verband.
Die Positivität des Funktionals $\int$ folgt direkt aus $f \geq 0$ und $\mu \geq 0$. Somit bleibt Eigenschaft (2) aus Definition 4.3.9 zu zeigen.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{T}(X, \mathfrak{A}, \mu)$ die monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert und sei $\varepsilon > 0$. Definiert man

$$A_n := \left\{ x \in X \;\middle|\; f_n(x) > \frac{\varepsilon}{2\mu(\operatorname{supp}(f_1))} \right\}$$

so ist $A_n \in \mathfrak{A}$ und es gilt $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ laut Voraussetzung monoton fallend ist. Definiert man weiters $B_n := A_n \setminus A_{n+1}$, so gilt $A_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ und da μ ein Maß ist folgt $\mu(A_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$. Also folgt $\sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) \to 0$, wenn $n \to \infty$. Also existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N_0$ dann

$$\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(B_k) < \frac{\varepsilon}{2\|f_1\|_\infty}.$$

Daher ist dann für alle $n \geq N_0$

$$\begin{aligned} \int_X f_n \, d\mu &= \int_{A_n} f_n \, d\mu + \int_{X\setminus A_n} f_n \, d\mu \leq \\ &\leq \|f_n\|_\infty \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2\mu(\operatorname{supp}(f_1))} \mu(\operatorname{supp}(f_n)) < \varepsilon \end{aligned}$$

❑

4.3.16 Definition. Sei $(X, \mathcal{U}, \varphi)$ ein Daniell-System. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *d-integrierbar*, wenn $\mathbf{1}_A \in \mathcal{U}$. Bezeichne mit $\mathfrak{I} := \{A \subseteq X \mid \mathbf{1}_A \in \mathcal{L}^+\}$ die Menge aller d-integrierbaren Mengen, wobei $\mathcal{L}^+$ die Menge aller durch eine monoton wachsende Folge von Funktionen aus $\mathcal{U}$ approximierbaren Funktionen aus dem Beweis von Satz 4.3.3 ist.
Weiters heißt eine Menge $A \subseteq X$ *d-messbar*, wenn die Menge $A \cap B$ für alle d-integrierbaren Mengen $B \subseteq X$ d-integrierbar ist. Sei $\mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\varphi)}$ die Menge aller d-messbaren Teilmengen von X

4.3.17 Bemerkung. Die Menge $\mathfrak{I}$ stimmt mit der Menge $\mathcal{G}$ aus Teil II. des Beweises von Satz 4.3.3 überein.

4.3.18 Lemma. *Ist $(X, \mathfrak{U}, \varphi)$ ein Daniell-System, dann ist $\mathfrak{I}$ ein Ring, genannt der Ring der d-integrierbaren Mengen und $\mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$ ist eine σ-Algebra auf X, genannt die σ-Algebra der d-messbaren Mengen.*

Beweis. Die Ringeigenschaft von $\mathfrak{I}$ wurde schon in Teil II. von Satz 4.3.3 bewiesen.
Sind M, $N \in \mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$ und $A \in \mathfrak{I}$, so gilt, da $\mathfrak{I}$ ein Ring ist, $(M \cup N) \cap A = (M \cap A) \cup (N \cap A) \in \mathfrak{I}$ und daher $M \cup N \in \mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$. Aus $(M \setminus N) \cap A = (M \cap A) \setminus (N \cap A) \in \mathfrak{I}$ folgt $M \setminus N \in \mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$ und aus $A = X \cap A \in \mathfrak{I}$ erhält man $X \in \mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$. Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$ und $A \in \mathfrak{I}$. Immer gilt $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M_n \cap A)$. Nach Voraussetzung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $M_n \cap A \in \mathfrak{I}$ ist und daher zunächst $\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^m (M_i \cap A)} \in \mathfrak{U}$. Die Funktion $\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^m (M_i \cap A)}$ wird offensichtlich von $\mathbf{1}_A \in \mathfrak{U}$ dominiert und konvergiert monoton wachsend gegen die Funktion $\mathbf{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M_i \cap A)}$, die nach dem Satz von der monotonen Konvergenz in $\mathfrak{U}$ liegt. Folglich gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(M_n \cap A) \in \mathfrak{I}$, also $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$. ❑

4.3.19 Bemerkung. Wählt man speziell den Daniell-System $(\mathbb{R}, \mathcal{T}(\mathbb{R}), \int)$, so heißt $\mathfrak{I}$ der Ring der Lebesgue-integrierbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{A}_{(\mathbb{R},\mathcal{T}(\mathbb{R}),\int)}$ heißt die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$.

4.3.20 Lemma. *Sei $(X, \mathfrak{U}, \varphi)$ ein Daniell-System. Die Mengenfunktion*

$$\mu_\varphi(A) := \begin{cases} \int_X \mathbf{1}_A \, d\mu, & \text{falls } A \in \mathfrak{I} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein Maß auf $\mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$. Dabei ist μ das im Beweis von Satz 4.3.3 durch φ konstruierte Maß.

Beweis. Offensichtlich gilt $\mu_\int(\varnothing) = \int_X 0 \, d\mu = 0$. Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}$. Prinzipiell sind zwei Fälle möglich. Einerseits kann $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \in \mathfrak{I}$ gelten. Dann ist jede Menge M_n als messbare Teilmenge einer integrierbaren Menge selbst integrierbar und wegen $\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^m A_j} \nearrow \mathbf{1}_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j}$ und dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\int_X \mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^m A_j} \, d\mu = \sum_{j=1}^m \int_X \mathbf{1}_{A_j} \, d\mu \nearrow \int_X \mathbf{1}_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} \, d\mu,$$

also gilt $\sum_{j=1}^m \mu_\varphi(A_j) \nearrow \mu_\varphi(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j)$. Als zweite Möglichkeit muss $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n \notin \mathfrak{I}$ betrachtet werden. In diesem Fall ist $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_\varphi(A_j) = \infty$ zu zeigen. Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $M_{n_0} \notin \mathfrak{I}$, dann ist diese Aussage per Definition richtig. Sind alle $M_n \in \mathfrak{I}$, so müssen wegen des Satzes von der monotonen Konvergenz die Integrale von $\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^m A_j}$ gegen ∞ streben, da sonst $\mathbf{1}_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j}$ in $\mathcal{L}^1$ wäre. Also gilt $\sum_{j=1}^m \mu_\varphi(A_j) \nearrow \infty = \mu_\varphi(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j)$. ❑

Lemmata 4.3.18 und 4.3.20 zeigen, dass ein Daniell-System $(X, \mathfrak{U}, \varphi)$ in natürlicher Weise einen Maßraum $(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}, \mu_\varphi)$ definiert. Daher ist es sinnvoll, vom Raum der integrierbaren Funktionen $L^1(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}, \mu_\varphi)$ zu sprechen. Nun stellt sich die Frage, ob $\mathfrak{U} = L^1(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathfrak{U},\varphi)}, \mu_\varphi)$ gilt. Dies beantworten die nächsten beiden Sätze.
Für eine einfache Darstellung bietet es sich an, folgende Definition des Raums $L^1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ zu verwenden.

4.3.21 Definition. Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann bezeichnet $L^1(X, \mathfrak{A}, \mu)$ die Menge aller Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, für die eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen existiert, sodass

1.) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$
2.) Für alle $x \in X$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$ gilt $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.

4.3.22 Satz. *Ist das Tripel $(X, \mathcal{U}, \varphi)$ ein vollständiges Daniell-System, so gilt $L^1(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\varphi)}, \mu_\varphi) \subseteq \mathcal{U}$.*

Beweis. Ist $f \in L^1(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\varphi)}, \mu_\varphi)$, so existiert eine Folge von Treppenfunktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und jede Treppenfunktion f_n ist eine Linearkombination charakteristischer Funktionen von Mengen endlichen Maßes. Also existiert eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen $A_n \in \mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\int)}$ und eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, sodass $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mathbf{1}_{A_n}$. Da nach Definition für alle integrablen Mengen $A \in \mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\int)}$ gilt, dass $\mathbf{1}_A \in \mathcal{U}$, so folgt aus der Vollständigkeit des Daniell-Systems $(X, \mathcal{U}, \int)$, dass $f \in \mathcal{U}$. ❑

Es zeigt sich, dass die Umkehrung im Allgemein nicht gilt. Die Umkehrung gilt allerdings, falls der Verband $\mathcal{U}$ ein Stone'scher Verband ist, siehe dazu Definition 4.3.1.

4.3.23 Satz. *Ist $(X, \mathcal{U}, \int)$ ein vollständiges Daniell-System und $\mathcal{U}$ ein Stone'scher Verband, so gilt $\mathcal{U} \subseteq L^1(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\int)}, \mu_\int)$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{U}$. Da mit einer Funktion f auch der Positivteil und der Negativteil in einem Verband $\mathcal{U}$ liegen (siehe Proposition 4.3.2), sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass $f \geq 0$ gilt. Sei für $\alpha > 0$ die Menge $S_\alpha := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$. Definiere weiters

$$g := f - \min(f, \alpha) \quad \text{und} \quad g_n := \min(ng, 1)$$

Da $\mathcal{U}$ ein Stone'scher Verband ist gilt g, $g_n \in \mathcal{U}$. Offensichtlich gilt $g_n \to \mathbf{1}_{S_\alpha}$ für $n \to \infty$ für alle $x \in X$. Da $g_n \leq \frac{f}{\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\frac{f}{\alpha} \in \mathcal{U}$ ist, folgt aus dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $\mathbf{1}_{S_\alpha} \in \mathcal{U}$.
Sei nun zunächst angenommen, dass $0 \leq f \leq M$ mit einer Konstanten $M \geq 0$ gilt. Definiere für ein festes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$A_k := \left\{ x \in X \mid f(x) > k\frac{M}{2^n} \right\}, \; k = 0, 1, \ldots, 2^n.$$

Nach dem vorherigen Argument ist $\mathbf{1}_{A_k} \in \mathcal{U}$ für $k = 0, \ldots, 2^n$. Außerdem gilt nach Konstruktion, dass $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_{2^n-1} \supseteq A_{2^n} = \varnothing$. Definiert man nun rekursiv $B_k := A_{k-1} \setminus A_k$ für $k = 1, \ldots, 2^n$, so gilt wegen $\mathbf{1}_{B_k} = \mathbf{1}_{A_{k_1}} - \mathbf{1}_{A_k}$, dass $\mathbf{1}_{B_k} \in \mathcal{U}$ und weiter

$$\operatorname{supp}(f) = \bigcup_{k=1}^{2^n} B_k$$

Definiert man die Treppenfunktionen

$$f_n := \sum_{k=1}^{2^n} (k-1) \frac{M}{2^n} \mathbf{1}_{B_k}$$

so gilt einerseits $f_n \in L^1(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\int)}, \mu_\int)$ und andererseits konvergiert für alle $x \in X$ die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen die Funktion f. Mit $g_1 := f_1$, $g_n := f_n - f_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, erhält man aus dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |g_n|\, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X g_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu < \infty.$$

Wegen

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für alle $x \in X$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |g_n(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(x) < \infty$ ist $f \in L^1(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\int)}, \mu)$. Im Falle, dass die Funktion $f \in \mathcal{U}$ unbeschränkt ist, betrachtet man Funktionen $f_n := \min(f, n)$, $n \in \mathbb{N}$. Nach dem bisher gezeigten ist $f_n \in L^1(X, \mathfrak{A}_{(X,\mathcal{U},\int)}, \mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Beweis, dass dann $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty$ und $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ für alle $x \in X$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$ gilt, verläuft vollkommen analog. ❑

4.4 Maße als Funktionale

Die Aussagen des letzten Abschnitts hatten keinen topologischen Bezug. Die topologischen Konzepte werden nun entwickelt.
Betrachtet man den Banachraum $(\mathcal{C}_b(X), \|.\|_\infty)$, wobei $\mathcal{C}_b(X)$ die bezüglich einer Topologie $\mathcal{T}$ stetigen beschränkten Funktionen auf einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet, so definiert für jedes Baire-Maß μ die Abbildung

$$\varphi_\mu := \begin{cases} \mathcal{C}_b(X) \to \mathbb{R} \\ \qquad f \mapsto \int_X f\, d\mu \end{cases}$$

offensichtlich ein stetiges lineares Funktional auf $(\mathcal{C}_b(X), \|.\|_\infty)$. Es soll nun untersucht werden, welche linearen Funktionale eine solche Darstellung gestatten und welche Eigenschaften der Maße sich aus den Eigenschaften der linearen Funktionale ergeben. Für eine möglichst allgemeine Untersuchung dieses Themas bezieht man sich zunächst nicht auf σ-additive Maße, sondern betrachtet allgemeine additive Mengenfunktionen auf einer Algebra.
Sei nun $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathfrak{A}(X)$ die von den funktional abgeschlossenen Mengen erzeugte Algebra.

4.4.1 Definition. Eine Funktion $m : \mathfrak{A}(X) \to \mathbb{R}$ heißt *additive reguläre Mengenfunktion*, wenn

1.) m endlich additiv ist, wenn also für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass für paarweise disjunkte $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}(X)$ die Beziehung

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n m(A_i)$$

erfüllt ist.

2.) m beschränkt ist.

3.) m regulär in dem Sinne ist, dass für jede Menge $A \in \mathfrak{A}(X)$ und für jedes $\varepsilon > 0$ eine funktional abgeschlossene Menge F mit $F \subseteq A$ existiert, sodass $|m(B)| < \varepsilon$ für alle $B \in \mathfrak{A}(X)$ mit $B \subseteq A \setminus F$.

4.4.2 Lemma. *Ist m eine additive reguläre Mengenfunktion auf $\mathfrak{A}(X)$, so hat m die Darstellung $m = m^+ - m^-$, wobei*

$$m^+(A) = \sup\{m(B) \bigm| B \in \mathfrak{A}(X), B \subseteq A\},$$
$$m^-(A) = -\inf\{m(B) \bigm| B \in \mathfrak{A}(X), B \subseteq A\}$$

jeweils nichtnegative additive reguläre Mengenfunktionen auf $\mathfrak{A}(X)$ sind.

Beweis. Direkt aus den Definitionen von m^+ und m^- folgt, dass $m^+ \geq m$, $-m \leq m^-$, $m^- = (-m)^+$ und dass m^+, m^- monoton wachsend sind. Seien E_1, E_2 disjunkte Mengen aus $\mathfrak{A}(X)$. Dann ist $E := E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{A}(X)$. Ist $A \in \mathfrak{A}(X)$ mit $A \subseteq E$, so gilt

$$m(A) \leq m^+(A \cap E_1) + m^+(A \cap E_2) \leq m^+(E_1) + m^+(E_2).$$

Da $A \subseteq E$ beliebig war folgt

$$m^+(E) \leq m^+(E_1) + m^+(E_2).$$

Um die umgekehrte Beziehung zu beweisen sei $\varepsilon > 0$ und A_1, $A_2 \in \mathfrak{A}(X)$ mit $A_i \subseteq E_i$ und $m(A_i) \geq m^+(E_i) - \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt

$$m^+(E) \geq m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) \geq m^+(E_1) + m^+(E_2) - \varepsilon,$$

also ist m^+ additiv. Da mit m auch $-m$ additiv und $m^- = (-m)^+$ ist, folgt die Additivität auch für m^-. Nach Voraussetzung ist m beschränkt und regulär, also sind offensichtlich auch m^+ und m^- beschränkt und regulär. Die behauptete Darstellung von m ergibt sich direkt aus

$$\begin{aligned} m^+(A) - m(A) &= \sup\{m(B) \bigm| B \in \mathfrak{A}(X), B \subseteq A\} - m(A) = \\ &= \sup\{-m(A \setminus B) \bigm| B \in \mathfrak{A}(X), B \subseteq A\} = m^-(A). \end{aligned}$$

❑

Der folgende fundamentale Satz geht auf A.D.Alexandrow [1] zurück.

