Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Nicht-erneuerbare Ressourcen - Abbau, Produktion, Konsum und Preisentwicklung in Modellen mit endogenem technologischem Wachstum

Ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz

durch
Stefan Ratheyser, B.Sc.
Sassmannstraße 232
3107 St. Pölten

(Ort, Datum) (Unterschrift)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**

2 Literaturüberblick **5**

2.1 Das Standard-Hotelling-Modell 5

2.2 Das DHSS-Modell 7

2.3 Das um endogenes Wachstum erweiterte Hotelling-Modell 11

3 Das Modell von Stürmer und Schwerhoff **16**

3.1 Das Modell 17

3.1.1 Die Kostenfunktionen 17

3.1.2 Das Wachstumsmodell 20

3.2 Ergebnisse 23

3.2.1 Fortführende Analyse 27

3.3 Diskussion 33

4 Das Modell von Tahvonen und Salo **35**

4.1 Das Modell 35

4.2 Ergebnisse 37

4.2.1 Der Fall $\mu = 0$ 40

4.2.2 Der Fall $\mu > 0$ 55

4.2.3 Ökonomische Folgerungen 59

4.3 Diskussion 61

5 Konklusion **62**

6 Anhang **63**

6.1 Beweise zu Kapitel 2 63

6.2 Beweise zu Stürmer und Schwerhoff (2012) 65

6.3 Beweise zu Tahvonen und Salo (2001) 73

Literatur **81**

1 Einführung

Nicht-erneuerbare Ressourcen sind schon lange ein vieldiskutiertes Thema und spielen in der Wirtschaft eine sehr wichtige Rolle. Diese Arbeit beschäftigt sich mit mathematischen Modellen, die nicht-erneuerbare Ressourcen als Grundlage haben. Alle in dieser Arbeit betrachteten Modelle nehmen eine(n) zentrale(n) Planer(in) an, die/der den Gesamtoutput maximieren möchte. Speziell wird der Frage nachgegangen welche Modelle die bisherige Entwicklung entscheidender Größen im Zusammenhang mit nicht-erneuerbaren Ressourcen gut beschreiben können. Diese wichtigen Größen sind vor allem der Verlauf des Abbaus, die Produktion, der Konsum und der Preis.

Betrachtet man den Abbau der meisten nicht-erneuerbaren Ressourcen, sieht man, dass dieser im Laufe der Zeit einen klaren Anstieg vorzuweisen hat, was eng mit einem, ebenfalls zu beobachtenden, Anstieg der Produktion verbunden ist.

Der Preis der meisten nicht-erneuerbaren Ressourcen weist ebenfalls einen steigenden Trend auf. Betrachtet man jedoch den Realpreis, kann bei vielen ein konstantes Preisniveau vermutet werden.

Wir wollen diese Behauptungen nun mit einer Grafik anschaulich machen. In den Abbildungen 1 und 2 aus dem Paper von Stürmer und Schwerhoff (2012) kann man den bisherigen Verlauf von Primärproduktion und Preisniveau von nicht-erneuerbaren Ressourcen erkennen. Als Primärproduktion versteht man jegliche Art der Gewinnung von nicht-erneuerbaren Ressourcen aus einer natürlichen Quelle bis zu einer verwendbaren Form.

In Abbildung 1 kann man gut erkennen, dass sowohl das weltweite BIP, als auch die Primärproduktion aller angeführten nicht-erneuerbarer Ressourcen im Laufe der Zeit ansteigt.

Betrachtet man Abbildung 2, liegt die Vermutung nahe, dass die Realpreise der hier betrachteten nicht-erneuerbaren Ressourcen im Laufe der Zeit auf einem konstanten Niveau bleiben.

Diese Aussagen über das BIP, die Primärproduktion und die Preise der nicht-erneuerbaren Ressourcen können auch mittels statistischer Tests bestätigt werden (siehe dazu Stürmer und Schwerhoff (2012)).

Die wichtigste Frage, im Zuge dieser Arbeit ist, ob es möglich ist, dass diese Entwicklungen noch lange so weitergeht, oder ob bald der Punkt gekommen ist, an dem der Abbau wieder sinken wird? Wenn das passieren sollte, welche Auswirkungen wird das auf die Produktion und das Preisniveau haben?

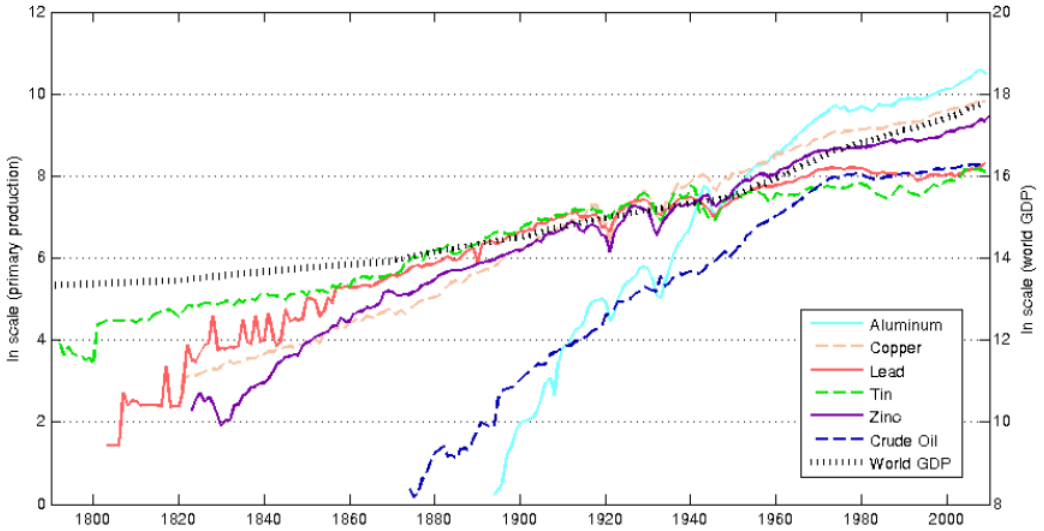


Abbildung 1: Primärproduktion und weltweites BIP in logarithmischer Darstellung
Quelle: Stürmer und Schwerhoff (2012, S. 25)

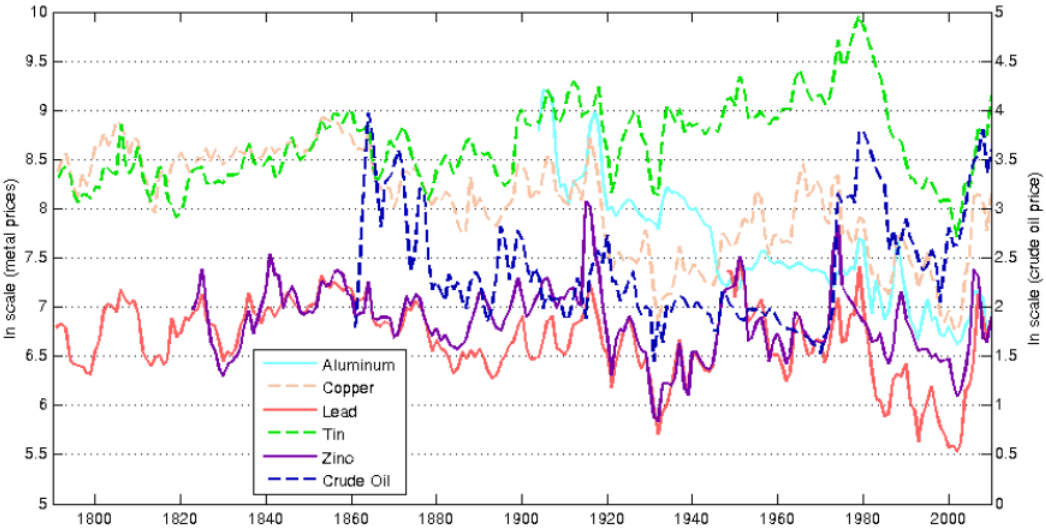


Abbildung 2: Preise verschiedener nicht-erneuerbarar Ressourcen in 1980-82 US-Dollar in logarithmischer Darstellung
Quelle: Stürmer und Schwerhoff (2012, S. 24)

Ziel ist es daher, Modelle zu finden, die den bisherigen Verlauf der Wirtschaft, nicht-erneuerbare Ressourcen betreffend, relativ gut beschreiben und zu sehen, was diese für die Zukunft voraussagen. Dabei spielt endogenes technologisches Wachstum eine sehr wichtige Rolle und der Fokus wird auf Modelle gelegt in denen ein solches angenommen wird.

Zunächst wollen wir im Kapitel 2 einen kurzen Überblick über die bisherigen Modelle in der Literatur zum Thema nicht-erneuerbare Ressourcen bekommen. Dieses Kapitel basiert auf dem Paper von Groth (2007). Wir werden zunächst das Standard-Hotelling-Modell betrachten und dieses zuerst um exogenes und schließlich um endogenes technologisches Wachstum erweitern. Wir werden sehen, dass die meisten Modelle in dieser Sparte einen monoton fallenden Abbau der Ressource und einen ansteigenden Ressourcenpreis voraussagen.
In den darauffolgenden Kapiteln widmen wir uns zwei Modellen, deren optimale Lösungspfade keine monoton steigenden Preise und keinen monoton fallenden Abbau der Ressource voraussagen. Dies ist einerseits das Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012) und andererseits das Modell von Tahvonen und Salo (2001).
Tahvonen und Salo ergänzen ein endogenes Wachstumsmodell für nicht-erneuerbare Ressourcen um eine erneuerbare Ressource. Das führt dazu, dass keine nicht-erneuerbaren Ressourcen benutzt werden beziehungsweise deren Nutzung gegen Null geht, wenn diese zu selten, und damit deren Abbau zu teuer wird. Dieses Modell wird in Kapitel 4 vorgestellt.

2 Literaturüberblick

Dieses Kapitel basiert auf dem Paper von Groth (2007). Beginnend mit dem Standard-Hotelling-Modell wollen wir bisherige Beiträge in der Literatur zum Thema nicht-erneuerbare Ressourcen vorstellen und besprechen. In all diesen Modellen wurde das Hotelling-Modell als Grundlage verwendet und jeweils abgeändert und ergänzt. Das wichtigste Modell für diese Arbeit ist das zum Schluss vorgestellte endogene Wachstumsmodell, da auch die Modelle der Kapitel 3 und 4 auf einem solchen basieren. Von einigen wichtigen angeführten Modellen werden in diesem Kapitel auch die Lösungen präsentiert.

2.1 Das Standard-Hotelling-Modell

Zuerst betrachten wir das Standard-Hotelling-Modell, dieses war das erste Modell, dass die Thematik nicht-erneuerbarer Ressourcen in einem kontrolltheoretischen Rahmen behandelte.

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} U(R) dt \tag{2.1}$$

$$\dot{S} = -R \tag{2.2}$$

$$\int_0^\infty R(t) \leq S_0 \tag{2.3}$$

Maximiert wird hier, wie in allen in dieser Arbeit vorgestellten Modellen, eine abdiskontierte Nutzenfunktion (U). Für diese wird, wie auch bei allen folgenden Modellen, eine isoelastische Nutzenfunktion verwendet. Diese lautet $U(R) = \frac{R^{1-\theta}-1}{1-\theta}$ und hängt positiv von der verwendeten Ressource (R) ab. Für den Parameter θ muss $0 < \theta < 1$ gelten. Ist θ nahe Null, bedeutet das eine fast lineare Entwicklung der Nutzenfunktion. Je größer θ ist, desto schneller nimmt der Grenznutzen bei steigendem Konsum ab. Gleichung (2.2) beschreibt, dass sich der noch vorhandene Ressourcenstock (S) um die abgebaute beziehungsweise benutzte Menge an Ressourcen verringert. Weiters muss natürlich $S \geq 0$ gelten, was äquivalent mit der angegebenen Bedingung (2.3) ist. Die Gesammtmenge an abgebauten Ressourcen darf den Anfangswert des Ressourcenstocks (S_0) nicht übersteigen. Diese Bedingung hat zur Folge, dass für die Ressourcen in jedem Fall $lim_{t\to\infty} R(t) = 0$

erfüllt sein muss. Abbaukosten werden in diesem Modell, wie auch in den folgenden Modellen dieses Kapitels, vernachlässigt.

Die Hamilton-Funktion dieses Modells lautet:

$$H = U(R) - \lambda R$$

Mittels dieser erhält man unter Anwendung des Pontryagischen Maximumprinzips:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial R} &= U'(R) - \lambda = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= R^{-\theta} \qquad (2.4) \\ \dot{\lambda} &= \lambda\rho - \frac{\partial H}{\partial S} \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} &= \rho \qquad (2.5) \end{aligned}$$

Eine große Bedeutung in der Kontrolltheorie wird bei ökonomischen Modellen den sogenannten "Balanced Growth Equilibria" (BGE) zugeschrieben. Diese sind definiert als ein Lösungspfad, bei dem die Wachstumsraten der Variablen $g_Z := \frac{\dot{Z}}{Z}$ konstant sind. Dabei können eine oder mehrere dieser auch negativ sein.
Nun wollen wir das BGEdes Hotelling-Modells untersuchen. Aus Gleichung (2.2) folgt:

$$g_S = \frac{\dot{S}}{S} = -\frac{R}{S} =: -u \qquad (2.6)$$

Die Konstante u beschreibt die Rate der Verringerung der Ressource. Klarerweise gilt $u \geq 0$. Aus (2.6) folgt, dass mit g_S auch $\frac{R}{S}$ konstant sein muss und somit deren Wachstumsraten übereinstimmen müssen $g_R = g_S = -u$.
Aus den Gleichungen (2.4) und (2.5) folgt $(g_S =)g_R = \frac{\dot{R}}{R} = -\frac{1}{\theta}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\frac{\rho}{\theta}$ und daraus $u = \frac{\rho}{\theta}$. Der Abbau der Ressource sinkt also im Laufe der Zeit mit der gleichen Rate wie der Ressourcenstock, diese lautet $u = \frac{\rho}{\theta}$.
Da aus (2.6) auch $u = \frac{R_0}{S_0}$ folgt, gilt für den Anfangswert des Ressourcenabbaus $R_0 = \frac{\rho}{\theta}S_0$. Daraus ergeben sich folgende Entwicklungen der Funktionen:

$$S(t) = S_0 e^{-\frac{\rho}{\theta}t} \tag{2.7}$$

$$R(t) = \frac{\rho}{\theta} S_0 e^{-\frac{\rho}{\theta}t} \lambda(t) = \frac{\rho}{\theta} S_0 e^{\rho t} \tag{2.8}$$

Um zu sehen, dass diese Lösung auch zulässig ist, muss man noch zeigen, dass die Gleichung (2.3) erfüllt ist. Man erhält:

$$\int_0^\infty R(t) = \int_0^\infty \frac{\rho}{\theta} S_0 e^{-\frac{\rho}{\theta}t} = S_0$$

Diese ist daher im Optimum sogar mit Gleichheit erfüllt.

Aus den Gleichungen (2.7) und (2.8) erkennt man, dass sowohl der Ressourcenstock, als auch der Abbau für jedes fixe $t \in \mathbb{R}$ größer als Null ist, für $t \to \infty$ jedoch gegen Null strebt.
Die Ableitung der Nutzenfunktion U'(R) entspricht, wie auch der Schattenpreis λ, dem Realpreis der Ressource. Diese beiden Größen müssen daher übereinstimmen (siehe dafür auch Gleichung (2.4)). Die Wachstumsrate des Realpreises ist daher wegen (2.5) gleich dem Abzinsfaktor ρ.

2.2 Das DHSS-Modell

Als nächstes wollen wir das DHSS-Modell (Dasgupta-Heal-Solow-Stiglitz-Modell) vorstellen. Dieses wird in Groth (2007) auf den Seiten 133-139 behandelt und basiert auf den Artikeln von Dasgupta und Heal (1974), Solow (1974) sowie Stiglitz (1974a, 1974b). In all diesen Papers wird ein Modell mit einem Produktionssektor betrachtet, welches wie folgt aussieht:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c) dt \tag{2.9}$$

$$\dot{K} = Y - C - \delta K \tag{2.10}$$

$$\dot{S} = -R \tag{2.11}$$

$$Y = (\alpha K^{\psi} + \beta L^{\psi} + \gamma R^{\psi})^{\frac{1}{\psi}} \qquad \alpha, \beta, \gamma > 0; \psi < 1 \tag{2.12}$$

$$L(t) = L_0 e^{nt} \Rightarrow g_L = n$$

$$\int_0^{\infty} R(t) \leq S_0$$

Als Nutzenfunktion wird wieder eine isoelastische Nutzenfunktion verwendet. Diese ist in diesem, und auch in den noch folgenden, Modellen jedoch vom pro-Kopf -Konsum (c) (und nicht mehr von der Ressource) abhängig ($U(c) = \frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}$). Die Veränderung des Kapitals (K) setzt sich aus der Produktion minus dem Konsum und dem Wertverlust des Kapitals zusammen. Es wird eine CES-Produktionsfunktion (Y) angenommen, die vom Kapital, von der Arbeitskraft (L), sowie von der nicht-erneuerbaren Ressource abhängt. Die Bevölkerung, die der Arbeitskraft entspricht, wächst mit der Rate n. Der gesamte Konsum ist das Produkt aus dem pro-Kopf-Konsum und der Bevölkerungsgröße ($C = cL$). Die anderen Gleichungen bzw. Variablen sind ident mit denen des Standard-Hotelling Modells. Betrachten wir nun die Entwicklung der Produktion, kommt es dabei stark auf den Parameter ψ an. Gilt $0 < \psi < 1$, so folgt:

$$lim_{R \to 0}(\alpha K^{\psi} + \beta L^{\psi} + \gamma R^{\psi})^{\frac{1}{\psi}} = (\alpha K^{\psi} + \beta L^{\psi})^{\frac{1}{\psi}}$$

Die Ressource ist in diesem Fall nicht essentiell für den Output. Es kann daher einen positiven Output geben, obwohl die nicht-erneuerbare Ressource nicht verwendet wird.
Als nächstes wollen wir den Fall $\psi < 0$ betrachten. Für den Output pro Einheit der Ressource gilt:

$$\frac{Y}{R} = \left(\alpha \left(\frac{K}{R} \right)^{\psi} + \beta \left(\frac{L}{R} \right)^{\psi} + \gamma \right)^{\frac{1}{\psi}}$$

Dieses Verhältnis strebt für $R \to 0$ gegen $\gamma^{\frac{1}{\psi}}$ und ist daher nach oben beschränkt. Weiters gilt $lim_{R \to 0} Y = lim_{R \to 0} \frac{Y}{R} R = 0$. Die Ressource ist daher essentiell. Gilt $R = 0$ kann also

kein positiver Output vorliegen.
Der jetzt noch zu betrachtende Fall ist $\psi = 0$. Für diesen Wert ist die obige Funktion nicht definiert, es kann jedoch gezeigt werden, dass die CES-Produktionsfunktion für $\psi \to 0$ gegen eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, also gegen $K^\alpha L^\beta R^\gamma$ strebt. In diesem Fall ist die Ressource essentiell, da $lim_{R\to 0} K^\alpha L^\beta R^\gamma = 0$ gilt. Jedoch ist der Output pro Einheit an Ressource $\frac{Y}{R} = K^\alpha L^\beta R^{\gamma-1}$ nicht beschränkt und strebt für $R \to 0$ gegen Unendlich. Hier ist die Frage ob ein steigender Output beziehungsweise Konsum möglich ist daher nicht so einfach zu beantworten.

Im nächsten Modell werden wir uns genau dieser Frage widmen. Außerdem werden wir das Modell um exogenes technologisches Wachstum erweitern, die neue Produktionsfunktion lautet also $AK^\alpha L^\beta R^\gamma$ mit $A(t) = A_0 e^{\tau t}$. Man beachte, dass man die Ergebnisse auch für das Modell ohne das exogenes Wachstum ablesen kann, indem man τ gleich Null setzt. Dieses Modell, das unter anderem im Paper von Solow (1974) sowie von Stiglitz (1974a, 1974b) untersucht wurde, sieht wie folgt aus:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c) dt \tag{2.13}$$

$$\dot{K} = Y - C - \delta K \tag{2.14}$$

$$\dot{S} = -R \tag{2.15}$$

$$Y = AK^\alpha (L)^\beta R^\gamma \tag{2.16}$$

$$L(t) = L_0 e^{nt} \Rightarrow g_L = n$$

$$A(t) = A_0 e^{\tau t} \Rightarrow g_A = \tau$$

$$\int_0^\infty R(t) \leq S_0$$

Proposition 1. *Im BGE des obigen Modells gilt:*

$$g_R = g_S = \frac{(1-\theta)\tau + [(1-\alpha-\beta)\theta+\beta]n - (1-\alpha)\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta} \tag{6.1}$$

$$g_C = g_Y = g_K = \frac{\tau + (\beta+\theta\gamma)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta} \tag{6.2}$$

$$g_c = \frac{\tau + (\alpha+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta} \tag{6.3}$$

$$g_\lambda = -\theta \cdot \frac{\tau + (\alpha+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta} \tag{6.4}$$

$$g_\phi = \rho \tag{6.5}$$

Beweis. Siehe Anhang 6.1 □

Als Minimalvoraussetzung für die Parameter, nehmen wir $1-\alpha-\gamma+\gamma\theta > 0$ an. Der Nenner aller Wachstumsraten ist daher positiv.
Betrachten wir zunächst die Wachstumsrate des Abbaus der Ressource. Diese ist positiv abhängig vom technologischen Fortschritt und vom Bevölkerungswachstum. Ein negativer Zusammenhang besteht zur Diskontierungsrate des Nutzens (ρ).
Als nächstes wollen wir die Wachstumsrate der Produktion (g_Y) betrachten. Diese ist positiv vom Parameter τ, welcher das technologische Wachstum beschreibt, und vom Bevölkerungswachstum (n) abhängig. Eine negative Korrelation besteht mit dem Abzinsfaktor ρ. Die Wachstumsrate der Produktion ist also genau dann positiv, wenn $\tau+(\beta+\theta\gamma)n > \gamma\rho$ gilt. Die einzige Schlussfolgerung, die man unabhängig der Parameter ziehen kann, ist die, dass in einem Modell ohne technologischem Wachstum ($\tau = 0$) und ohne Bevölkerungswachstum ($n = 0$) die Produktion im Laufe der Zeit sinkt.
Nun wollen wir uns der Entwicklung des pro-Kopf-Konsums (c) widmen. Dieser wird positiv von τ und negativ von ρ beeinflusst. Um den Einfluss des Bevölkerungswachstums zu bestimmen, muss man zwischen den verschiedenen Skaleneffekten unterscheiden. Nimmt man sinkende Skalenerträge ($\alpha+\beta+\gamma < 1$) an, hat das Bevölkerungswachstum einen negativen Einfluss auf den pro-Kopf-Konsum. Bei konstanten Skalenerträgen ($\alpha+\beta+\gamma = 1$) ist der pro-Kopf-Konsum unabhängig vom Bevölkerungswachstum. Bei steigenden Skalenerträgen ($\alpha+\beta+\gamma > 1$) liegt ein positiver Einfluss vor.
Nehmen wir nun vollständigen Wettbewerb an, entspricht der Nominalpreis der nicht-erneuerbaren Ressource, hier p_1 genannt, der Ableitung der Produktionsfunktion nach R. Es gilt $p_1 := \frac{\partial Y}{\partial R} = \gamma\frac{Y}{R}$. Die Wachstumsrate des Nominalpreises ist daher:

$$g_{p_1} = g_Y - g_R = \frac{\tau + (\beta + \theta\gamma)n - \gamma\rho}{1 - \alpha - \gamma + \gamma\theta} - \left[\frac{(1-\theta)\tau + [(1-\alpha-\beta)\theta + \beta]n - (1-\alpha)\rho}{1 - \alpha - \gamma + \gamma\theta}\right]$$
$$\Leftrightarrow g_{p_1} = \frac{\theta\tau + (\alpha + \beta + \gamma - 1)\theta n + (1 - \alpha - \gamma)\rho}{1 - \alpha - \gamma + \gamma\theta}$$

Setzt man die realistische Parameterrestriktion $\alpha + \gamma < 1$ voraus, kann ein sinkender Nominalpreis nur vorliegen, wenn es abnehmende Skalenerträge und ein hohes Bevölkerungswachstums gibt. Ansonsten steigt der Nominalpreis an.
Für den Realpreis (p_2) der Ressource betrachtet man entweder den Schattenpreis dieser, also ϕ, oder man multipliziert den Nominalpreis (p_1) mit dem Schattenpreis des Kapitals (λ), um den Preis bezüglich des Konsums, also ebenfalls den Realpreis zu erhalten:

$$g_{p_2} = g_\phi = \rho$$

beziehungsweise

$$g_{p_2} = g_{\lambda \cdot p_1} = g_\lambda + g_{p_1} =$$
$$= \frac{-\theta\tau - (\alpha + \beta + \gamma - 1)\theta n + \gamma\rho\theta}{1 - \alpha - \gamma + \gamma\theta} + \frac{\theta\tau + (\alpha + \beta + \gamma - 1)\theta n + (1 - \alpha - \gamma)\rho}{1 - \alpha - \gamma + \gamma\theta} = \rho$$

Der Realpreis der Ressource hat daher positives Wachstum, dieses entspricht der Abzinsfaktor ρ. Steigt also im Laufe der Zeit an. Man beachte, dass dieser nicht von der Produktionsfunktion abhängig ist. Diese Überlegung gilt also auch wenn eine CES-Produktionsfunktion verwendet wird.

