



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

Vienna University of Technology

## DIPLOMARBEIT

---

# Geometrische Eigenschaften kubischer Flächen

---

Ausgeführt am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie

Unter der Anleitung von  
Ao.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Martin PETERNELL

durch  
Lukas MITTERWENGER-FESSL  
Anton-Bruckner-Gasse 7, 2380 Perchtoldsdorf

---

Ort, Datum

---

Unterschrift  
Lukas Mitterwenger-Fessl

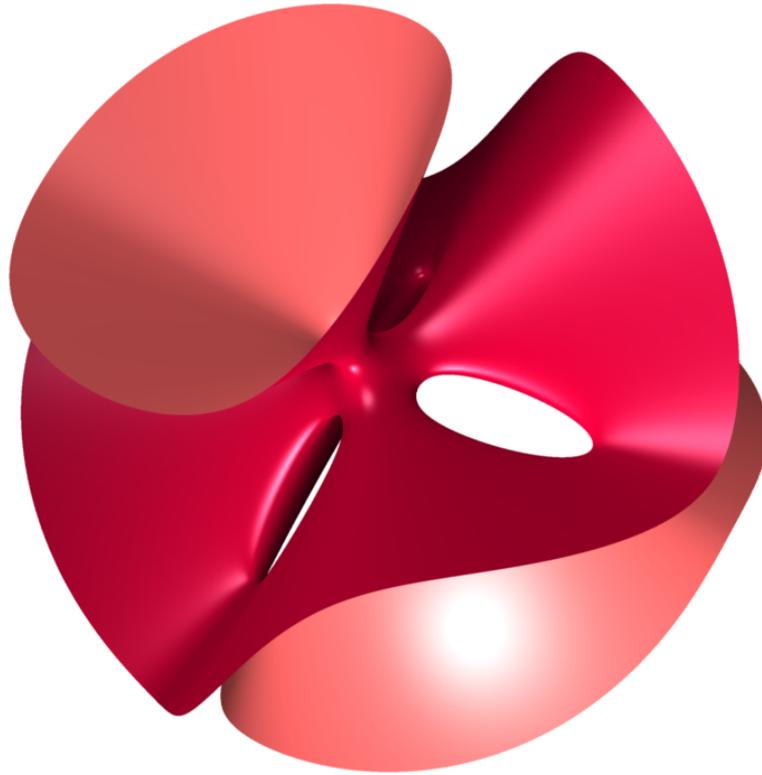


## Abstract

This master's thesis is concerned with numerous characteristics of cubic algebraic surfaces within the context of projective geometry. In comparison to the quadrics these surfaces already allow considerably more projective differentiated types. After a comprehensive chapter with essential basics out of the domain of plane algebraic curves, singularities of cubic surfaces will initially be considered more precisely. It is demonstrated that a cubic surface offers a singular line if and only if it is a ruled surface. Subsequently it is proofed that a nonsingular cubic surface always contains exactly 27 lines and furthermore numerous characteristics of configuration of these lines are described. Moreover rational parametric equations and projective generations for cubic surfaces are developed. The argumentation and structure follows in big parts results from books of Burau [3] and [2]. This Master's Thesis adds numerous proofs and steps of proofs – which were abstained in these oeuvres – and explicates many of those conclusions in a considerably more precise way.

## Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit befasst sich mit zahlreichen Eigenschaften kubischer algebraischer Flächen im Rahmen der projektiven Geometrie. Im Vergleich zu den Quadriken erlauben diese bereits deutlich mehr projektiv unterscheidbare Typen. Nach einem umfassenden Kapitel mit notwendigen Grundlagen aus dem Bereich der ebenen algebraischen Kurven, werden zunächst Singularitäten auf kubischen Flächen genauer betrachtet. Es wird gezeigt, dass eine kubische Fläche genau dann eine singuläre Gerade besitzt, wenn sie eine Regelfläche ist. Im Anschluss daran wird ein Beweis dafür angegeben, dass auf einer singularitätenfreien kubischen Fläche immer genau 27 Gerade liegen und es werden zahlreiche Konfigurationseigenschaften dieser Geraden beschrieben. Des Weiteren werden rationale Parameterdarstellungen und projektive Erzeugungen für kubische Flächen entwickelt. In der Argumentation und im Aufbau wird dabei in großen Teilen den Büchern von Burau [3] und [2] gefolgt. Diese Diplomarbeit ergänzt zahlreiche Beweise und Beweisschritte, auf die in diesen Werken verzichtet wurde und führt viele der dort angegebenen Schlussfolgerungen deutlich genauer aus.



## **Danksagung**

Ein herzliches Dankeschön

- an meine Familie, meine Freunde und Studienkollegen für die Unterstützung und den Rückhalt während meiner gesamten Studienzeit.
- an meinen Betreuer Martin Peternell für die Möglichkeit diese Diplomarbeit zu schreiben und für die zahlreichen Diskussionen und die Hilfe während der Erstellung.
- an meine AHS-Lehrer Martin Walter und Alexandra Lux, die einen wesentlichen Anteil daran tragen, dass ich mich für dieses Studium entschieden habe.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
1.1	Projektive Ebene $\mathbb{P}^2$	7
1.1.1	Definition und analytisches Modell	7
1.1.2	Dualitätsprinzip	10
1.1.3	Projektive Abbildung und projektive Kollineation	11
1.1.4	Projektives Koordinatensystem und Koordinatenwechsel	12
1.1.5	Korrelation und Polarität	13
1.1.6	$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$	13
1.2	Resultante und Formen	14
1.3	Hyperfläche, Singularität, Tangente	18
1.4	Ebene algebraische Kurven	21
1.4.1	Definitionen	21
1.4.2	Eigenschaften einer Kurve	23
1.4.3	Polarsystem	23
1.4.4	Dualgebilde	25
1.4.5	Der Satz von Bezout	26
1.4.6	Kegelschnitte	32
1.4.7	Kubiken	33
1.4.8	Quartiken	34
1.5	$\mathbb{P}^3$	35
1.5.1	Analytisches Modell	35
1.5.2	Dualitätsprinzip	36
1.5.3	Projektive Abbildungen, Koordinatensysteme und Koordinatenwechsel	37
1.5.4	$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$	37
1.5.5	Einschränkung einer Kollineation	38
1.5.6	Darstellungen von Geraden und Ebenen	38
1.5.7	Plückersche Geradenkoordinaten	39
1.5.8	Involutionen und Korrespondenzen zwischen Geraden	40
1.6	Algebraische Flächen	41
1.6.1	Definition	41
1.6.2	Eigenschaften einer Fläche	42
1.6.3	Polarsystem	43
1.6.4	Dualgebilde	44
1.6.5	Quadriken	46
1.6.6	Bezoutscher Satz im $\mathbb{P}^3$	47
<b>2</b>	<b>Kubische Flächen</b>	<b>49</b>
2.1	Definition	49
2.2	Reduzible kubische Flächen	50

2.3	Irreduzible kubische Flächen mit Singularitäten . . . . .	50
2.3.1	Flächen mit isolierten Singularitäten . . . . .	50
2.3.2	Kubische Flächen mit singulären Geraden . . . . .	58
2.4	Kubische Regelflächen . . . . .	61
2.5	Singularitätenfreie irreduzible kubische Flächen . . . . .	81
2.5.1	Die 27 Geraden auf der singularitätenfreien irreduziblen kubischen Fläche	81
2.5.2	Die Konfiguration der 27 Geraden . . . . .	94
2.6	Rationale Parameterdarstellungen kubischer Flächen . . . . .	106
2.6.1	Rationale Parameterdarstellungen für kubische Flächen mit Singularität .	107
2.6.2	Rationale Parameterdarstellungen für singularitätenfreie kubische Flächen	110
2.7	Dualgebilde kubischer Flächen . . . . .	119
2.7.1	Dualgebilde kubischer Flächen mit vier isolierten Singularitäten . . . . .	120
2.7.2	Dualgebilde kubischer Regelflächen . . . . .	126
2.8	Erzeugung kubischer Flächen . . . . .	128

**Abbildungs- und Literaturverzeichnis**

**136**

# 1 Grundlagen

Von Leserinnen und Lesern werden Grundkenntnisse der Algebra, wie die Berechnung von Skalarprodukten, Determinanten, linearen Abbildungen und der Nullstellen von Polynomen sowie der Anwendung des Gaußschen Fundamentalsatzes vorausgesetzt. Weiters werden grundlegende Begriffe der affinen Geometrie benötigt. Um ein umfassendes Verständnis der algebraischen kubischen Flächen zu erlangen, benötigen wir zunächst einen groben Einblick in das Gebiet der projektiven Geometrie. Neben einem streng axiomatischen Zugang, den wir hier nicht näher beleuchten wollen, kann man die projektive Geometrie als Erweiterung der affinen Geometrie auffassen. Da wir später zur Erfassung von Schnittkurven kubischer Flächen mit einer Ebene die sogenannten *ebenen algebraischen Kurven* benötigen, werden wir uns zunächst mit der *projektiven Ebene* beschäftigen. Im nächsten Abschnitt führen wir zunächst die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2$  über  $\mathbb{R}$  und einige weitere Definitionen ein. Die Aussagen gelten auch für die projektive Ebene über  $\mathbb{C}$ , wobei wir hier am Ende des Abschnitts einige zusätzliche Definitionen anführen werden.

Prinzipiell sei festgehalten, dass wir unsere weiteren Betrachtungen stets über dem Grundkörper  $\mathbb{C}(\supseteq \mathbb{R})$  durchführen werden. Bei manchen Ergebnissen wird jedoch speziell darauf hingewiesen, wenn sie zwar für den Körper der komplexen Zahlen erfüllt sind, aber im Allgemeinen für die reellen Zahlen nicht stimmen müssen.

Die Definitionen und Aussagen dieses Abschnitts sind größtenteils entnommen aus Blaschke [1], Kowol [6] und Hulek [5]. Einige Ergänzungen finden sich zudem auf Wikipedia: [18], [12], [17], [15], [16], [19], [13]. Die wesentlichen Eigenschaften der Resultanten, Formen, Hyperflächen und ebenen algebraischen Kurven stammen aus Burau [3]. Die Grundbegriffe aus dem Bereich der algebraischen Flächen finden sich in Burau [2].

## 1.1 Projektive Ebene $\mathbb{P}^2$

### 1.1.1 Definition und analytisches Modell

In einer *affinen Ebene* können Gerade liegen, die sich nicht schneiden – sogenannte Parallele. Für den Übergang zu einer projektiven Ebene werden die Elemente der affinen Ebene durch Fernelemente ergänzt. Dazu wird zu jeder Klasse von parallelen Geraden ein *Fernpunkt* definiert, der die Richtung dieser Geraden angibt. Alle Fernpunkte bilden zusammen die *Ferngerade*. Somit kann auch ein Schnittpunkt von parallelen Geraden angegeben werden. Um den Begriff der affinen Ebene erklären zu können, benötigen wir zunächst den Begriff der Inzidenzstruktur:

**Definition 1.1.1** (Inzidenzstruktur). Eine Inzidenzstruktur  $\langle \mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I} \rangle$  besteht aus drei Mengen mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{P} \cap \mathcal{B} = \emptyset$
- $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$

Die Elemente von  $\mathcal{P}$  heißen *Punkte*, die von  $\mathcal{B}$  *Blöcke*. Die Elemente von  $\mathcal{I}$  heißen Inzidenzen und für  $(P, B) \in \mathcal{I}$  mit  $P \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}$  schreibt man auch  $pIB$ .

Im Folgenden wird die Menge der Blöcke  $\mathcal{B}$  die Geradenmenge  $\mathcal{G}$  sein.

**Definition 1.1.2** (Affine Ebene). Eine Inzidenzstruktur  $\langle \mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I} \rangle$  mit der Punktmenge  $\mathcal{P}$ , der Geradenmenge  $\mathcal{G}$  und der Menge der Inzidenzen  $\mathcal{I}$  heißt affine Ebene, wenn gilt:

- Zu zwei verschiedenen Punkten  $P, Q \in \mathcal{P}$  existiert genau eine Verbindungsgerade  $g \in \mathcal{G}$  mit  $PIg, QIg$ .
- Zu gegebener Gerader  $g \in \mathcal{G}$  und gegebenem Punkt  $P \in \mathcal{P}$  mit  $(P, g) \notin \mathcal{I}$  existiert genau eine Gerade  $h \in \mathcal{G}$  mit  $PIh$  und  $g \cap h = \emptyset$ .
- Es existieren drei verschiedene Punkte aus  $\mathcal{P}$ , die nicht alle auf einer Geraden aus  $\mathcal{G}$  liegen.

*Bemerkung 1.1.3.* Der Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  ist eine affine Ebene, wobei  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$  gilt und die Menge  $\mathcal{G}$  alle eindimensionalen affinen Unterräume umfasst. Die Inzidenzrelation ist die Relation  $\in$ . Analoges gilt für den Vektorraum  $\mathbb{C}^2$ .

*Bemerkung 1.1.4.* Oft schreibt man  $g = PQ$ , um anzudeuten, dass die Gerade  $g$  die Verbindungsgerade der Punkte  $P$  und  $Q$  ist.

**Definition 1.1.5** (Parallelität). Zwei Gerade  $g, h \in \mathcal{G}$  heißen parallel (i.Z.  $g \parallel h$ ), wenn entweder  $g = h$  oder wenn  $g \cap h = \emptyset$ .

*Bemerkung 1.1.6.* Die Parallelitätsrelation ist eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklasse  $\langle g \rangle$  der zu  $g$  parallelen Geraden wird auch als Richtung von  $g$  bezeichnet.

Bei der Erweiterung zu einer projektiven Ebene wird nun eine affine Ebene um eben diese Äquivalenzklassen von parallelen Geraden, die sogenannten Fernpunkte, erweitert. Alle Fernpunkte bilden zusammen die Ferngerade  $u$ . Die neuen erweiterten Mengen  $\langle \overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{I}} \rangle$  der Inzidenzstruktur lauten dann:

- $\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{ \langle g \rangle, g \in \mathcal{G} \}$
- $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cup \{ u \}$
- $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \cup \{ (\langle g \rangle, h) : g \parallel h, g \in \mathcal{G}, h \in \mathcal{G} \} \cup \{ (\langle g \rangle, u) : g \in \mathcal{G} \}$

Nun können wir auch die projektive Ebene definieren:

**Definition 1.1.7** (Projektive Ebene). Eine Inzidenzstruktur  $\langle \overline{\mathcal{P}}, \overline{\mathcal{G}}, \overline{\mathcal{I}} \rangle$  mit der Punktmenge  $\overline{\mathcal{P}}$ , der Geradenmenge  $\overline{\mathcal{G}}$  und der Menge der Inzidenzen  $\overline{\mathcal{I}}$  heißt projektive Ebene, wenn gilt:

- Zu zwei verschiedenen Punkten  $P, Q \in \overline{\mathcal{P}}$  existiert genau eine Verbindungsgerade  $g \in \overline{\mathcal{G}}$  mit  $P\overline{\mathcal{I}}g, Q\overline{\mathcal{I}}g$ .
- Zu zwei verschiedenen Geraden  $g, h \in \overline{\mathcal{G}}$  existiert genau ein Schnittpunkt  $P \in \overline{\mathcal{P}}$  mit  $P\overline{\mathcal{I}}g, P\overline{\mathcal{I}}h$ .
- Es existieren vier verschiedene Punkte aus  $\overline{\mathcal{P}}$ , sodass je drei davon nicht auf einer Geraden aus  $\overline{\mathcal{G}}$  liegen.

*Bemerkung 1.1.8.* Man sieht leicht, dass eine affine Ebene mit der oben erwähnten projektiven Erweiterung eine projektive Ebene darstellt.

*Bemerkung 1.1.9.* Wird die affine Ebene  $\mathbb{R}^2$  auf diese Art projektiv erweitert, erhält man die projektiv abgeschlossene Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Für unsere weiteren Betrachtungen benötigen wir jetzt ein analytisches Modell der projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Dazu dient uns der Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  mit den Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2)$  in folgender Weise:

- $\mathbb{R}^2$  wird eingebettet in  $\mathbb{R}^3$  als Ebene  $x_0 = 1$ , also  $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
- Jeder Punkt  $X \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist eindeutig dargestellt durch die Gerade  $\mathcal{O}X$ , also die Verbindungsgerade des Ursprungs  $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$  mit  $X = (x_0, x_1, x_2)$ . Dadurch erhalten wir die Punktmenge von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  mit:

$$\mathcal{P} = \{ \vec{x}\mathbb{R} = (x_0, x_1, x_2)\lambda = (x_0 : x_1 : x_2), \lambda \neq 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\} \}.$$

Wir bezeichnen  $\vec{x}\mathbb{R} = (x_0, x_1, x_2)\lambda$  als homogene (projektive) Koordinaten des Punktes  $X \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Die Doppelpunkte bzw. die Schreibweise als Vielfaches von  $\lambda$  sollen andeuten, dass es nur auf das Verhältnis der drei Koordinaten zueinander ankommt. Man erhält nämlich:

- Für  $X = \vec{x}\mathbb{R}$  und  $Y = \vec{y}\mathbb{R}$  gilt:

$$X = Y \Leftrightarrow \vec{x} \text{ und } \vec{y} \text{ sind linear abhängig.}$$

- $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$  stellt keinen Punkt von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  dar.

*Bemerkung 1.1.10.* Formal spricht man beim  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  auch vom Quotientenraum  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\} / \sim$  bezüglich der Äquivalenzrelation

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x = \lambda y, x \in \mathbb{R}^3, y \in \mathbb{R}^3.$$

Die Umrechnung zwischen Punkten aus  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  funktioniert dann wie folgt:

- Sind  $(x, y)$  die affinen Koordinaten eines Punktes  $X$  in  $\mathbb{R}^2$ , ergeben sich für  $X$  in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  die homogenen Koordinaten  $(1, x, y)$ . Dabei muss die  $x$ -Achse parallel zu  $x_1$  und die  $y$ -Achse parallel zu  $x_2$  gewählt werden, wobei dann  $(\mathcal{O}, x, y)$  ein affines Koordinatensystem mit Ursprung  $\mathcal{O}$  in  $\mathbb{R}^2$  darstellt. Klarerweise erhält man so nur homogene Koordinaten für eigentliche Punkte, also Punkte, die keine Fernpunkte sind.
- Umgekehrt erhält man die affinen aus den homogenen Koordinaten für jeden eigentlichen Punkt durch

$$x = \frac{x_1}{x_0} \text{ und } y = \frac{x_2}{x_0}.$$

- Für Fernpunkte  $F \in u$  liegt die Gerade  $\mathcal{O}F$  in der Ebene  $x_0 = 0$  (hat daher keinen Schnittpunkt mit der Ebene  $x_0 = 1$ ), also

$$F \in u \Leftrightarrow F = (0, f_1, f_2)\mathbb{R}.$$

Die Gerade  $\mathcal{O}F$  hat  $(0, f_1, f_2)$  als Richtungsvektor.

Nachdem wir uns mit der Punktmenge der projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  auseinandergesetzt haben, brauchen wir auch für die Geradenmenge eine Übersetzung in das analytische Modell.

- Jede Gerade  $g \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  wird eindeutig dargestellt durch die Ebene  $\gamma = \mathcal{O}g$ , also die Verbindungsebene des Ursprungs  $\mathcal{O}$  mit der Geraden  $g$ . Die Ebene  $\gamma$  ist gegeben durch

$$\gamma : g_0x_0 + g_1x_1 + g_2x_2 = 0 (= \vec{g} \cdot \vec{x}) \text{ mit } (g_0, g_1, g_2) \neq (0, 0, 0). \quad (1.1)$$

Dadurch erhalten wir die Geradenmenge von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  mit:

$$\mathcal{G} = \{ \mathbb{R}\vec{g} = \lambda(g_0, g_1, g_2) = (g_0 : g_1 : g_2), \lambda \neq 0, \vec{g} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\} \}.$$

Es sind dann  $\mathbb{R}\vec{g} = \lambda(g_0, g_1, g_2)$  die homogenen Koordinaten der Geraden  $g$ . Die Doppelpunkte deuten wieder an, dass es nur auf das Verhältnis der Koordinaten zueinander ankommt.

- Zur Unterscheidung von Punkten und Geraden wird oft folgende Notation verwendet:

$$\begin{aligned} \vec{x}\mathbb{R} &\dots \text{ Punkt} \\ \mathbb{R}\vec{g} &\dots \text{ Gerade} \end{aligned}$$

- Die Ferngerade  $u \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  wird dargestellt durch die Ebene  $x_0 = 0$ , also  $u = \mathbb{R}(1, 0, 0)$ .
- Der Vektor  $\vec{g} \in \mathbb{R}^3$  ist Normalvektor der Ebene  $\gamma$ .

Die Umrechnung zwischen affinen und homogenen Geradendarstellungen erfolgt im Fall einer eigentlichen Geraden (also nicht der Ferngeraden) durch Division der Geradengleichung durch  $x_0$  bzw. umgekehrt durch Multiplikation mit  $x_0$ . Ist die Gerade  $g$  in homogenen Koordinaten gegeben durch die Gleichung  $g_0x_0 + g_1x_1 + g_2x_2 = 0$ , so erhält man nach der Division durch  $x_0$  die affine Geradendarstellung mit  $g_0 + g_1x + g_2y = 0$ . Die Umkehrung durch Multiplikation mit  $x_0$  ist offensichtlich. Zur Vervollständigung unseres analytischen Modells benötigen wir jetzt noch die passende Inzidenzrelation. Wir sagen, dass ein Punkt  $X = \vec{x}\mathbb{R}$  genau dann auf einer Geraden  $g = \mathbb{R}\vec{g}$  liegt, wenn gilt

$$\vec{g} \cdot \vec{x} = g_0x_0 + g_1x_1 + g_2x_2 = 0 \text{ also } \vec{g} \perp \vec{x}.$$

Unsere Inzidenzmenge lautet also

$$\mathcal{I} = \{ (X, g) = (\vec{x}\mathbb{R}, \mathbb{R}\vec{g}), \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}, \vec{g} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathcal{O}\}, \text{ mit } \vec{g} \cdot \vec{x} = 0 \}.$$

*Bemerkung 1.1.11.* Wir wollen noch Eigenschaften von Geraden in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  angeben:

- Sind  $P$  und  $Q$  zwei verschiedene Punkte in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , so existiert genau eine projektive Gerade, die durch  $P$  und  $Q$  verläuft.
- Sind  $P_1, P_2, \dots, P_r$  endlich viele Punkte in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , so existiert eine projektive Gerade, die durch keinen der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_r$  geht.

### 1.1.2 Dualitätsprinzip

Betrachtet man die obige Definition und das analytische Modell von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  etwas genauer, so sieht man, dass die Darstellungen für Punkte und Gerade identisch sind. Es ist also möglich, in Aussagen, die mithilfe dieses analytischen Modells gewonnen werden, Punkte und Gerade zu vertauschen. Geht man von einer Aussage über Punkte aus, so erhält man die sogenannte *duale Aussage*, indem man die Punkte durch Gerade und das Verbinden von Punkten durch das

Schneiden von Geraden ersetzt. Ist somit eine Aussage für Punkte wahr, so ist auch die duale Aussage für Gerade wahr. Man erhält die *duale projektive Ebene*  $\mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R}) = (\mathcal{P}^*, \mathcal{G}^*, \mathcal{I}^*)$  mit  $\mathcal{P}^* = \mathcal{G}, \mathcal{G}^* = \mathcal{P}, \mathcal{I}^* = \mathcal{I}$ . Analoges gilt, wenn man von einer Aussage über Gerade ausgeht und zur dualen Aussage über Punkte übergeht. Dual zur dualen projektiven Ebene ist also wieder die projektive Ebene.

*Bemerkung 1.1.12.* Als Beispiel wollen wir die Aussagen aus der obigen Bemerkung 1.1.11 dualisieren, da wir sie später auch noch benötigen werden:

- Sind  $g$  und  $h$  zwei verschiedene Gerade in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , so existiert genau ein Punkt, der auf beiden Geraden liegt – der Schnittpunkt.
- Sind  $g_1, g_2, \dots, g_r$  endlich viele Gerade in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , so existiert ein Punkt, der auf keiner der Geraden  $g_1, g_2, \dots, g_r$  liegt.

Es folgen nun ein paar Definitionen zu Begriffen, die wir immer wieder benötigen.

### 1.1.3 Projektive Abbildung und projektive Kollineation

**Definition 1.1.13** (Projektive Abbildung). Eine Abbildung  $\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  heißt projektiv, wenn es eine injektive lineare Abbildung

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ mit } \phi(\langle x \rangle) = \langle \tilde{\phi}(x) \rangle, \forall \langle x \rangle \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

gibt, wobei sich  $\langle x \rangle$  auf die Darstellung der Punkte von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  als Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation  $\sim$  bezieht (siehe 1.1.10).

*Bemerkung 1.1.14.* Da sich lineare Abbildungen durch eine geeignete Matrix darstellen lassen, ist dies auch für projektive Abbildungen möglich. Die projektive Abbildung sei gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ X = \vec{x}\mathbb{R} &\mapsto X' = \vec{x}'\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die zugrunde liegende lineare Abbildung  $\tilde{\phi}$  sei dargestellt durch die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Dann gilt für die projektive Abbildung

$$\vec{x}'\mathbb{R} = (A \cdot \vec{x})\mathbb{R}.$$

Für eine projektive Abbildung müssen die Koeffizienten von  $A$  nur bis auf ein Vielfaches bestimmt sein, also  $A \doteq \lambda A, \lambda \neq 0$ .

Gewöhnlich benötigen wir den folgenden Spezialfall der projektiven Abbildungen:

**Definition 1.1.15** (Projektive Kollineation). Eine projektive Abbildung  $\phi$ , deren zugrunde liegende lineare Abbildung  $\tilde{\phi}$  invertierbar (also  $\det(A) \neq 0$ ) ist, heißt projektive Kollineation. Die Abbildungen aus Definition 1.1.13 sind sicher invertierbar, da im endlichdimensionalen aus injektiv schon bijektiv folgt.

*Bemerkung 1.1.16.* Die projektiven Kollineationen bilden die projektive lineare Gruppe  $\text{PGL}(\mathbb{R})$ . Wir geben ein paar Eigenschaften von projektiven Kollineationen an:

- $\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist eine bijektive Punktabbildung, da  $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linear unabhängige Vektoren auf linear unabhängige abbildet.

- Kollineare Punkte (Punkte, die auf einer Geraden liegen) werden auf kollineare Punkte abgebildet.
- Gilt für einen Punkt  $X \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  die Gleichung  $X = \phi(X)$ , so nennt man ihn Fixpunkt. Eine projektive Kollineation mit vier oder mehr Fixpunkten, wobei keine drei davon auf einer Geraden liegen, stellt sich immer als die Identitätsabbildung  $\text{id}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}$  heraus. Auch diese ist nur bis auf einen Faktor bestimmt.
- Die duale projektive Kollineation  $\phi^* : \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$  bildet Gerade bijektiv auf Gerade ab und wird dargestellt durch die Matrix  $A^{-T}$ .

### 1.1.4 Projektives Koordinatensystem und Koordinatenwechsel

Von einem Koordinatensystem erwartet man, dass die Koordinaten eines Punktes nach einer bijektiven Punktabbildung in ein neues Koordinatensystem unverändert bleiben. Die bijektiven Punktabbildungen sind durch die projektiven Kollineationen gegeben und für deren zugrunde liegende lineare Abbildungen benötigt man zur eindeutigen Festlegung grundsätzlich drei linear unabhängige Vektoren  $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2$  (entspricht drei Punkten aus  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ) und deren Bilder  $\vec{\tilde{b}}_0, \vec{\tilde{b}}_1, \vec{\tilde{b}}_2$ . Jedoch ist durch die Bezeichnung  $X = \vec{x}\mathbb{R}$  zwar  $X$  durch  $\vec{x}$  festgelegt, aber nicht umgekehrt. Daher ist von vornherein nicht klar, welches jeweilige Vielfache von  $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2$  bzw.  $\vec{\tilde{b}}_0, \vec{\tilde{b}}_1, \vec{\tilde{b}}_2$  zur Berechnung der linearen Abbildung  $A$  herangezogen werden soll. Durch die Angabe eines zusätzlichen vierten Punktes  $\vec{e}$  und seines Bildes  $\vec{\tilde{e}}$  und die Bedingung, dass die jeweiligen Vielfachen der ersten drei Punkte so gewählt werden müssen, dass gilt

$$\begin{aligned}\vec{e} &= \vec{b}_0 + \vec{b}_1 + \vec{b}_2, \\ \vec{\tilde{e}} &= \vec{\tilde{b}}_0 + \vec{\tilde{b}}_1 + \vec{\tilde{b}}_2,\end{aligned}$$

kann dieses Problem gelöst werden. Die Anpassung der Vielfachen von  $\vec{b}_0, \vec{b}_1, \vec{b}_2$  bzw.  $\vec{\tilde{b}}_0, \vec{\tilde{b}}_1, \vec{\tilde{b}}_2$  nennt man Umnormierung. Nach der Umnormierung berechnet man die Matrix  $A$  unter den Bedingungen

$$\begin{aligned}\vec{b}_0 &\mapsto \vec{\tilde{b}}_0 \\ \vec{b}_1 &\mapsto \vec{\tilde{b}}_1 \\ \vec{b}_2 &\mapsto \vec{\tilde{b}}_2\end{aligned}$$

und erhält so die projektive Kollineation, für die schließlich auch  $\vec{e} \mapsto \vec{\tilde{e}}$  gilt. Man benötigt also vier Punkte, wobei je drei davon nicht auf einer Geraden liegen dürfen, und die jeweiligen Bilder der Punkte zur Festlegung einer projektiven Kollineation. In weiterer Folge benötigt man zur Festlegung eines projektiven Koordinatensystems ebenfalls vier Punkte, wobei je drei davon nicht auf einer Geraden liegen dürfen.

$$\Sigma(B_0 = \vec{b}_0\mathbb{R}, B_1 = \vec{b}_1\mathbb{R}, B_2 = \vec{b}_2\mathbb{R}, E = \vec{e}\mathbb{R}).$$

Man nennt  $B_0, B_1, B_2$  Grundpunkte und  $E$  Einheitspunkt. Man kann zeigen, dass eine projektive Kollineation, die einen Koordinatenwechsel zwischen den Koordinatensystemen  $\Sigma(B_0, B_1, B_2, E)$  und  $\tilde{\Sigma}(\vec{\tilde{B}}_0, \vec{\tilde{B}}_1, \vec{\tilde{B}}_2, \vec{\tilde{E}})$  realisiert, durch eine Matrix  $A$  dargestellt wird, die spaltenweise aus den Darstellungen der  $B_i, i = 0, 1, 2$  bezüglich des Koordinatensystems  $\tilde{\Sigma}$  besteht.

### 1.1.5 Korrelation und Polarität

**Definition 1.1.17** (Projektive Korrelation). Eine projektive Abbildung  $\kappa : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$  mit  $\mathbb{R}\vec{g} = \mathbb{R}(A\vec{x})$ ,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $\det(A) \neq 0$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{x}' \in \mathbb{R}^3$  heißt projektive Korrelation. Sie bildet Punkte des  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  bijektiv auf Gerade des  $\mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$  ab. Projektive Korrelationen sind durch ein Viereck und das entsprechende Bildvierseit (vier Gerade, bei denen je drei ein nicht entartetes Dreieck bilden) eindeutig festgelegt.

*Bemerkung 1.1.18.* Die zu  $\kappa : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$  duale Korrelation  $\kappa^* : \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist dargestellt durch  $\vec{x}\mathbb{R} = (A^{-T}\vec{g})\mathbb{R}$ .

**Definition 1.1.19** (Konjugiertheit). Ein Punkt  $Q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ist konjugiert zu einem Punkt  $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , wenn  $Q \in \kappa P$ . Analog heißt eine Gerade  $h \in \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$  konjugiert zu einer Geraden  $g \in \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$ , wenn  $\kappa^*(g) \in h$ .

**Definition 1.1.20** (Adjungierte Abbildung und Selbstadjungiertheit).  $\kappa^{*-1} : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$  heißt die zu  $\kappa$  adjungierte Abbildung. Eine projektive Kollineation heißt selbstadjungiert, wenn  $\kappa^* \circ \kappa = \text{id}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}$  ist.

*Bemerkung 1.1.21.* Man kann zeigen, dass für die Matrix  $A$  der Abbildung  $\kappa$  im Fall einer selbstadjungierten Korrelation  $A^T = \pm A$  gelten muss. Für eine bijektive lineare Abbildung ist jedoch für den Fall  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  nur  $A^T = A$  möglich.

**Definition 1.1.22.** Eine projektive Korrelation mit  $\phi^* \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}$  heißt Polarität. Für die analytische Darstellung gilt dann  $A^T = A$ .

*Bemerkung 1.1.23.* Im Fall einer Polarität ist die oben definierte Konjugiertheitsrelation symmetrisch.

### 1.1.6 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Ganz analog zu  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  geht man jetzt von einer affinen Ebene  $\mathbb{C}^2$  aus und erweitert sie um die Fernelemente. Auch der Aufbau des analytischen Modells folgt dem selben Schema wie bei  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Wir ergänzen nun noch ein paar weitere Definitionen, die insbesondere die reellen Elemente von  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  herausstreichen sollen.

**Definition 1.1.24** (Konjugiert komplexe Punkte). Seien  $x_i, \bar{x}_i, i = 0, 1, 2$  konjugiert komplexe Zahlen. Dann nennt man die Punkte  $P = (x_0, x_1, x_2)\mathbb{C}$ ,  $\bar{P} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\mathbb{C}$  konjugiert komplex. Analoges gilt für Gerade  $g = \mathbb{C}(g_0, g_1, g_2)$ ,  $\bar{g} = \mathbb{C}(\bar{g}_0, \bar{g}_1, \bar{g}_2)$ . Die Abbildung  $\iota : P = (x_0, x_1, x_2)\mathbb{C} \mapsto \bar{P} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\mathbb{C}$  heißt Konjugieren. Ein Punkt  $P$  heißt reell, wenn  $P = \bar{P}$  gilt. Analog führt man den Begriff der reellen Geraden ein.

*Bemerkung 1.1.25.* Diese Konjugiertheit ist nicht zu verwechseln mit jener aus Definition 1.1.19.

*Bemerkung 1.1.26.* Betrachtet man Koordinatenwechsel, bei denen ein reelles Koordinatensystem  $\Sigma$  (reelle Punkte  $B_0, B_1, B_2, E$ ) auf ein weiteres reelles Koordinatensystem  $\tilde{\Sigma}$  abgebildet wird, so ist die obige Definition 1.1.24 bezüglich dieser invariant. Für Abbildungen  $\vec{x}'\mathbb{C} = (B\vec{x})\mathbb{C}$  mit  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gilt also  $(B\vec{x}) = (\overline{B\vec{x}}) = \vec{x}'$ .

**Definition 1.1.27** (Reelle Kollineation). Eine Kollineation  $\phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  heißt reell, mit  $\vec{x}'\mathbb{C} = (A\vec{x})\mathbb{C}$ , wenn  $A$  bis auf einen gemeinsamen Faktor  $\lambda \in \mathbb{C}$  lauter reelle Einträge hat.

*Bemerkung 1.1.28.* Analoges gilt für reelle Korrelationen und Polaritäten.

*Bemerkung 1.1.29.* Jeder nicht reelle Punkt  $P \neq \bar{P}$  liegt genau auf einer reellen Geraden  $g = P\bar{P}$ . Und dual dazu: Jede nicht reelle Gerade  $h \neq \bar{h}$  enthält genau einen reellen Punkt  $P = h \cap \bar{h}$ .

## 1.2 Resultante und Formen

Im nächsten Abschnitt wollen wir ein Kriterium einführen, das uns angibt, ob zwei gegebene Polynome eine gemeinsame Wurzel besitzen. Das wird uns später helfen eine Maximalanzahl von gemeinsamen Punkten ebener algebraischer Kurven und Flächen zu berechnen. Es gilt folgender Zusammenhang:

**Satz 1.2.1.** *Seien  $f$  und  $g$  zwei Polynome in  $x$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{C}$ . Es gelte  $\text{Grad}(f) = n$  und  $\text{Grad}(g) = m$ , also*

$$\begin{aligned} f(x) &= f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_0, \\ g(x) &= g_m x^m + g_{m-1} x^{m-1} + \cdots + g_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

mit  $f_n \neq 0, g_m \neq 0$ . Dann haben  $f$  und  $g$  genau dann eine gemeinsame Wurzel, wenn zwei Polynome  $F$  und  $G$  existieren, sodass  $Ff + Gg = 0$  gilt, wobei  $\text{Grad}(F) < m$  und  $\text{Grad}(G) < n$ .

*Beweis.*

- $\Rightarrow$ : Angenommen es existiert eine gemeinsame Wurzel  $w$  von  $f$  und  $g$ . Dann lässt sich bei beiden Polynomen ein Faktor abspalten, also

$$f(x) = (x - w)\tilde{f}(x), \tag{1.3}$$

$$g(x) = (x - w)\tilde{g}(x), \tag{1.4}$$

wobei  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  jeweils Polynome sind mit  $\text{Grad}(\tilde{f}) < n$  bzw.  $\text{Grad}(\tilde{g}) < m$ . Wir multiplizieren (1.3) mit  $\tilde{g}(x)$  und (1.4) mit  $\tilde{f}(x)$  und erhalten

$$\begin{aligned} f(x)\tilde{g}(x) &= (x - w)\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \\ \text{und } g(x)\tilde{f}(x) &= (x - w)\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \end{aligned}$$

und daraus weiter durch Zusammenfügen

$$\begin{aligned} g(x)\tilde{f}(x) &= f(x)\tilde{g}(x) \\ \Leftrightarrow g(x)\tilde{f}(x) - f(x)\tilde{g}(x) &= 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir die beiden Polynome  $F(x) = -\tilde{g}(x)$  und  $G = \tilde{f}(x)$  gefunden.

- $\Leftarrow$ : Es gelte  $Ff + Gg = 0$  als  $Ff = -Gg$ . Nach dem Gauß'schen Fundamentalsatz lässt sich  $f$  als Produkt von  $n$  Faktoren schreiben. Da aber  $\text{Grad}(G) < n$  muss wegen  $Ff = -Gg$  zumindest einer dieser Faktoren von  $f$  auch ein Teiler von  $g$  sein. Also haben  $f$  und  $g$  eine gemeinsame Wurzel.

□

Zu gegebenen Polynomen  $f$  und  $g$  wollen wir nun klären, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit  $F$  und  $G$  mit  $Ff + Gg = 0$  existieren. Sei

$$\begin{aligned} F(x) &= F_{m-1}x^{m-1} + F_{m-2}x^{m-2} + \cdots + F_0, \\ G(x) &= G_{n-1}x^{n-1} + G_{n-2}x^{n-2} + \cdots + G_0, \end{aligned}$$





die Darstellung

$$\begin{aligned}
 f(x_0, x_1, x_2) &= \sum_{i_1, i_2=0}^2 a_{i_1 i_2} x_{i_1} x_{i_2} \\
 &= a_{00} x_0^2 + a_{01} x_0 x_1 + a_{02} x_0 x_2 + a_{10} x_0 x_1 \\
 &\quad + a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + a_{20} x_0 x_2 + a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \\
 &= a_{00} x_0^2 + (a_{01} + a_{10}) x_0 x_1 + (a_{02} + a_{20}) x_0 x_2 + a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \\
 &= \widetilde{a}_{00} x_0^2 + \widetilde{a}_{01} x_0 x_1 + \widetilde{a}_{02} x_0 x_2 + \widetilde{a}_{11} x_1^2 + \widetilde{a}_{12} x_1 x_2 + \widetilde{a}_{22} x_2^2
 \end{aligned}$$

Die  $3^2 = 9$  Koeffizienten reduzieren sich also auf  $\binom{4}{2} = 6$ . In der Regel wird man diese neuen

Koeffizienten dann auch platzsparender, etwa mit  $a_j, j = 0, 1, \dots, \binom{p+q}{q}$ , bezeichnen.

*Bemerkung 1.2.8.* Angenehmerweise verhalten sich Formen in  $q + 1$  Veränderlichen oft sehr ähnlich wie beliebige Polynome in  $q$  Variablen. Zum Beispiel kann man das Polynom (1.2) zunächst homogenisieren zu einer *binären* Form vom Grad  $n$

$$f(x_0, x_1) = f_n x_1^n + f_{n-1} x_1^{n-1} x_0 + \dots + f_0 x_0^n$$

und dann zeigen, dass auch hier eine Zerlegung von  $f$  in ein Produkt von  $n$  binären *Linearformen* (höchster auftretender Grad ist 1) mit Koeffizienten aus  $\mathbb{C}$  möglich ist:

$$\begin{aligned}
 f(x_0, x_1) &= \prod_{i=1}^h (a_1^{(i)} x_1 + a_0^{(i)} x_0)^{\sigma_i} \text{ mit } \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_h = n \text{ und} \\
 &\quad \left| \begin{array}{cc} a_1^{(i)} & a_0^{(i)} \\ a_1^{(j)} & a_0^{(j)} \end{array} \right| \neq 0 \text{ bei } i \neq j.
 \end{aligned}$$

Dazu muss man nur die einzelnen nach dem Gaußschen Fundamentalsatz existierenden linearen Faktoren des Polynoms homogenisieren.

*Bemerkung 1.2.9.* Ist eine Binärform  $n$ -ten Grades durch Linearformen mit Vielfachheitssumme größer als  $n$  teilbar, so muss  $f$  identisch verschwinden.

*Bemerkung 1.2.10.* Zwar zerfällt eine binäre Form  $f$  vom Grad  $p$  immer in ein Produkt von  $p$  binären Linearformen, im allgemeinen gilt das aber nicht für beliebige  $(q + 1)$ -äre Formen. Eine  $(q + 1)$ -äre Form vom Grad  $p$  kann in ein Produkt von  $(q + 1)$ -ären Formen niederen Grades, deren Gradsumme  $p$  ist, zerfallen. Für den Fall, dass eine Form nicht zerfällt, sagt man, sie ist *irreduzibel*.

Für Formen  $f(x_0, x_1, \dots, x_q)$  vom Grad  $p$  gilt das folgende

**Lemma 1.2.11** (Eulersche Beziehung).

$$\sum_{i=0}^q \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = p \cdot f$$

Möglich sind auch Formen mit mehreren Variablenreihen, wie sie bei der sogenannten *Polaren* auftreten. Gegeben sei eine Form  $f(z_0, z_1, \dots, z_q)$  vom Grad  $p > 1$ . Setzt man

$$z_i = x_i \lambda + y_i \mu \text{ für } i = 0, 1, \dots, q,$$

in die Form  $f$  ein und fasst man die Terme nach Potenzen von  $\lambda$  und  $\mu$  zusammen, so erhält man eine binäre Form in  $\lambda$  und  $\mu$

$$F(\lambda, \mu) = F_0\lambda^p + F_1\lambda^{p-1}\mu + \dots + F_p\mu^p$$

mit Koeffizienten  $F_j$  ( $j = 0, 1, \dots, p$ ), die rational von  $x_i$  und  $y_i$  ( $i = 0, 1, \dots, q$ ) abhängen. Insbesondere erhält man

$$F_0 = f(x_0, x_1, \dots, x_q)$$

$$F_1 = \sum_{i=0}^q \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i$$

**Definition 1.2.12** (Polare). Man nennt

$$F_1 = \sum_{i=0}^q \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i$$

die Polare (oder Polarform) von  $(y_0, y_1, \dots, y_q)$  bezüglich der Form  $f(x_0, x_1, \dots, x_q)$ .

*Bemerkung 1.2.13. Lineare Substitutionen*

$$x_i = \sum_{j=0}^q a_{ij} u_j \text{ mit } i = 0, 1, \dots, q$$

bei denen aus einer gegebenen Form  $f(x_0, x_1, \dots, x_q)$  die Form

$$g(u_0, u_1, \dots, u_q) = f\left(\sum_{j=0}^q a_{0j} x_j, \sum_{j=0}^q a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=0}^q a_{qj} x_j\right)$$

entsteht, und die Bildung der Polaren sind vertauschbare Prozesse.

### 1.3 Hyperfläche, Singularität, Tangente

Analog zu  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  bezeichnet  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  den  $n$ -dimensionalen projektiven Raum über  $\mathbb{C}$ . Die Definition und das analytische Modell folgen demselben Aufbau wie bei der projektiven Ebene. Konkret werden wir das später noch für den projektiven Raum  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  betrachten. In Zukunft schreiben wir für  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  nur mehr kurz  $\mathbb{P}^n$ . Des weiteren wollen wir mit  $\mathcal{P}_d$  einen  $d$ -dimensionalen Teilraum des  $\mathbb{P}^n$  bezeichnen. Man nennt diesen dann erwartungsgemäß für  $d = 0$  Punkt, für  $d = 1$  Gerade und für  $d = 2$  Ebene. Dabei spielt für die Bezeichnung nur der Index eine Rolle, d.h. Punkte können statt mit  $\mathcal{P}_0$  auch mit  $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \dots$  bezeichnet werden und Gerade entsprechend mit  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \dots$  usw. Zusätzlich werden wir für Punkte statt  $(x_0, x_2, \dots, x_n)\mathbb{C}$  nur mehr kurz  $(x_0, x_2, \dots, x_n)$  schreiben.

*Bemerkung 1.3.1.* Als eindimensionale Teilräume besitzen Gerade im  $\mathbb{P}^n$  eine Parameterdarstellung der Gestalt

$$x_i = p_i\lambda + q_i\mu \text{ mit } i = 0, 1, \dots, n$$

wobei  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, \dots, p_n)$  und  $\mathcal{Q}_0 = (q_0, q_1, \dots, q_n)$  zwei verschiedene Punkte auf der Geraden sind. Analog konstruiert man Parameterdarstellungen für höherdimensionale Teilräume  $\mathcal{P}_d$  mit  $d + 1$  linear unabhängigen Punkten aus  $\mathcal{P}_d$ .

**Definition 1.3.2** (Hyperfläche des  $\mathbb{P}^n$  und Hyperebene).  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  sei eine  $n$ -äre Form vom Grad  $p$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{C}$ . Die Gesamtheit aller Punkte des  $\mathbb{P}^n$ , deren Koordinaten die Gleichung

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1.6)$$

erfüllen, heißt Hyperfläche des  $\mathbb{P}^n$ . Ist  $p = 1$  so heißt die Hyperfläche auch Hyperebene und stellt einen  $(n - 1)$ -dimensionalen Teilraum des  $\mathbb{P}^n$  dar.

*Bemerkung 1.3.3.* Aus Bemerkung 1.2.10 wissen wir, dass Formen zerfallen können. Demnach kann auch eine Hyperfläche in Hyperflächen von niedrigerem Grad zerfallen. Ist die Form jedoch irreduzibel, spricht man bei der zugehörigen Hyperfläche auch von einer *projektiven Varietät*.

*Bemerkung 1.3.4.* Einige Beispiele:

- $n = 1$ : Aus Bemerkung 1.2.8 ist bekannt, dass  $f(x_0, x_1)$  nach dem Gaußschen Fundamentalsatz in binäre Linearformen mit gewissen ganzzahligen Exponenten zerfällt. Daher ist die Hyperfläche auf der *projektiven Geraden*  $\mathbb{P}^1$  ein System von Punkten, je mit Vielfachheiten versehen.
- $n = 2$ : Wir bezeichnen die Hyperflächen des  $\mathbb{P}^2$  als Kurven. Die Hyperebenen sind Gerade (vergleiche auch 1.1).
- $n = 3$ : Die Hyperflächen des  $\mathbb{P}^3$  werden Flächen genannt und die Hyperebenen sind Ebenen.

**Definition 1.3.5** (Vielfachheit eines Punktes und Singularität).  $F_p$  sei die durch eine Gleichung der Gestalt (1.6) definierte Hyperfläche des  $\mathbb{P}^n$  vom Grad  $p$ .  $\mathcal{S}_0 = (s_0, s_1, \dots, s_n)$  sei ein Punkt, der auf dieser Hyperfläche liegt (also dessen Koordinaten die Gleichung erfüllen). Wir sagen  $\mathcal{S}_0$  ist von der Vielfachheit  $s \geq 1$ , wenn für die Koordinaten von  $\mathcal{S}_0$  alle partiellen Ableitungen von  $f$  bis zur  $(s - 1)$ -ten, aber nicht alle  $s$ -ten Ableitungen verschwinden, dass heißt

$$k \leq s - 1 : \frac{\partial^k f}{\partial x_0^{i_0} \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(s_0, s_1, \dots, s_n) = 0 \text{ mit } i_0 + i_1 + \dots + i_n = k, i_j \in \mathbb{N},$$

aber

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_0^{i_0} \partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}(s_0, s_1, \dots, s_n) \neq 0$$

für mindestens eine Kombination aus  $i_0, i_1, \dots, i_n$  mit  $i_0 + i_1 + \dots + i_n = s, i_j \in \mathbb{N}$ . Ist  $s = 1$ , nennen wir den Punkt  $\mathcal{S}_0$  regulär, andernfalls singular.

*Bemerkung 1.3.6.* Will man das Verhalten von  $F_p$  (definiert durch (1.6)) bei einem Punkt  $\mathcal{S}_0$  untersuchen, kann man diesen als *Ecke* des Koordinatensystems annehmen. Wir erhalten dann eine praktische Tatsache, die uns die Arbeit in vielen Fällen erleichtern wird, da man im Allgemeinen immer durch eine geeignete projektive Kollineation das Koordinatensystem so anpassen kann, dass ein spezieller Punkt zur Ecke wird. Sei beispielsweise  $\mathcal{S}_0 = (1, 0, \dots, 0)$ , dann gilt folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_0 \text{ ist ein Punkt von Vielfachheit } s \\ \Leftrightarrow &x_0^{p-s} \text{ ist die höchste Potenz von } x_0, \text{ die in } f(x_0, x_1, \dots, x_n) \text{ auftritt.} \end{aligned}$$

**Definition 1.3.7** (Tangentialhyperebene).  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, \dots, p_n)$  sei ein regulärer Punkt einer Hyperfläche  $F_p$ , definiert durch eine Gleichung (1.6). Dann ist

$$\sum_{i=0}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0, p_1, \dots, p_n) \right) x_i = 0$$

die Gleichung der Tangentialhyperebene  $\mathcal{T}_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  an  $F_p$  in  $\mathcal{P}_0$ . Im Fall  $n = 2$  sprechen wir von einer Tangente, bei  $n = 3$  von einer Tangentialebene.

Wir wollen nun den Schnitt einer Geraden mit einer Hyperfläche  $F_p$  näher betrachten. Zunächst gilt allgemein, dass man durch Einsetzen einer Parameterdarstellung eines Teilraumes  $\mathcal{P}_d \subset \mathbb{P}^n$  für die  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$  in die Gleichung (1.6) von  $F_p$  eine Form in  $d + 1$  Unbekannten erhält. Verschwindet diese Form identisch (sind also alle Koeffizienten 0), liegt der Teilraum  $\mathcal{P}_d$  ganz auf  $F_p$ . Andernfalls erhält man die Gleichung einer Hyperfläche innerhalb von  $\mathbb{P}^d$ , die durch  $\mathcal{P}_d$  aus  $F_p$  ausgeschnitten wird. Man erhält dann den

**Satz 1.3.8.** *Jede Gerade  $\mathcal{P}^1 \subset \mathbb{P}^n$ , die nicht ganz auf der durch die Gleichung (1.6) definierten Hyperfläche  $F_p$  liegt, schneidet  $F_p$  in höchstens  $p$  verschiedenen Punkten.  $\mathcal{P}_{1_0}, \mathcal{P}_{2_0}, \dots, \mathcal{P}_{r_0}$  seien diese Schnittpunkte. Dann kann man jedem Punkt mit einer wohlbestimmten Zahl  $\sigma_i, i = 1, \dots, r$  versehen, sodass  $\sum_{i=1}^r \sigma_i = p$ . Die Zahlen  $\sigma_i$  nennt man auch Vielfachheiten der jeweiligen Schnittpunkte (nicht zu verwechseln mit der Vielfachheit eines Punktes nach Definition 1.3.5).*

—

*Beweisidee.* Zunächst setzt man eine Parameterdarstellung (siehe Bemerkung 1.3.1) der Geraden in  $f$  ein und erhält eine binäre Form vom Grad  $p$ , die man nach dem Gaußschen Fundamentalsatz (siehe Bemerkung 1.2.8) in binäre Linearformen mit gewissen ganzzahligen Exponenten zerlegen kann (siehe auch Bemerkung 1.3.4).

*Bemerkung 1.3.9.*  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P}_1$  sei ein Schnittpunkt von  $\mathcal{P}_1$  und  $F_p$ . Dem Punkt sei die Vielfachheit  $\sigma$  zugeordnet. Man sagt dann, dass  $\mathcal{P}_0$   $\sigma$ -fach als Schnitt von  $\mathcal{P}_1$  und  $F_p$  zählt oder auch „in  $\mathcal{P}_0$  fallen  $\sigma$  Schnittpunkte zusammen“.

*Bemerkung 1.3.10.*  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P}_1$  sei ein Schnittpunkt von  $\mathcal{P}_1$  und  $F_p$ . Dem Punkt sei die Vielfachheit  $\sigma \geq 2$  zugeordnet. Daraus kann man nicht schließen, dass  $\mathcal{P}_0$  ein Punkt der Vielfachheit  $s \geq 2$  der Hyperfläche  $F_p$  (also ein singulärer Punkt) ist. Umgekehrt gilt aber, dass für Gerade durch einen singulären Punkt  $\mathcal{P}_0$  der Vielfachheit  $s$  einer Hyperfläche  $F_p$  die Schnittvielfachheit  $\sigma$  der Geraden in diesem Punkt zumindest  $s$  beträgt. Das lässt sich leicht unter Verwendung einer Parameterdarstellung von  $\mathcal{P}_1$  zeigen.

**Definition 1.3.11** (Tangente).  $F_p$  sei eine Hyperfläche des  $\mathbb{P}^n$ . Eine Gerade, die durch den regulären Punkt  $\mathcal{P}_0 \in F_p$  geht und entweder ganz auf  $F_p$  liegt oder bei der der Schnittpunkt mit  $F_p$  mindestens doppelt zählt (im eben definierten Sinn mit  $\sigma \geq 2$ ), heißt Tangente  $\mathcal{T}_1(\mathcal{P}_0)$  an  $F_p$  in  $\mathcal{P}_0$  (vergleiche für  $n = 2$  auch mit Definition 1.3.7).

Der folgende Satz verdeutlicht den Zusammenhang der schon zuvor in Definition 1.3.7 eingeführten Tangentialhyperebenen mit den Tangenten aus der vorigen Definition.

**Satz 1.3.12.**  *$F_p$  sei eine Hyperfläche des  $\mathbb{P}^n$ . Die Tangentialhyperebene  $\mathcal{T}_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  des regulären Punktes  $\mathcal{P}_0 \in F_p$  enthält alle Tangenten an  $F_p$  in  $\mathcal{P}_0$ . Umgekehrt ist jede Gerade durch  $\mathcal{P}_0$ , die ganz in  $\mathcal{T}_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  enthalten ist, eine Tangente an  $F_p$  in  $\mathcal{P}_0$ .*

**Definition 1.3.13.** In Anlehnung an Definition 1.2.12 nennt man die durch die Gleichung (sofern der Ausdruck nicht komplett verschwindet)

$$\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0$$

definierte Hyperfläche vom Grad  $p - 1$  Polare eines Punktes  $\mathcal{Y}_0 = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{P}^n$  bezüglich der durch die Gleichung (1.6) definierten Hyperfläche  $F_p$  vom Grad  $p$ .

*Bemerkung 1.3.14.* Wegen Bemerkung 1.2.13 hängt die Beziehung zwischen einem Punkt  $\mathcal{Y}_0$  und seiner Polaren bezüglich einer gegebenen Hyperfläche  $F_p$  des  $\mathbb{P}^n$  nicht vom Koordinatensystem ab.

## 1.4 Ebene algebraische Kurven

Wir kehren zur projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  zurück und betrachten als Spezialfall der Hyperflächen die ebenen algebraischen Kurven.

### 1.4.1 Definitionen

**Definition 1.4.1** (Ebene algebraische Kurve). Eine Gleichung

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0 \tag{1.7}$$

definiert eine ebene algebraische Kurve (im Folgenden kurz als „Kurve“ bezeichnet)  $k_n$ , wobei  $f$  eine ternäre Form vom Grad  $n$  (vergleiche Definition 1.2.6 für  $q = 2, p = n$ ) in den  $x_i, i = 0, 1, 2$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{C}$  ist. Man nennt  $n$  die Ordnung der Kurve.

*Bemerkung 1.4.2.* Eine  $k_n$  kann in Kurven niedriger Ordnung mit einer Gesamtsumme der Ordnungen von  $n$  zerfallen (vergleiche Bemerkung 1.2.10). Die gemeinsamen Punkte dieser Kurven niedriger Ordnung sind singuläre Punkte im Sinn von Definition 1.3.5.

*Bemerkung 1.4.3.* Einige Bezeichnungen für Kurven für spezielle Ordnungen  $n$ :

- $n = 1$ : Gerade
- $n = 2$ : Kegelschnitt
- $n = 3$ : Kubik
- $n = 4$ : Quartik

Später werden wir für diese Spezialfälle noch einige Eigenschaften betrachten.

*Bemerkung 1.4.4.* Nach Bemerkung 1.3.1 besitzen Gerade in  $\mathbb{P}^2$  eine Parameterdarstellung der Gestalt

$$x_i = p_i \lambda + q_i \mu \text{ mit } i = 0, 1, 2,$$

wobei  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, p_2)$  und  $\mathcal{Q}_0 = (q_0, q_1, q_2)$  zwei Punkte sind, die auf der Gerade (Hyperebene)

$$f(x_0, x_1, x_2) = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0$$

liegen.

Ist  $\mathcal{P}_0 = (1, 0, 0) \in k_n$  ein Punkt von der Vielfachheit  $s$  (im Sinne von Definition 1.3.5), so hat die Kurve  $k_n$  eine Darstellung der Gestalt (vergleiche Bemerkung 1.3.6)

$$f(x_0, x_1, x_2) = x_0^{n-s} a_s(x_1, x_2) + x_0^{n-s-1} a_{s+1}(x_1, x_2) + \dots + a_n(x_1, x_2) = 0,$$

wobei die  $a_i$  binäre Formen vom Grad ihres Index sind. Außerdem verschwindet dabei  $a_s(x_1, x_2)$  nicht identisch und besitzt als binäre Form eine Zerlegung in ein Produkt aus binären Linearformen. Setzt man diese einzelnen Faktoren gleich 0, erhält man die Gleichungen derjenigen Geraden durch  $\mathcal{P}_0$ , welche mit der  $k_n$  einen mehr als  $s$ -fach zu zählenden Schnittpunkt (im Sinne von Satz 1.3.8) gemeinsam haben. Diese Geraden sind nicht notwendigerweise verschieden. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

- $s = 1$ :  $\mathcal{P}_0$  ist ein regulärer Punkt und  $a_1(x_1, x_2) = 0$  ist die Gleichung der Tangente  $\mathcal{T}_1(\mathcal{P}_0)$  in  $\mathcal{P}_0$ .
- $1 < s < n$ :  $\mathcal{P}_0$  ist ein singulärer Punkt. Auch in diesem Fall wollen wir die durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren von  $a_s(x_1, x_2)$  erhaltenen  $s$  Geraden durch  $\mathcal{P}_0$  als Tangenten bezeichnen.
- $s = n$ : Wie im vorigen Fall erhalten wir  $n$  Gerade durch  $\mathcal{P}_0$ . Jedoch zerfällt schon die  $k_n$  in eben diese Geraden.

Aus diesem Beispiel gewinnen wir Definition 1.4.5 als Erweiterung von Definition 1.3.11, wobei dabei wieder die zwei Begriffe  $s$ -facher Punkt einer Hyperfläche und  $s$ -facher Schnittpunkt auseinander gehalten werden müssen.

**Definition 1.4.5** (Tangente eines  $s$ -fachen Punktes). Von den Geraden, die durch einen  $s$ -fachen Punkt  $\mathcal{P}_0$  einer Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n$  mit der Gleichung (1.7) gehen, bezeichnen wir jene  $s$  nicht notwendigerweise verschiedenen Geraden, deren Schnitt mit  $k_n$  mehr als  $s$ -fach zählt, als Tangenten in  $\mathcal{P}_0$ .

*Bemerkung 1.4.6.* Der Schnitt einer Geraden mit einer Kurve  $k_n$  in einem  $s$ -fachen Punkt zählt immer zumindest  $s$ -fach. Das lässt sich leicht unter Verwendung einer Parameterdarstellung der Geraden zeigen.

*Bemerkung 1.4.7.* Im Fall  $s = 1$  sprechen wir weiterhin von einem regulären Punkt (vergleiche Definition 1.3.5), andernfalls von einem singulären Punkt. Die Tangente kann im Fall eines regulären Punktes dann auch wie in Definition 1.3.7 für  $n = 2$  berechnet werden.

**Definition 1.4.8** (Gewöhnlicher  $s$ -facher Punkt). Ein ( $s \geq 2$ )-facher Punkt  $\mathcal{P}_0$  (also ein singulärer Punkt) einer Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n$  mit der Gleichung (1.7) heißt gewöhnlicher  $s$ -facher Punkt, wenn alle Tangenten durch  $\mathcal{P}_0$  voneinander verschieden sind.

*Bemerkung 1.4.9.* Ist wie beim obigen Beispiel  $\mathcal{P}_0 = (1, 0, 0)$  ein gewöhnlicher  $s$ -facher Punkt der  $k_n$ , so zerfällt  $a_s(x_1, x_2)$  in ein Produkt von  $s$  wesentlich verschiedenen Linearformen.

**Definition 1.4.10** (Doppelpunkt, Spitze). Im Folgenden ist die  $k_n$  wieder eine Kurve der Ordnung  $n$ .

- Ein singulärer Punkt  $\mathcal{P}_0 \in k_n$  mit Vielfachheit  $s = 2$  heißt Doppelpunkt, wenn es 2 verschiedene Tangenten durch  $\mathcal{P}_0$  gibt.
- Ein singulärer Punkt  $\mathcal{P}_0 \in k_n$  mit Vielfachheit  $s = 2$  heißt Spitze, wenn die beiden Tangenten durch  $\mathcal{P}_0$  zusammenfallen und die verbleibende Tangente die  $k_n$  in  $\mathcal{P}_0$  mit Vielfachheit  $\sigma = 3$  schneidet.

*Bemerkung 1.4.11.* Der Doppelpunkt gehört also zu den gewöhnlichen  $s$ -fachen Punkten, die Spitze nicht. Die Tangenten eines Doppelpunkts heißen auch *Doppelpunktstangenten*, die einer Spitze *Spitzentangente*.

**Definition 1.4.12** (Gewöhnliche Wendetangente). Eine Gerade  $W_1$ , die eine Kurve  $k_n$  nur in einem regulären Punkt  $\mathcal{P}_0$  genau von der Vielfachheit  $\sigma = 3$  schneidet und in keinem weiteren Punkt berührt (in möglichen weiteren Schnittpunkten höchstens mit der Vielfachheit  $\sigma = 1$ ), heißt gewöhnliche Wendetangente.  $\mathcal{P}_0$  heißt gewöhnlicher Wendepunkt.

### 1.4.2 Eigenschaften einer Kurve

- Besitzt eine  $k_n$  einen Punkt  $\mathcal{P}_0$  der Vielfachheit  $n$ , so zerfällt die  $k_n$  in  $n$  Gerade durch  $\mathcal{P}_0$  (vergleiche mit dem obigen Beispiel). Umgekehrt ergeben die Gleichungen von  $n$  beliebigen und nicht notwendigerweise verschiedenen Geraden durch einen Punkt  $\mathcal{P}_0$  miteinander multipliziert die Gleichung einer solchen  $k_n$ .
- Daraus folgt sofort, dass  $n - 1$  die höchste Vielfachheit eines Punktes einer nicht zerfallenden  $k_n$  ist. Solche  $k_n$  heißen Monoide.
- Ein Monoid  $k_n$  mit  $n \geq 3$  kann außer einem Punkt der Vielfachheit  $n - 1$  keine weiteren Singularitäten besitzen ohne zu zerfallen.
- Eine nicht zerfallende Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n$  kann für  $n > 2$  nicht mehr als  $\binom{n-2}{2}$  singuläre Punkte besitzen.
- Die Schnittpunkte der Teilelemente zerfallender Kurven sind immer singulär.
- Da eine ternäre Form vom Grad  $n$  nach Definition 1.2.6 von  $\binom{n+2}{2}$  Koeffizienten abhängt, es in unserem Fall aber auf einen gemeinsamen Faktor aller dieser Koeffizienten nicht ankommt, gilt folgendes: Die ebenen algebraischen Kurven der Ordnung  $n$  sind eineindeutig den Punkten eines projektiven Raumes  $\mathbb{P}^N$  mit

$$N = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

Dimensionen zugeordnet.

*Bemerkung 1.4.13.* Der Begriff Monoid lässt sich auch auf Hyperflächen vom Grad  $n$  des  $\mathbb{P}^n$  übertragen.

### 1.4.3 Polarsystem

Zunächst benötigen wir folgende

**Definition 1.4.14** (Lineare  $\infty^h$ -Schar). Als lineare  $\infty^h$ -Schar von Kurven  $k_n$  der Ordnung  $n$  bezeichnet man die Gesamtheit aller Kurven, die den Punkten eines Teilraums  $\mathcal{P}_h \subset \mathbb{P}^N$ ,  $N = \frac{n(n+3)}{2}$  zugeordnet sind.

*Bemerkung 1.4.15.* Nimmt man beispielsweise als Ausgangsmenge die Geraden des  $\mathbb{P}^2$  (also die  $k_1$ ), ergibt sich  $N = 2$ . Für  $h = 1$  erhält man dann eine  $\infty^1$ -Schar von Geraden. Das entspricht allen Geraden, die durch einen gemeinsamen festen Punkt gehen.

*Bemerkung 1.4.16.* Bei  $h = 1$  spricht man von Büscheln, bei  $h = 2$  von Netzen.

