



Schallquellenortung an rotierenden Systemen

Diplomarbeit

Jonathan Nowak

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/
Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Tech-
nischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.

<http://www.ub.tuwien.ac.at>



The approved original version of this diploma or
master thesis is available at the main library of the
Vienna University of Technology.

<http://www.ub.tuwien.ac.at/eng>



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology



DIPLOMARBEIT

Schallquellenortung an rotierenden Systemen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung
des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs
unter der Leitung von

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Manfred Kaltenbacher

Mitwirkung Dipl.-Ing. Stefan Gombots

Institut für Mechanik und Mechatronik, E325 A4

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Jonathan Nowak

Matrikelnummer 1027635

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbständig und
ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht
benutzt bzw. die wörtlich oder sinngemäß entnommenen Stellen als solche kenntlich
gemacht habe.

Wien, am 3. Juni 2018

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	10
2. Grundlagen	12
2.1. Homogene Wellengleichung	12
2.2. Schallgeschwindigkeit c	13
2.3. Inhomogene Wellengleichung	14
2.3.1. Monopolquelle	14
2.4. Greensche Funktion	14
2.5. Bewegte Punktquellen	16
2.5.1. Emissionszeit τ	17
2.5.2. Akustischer Druck eines bewegten Monopols – Spezialfall der Rotation	19
2.6. Greensche Funktion für den rotierenden Monopol	20
3. Beamforming	24
3.1. Delay-and-Sum Beamforming	24
3.2. Standard Beamforming	24
3.3. Erweiterte Verfahren zur Schallquelllokalisierung	26
3.3.1. Functional Beamforming	27
3.3.2. CLEAN-SC	27
3.4. Beamforming bei rotierenden Quellen	28
4. Simulationsergebnisse	30
4.1. Schallfeld eines rotierenden Monopols	30
4.2. Beamforming mit simulierten Schalldaten	32
4.3. Einfluss der Anzahl an verwendeten Mikrofonen	34
5. Messergebnisse	39
5.1. Messtechnischer Aufbau	39
5.2. Gemessener Schalldruck eines rotierenden Lautsprechers	40
5.3. Beamforming mit realen Schalldaten	43
5.3.1. Unterschiedliche Algorithmen	43
5.3.2. Unterschiedliche Frequenzen	46
5.3.3. Auswertung mit Functional Beamforming und CLEAN-SC	46
5.3.4. Verschiedene Quellstärken	47

5.3.5. Einfluss der Genauigkeit der gemessenen Drehzahl	48
5.3.6. Breitbandige Auswertung bei weißem Rauschen	51
6. Zusammenfassung	53
A. Anhang	55
A.1. Schalldruck einer bewegten Schallquelle – Monopolansatz für das akustische Potential	55
A.2. Lösung Wellengleichung in Kugelkoordinaten	56
A.3. Eigenschaften der Diracschen Deltafunktion	59

Verwendete Formelzeichen

a	N^2/m^2	Beamforming-Ergebnis
c	m/s	Schallgeschwindigkeit
\mathbb{C}	N^2/m^4	Kreuzspektralmatrix
f_0	Hz	Schallfrequenz
f_s	Hz	Samplingfrequenz
\underline{g}	$1/\text{m}$	Greensche Funktion im Frequenzbereich
$\underline{\mathbf{g}}$	$1/\text{m}$	Vektor mit Greenscher Funktion für jede Mikrofonpositon
\underline{g}_Ω	$1/\text{m}$	modifizierte Greensche Funktion im Frequenzbereich
$\underline{\mathbf{g}}_\Omega$	$1/\text{m}$	Vektor mit modifizierter Greenscher Funktion für jede Mikrofonpositon
$h_n^{(\delta_m)}$		sphärische Besselfunktion dritter Gattung der Ordnung n , der Art δ_m
j_n		sphärische Besselfunktion erster Gattung der Ordnung n
k	$1/\text{m}$	Wellenzahl $k = \omega/c$
$L_{\text{norm},\hat{\mathbf{q}}}$	dB	Quellstärkenpegel
m	$\text{kg}/(\text{m}^3\text{s})$	Massenquellterm
M	1	Machzahl
\mathbf{M}	1	vektorielle Machzahl
M_{mol}	g/mol	molare Masse
p_a	Pa	akustischer Druck
\underline{p}	Pa	Schalldruck im ruhenden Bezugssystem
$\underline{\mathbf{p}}$	Pa	Vektor mit Schalldrücken im ruhenden Bezugssystem
\underline{p}_Ω	Pa	Schalldruck im rotierenden Bezugssystem

\underline{p}_Ω	Pa	Vektor mit Schalldrücken im rotierenden Bezugssystem
\hat{q}	N/m	Quellstärke
r	m	Abstand zwischen Schallquelle und Beobachter
\mathbf{r}	m	Vektor von der Schallquelle zum Beobachter
R_m	J/(molK)	universelle Gaskonstante
t	s	Empfängerzeit
\mathbf{v}	m/s	Strömungsgeschwindigkeit des Fluids
\mathbf{v}_a	m/s	akustische Schnelle (Schallschnelle)
\mathbf{w}	1	Gewichtsvektor
x, y, z	m	kartesische Koordinaten
\mathbf{x}	m	Ortsvektor des Beobachters
\mathbf{x}_s	m	Pfad der Quellungsbewegung
\mathbf{y}	m	Ortsvektor der Quellposition
δ		Diracsche Deltafunktion
ϑ	rad	Winkel zwischen Quellgeschwindigkeit und Vektor \mathbf{r}
Θ	rad	Polarwinkel (Kugelkoordinaten)
κ	1	Adiabatenkoeffizient
ϱ	kg/m ³	Dichte
ϱ_x	m	Abstand des Beobachters von der z -Achse
ϱ_y	m	Abstand der Quelle von der z -Achse
τ	s	Emissionszeit
$\boldsymbol{\tau}$	N/m ²	viskoser Spannungstensor
φ	rad	Azimutwinkel (Zylinderkoordinaten)
φ_{xl}	rad	Winkel zwischen zwei benachbarten Mikrofonen im Ringarray

φ_{y0}	rad	Startwinkel der Quelle
ψ_a	m^2/s	akustisches Potential
ω	1/s	Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$
Ω	1/s	Winkelgeschwindigkeit der Schallquelle
\mathbf{b}		Vektor
\mathbb{M}		Matrix
$u(t)$		Darstellung im Zeitbereich
$\underline{u}(\omega)$		Darstellung im Frequenzbereich
∇		Nabla-Operator
Δ		Laplace-Operator
$(\cdot)^H$		hermitesche Transposition (konjugiert transponierte Operation)
$[\cdot]$		Abrundungsfunktion

1. Einleitung

Die Schallquellenlokalisierung mit Mikrofonarrays hat sich als hilfreiches Instrument, beispielsweise für die Fehlersuche in Maschinen oder für die Verbesserung von Produkten hinsichtlich ihrer akustischen Eigenschaften, in zahlreichen Anwendungsbereichen etabliert. Erfolgt die Lokalisierung durch Messung des Schalldrucks, nennt man das Verfahren Beamforming. Das Grundprinzip des Beamformings ist die gleichzeitige Aufzeichnung mehrerer Mikrofonsignale und anschließend das Rückschließen auf die Quellpositionen innerhalb eines vorab definierten Scangebietes. Dabei benötigt man ein Modell, wie sich Schall von der Quellposition bis zur Mikrofonposition ausbreitet. Es werden dann systematisch unterschiedliche Punkte innerhalb des Scangebietes als Ort der Quelle angenommen. Vergleicht man die gemessenen Schalldaten in jedem Punkt des Scangebietes mit dem Modell, kann die tatsächliche Quellposition bestimmt werden.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein an der TU Wien vorhandenes Messsystem zur Ortung von ruhenden Quellen zu erweitern, sodass die Lokalisierung von rotierenden Schallquellen möglich gemacht wird. Dafür ist es erforderlich, Kenntnis darüber zu haben, wie sich Schallwellen von einer als punktförmig angenommenen, rotierenden Schallquelle ausbreiten. Weiters muss eine Kompensation der Quellbewegung stattfinden, da ohne die entsprechende Aufbereitung der Daten keine Beamforming-Algorithmen angewendet werden können. Hierfür werden zwei verschiedene Ansätze vorgestellt (Functional Beamforming und CLEAN-SC). Außerdem werden in dieser Arbeit analytische Formeln für rotierende Schallquellen diskutiert und mit Messdaten verglichen.

Es existieren bereits einige Methoden, die die Schalllokalisierung bei bewegten Quellen ermöglichen. Manche davon funktionieren im Zeitbereich, andere im Frequenzbereich. Auch einige kommerzielle Lösungen bieten eine Quellenlokalisierung für instationäre Quellen an. Einige dieser Systeme sollen hier beispielhaft genannt werden. Die Firma gfai tech GmbH bietet in ihrer Software NoiseImage die Möglichkeit, aus einem Zeitverlauf des Spektrums der aufgezeichneten Schallquelle einen Zeit- und Frequenzbereich auszuwählen, für den im Weiteren Beamforming-Algorithmen angewandt werden. Auch die Firma Siemens ermöglicht mit dem System LMS Test.Lab High Definition Acoustic Camera die Identifikation der Schallemission von rotierenden Bauteilen. Die Software HDCam von MicrodB ermöglicht ebenfalls die Schallquellenortung an rotierenden Quellen. Anwendungsgebiete für die Schalllokalisierung in rotierenden Systemen sind u. a. die Untersuchung von Lüftern, Turbinen oder Windrädern, um Informationen über die Positionen jener Bereiche zu erhalten, die für der Schallentstehung vordergründig verantwortlich sind.

Im Speziellen wird in dieser Arbeit eine Methode der Schallquellenlokalisierung behandelt, die ausschließlich im Frequenzbereich arbeitet. Zunächst wird in **Kapitel 2** auf die physikalischen und mathematischen Grundlagen eingegangen, die für die vorgestellten Verfahren benötigt werden. Außerdem werden analytische Gleichungen vorgestellt, mit denen der Schalldruck einer rotierenden, punktförmigen Schallquelle an einem beliebigen Beobachtungsort berechnet werden kann. **Kapitel 3** beschäftigt sich mit den Grundlagen des Beamformings bei stationären und rotierenden Quellen und den unterschiedlichen Weiterentwicklungen grundlegender Verfahren. Schließlich wird in **Kapitel 4** die Quellenlokalisierung an virtuellen Quellen behandelt, um die diversen Algorithmen vorzustellen und untereinander zu vergleichen. Schließlich werden in **Kapitel 5** Messergebnisse gezeigt, die mit Hilfe eines für diese Arbeit entwickelten Messaufbaus gewonnen wurden.

2. Grundlagen

Einleitend sollen die physikalischen und mathematischen Grundlagen erarbeitet werden, die zum Verständnis der in dieser Arbeit vorgestellten Prinzipien zur Schallquellenortung erforderlich sind.

2.1. Homogene Wellengleichung

Die Wellengleichung in der Akustik leitet sich aus Gleichungen der Strömungsmechanik, nämlich der Massen- und der Impulserhaltung, ab. Die Gleichung der Massenerhaltung in differentieller Form lautet [1, 2]

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = m \quad (2.1)$$

und jene der Impulserhaltung

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla p + m \mathbf{v} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2.2)$$

Hierbei bezeichnet ϱ die Dichte, \mathbf{v} die Strömungsgeschwindigkeit des Fluids, m den Massenquellterm und $\boldsymbol{\tau}$ den viskosen Spannungstensor, wobei m und $\boldsymbol{\tau}$ meist vernachlässigt werden können. Der Ausdruck $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ bezeichnet das dyadische Produkt des Geschwindigkeitsvektors mit sich selbst, dessen Ergebnis der Tensor $(v_i v_j)$ ist. Es werden außerdem Störansätze der Form

$$p = p_0 + p_a; \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho_a; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_a \quad (2.3)$$

für ein ruhendes Medium ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$) verwendet. Der Index '0' bezeichnet die Ruhegröße und der Index 'a' die akustische Größe (Wechselgröße). Mit diesen erhält man gemeinsam mit dem linearen Konstitutivgesetz

$$p_a = c^2 \varrho_a, \quad (2.4)$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit bezeichnet, sowie dem Vernachlässigen von bilinearen und höheren Termen, die linearen Erhaltungssätze der Akustik

$$\frac{\partial \varrho_a}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_a = 0 \quad (2.5)$$

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t} + \nabla p_a = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Aus der Verknüpfung von der partiellen Zeitableitung von Gl. (2.5) und der Multiplikation mit ∇ von Gl. (2.6) erhält man mit Gl. (2.4) schließlich die homogene akustische Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = 0. \quad (2.7)$$

Multipliziert man Gl. (2.6) mit $\nabla \times$ kann man zeigen, dass die akustische Schnelle \mathbf{v}_a rotationsfrei ist [3]

$$\nabla \times \left(\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t} + \nabla p_a \right) = \varrho_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{v}_a) = \mathbf{0}. \quad (2.8)$$

Daher kann die Schnelle durch den Gradienten eines skalaren, akustischen Potentials ausgedrückt werden [2]

$$\mathbf{v}_a = -\nabla \psi_a. \quad (2.9)$$

Das akustische Potential erfüllt ebenfalls die Wellengleichung (Gl. (2.7)). Aus Gl. (2.6) ergibt sich schließlich der Zusammenhang zwischen akustischem Druck und akustischem Potential

$$p_a = \varrho_0 \frac{\partial \psi_a}{\partial t}. \quad (2.10)$$

2.2. Schallgeschwindigkeit c

Die Schallgeschwindigkeit hängt in idealen Gasen nur von der molaren Masse M_{mol} und dem Adiabatenkoeffizienten κ des Gases sowie der absoluten Temperatur T ab, nicht jedoch von der Dichte oder dem Druck

$$c = \sqrt{\kappa \frac{R_m}{M_{\text{mol}}} T}. \quad (2.11)$$

Hier bezeichnet R_m die universelle Gaskonstante, die den Wert $R_m \approx 8.31446 \text{ J}/(\text{molK})$ besitzt. Bei einer Umgebungstemperatur von 20°C ($T = 293.15 \text{ K}$) ergibt sich in trockener Luft ($M_{\text{mol}} = 28.96 \text{ g/mol}$, $\kappa = 1.402$) eine Schallgeschwindigkeit von $c \approx 343.51 \text{ m/s}$.

Bei 25 °C Umgebungstemperatur beträgt die Schallgeschwindigkeit schon $c \approx 346.42$ m/s. Daher ist es bei der Schalllokalisierung wichtig, auch die aktuelle Lufttemperatur zu kennen, um die Wellenzahl (siehe Abschnitt 2.4) möglichst genau berechnen zu können.

2.3. Inhomogene Wellengleichung

Die inhomogene Wellengleichung mit beliebiger Quellverteilung auf der rechten Seite lautet im Zeitbereich

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - \Delta p_a = q(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

und besitzt für den Fall der freien Abstrahlung die Lösung

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{q(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d^3\mathbf{y}. \quad (2.13)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{y} die Quellposition, von der aus ein Teil des Schalls in Richtung von \mathbf{x} ausgesandt wird. Schall, der zum Zeitpunkt t an der Stelle \mathbf{x} ankommt, muss vom Quellpunkt zu einem früheren Zeitpunkt ausgesandt worden sein, nämlich zu $t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c$, da der Schall mit der Geschwindigkeit c die Strecke $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ zurücklegt [4].

2.3.1. Monopolquelle

Eine Schallquelle, die in einem Punkt konzentriert ist und deren Feld daher durch $q(\mathbf{x}, t) = Q(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ ausgedrückt werden kann, nennt man Monopolquelle. Für diese Art von Quellen reduziert sich Gl. (2.13) zu

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{Q(t - r/c)}{4\pi r}; \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|. \quad (2.14)$$

2.4. Greensche Funktion

In vielen Fällen kann es hilfreich sein, eine inhomogene, lineare, partielle Differentialgleichung mit dem Lösungsansatz des Physikers und Mathematikers George Green¹ zu lösen. Hierbei wird die Lösung der betrachteten Differentialgleichung als Integral über das Produkt eines Quellterms und einer geeigneten Greenschen Funktion angegeben [5].

¹★ 14. Juli 1793 in Sneinton; † 31. Mai 1841 in Nottingham

Es kann also Gl. (2.13) alternativ über den beschriebenen Ansatz angeschrieben werden. Hierfür wird die Eigenschaft der Deltafunktion verwendet, dass für eine beliebige stetige Funktion $f(\tau)$ der Zusammenhang

$$f(b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(b - \tau) d\tau \quad (2.15)$$

gilt (siehe auch Anhang A.3). Wählt man

$$b = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c} \quad \text{und} \quad f(\tau) = \frac{q(\mathbf{y}, \tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (2.16)$$

und setzt dies in Gl. (2.15) ein, so folgt

$$\frac{q(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\mathbf{y}, \tau)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c - \tau) d\tau. \quad (2.17)$$

Damit steht auf der linken Seite der Integrand aus Gl. (2.13) und man erhält für die Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) q(\mathbf{y}, \tau) d\tau d^3\mathbf{y} \quad (2.18)$$

mit g als Greensche Funktion des Freifelds

$$g(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) = \frac{\delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c - \tau)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (2.19)$$

Die Greensche Funktion für Monopole kann weiters mittels Fouriertransformation im Frequenzbereich angeschrieben werden (für $\tau = 0$) [6]

$$\begin{aligned} \underline{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c - \tau)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{e^{-jk r}}{4\pi r}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

mit $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ und der Wellenzahl $k = \omega/c$.

Die inhomogene Wellengleichung für den eingeschwungenen harmonischen Fall im Frequenzbereich wird auch Helmholtz-Gleichung genannt

$$\Delta \underline{p}_a(\mathbf{x}, \omega) + k^2 \underline{p}_a(\mathbf{x}, \omega) = -\underline{q}(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.21)$$

Die Lösung der Helmholtz-Gleichung im Frequenzbereich für einen Monopol lautet

$$p_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega) = \hat{q} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \omega); \quad \hat{q} = |q|. \quad (2.22)$$

2.5. Bewegte Punktquellen

In jenen Fällen, bei denen die Schallquelle nicht still steht, sondern relativ zum Beobachter bewegt ist, muss berücksichtigt werden, dass Schall, der zum Zeitpunkt t an der Stelle \mathbf{x} empfangen wird, zu einem früheren Zeitpunkt τ von der Quellposition \mathbf{y} ausgesandt wurde, von der aus sich die Quelle aber schon weg bewegt hat. Weiters werden von einem stationären Beobachter, andere Frequenzen wahrgenommen, als die bewegte Schallquelle aussendet. Diesen Effekt nennt man Dopplereffekt. Man kennt ihn aus der Praxis z. B. von einem vorbeifahrenden Auto, dessen Fahrgeräusch hochfrequenter wahrgenommen wird, wenn es sich auf den Beobachter zubewegt und tieffrequenter wahrgenommen wird, wenn es sich wieder weg bewegt. Entscheidend, ob die Frequenzen aus Sicht des ruhenden Beobachters höher oder tiefer wahrgenommen werden, ist dabei der Winkel ϑ , der zwischen dem Geschwindigkeitsvektor der bewegten Quelle $c\mathbf{M}_1$ und dem Vektor zwischen Quelle und Beobachter \mathbf{r} auftritt (siehe auch Abschnitt 2.5.2). Die Quelle in Abb. 2.1 ist zum Zeitpunkt τ_1 an einer Position, für die $-\pi/2 < \vartheta < \pi/2$, also $\cos \vartheta > 0$, gilt. Hier wird die Frequenz der Quelle an der Position \mathbf{x} höher als an der Quellposition wahrgenommen. Zum nächsten Zeitpunkt τ_2 gilt $\cos \vartheta < 0$ und die Frequenz wird tiefer wahrgenommen.