2.3 Das um endogenes Wachstum erweiterte Hotelling-Modell

Als nächstes wollen wir ein Modell betrachten, in dem das technologische Wachstum endogenisiert wird, wie es zum Beispiel auch von Suzuki (1976) untersucht wurde. In Groth (2007) wird dieses Modell auf den Seiten 139-145 behandelt.

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c) dt \tag{2.17}$$

$$\dot{K} = Y - C - I_A - \delta K \tag{2.18}$$

$$\dot{S} = -R \tag{2.19}$$

$$\dot{A} = I_A - \delta_A A \tag{2.20}$$

$$Y = A^\epsilon K^\alpha (L)^\beta R^\nu \qquad \alpha + \beta + \gamma = 1 \quad \alpha, \beta, \gamma > 0 \tag{2.21}$$

$$L(t) = L_0 e^{nt} \Rightarrow g_L = n$$

$$A(t) = A_0 e^{\tau t} \Rightarrow g_A = \tau$$

$$\int_0^\infty R(t) \leq S_0$$

Das Modell wurde also um die Gleichung (2.20) erweitert. Diese beschreibt die Entsicklung des technologischen Wachstums. Die Veränderung von diesem entspricht der Differenz zwischen der Investition in solches (I_A) und der Abschreibung ($\delta_A A$).
Die Hamilton-Funktion dieses Modells lautet:

$$H = u(C) + \lambda[A^\epsilon K^\alpha L^\beta R^\gamma - C - I_A - \delta K] - \phi R + \nu(I_A - \delta_A A)$$

Um das Modell etwas zu vereinfachen, nehmen wir nun $\delta_A = \delta$ an. Weiters betrachten wir hier nur den Fall in dem konstante Skalenerträge ($\alpha + \beta + \gamma = 1$) vorliegen.
Die marginale Produktivität des Kapitals ist $\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha \frac{Y}{K}$ und jene von Forschung gleich $\frac{\partial Y}{\partial A} = \epsilon \frac{Y}{A}$. Es ist entscheidend welche dieser marginalen Produktivitäten höher ist, dort wird das verfügbare Kapital hinfließen. Das hat ein Sinken dieser zur Folge, welches so lange geschieht, bis beide marginalen Produktivitäten gleich sind. Ab diesem Zeitpunkt ist man indifferent, wo das verfügbare Kapital hinfließt. Es wird nun immer so verteilt, dass beide marginalen Produktivitäten gleich bleiben. Gilt also zum Beispiel $\alpha \frac{Y}{K_0} > \epsilon \frac{Y}{A_0} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{K_0} > \frac{\epsilon}{A_0}$ dann wird in Kapital und nicht in Forschung investiert werden. Es gilt also $I_A = 0$, solange bis $\frac{\alpha}{K} = \frac{\epsilon}{A} \Leftrightarrow \frac{A}{K} = \frac{\epsilon}{\alpha}$ gilt. Danach bleibt dieses Verhältnis konstant. Ab dem Zeitpunkt, bei dem Gleichheit gilt kann man daher $A = \frac{\epsilon}{\alpha} K$ setzen.
Wir betrachten nun das Modell erst ab dem Zeitpunkt, ab dem die marginalen Produktivitäten gleich sind. Die Summe beider Investitionsmöglichkeiten wollen wir als $\tilde{K} := K + A = \frac{\alpha+\epsilon}{\alpha} K$ definieren. Außerdem definieren wir $\tilde{\alpha} = \alpha + \epsilon$.
Dies setzen wir in das obige Modell ein und erhalten ein neues, vereinfachtes Modell:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c) dt \tag{2.22}$$

$$\dot{\tilde{K}} = \dot{K} + \dot{A} = Y - C - \delta \tilde{K} \tag{2.23}$$

$$\dot{S} = -R \tag{2.24}$$

$$Y = \frac{\epsilon^{\epsilon\alpha^\alpha}}{(\tilde{\alpha})^{\tilde{\alpha}}} \tilde{K}^{\tilde{\alpha}} (L)^\beta R^\nu = B \tilde{K}^{\tilde{\alpha}} L^\beta R^\gamma \tag{2.25}$$

$$L(t) = L_0 e^{nt} \Rightarrow g_L = n$$

$$\int_0^\infty R(t) \leq S_0$$

Da dieses Modell von der Struktur nun dem vorigen Modell entspricht, können wir aus Proposition 1 und den beiden Gleichungen $\alpha + \beta + \gamma = 1$ und $\tilde{\alpha} = \alpha + \epsilon$ folgen, dass für die Variablen folgende Wachstumsraten gelten (man beachte hierbei, dass $\tau = 0$ gilt, weil B eine Konstante ist):

$$g_R = g_S = \frac{[(\gamma - \epsilon)\theta - \beta]n - (1 - \alpha - \epsilon)\rho}{\beta - \epsilon + \gamma\theta} \tag{2.26}$$

$$g_C = g_Y = g_K = \frac{(\beta + \theta\gamma)n - \gamma\rho}{\beta - \epsilon + \gamma\theta} \tag{2.27}$$

$$g_c = \frac{\epsilon n - \gamma\rho}{\beta - \epsilon + \gamma\theta} \tag{2.28}$$

$$g_\lambda = -\theta \cdot \frac{\epsilon n - \gamma\rho}{\beta - \epsilon + \gamma\theta} \tag{2.29}$$

$$g_\phi = \rho \tag{2.30}$$

Wie beim vorigen Modell nehmen wir als Minimalvoraussetzung für die Parameter an, dass die Nenner positiv sind, also $\beta - \epsilon + \gamma\theta > 0$, und untersuchen das BGE.
Der Zusammenhang der Wachstumsrate des Abbaus der Ressource mit dem Bevölkerungswachstum (n) und dem Diskontierungsfaktor des Nutzens (ρ) kann nicht genau bestimmt werden. Nimmt man allerdings $1 - \alpha - \epsilon > 0$ und $(\gamma - \epsilon)\theta - \beta < 0$ an, ist die Wachstumsrate immer negativ und ist kleiner je größer n und ρ sind.
Die Wachstumsrate der Produktion ist genau dann positiv, wenn $(\beta + \theta\gamma)n > \gamma\rho$ gilt. Man benötigt daher ein Bevölerungswachstum um einen Anstieg in der Produktion zu

gewährleisten. Für dieses muss $n > \frac{\gamma}{(\beta+\theta\gamma)}\rho$ gelten.
Der Wachstumsrate des pro-Kopf-Konsums (c) ist positiv von ϵ und n und negativ von γ und ρ abhängig und genau dann positiv, wenn $\epsilon n > \gamma\rho$ gilt. Um einen ansteigenden pro-Kopf-Konsum zu ermöglichen ist daher ebenfalls ein positives Bevölkerungswachstum erforderlich.
Für den Nominalpreis (p_1) und den Realpreis (p_2) der Ressource gilt durch die gleichen Überlegungen wie zuvor:

$$g_{p_1} = g_Y - g_R = \frac{\epsilon\theta n + (\beta - \epsilon)\rho}{\beta - \epsilon + \gamma\theta}$$

$$g_{p_2} = \rho$$

Hierbei ist $\beta > \epsilon$ eine hinreichende Bedingung, damit ein Anstieg des Nominalpreises vorliegt. Diese wird zu einer notwendigen Bedingung, wenn man eine gleichbleibende Bevölkerungsgröße annimmt. Ansonsten benötigt man die schwächere Bedingung $n > \frac{(\epsilon-\beta)\gamma}{\epsilon\theta}$ um einen Anstieg des Nominalpreises folgern zu können.
Mit den gleichen Überlegungen wie im vorigen Modell erkennt man, dass der Realpreis der Ressource wieder mit dem Abzinsfaktor ρ ansteigt.

Da wir uns in den nächsten beiden Kapiteln ebenfalls mit endogenen Wachstumsmodellen beschäftigen, ist das letzte Modell ein wichtiger Ausgangspunkt für Vergleiche mit den Modellen, die wir in den nächsten beiden Kapiteln untersuchen werden. Zuerst wollen wir noch die Ergebnisse dieses Modells mit den realen Entwicklungen vergleichen.
Der Abbau der meisten Ressourcen stieg in der Realität bis jetzt immer an. Dies ist sehr konträr zu den Ergebnissen dieses Modells. Betrachtet man jedoch das Modell außerhalb des BGEs, so ist ein steigender Abbau durchaus im Bereich des Möglichen. Dieser hätte allerdings zur Folge, dass die Ressourcen in endlicher Zeit aufgebraucht sind, und ab diesem Zeitpunkt der Ressourcenstock sowie die Produktion gleich Null sind. Danach könnte daher nur noch vorhandenes Kapital konsumiert werden, und der Konsum würde für $t \to \infty$ gegen Null streben. Dies ist, vor allem wenn man Wert auf intergenerationelle Gerechtigkeit legt, kein wünschenswertes Ergebnis.
Die Produktion in den meisten Sektoren mit nicht-erneuerbaren Ressourcen nimmt, alleine schon wegen des steigenden Abbaus, in der Wirklichkeit ebenfalls stetig zu. Im Modell kann, im BGE, eine steigende Produktion nur durch Bevölkerungswachstum erreicht wer-

den. Dies ist also ebenfalls kein sehr optimistischer Ausblick für die Zukunft, da man nicht von einem andauernden exponentiellen Bevölkerungswachstum ausgehen kann.
Für den pro-Kopf-Konsum gelten ähnliche Überlegungen. In der Realität nimmt dieser bis jetzt stetig zu. Im Modell kann dies jedoch nur durch positives Bevölkerungswachstum ermöglicht werden.
Bei der Preisentwicklung ist vor allem der Realpreis entscheidend, da dieser den wirklichen Wert der Ressource, also den bezüglich des Nutzens, angibt. Wie in Kapitel 1 gesehen, bleibt dieser im Laufe der Zeit annähernd konstant. Im Modell steigt er jedoch, unabhängig ob wir uns im BGE befinden oder nicht, mit gleichbleibender Rate ρ an.
Man sieht daher, dass dieses Modell kein sehr optimistisches ist, da sowohl die Produktion, als auch der pro-Kopf-Konsum nur durch Bevölkerungswachstum ansteigen können. Nimmt man, wie in den beiden noch folgenden Modellen, eine gleichbleibende Bevölkerungsrate an, so sind im BGE die Entwicklungen aller für uns relevanten Werte genau entgegengestetzt wie in der Realität. Ein Erklärungsversuch, dieses Modell benutzend, wäre von gleichbleibenden Wachstumsraten abzuweichen und steigenden Abbau der Ressource anzunehmen. Bis auf den Realpreis würden sich dann alle Variablen wie gewünscht entwickeln. Wie bereits oben erwähnt hätte das aber die Auswirkung, dass ab einem gewissen Zeitpunkt keine Ressourcen mehr vorhanden wären und somit der Konsum auf Null sinken würde. Glaubt man also diesem Modell, und bezieht die realen bisherige Entwicklung der relevanten Größen mit ein, würde daher irgendwann der Zeitpunkt kommen bei dem alle Ressourcen aufgebraucht sind.

3 Das Modell von Stürmer und Schwerhoff

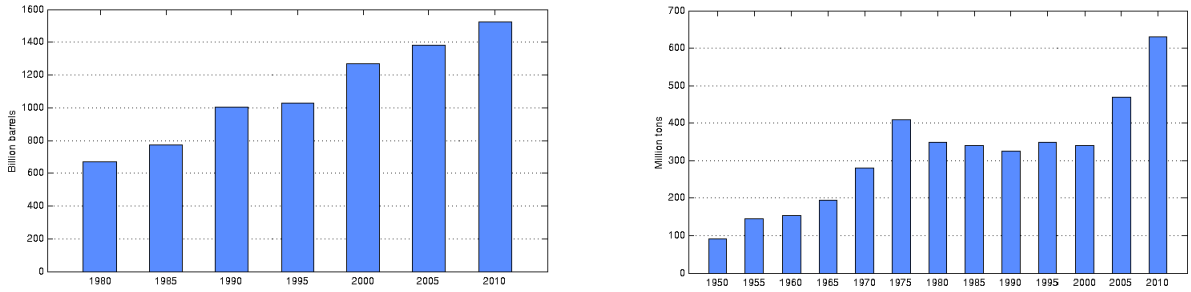
Dieses Kapitel basiert auf dem Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012). Ein wichtiger Punkt in deren Paper ist, dass sie den in der Realität vorkommenden Anstieg der Ressourcenstöcke vieler nicht-erneuerbarer Ressourcen in ein mathematisches Modell integrieren. Es wird also angenommen, dass nicht-erneuerbaren Ressourcen, im Gegensatz zur allgemeinen Annahme, quasi unerschöpflich sind.

Dies soll deshalb so sein, weil man immer neue Technologien entwickelt, um Vorkommen der Ressourcen mit immer kleinerem Erzgehalt[1] abzubauen und somit die Reserven[2] der Ressourcen zu erhöhen.

Es wird ein endogenes Wachstumsmodell verwendet, und um eine nicht-erneuerbaren Ressource, sowie technologischen Fortschritt im Abbau dieser, ergänzt.

In Abbildung 3, aus dem Paper von Stürmer und Schwerhoff (2012), sieht man die Entwicklung der Reserven von Öl bzw. von Kupfer. Diese soll verdeutlichen, warum die Annahme der steigenden Reserven der Ressourcen durch neue Technologien getroffen wurde.

Wie man sieht sind sowohl die Öl- als auch die Kupferreserven im Laufe der Zeit an-



(a) Ölreserven (b) Kupferreserven

Abbildung 3: Entwicklung von Öl- und Kupferreserven
Quelle: Stürmer und Schwerhoff (2012, S. 26f)

gestiegen. Dies kann auch bei vielen anderen nicht-erneuerbaren Ressourcen beobachtet werden.

[1] Erzgehalt beschreibt den Gehalt eines Gesteins an Erzen; der Begriff wird hier allerdings auch für Öl verwendet, wobei dies so zu verstehen ist, dass ein niedrigerer Erzgehalt schwerer zu erreichende Ölvorkommen beschreibt.

[2] Reserven sind hier als die Menge definiert, die mit dem derzeitigen Stand der Technik abgebaut werden kann.

3.1 Das Modell

Als Modell wird, wie bereits erwähnt, ein endogenes Wachstumsmodell um eine nicht-erneuerbare Ressource erweitert. Für den Output gibt es drei essenzielle Input-Faktoren, nämlich die Ressource (R), das Kapital (K) und die Arbeitskraft (L). Weiters hängt der Output vom Stand der Technik (B) ab. Dieser hat einen positiven Einfluss auf die Produktionsfunktion und ist nicht zu verwechseln mit den neuen Technologien, die Ressourcen mit geringerem Erzgehalt abbaubar machen.
Bevor wir uns dem Wachstumsmodell widmen, wollen wir uns noch der Kostenfunktion für den Abbau der Ressource, sowie jener für die Erforschung neuer Abbautechniken zur Erhöhung des Ressourcenstockes, zuwenden. Hier gilt es vor allem zu zeigen, dass, unabhängig vom derzeitigem Technologiestand, die Kosten für die Erhöhung des Ressourcenstockes um eine Einheit, konstant sind.

3.1.1 Die Kostenfunktionen

Wir wollen mit der Kostenfunktion für den Abbau der Ressource beginnen. Entscheidend ist hierbei, wie weit die Technologien schon fortgeschritten sind bzw. wie viel Kapital in diese bis zum aktuellen Zeitpunkt investiert wurde. Daher wird M_t als das bis zum Zeitpunkt t investierte Kapital in Technologien (zum Abbau der Ressource) definiert. Um die Notation zu erleichtern wird der Zeitindex ab jetzt weggelassen.
Es wird angenommen, dass die Kosten für den Abbau der Ressource (Φ_M) nicht vom Erzgehalt ($0 \leq g \leq 1$) abhängig sind. Allerdings können Vorkommen mit einem Erzgehalt unter einem gewissen Wert nicht abgebaut werden. Dies bringt uns zu folgender Kostenfunktion für den Abbau der Ressource:

$$\Phi_M(g) = \begin{cases} E, & wenn \quad g \geq h_M \\ \infty, & wenn \quad g < h_M \end{cases}$$

Liegt ein Erzgehalt über h_M vor, sind die Abbaukosten konstant gleich E. Vorkommen mit einem Erzgehalt kleiner als h_M können, beim derzeitigen Stand der Technik, nicht abgebaut werden. Die Funktion nimmt daher den Wert ∞ an. Um diese abbaubar zu machen, müsste man das investierte Kapital M erhöhen, was eine Verringerung von h_M zur Folge hätte.

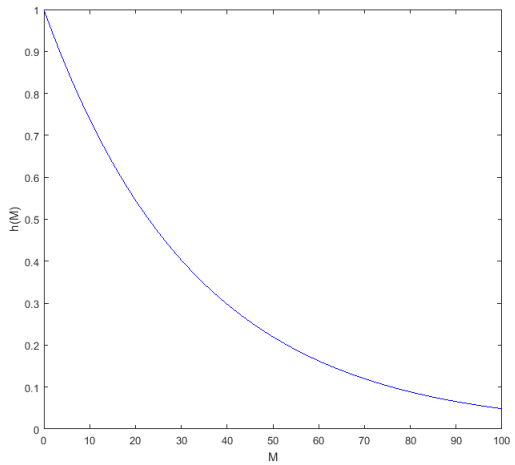
Die nachfolgende Funktion erklärt den Zusammenhang zwischen den getätigten Investitionen in Abbautechnologien und dem zum Abbau zur Verfügung stehenden Erzgehalt. Je niedriger der Erzgehalt, desto teurer wird es, diesen weiter zu senken. Beispielsweise kann man sich vorstellen, dass eine Senkung von 30 Prozent auf 29 Prozent noch vergleichsweise günstig im Gegensatz zu einer Senkung von 1,5 auf 0,5 Prozent ist. Daher bedient man sich einer negativen Exponentialfunktion:

$$h(M) = \gamma_1 e^{-\gamma_2 M}, \qquad \gamma_{1,2} > 0 \tag{3.1}$$

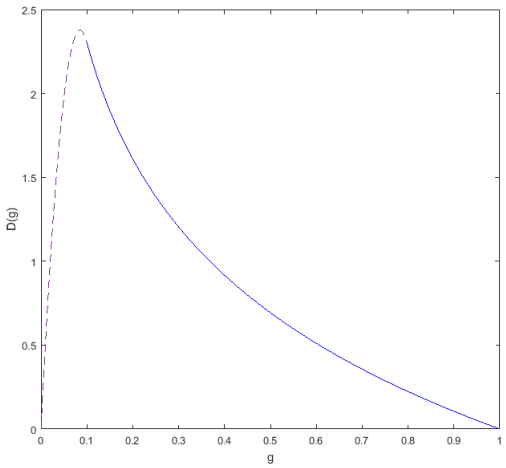
Um die abbaubare Menge der Ressource in Bezug auf den Erzgehalt zu ermitteln wurde folgende Formel verwendet:

$$D(g) = -\delta_1 ln(\delta_2 g), \qquad \delta_{1,2} > 0 \tag{3.2}$$

Diese entspricht, so lange der Erzgehalt nicht zu klein wird, relativ gut der Realität. Wird dieser sehr klein, geht die abbaubare Menge wieder gegen Null.
Diese beiden Funktionen sind in Abbildung 4 illustriert.
Um nun die abbaubare Menge der Ressource in Abhängigkeit von der in Technologie



(a) h(M)



(b) D(g)

Abbildung 4

getätigten Investitionen zu erhalten setzt man die Gleichung (3.1) in (3.2) ein und erhält:

$$D(M) = -\delta_1 ln(\delta_2 \gamma_1 e^{-\gamma_2 M}) = -\delta_1 ln(\delta_2 \gamma_1) + \delta_1 \gamma_2 M \tag{3.3}$$

Betrachtet man nun die Ableitung nach M, so erkennt man, dass diese konstant ist:

$$\frac{\partial D(M)}{\partial M} = \delta_1 \gamma_2 \tag{3.4}$$

Also erhöht sich die Menge der Ressource pro investierter Geldeinheit um $\delta_1 \gamma_2$. Möchte man nun wissen wieviele Geldeinheiten (F) man investieren muss, um den Ressourcenstock um eine Einheit zu erhöhen, rechnet man $\delta_1 \gamma_2 \cdot F = 1$ und somit gilt $F = \frac{1}{\delta_1 \gamma_2}$.

Die Kosten für die Produktion einer Ressourcen-Einheit setzen sich aus den Kosten für den Abbau der Ressource (E), sowie den Kosten für die Investitionen in neue Technologien (F) zusammen.
Der Ressourcenstock zum Zeitpunkt t beim derzeitigen Stand der Technologie wird mit X_t bezeichnet. Der durch neue Technologien zusätzlich verfügbare Ressourcenstock wird S_t genannt und die Menge der Ressourcen, die zum Zeitpunkt t abgebaut wird, R_t. Es wird angenommen, dass alle diese Werte nichtnegativ sind. Den Zusammenhang kann man wie folgt darstellen:

$$\dot{X}_t = S_t - R_t$$
$$X_t, S_t, R_t \geq 0$$

Die Veränderung des Ressourcenstocks ist also die Differenz des durch neue Technologien zusätzlich verfügbaren Ressourcenstocks und den abgebauten Recourcen.
Da nach den getroffenen Annahmen sowohl die Kosten für den Abbau der Ressource, wie auch die Kosten für die Investitionen in neue Technologien konstant sind, kann man die Gesamtkosten für die Ressourcenproduktion zum Zeitpunkt t als

$$R_t \cdot E + S_t \cdot F \tag{3.5}$$

darstellen.

