



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Instanz-Optimalität adaptiver FEM

Ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der Technischen Universität Wien

unter der Leitung von

Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr.techn. Dirk Praetorius

und

Dipl.-Ing. Michael Feischl

durch

Alexander Haberl BSc.

Matrikelnummer: 0925297

Römerstraße 3

3361 Aschbach

Wien, am 09.12.2014

Alexander Haberl

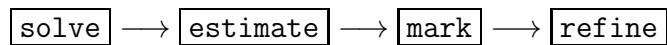
Erklärung

Hiermit erkläre ich, Alexander Haberl, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe. Außerdem bestätige ich, dass diese Arbeit in dieser oder ähnlicher Form noch nie veröffentlicht wurde.

Wien, am 09.12.2014

Kurzfassung

Ziel dieser Arbeit ist der Beweis der Instanz-Optimalität der Adaptiven Finiten Elemente Methode (AFEM) bestehend aus dem in Kapitel 7 beschriebenen Algorithmus. Dieser besteht im Wesentlichen aus folgender Schleife:



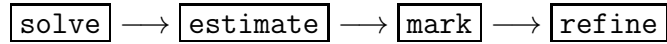
Beginnend mit einer kurzen Einführung in Newest Vertex Bisection (NVB), widmen sich die ersten Kapitel dem geometrischen Aspekt der AFEM. Mit Hilfe der Knotenmengen von Triangulierungen, genannt Populationen werden weitere, in der a posteriori Analysis benötigte Netzeigenschaften bewiesen. Als Modellproblem wählen wir die Poissongleichung im \mathbb{R}^2 mit homogenen Dirichlet-Randdaten. In weiterer Folge zeigen wir neben diskreter Effizienz und Zuverlässigkeit des kantenbasierten Residualschätzers eine Lower Diamond Estimate für den Schätzer sowie für das Energiefunktional.

Aufbauend auf der Maximumsstrategie und den oben skizzierten Schema stellen wir einen adaptiven Algorithmus mit modifizierten Markierungsstrategie vor. Abschließend wird mit Hilfe der oben erwähnten Netz- und analytischen Eigenschaften die Energieoptimalität bewiesen. Aus dieser lässt sich schlussendlich die Instanz-Optimalität für den Fehler $\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T})$ folgern.

Die Aufgabenstellung dieser Diplomarbeit ist die Auswertung und Aufarbeitung des Papers „Instance optimality of the adaptive maximum strategy“ von Lars Diening, Christian Kreuzer und Rob Stevenson. In dieser Publikation wurde erstmals ein Beweis der Instanz-Optimalität einer AFEM, ohne zusätzliche Vergrößerungsroutine vorgestellt.

Abstract

This thesis aims to prove the instance optimality of the adaptive finite element method (AFEM), driven by the algorithm of the form



The thesis and hence the proof of the instance optimality is organized as follows. First, we take a look on Newest Vertex Bisection (NVB), which is used for refining triangulations. Therefore, after a short introduction we take a different approach to look at meshes via the nodes of a triangulation. This so called Population-model allows us to derive some new properties of NVB, which are necessary in proof of the main result later on. In the next chapter, we introduce the Poisson model problem in \mathbb{R}^2 with homogeneous Dirichlet boundary conditions and give review of some needed function spaces. In this setting, we prove besides the discrete efficiency and reliability of the edge based residual error estimator, a so called lower diamond estimate for the energy functional and the total error. Chapter 7 contains the adaptive algorithm, which is steered by the maximum strategy with a slightly modified marking criterion. Finally we prove, first energy- and subsequently instance optimality for the total error $\|u_{\mathcal{T}} - u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T})$. The scope of this thesis is the analysis of the paper “Instance optimality of the adaptive maximum strategy” by Lars Diening, Christian Kreuzer and Rob Stevenson. This work contains the first proof of an AFEM algorithm, without using an additional coarsening routine.

Danksagung

Mein Dank gilt in erster Linie meinem Betreuerteam, bestehend aus Dirk Praetorius und Michael Feischl für die sehr herzliche und gute Zusammenarbeit sowie für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des FWF Projektes P27005 „Optimal Adaptivity for BEM and FEM-BEM Coupling“. Des Weiteren muss ich mich bei der kompletten Arbeitsgruppe für das schöne und immer anregende Arbeitsklima bedanken.

Abseits der Universität möchte ich sehr herzlich mich bei meiner Freundin Anna, für die mannigfaltige Unterstützung während des gesamten Studiums sowie während der Diplomarbeit bedanken und mich für die entfallene Zeit entschuldigen. Große Verbundenheit gilt meinen Eltern Angelika und Martin und meinem Bruder Peter für die Förderung meines Studiums und den Rückhalt in den letzten Jahren.

Zusätzlich gilt meine Anerkennung meinen Studienkollegen, allen voran Fabian Mußnig, der mir nicht nur mit zahllosen gelösten und schön aufgeschriebenen Übungsbeispielen, sondern auch mit mathematischem Rat zu jeder Tag- und Nachtzeit beiseite gestanden ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	13
1.1	Problemstellung	13
1.2	Aufbau der Arbeit	14
2	Newest Vertex Bisection	17
2.1	Einführung und Definition	17
2.2	BDD-Bedingung	20
3	Populationen	25
3.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	25
3.2	Verbandstruktur von Populationen und Triangulierungen	31
3.3	Vorfahren und Nachkommen	35
3.4	Freie Knoten	40
4	Die Lower Diamond Struktur	47
5	Analysis	51
5.1	Funktionenräume	51
5.2	Modellproblem	53
5.3	Scott-Zhang Projektion	55
5.4	Lower Diamond Estimate	64
6	A posteriori Analysis	67
6.1	Fehlerschätzer	67
6.2	Gesamtenergie	72
6.3	Energie und Fehlerschätzer für Populationen	76
7	Adaptiver Algorithmus	79
7.1	Algorithmus für Dreiecke	79
7.1.1	Schritt 1: <code>solve</code>	79
7.1.2	Schritt 2: <code>estimate</code>	79
7.1.3	Schritt 3: <code>mark</code>	80
7.1.4	Schritt 4: <code>refine</code>	80
7.2	Algorithmus für Populationen	81
8	Optimalität	83
8.1	Energieoptimalität	83
8.2	Instanzenoptimalität	92

9	Netze ohne BDD-Bedingung	95
9.1	Net Closure Estimate	95
9.2	Freie Knoten	95
	Literaturverzeichnis	99

1 Einleitung

Die Finite Elemente Methode (FEM) ist ein seit Jahrzehnten bewährtes und vielfach angewandtes Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen. Wie allgemein, bekannt bieten uniforme Verfahren kein optimales Konvergenzverhalten des Fehlers. Daher ist bei rechenintensiven Problemstellungen adaptiven Verfahren, bei welchen ein optimales Konvergenzverhalten bewiesen werden kann, der Vorzug zu geben.

Die Ratenoptimalität für die adaptive Finite Elemente Methode (AFEM) ist mittlerweile ein sehr gut untersuchter Forschungsgegenstand und diente in den letzten Jahren als fruchtbarer Boden für diverse wissenschaftliche Publikationen. In Verbindung mit der von Dörfler in [Dör96] vorgeschlagenen Markierungsstrategie ist die Ratenoptimalität für eine große Klasse von Problemen bewiesen. Neben elliptischen Problemen 2. Ordnung sei exemplarisch für nicht symmetrische Gleichungen auf [FFP14] und für inhomogene Dirichlet-Randdaten auf [FFP14] verwiesen. Des Weiteren wurden die für optimale Ratenkonvergenz nötigen Voraussetzungen, siehe [KPP13] bzw. [CFP14], auf 6 hinreichende Axiome reduziert.

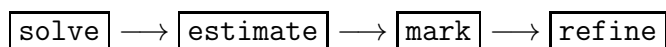
Der Fortschritt in puncto Instanz-Optimalität fällt in den letzten Jahren deutlich geringer aus. Für das sehr einfache Beispiel der Poissongleichung mit homogenen Randdaten wurde erstmals in [BDD04] die Instanz-Optimalität bewiesen. Diese Arbeit bedient sich einem in [MNS00] vorgestellten Algorithmus und benötigt eine zusätzliche Vergrößerungsroutine. Im Gegensatz zur Ratenoptimalität konnte diese erst 2013 in [DKS] entfernt werden. Dieser beweistechnische Quantensprung dient als Motivation und Ausgangspunkt meiner Diplomarbeit, welche die genauen Voraussetzungen sowie die mathematischen Mechanismen und neuen Methoden hinter dieser Publikation beleuchten soll. Diese Diplomarbeit beruht in wesentlichen Teilen auf dem oben erwähnten Preprint des Papers „Instance optimality of the adaptive maximum strategy“ von Lars Diening, Christian Kreuzer und Rob Stevenson, siehe [DKS].

1.1 Problemstellung

Als Modellproblem wählen wir die Poissongleichung in \mathbb{R}^2 mit homogener Dirichlet-Randbedingung. Das heißt, für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Rand $\partial\Omega = \Gamma$ lösen wir die Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma, \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit unbekannter Lösung u . Ziel dieser Arbeit ist, die Instanz-Optimalität für die Adaptive Finite Elemente Methode, bestehend aus der Schleife



zu beweisen. Der Algorithmus, siehe Kapitel 7, erhält eine initiale Triangulierung \mathcal{T}_0 und berechnet mit Hilfe einer leicht modifizierten Maximumsstrategie in jedem Schleifendurchlauf ein Gitter \mathcal{T}_ℓ mit dazugehöriger Galerkin-Lösung $u_{\mathcal{T}_\ell}$. Um nach jedem Schritt wieder ein reguläres Gitter, siehe Kapitel 2 zu erhalten, wählen wir Newest Vertex Bisection als Verfahren für die Netzverfeinerung. Die Instanz-Optimalität lässt sich mit Hilfe der Energienorm $\|\cdot\|$ und des Markierungsparameters μ nun folgendermaßen formulieren, siehe Satz 8.2.1 bzw. Korollar 8.2.2:

Es existieren Konstante $K, C > 0$, sodass für alle vom adaptiven Algorithmus erzeugten Gitter \mathcal{T}_ℓ und für alle Triangulierungen \mathcal{T} mit $\#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0) \leq K^{-1}\#(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0)$ gilt

$$\|u - u_{\mathcal{T}_\ell}\|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T}_\ell) \leq C(\|u - u_{\mathcal{T}}\|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T})).$$

In anderen Worten, der Fehler $\|u - u_{\mathcal{T}_\ell}\|$ einer berechneten Lösung $u_{\mathcal{T}_\ell}$ auf einer Triangulierung \mathcal{T}_ℓ mit n Dreiecken ist bis auf eine Konstante kleiner als der Fehler einer Lösung auf dem bestmöglichen Netz \mathcal{T} mit n/K Dreiecken. Dies garantiert nun, dass der adaptive Algorithmus maximal K Schritte benötigt um einen „optimalen Schritt“ durchzuführen. Die Instanz-Optimalität impliziert zusätzlich die Ratenoptimalität des adaptive Algorithmus. Ein weiterer Vorteil ist das Verschwinden einer vorasymptotischen Phase. Für den Beweis der Ratenoptimalität benötigt man oft, abhängig von der Problemstellung, sehr kleine Netzweiten, ehe eine optimales Konvergenzverhalten eintritt. Diese Bedingung tritt oft als Hemmschuh für Implementierungen auf und kann mit Instanz-optimalen Algorithmen vermieden werden.

1.2 Aufbau der Arbeit

Der Beweis der Instanz-Optimalität gliedert sich nun in folgende Kapitel bzw. Abschnitte, welche wir aufgrund der besseren Übersichtlichkeit und zur Bequemlichkeit des Lesers kurz zusammenfassen. Da die Eigenschaften der Netzverfeinerung, neben der a posteriori Analysis im Beweis der Instanz-Optimalität eine essentielle Rolle spielen, lässt sich diese Arbeit im wesentlichen in zwei Teile trennen. Der erste Teil, bestehend aus Kapiteln 2–4 behandelt die geometrischen Aspekt der AFEM bzw. beweist die nötigen Eigenschaften der Netzverfeinerung mittels NVB. Der zweite Teil, Kapitel 5–8 liefert die analytischen Voraussetzungen und Hilfsmittel sowie anschließend den Beweis des Hauptresultats.

Newest Vertex Bisection

Um die Notation einzuführen, definieren wir Begriffe wie Triangulierungen und Regularität und geben eine kurze Einführung in die Netzverfeinerung mittels Newest Vertex Bisection. Wir wiederholen zudem ein paar grundlegende Eigenschaften dieser Methode, allem voran die BDD-Bedingung siehe [BDD04] bzw. Definition 2.2.1 und direkt daraus folgende Resultate.

Populationen

Neben der Identifikation einer Triangulierung als Menge von Dreiecken, zeigen wir einen anderen Zugang um Dreiecksnetze zu beschreiben. Dieser stützt sich im Wesentlichen auf die Knotenmenge eines Netzes, welche wir als Populationen bezeichnen. Beginnend mit der Definition führen wir eine Verbands- und Baumstruktur ein. Diese erlaubt uns, am Ende dieses Kapitels mit Satz 3.4.7 eine Abschätzung für freie Knoten herzuleiten. Als frei bezeichnen wir im Späteren Verlauf genau jene Knoten eines Netzes, welche ohne weitere Konsequenz aus einer Triangulierung entfernt werden können. Diese Eigenschaft, welche wir leider nur für Netze im \mathbb{R}^2 beweisen können, wird später als wichtiger Bauteil im Beweis des Hauptresultats einfließen.

Lower Diamond Struktur

In der im vorigen Kapitel aufgebauten Baumstruktur von Triangulierungen bzw. Populationen lässt sich nun eine spezielle Ordnungsstruktur auszeichnen, die wir Lower Diamond nennen; Siehe Definition 4.0.10 bzw. Definition 4.0.12. Ziel dieses Abschnittes ist zu zeigen, dass diese Struktur unabhängig von der Betrachtung über Knoten oder Dreiecke, äquivalent definiert werden kann. (Siehe Korollar 4.0.16).

Analysis

In dieser Sektion führen wir das Modellproblem und die benötigten grundlegenden Analytischen Begriffe ein. Der dritte Unterabschnitt beschäftigt sich mit der Scott-Zhang Projektion und bietet Platz, um die später benötigten Eigenschaften dieses Operators herzuleiten. Das Kapitel endet mit dem Beweis der Lower Diamond Estimate für den Fehler in der Energienorm $\|u_{\mathcal{T}_x} - u_{\mathcal{T}_c}\|^2$. Diese ist, siehe Satz 5.4.2, eine Abschätzung welche auf der im vorhergehenden Kapitel definierten gleichnamigen Struktur beruht.

A posteriori Analysis

An dieser Stelle definieren wir den kanten-basierten Residualschätzer $\eta_{\mathcal{T}}^2(\cdot)$. Des Weiteren zeigen wir diskrete Zuverlässigkeit (Satz 6.1.7) und diskrete Effizienz (Satz 6.1.8) des Schätzers bzw. zeigen den Zusammenhang zwischen $\eta_{\mathcal{T}}^2(\cdot)$ und dem Energiefunktional des Modellproblems. Da wir den Beweis der Instanz-Optimalität in der Terminologie der Populationen führen, übersetzen wir anschließend die nötigen analytischen Begriffe in dieses Modell.

Adaptiver Algorithmus

Hier formulieren wir den oben kurz angesprochenen adaptiven Algorithmus, zuerst für Dreiecke und anschließend für Populationen. Das Markierungskriterium besteht aus einer leicht modifizierten Maximums-Strategie, wobei wir in jedem Schritt jene Dreiecke, welche zusätzlich zu einem markierten Dreieck verfeinert werden müssen, miteinbeziehen.

Optimalität

Mit der Vorbereitung aus den vorgehenden Kapitel und dem einem oder anderen technischen Lemma lässt sich nun zuerst die Energieoptimalität, Satz (8.1.5) beweisen. Aus diesem Resultat ist es nun ein Leichtes die Instanz-Optimalität des adaptiven Algorithmus (Satz 8.2.1 bzw. Korollar 8.2.2), welches das Hauptresultat dieser Arbeit darstellt, zu folgern.

Netze ohne BDD-Bedingung

Im Beweis der Energie- sowie Instanz-Optimalität geht entscheidend ein, dass die initiale Triangulierung die BDD-Bedingung erfüllt. In diesem Kapitel zeigen wir ein paar Probleme, welche sich ohne diese Voraussetzung ergeben bzw. mit welchen man im Fall von Netzen aus Simplizes im \mathbb{R}^n konfrontiert ist.

2 Newest Vertex Bisection

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit dem geometrischen Aspekt der finiten Elemente Methode, das heißt mit Triangulierungen und der dazugehörigen Netzverfeinerung. Im speziellen verwenden wir in dieser Arbeit Newest Vertex Bisection zur Netzverfeinerung. Ziel des ersten Kapitels ist, diese Technik vorzustellen und ein paar grundlegende Eigenschaften zusammenzufassen. Sei dazu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet mit Rand $\Gamma := \partial\Omega$.

2.1 Einführung und Definition

Wir bezeichnen eine Menge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ als nicht degeneriertes Dreieck, wenn es Punkte $x_T, y_T, z_T \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass $T = \text{conv}\{x_T, y_T, z_T\}$, und $|T| > 0$ ist. Für ein gegebenes Dreieck $T \in \mathcal{T}$ seien $\mathcal{K}(T) = \{x_T, y_T, z_T\}$ die Menge der Eckpunkte und $\mathcal{E}(T) = \{\text{conv}\{x_T, y_T\}, \text{conv}\{x_T, z_T\}, \text{conv}\{y_T, z_T\}\}$ die Menge der Kanten.

Wir definieren zusätzlich $\text{diam}(T) := \max\{|E| : E \in \mathcal{E}(T)\} = \max\{|x - y| : x, y \in T\}$.

Definition 2.1.1 Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet. Wir nennen \mathcal{T} genau dann eine Triangulierung von Ω wenn gilt:

- i) \mathcal{T} ist eine Menge von nicht degenerierten Dreiecken.
- ii) Der Abschluss von Ω wird von \mathcal{T} überdeckt, d.h. $\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$.
- iii) für alle $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \neq T'$ gilt $|T \cap T'| = 0$, d.h. der Schnitt zweier Dreiecke hat Maß 0.

Wir betrachten in dieser Arbeit nur Dreiecksnetze die in einem gewissen Sinne „schönbind“. Das soll heißen, eine Triangulierung darf keine hängenden Knoten besitzen, und einzelne Dreiecke dürfen sich nicht überlappen. Wir führen dazu den Begriff einer regulären Triangulierung ein.

Definition 2.1.2 Eine Triangulierung \mathcal{T} heißt regulär, wenn für alle $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \neq T'$ eine der folgenden Bedingungen zutrifft.

- $T \cap T' = \emptyset$,
- oder $T \cap T' = \{z\}$ mit $z \in \mathcal{K}_T \cap \mathcal{K}_{T'}$, d.h. T und T' besitzen einen gemeinsamen Knoten,
- oder $T \cap T' = E$ mit $z \in \mathcal{E}_T \cap \mathcal{E}_{T'}$, d.h. T und T' besitzen eine gemeinsame Kante.

Um den für die adaptive Finite Elemente Methode notwendigen Netzverfeinerungsalgorithmus erklären zu können, benötigen wir eine reguläre Triangulierung des Gebietes Ω . Diese bezeichnen wir mit \mathcal{T}_0 , und sie wird als Ausgangspunkt der Verfeinerung verwendet. In \mathcal{T}_0 wählen wir nun für jedes Dreieck einen beliebigen Knoten, der als Newest Vertex bezeichnet wird. Die dem Newest Vertex gegenüberliegende Kante nennen wir Referenzkante. Eine Heuristik für Newest Vertex Bisection (NVB) liest sich nun wie folgt:

- i) Starte mit regulärer Triangulierung \mathcal{T}_ℓ .
- ii) Verfeinere markierte Dreiecke $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ und erzeuge dadurch eine Verfeinerung $\mathcal{T}_{\ell+1}$.

Für ein beliebiges Dreieck $T \in \mathcal{T}_\ell$, siehe Abbildung 2.1, lautet die Verfeinerungsregel nun folgendermaßen:

- Ein zur Verfeinerung markiertes Dreieck wird durch Halbierung der Referenzkante in zwei Dreiecke T_1, T_2 geteilt. Diese bezeichnen wir als Kinder von T .
- Der Mittelpunkt der Referenzkante von T wird nun Newest Vertex der Nachkommen T_1 bzw. T_2 , und analog zur initialen Triangulierung wird jeweils die dem Newest Vertex gegenüberliegende Kante neue Referenzkante.

Um ausgehend von \mathcal{T}_ℓ sicherzustellen wieder eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T}_{\ell+1}$ zu erhalten, wählen wir folgende Verfeinerungsroutine:

- Wird ein Element $T \in \mathcal{T}_\ell$ für die Verfeinerung markiert, markieren wir die dazugehörige Referenzkante.
- In jedem Dreieck $T \in \mathcal{T}_\ell$, mit mindestens einer markierten Kante wird (falls nicht schon markiert) zusätzlich die Referenzkante markiert.
- Rekursiv wird nun jedes Dreieck mit markierter Referenzkante nach obiger Regel verfeinert. Es können folgende Fälle auftreten, siehe Abbildung 2.2.
 - Ist in T keine Kante markiert so wird T nicht verfeinert und daher gilt $T \in \mathcal{T}_{\ell+1}$
 - Enthält T nur eine markierte Kante, so muss bereits die Referenzkante markiert sein, und wir teilen T laut Bisektionsregel in Kinder T_1 und T_2 . Siehe Abbildung 2.1 bzw. 2.2 (links).



Abbildung 2.1: Bisektion mit Newest Vertex Bisection. Links: Für jedes Dreieck wird ein Newest Vertex und eine Referenzkante ausgezeichnet. Im Bisektionsschritt (rechts) wird die Referenzkante halbiert und T in Kinder T_1 und T_2 unterteilt

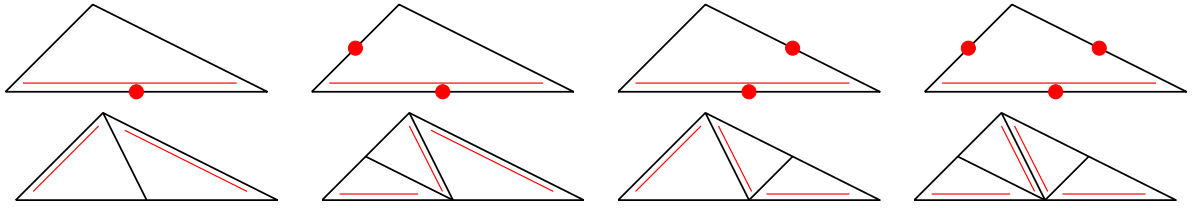


Abbildung 2.2: Abhängig von der Anzahl der markierten Kanten wird jedes Dreieck in 2, 3 oder 4 Dreiecke unterteilt.

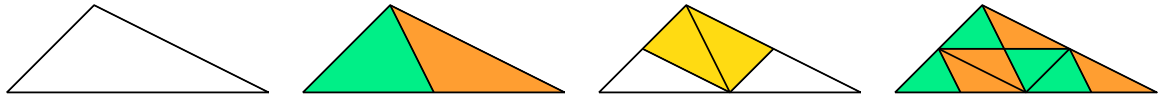


Abbildung 2.3: Verfeinerung durch Newst Vertex Bisection liefert für jedes Dreieck T nur 4 Klassen von ähnlichen Dreiecken. Ausgehend vom Dreieck T (links) sind die nach 1, 2 oder 3 Bisektionsschritten (rechts) auftretenden Dreiecke abgebildet. Gleiche Farben entsprechen in der Abbildung ähnlichen Dreiecken. Man sieht, dass nach 3 Bisektionen keine neuen Dreiecksklassen mehr entstehen können.

- Sind in T zwei Kanten markiert, muss die Referenzkante markiert sein. Wir verfeinern T in zwei Kinder T_1 und T_2 . Für eines dieser Dreiecke ist wiederum die Referenzkante markiert und wird daher abermals laut Bisektionsregel in zwei Kinder geteilt. Abbildung 2.2 (Mitte)
- Sind alle Kanten in T markiert, so teilen wir T in Kinder T_1 und T_2 . Beide Dreiecke haben nun eine markierte Referenzkante und werden daher wiederum in Kinder $T_{1,1}, T_{1,2}$ bzw. $T_{2,1}, T_{2,2}$ verfeinert.

Wie man sich leicht überlegen kann, entsteht durch den obige Routine wieder eine reguläre Triangulierung. Man bemerke dass in diesem Schritt, abhängig von der Anzahl der markierten Kanten, jedes Dreieck im maximal 4 Kinder unterteilt wird, siehe Abbildung 2.2.

Für Triangulierungen \mathcal{T} und \mathcal{T}' , wobei \mathcal{T} aus \mathcal{T}' durch Verfeinerung von markierten Elementen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}'$ hervorgeht, schreiben wir

$$\mathcal{T} = \text{ref}(\mathcal{T}', \mathcal{M}).$$

Mit Hilfe von Newst Vertex Bisection können wir nun Verfeinerungen einer Triangulierung definieren. Verwenden wir in Folgenden den Begriff Verfeinerung, so meinen wir dies immer im Sinne der nachstehenden Definition.

Definition 2.1.3 Seien \mathcal{T} und \mathcal{T}' reguläre Triangulierungen. Wir nennen \mathcal{T} genau dann eine Verfeinerung von \mathcal{T}' , das heißt $\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}')$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Es gibt endliche Mengen von Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ und markieren Elementen $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n$ mit $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}'$ sowie $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}$.

- Für alle $2 \leq \ell \leq n$ gilt $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$ sowie $\mathcal{T}_\ell = \text{ref}(\mathcal{T}_{\ell-1}; \mathcal{M}_{\ell-1})$.

Betrachtet man nun die Nachkommen eines Dreiecks $T \in \mathcal{T}_\ell$ genauer, so können, dargestellt in Abbildung 2.3, nur 4 verschiedene Typen von ähnlichen Dreiecken auftreten. Folglich können für eine initiale Triangulierung \mathcal{T}_0 , bei Netzverfeinerung mittels Newest Vertex Bisection, abhängig von $\#\mathcal{T}_0$, nur endlich viele verschiedene Ähnlichkeitsklassen von Dreiecken auftreten. Für zwei ähnliche Dreiecke T, T' gilt $|T|^{-1/2} \text{diam}(T) = |T'|^{-1/2} \text{diam}(T')$ und mit Hilfe dieser Tatsache verifiziert man nun leicht, folgendes Resultat über die uniforme Formregularität von NVB:

Satz 2.1.4 *Für ein Folge von regulären Triangulierungen $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{T}_\ell \in \text{refine}(\mathcal{T}_{\ell-1})$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$, gilt*

$$\sup_{\ell \in \mathbb{N}} \max_{T \in \mathcal{T}_\ell} |T|^{-1/2} \text{diam}(T) < \infty.$$

2.2 BDD-Bedingung

Die Wahl der Newest Vertices und der dazugehörigen Referenzkanten in \mathcal{T}_0 ist a priori beliebig. Wir beweisen in diesem Abschnitt, dass eine Zuordnung existiert, welche die nachfolgende Bedingung erfüllt. Die Beweisidee sowie der Erstbeweis stammen aus [BDD04, Section 2.2].

Definition 2.2.1 (BDD-Bedingung) *Eine Triangulierung \mathcal{T} erfüllt genau dann die BDD-Bedingung, wenn für alle $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \cap T' = E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{E}(\mathcal{T}')$ gilt*

$$E \text{ ist Referenzkante von } T \implies E \text{ ist Referenzkante von } T'$$

Satz 2.2.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet und \mathcal{T}_0 eine reguläre Triangulierung von Ω . Für \mathcal{T}_0 existiert eine Zuordnung von Newest Vertices und dazugehörige Referenzkanten, sodass die BDD-Bedingung 2.2.1 erfüllt ist.*

Beweis. Um den Beweis anschaulicher zu gestalten, sind die wesentlichen Beweisschritte in Abbildung 2.4 und 2.5 exemplarisch an einer regulären Triangulierung dargestellt.

- i) Da $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein polygonales Gebiet im \mathbb{R}^2 ist, lässt es sich homöomorph auf $\tilde{\Omega} \subseteq \mathcal{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ abbilden, wobei \mathcal{S}^2 die Einheitskugel bezeichnet. Das Bild der Triangulierung \mathcal{T}_0 liefert Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}_0$ von $\tilde{\Omega}$, siehe Abbildung 2.4. Die Regularität der Triangulierung ist eine rein kombinatorische Eigenschaft eines Netzes, und daher ist auch $\tilde{\mathcal{T}}_0$ regulär.
- ii) Sei nun $\tilde{\mathcal{T}} \supseteq \tilde{\mathcal{T}}_0$ eine beliebige Erweiterung von $\tilde{\mathcal{T}}_0$ zu einer regulären Triangulierung der kompletten Kugel \mathcal{S}^2 . Wir bezeichnen nun mit G den dualen Graphen der Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$. Dieser besitzt als Knoten die Menge der Dreiecke von $\tilde{\mathcal{T}}$ und jeweils zwei Knoten, die benachbarten Dreiecken entsprechen, sind durch eine Kante

verbunden. Das heißt als Knoten- und Kantenmenge von G ergibt sich

$$V_G := \{T : T \in \tilde{\mathcal{T}}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{E}_G := \{(T, T') : T \cap T' = E, \quad E \text{ ist Kante von } \tilde{\mathcal{T}}\}.$$

Aufgrund der Regularität der Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$ besitzt nun jedes $T \in \tilde{\mathcal{T}}$ mit genau 3 angrenzenden Dreiecken eine gemeinsame Kante. Somit ist jeder Knoten $K \in V_G$ mit exakt 3 anderen Knoten verbunden und G ist daher ein kubischer Graph. (Abbildung 2.5 (links)).

iii) Nach dem Satz von Peterson (siehe [Pet91]) existiert in jedem kubischen Graphen nun ein perfektes Matching, d.h. eine Menge von disjunkter Kanten $M \subseteq \mathcal{E}_G$, welche alle Knoten des Graphen G beinhalten und jeder Knoten genau einmal als Endpunkte einer Kante in M auftritt. (Abbildung 2.5 (Mitte))

iv) Da die Kanten im Graphen G den inneren Kanten der Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$ entsprechen, markieren wir nun alle $E \in M$ als Referenzkanten der angrenzenden Dreiecke in $\tilde{\mathcal{T}}$. Nun gilt:

- Da jeder Knoten von G als Endpunkt genau einer Kante in M auftritt, besitzt jedes Dreieck in $\tilde{\mathcal{T}}$ genau eine Referenzkante.
- Für $T, T' \in \tilde{\mathcal{T}}$ mit $T \cap T' = E \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}(T')$ gilt

$$\begin{aligned} E \text{ ist Referenzkante von } T &\iff E \in M && \text{und} \\ E \text{ verbindet Knoten } T, T' \text{ in } G &\iff E \text{ ist Referenzkante von } T'. \end{aligned}$$

v) Die so erhaltene Wahl der Referenzkanten in $\tilde{\mathcal{T}}$ liefert nun eine Zuordnung der Referenzkanten für $\tilde{\mathcal{T}}_0$ und folglich für \mathcal{T}_0 . Schlussendlich definieren wir für jedes $T \in \mathcal{T}_0$ den der Referenzkante gegenüberliegenden Knoten als Newest Vertex. \square

Satz 2.2.2 garantiert nun für jede Triangulierung \mathcal{T}_0 eine Zuordnung von Newest Vertices und Referenzkanten laut BDD-Bedingung 2.2.1. Wir können daher für die folgenden Kapitel o.B.d.A voraussetzen, dass die initiale Triangulierung \mathcal{T}_0 die BDD-Bedingung 2.2.1 erfüllt.

Definition 2.2.3 *Wir definieren nun \mathbb{T} , die Menge aller möglichen Verfeinerungen der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 als*

$$\mathbb{T} := \{\mathcal{T} : \mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}_0)\},$$

und die Menge aller Dreiecke in \mathbb{T} als

$$\mathfrak{T} := \{T \in \mathcal{T} : \mathcal{T} \in \mathbb{T}\}.$$

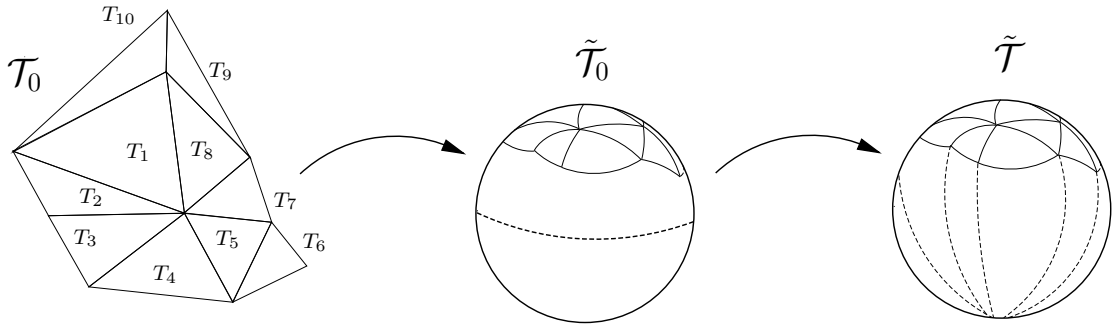


Abbildung 2.4: Illustration der wesentlichen Beweisschritte von Satz 2.2.2. Für eine beliebige reguläre Triangulierung \mathcal{T}_0 erhalten wir auf S^2 die Netze $\tilde{\mathcal{T}}_0$ bzw. eine beliebige Erweiterung $\tilde{\mathcal{T}}$ zu einer regulären Triangulierung der ganzen Sphäre

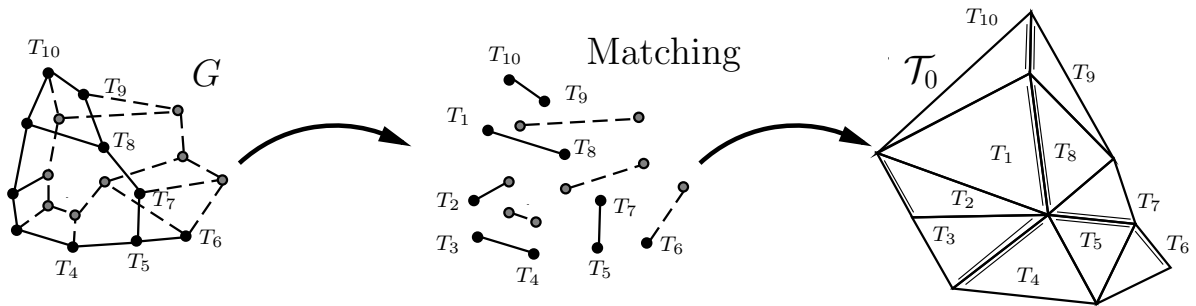


Abbildung 2.5: Illustration der wesentlichen Beweisschritte von Satz 2.2.2. Die Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$ liefert nun den kubischen Graphen G . Schwarze Punkte entsprechen Dreiecken in $\tilde{\mathcal{T}}_0$ und graue, Elementen aus der Erweiterung $\tilde{\mathcal{T}}$. Der Satz von Peterson garantiert nun ein perfektes Matching und dadurch eine Zuordnung der Referenzkanten laut Voraussetzung.