4.4.3 Satz. *Ist m eine additive reguläre Mengenfunktion auf $\mathfrak{A}(X)$ und definiert man $\|m\| := m^+(X) + m^-(X)$, dann ist die Abbildung L mit*

$$L(f) = \int_X f(x)m(dx)$$

ein beschränktes lineares Funktional auf $\mathcal{C}_b(X)$ und es gilt $\|L\| = \|m\|$. Umgekehrt existiert für jedes lineare Funktional L auf $\mathcal{C}_b(X)$ eine additive reguläre Mengenfunktion m auf $\mathfrak{A}(X)$ mit $\|L\| = \|m\|$, sodass

$$L(f) = \int_X f(x)m(dx)$$

für alle $f \in \mathcal{C}_b(X)$ gilt. Weiters ist m genau dann nicht-negativ, wenn L diese Eigenschaft hat.

Beweis. Die direkte Behauptung ist auf Grund der Eigenschaften des Integrals offensichtlich. Es wird die Umkehrung gezeigt. Zunächst stellt man fest, dass nach Lemma 4.4.2 angenommen werden kann, dass L ein nicht-negatives lineares Funktional auf $\mathcal{C}_b(X)$ ist. Bezeichne mit $\mathcal{Z}$ die Familie der funktional abgeschlossenen Mengen und definiere für $Z \in \mathcal{Z}$

$$m(Z) := \inf\{L(f) \mid f \in \mathcal{C}_b(X), \mathbf{1}_Z \leq f \leq 1\}$$

und für alle $A \subseteq X$ sei

$$m_*(A) := \sup\{m(Z) \mid Z \in \mathcal{Z}, Z \subseteq A\}.$$

Es wird gezeigt, dass m_* die gesuchte Mengenfunktion ist. Dazu wird erst bewiesen, dass alle $Z \in \mathcal{Z}$ Carathéodory-messbar bezüglich m_* sind. Der Beweis dieser Aussage beruht auf der Behauptung, dass für Z_1, $Z_2 \in \mathcal{Z}$ mit $Z_1 \subseteq Z_2$ die Eigenschaft

$$m(Z_2) - m(Z_1) = m_*(Z_2 \setminus Z_1)$$

erfüllt ist. Auf Grund der Voraussetzung, dass L nicht-negativ ist, ist offensichtlich m monoton wachsend, also gilt $m(Z) = m_*(Z)$ für alle $Z \in \mathcal{Z}$. Ist $Z \in \mathcal{Z}$ mit $Z \subseteq Z_2 \setminus Z_1$, so ist nach Proposition A.1.20 $Z_1 \cup Z \in \mathcal{Z}$ und daher

$$m(Z_2) - m(Z_1) \geq m_*(Z_2 \setminus Z_1).$$

Zum Beweis der Umkehrung sei $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}_b(X)$ mit $f \geq \mathbf{1}_{Z_1}$ und sei weiters $Y := \{x \in X \mid f(x) \leq 1-\varepsilon\}$. Per Definition ist dann $Y \cap Z_1 = \varnothing$. Sei $g \in \mathcal{C}_b(X)$ mit $g \geq \mathbf{1}_{Z_2 \cap Y}$. Betrachte nun ein $x \in Z_2$. Ist x auch aus Y, so ist $g(x) \geq 1$. Ist x nicht aus Y, so ist $f(x) > 1 - \varepsilon$, also ist für alle $x \in Z_2 : f(x) + g(x) > 1 - \varepsilon$. Nach Definition von f und g gilt für alle $x \in X$, dass $f(x) + g(x) \geq 0$ ist. Also besteht die Beziehung $(f + g)(1 - \varepsilon)^{-1} \geq \mathbf{1}_{Z_2}$. Daraus erhält man

$$L(f) + L(g) \geq L((1 - \varepsilon)\mathbf{1}_{Z_2}) \geq (1 - \varepsilon)m(Z_2).$$

Bildet man das Infimum über alle $g \in \mathcal{C}_b(X)$ mit $g \geq \mathbf{1}_{Z_2 \cap Y}$ ergibt sich

$$L(f) + m_*(Z_2 \cap Y) \geq (1 - \varepsilon)m(Z_2).$$

Wegen $Z_2 \cap Y \subseteq Z_2 \setminus Z_1$ ist $\mathbf{1}_{Z_2 \cap Y} \leq \mathbf{1}_{Z_2 \setminus Z_1}$ und daher $m(Z_2 \cap Y) \leq m_*(Z_2 \setminus Z_1)$, also

$$L(f) + m_*(Z_2 \setminus Z_1) \geq (1 - \varepsilon)m(Z_2).$$

Bildung des Infimums über alle $f \in \mathcal{C}_b(X)$ mit $f \geq \mathbf{1}_{Z_1}$ zeigt

$$m(Z_1) + m_*(Z_2 \setminus Z_1) \geq (1 - \varepsilon)m(Z_2),$$

woraus unmittelbar die behauptete Eigenschaft folgt.
Per Definition heißt $Z \in \mathcal{Z}$ Carathéodory-messbar bezüglich m_*, wenn für alle $E \subseteq X$ die Beziehung

$$m_*(E) = m_*(E \cap Z) + m_*(E \setminus Z)$$

gilt. Sei nun $Z \in \mathcal{Z}$ und $E \subseteq X$ beliebig. Sei weiters $Z_0 \in \mathcal{Z}$ mit $Z_0 \subseteq E$. Nach der eben bewiesenen Behauptung gilt

$$m(Z_0) - m(Z_0 \cap Z) = m_*(Z_0 \setminus (Z_0 \cap Z)),$$

also ist
$$m(Z_0) = m(Z_0 \cap Z) + m_*(Z_0 \setminus (Z_0 \cap Z)),$$
woraus wegen $Z_0 \cap Z \subseteq E \cap Z$ und $Z_0 \setminus (Z_0 \cap Z) \subseteq E \setminus Z$ nach Bildung des Supremums über alle $Z_0 \subseteq E$ folgt, dass
$$m_*(E) \leq m_*(E \cap Z) + m_*(E \setminus Z)$$
ist. Die Umkehrung gilt offensichtlich immer, also sind alle $Z \in \mathcal{Z}$ Carathéodory-messbar. Nach Lemma C.1.2 ist die Mengenfamilie $\mathfrak{M}_{m_*}$ aller Carathéodory-messbaren Mengen eine Algebra und nach eben Bewiesenem enthält $\mathfrak{M}_{m_*}$ alle funktional abgeschlossenen Mengen. Damit gilt $\mathfrak{A}(X) \subseteq \mathfrak{M}_{m_*}$ und die Einschränkung $m_*|_{\mathfrak{A}(X)}$ ist die gesuchte Mengenfunktion. ❑

Im allgemeinen wird die Funktion m aus Satz 4.4.3 nicht σ-additiv sein. Jetzt wird untersucht, welche Funktionale den σ-additiven Maßen bzw. den Radon-Maßen entsprechen.

4.4.4 Definition. Sei L ein stetiges lineares Funktional auf $(\mathcal{C}_b(X), \|.\|_\infty)$.

1.) Das Funktional L heißt *σ-glatt* wenn für jede Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$ mit $f_n \searrow 0$ gilt, dass $L(f_n) \to 0$.
2.) Das Funktional L heißt *τ-glatt*, wenn für jedes Netz $(f_i)_{i\in I}$ von Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$ mit $f_i \searrow 0$ gilt, dass $L(f_n) \to 0$.
3.) Das Funktional L heißt *straff*, wenn für jedes Netz $(f_i)_{i\in I}$ von Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$ mit $\|f\| \leq 1$ und $f_i \to 0$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von X gilt, dass $L(f_i) \to 0$.

Mit $\mathcal{M}_\sigma$ bzw. $\mathcal{M}_\tau$ bzw. $\mathcal{M}_s$ werden die Mengen der σ-glatten bzw. der τ-glatten bzw. der straffen Funktionale bezeichnet.

4.4.5 Satz. *Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 4.3 sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

1.) $L \in \mathcal{M}_\sigma$.

2.) L^+, $L^- \in \mathcal{M}_\sigma$.

3.) $|L| \in \mathcal{M}_\sigma$.

Beweis. Offensichtlich folgen aus (2) wegen $L = L^+ - L^-$ bzw. $|L| = L^+ + L^-$ (1) und (2). Ebenso offensichtlich ist die Implikation (3) $\Rightarrow$ (1). Es wird (2) $\Rightarrow$ (1) gezeigt. Sei angenommen, dass $L \in \mathcal{M}_\sigma$ und $L^+ \notin \mathcal{M}_\sigma$ gilt. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n \in \mathcal{C}_b(X)$, die monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert und für die $L^+(f_n) > c > 0$ gilt.
Sei zunächst $n = 1$. Dann existiert nach Definition von L^+ eine Funktion $g_1 \in \mathcal{C}_b(X)$ so, dass $L^+(f_1) = L(g_1)$ mit $0 \leq g_1 \leq f$ und $L(g_1) > \frac{c}{2}$. Da laut Annahme $f_n \searrow 0$ gilt, folgt $\max(f_n, g_1) \searrow g_1$ und daher, da $L \in \mathcal{M}_\sigma$ ist, $L(\max(f_n, g_1)) \to L(g_1)$ und es existiert ein Index $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $L(\max(f_n, g_1)) > \frac{c}{2}$. Sei $h_1 := \max(f_{n_1}, g_1)$. Dann ist $0 \leq f_{n_1} \leq h_1 \leq f_1$ und $L(h_1) > \frac{c}{2}$.
Wiederholt man diese Argumentation für $n = n_1$, so findet man einen Index $n_2 \in \mathbb{N}$ und $h_2 \in \mathcal{C}_b(X)$, sodass $0 \leq f_{n_2} \leq h_2 \leq f_{n_1}$ und $L(h_2) > \frac{c}{2}$ gilt. Per Induktion erhält man Folgen $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $h_k \in \mathcal{C}_b(X)$, mit $n_{k+1} > n_k$, $f_{n_{k+1}} \leq h_{k+1} \leq f_{n_k}$ und $L(h_k) > \frac{c}{2}$. Da aber $f_n \searrow 0$ laut Annahme, folgt $h_k \searrow 0$ und $L(h_k)$ konvergiert nicht gegen 0, was ein Widerspruch zu $L \in \mathcal{M}_\sigma$ ist. Der Beweis für L^- verläuft analog. ❑

4.4.6 Satz. *Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 4.3 sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

1.) $L \in \mathcal{M}_\tau$.

2.) $L^+, L^- \in \mathcal{M}_\tau$.

3.) $|L| \in \mathcal{M}_\tau$.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 4.4.5 sind die Implikationen (2) $\Rightarrow$ (1), (2) $\Rightarrow$ (3) und (3) $\Rightarrow$ (1) offensichtlich. Wieder wird der Beweis (1) $\Rightarrow$ (2) indirekt geführt. Sei also angenommen, dass ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ mit $f_i \in \mathcal{C}_b(X)$ und $f_i \searrow 0$ existiert, für das $L^+(f_i) > c > 0$ gilt. O.B.d.A sei $|f_i| \leq 1$ und sei die Menge $J := \{(i,j) \bigm| j > i\}$ mit der Relation

$$(i_1, j_1) \rhd (i_2, j_2) :\Leftrightarrow i_1 \geq j_2 \vee (i_1 = i_2 \wedge j_1 = j_2)$$

versehen. Sind $(i_3, j_3) \rhd (i_2, j_2)$ und $(i_2, j_2) \rhd (i_1, j_1)$ - wobei alle drei Paare verschieden sind - so gilt $i_3 \geq j_2$, $j_2 > i_2$ und $i_2 \geq j_1$, also ist $i_3 > j_1$ und es folgt $(i_3, j_3) \rhd (i_1, j_1)$, also ist $(J, \rhd)$ eine Quasiordnung.
Analog zum Beweis von Satz 4.4.5 findet man nach der Definition von L^+ für jedes $f_i \in \mathcal{C}_b(X)$ eine Funktion $g \in \mathcal{C}_b(X)$ so, dass $0 \leq g_i \leq f_i$ und $L(g_i) > \frac{c}{2}$ gilt. Nimmt man nun $(J, \rhd)$ als gerichtete Menge und definiert man das Netz $\varphi_{i,j} := \max(g_i, f_j)$, dann konvergiert $\varphi_{i,j} \searrow 0$. Denn ist $(i,j) \rhd (i_1, j_1)$ mit $i \neq i_1$, so gilt $i \geq j_1$ und $j > i \geq j_1$, also folgt $g_i \leq f_i \leq f_{j_1}$ und $f_j \leq f_{j_1}$. Wegen $f_i \searrow 0$ konvergiert dann $\varphi_{i,j} \searrow 0$. Laut Annahme folgt daraus $L(\varphi_{i,j}) \to 0$. Also existiert ein Index $(i_0, j_0) \in J$, sodass

$$|L(\varphi_{i,j})| < \frac{c}{2} \quad \forall (i,j) \in J : (i,j) \rhd (i_0, j_0) \tag{4.24}$$

gilt. Andererseits konvergiert aber offensichtlich $\varphi_{j_0,j} = \max(g_{j_0}, f_j)$ monoton fallend gegen g_{j_0}, also konvergiert auch $L(\varphi_{j_0,j}) \to L(g_{j_0}) > \frac{c}{2}$. Also existiert ein $j > j_0$ so, dass $|L(\varphi_{j_0,j})| > \frac{c}{2}$ ist, was ein Widerspruch zu (4.24) ist. Wieder verläuft der Beweis für L^- analog. ❑

4.4.7 Satz. *Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 4.3 sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

1.) $L \in \mathcal{M}_s$.

2.) $L^+, L^- \in \mathcal{M}_s$.

3.) $|L| \in \mathcal{M}_s$.

Beweis. Wieder ist der wesentliche Schritt des Beweises die Folgerung (1) $\Rightarrow$ (2). Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz von Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$, das auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei weiters $|f_i| \leq 1$. Direkt aus der Definition von L^+ folgt für alle f_i die Existenz einer Funktion $g_i \in \mathcal{C}_b(X)$, die $0 \leq g \leq f_i$ und $0 \leq L^+(|f_i|) \leq 2L(g_i)$ erfüllt. Da das Netz $(f_i)_{i\in I}$ auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, konvergiert auch das Netz $(g_i)_{i\in I}$ auf kompakten Mengen gleichmäßig gegen die Nullfunktion und es gilt $|g_i| \leq 1$. Nach Voraussetzung folgt daraus $L(g_i) \to 0$, also auch $L^+(f_i) \to 0$. Die Behauptung für L^- sieht man analog. ❑

Nun wird ein enger Zusammenhang der besprochenen Funktionale zu Baire-, τ-additiven und Radon-Maßen gezeigt.

4.4.8 Satz. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein topologischer Raum. Durch die Gleichung*

$$L(f) = \int_X f(x)\, \mu(dx) \tag{4.25}$$

wird ein bijektiver Zusammenhang zwischen der Menge $\mathcal{M}_a(X)$ *der Baire-Maße auf* $\mathcal{B}_a(X)$ *und der Menge der stetigen linearen Funktionale* L *auf* $\mathcal{C}_b(X)$ *hergestellt, die folgende Eigenschaft besitzen: Ist* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Funktionen in* $\mathcal{C}_b(X)$*, die monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert, so folgt*

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = 0.$$

Beweis. Offensichtlich definiert jedes Baire-Maß $\mu \in \mathcal{M}_a(X)$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{C}_b(X)$. Die Umkehrung folgt direkt aus Satz 4.3.3 und Korollar 4.3.7. ❑

Eine schöne Konsequenz, die sich aus der Verwendung des Daniell-Integrals ergibt, ist die Tatsache, dass sich der Darstellungssatz von Riesz nun sehr einfach und kompakt beweisen lässt.

4.4.9 Satz (Darstellungssatz von Riesz)**.** *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein kompakter Raum. Dann existiert für jedes stetige lineare Funktional* L *auf dem Banachraum* $\mathcal{C}(X)$ *ein eindeutiges Radon-Maß* μ*, sodass*

$$L(f) = \int_X f(x)\, \mu(dx)$$

gilt.