3.1.2 Das Wachstumsmodell

Die Autoren verwenden ein Standard Schumpeterianisches Wachstumsmodell. Es wird auch in diesem Modell eine isoelastische Nutzenfunktion verwendet:

$$u(C) = \frac{C^{1-\epsilon} - 1}{1 - \epsilon}, \qquad \epsilon > 0$$

verwendet. Diese bringt uns zu einem Gesamtnutzen von

$$W = \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C^{1-\epsilon} - 1}{1 - \epsilon} dt, \qquad \rho, \epsilon > 0$$

Als Produktionsfunktion verwenden die Autoren eine spezielle Form der Cobb-Douglas Produktionsfunktion:

$$Y = K^\alpha B^{1-\alpha} L^\beta R^\nu, \qquad \alpha + \beta + \nu = 1, \quad \alpha, \beta, \nu > 0$$

Die gesamte Produktion setzt sich also aus dem Kapital K, dem Qualitätsparameter B, der Arbeitskraft L sowie der Ressource R zusammen. Der Parameter B gibt an wie effizient gearbeitet wird, und kann durch Investitionen in neue Technologien (nicht zu verwechseln mit der Investition in Technologien zur Erhöhung des Ressourcenstocks) erhöht werden. Der Parameter α beschreibt die Produktionselastizität des Kapitals, da $\frac{\frac{\partial Y}{\partial K}}{\frac{Y}{K}} = \alpha$ gilt. Aus den gleichen Überlegungen ist β die Produktionselastizität der Arbeitskraft und ν die der Ressource.
Die gesamte Arbeitskraft wird als konstant angenommen und auf Eins normalisiert. Diese kann in Arbeitskraft für den Output (L) und Arbeitskraft für Technologieentwicklung zur Steigerung der Produktivität (n) aufgeteilt werden. Daher gilt $L + n = 1$.
Die Veränderung des Qualitätsparameters hängt von dessen momentaner Größe (B), von der dafür Verwendeten Arbeitskraft (n), von einem Parameter, der die Größe der jeweiligen Innovation beschreibt (σ) und von einem Parameter, der den Poisson-Prozess bezüglich des Erscheinens neuer Innovationen angibt (η), ab:

$$\dot{B} = \sigma \eta n B$$

Um die Veränderung des Kapitals zu beschreiben, wird der Gesamtoutput (Y) minus des

Konsums (C), der Kosten für den Abbau der Ressource ($E \cdot R$) und der Kosten für neue Innovationen zur Erhöhung des Ressourcenstocks ($F \cdot S$) gerechnet:

$$\dot{K} = Y - C - E \cdot R - F \cdot S$$

Das gesamte Modell sieht daher wie folgt aus:

$$\max_{C,n,R} W = \max_{C,n,R} \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C^{1-\epsilon} - 1}{1 - \epsilon} dt \tag{3.6}$$

$$\dot{K} = K^\alpha B^{1-\alpha} (1-n)^\beta R^\nu - C - ER - FS \tag{3.7}$$

$$\dot{B} = \sigma \eta n B \tag{3.8}$$

$$\dot{X} = R_t - S_t \tag{3.9}$$

Unter den Nichtnegativitätsbedingungen:

$$X_t, S_t, R_t \geq 0$$

Mit folgenden Einschränkungen für die Parameter:

$$\begin{aligned} \rho, \epsilon &> 0 \\ \sigma, \eta &> 0 \\ \alpha + \beta + \nu &= 1 \\ \alpha, \beta, \nu &> 0 \end{aligned}$$

Um das Modell zu vereinfachen, bedient man sich folgender Proposition (siehe Stürmer und Schwerhoff (2012, S. 14)).

Proposition 2. *Bei einem positiven Ressourcenstock wird nicht in Abbau-Technologie investiert. Ist der Ressourcenstock erschöpft, wird so viel investiert, dass der neue Ressourcenstock der Abbau-Menge entspricht:*

$$X > 0 \qquad \Rightarrow S = 0$$

$$X = 0 \qquad \Rightarrow S = R$$

Beweis. Siehe Anhang 6.2 □

Wenn also der Anfangsbestand (X) gleich Null ist, werden immer alle Ressourcen, die in dieser Periode neu zur Verfügung stehen, abgebaut, beziehungsweise es wird genau so viel in neue Technologien investiert, dass die neu zum Abbau zur Verfügung stehenden Ressourcen genau der geplanten Abbaumenge entsprechen.
Ist der Anfangsbestand (X) größer Null, so gibt es solange keine Investition in neue Abbautechnologien, solange der Ressourcenstock positiv ist.

Mit diesem Wissen wird ein neues Modell aufgestellt, bei dem man annimmt, dass zum Beginnzeitpunkt X=0 gilt. Wenn es also einen positiven Ressourcenstock gegeben hat, ist dieser bereits abgebaut.
Daraus ergibt sich folgendes vereinfachtes Modell (X=0 und S=R), welches wir nun genauer analysieren werden:

$$\max_{C,n,R} \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C^{1-\epsilon} - 1}{1-\epsilon} dt \tag{3.10}$$

$$\dot{K} = K^\alpha B^{1-\alpha} (1-n)^\beta R^\nu - C - (E+F)R \tag{3.11}$$

$$\dot{B} = \sigma \eta n B \tag{3.12}$$

Mit den selben Einschränkungen für die Parameter:

$$\rho, \epsilon > 0$$

$$\sigma, \eta > 0$$

$$\alpha + \beta + \nu = 1$$

$$\alpha, \beta, \nu > 0$$

3.2 Ergebnisse

Die Hamilton-Funktion dieses vereinfachten Modells lautet:

$$H = u(C) + \lambda[K^{\alpha}B^{1-\alpha}(1-n)^{\beta}R^{\nu} - C - (E+F)R] + \mu\eta\sigma Bn$$

Mittels des Pontryaginschen Maximumsprinzips erhält man folgende Optimalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial C} &= u'(C) - \lambda = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda = C^{-\epsilon} && (3.13) \\
\frac{\partial H}{\partial n} &= -\lambda\beta K^{\alpha}B^{1-\alpha}(1-n)^{\beta-1}R^{\nu} + \mu\eta\sigma B = 0 \\
&\Leftrightarrow \mu = \lambda\beta Y(1-n)^{-1}(\eta\sigma B)^{-1} && (3.14) \\
\frac{\partial H}{\partial R} &= \lambda(\nu K^{\alpha}B^{1-\alpha}(1-n)^{\beta}R^{\nu-1} - (E+F)) = 0 \\
&\Leftrightarrow R = \frac{\nu}{E+F}Y && (3.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial K} \\
\Leftrightarrow \dot{\lambda} &= \rho\lambda - \lambda\alpha K^{\alpha-1}B^{1-\alpha}(1-n)^{\beta}R^{\nu} \\
&\Leftrightarrow \dot{\lambda} = \rho\lambda - \lambda\alpha\frac{Y}{K} && (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mu} &= \rho\mu - \frac{\partial H}{\partial B} \\
\Leftrightarrow \dot{\mu} &= \rho\mu - \lambda(1-\alpha)K^{\alpha}B^{-\alpha}(1-n)^{\beta}R^{\nu} - \mu\eta\sigma n \\
&\Leftrightarrow \dot{\mu} = \rho\mu - \lambda\left(1-\alpha\,\frac{Y}{B}\right) - \mu\eta\sigma n && (3.17)
\end{aligned}$$

Nun wollen wir das BGE dieses Modells untersuchen. Die Variablen Y, K, C, R und B sollen also gleichbleibende Wachstumsraten aufweisen.

Durch die Gleichungen (3.13)-(3.17) erhält man folgende Zusammenhänge:

$$g_\lambda = -\epsilon g_C \tag{3.18}$$

$$g_\mu = g_\lambda + g_Y - g_B \tag{3.19}$$

$$g_R = g_Y \tag{3.20}$$

$$g_\lambda = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - \frac{\alpha Y}{K} \tag{3.21}$$

$$g_\mu = \frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - \frac{1-\alpha}{\beta}\eta\sigma + \frac{\nu}{\beta}g_B \tag{3.22}$$

Außerdem erhalten wir wegen der Produktionsfunktion:

$$g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha)g_B + \nu g_R \tag{3.23}$$

Um zur Gleichung (3.22) zu gelangen, setzt man in Gleichung (3.17) für μ die Gleichung (3.14) ein und benutzt (3.12) um für $\eta\sigma n$ gleich $\frac{\dot{B}}{B} = g_B$ einzusetzen. Nun drückt man sich g_μ aus, und erhält die Gleichung (3.22). Die Gleichungen (3.18)-(3.21) erhält man unmittelbar aus den Gleichungen (3.13)-(3.16).

Aus den Gleichungen (3.18), (3.22) und (3.12) kann man sofort folgern, dass auch g_λ, g_μ und n konstant sein müssen.
Aufgrund von (3.20) sehen wir, dass die Wachstumsrate des Ressourcenabbaus gleich jener der Produktion ist. Als nächstes möchten wir zeigen, dass im BGE auch für die Wachstumsraten von Produktion, Kapital und Konsum Gleichheit gilt.
Da sowohl g_λ als auch die Parameter ρ und α konstant sind, muss wegen Gleichung (3.21) auch der Ausdruck $\frac{Y}{K}$ konstant sein. Daher muss $g_Y = g_K$ gelten.
Um zu zeigen, dass auch C die selbe Wachstumsrate hat, dividieren wir die Gleichung (3.11) durch K, und erhalten:

$$g_K = \frac{Y}{K} - \frac{C}{K} - (E+F)\frac{R}{K}$$

Die Wachstumsrate von K ist konstant. Auf der rechten Seite dieser Gleichung sind sowohl

die Parameter E und F, als auch $\frac{Y}{K}$ und $\frac{R}{K}$ konstant (weil, wie oben gezeigt $g_Y = g_K = g_R$ gilt). Also muss auch $\frac{C}{K}$ konstant sein. Daher gilt:

$$g_C = g_K = g_Y = g_R \tag{3.24}$$

Nun wollen wir die Gleichungen (3.18)-(3.22) dazu benutzen, um die Wachstumsraten der Variablen zu erhalten.
Setzt man die Gleichungen (3.19) und (3.22) gleich, setzt für g_λ gleich $-\epsilon g_Y$ ein (siehe Gleichungen (3.18) und (3.24)) und drückt sich g_B aus, so erhält man:

$$g_B = (1-\epsilon)\left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right) g_Y - \left(\frac{\beta}{1-\alpha}\right)\rho + \eta\sigma \tag{3.25}$$

Wegen (3.24) kann man in (3.23) g_K und g_R mit g_Y ersetzen. Drückt man sich dann g_Y aus, und verwendet die Parametervoraussetzung $\alpha + \beta + \nu = 1$ ergibt sich:

$$g_Y = \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right) g_B \tag{3.26}$$

Setzt man das nun in die Gleichung (3.25) ein und drückt sich g_B aus, erhält man:

$$g_B = \frac{1}{\epsilon}\left(\eta\sigma - \frac{\beta\rho}{1-\alpha}\right) \tag{3.27}$$

Setzt man (3.27) nun in (3.26) ein, erhält man für die Wachstumsrate von Y und wegen Gleichung (3.24) auch für R, K und C:

$$g_Y (= g_R = g_K = g_C) = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\eta\sigma - \rho\right) \tag{3.28}$$

Siehe dazu auch Stürmer und Schwerhoff (2012, S.14).
Obwohl die Wachstumsraten für B und Y unterschiedlich sind, sind beide genau dann positiv, wenn $\eta\sigma > \frac{\beta\rho}{1-\alpha}$ gilt. Setzt man dies voraus, sind die Wachstumsraten von B und

Y, und somit auch jene von R, K und C, negativ vom Parameter ϵ, der Produktionselastizitäten des Kapitals α, der Produktionselastizitäten des technologischen Fortschrittes β und der Diskontierungsrate ρ abhängig.
Ein positiver Zusammenhang besteht zwischen den Wachstumsraten und den Parametern η, σ und, wegen des negativen Zusammenhangs zu α und β und $\alpha + \beta + \nu = 1$, auch zur Produktionselastizität der Ressource ν.
Sind also die Häufigkeit (η) und die Größe (σ) der Innovationen, sowie die Produktionselastizität der Ressource (ν), groß genug, beziehungsweise die Diskontierungsrate (ρ) klein genug, ist ein kontinuierliches Wachstum von Abbau, Produktion, Konsum und technologischem Wachstum möglich.

Für n erhalten wir wegen (3.12):

$$n = \frac{g_B}{\eta\sigma} = \frac{1}{\epsilon}\left(1 - \frac{\beta\rho}{\eta\sigma(1-\alpha)}\right)$$

Die Variable n ist daher nicht-negativ, wenn die Parametereinschränkung $\eta\sigma \geq \frac{\beta\rho}{1-\alpha}$ gilt. Man beachte, dass diese Voraussetzung daher eine notwenige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines BGEs ist, da n den Teil der Arbeitskraft beschreibt, der für den technologischen Fortschritt verwendet wird, und dieser klarerweise nicht negativ sein kann. Wegen (3.27) und (3.28) sind daher, falls ein BGE existiert, dort keine negativen Wachstumsraten möglich.
Im Fall $\eta\sigma = \frac{\beta\rho}{1-\alpha}$ ist n gleich Null. Die gesamte Arbeitskraft wird daher für die Produktion verwendet. Außerdem gilt $g_Y = g_R = g_K = g_C = g_B = 0$ und somit sind in diesem Fall alle betrachteten Variablen konstant.
Ist $\eta\sigma > \frac{\beta\rho}{1-\alpha}$, so gilt $n, g_Y, g_R, g_K, g_C, g_B > 0$. Es liegen also positive Wachstumsraten vor.

Nimmt man auch hier vollständigen Wettbewerb an, setzt sich der nominelle Preis der Ressource aus den Kosten für die Investitionen, um diese abbaufähig zu machen, und dem eigentlichen Abbau zusammen. Da diese beiden Werte konstant gleich E beziehungsweise F sind (siehe Gleichung (3.5)), gilt für den nominellen Preis $p_1 = E + F$ und dieser ist somit konstant.
Den Realpreis, also den Preis der Ressource bezüglich des Nutzens, erhält man, wenn man den nominellen Preis mit dem Schattenpreis des Kapitals multipliziert, da dieser

den Wert des Kapitals im Sinne des Nutzens beschreibt. Anders gesagt, um denn Realpreis zu erhalten, muss man den Nominalpreis mit dem Nutzen einer Geldeinheit, also dem Schattenpreis des Kapitals, multiplizieren: $p_2 = \lambda p_1 = \lambda(E + F)$. Da $g_C > 0$ gilt, folgt aus (3.18), dass $g_\lambda < 0$ gelten muss. Der Realpreis ist daher, wie λ, ebenfalls monoton fallend.

3.2.1 Fortführende Analyse

Die Analysen von Stürmer und Schwerhoff (2012) beschränken sich auf das BGE des Modells. Wir wollen dieses nun außerhalb des BGEs etwas genauer betrachten und analysieren. Zu diesem Zweck werden wir es um eine Dimension verkleinern und die Verhältnisse der Variablen zueinander betrachten.

Das am Leichtesten zu berechnende Verhältnis ist der Anteil der Ressource R am Gesamtoutput Y. Durch die Gleichung (3.20) erkennt man, dass der Abbau bzw. die Nutzung der Ressource mit der selben Rate wie der Gesamtoutput wächst. Wegen (3.15) gilt für dieses Verhältnis: $\frac{R}{Y} = \frac{\nu}{E+F}$. Dieser Zusammenhang gilt nicht nur im BGE, sondern für jeden optimalen Lösungspfad.
Das Verhältnis $\frac{R}{Y}$ wird also positiv durch ν beeinflusst. Je größer also die Produktionselastizität der Ressource, desto größer wird R im Vergleich zu Y. Negativ wird dieses Verhältnis von E und F beeinflusst. Je teurer es ist neue Ressourcen abbaubar zu machen und je teurer der eigentliche Abbau der Ressource ist, desto geringer ist R im Vergleich zu Y.

Um Genaueres über die anderen Verhältnisse zu erfahren, definieren wir zwei neue Variablen, $x := \frac{Y}{K}$ und $z := \frac{C}{K}$.
Ziel ist es nun, ein Differentialgleichungssystem mit diesen beiden Variablen aufzustellen, um das Verhältnis von Y zu K und C zu K genauer analysieren zu können. Da im BGE des Modells (3.10)-(3.12) sowohl $\frac{Y}{K}$ als auch $\frac{C}{K}$ konstant sind, sollte dieses mit einem stationären Punkt, dessen beide Koordinaten positiv sind, des nun folgenden Modells übereinstimmen.
Für x und z gilt folgender Zusammenhang:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\left(\frac{\dot{Y}}{K}\right)}{\frac{Y}{K}} = \frac{\dot{Y}K - Y\dot{K}}{K^2}\frac{K}{Y} = \frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{K}}{K} = g_Y - g_K \tag{3.29}$$

Durch die selben Überlegungen erhält man für z:

$$\frac{\dot{z}}{z} = g_C - g_K \tag{3.30}$$

Daher muss man zuerst die Wachstumsraten g_Y, g_K und g_C berechnen.
Aus Gleichung (3.21) erhalten wir:

$$g_\lambda = \rho - \alpha x \tag{3.31}$$

Setzt man das in die Gleichung (3.18) ein und formt nach g_C um, erhält man für die Wachstumsrate von C:

$$g_C = \frac{1}{\epsilon}(x\alpha - \rho) \tag{3.32}$$

Um zu g_K zu gelangen, dividiert man die Gleichung (3.11) durch K und setzt für R gleich $\frac{\nu}{E+F}Y$ ein (siehe (3.15)). Nach dem Kürzen erhält man:

$$g_K = (1-\nu)x - z \tag{3.33}$$

Setzt man die Gleichungen (3.19) und (3.22) gleich und benutzt (3.31) um g_λ zu eliminieren, ergibt sich:

$$\rho - \alpha x + g_Y - g_B = \rho - \frac{1-\alpha}{\beta}\eta\sigma + \frac{\nu}{\beta}g_B$$

$$\Leftrightarrow g_B = \frac{\beta}{1-\alpha}g_Y - \frac{\beta\alpha}{1-\alpha}x + \eta\sigma \tag{3.34}$$

Setzt man nun die Gleichungen (3.20) und (3.33) in (3.23) ein und drückt sich g_Y aus, erhält man:

$$g_Y = \alpha x - \frac{\alpha}{1-\nu} z + \frac{1-\alpha}{1-\nu} g_B \tag{3.35}$$

Einsetzen von (3.34) in (3.35) und Ausdrücken von g_Y bringt folgendes Ergebnis:

$$g_Y = \alpha x - z + \frac{1-\alpha}{\alpha} \eta\sigma \tag{3.36}$$

Der Vollständigkeit halber berechnen wir nun, mittels der Gleichungen (3.34) und (3.36), auch noch g_B:

$$g_B = \frac{1-\nu}{\alpha} \eta\sigma - \frac{\beta}{1-\alpha} z \tag{3.37}$$

Setzt man die Gleichungen (3.32), (3.33) und (3.36) in (3.29) und (3.30) ein, erhält man folgendes Differentialgleichungssystem, das wir nun analysieren möchten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[-\beta x + \frac{1-\alpha}{\alpha} \eta\sigma \right] x \\ \dot{z} &= \left[-\left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu \right) x + z - \frac{\rho}{\epsilon} \right] z \end{aligned}$$

Proposition 3. *Das Gleichungssystem*

$$\dot{x} = \left[-\beta x + \frac{1-\alpha}{\alpha} \eta\sigma \right] x \tag{6.39}$$

$$\dot{z} = \left[-\left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu \right) x + z - \frac{\rho}{\epsilon} \right] z \tag{6.40}$$

hat unter der Parameterrestriktion

$$\rho > -\frac{(1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} \tag{6.41}$$

vier stationäre Punkte mit folgenden Eigenschaften:
Einen Sattelpunkt $S_1 = (0/0)$ mit den charakteristischen Richtungen

$\tau_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Einen abstoßenden Knoten $S_2 = (0/\frac{\rho}{\epsilon})$ *mit den charakteristischen Richtungen*
$\tau_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu}{\frac{\epsilon}{\rho}\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma-1} \end{pmatrix}$ *und* $\tau_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Einen anziehenden Knoten $S_3 = (\frac{1-\alpha}{\beta\alpha}\eta\sigma/0)$ *mit den charakteristischen Richtungen*
$\tau_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\tau_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Einen Sattelpunkt $S_4 = (x^*/z^*) = (\frac{1-\alpha}{\beta\alpha}\eta\sigma/\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)}{\beta\alpha}\eta\sigma+\frac{\rho}{\epsilon})$ *mit den charakteristischen Richtungen* $\tau_{41} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)^2(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon+(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)\rho\alpha\beta}{(1-\alpha)\beta\eta\sigma\epsilon+(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon+\rho\alpha\beta} \end{pmatrix}$ *und* $\tau_{42} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gilt umgekehrt

$$\rho < -\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} \tag{6.42}$$

so ist S_3 *ein Sattelpunkt und* S_4 *ein anziehender Knoten. Bei den anderen stationären Punkten ändert sich nichts.*

Beweis. Siehe Anhang 6.2 □

Wir möchten nun zeigen, dass der stationäre Punkt S_4, der, wie in Proposition 3 gezeigt wird, der einzige stationäre Punkt mit zwei positiven Koordinaten ist, wirklich dem BGE des Modells (3.10)-(3.12) entspricht.

Setzt man nun x^* und z^* in die Wachstumsraten g_C, g_K, g_Y und g_B ein, erhält man, wie erwartet, die selben Ergebnisse wie für das BGE des Modells (3.10)-(3.12) (siehe (3.28) und (3.27)):

$$g = g_Y (= g_R = g_K = g_C) = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1-\alpha}{\beta}\eta\sigma - \rho\right)$$
$$g_B = \frac{1}{\epsilon}\left(\eta\sigma - \frac{\beta}{1-\alpha}\rho\right)$$

Nun wollen wir das gesamte Vektorfeld betrachten. Wir beschränken uns auf den Fall $\eta\sigma > \frac{\beta\rho}{1-\alpha}$, was positive Wachstumsraten der Variablen zur Folge hat.
Zuerst nehmen wir für die Parameter folgende Werte an:

$$\alpha = \beta = \nu = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{2}, \sigma = \frac{1}{5}, \epsilon = \frac{1}{3}, \rho = \frac{1}{10}$$

Man beachte, dass die Parameterrestriktion (6.41) in diesem Fall erfüllt ist. Das dadurch erhaltene Vektorfeld sieht man in Abbildung 5.

