



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN**  
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

# Überblick und Analyse über Abhängigkeit und Korrelationen in Solvency 2

Ausgeführt am Institut für  
Finanz- und Versicherungsmathematik  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von  
A.o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Friedrich Hubalek  
und  
Mag. Christoph Krischanitz

durch  
Bettina Ferscha, BSc  
Breitenfeldergasse 5/18  
1080 Wien

Wien, 27. September 2016

---



# Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei Herrn A.o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Friedrich Hubalek und Herrn Mag. Christoph Krischanitz für die ausgezeichnete Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken. Beide Betreuer standen mir mit hilfreichen Anregungen und Lösungsvorschlägen bei Problemen stets zur Seite.

Ein besonderer Dank gebührt meiner Familie, die mich sowohl finanziell als auch emotional während meines ganzen Studiums unterstützt und begleitet hat. Insbesondere meiner Mutter möchte ich danken, die für das Korrekturlesen meiner Arbeit viel Zeit und Mühe aufgebracht hat.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinem Freund Dominik bedanken, der mich stets motiviert und unterstützt hat und immer an mich geglaubt hat.

# Zusammenfassung

Die Standardformel unter Solvency 2 bietet Unternehmen eine kostengünstige und einfach anzuwendende Möglichkeit, um das erforderliche Eigenkapital, das Solvenzkapital, zu ermitteln. In der Berechnung der Basissolvenzkapitalanforderung, welche den wichtigsten Bestandteil der Solvenzkapitalanforderung darstellt, findet die Wurzelformel Anwendung. Mit Hilfe dieser einfachen Formel werden die Kapitalanforderungen der einzelnen Risiken unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten zur Basissolvenzkapitalanforderung aggregiert.

Ziel dieser Arbeit ist die Analyse der Abhängigkeiten der Risikomodule sowie die Analyse der Genauigkeit der Wurzelformel. Für die Genauigkeitsanalyse wird das Ergebnis der genauen Berechnung der Kapitalanforderung mit dem durch Anwendung der Wurzelformel erhaltenen Ergebnis verglichen. Untersucht werden dabei unterschiedliche Verteilungen und unterschiedliche zugrunde liegende Abhängigkeitsstrukturen. Letzteres geschieht durch den Einsatz diverser Copulas. Auch die Wahl des Abhängigkeitsmaßes hat einen nicht unerheblichen Einfluss auf den Aggregationsfehler, weshalb auch diese genauer studiert wird.

Den zweiten Gesichtspunkt dieser Arbeit stellen Korrelationsmatrizen dar. Zum einen kann gezeigt werden, dass die in der Standardformel zur Anwendung kommenden Matrizen nicht alle Korrelationsmatrizen im mathematischen Sinne sind. Zum anderen wird der Einfluss der Wahl der Parameter auf die Höhe der Basissolvenzkapitalanforderung bzw. auf die Diversifikationseffekte untersucht.

# Abstract

The standard formula introduced in Solvency 2 enables insurance companies to calculate the required equity capital, the solvency capital, in a user-friendly and cost-efficient way. The calculation of the basis solvency capital, the major part of the solvency capital, is based on the so called square root formula. This formula aggregates all risk modules, taking account for dependencies.

This paper aims at analysing the dependencies between the risk modules and at proving the accuracy of the square root formula. For this purpose the result of the mathematically exact calculation of the solvency capital is compared to the result which is obtained by using the square root formula. In order to conduct the analysis different probability distributions and different dependence structures are taken into account. Creating different dependence structures is realised through the concept of copulas. As the choice of the correct dependence measure is essential for the accuracy of the square root formula the effect of different dependence measures is studied as well.

Aside from the main topic two aspects of correlation matrices are examined. On the one hand it can be shown that not all correlation matrices used in the standard formula are correlation matrices in the mathematical sense. On the other hand the influence of the choice of correlation parameters on the basis solvency capital and on the diversification effects is determined.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Ein Überblick über Solvency 2 und die Standardformel</b>	<b>9</b>
2.1	Die Standardformel . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Historische Entwicklung der Korrelationsmatrix und Berechnungsformel zur Aggregation der Solvenzkapitalanforderung</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Relevante Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	<b>23</b>
4.1	Normalverteilung . . . . .	23
4.2	Log-Normalverteilung . . . . .	24
4.3	Gammaverteilung . . . . .	25
4.4	Exponentialverteilung . . . . .	25
4.5	Chiquadratverteilung . . . . .	26
4.6	Betaverteilung . . . . .	26
4.7	Weibullverteilung . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Copulas und Abhängigkeitsmaße</b>	<b>28</b>
5.1	Klasse der archimedischen Copulas . . . . .	31
5.1.1	Gumbelcopula . . . . .	32
5.1.2	Claytoncopula . . . . .	33
5.1.3	Frankcopula . . . . .	34
5.2	Klasse der elliptischen Copulas . . . . .	35
5.2.1	Gaußcopula . . . . .	35
5.2.2	Student-t-Copula . . . . .	36
5.3	Abhängigkeitsmaße und deren Eigenschaften . . . . .	37
5.3.1	Linearer Korrelationskoeffizient . . . . .	38
5.3.2	Kendall's Tau . . . . .	39
5.3.3	Spearman's Rho . . . . .	40

<b>6</b>	<b>Korrelationen und Abhängigkeiten in der Standardformel</b>	<b>42</b>
6.1	Korrelationsmatrizen in der Standardformel . . . . .	43
6.2	Verteilungsannahmen und Annahmen über Abhängigkeiten . . . . .	44
6.2.1	Die Standardformel für elliptische Verteilungen und normalverteilte Risiken . . . . .	44
6.2.2	Die Standardformel für schiefe Verteilungen . . . . .	48
6.2.3	Die Standardformel für Verteilungen unabhängiger Zufallsvariablen	51
6.3	Empirische Untersuchung von Abhängigkeiten . . . . .	54
6.4	Diversifikation . . . . .	58
6.4.1	Diversifikation und Korrelationen . . . . .	59
6.4.2	Diversifikation und der Bottom-Up-Approach . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Untersuchung abhängiger Risiken mit Hilfe von Copulas</b>	<b>68</b>
7.1	Untersuchung abhängiger Risiken in der Standardformel unter Verwendung von Copulas . . . . .	68
7.1.1	Komonotonie und Kontramotonie . . . . .	68
7.1.2	Archimedische Copulas . . . . .	70
7.1.3	Elliptische Copulas . . . . .	79
7.1.4	Analyse der Ergebnisse . . . . .	84
7.2	Analyse des Zusammenhangs zwischen dem gewählten Korrelationskoeffizienten und dem den Aggregationsfehler in der Wurzelformel minimierenden Parameter . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Conclusio</b>	<b>94</b>
<b>A</b>	<b>R-Code zur Berechnung des exakten SCR für zwei Lognormalverteilungen</b>	<b>95</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Mit der Standardformel, die im Laufe der Entwicklung des Solvency 2 Regelwerks immer wieder modifiziert wurde, wurde eine Formel entwickelt, mit der Versicherungsunternehmen einfach das notwendige Eigenkapital berechnen können. Neben der Ermittlung der Kapitalanforderung für das operationelle Risiko sowie der Ermittlung einer Anpassung für die risikomindernde Wirkung zukünftiger Überschussbeteiligung und latenter Steuern stellt die Basissolvenzkapitalanforderung den größten Baustein der Standardformel dar. Zur Berechnung der Basissolvenzkapitalanforderung wird die so genannte Wurzelformel herangezogen, welche den Mittelpunkt dieser Arbeit darstellt. Untersucht wird vor allem die Exaktheit der Wurzelformel unter unterschiedlichen Annahmen.

In Kapitel 2 werden neben allgemeinen Informationen über das Regelwerk Solvency 2 und die Solvenzkapitalanforderung, speziell die Bestandteile der Wurzelformel erläutert. Die einzelnen Risikomodule werden beschrieben und die Ermittlung der Kapitalanforderung für die Risikomodule auf Basis der Untermodule wird angeführt.

In Kapitel 3 wird die Entwicklung der Standardformel und der darin verwendeten Korrelationsmatrix dargestellt. Anhand der Quantitative Impact Studies werden die Veränderungen des Aufbaus und der Struktur der Standardformel sowie die Veränderung der Korrelationsparameter analysiert.

In Kapitel 4 werden wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen, welche in späteren Kapiteln für diverse Untersuchungen zur Anwendung kommen, und deren Eigenschaften wiederholt.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit Abhängigkeitsstrukturen und Abhängigkeitsmaßen. Die wichtigsten Definitionen und Resultate betreffend Copulas werden hier angeführt. Neben diesen allgemeinen Informationen über Copulas wird die Klasse der archimedischen



und die Klasse der elliptischen Copulas vorgestellt. Auch Abhängigkeitsmaße, die eng mit Copulas in Zusammenhang stehen, und ihre Eigenschaften werden in diesem Kapitel wiederholt.

In Kapitel 6 nehmen neben den Korrelationsmatrizen unabhängige Verteilungen eine wichtige Rolle ein. Für die Korrelationsmatrizen kann gezeigt werden, dass nicht alle in der Standardformel vorkommenden Matrizen tatsächlich Korrelationsmatrizen sind. Außerdem werden die Auswirkungen der Veränderungen von Korrelationsparametern analysiert.

In Kapitel 6 wird außerdem gezeigt, dass die Wurzelformel bei zugrunde liegenden elliptischen Verteilungen das exakte Resultat erzielt. Auch (schiefe) unabhängige Verteilungen werden auf die Exaktheit überprüft.

Des Weiteren kann festgestellt werden, dass die empirische Untersuchung von Abhängigkeiten zwischen Risikomodulen stark vom betrachteten Zeitraum abhängt.

In Kapitel 7 liegt der Hauptaugenmerk auf der Untersuchung der Genauigkeit der Wurzelformel bei zugrunde liegenden abhängigen Risiken. Der Fehler wird für verschiedene Arten der Abhängigkeit durch den Einsatz von Copulas untersucht. Weiters wird für zugrunde liegende Gaußcopulas eine Formel gesucht, die den Zusammenhang zwischen dem für die genaue Berechnung der Solvenzkapitalanforderung verwendeten Korrelationskoeffizienten und dem den Aggregationsfehler minimierenden Parameter beschreibt.

# Kapitel 2

## Ein Überblick über Solvency 2 und die Standardformel

Solvency 2 ist ein von der europäischen Kommission ins Leben gerufene Projekt zur Schaffung eines einheitlichen Aufsichtssystems, um die Solvabilität, d.h. die Ausstattung mit ausreichend Eigenmitteln, von Versicherungsunternehmen beurteilen zu können. Das alte statische System zur Ermittlung der Eigenmittelausstattung unter Solvency 1 wird dabei durch ein risikobasiertes neues System ersetzt, dessen Ziel es ist, Risiken besser messen, darstellen und managen zu können.<sup>1</sup>

Das Solvency 2 Regelwerk besteht aus drei Säulen. Die erste Säule enthält quantitative Regelungen zur Bewertung von Aktiva und Passiva sowie Vorschriften zu versicherungstechnischen Rückstellungen und zu den vorhandenen Eigenmitteln. Das so genannte Solvency Capital Requirement (SCR), mit dem wir uns in dieser Arbeit noch genau befassen, fällt somit unter diese Säule. Die zweite Säule enthält qualitative Regelungen betreffend das Risikomanagement und aufsichtsrechtliche Aktivitäten. Die dritte Säule enthält Vorschriften zur Offenlegung gegenüber der Öffentlichkeit und gegenüber den aufsichtsrechtlichen Behörden.<sup>2</sup>

Detaillierte Informationen über die Entstehung und Entwicklung von Solvency 2 und dessen drei Säulen können u.a. [2] entnommen werden, wir wollen nun jedoch das SCR und insbesondere die Standardformel näher beleuchten.

Beim Solvency Capital Requirement, der Solvenzkapitalanforderung, handelt es sich um die notwendigen Eigenmittel, die ein Versicherungsunternehmen zur Verfügung haben muss. Durch Erfüllung der Solvenzkapitalanforderung soll sichergestellt werden, dass Versicherungsunternehmen über ausreichend Eigenmittel verfügen, um bei Eintritt ungünstiger Szenarien dennoch die Ansprüche der Versicherungsnehmer wahren zu können. Entsprechen die tatsächlich verfügbaren Eigenmittel nicht dem SCR, so

---

<sup>1</sup>Siehe [1].

<sup>2</sup>Siehe [2, S.55].

können von aufsichtsrechtlichen Behörden Gegenmaßnahmen gefordert werden. Neben dem SCR gibt es auch noch das MCR, das Minimum Capital Requirement. Dieses ist niedriger als das SCR und die Nicht-Erfüllung dieser Anforderung hat den Entzug der Zulassung zur Folge.<sup>3</sup>

Um nun die Höhe der erforderlichen Eigenmitteln zu berechnen, gibt es zwei Möglichkeiten: die Standardformel oder firmeneigene interne Modelle. Interne Modelle werden von den Firmen selbst entwickelt und haben u.a. den Vorteil, dass firmenspezifische Risiken optimal berücksichtigt werden können. Werden nur bestimmte Risiken oder Subrisiken mittels internem Modell bewertet und die restlichen Risiken durch die Standardformel, so spricht man von einem partiellen internen Modell. Interne sowie partiell interne Modelle benötigen immer die Genehmigung der örtlichen Behörden. Die Standardformel stellt eine allgemeine, kostengünstige Alternative dar. Zugrunde liegt das Risikoprofil einer durchschnittlichen Firma. So kann es klarerweise zur Unter- bzw. Überschätzung diverser Risiken kommen, die nicht dem Durchschnitt entsprechen.<sup>4</sup> Allgemein gelten jedoch, unabhängig davon, ob sich eine Firma für ein internes Modell oder die Standardformel entscheidet, folgende Bewertungsgrundsätze:<sup>5</sup>

- Als Risikomaß ist der Value-at-Risk (VaR) heranzuziehen. Zu gegebenem Risiko  $X$  mit Verteilungsfunktion  $F_X$  und Konfidenzlevel  $1 - \alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  ist der Value-at-Risk definiert als  $\text{VaR}_{1-\alpha}(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq 1 - \alpha\}$ .<sup>6</sup>
- Als Konfidenzlevel ist  $1 - \alpha = 99,5\%$  zu wählen. Das entspricht einer Ruinwahrscheinlichkeit von  $0,5\%$ . Anders formuliert ist der  $\text{VaR}_{0,005}$  jener Wert, der mit  $99,5\%$ -prozentiger Wahrscheinlichkeit im gegebenen Zeitfenster nicht überschritten wird.
- Als Zeithorizont ist ein Jahr festgelegt.

Als Risikomaß ist demnach der Value-at-Risk festgelegt. Doch wie erhält man dadurch das SCR? - Die Antwort ist einfach: Das SCR eines Risikos  $X$  zum Konfidenzlevel  $1 - \alpha$  ist nichts anderes als  $\text{SCR}_\alpha(X) = \text{VaR}_\alpha(X) - \mathbb{E}(X)$ . Der Erwartungswert deckt dabei die erwarteten Verluste und technischen Rückstellungen ab, während der VaR als Sicherheitspuffer für unerwartete Verluste dient.<sup>7</sup>

Nachdem wir nun einige allgemeine Informationen über die Solvenkapitalanforderung erläutert haben, wollen wir uns der Berechnung der Solvenzkapitalanforderung mittels Standardformel widmen.

---

<sup>3</sup>Siehe [2, S.21].

<sup>4</sup>Siehe [2, S.341].

<sup>5</sup>Siehe [2, S.453 f.].

<sup>6</sup>Siehe [2, S.209].

<sup>7</sup>Siehe [2, S.196].

## 2.1 Die Standardformel

Die Solvenzkapitalanforderung gemäß Standardformel setzt sich zusammen aus der Basissolvvenzkapitalanforderung BSCR und der Kapitalanforderung für das operationelle Risiko  $SCR_{Op}$  abzüglich einer Anpassung für die risikomindernde Wirkung zukünftiger Überschussbeteiligung und latenter Steuern (Adj). Formal gilt also

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} - Adj.^8$$

Betrachten wir nun die Basissolvvenzkapitalanforderung BSCR genauer, so setzt sich diese wieder aus verschiedenen einzelnen Kapitalanforderungen zusammen, nämlich den Kapitalanforderungen für das nichtlebensversicherungstechnische Risiko  $SCR_{NL}$ , für das lebensversicherungstechnische Risiko  $SCR_L$ , für das krankenversicherungstechnische Risiko  $SCR_K$ , für das Marktrisiko  $SCR_M$ , für das Gegenparteiausfallsrisiko  $SCR_G$  und für das mit immateriellen Vermögenswerten verbundene Risiko  $SCR_{Imm}$ . Das BSCR berechnet sich dann durch die so genannte Wurzelformel:<sup>9</sup>

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} SCR_i SCR_j} + SCR_{Imm}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Module  $i$  und  $j$  und  $SCR_i$  und  $SCR_j$  die Kapitalanforderungen für das Modul  $i$  bzw.  $j$ .

Da gewisse Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Risiken bestehen, müssen diese auch in die Berechnung des erforderlichen Eigenkapitals miteinbezogen werden. Dies geschieht mittels Korrelationsmatrix. Für die Aggregation der Kapitalerfordernisse für die fünf Hauptrisiken ( $SCR_{NL}$ ,  $SCR_L$ ,  $SCR_K$ ,  $SCR_M$  und  $SCR_G$ ) kommt daher die folgende Abhängigkeitsmatrix zum Einsatz:<sup>10</sup>

	M	G	L	K	NL
M	1	0,25	0,25	0,25	0,25
G	0,25	1	0,25	0,25	0,5
L	0,25	0,25	1	0,25	0
K	0,25	0,25	0,25	1	0
NL	0,25	0,5	0	0	1

Tabelle 2.1: Korrelationsmatrix zur Berechnung des BSCR

Folgende Bezeichnungen werden in der oben stehenden Tabelle benutzt: M=Marktrisiko, G=Gegenparteiausfallsrisiko, L=Lebensversicherungstechnisches Risiko, K=Krankenversicherungstechnisches Risiko, NL=Nichtlebensversicherungstechnisches Risiko

<sup>8</sup>Siehe [2, S.455].

<sup>9</sup>Siehe [3, Artikel 87].

<sup>10</sup>Siehe [4, Anhang IV].

Jedes dieser fünf Risikomodule ist weiter in Subrisikomodule gegliedert und manche davon sind wiederum in weitere Untermodule unterteilt. Zur Aggregation dieser Sub(sub)module werden zum Teil auch wieder Abhängigkeitsmatrizen verwendet. Um einen Überblick zu gewinnen, wollen wir die Risikomodule kurz vorstellen, detaillierte Informationen dazu finden sich in [2],[3] und [4].

**Nichtlebensversicherungstechnisches Risiko** *„Das nichtlebensversicherungstechnische Risikomodul gibt das Risiko wieder, das sich aus Nichtlebensversicherungsverpflichtungen ergibt, und zwar in Bezug auf die abgedeckten Risiken und die verwendeten Prozesse bei der Ausübung des Geschäfts. Dabei berücksichtigt es die Ungewissheit der Ergebnisse der Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen im Hinblick auf die bestehenden Versicherungs- und Rückversicherungsverpflichtungen und auf die in den folgenden zwölf Monaten erwarteten neuen Geschäfte.“*<sup>11</sup>

Das nichtlebensversicherungstechnische Risikomodul gliedert sich in folgende drei Submodule:<sup>12</sup>

- Nichtlebensversicherungsprämien- und -rückstellungsrisiko
- Nichtlebenskatastrophenrisiko
- Nichtlebensversicherungsstornorisiko

Wie auch beim BSCR, kommt zur Ermittlung der Kapitalanforderung  $SCR_{NL}$  die Wurzelformel zum Einsatz:<sup>13</sup>

$$SCR_{NL} = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} SCR_i SCR_j}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Untermodule  $i$  und  $j$  und  $SCR_i$  und  $SCR_j$  die Kapitalanforderungen für das Untermodul  $i$  bzw.  $j$ . Die Korrelationsmatrix, die hierzu verwendet wird, findet sich in [3, Artikel 114(3)].

**Lebensversicherungstechnisches Risiko** *„Das lebensversicherungstechnische Risikomodul gibt das Risiko wieder, das sich aus Lebensversicherungsverpflichtungen ergibt, und zwar in Bezug auf die abgedeckten Risiken und die verwendeten Prozesse bei der Ausübung des Geschäfts.“*<sup>14</sup>

Das lebensversicherungstechnische Modul besteht aus einigen Untermodulen, die wir im Folgenden auflisten:<sup>15</sup>

---

<sup>11</sup>Siehe [4, Artikel 105(2)].

<sup>12</sup>Siehe [3, Artikel 114(1)].

<sup>13</sup>Siehe [3, Artikel 114(2)].

<sup>14</sup>Siehe [4, Artikel 105(3)].

<sup>15</sup>Siehe [3, Artikel 136(1)].

- Sterblichkeitsrisiko
- Langlebigkeitsrisiko
- Invaliditäts-/Morbiditätsrisiko
- Lebensversicherungskostenrisiko
- Revisionsrisiko
- Stornorisiko
- Lebensversicherungskatastrophenrisiko

Auch die Berechnung der Kapitalanforderung für das lebensversicherungstechnische Risikomodul basiert auf der Wurzelformel:<sup>16</sup>

$$SCR_L = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} SCR_i SCR_j}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Untermodule  $i$  und  $j$  und  $SCR_i$  und  $SCR_j$  die Kapitalanforderungen für das Untermodul  $i$  bzw.  $j$ . Die Korrelationsmatrix, die hierzu verwendet wird, findet sich in [3, Artikel 136(3)].

**Krankenversicherungstechnisches Risiko** *„Unabhängig davon, ob die Krankenversicherung auf einer der Lebensversicherung vergleichbaren technischen Basis betrieben wird oder nicht, gibt das krankenversicherungstechnische Risikomodul das Risiko wieder, das sich aus Krankenversicherungsverpflichtungen ergibt, und zwar in Bezug auf die abgedeckten Risiken und verwendeten Prozesse bei der Ausübung des Geschäfts.“*<sup>17</sup>

Die Submodule des krankenversicherungstechnischen Risikomoduls sind die folgenden:<sup>18</sup>

- Versicherungstechnisches Risiko der Krankenversicherung, die auf vergleichbarer versicherungstechnischer Basis betrieben wird wie die Schadenversicherung
- Versicherungstechnisches Risiko der Krankenversicherung, die auf vergleichbarer versicherungstechnischer Basis betrieben wird wie die Lebensversicherung
- Krankenversicherungskatastrophenrisiko

Die Berechnung des Kapitalerfordernisses basiert, wie auch schon bei den zuvor vorgestellten Risikomodulen, auf der Wurzelformel:<sup>19</sup>

---

<sup>16</sup>Siehe [3, Artikel 136(2)].

<sup>17</sup>Siehe [4, Artikel 105(4)].

<sup>18</sup>Siehe [3, Artikel 144(1)].

<sup>19</sup>Siehe [3, Artikel 144(2)].

$$\text{SCR}_K = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \text{SCR}_i \text{SCR}_j}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Untermodule  $i$  und  $j$  und  $\text{SCR}_i$  und  $\text{SCR}_j$  die Kapitalanforderungen für das Untermodul  $i$  bzw.  $j$ . Die Korrelationsmatrix, die hierzu verwendet wird, findet sich in [3, Artikel 144(3)].

**Marktrisiko** *„Das Marktrisikomodul hat dem Risiko Rechnung zu tragen, das sich aus der Höhe oder der Volatilität der Marktpreise von Finanzinstrumenten ergibt, die den Wert der Vermögenswerte und Verbindlichkeiten des Unternehmens beeinflussen. Es hat die strukturelle Inkongruenz zwischen Vermögenswerten und Verbindlichkeiten insbesondere im Hinblick auf deren Laufzeit angemessen widerzuspiegeln.“*<sup>20</sup>

Das Modul Marktrisiko ist weiter unterteilt in folgende Untermodule:<sup>21</sup>

- Zinsrisiko
- Aktienrisiko
- Immobilienrisiko
- Spread-Risiko
- Wechselkursrisiko
- Marktrisikokonzentration

Wieder kommt die Wurzelformel zur Berechnung der Kapitalanforderung  $\text{SCR}_M$  zur Anwendung:<sup>22</sup>

$$\text{SCR}_M = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \text{SCR}_i \text{SCR}_j}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Untermodule  $i$  und  $j$  und  $\text{SCR}_i$  und  $\text{SCR}_j$  die Kapitalanforderungen für das Untermodul  $i$  bzw.  $j$ . Die Korrelationsmatrix, die hierzu verwendet wird, findet sich in [3, Artikel 164(3)].

**Gegenparteiausfallsrisiko** *„Das Gegenparteiausfallsrisikomodul trägt möglichen Verlusten Rechnung, die sich aus einem unerwarteten Ausfall oder der Verschlechterung der Bonität von Gegenparteien und Schuldnern von Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen während der folgenden zwölf Monate ergeben. Das Gegenparteiausfallsrisikomodul deckt risikomindernde Verträge wie Rückversicherungsvereinbarungen, Verbriefungen und Derivate sowie Forderungen gegenüber Vermittlern und alle sonstigen*

---

<sup>20</sup>Siehe [4, Artikel 105(5)].

<sup>21</sup>Siehe [3, Artikel 164(1)].

<sup>22</sup>Siehe [3, Artikel 164(2)].

*Kreditrisiken ab, die vom Untermodul für das Spread-Risiko nicht abgedeckt werden. Es berücksichtigt angemessen die akzessorischen oder sonstigen Sicherheiten, die von dem oder für das Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmen gehalten werden, und die damit verbundenen Risiken. Das Gegenparteiausfallrisikomodul berücksichtigt für jede Gegenpartei die Gesamtgegenparteirisikoexponierung des jeweiligen Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmens in Bezug auf diese Gegenpartei, und zwar unabhängig von der Rechtsform der vertraglichen Verpflichtungen gegenüber diesem Unternehmen.*<sup>23</sup>

Das Gegenparteiausfallsrisiko wird im Gegensatz zu den anderen vier Risikomodulen nicht in klassische weitere Untermodule geteilt, es gibt lediglich eine Differenzierung zwischen den so genannten Typ-1- und Typ-2-Exponierungen. Dadurch lässt sich die Berechnungsformel für die Kapitalanforderung für dieses Modul wie folgt schreiben:<sup>24</sup>

$$SCR_G = \sqrt{SCR_{(G,1)}^2 + 1,5 \cdot SCR_{(G,1)} \cdot SCR_{(G,2)} + SCR_{(G,2)}^2}$$

Kurz wollen wir auch noch die Berechnung der Kapitalanforderungen  $SCR_{Op}$  und  $SCR_{Imm}$  angeben.

**Operationelles Risiko** Die Kapitalanforderung für das operationelle Risiko berechnet sich gemäß folgender Formel:<sup>25</sup>

$$SCR_{Op} = \min(0,3 \cdot BSCR; Op) + 0,25 \cdot Exp_{ul}$$

Hierbei bezeichnet  $Op$  die Basiskapitalanforderung für das operationelle Risiko und  $Exp_{ul}$  den Betrag der in den letzten zwölf Monaten angefallenen Kosten für Lebensversicherungen, bei denen das Anlagerisiko von den Versicherungsnehmern getragen wird. Für die Berechnung der Basiskapitalanforderung für das operationelle Risiko sei auf [3, Artikel 204(1)] verwiesen.

**Mit immateriellen Vermögenswerten verbundenes Risiko** Die Kapitalanforderung für das mit immateriellen Vermögenswerten verbundene Risiko wird mittels folgender Formel berechnet:<sup>26</sup>

$$SCR_{Imm} = 0,8 \cdot V_{Imm},$$

---

<sup>23</sup>Siehe [4, Artikel 105(6)].

<sup>24</sup>Siehe [3, Artikel 189(1)].

<sup>25</sup>Siehe [3, Artikel 204(1)].

<sup>26</sup>Siehe [3, Artikel 203].



wobei  $V_{Imm}$  den Betrag, der im Einklang mit [3, Artikel 12(2)] anerkannten und bewerteten immateriellen Vermögenswerte bezeichnet.

Diese grundlegenden Informationen über die Berechnung der Solvenzkapitalanforderung ermöglichen uns nun, uns näher mit den Abhängigkeiten der Risiken und den verwendeten Korrelationsmatrizen zu beschäftigen. Zuvor wollen wir aber noch die Veränderungen der Struktur und des Aufbaus der Standardformel und der Korrelationsmatrix zur Aggregation des SCR studieren.

# Kapitel 3

## Historische Entwicklung der Korrelationsmatrix und Berechnungsformel zur Aggregation der Solvenzkapitalanforderung

Die Korrelationsmatrix und Berechnungsformel zur Ermittlung des SCR, wie sie heute festgelegt sind, waren nicht seit Beginn des Solvency 2 Projekts so gegeben. Vielmehr haben sich im Laufe der Entwicklung des Regelwerks immer wieder Änderungen auf Grund von Studien und Expertenmeinungen ergeben. In diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten Änderungen sowohl hinsichtlich der Struktur als auch hinsichtlich der Wahl der Korrelationsparameter, die es seit Beginn des Projekts gab, aufzeigen. Dazu wollen wir die Quantitative Impact Studies (QIS), durch die die Entwicklung von Solvency 2 charakterisiert ist, studieren.

**QIS 1** In den QIS1 Specifications finden sich keine Angaben über Klassifizierung der Risiken und die zu verwendenden Korrelationsmatrizen.<sup>1</sup> In der ein Jahr zuvor erschienenen Arbeit [6], in der vorbereitende Ansätze für das Regelwerk veröffentlicht wurden, findet man jedoch Angaben hinsichtlich einer möglichen Klassifizierung der Risiken. Gemäß dieser Arbeit ist ein durchschnittliches Versicherungsunternehmen fünf Risiken ausgesetzt, nämlich dem *versicherungstechnischen Risiko*, dem *Marktrisiko*, dem *Kreditrisiko*, dem *operationellen Risiko* und dem *Liquiditätsrisiko*.<sup>2</sup>

Für die Berechnung der Kapitalanforderungen wird in [6, Absatz 6.19] bereits die Wurzelformel vorgestellt, da durch diese Diversifikationseffekte zwischen verschiedenen Sparten berücksichtigt werden. Explizite Korrelationsparameter, oder Angaben, wie

---

<sup>1</sup>Siehe [5].

<sup>2</sup>Siehe [6, Kapitel 5.2].

diese berechnet werden können, sind jedoch nicht enthalten. Lediglich wird erwähnt, dass es sich bei den Korrelationsparametern nicht um lineare Korrelationskoeffizienten handeln muss, sondern dass beispielsweise auch „tail correlations“ benutzt werden können.