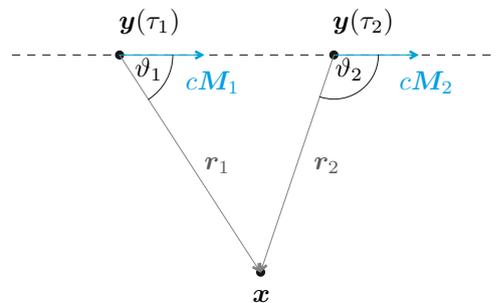


Abb. 2.1.: Lineare Bewegung einer Schallquelle; Winkel ϑ

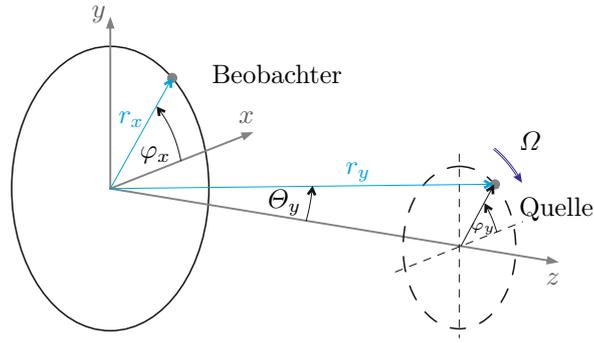


Abb. 2.2.: Skizze der Anordnung des Beobachter und der rotierenden Schallquelle

2.5.1. Emissionszeit τ

Die Emissionszeit oder auch retardierte Zeit (engl. *emission time* oder *retarded time*) wird implizit über den Zusammenhang

$$c(t - \tau) - r(\tau) = 0 \quad (2.23)$$

definiert. Hierbei bezeichnet t die Empfängerzeit (*reception time*) und $r(\tau)$ den zeitabhängigen Abstand zwischen Beobachter- und Quellposition. Es kann bei bekannter Emissionszeit τ und bekannter Quellposition \mathbf{y} explizit über Gl. (2.23) der Zeitpunkt t berechnet werden, zu dem das Signal am Ort \mathbf{x} empfangen wird. Umgekehrt ist dies allerdings i. A. nicht explizit möglich, da $r = r(\tau)$ gilt.

Im Folgenden wird der Spezialfall eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω gegen den positiven Drehsinn rotierenden Monopols betrachtet. Diese Methode kann aber bei beliebig bewegten Schallquellen angewandt werden. Dargestellt im kartesischen Koordinatensystem (siehe Abb. 2.2) werden \mathbf{x} und \mathbf{y} mit $\varrho_i = r_i \sin \Theta_i$ angeschrieben als

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varrho_x \cos \varphi_x \\ \varrho_x \sin \varphi_x \\ z_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(\tau) = \begin{bmatrix} \varrho_y \cos \varphi_y(\tau) \\ \varrho_y \sin \varphi_y(\tau) \\ z_y \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Aufgrund der konstanten Rotation um die z -Achse gegen den Uhrzeigersinn folgt $\varphi_y = \varphi_{y0} - \Omega\tau$. Mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) = \cos(\alpha + \beta) \quad (2.25)$$

ergibt sich $r^2(\tau)$ zu

$$r^2(\tau) = x^2 - y^2 = \varrho_x^2 + \varrho_y^2 - 2\varrho_x\varrho_y \cos(\varphi_x - \varphi_{y0} + \Omega\tau) + (z_x - z_y)^2. \quad (2.26)$$

Bei vorgegebenem Zeitpunkt t^* kann τ^* numerisch aus den Nullstellen der Gl. (2.23) ermittelt werden, die bei vorliegendem Spezialfall durch Einsetzen von Gl. (2.26) zu

$$c^2(t - \tau)^2 - \varrho_x^2 - \varrho_y^2 - (z_x - z_y)^2 = -2\varrho_x\varrho_y \cos(\varphi_x - \varphi_{y0} + \Omega\tau) \quad (2.27)$$

umgeschrieben werden kann. Es kommen hierbei nur die physikalisch sinnvollen Nullstellen $\tau_i^* \leq t^*$ in Frage, da Schall nur zu einem späteren Zeitpunkt empfangen werden kann, als er ausgesandt wurde. Bei einer Geschwindigkeit des Monopols, die größer als die Schallgeschwindigkeit ist, also $M = \Omega \varrho_y / c > 1$, kann es mehrere gültige Nullstellen τ_i^* geben. Das bedeutet, dass ein zum Zeitpunkt t^* empfangenes Signal aus mehreren, zu unterschiedlichen Zeitpunkten τ_i^* und an unterschiedlichen Orten ausgesandten Signalen bestehen kann.

Zur Veranschaulichung der numerischen Berechnung von τ zeigt Abb. 2.3 die linke und rechte Seite der Gl. (2.27) für $t^* = 100$ ms. Der Beobachter befindet sich stationär am Punkt $\mathbf{x} = [0.45, 0, 0]$ m und die Schallquelle hat folgende Parameter: $z_y = 1.5$ m, $\varrho_y = 0.3$ m, $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$ und $\varphi_{y0} = 0$. Der Schnittpunkt der beiden Graphen im Bereich $\tau^* > t^*$ ist ungültig und es bleibt nur die Lösung $\tau^* = 95.95$ ms. Für Quellen, die sich mit Überschall

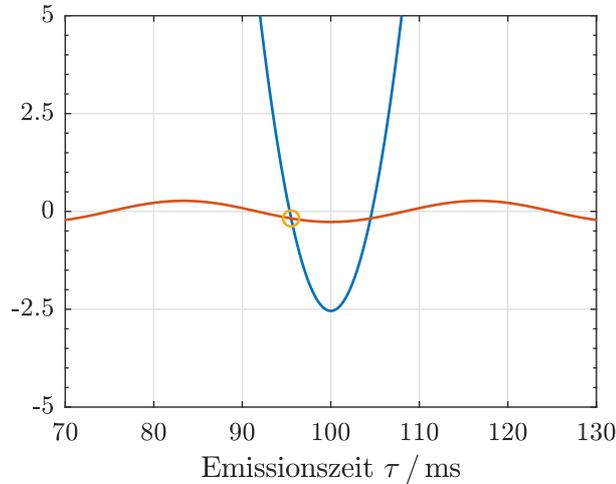


Abb. 2.3.: Numerische Berechnung von τ^* bei gegebenem $t^* = 100$ ms; $\mathbf{x}_s = [0.45, 0, 0]$ m, $z_y = 1.5$ m, $\varrho_y = 0.3$ m, $\Omega = 2\pi \cdot 30/\text{s}$ und $\varphi_{y0} = 0$
— quadratischer Term, — cos-Term, ○ τ^*

bewegen, kann es zu gewissen Zeitpunkten auftreten, dass es mehr als eine gültige Lösung für τ in Gl. (2.27) gibt. Wählt man beispielsweise die Parameter wie zuvor, erhöht aber die Winkelgeschwindigkeit auf $\Omega = 2\pi \cdot 1000 \text{ s}^{-1}$ (entspricht $M \approx 5.5$), so treten bei $t^* = 100$ ms drei gültige Lösungen für τ^* auf (siehe Abb. 2.4).

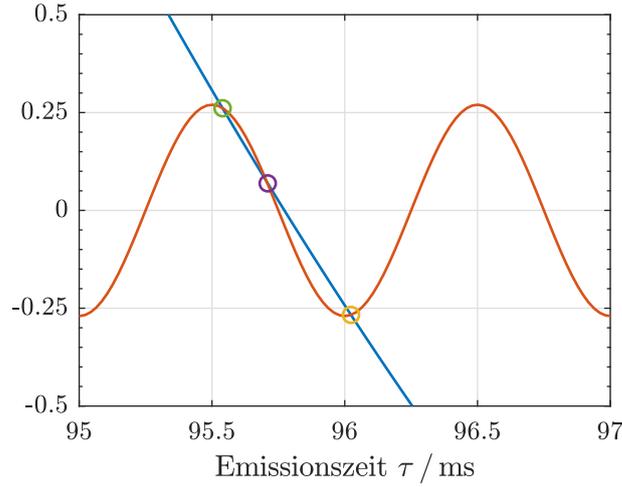


Abb. 2.4.: Numerische Berechnung von τ^* bei gegebenem $t^* = 100$ ms; $\mathbf{x}_s = [0.45, 0, 0]$ m, $z_y = 1.5$ m, $\varrho_y = 0.3$ m, $\Omega = 2\pi \cdot 1000$ /s und $\varphi_{y0} = 0$
— quadratischer Term, — cos-Term, $\circ \tau_1^*$, $\circ \tau_2^*$, $\circ \tau_3^*$

2.5.2. Akustischer Druck eines bewegten Monopols – Spezialfall der Rotation

Wird angenommen, dass sich ein bewegter Monopol entlang des Pfades $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s(t)$ bewegt, so gilt $q(\mathbf{x}, t) = Q(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(t))$ und Gl. (2.18) wird zu [4]

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\tau) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_s(\tau)) \delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c - \tau)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\tau d^3\mathbf{y} \quad (2.28)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\tau) \delta(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(\tau)|/c - \tau)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s(\tau)|} d\tau. \quad (2.29)$$

Aufgrund der Eigenschaft der δ -Funktion gilt für beliebige Funktionen f, g

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(g(\tau)) d\tau = \sum_i \left[\frac{f(\tau)}{|dg/d\tau|} \right]_{\tau=\tau_i^*}, \quad (2.30)$$

mit $g(\tau_i^*) = 0$. Wird $g(\tau) = t - \tau - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|/c$ gesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\tau} &= -1 - \frac{1}{c} \frac{1}{2} [(x_1 - x_{s1})^2 + (x_2 - x_{s2})^2 + (x_3 - x_{s3})^2]^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad (-2) [(x_1 - x_{s1})x'_{s1} + (x_2 - x_{s2})x'_{s2} + (x_3 - x_{s3})x'_{s3}] \\ &= -1 + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} \cdot c\mathbf{M}}{r} = 1 - M \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (2.31)$$

mit der Notation $(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}(\cdot)$, der vektoriellen Machzahl \mathbf{M} sowie dem Winkel ϑ zwischen dem Vektor der Quellgeschwindigkeit $c\mathbf{M}$ und dem Vektor zwischen Quelle und Beobachter $\mathbf{r}(\tau)$ (siehe Abb. 2.1)

$$\cos \vartheta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}}{r M} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{r}(\tau) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_s(\tau); \quad r = |\mathbf{r}| \quad (2.33)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{c} \left. \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial t} \right|_{\tau}; \quad M = |\mathbf{M}|. \quad (2.34)$$

Eingesetzt in Gl. (2.29) ergibt sich der Schalldruck eines rotierenden Monopols mit der Quellstärke $Q(\tau)$ zu [4, 7]

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \frac{Q_e}{4\pi r_e (1 - M_e \cos \vartheta_e)} \quad (2.35)$$

wobei der Index 'e' das Auswerten an der Stelle τ^* bedeutet (siehe Abschnitt 2.5.1). Existieren mehrere Lösungen für τ^* , so wird über alle τ_i^* summiert. Alternativ kann der Monopolansatz für das Geschwindigkeitspotential ψ_a angeschrieben werden, für das die Wellengleichung ebenso gilt (siehe Anhang A.1).

Der Term $1/(1 - M_e \cos \vartheta_e)$ in Gl. (2.35) wird auch „Dopplerfaktor“ genannt. Die vom Beobachter wahrgenommene momentane Schallfrequenz f kann bei einer harmonischen Schallquelle (konstante Frequenz f_0) über

$$f(t) = \frac{d}{dt}(f_0 \tau) = \frac{f_0}{1 - M_e \cos \vartheta_e} \quad (2.36)$$

berechnet werden [1].

2.6. Greensche Funktion für den rotierenden Monopol

Die Greensche Funktion für den bewegten Monopol im (ruhenden) Freifeld lautet (vgl. Gl. (2.29))

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau), t - \tau) = \frac{\delta(t - \tau - |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|/c)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}(\tau)|} \quad (2.37)$$

bzw. nach Fouriertransformation

$$\underline{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau), \omega) = \frac{e^{-jkr(\tau)}}{4\pi r(\tau)}. \quad (2.38)$$

Der akustische Druck am Ort \mathbf{x} berechnet sich damit zu

$$\underline{p}_a(\mathbf{x}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau) \underline{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau), t - \tau) d\tau. \quad (2.39)$$

Diese Greensche Funktion kann in Kugelflächenfunktionen (engl. *spherical harmonics*) entwickelt werden [8]

$$\frac{e^{-jkr(\tau)}}{4\pi r(\tau)} = -j \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\varphi_{x0}-\varphi_y(\tau))} k \sum_{n=|m|}^{+\infty} \mathcal{N}_{mn}^2 b_n(k, r_x, r_y) c_{mn}(\Theta_x, \Theta_y) \quad (2.40)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\varphi_{x0}-\varphi_y(\tau))} \underline{g}_m(r_x, r_y, \Theta_x, \Theta_y, \omega) \quad (2.41)$$

mit dem Normalisierungsfaktor

$$\mathcal{N}_{mn} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \quad (2.42)$$

sowie b_n , dem Produkt aus der sphärischen Besselfunktion erster Gattung j_n der Ordnung n und der sphärischen Besselfunktion dritter Gattung $h_n^{(2)}$ der Ordnung n , zweiter Art

$$b_n = j_n(kr_<) h_n^{(2)}(kr_>) \quad (2.43)$$

$$r_< = \min\{r_x, r_y\}$$

$$r_> = \max\{r_x, r_y\}$$

und den zugeordneten Legendre-Polynomen P_n^m vom Grad n und Ordnung m

$$c_{mn} = P_n^m(\cos \Theta_x) P_n^m(\cos \Theta_y). \quad (2.44)$$

Wird weiters vorausgesetzt, dass die Bewegung der Punktquelle eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die z -Achse darstellt

$$\varphi_y(\tau) = \varphi_{y0} - \Omega\tau, \quad (2.45)$$

kann der akustische Druck nach Integration nach τ (siehe Gl. (2.39)) angeschrieben werden als

$$\underline{p}_a(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\varphi_{x0}-\varphi_{y0})} \underline{g}_m(r_x, r_y, \Theta_x, \Theta_y, \omega) Q(\omega - m\Omega). \quad (2.46)$$

Damit wird sichtbar, dass das Frequenzspektrum des Quellterms $Q(\omega - m\Omega)$ aufgrund der gleichförmigen Rotation mit Ω verschoben ist. Greensche Funktion und Quellterm sind durch die sogenannten Azimutalmoden oder Spinning-Moden m (engl. *spinning modes*) gekoppelt. Durch die Transformation $\omega \rightarrow \omega + m\Omega$ kann Gl. (2.46) umgeschrieben werden zu

$$\underline{p}_\Omega(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\varphi_{x0}-\varphi_{y0})} \underline{g}_m(r_x, r_y, \Theta_x, \Theta_y, \omega + m\Omega) Q(\omega) \quad (2.47)$$

$$= \underline{g}_\Omega(r_x, r_y, \Theta_x, \Theta_y, \omega) Q(\omega) \quad (2.48)$$

und die modifizierte Greensche Funktion wird zu [8]

$$\underline{g}_\Omega(r_x, r_y, \Theta_x, \Theta_y, \omega) = -j \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{jm(\varphi_{x0}-\varphi_{y0})} k_m \sum_{n=|m|}^{+\infty} \mathcal{N}_{mn}^2 b_n(k_m, r_x, r_y) c_{mn}(\Theta_x, \Theta_y). \quad (2.49)$$

Zu beachten ist, dass nun anstelle von k die um ein Vielfaches der Winkelgeschwindigkeit der Rotation Ω verschobene Wellenzahl k_m auftritt

$$k_m = \frac{\omega + m\Omega}{c}. \quad (2.50)$$

Weiters hängen die sphärischen Besselfunktionen in b_n nun ebenfalls von k_m ab

$$b_n = j_n(k_m r_{<}) h_n^{(\delta_m)}(k_m r_{>}) \quad (2.51)$$

und die sphärische Hankelfunktion kann nun erster oder zweiter Art sein

$$\delta_m = \begin{cases} 2 & k_m \geq 0 \\ 1 & k_m < 0 \end{cases}. \quad (2.52)$$

Einschub: Implementierung der modifizierten Greenschen Funktion in MATLAB

Um die modifizierte Greensche Funktion numerisch auszuwerten, wurde für diese Arbeit MATLAB verwendet. Für die Berechnung des Produkts aus dem Normalisierungsfaktor \mathcal{N}_{mn} und den zugeordneten Legendre-Polynomen vom Grad n und der Ordnung m an der Stelle x wurde eine Funktion geschrieben, die auf der MATLAB-Funktion `legendre(n, x, 'norm')` basiert. Diese wurde um den zusätzlichen Faktor $(-1)^m \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ ergänzt, um \mathcal{N}_{mn} zu erhalten. Zusätzlich wurde der Fall $m < 0$ implementiert, der in der MATLAB-Funktion nicht enthalten ist.

Für die sphärische Besselfunktion $j_n(x)$ wurde ebenfalls eine Kombination aus MATLAB-Funktionen und zusätzlichen eigenen Erweiterungen gewählt, die anschließend mit WolframAlpha und [9] verifiziert wurde. Sie wurde `sphericalBessel` genannt. Die sphärische Besselfunktion erster Gattung der Ordnung n an der Stelle x wird über

$$\text{jn} = \text{sqrt}(\text{pi}/(2*\text{x}))*\text{besselj}(n+0.5,\text{x})$$

berechnet. Für den Fall $x < 0$ wurden Korrekturen der MATLAB-Funktion vorgenommen. Der Fall $x = 0$ wurde gesondert in der Form

$$\text{jn} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1\text{E}09 & n < 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

behandelt, wobei eigentlich $j_n(x = 0) = -\infty$ für $n < 0$ gilt.

Die sphärische Hankelfunktion $h_n^{(\delta_m)}(x)$ wurde für $x > 0$ in der Form

$$\text{hn} = \text{sphericalBessel}(n, \text{x}) + \text{sqrt}(\text{pi}/(2*\text{x}))*1\text{i}*\text{imag}(\text{besselh}(n+0.5,\text{d},\text{x}))$$

programmiert. Für negative Werte von x wurden die Zusammenhänge

$$h_n^{(1)}(x) = (-1)^n h_n^{(2)}(|x|) \quad (2.54)$$

$$h_n^{(2)}(x) = (-1)^n h_n^{(1)}(|x|) \quad (2.55)$$

$$x < 0 \quad (2.56)$$

verwendet. Auf eine genauere Behandlung der auftretenden Unstetigkeiten von h_n bei $x = 0$ wurde verzichtet, da sie für die Berechnungen in dieser Arbeit nicht relevant sind.

3. Beamforming

Unter dem Begriff Beamforming versteht man eine Methode zur Schallquellenlokalisierung in einem definierten Scangebiet mittels mehrerer speziell angeordneter Mikrofone (*Array*), die gleichzeitig den Schalldruck einer oder mehrerer akustischer Quellen aufzeichnen.

