



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

Vienna University of Technology

# DIPLOMARBEIT

## Thiele'sche Differentialgleichung

Ausgeführt am Institut für  
Stochastik und Wirtschaftsmathematik  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von  
Univ.Prof. Dr. Thorsten Rheinländer

durch

Petra Halász, BSc  
Bräuhausgasse 59/32  
1050 Wien

Wien, 15. November 2017

---

Unterschrift (Student)

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe, und dass ich die Stellen der Arbeit, einschließlich Tabellen und Abbildungen, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Wien, am 15. November 2017

---

Unterschrift

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor Thorsten Rheinländer für die Betreuung meiner Abschlussarbeit bedanken. Er hatte stets ein offenes Ohr für meine Fragen und ich konnte immer auf seine Ratschläge zählen. Herzlichen Dank!

Auch bei meinen Studienkollegen möchte ich mich für die gegenseitige Unterstützung während des gesamten Studiums bedanken. Ein besonderer Dank geht an Christiane Elgert für die Tipps für das Schreiben einer Abschlussarbeit.

Nicht zuletzt gilt mein Dank auch meiner Familie und meinen Freunden, die immer besonders viel Geduld mit mir hatten. Danke, dass ich immer auf euch zählen kann.

## Zusammenfassung

Diese Arbeit gibt einen kurzen Überblick über  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten und leitet dann die Thiele'schen Differentialgleichungen für den Wertprozess einer Versicherung, deren Zustandsprozess durch eine  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette modelliert wird, her. Als konkretes Beispiel werden zwei Versicherungstarife abgebildet, eine Berufsunfähigkeitsversicherung und eine Arbeitslosenversicherung. Beide dieser Modelle profitieren von den Eigenschaften der  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten, dass sie einen zusätzlichen Unsicherheitsfaktor in der Intensitätsmatrix haben, indem dieser Faktor die im aktuellen Zustand verbrachte Zeit abbilden kann. Für diese Beispiele wird anhand bestimmter Parameterannahmen eine numerische Berechnung der Reserve durchgeführt um die Wichtigkeit der Thiele'schen Differentialgleichungen zu illustrieren. Weiters wird zur Veranschaulichung gezeigt, wie man solche Probleme in Betrachtung diskreter Zeit anhand herkömmlicher Markovketten lösen kann und somit die Notwendigkeit  $\mathbb{F}$ -doppelstochastischer Markovketten bei Betrachtung der stetigen Zeit angedeutet.

## Abstract

This thesis gives a short review of  $\mathbb{F}$ -doubly stochastic Markov chains and uses its properties to derive the Thiele's differential equations for the value process of an insurance which state process is modelled by a  $\mathbb{F}$ -doubly stochastic Markov chain. As concrete examples we demonstrate two insurance products, a disability insurance and an unemployment insurance. Both cases use the fact that  $\mathbb{F}$ -doubly stochastic Markov chains have got an additional uncertainty factor in their intensity matrix, as this factor can model the time the process is already spending in the actual state. Some assumptions of the parameter of the mentioned insurance products are made, to make a numerical calculation of the reserve possible and to illustrate the importance of Thiele's differential equations. Furthermore it is shown how the above insurance products could be modeled in consideration of discrete time markov chains, in order to emphasize the necessity of  $\mathbb{F}$ -doubly stochastic Markov chains in a continuous time setting.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie der <math>\mathbb{F}</math>-doppelstochastische Markovketten</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Thiele'sche Differentialgleichungen</b>	<b>5</b>
3.1	Das Modell . . . . .	5
3.2	Thiele'sche Differentialgleichungen . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>16</b>
4.1	Modell einer Berufsunfähigkeitsversicherung . . . . .	16
4.1.1	Das Modell . . . . .	16
4.1.2	Die Thiele'schen Differentialgleichungen . . . . .	19
4.1.3	Numerische Berechnung . . . . .	19
4.1.4	Analogon im diskreten Fall . . . . .	26
4.2	Modell einer Arbeitslosenversicherung . . . . .	27
4.2.1	Das Modell . . . . .	27
4.2.2	Die Thiele'schen Differentialgleichungen . . . . .	29
4.2.3	Numerische Berechnung . . . . .	29
4.2.4	Analogon im diskreten Fall . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Konklusion</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Anhang Berufsunfähigkeitsversicherung</b>	<b>37</b>
<b>B</b>	<b>Anhang Arbeitslosenversicherung</b>	<b>41</b>

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit werden die Thiele'schen Differentialgleichungen für  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten [4] hergeleitet und anschließend zwei konkrete Versicherungstarife modelliert und numerisch ausgewertet.  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten sind ein Konstrukt das zwar ähnlich definiert ist wie herkömmliche Markovketten in stetiger Zeit, allerdings mit einer zusätzlichen Quelle der Ungewissheit in der Intensitätsmatrix. Somit stellt diese Klasse von Prozessen eine Verallgemeinerung dar und herkömmliche Markovketten sind ein Spezialfall dieser Klasse. Die bereits erwähnten Thiele'schen Differentialgleichungen beschreiben die Entwicklung der zustandsabhängigen prospektiven Reserve. Diese wiederum ist der erwartete Barwert des Zahlungsstromes, mit anderen Worten die Höhe der Reservenforderungen, also die Summe der zukünftig erwarteten Leistungen des Versicherungsunternehmens abzüglich der zukünftig erwarteten Beiträge des Versicherungsnehmers. Bei dieser Größe handelt es sich um den Betrag, den der Versicherer für seine zukünftigen Verpflichtungen, die aus dem abgeschlossenen Vertrag resultieren, in einer bestimmten Art und Weise beiseite gelegt haben muss. Anhand dieser Größe kann wegen dem Nettoäquivalenzprinzip auch ein fairer Preis für das betrachtete Versicherungsprodukt bestimmt werden.

Im Kapitel 2 werden wichtige Resultate aus [4] präsentiert, unter anderem die Definition der  $\mathbb{F}$ -doppelstochastischen Markovketten, wichtige Eigenschaften solcher Prozesse und wichtige Sätze über diese, die für unsere Folgerungen in den weiteren Kapiteln notwendig sind.

Im Kapitel 3 werden die Thiel'schen Differentialgleichungen aufgestellt und bewiesen. Zusätzlich wird die Formel für den zweiten Moment des Barwertes für zukünftige Zahlungen hergeleitet. Für beide Beweise wird ein Martingalansatz verwendet.

Im Kapitel 4 werden zwei konkrete Versicherungsprodukte modelliert, mit einigen Parameterannahmen versehen und anschließend numerisch untersucht: Einerseits eine Berufsunfähigkeitsversicherung, bei der die Reaktivierungswahrscheinlichkeit also die Übergangswahrscheinlichkeit vom berufsunfähigen Zustand in den aktiven Zustand, mit der im berufsunfähigen Zustand verbrachte Zeit immer geringer wird, andererseits eine Arbeitslosenversicherung mit einer Karenzzeit bevor eine eventuelle Leistung fällig wird. Die Umsetzung des numerischen Verfahrens in diesem Kapitel erfolgt in R Version 3.4.0 auf einer Microsoft Windows 10 Plattform. Wichtige Abschnitte des R Programmes werden ebenfalls in diesem Kapitel vorgestellt.

Betrachtet man die angeführten zwei oder andere ähnlich strukturierte Beispiele in diskreter Zeit, kann man diese sogar mit herkömmlichen Markovketten modellieren. Bei diskreten Markovketten kann man die Zeit, die der Prozess im Zustand verbracht hat, messen, indem man den Zustand in viele Teilzustände zerlegt und diese miteinander durch entsprechend angesetzte Übergänge verkettet. Voraussetzung dafür ist, dass man nur endlich viele Teilzustände braucht, was jedoch automatisch gegeben ist, da einerseits die Zeit als diskret angenommen wird, andererseits der betrachtete Zeithorizont endlich ist. Der endliche Zeithorizont ist bei temporären Versicherungen durch die endliche Vertragsdauer gegeben, aber auch bei lebenslangen Versicherungen kann man aufgrund der Natur des menschlichen Lebens einen Höchstalter annehmen.

Wechselt man die Betrachtung der Zeit auf stetig, wird es zu einer Herausforderung die im Zustand verbrachte Zeit zu messen. In jedem noch so kleinen Zeitintervall befinden sich überabzählbar viele Zeitpunkte, somit kommt eine Zerlegung des Zustandes als Lösung nicht in Frage. In den Beispielen in Kapitel 4 wird gezeigt wie eine Stoppzeit, die den Zeitpunkt des letzten Zustandswechsels darstellt, verwendet werden kann, um die im Zustand verbrachte Zeit auch bei Betrachtung der stetigen Zeit ermitteln und verwenden zu können. In dieser Arbeit wurden  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten eingesetzt, um diese Stoppzeit als die zusätzliche Quelle des Zufalls in der Intensitätsmatrix in die Modellierung mit einbeziehen zu können.

Damit der Vergleich der Lösungen bei diskreter beziehungsweise stetiger Zeitbetrachtung anschaulich wird, werden bei den Anwendungsbeispielen jeweils die diskreten Analoga ebenso als Zustandsdiagramm dargestellt. Auf die Aufstellung der Thiele'schen Differentialgleichungen und auf die numerische Berechnung der zustandsabhängigen prospektiven Reserven wird für die Beispiele in diskreter Zeit jedoch verzichtet.

## 2 Theorie der $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten

In diesem Kapitel werden die benötigten Ergebnisse aus dem Paper “A class of  $\mathbb{F}$ -doubly stochastic Markov chains“ [4] wiederholt. Diese sind für die Herleitung der Thiele’schen Differentialgleichungen für  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten nötig. Die Notationen werden in den weiteren Kapiteln dieser Arbeit analog verwendet. Leser, die an Beweisen oder an weiteren Details von dieser Klasse von Prozessen interessiert sind, seien auf das oben genannte Paper verwiesen.

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, mit einer Menge  $\Omega$ , einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  aus Teilmengen von  $\Omega$  und einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$ . Desweiteren sei  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  eine Filtration, das heißt eine monoton wachsende Folge von  $\sigma$ -Algebren, die Teil- $\sigma$ -Algebren von  $\mathcal{A}$  enthalten. Diese Filtration wird als Referenzfiltration dienen. Für grundlegende Definitionen und Aussagen der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie sei auf [5] verwiesen. Jakubowski und Niewęłowski definieren in [4] die Klasse der  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten folgendermaßen:

**Definition 2.1** ( $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette).

*Ein càdlàg Prozess  $C$  heißt  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette mit Zustandsraum  $\mathcal{K} \subset \mathbb{Z}$ , falls eine Familie von stochastische Matrizen  $P(s, t) = (p_{ij}(s, t))_{i, j \in \mathcal{K}}$  existiert, so dass*

1.  $P(s, t)$   $\mathcal{F}_t$ -messbar ist und  $P(s, \cdot)$  progressiv messbar ist.
2.  $\forall t \geq s \geq 0, \forall i, j \in \mathcal{K}: \mathbb{P}(C_t = j | \mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{F}_s^C) \mathbb{1}_{\{C_s = i\}} = \mathbb{1}_{\{C_s = i\}} p_{ij}(s, t)$

$P$  heißt dann bedingte Übergangswahrscheinlichkeitsprozess von  $C$ .

Wie man leicht sieht, sind die Markovketten ein Spezialfall der  $\mathbb{F}$ -doppelstochastischen Markovketten, nämlich die, bei denen  $\mathcal{F}_\infty$  trivial ist. Tatsächlich kann eine Verbindung zu Markovketten hergestellt werden, wie folgende Proposition beschreibt:

**Proposition 2.2.**

*Falls der Prozess  $C$  eine  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette ist, dann ist  $C$  eine  $\mathbb{F}$ -bedingte  $\mathbb{F} \vee \mathbb{F}^C$ -Markovkette.*

Es werden zwei Prozesse eingeführt, die von dem Zustand beziehungsweise der Veränderung des Zustandes des Prozesses  $C$  abhängig sind. Dafür sind aber Übergangsintensitäten notwendig, die wie folgt definiert sind.

**Definition 2.3** (Übergangsintensitäten).

*Eine  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette  $C$  besitzt eine Intensität, falls es einen  $\mathbb{F}$ -adaptierten matrixwertigen Prozess  $\Lambda = (\Lambda(s))_{s \geq 0} = (\lambda_{i,j}(s))_{s \geq 0}$  gibt, so dass*



1.  $\Lambda$  lokal integrierbar ist,

2.  $\Lambda$  folgende Bedingungen erfüllt:

(a)  $\lambda_{i,j}(s) \geq 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{K}$

(b)  $\lambda_{i,i}(s) = -\sum_{j \neq i} \lambda_{i,j}(s) \quad \forall i \in \mathcal{K}$

(c)  $\Lambda$  erfüllt die Kolmogorov Rückwärtsgleichung, das heißt

$$\forall v \leq t : P(v, t) - Id = \int_v^t \Lambda(u) P(u, t) du$$

(d)  $\Lambda$  erfüllt die Kolmogorov Vorwärtsgleichung, das heißt

$$\forall v \leq t : P(v, t) - Id = \int_v^t P(v, u) \Lambda(u) du.$$

Um eine bestimmte Martingaleigenschaft der hier untersuchten Prozesse beschreiben zu können, werden der Zustandsindikatorprozess und der Zustandswechselzählprozess benötigt.

**Definition 2.4** (Zustandsindikatorprozess).

$H_t^j := \mathbb{1}_{\{C_t=j\}}$  ist der Zustandsindikator des Prozesses  $C$  und gibt an, ob sich  $C$  zum Zeitpunkt  $t$  im Zustand  $j$  befindet oder nicht.

**Definition 2.5** (Zustandswechselzählprozess).

$H_t^{ij} := \int_0^t H_{u-}^i dH_u^j$  ist der Zustandswechselzählprozess von  $C$  und zählt, wie oft  $C$  im Intervall  $[0, t]$  vom Zustand  $i$  in Zustand  $j$  wechselt.

