



## DIPLOMARBEIT

# Modellbildung zur Berechnung der Flüssigkeitsumlaufgeschwindigkeit in einem Airlift-Schlaufenreaktor

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs  
unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Braun  
E322

Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung

eingereicht an der Technischen Universität Wien  
Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von  
Alfred Hansal  
e0425260

Cranachstraße 13/7, 1130 Wien

Wien, im September 2016

---

eigenhändige Unterschrift

## **Danksagung**

Zuallererst gilt mein besonderer Dank meinem Betreuer Herrn Univ-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Stefan Braun für seine Unterstützung und Geduld sowie seine fachlichen Anregungen und Hilfestellungen bei der Erstellung dieser Diplomarbeit.

Ebenso möchte ich mich bei meinen Eltern herzlichst bedanken dafür, dass sie mir dieses Studium ermöglicht und mich dabei stets wohlwollend unterstützt haben.

Ich möchte auch allen meinen Familienmitgliedern meinen Dank aussprechen, meinen Schwestern und meinen Schwiegereltern, ganz besonders aber meiner Ehefrau Daniela für ihre Unterstützung danken. Sie ist mir sowohl bei der Entstehung dieser Arbeit, als auch während meines Studiums stets motivierend, bestärkend und verständnisvoll zur Seite gestanden.

## Kurzfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit der Erstellung eines Modells zur Berechnung der Fließgeschwindigkeit des Trägerfluids in einem Bioreaktor namens „Hanging Gardens“ der Ecoduna AG in Bruck an der Leitha, der nach dem Prinzip einer Airliftpumpe betrieben wird. Diese auch Mammutpumpe genannte Vorrichtung dient der Förderung von Flüssigkeit auf ein höheres Niveau, wobei am Boden einer Flüssigkeitssäule Gas eingebracht und die Flüssigkeit dadurch in Bewegung gesetzt wird. Dieses Modell ermöglicht es, ausgehend von den physikalischen Stoffeigenschaften der Fluide sowie den Konstruktionsmaßen der Anlage, eine Abschätzung für die gesuchte Geschwindigkeit zu erhalten. Dazu wird zunächst die Gasblasenentstehung an einer Düsenbohrung betrachtet und es werden unterschiedliche Konzepte zu ihrer Berechnung vorgestellt. Anschließend wird das Aufstiegsverhalten einer einzelnen Gasblase in einer Flüssigkeitssäule untersucht. Zur Aufstellung des Gleichungssystems wird das Mehrphasensystem durch ein Einphasensystem des Gemisches ersetzt. Aus diesen Gleichungen wird die Fluidgeschwindigkeit gewonnen, welche für die Algenkultivierung wesentlich ist. Abschließend wird der Einfluss der einzelnen Konstruktionsparameter auf dieselbe diskutiert. Dabei hat sich herausgestellt, dass das Modell erwartungsgemäß sensibel auf eine Änderung des Bohrungsquerschnitts der Gaszuführöffnungen und des Überdrucks in der Gaszufuhr sowie der Bohrungsanzahl reagiert, während eine Änderung der Säulenhöhe oder des betrachteten Strömungsquerschnitts nur einen geringen Einfluss hat.

## Abstract

This thesis describes the concept of a model for the calculation of the circulation velocity of a liquid in a bioreactor called "Hanging Gardens" of Ecoduna AG located in Bruck an der Leitha in Lower Austria, which works according to the principle of an airlift pump. This device serves the purpose of lifting liquid on a higher level by injecting gas on the bottom of a fluid column and thus setting the liquid in motion. This model provides an assessment of the velocity of the fluid, based on the physical properties of the fluid and the basic dimensions of the reactor. For this reason, this thesis first studies the formation of gas bubbles at a bore and presents different concepts for their modelling. Secondly it examines the uplift of a single gas bubble in a column filled with liquid. For the system of equations the multi-phase-system is replaced by a one-phase-system describing the mixture. From these equations the velocity of the fluid can be gained and finally the effect of the different construction parameters will be discussed. It will be shown that – according to expectations – the model reacts strongly to a change of the diameter of the bores for gas access and the positive pressure in the gas supply as well as to the number of bores, whereas a change of the height of the column of the liquid or of the examined diameter of the stream does not have any significant influence.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung und Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Die Hanging Gardens von Ecoduna . . . . .	1
1.2	Algenzuchtverfahren . . . . .	4
1.2.1	Offene Systeme . . . . .	4
1.2.2	Geschlossene Systeme . . . . .	5
1.3	Aufgabenstellung . . . . .	6
1.4	Dimensionslose Kennzahlen . . . . .	7
1.4.1	Reynolds-Zahl . . . . .	7
1.4.2	Weber-Zahl . . . . .	8
1.4.3	Eötvös-Zahl . . . . .	8
1.4.4	Flüssigkeitskennzahl . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Entstehung einer Gasblase an einer Bohrung</b>	<b>10</b>
2.1	Literaturstudie . . . . .	10
2.2	Stationäre Gasblasenentstehung . . . . .	11
2.3	Blasenbildung im Strahlgasenbereich . . . . .	12
2.4	Modellrechnung . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Bewegung einer Gasblase in einer Flüssigkeit</b>	<b>19</b>
3.1	Literaturstudie . . . . .	19
3.2	Stationäre Aufstiegsgeschwindigkeit einer Gasblase . . . . .	19
3.3	Instationäre Gasblasenbewegung . . . . .	24
3.4	Betrachtung eines Partikelschwarms . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Berechnung der Flüssigkeitgeschwindigkeit</b>	<b>28</b>
4.1	Einleitung . . . . .	28
4.2	Modellbildung . . . . .	28
4.3	Numerische Lösung . . . . .	39
4.3.1	Düsenradius . . . . .	40
4.3.2	Druck . . . . .	46
4.3.3	Säulenhöhe . . . . .	51
4.3.4	Säulenbreite . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>62</b>

## Verwendete Formelzeichen

<i>Zeichen</i>	<i>Einheit</i>	Beschreibung
$A$	$\text{m}^2$	Fläche, Querschnitt
$b$	$\text{m}$	Breite
$c$	$\text{m/s}$	Schallgeschwindigkeit
$d$	$\text{m}$	Durchmesser
$E_o$	–	Eötvöszahl
$f$	$1/\text{s}$	Frequenz
$F$	$\text{N}$	Kraft
$g$	$\text{m/s}^2$	Erdbeschleunigung
$h$	$\text{m}$	Höhe
$K$	–	Korrekturfaktor
$Kf$	–	Flüssigkeitskennzahl
$m$	$\text{kg}$	Masse
$\dot{m}$	$\text{kg/s}$	Massenstrom
$n$	–	Anzahl
$O$	$\text{m}^2$	Oberfläche
$p$	$\text{bar}$	Druck
$Re$	–	Reynolds-Zahl
$r$	$\text{m}$	Radius
$t$	$\text{s}$	Zeit
$t$	$\text{m}$	Tiefe
$U$	$\text{m}$	Umfang
$v$	$\text{m/s}$	Geschwindigkeit
$\bar{v}$	$\text{m/s}$	mittlere Geschwindigkeit
$V$	$\text{m}^3$	Volumen
$We$	–	Weberzahl
$\dot{V}$	$\text{m}^3/\text{s}$	Volumenstrom
$\varepsilon$	–	Volumenanteil
$\lambda$	–	Rohrreibungszahl
$\eta$	$\text{kg/s m}$	dynamische Viskosität
$\nu$	$\text{m}^2/\text{s}$	kinematische Viskosität
$\rho$	$\text{kg/m}^3$	Dichte
$\bar{\rho}$	$\text{kg/m}^3$	mittlere Dichte
$\sigma$	$\text{N/m}$	Grenzflächenspannung
$\tau$	$\text{N/m}^2$	Schubspannung
$\zeta$	–	Druckverlustziffer

## Verwendete Indizes

<i>Zeichen</i>	Beschreibung
1	Steigrohr
2	Fallrohr
<i>A</i>	Auftrieb
<i>ab</i>	Ablöse
<i>B</i>	Gasblase
<i>G</i>	Gewicht
<i>l</i>	Liquidphase, kontinuierliche Phase
<i>g</i>	Gasphase, dispergierte Phase
<i>ges</i>	gesamt
<i>h</i>	hydraulisch
<i>krit</i>	kritisch
<i>leer</i>	leerrohr
<i>rel</i>	relativ
<i>T</i>	Trägheit
<i>u</i>	Umgebung
<i>W</i>	Widerstand
<i>w</i>	Wand
$\eta$	Zähigkeit

# 1 Aufgabenstellung und Einleitung

Die Aufgabenstellung der Diplomarbeit ist die Erstellung eines mathematischen Modells zur Berechnung der Strömung in einem Photobioreaktor sowie einer Parameterstudie, die untersucht, welche vorgegebenen Größen einen maßgeblichen Einfluss auf die Zielgröße haben.

Angeregt wurde das Thema durch die Firma Ecoduna in Bruck an der Leitha <sup>1</sup>, die eine spezielle Anlage zur Algenkultivierung entwickelt hat. Die gemessene Strömungsgeschwindigkeit wurde von Ecoduna mit ca. 5 cm/s angegeben. Diese dient als Anhaltspunkt für die Bewertung des Modells anhand seiner gelieferten Ergebnisse. Abbildung 1 zeigt die Produktionsstätte auf dem Firmengelände.



Abbildung 1: Foto der Produktionsstätte auf dem Firmengelände (Quelle: Homepage Ecoduna)

## 1.1 Die Hanging Gardens von Ecoduna

Der „Hanging Gardens“ genannte Reaktor stellt ein geschlossenes System zur kontinuierlichen Algenzucht dar. Es handelt sich dabei um relativ schmale, breite und insbesondere hohe Platten, die in Säulen annähernd quadratischen Querschnitts unterteilt sind. Dabei wechseln sich stets Säulen aufsteigender und absteigender Flüssigkeit ab, wie in Abbildung 2 dargestellt. Eine Säule ist dabei rund 30 mm breit bzw. tief und 6 m hoch.

Eine Platte besteht aus 30 Paaren auf- und absteigender Säulen und ist somit insgesamt etwa 2 m breit. 12 parallel angeordnete Platten werden zu einem Reaktorcontainer zusammengefasst. Ein Zyklus bis zur Ernte der Algen dauert 14 Tage, während dessen die Algen mehrere Container durchströmen. In Abbildung 3 ist eine derartige Anordnung am Firmenstandort in Bruck an der Leitha zu sehen.

Die Platten sind äußerst dünn, da - wie auch in einem Teich - nur ein sehr kleiner Bereich unterhalb der Wasseroberfläche optimale Bedingungen für das Algenwachstum bereitstellt: Zu nahe

---

<sup>1</sup><http://www.ecoduna.com/>







Abbildung 3: Foto der Anlage, das die parallel angeordneten Platten zeigt

Zweck dieser Arbeit ist es daher, ein mathematisches Modell zu erstellen, das es erlaubt, die wesentlichen Betriebsaspekte einer derartige Anlage zu verstehen und zu berechnen bzw. eine Entscheidungshilfe für die Dimensionierung zu liefern.

Daraus ergibt sich jedoch eine wesentliche Anforderung an das Berechnungsmodell: Die Wechselwirkung zwischen der flüssigen Phase und den Gasblasen ist von entscheidender Bedeutung. Aufgrund der geringeren Dichte des Gases gegenüber der Flüssigkeit steigen sie vom Boden des Reaktors zur Oberfläche auf. Dabei werden die Gasblasen nicht unendlich beschleunigt, sondern aufgrund der Reibung in der Flüssigkeit abgebremst. Die von der Flüssigkeit auf eine aufsteigende Gasblase ausgeübte Widerstandskraft ist gleichzeitig jene Kraft, die von der Gasblase auf die Flüssigkeit ausgeübt wird. Diese allein ist für den Antrieb der Flüssigkeitsströmung verantwortlich und muss daher selbst bei sehr geringem Gasgehalt im Reaktor berücksichtigt werden. Umgekehrt hätte die Gasphase bei niedrigem Gasphasenanteil bei einer mechanisch induzierten Strömung (durch eine Pumpe angetrieben oder in einem Rührkessel) keinen entscheidenden Einfluss auf die Strömung der Flüssigkeit. In solchen Fällen wäre ein Berechnungsmodell ausreichend, das den Auftriebseffekt vernachlässigt.

Zur Modellbildung werden nur zwei nebeneinanderliegende Säulen betrachtet: In der ersten steigt die Flüssigkeit auf, in der zweiten fließt sie wieder hinunter. Diese beiden werden zu einer Einheitszelle zusammengefasst. Eine Platte des Reaktors besteht aus einer Vielzahl derartig nebeneinander angeordneter Zellen. Die Betrachtung einer solchen Einheitszelle ist ausreichend, weil sich die folgenden konstruktiv nicht von ihr unterscheiden und die Randbedingungen am Ein- und Ausgang jeweils übereinstimmen. Anschließend wird das Modell in einer Parameterstudie getestet, um die wesentlichen Einflussgrößen identifizieren und Vorhersagen über die sich einstellende Strömung einer modifizierten Anlage treffen zu können.



Abbildung 4: Innenansicht der Produktionsstätte in Bruck an der Leitha

## 1.2 Algenzuchtverfahren

Voraussetzung für das Wachstum von Algen sind folgende Bedingungen: Wasser, Nährstoffe, eine je nach gezüchteter Art angemessene Temperatur, eine Energie- (Licht-) und eine CO<sub>2</sub>-Quelle. Die unterschiedlichen Verfahren zur Kultivierung von Algen lassen sich im Allgemeinen in zwei Arten von Systemen unterteilen, die diese Bedingungen erfüllen, nämlich offene (open ponds) und geschlossene (Photobioreaktoren) Systeme (Buck 2013).

### 1.2.1 Offene Systeme

Diese sind Teichen nachempfunden und bringen deren Vor- und Nachteile mit: Das CO<sub>2</sub> der Umgebungsluft dient als Kohlenstoffquelle und Sonnenlicht als Energiequelle. Dadurch fällt jedoch der Ertrag pro Fläche gering aus, da sich optimale Bedingungen für das Algenwachstum nur knapp unter der Wasseroberfläche einstellen. Sie werden oft als sogenannte raceway-ponds - flache, ovale Becken - ausgeführt, was einen großen Flächenbedarf bedeutet (Buck 2013). Offene Systeme sind Witterungseinflüssen und Kontaminationen ausgesetzt, was als große Einschränkung zu betrachten ist. So muss beispielsweise darauf geachtet werden, dass keine Verunreini-

gung in Form von anderen als der gezüchteten Algenart auftritt. Als weiteres Problem ist noch die Verdunstung anzusehen, die je nach Standort pro Jahr  $1 - 3 \text{ m}^3/\text{m}^2$  betragen kann. Durch diesen Verlust ist ein erhöhter Wasserbedarf vorhanden, der vor allem in warmen Gebieten zu hohen Kosten führen kann (Sartori 2000).

### 1.2.2 Geschlossene Systeme

Bei solchen Systemen können die meisten Nachteile offener Systeme vermieden und damit weitaus größere Erträge pro Fläche erzielt werden. Oberflächen der Teiche können mit einer transparenten Folie oder einem Überbau, der einem Gewächshaus ähnelt, vor den genannten Umwelteinflüssen geschützt werden. Dies ist jedoch bei großen Flächen sehr kostspielig (Buck 2013). Als weitere einfache und kostengünstige Methode ist der Einsatz von Polyethylen-Zylindern im Batch Betrieb zu nennen, die ein Fassungsvermögen bis zu 1000 Liter aufweisen. Zu den geschlossenen Systemen zählen weiters auch Photobioreaktoren, deren wichtigste Eigenschaft lichtdurchlässige Reaktorwände sind. Diese werden meist aus Glas oder aus Acryl hergestellt (Buck 2013). Es existieren unterschiedliche Bauformen von Photobioreaktoren, wie z. B. Rohr-, Säulen-, Schlauch und Plattenreaktoren. Die Vermischung der Algensuspension wird mit Hilfe von durch sie strömenden Gasblasen (z. B. bei einem Airlift-Säulenreaktor) oder einer Pumpe (z. B. bei einem Rohrreaktor) verursacht. Als großer Vorteil der Photobioreaktoren sind die kontrollierten Kultivierungsbedingungen anzusehen. Es werden dadurch höhere Zelldichten und eine höhere Produktivität als bei offenen Systemen erzielt. Ein Nachteil sind jedoch die hohen Investitions- und Betriebskosten.

### 1.3 Aufgabenstellung

Im Folgenden werden vier Problemstellungen betrachtet:

1. Die Entstehung und Ablösung einer Gasblase an der Düsenbohrung des CO<sub>2</sub>-Versorgungsrohres: Dieser Teil enthält die Unterscheidung zwischen stationärem und instationärem, trägheitsdominiertem Gasblasenwachstum bis zur Ablösung der Blase von der Düsenbohrung.
2. Die Berechnung der Geschwindigkeit der aufsteigenden Gasblasen: Zur Bestimmung der stationären Geschwindigkeit der aufsteigenden Gasblasen in einer ruhenden Flüssigkeit werden die Gewicht-, Auftriebs- und Widerstandskraft berücksichtigt und der für letztere benötigte Widerstandsbeiwert für fluide Partikel ausführlicher diskutiert. Anschließend sollen anhand einiger einfacher Überlegungen die Auswirkungen der Störung einer Gasblase aus ihrer Ruhelage heraus, wie sie bei der Ablösung auftreten, abgeschätzt werden.
3. Die durch die Blasen induzierte Strömung der Flüssigkeit: Diese Strömung wird durch zwei Effekte hervorgerufen: Zum einen wird Flüssigkeit von den Gasblasen verdrängt, zum anderen übt die Flüssigkeit eine bremsende Kraft auf die aufsteigenden Gasblasen aus. Diese Kraft wirkt aber umgekehrt als Antrieb auf die Flüssigkeit.
4. Die numerische Lösung des erarbeiteten Modells und Diskussion der Ergebnisse.

Für die Erstellung des Modells gelten folgende Richtwerte:

Düsendurchmesser:	$d = 100 \mu\text{m}$
Anzahl der Bohrungen:	2 in einer Säule aufsteigender Flüssigkeit 1 in einer Säule absteigender Flüssigkeit
Säulenhöhe:	$h = 6 \text{ m}$
Säulenquerschnitt:	$b \cdot t = 900 \text{ mm}^2$
Überdruck in der Gaszufuhr:	$\Delta p = 0,2 \text{ bar}$
Dichte von Wasser:	$\rho_{\text{Wasser}} = 998,203 \text{ kg/m}^3$
Druck am Boden des Reaktors:	$p = p_u + \rho_{\text{Wasser}} g h$
Dichte von $\text{CO}_2$ unter Druck $p$ :	$\rho_{\text{CO}_2} = \frac{p}{R \cdot T}$
Temperatur im Reaktor:	$T = 293,15 \text{ K}$
Spezifische Gaskonstante von $\text{CO}_2$ :	$R = 188,922 \text{ J/kgK}$
Oberflächenspannung von Wasser:	$\sigma_{\text{Wasser}} = 72,8 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$
Erdbeschleunigung:	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$

In Abbildung (2) sind die wesentlichen Abmessungen und die jeweilige Anzahl an Bohrungen pro Säule ersichtlich. Ebenso erkennt man, dass sich der Druck am Boden des Reaktors aus dem Umgebungsdruck  $p_u$  und dem hydrostatischen Druck der Wassersäule der Höhe  $h$  ergibt.

## 1.4 Dimensionslose Kennzahlen

### 1.4.1 Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{v L}{\nu}$$

Dabei ist  $v$  die Geschwindigkeit der Strömung,  $L$  eine charakteristische Länge und  $\nu$  die kinematische Viskosität.

In dieser Arbeit wird die Reynolds-Zahl an mehreren Stellen verwendet. Zum einen dient sie klassischerweise der Unterscheidung zwischen laminarer und turbulenter Rohrströmung. Dann ist der hydraulische Durchmesser  $d_h$  des durchströmten Querschnitts die charakteristische Län-

ge. Andererseits wird sie aber auch zur Beschreibung der Form der Gasblase herangezogen. In diesem Fall sind die Aufstiegsgeschwindigkeit der Gasblase  $v_B$  und der Durchmesser der Gasblase  $d_B$  einzusetzen (Oertel 2012). Die Reynolds-Zahl ist eine der wichtigsten dimensionslosen Kennzahlen der Ähnlichkeitstheorie und kann als Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften interpretiert werden.

#### 1.4.2 Weber-Zahl

$$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$$

wobei  $\rho$  die Dichte des Mediums,  $v$  wieder die Geschwindigkeit,  $L$  eine charakteristische Länge und  $\sigma$  die Grenzflächenspannung zwischen den betrachteten Stoffen ist.

Sie ist ein Maß für die Verformung eines Tropfens oder einer Blase und beschreibt das Verhältnis von Trägheitskräften zu Kapillar- oder Grenzflächenkräften, also deformierender Trägheitskraft der Relativströmung zu stabilisierender Oberflächenkraft. Dabei wird ersichtlich, dass sich ein Tropfen von der Kugelform entfernt, je größer die Weberzahl wird (Kraume 2012). Wichtig für diese Arbeit ist die Bedingung für die Kugelform einer Gasblase, nämlich dass die Weber-Zahl kleiner als 6 ist.

#### 1.4.3 Eötvös-Zahl

$$Eo = \frac{\Delta \rho g L^2}{\sigma}$$

mit  $\Delta \rho$  als Dichtedifferenz zwischen den beiden Phasen,  $g$  der Erdbeschleunigung,  $L$  einer charakteristischen Länge und  $\sigma$  als Grenzflächenspannung. Sie charakterisiert die Form eines fluiden Partikels und kann als Verhältnis von Auftriebskräften zur Oberflächenspannung interpretiert werden. Allgemein ist eine Blasenströmung durch die Angabe von drei Kennzahlen, beispielsweise  $Re$ ,  $We$  und  $Eo$ , vollständig charakterisiert (Clift et al. 1978).

#### 1.4.4 Flüssigkeitskennzahl

$$Kf = \frac{\rho_l^2 \sigma^3}{g \eta^4 \Delta \rho}$$

Dabei ist  $\rho_l$  die Dichte der kontinuierlichen Phase,  $\sigma$  die Grenzflächenspannung zwischen den beiden Phasen,  $g$  die Erdbeschleunigung,  $\eta$  die dynamische Viskosität der kontinuierlichen Phase und  $\Delta \rho$  die Differenz der Dichte zwischen kontinuierlicher und disperser Phase. Unter der Annahme, dass die Dichte der Flüssigkeit viel größer als jene des Gases ist

$$\rho_l \gg \rho_g \quad \Rightarrow \quad \Delta \rho \approx \rho_l$$

und mit dem Zusammenhang zwischen dynamischer und kinematischer Viskosität und Dichte

$$\eta = \nu \cdot \rho$$

kann die Flüssigkeitskennzahl angegeben werden als

$$Kf = \frac{\sigma^3}{g \nu^4 \rho_l^3}.$$

Sie wird auch als Kapitza-Zahl und ihr vor allem im Englischen gebräuchlicher Kehrwert als Morton Zahl bezeichnet. Die Flüssigkeitskennzahl ist nur von Stoffeigenschaften der beiden Phasen einer dispersen Strömung abhängig und beschreibt den Zusammenhang zwischen viskosen Kräften und Oberflächenspannungen (Kraume 2012).