Beweis. Nach dem Satz von Dini (siehe C.1.4) ist jede Folge von stetigen Funktionen, die in einem kompakten topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ monoton gegen die Nullfunktion konvergiert, auch gleichmäßtig konvergent. Also erfüllt auf einem kompakten Raum jedes stetige lineare Funktional L die Voraussetzung aus Satz 4.4.8.
Auf einem kompakten Raum sind offensichtlich alle Maße straff und da ein kompakter Raum insbesonders normal ist (siehe z.B.: [6, Satz 3.1.9]) und normale Räume offensichtlich vollständig regulär sind, kann der erste Punkt aus Korollar 4.2.15 angewandt und somit jedes Baire-Maß auf $\mathfrak{B}_a(X)$ eindeutig zu einem Radon-Maß auf $\mathfrak{B}(X)$ fortgesetzt werden. ❑

4.4.10 Satz. *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein vollständig regulärer Raum. Gleichung* (4.25) *stellt einen bijektiven Zusammenhang zwischen der Menge der Radon-Maße* μ *auf* X *und den stetigen linearen Funktionalen* L *auf* $\mathcal{C}_b(X)$ *her, die die folgende Eigenschaft besitzen: Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert eine kompakte Menge* K_ε *so, dass für jedes* $f \in \mathcal{C}_b(X)$ *mit* $f|_{K_\varepsilon} = 0$ *folgt, dass*

$$|L(f)| \leq \varepsilon \sup_{x\in X} |f(x)|$$

gilt.

Beweis. Ist μ ein Radon-Maß und $\varepsilon > 0$, so existiert eine kompakte Menge K_ε, die $|\mu|(X \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ erfüllt. Ist dann L ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{C}_b(X)$ und $f \in \mathcal{C}_b(X)$ so, dass $f|_{K_\varepsilon} = 0$, so folgt

$$\begin{aligned} L(f) = \int_X f(x)\,\mu(dx) = \int_{X \setminus K_\varepsilon} f(x)\,\mu(dx) \leq \\ \leq \sup_{x \in X \setminus K_\varepsilon} |f(x)| \int_{X \setminus K_\varepsilon} \mathbf{1}_{\{X \setminus K_\varepsilon\}}(x)\,\mu(dx) \leq \varepsilon \sup_{x \in X} |f(x)| \end{aligned}$$

also ist die geforderte Bedingung erfüllt.
Zum Beweis der Umkehrung soll zunächst gezeigt werden, dass unter den gegebenen Bedingungen die Voraussetzungen von Satz 4.4.8 erfüllt sind. Sei dazu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$ mit $f_n \searrow 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $|f| < 1$ und $\|L\| \leq 1$ angenommen. Sei weiters $\varepsilon \in (0, 1)$. Laut Annahme existiert eine kompakte Menge K_ε, so dass für jede Funktion $f \in \mathcal{C}_b(X)$ mit $f|_{K_\varepsilon} = 0$ folgt, dass $|L(f)| \leq \varepsilon \sup |f|$. Nach dem Satz von Dini (C.1.4) konvergiert f_n gleichmäßig gegen Null, also existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\sup_{x \in K_\varepsilon} |f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$. Damit existiert für alle $n \geq N_0$ eine Funktion $g_n \in \mathcal{C}_b(X)$ mit $g_n(x) = f_n(x)$, $x \in K_\varepsilon$ und $|g_n| \leq \varepsilon$. Daraus folgt $|L(g_n)| \leq \varepsilon$. Weiters ist für alle $x \in K_\varepsilon$ dann $f_n - g_n = 0$ und $|f_n - g_n| \leq 2$. Also gilt $|L(f_n - g_n)| \leq \varepsilon \sup |f_n - g_n| \leq 2\varepsilon$ und man erhält insgesamt

$$|L(f_n)| = |L(f_n - g_n + g_n)| \leq |L(f_n - g_n)| + |L(g_n)| \leq 3\varepsilon,$$

also ist $|L|$ σ-glatt und nach Satz 4.4.5 auch L. Satz 4.4.8 liefert damit ein eindeutiges Baire-Maß μ, sodass

$$L(f) = \int_X f(x)\,\mu(dx).$$

Nun wird gezeigt, dass μ straff ist. Sei $\varepsilon > 0$ und K_ε die kompakte Menge aus der Voraussetzung, L ein stetiges lineares Funktional mit den geforderten Eigenschaften und $f \in \mathcal{C}_b(X)$ mit $f|_{K_\varepsilon} = 0$, so folgt aus (4.19) in Satz 4.3.5 und $f|_{K_\varepsilon} = 0$

$$|L(f)| \leq |L|(|f|) \leq \varepsilon \sup |f|$$

Also erfüllt $|L|$ die geforderte Eigenschaft und $|L|$ wird von $|\mu|$ erzeugt. Damit kann man sich im Beweis auf positive Funktionale L und damit auch auf nichtnegative Maße μ beschränken. Sei nun B eine Baire-Menge mit $B \cap K_\varepsilon = \varnothing$. Nach Korollar 4.2.7 existiert existiert eine funktional abgeschlossene Menge $Z \subseteq B$ mit $\mu(B \setminus Z) < \varepsilon$. Laut Voraussetzung ist der Raum X vollständig regulär, also existiert einerseits eine Umgebung U von K_ε mit $U \cap Z = \varnothing$ und andererseits eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(x) = 0$ für $x \in K_\varepsilon$ und $f(x) = 1$ für $x \in Z$. Damit ist wegen $\mu \geq 0$

$$\mu(Z) = \int_Z f\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu = L(f) \leq \varepsilon \sup_{x \in X} |f(x)| \leq \varepsilon$$

und weiter

$$\mu(B) = \mu((B \setminus Z) \cup Z) = \mu(B \setminus Z) + \mu(Z) < 2\varepsilon$$

also ist μ straff. Nach Satz 4.2.14 kann das straffe und reguläre Maß μ zu einem eindeutigen Radon-Maß auf $\mathcal{B}(X)$ fortgesetzt werden. ❑

4.4.11 Satz. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein vollständig regulärer Raum. Gleichung 4.25 stellt einen bijektiven Zusammenhang zwischen der Menge der τ-additiven Maße μ auf X und den stetigen linearen Funktionalen L auf $\mathcal{C}_b(X)$ her, die die folgende Eigenschaft besitzen: konvergiert ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ von Funktionen aus $\mathcal{C}_b(X)$ punktweise monoton fallend gegen die Nullfunktion, so folgt*

$$\lim_{i\in I} L(f_i) = 0.$$

Beweis. Ist μ ein τ-additives Maß und $(f_i)_{i\in I}$ ein Netz beschränkter Funktionen, das punktweise monoton fallend gegen die Nullfunktion konvergiert, so hat nach Korollar 4.2.13 das Funktional

$$L(f) = \int_X f \, d\mu$$

die Eigenschaft $L(f_i) \to 0$. Zum Beweis der Umkehrung kann nach Satz 4.4.6 angenommen werden, dass das gegebene Funktional L positiv ist. Die Aussage folgt nun direkt aus Satz 4.3.8. ❑

4.5 Schwache Konvergenz

Für den gesamten Abschnitt 4.5 sei vorausgesetzt, dass topologische Räume Hausdorff'sch sind. Dies ist keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit. Weiters sind, sofern nichts anderes angegeben wird, alle betrachteten Maße von beschränkter Variation.

Notation. Mit $\mathcal{M}_a(X)$ wird die Menge der Baire-Maße über X bezeichnet, $\mathcal{M}(X)$ steht für die Menge aller Borel-Maße über X.

4.5.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ein Netz $(\mu_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_a(X)$ heißt *schwach konvergent* gegen $\mu \in \mathcal{M}_a(X)$, wenn für alle $f \in \mathcal{C}_b(X)$ die Bedingung

$$\lim_i \int_X f \, d\mu_i = \int_X f \, d\mu$$

gilt, in Zeichen $\mu_i \xrightarrow{w} \mu$. Weiters heißt eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Baire-Maßen *schwach fundamental* oder *schwach Cauchy*, wenn für alle $f \in \mathcal{C}_b(X)$ die Folge

$$\left(\int_X f \, d\mu_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

fundamental in $\mathbb{R}$ ist (und daher konvergiert).
Die schwache Konvergenz von Borel-Maßen wird als schwache Konvergenz deren Einschränkung auf die Baire'sche σ-Algebra $\mathfrak{B}_a(X)$ definiert.

Die schwache Konvergenz von Maßen ist, im Gegensatz zu den in Teil I vorgestellten Konvergenzbegriffen, tatsächlich eine Konvergenz im topologischen Sinn.

4.5.2 Definition. Sei X eine Menge. Die Initial-Topologie $\mathcal{T}_w$ bezüglich der Abbildungen

$$\varphi_f := \begin{cases} \mathcal{M}_a(X) & \to \mathbb{R} \\ \mu & \mapsto \int_X f \, d\mu \end{cases}$$

mit $f \in \mathcal{C}_b(X)$ heißt *schwache Topologie* auf $\mathcal{M}_a(X)$. Per Definition ist die schwache Topologie also die gröbste Topologie auf $\mathcal{M}_a(X)$, sodass alle Abbildungen φ_f stetig sind.

4.5.3 Bemerkung. Aus funktionalanalytischer Sicht entspricht die schwache Konvergenz eher dem Konzept der schwach*-Konvergenz, denn: Nach Kapitel 4.4 lässt sich der Dualraum zu $\mathcal{C}_b(X)$ mit den Bairemaßen $\mathcal{M}_a(X)$ identifizieren. Bezeichnet $(\mathcal{C}_b(X), \|.\|_\infty)^*$ den topologischen Dualraum zu $(\mathcal{C}_b(X), \|.\|_\infty)$, so folgt aus Satz 4.4.8, dass $\mathcal{M}_a(X) \subseteq (\mathcal{C}_b(X), \|.\|_\infty)^*$ ist. Damit ist die hier vorgestellte schwache Topologie $\mathcal{T}_w$ die Spurtopologie der schwach*-Topologie auf $\mathcal{M}_a(X)$.

4.5.4 Satz. *Sei X eine Menge. Die schwache Topologie $\mathcal{T}_w$ auf $\mathcal{M}_a(X)$ hat das Mengensystem*

$$\mathcal{V} := \big\{ V(\varphi_f, \mu, \varepsilon) \;\big|\; f \in \mathcal{C}_b(X), \mu \in \mathcal{M}_a(X), \varepsilon > 0 \big\}$$

mit

$$V(\varphi_f, \mu, \varepsilon) := \left\{ \nu \in \mathcal{M}_a \;\middle|\; \left| \int_X f \, d\nu - \int_X f \, d\mu \right| < \varepsilon \right\}$$

als Subbasis. Die schwache Konvergenz eines Netzes $(\mu_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}_a(X)$ nach Definition 4.5.1 ist die Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie $\mathcal{T}_w$ auf $\mathcal{M}_a(X)$.

Beweis. Nach Satz A.3.5 ist $\bigcup_{f \in \mathcal{C}_b(X)} \varphi_f^{-1}(\mathcal{T}_d)$ eine Subbasis der schwachen Topologie auf $\mathcal{M}_a(X)$ und wegen Korollar A.3.6 hat die Subbasis die behauptete Darstellung.
Lemma A.1.14 besagt, dass ein Netz $(\mu_i)_{i \in I}$ genau dann konvergiert, wenn es auf einer Subbasis der Topologie konvergiert und die Konvergenz auf der angegebenen Subbasis ist offensichtlich genau die schwache Konvergenz. ❑

4.5.5 Lemma. *Sei $(\mu_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{M}_a(X)$ ein Netz von Baire-Maßen über einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ und $\mu \in \mathcal{M}_a(X)$. Sind die Bedingungen*

1. *Es existiert ein $i_0 \in I$, sodass $\sup_{i \geq i_0} \|\mu_i\| < \infty$.*
2. *Für alle $B \subseteq X$ der Form $B = \{f < c\}$ mit $f \in \mathcal{C}_b(X)$ und $|\mu|(\{f = c\}) = 0$ gilt $\lim_i \mu_i(B) = \mu(B)$.*

erfüllt, so konvergiert das Netz $(\mu_i)_{i \in I}$ schwach gegen $\mu \in \mathcal{M}_a(X)$.

Beweis. Nach Bedingung (1) existiert ein $C \in \mathbb{R}$, sodass $\sup_{i \geq i_0} \|\mu_i\| \leq C$ und $\|\mu\| \leq C$ ist. Sei $f \in \mathcal{C}_b(X)$ und $\varepsilon > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $|f| \leq 1$ angenommen werden. Bedingung (2) liefert die Existenz von $c_j \in [-1, 1]$, $j = 1, \ldots, n$, sodass $0 < c_{j+1} - c_j < \varepsilon$, $c_1 = -1$, $c_n = 1$ und $|\mu|(f = c) = 0$ ist. Definiere die Funktion $g(x) := c_j$ für $c_j \leq f(x) < c_{j+1}$. Dann ist $g \in \mathcal{C}_b(X)$ und $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Wegen Bedingung (2) und der Tatsache

$$\{c_j \leq f < c_{j+1}\} = \{f < c_{j+1}\} \setminus \{f < c_j\}$$

gilt

$$\lim_i \mu_i(\{c_j \leq f < c_{j+1}\}) = \mu(\{c_j \leq f < c_{j+1}\}).$$

Demzufolge ist

$$\left| \int_X g \, d\mu_i - \int_X g \, d\mu \right| = \left| \int_X c_j \cdot \mathbf{1}_{\{c_j \leq f < c_{j+1}\}} \, d\mu_i - \int_X c_j \cdot \mathbf{1}_{\{c_j \leq f < c_{j+1}\}} \, d\mu \right| < \varepsilon.$$

für alle $i \geq i_0$. Infolgedessen gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_X f\,d\mu_i - \int_X f\,d\mu\right| &\leq \left|\int_X f\,d\mu_i - \int_X g\,d\mu_i\right| + \left|\int_X g\,d\mu_i - \int_X g\,d\mu\right| + \\ &+ \left|\int_X g\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| \leq 2\int_X |f-g|\,d\mu_i + \left|\int_X g\,d\mu_i - \int_X g\,d\mu\right| < \\ &< \varepsilon(2C+1),\end{aligned}$$

also $\mu_i \xrightarrow{w} \mu$. ❑

4.5.6 Korollar. *Beide der folgenden Bedingungen implizieren die schwache Konvergenz eines Netzes $(\mu_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{M}_a(X)$ gegen $\mu \in \mathcal{M}_a(X)$:*

1. *Es existiert $i_0 \in I$, sodass $\sup_{i\geq i_0}\|\mu_i\| < \infty$ ist und für alle $B \in \mathcal{B}_a(X)$ gilt $\lim_i \mu_i(B) = \mu(B)$.*
2. *Konvergiert ein Netz $(\mu_i)_{i\in I}$ von Maßen in der Variationsnorm gegen ein Maß μ, dann konvergiert es auch schwach gegen μ.*

Beweis. Offensichtlich folgen aus beiden Bedingungen die Voraussetzungen von Lemma 4.5.5. ❑

4.5.7 Proposition. *Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_a(X)$ eine Familie von Bairemaßen, sodass für alle $f \in \mathcal{C}_b(X)$*

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int_X f\,d\mu < \infty$$

ist. Dann folgt $\sup_{\mu\in\mathcal{M}}\|\mu\| < \infty$. Insbesonders ist jede schwach konvergente Folge von Bairemaßen beschränkt in der Variationsnorm.

Beweis. Bekanntlich ist $(\mathcal{C}_b(X), \|.\|_\infty)$ ein Banachraum. Nach Voraussetzung ist $(\varphi_\mu)_{\mu\in\mathcal{M}}$ mit

$$\varphi_\mu := \begin{cases} \mathcal{C}_b(X) & \to \mathbb{R} \\ \quad f & \mapsto \int_X f\,d\mu \end{cases}$$

eine punktweise beschränkte Familie beschränkter linearer Operatoren von $\mathcal{C}_b(X)$ nach $\mathbb{R}$, also

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}} |\varphi_\mu(f)| = \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \varphi_\mu(f) = \sup_{\mu\in\mathcal{M}} \int_X f\,d\mu < \infty$$

Dabei kann der Betrag weggelassen werden, da mit $f \in \mathcal{C}_b(X)$ auch $-f \in \mathcal{C}_b(X)$ gilt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (siehe z.B. [8, 4.2.2]) ist die Familie $(\varphi_\mu)_{\mu\in\mathcal{M}}$ gleichmäßig beschränkt, also folgt $\sup_{\mu\in\mathcal{M}}\|\varphi_\mu\| < \infty$. Nach Satz 4.4.3 gilt $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|$ und damit $\sup_{\mu\in\mathcal{M}}\|\mu\| < \infty$. Da jede schwach konvergente Folge von Baire-Maßen insbesonders die angegebene Bedingung erfüllt folgt auch die zweite Aussage. ❑

4.5.8 Proposition. *Eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ signierter Bairemaße auf dem Intervall $[a,b]$ konvergiert genau dann schwach gegen ein Bairemaß μ, wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mu_n\| < \infty$.