Definition 2.2.4 Für ein $T \in \mathfrak{T}$ definieren wir nun die Generation $\text{gen}(T)$ folgendermaßen:

- $\text{gen}(T) := 0$ für alle $T \in \mathcal{T}_0$.
- Für $T \in \mathfrak{T} \setminus \mathcal{T}_0$ ist $\text{gen}(T)$ die Anzahl der Bisektionen, um ausgehend von einem $T' \in \mathcal{T}_0$ zu T zu gelangen.

Man beachte, dass es für jedes Dreieck $T \in \mathfrak{T}$ ein eindeutiges Element $T' \in \mathcal{T}_0$ mit $T \subseteq T'$ gibt. Da in jedem Bisektionsschritt die Referenzkante und daher auch die Fläche eines Dreiecks halbiert wird, gilt folgende Proposition.

Proposition 2.2.5 *Sei $T \in \mathfrak{T}$. Für $\text{gen}(T)$ gilt*

$$\text{gen}(T) = \log_2 \frac{|T'|}{|T|} \quad \text{mit } T' \in \mathcal{T}_0 \text{ und } T \subseteq T'.$$

□

Wir nennen eine Verfeinerung \mathcal{T} des Netzes \mathcal{T}_0 uniform, wenn alle Dreiecke dieselbe Generation besitzen, d.h. $\text{gen}(T) = \text{gen}(T')$ für alle $T, T' \in \mathcal{T}$. Die Voraussetzung, dass \mathcal{T}_0 die BDD-Bedingung 2.2.1 erfüllt, ermöglicht nun den Beweis zwei sehr starke Netzeigenschaften von Verfeinerungen. Für den Beweis von Satz 2.2.6 sei auf [BDD04, Lemma 2.2].

Die Netzverfeinerung NVB wurde so konstruiert, dass ausgehend von einer regulären Triangulierung, durch iteratives markieren und verfeinern von Dreiecken, wieder ein reguläres Netz entsteht. Diese Eigenschaft wird als Netzabschluss bezeichnet. Verzichten wir nun auf NVB und betrachten Verfeinerungen, welche nur durch Bisektion von markierten Dreieck entstehen. Das heißt, nur jedes markierte Dreieck wird genau einer Bisektion (siehe Abbildung 2.1) unterworfen. Wie man sich leicht anhand eines Beispielen überzeugen kann, muss in diesem Fall das verfeinerte Netz nicht regulär sein. Es gilt jedoch das folgende Resultat. Für den Beweis verweisen wir auf [Ste08, Theorem 4.3].

Wir bezeichnen die Menge aller Verfeinerungen von \mathcal{T}_0 , welche durch Bisektion von einzelnen Dreiecken entstehen mit $\hat{\mathbb{T}}$. Es gilt nun $\mathbb{T} \subseteq \hat{\mathbb{T}}$ und folgender Satz:

Satz 2.2.6 *Sei \mathcal{T}_0 eine reguläre Triangulierung welche die BDD-Bedingung 2.2.1 erfüllt. Dann ist jede uniforme Verfeinerung $\mathcal{T} \in \hat{\mathbb{T}}$ regulär.*

Aufbauend auf Satz 2.2.6 erlaubt uns Lemma 2.2.7 im nächsten Kapitel, den Knoten einer Triangulierung eine sinnvolle und eindeutige Generation zuzuweisen, und so mit Hilfe der Knotenmenge weitere Netzeigenschaften zu beweisen.

Lemma 2.2.7 *Seien $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ und $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \cap T' = E$. Ferner sei E ist Referenzkante von T . Dann gilt*

- *entweder $\text{gen}(T') = \text{gen}(T)$, und E ist Referenzkante von T' ,*
- *oder $\text{gen}(T') = \text{gen}(T) - 1$, und E ist die Referenzkante von einem der beiden Kinder von T' .*

Beweis. Sei nun $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ beliebig, mit $E = T_1 \cap T_2$. Angenommen es gilt $\text{gen}(T_1) \geq \text{gen}(T_2) + 2$. Wir verfeinern nun T_2 so lange bis wir einen Nachkommen \tilde{T} von T , mit $\text{gen}(\tilde{T}) = \text{gen}(T_1)$ und $\tilde{T} \cap T_2 \neq \emptyset$ erhalten. Da in diesem Fall jede Kante mindestens ein Mal halbiert wird, siehe Abbildung 2.7, gilt

$$\exists K \in \mathcal{K}(\tilde{T}) \text{ mit } K \in \text{interior}(E).$$

Laut Satz 2.2.6 sind uniforme Verfeinerungen regulär also muss, damit keine hängenden Knoten entstehen, $\text{gen}(T) \neq \text{gen}(\tilde{T})$ gelten. Widerspruch.

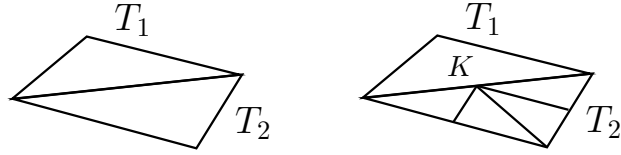


Abbildung 2.6: Für $\text{gen}(T_1) \geq \text{gen}(T_2) + 2$ entsteht durch mindestens zweifache Verfeinerung von T_2 , unabhängig von der Wahl der Referenzkanten, ein hängender Knoten K in der uniformen Verfeinerung.

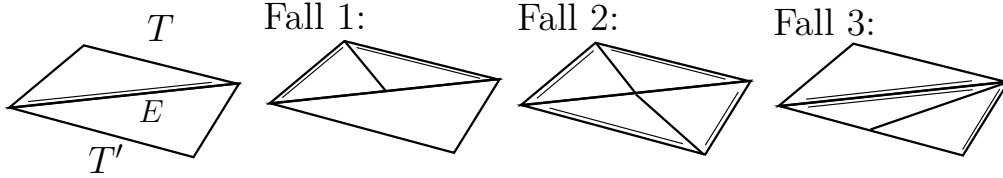


Abbildung 2.7: Für $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \cap T' = E$ ist im Fall 1 und Fall 3 die jeweils größte uniforme Verfeinerung mit Generation $\max\{\text{gen}(T), \text{gen}(T')\}$ abgebildet. Im Fall 2, mit gleicher Generation, ist die, durch Bisektion von T und T' , entstehende Verfeinerung dargestellt.

Somit gilt für beliebige benachbarte Dreiecke $|\text{gen}(T_1) - \text{gen}(T_2)| < 2$.

Seien nun $T, T' \in \mathcal{T}$ laut Voraussetzung. Wir unterscheiden nun die 3 möglichen Fälle.

Fall 1: $\text{gen}(T') = \text{gen}(T) + 1$:

Laut Voraussetzung gilt $T \cap T' = E$ und E ist Referenzkante von T . Verfeinern wir nun T erhalten wir Kinder T_1, T_2 mit $\text{gen}(T_1) = \text{gen}(T_2) = \text{gen}(T)$ und wieder einen Knoten $K \in \text{interior}(E)$. Auch in diesem Fall, siehe Abbildung 2.7, würde die uniforme Verfeinerung einen hängenden Knoten enthalten. Daher kann dieser Fall nicht auftreten.

Fall 2: $\text{gen}(T') = \text{gen}(T)$:

Unterwerfen wir nun T und T' einer Bisektion, so muss die entstehende uniforme Verfeinerung regulär sein. Dies kann aber nur der Fall sein, wenn E auch Referenzkante von T' ist. Siehe Abbildung 2.7 (Mitte).

Fall 3: $\text{gen}(T') = \text{gen}(T) - 1$:

Analog zu Fall 1 gibt es ein Kind \tilde{T}' von T' mit $\text{gen}(\tilde{T}') = \text{gen}(T)$ und $\tilde{T}' \cap T \neq \emptyset$. Nach Fall 2 gilt nun E ist Referenzkante von \tilde{T}' . \square

3 Populationen

3.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

In diesem Kapitel betrachten wir einen alternativen Zugang Triangulierungen zu beschreiben bzw. zu charakterisieren. Dieser wird sich im Wesentlichen auf die Knoten der Triangulierung stützen. Wir bezeichnen die Knotenmenge einer regulären Triangulierung als Population und wie sich in diesem Kapitel herausstellen wird, haben Populationen interessante Eigenschaften, welche wir in der a posteriori Analysis der finiten Elemente Methode sehr gut Nutzen können.

Dazu benötigen wir zuerst ein paar grundlegende Definitionen und Eigenschaften der Knotenmenge. Wir bezeichnen für eine Triangulierung $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{E}(\mathcal{T}) := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{E}(T)$ die Menge der Kanten und mit $\mathcal{K}(\mathcal{T}) := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{K}(T)$ die Menge aller Knoten. Analog zu den Triangulierungen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\mathcal{P}_\infty := \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \mathcal{K}(\mathcal{T}) \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_0 := \mathcal{K}(\mathcal{T}_0)$$

Definition 3.1.1 (Population) *Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ eine Menge von Knoten. \mathcal{P} ist genau dann eine Population, wenn eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ existiert mit $\mathcal{P} = \mathcal{K}(\mathcal{T})$. Die Menge aller Populationen bezeichnen wir mit \mathbb{P} .*

Klarerweise besitzt jede Triangulierung eine eindeutige Knotenmenge, aber wie das folgenden Lemma zeigt, lässt sich auch jeder Population in eindeutiger Weise eine Triangulierung zuordnen.

Lemma 3.1.2 *Sei $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ eine Population, dann existiert eine eindeutige Triangulierung $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{P} = \mathcal{K}(\mathcal{T})$*

Beweis. Laut Definition ist jede Population bereits Knotenmenge einer Triangulierung. Es bleibt nur die Eindeutigkeit zu zeigen. Angenommen es existieren $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{T}$ mit

$$\mathcal{K}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{K}(\mathcal{T}_2) = \mathcal{P}.$$

Da \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 beides Verfeinerungen des initialen Netzes \mathcal{T}_0 sind und neue Punkte mittels NVB nur durch Halbierung von Referenzkanten entstehen, bedeuten gleiche Knotenmengen auch, dass jeweils idente Dreiecke verfeinert wurden. Daher enthalten \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 die gleichen Dreiecke, d.h. $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ □

Dies liefert uns eine eindeutige Zuordnung zwischen Populationen und Triangulierungen. Aufgrund dieser lässt sich nun jeder Population \mathcal{P} eindeutig ein Netz $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ zuordnen. Um-

gekehrt bezeichnen wir die von der Triangulierung \mathcal{T} induzierte Population mit $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$. Diese Identifikation ermöglicht uns nun Verfeinerungen von Populationen zu definieren.

Definition 3.1.3 *Eine Population \mathcal{P} ist genau dann Verfeinerung einer Population \mathcal{P}' , wenn für die induzierten Triangulierungen gilt $\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}')$. Wir schreiben analog $\mathcal{P} \in \text{refine}(\mathcal{P}')$.*

Populationen besitzen wie Triangulierungen eine Baumstruktur. (Siehe Abbildung 3.1 bzw. 3.2). Um diese näher beleuchten zu können, definieren wir zuerst die Generation eines Knoten.

Definition 3.1.4 *Sei $P \in \mathcal{P}_{\infty}$ dann existiert ein $T \in \mathfrak{T}$, sodass P Mittelpunkt der Referenzkante von T ist. Wir definieren nun*

$$\text{gen}(P) := \begin{cases} 0 & \text{falls } P \in \mathcal{P}_0. \\ \text{gen}(T) + 1 & \text{falls } P \in \mathcal{P}_{\infty} \setminus \mathcal{P}_0 \text{ und } P \text{ ist Mittelp. der Referenzk. von } T. \end{cases}$$

Bemerkung 3.1.5 *Die Generation eines Knotens $P \in \mathcal{P}_{\infty}$ ist eindeutig, denn besitzen $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$ die selbe Referenzkante, so gilt laut Lemma 2.2.7, dass $\text{gen}(T_1) = \text{gen}(T_2)$ und $\text{gen}(P)$ ist daher wohldefiniert.*

Wie schon am Ende des ersten Kapitels erwähnt, geht an dieser Stelle die BDD-Bedingung 2.2.1 und das daraus folgende Lemma 2.2.7 entscheidend ein.

Proposition 3.1.6 *Sei $P \in \mathcal{P}_{\infty} \setminus \mathcal{P}_0$ und P Mittelpunkt der Referenzkante von Dreiecken T bzw. T' , dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- i) $\text{gen}(P) = \text{gen}(T) + 1$.
- ii) P ist Newest Vertex der Kinder T_1, T_2, T'_1, T'_2 von T bzw. T' und $\text{gen}(P) = \text{gen}(T_i) = \text{gen}(T'_i)$ für $i = 1, 2$.
- iii) $\text{gen}(P) = \min\{\text{gen}(T) : T \in \mathfrak{T} \text{ und } P \in \mathcal{K}_T\}$.

Beweis. Wir beweisen die Äquivalenz mittels i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i).

- i) \Rightarrow ii) Laut Lemma 2.2.7 gilt $\text{gen}(T) = \text{gen}(T')$. Die Implikation folgt nun direkt aus der Bisektionsregel für die Dreiecke T, T' .
- ii) \Rightarrow iii) Alle Dreiecke $\tilde{T} \in \mathfrak{T}$ mit $P \in \mathcal{K}(\tilde{T})$ entstehen durch Verfeinerung der Dreiecke T, T' bzw. deren Kinder. Daher gilt $\text{gen}(\tilde{T}) \geq \text{gen}(T_i) = \text{gen}(T'_j)$ für $i, j = 1, 2$ und somit $\text{gen}(P) = \min\{\text{gen}(T) : T \in \mathfrak{T} \text{ und } P \in \mathcal{K}(T)\}$.
- iii) \Rightarrow i) Es existiert nun ein $\tilde{T} \in \mathfrak{T}$ mit $\text{gen}(\tilde{T}) = \text{gen}(P)$ und $P \in \mathcal{K}(\tilde{T})$. Analog zum obigen Punkt muss \tilde{T} Nachkomme von T oder T' sein. Wir folgern aufgrund der Minimalität

$$\text{gen}(P) = \text{gen}(\tilde{T}) = \min\{\text{gen}(T) : T \in \mathfrak{T} \text{ und } P \in \mathcal{K}(T)\} = \text{gen}(T) + 1.$$

□

Bemerkung 3.1.7 *Betrachtet man die Verfeinerungen eines Netzes \mathcal{T}_0 , ohne die BDD-Bedingung so ermöglicht Punkt iii) aus Proposition 3.1 eine eindeutige Definition einer Generation von Knoten einer Population. Man beachte, dass in diesem Fall die Äquivalenz aus Proposition 3.1 nicht mehr gilt.*

Wir bezeichnen im Folgenden den Mittelpunkt P einer Kante E als $P = \text{mpt}(E)$ bzw. die eindeutige Kante E mit Mittelpunkt P als $E = \text{mpt}^{-1}(P)$. Jeder Knoten $P \in \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ ist, siehe Abbildung 3.1, Mittelpunkt einer Referenzkante von maximal 2 Dreiecken.

Definition 3.1.8 *Sei $P \in \mathcal{P}_\infty$ beliebig. Wir definieren die Eltern und Kinder von P , siehe Abbildung 3.1 wie folgt.*

- Für $P \in \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ und $E = \text{mpt}^{-1}(P)$ bezeichnen wir die Newest Vertices der Dreiecke mit Referenzkante E als Eltern von P respektive $\text{parents}(P)$. Gilt $P \in \mathcal{P}_0$ definieren wir $\text{parents}(P) = \emptyset$.
- Wir definieren die Kinder von P als $\text{children}(P) := \{P' \in \mathcal{P}_\infty : P \in \text{parents}(P')\}$.

Lemma 2.2.7 garantiert uns wieder, dass Dreiecke mit der gleichen Referenzkante E , die selbe Generation besitzen und daher auch die Elterngeneration $\text{gen}(\text{parents}(P)) = \text{gen}(P) + 1$ wohldefiniert ist. Es gilt nun die folgende nützliche Eigenschaft:

Proposition 3.1.9 *Für jedes Dreieck $T \in \mathfrak{T}$ und Knoten $P, P' \in \mathcal{K}(T)$, mit $P \neq P'$ und $\text{gen}(P) = \text{gen}(P')$, gilt*

$$\text{gen}(P) = \text{gen}(P') = 0.$$

Das heißt die Knoten jedes Dreiecks $T \in \mathfrak{T}$ mit $\text{gen}(T) > 1$ haben unterschiedliche Generation.

Beweis. Sei $T \in \mathfrak{T}$, für 2 Knoten $P, P' \in \mathcal{K}_T$ mit $P \neq P'$ gilt entweder $P \in \text{parents}(P')$ bzw. $P' \in \text{parents}(P)$, oder $P, P' \in \mathcal{P}_0$. Im ersten Fall gilt $\text{gen}(\text{parents}(P)) = \text{gen}(P) + 1$ und damit $\text{gen}(P) \neq \text{gen}(P')$. Somit kann nur der letzte Fall $P, P' \in \mathcal{P}_0$ auftreten. □

Wie man anhand Abbildung 3.1 erkennen kann, ist jeder innere Knoten $P \in (\mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0) \cap \Omega$ Kind von 2 Elternknoten. Im Falle eines Randknotens $P \in (\mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0) \cap \Gamma$ ist die Menge $\text{parents}(P)$ einelementig. Andererseits ist P Mittelpunkt der Referenzkante von Dreiecken T_1 und T_2 und daher Newest Vertex von maximal 4 verfeinerten Dreiecken. Siehe Abbildung 3.1 bzw. 3.2. Mit Hilfe des Knotenpatches erhalten wir folgende Proposition.

Definition 3.1.10 *Sei $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$. Für einen Knoten $P \in \mathcal{P}_\infty$ definieren wir den Knotenpatch als*

$$\omega_P := \{T \in \mathcal{T}_\mathcal{P} : P \in \mathcal{K}(T)\}.$$

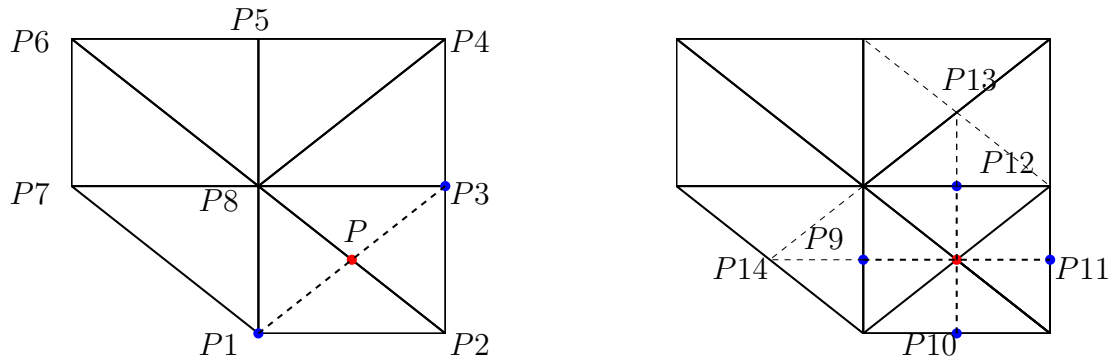


Abbildung 3.1: Für den Knoten P (in rot) sind in der linken Abbildung die Eltern, und in der rechten Abbildung die Kinder, jeweils in blau markiert.

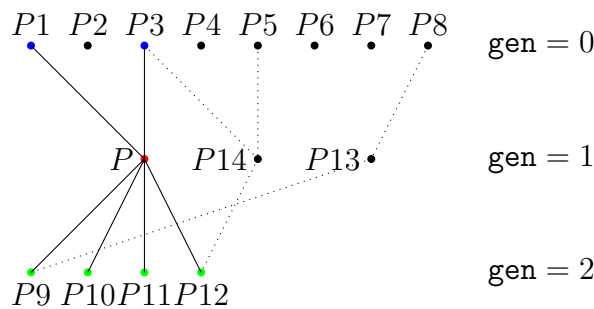


Abbildung 3.2: Baumstruktur für jene Population, welche der Triangulierung aus Abbildung 3.1 entspricht. Für den Knoten P (rot) sind die Eltern blau und die Kinder grün eingefärbt.

Proposition 3.1.11 Sei $P \in \mathcal{P}_\infty$ dann gelten folgende Punkte:

- i) Ist $P \in \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ Randknoten, so gilt $\#\text{parents}(P) = 1$.
- ii) Ist $P \in \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ innere Knoten, so gilt $\text{parents}(P) = \{P_1, P_2\}$ mit $\text{gen}(P_1) = \text{gen}(P_2)$.
- iii) Für $P \in \mathcal{P}_0$ existiert eine Konstante C mit $\#\text{children}(P) \leq C$.
- iv) Für $P \in \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ gilt $\#\text{children}(P) \leq 4$.

Beweis. Die Punkte i), ii) und iv) folgen direkt aus der Definition bzw. wurden oben gezeigt. Es bleibt nur noch Punkt iii) zu beweisen. Wählen wir C als $C := \max\{\#\omega_P : P \in \mathcal{P}_0\}$, kann jeder Knoten $P \in \mathcal{P}_0$ Newest Vertex vom maximal C Dreiecken sein und daher gilt $\#\text{children}(P) \leq C$. \square

Mit Hilfe der Eltern eines Knoten erhalten wir nun eine sehr nützliche Charakterisierung von Populationen.

Proposition 3.1.12 *Eine beliebige Teilmenge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ ist genau dann eine Population, wenn $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{Q}$ und für alle $P \in \mathcal{Q}$ gilt $\text{parents}(P) \subseteq \mathcal{Q}$.*

Da eine eindeutige Zuordnung zwischen Populationen und regulären Netzen existiert, charakterisiert die obige Bedingung auch, ob eine Knotenmenge einer regulären Triangulierung entspricht.

Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ ein beliebiges reguläres Netz. Wir bezeichnen die, durch zweifache uniforme Verfeinerung entstehende Triangulierung mit \mathcal{T}^{++} . Mittels NVB erhalten wir \mathcal{T}^{++} durch Markierung aller Kanten in \mathcal{T} , und anschließender Verfeinerung. Siehe Abbildung 2.2. Für Populationen definieren wir \mathcal{P}^{++} mit Hilfe von Triangulierungen als $\mathcal{P}^{++} := \mathcal{K}(\mathcal{T}_\mathcal{P}^{++})$.

Definition 3.1.13 *Für $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{T})$ definieren wir*

$$\text{mpt}(\mathcal{M}) := \{P : \exists E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}), P = \text{mpt}(E)\}.$$

Proposition 3.1.14 *Für Populationen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ mit $\mathcal{P}' \in \text{refine}(\mathcal{P})$ gilt:*

i) $\mathcal{P}^{++} \setminus \mathcal{P} = \text{mpt}(\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P}))$

ii) $\mathcal{P}' \cap (\mathcal{P}^{++} \setminus \mathcal{P}) = \text{mpt}(\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P}) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}'}))$

Beweis. $\mathcal{T}_\mathcal{P}^{++}$ entsteht aus $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ mittels NVB durch Markierung und anschließender Verfeinerung aller Kanten. Somit erhalten wir im Mittelpunkt jeder Kante in $\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P})$ einen neuen Knoten. Es gilt daher

$$\mathcal{P}^{++} \setminus \mathcal{P} = \text{mpt}(\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P})),$$

also Punkt i). Mit Hilfe von Punkt i), ergibt sich für $\mathcal{P}' \cap (\mathcal{P}^{++} \setminus \mathcal{P})$

$$\mathcal{P}' \cap (\mathcal{P}^{++} \setminus \mathcal{P}) = \mathcal{P}' \cap \text{mpt}(\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P})).$$

Laut Voraussetzung ist \mathcal{P}' eine Verfeinerung von \mathcal{P} . Die Menge $\mathcal{P}' \cap \text{mpt}(\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P}))$ enthält daher alle Mittelpunkte von Kanten in $\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P})$, welche beim Übergang von \mathcal{P} zu \mathcal{P}' verfeinert werden müssen. Somit gilt

$$\mathcal{P}' \cap (\mathcal{P}^{++} \setminus \mathcal{P}) = \text{mpt}(\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P}) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}'})),$$

also Punkt ii). □

Wir bezeichnen im Folgenden für $T \in \mathfrak{T}$ die Fläche von T mit $\text{area}(T) := \{x \in \mathbb{R}^2 : x \in T\}$.

Definition 3.1.15 *Für einen Knoten $P \in \mathcal{P}_\infty$ definieren wir*

$$\text{area}(P) := \bigcup \{\text{area}(T) : T \in \mathfrak{T}, P \in \mathcal{K}(T) \text{ und } \text{gen}(T) = \text{gen}(P)\}.$$

Für eine beliebige Knotenmenge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ definieren wir $\text{area}(\mathcal{P})$ durch

$$\text{area}(\mathcal{Q}) := \bigcup_{P \in \mathcal{Q}} \text{area}(P).$$

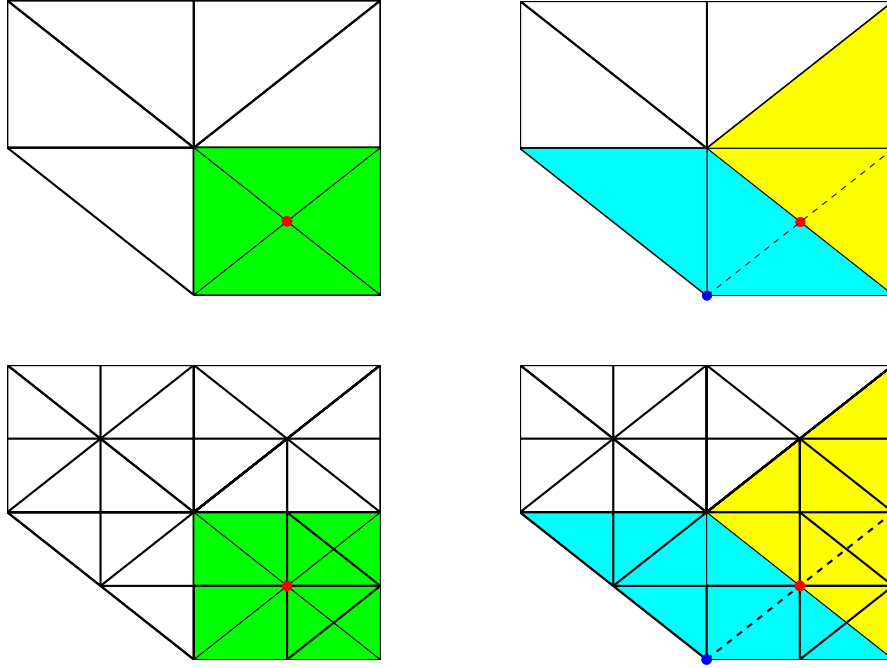


Abbildung 3.3: Links ist $\text{area}(P)$ für einen Knoten $P \in \mathcal{P}_\infty$ (rot) dargestellt. $\text{area}(P)$ ändert sich beim Übergang zu einer Verfeinerung nicht und ist im Fall des feineren Netzes ungleich dem Knotenpatch. Rechts ist analog $\text{area}(\text{parents}(P))$ in beiden Netzen dargestellt.

Bemerkung 3.1.16 Man beachte, dass die Definition von $\text{area}(P)$ im Gegensatz zu ω_P unabhängig von einer bestimmten Triangulierung oder Population ist. Im Allgemeinen stimmen diese zwei Begriffe auch nicht überein. Nur im speziellen Fall eines uniform verfeinerten Netzes \mathcal{T} , also für alle $T, T' \in \mathcal{T}$ gilt $\text{gen}(T) = \text{gen}(T')$ stimmt $\text{area}(P)$ mit der Fläche des Knotenpatches von P überein.

In Abbildung 3.3 wird für einen Knoten $P \in \mathcal{P}$, $\text{area}(P)$ und $\text{area}(\text{parents}(P))$ in zwei Triangulierungen dargestellt.

Lemma 3.1.17 Sei $P \in \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$, dann gelten folgende Punkte für $\text{area}(P)$:

- i) $\text{area}(P) = \bigcup \{ \text{area}(T) \in \mathfrak{T} : P \text{ ist Newest Vertex von } T \}$
- ii) $\text{area}(P) \subseteq \text{area}(\text{parents}(P))$
- iii) Sei $P' \in \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ mit $P' \neq P$ und $\text{gen}(P) = \text{gen}(P')$. Es gilt

$$|\text{area}(P) \cap \text{area}(P')| = 0$$

Beweis. i) Laut Definition beinhaltet $\text{area}(P)$ nur Dreiecke mit $\text{gen}(T) = \text{gen}(P)$ und $P \in \mathcal{K}_T$. Für diese gilt genau dann $\text{gen}(T) = \text{gen}(P)$, wenn P Newest Vertex von T ist. Wir erhalten i).

- ii) Für ein beliebiges Dreieck T mit Newest Vertex P und $\text{gen}(T) = \text{gen}(P)$ gilt, T ist Verfeinerung eines Dreieckes T' mit Newest Vertex $P' \in \text{parents}(P)$. Mit Hilfe vom Punkt i) erhalten wir

$$\begin{aligned} T &\subseteq T' \subseteq \text{area}(\text{parents}(P)) \\ \implies \text{area}(P) &\subseteq \text{area}(\text{parents}(P)). \end{aligned}$$

- iii) Seien P und P' laut Voraussetzung. Es gilt daher $\text{gen}(P) = \text{gen}(P')$ und $P' \neq P$. Wir folgern, dass P bzw. P' Mittelpunkte von Referenzkanten E respektive E' von Dreiecken T_1, T_2 sowie T'_1, T'_2 , der uniformen Verfeinerung mit Generation $\text{gen}(P)$ sind. Laut Lemma 2.2.7 gilt $T_1 \neq T_2 \neq T'_1 \neq T'_2$ und daher

$$|(\text{area}(T_1) \cup \text{area}(T_2)) \cap (\text{area}(T'_1) \cup \text{area}(T'_2))| = 0. \quad (3.1)$$

Verwenden wir nun

$$\text{area}(P) \subseteq \{\text{area}(T) : P \text{ ist Mittelpunkt der Referenzkante von } T\}, \quad (3.2)$$

erhalten wir schlussendlich $|\text{area}(P) \cap \text{area}(P')| = 0$.

□

3.2 Verbandstruktur von Populationen und Triangulierungen

Die Relation der Verfeinerung versieht die Mengen \mathbb{T} und \mathbb{P} in natürlicher Weise mit einer Halbordnung. In diesem Kapitel fassen wir ein paar grundlegende Eigenschaften, der von $\text{refine}(\cdot)$ induzierten Ordnungsstruktur zusammen. Ein Vorteil von Populationen gegenüber Triangulierungen besteht unter anderem darin, dass sich diese Halbordnung mit der mengentheoretischen Inklusion übereinstimmt. Man verifiziert nun unmittelbar, dass folgende Proposition gilt.

Proposition 3.2.1 *Für $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ gilt folgende Äquivalenz:*

$$\mathcal{P}' \in \text{refine}(\mathcal{P}) \iff \mathcal{T}_{\mathcal{P}'} \in \text{refine}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}}) \iff \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'.$$

Die Menge der Populationen bildet bezüglich der Verfeinerung einen Verband. Als obere Schranken führen wir die Bezeichnung $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}'$, für die größte gemeinsame Verfeinerung ein. Analog definieren wir $\mathcal{P} \ominus \mathcal{P}'$ als die feinste gemeinsame Vergrößerung.