## 2 Entstehung einer Gasblase an einer Bohrung

### 2.1 Literaturstudie

Bereits Clift et al. 1978 beschäftigen sich ausführlich mit der Entstehung von Gasblasen und Tropfen, deren Form und Bewegungsverhalten. Einen guten Überblick über das Themengebiet und gegenwärtig verwendete Berechnungsmethoden gewinnt man bei Bals 2002. Im ersten Teil werden Einzelbohrungen betrachtet und abhängig vom Gasdurchsatz in der Bohrung die Fälle des quasistatischen und des dynamischen Gasblasenwachstums in einer ruhenden Flüssigkeit unterschieden. Anschließend werden diese Betrachtungen auf Lochplatten und das Entstehen und Ablösen von Gasblasen in einer bewegten Flüssigkeitsumgebung erweitert. Rübiger und Schlüter 2013 widmen sich nicht nur dem Entstehungs- und Ablösevorgang von Partikeln, sondern auch der Bewegung derselben, wobei sich die Ausführungen auf einzelne Partikel beschränken und Partikelschwärme unbeachtet bleiben. Aufschlussreiche Erkenntnisse über die Vorgänge bei der Gasblasenentstehung in Abhängigkeit vom Gasdurchsatz an einer Bohrung hat Rübiger 1982 in seiner Arbeit präsentiert. So konnte er in Experimenten zeigen, dass die Annahme, dass im Bereich des Blasengasens Einzelblasen entstehen, nicht zutreffend ist. Unter Blasengasen versteht man quasistatisches Gasblasenwachstum und Ablösen von Einzelblasen, siehe Abbildung 5. Vielmehr entstehen, entgegen der gängigen Betrachtungsweise, stets Primär- und Sekundärblasen.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass für die Entstehung und Ablösung einer Gasblase an einer Bohrung der Volumenstrom des Gases durch die Bohrung von entscheidender Bedeutung ist. Bei geringen Gasdurchsätzen kommt es zu einer periodischen Gasblasenbildung an einer Bohrung und Trägheitskräfte können vernachlässigt werden. Steigt der Volumenstrom an, so dominieren die Trägheitskräfte das Gasblasenwachstum.

Nach Rübiger und Schlüter 2013 kann der Übergangsbereich zum Strahlgasen - das ist der Bereich des dynamischen Gasblasenwachstums, siehe Abbildung 5 - mit Hilfe der Weber-Zahl

$$We = \frac{v_g^2 2r \rho_g}{\sigma_{Wasser}} \quad (1)$$

angegeben werden und tritt für eine Weber-Zahl größer zwei auf, siehe Bals 2002 und Rübiger und Schlüter 2013. Dabei ist in diesem Fall die Geschwindigkeit  $v_{Gas}$  jene, mit der das Gas durch die Düsen strömt,  $r$  der Bohrungsradius einer Düse,  $\rho_{Gas}$  die Dichte von  $CO_2$  und  $\sigma_{Wasser}$  die Grenzflächenspannung zwischen Gas und Flüssigkeit. Von diesen Größen ist nur  $v_{Gas}$  variabel und der Rest durch die Konstruktion bzw. die beteiligten Medien und ihre Stoffeigenschaften vorgegeben. Somit ist ersichtlich, dass der Übergang vom Blasen- zum Strahlgasen direkt vom Gasdurchsatz abhängt.

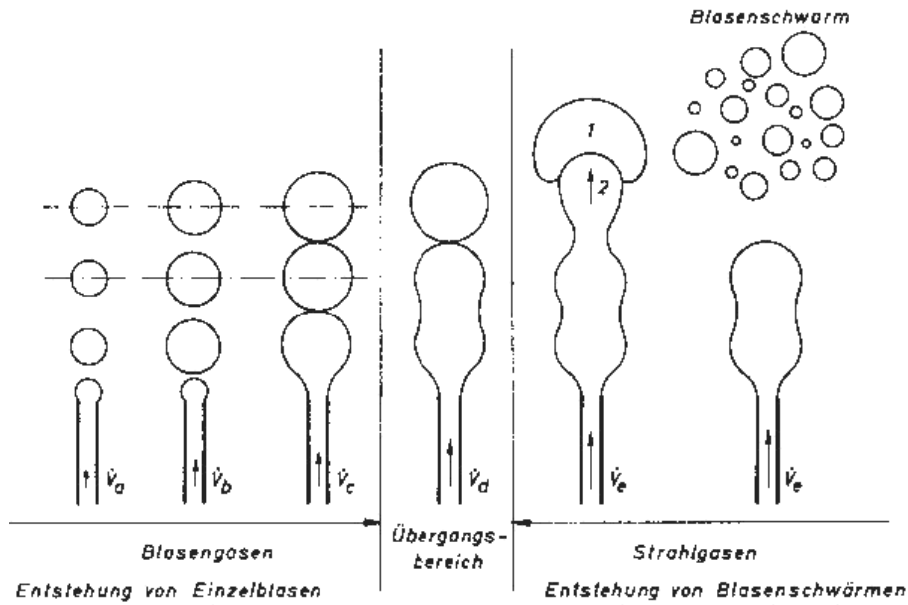


Abbildung 5: Darstellung der Gasblasenentstehung an einer Bohrung im Bereich des Blasengasens und des Strahlgasens nach Brauer 1971

## 2.2 Stationäre Gasblasenentstehung

Die einfachste Berechnung des Blasendurchmessers einer Gasblase bei der Ablösung erfolgt über das Kräftegleichgewicht bestehend aus der Differenz zwischen der Auftriebskraft und der Gewichtskraft der Gasblase  $F_A - F_G$  sowie der Grenzflächenspannungskraft  $F_\sigma$ . Dabei ist

$$F_A - F_G = \Delta\rho g V_B$$

mit der Dichtedifferenz  $\Delta\rho$  zwischen Gas und Flüssigkeit und dem Volumen  $V_B$  einer Gasblase, sowie

$$F_\sigma = 2 r \pi \sigma_{Wasser}$$

mit dem Bohrungsradius  $r$  und der Grenzflächenspannung  $\sigma_{Wasser}$ , was zu einem Durchmesser

$$d_B = \sqrt[3]{\frac{12 r \sigma_{Wasser}}{g \Delta\rho}}$$

bzw. einem Radius, der Fritzscher Radius genannt wird,

$$r_F = \sqrt[3]{\frac{3 r \sigma_{Wasser}}{2 g \Delta\rho}} \quad (2)$$

führt. Dieses Modell lässt jedoch den Gasdurchsatz unberücksichtigt und liefert für die Abmes-

sungen der betrachteten Anlage einen Wert von

$$d_B = 1,6 \text{ mm.}$$

Möchte man die Geschwindigkeit des einströmenden Gases berücksichtigen, so muss man das Modell um zwei Ausdrücke erweitern, nämlich einerseits die Zähigkeitskraft

$$F_\eta = 15 \eta_l \frac{\dot{V}_g}{2r}$$

mit der dynamischen Viskosität  $\eta_l$  und andererseits die Trägheitskraft

$$F_T = 1,3 \rho_l \left( \frac{\dot{V}_g}{2r} \right)^2.$$

Man erhält so das Modell von Voit et al. (1987), zitiert nach Rübiger und Schlüter 2013, welches jedoch iterativ nach dem Gasblasendurchmesser gelöst werden muss, da dieser in den Ausdrücken für die Zähigkeits- bzw. Trägheitskraft enthalten ist

$$d_B = \sqrt[3]{\left( \frac{F_\eta + F_T + F_\sigma}{\Delta \rho g} \right) \frac{6}{\pi}}. \quad (3)$$

Dieses Modell liefert Werte für den Primärblasendurchmesser, deren Abweichung von den experimentell ermittelten innerhalb der Messgenauigkeit liegt. Für die in dieser Arbeit verwendeten Richtwerte erhält man nach diesem Modell einen Gasblasendurchmesser von

$$d_B = 2,1 \text{ mm.}$$

Alternativ dazu existieren auch graphische Methoden zum schnellen Abschätzen des Primärblasendurchmessers.

### 2.3 Blasenbildung im Strahlgasbereich

In diesem Bereich werden die Gasblasen an einer Bohrung in so schneller Abfolge gebildet, dass sie den Anschein eines „Gasstrahles“ erwecken. Tatsächlich bildet sich an der Öffnung weiterhin eine Primärblase, deren Durchmesser volumenstromabhängig ist. Wird der Impuls der umgebenden Flüssigkeit, die durch die Ablösung des Gasstrahls beschleunigt wird, groß genug, so werden die Primärblasen zerteilt und sogenannte Sekundärblasen entstehen. Da nicht zu erwarten ist, dass alle Gasblasen denselben Durchmesser haben werden, bedient man sich spezieller Populationsmodelle, die verschiedene Blasenklassen unterschiedlicher Größen erfassen und auch den Effekt der Koaleszenz berücksichtigen. Da jedoch das oben beschriebene Modell von Voit zur Berechnung des Primärblasendurchmessers weiterhin seine Gültigkeit behält, liefert es uns einen Schätzwert für die größten vorkommenden Gasblasen.

## 2.4 Modellrechnung

Für die Erstellung des Modells gilt es zunächst die unbekannte Druckverlustziffer  $\zeta$  der Bohrung abzuschätzen. Von ihr hängt definitionsgemäß die Gasgeschwindigkeit in der Bohrung ab, da gilt

$$\zeta = \frac{2 \Delta p}{\rho \cdot v^2}. \quad (4)$$

Somit ist der Gasdurchsatz und damit die Art der Gasblasenentstehung an der Bohrung von der Druckverlustziffer abhängig.

Um den mathematisch möglichen Wertebereich einzugrenzen und physikalisch sinnvolle Werte zu erhalten, werden zwei Annahmen getroffen. Zum einen sollen keine kompressiblen Effekte in der Bohrung auftreten können. Überschlagsmäßig treten diese ab 30% der Schallgeschwindigkeit  $c$  des strömenden Mediums auf. Für  $\text{CO}_2$  beträgt sie rund  $266 \text{ m/s}$  und damit ergibt sich

$$0,3 \cdot c_{\text{CO}_2} \approx 80 \text{ m/s}.$$

Einsetzen in Gleichung (4) und Umformen nach der Geschwindigkeit liefert einen unteren Grenzwert für die Druckverlustziffer

$$\zeta_{\min} = \frac{2 \Delta p}{\rho \cdot (0,3 \cdot c_{\text{CO}_2})^2} \approx 2. \quad (5)$$

Ebenso lässt sich ein oberer Grenzwert bestimmen. Ausgangspunkt der Herleitung ist die Annahme, dass die Blasenbildung im Bereich des Strahlgasens liegt, was die Voraussetzung für eine Durchströmung aller Poren und damit für die Vermeidung des sogenannten „Durchregens“ ist, bei dem Flüssigkeit aufgrund des zu geringen Druckunterschiedes durch die Bohrung in die Vorkammer fließen würde. Die Weber-Zahl wird also mit dem Grenzwert für den Übergang von der Einzelblasenbildung zum Strahlgasen gleichgesetzt:

$$We = 2$$

Setzt man die Definition der Weber-Zahl aus Gleichung (1) gleich, formt nach der Geschwindigkeit bzw. ihrem Quadrat

$$v^2 = \frac{\sigma}{r \rho_g}$$

um und setzt dieses in Gleichung (4) ein, so erhält man nach Umformen nach der Druckdifferenz

$$\Delta p = \zeta \frac{\sigma}{2r}.$$

In Bals 2002 wird die mindestens notwendige Druckdifferenz bei gegebener Druckverlustziffer

einer Pore angegeben mit

$$\Delta p_{min} = 1,05 \zeta \frac{\sigma}{2r}.$$

Umformen nach der Druckverlustziffer liefert

$$\zeta_{max} = \frac{2 \Delta p r}{1,05 \sigma} \approx 26. \quad (6)$$

Eine detaillierte Untersuchung hat ergeben, dass der Einfluss der Druckverlustziffer auf die Flüssigkeitgeschwindigkeit begrenzt ist. Abbildung 6 zeigt den Verlauf der Fließgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Druckverlustziffer. Diese liegt über nahezu dem gesamten Bereich zwischen 5 cm/s und 6 cm/s.

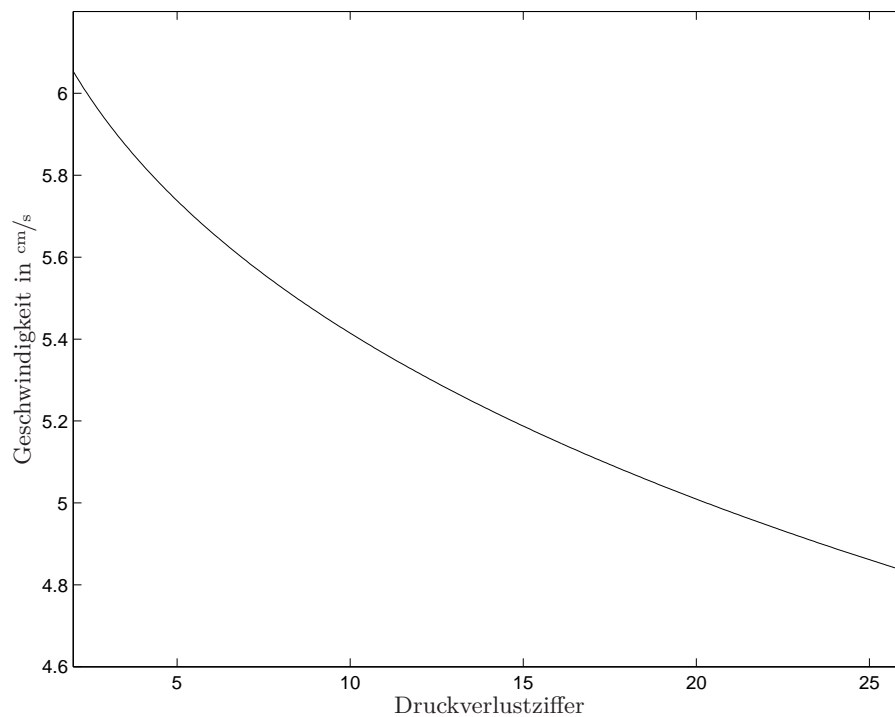


Abbildung 6: Einfluss der Druckverlustziffer der Bohrung auf die Geschwindigkeit bei 0,2 bar Überdruck in der Gaszufuhr

Eine Erhöhung des Überdrucks in der Rohrleitung führt zu einer Verschiebung der minimalen und maximalen Druckverlustziffer, wobei sich die Flüssigkeitgeschwindigkeit wenig ändert. Der Verlauf der Kurve bleibt gleich und die Größenordnung der Geschwindigkeit ändert sich nicht, wie Abbildung 7 zeigt.

In Abbildung 8 ist der Durchmesser einer ablösenden Gasblase als Funktion des Überdrucks in der Gaszufuhr dargestellt. Ein größerer Überdruck führt zu einer größeren Geschwindigkeit des Gases in der Düse und somit zu einem erhöhten Gasdurchsatz. Formt man Gleichung (4) nach

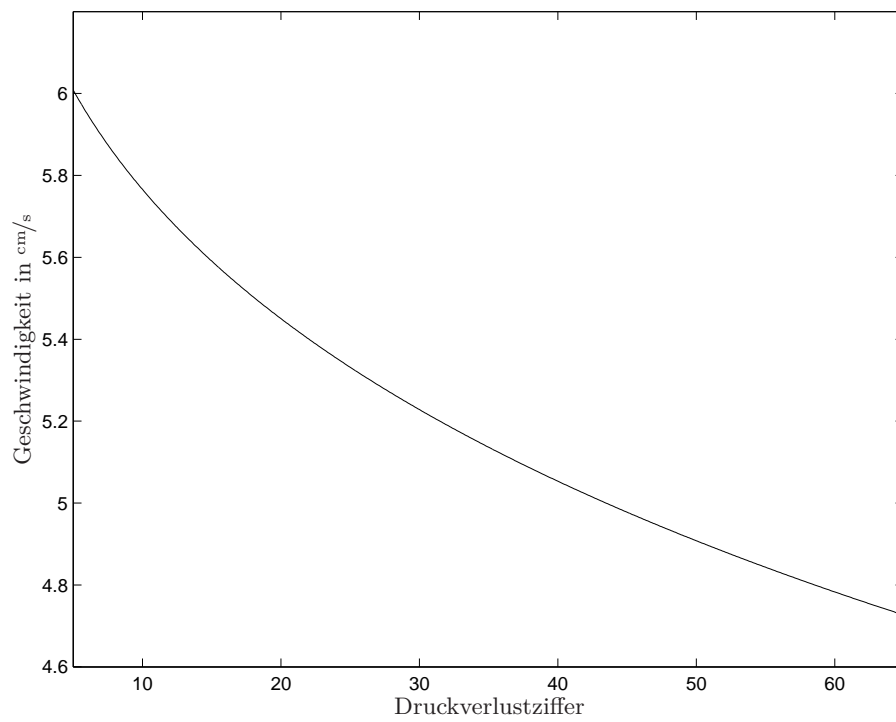


Abbildung 7: Einfluss der Druckverlustziffer der Bohrung auf die Geschwindigkeit bei 0,5 bar Überdruck in der Gaszufuhr

der Geschwindigkeit um, so erhält man

$$v = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \cdot \zeta}}. \quad (7)$$

Die Geschwindigkeit ist also eine Wurzelfunktion des Überdrucks und somit auch der Gasdurchsatz. Der Gasvolumenstrom fließt linear bzw. quadratisch in die Zähigkeits- bzw. Trägheitskraft in (3) ein. Für den Gasblasendurchmesser wird die dritte Wurzel aus der Summe dieser beiden Ausdrücke sowie einem in Bezug auf den Gasvolumenstrom konstanten Ausdruck gezogen. Der Einfluss des Gasdurchsatzes auf die Gasblasengröße ist also weniger als linear und damit seinerseits der Einfluss des Überdrucks.

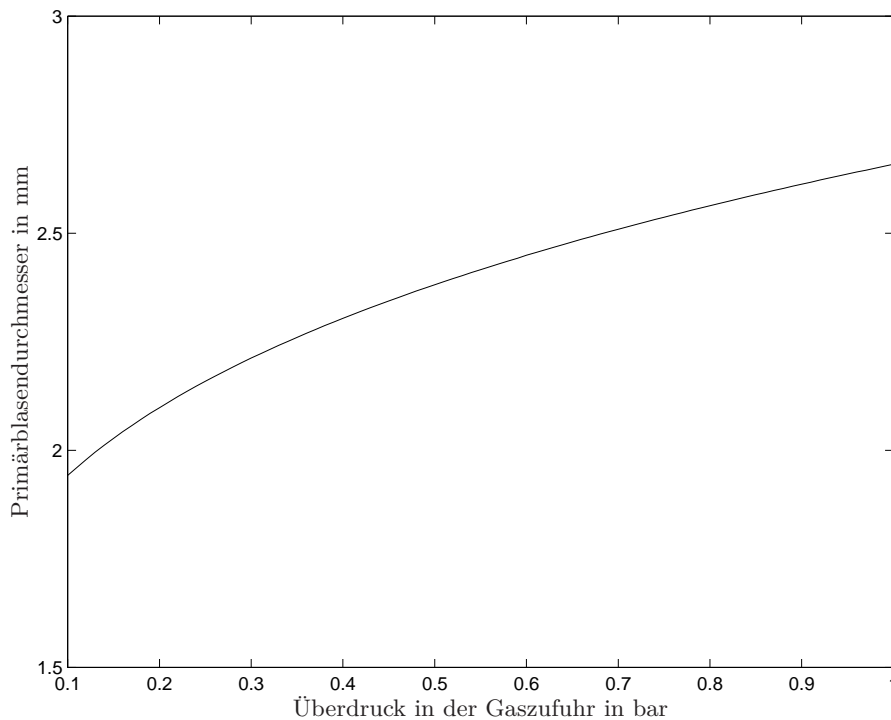


Abbildung 8: Abhängigkeit des Primärblasendurchmessers vom Überdruck in der Gaszufuhr

Anders verhält es sich mit der Druckverlustziffer der Düse, wie in Abbildung 9 dargestellt, da sie nach Gleichung (7) im Nenner und nicht wie die Druckdifferenz im Zähler steht. Sie führt also mit steigenden Werten zu einem immer geringeren Gasdurchsatz und folglich auch einem kleineren Gasblasendurchmesser. Die Aussagen ihren Einfluss betreffend sind analog zu jenen für den Überdruck.

Alle drei Kräfte in Gleichung (3) sind vom Düsenradius abhängig und führen bei einem größeren Radius zu einer größeren Gasblase. Im Fall der Trägheits- bzw. Zähigkeitskraft fließt er über den Gasdurchsatz quadratisch ein, dieser wird jedoch wieder auf den Durchmesser der Düse

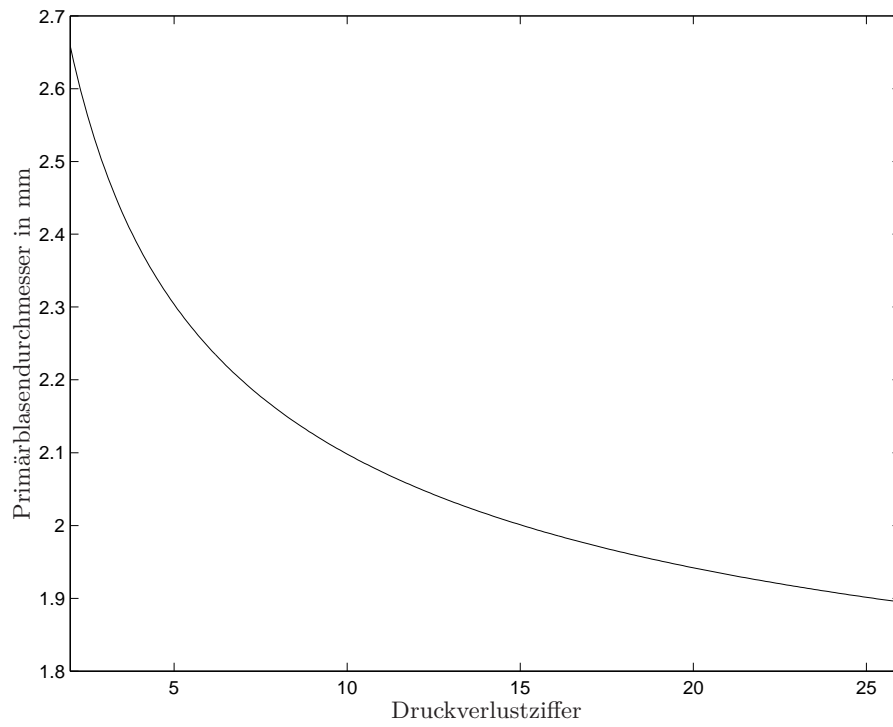


Abbildung 9: Abhängigkeit des Primärblasendurchmessers von der Druckverlustziffer

bezogen. Somit ergibt sich der nahezu lineare Zusammenhang in Abbildung 10.