Mögliche Ansätze zur Erfassung der Abhängigkeiten zwischen den Risiken werden in [6, Kapitel 9.3] diskutiert. Auch Copulas finden hier Erwähnung.

**QIS 2<sup>3</sup>** Die Annahmen und Angaben zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderung gemäß Standardformel nach QIS2 sind bereits wesentlich konkreter spezifiziert als noch in den QIS1 Specifications. Die QIS2 Specifications stellen eine detaillierte Klassifizierung der Risiken bereit, diese unterscheidet sich nur unwesentlich von den aktuellen Risikomodulen. Bis auf das *mit immateriellen Vermögenswerten verbundene Risiko*, das nach QIS2 nicht berücksichtigt wird, stimmen die Module überein. Bei den Untermodulen gibt es noch einige Differenzen, da diese nach QIS2 noch nicht so umfangreich sind, wie das heute der Fall ist. Die meisten Module enthalten weniger Untermodule.

Die Formel zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderung setzt sich aus der Basis-solvvenzkapitalanforderung, der Reduktion für Gewinnbeteiligung (RPS) und für Nicht-Lebensversicherer, dem erwarteten Verlust oder dem Verlust, der auf Grund des Geschäfts des nächsten Jahres entsteht ( $NL_{PL}$ ), zusammen, also

$$SCR = BSCR - RPS - NL_{PL}.$$

Für die Ermittlung des BSCR sollen nach QIS2 drei verschiedene Zugänge getestet werden. Wir verwenden dazu die Notation aus Kapitel 2.

- Unter Annahme der Unabhängigkeit:

$$BSCR_1 = \sqrt{SCR_{NL}^2 + SCR_L^2 + SCR_K^2 + SCR_M^2 + SCR_G^2 + SCR_{Op}^2}$$

- Unter Vernachlässigung der Diversifikationseffekte:

$$BSCR_2 = SCR_{NL} + SCR_L + SCR_K + SCR_M + SCR_G + SCR_{Op}$$

- Unter Berücksichtigung von Diversifikationseffekten:

$$BSCR_3 = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} SCR_i SCR_j}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Module  $i$  und  $j$  und  $SCR_i$  und  $SCR_j$  die Kapitalanforderungen für das Modul  $i$  bzw.  $j$ .

---

<sup>3</sup>Siehe [7, Abschnitt 5].

Der dritte Ansatz ähnelt schon sehr der aktuell gültigen Berechnungsformel. Im Gegensatz zu dieser wird hier jedoch die Kapitalanforderung für das operationelle Risiko  $SCR_{Op}$  auch in die Wurzel miteinbezogen. Die Korrelationsmatrix, die zur Aggregation herangezogen werden soll, ist auch noch sehr allgemein gehalten:

	M	G	L	K	NL	Op
M	1	MH	ML	ML	ML	M
G	MH	1	ML	ML	M	ML
L	ML	ML	1	ML	L	ML
K	ML	ML	ML	1	L	ML
NL	ML	M	L	L	1	M
Op	M	ML	ML	ML	M	1

Tabelle 3.1: Korrelationsmatrix gemäß QIS2 zur Berechnung des BSCR

Folgende Bezeichnungen für die Einträge werden in der oben stehenden Tabelle benutzt: L: niedrige Abhängigkeit, ML: mittel-niedrige Abhängigkeit, M: mittlere Abhängigkeit, MH: mittel-hohe Abhängigkeit, H: hohe Abhängigkeit

Für die Ermittlung des RPS und  $NL_{PL}$  sei auf [7, S.19 und S.20 ff.] verwiesen.

**QIS 3**<sup>4</sup> Während es bei der Struktur der Untermodule im Vergleich zu QIS2 einige Veränderungen gibt, sind die Hauptrisikomodule in QIS3 dieselben geblieben. Leichte Veränderungen gibt es auch hinsichtlich der Berechnungsformel für das SCR und BSCR und auch die Korrelationsmatrix zur Aggregation des BSCR weist eine Veränderung auf: erstmals stehen konkrete Werte zur Verfügung. Bevor wir uns diese jedoch ansehen, wollen wir erst einmal die Berechnungsformel des SCR angeben. Diese lautet:

$$SCR=BSCR+SCR_{Op}$$

Die Solvenzkapitalanforderung für das operationelle Risiko  $SCR_{Op}$  ist also nicht mehr in die Berechnung des BSCR einzubinden und getrennt zu ermitteln, wie das auch bei der aktuellen Berechnungsformel der Fall ist. Die Berechnung des  $SCR_{Op}$  wird in [8, S.34 f.] ausführlich erläutert.

Betrachten wir nun die Formel zur Ermittlung des BCSR genauer, so erkennen wir, dass diese mit keiner der in QIS2 zu testenden Formeln übereinstimmt. Wir können jedoch erkennen, dass der dritte Ansatz aus QIS2 übernommen wurde, allerdings in abgeänderter Form:

---

<sup>4</sup>Siehe [8, Abschnitt 3].

$$\text{BSCR} = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \text{SCR}_i \text{SCR}_j} - \min \left\{ \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \text{KC}_i \text{KC}_j}, \text{FDB} \right\}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Module  $i$  und  $j$ ,  $\text{SCR}_i$  und  $\text{SCR}_j$  die Kapitalanforderungen für das Modul  $i$  bzw.  $j$ ,  $\text{KC}_i$  und  $\text{KC}_j$  die risikomindernden Effekte für zukünftige Gewinnbeteiligungen für das Modul  $i$  bzw.  $j$ , wobei  $\text{KC}_{NL}$  und  $\text{KC}_G$  definitionsgemäß 0 sind, und FDB jenen Betrag der technischen Rückstellungen, der den künftigen Überschussbeteiligungen entspricht.

Für beide Teile dieser Formel ist die gleiche Korrelationsmatrix heranzuziehen, nämlich die folgende:

	M	G	L	K	NL
M	1	0,25	0,25	0,25	0,25
G	0,25	1	0,25	0,25	0,5
L	0,25	0,25	1	0,25	0
K	0,25	0,25	0,25	1	0
NL	0,25	0,5	0	0	1

Tabelle 3.2: Korrelationsmatrix gemäß QIS3 zur Berechnung des BSCR

Vergleichen wir die Matrix mit den Angaben, die unter QIS2 gemacht werden und nehmen an, dass die Parameter  $\text{MH}=0,75$ ,  $\text{M}=0,5$ ,  $\text{ML}=0,25$  und  $\text{L}=0$  entsprechen, so gibt es eine signifikante Änderung für den Korrelationsparameter für das Marktrisiko und das Gegenparteausfallsrisiko. Bis auf die Parameter für das operationelle Risiko, das ja unter QIS3 nicht mehr in die Wurzelformel miteinbezogen wird und daher in der Korrelationsmatrix wegfällt, sind sonst alle Parameter mit den QIS2-Angaben konsistent.

Tatsächlich können wir jedoch feststellen, wenn wir noch einmal jene Matrix in Kapitel 2 betrachten, die aktuell zur Aggregation herangezogen wird, dass die beiden Matrizen übereinstimmen.

**QIS 4<sup>5</sup>** Die Angaben, die in QIS4 zur Standardformel im Hinblick auf die Berechnungsformel und die Korrelationsmatrix zur Aggregation des BSCR gemacht werden, kommen der endgültigen Version schon sehr nahe. Die Struktur der Risikomodule stimmt bereits mit jener, die wir in Kapitel 2 studiert haben, überein. Auch die Untermodule in QIS4 weisen keine großen Abweichungen zur aktuellen Gliederung auf. So entsprechen die Untermodule des nichtlebensversicherungstechnischen Risikos und des Marktrisikos bereits den aktuellen Untermodulen, in den anderen Risikomodulen

<sup>5</sup>Siehe [9, Abschnitt TS.VIII.].

fehlen meist ein bis zwei Untermodule verglichen mit der Gliederung nach heutigem Standpunkt.

Die Berechnungsformeln, die zur Berechnung des SCR und BSCR herangezogen werden, sind wie folgt gegeben:

$$\text{SCR} = \text{BSCR} + \text{SCR}_{Op} - \text{Adj}$$

$$\text{BSCR} = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} \text{SCR}_i \text{SCR}_j}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Module  $i$  und  $j$ ,  $\text{SCR}_i$  und  $\text{SCR}_j$  die Kapitalanforderungen für das Modul  $i$  bzw.  $j$ ,  $\text{SCR}_{Op}$  die Kapitalanforderung für operationelles Risiko  $\text{SCR}_{Op}$  und Adj die Anpassung für die risikomindernde Wirkung zukünftiger Überschussbeteiligung und latenter Steuern.

Wie wir sehen, gibt es nur einen kleinen Unterschied zu den aktuell gültigen Versionen (siehe Kapitel 2). So wird nämlich bei der Berechnung des BSCR das mit immateriellen Vermögenswerten verbundene Risiko noch nicht berücksichtigt.

Verglichen mit QIS3 können wir feststellen, dass der zweite Teil der Berechnungsformel des BSCR in QIS3 nun extra durch die Anpassung (Adj), deren Berechnung in [9, S.128 f.] genau dokumentiert wird, berücksichtigt wird.

Eine kleine Änderung weist auch die Korrelationsmatrix zur Aggregation des BSCR auf:

	M	G	L	K	NL
M	1	0,25	0,25	0,25	0,25
G	0,25	1	0,25	0,25	0,5
L	0,25	0,25	1	0,25	0
K	0,25	0,25	0,25	1	0
NL	0,25	0,5	0	0,25	1

Tabelle 3.3: Korrelationsmatrix gemäß QIS4 zur Berechnung des BSCR

Der Korrelationsparameter für das krankensversicherungstechnische und für das nichtlebensversicherungstechnische Risiko wurde von 0 auf 0,25 erhöht. Das liegt daran, dass gewisse Sparten des nichtlebensversicherungstechnischen Risikomoduls (in QIS3) nun in das krankensversicherungstechnische Modul integriert wurden.

**QIS 5**<sup>6</sup> Da QIS5 die letzte Studie in der Entwicklung des Regelwerks ist, entsprechen die darin enthaltenen Annahmen bereits nahezu den aktuellen Berechnungsgrundlagen.

---

<sup>6</sup>Siehe [10, Abschnitt 2.1].

Betrachtet man die Gliederung der Risikomodule, so wird das Marktrisikomodul um das Untermodul Illiquiditätsrisiko erweitert. Dieses Modul findet sich jedoch in der aktuellen Gliederung nicht mehr. Die restlichen Module und Untermodule stimmen aber mit der aktuellen Modulstruktur überein.

Auch die Berechnungsformeln stimmen überein. Das SCR gemäß QIS5 besteht aus dem BSCR und dem  $SCR_{Op}$  abzüglich der Anpassung für die risikomindernde Wirkung zukünftiger Überschussbeteiligung und latenter Steuern (Adj), also

$$SCR = BSCR + SCR_{Op} - Adj.$$

Im Gegensatz zur Berechnungsformel des BSCR in QIS4 wird unter QIS5 bereits die Kapitalanforderung für das mit immateriellen Vermögenswerten verbundene Risiko berücksichtigt. Demnach hat dann die Berechnung die folgende Form:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \rho_{i,j} SCR_i SCR_j} + SCR_{Imm}$$

Hierbei bezeichnet  $\rho_{i,j}$  den Korrelationskoeffizienten für die Module  $i$  und  $j$ ,  $SCR_i$  und  $SCR_j$  die Kapitalanforderungen für das Modul  $i$  bzw.  $j$  und  $SCR_{Imm}$  die Kapitalanforderung für das mit immateriellen Vermögenswerten verbundene Risiko.

Zuletzt gleicht auch die Korrelationsmatrix, die zur Aggregation des BSCR gemäß QIS5 verwendet wird, jener, die wir in Kapitel 2 betrachtet haben:

	M	G	L	K	NL
M	1	0,25	0,25	0,25	0,25
G	0,25	1	0,25	0,25	0,5
L	0,25	0,25	1	0,25	0
K	0,25	0,25	0,25	1	0
NL	0,25	0,5	0	0	1

Tabelle 3.4: Korrelationsmatrix gemäß QIS5 zur Berechnung des BSCR

# Kapitel 4

## Relevante

## Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In diesem Kapitel, das auf [11] und [12] beruht, sollen die in der Arbeit verwendeten Wahrscheinlichkeitsverteilungen kurz dargestellt und wiederholt werden. Dies ist wichtig, um Verwirrungen und Unklarheiten zu vermeiden, da es in der Literatur oft unterschiedliche Bezeichnungen und Parametrisierungen gibt. Da in dem Kapitel auch Schiefe eine wichtige Rolle einnimmt, geben wir die allgemeine Definition hier vorab an:

**Definition** (Schiefe). *Die Schiefe einer Zufallsvariable  $X$  mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist definiert als*

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

*Ist  $\gamma > 0$  so nennt man die Verteilung von  $X$  rechtsschief. Die Verteilung von  $X$  heißt linksschief, falls  $\gamma < 0$ . Bei  $\gamma = 0$  handelt es sich um eine symmetrische Verteilung.*

### 4.1 Normalverteilung<sup>1</sup>

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt normalverteilt, wenn  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Dabei ist  $\mu$  der Erwartungswert und ein Lageparameter und  $\sigma$  die Standardabweichung und ein Skalenparameter. Da es sich bei der Normalverteilung um eine symmetrische Verteilung handelt, ist die Schiefe immer 0, unabhängig von der Wahl der Parameter. Die Dichte der Normalverteilung ist definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad x \in \mathbb{R}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

---

<sup>1</sup>Siehe [11, Kapitel 13].



Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Wählt man für  $\mu = 0$  und  $\sigma^2 = 1$ , so spricht man von einer *Standardnormalverteilung*. Es gilt dann folgender Zusammenhang:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \iff Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Besonders hervorzuheben ist die Eigenschaft der Additivität der Normalverteilungen bei Unabhängigkeit. Sind nämlich  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so ist die Summe wieder normalverteilt mit  $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$ . Sind die  $n$  Zufallsvariablen nun abhängig voneinander und ist die Kovarianz jeweils gegeben durch  $\sigma_{ij}$ , so ist die Summe zwar auch wieder normalverteilt mit demselben Mittelwert, die Varianz ist nun jedoch von der Form  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij}$ .

## 4.2 Log-Normalverteilung<sup>2</sup>

Wie der Name erahnen lässt, besteht ein enger Zusammenhang zur Normalverteilung. Eine Zufallsvariable  $X$  heißt nämlich genau dann log-normalverteilt mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma^2$  ( $X \sim L(\mu, \sigma^2)$ ), wenn  $\ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Die Dichte und Verteilungsfunktion sind dann gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x > 0; \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^x \frac{1}{z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln z - \mu}{\sigma}\right)^2} dz.$$

Im Gegensatz zur Normalverteilung ist bei der Log-Normalverteilung  $\mu$  ein Skalenparameter und  $\sigma$  ein Formparameter.

Weitere wichtige Kennzahlen der Log-Normalverteilung sind die Folgenden:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) & \text{Var}(X) &= [\exp(\sigma^2) - 1] \exp(2\mu + \sigma^2) \\ \gamma(X) &= (\exp(\sigma^2) + 2) \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1} \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Siehe [11, Kapitel 14].

### 4.3 Gammaverteilung<sup>3</sup>

Die Gammaverteilung ist eine sehr wichtige Verteilung, da sich je nach Wahl der Parameter andere Verteilungen ableiten lassen, wie etwa die Exponentialverteilung oder Chiquadratverteilung. Die Gammaverteilung wird durch den Formparameter  $\alpha$  und den Skalierungsparameter  $\beta$  bestimmt. Die Dichtefunktion für  $X \sim Gam(\alpha, \beta)$  ist nämlich definiert als

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}, \quad x > 0; \alpha, \beta > 0$$

wobei  $\Gamma(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$  mit  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1), \quad x > 1.$

Erwartungswert, Varianz und Schiefe sind für die Gammaverteilung wie folgt gegeben:

$$\mathbb{E}(X) = \alpha\beta \quad \text{Var}(X) = \alpha\beta^2 \quad \gamma(X) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Ähnlich wie bei der Normalverteilung ist auch die Gammaverteilung additiv. Sind nämlich  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige gammaverteilte Zufallsvariablen mit  $X_i \sim Gam(\alpha_i, \beta)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so ist die Summe wieder gammaverteilt mit  $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim Gam\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta\right).$

### 4.4 Exponentialverteilung<sup>4</sup>

Wie bereits erwähnt, ist die Exponentialverteilung ein Spezialfall der Gammaverteilung. Wählen wir nämlich für den Parameter  $\alpha = 1$  und ersetzen  $\beta$  durch  $\frac{1}{\lambda}$ , so erhalten wir genau die Exponentialverteilung. Bei der Parametrisierung muss man vorsichtig sein, da es hier zwei unterschiedliche gebräuchliche Bezeichnungen in der Literatur gibt. Wir geben hier jene Definition an, die auch von R verwendet wird, da dieses Programm für diverse Berechnungen in der Arbeit verwendet wird.

Ein Zufallsvariable  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  heißt exponentialverteilt, wenn ihre Dichte die Form

$$f(x) = \lambda e^{-x\lambda}, \quad x, \lambda > 0$$

hat.  $\lambda$  ist dabei ein Formparameter. Wir betrachten auch noch den Erwartungswert und die Varianz. Diese sind von der einfachen Form

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

---

<sup>3</sup>Siehe [11, Kapitel 17].

<sup>4</sup>Siehe [11, Kapitel 19].

Die Schiefe der Exponentialverteilung ist immer 2, unabhängig davon welchen Wert  $\lambda$  annimmt. Es handelt sich also um eine rechtsschiefe Verteilung.

## 4.5 Chiquadratverteilung<sup>5</sup>

Auch die Chiquadratverteilung ist ein Spezialfall der Gammaverteilung. Um die Chi-quadratverteilung zu erhalten, setzt man die Parameter der Gammaverteilung  $\alpha = r/2$  und  $\beta = 2$ . Man erhält dann für die chiquadratverteilte Zufallsvariable  $X \sim \chi^2(r)$  die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{x^{r/2-1}e^{-x/2}}{\Gamma(r/2)2^{r/2}}, \quad x > 0.$$

Erwartungswert, Varianz und Schiefe sind wie folgt gegeben:

$$\mathbb{E}(X) = r \quad \text{Var}(X) = 2r \quad \gamma(X) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}.$$

Wie auch bei der Gammaverteilung gilt für die Chiquadratverteilung die Additivität: Betrachten wir unabhängige Zufallsvariablen  $X_i \sim \chi^2(r_i)$ , dann ist die Summe ebenfalls chiquadratverteilt und es gilt  $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \chi^2(\sum_{i=1}^n r_i)$ .

## 4.6 Betaverteilung<sup>6</sup>

Bevor wir die Betaverteilung betrachten, müssen wir zunächst die Betafunktion definieren, da diese Bestandteil der Dichtefunktion ist:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad x, y > 0$$

Die Betafunktion kann auch mit Hilfe der Gammafunktion dargestellt werden:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Die Dichte einer betaverteilten Zufallsvariable  $X \sim Be(a, b)$  ( $a$  und  $b$  sind zwei Formparameter) auf dem Intervall  $[0, 1]$  ist dann definiert als

$$f(x) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad 0 < x < 1; a, b > 0.$$

---

<sup>5</sup>Siehe [11, Kapitel 18].

<sup>6</sup>Siehe [12, Kapitel 25].

Ein Spezialfall ergibt sich dabei, wenn  $a = b = 1$ . In diesem Fall erhalten wir nämlich genau die Dichte der **stetigen Gleichverteilung** auf  $[0, 1]$ .

Die Verteilungsfunktion erhält man ganz einfach durch Integration der Dichte.

Die drei wichtigen Kennzahlen Erwartungswert, Varianz und Schiefe können wie folgt berechnet werden:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b} \quad \text{Var}(X) = \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \quad \gamma(X) = \frac{2(b-a)\sqrt{a+b+1}}{(a+b+2)\sqrt{ab}}$$

Nun kann die Beta-Verteilung allgemeiner auf einem beliebigen Intervall  $[p, q]$  betrachtet werden. Für genauere Informationen über diese Verallgemeinerung sei auf [12, Kapitel 25] verwiesen.

## 4.7 Weibullverteilung<sup>7</sup>

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt weibullverteilt, wenn  $X \sim W(\beta, \eta)$ . Hier hat  $\beta$  die Rolle eines Formparameters,  $\eta$  die eines Skalierungsparameters. Die Dichtefunktion, die Verteilungsfunktion, der Erwartungswert, die Varianz und die Schiefe sind wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right], \quad x > 0; \beta, \eta > 0 \\ F(x) &= 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right], \quad x > 0 \\ \mathbb{E}(X) &= \eta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{Var}(X) = \eta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right] \\ \gamma(X) &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{\beta}\right)\eta^3 - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} \end{aligned}$$

In der Formel für die Schiefe verwenden wir  $\mu$  als Symbol für den Erwartungswert und  $\sigma^2$  für die Varianz.

Die Weibullverteilung wird auch *Typ-III-Extremwertverteilung* genannt, da sie eine von drei asymptotischen Verteilungen des Minimums einer bestimmten Klasse von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ist.

---

<sup>7</sup>Siehe [11, Kapitel 21].

# Kapitel 5

## Copulas und Abhängigkeitsmaße

Betrachtet man zwei Zufallsvariablen mit unabhängigen Verteilungsfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  so ist es, unter der Annahme der Unabhängigkeit, nicht schwer, die Verteilungsfunktion der Summe der Zufallsvariablen  $F_{X_1+X_2}$  zu ermitteln. Dies kann ganz einfach durch Faltung geschehen. Sind die beiden Zufallsvariablen jedoch in irgendeiner Weise abhängig voneinander, so ist die Faltung nicht mehr geeignet. Hier kommen Copulas ins Spiel. Copulas ermöglichen uns nämlich, Abhängigkeiten zwischen Zufallsvariablen zu modellieren und unter Berücksichtigung dieser Abhängigkeiten die gemeinsame Verteilungsfunktion der Randverteilungen und somit auch die Verteilung der Summe zu bestimmen. Man kann also durch Kenntnis der Randverteilungen und deren Abhängigkeit mit Hilfe von Copulas gemeinsame Verteilungsfunktionen konstruieren. Nun gilt jedoch auch die Umkehrung: So kann eine Copula als multivariate Verteilungsfunktion aufgefasst werden, die das Verhalten ihrer Randverteilungen und deren Abhängigkeiten exakt beschreibt. Dieser Zusammenhang zwischen den Randverteilungen und der gemeinsamen Verteilungsfunktion wird im Satz von Sklar beleuchtet. Bevor wir uns diesem wichtigen Satz widmen, wollen wir aber eine allgemeine Definition der Copula geben:<sup>1</sup>

**Definition** (Copula). *Eine  $n$ -dimensionale Copula ist eine Funktion  $C$  von  $\mathbf{I}^n$  nach  $\mathbf{I}$  mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *Für jedes  $\mathbf{u}$  in  $\mathbf{I}^n$  gilt  $C(\mathbf{u})=0$ , falls zumindest eine Koordinate von  $\mathbf{u}$  gleich 0 ist und  $C(\mathbf{u})=u_k$ , falls alle Koordinaten bis auf  $u_k$  gleich 1 sind.*
2. *Für jedes  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  in  $\mathbf{I}^n$  mit  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  gilt  $V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0$ .*

$\mathbf{I}^n$  in obiger Definition bezeichnet dabei das abgeschlossene Einheitsintervall und  $V_C$

---

<sup>1</sup>Siehe [13, S. 45].

das Volumen der Copula. Dieses ist wie folgt definiert:<sup>2</sup>

$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_n} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) \quad u_{j,1} = a_j, u_{j,2} = b_j \quad j = 1, \dots, n$$

Die Copula-Eigenschaft, dass  $C(\mathbf{u})=0$  für eine Koordinate  $u_k = 0$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , nennt man geerdet, die Eigenschaft 2 der Definition bedeutet, dass die Copula n-wachsend ist.<sup>3</sup>

Nun kann eine Copula unter gewissen Voraussetzungen eine Dichte besitzen. Bevor wir diese jedoch definieren, wollen wir noch den Satz von Sklar vorstellen. Wie schon anfangs erwähnt, ist Sklar's Theorem in der Theorie der Copulas von großer Bedeutung. Das Theorem findet eine breite Anwendung in der Statistik und auch wir werden später noch Gebrauch davon machen.

**Satz 5.1** (Sklar's Theorem). *Sei  $H$  eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungen  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Dann existiert eine  $n$ -dimensionale Copula  $C$ , sodass für alle  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^n$  gilt*

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (5.1)$$

*Sind  $F_1, F_2, \dots, F_n$  alle stetig, so ist  $C$  eindeutig; sonst ist  $C$  eindeutig auf  $\text{Ran } F_1 \times \text{Ran } F_2 \times \dots \times \text{Ran } F_n$  bestimmt. Sind umgekehrt  $C$  eine  $n$ -dimensionale Copula und  $F_1, F_2, \dots, F_n$  Verteilungsfunktionen, dann ist die durch (5.1) definierte Funktion eine  $n$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit Rändern  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .<sup>4</sup>*

Da bekanntlich für stetige  $X \sim F$  gilt, dass  $F(X) \sim U$ , wobei  $U \sim U[0, 1]$ , folgt, dass eine Copula eine multivariate Verteilungsfunktion mit uniformverteilten Rändern ist. Das haben wir auch bereits in der Definition der Copulas gesehen, da diese nur für  $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$  definiert ist. Umgekehrt gilt für die stetige gleichverteilte Zufallsvariable  $U \sim U[0, 1]$ , dass  $X := F^{-1}(U) \sim F$ . Die so genannte Inversionsmethode wird häufig angewandt, um Zufallszahlen einer beliebigen Verteilung zu generieren.<sup>5</sup>

Eine andere Darstellung für Formel (5.1) ist somit die Folgende:<sup>6</sup>

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^n$$

$F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$  sind dabei die Inversen der Randverteilungen.

---

<sup>2</sup>Siehe [14, S.221].

<sup>3</sup>Siehe [13, S.43 f.].

<sup>4</sup>Siehe [13, S.46].

<sup>5</sup>Siehe [14, S.222].

<sup>6</sup>Siehe [2, S.168].

Die eben angegebene Form benötigen wir u.a. für die Copuladichte, welche wir nun definieren wollen:<sup>7</sup>

Ist eine  $n$ -dimensionale Copula absolut stetig und ist die durch sie definierte gemeinsame Verteilungsfunktion  $H$  absolut stetig, sind die  $n$  Randverteilungen alle streng monoton wachsend und stetig, so besitzt die Copula eine Dichte. Diese ist dann von der Form

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\delta C(u_1, \dots, u_n)}{\delta u_1, \dots, \delta u_n} = \frac{h(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))}{f_1(F_1^{-1}(u_1)), \dots, f_n(F_n^{-1}(u_n))}. \quad (5.2)$$

$h$  ist dabei die Dichte von  $H$ ,  $f_1, \dots, f_n$  die Randdichten und  $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$  die Inversen der Randverteilungen.

Wir betrachten nun drei einfache Beispiele für Copulas, die uns zu einem weiteren wichtigen Gesichtspunkt in der Theorie der Copulas führen. Seien

- $M^n(\mathbf{u}) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n)$
- $\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 u_2, \dots, u_n$
- $W^n(\mathbf{u}) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_n - n + 1, 0)$

gegeben, so handelt es sich bei diesen Funktionen um Copulas. Die Copula  $M^n$  ist die  $n$ -dimensionale Komonotoniecopula,  $\Pi^n$  die  $n$ -dimensionale Unabhängigkeitscopula und  $W^n$  die  $n$ -dimensionale Kontramotoniecopula. Während die Komonotonie- und die Unabhängigkeitscopula für beliebige Werte für  $n$  Copulas sind, gilt dies für die Kontramotonie nicht. Diese Copula ist nur für  $n = 2$  tatsächlich eine Copula.<sup>8</sup>

Bei den soeben vorgestellten Copulas handelt es sich um spezielle Copulas, da diese für  $n = 2$  die extremen Abhängigkeiten widerspiegeln: Mittels Komonotoniecopula werden perfekt positiv abhängige Zufallsvariablen modelliert, während zur Modellierung der perfekten negativen Abhängigkeit die Kontramotoniecopula verwendet wird. Wie bereits der Name suggeriert, wird die Unabhängigkeitscopula für unabhängige Risiken herangezogen.<sup>9</sup>

Die beiden Funktionen  $M^n$  und  $W^n$  haben noch eine weitere wichtige Eigenschaft: Sie stellen die so genannte obere bzw. untere Fréchet-Hoeffding Schranke dar. Für jede beliebige Copula  $C$  gilt nämlich

$$W^n(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^n(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{I}^n. \quad ^{10}$$

---

<sup>7</sup>Siehe [2, S.168 f.].

<sup>8</sup>Siehe [13, S.47].

<sup>9</sup>Siehe [2, S.170 f.].

<sup>10</sup>Siehe [13, S.47].

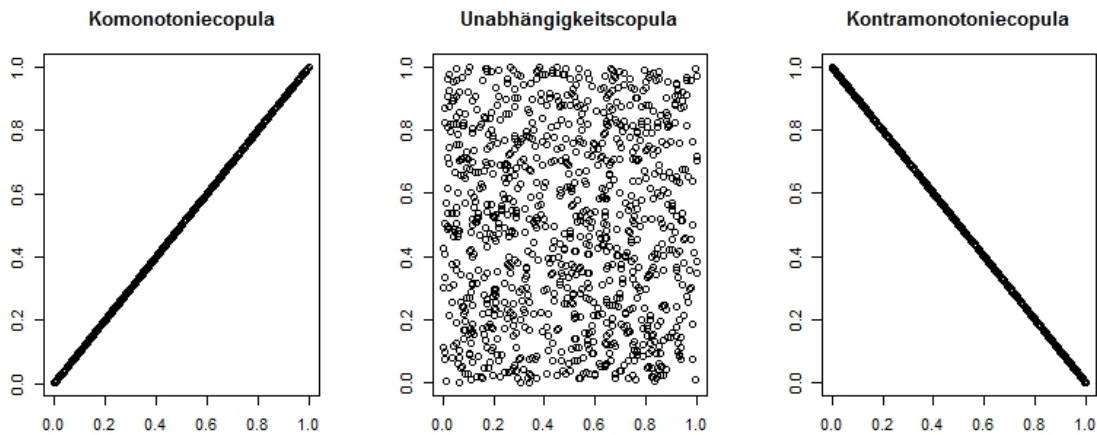


Abbildung 5.1: Komonotonie-, Unabhängigkeits- und Kontramotoniecopula

Nun gibt es eine Vielzahl an verschiedenen Copulas. Um gewissermaßen einen Überblick über die diversen Copulas zu behalten, gibt es die Klassifizierung in Copulaklassen, welche wiederum in Copulafamilien unterteilt sind. Da wir uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit der Klasse der archimedischen Copulas und der Klasse der elliptischen Copulas beschäftigen, wollen wir diese beiden Klassen nun vorstellen.