Lemma 3.2.2 *Die Halbordnung $(\mathbb{P}, \text{refine}(\cdot))$ bildet einen Verband mit Nullelement.*

- i) Für $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ gilt $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ d.h. je zwei Elemente besitzen eine obere Schranke.
ii) Für $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ gilt $\mathcal{P} \ominus \mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ d.h. je zwei Elemente besitzen eine untere Schranke

iii) Für alle $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ gilt $\mathcal{P} \ominus \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0$, somit \mathcal{P}_0 ist ein Nullelement.

iv) Die um \mathcal{P}_∞ erweiterte Menge $\mathbb{P} \cup \{\mathcal{P}_\infty\}$, bildet einen Verband mit Einselement \mathcal{P}_∞ .

v) Für Populationen gilt die Overlay Estimate $\#(\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}') \leq \#\mathcal{P} + \#\mathcal{P}' - \#\mathcal{P}_0$

Beweis. i) Seien $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$. Als ersten Schritt müssen wir die Wohldefiniertheit, also $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ zeigen. Trivialerweise gilt $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$. Für ein beliebiges $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ mit o.B.d.A $P \in \mathcal{P}$, gilt laut Proposition 3.1.12 $\text{parents}(P) \subseteq \mathcal{P}$ und daher $\text{parents}(P) \subseteq \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$. Wir verwenden wieder Proposition 3.1.12 an und erhalten $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$. Nun gilt $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ also laut Prop. 3.2.1 $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}' \in \text{refine}(\mathcal{P})$ bzw. $\text{refine}(\mathcal{P}')$. Dies ist klarerweise die grösste gemeinsame Verfeinerung und wir erhalten schlussendlich $\mathcal{P} \cup \mathcal{P}' = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}'$.

ii) Lässt sich völlig analog zu i) beweisen.

iii) Folgt direkt aus ii) da für alle $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ gilt $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ und daher $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P} = \mathcal{P}_0 = \mathcal{P} \wedge \mathcal{P}_0$.

iv) Laut Definition gilt

$$\mathcal{P}_\infty = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \mathcal{K}(\mathcal{T}) = \bigcup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \mathcal{P},$$

und daher $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ für alle $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$.

v) Da laut Voraussetzung $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ folgern wir $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. Punkt i) liefert nun

$$\#(\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}') = \#(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}') \leq \#\mathcal{P} + \#\mathcal{P}' - \#\mathcal{P}_0.$$

□

Bemerkung 3.2.3 Die Verbandseigenschaft überträgt sich mit Hilfe der Bijektion zwischen \mathbb{P} und \mathbb{T} nun direkt auf die Menge der Triangulierungen.

$$\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}'}} \quad \text{und} \quad \mathcal{T} \ominus \mathcal{T}' = \mathcal{T}_{\mathcal{P}_{\mathcal{T} \wedge \mathcal{T}'}}$$

Analog zu oben ist \mathcal{T}_0 das Nullelement und $\mathbb{T} \cup \{\mathcal{T}_*\}$ bildet einen Verband mit Einselement \mathcal{T}_* .

Da wir $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}'$ und $\mathcal{T} \ominus \mathcal{T}'$ über Populationen definiert haben ist a priori nicht klar, dass diese Triangulierungen die zu erwartenden Eigenschaften erfüllen. Wie aber das nächste Lemma zeigt ist das der Fall.

Lemma 3.2.4 Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{T}$. Gilt nun für ein Dreieck T , $T \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ so folgt $T \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ sowie $T \in \mathcal{T}_1 \ominus \mathcal{T}_2$.

Beweis. Seien $P_{\mathcal{T}_1}, P_{\mathcal{T}_2}$ die von \mathcal{T}_1 respektive \mathcal{T}_2 induzierten Populationen. Angenommen es existiert $T \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ mit $T \notin \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$. So muss T in $\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$ verfeinert worden sein und daher gilt für den Mittelpunkt P der Referenzkante von T , $P \in P_{\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2} = P_{\mathcal{T}_1} \cup P_{\mathcal{T}_2}$. Da aber $P \notin P_{\mathcal{T}_1}$ und $P \notin P_{\mathcal{T}_2}$ erhalten wir einen Widerspruch. Die zweite Implikation lässt sich völlig analog beweisen. □

Mit Hilfe der Verbandsstruktur können wir nun Verfeinerungen bezüglich beliebigen endlichen Knotenmengen definieren.

Definition 3.2.5 Für $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ und eine Menge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ mit $\#\mathcal{Q} < \infty$. Wir definieren $\text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{Q})$ als

$$\text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{Q}) := \bigoplus \{ \mathcal{P}' \in \mathbb{P} : \mathcal{P}' \in \text{refine}(\mathcal{P}) \text{ und } \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}' \}.$$

Das heißt $\text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{Q})$ ist die grösste Verfeinerung der Populationen \mathcal{P} welche alle Knoten aus \mathcal{Q} enthält.

Lemma 3.2.6 Seien $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ und $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ mit $\#\mathcal{Q} < \infty$, so ist $\text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{Q})$ wohldefiniert und eindeutig.

Beweis. Wir wählen $n = \max\{\text{gen}(P) : P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}\}$. Wir wissen nach Lemma 2.2.6, dass uniforme Verfeinerungen des Anfangsnetzes reguläre Triangulierungen sind. Sei nun \mathcal{T} , die Triangulierung, welche durch n uniforme Verfeinerungen aus \mathcal{T}_0 entsteht. Es gilt

$$\forall T, T' \in \mathcal{T} : \text{gen}(T) = \text{gen}(T') \implies \forall P \in \mathcal{P}_\mathcal{T} \text{ gilt } \text{gen}(P) \leq n, \quad (3.3)$$

und daher auch $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\mathcal{T}$ sowie $\mathcal{P}_\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{P})$. Somit haben wir eine gemeinsame Verfeinerung gefunden. Da wir die grösste gemeinsame Verfeinerung suchen, genügt es daher die grösste untere Schranke endlich vieler Populationen zu bestimmen. Die Existenz folgt induktiv aus der Existenz für zwei Populationen. Diese ist eindeutig, denn angenommen es existieren zwei grösste Verfeinerungen $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, so erhalten wir mit $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ ein gröbere Verfeinerung. Widerspruch. \square

Korollar 3.2.7 Für zwei Populationen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ gilt

$$\text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{P}') = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}' = \text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}).$$

Beweis. Es gilt laut Definition $\text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{P}') = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}'$ und mit 3.2.2 weiters auch, dass

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup (\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}) = \mathcal{P} \oplus (\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}) = \text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}).$$

\square

Analog definieren wir die feinste gemeinsame Vergrößerung einer Population \mathcal{P} und einer Teilmenge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$, das heißt die feinste Population \mathcal{P}' , sodass $\mathcal{P} \in \text{refine}(\mathcal{P}')$ und \mathcal{P}' keine Knoten der Menge \mathcal{Q} enthält.

$$\text{coa}(\mathcal{P}; \mathcal{Q}) := \bigoplus \{ \mathcal{P}' \in \mathbb{P} : \mathcal{P} \in \text{refine}(\mathcal{P}') \text{ und } \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}' = \emptyset \}$$

Da sich alle Verbandseigenschaften auf die Triangulierungen übertragen, erinnern wir an dieser Stelle an die Definition $\text{ref}(\mathcal{T}; \mathcal{M})$ für ein Netz $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ und einer Menge von markierten Elementen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{T}$. In Verbandsnotation ergibt sich für $\text{ref}(\mathcal{T}; \mathcal{M})$ nun

$$\text{ref}(\mathcal{T}; \mathcal{M}) = \bigoplus \{ \mathcal{T}' \in \mathbb{T} : \mathcal{T}' \in \text{refine}(\mathcal{T}) \text{ und } \mathcal{M} \cap \mathcal{T}' = \emptyset \}.$$

Markieren wir anstatt Dreiecken nun Kanten so definieren wir

$$\mathbf{ref}(\mathcal{T}; \mathcal{F}) := \bigoplus \{ \mathcal{T}' \in \mathbb{T} : \mathcal{T}' \in \mathbf{refine}(\mathcal{T}) \text{ und } \mathcal{E}(\mathcal{T}') \cap \mathcal{F} = \emptyset \} \quad (3.4)$$

$$= \mathbf{ref}(\mathcal{P}_{\mathcal{T}}; \mathbf{mpt}(\mathcal{F})). \quad (3.5)$$

und $\mathbf{ref}(\mathcal{T}; \mathcal{F})$ bezeichnet wiederum die größte Verfeinerung von \mathcal{T} , in der alle Kanten der Menge \mathcal{F} verfeinert wurden. Wir haben nun $\mathbf{ref}(\cdot; \cdot)$ mehrfach definiert, doch wird im späteren Verlauf immer klar sein, welche Definition bzw. in welchem Sinn wir $\mathbf{ref}(\cdot; \cdot)$ verstehen bzw. verwenden. Es gilt nun folgender Zusammenhang zwischen Verfeinerungen durch markierte Kanten und markierte Dreiecke.

Lemma 3.2.8 *Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{T})$ dann existieren Mengen*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &:= \{ T \in \mathcal{T} : \exists E \in \mathcal{E}(T) \text{ mit } E \in \mathcal{F} \} \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_2 &:= \{ T \in \mathbf{ref}(\mathcal{T}, \mathcal{M}_1) : \exists E \in \mathcal{E}(T) \text{ mit } E \in \mathcal{F} \}, \end{aligned}$$

sodass gilt

$$\mathbf{ref}(\mathcal{T}; \mathcal{F}) = \mathbf{ref}(\mathbf{ref}(\mathcal{T}; \mathcal{M}_1); \mathcal{M}_2). \quad (3.6)$$

Für die Anzahl der markierten Dreiecke gilt zusätzlich die Abschätzung

$$\#\mathcal{M}_1 + \#\mathcal{M}_2 \leq 4\#\mathcal{F}. \quad (3.7)$$

Beweis. Definieren wir die Mengen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ laut Voraussetzung ergibt sich (3.6) direkt aus der NVB Verfeinerungsroutine. Jedes $E \in \mathcal{F}$ ist Kante von maximal zwei Dreiecken, somit gilt $\#\mathcal{M}_i \leq \#2\mathcal{F}$ für $i = 1, 2$. Summieren über i liefert (3.7). \square

Betrachtet man nun für Triangulierungen $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ mit $\mathcal{T}' \in \mathbf{ref}(\mathcal{T}, \mathcal{M})$, nun $\#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}') - \#\mathcal{M}$, dass heißt die Anzahl an Dreiecken die zusätzlich zu \mathcal{M} verfeinert werden müssen. Wie man sich leicht anhand eines Beispiels überzeugen kann, ist möglich dass für ein markiertes Element alle Dreiecke einer Triangulierung verfeinert werden müssen. Dennoch lässt sich folgende wichtige Abschätzung zeigen. Für den Beweis sei auf [BDD04] bzw. [KPP13] verwiesen.

Satz 3.2.9 (Net Closure Estimate) *Für eine Folge $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{T}$ von Triangulierungen und einer Folge von markierten Elementen $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{T}_\ell$, sodass $\mathcal{T}_{\ell+1} = \mathbf{ref}(\mathcal{T}_\ell; \mathcal{M}_\ell)$ gilt*

$$\#(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0) \leq C'_{nc} \sum_{i=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_i.$$

Mit einer Konstanten C'_{nc} welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 abhängt.

Bemerkung 3.2.10 *Die Net Closure Estimate 3.2.9 gilt, siehe [KPP13] auch für Folgen $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit einer initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 , welche die BDD-Bedingung nicht erfüllen.*

Der in späteren Verlauf vorgestellte adaptive Algorithmus und der Beweis der Instanzen Optimalität wird sich wesentlich auf Populationen stützen. Um daher die Net Closure Estimate anwenden zu können, müssen wir diese für Populationen formulieren. Wir machen das in zwei Schritten.

Lemma 3.2.11 (Net Closure Estimate) *Für eine Folge $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{P}$ von Populationen und einer Folge markierten Elementen $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{P}_\ell)$, sodass $\mathcal{P}_{\ell+1} = \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell)$ gilt*

$$\#(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0) \leq C_{nc} \sum_{i=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_i.$$

Mit einer Konstanten C_{nc} welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 abhängt.

Beweis. Seien $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{P}$ und $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ laut Voraussetzung. Wir bezeichnen wieder mit \mathcal{T}_0 die von \mathcal{P}_0 induzierte Triangulierung, und definieren für $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_{2\ell+1} = \text{ref}(\mathcal{T}_\ell; \mathcal{M}_{2\ell,1})$ sowie $\mathcal{T}_{2(\ell+1)} = \text{ref}(\mathcal{T}_{2\ell+1}; \mathcal{M}_{2\ell,2})$. Laut Proposition 3.2.8 wissen wir nun

$$\mathcal{P}_{\ell+1} = \mathcal{T}_{2(\ell+1)} \quad \text{sowie} \quad \#\mathcal{M}_{\ell,1} + \#\mathcal{M}_{\ell,2} \leq 4\#\mathcal{M}_\ell.$$

Wir können nun die Net Closure Estimate auf $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ anwenden und erhalten

$$\#(\mathcal{T}_{2\ell} \setminus \mathcal{T}_0) \leq C'_{nc} \sum_{i=0}^{(\ell-1)} \#\mathcal{M}_{2i,1} + \#\mathcal{M}_{2i+1} \leq 4C'_{nc} \sum_{i=0}^{2\ell-1} \#\mathcal{M}_i. \quad (3.8)$$

Für jede Population $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ gilt klarerweise $\#(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0) \leq \#(\mathcal{T}_\mathcal{P} \setminus \mathcal{T}_0)$. Dies und $C_{nc} := 4C'_{nc}$ liefert die Behauptung. \square

Korollar 3.2.12 *Für eine Folge $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{T}$ und einer Folge $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ von markierten Elementen, mit $\mathcal{M}_\ell \subseteq (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P})$ und $\mathcal{P}_{\ell+1} = \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell)$ gilt*

$$\#(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0) \leq C_{ov} \sum_{i=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_i.$$

Mit einer Konstanten C_{ov} welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 abhängt.

Beweis. Folgt direkt aus 3.2.11 mit Hilfe von $\text{mpt}^{-1}(\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}) = \mathcal{E}(\mathcal{P}_\ell)$. \square

3.3 Vorfahren und Nachkommen

In diesem Abschnitt gehen wir genauer auf die von Eltern und Kindern induzierte hierarchische Ordnung ein. Wir definieren dazu die Vorfahren und Nachkommen eines Knoten.

Definition 3.3.1 Sei $P \in \mathcal{P}_\infty$, die Vorfahren, $\text{anc}(P)$ sind gegeben durch

$$\text{anc}(P) := \text{parents}(P) \cup \bigcup_{Q \in \text{parents}(P)} \text{anc}(Q). \quad (3.9)$$

Wir definieren die Nachkommen des von $P \in \mathcal{P}_\infty$ durch

$$\text{des}(P) := \{P' \in \mathcal{P}_\infty : P \in \text{anc}(P')\} \quad (3.10)$$

Da für alle $P \in \mathcal{P}_0$ laut Definition $\text{parents}(P) = \emptyset$ gilt, erhalten wir auch $\text{anc}(P) = \emptyset$. Die Definition der Vorfahren und Nachkommen sowie der Eltern und Kinder lässt sich unmittelbar auf eine Menge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ übertragen. Wir setzen dazu:

$$\text{children}(\mathcal{Q}) := \bigcup_{P \in \mathcal{Q}} \text{children}(P) \quad (3.11)$$

$$\text{parents}(\mathcal{Q}) := \bigcup_{P \in \mathcal{Q}} \text{parents}(P) \quad (3.12)$$

$$\text{anc}(\mathcal{Q}) := \bigcup_{P \in \mathcal{Q}} \text{anc}(P) \quad (3.13)$$

$$\text{des}(\mathcal{Q}) := \bigcup_{P \in \mathcal{Q}} \text{des}(P) \quad (3.14)$$

In der folgenden Proposition fassen nun ein paar grundlegende Eigenschaften der Vor- und Nachfahren zusammen.

Proposition 3.3.2 Für Populationen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ mit $\mathcal{P}' \in \text{refine}(\mathcal{P})$ gelten folgende Eigenschaften:

- i) $\text{anc}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$.
- ii) Sei $\mathcal{Q} \in \mathcal{P}_\infty$, dann gilt $\text{ref}(\mathcal{P}; \mathcal{Q}) = \mathcal{P} \cup \text{anc}(\mathcal{Q}) \cup \mathcal{Q}$.
- iii) $\text{anc}(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}) = \emptyset$.
- iv) $\text{des}(\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

Beweis. i) Laut Proposition 3.1.12 ist \mathcal{P} genau dann eine Population, wenn für alle $P \in \mathcal{P}$ auch $\text{parents}(P) \subseteq \mathcal{P}$. Somit gilt $\text{anc}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P}$.

ii) $\mathcal{P} \cup \text{anc}(\mathcal{Q}) \cup \mathcal{Q}$ ist wieder laut Proposition 3.1.12 eine Population. Diese ist eine Verfeinerung von \mathcal{P} und enthält trivialerweise die Menge \mathcal{Q} . Sie ist auch minimal bezüglich dieser Eigenschaft, denn entfernen wir einen Punkt $P \in \text{anc}(\mathcal{Q})$ ist P einer der Eltern eines Punktes in $(\mathcal{P} \cup \text{anc}(\mathcal{Q}) \cup \mathcal{Q}) \setminus \{P\}$ und daher ist $\mathcal{P} \cup \text{anc}(\mathcal{Q}) \cup \mathcal{Q} \setminus \{P\}$ keine Population.

iii) Aus $\mathcal{P}' \in \text{refine}(\mathcal{P})$ folgt nach Punkt i) $\text{anc}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ und folglich $\text{anc}(\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}) = \emptyset$.

- iv) Angenommen es existiert ein Knoten $P \in \text{des}(\mathcal{P}' \setminus \mathcal{P}) \cap \mathcal{P}$. Nach Definition existiert ein Knoten $\tilde{P} \in \text{anc}(P)$ mit $\tilde{P} \notin \mathcal{P}$. Da aber $P \in \mathcal{P}$ und laut Punkt i) $\text{anc}(P) \subseteq \mathcal{P}$ gelten muss erhalten wir einen Widerspruch. □

Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei nun $\text{gen}^{-1}(n) := \{P \in \mathcal{P}_\infty : \text{gen}(P) = n\}$. Diese Mengen können als Schichten im Binärbaum der Populationen, siehe Abbildung 3.2, interpretiert werden. Um die Notation zu vereinfachen verwenden wir im Beweis des nächsten Lemmas folgende Schreibweise:

Wir bezeichnen mit \mathcal{T}_n die uniforme Verfeinerung der initialen Triangulierung mit Generation n und mit \mathcal{P}_n die von \mathcal{T}_n induzierte Triangulierung. Nun gilt für alle $P \in \mathcal{P}_n$, $\text{gen}(P) \leq n$. Wir erhalten daher

$$\text{gen}^{-1}(n) = \{P \in \mathcal{P}_\infty : \text{gen}(P) = n\} = \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_{n-1}. \quad (3.15)$$

Betrachtet man nun für einen beliebigen Punkt $P \in \mathcal{P}_\infty$ die Menge der Vorfahren von P , so wächst diese a priori mit steigender Generation. Wie aber folgendes Lemma zeigt, ist die Anzahl der Vorfahren mit gleicher Generation uniform beschränkt und kann daher auch bei beliebiger Verfeinerung, der Population bzw. der Triangulierung, nicht vergrößert werden.

Lemma 3.3.3 (Limited Genetic Diversity) *Es existiert eine Konstante C_{gd} , welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 abhängt, sodass*

$$C_{gd} := \sup_{P \in \mathcal{P}_\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \#(\text{anc}(P) \cap \text{gen}^{-1}(n)) < \infty. \quad (3.16)$$

Beweis. Wir teilen den Beweis in mehrere Schritte.

- i) Sei $T \in \mathfrak{T}$ ein beliebiges Dreieck. Laut Definition ist $\text{gen}(T)$ gleich der Anzahl an Bisektionen um von einem Dreieck $\tilde{T} \in \mathcal{T}_0$ zu T zu gelangen. Da in mit jedem Bisektionsschritt die Referenzkante und daher auch die Fläche eines Dreiecks halbiert wird, gilt mit $2^{-\text{gen}(T)}|\tilde{T}| = |T|$ nun

$$2^{-\text{gen}(T)} \min_{T' \in \mathcal{T}_0} |T'| \leq |T| \leq 2^{-\text{gen}(T)} \max_{T' \in \mathcal{T}_0} |T'|, \quad (3.17)$$

und daher $|T| \simeq 2^{-\text{gen}(T)}$. Bezeichnen wir mit $\text{diam}(T)$ die längste Seite des Dreiecks, so liefert uns die uniforme Formregularität für jede Kante $E \in \mathcal{E}(T)$

$$|E| \simeq \text{diam}(T) \simeq |T|^{-1/2}. \quad (3.18)$$

mit Konstanten die nur von \mathcal{T}_0 abhängen.

ii) Für alle $P, P' \in \mathcal{P}_\infty$ mit $P' \in \text{parents}(P)$ existiert ein $T \in \mathfrak{T}$ mit $\text{gen}(T) = \text{gen}(P)$ und $P, P' \in \mathcal{K}(T)$. Wir erhalten mit $\text{dist}(P, P') \simeq 2^{-\text{gen}(P)/2}$.

Sein nun $P' \in \text{anc}(P)$ und $k := \text{gen}(P) - \text{gen}(P')$ dann existieren Knoten P_1, \dots, P_k mit $P_1 = P$ sowie $P_k = P'$ und für alle $i \geq 2$ gilt $P_i \in \text{parents}(P_{i-1})$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe erhalten wir

$$\text{dist}(P, P') = \sum_{i=1}^{k-1} \text{dist}(P_i, P_{i+1}) \simeq \sum_{i=1}^{k-1} 2^{-i/2} = \frac{2^{-k/2} - 1}{2 - 1} \simeq 2^{-k/2}. \quad (3.19)$$

iii) Sei nun \mathcal{T}_m wie oben, die uniforme Verfeinerung von \mathcal{T}_0 bestehend aus Dreiecken der Generation m . Aufgrund der Formregularität wissen wir, dass der kleinste Innenwinkel in \mathcal{T}_m durch eine Konstante nach unten beschränkt ist. Mit Hilfe von Punkt i) gilt nun für jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}_m$ und für alle $E \in \mathcal{E}(T)$

$$|T|^{\frac{1}{2}} \simeq 2^{-m/2} \simeq |E|.$$

Für jede Kugel B mit Radius $2^{-m/2}$ existiert daher eine Konstante C , sodass $\#\{T \in \mathcal{T}_m : T \cap B \neq \emptyset\} \leq C$.

iv) Für ein beliebiges $\tilde{P} \in \text{anc}(P) \cap \text{gen}^{-1}(n)$ gilt $\text{gen}(P) - \text{gen}(\tilde{P}) = \text{gen}(P) - n =: m$ und daher nach Punkt ii) $\text{dist}(P, \tilde{P}) \simeq 2^{-m/2}$. Nach Punkt iii) lässt sich für m die Anzahl der Knoten in jeder Kugel mit Radius $r := \text{dist}(P, \tilde{P}) \simeq 2^{-m/2}$, in \mathcal{T}_m durch eine Konstante C nach oben abschätzen. Somit gilt für alle Kugeln $B_r(P)$ um P

$$\begin{aligned} 3C &> \#(B_r(P) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{T}_m}) \geq \#\{P' \in \mathcal{P}_m : \text{dist}(P, P') < r\} \\ &\geq \#(\text{anc}(P) \cap \mathcal{P}_n) = \#(\text{anc}(P) \cap \text{gen}^{-1}(n)). \end{aligned}$$

v) Man beachte, dass alle verwendeten Konstanten direkt von \mathcal{T}_0 , oder von der uniformen Formregularität abhängen. Diese wiederum hängt wieder nur von \mathcal{T}_0 ab und daher gilt selbiges auch für C_{gd} .

□

Lemma 3.3.4 *Seien $P, P_1, P_2 \in \mathcal{P}_\infty$ verschieden, sodass $\text{parents}(P) = \{P_1, P_2\}$ und $\text{gen}(P) > 2$. Dann gilt $\text{parents}(P_1) \cap \text{parents}(P_2) \neq \emptyset$, d.h. P_1 und P_2 besitzen einen gemeinsamen Elternteil.*

Beweis. Seien $P, P_1, P_2 \in \mathcal{P}_\infty$ laut Voraussetzung. In Abbildung 3.4 (Mitte) ist der größte Knotenpatch dargestellt, der den Punkt P enthält. Nun gibt es bis auf Symmetrie zwei mögliche Vergrößerungen in welchen P_1 und P_2 als Newest Vertices auftreten, siehe Abbildung 3.4 jeweils links bzw. rechts.

- In der rechten Vergrößerung gilt nun $P_3 \in \text{parents}(P_1) \cap \text{parents}(P_2) \neq \emptyset$, also sind wir in diesem Fall fertig.

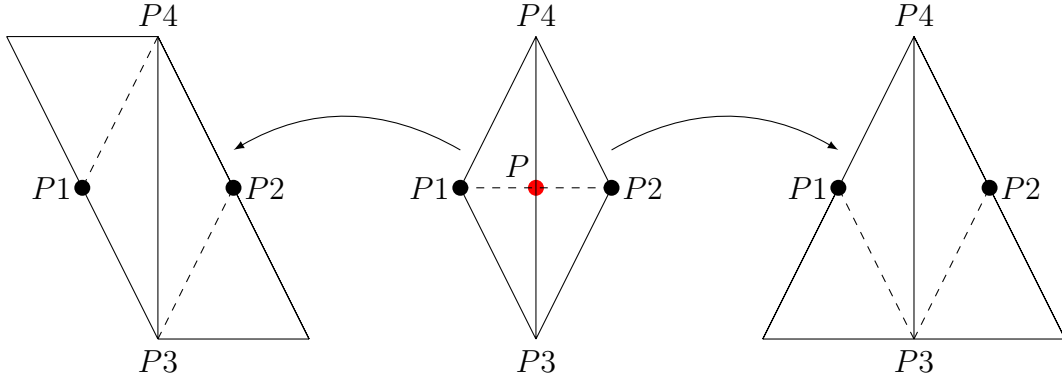


Abbildung 3.4: In der Mitte ist die größte Triangulierung, die den Punkte P (rot) enthält, dargestellt. Links und rechts befinden sich die, bis auf Symmetrie, einzigen möglichen Vergrößerungen welche P_1 bzw. P_2 als Newest Vertex enthalten.

- Im Fall der linken Vergrößerung betrachten wir $P_3 \in \text{parents}(P_2)$, so gilt $\text{gen}(P_3) = \text{gen}(P_2) - 1 = \text{gen}(P) - 2$. Analog erhalten wir $\text{gen}(P_4) = \text{gen}(P_3) = \text{gen}(P) - 2 > 0$. Das Dreieck mit Knotenmenge $\{P_1, P_3, P_4\}$ enthält nun zwei Knoten der selben Generation also gilt nach Korollar 3.1.9 $\text{gen}(P_3) = \text{gen}(P_4) = 0$ und daher $\text{gen}(P) = 2$. Widerspruch. Somit kann Fall 2 nicht auftreten und daraus folgend gilt $\text{parents}(P_1) \cap \text{parents}(P_2) \neq \emptyset$.

□

Lemma 3.3.5 Sei $P \in \mathcal{P}_\infty$, für zwei verschiedene Knoten $Q, R \in \text{anc}(P)$ mit $\text{gen}(Q) = \text{gen}(R) > 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq \text{gen}(P) - \text{gen}(Q)$ und eine Folge von Knoten P_0, \dots, P_k . Diese erfüllt $P_0 = Q$ und $P_k = R$ und für alle $1 \leq i \leq k$ haben P_i und P_{i-1} ein gemeinsames Kind, d.h.

$$\text{children}(P_{i-1}) \cap \text{children}(P_i) \cap (\text{anc}(P) \cup \{P\}) \neq \emptyset \quad 1 \leq i \leq k.$$

Beweis. Wir wählen ein $P \in \mathcal{P}_\infty$ beliebig aber fest. Wir führen den Beweis nun Induktiv nach $n := \text{gen}(P) - \text{gen}(Q)$.

- $n = 1$
In diesem Fall gilt $\text{gen}(Q) = \text{gen}(R) = \text{gen}(P) - 1$, insbesondere auch $Q, R \in \text{parents}(P)$ und somit

$$\text{children}(Q) \cap \text{children}(R) = P.$$

- $n \rightarrow n + 1$
Es seien $P, Q \in \text{anc}(P)$ laut Voraussetzung mit $\text{gen}(Q) - \text{gen}(P) = n + 1$ gegeben. Wir wählen Knoten Q' und R' , siehe Abbildung 3.5, mit

$$Q' \in \text{children}(Q) \cap \text{anc}(P) \tag{3.20}$$

$$R' \in \text{children}(R) \cap \text{anc}(P) \tag{3.21}$$

Es folgt $\text{gen}(Q') = \text{gen}(R') = \text{gen}(Q) + 1$ und somit $\text{gen}(P) - \text{gen}(Q') = n$. Gilt nun $Q' = R'$ haben wir ein gemeinsames Kind gefunden und wir sind fertig.

Ansonsten existieren laut Induktionsvoraussetzung P'_0, \dots, P'_k mit $P'_0 = Q'$ sowie $P'_k = R'$ und für alle $1 \leq i \leq k$ besitzen P'_i, P'_{i-1} jeweils ein gemeinsames Kind. Laut Proposition 3.1.11 haben beide Eltern eines gemeinsamen Kindes die gleiche Generation, also gilt $\text{gen}(P'_i) = \text{gen}(P'_{i-1})$. Mit der gleichen Argumentation erhalten wir für alle $1 \leq i \leq k$,

$$\text{gen}(P'_i) = \text{gen}(Q) + 1 \geq 2.$$

Nach dem soeben bewiesenen Lemma 3.3.4 besitzen jeweils $\text{gen}(P'_i)$ und $\text{gen}(P'_{i-1})$ einen gemeinsamen Elternteil welches wir P_i bezeichnen. Definieren wir nun $P_0 = Q$ und $P_{k+1} = R$ so gilt für alle $1 \leq i \leq k+1 \leq \text{gen}(P) - \text{gen}(Q)$. P_i und P_{i-1} haben ein gemeinsames Kind P'_i und insbesondere ist

$$\text{children}(P_{i-1}) \cap \text{children}(P_i) \cap (\text{anc}(P) \cup \{P\}) \neq \emptyset.$$

□

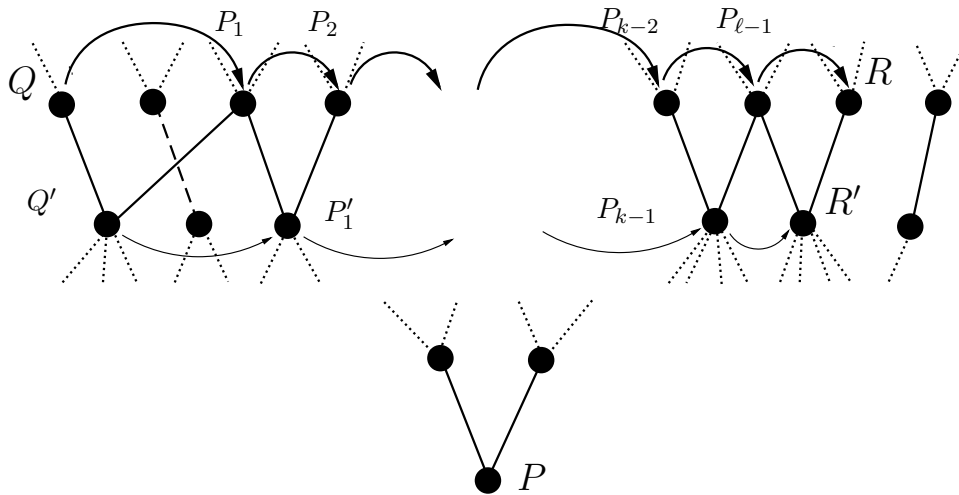


Abbildung 3.5: Induktionsschritt von $n \rightarrow n + 1$ im Beweis von Lemma 3.3.5.

3.4 Freie Knoten

Wir betrachten in diesem Abschnitt Knotenmengen, in welcher für alle Knoten die Nachkommen nicht enthalten sind. Diese Eigenschaft bezeichnen wir als Nachkommen-frei bzw. **free**. Wie sich herausstellen wird, sind das jene Knoten, die aus einer Population entfernt werden können, sodass die übrig gebliebene Knotenmenge wieder eine Population ist. Ziel dieses Kapitels ist, siehe Satz 3.4.7, eine Abschätzung für die Anzahl der freien Knoten einer Menge herzuleiten.

Definition 3.4.1 Eine Menge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ ist (Nachkommen-) frei, wenn gilt

$$\text{des}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{Q} = \emptyset.$$

Definition 3.4.2 Sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$. Wir bezeichnen mit

$$\text{free}(\mathcal{Q}) := \{P \in \mathcal{Q} : \text{des}(P) \cap \mathcal{Q} = \emptyset\},$$

die Menge aller (Nachkommen-) freien Knoten in \mathcal{Q} .

Im folgenden Lemma fassen wir ein paar grundlegende Eigenschaften freier Knoten zusammen.

Lemma 3.4.3 Sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ beliebig, dann gelten folgende Eigenschaften.

- i) Die Menge \mathcal{Q} ist genau dann (Nachkommen-) frei, wenn $\text{free}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$.
- ii) Für $\#\mathcal{Q} < \infty$ gilt $\mathcal{Q} \cup \text{anc}(\mathcal{Q}) = \text{free}(\mathcal{Q}) \cup \text{anc}(\text{free}(\mathcal{Q}))$.
- iii) Für $\#\mathcal{Q} < \infty$ und $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ folgt $\text{ref}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \text{ref}(\mathcal{P}, \text{free}(\mathcal{Q}))$.
- iv) Für $\#\mathcal{Q} < \infty$ gilt $\mathcal{Q} \neq \emptyset \implies \text{free}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$.