Ein ganz wesentliches Resultat ist, dass der Prozess  $H_t^{ij}$  so kompensiert werden kann, dass er bestimmte Martingaleigenschaften erhält. Die folgende Proposition ist ein wichtiger Punkt bei der Herleitung der Thiele'schen Differentialgleichungen für die betrachtete Klasse von Prozessen:

**Proposition 2.6** (Martingaleigenschaft).

$$M_t^{ij} := H_t^{ij} - \int_0^t H_s^i \lambda_{ij}(s) ds$$

ist ein  $(\mathcal{F}_\infty \vee \mathcal{F}_t^C)$ -Martingal.

### 3 Thiele'sche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel werden die Thiele'schen Differentialgleichungen für die  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten hergeleitet. Die Thiele'schen Differentialgleichungen beschreiben die Entwicklung der zustandsabhängigen prospektiven Reserve in der Änderung der Zeit. Außer dieser Differentialgleichung ist für die Berechnung der Reserve eine Endbedingung pro Zustand nötig, die bei Modellen für Lebensversicherungen meist einfach gegeben ist.

Als Vorlage für die Herleitung des gewünschten Resultates wird ein Beweis von Ragnar Norberg genommen aus "Differential equations for moments of present values in life insurance" [8]. Norberg beweist die Formel für beliebige Momente der zustandsabhängigen Reserve für herkömmliche Markovketten. Sein Beweis verwendet die Martingaleigenschaft des Zustandswechselzählprozesses (Vgl. Proposition 2.6) und die Markoveigenschaft des Zustandprozesses. Diese Eigenschaft möchten wir auch im Beweis für die  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten nutzen. Allerdings gilt, dass  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten nur  $\mathbb{F}$ -bedingt  $\mathbb{F} \vee \mathbb{F}^C$ -Markovketten sind. Diese Eigenschaft muss bei der Definition des Wertprozesses berücksichtigt werden. Das Modell aus [8] wird mit der soeben beschriebenen nötigen Abänderung, beziehungsweise Anpassungen an die bisherige Notation übernommen.

#### 3.1 Das Modell

Der im vorigen Kapitel behandelte Prozess  $C$  beschreibt die zeitliche Entwicklung des Zustandes einer Versicherung. Zustände könnten zum Beispiel aktiv, inaktiv, tot, usw. sein. Sei  $r_t$  die Zinsrate zum Zeitpunkt  $t$ . Dann lässt sich der Abzinsungsfaktor zum Zeitpunkt  $t$  darstellen als  $v_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$ . Daraus schließen wir sofort auf

$$dv_t = -v_t r_t dt.$$

Sei der Prozess  $B$  der von dem Vertrag erzeugter Zahlungsstrom (vorzeichenbehaftete Summe der Einnahmen und Ausgaben). Eine Auszahlung  $b_t^j$  erfolgt, falls sich der Vertrag im Zeitpunkt  $t$  in Zustand  $j$  befindet (dh. zum Beispiel ist  $b_t^j$  negativ, falls sie die Prämienzahlung darstellen soll), während  $b_t^{jk}$  dann ausgezahlt wird, falls der Vertrag zum Zeitpunkt  $t$  von Zustand  $j$  in Zustand  $k$  wechselt. Somit ist  $B$  gegeben durch

$$dB_t = \sum_j H_t^j b_t^j dt + \sum_{j \neq k} b_t^{jk} dH_t^{jk}$$

Um diese Eigenschaft verwenden zu können, wird der Wertprozess betrachtet, der durch  $C_t \vee \mathcal{F}_t$  beschränkt ist, also zusätzlich zum aktuellen Zustand auch durch die Referenzfiltration. Die zustandsabhängige Reserve  $V_t^j$  definiert sich, für einen sich zum Zeitpunkt  $t$

im Zustand  $j$  befindenden Prozess als bedingter Erwartungswert, der auf den Zeitpunkt  $t$  abgezinsten zukünftigen Zahlungen  $\frac{1}{v_t} \int_t^T v_\tau dB_\tau$ , also

$$V_t^j := \mathbb{E} \left[ \int_t^T \exp^{-\int_t^\tau r_u du} dB_\tau \middle| C_t = j \vee \mathcal{F}_t \right].$$

Dabei steht  $T$  für die Vertragslaufzeit. Durch die zusätzliche Beschränkung durch die Referenzfiltration wird sichergestellt, dass die Markoveigenschaft verwendet werden kann. Für den Beweis sind weiters die Größen

$$\tilde{V}_t^j := v_t V_t^j = \mathbb{E} \left[ \int_t^T v_\tau dB_\tau \middle| C_t = j \vee \mathcal{F}_t \right],$$

auch prospektive Reserve genannt und

$$U_t := \int_0^t v_\tau dB_\tau = \sum_j U_t H_t^j$$

die sogenannte retrospektive Reserve notwendig. In dieser Arbeit wird mit der Annahme gearbeitet, dass  $b_t^j$  und  $b_t^{jk}$  stückweise stetige Funktionen sind.

### 3.2 Thiele'sche Differentialgleichungen

**Proposition 3.1** (Thiele'sche Differentialgleichungen).

Für oben beschriebene Prozesse gilt folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dV_t^j}{dt} = r_t V_t^j - b_t^j - \sum_{j \neq k} \lambda_t^{jk} (b_t^{jk} + V_t^k - V_t^j) \quad (1)$$

$$V_T^j = 0 \forall j \in \mathcal{K} \quad (2)$$

#### Bemerkung 3.2.

Die Endbedingungen bei den Thiele'sche Differentialgleichungen hängen von der Art der Versicherung ab. Handelt es sich um eine kapitalbildende Versicherung, zum Beispiel um eine reine Erlebensversicherung, so muss zum Versicherungsablauf der auszuzahlende Betrag reserviert sein, und somit  $V_T$  mit entsprechender Betrag angesetzt werden. Im Gegensatz dazu, falls der Versicherungsunternehmen zu Versicherungsablauf keine monetären Verpflichtungen gegenüber dem Versicherungsnehmer mehr hat, ist die benötigte Reserve zum Zeitpunkt  $T$  gleich null.

*Beweis.* Aus der Definition des Abzinsungsfaktors folgt  $\frac{v_\tau}{v_t} = \exp(-\int_t^\tau r_u du)$ . Der Wert

der zukünftigen Zahlungen zum Zeitpunkt  $t$  ist  $\frac{1}{v_t} \int_t^T v_\tau dB_\tau$ . Sei

$$M_t := \mathbb{E} \left[ \int_0^T v_\tau dB_\tau \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^C \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t v_\tau dB_\tau \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^C \right] + \mathbb{E} \left[ \int_t^T v_\tau dB_\tau \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^C \right]$$

wobei letzte Summand der Vertragswert ist. Wegen der  $\mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^C$ -messbarkeit von  $\int_0^t v_\tau dB_\tau$  gilt  $\mathbb{E}[\int_0^t v_\tau dB_\tau | \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^C] = \int_0^t v_\tau dB_\tau = U_t$ . Aus der Tatsache, dass  $C$  eine  $\mathbb{F}$ -bedingte  $\mathbb{F} \vee \mathbb{F}^C$ -Markovkette ist, folgt

$$\mathbb{E} \left[ \int_t^T v_\tau dB_\tau \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{F}_t^C \right] = \mathbb{E} \left[ \int_t^T v_\tau dB_\tau \middle| \mathcal{F}_t \vee C_t \right] = \sum_j \tilde{V}_t^j H_t^j.$$

Mit Hilfe von diesen Ergebnissen, lässt sich  $M_t$  folgendermaßen darstellen:

$$M_t = \sum_j U_t H_t^j + \sum_j \tilde{V}_t^j H_t^j.$$

Die Martingaleigenschaften von  $M_t$  und  $M_t^{jk}$  werden verwendet, in dem die Differenzen dieser Martingale betrachtet werden. Diese Differenz führt wegen bestimmten, weiter unten angeführten, Eigenschaften zur gesuchte Formel. Dazu untersucht man zunächst  $dM_t$ . Es gilt

$$dM_t = d\left(\sum_j \tilde{V}_t^j H_t^j\right) + d\left(\sum_j U_t H_t^j\right) \quad (3)$$

Es werden die Summanden der letzten Gleichung einzeln betrachtet. Wegen  $d\bar{H}_t^j=0$  erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} d\left(\sum_j \tilde{V}_t^j H_t^j\right) &= \sum_j d(\tilde{V}_t^j H_t^j) = \\ &= \sum_j (\tilde{V}_t^j d\bar{H}_t^j + H_t^j d\tilde{V}_t^j + H_t^j \tilde{V}_t^j - H_{t-}^j \tilde{V}_{t-}^j) = \\ &= \sum_j (H_t^j d\tilde{V}_t^j + H_t^j \tilde{V}_t^j - H_{t-}^j \tilde{V}_{t-}^j) \end{aligned} \quad (4)$$

und

$$\begin{aligned} d\left(\sum_j U_t H_t^j\right) &= \sum_j d(U_t H_t^j) = \sum_j (U_t d\bar{H}_t^j + H_t^j dU_t + U_t H_t^j - U_{t-} H_{t-}^j) \\ &= \sum_j (H_t^j dU_t + U_t H_t^j - U_{t-} H_{t-}^j), \end{aligned} \quad (5)$$

wobei  $\bar{\cdot}$  der stetiger Anteil des Prozesses ist.

Aufgrund der Zusammensetzung des Zahlungsstromes gilt  $d\bar{U}_t = v_t \sum_k H_t^k b_t^k dt$ . Weiters gilt  $H_t^k H_t^j = H_t^j \delta_{jk}$ , wobei  $\delta_{jk}$  das Kronecker-Delta bezeichnet und genau dann 1 ist, wenn  $j = k$  und sonst 0. Damit lässt sich (5) wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} d\left(\sum_j U_t H_t^j\right) &= \sum_j \left(v_t \sum_k H_t^k b_t^k dt H_t^j + U_t H_t^j - U_{t-} H_{t-}^j\right) = \\ &= \sum_j \left(v_t H_t^j b_t^j dt + U_t H_t^j - U_{t-} H_{t-}^j\right) \end{aligned}$$

Die Sprünge in (4) haben die Form

$$\sum_{j \neq k} (\tilde{V}_t^k - \tilde{V}_{t-}^j) dH_t^{jk},$$

wogegen Sprünge in (5) die Form

$$\sum_{j \neq k} ((U_{t-} + v_t b_t^{jk}) - U_{t-}) dH_t^{jk}$$

haben.

Somit kann man Gleichungen (4) und (5) darstellen als

$$d\left(\sum_j \tilde{V}_t^j H_t^j\right) = \sum_j \left(H_t^j d\tilde{V}_t^j + \sum_{j \neq k} (\tilde{V}_t^k - \tilde{V}_t^j) dH_t^{jk}\right)$$

beziehungsweise

$$d\left(\sum_j U_t H_t^j\right) = \sum_j \left(v_t H_t^j b_t^j dt + \sum_{j \neq k} ((U_{t-} + v_t b_t^{jk}) - U_{t-}) dH_t^{jk}\right).$$

Wir definieren  $\tilde{b}_t^j := v_t b_t^j$  und  $\tilde{b}_t^{jk} := v_t b_t^{jk}$ . Aus dieser Schreibweise folgt, dass

$$d\left(\sum_j U_t H_t^j\right) = \sum_j \left(H_t^j \tilde{b}_t^j dt + \sum_{j \neq k} ((U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk}) - U_{t-}) dH_t^{jk}\right).$$

Einfügen in (3) führt zu

$$dM_t = \sum_j \left(H_t^j d\tilde{V}_t^j + H_t^j \tilde{b}_t^j dt + \sum_{j \neq k} ((\tilde{V}_t^k - \tilde{V}_t^j) + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk}) - U_{t-}) dH_t^{jk}\right)$$

Aus dem ersten Kapitel ist bekannt, dass  $dM_t^{jk} = dH_t^{jk} - H_t^j \lambda_t^{jk} dt$  ein Martingal für  $j \neq k$  ist.

Man betrachtet folgenden Differenz:

$$\begin{aligned}
dM_t - \sum_{k \neq j} (\tilde{V}_t^k - \tilde{V}_t^j + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk}) - U_{t-}) dM_t^{jk} &= \\
= \sum_j (H_t^j d\tilde{V}_t^j + H_t^j \tilde{b}_t^j dt + \sum_{j \neq k} (\tilde{V}_t^k - \tilde{V}_t^j + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk}) - U_{t-}) H_t^j \lambda_t^{jk} dt) &= \\
= \sum_j H_t^j (d\tilde{V}_t^j + \tilde{b}_t^j dt + \sum_{j \neq k} (\tilde{V}_t^k - \tilde{V}_t^j + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk}) - U_{t-}) \lambda_t^{jk} dt) &
\end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Differenz von Martingalen, somit muss auch die rechte Seite ein Martingal sein. Dieses Martingal ist konstant, da es vorhersehbar und von beschränkter Variation ist (Vergleich [1, Seite 190, Corollary 8.2.14]). Weiters gilt  $U_{t-} dt = U_t dt$ . Es folgt, dass die Inkremente null sein müssen.

$$\forall j \in \mathcal{K} : \quad 0 \stackrel{!}{=} \tilde{b}_t^j dt + d\tilde{V}_t^j + \sum_{k \neq j} (\tilde{V}_t^k \lambda_t^{jk} dt + \tilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk} dt + U_t \lambda_t^{jk} dt) - \tilde{V}_t^j \lambda_t^{j \cdot} dt - U_t \lambda_t^{j \cdot} dt, \quad (6)$$

wobei  $\lambda_t^{j \cdot} := \sum_{k \neq j} \lambda_t^{jk}$ .