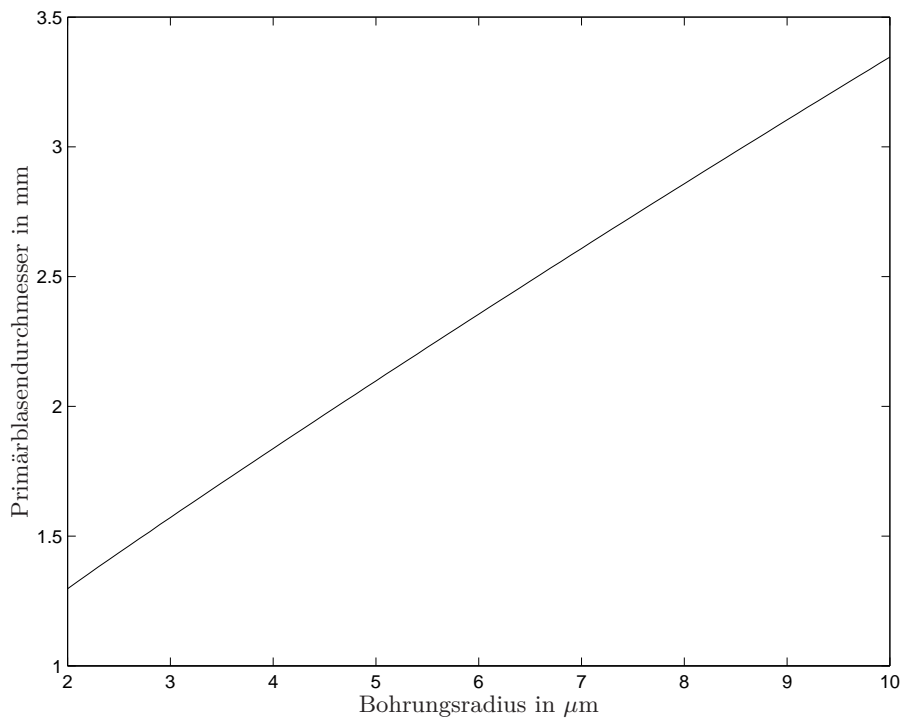


Abbildung 10: Abhängigkeit des Primärblasendurchmessers vom Radius der Düsenbohrung

## 3 Bewegung einer Gasblase in einer Flüssigkeit

### 3.1 Literaturstudie

Betrachtet man den Aufstieg einer einzelnen Gasblase in einer ruhenden Flüssigkeitssäule, so lässt sich eine stationäre Aufstiegsgeschwindigkeit beobachten. Der instationäre Vorgang der Beschleunigung auf die Endgeschwindigkeit nach dem Ablösen der Gasblase bei ihrer Entstehung an einer Bohrung oder Pore ist dabei sehr schnell abgeschlossen, siehe Sokolichin 2004, weshalb die Betrachtung einer stationären Aufstiegsgeschwindigkeit über den gesamten Bereich der Gasblasenbewegung berechtigt ist. Diese wird durch das Gleichgewicht aus Auftriebskraft, Gewichtskraft und Widerstandskraft zufolge der Reibung zwischen der Gasblase und der Flüssigkeit bestimmt. Von den Stoffeigenschaften der flüssigen und der dispersen Phase sowie der Größe der Gasblase ist ihre Form und damit ihr Widerstand abhängig. Für deformierte Gasblasen rechnet man üblicherweise mit einem äquivalenten Blasenradius, um den Widerstandsbeiwert anhand einer Kugel bestimmen zu können (Oertel 2012). Die Frage der Form einer Gasblase wird ausführlich in Kraume 2012 und Brauer 1971 diskutiert.

### 3.2 Stationäre Aufstiegsgeschwindigkeit einer Gasblase

Im ersten Schritt wird die Aufstiegsgeschwindigkeit einer einzelnen Gasblase in einer ruhenden, unendlich ausgedehnten Flüssigkeit betrachtet. Die Herleitung der Aufstiegsgeschwindigkeit erfolgt über die Betrachtung des Kräftegleichgewichts an einer Gasblase. Dazu werden nur die Gewichtskraft  $F_G$ , die Auftriebskraft  $F_A$  und die Widerstandskraft  $F_W$  berücksichtigt

$$F_A = F_G + F_W.$$

Einsetzen für die einzelnen Ausdrücke führt zu

$$g\rho_l \frac{\pi}{6} d_B^3 = g\rho_B \frac{\pi}{6} d_B^3 + c_W \rho_l \frac{\pi}{4} d_B^2 \frac{v_B^2}{2}$$

und Umformen nach der Blasengeschwindigkeit ergibt

$$v_B = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_l - \rho_B}{\rho_l} g d_B \frac{1}{c_W}}. \quad (8)$$

Einziges Unbekannte in dieser Gleichung ist der dimensionslose Widerstandsbeiwert  $c_W$ , der allgemein in der Form

$$c_W = \frac{2 F_W}{\rho_l v_B^2 A} \quad (9)$$

angegeben wird. Der Widerstandsbeiwert ist also nicht nur von der Aufstiegsgeschwindigkeit der Gasblase  $v_B$ , sondern auch von seiner angeströmten Querschnittsfläche  $A$  und damit der Form der Gasblase abhängig.

Abbildung 11 zeigt die Aufstiegs­geschwindigkeit von Luft­blasen in einer ruhenden Wassersäule, die mehrfach experimentell bestätigt wurde und der ersten Einschätzung der tatsächlich vorhandenen Gas­blasen­bewegung dient. Dabei ist ersichtlich, dass die Aufstiegs­geschwindigkeit stark vom Durchmesser der Gas­blase abhängt, solange ihre Form eine Kugel ist. Sobald die Blase eine ellipsoid­ähnliche Form annimmt, ist ihre Aufstiegs­geschwindigkeit nahezu un­abhängig von der Größe der Gas­blase und stellt sich bei etwas mehr als 20 cm/s ein.

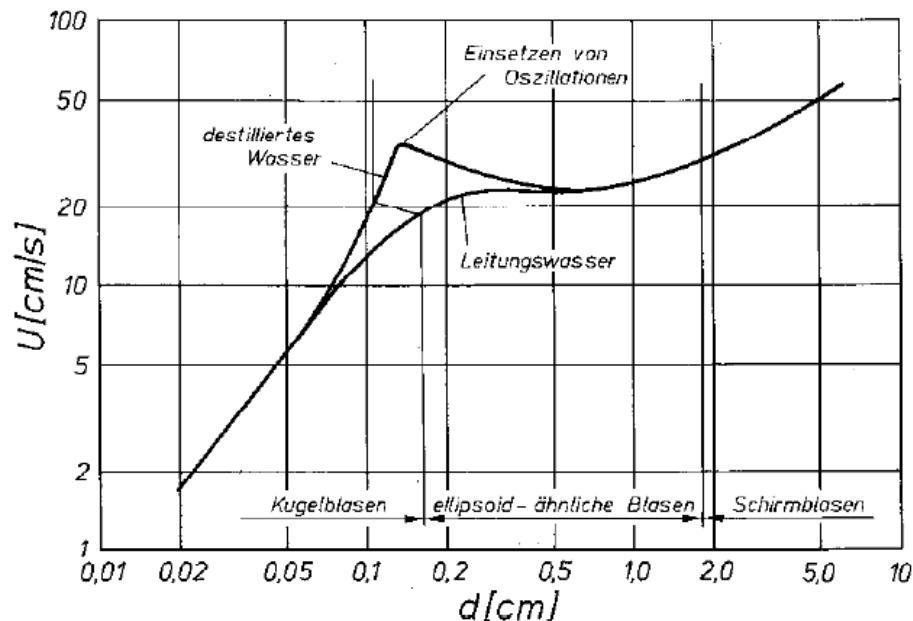


Abbildung 11: Geschwindigkeit von Luft­blasen in Wasser

Abbildung 12 gibt einen Überblick über die Formen aufsteigender Gas­blasen in Ab­hängigkeit von der Eötvös-Zahl sowie der Morton-Zahl bzw. deren Kehrwert, der Flüssigkeits­kennzahl. Aus den Definitionen dieser Kennzahlen erkennt man, dass sie nur von den Stoffwerten der beiden Phasen bzw. im Fall der Eötvös-Zahl auch von der Größe der Bohrung, an der die Gas­blase jeweils entsteht, abhängen. Daher erlaubt Abbildung 12 nicht nur eine grobe Abschätzung der Form der Gas­blasen bei bekannten Stoff- und Geometrie­werten, sondern liefert im Zuge einer Erstausslegung auch einen Richtwert für die Reynolds-Zahl der Gas­blase und damit ihrer Aufstiegs­geschwindigkeit.

Für feste Körper kann der Widerstands­beiwert experimentell bestimmt oder für bestimmte Fälle hergeleitet und durch Messungen bestätigt werden. So gilt für eine feste Kugel in einer schleichenden Strömung (Kraume 2012)

$$c_w = \frac{24}{Re}. \tag{10}$$

Eine Gas­blase besitzt jedoch im Gegensatz zu einem festen Teilchen eine bewegliche Phasen­grenzfläche, was auch ihren Widerstand in einer Strömung beeinflusst. Außerdem ist die geome-

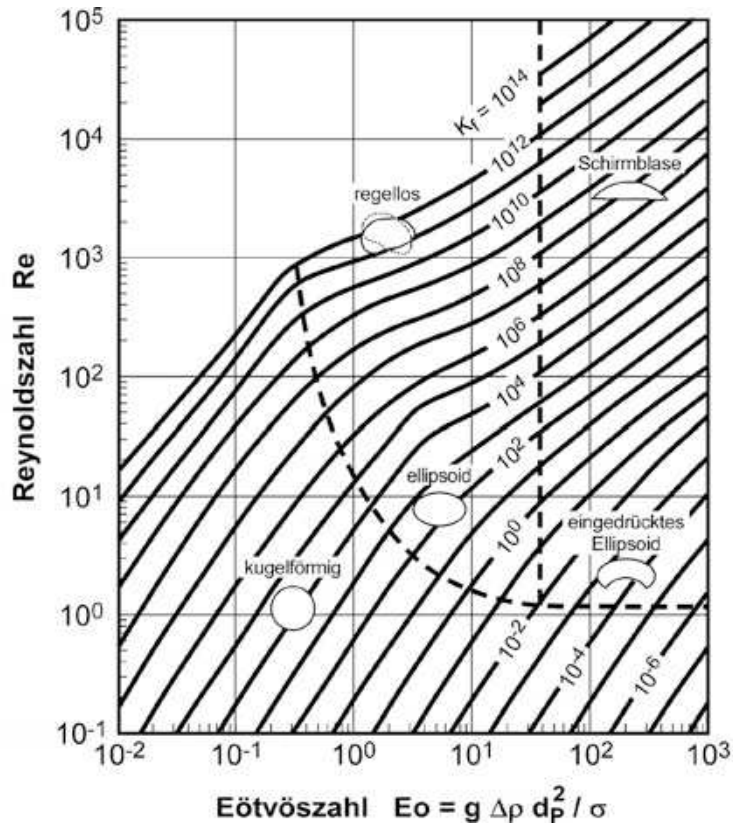


Abbildung 12: Form einer Gasblase in einer Flüssigkeit aus Kraume 2012 nach Grace et al. 1976

trische Form veränderlich. Für Gasblasen ist diese Gleichung nur bei sehr kleinen Durchmessern anwendbar. Vernachlässigt man die Dichte des Gases gegenüber derjenigen der Flüssigkeit

$$\rho_B \ll \rho_l \Rightarrow \rho_l - \rho_B \approx \rho_l$$

setzt die Definition der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{v_B d_B}{\nu_{Wasser}} \quad (11)$$

in die Gleichung (10) ein und formt nach der Geschwindigkeit um, erhält man

$$v_B = \frac{g d_B^2}{18 \nu_{Wasser}}. \quad (12)$$

Für aufsteigende Gasblasen führt diese Gleichung jedoch zu um ein Vielfaches erhöhten Aufstiegseschwindigkeiten gegenüber tatsächlich beobachteten. Im betrachteten Bereich für den Gasblasendurchmesser von wenigen Millimetern erhält man eine Aufstiegseschwindigkeit der Gasblase unter Verwendung des Widerstandsbeiwerts einer festen Kugel von etwa 1 m/s. Offensichtlich tritt hier keine schleichende Strömung mehr auf, wie es aber Voraussetzung für die

Verwendung dieser Formel wäre. Auch hilft eine Anpassung des Widerstandsbeiwerts für fluide Partikel nicht. Für Gasblasen in einer Flüssigkeit gilt ein Wert von  $2/3$  des Werts für feste Körper (Kraume 2012). Ein verringerter Widerstandsbeiwert führt aber nur zu einer noch höheren Aufstiegs geschwindigkeit. Die Formel für feste Körper liefert für diese Anwendung also keine brauchbaren Ergebnisse.

Für eine kugelförmige Gasblase gilt für den Widerstandsbeiwert nach (Kraume 2012)

$$c_W = \frac{16}{Re_B} + \frac{14,9}{Re_B^{0,78}} \left( \frac{1}{1 + 10 Re_B^{-0,6}} \right).$$

Die Gleichung liefert mit der Definition der Reynolds-Zahl und der Blasen aufstiegs geschwindigkeit nach Gleichung 8 ein gekoppeltes Gleichungssystem für die Aufstiegs geschwindigkeit, das Gültigkeit besitzt bis zu einer kritischen Reynolds-Zahl der Gasblase

$$Re_{B,krit} = 3,73 K f^{0,209}.$$

Für den Bereich, in dem die Gasblase ihre Kugelgestalt verliert und eine Elipsoid-ähnliche Form annimmt, sollen zwei andere Berechnungsmethoden zur Bestimmung des Widerstandsbeiwerts einer Gasblase bzw. der Widerstandskraft vorgestellt werden, die beide Sokolichin 2004 entnommen sind. Der erste Zusammenhang lautet

$$c_W = \frac{2}{3} Eo^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Einsetzen der Eötvös-Zahl

$$Eo = \frac{\Delta \rho g d_B^2}{\sigma} \quad (14)$$

liefert

$$c_W = \frac{2}{3} d_B \sqrt{\frac{\Delta \rho g}{\sigma}} \approx \frac{2}{3} d_B \sqrt{\frac{\rho_F g}{\sigma}}. \quad (15)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (8) ein, erhält man einen Zusammenhang, der nicht mehr vom Durchmesser abhängig ist:

$$v_B = \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{\sigma g}{\rho_l}} \quad (16)$$

Im zweiten Fall wird die Widerstandskraft folgendermaßen angeschrieben:

$$F_W = \frac{1}{2} c_W \rho_l A \pi v_B^2 = C_W V_B v_B \quad (17)$$

Somit gilt also

$$C_W V_B = \frac{1}{2} C_W \rho_l \frac{d_B^2}{4} \pi v_B. \quad (18)$$

Der Grund für diese Zusammenfassung wird offensichtlich, wenn man die Kräftebilanz an der Gasblase anschreibt:

$$C_W V_B v_B = V_B \Delta \rho g \quad (19)$$

Umformen nach der Blasengeschwindigkeit liefert

$$v_B = \frac{\Delta \rho g}{C_W}. \quad (20)$$

Für  $C_W$  wird folgender Wert angegeben

$$C_W = 5 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3\text{s}, \quad (21)$$

was zu einer Geschwindigkeit von knapp unter  $20 \text{ cm/s}$  führt.

Abbildung 13 zeigt das Auftreten unterschiedlicher Strömungsformen von dispergierten Zweiphasenströmungen in Abhängigkeit von Gasgehalt bzw. Gasleerrohrgeschwindigkeit. Diese wird allgemein, ganz ähnlich den dimensionslosen Kennzahlen, herangezogen, um unterschiedliche Strömungen vergleichen zu können. In dieser Arbeit wird sie im Rahmen der Modellbildung auftreten und zur Interpretation bzw. Einordnung der Strömung herangezogen werden.

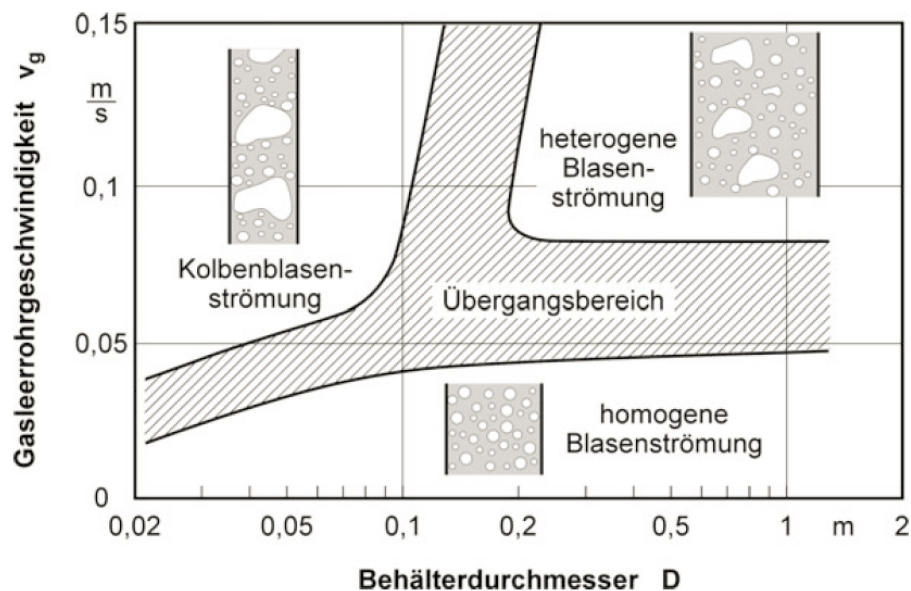


Abbildung 13: Strömungsbereiche in Blasensäulen

### 3.3 Instationäre Gasblasenbewegung

An dieser Stelle soll untersucht werden, wie schnell eine Gasblase nach dem Ablösen ihre stationäre Aufstiegs geschwindigkeit erreicht. Dazu wird der Aufstieg einer Gasblase in einer ruhenden Flüssigkeit betrachtet:

$$v_1 = 0 \quad (22)$$

Die Herleitung ist der Arbeit Sokolichin 2004 entnommen. Es wird angenommen, dass kein Stoffaustausch zwischen einer Gasblase und der Flüssigkeit stattfindet, also die Gasblasenmasse  $m_B$  konstant bleibt:

$$m_B = \rho_g V_B = \text{const.}$$

Die eindimensionale Bewegungsgleichung für die Gasblase lautet:

$$\frac{d(m_B v_B)}{dt} = V_B \rho_l g - m_B g - C_W V_B v_B - C_{am} V_B \rho_l \frac{dv_B}{dt} \quad (23)$$

Dabei bezeichnet  $V_B \rho_l g - m_B g$  den Auftriebsterm,  $C_W V_B v_B$  den Widerstand und  $C_{am} V_B \rho_l \frac{dv_B}{dt}$  den Anteil der zusätzlichen oder virtuellen Masse, der dadurch entsteht, dass die Gasblase die sie umgebende Flüssigkeit verdrängen, d. h. beschleunigen muss.

Division durch  $m_B$  und Einsetzen des obigen Zusammenhangs ergibt

$$\frac{dv_B}{dt} = \frac{\rho_l}{\rho_g} g - g - \frac{C_W}{\rho_g} v_B - \frac{\rho_l}{\rho_g} C_{am} \frac{dv_B}{dt}.$$

Fasst man die beiden beschleunigten Terme zusammen und formt die Gleichung danach um, erhält man

$$\left(1 + \frac{\rho_l}{\rho_g} C_{am}\right) \frac{dv_B}{dt} = \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1\right) g - \frac{C_W}{\rho_g} v_B.$$

Aus dem Verhältnis der Dichte der Flüssigkeit bzw. des Gases

$$\rho_l \gg \rho_g \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_l}{\rho_g} \gg 1$$

folgt, dass der Einfluss der virtuellen Masse gegenüber jenem der Trägheitskraft bzw. jener der Druckkraft gegenüber jenem der Schwerkraft dominiert:

$$\left(1 + \frac{\rho_l}{\rho_g} C_{am}\right) \approx \frac{\rho_l}{\rho_g} C_{am} \quad (24)$$

und

$$\left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1\right) \approx \frac{\rho_l}{\rho_g} \quad (25)$$

Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (23) zu

$$\frac{\rho_l}{\rho_g} C_{am} \frac{dv_B}{dt} = \frac{\rho_l}{\rho_g} g - \frac{C_W}{\rho_g} v_B$$

bzw.

$$\rho_l C_{am} \frac{dv_B}{dt} = \rho_l g - C_W v_B. \quad (26)$$

In dieser Differentialgleichung treten nur noch die Druckkraft, die Trägheitskraft sowie die Wirkung der virtuellen Masse auf. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung (22) lautet ihre Lösung:

$$v_B(t) = \frac{\rho_l g}{C_W} \left(1 - e^{-\frac{C_W}{C_{am} \rho_l} t}\right). \quad (27)$$

Setzt man folgende Werte ein

$$\rho_l = 1.000 \text{ kg/m}^3$$

$$g \approx 10 \text{ m/s}^2$$

$$C_W = 5 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3 \text{s}$$

$$C_{am} = 0,5$$

erhält man

$$v_B(t) = 0,2 \text{ m/s} \left(1 - e^{-100t}\right). \quad (28)$$

Abbildung 14 zeigt den zeitlichen Verlauf der Gasblasengeschwindigkeit, wenn die Blase aus einer Ruhelage heraus gestört wird. Nach etwa 0,02s hat die Gasblase bereits 80% ihrer Endgeschwindigkeit erreicht und steigt nach etwa 0,04s mit konstanter Geschwindigkeit auf. Es ist also gerechtfertigt, näherungsweise von einer konstanten Aufstiegsgeschwindigkeit auszugehen und die Beschleunigungsphase in weiterer Folge zu vernachlässigen.

Dabei wurde für die virtuelle Masse der Wert für eine feste Kugel verwendet. Für eine Gasblase



wird oft nur der halbe Wert, also

$$C_{am} = 0,25$$

angegeben (Kraume 2012). Damit würde die Endgeschwindigkeit nur noch schneller erreicht werden.