2. *Jede Teilfolge der Folge der Verteilungsfunktionen F_{μ_n} hat eine Teilfolge, die gegen die Verteilungsfunktion F_μ auf allen bis auf höchstens abzählbar vielen Punkten konvergiert.*

Ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer Bairemaße, so kann Eigenschaft (2) durch

2'. *Die gesamte Folge der Verteilungsfunktionen $(F_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Verteilungsfunktion F_μ auf allen Stetigkeitspunkten von F_μ.*

ersetzt werden.

Beweis. Sei angenommen, dass eine Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, aber nicht schwach gegen das Maß μ konvergiert. Bekanntlich kann nach dem Satz von Stone-Weierstrass jede Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$ durch Funktionen aus $\mathcal{C}^\infty(X)$ approximiert werden. Dies ergibt zusammen mit Bedingung (1), dass es eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ gibt, sodass

$$\int_{[a,b]} f(t)\mu_n(dt) \overset{n\to\infty}{\not\to} \int_{[a,b]} f(t)\mu(dt).$$

Dies ist äquivalent dazu, dass eine Teilfolge $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ existieren, sodass

$$\exists K \in \mathbb{N} : \forall k \geq K : \left| \int_{[a,b]} f(t)\mu_{n_k}(dt) - \int_{[a,b]} f(t)\mu(dt) \right| \geq \varepsilon_0 \qquad \textbf{(4.26)}$$

ist. Wegen Bedingung (2) hat die dazugehörende Folge $(F_{\mu_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ von Verteilungsfunktionen eine Teilfolge $(F_{\mu_{n_{k_l}}})_{l\in\mathbb{N}}$, die auf allen bis auf höchstens abzählbar vielen Punkten gegen F_μ konvergiert. Da die Funktionen F_{μ_n} und F_μ konstant auf (b,∞) sind, gilt $\mu([a,b]) = \lim_{n\to\infty} \mu_n([a,b])$. Wendet man dies auf die Darstellung nach Lemma C.1.1 an, so ergibt sich, dass die rechte Seite des Ausdrucks

$$\int_{[a,b]} f(t)\mu_{n_{k_l}}(dt) = f(b)F_{\mu_{n_k}}(b+) - \int_{[a,b]} f'(t)F_{\mu_{n_{k_l}}}(t)dt \qquad \textbf{(4.27)}$$

nach dem Satz von der dominierten Kovergenz mit $|F_{\mu_{n_{k_l}}}(t)| \leq C := \sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mu_n\|$ für $l \to \infty$ gegen

$$f(b)F_\mu(b+) - \int_{[a,b]} f'(t)F_\mu(t)dt = \int_{[a,b]} f(t)\mu(dt)$$

konvergiert, wobei das Gleichheitszeichen wieder wegen Lemma C.1.1 gilt. Dies ist ein Widerspruch zu (4.26).

Sind die Maße μ_n nichtnegativ, so sind die Funktionen F_{μ_n} monoton wachsend. Nach Annahme (2) konvergiert jede Teilfolge einer Teilfolge von F_{μ_n} auf dem Komplement einer höchstens abzählbaren Menge. Da das Komplement einer abzählbaren Teilmenge von $[a,b]$ dicht in $[a,b]$ ist, kann Punkt (1) von Lemma C.1.5 angewandt werden und man erhält, dass die gesamte Folge $(F_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ auf den Stetigkeitspunkten von F_μ gegen F_μ konvergiert.

Zum Beweis der Umkehrung sei angenommen, dass die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Maßen μ_n schwach gegen ein Maß μ konvergiert. Nach Proposition 4.5.7 gilt dann $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\mu_n\| < \infty$ und damit ist Folge der Variationen

$$V_a^b(F_{\mu_n}) := V(F_{\mu_n}, [a,b]) := \sup \sum_{i=1}^{n} |F_{\mu_n}(t_{i+1}) - F_{\mu_n}(t_i)|,$$

wobei das Supremum über alle $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n+1}$ in $[a,b]$ gebildet wird, gleichmäßig beschränkt. Definiert man

$$\varphi_n(x) := \frac{V_a^b(F_{\mu_n}) + F_{\mu_n}(x)}{2} \quad \text{und} \quad \psi_n(x) := \frac{V_a^b(F_{\mu_n}) - F_{\mu_n}(x)}{2},$$

so gilt offensichtlich $F_{\mu_n} = \varphi_n - \psi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Funktionen φ_n, ψ_n sind monoton wachsend und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von $(F_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sind auch die Folgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt. Durch Anwendung von Punkt (2) aus Lemma C.1.5 auf eine beliebige Teilfolge von F_{μ_n} erhält man die Existenz von punktweise überall auf $[a,b]$ konvergenten Teilfolgen φ_{n_k} und ψ_{n_k}. Also kann angenommen werden, dass die Folge F_{μ_n} punktweise gegen eine Funktion G konvergiert. Nun gilt sicher

$$\lim_{n\to\infty} F_{\mu_n}(b+) = \lim_{n\to\infty}([a,b]) = \mu([a,b]) = F_\mu(b+),$$

woraus man mit (4.27) und dem Satz von der dominierten Konvergenz erhält, dass

$$\int_a^b f(t)\,\mu(dt) = f(b)F_\mu(b+) - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt$$

Aus Lemma C.1.1 folgt ebenso

$$\int_a^b f(t)\,\mu(dt) - f(b)F_\mu(b+) = -\int_a^b f'(t)F_\mu(t)\,dt$$

und damit insgesamt

$$\int_a^b f'(t)F_\mu(t)\,dt = \int_a^b f'(t)G(t)\,dt,$$

also stimmen F_μ und G μ-fast überall und damit auf dem Komplement einer μ-Nullmenge überein. Also ist die Menge, auf der die Funktionen F_μ und G nicht übereinstimmen, höchstens abzählbar. Sind die Maße μ_n nichtnegativ, so ist die Menge der Unstetigkeitspunkte von F_μ und G höchstens abzählbar und ihr Komplement damit dicht in $[a,b]$. Damit müssen F_μ und G auf allen Punkten, an denen beide Funktionen stetig sind, übereinstimmen. ❏

Appendices

Anhang A

Topologische Grundlagen

Dieser Anhang gibt die benötigten topologischen Grundlagen wieder.

A.1 Grundbegriffe

A.1.1 Topologie, Filter, Netze

A.1.1 Definition. Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Teilmengen von X. Erfüllt $\mathcal{T}$ die Eigenschaften

- **($\mathcal{T}$1)** $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
- **($\mathcal{T}$2)** Ist $n \in \mathbb{N}$ und $O_1, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$, so folgt $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$.
- **($\mathcal{T}$3)** Ist I eine Indexmenge und $O_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$, so folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$,

dann heißt $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt topologischer Raum. Die Elemente einer Topologie werden offene Mengen genannt.

A.1.2 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von x, wenn es eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in O \subseteq U$. Die Menge $\mathcal{U}(x)$ aller Umgebungen von x heißt Umgebungsfilter von x.

Der Umgebungsfilter stellt nur einen Spezialfall eines allgemeinen mengentheoretischen Konzepts dar.

A.1.3 Definition. Sei M eine nichtleere Menge und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein System von Teilmengen von M. Erfüllt $\mathcal{F}$ die Eigenschaften

- **($\mathcal{F}$1)** $\emptyset \in \mathcal{F}$,
- **($\mathcal{F}$2)** $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$,
- **($\mathcal{F}$3)** $F_1 \in \mathcal{F}$ und $F_1 \subseteq F_2 \subseteq M \Longrightarrow F_2 \in \mathcal{F}$

dann heißt $\mathcal{F}$ *Filter*.

Offensichtlich ist der Umgebungsfilter eines Punktes $x \in X$ tatsächlich ein Filter im Sinne der allgemeinen Definition.

A.1.4 Definition. Sei $M \neq \varnothing$ eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter. Dann heißt ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ *Filterbasis* von $\mathcal{F}$, wenn

$$\forall F \in \mathcal{F} : \exists W \in \mathcal{B} : W \subseteq F.$$

Ein Mengensystem $\mathcal{V}$ heißt *Filtersubbasis* des Filters $\mathcal{F}$, wenn die Menge aller endlichen Schnitte von Elementen aus $\mathcal{V}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$ bildet.

A.1.5 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. $(X, \mathcal{T})$ *erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom*, wenn für jedes $x \in X$ der Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ eine Filterbasis hat, die aus abzählbar vielen Mengen besteht.

A.1.6 Lemma. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$, so gilt*

($\mathcal{FB}$1) $\varnothing \notin \mathcal{B}$.

($\mathcal{FB}$2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Ist umgekehrt $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften ($\mathcal{FB}$1) und ($\mathcal{FB}$2), so existiert ein eindeutiger Filter $\mathcal{F}$, der $\mathcal{B}$ als Filterbasis hat. Dieser Filter ist durch

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}$$

gegeben.

Beweis. Ist $\mathcal{F}$ ein Filter und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis von $\mathcal{F}$, so ist wegen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ und ($\mathcal{F}$1) $\varnothing \notin \mathcal{B}$. Sind $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, so folgt wegen $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ aus ($\mathcal{F}$3), dass $B_3 := B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ und $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Also hat $\mathcal{B}$ die Eigenschaften ($\mathcal{FB}$1) und ($\mathcal{FB}$2).
Sei $\mathcal{B}$ ein Mengensystem mit den Eigenschaften ($\mathcal{FB}$1), ($\mathcal{FB}$2) und sei weiters

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq F\}.$$

Da $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ und ($\mathcal{FB}$1) gilt, ist $\varnothing \notin \mathcal{F}$. Ist $F_1 \in \mathcal{F}$ und $F_2 \supseteq F_1$, so existiert ein $B \in \mathcal{B}$ so, dass $B \subseteq F_1$. Damit ist auch $B \subseteq F_2$ und daher $F_2 \in \mathcal{F}$. Sind F_1, $F_2 \in \mathcal{F}$, so gibt es $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, sodass $B_1 \subseteq F_1$, $B_2 \subseteq F_2$. Aus ($\mathcal{FB}$2) folgt die Existenz eines $B_3 \in \mathcal{B}$, sodass $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$. Daher ist $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ erfüllt die Eigenschaften ($\mathcal{F}$1) - ($\mathcal{F}$3) eines Filters.
Ist $\mathcal{F}_1$ ein weiterer Filter mit der Filterbasis $\mathcal{B}$, so folgt aus $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, ($\mathcal{F}$2) und der Definition von $\mathcal{F}$, dass $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$. Ist $F \in \mathcal{F}_1$, so gibt es - weil $\mathcal{B}$ Filterbasis von $\mathcal{F}_1$ ist - ein $B \in \mathcal{B}$ so, dass $B \subseteq F$ ist. Nach Definition von $\mathcal{F}$ ist dann aber auch $F \in \mathcal{F}$ und damit $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$. ❑

A.1.7 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Ist für alle $x \in X$ das System $\mathcal{W}(x)$ eine Filterbasis des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Die Menge $O \subseteq X$ ist offen.

(ii) Für alle $x \in O$ ist $O \in \mathcal{U}(x)$.

(iii) Für alle $x \in O$ gibt es ein $W \in \mathcal{W}(x)$ so, dass $W \subseteq O$.

Beweis. Sei $x \in X$ beliebig. Gilt (ii), so existiert nach Definition einer Filterbasis ein $W \in \mathcal{W}(x)$ mit $W \subseteq O$. Gilt umgekehrt (iii), so ist nach der Definition des eindeutigen Filters $\mathcal{U}(x)$ zur Filterbasis $\mathcal{W}(x)$ in Lemma A.1.6 dann $O \in \mathcal{U}(x)$, also sind (ii) und (iii) äquivalent.
Ist $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$, so ist wegen $x \in O \subseteq O$ dann $O \in \mathcal{U}(x)$. Ist umgekehrt $\forall x \in O : O \in \mathcal{U}(x)$, so gibt es für alle $x \in O$ ein $O_x \in \mathcal{T}$ so, dass $x \in O_x \subseteq O$. Wegen

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in O} O_x \subseteq O$$

ist O als Vereinigung offener Mengen nach ($\mathcal{T}3$) offen. Daher sind auch (i) und (ii) äquivalent. ❑

Das folgende Lemma zeigt den engen Zusammenhang zwischen einer Topologie und dem Umgebungsfilter.

A.1.8 Lemma. *Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter von $x \in X$, dann gilt:*

($\mathcal{U}$1) $X \in \mathcal{U}(x)$.

($\mathcal{U}$2) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so ist $x \in U$.

($\mathcal{U}$3) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \supseteq U$ beliebig, dann ist $V \in \mathcal{U}(x)$.

($\mathcal{U}$4) Sind U, $V \in \mathcal{U}(x)$, dann ist auch $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$.

($\mathcal{U}$5) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so existiert ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subseteq U$ so, dass $V \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in V$ gilt.

Ist umgekehrt jedem $x \in X$ ein System $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X zugeordnet, sodass ($\mathcal{U}$1) - ($\mathcal{U}$5) gilt, dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass für alle $x \in X$ die Menge $\mathcal{U}(x)$ gerade der Umgebungsfilter von x bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ ist. Diese Topologie ist durch

$$\mathcal{T} := \big\{O \subseteq X \;\big|\; \forall x \in O : \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subseteq O\big\}$$

gegeben.

Beweis. Die Eigenschaften ($\mathcal{U}$1) - ($\mathcal{U}$3) folgen direkt aus der Definition des Umgebungsfilters. Sind U, $V \in \mathcal{U}(x)$, so existieren O_1, $O_2 \in \mathcal{T}$ so, dass $x \in O_1 \subseteq U$ und $x \in O_2 \subseteq V$ ist. Also ist $x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U \cap V$ und es gilt ($\mathcal{U}$4). Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so existiert ein $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$. Nach Lemma A.1.7 ist dies äquivalent dazu, dass $O \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in O$ ist. Mit $V := O$ gilt also auch ($\mathcal{U}$5).
Nun wird eine Topologie $\mathcal{T}$ aus den Umgebungsfiltern $\mathcal{U}(x)$ konstruiert. Sei dazu X gegeben und jedem $x \in X$ sei ein System $\mathcal{U}(x)$ zugeordnet, das ($\mathcal{U}$1) - ($\mathcal{U}$5) erfüllt. Sei $\mathcal{T}$ das Mengensystem

$$\mathcal{T} := \big\{O \subseteq X \;\big|\; \forall x \in O : \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subseteq O\big\}.$$

Wegen ($\mathcal{U}$1) gilt offensichtlich ($\mathcal{T}$1). Ist $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i$, $O_i \in \mathcal{T}$, so existieren $U_i \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_i \subseteq O_i$. Wegen ($\mathcal{U}$4) ist $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{U}(x)$ und es gilt $\bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n O_i$, also ist ($\mathcal{T}$2) erfüllt. Sei I eine Indexmenge und $O_i \in \mathcal{T}$ für $i \in I$. Ist

$x \in \bigcap_{i\in I} O_i$, so existiert ein $i_0 \in I$ mit $x \in O_{i_0}$. Daher existiert ein $U \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$U \subseteq O_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i,$$

also ist $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ erfüllt ($\mathcal{T}$1) - ($\mathcal{T}$3).
Zum Beweis der Eindeutigkeit muss sowohl nachgewiesen werden, dass $\mathcal{T}$ die Topologie zum Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ ist, als auch die Umkehrung - also dass $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter zur Topologie $\mathcal{T}$ ist. Sei dazu $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter bezüglich $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ die aus dem letzten Schritt konsturierte Topologie. Sei $O \in \mathcal{T}'$. Das ist per Definition von $\mathcal{T}'$ äquivalent dazu, dass es für jedes $x \in O$ ein $U \in \mathcal{U}(x)$ gibt, sodass $U \subseteq O$ ist. Nach Lemma A.1.7 ist dies äquivalent dazu, dass $O \in \mathcal{T}$ ist, also gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.
Sei nun jedem $x \in X$ ein System $\mathcal{U}(x)$ mit ($\mathcal{U}$1) - ($\mathcal{U}$5) zugeordnet, $\mathcal{T}$ die daraus konstruierte Topologie und $\mathcal{U}'(x)$ der Umgebungsfilter bezüglich $\mathcal{T}$. Es ist $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}'(x)$ zu zeigen. Sei $x \in X$. Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so existiert wegen ($\mathcal{U}$5) ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \subseteq U$ so, dass für alle $y \in V$ dann $V \in \mathcal{U}(y)$ gilt. Per Definition von $\mathcal{T}$ ist $V \in \mathcal{T}$ mit $x \in V \subseteq U$, also ist $U \in \mathcal{U}'(x)$ und daher $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{U}'(x)$. Sei umgekehrt $U \in \mathcal{U}'(x)$. Dann existiert ein $O \in \mathcal{T}$, sodass $x \in O \subseteq U$ ist. Nach Definition von $\mathcal{T}$ existiert ein $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_1 \subseteq O \subseteq U$. Wegen ($\mathcal{U}$3) ist dann $U \in \mathcal{U}(x)$ und $\mathcal{U}'(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$. ❑

Für topologische Räume sind Netze eine natürliche Erweiterung des Folgenbegriffs.