3.1. Delay-and-Sum Beamforming

Die grundsätzliche Idee bei der Schallquellenlokalisierung beruht auf der Tatsache, dass die Schallwellen einer Schallquelle der Stärke \hat{q} an unterschiedlichen Beobachtungsorten mit unterschiedlichen Amplituden und zu unterschiedlichen Zeitpunkten ankommen. Es wird ein Quellgebiet definiert, in dem die Schallquelle vermutet wird. In diesem wird systematisch jeweils eine konkrete Quellposition angenommen. Befände sich die Schallquelle an der angenommenen Position, ist die zeitliche Verzögerung sowie die Amplitudenabnahme zu den Mikrofonpositionen bekannt. Werden die Amplitudenabnahme und die Zeitverzögerung künstlich rückgängig gemacht und die einzelnen Mikrofonsignale anschließend summiert, ist diese Summe genau dann maximal, wenn tatsächliche und angenommene Quellposition übereinstimmen. Dieser Algorithmus wird im Zeitbereich angewandt und *Delay-and-Sum* genannt [10].

3.2. Standard Beamforming

Auf Delay-and-Sum basierend kann ein Algorithmus im Frequenzbereich formuliert werden, dessen Ergebnis a ist und für jeden Scanpunkt separat berechnet wird

$$a = \mathbf{w}^H \mathbb{C} \mathbf{w}. \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{y})$ einen Gewichtsvektor, der von der angenommenen Quellposition \mathbf{y} abhängig ist und \mathbb{C} die Kreuzspektralmatrix. Dabei symbolisiert $(\cdot)^H$ die hermitesche Transposition, deren Ergebnis auch konjugiert transponierte Matrix genannt wird

$$(w_{i,j})^H = \bar{w}_{j,i}. \quad (3.2)$$

Die Kreuzspektralmatrix oder auch Kreuzkorrelations-Matrix \mathbb{C} (engl. *cross-spectral matrix*, CSM) berechnet sich für eine feste Frequenz ω über

$$\mathbb{C} = E \{ \underline{\mathbf{p}}(\omega) \underline{\mathbf{p}}(\omega)^H \} \quad (3.3)$$

aus dem Vektor $\underline{\mathbf{p}}(\omega)$, der aus den N Mikrofonsignalen $\underline{p}_i(\omega)$ besteht

$$\underline{\mathbf{p}}(\omega) = \begin{pmatrix} \underline{p}_1(\omega) \\ \underline{p}_2(\omega) \\ \vdots \\ \underline{p}_N(\omega) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Hierbei bezeichnet $E \{ \cdot \}$ den Erwartungswert. Näherungsweise kann die Kreuzspektralmatrix mittels

$$\mathbb{C} = \underline{\mathbf{p}}(\omega) \underline{\mathbf{p}}(\omega)^H \quad (3.5)$$

berechnet werden. Es existieren weitere Methoden, um eine genauere Schätzung für \mathbb{C} zu erhalten. Diese Methoden verwenden entweder eine Mittelung im Zeitbereich (Welch-Methode) oder eine Mittelung im Frequenzbereich (Daniell-Methode), siehe [11]. In der vorliegenden Arbeit wurde die Näherung in Gl. (3.5) verwendet.

Der Gewichtsvektor \mathbf{w} berechnet sich durch Minimierung des Funktionals $\mathcal{J}(a)$ [12, 13]

$$\mathcal{J}(a) = \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \quad (3.6)$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{w}^H \mathbf{g} = 1 \quad (3.7)$$

oder der Minimierung von

$$\mathcal{J}(a) = \|\mathbb{C} - a \mathbf{g} \mathbf{g}^H\|_{\text{F}}^2. \quad (3.8)$$

Hier bezeichnet $\|\cdot\|_{\text{F}}$ die Frobenius-Norm² und \mathbf{g} den Vektor der einzelnen Greenschen Funktionen. Dieser wird in diesem Zusammenhang auch Steuervektor genannt, da mit ihm systematisch das definierte Scangebiet durchlaufen wird. Er ist definiert als (vgl. Gl. (2.20))

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}|} e^{-jk|\mathbf{x}_1-\mathbf{y}|} \\ \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}_2-\mathbf{y}|} e^{-jk|\mathbf{x}_2-\mathbf{y}|} \\ \vdots \\ \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}_N-\mathbf{y}|} e^{-jk|\mathbf{x}_N-\mathbf{y}|} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Gleichung (3.8) kann als Minimierung der Differenz zwischen den gemessenen Schalldrücken $\underline{\mathbf{p}}$ und den modellierten $\hat{\mathbf{q}}\mathbf{g}$ interpretiert werden. Beide Minimierungen liefern

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{g}^H \mathbf{g}}. \quad (3.10)$$

Setzt man Gl. (3.10) in Gl. (3.1) ein, so ergibt sich das Beamforming-Ergebnis zu

$$a(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{g}^H \mathbf{C} \mathbf{g}}{(\mathbf{g}^H \mathbf{g})^2}. \quad (3.11)$$

Das Beamforming-Ergebnis a und die Quellstärke \hat{q} hängen über

$$\hat{q}(\mathbf{y}) = \sqrt{a(\mathbf{y})} \quad (3.12)$$

zusammen. Wird die Quellstärke für jeden Scanpunkt dargestellt, nennt man dies Quellkarte.

Die Quellkarte wird – wie bereits erwähnt – für eine konkrete Frequenz bestimmt, d. h. es wird gezielt nach Quellen der Frequenz f_0 gesucht. Es können aber auch breitbandige Auswertungen gemacht werden. Hierfür wird beispielsweise innerhalb eines Terzbandes um eine Mittenfrequenz f_m zu jeder, im diskreten Spektrum vorhandenen Frequenz f_i , ein zugehöriges a_i berechnet. Das Ergebnis der breitbandigen Auswertung ist die Summe der einzelnen Beamforming-Ergebnisse $a = \sum_i a_i$.

3.3. Erweiterte Verfahren zur Schallquelllokalisierung

Es existieren einige Weiterentwicklungen des zuvor beschriebenen Standard Beamformings. Diese haben zum Ziel, das Auflösungsvermögen bzw. die Dynamik des Arrays zu verbessern. Das Auflösungsvermögen ist ein Maß für die Qualität der räumlichen Auflösung. Liegen zwei Quellen nahe beieinander, werden sie nur dann als zwei unterschiedliche Quellen erkannt,

² $\|\mathbf{A}\|_{\text{F}}^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}$

wenn das Auflösungsvermögen ausreichend ist bzw. die Breite der Hauptkeule b gering genug ist. Diese wird bei einem Wert von 3 dB unter deren Maximum bestimmt.

Die Dynamik trifft eine Aussage darüber, wie gut Schallquellen, die weit vom Scanpunkt entfernt sind, unterdrückt werden. Als Maß für die Dynamik wird der Abstand h zwischen dem Maximum der Hauptkeule und jenem der Nebenkeule angegeben. Bei hoher Dynamik können auch schwache Quellen geortet werden und verschwinden nicht in den Nebenkeulen benachbarter stärkerer Quelle [12]. Zwei dieser Weiterentwicklungen, die in dieser Arbeit auch verwendet werden, sollen hier vorgestellt werden.

3.3.1. Functional Beamforming

Beim Functional Beamforming wird der Parameter ν eingeführt und die ν -te Wurzel aus der Kreuzspektralmatrix \mathbb{C} gezogen

$$a(\mathbf{y}) = \frac{\left(\mathbf{g}^H \mathbb{C}^{\frac{1}{\nu}} \mathbf{g}\right)^\nu}{\left(\mathbf{g}^H \mathbf{g}\right)^{\nu+1}}. \quad (3.13)$$

Dazu wird die Kreuzspektralmatrix \mathbb{C} gemäß

$$\mathbb{C} = \mathbf{U} \Lambda \mathbf{U}^H \quad (3.14)$$

diagonalisiert, mit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ den Eigenwerten λ_i von \mathbb{C} . Die ν -te Wurzel aus \mathbb{C} wird aus den ν -ten Wurzeln der Eigenwerte λ_i berechnet

$$\mathbb{C}^{\frac{1}{\nu}} = \mathbf{U} \text{diag}\left(\lambda_1^{\frac{1}{\nu}}, \dots, \lambda_N^{\frac{1}{\nu}}\right) \mathbf{U}^H. \quad (3.15)$$

Durch Verwenden von Gl. (3.13) wird die Dynamik verbessert und es können schwächere Quellen lokalisiert werden, die beim Standard Beamforming nicht sichtbar waren. Es können Werte $\nu \geq 1$ verwendet werden, wobei $\nu = 1$ die Gleichung für das Standard Beamforming liefert. Für steigende Werte für ν steigen auch Auflösungsvermögen und Dynamik. In der Praxis sind durch kleine Fehler im Steuervektor allerdings Grenzen nach oben gesetzt. Bei Verwendung von gut kalibrierten Arrays liefern Werte für ν von bis zu $\nu = 100$ gute Ergebnisse. [12, 14]

3.3.2. CLEAN-SC

Dieses Verfahren ist im Postprocessing angesiedelt. Als Startpunkt dient eine zuvor mit einem anderen Algorithmus berechnete, „schmutzige“ Quellkarte, die anschließend iterativ bereinigt wird. Ergebnis ist dann ein einzelner Punkt in der Quellkarte. Weiteres zum CLEAN-SC-Algorithmus ist u. a. in [12] und [15] zu finden.

3.4. Beamforming bei rotierenden Quellen

Hängt die Position der Schallquelle von der Zeit ab, wie das z. B. bei einem mit der Winkelgeschwindigkeit Ω rotierenden Monopol der Fall ist, kann Gl. (3.1) nicht ohne Weiteres verwendet werden. Es muss eine Kompensation der Bewegung stattfinden.

Eine Methode, Beamforming bei rotierenden Schallquellen zu betreiben, ist die Interpolation des Schalldrucks im Zeitbereich. Dazu wird ein Ringarray aus N gleichmäßig angeordneten Mikrofonen benötigt. Bei bekanntem Winkel der Quelle $\varphi(t)$ wird ein fiktiver Schalldruck berechnet, indem dieser zwischen den beiden Mikrofonen, die der aktuellen Quellposition am nächsten sind, linear interpoliert wird. Es wird dadurch ein virtuell rotierendes Array erzeugt, das mit der Bewegung der Schallquelle synchron ist. Der virtuelle Schalldruck $p_{vr,l}(t)$ ($l = 1, \dots, N$) berechnet sich aus dem Schalldruck der beiden nächsten Mikrofone p_{lu} und p_{lo} über

$$p_{vr,l}(t) = s_u p_{lu} + s_o p_{lo} \quad (3.16)$$

$$s_u(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi_{xl}} - \left\lfloor \frac{\varphi(t)}{\varphi_{xl}} \right\rfloor \quad (3.17)$$

$$s_o(t) = 1 - s_u(t), \quad (3.18)$$

wobei φ_{xl} der Winkel zwischen zwei beliebigen, benachbarten Mikrofonen des Arrays ist (siehe Abb. 3.1) und $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion bezeichnet. Anschließend wird die Kreuzspektralmatrix mit Gl. (3.3) wie im ruhenden Fall berechnet [16]. Eine zweite Methode, die ebenfalls mit Interpolation arbeitet, ist in [17] zu finden. Ein anderer Ansatz ist die

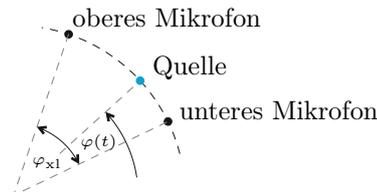


Abb. 3.1.: Anordnung der Mikrofone bei der Schallquellenlokalisierung an rotierenden Quellen mittels Interpolation im Zeitbereich

Modenzerlegung des Schalldrucks und das Verwenden der modifizierten Greenschen Funktion \underline{g}_Ω (siehe Abschnitt 2.6). Die Besonderheit dieser Methode ist, dass sie vollständig im Frequenzbereich funktioniert und analytisch exakt ist. Voraussetzung für diese Methode ist unter anderem, dass das Array aus N ringförmig angeordneten, gleichmäßig verteilten Mikrofonen besteht und dass dessen Mittelpunkt auf der Rotationsachse der Quelle liegt. Weiters muss die Winkelgeschwindigkeit Ω konstant und bekannt sein. Um vom Vektor der

Mikrofonsignale im ruhenden Bezugssystem $\underline{\mathbf{p}}$ zum Vektor im rotierenden Bezugssystem $\underline{\mathbf{p}}_\Omega$ überzugehen, wird $\underline{\mathbf{p}}$ durch eine diskrete Fourierreihe mit den Spinning-Mode-Koeffizienten ausgedrückt

$$\underline{p}_m(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \underline{p}_l(\omega) e^{-jm\varphi_{xl}} \quad (3.19)$$

mit

$$-\frac{N}{2} + 1 \leq m \leq \frac{N}{2}. \quad (3.20)$$

Der Winkel φ_{xl} ist wieder der Winkel zwischen zwei beliebigen benachbarten Mikrofonen. Die Drucksignale im rotierenden Bezugssystem \underline{p}_Ω berechnen sich durch inverse Fouriertransformation mit

$$\underline{p}_\Omega(\varphi_{xl}, \omega) = \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} p_m(\omega + m\Omega) e^{jm\varphi_{xl}}. \quad (3.21)$$

Es können also die selbe Anzahl an Spinning-Moden erfasst werden, wie Mikrofone am Ring verwendet werden.

Anschließend kann das Beamforming-Ergebnis wie folgt berechnet werden

$$a(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{g}_\Omega^H \mathbb{C}_\Omega \mathbf{g}_\Omega}{(\mathbf{g}_\Omega^H \mathbf{g}_\Omega)^2} \quad (3.22)$$

$$\mathbb{C}_\Omega = \underline{\mathbf{p}}_\Omega \underline{\mathbf{p}}_\Omega^H \quad (3.23)$$

$$\underline{\mathbf{p}}_\Omega = \begin{pmatrix} \underline{p}_\Omega(\varphi_{x1}, \omega) \\ \underline{p}_\Omega(\varphi_{x2}, \omega) \\ \dots \\ \underline{p}_\Omega(\varphi_{xN}, \omega) \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

4. Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel werden Ergebnisse des Schalldrucks eines rotierenden Monopols sowie Beamformingergebnisse, denen simulierte Signale zugrunde liegen, präsentiert.

4.1. Schallfeld eines rotierenden Monopols

In Abschnitt 2.5 wurde eine Methode vorgestellt, mit der der Schalldruck eines rotierenden Monopols an einem beliebigen Beobachtungsort analytisch berechnet werden kann. Für die folgenden Parameter wurde mit dieser der Schalldruck an zwei Orten $\mathbf{x}_1 = [0.45, 0, 0]$ m und $\mathbf{x}_2 = [-0.45, 0, 0]$ m berechnet

- $f_0 = 1500$ Hz
- $\Omega = 2\pi \cdot 30$ s⁻¹
- $\mathbf{x}_s|_{\tau=0} = [0.3, 0, 0.5]$ m
- $Q(\tau) = \hat{Q} \cos(2\pi f_0 \cdot \tau)$; $\hat{Q} = 0.1$.

Aufgrund der gewählten Parameter beträgt der konstante Betrag des Geschwindigkeitsvektors etwa 56.5 m/s, also $M < 1$ und zu jedem Zeitpunkt t^* existiert nur ein gültiges τ^* . Abbildung 4.1 zeigt den zeitlichen Verlauf des Schalldrucks an den Orten \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 . Die Winkelgeschwindigkeit des Monopols von $2\pi \cdot 30$ s⁻¹ ist im Zeitverlauf des Signals klar zu erkennen, genauso wie die Laufzeitdifferenz des Schalls zwischen den beiden Beobachtungsorten (Abb. 4.1a). Je näher die Schallquelle am Beobachtungsort ist, desto höher ist dort die Schalldruckamplitude. Betrachtet man ein kleineres Zeitintervall (Abb. 4.1b), werden die unterschiedlichen Zeitpunkte, zu denen die Signale an den zwei Orten empfangen werden, sichtbar. Diese Zeitpunkte können leicht über die Schallgeschwindigkeit berechnet werden. Ein zum Zeitpunkt $\tau = 0$ ausgesandtes Signal wird am Mikrofon 1 zum Zeitpunkt

$$t_1 = r_1/c = \sqrt{(0.45 - 0.3)^2 + (-0.5)^2}/c = 1.52 \text{ ms} \quad (4.1)$$

und am Mikrofon 2 zum Zeitpunkt

$$t_2 = r_2/c = \sqrt{(-0.45 - 0.3)^2 + (-0.5)^2}/c = 2.63 \text{ ms} \quad (4.2)$$

empfangen, wobei c wieder die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Die Änderung der Frequenz

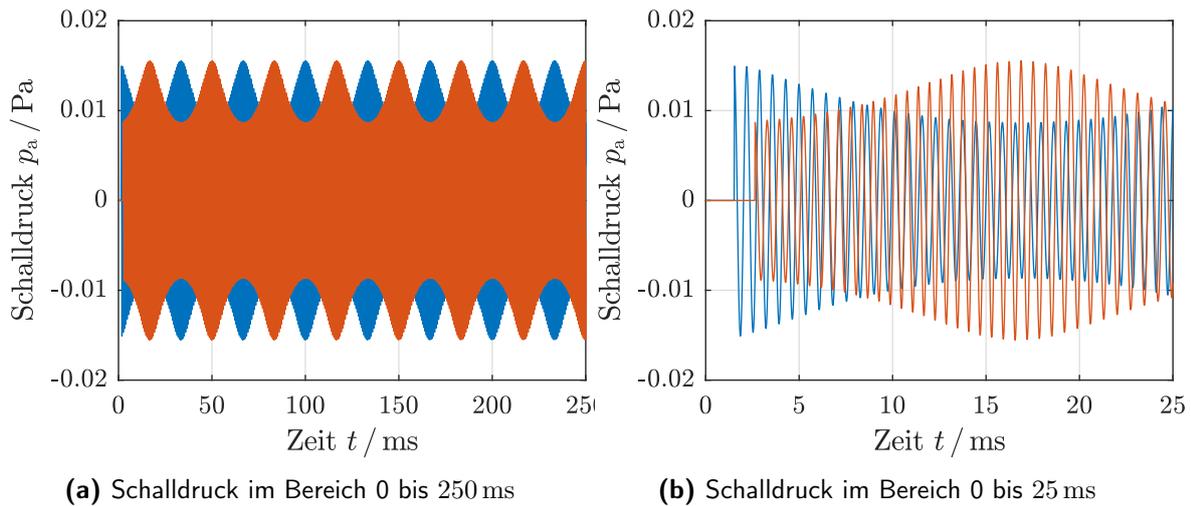


Abb. 4.1.: Analytisch berechneter Schalldruck eines rotierenden Monopols im Zeitbereich; $f_0 = 1500 \text{ Hz}$, $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$, $\mathbf{x}_1 = [0.45, 0, 0] \text{ m}$ und $\mathbf{x}_2 = [-0.45, 0, 0] \text{ m}$
 — Schalldruck am Ort \mathbf{x}_1 , — Schalldruck am Ort \mathbf{x}_2

über die Zeit in Abhängigkeit der Bewegung der Schallquelle ist hier in der Darstellung des Schalldrucks über die Zeit nicht eindeutig erkennbar. Sie kann aber durch Auswertung von Gl. (2.36) berechnet werden und ist in Abb. 4.2 dargestellt. Schließen der Vektor zwischen Schallquelle und Beobachter und der Geschwindigkeitsvektor zu einem Zeitpunkt τ einen Winkel $\vartheta_e > 90^\circ$ ein, so ist der Term $1 - M_e \cos \vartheta_e > 1$ und die momentane Schallfrequenz $f < f_0$. Eine Fouriertransformation des Zeitsignals liefert die Frequenzanteile des Signals,

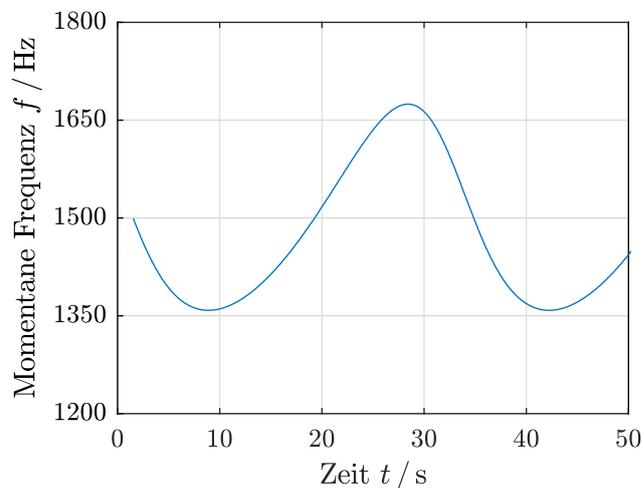


Abb. 4.2.: Momentane vom Beobachter wahrgenommene Frequenz über die Zeit

das aufgrund der Bewegung nicht nur bei $f_0 = 1500 \text{ Hz}$, sondern ebenfalls bei Vielfachen der Umdrehungsfrequenz $f_0 + m \cdot \Omega / (2\pi)$ Werte besitzt. Diese Anteile abseits von 1500 Hz sind hier betragsmäßig sogar deutlich größer, als jene bei der Schallfrequenz der Quelle.