## 5.1 Klasse der archimedischen Copulas<sup>11</sup>

Zur Klasse der archimedischen Copulas gehören unter anderem die bekannte Gumbelfamilie oder Claytonfamilie. Archimedische Copulas haben einige gute Eigenschaften. So sind archimedische Copulas beispielsweise symmetrisch und assoziativ, die meisten archimedischen Copulas sind zudem in geschlossener Form gegeben. Ein Kennzeichen dieser Klasse ist, dass jede zu der Klasse gehörende Copula durch einen Generator erzeugt wird. Ein Generator ist dabei eine Funktion  $\varphi$ , die die folgenden Eigenschaften erfüllt:<sup>12</sup>

- $\varphi$  ist eine stetige, konvexe und streng monoton fallende Funktion von  $\mathbf{I}$  nach  $[0, \infty]$
- $\varphi(1) = 0$

Die Pseudoinverse von  $\varphi$  ist dann die Funktion  $\varphi^{[-1]}$  mit  $\text{Dom } \varphi^{[-1]} = [0, \infty]$  und  $\text{Ran } \varphi^{[-1]} = \mathbf{I}$  für die gilt:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

<sup>11</sup>Dieses Unterkapitel beruht auf den Kapiteln 4.1, 4.3 und 4.6 in [13].

<sup>12</sup>Siehe [13, S.110 ff.].



Gilt  $\varphi(0) = \infty$ , dann stimmt  $\varphi^{[-1]}$  mit  $\varphi^{-1}$  überein.

Mit Hilfe des Generators und seiner Pseudoinversen kann nun eine  $n$ -dimensionale archimedische Copula geschrieben werden, als

$$C^n(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_n)).^{13} \quad (5.3)$$

Im mehrdimensionalen Fall muss der Generator zusätzlich die Eigenschaft

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \varphi(t) \geq 0, \quad \forall t \in (0, 1) \text{ und } k = 0, 1, 2, \dots$$

erfüllen.<sup>14</sup>

Die verschiedenen Familien innerhalb der Klasse der archimedischen Copulas kennzeichnen sich nun durch unterschiedliche Generatoren.

### 5.1.1 Gumbelcopula

Die Gumbelcopula ergibt sich durch Einsetzen des Generators  $\varphi_\theta(t) = -\ln(t)^\theta$  in Formel (5.3). Wir erhalten dann die geschlossene Form

$$C_\theta^n(\mathbf{u}) = \exp\left(-\left[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta + \dots + (-\ln u_n)^\theta\right]^{1/\theta}\right).^{15}$$

Wie unschwer erkennbar ist, handelt es sich bei der Gumbelfamilie um eine einparametrische Familie. Der Parameter  $\theta$  nimmt Werte im Intervall  $[1, \infty)$  an und gibt die Stärke der Abhängigkeit an. Für den Grenzfall  $\theta = 1$  ergibt sich die Unabhängigkeitscopula, also Unabhängigkeit, im Fall  $\theta = \infty$  erhalten wir die Komonotoniecopula, also perfekte positive Abhängigkeit.<sup>16</sup>

Die Gumbelcopula weist eine obere Tail-Dependence auf, was bedeutet, dass die Abhängigkeit im oberen Ende zunimmt. Mit zunehmendem  $\theta$  wächst auch die Tail-Dependence, wie die folgenden Grafiken belegen.

---

<sup>13</sup>Siehe [13, S.151].

<sup>14</sup>Siehe [13, S.151].

<sup>15</sup>Siehe [13, S.153].

<sup>16</sup>Siehe [13, S.116 f.].

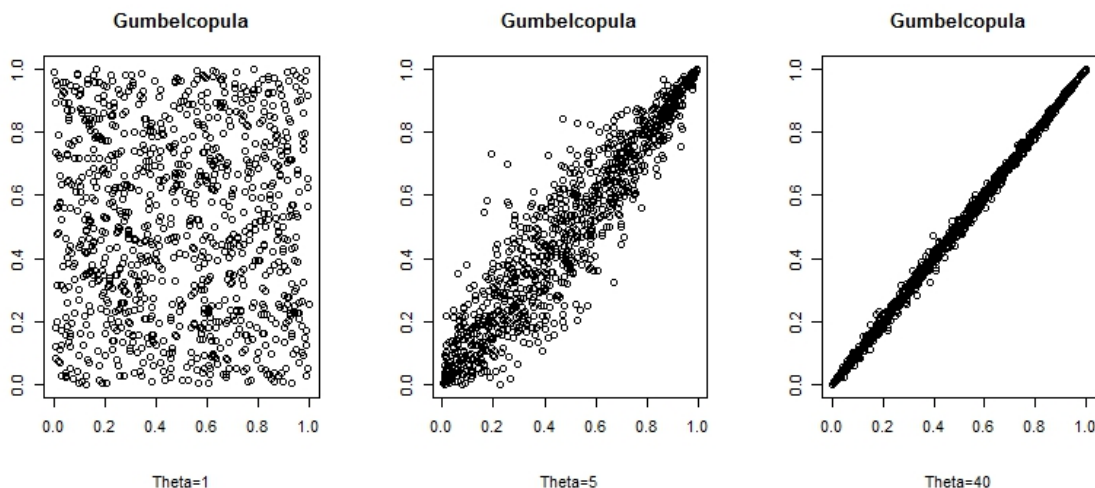


Abbildung 5.2: Gumbelcopula für verschiedene Werte von  $\theta$

### 5.1.2 Claytoncopula

Die bivariate Claytoncopula erhält man durch Einsetzen des Generators  $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$  in Formel (5.3). Dadurch ergibt sich dann folgende geschlossene Form für die zweidimensionale Claytoncopula:<sup>17</sup>

$$C_\theta(u, v) = \left[ \max \left( u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0 \right) \right]^{-1/\theta}$$

Der Definitionsbereich von  $\theta$  ist hierbei  $[-1, \infty) \setminus \{0\}$ . Wählen wir  $\theta = -1$ , so erhalten wir perfekte negative Abhängigkeit, für  $\theta = \infty$  ergibt sich, wie auch schon bei der Gumbelcopula, die Komonotoniecopula. Für  $\theta = 0$  erhalten wir die Unabhängigkeitscopula.<sup>18</sup> Ein bisschen anders verhält es sich bei der  $n$ -dimensionalen Verallgemeinerung. Der Generator ist in diesem Fall durch  $\varphi_\theta(t) = t^{-\theta} - 1$  gegeben und die Copula von der Form

$$C_\theta^n(\mathbf{u}) = \left( u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1 \right)^{-1/\theta}.$$

Im Gegensatz zum zweidimensionalen Fall gilt für den Abhängigkeitsparameter im  $n$ -dimensionalen Fall  $\theta > 0$ .<sup>19</sup>

Konnten wir bei der Gumbelcopula eine obere Tail-Dependence beobachten, so können wir bei der Claytoncopula eine untere Tail-Dependence beobachten. Dies ist auch in den folgenden Grafiken zu erkennen.

<sup>17</sup>Siehe [13, S.116 f.].

<sup>18</sup>Siehe [13, S.116 f.].

<sup>19</sup>Siehe [13, S.152].

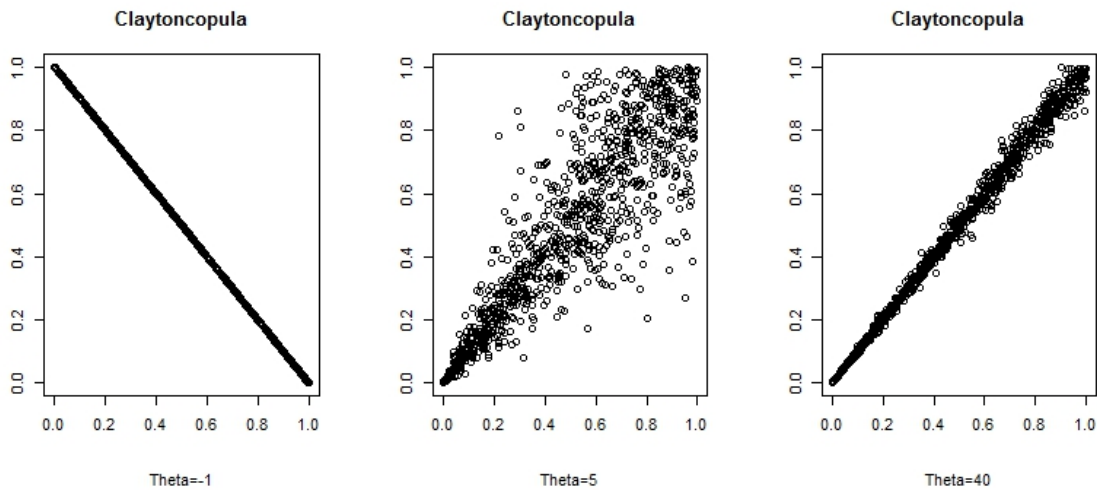


Abbildung 5.3: Claytoncopula für verschiedene Werte von  $\theta$

### 5.1.3 Frankcopula

Der Generator der Frankcopula ist gegeben durch  $\varphi_\theta(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ . Setzt man diesen Generator in Formel (5.3) ein, so erhält man

$$C_\theta^n(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\theta} \ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) \dots (e^{-\theta u_n} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right).^{20}$$

Im zweidimensionalen Fall ist die Copula für  $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$  definiert, im  $n$ -dimensionalen Fall nur für  $\theta > 0$ . Als Grenzfälle erhalten wir im 2-dimensionalen Fall für  $\theta = -\infty$  die Kontramotonicopula, für  $\theta = \infty$  die Komotonicopula und für  $\theta = 0$  die Unabhängigkeitscopula.<sup>21</sup>

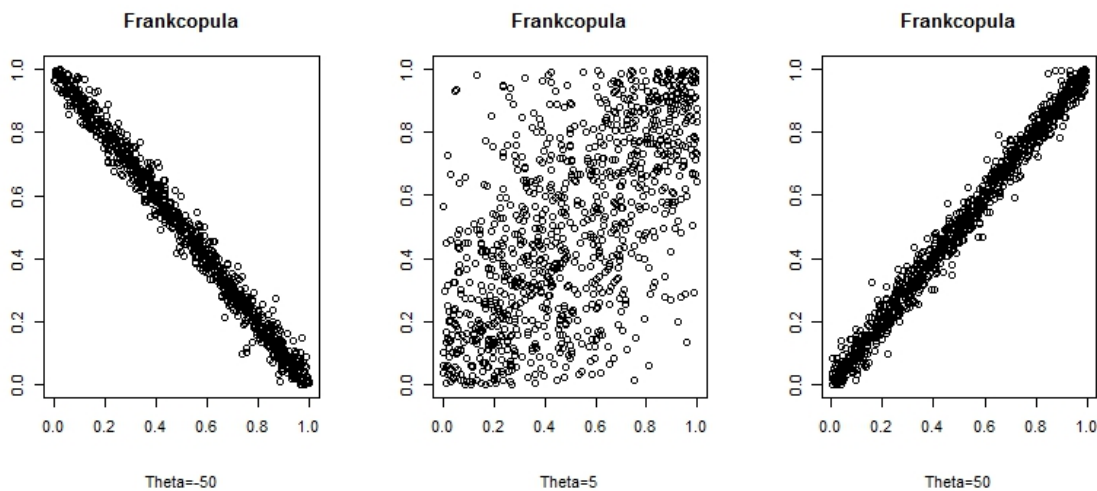


Abbildung 5.4: Frankcopula für verschiedene Werte von  $\theta$

<sup>20</sup>Siehe [13, S.153].

<sup>21</sup>Siehe [13, S.153] und [13, S.116 ff.] .

Im Gegensatz zur Gumbel- und Claytoncopula hat die Frankcopula weder obere noch untere Tail-Dependence.

## 5.2 Klasse der elliptischen Copulas

Während es sich bei archimedischen Copulas um explizite Copulas handelt und diese in geschlossener Form gegeben sind, gibt es für die elliptischen Copulas keine geschlossene Form, da es sich bei diesen Copulas um implizite Copulas handelt.

Die beiden bekanntesten Vertreter dieser Klasse stellen die Gaußcopula und die Student-t-Copula dar, welche wir im Folgenden herleiten wollen.

### 5.2.1 Gaußcopula<sup>22</sup>

Sei  $\mathbf{Y} \sim N_n(\mu, \Sigma)$ , also eine  $n$ -dimensionale Normalverteilung mit Mittelwertvektor  $\mu$  und Varianz-Kovarianzmatrix  $\Sigma$ . Dann gilt für  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Durch eine einfache Transformation lässt sich  $Y_i$  in eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $X_i \sim N(0, 1)$  umwandeln, für die dann gilt  $F_i(X_i) = \Phi(X_i)$ . Für den  $n$ -dimensionalen Zufallsvektor gilt dann  $\mathbf{X} \sim N(0, P)$ , wobei  $P$  die Korrelationsmatrix, bestehend aus den gewöhnlichen linearen Korrelationen, darstellt.  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  haben dann dieselbe Copula.

Wir können nun den Satz von Sklar anwenden, nachdem bekanntlich gilt  $C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$ ,  $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ . In unserem Fall ist die Verteilungsfunktion  $H = \Phi_P$ , also die multivariate Verteilungsfunktion von  $N(0, P)$  und  $F_i^{-1} = \Phi^{-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , also die univariate inverse Verteilungsfunktion von  $N(0, 1)$ . Somit kann die Gaußcopula also geschrieben werden als

$$C_P^n(\mathbf{u}) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$$

oder auch als

$$C_P^n(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n.$$

wobei hier  $f$  die Dichte von  $N(0, P)$  ist.

Die in der Korrelationsmatrix vorkommenden Korrelationsparameter liegen klarerweise im Intervall  $[0, 1]$ . Im zweidimensionalen Fall beschränkt sich die Korrelationsmatrix auf den linearen Korrelationsparameter  $\rho$ . Ist  $\rho = -1$  so liegt perfekte negative Abhängigkeit vor, ist  $\rho = 0$  so sprechen wir von Unabhängigkeit und für  $\rho = 1$  erhalten wir perfekte positive Abhängigkeit.

---

<sup>22</sup>Siehe [14, S.226 f.].

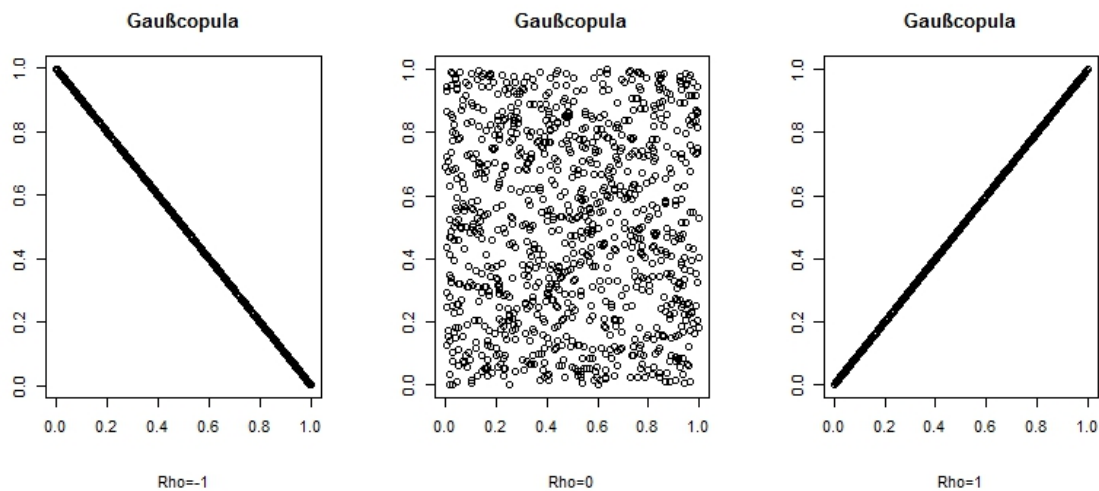


Abbildung 5.5: Gaußcopula für verschiedene Werte von  $\rho$

Die Gaußcopula weist, wie auch die Frankcopula, weder eine obere noch eine untere Tail-Dependence auf.

Nach dem Satz von Sklar können wir nun beliebige Randverteilungen in die Copula einsetzen. Die dadurch erhaltenen Verteilungen werden im Falle der Gauß-Copula Meta-Gauß-Verteilungen genannt.

## 5.2.2 Student-t-Copula<sup>23</sup>

Die Herleitung der Student-t-Copula erfolgt analog zur Herleitung der Gaußcopula nur mit zugrunde liegender Student-t-Verteilung. Man erhält somit die Form

$$C_{v,P}^n(\mathbf{u}) = t_{v,P}(t_v^{-1}(u_1), t_v^{-1}(u_2), \dots, t_v^{-1}(u_n))$$

bzw.

$$C_{v,P}^n(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_n)} f(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n.$$

Hierbei ist  $v > 0$  der Parameter der Freiheitsgrade und  $P$  die Korrelationsmatrix, bestehend aus linearen Korrelationsparametern.  $t_{v,P}$  ist die multivariate Verteilungsfunktion von  $t_n(v, 0, P)$ ,  $t_v^{-1}$  die univariate inverse Verteilungsfunktion von  $t(v, 0, 1)$  und  $f$  die gemeinsame Dichtefunktion von  $t_n(v, 0, P)$ .

Wie auch bei der Gaußcopula gilt im bivariaten Fall bei der Student-t-Copula, dass wir die Komtonotonicopula für  $\rho = 1$ , die Unabhängigkeitscopula für  $\rho = 0$  und die Kontramotonicopula für  $\rho = -1$  erhalten.

Die Student-t-Copula besitzt gleichermaßen eine obere und untere Tail-Dependence.

<sup>23</sup>Siehe [14, S.228 f.].

Diese nimmt mit zunehmendem  $\rho$  zu und dafür mit zunehmendem  $v$  ab. Folglich verschwindet die Tail-Dependence für  $v \rightarrow \infty$ .

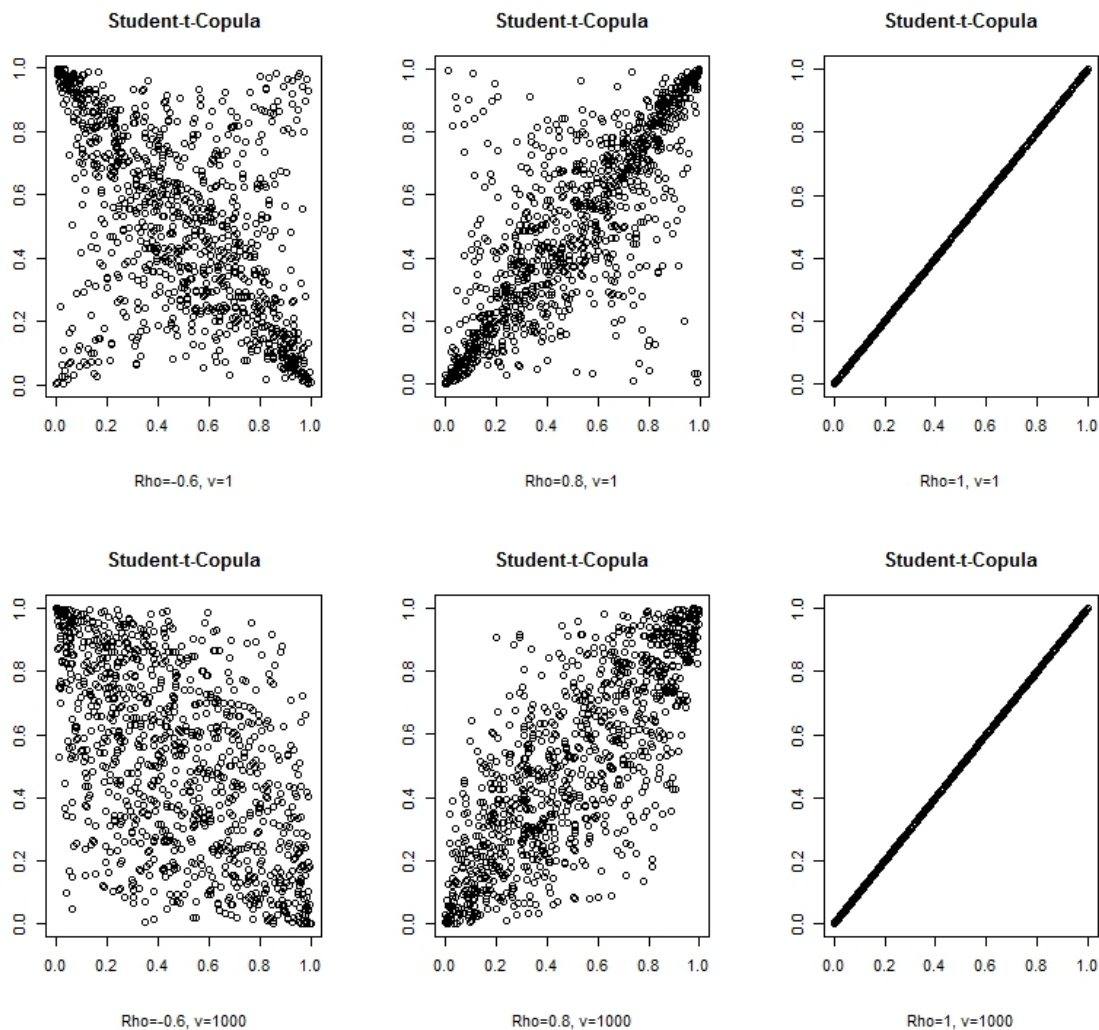


Abbildung 5.6: Student-t-Copula für verschiedene Werte von  $\rho$  und  $v$

Auf Grund des Satzes von Sklar ist es nun wieder möglich, beliebige Randverteilungen einzusetzen. So ergeben sich bei Verwendung der Student-t-Copula dann Meta-t-Verteilungen.

### 5.3 Abhängigkeitsmaße und deren Eigenschaften

Um den Zusammenhang zwischen zwei beliebigen Zufallsvariablen beschreiben bzw. analysieren zu können, bedient man sich der Abhängigkeitsmaße. Je nach Wahl des Abhängigkeitsmaßes hat dieses unterschiedliche Eigenschaften. Wir wollen hier die wichtigsten, für diese Arbeit relevanten, Abhängigkeitsmaße vorstellen und ihre Vor- und Nachteile abwägen.

### 5.3.1 Linearer Korrelationskoeffizient<sup>24</sup>

Der lineare Korrelationskoeffizient ist eines der am weitest verbreitetsten Abhängigkeitsmaße. Grund dafür ist unter anderem die unkomplizierte Anwendung. Definiert ist der lineare Korrelationskoeffizient für zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  als

$$\rho(X, Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}}$$

wobei  $\sigma_{XY} = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  die Kovarianz von  $X$  und  $Y$  bezeichnet und  $\sigma_X^2$  und  $\sigma_Y^2$  die jeweiligen Varianzen.<sup>25</sup>

$\rho$  kann nun Werte im Intervall  $[-1, 1]$  annehmen. Perfekte lineare Abhängigkeit besteht genau dann, wenn  $\mathbb{P}[Y = aX + b] = 1$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$ . In diesem Fall ist  $\rho(X, Y) = \pm 1$ .

Eine Problematik wird bereits bei Betrachtung der Definition ersichtlich: Der lineare Korrelationskoeffizient ist nur für Zufallsvariablen mit endlicher Varianz definiert. In der Versicherungsbranche werden jedoch häufig Verteilungen mit schweren Enden, so genannten Heavy-Tails, betrachtet. Für diese Verteilungen ist die lineare Korrelation daher nicht definiert.

Wie der Name bereits suggeriert, gibt der lineare Korrelationskoeffizient den linearen Zusammenhang an. Sind z.B. zwei Zufallsvariablen  $X$  und  $Y = e^X$  gegeben, so sind diese offensichtlich abhängig voneinander. Jedoch ist diese Abhängigkeit nicht linear und somit würde sich der lineare Korrelationskoeffizient als Abhängigkeitsmaß nicht eignen.

Vorsicht ist allgemein bei Transformationen geboten. Denn der lineare Korrelationskoeffizient ist nur invariant unter streng monoton wachsenden, linearen Transformationen, nicht jedoch unter nicht-linearen Transformationen.

Betrachtet man noch einmal die Definition von  $\rho$ , so erkennt man den engen Zusammenhang zur Kovarianz. Ist nämlich die Kovarianz  $\sigma_{XY} = 0$ , so folgt automatisch  $\rho(X, Y) = 0$ . Die Umkehrung gilt im Allgemeinen jedoch nicht. Sind die beiden Zufallsvariablen normalverteilt und ist ihre gemeinsame Verteilungsfunktion ebenfalls eine Normalverteilung, so ist der Rückschluss von Unkorreliertheit auf Unabhängigkeit zulässig.

Der lineare Korrelationskoeffizient ist also auf Grund seiner Eigenschaften nur mäßig gut geeignet, um die Abhängigkeiten zwischen zwei oder mehreren Zufallsvariablen zu messen.

---

<sup>24</sup>Siehe [14, S.238].

<sup>25</sup>Siehe [14, S.175].

### 5.3.2 Kendall's Tau

Sowohl Kendall's Tau als auch Spearman's Rho gehören zu den so genannten Rangkorrelationen. Es handelt sich dabei um nichtparametrische Abhängigkeitsmaße, die den Grad der monotonen Abhängigkeit zwischen zwei Zufallsvariablen messen.

Um die Konzepte der beiden Rangkorrelationen besser verstehen zu können, führen wir zunächst die Begriffe Konkordanz und Diskordanz ein.<sup>26</sup>

Informell versteht man unter der Konkordanz eines Paares von Zufallsvariablen, dass große Werte der einen Zufallsvariable mit großen Werten der anderen einhergehen, ebenso wie kleine Werte der einen mit kleinen Werten der anderen Zufallsvariable einhergehen. Diskordanz ist dann das Gegenteil, hier gehen große Werte der einen Zufallsvariable mit kleinen Werten der anderen einher und umgekehrt.

Sind  $(x_i, y_i)$  und  $(x_j, y_j)$  zwei Realisationen eines Zufallsvektors  $(X, Y)$  bestehend aus zwei stetigen Zufallsvariablen, so sagen wir  $(x_i, y_i)$  und  $(x_j, y_j)$  sind konkordant, wenn  $x_i < x_j$  und  $y_i < y_j$  oder  $x_i > x_j$  und  $y_i > y_j$  oder alternativ, wenn  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ . Die Realisationen heißen diskordant, wenn  $x_i < x_j$  und  $y_i > y_j$  oder  $x_i > x_j$  und  $y_i < y_j$  oder alternativ, wenn  $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ .

Mit den Begriffen Konkordanz und Diskordanz lässt sich nun Kendall's Tau für zwei unabhängige, identisch verteilte Zufallsvektoren  $(X_1, Y_1)$  und  $(X_2, Y_2)$  definieren:<sup>27</sup>

$$\tau(X, Y) = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

Kendall's Tau ist also nichts anderes, als die Wahrscheinlichkeit der Konkordanz weniger der Wahrscheinlichkeit der Diskordanz.

Für zwei stetige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit Copula  $C$  lässt sich Kendall's Tau noch darstellen als

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1$$

bzw.

$$\tau(X, Y) = 4\mathbb{E}[C(U, V)] - 1,$$

wobei  $U$  und  $V$  zwei auf dem Intervall  $(0,1)$  uniformverteilte Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion  $C$  sind.<sup>28</sup>

Kendall's Tau nimmt, wie auch der lineare Korrelationskoeffizient, Werte im Intervall  $[-1, 1]$  an. Im Falle  $\tau = 1$  liegt perfekte positive Abhängigkeit (Komonotonie) vor, im

---

<sup>26</sup>Siehe [13, S.157 f.].

<sup>27</sup>Siehe [13, S.158].

<sup>28</sup>Siehe [13, S.161 f.].



Falle  $\tau = -1$  perfekte negative Abhängigkeit (Kontramonotonie).

Kendall's Tau hat nun im Gegensatz zum linearen Korrelationskoeffizienten den großen Vorteil, dass das Abhängigkeitsmaß invariant unter streng monoton wachsenden linearen Transformationen, aber auch unter streng monoton wachsenden nicht-linearen Transformationen ist. Besonders in der Finanzmathematik ist dies ein großer Vorteil, da häufig logarithmierte Werte betrachtet werden.<sup>29</sup>

Für die im vorherigen Unterkapitel vorgestellten archimedischen Copulas sowie für die Gauß- und Student-t-Copula ist Kendall's Tau sehr einfach zu bestimmen. In der folgenden Tabelle ist Kendall's Tau für diese Copulas angegeben.

Copula	$\tau$
Gumbel	$1 - \frac{1}{\theta}$
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Frank	$1 - 4(1 - D_1(\theta))/\theta$
Gauß	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$
Student-t	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$

Tabelle 5.1: Kendall's Tau für die Gumbel-, Clayton-, Frank-, Gauß- und Student-t-Copula, Quelle: [2, S.178]

Hierbei ist  $\theta$  der Copulaparameter,  $D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t-1} dt$ <sup>30</sup> und  $\rho$  der gewöhnliche lineare Korrelationskoeffizient.

### 5.3.3 Spearman's Rho

Spearman's Rho ist wie Kendall's Tau ein auf Konkordanz und Diskordanz basierendes Abhängigkeitsmaß. Abgesehen davon teilt es auch einige weitere Eigenschaften mit Kendall's Tau, die wir später aufzeigen.

Einfacher als über die Definition mittels Konkordanz und Diskordanz kann man Spearman's Rho für zwei stetige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  mit Verteilungsfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  auch über den linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho$  definieren:<sup>31</sup>

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y))$$

Ist zusätzlich  $C$  eine Copula, so lässt sich Spearman's Rho, wie auch Kendall's Tau, als Integral bezüglich der Copula bzw. als Erwartungswert schreiben:<sup>32</sup>

<sup>29</sup>Siehe [14, S.246].

<sup>30</sup>Siehe [15, S.35].

<sup>31</sup>Siehe [2, S.173].

<sup>32</sup>Siehe [2, S.173].

$$\rho_S(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \, dC(u, v) - 3$$

bzw.

$$\rho_S(X, Y) = 12\mathbb{E}[UV] - 3,$$

wobei  $U$  und  $V$  zwei auf dem Intervall  $(0,1)$  uniformverteilte Zufallsvariablen sind. Der Wertebereich ist, wie auch bei den anderen vorgestellten Abhängigkeitsmaßen, das Intervall  $[-1, 1]$ . Nimmt Spearman's Rho den Wert  $-1$  an, so liegt perfekte negative Abhängigkeit (Kontramonotonie) vor, für  $\rho_S = 1$  sprechen wir von perfekter positiver Abhängigkeit (Komonotonie).