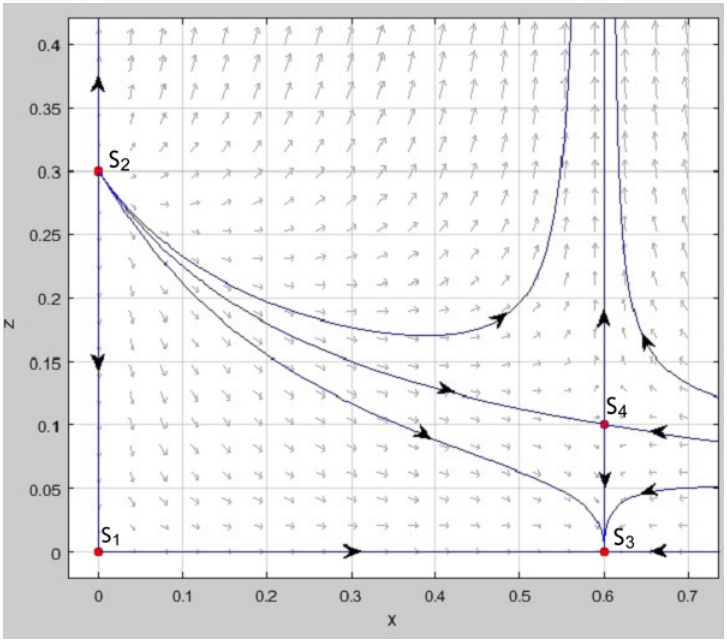


Abbildung 5: $\alpha = \beta = \nu = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{2}, \sigma = \frac{1}{5}, \epsilon = \frac{1}{3}, \rho = \frac{1}{10}$

Auf der Abszissenachse ist die Variable $x = \frac{Y}{K}$ und auf der Ordinatenachse die Variable $z = \frac{C}{K}$ aufgetragen. Betrachtet man die vier Trajektorien, die direkt im Sattelpunkt S_4 beginnen, beziehungsweise dort enden, erkennt man, dass die zwei senkrechten Trajaktorien instabil sind, da diese zum positiven Eigenwert gehören. Diese streben also von S_4 weg. Die anderen beiden Trajektorien gehören zum negativen Eigenwert und gehen daher in Richtung des Punktes S_4 (stabile Trajektorien). Daraus kann man folgern, dass sich die Variable x, unabhängig von ihrem Startwert, immer dem Wert x^* annähert. Das Verhältnis von Y zu K strebt also, unabhängig von den Anfangswerten, immer nach $x^* = \frac{1-\alpha}{\beta\alpha}\eta\sigma$. Das bedeutet, dass Y im Verhältnis zu K für $t \to \infty$ größer ist, je kleiner α und β sind, beziehungsweise je größer ν, η und σ sind. Je höher also die Produktionselastizität der Ressource, sowie die Häufigkeit und Größe der auftretenden Innovationen ist, desto größer ist die Produktion im Vergleich zu dem vorhandenen Kapital.
Bezüglich der zweiten Variable ist es entscheidend, ob man ober, unter oder auf dem

stabilen Ast des Sattelunktes S_4 liegt. Liegt der Anfangswert auf diesen Trajektorien, strebt das System, in Richtung des Sattelpunktes S_4, und somit das Verhältnis von C zu K gegen $z^* = \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)}{\beta\alpha}\eta\sigma + \frac{\rho}{\epsilon}$. Befindet er sich unterhalb der Trajektorien, so strebt $\frac{C}{K}$ gegen Null. In diesem Fall wächst das Kapital also schneller als der Konsum. Startet man oberhalb der Trajektorien, strebt das Verhältnis gegen Unendlich, was gleichbedeutend damit ist, dass der Konsum schneller als das Kapital wächst.

Mit den vorher gewählten Parametern gilt $1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu = -\frac{1}{3} < 0$. Wir wollen nun herausfinden wie sich das Phasenportrait ändert, wenn $1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu > 0$ gilt. Diese Annahme hat zur Folge, dass die oben angenommene Parameterbeschränkung (6.41) immer erfüllt ist. Das Phasendiagramm dazu ist in Abbildung 6 zu sehen. Die verwendeten Parameter sind unter der Abbildung zu finden.

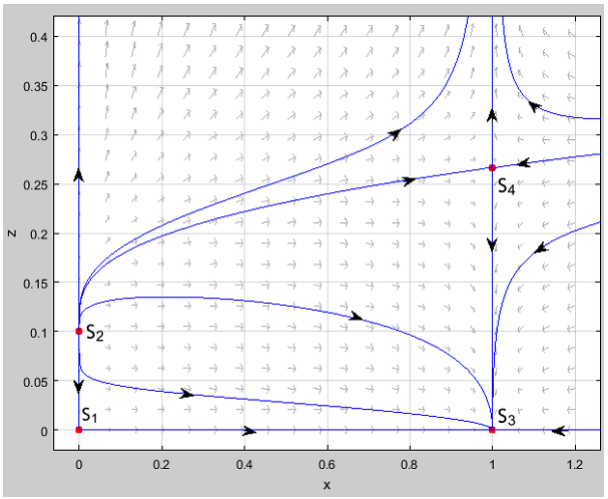


Abbildung 6: $\alpha = \frac{1}{6}, \beta = \frac{1}{2}\, \nu = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{2}, \sigma = \frac{1}{5}, \epsilon = \frac{1}{2}, \rho = \frac{1}{10}$

Die auffallendste Änderung des Phasenportraits ist die, dass der z-Wert des Punktes S_4 nun größer als der des Punktes S_2 ist (gilt $1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu = 0$ liegen beide auf gleicher Höhe). Befinden wir uns in einem Anfangspunkt, der kleiner als x^* ist und auf der stabilen Trajektorie von S_4 liegt, steigt, im Unterschied zur vorherigen Parameterwahl (Abbildung 5), das Verhältnis $\frac{C}{K}$ an. Der Konsum wächst daher in diesem Fall schneller als das Kapital. Bei obiger Parameterwahl ist genau die umgekehrte Entwicklung (das Kapital wächst schneller als der Konsum) zu beobachten. Da entscheidend ist, wie groß der Term $1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu$ ist, kann man folgern, dass (falls der Anfangspunkt auf besagter Trajektorie liegt) der Konsum im Vergleich zum Kapital schneller wächst, je größer der Parameter ϵ beziehungsweise je kleiner die Produktionselastizitäten des Kapitals α und die Produkti-

onselastizitäten der Ressource ν sind.
Die Struktur, also welche Art der stationären Punkte vorliegt, ändert sich nicht, da die Parametereinschränkung (6.41) bei den gewählten Parametern ebenfalls gilt. Für $t \to \infty$ gelten daher die selben Überlegungen wie zuvor.

Wir wollen nun überlegen was passiert, wenn $\rho < -\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta}$ gilt.
Wie bereits erwähnt gilt in diesem Fall $z^* < 0$, der stationäre Punkt S_4 liegt also unter der x-Achse. Daraus folgt, dass $\frac{C}{K}$ in diesem Fall negativ ist. Bei gegebenem $K_0 > 0$ muss also $C_0 < 0$ gewählt werden, um gleichbleibende Wachstumsraten zu ermöglichen. Will man daher positiven Konsum im BGE garantieren, muss man die Parameterrestriktion (6.41) voraussetzen. Dies führt zu folgender Proposition:

Proposition 4. *Um im BGE sowohl positiven Konsum, als auch positive Wachstumsraten in Kapital, Produktion und Konsum zu garantieren, muss für den Diskontierungsfaktor*

$$-\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} < \rho < \frac{\eta\sigma(1-\alpha)}{\beta} \tag{6.46}$$

gelten.
Setzt man außerdem $-\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} < 1$ *voraus und fixiert alle Parameter außer* ρ*, existiert immer ein* ρ*, für das* $0 < \rho < 1$ *gilt und das die Restriktion (6.42) erfüllt.*

Beweis. siehe Anhang 6.2 □

3.3 Diskussion

Stürmer und Schwerhoff (2012) bringen mit dem Einbeziehen von steigenden Ressourcenstöcken einen völlig neuen Gedanken in Modelle, die nicht-erneuerbare Ressourcen betrachten. Beim analysieren des endogenen Wachstumsmodells können die genauen Wachstumsraten aller relevanten Variablen berechnet werden. Allerdings bedarf es einiger Parametereinschränkungen, dass sowohl positiver Konsum, als auch ein positives Wachstum von diesem (und auch von den anderen Variablen) möglich ist. Da im Paper über die Wahl der Parameter keine Angaben gemacht werden, kann man keine Aussagen darüber treffen, ob die notwendigen Parameterrestriktionen realistisch sind, oder nicht.
Ein weiterer ungeklärter Punkt ist die Funktion D(g), welche die abbaubare Menge der Ressource in Abhängigkeit vom Erzgehalt beschreibt. Wie im Paper erwähnt wird, und

bei meiner Arbeit in Abbildung 4b illustriert ist, geht die Funktion für geringe Erzgehalte wieder gegen Null. Wird der Erzgehalt also klein, trifft die im Modell verwendete Funktion $D(g) = \delta_1 ln(\delta_2 g)$ in der Realität nicht mehr zu. Die Frage, die sich in diesem Zusammenhang nun stellt, ist, bei welchem Erzgehalt dieser "Einbruch" der Funktion stattfindet, beziehungsweise ob dieser in einem relevanten Zeitraum erreicht wird, oder nicht.

Nimmt man an, dass sowohl die Parametereinschränkungen in der Realität erfüllt sind, und auch der "Einbruch" der Funktion D(g) keine Rolle spielt, sagt das Modell eine exponentielle Steigerung vom Abbau der Ressource, von der Produktion und dem Konsum voraus, was auch in der Realität beobachtet werden kann. Dieses Wachstum würde sich, laut des Modells, auch in Zukunft unbeschränkt weiter fortsetzen.

Weiters kann man aus dem Modell auf einen konstanten Nominalpreis, sowie einen fallenden Realpreis schließen. Diese Entwicklung steht nicht ganz mit der Realität im Einklang, da, wie bereits erwähnt, bis jetzt steigende Nominalpreise und nahezu konstante Realpreise bei vielen nicht-erneuerbaren Ressourcen zu beobachten waren.

Natürlich kann kein Modell die Realität perfekt beschreiben, und das Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012) ist, wie bereits erwähnt, das Erste, das den Ressourcenstock nicht als konstant ansieht und bringt somit einen wichtigen neuen Aspekt in die Thematik nicht-erneuerbarer Ressourcen in der optimalen Kontrolltheorie.

4 Das Modell von Tahvonen und Salo

Als nächstes wollen wir das Paper von Tahvonen und Salo (2001) näher untersuchen. In diesem Paper werden zwei Modelle behandelt. Da sich diese Arbeit mit der Untersuchung und dem Vergleich von Modellen mit endogenem technologischem Wachstum beschäftigt, werden wir das Modell ohne endogenem technologischem Fortschritt hier nicht betrachten und uns auf jenes konzentrieren in dem technologisches Wachstum angenommen wird.
Im Unterschied zum Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012) werden die nicht-erneuerbaren Ressourcen (=nicht-erneuerbare Energiequellen) nicht als unerschöpflich angenommen, sondern es gibt, wie bei den Modellen in Kapitel 2, einen fixen Ressourcenstock. Weiters berücksichtigen die Autoren die Möglichkeit erneuerbare Energiequellen, wie unter anderem Windräder, Wasserkraftwerke oder Solarenergie, zu benutzen.
Ein wichtiger Unterschied dieses Modells zu den meisten anderen endogenen Wachstumsmodellen, die sich mit nicht-erneuerbaren Ressourcen beschäftigen, ist der, dass die Autoren die Abbaukosten für die nicht-erneuerbaren Ressourcen im Modell einbeziehen. Wie wir später sehen werden führt dies dazu, dass es optimal sein kann erneuerbare und nicht-erneuerbare Ressourcen gleichzeitig zu verwenden und, aufgrund steigender Abbaukosten bei verringertem Ressourcenstock, das Modell keinen vollständiger Abbau der nicht-erneuerbaren Ressourcen voraussagt.

4.1 Das Modell

Auch bei diesem Modell wird wieder die Existenz eines übergeordneten Planers angenommen und über einen unendlichen Zeitraum maximiert. Wie auch im Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012) wird dabei eine konstante Bevölkerungsgröße angenommen:

$$\max_{c,q,s} W(x_0, k_0) = \max_{c,q,s} \int_0^\infty exp(-\delta t) U(c) dt \tag{4.1}$$

$$\dot{k} = P(k, s+q, n_2) - c - qC(x, n_1, n_2) - F(s, n_2) \tag{4.2}$$

$$\dot{x} = -q \tag{4.3}$$

$$q \geq 0$$

unter den Anfangswertbedingungen

$$k(0) = k_0$$
$$x(0) = x_0$$

Die Zustandsvariablen sind hierbei das Kapital (k), sowie der Ressourcenstock der nicht-erneuerbaren Ressource (x). Die Kontrollvariablen sind der Konsum (c), der Abbau der nicht-erneuerbaren Ressource (q), sowie die Verwendung der erneuerbaren Ressource (s). Die Summe von q und s ergibt die insgesamt verwendeten Ressourcen und wird mit e bezeichnet.
Die Nutzenfunktion (U(c)) soll über einen unendlichen Zeitraum maximiert werden. Die Veränderung des Kapitals ($\dot{k}$) ergibt sich indem man von der Produktionsfunktion (P(k,e)) den Konsum (c), die Kosten für den Abbau der nicht-erneuerbaren Ressource (qC(x)) und die Kosten für die erneuerbare Ressource (F(s)) abzieht. Es wird hierbei angenommen, dass $F'(0) \leq C(x_0)$ gelten muss. Das bedeutet, dass die Kosten für die erste Einheit an erneuerbaren Energiequellen kleiner oder gleich der Kosten der ersten Einheit an nicht-erneuerbaren Energiequellen ist. Dies hat einen stets positiven Wert von s zur Folge.
Die Änderungsrate des Ressourcenstocks ($\dot{x}$) entspricht dem Abbau der nicht-erneuerbaren Ressource.
Um den technologischen Fortschritt zu beschreiben, werden folgende Gleichungen verwendet:

$$\dot{n_1} = q \tag{4.4}$$
$$n_2 = k \tag{4.5}$$
$$n_1(0) = 0$$

Es wird zwischen technologischem Fortschritt aufgrund von Wissen durch den Abbau der nicht-erneuerbaren Ressource (n_1) und technologischem Fortschritt aufgrund von höherem Kapital (n_2) unterschieden. Hierbei beeinflusst n_1 die Abbaukosten der nicht-erneuerbaren Ressource und n_2 ebenfalls die Abbaukosten, sowie die Kosten für erneuerbare Energiequellen und die Produktionsfunktion.
Die Variable n_1 ist zu Beginn gleich Null. Je mehr des nicht-erneuerbaren Rohstoffes abgebaut wurde, desto größer das technologische Wissen über diesen Vorgang. Daher setzt

man $\dot{n_1} = q$. Die Abbaukosten sind von diesem Wissen negativ abhängig, es gilt also $C_{n_1} \leq 0$.
Der Variable n_2 wird ein linearer Zusammenhang mit dem Kapital unterstellt, siehe Barro und Sala-i-Martin (2004). Mit geeigneten Einheiten kann man daher $n_2 = k$ annehmen. Dieses vom Kapital abhängige Wissen beeinflusst sowohl die Abbaukosten als auch die Kosten für erneuerbare Energiequellen negativ ($C_{n_2} \leq 0, F_{n_2} \leq 0$). Die Produktionsfunktion wird von diesem Wissen positiv beeinflusst ($P_{n_2} \geq 0$).

Die Effekte des technologischen Fortschrittes werden als Externalitäten angenommen, deshalb werden die Gleichungen (4.4) und (4.5) als Nebenbedingungen in das Modell integriert. Der Planer schenkt also dem Einfluss der Variablen n_1 und n_2 auf die Funktionen für den Maximierungsprozess keine Beachtung.

4.2 Ergebnisse

Nun wollen wir die optimale Lösung herleiten und berechnen dazu die Hamiltonfunktion:

$$H = U(c) + \lambda(P(e, k, n_2) - c - qC(x, k, n_1, n_2) - F(s, n_2)) - \phi q + \nu q$$

Hierbei ist λ der Schattenpreis des Kapitals, ϕ der Schattenpreis der nicht-erneuerbaren Ressource und ν der Lagrangeparameter für die Nichtnegativitätsbedingung $q \geq 0$.
Es ergeben sich folgende Optimalitätsbedingungen:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = U'(c) - \lambda \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = P_e - F_s = 0 \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \lambda(P_e - C) - \phi + \nu = 0 \tag{4.8}$$

$$\nu q = 0, \quad \nu \geq 0$$

$$\dot{\lambda} = \delta\lambda - \frac{\partial H}{\partial k} \tag{4.9}$$

$$\dot{\phi} = \delta\phi - \frac{\partial H}{\partial x} \tag{4.10}$$

Wir werden nun die Einflüsse des technologischen Fortschrittes mittels der Variablen k und x direkt in den verwendeten Funktionen beschreiben, um die Nebenbedingungen (4.4) und (4.5) zu eliminieren.

Auch in diesem Modell wird wieder eine isoelastische Nutzenfunktion verwendet:

$$U(c) := \frac{c^{1-a} - 1}{1 - a} \tag{4.11}$$

Um die Produktion zu beschreiben wird eine Cobb-Douglas-Funktion verwendet:

$$P(k, q + s) := k^{\alpha}(q + s)^{1-\alpha} \tag{4.12}$$

Die Input-Faktoren sind das Kapital und die Ressourcen. Für die Produktionselastizität des Kapitals ($\frac{\partial P}{\partial k}\frac{k}{P} = \alpha$) muss $0 < \alpha < 1$ gelten. Die Produktionselastizität der Ressourcen entspricht $1 - \alpha$. Tahvonen und Salo (2001) abstrahieren vom Einfluss des gesteigerten Wissens durch erhöhtes Kapital auf die Produktionsfunktion, um das Modell einfacher zu halten.
Die Kostenfunktion für die Benutzung erneuerbarer Energiequellen lautet:

$$F(s, n_2) = F(s, k) := s^{\sigma}(\mu + k^{1-\sigma}) \tag{4.13}$$

Wobei $\sigma > 1$ gelten muss. Wird eine größere Menge der erneuerbaren Energiequelle verwendet, erhöhen sich die Kosten pro Einheit. Diese Annahmen werden deshalb so getroffen, weil je mehr Energie man aus erneuerbaren Quellen bezieht, desto ineffizientere Orte müssen beispielsweise für Windräder oder Wasserkraftwerke verwendet werden. Bei einem σ nahe Eins ist dieser Effekt relativ gering, je höher σ angenommen wird, desto stärker tritt dieser Effekt auf. Die Variable k beschreibt den Einfluss von n_2 auf die Kostenfunktion (siehe Gleichung (4.5)). Der Parameter μ beschreibt den Teil der Kosten, der unabhängig vom technologischen Fortschritt ist.
Für die Funktion F gilt $F(0, k) = 0$. Es werden also keine Fixkosten für die Energiegewinnung aus erneuerbaren Ressourcen angenommen.
Die Kostenfunktion für die nicht-erneuerbare Ressource lautet:

$$C(x, n_1, n_2) = C(x, k) := \frac{c_0}{x} + c_1 x + \frac{c_2}{c_3 + k} \tag{4.14}$$

Der Term $\frac{c_0}{x}$ beschreibt die steigenden Kosten bei sinkendem Ressourcenstock, da der Abbau der Ressource dann schwieriger wird. Der zweite Term beschreibt den technologischen Fortschritt und somit eine Kostenreduktion im Abbau aufgrund von Erfahrung und somit den Einfluss von n_1 auf die Kostenfunktion. Je kleiner daher der Ressourcenstock ist, desto kleiner wird dieser. Der letzte Term beschreibt den Einfluss von n_2 auf die Kostenfunktion (siehe Gleichung (4.5)). Steigt das Kapital und mit ihm n_2, verringert sich dieser.

Setzt man nun die Funktionen (4.11)-(4.14) in die Gleichungen (4.7)-(4.10) ein, erhält man folgende Optimalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial c} &= U'(c) - \lambda \\
\Leftrightarrow c^{-a} - \lambda &= 0 && (4.15) \\
\frac{\partial H}{\partial s} &= P_e - F_s = 0 \\
\Leftrightarrow (1-\alpha)\left(\frac{k}{q+s}\right)^{\alpha} - \sigma s^{\sigma-1}(\mu + k^{1-\sigma}) &= 0 && (4.16) \\
\frac{\partial H}{\partial q} &= \lambda(P_e - C) - \phi + \nu = 0 \\
\Leftrightarrow \lambda\left((1-\alpha)\left(\frac{k}{q+s}\right)^{\alpha} - \left(\frac{c_0}{x} + c_1 x + \frac{c_2}{c_3+k}\right)\right) - \phi + \nu &= 0 && (4.17) \\
\nu q = 0, \quad \nu \geq 0 &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda} &= \delta\lambda - \frac{\partial H}{\partial k} \\
\Leftrightarrow \dot{\lambda} &= \lambda\left(\delta - P_k\right) \\
\Leftrightarrow \dot{\lambda} &= \lambda\left(\delta - \alpha\left(\frac{q+s}{k}\right)^{1-\alpha}\right) && (4.18) \\
\dot{\phi} &= \delta\phi - \frac{\partial H}{\partial x} \\
\Leftrightarrow \dot{\phi} &= \delta\phi - C_x \\
\Leftrightarrow \dot{\phi} &= \delta\phi - \left(\frac{\lambda q c_0}{x^2}\right) && (4.19)
\end{aligned}$$

Man beachte, dass hierbei einige Variablen beziehungsweise Terme durch das technologische Wachstum in die Funktionen einfließen und somit nicht für den Maximierungsprozess beachtet werden. Dies ist die Variable k bei den Kostenfunktionen für die erneuerbaren und auch für die nicht-erneuerbaren Ressourcen, sowie der Term $c_1 x$ bei der Kostenfunktion der nicht-erneuerbaren Ressourcen. Bei den Ableitungen der Hamiltonfunktion nach k beziehungsweise nach x werden diese Funktionen beziehungsweise Terme daher nicht berücksichtigt. Wir wollen in diesem Kapitel nun zwei Fälle unterscheiden. Zum Einen, wenn der technologische Fortschritt der die Kostenfunktion der nicht-erneuerbaren Energiequellen beeinflusst zur Gänze vom Kapital abhängt ($\mu = 0$) und zum Anderen wenn dies nicht der Fall ist ($\mu > 0$).

4.2.1 Der Fall $\mu = 0$

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, in dem es keinen Teil der Kosten für die erneuerbaren Energiequellen gibt, der nicht durch technologischen Fortschritt vom Kapital beeinflusst wird. Die Kostenfunktion für erneuerbare Ressourcen kann daher als $F(s,k) = s^\sigma k^{1-\sigma}$ angeschrieben werden.

Wir werden später zeigen, dass Verläufe existieren, bei denen keine nicht-erneuerbaren Ressourcen verwendet werden. Deshalb beginnen wir mit der Untersuchung des Systems, wenn $q = 0$ gilt.
Wir wollen nun, mittels der Gleichungen (4.2), (4.3) und (4.15)-(4.19) ein Differentialgleichungssystem in c und k aufstellen.
Drückt man sich aus der Gleichung (4.16) s aus, erhält man, wenn man $q = 0$ setzt:

$$s = k \left(\frac{1-\alpha}{\sigma} \right)^{\frac{1}{\sigma+\alpha-1}} \tag{4.20}$$

Das Verhältnis $\frac{s}{k}$ ist daher konstant gleich $\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma+\alpha-1}}$.