Beweis. i) Sei $\text{free}(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$. Nach Definition gilt für alle $P \in \mathcal{Q}$, $\text{des}(P) \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. Also P ist (Nachkommen-) frei. Die Rückrichtung folgt wiederum direkt aus der Definition von $\text{free}(\mathcal{Q})$.

ii) Da $\text{free}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$ gilt trivialerweise $\mathcal{Q} \cup \text{anc}(\mathcal{Q}) \supseteq \text{free}(\mathcal{Q}) \cup \text{anc}(\text{free}(\mathcal{Q}))$. Es bleibt daher nur noch

$$\mathcal{Q} \cup \text{anc}(\mathcal{Q}) \subseteq \text{free}(\mathcal{Q}) \cup \text{anc}(\text{free}(\mathcal{Q}))$$

zu zeigen. Wir wählen einen Knoten $P \in \mathcal{Q}$ beliebig aber fest und unterscheiden nun 2 Fälle:

- Ist $P \in \text{free}(\mathcal{Q})$ dann folgt $P \cup \text{anc}(P) \subseteq \text{free}(\mathcal{Q}) \cup \text{anc}(\text{free}(\mathcal{Q}))$ und wir sind fertig.
- Ist $P \notin \text{free}(\mathcal{Q})$, so existiert ein Nachkomme $P' \in \text{des}(P) \cap \mathcal{Q}$ mit $\text{gen}(P') > \text{gen}(P)$. Für $P' \notin \text{free}(\mathcal{Q})$ wiederholen wir den Vorgang und wählen $P'' \in \text{des}(P') \cap \mathcal{Q}$. Da laut Voraussetzung $\#\mathcal{Q} < \infty$ ist $m := \max\{\text{gen}(P) : P \in \mathcal{Q}\} \leq \infty$. Wir erhalten nach endlich vielen Schritten ein $P^{(n)}$ mit $P^{(n)} \in \text{free}(\mathcal{Q})$ und $\text{gen}(P^{(n)}) \leq m$. Für diesen gilt nun

$$P \cup \text{anc}(P) \subseteq \text{anc}(P') \subseteq \dots \subseteq \text{anc}(P^{(n)}) \subseteq \text{anc}(\text{free}(\mathcal{Q})).$$

iii) Sei $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$, nach Proposition 3.3.2 Punkt ii) und den soeben bewiesenen Punkt ii) gilt

$$\begin{aligned} \text{ref}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) &\stackrel{3.3.2 \text{ ii)}}{=} \mathcal{P} \cup \text{anc}(\mathcal{Q}) \cup \mathcal{Q} \stackrel{\text{ii)}}{=} \mathcal{P} \cup \text{free}(\mathcal{Q}) \cup \text{anc}(\text{free}(\mathcal{Q})) \\ &\stackrel{3.3.2 \text{ ii)}}{=} \text{ref}(\mathcal{P}, \text{free}(\mathcal{Q})). \end{aligned}$$

iv) Angenommen es gilt $\mathcal{Q} \neq \emptyset$ und $\mathbf{free}(\mathcal{Q}) = \emptyset$. Wir folgern mit Hilfe von Punkt ii)

$$\emptyset = \mathbf{free}(\mathcal{Q}) \cup \mathbf{anc}(\mathbf{free}(\mathcal{Q})) \stackrel{ii)}{=} \mathcal{Q} \cup \mathbf{anc}(\mathcal{Q}) \quad (3.22)$$

Widerspruch!

□

Bemerkung 3.4.4 *Wie wir später an einem Gegenbeispiel sehen werden, gilt für Netze ohne die BDD-Bedingung für Knoten $P' \in \mathbf{parents}(P)$ nicht, dass $\mathbf{gen}(P) > \mathbf{gen}(P')$. Somit lassen sich die Punkte ii) und iv) in dieser Form nicht beweisen und gelten auch im Allgemeinen für initiale Netze ohne Bedingung 2.2.1 nicht.*

Wie zu Beginn erwähnt, sind die freien Knoten einer Population genau jene, deren Entfernung wieder in einer Population bzw. einer regulären Triangulierung ergibt. Diese ist trivialerweise eine Vergrößerung der ausgehenden. Etwas formaler erhalten wir:

Lemma 3.4.5 *Gegeben sei eine Population $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$. Dann gelten folgenden Eigenschaften.*

- i) Für $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$ gilt $\mathbf{coa}(\mathcal{P}, \mathcal{F}) = \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$
- ii) Für $\mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ folgt $\mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}') \subseteq \mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$

Beweis. i) Sei $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ und \mathcal{F} laut Voraussetzung. Da $\mathcal{F} \subseteq \mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$ laut Definition (Nachkommen-) frei ist, gilt für alle $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$, $\mathbf{parents}(P) \subseteq \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$. Wir verwenden wieder Proposition 3.1.12 und erhalten $\mathcal{P} \setminus \mathcal{F} \in \mathbb{P}$. Dies ist trivialerweise die feinste Vergrößerung von P welche keine Knoten aus \mathcal{F} enthält also gilt $\mathbf{coa}(\mathcal{P}, \mathcal{F}) = \mathcal{P} \setminus \mathcal{F}$.

- ii) Es gilt $\mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}') \subseteq \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ und trivialerweise $\mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}') \cap \mathcal{P}' = \emptyset$. Mit Hilfe von Lemma 3.3.2 Punkt i) folgern wir

$$\mathbf{des}(\mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}')) \cap \mathcal{P} = \emptyset. \quad (3.23)$$

Laut Definition der (Nachkommen-) Freiheit gilt für jede Menge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$, $\mathbf{des}(\mathbf{free}(\mathcal{Q})) \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. Setzen wir $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}'$ erhalten wir mit Hilfe von (3.23)

$$\mathbf{des}(\mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}')) \cap (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}') = \emptyset \stackrel{(3.23)}{=} \mathbf{des}(\mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}')) \cap (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0). \quad (3.24)$$

Somit haben Punkte aus $\mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}')$ keine Nachkommen in \mathcal{P} bzw. $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$, das heißt für jeder Knoten in $P \in \mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}')$ gilt $P \in \mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0)$. Schlussendlich erhalten wir

$$\mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}') \subseteq \mathbf{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0). \quad (3.25)$$

□

Wie schon anfangs erwähnt, benötigen wir für den späteren Beweis der Instanzen-Optimalität eine Abschätzung der Anzahl an entfernbaren Knoten in einer Population. Im speziellen ist die minimale Anzahl an freien Knoten einer Triangulierung $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ bis auf eine Konstante bereits durch \mathcal{T}_0 respektive \mathcal{P}_0 bestimmt. Für den Beweis benötigen wir zunächst ein technisches Lemma.

Lemma 3.4.6 Sei $P \in \mathcal{P}_\infty$ beliebig. Für eine (Nachkommen-) freie Menge $\mathcal{Q}' \subseteq \text{anc}(P) \setminus \mathcal{P}_0$ gilt

$$\#\mathcal{Q}' \leq C_{gd}.$$

Beweis. Der Beweis gliedert sich in folgende Punkte:

- i) Wir wählen $P \in \mathcal{P}_\infty$ beliebig aber fest. Es gilt $\#\text{anc}(P) < \infty$ und daher existiert eine bezüglich Kardinalität, maximale freie Teilmenge. Falls diese nicht eindeutig ist, wählen wir jene, in welcher die Summe über Generationen der Knoten maximiert wird d.h.

$$M := \{\mathcal{U} \subseteq (\text{anc}(P) \setminus \mathcal{P}_0) : \text{free}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}, \#\mathcal{U} \text{ maximal}\}. \quad (3.26)$$

Ist die Menge M einelementig, haben wir genau ein \mathcal{U} mit maximaler Kardinalität gefunden und definieren wir $\mathcal{Q} := \mathcal{U}$. Ansonsten wählen wir

$$\mathcal{Q} := \arg \max_{\mathcal{U} \in M} \sum_{K \in \mathcal{U}} \text{gen}(K). \quad (3.27)$$

- ii) Angenommen es gilt folgende Behauptung: Es existiert $n \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $Q \in \mathcal{Q}$, $\text{gen}(Q) = n$ gilt und somit $\mathcal{Q} \subseteq \text{gen}^{-1}(n)$.

Lemma 3.3.3 liefert nun $\#\mathcal{Q} \leq C_{gd}$ und daher gilt für alle $\mathcal{Q}' \subseteq \text{anc}(P) \setminus \mathcal{P}_0$, $\#\mathcal{Q}' \leq \#\mathcal{Q} \leq C_{gd}$ und damit die Behauptung. Es bleibt also die obige Behauptung zu beweisen.

- iii) Beweis der Behauptung:

Sei nun $\text{gen}(P) \geq 2$ sodass $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Ansonsten ist die Aussage trivial. Wir definieren $n := \min\{\text{gen}(Q) : Q \in \mathcal{Q}\}$ und führen einen Widerspruchsbeweis.

Angenommen es gibt ein $P' \in \mathcal{Q}$ mit $\text{gen}(P') \neq n \Leftrightarrow \text{gen}(P') \geq n + 1$.

Da \mathcal{Q} frei ist, gilt $\text{anc}(P') \not\subseteq \mathcal{Q}$ und daher existiert ein Vorfahre Q von P' mit Generation n , welcher nicht in der Menge \mathcal{Q} enthalten ist. Da $P' \in \mathcal{Q}$ und damit laut Definition auch $P' \in \text{anc}(P)$ gilt, erhalten wir $Q \in \text{anc}(P)$ und zusammenfassend

$$Q \in (\text{anc}(P') \cap \text{anc}(P) \cap \text{gen}^{-1}(n)) \setminus \mathcal{Q}. \quad (3.28)$$

Laut Definition von n gibt es einen Knoten $R \in \mathcal{Q}$ mit $\text{gen}(R) = n = \text{gen}(Q)$ also sind die Voraussetzungen von Lemma 3.3.5 erfüllt. Nach 3.3.5 existiert eine Kette von Knoten $Q = P_0, P_1, \dots, P_k = R$, wobei für alle $1 \leq j \leq k$ jeweils P_j und P_{j-1} ein gemeinsames Kind besitzen, siehe Abbildung 3.6. Für ein i gilt nun $P_{i-1} \notin \mathcal{Q}$ und $P_i \in \mathcal{Q} \subseteq \text{anc}(P)$.

Sei $\tilde{P} \in \text{children}(P_i) \cap \text{children}(P_{i-1})$ der gemeinsame Nachkomme beider Knoten. Es gilt $\tilde{P} \in \text{des}(P_i)$ und daher $\text{des}(P_i) \supseteq \text{des}(\tilde{P})$.

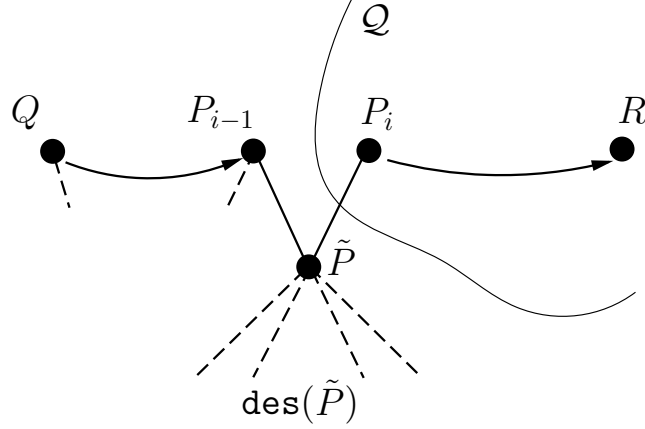


Abbildung 3.6: Darstellung des Zusammenhangs zwischen Q, R bzw. P_i, P_{i-1}, \tilde{P} sowie \mathcal{Q} im Beweis von Lemma 3.4.6

Da \mathcal{Q} nach Konstruktion (Nachkommen)-frei ist, gilt $\text{des}(P_i) \cap \mathcal{Q} = \emptyset$. Zusammenfassend ergibt sich jetzt

$$\text{des}(\tilde{P}) \cap \mathcal{Q} \subseteq \text{des}(P_i) \cap \mathcal{Q} = \emptyset. \quad (3.29)$$

Mit Hilfe von $P_{i-1} \notin \mathcal{Q}$ und da jeder Knoten maximal 2 Eltern besitzt, ergibt sich $\text{anc}(\tilde{P}) \cap \mathcal{Q} = P_i$. (Abbildung 3.6). Wir definieren nun

$$\mathcal{Q}' := (\mathcal{Q} \setminus \{P_{i-1}\}) \cup \{\tilde{P}\}.$$

Da \mathcal{Q} frei ist, ist auch $\mathcal{Q} \setminus \{P_{i-1}\}$ eine freie Menge. Laut Gleichung (3.29) hat auch \tilde{P} keine Nachkommen in \mathcal{Q} und schlussendlich ist \mathcal{Q}' frei von Nachkommen. Für \mathcal{Q}' gilt nun

$$\sum_{K \in \mathcal{Q}'} \text{gen}(K) = 1 + \sum_{K \in \mathcal{Q}} \text{gen}(K). \quad (3.30)$$

Da $\#\mathcal{Q} = \#\mathcal{Q}'$ und \mathcal{Q} maximal bezüglich dieser Summe gewählt wurde, erhalten wir einen Widerspruch. Damit haben wir die Behauptung und somit das Lemma.

□

Mit Hilfe des obigen Lemmas können wir das Hauptresultat dieses Abschnittes zeigen, welches neben der Net Closure Estimate im Beweis der Instanzen-Optimalität eine entscheidende Rolle spielen wird.

Satz 3.4.7 Sei $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$, wobei $\#\mathcal{U} < \infty$. Dann gilt

$$\#\text{free}(\mathcal{Q}) \leq C_{gd} \#\text{free}(\mathcal{U}). \quad (3.31)$$

Beweis. Seien \mathcal{Q}, \mathcal{U} lt. Voraussetzung. Es gilt $\text{free}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U}$. Wenden wir Lemma 3.4.3 ii) auf \mathcal{U} an erhalten wir

$$\text{free}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{U} \subseteq \text{free}(\mathcal{U}) \cup \text{anc}(\text{free}(\mathcal{U})).$$

Wir schreiben nun $\text{free}(\mathcal{Q})$ etwas komplizierter als

$$\text{free}(\mathcal{Q}) = \text{free}(\mathcal{Q}) \cap \bigcup_{\substack{P \in \text{free}(\mathcal{U}) \\ \cup \text{anc}(\mathcal{U})}} P = \bigcup_{P \in \text{free}(\mathcal{U})} ((P \cup \text{anc}(P)) \cap \text{free}(\mathcal{Q})). \quad (3.32)$$

Für einen Knoten P definieren wir, abhängig von P die Menge $\mathcal{U}_P := ((P \cup \text{anc}(P)) \cap \text{free}(\mathcal{Q}))$. Betrachten wir nun für ein beliebiges $P \in \text{free}(\mathcal{U})$ die Mengen \mathcal{U}_P , müssen wir folgende 2 Fälle unterscheiden.

- Gilt $P \in \text{free}(\mathcal{Q})$, so folgt $\text{anc}(P) \cap \text{free}(\mathcal{Q}) = \emptyset$ und daher

$$\mathcal{U}_P = \{P\} \Rightarrow \#\mathcal{U}_P \leq C_{gd}.$$

- Für $P \notin \text{free}(\mathcal{Q})$ erhalten wir $\text{anc}(P) \cap \text{free}(\mathcal{Q}) = \mathcal{U}_P$. $\text{free}(\mathcal{Q})$ erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 3.4.6, denn einerseits ist $\text{free}(\mathcal{Q})$ frei von Nachkommen und andererseits gilt $\text{free}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{U}_P \subseteq \text{anc}(P) \setminus \mathcal{P}_0$. Lemma 3.4.6 liefert nun $\#\mathcal{U}_P \leq C_{gd}$.

Setzen wir nun in Gleichung (3.32) ein und nutzen $\#\mathcal{U}_P \leq C_{gd}$ erhalten wir schlussendlich

$$\#\text{free}(\mathcal{Q}) \leq \sum_{P \in \text{free}(\mathcal{U})} C_{gd} = C_{gd} \#\text{free}(\mathcal{U}). \quad (3.33)$$

□

4 Die Lower Diamond Struktur

Dank der Verbandseigenschaften von Triangulierung und Populationen können wir nun eine spezielle Struktur auszeichnen, die im Folgenden als Lower Diamond bezeichnet wird. Dieser Lower Diamond Teilstruktur hat interessante Eigenschaften, unter anderem die Lower Diamond Estimate, welche sich im späteren Verlauf als sehr hilfreich erweisen wird. Wir starten wie immer mit einer Definition.

Definition 4.0.8 Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ eine beliebige Menge von Dreiecken. Wir definieren

$$\text{area}(\mathcal{U}) := \bigcup \{\text{area}(T) : T \in \mathcal{U}\} \quad (4.1)$$

Wir bezeichnen im folgenden für $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$ und $\mathcal{T}' \in \text{refine}(\mathcal{T})$ nun $\text{area}(\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T})$ als Bereich der Vergrößerung. Das ist genau die Fläche jener Dreiecke in \mathcal{T}' die vergrößert werden müssen, um von \mathcal{T}' zu \mathcal{T} zu gelangen siehe Abbildung 4.1 . Analog nennen wir $\text{area}(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}')$ den Bereich der Verfeinerung, also wiederum die Fläche all jener Dreiecke in \mathcal{T} , die beim Übergang von \mathcal{T} zu \mathcal{T}' verfeinert werden. Wie man sich nun leicht überlegen kann, gilt $\text{area}(\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}) = \text{area}(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}')$.

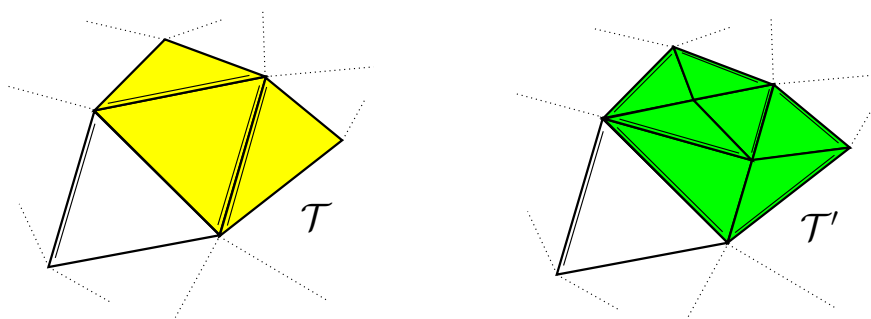


Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Triangulierung \mathcal{T} bzw. $\mathcal{T}' \in \text{refine}(\mathcal{T})$. Im linken Bild ist die Fläche $\text{area}(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}')$ gelb, und rechts $\text{area}(\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T})$ grün dargestellt.

Proposition 4.0.9 Für $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{P}$ und induzierten Triangulierungen $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}, \mathcal{T}_{\mathcal{Q}} \in \mathbb{T}$ gilt

$$\text{area}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}) = \text{area}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{T}_{\mathcal{Q}}).$$

Beweis. Sei $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ beliebig. Da $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{Q}$ ist $P \in \mathcal{P}_{\infty} \setminus \mathcal{P}_0$ und daher, falls P kein Randknoten ist, Mittelpunkt einer Referenzkante zweier Dreiecke und daher Neweast

Vertex der vier Kinder T_1, \dots, T_4 . Im Falle eines Randknotens argumentieren wir völlig analog mit Kinder T_1, T_2 . Lemma 2.2.7 garantiert nun $\text{gen}(T_1) = \dots = \text{gen}(T_4)$. Wir erhalten

$$\text{area}(P) = \bigcup_{i=1}^4 \text{area}(T) \implies \text{area}(P \setminus Q) \subseteq \text{area}(\mathcal{T}_P \setminus \mathcal{T}_Q) \quad (4.2)$$

Da es aber andererseits jedes Dreieck in $\mathcal{T}_P \setminus \mathcal{T}_Q$ einen Knoten in $P \setminus Q$ besitzt, erhalten wir $\text{area}(P \setminus Q) = \text{area}(\mathcal{T}_P \setminus \mathcal{T}_Q)$. \square

Definition 4.0.10 (Lower Diamond) Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n \in \mathbb{T}$. Für Triangulierungen $\mathcal{T}_r := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ und $\mathcal{T}_c := \bigominus_{i=1}^n \mathcal{T}_i$ nennen wir $(\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_c; \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ genau dann einen Lower Diamond, wenn für alle $1 \leq i, j \leq n$ und $i \neq j$ gilt

$$|\text{area}(\mathcal{T}_i \setminus \mathcal{T}_r) \cap \text{area}(\mathcal{T}_j \setminus \mathcal{T}_r)| = 0. \quad (4.3)$$

Das heißt, um von verschiedenen \mathcal{T}_i zu \mathcal{T}_r zu gelangen, müssen jeweils verschiedene Dreiecke verfeinert werden.

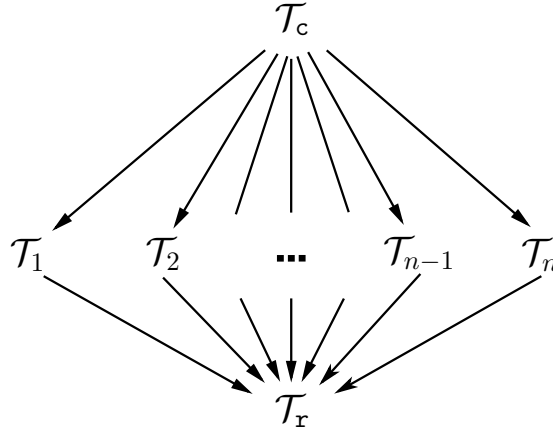


Abbildung 4.2: Graphische Darstellung eines Lower Diamonds. Pfeile bedeuten jeweils, dass in diese Richtung verfeinert wurde.

Wie das nächste Lemma zeigt, erfüllen bereits zwei beliebige Triangulierungen mit der größten Verfeinerung und feinsten Vergrößerung beider Netz, die Voraussetzung eines Lower Diamonds.

Lemma 4.0.11 Für zwei beliebige Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$ bildet $(\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_1 \ominus \mathcal{T}_2; \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ einen Lower Diamond.

Beweis. Angenommen $|\text{area}(\mathcal{T}_1 \setminus (\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2)) \cap \text{area}(\mathcal{T}_2 \setminus (\mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2))| \neq 0$, so gibt es ein Dreieck T mit $T \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ und $T \notin \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2$. Andererseits erhalten wir mit Lemma 3.2.4

$$T \in \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \implies T \in \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2. \quad \text{Widerspruch.}$$

\square

Die Definition eines Lower Diamonds für Triangulierungen lässt sich leider nicht ohne Weiteres auf Populationen übertragen. Ziel dieses Abschnittes ist nun eine äquivalente Formulierung für Populationen zu finden. Wir definieren dazu einen Lower Diamond für Populationen und zeigen anschließend die gewünschte Äquivalenz.

Definition 4.0.12 Seien $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n \in \mathbb{P}$, sowie $\mathcal{P}_r := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ und $\mathcal{P}_c := \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P}_i$. Wir nennen $(\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_c; \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ genau dann einen Lower Diamond, wenn für alle $1 \leq i \neq j \leq n$ gilt

$$(\mathcal{P}_r \setminus \mathcal{P}_i) \cap (\mathcal{P}_r \setminus \mathcal{P}_j) = \emptyset.$$

Bemerkung 4.0.13 Die Voraussetzungen eines Lower Diamonds lassen sich für Populationen wesentlich einfacher nachweisen. Zum Beispiel wissen wir laut Lemma 3.2.2, dass für zwei $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$, $\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$ und induktiv für endlich viele auch $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ gilt. Analog erhalten wir $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{P}_i = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{P}_i$.

Die gewünschte Äquivalenz zeigen wir mit Hilfe der folgenden zwei Lemmata.

Lemma 4.0.14 Für Knoten $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ mit $|\text{area}(P_1) \cap \text{area}(P_2)| > 0$ gilt

$$P_1 = P_2 \text{ oder } P_1 \in \text{anc}(P_2) \text{ oder } P_2 \in \text{anc}(P_1).$$

Beweis. Sei P_1, P_2 laut Voraussetzung gewählt. Gilt $\text{gen}(P_1) = \text{gen}(P_2)$ so folgt für $P_1 \neq P_2$ mit Lemma 3.1.17 iii) $|\text{area}(P_1) \cap \text{area}(P_2)| = 0$. Somit muss in diesem Fall $P_1 = P_2$ gelten.

Für den restlichen Beweis sei nun o.B.d.A $\text{gen}(P_1) < \text{gen}(P_2)$. Wir verwenden wieder Lemma 3.1.17 ii) und folgern $\text{area}(P_2) \subseteq \text{area}(\text{parents}(P_2))$. Wiederholen wir den letzten Schritt $(\text{gen}(P_2) - \text{gen}(P_1))$ -mal erhalten wir

$$\text{area}(P_2) \subseteq \text{area}(\text{anc}(P_2) \cap \text{gen}^{-1}(\text{gen}(P_1))). \quad (4.4)$$

Die Voraussetzung $|\text{area}(P_1) \cap \text{area}(P_2)| > 0$ impliziert nun

$$|\text{area}(P_2) \cap \text{area}(\text{anc}(P_2) \cap \text{gen}^{-1}(\text{gen}(P_1)))| > 0. \quad (4.5)$$

Somit existiert ein Knoten $P \in \text{anc}(P_2)$ mit $\text{gen}(P) = \text{gen}(P_1)$, sowie $|\text{area}(P_1) \cap \text{area}(P_2)| > 0$. Analog zum ersten Beweisschritt folgt mit Lemma 3.1.17 iii) $P_1 = P$ und daher $P_1 \in \text{anc}(P_2)$.

Im Fall $\text{gen}(P_1) > \text{gen}(P_2)$ ergibt sich mit gleicher Argumentation $P_2 \in \text{anc}(P_1)$. \square

Lemma 4.0.15 Gegeben sei $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ und zwei Verfeinerungen $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \text{refine}(\mathcal{P})$. Es gilt

$$(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2) = \emptyset \iff |\text{area}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1) \cap \text{area}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2)| = 0 \quad (4.6)$$

Beweis. Wie definieren $\mathcal{Q}_1 := \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1$ und $\mathcal{Q}_2 := \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2$. Wir beweisen beide Richtungen mittels Kontraposition.

- $(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2) = \emptyset \iff |\text{area}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1) \cap \text{area}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2)| = 0$.
Angenommen es existiert $P \in \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \neq \emptyset$, so gilt laut Definition $\text{area}(P) \subseteq \text{area}(\mathcal{Q}_1) \cap \text{area}(\mathcal{Q}_2)$ und infolgedessen

$$0 < |\text{area}(P)| \leq |\text{area}(\mathcal{Q}_1) \cap \text{area}(\mathcal{Q}_2)|. \quad (4.7)$$

- $(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2) = \emptyset \implies |\text{area}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1) \cap \text{area}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2)| = 0$.
Angenommen $|\text{area}(\mathcal{Q}_1) \cap \text{area}(\mathcal{Q}_2)| > 0$. Es gibt daher Knoten $P_1 \in \mathcal{Q}_1$ sowie $P_2 \in \mathcal{Q}_2$ mit $|\text{area}(P_1) \cap \text{area}(P_2)| > 0$. Diese erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 4.0.14 und daher gilt entweder $P_1 = P_2$, $P_1 \in \text{anc}(P_2)$ oder $P_2 \in \text{anc}(P_1)$.

Im ersten Fall $P_1 = P_2$ gilt trivialerweise $\mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \neq \emptyset$

Für die beiden anderen Möglichkeiten betrachten wir exemplarisch $P_1 \in \text{anc}(P_2)$, der zweite Fall lässt sich völlig analog behandeln. Die Definition von \mathcal{Q}_i garantiert nun $P_i \notin \mathcal{P}_i$ für $i = 1, 2$. Da \mathcal{P}_1 eine Population ist und daher für jeden Knoten auch seine Vorfahren enthalten muss, folgern wir $P_2 \notin \mathcal{P}_1$. Zusammenfassend ergibt sich

$$P \in (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_1) \cap (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_2) = \mathcal{Q}_1 \cap \mathcal{Q}_2 \neq \emptyset.$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas können die gewünschte Äquivalenz zeigen.

Korollar 4.0.16 $(\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_c; \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ ist ein Lower Diamond im Sinne von Definition 4.0.12 genau dann wenn $(\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_c; \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ ein Lower Diamond laut Definition 4.0.10 ist.

Beweis. Laut Lemma 4.0.9 ist $\text{area}(\mathcal{P}_i \setminus \mathcal{P}_r) = \text{area}(\mathcal{T}_i \setminus \mathcal{T}_r)$ und mit Hilfe von Lemma 4.0.15 folgern wir für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_i \setminus \mathcal{P}_r) \cap (\mathcal{P}_j \setminus \mathcal{P}_r) &= \emptyset \\ \stackrel{4.0.15}{\iff} |\text{area}(\mathcal{P}_i \setminus \mathcal{P}_r) \cap \text{area}(\mathcal{P}_j \setminus \mathcal{P}_r)| &= 0 \\ \stackrel{4.0.9}{\iff} |\text{area}(\mathcal{T}_i \setminus \mathcal{T}_r) \cap \text{area}(\mathcal{T}_j \setminus \mathcal{T}_r)| &= 0. \end{aligned}$$

□

5 Analysis

Am Anfang dieses Kapitels werden die später benötigten Funktionenräume definiert und das Modellproblem eingeführt. In Abschnitt 4.3 widmen wir uns der Scott-Zhang-Projektion und diversen Eigenschaften dieser. Diese wird sowohl im Beweis der Lower Diamond Estimate (Satz 5.4.2 bzw. Korollar 5.4.3) als auch in der a posteriori Analysis als wichtiges Hilfsmittel dienen.

5.1 Funktionenräume

Um die Notation zu erklären, wiederholen wir ein paar grundlegende Eigenschaften von Sobolev-Räumen. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Lipschitz Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Wir bezeichnen mit $H^1(\Omega)$ den Sobolev-Raum

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : u \text{ ist schwach differenzierbar und } \nabla u \in L^2(\Omega)\},$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Der Raum $H^1(\Omega)$ bildet mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ einen Hilbert-Raum. Wir benötigen folgendes Resultat über den Spuroperator γ :

Satz 5.1.1 (Spuroperator) *Es existiert ein eindeutiger linearer Operator $\gamma \in L^2(H^1(\Omega); L^2(\Gamma))$, sodass für alle $v \in C(\Omega) \cap H^1(\Omega)$,*

$$\gamma(v) = v|_{\Gamma}.$$

Das heißt, γ ist eine Fortsetzung, der für stetige Funktionen definierten Einschränkung $v|_{\Gamma}$, auf ganz $H^1(\Omega)$.

Mit Hilfe des Spuroperators gilt nun die folgende Identität

$$H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} = \ker(\gamma) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma(v) = 0\}.$$

Für die Diskretisierung des Modellproblems benötigen wir die nachstehenden diskreten Räume. In der nächsten Definition bezeichnet \mathbb{P}^1 den Raum aller Polynome vom Grad 1.

Definition 5.1.2 *Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ eine reguläre Triangulierung von Ω . Wir definieren mit*

$$\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) := \{v_{\mathcal{T}} \in C(\Omega) : \forall T \in \mathcal{T} \ v_{\mathcal{T}}|_T \in \mathbb{P}^1(T)\},$$

den Raum aller stetigen und stückweise affinen Funktionen. Darüber hinaus, analog zu $H_0^1(\Omega)$, sei $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ der Raum aller Funktionen aus $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, die auf dem Rand Γ verschwinden, d.h.

$$\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) := \{v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) : \forall P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap \Gamma \quad v_{\mathcal{T}}(P) = 0\} = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega).$$

In der folgenden Proposition werden einige später benötigte Eigenschaften der Räume $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ und $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ zusammengefasst. Der Beweis, siehe z.B. [NSV09, Kapitel 3.2], wird dem interessierten Leser überlassen.

Proposition 5.1.3 *Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$. Für den Raum $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ gelten folgende Eigenschaften:*

- i) $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ ist ein N -dimensionaler Unterraum von $H^1(\Omega)$, wobei $N = \#\mathcal{K}(\mathcal{T})$.
- ii) Für alle $P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$ existiert eine eindeutige Hutfunktion φ_P mit

$$\varphi_P \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \quad \text{und} \quad \varphi_P(P') = \delta_{PP'} \quad \forall P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}),$$

wobei δ das Kronecker-Delta bezeichnet, das heißt $\delta_{PP'} = 1$ falls $P = P'$ und ansonsten Null.

- iii) $\mathcal{B}_{\mathcal{T}} := \{\varphi_P : P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})\}$ ist eine Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$. Diese werden wir im Folgenden als nodale Basis bezeichnen.

Man könnte die obigen Räume mit Hilfe der Identifikation $\mathcal{P} = \mathcal{K}(\mathcal{T})$, äquivalent auch über Populationen $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ definieren. Da aber in der Literatur meist der Zugang über Triangulierungen gewählt wird, haben auch wir diesen gewählt. Die im Kapitel 3 definierte Verbandsstruktur von Triangulierungen, respektive Populationen, überträgt sich unmittelbar auf die dazugehörigen diskreten Funktionenräume $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ bzw. $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_0)$. Die folgende Proposition zeigt nun diesen Zusammenhang.

Proposition 5.1.4 *Seien reguläre Triangulierungen $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$ gegeben, dann gelten folgende Punkte:*

- i) Falls $\mathcal{T}' \in \text{refine}(\mathcal{T})$ gilt $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S}^1(\mathcal{T}')$.
- ii) $\mathcal{B}_{\mathcal{T} \ominus \mathcal{T}'} = \{\varphi_P : P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{T}')\}$
- iii) $\mathcal{B}_{\mathcal{T} \oplus \mathcal{T}'} = \{\varphi_P : P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cup \mathcal{K}(\mathcal{T}')\}$

Beweis. i) Sei $v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, wir müssen nun zeigen, dass für alle $T \in \mathcal{T}'$, $v_{\mathcal{T}}|_T \in \mathbb{P}^1(T)$. Wir wählen $T \in \mathcal{T}'$ beliebig aber fest. Ist nun $T \in \mathcal{T}$, d.h. T wurde in \mathcal{T}' nicht verfeinert, gilt laut Definition von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T})$, $v_{\mathcal{T}}|_T \in \mathbb{P}^1(T)$ und wir sind in diesem Fall fertig.