A.1.9 Definition. Sei I eine nichtleere Menge und sei $\lhd$ eine Relation auf I. Erfüllt $\lhd$ die Eigenschaften

- **($\mathcal{G}$1)** $\forall i \in I : i \lhd i$,
- **($\mathcal{G}$2)** $\forall i, j, k \in I : i \lhd j \land j \lhd k \Longrightarrow i \lhd k$,
- **($\mathcal{G}$3)** $\forall i, j \in I : \exists k \in I : i \lhd k \land j \lhd k$,

dann heißt das Paar $(I, \lhd)$ *gerichtete Menge.*

A.1.10 Bemerkung. Ist $I = \mathbb{N}$ und definiert man

$$\forall n, m \in \mathbb{N} : n \lhd m :\Leftrightarrow n \leq m,$$

so ist $(\mathbb{N}, \lhd) = (\mathbb{N}, \leq)$ eine gerichtete Menge. Damit sind Folgen spezielle Netze.

A.1.11 Definition. Sei X eine nichtleere Menge und $(I, \lhd)$ eine gerichtete Menge. Eine Abbildung $x : I \to X$ heißt Netz bzw. Moore-Smith-Folge in der Menge X über der gerichteten Menge $(I, \lhd)$. In Analogie zu Folgen schreibt man auch x_i statt $x(i)$ für $i \in I$ und statt $x : I \to X$ wird ein Netz auch in der Form $(x_i)_{i\in I}$ geschrieben.
Ist zusätzlich $A \subseteq X$, so *liegt* das Netz $(x_i)_{i\in I}$ *schließlich in* A, wenn

$$\exists i_0 \in I : \forall i \rhd i_0 : x_i \in A$$

und das Netz $(x_i)_{i\in I}$ *ist cofinal in* A, wenn

$$\forall i_0 \in I : \exists i \rhd i_0 : x_i \in A$$

gilt.

A.1.12 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $(I, \lhd)$ eine gerichtete Menge. Eine Abbildung $U : I \to \mathcal{P}(X)$ heißt ein Netz von Mengen bzw. Moore-Smith-Folge von Mengen in X über der gerichteten Menge $(I, \lhd)$.
Ein Netz $(U_i)_{i \in I}$ von Mengen heißt fallend, wenn $U_i \subseteq U_j$ für $j \lhd i$ und das Netz heißt steigend, wenn $U_j \subseteq U_i$ für $j \lhd i$.

A.1.13 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(I, \lhd)$ eine gerichtete Menge, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz auf I in X und $x \in X$. Das Netz $(x_i)_{i \in I}$ *konvergiert* gegen $x \in X$, in Zeichen $x_i \xrightarrow{\mathcal{T}} x$, wenn für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ das Netz $(x_i)_{i \in I}$ schließlich in U liegt. Die Menge aller Grenzwerte des Netzes $(x_i)_{i \in I}$ wird mit $\lim_{i \in I} x_i$ bezeichnet. Hat das Netz $(x_i)_{i \in I}$ genau einen Grenzwert x, so schreibt man $\lim_{i \in I} x_i = x$.
Der Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von $(x_i)_{i \in I}$, wenn für alle $U \in \mathcal{U}(x)$ das Netz $(x_i)_{i \in I}$ cofinal in U ist.

A.1.14 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $(I, \lhd)$ eine gerichtete Menge, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz auf I in X und $x \in X$. Seien weiters $\mathcal{W}(x)$ eine Filterbasis und $\mathcal{V}(x)$ eine Filtersubbasis des Umgebungsfilters $\mathcal{U}(x)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Das Netz $(x_i)_{i \in I}$ konvergiert gegen $x \in X$.*

(ii) $\forall W \in \mathcal{W}(x) : \exists i_0 \in I : \forall i \rhd i_0 : x_i \in W$

(iii) $\forall V \in \mathcal{V}(x) : \exists i_0 \in I : \forall i \rhd i_0 : x_i \in V$

Beweis. Die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sind offensichtlich. Gezeigt wird $(iii) \Rightarrow (i)$. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Da $\mathcal{V}(x)$ eine Filtersubbasis von $\mathcal{U}(x)$ ist, existieren Mengen $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{V}(x)$, sodass $x \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \subseteq U$ ist. Aus (iii) folgt, dass es für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ ein $i_k \in I$ so gibt, dass

$$\forall i \in I,\, i \rhd i_k : x_i \in V_k$$

gilt. Da $(I, \lhd)$ eine gerichtete Menge ist existiert ein $i_0 \in I$, so dass $i_k \rhd i_0$ für alle k mit $1 \leq k \leq n$ ist. Daher ist

$$\forall i \in I,\, i \rhd i_0 : x_i \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \subseteq U$$

und es folgt (i). ❑

In allgemeinen topologischen Räumen muss der Grenzwert eines Netzes keineswegs eindeutig sein.

A.1.15 Beispiel. Sei X eine Menge, die aus mindestens zwei Elementen besteht und $\mathcal{T} := \{\varnothing, X\}$. Dann ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und für alle $x \in X$ ist $\mathcal{U}(x) = X$. Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein beliebiges Netz, dann konvergiert $(x_i)_{i \in I}$ gegen jedes $x \in X$.

A.1.2 Hausdorff-Räume

Für die Entwicklung von maßtheoretischen Begriffen auf topologischen Räumen spielen Hausdorff-Räume, inbesonders lokalkompakte Hausdorff-Räume, eine wesentliche Rolle. Dies liegt unter anderem daran, dass die Hausdorff-Eigenschaft genügt, damit Grenzwerte von Netzen eindeutig sind.
A.1.16 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorff-Raum oder T_2-Raum, wenn er die Eigenschaft

($\mathbf{T_2}$) $\forall x, y \in X,\, x \neq y : \exists O_x, O_y \in \mathcal{T} : x \in O_x, y \in O_y$ und $O_x \cap O_y = \emptyset$

erfüllt. Anschaulich bedeutet T_2, dass Punkte durch offene Mengen getrennt werden können.

A.1.17 Bemerkung. Offensichtlich kann die T_2-Eigenschaft äquivalent über Umgebungen formuliert werden. Es ist ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ also genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn

($\mathbf{T_2^U}$) $\forall x, y \in X,\, x \neq y : \exists U \in \mathcal{U}(x), V \in \mathcal{U}(y) : U \cap V = \emptyset.$

A.1.18 Lemma. *Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein kovergentes Netz in einem topologischen T_2-Raum $(X, \mathcal{T})$, dann ist der Grenzwert eindeutig.*

Beweis. Sei angenommen, das Netz $(x_i)_{i \in I}$ konvergiert gegen $x \in X$ und gegen $y \in X$ mit $x \neq y$. Auf Grund der T_2-Eigenschaft können disjunkte Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ gewählt werden. Da das Netz konvergent ist, können Indices $i_1, i_2 \in I$ so gewählt werden, dass $i \rhd i_1 \implies x_i \in U$ und $i \rhd i_2 \implies x_i \in V$. Da $(I, \lhd)$ gerichtet ist, gibt es ein $i \in I : i \rhd i_1 \wedge i \rhd i_2$ und daher ist $x_i \in U \cap V$. Dies ist ein Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$. ❑

A.1.3 Normale und perfekt normale Räume

A.1.19 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $f : X \to [0, 1]$ stetig. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *funktional abgeschlossen*, wenn $A = f^{-1}(\{0\})$ ist. Weiters heißt eine Menge $O \subseteq X$ *funktional offen*, wenn sie das Komplement einer funktional abgeschlossenen Menge ist.

A.1.20 Proposition. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{Z}$ die Menge der funktional abgeschlossenen Mengen. Dann ist abgeschlossen bezüglich der Bildung endlicher Vereinigungen und endlicher Durchschnitte.*

Beweis. Sind Z_1, $Z_2 \in \mathcal{Z}$, so existieren per Definition zwei stetige Funktionen $f_1, f_2 : X \to [0, 1]$, sodass $Z_1 = f_1^{-1}(\{0\})$ und $Z_2 = f_2^{-1}(\{0\})$ ist. Definiere $g := f_1 \cdot f_2$ und $h := \frac{1}{2}(f + g)$. Dann sind $g, h : X \to [0, 1]$ stetig und es gilt

$$g^{-1}(\{0\}) = f_1^{-1}(\{0\}) \cup f_2^{-1}(\{0\}) \quad \text{und} \quad h^{-1}(\{0\}) = f_1^{-1}(\{0\}) \cap f_2^{-1}(\{0\}),$$

also ist $Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}$ und $Z_1 \cap Z_2 \in \mathcal{Z}$. ❑

A.1.21 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt T_1, wenn für zwei Punkte x_1, $x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ eine offene Menge $O \in \mathcal{T}$ existiert, sodass $x_1 \in O$ und $x_2 \notin O$ gilt.

A.1.22 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *normal* oder auch T_4, wenn er T_1 ist und für alle abgeschlossenen Mengen A_1, $A_2 \subseteq X$ mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ offene Mengen $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ existieren, sodass $A_1 \subseteq O_1$, $A_2 \subseteq O_2$ und $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ gilt.

A.1.23 Definition. Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *perfekt normal* (*perfectly normal*), wenn er normal ist und jede abgeschlossene Menge funktional abgeschlossen ist.

A.2 Umgebungsbasen, Basen, Subbasen

A.2.1 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ und $\mathcal{W}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$. Das Mengensystem $\mathcal{W}(x)$ heisst Umgebungsbasis von x, wenn es die Eigenschaft

($\mathcal{W}$) $\forall U \in \mathcal{U}(x) : \exists W \in \mathcal{W}(x) : W \subseteq U$

erfüllt.

Die Bezeichnung Umgebungsbasis geht auf den Umstand zurück, dass der Umgebungsfilter aus einer Umgebungsbasis rekonstruiert werden kann. Tatsächlich ist eine Umgebungsbasis eine Filterbasis des Umgebungsfilters.

A.2.2 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$ beliebig, $\mathcal{U}(x)$ der Umgebungsfilter von x und $\mathcal{W}(x)$ eine Umgebungsbasis. Dann gilt*

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{P}(X) \mid \exists W \in \mathcal{W}(x) : W \subseteq U\}.$$

Beweis. Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, dann existiert nach Definition ein $W \in \mathcal{W}(x)$ so, dass $W \subseteq U$. Ist umgekehrt $U \in \mathcal{P}(x)$ und $W \in \mathcal{W}(x)$ mit $W \subseteq U$. Da $\mathcal{W}(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ gilt, gibt es ein $O \in \mathcal{T} : x \in O \subseteq W \subseteq U$, also ist $U \in \mathcal{U}(x)$. ❑

Analog zur Rekonstruktion aller Umgebungen aus einem Teilsystem können auch die offenen Mengen, also die Topologie, aus einem Teilsystem rekonstruiert werden.

A.2.3 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Das Mengensystem $\mathcal{U}$ heisst Basis für die Topologie $\mathcal{T}$, wenn sich jede offene Menge $O \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{U}$ schreiben lässt, wenn also

($\mathcal{U}$) $\forall O \in \mathcal{T} : \exists \mathcal{V}_O \subseteq \mathcal{U} : O = \bigcup_{U \in \mathcal{V}_O} U$

gilt.

A.2.4 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Das Mengensystem $\mathcal{U}$ ist genau dann eine Basis für $\mathcal{T}$, wenn*

($\mathcal{U}_1$) $\forall O \in \mathcal{T} : O = \bigcup \big\{U \in \mathcal{U} \bigm| U \subseteq O\big\}$

bzw. genau dann, wenn

($\mathcal{U}_2$) $\forall O \in \mathcal{T} : \forall x \in O : \exists U \in \mathcal{U} : x \in U \subseteq O$

gilt.

Beweis. Gelte $(\mathcal{U})$. Sei $O \in \mathcal{T}$ und sei weiters $\mathcal{V}_O \subseteq \mathcal{U}$ so, dass $O = \bigcup_{U \in \mathcal{V}_O} U$. Setzt man $\mathcal{V} := \big\{U \in \mathcal{U} \bigm| U \subseteq O\big\}$, dann gilt $\mathcal{V}_O \subseteq \mathcal{V}$. Daher ist

$$O \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{V}_O} U \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U \subseteq O$$

und es folgt $(\mathcal{U}_1)$.
Gilt $(\mathcal{U}_1)$ und ist $O \in \mathcal{T}$, $x \in O$, so ist $O = \bigcup \big\{U \in \mathcal{U} \bigm| U \subseteq O\big\}$. Daher existiert ein $U_x \in \mathcal{U}$ mit $U_x \subseteq O$ so, dass $x \in U_x$ ist, also gilt $(\mathcal{U}_2)$.
Aus $(\mathcal{U}_2)$ folgt sofort $(\mathcal{U})$, denn nach $(\mathcal{U}_2)$ existiert für alle $O \in \mathcal{T}$ und alle $x \in O$ ein $U_x \in \mathcal{U}$, sodass $x \in U_x \subseteq O$ ist. Daher ist $O = \bigcup_{x \in O} U_x$ und $\mathcal{V}_O := \big\{U_x \in \mathcal{U} \bigm| \exists x \in O : x \in U_x \subseteq O\big\}$. ❑

A.2.5 Satz. *Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ eine Basis für $\mathcal{T}$, dann gilt:*

($\mathcal{B}$1) $\varnothing \in \mathcal{U}$.

($\mathcal{B}$2) *Sind U_1, $U_2 \in \mathcal{U}$ und $x \in U_1 \cap U_2$, so existiert ein $U_3 \in \mathcal{U}$ so, dass $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$.*

($\mathcal{B}$3) $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = X$.