Aus (4.15) folgt, $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -a\frac{\dot{c}}{c}$ und damit aus (4.18):

$$\dot{c} = -c\frac{1}{a}\left(\delta - \alpha\left(\frac{s}{k}\right)^{1-\alpha}\right)$$

Benutzt man nun noch (4.20) um s in diese Gleichung zu eliminieren, ergibt sich:

$$\dot{c} = c\frac{1}{a}\left(\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right)$$

Wegen Gleichung (4.2) und (4.20) ergibt sich für $\dot{k}$:

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= P(k, s+q) - c - qC(x) - F(s) = \\
&= k^{\alpha}s^{1-\alpha} - s^{\sigma}k^{1-\sigma} - c = \\
&= k^{\alpha}k^{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - k^{\sigma}\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}k^{1-\sigma} - c = \\
&= k\left(\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}\right) - c = \\
&= k\left((1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - (1-\alpha)\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}})\right) - c = \\
&= k\left((1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)\right) - c
\end{aligned}$$

Definieren wir hier $A := \frac{1}{a}\left(\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right)$ und $B := \sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$ können wir das obige Differentialgleichungssystem als

$$\dot{c} = Ac \tag{4.21}$$

$$\dot{k} = Bk - c \tag{4.22}$$

anschreiben.

A kann, abhängig von der Parameterwahl, größer, kleiner oder gleich Null sein. B ist, aufgrund der Annahmen für die Parameter, immer größer als Null.

Wir wollen nun das Vektorfeld dieses Differentialgleichungssystems untersuchen. Es ist relativ leicht zu erkennen, dass, wenn $A \neq 0$ gilt, der einzige stationäre Punkt (0/0) ist, da aus $\dot{c} = 0$ sofort $c = 0$ und anschließend aus $\dot{k} = 0$ unmittelbar $k = 0$ folgt.

Ist $A = 0$, ergeben sich unendlich viele stationäre Punkte (Bk_0, k_0), da $\dot{c}$ immer Null ist und $\dot{k}$ genau dann, wenn $Bk = c$ ist.

Die Jakobimatrix des Systems lautet:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta\dot{c}}{\delta c} & \frac{\delta\dot{c}}{\delta k} \\ \frac{\delta\dot{k}}{\delta c} & \frac{\delta\dot{k}}{\delta k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -1 & B \end{pmatrix}$$

Als Eigenwerte ergeben sich daher $\lambda_1 = A$ und $\lambda_2 = B$. Da $B > 0$ gilt, ist λ_2 immer positiv. A, und somit auch λ_1, ist genau dann größer als Null, wenn die marginale Produktivität des Kapitals ($P_k = \alpha \left(\frac{\sigma}{1-\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$) größer als die Diskontierungsrate δ ist. Der stationäre Punkt S(0/0) ist in diesem Fall also ein abstoßender Knoten.
Ist umgekehrt die Diskontierungsrate größer als die marginale Produktivität des Kapitals, ist $\lambda_1 = A$ kleiner Null und der stationäre Punkt ist ein Sattelpunkt. Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten sind in beiden Fällen die Lösungen der Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ -1 & B \end{pmatrix} \tau_i = \tau_i \lambda_i \qquad\qquad i = 1, 2 \tag{4.23}$$

Daher erhält man:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{B-A} \end{pmatrix}$$
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sind nun noch 2 Spezialfälle zu untersuchen. Zuerst betrachten wir den Fall $A = B$. In diesem Fall ist $\lambda_1 = A(= B)$ ein doppelter Eigenwert. Da, wie bereits erwähnt, immer $B > 0$ gelten muss, ist der Eigenwert λ_1 ebenfalls größer als Null. Der stationäre Punkt ist daher ein abstoßender Knoten. Es gibt, wegen des doppelten Eigenwertes, nur eine charakteristische Richtung. Diese ist wieder die Lösung von Gleichung (4.23) und lautet deshalb $\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Der zweite Spezialfall ist $A = 0$. In diesem Fall gibt es, wie bereits erwähnt, unendlich viele stationäre Punkte die alle auf der Geraden $Bk = c$ liegen. Da die Jakobimatix unabhängig von c und k ist, ist die charakteristische Richtung für alle stationären Punkte (Bk_0/k_0) gleich. Man erhält diese wieder durch Lösen der Gleichung (4.23), was zu $\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ führt. Die Trajektorien sind daher die horizontale Geraden durch den jeweiligen stationären Punkt. Da $B > 0$ gilt, laufen diese Geraden von den stationären Punkten weg, also horizontal nach $+\infty$ beziehungsweise $-\infty$.

Wir wollen nun die optimale Lösung des Systems berechnen. Wegen (4.21) erhält man

für den Konsum:

$$c(t) = c_0 e^{At}$$

Die Berechnung von k(t) ist etwas komplizierter. Aus (4.22) folgt:

$$k_{hom} = be^{Bt}$$

Mittels Variation der Konstanten kann man nun die Partikulärlösung berechnen:

$$\begin{aligned}
k_{pat} &= b(t)e^{Bt} \\
\Rightarrow \dot{b(t)}e^{Bt} + b(t)Be^{Bt} &= Bb(t)e^{Bt} - c \\
\Leftrightarrow \dot{b(t)}e^{Bt} &= -c_0 e^{At} \\
\Leftrightarrow \dot{b(t)} &= -c_0 e^{(A-B)t} \\
\Rightarrow b(t) &= \frac{c_0 e^{(A-B)t}}{B-A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow k_{pat} &= \frac{c_0 e^{(A-B)t}}{B-A} e^{Bt} = \\
&= \frac{c_0}{B-A} e^{At}
\end{aligned}$$

Setzt man die homogene Lösung und die Partikulärlösung zusammen ergibt sich:

$$k(t) = be^{Bt} + \frac{c_0}{B-A} e^{At} \tag{4.24}$$

Um nun noch herauszufinden welchen Wert b hat, fixiert man den Anfangswert des Kapitals, setzt also $k(0) = k_0$:

$$\begin{aligned}
k_0 = k(0) &= b + \frac{c_0}{B-A} \\
\Leftrightarrow b &= k_0 - \frac{c_0}{B-A} \\
\Rightarrow k(t) &= \left(k_0 - \frac{c_0}{B-A}\right) e^{Bt} + \frac{c_0}{B-A} e^{At}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Wir wollen nun vier mögliche Entwicklungen des Konsums und des Kapitals, in Abhängigkeit von den Parametern A und B, unterscheiden:

- Andauerndes Wachstum in Konsum und Kapital ist möglich
- Das System hat einen stationären Punkt, gleichbleibender Konsum und Kapital ist daher möglich
- Der Konsum ist streng monoton fallend, aber $c(t), k(t) > 0 \ \forall t \geq 0$ ist möglich
- Steigender Konsum ist möglich, das Kapital wird jedoch irgendwann gleich Null

Man beachte, dass dies nicht unbedingt eine Reihung entsprechend des Gesamtnutzens ist. Allerdings ist es wünschenswert, dass nicht irgendwann der Zeitpunkt kommt, zu dem das Kapital gleich Null wird, da, wenn dies passiert, immer $k(t) \to -\infty$ für $t \to \infty$ gilt. Diese Entwicklung soll, wenn möglich, vermieden werden.
Zuerst möchten wir den Fall $A < 0$ betrachten, den man in Abbildung 7 sieht. Die gewählten Parameter sind, wie auch bei den noch folgenden Phasendiagrammen, unter der Abbildung zu finden.

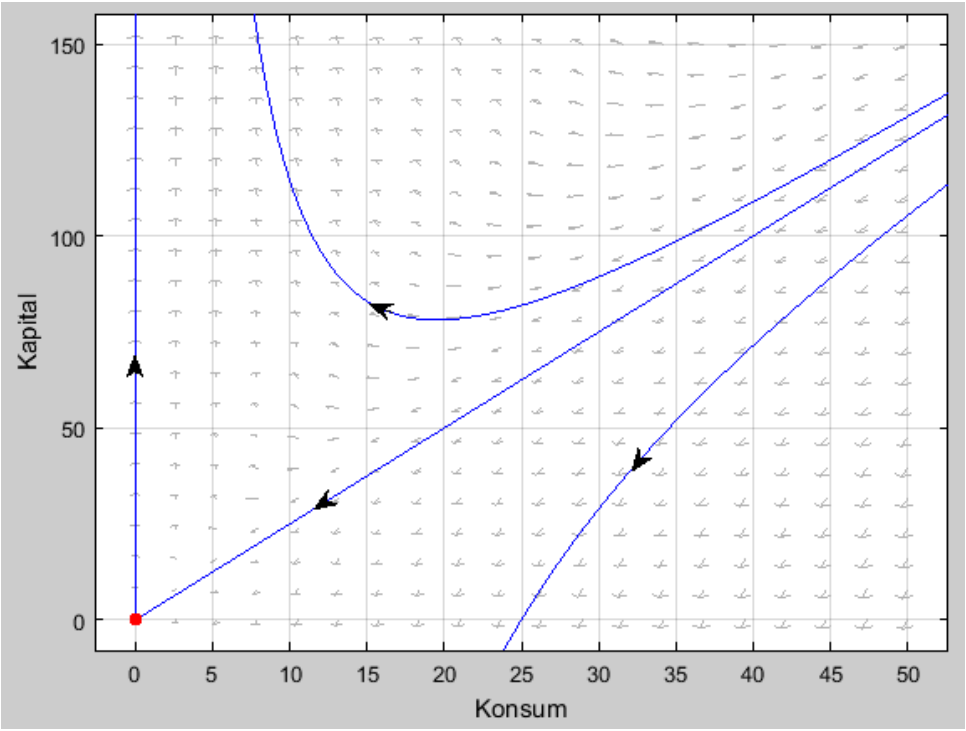


Abbildung 7: $\alpha = 0,25, \sigma = 1,5, \delta = 0,2, a = 0,5 \Rightarrow A = -0.15, B = 0.25$

Befinden wir uns hier unterhalb der Trajektorie die in den Ursprung führt, ist das Kapital in endlicher Zeit gleich Null, diesen Fall möchten wir also vermeiden. Befinden wir uns auf, oder über dieser Trajektorie, sinkt der Konsum unabhängig vom Kapital. Es ist also optimal, bei gegebenem k_0, c_0 möglichst groß zu wählen, sodass der Anfangspunkt jedoch nicht unterhalb besagter Trajektorie liegt. Die optimale Entscheidung ist daher ein Punkt auf der Trajektorie, die in den Ursprung führt, also $c_0 = (B - A)k_0$. Somit erhalten wir für für Konsum und Kapital:

$$\begin{aligned} c(t) &= (B - A)k_0 e^{At} \\ k(t) &= k_0 e^{At} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass in diesem Fall der Konsum streng monoton fallend ist, $c(t), k(t) > 0 \ \forall t \geq 0$ ist jedoch möglich.

Der Fall $A = 0$ ist in Abbildung 8 dargestellt. Man erhält, wie bereits erwähnt, unendlich viele stationäre Punkten, die alle auf der Geraden $Bk = c$ liegen, die in Abbildung 8 durch die rot strichlierte Linie dargestellt ist. Beginnt man mit einem Anfangswert abseits dieser stationären Punkte führen die Trajektorien horizontal von den stationären Punkten weg.

Bei gegebenem k_0 ist c_0 daher so zu wählen, dass (c_0/k_0) einer dieser stationären Punkte ist. Wählt man den Anfangswert nämlich kleiner, ist auch der gesamte Konsum geringer und wählt man ihn größer, wird das Kapital irgendwann gleich Null. Man muss also $c_0 = Bk_0$ setzen, und erhält:

$$\begin{aligned} c(t) &= Bk_0 \\ k(t) &= k_0 \end{aligned}$$

In diesem Fall ist also ein gleichbleibender Konsum und gleichbleibendes Kapital möglich.

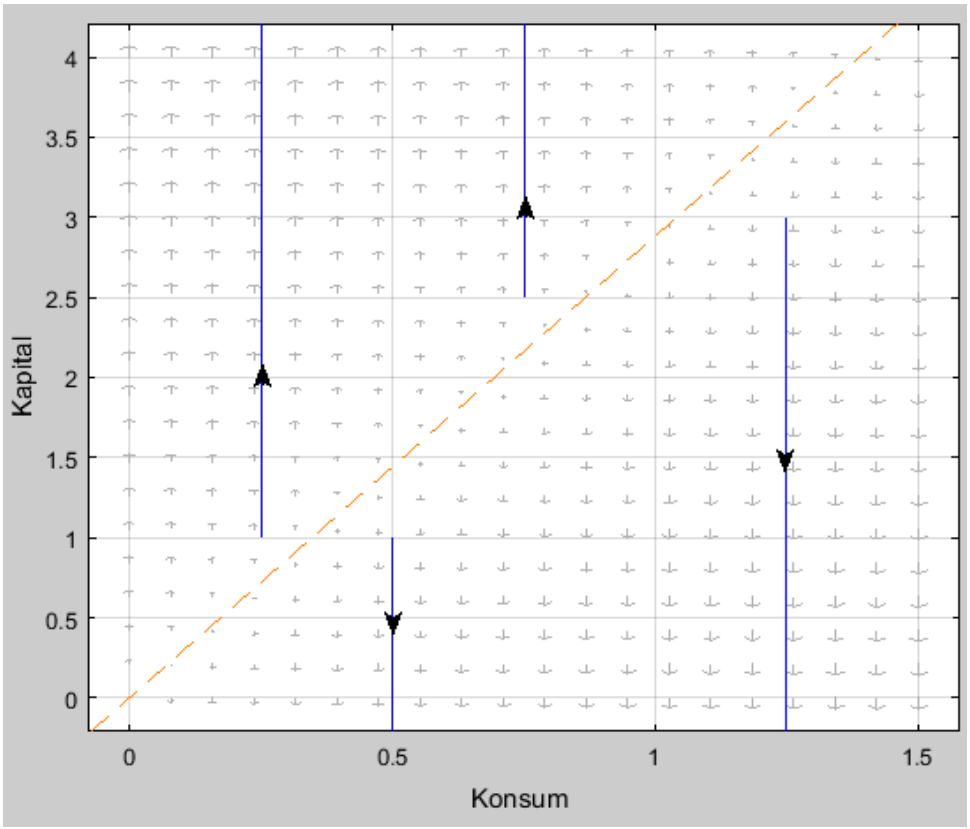


Abbildung 8: $\alpha = 0,25, \sigma = 2, \delta = \frac{\sqrt[5]{54}}{16} = 0,1387.., a = 0,5 \Rightarrow A = 0, B = 0.3469..$

Als nächstes wollen wir den Fall $A = B$ betrachten, der in Abbildung 9 veranschaulicht ist.

In diesem Fall sieht schon die Partikulärlösung des Differentialgleichungssystems (4.21) und (4.22) anders aus:

$$\begin{aligned} k_{pat} &= b(t)e^{Bt} \\ \dot{b(t)} &= -c_0 e^{(A-B)t} = -c_0 \\ \Leftrightarrow b(t) &= -c_0 t \\ \Rightarrow k_{pat} &= -c_0 t e^{Bt} \end{aligned}$$

Für die Gesamtlösung k ergibt sich in diesem Fall

$$k(t) = be^{Bt} - c_0 t e^{Bt} = (b - c_0 t)e^{Bt}$$

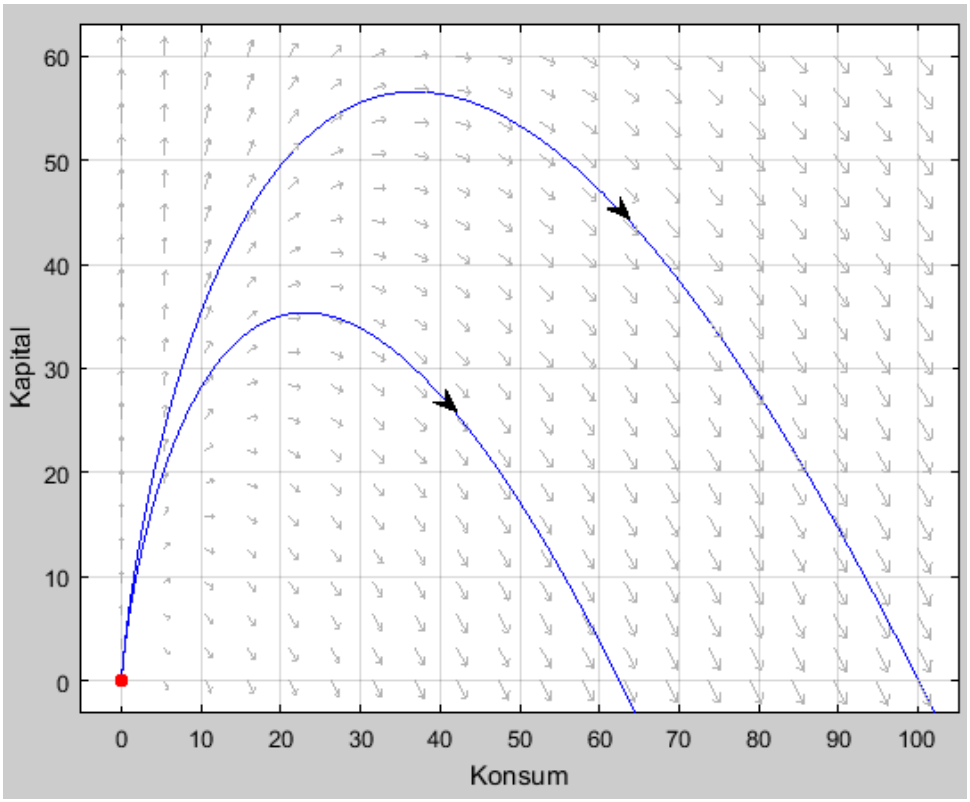


Abbildung 9: $\alpha = 0,75, \sigma = 2, \delta = \frac{5\sqrt[7]{16}}{32}, a = 0,5 \Rightarrow A = B = 0,6501..$

und aus $k_0 = k(0) = b$ schließlich:

$$k(t) = (k_0 - c_0 t)e^{Bt}$$

Wir sehen, dass hier ein steigender Konsum vorliegt, jedoch das Kapital irgendwann gleich Null wird, da, egal wie klein c_0 gewählt wird, $c_0 t$ irgendwann größer als k_0 wird.
Dasselbe gilt für den Fall $A > B$, der in Abbildung 10 illustriert ist. In diesem Fall ist der zweite Summand in (4.25) negativ und wegen des Faktors e^{At} und $A > B$ wächst dieser betragsmäßig schneller als der erste Summand.

Der Fall $B > A > 0$ ist in Abbildung 11 veranschaulicht.

In diesem Fall gibt es ein andauerndes positives Wachstum beider Variablen, wenn, bei

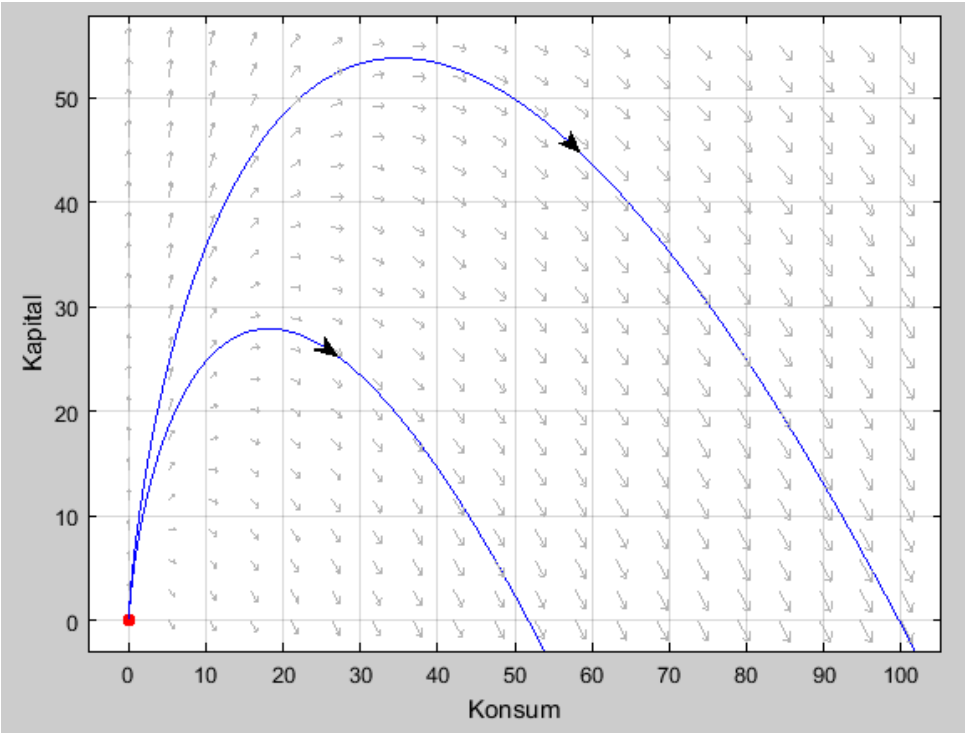


Abbildung 10: $\alpha = 0,75, \sigma = 2, \delta = 0,2, a = 0,5 \Rightarrow A = 0,7144.., B = 0,6501..$

gegebenem k_0, c_0 so gewählt wird, dass

$$\begin{aligned} k_0 &\geq \frac{c_0}{B-A} \\ \Leftrightarrow c_0 &\leq (B-A)k_0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

gilt.

Da der Gesamtnutzen höher ist, je größer der Anfangswert des Konsums ist, wählt man c_0 so groß wie möglich, dass die Ungleichung (4.26) erfüllt ist, und erhält $c_0 = (B-A)k_0$ sowie die beiden Funktionen für c und k:

$$\begin{aligned} c(t) &= (B-A)k_0 e^{At} \\ k(t) &= k_0 e^{At} \end{aligned}$$

Dies ist der einzige Fall in dem der Konsum und das Kapital mit konstanten Wachstumsraten ansteigen, für diese gilt:

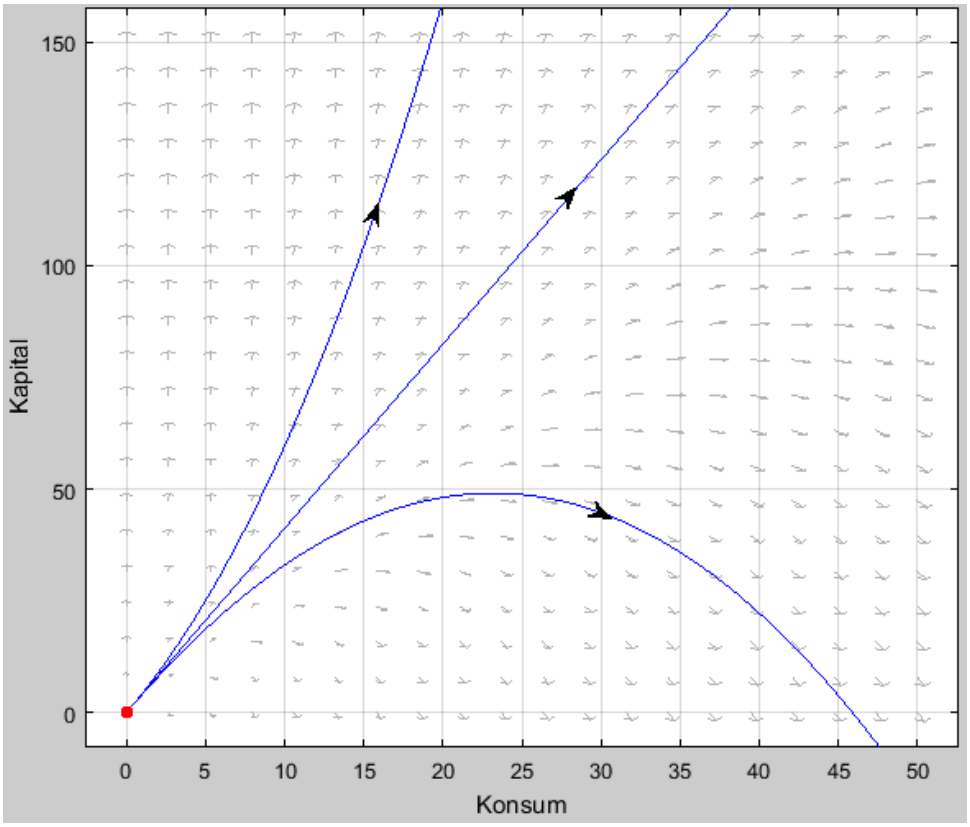


Abbildung 11: $\alpha = 0,5, \sigma = 2, \delta = 0,2, a = 0,5 \Rightarrow A = 0,2299.., B = 0,4724..$

$$g_c = g_k = \frac{\dot{k}}{k} = A = \frac{1}{a}\left(\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right) \tag{4.27}$$

Gilt also $q = 0$ muss für ein monotones Wachstum von Konsum und Kapital $B > A > 0 \Leftrightarrow \sigma^{\frac{-\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} > \frac{1}{a}\left(\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right) > 0$ gelten.
Um gleichbleibenden Konsum und gleichbleibendes Kapital (also einen stationäre Punkt) zu erhalten, ist die Restriktion $A = 0$ notwendig.
Fallender Konsum, jedoch $c(t), k(t) > 0 \ \forall t \geq 0$ erhält man, wenn $A < 0$ gilt.
Im Fall $A \geq B$ steigt der Konsum, jedoch das Kapital wird irgendwann gleich Null.