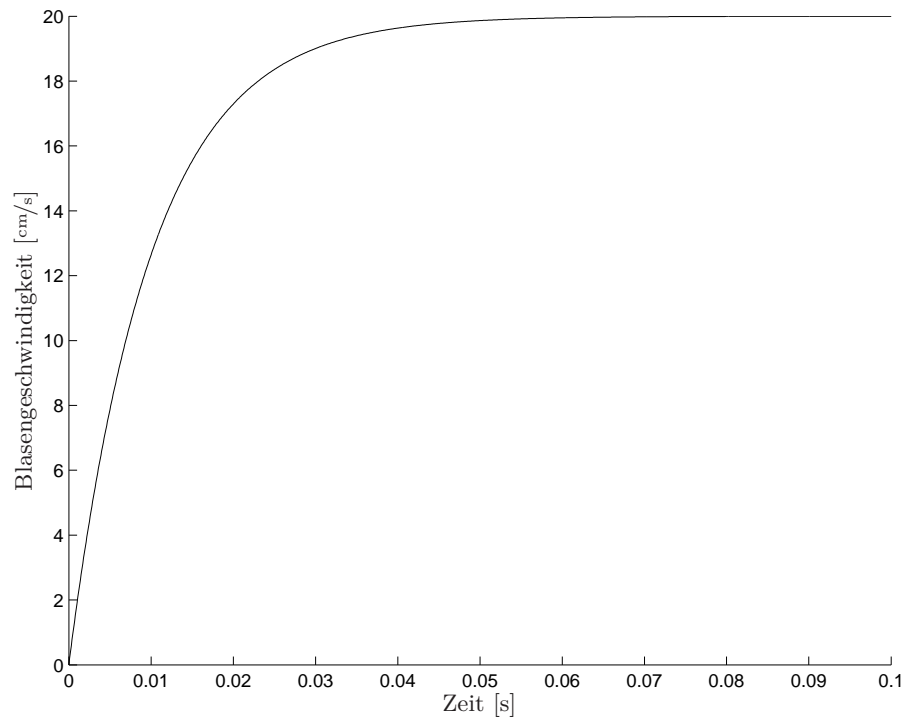


Abbildung 14: Zeitlicher Verlauf der Gasblasengeschwindigkeit ausgehend vom Ruhezustand

### 3.4 Betrachtung eines Partikelschwarms

Steigen zwei Partikel in sehr großem Abstand zueinander auf, so können diese unabhängig voneinander betrachtet und ihre Aufstiegsgeschwindigkeit wie in Kapitel 3.2 berechnet werden. Sobald der Abstand zwischen ihnen jedoch gering wird, beeinflussen sie sich gegenseitig, da eine Gasblase in den Nachlauf der vor ihr aufsteigenden gerät. Dadurch ändert sich das Widerstandsverhalten, was wiederum einen Einfluss auf die Aufstiegsgeschwindigkeit hat. Für eine einfache Modellrechnung wird dies durch einen Korrekturfaktor für den Widerstandsbeiwert einer Einzelblase berücksichtigt. Eine Aufzählung verschiedener solcher Faktoren, die allesamt den gleichen qualitativen Einfluss, nämlich eine Erhöhung des Widerstandsbeiwerts, haben, was zu einer Reduktion der Aufstiegsgeschwindigkeit führt, findet sich bei Sokolichin 2004. Allerdings wird dort auf eine Arbeit verwiesen, deren Messergebnisse zeigen, dass die Abnahme der Schwarmgeschwindigkeit erst ab einem Gasgehalt von etwa 5% einsetzt. Bei geringeren Werten wird sie gegenüber der Aufstiegsgeschwindigkeit einer Einzelblase größer. In dieser Arbeit wird der multiplikative Korrekturfaktor für die Aufstiegsgeschwindigkeit

$$K = \left( \frac{1 + 17,67 \varepsilon_l^{9/7}}{18,67 \varepsilon_l^{3/2}} \right)^2$$

verwendet, wobei  $\varepsilon_l$  den Anteil der Flüssigkeitsphase bezeichnet. Für geringe Gasphasenanteile, wie sie in der betrachteten Anlage auftreten, ist dieser nahezu gleich 1 und bewirkt somit eine sehr geringe Änderung der Gasblasenaufstiegsgeschwindigkeit.

## 4 Berechnung der Flüssigkeitsgeschwindigkeit

### 4.1 Einleitung

Es existiert eine Vielzahl unterschiedlicher Methoden, eine Zweiphasenströmung zu modellieren. Je genauer die physikalischen Vorgänge mathematisch erfasst und beschrieben werden, umso besser stimmen in der Regel die Ergebnisse mit den realen Verhältnissen überein.

Die einfachste Betrachtung ist die einer homogenen Gleichgewichtsströmung, bei der beide Phasen aufgrund starker Wechselwirkungen die gleiche Geschwindigkeit haben. In diesem Fall kann von einer Einphasenströmung ausgegangen werden, deren Stoffgrößen gemittelte Größen der beteiligten Stoffe sind.

Falls Relativgeschwindigkeiten zwischen beiden Phasen auftreten, können die Relativbewegungen beider Phasen gegenüber der Bewegung des Gemisches mit dem sogenannten Driftflussmodell dargestellt werden. Für Blasenströmungen zeigt Sokolichin 2004, dass diese Darstellung näherungsweise dem weitaus komplizierteren Zwei-Flüssigkeiten Eulermodell, bei dem beide Phasen getrennt betrachtet werden, entspricht.

### 4.2 Modellbildung

Für die strömungsmechanischen Berechnungen ist es ausreichend, eine eingangs erwähnte Einheitszelle, siehe Abbildung 15 zu betrachten. Dabei handelt es sich nur um jeweils eine Säule auf- bzw. absteigender Flüssigkeit, die von der Algensuspension durchströmt wird und der Reaktor kann als eine Abfolge von wiederholt aneinandergereihten Einheitszellen gedacht werden.

Ziel des Modells ist die Berechnung der Flüssigkeitsgeschwindigkeit im Reaktor. Unter der Vernachlässigung des Stoffübergangs zwischen Algen in der Flüssigkeit und den Gasblasen ist der Massenstrom in einer Säule auf- bzw. absteigender Flüssigkeit gleich groß. Ausgehend von der Kontinuitätsgleichung bzw. Massenbilanz

$$\dot{m} = A \bar{v}_1 \bar{\rho}_1 = A \bar{v}_2 \bar{\rho}_2 \quad (29)$$

ist ein Gleichungssystem von vier Gleichungen zur Bestimmung der folgenden Unbekannten notwendig: Der Flüssigkeitsgeschwindigkeiten  $\bar{v}_{1,2}$  sowie der Gemischdichten  $\bar{\rho}_{1,2}$ , wobei Index 1 eine Säule aufsteigender und Index 2 eine Säule absteigender Flüssigkeit bezeichnet.

Dabei werden die physikalischen Eigenschaften der Zweiphasenströmung, bestehend aus einer flüssigen und einer gasförmigen Phase, anhand von Gemischgrößen beschrieben. Für die Berechnung wird angenommen, dass es sich um eine einzige Phase handelt, deren Eigenschaften sich aus den volumetrisch gemittelten Eigenschaften der beiden Phasen zusammensetzen. Dazu muss der Volumensanteil der beiden Phasen am Gesamtvolumen einer Säule  $V_{ges}$  bestimmt werden. Dieses setzt sich aus den beiden Volumensanteilen  $V_g$  und  $V_l$  zusammen. Mit  $\varepsilon$  werden die Volumensanteile bezeichnet, der Index  $l$  steht für die flüssige (liquide) bzw. kontinuierliche und der Index  $g$  für die gasförmige bzw. dispergierte Phase. Es gilt also, den Volumensanteil der

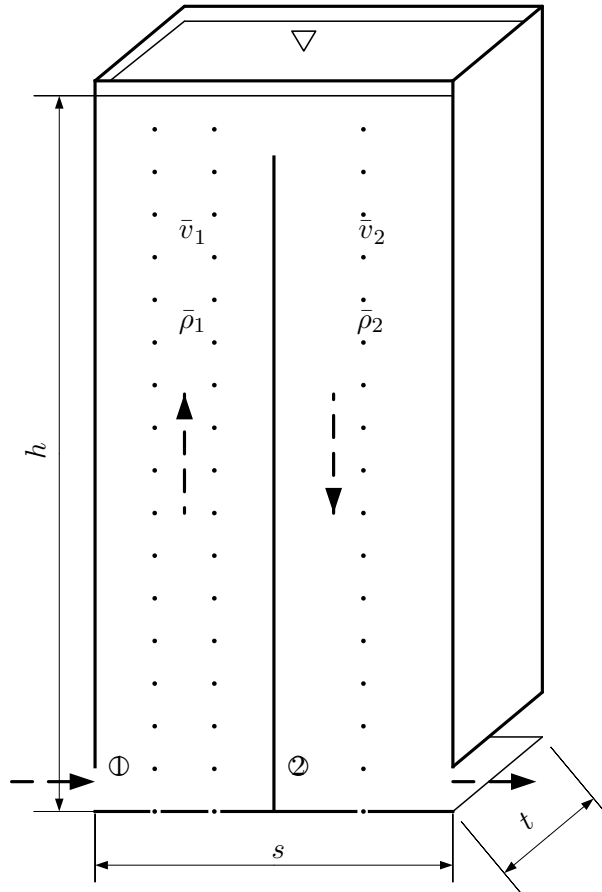


Abbildung 15: Einheitszelle, die der Modellbildung zu Grunde liegt

gasförmigen Phase am Gesamtvolumen zu bestimmen

$$\varepsilon_g = \frac{V_g}{V_{ges}}$$

Dabei gilt

$$\varepsilon_l + \varepsilon_g = 1$$

und für das Gesamtvolumen

$$V_{ges} = A \cdot h = b \cdot t \cdot h,$$

wobei  $h$  die Höhe des Reaktors bezeichnet und  $A = b \cdot t$  den rechteckigen Einheitskanalquerschnitt der Säule ( $b$  ist die Breite und  $t$  die Tiefe der Säule).

Der Einfachheit halber wird nun von Gasblasen konstanter Größe, d. h. einer inkompressiblen Gasphase, ausgegangen. Das Volumen der Gasphase ergibt sich aus dem Volumen einer einzelnen Blase  $V_B$  mal der Anzahl der Gasblasen  $n$ . Um den Verdrängungseffekt der Gasblasen zu

berücksichtigen, wird das Volumen einer Gasblase in der Mitte der Säulenhöhe herangezogen. Diese Anzahl  $n$  ist das Produkt aus der Verweilzeit  $t_{verweil}$  einer Blase in der Säule, d. h. der Zeit, die eine Blase vom Ablösen am Boden des Reaktors bis zum Erreichen der Oberfläche der Flüssigkeit benötigt und der Ablösefrequenz  $f_{ab}$  der Gasblasen an den Bohrungen

$$n = t_{verweil} \cdot f_{ab}.$$

Die Verweilzeit ergibt sich aus der Höhe des Reaktors  $h$  und der Aufstiegsgeschwindigkeit der Gasblasen  $v_{rise}$  zu

$$t_{verweil} = \frac{h}{v_{rise}}.$$

Die Aufstiegsgeschwindigkeit der Gasblasen errechnet sich aus der noch unbekanntem, zu berechnenden Geschwindigkeit der Flüssigkeit sowie der Relativgeschwindigkeit zwischen einer Gasblase und der Flüssigkeit. Einsetzen liefert für den Volumenanteil des Gases ganz allgemein

$$\varepsilon_g = \frac{V_B}{V_{ges}} \frac{h}{v_{rise}} f_{ab}. \quad (30)$$

Man muss zwischen den Säulen aufsteigender, Index 1, und absteigender Flüssigkeit, Index 2, unterscheiden: Addiert sich im ersten Fall die Relativgeschwindigkeit  $v_{rel}$  der Gasblasen mit der Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit  $\bar{v}_1$  zur Gesamtgeschwindigkeit der Gasblasen  $v_{rise,1}$ , so muss man im zweiten Fall die Differenz der Geschwindigkeiten bilden, da die Gasblasen entgegen der Strömungsrichtung der Flüssigkeit aufsteigen

$$v_{rise,1} = v_{rel} + \bar{v}_1$$

$$v_{rise,2} = v_{rel} - \bar{v}_2.$$

Bei  $\bar{v}_{1,2}$  handelt es sich um die jeweiligen querschnittsgemittelten Geschwindigkeiten einer laminarer Kreisrohrströmung. Eine Rohrströmung ist bis zu einer kritischen Reynolds-Zahl

$$Re_{krit} \approx 2320$$

laminar und besitzt ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil, dessen maximale Geschwindigkeit in der Mitte des Rohres doppelt so groß wie die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ist. Um unterschiedliche Querschnittsformen vergleichen zu können, beziehen sich die Berechnungen auf den hydraulischen Durchmesser  $d_h$  eines kreisförmigen Rohres, siehe Abbildung 16. Für einen beliebigen Querschnitt gilt

$$d_h = \frac{4A}{U},$$

wobei  $A$  die Querschnittsfläche und  $U$  den Umfang bezeichnet. Für einen quadratischen Querschnitt mit Seitenlänge  $b = t$  ergibt sich daher:

$$d_h = \frac{4b^2}{4b} = b$$

Für einen rechteckigen Querschnitt mit Seitenlängen  $b$  und  $t$  gilt:

$$d_h = \frac{4bt}{2(b+t)}$$

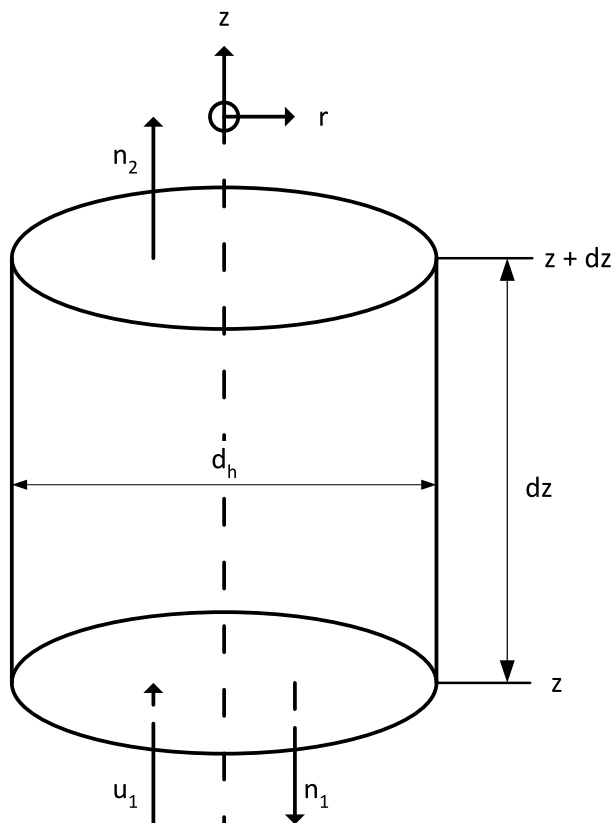


Abbildung 16: Kontrollvolumen für die aufsteigende Säule mit dem hydraulischen Durchmesser

Ausgehend von der bekannten Geometrie einer Säule, der Viskosität der Flüssigkeit und der vorgegebenen, gemessenen Fließgeschwindigkeit im Reaktor, kann die Reynolds-Zahl und damit das Strömungsverhalten abgeschätzt werden

$$Re \approx 1500 < Re_{krit} \approx 2320.$$

Daher wird zunächst von einer laminaren Rohrströmung ausgegangen.

Da die genaue Position der Gasblasen über den Querschnitt der Säule nicht bekannt ist, wird zur Berechnung ihrer Aufstiegsgeschwindigkeit die gemittelte Strömungsgeschwindigkeit verwendet.

Der Ausdruck für den volumetrischen Gasanteil der beiden Säulen lautet daher

$$\varepsilon_{g1} = n_1 \frac{\dot{V}}{V_{ges}} \frac{h}{v_{rel} + \bar{v}_1} \quad (31)$$

$$\varepsilon_{g2} = n_2 \frac{\dot{V}}{V_{ges}} \frac{h}{v_{rel} - \bar{v}_2}. \quad (32)$$

Dabei ist  $\dot{V}$  der Gasvolumenstrom durch eine Düse und  $n_1$  bzw.  $n_2$  die Anzahl der Düsen zur Einbringung von  $\text{CO}_2$  in eine auf- bzw. absteigende Flüssigkeitssäule. Betrachtet man den Ausdruck

$$\frac{\dot{V}}{V_{ges}} h$$

getrennt und kürzt die Höhe der Säule, so bleibt die sogenannte Gasleerrohrgeschwindigkeit

$$v_{leer} = \frac{\dot{V}}{A},$$

die ähnlich dem Partialdruck in der Thermodynamik definiert ist als die theoretische Geschwindigkeit der Gasphase unter Abwesenheit der kontinuierlichen Phase. So wie dimensionslose Kennzahlen dient auch sie dazu, unterschiedliche Strömungen miteinander zu vergleichen. Mit ihrer Hilfe kann beispielsweise nach Abbildung 13 die Art der Zweiphasenströmung eingeordnet werden. Im vorliegenden Fall befinden wir uns deutlich im Bereich der homogenen Blasenströmung.

Die Definition der Gemischdichte liefert zwei Gleichungen, nämlich jeweils eine in der auf- bzw. der absteigenden Säule. Die Gemischdichte ist die Summe der jeweiligen Phasendichten, gewichtet nach ihrem Volumsanteil

$$\bar{\rho}_i = \varepsilon_{li} \rho_l + \varepsilon_{gi} \rho_{gi} \quad \text{für } i = 1, 2. \quad (33)$$

Einsetzen der umgeformten Beziehung für die Volumsanteile

$$\varepsilon_{li} = 1 - \varepsilon_{gi} \quad (34)$$

liefert

$$\bar{\rho}_i = (1 - \varepsilon_{gi}) \rho_l + \varepsilon_{gi} \rho_{gi} = \rho_l - \varepsilon_{gi} (\rho_l - \rho_{gi}) = \rho_l - \varepsilon_{gi} \Delta \rho_i. \quad (35)$$

Eine weitere Gleichung ist die Impulsbilanz bzw. die Bernoulli-Gleichung: Beide liefern einen Ausdruck für die Druckdifferenz zwischen aufsteigender und absteigender Säule am Boden des Reaktors. Aufgrund der unterschiedlichen Menge an eingebrachtem Gas in den beiden Säulen ist auch die Dichte und damit der Druck verschieden. Der zurückgelegte Weg eines Fluidteilchens

während der Durchströmung der Einheitszelle setzt sich aus zwei unterschiedlich betrachteten Wegstrecken zusammen: Mit der Impulsbilanz wird der Weg vom Boden der aufsteigenden Säule bis knapp unterhalb der Oberfläche und wieder hinunter in der absteigenden Säule bis an deren Boden betrachtet. In Abbildung (17) entspricht dies der Strecke von den Punkten 2 bis 5. Da an der Oberfläche der Umgebungsdruck herrscht, wird näherungsweise knapp unterhalb der selbe Druck in beiden Säulen angenommen, wodurch der Weg vom Punkt 3 zum Punkt 4 in dieser Betrachtung vernachlässigt wird. Die Bernoulligleichung beschreibt den Übergang der Flüssigkeit am Boden des Reaktors von einer Säule in die nächste, womit die Betrachtung der Strömung an Stellen gleicher Randbedingungen beginnt und endet, was in Abbildung (17) dem Weg vom Punkt 1 zum Punkt 2 oder dem Weg vom Punkt 5 zum Punkt 6 entspricht. Eine Einheitszelle enthält von beiden Wegstrecken die Hälfte, was einer ganzen entspricht, weshalb insgesamt der Weg vom Punkt 1 zum Punkt 5 betrachtet wird.

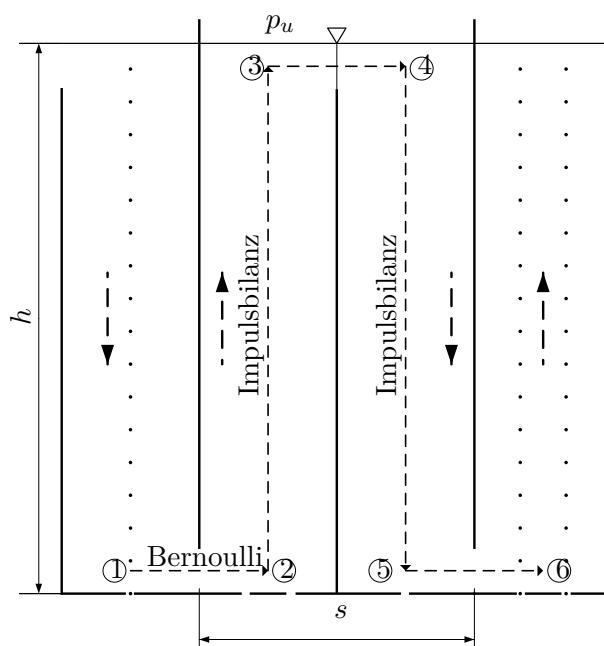


Abbildung 17: Darstellung der Strömungswege in der Einheitszelle

Dabei bleibt das Flüssigkeitsvolumen unverändert. Die Impulsbilanz in integraler Form lautet

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_j) dV + \oint_O \rho v_j (v_i n_i) dO = \oint_O \sigma'_{ij} n_i dO - \oint_O p n_j dO + \int_V \rho g_j dV, \quad (36)$$

wobei die beiden Ausdrücke auf der linken Seite gleich Null sind. Das erste Integral entfällt, weil die Strömung im stationären Zustand untersucht wird, das zweite, weil die Geschwindigkeit über die Säulenhöhe nicht vom Ort abhängig ist. Die Überlegung, dass sich die Geschwindigkeit nicht ändert, folgt aus der Kontinuitätsgleichung und der Tatsache, dass der Querschnitt und auch die Dichte des näherungsweise als inkompressibel betrachteten Fluids konstant sind. Auf der rechten Seite ist  $\sigma'_{ij}$  der Tensor der inneren Reibspannung und es gilt mit  $D_{ij}$  als



Deformationsratentensor

$$\sigma'_{ij} = 2\eta D_{ij}.$$

Für die Berechnungen wird jedoch nicht der rechteckige Querschnitt herangezogen, sondern ein kreisförmiges Rohr mit dem hydraulischen Durchmesser  $d_h$ . Daher ist es sinnvoll, in Zylinder- statt in kartesischen Koordinaten zu rechnen. Der Deformationsratentensor lautet dann

$$D = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} & \frac{2}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Da in diesem Modell eine Rohrströmung betrachtet wird und nur eine Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung auftritt, muss nur folgende Komponente des Deformationsratentensors berücksichtigt werden:

$$D_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),$$

wobei der erste Ausdruck gleich Null ist und damit nur

$$D_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

übrig bleibt.  $n_i$  beschreibt den Normalvektor auf die Oberfläche  $O$ , über die integriert wird.  $\bar{\rho}$  bezeichnet die Dichte des Gemisches aus Wasser und  $CO_2$ , mit dem die Säulen gefüllt sind.  $V$  bezeichnet das Volumen einer Säule, über das integriert wird.