Ist umgekehrt $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem, das die Eigenschaften ($\mathcal{B}$1) - ($\mathcal{B}$3) erfüllt, dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X so, dass $\mathcal{U}$ Basis von $\mathcal{T}$ ist und diese Topologie ist gegeben durch

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U \mid \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \right\}.$$

Beweis. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U}$ eine Basis von $\mathcal{T}$. Aus $\varnothing \in \mathcal{T}$ folgt ($\mathcal{B}$1) und aus $X \in \mathcal{T}$ folgt ($\mathcal{B}$3). Sind U_1, $U_2 \in \mathcal{U}$ und $x \in U_1 \cap U_2$, so ist - da $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ gilt - $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Wegen ($\mathcal{U}_1$) gilt

$$U_1 \cap U_2 = \left\{ U \in \mathcal{U} \mid U \subseteq U_1 \cap U_2 \right\}$$

also existiert $U_3 \in \mathcal{U}$ so, dass $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ und $\mathcal{U}$ erfüllt ($\mathcal{B}$2).
Sei nun $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ so gegeben, dass $\mathcal{U}$ die Bedingungen ($\mathcal{B}$1) - ($\mathcal{B}$3) erfüllt und sei

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U \mid \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \right\}.$$

Wegen ($\mathcal{B}$1) ist

$$\varnothing = \bigcup_{U \in \varnothing} U \in \mathcal{T}$$

und wegen ($\mathcal{B}$3) gilt

$$X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \mathcal{T}$$

somit erfüllt $\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$1). Um zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ auch ($\mathcal{T}$2) erfüllt sei festgehalten, dass aus ($\mathcal{B}$2) induktiv leicht gezeigt werden kann, dass aus $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ mit $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ die Existenz eines $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i$ folgt. Sind für $O_1, \ldots O_n \in \mathcal{T}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so existieren nach ($\mathcal{U}$) Teilsysteme $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{U}$, sodass $O_i = \bigcup_{U \in \mathcal{V}_i} U$. Ist $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i$, so existiert für jedes $i = 1, \ldots, n$ ein $U_i \in \mathcal{V}_i$ so, dass $x \in U_i$ ist. Nach obiger Aussage existiert dann $U \in \mathcal{U}$, sodass $x \in \mathcal{U} \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i \subseteq \bigcap_{i=1}^n O_i$. Also gilt

$$\bigcap_{i=1}^n O_i = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U \quad \text{mit} \quad \mathcal{V} := \left\{ U \in \mathcal{U} \mid U \subseteq \bigcap_{i=1}^n O_i \right\}$$

und daher erfüllt $\mathcal{T}$ auch ($\mathcal{T}$2). Ist I eine Indexmenge und $O_i \in \mathcal{T}$, $i \in I$, so existieren $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{U}$, sodass $O_i = \bigcup_{U \in \mathcal{V}_i} U$ gilt. Daher ist

$$\bigcup_{i \in I} O_i = \bigcup_{i \in I} \Bigg(\bigcup_{U \in \mathcal{V}_i} U \Bigg) = \bigcup_{U \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i} U$$

und $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf X.
Zur Feststellung der Eindeutigkeit sei $\mathcal{T}$ die im letzten Schritt konstruierte Topologie und $\mathcal{T}'$ sei eine weitere Topologie, die $\mathcal{U}$ als Basis hat. Ist $O' \in \mathcal{T}'$, dann gilt

$$O' = \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U \quad \text{mit} \quad \mathcal{V} = \big\{U \in \mathcal{U} \;\big|\; U \subseteq O'\big\}\,,$$

also ist $O' \in \mathcal{T}$. Ist umgekehrt $O \in \mathcal{T}$, so existiert ein $\mathcal{V}_O \subseteq \mathcal{U}$, sodass $O = \bigcup_{U \in \mathcal{V}_O} U$ ist. Dann ist aber $O \in \mathcal{T}'$ und ingesamt $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. ❑

A.2.6 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$. Dann ist $\mathcal{U}$ eine Basis für $\mathcal{T}$ genau dann, wenn für jedes $x \in X$ die Menge*

$$\mathcal{W}(x) := \big\{U \in \mathcal{U} \;\big|\; x \in U\big\}$$

eine Umgebungsbasis bei $x \in X$ ist.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ Basis für $\mathcal{T}$, $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann existiert ein $O \in \mathcal{T}$, sodass $x \in O \subseteq U$. Da $\mathcal{U}$ eine Basis ist, gilt $O = \bigcup \big\{U \in \mathcal{U} \;\big|\; U \subseteq O\big\}$ und es existiert ein $U_x \in \mathcal{U}$ so, dass $x \in U_x \subseteq O \subseteq U$ gilt. Dabei ist $U_x \in \mathcal{W}(x)$ und daher $\mathcal{W}(x)$ eine Umgebungsbasis.
Sei umgekehrt $\mathcal{W}(x)$ eine Umgebungsbasis, $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$. Nach Lemma A.1.7 ist $O \in \mathcal{U}(x)$ und daher existiert ein $U_x \in \mathcal{W}(x) \subseteq \mathcal{U}$ so, dass $x \in U_x \subseteq O$. Also erfüllt $\mathcal{U}$ die Bedingung $(\mathcal{U}_2)$. ❑

A.2.7 Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$. Das Mengensystem $\mathcal{V}$ heißt *Subbasis* für $\mathcal{T}$, wenn

$$\mathcal{U} := \{\varnothing, X\} \cup \left\{\bigcap_{i=1}^{n} V_i \;\middle|\; V_i \in \mathcal{V}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.

A.2.8 Lemma. *Sei X eine Menge und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass $\mathcal{V}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$ ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ gegeben durch

$$\mathcal{U} := \{\varnothing, X\} \cup \left\{\bigcap_{i=1}^{n} V_i \;\middle|\; V_i \in \mathcal{V}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Offensichtlich erfüllt $\mathcal{U}$ die Bedingungen $(\mathcal{B}1)$ und $(\mathcal{B}3)$. Sind U_1, $U_2 \in \mathcal{U}$ und $x \in U_1 \cap U_2$, so ist wegen

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=n+1}^{N} V_i\right) = \bigcap_{i=1}^{N} V_i$$

auch $(\mathcal{B}2)$ erfüllt und daher $\mathcal{U}$ eine Basis. Nach Satz A.2.5 erzeugt $\mathcal{U}$ eine eindeutige Topologie, die $\mathcal{U}$ als Basis und daher $\mathcal{V}$ als Subbasis hat. ❑

A.3 Vergleich von Topologien, Initialtopologie

A.3.1 Definition. Sei X eine Menge und bezeichne mit $\mathbb{T}(X)$ die Menge aller möglichen Topologien auf X. Sind $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X, so nennt man $\mathcal{T}_1$ *gröber* als $\mathcal{T}_2$ oder äquivalent $\mathcal{T}_2$ *feiner* als $\mathcal{T}_1$, wenn $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ gilt. Offensichtlich ist die Relation $\subseteq$ eine Ordnungsrelation auf $\mathbb{T}(X)$.

A.3.2 Lemma. *Sei X eine Menge. Dann gilt*

(i) Das kleinste Element in $\mathbb{T}(X)$ ist $\{\varnothing, X\}$, das größte Element ist $\mathcal{P}(X)$.

(ii) Ist $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Topologien auf X, so ist $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie auf X und es gilt

$$\inf_{i\in I} \mathcal{T}_i = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i.$$

(iii) Ist $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Topolgien auf X, so ist

$$\mathcal{T} := \sup_{i\in I} \mathcal{T}_i = \bigcap \big\{ \mathcal{T}' \in \mathbb{T}(X) \bigm| \mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}', i \in I \big\}$$

und $\mathcal{T}$ hat das Mengensystem $\bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$ als Subbasis.

(iv) Ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so ist

$$\tau(\mathcal{C}) := \bigcap \big\{ \mathcal{T}' \in \mathbb{T}(X) \bigm| \mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}' \big\}$$

die gröbste Topologie, die $\mathcal{C}$ enthält. Ist $\mathcal{C}$ eine Topologie auf X, so gilt $\tau(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Beweis.

(i) Da für jede Topologie $\mathcal{T}$ auf X sicher $\varnothing$, $X \in \mathcal{T}$ gilt, ist $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(ii) Da alle $\mathcal{T}_i$ abgeschlossen gegenüber der Bildung endlicher Durchschnitte und beliebiger Vereinigungen sind und weiters $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$ gilt, ist $\mathcal{T} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ eine Topologie auf X, außerdem gilt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$. Ist $\mathcal{T}'$ eine weitere Topologie, die bezüglich der Mengeninklusion kleiner ist als alle $\mathcal{T}_i$, $i \in I$, so gilt $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, also ist $\mathcal{T}$ die größte untere Schranke der Familie $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$.

(iii) Wie schon im letzten Punkte besprochen wurde ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und offensichtlich ist $\mathcal{T}$ das Supremum der Familie $\mathcal{T}_i$, $i \in I$. Betrachtet man nun das Mengensystem $\mathcal{V} := \bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$, so ist $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$, denn ist $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}'$ für alle $i \in I$, dann gilt $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}'$ und daher auch $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$. Bezeichnet $\mathcal{T}^*$ die nach Lemma A.2.8 von $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eindeutig erzeugte Topologie, dann gilt $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}^*$ für alle $i \in I$ und daher ist $\mathcal{T} = \bigcap \big\{ \mathcal{T}' \bigm| \mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}', i \in \mathbb{N} \big\} \subseteq \mathcal{T}^*$. Ist umgekehrt $O^* \in \mathcal{T}^*$, dann existieren ein $n \in \mathbb{N}$ und $V_1, \dots V_n \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i$, sodass $O^* = \bigcap_{i=1}^n V_i$ ist. Da also für jedes V_j eine Topologie $\mathcal{T}_{V_j} \subseteq \mathcal{T}$ mit $V_j \in \mathcal{T}_{V_j}$ existiert ist $O^* \in \mathcal{T}$ und insgesamt $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$.

(iv) Sicher gilt $\mathcal{C} \subseteq \tau(\mathcal{C})$. Nach Punkt (ii) ist $\tau(\mathcal{C})$ eine Topologie auf X und ist weiters $\mathcal{T}' \in \mathbb{T}(X)$ mit $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}'$, so ist $\tau(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{T}'$, also ist $\tau(\mathcal{C})$ die gröbste Topologie, die $\mathcal{C}$ enthält. Die zweite Aussage ist klar.

❑

A.3.3 Lemma. *Sei X eine Menge und $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}' \in \mathbb{T}(X)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

(ii) $id_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ *ist stetig.*

(iii) Ist $(Y, \mathcal{V})$ ein topologischer Raum und $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{V})$ stetig, so ist auch $f : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{V})$ stetig.

(iv) Ist $(Y, \mathcal{V})$ ein topologischer Raum und $f : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{T}')$ stetig, so ist auch $f : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{T})$ stetig.

Beweis. Offensichtlich sind (i) und (ii) äquivalent, da $id_X^{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$ ist. Gilt (ii), dann ist sowohl $f \circ id_X : (X, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{V})$ als auch $id_X \circ f : (Y, \mathcal{V}) \to (X, \mathcal{T})$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig, also gelten (iii) und (iv). Gilt Eigenschaft (iii), so ist mit $f := id_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ dann die Zusammensetzung $id_X = id_X \circ id_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ stetig, also gilt (ii). Die Implikation (iv) $\Longrightarrow$ (ii) sieht man analog. ❑

Das folgende Lemma zeigt die enge Verwandschaft von Basen bzw. Subbasen einer Topologie mit den Erzeugendensystemen von σ-Algebren, siehe B.1.4.

A.3.4 Lemma. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.*

(i) Ein Mengensystem $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{U}$ die Eigenschaften ($\mathcal{B}$1) - ($\mathcal{B}$3) erfüllt und $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie auf X ist, die $\mathcal{U}$ umfasst, d.h. wenn $\tau(\mathcal{U}) = \mathcal{T}$ gilt.

(ii) Ein Mengensystem $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann eine Subbasis der Topologie $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie ist, die $\mathcal{V}$ umfasst, d.h. wenn $\tau(\mathcal{V}) = \mathcal{T}$ gilt.

Beweis.

(i) Ist $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}$, so erfüllt $\mathcal{U}$ nach Satz A.2.5 die Eigenschaften ($\mathcal{B}$1) - ($\mathcal{B}$3). Sei $\mathcal{T}' \in \mathbb{T}(X)$ mit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}'$ und betrachte die in Satz A.2.5 konstruierte Topologie $\mathcal{T}^* = \left\{\bigcup_{U \in \mathcal{V}} \,\middle|\, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}\right\}$. Da $\mathcal{T}'$ die Eigenschaft ($\mathcal{T}$3) erfüllt, gilt für alle $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} : \bigcup_{U \in \mathcal{V}} U \in \mathcal{T}'$, also ist $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie, die $\mathcal{U}$ enthält. Ist andererseits $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie, die $\mathcal{U}$ umfasst und erfüllt $\mathcal{U}$ die Eigenschaften ($\mathcal{B}$1) - ($\mathcal{B}$3), so existiert wieder nach Satz A.2.5 eine eindeutige Topologie $\mathcal{T}^*$, für die $\mathcal{U}$ eine Basis ist. Laut Voraussetzung gilt $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$. Ist $O^* \in \mathcal{T}^*$, so existiert $\mathcal{V}_{O^*} \subseteq \mathcal{U}$ mit $\bigcup_{U \in \mathcal{V}_{O^*}} U = O^*$, also ist wegen ($\mathcal{T}$3) dann $O^* \in \mathcal{T}$ und insgesamt $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$, wobei $\mathcal{T}$ laut Annahme die gröbste Topologie ist, die $\mathcal{U}$ umfasst.

(ii) Ist $\mathcal{T}^*$ eine beliebige Topologie auf X, so folgt aus ($\mathcal{T}2$), dass $\mathcal{T}^*$ genau dann $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}^*$ erfüllt, wenn $\mathcal{U} = \{\varnothing, X\} \cup \left\{\bigcap_{i=1}^n V_i \;\middle|\; V_i \in \mathcal{V},\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathcal{T}^*$ gilt. Nun ist $\mathcal{V}$ per Definition genau dann eine Subbasis von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{U}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist, was nach Punkt (i) genau dann der Fall ist, wenn $\tau(\mathcal{U}) = \mathcal{T}$ ist, wenn also $\tau(\mathcal{V}) = \mathcal{T}$ gilt.

❑

A.3.1 Die Initialtopologie

A.3.5 Satz. *Sei X eine Menge, seien $(Y_i, \mathcal{T}_i)$, $i \in I$ topologische Räume und $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, Abbildungen. Dann existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit der Eigenschaft*

(I$\mathcal{T}$1) *$\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf X, sodass alle Abbildungen*

$$f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i),\ i \in I$$

stetig sind.

Diese Topologie heißt initiale Topologie *bezügliche der Familie $(f_i)_{i \in I}$. Für sie gilt:*

(I$\mathcal{T}$2) $\bigcup\limits_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ *ist eine Subbasis von $\mathcal{T}$.*

Beweis. Sei $\mathbb{T}_{f_i}(X) := \left\{\mathcal{T}' \in \mathbb{T}(X) \;\middle|\; \forall i \in I : f_i : (X, \mathcal{T}') \to (Y_i, \mathcal{T}_i) \text{ stetig}\right\}$. Wegen $\mathcal{P}(X) \in \mathbb{T}_{f_i}(X)$ ist $\mathbb{T}_{f_i}(X) \neq \varnothing$, also definiert

$$\mathcal{T} := \bigcap_{\mathcal{T}' \in \mathbb{T}_{f_i}(X)} \mathcal{T}'$$

nach Lemma A.3.2 (ii) eine Topologie auf X. Ist $i \in I$ beliebig, so folgt aus der Definition von $\mathcal{T}$, dass für alle $\mathcal{T}' \in \mathbb{T}_{f_i}(X)$ die Inklusion $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}'$ gilt. Also ist

$$f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \bigcap_{\mathcal{T}' \in \mathbb{T}_{f_i}(X)} \mathcal{T}' = \mathcal{T}$$

und alle $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ sind stetig. Nach Lemma A.3.2 (ii) ist $\mathcal{T}$ die gröbste Topologie mit dieser Eigenschaft, also erfüllt $\mathcal{T}$ die Eigenschaft (I$\mathcal{T}$1). Außerdem ist $\mathcal{T}$ offensichtlich die einzige Topologie mit (I$\mathcal{T}$1).
Sei $\mathcal{T}^*$ jene eindeutige Topologie, die nach Lemma A.2.8 aus dem Mengensystem $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugt wird und $\mathcal{T}$ die initiale Topologie. Da bezüglich $\mathcal{T}$ alle $f_i : (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ stetig sind, gilt für alle $i \in I : f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}$, also auch $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}$. Da $\mathcal{T}^*$ durch Bildung aller endlichen Schnitte aus $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i)$ entsteht, ist $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{T}$. Andererseits gilt per Definition von $\mathcal{T}^*$, dass $f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}^*$ für alle $i \in I$ ist, d.h., alle $f_i : (X, \mathcal{T}^*) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ sind stetig. Aus (I$\mathcal{T}$1) folgt $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}^*$. Da die von einer Subbasis bestimmte Topologie eindeutig ist, charakterisiert (I$\mathcal{T}$2) die initiale Topologie.