Man sieht, dass A genau dann positiv ist, wenn die marginale Produktivität des Kapitals ($P_k = \alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$) größer ist als die Diskontierungsrate δ und umgekehrt. Wenn diese beiden Größen übereinstimmen, gilt $A = 0$.
B ist nur von der Produktionselastizität des Kapitals (α) und der Kostenelastizität der erneuerbaren Ressource (σ) abhängig.

Nun wollen wir überlegen, wann die nicht-erneuerbare Ressource verwendet wird ($q > 0$) und wann nicht ($q = 0$). Es gilt $q > 0$ genau dann, wenn die marginale Produktivität der Energie höher ist als die Kosten pro Einheit der nicht-erneuerbaren Ressource ($P_e > C$). Beziehungsweise könnte man auch so argumentieren, dass der Preis für eine Einheit der nicht-erneuerbaren Ressource kleiner sein muss als der Preis für die teuerste verwendete Einheit der erneuerbaren Ressource, wenn also $C < F_s$ ist.
Da wegen Gleichung (4.16) $P_e = F_s$ gilt, führen diese beiden Überlegungen zum selben Ergebnis. Nämlich, dass ein Wechsel von $q = 0$ zu $q > 0$ genau dann erfolgt, wenn folgendes gilt:

$$\begin{aligned} G_2 := F_s - C = 0 \\ \Leftrightarrow P_e - C = 0 \\ \Leftrightarrow (1-\alpha)\left(\frac{k}{s}\right)^{\alpha} - C = 0 \\ \Leftrightarrow (1-\alpha)^{\frac{\sigma-1}{\sigma+\alpha-1}} \sigma^{\frac{\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \left(\frac{c_0}{x} + c_1 x + \frac{c_2}{c_3 + k}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Die letzte Äquivalenz erhält man indem man (4.20) für s einsetzt.
Die Kurve $G_2(k, x) = 0$ gibt also genau jene Kombinationen von k und x an, bei denen ein Wechsel von $q = 0$ zu $q > 0$ erfolgt. Den Preis der nicht-erneuerbaren Ressource, bei dem dieser Wechsel stattfindet, also P_e wollen wir, in Ermangelung einer vernünftigen Übersetzung, wie im Englischen, als "choke price" bezeichnen. Dieser ist konstant gleich $\bar{p} := (1-\alpha)^{\frac{\sigma-1}{\sigma+\alpha-1}} \sigma^{\frac{\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$. Klarerweise stimmt dieser mit den Abbaukosten pro Einheit (C(x)) überein, wenn $G_2 = 0$ gilt.
Man kann durch Umformen der Gleichung (4.28) k als Funktion in x definieren:

$$k|_{G_2=0} = \frac{c_2}{\bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x} - c_3$$

Diese Funktion strebt gegen Unendlich, wenn $\bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x$ gegen Null geht. Setzt man diesen Ausdruck gleich Null und formt nach x um, erhält man $x = \frac{\bar{p} \pm \sqrt{\bar{p}^2 - 4c_0c_1}}{2c_1}$. Diese Grenzen wollen wir als $\underline{\underline{x}} := \frac{\bar{p} - \sqrt{\bar{p}^2 - 4c_0c_1}}{2c_1}$ und $\bar{\bar{x}} := \frac{\bar{p} + \sqrt{\bar{p}^2 - 4c_0c_1}}{2c_1}$ bezeichnen. Da alle Parameter positiv sind, reicht die Voraussetzung $\bar{p}^2 > 4c_0c_1$ aus, um zu garantieren, dass sowohl $\underline{\underline{x}}$, als auch $\bar{\bar{x}}$ größer als Null und Elemente der reellen Zahlen sind. Die obigen Überlegungen sind

in Tahvonen und Salo (2001, S. 1392) zu finden und bringen uns zu folgender Proposition:

Proposition 5. *Nimmt man für die Parameter $\bar{p}^2 > 4c_0c_1$ an, erlaubt also nur positive Werte unter der Wurzel bei der Definition der Schranken, gilt:*

$$lim_{\epsilon\to 0} k|_{G_2=0}(\bar{\bar{x}} - \epsilon) = +\infty \tag{6.47}$$

$$lim_{\epsilon\to 0} k|_{G_2=0}(\underline{\underline{x}} + \epsilon) = +\infty \tag{6.48}$$

Die Funktion G_2 strebt also von oben gegen $(\underline{\underline{x}}, +\infty)$ und von unten gegen $(\bar{\bar{x}}, +\infty)$. Wenn x diese Grenzen verlässt, gilt $\bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x < 0$ und somit auch $k|_{G_2=0} < 0$.

Beweis. Siehe Anhang 6.3 □

Betrachten wir nur den Bereich in dem $k > 0$ gilt, liegt die Funktion $G_2(k, x) = 0$ in der k-x-Ebene zwischen den beiden Schranken und ist dort u-förmig. Dies ist in Abblildung 12 illustriert. Die rot strichlierten Linien entsprechen den beiden Schranken $\underline{\underline{x}}$ und $\bar{\bar{x}}$, an die sich die Funktion annähert. Die angenommenen Parameterwerte sind wieder unter der Abbildung zu finden.

Beginnen wir mit der Analyse, wenn man sich zwischen den beiden Schranken befindet ($\underline{\underline{x}} < x_0 < \bar{\bar{x}}$). Die Kurve $G_2(k, x) = 0$ teilt die durch $\underline{\underline{x}}$ und $\bar{\bar{x}}$ begrenzte k-x-Ebene in zwei Bereiche (siehe Abbildung 12). Da $\frac{\partial G_2}{\partial k} = \frac{c_2}{(c_3+k)^2} > 0$ gilt, die Funktion G_2 also streng monoton wachsend in k ist, gilt auf der linken Seite der Kurve $G_2(k, x) = 0$, dass G_2 dort kleiner als Null ist. Der choke price ist dort also kleiner als die Abbaukosten pro Einheit der nicht-erneuerbaren Ressourcen. Es wird daher nur die erneuerbare Ressource verwendet. Weil $C_k < 0$ gilt, sinkt mit steigendem k der Preis für den Abbau der Ressource. Ist k schließlich so groß, dass die Funktion $G_2(k, x) = 0$ überschritten wird und wir uns dann auf der rechten Seite der Kurve $G_2(k, x) = 0$ befinden, gelten natürlich genau die umgekehrten Überlegungen. Dort ist G_2 größer als Null und der choke price daher größer als die Abbaukosten pro Einheit der nicht-erneuerbaren Ressource. Es werden daher auch nicht-erneuerbare Ressourcen verwendet ($q > 0$).

Ist der Startwert von x unterhalb der unteren Grenze ($x_0 < \underline{\underline{x}}$), oder oberhalb der Oberen Grenze, also $x_0 > \bar{\bar{x}}$ (diese Grenzen sind in Abbildung 12 als die beiden rot strichlierten Linien eingezeichnet), so ist der choke price ebenfalls kleiner als die Abbaukosten für eine Einheit der nicht-erneuerbaren Ressourcen. Allerdings kann der choke price, egal wie groß k wird, in diesem Fall nie größer als die Abbaukosten werden. Daher gilt in diesen beiden Fällen ($x_0 < \underline{\underline{x}}$ und $x_0 > \bar{\bar{x}}$), dass zu keinem Zeitpunkt nicht-erneuerbare Ressourcen

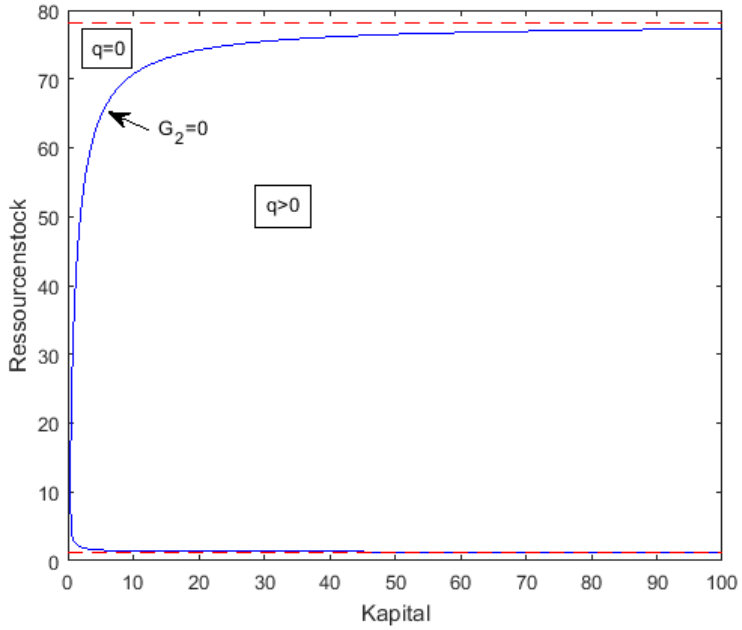


Abbildung 12: Die Funktion $G_2 = 0$

Parameterwerte: $\alpha = 0,5, \sigma = 2, c_0 = 1, c_1 = 0,01, c_2 = 0,8, c_3 = 1$

$\Rightarrow \bar{p} = 0,7937.., \underline{\underline{x}} = 1,2805.., \bar{\bar{x}} = 78,0894..$

verwendet werden $(q(t) = 0 \forall t)$.

Adaptierung der Kostenfunktion

Wir wollen uns in diesem Abschnitt dem Problem annehmen, dass es keine Erklärung dafür gibt, dass der Ressourcenstock nur groß genug sein muss um einen Abbau der nicht-erneuerbaren Ressource auszuschließen. Wir werden daher in diesem Abschnitt eine andere Funktion für die Abbaukosten vorschlagen, als jene, die in Tahvonen und Salo (2001) verwendet wurde.

In der vorher angegebenen Form $C := \frac{c_0}{x} + c_1 x + \frac{c_2}{c_3 + k}$ beschreibt der Term $c_1 x$ die Kostenverringerung aufgrund von durch den Abbau erhaltenes Wissen. Dieser Term hat allerdings zur Folge, dass wie oben erwähnt, bei sehr hohem Anfangsstock, die Kosten für den Abbau der nicht-erneuerbaren Ressourcen sehr hoch sind und somit kein Abbau stattfindet. Ziel wäre also, dass dieser Term, wenn noch kein Abbau stattgefunden hat gleich Null ist, also tatsächlich vom Abbau und nicht vom Ressourcenstock abhängig ist. Die adaptierte Kostenfunktion lautet daher:

$$C := \frac{c_0}{x} - c_1(x_0 - x) + \frac{c_2}{c_3 + k}$$

Setzt man wieder $G_2(= F_s - C)$ gleich Null, berechnet sich also, wann ein Wechsel von $q = 0$ zu $q > 0$ stattfindet, erhält man:

$$\bar{p} - \left(\frac{c_0}{x} - c_1(x_0 - x) + \frac{c_2}{c_3 + k} \right) = 0$$

Formt man dies wieder nach k um, ergibt sich:

$$k|_{G_2=0} = \frac{c_2}{\bar{p} - \frac{c_0}{x} + c_1(x_0 - x)} - c_3$$

Diese Funktion ist wieder Unendlich, wenn der Nenner gleich Null wird, daher sind die beiden Schranken die Lösungen der Gleichung

$$\bar{p} - \frac{c_0}{x} + c_1(x_0 - x) = 0$$

und somit

$$\underline{\underline{x}} = \frac{\bar{p} + c_1 x_0 - \sqrt{(\bar{p} + c_1 x_0)^2 - 4c_0 c_1}}{2c_1}$$
$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{p} + c_1 x_0 + \sqrt{(\bar{p} + c_1 x_0)^2 - 4c_0 c_1}}{2c_1}$$

Nimmt man nun für die Parameter $\bar{p}^2 + 2\bar{p}c_1 x_0 > 4c_0 c_1$ an (man beachte, dass dies eine schwächere Annahme als im vorigen Kapitel ist), sind beide Lösungen reell. Mit den selben Überlegungen wie im Beweis zu Proposition 5, kann man folgern dass die Funktion G_2 wieder u-förmig zwischen diesen Grenzen liegt und dass sie von oben gegen $(\underline{\underline{x}}, +\infty)$ und von unten gegen $(\bar{\bar{x}}, +\infty)$ strebt.

Für die obere Schranke gilt:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{p} + c_1 x_0 + \sqrt{\bar{p}^2 + 2\bar{p}c_1 x_0 + c_1^2 x_0^2 - 4c_0 c_1}}{2c_1} > \tag{4.29}$$

$$\frac{\bar{p} + c_1 x_0 + \sqrt{c_1^2 x_0^2}}{2c_1} = \frac{\bar{p}}{2c_1} + x_0 > x_0 \tag{4.30}$$

Die obere Grenze liegt daher immer oberhalb von x_0, kann also nicht erreicht werden. Das hat zur Folge, dass $q(t) = 0 \ \forall t \geq 0$ nur eintreten kann, wenn der Anfangsstock zu klein ist ($x_0 < \underline{\bar{x}}$), nicht jedoch wenn dieser zu groß ist, da die obere Grenze von x_0 abhängig, und immer größer als der anfängliche Ressourcenstock ist. Dies ist in Abbildung 13 illustriert. Zusätzlich zu den selben Parametern wie in Abbildung 12 wird hierbei $x_0 = 100$ gewählt, dies würde bei der vorher gewählten Kostenfunktion $q(t) = 0 \ \forall t \geq 0$ zur Folge haben.

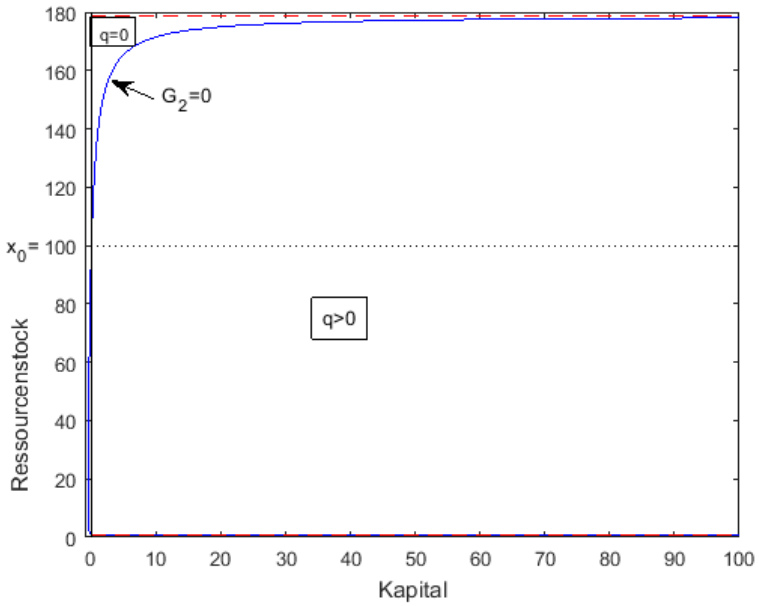


Abbildung 13: Die Funktion $G_2 = 0$ bei adaptierter Kostenfunktion
Parameterwerte: $\alpha = 0,5, \sigma = 2, c_0 = 1, c_1 = 0,01, c_2 = 0,8, c_3 = 1, x_0 = 100$
$\Rightarrow \bar{p} = 0,7937.., \underline{\bar{x}} = 0,5592.., \bar{\bar{x}} = 178,8107..$

Die rot strichlierten Linien geben wieder die beiden Schranken an. Man kann erkennen, dass für die adaptierte Kostenfunktion die obere Schranke deutlich über dem Anfangswert x_0 (gepunktete Linie) liegt.
Man beachte, dass diese neue Kostenfunktion die Überlegungen, wie sich das Modell für $q = 0$ entwickelt, nicht beeinflusst. Verändert werden der Zeitpunkt des Wechsels auf beide Energiequellen, sowie der Verlauf, wenn sowohl erneuerbare als auch nicht-erneuerbare Ressourcen verwendet werden. Die Struktur des Verlaufes, also dass, wenn man sich auf der linken Seite von G_2 befindet, q gleich Null ist, und auf der rechten Seite von G_2 $q > 0$ gilt, bleibt jedoch unverändert.

4.2.2 Der Fall $\mu > 0$

In diesem Abschnitt wollen wir die Untersuchungen von Tahvonen und Salo (2001) erweitern, indem wir auch den Fall $\mu > 0$ genauer untersuchen. Der technische Fortschritt, der die Kosten für erneuerbare Energie beeinflusst hängt nun also zusätzlich von dem Parameter μ ab. Der Unterschied zum vorigen Abschnitt ist also, dass die Kostenfunktion nun $F(s,k) = s^\sigma(\mu + k^{1-\sigma})$ statt $F(s,k) = s^\sigma k^{1-\sigma}$ lautet.
Zuerst betrachten wir wieder das Modell, wenn keine nicht-erneuerbaren Ressourcen verwendet werden ($q = 0$).
Ziel ist es nun wieder ein Differentialgleichungssystem in c und k aufzustellen.
Drückt man sich aus der Gleichung (4.16) s aus, ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= (1-\alpha)\left(\frac{k}{s}\right)^\alpha - \sigma s^{\sigma-1}(\mu + k^{1-\sigma}) \\ \Leftrightarrow s &= \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma+\alpha-1}} k^{\frac{\alpha}{\sigma+\alpha-1}}(\mu + k^{1-\sigma})^{-\frac{1}{\sigma+\alpha-1}} \\ \Leftrightarrow s &= \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma+\alpha-1}} k(\mu k^{\sigma-1} + 1)^{-\frac{1}{\sigma+\alpha-1}} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Dies setzt man nun in (4.18) ein und erhält man mit Hilfe von (4.15):

$$\begin{aligned} \dot\lambda &= \lambda\left[\delta - \alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} k^{1-\alpha}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} k^{\alpha-1}\right] \\ \Leftrightarrow \dot c &= c\frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \end{aligned} \tag{4.32}$$

Setzt man (4.31) in die Gleichung (4.2) ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot k &= k^\alpha s^{1-\alpha} - s^\sigma(\mu + k^{1-\sigma}) - c \\ \Leftrightarrow \dot k &= k^\alpha k^{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} k^\sigma(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} k^{1-\sigma} - c \\ \Leftrightarrow \dot k &= k\left[\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}\right](\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - c \\ \Leftrightarrow \dot k &= k(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - c \end{aligned} \tag{4.33}$$

Proposition 6. *Das Gleichungssystem*

$$\dot{c} = c\frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \tag{6.49}$$

$$\dot{k} = k(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - c \tag{6.50}$$

hat die beiden stationären Punkte $S_1(0/0)$ *und* $S_2(D^{\frac{1}{\sigma-1}}E\mu^{-\frac{1}{\sigma-1}}/D^{\frac{1}{\sigma-1}}\mu^{-\frac{1}{\sigma-1}})$.
Wobei $D = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma} - 1$ *und* $E = \frac{\delta}{\alpha\sigma}(\sigma+\alpha-1)$ *gilt.*

Setzt man $\sigma \geq 2$ *voraus, gilt außerdem:*
Die beiden Eigenwerte von S_1 *sind:*

$$\lambda_{11} = \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \tag{6.51}$$

$$\lambda_{12} = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1) \tag{6.52}$$

Die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten lauten:

$$\tau_{11} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1) - \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von S_2 *sind die Lösungen der Gleichung:*

$$0 = \lambda^2 - \left\{\frac{\delta(\sigma+\alpha-1)}{\alpha\sigma} - \left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right](\sigma-1)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{1-\alpha}}\right\}\lambda$$
$$- \frac{\sigma-1}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right]\alpha^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}}\delta^{\frac{\sigma+1-\alpha}{1-\alpha}} \tag{6.53}$$

Beweis. Siehe Anhang 6.3 □

Wie im vorigen Abschnitt ist es entscheidend, ob die marginale Produktivität des Kapitals (P_k) größer als die Diskontierungsrate (δ) ist. Unter anderem bestimmt dies, ob D größer oder kleiner als Null ist:

$$
\begin{aligned}
D &> 0 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1 &> 0 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} &> 1 \\
\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\delta}\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} &> 1 \\
\Leftrightarrow \alpha\left(\frac{\sigma}{1-\alpha}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} &> \delta \\
\Leftrightarrow P_k &> \delta
\end{aligned}
$$

Durch die selben Umformungen kann man folgern, dass auch

$$D < 0 \Leftrightarrow P_k < \delta$$

und

$$D = 0 \Leftrightarrow P_k = \delta$$

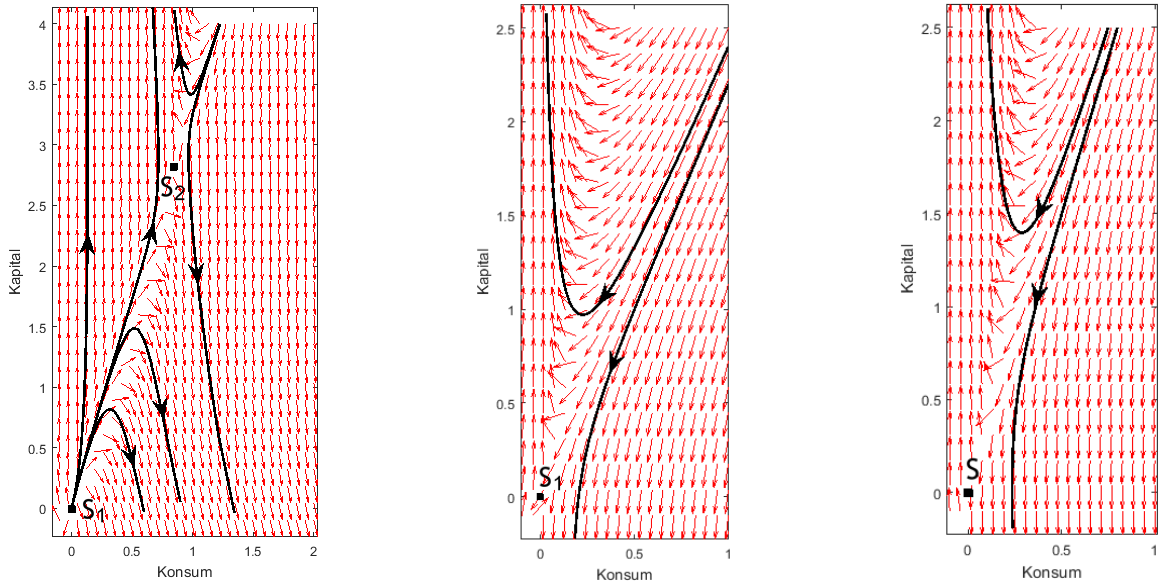
gilt.