Abbildung 4.3 zeigt die Fouriertransformation des Signals aus Abb. 4.1. Die Simulationszeit beträgt $T = 5$ s und die Samplingfrequenz $f_s = 48$ kHz. Weiters wurde zur Fensterung ein Hanning-Fenster verwendet. Zur Verifizierung wurde der Schalldruck mit der modifizierten Greenschen Funktion \underline{g}_Ω über Gl. (2.22) berechnet. Dafür wurde \underline{g}_Ω im Bereich zwischen 1050 Hz und 1980 Hz ausgewertet, also jenem Bereich, der beim rotierenden Beamforming mit 32 Mikrofonen erfasst werden kann. Der Schalldruck im Frequenzbereich, berechnet über \underline{g}_Ω , besitzt nur an den diskreten Frequenzen $f + m \cdot \Omega / (2\pi)$ einen Wert – anders als die Fouriertransformation des Zeitsignals, das an Vielfachen der Frequenzauflösung $\Delta f = 1/T = 0.2$ Hz definiert ist. Die Ergebnisse der beiden Ansätze stimmen sehr gut überein.

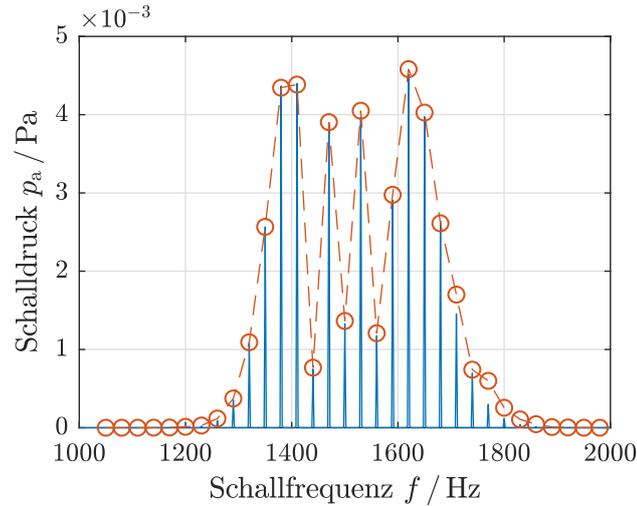


Abb. 4.3.: Spektrum des Schalldrucks mittels Fouriertransformation und modifizierter Greenscher Funktion
— FFT des Zeitsignals, über die Emissionszeit berechnet, -o- Modifizierte Greensche Funktion g_Ω

4.2. Beamforming mit simulierten Schalldaten

Die folgenden Abbildungen zeigen Beamformingergebnisse, die aus simulierten Schalldrücken eines rotierenden Monopols bei einer einzelnen, konkreten Schallfrequenz gewonnen wurden. Die so erzeugte Systemantwort des fiktiven Arrays wird Point Spread Function (PSF) oder Antwortfunktion genannt. Das fiktive Array ist aus 32 ringförmig angeordneten, in Umfangsrichtung gleichmäßig verteilten Mikrofonen, mit einem Array-Radius von 0.45 m aufgebaut. Die PSF wurde jeweils in 10 000 Punkten berechnet und hat eine Breite und Höhe von jeweils 1 m. Dargestellt ist der normierte Quellstärkenpegel $L_{\text{norm},\hat{q}}$, der in dieser Arbeit über

$$L_{\text{norm},\hat{q}} = 20 \log \left(\frac{\hat{q}}{\max\{\hat{q}\}} \right) \quad (4.3)$$

berechnet wird. Der Normalabstand zwischen Rotations- und Mikrofonebene beträgt 0.5 m, als Abstand der Punktquelle zu seiner Rotationsachse wurde 0.3 m gewählt und die Winkelgeschwindigkeit beträgt $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$, also 1800 min^{-1} . Abbildung 4.4 zeigt zunächst die PSF mit Standard-Beamforming, also mit \underline{g}_0 als Steuervektor und ohne Modenzerlegung. Der rotierende Monopol wird als ringförmige Quelle interpretiert. Verwendet man anstelle

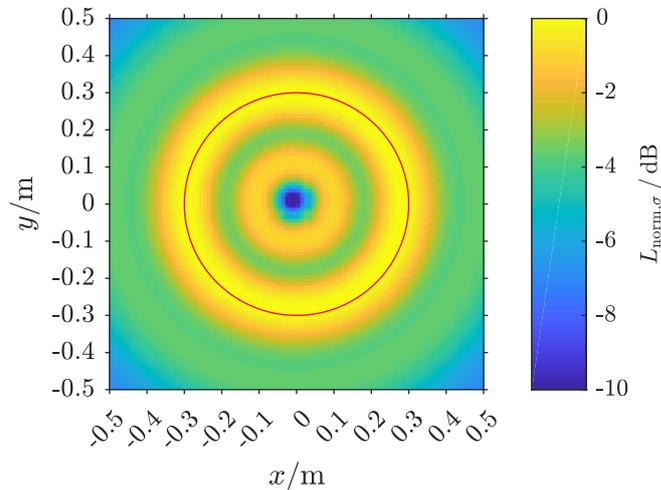
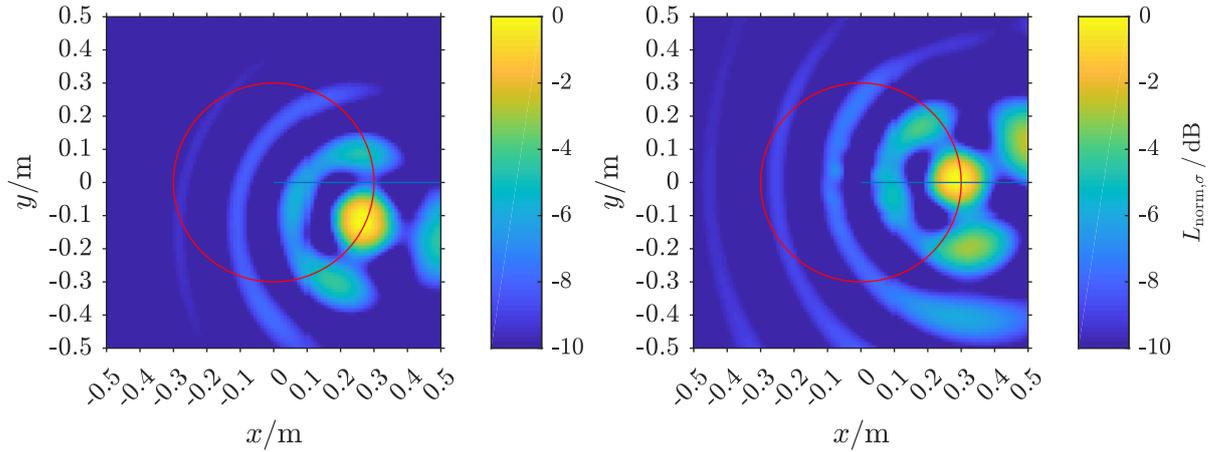


Abb. 4.4.: Standard Beamforming ohne Modenzerlegung, Schalldruck aus analytischer Formel berechnet: $f_0 = 1500 \text{ Hz}$, $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$, $\varrho_y = 0.3 \text{ m}$ und \underline{g}_0 als Steuervektor
— Radius der Schallquelle ϱ_y

der fouriertransformierten Drucksignale \underline{p} die Drucksignale im rotierenden Bezugssystem \underline{p}_Ω zur Berechnung der Kreuzspektralmatrix, so wird der rotierende Monopol wieder als Punktquelle erkannt (siehe Abb. 4.5a). Allerdings ist die gefundene Quellposition in Umfangsrichtung verschoben, da als Steuervektor noch immer die Greensche Funktion für einen ruhenden Monopol \underline{g}_0 verwendet wird und diese nur näherungsweise stimmen kann. Erst das Berechnen der modifizierten Greenschen Funktion \underline{g}_Ω in jedem Punkt der Quellkarte und das Verwenden dieser für die Berechnung des Steuervektors liefert schließlich die exakte Quellposition (siehe Abb. 4.5b).



(a) Greensche Funktion g_0 als Steuervektor (b) Mod. Greensche Funktion g_Ω als Steuervektor

Abb. 4.5.: Standard Beamforming mit Modenzerlegung, Schalldruck aus analytischer Formel berechnet: $f_0 = 1500$ Hz, $\Omega = 2\pi \cdot 30$ s⁻¹, $\varrho_y = 0.3$ m und herkömmlicher bzw. modifizierter Greenscher Funktion als Steuervektor
— Radius der Schallquelle ϱ_y , — Startwinkel φ_{y0}

4.3. Einfluss der Anzahl an verwendeten Mikrofonen

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, welchen Einfluss die Mikrofonanzahl des Ringarrays auf die Qualität der Quellkarten hat. Hierbei sind zwei Phänomene zu beachten. Zum einen können – wie in Abschnitt 3.4 beschrieben – nur so viele Spinning-Moden einer rotierenden Schallquelle erfasst werden, wie Mikrofone verwendet werden. Zum anderen nimmt bei äquidistanter Anordnung entlang des Rings der Mikrofonabstand mit zunehmender Mikrofonanzahl ab.

Mit zunehmender Anzahl an erfassten Spinning-Moden wird – ähnlich einer Reihenentwicklung, die mit steigender Anzahl an Gliedern immer genauer wird – das Schallfeld der rotierenden Quelle immer besser erfasst. Abgesehen von der Anzahl der erfassbaren Spinning-Moden gilt es auch das geometrische Aliasing zu beachten. Bei Abtastung eines zeitlichen Signals mit zu kleiner Samplingfrequenz tritt der zeitliche Alias-Effekt auf und zwar dann, wenn die Bedingung für die höchste im Signal enthaltene Frequenz f_{\max} und die Samplingfrequenz f_s

$$f_s > 2f_{\max} \quad (4.4)$$

nicht erfüllt ist. Gleichung (4.4) wird Nyquist-Shannon-Abtasttheorem genannt. Analog dazu sollte der Abstand zwischen zwei Mikrofonen Δx für die betrachtete Schallfrequenz f_0 mit zugehöriger Wellenlänge λ klein genug sein

$$\Delta x < \frac{\lambda}{2} \quad (4.5)$$

$$\lambda = \frac{c}{f_0}. \quad (4.6)$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, wie das z. B. bei den gewählten Parametern in Abb. 4.6a der Fall ist, so treten in der Quellkarte neben den Hauptkeulen sogenannte Spiegelquellen (engl. *grating lobes*) auf

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} &= \frac{c}{2f_0} = \frac{343.5 \text{ m s}^{-1}}{2 \cdot 1500 \text{ Hz}} \\ &= 0.229 \text{ m} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta x &= 2\varrho_x \sin \frac{\varphi_{xl}}{2} = 2 \cdot 0.5 \sin \frac{2\pi/8}{2} \\ &= 0.3827, \\ &\Rightarrow \Delta x > \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bei gegebener Anzahl an Mikrofonen in einem Ringarray können also nur bis zu einer gewissen Drehzahl bzw. Schallfrequenz gute Beamforming-Ergebnisse erzielt werden oder umgekehrt, bei gegebener Schallfrequenz und Drehzahl kann der Einfluss der Anzahl an Mikrofonen hinsichtlich der PSF untersucht werden. Die Ergebnisse von Letzterem sind in Abb. 4.6 bis 4.8 ersichtlich. Die erfasste Anzahl an Spinning-Moden ist im Spektrum durchgezogen dargestellt, die im Spektrum vorhandenen, aber aufgrund zu weniger Mikrofone nicht erfassten Frequenzen, sind gepunktet dargestellt. In Abb. 4.6 beträgt die Schallfrequenz $f_0 = 1500 \text{ Hz}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$. Bei acht Mikrofonen können also nur die Spinning-Moden zwischen $f_u = f_0 - \left(\frac{N}{2} + 1\right) \frac{\Omega}{2\pi} = 1410 \text{ Hz}$ und $f_o = f_0 + \frac{N}{2} \frac{\Omega}{2\pi} = 1620 \text{ Hz}$ erfasst werden und Gl. (4.5) ist nicht erfüllt. Bei 14 Mikrofonen erweitert sich der Bereich auf $f_u = 1320 \text{ Hz}$ und $f_o = 1710 \text{ Hz}$, Gl. (4.5) ist allerdings auch hier noch nicht erfüllt ($\lambda/2 = 0.115 \text{ m}$, $\Delta x = 0.133 \text{ m}$). Wie in Abb. 4.6 deutlich wird, reichen bei $f_0 = 1500 \text{ Hz}$ und $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$ acht Mikrofone nicht aus, um ein gutes Ergebnis zu erhalten. Mit zunehmender Anzahl an Mikrofonen kann die Quelle immer genauer lokalisiert werden, da die Anzahl an erfassbaren Spinning-Moden steigt und gleichzeitig der Mikrofonabstand abnimmt.

Die beiden genannten Bedingungen, nämlich dass eine ausreichende Anzahl an Spinning-Moden erfasst wird und dass Gl. (4.5) erfüllt ist, sind miteinander verknüpft. Ein Reduzieren der Schallfrequenz führt dazu, dass einerseits die Anzahl der relevanten Spinning-Moden zurückgeht und andererseits dazu, dass die Wellenlänge erhöht wird. Dadurch reichen bei einer Schallfrequenz von $f_0 = 500$ Hz und einer Winkelgeschwindigkeit von $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$ acht Mikrofone aus, um die exakte Quellposition zu finden (siehe Abb. 4.7).

Wird bei gleichbleibender Frequenz die Drehzahl drastisch erhöht, steigt die Anzahl relevanter Spinning-Moden an und die Quellposition wird trotz erfüllter Bedingung für das Vermeiden von räumlichen Aliasing nicht gefunden. Abbildung 4.8 zeigt dies anhand einer Schallquelle mit der Frequenz $f_0 = 500$ Hz und der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi \cdot 150 \text{ s}^{-1}$. Die Quellenbewegung findet hier mit 282.7 m/s ($M \approx 0.82$) statt. Zunächst erfolgt die Schallquellenlokalisierung mit acht Mikrofonen (Abb. 4.8a) und anschließend mit 24 Mikrofonen (Abb. 4.8b).

Zusammenfassend lässt sich bei vorhandener Quellengeschwindigkeit $\varrho_y \Omega = cM$ und zu untersuchender Schallfrequenz f_0 die erforderliche Anzahl der Mikrofone folgendermaßen ableiten: Bei Quellengeschwindigkeiten, die deutlich unter der Schallgeschwindigkeit c liegen, ist es ausreichend, die Bedingung für das räumliche Aliasing (Gl. (4.5)) zu beachten. Mit der Näherung $\Delta x \approx \varrho_x \frac{2\pi}{N}$ berechnet sich die minimale erforderliche Mikrofonanzahl $N_{\min, \Delta x}$, die nur die Mikrofonabstände berücksichtigt, über

$$N_{\min, \Delta x} \approx \frac{4\pi \varrho_x}{c} f_0. \quad (4.9)$$

Bei Quellengeschwindigkeiten in der Nähe der Schallfrequenz ist dies nicht mehr ausreichend und es ist auf den Frequenzinhalt des Signals einzugehen. Die momentane vom Beobachter wahrgenommene Frequenz f liegt für subsonische Quellengeschwindigkeiten im Bereich [7]

$$f \in \left[\frac{f_0}{1+M}, \frac{f_0}{1-M} \right]. \quad (4.10)$$

Dies kann als Anhaltspunkt für die zu erwartende Anzahl an Spinning-Moden dienen. Die minimale erforderliche Mikrofonanzahl $N_{\min, \Omega}$, die die Geschwindigkeit der Quelle berücksichtigt, berechnet sich damit zu

$$N_{\min, \Omega} = 2 \frac{f_{\max} - f_0}{\Omega / (2\pi)} = \frac{4\pi \varrho_x}{c - \Omega \varrho_x} f_0, \quad (4.11)$$

mit f_{\max} der oberen Grenze aus Gl. (4.10). Dies sind allerdings nur Anhaltspunkte, da die minimale erforderliche Mikrofonanzahl durch Gl. (4.9) und (4.11) tendenziell überschätzt wird. Für genauere Untersuchungen, ob die Anzahl der Mikrofone alle relevanten Spinning-Moden erfasst, sind Simulationen für den rotierenden Monopol vorzunehmen.