❑

Das folgende Korollar erweist sich als praktisch bei der Betrachtung von Funktionen $f \in \mathcal{C}(X)$.

A.3.6 Korollar. *Sei X eine Menge und sei $f_i : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d)$, $i \in I$ eine Familie reeller Funktionen. Dann hat die initiale Topologie $\mathcal{T}$ auf X das Mengensystem*

$$\mathcal{V} := \{V(f_i, x, \varepsilon) \mid f_i : X \to \mathbb{R}, x \in X, \varepsilon > 0\}$$

mit

$$V(f_i, x, \varepsilon) = \{y \in X \mid |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}$$

als Subbasis.

Beweis. Nach Satz A.3.5 ist $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_d)$ eine Subbasis der Initial-Topologie. $\mathcal{T}_d$ enthält alle offenen Intervalle, also ist sicher $\tau(\mathcal{V}) \subseteq \tau(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_d))$. Ist umgekehrt $U \in \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_d)$ und $x \in U$, so ist die Existenz eines $V(f_i, x, \varepsilon) \in \mathcal{V}$ zu zeigen, das $x \in V \subseteq U$ erfüllt. Da U die Form $U = f_i^{-1}(O)$ mit $i \in I$ hat und O offen in $\mathbb{R}$ ist, existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, sodass $(f_i(x) - \frac{\varepsilon_0}{2}, f_i(x) + \frac{\varepsilon_0}{2}) \subseteq O$ ist. Die Menge $V = V(f_i, x, \varepsilon_0)$ leistet nun das Gewünschte, also ist insgesamt $\tau(\mathcal{V}) = \tau(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_d))$. ❏

Anhang B

Ergänzungen zur Maßtheorie

B.1 Grundbegriffe

B.1.1 σ-Algebren und Erzeugendensysteme

B.1.1 Definition. Sei X eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Das Mengensystem $\mathfrak{A}$ heißt *Algebra* auf oder über X, wenn $\mathfrak{A}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

($\mathfrak{A}$1) $X \in \mathfrak{A}$.

($\mathfrak{A}$2) Ist $A \in \mathfrak{A}$, so folgt $A^c \in \mathfrak{A}$.

($\mathfrak{A}$3) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathfrak{A}$, so ist auch $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{A}$.

Ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra über X, die zusätzlich die Eigenschaft

($\mathfrak{A}3\sigma$) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}$, dann gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

erfüllt, so heißt $\mathfrak{A}$ eine *σ-Algebra* auf X, das Paar $(X, \mathfrak{A})$ heißt *Messraum* und die Elemente von $\mathfrak{A}$ heißen *meßbare* Mengen.

B.1.2 Definition. Seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(X', \mathfrak{A}')$ Messräume. Ist $f : (X, \mathfrak{A}) \to (X', \mathfrak{A}')$ eine Abbildung, so heißt f *meßbar* oder genauer $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-*meßbar*, wenn das Urbild meßbarer Mengen wieder meßbar ist, wenn also

$$f^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}$$

gilt.

B.1.3 Definition. Sei X eine Menge, bezeichne $\mathbb{A}(X)$ die Menge aller σ-Algebren über X und seien $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathbb{A}(X)$. Analog zu den Definitionen in der Topologie nennt man $\mathfrak{A}_1$ *gröber* als $\mathfrak{A}_2$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ *feiner* als $\mathfrak{A}_1$, wenn $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$ gilt. Offensichtlich ist $(\mathbb{A}(X), \subseteq)$ eine geordnete Menge.

Auf Grund der starken Ähnlichkeit zwischen σ-Algebren und Topologien sind die folgenden Aussagen nicht überraschend.

B.1.4 Lemma. *Sei X eine Menge. Dann gilt*

(i) *Das kleinste Element in $\mathbb{A}(X)$ ist $\{\varnothing, X\}$, das größte Element ist $\mathcal{P}(X)$.*

(ii) *Ist $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf X, so ist $\bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ eine σ-Algebra auf X und es gilt*

$$\inf_{i\in I}\mathfrak{A}_i = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i.$$

(iii) *Ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so ist*

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcap \big\{\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X) \;\big|\; \mathcal{C} \subseteq \mathfrak{A}'\big\}$$

die gröbste σ-Algebra, die $\mathcal{C}$ enthält. Ist $\mathcal{C}$ selbst eine σ-Algebra, dann gilt $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Man nennt in diesem Zusammenhang $\sigma(\mathcal{C})$ die von $\mathcal{C}$ erzeugte σ-Algebra *und $\mathcal{C}$ ein* Erzeugendensystem von $\sigma(\mathcal{C})$.

(iv) *Ist $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von σ-Algebren auf X, so ist*

$$\mathfrak{A} := \sup_{i\in I}\mathfrak{A}_i : \bigcap \big\{\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X) \;\big|\; \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}',\, i \in I\big\}$$

und $\bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}$.

Beweis.

(i) Da für jede σ-Algebra $\mathfrak{A}$ auf X sicher $\varnothing$, $X \in \mathfrak{A}$ gilt, ist $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(ii) Da alle $\mathfrak{A}_i$ abgeschlossen gegenüber der Bildung von Komplementen und beliebiger Vereinigungen sind und weiters $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathfrak{A}_i$ für alle $i \in I$ gilt, ist $\mathfrak{A} := \bigcap_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ eine σ-Algebra auf X, außerdem gilt $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_i$ für alle $i \in I$. Ist $\mathfrak{A}'$ eine weitere σ-Algebra, die gröber ist als alle $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, so gilt $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, also ist $\mathfrak{A}$ die größte untere Schranke der Familie $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$.

(iii) Sicher gilt $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Nach Punkt (ii) ist $\sigma(\mathcal{C})$ eine σ-Algebra auf X und ist weiters $\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X)$ mit $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{A}'$, so ist $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{A}'$, also ist $\sigma(\mathcal{C})$ die gröbste σ-Algebra, die $\mathcal{C}$ enthält. Die zweite Aussage ist klar.

(iv) Wegen Punkt (ii) ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf X und offensichtlich ist $\mathfrak{A}$ das Supremum der Familie $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$.
Sei $\mathcal{C} := \bigcup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{A}^* := \sigma(\mathcal{C})$. Dann gilt $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}^*$ für alle $i \in I$, also ist $\mathfrak{A} = \bigcap \big\{\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X) \;\big|\; \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}',\, i \in I\big\} \subseteq \mathfrak{A}^*$. Sei umgekehrt $\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X)$ so, dass für alle $i \in I$ die Inklusion $\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}'$ gilt. Dann ist $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathfrak{A}'$ und $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}') = \mathfrak{A}'$. Daher ist

$$\mathfrak{A}^* = \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \bigcap \big\{\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X) \;\big|\; \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}',\, i \in I\big\} = \mathfrak{A}$$

und insgesamt $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$.

❑

Analog zur Initialtopologie (siehe Satz A.3.5) kann auf einer Menge X eine eindeutige minimale σ-Algebra konstruiert werden, bezüglich der eine Familie von Abbildungen $f_i : X \to (Y_i, \mathfrak{A}_i)$ von X in Messräumr $(Y_i, \mathfrak{A}_i)$, $i \in I$, messbar sind.

B.1.5 Satz. *Sei X eine Menge, seien $(Y_i, \mathfrak{A}_i)$ Messräume und $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, Abbildungen. Dann existiert genau eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ auf X mit der Eigenschaft*

(I$\mathfrak{A}$1) *$\mathfrak{A}$ ist die gröbste σ-Algebra auf X, sodass alle Abbildungen*

$$f_i : (X, \mathfrak{A}) \to (Y_i, \mathfrak{A}_i),\ i \in I$$

$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_i$-messbar sind.

Diese σ-Algebra heißt initiale σ-Algebra *bezügliche der Familie $(f_i)_{i\in I}$. Für sie gilt:*

(I$\mathfrak{A}$2) *$\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Sei $\mathbb{A}_{f_i}(X) := \{\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}(X) \mid \forall i \in I : f_i : (X, \mathfrak{A}') \to (Y_i, \mathfrak{A}_i) \text{ messbar}\}$. Wegen $\mathcal{P}(X) \in \mathbb{A}_{f_i}(X)$ ist $\mathbb{A}_{f_i}(X) \neq \varnothing$, also definiert

$$\mathfrak{A} := \bigcap_{\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}_{f_i}(X)} \mathfrak{A}'$$

nach Lemma B.1.4 (ii) eine σ-Algebra auf X. Ist $i \in I$ beliebig, so gilt für alle $\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}_{f_i}(X)$ die Inklusion $f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \subseteq \mathfrak{A}'$, also ist

$$f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{A}' \in \mathbb{A}_{f_i}(X)} \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$$

und alle $f_i : (X, \mathfrak{A}) \to (Y_i, \mathfrak{A}_i)$ sind messbar. Nach Lemma B.1.4 (ii) ist $\mathfrak{A}$ die gröbste σ-Algebra mit dieser Eigenschaft, also erfüllt $\mathfrak{A}$ die Eigenschaft (I$\mathfrak{A}$1). Ist $\tilde{\mathfrak{A}}$ eine weitere σ-Algebra mit der Eigenschaft (I$\mathfrak{A}$1), so sind alle $f_i : (X, \tilde{\mathfrak{A}}) \to (Y_i, \mathfrak{A}_i)$ messbar und da $\mathfrak{A}$ (I$\mathfrak{A}$1) erfüllt ist $\mathfrak{A} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$. Die umgekehrte Inklusion sieht man genauso und $\mathfrak{A}$ ist die einzige σ-Algebra mit (I$\mathfrak{A}$1).
Sei $\mathfrak{A}^* := \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\right)$ und $\mathfrak{A}$ die Initial-σ-Algebra auf X. Es sind alle $f_i : (X, \mathfrak{A}) \to (Y_i, \mathfrak{A}_i)$ messbar, also $f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \subseteq \mathfrak{A}$ für alle $i \in I$ und damit auch $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \subseteq A$. Es gilt also

$$\mathfrak{A}^* = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)\right) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}.$$

Umgekehrt gilt nach Definition von $\mathfrak{A}^*$ sicher $f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i) \subseteq \mathfrak{A}^*$. Das heißt, dass alle $f_i : (X, \mathfrak{A}^*) \to (Y_i, \mathfrak{A}_i)$ messbar sind. Da $\mathfrak{A}$ die Inital-σ-Algebra auf X ist, folgt dann aber $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^*$ und insgesamt $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$. Da die von $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathfrak{A}_i)$ erzeugte σ-Algebra eindeutig ist, charakterisiert (I$\mathfrak{A}$2) die Initial-σ-Algbra. ❑

Wird nur eine einzige Abbildung $f : X \to Y$ betrachtet, so ist das vollständige Urbild schon eine σ-Algebra.

B.1.6 Lemma. *Seien X, X' Mengen und sei $f : X \to X'$ eine Abbildung.*

(i) Ist $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra über X', so ist $\mathfrak{A} := f^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra über X und $\mathfrak{A}$ ist die gröbste σ-Algebra auf X, sodass $f : X \to X'$ messbar ist.

(ii) Ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra über X, so ist $\mathfrak{A}' := \left\{A' \subseteq X' \;\middle|\; f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\right\}$ eine σ-Algebra über X' und $\mathfrak{A}'$ ist die feinste σ-Algebra auf X', sodass $f : X \to X'$ messbar ist.

Beweis. (i) Es ist $X' \in \mathfrak{A}'$ und $f^{-1}(X') = X$, also $X \in \mathfrak{A}$ und es gilt ($\mathfrak{A}1$). Ist $A \in f^{-1}(\mathfrak{A}')$, dann existiert ein $A \in \mathfrak{A}$ so, dass $f^{-1}(A) = A'$ gilt. Mit $A \in \mathfrak{A}$ ist auch $A^c \in \mathfrak{A}$ und auf Grund der Operationstreue des Urbilds gilt $f^{-1}(A^c) = \left(f^{-1}(A)\right)^c = A'^c$. Also erfüllt $f^{-1}(\mathfrak{A})$ auch ($\mathfrak{A}2$). Ist $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $f^{-1}(\mathfrak{A})$, so existiert eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{A}$ mit $f^{-1}(A_n) = A'_n$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$. Wegen $f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(f^{-1}(A_n)\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n$ ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \in f^{-1}(\mathfrak{A})$ und $f^{-1}(\mathfrak{A})$ erfüllt ($\mathfrak{A}3\sigma$). Die Minimalitätseigenschaft von $f^{-1}(\mathfrak{A})$ ist klar nach Satz B.1.5.

(ii) Da $f^{-1}(Y) = X \in \mathfrak{A}$ gilt, ist $Y \in \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}'$ erfüllt ($\mathfrak{A}1$). Ist $A' \in \mathfrak{A}'$, dann gilt $f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}$ und damit $\left(f^{-1}(A')\right)^c = f^{-1}(A'^c) \in \mathfrak{A}$, also erfüllt $\mathfrak{A}'$ ($\mathfrak{A}2$). Sei $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathfrak{A}'$. Dann ist $f^{-1}(A'_n) \in \mathfrak{A}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und daher auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A'_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n\right) \in \mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}'$ ist eine σ-Algebra über Y.

❑

B.1.7 Lemma. *Sei X eine Menge, $(X', \mathfrak{A}')$ ein Messraum, $\mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{A}'$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{A}'$ und $f : X \to (X', \mathfrak{A}')$ eine Abbildung. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{E}')$ ein Erzeugendensystem der σ-Algebra $f^{-1}(\mathfrak{A}')$, d.h. es gilt*

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E}')\right) = f^{-1}\left(\sigma(\mathcal{E}')\right).$$

Beweis. Aus $\mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{A}'$ folgt $f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A}')$. Nach Lemma B.1.6 Punkt (i) ist $f^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra, daher gilt

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E}')\right) \subseteq \sigma\left(f^{-1}(\mathfrak{A}')\right) = f^{-1}(\mathfrak{A}') = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')).$$

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen sei

$$\mathcal{C}' := \left\{C' \subseteq X' \;\middle|\; f^{-1}(C') \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E}')\right)\right\}.$$

Lemma B.1.6 Punkt (ii) zeigt, dass $\mathcal{C}'$ eine σ-Algebra über X' ist und offensichtlich gilt $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{C}'$. Daher ist $\sigma(\mathcal{E}') = \mathfrak{A}' \subseteq \sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{C}'$ und nach Definition von $\mathcal{C}'$ gilt

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')) = f^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}')).$$

❑

B.1.8 Lemma. *Seien $(A, \mathfrak{A})$ und $(X', \mathfrak{A}')$ Messräume, sei $\sigma(\mathcal{E}') = \mathfrak{A}'$ und $f : (X, \mathfrak{A}) \to (X', \mathfrak{A}')$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar, wenn $f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathfrak{A}$ gilt.*

Beweis. Ist f meßbar, so folgt aus $\mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{A}'$, dass $f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq f^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}$ ist. Gelte umgekehrt $f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathfrak{A}$. Dann ist nach Lemma B.1.7

$$f^{-1}(\mathfrak{A}') = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}')) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) \subseteq \sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}$$

erfüllt. ❑

Anhang C

Verschiedene benötigte Aussagen

C.1

C.1.1 Lemma. *Sei f absolut stetig auf dem Intervall $[a, b]$, sei μ ein beschränktes Maß auf $[a, b]$ und sei $\Phi_\mu(t) := \mu([a, t))$ mit $\Phi_\mu(a) = 0$. Dann gilt folgende Formel für die partielle Integration:*

$$\int_{[a,b]} f(t)\, \mu(dt) = f(b)\Phi_\mu(b+) - \int_a^b f'(t)\Phi_\mu(t)\, dt \tag{C.1}$$

Beweis. Zunächst bemerke man, dass

$$\Phi_\mu(t) = \int_{[a,t)} \mu(ds) = \int_{[a,b]} \mathbf{1}_{\{[a,t)\}}(s)\, \mu(ds)$$

gilt. Daher lässt sich die linke Seite von C.1 in der Form

$$\int_a^b f'(t)\Phi_\mu(t)\, dt = \int_a^b \int_{[a,b]} f'(t)\mathbf{1}_{\{[a,t)\}}(s)\, \mu(ds)\, dt$$

schreiben. Wendet man darauf den Satz von Fubini an, so erhält man

$$\int_a^b \int_{[a,b]} f'(t)\mathbf{1}_{\{[a,t)\}}(s)\, \mu(ds)\, dt = \int_{[a,b]} \int_a^b f'(t)\mathbf{1}_{\{(s,b]\}}(t)\, dt\, \mu(ds) =$$
$$= \int_{[a,b]} \int_s^b f'(t)\, dt\, \mu(ds),$$

wobei benutzt wurde, dass $\mathbf{1}_{\{[a,t)\}}(s) = 1$ genau dann gilt, wenn $\mathbf{1}_{\{(s,b]\}}(t) = 1$ ist. Auswertung des inneren Integrals nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt

$$\int_a^b f'(t)\Phi_\mu(t)\, dt = \int_{[a,b]} \int_s^b f'(t)\, dt\, \mu(ds) = \int_{[a,b]} f(b) - f(s)\, \mu(ds) =$$
$$= f(b)\Phi_\mu(b) - \int_a^b f(t)\, \mu(dt).$$

❑

C.1.2 Lemma. *Sei X eine Menge, sei $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ eine Mengenfunktion mit $m(\varnothing) = 0$ und bezeichne $\mathfrak{M}_m$ die Menge aller bezüglich m Carathéodory-messbaren Mengen, also*

$$\mathfrak{M}_m = \{A \subseteq X \bigm| \forall\, E \subseteq X : m(E \cap A) + m(E \setminus A) = m(E)\}.$$

Dann gilt

1.) $\mathfrak{M}_m$ ist eine Algebra und m ist additiv auf $\mathfrak{M}_m$.