Spearman's Rho teilt mit Kendall's Tau die Eigenschaft, sowohl unter streng monoton wachsenden linearen, als auch nicht-linearen Transformationen invariant zu sein.<sup>33</sup>

Für die Gauß-, Student-t- und Frankcopula lässt sich Spearman's Rho wieder in einfacher Weise darstellen, für die Gumbelcopula gibt es keine geschlossene Form und auch die Claytoncopula besitzt nur eine sehr komplizierte Form.

Copula	$\rho_S$
Frank	$1 - \frac{12}{\theta}(D_1(\theta) - D_2(\theta))$
Gauß	$\frac{6}{\pi} \arcsin(\frac{1}{2}\rho)$
Student-t	$\frac{6}{\pi} \arcsin(\frac{1}{2}\rho)$

Tabelle 5.2: Spearman's Rho für die Frank-, Gauß- und Student-t-Copula, Quelle: [2, S.178]

$D_1(\theta)$  haben wir bereits für Kendall's Tau definiert, die Definition von  $D_2(\theta)$  ist sehr ähnlich:  $D_2(\theta) = \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta \frac{t^2}{e^t - 1} dt$ .<sup>34</sup>

---

<sup>33</sup>Siehe [14, S.246].

<sup>34</sup>Siehe [15, S.35].

# Kapitel 6

## Korrelationen und Abhängigkeiten in der Standardformel

In der Berechnung der Eigenkapitalerfordernisse eines Versicherungsunternehmens nehmen Abhängigkeiten eine wichtige Rolle ein. Denn um das Kapital zur Abdeckung des Gesamtrisikos, dem das Unternehmen ausgesetzt ist, genau zu ermitteln, reicht es, wie wir gesehen haben, nicht einfach aus, die Kapitalanforderungen der einzelnen Risiken zu berechnen und diese zu addieren, sondern es erfordert eine genaue Analyse der Abhängigkeiten zwischen den unterschiedlichen Risiken, um mögliche Diversifikationseffekte in die Berechnung miteinzubeziehen.

Abhängigkeiten bestehen auf verschiedenen Ebenen. Auf einer der untersten Ebenen findet man Abhängigkeiten beispielsweise im Untermodul Erdbebenrisiko zwischen den unterschiedlichen Regionen eines Landes. Auf der Submodulebene weisen die Module unterschiedlichste Abhängigkeiten zwischen einander auf. Und auch auf Modulebene sind alle Module bis auf das lebensversicherungstechnische und das nichtlebensversicherungstechnische Modul sowie das krankenversicherungstechnische und das nichtlebensversicherungstechnische Modul in gewisser Weise abhängig von einander. In den Solvency 2 Bestimmungen wurde nun festgelegt, dass die Erfassung der Abhängigkeiten mittels linearer Korrelation erfolgen soll. Nach [4, Anhang IV] sollen zumindest für die Berechnung der Kapitalerfordernisse folgender Teile der Standardformel Korrelationsmatrizen herangezogen werden:

- Basissolvenzkapitalanforderung
- Kapitalerfordernis für das nichtlebensversicherungstechnische Risiko
- Kapitalerfordernis für das lebensversicherungstechnische Risiko
- Kapitalerfordernis für das Marktrisiko

Für die Berechnung der anderen Risikomodule sieht der Gesetzestext keine bestimmten Aggregationsmethoden vor, jedoch können Korrelationsmatrizen auch für diese verwendet werden. Dies ist auch tatsächlich der Fall, unter anderem im Bereich des Naturkatastrophenrisikos.<sup>1</sup>

## 6.1 Korrelationsmatrizen in der Standardformel

Wir wollen uns zunächst mit Korrelationsmatrizen allgemein vertraut machen, bevor wir jene, die in der Standardformel zur Anwendung kommen, genauer untersuchen. Die Definition der Korrelationsmatrix erhält man über die Definition der Kovarianzmatrix, da bekanntlich für die lineare Korrelation der Zusammenhang  $\rho(X, Y) = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$  gilt, wobei hier  $\rho(X, Y)$  die Korrelation der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  bezeichnet,  $\sigma_{XY}$  die Kovarianz von  $X$  und  $Y$  und  $\sigma_X$  und  $\sigma_Y$  die jeweiligen Standardabweichungen bezeichnen. Die Korrelation ist daher nichts anderes als die standardisierte Kovarianz. Eine Kovarianzmatrix ist eine positiv semidefinite, symmetrische  $n \times n$ -Matrix. Ist  $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$  ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor, so sind die Einträge der Kovarianzmatrix die paarweisen Kovarianzen der Zufallsvariablen  $X_i$  und  $X_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $X_i, X_j \in \mathbb{R}$ . Die Kovarianzmatrix ist dann gegeben durch

$$\Sigma_X = \sigma_{X_i X_j} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Diagonale besteht dabei aus den Varianzen, da  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Beim Übergang zur Korrelationsmatrix bleiben klarerweise die Eigenschaften der Symmetrie und der positiven Semidefinitheit erhalten, in der Hauptdiagonale stehen lauter Einsen.

Überprüft man nun einige in der Standardformel vorkommende Korrelationsmatrizen, so stellt man fest, dass **nicht alle Matrizen die positive Semidefinitheit erfüllen** und es sich bei diesen Matrizen daher im mathematischen Sinne eigentlich gar nicht um Korrelationsmatrizen handelt. So etwa die Matrix, die in einem Untermodul des nichtlebensversicherungstechnischen Risikos, dem Erdbebenrisiko, zur Aggregation der unterschiedlichen Regionen Österreichs verwendet wird.<sup>2</sup> Es handelt sich dabei um eine  $77 \times 77$  Matrix. Damit eine Matrix positiv semidefinit ist, müssen all ihre Eigenwerte größer oder gleich 0 sein. Dies ist bei der eben erwähnten Matrix nicht der Fall, da wir hier auch negative Eigenwerte erhalten. Auch die Matrix, die zur

---

<sup>1</sup>Siehe [3, Artikeln 121-125].

<sup>2</sup>Siehe [3, Anhang XXIII].

Aggregation der österreichischen Regionen im Untermodul Überschwemmungsrisiko eingesetzt wird, enthält negative Eigenwerte und ist daher im mathematischen Sinne keine Korrelationsmatrix.<sup>3</sup>

Natürlich gibt es aber auch Matrizen, die die Bedingung der positiven Semidefinitheit erfüllen. Von den überprüften Matrizen sind das die Matrix zur Berechnung der Basissolvvenzkapitalanforderung sowie die Matrizen zur Bestimmung des Kapitalerfordernisses für das nichtlebensversicherungstechnische Risiko, für das lebensversicherungstechnische Risiko, für das Marktrisiko und für das krankenversicherungstechnische Risiko.<sup>4</sup>

## 6.2 Verteilungsannahmen und Annahmen über Abhängigkeiten

Das Konzept der Verwendung linearer Korrelationen zur Aggregation von Risiken ist unkompliziert und sehr einfach anzuwenden, es ist leicht durchschaubar und verständlich. Tatsächlich birgt dieses Konzept allerdings einige Tücken. Denn lineare Korrelationen liefern nur dann ein korrektes Ergebnis, wenn die zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen (multivariate) Normalverteilungen bzw. allgemeine elliptische Verteilungen sind und wenn eine lineare Abhängigkeit besteht. In der Versicherungsbranche treffen diese Annahmen allerdings nur in den seltensten Fällen zu. Die Verteilungen weichen großteils von einer Normalverteilung ab und sind oft schief. Auch die Abhängigkeiten zwischen den Risiken sind nicht linear, vielmehr bestehen Abhängigkeiten in den Verteilungsenden. Einige Verteilungen sind auf Grund von Rückversicherungen auch abgeschnitten.<sup>5</sup>

Diese Eigenschaften lassen vermuten, dass die Aggregation mittels linearer Korrelation nicht optimal ist, um Abhängigkeiten genau zu erfassen. Tatsächlich kann die Verwendung linearer Korrelationen in diesem Fall auch zu Unter- oder Überschätzungen bei der Berechnung des Risikokapitals führen.

Zunächst wollen wir jedoch die Gültigkeit der Aggregationsformel für die elliptischen Verteilungen und Normalverteilungen zeigen.

### 6.2.1 Die Standardformel für elliptische Verteilungen und normalverteilte Risiken

Um mit elliptischen Verteilungen arbeiten zu können, wollen wir zunächst die sphärischen Verteilungen, die als Erweiterung der multivariaten Standardnormalverteilung  $N_n(0, I)$

---

<sup>3</sup>Siehe [3, Anhang XXIV].

<sup>4</sup>Siehe [4, Anhang IV] und [3, Artikel 114], [3, Artikel 136], [3, Artikel 164], [3, Artikel 144].

<sup>5</sup>Siehe [16, S.8 f.].

aufgefasst werden können, definieren.

**Definition** (Sphärische Verteilung). *Ein Zufallsvektor  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)'$  hat eine sphärische Verteilung, wenn für jede orthogonale Abbildung  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (d.h. wenn gilt  $UU' = U'U = I_{n \times n}$ )*

$$U\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \mathbf{X}.$$

*Die charakteristische Funktion  $\psi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}[\exp(i\mathbf{t}'\mathbf{X})]$  einer solchen Verteilung hat eine besonders einfache Form. Es existiert eine Funktion  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\psi(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}'\mathbf{t}) = \phi(t_1^2 + \dots + t_n^2)$ . Diese Funktion ist der charakteristische Generator der sphärischen Verteilung und man schreibt  $\mathbf{X} \sim S_n(\phi)$ .*<sup>6</sup>

Auch die elliptischen Verteilungen stellen eine Verallgemeinerung der multivariaten Normalverteilung dar, jedoch im Gegensatz zur sphärischen Verteilung nicht der unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen, sondern der unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert  $\mu$  und Kovarianzmatrix  $\Sigma$  ( $N_n(\mu, \Sigma)$ ). Die elliptische Verteilung kann als affine Abbildung einer sphärischen Abbildung aufgefasst werden, wie auch die folgende Definition zeigt.<sup>7</sup>

**Definition** (Elliptische Verteilung). *Sei  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mu$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^n$  eine affine Abbildung. Dann hat  $\mathbf{X}$  eine elliptische Verteilung, wenn  $\mathbf{X} = T(\mathbf{Y})$  und  $\mathbf{Y} \sim S_n(\phi)$ .*

*Die charakteristische Funktion ist gegeben durch  $\psi(\mathbf{t}) = \exp(i\mathbf{t}'\mu)\phi(\mathbf{t}'\Sigma\mathbf{t})$ .*

*Die elliptischen Verteilungen werden im Folgenden immer mit  $E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  bezeichnet, wobei  $\Sigma := AA'$ .*

Elliptische Verteilungen haben einige Eigenschaften mit der multivariaten Normalverteilung gemein. So ist jede affine Transformation eines Zufallsvektors mit elliptischer Verteilung wieder elliptisch und besitzt denselben charakteristischen Generator wie der ursprüngliche Zufallsvektor und auch die Randverteilungen von elliptischen Verteilungen sind elliptisch mit demselben charakteristischen Generator.<sup>8</sup>

Eine der wichtigsten Eigenschaften der elliptischen Verteilungen im Zusammenhang mit der Standardformel ist, dass die Aggregation unter Verwendung des Value-at-Risks und linearer Korrelationen das exakte Resultat liefert, wenn es sich bei der zugrunde liegenden Verteilung um eine elliptische Verteilung handelt. Grund dafür ist, dass der Value-at-Risk ein kohärentes Risikomaß in der Welt der elliptischen Verteilungen ist. Insbesondere ist in diesem Fall die Subadditivität gegeben. Im folgenden Satz soll dies bewiesen werden.<sup>9</sup>

---

<sup>6</sup>Siehe [17, S.185 f.].

<sup>7</sup>Siehe [17, S.186 f.].

<sup>8</sup>Siehe [17, S.187 f.].

<sup>9</sup>Siehe Theorem 1.1 in [17, S.190 f.].

**Satz 6.1.** Sei  $\mathbf{X} \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$  mit  $\sigma^2[X_i] = \sigma_i^2 < \infty$ . Weiters sei

$$P = \left\{ Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge der linearen Portfolios.  $F_Z$  sei die Verteilung von  $Z$  und der Value-at-Risk des Portfolios  $\text{VaR}_\alpha(Z) = F_Z^{-1}(\alpha) = \inf\{z \in \mathbb{R} : F_Z(z) \geq \alpha\}$ . Dann gilt:

Für zwei beliebige Portfolios  $Z_1, Z_2 \in P$  und  $0,5 \leq \alpha < 1$  gilt

$$\text{VaR}_\alpha(Z_1 + Z_2) \leq \text{VaR}_\alpha(Z_1) + \text{VaR}_\alpha(Z_2).$$

*Beweis.* Da  $(Z_1, Z_2)^t$  eine elliptische Verteilung besitzt, sind auch  $Z_1, Z_2$  und  $Z_1 + Z_2$  elliptisch verteilt.

Sei  $q_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der standardisierten Verteilung von diesem Typ. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(Z_1) &= \mathbb{E}[Z_1] + \sigma[Z_1]q_\alpha, \\ \text{VaR}_\alpha(Z_2) &= \mathbb{E}[Z_2] + \sigma[Z_2]q_\alpha, \\ \text{VaR}_\alpha(Z_1 + Z_2) &= \mathbb{E}[Z_1 + Z_2] + \sigma[Z_1 + Z_2]q_\alpha \end{aligned}$$

Da  $\sigma[Z_1 + Z_2] \leq \sigma[Z_1] + \sigma[Z_2]$  und  $q_\alpha \geq 0$  folgt das Resultat.  $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass bei zugrunde liegender elliptischer Verteilung die Wurzelformel das exakte Resultat liefert.

**Satz 6.2.** Sei  $P$  die Menge der linearen Portfolios  $\left\{ Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$ , wobei  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n) \sim E_n(0, \Sigma, \phi)$ . Dann gilt für jedes  $Z \in P$

$$\text{SCR}_Z(\alpha) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{SCR}_{\lambda_i X_i}^2(\alpha) + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \text{SCR}_{\lambda_i X_i}(\alpha) \text{SCR}_{\lambda_j X_j}(\alpha)} \quad (6.1)$$

wobei  $\rho_{ij}$  den linearen Korrelationskoeffizienten zwischen  $X_i$  und  $X_j$  bezeichnet.

Der Beweis zu diesem Satz findet sich in [14, S.295 ff.]. Dabei entspricht das dort allgemein gewählte Risikomaß in unserem Fall dem VaR. Dies ist zulässig, da der VaR die Eigenschaften der positiven Homogenität, der Translationsinvarianz und der Verteilungsinvarianz erfüllt.

Da die multivariate Normalverteilung ein Spezialfall der elliptischen Verteilung ist, ist die Standardformel auch für diese Verteilung gültig.

**Satz 6.3.** Sei  $(X_1, \dots, X_n)^t = \mathbf{X} \sim N_n(0, \Sigma)$  mit  $\sigma^2[X_i] = \sigma_i^2 < \infty$ . Dann gilt

$$\text{SCR}_{X_1 + \dots + X_n}(\alpha) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \text{SCR}_{X_i}^2(\alpha) + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \text{SCR}_{X_i}(\alpha) \text{SCR}_{X_j}(\alpha)} \quad (6.2)$$

wobei  $\rho_{ij}$  den linearen Korrelationskoeffizienten zwischen  $X_i$  und  $X_j$  bezeichnet.

*Beweis.* Zunächst gilt für eine normalverteilte Zufallsvariable  $Y \sim N(0, \sigma^2)$ , dass das SCR zum Niveau  $1 - \alpha$  gegeben ist durch  $\text{SCR}_Y(\alpha) = \text{VaR}_Y(\alpha) - \mathbb{E}[Y] = \text{VaR}_Y(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)\sigma$ , wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Um die Gleichheit in (6.2) zu zeigen, betrachten wir zunächst die linke Seite: Da  $(X_1, \dots, X_n)'$  multivariat normalverteilt ist, sind auch  $X_1, \dots, X_n$  und die Summe normalverteilt mit  $X_1 + \dots + X_n \sim N(0, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij})$ , wobei  $\sigma_{ij}$  die Kovarianz zwischen  $X_i$  und  $X_j$  bezeichnet. Nach obiger Bemerkung gilt nun also:

$$\text{SCR}_{X_1 + \dots + X_n}^2(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)^2 (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij})$$

Nun widmen wir uns der rechten Seite. Für  $X_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  erhalten wir  $\text{SCR}_{X_i}^2(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_i^2$  und  $\rho_{ij} \text{SCR}_{X_i}(\alpha) \text{SCR}_{X_j}(\alpha) = \rho_{ij} \Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_i \sigma_j$ . Da  $\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j = \sigma_{ij}$  erhalten wir nach Herausheben des Faktors  $\Phi^{-1}(\alpha)^2$  und Summation über alle  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{SCR}_{X_i}^2(\alpha) + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \text{SCR}_{X_i}(\alpha) \text{SCR}_{X_j}(\alpha) = \\ \Phi^{-1}(\alpha)^2 (\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sigma_{ij}) \end{aligned}$$

womit die Gleichheit der beiden Seiten bewiesen ist. □

Nun stellt sich die Frage, ob die Standardformel auch gültig ist, wenn anstatt einer multivariaten Normalverteilung mit Mittelwert 0 eine multivariate Normalverteilung mit einem beliebigen Mittelwertvektor herangezogen wird. Um das herauszufinden, wollen wir ein einfaches Beispiel betrachten:

**Beispiel 6.1.** Seien  $X_1$  und  $X_2$  normalverteilte Zufallsvariablen mit  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  und  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . Wir berechnen zuerst wieder die linke Seite der Gleichung (6.2): Aus  $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12})$  folgt:

$$\text{SCR}_{X_1 + X_2}(\alpha)^2 = \Phi^{-1}(\alpha)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_{12})$$

Ausmultipliziert erhält man:

$$\text{SCR}_{X_1 + X_2}(\alpha)^2 = \Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_1^2 + \Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_{12}$$

Die rechte Seite quadriert hat dann die Form:

$$\Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_1^2 + \Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_2^2 + 2 \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2} \Phi^{-1}(\alpha) \sigma_1 \Phi^{-1}(\alpha) \sigma_2$$

Kürzt man den Bruch, so erhält man auch hier:

$$\Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_1^2 + \Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\Phi^{-1}(\alpha)^2 \sigma_{12}$$

Es ist nun offensichtlich, dass die beiden Seiten übereinstimmen.



Die Standardformel liefert auch in diesem Fall ein exaktes Ergebnis. Dieses Resultat ist nicht sehr überraschend, wenn wir uns noch einmal die Definition des Value-at-Risks und des SCR in Erinnerung rufen. Schließlich ist der Value-at-Risk einer Normalverteilung  $N(\mu, \sigma^2)$  zum Niveau  $1 - \alpha$  gegeben durch  $\text{VaR}(\alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$  und das  $\text{SCR}(\alpha) = \text{VaR}(\alpha) - \mu$ . Durch Einsetzen des VaRs kürzt sich  $\mu$  weg. Die Standardformel ist also bei zugrunde liegender Normalverteilung unabhängig vom Mittelwert.

## 6.2.2 Die Standardformel für schiefe Verteilungen

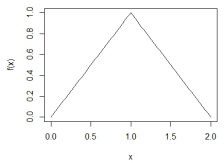
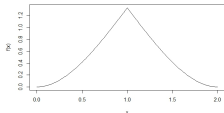
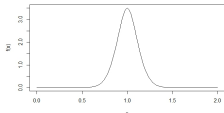
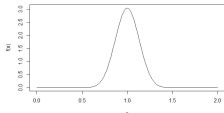
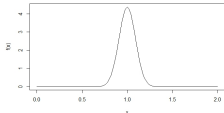
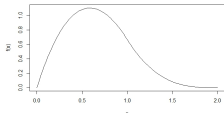
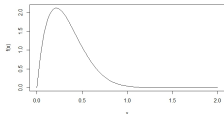
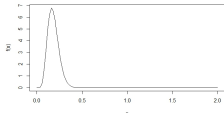
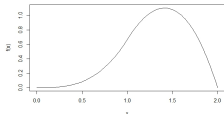
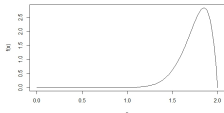
Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gezeigt, dass die Standardformel für (multivariate) Normalverteilungen bzw. noch allgemeiner für elliptische Verteilungen das korrekte Resultat liefert. Dies ist aber nicht für jede beliebige zugrunde liegende Verteilung zutreffend. Etwa für schiefe Verteilungen. Bevor wir diese Klasse von Verteilungen genauer studieren, wollen wir uns die Definition der Schiefe einer Verteilung in Erinnerung rufen.

**Definition** (Schiefe). *Die Schiefe einer Zufallsvariable  $X$  mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  ist definiert als*

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu)^3]}{\sigma^3}$$

*Ist  $\gamma > 0$  so nennt man die Verteilung von  $X$  rechtsschief. Die Verteilung von  $X$  heißt linksschief, falls  $\gamma < 0$ . Bei  $\gamma = 0$  handelt es sich um eine symmetrische Verteilung.*

Wir wollen nun einige schiefe Verteilungen untersuchen und deren Auswirkungen auf das mittels Wurzelformel aggregierte SCR. Dazu betrachten wir zunächst zwei unabhängige betaverteilte Risiken  $X \sim Be(a_1, b_1)$  und  $Y \sim Be(a_2, b_2)$ . Für einige Werte für  $a_1, b_1, a_2, b_2$  soll nun die Exaktheit der Standardformel überprüft werden. Betrachtet man die folgende Tabelle, so erkennt man, dass es zu teils großen Abweichungen zwischen dem tatsächlichen SCR und dem mittels Standardformel aggregierten SCR kommt. Auffällig ist auch, dass das **Eigenkapitalerfordernis für rechtsschiefe Verteilungen durch die Wurzelformel fast immer überschätzt wird, während es für linksschiefe Verteilungen unterschätzt** wird. Bei den symmetrischen Verteilungen ist erkennbar, dass die Approximation durch die Wurzelformel für große Werte für  $a_1, b_1, a_2, b_2$  ganz gut ist, hier beträgt der Fehler nicht einmal 1%.

$(a_1, b_1, a_2, b_2)$		Schiefe	$SCR_{exakt}(\alpha)$	$SCR_{\sqrt{}}(\alpha)$	Fehler in %
(1, 1, 1, 1)		0	0,9000	0,7000	-22,22
(1, 2, 2, 1)		0	0,8009	0,6816	-14,89
(15, 3, 3, 15)		0	0,3251	0,3109	-4,37
(15, 14, 14, 15)		0	0,3274	0,3220	-1,66
(30, 30, 30, 30)		0	0,2315	0,2297	-0,78
(1, 2, 1, 2)		0,4	0,9172	0,8428	-8,11
(1, 5, 1, 5)		0,84	0,6433	0,6883	7,01
(4, 40, 4, 40)		0,59	0,1879	0,2005	6,68
(2, 1, 2, 1)		-0,41	0,6158	0,4679	-24,02
(7, 1, 7, 1)		-0,96	0,2353	0,1757	-25,30

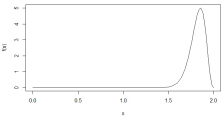
(20, 2, 20, 2)		-0,81	0,1493	0,1214	-18,68
----------------	---	-------	--------	--------	--------

Tabelle 6.1: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegenden Betaverteilungen mit  $\alpha = 0,005$

Wir wollen nun überprüfen, ob das Beobachtete auch für andere Verteilungen und Kombinationen zutrifft. Dazu betrachten wir Exponentialverteilungen, Weibullverteilungen, Normalverteilungen und Lognormalverteilungen. Es wird immer angenommen, dass die Zufallsvariablen unabhängig sind.

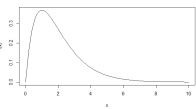
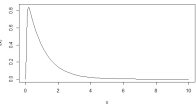
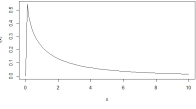

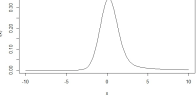

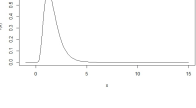
Verteilung 1	Verteilung 2		$SCR_{exakt}(\alpha)$	$SCR_{\sqrt{\cdot}}(\alpha)$	Fehler in %
Exp(1)	Exp(1)		5,4301	6,0787	11,94
Exp(1)	Exp(20)		4,2977	4,3037	0,14
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$		34,2973	36,8716	7,5
$L(1, 1)$	$L(1, 1)$		41,3495	44,1836	6,85
$W(0.4, 0.2)$	$N(0, 1)$		12,3910	12,5264	1,09
Exp(2)	$N(5, 4)$		10,3975	10,5251	1,23
$L(0, 0.5)$	Exp(2)		2,9640	3,2910	11,03

Tabelle 6.2: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegenden schiefen Verteilungen mit  $\alpha = 0,005$

Wir können auch bei diesen rechtsschiefen Verteilungen feststellen, dass das mittels

Wurzelformel aggregierte SCR das tatsächliche SCR immer übersteigt.

### 6.2.3 Die Standardformel für Verteilungen unabhängiger Zufallsvariablen

Wir haben bereits bei der Analyse schiefer Verteilungen unabhängige Zufallsvariablen betrachtet und gesehen, dass für diese Verteilungen das mittels Standardformel aggregierte SCR oft signifikant vom exakten Ergebnis abweicht. Tatsächlich wird in der Standardformel aus diesem Grund oft trotz Unabhängigkeit ein niedriger Korrelationskoeffizient gewählt.<sup>10</sup>

Wir betrachten daher noch einmal einige Verteilungen aus dem vorherigem Abschnitt und berechnen jeweils jenes  $\rho$ , das die Differenz zwischen dem exakten SCR und dem mittels Wurzelformel aggregiertem SCR minimiert (Formel 6.3), sowie die Kapitalanforderung basierend auf der Wurzelformel unter Berücksichtigung des berechneten  $\rho$ .

$$\rho = \min_{x \in [-1,1]} \{SCR_{exakt} - \sqrt{SCR_1^2 + SCR_2^2 + 2x SCR_1 SCR_2}\} \quad (6.3)$$

Verteilung 1	Verteilung 2	$\rho$	$SCR_{exakt}(\alpha)$	$SCR_{\sqrt{}}(\alpha)$	Fehler in %
$Be(1, 1)$	$Be(1, 1)$	0,6529	0,9000	0,9000	$-1,8049 \cdot 10^{-4}$
$Be(15, 3)$	$Be(3, 15)$	0,1129	0,3251	0,3251	$-1,0162 \cdot 10^{-3}$
$Be(30, 30)$	$Be(30, 30)$	0,0157	0,2315	0,2315	$-1,500 \cdot 10^{-3}$
$Be(1, 5)$	$Be(1, 5)$	-0,2449	0,6433	0,5982	-7,01
$Be(2, 1)$	$Be(2, 1)$	0,7324	0,6158	0,6158	$-6,2491 \cdot 10^{-4}$
$Be(7, 1)$	$Be(7, 1)$	0,792	0,2353	0,2353	$-6,6103 \cdot 10^{-4}$
$Be(20, 2)$	$Be(20, 2)$	0,5122	0,1493	0,1493	$-1,5544 \cdot 10^{-3}$
Exp(1)	Exp(1)	-0,3813	5,4301	4,7815	-11,94
Exp(1)	Exp(20)	-0,0554	4,2977	4,2918	-0,14
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	-0,2598	34,2973	31,7231	-7,51
$L(1, 1)$	$L(1, 1)$	-0,2401	41,3495	38,5154	-6,85
$W(0.4, 0.2)$	$N(0, 1)$	-0,1063	12,3910	12,2556	-1,09
Exp(2)	$N(5, 4)$	-0,1198	10,3975	10,2700	-1,23
$L(0, 0.5)$	Exp(2)	-0,3617	2,9640	2,6371	-11,03

Tabelle 6.3: Bestimmung des Korrelationskoeffizienten zur Minimierung des Aggregationsfehlers bei zugrunde liegenden unabhängigen Verteilungen mit  $\alpha = 0,005$

<sup>10</sup>Siehe [16, S.12].

Vergleicht man nun die Ergebnisse, die durch Aggregation mit Korrelationskoeffizienten 0 berechnet wurden (Tabellen im Unterkapitel "Die Standardformel für schiefe Verteilungen"), mit den hier erhaltenen Ergebnissen, so erkennt man, dass, trotz Unabhängigkeit, die Verwendung eines Korrelationskoeffizienten ungleich 0 in einigen Fällen tatsächlich ein genaueres Ergebnis liefert. Vor allem bei **symmetrischen und linksschiefen Verteilungen können auf diese Art sehr gute Approximationen** erreicht werden. Bei **rechtsschiefen Verteilungen hingegen werden, wenn überhaupt, nur minimale Verbesserungen** erzielt.

Nun sind beim Studium der diversen Verteilungsfunktionen und deren Abhängigkeiten Rückversicherungen nicht außer Acht zu lassen. Diese bewirken nämlich, dass die Verteilungsenden abgeschnitten sind. Welche Auswirkungen dieser Sachverhalt bei zugrunde liegenden unabhängigen Verteilungen auf das SCR hat, soll in zwei Beispielen dargestellt werden.

**Beispiel 6.2.** *Seien  $X$  und  $Y$  zwei unabhängige Zufallsvariablen, die abgeschnittenen Lognormalverteilungen folgen, wobei die zugrunde liegenden nichtabgeschnittenen Lognormalverteilungen Mittelwert 1 und Standardabweichung 0,1 haben. Die Verteilungen werden bei 0,2 abgeschnitten. Das SCR der gemeinsamen Verteilungsfunktion von  $X + Y$  zum Konfidenzniveau 99,5% ist dann  $\text{SCR}_{X+Y}(0,005) = 0,0014$ . Das mittels Wurzelformel aggregierte SCR ergibt  $\text{SCR}_{\sqrt{}}(0,005) = 0,0011$ , wobei ein Korrelationskoeffizient von 0 angenommen wird. Der relative Fehler beträgt somit  $-25,58\%$ . Wählt man nun stattdessen den Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,8055$ , erhält man das  $\text{SCR}_{\sqrt{}}(0,005) = 0,0014$  und der Fehler minimiert sich auf  $-3,5957 \cdot 10^{-4}\%$ .*

**Beispiel 6.3.** *Es seien  $X$  und  $Y$  zwei unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda_X = \lambda_Y = 1$ . Beide Verteilungen werden bei 0,2 abgeschnitten. Wir wollen nun wie im vorangegangenen Beispiel das SCR einmal auf Basis der gemeinsamen Verteilungsfunktion und einmal mittels Wurzelformel mit Korrelationskoeffizienten 0 berechnen. Dabei erhält man folgende Resultate:  $\text{SCR}_{X+Y}(0,005) = 0,1847$  und  $\text{SCR}_{\sqrt{}}(0,005) = 0,1446$ , der relative Fehler beträgt  $-21,72\%$ . Der optimale Korrelationskoeffizient für dieses Beispiel ist durch  $\rho = 0,632$  gegeben. Berücksichtigt man dieses  $\rho$  in der Wurzelformel, so beträgt das  $\text{SCR}_{\sqrt{}}(0,005) = 0,1847$  und der relative Fehler nur mehr  $-5,223 \cdot 10^{-4}\%$ .*

In beiden Beispielen können wir beobachten, dass bei Verwendung der Wurzelformel mit Korrelationskoeffizient 0 das wahre SCR deutlich unterschätzt wird. Es ist daher ein hoher Korrelationskoeffizient notwendig, um das exakte SCR möglichst gut zu approximieren.