Die Auswertung der Integrale am Kontrollvolumen, siehe Abbildung 16, ergibt:

$$\oint \sigma'_{ij} n_i dO = 2\mu \oint_O D_{ij} n_i dO = 2\mu d_h \pi \int_z^{z+dz} \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=\frac{d_h}{2}} dz \vec{e}_z = -d_h \pi \tau_w(z) dz \vec{e}_z.$$

Für die Wandschubspannung  $\tau_w$  gilt (Oertel 2012):

$$\tau_w = \rho \bar{v}^2 \frac{\lambda}{8}$$

und für die Rohrreibungszahl  $\lambda$  im Bereich einer laminaren Rohrströmung (Oertel 2012)

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64\eta}{\rho \bar{v} d_h}$$

bzw. für den turbulenten Bereich (Oertel 2012)

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}.$$

Die Auswertung des Druckterms liefert

$$\oint p n_i dO = A(-p(z) + p(z + dz)) \vec{e}_z = A\left(-p(z) + p(z) + \frac{dp}{dz} dz\right) \vec{e}_z = A \frac{dp}{dz} dz \vec{e}_z$$

und das Integral über die Volumskräfte, in diesem Fall nur die Massenkkräfte der Gemische, ergibt

$$\int \bar{\rho}_{1,2} \vec{g} dV = - \int_z^{z+dz} \bar{\rho}_{1,2} g A dz \vec{e}_z = -\bar{\rho}_{1,2} g A dz \vec{e}_z$$

mit  $\bar{\rho}_1$  als Gemischdichte in der aufsteigenden Säule

und  $\bar{\rho}_2$  als Gemischdichte in der absteigenden Säule.

Setzt man diese Terme in die Gleichung (36) ein, erhält man

$$-d_h \pi \rho \bar{v}^2 \frac{\lambda}{8} dz \vec{e}_z - A \frac{dp}{dz} dz \vec{e}_z - \bar{\rho}_{1,2} g A dz \vec{e}_z = 0. \quad (37)$$

Die nun erhaltene Gleichung muss über die gesamte Säulenhöhe integriert werden. Da  $p(h)$  als Druck an der Oberfläche gleich dem Umgebungsdruck  $p_u$  ist, folgt

$$- \int_0^h d_h \pi \rho \bar{v}^2 \frac{\lambda}{8} dz - \int_{p(0)}^{p_u} \frac{dp}{dz} A dz - \int_0^h \bar{\rho}_1 g A dz = 0.$$

Durch Umformung ergibt sich

$$\int_{p(0)}^{p_u} dp = - \int_0^h \frac{d_h}{A} \pi \rho \bar{v}^2 \frac{\lambda}{8} dz - \int_0^h \bar{\rho}_1 g dz. \quad (38)$$

Es ist notwendig, die Impulsbilanz zwischen den beiden Säulen zu unterscheiden. Für die aufsteigenden Säule gilt

$$p_u - p_1(0) = -d_h \pi \bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 \frac{\lambda}{8} \frac{h}{A} - \bar{\rho}_1 g h \quad (39)$$

und analog für die absteigende Säule

$$p_2(0) - p_u = -d_h \pi \bar{\rho}_2 \bar{v}_2^2 \frac{\lambda h}{8 A} + \bar{\rho}_2 g h. \quad (40)$$

Das Vorzeichen vor dem ersten Ausdruck auf der rechten Seite ergibt sich, da die Integration in Strömungsrichtung erfolgt. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$\Delta p = p_2(0) - p_1(0) = -d_h \pi \frac{\lambda h}{8 A} (\bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 + \bar{\rho}_2 \bar{v}_2^2) + (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1) g h.$$

Um die Betrachtung zwischen den beiden Säulen zu vervollständigen, siehe Abbildung 17, wird die Bernoulli-Gleichung aufgestellt

$$\frac{1}{2} (\bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2) = \int_2^1 \frac{dp}{\bar{\rho}}. \quad (41)$$

Dabei ist die Breite einer Zelle mit zwei Säulen gleich  $b$ , und es herrscht von  $0$  bis  $\frac{b}{2}$  der Druck  $p_2$  zufolge der Dichte  $\bar{\rho}_2$  und von  $\frac{b}{2}$  bis  $b$  der (niedrigere) Druck  $p_1$ , siehe Abbildung 18.

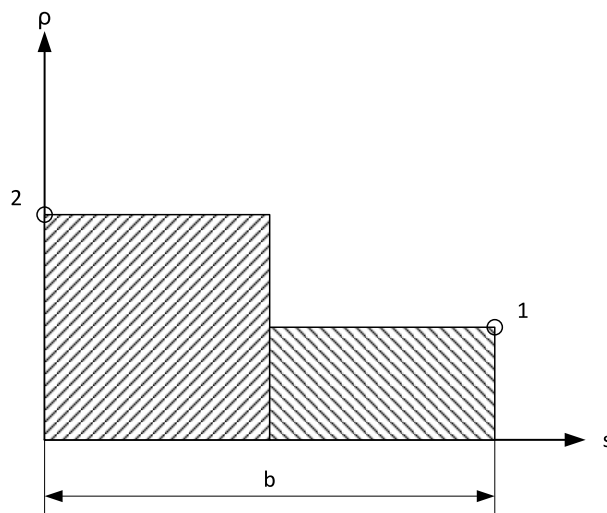


Abbildung 18: Druckverteilung am Boden zweier benachbarter Säulen

Da die beiden Säulen miteinander verbunden sind, kann man näherungsweise davon ausgehen, dass der Druck über die Zellenbreite linear abnimmt, siehe Abbildung 19, also

$$\frac{dp}{ds} = \textit{konst.} = \frac{\Delta p}{b}.$$

Daraus folgt

$$\int_2^1 \frac{dp}{\bar{\rho}} = \int_2^1 \frac{dp ds}{ds \bar{\rho}} = \frac{\Delta p}{b} \int_2^1 \frac{ds}{\bar{\rho}} \quad (42)$$

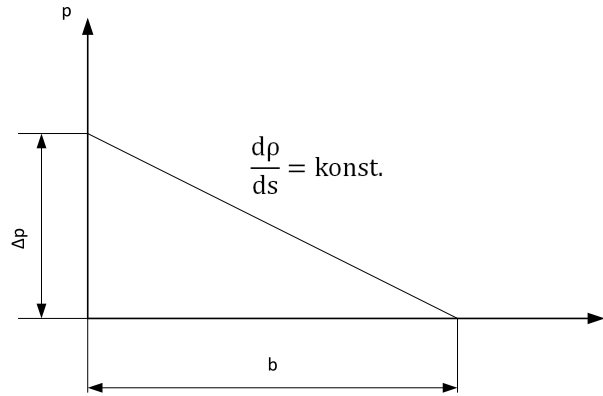


Abbildung 19: Linearer Druckverlauf zwischen zwei benachbarten Säulen

Der zweite Teil, aufgeteilt auf die beiden Säulen, ergibt

$$\int_2^1 \frac{ds}{\bar{\rho}} = \int_0^{b/2} \frac{ds}{\bar{\rho}_2} + \int_{b/2}^b \frac{ds}{\bar{\rho}_1} = \left( \frac{b}{2\bar{\rho}_1} + \frac{b}{2\bar{\rho}_2} \right).$$

Also gilt

$$\int_2^1 \frac{dp}{\bar{\rho}} = \frac{\Delta p}{b} \left( \frac{b}{2\bar{\rho}_1} + \frac{b}{2\bar{\rho}_2} \right) = \frac{\Delta p}{2} \left( \frac{1}{\bar{\rho}_1} + \frac{1}{\bar{\rho}_2} \right).$$

Somit wird die Bernoulli-Gleichung (41) zu

$$\frac{1}{2} (\bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2) = \frac{\Delta p}{2} \left( \frac{1}{\bar{\rho}_1} + \frac{1}{\bar{\rho}_2} \right). \quad (43)$$

Durch Umformung der Bernoulli-Gleichung und der Impulsbilanz nach  $\Delta p$  kann diese Variable eliminiert werden.

Gleichsetzen mit dem Ergebnis der Bernoulli-Gleichung für  $\Delta p$  ergibt

$$(\bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2) \left( \frac{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2} \right) = -d_h \pi \frac{\lambda}{8} h (\bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 + \bar{\rho}_2 \bar{v}_2^2) + (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1) g h. \quad (44)$$

Somit lautet das Gleichungssystem, das gelöst werden soll, insgesamt

$$\bar{v}_1 \bar{\rho}_1 - \bar{v}_2 \bar{\rho}_2 = 0 \quad (45)$$

$$\bar{\rho}_1 - \rho_l + n_1 \frac{V_B}{V_{ges}} \frac{h}{v_{rel} + \bar{v}_1} f_{ab} = 0 \quad (46)$$

$$\bar{\rho}_2 - \rho_l - n_2 \frac{V_B}{V_{ges}} \frac{h}{v_{rel} - \bar{v}_2} f_{ab} = 0 \quad (47)$$

$$\left(\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2\right) \left(\frac{\bar{\rho}_1 \bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2}\right) - d_h \pi \frac{\lambda}{8} \frac{h}{A} \left(\bar{\rho}_1 \bar{v}_1^2 + \bar{\rho}_2 \bar{v}_2^2\right) + (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1) g h = 0. \quad (48)$$

### 4.3 Numerische Lösung

Die numerische Lösung dieses nichtlinearen, gekoppelten Gleichungssystems erfolgte mittels Matlab. Folgende Werte wurden dafür verwendet und im Zuge einer Parametervariation untersucht:

Parameter	Symbol	Richtwert	Parametervariation
Höhe	h	6 m	1 – 10 m
Breite	b	32 mm	10 – 60 mm
Bohrungsradius	r	50 $\mu\text{m}$	50 – 100 $\mu\text{m}$
Überdruck in der Gaszufuhr	$\Delta p$	0,2 bar	0,1 – 1 bar

Tabelle 1: Abmessungen und Betriebsbedingungen der bestehenden Anlage sowie Wertebereich für die Parametervariation

Die Ergebnisse für die Ausgangswerte lauten

$$\bar{v}_1 \approx 5,417 \text{ cm/s}$$

$$\bar{\rho}_1 \approx 995,8 \text{ kg/m}^3$$

$$\bar{v}_2 \approx 5,415 \text{ cm/s}$$

$$\bar{\rho}_2 \approx 996,1 \text{ kg/m}^3.$$

In Tabelle 2 sind die Ergebnisse für die Geschwindigkeit  $v$ , die Dichte  $\rho$ , den volumetrischen Gasgehalt  $\varepsilon$  und die Reynolds-Zahl für die Richtwerte aus Tabelle 1 dargestellt. Dabei werden fünf unterschiedliche Kombinationen von Bohrungen in einer Säule auf- bzw. absteigender Flüssigkeit untersucht.

$n_1 : n_2$	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\bar{\rho}_1$	$\bar{\rho}_2$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$Re_1$	$Re_2$
	cm/s		kg/m <sup>3</sup>		%		[-]	
2:1	5,417	5,415	995,8	996,1	0,2402	0,2093	1619	1618
3:1	7,915	7,909	994,9	995,7	0,3281	0,2525	2365	2363
3:2	3,495	3,494	994,3	994,5	0,3898	0,3699	1044	1044
1:0	9,464	9,454	997,2	998,2	0,1036	0	2828	2825
2:0	13,15	13,13	996,4	998,2	0,1842	0	3930	3923

Tabelle 2: Ergebnisse für den Auslegungsfall und unterschiedliche Bohrungsanzahlen

In Tabelle 3 wurde nur der Fall 2:1 Bohrungen untersucht, wie er in der bestehenden Anlage vorliegt und die Richtwerte variiert.

Wie zu erwarten, ist die Gemischdichte in der aufsteigenden Säule aufgrund der höheren Anzahl an Gasblasen etwas geringer. Aus demselben Grund unterscheiden sich auch die Geschwindigkeiten in beiden Säulen geringfügig von einander. In einer aufsteigenden Säule muss das Gemisch

	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	$\bar{\rho}_1$	$\bar{\rho}_2$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$Re_1$	$Re_2$
	cm/s		kg/m <sup>3</sup>		%		[-]	
2 r	6,316	6,314	988,9	989,3	0,9280	0,8922	1887	1887
2 $\Delta p$	5,696	5,695	995,0	995,3	0,3188	0,2863	1702	1702
2 h	5,258	5,256	996,1	996,4	0,2091	0,1791	1571	1571
2 b	5,415	5,414	997,0	997,0	0,1201	0,1046	2158	2157
2 r & 2 $\Delta p$	6,404	6,402	985,8	986,2	1,241	1,205	1914	1913

Tabelle 3: Ergebnisse für den Auslegungsfall  $n_1 : n_2 = 2 : 1$  und unterschiedliche Parameter

etwas schneller fließen, da der Flüssigkeitsanteil geringer ist als in einer absteigenden Säule. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Parameterstudie im Detail diskutiert. Die Reihenfolge der Betrachtung erfolgt nach dem Einfluss, den die variierten Größen auf die untersuchte Zielgröße, die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit, ausüben.

Entscheidend für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist die Gasbeladung der Säulen. Dabei ist jedoch weniger der Gasgehalt einer einzelnen Säule ausschlaggebend, sondern das Verhältnis zwischen der Gasbeladung einer Säule aufsteigender und einer Säule absteigender Flüssigkeit. Das liegt vermutlich an der bremsenden Wirkung der Gasblasen in einer Säule absteigender Flüssigkeit, in der sie entgegen der Strömungsrichtung der Flüssigkeit aufsteigen. Dadurch wird der Gesamtvolumenstrom in der absteigenden Säule und damit die Geschwindigkeit in der gesamten Anlage begrenzt.

#### 4.3.1 Düsenradius

Der Einfluss des Düsenradius kann durch einfache Überlegungen über den Gasgehalt in einer Säule anschaulich gemacht werden. Der Gasgehalt ist abhängig vom Gasvolumenstrom durch die Düsen

$$\dot{V} = v \cdot A.$$

Dabei ist  $v$  die Geschwindigkeit, mit der das Gas durch die Düsenöffnung strömt gegeben durch Gleichung (7)

$$v = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \cdot \zeta}}.$$

Hier ist  $\Delta p$  der Überdruck in der Gaszufuhr gegenüber dem Reaktorboden,  $\rho$  die Dichte des strömenden Mediums und  $\zeta$  die Druckverlustziffer der Bohrung.

Die Querschnittsfläche der Düse ist

$$A = r^2 \pi,$$

sodass der Einfluss des Düsenradius bereits ersichtlich wird: Er fließt quadratisch und damit

stärker als die anderen variierten Parameter, hier namentlich der Überdruck in der Gaszufuhr, in den Gasvolumenstrom ein und beeinflusst somit den Gasgehalt in einer Säule am stärksten. Abbildungen 20 zeigt die Auswirkung einer Änderung des Bohrungsradius auf die Fließgeschwindigkeit des Gemisches.

Gut erkennbar ist die deutlich höhere Geschwindigkeit, wenn die Säule absteigender Flüssigkeit unbegast bleibt und die bremsende Wirkung der Gasblasen also wegfällt. Dabei wirkt es, als wären die Geschwindigkeiten in den Säulen identisch. Auf der rechten Seite ist deshalb die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen aufsteigender und absteigender Säule abgebildet. Die Auf- und Abstiegsgeschwindigkeit unterscheiden sich also geringfügig voneinander. Abbildung 22 unterstreicht, dass die Betrachtung zweier Säulen im Verhältnis zueinander wesentlich ist. Wäre der Gasgehalt in einer einzelnen Säule entscheidend, so müsste demnach die Konfiguration 3:2 Bohrungen die höchste Geschwindigkeit aufweisen. In diesem Fall tritt jedoch die geringste Geschwindigkeit von allen untersuchten Fällen auf. Umgekehrt ist der Gasgehalt in den beiden Fällen mit der höchsten Geschwindigkeit am geringsten. In diesen Fällen ist die Verweilzeit einer einzelnen Gasblase im Reaktor aufgrund der größeren Geschwindigkeit der Flüssigkeit und damit der größeren Absolutgeschwindigkeit der aufsteigenden Gasblase geringer und somit auch der Gasgehalt.

Zur Untersuchung der Strömungsverhältnisse ist in Abbildung 23 der Verlauf der Reynolds-Zahl über dem Bohrungsradius aufgetragen. In zwei Fällen liegen eindeutig turbulente Strömungsverhältnisse vor, nämlich dann, wenn eine Säule unbegast bleibt, während in den beiden Fällen, in denen der Unterschied des Gasgehalts in den beiden Säulen gering ausfällt, also bei der Konfiguration 2:1 und 3:2, laminare Strömungsverhältnisse vorliegen.



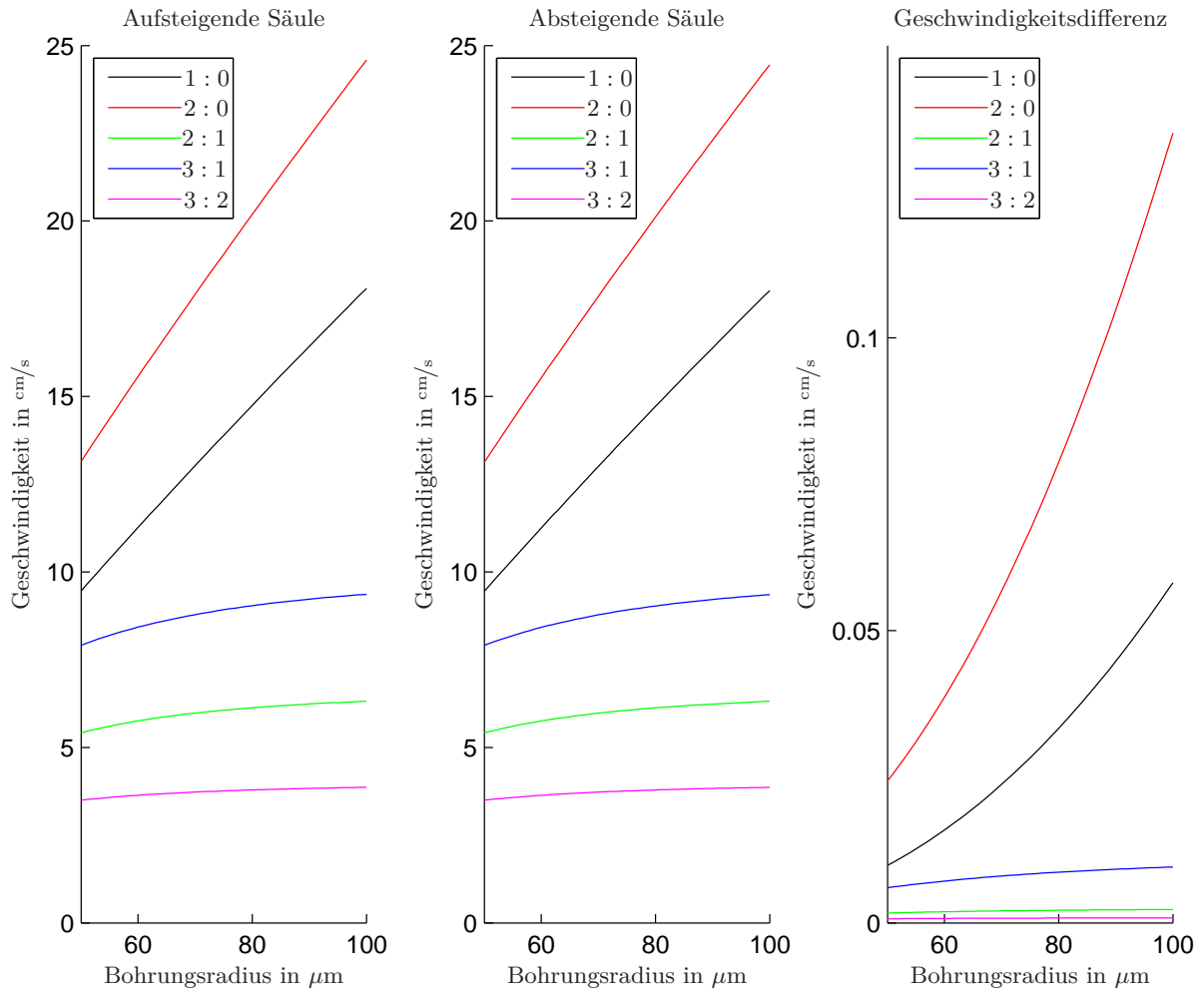


Abbildung 20: Einfluss des Düsenradius auf die Geschwindigkeit bei 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung, 6 m Säulenhöhe und 3 cm Säulenbreite. Auf der linken Seite ist die Geschwindigkeit in der aufsteigenden Säule dargestellt, während auf der rechten Seite die Differenz der Geschwindigkeit zwischen auf- und absteigender Säule abgebildet ist.