Gilt andererseits $T \notin \mathcal{T}$, so existiert $T' \in \mathcal{T}$ mit $T \subseteq T'$. Wiederum laut Definition folgt $v_{\mathcal{T}}|_{T'} \in \mathbb{P}^1(T')$ und daher auch $v_{\mathcal{T}}|_T \in \mathbb{P}^1(T)$. In Summe erhalten wir $v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}')$.

- ii) Wir bezeichnen die von \mathcal{T} respektive \mathcal{T}' induzierten Populationen mit \mathcal{P} und \mathcal{P}' . Laut Proposition 3.2.2 gilt $\mathcal{P} \ominus \mathcal{P}' = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ und daher auch $\mathcal{K}(\mathcal{T} \ominus \mathcal{T}') = \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{T}')$. Schlussendlich liefert Proposition 5.1.3 iii)

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T} \ominus \mathcal{T}'} = \{P : P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{T}')\}.$$

- iii) Der Beweis verläuft völlig analog zu ii). □

5.2 Modellproblem

In diesem Unterkapitel definieren wir das Modellproblem, beschäftigen uns mit seiner Diskretisierung und fundamentalen Eigenschaften des dazugehörigen Energiefunktional. Sei wieder $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Lipschitz-Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Als Modellproblem betrachten wir die Poissongleichung mit rechter Seite $f \in L^2(\Omega)$ und homogenen Dirichlet-Randbedingungen, d.h.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega, \\ u &= 0 & \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die schwache Formulierung liest sich nun wie folgt: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$ sodass

$$\int_{\Omega} (\nabla u; \nabla v) \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (5.2)$$

wobei $(\cdot; \cdot)$ das Skalarprodukt in \mathbb{R}^n bezeichnet. Wie allgemein bekannt, besitzt das Randwertproblem (5.1) für jedes $f \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.

Für $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ lautet die Galerkin-Diskretisierung nun wie folgt: Finde die eindeutige Galerkin-Lösung $u_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ mit

$$\int_{\Omega} (\nabla u_{\mathcal{T}}; \nabla v_{\mathcal{T}}) \, dx = \int_{\Omega} f v_{\mathcal{T}} \, dx \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}). \quad (5.3)$$

Definition 5.2.1 Für eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ definieren wir die Energienorm $\| \cdot \|$ durch

$$\| \| u \| \|^2 := \int_{\Omega} (\nabla u; \nabla u) \, dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Mit Hilfe der Friedrichs-Ungleichung gilt für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ die Äquivalenz $\| \| v \| \|_{H^1(\Omega)} \simeq \| \| v \| \|$, d.h. $\| \| \cdot \| \|$ ist eine zu $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$ äquivalente Norm auf $H_0^1(\Omega)$.

Definition 5.2.2 Wir definieren die Dirichlet-Energie $\mathcal{J} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{J}(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - f u \, dx. \quad (5.4)$$

Aus der Variationsrechnung erhalten wir nun folgenden Satz über den Zusammenhang der Dirichlet-Energie und der schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (5.1). Für den Beweis siehe [Eva10, Kapitel 2 bzw. Kapitel 8]

Satz 5.2.3 *Sei $\mathcal{X} \subseteq H_0^1(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum. Eine Funktion $u \in \mathcal{X}$ ist genau dann eindeutige Lösung der schwachen Formulierung 5.2, wenn sie ein eindeutiger Minimierer der Dirichlet-Energie $\mathcal{J}(u)$ in \mathcal{X} ist. Das heißt*

$$\mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}) = \inf\{\mathcal{J}(v) : v \in \mathcal{X}\}. \quad (5.5)$$

□

Insbesondere ist auch $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ ein abgeschlossener Unterraum von $H_0^1(\Omega)$. Diese Minimierungseigenschaft der Lösung von (5.1) liefert uns nützliche Eigenschaften der Galerkin-Lösungen. Zwei davon werden im nächsten Lemma bewiesen.

Lemma 5.2.4 *Seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$, wobei $\mathcal{T}' \in \text{refine}(\mathcal{T})$. Dann gilt für die Galerkin-Lösungen $u_{\mathcal{T}}$ respektive $u_{\mathcal{T}'}$*

$$i) \quad \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) \leq \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}),$$

$$ii) \quad \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) = \frac{1}{2} \| \| u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'} \| \|^2.$$

Beweis. i) Seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$ laut Voraussetzung mit Galerkin-Lösungen $u_{\mathcal{T}}$ und $u_{\mathcal{T}'}$. Laut Proposition 5.1.4 sind die diskreten Räume geschachtelt d.h. $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}) \subseteq \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$. Für die Galerkin-Lösung gilt somit $u_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$ und aufgrund von Satz 5.2.3

$$\mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) \leq \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}).$$

ii) Wir rechnen die gewünschte Identität einfach nach. Einsetzen in die Definition von \mathcal{J} liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_{\mathcal{T}}|^2 - f u_{\mathcal{T}} \, dx - \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_{\mathcal{T}'}|^2 - f u_{\mathcal{T}'} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\mathcal{T}}|^2 - |\nabla u_{\mathcal{T}'}|^2 \, dx - \int_{\Omega} f(u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'}) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u_{\mathcal{T}}; \nabla u_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_{\mathcal{T}'}; \nabla u_{\mathcal{T}'}) \, dx - \int_{\Omega} f(u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'}) \, dx. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität und Symmetrie des Skalarprodukts gilt nun

$$(\nabla u_{\mathcal{T}}; \nabla u_{\mathcal{T}}) - (\nabla u_{\mathcal{T}'}; \nabla u_{\mathcal{T}'}) = (\nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'}; \nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'}) + 2(\nabla u_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}'}; \nabla u_{\mathcal{T}'}).$$

Setzen wir nun in die obige Rechnung ein und beachten, dass $u_{\mathcal{T}}$ und $u_{\mathcal{T}'}$ Lösungen der schwachen Formulierung (5.3) sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) &= \frac{1}{2} \|\| \nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'} \|\|^2 + \int_{\Omega} (\nabla u_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}}; \nabla u_{\mathcal{T}'}) \, dx - \int_{\Omega} f(u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'}) \, dx \\ &\stackrel{(5.3)}{=} \frac{1}{2} \|\| \nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'} \|\|^2 \end{aligned}$$

□

Ziel der nächsten Abschnitte ist es zu zeigen, dass die Energienorm $\|\| \cdot \|\|$ und folglich auch die Dirichlet-Energie $\mathcal{J}(\cdot)$ die Lower Diamond Estimate (Satz 5.4.2 bzw. Korollar 5.4.3) erfüllen. Dazu benötigen wir einen Clément-Operator, der im nächsten Kapitel eingeführt wird.

5.3 Scott-Zhang Projektion

Dieses Unterkapitel widmet sich ausschließlich der Scott-Zhang-Projektion. Diese wurde erstmals in [SZ90] verwendet, und ihre Eigenschaften werden im nächsten Kapitel von entscheidender Bedeutung sein. Wir verwenden in den folgenden Kapitel die Notation $h_T := |T|^{1/2}$.

Sei \mathcal{T} eine reguläre Triangulierung. Wir wählen für jeden Knoten $P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$ eine Kante $E_P \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ mit $P \in E_P$ folgendermaßen:

- Für $P \in \Gamma$ ist $E_P \subseteq \Gamma$.
- Für $P \in \Omega$ ist E_P beliebig.

Wir benötigen für die Definition des Scott-Zhang-Operators folgendes Resultat über duale Basisfunktionen.

Lemma 5.3.1 *Für einen Knoten $P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$ existiert eine eindeutig Funktion $\psi_P \in \mathbb{P}^1(E_P)$ mit*

$$\int_{E_P} \psi_P \varphi_{P'} \, ds = \delta_{PP'} \quad \forall P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}), \quad (5.6)$$

wobei $\varphi_{P'} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ die eindeutige Hutfunktion mit $\varphi_{P'}(P) = \delta_{PP'}$ ist. Zusätzlich existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\|\psi\|_{L^\infty(E_P)} \leq C |E_P|^{-1}. \quad (5.7)$$

Beweis. Nach dem Darstellungssatz von Riesz existiert eine eindeutige Funktion $\hat{\psi} \in \mathbb{P}^1([0, 1])$, sodass

$$\int_{[0,1]} \hat{\psi} \hat{\varphi} \, dt = \hat{\varphi}(0) \quad \forall \hat{\varphi} \in \mathbb{P}^1([0, 1]).$$

Sei $\Phi_P : [0, 1] \rightarrow E_P$ eine affine Parametrisierung der Kante E_P mit $\Phi_P(0) = P$. Wir definieren die duale Basisfunktion $\psi_P \in \mathbb{P}^1(E_P)$ durch

$$\psi_P := \frac{1}{|E_P|} \hat{\psi} \circ \Phi_P^{-1}.$$

Es gilt $|\Phi_P'| = |E_P|$ und mit Hilfe des Transformationssatzes erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{E_P} \psi_P \varphi_{P'} \, ds &= \int_{[0,1]} (\psi_P \circ \Phi_P)(\varphi_{P'} \circ \Phi_P) |\Phi_P'| \, dt = \int_{[0,1]} \hat{\psi}(t)(\varphi_{P'} \circ \Phi_P)(t) \, dt \\ &= \varphi_{P'}(\Phi_P(0)) = \varphi_{P'}(P) = \delta_{PP'}. \end{aligned}$$

Schätzen wir abschließend $\|\psi_P\|_{L^\infty(E_P)}$ ab, erhalten wir $\|\psi_P\|_{L^\infty(E_P)} \leq |E_P|^{-1} \|\hat{\psi}\|_{L^\infty(0,1)}$ und haben das Lemma bewiesen. \square

Mit Hilfe des obigen Lemmas können wir nun den Scott-Zhang-Operator definieren.

Definition 5.3.2 Für eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ definieren wir den linearen Operator $J_{\mathcal{T}} : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ durch

$$J_{\mathcal{T}}(v) := \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})} \left(\int_{E_P} \psi_P v \, ds \right) \varphi_P.$$

Bemerkung 5.3.3 Die Scott-Zhang-Projektion ist wohldefiniert, denn nach Satz 5.1.1 über den Spuroperator ist für $v \in H^1(\Omega)$ die Einschränkung $v|_{\partial T} \in L^2(\partial T)$. Daher existiert $\int_{E_P} \psi_P v \, ds$ und $J_{\mathcal{T}}(v)$ ist daher wohldefiniert.

Die nachstehende Proposition zeigt nun zwei wichtige Projektionseigenschaften des Scott-Zhang Operators.

Proposition 5.3.4 Gegeben seien Funktionen $v \in H^1(\Omega)$ und $v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$.

- i) Es gilt $J_{\mathcal{T}}(v_{\mathcal{T}}) = v_{\mathcal{T}}$. Das heißt $J_{\mathcal{T}}$ ist eine Projektion auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}) \subseteq H^1(\Omega)$.
- ii) Für $v|_{\Gamma} = v_{\mathcal{T}}|_{\Gamma}$ folgt $(J_{\mathcal{T}}v)|_{\Gamma} = v|_{\Gamma}$. Der Scott-Zhang Projektion $J_{\mathcal{T}}$ erhält also diskrete Randdaten.

Beweis. i) Jede Funktion $v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ lässt sich nach Lemma 5.1.3, in der nodalen Basis darstellen als

$$v_{\mathcal{T}} = \sum_{P' \in \mathcal{K}(\mathcal{T})} v_{\mathcal{T}}(P') \varphi_{P'}.$$

Mit Hilfe der dualen Basis aus Lemma 5.3.1 erhalten wir

$$\int_{E_P} v_{\mathcal{T}} \psi_P \, ds = \sum_{P' \in \mathcal{K}(\mathcal{T})} v_{\mathcal{T}}(P') \underbrace{\int_{E_P} \varphi_{P'} \psi_P \, ds}_{=\delta_{PP'}} = v_{\mathcal{T}}(P). \quad (5.8)$$

Setzen wir dies in die Definition der Scott-Zhang Projektion ein, folgern wir

$$J_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T}} = \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})} \left(\int_{E_P} \psi_P v_{\mathcal{T}} \, ds \right) \varphi_P = \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})} v_{\mathcal{T}}(P) \varphi_P = v_{\mathcal{T}}.$$

ii) Für einen Randknoten $P \in \Gamma$ haben wir die dazugehörige Kante so gewählt, dass $E_P \subseteq \Gamma$. Laut Voraussetzung stimmen $v_{\mathcal{T}}$ und v auf Γ überein. Daher gilt $\int_{E_P} \psi_P v_{\mathcal{T}} \, ds = \int_{E_P} \psi_P v \, ds$, und des Weiteren

$$\begin{aligned} (J_{\mathcal{T}} v)|_{\Gamma} &= \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})} \left(\int_{E_P} \psi_P v \, ds \right) \varphi_P|_{\Gamma} = \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap \Gamma} \left(\int_{E_P} \psi_P v \, ds \right) \varphi_P|_{\Gamma} \\ &= \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap \Gamma} \left(\int_{E_P} \psi_P v_{\mathcal{T}} \, ds \right) \varphi_P|_{\Gamma} = (J_{\mathcal{T}} v_{\mathcal{T}})|_{\Gamma} = v_{\mathcal{T}}|_{\Gamma} = v|_{\Gamma}. \end{aligned}$$

□

Definition 5.3.5 Für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}$ definieren wir den Patch $\omega_T \subseteq \mathcal{T}$ durch

$$\omega_T := \{T' \in \mathcal{T} : \mathcal{K}(T) \cap \mathcal{K}(T') \neq \emptyset\}.$$

Wir benötigen im nächsten Kapitel diverse Eigenschaften der Scott-Zhang-Projektion, welche wir aufgrund der etwas technischen Beweise, in mehrere Lemmata aufteilen.

Lemma 5.3.6 Sei $v \in H^1(\Omega)$. Für Dreiecke $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \cap T' \neq \emptyset$, seien $v_T := |T|^{-1} \int_T v \, dx$ bzw. $v_{T'} := |T'|^{-1} \int_{T'} v \, dx$ die Integralmittel auf T repektive T' . Dann gilt

$$\|v_T - v_{T'}\|_{L^2(T)} \leq Ch_T \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}, \quad (5.9)$$

mit einer Konstanten $C > 0$, welche nur von der Formregularität von \mathcal{T} abhängt.

Beweis. Wir bezeichnen analog zu v_T mit $v_E := |E|^{-1} \int_E v \, ds$ das Integralmittel von v auf einer Kante $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$. Zusätzlich benötigen wir das Referenzdreieck T_{ref} bestehend aus den Knoten $\{(0,0)^T, (0,1)^T, (1,0)^T\}$ und Referenzkante $E_{\text{ref}} \in \mathcal{E}(T_{\text{ref}})$ mit $E_{\text{ref}} := [0,1] \times 0$.

Im Beweis verwenden wir die folgende Spurungleichung für $H^1(T)$ -Funktionen.

$$\|v - v_E\|_{L^2(E)}^2 \leq \|v - v_T\|_{L^2(E)}^2 \leq C_{tr} \frac{|E|h_T^2}{|T|} \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2 \quad \forall v \in H^1(T) \quad (5.10)$$

Mit einer Konstante $C_{tr} > 0$, welche nur vom Referenzdreieck T_{ref} abhängt.

- i) Für eine beliebige Funktion $w \in H^1(T_{\text{ref}})$ erhalten wir mit Hilfe der Hölder- und Spurungleichung (5.10)

$$\begin{aligned} |w_{T_{\text{ref}}} - w_{E_{\text{ref}}}| &\leq |E_{\text{ref}}|^{-1} \|w - w_{T_{\text{ref}}}\|_{L^1(E_{\text{ref}})} \stackrel{\text{H.}}{\leq} |E_{\text{ref}}|^{-1/2} \|w - w_{T_{\text{ref}}}\|_{L^2(E_{\text{ref}})} \\ &\stackrel{(5.10)}{\leq} \underbrace{\frac{C_{tr} h_{T_{\text{ref}}}}{|T_{\text{ref}}|^{1/2}}}_{=: C_{\text{ref}}} \|\nabla w\|_{L^2(T_{\text{ref}})}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

wobei C_{ref} nur von T_{ref} abhängt.

- ii) Sei nun $\Phi_T : T_{\text{ref}} \rightarrow T$ ein affiner Diffeomorphismus mit $\Phi(E_{\text{ref}}) = E$. Mit Hilfe der Transformationsformel erhalten wir für $v \in H^1(T)$ und $w := v \circ \Phi_T$

$$\begin{aligned} \|v_T - v_E\|_{L^2(T)} &= |T|^{1/2} |v_T - v_E| = |T|^{-1/2} |w_{T_{\text{ref}}} - w_{E_{\text{ref}}}| \\ &\stackrel{(5.11)}{\leq} |T|^{-1/2} C_{\text{ref}} \|\nabla w\|_{L^2(T_{\text{ref}})} \stackrel{\text{Trans.}}{\leq} C h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

mit einer Konstante C , die wiederum von der Formregularität von \mathcal{T} und C_{ref} abhängt.

- iii) Dreiecksungleichung und Formregularität liefern nun für Dreiecke $T, T' \in \mathcal{T}$ mit gemeinsamer Kante $E := T \cap T'$

$$\begin{aligned} \|v_T - v_{T'}\|_{L^2(T)} &= |T|^{1/2} |v_T - v_{T'}| \lesssim |T|^{1/2} |v_T - v_E| + |T'|^{1/2} |v_E - v_{T'}| \\ &= \|v_T - v_E\|_{L^2(T)} + \|v_{T'} - v_E\|_{L^2(T')}. \end{aligned}$$

Wenden wir nun Ungleichung (5.12) aus Punkt ii) an ergibt sich

$$\|v_T - v_{T'}\|_{L^2(T)} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)} + h_{T'} \|\nabla v\|_{L^2(T')} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(T \cup T')}.$$

- iv) Seien nun $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \cap T' \neq \emptyset$. Es existiert nun ein minimales $n \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Dreiecken $T =: T_0, T_1, \dots, T_n := T'$ mit $T_i \in \omega_T$ und $T_i \cap T_{i-1} = E_i \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ für alle $1 \leq i \leq n$. Aufgrund der uniformen Formregularität ist n für alle $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ nach oben beschränkt. Dreiecksungleichung, mehrfaches Anwenden von Punkt iii) und $\bigcup_{i=0}^n T_i \subseteq \omega_T$ liefern schlußendlich

$$\|v_T - v_{T'}\|_{L^2(T)} \leq \sum_{i=1}^n \|v_{T_i} - v_{T_{i-1}}\|_{L^2(T)} \lesssim \sum_{i=1}^n h_{T_i} \|\nabla v\|_{L^2(T_i \cup T_{i-1})} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}.$$

□

Lemma 5.3.7 (H^1 -Stabilität) *Es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von der Formregularität der Triangulierung \mathcal{T} abhängt, sodass für alle $T \in \mathcal{T}$ gilt*

$$\|\nabla J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(T)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Beweis. Sei $T \in \mathcal{T}$ beliebig aber fest. Für einen Knoten $P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$ wählen wir E_P und T_P mit $E_P \subseteq T_P$ und definieren $h_P := \text{diam}(T_P)$. Man bemerke, dass $P \in \mathcal{K}(T)$ $T_P \subseteq \omega_T$ impliziert. Im Beweis benötigen wir die folgende Spurungleichung für $H^1(\Omega)$ -Funktionen

$$\|v\|_{L^2(E_P)}^2 \lesssim h_P^{-1} \left(\|v\|_{L^2(T_P)}^2 + h_P^2 \|\nabla v\|_{L^2(T_P)}^2 \right). \quad (5.13)$$

Mit Hilfe der Spurungleichung (5.13) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_P} \psi_P v \, ds \right| &\leq \int_{E_P} |\psi_P| |v| \, ds \leq \underbrace{\|\psi_P\|_{L^\infty(E_P)}}_{\stackrel{5.3.1}{\lesssim} |E_P|^{-1}} \underbrace{\|v\|_{L^1(E_P)}}_{\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} |E_P|^{1/2} \|v\|_{L^2(E_P)}} \\ &\lesssim |E_P|^{-1/2} h_P^{-1/2} \left(\|v\|_{L^2(T_P)} + h_P \|\nabla v\|_{L^2(T_P)} \right). \end{aligned}$$

Eine inverse Abschätzung liefert für eine beliebige Hutfunktion φ_P

$$\|\nabla \varphi_P\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{-1} \|\varphi_P\|_{L^2(T)} \leq |T|^{1/2} h_T^{-1}. \quad (5.14)$$

Formregularität garantiert nun $|E_P| h_P \simeq |T_P| \simeq |T|$ sowie $h_P \simeq h_T$. Setzen wir in die Definition von $J_{\mathcal{T}}$ ein, erhalten wir für ein beliebiges $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|\nabla J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(T)} &\leq \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap T} \left| \int_{E_P} \psi_P v \, ds \right| \underbrace{\|\nabla \varphi_P\|_{L^2(T)}}_{\lesssim |T|^{1/2} h_T^{-1}} \\ &\lesssim \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap T} \left(h_P^{-1} \|v\|_{L^2(T_P)} + \|\nabla v\|_{L^2(T_P)} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Wir definieren wieder $v_T := |T|^{-1} \int_T v \, dx$. Die Projektionseigenschaft aus Proposition 5.3.4 Punkt i) garantiert nun $J_{\mathcal{T}}v_T = v_T$. Definieren wir weiters $w := v - v_T$ und setzen in (5.15) ein, ergibt sich

$$\|\nabla J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(T)} = \|\nabla J_{\mathcal{T}}(v - v_T)\|_{L^2(T)} \lesssim \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap T} \left(h_P^{-1} \|v - v_T\|_{L^2(T_P)} + \|\nabla v\|_{L^2(T_P)} \right). \quad (5.16)$$

Die Poincare Ungleichung in Verbindung mit Lemma 5.3.6 liefern für den ersten Term der Summe

$$\|v - v_T\|_{L^2(T_P)} \leq \|v - v_{T_P}\|_{L^2(T_P)} + \|v_{T_P} - v_T\|_{L^2(T_P)} \lesssim h_P \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}. \quad (5.17)$$

Setzen wir (5.16) und (5.17) zusammen, erhalten wir schlußendlich

$$\|\nabla J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(T)} \lesssim \sum_{P \in \mathcal{K}(T) \cap T} (\|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)} + \|\nabla v\|_{L^2(T_P)}) \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}.$$

□

Korollar 5.3.8 *Es existiert eine Konstante $C > 0$ die von der uniformen Formreguläritätskonstante abhängt, sodass für jede Triangulierung $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ gilt*

$$\|\nabla J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Beweis. Aufgrund der uniformen Formregulärität ist für jede Verfeinerung $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 und für alle $T \in \mathcal{T}$ die Anzahl der Dreiecke in ω_T durch eine Konstante K beschränkt. Dies impliziert

$$\begin{aligned} \|\nabla J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \|\nabla J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(T)}^2 \stackrel{5.3.7}{\lesssim} \sum_{T \in \mathcal{T}} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}^2 \\ &\leq K \sum_{T \in \mathcal{T}} \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2 \leq K \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

Neben der H^1 -Stabilität benötigen wir eine Approximations-Eigenschaft des Scott-Zhnag-Operators. Diese wir im nächsten Lemma bewiesen.

Lemma 5.3.9 (Approximations-Eigenschaft) *Es existiert eine Konstante $C > 0$, die nur von der Formregulärität der Triangulierung \mathcal{T} abhängt, sodass für alle $T \in \mathcal{T}$ gilt*

$$\|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)} \leq C \|h \nabla v\|_{L^2(\omega_T)} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Beweis. Seien $T \in \mathcal{T}$ und $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig aber fest gewählt. Wir argumentieren ähnlich zum Beweis von Lemma 5.3.7 und erhalten mit Hilfe der Spurgleichung (5.13)

$$\begin{aligned} \|J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(T)} &\leq \sum_{P \in \mathcal{K}(T) \cap T} \left| \int_{E_P} \psi_P v \, ds \right| \underbrace{\|\varphi_P\|_{L^2(T)}}_{\leq |T|^{1/2}} \\ &\lesssim \sum_{P \in \mathcal{K}(T) \cap T} |T|^{1/2} \left(\|v\|_{L^2(T_P)}^2 + h_P \|\nabla v\|_{L^2(T_P)} \right) |T|^{-1/2} \quad (5.18) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{K}(T) \cap T} (\|v\|_{L^2(T_P)} + h_P \|\nabla v\|_{L^2(T_P)}). \end{aligned}$$

Sei wieder $v_T := |T|^{-1} \int_T v \, dx$ das Integralmittel von v . Aufgrund der Projektionseigenschaft aus Proposition 5.3.4 Punkt i) gilt wieder $J_{\mathcal{T}}v_T = v_T$. Setzen wir analog zu Lemma 5.3.7 nun $w := v - v_T$ in (5.18) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)} &= \|(v - v_T) - J_{\mathcal{T}}(v - v_T)\|_{L^2(T)} \leq \|v - v_T\|_{L^2(T)} + \|J_{\mathcal{T}}(v - v_T)\|_{L^2(T)} \\ &\lesssim \|v - v_T\|_{L^2(T)} + \sum_{P \in \mathcal{K}(T) \cap T} (\|v - v_T\|_{L^2(T_P)} + h_P \|\nabla v\|_{L^2(T_P)}). \end{aligned}$$

Verwenden wir nun Gleichung (5.17) aus Lemma 5.3.7 und nutzen $h_P \simeq h_T$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)} &\lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)} + \sum_{P \in \mathcal{K}(T) \cap T} (h_T \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)} + h_P \|\nabla v\|_{L^2(T_P)}) \\ &\lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}. \end{aligned}$$

□

Aus der H^1 -Stabilität und Approximations-Eigenschaft folgen unmittelbar weiter Eigenschaften der Scott-Zhang-Projektion, welche wir im nächsten Korollar zusammenfassen.

Korollar 5.3.10 *Für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}$ mit Kante $E \in \mathcal{E}(T)$ gilt:*

- i) $\|\nabla(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
- ii) $\|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(E)} \lesssim C' h_E^{-1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
- iii) $J_{\mathcal{T}}$ und $(1 - J_{\mathcal{T}})$ sind stetige Projektionen von $H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$.

Beweis. i) Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Dann folgt $v - J_{\mathcal{T}}v \in H_0^1(\Omega)$ und daher erhalten wir mit Lemma 5.3.9

$$\begin{aligned} \|\nabla(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)} &\leq \underbrace{\|\nabla v\|_{L^2(T)}}_{\leq \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}} + \underbrace{\|\nabla J_{\mathcal{T}}v\|_{L^2(T)}}_{\stackrel{5.3.9}{\leq} C \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}} \lesssim (1 + C) \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}. \end{aligned}$$

- ii) Setzen wir nun für ein $v \in H_0^1(\Omega)$, $v - J_{\mathcal{T}}v$ in die Spurgleichung (5.13) ein, erhalten wir unter Verwendung von Lemma 5.3.9 sowie Punkt i)

$$\begin{aligned} \|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(E)}^2 &\lesssim h_E^{-1} \underbrace{\|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)}^2}_{\stackrel{5.3.9}{\lesssim} h_T^2 \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}^2} + h_E \underbrace{\|\nabla(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)}^2}_{\stackrel{i)}{\lesssim} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}^2} \\ &\lesssim h_E \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}^2. \end{aligned}$$

- iii) Aus Punkt i) und Lemma 5.3.9 erhalten wir wieder mit Hilfe der Formregularität für alle $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)}^2 + \|\nabla(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{L^2(T)}^2 \\ &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|v\|_{L^2(\omega_T)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\omega_T)}^2 \\ &\lesssim \text{diam}(\Omega)^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq (1 + \text{diam}(\Omega)^2) \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von $J_{\mathcal{T}}$ ergibt sich nun direkt aus

$$\|J_{\mathcal{T}}v\|_{H^1(\Omega)} = \|(1 - J_{\mathcal{T}})v + v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|(1 - J_{\mathcal{T}})v\|_{H^1(\Omega)}.$$

□

Lemma 5.3.11 Für Triangulierungen $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ mit $\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}')$ gilt für die Scott-Zhang Projektion $J_{\mathcal{T}'} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$

$$\| \| u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'} \| \| \simeq \| \| u_{\mathcal{T}} - J_{\mathcal{T}'} u_{\mathcal{T}} \| \|,$$

wobei $u_{\mathcal{T}}$ bzw. $u_{\mathcal{T}'}$ die Galerkin-Lösung im Raum $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ bzw. $\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$ bezeichnet.

Beweis. Nach dem Céa-Lemma ist $u_{\mathcal{T}'}$ die Bestapproximation der Lösung u von (5.2) in $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}')$ bezüglich $\| \| \cdot \| \|$ und daher auch Quasi-Bestapproximation der Funktion $u_{\mathcal{T}}$ bezüglich der H^1 -Norm. Somit erhalten wir

$$\| \| u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'} \| \|_{H^1(\Omega)} \lesssim \| \| u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}'} \| \|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v_{\mathcal{T}'} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}').$$

Setzen wir $v_{\mathcal{T}'} = J_{\mathcal{T}'} u_{\mathcal{T}}$ liefert die Normäquivalenz von $\| \| \cdot \| \| \simeq \| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$ nun

$$\| \| u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'} \| \| \lesssim \| \| u_{\mathcal{T}} - J_{\mathcal{T}'} u_{\mathcal{T}} \| \|.$$

Unter Verwendung der Projektionseigenschaft und Korollar 5.3.7 gilt für eine beliebige Funktion $v_{\mathcal{T}'} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}')$

$$\begin{aligned} \| \| u_{\mathcal{T}} - J_{\mathcal{T}'} u_{\mathcal{T}} \| \| &= \| \nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla J_{\mathcal{T}'} u_{\mathcal{T}} \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \nabla (u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}'}) \|_{L^2(\Omega)} + \| \nabla J_{\mathcal{T}'} (v_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}}) \|_{L^2(\Omega)} \\ &\lesssim \| \nabla (u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}'}) \|_{L^2(\Omega)} = \| \| u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T}'} \| \| . \end{aligned}$$

Da $v_{\mathcal{T}'}$ beliebig war, gilt $\| \| u_{\mathcal{T}} - J_{\mathcal{T}'} u_{\mathcal{T}} \| \| \lesssim \| \| u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'} \| \|$. □

In der Definition der Scott-Zhang-Projektion hatten wir für einen inneren Knoten P beliebige Kanten E_P zugelassen. Durch spezielle Wahl der Kanten E_P lassen sich nun weitere Eigenschaften beweisen.

Definition 5.3.12 Für $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}')$ definieren wir

$$\Omega_1 := \bigcup (\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}) \quad \text{und} \quad \Omega_2 := \Omega \setminus \Omega_1.$$

Wir wählen nun für einen Knoten P die ausgehende Kante E_P wie folgt:

$$E_P \subseteq \begin{cases} \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 & \text{wenn } P \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \\ \partial\Omega_1 & \text{wenn } P \in \partial\Omega_1 \\ \partial\Omega_2 & \text{wenn } P \in \partial\Omega_2 \end{cases}$$

Falls für P keine der beiden Bedingungen zutreffen, ist die Wahl von E_P wieder beliebig. Diese Wahl der Kanten liefert wiederum eine Scott-Zhang-Projektion, welche wir mit $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}$ bezeichnen.

Bemerkung 5.3.13 Die bisher bewiesenen Eigenschaften sind unabhängig von einer expliziten Wahl der Kanten und gelten somit auch für die Projektion $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}$. Die einzige Ausnahme bildet Lemma 5.3.4 Punkt ii), denn für $P \in \Gamma \cap \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ gibt es im Allgemeinen keine Kante $E_P \subseteq \Gamma \cap \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Das heißt, im Falle $\Omega_1 \cap \Gamma \neq \emptyset$ werden diskrete Randdaten nicht erhalten und es gilt i.A. $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}(H_0^1(\Omega)) \neq \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$.

Lemma 5.3.14 Die soeben definierte Scott-Zhang Projektion $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}$ erfüllt folgende Eigenschaften:

- i) $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}$ ist ein Projektion von $H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}')$.
- ii) Für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt $\|J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} v\| \lesssim \|v\|$.
- iii) Für $i = 1, 2$ existiert eine Projektion J_{Ω_i} , sodass für alle $v \in H^1(\Omega)$ und $v_i \in H^1(\Omega_i)$ mit $v|_{\Omega_i} = v_i$

$$(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} v)|_{\Omega_i} = J_{\Omega_i}(v|_{\Omega_i}).$$

Dass heißt, $(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} v)|_{\Omega_i}$ hängt nur von $v|_{\Omega_i}$ ab.

- iv) Für alle $v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ gilt $(v_{\mathcal{T}} - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} v_{\mathcal{T}})|_{\Omega_2} = 0$.
- v) $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}(\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})) \subseteq \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$.