Ein wichtiges, mit jeder Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n$  verknüpftes Linearsystem von Kurven der Ordnung  $n - 1$  ist das *Polarsystem*.

**Definition 1.4.17** (Polarsystem). Eine Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n$  sei gegeben durch ein Gleichung (1.7). Das zugehörige Polarsystem ist durch

$$\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad (1.8)$$

gegeben. Verschwindet der Ausdruck (1.8) nicht identisch, bezeichnet man ihn in Anlehnung an die Definitionen 1.2.12 und 1.3.13 als Polare  $k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  der  $k_n$  bezüglich des Punktes  $\mathcal{P}_0 = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ .

*Bemerkung 1.4.18.* Aus Bemerkung 1.3.14 wissen wir, dass die Polarenbeziehung invariant gegen Koordinatenänderungen ist. Verschwindet also (1.8) identisch für einen Punkt  $\mathcal{P}_0$ , können wir Koordinaten einführen, sodass  $\mathcal{P}_0 = (1, 0, 0)$  ist. Damit (1.8) identisch verschwindet, muss dann  $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 0$  sein. Also hängt  $f$  nicht von  $x_0$  ab und  $\mathcal{P}_0$  ist ein  $n$ -facher Punkt der Kurve  $k_n$ , die dann in  $n$  Gerade durch  $\mathcal{P}_0$  zerfällt. Umgekehrt besitzt jede Kurve  $k_n$ , die in  $n$  Gerade zerfällt, mindestens einen Punkt mit unbestimmter Polaren. In jedem anderen Fall ist (1.8) ein Netz von Kurven der Ordnung  $n - 1$ , also eine lineare  $\infty^2$  Schar, die man auch das zu  $k_n$  gehörige *Polarennetz* nennt.

Nun folgen einige Eigenschaften des Polarennetzes einer Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n$ :

- Jeder Kurve  $k_{n-1}$  des Polarennetzes ist eindeutig ein Punkt  $\mathcal{P}_0$  zugeordnet, dessen Polare  $k_{n-1}$  ist.
- Umgekehrt kann man zu gegebenem  $k_{n-1}$ -Netz im allgemeinen auch eine  $k_n$  konstruieren, sodass die  $k_{n-1}$  des Netzes die Polaren sind.
- Für die Punkte  $\mathcal{P}_0 \in k_n$  gilt  $\mathcal{P}_0 \in k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$ , sie liegen also auf ihrer eigenen Polaren. Umgekehrt gilt für Punkte  $\mathcal{P}_0$  mit  $\mathcal{P}_0 \in k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  auch schon  $\mathcal{P}_0 \in k_n$ . Das folgt aus der Eulerschen Beziehung aus Lemma 1.2.11

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 3f,$$

wenn man für die  $x_i$  die Koordinaten von  $\mathcal{P}_0$  einsetzt.

- Besitzt  $k_n$  einen singulären Punkt  $\mathcal{S}_0$ , so muss dieser auf allen Polaren liegen, da für  $\mathcal{S}_0$  alle Ableitungen von  $f$  verschwinden.
- Liegt ein Punkt  $\mathcal{Q}_0$  sowohl auf  $k_n$  als auch auf der Polaren  $k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  eines Punktes  $\mathcal{P}_0$  und ist zudem  $\mathcal{Q}_0$  regulär, gilt  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{T}_1(\mathcal{Q}_0)$  ( $\mathcal{P}_0$  liegt also auf der Tangente durch  $\mathcal{Q}_0$ ). Umgekehrt ergibt sich für einen Punkt  $\mathcal{P}_0$  mit  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{T}_1(\mathcal{Q}_0)$  auch  $\mathcal{Q}_0 \in k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$ , falls  $\mathcal{Q}_0$  ein regulärer Punkt von  $k_n$  ist. Das ergibt sich ganz einfach daraus, dass man die Tangente eines Punktes  $\mathcal{Q}_0$  nach Definition (1.3.7) berechnet durch

$$x_0 \left( \frac{\partial f}{\partial x_0}(q_0, q_1, q_2) \right) + x_1 \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(q_0, q_1, q_2) \right) + x_2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}(q_0, q_1, q_2) \right) = 0.$$

Die letzte Eigenschaft ist besonders wichtig, weil wir dadurch ein Verfahren gewinnen können, um alle Tangenten aus einem Punkt  $\mathcal{P}_0$  an eine Kurve  $k_n$  zu erhalten:

1. Bilde  $k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$ .
2. Berechne  $k_n \cap k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$ .
3. Verbinde  $\mathcal{P}_0$  mit den gefundenen Schnittpunkten, sofern sie regulär sind.
4. Falls  $\mathcal{P}_0$  selbst ein regulärer Punkt von  $k_n$  ist, muss man noch die Tangente in  $\mathcal{P}_0$  hinzufügen.

*Bemerkung 1.4.19.* Aus den obigen Eigenschaften des Polarennetzes wissen wir, dass singuläre Punkte einer Kurve  $k_n$  auf allen Elementen des Polarennetzes liegen. Daher sind die singulären Punkte auch sicher in jeder Menge  $k_n \cap k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$ , und die Zusatzbedingung der Regularität der Schnittpunkte im Punkt 3. des angegebenen Verfahrens macht Sinn.

#### 1.4.4 Dualgebilde

Das führt uns zu folgender

**Definition 1.4.20** (Klasse). Als Klasse  $m$  einer ebenen algebraischen Kurve  $k_n$  bezeichnet man die höchste Anzahl von Tangenten an  $k_n$ , die man durch einen Punkt des  $\mathbb{P}^2$  legen kann.

*Bemerkung 1.4.21.* Nach dem obigen Verfahren wissen wir, dass die Klasse  $m$  also im Wesentlichen die Maximalanzahl der Elemente von  $k_n \cap k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  ist, wenn man sozusagen alle  $\mathcal{P}_0 \in \mathbb{P}^2$  „durchprobiert“ und die singulären Punkte außer Acht lässt. Im nächsten Abschnitt werden wir einen Satz betrachten, der uns Aufschluss über die Maximalanzahl von Schnittpunkten gegebener Kurven gibt.

*Bemerkung 1.4.22.* Ordnung und Klasse sind dual zueinander definiert. Ordnung ist eine Anzahl von Punkten auf einer Geraden und Klasse eine Anzahl von Geraden durch einen Punkt.

Bisher sind wir bei unseren ebenen algebraischen Kurven  $k_n$  von einer Gleichung

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

in Punktkoordinaten  $x_i$  ausgegangen, wobei  $f$  eine ternäre Form vom Grad  $n$  ist. Im Gegensatz dazu erhält man die *Dualkurve*  $\widehat{k}_m$

$$\tilde{f}(g_0, g_1, g_2) = 0, \tag{1.9}$$

wenn man statt den Punktkoordinaten  $x_i$  Geradenkoordinaten  $g_i$  verwendet, wobei  $\tilde{f}$  wieder eine ternäre Form vom Grad  $m$  ist. Die Dualkurve  $\widehat{k}_m$  ist die Gesamtheit aller Geraden aus  $\mathbb{P}^{2*}$ , deren Koordinaten die Gleichung (1.9) erfüllen. Die Dualkurve legt eine ebene algebraische Kurve  $\tilde{k}$  in der Weise fest, dass jede Tangente von  $\tilde{k}$  die Gleichung (1.9) erfüllt und jede Gerade von  $\widehat{k}_m$  eine Tangente von  $\tilde{k}$  ist.

Mit jeder nicht zerfallenden ebenen algebraischen Kurve  $k_n$  ist eine solche Geradenmenge  $\widehat{k}_m$ , nämlich die Menge der Tangenten in den regulären Punkten von  $k_n$  und die *Grenzlagen* dieser Tangenten (um die Tangenten in den singulären Punkten miteinzubeziehen, z.B. Doppelpunkts- und Spitzentangenten), verbunden. Die dabei auftretende Zahl  $m$  ist genau die Klasse von  $k_n$ . Um eine Gleichung (1.9) für die Tangentenmenge  $\widehat{k}_m$  einer durch die Gleichung (1.7) gegebenen Kurve  $k_n$  zu finden, muss man aus

$$g_0 : g_1 : g_2 = \frac{\partial f}{\partial x_0} : \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

die  $x_i$  eliminieren. Fasst man die so erhaltene Gleichung (1.9) wieder als Gleichung in Punktkoordinaten auf, erhält man die sogenannte zu  $k_n$  *duale Kurve*.

*Bemerkung 1.4.23.* Die angesprochene Elimination ist schon für  $n = 3$  nicht mehr ganz so einfach.

*Bemerkung 1.4.24.* Aus Satz 1.3.8 wissen wir, dass der Schnitt einer Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n$  mit einer Geraden aus höchstens  $n$  Punkten besteht. Dual dazu gehen durch einen Punkt  $\mathcal{P}_0$  höchstens  $m$  Gerade einer Dualkurve  $\widehat{k_m}$ . Dabei können, wie bei den Punkten, auch mehrere Gerade zusammenfallen.

Wir erhalten nun folgende

**Definition 1.4.25** (Liniensingularität).  $k_n$  sei eine nicht zerfallende Kurve der Ordnung  $n$  und  $\widehat{k_m}$ , die mit  $k_n$  verbundene Gesamtheit ihrer Tangenten.

- Eine Tangente  $\mathcal{T}_1 \subset \widehat{k_m}$  heißt einfach (oder regulär), wenn genau ein Punkt  $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{T}_1$  existiert, sodass  $\mathcal{T}_1$  unter allen Tangenten durch irgendeinen Punkt  $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{T}_1, \mathcal{A}_0 \neq \mathcal{T}_0$  einfach (im Sinn von Bemerkung 1.4.24) zählt und mindestens doppelt bei  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{T}_0$ .
- Analog heißt eine Tangente  $\mathcal{T}_1 \subset \widehat{k_m}$  gewöhnliche  $s$ -fache Tangente, wenn es genau  $s$  verschiedene Punkte  $\mathcal{A}_{1_0}, \mathcal{A}_{2_0}, \dots, \mathcal{A}_{s_0}, \mathcal{A}_{i_0} \in \mathcal{T}_1$  gibt, sodass  $\mathcal{T}_1$  unter den Tangenten durch irgendeinen Punkt  $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{T}_1, \mathcal{A}_{i_0} \neq \mathcal{T}_0$   $s$ -fach zählt und mindestens  $(s + 1)$ -fach bei  $\mathcal{A}_{i_0} = \mathcal{T}_0, i = 1, 2, \dots, s$ .

Es liegt nahe, dass die Punkte  $\mathcal{A}_{i_0} i = 1, 2, \dots, s$  genau die Berührungspunkte der Tangente  $\mathcal{T}_1$  an die Kurve  $k_n$  sind. Um das einzusehen, benötigen wir jedoch noch ein paar weitere Instrumente – unter anderem den Satz von Bezout.

### 1.4.5 Der Satz von Bezout

Wie bereits angekündigt, wollen wir eine Aussage zur Anzahl der gemeinsamen Punkte von zwei ebenen algebraischen Kurven machen. Dieser Satz ist ein Sonderfall einer Aussage über  $n$  algebraische Hyperflächen des  $\mathbb{P}^n$ . Einige Überlegungen dazu sind Lüdtke [7] entnommen.

**Satz 1.4.26** (Bezout). Gegeben sind zwei ebene algebraische Kurven  $k_n^f$  und  $k_m^g$ .  $k_n^f$  sei von der Ordnung  $n$  und definiert durch die Gleichung

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Analog sei  $k_m^g$  von der Ordnung  $m$  und definiert durch die Gleichung

$$g(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

Dann besitzen  $k_n^f$  und  $k_m^g$  entweder einen gemeinsamen Kurvenbestandteil (also unendlich viele gemeinsame Punkte), oder sie haben höchstens  $m \cdot n$  gemeinsame Punkte. Sind

$$\mathcal{P}_{1_0}, \mathcal{P}_{2_0}, \dots, \mathcal{P}_{r_0}$$

diese Punkte, kann man jedem dieser Punkte eine natürliche Zahl  $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, r$ , die sogenannte Schnittvielfachheit von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  in  $\mathcal{P}_{i_0}, i = 1, 2, \dots, r$ , zuordnen, sodass dann

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i = m \cdot n$$

gilt.

*Beweis.*

- Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Punkt  $\mathcal{A}_0 = (0, 0, 1)$  auf keiner der beiden Kurven liegt. Wir schreiben jetzt die Gleichungen von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  ausführlicher (vergleiche Definition 1.2.6 für  $q = 2, p = n$  bzw.  $p = m$ ) und nach Potenzen von  $x_2$  sortiert:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2) &= a_0 x_2^n + a_1(x_0, x_1) x_2^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x_0, x_1) x_2 + a_n(x_0, x_1) \\ g(x_0, x_1, x_2) &= b_0 x_2^m + b_1(x_0, x_1) x_2^{m-1} + \dots + b_{m-1}(x_0, x_1) x_2 + b_m(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Wegen  $\mathcal{A}_0 \notin k_n^f$  und  $\mathcal{A}_0 \notin k_m^g$  gilt (vergleiche Bemerkung 1.3.6)

$$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0,$$

und die übrigen  $a_i, i = 1, \dots, n$  und  $b_j, j = 1, \dots, m$  sind binäre Formen in  $x_0$  und  $x_1$  vom Grad ihrer Indizes.

- In Satz 1.2.1 und den darauf folgenden Ausführungen (insbesondere (1.5)) haben wir ein Kriterium entwickelt, um festzustellen, ob zwei gegebene Polynome gemeinsame Wurzeln besitzen. Zunächst benötigen wir also die Resultante. Fasst man nun  $f$  und  $g$  als Polynome in  $x_2$  auf, erhält man die Resultante als Determinante der Sylvestermatrix (vergleiche Definition 1.2.3)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & b_m & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_m \end{vmatrix} = R(x_0, x_1).$$

Dies ist die Gestalt der Determinante für  $m > n$  (analog auch für  $m \leq n$ ).

- Jeder Eintrag ist eine binäre Form in  $x_0$  und  $x_1$ , sofern man konstante Einträge  $0, a_0, b_0$  auch als solche betrachtet. Aus Bemerkung 1.2.5 wissen wir, dass in  $R(x_0, x_1)$  die Summe der Indizes in jedem Glied  $m \cdot n$  ist. Daher können wir schließen, dass auch  $R(x_0, x_1)$  eine binäre Form ist. Sie hat den Grad  $m \cdot n$ , sofern  $R(x_0, x_1)$  nicht identisch verschwindet. Gleich 0 gesetzt (das ist schließlich auch der interessante Fall) kann man also  $R(x_0, x_1)$  als Kurve der Ordnung  $m \cdot n$  auffassen. Für die binäre Form  $R(x_0, x_1)$  existiert eine Zerlegung in binäre Linearformen, wobei man in  $\mathbb{P}^2$  jeden Faktor gleich 0 gesetzt, als Gerade durch  $\mathcal{A}_0 = (0, 0, 1)$  auffassen kann (hängt schließlich nicht von  $x_2$  ab, vergleiche Definition 1.2.6), und gemeinsame Elemente von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  auf einer dieser Geraden liegen müssen.

- Zudem wissen wir aus Bemerkung 1.2.4, dass sich  $R(x_0, x_1)$  auch schreiben lässt als

$$R(x_0, x_1) = A(x_2)f + B(x_2)g, \quad (1.10)$$

wobei  $A$  und  $B$  Polynome in  $x_2$  mit  $\text{Grad}(A) \leq m - 1$  und  $\text{Grad}(B) \leq n - 1$  sind.

- Wir wollen nun in einem Zwischenschritt Folgendes zeigen:

$R(x_0, x_1)$  verschwindet identisch  $\Leftrightarrow k_n^f$  und  $k_m^g$  haben eine ganze Teilkurve gemeinsam.

–  $\Rightarrow$ : Gilt  $R(x_0, x_1) \equiv 0$  so folgt aus (1.10)

$$A(x_2)f = -B(x_2)g. \quad (1.11)$$

Das heißt  $f$  teilt die rechte Seite von (1.11). Da aber  $f$  vom Grad  $n$  ist und  $B$  höchstens Grad  $n - 1$  hat, ist  $f$  nicht teilerfremd zu  $g$ . Also haben in diesem Fall  $k_n^f$  und  $k_m^g$  eine ganze Teilkurve gemeinsam.

–  $\Leftarrow$ : Haben  $k_n^f$  und  $k_m^g$  eine ganze Teilkurve  $k_h$  gemeinsam, so betrachte man das Geradenbüschel mit dem Grundpunkt  $\mathcal{A}_0 = (0, 0, 1)$ .  $k_h$  wird von jeder Geraden dieses Büschels in mindestens einem Punkt getroffen (vergleiche dazu auch Satz 1.3.8), gemeinsame Punkte von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  liegen also auf jeder Geraden durch  $\mathcal{A}_0$ . Das heißt aber, jeder mögliche binäre Linearfaktor würde in  $R(x_0, x_1)$  auftreten und damit sind alle  $(x_0, x_1)$  Wurzeln von  $R(x_0, x_1)$ , sodass dieser Ausdruck identisch verschwindet.

- Verschwindet  $R(x_0, x_1)$  nicht identisch, so hat diese binäre Form endlich viele Wurzeln.  $(p_0, p_1)$  sei eine dieser Wurzeln. Setzt man diese in (1.10) ein, erhält man einen Ausdruck, der nur mehr von  $x_2$  abhängt und so können endlich viele gemeinsame Wurzeln von  $f$  und  $g$ , also gemeinsame Punkte  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, p_2)$  von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  ermittelt werden. Führt man das für alle Wurzeln von  $R(x_0, x_1)$  durch, erhält man so sämtliche gemeinsame Punkte von  $k_n^f$  und  $k_m^g$ . Wir können also festlegen, dass es sich nur um endlich viele solche Punkte handeln kann.
- Gibt es jetzt aber zu einer gegebenen Wurzel  $(p_0, p_1)$  von  $R(x_0, x_1)$ , eingesetzt in (1.10) mehr als eine Wurzel  $p_2$ , liegen die entsprechenden gemeinsamen Punkte alle auf einer Geraden (jener zu  $(p_0, p_1)$ ) durch  $\mathcal{A}_0 = (0, 0, 1)$ .
- Um das zu vermeiden, erweitern wir die Voraussetzungen an das Koordinatensystem so, dass  $\mathcal{A}_0$  auf keiner Verbindungsgeraden von zwei oder mehr gemeinsamen Punkten von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  liegt. Das heißt  $\mathcal{A}_0$  darf nicht auf endlich vielen Geraden liegen, was im allgemeinen immer möglich ist.
- Dadurch erhalten wir jetzt zu jeder gegebenen Wurzel  $(p_0, p_1)$  von  $R(x_0, x_1)$  nur einen gemeinsamen Schnittpunkt  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, p_2)$  von  $k_n^f$  und  $k_m^g$ . Da  $R(x_0, x_1)$  eine binäre Form vom Grad  $m \cdot n$  ist, kann die Anzahl der Schnittpunkte diesen Wert nicht überschreiten. Die gemeinsamen Punkte von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  seien jetzt

$$\mathcal{P}_{1_0}, \mathcal{P}_{2_0}, \dots, \mathcal{P}_{r_0}$$

und  $\mathcal{P}_{i_0}$  gehöre zur Wurzel  $(p_0, p_1)$  der Vielfachheit  $\sigma_i$  von  $R(x_0, x_1)$ . Wir sagen dann, dass  $k_n^f$  und  $k_m^g$  sich in  $\mathcal{P}_{i_0}$  von der Vielfachheit  $\sigma_i$  schneiden. Nach den Bemerkungen 1.2.8 und 1.2.5 wissen wir jetzt, dass  $m \cdot n$  die Vielfachheitssumme der gemeinsamen Punkte von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  ist.

□

*Bemerkung 1.4.27.* Im obigen Beweis hängen die Vielfachheiten der Schnittpunkte von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  noch von der Lage von  $\mathcal{A}_0$  ab. Es wäre mit Hilfe von  $R(x_0, x_1)$  rechnerisch möglich, die Unabhängigkeit von der Lage zu zeigen. Uns reicht an dieser Stelle aber ein Stetigkeitsschluss: Angenommen der Punkt  $\mathcal{A}_0$  durchläuft in  $\mathbb{P}^2$  eine bestimmte Kurve  $\mathcal{A}_0(t)$  mit  $(t_0 \leq t \leq t_1)$ . Dabei sollen alle Punkte  $\mathcal{A}_0(t)$ , die im Beweis verwendete allgemeine Lage besitzen, also für alle  $t$  mit  $t_0 \leq t \leq t_1$  soll gelten

- $\mathcal{A}_0(t) \notin k_n^f, \mathcal{A}_0(t) \notin k_n^g,$
- $\mathcal{A}_0(t)$  liegt auf keiner Verbindungsgeraden von zwei Schnittpunkten von  $k_n^f$  und  $k_m^g$ .

Nun bildet man für jeden Punkt  $\mathcal{A}_0(t)$  als Punkt  $(0, 0, 1)$  eines Koordinatensystems die Resultante  $R(x_0, x_1)$ . Setzt man diese Resultanten 0, wissen wir schon aus dem Beweis, dass dann die so erhaltene Kurve von der Ordnung  $m \cdot n$  in Gerade durch  $\mathcal{A}_0(t)$  zerfällt. Diese Geraden verbinden dann je  $\mathcal{A}_0(t)$  mit einem der Punkte  $\mathcal{P}_{1_0}, \mathcal{P}_{2_0}, \dots, \mathcal{P}_{r_0}$ , wobei jede Gerade mit der aus der Zerlegung der Resultante folgenden Vielfachheit  $\sigma_i$  zu zählen ist. Sowohl die Resultante, als auch die aus ihr berechneten Vielfachheiten  $\sigma_i$  hängen nun stetig von  $t$  ab, wobei die  $\sigma_i$  als ganze Zahlen konstant bleiben müssen.

*Bemerkung 1.4.28.* Nach Bemerkung 1.1.12 wissen wir, dass wir für den obigen Beweis immer einen Punkt  $\mathcal{A}_0$  finden können, der auf keiner der Verbindungsgeraden von zwei oder mehr gemeinsamen Punkten von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  liegt.

*Bemerkung 1.4.29.* Der Satz von Bezout garantiert uns die Existenz zumindest eines Schnittpunkts zweier ebener algebraischer Kurven.

Das Berechnen der Schnittvielfachheiten nach dem im Satz angegebenen Verfahren ist im allgemeinen umständlich. Auf der Grundlage des Satzes lässt sich der folgende besser anwendbare Satz jedoch verhältnismäßig einfach zeigen, wobei wir hier den Beweis nicht näher ausführen wollen.

**Satz 1.4.30.** *Gegeben sind zwei ebene algebraische Kurven  $k_n^f$  und  $k_m^g$ .  $k_n^f$  sei von der Ordnung  $n$  und definiert durch die Gleichung*

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

*Analog sei  $k_m^g$  von der Ordnung  $m$  und definiert durch die Gleichung*

$$g(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

*$\mathcal{S}_0$  sei ein gemeinsamer Punkt von  $k_n^f$  und  $k_m^g$ , wobei  $\mathcal{S}_0$  für  $k_n^f$  ein Punkt der Vielfachheit  $s$  und für  $k_m^g$  ein Punkt der Vielfachheit  $t$  sei. Außerdem sollen die Tangenten in  $\mathcal{S}_0$  an  $k_n^f$  von denen an  $k_m^g$  verschieden sein. Dann zählt  $\mathcal{S}_0$  unter den gemeinsamen Punkten von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  genau mit der Vielfachheit  $\sigma_{\mathcal{P}_0} = s \cdot t$ .*

Wir erwähnen noch zwei wichtige Spezialfälle:

- Ist  $\mathcal{S}_0$  ein gemeinsamer Punkt von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  und  $\mathcal{S}_0$  für eine der beiden Kurven ein Punkt der Vielfachheit  $s \geq 2$  und für die anderen Kurven ein regulärer Punkt, und sind außerdem die Tangenten in  $\mathcal{S}_0$  an die eine Kurve verschieden von der an die andere, so ist die Schnittvielfachheit in  $\mathcal{S}_0$  gleich  $s$ .

- Ist  $\mathcal{S}_0$  ein gemeinsamer Punkt von  $k_n^f$  und  $k_m^g$  und für beide Kurven ein regulärer Punkt und außerdem die Tangente in  $\mathcal{S}_0$  an die eine Kurve verschieden von der an die andere, so ist die Schnittvielfachheit in  $\mathcal{S}_0$  gleich 1.

Umgekehrt gilt der

**Satz 1.4.31.** *Wenn  $\mathcal{S}_0$  ein Punkt der Vielfachheit  $s$  von  $k_n^f$  ist und ein Punkt der Vielfachheit  $t$  von  $k_m^g$ , beträgt die Schnittvielfachheit in einem gemeinsamen Punkt  $\mathcal{S}_0$  der beiden Kurven  $k_n^f$  und  $k_m^g$  mindestens  $st$ . Beträgt die Schnittvielfachheit genau  $s \cdot t$ , so sind die Tangenten der einen Kurve in  $\mathcal{S}_0$  verschieden von denen der anderen.*

Für die Definition der  $s$ -fachen Tangenten brauchen wir nun noch folgende Überlegungen:

*Bemerkung 1.4.32.* Gegeben sei eine nicht zerfallende Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n > 1$ . Nach den Ausführungen des letzten Abschnitts gibt es die mit  $k_n$  verbundene Geradenmenge  $\widehat{k}_m$ , die aus allen Tangenten an  $k_n$  in den regulären und singulären Punkten besteht.  $\mathcal{P}_0$  sei ein Punkt der nicht auf  $k_n$  und auf keiner der Tangenten eines singulären Punktes von  $k_n$  liegt. Wir betrachten nun die Gesamtheit der Schnittpunkte von

$$k_n \cap k_{n-1}(\mathcal{P}_0) = \{\mathcal{Q}_{1_0}, \mathcal{Q}_{2_0}, \dots, \mathcal{Q}_{p_0}, \mathcal{S}_{1_0}, \mathcal{S}_{2_0}, \dots, \mathcal{S}_{q_0}\}, \quad (1.12)$$

wobei die  $\mathcal{S}_{i_0}$  die singulären Punkte von  $k_n$  sind. Nach dem Satz von Bezout gilt

$$n(n-1) = \sigma_{\mathcal{Q}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{Q}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{Q}_{p_0}} + \sigma_{\mathcal{S}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{S}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{S}_{q_0}},$$

wobei die  $\sigma$ -Werte Schnittvielfachheiten der Punkte in (1.12) angeben. Aus der Lage von  $\mathcal{P}_0$  lässt sich dann schließen, dass die Geraden

$$\mathcal{Q}_{i_1} = \mathcal{Q}_{i_0} \cup \mathcal{P}_0, i = 1, 2, \dots, p \quad (1.13)$$

Tangenten von  $k_n$  und damit in  $\widehat{k}_m$  enthalten sind, und die Geraden

$$\mathcal{S}_{j_1} = \mathcal{S}_{j_0} \cup \mathcal{P}_0, j = 1, 2, \dots, q$$

keine Tangenten sind. Damit erhält man die Klasse  $m$  von  $k_n$  als

$$m = \sigma_{\mathcal{Q}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{Q}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{Q}_{p_0}}.$$

Die Geraden aus (1.13) müssen nicht alle verschieden sein, da mehrere Punkte  $\mathcal{Q}_{i_0}$  mit  $\mathcal{P}_0$  kollinear liegen können. Angenommen auf  $\mathcal{Q}_{1_1}$  liegen die Punkte  $\mathcal{Q}_{1_0}, \mathcal{Q}_{2_0}, \dots, \mathcal{Q}_{t_0}$ , dann sagen wir, die Vielfachheit  $\rho_{\mathcal{Q}_{1_1}}$ , mit der die Gerade  $\mathcal{Q}_{1_1}$  in der Gesamtheit aller Tangenten an die Kurve  $k_n$ , die  $\mathcal{P}_0$  enthalten, zählt, ist

$$\rho_{\mathcal{Q}_{1_1}} = \sigma_{\mathcal{Q}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{Q}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{Q}_{t_0}},$$

und man erhält in Summe wieder

$$m = \underbrace{\sigma_{\mathcal{Q}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{Q}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{Q}_{t_0}}}_{\rho_{\mathcal{Q}_{1_1}}} + \sigma_{\mathcal{Q}_{t+1_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{Q}_{p_0}}.$$

Ist  $k_n$  singularitätenfrei, so gilt

$$m = n(n-1).$$

Hat  $k_n$  die Singularitäten  $\mathcal{S}_{1_0}, \mathcal{S}_{2_0}, \dots, \mathcal{S}_{q_0}$ , so gilt

$$m = n(n-1) - (\sigma_{\mathcal{S}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{S}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{S}_{q_0}}),$$

wobei man  $\sigma_{\mathcal{S}_{j_0}}$ , die durch  $\mathcal{S}_{j_0}$  bewirkte *Klassenreduktion* nennt und die Summe  $(\sigma_{\mathcal{S}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{S}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{S}_{q_0}})$  *Gesamtreduktion*. Man kann zeigen, dass für  $\mathcal{P}_0$  in der oben definierten Lage die Werte  $\sigma_{\mathcal{S}_{j_0}}$  nicht von  $\mathcal{P}_0$  abhängen.

Wir betrachten nun noch die oben für  $\mathcal{P}_0$  ausgeschlossenen Lagen.

- $\mathcal{P}_0$  sei ein regulärer Punkt von  $k_n$ . Dann tritt natürlich  $\mathcal{P}_0$  selbst in der Menge (1.12) auf. Sei  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{Q}_{1_0}$  und die Tangente  $\mathcal{T}_1$  des Punktes  $\mathcal{Q}_{1_0}$  berühre die  $k_n$  außerdem noch in den Punkten  $\mathcal{Q}_{1_0}, \mathcal{Q}_{2_0}, \dots, \mathcal{Q}_{t_0}, t \geq 1$ , aber in keinem singulären Punkt, dann gilt für die Vielfachheit  $\rho_{\mathcal{T}_1}$  von  $\mathcal{T}_1$  in der Menge der Tangenten, die  $\mathcal{Q}_{1_0}$  enthalten,

$$\rho_{\mathcal{T}_1} = \sigma_{\mathcal{Q}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{Q}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{Q}_{t_0}}.$$

- Ist  $\mathcal{T}_1$  eine Gerade, die sowohl  $\mathcal{P}_0$  enthält, als auch Tangente für die  $t$  regulären Punkte  $\mathcal{Q}_{1_0}, \mathcal{Q}_{2_0}, \dots, \mathcal{Q}_{t_0}, t \geq 0$  und die  $s$  singulären Punkte  $\mathcal{S}_{1_0}, \mathcal{S}_{2_0}, \dots, \mathcal{S}_{s_0}, s \geq 1$  ist, so ergeben sich größere Schnittvielfachheiten  $\sigma'_{\mathcal{S}_{j_0}}$ , mit denen die Punkte  $\mathcal{S}_{1_0}, \mathcal{S}_{2_0}, \dots, \mathcal{S}_{s_0}$  jetzt in der Menge (1.12) zu rechnen sind. Es ergibt sich eine Formel

$$\rho_{\mathcal{T}_1} = \sigma_{\mathcal{Q}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{Q}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{Q}_{t_0}} + \sigma_{\mathcal{S}_{1_0}} - \sigma'_{\mathcal{S}_{1_0}} + \sigma_{\mathcal{S}_{2_0}} - \sigma'_{\mathcal{S}_{2_0}} + \dots + \sigma_{\mathcal{S}_{s_0}} - \sigma'_{\mathcal{S}_{s_0}}$$

für die Vielfachheit  $\rho_{\mathcal{T}_1}$  mit der die Gerade  $\mathcal{T}_1$  in der Menge der Tangenten durch  $\mathcal{P}_0$  gezählt werden muss.

*Bemerkung 1.4.33.* Die Vielfachheit  $\rho_{\mathcal{T}_1}$ , die einer Geraden  $\mathcal{T}_1 \in \widehat{k_m}$  zukommt, ist das Minimum unter allen Vielfachheiten, die  $\mathcal{T}_1$  bezüglich seiner Punkte besitzt.

Wir erhalten folgenden

**Satz 1.4.34.**  $k_n$  sei eine nicht zerfallende Kurve der Ordnung  $n$  mit der Polaren  $k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  bezüglich eines Punktes  $\mathcal{P}_0$ .  $\mathcal{Q}_0$  sei ein für  $k_n$  regulärer Punkt mit  $\mathcal{Q}_0 \in k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  mit der Schnittvielfachheit  $\sigma_{\mathcal{Q}_0}$ . Weiters sei  $\mathcal{T}_1(\mathcal{Q}_0)$  die Tangente in  $\mathcal{Q}_0$  an  $k_n$ .

- Dann gilt (wie schon gesehen)  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{T}_1(\mathcal{Q}_0)$ .
- Berührt  $\mathcal{T}_1(\mathcal{Q}_0)$  die  $k_n$  in  $\mathcal{Q}_0$  einfach (Schnittvielfachheit 2), so gilt im Fall  $\mathcal{Q}_0 \neq \mathcal{P}_0$

$$\sigma_{\mathcal{Q}_0} = 1$$

und im Fall  $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{P}_0$

$$\sigma_{\mathcal{Q}_0} = 2.$$

- Berührt  $\mathcal{T}_1(\mathcal{Q}_0)$  die  $k_n$  in höherer Ordnung, so gilt  $\sigma_{\mathcal{Q}_0} \geq 2$ .
- Berührt  $\mathcal{T}_1(\mathcal{Q}_0)$  die  $k_n$  in  $\mathcal{Q}_0$  genau mit Schnittvielfachheit 3, so gilt im Fall  $\mathcal{Q}_0 \neq \mathcal{P}_0$

$$\sigma_{\mathcal{Q}_0} = 2$$

und im Fall  $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{P}_0$

$$\sigma_{\mathcal{Q}_0} = 3.$$

- $\mathcal{S}_0$  sei ein gewöhnlicher  $s$ -facher Punkt ( $s > 1$ ) von  $k_n$ , dann ist die Schnittvielfachheit  $\sigma_{\mathcal{S}_0}$  von  $k_n$  und  $k_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  in  $\mathcal{S}_0$  größer als  $s(s-1)$ , falls  $\mathcal{P}_0$  auf einer Tangente in  $\mathcal{S}_0$  an  $k_n$  liegt, und gleich  $s(s-1)$ , falls nicht.

*Bemerkung 1.4.35.*  $k_n$  sei eine nicht zerfallende Kurve der Ordnung  $n$ ,  $\widehat{k_m}$  die mit  $k_n$  verbundene Gesamtheit ihrer Tangenten, und  $\mathcal{T}_1 \in \widehat{k_m}$  eine reguläre Tangente. Bildet man also  $k_n \cap k_{n-1}(\mathcal{T}_0)$  für einen Punkt  $\mathcal{T}_0 \in \mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{A}_0 \neq \mathcal{T}_0$ , so ist nach den Erläuterungen aus Bemerkung 1.4.32 und den Ergebnissen aus Satz 1.4.34 der Punkt  $\mathcal{A}_0$  nur mit Vielfachheit  $\sigma_{\mathcal{A}_0} = 1$  in dieser Menge und für  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{T}_0$  mit Vielfachheit  $\sigma_{\mathcal{A}_0} = 2$ , woraus sich jeweils  $\rho_{\mathcal{T}_1} = 1$  bzw.  $\rho_{\mathcal{T}_1} = 2$  ergeben. Also genau das, was man aufgrund von Definition 1.4.25 erwarten würde.

*Bemerkung 1.4.36.* Anschaulich betrachtet, bedeutet die Definition 1.4.25 nun, dass zum Beispiel eine Doppeltangente (zweifache Tangente) die Kurve erwartungsgemäß genau in zwei Punkten mit Vielfachheit  $\sigma = 2$  berührt.

*Bemerkung 1.4.37.* Definition 1.4.25 kann man auch als Dualisierung von Bemerkung 1.4.7 und Definition 1.4.8 auffassen, wobei erst durch die Begriffsbildungen dieses Abschnitts wirklich klar ist, was es heißt, wenn eine Tangente durch einen Punkt  $s$ -fach zählt.

Beispielsweise ist also die Doppeltangente das duale Gegenstück zum Doppelpunkt aus Definition 1.4.10.

Demnach erhält man dual zur Spitze eine Tangente  $\mathcal{T}_1$  auf der ein Punkt  $\mathcal{A}_0$  liegt, sodass  $\mathcal{T}_1$  unter allen Tangenten durch einen beliebigen ihrer Punkte  $\mathcal{T}_0 \neq \mathcal{A}_0$  doppelt zählt, für  $\mathcal{T}_0 = \mathcal{A}_0$  jedoch dreifach (vergleiche dazu auch mit Satz 1.4.34). Das ist aber genau das duale Gegenstück zur Wendetangente aus Definition 1.4.12.

In den nächsten drei Abschnitten wollen wir Kegelschnitte und Kubiken hinsichtlich der bisher im Kapitel erarbeiteten Begriffe untersuchen. Für die Quartiken streichen wir noch ein paar Eigenschaften heraus, die wir später benötigen werden.

## 1.4.6 Kegelschnitte

Eine Kurve  $k_2$  der Ordnung 2 heißt Kegelschnitt und die zugehörige Gleichung hat nach Zusammenfassung der entsprechenden Terme die Gestalt

$$f(x_0, x_1, x_2) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j = \widetilde{a}_{00} x_0^2 + \widetilde{a}_{01} x_0 x_1 + \widetilde{a}_{02} x_0 x_2 + \widetilde{a}_{11} x_1^2 + \widetilde{a}_{12} x_1 x_2 + \widetilde{a}_{22} x_2^2 = 0.$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

- Die Gleichung eines Kegelschnitts kann auch folgendermaßen angegeben werden:

$$f(x_0, x_1, x_2) = (x_0, x_1, x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} \widetilde{a}_{00} & \frac{\widetilde{a}_{01}}{2} & \frac{\widetilde{a}_{02}}{2} \\ \frac{\widetilde{a}_{01}}{2} & \widetilde{a}_{11} & \frac{\widetilde{a}_{12}}{2} \\ \frac{\widetilde{a}_{02}}{2} & \frac{\widetilde{a}_{12}}{2} & \widetilde{a}_{22} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.14)$$

- Es gibt zwei mögliche zerfallende  $k_2$ 
  - zwei Gerade mit einem gemeinsamen Punkt,
  - eine doppelt zu zählende Gerade.

Dabei zerfällt ein Kegelschnitt  $k_2$  genau dann, wenn die Matrix  $A$  in (1.14) nicht invertierbar ist, also  $\det(A) = 0$  gilt.

- Eine nicht zerfallende  $k_2$  hat keine Singularitäten.
- Eine  $k_2$  hat keine gewöhnlichen Wendepunkte.
- Für eine  $k_2$  gibt es eine rationale Parameterdarstellung.
- In jedem Punkt einer nicht zerfallenden  $k_2$  gibt es eine wohlbestimmte Tangente. Die Gesamtheit der Tangenten bildet das Dualgebilde  $\widehat{k}_2$ .
- Eine nicht zerfallende  $k_2$  ist eine Kurve der Klasse 2.
- Durch  $\sum_{i,j=0}^2 a_{ij}x_iy_j = 0$  ist eine Polaritätskorrespondenz gegeben, wobei 2 Punkte korrespondieren, wenn ihre Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2)$  die Gleichung erfüllen.
- Die  $k_2$  ist die Gesamtheit aller selbstkorrespondierenden Punkte.
- Die Polaritätskorrespondenz entspricht im Fall eines Kegelschnitts der Gleichung der in Definition 1.4.17 eingeführten Polare bezüglich des Punktes  $(y_0, y_1, y_2)$ .
- Ein Kegelschnitt ist durch die Angabe von fünf auf ihm liegenden Punkten projektiv eindeutig (bis auf einen Faktor) gegeben.

### 1.4.7 Kubiken

Eine Kurve  $k_3$  der Ordnung 3 heißt Kubik (oder kubische Kurve) und die zugehörige Gleichung hat nach Zusammenfassung der entsprechenden Terme die Gestalt

$$\begin{aligned}
 f(x_0, x_1, x_2) &= \sum_{i,j,k=0}^2 a_{ijk}x_ix_jx_k \\
 &= \widetilde{a}_{000}x_0^3 + \widetilde{a}_{001}x_0^2x_1 + \widetilde{a}_{002}x_0^2x_2 + \widetilde{a}_{011}x_0x_1^2 + \widetilde{a}_{022}x_0x_2^2 \\
 &\quad + \widetilde{a}_{012}x_0x_1x_2 + \widetilde{a}_{111}x_1^3 + \widetilde{a}_{112}x_1^2x_2 + \widetilde{a}_{122}x_1x_2^2 + \widetilde{a}_{222}x_2^3 = 0.
 \end{aligned}$$

Es gelten folgende Eigenschaften:

- Es gibt sechs mögliche zerfallende  $k_3$ :
  - ein nicht zerfallender Kegelschnitt und eine seiner Tangenten,
  - ein nicht zerfallender Kegelschnitt und eine Gerade, die ihn nicht berührt,
  - drei Gerade durch einen gemeinsamen Punkt,
  - drei Gerade ohne gemeinsamen Punkt,
  - eine Gerade und eine doppelt zu zählende Gerade,
  - eine dreifach zu zählende Gerade.
- Eine nicht zerfallende  $k_3$  hat höchstens eine Singularität – einen Doppelpunkt oder eine Spitze.
- Gewöhnliche Wendepunkte:
  - Eine Kubik mit Spitze besitzt genau einen Wendepunkt.
  - Eine Kubik mit Doppelpunkt besitzt genau drei Wendepunkte.
  - Eine Kubik ohne Singularität besitzt genau neun Wendepunkte.

Eine Wendetangente hat außer dem Wendepunkt mit der  $k_3$  keinen weiteren Punkt gemeinsam. Eine Gerade, die drei Wendepunkte einer  $k_3$  enthält, heißt *Inflexionsachse*. Die neun Wendepunkte einer singularitätenfreien Kubik liegen auf zwölf Inflexionsachsen.

- Eine nicht zerfallende Kubik mit singulärem Punkt hat eine rationale Parameterdarstellung.
- Kubiken mit Doppelpunkten und Kubiken mit Spitze sind je zueinander projektiv äquivalent, d.h. es gibt eine Darstellung in einer Normalform, die nicht von Koeffizienten abhängt.
- Eine Kubik heißt reell, wenn sie in einem bestimmten Koordinatensystem durch eine Gleichung mit reellen Koeffizienten dargestellt werden kann. Es gibt im wesentlichen fünf grobe Typen von nicht zerfallenden reellen Kubiken:
  - die zweiteilige Form,
  - die einteilige Form,
  - mit reellem Knoten,
  - mit isoliertem Punkt,
  - mit Spitze.

Die letzten drei Typen sind Kubiken mit singulärem Punkt, die beiden ersten ohne. Bei der zweiteiligen Form unterscheidet man noch weiter in einen im Endlichen liegenden Teil (paarer Teil) und einen sich ins Unendliche erstreckenden Teil (unpaarer Teil).

Eine reelle singuläre Kubik besitzt entweder einen oder drei reelle Wendepunkte.

In der reellen projektiven Ebene kann es keine Konfiguration mit neun Wendepunkten und zwölf Inflexionsachsen geben.

- Das Polarsystem einer Kubik besteht aus einer  $\infty^2$ -Linearschar von Kegelschnitten.
- Kubiken ohne singulären Punkt haben Klasse 6, Kubiken mit Doppelpunkt Klasse 4 und Kubiken mit Spitze Klasse 3.
- Alle ebenen kubischen Kurven, die durch sechs verschiedene feste, nicht alle auf einem Kegelschnitt  $k_2$  liegende Punkte gehen, bilden eine  $\infty^3$ -Linearschar.

### 1.4.8 Quartiken

Eine Kurve  $k_4$  der Ordnung 4 heißt Quartik. Es gelten folgende Eigenschaften:

- Eine Quartik kann einen regulären Punkt haben, in dem die zugehörige Tangente von der Vielfachheit 4 berührt. So ein Punkt heißt *Flachpunkt* und die zugehörige Tangente *Flachtangente*.
- Das duale Gegenstück einer Flachtangente ist ein Spitzpunkt. Dieser ist Ursprung eines Zweigs der Ordnung 3 und Klasse 1.
- Eine singularitätenfreie Quartik ohne Flachpunkte (ohne Flachtangenten) hat 24 gewöhnliche Wendepunkte und 28 Doppeltangenten.
- Es gibt reelle Quartiken mit 28 Doppeltangenten.

- Es existiert keine Quartik  $k_4$  ohne Punkt singularität, deren Dualgebilde als Liniensingularitäten (vergleiche Definition 1.4.25) nur Wendetangenten und eine Flachtangente besitzt. Eine solche Quartik muss also zumindest noch eine weitere Flachtangente oder eine Doppeltangente besitzen, da als Liniensingularitäten bei den Quartiken nur Doppeltangenten, Flachtangenten und Wendetangenten in Frage kommen.

## 1.5 $\mathbb{P}^3$

Nachdem wir nun einige Begriffe der projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  (bzw.  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ) vorbereitet haben, brauchen wir als nächstes ein analytisches Modell für den projektiven Raum  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Der Aufbau für den Raum  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  funktioniert ganz analog. Wir gehen wieder ganz ähnlich wie beim  $\mathbb{P}^2$  vor, wobei wir für diesen Abschnitt von der bisher verwendeten Notation für Punkte, Gerade, ... mit den tiefgestellten Dimensionszahlen noch einmal abweichen.

### 1.5.1 Analytisches Modell

- Zunächst gehen wir vom affinen Raum  $\mathbb{R}^3$  aus und fügen wieder die Fernelemente und die entsprechenden Inzidenzen in folgender Weise hinzu:
  - parallele Gerade definieren einen Fernpunkt,
  - parallele Ebenen definieren eine Ferngerade.
  - Der Fernpunkt  $G_u$  einer Geraden  $g$  liegt auf der Ferngeraden  $e_u$  der Ebenen  $\epsilon$ , die zu  $g$  parallel sind.
  - Fernpunkte und Ferngerade liegen in der Fernebene  $\omega$ .

Dadurch erhalten wir den projektiven Abschluss

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \cup \{\text{Fernpunkte}\} \cup \{\text{Ferngerade}\} \cup \{\text{Fernebene}\}.$$

- Für das analytische Modell gehen wieder vom affinen Raum  $\mathbb{R}^3$  mit dem Koordinatensystem  $(\mathcal{O} = (0, 0, 0), x, y, z)$  (Ursprung  $\mathcal{O}$ ) aus und betten ihn in  $\mathbb{R}^4$  ein, sodass für den Vektorraum  $\mathbb{R}^4$  mit den Koordinatenachsen  $x_0, x_1, x_2, x_3$  gilt, dass

$$x \parallel x_1, y \parallel x_2, z \parallel x_3$$

und  $\mathbb{R}^3$  in der Hyperebene  $x_0 = 1$  liegt.

- Jeder eigentliche Punkt  $X \in \mathbb{R}^3$  ist darstellbar als Schnittpunkt von  $\mathbb{R}^3 : x_0 = 1$  mit einer Geraden  $\vec{x}\lambda = (x_0, x_1, x_2, x_3)\lambda$  durch  $\mathcal{O} = (0, 0, 0, 0)$ , wobei  $x_0 \neq 0$  gilt. Die Umrechnung von  $x_0, x_1, x_2, x_3$  auf  $x, y, z$  erfolgt dann durch

$$x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, z = \frac{x_3}{x_0}.$$

- Die Fernpunkte des projektiven Abschlusses  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  von  $\mathbb{R}^3$  werden dargestellt durch die Geraden  $\vec{f}\lambda$  durch  $\mathcal{O}$  mit  $f_0 = 0$ .
- Man erhält, wie im  $\mathbb{P}^2$ , eine Bijektion zwischen den Punkten  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  und den Geraden (1-dimensionalen Unterräumen) durch  $\mathcal{O}$ . Wir identifizieren also Punkte  $X \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  mit Vektoren  $\vec{x}\lambda, \vec{x} \in \mathbb{R}^4$  und erhalten die Punktmenge des  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  als

$$\mathcal{P} = \{\vec{x}\mathbb{R} = (x_0, x_1, x_2, x_3)\lambda = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3), \lambda \neq 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{\mathcal{O}\}\}$$

und bezeichnen  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$  als homogene Koordinaten von  $X$ .

- Jede Ebene  $E \in \mathbb{R}^3$  ist darstellbar durch  $E : e_0 + e_1x + e_2y + e_3z = 0$ ,  $(e_1, e_2, e_3) \neq (0, 0, 0)$ . Durch Homogenisieren erhält man

$$\epsilon : e_0x_0 + e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0 (= \vec{e} \cdot \vec{x}), \quad (1.15)$$

wobei  $E = \epsilon \cap (\mathbb{R}^3 : x_0 = 1)$  gilt. Die Fernebene ergibt sich durch  $\omega : x_0 = 0$ .

- Man erhält nun eine Bijektion zwischen den Ebenen  $\epsilon \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  und den 3-dimensionalen Unterräumen des  $\mathbb{R}^4$ , die in Gleichungen der Form (1.15) gegeben sind. Dadurch lassen sich auch Ebenen  $\epsilon \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  mit Vektoren  $\lambda\vec{e}, \vec{e} \in \mathbb{R}^4$  identifizieren und wir erhalten die Ebenenmenge des  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  als

$$\mathcal{E} = \{ \mathbb{R}\vec{e} = \lambda(e_0, e_1, e_2, e_3) = (e_0 : e_1 : e_2 : e_3), \lambda \neq 0, \vec{e} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{ \mathcal{O} \} \}$$

und bezeichnen  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  als homogene Ebenenkoordinaten von  $\epsilon$ .

- Zur Vervollständigung des analytischen Modells ergänzen wir noch die passende Inzidenzrelation. Wir sagen, dass ein Punkt  $X = \vec{x}\mathbb{R}$  genau dann auf einer Ebene  $\epsilon = \mathbb{R}\vec{e}$  liegt, wenn gilt

$$\vec{e} \cdot \vec{x} = e_0x_0 + e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3 = 0 \text{ also } \vec{e} \perp \vec{x}.$$

Die Inzidenzmenge lautet dann

$$\mathcal{I} = \{ (X, \epsilon) = (\vec{x}\mathbb{R}, \mathbb{R}\vec{e}), \vec{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{ \mathcal{O} \}, \vec{e} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{ \mathcal{O} \}, \text{ mit } \vec{e} \cdot \vec{x} = 0 \}$$

- Eine Gerade  $g \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  wird durch einen 2-dimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^4$  dargestellt. Alle Geraden bilden die Geradenmenge  $\mathcal{G}$ . Man erhält ein Schema, dass auch auf höhere Dimensionen erweiterbar ist:

$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$	$\mathbb{R}^4$
Punkt	1-dimensionaler Unterraum
Gerade	2-dimensionaler Unterraum
Ebene	3-dimensionaler Unterraum

### 1.5.2 Dualitätsprinzip

Wie schon bei der projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2$ , lässt sich auch zu  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  der duale projektive Raum  $\mathbb{P}^{3*}(\mathbb{R})$  entwickeln, mit den Mengen

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{E}, \mathcal{G}^* = \mathcal{G}, \mathcal{E}^* = \mathcal{P}.$$

Es besteht also eine Dualität zwischen Punkten und Ebenen des  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , die sich auch an der gleichen analytischen Darstellung ablesen lässt. Gerade sind selbstdual. Fast man eine Gerade als Erzeugnis einer Punktreihe auf, ergibt sich dual dazu, dass sich eine Gerade als Ort der gemeinsamen Punkte eines Ebenenbüschels darstellen lässt. Man sagt, dass die Gerade *Träger* des Ebenenbüschels ist. Das Dualitätsprinzip besagt, dass sich geometrische Aussagen über Punkte in geometrische Aussagen über Ebenen umwandeln lassen, wobei man das Verbinden von Punkten durch Schneiden von Ebenen ersetzen muss.

### 1.5.3 Projektive Abbildungen, Koordinatensysteme und Koordinatenwechsel

Grundsätzlich gelten alle Aussagen aus den entsprechenden Abschnitten der projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2$ , wobei wir hier das Wichtigste noch einmal zusammenfassen:

- Eine Abbildung  $\phi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  heißt projektiv, wenn es eine injektive lineare Abbildung

$$\tilde{\phi} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ mit } \phi(\langle x \rangle) = \langle \tilde{\phi}(x) \rangle, \forall \langle x \rangle \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

gibt, wobei sich  $\langle x \rangle$  auf die Darstellung der Punkte von  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  als Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation  $\sim$  bezieht (vergleiche 1.1.10).

- Die projektive Abbildung kann durch eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  angegeben werden.
- Ist  $\tilde{\phi}$  invertierbar, sprechen wir von einer projektiven Kollineation. Diese ist eine bijektive Punktabbildung, geradentreu (kollineare Punkte werden auf kollineare Punkte abgebildet) und ebenentreu (koplanare Punkte werden auf koplanare Punkte abgebildet).
- Die duale projektive Kollineation  $\phi^* : \mathbb{P}^{3*}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^{3*}(\mathbb{R})$  bildet Ebenen bijektiv auf Ebenen ab und wird dargestellt durch die Matrix  $A^{-T}$ .
- Zur Festlegung einer projektiven Kollineation benötigt man fünf Punkte und ihre jeweiligen Bilder. Dabei dürfen je drei der fünf (sowohl im Bild als auch im Urbild) nicht auf einer Geraden liegen und je vier nicht auf einer Ebene. Ein projektives Koordinatensystem ist demnach durch fünf Punkte mit den gleichen Voraussetzungen festgelegt. Man bezeichnet vier dieser Punkte  $B_0, B_1, B_2, B_3$  als Grundpunkte und den fünften Punkt  $E$  als Einheitspunkt. Die Grundpunkte spannen das sogenannte *Grundtetraeder* auf.
- Daraus ergibt sich auch, dass bei der Betrachtung einer Hyperfläche des  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit bis zu fünf Punkte in dieser Lage vorgegeben werden können, da jede andere Wahl von fünf derartigen Punkten mittels einer projektiven Kollineation eineindeutig den fünf vorgegebenen Punkte zugeordnet werden kann.
- Eine projektive Abbildung  $\kappa : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^{3*}(\mathbb{R})$  mit  $\mathbb{R}\vec{g} = \mathbb{R}(A\vec{x})$ ,  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ,  $\det(A) \neq 0$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ ,  $\vec{x}' \in \mathbb{R}^4$  heißt projektive Korrelation. Sie bildet Punkte des  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  bijektiv auf Ebenen des  $\mathbb{P}^{3*}(\mathbb{R})$  ab. Eine projektive Korrelation mit  $\phi^* \circ \phi = \text{id}_{\mathbb{P}^3(\mathbb{R})}$  heißt Polarität.

### 1.5.4 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

Ganz analog zu  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  geht man jetzt von einem affinen Raum  $\mathbb{C}^3$  aus und erweitert ihn um die Fernelemente. Auch der Aufbau des analytischen Modells folgt dem selben Schema wie bei  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Wir erhalten:

- Ein Punkt  $P$  heißt reell, wenn  $P = \bar{P}$ .
- Eine Ebene  $\epsilon$  heißt reell, wenn  $\epsilon = \bar{\epsilon}$ . Haben  $\epsilon$  und  $\bar{\epsilon}$  eine Gerade gemeinsam, ist  $\epsilon$  komplex.
- Bei den Geraden unterscheidet man drei Sorten:
  - Gilt  $g = \bar{g}$ , sprechen wir von einer reellen Geraden.
  - Schneiden sich  $g$  und  $\bar{g}$  in einem reellen Punkt, spricht man von niederimaginären Geraden.

Schneiden sich die Geraden in keinem reellen Punkt, spricht man von hochimaginären Geraden.

Im Folgenden werden wir statt  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  nur mehr  $\mathbb{P}^3$  schreiben.

### 1.5.5 Einschränkung einer Kollineation

Gegeben sei eine projektive Kollineation

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{P}^3 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ \vec{x}'\mathbb{C} &= (A \cdot \vec{x})\mathbb{C}.\end{aligned}$$

Wir wollen  $\phi$  auf eine Ebene  $\pi(\cong\mathbb{P}^2)$  einschränken. Dazu müssen wir unser Koordinatensystem in  $\mathbb{P}^3$  so wählen, dass  $B_0, B_1, B_2$  in der Ebene  $\pi$  liegen. Die Punkte  $B_i$  seien gegeben durch  $\vec{b}_i\mathbb{C}$  und  $F$  sei ein weiterer Punkt mit  $\vec{f}\mathbb{C} = (\vec{b}_0 + \vec{b}_1 + \vec{b}_2)\mathbb{C}$ . Unter  $\phi$  werden die Punkte dann folgendermaßen abgebildet:

$$\begin{aligned}B_i &\mapsto B'_i, i = 0, 1, 2, \\ F &\mapsto F',\end{aligned}$$

wobei  $B'_0, B'_1, B'_2$  und  $F'$  in der Ebene  $\pi'$  liegen. Für einen Punkt  $X \in \pi$  gilt dann, dass er sich darstellen lässt als

$$X = x_0\vec{b}_0 + x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2.$$

Er wird dann unter  $\phi|_{\pi}$  abgebildet auf

$$X' = x_0\vec{b}'_0 + x_1\vec{b}'_1 + x_2\vec{b}'_2,$$

womit  $X$  und  $X'$  durch dieselben Koordinaten  $(x_0 : x_1 : x_2)$  bezüglich der projektiven ebenen Koordinatensysteme  $(B_0, B_1, B_2, F)$  in  $\pi$  und  $(B'_0, B'_1, B'_2, F')$  in  $\pi'$  beschrieben werden. Schränkt man eine projektive Kollineation

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{P}^3 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ \vec{x}'\mathbb{C} &= (A \cdot \vec{x})\mathbb{C}\end{aligned}$$

auf eine Gerade  $g$  ein, so erhält man analog, dass  $X$  und  $X'$  unter  $\phi|_g$  durch dieselben Koordinaten  $(x_0 : x_1)$  bezüglich der projektiven Geraden-Koordinatensysteme  $(B_0, B_1, F)$  in  $g$  und  $(B'_0, B'_1, F')$  in  $g'$  beschrieben werden, wobei  $\vec{f}\mathbb{C} = (\vec{b}_0 + \vec{b}_1)\mathbb{C}$  gilt.

### 1.5.6 Darstellungen von Geraden und Ebenen

Aus Bemerkung 1.3.1 wissen wir bereits, dass  $d$ -dimensionale Teilräume des  $\mathbb{P}^3$  eine Parameterdarstellung besitzen. Konkret heißt das für Ebenen, dass

$$X = \vec{x}\mathbb{C} = (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})\mathbb{C}$$

ein beliebiger Punkt einer Ebene  $\epsilon$  ist, wobei  $A = \vec{a}\mathbb{C}, B = \vec{b}\mathbb{C}, C = \vec{c}\mathbb{C}$  drei verschiedene Punkte der Ebene sind, die nicht auf einer Geraden liegen.  $(\alpha, \beta, \gamma)$  sind die homogenen Koordinaten

in  $\epsilon$  bezüglich dem Koordinatensystem  $(A, B, C, D)$ , wobei  $\vec{d}\mathbb{C} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})\mathbb{C}$  gilt. Für Gerade bedeutet das, dass

$$X = \vec{x}\mathbb{C} = (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b})\mathbb{C}$$

ein beliebiger Punkt der Geraden  $g$  ist, wobei  $A = \vec{a}\mathbb{C}, B = \vec{b}\mathbb{C}$  zwei verschiedene Punkte von  $g$  sind.  $(\alpha, \beta)$  sind die homogenen Koordinaten in  $g$  bezüglich dem Koordinatensystem  $(A, B, C)$ , wobei  $\vec{c}\mathbb{C} = (\vec{a} + \vec{b})\mathbb{C}$  gilt.

Alternativ kann zufolge Abschnitt 1.5.2 eine Gerade auch als Träger eines Ebenenbüschels aufgefasst werden. Durch die Angabe zweier Ebenen dieses Büschels ist die Gerade eindeutig festgelegt.

$\epsilon = \mathbb{C}\vec{e}$  und  $\phi = \mathbb{C}\vec{f}$  seien zwei Ebenen, die  $g$  gemeinsam haben. Eine beliebige Ebene  $\gamma$  durch  $g$  ist dann dargestellt durch

$$\gamma = \mathbb{C}(\lambda\vec{e} + \mu\vec{f}).$$

$(\lambda, \mu)$  sind die homogenen Koordinaten im Ebenenbüschel bezüglich dem Koordinatensystem  $(\epsilon, \phi, \psi)$ , wobei  $\psi = \mathbb{C}(\vec{e} + \vec{f})$  gilt.

Von nun an wollen wir wieder zur Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen mit den tiefgestellten Dimensionszahlen zurückkehren, wobei wir Gerade nun manchmal auch mit Kleinbuchstaben bezeichnen werden. Es gibt eine weitere Möglichkeit Gerade des  $\mathbb{P}^3$  darzustellen, die wir später benötigen werden.

### 1.5.7 Plücker'sche Geradenkoordinaten

**Definition 1.5.1** (Plücker'sche Geradenkoordinaten). Gegeben seien zwei Punkte des  $\mathbb{P}^3$  durch  $\mathcal{A}_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$  und  $\mathcal{B}_0 = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ . Die sechs Determinanten

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \quad \text{mit } (0 \leq i < j \leq 3)$$

bezeichnet man als die Plücker'schen Geradenkoordinaten der Verbindungsgerade  $p_1$  von  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$ . Die  $p_{ij}$  sind unabhängig von der Wahl der zwei Punkte auf  $p_1$ . Außerdem gilt die Beziehung

$$p_{01}p_{23} + p_{03}p_{12} - p_{02}p_{13} = 0. \quad (1.16)$$

*Bemerkung 1.5.2.* Fasst man die Werte  $p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}$  als Koordinaten eines Punktes im  $\mathbb{P}^5$  auf, so definiert die Gleichung (1.16) innerhalb des  $\mathbb{P}^5$  die sogenannte *Plückerquadrik*  $Q_4$ . Man kann also den Geraden des  $\mathbb{P}^3$  eindeutig Punkte auf  $Q_4$  zuordnen.

Es gelten die folgenden zwei Aussagen, die man unter der Verwendung der Plücker'schen Geradenkoordinaten beweisen kann.

**Satz 1.5.3.** Gegeben seien zwei windschiefe Gerade  $a_1$  und  $b_1$  des  $\mathbb{P}^3$ . Dann wird die Gesamtheit  $L_{a_1, b_1}$  aller Treffgeraden von  $a_1$  und  $b_1$  (Gerade, die gleichzeitig  $a_1$  und  $b_1$  schneiden) auf die Punkte einer regulären Quadrik  $Q_2 \subset Q_4$  abgebildet. Man nennt  $L_{a_1, b_1}$  die allgemeine lineare Geradenkongruenz.

*Bemerkung 1.5.4.* Durch jeden Punkt, der weder auf  $a_1$  noch  $b_1$  liegt, geht genau eine Gerade von  $L_{a_1, b_1}$ . Für die duale Aussage ergibt sich: In jeder Ebene, die weder  $a_1$  noch  $b_1$  enthält, liegt genau eine Gerade von  $L_{a_1, b_1}$ .

**Satz 1.5.5.** Gegeben seien die allgemeine lineare Geradenkongruenz  $L_{a_1, b_1}$  und eine Ebene  $\mathcal{C}_2$ , die weder  $a_1$  noch  $b_1$  enthält. Für  $\mathcal{C}_2$  gelte:

$$\mathcal{C}_2 \cap a_1 = \mathcal{C}_0^{a_1}, \mathcal{C}_2 \cap b_1 = \mathcal{C}_0^{b_1}, c_1 = \mathcal{C}_0^{a_1} \cup \mathcal{C}_0^{b_1}.$$

Wenn man Punkte  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{C}_2$  den Geraden  $p_1 \in L_{a_1, b_1}$  zuordnet, mit denen sie inzidieren, so erhält man eine im allgemeinen eineindeutige Beziehung mit folgenden Ausnahmen:

- Jeder Punkt von  $c_1$  ist  $c_1$  zugeordnet.
- $\mathcal{C}_0^{a_1}$  und  $\mathcal{C}_0^{b_1}$  sind je allen Geraden aus  $L_{a_1, b_1}$  durch  $\mathcal{C}_0^{a_1}$  und  $\mathcal{C}_0^{b_1}$  zugeordnet.

*Bemerkung 1.5.6.* Wir wählen im Satz 1.5.5 beispielsweise

$$a_1 : x_2 = x_3 = 0, b_1 : x_0 = x_1 = 0 \text{ und } \mathcal{C}_2 : x_3 - x_0 = 0,$$

wobei  $a_1$  und  $b_1$  jeweils durch zwei Ebenen des Büschels ( $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$  bzw.  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 0$ ), deren Träger sie sind, dargestellt werden. Die Ausnahmegerade ergibt sich dann zu

$$x_3 = x_0 = 0$$

bzw. in Plückerkoordinaten

$$p_{12} = 1, p_{01} = p_{23} = p_{02} = p_{03} = p_{13} = 0. \quad (1.17)$$

Man erhält nun für einen durch  $\mathcal{P}_0 = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  dargestellten Punkt der Ebene  $\mathcal{C}_2$  eine Plückerdarstellung der  $\mathcal{P}_0$  enthaltenden Geraden  $\mathcal{P}_1 \in L_{a_1, b_1}$  mit

$$p_{01} = p_{23} = 0, p_{02} = x_0 x_2, p_{03} = x_0^2, p_{12} = x_1 x_2, p_{13} = x_0 x_1. \quad (1.18)$$

Es lässt sich zeigen, dass (1.18) auch die Projektion der Quadrik  $Q_2$  aus Satz 1.5.3 aus dem Punkt (1.17) (ist wie bekannt als Gerade ein Punkt der Plückerquadrik) auf eine diesen Punkt nicht enthaltende Ebene ist. Man spricht dann von einer stereographischen Projektion.