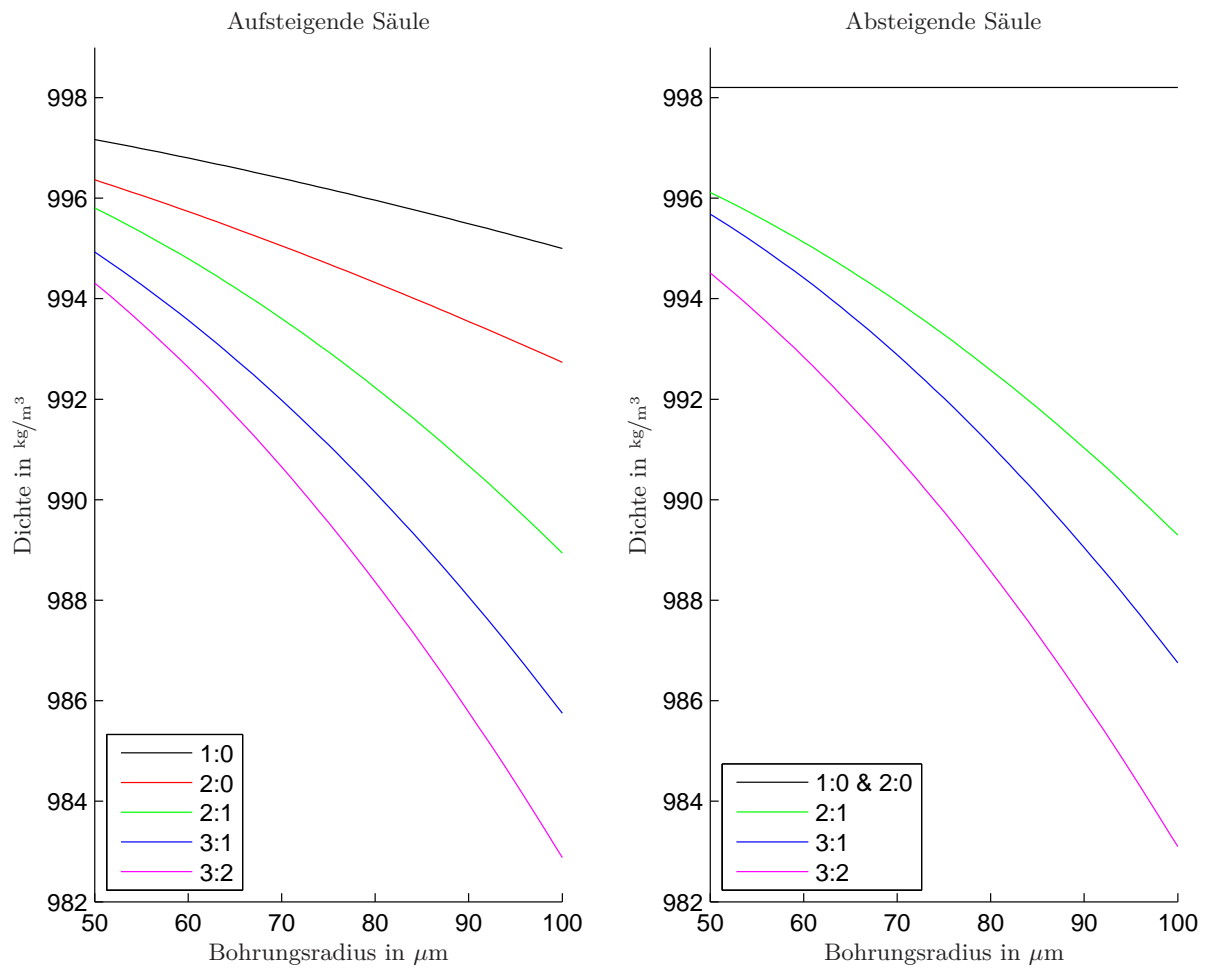


Abbildung 21: Einfluss des Düsenradius auf die Gemischdichte bei 0,2bar Überdruck in der Gasversorgung, 6 m Säulenhöhe und 3 cm Säulenbreite

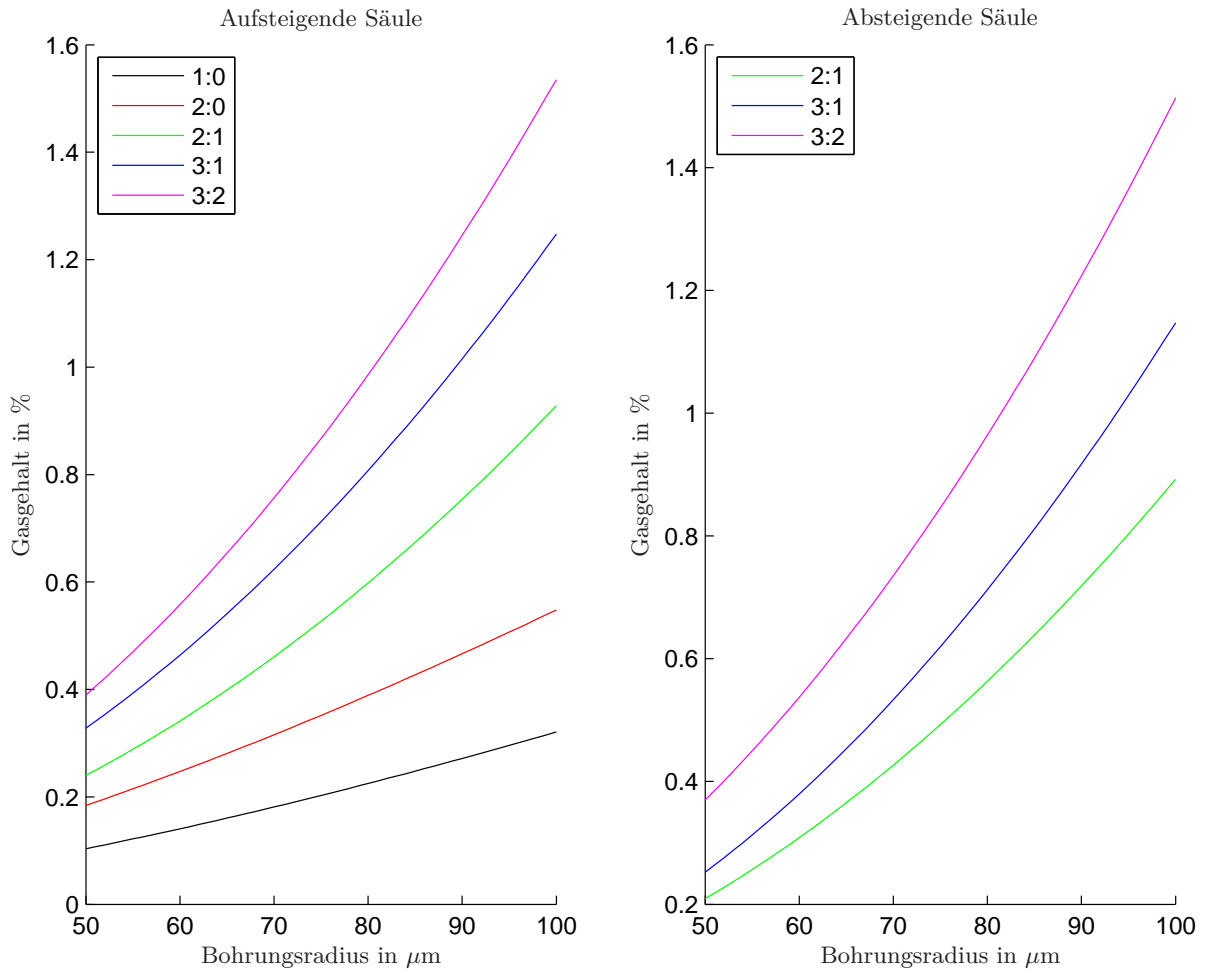


Abbildung 22: Einfluss des Düsenradius auf den Gasgehalt bei 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung, 6 m Säulenhöhe und 3 cm Säulenbreite

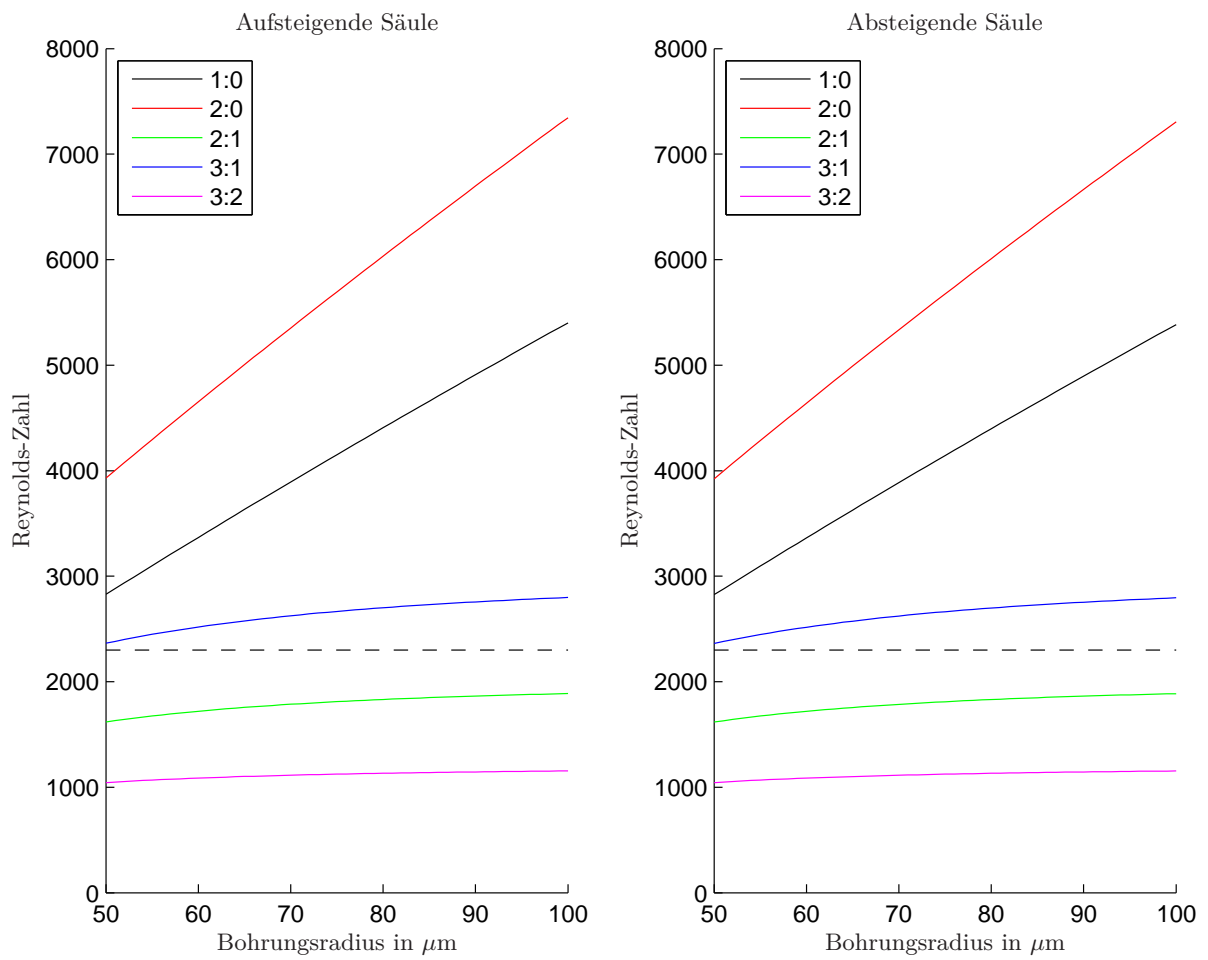


Abbildung 23: Einfluss des Düsenradius auf die Reynolds-Zahl bei 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung, 6 m Säulenhöhe und 3 cm Säulenbreite

### 4.3.2 Druck

Den nächstgrößeren Einfluss hat der Überdruck in der Gaszufuhr. Es ist nach Gleichung 7 der zweite untersuchte Parameter, der den Gasgehalt über den Gasvolumenstrom beeinflusst. Aus dem Verlauf der Geschwindigkeit in Abbildung 24 ist der Einfluss in Form einer Wurzelfunktion aus den abnehmenden Grenzzuwächsen erkennbar. Auffallend ist der wesentlich steilere Verlauf in jenen Fällen, in denen turbulente Strömungsverhältnisse auftreten, also bei 1:0 und 2:0 Düsen. Anzumerken ist auch, dass zwei Linienzüge scheinbar erst mitten im Diagramm beginnen. Das liegt daran, dass die berechneten Ergebnisse im Übergangsbereich einer laminaren zu einer turbulenten Strömung liegen, weshalb die Darstellung für diesen Bereich ausgespart wurde. Überhaupt sind die berechneten Ergebnisse bei geringem Überdruck kritisch zu betrachten, da ein gewisser Überdruck notwendig ist, um den Druckverlust der Düsen zu überwinden. Abbildung 25 zeigt die Auswirkungen eines geänderten Überdrucks in der Gaszufuhr auf die Gemischdichte. Naheliegenderweise ist die Dichte umso geringer, je mehr Düsen eine Säule begasen. Aber auch die Geschwindigkeit des Gemisches spielt eine Rolle, da sie in die Blasenaufstiegsgeschwindigkeit einfließt und damit die Blasenverweilzeit im Reaktor beeinflusst. Daher ist im Fall 2:0 Düsen die Dichte in der aufsteigenden Säule höher als im Fall 2:1, weil die Gasblasen den Reaktor schneller verlassen und sich somit stets weniger Gasblasen gleichzeitig in der Säule aufhalten. Für die absteigende Säule gilt auch hier, dass in den Fällen 1:0 und 2:0 die Dichte konstant jener von Wasser entspricht, weil gar kein Gemisch, sondern nur Wasser vorliegt. Abbildung 26 unterstreicht das zuvor Gesagte: Je niedriger der Gasgehalt, umso höher die Gemischdichte in der Säule. Der Gasgehalt ist in erster Linie von der Anzahl der Düsen abhängig und darüber hinaus von der Blasenverweilzeit, welche durch die Blasenaufstiegsgeschwindigkeit und daher durch die Flüssigkeitsgeschwindigkeit bestimmt wird. Abschließend kann aus Abbildung 27 die vorliegende Strömungsform abgelesen werden. In den beiden Fällen einer unbegasteten Säule absteigender Flüssigkeit und dem Fall von 3:1 Düsen treten turbulente Verhältnisse auf, in den anderen beiden Fällen ist die Strömung laminar.

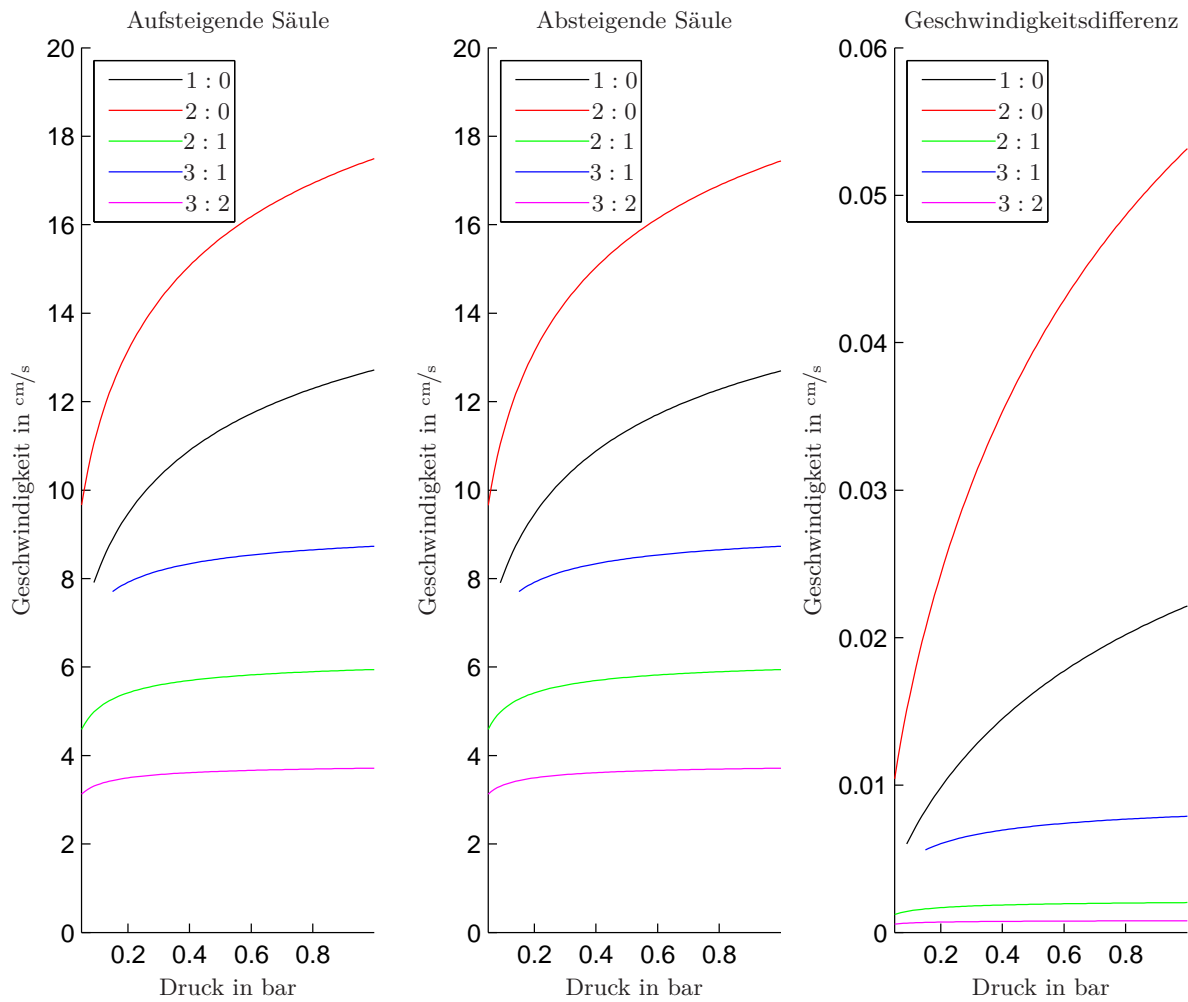


Abbildung 24: Einfluss des Überdrucks in der Gaszufuhr auf die Geschwindigkeit bei  $50 \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 6 m Säulenhöhe und 3 cm Säulenbreite. Auf der linken Seite ist die Geschwindigkeit in der aufsteigenden Säule dargestellt, während auf der rechten Seite die Differenz der Geschwindigkeit zwischen auf- und absteigender Säule abgebildet ist.

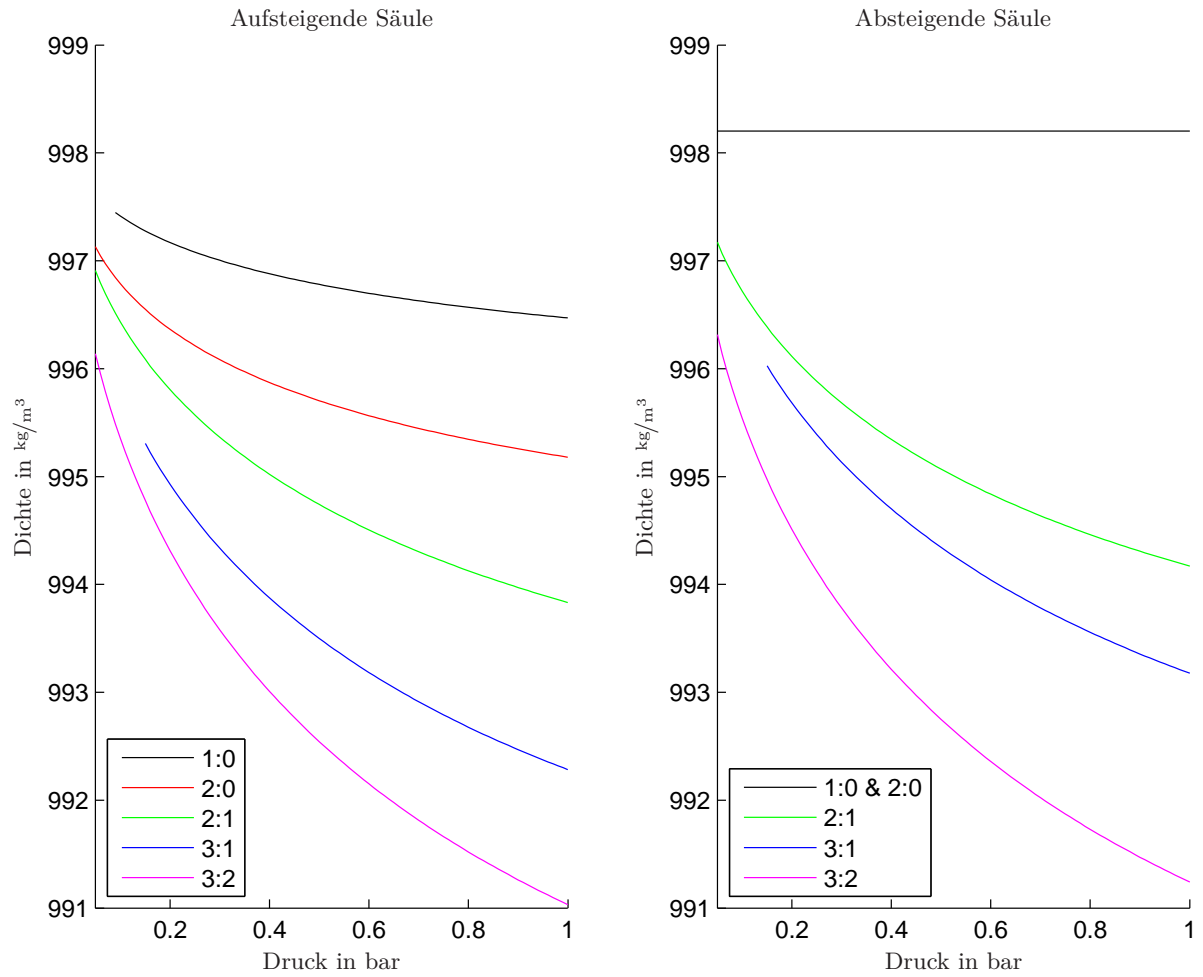


Abbildung 25: Einfluss des Überdrucks in der Gaszufuhr auf die Gemischdichte bei  $50 \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 6 m Säulenhöhe und 3 cm Säulenbreite

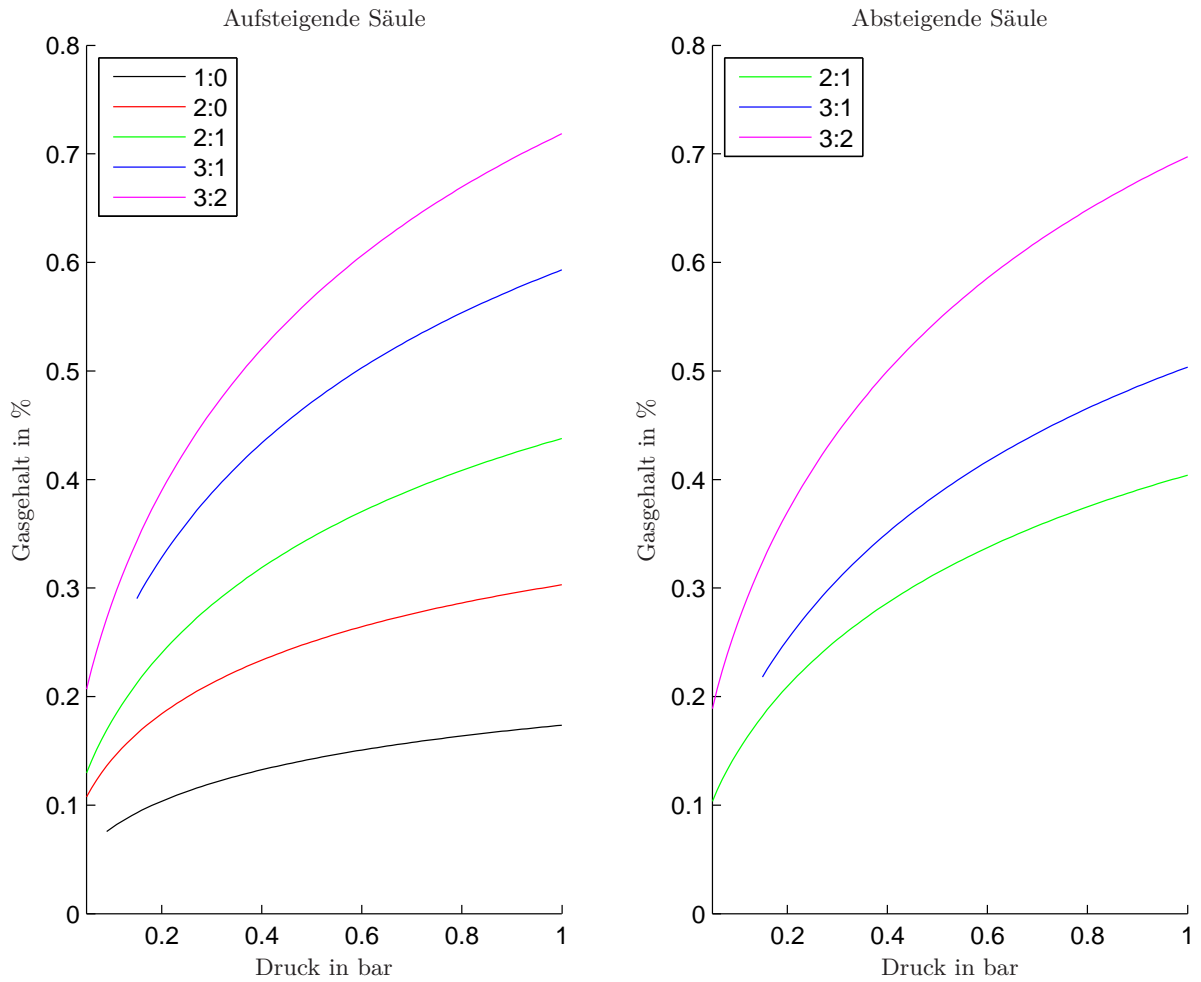


Abbildung 26: Einfluss des Überdrucks in der Gaszufuhr auf den Gasgehalt bei  $50\ \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 6 m Säulenhöhe und 3 cm Säulenbreite