Speziell bei der Aggregation der beiden Exponentialverteilungen haben wir auch einen Vergleich zur nichtabgeschnittenen Variante: Es ist erkennbar, dass **der relative Aggregationsfehler durch das Abschneiden der Verteilungsenden noch größer** wird.

Wir haben bisher immer nur zwei Risiken betrachtet. Wie verhält sich der Aggregationsfehler jedoch, wenn drei oder gar mehr Risiken aggregiert werden?

Zunächst betrachten wir dazu wieder unabhängige Zufallsvariablen. Für eine erste Untersuchung bieten sich unabhängige gammaverteilte Risiken an, da die Summe dieser Zufallsvariablen wieder gammaverteilt ist. Seien also  $X_i \sim Gam(\alpha_i, \beta)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , dann wählen wir als Parameter  $\beta = 1$  und  $\alpha_i = i$ . In der folgenden Tabelle betrachten wir immer die Summe von  $n$  Summanden und wollen untersuchen, wie sich der Fehler des mittels Wurzelformel aggregiertem SCR bei zunehmender Anzahl an Summanden verändert.

n	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>sqrt</sub> (0, 005)	Fehler in %
2	6,2738	6,9254	10,39
3	8,1498	9,3446	14,66
4	9,9984	11,6622	16,64
5	11,836	13,9168	17,58
6	13,668	16,1275	17,99

Tabelle 6.4: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung für  $n$  unabhängige gammaverteilte Summanden

Wir sehen, dass auch der Fehler mit zunehmender Anzahl an Summanden zunimmt. Wir wollen nun überprüfen, ob dies ein Einzelfall ist oder auch für andere Verteilungen gültig ist. Wir betrachten dazu die Chiquadratverteilung, da auch für diese Verteilung gilt, dass die Summe unabhängiger chiquadratverteilter Zufallsvariablen wieder chiquadratverteilt ist. Für die Zufallsvariablen  $X_i$  gelte nun also  $X_i \sim \chi^2(r_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , wobei wir  $r_i = i$  wählen.

n	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>sqrt</sub> (0, 005)	Fehler in %
2	9,8382	11,0104	11,92
3	12,5476	14,7654	17,68
4	15,1882	18,3293	20,68
5	17,8013	21,7719	22,31
6	20,4011	25,1288	23,17

Tabelle 6.5: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung für  $n$  unabhängige chiquadratverteilte Summanden

Auch hier können wir, wie bereits bei der Gammaverteilung, eine **zunächst starke Zunahme, jedoch mit der Anzahl der  $n$  geringer werdende Zunahme**, verzeichnen.

### 6.3 Empirische Untersuchung von Abhängigkeiten

Die Festlegung der Korrelationsparameter erfolgt durch die Analyse historischer Daten sowie durch Expertenmeinungen. Die Analyse historischer Daten birgt nun einige Problematiken. So sind z.B. für einige Module nicht ausreichend Daten verfügbar, um verlässliche Aussagen treffen zu können. Ein weiterer Schwachpunkt, dem wir uns hier widmen wollen, ist, dass die empirischen Abhängigkeiten vom betrachteten Zeithorizont abhängen. Will man also die Korrelation auf Basis empirischer Daten bestimmen, so macht es einen Unterschied, ob man Daten von z.B. 5 oder von 10 Jahren betrachtet. Die einfachste Weise dies zu zeigen, ist die Demonstration an einem Beispiel. Exemplarisch wählen wir das Aktienrisikomodul und das Zinsrisikomodul, zwei Subrisiken des Marktrisikomoduls. Laut [16, Paragraph 3.49] werden für die Analyse der Abhängigkeit dieser zwei Module die Datensätze "MSCI World Equity Index" und "UK 10 Year Spot" herangezogen. Auch wir wollen für unsere Analyse diese beiden Datensätze verwenden.<sup>11</sup> Zuerst betrachten wir die Daten im Zeitraum von 1.1.1996 bis 31.12.2015. Für diesen Zeitraum berechnen wir die jährlichen Renditen, auf deren Basis wir dann die Korrelation zwischen dem Zins- und dem Aktienrisiko bestimmen.

<sup>11</sup>Die Daten des MSCI World Index stammen von <http://www.onvista.de> und wurden zuletzt am 09.03.2016 abgerufen, die Daten des UK 10 Year Spot stammen von <http://www.bankofengland.co.uk/statistics/Pages/yieldcurve/archive.aspx> und wurden zuletzt am 17.03.2016 abgerufen

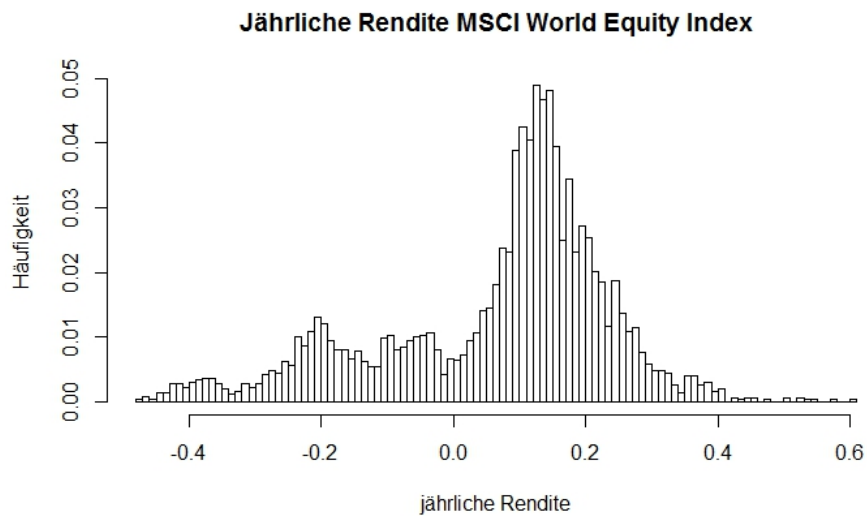


Abbildung 6.1: Jährliche Rendite des MSCI im Zeitraum 1996-2015

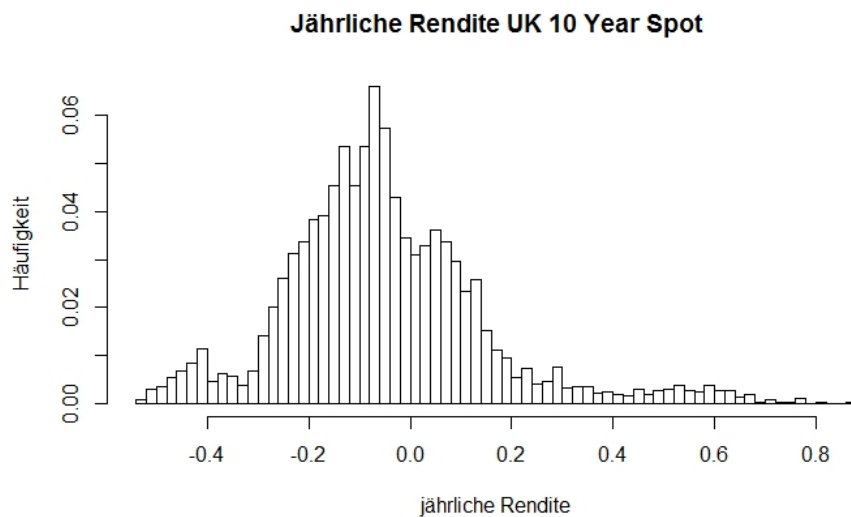


Abbildung 6.2: Jährliche Rendite des UK 10 Year Spot im Zeitraum 1996-2015

An den Histogrammen ist deutlich erkennbar, dass die Dichten stark von der Dichte einer Normalverteilung abweichen. Dies unterstützt die zuvor getroffene Annahme, dass die meisten in der Versicherungsbranche betrachteten Verteilungen nicht einer Normalverteilung folgen.

Berechnet man nun für die gegebenen Daten den linearen Korrelationskoeffizienten, so erhält man, je nach gewählter Methode, folgende Ergebnisse:  $\rho_{Pearson} = 0,0298$ ,  $\rho_{Kendall} = 0,0154$  und  $\rho_{Spearman} = 0,0221$ .



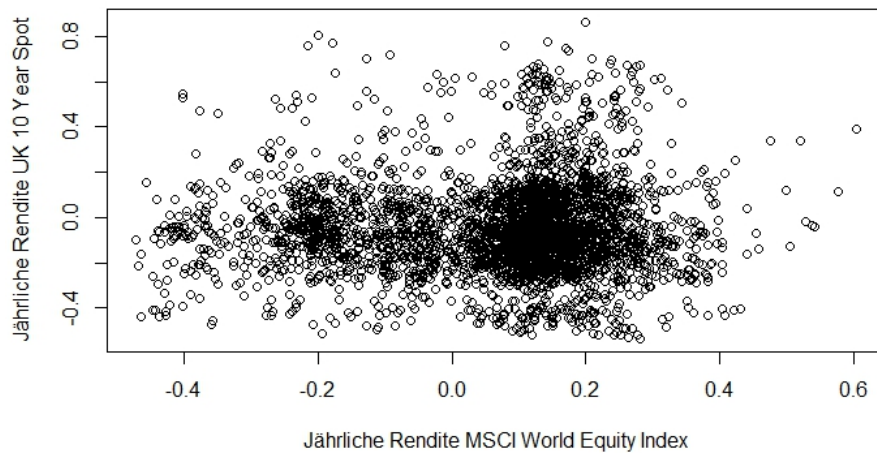


Abbildung 6.3: Korrelation zwischen dem MSCI und dem UK 10 Year Spot im Zeitraum 1996-2015

Wir betrachten nun den Zeitraum von 1.1.2000 bis 31.12.2005. Bereits die Histogramme weisen hier eine ganz andere Form auf, insbesondere jenes des MSCI Indizes:

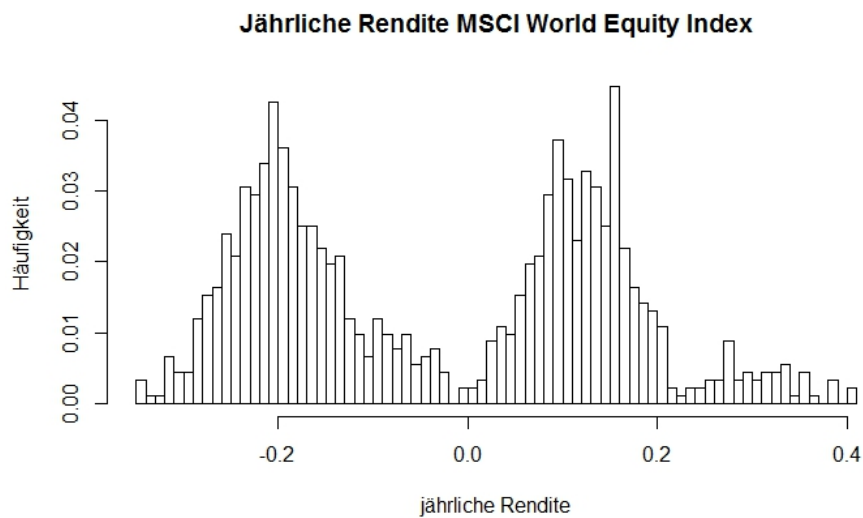


Abbildung 6.4: Jährliche Rendite des MSCI im Zeitraum 2000-2005

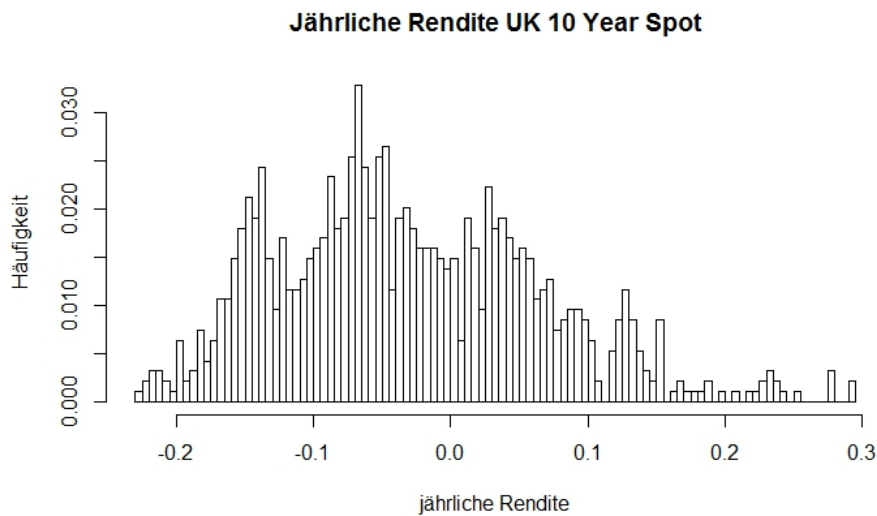


Abbildung 6.5: Jährliche Rendite des UK 10 Year Spot im Zeitraum 2000-2005

Dies lässt vermuten, dass der Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Risikomodulen basierend auf den Daten von 2000-2005 deutlich von dem zuvor berechneten abweicht. Tatsächlich ist das auch der Fall, denn wir erhalten als Ergebnis  $\rho_{Pearson} = -0,0413$ ,  $\rho_{Kendall} = -0,0407$  und  $\rho_{Spearman} = -0,0677$ .

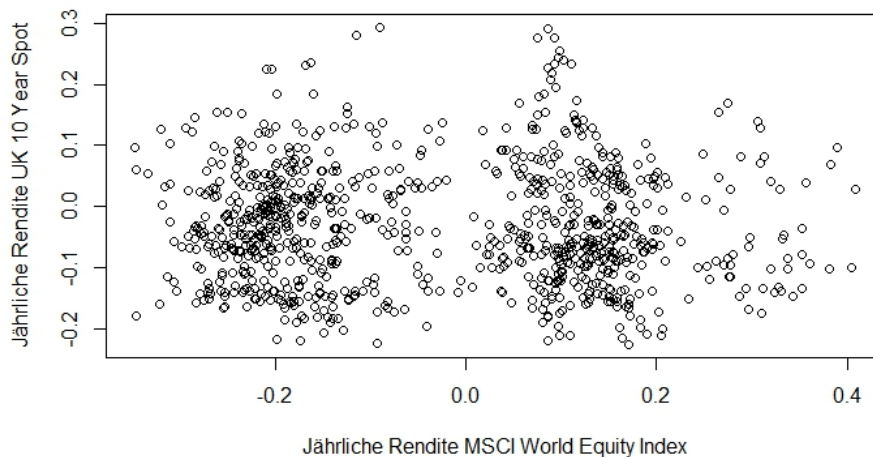


Abbildung 6.6: Korrelation zwischen dem MSCI und dem UK 10 Year Spot im Zeitraum 2000-2005

Auf diese Weise erhält man also **je nach betrachtetem Zeitraum einen anderen Korrelationskoeffizienten**. Soll also basierend auf einer empirischen Studie der Korrelationsparameter für die Standardformel festgelegt werden, muss der zu betrachtende Zeitraum wohl überlegt werden, da dieser einen maßgeblichen Einfluss auf den Parameter hat.

## 6.4 Diversifikation

Diversifikation ist einer der wichtigsten Bestandteile in der Berechnung der Eigenkapitalerfordernisse.

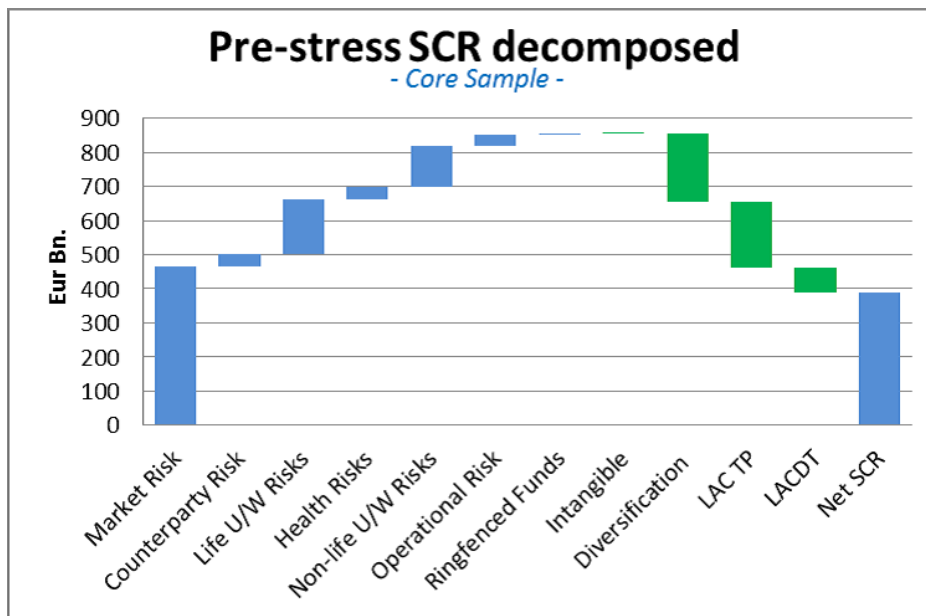


Abbildung 6.7: Einfluss des Diversifikationseffekts auf das Gesamt-SCR, Quelle:[18, S.50]

Unter Diversifikation im engeren Sinne versteht man die Kombination von Risiken, die nicht oder zumindest nicht vollständig abhängig voneinander sind. Im Gegensatz dazu stehen die Konzepte des Poolings und der Risikokompensation, wobei ersteres durch das Poolen ähnlicher Risiken mit hohen Abhängigkeiten das Gesetz der großen Zahlen ausnutzt und letzteres von der Übernahme von Risiken mit gegenläufigem Risikoprofil profitiert. Im Gegensatz zur Diversifikation, wo Risiken keine oder eine geringe positive Abhängigkeit aufweisen, sind bei der Risikokompensation die Risiken negativ korreliert.<sup>12</sup>

Im Allgemeinen wird der Begriff „Diversifikation“ jedoch oftmals als Überbegriff für die soeben genannten Risikokombinationen verwendet.

Diversifikationseffekte entstehen, wenn eine Risikokategorie in einzelne Risikoklassen unterteilt werden kann. Dann gilt nämlich, dass das Eigenkapitalerfordernis der Summe der Risikoklassen unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten kleiner oder gleich der Summe der einzelnen Eigenkapitalanforderungen für die Risikoklassen ist. Formal gilt also für beispielsweise 3 Risiken  $X, Y$  und  $Z$ :  $C(X + Y + Z) \leq C(X) + C(Y) + C(Z)$ ,

<sup>12</sup>Siehe [2, S.63].

wobei  $C(*)$  das Kapitalerfordernis für Risiko  $*$  ist.<sup>13</sup>

Je höher die Abhängigkeiten zwischen den Risiken sind, desto höher ist auch die Kapitalanforderung und desto geringer sind die Diversifikationseffekte. Im folgenden Unterkapitel wird das anhand eines einfachen Beispiels gezeigt.

Da Diversifikationseffekte eng mit Abhängigkeiten zusammenhängen, kann man auch diese auf den unterschiedlichen Ebenen (Modulebene, Submodulebene, ...) betrachten.

### 6.4.1 Diversifikation und Korrelationen

In der Standardformel wird zur Abbildung der Abhängigkeiten zwischen den Risiken auf lineare Korrelationsmatrizen zurückgegriffen. Bei der Festlegung der Matrizen stellt die Wahl der geeigneten Korrelationsparameter eine große Herausforderung dar, denn die Korrelationskoeffizienten müssen die Abhängigkeiten der Risiken möglichst exakt widerspiegeln, da diese zur Aggregation verwendet werden und daher einen maßgeblichen Einfluss auf die Diversifikation haben. Eine unpassende Auswahl kann eine Unter- oder Überschätzung des Gesamteigenkapitalerfordernisses zur Folge haben. Ein einfaches Beispiel soll die Signifikanz der Korrelationsparameter verdeutlichen:

**Beispiel 6.4.** *Seien  $A, B, C, D$  und  $E$  fünf Risiken. Ganz allgemein gilt dann für das Gesamteigenkapitalerfordernis*

$$\text{SCR} = \sqrt{\sum_{i=A}^E \text{SCR}_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \text{SCR}_i \text{SCR}_j} \quad (6.4)$$

*Nun sei das Eigenkapitalerfordernis für alle Risiken gleich 1, also  $\text{SCR}_A = \text{SCR}_B = \text{SCR}_C = \text{SCR}_D = \text{SCR}_E = 1$ . Wählt man zunächst die Korrelationskoeffizienten  $\rho_{ij} = 0 \forall i, j = A, \dots, E$  so erhält man für das Gesamteigenkapitalerfordernis  $\text{SCR} = 2,23$ . Wählt man stattdessen  $\rho_{ij} = 1 \forall i, j = A, \dots, E$  so erhält man als Ergebnis  $\text{SCR} = 5,2$ . Die absolute Differenz beträgt somit 2,97. Das Ergebnis ist also um 57,1% niedriger, wenn man einen Korrelationsparameter von 0 statt 1 heranzieht.*

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den Korrelationsparametern und den daraus resultierenden Diversifikationseffekten noch genauer studieren. Dazu betrachten wir die Korrelationsmatrix, die zur Berechnung der Basissolvenzkapitalanforderung verwendet wird (Siehe Tabelle 2.1 in Kapitel 2).

Der Einfachheit halber nehmen wir zunächst an, dass die Kapitalanforderungen der einzelnen Risiken gleich 1 sind. Aggregiert man die Kapitalanforderungen gemäß Formel

---

<sup>13</sup>Siehe [2, S.120 f.].

(6.4) unter Berücksichtigung der Korrelationsmatrix, so erhält man als Gesamtkapitalerfordernis  $SCR_{Gesamt} = 3,16$ . Der Diversifikationseffekt beträgt hier 39,23%, da das Gesamtkapitalerfordernis bei Annahme der vollkommenen Abhängigkeit zwischen den einzelnen Risiken gemäß Beispiel 6.4 5,2 beträgt. Erhöht man einen Parameter in der Korrelationsmatrix um 0,25, so verändert sich das  $SCR_{Gesamt}$  um +2,5%, bei Senkung eines Parameters um 0,25, ergibt das dementsprechend eine Reduktion des  $SCR_{Gesamt}$  um -2,5%.

Wir erhöhen nun alle Parameter um 0,25. Dies liefert ein  $SCR_{Gesamt}$  von 3,94, das entspricht einem Zuwachs des ursprünglichen  $SCR_{Gesamt}$  um +24,7%. Die Diversifikationseffekte betragen nur mehr 24,2%, also nur mehr etwa halb so viel wie bei Aggregation mit den ursprünglichen Korrelationskoeffizienten.

Im Folgenden wollen wir die Eigenkapitalanforderungen der einzelnen Risiken nicht mehr als gleich annehmen, sondern nach Relevanz für österreichische Versicherer gewichten. Dabei sind die Gewichtungen wie folgt gegeben:<sup>14</sup>

- Marktrisiko 46%
- Risikomodul Nicht-Leben 39,7%
- Risikomodul Leben 6,6%
- Ausfallsrisiko 4,8%
- Risikomodul Krankenversicherung 2,2%
- Immaterielles Risiko 0,9%
- Operationelles Risiko

Da das immaterielle Risiko nicht in die Wurzelformel einbezogen ist, werden für unsere Gewichtung die 0,9% auf die ersten fünf Risikomodule in obiger Aufzählung gleichmäßig aufgeteilt. Somit gehen wir in unseren weiteren Untersuchungen von folgenden Kapitalanforderungen für die einzelnen Risikomodule aus:  $SCR_M = 46,18$ ,  $SCR_{NL} = 39,88$ ,  $SCR_L = 6,78$ ,  $SCR_G = 4,98$  und  $SCR_K = 2,38$ . Unter diesen Annahmen erhält man unter Berücksichtigung der ursprünglichen Korrelationsmatrix als Gesamteigenmittelanforderung  $SCR_{Gesamt} = 72,75$ . Die Diversifikationseffekte betragen 27,61%.

Da das Marktrisiko und das nichtlebensversicherungstechnische Risiko den größten Anteil am Gesamtrisiko haben, wollen wir zunächst den Korrelationskoeffizienten zwischen diesen beiden Risikomodulen untersuchen. Dazu betrachten wir die zwei

---

<sup>14</sup>Siehe [19, S.49].

Extremfälle: einmal, dass die beiden Risikomodule perfekt linear abhängig sind ( $\rho = 1$ ) und einmal, dass die beiden Risiken unabhängig von einander sind ( $\rho = 0$ ).

$\rho$	SCR <sub>Gesamt</sub>	Zuwachs/Reduktion	Diversifikationseffekte
1	89,75	+23,37%	10,69%
0	66,12	-9,11%	34,21%

Tabelle 6.6: Veränderung des Gesamt-SCR bzw. der Diversifikationseffekte bei Veränderung des Korrelationsparameters zwischen dem Marktrisiko und dem nichtlebensversicherungstechnischen Risiko

Dabei versteht sich der Zuwachs bzw. die Reduktion immer bezüglich des SCR<sub>Gesamt</sub> auf Basis der ursprünglichen Korrelationsmatrix. Da der ursprüngliche Korrelationskoeffizient zwischen den beiden Risikomodulen mit 0,25 gegeben ist, ist es nicht verwunderlich, dass der Effekt einer Reduktion auf  $\rho = 0$  niedriger als der einer Erhöhung auf  $\rho = 1$  ausfällt.

Wir haben nun die beiden Extremfälle  $\rho = 0$  und  $\rho = 1$  betrachtet. Doch wie verändern sich die Diversifikationseffekte für  $0 < \rho < 1$ ? - Um das herauszufinden, betrachten wir die folgende Grafik:

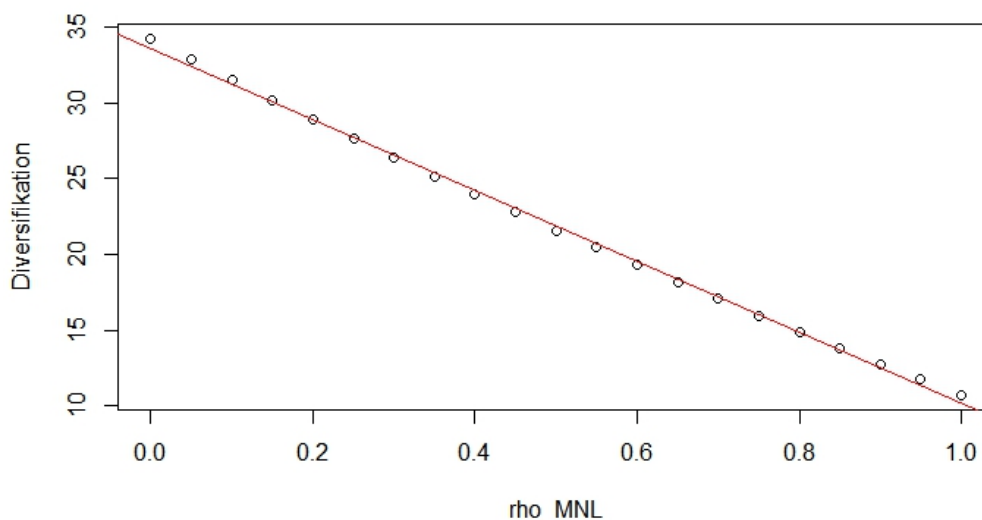


Abbildung 6.8: Veränderung der Diversifikationseffekte bei Veränderung des Korrelationskoeffizienten zwischen dem Marktrisiko und dem Risikomodul Nicht-Leben

Die **Veränderung der Diversifikationseffekte ist also eine annähernd lineare Funktion des Korrelationsparameters**. Je größer der Korrelationsparameter, desto niedriger die Diversifikationseffekte.

Wir wollen nun den Korrelationskoeffizienten zwischen den Risikomodulen Krankenversicherung und Gegenparteausfall betrachten. Diese beiden Module haben nämlich den

geringsten Einfluss auf das Gesamteigenkapitalerfordernis. Wir ändern den Korrelationsparameter, wie schon zuvor, einmal auf  $\rho = 1$  und einmal auf  $\rho = 0$  ab.

$\rho$	$SCR_{Gesamt}$	Zuwachs/Reduktion	Diversifikationseffekte
1	72,88	+0,18%	27,48%
0	72,71	-0,05%	27,65%

Tabelle 6.7: Veränderung des Gesamt-SCR bzw. der Diversifikationseffekte bei Veränderung des Korrelationsparameters zwischen dem krankenversicherungstechnischen Risiko und dem Gegenparteiausfallsrisiko

Die Veränderung dieses Korrelationsparameter hat, wie wir sehen, keine großen Auswirkungen auf das Gesamteigenkapitalerfordernis. Im Gegensatz dazu hat eine Veränderung des Korrelationskoeffizientens zwischen den beiden Risikomodulen mit den größten Anteilen am Gesamtkapitalerfordernis einen entscheidenden Einfluss.

Diese Resultate verwundern nicht weiter, da sie sich logisch nachvollziehen lassen. Wie wirkt sich nun jedoch eine Veränderung des Korrelationskoeffizienten zwischen jenem Modul mit dem größten und jenem Modul mit dem kleinsten Anteil am Gesamtkapitalerfordernis aus? - Intuitiv würde man nun eine moderate Änderung erwarten, die zwischen den beiden zuvor betrachteten Extremen liegt. Die Auswertung liefert folgendes Resultat:

$\rho$	$SCR_{Gesamt}$	Zuwachs/Reduktion	Diversifikationseffekte
1	73,88	+1,55%	26,49%
0	72,38	-0,51%	27,98%

Tabelle 6.8: Veränderung des Gesamt-SCR bzw. der Diversifikationseffekte bei Veränderung des Korrelationsparameters zwischen dem Marktrisiko und dem krankenversicherungstechnischen Risiko

Tatsächlich ist die Veränderung auch hier nur sehr gering.