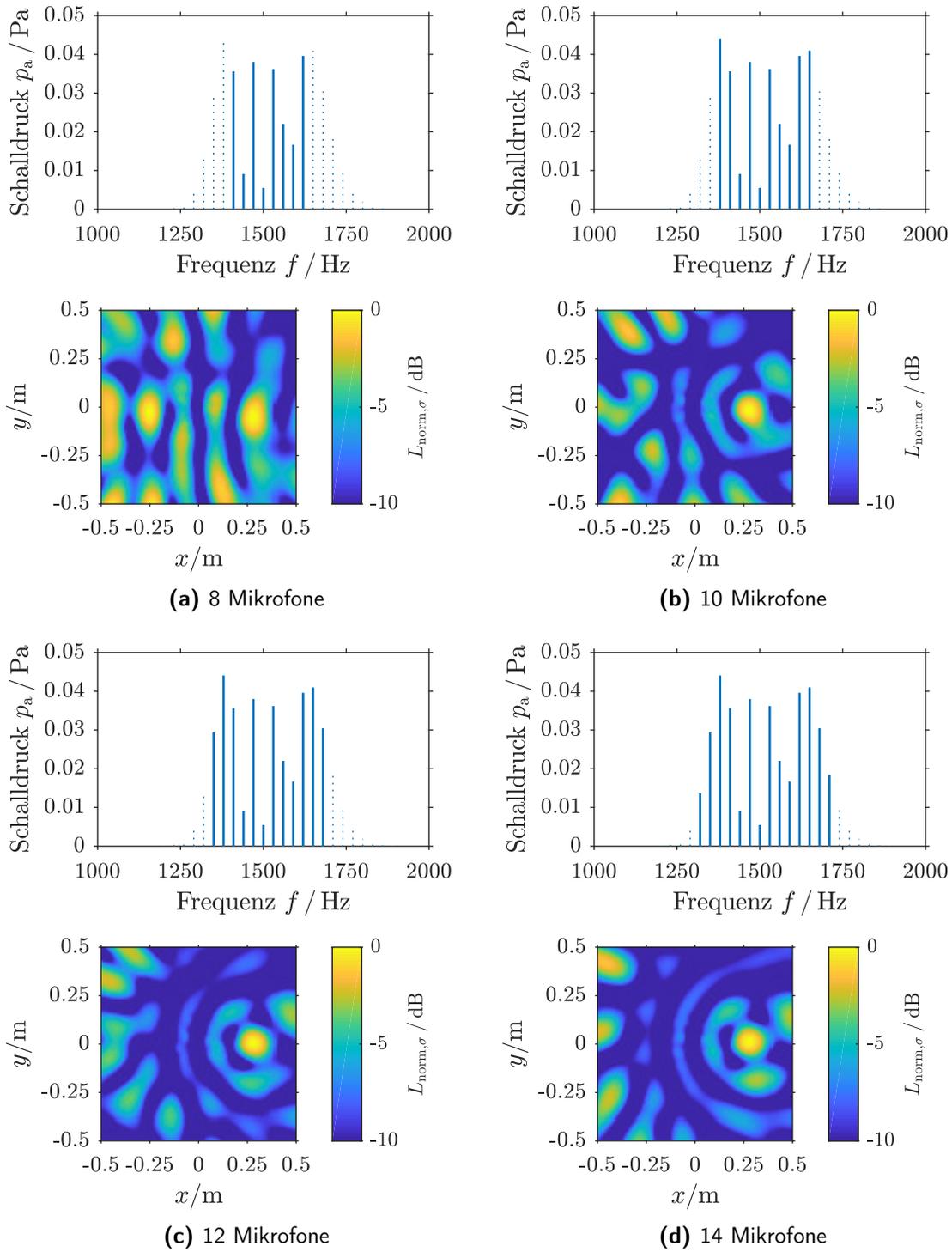


Abb. 4.6.: Einfluss der Mikrofonanzahl bei $f_0 = 1500 \text{ Hz}$, $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$, $\varrho_x = 0.5 \text{ m}$, $\varrho_y = 0.3 \text{ m}$
 — erfasste Spinning-Moden, ··· nicht erfasste Spinning-Moden

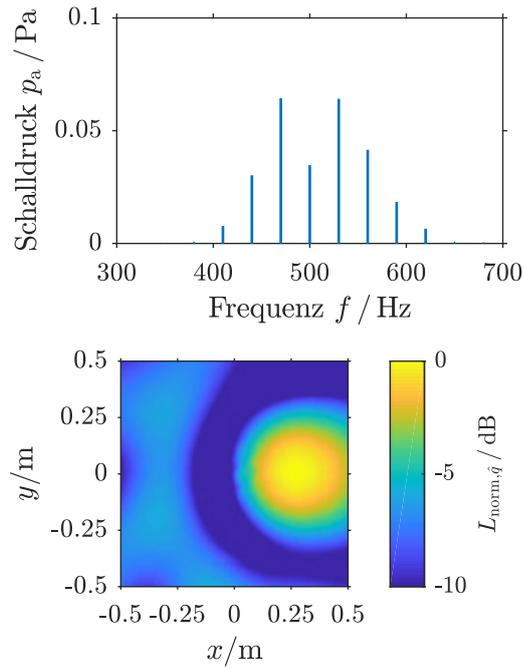


Abb. 4.7.: 8 Mikrofone bei $f_0 = 500 \text{ Hz}$, $\Omega = 2\pi \cdot 30 \text{ s}^{-1}$, $\varrho_x = 0.5 \text{ m}$, $\varrho_y = 0.3 \text{ m}$
 — erfasste Spinning-Moden, \cdots nicht erfasste Spinning-Moden

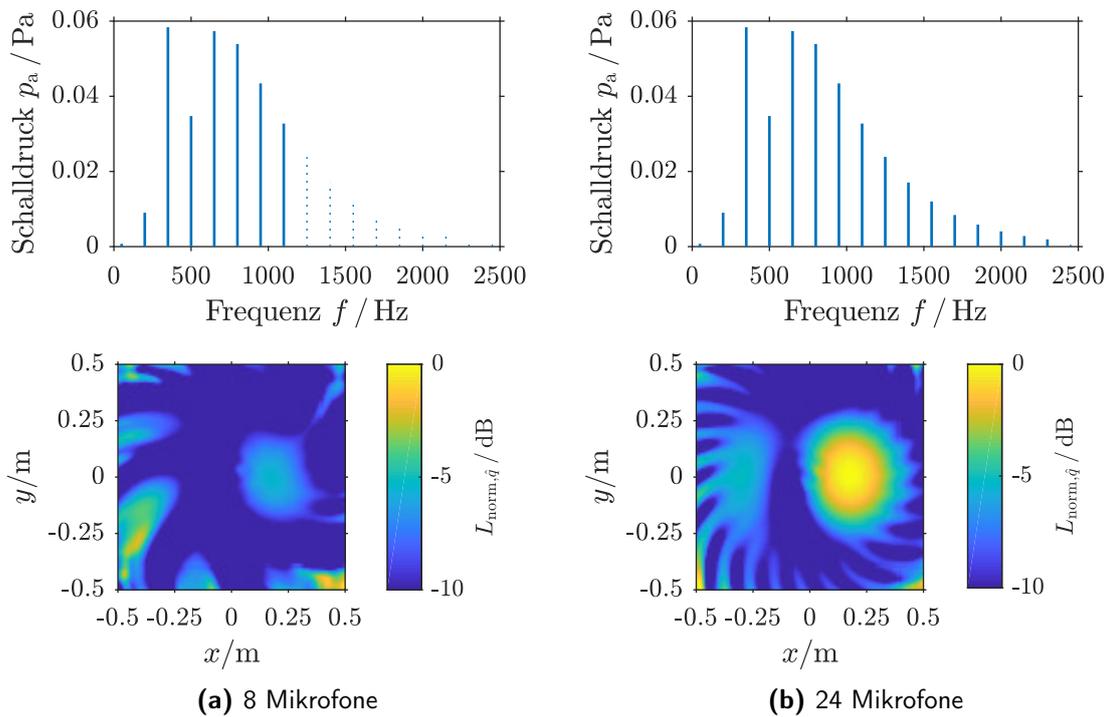


Abb. 4.8.: Einfluss der Mikrofonanzahl bei $f_0 = 500 \text{ Hz}$, $\Omega = 2\pi \cdot 150 \text{ s}^{-1}$, $\varrho_x = 0.5 \text{ m}$, $\varrho_y = 0.3 \text{ m}$
 — erfasste Spinning-Moden, \cdots nicht erfasste Spinning-Moden

5. Messergebnisse

In diesem Kapitel werden Ergebnisse der Messungen gezeigt, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden. Zum einen wird das Spektrum eines rotierenden Lautsprechers mit den analytischen Formeln für einen rotierenden Monopol verglichen, zum anderen Ergebnisse der unterschiedlichen Beamforming-Algorithmen präsentiert.

5.1. Messtechnischer Aufbau

Um die eingangs erwähnten Messaufgaben zu erreichen, wurde an der TU Wien ein Versuchsstand gebaut (Abb. 5.1). Dieser besteht aus einem Rotor, an dem vier verschiebliche Lautsprecher befestigt sind. Deren Abstand zur Rotationsachse kann ca. 5 cm bis 0.5 m betragen. Der Rotor selbst ist über eine Fest-Los-Lagerung an einem Montagetisch befestigt und wird über einen Schrittmotor bewegt. Die Steuerung der Drehrichtung und der Winkelgeschwindigkeit erfolgt über einen Arduino und einen passenden Motortreiber. Aufgrund der Bauart des verwendeten Schrittmotors entsprechen im Vollschrittmodus 200 Schritte einer vollen Umdrehung bzw. ein Schritt entspricht 1.8° . Ein Rechtecksignal mit einer Frequenz von 200 Hz als Steuersignal an den Motortreiber resultiert dann in einer Drehzahl des Rotors von 1 U/s. Abhängig von der Bauart des Motortreibers stehen auch noch ein Halbschritt-, Viertelschrittmodus usw. zur Verfügung. Hierbei erhöht sich die Frequenz des Steuersignals, die für 1 U/s notwendig ist, jeweils um den Faktor zwei.

Aufgrund der Bauart und des hohen Massenträgheitsmoments des Rotors ist die Winkelgeschwindigkeit des Rotors für die in dieser Arbeit beschriebenen Versuche auf $2\pi \cdot 3 \text{ s}^{-1}$ (180 Umdrehungen pro Minute) begrenzt.

Zur Verifikation der Winkelgeschwindigkeit des Rotors während der Messung und um die aktuelle Lage des Rotors zu kennen, wird ein Drehwinkelsensor („Hallsensor“) eingesetzt. Die Ansteuerung der Lautsprecher erfolgt über einen Frequenzgenerator. Um Probleme bei der Rotation durch eine Verkabelung zu vermeiden, werden die Lautsprecher und ihre Verstärker über eine Powerbank, die ebenfalls am Rotor befestigt ist, versorgt. Die mit dem Frequenzgenerator erzeugten Signale werden über einen Bluetoothsender bzw. -empfänger an die Lautsprecher übertragen.

Das verwendete Ringarray hat einen Radius von $\varrho_x = 0.42 \text{ m}$ und besteht aus 32, entlang des Umfangs äquidistant angeordneten Elektretmikrofonen, d. h. der Winkel zwischen zwei benachbarten Mikrofonen beträgt 11.25° . Das Array ist in Abb. 5.1 zu sehen. Es enthält außer den ringförmig angeordneten Mikrofonen noch weitere 31 spiralförmig angeordnete

Mikrofone (Underbrink-Array), die aber für die Messungen in dieser Arbeit nicht benötigt wurden. Um der Voraussetzung gerecht zu werden, dass die Rotationsachse mit der Mittelachse des Arrays zusammenfällt, ist das Ringarray an einem höhenverstellbaren Stativ angebracht.

Die Auswertung der erfassten Mikrofonensignale erfolgt über eine im Rahmen dieser Diplomarbeit entwickelten Software, die in MATLAB programmiert wurde.

Alle Messungen erfolgten in einem Messraum der TU Wien. Dieser hat in etwa folgende Abmessungen:

- Raumhöhe: 2.7 m
- Breite: ca. 4 m
- Tiefe: 5.2 m.

In einer Hälfte des Raumes sind die Seitenwände und die Decke mit Absorberplatten mit einer Dicke von 10 cm abgedeckt, um im Bereich der Schallquellen und des Arrays Reflexionen zu mindern. Diese Reflexionen wirken sich negativ auf die Qualität der Beamforming-ergebnisse aus, da im Modell der Schallausbreitung immer von einer Freifeldabstrahlung ausgegangen wird.

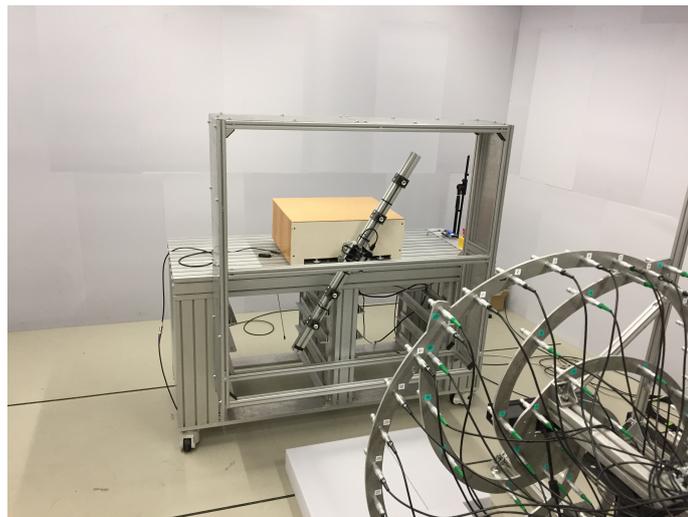


Abb. 5.1.: Messaufbau und Ringarray im Messraum mit Absorberplatten an den Wänden im Hintergrund

5.2. Gemessener Schalldruck eines rotierenden Lautsprechers

In einem ersten Schritt wurde untersucht, inwiefern das Spektrum eines einzelnen rotierenden Lautsprechers dem eines rotierenden Monopols ähnelt. Die verwendeten Lautsprecher

besitzen einen Membrandurchmesser von 20 mm. Der Lautsprecher wurde mit einem monofrequenten Signal mit $f_0 = 500$ Hz, 1500 Hz und 4000 Hz angesteuert und mit Winkelgeschwindigkeiten zwischen $\Omega = 2\pi \cdot 1 \text{ s}^{-1}$ und $2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$ bewegt. Die Messzeit betrug jeweils 5 s und die Samplingfrequenz $f_s = 48$ kHz. Zur Fensterung wurde das Hanning-Fenster verwendet. Die blaue, durchgezogene Linie zeigt das Spektrum des gemessenen Schalldrucks, die orange, gestrichelte Linie den berechneten Schalldruck eines mit der selben Winkelgeschwindigkeit rotierenden Monopols. Das Mikrofon befand sich jeweils am Ort $\boldsymbol{x} = [0.42, 0, 0]$ m. Das berechnete Spektrum wurde mit der modifizierten Greenschen Funktion \underline{g}_Ω erzeugt und die Quellstärke \hat{q} entsprechend angepasst, sodass das Maximum im Spektrum des berechneten Schalldrucks mit dem Maximum im Spektrum des gemessenen Schalldrucks übereinstimmt.

Klar erkennbar sind die Spinning-Moden bei ganzzahligen Vielfachen der Umdrehungsfrequenz. Auffällig hierbei ist allerdings, dass im Gegensatz zum berechneten das gemessene Spektrum sein Maximum meist bei der Schallfrequenz f_0 hat und nicht bei der ersten Mode bei $f = f_0 \pm \Omega/(2\pi)$. Die Unterschiede zwischen dem berechneten und dem gemessenen Schalldruck sind u. a. darauf zurückzuführen, dass der Lautsprecher – wie jede real existierende Schallquelle – kein Monopol ist, da er eine Ausdehnung besitzt.

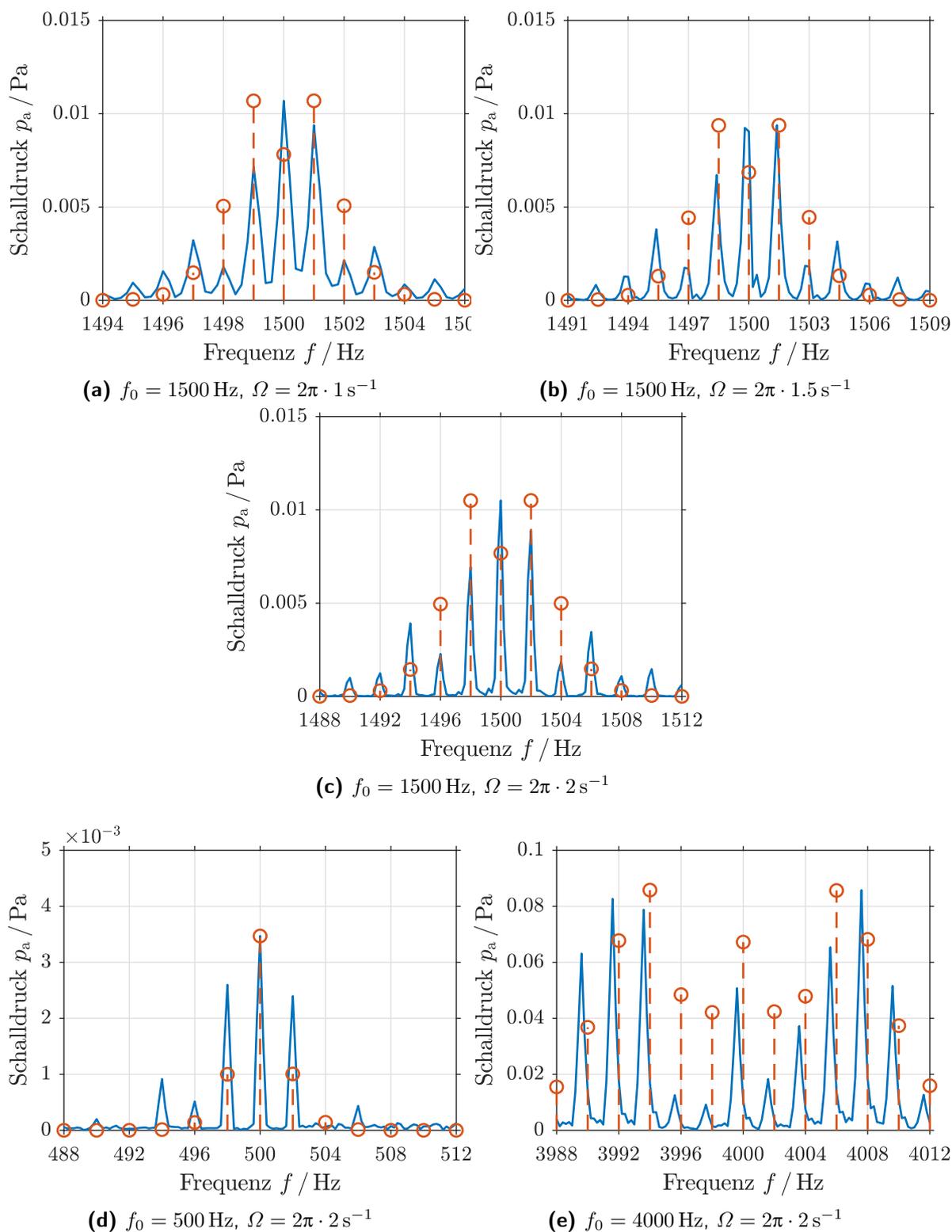


Abb. 5.2.: Vergleich zwischen gemessenen Daten eines rotierenden Lautsprechers und analytischer Formel für den Schalldruck eines rotierenden Monopols
 — gemessener Schalldruck, - - o berechneter Schalldruck

5.3. Beamforming mit realen Schalldaten

Im Folgenden werden Quellkarten gezeigt, die aus den Messungen mit dem Ringarray mit 32 Mikrofonen und dem Rotor mit Lautsprechern gewonnen wurden. Der Normalabstand zwischen Arrayebene und der Rotationsebene der Lautsprechermembranen betrug bei allen Messungen 1.26 m. Es wird der Einfluss von unterschiedlichen Schallfrequenzen, Drehzahlen und Beamforming-Algorithmen untersucht. Zunächst werden Auswertungen für monofrequente Schallquellen gezeigt und anschließend wird auf die breitbandige Auswertung bei Anregung mit weißem Rauschen eingegangen.