Betrachten wir zuerst den Fall $P_k > \delta$. Dieser ist (mit den Parametern $\alpha = 0,5, \sigma = 2, \delta = 0,2, a = 0,5, \mu = 1$) in Abbildung 14a zu sehen.
In diesem Fall ist λ_{11} positiv. λ_{12} ist immer größer als Null. S_1 ist also ein abstoßender Knoten.
Nun wenden wir uns dem zweiten stationären Punkt zu. Da sowohl D als auch E größer als Null sind, hat $S_2(D^{\frac{1}{\sigma-1}} E \mu^{-\frac{1}{\sigma-1}} / D^{\frac{1}{\sigma-1}} \mu^{-\frac{1}{\sigma-1}})$ zwei positive Einträge.
Für die Konstante der quadratischen Gleichung (6.53) gilt:

$$-\frac{\sigma-1}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right] \alpha^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}} \delta^{\frac{\sigma+1-\alpha}{1-\alpha}} < 0$$

Wendet man nun die kleine Lösungsformel $\left(x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right) - c}\right)$ auf diese Gleichung an, ist daher die Wurzel der Diskriminante immer größer als der Term davor ($-\frac{p}{2} < \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right) - c}$), da $c < 0$ gilt. Somit gilt immer $\lambda_{21} < 0$ und $\lambda_{22} > 0$. Es handelt sich bei S_2 daher um einen Sattelpunkt.

Betrachtet man Abbildung 14a, kann man erkennen, dass die Trajektorien die in den Punkt S_2 führen das Phasenportrait in zwei Bereiche teilen. Ist der Anfangspunkt unter diesen, wird das Kapital in endlicher Zeit Null, was, wie bereits erwähnt, nicht erwünscht ist. Startet man über diesen Trajektorien strebt das Kapital gegen Unendlich, der Konsum strebt jedoch für $t \to \infty$ gegen Null. Bei vorgegebenem Anfangskapital k_0 ist c_0 daher so zu wählen, dass man sich auf der Trajektorie befindet, die in den stationären Punkt S_2 führt, da dies die einzige Möglichkeit ist, dass weder das Kapital in endlicher Zeit gleich Null wird, noch der Konsum für $t \to \infty$ gegen Null strebt.



(a) $P_k > \delta$ (b) $P_k < \delta$ (c) $P_k = \delta$

Abbildung 14: Phasenportraits für $\mu > 0$

Gilt $P_k < \delta$ folgt unmittelbar $\lambda_{11} < 0$. Der Eigenwert λ_{12} ist, wie auch im anderen Fall, positiv. S_1 ist somit ein Sattelpunkt. S_2 hat in diesem Fall, wegen $D < 0$, zwei negative Einträge und ist daher für die hier durchgeführten Untersuchungen nicht entscheidend. Das Phasenportrait für diesen Fall (mit der Parameterwahl $\alpha = 0,25, \sigma = 2, \delta = 0,2, a = 0,5, \mu = 1$) ist in Abbildung 14b illustriert.

Ist $P_k = \delta$, gibt es, weil $D = 0$ gilt, nur einen stationären Punkt $S(0/0)$. Die Eigenwerte von diesem sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} (\sigma + \alpha - 1)$ und der Eigenvektor $\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Man kann daraus schließen, dass zwei Trajektorien senkrecht vom Ursprung

Richtung $+\infty$ und $-\infty$ wegführen (da $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 > 0$ ist). Der gesamte Verlauf des Systems (mit den Parameterwerten $\alpha = 0,25, \sigma = 2, \delta = \frac{\sqrt[5]{54}}{16} = 0,1387.., a = 0,5, \mu = 1$) ist in Abbildung 14c zu sehen.

Sowohl im Fall $P_k < \delta$ (Abbildung 14b), als auch im Fall $P_k = \delta$ (Abbildung 14c) nimmt der Konsum mit der Zeit immer ab. Befinden wir uns unter der Trajektorie, die in den Ursprung führt, wird das Kapital in endlicher Zeit gleich Null. Befindet man sich auf, oder über besagter Trajektorie, ist der Konsum nicht vom Kapital abhängig. Es ist also der Anfangswert des Konsums, bei gegebenem k_0 so zu wählen, dass er möglichst groß ist, jedoch nicht unter der Trajektorie liegt, was damit gleichzusetzen ist, dass er genau darauf liegt.
In diesen beiden Fällen sinkt der Konsum also im Laufe der Zeit, allerdings kann $c(t), k(t) > 0 \ \forall t \geq 0$ erreicht werden.

Fixiert man alle Parameter außer μ, ändert sich nur der zweite stationäre Punkt, weil die Eigenwerte, und somit klarerweise auch die Eigenvektoren, nicht von μ abhängig sind. S_2 wird auf einer Geraden, die durch den Ursprung geht, verschoben, da sich die c-Koordinate und die k-Koordinate um den selben Faktor ändern. Passt man also die Skalierung an, bleibt das Phasenportrait unverändert.

In der k-x-Ebene gelten für den Wechsel vom Fall $q = 0$ auf den Fall $q > 0$ die selben Überlegungen wie im vorigen Abschnitt. Auch hier findet dieser statt wenn die Funktion $G_2 = 0$ geschnitten wird. Links von der Funktion gilt wieder $q = 0$ und rechts davon $q > 0$.

4.2.3 Ökonomische Folgerungen

Wir werden in diesem Abschnitt nur den bestmöglichen Fall, auf den sich auch Tahvonen und Salo (2001) beschränken, also $\mu = 0$ und $B > A > 0$, betrachten. Es ist also auch ohne Verwendung der nicht-erneuerbaren Ressource ein andauerndes Wachstum in Konsum und Kapital möglich.
Weiters nehmen wir für den Anfangswert der Ressourcen $\underline{\underline{x}} < x_0 < \bar{\bar{x}}$ an. Man befindet sich also entweder schon auf der rechten Seite von $G_2 = 0$, oder gelangt durch folgen des Wachstumspfades, unter ausschließlicher Verwendung der erneuerbaren Ressource, und daraus resultierendem Anstieg von k, nach endlicher Zeit dorthin. Daher kommt in die-

sem Fall immer ein Zeitpunkt, ab dem beide Energiequellen gleichzeitig benutzt werden. Für $t \to \infty$ bleibt der Abbau der nicht-erneuerbaren Ressourcen positiv, strebt jedoch gegen Null, da die optimale Lösung die Funktion G_2 nicht unterschreiten kann, weil diese von oben (mit negativer Steigung) gegen die Grenze $\underline{\underline{x}}$ strebt. Der Ressourcenstock bleibt daher immer größer als $\underline{\underline{x}}$ (siehe dazu Tahvonen und Salo (2001, S. 1393, Fig. 2(a))).
Das Kapital und der Konsum sind schon im Fall $q = 0$ monoton steigend. Dies ist auch im Fall $q > 0$ der Fall. Siehe dazu Tahvonen und Salo (2001, S.1393, Fig. 2(b) und Fig. 2(c)). Unabhängig ob die nicht-erneuerbare Ressource verwendet wird, steigen diese beiden Variablen also monoton an. Gilt $q = 0$ kann man die genauen Wachstumsraten berechnen (siehe (4.27)).

Wir wollen nun die Preisentwicklung betrachten, wenn am Beginn $q = 0$ gilt, die Kosten pro Einheit der nicht-erneuerbaren Ressource also den choke price übersteigen.
Nimmt man wieder vollständigen Wettbewerb an, entspricht der nominelle Preis der Ableitung der Produktionsfunktion nach der Energie. Für $q = 0$ erhält man also (mittels (4.20)):

$$P_e = (1-\alpha)\left(\frac{k}{s}\right)^{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow P_e = (1-\alpha)^{\frac{\sigma-1}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{\frac{\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$$

Der nominelle Preis ist also zu Beginn für $q = 0$ konstant gleich $(1-\alpha)^{\frac{\sigma-1}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{\frac{\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$. Findet schließlich ein Wechsel zu $q > 0$ statt, so sinkt der nominelle Preis, solange q steigt. Sinkt q schließlich wieder ($\dot{q} < 0$), was irgendwann passieren muss, da ja $lim_{t\to\infty}\, q(t) = 0$ gilt, steigt der nominelle Preis an und strebt für $t \to \infty$ wieder gegen $(1-\alpha)^{\frac{\sigma-1}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{\frac{\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$.

Der Realpreis (λP_e), also der Preis der Ressource bezüglich des Nutzens, ist für $q = 0$ monoton fallend, da λ monoton fallend und P_e konstant ist. Findet dann der Wechsel zu $q > 0$ statt, sinkt der Realpreis, solange q wächst, weiter an (da nun sowohl λ als auch P_e fallend sind). Sinkt q schließlich wieder, ist die genaue Entwicklung ad hoc nicht so leicht ersichtlich, für $t \to \infty$ muss der Realpreis jedoch wieder fallen, da P_e dann gegen $(1-\alpha)^{\frac{\sigma-1}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{\frac{\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$ strebt und λ weiter fällt. Die genauen Entwicklungen sind in Tahvonen und Salo (2001, S. 1393, Fig. 2(e)) zu finden.

4.3 Diskussion

Im Modell von Tahvonen und Salo (2001) kann ein andauerndes Wachstum des Konsums nur dann erreicht werden, wenn dieses auch ohne die Benutzung von nicht-erneuerbaren Ressourcen möglich ist. Um dies zu garantieren, bedarf es Einschränkungen für die Parameter. Vor allem, dass $\mu = 0$ gelten muss, es also keinen Teil der Kostenfunktion gibt, der nicht vom technologischen Fortschritt abhängt, ist eine starke Annahme. Allgemein gibt es keine Informationen im Paper, wie die Parameterwahl zustande kam. Es ist also ohne weitere Untersuchungen schwierig zu sagen, ob diese Restriktionen realitätsnah sind oder nicht.

Setzen wir die nötigen Parametereinschränkungen jedoch voraus, kann das Modell die bisherige Entwicklungen im Bereich der nichterneuerbaren Energiequellen gut beschreiben. Der Konsum steigt kontinuierlich an. Der Abbau steigt zu Beginn des Modells an, bis irgendwann der Zeitpunkt kommt, in dem der Ressourcenabbau wieder abnimmt und schließlich gegen Null strebt. Anders als in vielen anderen Modellen bleibt der Ressourcenstock hier jedoch positiv, da das Modell die Abbaukosten der nicht-erneuerbaren Energiequellen miteinbezieht. All diese Entwicklungen findet man auch in der Realität wieder, wenn man annimmt, dass der Zeitpunkt zu dem der Abbau der nicht-erneuerbaren Ressource wieder abnimmt noch nicht erreicht ist.

Den Sachverhalt, den das Modell von Tahvonen und Salo (2001) auch unter den Parameterrestriktionen nicht ganz realitätsgetreu darstellen kann, ist die Preisentwicklung. Wie schon im Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012) ist auch hier ein fallendes Realpreisniveau zu beobachten, wogegen in der Realität die Realpreise der meisten nicht-erneuerbaren Ressourcen, wie bereits erwähnt, annähernd konstant sind. Trotz dieser Diskrepanz ist die Preisentwicklung dieses Modells näher an der Realität als ein exponentielles Wachstum der Preise, welches unter anderem von den Modelle in Kapitel 2 impliziert wird.

5 Konklusion

Sowohl das Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012), als auch jedes von Tahvonen und Salo (2001) bringen neue Ansätze in das Modellieren mit nicht-erneuerbaren Ressourcen und bieten somit neue Einblicke in diesen Themenbereich. Das Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012) bezieht die in der Realität zu beobachtenden steigenden Ressourcenstöcke mit ein und in Tahvonen und Salo (2001) werden, zusätzlich zu den nicht-erneuerbaren Ressourcen, auch erneuerbare Energiequellen miteinbezogen. Ein weiterer Unterschied zu vielen anderen Modellen in diesem Themenbereich, wie auch zu dem von uns in Kapitel 2 vorgestellten Modellen ist, dass beide Modelle die Abbaukosten der nicht-erneuerbaren Ressourcen miteinbeziehen.

Beide Modelle können die Entwicklungen der für uns wichtigen Variablen besser beschreiben als die klassischen Modelle, die sich mit nicht-erneuerbaren Energiequellen beschäftigen. Das von uns in Kapitel 2 betrachtete um endogenes Wachstum erweiterte Hotelling-Modell sagt, zumindest wenn wir uns im Balanced Growth Equilibrium befinden und eine gleichbleibende Bevölkerungsgröße voraussetzen, sinkenden Ressourcenabbau, sinkende Produktion und sinkenden Konsum voraus. Die Preise steigen, egal ob wir uns im Balanced Growth Equilibrium befinden oder nicht, laut des Modells exponentiell an. Bei den beiden in Kapitel 3 und 4 betrachteten Modellen ist jedoch ein Anstieg des Abbaus, der Produktion und des Konsums, zumindest zu Beginn, möglich. Einzig das Realpreisniveau kann bei beiden Modellen nicht ganz realitätsgetreu beschrieben werden. Jedoch sind die in beiden Modellen sinkenden Realpreise wahrscheinlich realitätsnäher als die exponentiell steigenden Preise der Modelle in Kapitel 2.

Die Prognosen beider Modelle sind relativ unterschiedlich. Während im Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012), dank des steigenden Ressourcenstocks, ein gleichmäßig ansteigender Abbau der Ressource möglich ist, nimmt im Modell von Tahvonen und Salo (2001) der Abbau ab einem bestimmten Zeitpunkt wieder ab und strebt für $t \to \infty$ gegen Null, der Ressourcenstock bleibt jedoch positiv. Da aber in diesem Modell auch die Benutzung erneuerbarer Ressourcen miteinfließt, ist dennoch, wie auch im Modell von Stürmer und Schwerhoff (2012), ein steigender Konsum möglich.

Schätzungen für die Parameter zu finden, beziehungsweise zu überprüfen, ob die gewählten Parameter realistisch sind oder nicht, ist nicht Bestandteil dieser Arbeit. Es wäre jedoch interessant, diesen Punkt in späteren Arbeiten zu betrachten.

6 Anhang

6.1 Beweise zu Kapitel 2

Proposition 1. *Im BGE des obigen Modells gilt:*

$$g_R = g_S = \frac{(1-\theta)\tau + [(1-\alpha-\beta)\theta+\beta]n - (1-\alpha)\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta} \tag{6.1}$$

$$g_C = g_Y = g_K = \frac{\tau + (\beta+\theta\gamma)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta} \tag{6.2}$$

$$g_c = \frac{\tau + (\alpha+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta} \tag{6.3}$$

$$g_\lambda = -\theta \cdot \frac{\tau + (\alpha+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta} \tag{6.4}$$

$$g_\phi = \rho \tag{6.5}$$

Beweis. Zuerst wollen wir noch einmal das Modell betrachten:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c) dt \tag{6.6}$$

$$\dot{K} = Y - C - \delta K \tag{6.7}$$

$$\dot{S} = -R \tag{6.8}$$

$$Y = AK^\alpha (L)^\beta R^\gamma \tag{6.9}$$

$$L(t) = L_0 e^{nt} \Rightarrow g_L = n$$

$$A(t) = A_0 e^{\tau t} \Rightarrow g_A = \tau$$

$$\int_0^\infty R(t) \leq S_0$$

Dies führt uns zu folgender Hamilton-Funktion:

$$H = u(C) + \lambda[AK^\alpha (L)^\beta R^\gamma - C - \delta K] - \phi R$$

Mittels des Pontryaginschen Maximumsprinzips erhält man folgende Optimalitätsbedingungen:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = u'(C) - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = C^{-\theta} \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \gamma\lambda\frac{Y}{R} - \phi = 0 \tag{6.11}$$

$$\dot{\lambda} = \delta\lambda - \frac{\partial H}{\partial K} = \lambda\rho - \lambda\left(\frac{Y}{K} - \delta\right) \tag{6.12}$$

$$\dot{\phi} = \rho\phi - \frac{\partial H}{\partial S} = \rho\phi \tag{6.13}$$

Da für die Wachstumsraten von Funktionen Q und P_i der Zusammenhang

$$Q = aP_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}...P_{n-1}^{\alpha_n-1}P_n^{\alpha_n} \tag{6.14}$$

$$\Rightarrow g_Q = \frac{\dot{Q}}{Q} = \alpha_1 g_{P_1} + \alpha_2 g_{P_2} + ... + \alpha_{n-1} g_{P_{n-1}} + \alpha_n g_{P_n} \tag{6.15}$$

gilt, erhält man mittels der Gleichungen (2.14)-(2.16) sowie (6.10)-(6.13):

$$g_\lambda = -\theta g_c = \theta n - \theta g_C \tag{6.16}$$

$$g_K = \frac{Y}{K} - \frac{C}{K} - \delta \tag{6.17}$$

$$g_S = -\frac{R}{S} =: -u \qquad\qquad u \geq 0 \tag{6.18}$$

$$g_Y = \tau + \alpha g_K + \beta n + \gamma g_R \tag{6.19}$$

$$g_R = g_\lambda + g_Y - g_\phi \tag{6.20}$$

$$g_\lambda = \rho + \delta - \frac{Y}{K} \tag{6.21}$$

$$g_\phi = \rho \tag{6.22}$$

Bei Gleichung (6.16) benutzt man die Tatsache, dass aus $C = cL$ unmittelbar $g_c = g_C - n$ folgt.

Da die Wachstumsraten konstant sind, und somit in (6.21) auch die rechte Seite konstant sein muss, folgt $g_Y = g_K$. Mit dem selben Argument folgt aus und (6.17) $(g_Y =)g_K = g_C$ sowie aus (6.18) $g_S = g_R$.

Benutzt man diese Gleichheiten und außerdem die Gleichung (6.16) erhält man mittels der Gleichungen (6.19) und (6.20):

$$g_C = \frac{\gamma}{1-\alpha} g_R + \frac{\tau + \beta n}{1-\alpha}$$
$$g_R = (1-\theta) g_C + \theta n - \rho$$

Löst man dieses Gleichungssystem, erhält man:

$$g_R (= g_S) = \frac{(1-\theta)\tau + [(1-\alpha-\beta)\theta - \beta]n - (1-\alpha)\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta}$$
$$g_C (= g_Y = g_K) = \frac{\tau + (\beta + \theta\gamma)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta}$$

Daraus folgt durch $g_c = g_C - n$ und (6.16):

$$g_c = \frac{(\alpha+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta}$$
$$g_\lambda = -\theta \cdot \frac{\tau + (\alpha+\beta+\gamma-1)n - \gamma\rho}{1-\alpha-\gamma+\gamma\theta}$$

□

6.2 Beweise zu Stürmer und Schwerhoff (2012)

Proposition 2. *Bei einem positiven Ressourcenstock wird nicht in Abbau-Technologie investiert. Ist der Ressourcenstock erschöpft, wird so viel investiert, dass der neue Ressourcenstock der Abbau-Menge entspricht:*

$$X > 0 \qquad \Rightarrow S = 0$$

$$X = 0 \qquad \Rightarrow S = R$$

Beweis. Das zu maximierende Modell sieht wie folgt aus:

$$\max_{C,n,R} \int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{C^{1-\epsilon} - 1}{1-\epsilon} dt \tag{6.23}$$

$$\dot{K} = K^{\alpha} B^{1-\alpha} (1-n)^{\beta} R^{\nu} - C - ER - FS \tag{6.24}$$

$$\dot{B} = \sigma \eta n B \tag{6.25}$$

$$\dot{X} = R_t - S_t \tag{6.26}$$

$$X_t, S_t \geq 0$$

$R_t \geq 0$ wird bei den Nichtnegativitätsbedingungen weggelassen, da die Ressource ein essentieller Input der Produktionsfunktion ist.

Man erhält daher folgende Hamilton-Funktion:

$$H = u(C) + \lambda[K^{\alpha} B^{1-\alpha} (1-n)^{\beta} R^{\nu} - C - ER - FS] + \mu \eta \sigma B n + \phi(S - R) + \omega_1 S + \omega_2 X$$

Daraus erhält man mittels des Pontryaginschen Maximumprinzips folgende Optimalitätsbedingungen:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = u'(C) - \lambda = 0 \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial H}{\partial n} = -\lambda \beta K^{\alpha} B^{1-\alpha} (1-n)^{\beta-1} R^{\nu} + \mu \eta \sigma B = 0 \tag{6.28}$$

$$\frac{\partial H}{\partial R} = \lambda(\nu K^{\alpha} B^{1-\alpha} (1-n)^{\beta} R^{\nu-1} - E) - \phi = 0 \tag{6.29}$$

$$\frac{\partial H}{\partial S} = -\lambda F + \phi + \omega_1 = 0 \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \rho\lambda - \frac{\partial H}{\partial K} \\ \Leftrightarrow \dot{\lambda} &= \rho\lambda - \lambda\alpha K^{\alpha-1} B^{1-\alpha} (1-n)^{\beta} R^{\nu} \\ \Leftrightarrow \dot{\lambda} &= \rho\lambda - \lambda\alpha \frac{Y}{K} \end{aligned} \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \rho\mu - \frac{\partial H}{\partial B} \\ \Leftrightarrow \dot{\mu} &= \rho\mu - \lambda(1-\alpha) K^{\alpha} B^{-\alpha} (1-n)^{\beta} R^{\nu} - \mu\eta\sigma n \\ \Leftrightarrow \dot{\mu} &= \rho\mu - \lambda(1-\alpha)\frac{Y}{B} - \mu\eta\sigma n \end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\dot{\phi} = \rho\phi - \frac{\partial H}{\partial X}$$
$$\Leftrightarrow \dot{\phi} = \rho\phi - \omega_2 \tag{6.33}$$

$$\omega_1 S = 0 \tag{6.34}$$
$$\omega_2 X = 0 \tag{6.35}$$
$$\omega_1, \omega_2 \geq 0$$

Betrachten wir nun die Gleichung (6.30) und dividieren außerdem die Gleichungen (6.31) und (6.33) durch λ bzw ϕ, um die Wachstumsraten von λ (g_λ) und von ϕ (g_ϕ) zu erhalten:

$$-\lambda F + \phi + \omega_1 = 0 \tag{6.36}$$
$$g_\lambda = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \rho - \alpha\frac{Y}{K} \tag{6.37}$$
$$g_\phi = \frac{\dot{\phi}}{\phi} = \rho - \frac{\omega_2}{\phi} \tag{6.38}$$

Weiters verwenden wir die Nichtnegativitätsbedingungen:

$$\omega_1 \geq 0, \qquad \omega_1 S = 0$$
$$\omega_2 \geq 0, \qquad \omega_2 X = 0$$

Betrachtet man nun den Ressourcenstock, kann man zwei Fälle unterscheiden:

1.Fall: X > 0
Daraus folgt, dass $\omega_2 = 0$ gilt. Wäre nun ω_1 ebenfalls gleich 0, kann man aus (6.36) folgen, dass die Wachstumsraten übereinstimmen ($g_\lambda = g_\phi$). Dann würde aus (6.37) und (6.38) folgen, dass $\frac{Y}{K} = 0$ ist. Daher würde auch $Y = 0$ gelten, was im Gleichgewicht nicht möglich ist. Daher schließen wir $\omega_1 > 0$ und daher $S = 0$. Man erhält:

$$X > 0 \Rightarrow S = 0$$

2.Fall: X = 0

Gilt $X = 0$, wird nur soviel der nicht-erneuerbaren Ressource abbaubar gemacht, wie auch wirklich abgebaut wird. Dies ist deshalb der Fall, weil der Preis für die Erhöhung des Ressourcenstocks konstant ist (die Erhöhung um eine Einheit kostet immer S Geldeinheiten). Es macht daher ökonomisch keinen Sinn Ressourcen, die man nicht abbauen möchte, abbaubar zu machen. Daher gilt:

$$X = 0 \Rightarrow S = R$$

□

Proposition 3. *Das Gleichungssystem*

$$\dot{x} = \left[-\beta x + \frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma\right] x \tag{6.39}$$

$$\dot{z} = \left[-\left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu\right) x + z - \frac{\rho}{\epsilon}\right] z \tag{6.40}$$

hat unter der Parameterrestriktion

$$\rho > -\frac{(1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} \tag{6.41}$$

vier stationäre Punkte mit folgenden Eigenschaften:

Einen Sattelpunkt $S_1 = (0/0)$ *mit den charakteristischen Richtungen*

$\tau_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Einen abstoßenden Knoten $S_2 = (0/\frac{\rho}{\epsilon})$ *mit den charakteristischen Richtungen*

$\tau_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu}{\frac{\epsilon}{\rho}\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma-1} \end{pmatrix}$ *und* $\tau_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Einen anziehenden Knoten $S_3 = (\frac{1-\alpha}{\beta\alpha}\eta\sigma/0)$ *mit den charakteristischen Richtungen*

$\tau_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\tau_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Einen Sattelpunkt $S_4 = (x^*/z^*) = (\frac{1-\alpha}{\beta\alpha}\eta\sigma/\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)}{\beta\alpha}\eta\sigma + \frac{\rho}{\epsilon})$ *mit den charakteristischen Richtungen* $\tau_{41} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)^2(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon+(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)\rho\alpha\beta}{(1-\alpha)\beta\eta\sigma\epsilon+(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon+\rho\alpha\beta} \end{pmatrix}$ *und* $\tau_{42} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gilt umgekehrt

$$\rho < -\frac{(1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} \tag{6.42}$$

so ist S_3 ein Sattelpunkt und S_4 ein anziehender Knoten. Bei den anderen stationären Punkten ändert sich nichts.