Beweis. i) Wurde bereits in Lemma 5.3.4 bewiesen.

ii) Folgt direkt aus Korollar 5.3.8.

iii) Wir bezeichnen $\mathcal{T}'|_{\Omega_i}$ die Einschränkung der Triangulierung \mathcal{T}' auf Ω_i . Um die Projektion J_{Ω_i} definieren zu können benötigen wir für jeden Knoten $P \in \Omega_i$ eine dazugehörige Kante E_P . Dazu übernehmen wir die Wahl der Kanten von $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}$, das heißt für jeden Knoten P sei die dazugehörige Kante E_P bei J_{Ω_i} und $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}$ gleich gewählt. Man bemerke, dass nach Definition 5.3.12 für jeden Knoten $P \in \partial\Omega_i$ auch $E_P \subseteq \partial\Omega_i$ gilt. Dies impliziert für $P \in \overline{\Omega_i}$ sofort $E_P \subseteq \overline{\Omega_i}$ und des weiteren

$$\begin{aligned} (J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} v)|_{\Omega_i} &= \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T})} \left(\int_{E_P} \psi_P v \, ds \right) \varphi_P|_{\Omega_i} \\ &= \sum_{P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}) \cap \Omega_i} \left(\int_{E_P} \psi_P v|_{\Omega_i} \, ds \right) \varphi_P|_{\Omega_i} = J_{\Omega_i}(v|_{\Omega_i}). \end{aligned}$$

iv) Aufgrund der Definition von Ω_2 gilt $v_{\mathcal{T}}|_{\Omega_2} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}')|_{\Omega_2}$. Die Projektionseigenschaft von J_{Ω_2} aus Punkt iii) liefert nun

$$v_{\mathcal{T}}|_{\Omega_2} = J_{\Omega_2} v_{\mathcal{T}}|_{\Omega_2} \stackrel{iii)}{=} (J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} v_{\mathcal{T}})|_{\Omega_2}.$$

v) Sei $v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$. Nach Punkt i) gilt $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$. Es bleibt also nur $v_{\mathcal{T}}|_{\Gamma} = 0$ zu zeigen. Nach Punkt gilt iv) $v = 0$ auf $\Gamma \cap \Omega_2$. Für einen Knoten $P \in \mathcal{K}(\mathcal{T}')$ mit $P \in \Gamma \setminus \partial\Omega_2$ zeigt man analog zu Lemma 5.3.4 ii), dass $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} v_{\mathcal{T}}(P) = 0$ und somit $v_{\mathcal{T}}|_{\Gamma} = 0$ gilt. □

5.4 Lower Diamond Estimate

In diesem Kapitel widmen wir uns der schon angesprochenen Lower Diamond Estimate. Diese werden wir zunächst in der Energienorm $\|\cdot\|$ und anschließend für die Dirichlet-Energie $\mathcal{J}(\cdot)$ formulieren und beweisen. (siehe Satz 5.4.2 bzw. Korollar 5.4.3). Wir erinnern an die Definition 4.0.10 der Lower Diamond Struktur.

Bevor wir jedoch die Lower Diamond Estimate beweisen können, benötigen wir ein Lemma über Eigenschaften der Scott-Zhang-Projektion auf einem Lower Diamond.

Lemma 5.4.1 *Sei $(\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_c; \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ ein Lower Diamond. Wir definieren für $j = 1, \dots, n$, $\Omega_j := \bigcup (\mathcal{T}_j \setminus \mathcal{T}_r)$ und $J_j := J_{\mathcal{T}_r \rightarrow \mathcal{T}_j}$. Sei zusätzlich $J : \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_c) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_c)$ gegeben durch $J := J_1 \circ \dots \circ J_n$. Dann gilt*

- i) die Projektionen J_j , aufgefasst als Operatoren von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_r) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_r)$, kommutieren.
- ii) J ist ein Projektion auf $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_c)$ mit $J(\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_r)) \subseteq \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_c)$ und für alle $v_{\mathcal{T}_r} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_r)$ gilt

$$Jv_{\mathcal{T}_r} = \begin{cases} J_j v_{\mathcal{T}_r} & \text{auf } \Omega_j \\ v_{\mathcal{T}_r} & \text{auf } \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n \Omega_j, \end{cases} \quad (5.19)$$

sowie $\|Jv_{\mathcal{T}_r}\|^2 \lesssim \|v_{\mathcal{T}_r}\|^2$. Mit einer Konstanten, die nur von der uniformen Formregularität abhängt.

Beweis. i) Wir wählen beliebige aber feste Indizes $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ sowie eine Funktion $v_{\mathcal{T}_r} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_r)$. Laut Definition eines Lower Diamonds gilt $\Omega_i \subseteq \Omega \setminus \Omega_j$. Die Punkte iv) und v) aus Lemma 5.3.14 angewandt auf J_j liefern

$$J_j(\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_r)) \subseteq \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_j) \quad \text{und} \quad J_j v_{\mathcal{T}_r} = v_{\mathcal{T}_r} \quad \text{in } \Omega_i.$$

Dies impliziert nun $J_i v_{\mathcal{T}_r} = J_j(J_i v_{\mathcal{T}_r})$ in Ω_i . Andererseits hängt laut 5.3.14 ii) für eine beliebige Funktion $w \in H^1(\Omega)$, $(J_i w)|_{\Omega_i}$ nur von $w|_{\Omega_i}$ ab. Wir folgern

$$(J_i \circ J_j)v_{\mathcal{T}_r} = J_i \overbrace{(J_j v_{\mathcal{T}_r})}^{=v_{\mathcal{T}_r}} = J_i v_{\mathcal{T}_r} \quad \text{in } \Omega_i,$$

und des weitern auch

$$(J_i \circ J_j)v_{\mathcal{T}_r} = J_i v_{\mathcal{T}_r} = (J_j \circ J_i)v_{\mathcal{T}_r} \quad \text{in } \Omega_i.$$

Analog lässt sich $(J_j \circ J_i)v_{\mathcal{T}_r} = J_j v_{\mathcal{T}_r} = (J_i \circ J_j)v_{\mathcal{T}_r}$ auf Ω_j zeigen.

Lemma 5.3.14 iv) liefert $v_{\mathcal{T}_r} = (J_i \circ J_j)v_{\mathcal{T}_r}$ auf $\overline{\Omega \setminus (\Omega_i \cup \Omega_j)}$. Die Zusammensetzung ergibt schlussendlich

$$(J_j \circ J_i)v_{\mathcal{T}_r} = (J_i \circ J_j)v_{\mathcal{T}_r} \quad \text{in } \Omega.$$

ii) Aufgrund der Kommutativität liefert die Hintereinanderausführung der Projektionen J_i wieder eine Projektion auf $\bigcap_{j=1}^n \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_j) = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_c)$. Fassen wir J als $J_{\mathcal{T}_r \rightarrow \mathcal{T}_c}$ auf, erhalten wir mit 5.3.14 iv) nun $J(\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_r)) \subseteq \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_c)$. Argumentieren wir analog zu Punkt i) folgt

$$Jv_{\mathcal{T}_r} = \begin{cases} J_j v_{\mathcal{T}_r} & \text{auf } \Omega_j \\ v_{\mathcal{T}_r} & \text{auf } \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n \Omega_j. \end{cases} \quad (5.20)$$

Die Stabilitätseigenschaft aus Lemma 5.3.7 angewandt auf die Projektionen J_j liefert schlussendlich

$$\begin{aligned} \| \| Jv_{\mathcal{T}_r} \| \|^2 &= \|\nabla v_{\mathcal{T}_r}\|_{L^2(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n \Omega_j)}^2 + \sum_{j=1}^n \|\nabla J_j v_{\mathcal{T}_r}\|_{L^2(\Omega_j)}^2 \\ &= \|\nabla v_{\mathcal{T}_r}\|_{L^2(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n \Omega_j)}^2 + \sum_{j=1}^n \sum_{T \subseteq \Omega_j} \underbrace{\|\nabla J_j v_{\mathcal{T}_r}\|_{L^2(T)}^2}_{\lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}_r}\|_{L^2(\omega_T)}^2} \\ &\lesssim \|\nabla v_{\mathcal{T}_r}\|_{L^2(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n \Omega_j)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \|\nabla v_{\mathcal{T}_r}\|_{L^2(\omega_T)}^2 \simeq \|\nabla v_{\mathcal{T}_r}\|_{L^2(\Omega)}^2 = \| \| v_{\mathcal{T}_r} \| \|^2. \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Scott-Zhang Projektion lässt sich die Lower Diamond Estimate (LDE) beweisen. Für Triangulierungen $\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_c, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n$ bezeichnen wieder $u_{\mathcal{T}_r}, u_{\mathcal{T}_c}, u_{\mathcal{T}_1}, \dots, u_{\mathcal{T}_n}$ die dazugehörigen Galerkinlösungen.

Satz 5.4.2 (Lower Diamond Estimate) *Sei $(\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_c; \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ ein Lower Diamond, dann gilt*

$$C_{ld,l} \| \| u_{\mathcal{T}_r} - u_{\mathcal{T}_c} \| \|^2 \lesssim \sum_{j=1}^n \| \| u_{\mathcal{T}_r} - u_{\mathcal{T}_j} \| \|^2 \lesssim C_{ld,u} \| \| u_{\mathcal{T}_r} - u_{\mathcal{T}_c} \| \|^2$$

Die Konstanten $C_{ld,l}, C_{ld,u} > 0$ hängen nur von der Formregularität ab.

Beweis. Mit Hilfe der Projektionen J und J_j aus den Lemmata 5.4.1 respektive 5.3.14 ist der Beweis der Lower Diamond Estimate ein einfache Rechnung.

$$\begin{aligned} \| \| u_{\mathcal{T}_r} - u_{\mathcal{T}_c} \| \|^2 &\stackrel{5.3.8}{\simeq} \|\nabla(u_{\mathcal{T}_r} - Ju_{\mathcal{T}_r})\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\stackrel{5.4.1}{=} \sum_{j=1}^n \|\nabla(u_{\mathcal{T}_r} - Ju_{\mathcal{T}_j})\|_{L^2(\Omega_j)}^2 + \underbrace{\|\nabla(u_{\mathcal{T}_r} - Ju_{\mathcal{T}_r})\|_{L^2(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^n \Omega_j)}^2}_{\stackrel{5.3.14 \text{ iv)}_0}{=}} \\ &\stackrel{5.3.14 \text{ iv)}_0}{=} \sum_{j=1}^n \|\nabla(u_{\mathcal{T}_r} - Ju_{\mathcal{T}_j})\|_{L^2(\Omega)}^2 \stackrel{5.3.8}{\simeq} \| \| u_{\mathcal{T}_r} - u_{\mathcal{T}_j} \| \|^2 \end{aligned}$$

Man beachte, dass in allen verwendeten Resultaten die Konstanten nur von der Formregularität abhängen und dies daher auch für die LDE gilt. □

Mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen der Energienorm und der Dirichlet-Energie ist es nun ein Leichtes die Lower Diamond Estimate für \mathcal{J} zu formulieren und zu beweisen.

Korollar 5.4.3 Sei $(\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_c; \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ ein Lower Diamond. Analog zu Satz 5.4.2 gilt

$$\mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_r}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_c}) \simeq \sum_{j=1}^n (\mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_r}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_j})),$$

mit Konstanten, die nur von der Formregularität abhängen.

Beweis. Aufgrund der Äquivalenz bis aus Lemma 5.2.4 erhalten wir

$$\mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_r}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_c}) = \frac{1}{2} \|\| u_{\mathcal{T}_r} - u_{\mathcal{T}_c} \|\|^2 \simeq \sum_{j=1}^n \|\| u_{\mathcal{T}_r} - u_{\mathcal{T}_j} \|\|^2 = \sum_{j=1}^n (\mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_r}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_j})),$$

wobei die Normäquivalenzkonstanten nur von der Formregularität abhängen. □

6 A posteriori Analysis

6.1 Fehlerschätzer

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem Fehlerschätzer. Im Gegensatz zum üblicheren Residualschätzer auf Dreiecken verwenden wir einen kantenbasierten Residualschätzer. In diesem Kapitel werden wir diskrete Zuverlässigkeit und diskrete Effizienz des Schätzers zeigen. Wir bezeichnen die Menge der Kanten einer regulären Triangulierung \mathcal{T} mit $\mathcal{E}(\mathcal{T})$. Für die Definition des Fehlerschätzers benötigen wir zuerst den Begriff des Normalensprungs.

Definition 6.1.1 Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ eine reguläre Triangulierung und $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \cap \Omega$, so existieren eindeutige Dreiecke $T_E^+, T_E^- \in \mathcal{T}$ mit $E \in \mathcal{E}(T_E^+) \cap \mathcal{E}(T_E^-)$. Der Normalensprung auf E für eine Funktion $v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T})$ sei definiert durch

$$\llbracket \nabla v_{\mathcal{T}} \rrbracket := |(\nabla v_{\mathcal{T}}; n_E^+) + (\nabla v_{\mathcal{T}}; n_E^-)|,$$

wobei n_E^\pm den äußeren Normalvektor der Dreiecke T_E^\pm bezeichnet. Es gilt daher $n_E^+ = -n_E^-$ und, da das Skalarprodukt in die reellen Zahlen abbildet, gilt auch $\llbracket \nabla v_{\mathcal{T}} \rrbracket \in \mathbb{R}$.

Definition 6.1.2 Für eine Triangulierung \mathcal{T} und $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ definieren wir den Kantenpatch ω_E als

$$\omega_E := \bigcup \{T \in \mathcal{T} : E \in \mathcal{E}(T)\}.$$

Verwenden wir die obige Notation, ergibt sich sofort $\omega_E = \bigcup \{T_E^+, T_E^-\}$. Mit Hilfe des Kantensprungs und dem Begriff des verfeinerten Kantenpatches können wir nun den Residualschätzer definieren.

Definition 6.1.3 Für $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ und $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ definieren wir den Residualschätzer $\eta_{\mathcal{T}}^2(E)$ für die Kante E als

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(E) := \begin{cases} h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 + h_E \llbracket \nabla u_{\mathcal{T}} \rrbracket^2_{L^2(E)} & \text{für } E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \subseteq \Omega, \\ h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 & \text{für } E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \subseteq \Gamma. \end{cases} \quad (6.1)$$

Hier bezeichnet wieder $h_E := |E|$. Für eine beliebige Menge von Kanten $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{T})$ sei nun

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{F}) := \sum_{E \in \mathcal{F}} \eta_{\mathcal{T}}^2(E). \quad (6.2)$$

Bemerkung 6.1.4 Aufgrund der uniformen Formregularität gilt für alle Dreiecke $T_E^\pm \in \mathcal{T}$ mit $E \in \mathcal{E}(T_E^\pm)$, dass $h_E \simeq \text{diam}(T) \simeq h_T$. Somit stimmt auch $\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}))$ bis auf eine Konstante, mit dem dreiecksbasierten Residualschätzer überein.

Im Folgenden bezeichnen wir für ein $T \in \mathcal{T}$, mit $f_T := |T|^{-1} \int_T f \, dt$ das Integralmittel von f auf T . Wir benötigen des Weiteren noch den nachstehenden Oszillationsterm der Daten.

Definition 6.1.5 Sei wieder $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ eine reguläre Triangulierung und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ eine Menge von Dreiecken. Wir definieren

$$\text{osc}^2(\mathcal{U}) := \sum_{T \in \mathcal{U}} h_T^2 \|f - f_T\|_{L^2(T)}^2. \quad (6.3)$$

Wie allgemein bekannt, ist der Residualschätzer effizient und zuverlässig. Es gilt daher folgender Satz. Für den Beweis siehe z.B. [NSV09].

Satz 6.1.6 (Effizienz und Zuverlässigkeit) Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ eine reguläre Triangulierung mit Galerkin-Lösung $u_{\mathcal{T}}$. Dann gelten folgende Abschätzungen für den Residualschätzer $\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}))$.

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}^2 \lesssim \eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T})) \lesssim \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T})$$

Sowie aufgrund der Normäquivalenz auch

$$\| \|u - u_{\mathcal{T}}\| \|^2 \lesssim \eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T})) \lesssim \| \|u - u_{\mathcal{T}}\| \|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T}).$$

Ausgehend von der Zuverlässigkeit und mit Hilfe der Scott-Zhang-Projektion $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}$ können wir nun die diskrete Zuverlässigkeit zeigen.

Satz 6.1.7 (diskrete Zuverlässigkeit) Seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}')$. Bezeichnen wir die Kanten der Triangulierungen mit $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{E}' := \mathcal{E}(\mathcal{T}')$, dann gilt

$$\| \|u_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}}\| \|^2 \lesssim \eta_{\mathcal{T}'}^2(\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}). \quad (6.4)$$

Wobei $\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}$ die Menge aller Kanten in \mathcal{T}' ist, welche in \mathcal{T} nicht verfeinert wurden.

Beweis. Wir definieren $w \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$ als $w := u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'}$. Lemma 5.3.14 v) garantiert $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'}(\mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})) \subseteq \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}')$, und die Galerkin-Orthogonalität liefert nun

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla w; \nabla(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)) \, dx &= \int_{\Omega} (\nabla(u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}'}); \nabla(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} (\nabla(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) - \nabla(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)) f \, dx = 0. \end{aligned}$$

Verwenden wir die Galerkin-Orthogonalität und die Projektionseigenschaft der Scott-Zhang-Projektion, erhalten wir folgende Identität für die Energienorm $\|w\|$:

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 &= \int_{\Omega} (\nabla w; \nabla w) \, dx = \int_{\Omega} (\nabla w; \nabla w - \nabla(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)) \, dx \\
&= \int_{\Omega} (\nabla u_{\mathcal{T}'}; \underbrace{\nabla w - \nabla(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)}_{\in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}')}) \, dx - \int_{\Omega} (\nabla u_{\mathcal{T}'}; \nabla w - \nabla(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)) \, dx \\
&= \int_{\Omega} (w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) f \, dx - \sum_{T \in \mathcal{T}'} \int_T (\nabla u_{\mathcal{T}'}; \nabla w - \nabla(J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)) \, dx \\
&= \int_{\Omega} (w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) f \, dx \\
&\quad - \sum_{T \in \mathcal{T}'} \left(\int_T \underbrace{\Delta u_{\mathcal{T}'}(w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)}_{=0} \, dx + \int_{\partial T} (\nabla u_{\mathcal{T}'}; n_T)(w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) \, ds \right).
\end{aligned}$$

Da $J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$, gilt für alle Kanten $E \subseteq \Gamma$ nun $\int_E (\nabla u_{\mathcal{T}'}; n_T)(w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) \, ds = 0$. Summation über die Kanten ergibt nun

$$\|w\|^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}'} \int_T (w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) f \, dx - \sum_{E \in \mathcal{E}' \cap \Omega} \int_E \llbracket \nabla u_{\mathcal{T}'} \rrbracket (w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) \, ds.$$

Nach Lemma 5.3.14 iii) gilt in $\Omega \setminus (\cup(\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}))$ aufgrund der Projektionseigenschaft, dass $w = J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w$. Für eine Kante E bezeichnen wir wieder mit T_E^{\pm} , die eindeutigen Dreiecke mit $E = T_E^+ \cap T_E^-$. Cauchy-Schwarz-Ungleichung, $H^1(\Omega)$ -Stabilität 5.3.9 und Korollar 5.3.10 liefern

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} \int_T (w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) f - \sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} \int_E \llbracket \nabla u_{\mathcal{T}'} \rrbracket (w - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w) \, ds. \\
&\stackrel{CSU}{\leq} \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} \|f\|_{L^2(T)} \underbrace{\|(1 - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)\|_{L^2(T)}}_{\stackrel{5.3.9}{\lesssim} h_T \|\nabla w\|_{L^2(\omega_T)}}}_{=:A} + \underbrace{\sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} \|\llbracket \nabla u_{\mathcal{T}'} \rrbracket\|_{L^2(E)} \underbrace{\|(1 - J_{\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}'} w)\|_{L^2(E)}}_{\stackrel{5.3.10}{\lesssim} h_E^{1/2} \|\nabla w\|_{L^2(\omega_{T_E^+})}}}_{=:B}.
\end{aligned}$$

- Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und anschließende Summierung über Kanten anstatt Dreiecken gibt für den Term A nun

$$A \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} \|\nabla w\|_{L^2(\omega_T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\lesssim \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}} \lesssim \|\nabla w\| \left(\sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- Behandeln wir den zweiten Term analog gilt

$$B \leq \left(\sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} h_E \|\llbracket \nabla u_{\mathcal{T}} \rrbracket^2\|_{L^2(E)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} \|\nabla w\|_{L^2(\omega_{T_E^+})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

$$\lesssim \|\llbracket \nabla w \rrbracket\| \left(\sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} h_E \|\llbracket \nabla u_{\mathcal{T}} \rrbracket^2\|_{L^2(E)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.6)$$

Setzen wir zusammen und dividieren wir durch $\|\llbracket w \rrbracket\|$, ergibt sich

$$\|\llbracket w \rrbracket\| \lesssim \left(\sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} h_E \|\llbracket \nabla u_{\mathcal{T}} \rrbracket^2\|_{L^2(E)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nutzen wir schlußendlich $(a + b)^2 \lesssim a^2 + b^2$ erhalten wir:

$$\|\llbracket w \rrbracket\|^2 \lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 + \|\llbracket \nabla u_{\mathcal{T}} \rrbracket^2\|_{L^2(E)} = \eta_{\mathcal{T}'}^2(\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}),$$

womit wir die diskrete Zuverlässigkeit beweisen haben. □

Wie schon zu Beginn dieses Unterkapitels erwähnt, beschließen wir diesen Abschnitt mit dem Beweis der diskreten Effizienz.

Satz 6.1.8 (diskrete Effizienz) *Seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}')$. Wir bezeichnen wieder die Kanten der Triangulierungen mit $\mathcal{E} := \mathcal{E}(\mathcal{T})$ und $\mathcal{E}' := \mathcal{E}(\mathcal{T}')$. Dann gilt*

$$\eta_{\mathcal{T}'}^2(\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}) \lesssim \|\llbracket u_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}} \rrbracket\|^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2. \quad (6.7)$$

Beweis. Sei $E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}$ beliebig, das heißt, die Kante E wurde in der Triangulierung \mathcal{T} verfeinert. Wir bezeichnen wieder den Mittelpunkt von E mit P und erhalten $P = \text{mpt}^{-1}(E) \in \mathcal{K}(\mathcal{T})$. Der Beweis gliedert sich in folgende Schritte:

- i) Ist E eine Randkante, also $E \subseteq \Gamma$, folgt trivialerweise

$$\eta_{\mathcal{T}'}^2(E) = h_E^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \leq \|\llbracket u_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}} \rrbracket\|_T^2 + h_E^2 \|f\|_{L^2(T)}^2,$$

wobei $T = \omega_E$ das angrenzende Dreieck mit $E \in \mathcal{E}(T)$ bezeichnet.

- ii) Für $E \not\subseteq \Gamma$, sei $\tilde{\mathcal{T}} := \text{ref}(\mathcal{T}', E)$. Dann ist $\tilde{\mathcal{T}}$ ist somit die größte Verfeinerung von \mathcal{T}' , in der die Kante E verfeinert wurde. Wir definieren nun die Bubble-Funktion $b_P \in \mathcal{S}_0^1(\tilde{\mathcal{T}})$ für den Knoten $P = \text{mpt}^{-1}(E)$ als

$$b_P(P') := \delta_{PP'} = \begin{cases} 1 & \text{für } P' = P, \\ 0 & \text{für } P' \in \mathcal{K}(\tilde{\mathcal{T}}) \setminus P. \end{cases} \quad (6.8)$$

Die Funktion b_P erfüllt zusätzlich $\text{supp}(b_P) \subseteq \omega_E$ und aufgrund der Schachtelung der diskreten Räume $b_P \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$.

iii) Laut Definition des Kantensprungs gilt $[[\nabla u_{\mathcal{T}'}]]|_E \in \mathbb{R}$. Bezeichnen wir die angrenzenden Dreiecke wieder mit $\omega_E = \{T_E^+, T_E^-\}$ so sehen wir mit $\int_E b_P \, ds = 1/2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_E h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]]^2 \, ds &= \int_E h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]]^2 b_P \, ds \\
&= \int_E h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] ((\nabla u_{\mathcal{T}'}; n_{T_E^+}^+) + (\nabla u_{\mathcal{T}'}; n_{T_E^-}^-)) b_P \, ds \\
&= \int_{T_E^+} h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] (\nabla u_{\mathcal{T}'}; \nabla b_P) \, ds + \int_{T_E^-} h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] (\nabla u_{\mathcal{T}'}; \nabla b_P) \, ds \\
&= \int_{\omega_E} (\nabla u_{\mathcal{T}'}; h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] \nabla b_P) \, ds.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der schwachen Formulierung (5.3) und $h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] b_P \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T})$ erhalten wir weiters

$$0 = \int_{\omega_E} f h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] b_P \, ds - \int_{\omega_E} h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] (\nabla u_{\mathcal{T}'}; \nabla b_P) \, ds. \quad (6.9)$$

Setzen wir nun in die obige Gleichung ein und wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an, ergibt sich

$$\frac{1}{2} \int_E h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]]^2 \, ds = \int_{\omega_E} f h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] b_P \, ds \quad (6.10)$$

$$- \int_{\omega_E} h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] ((\nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'}); \nabla b_P) \, ds \quad (6.11)$$

$$\stackrel{CSU}{\leq} h_E \|f\|_{L^2(\omega_E)} \| [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] b_P \|_{L^2(\omega_E)} \quad (6.12)$$

$$+ \| \nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'} \|_{L^2(\omega_E)} \| h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] \nabla b_P \|_{L^2(\omega_E)}. \quad (6.13)$$

iv) Ein Skalierungsargument liefert nun folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\| h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] \nabla b_P \|_{L^2(\omega_E)}^2 &\lesssim \| [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] b_P \|_{L^2(\omega_E)}^2 = [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]]^2 \int_{\omega_E} b_P^2 \, ds \\
&\lesssim \int_E h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]]^2 \, ds
\end{aligned} \quad (6.14)$$

Quadrieren wir (6.13) und nutzen wieder $(a+b)^2 \lesssim a^2 + b^2$, erhalten wir in Verbindung mit (6.14)

$$h_E \| [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]] \|_{L^2(E)}^2 = \int_E h_E [[\nabla u_{\mathcal{T}'}]]^2 \, ds \lesssim \| \nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'} \|_{L^2(\omega_E)}^2 + h_E^2 \| f \|_{L^2(\omega_E)}^2.$$

- v) Jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}$ ist maximal 3 Patches ω_E von Kanten $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}') \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T})$ enthalten. Summieren wir wieder über die Kanten und setzen alle Beweisschritte zusammen, ergibt sich schlussendlich die gewünschte Ungleichung

$$\begin{aligned} \eta_{\mathcal{T}'}^2(\mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}) &= \sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} \left(h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 + h_E \|\llbracket \nabla u_{\mathcal{T}'} \rrbracket\|_{L^2(E)}^2 \right) \\ &\lesssim \sum_{E \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}} \left(h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 + \|\nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'}\|_{L^2(\omega_E)}^2 \right) \\ &\lesssim \|\nabla u_{\mathcal{T}} - \nabla u_{\mathcal{T}'}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2, \end{aligned}$$

und somit die diskrete Effizienz des Fehlerschätzers. \square

Im nächsten Kapitel werden wir die wichtigsten Eigenschaften des Fehlerschätzers, wie diskrete Effizienz und diskrete Zuverlässigkeit auf den Energieterm \mathcal{G} übertragen.

6.2 Gesamtenergie

In diesem Kapitel widmen wir uns der Gesamtenergie \mathcal{G} , welche sich im Wesentlichen aus der Dirichlet-Energie \mathcal{J} und dem Volumsresiduum zusammensetzt. Diese verhält sich bis auf eine Konstante wie der Fehlerschätzer, mit dem Vorteil der Monotonie bezüglich der Verfeinerung. Wir werden nun die Eigenschaften des Schätzers aus dem vorigen Kapitel auf \mathcal{G} übertragen.

Definition 6.2.1 Für eine Triangulierung \mathcal{T} bezeichnen wir wieder mit $u_{\mathcal{T}}$ die zugehörige Galerkinlösung. Wir definieren nun die Gesamtenergie $\mathcal{G} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}) := \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2, \quad (6.15)$$

bzw. setzen für \mathcal{T}_{∞} analog $\mathcal{G}(\mathcal{T}_{\infty}) := \mathcal{J}(u)$, wobei u die eindeutige Lösung von (5.2) ist.

Das folgende Lemma zeigt nun den oben angesprochenen Zusammenhang zwischen Fehlerschätzer und Energie.

Lemma 6.2.2 Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$, dann gilt

- i) $\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T})) \simeq \| \|u - u_{\mathcal{T}}\| \|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T}) \simeq \| \|u - u_{\mathcal{T}}\| \|^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2.$
- ii) $\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T})) \simeq \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}) - \mathcal{J}(u) + \text{osc}^2(\mathcal{T}) \simeq \mathcal{G}(\mathcal{T}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_{\infty}).$

Beweis. i) Wir wissen, das Integralmittel ist die L^2 -Bestapproximation im Raum der stückweise konstanten Funktionen $\mathbb{P}^0(\mathcal{T})$. In anderen Worten

$$\|f - f_T\|_{L^2(\Omega)} = \min_{w \in \mathbb{R}} \|f - w\|_{L^2(\Omega)}.$$

Das impliziert nun direkt

$$\text{osc}^2(\mathcal{T}) = \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f - f_T\|_{L^2(T)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \leq \eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T})),$$

und zusammen mit der Effizienz respektive Zuverlässigkeit aus Satz 6.1.6

$$\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T})) \stackrel{\text{Eff.}}{\lesssim} \| \|u - u_{\mathcal{T}}\| \|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T}) \leq \| \|u - u_{\mathcal{T}}\| \|^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \stackrel{\text{Zuv.}}{\lesssim} \eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}))$$

ii) Für die Dirichlet-Energie gilt nach Lemma 5.2.4 ii) $\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) = \frac{1}{2} \| \|u - u_{\mathcal{T}'}\| \|^2$.
Verwenden die Definition von \mathcal{G} , erhalten wir

$$\frac{1}{2} \| \|u - u_{\mathcal{T}'}\| \|^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 = \mathcal{J}(u) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 = \mathcal{G}(\mathcal{T}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_{\infty}).$$

Zusammen mit Punkt i) folgt die Behauptung. □

Als nächsten Schritt zeigen wir die Monotonie von $\mathcal{G}(\cdot)$ bezüglich der Verfeinerung.

Lemma 6.2.3 *Seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$ mit $\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}')$ gegeben. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

- i) $\frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}'} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 - \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2$,
- ii) $\text{osc}^2(\mathcal{T}') - \text{osc}^2(\mathcal{T}) \simeq \text{osc}^2(\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T})$
- iii) $\mathcal{G}(\mathcal{T}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{T}')$. *Das heißt die Gesamtenergie ist monoton bezüglich der Halbordnung der Verfeinerung.*

Beweis. i) Wir betrachten ein beliebiges Dreieck $T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}$. Da sich bei jeder Bisektion eines Dreiecks T seine Fläche halbiert, gilt für Kinder T_1 und T_2 von T

$$h_{T_1}^2 \|f\|_{L^2(T_1)}^2 + h_{T_2}^2 \|f\|_{L^2(T_2)}^2 \leq \frac{1}{2} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2. \quad (6.16)$$

Wurde nun $T \in \mathcal{T}'$ zu Nachkommen $T_1, \dots, T_m \in \mathcal{T}$ mit $T = \bigcup_{i=1}^m T_i$ verfeinert, erhalten wir induktiv mit (6.16),

$$\sum_{i=1}^m h_{T_i} \|f\|_{L^2(T_i)}^2 \leq \frac{1}{2} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2.$$

Dies liefert uns, angewendet auf die linke Seite von Punkt i) ,

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}'} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 - \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 - \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned}$$

Die Umkehrung folgt aus

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}'} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}' \cap \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \end{aligned}$$

ii) Wie in Punkt i) erhalten wir für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}$ mit Kindern T_1, T_2

$$\begin{aligned} h_T^2 \|f - f_T\|_{L^2(T)}^2 &= h_T^2 (\|f - f_T\|_{L^2(T_1)}^2 + \|f - f_T\|_{L^2(T_2)}^2) \\ &\geq h_T^2 \left(\inf_{w \in \mathbb{R}} \|f - w\|_{L^2(T_1)}^2 + \inf_{w \in \mathbb{R}} \|f - w\|_{L^2(T_2)}^2 \right) \\ &\geq 2(h_{T_1}^2 \|f - f_{T_1}\|_{L^2(T_1)}^2 + h_{T_2}^2 \|f - f_{T_2}\|_{L^2(T_2)}^2). \end{aligned}$$

Die Aussage folgt analog zu Punkt i).

iii) Aus der Monotonie der Dirichlet-Energie und Netzweite folgt nun

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}) = \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \leq \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) + \sum_{T \in \mathcal{T}'} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 = \mathcal{G}(\mathcal{T}').$$

Wobei wieder $u_{\mathcal{T}}$ und $u_{\mathcal{T}'}$ die Galerkinlösungen auf den Gittern \mathcal{T} bzw. \mathcal{T}' sind. \square

Wir können nun ein diskretes Analogon zu der in Lemma 6.2.2 bewiesenen Äquivalenz $\eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T})) \simeq \mathcal{G}(\mathcal{T}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_{\infty})$ zeigen.

Satz 6.2.4 *Seien wiederum $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathbb{T}$, sodass $\mathcal{T} \in \text{refine}(\mathcal{T}')$. Dann gilt*

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}') - \mathcal{G}(\mathcal{T}) \simeq \eta_{\mathcal{T}'}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}') \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T})).$$

Beweis. Laut Definition und Lemma 6.2.3 gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{T}') - \mathcal{G}(\mathcal{T}) &= \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) + \sum_{T \in \mathcal{T}'} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}}) - \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \\ &\stackrel{6.2.3}{\simeq} \underbrace{\mathcal{J}(u_{\mathcal{T}'}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}})}_{\stackrel{5.2.4}{\simeq} \frac{1}{2} \|u_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}}\|^2} + \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \end{aligned}$$

Die diskrete Effizienz aus Satz 6.1.8 liefert nun direkt

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}') - \mathcal{G}(\mathcal{T}) \gtrsim \eta_{\mathcal{T}'}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}') \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T})). \quad (6.17)$$

Mit Hilfe der diskreten Zuverlässigkeit aus Satz 6.1.7 sehen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{T}') - \mathcal{G}(\mathcal{T}) &\simeq \|u_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}}\|^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq \|u_{\mathcal{T}'} - u_{\mathcal{T}}\|^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}') \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T})} h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 \stackrel{6.1.7}{\lesssim} \eta_{\mathcal{T}'}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}') \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T})), \end{aligned}$$

und somit haben das Lemma bewiesen. \square

Diskrete Zuverlässigkeit und Effizienz des Schätzers bzw. der Gesamtenergie ermöglichen es uns, die Lower Diamond Estimate für beide Terme zu formulieren und zu beweisen.