## 1.5.8 Involutionen und Korrespondenzen zwischen Geraden

**Definition 1.5.7** (Involution).  $(x_0, x_1)$  seien projektive Koordinaten auf einer Geraden  $p_1$ . Die Gesamtheit aller Punktepaare mit Koordinaten  $(x_0, x_1)$  und  $(y_0, y_1)$  auf  $p_1$ , die

$$(y_0 a_{00} + y_1 b_{00})x_0^2 + 2(y_0 a_{01} + y_1 b_{01})x_0 x_1 + (y_0 a_{11} + y_1 b_{11})x_1^2 = 0 \quad (1.19)$$

erfüllen, heißen Involution, wobei die festen  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  nicht alle verschwinden dürfen und  $(y_0, y_1) \neq (0, 0)$  gelten muss.

Man kann  $(y_0, y_1)$  als Koordinaten einer zweiten Geraden  $q_1$  auffassen und erhält die

**Definition 1.5.8** ((2,1)-Korrespondenz). Das Paar von Punkten  $\mathcal{X}_0 = (x_0, x_1) \in p_1$  und  $\mathcal{Y}_0 = (y_0, y_1) \in q_1$  korrespondiert zueinander, wenn ihre Koordinaten die Gleichung (1.19) erfüllen. Wir sprechen von einer (2,1)-Korrespondenz  $\kappa$  zwischen den Punkten von  $p_1$  und  $q_1$ , denn im allgemeinen korrespondieren zwei Punkte auf  $p_1$  zu je einem Punkt auf  $q_1$ .

*Bemerkung 1.5.9.* Die Gesamtheit der so erklärten Paare auf  $p_1$  definieren die Involution. Dabei fallen zwei Punkte (sogenannte *Doppelpunkte*) genau dann zusammen, wenn für die entsprechenden Punkte  $\mathcal{Y}_0$  auf  $q_1$

$$(a_{01}y_0 + b_{01}y_1)^2 - (a_{00}y_0 + b_{00}y_1)(a_{11}y_0 + b_{11}y_1) = 0 \quad (1.20)$$

gilt. Verschwindet die linke Seite dieser Gleichung nicht identisch und hat zwei verschiedene Wurzeln, sprechen wir von einer regulären  $(2, 1)$ -Korrespondenz. Das ist äquivalent dazu, dass

$$D = (a_{01}^2 - a_{00}a_{11})(b_{01}^2 - b_{00}b_{11}) - (a_{01}b_{01} - a_{00}b_{11} - a_{11}b_{00})^2 \neq 0$$

gilt.  $D$  ist aber gleichzeitig auch die Resultante der Polynome

$$\begin{aligned} a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2 &= 0 \\ b_{00}x_0^2 + 2b_{01}x_0x_1 + b_{11}x_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Verschwindet  $D$ , so haben die beiden Polynome eine gemeinsame Wurzel und umgekehrt.

Es lässt sich zeigen, dass es neben den regulären  $(2, 1)$ -Korrespondenzen noch drei Typen von nicht-regulären (zerfallenden)  $(2, 1)$ -Korrespondenzen gibt. In geeignet gewählten Koordinaten erhält man folgende Normalformen für alle vier Typen:

- $x_0^2y_0 - x_1^2y_1 = 0$  im regulären Fall und
- $x_0(x_0y_0 - x_1y_1) = 0$ ,  $x_0x_1y_0 = 0$  oder  $x_0^2y_0 = 0$  in den nicht-regulären Fällen.

Man sieht leicht, dass im nicht-regulären Fall der Punkt  $(x_0, x_1) = (0, 1)$  zu jedem Punkt  $(y_0, y_1)$  korrespondiert.

## 1.6 Algebraische Flächen

### 1.6.1 Definition

Wieder als Spezialfall der Hyperflächen erhalten wir die algebraischen Flächen des  $\mathbb{P}^3$ .

**Definition 1.6.1** (Algebraische Fläche). Eine Gleichung

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1.21)$$

definiert eine algebraische Fläche  $F_n$ , wobei  $f$  eine quaternäre Form vom Grad  $n$  (vergleiche Definition 1.2.6 für  $q = 3, p = n$ ) in den  $x_i, i = 0, 1, 2, 3$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{C}$  ist. Man nennt  $n$  die Ordnung der Fläche.

Im Folgenden wird die algebraische Fläche kurz als „Fläche“ bezeichnet.

*Bemerkung 1.6.2.* Eine  $F_n$  kann in Flächen niederer Ordnung mit einer Gesamtsumme der Ordnungen von  $n$  zerfallen (vergleiche Bemerkung 1.2.10). Zerfällt die Fläche nicht, sagt man, sie ist irreduzibel.

*Bemerkung 1.6.3.* Einige Bezeichnungen für Flächen für spezielle Ordnungen  $n$ :

- $n = 1$ : Ebene
- $n = 2$ : Quadrik
- $n = 3$ : Kubische Fläche

## 1.6.2 Eigenschaften einer Fläche

- Aus Satz 1.3.8 wissen wir, dass eine Gerade, die nicht schon ganz in einer Fläche  $F_n$  der Ordnung  $n$  liegt, die  $F_n$  in höchstens  $n$  Punkten schneidet. Diese Höchstzahl muss erreicht werden, wenn  $F_n$  irreduzibel ist. Im reduziblen Fall kann  $F_n$  mehrfach zu zählende Bestandteile besitzen und daher kann es passieren, dass keine Gerade die Höchstzahl der Schnittpunkte erreicht.
- Eine beliebige Ebene  $\mathcal{P}_2$ , die nicht schon ein Bestandteil von  $F_n$  ist, schneidet die Fläche  $F_n$  in einer ebenen algebraischen Kurve  $k_n$  der Ordnung  $n$ . Diese  $k_n$  kann auch zerfallen, wenn  $F_n$  irreduzibel ist.
- Ist  $\mathcal{P}_0 = (1, 0, 0, 0) \in F_n$  ein Punkt der Vielfachheit  $s$  (im Sinne von Definition 1.3.5), so hat die Fläche  $F_n$  eine Darstellung der Gestalt (vergleiche Bemerkung 1.3.6)

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^{n-s} a_s(x_1, x_2, x_3) + x_0^{n-s-1} a_{s+1}(x_1, x_2, x_3) + \dots + a_n(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad (1.22)$$

wobei die  $a_i$  ternäre Formen vom Grad ihres Index sind. Außerdem verschwindet dabei  $a_s(x_1, x_2, x_3)$  nicht identisch. Im Fall  $s = 1$  sprechen wir weiterhin von einem regulären Punkt (vergleiche ebenfalls Definition 1.3.5), andernfalls von einem singulären Punkt.

- Im Gegensatz zu den Kurven können Flächen auch unendlich viele singuläre Punkte besitzen ohne zu zerfallen. Diese bilden dann eine sogenannte *singuläre Kurve*, also in der Regel eine Kurve im Raum. Beispielsweise hat ein Ebenenpaar seine Schnittgerade als singuläre Kurve, und eine  $F_3$ , die in eine Quadrik (siehe Abschnitt 1.6.5) und eine Ebene zerfällt, hat einen Kegelschnitt als gemeinsame singuläre Kurve.

Als Spezialfall für  $n = 3$  erhalten wir aus der Definition 1.3.7 die

**Definition 1.6.4** (Tangentialebene).  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  sei ein regulärer Punkt einer Fläche  $F_n$  der Ordnung  $n$ . Dann bezeichnet man die Ebene mit der Gleichung

$$\sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0, p_1, p_2, p_3) \right) x_i = 0$$

als Tangentialebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$  von  $F_n$  im Punkt  $\mathcal{P}_0$ .

Diese Definition erlaubt uns, einige weitere Eigenschaften zu beschreiben.

*Bemerkung 1.6.5.*

- Nach Satz 1.3.12 schneiden alle Geraden, die ganz in  $\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$  liegen, die Fläche  $F_n$  in  $\mathcal{P}_0$  mit einer Vielfachheit  $\sigma \geq 2$ . Umgekehrt liegen alle Geraden mit dieser Eigenschaft schon in  $\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$ . Wir bezeichnen diese Geraden naheliegenderweise als Tangenten an  $F_n$  im regulären Punkt  $\mathcal{P}_0$ .
- Wie schon bei den Kurven, wollen wir auch die Geraden, die durch einen  $s$ -fachen Punkt  $\mathcal{S}_0$  einer Fläche  $F_n$  der Ordnung  $n$  mit der Gleichung (1.21) gehen und deren Schnitt mit  $F_n$  mehr als  $s$ -fach zählt, als Tangenten in  $\mathcal{S}_0$  bezeichnen. Diese Tangenten bilden den

*Tangentialkegel* mit der Spitze  $\mathcal{S}_0$ . In einem regulären Punkt entspricht die Tangentialebene dem Tangentialkegel. Wählt man das Koordinatensystem so, dass  $\mathcal{S}_0 = (1, 0, 0, 0)$  gilt, so erhält man eine Gleichung der Gestalt (1.22), wobei  $a_s(x_1, x_2, x_3) = 0$  die Gleichung des Tangentialkegels ist (das ist auch eine Gleichung einer ebenen kubischen Kurve  $k_s$  der Ordnung  $s$  in der Ebene  $x_0 = 0$ ).

*Bemerkung 1.6.6.* Ein Kegel der Ordnung  $n$  wird durch Verbinden der Punkte einer ebenen algebraischen Kurve  $k_n$ , die in einer Ebene des Raums liegt, mit einem Punkt außerhalb dieser Ebene erzeugt. Beispielsweise ist für den eben erwähnten Tangentialkegel  $a_s(x_1, x_2, x_3) = 0$  die Gleichung einer solchen Kurve  $k_s$ . Kegel sind als Flächen der Ordnung  $n$  gekennzeichnet, die einen singulären Punkt mit Vielfachheit  $s = n$  (die Spitze) besitzen.

*Bemerkung 1.6.7.* Wir bezeichnen, wie bei den Kurven, jene Flächen  $F_n$  der Ordnung  $n$  als Monoid, die einen Punkt der Vielfachheit  $s = n - 1$  besitzen. Dazu zählen alle Quadriken und die kubischen Flächen mit einer Singularität.

Wir wollen einen später nützlichen Satz zur Kennzeichnung von Tangentialebenen angeben:

**Satz 1.6.8.**  $\mathcal{P}_0$  sei ein regulärer Punkt der Fläche  $F_n$  der Ordnung  $n$ . Die Tangentialebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$  schneidet dann  $F_n$  in einer in  $\mathcal{P}_0$  singulären Kurve. Umgekehrt ist eine Ebene  $\mathcal{T}_2$  Tangentialebene in  $\mathcal{P}_0$ , wenn dieser Punkt einerseits für  $F_n$  regulär und andererseits für die Schnittkurve  $\mathcal{T}_2 \cap F_n$  singulär ist.

**Definition 1.6.9** (Regelfläche). Eine algebraische Fläche, bei der durch jeden Punkt mindestens eine Gerade geht, die ganz auf der Fläche liegt, heißt Regelfläche.

*Bemerkung 1.6.10.* Quadriken und Kegel sind Regelflächen.

Wir wollen nun noch das Analogon eines Doppelpunkts für eine Fläche entwickeln. Dabei können allerdings drei Fälle unterschieden werden.

**Definition 1.6.11** (Doppelpunkt).  $\mathcal{S}_0$  sei ein singulärer Punkt mit Vielfachheit  $s = 2$ . Aus den oben angegebenen Eigenschaften wissen wir, dass die Tangenten an  $F_n$  in  $\mathcal{S}_0$  einen Tangentialkegel bilden. Dieser Kegel ist dann eine Fläche der Ordnung 2, die im Gegensatz zur Quadrik (siehe Abschnitt 1.6.5) einen singulären Punkt besitzt. Eine Fläche der Ordnung 2 kann jedoch auch noch in ein Ebenenpaar oder eine doppelt zu zählende Ebene zerfallen. Je nachdem, spricht man dann von einem

- konischen Doppelpunkt (Kegel)
- biplanaren Doppelpunkt (Ebenenpaar)
- uniplanaren Doppelpunkt (doppelt zu zählende Ebene).

### 1.6.3 Polarsystem

Wie schon bei den Kurven lassen sich die Flächen den Punkten eines höherdimensionalen projektiven Raumes zuordnen. Da eine quaternäre Form vom Grad  $n$  nach Definition 1.2.6 von  $\binom{n+3}{3}$  Koeffizienten abhängt, es in unserem Fall aber von einem gemeinsamen Faktor aller dieser Koeffizienten nicht ankommt, gilt folgendes: Die algebraischen Flächen der Ordnung  $n$  sind eineindeutig den Punkten eines projektiven Raumes  $\mathbb{P}^N$  mit

$$N = \binom{n+3}{3} - 1$$

Dimensionen zugeordnet.

Als lineare  $\infty^h$ -Schar von Flächen  $F_n$  der Ordnung  $n$  bezeichnet man die Gesamtheit aller Flächen, die den Punkten eines Teilraums  $\mathcal{P}_h \subset \mathbb{P}^N$ ,  $N = \binom{n+3}{3} - 1$  zugeordnet sind. Für  $h = 1$  spricht man wieder von Büscheln, bei  $h = 2$  von Bündeln.

Ein wichtiges, mit jeder Fläche  $F_n$  der Ordnung  $n$  verknüpftes Linearsystem von Flächen der Ordnung  $n - 1$  ist wiederum das *Polarsystem*.

**Definition 1.6.12** (Polarsystem). Eine Fläche  $F_n$  der Ordnung  $n$  sei gegeben durch ein Gleichung (1.21). Das zugehörige Polarsystem ist durch

$$\sum_{i=0}^3 \lambda_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (1.23)$$

gegeben. Verschwindet der Ausdruck (1.23) nicht identisch, bezeichnet man ihn in Anlehnung an die Definitionen 1.2.12 und 1.3.13 als Polare  $F_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  der  $F_n$  bezüglich des Punktes  $\mathcal{P}_0 = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

*Bemerkung 1.6.13.* Die Polare  $F_{n-1}(\mathcal{P}_0)$  von  $\mathcal{P}_0$  bezüglich  $F_n$  ist genau dann nicht erklärt (die linke Seite von (1.23) verschwindet also), wenn  $F_n$  ein Kegel mit der Spitze  $\mathcal{P}_0$  ist. Genau dann hat auch das Polarsystem weniger als 3 Dimensionen.

Mit den Polen kann man, wie bei den Kurven, die Berührungspunkte der Tangenten finden, die einen gegebenen Punkt enthalten. Es gilt der

**Satz 1.6.14.**  $\mathcal{Q}_0$  sei ein beliebiger Punkt des  $\mathbb{P}^3$  und  $F_{n-1}(\mathcal{Q}_0)$  die Polare des Punktes  $\mathcal{Q}_0$  bezüglich  $F_n$ . Der Punkt  $\mathcal{P}_0$  sei im Durchschnitt

$$F_n \cap F_{n-1}(\mathcal{Q}_0). \quad (1.24)$$

Ist  $\mathcal{P}_0$  regulär für  $F_n$ , ist die Gerade  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{Q}_0$  eine Tangente an  $F_n$  in  $\mathcal{P}_0$ . Umgekehrt liegt der Berührungspunkt  $\mathcal{P}_0$  jeder Tangente, die  $\mathcal{Q}_0$  enthält, im Durchschnitt (1.24). Außerdem liegen alle singulären Punkte von  $F_n$  in der Menge (1.24).

*Bemerkung 1.6.15.* Alle Tangenten aus einem beliebigen Punkt  $\mathcal{Q}_0$  des  $\mathbb{P}^3$  bilden den sogenannten *Umrisskegel* der Fläche  $F_n$  vom Punkt  $\mathcal{Q}_0$  aus, wobei man im Fall eines regulären Punktes  $\mathcal{Q}_0 \in F_n$ , die in der Tangentialebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{Q}_0)$  der  $F_n$  liegenden Tangenten nicht zum Umrisskegel zählt.

## 1.6.4 Dualgebilde

Wie schon bei den Kurven wählen wir als Ausgangspunkt eine gleich 0 gesetzte quaternäre Form vom Grad  $m$

$$f(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = 0 \quad (1.25)$$

in den Ebenenkoordinaten  $\epsilon_i, i = 0, 1, 2, 3$ . Die Dualfläche  $\widehat{F}_m$  ist die Gesamtheit aller Ebenen aus  $\mathbb{P}^{3*}$ , deren Koordinaten die Gleichung (1.25) erfüllen. Folgende Eigenschaften ergeben sich durch Dualisierung der bereits angeführten Ergebnisse der vorigen Abschnitte und viele Begriffe sind analog zum entsprechenden Abschnitt bei den Kurven definiert:

- $\mathcal{P}_1$  sei eine beliebige Gerade. Es gibt dann zwei Möglichkeiten:

- Alle Ebenen durch  $\mathcal{P}_1$  gehören zu  $\widehat{F}_m$  oder
- nur endlich viele, nämlich höchstens  $m$ , gehören zu  $\widehat{F}_m$ .
- $\mathcal{P}_0$  sei ein beliebiger Punkt. Gehören nicht alle Ebenen durch  $\mathcal{P}_0$  schon zu  $\widehat{F}_m$ , bilden die Ebenen durch  $\mathcal{P}_0$ , die zu  $\widehat{F}_m$  gehören, das räumlich-duale Gegenstück einer ebenen algebraischen Kurve. Man erhält sie also durch Verbindung der Geraden eines eben-dualen Gegenstücks  $\widehat{k}_m$  einer Kurve mit dem Punkt  $\mathcal{P}_0$  (Kegel).
- Eine Ebene  $\mathcal{P}_2 \in \widehat{F}_m$  heißt von der Vielfachheit  $s$  in  $\widehat{F}_m$ , wenn es Gerade  $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{P}_2$  gibt, sodass  $\mathcal{P}_2$  im Sinn des vorletzten Punktes unter den endlich vielen, zu  $\widehat{F}_m$  gehörigen Ebenen durch  $\mathcal{P}_1$   $s$ -fach zählt, aber keine Geraden  $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{P}_2$ , bei denen  $\mathcal{P}_2$  weniger als  $s$ -fach zählt. Gilt  $s = 1$ , spricht man von einer regulären Ebene, andernfalls von einer singulären.
- In einer regulären Ebene  $\mathcal{P}_2$  gibt es einen Punkt  $\mathcal{P}_0$ , für den gilt:  $\mathcal{P}_2$  zählt in allen Büscheln, deren Trägergerade  $\mathcal{P}_0$  nicht enthält, einfach, für alle Büschel, deren Trägergerade  $\mathcal{P}_0$  enthält, mindestens zweifach (vergleiche Definition 1.4.25). Dieser Punkt  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{P}_2$  ist das duale Gegenstück zur Tangentialebene im regulären Punkt einer Fläche  $F_n$ . Die Geraden des Büschels durch  $\mathcal{P}_0$  in der Ebene  $\mathcal{P}_2$  entsprechen den Tangenten, die  $F_n$  im regulären Punkt  $\mathcal{P}_0$  berühren. Wir nennen sie Dualtangente von  $\widehat{F}_m$ .  
Zählt eine Ebene  $\mathcal{P}_2$  im Sinn des vorletzten Punktes von der Vielfachheit  $s > 1$ , dann bilden die Geraden  $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$ , für deren Büschel  $\mathcal{P}_2$  mit Vielfachheit größer  $s$  zählt, das eben-duale Gegenstück  $\widehat{k}_s$  zu einer ebenen algebraischen Kurve. Auch diese Geraden werden Dualtangente von  $\widehat{F}_m$  genannt.
- Als duales Gegenstück zu einem konischen Doppelpunkt erhält man eine Ebene  $\mathcal{P}_2 \in \widehat{F}_m$  von der Vielfachheit 2, wobei die nach dem letzten Punkt in  $\mathcal{P}_2$  ausgezeichnete  $\widehat{k}_2$  aus den Tangenten eines regulären Kegelschnitts besteht.
- Der Dualkegel besteht aus allen Ebenen des  $\mathbb{P}^3$ , die Geraden eines Gebildes  $\widehat{k}_m$  einer festen Ebene  $\mathcal{S}_2$  enthalten.  $\mathcal{S}_2$  entspricht der Spitze des Kegels.
- Eine Dualfläche  $\widehat{F}_m$  ist Dualregelfläche, wenn es in jeder Ebene  $\mathcal{P}_2$  mindestens eine Gerade  $\mathcal{P}_1$  gibt, sodass auch alle Ebenen durch  $\mathcal{P}_1$  in  $\widehat{F}_m$  liegen.

In Anlehnung an Definition 1.4.5 wollen wir Definition 1.6.4 auch auf nicht reguläre Punkte ausbauen.

**Definition 1.6.16** (Singuläre Tangentialebene).  $\mathcal{S}_0$  sei ein singulärer Punkt einer Fläche  $F_n$  der Ordnung  $n$  und  $K_s(\mathcal{S}_0)$  der schon in Bemerkung 1.6.5 definierte Tangentialkegel mit der Spitze  $\mathcal{S}_0$ . Die Geraden von  $K_s(\mathcal{S}_0)$  ergeben sich dabei durch Verbindung von  $\mathcal{S}_0$  mit einer Kurve  $k_s$ . Mit  $k_s$  sei das ebene Dualgebilde  $\widehat{k}$  verbunden. Wir bezeichnen alle Ebenen, die sich als Verbindungsebenen von Geraden aus  $\widehat{k}$  mit  $\mathcal{S}_0$  ergeben, als singuläre Tangentialebenen in  $\mathcal{S}_0$ . Diese Ebenen sind auch tangential an den Kegel (vergleiche mit der Aufzählung am Beginn des Abschnitts; Dualkegel).

*Bemerkung 1.6.17.* Die singulären Tangentialebenen sind Grenzlagen von Tangentialebenen in regulären Punkten.

Die Gesamtheit der regulären und singulären Tangentialebenen von  $F_n$  bezeichnen wir als das mit  $F_n$  verbundene Dualgebilde  $\widehat{F}_m$ . Es gilt der

**Satz 1.6.18.** *Das mit einer gegebenen Fläche  $F_n$  verbundene Dualgebilde ist eine Dualfläche  $\widehat{F}_m$ , außer wenn  $F_n$  eine Ebene oder eine Torse ist. Eine Torse ist eine spezielle Art einer Regelfläche. (Ein Kegel ist auch eine Torse.) Wir bezeichnen  $\widehat{F}_m$  auch als die mit  $F_n$  verbundene duale Fläche.*

Das Dualgebilde  $\widehat{F}_m$  einer Fläche  $F_n$  kann durch Elimination wie bei den Kurven durch eine Gleichung

$$f(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = 0$$

dargestellt werden. Fasst man diese Bedingung als Gleichung in Punktkoordinaten auf, erhält man die zu  $F_n$  duale Fläche  $F_m$ .  $m$  ist die sogenannte *Klasse* von  $F_n$ .

### 1.6.5 Quadriken

- Eine Quadrik  $Q_2$  ist eine Fläche der Ordnung 2 und wird durch eine quaternäre Form vom Grad 2 beschrieben, also

$$\sum_{i,j=0}^3 a_{ij}x_i x_j.$$

- Schreibt man die Koeffizienten  $a_{ij}$  in eine entsprechende Matrix, dann ist der Rang dieser Matrix im Fall einer Quadrik ohne Singularitäten gleich 4 und jeder Punkt hat eine Tangentialebene. Die Beziehung zwischen einem Punkt und seiner Tangentialebene kann auf den ganzen  $\mathbb{P}^3$  ausgedehnt und durch eine Polarität angegeben werden.
- Die Quadriken haben Ordnung und Klasse 2.
- Ist der Rang der Matrix 3, gibt es einen singulären Punkt  $\mathcal{S}_0$  und  $Q_2$  ist ein Kegel mit Spitze  $\mathcal{S}_0$ .
- Eine Quadrik muss erst zerfallen, wenn sie mehr als einen singulären Punkt hat. Gibt es zwei singuläre Punkte  $\mathcal{S}_0, \mathcal{T}_0$ , so ist die ganze Gerade  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{T}_0$  singulär und  $Q_2$  zerfällt in zwei Ebenen durch  $\mathcal{S}_1$ . Die Matrix hat dann den Rang 2.
- Singularitätenfreie Quadriken (und nur diese) können von zwei Scharen windschiefer Geraden erzeugt werden. Dabei reicht es, die eine Schar als jene Geraden zu kennzeichnen, die drei Gerade der anderen Schar schneiden.
- Singularitätenfreie Quadriken sind selbstdual. Den Quadriken mit Rang 3 stehen die Ebenen des  $\mathbb{P}^3$ , die eine der Tangenten eines in einer gewissen Ebene liegenden Kegelschnitts enthalten, gegenüber.
- Singularitätenfreie Quadriken besitzen in geeigneten Koordinaten eine Normalform

$$x_0x_3 - x_1x_2 = 0$$

und eine rationale Parameterdarstellung.

- Singularitätenfreie Quadriken können nur mit gewissen Ausnahmen eindeutig auf die Punkte einer projektiven Ebene  $\mathcal{P}_2$  bezogen werden. Man benötigt die *stereographische Projektion*.

- Quadriken können durch zwei regulär projektiv aufeinander bezogene Ebenenbüschel erzeugt werden (das heißt, es gibt eine bijektive Abbildung, die die Ebenen des einen Büschels auf die des anderen abbildet). Die Schnittgeraden von zwei zugeordneten Ebenen liegen alle auf einer Quadrik.

Bevor wir jetzt endgültig in das Gebiet der kubischen Flächen starten, benötigen wir noch die Variante des Satzes von Bezout für den projektiven Raum  $\mathbb{P}^3$ .

### 1.6.6 Bezoutscher Satz im $\mathbb{P}^3$

**Satz 1.6.19** (Bezout im  $\mathbb{P}^3$ ). *Gegeben seien drei verschiedene Flächen  $F_i, F_j$  und  $F_k$  des  $\mathbb{P}^3$  mit den Ordnungen  $i, j$  und  $k$ , die nur endlich viele gemeinsame Punkte besitzen. Dann ist die Höchstzahl dieser Schnittpunkte  $i \cdot j \cdot k$ . Die gemeinsamen Punkte seien*

$$\mathcal{P}_{10}, \mathcal{P}_{20}, \dots, \mathcal{P}_{r0} \text{ mit } r \leq i \cdot j \cdot k.$$

*Man kann jedem dieser Punkte eine natürliche Zahl  $\sigma_i, i = 1, 2, \dots, r$ , die sogenannte Schnittvielfachheit von  $F_i, F_j$  und  $F_k$  in  $\mathcal{P}_{i0}, i = 1, 2, \dots, r$ , zuordnen, sodass dann*

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i = i \cdot j \cdot k$$

*gilt.*

Einen Spezialfall dieses Satzes erhalten wir im

**Korollar 1.6.20.** *Gegeben seien zwei Flächen  $F_m$  und  $F_n$  des  $\mathbb{P}^3$  mit den Ordnungen  $m$  und  $n$  und eine Ebene  $\mathcal{F}_2$  (Fläche der Ordnung 1), die nur endlich viele gemeinsame Punkte haben. Setzt man*

$$k_n = F_n \cap \mathcal{F}_2 \text{ und } k_m = F_m \cap \mathcal{F}_2$$

*und erklärt die Schnittvielfachheit  $\sigma_i$  eines gemeinsamen Punktes  $\mathcal{P}_{i0}$  der drei Flächen als die Schnittvielfachheit von  $k_n$  und  $k_m$  in  $\mathcal{P}_{i0}$  (also wie beim Satz von Bezout für  $\mathbb{P}^2$ , Satz 1.4.26), so ist die Summe dieser Vielfachheiten gleich  $m \cdot n$ .*

*Außerdem gilt: Der gemeinsame Punkt  $\mathcal{P}_0$  zähle in diesem Sinn einfach. Dann ist  $\mathcal{P}_0$  für  $F_n$  und  $F_m$  regulär, die Tangentialebenen in  $\mathcal{P}_0$  an  $F_n$  und  $F_m$  sind verschieden und ihre Schnittgerade liegt nicht in  $\mathcal{F}_2$ . Umgekehrt zählt  $\mathcal{P}_0$  auch nur unter diesen Voraussetzungen einfach (bezüglich der Schnittvielfachheit).*



## 2 Kubische Flächen

Im Hauptteil der Arbeit sollen nun einige spezielle Eigenschaften der kubischen Flächen präsentiert werden. Besonders werden wir dabei Gerade betrachten, die ganz auf der Fläche liegen, und wir werden versuchen, Flächen eindeutig auf Ebenen abzubilden (und entsprechende rationale Parameterdarstellungen der Flächen anzugeben). Zwar soll ein möglichst großes Spektrum abgedeckt werden, jedoch handelt es sich hierbei nicht um eine vollständige Klassifikation der kubischen Flächen. Beispielsweise werden wir uns hauptsächlich mit den irreduziblen kubischen Flächen auseinandersetzen und auch bei diesen nicht alle möglichen Varianten der auftretenden Singularitäten betrachten. Zunächst geben wir einmal die Definition an, wobei wir die kubischen Flächen prinzipiell schon im Abschnitt 1.6 kennengelernt haben (vergleiche Definition 1.6.1 und Bemerkung 1.6.3). Die Begriffsbildungen und Argumentationen folgen dabei Burau [2].

### 2.1 Definition

**Definition 2.1.1** (Kubische Fläche). Eine kubische Fläche  $F_3$  ist gegeben durch eine nullgesetzte quaternäre Form  $f(x_0, x_1, x_2, x_3)$  vom Grad 3 (vergleiche Definition 1.2.6 für  $q = 3, p = 3$ ), also

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j,k=0}^3 a_{ijk} x_i x_j x_k = 0 \quad (2.1)$$

*Bemerkung 2.1.2.*

- Schreibt man die Gleichung (2.1) in voller Länge aus und fasst die Koeffizienten  $a_{ijk}$  gleicher Monome zusammen zu Koeffizienten  $\widetilde{a}_{ijk}$ , erhält man

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i,j,k=0}^3 a_{ijk} x_i x_j x_k \\ &= \widetilde{a}_{000} x_0^3 + \widetilde{a}_{001} x_0^2 x_1 + \widetilde{a}_{002} x_0^2 x_2 + \widetilde{a}_{003} x_0^2 x_3 + \widetilde{a}_{011} x_0 x_1^2 \\ &\quad + \widetilde{a}_{012} x_0 x_1 x_2 + \widetilde{a}_{013} x_0 x_1 x_3 + \widetilde{a}_{022} x_0 x_2^2 + \widetilde{a}_{023} x_0 x_2 x_3 + \widetilde{a}_{033} x_0 x_3^2 \\ &\quad + \widetilde{a}_{111} x_1^3 + \widetilde{a}_{112} x_1^2 x_2 + \widetilde{a}_{113} x_1^2 x_3 + \widetilde{a}_{122} x_1 x_2^2 + \widetilde{a}_{123} x_1 x_2 x_3 \\ &\quad + \widetilde{a}_{133} x_1 x_3^2 + \widetilde{a}_{222} x_2^3 + \widetilde{a}_{223} x_2^2 x_3 + \widetilde{a}_{233} x_2 x_3^2 + \widetilde{a}_{333} x_3^3 = 0 \end{aligned} \quad (I)$$

Wir können also ablesen, dass eine kubische Fläche durch eine homogene Gleichung mit 20 Koeffizienten angegeben wird, wobei es in unserem Fall nicht auf einen gemeinsamen Faktor aller Koeffizienten ankommt. Zum selben Ergebnis kommt man auch unter Berücksichtigung von Definition 1.2.6, also  $\binom{p+q}{q} = \binom{3+3}{3} = 20$ .

- Aus der Aufzählung direkt am Beginn von Abschnitt 1.6.2 erhalten wir direkt:

- Eine Gerade, die nicht ganz in einer  $F_3$  liegt, schneidet die  $F_3$  in höchstens 3 Punkten. Ist  $F_3$  irreduzibel, muss diese Höchstzahl auch erreicht werden (vergleiche auch Satz 1.3.8).
- Eine beliebige Ebene  $\mathcal{P}_2$ , die nicht schon ein Bestandteil einer  $F_3$  ist, schneidet die  $F_3$  in einer ebenen algebraischen Kurve  $k_3$  der Ordnung 3. Diese  $k_3$  ist entweder irreduzibel oder reduzibel, wobei im zweiten Fall die Fläche  $F_3$  auch irreduzibel sein kann. Zerfällt die  $k_3$ , ergeben sich die sechs möglichen Fälle wie im ersten Punkt der Aufzählung im Abschnitt 1.4.7.

## 2.2 Reduzible kubische Flächen

Zerfällt die Gleichung (I) in ein Produkt von Formen niederen Grades, so zerfällt auch die zugehörige Fläche  $F_3$  in Flächen niederer Ordnung. Dabei gibt es folgende Möglichkeiten zerfallender  $F_3$ :

- eine nicht zerfallende Quadrik und eine ihrer Tangentialebenen,
- eine nicht zerfallende Quadrik und eine Ebene, die die Quadrik nicht berührt,
- ein Kegel der Ordnung 2 und eine Ebene durch die Spitze des Kegels,
- ein Kegel der Ordnung 2 und eine Ebene, die die Spitze des Kegels nicht enthält,
- drei Ebenen mit einer gemeinsamen Geraden,
- drei Ebenen mit einem gemeinsamen Punkt und ohne gemeinsame Gerade,
- eine Ebene und eine doppelt zu zählende Ebene,
- eine dreifach zu zählende Ebene.

*Bemerkung 2.2.1.* Gemeinsame Punkte der einzelnen Bestandteile einer zerfallenden  $F_3$  sind singuläre Punkte. So haben zum Beispiel eine nicht zerfallende Quadrik und eine Ebene, die die Quadrik nicht berührt, einen Kegelschnitt gemeinsam. Zusätzlich kann die Quadrik auch noch einen singulären Punkt besitzen. Es liegt dann ein Kegel vor.

Im Folgenden werden wir uns ausschließlich mit irreduziblen kubischen Flächen  $F_3$  beschäftigen, wobei wir zunächst die Flächen mit Singularitäten behandeln werden.

## 2.3 Irreduzible kubische Flächen mit Singularitäten

Im ersten Abschnitt betrachten wir zunächst kubische Flächen  $F_3$  mit ausschließlich *isolierten Singularitäten*, also Flächen, die nur eine endliche Anzahl singulärer Punkte besitzen und keine singulären Geraden, Kegelschnitte usw.

### 2.3.1 Flächen mit isolierten Singularitäten

Zunächst ist eine kubische Fläche  $F_3$  mit einer Singularität der Vielfachheit  $s = 3$  ein Kegel. Liegt die Singularität in einem geeigneten Koordinatensystem im Punkt  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$ , so erhält man nach Bemerkung 1.3.6 für  $F_3$  eine Gleichung der Gestalt

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = a_3(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

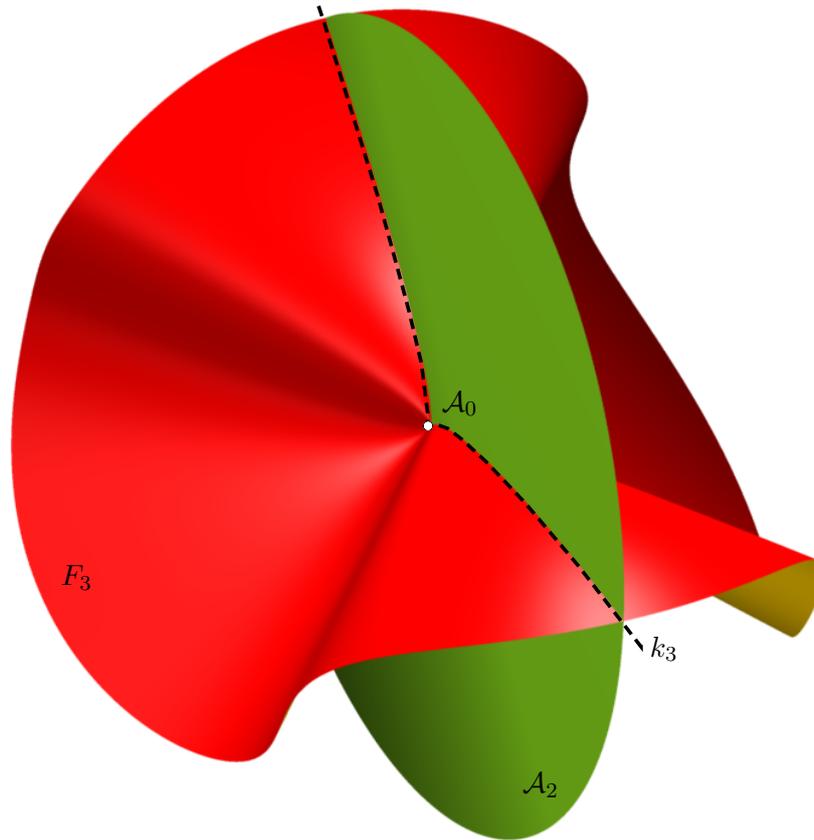


Abbildung 1: Schnittkurve einer kubischen Fläche mit Singularität mit einer Ebene

wobei  $a_3(x_0, x_1, x_2)$  eine ternäre Form vom Grad 3 ist. Diese hängt also nicht mehr von  $x_3$  ab. Umgekehrt hat auch jeder Kegel mit Spitze  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$  eine Gleichung dieser Gestalt (vergleiche dazu auch Bemerkung 1.6.6).

Im Folgenden soll die kubische Fläche  $F_3$  nur Singularitäten mit Vielfachheit  $s = 2$  besitzen. Eine solche Fläche heißt nach Bemerkung 1.6.7 Monoid. Ist wieder  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$  die Singularität mit der Vielfachheit  $s = 2$  einer Fläche  $F_3$ , so erhält man aus der Gleichung (I) für  $F_3$  ein Darstellung der Gestalt

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 a_2(x_0, x_1, x_2) + a_3(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad (2.2)$$

wobei  $a_2$  und  $a_3$  Formen vom Grad ihres Index in  $x_0, x_1$  und  $x_2$  sind. Da die Vielfachheit von  $\mathcal{S}_0$  nur  $s = 2$  ist, darf  $a_2(x_0, x_1, x_2)$  dabei nicht identisch verschwinden. Aus dem zweiten Punkt der Bemerkung 1.6.5 wissen wir, dass  $a_2(x_0, x_1, x_2) = 0$  die Gleichung des Tangentialkegels in  $\mathcal{S}_0$  ist. Je nachdem, ob der Kegel weiter zerfällt oder nicht, bezeichnet man  $\mathcal{S}_0$  als konischen, biplanaren oder uniplanaren Doppelpunkt (vergleiche Definition 1.6.11). Auch  $a_3(x_0, x_1, x_2) = 0$  ist die Gleichung eines Kegels mit der Spitze  $\mathcal{S}_0$ . Nun vorab noch ein Satz, der sich mit der Schnittkurve  $k_3$  einer Fläche  $F_3$  mit einer Ebene durch einen singulären Punkt befasst (der Punkt muss dabei keine isolierte Singularität sein).

**Satz 2.3.1.**  *$F_3$  sei eine irreduzible kubische Fläche und  $\mathcal{A}_0$  sei ein singulärer Punkt dieser  $F_3$ . Schneidet man die  $F_3$  mit einer beliebigen Ebene  $\mathcal{A}_2$  durch  $\mathcal{A}_0$ , so ist der Schnitt eine kubische Kurve  $k_3$ , die in  $\mathcal{A}_0$  ebenfalls singulär ist (siehe Abbildung 1).*

*Beweis.* Wir wählen das Koordinatensystem so, dass sich für den singulären Punkt  $\mathcal{A}_0$  und die Schnittebene  $\mathcal{A}_2$  die Darstellungen  $\mathcal{A}_0 = (0, 0, 0, 1)$  und  $\mathcal{A}_2 : x_2 = 0$  ergeben. Dann erhalten wir aus dem letzten Absatz für die  $F_3$  die Darstellung (2.2). Schreiben wir die Formen  $a_2$  und  $a_3$  explizit an, erhalten wir

$$x_3(a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2) + b_0x_0^3 + b_1x_0^2x_1 + b_2x_0^2x_2 \quad (2.3)$$

$$+ b_3x_0x_1^2 + b_4x_0x_1x_2 + b_5x_0x_2^2 + b_6x_1^3 + b_7x_1^2x_2 + b_8x_1x_2^2 + b_9x_2^3 = 0. \quad (2.4)$$

Bilden wir den Schnitt der Fläche  $F_3$  mit der Ebene  $\mathcal{A}_2$ , erhalten wir die Gleichung der kubischen Kurve  $k_3$  in der  $(x_0, x_1, x_3)$ -Ebene

$$k(x_0, x_1, x_3) = x_3(a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_3x_1^2) + b_0x_0^3 + b_1x_0^2x_1 + b_3x_0x_1^2 + b_6x_1^3 = 0.$$

Bildet man nun die partiellen Ableitungen, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_3) &= x_3(2a_0x_0 + a_1x_1) + 3b_0x_0^2 + 2b_1x_0x_1 + b_3x_1^2, \\ \frac{\partial k}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_3) &= x_3(a_1x_0 + 2a_3x_1) + b_1x_0^2 + 2b_3x_0x_1 + 3b_6x_1^2, \\ \frac{\partial k}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_3) &= a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_3x_1^2, \end{aligned}$$

und diese verschwinden alle für den Punkt  $\mathcal{A}_0$ , womit dieser auch für die Kurve  $k_3$  singulär ist.  $\square$

Es gilt folgender

**Satz 2.3.2.** *Gegeben sei eine durch (I) definierte irreduzible kubische Fläche  $F_3$ , die kein Kegel ist.  $\mathcal{S}_0$  sei ein singulärer Punkt dieser  $F_3$ . Dann gibt es Gerade durch  $\mathcal{S}_0$ , die ganz auf  $F_3$  liegen. Die Anzahl dieser Geraden ist  $\leq 6$ , und es kann jeder dieser Geraden eine Vielfachheit  $\rho$  zugeordnet werden, sodass die Vielfachheitssumme 6 beträgt.*

*Beweis.*

- In einem geeigneten Koordinatensystem (vergleiche Bemerkung 1.3.6) habe  $\mathcal{S}_0$  die Koordinaten  $(0, 0, 0, 1)$ .
- Man kann dann den Geraden durch  $\mathcal{S}_0$  die Schnittpunkte der Ebene  $\mathcal{P}_2 : x_3 = 0$  mit den Koordinaten  $(x_0, x_1, x_2)$  eindeutig zuordnen. Wir haben schon gesehen, dass eine Fläche mit der Singularität  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$  eine Gleichung der Gestalt (2.2) hat. Die beiden Kegelgleichungen  $a_2(x_0, x_1, x_2) = 0$  und  $a_3(x_0, x_1, x_2) = 0$  stellen, eingeschränkt auf die Ebene  $\mathcal{P}_2$ , Gleichungen von Kurven  $k_2$  und  $k_3$  dar.
- Hätten diese zwei Gleichungen gemeinsame Faktoren (in diesem Fall hätten die beiden Kurven gemeinsame Bestandteile), würde die  $F_3$  zerfallen. Da dies nicht der Fall ist, folgt aus dem Satz von Bezout (Satz 1.4.26), dass  $k_2$  und  $k_3$  maximal sechs gemeinsame Punkte besitzen ( $\sigma \leq 6$ ), wobei die Vielfachheitssumme der Schnittpunkte 6 beträgt.
- Da sowohl  $a_2(x_0, x_1, x_2) = 0$  als auch  $a_3(x_0, x_1, x_2) = 0$  Gleichungen von Kegeln sind, gehen durch diese  $\sigma$  Punkte Gerade durch  $\mathcal{S}_0$  (siehe Bemerkung 1.6.6), die ganz auf der  $F_3$  liegen (alle Punkte dieser Geraden liegen nämlich sowohl auf  $a_2(x_0, x_1, x_2) = 0$  als auch auf  $a_3(x_0, x_1, x_2) = 0$ , wodurch die Gleichung (2.2) der  $F_3$  für diese Punkte erfüllt ist; siehe auch Abbildung 2) und denen als Vielfachheiten  $\rho$  die Vielfachheiten der Schnittpunkte  $\sigma$  zugeordnet werden.

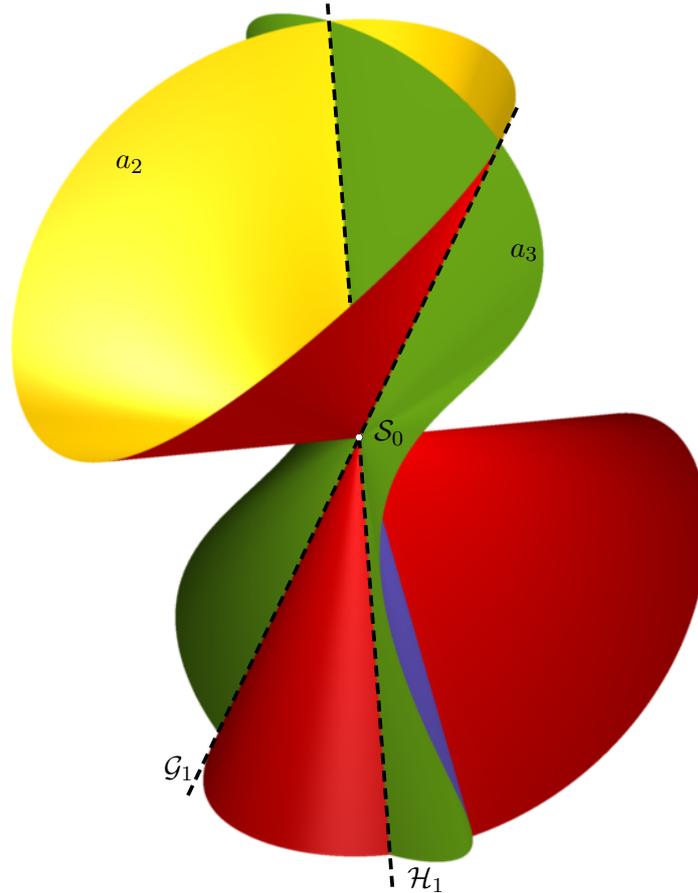


Abbildung 2: Schnittgeraden eines quadratischen und eines kubischen Kegels mit gemeinsamer Spitze

- Umgekehrt sei  $\mathcal{P}_1$  eine Gerade durch  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$ , die ganz auf der irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$  mit der Singularität  $\mathcal{S}_0$  der Vielfachheit 2 liegt. Diese Gerade hat sicher einen Schnittpunkt  $(p_0, p_1, p_2, 0)$  mit der Ebene  $\mathcal{P}_2 : x_3 = 0$  und kann daher durch eine Parameterdarstellung  $x_0 = \mu p_0, x_1 = \mu p_1, x_2 = \mu p_2, x_3 = \lambda$  angegeben werden. Setzt man diese Geradendarstellung in die Gleichung (2.2) der  $F_3$  ein, so erhält man

$$\lambda a_2(\mu p_0, \mu p_1, \mu p_2) + a_3(\mu p_0, \mu p_1, \mu p_2) = 0.$$

Aus  $a_2$  und  $a_3$  lassen sich  $\mu^2$  bzw.  $\mu^3$  herausheben (vergleiche dazu mit der expliziten Darstellung von  $a_2$  und  $a_3$  in (2.3)). Wir erhalten also

$$\mu^2(\lambda a_2(p_0, p_1, p_2) + \mu a_3(p_0, p_1, p_2)) = 0,$$

und da die Gerade  $\mathcal{P}_1$  ganz auf der  $F_3$  liegen soll, muss dieser Ausdruck identisch verschwinden. Das kann aber nur passieren, wenn der Punkt  $(p_0, p_1, p_2, 0)$  so gewählt ist, dass  $a_2(p_0, p_1, p_2) = 0$  und  $a_3(p_0, p_1, p_2) = 0$  gilt.

□

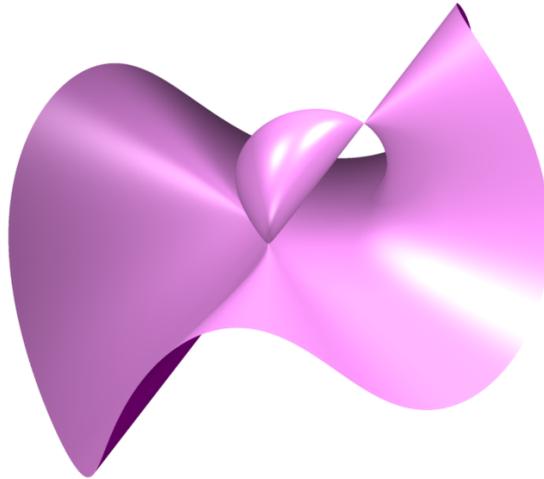


Abbildung 3: Eine kubische Fläche mit zwei isolierten Singularitäten (affine Gleichung:  $x^3 + y^2z + xz^2 - xz = 0$ )

Abbildung 2 zeigt zur Visualisierung des Sachverhalts aus Satz 2.3.2 einen quadratischen Kegel  $a_2$  und einen kubischen Kegel  $a_3$  mit gemeinsamer Spitze  $\mathcal{S}_0$ .  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{H}_1$  sind Schnittgeraden der beiden Kegel.

*Bemerkung 2.3.3.* Gehen mehr als sechs Gerade durch  $\mathcal{S}_0$ , die ganz auf der  $F_3$  liegen, so ist die  $F_3$  entweder ein Kegel mit Spitze  $\mathcal{S}_0$ , oder sie zerfällt, wobei ein solcher Kegel als Teil auftritt.

Im Abschnitt 2.6.1 werden wir eine Projektion der kubischen Flächen mit isolierter Singularität auf eine Ebene entwickeln. Dadurch erhält man rationale Parameterdarstellungen dieser Flächen.

Eine kubische Fläche  $F_3$  kann mehr als einen singulären Punkt besitzen ohne zu zerfallen (siehe beispielsweise Abbildung 3). Es gibt 20 verschiedene Typen von Flächen  $F_3$  mit  $r \leq 4$  isolierten Singularitäten, wobei man bei jeder einzelnen Singularität noch zwischen den drei Möglichkeiten – konisch, biplanar, uniplanar – zu unterscheiden hat. Wie schon am Beginn des Kapitels angemerkt, werden wir hier auf eine genaue Klassifikation der kubischen Flächen mit Singularität verzichten (Leserinnen und Leser seien hierzu auf Sturm [11] und eine Diplomarbeit von Reimann [8] verwiesen) und nur den Fall, dass die  $F_3$  genau  $r = 4$  isolierte Singularitäten besitzt, näher betrachten. Dabei werden wir gleichzeitig zeigen, dass es nicht mehr als vier solche Singularitäten geben kann. Dazu benötigen wir zuerst folgenden

**Satz 2.3.4.** *Besitzt eine durch (I) definierte kubische Fläche  $F_3$  mehr als zwei Singularitäten auf einer Geraden  $\mathcal{G}_1$ , dann ist jeder Punkt von  $\mathcal{G}_1$  singulär für  $F_3$ .*

*Beweis.* In einem geeigneten Koordinatensystem seien zwei singuläre Punkte  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$  einer kubischen Fläche  $F_3$  gegeben durch  $\mathcal{A}_0 = (0, 0, 0, 1)$  und  $\mathcal{B}_0 = (0, 0, 1, 0)$ . Aus Bemerkung 1.3.6 erhalten wir wieder, dass wegen der Lage von  $\mathcal{A}_0$  die höchste Potenz von  $x_3$  in (I) 1 sein muss. Analoges erhält man für  $x_2$  wegen der Lage von  $\mathcal{B}_0$ . Dadurch gelangt man zu einer Darstellung

der  $F_3$  durch eine Gleichung in der Form

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2x_3a_1(x_0, x_1) + x_2b_2(x_0, x_1) + x_3c_2(x_0, x_1) + d_3(x_0, x_1) = 0, \quad (2.5)$$

wobei  $a_1, b_2, c_2$  und  $d_3$  jeweils binäre Formen in  $x_0$  und  $x_1$  vom Grad ihrer Indizes sind. Schreibt man diese Formen ausführlich auf, erhält man

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2x_3(a_{10}x_0 + a_{11}x_1) + x_2(b_{20}x_0^2 + b_{21}x_0x_1 + b_{22}x_1^2) \quad (2.6)$$

$$+ x_3(c_{20}x_0^2 + c_{21}x_0x_1 + c_{22}x_1^2) + d_{30}x_0^3 + d_{31}x_0^2x_1 + d_{32}x_0x_1^2 + d_{33}x_1^3 = 0, \quad (2.7)$$

und die ersten partiellen Ableitungen sind dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= a_{10}x_2x_3 + x_2(2b_{20}x_0 + b_{21}x_1) + x_3(2c_{20}x_0 + c_{21}x_1) \\ &\quad + 3d_{30}x_0^2 + 2d_{31}x_0x_1 + d_{32}x_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= a_{11}x_2x_3 + x_2(2b_{22}x_1 + b_{21}x_0) + x_3(2c_{22}x_1 + c_{21}x_0) \\ &\quad + 3d_{33}x_1^2 + 2d_{32}x_0x_1 + d_{31}x_0^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3(a_{10}x_0 + a_{11}x_1) + b_{20}x_0^2 + b_{21}x_0x_1 + b_{22}x_1^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2(a_{10}x_0 + a_{11}x_1) + c_{20}x_0^2 + c_{21}x_0x_1 + c_{22}x_1^2$$

Auf der Verbindungsgeraden  $\mathcal{G}_1$  von  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$ , die als Träger des durch

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 0$$

(kurz  $x_0 = x_1 = 0$ ) definierten Ebenenbüschels angegeben werden kann, liege jetzt noch ein weiterer singulärer Punkt  $\mathcal{C}_0$  der Fläche  $F_3$ . Da man wegen der Homogenität gegebenenfalls die Koordinaten von  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$  noch entsprechend skalieren kann, können wir für  $\mathcal{C}_0$  den Punkt  $(0, 0, 1, 1)$  wählen. Verlangt man jetzt, dass die partiellen Ableitungen von (2.5) für den Punkt  $\mathcal{C}_0$  gleich 0 sind, so erhält man durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes in die partiellen Ableitungen die Beziehungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(0, 0, 1, 1) = a_{10} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0, 1, 1) = a_{11} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 1, 1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 0, 1, 1) = 0$$

und damit die Bedingung, dass  $a_1(x_0, x_1)$  identisch verschwinden muss. Unsere  $F_3$  hat also eine Gleichung der Gestalt

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_2(b_{20}x_0^2 + b_{21}x_0x_1 + b_{22}x_1^2) \\ &\quad + x_3(c_{20}x_0^2 + c_{21}x_0x_1 + c_{22}x_1^2) + d_{30}x_0^3 + d_{31}x_0^2x_1 + d_{32}x_0x_1^2 + d_{33}x_1^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2(2b_{20}x_0 + b_{21}x_1) + x_3(2c_{20}x_0 + c_{21}x_1) + 3d_{30}x_0^2 + 2d_{31}x_0x_1 + d_{32}x_1^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_2(2b_{22}x_1 + b_{21}x_0) + x_3(2c_{22}x_1 + c_{21}x_0) + 3d_{33}x_1^2 + 2d_{32}x_0x_1 + d_{31}x_0^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) = (b_{20}x_0^2 + b_{21}x_0x_1 + b_{22}x_1^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) = (c_{20}x_0^2 + c_{21}x_0x_1 + c_{22}x_1^2).$$

Damit verschwinden aber für jeden Punkt der Geraden  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$  alle partiellen Ableitungen.  $\square$

*Bemerkung 2.3.5.* Aus der Gleichung (2.6) kann man ablesen, dass die Verbindungsgerade  $\mathcal{G}_1$  von zwei singulären Punkten einer  $F_3$  immer schon ganz auf der Fläche liegt. Eine Gerade  $\mathcal{G}_1 \subset F_3$ , deren Punkte alle singulär für  $F_3$  sind, heißt singuläre Gerade von  $F_3$ .

Unter Verwendung dieser Ergebnisse erhalten wir den

**Satz 2.3.6.** *Eine durch (I) definierte irreduzible kubische Fläche  $F_3$ , die kein Kegel ist und nur endlich viele isolierte Singularitäten besitzt, kann höchstens vier solche Punkte besitzen.*

*Beweis.*

1. Nach Satz 2.3.4 dürfen maximal zwei singuläre Punkte  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$  einer  $F_3$  auf einer Geraden liegen, ansonsten ist schon die ganze Gerade singulär für die Fläche. Drei Singularitäten  $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0$  und  $\mathcal{C}_0$  einer  $F_3$  müssen daher eine Ebene aufspannen.
2. Der Schnitt einer Ebene mit einer Fläche  $F_3$  ist nach Bemerkung 2.1.2 eine ebene Kurve  $k_3$ . Im Fall einer Ebene, die drei singuläre Punkte  $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0$  und  $\mathcal{C}_0$  der Fläche  $F_3$  enthält, zerfällt diese  $k_3$  in die drei Verbindungsgeraden dieser Singularitäten, da diese Geraden nach der Bemerkung 2.3.5 schon ganz auf der  $F_3$  liegen müssen.
3. Soll ein weiterer singulärer Punkt  $\mathcal{D}_0$  der  $F_3$  in derselben Ebene liegen, kann er also nicht außerhalb dieser drei Verbindungsgeraden liegen (dann wäre der Schnitt von Ebene und Fläche mehr als die  $k_3$ ). Nach dem Satz 2.3.4 wäre dann aber schon die ganze Gerade singulär für die Fläche.
4. Vier Singularitäten müssen also linear unabhängig sein. Sie spannen ein Grundtetraeder  $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$  und  $\mathcal{D}_0$  auf.
5. Soll ein weiterer singulärer Punkt  $\mathcal{E}_0$  der  $F_3$  auf dem Grundtetraeder liegen, so muss er wiederum in einer der durch drei der vier Punkte aufgespannten Ebenen liegen, was wegen 3. nicht möglich ist.
6. Liegt  $\mathcal{E}_0$  außerhalb des Grundtetraeders, so kann man die Verbindungsgerade  $\mathcal{G}_1$  von  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{E}_0$  bilden. Diese muss nach der Bemerkung 2.3.5 auch ganz auf der  $F_3$  liegen.  $\mathcal{G}_1$  hat jedoch auch einen Schnittpunkt  $\mathcal{F}_0$  mit der durch  $\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$  und  $\mathcal{D}_0$  aufgespannten Ebene (siehe Abbildung 4). In dieser Ebene läge dann aber außer den drei Verbindungsgeraden der singulären Punkte auch noch der Punkt  $\mathcal{F}_0$  und damit wieder mehr als eine  $k_3$ .

$\square$

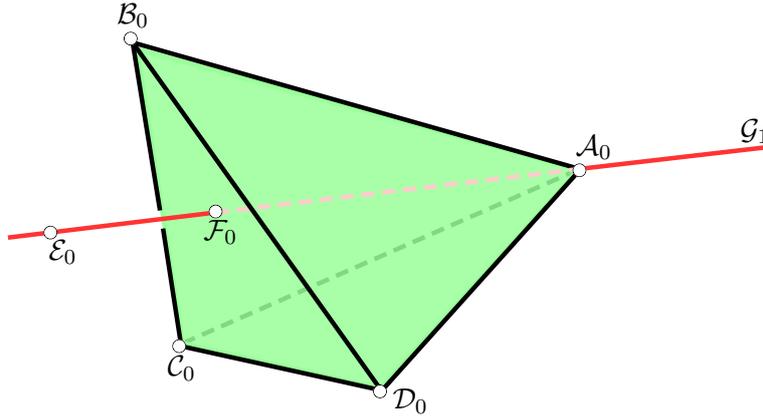


Abbildung 4: Grundtetraeder mit singulären Eckpunkten

*Bemerkung 2.3.7.* Im letzten Punkt des Beweises von Satz 2.3.6 könnte  $\mathcal{E}_0$  auch eine nicht isolierte Singularität sein.

Für die irreduziblen kubischen Flächen mit genau vier isolierten Singularitäten gilt der folgende

**Satz 2.3.8.** *Irreduzible kubische Flächen  $F_3$  mit genau vier isolierten singulären Punkten sind zueinander projektiv äquivalent (das heißt, dass es eine Darstellung in einer Normalform gibt, die nicht von Koeffizienten abhängt).*

*Beweis.* Wählt man die vier singulären Punkte der  $F_3$  als die Ecken des Koordinatensystems

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= (1, 0, 0, 0) \\ \mathcal{B}_0 &= (0, 1, 0, 0) \\ \mathcal{C}_0 &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathcal{D}_0 &= (0, 0, 0, 1),\end{aligned}$$

so erhält man aus der Gleichung (I) der  $F_3$  eine Darstellung der Form

$$f(y_0, y_1, y_2, y_3) = a_0 y_1 y_2 y_3 + a_1 y_0 y_2 y_3 + a_2 y_0 y_1 y_3 + a_3 y_0 y_1 y_2 = 0, \quad (2.9)$$

da keine der vier Variablen in einer höheren Potenz als 1 auftreten darf. Dabei dürfen auch die  $a_i, i = 0, 1, 2, 3$  nicht verschwinden, da sich andernfalls aus der Gleichung (2.9) ein Faktor abspalten ließe und die  $F_3$  reduzibel wäre. Führt man nun durch die projektive Kollineation  $y_i = a_i x_i$  neue Koordinaten ein, erhält man aus (2.9) durch Kürzen des gemeinsamen Faktors  $a_0 a_1 a_2 a_3$  die Gleichung

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 + x_0 x_2 x_3 + x_0 x_1 x_3 + x_0 x_1 x_2 = 0. \quad (2.10)$$

Damit haben wir die projektive Äquivalenz aller  $F_3$  mit vier singulären Punkten gezeigt. Noch ist aber nicht klar, ob die  $F_3$  mit der Gleichung (2.10) nicht noch weitere Singularitäten besitzt. Aus dem Beweis von Satz 2.3.6 bzw. der Bemerkung 2.3.7 wissen wir zumindest schon, dass es keine weiteren singulären Punkte außerhalb des Grundtetraeders geben kann. Wäre aber zum Beispiel die ganze Gerade  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$  des Grundtetraeders für die  $F_3$  singulär, so müsste jede Ebene durch  $\mathcal{G}_1$  die  $F_3$  in einer ebenen Kurve  $k_3$  schneiden (wir werden diese Schnittkurve später auch explizit im Beweis von Satz 2.3.11 angeben), die in jedem Punkt von

$\mathcal{G}_1$  singularär ist (siehe Satz 2.3.1). Betrachtet man jedoch die Ebene  $x_0 = 0$ , so sieht man, dass für deren Schnitt mit der  $F_3$  die sich ergebende  $k_3$  in drei verschiedene Gerade ( $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ;  $\mathcal{G}_1$  und zwei weitere Gerade) zerfällt (und nicht in die nach dem Beweis von Satz 2.3.11 für den ebenen Schnitt durch  $\mathcal{G}_1$  notwendige für den Schnitt doppelt zu zählende Gerade  $\mathcal{G}_1$  und eine weitere Gerade). Die Gerade  $\mathcal{G}_1$  ist also nicht in jedem Punkt singularär für  $k_3$  und damit auch nicht für  $F_3$ .  $\square$

Im Abschnitt 2.7 werden wir weiter unten noch die Dualfläche zu einer kubischen Fläche mit genau vier isolierten Singularitäten betrachten. Nun wollen wir die kubischen Flächen mit einer singularären Geraden näher betrachten.

### 2.3.2 Kubische Flächen mit singularären Geraden

Wir haben in Satz 2.3.4 bereits gesehen, dass jeder Punkt einer Geraden  $\mathcal{G}_1$  singularär für eine  $F_3$  ist, wenn dies schon für mehr als zwei Punkte der  $\mathcal{G}_1$  gilt. Nun erhält man folgenden

**Satz 2.3.9.** *Eine irreduzible kubische Fläche  $F_3$  mit einer singularären Geraden  $\mathcal{G}_1 \subset F_3$  ist eine Regelfläche und besitzt keine weiteren singularären Punkte.*

*Beweis.*

- $F_3$  sei eine irreduzible kubische Fläche und  $\mathcal{G}_1 \subset F_3$  eine singularäre Gerade der  $F_3$ . Weiters sei  $\mathcal{E}_2$  eine beliebige Ebene durch  $\mathcal{G}_1$ .
- Da die  $F_3$  irreduzibel ist, kann nicht schon die ganze Ebene  $\mathcal{E}_2$  zur  $F_3$  gehören.
- Damit schneidet  $\mathcal{E}_2$  nach dem zweiten Punkt in der Aufzählung am Beginn des Abschnitts 1.6.2 die Fläche  $F_3$  in einer ebenen kubischen Kurve  $k_3$ . Wir werden diese Schnittkurve später auch explizit im Beweis von Satz 2.3.11 angeben. Teil dieser  $k_3$  ist die Gerade  $\mathcal{G}_1$  und die  $k_3$  ist nun auch für jeden Punkt von  $\mathcal{G}_1$  singularär (siehe Satz 2.3.1). Die  $k_3$  zerfällt also in die nach dem Beweis von Satz 2.3.11 für den Schnitt doppelt zu zählende Gerade  $\mathcal{G}_1$  und eine weitere Gerade  $\mathcal{H}_1$ , die ebenfalls ganz auf der  $F_3$  liegt.
- Nun kann man die Ebene  $\mathcal{E}_2$  innerhalb des Ebenenbüschels mit der Trägergeraden  $\mathcal{G}_1$  beliebig variieren und erhält so Gerade  $\mathcal{H}_1$  durch jeden beliebigen Punkt der  $F_3$ . Damit ist die  $F_3$  eine Regelfläche.
- Angenommen es gäbe auf der  $F_3$  einen weiteren singularären Punkt  $\mathcal{S}_0$  außerhalb der Geraden  $\mathcal{G}_1$ . Dann müsste aber die Ebene

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{S}_0$$

die Fläche  $F_3$  in einer zerfallenden kubischen Kurve  $k_3$  schneiden, die in jedem Punkt von  $\mathcal{G}_1$  und in  $\mathcal{S}_0$  singularär ist. So eine  $k_3$  gibt es jedoch nicht.  $\square$

*Bemerkung 2.3.10.* Aus dem Satz 2.3.9 lässt sich unmittelbar ablesen, dass die Schnittkurve einer beliebigen Ebene  $\mathcal{E}_2$ , die eine singularäre Gerade  $\mathcal{G}_1$  einer irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$  enthält, mit der  $F_3$  entweder einen Punkt  $\mathcal{G}_0$  der Vielfachheit  $s = 3$  besitzt (siehe Abbildung 5) oder jeder Punkt der Gerade  $\mathcal{G}_1$  zählt für sie dreifach (siehe Abbildung 6). Das hängt davon ab, ob die Schnittkurve aus zwei verschiedenen Geraden  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{H}_1$  oder nur aus der Gerade  $\mathcal{G}_1$  besteht. Wir erhalten den folgenden

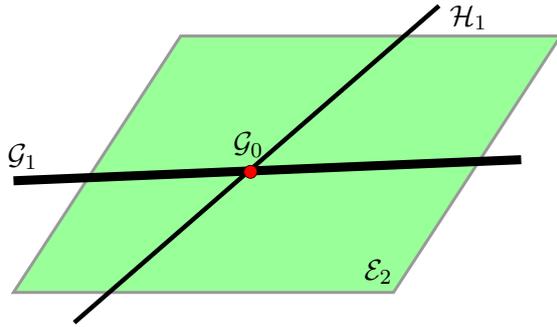


Abbildung 5: Dreifacher Schnittpunkt

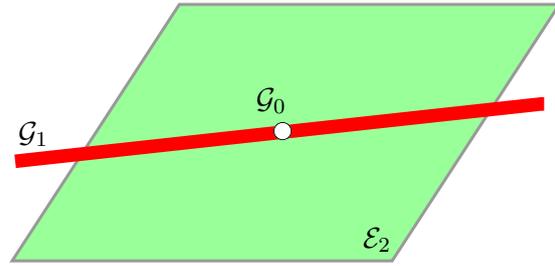


Abbildung 6: Dreifache Schnittgerade

**Satz 2.3.11.** *Gegeben sei eine irreduzible kubische Fläche  $F_3$  mit einer singulären Geraden  $\mathcal{G}_1 \subset F_3$ . Ordnet man jedem Punkt  $\mathcal{G}_0$  der Geraden  $\mathcal{G}_1$  die Ebene durch  $\mathcal{G}_1$  zu, für deren Schnittkurve mit der Fläche der Punkt  $\mathcal{G}_0$  ein dreifacher Punkt ist, so wird dadurch eine  $(1, 2)$ -Korrespondenz  $\kappa$  (vergleiche Abschnitt 1.5.8) definiert (und damit auch eine Involution der Ebenen), wobei gilt*

- zerfällt  $\kappa$ , so ist die  $F_3$  ein Kegel,
- zerfällt  $\kappa$  nicht, so ist die  $F_3$  kein Kegel und alle Punkte von  $\mathcal{G}_1$  sind biplanar bis auf entweder zwei oder einen uniplanaren Punkt, je nachdem, ob  $\kappa$  regulär oder parabolisch ist.