Beweis. Die stationären Punkte erhält man, indem man

$$\dot{x} = \left[-\beta x + \frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma\right] x = 0 \tag{6.43}$$

$$\dot{z} = \left[-\left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon} - \nu\right) x + z - \frac{\rho}{\epsilon}\right] z = 0 \tag{6.44}$$

setzt. Aus der ersten Gleichung erhalten wir $x = 0$ oder $x = \frac{1-\alpha}{\beta\alpha}\eta\sigma$. Für $x = 0$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung $z = 0$ oder $z = \frac{\rho}{\epsilon}$. Im anderen Fall ergibt sich $z = 0$ oder $z = \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)}{\beta\alpha}\eta\sigma + \frac{\rho}{\epsilon}$. Daher erhalten wir folgende stationären Punkte:

$$\begin{aligned}
S_1 &= (0/0) \\
S_2 &= \left(0/\frac{\rho}{\epsilon}\right) \\
S_3 &= \left(\frac{1-\alpha}{\beta\alpha}\eta\sigma/0\right) \\
S_4 &= \left(x^*/z^*\right) = \left(\frac{1-\alpha}{\beta\alpha}\eta\sigma/\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)}{\beta\alpha}\eta\sigma + \frac{\rho}{\epsilon}\right)
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Jakobimatrix des obigen Differentialgleichungssystems:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\delta\dot{x}}{\delta x} & \frac{\delta\dot{x}}{\delta z} \\ \frac{\delta\dot{z}}{\delta x} & \frac{\delta\dot{z}}{\delta z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\beta x + \frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma & 0 \\ -(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)z & -(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)x + 2z - \frac{\rho}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Wir beginnen mit der Untersuchung des Punktes S_1. Setzt man diesen in die Jakobimatrix ein, erhält man:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma & 0 \\ 0 & -\frac{\rho}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Als nächstes berechnen wir die Eigenwerte, da diese angeben welche Art von stationärem Punkt vorliegt. Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Lösung der Gleichung

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma - \lambda\right)\left(-\frac{\rho}{\epsilon} - \lambda\right) = 0$$

Daraus ergibt sich:

$$\lambda_{11} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma$$
$$\lambda_{12} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Der erste Eigenwert ist größer als Null und der zweite kleiner, daher ist der erste stationären Punkt ein Sattelpunkt.
Die charakteristischen Richtungen der stationären Punkte entsprechen den Eigenvektoren, sind also die Lösungen der Gleichung:

$$J\tau_{ij} = \tau_{ij}\lambda_{ij} \tag{6.45}$$

Für den ersten stationären Punkt ist der Eigenvektor zum positiven Eigenwert daher gleich $\tau_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der zum negativen Eigenwert $\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Als nächstes betrachten wir den Punkt S_2. Setzt man diesen in die Jakobimatrix ein, ergibt sich:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma & 0 \\ -(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)\frac{\rho}{\epsilon} & \frac{\rho}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Daraus erhält man die Eigenwerte:

$$\lambda_{21} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma$$
$$\lambda_{22} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Beide Eigenwerte sind größer als Null, daher liegt ein abstoßender Knoten vor.
Die charakteristischen Richtungen, also die Eigenvektoren, erhält man wieder mittels der Gleichung (6.45). Man erkennt hier, dass beim ersten Eigenwert beide Einträge ungleich Null sein müssen. Da bei den Eigenvektoren nur die Richtung entscheidend ist, kann man die x-Koordinate gleich 1 setzen und erhält:

$$\tau_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)\rho\alpha}{\rho\alpha-(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon} \end{pmatrix}$$
$$\tau_{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzt man den dritten Punkt S_3 in die Jakobimatrix ein, erhält man:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma & 0 \\ 0 & \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)}{\alpha\beta}\eta\sigma - \frac{\rho}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Diese Matrix bringt uns zu den Eigenwerten:

$$\lambda_{31} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma$$
$$\lambda_{32} = \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)}{\alpha\beta}\eta\sigma - \frac{\rho}{\epsilon}$$

Klarerweise ist λ_{31} immer kleiner als Null. Der zweite Eigenwert ist kleiner Null, falls

$$\rho > \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta}$$

gilt. Dreht man das Ungleichheitszeichen um, ist dieser größer als Null. Bei S_3 handelt es sich daher um einen anziehenden Knoten, falls obige Restriktion erfüllt ist. Gilt umgekehrt $\rho < \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta}$ ist S_3 ein Sattelpunkt.
Die Eigenvektoren sind in jedem Fall:

$$\tau_{31} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\tau_{32} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Setzt man nun noch $S_4 = (x^*/z^*)$ in die Jakobimatrix ein, ergibt sich:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma & 0 \\ -\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)^2(1-\alpha)}{\beta\alpha}\eta\sigma + (1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)\frac{\rho}{\epsilon} & \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)}{\beta\alpha}\eta\sigma + \frac{\rho}{\epsilon} \end{pmatrix}$$

Definieren wir nun $v := \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)^2(1-\alpha)}{\beta\alpha}\eta\sigma + (1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)\frac{\rho}{\epsilon}$ erhält man:

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma & 0 \\ v & z^* \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind somit $\lambda_{31} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma$ und $\lambda_{32} = z^*$. λ_{31} ist laut Definition immer kleiner als Null. $\lambda_{32} = z^*$ ist größer als Null, wenn

$$\rho > \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta}$$

gilt. Der stationäre Punkt S_4 ist somit unter dieser Voraussetzung ein Sattelpunkt. Gilt bei der obigen Ungleichung umgekehrtes Ungleichheitszeichen, so ist S_4 ein anziehender Knotenpunkt.
Mit gleichen Überlegungen wie beim Punkt S_2 erhält man für die Eigenvektoren:

$$\tau_{41} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{v}{-\frac{1-\alpha}{\alpha}\eta\sigma - z^*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)^2(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon + (1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)\rho\alpha\beta}{(1-\alpha)\beta\eta\sigma\epsilon + (1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon + \rho\alpha\beta} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{42} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

□

Proposition 4. *Um im BGE sowohl positiven Konsum, als auch positive Wachstumsraten in Kapital, Produktion und Konsum zu garantieren, muss für den Diskontierungsfaktor*

$$-\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} < \rho < \frac{\eta\sigma(1-\alpha)}{\beta} \tag{6.46}$$

gelten.
Setzt man außerdem $-\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} < 1$ *voraus und fixiert alle Parameter außer* ρ*, existiert immer ein* ρ*, für das* $0 < \rho < 1$ *gilt und das die Restriktion (6.42) erfüllt.*

Beweis. Der erste Teil der Ungleichungskette ist genau die Parametereinschränkung (6.41), aus der man $z^* > 0$ und somit auch positiven Konsum folgern kann. Den zweiten Teil erhält man, wenn man die Parametereinschränkung $\eta\sigma > \frac{\beta\rho}{1-\alpha}$, die positive Waschstumsraten garantiert, nach ρ umformt.
Weiters gilt

$$\begin{aligned} -\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} &< \frac{\eta\sigma(1-\alpha)}{\beta} \\ \Leftrightarrow -\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)\epsilon}{\alpha} &< 1 \\ \Leftrightarrow 1-\frac{\epsilon}{\alpha}-\frac{\nu\epsilon}{\alpha} &< 1 \\ \Leftrightarrow \nu &< 1 \end{aligned}$$

Da $\nu < 1$ immer gilt, stimmt auch die oberste Ungleichung und aus dieser kann man sofort folgern, dass ein ρ existiert, das die Restriktion (6.46) erfüllt.
Da unabhängig von der Parameterwahl immer $\frac{\eta\sigma(1-\alpha)}{\beta} > 0$ und laut Voraussetzung $-\frac{(1-\frac{\alpha}{\epsilon}-\nu)(1-\alpha)\eta\sigma\epsilon}{\alpha\beta} < 1$ gilt, findet man sogar ein ρ für das $0 < \rho < 1$ gilt, und welches die Restriktion (6.46) erfüllt. □

6.3 Beweise zu Tahvonen und Salo (2001)

Proposition 5. *Nimmt man für die Parameter $\bar{p}^2 > 4c_0c_1$ an, erlaubt also nur positive Werte unter der Wurzel bei der Definition der Schranken, gilt:*

$$lim_{\epsilon\to 0} k|_{G_2=0}(\bar{\bar{x}} - \epsilon) = +\infty \tag{6.47}$$

$$lim_{\epsilon\to 0} k|_{G_2=0}(\underline{\underline{x}} + \epsilon) = +\infty \tag{6.48}$$

Die Funktion G_2 strebt also von oben gegen $(\underline{\underline{x}}, +\infty)$ und von unten gegen $(\bar{\bar{x}}, +\infty)$. Wenn x diese Grenzen verlässt, gilt $\bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x < 0$ und somit auch $k|_{G_2=0} < 0$.

Beweis. Wir wollen zuerst zeigen, dass für $\underline{\underline{x}} < x < \bar{\bar{x}}$ immer $\bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x > 0$ gilt. Da $k|_{G_2}$ in der Nähe der beiden Grenzen entweder gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ streben muss, folgen daraus unmittelbar die Gleichungen $k|_{G_2=0}(\bar{\bar{x}} - \epsilon) = +\infty$ und $k|_{G_2=0}(\underline{\underline{x}} + \epsilon) = +\infty$. Um zu berechnen wann $\bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x > 0$ gilt, brauchen wir folgende Äquivalenz:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + px + q < 0 \\
\Leftrightarrow & \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\
\Leftrightarrow & \pm\left(x + \frac{p}{2}\right) < \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\
\Leftrightarrow & x < -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x > -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}
\end{aligned}
$$

Daraus kann man folgern:

$$
\begin{aligned}
& \bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x > 0 \\
\Leftrightarrow & x^2 - \frac{\bar{p}}{c_1} x + \frac{c_0}{c_1} < 0 \\
\Leftrightarrow & x < \frac{\bar{p} + \sqrt{\bar{p}^2 - 4c_0c_1}}{2c_1} \vee x > \frac{\bar{p} - \sqrt{\bar{p}^2 - 4c_0c_1}}{2c_1}
\end{aligned}
$$

Dies sind genau die vorher betrachteten Grenzen. $\bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x$ ist also genau dann positiv, wenn x zwischen der unteren Grenze ($\underline{\bar{x}}$)und der oberen Grenze ($\bar{\bar{x}}$) liegt. Daher gilt für die Funktion $k|_{G_2}$:

$$
\begin{aligned}
k|_{G_2=0}(\bar{\bar{x}} - \epsilon) &= +\infty \\
k|_{G_2=0}(\underline{\underline{x}} + \epsilon) &= +\infty
\end{aligned}
$$

Liegt x nicht zwischen diesen Grenzen, muss daher $\bar{p} - \frac{c_0}{x} - c_1 x < 0$ und somit auch $k|_{G_2=0} < 0$ gelten. □

Proposition 6. *Das Gleichungssystem*

$$
\dot{c} = c\frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \tag{6.49}
$$

$$
\dot{k} = k(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - c \tag{6.50}
$$

hat die beiden stationären Punkte $S_1(0/0)$ *und* $S_2(D^{\frac{1}{\sigma-1}}E\mu^{-\frac{1}{\sigma-1}}/D^{\frac{1}{\sigma-1}}\mu^{-\frac{1}{\sigma-1}})$.
Wobei $D = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma} - 1$ *und* $E = \frac{\delta}{\alpha\sigma}(\sigma+\alpha-1)$ *gilt.*

Setzt man $\sigma \geq 2$ voraus, gilt außerdem:
Die beiden Eigenwerte von S_1 sind:

$$\lambda_{11} = \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \tag{6.51}$$

$$\lambda_{12} = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1) \tag{6.52}$$

Die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten lauten:

$$\tau_{11} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1) - \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte von S_2 sind die Lösungen der Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = \lambda^2 - \left\{\frac{\delta(\sigma+\alpha-1)}{\alpha\sigma} - \left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right](\sigma-1)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{1-\alpha}}\right\}\lambda \\ - \frac{\sigma-1}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right]\alpha^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}}\delta^{\frac{\sigma+1-\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{6.53}$$

Beweis. Um die stationären Punkte zu berechenen, setzen wir zuerst $\dot{c}$ gleich Null. Es ergeben sich folgende zwei Möglichkeiten:

$$c = 0 \tag{6.54}$$

oder

$$\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\left(\mu k^{\sigma-1}+1\right)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta = 0 \tag{6.55}$$

Im Fall $c = 0$ folgt, nach dem Einsetzen in $\dot{k} = 0$, dass auch $k = 0$ gelten muss.
Dies bringt uns zum ersten stationären Punkt:

$$S_1(0/0) \tag{6.56}$$

Im zweiten Fall erhält man durch Ausdrücken von k aus der Gleichung (6.55):

$$k = \left[\left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1 \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \mu^{-\frac{1}{\sigma-1}} \tag{6.57}$$

Eine Folgerung die wir nun öfters brauchen ist, wenn

$$k = \left[\left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1 \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \mu^{-\frac{1}{\sigma-1}}$$

gilt, dann folgt daraus:

$$(\mu k^{\sigma-1} + 1) = \mu \left[\left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1 \right] \frac{1}{\mu} + 1 = \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} \tag{6.58}$$

Setzt man nun (6.57) in die Gleichung $\dot{k} = 0$ ein, erhält man, unter der Benutzung von (6.58):

$$\begin{aligned}
& c = k(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} (\sigma+\alpha-1)(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \\
\Leftrightarrow\ & c = \left[\left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1 \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \mu^{-\frac{1}{\sigma-1}} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} (\sigma+\alpha-1) \frac{\delta}{\alpha} \frac{1-\alpha}{\sigma}^{-\frac{1-\alpha}{\sigma-\alpha-1}} \\
\Leftrightarrow\ & c = \left[\left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1 \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \frac{\delta}{\alpha\sigma} (\sigma+\alpha-1) \mu^{-\frac{1}{\sigma-1}}
\end{aligned} \tag{6.59}$$

Definiert man nun $D := \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1$ und $E := \frac{\delta}{\alpha\sigma}(\sigma+\alpha-1)$ kann man den zweiten stationären Punkt als:

$$S_2(D^{\frac{1}{\sigma-1}} E \mu^{-\frac{1}{\sigma-1}} / D^{\frac{1}{\sigma-1}} \mu^{-\frac{1}{\sigma-1}})$$

anschreiben.

Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen des Gleichungssystems und erhalten:

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} = \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} &= c\frac{1}{a}\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\left(-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}\right)(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma-1)\mu k^{\sigma-2} = \\ &= -\frac{\alpha(1-\sigma)}{a(\sigma+\alpha-1)}(1-\alpha)^{\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\mu c k^{\sigma-2}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} &= (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \\ &- k(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma-1)\mu k^{\sigma-2} = \\ &= (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \\ &\left(-\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma-1)\mu k^{\sigma-1}(\mu k^{\sigma-1}+1)^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}\end{aligned}$$

Setzt man nun zuerst $S_1(0/0)$ in die Jakobimatrix $J = \begin{pmatrix} \frac{\delta\dot{c}}{\delta c} & \frac{\delta\dot{c}}{\delta k} \\ \frac{\delta\dot{k}}{\delta c} & \frac{\delta\dot{k}}{\delta k} \end{pmatrix}$ ein, ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] & 0 \\ -1 & (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1) \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass hier $\frac{\partial \dot{c}}{\partial k}$ nur dann gleich Null ist, wenn die angenommene Voraussetzung $\sigma \geq 2$ eingehalten wird.
Die beiden Eigenwerte von S_1 sind also:

$$\begin{aligned}\lambda_{11} &= \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \\ \lambda_{12} &= (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}\sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}}(\sigma+\alpha-1)\end{aligned}$$

Da die Eigenvektoren die Lösungen der Gleichung $J\tau_{1i} = \tau_{1i}\lambda_{1i}$ sind, lauten diese:

$$\tau_{11} = \begin{pmatrix} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} (\sigma+\alpha-1) - \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um die Jakobimatrix im Punkt S_2 zu erhalten, setzt man (6.57) und (6.59) in die partiellen Ableitungen des Systems ein und erhält, wieder unter Verwendung von (6.58):

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} = \frac{1}{a}\left[\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} - \delta\right] =$$
$$= \frac{1}{a}\left[\delta - \delta\right] = 0$$

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial k} = -\frac{\alpha(\sigma-1)}{a(\sigma+\alpha-1)}(1-\alpha)^{\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} \sigma^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \mu \left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \frac{\delta}{\alpha\sigma}(\sigma+\alpha-1)\mu^{-\frac{1}{\sigma-1}}$$
$$\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right]^{\frac{\sigma-2}{\sigma-1}} \mu^{\frac{\sigma-2}{\sigma-1}} \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{1-\alpha}} \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} =$$
$$= -\frac{\sigma-1}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right] \alpha^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}} \delta^{\frac{\sigma+1-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial c} = -1$$

$$\frac{\partial \dot{k}}{\partial k} = (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}} \sigma^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} (\sigma+\alpha-1)\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{-1} \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{-\frac{1-\alpha}{\sigma+\alpha-1}}$$
$$- \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} (\sigma-1)\mu \left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right] \frac{1}{\mu}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{1-\alpha}} \left(\frac{1-\alpha}{\sigma}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma+\alpha-1}} =$$
$$= \frac{\delta(\sigma+\alpha-1)}{\alpha\sigma} - \left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right](\sigma-1)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{1-\alpha}}$$

Die Jakobimatrix im Punkt S_2 ist daher:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sigma-1}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right] \alpha^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}} \delta^{\frac{\sigma+1-\alpha}{1-\alpha}} \\ -1 & \frac{\delta(\sigma+\alpha-1)}{\alpha\sigma} - \left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}} \frac{1-\alpha}{\sigma} - 1\right](\sigma-1)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{1-\alpha}} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind die Lösungen der Gleichung

$$
\begin{aligned}
-\lambda\left\{\frac{\delta(\sigma+\alpha-1)}{\alpha\sigma}-\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma}-1\right](\sigma-1)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{1-\alpha}}-\lambda\right\} \\
-\frac{\sigma-1}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma}-1\right]\alpha^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}}\delta^{\frac{\sigma+1-\alpha}{1-\alpha}}=0 \\
\Leftrightarrow \lambda^2-\left\{\frac{\delta(\sigma+\alpha-1)}{\alpha\sigma}-\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma}-1\right](\sigma-1)\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{\sigma}{1-\alpha}}\right\}\lambda \\
-\frac{\sigma-1}{a}\left[\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{\frac{\sigma+\alpha-1}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\sigma}-1\right]\alpha^{-\frac{\sigma}{1-\alpha}}\delta^{\frac{\sigma+1-\alpha}{1-\alpha}}=0
\end{aligned}
$$

□

Literatur

[1] R. J. Barro and X. Sala-i Martin. *Economic Growth.* McGraw-Hill, New York, 2004.

[2] P. Dasgupta and G. M. Heal. The optimal deplation of exhaustible resources. *Review of Economic Studies 41, Symposium, 3-28*, 1974.

[3] A. Fürnkranz-Prskawetz. 175.868 AKVWL Umwelt- und Bevölkerungsökonomie. Vorlesung TU Wien, 2011.

[4] C. Groth. *Sustainable Resource Use and Economic Dynamics*, chapter 7. A New-Growth Perspective on Non-Renewable Resources, pages 127–163. Springer, 2007.

[5] C. Mistlbauer. Nicht-erneuerbare Resourcen in endogenen Wachstumsmodellen. Master's thesis, Technische Universitaet Wien, 2013.

[6] C. Schmid. Optimale Kontrolle von Emissionen versus Investitionen in grüne Technologien. Master's thesis, Technische Universitaet Wien, 2011.

[7] R. M. Solow. Intergenerational equity and exhaustible resources. *Review of Economic Studies 41, Symposium Issue, 29-45*, 1974.

[8] J. Stiglitz. Growth with exhaustible natural resources: Efficient and optimal growth paths. *Review of Economic Studies 41, Symposium Issue, 123-137*, 1974a.

[9] J. Stiglitz. Growth with exhaustible natural resources: The competitive economy. *Review of Economic Studies 41, Symposium Issue, 139-52*, 1974b.

[10] M. Stürmer and G. Schwerhoff. Non-renewable but inexhaustible - resources in an endogenous growth model. *Max Plank Society*, 2012.

[11] H. Suzuki. On the possibility of steadily growing per capita consumption in an economy with a wasting and non-replenishable resource. *Review of Economic Studies 43, 527-35*, 1976.

[12] O. Tahvonen and S. Salo. Economic growth and transition between renewable and nonrenewable energy resources. *European Economic Review*, 2001.

[13] V. Veliov. 105.536 AKOR Dynamische Optimierung. Vorlesung TU Wien, 2011.

[14] World Resources. A report by the world resources institute in collaboration with the united nations environment and development programs. Technical report, Oxford University Press, New York, 1994.