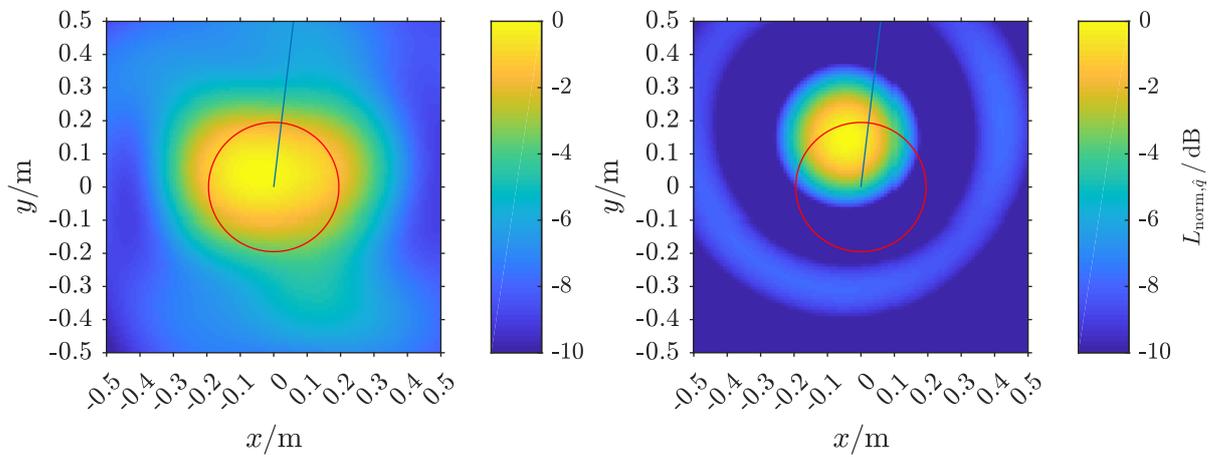
5.3.1. Unterschiedliche Algorithmen

Zunächst soll der Einfluss verschiedener Algorithmen an einem konkreten Beispiel gezeigt werden. Die Schallfrequenz beträgt hier $f_0 = 1500$ Hz und die Winkelgeschwindigkeit des Rotors $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$. Da die Winkelgeschwindigkeit hier eher gering ist, können auch gute Ergebnisse erzielt werden, wenn die modifizierte Greensche Funktion \underline{g}_Ω mit jener im ruhenden Bezugssystem \underline{g}_0 approximiert wird (vgl. [8]). Dazu wurde zunächst ein und dann zwei Lautsprecher als Schallquelle verwendet.

In Abb. 5.3 zeigt der rote Kreis den tatsächlichen Abstand des bzw. der Lautsprecher an und die blaue Linie den Winkel, den der Rotor zu Beginn der Messung hatte. Die mit dem Drehwinkelsensor gemessene Startposition und die mittels Beamforming ermittelte Anfangslage stimmen nicht exakt überein. Dies wird auf die Tatsache zurückgeführt, dass das Signal des Drehwinkelsensors gefiltert ausgewertet wird. Diese Filterung führt zu geringen Zeitverzögerungen.

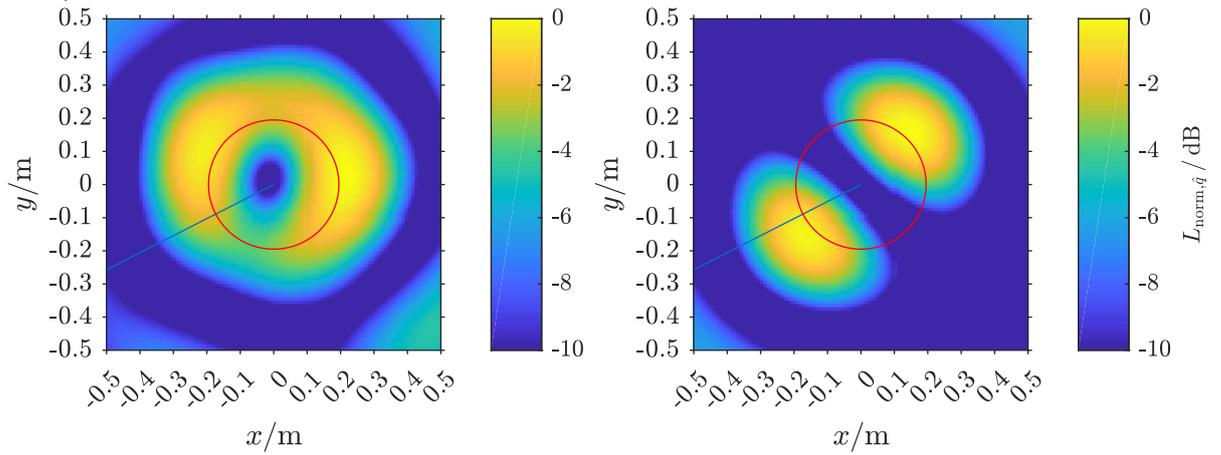
Wie schon in den Beamforming-Ergebnissen mit analytisch berechneten Schalldaten (siehe Abschnitt 4.2) gezeigt wurde, werden die rotierenden Lautsprecher mit herkömmlichen Algorithmen nicht korrekt erkannt. Die Zerlegung der Schalldrücke im Frequenzbereich in die Spinning-Moden und Bildung der Kreuzspektralmatrix über Gl. (3.23), kompensiert die Rotation und lässt die beiden Lautsprecher klar erkennen. Die Quellkarte liefert dann das Bild, das der Anfangsposition der rotierenden Quelle entspricht. Bei Kenntnis des Anfangswinkels des Rotors kann also die Position der Schallquelle in Umfangsrichtung relativ zum Rotor bestimmt werden. Wie bereits erwähnt, zeigt Abb. 5.3 Ergebnisse, für die die Greensche Funktion für ruhende Monopole verwendet wurde. Trotzdem können bei geringen Drehzahlen alleine durch die Modenzerlegung schon sehr gute Ergebnisse erzielt werden und auch zwei, um 180° verschobene Lautsprecher werden als zwei getrennte Schallquellen erkannt.

Wird als Steuervektor die modifizierte Greensche Funktion \underline{g}_Ω verwendet, so ergibt sich eine andere Winkellage der lokalisierten Quelle. Aufgrund der geringen Drehzahl ist der Unterschied allerdings sehr klein (siehe Abb. 5.4), bei höheren Drehzahlen ist dieser aber nicht mehr zu vernachlässigen.



(a) Beamforming ohne Modenzerlegung, 1 Lautsprecher

(b) Beamforming mit Modenzerlegung, 1 Lautsprecher



(c) Beamforming ohne Modenzerlegung, 2 Lautsprecher um 180° versetzt

(d) Beamforming mit Modenzerlegung, 2 Lautsprecher um 180° versetzt

Abb. 5.3.: Vergleich zwischen Beamforming mit und ohne Modenzerlegung; \underline{g}_0 als Steuervektor, $f_0 = 1500 \text{ Hz}$ und $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$
 — Radius der Schallquelle ϱ_y , — Startwinkel φ_{y0}

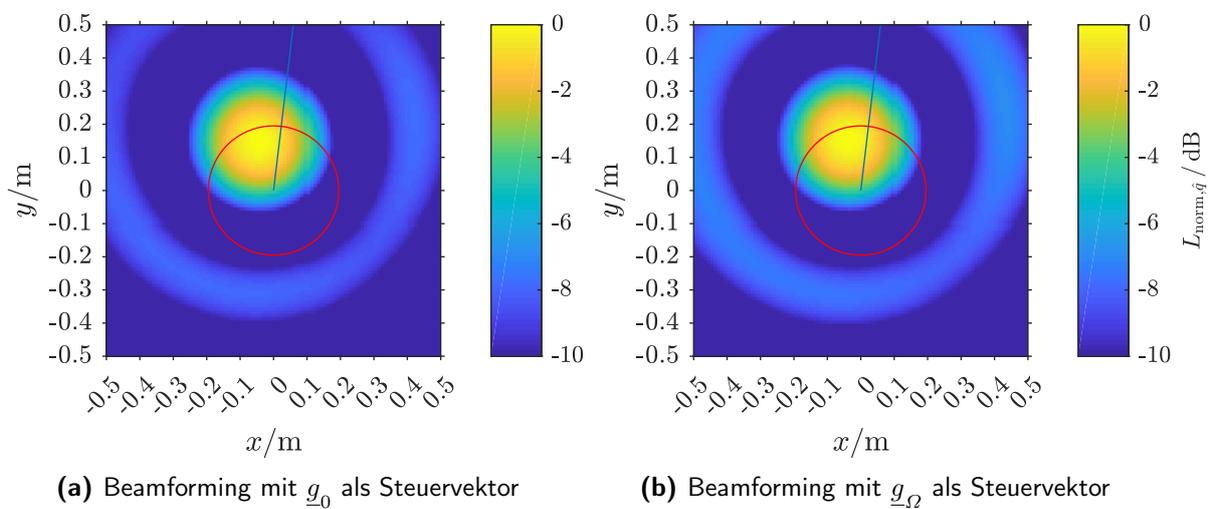


Abb. 5.4.: Vergleich zwischen Beamforming mit \underline{g}_0 bzw. \underline{g}_Ω als Steuervektor; mit Modenzerlegung, $f_0 = 1500 \text{ Hz}$ und $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$
 — Radius der Schallquelle ϱ_y , — Startwinkel φ_{y0}

5.3.2. Unterschiedliche Frequenzen

Wie beim Beamforming bei stationären Quellen zeigt sich auch hier ein Einfluss der Schallfrequenz f_0 auf die Breite der Hauptkeule. Die Hauptkeule in Abb. 5.5b ist schmaler als in Abb. 5.5a, wodurch die Quellposition genauer ermittelt werden kann. Das hat auch zur Folge, dass zwei Quellen näher beieinanderliegen können und trotzdem als zwei unterschiedliche Quellen erkannt werden.

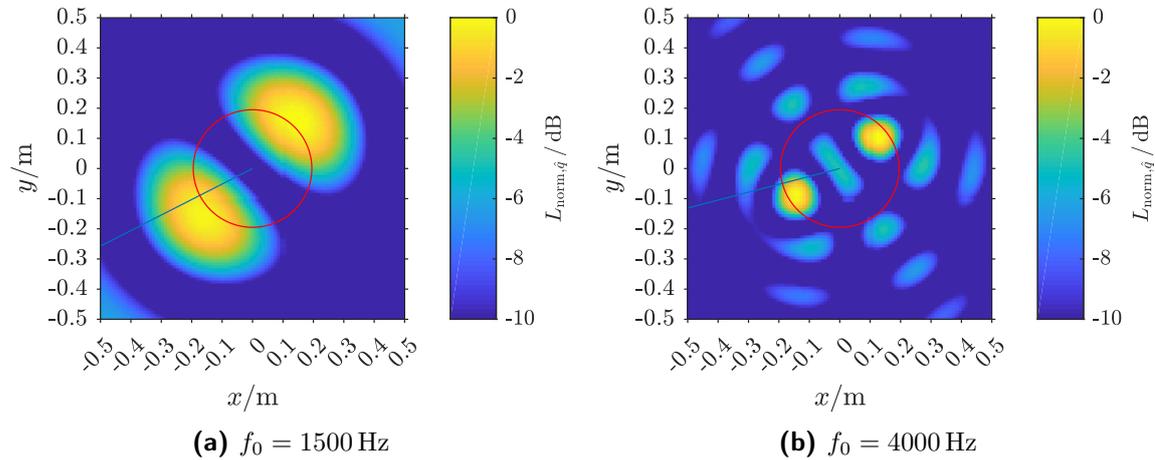


Abb. 5.5.: Vergleich zwischen zwei unterschiedlichen Schallfrequenzen f_0 ; \underline{g}_0 als Steuervektor, mit Modenzerlegung und $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$
— Radius der Schallquelle ϱ_y , — Startwinkel φ_{y0}

5.3.3. Auswertung mit Functional Beamforming und CLEAN-SC

Weiters können statt des Standard Beamforming-Verfahrens erweiterte Verfahren angewandt werden. Exemplarisch wurden in Abschnitt 3.3 das Functional Beamforming-Verfahren sowie CLEAN-SC vorgestellt. Daher sollen die beiden Verfahren anhand der gewonnenen Messergebnisse demonstriert werden.

Wählt man den Parameter $\nu = 2$, so zeigt sich im Falle von \underline{g}_0 als Steuervektor ein vom Functional Beamforming bei ruhenden Quellen bekanntes Verhalten (siehe Abb. 5.6a): die Quellpositionen bleiben gleich und die Breiten der Hauptkeulen werden im Vergleich zu Abb. 5.5b kleiner. Bei Verwendung von \underline{g}_Ω hingegen, werden die zwei Quellpositionen nicht mehr korrekt erkannt.

Der CLEAN-SC-Algorithmus kann auch auf Quellkarten, denen eine rotierende Schallquelle zugrunde liegt, angewandt werden. Abbildung 5.7 zeigt beispielhaft das Ergebnis der bereinigten im Vergleich mit der nicht bereinigten Quellkarte. Nachteilig wirkt sich dabei aus, dass die beiden Lautsprecher mit dem selben Signal angesteuert werden, wodurch die Schallquellen kohärent sind. CLEAN-SC besitzt die Eigenschaft, dass von mehreren kohärenten Quellen nur eine erkannt wird. Daher wird zwar die Position des einen Laut-

sprechers genauer lokalisiert, als beim Standard-Beamforming, die Information über den zweiten Lautsprecher geht aber verloren.

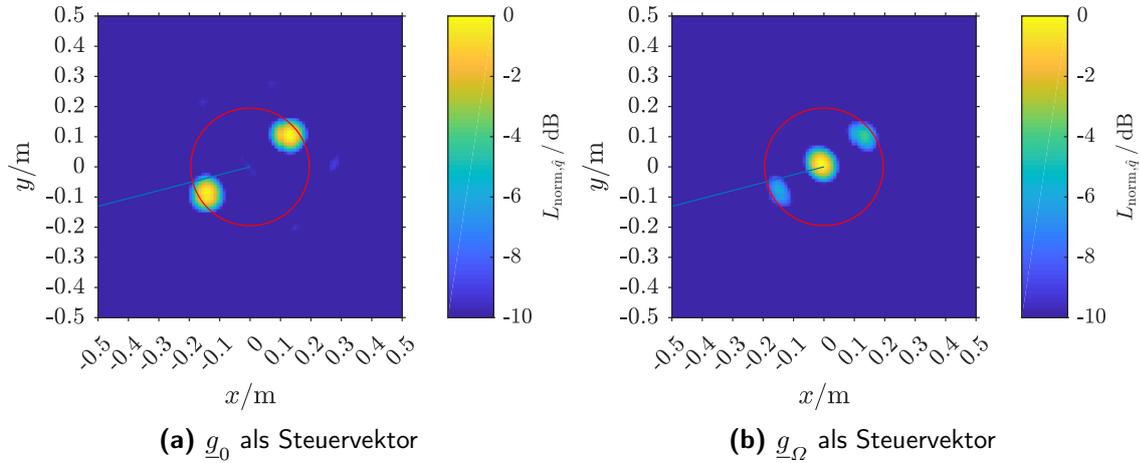


Abb. 5.6.: Functional Beamforming mit $\nu = 2$; 2 Lautsprecher, $f_0 = 4000$ Hz und $\Omega = 2\pi \cdot 2$ s $^{-1}$
 — Radius der Schallquelle ϱ_y , — Startwinkel φ_{y0}

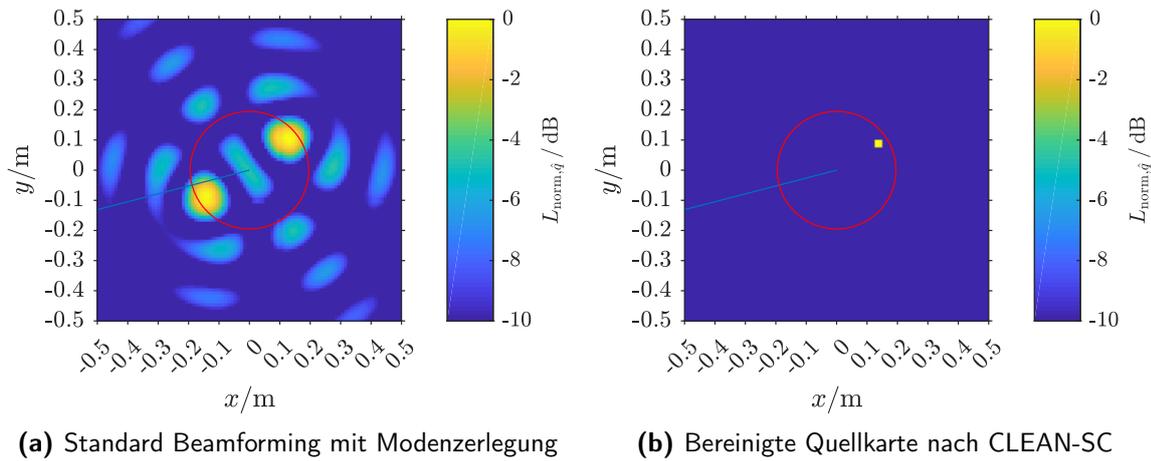


Abb. 5.7.: Vergleich vor und nach Postprocessing mit CLEAN-SC; 2 Lautsprecher, $f_0 = 4000$ Hz und $\Omega = 2\pi \cdot 2$ s $^{-1}$
 — Radius der Schallquelle ϱ_y , — Startwinkel φ_{y0}

5.3.4. Verschiedene Quellstärken

Weitere Messungen wurden mit unterschiedlich lauten Lautsprechern durchgeführt, um zu überprüfen, ob die unterschiedlichen Quellstärken durch den Algorithmus erfasst werden. Dazu wurde mit einem Schallpegelmesser der Schalldruckpegel eines Lautsprechers bestimmt und anschließend ein zweiter auf unterschiedliche, um 2 bis ca. 7 dB niedrigere Werte eingestellt. Die Messung der Schalldruckpegel erfolgte in einer Entfernung von ca.

1.26 m, der gleichen Entfernung, die das Array zum Rotor hat, jeweils an der gleichen Stelle. Die Frequenz betrug $f_0 = 4000$ Hz und die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi \cdot 1 \text{ s}^{-1}$.

Abbildung 5.8 zeigt Quellkarten für $\Delta L_p = 2$ dB, $\Delta L_p = 5.2$ dB und $\Delta L_p = 7.3$ dB. Der Quellpunkt, der der Linie, die den Startwinkel markiert, näher ist, war jeweils der lautere Lautsprecher.