*Beweis.*

- Wir wählen ein Koordinatensystem so, dass die singuläre Gerade einer irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$  beschrieben wird durch  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$ . Aus dem Beweis von Satz 2.3.4 wissen wir schon, dass die  $F_3$  dann dargestellt werden kann durch eine Gleichung der Gestalt (2.8), wobei man durch entsprechendes Herausheben die Form

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2(b_{20}x_2 + c_{20}x_3) + 2x_0x_1\left(\frac{b_{21}}{2}x_2 + \frac{c_{21}}{2}x_3\right) + x_1^2(b_{22}x_2 + c_{22}x_3) + d_{30}x_0^3 + 3\frac{d_{31}}{3}x_0^2x_1 + 3\frac{d_{32}}{3}x_0x_1^2 + d_{33}x_1^3 = 0$$

erhält. Für eine übersichtlichere Darstellung ersetzen wir die Koeffizienten dieser Gleichung und erhalten

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0^2(a_2x_2 + a_3x_3) + 2x_0x_1(b_2x_2 + b_3x_3) + x_1^2(c_2x_2 + c_3x_3) + d_0x_0^3 + 3d_1x_0^2x_1 + 3d_2x_0x_1^2 + d_3x_1^3 = 0. \quad (2.11)$$

Dabei dürfen die  $a_i, b_i$  und  $c_i$  nicht alle verschwinden, da andernfalls die  $F_3$  in ein Ebenen-triplet durch  $\mathcal{G}_1$  (die Gleichung der  $F_3$  hängt dann nur mehr von  $x_0$  und  $x_1$  ab) zerfallen würde.

- Das Ebenenbüschel mit der Trägergerade  $\mathcal{G}_1$  enthält die Ebenen  $x_0 = 0$  und  $x_1 = 0$  und kann daher angegeben werden durch die Gleichung

$$\alpha x_0 - \beta x_1 = 0,$$

wobei  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  gelten muss. Daraus ergibt sich für eine beliebige Ebene  $\mathcal{G}_2$  durch  $\mathcal{G}_1$  eine Parameterdarstellung der Gestalt

$$x_0 = \alpha\lambda, x_1 = \beta\lambda, x_2 = \mu, x_3 = \nu \quad (2.12)$$

mit  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ .

- Die Schnittkurve  $k_3$  der  $F_3$  mit der Ebene  $\mathcal{G}_2$  erhält man nun durch Einsetzen dieser Darstellung in die Gleichung (2.11). Dabei sind jetzt  $(\lambda, \mu, \nu)$  die Parameter in der Ebene  $\mathcal{G}_2$ , und man bekommt durch entsprechendes Umformen

$$\begin{aligned} & \lambda^2(\alpha^2(a_2\mu + a_3\nu) + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu)) \\ & + \lambda^3(d_0\alpha^3 + 3d_1\alpha^2\beta + 3d_2\alpha\beta^2 + d_3\beta^3) = 0. \end{aligned}$$

- Für  $\lambda = 0$  erhält man wieder die doppelt zu zählende Gerade  $\mathcal{G}_1$  und sieht auch durch Bilden der partiellen Ableitungen, dass diese Gerade für die  $k_3$  singulär ist.
- Ein Punkt  $\mathcal{G}_0 = (0, 0, \mu, \nu) \in \mathcal{G}_1$  ist demnach dreifach für die  $k_3$ , wenn

$$\alpha^2(a_2\mu + a_3\nu) + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu) = 0$$

gilt.

- Diese Gleichung definiert nach dem Abschnitt 1.5.8 aber genau eine  $(1, 2)$ -Korrespondenz  $\kappa$ . Dabei sind den Punkten  $\mathcal{G}_0 \in \mathcal{G}_1$  im allgemeinen zwei Ebenen aus dem Ebenenbüschel um  $\mathcal{G}_1$  zugeordnet.
- Zerfällt nun die Darstellung von  $\kappa$  in zwei Faktoren, die jeweils nur mehr von  $\alpha$  und  $\beta$  bzw.  $\mu$  und  $\nu$  abhängen, also

$$(A_2\mu + A_3\nu)(B_0\alpha^2 + 2B_1\alpha\beta + B_2\beta^2) = 0,$$

so erhält man unter Rückverfolgung der obigen Schritte eine Darstellung der  $F_3$  durch

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) = & (A_2x_2 + A_3x_3)(B_0x_0^2 + 2B_1x_0x_1 + B_2x_1^2) \\ & + d_0x_0^3 + 3d_1x_0^2x_1 + 3d_2x_0x_1^2 + d_3x_1^3 = 0. \end{aligned}$$

Durch Bilden der zweiten partiellen Ableitungen sieht man leicht, dass der Punkt  $\mathcal{G}_0 = (0, 0, A_3, -A_2) \in F_3$  für die  $F_3$  singulär mit der Vielfachheit  $s = 3$  ist. Also ist die  $F_3$  ein Kegel mit der Spitze  $\mathcal{G}_0$ .

- Ist umgekehrt die  $F_3$  ein Kegel mit der Spitze  $\mathcal{G}_0 = (0, 0, 0, 1)$  (durch geeignete Wahl des Koordinatensystems) und der singulären Geraden  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$ , so kann wegen der Vielfachheit  $s = 3$  des Punktes  $\mathcal{G}_0$  die Unbekannte  $x_3$  in der Gleichung (2.11) gar nicht mehr auftreten. Damit verschwinden  $a_3, b_3$  und  $c_3$  und in weiterer Folge zerfällt die Gleichung von  $\kappa$  in

$$\mu(a_2\alpha^2 + 2b_2\alpha\beta + c_2\beta^2),$$

also in zwei Faktoren, die nur mehr von  $\alpha$  und  $\beta$  bzw.  $\mu$  (und  $\nu$ ) abhängen.

- Betrachten wir schließlich irreduzible Flächen  $F_3$  mit einer singulären Geraden  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$ , die keine Kegel sind, so zerfällt  $\kappa$  nicht.

- Die zu jedem Punkt  $\mathcal{G}_0 = (0, 0, \mu, \nu) \in \mathcal{G}_1$  bei  $\kappa$  korrespondierenden Ebenen sind gerade diejenigen, in die der Tangentialkegel von  $\mathcal{G}_0$  zerfällt. Um das einzusehen, wähle man die Parameterdarstellung einer Geraden durch  $\mathcal{G}_0$  und einen beliebigen unbestimmten weiteren Punkt  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  außerhalb von  $\mathcal{G}_1$  (also eine beliebige Gerade durch  $\mathcal{G}_0$  ungleich  $\mathcal{G}_1$ , das heißt  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ) mit

$$x_0 = \sigma\alpha, x_1 = \sigma\beta, x_2 = \rho\mu + \sigma\gamma, x_3 = \rho\nu + \sigma\delta$$

und bilde den Schnitt mit der  $F_3$ . Dann erhält man durch entsprechendes Herausheben die Gleichung der Schnittpunkte in  $(\sigma, \rho)$  mit

$$\rho\sigma^2(\alpha^2(a_2\mu + a_3\nu) + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu)) + \sigma^3(\dots) = 0.$$

Damit ist der Punkt  $\mathcal{G}_0$  (entspricht  $\sigma = 0$ ) dreifach für den Schnitt der Geraden mit  $F_3$ , wenn

$$\alpha^2(a_2\mu + a_3\nu) + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu) = 0$$

gilt, da  $(\sigma, \rho) \neq (0, 0)$  erfüllt sein muss. Das heißt aber, dass alle diese Geraden einen in Ebenen zerfallenden Kegel bilden und gleichzeitig ist das die Gleichung von  $\kappa$ , da der Punkt  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  wie bekannt genauso der Punkt sein kann, auf dem die obige Parameterdarstellung einer beliebigen Ebene durch  $\mathcal{G}_1$  beruht.

- Aus dem Abschnitt 1.5.8 wissen wir, dass die so erklärten Paare von Ebenen eine Involution bilden, die entweder regulär oder parabolisch sein kann. Im regulären Fall gibt es zwei, und im parabolischen Fall einen uniplanaren Punkt (Anzahl der Fixpunkte) auf der Geraden  $\mathcal{G}_1$ , während die übrigen Punkte von  $\mathcal{G}_1$  alle biplanar sind.

□

## 2.4 Kubische Regelflächen

Bevor wir uns den Regelflächen konkret zuwenden, benötigen wir einige Eigenschaften von Geraden auf irreduziblen kubischen Flächen.

**Satz 2.4.1.** *Gegeben sei eine nicht singuläre Gerade  $\mathcal{G}_1$  auf einer irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$ . Wir wissen bereits, dass beim Schneiden der  $F_3$  mit einer beliebigen Ebene  $\mathcal{G}_2$  durch  $\mathcal{G}_1$  die Schnittkurve in die Gerade  $\mathcal{G}_1$  und einen Kegelschnitt  $k_2(\mathcal{G}_2)$  zerfällt. Ordnet man bei Veränderung der Ebene  $\mathcal{G}_2$  im Bündel mit der Trägergerade  $\mathcal{G}_1$  die Schnittpunkte  $k_2(\mathcal{G}_2) \cap \mathcal{G}_1 = \{\mathcal{S}_0, \mathcal{T}_0\}$  der Ebene  $\mathcal{G}_2$  zu (siehe Abbildung 7), so erhält man eine  $(1, 2)$ -Korrespondenz  $\kappa$ . Dabei ist  $\kappa$  genau dann regulär, wenn auf  $\mathcal{G}_1$  keine singulären Punkte der  $F_3$  liegen.*

*Beweis.*

- Wir wählen das Koordinatensystem wieder so, dass  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$  gilt. Die Punkte  $(0, 0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 0, 1)$  liegen auf dieser Geraden. Erstellt man mit Hilfe dieser Punkte eine Parameterdarstellung

$$x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = \lambda, x_3 = \mu$$

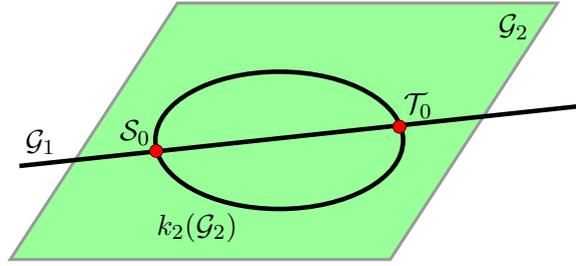


Abbildung 7: Zerfallende Schnittkurve der kubischen Fläche mit einer Ebene durch eine Gerade der Fläche

der Geraden  $\mathcal{G}_1$  und setzt diese in die allgemeine Gleichung einer kubischen Fläche (I) ein, erhält man

$$\widetilde{a}_{222}\lambda^3 + \widetilde{a}_{223}\lambda^2\mu + \widetilde{a}_{233}\lambda\mu^2 + \widetilde{a}_{333}\mu^3 = 0.$$

Da die Gerade  $\mathcal{G}_1$  ganz auf der  $F_3$  liegen soll, muss dieser Ausdruck identisch verschwinden, und damit gilt für die Koeffizienten

$$\widetilde{a}_{222} = \widetilde{a}_{223} = \widetilde{a}_{233} = \widetilde{a}_{333} = 0.$$

Durch entsprechendes Umformen erhalten wir so aus (I) eine Gleichung der Gestalt

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) = & x_0(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + x_1(b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) \\ & + x_0^2(a_2x_2 + a_3x_3) + 2x_0x_1(b_2x_2 + b_3x_3) + x_1^2(c_2x_2 + c_3x_3) \\ & + d_0x_0^3 + 3d_1x_0^2x_1 + 3d_2x_0x_1^2 + d_3x_1^3 = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Weil  $\mathcal{G}_1$  keine singuläre Gerade für  $F_3$  ist, dürfen in dieser Darstellung nicht gleichzeitig alle  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  verschwinden (betrachte dazu die partiellen Ableitungen von  $f$  (2.16)-(2.19), die dann für alle Punkte  $(0, 0, c, d) \in \mathcal{G}_1$  gleich 0 wären).

- Wir wählen für eine Ebene  $\mathcal{G}_2$  durch  $\mathcal{G}_1$  wieder die Parameterdarstellung (2.12) und erhalten durch Einsetzen in (2.13) und entsprechendes Umformen eine Gleichung der Schnittkurve in den Parametern  $(\lambda, \mu, \nu)$  der Ebene  $\mathcal{G}_2$  als

$$\begin{aligned} & \lambda(\alpha(a_{22}\mu^2 + 2a_{23}\mu\nu + a_{33}\nu^2) + \beta(b_{22}\mu^2 + 2b_{23}\mu\nu + b_{33}\nu^2)) \\ & + \lambda^2(\alpha^2(a_2\mu + a_3\nu) + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu)) \\ & + \lambda^3(d_0\alpha^3 + 3d_1\alpha^2\beta + 3d_2\alpha\beta^2 + d_3\beta^3) = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist durch  $\lambda = 0$  die Gerade  $\mathcal{G}_1$  gegeben. Spalten wir diese Gerade ab, erhalten wir den Kegelschnitt  $k_2(\mathcal{G}_2)$  durch

$$\begin{aligned} & (\alpha(a_{22}\mu^2 + 2a_{23}\mu\nu + a_{33}\nu^2) + \beta(b_{22}\mu^2 + 2b_{23}\mu\nu + b_{33}\nu^2)) \\ & + \lambda(\alpha^2(a_2\mu + a_3\nu) + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu)) \\ & + \lambda^2(d_0\alpha^3 + 3d_1\alpha^2\beta + 3d_2\alpha\beta^2 + d_3\beta^3) = 0. \end{aligned}$$

- Schneidet man jetzt den Kegelschnitt mit der Geraden  $\mathcal{G}_1$ , die in der Ebene  $\mathcal{G}_2$  dargestellt ist, durch  $\lambda = 0$ , erhält man für die  $(\mu, \nu)$ -Koordinaten der Schnittpunkte die Beziehung

$$\alpha(a_{22}\mu^2 + 2a_{23}\mu\nu + a_{33}\nu^2) + \beta(b_{22}\mu^2 + 2b_{23}\mu\nu + b_{33}\nu^2) = 0,$$

und diese Gleichung definiert die behauptete  $(1, 2)$ -Korrespondenz  $\kappa$  (und damit nach Bemerkung 2.4.1 auch eine Involution auf  $\mathcal{G}_1$ ), wenn man davon ausgeht, dass die Parameterdarstellung der Ebene etwa auf dem Punkt  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  beruht.

- Ist  $\kappa$  nicht regulär, so verschwinden entweder alle  $a_{ij}$  oder alle  $b_{ij}$ , oder die Formen

$$a_{22}\mu^2 + 2a_{23}\mu\nu + a_{33}\nu^2 = 0 \quad (2.14)$$

$$b_{22}\mu^2 + 2b_{23}\mu\nu + b_{33}\nu^2 = 0 \quad (2.15)$$

haben eine gemeinsame Wurzel ( $\mu = c, \nu = d$ ) (vergleiche dazu wieder Abschnitt 1.5.8). Falls eines der beiden Polynome identisch verschwindet, sei einfach ( $\mu = c, \nu = d$ ) eine Wurzel des anderen. In jedem Fall ist der Punkt  $(0, 0, c, d) \in \mathcal{G}_1$  singulär für  $F_3$ . Bildet man nämlich die partiellen Ableitungen für (2.13), so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= (a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + 2x_0(a_2x_2 + a_3x_3) \\ &\quad + 2x_1(b_2x_2 + b_3x_3) + 3d_0x_0^2 + 6d_1x_0x_1 + 3d_2x_1^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= (b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) + 2x_0(b_2x_2 + b_3x_3) \\ &\quad + 2x_1(c_2x_2 + c_3x_3) + 3d_1x_0^2 + 6d_2x_0x_1 + 3d_3x_1^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2a_{22}x_0x_2 + 2a_{23}x_0x_3 + 2b_{22}x_1x_2 + 2b_{23}x_1x_3 + a_2x_0^2 + 2b_2x_0x_1 + c_2x_1^2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2a_{23}x_0x_2 + 2a_{33}x_0x_3 + 2b_{23}x_1x_2 + 2b_{33}x_1x_3 + a_3x_0^2 + 2b_3x_0x_1 + c_3x_1^2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

und für den Punkt  $(0, 0, c, d)$  gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0}(0, 0, c, d) &= a_{22}c^2 + 2a_{23}cd + a_{33}d^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0, c, d) &= b_{22}c^2 + 2b_{23}cd + b_{33}d^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, c, d) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 0, c, d) &= 0, \end{aligned}$$

wobei  $(c, d)$  eine gemeinsame Wurzel von (2.14) und (2.15) ist. Daher sind die Ableitungen für den Punkt  $(0, 0, c, d)$  alle 0.

- Ist umgekehrt der Punkt  $\mathcal{G}_0 = (0, 0, c, d) \in \mathcal{G}_1$  singulär für die  $F_3$ , dann müssen die partiellen Ableitungen von  $f$  (siehe (2.16)-(2.19)) für  $\mathcal{G}_0$  verschwinden. Damit verschwinden aber auch die Polynome (2.14) und (2.15) für  $\mu = c$  und  $\nu = d$ . Also haben die beiden Polynome eine gemeinsame Wurzel und die Korrespondenz  $\kappa$  ist nicht regulär.

□

*Bemerkung 2.4.2.* Bei den nicht-regulären Korrespondenzen des vorigen Satzes kommt Folgendes vor:

Es existiert mindestens eine Ebene durch  $\mathcal{G}_1$ , zu der nicht nur zwei oder einer, sondern unendlich viele Punkte von  $\mathcal{G}_1$  korrespondieren.

Daraus folgt die Tatsache:

**Korollar 2.4.3.** *Eine Gerade  $\mathcal{G}_1$  liege auf einer irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$ . Dann gilt:  $\mathcal{G}_1$  enthält genau dann singuläre Punkte der  $F_3$ , wenn es eine Ebene durch  $\mathcal{G}_1$  gibt, deren Schnittkurve mit der  $F_3$  in die doppelt zu zählende Gerade  $G_1$  und höchstens noch eine weitere Gerade zerfällt.*

Wir benötigen noch eine

**Definition 2.4.4** (Voll zerfallender Schnitt). Man bezeichnet jene Schnittkurven  $k_3$  einer kubischen Fläche mit einer Ebene als voll zerfallend, die in drei nicht notwendigerweise verschiedene Gerade zerfallen.

Nun erhalten wir einen Satz, der später bei den singularitätenfreien kubischen Flächen noch eine Rolle spielen wird.

**Satz 2.4.5.** *Gegeben sei eine Gerade  $\mathcal{G}_1$  auf einer irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$ . Betrachtet man alle Schnitte der  $F_3$  mit einer Ebene  $\mathcal{G}_2$  durch  $\mathcal{G}_1$ , so gibt es zwei Möglichkeiten:*

- *Alle ebenen Schnitte durch  $\mathcal{G}_1$  zerfallen.*
- *Es existieren nur endlich viele voll zerfallende ebene Schnitte durch  $\mathcal{G}_1$  – und zwar mindestens einer und höchstens fünf.*

*Der erste Fall ist für singularitätenfreie kubische Flächen nicht möglich, und es gibt für diese immer genau fünf voll zerfallende ebene Schnitte (siehe Abbildung 8).*

*Beweis.*

- Zunächst gehen wir so vor wie zu Beginn des Beweises von Satz 2.4.1. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$  gilt und wir für die irreduzible kubische Fläche  $F_3$  eine Gleichung der Gestalt (2.13) erhalten. Setzt man wieder die Parameterdarstellung (2.12) einer Ebene  $\mathcal{G}_2$  durch  $\mathcal{G}_1$  in die Gleichung der  $F_3$  ein, so erhält man nach Abspaltung der Geraden  $\mathcal{G}_1$  (entspricht  $\lambda = 0$ ) die Gleichung des Kegelschnitts  $k_2(\mathcal{G}_2)$  in den Parametern  $(\lambda, \mu, \nu)$  der Ebene als

$$\begin{aligned} & (\alpha(a_{22}\mu^2 + 2a_{23}\mu\nu + a_{33}\nu^2) + \beta(b_{22}\mu^2 + 2b_{23}\mu\nu + b_{33}\nu^2)) \\ & + \lambda(\alpha^2(a_2\mu + a_3\nu) + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu)) \\ & + \lambda^2(d_0\alpha^3 + 3d_1\alpha^2\beta + 3d_2\alpha\beta^2 + d_3\beta^3) = 0. \end{aligned}$$

Durch entsprechendes Umformen erhält man

$$\begin{aligned} & \lambda^2(d_0\alpha^3 + 3d_1\alpha^2\beta + 3d_2\alpha\beta^2 + d_3\beta^3) + 2\lambda\mu\left(\frac{a_2}{2}\alpha^2 + b_2\alpha\beta + \frac{c_2}{2}\beta^2\right) \\ & + 2\lambda\nu\left(\frac{a_3}{2}\alpha^2 + b_3\alpha\beta + \frac{c_3}{2}\beta^2\right) + \mu^2(a_{22}\alpha + b_{22}\beta) \\ & + \mu\nu(a_{23}\alpha + b_{23}\beta) + \nu^2(a_{33}\alpha + b_{33}\beta) = 0. \end{aligned}$$

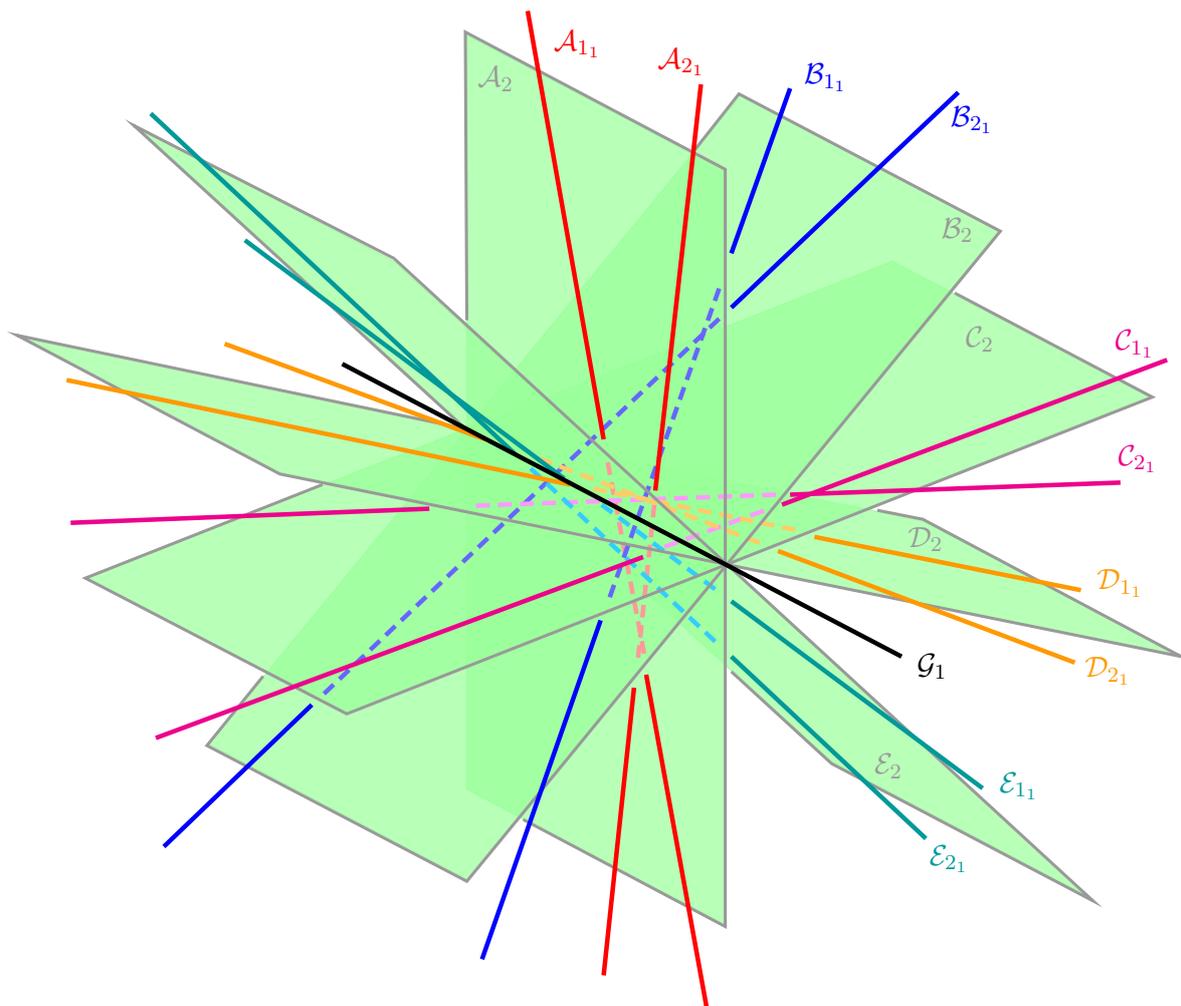


Abbildung 8: Fünf voll zerfallende ebene Schnitte

- Aus dem Abschnitt 1.4.6 wissen wir, dass dieser Kegelschnitt genau dann zerfällt, wenn

$$\begin{vmatrix} d_0\alpha^3 + 3d_1\alpha^2\beta + 3d_2\alpha\beta^2 + d_3\beta^3 & \frac{a_2}{2}\alpha^2 + b_2\alpha\beta + \frac{c_2}{2}\beta^2 & \frac{a_3}{2}\alpha^2 + b_3\alpha\beta + \frac{c_3}{2}\beta^2 \\ \frac{a_2}{2}\alpha^2 + b_2\alpha\beta + \frac{c_2}{2}\beta^2 & a_{22}\alpha + b_{22}\beta & a_{23}\alpha + b_{23}\beta \\ \frac{a_3}{2}\alpha^2 + b_3\alpha\beta + \frac{c_3}{2}\beta^2 & a_{23}\alpha + b_{23}\beta & a_{33}\alpha + b_{33}\beta \end{vmatrix} = H(\alpha, \beta) = 0$$

gilt.

- Durch Berechnung der Determinante  $H(\alpha, \beta)$  sieht man, dass diese eine binäre Form in  $\alpha$  und  $\beta$  vom Grad 5 ist. Es ergeben sich folgende Möglichkeiten:
  - $H(\alpha, \beta)$  verschwindet identisch.
  - $H(\alpha, \beta)$  ist ein Produkt von höchstens 5 verschiedenen Linearfaktoren in  $\alpha$  und  $\beta$ .

Im ersten Fall zerfallen alle Schnitte mit einer Ebene durch  $\mathcal{G}_1$  voll (die Determinante ist unabhängig von  $\alpha$  und  $\beta$  immer 0) und im zweiten Fall gibt es mindestens einen voll zerfallenden Schnitt durch  $\mathcal{G}_1$  (es gibt mindestens einen Linearfaktor) und maximal fünf.

- Wir setzen nun voraus, dass die  $F_3$  irreduzibel und singularitätenfrei ist.  $\mathcal{G}_2$  sei eine Ebene durch  $\mathcal{G}_1$ , die die  $F_3$  voll zerfallend schneide. Aus Korollar 2.4.3 (angewandt auf jede der drei Geraden) wissen wir dann, dass  $\mathcal{G}_2 \cap F_3$  aus drei verschiedenen Geraden bestehen muss. Es bleiben noch zwei Fälle zu unterscheiden:
  - $\mathcal{G}_2 \cap F_3$  sind drei Gerade ohne gemeinsamen Punkt
  - $\mathcal{G}_2 \cap F_3$  sind drei Gerade mit gemeinsamem Punkt
- $\mathcal{G}_2 \cap F_3$  seien drei Gerade ohne gemeinsamen Punkt. Wir wählen die Koordinaten so, dass zusätzlich die Ebene  $\mathcal{G}_2$  durch  $x_0 = 0$  und das Dreieck  $\mathcal{G}_2 \cap F_3$  durch  $x_1x_2x_3 = 0$  beschrieben wird. Setzt man Parameterdarstellungen

$$x_0 = x_2 = 0 : x_0 = 0, x_1 = \lambda, x_2 = 0, x_3 = \mu$$

$$x_0 = x_3 = 0 : x_0 = 0, x_1 = \lambda, x_2 = \mu, x_3 = 0$$

der beiden anderen Geraden in die Gleichung (2.13) der  $F_3$  ein, erhält man

$$b_{33}\lambda\mu^2 + c_3\lambda^2\mu + d_3\lambda^3 = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{bzw. } b_{22}\lambda\mu^2 + c_2\lambda^2\mu + d_3\lambda^3 = 0. \quad (2.21)$$

Da die beiden Geraden ganz auf der  $F_3$  liegen, müssen die Ausdrücke (2.20) und (2.21) identisch verschwinden und man erhält

$$b_{22} = b_{33} = c_2 = c_3 = d_3 = 0.$$

Die Gleichung der  $F_3$  hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_0(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + 2b_{23}x_1x_2x_3 \\ &\quad + x_0^2(a_2x_2 + a_3x_3) + 2x_0x_1(b_2x_2 + b_3x_3) \\ &\quad + d_0x_0^3 + 3d_1x_0^2x_1 + 3d_2x_0x_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Dabei muss  $b_{23} \neq 0$  gelten, da sonst der Faktor  $x_0 = 0$  abgespalten werden könnte und die  $F_3$  somit zerfallen würde. Außerdem muss  $d_2 \neq 0$  gelten, andernfalls wäre der Punkt  $(0, 1, 0, 0)$  singular für die  $F_3$ . Betrachte dazu die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= (a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + 2x_0(a_2x_2 + a_3x_3) \\ &\quad + 2x_1(b_2x_2 + b_3x_3) + 3d_0x_0^2 + 6d_1x_0x_1 + 3d_2x_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2b_{23}x_2x_3 + 2x_0(b_2x_2 + b_3x_3) \\ &\quad + 3d_1x_0^2 + 6d_2x_0x_1 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2a_{22}x_0x_2 + 2a_{23}x_0x_3 + 2b_{23}x_1x_3 + a_2x_0^2 + 2b_2x_0x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2a_{23}x_0x_2 + 2a_{33}x_0x_3 + 2b_{23}x_1x_2 + a_3x_0^2 + 2b_3x_0x_1,$$

die für den Punkt  $(0, 1, 0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(0, 1, 0, 0) = d_2, \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 1, 0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 1, 0, 0) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 1, 0, 0) = 0$$

ergeben. Berechnet man nun  $H(\alpha, \beta)$ , erhält man

$$H(\alpha, \beta) = \underbrace{-3d_2b_{23}}_{\neq 0} \alpha\beta^4 + \text{höhere Potenzen in } \alpha.$$

Damit verschwindet  $H(\alpha, \beta)$  sicher nicht identisch und hat die zur Ebene  $\mathcal{G}_2$  gehörige Wurzel  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$  (vergleiche dazu mit der Parameterdarstellung der Ebene (2.12)) der Vielfachheit 1.

- $\mathcal{G}_2 \cap F_3$  seien nun drei Gerade mit gemeinsamem Punkt. Wir wählen die Koordinaten so, dass zusätzlich die Ebene  $\mathcal{G}_2$  durch  $x_0 = 0$  und das Geradentripel  $\mathcal{G}_2 \cap F_3$  durch  $x_1x_2(x_1 + x_2) = 0$  beschrieben wird. Setzt man Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} x_0 = x_2 = 0 : x_0 = 0, x_1 = \lambda, x_2 = 0, x_3 = \mu \\ x_0 = x_1 + x_2 = 0 : x_0 = 0, x_1 = \lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = \mu \end{aligned}$$

der beiden anderen Geraden in die Gleichung (2.13) der  $F_3$  ein, erhält man

$$b_{33}\lambda\mu^2 + c_3\lambda^2\mu + d_3\lambda^3 = 0 \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \text{bzw. } b_{22}\lambda^3 - 2b_{23}\lambda^2\mu + b_{33}\lambda\mu^2 - c_2\lambda^3 + c_3\lambda^2\mu + d_3\lambda^3 = \\ \lambda^3(b_{22} - c_2 + d_3) + \lambda^2\mu(-2b_{23} + c_3) + b_{33}\lambda\mu^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Da die beiden Geraden ganz auf der  $F_3$  liegen, müssen die Ausdrücke (2.22) und (2.23) identisch verschwinden und man erhält aus (2.22)

$$b_{33} = c_3 = d_3 = 0$$

und aus (2.23)

$$b_{22} - c_2 + d_3 = -2b_{23} + c_3 = b_{33} = 0.$$

Das ergibt in Summe

$$b_{23} = b_{33} = c_3 = d_3 = 0 \text{ und } b_{22} = c_2.$$

Die Gleichung der  $F_3$  hat dann die Gestalt

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + b_{22}x_1x_2^2 \\ + x_0^2(a_2x_2 + a_3x_3) + 2x_0x_1(b_2x_2 + b_3x_3) + b_{22}x_1^2x_2 \\ + d_0x_0^3 + 3d_1x_0^2x_1 + 3d_2x_0x_1^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dabei muss  $b_{22} \neq 0$  gelten, da sonst der Faktor  $x_0 = 0$  abgespalten werden könnte und die  $F_3$  somit zerfallen würde. Außerdem muss  $a_{33} \neq 0$  gelten, andernfalls wäre der Punkt  $(0, 0, 0, 1)$  singulär für die  $F_3$ . Betrachte dazu die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= (a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + 2x_0(a_2x_2 + a_3x_3) \\ &\quad + 2x_1(b_2x_2 + b_3x_3) + 3d_0x_0^2 + 6d_1x_0x_1 + 3d_2x_1^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= b_{22}x_2^2 + 2x_0(b_2x_2 + b_3x_3) + 2b_{22}x_1x_2 \\ &\quad + 3d_1x_0^2 + 6d_2x_0x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2a_{22}x_0x_2 + 2a_{23}x_0x_3 + 2b_{22}x_1x_2 + a_2x_0^2 + 2b_2x_0x_1 + b_{22}x_1^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2a_{23}x_0x_2 + 2a_{33}x_0x_3 + a_3x_0^2 + 2b_3x_0x_1, \end{aligned}$$

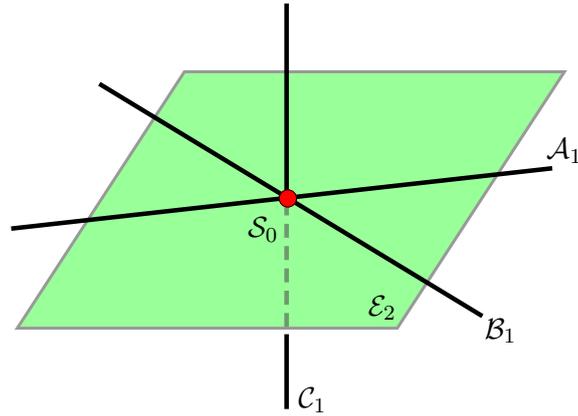


Abbildung 9: Schnittpunkt von drei nicht in einer Ebene liegenden Geraden einer kubischen Fläche

die für den Punkt  $(0, 0, 0, 1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(0, 0, 0, 1) = a_{33}, \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0, 0, 1) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 0, 1) = 0, \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 0, 0, 1) = 0$$

ergeben. Berechnet man nun  $H(\alpha, \beta)$ , erhält man

$$H(\alpha, \beta) = \underbrace{-\frac{1}{4}b_{22}^2 a_{33}}_{\neq 0} \alpha \beta^4 + \text{höhere Potenzen in } \alpha.$$

Damit verschwindet  $H(\alpha, \beta)$  sicher nicht identisch und hat die zur Ebene  $\mathcal{G}_2$  gehörige Wurzel  $(\alpha, \beta) = (0, 1)$  der Vielfachheit 1.

□

Wir werden diesen Satz später noch dazu einsetzen, 27 Gerade auf einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  zu finden. Auf diesen ist eine spezielle Geradenanordnung nicht möglich, wie der folgende Satz zeigt.

**Satz 2.4.6.** *Liegen drei verschiedene Gerade  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{C}_1$ , die einen Punkt  $\mathcal{S}_0$  gemeinsam haben, ganz auf einer kubischen Fläche  $F_3$ , jedoch nicht in einer Ebene (siehe Abbildung 9), so ist  $\mathcal{S}_0$  singulär für die  $F_3$ .*

*Beweis.* Wir gehen aus von der Darstellung (I) der kubischen Fläche  $F_3$ . Wir wählen unser Koordinatensystem so, dass der Punkt  $\mathcal{S}_0$  und die Geraden  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{C}_1$  gegeben sind durch  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$ ,  $\mathcal{A}_1 : x_0 = x_1 = 0$ ,  $\mathcal{B}_1 : x_1 = x_2 = 0$  und  $\mathcal{C}_1 : x_0 = x_2 = 0$ . Setzt man Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 : x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = \lambda, x_3 = \mu \\ \mathcal{B}_1 : x_0 = \lambda, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \mu \\ \mathcal{C}_1 : x_0 = 0, x_1 = \lambda, x_2 = 0, x_3 = \mu \end{aligned}$$

der drei Geraden in die Gleichung (I) der  $F_3$  ein, erhält man

$$\widetilde{a}_{222}\lambda^3 + \widetilde{a}_{223}\lambda^2\mu + \widetilde{a}_{233}\lambda\mu^2 + \widetilde{a}_{333}\mu^3 = 0 \quad (2.25)$$

$$\widetilde{a}_{000}\lambda^3 + \widetilde{a}_{003}\lambda^2\mu + \widetilde{a}_{033}\lambda\mu^2 + \widetilde{a}_{333}\mu^3 = 0 \quad (2.26)$$

$$\text{bzw. } \widetilde{a}_{111}\lambda^3 + \widetilde{a}_{113}\lambda^2\mu + \widetilde{a}_{133}\lambda\mu^2 + \widetilde{a}_{333}\mu^3 = 0. \quad (2.27)$$

Da die drei Geraden ganz auf der  $F_3$  liegen, müssen die Ausdrücke (2.25)-(2.27) identisch verschwinden und man erhält

$$\widetilde{a}_{000} = \widetilde{a}_{003} = \widetilde{a}_{033} = \widetilde{a}_{111} = \widetilde{a}_{113} = \widetilde{a}_{133} = \widetilde{a}_{222} = \widetilde{a}_{223} = \widetilde{a}_{233} = \widetilde{a}_{333} = 0.$$

Die  $F_3$  hat dann eine Gleichung der Gestalt

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) = & \widetilde{a}_{001}x_0^2x_1 + \widetilde{a}_{002}x_0^2x_2 + \widetilde{a}_{011}x_0x_1^2 + \widetilde{a}_{012}x_0x_1x_2 + \widetilde{a}_{013}x_0x_1x_3 + \widetilde{a}_{022}x_0x_2^2 \\ & + \widetilde{a}_{023}x_0x_2x_3 + \widetilde{a}_{112}x_1^2x_2 + \widetilde{a}_{122}x_1x_2^2 + \widetilde{a}_{123}x_1x_2x_3 = 0. \end{aligned}$$

Durch Bildung der partiellen Ableitungen von  $f$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) = & 2\widetilde{a}_{001}x_0x_1 + 2\widetilde{a}_{002}x_0x_2 + \widetilde{a}_{011}x_1^2 + \widetilde{a}_{012}x_1x_2 + \widetilde{a}_{013}x_1x_3 \\ & + \widetilde{a}_{022}x_2^2 + \widetilde{a}_{023}x_2x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) = & \widetilde{a}_{001}x_0^2 + 2\widetilde{a}_{011}x_0x_1 + \widetilde{a}_{012}x_0x_2 + \widetilde{a}_{013}x_0x_3 + 2\widetilde{a}_{112}x_1x_2 \\ & + \widetilde{a}_{122}x_2^2 + \widetilde{a}_{123}x_2x_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) = & \widetilde{a}_{002}x_0^2 + \widetilde{a}_{012}x_0x_1 + 2\widetilde{a}_{022}x_0x_2 + \widetilde{a}_{023}x_0x_3 + \widetilde{a}_{112}x_1^2 \\ & + 2\widetilde{a}_{122}x_1x_2 + \widetilde{a}_{123}x_1x_3, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) = \widetilde{a}_{013}x_0x_1 + \widetilde{a}_{023}x_0x_2 + \widetilde{a}_{123}x_1x_2$$

und Einsetzen des Punktes  $\mathcal{S}_0$  sieht man, dass dieser singular für die  $F_3$  ist.  $\square$

Nachdem wir nun einige Ergebnisse über Geraden auf irreduziblen kubischen Flächen gesammelt haben, wollen wir uns konkret den kubischen Regelflächen zuwenden. Dazu zählen zunächst die kubischen Kegel, da es offensichtlich durch jeden Punkt eine Gerade gibt, die ganz auf der Fläche liegt. Sofern ein kubischer Kegel nicht zerfällt, entsteht er dadurch, dass man alle Punkte einer in einer Ebene  $\mathcal{E}_2$  liegenden, nicht zerfallenden ebenen Kurve  $k_3$  der Ordnung 3 mit einem Punkt  $\mathcal{S}_0 \notin \mathcal{E}_2$  – der Spitze – verbindet. Die  $k_3$  kann dabei entweder singularitätenfrei sein, einen Doppelpunkt oder eine Spitze enthalten. Im ersten Fall gibt es außer  $\mathcal{S}_0$  keine singulären Punkte auf dem Kegel. Im Fall einer singulären  $k_3$  gibt es auf dem Kegel eine ganze singuläre Gerade. Um das einzusehen, wählt man zum Beispiel einen Kegel mit Spitze  $(0, 0, 0, 1)$  mit einer Gleichung der Gestalt  $a_3(x_0, x_1, x_2)$  und einen weiteren singulären Punkt  $(1, 0, 0, 0)$ , der die Kegelgleichung zusätzlich vereinfacht. Bildet man die partiellen Ableitungen der resultierenden Kegelgleichung, sieht man, dass die ganze Gerade  $x_1 = x_2 = 0$  für den Kegel singular ist. Wir erhalten also drei verschiedene Klassen kubischer Kegel.

Wir wollen uns im Folgenden mit irreduziblen kubischen Regelflächen befassen, die keine Kegel sind, und wir werden sehen, dass es dabei zwei projektiv verschiedene Klassen gibt. Zunächst benötigen wir folgenden

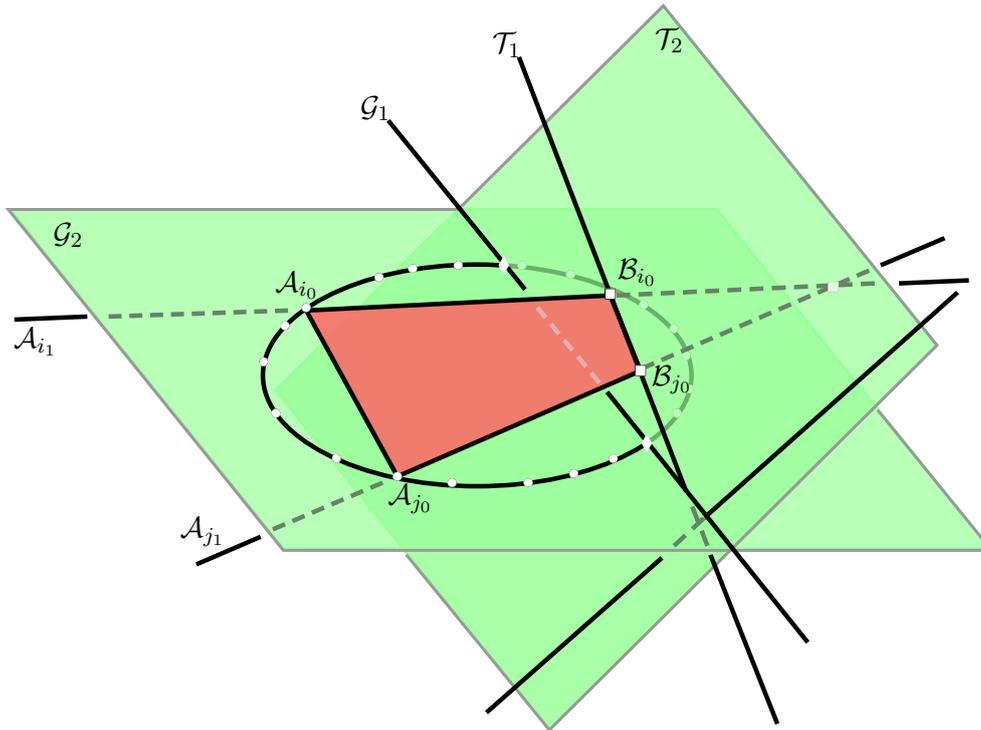


Abbildung 10: Situation aus dem Beweis von Satz 2.4.7

**Satz 2.4.7.** *Auf jeder irreduziblen kubischen Regelfläche  $F_3$  existiert eine Gerade  $\mathcal{T}_1$ , sodass alle Schnitte von  $F_3$  mit einer Ebene  $\mathcal{E}_2$  durch  $\mathcal{T}_1$  voll zerfallen.*

*Beweis.*

- Da wir die  $F_3$  als irreduzible kubische Regelfläche voraussetzen, gibt es sicher Gerade, die ganz auf ihr liegen.  $\mathcal{G}_1$  sei eine solche Gerade. Erfüllt  $\mathcal{G}_1$  schon die Eigenschaft, dass alle ebenen Schnitte durch sie zerfallen, sind wir fertig. Andernfalls existiert mindestens eine Ebene  $\mathcal{G}_2$  durch  $\mathcal{G}_1$ , die mit der  $F_3$  außer  $\mathcal{G}_1$  noch einen nicht zerfallenden Kegelschnitt  $k_2$  gemeinsam hat (der Schnitt ist ja eine  $k_3$ ).
- Aus Satz 2.4.5 wissen wir, dass es Ebenen durch  $\mathcal{G}_1$  gibt, deren Schnitt voll zerfällt.  $\mathcal{T}_2$  sei eine solche Ebene durch  $\mathcal{G}_1$ .
- Nun wählen wir 20 Punkte auf  $k_2$ , die nicht auf  $\mathcal{G}_1$  liegen dürfen, und zwar

$$\mathcal{A}_{i_0}, i = 1, 2, \dots, 20.$$

Da die  $F_3$  eine Regelfläche ist, gibt es sicher ganz auf der  $F_3$  liegende Gerade

$$\mathcal{A}_{i_1}, i = 1, 2, \dots, 20, \tag{2.28}$$

die wegen der Wahl der Punkte sicher nicht in der Ebene  $\mathcal{G}_2$  liegen, denn dann würde der Schnitt dieser Ebene mit der  $F_3$  aus einem Kegelschnitt und zwei verschiedenen Geraden  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{A}_{i_1}$  bestehen (so eine  $k_3$  gibt es nicht). Außerdem können die Geraden (2.28) auch nicht in der Ebene  $\mathcal{T}_2$  liegen, denn da der Schnitt von  $\mathcal{T}_2$  und  $\mathcal{G}_2$  die Gerade  $\mathcal{G}_1$  ist, müsste

eine solche Gerade  $\mathcal{A}_{i_1}$  die Ebene  $\mathcal{G}_2$  in einem Punkt  $\mathcal{G}_0$  auf  $\mathcal{G}_1$  schneiden.  $\mathcal{G}_0$  müsste jedoch als einziger Schnittpunkt mit  $\mathcal{G}_2$  ( $\mathcal{T}_2 \neq \mathcal{G}_2$ ) bereits der Punkt  $\mathcal{A}_{i_0}$  sein, der nach den Voraussetzungen nicht auf  $\mathcal{G}_1$  liegen darf.

- Es gibt daher die Punkte

$$\mathcal{B}_{i_0} = \mathcal{A}_{i_1} \cap \mathcal{T}_2, i = 1, 2, \dots, 20,$$

die alle außerhalb von  $\mathcal{G}_1$  liegen müssen.

- Da die Punkte  $\mathcal{B}_{i_0}$  auch alle auf der  $F_3$  liegen, muss der Schnitt von  $\mathcal{T}_2$  mit der  $F_3$  nun neben  $\mathcal{G}_1$  noch mindestens eine weitere Gerade enthalten (höchstens zwei weitere; siehe Abbildung 10). Ein einfacher Schubfachschluss ergibt, dass es in diesem Schnitt eine Gerade  $\mathcal{T}_1$  geben muss, sodass mindestens 10 der Punkte  $\mathcal{B}_{i_0}$  auf ihr liegen (gibt es keine weitere Gerade, müssen natürlich alle 20 Punkte auf  $\mathcal{T}_1$  liegen). Wir wählen die Nummerierung der Punkte  $\mathcal{B}_{i_0}$  so, dass

$$\mathcal{B}_{1_0}, \mathcal{B}_{2_0}, \dots, \mathcal{B}_{10_0}$$

auf  $\mathcal{T}_1$  liegen.

- Damit wird jetzt  $\mathcal{T}_1$  von den Geraden  $\mathcal{A}_{i_1}, i = 1, 2, \dots, 10$  getroffen, wobei nur höchstens je zwei dieser Geraden eine Ebene aufspannen können. Eine solche Ebene schneidet nämlich die Ebene  $\mathcal{G}_2$  in einer Geraden, die nach Satz 1.4.26 den Kegelschnitt  $k_2 \subset \mathcal{G}_2$ , auf dem die zugehörigen Punkte  $\mathcal{A}_{i_0}, i = 1, 2, \dots, 10$  liegen, in höchstens zwei Punkten schneiden kann (siehe Abbildung 10).
- Es gibt daher mindestens fünf verschiedene Ebenen durch  $\mathcal{T}_1$ , die die  $F_3$  voll zerfallend schneiden. Außerdem ist  $\mathcal{T}_2$  eine weitere, von diesen fünf verschiedene, sechste Ebene durch  $\mathcal{T}_1$ , die die  $F_3$  voll zerfallend schneidet. Daher erhalten wir aus Satz 2.4.5, dass alle Ebenen durch  $\mathcal{T}_1$  voll zerfallen müssen.

□

Mithilfe dieses Ergebnisses können wir nun einen Satz beweisen, der im Großen und Ganzen eine Umkehrung zu Satz 2.3.9 darstellt.

**Satz 2.4.8.** *Jede irreduzible kubische Regelfläche  $F_3$ , die kein Kegel ist, besitzt eine singuläre Gerade.*

*Beweis.*

- Gegeben sei die irreduzible kubische Regelfläche  $F_3$ . Nach Satz 2.4.7 können wir ein Gerade  $\mathcal{G}_1$  auf der  $F_3$  finden, sodass alle Schnitte von  $F_3$  mit Ebenen durch  $\mathcal{G}_1$  voll zerfallen. Ist  $\mathcal{G}_1$  schon ganz singulär, sind wir fertig.
- Wir gehen nun davon aus, dass  $\mathcal{G}_1$  nicht ganz singulär ist und wollen zeigen, dass es dann gar keinen singulären Punkt auf dieser Geraden gibt. Angenommen ein Punkt  $\mathcal{G}_0 \in \mathcal{G}_1$  wäre singulär. Dann schneidet aber jede Ebene durch  $\mathcal{G}_1$  die Fläche  $F_3$  in einem Geraden-triplet mit  $\mathcal{G}_0$  als singulären Punkt. Damit enthalten die Geradenpaare, die die Ebenen des Büschels mit Trägergerade  $\mathcal{G}_1$  neben  $\mathcal{G}_1$  noch mit der  $F_3$  gemeinsam haben, alle den Punkt  $\mathcal{G}_0$  (die Schnittpunkte der zerfallenden Kurven sind die singulären Punkte), was die  $F_3$  selbst zu einem Kegel mit Spitze  $\mathcal{G}_0$  (alle drei Geraden sind verschieden und gehen durch

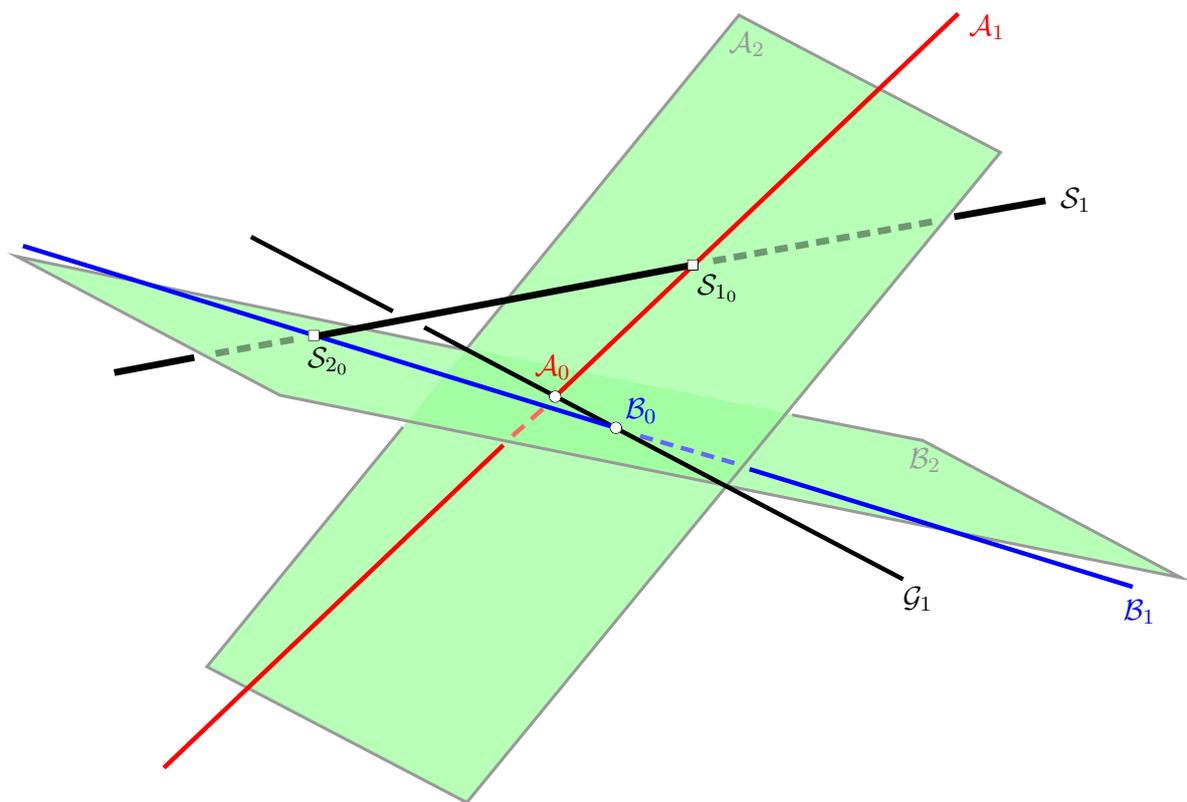


Abbildung 11: Situation aus dem Beweis von Satz 2.4.8

$\mathcal{G}_0$ ) macht, oder die  $F_3$  enthält so einen Kegel als Teil (zerfällt also). Beide Varianten sind Widersprüche zu den an die  $F_3$  gestellten Voraussetzungen, also kann die Gerade  $\mathcal{G}_1$  keine singulären Punkte der  $F_3$  enthalten.

- Aus Korollar 2.4.3 wissen wir dann, dass die Gerade  $\mathcal{G}_1$  für keinen Schnitt mit einer Ebene des  $\mathcal{G}_1$ -Büschels mehrfach zählt.
- Nach Satz 2.4.1 bestimmen diese ebenen Schnitte auf  $\mathcal{G}_1$  eine reguläre Involution  $\kappa$ .
- Wir wählen das Koordinatensystem nun so, dass die Gerade  $\mathcal{G}_1$  durch  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$  gegeben ist. Die Doppelpunkte von  $\kappa$  auf  $\mathcal{G}_1$  sollen dabei die Punkte  $\mathcal{A}_0 = (0, 0, 1, 0)$  und  $\mathcal{B}_0 = (0, 0, 0, 1)$  sein.
- Es muss nun zwei verschiedene Ebenen  $\mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{B}_2$  durch  $\mathcal{G}_1$  geben, für deren Schnitt mit der  $F_3$  man die Doppelpunkte von  $\kappa$  auf der Geraden  $\mathcal{G}_1$  erhält. Dabei kann so ein Doppelpunkt nur dadurch entstehen, dass die zwei neben  $\mathcal{G}_1$  noch vorhandenen Geraden  $\mathcal{A}_{11}$  und  $\mathcal{A}_{21}$  durch  $\mathcal{A}_0$  aus dem ebenen Schnitt zusammenfallen (analog für  $\mathcal{B}_0$ ). Die andere Möglichkeit, also zwei verschiedene Gerade neben  $\mathcal{G}_1$ , die sich beide in einem Punkt auf  $\mathcal{G}_1$  schneiden, kann nicht auftreten. Betrachte dazu den letzten Punkt des Beweises von Satz

2.4.5. Dort haben wir gezeigt, dass eine irreduzible kubische  $F_3$ , auf der drei verschiedene Gerade (eine davon war  $\mathcal{G}_1$ ) liegen, die sich in einem Punkt schneiden, eine Gleichung der Gestalt (2.24) hat. Dabei haben wir gesehen, dass  $b_{22} \neq 0$  sein muss, da andernfalls die  $F_3$  zerfällt. Im selben Beweis haben wir auch  $H(\alpha, \beta)$  eingeführt und gesehen, dass dieser Ausdruck für eine Gerade, deren Schnitte alle voll zerfallen, identisch verschwinden muss. Ist nun aber unsere  $F_3$  von der Gestalt (2.24), so erhält man

$$H(\alpha, \beta) = -\frac{1}{4}b_{22}^2a_{33}\alpha\beta^4 + \text{höhere Potenzen in } \alpha,$$

und damit muss für unsere Gerade  $\mathcal{G}_1$  der Koeffizient  $a_{33}$  verschwinden. Wir haben dann im selben Beweis gesehen, dass damit der Punkt  $(0, 0, 0, 1) \in \mathcal{G}_1$  singulär für die  $F_3$  ist. Wir haben aber schon gezeigt, dass es so einen Punkt auf  $\mathcal{G}_1$  nicht geben kann.

- $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  durch  $\mathcal{A}_0$  bzw.  $\mathcal{B}_0$  seien nun die jeweils doppelt zu zählenden Geraden aus den ebenen Schnitten der  $F_3$  mit  $\mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{B}_2$ . Aus Korollar 2.4.3 wissen wir, dass es auf diesen Geraden je mindestens einen singulären Punkt  $\mathcal{S}_{1_0} \in \mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{S}_{2_0} \in \mathcal{B}_1$  geben muss. Diese Punkte dürfen nicht auf  $\mathcal{G}_1$  liegen, und weil die Ebenen  $\mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{B}_2$  verschieden sind, kann auch die Gerade

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_{1_0} \cup \mathcal{S}_{2_0}$$

die Gerade  $\mathcal{G}_1$  nicht schneiden (siehe Abbildung 11). Wir passen unser Koordinatensystem nochmals an und wählen es so, dass  $\mathcal{S}_{1_0} = (0, 1, 0, 0)$  und  $\mathcal{S}_{2_0} = (1, 0, 0, 0)$  gilt.

- Wir kennen nun von dieser  $F_3$  die Geraden  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$ ,  $\mathcal{A}_1 : x_0 = x_3 = 0$  und  $\mathcal{B}_1 : x_1 = x_2 = 0$  und wissen außerdem, dass die Punkte  $\mathcal{S}_{1_0}$  und  $\mathcal{S}_{2_0}$  singulär für die  $F_3$  sind. Wir wissen bereits, dass wir aus der Tatsache, dass die Gerade  $\mathcal{G}_1$  auf der  $F_3$  liegt, eine Gleichung der Gestalt (2.13) erhalten. Da nun  $\mathcal{S}_{1_0}$  und  $\mathcal{S}_{2_0}$  für die  $F_3$  singulär sind, dürfen nach Bemerkung 1.3.6 die Unbekannten  $x_0$  und  $x_1$  mit keiner größeren Potenz als 1 auftreten. Dadurch reduziert sich die Gleichung der  $F_3$  auf

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_0(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2) + x_1(b_{22}x_2^2 + 2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) \\ &+ 2x_0x_1(b_2x_2 + b_3x_3) = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir nun Parameterdarstellungen der Geraden  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 : x_0 &= 0, x_1 = \lambda, x_2 = \mu, x_3 = 0 \\ \mathcal{B}_1 : x_0 &= \lambda, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \mu \end{aligned}$$

in die verbleibende Gleichung der  $F_3$  ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} b_{22}\lambda\mu^2 &= 0, \\ \text{bzw. } a_{33}\lambda\mu^2 &= 0, \end{aligned}$$

und da die beiden Geraden ganz auf der  $F_3$  liegen sollen, müssen diese Ausdrücke identisch verschwinden. Es gilt also  $a_{33} = b_{22} = 0$  und die Gleichung der  $F_3$  reduziert sich auf

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_0(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3) + x_1(2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) \\ &+ 2x_0x_1(b_2x_2 + b_3x_3) = 0. \end{aligned}$$

Durch unsere Wahl des Koordinatensystems wird die Ebene  $\mathcal{A}_2$  durch  $\mathcal{A}_2 : x_0 = 0$  und die Ebene  $\mathcal{B}_2$  durch  $\mathcal{B}_2 : x_1 = 0$  beschrieben. Schneiden wir diese Ebenen mit der  $F_3$ , erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2 : x_1(2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) &= 0 \\ \text{bzw. } \mathcal{B}_2 : x_0(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3) &= 0. \end{aligned}$$

Da für den Schnitt mit  $\mathcal{A}_2$  die Gerade  $\mathcal{A}_1 : x_0 = x_3 = 0$  doppelt zählen soll, muss  $b_{23} = 0$  sein. Analog erhält man, da für den Schnitt mit der Ebene  $\mathcal{B}_2$  die Gerade  $\mathcal{B}_1 : x_0 = x_2 = 0$  doppelt zählen soll, dass  $a_{23} = 0$  gelten muss. In der nun verbleibenden Gleichung der  $F_3$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = a_{22}x_0x_2^2 + b_{33}x_1x_3^2 + 2x_0x_1(b_2x_2 + b_3x_3) = 0$$

muss  $a_{22} \neq 0$  und  $b_{33} \neq 0$  gelten, da die  $F_3$  sonst zerfällt.

- Bildet man nun, wie im Beweis von Satz 2.4.5, den Ausdruck  $H(\alpha, \beta)$  für die Gerade  $\mathcal{G}_1$  und die aktuelle Gleichung der  $F_3$ , erhält man

$$H(\alpha, \beta) = -\alpha^2\beta^2(b_3^2a_{22} + b_2^2b_{33}).$$

Da alle ebenen Schnitte durch  $\mathcal{G}_1$  voll zerfallen, muss  $b_2 = b_3 = 0$  gelten, und die  $F_3$  hat die Gleichung

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = a_{22}x_0x_2^2 + b_{33}x_1x_3^2 = 0.$$

- Bildet man die partiellen Ableitungen von  $f$ , erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(0, 1, 0, 0) = a_{22}x_2^2 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 1, 0, 0) = b_{33}x_3^2 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 1, 0, 0) = 2a_{22}x_0x_2 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 1, 0, 0) = 2b_{33}x_1x_3. \quad (2.32)$$

Die Gerade  $\mathcal{S}_1$  wird beschrieben durch die Darstellung  $\mathcal{S}_1 : x_2 = x_3 = 0$ . Aus Bemerkung 2.3.5 wissen wir bereits, dass die Gerade  $\mathcal{S}_1$  ganz auf der  $F_3$  liegt, und anhand ihrer partiellen Ableitungen (2.29)-(2.32) erkennt man, dass sie für die  $F_3$  singulär ist.

□

Nachdem wir die Existenz einer singulären Geraden auf einer irreduziblen Regelfläche nachgewiesen haben, können wir uns dem Hauptergebnis dieses Abschnitts zuwenden.