Durch die Anwendung von Ito's Formel auf  $\tilde{V}_t^j$  erhalten wir

$$d\tilde{V}_t^j = -v_t r_t dt V_t^j + v_t dV_t^j$$

Mittels Umformung folgt, dass

$$\frac{dV_t^j}{dt} = \frac{1}{v_t} \frac{d\tilde{V}_t^j}{dt} + r_t V_t^j. \quad (7)$$

Umformen von Gleichung (6) auf  $\frac{d\tilde{V}_t^j}{dt}$  und Einsetzen in obige Gleichung führt zu der gewünschten Formel (1).

$$\begin{aligned}
\frac{dV_t^j}{dt} &= V_t^j \lambda_t^{j \cdot} - b_t^j - \sum_{k \neq j} (V_t^k \lambda_t^{jk} + b_t^{jk} \lambda_t^{jk}) + r_t V_t^j = \\
&= (r_t + \lambda_t^{j \cdot}) V_t^j - b_t^j - \sum_{k \neq j} (V_t^k \lambda_t^{jk} + b_t^{jk} \lambda_t^{jk})
\end{aligned}$$

□

Ähnlich funktioniert der Beweis für den zweiten bedingten Moment des Barwertes der zukünftigen Zahlungen  $\frac{1}{v_t} \int_t^T v_\tau dB_\tau$ .

**Proposition 3.3.**

Für  $V_t^{(2)j} := \mathbb{E}[(\int_t^T \exp^{-\int_t^\tau r_u du} dB_\tau)^2 \mid C_t = j \vee \mathcal{F}_t]$  gilt

$$\frac{dV_t^{(2)j}}{dt} = (2r_t + \lambda_t^{j\cdot})V_t^{(2)j} - 2b_t^j V_t^{(1)j} - \sum_{j \neq k} \lambda_t^{jk} (V_t^{(2)k} + 2b_t^{jk} V_t^{(1)k} + (b_t^{jk})^2) \quad (8)$$

*Beweis.* Sei  $\tilde{V}_t^{(2)j} := v_t^2 V_t^{(2)j} = \mathbb{E}[(\int_t^T v_\tau dB_\tau)^2 \mid C_t = j \vee \mathcal{F}_t]$ . Weiters definieren wir

$$M_t^{(2)} := \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T v_\tau dB_\tau\right)^2 \mid F_t \vee F_t^C\right].$$

Sei  $U_t$  wie im Beweis von Proposition 3.1 definiert. Damit lässt sich  $M_t^{(2)}$  folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} M_t^{(2)} &= \mathbb{E}\left[\left(U_t + \int_t^T v_\tau dB_\tau\right)^2 \mid F_t \vee F_t^C\right] = \\ &= \mathbb{E}[U_t^2 \mid F_t \vee F_t^C] + 2\mathbb{E}\left[U_t \int_t^T v_\tau dB_\tau \mid F_t \vee F_t^C\right] + \mathbb{E}\left[\left(\int_t^T v_\tau dB_\tau\right)^2 \mid F_t \vee F_t^C\right] \end{aligned}$$

Wegen der  $F_t \vee F_t^C$ -messbarkeit von  $U_t$ , und der Makroveigenschaft gilt somit

$$M_t^{(2)} = \sum_j (U_t^2 H_t^j + 2U_t H_t^j \tilde{V}_t^{(1)j} + H_t^j \tilde{V}_t^{(2)j})$$

Aufgrund der Linearität des Differentialoperators gilt

$$dM_t^{(2)} = d\left(\sum_j H_t^j \tilde{V}_t^{(2)j}\right) + 2d\left(\sum_j U_t H_t^j \tilde{V}_t^{(1)j}\right) + d\left(\sum_j U_t^2 H_t^j\right) \quad (9)$$

Wir betrachten wieder die einzelnen Summanden separat. Damit und mit  $d\overline{H}_t^j = 0$  gilt

$$\begin{aligned} d\left(\sum_t H_t^j \widetilde{V}_t^{(2)j}\right) &= \sum_j d(\widetilde{V}_t^{(2)j} H_t^j) = \\ &= \sum_j (\widetilde{V}_t^{(2)j} d\overline{H}_t^j + H_t^j d\widetilde{V}_t^{(2)j} + H_t^j \widetilde{V}_t^{(2)j} - H_{t-}^j \widetilde{V}_{t-}^{(2)j}) = \\ &= \sum_j (H_t^j d\widetilde{V}_t^{(2)j} + H_t^j \widetilde{V}_t^{(2)j} - H_{t-}^j \widetilde{V}_{t-}^{(2)j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\left(\sum_j U_t^2 H_t^j\right) &= \sum_j (2U_t d\overline{U}_t H_t^j + U_t^2 d\overline{H}_t^j + U_t^2 H_t^j - U_{t-}^2 H_{t-}^j) = \\ &= \sum_j (2U_t d\overline{U}_t H_t^j + U_t^2 H_t^j - U_{t-}^2 H_{t-}^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\left(\sum_j U_t H_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j}\right) &= \sum_j d(U_t H_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j}) = \\ &= \sum_j (d(\overline{U_t H_t^j}) \widetilde{V}_t^{(1)j} + U_t H_t^j d\widetilde{V}_t^{(1)j} + U_t H_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j} - U_{t-} H_{t-}^j \widetilde{V}_{t-}^{(1)j}) = \\ &= \sum_j (H_t^j d\overline{U}_t \widetilde{V}_t^{(1)j} + U_t H_t^j d\widetilde{V}_t^{(1)j} + U_t H_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j} - U_{t-} H_{t-}^j \widetilde{V}_{t-}^{(1)j}) \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt dabei wegen der Produktregel.

Einsetzen in (9) führt zu

$$\begin{aligned} dM_t^{(2)} &= \sum_j (H_t^j d\widetilde{V}_t^{(2)j} + H_t^j \widetilde{V}_t^{(2)j} - H_{t-}^j \widetilde{V}_{t-}^{(2)j} + 2U_t d\overline{U}_t H_t^j + U_t^2 H_t^j - U_{t-}^2 H_{t-}^j + \\ &\quad + 2\widetilde{V}_t^{(1)j} H_t^j d\overline{U}_t + 2U_t H_t^j d\widetilde{V}_t^{(1)j} + 2U_t H_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j} - 2U_{t-} H_{t-}^j \widetilde{V}_{t-}^{(1)j}) \end{aligned} \quad (10)$$

Es wird analog zum Beweis von Proposition 3.1 die Differenz von  $M_t^{(2)}$  und dem Vielfachen von den  $M_t^{jk}$  betrachtet. Diese Differenz soll wegen besondere Eigenschaften auf die Formel führen. Als erstes untersucht man wieder die Summanden separat. Wegen der Zusammensetzung des Zahlungsstromes ist  $d\overline{U}_t = v_t \sum_k H_t^k b_t^k dt$ . Weiters gilt für die Indikatorfunktion  $I_t$  folgende Gleichung  $I_t^k I_t^j = I_t^j \delta_t^{jk}$ . Somit gelten folgende Aussagen für zwei der obigen Summanden

$$2U_t d\overline{U}_t H_t^j = 2U_t v_t \sum_k H_t^k b_t^k dt H_t^j = 2U_t v_t H_t^j b_t^j dt$$



und

$$2\tilde{V}_t^{(1)j} H_t^j d\bar{U}_t = 2\tilde{V}_t^{(1)j} H_t^j v_t b_t^j dt.$$

Für die Summanden, welche die Sprünge darstellen gilt

$$H_t^j \tilde{V}_t^{(2)j} - H_{t-}^j \tilde{V}_{t-}^{(2)j} = \sum_{j \neq k} (\tilde{V}_t^{(2)k} - \tilde{V}_{t-}^{(2)j}) dH_t^{jk},$$

$$2U_t H_t^j \tilde{V}_t^{(1)j} - 2U_{t-} H_{t-}^j \tilde{V}_{t-}^{(1)j} = 2 \sum_{j \neq k} ((U_{t-} + v_t b_t^{jk}) \tilde{V}_t^{(1)k} - U_{t-} \tilde{V}_{t-}^{(1)j}) dH_t^{jk},$$

$$U_t^2 H_t^j - U_{t-}^2 H_{t-}^j = \sum_{j \neq k} ((U_{t-} + v_t b_t^{jk})^2 - U_{t-}^2) dH_t^{jk}.$$

Diese Ergebnisse in Gleichung (10) eingesetzt, liefert

$$\begin{aligned} dM_t^{(2)} &= \sum_j \left( H_t^j d\tilde{V}_t^{(2)j} + 2U_t H_t^j v_t b_t^j dt + 2\tilde{V}_t^{(1)j} H_t^j v_t b_t^j dt + 2U_t H_t^j d\tilde{V}_t^{(1)j} + \right. \\ &+ \sum_{j \neq k} (\tilde{V}_t^{(2)k} - \tilde{V}_{t-}^{(2)j} + 2(U_{t-} + v_t b_t^{jk}) \tilde{V}_t^{(1)k} - 2U_{t-} \tilde{V}_{t-}^{(1)j} + \\ &\left. + (U_{t-} + v_t b_t^{jk})^2 - U_{t-}^2) dH_t^{jk} \right) \end{aligned}$$

Wir definieren  $\tilde{b}_t^j := v_t b_t^j$  und  $\tilde{b}_t^{jk} := v_t b_t^{jk}$  und erhalten somit

$$\begin{aligned} dM_t^{(2)} &= \sum_j \left( H_t^j d\tilde{V}_t^{(2)j} + 2U_t H_t^j \tilde{b}_t^j dt + 2\tilde{V}_t^{(1)j} H_t^j \tilde{b}_t^j dt + 2U_t H_t^j d\tilde{V}_t^{(1)j} + \right. \\ &+ \sum_{j \neq k} (\tilde{V}_t^{(2)k} - \tilde{V}_{t-}^{(2)j} + 2(U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk}) \tilde{V}_t^{(1)k} - 2U_{t-} \tilde{V}_{t-}^{(1)j} + \\ &\left. + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})^2 - U_{t-}^2) dH_t^{jk} \right) \end{aligned}$$

Wir definieren wie im vorigem Kapitel  $M_t^{jk}$  über  $dM_t^{jk} = dH_t^{jk} - H_t^j \lambda_t^{jk} dt$ . Laut Proposition 2.6 ist dann  $M_t^{jk}$  ein Martingal für  $\forall k \neq j \in \mathcal{K}$ .

Wir ziehen von  $dM_t^{(2)}$  wieder ein Vielfaches von  $dM_t^{jk}$  ab und erhalten ein Martingal.

$$\begin{aligned}
& dM_t^{(2)} - \sum_{j \neq k} \left\{ \tilde{V}_t^{(2)k} - \tilde{V}_{t-}^{(2)j} + 2(U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})\tilde{V}_t^{(1)k} - 2U_{t-}\tilde{V}_{t-}^{(1)j} + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})^2 - U_{t-}^2 \right\} dM_t^{jk} \\
&= \sum_j \left\{ H_t^j \left( \overline{\tilde{V}}_t^{(2)j} + 2\tilde{b}_t^j \tilde{V}_t^{(1)j} dt + 2U_t d\overline{\tilde{V}}_t^{(1)j} + 2U_t \tilde{b}_t^j dt \right) \right. \\
&\quad + \sum_{k \neq j} \left( \tilde{V}_t^{(2)k} - \tilde{V}_{t-}^{(2)j} + 2(U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})\tilde{V}_t^{(1)k} - 2U_{t-}\tilde{V}_{t-}^{(1)j} + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})^2 - U_{t-}^2 \right) dH_t^{jk} \\
&\quad - \sum_{k \neq j} \left( \tilde{V}_t^{(2)k} - \tilde{V}_{t-}^{(2)j} + 2(U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})\tilde{V}_t^{(1)k} - 2U_{t-}\tilde{V}_{t-}^{(1)j} + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})^2 - U_{t-}^2 \right) dH_t^{jk} \\
&\quad \left. + \sum_{k \neq j} \left( \tilde{V}_t^{(2)k} - \tilde{V}_{t-}^{(2)j} + 2(U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})\tilde{V}_t^{(1)k} - 2U_{t-}\tilde{V}_{t-}^{(1)j} + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})^2 - U_{t-}^2 \right) \lambda_t^{jk} H_t^j dt \right\} \\
&= \sum_j H_t^j \left( d\overline{\tilde{V}}_t^{(2)j} + 2\tilde{b}_t^j \tilde{V}_t^{(1)j} dt + 2U_t d\overline{\tilde{V}}_t^{(1)j} + 2U_t \tilde{b}_t^j dt \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j \neq k} \lambda_t^{jk} (\tilde{V}_t^{(2)k} - \tilde{V}_{t-}^{(2)j} + 2(U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})\tilde{V}_t^{(1)k} - 2U_{t-}\tilde{V}_{t-}^{(1)j} + (U_{t-} + \tilde{b}_t^{jk})^2 - U_{t-}^2) dt \right)
\end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine Summe (beziehungsweise Differenz) aus Martingalen, somit muss auch die rechte Seite ein Martingal sein. Dieses Martingal ist konstant, da es vorhersehbar und von beschränkter Variation ist (Vergleich [1, Seite 190, Corollary 8.2.14]) und muss somit Inkremente gleich null haben. Weiters gilt  $U_{t-}dt = U_t dt$ . Man folgert, dass die Inkremente null sein müssen und schließt auf:

$$\begin{aligned}
\forall j \in \mathcal{K} : 0 &\stackrel{!}{=} d\overline{\tilde{V}}_t^{(2)j} + 2\tilde{b}_t^j \tilde{V}_t^{(1)j} dt + 2U_t d\overline{\tilde{V}}_t^{(1)j} + 2U_t \tilde{b}_t^j dt + \\
&\quad + \sum_{k \neq j} (\tilde{V}_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \tilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + 2\tilde{b}_t^{jk} \tilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + (U_t + \tilde{b}_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk}) dt \\
&\quad - \tilde{V}_t^{(2)j} \lambda_t^{j\cdot} dt - 2U_t \tilde{V}_t^{(1)j} \lambda_t^{j\cdot} dt - U_t^2 \lambda_t^{j\cdot} \\
&= d\overline{\tilde{V}}_t^{(2)j} + 2\tilde{b}_t^j \tilde{V}_t^{(1)j} dt + 2U_t d\overline{\tilde{V}}_t^{(1)j} + 2U_t \tilde{b}_t^j dt + \\
&\quad + \sum_{j \neq k} (\tilde{V}_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \tilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + 2\tilde{b}_t^{jk} \tilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + \\
&\quad + U_t^2 \lambda_t^{jk} + 2U_t \tilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk} + (\tilde{b}_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk}) dt.
\end{aligned} \tag{11}$$

Es gilt  $d\overline{\tilde{V}}_t^{(2)j} = -2v_t^2 r_t dt V_t^{(2)j} + v_t^2 dV_t^{(2)j}$  und somit

$$\frac{dV_t^{(2)j}}{dt} = \frac{1}{v_t^2} \frac{d\overline{\tilde{V}}_t^{(2)j}}{dt} + 2r_t V_t^{(2)j}. \tag{12}$$

Durch das Herausheben von  $U_t^2 \lambda_t^{jk}$  aus der Summe der letzten Zeile von Gleichung (11) und Umformung auf  $\frac{d\widetilde{V}_t^{(2)j}}{dt}$  erhalt man.