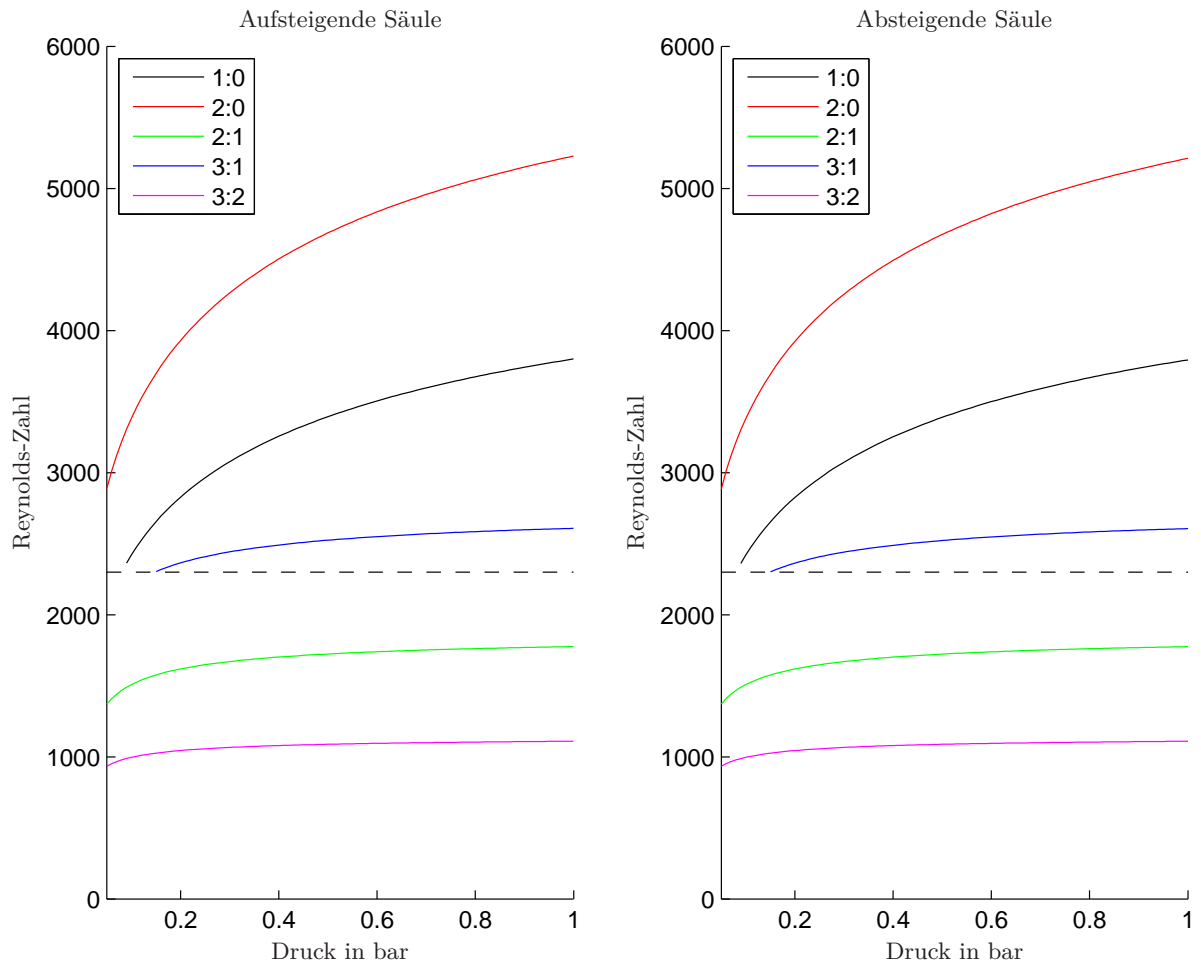


Abbildung 27: Einfluss des Überdrucks in der Gaszufuhr auf die Reynolds-Zahl bei  $50 \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 6 m Säulenhöhe und 3 cm Säulenbreite

### 4.3.3 Säulenhöhe

Die Säulenhöhe beeinflusst den Gasgehalt indirekt über das veränderte Volumen. In einer Säule ruhender Flüssigkeit hätte sie gar keinen Einfluss, da sich der Gasgehalt nicht ändern würde. Weil sich die Flüssigkeit aber bewegt, hat die Säulenhöhe über die Geschwindigkeit der Flüssigkeit eine Auswirkung auf die Gasblasenaufstiegsgeschwindigkeit und somit den Gasgehalt. In höheren Säulen steigt die Flüssigkeit insgesamt langsamer auf, wie in Abbildung 28 dargestellt. Zurückzuführen ist dies auf die aufgrund der längeren Wegstrecke höhere Reibleistung an den Säulenwänden und den zufolge der höheren Flüssigkeitssäule größeren hydrostatischen Druck. Daraus resultiert eine insgesamt größer werdende Gemischdichte mit steigender Säulenhöhe, wie in Abbildung 29 dargestellt, was mit einem aufgrund der abnehmenden Geschwindigkeit zunehmenden Gasgehalt, siehe Abbildung 30, korreliert. Auch hier treten wieder in den beiden Fällen 1:0, 2:0 und 3:1 Düsen turbulente Strömungsverhältnisse auf, während in den beiden Fällen 2:1 und 3:2 die Strömung laminar ist.

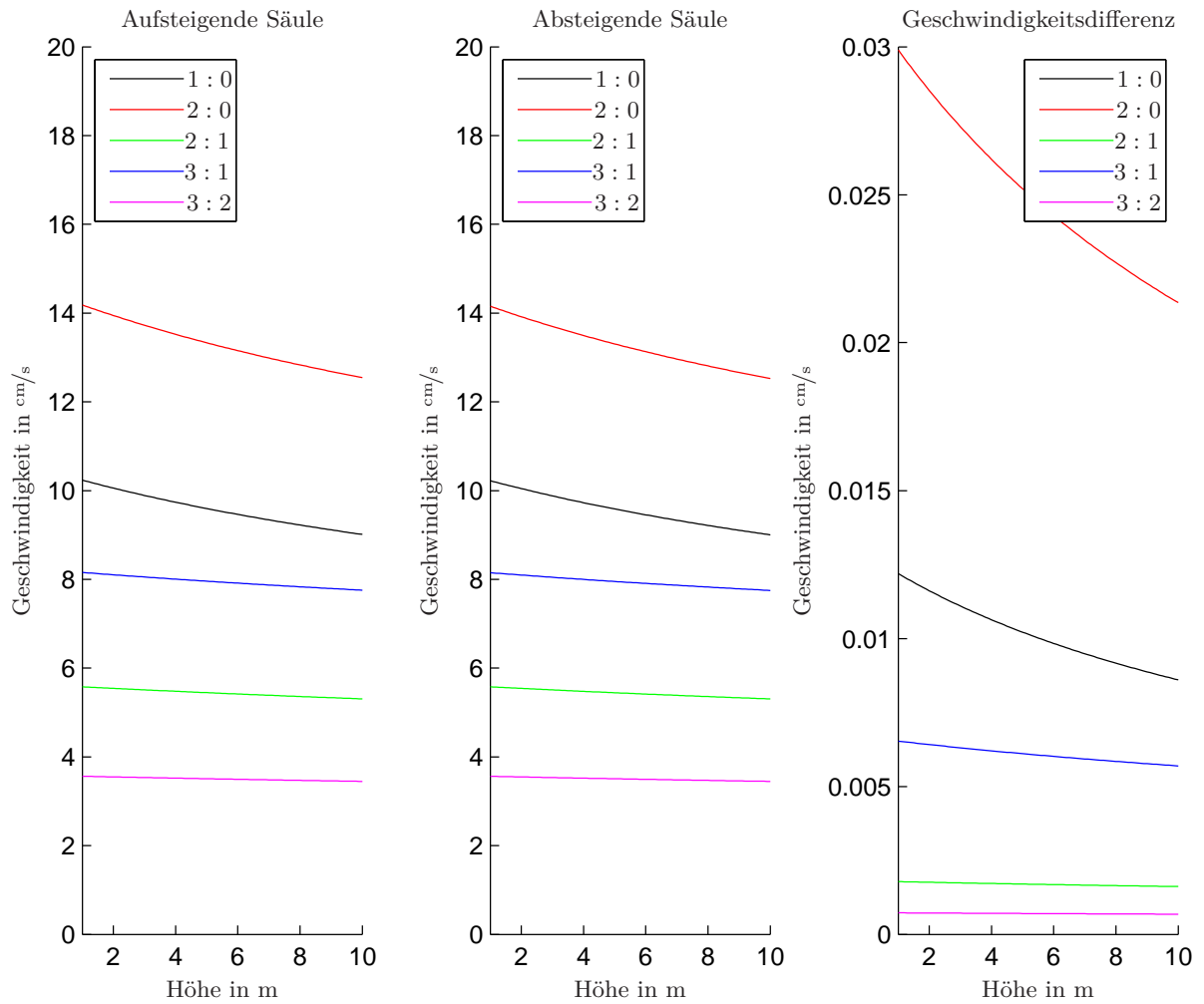


Abbildung 28: Einfluss der Säulenhöhe auf die Geschwindigkeit bei  $50\ \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung und 3 cm Säulenbreite. Auf der linken Seite ist die Geschwindigkeit in der aufsteigenden Säule dargestellt, während auf der rechten Seite die Differenz der Geschwindigkeit zwischen auf- und absteigender Säule abgebildet ist.

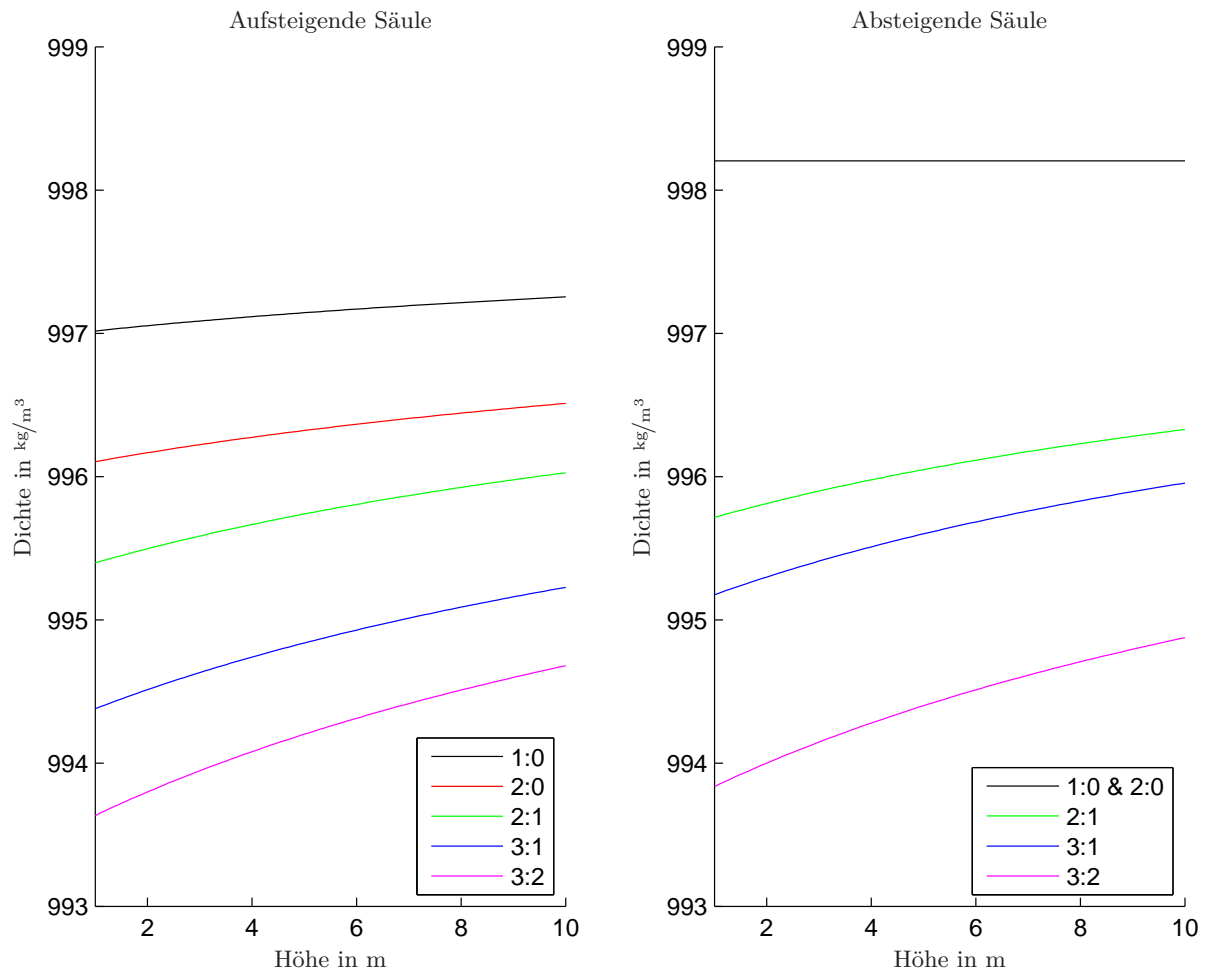


Abbildung 29: Einfluss der Säulenhöhe auf die Gemischdichte bei  $50 \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung und 3 cm Säulenbreite

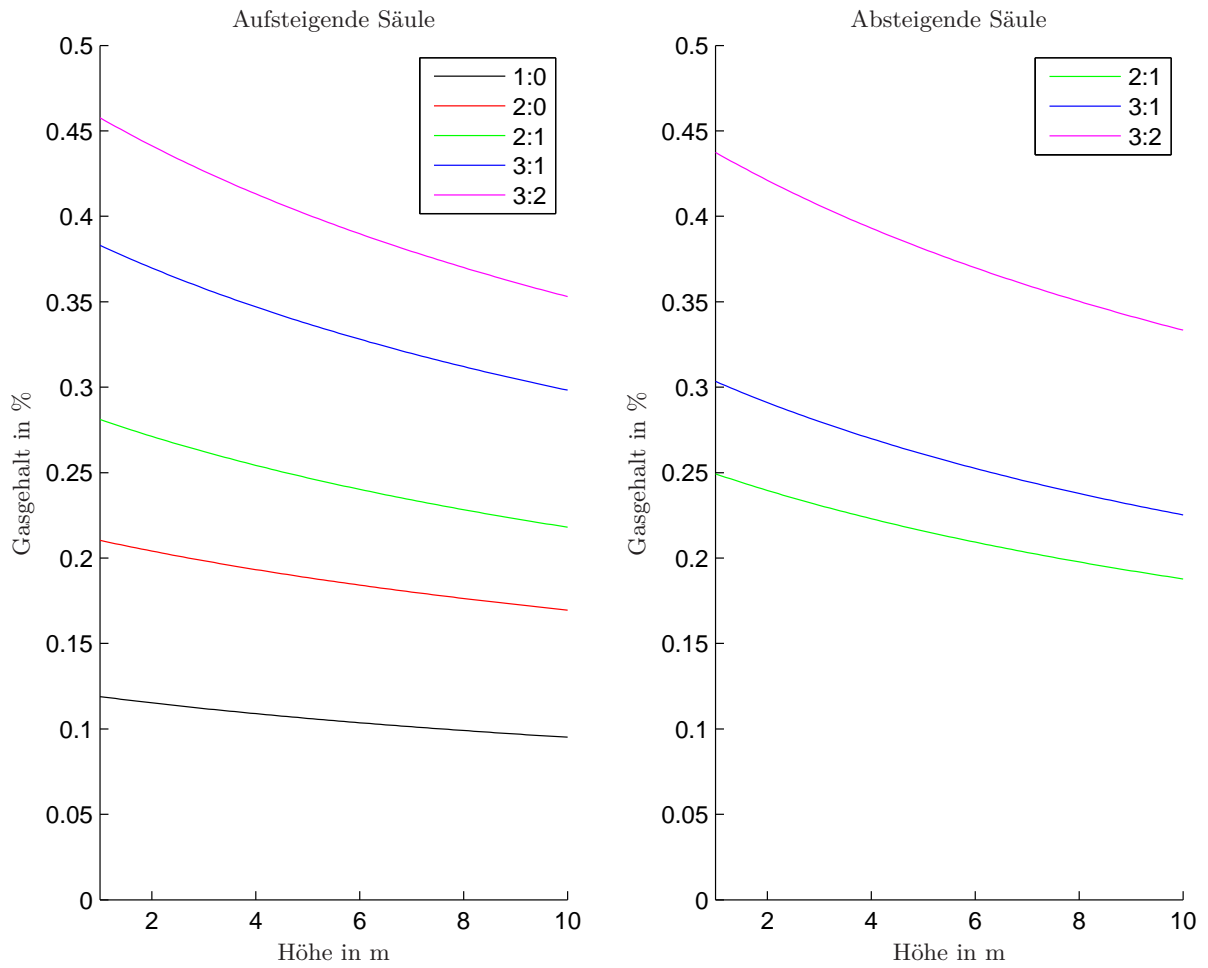


Abbildung 30: Einfluss der Säulenhöhe auf den Gasgehalt bei  $50\ \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung und 3 cm Säulenbreite

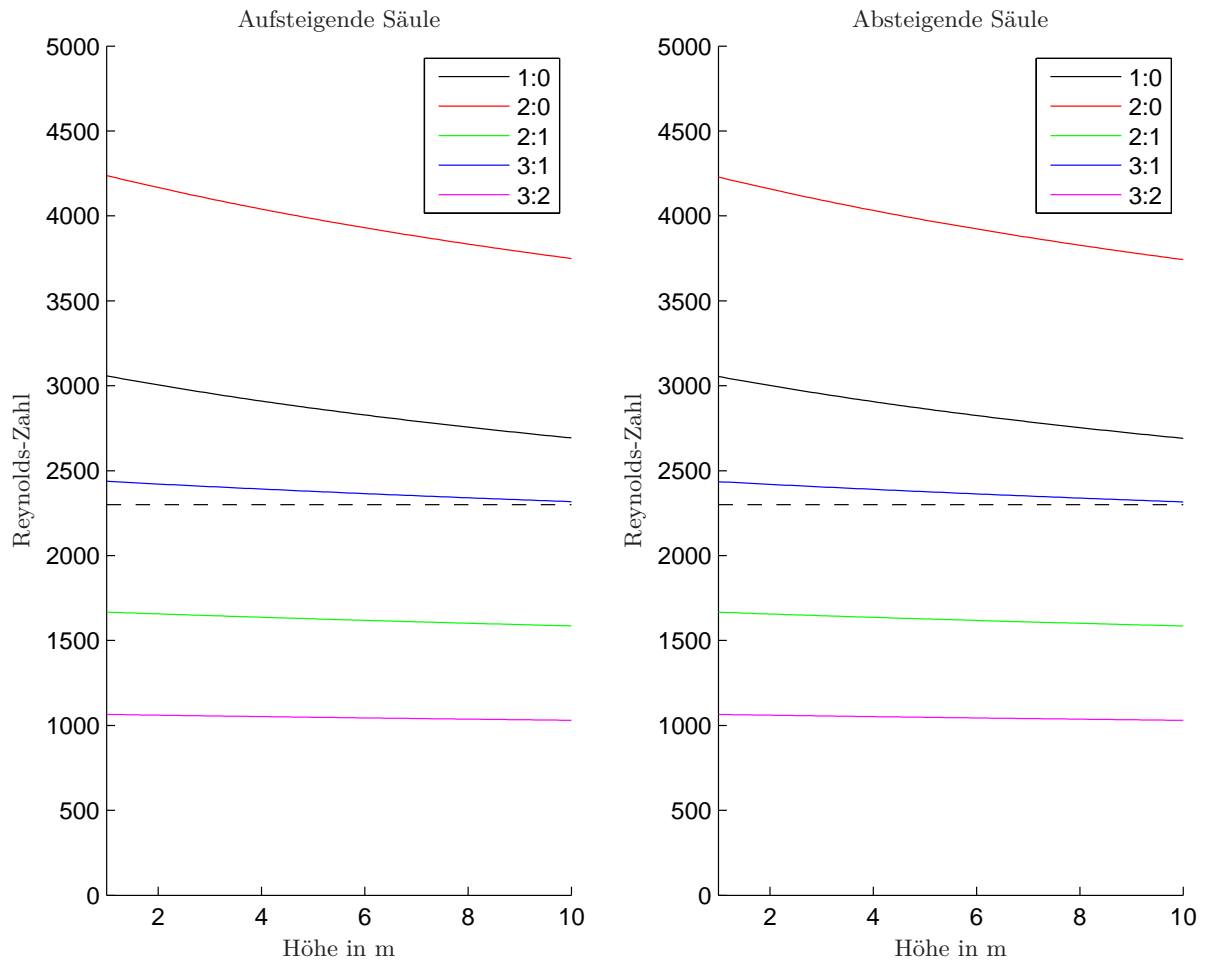


Abbildung 31: Einfluss der Säulenhöhe auf die Reynolds-Zahl bei  $50 \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung und 3 cm Säulenbreite

#### 4.3.4 Säulenbreite

Anders als die Säulenhöhe führt eine Variation der Breite bzw. des Querschnitts bereits in einer ruhenden Flüssigkeitssäule zu einer Veränderung des Gasgehalts. Das Gesamtvolumen vergrößert sich in diesem Fall nämlich ohne die Wegstrecke, die eine Gasblase zurücklegt, zu vergrößern. Dadurch bleibt auch die Blasenverweilzeit gleich, die ausschlaggebend für den Gasgehalt ist. In Abbildung 34 sieht man deutlich die Abnahme des Gasgehalts bei einer Zunahme des Querschnitts, was die Abnahme der Geschwindigkeit in Abbildung 32 bewirkt. Die Unterbrechung im Linienzug für den Fall 3:1 resultiert aus dem Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung. In Abbildung 35 ist zu erkennen, dass es sich zunächst um eine laminare Strömung handelt, die nach einem Übergangsbereich in eine turbulente Strömung umschlägt. Aus Abbildung 32 sieht man schön, dass die Geschwindigkeit im laminaren Teil höher ist als im turbulenten. Außerdem erkennt man in Abbildung 32, dass die Differenzen der Geschwindigkeiten zwischen aufsteigender und absteigender Flüssigkeit mit abnehmender Geschwindigkeit auch abnehmen: Je langsamer die Flüssigkeit fließt, umso geringer werden die Unterschiede ihrer Fließgeschwindigkeit in benachbarten Säulen. Die Dichte verhält sich erwartungsgemäß so, dass sie mit steigender Säulenbreite zunimmt und sich dem Grenzwert der Dichte von Wasser annähert, siehe Abbildung 33.