**Satz 2.4.9.** *Es gibt neben den Kegeln zwei projektiv verschiedene Typen von irreduziblen kubischen Regelflächen, die sich unterscheiden lassen:*

- die sogenannte allgemeine Regelfläche mit einer Normalgleichung

$$x_0x_2^2 + x_1x_3^2 = 0;$$

*es gibt genau dann außerhalb der singulären Geraden  $\mathcal{S}_1$  noch eine zu  $\mathcal{S}_1$  windschiefe Gerade  $\mathcal{T}_1$ , die von allen anderen Geraden der Fläche getroffen wird. Die Ebenenpaare der Tangentialkegel zu den Punkten von  $\mathcal{S}_1$  (vergleiche Satz 2.3.11) bilden eine reguläre Involution, und es gibt keine Torsalebene, also keine Ebene, die die Fläche in der dreifach zu zählenden Gerade  $\mathcal{S}_1$  schneidet.*

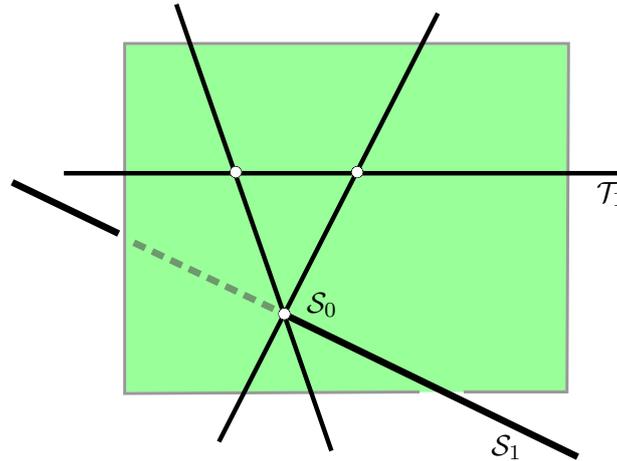


Abbildung 12: Voll zerfallender ebener Schnitt der kubischen Fläche durch die Gerade  $\mathcal{T}_1$

- Die sogenannte spezielle oder Cayleysche Regelfläche mit einer Normalgleichung

$$x_0x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_2^3 = 0;$$

es existiert genau dann keine Gerade  $\mathcal{T}_1$  windschief zu  $\mathcal{S}_1$ , die von allen anderen Geraden der  $F_3$  getroffen wird. Die Ebenenpaare der Tangentialkegel zu den Punkten von  $\mathcal{S}_1$  bilden eine parabolische Involution. Sie besteht aus allen Ebenenpaaren  $(\mathcal{A}_2, \mathcal{S}_2)$  durch  $\mathcal{S}_1$ , wobei  $\mathcal{A}_2$  fest ist und  $\mathcal{S}_2$  durch  $\mathcal{S}_1$  beliebig. Die Ebene  $\mathcal{A}_2$  schneidet dabei die Fläche  $F_3$  in der dreifach zu zählenden Gerade  $\mathcal{S}_1$ , ist also ein Torsalebene.

*Beweis.*

- Gegeben sei eine irreduzible kubische Regelfläche  $F_3$ , die kein Kegel ist. Besitzt die Fläche außerhalb ihrer singulären Geraden  $\mathcal{S}_1$  noch eine weitere auf ihr liegende Gerade  $\mathcal{T}_1$ , die  $\mathcal{S}_1$  nicht trifft, so haben alle ebenen kubischen Schnittkurven der  $F_3$  mit beliebigen Ebenen durch  $\mathcal{T}_1$  einen Punkt  $\mathcal{S}_0$  mit  $\mathcal{S}_1$  gemeinsam.  $\mathcal{S}_0$  ist nach Satz 2.3.1 auch für die ebene kubische Schnittkurve singulär. Diese besteht neben der Geraden  $\mathcal{T}_1$  noch aus einem Kegelschnitt  $k_2$ . Da wegen Satz 2.3.9 der singuläre Punkt  $\mathcal{S}_0$  nicht auf  $\mathcal{T}_1$  liegen kann, muss dieser auf  $k_2$  sein. Nach Abschnitt 1.4.6 zerfällt  $k_2$  bei Auftreten eines singulären Punktes schon in zwei Geraden (siehe Abbildung 12), und daher müssen alle ebenen Schnittkurven der  $F_3$  mit beliebigen Ebenen durch  $\mathcal{T}_1$  voll zerfallen.
- Wegen unserer Wahl der Geraden  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{T}_1$ , und da wir nun für die Gerade  $\mathcal{T}_1$  wissen, dass alle Schnitte voll zerfallen, können wir den Beweis des Satzes 2.4.8 erneut verwenden ( $\mathcal{T}_1$  entspricht  $\mathcal{G}_1$ ) und erhalten für die Gleichung der  $F_3$  die Beziehung

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = a_{22}x_0x_2^2 + b_{33}x_1x_3^2 = 0.$$

Durch geeignete Wahl des Einheitspunkts gelangt man dann zu

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0x_2^2 + x_1x_3^2 = 0. \quad (2.33)$$

- Aus Satz 2.3.11 wissen wir: Ordnet man jedem Punkt  $\mathcal{S}_0$  der Geraden  $\mathcal{S}_1$  die Ebene durch  $\mathcal{S}_1$  zu, für deren Schnittkurve mit der Fläche der Punkt  $\mathcal{S}_0$  ein dreifacher Punkt ist, so

wird dadurch eine  $(1, 2)$ -Korrespondenz  $\kappa$  definiert. Eine Ebene durch  $\mathcal{S}_1$  hat analog zu (2.12) die Parameterdarstellung

$$x_0 = \mu, x_1 = \nu, x_2 = \alpha\lambda, x_3 = \beta\lambda.$$

Schneiden wir diese Ebene mit der  $F_3$ , erhalten wir

$$\lambda^2(\mu\beta^2 + \nu\alpha^2) = 0,$$

und ein Punkt  $(\mu, \nu, 0, 0) \in \mathcal{S}_1$  zählt somit dreifach für den Schnitt, wenn

$$\mu\beta^2 + \nu\alpha^2 = 0$$

gilt. Das ist aber schon die Gleichung der Korrespondenz  $\kappa$  (vergleiche mit dem Beweis von Satz 2.3.11), die nach Abschnitt 1.5.8 regulär ist. Damit sind nach Satz 2.3.11 alle Punkte der Geraden  $\mathcal{S}_1$  biplanar, bis auf zwei uniplanare Punkte, und aus dem gleichen Beweis wissen wir auch, dass die zu jedem Punkt der  $\mathcal{S}_1$  korrespondierenden Ebenen die Tangentialebenen sind, die somit eine reguläre Involution bilden.

- Liegt umgekehrt eine reguläre Involution der Tangentialebenen zu den Punkten  $\mathcal{S}_0 \in \mathcal{S}_1$  vor, so gibt es zwei uniplanare Punkte  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$ , für die wir das Koordinatensystem so wählen, dass  $\mathcal{A}_0 = (1, 0, 0, 0)$  und  $\mathcal{B}_0 = (0, 1, 0, 0)$  gilt. Die zugehörigen Doppelebenen seien  $x_2^2 = 0$  und  $x_3^2 = 0$ .
- In den Beweisen von Satz 2.3.4 und Satz 2.3.11 haben wir bereits gesehen, dass eine  $F_3$  mit einer singulären Gerade eine Gleichung der Gestalt

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, x_2, x_3) = & x_2^2(a_2x_0 + a_3x_1) + 2x_2x_3(b_2x_0 + b_3x_1) + x_3^2(c_2x_0 + c_3x_1) \\ & + d_0x_2^3 + 3d_1x_2^2x_3 + 3d_2x_2x_3^2 + d_3x_3^3 = 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

hat, wobei wir wegen der Symmetrie die Rollen von  $x_0$  und  $x_2$  bzw.  $x_1$  und  $x_3$  vertauscht haben, da die Gerade  $\mathcal{S}_1$  die Darstellung  $\mathcal{S}_1 : x_2 = x_3 = 0$  und nicht  $x_0 = x_1 = 0$  besitzt.

- Bilden wir wieder wie im Beweis von Satz 2.3.11 die Korrespondenz unbestimmt für eine Ebene durch die Gerade  $\mathcal{S}_1$  und durch den Punkt  $(\gamma, \delta, \alpha, \beta)$  mit der Parameterdarstellung

$$x_0 = \mu, x_1 = \nu, x_2 = \alpha\lambda, x_3 = \beta\lambda$$

und einen Punkt  $\mathcal{S}_0 = (\mu, \nu, 0, 0) \in \mathcal{S}_1$ , so erhalten wir die Beziehung

$$\alpha^2(a_2\mu + a_3\nu) + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu) = 0.$$

Für die Ebene  $x_2 = 0$  (also durch den Punkt  $(\gamma, \delta, \alpha, \beta) = (0, 0, 0, 1)$ ) erhält man wegen  $\alpha = 0$  und  $\beta = 1$

$$c_2\mu + c_3\nu = 0,$$

und da zu dieser Ebene der Punkt  $\mathcal{A}_0$  korrespondieren soll, muss  $c_2 = 0$  gelten. Analog erhält man für die Ebene  $x_3 = 0$  und den Punkt  $\mathcal{B}_0$  die Bedingung  $a_3 = 0$ . Die Korrespondenz hat dann die Gestalt

$$a_2\alpha^2\mu + 2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + c_3\beta^2\nu = 0,$$

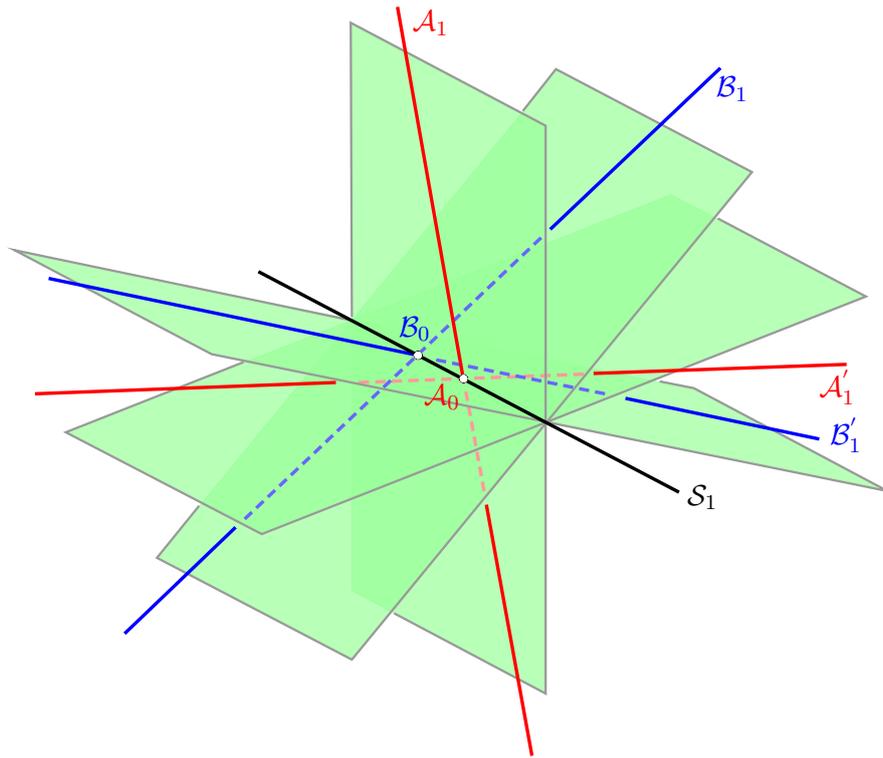


Abbildung 13: Vier Tangentialebenen durch  $\mathcal{S}_1$

und damit sie regulär ist, muss  $a_2 \neq 0$  und  $c_3 \neq 0$  gelten.

Setzt man nun umgekehrt den Punkt  $\mathcal{A}_0$  ein, erhält man  $\alpha^2 a_2 + 2\alpha\beta b_2 = 0$  und für eine Doppellösung muss  $b_2 = 0$  gelten. Analog erhält man für den Punkt  $\mathcal{B}_0$  die Bedingung  $b_3 = 0$ . Damit ergibt sich eine Darstellung der  $F_3$  durch die Gleichung

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = a_2 x_2^2 x_0 + c_3 x_3^2 x_1 + d_0 x_2^3 + 3d_1 x_2^2 x_3 + 3d_2 x_2 x_3^2 + d_3 x_3^3 = 0$$

mit  $a_2 \neq 0$  und  $c_3 \neq 0$ . Wendet man die projektive Kollineation

$$\begin{aligned} y_0 &= a_2 x_0 + d_0 x_2 + 3d_1 x_3, \\ y_1 &= c_3 x_1 + 3d_2 x_2 + d_3 x_3, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}$$

an, erhält man  $y_0 y_2^2 + y_1 y_3^2 = 0$ . Man sieht jetzt leicht, dass die zur  $\mathcal{S}_1$  windschiefe Gerade  $\mathcal{T}_1 : x_0 = x_1 = 0$  auf der  $F_3$  liegt.

- Eine irreduzible kubische Regelfläche  $F_3$  mit einer singulären Geraden  $\mathcal{S}_1$  und einer dazu windschiefen Geraden  $\mathcal{T}_1$ , die von allen übrigen Geraden der Fläche getroffen wird, kann keine Torsalebene besitzen, da jede Ebene durch  $\mathcal{S}_1$  auch  $\mathcal{T}_1$  schneidet. Damit bestünde der ebene Schnitt aus mehr als einer  $k_3$ .
- Umgekehrt sei eine irreduzible kubische Regelfläche mit einer singulären Geraden  $\mathcal{S}_1$  und ohne Torsalebene gegeben. Man wählt nun zwei biplanare Punkte  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$  auf  $\mathcal{S}_1$ . Die

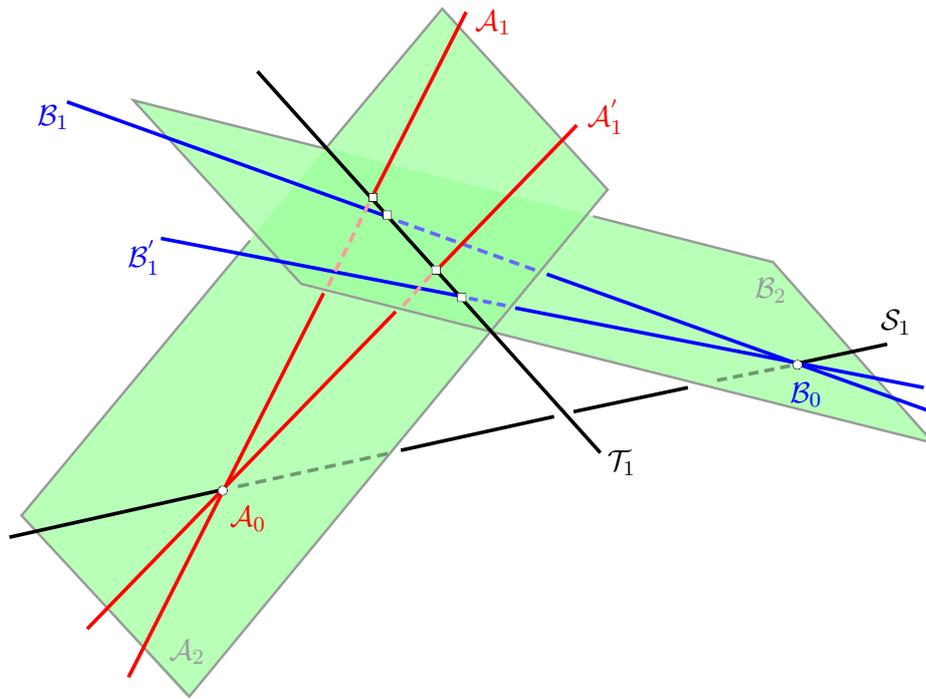


Abbildung 14: Die zu  $\mathcal{S}_1$  windschiefe Gerade  $\mathcal{T}_1$

beiden Tangentialebenen im Punkt  $\mathcal{A}_0$  enthalten neben der Geraden  $\mathcal{S}_1$  noch jeweils eine weitere Gerade  $\mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{A}'_1$  (die Gerade  $\mathcal{S}_1$  zählt doppelt für den Schnitt; siehe auch den Beweis von Satz 2.3.11) auf der  $F_3$ . Da die Ebenen verschieden sind, sind auch die Geraden verschieden. Da nach Satz 2.3.11 der Punkt  $\mathcal{A}_0$  für den Schnitt mit seiner Tangentialebene dreifach zählt, müssen die Geraden  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}'_1$  durch  $\mathcal{A}_0$  gehen. Analog erhält man zwei verschiedene Geraden  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}'_1$  auf der  $F_3$  durch  $\mathcal{B}_0$ . Wir bilden die beiden Ebenen  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}'_1$  und  $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}'_1$  (siehe Abbildung 13). Diese können  $\mathcal{S}_1$  nicht enthalten, da sonst die doppelt zu zählende Gerade  $\mathcal{S}_1$  und zwei weitere Gerade im Schnitt mit der  $F_3$  lägen. Es darf auch keine der Geraden  $\mathcal{A}_1$  oder  $\mathcal{A}'_1$  eine der Geraden  $\mathcal{B}_1$  oder  $\mathcal{B}'_1$  schneiden, da sonst wieder  $\mathcal{S}_1$  und zwei weitere Geraden in einer Ebene lägen. Bildet man nun die Gerade  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{B}_2$ , so hat diese mit der Fläche  $F_3$  vier Punkte (die vier Schnittpunkte mit den Geraden  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}'_1, \mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}'_1$ ) gemeinsam. Damit liegt aber  $\mathcal{T}_1$  schon ganz auf der  $F_3$  und ist wegen der Lage der beiden Ebenen  $\mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{B}_2$  windschief zu  $\mathcal{S}_1$  (siehe Abbildung 14).

- Liegt schließlich eine parabolische Involution der Tangentialebenen zu den Punkten  $\mathcal{S}_0 \in \mathcal{S}_1$  vor, so gibt es wegen Satz 2.3.11 auf der Geraden  $\mathcal{S}_1$  nur einen uniplanaren Punkt  $\mathcal{A}_0$ . Zu diesem korrespondiert eine Ebene  $\mathcal{A}_2$ , die wegen der Eigenschaften der parabolischen Korrespondenzen (siehe Abschnitt 1.5.8) zu jedem anderen Punkt der Gerade  $\mathcal{S}_1$  ebenfalls korrespondiert. Das bedeutet aber, dass für den Schnitt der  $F_3$  mit dieser Ebene jeder Punkt  $\mathcal{S}_0 \in \mathcal{S}_1$  dreifach zählt. Damit ist die Ebene  $\mathcal{A}_2$  eine Torsalebene (in dieser Ebene können dann keine weiteren Schnittpunkte mehr liegen). Da sie parabolisch ist, besteht unsere Involution aus allen Ebenenpaaren  $(\mathcal{A}_2, \mathcal{S}_2)$  durch  $\mathcal{S}_1$ , wobei  $\mathcal{A}_2$  fest ist und  $\mathcal{S}_2$  durch  $\mathcal{S}_1$  beliebig.

- Wir wählen das Koordinatensystem so, dass  $\mathcal{S}_1 : x_2 = x_3 = 0$ ,  $\mathcal{A}_0 = (1, 0, 0, 0)$  und  $\mathcal{A}_2 : x_3 = 0$  gilt. Wegen der Lage von  $\mathcal{S}_1$  erhalten wir eine Gleichung der  $F_3$  von der Gestalt (2.34). Für den Schnitt mit der Ebene  $\mathcal{A}_2$  mit der Parameterdarstellung  $x_0 = \lambda, x_1 = \mu, x_2 = \nu, x_3 = 0$  erhält man

$$\nu^2(a_2\lambda + a_3\mu) + \nu^3d_0 = 0.$$

Die Gerade  $\mathcal{S}_1$  entspricht dabei in der  $(\lambda, \mu, \nu)$ -Ebene der Gleichung  $\nu = 0$ . Sie soll für den Schnitt dreifach zählen (also jeder Punkt  $(\lambda, \mu, 0, 0) \in \mathcal{S}_1$  soll dreifach zählen), wodurch man  $a_2 = 0$  und  $a_3 = 0$  erhält. Bilden wir weiters wieder die Korrespondenz unbestimmt für eine Ebene durch die Gerade  $\mathcal{S}_1$  und durch den Punkt  $(\gamma, \delta, \alpha, \beta)$  mit der Parameterdarstellung

$$x_0 = \mu, x_1 = \nu, x_2 = \alpha\lambda, x_3 = \beta\lambda$$

und einen Punkt  $\mathcal{S}_0 = (\mu, \nu, 0, 0) \in \mathcal{S}_1$ , so erhalten wir die Beziehung

$$2\alpha\beta(b_2\mu + b_3\nu) + \beta^2(c_2\mu + c_3\nu) = 0.$$

Für den Punkt  $\mathcal{A}_0 = (1, 0, 0, 0)$  erhalten wir  $2\alpha\beta b_2 + \beta^2 c_2 = 0$ . Da wir für den uniplanaren Punkt  $\mathcal{A}_0$  eine Doppellösung brauchen, muss  $b_2 = 0$  gelten.

- Die Gleichung der  $F_3$  hat nun die Gestalt

$$2b_3x_1x_2x_3 + x_3^2(c_2x_0 + c_3x_1) + d_0x_2^3 + 3d_1x_2^2x_3 + 3d_2x_2x_3^2 + d_3x_3^3 = 0, \quad (2.35)$$

wobei  $c_2 \neq 0$  sein muss, da sonst  $x_0$  gar nicht auftritt und die  $F_3$  zu einem Kegel wird. Außerdem darf  $d_0$  nicht verschwinden, da die Fläche sonst zerfällt (man kann dann  $x_3$  herausheben).

- Bildet man nun den Schnitt der  $F_3$  mit der Ebene  $\mathcal{B}_2 : x_1 = 0$ , so erhält man die Schnittkurve

$$k_3 : c_2x_3^2x_0 + d_0x_2^3 + 3d_1x_2^2x_3 + 3d_2x_2x_3^2 + d_3x_3^3, \quad (2.36)$$

die wegen  $c_2 \neq 0$  und  $d_0 \neq 0$  nicht zerfällt. Durch Bilden der partiellen Ableitungen sieht man leicht, dass die  $k_3$  im Punkt  $\mathcal{A}_0$  eine Spitze hat. Aus Abschnitt 1.4.7 wissen wir, dass eine solche kubische Kurve einen Wendepunkt  $\mathcal{W}_0$  besitzt. Außerdem haben wir dort gesehen, dass die zugehörige Wendetangente keinen weiteren Schnittpunkt mit der  $k_3$  (also auch nicht den Punkt  $\mathcal{A}_0$ ) besitzt. In der Ebene  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{W}_0$  liegt außer  $\mathcal{S}_1$  noch eine weitere Gerade  $\mathcal{C}_1$ , die ganz in der  $F_3$  enthalten ist (ebener Schnitt mit doppelt gezählter  $\mathcal{S}_1$  und einer weiteren Geraden). Diese muss durch den Punkt  $\mathcal{W}_0$  gehen, da dieser Punkt ein Bestandteil der  $F_3$  ist. Außerdem muss sie durch einen weiteren Punkt  $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{S}_1$  gehen, der nicht  $\mathcal{A}_0$  sein kann, da sonst der Schnitt der Ebene  $\mathcal{B}_1$  mit der  $F_3$  die  $k_3$  und die Gerade  $\mathcal{C}_1$  enthalten würde.

- Wir passen unser Koordinatensystem weiter an und legen  $\mathcal{C}_0 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\mathcal{W}_0 = (0, 0, 0, 1)$  und  $\mathcal{W}_1 : x_0 = x_1 = 0$  fest. Nach der Wahl der Punkte ist das sicher zulässig. Durch Einsetzen einer entsprechenden Parameterdarstellung  $x_0 = 0, x_1 = \lambda, x_2 = 0, x_3 = \mu$  der Geraden  $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{W}_0 : x_0 = x_2 = 0$  in (2.35) erhalten wir

$$c_3\mu^2\lambda + d_3\mu^3 = 0.$$

Da nun die Gerade  $\mathcal{C}_1$  ganz auf der  $F_3$  liegen soll, muss  $c_3 = d_3 = 0$  gelten.

- Schneidet man die  $k_3$  mit der Gleichung (2.36) mit der Wendetangente  $\mathcal{W}_1$  (hat in der Ebene  $\mathcal{B}_2 : x_1 = 0$  die Gleichung  $x_0 = 0$ ), so erhält man

$$d_0x_2^3 + 3d_1x_2^2x_3 + 3d_2x_2x_3^2 = x_2(3d_2x_3^2 + x_2(3d_1x_3 + x_2d_0)) = 0.$$

Der Punkt  $\mathcal{W}_0$  soll der Wendepunkt der  $k_3$  sein und daher muss der Schnitt mit der Gerade  $\mathcal{W}_1$  dreifach zählen. Darum muss  $d_1 = d_2 = 0$  gelten, und die Gleichung der  $F_3$  hat die Gestalt

$$2b_3x_1x_2x_3 + c_2x_3^2x_0 + d_0x_2^3 = 0,$$

wobei wegen dem bisher Bewiesenen  $c_2 \neq 0$  und  $d_0 \neq 0$  gelten muss. Außerdem muss  $b_1 \neq 0$  sein, da sonst  $x_1$  nicht mehr vorkommt und die  $F_3$  zu einem Kegel wird. Durch die geeignete Wahl eines Einheitspunkts kann nun die irreduzible kubische Regelfläche dieses Typs mit einer Gleichung der Form

$$x_0x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_2^3 = 0$$

dargestellt werden.

□

*Bemerkung 2.4.10.*

- Die Fläche mit der Gleichung (2.33) heißt auch Whitney Umbrella.
- Die beiden Geraden  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{T}_1$ , die von allen anderen Geraden der allgemeinen kubischen Regelfläche getroffen werden, heißen Leitlinien. Die restlichen Geraden heißen Erzeugende. Bei der Cayleyschen Regelfläche fallen die Geraden  $\mathcal{S}_1$  und  $\mathcal{T}_1$  zusammen. Die verbleibende Gerade ist dann sowohl Leitlinie als auch Erzeugende.
- Allgemeine kubische Regelflächen können dadurch erzeugt werden, dass man die Punkte einer Geraden  $\mathcal{S}_1$  auf die Punktpaare einer regulären Involution auf einer Geraden  $\mathcal{T}_1$  bezieht und entsprechend verbindet. Für Cayleysche Regelflächen gibt es keine solche Erzeugung.

Allerdings beschreiben wir eine mögliche Konstruktion im folgenden

**Satz 2.4.11.** *Gegeben sei ein regulärer Kegelschnitt  $k_2$  und eine Gerade  $\mathcal{T}_1$ , die nicht in der Ebene von  $k_2$  liegt. Bezieht man nun die Punkte von  $k_2$  mit einer Abbildung  $\phi$  eineindeutig auf die der Geraden  $\mathcal{T}_1$  und verbindet diese, erhält man je nach Lage von  $\mathcal{T}_1$  Erzeugende von*

- einer allgemeinen kubischen Regelfläche, wenn  $\mathcal{T}_1 \cap k_2 = \{\}$  gilt;
- einer Cayleyschen Regelfläche, wenn  $\mathcal{T}_1 \cap k_2 = \mathcal{A}_0$  gilt, der Punkt  $\mathcal{A}_0$  unter der Abbildung  $\phi$  jedoch nicht auf sich selbst abgebildet wird;
- einer quadratischen Regelschar (Quadrik), wenn  $\mathcal{T}_1 \cap k_2 = \mathcal{A}_0$  gilt und der Punkt  $\mathcal{A}_0$  unter der Abbildung  $\phi$  auf sich selbst abgebildet wird.

*Bemerkung 2.4.12.* Es ist möglich, alle drei Arten von kubischen Regelflächen (allgemeine, Cayleysche und Kegel) durch eine Projektion einer sogenannten *Normregelfläche*  $\Phi_3$  des  $\mathbb{P}^4$  zu definieren. Diese  $\Phi_3$  wird so erzeugt wie die Gebilde in Satz 2.4.11, wobei in diesem Fall die Gerade  $\mathcal{T}_1$  die Ebene von  $k_2$  gar nicht trifft.

Die Dualflächen der Regelflächen sind sehr leicht zu finden. Wir werden das im Abschnitt 2.7 noch genauer betrachten.

## 2.5 Singularitätenfreie irreduzible kubische Flächen

Wir wollen uns nun den singularitätenfreien Flächen zuwenden. Zunächst werden wir zeigen, dass auf einer solchen Fläche  $F_3$  immer eine Gerade liegt. Dazu werden wir die Geraden einer kubischen Fläche mit den Doppeltangenten einer ebenen Quartik in Verbindung bringen. Schließlich werden wir sehen, dass man sogar noch 26 weitere Gerade auf der  $F_3$  finden kann. Wir werden die Lage dieser Geraden studieren und einige Eigenschaften ableiten.

### 2.5.1 Die 27 Geraden auf der singularitätenfreien irreduziblen kubischen Fläche

Im Folgenden soll nun also die irreduzible kubische Fläche  $F_3$  keine Regelfläche sein. Es liegen daher nur endlich viele Gerade und singuläre Punkte auf ihr. Wir geben uns jetzt eine Grundkonfiguration (siehe Abbildung 15) vor, die wir für die nachfolgenden Betrachtungen benötigen werden:

- Der Punkt  $\mathcal{A}_0$  sei regulär für die  $F_3$  und liege auf keiner Geraden, die schon ganz in der Fläche enthalten ist.
- Die Tangentialebene (nach Definition 1.6.4) an  $F_3$  in  $\mathcal{A}_0$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$ .
- Wir wählen das Koordinatensystem im Folgenden so, dass

$$\mathcal{A}_0 = (0, 0, 0, 1) \text{ und } \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0) : x_2 = 0 \quad (2.37)$$

gilt. Die übrigen Eckpunkte des Systems werden dann nach Bedarf nachträglich festgelegt.

- Wir betrachten nun die allgemeine Gleichung (I) einer  $F_3$  aus Bemerkung 2.1.2. Setzt man den Punkt  $\mathcal{A}_0$  ein, erhält man  $\tilde{a}_{333} = 0$ . Bildet man nach Definition 1.6.4 die Tangentialebene für den Punkt  $\mathcal{A}_0$ , erhält man die Gleichung

$$\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_2) : \tilde{a}_{033}x_0 + \tilde{a}_{133}x_1 + \tilde{a}x_2 = 0,$$

und weil wir  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_2)$  schon mit  $x_2 = 0$  festgelegt haben, ergibt sich

$$\tilde{a}_{033} = \tilde{a}_{133} = 0 \text{ und } \tilde{a}_{233} = 1.$$

Damit hat die  $F_3$  eine Gleichung der Gestalt

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3^2x_2 + 2x_3a_2(x_0, x_1, x_2) + a_3(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad (2.38)$$

wobei wieder  $a_2$  und  $a_3$  Formen in  $x_0, x_1$  und  $x_2$  vom Grad ihres Index sind.

- In Bemerkung 1.6.15 haben wir bereits den Umrisskegel eines beliebigen Punktes  $\mathcal{Q}_0$  kennengelernt. Man erhält ihn durch Bildung aller Tangenten aus  $\mathcal{Q}_0$  an die  $F_3$ . Um diese Tangenten zu finden, muss man nach Satz 1.6.14 alle für die  $F_3$  regulären Punkte des Durchschnitts  $F_3 \cap F_2(\mathcal{Q}_0)$  mit  $\mathcal{Q}_0$  verbinden. Dabei bezeichnet  $F_2(\mathcal{Q}_0)$  die Polare des Punktes  $\mathcal{Q}_0$  bezüglich der  $F_3$  (siehe Definition 1.6.12).
- Bilden wir nun nach Definition 1.6.12 die Polare für den Punkt  $\mathcal{A}_0$ , erhalten wir die Gleichung

$$F_2(\mathcal{A}_0) : 2x_2x_3 + 2a_2(x_0, x_1, x_2) = 0. \quad (2.39)$$

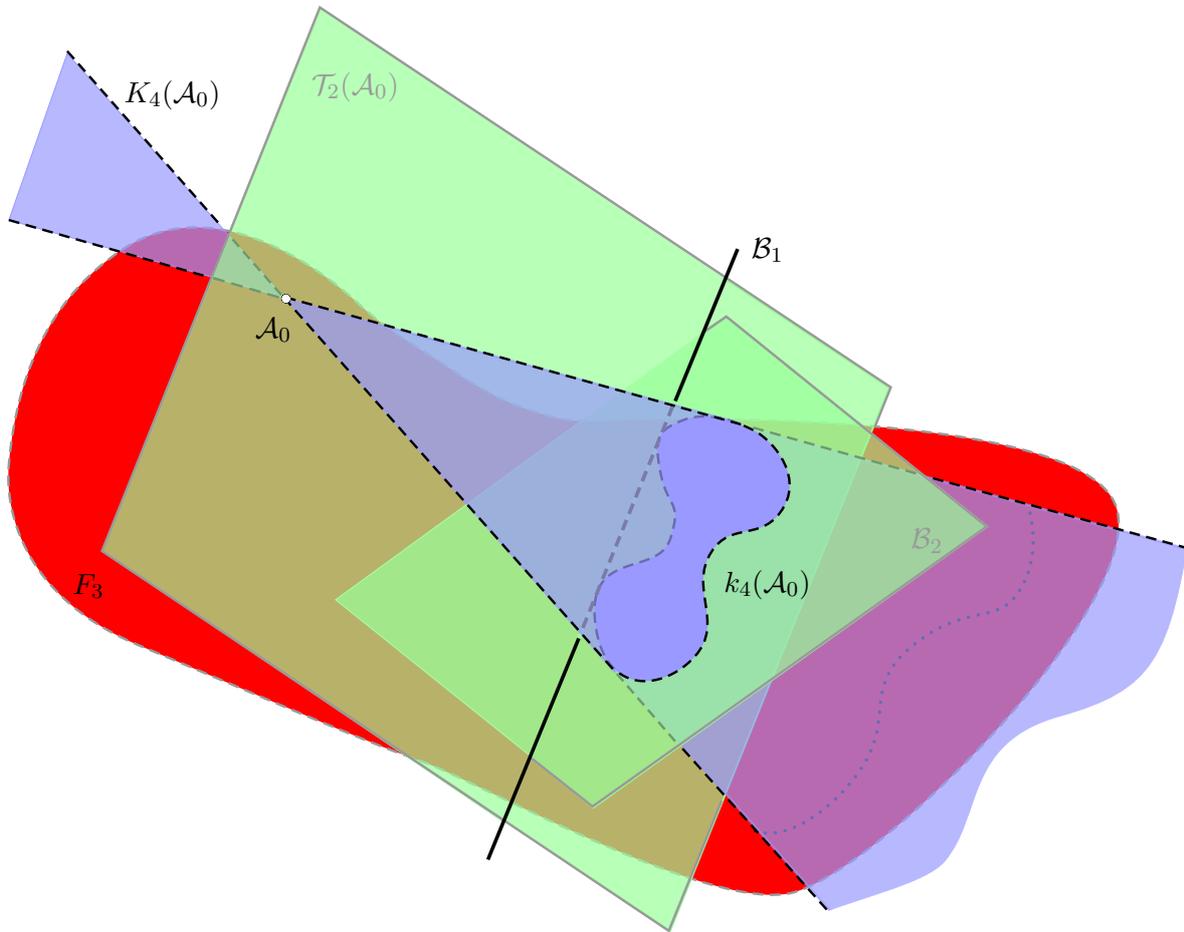


Abbildung 15: Grundkonfiguration

- Um nun eine Gleichung des Umrisskegels von  $\mathcal{A}_0$  zu finden, genügt es, die Schnittkurve  $\tilde{k}$  der  $F_3$  mit der Polaren  $F_2(\mathcal{A}_0)$  zu bilden (das wird im Allgemeinen eine räumliche und keine ebene Kurve sein). Dazu wollen wir  $x_3$  aus (2.38) und (2.39) eliminieren. Wir berechnen also die Resultante bezüglich  $x_3$  von (2.38) und (2.39) und erhalten

$$x_2(x_2 a_3(x_0, x_1, x_2) - a_2(x_0, x_1, x_2)^2) = 0.$$

Unabhängig von  $x_3$  müssen also die Punkte der Schnittkurve  $\tilde{k}$  diese Beziehung für  $x_0, x_1$  und  $x_2$  erfüllen. Für  $x_2 = 0$  erhalten wir alle Tangenten an die  $F_3$ , die in der Ebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  liegen. Nach Bemerkung 1.6.15 gehören sie nicht zum Umrisskegel. Wir können daher den Faktor  $x_2$  abspalten und erhalten

$$x_2 a_3(x_0, x_1, x_2) - a_2(x_0, x_1, x_2)^2 = 0. \quad (2.40)$$

Diese Beziehung definiert einen Kegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  der Ordnung 4 mit Spitze  $\mathcal{A}_0$ , auf dem alle Punkte der Schnittkurve  $\tilde{k}$  liegen (deren Koordinaten müssen nämlich dieselbe Gleichung erfüllen). Es handelt sich also um den Umrisskegel des Punktes  $\mathcal{A}_0$ . Alle Schnitte eines Kegels mit einer Ebene, die  $\mathcal{A}_0$  nicht enthält, sind projektiv äquivalent (vergleiche Bemerkung 1.6.6). Man kann daher die Beziehung (2.40) auch als Gleichung einer Quartik

$k_4(\mathcal{A}_0)$  in der Ebene  $\mathcal{B}_2 : x_3 = 0$ , deren Punkte bei Verbindung mit  $\mathcal{A}_0$  wieder den Kegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  ergeben, auffassen. Wir wollen diese Quartik als Umrissquartik bezeichnen.

- In der Ebene  $\mathcal{B}_2$  liegt die ausgezeichnete Gerade  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$ , die durch  $\mathcal{B}_1 : x_2 = x_3 = 0$  definiert wird. Durch Schneiden dieser Geraden mit der durch (2.40) definierten Umrissquartik  $k_4(\mathcal{A}_0)$  sieht man, dass  $\mathcal{B}_1$  eine Doppel- oder Flachtangente (siehe Abschnitt 1.4.8) von  $k_4(\mathcal{A}_0)$  ist (in der Ebene  $\mathcal{B}_2$  ist die Gerade gegeben durch  $x_2 = 0$ ;  $a_2(x_0, x_1, 0)$  zerfällt und definiert einen oder zwei Schnittpunkte; diese zählen wegen der Quadrierung jeweils doppelt bzw. im Fall einer Flachtangente zählt der eine Schnittpunkt vierfach; vergleiche auch Bemerkung 1.4.36).
- Da es im Weiteren nur auf den projektiven Charakter von  $k_4(\mathcal{A}_0)$  ankommt, ist ihre Abhängigkeit von der Ebene  $\mathcal{B}_2$  unwesentlich. Wir verstehen daher unter  $k_4(\mathcal{A}_0)$  den Schnitt von  $K_4(\mathcal{A}_0)$  mit einer jeweils geeignet als  $x_3 = 0$  gewählten Ebene  $\mathcal{B}_2$ .
- Die Abhängigkeit der Umrissquartik vom Punkt  $\mathcal{A}_0 \in F_3$  ist klarerweise wesentlich und ohnehin in der Namensgebung –  $k_4(\mathcal{A}_0)$  – festgehalten.

Der folgende Satz, der uns im Weiteren sehr hilfreich sein wird, stellt nun eine Verbindung zwischen der Umrissquartik und der Fläche  $F_3$  her.

**Satz 2.5.1.** *Die Umrissquartik  $k_4(\mathcal{A}_0)$  der irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$ , gebildet für einen Punkt  $\mathcal{A}_0$ , durch den keine Gerade geht, die ganz auf der  $F_3$  liegt, besitzt genau dann einen singulären Punkt, wenn die  $F_3$  einen solchen besitzt.*

*Beweis.*

- Der Punkt  $\mathcal{B}_0$  sei zunächst singulär für die  $F_3$ .
- Angenommen  $\mathcal{B}_0$  läge auf der Tangentialebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  des Punktes  $\mathcal{A}_0$ . Schneidet man die Fläche  $F_3$  mit der Tangentialebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$ , so erhält man eine kubische Kurve  $k_3$ . Diese ist nach Satz 1.6.8 singulär im Punkt  $\mathcal{A}_0$ . Außerdem wissen wir aus Satz 2.3.1, dass auch der Punkt  $\mathcal{B}_0$  für die  $k_3$  singulär ist. Damit zerfällt nach Abschnitt 1.4.7 die  $k_3$  und hat nach Abschnitt 1.4.2 die Gerade  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_0$  als Bestandteil. Diese Gerade liegt dann aber auch auf der Fläche  $F_3$  und geht durch den Punkt  $\mathcal{A}_0$ , was unseren Voraussetzungen widerspricht. Der Punkt  $\mathcal{B}_0$  liegt also nicht in der Ebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$ .
- Wir wählen das Koordinatensystem nun so, dass  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  der Grundkonfiguration am Anfang dieses Abschnitts entsprechen. Daher ergibt sich für die  $F_3$  eine Gleichung der Gestalt (2.38). Zusätzlich passen wir unser Koordinatensystem so an, dass wir für den Punkt  $\mathcal{B}_0$  die Darstellung  $\mathcal{B}_0 = (0, 0, 1, 0)$  erhalten. Aus Bemerkung 1.3.6 wissen wir dann, dass in der Gleichung der  $F_3$  die Unbekannte  $x_2$  höchstens mit der Potenz 1 auftreten darf, also in den Formen  $a_2$  und  $a_3$  auch höchstens mit dieser Potenz vorkommt.
- Damit kommt  $x_2$  in der Gleichung (2.40) des Umrisskegels – und damit auch der Umrissquartik  $k_4(\mathcal{A}_0)$  – nur mit höchstens der Potenz 2 vor. Diese hat also eine Darstellung der Gestalt

$$k(x_0, x_1, x_2) = x_2(a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_5x_1^3 + a_6x_1^2x_2) - (b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)^2 = 0.$$

Die partiellen Ableitungen lauten dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2) &= x_2(3a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + 2a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2) \\
&\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)(2b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) \\
\frac{\partial k}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2) &= x_2(a_1x_0^2 + 2a_3x_0x_1 + a_4x_0x_2 + 3a_5x_1^2 + 2a_6x_1x_2) \\
&\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)(b_1x_0 + 2b_3x_1 + b_4x_2) \\
\frac{\partial k}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) &= (a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_5x_1^3 + a_6x_1^2x_2) \\
&\quad + x_2(a_2x_0^2 + a_4x_0x_1 + a_6x_1^2) \\
&\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)(b_2x_0 + b_4x_1).
\end{aligned}$$

Durch einfaches Einsetzen sieht man, dass der Punkt  $(0, 0, 1, 0)$  singulär für die Umrissquartik  $k_4(\mathcal{A}_0)$  ist.

- Gilt umgekehrt, dass die Quartik  $k_4(\mathcal{A}_0)$  für den Punkt  $\mathcal{A}_0$ , also die Schnittkurve von  $K_4(\mathcal{A}_0)$  mit der Ebene  $\mathcal{B}_2$ , einen singulären Punkt  $\mathcal{B}_0$  besitzt, so gibt es zwei Fälle ( $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0), \mathcal{B}_0 \notin \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$ ), wobei wir wieder von unserer Grundkonfiguration am Anfang dieses Abschnitts ausgehen:

- $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$ : In diesem Fall passen wir das Koordinatensystem so an, dass  $\mathcal{B}_0 = (1, 0, 0, 0)$  gilt. Damit tritt aber  $x_0$  wegen Bemerkung 1.3.6 in (2.40) höchstens mit der Potenz 2 auf. Wegen der Gestalt (2.40) der Umrissquartik kann das nur eintreten, wenn in  $a_2$  das Glied mit  $x_0^2$  und in  $a_3$  das Glied mit  $x_0^3$  verschwindet. Das bedeutet aber auch, dass diese Terme schon in der Gleichung (2.38) der  $F_3$  nicht auftreten dürfen. Diese erhält also die Gestalt

$$\begin{aligned}
f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_3^2x_2 + 2x_3(b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2 + b_5x_2^2) \\
&\quad + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_5x_0x_2^2 \\
&\quad + a_6x_1^3 + a_7x_1^2x_2 + a_8x_1x_2^2 + a_9x_2^3.
\end{aligned}$$

Unter der Verwendung einer Parameterdarstellung  $x_0 = \lambda, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \mu$  der Geraden  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$  sieht man, dass diese ganz auf der  $F_3$  liegt. Außerdem geht diese Gerade durch den Punkt  $\mathcal{A}_0$ , was allerdings unserer Voraussetzung widerspricht.

- Daher muss  $\mathcal{B}_0 \notin \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  gelten: Wir passen das Koordinatensystem so an, dass  $\mathcal{B}_0 = (0, 0, 1, 0)$  gilt. Damit tritt aber  $x_2$  wegen Bemerkung 1.3.6 in (2.40) höchstens mit der Potenz 2 auf. Wegen der Gestalt (2.40) der Umrissquartik kann das nur eintreten, wenn  $x_2$  in  $a_2$  und  $a_3$  höchstens mit der Potenz 1 enthalten ist. Diese Bedingung hat auch Auswirkungen auf die Gleichung der  $F_3$ , die dann die Gestalt

$$\begin{aligned}
f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_3^2x_2 + 2x_3(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2) + a_0x_0^3 \\
&\quad + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_5x_1^3 + a_6x_1^2x_2
\end{aligned}$$

hat. Durch das Bilden der partiellen Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2x_3(2b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) + 3a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + 2a_2x_0x_2 \\ &\quad + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2x_3(b_1x_0 + 2b_3x_1 + b_4x_2) + a_1x_0^2 + 2a_3x_0x_1 + a_4x_0x_2 \\ &\quad + 3a_5x_1^2 + 2a_6x_1x_2,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 2x_3(b_2x_0 + b_4x_1) + a_2x_0^2 + a_4x_0x_1 + a_6x_1^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2x_3x_2 + 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2),$$

und damit sieht man wieder durch Einsetzen, dass der Punkt  $\mathcal{B}_0 = (0, 0, 1, 0)$  singulär für die  $F_3$  ist. □

*Bemerkung 2.5.2.* Wenn wir also im Folgenden von einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  ausgehen, so wissen wir, dass die Umrissquartik, gebildet für einen Punkt  $\mathcal{A}_0$ , durch den keine ganz auf der  $F_3$  liegende Gerade geht, auch keine Singularitäten besitzt.

In der Grundkonfiguration am Anfang des Abschnitts haben wir den Umrisskegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  der von  $\mathcal{A}_0$  an die  $F_3$  gelegten Tangenten betrachtet. Die Tangentialebenen an diesen Kegel sind gleichzeitig auch Tangentialebenen an die  $F_3$ . Das zeigt uns der folgende

**Satz 2.5.3.**  $K_4(\mathcal{A}_0)$  sei der Umrisskegel der singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  vom Punkt  $\mathcal{A}_0$  aus. Durch diesen Punkt soll keine Gerade gehen, die ganz auf der  $F_3$  liegt. Dann ist jede Ebene durch  $\mathcal{A}_0$ , die den Kegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  berührt, eine Tangentialebene an die  $F_3$ , und umgekehrt berührt jede  $\mathcal{A}_0$  enthaltende Tangentialebene der  $F_3$  auch  $K_4(\mathcal{A}_0)$ .

*Beweis.*

- Die Voraussetzungen an  $F_3$  und  $K_4(\mathcal{A}_0)$  seien erfüllt. Wir wählen das Koordinatensystem dann wieder der Grundkonfiguration am Anfang des Abschnitts entsprechend. Damit ist  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  die Tangentialebene von  $F_3$  im Punkt  $\mathcal{A}_0$ .
- Zunächst wollen wir die Gleichung der  $F_3$  aus (2.38) explizit anschreiben:

$$\begin{aligned}f(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_3^2x_2 + 2x_3(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2 + b_5x_2^2) \\ &\quad + a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_5x_0x_2^2 + a_6x_1^3 \\ &\quad + a_7x_1^2x_2 + a_8x_1x_2^2 + a_9x_2^3.\end{aligned}\tag{2.41}$$

- Wir wissen bereits aus der Grundkonfiguration, dass die in der Ebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  liegende Gerade  $\mathcal{B}_1 : x_2 = x_3 = 0$  eine Tangente der Umrissquartik  $k_4(\mathcal{A}_0)$  ist. Im Abschnitt 1.6.4 (siehe Dualkegel) haben wir gesehen, dass dann die Ebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  auch Tangentialebene des zur Umrissquartik gehörenden Umrisskegels  $K_4(\mathcal{A}_0)$  ist (sogar Doppeltangentialebene).
- Wir können also im folgenden von einer Ebene  $\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  ausgehen, die den Kegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  längs der nicht in  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  liegenden Geraden  $\mathcal{C}_1$  berührt. Da der Umrisskegel aus allen Tangenten aus  $\mathcal{A}_0$  an die  $F_3$  besteht, muss  $\mathcal{C}_1$  auch eine Tangente der  $F_3$  sein. Der Berührungspunkt sei  $\mathcal{C}_0 \notin \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$ .

- Wir passen unser Koordinatensystem dahingehend an, dass  $\mathcal{C}_0 = (0, 0, 1, 0)$ ,  $\mathcal{C}_2 : x_1 = 0$  und  $\mathcal{C}_1 : x_0 = x_1 = 0$  gilt.
- Wir schreiben die Gleichung des Umrisskegels explizit an (in (2.40) entsprechend eingesetzt) und erhalten

$$\begin{aligned}
k(x_0, x_1, x_2, x_3) = & x_2(a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_5x_0x_2^2 + a_6x_1^3 \\
& + a_7x_1^2x_2 + a_8x_1x_2^2 + a_9x_2^3) \\
& - (b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2 + b_5x_2^2)^2 = 0 \quad (2.42)
\end{aligned}$$

(dabei ist prinzipiell keine Abhängigkeit von  $x_3$  gegeben). Wegen  $\mathcal{C}_0 \in K_4(\mathcal{A}_0)$  gilt  $b_5 = 0$  (Bemerkung 1.3.6).

- Die Ebene  $\mathcal{C}_2$  soll tangential an den Kegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  liegen. Bildet man nach Definition 1.6.4 die partiellen Ableitungen der Kegelmgleichung erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_2(3a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + 2a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2) \\
&\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2) \\
&\quad (2b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2), \\
\frac{\partial k}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_2(a_1x_0^2 + 2a_3x_0x_1 + a_4x_0x_2 + 3a_6x_1^2 + 2a_7x_1x_2 + a_8x_2^2) \\
&\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2) \\
&\quad (b_1x_0 + 2b_3x_1 + b_4x_2), \\
\frac{\partial k}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_5x_0x_2^2 + a_6x_1^3 \\
&\quad + a_7x_1^2x_2 + a_8x_1x_2^2 + a_9x_2^3 + x_2(a_2x_0^2 + a_4x_0x_1 + 2a_5x_0x_2 \\
&\quad + a_7x_1^2 + 2a_8x_1x_2 + 3a_9x_2^2) \\
&\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)(b_2x_0 + b_4x_1) \\
\frac{\partial k}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Setzt man den Punkt  $\mathcal{C}_0$  ein, erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k}{\partial x_0}(0, 0, 1, 0) &= a_5, \\
\frac{\partial k}{\partial x_1}(0, 0, 1, 0) &= a_8, \\
\frac{\partial k}{\partial x_2}(0, 0, 1, 0) &= 4a_9, \\
\frac{\partial k}{\partial x_3}(0, 0, 1, 0) &= 0,
\end{aligned}$$

und damit die Tangentialebene  $a_5x_0 + a_8x_1 + 4a_9x_2 = 0$ . Damit ergibt sich  $a_5 = a_9 = 0$  und  $a_8 = 1$ .

- Setzt man in die Gleichung der  $F_3$  (2.41) entsprechend ein und beachtet die Bedingungen

$a_5 = a_9 = b_5 = 0$  und  $a_8 = 1$ , so ergibt sich für die partiellen Ableitungen von  $f$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2x_3(2b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) + 3a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + 2a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 \\ &\quad + a_4x_1x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2x_3(b_1x_0 + 2b_3x_1 + b_4x_2) + a_1x_0^2 + 2a_3x_0x_1 + a_4x_0x_2 + 3a_6x_1^2 \\ &\quad + 2a_7x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 2x_3(b_2x_0 + b_4x_1) + a_2x_0^2 + a_4x_0x_1 + a_7x_1^2 + 2x_1x_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2x_3x_2 + 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)$$

und für den Punkt  $\mathcal{C}_0$  ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(0, 0, 1, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0, 1, 0) = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 1, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 0, 1, 0) = 0,$$

also ist die Ebene  $\mathcal{C}_2$  eine Tangentialebene an die  $F_3$ .

- Umgekehrt geht man wieder von der Grundkonfiguration und einer Ebene  $\mathcal{C}_2 \neq \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  aus, die die Fläche  $F_3$  im Punkt  $\mathcal{C}_0$  berührt.
- Da  $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{A}_0$  gilt, muss auch  $\mathcal{C}_0 \notin \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  gelten, da sonst die Gerade  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{C}_0$  ganz zur  $F_3$  gehören würde. Das ergibt sich daraus, dass die Gerade  $\mathcal{G}_1$  eine Tangente der  $F_3$  ist, die in den zwei Tangentialebenen  $\mathcal{C}_2$  und  $\mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$  liegt. Nach Bemerkung 1.6.5 zählen für den Schnitt der Geraden mit der  $F_3$  sowohl  $\mathcal{A}_0$  als auch  $\mathcal{C}_0$  zweifach, womit schon die ganze Gerade auf der  $F_3$  liegen muss, was den Voraussetzungen widerspricht.
- Wir passen das Koordinatensystem nun so an, dass der Punkt  $\mathcal{C}_0 = (0, 0, 1, 0)$  in der  $\mathcal{A}_0$  nicht enthaltenden Ebene  $\mathcal{B}_2 : x_3 = 0$  (die auch  $k_4(\mathcal{A}_0)$  enthält) liegt. Weiters sei die Ebene  $\mathcal{C}_2$  gegeben durch  $\mathcal{C}_2 : x_1 = 0$ .
- Die  $F_3$  sei wieder gegeben durch (2.41). Aus  $\mathcal{C}_0 \in F_3$  folgt  $a_9 = 0$  (Bemerkung 1.3.6).
- Wir bestimmen die Tangentialebene der  $F_3$  für den Punkt  $\mathcal{C}_0$ . Die partiellen Ableitungen

von  $f$  lauten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2x_3(2b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2) + 3a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + 2a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 \\ &\quad + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= 2x_3(b_1x_0 + 2b_3x_1 + b_4x_2) + a_1x_0^2 + 2a_3x_0x_1 + a_4x_0x_2 + 3a_6x_1^2 \\ &\quad + 2a_7x_1^2 + b_8x_2^2,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + 2x_3(b_2x_0 + b_4x_1 + 2b_5x_2) + a_2x_0^2 + a_4x_0x_1 + a_7x_1^2 + 2a_8x_1x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 2x_3x_2 + 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2 + b_5x_2^2),$$

und für den Punkt  $\mathcal{C}_0$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_0}(0, 0, 1, 0) &= a_5, \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0, 1, 0) &= a_8, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0, 1, 0) &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(0, 0, 1, 0) &= 2b_5.\end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangentialebene lautet also  $a_5x_0 + a_8x_1 + 2b_5x_3 = 0$ . Da die Ebene  $\mathcal{C}_2$  tangential zur Fläche  $F_3$  im Punkt  $\mathcal{C}_0$  liegen soll, erhalten wir  $a_5 = b_5 = 0$  und  $a_8 = 1$ .

- Der Umrisskegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  hat dann eine Gleichung der Gestalt (in (2.40) entsprechend eingesetzt)

$$\begin{aligned}k(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_2(a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_6x_1^3 + a_7x_1^2x_2 \\ &\quad + x_1x_2^2) - (b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)^2 = 0.\end{aligned}$$

Bildet man wieder die partiellen Ableitungen, erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial x_0}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_2(3a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + 2a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2) \\ &\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)(2b_0x_0 \\ &\quad + b_1x_1 + b_2x_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= x_2(a_1x_0^2 + 2a_3x_0x_1 + a_4x_0x_2 + 3a_6x_1^2 + 2a_7x_1x_2 + x_2^2) \\ &\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)(b_1x_0 \\ &\quad + 2b_3x_1 + b_4x_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2, x_3) &= a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0^2x_2 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_6x_1^3 \\ &\quad + a_7x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_2(a_2x_0^2 + a_4x_0x_1 + a_7x_1^2 + 2x_1x_2) \\ &\quad - 2(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_2x_0x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2)(b_2x_0 + b_4x_1),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial k}{\partial x_3}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0,$$

und für den Punkt  $\mathcal{C}_0$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial x_0}(0, 0, 1, 0) &= 0, \\ \frac{\partial k}{\partial x_1}(0, 0, 1, 0) &= 1, \\ \frac{\partial k}{\partial x_2}(0, 0, 1, 0) &= 0, \\ \frac{\partial k}{\partial x_3}(0, 0, 1, 0) &= 0,\end{aligned}$$

womit die Ebene  $\mathcal{C}_2$  tangential an den Umrisskegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  liegt. □

Nun betrachten wir die Doppel- und Flachtangenten der Umrissquartik. Wir haben einige Eigenschaften der Quartiken bereits im Abschnitt 1.4.8 festgehalten. Eine Flachtangente ist demnach eine Gerade, die die Quartik in einem regulären Punkt von der Vielfachheit 4 berührt.

**Satz 2.5.4.** *Ausgehend von der Grundkonfiguration am Anfang des Abschnitts sei  $K_4(\mathcal{A}_0)$  der Umrisskegel der singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  vom Punkt  $\mathcal{A}_0$  aus. Durch diesen Punkt soll keine Gerade gehen, die ganz auf der  $F_3$  liegt.  $\mathcal{G}_1$  sei eine Doppel- oder Flachtangente der Schnittkurve  $k_4(\mathcal{A}_0)$  des Umrisskegels  $K_4(\mathcal{A}_0)$  mit der Ebene  $\mathcal{B}_2$ . Dabei sei  $\mathcal{G}_1$  verschieden von der Geraden  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{T}_2(\mathcal{A}_0)$ . Dann enthält die Ebene*

$$\mathcal{G}_2 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{G}_1$$

*eine Gerade, die ganz auf der  $F_3$  liegt. Umgekehrt liegt eine Doppel- oder Flachtangente von  $k_4(\mathcal{A}_0)$  in der Ebene  $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{S}_1$ , wobei  $\mathcal{S}_1$  eine Gerade ist, die ganz auf der  $F_3$  liegt.*

*Beweis.*

- Es liege die Umrissquartik  $k_4(\mathcal{A}_0) = \mathcal{B}_2 \cap K_4(\mathcal{A}_0)$  des Umrisskegels  $K_4(\mathcal{A}_0)$  der  $F_3$  vor, wobei  $F_3$  singularitätenfrei sein soll und  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_2$  die entsprechenden Voraussetzungen erfüllen sollen. Wir können also von der Grundkonfiguration am Anfang des Abschnitts ausgehen. Es ergeben sich zwei Fälle:

- $\mathcal{G}_1$  ist Doppeltangente und berührt die  $k_4(\mathcal{A}_0)$  in zwei verschiedenen Punkten  $\mathcal{G}_0$  und  $\mathcal{G}'_0$ . Die Ebene  $\mathcal{G}_2$  ist eine Tangentialebene (vergleiche Abschnitt 1.6.4; Dualkegel) des Umrisskegels und nach Satz 2.5.3 auch eine Tangentialebene der  $F_3$ . Die Geraden  $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{G}_0$  und  $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{G}'_0$  sind Tangenten an die  $F_3$  (beide liegen auf dem Umrisskegel). Sie berühren daher die  $F_3$  in zwei verschiedenen Punkten  $\mathcal{T}_0$  und  $\mathcal{T}'_0$ . Das sind gleichzeitig die zwei Berührungspunkte der Tangentialebene  $\mathcal{G}_2$ .

(Denn hätte beispielsweise  $\mathcal{T}_0$  eine andere Tangentialebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_0)$ , so läge die Gerade  $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{G}_0$ , da sie wegen Bemerkung 1.6.5 eine Tangente im Punkt  $\mathcal{T}_0$  ist, auch in dieser Ebene.  $\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_0)$  wäre dann ebenfalls tangential an den Umrisskegel, und man erhielte eine weitere Tangente der  $k_4(\mathcal{A}_0)$  durch  $\mathcal{G}_0$ , was wegen der Singularitätenfreiheit der  $k_4(\mathcal{A}_0)$  nicht möglich ist.)

Nach Bemerkung 1.6.5 berührt die Gerade  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_0 \cup \mathcal{T}'_0 \subset \mathcal{G}_2$  die  $F_3$  in den Punkten  $\mathcal{T}_0$  und  $\mathcal{T}'_0$  jeweils von der Vielfachheit 2 und muss daher schon ganz auf der  $F_3$  liegen (siehe Abbildung 16).

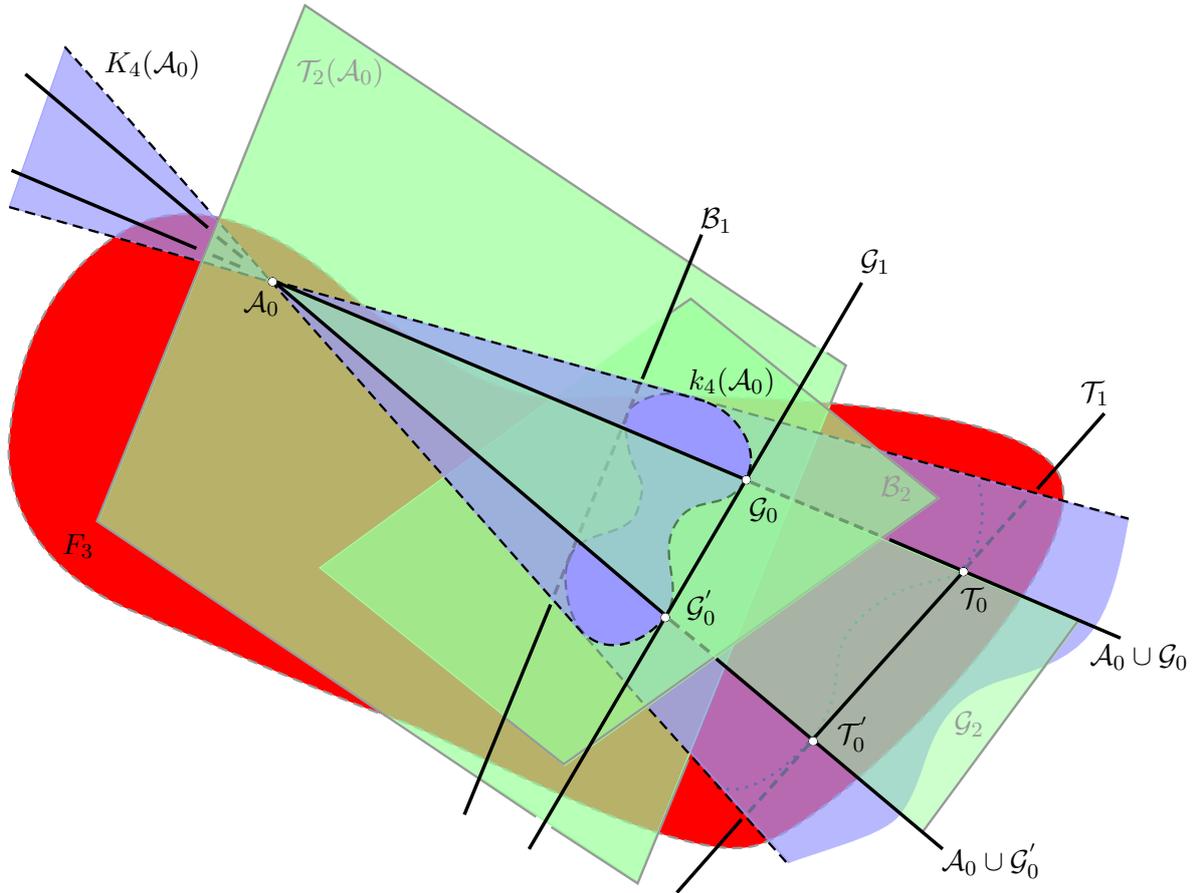


Abbildung 16: Situation aus dem Beweis von Satz 2.5.4

- $\mathcal{G}_1$  ist Flachtangente und berührt die  $k_4(\mathcal{A}_0)$  nur in einem Punkt  $\mathcal{C}_0$ . Wir wählen das Koordinatensystem unserer Grundkonfiguration entsprechend und passen es so an, dass wie im Beweis von Satz 2.5.3 für  $\mathcal{C}_0 = (0, 0, 1, 0)$  und die zugehörige Tangentialebene  $\mathcal{G}_2 : x_1 = 0$  gilt. Betrachten wir die Gleichung (2.42) der  $k_4(\mathcal{A}_0)$ , erhalten wir wie im Beweis von Satz 2.5.3, dass  $a_5 = a_9 = b_5 = 0$  und  $a_8 = 1$  gelten muss. Schneidet man die verbleibende Gleichung der  $k_4(\mathcal{A}_0)$  mit der Geraden  $\mathcal{G}_1 : x_1 = x_3 = 0$  (die Flachtangente hat dann in der Ebene  $\mathcal{B}_2$  die Gleichung  $x_1 = 0$ ), so ergibt sich

$$a_0x_0^3x_2 + a_2x_0^2x_2^2 - (b_0x_0^2 + b_2x_0x_2)^2 = 0$$

Damit der Punkt  $\mathcal{C}_0$  in diesem Schnitt mit der Vielfachheit 4 zählt, muss sich der Ausdruck auf  $b_0^2x_0^4 = 0$  mit  $b_0 \neq 0$  (sonst liegt die ganze Gerade auf der Quartik; diese soll aber nicht zerfallen) reduzieren. Es gilt also  $a_0 = a_2 = b_2 = 0$  und wir erhalten für die zugehörige  $F_3$  eine Gleichung der Gestalt

$$x_3^2x_2 + 2x_3(b_0x_0^2 + b_1x_0x_1 + b_3x_1^2 + b_4x_1x_2) + a_1x_0^2x_1 + a_3x_0x_1^2 + a_4x_0x_1x_2 + a_6x_1^3 + b_7x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = 0.$$

Durch Einsetzen einer Parameterdarstellung  $x_0 = \lambda, x_1 = 0, x_2 = \mu, x_3 = 0$  der Geraden  $\mathcal{G}_1$  sieht man, dass diese schon ganz auf der  $F_3$  liegt.