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{V}_t^{(2)j}}{dt} &= \widetilde{V}_t^{(2)j} \lambda_t^{j\cdot} + 2U_t \widetilde{V}_t^{(1)j} \lambda_t^{j\cdot} + U_t^2 \lambda_t^{j\cdot} - 2\widetilde{b}_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j} - 2U_t \frac{d\widetilde{V}_t^{(1)j}}{dt} - 2U_t \widetilde{b}_t^j \\
&\quad - \sum_{j \neq k} \{ \widetilde{V}_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + 2\widetilde{b}_t^{jk} \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \widetilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk} + \\
&\quad + (\widetilde{b}_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk} \} - U_t^2 \lambda_t^{j\cdot} \\
&= \widetilde{V}_t^{(2)j} \lambda_t^{j\cdot} + 2U_t \widetilde{V}_t^{(1)j} \lambda_t^{j\cdot} - 2\widetilde{b}_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j} - 2U_t \frac{d\widetilde{V}_t^{(1)j}}{dt} - 2U_t \widetilde{b}_t^j - \sum_{j \neq k} (\widetilde{V}_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + \\
&\quad + 2U_t \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + 2\widetilde{b}_t^{jk} \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \widetilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk} + (\widetilde{b}_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk}).
\end{aligned} \tag{13}$$

Durch Umformen der Gleichung (6) aus dem Beweis von Proposition 3.1 auf  $\frac{d\widetilde{V}_t^{(1)j}}{dt}$  erhalten wir

$$\frac{d\widetilde{V}_t^{(1)j}}{dt} = \widetilde{V}_t^{(1)j} \lambda_t^{j\cdot} - \widetilde{b}_t^j - \sum_{k \neq j} (\widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + \widetilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk})$$

Einsetzen in Gleichung (13) liefert

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{V}_t^{(2)j}}{dt} &= \widetilde{V}_t^{(2)j} \lambda_t^{j\cdot} + 2U_t \widetilde{V}_t^{(1)j} \lambda_t^{j\cdot} - 2\widetilde{b}_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j} - 2U_t (\widetilde{V}_t^{(1)j} \lambda_t^{j\cdot} - \widetilde{b}_t^j \\
&\quad - \sum_{k \neq j} (\widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + \widetilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk})) - 2U_t \widetilde{b}_t^j - \sum_{j \neq k} (\widetilde{V}_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + \\
&\quad + 2\widetilde{b}_t^{jk} \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \widetilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk} + (\widetilde{b}_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk}) \\
&= \widetilde{V}_t^{(2)j} \lambda_t^{j\cdot} + 2U_t \widetilde{V}_t^{(1)j} \lambda_t^{j\cdot} - 2\widetilde{b}_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j} \lambda_t^{j\cdot} + 2U_t \widetilde{b}_t^j - 2U_t \widetilde{b}_t^j \\
&\quad - \sum_{k \neq j} (-2U_t \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} - 2U_t \widetilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk} + \widetilde{V}_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + \\
&\quad + 2\widetilde{b}_t^{jk} \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + 2U_t \widetilde{b}_t^{jk} \lambda_t^{jk} + (\widetilde{b}_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk}) \\
&= \widetilde{V}_t^{(2)j} \lambda_t^{j\cdot} - 2\widetilde{b}_t^j \widetilde{V}_t^{(1)j} - \sum_{k \neq j} (\widetilde{V}_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + 2\widetilde{b}_t^{jk} \widetilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + (\widetilde{b}_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk})
\end{aligned} \tag{14}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (14) in Gleichung (12) erhalten wir die gewünschte Formel:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_t^{(2)j}}{dt} &= \frac{1}{v_t^2} (\tilde{V}_t^{(2)j} \lambda_t^{j\cdot} - 2\tilde{b}_t^j \tilde{V}_t^{(1)j} - \sum_{k \neq j} (\tilde{V}_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + 2\tilde{b}_t^{jk} \tilde{V}_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + (\tilde{b}_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk})) + \\
&\quad + 2r_t V_t^{(2)j} \\
&= V_t^{(2)j} \lambda_t^{j\cdot} - 2b_t^j V_t^{(1)j} - \sum_{k \neq j} (V_t^{(2)k} \lambda_t^{jk} + 2b_t^{jk} V_t^{(1)k} \lambda_t^{jk} + (b_t^{jk})^2 \lambda_t^{jk}) + 2r_t V_t^{(2)j} \\
&= (2r_t + \lambda_t^{j\cdot}) V_t^{(2)j} - 2b_t^j V_t^{(1)j} - \sum_{k \neq j} \lambda_t^{jk} (V_t^{(2)k} + 2b_t^{jk} V_t^{(1)k} + (b_t^{jk})^2).
\end{aligned}$$

□

## 4 Anwendungsbeispiele

### 4.1 Modell einer Berufsunfähigkeitsversicherung

#### 4.1.1 Das Modell

Für das Beispiel einer Berufsunfähigkeitsversicherung betrachten wir das Beispiel aus [2, Example 8.5, Seite 246], mit einer Änderung, damit wir von den Eigenschaften  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten profitieren können. Beim erwähnten Modell unterscheidet man die Zustände aktiv (0), berufsunfähig (1) und tot (2), also  $\mathcal{K} = \{0, 1, 2\}$ . Zu Versicherungsbeginn befindet sich der Versicherungsnehmer im aktiven Zustand. Im Gegensatz zum Beispiel aus [2] möchte man die Übergänge so modellieren, dass die Übergangintensität von berufsunfähig nach aktiv nicht nur vom Alter der versicherten Person abhängt, sondern mit zunehmender Dauer im Zustand berufsunfähig abnimmt. Sei  $\mu_t^{ij}$  die Übergangintensität für den Wechsel von Zustand  $i$  in Zustand  $j$  zum Zeitpunkt  $t$ , somit ergibt sich folgendes Diagramm:

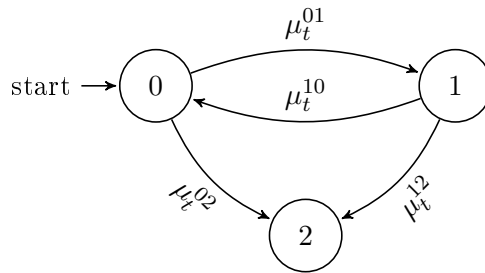


Abbildung 1: Zustandsdiagramm der Berufsunfähigkeitsversicherung

wobei die Intensitäten wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}
 \mu_t^{01} &= a_1 + b_1 \exp(c_1(x+t)), \\
 \mu_t^{10} &= 0.1\mu_t^{01} \exp(-(t-\tau_t)), \\
 \mu_t^{02} &= a_2 + b_2 \exp(c_2(x+t)), \\
 \mu_t^{12} &= \mu_t^{02}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Hierbei seien  $a_1 := 4 \times 10^{-4}$ ,  $b_1 := 3.4674 \times 10^{-6}$ ,  $c_1 := 0.138155$ ,  $a_2 := 5 \times 10^{-4}$ ,  $b_2 := 7.5858 \times 10^{-5}$ ,  $c_2 := 0.087498$  und  $\tau_t$  sei der Zeitpunkt des letzten Zustandswechsels vor  $t$ , das heißt  $\tau_t := \max\{s \leq t | C_s \neq C_{s-}\}$ , wobei  $(C_s)_{s \geq 0}$  der Prozess ist, der die Zustände für die versicherte Person zu den verschiedenen Zeitpunkten darstellt. Somit beschreibt  $(t - \tau_t)$  die Verweildauer im aktuellen Zustand.

Während sich die versicherte Person im aktiven Zustand befindet, muss sie eine Prämie mit konstanter Prämienrate  $P$  zahlen. Sollte die Person vor der Maturität in den berufsunfähigen Zustand kommen, bekommt sie eine Rente mit konstanter Rate  $B$  ausgezahlt. Stirbt die versicherte Person vor der Maturität, wird eine einmalige Ablebensleistung  $S$  ausbezahlt.

Um die Thiele'schen Differentialgleichungen anwenden können, muss man zunächst zeigen, dass es sich bei dem obigen Modell tatsächlich um eine  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette handelt. Dafür wird mittels Kolmogorov'scher Vorwärtsgleichung ein System von Differentialgleichungen für die Übergangswahrscheinlichkeiten aufgestellt. Wir zeigen, dass eine Lösung mit den gewünschten Eigenschaften existiert.

Aus dem Graph leitet sich folgende Matrix ab

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -(\mu_t^{01} + \mu_t^{02}) & \mu_t^{01} & \mu_t^{02} \\ \mu_t^{10} & -(\mu_t^{10} + \mu_t^{12}) & \mu_t^{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Anwendung der Kolmogorov'schen Vorwärtsgleichung liefert folgendes System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, t) = P(v, t) \Lambda(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(v, t) & p_{01}(v, t) & p_{02}(v, t) \\ p_{10}(v, t) & p_{11}(v, t) & p_{12}(v, t) \\ p_{20}(v, t) & p_{21}(v, t) & p_{22}(v, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\mu_t^{01} + \mu_t^{02}) & \mu_t^{01} & \mu_t^{02} \\ \mu_t^{10} & -(\mu_t^{10} + \mu_t^{12}) & \mu_t^{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei gilt  $p_{20}(v, t) = p_{21}(v, t) = 0$  und  $p_{22}(v, t) = 1$  für  $\forall v \leq t$ , da der Zustand tot absorbierend ist. Das Alter der versicherten Person bei Versicherungsbeginn wird mit  $x$  bezeichnet.

Das System der Differentialgleichungen ausgeschrieben als einzelne Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} p_{00}(v, t) &= -(\mu_t^{01} + \mu_t^{02})p_{00}(v, t) + 0.1\mu_t^{01} \exp(-(t - \tau_t))p_{01}(v, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{01}(v, t) &= \mu_t^{01}p_{00}(v, t) - (\mu_t^{10} + \mu_t^{12})p_{01}(v, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{02}(v, t) &= \mu_t^{02}p_{00}(v, t) + \mu_t^{12}p_{0,1}(v, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{10}(v, t) &= -(\mu_t^{01} + \mu_t^{02})p_{10}(v, t) + \mu_t^{10}p_{11}(v, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{11}(v, t) &= \mu_t^{01}p_{10}(v, t) - (\mu_t^{10} + \mu_t^{12})p_{11}(v, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{12}(v, t) &= \mu_t^{02}p_{10}(v, t) + \mu_t^{12}p_{11}(v, t) \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{20}(v, t) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{21}(v, t) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t} p_{21}(v, t) &= 0
\end{aligned}$$

Da der Zustand tot ein absorbierender Zustand ist, gelten  $p_{20}(v, t) = p_{21}(v, t) = 0$  und  $p_{22}(v, t) = 1$ .

Somit muss man die Lösbarkeit von

$$dP_t = b(t, P_t)dt$$

zeigen, wobei  $P_t := (p_{00}(v, t), p_{01}(v, t), p_{02}(v, t), p_{10}(v, t), p_{11}(v, t), p_{12}(v, t), 0, 0, 1)^T$  und

$$b(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -(\mu_t^{01} + \mu_t^{02})x_1 + 0.1\mu_t^{01} \exp(-(t - \tau_t))x_2 \\ \mu_t^{01}x_1 - (\mu_t^{10} + \mu_t^{12})x_2 \\ \mu_t^{02}x_1 + \mu_t^{12}x_2 \\ -(\mu_t^{01} + \mu_t^{02})x_4 + \mu_t^{10}x_5 \\ \mu_t^{01}x_4 - (\mu_t^{10} + \mu_t^{12})x_5 \\ \mu_t^{02}x_4 + \mu_t^{12}x_5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^9.$$

Da die Intensitäten monoton steigend sind, und das menschliche Höchstalter begrenzt ist (diese Grenze nehmen wir o.B.d.A mit 120 Jahren an), ist

$$c := \max(\mu_{120}^{0,1}, \mu_{120}^{02})$$

eine obere Schranke der Intensitäten für alle  $t \in [0, 120]$ .

Da  $b(s, \mathbf{x})$  in  $s$  monoton steigend ist und in  $\mathbf{x}$  linear, gilt folgende Abschätzung

$$\|b(s, \mathbf{x}) - b(s, \mathbf{y})\| \leq \|b(120, \mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \sqrt{8}c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

wobei die letzte Ungleichheit gilt, weil  $c$  eine obere Schranke für die Intensitäten ist.