2.) Für jede Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{M}_m$ gilt für alle $E \subseteq X$:

$$m\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{i=1}^{n} m(E \cap A_k) \tag{C.2}$$

und

$$m\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E \cap A_k) + \lim_{n\to\infty} m\Big(E \cap \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \tag{C.3}$$

3.) Ist m ein äußeres Maß auf X, dann ist $\mathfrak{M}_m$ eine σ-Algebra und m ist abzählbar-additiv auf $\mathfrak{M}_m$. Außerdem ist das Maß m vollständig auf $\mathfrak{M}_m$.

Beweis. 1.) Nach Definition von $\mathfrak{M}_m$ gilt offensichtlich $\varnothing \in \mathfrak{M}_m$. Ist $A \in \mathfrak{M}_m$, so gilt

$$\begin{aligned} m(E \cap A^c) + m(E \setminus A^c) &= m(E \cap (X \setminus A)) + m(E \setminus (X \setminus A)) = \\ &= m(E \setminus A) + m(E \cap A) = m(E), \end{aligned}$$

also ist $\mathfrak{M}_m$ abgeschlossen bezüglich der Bildung von Komplementen. Seien A_1, $A_2 \in \mathfrak{M}_m$ und $E \subseteq X$. Aus der Carathéodory-Messbarkeit von A_1 und A_2 ergibt sich

$$\begin{aligned} m(E) &= m(E \cap A_1) + m(E \setminus A_1) = \\ &= m(E \cap A_1) + m((E \setminus A_1) \cap A_2) + m((E \setminus A_1) \setminus A_2) = \\ &= m(E \cap A_1) + m((E \setminus A_1) \cap A_2) + m(E \setminus (A_1 \cup A_2)). \end{aligned} \tag{C.4}$$

Schreibt man $E \cap A_1 = E \cap (A_1 \cap A_2) \cap A_1$ und berücksichtigt die Carathéodory-Messbarkeit von A_1, so gilt

$$\begin{aligned} m(E \cap A_1) &+ m((E \setminus A_1) \cap A_2) = \\ &= m(E \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + m((E \setminus A_1) \cap A_2) = \\ &= m((E \cap (A_1 \cup A_2)) \cap A_1) + m((E \cap (A_1 \cup A_2)) \setminus A_1) = \\ &= m(E \cap (A_1 \cup A_2)). \end{aligned} \tag{C.5}$$

Setzt man (C.5) in (C.4) ein, so sieht man mit

$$m(E) = m(E \cap (A_1 \cup A_2)) + m(E \setminus (A_1 \cup A_2))$$

dass $\mathfrak{M}_m$ eine Algebra ist. Sind A_1 und A_2 disjunkte Mengen aus $\mathfrak{M}_m$, so gilt für $E := X$ in (C.5)

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2),$$

also ist m auf $\mathfrak{M}_m$ wie behauptet additiv.

2.) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{M}_m$ und setze

$$S_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \text{und} \quad R_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Dann ist $S_n \in \mathfrak{M}_m$ und (C.5) ergibt

$$m(E \cap S_n) = m(E \cap A_n) + m(E \cap S_{n-1}).$$

Per Induktion gilt also

$$m\Big(E \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} m(E \cap A_k),$$

was (C.2) zeigt. Offensichtlich gelten die Beziehungen $R_1 \cap S_{n-1} = S_{n-1}$ und $R_1 \setminus S_{n-1} = R_n$. Also folgt aus (C.2) und $S_n \in \mathfrak{M}_m$

$$\begin{aligned} m(E \cap R_1) &= m((E \cap R_1) \cap S_{n-1}) + m((E \cap R_1) \setminus S_{n-1}) = \\ &= m(E \cap S_{n-1}) + m(E \cap R_n) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} m(E \cap A_k) + m(E \cap R_n). \end{aligned} \tag{C.6}$$

Wegen $R_n \setminus A_n = R_{n+1}$ und $A_n \in \mathfrak{M}_m$ gilt

$$\begin{aligned} m(E \cap R_n) &= m((E \cap R_n) \cap A_n) + m((E \cap R_n) \setminus A_n) = \\ &= m(E \cap A_n) + m(E \cap R_{n+1}), \end{aligned}$$

also ist die Folge $(m(E \cap R_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und der Grenzübergang $n \to \infty$ in (C.6) ergibt (C.3).

3.) Sei nun $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ein äußeres Maß, also σ-subadditiv und monoton mit $m(\varnothing) = 0$ und sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein paarweise disjunkte Folge in $\mathfrak{M}_m$. Setze $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ und sei $E \subseteq X$ beliebig. Wegen (C.3) gilt

$$m(E \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap A_k) + \lim_{n\to\infty} m\Big(E \cap \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap A_k),$$

woraus aus der σ-Subadditivität von m

$$m(E \cap A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E \cap A_k) \tag{C.7}$$

folgt. (C.2) zeigt

$$m(E) = m(E \setminus S_n) + m(E \setminus S_n) \geq \sum_{k=1}^{n} m(E \cap A_k) + m(E \setminus A),$$

also gilt nach (C.7)

$$m(E) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(E \cap A_k) + m(E \setminus A) = m(E \cap A) + m(E \setminus A).$$

Andererseits ist m σ-subadditiv, also ist insgesamt $m(E) = m(E\cap A)+m(E\setminus A)$ und $\mathfrak{M}_m$ eine σ-Algebra. Die σ-Additivität von m sieht man direkt aus (C.7) durch die Wahl von $E := X$.
Um noch zu zeigen, dass das Maß m vollständig auf $\mathfrak{M}_m$ ist, sei $A \in \mathfrak{M}_m$ mit $m(A) = 0$. Dann gilt für alle $E \subseteq X$ wegen $0 \leq m(E \cap A) \leq m(A) = 0$ die Beziehung $m(A \cap E) = 0$. Nachdem außerdem $m(E \setminus A) \leq m(E) \leq m(E \setminus A) + m(A) = m(E \setminus A)$ und damit $m(E \setminus A) = M(E)$ gilt, hat man insgesamt erhalten, dass für jede Menge $E \subseteq X$

$$m(E \cap A) + m(E \setminus A) = m(E)$$

gilt.

❑

C.1.3 Satz. *Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein metrischer Raum und sei μ ein nicht negatives, σ-additives Maß auf $\mathfrak{B}(X)$. Dann existiert für jede Borelmenge $B \subseteq X$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge O_ε und eine abgeschlossene Menge F_ε so, dass $F_\varepsilon \subseteq B \subseteq O_\varepsilon$ und $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $\mathfrak{A}$ die Menge all jener Borelmengen $A \in \mathfrak{B}(X)$, für die eine offene Menge O_ε und eine abgeschlossene Menge F_ε mit $F_\varepsilon \subseteq A \subseteq O_\varepsilon$ und $\mu(O_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ existieren. Es wird gezeigt, dass $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra ist, die die abgeschlossenen Teilmengen von X enthält. Da die abgeschlossenen Mengen ein Erzeugendensystem der Borel'schen σ-Algebra sind, ist der Beweis damit dann abgeschlossen.
Sei $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge und setze $F_\varepsilon := A$. Für alle $\delta > 0$ ist

$$A_\delta := \bigcup_{x\in A} \{y \in X \mid d(x, y) < \delta\}$$

eine offene Menge mit $A \subseteq A_\delta$. Betrachtet man den Grenzübergang $\delta \to 0$, so folgt aus $\mu(A_\delta) \to \mu(A)$, dass ein $\delta_0 > 0$ existiert, so dass $\mu(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(A_\delta \setminus A) < \varepsilon$ ist. Also ist $A \in \mathfrak{A}$.
Offensichtlich ist $X \in \mathfrak{A}$. Ist $A \in \mathfrak{A}$, so existieren F_ε abgeschlossen und O_ε offen, sodass $F_\varepsilon \subseteq A \subseteq O_\varepsilon$ und $\mu(O_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ gilt. Damit ist $F_\varepsilon^c \supseteq A \supseteq O_\varepsilon^c$ und $\mu(F_\varepsilon^c \setminus O_\varepsilon^c) = \mu(O_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$, das heißt, $\mathfrak{A}$ ist abgeschlossen bezüglich der Bildung von Komplementen. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{A}$ und $j \in \mathbb{N}$, so existieren F_j abgeschlossen und O_j offen, sodass $F_j \subseteq A_j \subseteq O_j$ und $\mu(O_j \setminus F_j) < \varepsilon 2^{-j}$ gilt. Weiters ist $O := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} O_j$ offen, für alle $k \in \mathbb{N}$ ist die Menge $Z_k := \bigcup_{j=1}^{k} F_j$ abgeschlossen und es gilt

$$Z_k \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \subseteq O \quad \text{und} \quad \mu\Bigg(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (O_j \setminus Z_j)\Bigg) < \sum_{j\in\mathbb{N}} \varepsilon 2^{-j} = \varepsilon.$$

Da $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge und μ abzählbar additiv ist folgt $\mu(Z_k) \to \mu(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j)$ für $k \to \infty$ und damit ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra. ❑

C.1.4 Lemma (Satz von Dini)**.** *Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein kompakter Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf X, die für alle $x \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ monoton fallend ist, d.h. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ erfüllt. Existiert eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$, dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion f.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und definiere $U_n := \{f - f_n < \varepsilon\}$, $g_n := f - f_n$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge U_n als Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Funktion g offen. Da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend gegen f konvergiert, konvergiert die Folge g_n monoton fallend gegen die Nullfunktion. Also ist die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f, also gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X.$$

Da X kompakt ist existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $U_N = X$ ist. Das heißt, es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $x \in X$ und alle $n > N$ dann $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$ ist, also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f. ❑

C.1.5 Lemma. *Es gelten folgende Aussagen:*

1.) Konvergiert eine Folge wachsender Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegen eine wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an allen Punkten einer in $\mathbb{R}$ Dichten Menge $\mathcal{D}$, dann konvergiert sie an allen Stetigkeitspunkten von f gegen f.

2.) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig beschränkte Folge monoton wachsender Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$, so enthält $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Teilfolge.

Beweis.

1.) Sei $\varepsilon > 0$ und sei x_0 ein Stetigkeitspunkt von f. Dann existieren auf Grund der Dichtheit von $\mathcal{D}$ zwei Punkte α, $\beta \in \mathcal{D}$ mit $x_0 \in [\alpha, \beta]$ so, dass $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ für alle s, $t \in [\alpha, \beta]$. Da α, $\beta \in \mathcal{D}$ existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|f(\alpha) - f_n(\alpha)| < \varepsilon$ und $|f(\beta) - f_n(\beta)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$ gilt. Weiters sind f_n, f monoton wachsend, also hat man auch die Beziehungen

$$f_n(\alpha) \leq f_n(x_0) \leq f_n(\beta) \quad \text{und} \quad f(\alpha) \leq f(x_0) \leq f(\beta)$$

aus denen

$$|f_n(\beta) - f_n(x_0)| \leq |f_n(\beta) - f_n(\alpha)| \quad \text{und} \quad |f(\beta) - f(x_0)| \leq |f(\beta) - f(\alpha)|$$

folgt. Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
|f(x_0) - f_n(x_0)| &= |f(x_0) - f_n(\beta) - (f_n(x_0) - f_n(\beta))| \leq \\
&\leq |f(x_0) - f_n(\beta)| + |f_n(x_0) - f_n(\beta)| \leq |f(x_0) - f(\beta)| + \\
&+ |f_n(\beta) - f_n(\alpha)| \leq |f(x_0) - f(\beta)| + |f(\beta) - f_n(\beta)| + |f_n(\beta) - f(\beta)| + \\
&+ |f(\beta) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f_n(\alpha)| < 5\varepsilon
\end{aligned}$$

2.) Sei $\mathcal{D}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\mathcal{D} = \mathbb{Q}$. Sei $q_1 \in \mathbb{Q}$. Dann ist die Folge $(f_n(q_1))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $\mathbb{R}$, also existiert eine konvergente Teilfolge $(f_n^{11}(q_1))_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n(q_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Ist $q_2 \in \mathbb{Q}$, so ist auch die Folge $(f_n(q_2))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und daher existiert eine konvergente Teilfolge $(f_n^{12}(q_2))_{n\in\mathbb{N}}$. Nun ist aber auch $(f_n^{12}(q_1))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, also findet man wieder eine konvergente Teilfolge $(f_n^{21}(q_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Fährt man iterativ so fort, so erhält man, dass die Diagonalfolge $(f_n^{nn}(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auf allen $q_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ und damit auf ganz $\mathbb{Q}$ konvergiert. Ruft man sich in Erinnerung, dass eine monoton wachsende Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ für alle $x\in\mathbb{R}$ links- und rechtsseitige Grenzwerte

$$f(s-)=\sup_{t<s} f(t) \qquad \text{und} \qquad f(s+)=\inf_{t>s} f(t)$$

existieren, so wird klar, dass die Menge $\mathcal{U}$ der Unstetigkeitsstellen der Funktion f höchstens abzählbar sein kann, denn an jeder Sprungstelle existiert eine rationale Zahl q, die

$$f(s-)<q<f(s+)$$

erfüllt. Somit kann man Punkt (1) anwenden und erhält, dass für alle $x\notin\mathcal{U}$ die Folge $(f_n^{nn}(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert. Nun wählt man aus $(f_n^{nn}(q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge aus, die für alle x in der höchstens abzählbaren Menge $\mathcal{U}$ konvergiert.

❑

Literaturverzeichnis

[1] Alexander Danilowitsch Alexandrow
Additive set functions in abstract spaces, Mat. Sbornik 1940, V.8(50)

[2] Vladimir I. Bogachev
Measure Theory 1, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007

[3] Vladimir I. Bogachev
Measure Theory 2, Springer-Verlag erlin Heidelberg 2007

[4] Percy John Daniell
A general form of the integral, Ann. Math. (2). 1917-1918, V.19

[5] Percy John Daniell
Integrals in an infinite number of dimensions, Ann. Math. (2). 1918, V.20

[6] Ryszard Engelking
General Topology, Revised and completed edition, Helderman Verlag 1989

[7] Walter Rudin
Real and Complex Analysis, 3rd Edition, McGraw-Hill 1987

[8] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck, Martin Blümlinger
Funktionalanalysis, 2015

[9] Harald Woracek
Topologie, 2003