Es lässt sich nun feststellen, dass die **Veränderung des Gesamtkapitalerfordernisses als Folge der Abänderung eines Korrelationsparameters abhängig vom Anteil der betrachteten Risikomodule am Gesamtrisiko** ist. In anderen Worten: Ist  $\rho_{XY}$  der Korrelationsparameter zwischen den Risikomodulen  $X$  und  $Y$ , so ist die Veränderung des  $SCR_{Gesamt}$  nach Abändern von  $\rho_{XY}$  abhängig vom Anteil der beiden Risikomodule  $X$  und  $Y$  am Gesamtrisiko. Je größer die Anteile der beiden Module, desto größer der Abänderungseffekt, je kleiner die Anteile, desto kleiner auch der Effekt.

Nachdem wir nun die Veränderung des  $SCR_{Gesamt}$  bzw. der Diversifikationseffekte bei Abänderung eines bzw. mehrerer Korrelationskoeffizienten analysiert haben, wollen

wir nun umgekehrt bei gegebener Korrelationsmatrix untersuchen, welche Gewichtung der Risikomodule zu einem größt möglichen Diversifikationseffekt führt. Wir haben bereits Ergebnisse für die Gleichgewichtung sowie für die Gewichtung nach Relevanz für österreichische Versicherer:

Gewichtung	Diversifikationseffekte
Gleichgewichtung	39,23%
Relevanz österr. Versicherer	27,61%

Tabelle 6.9: Diversifikationseffekte für gleichgewichtete und für nach Relevanz für österreichische Versicherer gewichtete Risikomodule

Offensichtlich können durch Gleichgewichtung sehr hohe Diversifikationseffekte erzielt werden. Gibt es noch eine Möglichkeit, ähnlich hohe oder gar höhere Diversifikationseffekte zu erzielen? - Wir wollen nun einige Szenarien, ausgehend von der Relevanz der Risiken für österreichische Versicherer, testen.

- Szenario 1: Die Gewichtung für das Marktrisiko und das Risikomodul Nicht-Leben bleibt gleich, die restlichen drei Risikomodule werden gleichgewichtet.
- Szenario 2: Die Gewichtung für das Marktrisiko bleibt gleich, die restlichen Risikomodule werden gleichgewichtet.
- Szenario 3: Die Gewichtung für das Risikomodul Nicht-Leben bleibt gleich, die restlichen Risikomodule werden gleichgewichtet.
- Szenario 4: Die Gewichtung für das Risikomodul Krankenversicherung bleibt gleich, die restlichen Risikomodule werden gleichgewichtet.
- Szenario 5: Angefangen beim Marktrisiko mit der höchsten Gewichtung ( $SCR_M = 30$ ), nimmt die Gewichtung bis hin zum Risikomodul Krankenversicherung in gleich großen Schritten (5) ab.

Szenario	Diversifikationseffekte
1	27,7%
2	33,09%
3	36,73%
4	36,15%
5	36,85%

Tabelle 6.10: Diversifikationseffekte für diverse Szenarien unterschiedlich gewichteter Risikomodule



Wir erkennen, dass die Diversifikationseffekte bei möglichst vielen gleichgewichteten bzw. ähnlich gewichteten Risikomodulen sehr groß sind. Im folgenden Szenario wollen wir zeigen, dass bei sehr unterschiedlich gewichteten Risikomodulen genau das Gegenteil eintritt.

- Szenario 6: Wir wählen die Gewichtung wie folgt:  $SCR_M = 5,2$ ,  $SCR_G = 17$ ,  $SCR_L = 7$ ,  $SCR_K = 0,8$  und  $SCR_{NL} = 70$ .

Szenario	Diversifikationseffekte
6	18,33%

Tabelle 6.11: Diversifikationseffekte für sehr unterschiedlich gewichtete Risikomodule

Nachdem wir also festgestellt haben, dass Gleichgewichtung eine Möglichkeit ist, von großen Diversifikationseffekten zu profitieren, wollen wir noch einen Blick auf die Gewichtung des Gegenparteiausfallsrisikos und des Risikomoduls Nicht-Leben werfen. Der Korrelationskoeffizient, der diese beiden Risikomodule verbindet, ist nämlich mit  $\rho_{G,NL} = 0,5$  der höchste Wert in der Matrix. Um den Einfluss dieser beiden Risikomodule zu überprüfen, betrachten wir folgende Szenarien:

- Szenario 7a: Sowohl das Gegenparteiausfallsrisiko als auch das Risikomodul Nicht-Leben sind sehr hoch gewichtet (annähernd gleichgewichtet:  $SCR_G = 50$ ,  $SCR_{NL} = 40$ ), die restlichen Module sind unterschiedlich und niedrig gewichtet.
- Szenario 7b: Sowohl das Gegenparteiausfallsrisiko als auch das Risikomodul Nicht-Leben sind sehr hoch gewichtet (sehr unterschiedlich gewichtet:  $SCR_G = 60$ ,  $SCR_{NL} = 30$ ), die restlichen Module sind unterschiedlich und niedrig gewichtet.
- Szenario 8a: Sowohl das Gegenparteiausfallsrisiko als auch das Risikomodul Nicht-Leben sind sehr niedrig gewichtet (annähernd gleichgewichtet:  $SCR_G = 3$ ,  $SCR_{NL} = 1$ ), die restlichen Module sind unterschiedlich und höher gewichtet.
- Szenario 8b: Sowohl das Gegenparteiausfallsrisiko als auch das Risikomodul Nicht-Leben sind sehr niedrig gewichtet (sehr unterschiedlich gewichtet:  $SCR_G = 4$ ,  $SCR_{NL} = 0,1$ ), die restlichen Module sind unterschiedlich und höher gewichtet.
- Szenario 9a: Das Risikomodul Nicht-Leben ist sehr hoch gewichtet ( $SCR_{NL} = 60$ ) und das Gegenparteiausfallsrisiko sehr niedrig ( $SCR_G = 0,5$ ), die restlichen Module sind unterschiedlich gewichtet.

- Szenario 9b: Das Gegenparteiausfallsrisiko ist sehr hoch gewichtet ( $SCR_G = 60$ ) und das Risikomodul Nicht-Leben sehr niedrig ( $SCR_{NL} = 0,5$ ), die restlichen Module sind unterschiedlich gewichtet.

Szenario	Diversifikationseffekte
7a	19,76%
7b	17,39%
8a	24,94%
8b	26,27%
9a	27,62%
9b	27,07%

Tabelle 6.12: Diversifikationseffekte für diverse Szenarien mit Hauptaugenmerk auf dem Risikomodul Nicht-Leben und dem Gegenparteiausfallsrisiko

Wir erhalten nur mäßige Diversifikationseffekte. Die Gewichtung der beiden Risikomodule auf Grund des höheren Korrelationskoeffizienten ist also irrelevant. Die Untersuchung hat somit ergeben, dass **einzig durch Gleichgewichtung die größten Diversifikationseffekte** erzielt werden können.

#### 6.4.2 Diversifikation und der Bottom-Up-Approach<sup>15</sup>

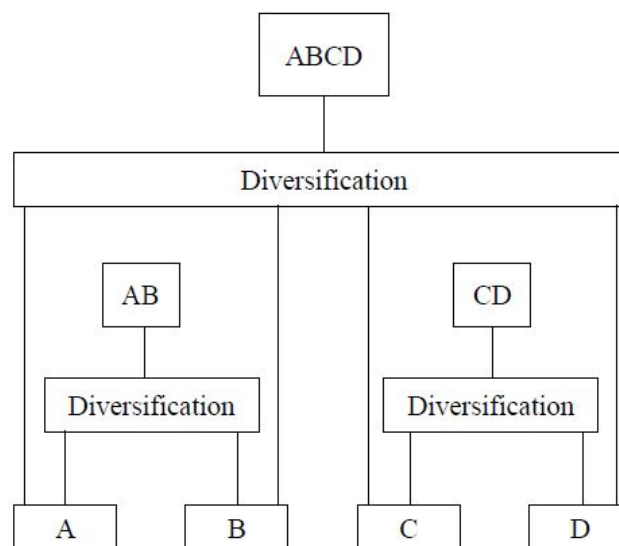


Abbildung 6.9: Der Bottom-Up-Approach geht immer von der kleinsten Einheit aus, Quelle:[20, S.7]

<sup>15</sup>Siehe [20, S.7 f.].

Die Berechnung der Eigenkapitalanforderungen erfolgt im Konsens mit Solvency 2 nach dem Bottom-Up-Approach. Beim Bottom-Up-Approach geht man immer von der kleinsten Einheit aus, um die Eigenkapitalanforderung auf einem höheren Level, etwa auf Gruppenlevel oder gar für das ganze Unternehmen, zu berechnen.

Dass diese Vorgehensweise wichtig für die Stabilität der Aggregation ist, soll an einem Beispiel demonstriert werden:

**Beispiel 6.5.** a) Für die vier Risiken  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  seien die einzelnen Kapitalerfordernisse und die Korrelationen zwischen den Risiken wie folgt gegeben:

Risiko	Kapitalerfordernis
$A$	1000
$B$	200
$C$	2000
$D$	500

	$A$	$B$	$C$	$D$
$A$	1			
$B$	0,5	1		
$C$	0,75	0,75	1	
$D$	0,5	0,5	0,25	1

Unter Berücksichtigung dieser Korrelationen erhält man nun mit Formel (6.4) die Kapitalerfordernisse für  $A + B$ ,  $C + D$  und  $A + B + C + D$ .

Risiko	Kapitalerfordernis
$A + B$	1114
$C + D$	2179
$A + B + C + D$	3192

Zieht man wieder Formel (6.4) heran, so gilt für das Kapitalerfordernis für  $A+B+C+D$ :

$$\text{SCR}_{A+B+C+D}^2 = \text{SCR}_{A+B}^2 + \text{SCR}_{C+D}^2 + 2 \cdot \rho_{A+B,C+D} \cdot \text{SCR}_{A+B} \cdot \text{SCR}_{C+D} \quad (6.5)$$

Das einfache Umformen und Einsetzen der Kapitalerfordernisse liefert somit den Korrelationskoeffizienten zwischen den Risiken  $A + B$  und  $C + D$   $\rho_a = 0,865$ .

b) Nun betrachte man dasselbe Setting, jedoch mit abgeänderten Kapitalanforderungen. Diese seien wie folgt gegeben:

Risiko	Kapitalerfordernis
$A$	1100
$B$	300
$C$	1800
$D$	800

Unter Benutzung derselben Korrelationsmatrix wie in Teil a erhält man für die Risiken  $A + B$ ,  $C + D$  und  $A + B + C + D$  die folgenden Kapitalerfordernisse:

<i>Risiko</i>	<i>Kapitalerfordernis</i>
$A + B$	1277
$C + D$	2145
$A + B + C + D$	3336

Den Korrelationsparameter zwischen den Risiken  $A + B$  und  $C + D$  berechnet man wieder durch Einsetzen in Formel (6.5) und erhält als Ergebnis  $\rho_b = 0,895$ .

Obwohl sowohl in Teil a, als auch in Teil b dieselben Korrelationen auf unterster Ebene herangezogen wurden, ergibt sich ein Unterschied von 0,03 für den Korrelationsparameter zwischen  $A + B$  und  $C + D$ . Würde man in Teil b zunächst die Subrisiken  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  zu den Risiken  $A + B$  und  $C + D$  aggregieren und diese dann wiederum mittels Korrelationskoeffizienten  $\rho_a$  aggregieren, so würde dies zu einer Überschätzung des benötigten Kapitals führen. Das Kapitalerfordernis betrüge dann fälschlicherweise 3312.

Das Beispiel deutet daraufhin, dass die Aggregation immer auf den Korrelationen der untersten Ebene basieren sollte, da nur auf diese Weise Stabilität garantiert werden kann.

# Kapitel 7

## Untersuchung abhängiger Risiken mit Hilfe von Copulas

Wir haben bisher, bei der Untersuchung der Standardformel, immer angenommen, dass die Risiken unabhängig voneinander sind. In diesem Kapitel wollen wir uns nun abhängigen Verteilungen widmen. Um Abhängigkeiten zwischen den Verteilungen zu modellieren und so gemeinsame Verteilungsfunktionen zu kreieren, werden wir auf verschiedene Copulas, die wir bereits im Kapitel „Copulas und Abhängigkeitsmaße“ erarbeitet haben, zurückgreifen. Wir werden, um die Exaktheit der Standardformel bei abhängigen Risiken zu überprüfen, nicht nur unterschiedliche Copulas, und somit unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen, sondern auch unterschiedliche Randverteilungen heranziehen. Im folgenden Abschnitt betrachten wir immer zweidimensionale Copulas.

### 7.1 Untersuchung abhängiger Risiken in der Standardformel unter Verwendung von Copulas

#### 7.1.1 Komonotonie und Kontramotonie

Wir wollen zu Beginn die beiden Extremfälle betrachten: die Komonotonie und die Kontramotonie. Die folgende Analyse behandelt also zum einen perfekt positiv abhängige Risiken und zum anderen perfekt negativ abhängige Risiken. Wir wissen bereits, dass wir zur Modellierung dieser Arten von Abhängigkeit die beiden Fréchet-Schranken als Copula verwenden können. Die obere Fréchet-Schranke, die Komonotoniecopula, modelliert dabei perfekte positive Abhängigkeit, die untere Fréchet-Schranke, die Kontramotoniecopula, modelliert im zweidimensionalen Fall die perfekte negative Abhängigkeit.

Wir interessieren uns nicht nur für die gemeinsame Verteilungsfunktion, sondern

insbesondere für die Verteilungsfunktion der Summe der Risiken, die durch diese Abhängigkeitsstruktur gekoppelt sind. Da für die Berechnung des SCR der Value-at-Risk von großer Bedeutung ist, benötigen wir auch Kenntnisse über die inverse Verteilungsfunktion bzw. die Quantilfunktion. Im Falle der Komonotonie ist diese sehr einfach zu berechnen, denn die Quantilfunktion der Summe komotoner Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ist wie folgt gegeben:<sup>1</sup>

$$F_{X_1+X_2+\dots+X_n}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(p) \quad p \in (0, 1)$$

So können wir also sehr einfach das genaue SCR bestimmen und mit dem mittels Wurzelformel aggregierten vergleichen. Für den Koeffizienten  $\rho$  in der Wurzelformel setzen wir im Falle der perfekten positiven Abhängigkeit klarerweise 1 ein. Für die unterschiedlichen Verteilungen erhalten wir dann folgende Resultate:

Verteilung 1	Verteilung 2	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>√</sub> (0, 005)	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	6,8741	6,8741	$-1, 11 \cdot 10^{-14}$
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,5637	1,5637	$6, 12 \cdot 10^{-6}$
$W(1, 3)$	Exp(3)	14,3277	14,3277	$-1, 11 \cdot 10^{-14}$
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0518	5,0518	$-6, 26 \cdot 10^{-8}$
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	52,1443	52,1443	$-1, 11 \cdot 10^{-14}$
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,7150	12,7150	$6, 14 \cdot 10^{-8}$
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,8345	14,8345	$-1, 06 \cdot 10^{-8}$
Exp(1)	Exp(20)	4,5132	4,5132	$-2, 22 \cdot 10^{-14}$
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	6,9746	6,9746	$1, 25 \cdot 10^{-7}$

Tabelle 7.1: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Komonotoniecopula

Wir können also erkennen, dass die Standardformel für **zwei komonotone Zufallsvariablen sehr gute Ergebnisse** erzielt, vor allem wenn wir bedenken, dass bei den unabhängigen Verteilungen im vorangegangenen Kapitel die Fehler im Bereich  $-25\%$  bis  $12\%$  gelegen sind. Wir wollen nun überprüfen, ob bei perfekt negativ abhängigen Zufallsvariablen eine ähnliche Genauigkeit erzielt werden kann.

Die Ermittlung der Quantilfunktion der Summe zweier kontramotoner Zufallsvariablen ist nicht so einfach, wie im komonotonen Fall. Die einfache Addition der Quantilfunktionen ist nicht möglich. Um die Verteilungsfunktion der Summe zu ermitteln, betrachten wir für je zwei Verteilungsfunktionen den Graphen der Summe, um das

<sup>1</sup>Siehe [14, S.237]

Verhalten der Kurve analysieren zu können. So lässt sich dann auch die Verteilungsfunktion bestimmen. Anschließend können wir dann die inverse Verteilungsfunktion und das 0,995-Quantil ermitteln. In der Standardformel wählen wir  $\rho = -1$ , um die perfekte negative Abhängigkeit abzubilden. Ein Vergleich des exakten SCR mit dem mittels Wurzelformel aggregierten SCR liefert folgende Ergebnisse:

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0, 1)$	$Exp(1)$	10,5075	7,1952	-31,52
$W(1, 3)$	$Exp(3)$	8,2646	7,1639	-13,31
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	4,3994	4,7205	7,30
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	32,0263	0	-100
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	10,3269	10,2720	-0,53
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	9,8106	9,6828	-1,30
$Exp(1)$	$Exp(20)$	4,2625	4,0834	-4,20
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	18,7491	18,6074	-0,76

Tabelle 7.2: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Kontramotonicopula

Wie in der Tabelle ersichtlich, sind die Ergebnisse, die wir hier erhalten, sehr durchwachsen. Die Aggregation zweier identischer Verteilungen liefert einen Aggregationsfehler von 100%, da das  $SCR_{\sqrt{}}$  hier immer 0 beträgt. Dies lässt sich durch Einsetzen in die Wurzelformel ganz einfach überprüfen. Ist eine der beiden Randverteilungen eine lognormalverteilte Zufallsvariable, so ist der Aggregationsfehler recht klein, im Gegensatz dazu ist der Aggregationsfehler recht groß, wenn eine der beiden Randverteilungen eine Exponentialverteilung ist. Der **Aggregationsfehler** bei zugrunde liegender **Kontramotonicopula** ist daher offensichtlich von den betrachteten Randverteilungen abhängig.

## 7.1.2 Archimedische Copulas

Da wir uns soeben mit den Extremfällen, der perfekten positiven und perfekten negativen Abhängigkeit, beschäftigt haben, interessieren wir uns nun auch für Zwischenstufen der Abhängigkeit. Eine Möglichkeit, diese zu modellieren, bietet u.a. die Klasse der archimedischen Copulas. Diese Klasse besteht bekanntlich aus zahlreichen Familien. Für die Analyse der Genauigkeit der Standardformel für abhängige Risiken wählen wir die Gumbelcopula, die Claytoncopula und die Frankcopula, um Abhängigkeiten zu modellieren. Als Abhängigkeitsmaße eignen sich beim Gebrauch von Copulas vor allem Kendall's Tau und Spearman's Rho. Wir werden zunächst die Aggregation in der

Wurzelformel mit Kendall's Tau durchführen. Zu einem späteren Zeitpunkt werden wir jedoch auch einen Vergleich mit Spearman's Rho anstellen sowie mit dem vermeintlich ungeeigneten linearen Korrelationskoeffizienten.

## Gumbelcopula

Wir wollen nun die Genauigkeit der SCR-Berechnung einerseits für verschiedene Randverteilungen und andererseits auch für verschiedene Werte von  $\theta$  testen. Für die Gumbelcopula kann  $\theta$  bekanntlich Werte im Intervall  $[1, \infty]$  annehmen. Für  $\theta = 1$  erhalten wir die Unabhängigkeitscopula, für  $\theta = \infty$  die Komonotoniecopula. Wir setzen vorerst  $\theta = 10$ .

Verteilung 1	Verteilung 2	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>√</sub> (0, 005)	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	15,7780	15,4758	-1,92
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,5629	1,5297	-2,13
$W(1, 3)$	Exp(3)	14,3225	14,1982	-0,87
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0514	5,0358	-0,31
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	52,069	50,8240	-2,39
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,7121	12,6041	-0,85
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,8309	14,6201	-1,42
Exp(1)	Exp(20)	4,5124	4,4927	-0,44
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,2908	19,2581	-0,17

Tabelle 7.3: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gumbelcopula mit Parameter  $\theta = 10$  und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau

Wie wir erkennen können, ist für die hier gebrachten Beispiele der Aggregationsfehler immer sehr klein. Doch wie verändert sich der Fehler, wenn wir den Parameter  $\theta$  verändern? - Wir wollen nun für genau dieselben Beispiele den Fall  $\theta = 40$  betrachten.

Verteilung 1	Verteilung 2	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>√</sub> (0, 005)	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	15,791	15,7134	-0,49
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,5637	1,5553	-0,54
$W(1, 3)$	Exp(3)	14,3274	14,2955	-0,22
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0514	5,0478	-0,07
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	52,1398	51,8174	-0,62
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,6981	12,6874	-0,08
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,8333	14,7812	-0,35



Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
Exp(1)	Exp(20)	4,5132	4,5081	-0,11
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,2917	19,2833	-0,04

Tabelle 7.4: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gumbelcopula mit Parameter  $\theta = 40$  und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau

Tatsächlich wird der relative Fehler bei Erhöhung von  $\theta$  geringer. Um diese Vermutung zu unterlegen, wollen wir exemplarisch die beiden Verteilungen  $L(0, 1)$  und  $Exp(1)$  hernehmen und den Aggregationsfehler für verschiedene Werte von  $\theta$  betrachten. Basierend auf der obigen Analyse, sollte der Absolutbetrag des Fehlers demnach eine monoton fallende Funktion in  $\theta$  sein.

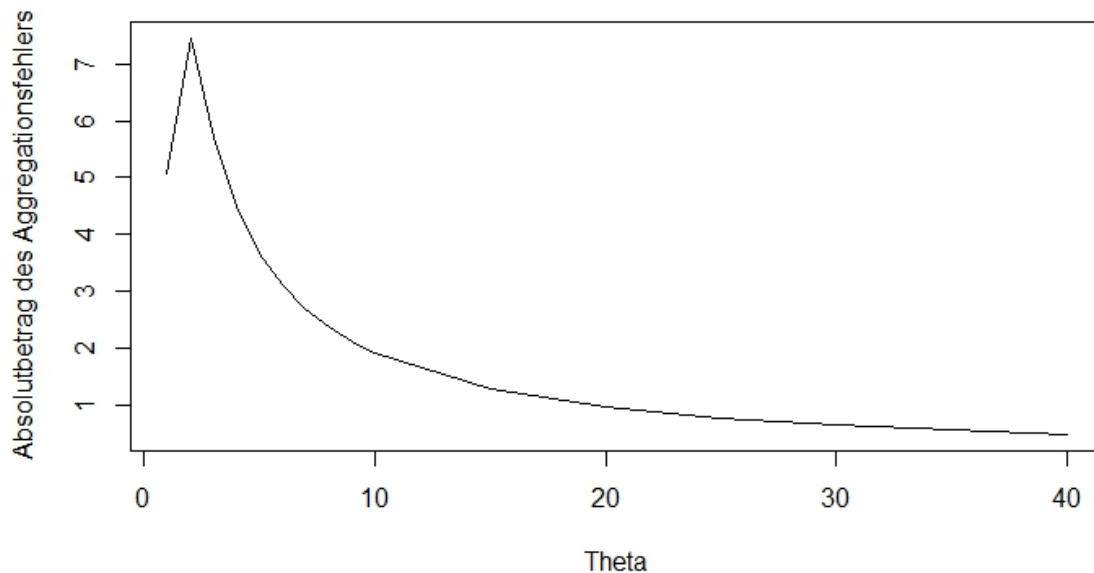


Abbildung 7.1: Veränderung des Absolutbetrags des Aggregationsfehlers bei Veränderung des Parameters  $\theta$  bei zugrunde liegender Gumbelcopula

$\theta$	Betrag des Aggregationsfehlers in %
1	5,08
2	7,45
3	5,71
4	4,49
5	3,68
10	1,92

$\theta$	Betrag des Aggregationsfehlers in %
15	1,29
20	0,97
25	0,78
30	0,65
35	0,56
40	0,49

Tabelle 7.5: Veränderung des Absolutbetrags des Aggregationsfehlers bei Veränderung des Parameters  $\theta$  bei zugrunde liegender Gumbelcopula

Unsere Vermutung erweist sich als fast richtig. Für  $\theta \geq 2$  tritt das Erwartete ein und der Betrag des relativen Aggregationsfehlers ist eine monoton fallende Funktion in  $\theta$ . Abschließend lässt sich also feststellen, dass das **mittels Wurzelformel aggregierte SCR bei Modellierung der Abhängigkeiten mit der Gumbelcopula dem wahren SCR sehr nahe kommt und der Fehler mit zunehmendem  $\theta$  abnimmt.**

### Claytoncopula

Wir wollen nun untersuchen, ob wir bei Verwendung der Claytoncopula ähnlich gute Resultate wie bei der Gumbelcopula erzielen können. Dazu gehen wir ähnlich vor wie zuvor und betrachten unterschiedliche Randverteilungen sowie unterschiedliche Werte für  $\theta$ . Wir setzen zunächst  $\theta = 10$ , um auch einen Vergleich zur Gumbelcopula anstellen zu können.

Verteilung 1	Verteilung 2	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>√</sub> (0, 005)	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	13,7294	15,2615	11,16
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,4208	1,5066	6,04
$W(1, 3)$	Exp(3)	13,5862	14,1111	3,86
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0347	5,0250	-0,19
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	42,3879	49,9244	17,78
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,2797	12,5296	2,04
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	13,8637	14,4754	4,41
Exp(1)	Exp(20)	4,3995	4,4790	1,81
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,1471	19,2356	0,46

Tabelle 7.6: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Claytoncopula mit Parameter  $\theta = 10$  und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau

Die Fehler, die wir hier erhalten, schwanken stark. Teils wird das wahre SCR durch die Wurzelformel ganz gut approximiert, teils erhalten wir sehr hohe Abweichungen. Vergleichen wir die hier erhaltenen Ergebnisse mit jenen, die bei zugrunde liegender Gumbelcopula erzielt werden, so ist deutlich erkennbar, dass alle soeben erhaltenen Fehler, bis auf jenen, der durch Aggregation der Beta- und Weibullverteilung entsteht, größer sind. Auffällig ist auch, dass im Falle der **Gumbelcopula das wahre SCR immer unterschätzt** wird, während es bei der **Claytoncopula fast ausschließlich überschätzt** wird.

Wir wollen nun, wie auch schon bei der Gumbelcopula, untersuchen, was passiert, wenn  $\theta$  verändert wird. Diesmal setzen wir  $\theta = 50$ . Für einige Verteilungskombinationen ist bei dieser Wahl von  $\theta$  die Ermittlung der Verteilungsfunktion der Summe nicht mehr so einfach möglich. Wir betrachten daher nur jene Kombinationen, die eine unkomplizierte Berechnung zulassen.

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{\text{exakt}}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	15,0476	15,6710	4,14
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,5143	1,5507	2,41
$W(1, 3)$	Exp(3)	14,0373	14,2780	1,72
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	49,2450	51,6405	4,86
Exp(1)	Exp(20)	4,4675	4,5054	0,85

Tabelle 7.7: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Claytoncopula mit Parameter  $\theta = 50$  und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau

Auch hier verringert sich der Aggregationsfehler offenbar mit zunehmendem  $\theta$ . Wir wollen dies am Beispiel der beiden Weibullverteilungen noch genauer untersuchen:

$\theta$	Betrag des Aggregationsfehlers in %
1	18,30
2	21,29
3	21,98
4	21,82
5	21,34
10	17,78
15	14,78
20	12,37
25	10,73
30	8,95

$\theta$	Betrag des Aggregationsfehlers in %
35	7,67
40	6,59
45	5,67
50	4,86

Tabelle 7.8: Veränderung des Absolutbetrags des Aggregationsfehlers bei Veränderung des Parameters  $\theta$  bei zugrunde liegender Claytoncopula

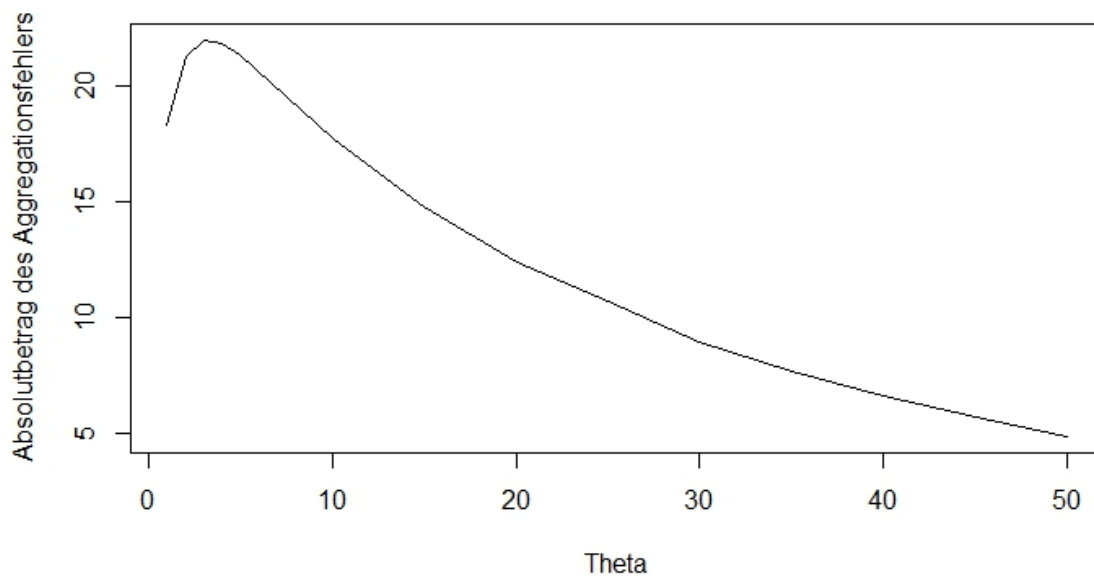


Abbildung 7.2: Veränderung des Absolutbetrags des Aggregationsfehlers bei Veränderung des Parameters  $\theta$  bei zugrunde liegender Claytoncopula

Tatsächlich gilt also auch hier, dass für  $\theta \geq 3$  der **relative Aggregationsfehler eine monoton fallende Funktion in  $\theta$  ist.**

### Frankcopula

Als letzte Familie der Klasse der archimedischen Copulas wollen wir noch die Frankcopula untersuchen. Für die Frankcopula wollen wir jedoch nicht nur den Aggregationsfehler bei Verwendung von Kendall's Tau in der Wurzelformel analysieren, sondern auch das Fehlerverhalten bei Verwendung von Spearman's Rho sowie des linearen Korrelationskoeffizienten. Für die Analysen werden wir wieder verschiedene Randverteilungen heranziehen. Wir wollen zuerst wieder Kendall's Tau in der Wurzelformel als Abhängigkeitsmaß verwenden. Als Parameter wählen wir wieder  $\theta = 10$ .