Setzt man  $\mathbf{y} := (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^9$ , folgt

$$\|b(t, \mathbf{x})\| \leq \|b(120, \mathbf{x})\| \leq \sqrt{8}c\|\mathbf{x}\|$$

Somit sind die Bedingungen für die Existenz einer Lösung erfüllt und  $(C_s)_{s \geq 0}$  eine  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette.

#### 4.1.2 Die Thiele'schen Differentialgleichungen

Anhand obiger Ergebnisse kann man Proposition 3.1 verwenden und erhält folgendes System von Differentialgleichungen für die Reserve

$$\begin{aligned} \frac{dV_t^0}{dt} &= r_t V_t^0 + P - \mu_t^{01}(V_t^1 - V_t^0) - \mu_t^{02}(S - V_t^0) \\ \frac{dV_t^1}{dt} &= r_t V_t^1 - B - \mu_t^{10}(V_t^0 - V_t^1) - \mu_t^{12}(S - V_t^1) \\ \frac{dV_t^2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen  $V_T^0 = V_T^1 = V_T^2 = 0$ . Damit folgt automatisch  $V_t^2 = 0$ . Das Ziel ist es, für  $V_t^0$  und  $V_t^1$  eine numerische Lösung zu finden.

#### 4.1.3 Numerische Berechnung

Um für eine numerische Lösung das explizite Euler-Verfahren verwenden zu können, muss zunächst eine geeignete Schrittweite ermittelt werden, die zu Stabilität bei dieser Methode führt. Seien die Parameter  $T = 20$ ,  $x = 40$ ,  $r_t = 0.005$ ,  $S = 5 \times 10^5$  und  $B = 10^5$ . Die Prämienrate muss zwar noch so bestimmt werden, dass das Äquivalenzprinzip zu Versicherungsbeginn gilt, man kann den Bereich in dem man die Prämie sucht aber mit  $[0, 20 \cdot R + D] = [0, 2.5 \times 10^6]$  festlegen, da niemand bereit sein wird, eine höhere Prämie zu zahlen, als die höchstmögliche Leistung.

Für die numerische Stabilität der Lösung muss man noch die Voraussetzungen an die



Schrittweite  $h$  prüfen. Die oben aufgeschriebene Differentialgleichung für die zustandsabhängigen Reserven kann man in folgender Form aufschreiben

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} V_t^0 \\ V_t^1 \end{pmatrix} = G(t) \begin{pmatrix} V_t^0 \\ V_t^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P - \mu_t^{02} S \\ -R - \mu_t^{12} S \end{pmatrix}$$

wobei

$$G(t) = \begin{pmatrix} r + \mu_t^{01} + \mu_t^{02} & -\mu_t^{01} \\ -\mu_t^{10} & r + \mu_t^{10} + \mu_t^{12} \end{pmatrix},$$

Laut [6, Kapitel 3.6, Seite 58] werden die Stabilitätsbedingungen erfüllt, falls für jeden Eigenwert  $\lambda^i$  der Matrix  $G$  folgende Ungleichung gilt

$$|1 + h \cdot \lambda^i| < 1$$

Die Eigenwerte sind genau die Nullstellen der Determinante der Matrix  $G$  abzüglich der Matrix  $\lambda I$ , wobei  $I \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  mit Einsen in der Diagonale und restliche Matrixelemente gleich Null, Vergleich [3, Satz 8.4.4].

$$\det \left| \begin{pmatrix} r + \mu_t^{01} + \mu_t^{02} & -\mu_t^{01} \\ -\mu_t^{10} & r + \mu_t^{10} + \mu_t^{12} \end{pmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Die Ermittlung der Eigenwerte und ihre Abschätzungen im folgenden Schritt wurden in Wolfram Mathematica 11.1 durchgeführt. Die Ein- und Ausgabezeilen aus dem Wolfram Notebook sind im Anhang zu finden.

$$\begin{aligned} \lambda_t^1 = & 0.5 \left( 0.0114 + 0.00502374e^{0.087498t} \right. \\ & 0.000870968e^{0.138155t} + 0.00004e^{-1.t+\tau_t} \\ & + 0.0000870968e^{-0.861845t+\tau_t} \\ & - \left\{ 1.6 \cdot 10^{-7} + 1.35525 \cdot 10^{-20} e^{0.087498t} \right. \\ & + 6.96774 \cdot 10^{-7} e^{0.138155t} + 1.12079 \cdot 10^{-20} e^{0.174996t} \\ & + 1.26089 \cdot 10^{-20} e^{0.225653t} + 7.58585 \cdot 10^{-7} e^{0.27631t} \\ & + 3.2 \cdot 10^{-8} e^{-1t+\tau_t} + 1.39355 \cdot 10^{-7} e^{-0.861845t+\tau_t} \\ & + 1.57611 \cdot 10^{-21} e^{-0.774347t+\tau_t} + 1.51717 \cdot 10^{-7} e^{-0.72369t+\tau_t} \\ & + 1.6 \cdot 10^{-9} e^{-2.t+2\tau_t} + 6.96774 \cdot 10^{-9} e^{-1.86185t+2\tau_t} \\ & \left. + 7.58585 \cdot 10^{-9} e^{-1.72369t+2\tau_t} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda_t^2 = & 0.5 \left( 0.0114 + 0.00502374e^{0.087498t} \right. \\
& + 0.000870968e^{0.138155t} + 0.00004e^{-1t+\tau_t} \\
& + 0.0000870968e^{-0.861845t+\tau_t} \\
& + \left\{ 1.6 \cdot 10^{-7} + 1.35525 \cdot 10^{-20}e^{0.087498t} \right. \\
& + 6.96774 \cdot 10^{-7}e^{0.138155t} + 1.12079 \cdot 10^{-20}e^{0.174996t} \\
& + 1.26089 \cdot 10^{-20}e^{0.225653t} + 7.58585 \cdot 10^{-7}e^{0.27631t} \\
& + 3.2 \cdot 10^{-8}e^{-1t+\tau_t} + 1.39355 \cdot 10^{-7}e^{-0.861845t+\tau_t} \\
& + 1.57611 \cdot 10^{-21}e^{-0.774347t+\tau_t} + 1.51717 \cdot 10^{-7}e^{-0.72369t+\tau_t} \\
& + 1.6 \cdot 10^{-9}e^{-2t+2\tau_t} + 6.96774 \cdot 10^{-9}e^{-1.86185t+2\tau_t} \\
& \left. + 7.58585 \cdot 10^{-9}e^{-1.72369t+2\tau_t} \right\}^{\frac{1}{2}} \Big)
\end{aligned}$$

Mit der Tatsache, dass  $0 \leq t \leq 20$  und  $0 \leq \tau_t \leq t$  und termenweiser Abschätzung gelten folgende Schranken für alle  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned}
\lambda_{min}^1 & := 0.000835221 \leq \lambda_t^1 \leq 0.0277656 =: \lambda_{max}^1 \\
\lambda_{min}^2 & := 0.00928284 \leq \lambda_t^2 \leq 0.0355785 =: \lambda_{max}^2
\end{aligned}$$

Die Schrittweite muss also folgende Ungleichungen für die Stabilität erfüllen:

$$\begin{aligned}
|1 + \lambda_{min}^1 \cdot h| & < 1 \\
|1 + \lambda_{max}^1 \cdot h| & < 1 \\
|1 + \lambda_{min}^2 \cdot h| & < 1 \\
|1 + \lambda_{max}^2 \cdot h| & < 1
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass die Schrittweite im Intervall  $(-56.2137, 0)$  zu wählen ist. In dieser Arbeit wird die Schrittweite  $h = -0.0833333$  betrachtet.

Für die Ermittlung der zustandsabhängigen Reserven anhand eines Pfades von  $\tau_t$  wurde folgende Funktion in R programmiert.

```
euler <- function(
  P, #Prämie
  h, start, end, #Schrittweite, Intervallanfang und -ende.
  V0T, V1T, V2T #Endwerte
){
  nsteps <- ceiling((end - start)/h)+1
  V0s <- numeric(nsteps)
  V1s <- numeric(nsteps)
  V2s <- numeric(nsteps)
  V0s[nsteps] <- V0T
  V1s[nsteps] <- V1T
  V2s[nsteps] <- V2T
  for (i in nsteps:1) { #von Ende bis Anfang durchlaufen
    x <- max(start + (i-1)*h,start) #Stützpunkt bestimmen
    V0s[i-1] = V0s[i] - h * dV0.dt(V0s[i],V1s[i],V2s[i], x, P)
    V1s[i-1] = V1s[i] - h * dV1.dt(V0s[i],V1s[i],V2s[i], x)
    V2s[i-1] = V2s[i] - h * dV2.dt(V0s[i],V1s[i],V2s[i], x)
  }
  mat=matrix(c(V0s,V1s,V2s), nrow=length(V0s)) #Erg in Matrix zusammenfassen
  mat #Returnwert
}
```

Dabei sind die Funktionen für die Ableitungen der zustandsabhängigen Reserven  $\frac{dV_t^0}{dt}$  und  $\frac{dV_t^1}{dt}$ ,

```
dV0.dt <- function(V0, V1, V2, t, P) {
  r * V0 + P - mu_01(t) * (V1 - V0) - mu_02(t) * (S - V0)
}

dV1.dt <- function(V0, V1, V2, t) {
  r * V1 - B - mu_10(t) * (V0 - V1) - mu_12(t) * (S - V1)
}
```

Die Funktionen für die Intensitäten wurden entsprechend (15) definiert:

```
mu_01 <- function(t) {
  a1 + b1 * exp(c1 * (x + t))
}
```

```

mu_10 <- function(t) {
  tau_t = rexp(1, rate = 0.1 * mu_01(t) + mu_12(t))
  0.1 * mu_01(t) * exp(-tau_t)
}

mu_02 <- function(t) {
  a2 + b2 * exp(c2 * (x + t))
}

mu_12 <- function(t) {
  mu_02(t)
}

```

Um den Erwartungswert berücksichtigen zu können, wird eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Mittels Monte-Carlo-Simulation können z.B. Erwartungswerte angenähert werden, ohne dass man die zugrunde liegende Verteilung explizit kennt, Vergleich [9, Seite 70].

```

ew_euler <- function(N, P) {
  stuetzpunkte <- c(0:ceiling((end - start)/h)) * h
  erg <- matrix(0, nrow = ceiling((end - start)/h) + 1, 4)
  for (i in 1:N) {
    temp <- matrix(0, nrow = ceiling((end - start)/h) + 1, 2)
    temp = euler(P, h, start, end, 0, 0, 0)
    erg[, 2:4] = erg[, 2:4] + temp/N
  }
  erg[, 1] = stuetzpunkte
  colnames(erg) <- c("t", "$V^0_t$", "$V^1_t$", "V^2_t")
  erg #Returnwert
}

```

Sei nun die Prämie  $P = 6000$  und die Anzahl der Simulationen  $N = 8 \times 10^4$ . Für diese ergibt sich folgende Reservenentwicklung.

t	$V_t^0$	$V_t^1$
0.00	11247.18	1871081.12
1.00	13355.18	1784351.61
2.00	15241.88	1697212.80
3.00	16886.97	1609644.47
4.00	18269.82	1521622.31
5.00	19369.79	1433117.14
6.00	20166.72	1344094.23
7.00	20641.44	1254512.36
8.00	20776.60	1164322.89
9.00	20557.65	1073468.67
10.00	19974.08	981882.64
11.00	19021.11	889486.21
12.00	17701.75	796187.85
13.00	16029.57	701880.54
14.00	14032.14	606439.83
15.00	11755.56	509720.93
16.00	9270.29	411555.47
17.00	6678.72	311747.54
18.00	4125.08	210069.49
19.00	1808.45	106256.44
20.00	0.00	0.00

Tabelle 1: Reservenentwicklung bei  $P = 6000$  und  $N = 8 \cdot 10^4$

Die Reserve ist im Zeitpunkt Null beim Anfangszustand ungleich Null. Diese Eigenschaft ist aber aufgrund des Nettoäquivalenzprinzips unerwünscht. Das Nettoäquivalenzprinzip besagt, dass der Barwert der Leistungen zu Vertragsbeginn gleich dem Barwert der Prämien zu Vertragsbeginn sein soll (Vergleich [7, Kapitel 2.4, Seite 41]). Um dieses Prinzip zu erfüllen sucht man mittels einer Optimierungsfunktion die Prämie, die zu  $V_0^0 = 0$  führt. Dafür steht in R die Funktion `optimize` zur Verfügung.

```
opt_P_BU = optimize(reserve_anf, lower=-1, upper=2.5*10^(6),
                    tol = 0.000001)$minimum
print(opt_P_BU)
```

wobei die Funktion, über die optimiert wird, folgenderweise definiert ist:

```

reserve_anf<-function(P) {
  abs(ew_euler(N,P)[1,2])
}

```

Für die optimale Prämie  $P_{opt} = 0$  ergibt sich folgende Reservenentwicklung

t	$V_t^0$	$V_t^1$
0.00	0.00	1871081.01
1.00	2645.23	1784351.51
2.00	5070.29	1697212.68
3.00	7254.88	1609644.37
4.00	9178.40	1521622.20
5.00	10820.25	1433117.04
6.00	12160.34	1344094.10
7.00	13179.67	1254512.22
8.00	13861.06	1164322.77
9.00	14190.22	1073468.61
10.00	14156.98	981882.55
11.00	13757.00	889486.18
12.00	12993.88	796187.77
13.00	11881.91	701880.41
14.00	10449.58	606439.80
15.00	8744.14	509720.94
16.00	6837.50	411555.44
17.00	4833.85	311747.53
18.00	2879.66	210069.48
19.00	1176.82	106256.43
20.00	0.00	0.00

Tabelle 2: Reservenentwicklung bei  $P_{opt} = 6641.01188231168$  und  $N = 8 \cdot 10^4$

Wie man sieht, steigt die Reserve für den Zustand aktiv zuerst an und sinkt etwas ab der Hälfte der Laufzeit, während die Reserve für den Zustand berufsunfähig über die gesamte Laufzeit sinkt, da mit der vergangenen Zeit immer weniger Leistungserbringungen für die Zukunft zu erwarten sind.