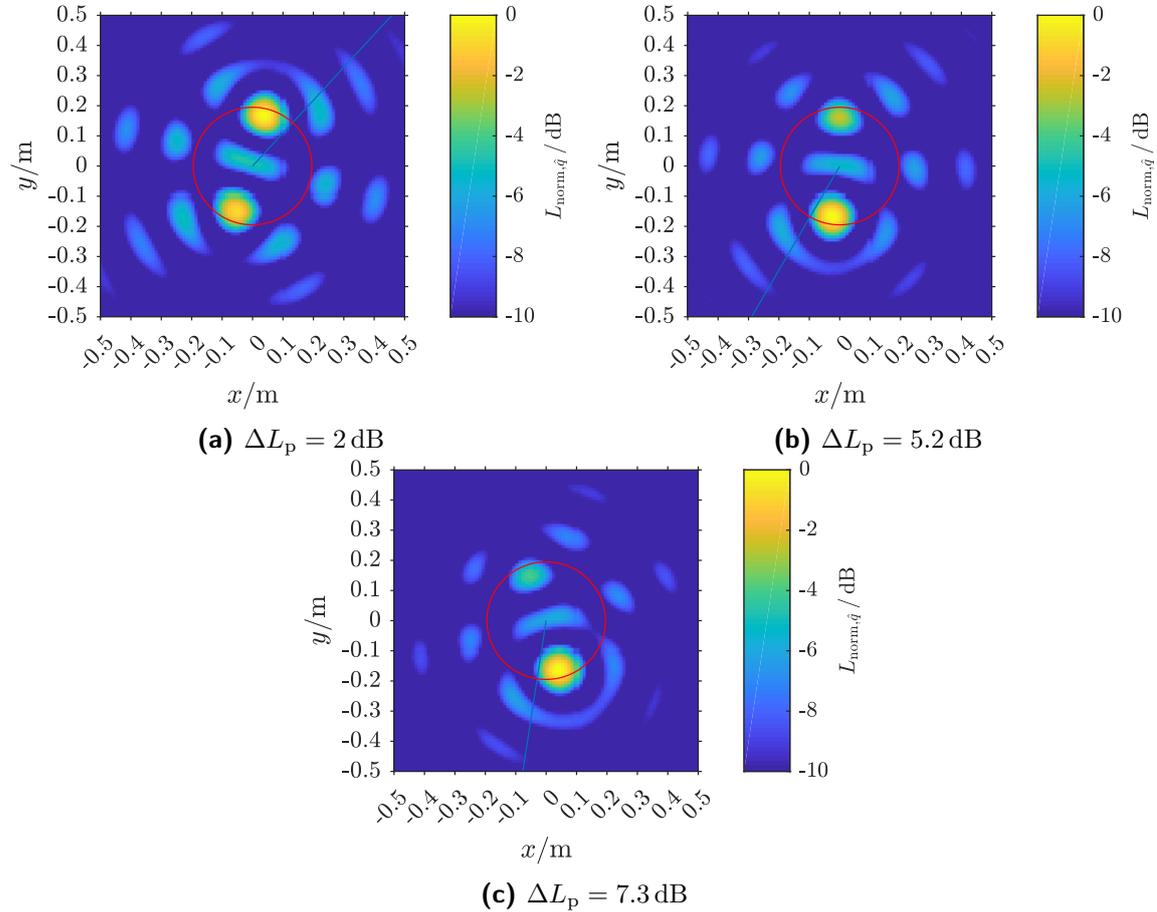


Abb. 5.8.: Zwei Lautsprecher mit unterschiedlichen Quellstärken; $f_0 = 4000$ Hz und $\Omega = 2\pi \cdot 1 \text{ s}^{-1}$
— Radius der Schallquelle ϱ_y , — Startwinkel φ_{y0}

5.3.5. Einfluss der Genauigkeit der gemessenen Drehzahl

Die hier gezeigte Methode der Quelllokalisierung benötigt als Inputvariable die (konstante) Drehzahl der Schallquelle. Diese wird u. a. verwendet, um aus den Drucksignalen im stationären System \underline{p} die Drucksignale im rotierenden Bezugssystem \underline{p}_Ω zu berechnen (siehe Gl. (3.21)). Im Spektrum der Schallsignale werden die ganzzahligen Vielfachen der Umdrehungsfrequenz $m \cdot \Omega / (2\pi)$ verwendet. Beträgt die tatsächliche Winkelgeschwindigkeit Ω , es wird aber fälschlicherweise ein Wert von $\Omega + \varepsilon$ gemessen, so beträgt der Fehler bei der m -ten

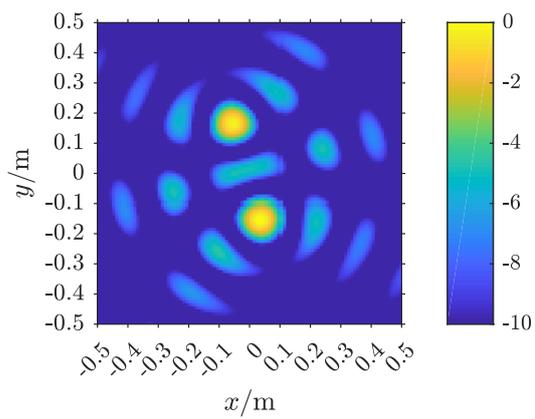
Spinning-Mode schon $m\varepsilon$. Hier ist allerdings auch anzumerken, dass höhere Moden – sobald die Quelle richtig erkannt wird – immer geringere Bedeutung für das Beamforming-Ergebnis haben, wie es auch die Untersuchungen zu den Auswirkungen der erfassten Modenanzahl in Abschnitt 4.3 zeigen.

Abbildung 5.9 zeigt die Auswirkungen, die eine Ungenauigkeit der tatsächlich vorhandenen Drehzahl auf die Quellkarte hat. Die linke Spalte zeigt jeweils das Beamforming-Ergebnis und die rechte das Spektrum der Schallsignale des Mikrofons an der Stelle $\varphi_x = 0$. Die Schallfrequenz beträgt $f_0 = 4000$ Hz und die Drehzahl beträgt 2 U/s. Zunächst werden die exakten Werte bei den Frequenzen $f_0 + m \cdot \Omega/(2\pi)$ im Spektrum verwendet, siehe Abb. 5.9b. Bei der richtigen Drehzahl entspricht dies jenen Frequenzen, zu denen die Maxima auftreten. Demzufolge werden die zwei Schallquellen in der Quellkarte in Abb. 5.9a an der richtigen Position gefunden.

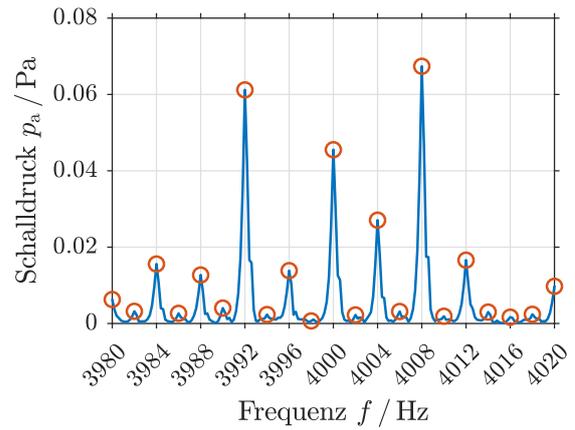
Würde die gemessene Drehzahl um 1 % von der tatsächlich vorhandenen abweichen, also würde anstelle von 2 U/s ein Wert von 2.02 U/s gemessen werden, so werden die Quellpositionen noch immer an der richtigen Position lokalisiert (Abb. 5.9c), obwohl bei höheren Moden m schon benachbarte Frequenzen verwendet werden (Abb. 5.9d).

Bei einem Fehler von 2 %, also einer fälschlich gemessenen Drehzahl von 2.04 U/s, werden die Spinning-Moden bei 3992 Hz und 4008 Hz nicht mehr exakt gefunden. Die Abweichung von der tatsächlichen Drehzahl bewirkt, dass die Quellkarte nicht mehr die richtigen Quellpositionen zeigt. Auswertungen bei 1 % bzw. 2 % zu gering gemessenen Drehzahlen zeigen das gleiche Verhalten.

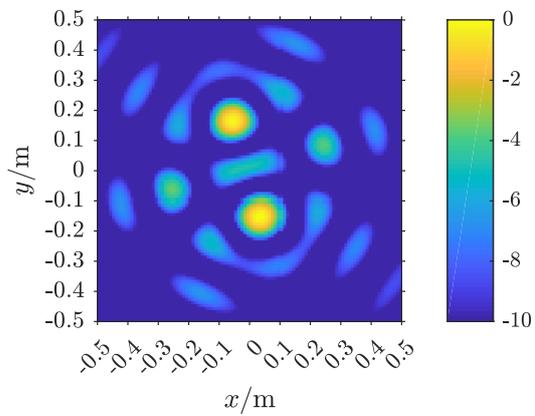
Aus diesen Untersuchungen lässt sich ableiten, dass eine exakte Messung der Drehzahl für diese Methode der Schalllokalisierung unumgänglich ist.



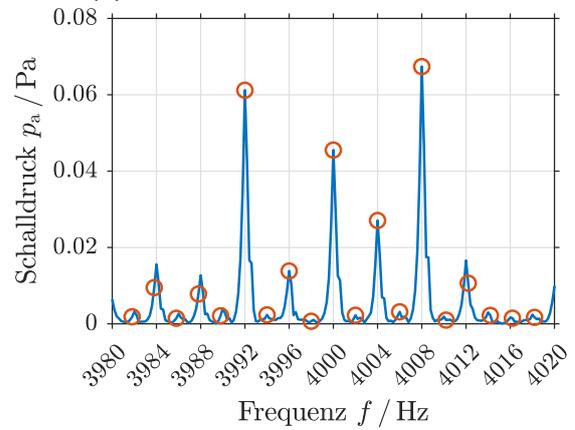
(a) Quellkarte bei exakter Drehzahl



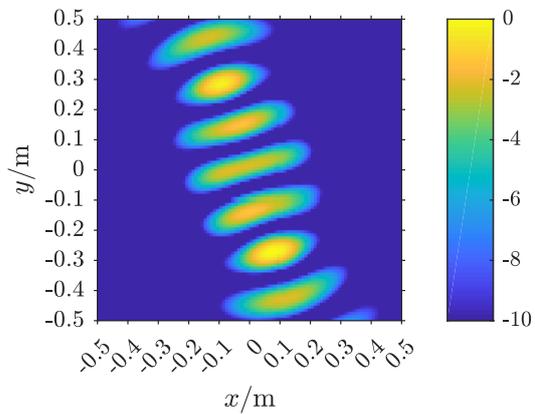
(b) Frequenzen bei exakter Drehzahl



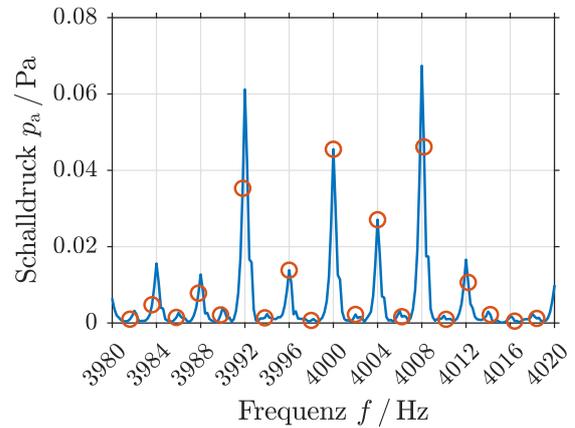
(c) Quellkarte bei 1% Abweichung



(d) Frequenzen bei 1% Abweichung



(e) Quellkarte bei 2% Abweichung



(f) Frequenzen bei 2% Abweichung

Abb. 5.9.: Auswirkungen eines Fehlers in der Drehzahlmessung; $f_0 = 4000 \text{ Hz}$, $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$
 — FFT des Schalldrucks des Mikrofones bei $\varphi_x = 0$, \circ Verwendete Frequenz

5.3.6. Breitbandige Auswertung bei weißem Rauschen

Da reale rotierende Schallquelle, wie beispielsweise Lüfter oder Rotoren, keine monofrequenten Schallquellen darstellen, wird nun die Schallquellenlokalisierung bei breitbandigen Quellen behandelt. Dazu wurde für das Lautsprecher-signal kein reiner Sinuston mehr verwendet, sondern weißes Rauschen. Weißes Rauschen ist ein Rauschsignal, das in einem bestimmten Frequenzbereich ein konstantes Frequenzspektrum besitzt. Es enthält also in vorgegebenen Schranken alle Frequenzen, die jeweils die gleiche Amplitude aufweisen. Aufgrund der verwendeten Lautsprecher und Mikrofone ist das aufgezeichnete Signal allerdings kein exaktes weißes Rauschen; manche Frequenzen besitzen höhere Amplituden als andere.

Bei der breitbandigen Auswertung wird eine untere und obere Schranke definiert, innerhalb derer jede Frequenz einmal als Scanfrequenz angenommen wird. Diese Schranken müssen aber nicht mit der oberen und unteren Grenzfrequenz der breitbandigen Quelle übereinstimmen. Die Beamforming-Ergebnisse zu jeder Frequenz innerhalb der Schranken werden anschließend addiert. Wie nahe die gescannten Frequenzen beieinanderliegen, hängt von der Messdauer ab sowie davon, ob eine Mittelung verwendet wird. Als Auswertungsbereich kann z. B. ein Terzband dienen, bei dem eine Mittenfrequenz f_m definiert wird, aus der die untere Grenzfrequenz $f_{u, \text{Terz}}$ und obere Grenzfrequenz $f_{o, \text{Terz}}$ über

$$f_{u, \text{Terz}} = \frac{f_m}{\sqrt{2}} \quad (5.1)$$

$$f_{o, \text{Terz}} = \sqrt{2}f_m = 2f_{u, \text{Terz}} \quad (5.2)$$

berechnet werden. Abbildung 5.10 zeigt die Auswertung innerhalb eines Terzbandes mit der Mittenfrequenz $f_m = 1500$ Hz, also $f_{u, \text{Terz}} = 1060.7$ Hz und $f_{o, \text{Terz}} = 2121.3$ Hz (Abb. 5.10a) bzw. $f_m = 3000$ Hz, also $f_{u, \text{Terz}} = 2121.3$ Hz und $f_{o, \text{Terz}} = 4242.6$ Hz (Abb. 5.10b). Auch in diesen Fällen werden die Quellpositionen korrekt gefunden. Es wurde eine weitere Messung mit weißem Rauschen an zwei Lautsprechern durchgeführt. Das Ergebnis dieser Messung mit einer breitbandigen Auswertung im Terzband um $f_m = 4000$ Hz ($f_{u, \text{Terz}} = 2828.4$ Hz, $f_{o, \text{Terz}} = 5656.9$ Hz) ist Abb. 5.11 zu entnehmen. Um die Rechenzeit zu reduzieren wurde für diese Auswertungen die Anzahl der Scanpunkte auf 1600 reduziert.

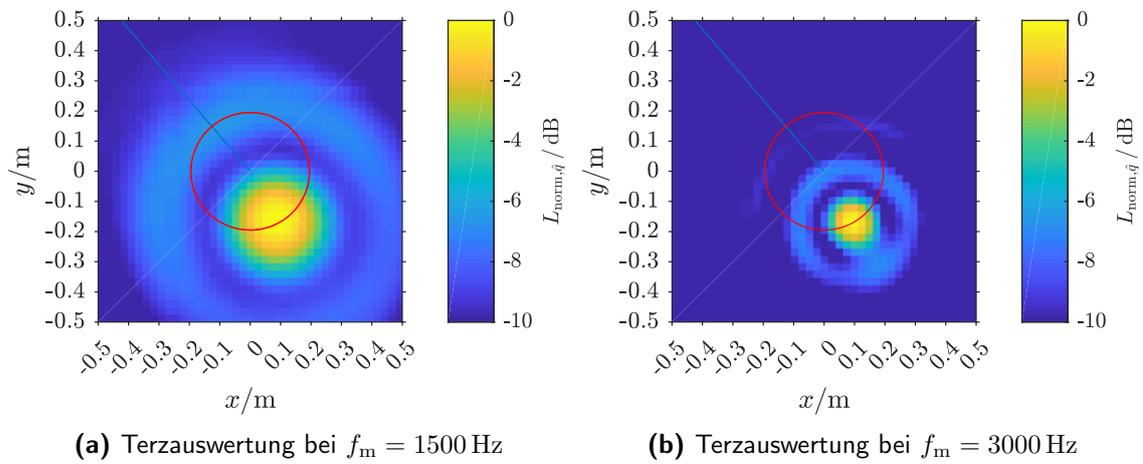


Abb. 5.10.: Auswertung innerhalb eines Terzbandes bei weißem Rauschen; $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$
 — Radius der Schallquelle ϱ_y , — Startwinkel φ_{y0}

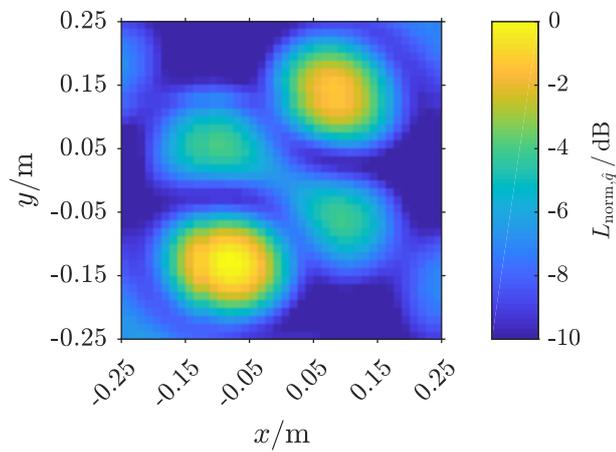


Abb. 5.11.: Auswertung innerhalb eines Terzbandes bei weißem Rauschen mit zwei Lautsprechern; $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$

6. Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Thema der Schalllokalisierung von bewegten Quellen. Insbesondere wird auf Schallquellen eingegangen, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren. Zunächst werden das Standard-Beamforming-Verfahren, das für stationäre Quellen geeignet ist, sowie die Weiterentwicklungen Functional-Beamforming und CLEAN-SC vorgestellt. Anschließend wird auf Möglichkeiten eingegangen, Messdaten von rotierenden Schallquellen derart aufzubereiten, damit bekannte Algorithmen angewandt werden können. Insbesondere wird die Zerlegung der gemessenen Schalldrücke in die sogenannten Spinning-Moden und das Verwenden der Greenschen Funktion für einen rotierenden Monopol im Freifeld als Steuervektor im Detail behandelt. Durch die Modenzerlegung werden die Schalldaten in ein rotierendes Bezugssystem transformiert, wodurch die Bewegung der Schallquelle kompensiert werden kann.

In Simulationen, die auf analytischen Formeln für einen rotierenden Monopol basieren, werden Frequenzspektren einer rotierenden Punktquelle und zu erwartende Beamforming-Ergebnisse gezeigt. Anschließend werden die Simulationen mit Messergebnissen verglichen. Ein Versuchsstand, der aus einem Rotor mit vier Lautsprechern aufgebaut ist, diente dazu, Messdaten von rotierenden Schallquellen zu erhalten. Es wurden Messungen mit einem Ringarray, das aus 32 Mikrofonen besteht, durchgeführt. Die zuvor mit simulierten Schalldaten getesteten Algorithmen wurden mit realen Schalldaten verifiziert.

Zusammenfassend lassen sich aus den Messungen dieser Arbeit einige Erkenntnisse hinsichtlich der Schallquellenlokalisierung an rotierenden Quellen ableiten. Die Spinning-Moden-Zerlegung und anschließende Berechnung der Kreuzspektralmatrix mit den Schalldrücken im rotierenden Bezugssystem liefert gute Ergebnisse für die Schallquellenlokalisierung an rotierenden Quellen. Aufgrund der numerisch ressourcenintensiven Berechnung der modifizierten Greenschen Funktion kann es bei geringen Drehzahlen zweckmäßig sein, die Greensche Funktion für rotierende Monopole durch jene für ruhende Monopole zu approximieren. Es muss allerdings beachtet werden, dass dann die gefundene Quellposition in Umfangsrichtung verschoben ist. Der vorgestellte Algorithmus wurde mit einer und mehreren Schallquellen, sowie mit Schallquellen unterschiedlicher Frequenzen, Drehzahlen und Quellstärken getestet. Es zeigte sich, dass darauf geachtet werden muss, dass der äquidistante Mikrofonabstand klein genug für die vorhandene Schallfrequenz gewählt wird. Außerdem muss die Mikrofonanzahl groß genug sein, damit bei der vorhandenen Kombination aus Schallfrequenz und Drehzahl eine ausreichende Anzahl an Spinning-Moden erfasst werden kann. Des Weiteren ist es unerlässlich, die vorhandene, konstante Drehzahl so genau wie möglich zu kennen, da

schon geringe Messfehler von einigen wenigen Prozent zu ungenauen Ergebnissen führen. Die Quellkarten der vorgestellten Methode zeigen die Positionen der Schallquellen zum Startzeitpunkt der Messung. Damit daraus auf die Positionen in Bezug auf den Rotor geschlossen werden kann, ist die Kenntnis dessen räumlicher Lage zum Startzeitpunkt erforderlich. Der Algorithmus wurde auch erfolgreich hinsichtlich einer breitbandigen Auswertung getestet, die in der Praxis aufgrund der meist unbekanntes Frequenz einer Schallquelle gebräuchlich ist.