Korollar 6.2.5 Sei $(\mathcal{T}_r, \mathcal{T}_c; \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n)$ ein Lower Diamond und bezeichnen wieder $u_{\mathcal{T}_r}, u_{\mathcal{T}_c}, u_{\mathcal{T}_i}$ die Galerkinlösungen auf den entsprechenden Triangulierungen.

i) Die Gesamtenergie \mathcal{G} erfüllt die Lower Diamond Estimate:

$$\mathcal{G}(\mathcal{T}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_r) \simeq \sum_{j=1}^n (\mathcal{G}(\mathcal{T}_j) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_r))$$

ii) Der kantenbasierte Residualschätzer η erfüllt die Lower Diamond Estimate.

$$\eta_{\mathcal{T}_c}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}_c) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T}_r)) \simeq \sum_{j=1}^n \eta_{\mathcal{T}_j}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}_r) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T}_j))$$

Beweis. i) In Satz 5.4.2 bzw. Korollar 5.4.3 haben wir die LDE bereits für die Energienorm $\|\cdot\|$ sowie für die Dirichlet-Energie $\mathcal{J}(\cdot)$ bewiesen. Mit Hilfe der in diesem Kapitel gezeigten Eigenschaften des Fehlerschätzers ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{T}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_r) &= \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_c}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_r}) + \sum_{T \in \mathcal{T}_c} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 - \sum_{T \in \mathcal{T}_r} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \\ &\simeq \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_c}) - \mathcal{J}(u_{\mathcal{T}_r}) + \sum_{T \in \mathcal{T}_c \setminus \mathcal{T}_r} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Laut Definition eines Lower Diamonds erfüllen alle $i \neq j$, dass $|\text{area}(\mathcal{T}_i \setminus \mathcal{T}_r) \cap \text{area}(\mathcal{T}_j \setminus \mathcal{T}_r)| = 0$ ist. Für ein Dreieck $T \in \mathcal{T}_c \setminus \mathcal{T}_r$ gilt daher, dass T in genau einer Triangulierung \mathcal{T}_j verfeinert wurde. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_c \setminus \mathcal{T}_r} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{T \in \mathcal{T}_j \setminus \mathcal{T}_r} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \\ &\stackrel{6.2.3 \text{ i)}}{\simeq} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_j} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 - \sum_{T \in \mathcal{T}_r} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2 \right). \end{aligned}$$

Einsetzen in Gleichung (6.18) und die LDE der Dirichlet-Energie beweisen

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{T}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_r) &\simeq \sum_{j=1}^n \left((\mathcal{J}(\mathcal{T}_j) + \sum_{T \in \mathcal{T}_j} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2) - (\mathcal{J}(\mathcal{T}_r) + \sum_{T \in \mathcal{T}_r} h_T^2 \|f\|_{L^2(T)}^2) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathcal{G}(\mathcal{T}_j) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_r). \end{aligned}$$

ii) Folgt mit $\mathcal{G}(\mathcal{T}') - \mathcal{G}(\mathcal{T}) \simeq \eta_{\mathcal{T}'}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}') \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T}))$ aus Satz 6.2.4 trivialerweise aus Punkt i). □

6.3 Energie und Fehlerschätzer für Populationen

Da der im Kapitel 8 geführte Beweis der Instanz-Optimalität in der Terminologie von Populationen geführt wird, müssen wir zuerst die, im vorigen Kapitel gezeigten Resultate in die Sprache der Populationen übersetzen.

Definition 6.3.1 Für eine Population $\mathcal{P} \in (\mathbb{P} \cup \{\mathcal{P}_\infty\})$ definieren wir die Gesamtenergie mit Hilfe der entsprechenden Triangulierung $\mathcal{T}_\mathcal{P} \in (\mathbb{T} \cup \{\mathcal{T}_\infty\})$ durch

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}) := \mathcal{G}(\mathcal{T}_\mathcal{P}).$$

Wie wir im ersten Abschnitt gesehen haben gilt, $\mathcal{P}^{++} \setminus \mathcal{P} = \text{mpt}(\mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P}))$. Diese Zuordnung zwischen Knoten und Kanten legt nun folgende Definition nahe.

Definition 6.3.2 Sei $\mathcal{P} \in (\mathbb{P} \cup \{\mathcal{P}_\infty\})$ und $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ die von \mathcal{P} induzierte Triangulierung. Für eine Knotenmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}^{++} \setminus \mathcal{P}$ definieren wir

$$\eta_\mathcal{P}^2(\mathcal{U}) := \eta_{\mathcal{T}_\mathcal{P}}^2(\text{mpt}^{-1}(\mathcal{U})),$$

wobei $\text{mpt}^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P})$ eine Kantenmenge ist.

Mit Hilfe dieser Definition übertragen sich alle Eigenschaften direkt in das Populationsmodell. Da die nachstehenden zwei Identitäten später eine wichtige Rolle spielen, führen wir diese Beweise an.

Korollar 6.3.3 Für Populationen $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in \mathbb{P}$ mit $\mathcal{P} \in \text{refine}(\mathcal{P}')$ gilt

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}') - \mathcal{G}(\mathcal{P}) \simeq \eta_\mathcal{P}^2(\mathcal{P} \cap ((\mathcal{P}')^{++} \setminus \mathcal{P}))$$

Beweis. Benutzen wir die Definitionen von $\mathcal{G}(\mathcal{P})$, Satz 6.2.4 und Proposition 3.1.14, ergibt sich

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}') - \mathcal{G}(\mathcal{P}) \stackrel{\text{Def.}}{=} \mathcal{G}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}'}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_\mathcal{P}) \stackrel{6.2.4}{\simeq} \eta_{\mathcal{T}_{\mathcal{P}'}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}'}) \setminus \mathcal{E}(\mathcal{T}_\mathcal{P})) \stackrel{3.1.14}{=} \eta_{\mathcal{P}'}^2(\mathcal{P} \cap ((\mathcal{P}')^{++} \setminus \mathcal{P})),$$

und somit die Behauptung. \square

Korollar 6.3.4 Sei $(\mathcal{P}_\mathbf{r}, \mathcal{P}_\mathbf{c}; \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ ein Lower Diamond und wieder $u_{\mathcal{P}_\mathbf{r}}, u_{\mathcal{P}_\mathbf{c}}, u_{\mathcal{P}_i}$ die von den entsprechenden Populationen induzierten Galerkin-Lösungen. Dann gilt

i) die Gesamtenergie \mathcal{G} erfüllt die Lower Diamond Estimate

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\mathbf{c}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_\mathbf{r}) \simeq \sum_{j=1}^n (\mathcal{G}(\mathcal{P}_j) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_\mathbf{r})),$$

ii) der Kanten basierte Residualschätzer erfüllt die Lower Diamond Estimate

$$\eta_{\mathcal{P}_\mathbf{c}}^2(\mathcal{P}_\mathbf{r} \cap (\mathcal{P}_\mathbf{c}^{++} \setminus \mathcal{P}_\mathbf{c})) \simeq \sum_{j=1}^n \eta_{\mathcal{P}_j}^2(\mathcal{P}_\mathbf{r} \cap (\mathcal{P}_j^{++} \setminus \mathcal{P}_j)).$$

Beweis. Laut Korollar 4.0.16 ist $(\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_c; \mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ genau dann ein Lower Diamond im Sinne von Populationen, wenn die induzierten Triangulierungen $(\mathcal{T}_{\mathcal{P}_r}, \mathcal{T}_{\mathcal{P}_c}; \mathcal{T}_{\mathcal{P}_1}, \dots, \mathcal{T}_{\mathcal{P}_n})$ einen Lower Diamond bilden. Wir erhalten mit Korollar 6.2.5

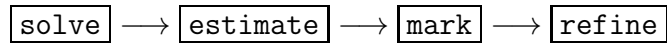
$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r) = \mathcal{G}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}_c}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}_r}) \stackrel{6.2.5}{\cong} \sum_{j=1}^n (\mathcal{G}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}_j}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}_r})) = \sum_{j=1}^n (\mathcal{G}(\mathcal{P}_j) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r))$$

Damit haben wir Punkt i) bewiesen.

Punkt ii) folgt direkt aus Korollar 6.3.3 in Verbindung mit Punkt i). □

7 Adaptiver Algorithmus

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Adaptiven Finiten Elementen Methode. Wir verwenden dafür eine modifizierte Version der von Babuška und Rheinbolt in [BR78] vorgeschlagenen Maximums Strategie. Der adaptive Algorithmus besteht nun aus folgenden Schleife:



7.1 Algorithmus für Dreiecke

Wir werden die 4 Schritte zuerst aus der Perspektive von Dreiecken betrachten. Anschließend formulieren wir den Algorithmus für Populationen, um mit Hilfe der in der vorhergehenden Kapiteln bewiesenen Netzeigenschaften die Instanz-Optimalität beweisen zu können.

7.1.1 Schritt 1: $\boxed{\text{solve}}$

Sei $\mathcal{T}_\ell \in \text{refine}(\mathcal{T}_0)$ eine regulären Triangulierung und $u_{\mathcal{T}_\ell}$ die eindeutige Galerkin-Lösung $u_{\mathcal{T}_\ell}$ der diskreten Formulierung

$$\int_{\Omega} (\nabla u_{\mathcal{T}}; \nabla v_{\mathcal{T}}) dx = \int_{\Omega} f v_{\mathcal{T}} dx \quad \forall v_{\mathcal{T}} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell), \quad (7.1)$$

welche sich durch Lösen eines linearen Gleichungssystem berechnen lässt. In Schritt solve berechnen wir nun die Exakte Galerkin-Lösung $u_{\mathcal{T}_\ell} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$.

7.1.2 Schritt 2: $\boxed{\text{estimate}}$

Wir erinnern an die Definition des Fehlerschätzers bzw. den Beitrag einer Kante $E \in \mathcal{T}_\ell$:

$$\eta_{\mathcal{T}_\ell}^2(E) = \begin{cases} h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 + h_E \| \llbracket \nabla u_{\mathcal{T}} \rrbracket \|_{L^2(E)}^2 & \text{für } E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \subseteq \Omega, \\ h_E^2 \|f\|_{L^2(\omega_E)}^2 & \text{für } E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}) \subseteq \Gamma. \end{cases} \quad (7.2)$$

Schritt estimate berechnet für jede Kante $E \in \mathcal{T}_\ell$ nun die lokalen Beiträge des Schätzers.

7.1.3 Schritt 3: mark

Um eine reguläre Triangulierung zu erhalten, in der beliebige Kante $E \in \mathcal{T}_\ell$ verfeinert wurde, ist es im Allgemeinen notwendig, neben E noch andere Kanten zu verfeinern. Beachten wir dies, liest sich eine Heuristik des Markierungsschritts, wie folgt:

- i) Wir ermitteln eine Kante E derart, dass die Summe der Beiträge $\eta_{\mathcal{T}_\ell}^2(E')$, über alle Kanten E' welche zusätzlich zu E verfeinert werden müssen, maximal ist. Diese Summe bezeichnen wir mit $\rho_{\ell, \max}^2$.
- ii) Für eine beliebige nicht markierte Kante $E \in \mathcal{T}_\ell$ berechnen wir $\rho_\ell^2(E)$ als die Summe der Beiträge $\eta_{\mathcal{T}_\ell}^2(E')$ über alle Kanten E' , die für E aber für keine bereits vorher markierte Kante verfeinert werden müssen.
- iii) Gilt für ein festes $\mu \in (0, 1)$ nun $\rho_\ell^2(E) \geq \mu \rho_{\ell, \max}^2$, markieren wir die Kante E und alle Kanten, die zusätzlich zu E verfeinert werden müssen.
- iv) Wir wiederholen die Schritte ii) und iii) für alle nicht-markierten Kanten $E \in \mathcal{T}_\ell$

Um diese Heuristik zu formalisieren benötigen wir folgende Definition.

Definition 7.1.1 Sei $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ und $E \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ eine beliebige Kante. Wir definieren

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}; E) := \mathcal{E}(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{E}(\mathbf{ref}(\mathcal{T}; E)),$$

wobei $\mathbf{ref}(\mathcal{T}; E)$ laut Definition die größte Triangulierung ist, in welcher die Kante E verfeinert wurde.

Der Markierungsschritt für eine Triangulierung \mathcal{T}_ℓ und einem fixiertem $\mu \in (0, 1)$ lautet nun, wie folgt:

- i) Berechne $\rho_{\ell, \max}^2 := \max\{\eta_{\mathcal{T}_\ell}^2(\mathcal{R}(\mathcal{T}; E)) : E \in \mathcal{E}(\mathcal{T}_\ell)\}$ und definiere die Mengen $\mathcal{M}_\ell = \widetilde{\mathcal{M}}_\ell = \emptyset$ sowie $\mathcal{N} = \mathcal{E}(\mathcal{T}_\ell)$.
- ii) Wähle $E \in \mathcal{N}$ beliebig und berechne $\rho_\ell^2(E) = \eta_{\mathcal{T}_\ell}^2(\mathcal{R}(\mathcal{T}_\ell; E) \setminus \widetilde{\mathcal{M}}_\ell)$.
- iii) Ist $\rho_\ell^2(E) \geq \mu \rho_{\ell, \max}^2$, update die Mengen $\mathcal{M}_\ell \leftarrow \mathcal{M}_\ell \cup \{E\}$ und $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell \leftarrow \widetilde{\mathcal{M}}_\ell \cup \mathcal{R}(\mathcal{T}_\ell; E)$ sowie $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \setminus \mathcal{R}(\mathcal{T}_\ell; E)$.
- iv) Ist $\mathcal{N} \neq \emptyset$ gehe zu ii).

7.1.4 Schritt 4: refine

Schritt 3 liefert eine Menge \mathcal{M}_ℓ von markierten Kanten. Mittels Newest Vertex Bisection berechnen wir nun das Netz $\mathcal{T}_{\ell+1} := \mathbf{ref}(\mathcal{T}_\ell, \mathcal{M}_\ell)$. Wir erhöhen $\ell = \ell + 1$ und gehen zum Schritt solve.

7.2 Algorithmus für Populationen

Sei wieder $\mathcal{P}_\ell = \mathcal{K}(\mathcal{T}_\ell) \in \text{refine}(\mathcal{P}_0)$. Wir erinnern an die im Kapitel 2 gezeigt direkte Korrespondenz

$$(\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell) = \text{mpt}(\mathcal{E}(\mathcal{T}_{\mathcal{P}_\ell})),$$

sowie an die Definition des Fehlerschätzers für einen Knoten $P \in \mathcal{P}_\ell$ mittels $\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(P) = \eta_{\mathcal{T}_\ell}^2(\text{mpt}^{-1}(P))$.

Algorithmus 7.2.1 *Wir wählen den Markierungsparameter $\mu \in (0, 1)$ beliebig aber fest und erhalten nun folgenden Algorithmus für Populationen:*

1. **solve**: Berechne $u_{\mathcal{P}_\ell} = u_{\mathcal{T}_\ell} \in \mathcal{S}_0^1(\mathcal{T}_\ell)$.
2. **estimate**: Berechne $\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(P)$ für alle $P \in \mathcal{P}_\ell$.
3. **mark**: Besteht wieder aus folgenden Punkten:
 - i) Finde $\rho_{\ell, \max}^2 := \max\{\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \mathcal{P}_\ell) : P \in \mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell\}$ und definiere die Mengen $\mathcal{M}_\ell = \widetilde{\mathcal{M}}_\ell = \emptyset$ sowie $\mathcal{N} = \mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell$.
 - ii) Wähle einen beliebigen Knoten $P \in \mathcal{N}$ und berechne
$$\rho_\ell^2(P) = \eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus (\mathcal{P}_\ell \cup \widetilde{\mathcal{M}}_\ell)).$$
 - iii) Ist $\rho_\ell^2(P) > \mu \rho_{\ell, \max}^2$, update die Mengen $\mathcal{M}_\ell \leftarrow \mathcal{M}_\ell \cup P$ und $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell \leftarrow \widetilde{\mathcal{M}}_\ell \cup (\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \mathcal{P}_\ell)$ sowie $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \setminus (\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \mathcal{P}_\ell)$.
 - iv) Ist $\mathcal{N} \neq \emptyset$ gehe zu ii).
4. **refine** Erzeuge mittels NVB $\mathcal{P}_{\ell+1} := \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell)$, erhöhe $\ell = \ell + 1$ und gehe zu 1. solve.

Bemerkung 7.2.2 *i) Da in $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell$ alle Knoten, die zusätzlich zu den markierten Knoten aus \mathcal{M}_ℓ verfeinert werden müssen enthalten sind, gilt*

$$\mathcal{P}_{\ell+1} = \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell) = \mathcal{P}_\ell \cup \widetilde{\mathcal{M}}_\ell.$$

Das heißt für eine Implementierung des adaptiven Algorithmus ist nur die Knotenmenge \mathcal{M}_ℓ notwendig.

- ii) *Die Wahl des Knoten (bzw. der Kante im Fall von Triangulierungen) im Markierungsschritt ii) ist beliebig und daher auch die Reihenfolge in welcher die Knoten der Population \mathcal{P}_ℓ abgearbeitet werden. Daher muss im Allgemeinen der Knoten P mit $\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P)) = \rho_{\ell, \max}^2$ nicht markiert werden.*

Wir schließen das Kapitel über den adaptiven Algorithmus mit dem nachstehenden Lemma.

Lemma 7.2.3 *Seien $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Populationen, die ausgehend von einer initialen Population \mathcal{P}_0 durch Algorithmus 7.2.1 generiert wurde, und $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ die Folge der in jedem Schritt markierten Elemente. Es gilt für alle $\ell \in \mathbb{N}$, dass $\mathcal{M}_\ell \neq \emptyset$ sowie*

$$\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\mathcal{P}_{\ell+1} \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)) = \eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\mathbf{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell) \setminus \mathcal{P}_\ell) \geq \mu \# \mathcal{M}_\ell \rho_{\ell, \max}^2.$$

Beweis. Sei $\ell \in \mathbb{N}$ beliebig. Angenommen, es gilt nach dem Markierungsschritt $\mathcal{M}_\ell = \emptyset$ und daher auch $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell = \emptyset$. Da alle Knoten in $\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell$ durchlaufen werden, wird nach endlich vielen Schritten der Knoten $P \in \mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell$ mit

$$\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\mathbf{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \underbrace{(\mathcal{P}_\ell \cup \widetilde{\mathcal{M}}_\ell)}_{=\mathcal{P}_\ell}) = \rho_{\ell, \max}^2.$$

ausgewählt, und daher auch markiert. Es gilt somit $P \in \mathcal{M}_\ell \neq \emptyset$. Widerspruch

Die rechte Ungleichung folgt direkt aus dem Markierungskriterium, denn wird ein Knoten P markiert, so wird $\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\mathbf{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell) \setminus \mathcal{P}_\ell)$ um mindestens $\mu \rho_{\ell, \max}^2$ erhöht und wir erhalten daher

$$\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\mathbf{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell) \setminus \mathcal{P}_\ell) \geq \mu \# \mathcal{M}_\ell \rho_{\ell, \max}^2$$

Es gilt $\widetilde{\mathcal{M}}_\ell \subseteq \mathcal{P}_\ell$ und $\mathbf{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell) \subseteq \mathcal{P}_\ell^{++}$. Mit Hilfe von Bemerkung 7.2.2 i) folgern wir

$$\mathcal{P}_{\ell+1} \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell) = \mathbf{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell) \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell) = \mathbf{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{M}_\ell) \setminus \mathcal{P}_\ell.$$

Setzen wir nun in den Fehlerschätzer ein, erhalten wir die gewünschte Gleichheit. \square

8 Optimalität

Als erstes Ziel dieses Kapitels beweisen wir die Energieoptimalität des adaptiven Algorithmus, Satz 8.1.5. Der Beweis ist etwas technischer Natur und gliedert sich in die Lemmata 8.1.2-8.1.4 bzw. 8.1.5. Anschließend lässt sich relativ mühelos, mit Hilfe der Äquivalenz zwischen Gesamtenergie und Fehler, die Instanzenoptimalität beweisen.

8.1 Energieoptimalität

Sei \mathcal{P}_0 die von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 induzierte Population. Wir benötigen im späteren Beweis eine bezüglich Kardinalität energieoptimale Population.

Definition 8.1.1 Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die $\mathcal{P}_n^{\text{opt}}$ als jene Population mit

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) := \min\{\mathcal{G}(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \in \mathbb{P}, \#(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0) \leq n\}.$$

Das heißt $\mathcal{P}_n^{\text{opt}}$ ist die, bezüglich \mathcal{G} beste Verfeinerung der Population \mathcal{P}_0 mit $n + \#\mathcal{P}_0$ Knoten.

Da die Menge aller Populationen \mathcal{P} mit $\#(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0) \leq n$ endlich ist, wird das Minimum angenommen und $\mathcal{P}_n^{\text{opt}}$ existiert daher immer. Man beachte, dass $\mathcal{P}_n^{\text{opt}}$ im Allgemeinen nicht eindeutig ist, in unserem Fall genügt jedoch eine beliebige, im obigen Sinn optimale Population.

In den folgenden Lemmata und Sätzen bezeichnet $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ die vom adaptiven Algorithmus 7.2.1 (für Populationen) erzeugte Folge von Netzen. Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ erhalten wir zusätzlich eine Menge von markierten Elementen \mathcal{M}_ℓ .

Lemma 8.1.2 Seien $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ gegeben. Es existiert eine Konstante $C_1 > 0$ welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 abhängt, sodass für ein $\ell \in \mathbb{N}$ und eine Population \mathcal{Q} mit $\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) > \mathcal{G}(\mathcal{Q})$ gilt

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \geq C_1 \mu \frac{\#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_r) - \mathcal{G}(\mathcal{Q})),$$

mit die Mengen $\mathcal{P}_r := \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{Q})$ und $\mathcal{U} := \text{free}(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell))$.

Beweis. Der Beweis besteht aus folgenden Schritten:

- i) Sei $\ell \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{Q} \in \mathbb{P}$ mit $\mathcal{G}(\mathcal{Q}) < \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell)$. Mit Hilfe von Korollar 6.3.3 und Lemma 7.2.3 erhalten wir die Abschätzung

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \stackrel{6.3.3}{\gtrsim} \eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\mathcal{P}_{\ell+1} \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)) \stackrel{7.2.3}{\geq} \mu \#\mathcal{M}_\ell \rho_{\ell, \max}^2. \quad (8.1)$$

ii) Wir definieren die Mengen \mathcal{P}_r und \mathcal{U} laut Voraussetzung als

$$\mathcal{P}_r := \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{Q}) \quad \text{und} \quad \mathcal{U} := \text{free}(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)).$$

$\mathcal{G}(\mathcal{Q}) < \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell)$ impliziert nun $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}_\ell$ und daher auch $\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell) \neq \emptyset$. Da laut Lemma 3.4.3 vi) jede nicht leere Knotenmenge (Nachkommen-) freie Knoten enthält, gilt

$$\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{U} \neq \emptyset.$$

iii) Verwenden wir die Definition von $\rho_{\ell, \max}^2$ erhalten wir folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \rho_{\ell, \max}^2 &:= \max\{\eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \mathcal{P}_\ell) : P \in \underbrace{\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell}_{\supseteq \mathcal{U}}\} \\ &\geq \frac{1}{\#\mathcal{U}} \sum_{P \in \mathcal{U}} \eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \mathcal{P}_\ell) \\ &\geq \frac{1}{\#\mathcal{U}} \eta_{\mathcal{P}_\ell}^2\left(\bigcup_{P \in \mathcal{U}} \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \mathcal{P}_\ell\right). \end{aligned} \tag{8.2}$$

iv) Wenden wir Lemma 3.4.3 i) auf $\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)$ an, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \cup \text{anc}(\mathcal{U}) &= \text{free}(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)) \cup \text{anc}(\text{free}(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell))) \\ &= (\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)) \cup \text{anc}(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)), \end{aligned}$$

und daher $(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)) \subseteq \mathcal{U} \cup \text{anc}(\mathcal{U})$. Die Menge $\bigcup(\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \mathcal{P}_\ell)$ lässt sich nun folgendermaßen vereinfachen.

$$\begin{aligned} \bigcup_{P \in \mathcal{U}} (\text{ref}(\mathcal{P}_\ell; P) \setminus \mathcal{P}_\ell) &= \bigcup_{P \in \mathcal{U}} ((\{P\} \cup \text{anc}(P)) \setminus \mathcal{P}_\ell) = (\mathcal{U} \cup \text{anc}(\mathcal{U})) \setminus \mathcal{P}_\ell \\ &\supseteq (\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)) \setminus \mathcal{P}_\ell \\ &= \mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell). \end{aligned}$$

Setzen wir (8.2) und Punkt iv) zusammen und nutzen wieder die Äquivalenz zwischen Fehlerschätzer und Energie aus 6.3.3, ergibt sich

$$\rho_{\ell, \max}^2 \geq \frac{1}{\#\mathcal{U}} \eta_{\mathcal{P}_\ell}^2(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)) \tag{8.3}$$

$$\stackrel{6.3.3}{\gtrsim} \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r). \tag{8.4}$$

v) Laut Lemma 4.0.11 und 4.0.16 bildet $(\mathcal{P}_r, \mathcal{P}_c, \mathcal{P}_\ell, \mathcal{Q})$ nun einen Lower Diamond. Aufgrund der Monotonie der Gesamtenergie gilt $\mathcal{G}(\mathcal{P}_r) \leq \mathcal{G}(\mathcal{Q}) < \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell)$ und mit Hilfe der Lower Diamond Estimate für $\mathcal{G}(\cdot)$ (Korollar 6.3.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r) &\geq \frac{1}{2}((\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r)) + (\mathcal{G}(\mathcal{Q}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r))) \\ &\stackrel{6.3.4}{\gtrsim} \mathcal{G}(\mathcal{P}_r) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_c) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_r) - \mathcal{G}(\mathcal{Q}). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Setzen wir in Ungleichung (8.1) aus Punkt i) ein und verwenden Gleichung (8.4) ergibt sich schlussendlich

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) &\geq \mu \# \mathcal{M}_\ell \rho_{\ell, \max}^2 \\ &\stackrel{(8.4)}{\gtrsim} \mu \frac{\# \mathcal{M}_\ell}{\# \mathcal{U}} \gtrsim (\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r)) \stackrel{(8.5)}{\gtrsim} \mu \frac{\# \mathcal{M}_\ell}{\# \mathcal{U}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_r) - \mathcal{G}(\mathcal{Q})). \end{aligned}$$

vi) Man beachte, dass in den Abschätzung nur die Konstanten der Lower Diamond Estimate bzw. der diskreten Effizient eingegangen sind. Diese hängen aber nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 ab.

□

Aufbauend auf 8.1.2, können wir nun die nachstehenden zwei Lemmata beweisen.

Lemma 8.1.3 *Für die Folgen $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ existiert eine Konstante $\gamma_1 > 0$, welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 und dem Parameter μ abhängt, sodass für $\ell, n \in \mathbb{N}$ und Populationen $\mathcal{P}_n^{\text{opt}}, \mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}$ mit $\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) > \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})$ gilt*

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \geq \gamma_1 \# \mathcal{M}_\ell (\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})).$$

Beweis. Wir gliedern den Bewies wiederum in mehrere Schritte.

i) Seien ℓ, n laut Voraussetzung, sodass $\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) > \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})$. Wählen wir \mathcal{Q} als $\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}$ gilt $\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) < \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})$ und wir folgern daher mit Lemma 8.1.2

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \gtrsim \mu \frac{\# \mathcal{M}_\ell}{\# \mathcal{U}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_r) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})), \quad (8.6)$$

mit Mengen $\mathcal{P}_r = \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})$ und $\mathcal{U} = \text{free}(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell))$.

ii) Da $\mathcal{P}_\ell \neq \mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}$, gilt für die feinste gemeinsame Vergrößerung $\mathcal{P}_c := \text{coa}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{Q})$ nun $\mathcal{P}_c \subsetneq \mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}$ und somit $\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_c \neq \emptyset$. Wir folgern wieder mit Lemma 3.4.3 vi) $\mathcal{V} := \text{free}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_c) \neq \emptyset$. Für alle $P \in \mathcal{V}$ definieren wir die Mengen

$$\mathcal{P}_P := \mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}} \setminus P.$$

Man beachte, dass laut 3.4.5 $\mathcal{P}_P = \text{coa}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}, P)$ gilt, und daher ist für alle $P \in \mathcal{V}$, $\mathcal{P}_P \in \mathbb{P}$ das heißt, für alle $P \in \mathcal{V}$ ist \mathcal{P}_P wieder eine Population. Nun sind alle $\mathcal{P}_P \in \text{refine}(\mathcal{P}_c)$ und daher ist die größte gemeinsame Verfeinerung der Mengen \mathcal{P}_P ebenfalls eine Verfeinerung von \mathcal{P}_c . Wir erhalten

$$\mathcal{P}_P \in \text{refine}(\mathcal{P}_c) \quad \forall P \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \bigoplus_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_P \in \text{refine}(\mathcal{P}_c).$$

Andererseits liefert uns die Definition der \mathcal{P}_P , dass $\bigoplus_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_P = \mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}$.

- iii) Ziel ist nun die Lower Diamond Estimate auf $(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}, \bigoplus_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_P; (\mathcal{P}_P)_{P \in \mathcal{V}})$ anzuwenden. Seien nun $\#\mathcal{V} \geq 2$ und $P, P' \in \mathcal{V}$ mit $P \neq P'$, dann gilt

$$\underbrace{(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_P)}_{=P} \cap \underbrace{(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_{P'})}_{=P'} = P \cap P' = \emptyset.$$

Somit bildet $(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}, \bigoplus_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_P; (\mathcal{P}_P)_{P \in \mathcal{V}})$ einen Lower Diamond und wir können die LDE für die Energie $\mathcal{G}(\cdot)$ anwenden.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{P}_r) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}) &\stackrel{\mathcal{G} \text{ mon.}}{\geq} \mathcal{G}(\bigoplus_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_P) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}) \\ &\gtrsim \sum_{P \in \mathcal{V}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_P) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})) \end{aligned} \quad (8.7)$$

Im Fall $\#\mathcal{V} = 1$, das heißt $\mathcal{V} = \{P\}$, gilt $\mathcal{P}_P = \bigoplus_{P \in \mathcal{V}} \mathcal{P}_P$ und daher trivialerweise die obige Ungleichung.

- iv) Kombinieren wir nun die Ungleichung (8.6) aus Punkt i) und Ungleichung (8.7) aus Punkt iii) erhalten wir in Summe

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) &\stackrel{(8.6)}{\gtrsim} \mu \frac{\#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_r) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})) \stackrel{(8.7)}{\gtrsim} \mu \frac{\#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}} \sum_{P \in \mathcal{V}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_P) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})) \\ &\geq \mu \frac{\#\mathcal{M}_\ell \#\mathcal{V}}{\#\mathcal{U}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Die letzte Abschätzung gilt, da $\#(\mathcal{P}_P \setminus \mathcal{P}_0) = \#(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_0) - 1 \leq n$ und somit $\mathcal{G}(\mathcal{P}_P) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}})$ erfüllt ist.

- v) Es bleibt zu zeigen, dass $\#U/\#V$ durch eine Konstante beschränkt ist. Wir definieren dazu \mathcal{W} als $\mathcal{W} := \mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell)$ und per Definition gilt $\mathcal{U} = \text{free}(\mathcal{W})$.

Für zwei Populationen, siehe Lemma 3.2.2 i) ist die größte gemeinsame Verfeinerung durch die Vereinigung der Populationen gegeben. Daraus erhalten wir $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_\ell \cup \mathcal{P}_n^{\text{opt}}$ und analog mit Punkt ii) $\mathcal{P}_c = \mathcal{P}_\ell \cap \mathcal{P}_n^{\text{opt}}$. Wir folgern nun

$$\mathcal{P}_r \setminus \mathcal{P}_\ell = (\mathcal{P}_\ell \cup \mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \setminus \mathcal{P}_\ell = \mathcal{P}_n^{\text{opt}} \setminus (\mathcal{P}_\ell \cap \mathcal{P}_n^{\text{opt}}) = \mathcal{P}_n^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_c,$$

und somit $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{P}_n^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_c$. Mit der Abschätzung aus Satz 3.4.7 gilt

$$\#\mathcal{U} = \#\text{free}(\mathcal{W}) \leq C_{gd} \#\text{free}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_c) = C_{gd} \#\mathcal{V}.$$

Das impliziert nun $\#\mathcal{V}/\#\mathcal{U} \leq C_{gd}^{-1}$. Definieren wir nun $\gamma_1 := \mu C_{gd}^{-1}$ erhalten wir mit (8.7)

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \geq \gamma_1 \mathcal{M}_\ell (\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})).$$

vi) Man beachte, dass wir neben der Konstante aus Lemma 8.1.2 wiederum nur die Lower Diamond Estimate und Satz 3.4.7 verwendet haben. Die jeweiligen Konstanten hängen jedoch nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 ab.