#### 4.1.4 Analogon im diskreten Fall

Wie es schon in der Einleitung angedeutet wurde, kann man dieses und ähnliche Beispiele im diskreten Fall ohne  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovketten modellieren, herkömmliche Markovketten sind für das Abbilden solcher Probleme ausreichend. Dafür zerlegt man den Zustand, in dem man die verbrachte Zeit messen möchte, pro Zeiteinheit in Teilzustände. Dieses Verfahren liefert für das Beispiel der Berufsunfähigkeitsversicherung folgendes Zustandsdiagramm

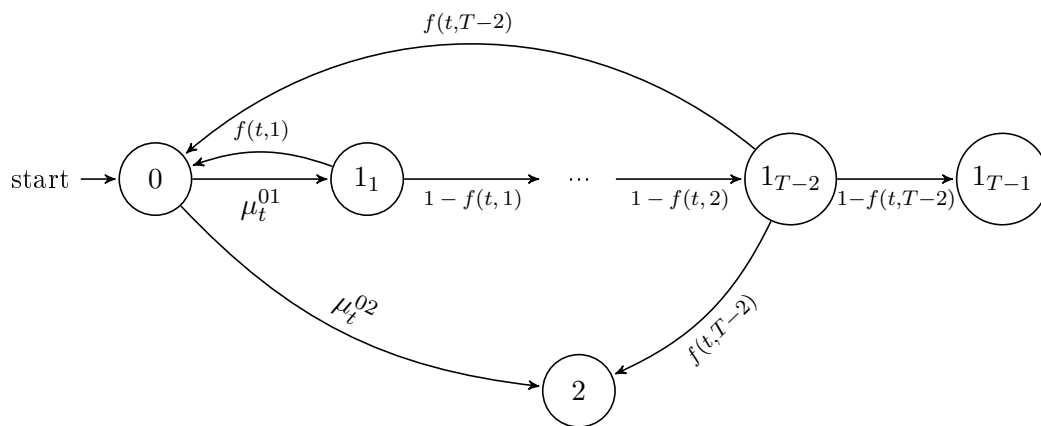


Abbildung 2: Zustandsdiagramm der Berufsunfähigkeitsversicherung im diskreten Fall

wobei die Funktion  $f$  definiert ist durch

$$f(t, y) = 0.1\mu_t^{01} \exp(-(t - y)).$$

## 4.2 Modell einer Arbeitslosenversicherung

### 4.2.1 Das Modell

Als nächstes untersuchen wir eine Versicherung, bei der sich eine Person gegen die finanziellen Lasten der Arbeitslosigkeit versichern lassen kann. Dabei betrachtet man drei Zustände (0), (1) und (2), also  $\mathcal{K} = \{0, 1, 2\}$ . In Zustand (0), der auch der Startzustand ist, hat die versicherte Person ein Arbeitsverhältnis und zahlt eine jährliche Prämie von  $P$  an das Versicherungsunternehmen. Verliert die Person ihre Arbeit, kommt sie in den Zustand (1) und muss keine Prämien zahlen. Eine Leistung wird allerdings noch nicht ausgezahlt, da in Zustand (1) die Karenzzeit  $d$  für die Leistung noch nicht erfüllt ist. Wird die Karenzzeit erreicht, springt der Zustand automatisch auf Zustand (2) um und die Person erhält eine jährliche Leistung der Höhe  $B$ .

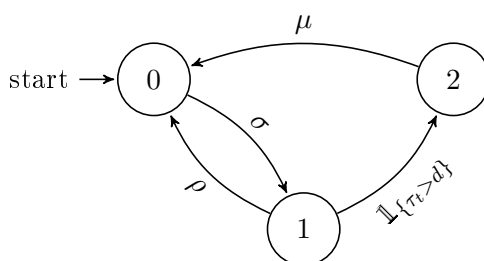


Abbildung 3: Zustandsdiagramm der Arbeitslosenversicherung

Hierbei seien  $\sigma, \rho, \mu \in \mathbb{R}_+$  deterministische, konstante Intensitäten.  $\tau_t := t - \iota_t$  beschreibt die Zeitdauer, die sich die versicherte Person zu Zeitpunkt  $t$  schon im aktuellen Zustand befindet, das heißt  $\iota_t := \max\{s \leq t | C_s \neq C_{s-}\}$ . Auch bei diesem Beispiel ist  $(C_s)_{s \geq 0}$  der Prozess, der die Zustände für die versicherte Person zu den verschiedenen Zeitpunkten darstellt.

Analog zum vorigen Beispiel, muss man zuerst zeigen, dass sich bei  $(C_s)_{s \geq 0}$  um eine  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette handelt. Dafür zeigen wir wieder, dass die Differentialgleichung, die die Übergangswahrscheinlichkeiten beschreibt, eine Lösung besitzt.

Aus obigem Graph leiten wir folgende Intensitätsmatrix ab

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -(\rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}) & \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$



Durch die Anwendung der Kolmogorov'schen Vorwärtsgleichung erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} P(v, t) = P(v, t) \Lambda(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(v, t) & p_{01}(v, t) & p_{02}(v, t) \\ p_{10}(v, t) & p_{11}(v, t) & p_{12}(v, t) \\ p_{20}(v, t) & p_{21}(v, t) & p_{22}(v, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -(\rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}) & \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} \\ \mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

Dabei gelten die Randbedingungen  $p_{ij}(v, t) = \delta_{ij}$ , wobei  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta darstellt, siehe im Beweis von Proposition 3.1.

Das System der Differentialgleichungen ausgeschrieben als einzelne Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p_{00}(v, t) &= -\sigma p_{00}(v, t) + \rho p_{01}(v, t) + \mu p_{02}(v, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{01}(v, t) &= \sigma p_{00}(v, t) - (\rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}) p_{01}(v, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{02}(v, t) &= \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} p_{01}(v, t) - \mu p_{02}(v, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{10}(v, t) &= -\sigma p_{10}(v, t) + \rho p_{11}(v, t) + \mu p_{12}(v, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{11}(v, t) &= \sigma p_{10}(v, t) - (\rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}) p_{11}(v, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{12}(v, t) &= \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} p_{11}(v, t) - \mu p_{12}(v, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{20}(v, t) &= -\sigma p_{20}(v, t) + \rho p_{21}(v, t) + \mu p_{22}(v, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{21}(v, t) &= \sigma p_{20}(v, t) - (\rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}) p_{21}(v, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} p_{22}(v, t) &= \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} p_{21}(v, t) - \mu p_{22}(v, t) \end{aligned}$$

Es bleibt die Lösbarkeit von

$$dP_t = b(t, P_t) dt$$

zu zeigen, wobei  $P_t := (p_{00}(v, t), p_{01}(v, t), p_{02}(v, t), p_{10}(v, t), p_{11}(v, t), p_{12}(v, t), p_{20}(v, t), p_{21}(v, t), p_{22}(v, t))^T$  und

$$b(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\sigma x_1 + \rho x_2 + \mu x_3 \\ \sigma x_1 - (\rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}) x_2 \\ \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} x_2 - \mu x_3 \\ -\sigma x_4 + \rho x_5 + \mu x_6 \\ \sigma x_4 - (\rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}) x_5 \\ \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} x_5 - \mu x_6 \\ -\sigma x_7 + \rho x_8 + \mu x_9 \\ \sigma x_7 - (\rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}) x_8 \\ \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} x_8 - \mu x_9 \end{pmatrix} \text{ für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^9.$$

Die Intensitäten sind konstant oder durch 1 beschränkt, somit stellt

$$c := \max(|\sigma|, |\rho| + 1, |\mu|)$$

eine obere Schranke für die Intensitäten zu jedem Zeitpunkt dar.

Da  $b(s, \mathbf{x})$  linear in  $\mathbf{x}$  ist und die Intensitäten durch  $c$  beschränkt sind, gilt

$$\|b(s, \mathbf{x}) - b(s, \mathbf{y})\| \leq \sqrt{11}c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Setzt man  $\mathbf{y} := (0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^9$ , folgt

$$\|b(t, \mathbf{x})\| \leq \|b(120, \mathbf{x})\| \leq \sqrt{11}c\|\mathbf{x}\|$$

Da die Bedingungen für die Existenz einer Lösung erfüllt sind, ist  $(C_s)_{s \geq 0}$  eine  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette.

#### 4.2.2 Die Thiele'schen Differentialgleichungen

Da  $(C_s)_{s \geq 0}$  eine  $\mathbb{F}$ -doppelstochastische Markovkette darstellt, dürfen wir die Resultate aus Proposition 3.1 anwenden. Dabei erhalten wir folgendes System von Differentialgleichungen für die Reserve der Arbeitslosenversicherung

$$\begin{aligned} \frac{dV_t^0}{dt} &= r_t V_t^0 + P - \sigma(V_t^1 - V_t^0) \\ \frac{dV_t^1}{dt} &= r_t V_t^1 - \rho(V_t^0 - V_t^1) - \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}}(V_t^2 - V_t^1) \\ \frac{dV_t^2}{dt} &= r_t V_t^2 - B - \mu(V_t^0 - V_t^2) \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen  $V_T^0 = V_T^1 = V_T^2 = 0$ . Auch in diesem Beispiel setzen wir uns die numerische Berechnung von  $V_t^0$ ,  $V_t^1$  und  $V_t^2$  als Ziel.

#### 4.2.3 Numerische Berechnung

Wir möchten, wie schon im ersten Beispiel, das explizite Euler-Verfahren verwenden und ermitteln daher die Schrittweite, die für die Stabilität der Methode ausreichend ist. Seien im weiteren  $T = 20$ ,  $r_t = 0.005$ ,  $B = 2.4 \times 10^4$ ,  $\sigma = 0.12$ ,  $\rho = 0.05$  und  $\mu = 0.4$ . Die Prämienrate ist wieder zunächst unbekannt, aber über eine Optimierungsfunktion ermittelbar. Das Intervall, in der die Suche stattfinden muss ist  $[0, T \cdot B] = [0, 4.8 \times 10^5]$ , also

mit der höchstmöglichen Leistung nach oben beschränkt.

Die oben aufgeschriebene Differentialgleichung für die zustandsabhängige Reserven kann man in folgender Form aufschreiben

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} V_t^0 \\ V_t^1 \\ V_t^2 \end{pmatrix} = G(t) \begin{pmatrix} V_t^0 \\ V_t^1 \\ V_t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ -B \end{pmatrix}$$

wobei

$$G(t) = \begin{pmatrix} r + \sigma & -\sigma & 0 \\ -\rho & r + \rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} & -\mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} \\ -\mu & 0 & r + \mu \end{pmatrix},$$

Auch bei diesem Beispiel müssen wir die Eigenwerte  $\lambda^i$  der Matrix  $G$  untersuchen, um zu erfahren, wie groß die Schrittweite sein darf. Folgendes soll für die Schrittweite und alle Eigenwerte gelten

$$|1 + h \cdot \lambda^i| < 1$$

Die Eigenwerte sind genau die Nullstellen der Determinante der Matrix  $G$  abzüglich der Matrix  $\lambda I$ , wobei  $I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit Einsen in der Diagonale und restliche Matrixelemente gleich Null, Vergleich [3, Satz 8.4.4]).

$$\det \left| \begin{pmatrix} r + \sigma & -\sigma & 0 \\ -\rho & r + \rho + \mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} & -\mathbb{1}_{\{\tau_t > d\}} \\ -\mu & 0 & r + \mu \end{pmatrix} - \lambda I \right| = 0$$

Wieder erfolgt die Bestimmung und Abschätzung der Eigenwerte in Wolfram Mathematica 11.1, siehe Anhang, und wir erhalten folgendes:

$$\begin{aligned} \lambda_{min}^1 &:= 0.005 \leq \lambda_t^1 \leq 0.005 =: \lambda_{max}^1 \\ \lambda_{min}^2 &:= 0.175 \leq \lambda_t^2 \leq 0.621997 =: \lambda_{max}^2 \\ \lambda_{min}^3 &:= 0.405 \leq \lambda_t^3 \leq 0.958003 =: \lambda_{max}^3. \end{aligned}$$

Die von der Schrittweite  $h$  zu erfüllende Ungleichungen sind also:

$$\begin{aligned} |1 + \lambda_{min}^1 \cdot h| &< 1 \\ |1 + \lambda_{max}^1 \cdot h| &< 1 \\ |1 + \lambda_{min}^2 \cdot h| &< 1 \\ |1 + \lambda_{max}^2 \cdot h| &< 1 \\ |1 + \lambda_{min}^3 \cdot h| &< 1 \\ |1 + \lambda_{max}^3 \cdot h| &< 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die ausreichende Schrittweite im Intervall  $(-1.75096, 0)$  liegt. Bei diesem Beispiel wird die Schrittweite  $h = -0.0833333$  betrachtet.