- Liegt umgekehrt die Gerade  $\mathcal{S}_1$  ganz auf der  $F_3$ , so schneidet die Ebene  $\mathcal{C}_2 = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{S}_1$  (wir gehen von der Grundkonfiguration am Anfang des Abschnitts aus) die Fläche  $F_3$  in einer kubischen Kurve  $k_3$ , die dann in  $\mathcal{S}_1$  und einen weiteren Kegelschnitt  $k_2$  zerfallen muss. Es gibt nun wieder zwei Fälle:

- Die Gerade  $\mathcal{S}_1$  schneidet  $k_2$  in zwei verschiedenen Punkten  $\mathcal{C}_0$  und  $\mathcal{C}'_0$ . Diese Punkte sind regulär für die  $F_3$  und singulär für die Schnittkurve der Ebene  $\mathcal{C}_2$  mit der  $F_3$  (vergleiche Abschnitt 1.4.2). Nach Satz 1.6.8 ist die Ebene  $\mathcal{C}_2$  Tangentialebene an die  $F_3$  in den Punkten  $\mathcal{C}_0$  und  $\mathcal{C}'_0$  und somit nach Satz 2.5.3 auch Doppeltangentialebene an den Umrisskegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$  (die Argumentation funktioniert genau umgekehrt zu jener in der Klammer im ersten Teil dieses Beweises).
- Die Gerade  $\mathcal{S}_1$  berührt  $k_2$  in einem Punkt  $\mathcal{C}_0$ , der wieder einerseits für  $F_3$  regulär und andererseits für die Schnittkurve der Ebene  $\mathcal{C}_2$  mit der  $F_3$  singulär ist. Damit ist  $\mathcal{C}_2$  eine Tangentialebene an die  $F_3$  im Punkt  $\mathcal{C}_0$  und nach Satz 2.5.3 auch wieder Tangentialebene an den Umrisskegel  $K_4(\mathcal{A}_0)$ . Wir passen das Koordinatensystem so an, dass  $\mathcal{S}_1 : x_1 = x_3 = 0 \subset \mathcal{B}_2$ ,  $\mathcal{C}_2 : x_1 = 0$  und  $\mathcal{C}_0 = (0, 0, 1, 0)$  gilt. Wegen der Grundkonfiguration gehen wir von einer Gleichung (2.41) der  $F_3$  aus und erhalten wieder, wie im Beweis von Satz 2.5.3, dass  $a_5 = a_9 = b_5 = 0$  und  $a_8 = 1$  gelten muss. Wir schneiden die  $F_3$  mit der Ebene  $\mathcal{C}_2$  und erhalten die  $k_3$

$$x_3^2 x_2 + 2x_3(b_0 x_0^2 + b_2 x_0 x_2) + a_0 x_0^3 + a_2 x_0^2 x_2 = 0.$$

Soll die  $k_3$  die Gerade  $\mathcal{S}_1$  abspalten, muss  $a_0 = a_2 = 0$  gelten. Die verbliebene  $k_3$  hat dann die Gestalt

$$x_3^2 x_2 + 2x_3(b_0 x_0^2 + b_2 x_0 x_2) = 0,$$

und so ergibt sich für die  $k_2$  die Gleichung

$$x_3 x_2 + 2(b_0 x_0^2 + b_2 x_0 x_2) = 0.$$

Damit der Punkt  $\mathcal{C}_0$  eine Doppellösung des Schnitts der  $k_2$  mit der Geraden  $\mathcal{S}_1$  ist, muss  $b_2 = 0$  gelten. Wir erhalten also für die Umrissquartik  $k_4(\mathcal{A}_0)$  eine Gleichung der Gestalt

$$\begin{aligned} & x_2(a_1 x_0^2 x_1 + a_3 x_0 x_1^2 + a_4 x_0 x_1 x_2 + a_6 x_1^3 + a_7 x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) \\ & - (b_0 x_0^2 + b_1 x_0 x_1 + b_3 x_1^2 + b_4 x_1 x_2)^2 = 0, \end{aligned}$$

und beim Schnitt mit der Geraden  $\mathcal{S}_1$  (in der Ebene  $\mathcal{B}_2$  dargestellt durch  $x_1 = 0$ ) erweist sich der Punkt  $\mathcal{C}_0$  als Schnittpunkt der Vielfachheit 4. □

Nun sind wir bereit für den Hauptsatz dieses Abschnitts.

**Satz 2.5.5.** *Jede singularitätenfreie kubische Fläche besitzt eine ganz auf ihr liegende Gerade.*

*Beweis.*  $F_3$  sei eine singularitätenfreie kubische Fläche und  $\mathcal{A}_0$  ein Punkt auf ihr. Geht durch  $\mathcal{A}_0$  bereits eine Gerade, die ganz auf der  $F_3$  liegt, sind wir fertig. Andernfalls können wir von der Grundkonfiguration am Anfang des Abschnitts ausgehen und erhalten eine singularitätenfreie Umrissquartik  $k_4(\mathcal{A}_0)$  mit der ausgezeichneten Gerade  $\mathcal{B}_1$ , die Doppel- oder Flachtangente von  $k_4(\mathcal{A}_0)$  ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $\mathcal{B}_1$  ist Flachtangente. Damit muss es nach Abschnitt 1.4.8 zumindest eine weitere von  $\mathcal{B}_1$  verschiedene Doppel- oder Flachtangente an die  $k_4(\mathcal{A}_0)$  geben.
- $\mathcal{B}_1$  ist Doppeltangente. Aus der Aufzählung am Beginn des Abschnitts 1.4.8 wissen wir, dass die  $k_4(\mathcal{A}_0)$  entweder eine Flachtangente oder sogar 27 weitere Doppeltangenten besitzt.

In jedem Fall gibt es neben  $\mathcal{B}_1$  noch eine weitere Doppel- oder Flachtangente an die  $k_4(\mathcal{A}_0)$ . Mit Satz 2.5.4 existiert dann eine Gerade auf der  $F_3$ .  $\square$

Wie der Beweis von Satz 2.5.5 schon vermuten lässt, gibt es nicht nur eine, sondern sogar 27 Gerade auf einer singularitätenfreien kubischen Fläche. Dies zeigt nun der

**Satz 2.5.6.** *Auf einer singularitätenfreien kubischen Fläche liegen genau 27 Gerade.*

*Beweis.* Nach Satz 2.5.5 liegt zumindest eine Gerade  $\mathcal{G}_1$  ganz auf der singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$ .

- In Satz 2.4.5 haben wir gesehen, dass es fünf voll zerfallende ebene Schnitte durch  $\mathcal{G}_1$  gibt, und aus Korollar 2.4.3 (angewendet auf jede Gerade) folgt, dass die Schnitte jeweils aus drei verschiedenen Geraden bestehen. Wir erhalten also pro Schnittebene zwei weitere Gerade, die, da sie in verschiedenen Ebenen liegen, auch alle voneinander verschieden sein müssen. Wir geben nun den Ebenen und Geraden entsprechende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1, \mathcal{A}'_1 &\subset \mathcal{A}_2 \\
\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1 &\subset \mathcal{B}_2 \\
\mathcal{C}_1, \mathcal{C}'_1 &\subset \mathcal{C}_2 \\
\mathcal{D}_1, \mathcal{D}'_1 &\subset \mathcal{D}_2 \\
\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_1 &\subset \mathcal{E}_2
\end{aligned} \tag{2.43}$$

- Keine dieser zehn Geraden wird von einer der anderen Geraden getroffen, außer jener, die bereits mit ihr in einer Ebene liegt. Wäre das nämlich der Fall, müsste der Schnittpunkt  $\mathcal{G}_0$  der beiden Geraden, da sie nicht alle in einer Ebene durch  $\mathcal{G}_1$  liegen, auf  $\mathcal{G}_1$  sein. Dann wäre nach Satz 2.4.6 der Punkt  $\mathcal{G}_0$  allerdings singularär.
- Nach der selben Argumentation wie im ersten Punkt dieses Beweises besitzt jede der zehn Geraden selbst zehn Gerade auf  $F_3$ , von denen sie getroffen wird. Beispielsweise wird die Gerade  $\mathcal{A}_1$  von  $\mathcal{A}'_1$ ,  $\mathcal{G}_1$  und noch acht weiteren Geraden

$$\mathcal{W}_1, \mathcal{W}'_1, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}'_1, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}'_1, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}'_1 \tag{2.44}$$

geschnitten. Dabei kann keine dieser acht Geraden mit einer aus (2.43) zusammenfallen, da nämlich  $\mathcal{A}_1$  unter diesen zehn Geraden nur von  $\mathcal{A}'_1$  getroffen wird.

- Die Geraden aus (2.44) schneiden auch nicht  $\mathcal{A}'_1$ , denn trifft eine Gerade sowohl  $\mathcal{A}_1$  als auch  $\mathcal{A}'_1$ , so liegt sie in der Ebene  $\mathcal{A}_2$  oder geht zumindest durch den Punkt  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}'_1$ . Im ersten Fall lägen dann aber mit  $\mathcal{G}_1$  vier verschiedene Gerade in der Ebene  $\mathcal{A}_2$ , was für einen ebenen Schnitt mit der  $F_3$  nicht möglich ist. Im anderen Fall gingen drei Gerade der  $F_3$  durch den Punkt  $\mathcal{A}_0$ , lägen aber nicht in einer Ebene. Nach Satz 2.4.6 wäre der Punkt  $\mathcal{A}_0$  dann singularär für die  $F_3$ .

- Betrachtet man jetzt die zehn Geraden, die  $\mathcal{A}'_1$  treffen, so gibt es neben  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{G}_1$  noch

$$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_1, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}'_1, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}'_1, \mathcal{V}_1, \mathcal{V}'_1. \quad (2.45)$$

Diese acht müssen wegen der selben Argumentation wie bei den Geraden aus (2.44) von jenen aus (2.43) verschieden sein. Und da nach dem letzten Punkt die Geraden aus (2.44) die Gerade  $\mathcal{A}'_1$  nicht schneiden, müssen sie auch von allen aus (2.45) verschieden sein.

- Zusammen mit  $\mathcal{G}_1$  ergeben (2.43), (2.44) und (2.45) genau 27 Gerade auf der  $F_3$ .
- Das ist auch schon die Maximalzahl, denn ist  $\mathcal{H}_1$  eine beliebige auf der  $F_3$  liegende Gerade, die von  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}'_1$  und  $\mathcal{G}_1$  verschieden ist, dann kann  $\mathcal{H}_1$  einerseits nicht in der Ebene  $\mathcal{A}_2$  liegen (dort lägen sonst vier verschiedene Gerade), andererseits muss sie die Ebene  $\mathcal{A}_2$  dann aber in einem Punkt treffen, der auf  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}'_1$  oder  $\mathcal{G}_1$  liegt (sonst wäre auch mehr als eine  $k_3$  im Schnitt). Damit muss  $\mathcal{H}_1$  aber schon in einem der voll zerfallenden Schnitte von Ebenen durch  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}'_1$  oder  $\mathcal{G}_1$  liegen und eine der Geraden (2.43), (2.44) oder (2.45) sein.

□

*Bemerkung 2.5.7.* Es ist auch recht einfach, zu einer gegebenen Quartik  $k_4$  eine kubische Fläche  $F_3$  mit  $k_4$  als Umrissquartik zu konstruieren. Dazu muss die Gleichung der  $k_4$  unter Auszeichnung einer Doppel- oder Flachtangente  $\mathcal{B}_1$  in der Form (2.40) angegeben werden. Von dieser kann dann zur Gleichung der  $F_3$  mit der Gestalt (2.38) übergegangen werden.

Dieser starke Zusammenhang zwischen den singularitätenfreien kubischen Flächen und den Quartiken lässt es zu, gewisse Sätze über Quartiken zu solchen über Geraden auf kubischen Flächen umzudeuten und umgekehrt. Beispielsweise ergibt sich recht einfach aus den Sätzen 2.5.4 und 2.5.6, dass eine singularitätenfreie Quartik 28 Doppel- oder Flachtangenten besitzt.

Zum Abschluss noch ein Satz, der einen Bezug der Punkte auf den 27 Geraden einer kubischen Fläche zu ihren Tangentialebenen herstellt.

**Satz 2.5.8.**  $\mathcal{P}_0$  sei ein Punkt einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$ , der außerdem noch auf einer der 27 Geraden liegt. Dann liegt diese Gerade in der Tangentialebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$  des Punktes  $\mathcal{P}_0$ .

*Beweis.* Der Punkt  $\mathcal{P}_0$  sei auf der Geraden  $\mathcal{P}_1$ , die ganz auf der singularitätenfreien Fläche  $F_3$  liegt. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass  $\mathcal{P}_0 = (0, 0, 0, 1)$  und  $\mathcal{P}_1 : x_0 = x_1 = 0$  gilt. Setzt man eine Parameterdarstellung  $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = \lambda, x_3 = \mu$  von  $\mathcal{P}_1$  in die allgemeine Gleichung (I) der  $F_3$  ein, erhält man

$$\widetilde{a}_{222}\lambda^3 + \widetilde{a}_{223}\lambda^2\mu + \widetilde{a}_{233}\lambda\mu^2 + \widetilde{a}_{333}\mu^3 = 0.$$

Da die Gerade  $\mathcal{P}_1$  ganz auf der  $F_3$  liegen soll, muss dieser Ausdruck identisch verschwinden, und damit gilt für die Koeffizienten

$$\widetilde{a}_{222} = \widetilde{a}_{223} = \widetilde{a}_{233} = \widetilde{a}_{333} = 0.$$

Bildet man nun nach Definition 1.6.4 die Tangentialebene für den Punkt  $\mathcal{P}_0$ , erhält man

$$\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0) : \widetilde{a}_{033}x_0 + \widetilde{a}_{133}x_1 = 0,$$

wobei dieser Ausdruck nicht identisch verschwinden kann, da sonst der Punkt  $\mathcal{P}_0$  singular für die  $F_3$  wäre (dann wären nämlich alle ersten partiellen Ableitungen im Punkt  $\mathcal{P}_0$  gleich 0). Die Gerade  $\mathcal{P}_1 : x_0 = x_1 = 0$  liegt jetzt aber offensichtlich in der Ebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$ . □

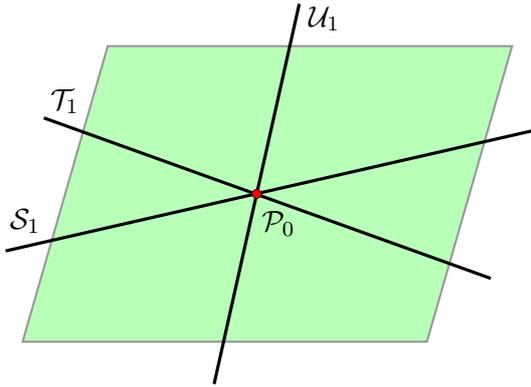


Abbildung 17: Eckardtpunkt

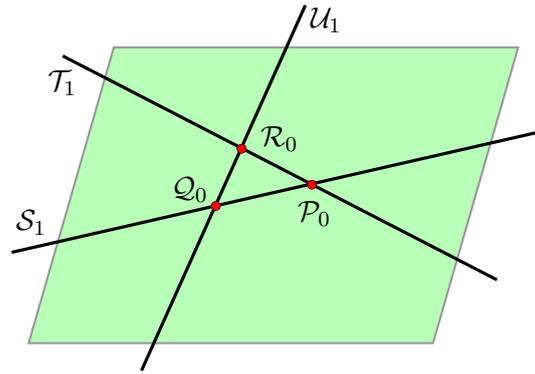


Abbildung 18: Tritangentialebene

*Bemerkung 2.5.9.* Satz 2.5.5 garantiert zusammen mit Abschnitt 2.2, Satz 2.3.2 und Bemerkung 1.6.6 auf jeder kubischen Fläche zumindest eine Gerade.

Im nächsten Abschnitt werden wir trotzdem die direkte Betrachtung (ohne Umweg über die Quartiken) wählen und uns mit verschiedenen Eigenschaften auseinandersetzen, die sich durch die Anordnung der 27 Geraden einer singularitätenfreien kubischen Fläche ergeben.

## 2.5.2 Die Konfiguration der 27 Geraden

Wir bleiben bei den singularitätenfreien kubischen Flächen und wollen die 27 Geraden mit der Bezeichnung *27-Konfiguration* versehen. Zunächst halten wir einige Grundeigenschaften fest:

*Bemerkung 2.5.10.*

- Aus Satz 2.4.6 wissen wir, dass drei Gerade einer 27-Konfiguration nie durch einen Punkt gehen können, ohne in einer Ebene zu liegen, da sonst der Punkt singular für die Fläche wäre.
- Satz 2.4.5 und Korollar 2.4.3 (auf jede Gerade angewendet) haben uns gezeigt, dass jede Gerade  $\mathcal{G}_1$  der 27-Konfiguration von 10 verschiedenen anderen geschnitten wird, wobei je zwei davon mit  $\mathcal{G}_1$  fünf verschiedene Ebenen aufspannen.

Wir wollen nun drei weitere Begriffe einführen.

**Definition 2.5.11** (Tripelebene). Eine von drei Geraden der 27-Konfiguration aufgespannte Ebene heißt Tripelebene.

**Definition 2.5.12** (Eckardtpunkt, Tritangentialebene).

- Haben alle drei Geraden  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{U}_1$  einer Tripelebene einen gemeinsamen Punkt  $\mathcal{P}_0$ , nennt man diesen Eckardtpunkt (siehe Abbildung 17).
- Sind die Schnittpunkte  $\mathcal{P}_0$ ,  $\mathcal{Q}_0$  und  $\mathcal{R}_0$  der drei Geraden einer Tripelebene verschieden, so berührt sie die Fläche in diesen drei Punkten (nach Satz 1.6.8) und wird Tritangentialebene genannt (siehe Abbildung 18).

Wir erhalten den

**Satz 2.5.13.** *Jede 27-Konfiguration spannt 45 Tripelebenen auf.*

*Beweis.* Jede Gerade der 27-Konfiguration ist nach Satz 2.4.5 an fünf Tripelebenen beteiligt, wobei zu jeder Tripelebene drei Gerade gehören. Man erhält

$$\frac{27 \cdot 5}{3} = 45$$

□

Wir erarbeiten in den nun folgenden Sätzen einige Aussagen zur Lage der Geraden einer 27-Konfiguration zueinander. Dabei spielen vor allem die Teilmengen, die aus lauter paarweise windschiefen Geraden bestehen, eine besondere Rolle. Wir nennen diese Mengen entsprechend auch *windschiefe Paare*, *Tripel usw.*

**Satz 2.5.14.** *In einer 27-Konfiguration gibt es keine Teilmenge von vier zueinander paarweise windschiefen Geraden, die alle von drei anderen paarweise zueinander windschiefen Geraden getroffen werden.*

*Beweis.* Angenommen es gäbe vier windschiefe Gerade, die alle von drei anderen zueinander windschiefen Geraden getroffen werden. Aus dem Abschnitt 1.6.5 wissen wir dann, dass diese vier Geraden alle auf einer (durch diese Angabe wohlbestimmten) Quadrik  $Q_2$  liegen. Diese wird durch lauter Gerade erzeugt, die die ersten vier schneiden. Damit haben diese unendlich vielen erzeugenden Geraden jeweils vier Punkte mit der  $F_3$  gemeinsam und liegen daher auch alle ganz auf der Fläche. Damit kann die  $F_3$  nicht mehr singularitätenfrei sein (dort sind maximal 27 Gerade auf der Fläche) und zerfällt in die Quadrik  $Q_2$  und eine Ebene. □

**Satz 2.5.15.** *Es existieren genau fünf Gerade, die zwei gegebene windschiefe Gerade einer 27-Konfiguration gleichzeitig schneiden. Diese fünf Geraden bilden ein windschiefes Quintupel.*

*Beweis.*

- Wir gehen von zwei gegebenen zueinander windschiefen Geraden  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  einer 27-Konfiguration aus. Diese gibt es immer (beispielsweise sind  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  aus Satz 2.5.6 sicher windschief).
- Aus Satz 2.4.5 wissen wir, dass es durch  $\mathcal{A}_1$  fünf verschiedene Tripelebenen gibt. Diese müssen die Gerade  $\mathcal{B}_1$  in fünf verschiedenen Punkten schneiden und durch jeden dieser Punkte muss mindestens eine  $\mathcal{A}_1$  treffende Gerade der 27-Konfiguration gehen (sonst läge in einer Schnittebene mehr als eine  $k_3$ ).
- Mehr als eine  $\mathcal{A}_1$  schneidende Gerade kann durch einen Punkt  $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{B}_1$  nicht gehen, da dieser sonst nach Satz 2.4.6 singularär wäre.
- Aus dem selben Satz können wir auch schließen, dass keine zwei Geraden aus unterschiedlichen Tripelebenen durch  $\mathcal{A}_1$  sich in einem gemeinsamen Punkt auf  $\mathcal{A}_1$  treffen. Wir erhalten also fünf Gerade

$$\mathcal{G}_{1_1}, \mathcal{G}_{2_1}, \mathcal{G}_{3_1}, \mathcal{G}_{4_1}, \mathcal{G}_{5_1},$$

die sowohl  $\mathcal{A}_1$  als auch  $\mathcal{B}_1$  in jeweils fünf verschiedenen Punkten treffen.

- Da es durch jede Gerade nur fünf Tripelebenen gibt, sind damit alle gemeinsamen Schnittgeraden von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  erfasst.

- Würden sich zwei dieser fünf Geraden außerhalb von  $\mathcal{A}_1$  oder  $\mathcal{B}_1$  schneiden, so müssten sie zusammen mit  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  eine Ebene aufspannen, was den Voraussetzungen widerspricht.

□

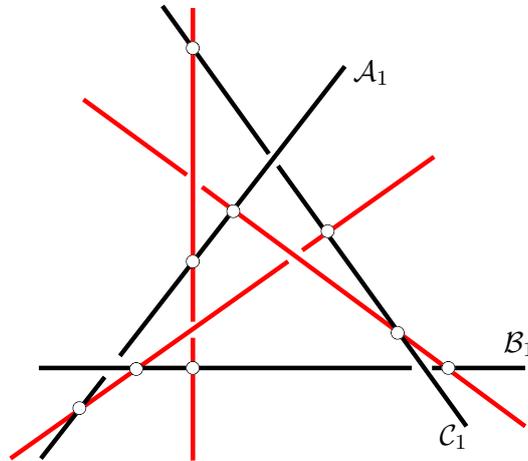


Abbildung 19: Ein Paar von windschiefen Tripeln

Eine Gerade, die zwei zueinander windschiefe Geraden schneidet, nennt man auch *gemeinsame Sekante* oder *Treffgerade*.

**Satz 2.5.16.** *Die drei Geraden eines windschiefen Tripels der 27-Konfiguration werden von drei Geraden eines anderen windschiefen Tripels geschnitten. Diese Tripel treten also immer paarweise auf, wobei jede Gerade des einen Tripels jede des anderen schneidet (siehe Abbildung 19).*

*Beweis.*

- Gegeben sei ein windschiefes Tripel  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{C}_1$  innerhalb einer 27-Konfiguration. Dieses gibt es nach Satz 2.5.15 immer (fünf wurden dort schon gefunden). Wir wollen nun zeigen, dass jede zu  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  windschiefe Gerade (also auch  $\mathcal{C}_1$ ) genau drei der nach Satz 2.5.15 vorhandenen fünf gemeinsamen Sekanten von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  schneidet.
- Wir bezeichnen die fünf gemeinsamen Sekanten von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  mit

$$\mathcal{C}_{2_1}, \mathcal{C}_{3_1}, \mathcal{C}_{4_1}, \mathcal{C}_{5_1}, \mathcal{C}_{6_1}. \quad (2.46)$$

- $\mathcal{A}_1$  spannt mit jeder Gerade aus (2.46) nach Bemerkung 2.5.10 eine Tripelebene auf. Analoges gilt für  $\mathcal{B}_1$ . Da die beiden Geraden  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  zueinander windschief sind, handelt es sich dabei um zehn verschiedene Ebenen. In jeder dieser Tripelebenen liegt nach Bemerkung 2.5.10 noch eine weitere Gerade, die wir mit  $(\mathcal{A}_{1i})_1$  bezeichnen wollen, falls sie in einer Ebene durch  $\mathcal{A}_1$  liegt, die die Gerade  $\mathcal{C}_{i_1}$ ,  $i = 2, 3, 4, 5, 6$  aus (2.46) enthält. Analog ergeben sich die Geraden  $(\mathcal{B}_{1i})_1$ ,  $i = 2, 3, 4, 5, 6$ . Wir wollen zeigen, dass alle diese 17 Geraden verschieden sind:

- Es gilt zunächst sicher  $\mathcal{A}_1 \neq (\mathcal{A}_{1i})_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, 6$ , und  $\mathcal{C}_{i_1} \neq (\mathcal{A}_{1i})_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, 6$  da die Geraden aus Tripelebenen nach Korollar 2.4.3 immer verschieden sind. Analog gilt für die Geraden  $(\mathcal{B}_{1i})_1$ ,  $i = 2, 3, \dots, 6$  auch  $\mathcal{B}_1 \neq (\mathcal{B}_{1i})_1$  und  $\mathcal{C}_{i_1} \neq (\mathcal{B}_{1i})_1$ .

- Weiters gilt  $\mathcal{A}_1 \neq (\mathcal{B}_{1i})_1$  für  $i = 2, 3, \dots, 6$ , da die Gerade  $\mathcal{A}_1$  windschief zu  $\mathcal{B}_1$  liegt und daher die Tripelebenen durch  $\mathcal{B}_1$  nur in einem Punkt schneidet. Analog gilt  $\mathcal{B}_1 \neq (\mathcal{A}_{1i})_1$  für  $i = 2, 3, \dots, 6$ .
  - Auch  $(\mathcal{A}_{1i})_1 = (\mathcal{A}_{1j})_1, i \neq j$  ist nicht möglich, da die Geraden in verschiedenen Tripelebenen durch  $\mathcal{A}_1$  liegen. Genauso gilt  $(\mathcal{B}_{1i})_1 \neq (\mathcal{B}_{1j})_1, i \neq j$ .
  - Aus demselben Grund muss auch  $\mathcal{C}_{i_1} \neq (\mathcal{A}_{1j})_1$  bzw.  $\mathcal{C}_{i_1} \neq (\mathcal{B}_{1j})_1$  für  $i \neq j$  gelten.
  - Schließlich ist auch  $(\mathcal{A}_{1i})_1 = (\mathcal{B}_{1j})_1$  für  $i, j = 2, \dots, 6$  unmöglich, da sonst  $(\mathcal{A}_{1i})_1$  eine von (2.46) verschiedene Treffgerade von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  wäre, was nach Satz 2.5.15 nicht möglich ist.
- Neben den 17 Geraden  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{A}_{1i})_1, (\mathcal{B}_{1i})_1$  und  $\mathcal{C}_{i_1}$  für  $i = 2, 3, \dots, 6$  gibt es noch zehn weitere Gerade

$$\mathcal{H}_{1_1}, \dots, \mathcal{H}_{10_1} \tag{2.47}$$

in der 27-Konfiguration.

- Die Gerade  $\mathcal{C}_{i_1}$  aus (2.46) wird von  $(\mathcal{A}_{1j})_1$  bei  $i \neq j$  nicht getroffen, da die beiden in verschiedenen Tripelebenen durch  $\mathcal{A}_1$  liegen und sich daher höchstens in einem Punkt auf  $\mathcal{A}_1$  schneiden könnten, der dann nach Satz 2.4.6 singulär für die  $F_3$  wäre. Analog sind auch die Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}$  und  $(\mathcal{B}_{1j})_1$  windschief bei  $i \neq j$ .
- Von den zehn Geraden, die nach Bemerkung 2.5.10 die Gerade  $\mathcal{C}_{i_1}$  treffen, können daher nur  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{A}_{1i})_1$  und  $(\mathcal{B}_{1i})_1$  aus der Menge der ersten 17 Geraden sein (die  $\mathcal{C}_{i_1}$  sind nämlich ohnehin zueinander windschief). Die restlichen sechs müssen aus der Menge (2.47) stammen.
- In Summe treten also die Geraden aus (2.47) genau  $5 \cdot 6 = 30$  mal als Schnittgeraden der fünf Geraden aus (2.46) auf. Dabei sollen
  - $n_1$  der Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  von  $\mathcal{H}_{1_1}$
  - $n_2$  der Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  von  $\mathcal{H}_{2_1}$
  - $\vdots$
  - $n_{10}$  der Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  von  $\mathcal{H}_{10_1}$

getroffen werden. Es gilt einerseits

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{10} = 30,$$

und andererseits nach Satz 2.5.14 auch  $n_i \leq 3$  für  $i = 1, 2, \dots, 10$ . Da die  $n_i, i = 1, 2, \dots, 10$  sicher ganze positive Zahlen sind, erhält man  $n_i = 3$  für  $i = 1, 2, \dots, 10$ .

- Die zu  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  windschiefe Gerade  $\mathcal{C}_1$  muss eine der zehn Geraden aus (2.47) sein (alle anderen schneiden entweder zumindest  $\mathcal{A}_1$  oder  $\mathcal{B}_1$ ). Die Geraden  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  werden von allen fünf aus (2.46) getroffen, und nach dem eben Gezeigten wird  $\mathcal{C}_1$  von drei Geraden aus dieser Menge getroffen.
- Wir haben also zwei windschiefe Tripel gefunden, bei denen jede Gerade des einen Tripels jede Gerade des anderen schneidet.

□

*Bemerkung 2.5.17.* Wie wir soeben im Beweis von Satz 2.5.16 gesehen haben, trifft jede der Geraden aus (2.47) genau drei aus der Menge (2.46). Außerdem ist jede Gerade aus (2.47) sowohl zu  $\mathcal{A}_1$  als auch zu  $\mathcal{B}_1$  windschief, da die nach Bemerkung 2.5.10 möglichen zehn Schnittgeraden schon durch die  $\mathcal{C}_{i_1}$  und  $(\mathcal{A}_{1i})_1$  bzw.  $(\mathcal{B}_{1i})_1$  für  $i = 2, 3, \dots, 6$  gegeben sind. In Zukunft wollen wir die Geraden aus (2.47) mit  $(\mathcal{D}_{ij})_1, i \neq j$  bezeichnen, wobei  $(\mathcal{D}_{ij})_1$  genau jene Gerade ist, die  $\mathcal{C}_{i_1}$  und  $\mathcal{C}_{j_1}$  nicht trifft.

Da uns diese Bezeichnungen im Folgenden eine Weile begleiten werden, fassen wir sie noch einmal zusammen.

- Ausgangspunkt sind zwei windschiefe Gerade der 27-Konfiguration

$$\mathcal{A}_1 \text{ und } \mathcal{B}_1.$$

- Dazu kommen ihre fünf zueinander paarweise windschiefen Treffgeraden

$$\mathcal{C}_{2_1}, \mathcal{C}_{3_1}, \mathcal{C}_{4_1}, \mathcal{C}_{5_1} \text{ und } \mathcal{C}_{6_1}.$$

- Diese werden jeweils durch die fünf noch fehlenden weiteren Schnittgeraden

$$(\mathcal{A}_{12})_1, (\mathcal{A}_{13})_1, (\mathcal{A}_{14})_1, (\mathcal{A}_{15})_1 \text{ und } (\mathcal{A}_{16})_1 \\ \text{bzw. } (\mathcal{B}_{12})_1, (\mathcal{B}_{13})_1, (\mathcal{B}_{14})_1, (\mathcal{B}_{15})_1 \text{ und } (\mathcal{B}_{16})_1$$

von  $\mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{B}_1$  ergänzt, wobei jeweils  $\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_{i_1}$  und  $(\mathcal{A}_{1i})_1$  bzw.  $\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_{i_1}$  und  $(\mathcal{B}_{1i})_1$  für  $i = 2, 3, \dots, 6$  in einer Ebene liegen.

- Schlussendlich bleiben noch die zehn sowohl zu  $\mathcal{A}_1$  als auch  $\mathcal{B}_1$  windschiefen Geraden

$$(\mathcal{D}_{23})_1, (\mathcal{D}_{24})_1, (\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{26})_1, (\mathcal{D}_{34})_1, (\mathcal{D}_{35})_1, (\mathcal{D}_{36})_1, (\mathcal{D}_{45})_1, (\mathcal{D}_{46})_1 \text{ und } (\mathcal{D}_{56})_1,$$

wobei die Indizes angeben, welche zwei der fünf Geraden  $\mathcal{C}_{2_1}, \mathcal{C}_{3_1}, \mathcal{C}_{4_1}, \mathcal{C}_{5_1}$  und  $\mathcal{C}_{6_1}$  von  $(\mathcal{D}_{ij})_1$  nicht getroffen werden. Die restlichen drei Geraden dieser Menge werden getroffen.

**Satz 2.5.18.** *Die Geraden der 27-Konfiguration seien versehen mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 2.5.17. Dann werden die 45 Tripelebenen aufgespannt durch*

$$(\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_{i_1}, (\mathcal{A}_{1i})_1), (\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_{i_1}, (\mathcal{B}_{1i})_1) \text{ mit } i = 2, 3, \dots, 6, \quad (2.48)$$

$$(\mathcal{C}_{i_1}, (\mathcal{D}_{kl})_1, (\mathcal{D}_{mn})_1), \text{ wobei } (iklmn) \text{ eine Permutation der Zahlen } 2, 3, 4, 5, 6 \text{ ist,} \quad (2.49)$$

$$\text{und } ((\mathcal{A}_{1i})_1, (\mathcal{B}_{1j})_1, (\mathcal{D}_{ij})_1), ((\mathcal{A}_{1j})_1, (\mathcal{B}_{1i})_1, (\mathcal{D}_{ij})_1) \text{ mit } (2 \leq i < j \leq 6). \quad (2.50)$$

*Beweis.*

- Die Tripelebenen aus (2.48) ergeben sich schon aus der Definition der Geraden  $(\mathcal{A}_{1i})_1$  und  $(\mathcal{B}_{1i})_1$  mit  $i = 2, 3, \dots, 6$  im Satz 2.5.16 bzw. in Bemerkung 2.5.17.
- Ebenfalls nach dem Beweis von Satz 2.5.16 bzw. Bemerkung 2.5.17 wird die Gerade  $\mathcal{C}_{2_1}$  von den zehn Geraden

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{A}_{12})_1, (\mathcal{B}_{12})_1, (\mathcal{D}_{34})_1, (\mathcal{D}_{35})_1, (\mathcal{D}_{36})_1, (\mathcal{D}_{45})_1, (\mathcal{D}_{46})_1 \text{ und } (\mathcal{D}_{56})_1 \quad (2.51)$$

getroffen. Nach Satz 2.4.5 liegen diese Geraden in fünf verschiedenen Tripelebenen durch  $\mathcal{C}_{2_1}$ . Zwei davon, also  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_{2_1}, (\mathcal{A}_{12})_1)$  und  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_{2_1}, (\mathcal{B}_{12})_1)$ , sind schon in (2.48) enthalten. Damit sind an den anderen drei Ebenen nur  $(\mathcal{D}_{ij})_1$ -Gerade beteiligt.

- Allerdings treffen beispielsweise  $(\mathcal{D}_{34})_1$  und  $(\mathcal{D}_{35})_1$  sowohl  $\mathcal{C}_{2_1}$  als auch  $\mathcal{C}_{6_1}$ . Die Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}$  sind paarweise zueinander windschief, also könnten sich  $(\mathcal{D}_{34})_1$  und  $(\mathcal{D}_{35})_1$  höchstens in einem Punkt auf  $\mathcal{C}_{2_1}$  oder  $\mathcal{C}_{6_1}$  schneiden, der dann aber nach Satz 2.4.6 singulär für die  $F_3$  wäre. Wir erhalten also, dass sich zwei  $(\mathcal{D}_{ij})_1$ -Gerade nur dann schneiden können, wenn alle vier Indizes verschieden sind. Damit bleiben für die fehlenden drei Tripelebenen durch  $\mathcal{C}_{2_1}$  aber genau drei Ebenen aus (2.49). Analog erhält man für  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 3, 4, 5, 6$  die restlichen 12 Ebenen aus dieser Menge.
- Wir wissen bereits aus dem Beweis von Satz 2.5.16 bzw. Bemerkung 2.5.17, dass  $(\mathcal{D}_{23})_1$  die Geraden  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_{2_1}$  und  $\mathcal{C}_{3_1}$  nicht trifft. Da aber  $(\mathcal{D}_{23})_1$  nicht in den Tripelebenen  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_{2_1}, (\mathcal{A}_{12}))$  und  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_{2_1}, (\mathcal{B}_{12}))$  aus (2.48) enthalten ist, muss sie diese in Punkten schneiden, die demnach auf  $(\mathcal{A}_{12})_1$  und  $(\mathcal{B}_{12})_1$  liegen (sonst wären die Schnittkurven nicht von der Ordnung 3).
- Analog schneidet  $(\mathcal{D}_{23})_1$  auch  $(\mathcal{A}_{13})_1$  und  $(\mathcal{B}_{13})_1$ .
- $(\mathcal{A}_{13})_1$  liegt ebenfalls nicht in der Tripelebene  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_{2_1}, (\mathcal{B}_{12}))$  und muss diese daher in einem Punkt auf einer der drei Geraden schneiden.  $(\mathcal{A}_{13})_1$  kann  $\mathcal{B}_1$  nicht schneiden, da sie sonst eine weitere Treffgerade von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  neben den  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  wäre, was nach Satz 2.5.15 nicht möglich ist. Allerdings kann  $(\mathcal{A}_{13})_1$  auch die Gerade  $\mathcal{C}_{2_1}$  nicht schneiden, da wir deren zehn Schnittgeraden schon in (2.51) angegeben haben.
- Damit schneidet  $(\mathcal{A}_{13})_1$  die Gerade  $(\mathcal{B}_{12})_1$ , und wir erhalten die Tripelebene

$$((\mathcal{A}_{13})_1, (\mathcal{B}_{12})_1, (\mathcal{D}_{23})_1).$$

- Wiederholt man dieses Vorgehen für alle möglichen Indexkombinationen, erhält man sämtliche Tripelebenen aus (2.50).

□

Mit den Ergebnissen aus Bemerkung 2.5.17 und Satz 2.5.18 ist es nun möglich anzugeben, welche Geraden der 27-Konfiguration einander schneiden (inzidieren). Das Schnittverhalten wird in Tabelle 1 veranschaulicht (aus Platzgründen wurden die tiefgestellten Einsen weggelassen). Wir wollen uns jetzt genauer mit windschiefen Quadrupeln, Quintupeln und Sextupeln auseinandersetzen.

**Satz 2.5.19.** *Innerhalb einer 27-Konfiguration gibt es*

- *einen Typ von windschiefen Quadrupeln mit zwei gemeinsamen Treffgeraden;*
- *zwei Typen von windschiefen Quintupeln mit*
  - *einer gemeinsamen Treffgerade;*
  - *zwei gemeinsamen Treffgeraden;*
- *einen Typ von windschiefen Sextupeln. Alle windschiefen Teilquintupel gehören zum ersten Typ, besitzen also eine gemeinsame Treffgerade. Die so definierten Treffgeraden bilden ihrerseits ein weiteres, dem ersten eineindeutig zugeordnetes Sextupel.*

*Beweis.* Ausgangspunkt ist ein beliebiges windschiefes Tripel innerhalb der 27-Konfiguration.

	$A$	$B$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$A_{12}$	$A_{13}$	$A_{14}$	$A_{15}$	$A_{16}$	$B_{12}$	$B_{13}$	$B_{14}$	$B_{15}$	$B_{16}$	$D_{23}$	$D_{24}$	$D_{25}$	$D_{26}$	$D_{34}$	$D_{35}$	$D_{36}$	$D_{45}$	$D_{46}$	$D_{56}$		
$A$			•	•	•	•	•	•	•	•	•	•																	
$B$			•	•	•	•	•						•	•	•	•	•												
$C_2$	•	•						•					•										•	•	•	•	•	•	
$C_3$	•	•							•					•					•	•	•					•	•	•	
$C_4$	•	•								•					•				•	•	•			•	•			•	
$C_5$	•	•									•				•				•	•		•	•		•		•		
$C_6$	•	•										•					•	•	•	•			•	•		•			
$A_{12}$	•		•											•	•	•	•	•	•	•	•	•							
$A_{13}$	•			•										•		•	•	•	•	•				•	•	•			
$A_{14}$	•				•									•	•		•	•		•			•				•	•	
$A_{15}$	•					•								•	•	•		•			•			•		•		•	
$A_{16}$	•						•							•	•	•	•				•			•		•		•	
$B_{12}$		•	•							•	•	•	•						•	•	•	•							
$B_{13}$		•		•					•		•	•	•						•				•	•	•				
$B_{14}$		•			•				•	•		•	•						•				•				•	•	
$B_{15}$		•				•			•	•	•		•							•			•			•		•	
$B_{16}$		•					•	•	•	•	•										•			•			•	•	
$D_{23}$					•	•	•	•	•					•	•												•	•	•
$D_{24}$				•		•	•	•		•				•		•								•	•				•
$D_{25}$				•	•		•	•			•			•									•		•		•		
$D_{26}$				•	•	•		•					•	•			•						•	•		•			
$D_{34}$			•			•	•		•	•					•	•					•	•							•
$D_{35}$			•		•		•		•		•				•		•				•		•				•		
$D_{36}$			•		•	•			•			•			•		•				•	•					•		
$D_{45}$			•	•			•			•	•				•	•					•			•			•		
$D_{46}$			•	•		•				•		•			•		•				•			•					
$D_{56}$			•	•	•						•	•			•	•	•	•					•						

Tabelle 1: Inzidenzmatrix der 27-Konfiguration

- Zwei der drei Geraden bezeichnen wir in Übereinstimmung mit Bemerkung 2.5.17 mit  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  und die drei gemeinsamen Treffgeraden des Tripels mit  $\mathcal{C}_{2_1}$ ,  $\mathcal{C}_{3_1}$  und  $\mathcal{C}_{4_1}$ . Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 2.5.17 ist dann  $(\mathcal{D}_{56})_1$  die dritte Gerade des Tripels. Auch die restlichen 21 Geraden wollen wir in Übereinstimmung mit Bemerkung 2.5.17 benennen.

- Aus der selben Bemerkung wissen wir, dass die Geraden

$$(\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{26})_1, (\mathcal{D}_{35})_1, (\mathcal{D}_{36})_1, (\mathcal{D}_{45})_1 \text{ und } (\mathcal{D}_{46})_1 \quad (2.52)$$

windschief zu  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  sind. Außerdem haben wir im Beweis des Satzes 2.5.18 gesehen, dass die Geraden aus (2.52), da sie sich mit  $(\mathcal{D}_{56})_1$  einen Index teilen, diese Gerade auch nicht schneiden.

- Ergänzt man also  $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{D}_{56})_1)$  mit einer der Geraden aus (2.52), erhält man ein windschiefes Quadrupel, wobei sich immer zwei der Geraden  $\mathcal{C}_{2_1}$ ,  $\mathcal{C}_{3_1}$ ,  $\mathcal{C}_{4_1}$  (nämlich die, deren

Index nicht vorkommt) als gemeinsame Treffgeraden ergeben. Beispielsweise sind  $\mathcal{C}_{3_1}$  und  $\mathcal{C}_{4_1}$  gemeinsame Sekanten des windschiefen Quadrupels

$$(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{D}_{56})_1, (\mathcal{D}_{25})_1). \quad (2.53)$$

- Setzen wir mit diesem Beispiel fort, so sind aus der Menge (2.52) nur mehr

$$(\mathcal{D}_{26})_1, (\mathcal{D}_{35})_1, (\mathcal{D}_{45})_1 \quad (2.54)$$

zu (2.53) windschief, da  $(\mathcal{D}_{36})_1$  und  $(\mathcal{D}_{46})_1$  mit  $(\mathcal{D}_{25})_1$  keinen gemeinsamen Index haben (vergleiche wieder mit dem Beweis von Satz 2.5.18).

- Wir erhalten also drei verschiedene windschiefe Quintupel

$$(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{D}_{56})_1, (\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{35})_1) \quad (2.55)$$

$$(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{D}_{56})_1, (\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{45})_1) \quad (2.56)$$

$$\text{und } (\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{D}_{56})_1, (\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{26})_1). \quad (2.57)$$

Dabei haben (2.55) und (2.56) nur jeweils eine gemeinsame Treffgerade  $\mathcal{C}_{4_1}$  bzw.  $\mathcal{C}_{3_1}$  (da 4 bzw. 3 die jeweils einzigen nicht vorkommenden Indizes sind).

- Das windschiefe Quintupel (2.57) hat sowohl  $\mathcal{C}_{3_1}$  als auch  $\mathcal{C}_{4_1}$  als gemeinsame Treffgerade (beide Indizes kommen nicht vor). Um (2.57) zu einem windschiefen Sextupel zu ergänzen, kommen jetzt nur mehr die Geraden  $(\mathcal{D}_{35})_1$  und  $(\mathcal{D}_{45})_1$  in Frage, die aber beide mit  $(\mathcal{D}_{26})_1$  keinen Index gemeinsam haben, diese Gerade also schneiden.
- (2.55) lässt sich mit  $(\mathcal{D}_{45})_1$  allerdings schon zu einem windschiefen Sextupel

$$(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{D}_{56})_1, (\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{35})_1, (\mathcal{D}_{45})_1) \quad (2.58)$$

ergänzen, denn zu den ersten vier Elementen war  $(\mathcal{D}_{45})_1$  ohnehin schon windschief, und auch mit  $(\mathcal{D}_{35})_1$  hat die Gerade einen gemeinsamen Index (vergleiche wieder mit dem Beweis von Satz 2.5.18).

- Ergänzt man (2.56) mit  $(\mathcal{D}_{35})_1$ , erhält man dasselbe windschiefe Sextupel.
- Je fünf Gerade aus (2.58) haben eine gemeinsame Treffgerade. Diese sind dann

$$(\mathcal{B}_{15})_1, (\mathcal{A}_{15})_1, \mathcal{C}_{2_1}, \mathcal{C}_{3_1}, \mathcal{C}_{4_1} \text{ und } \mathcal{C}_{6_1}. \quad (2.59)$$

Das folgt daraus, dass  $(\mathcal{B}_{15})_1$  sicher  $\mathcal{B}_1$  trifft und nach Satz 2.5.18 jeweils mit  $(\mathcal{D}_{56})_1$ ,  $(\mathcal{D}_{25})_1$ ,  $(\mathcal{D}_{35})_1$  und  $(\mathcal{D}_{45})_1$  in einer Tripelebene liegt. Außerdem schneidet  $(\mathcal{B}_{15})_1$  sicher nicht  $\mathcal{A}_1$  (siehe den Beweis von Satz 2.5.16 bzw. Bemerkung 2.5.17). Analoges gilt für  $(\mathcal{A}_{15})_1$ .  $\mathcal{C}_{2_1}$  ist gemeinsame Sekante von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  und schneidet nach Bemerkung 2.5.17  $(\mathcal{D}_{56})_1$ ,  $(\mathcal{D}_{35})_1$  und  $(\mathcal{D}_{45})_1$ , aber nicht  $(\mathcal{D}_{25})_1$ . Analoges gilt für  $\mathcal{C}_{3_1}$ ,  $\mathcal{C}_{4_1}$  und  $\mathcal{C}_{6_1}$ .

- (2.59) bildet ein zweites windschiefes Sextupel. Nach Bemerkung 2.5.17 sind die Geraden  $\mathcal{C}_{2_1}$ ,  $\mathcal{C}_{3_1}$ ,  $\mathcal{C}_{4_1}$  und  $\mathcal{C}_{6_1}$  zueinander windschief und liegen in verschiedenen Ebenen durch  $\mathcal{A}_1$ .  $(\mathcal{A}_{15})_1$  liegt mit  $\mathcal{C}_{5_1}$  in einer weiteren Schnittebene durch  $\mathcal{A}_1$ , kann also die Geraden  $\mathcal{C}_{2_1}$ ,  $\mathcal{C}_{3_1}$ ,  $\mathcal{C}_{4_1}$  oder  $\mathcal{C}_{6_1}$  nur in einem Punkt auf  $\mathcal{A}_1$  schneiden, was nach Satz 2.4.6 nicht möglich ist. Analoges gilt für  $(\mathcal{B}_{15})_1$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $(\mathcal{A}_{15})_1$  und  $(\mathcal{B}_{15})_1$  sich nicht schneiden:

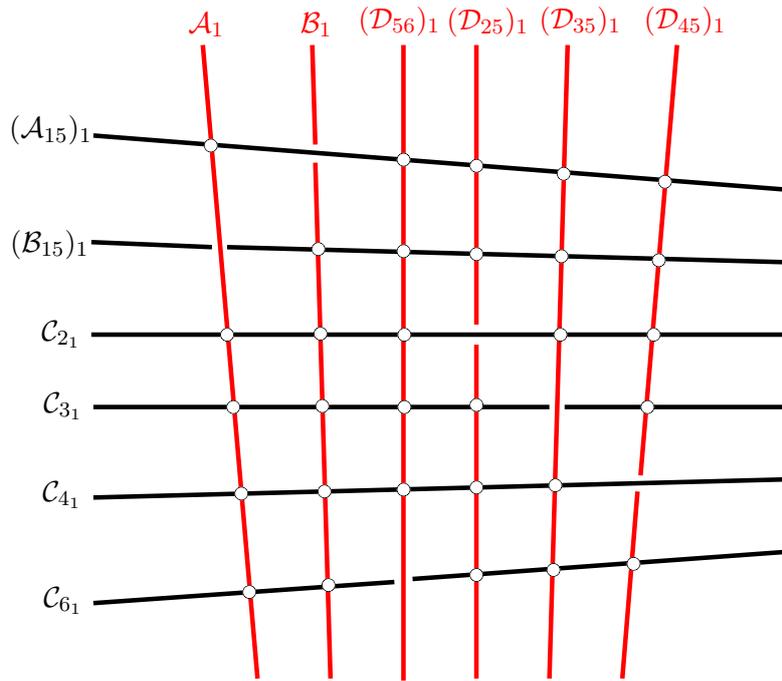


Abbildung 20: Eine Doppelsechse

Angenommen das wäre der Fall. Da beide Gerade nach Bemerkung 2.5.17 auch  $C_{5_1}$  schneiden, würden alle drei entweder eine Ebene aufspannen, in der dann auch die zueinander windschiefen Geraden  $A_1$  und  $B_1$  liegen müssten, was nicht möglich ist. Oder die drei liegen in verschiedenen Ebenen und schneiden sich in einem Punkt, was nach Satz 2.4.6 auch nicht zutreffen kann.

□

*Bemerkung 2.5.20.* Zwei windschiefe Sextupel, die wie im Satz 2.5.19 miteinander verbunden sind, nennt man zusammen *Doppelsechse* oder *Schläflische Doppelsechse* (siehe Abbildung 20).

**Satz 2.5.21.** *Es gibt 720 windschiefe Tripel innerhalb der 27-Konfiguration, wobei jedes Tripel in genau zwei Doppelsechsen liegt. Insgesamt gibt es 36 verschiedene Doppelsechsen.*

*Beweis.*

- Geht man von einer der 27 Geraden der 27-Konfiguration aus, so gibt es nach Bemerkung 2.5.10 zehn Gerade, die diese treffen. Es bleiben also 16 mögliche windschiefe übrig. Aus dem Beweis von Satz 2.5.16 bzw. aus Bemerkung 2.5.17 wissen wir, dass es zu zwei windschiefen Geraden noch 10 weitere gibt, die beide nicht schneiden. Wir erhalten also

$$27 \cdot 16 \cdot 10 = 4320$$

geordnete windschiefe Tripel innerhalb einer 27-Konfiguration. Dividiert man durch die  $3! = 6$  möglichen Anordnungen eines Tripels, erhält man also 720 ungeordnete windschiefe Tripel.

- Wir bezeichnen die Geraden eines windschiefen Tripels wie im Beweis von Satz 2.5.19 mit  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$  und  $(\mathcal{D}_{23})_1$ . Mit den selben Bezeichnungen wie in Bemerkung 2.5.17 wissen wir dann schon, dass  $\mathcal{C}_{4_1}$ ,  $\mathcal{C}_{5_1}$  und  $\mathcal{C}_{6_1}$  ihre gemeinsamen Treffgeraden sind. Wie im Beweis von Satz 2.5.19 erhalten wir, dass

$$(\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{26})_1, (\mathcal{D}_{35})_1, (\mathcal{D}_{36})_1, (\mathcal{D}_{45})_1 \text{ und } (\mathcal{D}_{46})_1$$

windschief zu  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$  und  $(\mathcal{D}_{23})_1$  sind. Aus diesen sechs Geraden kann man nur zwei windschiefe Tripel (nach Satz 2.5.18 schneiden sich jene  $(\mathcal{D}_{ij})_1$ -Geraden mit vier verschiedenen Indizes)

$$\begin{aligned} &((\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{35})_1, (\mathcal{D}_{45})_1) \\ &\text{und } ((\mathcal{D}_{26})_1, (\mathcal{D}_{36})_1, (\mathcal{D}_{46})_1) \end{aligned}$$

bilden. Jedes für sich ergänzt  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$  und  $(\mathcal{D}_{23})_1$  zu einem windschiefen Sextupel (für das erste vergleiche mit (2.58), das zweite ergibt sich nach dem selben Schema wie im Beweis von Satz 2.5.19). Damit liegen  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{B}_1$  und  $(\mathcal{D}_{23})_1$  in genau zwei verschiedenen windschiefen Sextupeln und daher auch in zwei verschiedenen Doppelsechsen.

- 720 Tripel führen dann zu  $720 \cdot 2 = 1440$  Sextupeln, wobei aber jedes  $\binom{6}{3} = 20$  mal gezählt wird (das entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, sechs windschiefe Gerade in zwei windschiefe Tripel aufzuteilen). Es bleiben also  $\frac{1440}{20} = 72$  Sextupel, die sich nach dem Satz 2.5.19 eineindeutig zu 36 Doppelsechsen zusammenführen lassen.

□

*Bemerkung 2.5.22.* Es ist möglich, die Konfiguration der Doppelsechs unabhängig von der kubischen Fläche zu erklären:

- Gegeben seien dabei 5 paarweise zueinander windschiefe Gerade

$$\mathcal{A}_{1_1}, \mathcal{A}_{2_1}, \mathcal{A}_{3_1}, \mathcal{A}_{4_1} \text{ und } \mathcal{A}_{5_1}, \tag{2.60}$$

die eine gemeinsame Treffgerade  $\mathcal{A}'_{6_1}$  besitzen.

- Zu je vier sollen die Geraden aus (2.60) eine weitere Treffgerade besitzen. Diese bezeichnen wir mit  $\mathcal{A}'_{i_1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, 5$ , wenn sie  $\mathcal{A}_{i_1}$  nicht trifft.
- Ergänzt man  $\mathcal{A}'_{6_1}$ , so erhält man sechs windschiefe Gerade

$$\mathcal{A}'_{1_1}, \mathcal{A}'_{2_1}, \mathcal{A}'_{3_1}, \mathcal{A}'_{4_1}, \mathcal{A}'_{5_1} \text{ und } \mathcal{A}_{6_1}, \tag{2.61}$$

(wären die Treffgeraden schneidend, so wären es auch die Geraden selbst), wobei nach Konstruktion darin schon fünf windschiefe Quintupel existieren, die je eine der Geraden aus (2.60) als gemeinsame Treffgerade besitzen.

- Es lässt sich zeigen, dass auch das sechste aus (2.61) gebildete windschiefe Quintupel  $(\mathcal{A}'_{1_1}, \mathcal{A}'_{2_1}, \mathcal{A}'_{3_1}, \mathcal{A}'_{4_1}, \mathcal{A}'_{5_1})$  eine gemeinsame Treffgerade  $\mathcal{A}_{6_1}$  besitzt.
- Damit bilden  $\mathcal{A}_{i_1}$  und  $\mathcal{A}'_{i_1}$  für  $i = 1, 2, \dots, 6$  eine Doppelsechs.

*Bemerkung 2.5.23.* Geht man vom dualen Gegenstück einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$ , also einer kubischen Dualfläche  $\widehat{F}_3$  ohne singuläre Ebene aus (vergleiche Abschnitt 1.6.4), so ergeben sich ebenfalls 27 wohlbestimmte Gerade, sodass alle Ebenen durch diese Geraden zu  $\widehat{F}_3$  gehören. Wir bezeichnen diese als *duale 27-Konfiguration*. Durch Dualisierung der bisher erarbeiteten Ergebnisse erhält man:

- In einer dualen 27-Konfiguration liegen niemals drei Gerade in einer Ebene, ohne dass sie durch einen Punkt gehen, da diese Ebene sonst für die  $\widehat{F}_3$  singulär wäre (vergleiche Satz 2.4.6).
- Statt 45 Tripelebenen gibt es 45 Punkte, durch die je drei Gerade einer dualen 27-Konfiguration gehen. Damit ist die duale 27-Konfiguration wohlunterscheidbar von der 27-Konfiguration.
- Allerdings stimmen die Doppelsechsen, die man bei beiden Konfigurationen bilden kann, projektiv überein. Das ergibt sich daraus, dass eine Doppelsech ihrer Definition nach in sich schon dual ist.

Man kann zeigen, dass eine Doppelsech bereits je eine  $F_3$  und eine  $\widehat{F}_3$  bestimmt, der sie angehört. Wir zeigen fürs Erste

**Satz 2.5.24.** *Ist die Doppelsech der 12 Geraden*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1_1} & \mathcal{A}_{2_1} & \mathcal{A}_{3_1} & \mathcal{A}_{4_1} & \mathcal{A}_{5_1} & \mathcal{A}_{6_1} \\ \mathcal{A}'_{1_1} & \mathcal{A}'_{2_1} & \mathcal{A}'_{3_1} & \mathcal{A}'_{4_1} & \mathcal{A}'_{5_1} & \mathcal{A}'_{6_1} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  entnommen, so ergeben sich die restlichen 15 Geraden der 27-Konfiguration aus

$$(\mathcal{C}_{ij})_1 = (\mathcal{A}_{i_1} \cup \mathcal{A}'_{j_1}) \cap (\mathcal{A}_{j_1} \cup \mathcal{A}'_{i_1}) \text{ für } i \neq j. \quad (2.63)$$

Ist (2.62) einer singularitätenfreien kubischen Dualfläche  $\widehat{F}_3$  entnommen, so ergeben sich die restlichen 15 Geraden der dualen 27-Konfiguration aus

$$(\mathcal{C}_{ij})_1 = (\mathcal{A}_{i_1} \cap \mathcal{A}'_{j_1}) \cup (\mathcal{A}_{j_1} \cap \mathcal{A}'_{i_1}) \text{ für } i \neq j.$$

*Beweis.*

- Ist der erste Teil bewiesen, ergibt sich der zweite durch Dualisieren.
- Eine durch (2.63) definierte Gerade  $(\mathcal{C}_{ij})_1$  (man erhält immer ein Gerade, da wegen der Eigenschaften der Doppelsech ( $\mathcal{A}_{i_1}$  liegt windschief zu  $\mathcal{A}_{j_1}$  usw.) die Ebenen  $\mathcal{A}_{i_1} \cup \mathcal{A}'_{j_1}$  und  $\mathcal{A}_{j_1} \cup \mathcal{A}'_{i_1}$  mit Sicherheit verschieden sind) hat mit der  $F_3$  je vier auf  $\mathcal{A}_{i_1}$ ,  $\mathcal{A}_{j_1}$ ,  $\mathcal{A}'_{i_1}$  und  $\mathcal{A}'_{j_1}$  liegende, im Allgemeinen verschiedene Punkte gemeinsam.
- Zusammenfallen könnten höchstens diejenigen Punkte, die auf  $\mathcal{A}_{i_1}$  und  $\mathcal{A}'_{j_1}$  bzw.  $\mathcal{A}_{j_1}$  und  $\mathcal{A}'_{i_1}$  liegen. Auch dann ergibt sich aber eine Schnittpunktvielfachheit der Gerade  $(\mathcal{C}_{ij})_1$  mit der  $F_3$ , die größer als drei ist (es liegt ein Eckardt看punkt vor).  
(Nach Satz 1.6.8 berührt beispielsweise die Ebene  $\mathcal{P}_2 = \mathcal{A}_{i_1} \cup \mathcal{A}'_{j_1}$  die  $F_3$  im Punkt  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{A}_{i_1} \cup \mathcal{A}'_{j_1}$ . Nach Bemerkung 1.6.5 schneidet dann jede Gerade, die in der Ebene  $\mathcal{P}_2$  liegt und durch den Punkt  $\mathcal{P}_0$  geht, die  $F_3$  im Punkt  $\mathcal{P}_0$  von der Vielfachheit 2.)

- Damit liegt die Gerade  $(C_{ij})_1$  aber auf der  $F_3$ .
- Ebenfalls aus den Eigenschaften der Doppelsechs folgt, dass die Geraden  $(C_{ij})_1$  alle verschieden sind und damit die Doppelsechs zu einer vollständigen 27-Konfiguration ergänzen. (Wäre nämlich  $(C_{ij})_1 = (C_{kl})_1$ , wobei alle vier Indizes verschieden sind, so würde  $\mathcal{A}_{i_1}$  mit  $(C_{ij})_1$  eine Ebene aufspannen, in der sowohl  $\mathcal{A}'_{j_1}$ , also auch  $\mathcal{A}'_{k_1}$  und  $\mathcal{A}'_{l_1}$  lägen, da die beiden letzteren sowohl  $(C_{ij})_1$  als auch  $\mathcal{A}_{i_1}$  schneiden würden. Dann lägen aber fünf verschiedene Gerade einer  $F_3$  in einer Ebene, also mehr als eine  $k_3$ . Gilt  $(C_{ij})_1 = (C_{ik})_1$ , kommt man analog auf die vier Geraden  $(C_{ij})_1$ ,  $\mathcal{A}_{i_1}$ ,  $\mathcal{A}'_{j_1}$  und  $\mathcal{A}'_{k_1}$  in einer Ebene, erhält also ebenfalls einen Widerspruch.)

□

*Bemerkung 2.5.25.* Die Bestimmung der 27 Geraden einer kubischen Fläche hängt von einer Gleichung vom Grad 27 ab mit einer Galoisgruppe von 25920 Elementen. Auch aus dieser Gruppe lassen sich die Besonderheiten der 27-Konfiguration, wie die Doppelsechsen, ablesen. Geht man bei den nach dem Beweis von Satz 2.5.21 vorhandenen 72 windschiefen Sextupeln zu geordneten Sextupeln über, erhält man  $72 \cdot 6! = 51840$  verschiedene. Es lässt sich zeigen, dass die sogenannte *Coxeter-Gruppe*  $E_6$  auf der Menge der windschiefen Sextupel operiert. Diese hat genau 51840 Elemente. Eine kurze Ausführung dieser Überlegungen finden sich in den online zur Verfügung gestellten Vorlesungsunterlagen von Ringel [9]. Einführende Infos zu Coxeter-Gruppen gibt es beispielsweise auf Wikipedia [14].

Wir werden später im Abschnitt 2.6.2 noch rationale Parameterdarstellungen für singularitätenfreie kubische Flächen entwickeln.

*Bemerkung 2.5.26.* Jetzt wollen wir noch die Realitätstypen von singularitätenfreien kubischen Flächen betrachten. Man sagt, eine 27-Konfiguration ist vom reellen Typ, wenn sie beim Übergang zum konjugiert komplexen in sich selbst transformiert wird. Es gelten folgende Eigenschaften (vergleiche Abschnitt 1.5.4):

- Es gibt singularitätenfreie kubische Flächen mit 27 reellen Geraden.
- Liegt eine 27-Konfiguration vom reellen Typ vor und sei  $\mathcal{T}_2$  eine Tripelebene dieser Konfiguration, dann gibt es folgende Möglichkeiten:
  - $\mathcal{T}_2$  ist reell und
    - \* alle drei Geraden in der Ebene  $\mathcal{T}_2$  sind reell.
    - \* eine Gerade in  $\mathcal{T}_2$  ist reell. Die beiden anderen sind niederimaginär.
  - $\mathcal{T}_2$  ist imaginär mit  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \cap \overline{\mathcal{T}_2}$  und
    - \*  $\mathcal{T}_1$  gehört zur 27-Konfiguration. Die übrigen vier Geraden in  $\mathcal{T}_2$  und  $\overline{\mathcal{T}_2}$  sind hochimaginär.
    - \*  $\mathcal{T}_1$  gehört nicht zur 27-Konfiguration. Je zwei Geraden aus  $\mathcal{T}_2$  und  $\overline{\mathcal{T}_2}$  sind hochimaginär und je eine niederimaginär.
    - \*  $\mathcal{T}_1$  gehört nicht zur 27-Konfiguration. Alle Geraden aus  $\mathcal{T}_2$  und  $\overline{\mathcal{T}_2}$  sind niederimaginär.
  - Besitzt eine 27-Konfiguration sowohl reelle als auch niederimaginäre, aber keine hochimaginären Geraden, so sind nur drei Geraden reell.
  - Besitzt eine 27-Konfiguration sowohl reelle als auch niederimaginäre, aber keine hochimaginären Geraden, so gibt es keine zwei windschiefen reellen Geraden.