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0.5, 1)$	Exp(1)	20,9412	22,0458	5,27
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,4084	1,4470	2,74
$W(1, 3)$	Exp(3)	13,5411	13,8900	2,58
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0307	4,9980	-0,65
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	41,7658	47,5883	13,94
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,2423	12,3405	0,80
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	13,7867	14,1052	2,31
Exp(1)	Exp(20)	4,3926	4,4444	1,18
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,1357	19,1791	0,23

Tabelle 7.9: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Frankcopula mit Parameter  $\theta = 10$  und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau

Der Aggregationsfehler, den wir hier erhalten, ist bis auf die beiden Weibullverteilungen, recht klein. Verglichen mit jenen Resultaten, die wir bei zugrunde liegender Gumbel- und Claytoncopula erhalten haben, liegen die hier erhaltenen Ergebnisse im Mittelfeld. Für  $\theta = 10$  konnte nämlich für die **Gumbelcopula die beste Approximation mit einem durchschnittlichen relativen Fehler von  $-1,16\%$**  erzielt werden, während vergleichsweise der **durchschnittliche relative Fehler für die Claytoncopula mit  $5,31\%$  eine deutlich schlechtere Approximation** darstellt. Der **durchschnittliche relative Fehler für die Frankcopula beträgt  $3,3\%$** .

Für dasselbe  $\theta$  und mit zugrunde liegender Frankcopula wollen wir nun untersuchen, welche Veränderung eintritt, wenn statt Kendall's Tau Spearman's Rho verwendet wird. Wir gehen dabei analog vor wie zuvor und betrachten unterschiedliche Verteilungskombinationen.

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0.5, 1)$	Exp(1)	20,9412	22,75	8,65
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,4084	1,516	7,64
$W(1, 3)$	Exp(3)	13,5411	14,1463	4,47
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0307	5,0294	-0,03
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	41,7658	50,2893	20,41
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,2423	12,5598	2,6
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	13,7867	14,534	5,42
Exp(1)	Exp(20)	4,3926	4,4845	2,09

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,1357	19,2448	0,57

Tabelle 7.10: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Frankcopula mit Parameter  $\theta = 10$  und Abhängigkeitsmaß Spearman's Rho

Der **Aggregationsfehler wird offenbar größer, wenn man Spearman's Rho anstelle von Kendall's Tau** heranzieht. Die Verwendung von Spearman's Rho eignet sich daher weniger gut, um das wahre SCR zu approximieren.

Wir wollen nun auch die Genauigkeit der Approximation für den linearen Korrelationskoeffizienten als Abhängigkeitsmaß testen. Dieser eignet sich theoretisch nicht sehr gut als Abhängigkeitsmaß, wenn die zugrunde liegenden Verteilungen nicht normal sind und nicht in einem linearen Zusammenhang stehen. Wir wagen dennoch einen Versuch.

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0.5, 1)$	$Exp(1)$	20,9412	21,8336	4,26
$Exp(4)$	$Be(2, 3)$	1,4084	1,4775	4,90
$W(1, 3)$	$Exp(3)$	13,5411	13,9721	3,18
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0307	5,0178	-0,26
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	41,7658	44,3927	6,29
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,2423	12,2385	-0,03
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	13,7867	13,4666	-2,32
$Exp(1)$	$Exp(20)$	4,3926	4,4571	1,47
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,1603	19,2447	0,13

Tabelle 7.11: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Frankcopula mit Parameter  $\theta = 10$  und dem linearen Korrelationskoeffizienten

Die soeben erhaltenen Ergebnisse sind erstaunlich gut. Betrachtet man noch einmal die Fehler, die bei Verwendung von Spearman's Rho erzielt wurden, so ist der lineare Korrelationskoeffizient diesem deutlich vorzuziehen. Auch mit Kendall's Tau kann der lineare Korrelationskoeffizient mithalten. Bei einigen Verteilungskombinationen liefert der lineare Korrelationskoeffizient sogar ein besseres Approximationsresultat als Kendall's Tau. Die Berechnung des linearen Korrelationskoeffizienten mit Hilfe der Kovarianzformel von Hoeffding ist allerdings auf Grund numerischer Probleme nur für Werte für  $\theta \leq 17$  möglich. Wir können daher nicht überprüfen, ob die Wurzelformel

unter Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten für größere Werte für  $\theta$  ebenso gute Resultate liefert.

Dennoch wollen wir noch an weiteren Beispielen testen, ob der lineare Korrelationskoeffizient auch so gute Ergebnisse liefert, wenn wir anstelle der Frankcopula die Gumbel- und die Claytoncopula, welche ja beide eine Tail-Dependence aufweisen, verwenden. Wir wählen wieder  $\theta = 10$ .

Verteilung 1	Verteilung 2	Fehler Gumbelcopula in %	Fehler Claytoncopula in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	-0,13	7,01
Exp(4)	$Be(2, 3)$	-1,83	5,65
$W(1, 3)$	Exp(3)	-0,02	3,45
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	18,81	0,11
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	-0,01	6,24
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	-2,28	8,93
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	-6,58	-2,43
Exp(1)	Exp(20)	-0,02	1,61
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	-0,31	-0,2

Tabelle 7.12: Aggregationsfehler bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten als Abhängigkeitsmaß bei zugrunde liegender Gumbel- und Claytoncopula

Die erzielten Ergebnisse sind bis auf einen Ausreißer im Speziellen für die Gumbelcopula sehr gut. Trotz Tail-Dependence ist der **relative Aggregationsfehler bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten überraschenderweise hier nur sehr klein**.

Zusammenfassend lässt sich über den Aggregationsfehler der SCR-Berechnung feststellen, dass durch Modellierung der gemeinsamen Verteilungsfunktion mittels **Gumbelcopula unter Verwendung von Kendall's Tau in der Wurzelformel die besten Ergebnisse** erzielt werden. Je größer der Abhängigkeitsparameter  $\theta$  desto kleiner auch der Aggregationsfehler. Auch der Einsatz des linearen Korrelationskoeffizienten hat überraschenderweise trotz Tail-Dependence sehr gute Approximationen geliefert.

Nach dem Studium der archimedische Copulas wollen wir uns nun den elliptischen Copulas widmen.

### 7.1.3 Elliptische Copulas

Zu den bekanntesten Vertretern in der Klasse der elliptischen Copulas zählen bekanntlich die Gaußcopula und die Student-t-Copula. Wir wollen daher auch diese beiden Copulas für die Analysen der Genauigkeit der SCR-Berechnung heranziehen. Wir werden alle drei vorgestellten Abhängigkeitsmaße, den linearen Korrelationskoeffizienten, Kendall's Tau und Spearman's Rho, einsetzen. Bei zugrunde liegenden elliptischen Verteilungen ist vor allem der lineare Korrelationskoeffizient sehr vielversprechend.

#### Gaußcopula

Wir werden nun wieder diverse Randverteilungen in die Gaußcopula einsetzen, um die Genauigkeit der Wurzelformel zu testen. Um eine bessere Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wählen wir wieder dieselben Randverteilungen wie auch schon beim Studium der archimedischen Copulas sowie der Ko- und Kontramonotoniecopula. Wir starten die Analyse mit dem linearen Korrelationskoeffizienten. Zunächst wählen wir einen niedrigen Korrelationskoeffizienten ( $\rho = 0,3$ ):

Verteilung 1	Verteilung 2	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>√</sub> (0, 005)	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	12,6613	13,4245	6,03
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,2995	1,3074	0,61
$W(1, 3)$	Exp(3)	13,2164	13,3947	1,35
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	4,9791	4,9384	-0,82
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	37,8434	42,0402	11,09
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	11,9102	11,9171	0,06
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	13,1250	13,611	1,04
Exp(1)	Exp(20)	4,3436	4,3676	0,55
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,0428	19,0550	0,06

Tabelle 7.13: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gaußcopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,3$

Bis auf zwei Ausnahmen sind die Fehler sehr klein. Wir wählen nun statt des kleinen Korrelationskoeffizienten mit  $\rho = 0,9$  einen relativ hohen Korrelationsparameter und betrachten wieder für obige Randverteilungen die Aggregationsfehler:

Verteilung 1	Verteilung 2	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>√</sub> (0, 005)	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	15,2922	15,4758	1,2
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,5324	1,5297	0,17



Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$W(1, 3)$	$Exp(3)$	14,1365	14,1982	0,44
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0493	5,0358	-0,27
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	49,5944	50,8240	2,48
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,6079	12,6041	-0,03
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,5957	14,6201	0,17
$Exp(1)$	$Exp(20)$	4,4831	4,4927	0,21
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,2545	19,2581	0,02

Tabelle 7.14: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gaußcopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$

Bei Erhöhung der linearen Korrelation verringert sich also der Aggregationsfehler, das mittels Wurzelformel aggregierte Ergebnis stellt eine sehr gute Approximation dar.

Wir wollen nun anstelle des linearen Korrelationskoeffizienten Kendall's Tau verwenden. Als linearen Korrelationskoeffizienten, auf dessen Basis Kendall's Tau berechnet wird, wählen wir  $\rho = 0,9$ .

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0, 1)$	$Exp(1)$	15,2922	14,8664	2,78
$Exp(4)$	$Be(2, 3)$	1,5324	1,4640	-4,46
$W(1, 3)$	$Exp(3)$	14,1365	13,9526	-1,30
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0493	5,0056	-0,87
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	49,5944	48,2563	-2,7
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,6079	12,3939	-1,7
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,5957	14,2102	-2,64
$Exp(1)$	$Exp(20)$	4,4831	4,4541	-0,65
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,2545	19,195	-0,31

Tabelle 7.15: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gaußcopula bei Verwendung von Kendall's Tau

Die Verwendung von Kendall's Tau anstelle des linearen Korrelationkoeffizienten bringt offenbar keine Verbesserung. Wir wollen nun auch noch testen, ob der Einsatz von Spearman's Rho eine Verbesserung des Ergebnisses bewirkt. Spearman's Rho wird wieder auf Basis des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$  berechnet.

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0, 1)$	$Exp(1)$	15,2922	15,4485	1,02
$Exp(4)$	$Be(2, 3)$	1,5324	1,5268	-0,36
$W(1, 3)$	$Exp(3)$	14,1365	14,1871	0,36
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0493	5,0344	-0,30
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	49,5944	50,7096	2,25
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,6079	12,5946	-0,11
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,5957	14,60	0,04
$Exp(1)$	$Exp(20)$	4,4831	4,491	0,18
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,2545	19,2552	$3,8 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 7.16: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gaußcopula bei Verwendung von Spearman's Rho

Durch die Verwendung von Spearman's Rho kann für manche Verteilungen im Vergleich mit der Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten eine leichte Verbesserung erzielt werden.

Insgesamt können wir nun festhalten, dass der **Aggregationsfehler bei Verwendung der Gaußcopula immer sehr klein** ist, egal welches Abhängigkeitsmaß wir heranziehen. Je nach gewählten Randverteilungen ist optimalerweise der lineare Korrelationskoeffizient oder Spearman's Rho in die Wurzelformel einzusetzen, um ein möglichst exaktes Resultat zu erhalten.

### Student-t-Copula

Als letzte Copula wollen wir nun noch die Student-t-Copula heranziehen, um die Genauigkeit der Wurzelformel zu überprüfen. Wir werden dabei ähnlich wie bei der Gaußcopula vorgehen und für unterschiedliche Randverteilungen den Aggregationsfehler bestimmen. Auf Grund des großen numerischen Aufwands bei der Berechnung des exakten SCR wird die Integration bei der Bestimmung der Verteilungsfunktion der Summe der Zufallsvariablen nicht bis  $\infty$  durchgeführt, sondern händisch abgeschnitten. Dadurch kann es zu einem Fehler kommen. Dieser liegt schlimmstenfalls im Hundertstel- bzw. Tausendstelbereich.

Bei der Student-t-Copula kommt noch ein weiterer Faktor hinzu, den wir berücksichtigen müssen, nämlich die Anzahl der Freiheitsgrade. Wir werden auch überprüfen, welchen Einfluss dieser Faktor auf den Aggregationsfehler hat. Zunächst legen wir für die Anzahl der Freiheitsgrade  $v = 5$  fest.

Als Abhängigkeitsmaß für die Aggregation mittels Wurzelformel verwenden wir vorerst den linearen Korrelationskoeffizienten.

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	13,1989	13,4245	1,71
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,3445	1,3074	-2,76
$W(1, 3)$	Exp(3)	13,3803	13,3947	0,11
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	4,9581	4,9384	-0,43
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	39,9642	42,0402	5,19
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	11,9555	11,9171	-0,32
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	13,2695	13,2611	-0,07
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,0652	19,0550	-0,05

Tabelle 7.17: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Student-t-Copula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,3$

Verteilung 1	Verteilung 2	$SCR_{exakt}(0, 005)$	$SCR_{\sqrt{}}(0, 005)$	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	15,4154	15,4758	0,39
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,5407	1,5297	-0,72
$W(1, 3)$	Exp(3)	14,1834	14,1982	0,10
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0493	5,0358	-0,27
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	50,1567	50,8240	1,33
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,6326	12,6041	-0,23
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,6525	14,6201	-0,22
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,2631	19,2581	-0,03

Tabelle 7.18: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Student-t-Copula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$

Wie unschwer zu erkennen ist, sind die **Aggregationsfehler, die wir bei zugrunde liegender Student-t-Copula erhalten, alle sehr klein**, wobei, bis auf zwei Ausnahmen, die Fehler bei hoher Abhängigkeit kleiner als bei niedriger Abhängigkeit werden. Wir wollen nun noch überprüfen, ob durch die Verwendung von Kendall's Tau und Spearman's Rho eine Verbesserung erzielt werden kann. Als Basis zur Berechnung der beiden Abhängigkeitsmaße wählen wir wieder  $\rho = 0,9$ .

Verteilung 1	Verteilung 2	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>√</sub> (0, 005)	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	15,4154	15,8664	-3,56
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,5407	1,4640	-4,98
$W(1, 3)$	Exp(3)	14,1834	13,9526	-1,63
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0493	5,0056	-0,87
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	50,1567	48,2563	-3,79
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,6326	12,3939	-1,89
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,6525	14,2102	-3,02
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,2631	19,195	-0,35

Tabelle 7.19: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Student-t-Copula bei Verwendung von Kendall's Tau

Verteilung 1	Verteilung 2	SCR <sub>exakt</sub> (0, 005)	SCR <sub>√</sub> (0, 005)	Fehler in %
$L(0, 1)$	Exp(1)	15,4154	15,4485	0,22
Exp(4)	$Be(2, 3)$	1,5407	1,5268	-0,91
$W(1, 3)$	Exp(3)	14,1834	14,1871	0,03
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	5,0493	5,0344	-0,3
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	50,1567	50,7096	1,10
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	12,6326	12,5946	-0,30
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	14,6525	14,6016	-0,35
$L(0.5, 1)$	$Be(3, 10)$	19,2631	19,2552	-0,04

Tabelle 7.20: Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Student-t-Copula bei Verwendung von Spearman's Rho

Vergleichen wir die Ergebnisse mit jenen, die durch Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten erzielt wurden, so stellen wir bei Verwendung von Kendall's Tau eine eindeutige Verschlechterung fest. Die Verwendung von Spearman's Rho liefert vergleichbare Ergebnisse wie der lineare Korrelationskoeffizient. Bei Modellierung von abhängigen Zufallsvariablen mittels **Student-t-Copula ist also die Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten oder von Spearman's Rho zu empfehlen.**

Wie schon anfangs erwähnt, wollen wir auch den Einfluss der Freiheitsgrade auf die Genauigkeit der SCR-Berechnung analysieren. Dazu betrachten wir die beiden

Randverteilungen  $U(0, 1)$  und  $\text{Exp}(2)$  und fixieren den linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,4$ . Für verschiedene Anzahlen der Freiheitsgrade werden wir nun das exakte SCR sowie das mittels Wurzelformel aggregierte SCR und den Fehler berechnen.

$v$	$\text{SCR}_{\text{exakt}}(0, 005)$	$\text{SCR}_{\sqrt{v}}(0, 005)$	Fehler in %
1	2,4809	2,3906	-3,64
5	2,4798	2,3906	-3,6
10	2,4754	2,3906	-3,43
50	2,47	2,3906	-3,21
100	2,4689	2,3906	-3,17
500	2,4683	2,3906	-3,15
1000	2,4682	2,3906	-3,14
10000	2,4681	2,3906	-3,14
100000	2,4681	2,3906	-3,14

Tabelle 7.21: Veränderung des Aggregationsfehlers bei Veränderung der Anzahl der Freiheitsgrade bei zugrunde liegender Student-t-Copula

Die **Veränderung des relativen Fehlers bei Veränderung der Anzahl der Freiheitsgrade** ist, wie wir sehen, **minimal** und ab einer gewissen Anzahl kaum bemerkbar.

Wir können nun schlussfolgern, dass die Wurzelformel bei Verwendung elliptischer Copulas zur Modellierung gemeinsamer Verteilungsfunktionen eine sehr gute Approximation des wahren SCR erzielt. Sowohl bei der Gaußcopula als auch bei der Student-t-Copula haben sich der lineare Korrelationskoeffizient und Spearman's Rho etabliert.

#### 7.1.4 Analyse der Ergebnisse

Um einen Überblick zu erlangen, für welche Copulas der Aggregationsfehler groß bzw. klein ist, wollen wir alle Ergebnisse noch einmal vergleichen. In der folgenden Tabelle betrachten wir daher für alle in diesem Kapitel vorkommenden Randverteilungskombinationen den relativen Aggregationsfehler für die unterschiedlichen Copulas und Annahmen. Gerundet wird dabei immer auf zwei Nachkommastellen. In der Tabelle werden die folgenden Abkürzungen verwendet: Kom=Komonotoniecopula, Kontr=Kontramonotoniecopula, GuK10= Gumbelcopula bei Verwendung von Kendall's Tau mit Parameter  $\theta = 10$ , GuK40= Gumbelcopula bei Verwendung von Kendall's Tau mit Parameter  $\theta = 40$ , GuL10= Gumbelcopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten mit Parameter  $\theta = 10$ , CK10= Claytoncopula bei Verwendung von

Kendall's Tau mit Parameter  $\theta = 10$ , CK50= Claytoncopula bei Verwendung von Kendall's Tau mit Parameter  $\theta = 50$ , CL10= Claytoncopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten mit Parameter  $\theta = 10$ , FK10= Frankcopula bei Verwendung von Kendall's Tau mit Parameter  $\theta = 10$ , FS10= Frankcopula bei Verwendung von Spearman's Rho mit Parameter  $\theta = 10$ , FL10= Frankcopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten mit Parameter  $\theta = 10$ , GaL0,3=Gaußcopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,3$ , GaL0,9=Gaußcopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$ , GaK0,9=Gaußcopula bei Verwendung von Kendall's Tau bei zugrunde liegendem linearem Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$ , GaS0,9=Gaußcopula bei Verwendung von Spearman's Rho bei zugrunde liegendem linearem Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$ , SL0,3=Student-t-Copula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,3$ , SL0,9=Student-t-Copula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$ , SK0,9=Student-t-Copula bei Verwendung von Kendall's Tau bei zugrunde liegendem linearem Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$ , SS0,9=Student-t-Copula bei Verwendung von Spearman's Rho bei zugrunde liegendem linearem Korrelationskoeffizienten  $\rho = 0,9$ .

Verteilung 1	Verteilung 2	Kom	Kontr	GuK10	GuK40	GuL10	CK10	CK50	CL10	FK10	FS10	FL10
$L(0, 1)$	Exp(1)	0	-31,52	-1,92	-0,49	-0,13	11,16	4,14	7,01	5,27	8,65	4,26
Exp(4)	Be(2, 3)	0	-	-2,13	-0,54	-1,83	6,04	2,41	5,65	2,74	7,64	4,90
$W(1, 3)$	Exp(3)	0	-13,31	-0,87	-0,22	-0,02	3,86	1,72	3,45	2,58	4,47	3,18
$Be(5, 1)$	$W(4, 8)$	0	7,30	-0,31	-0,07	18,81	-0,19	-	0,11	-0,65	-0,03	-0,26
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	0	100	-2,39	-0,62	-0,01	17,78	4,86	6,24	13,94	20,41	6,29
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	0	-0,53	-0,85	-0,08	-2,28	2,04	-	8,93	0,80	2,60	-0,03
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	0	-1,30	-1,42	-0,35	-6,58	4,41	-	-2,43	2,31	5,42	-2,32
Exp(1)	Exp(20)	0	-4,20	-0,44	-0,11	-0,02	1,81	0,85	1,61	1,18	2,09	1,47
$L(0.5, 1)$	Be(3, 10)	0	-0,76	-0,17	-0,04	-0,31	0,46	-	-0,2	0,23	0,57	0,13

Verteilung 1	Verteilung 2	GaL0,3	GaL0,9	GaK0,9	GaS0,9	SL0,3	SL0,9	SK0,9	SS0,9
$L(0, 1)$	Exp(1)	6,03	1,20	2,78	1,02	1,71	0,39	-3,56	0,22
Exp(4)	Be(2, 3)	0,61	0,17	-4,46	-0,36	-2,76	-0,72	-4,98	-0,91
$W(1, 3)$	Exp(3)	1,35	0,44	-1,30	0,36	0,11	0,10	-1,63	0,03
Be(5, 1)	$W(4, 8)$	-0,82	-0,27	-0,87	-0,30	-0,43	-0,27	-0,87	-0,30
$W(0.5, 1)$	$W(0.5, 1)$	11,09	2,48	-2,70	2,25	5,19	1,33	-3,79	1,10
$L(0, 1)$	$W(4, 2)$	0,06	-0,03	-1,70	-0,11	-0,32	-0,23	-1,89	-0,30
$N(0, 1)$	$W(0.4, 0.2)$	1,04	0,17	-2,64	0,04	-0,07	-0,22	-3,02	-0,35
Exp(1)	Exp(20)	0,55	0,21	-0,65	0,18	-	-	-	-
$L(0.5, 1)$	Be(3, 10)	0,06	0,02	-0,31	0	-0,05	-0,03	-0,35	-0,04

Tabelle 7.22: Überblick der relativen Aggregationsfehler für die unterschiedlichen Copulas

Was zunächst auffällt, ist, dass unabhängig von der Wahl der Copula, der Aggregationsfehler mit zunehmender Abhängigkeit abnimmt. Die größten Fehler erhalten wir bei der Kontramotonicopula, also bei perfekter negativer Abhängigkeit, bei perfekter positiver Abhängigkeit liegt der Fehler lediglich im Bereich  $10^{-6}$  bis  $10^{-14}$ .

Den kleinsten Aggregationsfehler bei Betrachtung der archimedischen Copulas erhalten wir für die Gumbelcopula. Da der in die Wurzelformel einzusetzende Parameter bei Verwendung von Kendall's Tau bei  $\theta = 10,9$  entspricht, können wir die Ergebnisse gut mit der Gauß- und Student-t-Copula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten vergleichen. Ein Vergleich der Aggregationsfehler zeigt, dass sowohl bei zugrunde liegender Gauß- als auch Student-t-Copula eine bessere Approximation des wahren SCR als bei zugrunde liegender Gumbelcopula erzielt werden kann.

Betrachtet man nun nur die elliptischen Copulas, so liefert ein Vergleich der Gauß- und Student-t-Copula das Resultat, dass je nach gewählten Randverteilungen einmal bei Verwendung der Gauß- und einmal bei Verwendung der Student-t-Copula der Aggregationsfehler kleiner ist. Eine einheitliche Aussage, für welche Copula der Aggregationsfehler kleiner ist, kann nicht getroffen werden.

Abschließend kann festgestellt werden, dass die **kleinsten Aggregationsfehler bei Verwendung von elliptischen Copulas** erzielt werden. Besonders gut eignen sich hier **der lineare Korrelationskoeffizient und Spearman's Rho** als Abhängigkeitsmaß. Gute Ergebnisse werden auch bei Verwendung der Gumbelcopula erzielt, je nach Wahl der Randverteilungen sind hier der lineare Korrelationskoeffizient oder Kendall's Tau zu empfehlen.



## 7.2 Analyse des Zusammenhangs zwischen dem gewählten Korrelationskoeffizienten und dem den Aggregationsfehler in der Wurzelformel minimierenden Parameter

Wir wollen nun überprüfen, ob es einen Zusammenhang zwischen dem für die exakte Berechnung gewähltem linearem Korrelationskoeffizienten und dem entsprechenden Parameter in der Wurzelformel, der den Aggregationsfehler minimiert, gibt. Zu diesem Zweck betrachten wir zwei lognormalverteilte Zufallsvariablen  $L(0.5, 1)$  und  $L(0.5, 1)$  und ermitteln die gemeinsame Verteilungsfunktion auf Basis einer Gaußcopula. Für verschiedene Werte des linearen Korrelationskoeffizienten  $\rho$  ermitteln wir dann jene Parameter  $\rho_{op}$ , die in die Wurzelformel eingesetzt werden müssen, um ein möglichst exaktes Ergebnis zu erhalten.

$\rho$	Aggregationsfehler in %	$\rho_{op}$	Aggregationsfehler mit $\rho_{op}$ in %
0,1	8,27	-0,0616	$-2,5 \cdot 10^{-3}$
0,2	9,01	0,0099	$-9 \cdot 10^{-4}$
0,3	9,13	0,0916	$-2,3 \cdot 10^{-3}$
0,4	8,76	0,1836	$-6 \cdot 10^{-4}$
0,5	7,96	0,2870	$-1,6 \cdot 10^{-3}$
0,6	6,93	0,3994	$-1,3 \cdot 10^{-3}$
0,7	5,40	0,5302	$-1,5 \cdot 10^{-3}$
0,8	3,76	0,6718	$-8 \cdot 10^{-4}$
0,9	1,95	0,828	$-1,3 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 7.23: Optimaler Korrelationsparameter für die Wurzelformel zu gegebenem linearem Korrelationskoeffizienten

Wir betrachten jetzt den optimalen Aggregationsparameter  $\rho_{op}$  als Funktion des entsprechenden  $\rho$  und können erkennen, dass tatsächlich ein Zusammenhang besteht.

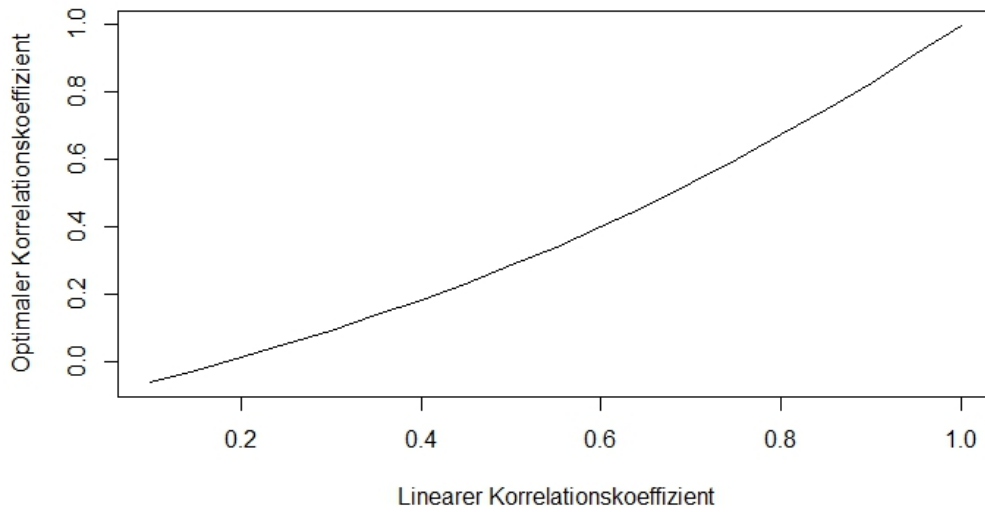


Abbildung 7.3: Zusammenhang zwischen gewähltem und für die Wurzelformel optimalen Korrelationskoeffizienten

Es gibt nun also eine von  $\rho$  abhängige Funktion  $\alpha$ , sodass der Zusammenhang

$$\alpha(\rho) * \rho = \rho_{op}$$

gilt. Um eine Idee zu erlangen, von welcher Form die Funktion sein muss, formen wir die obige Gleichung auf  $\alpha(\rho) = \frac{\rho_{op}}{\rho}$  um und betrachten den Graphen.

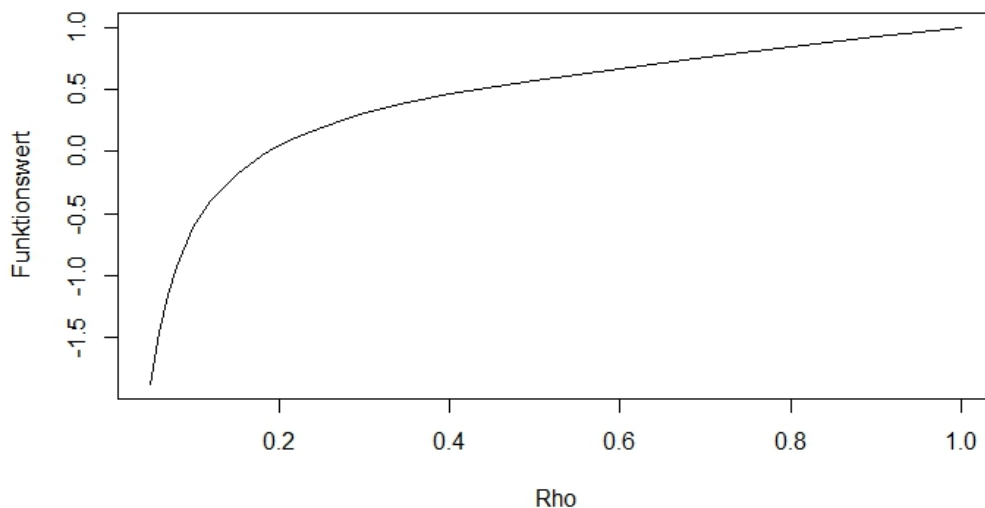


Abbildung 7.4: Graph von  $\alpha(\rho)$  für  $L(0.5, 1)$  und  $L(0.5, 1)$

Offensichtlich handelt es sich um eine monoton wachsende und konkave Funktion. Von der Form her erinnert die Funktion an den natürlichen Logarithmus.