Die Funktion `euler` kann aus dem Kapitel 4.1.3 wiederverwendet werden, lediglich die von dieser Funktion verwendete Ableitungsfunktionen müssen neu definiert werden.

```
dV0.dt <- function(V0, V1, V2, t, P) {
  r * V0 + P - sigma * (V1 - V0)
}

dV1.dt <- function(V0, V1, V2, t) {
  tau_t <- rexp(1, rate = rho)
  ret <- r * V1 - rho * (V0 - V1)
  if (tau_t > d) {
    ret <- ret - (V2 - V1)
  }
  ret
}

dV2.dt <- function(V0, V1, V2, t) {
  r * V2 - B - mu * (V0 - V2)
}
```

Auch die Funktion `ew_euler` ist wiederverwendbar für die Ermittlung der Erwartungswerte. Seien nun  $P = 4985$  und  $N = 2 \times 10^6$  die Anzahl der Simulationen in `ew_euler`, damit ergibt sich folgende Reservenentwicklung.

t	$V_t^0$	$V_t^1$	$V_t^2$
0.00	9642.16	61637.54	65803.71
1.00	8432.67	60427.75	64594.05
2.00	7217.17	59211.63	63378.21
3.00	5995.69	57988.96	62156.08
4.00	4768.28	56759.34	60927.46
5.00	3535.12	55521.79	59691.97
6.00	2296.53	54275.12	58448.93
7.00	1053.11	53016.40	57197.11
8.00	-193.89	51740.26	55934.17
9.00	-1442.10	50437.01	54655.68
10.00	-2687.09	49088.35	53353.34
11.00	-3920.46	47659.96	52011.41
12.00	-5126.54	46089.31	50600.29
13.00	-6276.31	44262.31	49064.26
14.00	-7316.74	41977.72	47299.08
15.00	-8152.73	38891.76	45110.80
16.00	-8618.97	34456.35	42142.25
17.00	-8442.23	27909.93	37744.96
18.00	-7213.02	18553.00	30767.87
19.00	-4445.93	7052.39	19240.75
20.00	0.00	0.00	0.00

Tabelle 3: Reservenentwicklung bei  $P = 4985$  und  $N = 2 \cdot 10^6$

Da die Reserve im Zustand (0) zum Anfangszeitpunkt ungleich Null ist, ist  $P = 4985$  keine faire Prämie. Wieder verwenden wir die Optimierungsfunktion und erhalten somit

```
opt_P_AL = optimize(reserve_anf, lower=-1, upper=0.96*10^(6),
                    tol = 0.00000001)$minimum
print(opt_P_AL)
```

Für die optimale Prämie von  $P_{opt} = 0$  ergibt sich folgende Reservenentwicklung

t	$V_t^0$	$V_t^1$	$V_t^2$
0.00	0.00	53606.47	57367.75
1.00	-768.00	52838.14	56599.58
2.00	-1539.78	52065.71	55827.45
3.00	-2315.31	51288.97	55051.25
4.00	-3094.53	50507.43	54270.78
5.00	-3877.27	49720.44	53485.67
6.00	-4663.18	48926.21	52695.25
7.00	-5451.60	48122.25	51898.27
8.00	-6241.27	47302.81	51092.35
9.00	-7029.76	46458.22	50273.01
10.00	-7812.54	45569.69	49431.79
11.00	-8581.04	44602.52	48552.67
12.00	-9319.27	43492.45	47605.47
13.00	-9997.60	42123.63	46533.44
14.00	-10561.96	40290.46	45230.28
15.00	-10915.31	37641.64	43498.31
16.00	-10888.76	33616.00	40973.27
17.00	-10202.91	27430.53	36993.65
18.00	-8437.67	18353.69	30384.48
19.00	-5091.05	7015.30	19132.67
20.00	0.00	0.00	0.00

Tabelle 4: Reservenentwicklung bei  $P_{opt} = 5666.84195769301$  und  $N = 2 \cdot 10^6$

Wie man sieht ist die Reserve im Zustand (3) am höchsten, gefolgt von der Reserve im Zustand (2) und anschließend von der Reserve im Zustand (1). Dieses Verhalten liegt daran, dass im Zustand (3) bereits eine Verpflichtung zur Leistungserbringung vorhanden ist, während bei Zustand (1) die Arbeitslosigkeit zwar schon besteht aber die Karenzzeit noch unerfüllt ist und somit die Möglichkeit besteht, dass die versicherte Person vor der Erfüllung der Karenzzeit wieder eine Arbeit findet. Mit ähnlichem Argument folgt, dass die Reserve im Zustand (0) am niedrigsten sein muss, da bei diesem Zustand noch keine Arbeitslosigkeit und daraus folgend auch keine erfüllte Karenzzeit besteht. Somit sind noch die Möglichkeiten, dass die versicherte Person ihre Arbeit nicht verliert und dass sie zwar ihre Arbeit verliert, aber in der Karenzzeit eine neue findet, offen.

#### 4.2.4 Analogon im diskreten Fall

Auch bei diesem Beispiel möchten wir einen möglichen Ansatz für das Modellieren des Tarifes im diskreten Fall angeben. Dabei wird wieder der Zustand, in dem wir die Zeit messen möchten, in Teilzustände zerlegt und wir erhalten folgendes Zustandsdiagramm

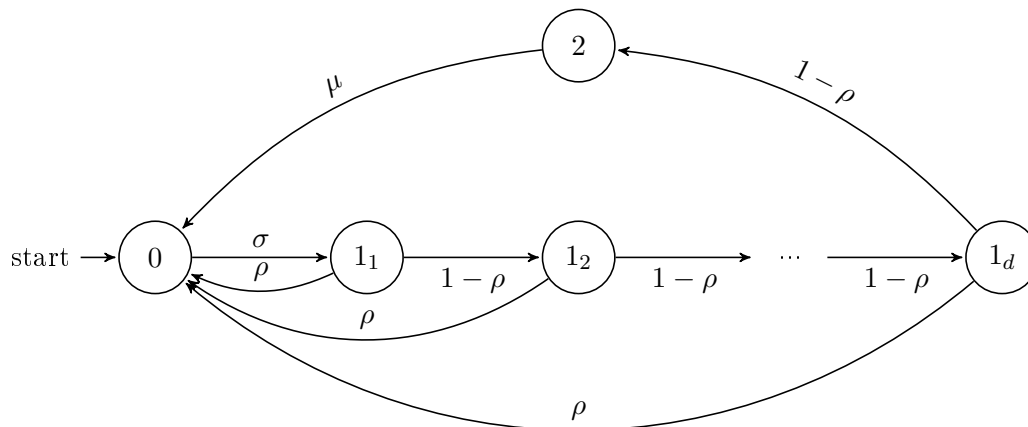


Abbildung 4: Zustandsdiagramm der Arbeitslosenversicherung mit Karenzzeit  $d$  Zeiteinheiten im diskreten Fall

## 5 Konklusion

Wie wir an den Beispielen gesehen haben, existiert im diskreten Fall eine Möglichkeit, nämlich die Zerlegung des Zustandes in Teilzustände, den Zustandswechsel vom im aktuellen Zustand verbrachten Zeitraum abhängig zu machen. Im Gegensatz dazu reichen im stetigen Fall herkömmliche Markovketten nicht mehr aus, da das Verfahren mit der Zerlegung der Zustände aufgrund der überabzählbaren Zeitpunkte in jedem Zeitintervall hier nicht mehr anwendbar ist.

Bei beiden Beispielen wurde jeweils eine Möglichkeit gezeigt, wie man solche Abhängigkeiten mittels  $\mathbb{F}$ -doppelstochastischen Markovketten darstellen kann, indem man die Eigenschaften dieses Prozesses nützt und die im aktuellen Zustand verbrachte Zeit als die zusätzliche Ungewissheit in der Intensitätsmatrix abbildet.

Modelle müssen zwar immer die Realität detailliert genug abbilden, jedoch gleichzeitig auch möglichst einfach bleiben, damit Schlüsse auf das Verhalten gesuchter Größen gezogen werden können. Deswegen wurde in dieser Arbeit untersucht, ob mit  $\mathbb{F}$ -doppelstochastischen Markovketten modellierte Wertprozesse eine einfache Form der Beschreibung ihrer zeitlichen Entwicklung haben. Wie wir gesehen haben, erfüllen sie die Thiele'schen Differentialgleichungen. Die Thiele'schen Differentialgleichungen beschreiben die Änderung des Wertprozesses des Vertrages in der Änderung der Zeit. Damit ist die numerische Berechnung der zustandsabhängigen prospektiven Reserven möglich und daher eine faire Preisfindung erreichbar, was für die Anwendung von hoher Bedeutung ist.

Als Anwendungsbeispiele haben wir zwei konkrete Versicherungstarife modelliert, eine Berufsunfähigkeitsversicherung mit abnehmender Reaktivierungswahrscheinlichkeit je länger die Person sich im berufsunfähigen Zustand befindet und eine Arbeitslosenversicherung mit Karenzzeit. Anhand dieser Beispiele konnte veranschaulicht werden, welche Eigenschaften für die Anwendbarkeit der Theorie der  $\mathbb{F}$ -doppelstochastischen Markovketten vorhanden sein müssen. Ebenso haben wir anhand dieser Beispiele gezeigt, wie eine numerische Berechnung der zustandsabhängigen prospektiven Reserven in  $\mathbb{R}$  mittels einem einfachen numerischen Verfahrens, nämlich der expliziten Euler-Methode, erfolgen kann und daraus folgend wie eine faire Prämienfindung nach dem Nettoäquivalenzprinzip möglich ist. Dabei wurde eine Prämie mittels einer Optimierungsfunktion so gesucht und gefunden, dass das Nettoäquivalenzprinzip zum Zeitpunkt  $t = 0$  erfüllt ist.



## Literatur

- [1] S.N. Cohen und R.J. Elliott. *Stochastic Calculus and Applications*. 2. Probability and Its Applications. Springer New York, 2015. ISBN: 9781493928675. URL: <https://books.google.at/books?id=qWb\CgAAQBAJ>.
- [2] Mary R. Hardy David C.M. Dickson und Howard R. Waters. *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. International Series on Actuarial Science. Cambridge University Press, 2009. ISBN: 9780521118255.
- [3] Hans Havlicek. *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. 2. Bd. Band 16. Berliner Studienreihe zur Mathematik. Heldermann Verlag, 2008. ISBN: 3885381168.
- [4] Jacek Jakubowski und Mariusz Nieweglowski. “A class of F-doubly stochastic Markov chains”. In: *Electronic Journal of Probability* 15 (2010), S. 1743–1771. URL: <http://www.math.washington.edu/~ejpecp/>.
- [5] Norbert Kusolitsch. *Mass- und Wahrscheinlichkeitstheorie: Eine Einführung*. Springer, 2011. ISBN: 9783709106846.
- [6] D.F. Mayers L. Fox. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2012. ISBN: 9789401079075.
- [7] Elke Warmuth Moritz Adelmeyer. *Finanzmathematik für Einsteiger: Von Anleihen über Aktien zu Optionen*. Springer-Verlag, 2005. ISBN: 3528131853.
- [8] Ragnar Norberg. “Differential equations for moments of present values in life insurance”. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 17 (1995), S. 171–180.
- [9] Rüdiger Seydel. *Einführung in die numerische Berechnung von Finanz-Derivaten*. Springer, 2000. ISBN: 3540668896.

## A Anhang Berufsunfähigkeitsversicherung

Auf folgenden Seiten befinden sich die Mathematica Ein- und Ausgaben für die Berechnung der Eigenwerte aus Kapitel 4.1.3 und die dazugehörigen Abschätzungen.

```
r := 0.005; a1 := 4 * 10^(-4);
b1 := 3.4674 * 10^(-6);
c1 := 0.138155;
Remove[Tau];
|entferne

x := 40; a2 := 5 * 10^(-4); b2 := 7.5858 * 10^(-5); c2 := 0.087498;

mu01[t_] := a1 + b1 * Exp[c1 * (x + t)];
|Exponentialfunktion

mu10[t_] := 0.1 * mu01[t] * Exp[-(t - Tau[t])]
|Exponentialfunktion

In[7]:= mu02[t_] := a2 + b2 * Exp[c2 * (x + t)]
|Exponentialfunktion

In[8]:= mu12[t_] := mu02[t]

In[9]:= {lambda1, lambda2} =
Last@@@Solve[(r + mu01[t] + mu02[t] - lambda) * (r + mu10[t] + mu12[t] - lambda) -
|letztes E... |löse
mu10[t] * mu01[t] == 0, lambda];

In[10]:= l1[t_] := Evaluate[lambda1];
|werte aus

In[11]:= l2[t_] := Evaluate[lambda2];
|werte aus
```

### Min/Max für I1 ermitteln

```
In[12]:= l1[t]
Out[12]= 0.5 (0.0114 + 0.00502374 e^{0.087498 t} +
0.000870968 e^{0.138155 t} + 0.00004 e^{-1. t + Tau[t]} + 0.000870968 e^{-0.861845 t + Tau[t]} -
1. \sqrt{(1.6 \times 10^{-7} + 1.35525 \times 10^{-20} e^{0.087498 t} + 6.96774 \times 10^{-7} e^{0.138155 t} +
1.12079 \times 10^{-20} e^{0.174996 t} + 1.26089 \times 10^{-20} e^{0.225653 t} + 7.58585 \times 10^{-7} e^{0.27631 t} +
3.2 \times 10^{-8} e^{-1. t + Tau[t]} + 1.39355 \times 10^{-7} e^{-0.861845 t + Tau[t]} + 1.57611 \times 10^{-21} e^{-0.774347 t + Tau[t]} +
1.51717 \times 10^{-7} e^{-0.72369 t + Tau[t]} + 1.6 \times 10^{-9} e^{-2. t + 2 Tau[t]} +
6.96774 \times 10^{-9} e^{-1.86185 t + 2 Tau[t]} + 7.58585 \times 10^{-9} e^{-1.72369 t + 2 Tau[t]})
```

Minimum für I1:

Minuend möglichst klein

Subtrahend möglichst groß

```
In[13]:= 0.0114` + 0.005023741993929048` e^{0.087498` * 0} + 0.0008709678229950013` e^{0.138155` * 0} +
0.00004` e^{-1.` * 20+0} + 0.0008709678229950014` e^{-0.861845` * 20+0}
Out[13]= 0.0172947
```

```
In[14]:= 1.600000000002557`*^-7 + 1.3552527156068805`*^-20 e0.0874980000000008` * 20 +
6.967742583960017`*^-7 e0.1381550000000025` * 20 +
1.1207916204710161`*^-20 e0.1749960000000015` * 20 +
1.260890573029893`*^-20 e0.2256529999999944` * 20 + 7.585849486926519`*^-7 e0.276310000000005` * 20 +
3.200000000000075`*^-8 e-1.` * 20+20 + 1.393548516792009`*^-7 e-0.861845000000006` * 20+20 +
1.5761132162873663`*^-21 e-0.774347000000006` * 20+20 +
1.517169897385304`*^-7 e-0.723689999999995` * 20+20 + 1.600000000000003`*^-9 e-2.` * 20+2 * 20 +
6.967742583960012`*^-9 e-1.861845000000002` * 20+2 * 20 + 7.585849486926522`*^-9 e-1.72369` * 20+2 * 20
```

```
Out[14]= 0.000244118
```

```
In[15]:= l1min := 0.5 * (0.01729470981985169` - Sqrt[0.00024411777071191326`])
└─Quadratwurzel
```

```
l1min
```

```
Out[16]= 0.000835221
```

Maximum für l1:

Minuend möglichst groß

Subtrahend möglichst klein

```
In[17]:= l1[t]
```

```
Out[17]= 0.5 (0.0114 + 0.00502374 e0.087498 t +
0.000870968 e0.138155 t + 0.00004 e-1. t+Tau[t] + 0.000870968 e-0.861845 t+Tau[t] -
1. √(1.6 × 10-7 + 1.35525 × 10-20 e0.087498 t + 6.96774 × 10-7 e0.138155 t +
1.12079 × 10-20 e0.174996 t + 1.26089 × 10-20 e0.225653 t + 7.58585 × 10-7 e0.27631 t +
3.2 × 10-8 e-1. t+Tau[t] + 1.39355 × 10-7 e-0.861845 t+Tau[t] + 1.57611 × 10-21 e-0.774347 t+Tau[t] +
1.51717 × 10-7 e-0.72369 t+Tau[t] + 1.6 × 10-9 e-2. t+2 Tau[t] +
6.96774 × 10-9 e-1.86185 t+2 Tau[t] + 7.58585 × 10-9 e-1.72369 t+2 Tau[t]))
```

```
In[18]:= 0.0114` + 0.005023741993929048` e0.087498` * 20 + 0.0008709678229950013` e0.138155` * 20 +
0.00004` e-1.` * 20+20 + 0.0008709678229950014` e-0.861845` * 20+20
```

```
Out[18]= 0.0555328
```

```
In[19]:= 1.600000000002557`*^-7 + 1.3552527156068805`*^-20 e0.0874980000000008` * 0 +
6.967742583960017`*^-7 e0.1381550000000025` * 0 + 1.1207916204710161`*^-20 e0.1749960000000015` * 0 +
1.260890573029893`*^-20 e0.2256529999999944` * 0 + 7.585849486926519`*^-7 e0.276310000000005` * 0 +
3.200000000000075`*^-8 e-1.` * 20+0 + 1.393548516792009`*^-7 e-0.861845000000006` * 20+0 +
1.5761132162873663`*^-21 e-0.774347000000006` * 20+0 +
1.517169897385304`*^-7 e-0.723689999999995` * 20+0 + 1.600000000000003`*^-9 e-2.` * 20+2 * 0 +
6.967742583960012`*^-9 e-1.861845000000002` * 20+2 * 0 + 7.585849486926522`*^-9 e-1.72369` * 20+2 * 0
```

```
Out[19]= 1.61536 × 10-6
```

```
In[20]:= l1max := 0.5 * (0.05553275140505397` - Sqrt[1.6153592902563574`*^-6])
└─Quadratwurzel
```

```
In[21]:= l1max
```

```
Out[21]= 0.0271309
```

## Min/Max für l2 ermitteln

In[22]:= **l2[t]**

$$\text{Out[22]} = 0.5 \left( 0.0114 + 0.00502374 e^{0.087498 t} + 0.000870968 e^{0.138155 t} + 0.00004 e^{-1. t + \text{Tau}[t]} + 0.0000870968 e^{-0.861845 t + \text{Tau}[t]} + \sqrt{\left( 1.6 \times 10^{-7} + 1.35525 \times 10^{-20} e^{0.087498 t} + 6.96774 \times 10^{-7} e^{0.138155 t} + 1.12079 \times 10^{-20} e^{0.174996 t} + 1.26089 \times 10^{-20} e^{0.225653 t} + 7.58585 \times 10^{-7} e^{0.27631 t} + 3.2 \times 10^{-8} e^{-1. t + \text{Tau}[t]} + 1.39355 \times 10^{-7} e^{-0.861845 t + \text{Tau}[t]} + 1.57611 \times 10^{-21} e^{-0.774347 t + \text{Tau}[t]} + 1.51717 \times 10^{-7} e^{-0.72369 t + \text{Tau}[t]} + 1.6 \times 10^{-9} e^{-2. t + 2 \text{Tau}[t]} + 6.96774 \times 10^{-9} e^{-1.86185 t + 2 \text{Tau}[t]} + 7.58585 \times 10^{-9} e^{-1.72369 t + 2 \text{Tau}[t]} \right) \right)$$

Minimum für l2:

Jeder Summand möglichst klein

In[23]:= **l2min :=**

$$0.5 \left( 0.0114 + 0.005023741993929048 e^{0.087498 t} + 0.0008709678229950013 e^{0.138155 t} + 0.00004 e^{-1. t + 20} + 0.00008709678229950014 e^{-0.861845 t + 20} + \sqrt{\left( 1.600000000002557 t^{-7} + 1.3552527156068805 t^{-20} e^{0.087498000000000008 t} + 6.967742583960017 t^{-7} e^{0.138155000000000025 t} + 1.1207916204710161 t^{-20} e^{0.174996000000000015 t} + 1.260890573029893 t^{-20} e^{0.225652999999999944 t} + 7.585849486926519 t^{-7} e^{0.27631000000000005 t} + 3.2000000000000075 t^{-8} e^{-1. t + 20} + 1.393548516792009 t^{-7} e^{-0.8618450000000006 t + 20} + 1.5761132162873663 t^{-21} e^{-0.7743470000000006 t + 20} + 1.517169897385304 t^{-7} e^{-0.723689999999995 t + 20} + 1.6000000000000003 t^{-9} e^{-2. t + 20} + 6.967742583960012 t^{-9} e^{-1.8618450000000002 t + 20} + 7.585849486926522 t^{-9} e^{-1.72369 t + 20} \right) \right)$$

In[24]:= **l2min**

Out[24]= 0.00928284

Maximum für l2:

Jeder Summand ist möglichst groß

In[25]:= **l2max :=**

$$0.5 \left( 0.0114 + 0.005023741993929048 e^{0.087498 t} + 0.0008709678229950013 e^{0.138155 t} + 0.00004 e^{-1. t + 20} + 0.00008709678229950014 e^{-0.861845 t + 20} + \sqrt{\left( 1.600000000002557 t^{-7} + 1.3552527156068805 t^{-20} e^{0.087498000000000008 t} + 6.967742583960017 t^{-7} e^{0.138155000000000025 t} + 1.1207916204710161 t^{-20} e^{0.174996000000000015 t} + 1.260890573029893 t^{-20} e^{0.225652999999999944 t} + 7.585849486926519 t^{-7} e^{0.27631000000000005 t} + 3.2000000000000075 t^{-8} e^{-1. t + 20} + 1.393548516792009 t^{-7} e^{-0.8618450000000006 t + 20} + 1.5761132162873663 t^{-21} e^{-0.7743470000000006 t + 20} + 1.517169897385304 t^{-7} e^{-0.723689999999995 t + 20} + 1.6000000000000003 t^{-9} e^{-2. t + 20} + 6.967742583960012 t^{-9} e^{-1.8618450000000002 t + 20} + 7.585849486926522 t^{-9} e^{-1.72369 t + 20} \right) \right)$$

In[26]:= **l2max**

Out[26]= 0.0355785

Da  $|1 + \lambda(i)h| < 1$  gelten muss, müssen folgende Ungleichheiten gelten:Für  $\lambda(1)$ :

$$-1 < 1 + \lambda(1)h$$

$$-2/\lambda(1) < h$$

In[27]:= **-2 / l1min**

Out[27]= -2394.58

In[28]:=  $-2 / \mathbf{l1max}$

Out[28]=  $-73.7167$

und weiters

$$1 + \lambda(1) \cdot h < 1$$

also  $h < 0$

Aufgrund des Bereichs für  $\lambda(1)$  muss also folgendes gelten  $-72.0317 < h < 0$

Für  $\lambda(2)$  muss folgendes gelten:

$$-1 < 1 + \lambda(2) \cdot h$$

$$-2 / \lambda(2) < h$$

In[29]:=  $-2 / \mathbf{l2min}$

Out[29]=  $-215.451$

In[30]:=  $-2 / \mathbf{l2max}$

Out[30]=  $-56.2137$

und weiters

$$-1 + \lambda(2) \cdot h < 1$$

also  $h < 0$

Aufgrund des Bereichs für  $\lambda(2)$  muss also folgendes gelten  $-56.2137 < h < 0$

=>  $h$  aus  $(-56.2137, 0)$

## B Anhang Arbeitslosenversicherung

Auf folgenden Seiten befinden sich die Mathematica Ein- und Ausgaben für die Berechnung der Eigenwerte aus Kapitel 4.2.3 und die dazugehörigen Abschätzungen.

```
In[1]:= r := 0.005; sigma := 0.12; mu := 0.4; rho := 0.05; Remove[Tau];
```

Sei  $t$  aus  $R$  beliebig aber fix.

Wir müssen dann zwei Fälle unterscheiden, nämlich wo die Karenzzeit bereits erfüllt ist, also wo die Indikatorfunktion von  $\{\tau(t) > d\} = 1$

und wo die Karenzzeit noch nicht erfüllt ist, dh. Indikatorfunktion von  $\{\tau(t) > d\} = 0$ .

Fall 1 (Karenzzeit erfüllt):

```
In[2]:= (r + sigma - lambda) * (r + rho + 1 - lambda) * (r + mu - lambda) +
        (-sigma) * (-1) * (-mu) - (-rho) * (-sigma) * (r + mu - lambda)
Out[2]:= -0.048 - 0.006 (0.405 - lambda) + (0.125 - lambda) (0.405 - lambda) (1.055 - lambda)
```

```
In[3]:= {lambda1a, lambda2a, lambda3a} =
        Last @@@ Solve[(r + sigma - lambda) * (r + rho + 1 - lambda) * (r + mu - lambda) +
        (-sigma) * (-1) * (-mu) - (-rho) * (-sigma) * (r + mu - lambda) == 0, lambda];
```

Fall 2 (Karenzzeit noch nicht erfüllt):

```
In[5]:= (r + sigma - lambda) * (r + rho - lambda) * (r + mu - lambda) -
        (-sigma) * (-rho) * (r + mu - lambda)
Out[5]:= -0.006 (0.405 - lambda) + (0.055 - lambda) (0.125 - lambda) (0.405 - lambda)
```

```
In[6]:= {lambda1b, lambda2b, lambda3b} =
        Last @@@ Solve[(r + sigma - lambda) * (r + rho - lambda) * (r + mu - lambda) -
        (-sigma) * (-rho) * (r + mu - lambda) == 0, lambda];
```

```
In[7]:= l1min := Min[lambda1a, lambda1b]; l1max := Max[lambda1a, lambda1b];
```

```
In[8]:= l1min
```

```
Out[8]:= 0.005
```

```
In[9]:= l1max
```

```
Out[9]:= 0.005
```

```
In[10]:= l2min := Min[lambda2a, lambda2b]; l2max := Max[lambda2a, lambda2b];
```

In[11]:= **l2min**

Out[11]= 0.175

In[12]:= **l2max**

Out[12]= 0.621997

In[13]:= **l3min := Min[lambda3a, lambda3b]; l3max := Max[lambda3a, lambda3b];**  
└─kleinstes Element └─größtes Element

In[14]:= **l3min**

Out[14]= 0.405

In[15]:= **l3max**

Out[15]= 0.958003

Da  $|1+\lambda(i)h|<1$  gelten muss, müssen folgende Ungleichheiten gelten:

Für  $\lambda(1)$ :

$$-1 < 1 + \lambda(1)h$$

$$-2/\lambda(1) < h$$

In[16]:= **-2 / l1min**

Out[16]= -400.

In[17]:= **-2 / l1max**

Out[17]= -400.

und weiters

$$1 + \lambda(1)h < 1$$

$$\text{also } h < 0$$

Aufgrund vom Bereich für  $\lambda(1)$  muss also folgendes gelten  $-400 < h < 0$ .

Für  $\lambda(2)$  muss folgendes gelten:

$$-1 < 1 + \lambda(2)h$$

$$-2/\lambda(2) < h$$

In[18]:= **-2 / l2min**

Out[18]= -11.4286

In[19]:= **-2 / l2max**

Out[19]= -3.21545

und weiters

$$1 + \lambda(2)h < 1$$

$$\text{also } h < 0$$

Aufgrund vom Bereich für  $\lambda(2)$  muss also folgendes gelten  $-3.21545 < h < 0$ .

Für  $\lambda(3)$  muss folgendes gelten:

$$-1 < 1 + \lambda(3) \cdot h$$

$$-2 / \lambda(3) < h$$

$$\text{In[20]:= } -2 / \lambda_{\text{min}}$$

$$\text{Out[20]= } -4.93827$$

$$\text{In[21]:= } -2 / \lambda_{\text{max}}$$

$$\text{Out[21]= } -2.08768$$

und weiters

$$1 + \lambda(3) \cdot h < 1$$

$$\text{also } h < 0$$

Aufgrund vom Bereich für  $\lambda(3)$  muss also folgendes gelten  $-2.08768 < h < 0$ .

$$\Rightarrow h \text{ aus } (-2.08768, 0)$$