Der gewählte Messaufbau dient der Verifikation des Algorithmus. Aufgrund seiner Bauart konnten aber keine Drehzahlen über 3 U/s realisiert werden. Es wäre wünschenswert, weiterführende Messungen mit dem verifizierten Messsystem an realen rotierenden Objekten und Maschinenteilen wie Lüftern, Ventilatoren oder Autoreifen vorzunehmen.

A. Anhang

A.1. Schalldruck einer bewegten Schallquelle – Monopolansatz für das akustische Potential

Alternativ zum Ansatz, der in Abschnitt 2.5.2 beschrieben wird, kann der Monopolansatz für das akustische Potential ψ_a bzw. für $\Psi = \rho_0 \psi_a$ angeschrieben werden [1, 18]

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -Q(t) \delta(\mathbf{r}(t)). \quad (\text{A.1})$$

Dann lautet die Gleichung für das akustische Potential

$$4\pi \Psi = \frac{Qe}{r(1 - M_e \cos \vartheta_e)}. \quad (\text{A.2})$$

Aus Gl. (2.23) folgen mit der Kettenregel sowie $\mathbf{x} = \text{const.}$ die Identitäten

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{1 - M_e \cos \vartheta_e} \quad (\text{A.3})$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_e}{\partial t} &= \frac{\partial r_e}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= -\frac{\mathbf{r}_e \cdot c\mathbf{M}_e}{r_e} \frac{1}{1 - M_e \cos \vartheta_e} \\ &= -\frac{cM_e \cos \vartheta_e}{1 - M_e \cos \vartheta_e} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} (r_e M_e \cos \vartheta_e) &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{r}_e \cdot \mathbf{M}_e) \\
&= \frac{\mathbf{r}'_e \cdot \mathbf{M}_e + \mathbf{r}_e \cdot \mathbf{M}'_e}{1 - M_e \cos \vartheta_e} \\
&= \frac{-c \mathbf{M}_e \cdot \mathbf{M}_e + \mathbf{r}_e \cdot \mathbf{M}'_e}{1 - M_e \cos \vartheta_e} \\
&= \frac{\mathbf{r}_e \cdot \mathbf{M}'_e - c M_e^2}{1 - M_e \cos \vartheta_e}, \tag{A.5}
\end{aligned}$$

wobei $(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial \tau}(\cdot)$. Setzt man Gl. (A.2) in Gl. (2.10) unter der Verwendung von Gl. (A.3) bis (A.5) und der Kettenregel ein, lautet die Bestimmungsgleichung für den akustischen Druck eines bewegten Monopols

$$p_a(\mathbf{x}, t) = \varrho_0 Q'(\tau) \frac{1}{4\pi r_e (1 - M_e \cos \vartheta_e)^2} + \varrho_0 Q(\tau) \frac{\mathbf{r}_e \cdot \mathbf{M}'_e + c M_e (M_e - \cos \vartheta_e)}{4\pi r_e^2 (1 - M_e \cos \vartheta_e)^3}. \tag{A.6}$$

A.2. Lösung Wellengleichung in Kugelkoordinaten

Die bekannte Wellengleichung (Gl. (2.7)) kann auch in Kugelkoordinaten angeschrieben und gelöst werden. Die folgende Herleitung wurde zum Großteil aus [19, 20] übernommen.

Grundsätzlich kann jeder Punkt statt in kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten angeschrieben werden. Anstelle der x -, y - und z -Komponenten eines Punktes P wird sein Abstand vom Ursprung r sowie der Winkel ϑ zwischen Ortsvektor von P und z -Achse und der Winkel φ zwischen x -Achse und der Projektion des Ortsvektors auf die xy -Ebene angegeben, siehe Abb. 2.2. Kartesische Koordinaten und Kugelkoordinaten hängen über

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \tag{A.7}$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi \tag{A.8}$$

$$z = r \cos \vartheta \tag{A.9}$$

zusammen. Der Laplaceoperator Δ in Kugelkoordinaten lautet

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \tag{A.10}$$

Damit wird Gl. (2.7) in Kugelkoordinaten zu

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p_a}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial p_a}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 p_a}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Ein Separationsansatz der Form $p_a(r, \vartheta, \varphi, t) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)T(t)$ liefert, eingesetzt in Gl. (A.11),

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\Phi r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \frac{1}{T c^2} \frac{d^2 T}{dt^2}. \quad (\text{A.12})$$

Zunächst folgt aus der Tatsache, dass nur die rechte Seite von t abhängig ist, dass beide Seiten der Gl. (A.12) konstant sein müssen

$$T c^2 \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2. \quad (\text{A.13})$$

Die Konstante wurde hier negativ gewählt, da dies in der Lösung zu fortschreitenden bzw. stehenden Wellen führt. Die Lösung für $T(t)$ ist daher

$$T = T_1 e^{j\omega t} + T_2 e^{-j\omega t} \quad (\text{A.14})$$

$$\omega = kc. \quad (\text{A.15})$$

Setzt man nun die linke Seite von Gl. (A.12) gleich $-k^2$ und multipliziert dies mit r^2 erhält man

$$\left[\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 \right] + \left[\frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \right] = 0. \quad (\text{A.16})$$

Hier hängt nun der Ausdruck in der ersten Klammer nur von r und jener in der zweiten Klammer nur von den Winkeln ϑ und φ ab, die daher wiederum konstant sein müssen. Es wird eine beliebige Konstante $n(n+1)$ gewählt, da dies später praktisch sein wird.

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + k^2 r^2 R = n(n+1)R \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -n(n+1) \quad (\text{A.18})$$

Der winkelabhängige Term (Gl. (A.18)) lässt sich nach Multiplikation mit $\sin^2 \vartheta$ wiederum aufteilen in einen Teil, der nur von φ und einen Teil, der nur von ϑ abhängig ist, woraus unmittelbar

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \quad (\text{A.19})$$

und

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) - \Theta m^2 = -n(n+1) \sin^2 \vartheta \Theta \quad (\text{A.20})$$

folgt. Die Lösung von Gl. (A.19) ist

$$\Phi = \Phi_1 \cos m\varphi + \Phi_2 \sin m\varphi. \quad (\text{A.21})$$

Für jene von Gl. (A.20) erfolgt die Variablentransformation $\eta = \cos \vartheta$, womit

$$d\eta = -\sin \vartheta d\vartheta \quad (\text{A.22})$$

$$\sin \vartheta = \sqrt{1 - \eta^2} \quad (\text{A.23})$$

$$d\vartheta = \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \quad (\text{A.24})$$

gilt. Dies eingesetzt in Gl. (A.20) führt auf

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2\Theta}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Theta}{d\eta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] \Theta = 0. \quad (\text{A.25})$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung besteht aus den Legendrefunktionen erster Art P_n^m und zweiter Art Q_n^m

$$\Theta(\vartheta) = \Theta_1 P_n^m(\cos \vartheta) + \Theta_2 Q_n^m(\cos \vartheta), \quad (\text{A.26})$$

wobei $\Theta_2 = 0$ gesetzt wird, da Q_n^m an den Stellen $\cos \vartheta = \pm 1$ Singularitäten besitzt. Weiter müssen n und m ganzzahlig sein und es muss

$$0 \leq m \leq n \quad (\text{A.27})$$

gelten.

Abschließend soll noch die Lösung für $R(r)$ gefunden werden. Gleichung (A.17) stellt die sphärische Besselsche Differentialgleichung dar, die Lösungen der Form

$$R(r) = R_1 j_n(kr) + R_2 y_n(kr) \text{ oder} \quad (\text{A.28})$$

$$R(r) = R_3 h_n^{(1)}(kr) + R_4 h_n^{(2)}(kr) \quad (\text{A.29})$$

besitzt. Hierbei bezeichnet j_n die sphärische Besselfunktion erster Gattung der Ordnung n , y_n die sphärische Besselfunktion zweiter Gattung der Ordnung n (auch sphärische Neumannfunktion genannt) und $h_n^{(1)}$ bzw. $h_n^{(2)}$ die sphärische Besselfunktion dritter Gattung

der Ordnung n erster bzw. zweiter Art (auch sphärische Hankelfunktion genannt). Die sphärischen Besselfunktionen hängen mit den herkömmlichen Besselfunktionen über

$$a_n(x) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2x}} A_{n+1/2}(x); \quad (\text{A.30})$$

$$a_n = j_n, y_n, h_n \quad (\text{A.31})$$

$$A_n = J_n, Y_n, H_n \quad (\text{A.32})$$

zusammen. Eine detaillierte Herleitung der sphärischen Besselschen Differentialgleichung ist in [21] zu finden.

Häufig werden die winkelabhängigen Terme Θ und Φ kombiniert. Diese Kombinationen nennt man Kugelflächenfunktionen (engl. *spherical harmonics*), deren Symbol Y_n^m ist

$$\begin{aligned} Y_n^m &= \Theta(\vartheta)\Phi(\varphi) \\ &= \Theta_1 P_n^m(\cos \vartheta) \Phi_1 e^{jm\varphi} \\ &= \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \vartheta) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{jm\varphi} \\ Y_n^m &= \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos \vartheta) e^{jm\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Die Koeffizienten folgen aus den Normierungsbedingungen $\int_0^{2\pi} |\Phi|^2 d\varphi = 1$ und $\int_0^\pi |\Theta|^2 \sin \vartheta d\vartheta = 1$. Kugelflächenfunktionen sind daher orthonormal und es kann eine beliebige Funktion auf einer Kugeloberfläche in Kugelflächenfunktionen entwickelt werden.

A.3. Eigenschaften der Diracschen Deltafunktion

Idee des Deltaimpulses ist es, einen unendlich kurzen, unendlich starken Impuls, dessen Fläche 1 ist, zu symbolisieren. Die Diracsche Deltafunktion δ wurde vom theoretischen Physiker Paul Dirac³ eingeführt. Obwohl die Diracsche Deltafunktion keine Funktion im eigentlichen Sinne der Analysis darstellt, hat es sich u. a. in der Physik als praktisch erwiesen, mit ihr zu arbeiten.

Im Folgenden werden Eigenschaften aufgelistet, die im Zusammenhang dieser Arbeit von Bedeutung sind [22, 23, 24].

³★ 8. August 1902 in Bristol; † 20. Oktober 1984 in Tallahassee

- Die Deltafunktion ist definiert über

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

bzw. allgemeiner

$$\delta(x - a) = \begin{cases} +\infty & \text{für } x = a \\ 0 & \text{für } x \neq a \end{cases}. \quad (\text{A.35})$$

- Die Deltafunktion kann als Ableitung der Heavyside-Funktion $H(x)$ interpretiert werden

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}, \quad (\text{A.36})$$

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} [H(x)]. \quad (\text{A.37})$$

- $\delta(x)$ besitzt die Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (\text{A.38})$$

bzw. für $\varepsilon > 0$

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x) \delta(x - a) dx = f(a). \quad (\text{A.39})$$

- Daraus ergibt sich für die konstante Funktion $f(x) = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1. \quad (\text{A.40})$$

- Für die Deltafunktion einer Funktion $g(x)$ gilt

$$\delta(g(x)) = \sum_i \left[\frac{1}{|dg/dx|_{x=x_i^*}} \delta(x - x_i^*) \right], \quad (\text{A.41})$$

mit x_i^* den Nullstellen der Funktion $g(x)$ sind. Ein Spezialfall dieser Eigenschaft ist

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (\text{A.42})$$

- Außerdem gilt

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (\text{A.43})$$

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Lineare Bewegung einer Schallquelle; Winkel ϑ	16
2.2.	Skizze der Anordnung des Beobachter und der rotierenden Schallquelle . . .	17
2.3.	Numerische Berechnung von τ^* bei gegebenem $t^* = 100$ ms; $\mathbf{x}_s = [0.45, 0, 0]$ m, $z_y = 1.5$ m, $\varrho_y = 0.3$ m, $\Omega = 2\pi \cdot 30$ /s und $\varphi_{y0} = 0$	18
2.4.	Numerische Berechnung von τ^* bei gegebenem $t^* = 100$ ms; $\mathbf{x}_s = [0.45, 0, 0]$ m, $z_y = 1.5$ m, $\varrho_y = 0.3$ m, $\Omega = 2\pi \cdot 1000$ /s und $\varphi_{y0} = 0$	19
3.1.	Anordnung der Mikrofone bei der Schallquellenlokalisierung an rotierenden Quellen mittels Interpolation im Zeitbereich	28
4.1.	Analytisch berechneter Schalldruck eines rotierenden Monopols im Zeitbereich	31
4.2.	Momentane vom Beobachter wahrgenommene Frequenz über die Zeit	31
4.3.	Spektrum des Schalldrucks mittels Fouriertransformation und modifizierter Greenscher Funktion	32
4.4.	Standard Beamforming ohne Modenzerlegung, Schalldruck aus analytischer Formel berechnet: $f_0 = 1500$ Hz, $\Omega = 2\pi \cdot 30$ s ⁻¹ , $\varrho_y = 0.3$ m und \underline{g}_0 als Steuervektor	33
4.5.	Standard Beamforming mit Modenzerlegung, Schalldruck aus analytischer Formel berechnet: $f_0 = 1500$ Hz, $\Omega = 2\pi \cdot 30$ s ⁻¹ , $\varrho_y = 0.3$ m und herkömm- licher bzw. modifizierter Greenscher Funktion als Steuervektor	34
4.6.	Einfluss der Mikrofonanzahl bei $f_0 = 1500$ Hz, $\Omega = 2\pi \cdot 30$ s ⁻¹ , $\varrho_y = 0.3$ m .	37
4.7.	8 Mikrofone bei $f_0 = 500$ Hz, $\Omega = 2\pi \cdot 30$ s ⁻¹ , $\varrho_y = 0.3$ m	38
4.8.	Einfluss der Mikrofonanzahl bei $f_0 = 500$ Hz, $\Omega = 2\pi \cdot 150$ s ⁻¹ , $\varrho_y = 0.3$ m .	38
5.1.	Messaufbau und Ringarray im Messraum mit Absorberplatten an den Wän- den im Hintergrund	40
5.2.	Vergleich zwischen gemessenen Daten eines rotierenden Lautsprechers und analytischer Formel für den Schalldruck eines rotierenden Monopols	42
5.3.	Vergleich zwischen Beamforming mit und ohne Modenzerlegung; \underline{g}_0 als Steu- ervektor, $f_0 = 1500$ Hz und $\Omega = 2\pi \cdot 2$ s ⁻¹	44
5.4.	Vergleich zwischen Beamforming mit \underline{g}_0 bzw. \underline{g}_Ω als Steuervektor; mit Mo- denzerlegung, $f_0 = 1500$ Hz und $\Omega = 2\pi \cdot 2$ s ⁻¹	45
5.5.	Vergleich zwischen zwei unterschiedlichen Schallfrequenzen f_0 ; \underline{g}_0 als Steuer- vektor, mit Modenzerlegung und $\Omega = 2\pi \cdot 2$ s ⁻¹	46

5.6. Functional Beamforming mit $\nu = 2$; 2 Lautsprecher, $f_0 = 4000$ Hz und $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$	47
5.7. Vergleich vor und nach Postprocessing mit CLEAN-SC; 2 Lautsprecher, $f_0 = 4000$ Hz und $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$	47
5.8. Zwei Lautsprecher mit unterschiedlichen Quellstärken; $f_0 = 4000$ Hz und $\Omega = 2\pi \cdot 1 \text{ s}^{-1}$	48
5.9. Auswirkungen eines Fehlers in der Drehzahlmessung; $f_0 = 4000$ Hz, $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$	50
5.10. Auswertung innerhalb eines Terzbandes bei weißem Rauschen; $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$	52
5.11. Auswertung innerhalb eines Terzbandes bei weißem Rauschen mit zwei Lautsprechern; $\Omega = 2\pi \cdot 2 \text{ s}^{-1}$	52

Literatur

- [1] A. Hirschberg und S. Rienstra. *An Introduction to Acoustics*. IWDE-Report. Besucht am 25.04.2018. 2017. URL: <https://www.win.tue.nl/~sjoerdr/papers/boek.pdf>.
- [2] M. Kaltenbacher, J. Kolerus, S. Gombots und J. Metzger. *Skriptum zur Vorlesungsübung Akustik für Ingenieure*. Skriptum. Technische Universität Wien, 2017.
- [3] M. Kaltenbacher. *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. Springer, 2004. ISBN: 9783540204589.
- [4] A. P. Dowling und J. E. Efwocs Williams. *Sound and sources of sound*. Ellis Horwood series in engineering science. Chichester New York: E. Horwood ; Halsted Press, 1983.
- [5] K. Ehrenfried. *Skript zur Vorlesung Strömungsakustik I*. Skriptum. Technische Universität Berlin, 2003.
- [6] M. Kaltenbacher. *Skriptum zur Vorlesung Strömungsakustik*. Skriptum. Technische Universität Wien, 2018.
- [7] M. A. Poletti und P. D. Teal. „Comparison of methods for calculating the sound field due to a rotating monopole“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 129.6 (2011), S. 3513–3520.
- [8] C. Ocker und W. Pannert. „Imaging of Broadband Noise from Rotating Sources in Uniform Axial Flow“. In: *AIAA Journal* 55.4 (2016), S. 1185–1193.
- [9] M. Abramowitz und I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York: Dover, 1964.
- [10] M. Möser. *Messtechnik der Akustik*. Berlin: Springer, 2010.
- [11] C. Ocker und W. Pannert. „Calculation of the cross spectral matrix with Daniell’s method and application to acoustical beamforming“. In: 120 (Mai 2017), S. 59–69.
- [12] S. Gombots. „Aufbau, Inbetriebnahme und Charakterisierung eines Mikrofonarrays“. ger. Magisterarb. 2015.
- [13] P. Sijtsma und H. Holthusen. „Corrections for Mirror Sources in Phased Array Processing Techniques“. In: *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*. Aeroacoustics Conferences. American Institute of Aeronautics und Astronautics, 2003.
- [14] R. P. Dougherty. „Functional Beamforming“. In: *BeBeC, Berlin Beamforming Conference*, 5. 2014.

- [15] P. Sijtsma. „CLEAN Based on Spatial Source Coherence“. In: *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (28th AIAA Aeroacoustics Conference)*. Aeroacoustics Conferences. American Institute of Aeronautics und Astronautics, 2007.
- [16] G. Herold und E. Sarradj. „Microphone array method for the characterization of rotating sound sources in axial fans“. In: *Noise Control Engineering Journal* 63 (Nov. 2015), S. 546–551.
- [17] R. Dougherty und B. Walker. „Virtual Rotating Microphone Imaging of Broadband Fan Noise“. In: *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (30th AIAA Aeroacoustics Conference)*. Aeroacoustics Conferences. American Institute of Aeronautics und Astronautics, 2009.
- [18] P. Morse und K. Ingard. *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1968.
- [19] E. G. Williams. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. San Diego, Calif.: Academic Press, 1999.
- [20] E. J. Skudrzyk. *The Foundations of Acoustics: Basic Mathematics and Basic Acoustics*. New York: Springer-Verlag, 1971.
- [21] E. W. Weisstein. *Spherical Bessel Differential Equation*. From *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. Besucht am 25.05.2018. URL: <http://mathworld.wolfram.com/SphericalBesselDifferentialEquation.html>.
- [22] R. Bracewell. *The Fourier Transform and Its Applications*. Electrical engineering series. McGraw Hill, 2000. ISBN: 9780073039381.
- [23] E. W. Weisstein. *Delta Function*. From *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. Besucht am 25.05.2018. URL: <http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html>.
- [24] E. Zeidler et al. *Springer-Taschenbuch der Mathematik: Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler Herausgegeben von E. Zeidler*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2012.