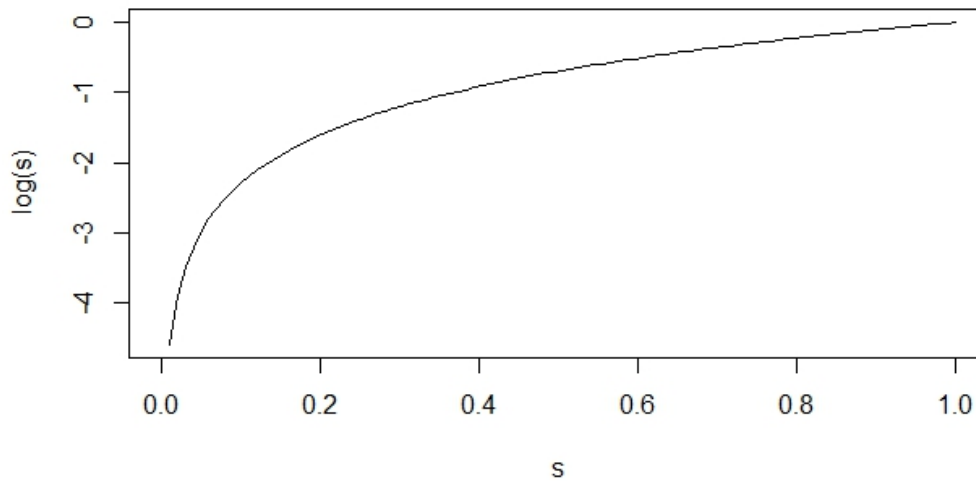


Abbildung 7.5: Graph des natürlichen Logarithmus

Es gilt nun also Koeffizienten  $a$  und  $b$  zu finden, sodass  $\alpha(\rho) = b \cdot \log(\rho) + a$ . Wählen wir  $a = 1,01$  und  $b = 1/1,92$  und verschieben die Funktion zusätzlich um  $0,05$  (folglich verschiebt sich natürlich auch der Definitionsbereich), so erhalten wir mit  $\hat{\alpha}(\rho) = \frac{1}{1,92} \cdot \log(\rho - 0,05) + 1,01$  eine sehr gute Approximation der Funktion  $\alpha(\rho)$ .

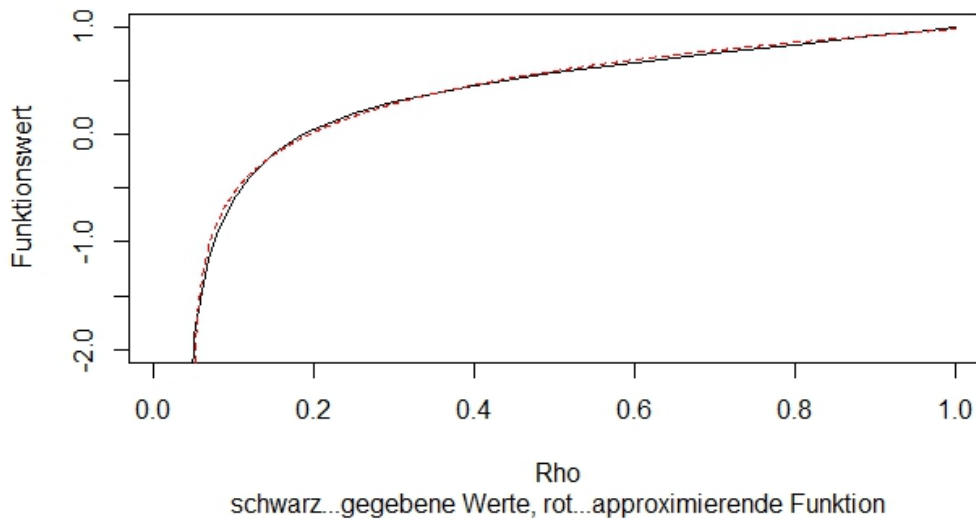


Abbildung 7.6: Graph der Funktion  $\alpha(\rho)$  mit approximierender Logarithmusfunktion  $\hat{\alpha}(\rho)$  für  $L(0.5, 1)$  und  $L(0.5, 1)$

Wie genau die Approximation mittels  $\hat{\alpha}$  gelingt und wie groß der Aggregationsfehler bei Einsatz des so ermittelten Parameters ist, wollen wir in der folgenden Tabelle noch einmal betrachten.

$\rho$	$\rho_{op}$	$\hat{\alpha}(\rho) * \rho$	Fehler in %
0,1	-0,0616	-0,0550	0,30
0,2	0,0099	0,0044	-0,33
0,3	0,0916	0,0864	-0,29
0,4	0,1836	0,1852	-0,02
0,5	0,2870	0,2971	0,35
0,6	0,3994	0,4192	0,67
0,7	0,5302	0,5499	0,62
0,8	0,6718	0,6881	0,47
0,9	0,828	0,8328	0,12

Tabelle 7.24: Vergleich des linearen Korrelationskoeffizienten, des optimalen Korrelationskoeffizienten und des approximierten optimalen Korrelationskoeffizienten

Gänzlich kann der Fehler durch diese Approximation zwar nicht beseitigt werden, dennoch kann eine Verbesserung um ein Vielfaches erzielt werden.

Nun stellt sich die Frage, ob der soeben ermittelte Zusammenhang von den betrachteten Randverteilungen und/oder Parametern abhängig ist. Wir betrachten daher einmal den Graphen  $\alpha(\rho)$  für  $L(0, 1)$  und  $L(0.3, 1)$  und einmal für  $\text{Exp}(2)$  und  $W(1, 3)$ .

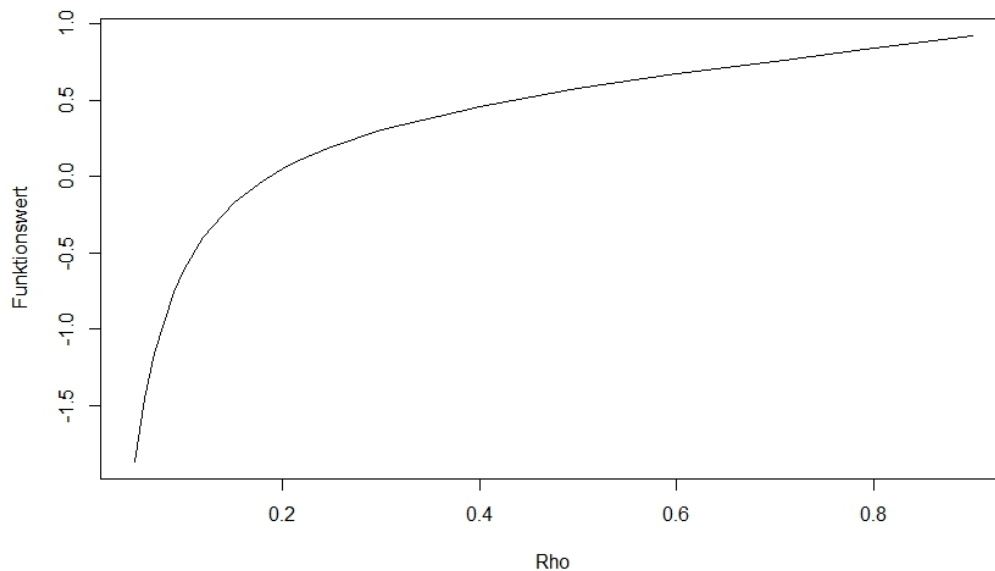


Abbildung 7.7: Graph von  $\alpha(\rho)$  für  $L(0, 1)$  und  $L(0.3, 1)$

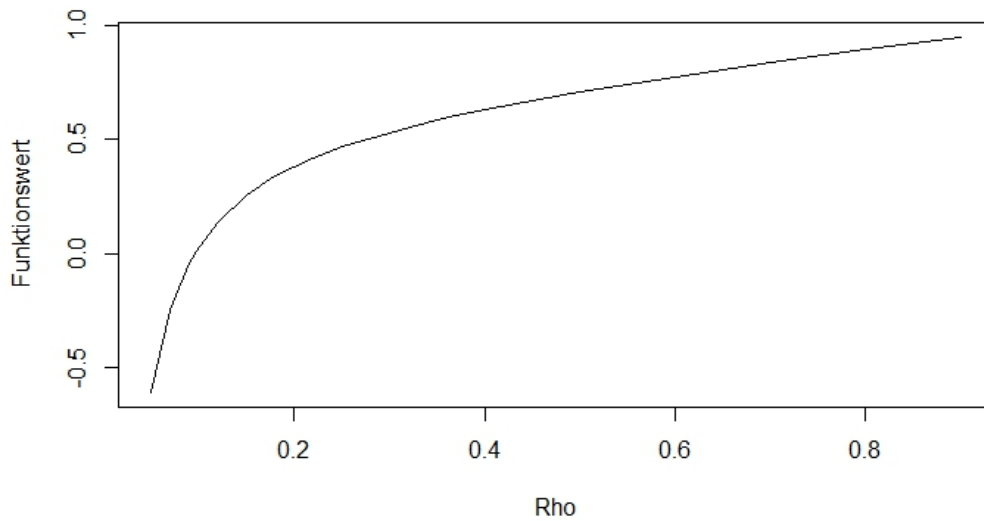


Abbildung 7.8: Graph von  $\alpha(\rho)$  für  $\text{Exp}(2)$  und  $W(1, 3)$

Tatsächlich sind beide Graphen wieder von der Form einer Logarithmusfunktion. Legt man nun wieder die Approximation  $\hat{\alpha}$  über die Graphen, so ist ersichtlich, dass für die beiden Lognormalverteilungen keine Anpassung der oben gewählten Parameter notwendig ist, für die exponential- und weibullverteilte Kombination die Parameter jedoch leicht verändert werden müssen. Die optimale Wahl ist hier mit  $a = 0,97$  und  $b = 1/3,11$  gegeben.

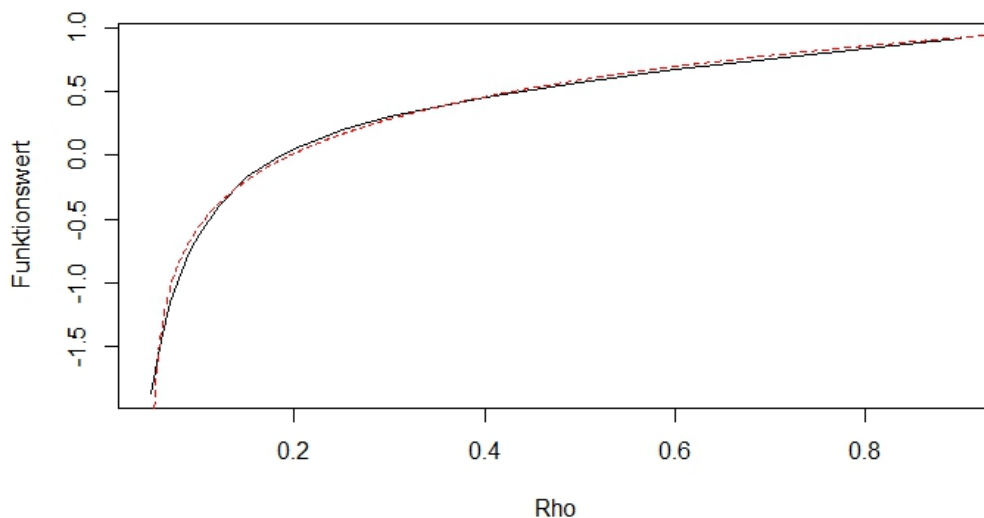


Abbildung 7.9: Graph der Funktion  $\alpha(\rho)$  mit approximierender Logarithmusfunktion  $\hat{\alpha}(\rho)$  für  $L(0, 1)$  und  $L(0.3, 1)$

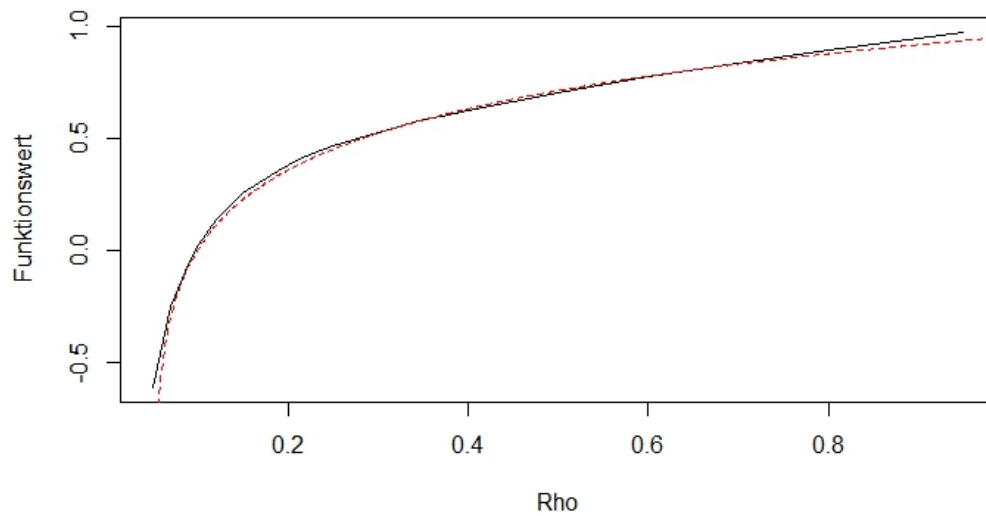


Abbildung 7.10: Graph der Funktion  $\alpha(\rho)$  mit approximierender Logarithmusfunktion  $\hat{\alpha}_1(\rho)$  für  $\text{Exp}(2)$  und  $W(1, 3)$

Auf Basis der getesteten drei Beispiele lässt sich also festhalten, dass der **Zusammenhang zwischen dem gewählten linearen Korrelationskoeffizienten und dem für die Wurzelformel optimalen Parameter durch die Logarithmusfunktion** gegeben ist. Die Wahl der Parameter ist von Mittelwert und Varianz unabhängig, nicht jedoch von den betrachteten Randverteilungen. Für die diversen Randverteilungen muss eine Anpassung der Parameter vorgenommen werden.

# Kapitel 8

## Conclusio

Durch die Untersuchung der Standardformel konnten einige interessante Fakten aufgezeigt werden. Die Wichtigsten wollen wir hier noch einmal kurz zusammenfassen.

Eine der wichtigsten Erkenntnisse dieser Arbeit ist, dass der Aggregationsfehler, der durch die Verwendung der Wurzelformel entsteht, abhängig von der zugrunde liegenden Abhängigkeitsstruktur und von der Wahl des Abhängigkeitsmaßes ist. So eignen sich der lineare Korrelationskoeffizient und Spearman's Rho sehr gut bei Verwendung von elliptischen Copulas, wohingegen die Anwendung von Spearman's Rho bei Modellierung der Abhängigkeit durch archimedische Copulas zu größeren Aggregationsfehler führt. Soll für elliptische Verteilung das Solvenzkapital berechnet werden, so liefert die Wurzelformel bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten gar das exakte Ergebnis.

Ein äußerst interessantes Ergebnis hat auch die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen dem in der exakten Berechnung verwendeten Korrelationskoeffizienten und dem den Aggregationsfehler minimierenden Parameter geliefert. Bei zugrunde liegender Gaußcopula konnte festgestellt werden, dass der Zusammenhang, unabhängig von der Wahl der Randverteilungen, von der Form einer Logarithmusfunktion ist.

Weitere Erkenntnisse konnten auch bei der Analyse von Korrelationsmatrizen erzielt werden. Es konnte gezeigt werden, dass die Diversifikationseffekte von der Gewichtung der Risikomodule abhängen. Eine Veränderung eines Korrelationskoeffizienten bewirkt eine umso größere Veränderung in den Diversifikationseffekten, je größer die Anteile der betroffenen Risikomodule am Gesamt SCR sind. Außerdem können durch Gleichgewichtung die größten Diversifikationseffekte erzielt werden.

# Anhang A

## R-Code zur Berechnung des exakten SCR für zwei Lognormalverteilungen

Als Beispiel für die numerischen Rechnungen zur Bestimmung des exakten SCR bei zugrunde liegender Claytoncopula in Kapitel 7 führen wir hier den R-Code für zwei Lognormalverteilungen an.

```
library(distr)
library(distrEx)

#Festlegung der Parameter
n1<-0
m1<-1
n2<-0
m2<-1

N <- Lnorm(n1,m1)
L <- Lnorm(n2,m2)

#Abhängigkeitsparameter Theta
th<-10

# Clayton Copula
G<- function(u1,u2)(u1^(-th)+u2^(-th)-1)^(-1/th)
# Ableitung nach der zweiten Variable
dG2<- function(u1,u2)(u1^(-th)+u2^(-th)-1)^(-1/th-1)*u2^(-th-1)
```



```

# Clayton Copula Dichte
g<- function(u1,u2) (th+1)*(u1^(-th)+u2^(-th)-1)^(-1/th-2)*u1^(-th-1)*u2^(-th-1)

# Randverteilungen
F1<- function(x1) plnorm(x1,n1,m1)
F2<- function(x2) plnorm(x2,n2,m2)
# Raddichten
f1<- function(x1) dlnorm(x1,n1,m1)
f2<- function(x2) dlnorm(x2,n2,m2)
# Sklar's Theorem
F<- function(x1,x2) G(F1(x1),F2(x2))
# Sklar's Dichte Formel
f<- function(x1,x2) g(F1(x1),F2(x2))*f1(x1)*f2(x2)

# Verteilungsfunktion der Summe
FS<- function(s){
  fun<- function(x2)dG2(F1(s-x2),F2(x2))*f2(x2)
  integrate(fun,0,Inf)$value
}

#Kovarianz von Hoeffding
CovHoeff<- function(F,F1,F2){
  fun1<- function(x1){
    fun2<- function(x2){
      F(x1,x2)-F1(x1)*F2(x2)
    }
    integrate(fun2,0,Inf)$value
  }
  integrate(Vectorize(fun1),-Inf,Inf)$value
}
V12<- CovHoeff(F,F1,F2)

#Numerische Berechnung des Quantils
#al ist das Konfidenzniveau
#F die Verteilungsfunktion
#x eine Schätzung des Quantils
#dx ein Inkrement, um stufenweise ein Intervall zu finden,
#das das Quantil enthält

```

```

myQua<- function(al,F,x,dx){

  u<- F(x)
  if(u==al) return(x);
  if(u>al){
    b<- x
    a<- x
    while(F(a<- a-dx)>al){}
  } else {
    a<- x
    b<- x
    while(F(b<- b+dx)<al) {}
  }
  return(uniroot(function(x)F(x)-al,c(a,b))$root)
}

# Mittelwerte
mu1<- 0
mu2<- 0
# Standardabweichungen
si1<- 1
si2<- 1
#Konfidenzniveau
al<- 0.995

muS<- mu1+mu2
siS<- sqrt(si1^2+si2^2+2*V12)

# Schätzung des Quantils
x<- qnorm(al,muS,siS)
dx<- siS

#Ermittlung des Quantils
q<- myQua(al,FS,x,dx)

#Berechnung des Erwartungswerts
EW<-E(N)+E(L)

```

```
#Berechnung des SCR  
SCR<-q-EW
```



# Abbildungsverzeichnis

5.1	Komonotonie-, Unabhängigkeits- und Kontramonotoniecopula . . . . .	31
5.2	Gumbelcopula für verschiedene Werte von $\theta$ . . . . .	33
5.3	Claytoncopula für verschiedene Werte von $\theta$ . . . . .	34
5.4	Frankcopula für verschiedene Werte von $\theta$ . . . . .	34
5.5	Gaußcopula für verschiedene Werte von $\rho$ . . . . .	36
5.6	Student-t-Copula für verschiedene Werte von $\rho$ und $v$ . . . . .	37
6.1	Jährliche Rendite des MSCI im Zeitraum 1996-2015 . . . . .	55
6.2	Jährliche Rendite des UK 10 Year Spot im Zeitraum 1996-2015 . . . . .	55
6.3	Korrelation zwischen dem MSCI und dem UK 10 Year Spot im Zeitraum 1996-2015 . . . . .	56
6.4	Jährliche Rendite des MSCI im Zeitraum 2000-2005 . . . . .	56
6.5	Jährliche Rendite des UK 10 Year Spot im Zeitraum 2000-2005 . . . . .	57
6.6	Korrelation zwischen dem MSCI und dem UK 10 Year Spot im Zeitraum 2000-2005 . . . . .	57
6.7	Einfluss des Diversifikationseffekts auf das Gesamt-SCR, Quelle:[18, S.50]	58
6.8	Veränderung der Diversifikationseffekte bei Veränderung des Korrelati- onskoeffizienten zwischen dem Marktrisiko und dem Risikomodul Nicht- Leben . . . . .	61
6.9	Der Bottom-Up-Approach geht immer von der kleinsten Einheit aus, Quelle:[20, S.7] . . . . .	65
7.1	Veränderung des Absolutbetrags des Aggregationsfehlers bei Veränderung des Parameters $\theta$ bei zugrunde liegender Gumbelcopula . . . . .	72
7.2	Veränderung des Absolutbetrags des Aggregationsfehlers bei Veränderung des Parameters $\theta$ bei zugrunde liegender Claytoncopula . . . . .	75
7.3	Zusammenhang zwischen gewähltem und für die Wurzelformel optimalen Korrelationskoeffizienten . . . . .	89
7.4	Graph von $\alpha(\rho)$ für $L(0.5, 1)$ und $L(0.5, 1)$ . . . . .	89
7.5	Graph des natürlichen Logarithmus . . . . .	90

7.6	Graph der Funktion $\alpha(\rho)$ mit approximierender Logarithmusfunktion $\hat{\alpha}(\rho)$ für $L(0.5, 1)$ und $L(0.5, 1)$ . . . . .	90
7.7	Graph von $\alpha(\rho)$ für $L(0, 1)$ und $L(0.3, 1)$ . . . . .	91
7.8	Graph von $\alpha(\rho)$ für $\text{Exp}(2)$ und $W(1, 3)$ . . . . .	92
7.9	Graph der Funktion $\alpha(\rho)$ mit approximierender Logarithmusfunktion $\hat{\alpha}(\rho)$ für $L(0, 1)$ und $L(0.3, 1)$ . . . . .	92
7.10	Graph der Funktion $\alpha(\rho)$ mit approximierender Logarithmusfunktion $\hat{\alpha}_1(\rho)$ für $\text{Exp}(2)$ und $W(1, 3)$ . . . . .	93

# Tabellenverzeichnis

2.1	Korrelationsmatrix zur Berechnung des BSCR . . . . .	11
3.1	Korrelationsmatrix gemäß QIS2 zur Berechnung des BSCR . . . . .	19
3.2	Korrelationsmatrix gemäß QIS3 zur Berechnung des BSCR . . . . .	20
3.3	Korrelationsmatrix gemäß QIS4 zur Berechnung des BSCR . . . . .	21
3.4	Korrelationsmatrix gemäß QIS5 zur Berechnung des BSCR . . . . .	22
5.1	Kendall's Tau für die Gumbel-, Clayton-, Frank-, Gauß- und Student-t-Copula, Quelle: [2, S.178] . . . . .	40
5.2	Spearman's Rho für die Frank-, Gauß- und Student-t-Copula, Quelle: [2, S.178] . . . . .	41
6.1	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegenden Betaverteilungen mit $\alpha = 0,005$ . . . . .	50
6.2	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegenden schiefen Verteilungen mit $\alpha = 0,005$ . . . . .	50
6.3	Bestimmung des Korrelationskoeffizienten zur Minimierung des Aggregationsfehlers bei zugrunde liegenden unabhängigen Verteilungen mit $\alpha = 0,005$ . . . . .	51
6.4	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung für $n$ unabhängige gammaverteilte Summanden	53
6.5	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung für $n$ unabhängige chiquadratverteilte Summanden	54
6.6	Veränderung des Gesamt-SCR bzw. der Diversifikationseffekte bei Veränderung des Korrelationsparameters zwischen dem Marktrisiko und dem nichtlebensversicherungstechnischen Risiko . . . . .	61
6.7	Veränderung des Gesamt-SCR bzw. der Diversifikationseffekte bei Veränderung des Korrelationsparameters zwischen dem krankenversicherungstechnischen Risiko und dem Gegenparteiausfallsrisiko . . . . .	62

6.8	Veränderung des Gesamt-SCR bzw. der Diversifikationseffekte bei Veränderung des Korrelationsparameters zwischen dem Marktrisiko und dem Krankenversicherungstechnischen Risiko . . . . .	62
6.9	Diversifikationseffekte für gleichgewichtete und für nach Relevanz für österreichische Versicherer gewichtete Risikomodule . . . . .	63
6.10	Diversifikationseffekte für diverse Szenarien unterschiedlich gewichteter Risikomodule . . . . .	63
6.11	Diversifikationseffekte für sehr unterschiedlich gewichtete Risikomodule	64
6.12	Diversifikationseffekte für diverse Szenarien mit Hauptaugenmerk auf dem Risikomodul Nicht-Leben und dem Gegenparteiausfallsrisiko . . .	65
7.1	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Komonotoniecopula . .	69
7.2	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Kontramonotoniecopula	70
7.3	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gumbelcopula mit Parameter $\theta = 10$ und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau . . . . .	71
7.4	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gumbelcopula mit Parameter $\theta = 40$ und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau . . . . .	72
7.5	Veränderung des Absolutbetrags des Aggregationsfehlers bei Veränderung des Parameters $\theta$ bei zugrunde liegender Gumbelcopula . . . . .	73
7.6	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Claytoncopula mit Parameter $\theta = 10$ und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau . . . . .	73
7.7	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Claytoncopula mit Parameter $\theta = 50$ und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau . . . . .	74
7.8	Veränderung des Absolutbetrags des Aggregationsfehlers bei Veränderung des Parameters $\theta$ bei zugrunde liegender Claytoncopula . . . . .	75
7.9	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Frankcopula mit Parameter $\theta = 10$ und Abhängigkeitsmaß Kendall's Tau . . . . .	76
7.10	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Frankcopula mit Parameter $\theta = 10$ und Abhängigkeitsmaß Spearman's Rho . . . . .	77



7.11	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Frankcopula mit Parameter $\theta = 10$ und dem linearen Korrelationskoeffizienten . . . . .	77
7.12	Aggregationsfehler bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten als Abhängigkeitsmaß bei zugrunde liegender Gumbel- und Claytoncopula	78
7.13	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gaußcopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten $\rho = 0,3$ . . . . .	79
7.14	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gaußcopula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten $\rho = 0,9$ . . . . .	80
7.15	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gaußcopula bei Verwendung von Kendall's Tau . . . . .	80
7.16	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Gaußcopula bei Verwendung von Spearman's Rho . . . . .	81
7.17	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Student-t-Copula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten $\rho = 0,3$ . . . . .	82
7.18	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Student-t-Copula bei Verwendung des linearen Korrelationskoeffizienten $\rho = 0,9$ . . . . .	82
7.19	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Student-t-Copula bei Verwendung von Kendall's Tau . . . . .	83
7.20	Vergleich der exakten SCR-Berechnung und der mittels Wurzelformel aggregierten Berechnung bei zugrunde liegender Student-t-Copula bei Verwendung von Spearman's Rho . . . . .	83
7.21	Veränderung des Aggregationsfehlers bei Veränderung der Anzahl der Freiheitsgrade bei zugrunde liegender Student-t-Copula . . . . .	84
7.22	Überblick der relativen Aggregationsfehler für die unterschiedlichen Copulas . . . . .	86
7.23	Optimaler Korrelationsparameter für die Wurzelformel zu gegebenem linearem Korrelationskoeffizienten . . . . .	88
7.24	Vergleich des linearen Korrelationskoeffizienten, des optimalen Korrelationskoeffizienten und des approximierten optimalen Korrelationskoeffizienten . . . . .	91

# Literaturverzeichnis

- [1] FMA, “Solvency 2.” <https://www.fma.gv.at/versicherungen/solvency-ii/>. Abgerufen am 01.09.2016.
- [2] A. Sandström, *Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers - Theory and Practice*. Chapman & Hall/CRC, 2010.
- [3] Europäische Kommission, *DELEGIERTE VERORDNUNG (EU) 2015/35 DER KOMMISSION vom 10. Oktober 2014 zur Ergänzung der Richtlinie 2009/138/EG des Europäischen Parlaments und des Rates betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II)*, Amtsblatt der Europäischen Union L 12, 17.1.2015.
- [4] Europäisches Parlament und Europäischer Rat, *RICHTLINIE 2009/138/EG DES EUROPÄISCHEN PARLAMENTS UND DES RATES vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II)*, Amtsblatt der Europäischen Union L 335, 17.12.2009.
- [5] CEIOPS, *QIS1 specification. Technical provisions*. CEIOPS-FS-11/05, 2005. Abrufbar auf <https://eiopa.europa.eu/publications/qis/insurance/insurance-quantitative-impact-study-1>.
- [6] International Actuarial Association, *A Global Framework for Insurer Solvency Assessment*, 2004.
- [7] CEIOPS, *Quantitative Impact Study 2. Technical Specifications*. CEIOPS-PI-08/06, 2006. Abrufbar auf <https://eiopa.europa.eu/publications/qis/insurance/insurance-quantitative-impact-study-2>.
- [8] CEIOPS, *QIS3. Technical Specifications. Part I: Instructions*. CEIOPS-FS-11/07, 2007. Abrufbar auf <https://eiopa.europa.eu/publications/qis/insurance/insurance-quantitative-impact-study-3>.

- [9] Europäische Kommission, *QIS4 Technical Specifications. Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS4 (MARKT/2504/08)*, MARKT/2505/08, 2008. Abrufbar auf <https://eiopa.europa.eu/publications/qis/insurance/insurance-quantitative-impact-study-4>.
- [10] Europäische Kommission, *QIS5 Technical Specifications. Annex to Call for Advice from CEIOPS on QIS5*, 2010. Abrufbar auf <https://eiopa.europa.eu/publications/qis/insurance/insurance-quantitative-impact-study-5t/technical-specifications>.
- [11] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions Volume 1*. Wiley & Sons, 2nd ed., 1994.
- [12] N. L. Johnson, S. Kotz, and N. Balakrishnan, *Continuous Univariate Distributions Volume 2*. Wiley & Sons, 2nd ed., 1995.
- [13] R. B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*. Springer-Verlag New York, 2nd ed., 2006.
- [14] A. J. McNeil, R. Frey, and P. Embrechts, *Quantitative Risk Management - Concept, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 2015.
- [15] P. Embrechts, F. Lindskog, and A. McNeil, *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. Department of Mathematics, ETHZ Zürich, 2001.
- [16] CEIOPS, *CEIOPS' Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR STANDARD FORMULA Article 111(d) Correlations (former Consultation Paper 74)*, CEIOPS-70-10, 2010.
- [17] P. Embrechts, A. McNeil, and D. Straumann, "Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls," *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, pp. 176–223, 2002.
- [18] EIOPA, *EIOPA Insurance stress test 2014*. EIOPA-BOS-14-203, 2014. Abrufbar auf <https://eiopa.europa.eu/financial-stability-crisis-prevention/financial-stability/insurance-stress-test/insurance-stress-test-2014>.
- [19] FMA, *QIS 5 Ergebnisreport Österreich*. 2011. Abrufbar auf <https://www.fma.gv.at/versicherungen/stress-test/>.
- [20] Groupe Consultatif, *Diversification, Technical Paper*, 2005. Abrufbar auf [https://www.actuary.eu/documents/diversification\\_oct05.pdf](https://www.actuary.eu/documents/diversification_oct05.pdf).