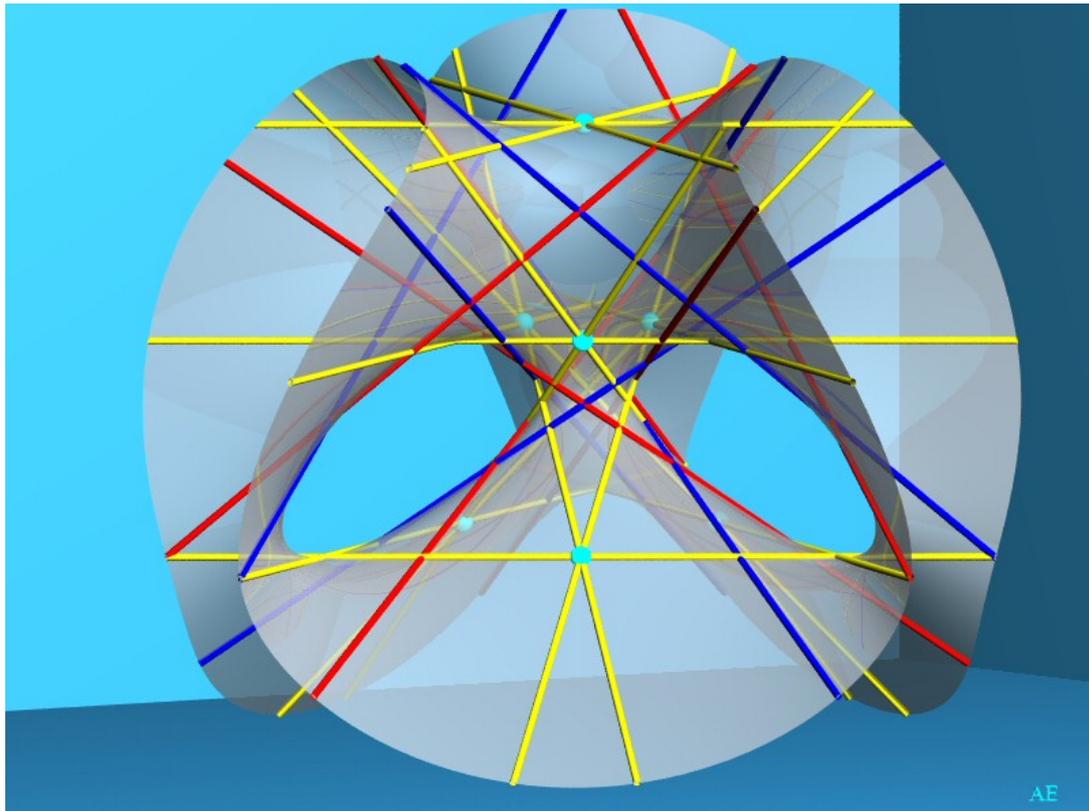


Abbildung 21: Clebsche Diagonalfäche (Alain Esculier, entnommen aus [4])

- Liegt eine 27-Konfiguration vom reellen Typ vor, die auch hochimaginäre Geraden enthält, so gibt es nur folgende Möglichkeiten:
  - \* 12 hochimaginäre und 15 reelle Geraden
  - \* 16 hochimaginäre, 4 niederimaginäre und 7 reelle Geraden
  - \* 12 hochimaginäre, 12 niederimaginäre und 3 reelle Geraden

Die sogenannte *Clebsche Diagonalfäche* ist eine kubische Fläche mit 27 reellen Geraden. Eine mögliche affine Gleichung einer solchen Fläche lautet  $x^3 + y^3 + z^3 + 1 - 0.5(x + y + z + 1)^3 = 0$ . Abbildung 21 zeigt neben der Clebschen Diagonalfäche auch die 27 Geraden. Abbildung 22 zeigt außerdem ein Modell einer solchen Fläche.

## 2.6 Rationale Parameterdarstellungen kubischer Flächen

Es lässt sich zeigen, dass sich alle kubischen Flächen mit Ausnahme der sogenannten *elliptischen Kegel* birational, das heißt im Allgemeinen eineindeutig (es kann gewisse Ausnahmemengen geben), auf eine Ebene beziehen lassen. Wir wollen uns zwei solche rationale Parameterdarstellungen konkret erarbeiten. Zunächst betrachten wir jene für kubische Flächen mit einem singulären Punkt der Vielfachheit 2 und im Anschluss daran die für singularitätenfreie kubische Flächen.



Abbildung 22: Modell einer Clebschen Diagonalfäche im Innenhof der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Düsseldorfer Universität (Gerd Fischer, entnommen aus [10])

### 2.6.1 Rationale Parameterdarstellungen für kubische Flächen mit Singularität

Aus Abschnitt 2.3.1 wissen wir, dass eine irreduzible kubische Fläche mit einer Singularität  $\mathcal{S}_0$  der Vielfachheit 2 bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems ( $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$ ) durch eine Gleichung der Gestalt

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 a_2(x_0, x_1, x_2) + a_3(x_0, x_1, x_2) \quad (2.64)$$

(wobei  $a_2$  und  $a_3$  Formen vom Grad ihres Index in  $x_0, x_1$  und  $x_2$  sind) dargestellt werden kann (vergleiche (2.2)). Wir erhalten nun folgenden

**Satz 2.6.1.** *Gegeben sei eine irreduzible kubische Fläche  $F_3$  mit einem singulären Punkt  $\mathcal{S}_0$  der Vielfachheit 2. Dann wird die  $F_3$  durch eine Projektion vom Punkt  $\mathcal{S}_0$  auf eine  $\mathcal{S}_0$  nicht enthaltende Ebene  $\mathcal{P}_2$  im Allgemeinen eineindeutig abgebildet. Wählt man das Koordinatensystem so, dass man für  $\mathcal{S}_0$  und  $\mathcal{P}_2$  die Darstellungen  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$  und  $\mathcal{P}_2 : x_3 = 0$  erhält, so wird diese Beziehung durch (die Gleichung der  $F_3$  hat dann die Gestalt (2.64))*

$$x_0 = p_0 a_2(p_0, p_1, p_2), \quad (2.65)$$

$$x_1 = p_1 a_2(p_0, p_1, p_2), \quad (2.66)$$

$$x_2 = p_2 a_2(p_0, p_1, p_2), \quad (2.67)$$

$$x_3 = -a_3(p_0, p_1, p_2) \quad (2.68)$$

angegeben, wobei  $(p_0, p_1, p_2)$  jetzt die Parameter in der Ebene  $\mathcal{P}_2$  sind. Umgekehrt erhält man aus (2.65)-(2.68) bei teilerfremden Formen  $a_2$  und  $a_3$  auch die Parameterdarstellung einer irreduziblen kubischen Fläche mit einem singulären Punkt der Vielfachheit 2.

*Beweis.*

- Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$  der singuläre Punkt mit Vielfachheit 2 einer irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$  ist (diese hat dann also eine Darstellung mit einer Gleichung der Gestalt (2.64).
- $\mathcal{P}_1$  sei jetzt eine Gerade durch  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$ . Diese hat sicher einen Schnittpunkt  $(p_0, p_1, p_2, 0)$  mit der Ebene  $\mathcal{P}_2 : x_3 = 0$  und kann daher durch eine Parameterdarstellung

$$x_0 = \mu p_0, x_1 = \mu p_1, x_2 = \mu p_2, x_3 = \lambda \quad (2.69)$$

angegeben werden.

- Setzt man diese Geradendarstellung in die Gleichung (2.64) der  $F_3$  ein, so erhält man

$$\lambda a_2(\mu p_0, \mu p_1, \mu p_2) + a_3(\mu p_0, \mu p_1, \mu p_2) = 0.$$

- Aus  $a_2$  und  $a_3$  lassen sich  $\mu^2$  bzw.  $\mu^3$  herausheben (vergleiche dazu mit der expliziten Darstellung von  $a_2$  und  $a_3$  in (2.3)). Wir erhalten also

$$\mu^2(\lambda a_2(p_0, p_1, p_2) + \mu a_3(p_0, p_1, p_2)) = 0$$

und damit können wir einerseits die doppelt zu zählende Wurzel ( $\lambda = 1, \mu = 0$ ) (entspricht dem Punkt  $\mathcal{S}_0$ ) ablesen und andererseits ergibt sich ein im Allgemeinen dazu verschiedener weiterer Schnittpunkt der Geraden  $\mathcal{P}_1$  mit der  $F_3$  als ( $\lambda = -a_3(p_0, p_1, p_2), \mu = a_2(p_0, p_1, p_2)$ ).

- Setzen wir das in (2.69) ein, erhalten wir einen Punkt der  $F_3$  und gleichzeitig genau (2.65)-(2.68).
- Durch Veränderung der Geraden  $\mathcal{P}_1$  im Bündel durch  $\mathcal{S}_0$  erfasst man jeden Punkt der  $F_3$ .
- Umgekehrt stellen Formeln der Gestalt (2.65)-(2.68) eine Parameterdarstellung einer  $F_3$  mit der Gleichung (2.64) (also mit singulärem Punkt der Vielfachheit 2) dar.

□

*Bemerkung 2.6.2.* Es handelt sich hierbei im Wesentlichen um eine stereographische Projektion. Wir wollen nun die Parameterdarstellung (2.65)-(2.68) genauer betrachten und erhalten das

**Korollar 2.6.3.** *Gegeben sei die durch (2.65)-(2.68) definierte Abbildung  $\kappa$  einer irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$  mit dem singulären Punkt  $\mathcal{S}_0 = (0, 0, 0, 1)$  der Vielfachheit 2 auf die Ebene  $\mathcal{P}_2 : x_3 = 0$ . Sind  $(p_0, p_1, p_2)$  die Parameter in der Ebene  $\mathcal{P}_2$ , so gilt:*

- Die Schnittkurven  $k_3$ , die sich beim Schnitt einer beliebigen Ebene mit der  $F_3$  ergeben, sind den Kurven des durch

$$-\lambda_3 a_3(p_0, p_1, p_2) + \lambda_0 p_0 a_2(p_0, p_1, p_2) + \lambda_1 p_1 a_2(p_0, p_1, p_2) + \lambda_2 p_2 a_2(p_0, p_1, p_2) = 0$$

definierten linearen  $\infty^3$ -System eineindeutig zugeordnet.

- $\kappa$  ordnet Punkte der  $F_3$ , die nicht auf einer ganz auf der  $F_3$  liegenden Geraden durch  $\mathcal{S}_0$  sind, eindeutig Punkten in der Ebene  $\mathcal{P}_2$  zu, die nicht auf dem Kegelschnitt  $k_2 : a_2(x_0, x_1, x_2) = 0$  liegen.
- Dem singulären Punkt  $\mathcal{S}_0$  werden unter dieser Abbildung alle Punkte der Ebene  $\mathcal{P}_2$  zugeordnet, die zwar auf dem Kegelschnitt  $k_2 : a_2(x_0, x_1, x_2) = 0$ , aber nicht auf der Kurve  $k_3 : a_3(x_0, x_1, x_2) = 0$  liegen.

Der Beweis dieser Aussagen ergibt sich direkt aus den Formeln (2.65)-(2.68).

*Bemerkung 2.6.4.* Um die Beziehung aus Satz 2.6.1 zu vervollständigen, ordnet man alle Punkte, die auf ganz auf der  $F_3$  liegenden Geraden durch  $\mathcal{S}_0$  sind (außer  $\mathcal{S}_0$  selbst), den Schnittpunkten von  $k_2 : a_2(x_0, x_1, x_2) = 0$  und  $k_3 : a_3(x_0, x_1, x_2) = 0$  in der Ebene  $\mathcal{P}_2$  zu.

Es lässt sich zeigen, dass man auf die soeben in Satz 2.6.1 vorgestellte Art für alle kubischen Flächen mit singulären Punkten – außer den elliptischen Kegeln – eine rationale Parameterdarstellung in der Ebene findet. Dazu sind in der Regel kleine Abwandlungen notwendig. Ein Nachteil besteht zum Beispiel darin, dass im Fall einer  $F_3$  mit mehreren singulären Punkten bei unserer Abbildung aus Satz 2.6.1 einer Singularität eine spezielle Rolle zukommt. Wir geben noch einen Satz an, der sich mit ebenen Schnitten von irreduziblen kubischen Flächen mit genau vier verschiedenen isolierten Singularitäten beschäftigt.

**Satz 2.6.5.** *Führt man die Projektion aus Satz 2.6.1 bei einer irreduziblen kubischen Fläche  $F_3$  mit vier verschiedenen singulären Punkten der Vielfachheit 2 auf die Ebene  $\mathcal{P}_2$  unter Bevorzugung einer dieser Singularitäten durch, so gibt es eine eindeutige Zuordnung der ebenen Schnitte der  $F_3$  zu folgendem Linearsystem von kubischen Kurven in der Ebene  $\mathcal{P}_2$ :*

*alle kubischen Kurven  $k_3$ , die in drei festen Punkten einen gegebenen Kegelschnitt  $k_2$  schneiden und in diesen Punkten entweder singulär sind oder mit  $k_2$  eine gemeinsame Tangente besitzen.*

*Beweisidee.* Nach Satz 2.3.8 hat eine irreduzible kubische Fläche  $F_3$  mit vier isolierten Singularitäten in einem geeigneten Koordinatensystem eine Gleichung der Gestalt (vergleiche (2.10)

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 + x_0x_1x_2 = 0.$$

Geht man bei der Projektion der  $F_3$  auf die Ebene  $\mathcal{P}_2$  wie bei Satz 2.6.1 vor, so wird den ebenen Schnitten der  $F_3$  das Linearsystem der kubischen Kurven

$$-\lambda_3 p_0 p_1 p_2 + (p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_1 p_2)(\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = 0 \quad (2.70)$$

zugeordnet. Man kann zeigen, dass alle kubischen Kurven, die bezüglich des Kegelschnitts  $p_0 p_1 + p_0 p_2 + p_1 p_2 = 0$  in den drei Koordinatenecken entweder singulär sind oder mit dem Kegelschnitt eine gemeinsame Tangente besitzen, eine Gleichung der Gestalt (2.70) haben.

*Bemerkung 2.6.6.* In der durch (2.70) definierten  $\infty^3$ -Linearschar gibt es zwei in je drei Gerade zerfallende kubische Kurven

$$p_0 p_1 p_2 = 0$$

bzw.  $(p_0 + p_1)(p_0 + p_2)(p_1 + p_2) = 0.$

Die erste wird der Verbindungsebene  $x_3 = 0$  der drei singulären Punkte der  $F_3$ , aus denen nicht projiziert wird, zugeordnet (diese enthält also nach Bemerkung 2.3.5 drei Gerade, die ganz auf der  $F_3$  liegen). Die zweite steht in Beziehung zur Ebene  $\mathcal{E}_2 : x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$ , die die  $F_3$  ebenfalls in drei Geraden schneidet.  $\mathcal{E}_2$  enthält keine singulären Punkte der  $F_3$  und berührt nach Satz 1.6.8 die Fläche in drei Punkten (ist also eine Tritangentialebene). Es lässt sich zeigen, dass die auf ihr liegenden drei Geraden die einzigen sind, die neben den sechs Verbindungsgeraden der vier singulären Punkte (siehe Bemerkung 2.3.5) ganz auf einer solchen  $F_3$  liegen.

Nun widmen wir uns wieder den singularitätenfreien kubischen Flächen.

## 2.6.2 Rationale Parameterdarstellungen für singularitätenfreie kubische Flächen

Bei den singularitätenfreien kubischen Flächen ist es nicht mehr möglich, aus einem Punkt auf die Ebene zu projizieren. Wir müssen nun etwas umständlicher vorgehen:

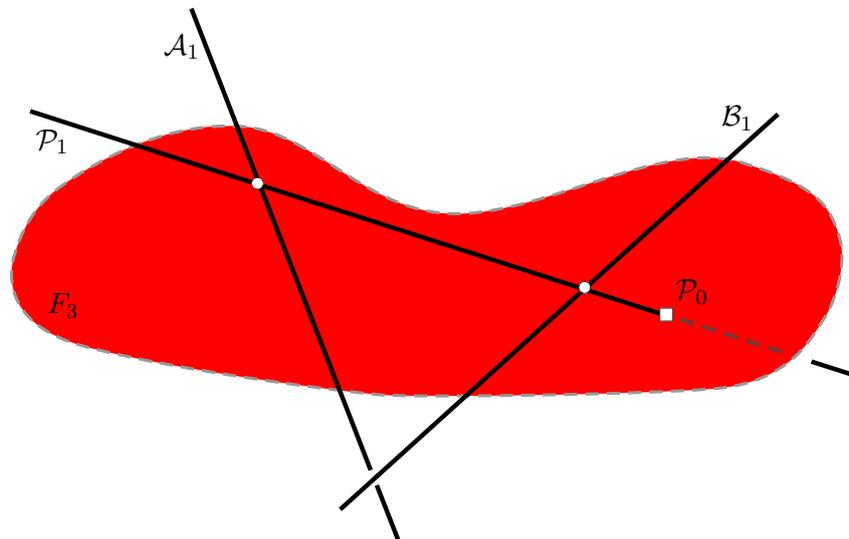


Abbildung 23: Zuordnung eines Punktes zu einer Kongruenzgeraden

- Wir gehen aus von zwei windschiefen Geraden, die ganz auf der Fläche  $F_3$  liegen. Da wir die  $F_3$  als singularitätenfrei voraussetzen, gibt es solche Gerade immer (beispielsweise  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  aus dem Beweis von Satz 2.5.6), und wir benennen sie mit  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$ .
- Nach Satz 2.5.15 haben zwei windschiefe Gerade genau fünf Treffgerade, die wir wieder mit  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  bezeichnen wollen.
- Wählen wir nun einen Punkt  $\mathcal{P}_0 \in F_3$ , der nicht auf  $\mathcal{A}_1$  oder  $\mathcal{B}_1$  liegt, so gibt es nach Bemerkung 1.5.4 eine wohlbestimmte Gerade  $\mathcal{P}_1$ , die sowohl  $\mathcal{A}_1$  als auch  $\mathcal{B}_1$  trifft.  $\mathcal{P}_1$  gehört also zu der in Satz 1.5.3 definierten allgemeinen linearen Geradenkongruenz  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$ .
- Wir ordnen den Punkt  $\mathcal{P}_0$  der Kongruenzgeraden  $\mathcal{P}_1$  zu (siehe Abbildung 23).
- Diese Zuordnung kann auf Punkte  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{A}_1$  bzw.  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{B}_1$  mit  $\mathcal{P}_0 \notin \mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  ausgedehnt werden:
  - Der Punkt  $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{A}_1$  habe die Tangentialebene  $\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$  an die  $F_3$ .
  - Nach Satz 2.5.8 gilt  $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$ . Da  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  windschief sind, schneidet  $\mathcal{T}_2(\mathcal{P}_0)$  die Gerade  $\mathcal{B}_1$  in einem Punkt  $\mathcal{P}'_0$ .
  - Wir ordnen jetzt  $\mathcal{P}_0$  die Gerade  $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}'_0$  aus  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  zu (die nach Bemerkung 1.6.5 eine Tangente an die  $F_3$  ist; siehe Abbildung 24).
  - Analog bekommt jeder Punkt von  $\mathcal{B}_1$  ebenfalls eine Gerade aus  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  zugeordnet.

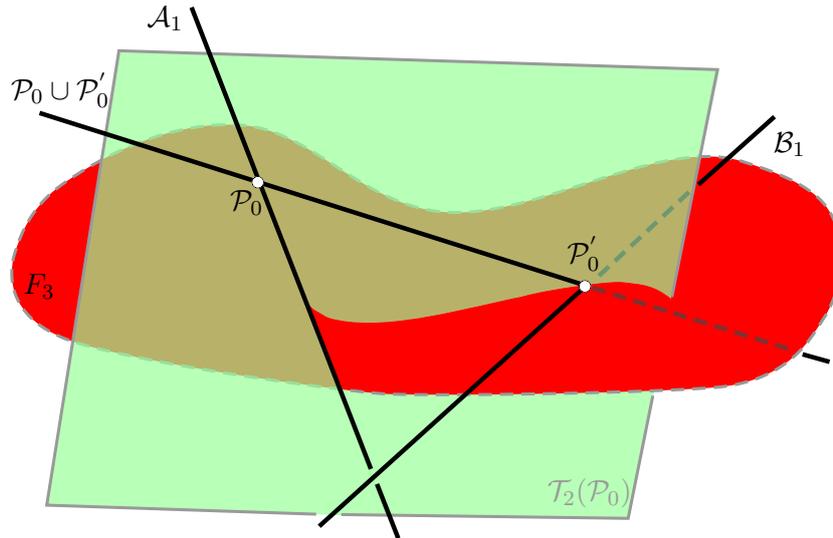


Abbildung 24: Zuordnung eines Punktes auf  $\mathcal{A}_1$  zu einer Kongruenzgeraden

Umgekehrt sei eine Gerade  $\mathcal{P}_1 \in L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  mit  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{\mathcal{A}_0} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{B}_0}$  gegeben, wobei  $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{B}_1$  gilt. Außerdem sei  $\mathcal{P}_1$  verschieden von den fünf Treffgeraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$ . Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

- $\mathcal{P}_1$  hat mit der  $F_3$  noch einen weiteren von  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$  verschiedenen Punkt  $\mathcal{P}_0$  gemeinsam. Wir ordnen dann  $\mathcal{P}_1$  den Punkt  $\mathcal{P}_0$  zu.
  - $\mathcal{P}_1$  hat mit der  $F_3$  nur  $\mathcal{A}_0$  und  $\mathcal{B}_0$  gemeinsam. Dann muss aber einer dieser Punkte für den Schnitt der Geraden mit der Fläche die Vielfachheit 2 haben. Gilt das beispielsweise für den Punkt  $\mathcal{A}_0$ , ist  $\mathcal{P}_1$  tangential an die  $F_3$  im Punkt  $\mathcal{A}_0$  (vergleiche Satz 1.6.8) und wir ordnen  $\mathcal{P}_1$  den Punkt  $\mathcal{A}_0$  zu. Zählt  $\mathcal{B}_0$  zweifach, wird  $\mathcal{P}_1$  analog  $\mathcal{B}_0$  zugeordnet. Beide können nicht zweifach zählen, da dann  $\mathcal{P}_1$  schon ganz auf der  $F_3$  liegen müsste und damit eine der Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  wäre.
- Um die Beziehung zu vervollständigen, ordnen wir jedem auf einer der Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  liegenden Punkt die Gerade  $\mathcal{C}_{i_1}$  selbst zu und umgekehrt.
  - Damit erhalten wir eine im Allgemeinen eineindeutige Beziehung zwischen den Geraden aus  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  und den Punkten der  $F_3$ . Eine Ausnahme stellen die Geraden  $\mathcal{C}_{i_1} \in L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  dar, die jeweils den unendlich vielen auf ihnen liegenden Punkten zugeordnet werden.

Wir fassen zusammen:

**Satz 2.6.7.** *Die Punkte einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  lassen sich im Allgemeinen den Geraden einer allgemeinen linearen Geradenkongruenz  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  zuordnen. Die Ausnahmemenge besteht dabei aus den fünf Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  auf der  $F_3$  (das sind die fünf Treffgeraden zweier windschiefer Geraden  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  auf der  $F_3$ , die  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  festlegen), denen jeweils alle auf ihnen liegenden Punkte zugeordnet werden.*

Im Satz 1.5.3 haben wir gesehen, dass sich die Elemente einer allgemeinen linearen Geradenkongruenz eineindeutig den Punkten einer regulären Teilquadrik  $Q_2$  der Plückerquadrik  $Q_4$  zuordnen lassen. Das ergibt den

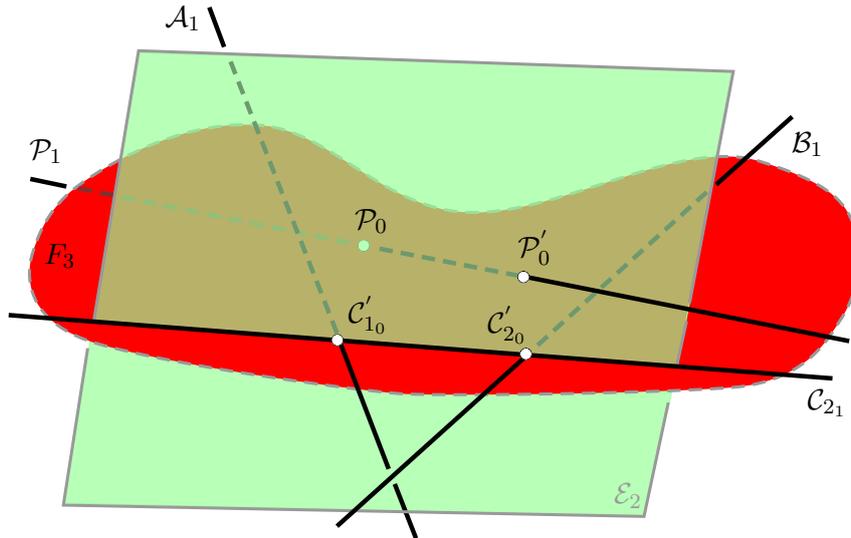


Abbildung 25: Die schiefe Projektion

**Satz 2.6.8.** Die Punkte einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  lassen sich im Allgemeinen den Punkten einer regulären Quadrik  $Q_2$  zuordnen. Die Ausnahmemenge besteht dabei aus den fünf Geraden  $C_{i_1}$ ,  $i = 2, 3, \dots, 6$  auf der  $F_3$  (die fünf Treffgeraden zweier windschiefer Geraden auf der  $F_3$ , die eine allgemeine lineare Geradenkongruenz festlegen), denen je ein Punkt  $C_{i_0}$ ,  $i = 2, 3, \dots, 6$  auf der Quadrik  $Q_2$  entspricht.

*Bemerkung 2.6.9.* Durch eine stereographische Projektion lassen sich nun die Punkte einer regulären Quadrik den Punkten einer Ebene zuordnen. Allerdings kann man auch folgendermaßen vorgehen (vergleiche Satz 1.5.5):

- Man wähle eine Ebene  $\mathcal{E}_2$ , die die Gerade  $C_{2_1}$ , aber nicht  $\mathcal{A}_1$  oder  $\mathcal{B}_1$  enthalte.
- Jetzt kann man die Elemente der allgemeinen linearen Geradenkongruenz  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  eindeutig durch den Schnitt mit der Ebene  $\mathcal{E}_2$  auf die Punkte von  $\mathcal{E}_2$  beziehen.

Diese Beziehung entspricht der stereographischen Projektion der  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  zugeordneten Quadrik  $Q_2$  aus dem Punkt  $C_{2_0}$  auf die Ebene  $\mathcal{E}_2$  (vergleiche Bemerkung 1.5.6). Damit erhalten wir mit dem Satz 2.6.8 eine im Allgemeinen eineindeutige Zuordnung zwischen den Punkten einer  $F_3$  und der Ebene  $\mathcal{E}_2$ . Diese Abbildung nennt man *schiefe Projektion* auf die Ebene  $\mathcal{E}_2$  (siehe Abbildung 25). Zusammengefasst gilt folgender

**Satz 2.6.10.** Eine singularitätenfreie kubische Fläche  $F_3$  wird durch die in Bemerkung 2.6.9 definierte schiefe Projektion im Allgemeinen eineindeutig auf eine Ebene  $\mathcal{E}_2$  abgebildet. Diese Beziehung hat folgende Ausnahmen:

Die Punkte

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}'_{10} &= \mathcal{C}_{21} \cap \mathcal{A}_1, \\
\mathcal{C}'_{20} &= \mathcal{C}_{21} \cap \mathcal{B}_1, \\
\mathcal{C}'_{30} &= \mathcal{C}_{31} \cap \mathcal{E}_2, \\
\mathcal{C}'_{40} &= \mathcal{C}_{41} \cap \mathcal{E}_2, \\
\mathcal{C}'_{50} &= \mathcal{C}_{51} \cap \mathcal{E}_2, \\
\mathcal{C}'_{60} &= \mathcal{C}_{61} \cap \mathcal{E}_2
\end{aligned} \tag{2.71}$$

werden in dieser Reihenfolge jeweils den Geraden

$$(\mathcal{B}_{12})_1, (\mathcal{A}_{12})_1, \mathcal{C}_{31}, \mathcal{C}_{41}, \mathcal{C}_{51}, \mathcal{C}_{61} \tag{2.72}$$

zugeordnet. Dabei wählen wir die Bezeichnungen der Geraden der 27-Konfiguration so wie in Bemerkung 2.5.17. Die sechs Geraden aus (2.72) bilden demnach ein windschiefes Sextupel (bzw. eine halbe Doppelsechs).

*Beweis.* Wir wählen die Bezeichnungen der Geraden der 27-Konfiguration, wie in Bemerkung 2.5.17. Es sei nun  $F_3$  durch die in Bemerkung 2.6.9 definierte schiefe Projektion auf die Ebene  $\mathcal{E}_2$  durch  $\mathcal{C}_{21}$  abgebildet. Dabei sind  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  jene beiden windschiefen Geraden, auf denen die allgemeine lineare Geradenkongruenz  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  beruht und die Punkte  $\mathcal{C}'_{i_0} \in \mathcal{E}_2, i = 1, 2, \dots, 6$  so definiert wie in (2.71). Je nach Lage eines Punktes  $\mathcal{P}'_0$  auf der Ebene  $\mathcal{E}_2$  ergeben sich verschiedene Möglichkeiten.

- $\mathcal{P}'_0 \subset \mathcal{E}_2$  liege nicht auf  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$ . Dann geht durch  $\mathcal{P}'_0$  nach Bemerkung 1.5.4 eine wohlbestimmte Gerade  $\mathcal{P}_1$  von  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$ , die nicht auf der  $F_3$  liegt (alle anderen Treffgeraden von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$ , die noch auf der  $F_3$  liegen, sind windschief zu  $\mathcal{C}_{21}$ ). Es gibt wieder zwei Möglichkeiten:
  - $\mathcal{P}_1$  ist keine Tangente an die  $F_3$ . Dann schneidet  $\mathcal{P}_1$  die  $F_3$  je in einem Punkt auf  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  und in einem weiteren Punkt  $\mathcal{P}_0$ , der nicht auf  $\mathcal{A}_1$  oder  $\mathcal{B}_1$  liegt. Wir ordnen dann  $\mathcal{P}_0$  und  $\mathcal{P}'_0$  einander zu.
  - $\mathcal{P}_1$  ist Tangente an die  $F_3$ . Der Berührungspunkt  $\mathcal{P}_0$  muss dann entweder auf  $\mathcal{A}_1$  oder  $\mathcal{B}_1$  liegen, da  $\mathcal{P}_1$  sicher je einen Punkt mit diesen Geraden gemeinsam hat, und die maximale Schnittvielfachheit für eine Gerade, die nicht auf der  $F_3$  liegt, 3 beträgt. Wir ordnen wieder  $\mathcal{P}_0$  und  $\mathcal{P}'_0$  einander zu.
- $\mathcal{P}'_0 \subset \mathcal{E}_2$  liege auf  $\mathcal{C}_{21}$ , sei aber verschieden von  $\mathcal{C}'_{10}$  und  $\mathcal{C}'_{20}$ . Dann wird der Punkt einfach sich selbst zugeordnet.
- Es gelte  $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{C}'_{10}$ . Durch  $\mathcal{C}'_{10}$  gehen nun unendlich viele Kongruenzgerade (der Punkt liegt auf  $\mathcal{A}_1$ ). Jede dieser Kongruenzgeraden trifft  $(\mathcal{B}_{12})_1$ , denn: Nach Definition liegen  $\mathcal{B}_1, \mathcal{C}_{21}$  und  $(\mathcal{B}_{12})_1$  in einer Ebene  $\mathcal{P}_2$  (vergleiche Bemerkung 2.5.17) und wegen  $\mathcal{C}_{10} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{C}_{21}$  gilt auch  $\mathcal{C}_{10} \in \mathcal{P}_2$ . Damit liegen alle Kongruenzgeraden durch  $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{C}_{10}$  ebenfalls in  $\mathcal{P}_2$  und schneiden  $(\mathcal{B}_{12})_1$ . Wir ordnen nun den Punkt  $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{C}'_{10}$  allen Punkten von  $(\mathcal{B}_{12})_1$  zu.
- Analog können wir  $\mathcal{P}'_0 = \mathcal{C}'_{20}$  mit allen Punkten von  $(\mathcal{A}_{12})_1$  in Beziehung setzen.

- Schließlich werden noch alle Punkte der Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 3, 4, 5, 6$  jeweils den Punkten  $\mathcal{C}'_{i_0}, i = 3, 4, 5, 6$  zugeordnet, wodurch die Beziehung zwischen  $F_3$  und  $\mathcal{E}_2$  vervollständigt wird.

□

Wir wollen die Beziehung aus Bemerkung 2.6.9 bzw. Satz 2.6.10 etwas genauer betrachten und erhalten

**Satz 2.6.11.** *Bei der in Bemerkung 2.6.9 definierten schiefen Projektion gilt unter Verwendung der Bezeichnungen aus Bemerkung 2.5.17 Folgendes:*

- *Den sechs Geraden*

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, (\mathcal{D}_{23})_1, (\mathcal{D}_{24})_1, (\mathcal{D}_{25})_1, (\mathcal{D}_{26})_1$$

der  $F_3$ , die (2.72) zu einer Doppelsechse ergänzen, werden in dieser Reihenfolge in der Ebene  $\mathcal{E}_2$  die voneinander verschiedenen Kegelschnitte  $k_{i_2}, i = 1, 2, \dots, 6$  zugeordnet. Dabei ist  $k_{i_2}$  so definiert, dass die Kurve durch alle Punkte aus (2.71) außer  $\mathcal{C}'_{i_0}$  geht (ein Kegelschnitt ist nach Abschnitt 1.4.6 durch fünf Punkte projektiv eindeutig gegeben; siehe auch Abbildung 26).

- *Den restlichen noch verbleibenden 15 Geraden*

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_{2_1}, (\mathcal{A}_{13})_1, (\mathcal{A}_{14})_1, (\mathcal{A}_{15})_1, (\mathcal{A}_{16})_1, (\mathcal{B}_{13})_1, (\mathcal{B}_{14})_1, (\mathcal{B}_{15})_1, (\mathcal{B}_{16})_1, \\ &(\mathcal{D}_{34})_1, (\mathcal{D}_{35})_1, (\mathcal{D}_{36})_1, (\mathcal{D}_{45})_1, (\mathcal{D}_{46})_1, (\mathcal{D}_{56})_1 \end{aligned}$$

werden in der Ebene  $\mathcal{E}_2$  in gleicher Reihenfolge die Geraden

$$\begin{aligned} &(\mathcal{G}_{12})_1, (\mathcal{G}_{13})_1, (\mathcal{G}_{14})_1, (\mathcal{G}_{15})_1, (\mathcal{G}_{16})_1, (\mathcal{G}_{23})_1, (\mathcal{G}_{24})_1, (\mathcal{G}_{25})_1, (\mathcal{G}_{26})_1, \\ &(\mathcal{G}_{56})_1, (\mathcal{G}_{46})_1, (\mathcal{G}_{45})_1, (\mathcal{G}_{36})_1, (\mathcal{G}_{35})_1, (\mathcal{G}_{34})_1, \end{aligned}$$

wobei  $(\mathcal{G}_{ij})_1 = \mathcal{C}'_{i_0} \cup \mathcal{C}'_{j_0}, i \neq j$  gilt, zugeordnet.

*Beweisidee.*

- Wir starten mit der Gerade  $\mathcal{A}_1 \subset F_3$ . Die Tangenten an die  $F_3$ , die in den Punkten von  $\mathcal{A}_1$  die  $F_3$  berühren und  $\mathcal{B}_1$  schneiden, erzeugen eine kubische Regelfläche  $R_{(\mathcal{A}_1, \widehat{\mathcal{B}}_1)_3}$  mit der Doppelgerade (singulären Gerade)  $\mathcal{B}_1$  (vergleiche Satz 2.4.9 und weitere Sätze aus dem Abschnitt 2.4).
- Diese Regelfläche enthält die fünf Geraden  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 2, 3, \dots, 6$  und schneidet die Ebene  $\mathcal{E}_2$  außer in der Geraden  $\mathcal{C}_{2_1}$  noch in einem Kegelschnitt  $k_{1_2}$ .
- Dieser geht sicher durch die Punkte  $\mathcal{C}'_{i_0}, i = 3, 4, 5, 6$ , da  $\mathcal{C}_{i_1}, i = 3, 4, 5, 6$  windschief zu  $\mathcal{C}_{2_1}$  liegen. Außerdem geht der Kegelschnitt auch noch durch  $\mathcal{C}'_{2_0}$ , da dieser Punkt singulär für die Regelfläche ist und damit auch nach Satz 2.3.1 singulär für den Schnitt mit der Ebene  $\mathcal{E}_2$  sein muss (siehe auch Abschnitt 1.4.2).
- Analog erzeugen die Tangenten an die  $F_3$ , die in Punkten auf  $\mathcal{B}_1$  die Fläche berühren und  $\mathcal{A}_1$  schneiden, eine Regelfläche  $R_{(\widehat{\mathcal{A}}_1, \mathcal{B}_1)_3}$  mit  $\mathcal{A}_1$  als singuläre Gerade. Diese hat dann mit der Ebene  $\mathcal{E}_2$  neben der Geraden  $\mathcal{C}_{2_1}$  noch einen  $\mathcal{C}'_{i_0}, i = 1, 3, 4, 5, 6$  enthaltenden Kegelschnitt  $k_{2_2}$  gemeinsam.

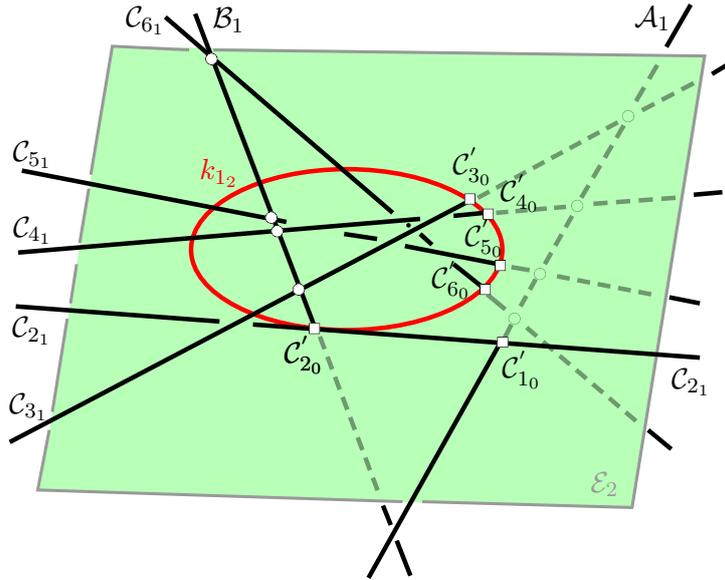


Abbildung 26: Der  $\mathcal{A}_1$  zugeordnete Kegelschnitt  $k_{12}$

- Wäre  $k_{12} = k_{22}$ , so lässt sich zeigen, dass dann auch  $R_{(\mathcal{A}_1, \widehat{\mathcal{B}}_1)_3} = R_{(\widehat{\mathcal{A}}_1, \widehat{\mathcal{B}}_1)_3}$  gelten muss. Es hätte  $F_3$  dann unendlich viele Tangenten, die gleichzeitig in Punkten auf  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  berühren und damit schon ganz auf der  $F_3$  liegen müssten. Damit wäre aber  $F_3$  eine Regelfläche und sicher nicht singularitätenfrei.
- Alle Geraden von  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$ , die neben  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  auch noch eine der Geraden  $(\mathcal{D}_{2i})_1, i = 3, 4, 5, 6$  treffen, erzeugen nach Abschnitt 1.6.5 eine Quadrik, die  $\mathcal{E}_2$  in einem Kegelschnitt  $k_{i2}$  schneidet, der alle Punkte aus (2.71) außer  $\mathcal{C}'_{i0}$  enthält ( $(\mathcal{D}_{2i})_1$  trifft alle Geraden aus (2.72) außer  $\mathcal{C}_{i1}$ ). Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.
- Wir wissen schon, dass die Gerade  $\mathcal{C}_{21}$  sich selbst zugeordnet wird.
- $(\mathcal{A}_{13})_1$  liegt in der von  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{C}_{31}$  aufgespannten Ebene  $\mathcal{P}_2$ . Diese hat mit  $\mathcal{B}_1$  nur einen gemeinsamen Punkt  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{C}_{31} \cap \mathcal{B}_1$ . Alle Punkte aus  $\mathcal{P}_2$  werden daher von einem Element aus  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  getroffen, das durch  $\mathcal{P}_0$  geht. Verbindet man nun einen Punkt von  $(\mathcal{A}_{13})_1$  mit  $\mathcal{P}_0$ , erhält man eine Gerade, die  $\mathcal{E}_2$  in  $(\mathcal{G}_{13})_1$  schneidet, da wegen  $\mathcal{C}'_{10} \in \mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{C}'_{30} \in \mathcal{C}_{31}$  auch  $(\mathcal{G}_{13})_1 \subset \mathcal{P}_2$  gilt.
- Analog geht man für  $(\mathcal{A}_{1i})_1, i = 4, 5, 6$  und  $(\mathcal{B}_{1i})_1, i = 3, 4, 5, 6$  vor.
- Alle Geraden von  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$ , die neben  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$  auch noch  $(\mathcal{D}_{34})_1, i = 3, 4, 5, 6$  treffen, erzeugen nach Abschnitt 1.6.5 eine Quadrik. Diese enthält nach Bemerkung 2.5.17  $\mathcal{C}_{21}$ ,  $\mathcal{C}_{51}$  und  $\mathcal{C}_{61}$ . Damit muss die Quadrik die Ebene  $\mathcal{E}_2$  in einem Kegelschnitt schneiden, der in die Gerade  $\mathcal{C}_{21}$  und die Verbindungsgerade  $(\mathcal{G}_{56})_1 = \mathcal{C}'_{50} \cup \mathcal{C}'_{60}$  ( $\mathcal{C}_{51}$  und  $\mathcal{C}_{61}$  sind windschief zu  $\mathcal{C}_{21}$ ) zerfällt.
- Analog verfährt man für die übrigen Geraden.

*Bemerkung 2.6.12.* Wir wollen nun die Abbildungen aus den Sätzen 2.6.7, 2.6.8 und 2.6.10 (bzw. Bemerkung 2.6.9) rechnerisch für ein Beispiel betrachten.

Die folgenden vier Geraden sollen ganz auf der singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  liegen:

$$\mathcal{A}_1 : x_2 = x_3 = 0, \mathcal{B}_1 : x_0 = x_1 = 0, \mathcal{C}_2 : x_0 = x_3 = 0, \mathcal{C}_3 : x_1 = x_2 = 0. \quad (2.73)$$

Wir haben schon des öfteren gesehen, wie man Parameterdarstellungen dieser Geraden verwendet, um die allgemeine Gleichung (I) einer  $F_3$  zu reduzieren (zum Beispiel im Beweis von Satz 2.5.8). Für diese speziellen Geraden erhält man schlussendlich für die  $F_3$  eine Gleichung der Gestalt

$$x_0(a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3) + x_1(2b_{23}x_2x_3 + b_{33}x_3^2) + \alpha_2x_0^2x_2 + 2x_0x_1(\beta_2x_2 + \beta_3x_3) + \gamma_3x_1^2x_3 = 0. \quad (2.74)$$

Ein Punkt, der auf  $\mathcal{A}_1$  liegt, hat die Gestalt  $\mathcal{A}_0 = (u_0, u_1, 0, 0)$  mit  $(u_0, u_1) \neq (0, 0)$ . Analog hat ein Punkt auf  $\mathcal{B}_1$  die Gestalt  $\mathcal{B}_0 = (0, 0, v_0, v_1)$ . Für eine beliebige Gerade  $\mathcal{P}_1$  aus der allgemeinen linearen Geradenkongruenz  $L(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$  erhält man damit die Parameterdarstellung

$$x_0 = \lambda u_0, x_1 = \lambda u_1, x_2 = \mu v_0, x_3 = \mu v_1 \quad (2.75)$$

bzw. in Plückerkoordinaten

$$p_{01} = p_{23} = 0, p_{02} = u_0v_0, p_{03} = u_0v_1, p_{12} = u_1v_0, p_{13} = u_1v_1. \quad (2.76)$$

Setzt man (2.75) in (2.74) ein (schneidet also  $\mathcal{P}_1$  mit  $F_3$ ), erhält man

$$\begin{aligned} & \lambda\mu(\lambda(\alpha_2u_0^2v_0 + 2\beta_2u_0u_1v_0 + 2\beta_3u_0u_1v_1 + \gamma_3u_1^2v_1) \\ & + \mu(a_{22}u_0v_0^2 + 2a_{23}u_0v_0v_1 + 2b_{23}u_1v_0v_1 + b_{33}u_1v_1^2)) = 0 \end{aligned}$$

und damit die drei Schnittpunkte für  $(\lambda = 1, \mu = 0)$ ,  $(\lambda = 0, \mu = 1)$  und

$$\lambda = -(a_{22}u_0v_0^2 + 2a_{23}u_0v_0v_1 + 2b_{23}u_1v_0v_1 + b_{33}u_1v_1^2), \quad (2.77)$$

$$\mu = \alpha_2u_0^2v_0 + 2\beta_2u_0u_1v_0 + 2\beta_3u_0u_1v_1 + \gamma_3u_1^2v_1. \quad (2.78)$$

Die ersten beiden liegen jeweils auf  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{B}_1$ . Der dritte ist im Allgemeinen auf keiner der beiden Geraden. Wir bezeichnen diesen Schnittpunkt von  $F_3$  und  $\mathcal{P}_1$  mit  $\mathcal{P}_0$ . Setzt man die gefundenen Werte (2.77) und (2.78) für  $\lambda$  und  $\mu$  in (2.75) ein, erhält man die Koordinaten

$$x_0 = -a_{22}u_0^2v_0^2 - 2a_{23}u_0^2v_0v_1 - 2b_{23}u_0u_1v_0v_1 - b_{33}u_0u_1v_1^2 \quad (2.79)$$

$$x_1 = -a_{22}u_0u_1v_0^2 - 2a_{23}u_0u_1v_0v_1 - 2b_{23}u_1^2v_0v_1 - b_{33}u_1^2v_1^2 \quad (2.80)$$

$$x_2 = \alpha_2u_0^2v_0^2 + 2\beta_2u_0u_1v_0^2 + 2\beta_3u_0u_1v_0v_1 + \gamma_3u_1^2v_0v_1 \quad (2.81)$$

$$x_3 = \alpha_2u_0^2v_0v_1 + 2\beta_2u_0u_1v_0v_1 + 2\beta_3u_0u_1v_1^2 + \gamma_3u_1^2v_1^2 \quad (2.82)$$

für den Punkt  $\mathcal{P}_0$ . Wir können wegen (2.76) die Beziehungen (2.79)-(2.82) auch schreiben als

$$x_0 = -a_{22}p_{02}^2 - 2a_{23}p_{02}p_{03} - 2b_{23}p_{02}p_{13} - b_{33}p_{03}p_{13} \quad (2.83)$$

$$x_1 = -a_{22}p_{02}p_{12} - 2a_{23}p_{02}p_{13} - 2b_{23}p_{12}p_{13} - b_{33}p_{13}^2 \quad (2.84)$$

$$x_2 = \alpha_2p_{02}^2 + 2\beta_2p_{02}p_{12} + 2\beta_3p_{02}p_{13} + \gamma_3p_{12}p_{13} \quad (2.85)$$

$$x_3 = \alpha_2p_{02}p_{03} + 2\beta_2p_{02}p_{13} + 2\beta_3p_{03}p_{13} + \gamma_3p_{13}^2, \quad (2.86)$$

wobei für die  $p_{ij}$  die Gleichung der Quadrik

$$Q_2 : p_{02}p_{13} - p_{03}p_{12} = 0 \quad (2.87)$$

gelten muss (die Geraden aus (2.76) bzw. (2.75) liegen alle auf  $\mathcal{Q}_2$ ).

Die Ausdrücke (2.83)-(2.86) und (2.87) beschreiben die Beziehung zwischen einem Punkt von  $\mathcal{Q}_2$  und einem Punkt  $\mathcal{P}_0 \in F_3$  aus Satz 2.6.8.

Oder: Die Ausdrücke (2.79)-(2.82) beschreiben die Beziehung zwischen einer Geraden aus  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  und einem Punkt  $\mathcal{P}_0 \in F_3$  aus Satz 2.6.7.

Um die schiefe Projektion aus Satz 2.6.10 (bzw. Bemerkung 2.6.9) rechnerisch zu erfassen, wählen wir die Ebene

$$\mathcal{E}_2 : x_3 - x_0 = 0. \quad (2.88)$$

Aus Bemerkung 1.5.6 wissen wir dann, dass sich die Elemente der allgemeinen linearen Geradenkongruenz  $L_{\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1}$  (bzw. die Punkte der Quadrik  $\mathcal{Q}_2$ ) und die Punkte  $\mathcal{P}'_0 = (y_0, y_1, y_2, y_0) \in \mathcal{E}_2$  durch

$$p_{01} = p_{23} = 0, p_{02} = y_0 y_2, p_{03} = y_0^2, p_{12} = y_1 y_2, p_{13} = y_0 y_1 \quad (2.89)$$

eindeutig aufeinander beziehen lassen. Setzt man 2.89 in (2.83)-(2.86) ein, erhält man nach dem Kürzen eines gemeinsamen Faktors  $y_0$  ( $y_0 = 0$  entspricht der Ausnahmegerade  $\mathcal{C}_{21}$ )

$$\begin{aligned} x_0 &= y_0 \psi, x_1 = y_1 \psi, x_2 = y_2 \phi, x_3 = y_0 \phi \\ \text{mit } \psi &= -a_{22} y_2^2 - 2a_{23} y_0 y_2 - 2b_{23} y_1 y_2 - b_{33} y_0 y_1 \\ \text{und } \phi &= \alpha_2 y_0 y_2 + 2\beta_2 y_1 y_2 + 2\beta_3 y_0 y_1 + \gamma_3 y_1^2. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Damit haben wir nun eine rationale Parameterdarstellung unserer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  erhalten.

Abschließend erhalten wir eine zu Satz 2.6.5 ähnliche Aussage zu den ebenen Schnittkurven der  $F_3$ .

**Satz 2.6.13.** *Die schiefe Projektion aus Satz 2.6.10 (bzw. Bemerkung 2.6.9), die die singularitätenfreie kubische Fläche  $F_3$  auf die Ebene  $\mathcal{E}_2$  abbildet, ordnet dem  $\infty^3$ -Linearsystem der ebenen Schnittkurven ( $\infty^3$  entspricht der Anzahl aller möglichen Ebenen) der  $F_3$  das Linearsystem aller ebenen kubischen Kurven durch die Punkte  $\mathcal{C}'_{i_0}$  aus (2.71) zu.*

*Umgekehrt wird durch das System aller ebenen kubischen Kurven, die sechs nicht einem Kegelschnitt angehörige Punkte einer Ebene enthalten, eine ebene Abbildung einer projektiv eindeutigen singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  beschrieben.*

*Beweis.*

- Von einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  sei eine Parameterdarstellung (2.90) gegeben (durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems ist es immer möglich, die Ausgangslage (2.73) und (2.88) in Bemerkung 2.6.12 zu erhalten).
- Wir wählen eine beliebige Ebene

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0. \quad (2.91)$$

Diese schneidet die  $F_3$  in einer kubischen Kurve  $k_3$ , deren Punkten unter der schiefen Projektion gewisse Punkte der Ebene  $\mathcal{E}_2$  entsprechen. Um diese Punkte in  $\mathcal{E}_2$  zu erhalten, muss lediglich die Parameterdarstellung (2.90) in (2.91) eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$\lambda_0 y_0 \psi + \lambda_1 y_1 \psi + \lambda_2 y_2 \phi + \lambda_3 y_0 \phi = 0, \quad (2.92)$$

wobei  $(y_0, y_1, y_2)$  die Parameter in der Ebene  $\mathcal{E}_2$  sind.

- (2.92) ist also ein Linearsystem von kubischen Kurven  $\widehat{k}_3$  in der Ebene  $\mathcal{E}_2$ .
- Aus (2.92) kann man direkt ablesen, dass jede  $\widehat{k}_3$  eine Linearkombination von vier zerfallenden kubischen Kurven

$$\lambda_0 y_0 \psi = 0, \lambda_1 y_1 \psi = 0, \lambda_2 y_2 \phi = 0, \lambda_3 y_0 \phi = 0 \quad (2.93)$$

ist, die jeweils aus einer Geraden und einem Kegelschnitt  $k_{\psi_2} : \psi = 0$  oder  $k_{\phi_2} : \phi = 0$  in der Ebene  $\mathcal{E}_2$  bestehen.

- Da wir (2.73) und (2.88) aus Bemerkung 2.6.12 als unsere Ausgangslage gewählt haben, ergibt sich für die Punkte  $\mathcal{C}'_{i_0}, i = 1, 2, 3$  die Darstellung

$$\mathcal{C}'_{1_0} = (0, 1, 0, 0), \mathcal{C}'_{2_0} = (0, 0, 1, 0), \mathcal{C}'_{3_0} = (1, 0, 0, 1). \quad (2.94)$$

Durch Einsetzen der Punkte in die Gleichungen für  $k_{\psi_2}$  und  $k_{\phi_2}$  sieht man, dass

$$\mathcal{C}'_{1_0}, \mathcal{C}'_{3_0} \in k_{\psi_2}, \mathcal{C}'_{2_0}, \mathcal{C}'_{3_0} \in k_{\phi_2}$$

und

$$\mathcal{C}'_{1_0} \notin k_{\phi_2}, \mathcal{C}'_{2_0} \notin k_{\psi_2}$$

gilt, da  $\gamma_3 \neq 0$  und  $b_{33} \neq 0$  gelten muss, sonst wäre die durch (2.74) gegebene  $F_3$  nicht singularitätenfrei (im ersten Fall wäre  $(0, 1, 0, 0)$  und im zweiten  $(0, 0, 0, 1)$  singular, was man durch Bilden der partiellen Ableitungen und Einsetzen dieser Punkte schnell nachrechnen kann).

- Betrachtet man nun das Linearsystem aus (2.92), so sieht man, dass  $\mathcal{C}'_{i_0}, i = 1, 2, 3$  auf allen ebenen kubischen Kurven  $\widehat{k}_3$  dieses Systems liegen (zum Beispiel gilt wegen  $\mathcal{C}'_{1_0} \in k_{\psi_2}$ , dass  $\psi = 0$  ist und wegen  $y_0 = y_2 = 0$  verschwindet auch der von  $\phi$  abhängende Teil).
- Auch alle Punkte, die sowohl auf  $k_{\psi_2}$  als auch auf  $k_{\phi_2}$  liegen (nach Satz 1.4.26 sind das neben  $\mathcal{C}'_{3_0}$  noch maximal drei), sind auf allen ebenen kubischen Kurven des Linearsystems (2.92), da für diese Punkte sowohl  $\psi = 0$  als auch  $\phi = 0$  gilt. Zusammen mit  $\mathcal{C}'_{i_0}, i = 1, 2$  sind das dann gleichzeitig auch alle sechs Punkte der Ebene  $\mathcal{E}_2$ , für die alle rechten Seiten aus (2.90) verschwinden und damit auch alle Punkte, die gleichzeitig auf allen ebenen kubischen Kurven des Linearsystems (2.92) liegen.  
(Ist  $\psi \neq 0$ , muss  $y_0 = y_1 = 0$  gelten. Dann ist aber schon  $\phi = 0$ . Ist andererseits  $\phi \neq 0$ , muss schon  $y_0 = y_2 = 0$  erfüllt sein und damit ist  $\psi = 0$ . Bleiben noch die maximal vier gemeinsamen Punkte, für die  $\phi = \psi = 0$  gilt.)
- Jede beliebige Ebene (2.91) schneidet alle sechs Ausnahmeggeraden aus (2.72). Nach Satz 2.6.10 werden alle Punkte dieser Geraden unter der schiefen Projektion auf die sechs Punkte  $\mathcal{C}'_{i_0} \in \mathcal{E}_2, i = 1, 2, \dots, 6$  abgebildet.
- Damit müssen alle ebenen kubischen Kurven des Linearsystems aus (2.92) ebenfalls diese sechs Punkte enthalten. Wir haben im vorletzten Beweisschritt schon gesehen, welche Punkte auf allen Kurven des Linearsystems (2.92) liegen, und damit müssen dann  $\mathcal{C}'_{i_0}, i = 4, 5, 6$  die weiteren drei neben  $\mathcal{C}'_{3_0}$  noch vorhandenen Schnittpunkte von  $k_{\psi_2}$  und  $k_{\phi_2}$  sein.

- Damit gilt mit den Bezeichnungen aus Satz (2.6.11)

$$k_{\psi_2} = k_{2_2} \text{ und } k_{\phi_2} = k_{1_2}.$$

- (2.92) ist ein  $\infty^3$ -Linearsystem, sonst müssten zumindest zwei rechte Seiten von (2.90) bis auf einen Faktor übereinstimmen, womit man dann keine Parameterdarstellung einer kubischen Fläche hätte. Das System aller ebenen kubischen Kurven, die durch die Punkte  $C'_{i_0} \in \mathcal{E}_2, i = 1, 2, \dots, 6$  gehen, die nicht auf einem Kegelschnitt liegen, ist nach Abschnitt 1.4.7 ebenfalls ein  $\infty^3$ -Linearsystem und stimmt daher mit (2.92) überein.
- Geht man umgekehrt von sechs Punkten  $C'_{i_0}, i = 1, 2, \dots, 6$  einer Ebene  $\mathcal{E}_2$  aus, die nicht auf einem Kegelschnitt liegen, so kann man mit  $\psi = 0$  und  $\phi = 0$  die Gleichungen der nach Abschnitt 1.4.6 durch  $C'_{i_0}, i = 1, 3, 4, 5, 6$  und  $C'_{i_0}, i = 2, 3, 4, 5, 6$  projektiv eindeutig gegebenen Kegelschnitte  $k_{\psi_2}$  und  $k_{\phi_2}$  angeben. Dabei wählt man das Koordinatensystem so, dass man  $C'_{i_0}, i = 1, 2, 3$  wie in (2.94) erhält.  $\mathcal{E}_2$  sei wieder durch  $\mathcal{E}_2 : x_3 - x_0 = 0$  gegeben.
- Damit erhält man für das Linearsystem aller ebenen kubischen Kurven durch die Punkte  $C'_{i_0}, i = 1, 2, \dots, 6$  die Beziehung (2.92), und daraus die Parameterdarstellung (2.90) einer  $F_3$  mit der Gleichung (2.74).

□

*Bemerkung 2.6.14.* Liegen alle sechs Punkte  $C'_{i_0}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  auf einem Kegelschnitt, so erhält man auf die im zweiten Teil des Beweises von Satz 2.6.13 beschriebene Weise alle Typen kubischer Flächen mit singulären Punkten (vergleiche Satz 2.3.2). Hat beispielsweise die kubische Fläche  $F_3$  nur einen konischen Doppelpunkt  $\mathcal{S}_0$ , so besitzt sie nach Satz 2.3.2, sechs Gerade durch  $\mathcal{S}_0$ , die ganz auf  $F_3$  liegen. Es lässt sich zeigen, dass die 15 Ebenen, die je zwei dieser Geraden aufspannen, je noch eine weitere Gerade der  $F_3$  enthalten, die nicht durch  $\mathcal{S}_0$  geht (die Schnittkurve muss nämlich eine  $k_3$  sein). Auf dieser  $F_3$  liegen dann genau diese 21 Geraden, wobei man die sechs Geraden durch  $\mathcal{S}_0$  als Grenzfall der zwölf Geraden einer Doppelsechse einer singularitätenfreien kubischen Fläche auffassen kann.

*Bemerkung 2.6.15.* Da eine reelle singularitätenfreie kubische Fläche keine zwei windschiefen reellen Geraden haben muss (vergleiche Bemerkung 2.5.26), lassen sich reelle singularitätenfreie kubische Flächen im Allgemeinen nicht durch die schiefe Projektion aus Bemerkung 2.6.9 parametrisieren. Man kann zeigen, dass sich dann auch keine andere Parametrisierung finden lässt.

## 2.7 Dualgebilde kubischer Flächen

Im Allgemeinen lässt sich nicht einfach zu gegebener kubischer Fläche das mit ihr verbundene Dualgebilde finden (vergleiche Abschnitt 1.6.4). Für drei Typen von kubischen Flächen – jene mit vier isolierten Singularitäten und die zwei Typen kubischer Regelflächen ausgenommen den Kegeln – haben wir allerdings eine projektive Normalform entwickelt (vergleiche die Sätze 2.3.8 und 2.4.9).

### 2.7.1 Dualgebilde kubischer Flächen mit vier isolierten Singularitäten

Nach Satz 2.3.8 sind alle kubischen Flächen mit vier isolierten Singularitäten projektiv äquivalent und die projektive Normalform lautet

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3 + x_0x_1x_3 + x_0x_1x_2 = 0. \quad (2.95)$$

Dabei haben wir die vier Koordinatenecken als singuläre Punkte gewählt. Es gilt nun folgender

**Satz 2.7.1.** *Eine Ebene*

$$\mathcal{P}_2 : \zeta_0x_0 + \zeta_1x_1 + \zeta_2x_2 + \zeta_3x_3 = 0$$

mit den Koordinaten  $\zeta_i, i = 0, 1, 2, 3$  ist genau dann reguläre oder singuläre Tangentialebene (vergleiche Abschnitt 1.6.4) einer kubischen Fläche  $F_3$  mit der Gleichung (2.95), wenn bei irgendeiner Vorzeichenverteilung

$$\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1} + \sqrt{\zeta_2} + \sqrt{\zeta_3} = 0 \quad (2.96)$$

gilt (wir rechnen in  $\mathbb{C}$ ).

*Beweis.*

- Nach Definition 1.6.4 erhält man die Koordinaten  $\zeta_i, i = 0, 1, 2, 3$  einer Tangentialebene für einen regulären Punkt  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  durch Bildung der partiellen Ableitungen von (2.95). Es ergibt sich

$$\zeta_0 = \frac{\partial f}{\partial x_0}(p_0, p_1, p_2, p_3) = p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3, \quad (2.97)$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0, p_1, p_2, p_3) = p_0p_2 + p_0p_3 + p_2p_3, \quad (2.98)$$

$$\zeta_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0, p_1, p_2, p_3) = p_0p_1 + p_0p_3 + p_1p_3, \quad (2.99)$$

$$\zeta_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}(p_0, p_1, p_2, p_3) = p_0p_1 + p_0p_2 + p_1p_2. \quad (2.100)$$

- Wir betrachten zuerst nur Punkte der  $F_3$  für die  $p_i \neq 0, i = 0, 1, 2, 3$  gilt. Man erhält aus (2.97)-(2.100)

$$\zeta_0 = \frac{1}{p_0} \underbrace{(p_0p_1p_2 + p_0p_1p_3 + p_0p_2p_3)}_{=-p_1p_2p_3 \text{ wegen (2.95)}} = -\frac{1}{p_0}p_1p_2p_3 = -\frac{p_0p_1p_2p_3}{p_0^2},$$

$$\zeta_1 = -\frac{p_0p_1p_2p_3}{p_1^2},$$

$$\zeta_2 = -\frac{p_0p_1p_2p_3}{p_2^2},$$

$$\zeta_3 = -\frac{p_0p_1p_2p_3}{p_3^2},$$

und damit weiter

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1} + \sqrt{\zeta_2} + \sqrt{\zeta_3} = \\
& \sqrt{-\frac{p_0 p_1 p_2 p_3}{p_0^2}} + \sqrt{-\frac{p_0 p_1 p_2 p_3}{p_1^2}} + \sqrt{-\frac{p_0 p_1 p_2 p_3}{p_2^2}} + \sqrt{-\frac{p_0 p_1 p_2 p_3}{p_3^2}} = \\
& \sqrt{-p_0 p_1 p_2 p_3} \left( \frac{1}{p_0} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right) = \\
& \sqrt{-p_0 p_1 p_2 p_3} \underbrace{\left( \frac{p_1 p_2 p_3 + p_0 p_2 p_3 + p_0 p_1 p_3 + p_0 p_1 p_2}{p_0 p_1 p_2 p_3} \right)}_{=0 \text{ wegen (2.95)}} = 0.
\end{aligned}$$

- Umgekehrt sei eine Ebene  $\mathcal{P}_2$  gegeben durch ein System von Zahlen  $\zeta_i \neq 0, i = 0, 1, 2, 3$ , dass (2.96) erfüllt, also

$$\mathcal{P}_2 : \zeta_0 x_0 + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 = 0. \quad (2.101)$$

Durch Einsetzen in (2.101) sieht man, dass wegen der Beziehung (2.96) der Punkt  $\mathcal{P}_0 = (\frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_2}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_3}})$  auf dieser Ebene liegt.

- Dieser Punkt liegt auch auf der durch (2.95) gegebenen  $F_3$ , denn es gilt

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_2}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_3}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}} + \frac{1}{\sqrt{\zeta_0 \zeta_2 \zeta_3}} + \frac{1}{\sqrt{\zeta_0 \zeta_1 \zeta_3}} + \frac{1}{\sqrt{\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2}} \\
&= \frac{\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1} + \sqrt{\zeta_2} + \sqrt{\zeta_3}}{\underbrace{\sqrt{\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}}_{=0 \text{ wegen (2.96)}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- Setzt man  $\mathcal{P}_0$  in die partiellen Ableitungen (2.97)-(2.100) von (2.95) ein, erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_2}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_3}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\zeta_1 \zeta_2}} + \frac{1}{\sqrt{\zeta_1 \zeta_3}} + \frac{1}{\sqrt{\zeta_2 \zeta_3}} \\
&= \underbrace{(\sqrt{\zeta_1} + \sqrt{\zeta_2} + \sqrt{\zeta_3})}_{=-\sqrt{\zeta_0} \text{ wegen (2.96)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}} \\
&= \frac{-\sqrt{\zeta_0}}{\sqrt{\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}} \\
&= \frac{-\zeta_0}{\sqrt{\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_2}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_3}}\right) &= \frac{-\zeta_1}{\sqrt{\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}} \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_2}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_3}}\right) &= \frac{-\zeta_2}{\sqrt{\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}} \\
\frac{\partial f}{\partial x_3}\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_2}}, \frac{1}{\sqrt{\zeta_3}}\right) &= \frac{-\zeta_3}{\sqrt{\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3}}.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man wegen Definition 1.6.4 im Punkt  $\mathcal{P}_0$  die Tangentialebene

$$-\frac{1}{\sqrt{\zeta_0\zeta_1\zeta_2\zeta_3}}(\zeta_0x_0 + \zeta_1x_1 + \zeta_2x_2 + \zeta_3x_3) = 0,$$

die mit (2.101) bis auf einen projektiv unwesentlichen Faktor übereinstimmt.