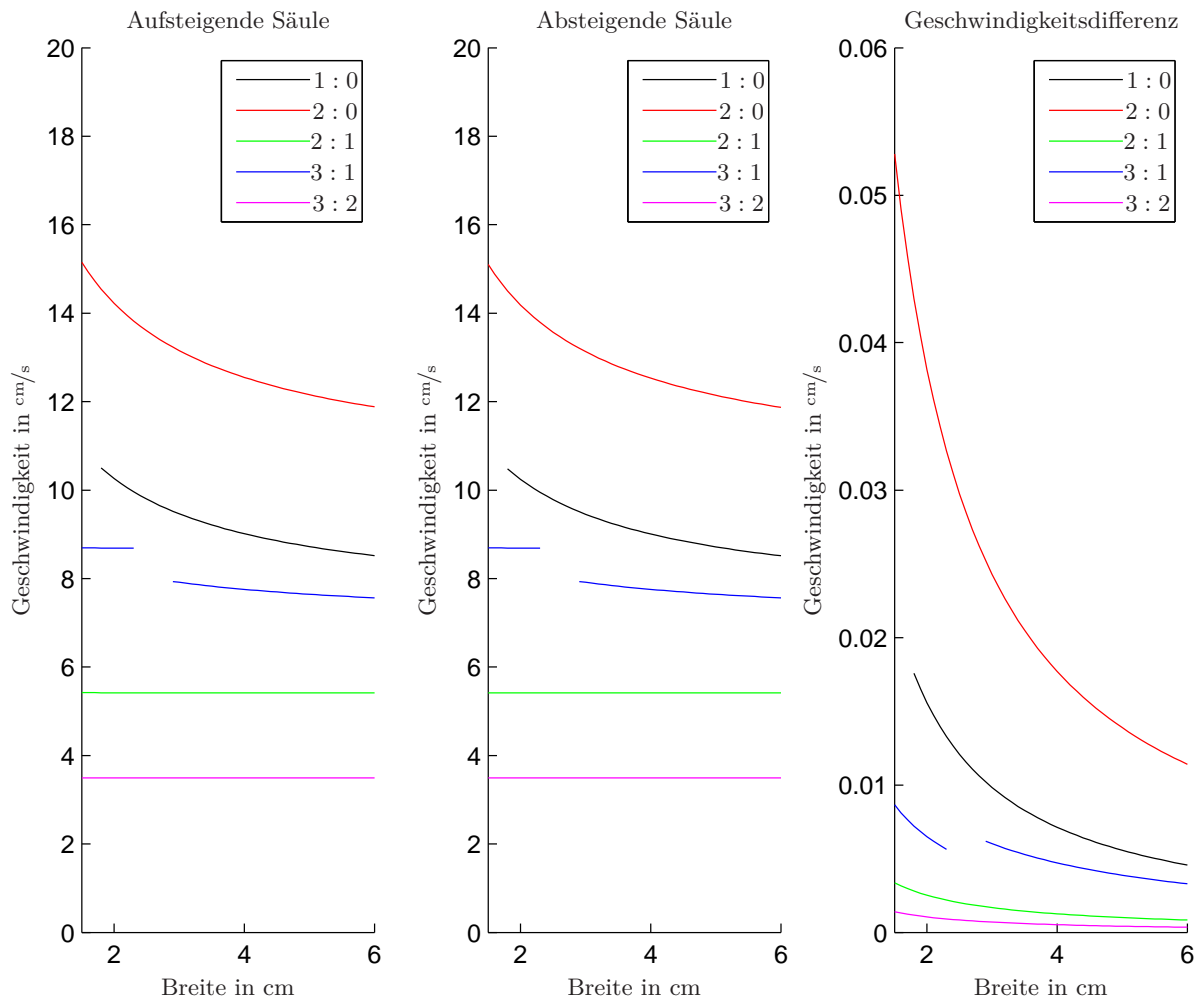


Abbildung 32: Einfluss der Säulenbreite auf die Geschwindigkeit bei  $50\ \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung und 6 m Säulenhöhe. Auf der linken Seite ist die Geschwindigkeit in der aufsteigenden Säule dargestellt, während auf der rechten Seite die Differenz der Geschwindigkeit zwischen auf- und absteigender Säule abgebildet ist.



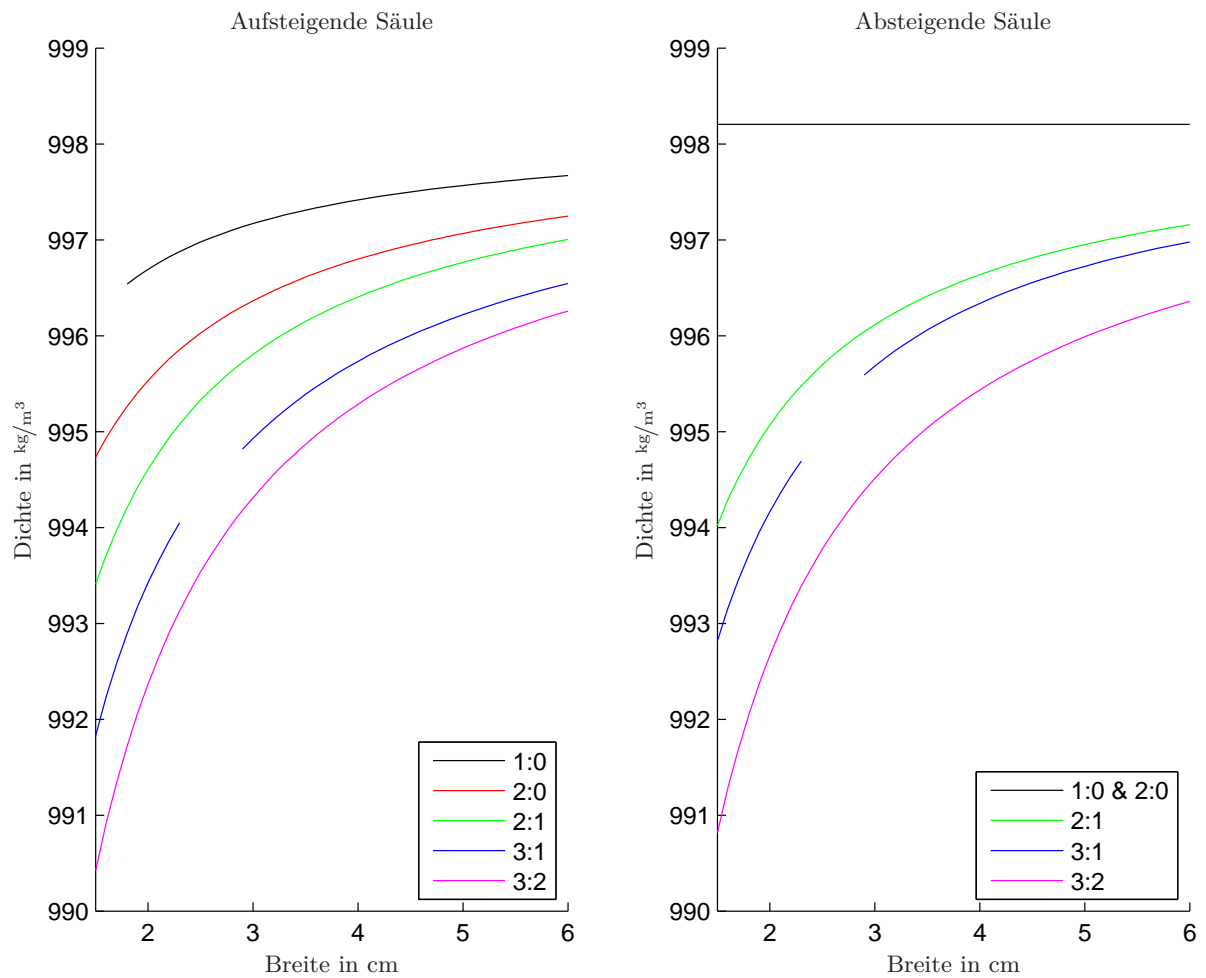


Abbildung 33: Einfluss der Säulenbreite auf die Gemischdichte bei  $50\ \mu\text{m}$  Bohrungsradius,  $0,2\ \text{bar}$  Überdruck in der Gasversorgung und  $6\ \text{m}$  Säulenhöhe

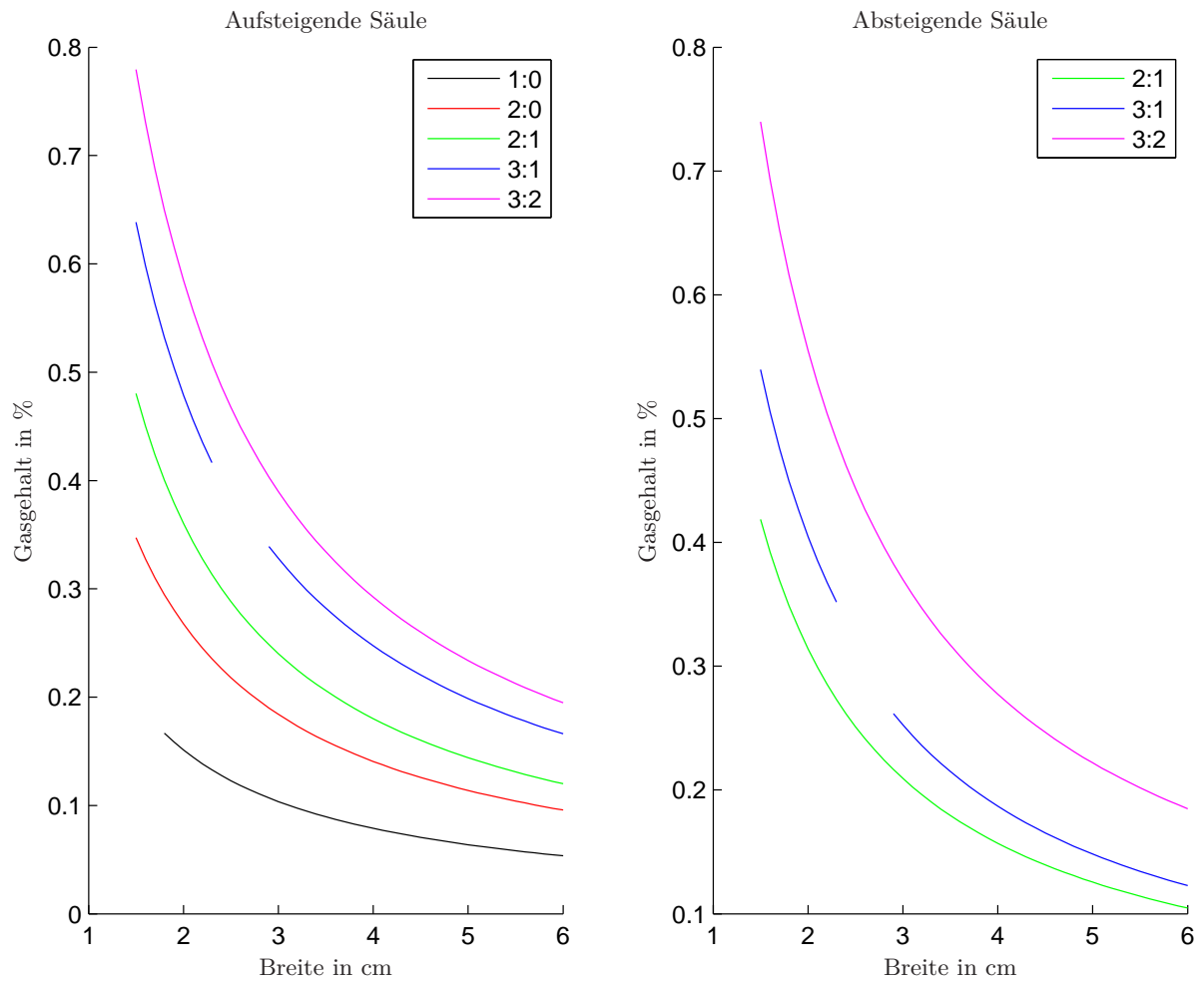


Abbildung 34: Einfluss der Säulenbreite auf den Gasgehalt bei  $50\ \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung und 6 m Säulenhöhe

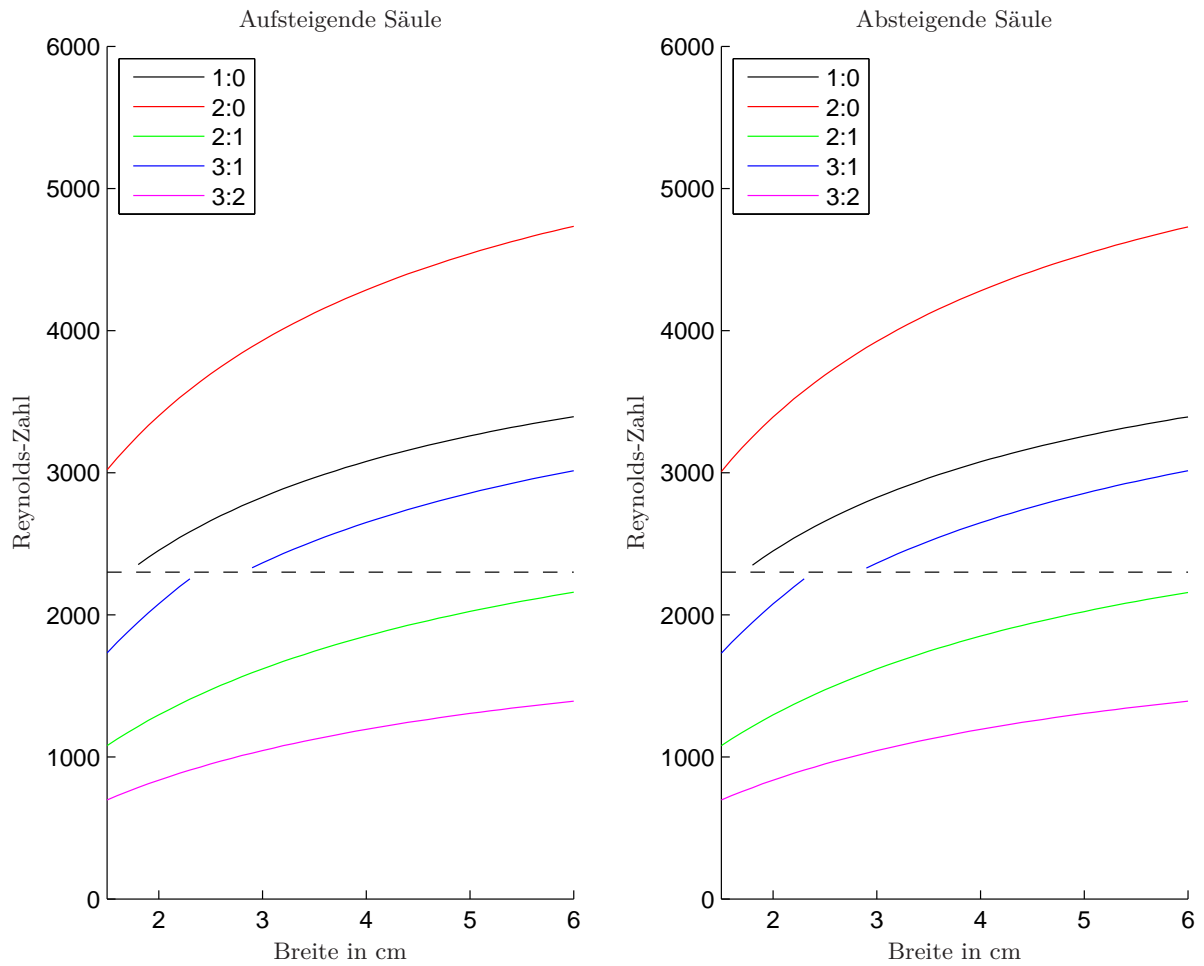


Abbildung 35: Einfluss der Säulenbreite auf die Reynolds-Zahl bei  $50\ \mu\text{m}$  Bohrungsradius, 0,2 bar Überdruck in der Gasversorgung und 6 m Säulenhöhe

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich die Strömungsgeschwindigkeit über die variierten Parameterbereiche stabil verhält, wenn beide Säulen begast werden. Starke Änderungen der Geschwindigkeit gibt es fast nur, wenn die Säule absteigender Flüssigkeit unbegast bleibt. In Hinblick auf die Strömungsform ist dies insofern bemerkenswert, da nur diese beiden Fälle stets im turbulenten Bereich betrieben werden. Auch im Fall von 3 zu 1 Bohrungen liegt zumeist eine turbulente Strömung vor, einzige Ausnahme ist der Fall einer besonders schmalen Säule. In Hinblick auf eine eventuelle Herbeiführung turbulenter Strömungsverhältnisse ist es also notwendig, wenn nicht komplett auf die Begasung der Hälfte der Säulen verzichtet werden soll, die Anzahl der Bohrungen in einer Säule aufsteigender Flüssigkeit zu erhöhen. Den stärksten Einfluss hatten dabei, wie in der theoretischen Betrachtung ausführlich erläutert, der Bohrungsradius gefolgt vom Überdruck in der Gaszufuhr, weil diese beiden Größen den Gasgehalt direkt über den Gasdurchsatz beeinflussen und die Geschwindigkeit erhöhen. Sowohl die Höhe als auch die Säulenbreite haben einen umgekehrten Einfluss, sie verringern die Geschwindigkeit, wenn auch in weniger starkem Ausmaß, wie die anderen beiden untersuchten Parameter. Somit ist ersichtlich, welche Kombinationen von Parametern einen unveränderten Betrieb in Hinblick auf die Geschwindigkeit erlauben, nämlich solche, bei denen zu erwarten ist, dass sich die auftretenden Einflüsse gegenseitig aufheben.

## 5 Zusammenfassung

Die Aufgabe dieser Diplomarbeit war die Erstellung eines mathematischen Modells zur Berechnung der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in einem Photobioreaktor, der nach dem Prinzip einer Airliftpumpe mit internem Umlauf betrieben wird. Die Erstellung des Modells umfasst die Bearbeitung folgender drei Problemstellungen:

1. Die Entstehung einer Gasblase an einer Düse im Flüssigkeitsbad
2. Das Aufsteigen einer Gasblase bzw. eines Blasenschwarms in einer Flüssigkeitssäule
3. Die sich einstellende Flüssigkeitsströmung infolge der Gasblasenströmung.

Im ersten Teil wurde das grundsätzlich unterschiedliche Verhalten der Gasblasenentstehung in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit des Gases in der Bohrung erörtert.

Der zweite Teil behandelt das Aufsteigen einer Gasblase abhängig von ihrer Form und Größe in einer Flüssigkeit.

Aufbauend auf diesen Erkenntnissen wird im dritten Teil basierend auf der Massen- und Impulsbilanz unter der Annahme eines Gas-Flüssigkeitsgemisches als Einphasenströmung ein Gleichungssystem aufgestellt, mit dessen Hilfe die sich einstellende Zirkulationsgeschwindigkeit der Flüssigkeit berechnet wird.

Da es Ziel der Arbeit war, Aussagen über die sich einstellende Flüssigkeitsströmung im Reaktor zu treffen, blieben verfahrenstechnisch-chemische Prozesse unberücksichtigt. Es soll daher erwähnt werden, dass bei der Auslegung einer derartigen Anlage zwischen den optimalen Betriebsverhältnissen für das Induzieren der Flüssigkeitsströmung einerseits und andererseits der Dispersion von Kohlendioxid in der Flüssigkeit abgewogen werden muss. Die Ergebnisse und Erkenntnisse des Modells können dennoch einen wertvollen Beitrag für die Auslegung und den Betrieb einer derartigen Anlage liefern, da der Stoffübergang auch maßgeblich vom Strömungsregime abhängt und man in Hinblick darauf eventuell gezielt turbulente Strömungsverhältnisse herbeiführen möchte.

Ebenso blieben instationäre Vorgänge, wie sie üblicherweise beim Anfahren einer Anlage auftreten, unberücksichtigt, sodass sich die Aussagen auf den stationären Betrieb beschränken.

Erwartungsgemäß zeigt das Modell eine starke Abhängigkeit der Fließgeschwindigkeit vom Gasgehalt und damit jenen Parametern, die diesen am meisten beeinflussen (Anzahl und Größe der Düsenbohrungen sowie dem Überdruck in der Gaszufuhr). Die berechnete Fließgeschwindigkeit von ungefähr  $5,4 \text{ cm/s}$  liegt nahe dem Wert, der als Zielgröße angegeben wurde.

## Literatur

- [1] A. Bals. „Grundlagen der Blasenbildung an Einzelporen und Lochplatten“. In: *Chemie Ingenieur Technik* 74 (2002), S. 337–344.
- [2] H. Brauer. *Grundlagen der Einphasen- und Mehrphasenströmungen*. Sauerländer, 1971.
- [3] A. Buck. *Rohstoff Mikroalge: Innovative Technologien zur Kraftstoffgewinnung*. Diplomica Verlag, 2013.
- [4] R. Clift, J. R. Grace und M. E. Weber. *Bubbles, drops, and particles*. New York, N.Y., [u.a.]: Academic Press, 1978.
- [5] J. Grace, T. Wairegi und T. Nguyen. „Shapes and velocities of single drops and bubbles moving freely through immiscible liquids“. In: *Trans Instn Chem Engrs* 54 (1976), S. 167–173.
- [6] M. Kraume. *Transportvorgänge in der Verfahrenstechnik: Grundlagen und apparative Umsetzungen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [7] H. Oertel. *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre; Grundlagen und Phänomene*. 13., Überarb. Aufl. Springer Vieweg, 2012.
- [8] N. Rübiger. „Blasenbildung in ruhenden und bewegten newtonschen Flüssigkeiten“. Dissertation. Technische Universität Clausthal, 1982.
- [9] N. Rübiger und M. Schlüter. „Bildung und Bewegung von Tropfen und Blasen“. In: *VDI-Wärmeatlas* (2013), S. 1413–1428.
- [10] E. Sartori. „A critical review on equations employed for the calculation of the evaporation rate from free water surfaces“. In: *Solar Energy* 68 (2000), S. 77–89.
- [11] A. Sokolichin. „Mathematische Modellbildung und numerische Simulation von Gas-Flüssigkeits-Blasenströmungen“. Habilitation. Universität Stuttgart, 2004.