□

Lemma 8.1.4 *Seien $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ vom adaptiven Algorithmus erzeugte Folgen von Netzen, respektive markierten Elementen. Es existiert eine Konstante $\gamma_2 > 0$ welche nur von der initialen Population \mathcal{P}_0 und dem Parameter μ abhängt, sodass für $\ell, n \in \mathbb{N}$ und Populationen $\mathcal{P}_n^{\text{opt}}, \mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}$ mit $\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) > \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})$ gilt*

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+\lfloor \#\mathcal{M}_\ell/\gamma_2 \rfloor}^{\text{opt}}).$$

Beweis. Wir wählen $\ell, n \in \mathbb{N}$, sodass für $\mathcal{P}_\ell, \mathcal{P}_n^{\text{opt}}$ und $\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}$ wieder $\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) > \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})$ gilt. Wir definieren $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ als

$$\gamma_2 := \max \left\{ \frac{C_{gd}}{C_1 \mu}, \frac{2C_{gd}}{\mu C_1 C_{ld,u}} \right\}.$$

Wobei C_1 die Konstante aus Lemma 8.1.2 bezeichnet, und $C_{ld,u}$ die Konstante der Lower Diamond Estimate nach oben ist, das heißt

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r) \geq C_{ld,u} \sum_{j=1}^n (\mathcal{G}(\mathcal{P}_j) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_r)).$$

Wir definieren $r := \lfloor \#\mathcal{M}_\ell/K \rfloor$ und unterscheiden zwei Fälle.

i) Für den Fall, dass $\gamma_2 > \#\mathcal{M}_\ell$ gilt $r = 0$ und aufgrund der Monotonie der Gesamtenergie

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}) = \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}).$$

ii) Im Fall $\gamma_2 \leq \#\mathcal{M}_\ell$ ist $r \geq 1$ und daher $\mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}})$. Wir wenden wieder Lemma 8.1.2 für $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}$ an erhalten

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \geq \mu C_1 \frac{\#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})), \quad (8.9)$$

wiederum mit Mengen $\mathcal{P}_r = \text{ref}(\mathcal{P}_\ell; \mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})$, sowie $\mathcal{U} = \text{free}(\mathcal{P}_r \cap (\mathcal{P}_\ell^{++} \setminus \mathcal{P}_\ell))$ und einer Konstanten $C_1 > 0$ die nur von der initialen Population \mathcal{P}_0 abhängt.

iii) Analog zum Beweis von Lemma 8.1.3 Punkt ii) definieren wir $\mathcal{V} := \text{free}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_c)$ und erhalten mit gleicher Argumentation wie in 8.1.3 v) $\#\mathcal{U} \leq C_{gd} \#\mathcal{V}$. Wir führen nun eine Fallunterscheidung nach $\lfloor \#\mathcal{V}/r \rfloor$.

iv) Fall $\lfloor \#\mathcal{V}/r \rfloor = 0$:

Wir erhalten unmittelbar $C_{gd}^{-1} \#\mathcal{U} \leq \#\mathcal{V} < r = \lfloor \#\mathcal{M}_\ell/\gamma_2 \rfloor$, sowie

$$\frac{\gamma_2}{C_{gd}} < \frac{\#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}}.$$

Die Wahl von γ_2 in Verbindung mit Gleichung (8.9) impliziert nun

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) &\geq \underbrace{\mu C_1 \frac{\#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}}}_{> \gamma_2 C_{gd}^{-1}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})) \geq \underbrace{\frac{\mu C_1}{C_{gd}} \gamma_2}_{\geq 1} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})) \\ &\geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt aufgrund der Monotonie, da \mathcal{P}_c eine gemeinsame Vergrößerung von \mathcal{P}_ℓ und $\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}$ ist. Subtrahieren wir nun $\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell)$ und multiplizieren anschließend mit (-1) erhalten wir $\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})$.

v) Fall $\lfloor \#\mathcal{V}/r \rfloor \geq 1$:

Sei $m := \lfloor \#\mathcal{V}/r \rfloor$ und $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_m$ beliebige paarweise disjunkte Teilmengen von \mathcal{V} mit $\#\mathcal{V}_i \geq r$ für alle $i = 1, \dots, m$. Analog zum Beweis von Lemma 8.1.3 ii) definieren wir die Populationen $\mathcal{P}_j := \text{coa}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}; \mathcal{V}_j) = \mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{V}_j$ mit

$$\#(\mathcal{P}_j \setminus \mathcal{P}_0) = \#(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_0) - r \leq n + r - r = n$$

Die Monotonie der Energie \mathcal{G} liefert für alle $i = 1, \dots, m$ nun $\mathcal{G}(\mathcal{P}_i) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})$. Da alle $\mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}} \setminus \mathcal{P}_c$ sind gilt auch

$$\mathcal{P}_c \in \text{refine}\left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{P}_i\right) \quad \text{sowie} \quad \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}.$$

Ist $m > 1$ zeigt man analog zu Lemma 8.1.3 v), dass $(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{V}_i, \mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}; (\mathcal{P}_j)_{1 \leq j \leq m})$ einen Lower Diamond bildet und daher die Lower Diamond Estimate anwendbar ist. Diese liest sich nun als

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_c) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}) \leq \mathcal{G}\left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{V}_i\right) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}) \geq C_{ld,u} \sum_{i=1}^m (\mathcal{G}(\mathcal{P}_i) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})). \quad (8.10)$$

Im Fall $m = 1$ ist $\bigoplus_{i=1}^1 \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_1$ und (8.10) gilt trivialerweise.

Setzen wir nun in (8.9) aus Punkt ii) ein, erhalten wir mit Hilfe von (8.10)

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \geq \mu C_1 C_{ld,u} \frac{\#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}} \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{\mathcal{G}(\mathcal{P}_i)}_{\geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}})} - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}) \right) \quad (8.11)$$

$$\geq \frac{\mu m C_1 C_{ld,u} \#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})). \quad (8.12)$$

Es bleibt jetzt nur noch die Konstante abzuschätzen. Aus $m = \lfloor \#\mathcal{V}/r \rfloor$ erhalten wir $m \geq \#\mathcal{V}/2r$. Somit gilt für die Mengen \mathcal{M}_ℓ und \mathcal{U}

$$C_{gd}^{-1} \#\mathcal{U} \leq \#\mathcal{V} \leq 2mr = 2m \left\lfloor \frac{\#\mathcal{M}_\ell}{\gamma_2} \right\rfloor \Rightarrow \frac{\gamma_2}{2C_{gd}} \leq \frac{m\#\mathcal{M}_\ell}{\#\mathcal{U}}.$$

Schätzen wir die Konstanten in Gleichung (8.11) nach unten ab, ergibt sich mit Hilfe von $\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell)$ und der Definition von γ_2 schlussendlich

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) &\geq \underbrace{\gamma_2 \frac{\mu C_1 C_{ld,u}}{2C_{gd}}}_{\geq 1} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}})) \\ &\geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}). \\ &\Rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell+1}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+r}^{\text{opt}}) \end{aligned}$$

□

Wir benötigen im Beweis der Energieoptimalität folgende Identität für die Gauss-Klammer. Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq 1$ gilt

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \geq \lfloor x + \frac{y}{2} \rfloor. \quad (8.13)$$

Der Beweis ist elementar und wird dem interessierten Leser überlassen.

Satz 8.1.5 (Energieoptimalität) *Seien $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ gegeben. Es existiert eine Konstante $C_{eo} \geq 1$ welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 und μ abhängt, sodass für alle $\ell \in \mathbb{N}$ die folgende Implikation gilt.*

$$\#(\mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_0) \geq C_{eo}n \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \quad (8.14)$$

Das heißt, der Algorithmus ist quasi-energieoptimal.

Beweis. Mit Hilfe der Konstanten γ_1 und γ_2 aus den Lemmata 8.1.3 respektive 8.1.4 definieren wir folgende Größen:

$$\begin{aligned} M_\ell &:= \sum_{i=0}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_i \\ R &:= \left\lfloor \frac{1}{\gamma_1} \right\rfloor \\ L &:= 2R(\gamma_2 - 1) + 2\gamma_2 \end{aligned}$$

Angenommen es gilt folgende Behauptung:

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\lfloor M_\ell/L \rfloor}^{\text{opt}}). \quad (8.15)$$

So wissen wir aus der Net Closure Estimate für Populationen 3.2.12, dass $\#(\mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_0) \leq C_{nc}M_\ell$. Für $C_{eo} := 2C_{nc}L$ erhalten wir direkt aus den Definitionen der Konstanten die Implikation

$$\#(\mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_0) \geq C_{eo}n \quad \Rightarrow \quad 2C_{nc}M_\ell \geq C_{eo}n \quad \Rightarrow \quad \frac{M_\ell}{2L} \geq n \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor \frac{M_\ell}{L} \right\rfloor \geq n.$$

Die Monotonie der Gesamtenergie liefert $\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\lfloor M_\ell/L \rfloor}^{\text{opt}}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}})$ und in Verbindung mit (8.15) sofort (8.14).

Es bleibt nur noch der Beweis der Behauptung (8.15). Diese beweisen wir induktiv für ℓ . Wir können o.B.d.A $\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) > \min_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \mathcal{G}(\mathcal{P})$ annehmen, das heißt, dass die Galerkinlösung $u_{\mathcal{P}_\ell}$ nicht der exakten Lösung u entspricht. Denn ansonsten gilt trivialerweise $\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_k^{\text{opt}})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

- $\ell = 0$: Es gilt $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^{\text{opt}}$ und somit $\mathcal{G}(\mathcal{P}_0) = \mathcal{G}(\mathcal{P}_0^{\text{opt}})$.
- $\ell' \leq \ell - 1 \rightarrow \ell$: Wir definieren die Indexmenge

$$I := \{ \max\{\ell - i, 0\} : 1 \leq i \leq R, \ \#\mathcal{M}_i > \gamma_2 \}$$

und unterscheiden folgende zwei Fälle:

Fall 1: Angenommen $I \neq \emptyset$ so existiert ein maximaler Index $j = \max\{i : i \in I\}$. Laut Definition von I gilt $j \leq \ell - 1$ und mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $\mathcal{G}(\mathcal{P}_j) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\lfloor C_j/L \rfloor}^{\text{opt}})$. Daher existiert ein $n \geq \lfloor C_j/L \rfloor$ mit

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}) < \mathcal{G}(\mathcal{P}_j) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}).$$

Wir können nun Lemma 8.1.4 anwenden und erhalten

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_{j+1}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+\lfloor \#\mathcal{M}_j/\gamma_2 \rfloor}^{\text{opt}}), \quad (8.16)$$

Die Konstruktion von I war so gewählt, dass $\#\mathcal{M}_j \geq \gamma_2$. Eine Nebenrechnung zeigt nun

$$2\gamma_2 \leq 2\#\mathcal{M}_j \quad (8.17)$$

$$\Rightarrow 2\gamma_2\#\mathcal{M}_j + 2R(\gamma_2 - 1)\gamma_2 \leq 2\gamma_2\#\mathcal{M}_j + 2R(\gamma_2 - 1)\#\mathcal{M}_j \quad (8.18)$$

$$\Leftrightarrow 2\gamma_2(\#\mathcal{M}_j + R(\gamma_2 - 1)) \leq \#\mathcal{M}_j L \quad (8.19)$$

$$\Rightarrow \frac{\#\mathcal{M}_j + R(\gamma_2 - 1)}{L} \leq \frac{\#\mathcal{M}_j}{2\gamma_2}. \quad (8.20)$$

Setzen wir nun alle Bausteine zusammen ergibt sich mit Hilfe einer einfachen Rechnung

$$\begin{aligned} n + \left\lfloor \frac{\#\mathcal{M}_j}{\gamma_2} \right\rfloor &\stackrel{\text{Def. } m}{\geq} \left\lfloor \frac{C_j}{L} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\#\mathcal{M}_j}{\gamma_2} \right\rfloor \stackrel{(8.13)}{\geq} \left\lfloor \frac{C_j}{L} + \frac{\#\mathcal{M}_j}{2\gamma_2} \right\rfloor \\ &\stackrel{(8.20)}{\geq} \left\lfloor \frac{C_j + \#\mathcal{M}_j + R(\gamma_2 - 1)}{L} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{C_\ell}{L} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Der letzte Schritt gilt da alle $j \leq i \leq \ell - 1$, $\mathcal{M}_i \leq \gamma_2 - 1$ und daher

$$C_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_i = C_j + \#\mathcal{M}_j + \sum_{i=j+1}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_i \leq C_j + \#\mathcal{M}_i + R(\gamma_2 - 1)$$

gilt. Einsetzen in Gleichung (8.16) liefert die Behauptung

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{j+1}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\lfloor C_\ell/L \rfloor}^{\text{opt}}).$$

Fall 2: Wir betrachten nun den Fall $I = \emptyset$. Dieser gliedert sich wiederum in zwei Unterfälle.

Fall 2.1: Als erstes sei $\ell \geq R$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert wieder ein $n \geq \lfloor C_{\ell-R}/L \rfloor$ mit

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}) < \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}).$$

Definieren wir nun $m := \min \{ \ell - 1, \max \{ \ell - R + j : \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R+j}) > \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}) \} \}$. Ist $m < \ell - 1$, das heißt $\mathcal{G}(\mathcal{P}_m) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})$ folgt wieder aus der Monotonie von \mathcal{G}

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R+n}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}).$$

Sei nun $m = \ell - 1$. Für $1 \leq i \leq m$ erfüllen die Populationen $\mathcal{P}_{\ell-R+i}$ die Voraussetzungen von Lemma 8.1.3. Wenden wir dieses an, erhalten wir für alle $i \in \{1, \dots, m\}$

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R+i}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R+i+1}) \geq \gamma_1 \#\mathcal{M}_{\ell-R} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})).$$

Schreiben wir nun $\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{m+1})$ als Teleskopsumme und formen um, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{m+1}) &= \sum_{i=0}^m \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R+i}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R+i+1}) \\ &\stackrel{8.1.3}{\geq} \sum_{i=0}^m \gamma_1 \#\mathcal{M}_{\ell-R+i} (\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})) \\ &\geq \gamma_1 (m - \ell + R + 1) (\mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})) \underbrace{\sum_{i=0}^m \#\mathcal{M}_{\ell-R+i}}_{\geq 1} \\ &\geq \gamma_1 (m - \ell + R + 1) (\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}})). \end{aligned}$$

Da $m = \ell - 1$ gilt $\gamma_1 (m - \ell + R + 1) = \gamma_1 R > 1$ und wiederum liefert uns Monotonie der Gesamtenergie \mathcal{G}

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{m+1}) \geq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R}) - \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\ell-R}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{n+1}^{\text{opt}}).$$

Es bleibt noch $n + 1 \leq \lfloor C_\ell/L \rfloor$ zu beweisen. Da wir im Fall $I = \emptyset$ sind, gilt für alle $\ell - R \leq i \leq \ell - 1$, dass $\#\mathcal{M}_i \leq C - 1$. Nutzen wir $L \geq R(\gamma_2 - 1) \geq \sum_{j=\ell-R}^{\ell-1} \#\mathcal{M}_j$ aus, ergibt sich

$$n + 1 \geq \left\lfloor \frac{C_{\ell-R} + 1}{L} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{C_{\ell-R} + R(\gamma_2 - 1)}{L} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{C_\ell}{L} \right\rfloor.$$

Wir erhalten somit für $\ell \geq R$, dass $\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_{\lfloor C_\ell/L \rfloor})$ und sind in diesem Fall fertig.

Fall 2.2: Ist nun $\ell < R$, so bedeutet $I = \emptyset$, dass $\#\mathcal{M}_i < \gamma_2$ für alle $0 \leq i \leq \ell \leq R - 1$. Dies impliziert $C_\ell \leq (R - 1)(\gamma_2 - 1) \leq L$ und somit $\lfloor C_\ell/L \rfloor = 0$ und die Behauptung gilt trivialerweise. □

Bemerkung 8.1.6 Die Konstante C_{eo} aus Satz 8.1.5 wurde definiert als $C_{eo} := 2C_{nc}L$. Setzen wir nun in die Definition von L und γ_2 aus Lemma 8.1.4 ein, erhalten wir für C_{eo}

$$\begin{aligned} C_{eo} &= 4C_{nc} \left\lfloor \frac{1}{\gamma} \right\rfloor (\gamma_2 - 1) + 4C_{nc}\gamma_2 \\ &= \frac{8}{\mu} \left\lfloor \frac{C_{gd}}{\mu} \right\rfloor \max \left\{ \frac{C_{nc}C_{gd}}{C_1}, \frac{C_{nc}C_{gd}}{C_1C_{ld}} \right\} + \frac{4}{\mu} \max \left\{ \frac{C_{nc}C_{gd}}{C_1}, \frac{C_{nc}C_{gd}}{C_1C_{ld}} \right\}. \end{aligned}$$

Beachten wir nun, dass C_{nc}, C_{gd}, C_{ld} und C_1 nur von der Formregularitätskonstante sowie an \mathcal{T}_0 abhängen und definieren wir $C_{\mathcal{T}_0} := \max \left\{ \frac{C_{nc}C_{gd}}{C_1}, \frac{C_{nc}C_{gd}}{C_1C_{ld}} \right\}$ ergibt sich

$$C_{eo} = \frac{8C_{\mathcal{T}_0}}{\mu} \left\lfloor \frac{C_{gd}}{\mu} \right\rfloor + \frac{4C_{\mathcal{T}_0}}{\mu}. \quad (8.21)$$

Nutzen wir $0 \leq \mu \leq 1$ und schätzen (8.21) nach unten ab erhalten wir schlußendlich

$$C_{eo} \geq \frac{8C_{\mathcal{T}_0}C_{gd}}{\mu^2} + \frac{4C_{\mathcal{T}_0}}{\mu}.$$

Somit gilt für $\mu \rightarrow 0$, dass $C_{eo} = \Theta(\mu^{-2})$. Dieses Wachstum ist für $\mu \rightarrow 0$ zu erwarten, denn für $\mu = 0$ entspricht der Algorithmus uniformer Verfeinerung und kann daher die Energieoptimalität nicht erfüllen.

8.2 Instanzenoptimalität

Wir können nun nach einiger Vorbereitung endlich das Hauptresultat dieser Arbeit beweisen. Wie schon am Anfang dieses Kapitels erwähnt, ist es mit Hilfe der Energieoptimalität ein Leichtes die Instanzenoptimalität der Adaptiven Finiten Elemente Methode zu zeigen.

Satz 8.2.1 (Instanzenoptimalität) Für die Folgen $(\mathcal{T}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ respektive $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, existieren Konstanten $C_{io}, K_{io} \geq 1$, welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 , und K_{io} zusätzlich vom Markierungsparameter μ abhängt, sodass für alle $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ mit $\#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0) \leq K_{io}^{-1} \#(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0)$ gilt

$$\| \|u - u_{\mathcal{T}_\ell}\|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T}_\ell) \leq C_{io} (\| \|u - u_{\mathcal{T}}\|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T})).$$

Beweis. Wir bezeichnen die von den Triangulierungen \mathcal{T}_ℓ induzierten Populationen mit \mathcal{P}_ℓ . Laut der Energieoptimalität 8.1.5 existiert eine Konstante $C_{eo} \geq 1$, welche nur von \mathcal{T}_0 und μ abhängt, sodass für alle Populationen \mathcal{P}_ℓ mit $\#(\mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_0) \geq C_{eo}n$ und für alle $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ mit $\#(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0) \leq n = \#(\mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_0)/C_{eo}$ gilt

$$\mathcal{G}(\mathcal{P}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}_n^{\text{opt}}) \leq \mathcal{G}(\mathcal{P}). \quad (8.22)$$

Uniforme Formregularität garantiert nun, dass die Anzahl der Dreiecke in jedem Knotenpatch durch eine Konstante K_p beschränkt ist. Somit impliziert (8.22), dass $\mathcal{G}(\mathcal{T}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{T})$ für alle \mathcal{T} mit

$$K_p^{-1} \#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0) \leq \#(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0) \leq \frac{\#(\mathcal{P}_\ell \setminus \mathcal{P}_0)}{C_{eo}} \leq \frac{\#(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0)}{C_{eo}}.$$

Mit Hilfe der Äquivalenz zwischen Energie und Fehler, siehe Lemma 6.2.2, erhalten wir mit $\mathcal{G}(\mathcal{T}_\ell) \leq \mathcal{G}(\mathcal{T})$ schlussendlich

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{T}_\ell) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_\infty) &\leq \mathcal{G}(\mathcal{T}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_\infty). \\ \stackrel{6.2.2}{\Rightarrow} \| \|u - u_{\mathcal{T}_\ell}\|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T}_\ell) &\leq C (\| \|u - u_{\mathcal{T}}\|^2 + \text{osc}^2(\mathcal{T})) \end{aligned}$$

Wobei C_{io} die Konstante aus Lemma 6.2.2 bezeichnet. Diese hängt wiederum nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 ab. \square

Wir beschließen dieses Kapitel mit der Instanzenoptimalität des Fehlerlschätzers. Dies ergibt sich mit Hilfe von Effizienz und Zuverlässigkeit des Schätzers aus Satz 8.2.1.

Korollar 8.2.2 Für die Folgen $(\mathcal{P}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ respektive $(\mathcal{M}_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, existieren Konstanten $C, K \geq 1$, welche nur von der initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 , und K zusätzlich vom Markierungsparameter μ abhängt, sodass für alle $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ mit $\#(\mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_0) \leq K^{-1} \#(\mathcal{T}_\ell \setminus \mathcal{T}_0)$, gilt

$$\eta_{\mathcal{T}_\ell}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T}_\ell)) \leq C \eta_{\mathcal{T}}^2(\mathcal{E}(\mathcal{T})).$$

9 Netze ohne BDD-Bedingung

In diesem Kapitel betrachten wir Verfeinerungen einer initialen Triangulierung \mathcal{T}_0 , welche die BDD-Bedingung 2.2.1 nicht erfüllt. Eine wichtige Frage ist nun ob der adaptive Algorithmus aus Kapitel 7 auch in diesem Fall Instanz optimal bzw. energieoptimal ist. Diese Frage ist unseren besten Wissens zur Zeit leider unbeantwortet. Das liegt unter anderem daran, dass der Beweis, der für die Instanzenoptimalität nötigen Netzeigenschaften, sich nicht auf diesen Fall verallgemeinern lässt. Ziel dieses Kapitels ist Probleme aufzuzeigen, die sich für Netze ohne die BDD-Bedingung ergeben.

Der Beweis der Instanzenoptimalität stützt sich im Wesentlichen auf zwei Netzeigenschaften. Einerseits die Net Closure Estimate (Satz 3.2.9 bzw. Korollar 3.2.12), und andererseits Satz 3.4.7.

9.1 Net Closure Estimate

Die Net Closure Estimate gilt auch für Folgen von Verfeinerungen eines Netzes \mathcal{T}_0 ohne BDD-Bedingung zeigen. Für den Beweis verweisen wir auf [KPP13]. Also können wir zumindest die erste wichtige Netzeigenschaft beweisen.

9.2 Freie Knoten

Die zweite wichtige Eigenschaft ist Satz 3.4.7. Dieser besagt, dass für Knotenmengen $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}_\infty \setminus \mathcal{P}_0$ mit $\#\mathcal{U} < \infty$, gilt

$$\#\text{free}(\mathcal{Q}) \leq C_{gd} \#\text{free}(\mathcal{U}).$$

Für eine Verallgemeinerung, müssen wir zuerst die nötigen Begriffe auf den Fall ohne BDD-Bedingung erweitern. Wir definieren die Generation eines Punktes, siehe Bemerkung 3.1.7, mittels

$$\text{gen}(P) = \min\{\text{gen}(T) : T \in \mathfrak{T} \text{ und } P \in \mathcal{K}(T)\}.$$

Die Definitionen der Eltern und Kinder können nun ohne weiteres übernommen werden. Für die Vor- und Nachkommen betrachten wir zuerst folgendes Beispiel in Abbildung 9.2.

Wie man in Abbildung 9.2 sieht, haben nun die Eltern eines Knoten unterschiedliche Generation. Verfolgt man nun, die durch Pfeile angezeigte Linie von Nachkommen, gelangt man nach endlich vielen Schritten wieder zum Ausgangsknoten. Dieser kann nicht Vorfahre bzw. Nachkomme von sich selbst sein und somit liegt folgende Definition nahe:

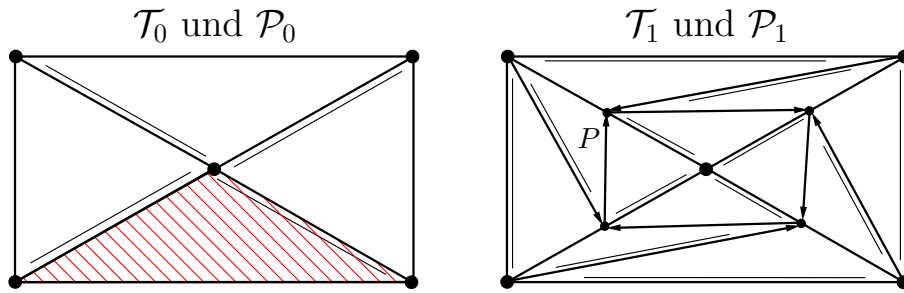


Abbildung 9.1: Wir starten mit einem regulären Netz \mathcal{T}_0 bzw. \mathcal{P}_0 . Markieren wir nun das schraffierte Dreieck und verfeinern mittels NVB, erhalten wir die Triangulierung \mathcal{T}_1 bzw. Population \mathcal{P}_1 . Pfeile zeigen jeweils zu den Kindern eines Knotens.

Definition 9.2.1 Für $P \in \mathcal{P}_\infty$ definieren wir

$$\text{anc}(P) := \text{parents}(P) \cup \bigcup_{Q \in \text{parents}(P)} (\text{anc}(Q) \setminus P),$$

$$\text{des}(P) := \{P' \in (\mathcal{P}_\infty \setminus P) : P \in \text{anc}(P')\}.$$

Die Definition von $\text{anc}(P)$ und $\text{des}(P)$ übertragen sich nun Analog zu Kapitel 2.3 analog auf Knotenmengen $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$. Also nächsten Schritt benötigen wir nun (Nachkommen-) freien Knoten. Die Freiheit von Knoten können wir wieder von Kapitel 2.4 übernehmen. Wie nennen eine Menge $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_\infty$ genau dann (Nachkommen-) frei, wenn

$$\text{des}(\mathcal{Q}) \cap \mathcal{Q} = \emptyset.$$

und wieder analog zu sei $\text{free}(\mathcal{Q})$ definiert als

$$\text{free}(\mathcal{Q}) := \{P \in \mathcal{Q} : \text{des}(P) \cap \mathcal{Q} = \emptyset\}.$$

Wie man sich unmittelbar überzeugen kann, ist das Beispiel in Abbildung 9.2 so gewählt, dass $\text{free}(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0) = \emptyset$ gilt. Wählen wir nun wie in 9.2 rechts, $\mathcal{Q} := \mathcal{P} \subseteq (\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_0)$ so

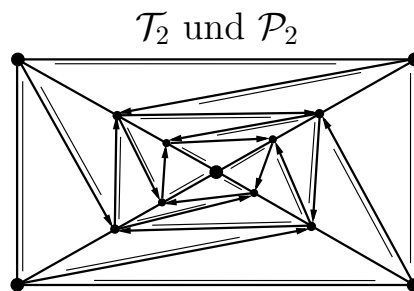


Abbildung 9.2: Markieren wir in 9.2 eines der inneren Dreiecke und verfeinern wieder mittels NVB, erhalten \mathcal{T}_2 bzw. \mathcal{P}_2 . Wie man anhand der Selbstähnlichkeit leicht erkennen kann gilt wiederum $\text{free}(\mathcal{P}_2 \setminus \mathcal{P}_0) = \emptyset$.

erhalten wir $\mathbf{free}(\mathcal{Q}) = \mathbf{free}(P) = \{P\}$ und somit für alle $C_{gd} \in \mathbb{R}$

$$1 = \#\mathbf{free}(\mathcal{Q}) > C_{gd} \#\mathbf{free}(\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_0) = 0.$$

Somit einen Widerspruch zu Satz 3.4.7. Wir können \mathcal{T}_1 bzw. \mathcal{P}_1 aus 9.2 abermals verfeinern und erhalten, siehe Abbildung 9.2 wiederum $\mathbf{free}(\mathcal{P}_2) = \emptyset$.

Wie wir in Abbildung 9.2 sehen lassen sich nun beliebig große Mengen $\mathcal{Q} \subset (\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_0)$ finden die frei sind, aber wieder $\mathbf{free}(\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_0) = \emptyset$ gilt.

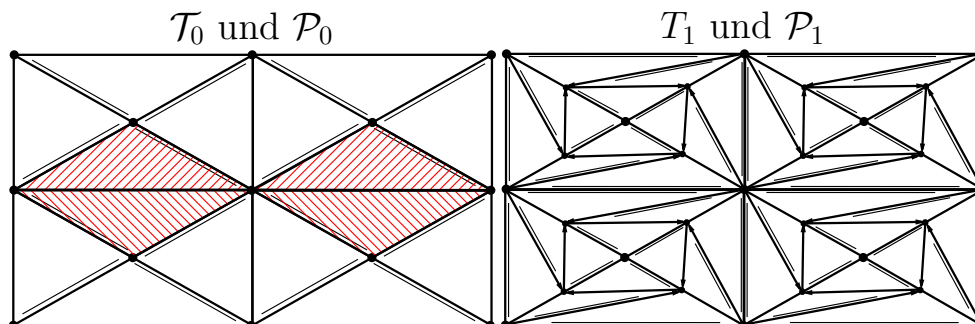


Abbildung 9.3: Wählen wir \mathcal{T}_0 wie links Dargestellt und verfeinern wieder die markieren Dreiecke so erhalten wir \mathcal{T}_1 . Wählen wir analog zu P oben, P_1, P_2, P_3, P_4 aus jeweils einen der Teilrechtecke, erhalten wir mit $\mathcal{Q} := \{P_1, \dots, P_4\}$ wieder $\#\mathbf{free}(\mathcal{Q}) = 4$ und $\#\mathbf{free}(\mathcal{P}_1 \setminus \mathcal{P}_0) = 0$.

Somit kann man aber leider Satz 3.4.7 ohne Weiteres nicht auf Netze ohne BDD-Bedingung erweitern. Dieser ist wesentlicher Bestandteil des Beweises der Energieoptimalität. Siehe Lemma 8.1.3 v), Lemma 8.1.4 iv) und v).

Wir Bemerken, dass wir die Definition der Nachkommen insofern verändert haben, dass $P \notin \mathbf{des}(P)$. Wählt man im Gegensatz die gleiche Definition wie im Fall mit BDD-Bedingung, so ist zwar Satz 3.4.7 nicht verletzt, jedoch für im Falle einer Triangulierung ohne BDD bedeutungslos. Daher können wir auch in diesem Fall, den Beweis der Instanzenoptimalität nicht wie im Kapitel 8 führen.

Neben der Frage nach Netzen ohne BDD-Bedingung, gibt es viele offene Probleme im Bereich der Instanzenoptimalität. Unser Modellproblem war mit der Poissongleichung mit homogenen Randdaten sehr speziell und einfach gewählt. Jedoch ist uns kein Beweis für eine allgemeinere Klasse von Differentialgleichungen bekannt. Abseits der FEM ist natürlich die Instanzenoptimalität für die Randelement Methode ein offenes Problem. Wie wir anhand dieser exemplarischen Auswahl an offenen Fragen sehen, steckt die Instanzenoptimalität noch in den Kinderschuhen und bildet daher einen interessanten Gegenstand der Forschung und viel Platz für gute Ideen.

Literaturverzeichnis

- [BDD04] Peter Binev, Wolfgang Dahmen, and Ron DeVore. Adaptive finite element methods with convergence rates. *Numer. Math.*, 97(2):219–268, 2004.
- [BR78] I. Babuška and W. C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(4):736–754, 1978.
- [CFP14] Carstensen C., M. Feisch, and D. Praetorius. Rate optimality of adaptive algorithms. *ECCOMAS Newsletter*, 07:20–23, 2014.
- [DKS] Lars Diening, Christian Kreuzer, and Rob Stevenson. Instance optimality of the adaptive maximum strategy. *Preprint, submitted June 2013, arXiv:1306.0377v1*.
- [Dör96] Willy Dörfler. A convergent adaptive algorithm for Poisson’s equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(3):1106–1124, 1996.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [FFP14] M. Feischl, T. Führer, and D. Praetorius. Adaptive FEM with optimal convergence rates for a certain class of nonsymmetric and possibly nonlinear problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52(2):601–625, 2014.
- [FPP14] M. Feischl, M. Page, and D. Praetorius. Convergence and quasi-optimality of adaptive FEM with inhomogeneous Dirichlet data. *J. Comput. Appl. Math.*, 255:481–501, 2014.
- [KPP13] Michael Karkulik, David Pavlicek, and Dirk Praetorius. On 2D newest vertex bisection: optimality of mesh-closure and H^1 -stability of L_2 -projection. *Constr. Approx.*, 38(2):213–234, 2013.
- [MNS00] Pedro Morin, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Data oscillation and convergence of adaptive FEM. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(2):466–488 (electronic), 2000.
- [NSV09] Ricardo H. Nochetto, Kunibert G. Siebert, and Andreas Veiser. Theory of adaptive finite element methods: an introduction. In *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation*, pages 409–542. Springer, Berlin, 2009.
- [Pet91] Julius Petersen. Die Theorie der regulären graphs. *Acta Math.*, 15(1):193–220, 1891.

- [Ste08] Rob Stevenson. The completion of locally refined simplicial partitions created by bisection. *Math. Comp.*, 77(261):227–241 (electronic), 2008.
- [SZ90] L. Ridgway Scott and Shangyou Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493, 1990.