- Jetzt müssen wir noch jene Punkte  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  der  $F_3$  betrachten, für die nicht alle  $p_i \neq 0, i = 0, 1, 2, 3$  sind.
- Wir untersuchen zunächst die Ebene  $x_3 = 0$ . In dieser liegen nach der Konstruktion der  $F_3$  mit der Gleichung (2.95) im Satz 2.3.8 die drei singulären Punkte  $\mathcal{A}_0 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathcal{B}_0 = (0, 1, 0, 0)$  und  $\mathcal{C}_0 = (0, 0, 1, 0)$ . Nach Bemerkung 2.3.5 sind auch die drei Verbindungsgeraden dieser Punkte schon ganz auf der  $F_3$ . Da in einem ebenen Schnitt mit einer kubischen Fläche nicht mehr als eine ebene kubische Kurve  $k_3$  liegen kann, können reguläre Punkte der  $F_3$  nur auf diesen drei Verbindungsgeraden liegen. Analoges erhält man für die anderen drei Ebenen  $x_0 = 0, x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$ .
- Wir brauchen also nur mehr die sechs Verbindungsgeraden der singulären Punkte zu betrachten (zur Erinnerung: der vierte singuläre Punkt hat die Darstellung  $\mathcal{D}_0 = (0, 0, 0, 1)$ ). Untersuchen wir beispielsweise die Gerade  $x_0 = x_1 = 0$ . Diese hat eine Parameterdarstellung der Gestalt  $x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = \lambda, x_3 = \mu$ . Setzt man jetzt einen beliebigen Punkt dieser Geraden in (2.97)-(2.100) ein, um die Tangentialebene zu berechnen, erhält man

$$\zeta_0 = \lambda\mu, \zeta_1 = \lambda\mu, \zeta_2 = 0, \zeta_3 = 0,$$

und somit für die Ebene die Darstellung

$$\lambda\mu(x_0 + x_1) = 0.$$

Damit ist für alle Punkte dieser Geraden, außer für die beiden singulären Punkte, die Tangentialebene gegeben durch  $x_0 + x_1 = 0$ . Mit der richtigen Wahl der Vorzeichen erhält man in (2.96)  $\sqrt{\lambda\mu} - \sqrt{\lambda\mu} = 0$ .

- Wir betrachten schließlich noch die vier singulären Punkte selber. Nach Definition 1.6.16 sind die singulären Tangentialebenen  $\zeta_0x_0 + \zeta_1x_1 + \zeta_2x_2 + \zeta_3x_3 = 0$  gegeben durch alle Ebenen, die den Tangentialkegel des singulären Punktes berühren. Dieser kann beispielsweise für den Punkt  $\mathcal{D}_0 = (0, 0, 0, 1)$  aus der Gleichung (2.95) der  $F_3$  abgelesen werden. Wir formen (2.95) um und erhalten

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3(x_1x_2 + x_0x_2 + x_0x_1) + x_0x_1x_2 = 0.$$

Der Tangentialkegel  $K_{\mathcal{D}_0}$  ist wegen (2.2) (bzw. Bemerkung 1.6.5) gegeben durch

$$K : x_1x_2 + x_0x_2 + x_0x_1 = 0. \tag{2.102}$$

- Wir suchen die Tangentialebenen an diesen Kegel und bestimmen nach Definition 1.6.4 die partiellen Ableitungen für einen beliebigen Punkt  $(p_0, p_1, p_2, p_3) \neq \mathcal{D}_0$  von  $K$ . Wir

erhalten

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial x_0}(p_0, p_1, p_2, p_3) &= p_1 + p_2, \\ \frac{\partial K}{\partial x_1}(p_0, p_1, p_2, p_3) &= p_0 + p_2, \\ \frac{\partial K}{\partial x_2}(p_0, p_1, p_2, p_3) &= p_0 + p_1, \\ \frac{\partial K}{\partial x_3}(p_0, p_1, p_2, p_3) &= 0,\end{aligned}$$

und setzen diese Bedingungen in (2.96) ein, wobei ohnehin  $\zeta_3 = 0$  gelten muss, da der Punkt  $\mathcal{D}_0$  in jeder seiner singulären Tangentialebenen liegt. Somit erhalten wir für  $p_0 \neq -p_1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{p_0 + p_1}}(p_0 + p_1 + \sqrt{p_0^2 + \underbrace{p_0p_1 + p_0p_2 + p_1p_2}_{=0 \text{ wegen 2.102}}} + \sqrt{p_1^2 + \underbrace{p_0p_1 + p_0p_2 + p_1p_2}_{=0 \text{ wegen 2.102}}}) &= \\ \frac{1}{\sqrt{p_0 + p_1}}(p_0 + p_1 + \sqrt{p_0^2} + \sqrt{p_1^2}) &= 0,\end{aligned}$$

sofern wir die Vorzeichen entsprechend wählen. Für  $p_0 = -p_1$  muss wegen (2.102) bereits  $p_1 = 0$  gelten, und man erhält in (2.96)

$$\sqrt{p_2} + \sqrt{p_2} = 0$$

bei richtiger Wahl der Vorzeichen.

- Ist umgekehrt eine Ebene  $\mathcal{P}_2 : \zeta_0x_0 + \zeta_1x_1 + \zeta_2x_2 + \zeta_3x_3 = 0$  mit der Bedingung (2.96) gegeben, für die mindestens ein  $\zeta_i, i = 0, 1, 2, 3$  verschwindet, so lässt sich leicht zeigen, dass diese Ebene tangential an die  $F_3$  in einem Punkt auf den Verbindungsgeraden der singulären Punkte oder in einer Singularität selbst ist. (Wir wollen für jede mögliche Anzahl von verschwindenden  $\zeta_i, i = 0, 1, 2, 3$  ein Beispiel angeben. Die anderen Fälle ergeben sich dann analog.

- $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 0$ : Wegen (2.96) gilt auch  $\zeta_0 = 0$  und wir erhalten keine Ebene.
- $\zeta_2 = \zeta_3 = 0$ : Wegen (2.96) gilt  $\zeta_0 = \zeta_1$  und wir erhalten Ebenen der Gestalt  $x_0 + x_1 = 0$ . Wir wissen bereits, dass eine Ebene dieser Gestalt tangential zu allen regulären Punkten auf der Verbindungsgeraden von  $\mathcal{C}_0$  und  $\mathcal{D}_0$  ist.
- $\zeta_3 = 0$ : Wir erhalten Ebenen der Gestalt

$$\zeta_0x_0 + \zeta_1x_1 + \zeta_2x_2 = 0 \tag{2.103}$$

mit der Bedingung  $\sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1} + \sqrt{\zeta_2} = 0$  (wegen 2.96). Wir untersuchen zunächst

diese Bedingung:

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1} + \sqrt{\zeta_2} = 0 \\
\iff & \sqrt{\zeta_0} + \sqrt{\zeta_1} = -\sqrt{\zeta_2} \\
\iff & \zeta_0 + \zeta_1 + 2\sqrt{\zeta_0\zeta_1} = \zeta_2 \\
\iff & \zeta_2 - \zeta_0 - \zeta_1 = 2\sqrt{\zeta_0\zeta_1} \\
\iff & \zeta_0^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\zeta_0\zeta_1 - 2\zeta_0\zeta_2 - 2\zeta_1\zeta_2 = 4\zeta_0\zeta_1 \\
\iff & \zeta_0^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 - 2\zeta_0\zeta_1 - 2\zeta_0\zeta_2 - 2\zeta_1\zeta_2 = 0 \\
\iff & -\zeta_0^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + 2\zeta_0\zeta_1 + 2\zeta_0\zeta_2 + 2\zeta_1\zeta_2 = 0. \tag{2.104}
\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass eine beliebige Ebene  $\mathcal{P}_2$  der Gestalt (2.103) den Tangentialkegel  $K_{\mathcal{D}_0}$  von  $\mathcal{D}_0$  berührt, also eine singuläre Tangentialebene ist.  $K_{\mathcal{D}_0}$  hat die Gleichung (2.102). Dazu betrachten wir nun den Punkt

$$\mathcal{P}_0 = \left(\frac{1}{2}(-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2), 0\right).$$

$\mathcal{P}_0$  liegt auf  $K_{\mathcal{D}_0}$ , denn wenn wir den Punkt einsetzen in (2.102), erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}((\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2) + (-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2) \\
& \quad + (-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2)) = \\
& \quad \frac{1}{4}(-\zeta_0^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + 2\zeta_0\zeta_1 + 2\zeta_0\zeta_2 + 2\zeta_1\zeta_2) \stackrel{(\star)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Dabei gilt  $(\star)$  wegen der Beziehung (2.104), die wir aus (2.96) abgeleitet haben. Außerdem liegt  $\mathcal{P}_0$  auf der Ebene  $\mathcal{P}_2$ , denn es gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}(\zeta_0(-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2) + \zeta_1(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2) + \zeta_2(\zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2)) = \\
& \quad \frac{1}{2}(-\zeta_0^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 + 2\zeta_0\zeta_1 + 2\zeta_0\zeta_2 + 2\zeta_1\zeta_2) \stackrel{(\star)}{=} 0
\end{aligned}$$

und  $(\star)$  gilt wieder wegen (2.104). Es bleibt noch zeigen, dass  $\mathcal{P}_2$  tangential an  $K_{\mathcal{D}_0}$  liegt. Dazu setzen wir  $\mathcal{P}_0$  in die partiellen Ableitungen von  $K_{\mathcal{D}_0}$  ein und erhalten

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial K}{\partial x_0} \left(\frac{1}{2}(-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2), 0\right) = \\
& \quad \frac{1}{2}(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2) = \zeta_0 \\
& \frac{\partial K}{\partial x_1} \left(\frac{1}{2}(-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2), 0\right) = \\
& \quad \frac{1}{2}(-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2) = \zeta_1 \\
& \frac{\partial K}{\partial x_2} \left(\frac{1}{2}(-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2), 0\right) = \\
& \quad \frac{1}{2}(-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2) = \zeta_3 \\
& \frac{\partial K}{\partial x_3} \left(\frac{1}{2}(-\zeta_0 + \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 - \zeta_1 + \zeta_2), \frac{1}{2}(\zeta_0 + \zeta_1 - \zeta_2), 0\right) = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.)

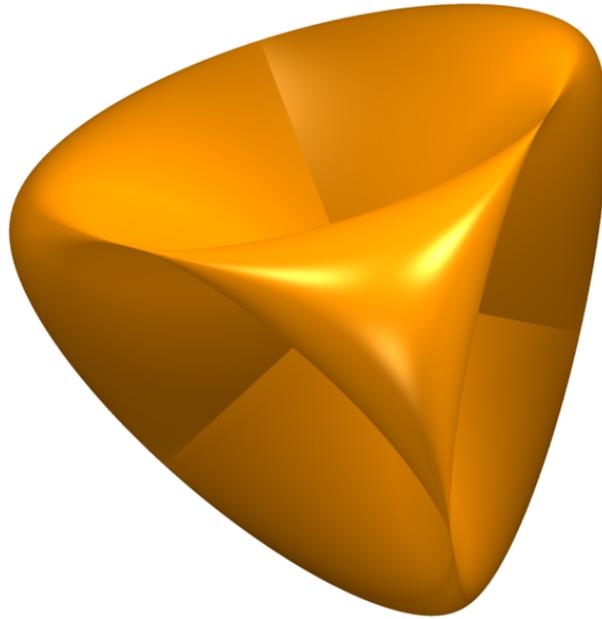


Abbildung 27: Eine Steinersche Römerfläche (affine Gleichung:  $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - xyz = 0$ )

□

*Bemerkung 2.7.2.* Wir haben nun gesehen, dass die Koordinaten der Tangentialebenen (reguläre und singuläre) der kubischen Flächen  $F_3$  mit vier isolierten Singularitäten die Beziehung (2.96) erfüllen. Damit können wir uns die in Abschnitt 1.6.4 erwähnte Elimination zur Auffindung einer Gleichung des mit der  $F_3$  verbundenen Dualgebildes sparen, da (2.96) diese Aufgabe bereits erfüllt.

Wir ersetzen in (2.96) die  $\zeta_i$  durch  $x_i$  mit  $i = 0, 1, 2, 3$  und quadrieren dreimal. Dadurch erhalten wir die Gleichung

$$(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 - 2x_0x_3 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3)^2 - 64x_0x_1x_2x_3 = 0,$$

der mit der  $F_3$  verbundenen, in Punktkoordinaten aufgefassten dualen Fläche  $F_4$ . Es handelt sich dabei um eine algebraische Fläche der Ordnung 4, die man auch *Steinersche Römerfläche* nennt (Abbildung 27 zeigt ein Beispiel für eine derartige Fläche).  $F_4$  hat vier Doppelpunkte und es lässt sich zeigen, dass die  $F_3$  das zur  $F_4$  verbundene, in Punktkoordinaten aufgefasste Dualgebilde ist. Die Beziehung zwischen  $F_3$  und  $F_4$  ist also wechselseitig, wodurch man viele Eigenschaften der Steinerschen Römerfläche erhalten kann. Wir wollen nur die Haupttatsachen anführen:

- Der in Bemerkung (2.6.6) angegebenen Tritangentialebene  $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$  der  $F_3$  entspricht der singuläre Punkt  $\mathcal{E}_0 = (1, 1, 1, 1)$  der  $F_4$  mit Vielfachheit 3.
- Alle Punkte der durch

$$x_0 - x_1 = x_2 - x_3 = 0$$

$$x_0 - x_2 = x_1 - x_3 = 0$$

$$x_0 - x_3 = x_1 - x_2 = 0$$

gegebenen Geraden durch  $\mathcal{E}_0$  sind für die  $F_4$  ebenfalls singulär.

- Den vier konischen Doppelpunkten  $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \mathcal{C}_0$  und  $\mathcal{D}_0$  der  $F_3$  entsprechen vier singuläre Ebenen der  $F_4$ . Es handelt sich dabei genau um die Koordinatenebenen. Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass sie die  $F_4$  jeweils in einem doppelt zu zählenden Kegelschnitt schneiden.

## 2.7.2 Dualgebilde kubischer Regelflächen

Nach Satz 2.4.9 gibt es neben den Kegeln zwei projektive Typen von irreduziblen kubischen Regelflächen – die allgemeine Regelfläche und die Cayleysche Regelfläche. Die jeweiligen Normalformen lauten

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0x_2^2 + x_1x_3^2 = 0 \quad (2.105)$$

$$\text{bzw. } f(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_2^3 = 0. \quad (2.106)$$

Es gilt der folgende

**Satz 2.7.3.**  *$F_3$  sei eine irreduzible kubische Regelfläche (allerdings kein Kegel), so ist das mit der  $F_3$  verbundene Dualgebilde  $\widehat{F}_3$  zur  $F_3$  projektiv äquivalent.*

*Beweisidee.* Wir starten mit unseren Normalgleichungen (2.105) und (2.106) für beide projektiven Typen von irreduziblen, von Kegeln verschiedenen kubischen Regelflächen und berechnen Gleichungen, die die Koordinaten  $\zeta_i, i = 0, 1, 2, 3$  der jeweils zugehörigen Tangentialebenen  $\zeta_0x_0 + \zeta_1x_1 + \zeta_2x_2 + \zeta_3x_3 = 0$  erfüllen müssen.

- Allgemeine Regelfläche: Wir berechnen die partiellen Ableitungen von (2.105) für einen regulären Punkt  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  und erhalten nach 1.6.4 die Koordinaten der Tangentialebene in  $\mathcal{P}_0$

$$\zeta_0 = \frac{\partial f}{\partial x_0}(p_0, p_1, p_2, p_3) = x_2^2,$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0, p_1, p_2, p_3) = x_3^2,$$

$$\zeta_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0, p_1, p_2, p_3) = 2x_0x_2,$$

$$\zeta_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}(p_0, p_1, p_2, p_3) = 2x_1x_3.$$

Man erkennt sofort, dass die  $\zeta_i, i = 0, 1, 2, 3$  die Beziehung

$$\zeta_0\zeta_2^2 - \zeta_1\zeta_3^2 = 4x_0^2x_2^4 - 4x_1^2x_3^4 = 4(x_0x_2^2)^2 - 4x_1^2x_3^4 \stackrel{(\star)}{=} 4(-x_1x_3^2)^2 - 4x_1^2x_3^4 = 0$$

erfüllen, wobei  $(\star)$  wegen (2.105) gilt. Damit erhält man für die Koordinaten aller Tangentialebenen in regulären Punkten eine zu (2.105) projektiv äquivalente Gleichung  $\zeta_0\zeta_2^2 - \zeta_1\zeta_3^2 = 0$ . Diese Beziehung gilt auch für die Grenzlagen dieser Tangentialebenen, was den Ebenen durch die singuläre Gerade entspricht.

- Cayleysche Regelfläche: Wir berechnen die partiellen Ableitungen von (2.106) für einen regulären Punkt  $\mathcal{P}_0 = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  und erhalten nach 1.6.4 die Koordinaten der Tangentialebene in  $\mathcal{P}_0$

$$\begin{aligned}\zeta_0 &= \frac{\partial f}{\partial x_0}(p_0, p_1, p_2, p_3) = x_3^2, \\ \zeta_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0, p_1, p_2, p_3) = x_2 x_3, \\ \zeta_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0, p_1, p_2, p_3) = x_1 x_3 + 3x_2^2, \\ \zeta_3 &= \frac{\partial f}{\partial x_3}(p_0, p_1, p_2, p_3) = 2x_0 x_3 + x_1 x_2.\end{aligned}$$

Man erkennt wieder sofort, dass die  $\zeta_i, i = 0, 1, 2, 3$  die Beziehung

$$\begin{aligned}\zeta_0^2 \zeta_3 + \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1^3 &= x_3^4 (2x_0 x_3 + x_1 x_2) + x_2 x_3^3 (x_1 x_3 + 3x_2^2) - x_2^3 x_3^3 \\ &= 2x_0 x_3^5 + 2x_1 x_2 x_3^4 + 2x_2^3 x_3^3 \\ &= 2x_3^3 \underbrace{(x_0 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2^3)}_{=0 \text{ wegen (2.106)}} \\ &= 0\end{aligned}$$

erfüllen. Damit erhält man für die Koordinaten aller Tangentialebenen in regulären Punkten eine zu (2.106) projektiv äquivalente Gleichung  $\zeta_0^2 \zeta_3 + \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1^3 = 0$ . Diese Beziehung gilt auch für die Grenzlagen dieser Tangentialebenen, was den Ebenen durch die singuläre Gerade entspricht.

- Sowohl für die allgemeinen als auch für die Cayleyschen Regelflächen haben wir damit jeweils eine Gleichung gefunden, die von den Koordinaten der regulären und singulären Tangentialebenen erfüllt wird. Diese Gleichungen

$$\zeta_0 \zeta_2^2 - \zeta_1 \zeta_3^2 = 0 \tag{2.107}$$

$$\text{bzw. } \zeta_0^2 \zeta_3 + \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1^3 = 0 \tag{2.108}$$

beschreiben damit das mit der jeweiligen  $F_3$  verbundene Dualgebilde  $\widehat{F}_3$ .

- Umgekehrt geht man von einer durch die Ebenenmenge (2.107) oder (2.108) definierten Dualfläche  $\widehat{F}_3$  aus. Man sieht durch Einsetzen einer Parameterdarstellung, dass in beiden Fällen die durch  $\zeta_0 = \zeta_1 = 0$  definierten Büschelebenen (im Fall einer Dualfläche spricht man nicht von Punkten auf einer Geraden, sondern von Ebenen, die einem Büschel angehören; siehe Abschnitt 1.5.6) auf  $\widehat{F}_3$  liegen und für die Dualfläche auch singulär sind. Gehen wir von (2.107) aus, wird durch  $\zeta_0 = \zeta_1 = 0$  die Leitlinie  $\mathcal{T}_1$  (siehe Bemerkung 2.4.10) von (2.105) angegeben. Gilt (2.108), beschreibt  $\zeta_0 = \zeta_1 = 0$  die singuläre Gerade  $\mathcal{S}_1$  von (2.106) (siehe ebenfalls Bemerkung 2.4.10).
- Für alle Ebenen von  $\widehat{F}_3$  außerhalb dieses Büschels sieht man durch duale Rechnung des ersten Beweisabschnitts, dass sie im Fall von (2.107) eine Fläche berühren, die (2.105) als Gleichung besitzt. Analog erhält man für (2.108) eine kubische Fläche mit der Gleichung (2.106).

*Bemerkung 2.7.4.*

- Bei der allgemeinen kubischen Regelfläche tauschen beim Dualisieren die Leitlinie  $\mathcal{T}_1$  und die singuläre Gerade  $\widehat{S}_1$  ihre Rollen. Punkte auf  $\mathcal{T}_1$  sind also für die  $F_3$  regulär, Ebenen durch  $\mathcal{T}_1$  sind für die  $\widehat{F}_3$  singulär.
- Satz 2.7.3 kann leicht für Regelflächen höherer Ordnung verallgemeinert werden.

## 2.8 Erzeugung kubischer Flächen

Im letzten Abschnitt wollen wir noch zwei von zahlreichen möglichen Erzeugungsweisen von kubischen Flächen betrachten. Andere Erzeugungsmöglichkeiten finden sich beispielsweise bei Sturm [11]. Im Abschnitt 1.6.5 haben wir gesehen, dass man Quadriken durch zwei aufeinander bezogene Ebenenbüschel erzeugen kann. Bei den kubischen Flächen betrachten wir zunächst eine Variante, die von einem Ebenen- und einem Quadrikenbüschel ausgeht. Im Anschluss daran untersuchen wir noch die Möglichkeit, dafür drei projektiv aufeinander bezogene Ebenenbündel zu verwenden. Zur Erinnerung: Ein Büschel ist eine  $\infty^1$ - und ein Bündel eine  $\infty^2$ -Linearschar. Da ein Büschel von zwei projektiven Parametern abhängt, kann man dessen Elemente den Punkten einer Gerade zuordnen. Analog kann man die Elemente eines Bündels den Punkten einer Ebene zuordnen.

**Satz 2.8.1.** *Geht man von einem Ebenen- und einem Quadrikenbüschel aus, die regulär projektiv aufeinander bezogen sind (es gibt eine Bijektion zwischen den Elementen des Ebenenbüschels und jenen des Quadrikenbüschels), so erzeugt die Gesamtheit der Kurven, die man beim Schnitt einer Büschelebene mit ihrer zugeordneten Büschelquadrik erhält, eine kubische Fläche  $F_3$ . Jede kubische Fläche kann so erzeugt werden.*

*Beweis.*

- Das Ebenenbüschel sei gegeben durch

$$\lambda \epsilon_{1_1} + \mu \epsilon_{2_1} = 0, \quad (2.109)$$

wobei  $\epsilon_{1_1}$  und  $\epsilon_{2_1}$  zwei Ebenengleichungen (also Formen vom Grad 1 in  $x_0, x_1, x_2$  und  $x_3$ ) von Ebenen des Büschels sind. Die Elemente des Büschels entsprechen also den Punkten einer Geraden mit den Parametern  $(\lambda, \mu)$ . Analog sei das Quadrikenbüschel durch

$$\lambda' f_{1_2} + \mu' f_{2_2} = 0 \quad (2.110)$$

gegeben, wobei  $f_{1_2}$  und  $f_{2_2}$  zwei Quadriken Gleichungen (Formen vom Grad 2 in  $x_0, x_1, x_2$  und  $x_3$ ) von Quadriken aus dem Büschel sind. Hier entsprechen die Elemente des Büschels den Punkten einer Gerade mit den Parametern  $(\lambda', \mu')$ .

- Laut Voraussetzung sind die Büschel regulär projektiv aufeinander bezogen. Das bedeutet aber, dass es zwischen den Punkten der  $(\lambda, \mu)$ - und der  $(\lambda', \mu')$ -Gerade eine reguläre projektive Beziehung gibt. Wir wählen die Darstellung der zwei Büschel (also die jeweils zwei zur Angabe notwendigen Repräsentanten) so, dass diese Beziehung durch

$$\lambda = \lambda' \quad \text{und} \quad \mu = \mu' \quad (2.111)$$

beschrieben werden kann.

- Unter Bedingung (2.111) erhält man aus (2.109) und (2.110) Gleichungen eines beliebigen aufeinander bezogenen Paares von Ebene und Quadrik mit

$$\begin{aligned}\lambda\epsilon_{1_1} + \mu\epsilon_{2_1} &= 0 \\ \lambda f_{1_2} + \mu f_{2_2} &= 0.\end{aligned}$$

Gemeinsame Punkte dieses Paares müssen die von  $\lambda$  und  $\mu$  und damit von der Wahl des Paares unabhängige Bedingung

$$\begin{vmatrix} \epsilon_{1_1} & \epsilon_{2_1} \\ f_{1_2} & f_{2_2} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.112)$$

erfüllen (die einzelnen Elemente der Determinante sind nämlich Terme in Punktkoordinaten), und Punkte, für die (2.112) gilt, liefern unter Bedingung (2.111) eine nicht triviale Lösung des durch (2.109) und (2.110) gegebenen Gleichungssystems in  $\lambda$  und  $\mu$ . Dieser Zusammenhang ergibt sich aus den Eigenschaften homogener linearer Gleichungssysteme.

- (2.112) liefert ausmultipliziert die Gleichung einer kubischen Fläche  $F_3$ .
- Hat man umgekehrt eine kubische Fläche  $F_3$  durch (2.112) gegeben, wobei  $\epsilon_{i_1}$  bzw.  $f_{i_2}$  mit  $i = 1, 2$  Formen vom Grad 1 bzw. 2 in  $x_0, x_1, x_2$  und  $x_3$  sind, so kann man zwei Büschel durch (2.109) und (2.110) definieren und durch (2.111) eine reguläre projektive Beziehung zwischen ihnen herstellen.
- Schlussendlich bleibt noch zu zeigen, dass man jede  $F_3$  durch eine Gleichung der Form (2.112) darstellen kann. Wegen Bemerkung 2.5.9 gibt es auf jeder kubischen Fläche zumindest eine Gerade  $\mathcal{G}_1$ . Wir wählen das Koordinatensystem so, dass  $\mathcal{G}_1 : x_0 = x_1 = 0$  gilt. Damit die Gleichung der  $F_3$  für alle Punkte von  $\mathcal{G}_1$  identisch verschwindet, muss diese die Gestalt

$$x_0 f_{1_2} + x_1 f_{2_2} = 0$$

haben. Damit gilt aber weiter

$$x_0 f_{1_2} + x_1 f_{2_2} = \begin{vmatrix} x_0 & -x_1 \\ f_{1_2} & f_{2_2} \end{vmatrix} = 0.$$

□

*Bemerkung 2.8.2.* Die Trägergerade  $\mathcal{G}_1$  des Ebenenbüschels aus Satz 2.8.1 liegt ganz auf der Fläche  $F_3$ . Die Ebenen des Büschels schneiden die Quadriken des anderen Büschels in Kegelschnitten, die dann die ganze  $F_3$  erzeugen. Jede Ebene des Büschels hat mit der  $F_3$  neben  $\mathcal{G}_1$  noch einen solchen Kegelschnitt gemeinsam.

Bei der nun folgenden Erzeugung mit drei Ebenenbündeln erhält man die  $F_3$  nicht durch Kurven auf ihr, sondern durch ihre Punkte.

**Satz 2.8.3.** *Gegeben seien drei verschiedene Ebenenbündel. Zwischen diesen sollen reguläre projektive Beziehungen bestehen. Jeder Ebene  $\mathcal{E}_2$  eines Bündels soll je eine Ebene  $\mathcal{F}_2$  bzw.  $\mathcal{G}_2$  der anderen beiden Bündel eineindeutig zugeordnet sein. Dabei stehen auch  $\mathcal{F}_2$  und  $\mathcal{G}_2$  in Beziehung. Die Gesamtheit der Schnittpunkte von drei zugeordneten Ebenen  $\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2$  und  $\mathcal{G}_2$*

erzeugt eine kubische Fläche  $F_3$ . Umgekehrt kann jede kubische Fläche, deren Gleichung sich in der Gestalt

$$\begin{vmatrix} a_{1_1} & a_{2_1} & a_{3_1} \\ a_{4_1} & a_{5_1} & a_{6_1} \\ a_{7_1} & a_{1_1} & a_{1_1} \end{vmatrix} = 0$$

schreiben lässt, unter der Voraussetzung dass die  $a_{i_1}, i = 1, 2, \dots, 9$  Formen vom Grad 1 in  $x_0, x_1, x_2$  und  $x_3$  sind, auf diese Weise erzeugt werden.

*Beweis.*

- Die drei Ebenenbündel seien gegeben durch

$$\lambda e_{1_1} + \mu e_{2_1} + \nu e_{3_1} = 0, \quad (2.113)$$

$$\lambda' f_{1_1} + \mu' f_{2_1} + \nu' f_{3_1} = 0, \quad (2.114)$$

$$\lambda'' g_{1_1} + \mu'' g_{2_1} + \nu'' g_{3_1} = 0, \quad (2.115)$$

wobei die  $e_{i_1}, f_{i_1}$  und  $g_{i_1}$  mit  $i = 1, 2, 3$  Ebenengleichungen (Formen vom Grad 1 in  $x_0, x_1, x_2$  und  $x_3$ ) von Ebenen der jeweiligen Bündel sind. Somit können die Elemente der Bündel jeweils den Punkten der Ebenen  $(\lambda, \mu, \nu)$ ,  $(\lambda', \mu', \nu')$  und  $(\lambda'', \mu'', \nu'')$  zugeordnet werden.

- Laut Voraussetzung sind die Bündel regulär projektiv aufeinander bezogen. Das bedeutet aber, dass es zwischen den Punkten der  $(\lambda, \mu, \nu)$ -, der  $(\lambda', \mu', \nu')$ - und der  $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ -Ebene reguläre projektive Beziehungen gibt. Wir wählen die Darstellung der drei Bündel (also die jeweils drei zur Angabe notwendigen Repräsentanten) so, dass diese Beziehungen durch

$$\lambda = \lambda' = \lambda'', \mu = \mu' = \mu'' \text{ und } \nu = \nu' = \nu'' \quad (2.116)$$

beschrieben werden können.

- Unter Bedingung (2.116) erhält man aus (2.113)-(2.115) Gleichungen eines beliebigen aufeinander bezogenen Tripels von Ebenen

$$\lambda e_{1_1} + \mu e_{2_1} + \nu e_{3_1} = 0,$$

$$\lambda f_{1_1} + \mu f_{2_1} + \nu f_{3_1} = 0,$$

$$\lambda g_{1_1} + \mu g_{2_1} + \nu g_{3_1} = 0.$$

Gemeinsame Punkte dieses Tripels müssen die von  $\lambda, \mu$  und  $\nu$  und damit von der Wahl des Tripels unabhängige Bedingung

$$\begin{vmatrix} e_{1_1} & e_{2_1} & e_{3_1} \\ f_{1_1} & f_{2_1} & f_{3_1} \\ g_{1_1} & g_{2_1} & g_{3_1} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.117)$$

erfüllen (die einzelnen Elemente der Determinante sind nämlich Terme in Punktkoordinaten), und Punkte, für die (2.117) gilt, liefern unter Bedingung (2.116) eine nicht triviale Lösung des durch (2.113)-(2.115) gegebenen Gleichungssystems in  $\lambda, \mu$  und  $\nu$ . Dieser Zusammenhang ergibt sich wieder aus den Eigenschaften homogener linearer Gleichungssysteme.

- (2.117) liefert ausmultipliziert die Gleichung einer kubischen Fläche  $F_3$ .
- Hat man umgekehrt eine kubische Fläche  $F_3$  durch (2.117) gegeben, wobei  $e_{i_1}$ ,  $f_{i_1}$  und  $g_{i_1}$  mit  $i = 1, 2, 3$  Formen vom Grad 1 in  $x_0, x_1, x_2$  und  $x_3$  sind, so kann man drei Bündel durch (2.113)-(2.115) definieren und durch (2.116) reguläre projektive Beziehungen zwischen ihnen herstellen.

□

*Bemerkung 2.8.4.*

- Es gibt immer Tripel von einander zugeordneten Ebenen aus den Bündeln (2.113)-(2.115), die sich nicht in einem Punkt, sondern einer ganzen Geraden schneiden. Im Allgemeinen erhält man auf diese Weise sechs Gerade, die ein windschiefes Sextupel bilden (also eine halbe Doppelsechs).
- Die linken Seiten von (2.113)-(2.115) sind Linearformen in den Punktkoordinaten  $x_i, i = 0, 1, 2, 3$ . Löst man das System nach diesen auf, erhält man gewisse Formen vom Grad 3 in  $\lambda, \mu$  und  $\nu$ . Damit erhält man aus der projektiven Erzeugung aus Satz 2.8.3 auch eine rationale Parameterdarstellung der erzeugten  $F_3$  über der  $(\lambda, \mu, \nu)$ -Ebene.

Wir wollen nun noch zeigen, dass singularitätenfreie kubische Flächen immer mit einer Gleichung der Gestalt (2.117) beschrieben und somit auf die in Satz 2.8.3 definierte Art erzeugt werden können. Dazu müssen wir uns zu den bereits bekannten Tatsachen der 27-Konfiguration noch zusätzliche Eigenschaften erarbeiten.

**Satz 2.8.5.** *Gegeben seien sechs verschiedene Gerade*

$$\mathcal{A}_{1_1}, \mathcal{B}_{1_1}, \mathcal{C}_{1_1} \tag{2.118}$$

$$\mathcal{A}_{2_1}, \mathcal{B}_{2_1}, \mathcal{C}_{2_1} \tag{2.119}$$

einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$ . Dabei sollen (2.118) die Tripelebene  $\mathcal{T}_{1_2}$  (vergleiche Definition 2.5.11) und (2.119) die Tripelebene  $\mathcal{T}_{2_2}$  aufspannen. Dann schneidet je eine Gerade von (2.118) genau eine von (2.119) (siehe Abbildung 28).

*Beweis.*

- Wir gehen von sechs Geraden (2.118) und (2.119) aus, die die Voraussetzungen erfüllen.
- Da in einem ebenen Schnitt mit der  $F_3$  maximal eine  $k_3$  liegen kann und die sechs Geraden verschieden sind, müssen  $\mathcal{T}_{1_2}$  und  $\mathcal{T}_{2_2}$  verschieden sein.
- Wir betrachten die Gerade  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{T}_{1_2} \cup \mathcal{T}_{2_2}$ .  $\mathcal{G}_1$  darf keine der Geraden aus (2.118) oder (2.119) sein, denn wäre sie beispielsweise eine von (2.118), so müsste sie auch eine von (2.119) sein (sonst lägen in  $\mathcal{T}_{2_2}$  sowohl (2.119) als auch  $\mathcal{G}_1$ , also mehr als eine  $k_3$ ). In diesem Fall wären aber die sechs gegebenen Geraden nicht verschieden.
- Jede Gerade von (2.119) hat einen Schnittpunkt mit  $\mathcal{G}_1$  und damit auch mit der Ebene  $\mathcal{T}_{1_2}$ . Dieser Schnittpunkt muss auch auf einer der Geraden (2.118) liegen (wieder weil der ebene Schnitt maximal eine  $k_3$  sein kann).
- Angenommen zwei Gerade aus (2.119) treffen dieselbe Gerade aus (2.118). Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

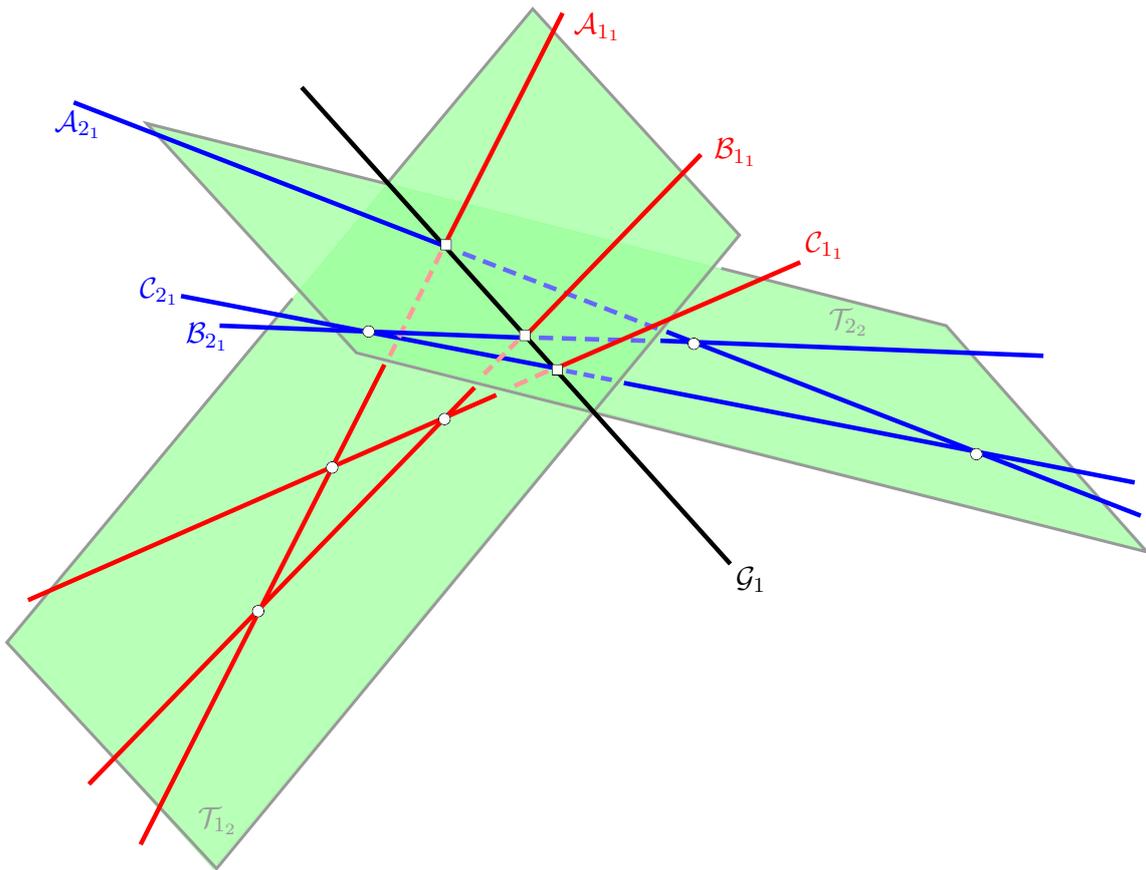


Abbildung 28: Zwei Tripelbenen

- Die zwei Geraden aus (2.119) treffen die Gerade aus (2.118) in zwei verschiedenen Punkten. Da diese zwei Schnittpunkte auf  $\mathcal{G}_1$  liegen müssen, wäre  $\mathcal{G}_1$  dann schon diese Gerade aus (2.118). Im zweiten Beweisschritt haben wir bereits gesehen, dass das nicht möglich ist.
  - Die zwei Geraden aus (2.119) treffen die Gerade aus (2.118) in einem Punkt auf  $\mathcal{G}_1$ . Da  $\mathcal{G}_1$  nach dem zweiten Beweisschritt nicht aus (2.118) oder (2.119) sein kann und die Ebenen  $\mathcal{T}_{1_2}$  und  $\mathcal{T}_{2_2}$  verschieden sind, gingen dann drei Gerade der  $F_3$ , die nicht in einer Ebene liegen, durch einen Punkt. Das ist nach Satz 2.4.6 unmöglich für eine singularitätenfreie kubische Fläche.
- Damit schneidet jeweils eine Gerade aus (2.118) genau eine Gerade aus (2.119).

□

**Satz 2.8.6.** Gegeben seien sechs verschiedene Gerade

$$\mathcal{A}_{1_1}, \mathcal{B}_{1_1}, \mathcal{C}_{1_1} \tag{2.120}$$

$$\mathcal{A}_{2_1}, \mathcal{B}_{2_1}, \mathcal{C}_{2_1} \tag{2.121}$$

einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$ . Dabei sollen (2.120) die Tripel Ebene  $\mathcal{T}_{1_2}$  (vergleiche Definition 2.5.11) und (2.121) die Tripel Ebene  $\mathcal{T}_{2_2}$  aufspannen. Wir wissen bereits aus

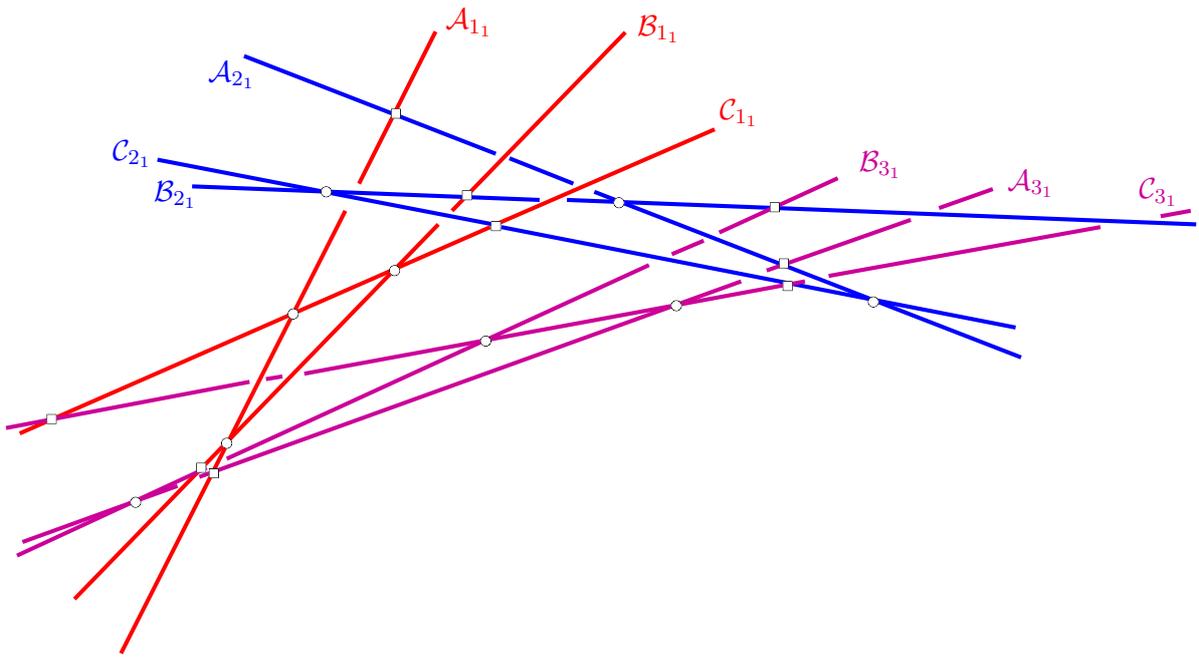


Abbildung 29: Steinersches Trieder

Satz 2.8.5, dass je eine Gerade aus (2.120) genau eine aus (2.121) schneidet. Wir benennen die Geraden so um, dass sich jeweils jene mit dem gleichen Buchstaben treffen. Diese spannen dann die drei Ebenen

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_{1_1} \cup \mathcal{A}_{2_1}$$

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{1_1} \cup \mathcal{B}_{2_1}$$

$$\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_{1_1} \cup \mathcal{C}_{2_1}$$

auf, in denen nach Bemerkung 2.5.10 jeweils noch eine weitere von (2.120) und (2.121) verschiedene Gerade sein muss, die ganz auf der  $F_3$  liegt (fehlt noch zu einer Schnittkurve der Ordnung 3). Wir nennen diese drei neuen Geraden entsprechend  $\mathcal{A}_{3_1}$ ,  $\mathcal{B}_{3_1}$  und  $\mathcal{C}_{3_1}$ . Dann bilden  $\mathcal{A}_{3_1}$ ,  $\mathcal{B}_{3_1}$  und  $\mathcal{C}_{3_1}$  eine Tripelebene  $\mathcal{T}_{3_2}$  (siehe Abbildung 29).

*Beweis.* Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt und wir halten auch fest, dass die Ebenen  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{B}_2$  und  $\mathcal{C}_2$  verschieden sind, da sonst mehr als drei verschiedene Gerade der  $F_3$  in einer Ebene lägen. Wir zeigen nun, dass sich  $\mathcal{A}_{3_1}$  und  $\mathcal{B}_{3_1}$  schneiden:

- Zunächst gilt  $\mathcal{A}_{3_1} \neq \mathcal{B}_{3_1}$ , denn:
  - Angenommen es gelte  $\mathcal{A}_{3_1} = \mathcal{B}_{3_1}$ . Dann ist  $\mathcal{A}_{3_1}$  die Schnittgerade der Ebenen  $\mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{B}_2$ , da diese Gerade in beiden Ebenen liegen muss.
  - Da sich nach Voraussetzung  $\mathcal{A}_{1_1} \subset \mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{B}_{1_1} \subset \mathcal{B}_2$  schneiden, muss deren Schnittpunkt auch auf der Gerade  $\mathcal{A}_{3_1}$  liegen.
  - Da wegen Satz 2.4.6 drei Gerade einer singularitätenfreien  $F_3$ , die durch einen Punkt gehen, auch in einer Ebene liegen müssen, gilt  $\mathcal{A}_{3_1} \subset \mathcal{T}_{1_2}$  (wegen  $\mathcal{A}_{1_1} \subset \mathcal{T}_{1_2}$  und  $\mathcal{B}_{1_1} \subset \mathcal{T}_{1_2}$ ). Damit muss aber schon  $\mathcal{A}_{3_1} = \mathcal{C}_{1_1}$  erfüllt sein.

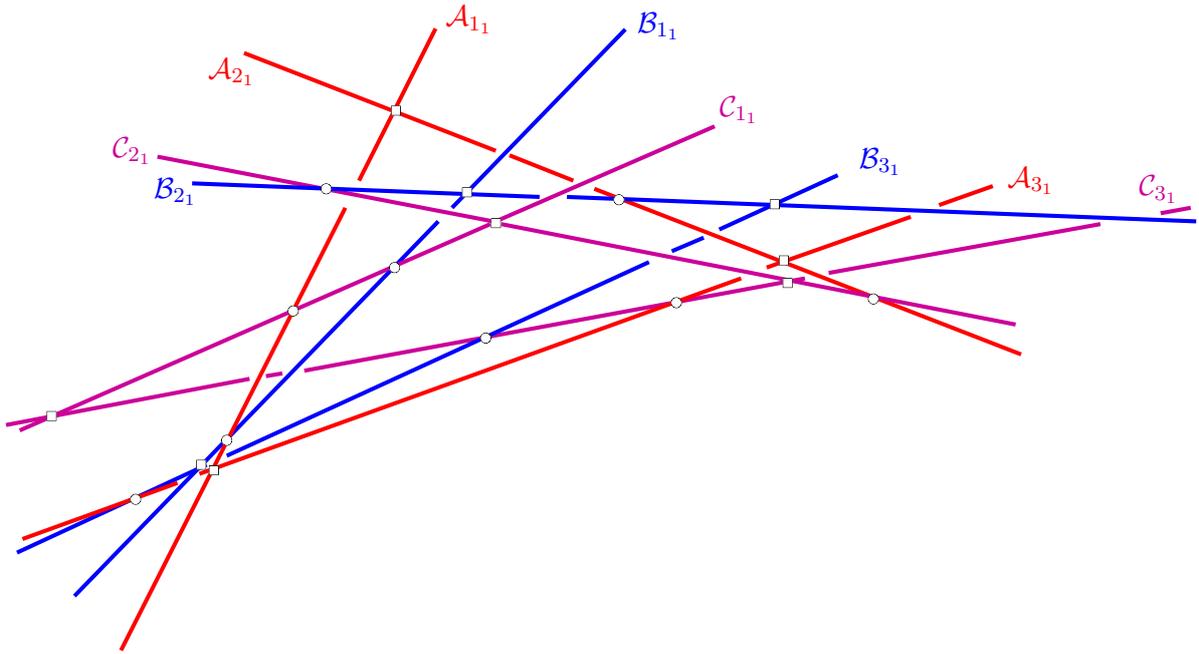


Abbildung 30: Steiner'sches Trieder aus Abbildung 29 mit den anderen drei Tripelebenen

- Das ist aber nicht möglich, da sich die Ebenen  $\mathcal{A}_2$  und  $\mathcal{T}_{1_2}$  schon in  $\mathcal{A}_{1_1} \neq \mathcal{C}_{1_1}$  schneiden und  $\mathcal{A}_2 \neq \mathcal{T}_{1_2}$  sein muss, weil sonst wieder mehr als drei verschiedene Gerade der  $F_3$  in einer Ebene lägen.
- Die Gerade  $\mathcal{B}_{3_1}$  schneidet also die Ebene  $\mathcal{A}_2$  in einem Punkt  $\mathcal{A}_0$ . ( $\mathcal{B}_{3_1}$  kann nämlich auch nicht  $\mathcal{A}_{1_1}$  sein, da sonst  $\mathcal{B}_{2_1}$  die Gerade  $\mathcal{A}_{1_1}$  treffen müsste, was den Voraussetzungen widerspräche. Analog gilt  $\mathcal{B}_{3_1} \neq \mathcal{A}_{2_1}$ ).
- $\mathcal{A}_0$  muss auf  $\mathcal{A}_{1_1}$ ,  $\mathcal{A}_{2_1}$  oder  $\mathcal{A}_{3_1}$  liegen, da der ebene Schnitt der  $F_3$  mit  $\mathcal{A}_2$  sonst aus mehr als einer  $k_3$  bestehen würde.
- $\mathcal{A}_0$  kann nicht auf  $\mathcal{A}_{2_1}$  liegen, da dann  $\mathcal{B}_{3_1}$  sowohl  $\mathcal{A}_{2_1}$  also auch  $\mathcal{B}_{2_1}$  schneiden würde und damit in der Ebene  $\mathcal{T}_{2_2}$  sein müsste. Dann wäre aber  $\mathcal{B}_{3_1} = \mathcal{C}_{2_1}$  und  $\mathcal{B}_{1_1}$  würde die Gerade  $\mathcal{C}_{2_1}$  treffen, was den Voraussetzungen widerspräche.
- Analog kann  $\mathcal{A}_0$  auch nicht auf  $\mathcal{A}_{1_1}$  liegen. Somit liegt der Schnittpunkt von  $\mathcal{B}_{3_1}$  und  $\mathcal{A}_2$  auf  $\mathcal{A}_{3_1}$ .

Wiederholt man diese Vorgangsweise für die Geraden  $\mathcal{A}_{3_1}$  und  $\mathcal{C}_{3_1}$  bzw.  $\mathcal{B}_{3_1}$  und  $\mathcal{C}_{3_1}$ , sieht man, dass sich auch diese treffen. Damit bilden die drei Geraden eine Tripelebene  $\mathcal{T}_{3_2}$ .  $\square$

*Bemerkung 2.8.7.* Wir schreiben nun die neun Geraden und sechs Ebenen aus Satz 2.8.6 in ein Schema, wobei je drei Gerade einer Zeile bzw. Spalte in der Ebene am Ende der Zeile bzw. Spalte liegen (vergleiche dazu auch Abbildung 29 mit Abbildung 30):

$$\begin{array}{ccc|c}
 \mathcal{A}_{1_1} & \mathcal{B}_{1_1} & \mathcal{C}_{1_1} & \mathcal{T}_{1_2} \\
 \mathcal{A}_{2_1} & \mathcal{B}_{2_1} & \mathcal{C}_{2_1} & \mathcal{T}_{2_2} \\
 \mathcal{A}_{3_1} & \mathcal{B}_{3_1} & \mathcal{C}_{3_1} & \mathcal{T}_{3_2} \\
 \hline
 \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 & 
 \end{array} \tag{2.122}$$

**Definition 2.8.8** (Steinersches Trieder). Drei Triplebenen  $\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2$  und  $\mathcal{C}_2$  bzw.  $\mathcal{T}_{12}, \mathcal{T}_{22}$  und  $\mathcal{T}_{32}$ , die in der Konfiguration von Satz 2.8.6 bzw. Bemerkung 2.8.7 vorliegen, bezeichnet man als Steinersches Trieder. Wir haben auch schon gesehen, dass sich Steinersche Trieder immer paarweise bestimmen (um ein Tripel von Ebenen mit dieser Konfiguration anzugeben, braucht man das zweite Tripel). Wir nennen solche Paare von Steinerschen Triedern *zugeordnet*.

Wir formulieren einen Satz zur Anzahl der Steinerschen Trieder einer singularitätenfreien kubischen Fläche.

**Satz 2.8.9.** *Die 45 Triplebenen (vergleiche Satz 2.5.13) einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  lassen sich zu 120 Paaren von zugeordneten Steinerschen Triedern zusammenstellen.*

*Beweis.* Eine beliebige Tripleebene einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  hat mit zwölf anderen Triplebenen eine auf der  $F_3$  liegende Gerade gemeinsam. Es gibt nämlich nach Satz 2.4.5 durch jede der drei Geraden einer Tripleebene noch genau vier weitere Triplebenen. Diese müssen alle voneinander verschieden sein, da sonst in einem ebenen Schnitt mit der  $F_3$  mehr als eine  $k_3$  läge. Damit hat die gegebene Tripleebene mit 32 anderen keine Gerade der 27-Konfiguration gemeinsam, woraus sich  $\frac{45 \cdot 32}{2} = 720$  mögliche Paare von Triplebenen ergeben. Nach Satz 2.8.6 legt ein Paar von Triplebenen ohne gemeinsame Gerade der  $F_3$  ein Steinersches Trieder fest. Jedoch liegen in jedem Trieder drei Paare, woraus man wiederum  $\frac{720}{3} = 240$  Steinersche Trieder erhält. Schlussendlich ergeben sich damit 120 zugeordnete Paare.  $\square$

Da wir nun wissen, dass jede singularitätenfreie kubische Fläche Steinersche Trieder enthält, können wir folgenden Satz beweisen.

**Satz 2.8.10.** *Wählt man zwei zugeordnete Steinersche Trieder einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$  aus und spannt mit diesen ein Büschel auf, so gehört die  $F_3$  diesem an.*

*Beweis.*

- $f(x_{0,1}, x_2, x_3) = 0$  sei die Gleichung einer singularitätenfreien kubischen Fläche  $F_3$ . Des weiteren seien  $t_i(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0, i = 1, 2, 3$  die Gleichungen der drei Ebenen  $\mathcal{T}_{i2}, i = 1, 2, 3$  eines Steinerschen Trieders. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen der Ebenen und ihrer Geraden wie in Bemerkung 2.8.7.

- Die neun Geraden aus (2.122) liegen dann auf allen Flächen des durch

$$\lambda f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \mu t_1(x_0, x_1, x_2, x_3)t_2(x_0, x_1, x_2, x_3)t_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (2.123)$$

definierten Büschels, da sie sicher auf der  $F_3$  und in mindestens einer der Ebenen  $\mathcal{T}_{i2}, i = 1, 2, 3$  liegen.

- Umgekehrt muss jeder Punkt, der auf allen Flächen von (2.123) liegt, sowohl auf der  $F_3$  als auch in einer der Ebenen  $\mathcal{T}_{i2}, i = 1, 2, 3$  sein. In diesen Ebenen liegen aber alle Punkte, die auch auf der  $F_3$  sind, bereits auf einer der Geraden aus (2.122), da sonst im ebenen Schnitt mehr als eine  $k_3$  läge. Wir bezeichnen die neun Geraden aus (2.122) als *Basis* des Büschels (2.123).
- Durch jeden Punkt  $\mathcal{P}_0$ , der nicht dieser Basis angehört, geht eine wohlbestimmte Fläche des Büschels (da es für jeden Punkt  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$  außerhalb der Basis ein bis auf ein gemeinsames Vielfaches eindeutiges Paar von Zahlen

$$\lambda = t_1(y_0, y_1, y_2, y_3)t_2(y_0, y_1, y_2, y_3)t_3(y_0, y_1, y_2, y_3) \text{ und } \mu = -f(y_0, y_1, y_2, y_3)$$

gibt, so dass (2.123) erfüllt ist und umgekehrt).

- Sei  $\mathcal{P}_0$  ein Punkt der Ebene  $\mathcal{A}_2$  aus (2.122), der nicht auf einer der Geraden  $\mathcal{A}_{1_1}$ ,  $\mathcal{A}_{2_1}$  oder  $\mathcal{A}_{3_1}$  liegt. Wir bezeichnen die dem Punkt  $\mathcal{P}_0$  zugeordnete Büschelfläche aus (2.123) als  $G_3$ .
- Als Teil des Büschels schneidet die Fläche  $G_3$  die Ebene  $\mathcal{A}_2$  in den Geraden  $\mathcal{A}_{1_1}$ ,  $\mathcal{A}_{2_1}$  und  $\mathcal{A}_{3_1}$  und zusätzlich noch im Punkt  $\mathcal{P}_0$  (also in mehr als einer  $k_3$ ). Damit muss  $G_3$  aber zumindest in die Ebene  $\mathcal{A}_2$  und eine Quadrik  $G_2$  zerfallen.
- Die restlichen sechs Geraden aus (2.122) liegen auch in jeder Büschelfläche, aber nicht in der Ebene  $\mathcal{A}_2$  und müssen daher auf der Quadrik  $G_2$  sein. Da aber  $\mathcal{B}_{1_1}$ ,  $\mathcal{B}_{2_1}$ ,  $\mathcal{B}_{3_1}$ ,  $\mathcal{C}_{1_1}$ ,  $\mathcal{C}_{2_1}$  und  $\mathcal{C}_{3_1}$  jeweils zu dritt in den Ebenen  $\mathcal{B}_2$  und  $\mathcal{C}_2$  liegen, muss auch  $G_2$  in diese beiden Ebenen zerfallen.
- In Summe zerfällt also  $G_3$  in die drei Ebenen  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{B}_2$  und  $\mathcal{C}_2$  des  $\mathcal{T}_{1_2}$ ,  $\mathcal{T}_{2_2}$  und  $\mathcal{T}_{3_2}$  zugeordneten Steinerschen Trieders. Damit gehören dem Flächenbüschel (2.123) diese beiden Trieder an und es existieren  $\lambda$  und  $\mu$ , sodass

$$\lambda f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \mu t_1(x_0, x_1, x_2, x_3)t_2(x_0, x_1, x_2, x_3)t_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = a(x_0, x_1, x_2, x_3)b(x_0, x_1, x_2, x_3)c(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (2.124)$$

gilt, wobei  $a(x_0, x_1, x_2, x_3)$ ,  $b(x_0, x_1, x_2, x_3)$  und  $c(x_0, x_1, x_2, x_3)$  Gleichungen der Ebenen  $\mathcal{A}_2$ ,  $\mathcal{B}_2$  und  $\mathcal{C}_2$  sind.

- Dabei kann  $\lambda$  nicht 0 sein, da zwei zugeordnete Trieder nicht übereinstimmen dürfen. Durch entsprechendes Umformen von (2.124) sieht man schließlich, dass es zwei Konstante  $\lambda_0$  und  $\mu_0$  gibt, sodass

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \lambda_0 t_1(x_0, x_1, x_2, x_3)t_2(x_0, x_1, x_2, x_3)t_3(x_0, x_1, x_2, x_3) + \mu_0 a(x_0, x_1, x_2, x_3)b(x_0, x_1, x_2, x_3)c(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (2.125)$$

gilt. Damit ist die  $F_3$  Teil eines von zwei Steinerschen Triedern aufgespannten Büschels.

□

*Bemerkung 2.8.11.*

- Steinersche Trieder kann man auch als ausgeartete kubische Flächen auffassen.
- (2.125) lässt sich schreiben als

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} \lambda_0 t_1(x_0, x_1, x_2, x_3) & 0 & -\mu_0 a(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ 0 & b(x_0, x_1, x_2, x_3) & -t_2(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ c(x_0, x_1, x_2, x_3) & t_3(x_0, x_1, x_2, x_3) & 0 \end{vmatrix}.$$

Zusammen mit Satz (2.8.3) wissen wir nun, dass sich jede singularitätenfreie kubische Fläche mit drei regulär projektiv aufeinander bezogenen Ebenenbündeln erzeugen lässt.

# Abbildungsverzeichnis

1	Schnittkurve einer kubischen Fläche mit Singularität mit einer Ebene . . . . .	51
2	Schnittgeraden eines quadratischen und eines kubischen Kegels mit gemeinsamer Spitze . . . . .	53
3	Eine kubische Fläche mit zwei isolierten Singularitäten (affine Gleichung: $x^3 + y^2z + xz^2 - xz = 0$ ) . . . . .	54
4	Grundtetraeder mit singulären Eckpunkten . . . . .	57
5	Dreifacher Schnittpunkt . . . . .	59
6	Dreifache Schnittgerade . . . . .	59
7	Zerfallende Schnittkurve der kubischen Fläche mit einer Ebene durch eine Gerade der Fläche . . . . .	62
8	Fünf voll zerfallende ebene Schnitte . . . . .	65
9	Schnittpunkt von drei nicht in einer Ebene liegenden Geraden einer kubischen Fläche . . . . .	68
10	Situation aus dem Beweis von Satz 2.4.7 . . . . .	70
11	Situation aus dem Beweis von Satz 2.4.8 . . . . .	72
12	Voll zerfallender ebener Schnitt der kubischen Fläche durch die Gerade $\mathcal{T}_1$ . . . . .	75
13	Vier Tangentialebenen durch $\mathcal{S}_1$ . . . . .	77
14	Die zu $\mathcal{S}_1$ windschiefe Gerade $\mathcal{T}_1$ . . . . .	78
15	Grundkonfiguration . . . . .	82
16	Situation aus dem Beweis von Satz 2.5.4 . . . . .	90
17	Eckardtpunkt . . . . .	94
18	Tritangentialebene . . . . .	94
19	Ein Paar von windschiefen Tripeln . . . . .	96
20	Eine Doppelsechs . . . . .	102
21	Clebsche Diagonalfäche (Alain Esculier, entnommen aus [4]) . . . . .	106
22	Modell einer Clebschen Diagonalfäche . . . . .	107
23	Zuordnung eines Punktes zu einer Kongruenzgeraden . . . . .	110
24	Zuordnung eines Punktes auf $\mathcal{A}_1$ zu einer Kongruenzgeraden . . . . .	111
25	Die schiefe Projektion . . . . .	112
26	Der $\mathcal{A}_1$ zugeordnete Kegelschnitt $k_{1_2}$ . . . . .	115
27	Eine Steinersche Römerfläche (affine Gleichung: $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - xyz = 0$ ) . . . . .	125
28	Zwei Tripelebenen . . . . .	132
29	Steinersches Trierer . . . . .	133
30	Steinersches Trierer aus Abbildung 29 mit den anderen drei Tripelebenen . . . . .	134

Mit Ausnahme der Abbildungen 21 und 22 wurden alle Graphiken mit den Programmen LaTeX-Draw (<http://latexdraw.sourceforge.net/>) und Surfer (<http://imaginary.org/program/surfer>) erstellt.



# Literaturverzeichnis

- [1] W. Blaschke. *Projektive Geometrie* -. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013. ISBN: 978-3-034-86932-4.
- [2] Werner Burau. *Algebraische Flächen*. Berlin: Walter de Gruyter, 1962.
- [3] Werner Burau. *Algebraische Kurven*. Berlin: Walter de Gruyter, 1962.
- [4] Alain Esculier. *Clebsch, ses 27 droites, les points de Eckardt*. Eingesehen am 16.12.2014. URL: <http://aesculier.fr/fichiersMaple/ClebschDroites/ClebschDroites.html>.
- [5] Klaus Hulek. *Elementare Algebraische Geometrie - Grundlegende Begriffe und Techniken mit zahlreichen Beispielen und Anwendungen*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2012. ISBN: 978-3-834-82348-9.
- [6] Gerhard Kowol. *Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene* -. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2009. ISBN: 978-3-764-39902-3.
- [7] Martin Lüdtke. *Der Satz von Bézout - Seminar zur Theorie der Algebraischen Kurven*. Eingesehen am 28.11.2014. Heidelberg. URL: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~gaertner/curves/vortrag5.pdf>.
- [8] Hendrik Reimann. "Klassifikation singulärer kubischer Flächen". Eingesehen am 10.12.2014. Magisterarb. Bochum: Ruhr-Universität Bochum, 2006. URL: <http://homepage.ruhr-uni-bochum.de/hendrik.reimann/diplom.pdf>.
- [9] Claus Michael Ringel. *27 - Vorlesung*. Eingesehen am 15.12.2014. URL: <http://www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/lectures/27/>.
- [10] Claus Michael Ringel. *Die 27 Geraden*. Eingesehen am 16.12.2014. URL: <http://www.math.uni-bielefeld.de/~ringel/27/27.htm>.
- [11] Rudolf Sturm. *Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung*. Leipzig: B. G. Teubner, 1867.
- [12] *Wikipedia - Affine Ebene*. Eingesehen am 16.11.2014. URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Affine\\_Ebene](http://de.wikipedia.org/wiki/Affine_Ebene).
- [13] *Wikipedia - Algebraische Varietät*. Eingesehen am 20.11.2014. URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Algebraische\\_Variet%C3%A4t](http://de.wikipedia.org/wiki/Algebraische_Variet%C3%A4t).
- [14] *Wikipedia - Coxeter group*. Eingesehen am 04.01.2015. URL: [http://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter\\_group](http://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter_group).
- [15] *Wikipedia - Inzidenzstruktur*. Eingesehen am 14.11.2014. URL: <http://de.wikipedia.org/wiki/Inzidenzstruktur>.
- [16] *Wikipedia - Projektive Abbildung*. Eingesehen am 17.11.2014. URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Projektive\\_Abbildung](http://de.wikipedia.org/wiki/Projektive_Abbildung).
- [17] *Wikipedia - Projektive Ebene*. Eingesehen am 16.11.2014. URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Projektive\\_Ebene](http://de.wikipedia.org/wiki/Projektive_Ebene).

- [18] *Wikipedia - Projektive Geometrie*. Eingesehen am 14.11.2014. URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Projektive\\_Geometrie](http://de.wikipedia.org/wiki/Projektive_Geometrie).
- [19] *Wikipedia - Projektives Koordinatensystem*. Eingesehen am 17.11.2014. URL: [http://de.wikipedia.org/wiki/Projektives\\_Koordinatensystem](http://de.wikipedia.org/wiki/Projektives_Koordinatensystem).