



DIPLOMARBEIT

Globale Lösbarkeit der Energie-Transport-Gleichungen für Halbleiter

Ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der
Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.-Prof. Dr. Ansgar Jüngel

durch
Georg Retschitzegger, B.Sc.
Meinhartsdorfergasse 5/29, 1150 Wien

Wien, März 2015

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich für die Unterstützung während meinem Studium und beim Schreiben dieser Diplomarbeit bedanken. Besonders bedanke ich mich bei Professor Ansgar Jüngel, der mir die Chance gegeben hat, eine Arbeit in diesem Bereich zu schreiben. Er und Doktor Nicola Zamponi sind mir beim Einarbeiten in die Materie mit Rat zur Seite gestanden.

Mein Dank gilt auch meinen Eltern, die es mir ermöglicht haben, das Studium in Wien zu absolvieren. Besondere Motivation bekam ich durch meine Mutter, die sich noch dazu entschlossen hatte, einen Mastertitel anzustreben und zeitgleich mit mir an ihrer Arbeit schrieb.

Weiters möchte ich mich noch bei meinen Kommilitonen bedanken, mit denen ich im Laufe meiner Studienzzeit viele Stunden beim Ausarbeiten und Lernen verbracht habe. Es war eine große Hilfe, dass ich mich mit ihnen über viele verschiedene Themen austauschen konnte und wir uns gegenseitig unterstützen konnten.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Klasse von Energie-Transport-Gleichungen mit gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen untersucht. Sie findet Anwendung in der Simulation von Halbleiterbauteilen. In mehreren Schritten wird gezeigt, dass eine schwache, positive Lösung des nichtlinearen, gekoppelten, parabolischen Systems existiert. Aufgebaut wird der Beweis zunächst mittels einer Semidiskretisierung in der Zeit und einer Variablen-Transformation, damit die Gleichung auf semilineare und elliptische Struktur gebracht wird. Mit einem Fixpunktargument wendet man die Lösungstheorie aus den linearen, elliptischen partiellen Differentialgleichungen an. Ein Stampacchia-Approximationsterm in Verbindung mit einer passenden Abschneide-Testfunktion liefert die Positivität. Eine nichtlogarithmische Entropieungleichung liefert Grenzen für die semidiskrete, schwache Lösung und ermöglicht den Schluss auf die Existenz einer schwachen Lösung des kontinuierlichen Systems. Anschließend wird das Langzeitverhalten dieser Lösung gegenüber konstanten Dirichlet-Randdaten untersucht und Konvergenz gezeigt. Der Beweis dazu baut wieder auf der davor gezeigten Entropieabschätzung auf.

Abstract

This thesis analyses a class of energy-transport equations under mixed Dirichlet-Neumann boundary conditions. The equations are applied in the simulation of semiconductor devices. In multiple steps the existence of a weak, positive solution of the nonlinear, coupled, parabolic system is shown. The proof starts with a time semi-discretization and a variable transformation to achieve semilinear and elliptic structure. Using a fixed-point argument, existence results for linear, elliptic partial differential equations are deployed. A Stampacchia truncation coupled with a suitable cut-off test function yields the positivity. A nonlogarithmic entropy inequality provides limits for the semi-discrete, weak solution and allows to conclude the existence of a weak solution to the continuous system. Subsequently the long-time behaviour for constant Dirichlet boundary conditions is studied and convergence to the steady state is shown, using the entropy inequality again.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Situation und Voraussetzungen	2
1.2	Lösungsstrategie und Vorgehen	4
2	Vorbemerkungen	6
2.1	Sobolevräume	6
2.2	Lösungstheorie für PDEs	10
2.3	Allgemeine Resultate	12
3	Globale Existenz	16
3.1	Reformulierung und Semidiskretisierung	16
3.2	Abgeschnittenes Problem	18
3.3	Entfernung des Abschneideterms	31
3.4	Entropieabschätzung	36
3.5	Übergang $h \rightarrow 0$	46
3.6	Temperaturabhängige Relaxionszeit	61
4	Langzeitverhalten	63
	Literaturverzeichnis	71
	Abbildungsverzeichnis	72

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einer Lösungsaussage für Energie-Transport-Modelle, welche in dieser Form bei der Simulation von Szenarien in der Halbleitertechnik eingesetzt werden. Wir werden zuerst kurz die physikalische Herkunft und Signifikanz dieser Modelle erläutern. Dies soll verdeutlichen, warum es von Interesse ist, Elektronendichte und Temperatur in diesen Bauteilen zu analysieren. Für einen genaueren physikalischen Hintergrund verweisen wir auf [3].

Der Begriff Halbleiter bezeichnet historisch einen Festkörper, der bessere Leitfähigkeit als ein Isolator, aber schlechtere als ein Metall besitzt. Die Theorie der elektrischen Leitfähigkeit beruht auf quantenmechanischen Resultaten. Durch Wechselwirkungen der Elektronen über mehrere Atome hinweg in der kristallinen Struktur eines Festkörpers erweitern sich die diskreten Energieniveaus eines einzelnen Atoms auf Energiebereiche, sogenannte Energiebänder. Elektronen nahe dem Atomkern liegen in energetisch tieferen Schichten, während die beweglichsten Elektronen in der höchst besetzten Schicht, dem sogenannten Valenzband, liegen.

Legt man nun ein elektrisches Feld an, können Elektronen vom Valenzband in das nächst höhere Leitungsband wandern und so entstehen teilbesetzte Bänder, welche Ladungsträger für elektrische Leitfähigkeit enthalten. Vollbesetzte Schichten erlauben aber auch keine Leitung, da keine Energie mehr aufgenommen werden kann und nur beschränkte Beweglichkeit der Teilchen gegeben ist.

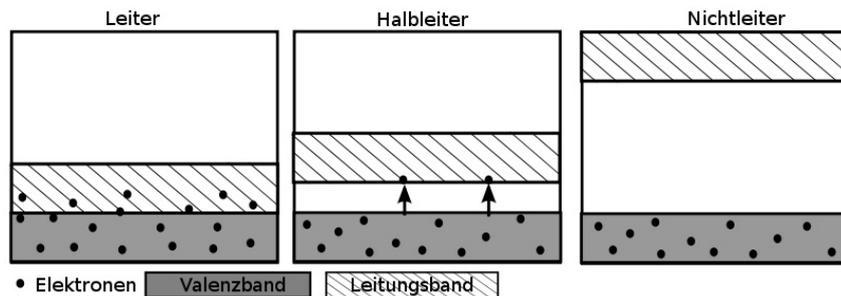


Abbildung 1: Energiebandmodell, Quelle: Wikimedia Commons¹

Die Elektronen im Leitungsband sind also notwendig. Bei Metallen überschneiden sich die Energieniveaus dieser Bänder, wodurch diese Bedingung leicht erfüllt ist. Bei Isolatoren aber befindet sich zwischen Valenz- und Leitungsband eine sogenannten Energielücke. In dieser Lücke befinden sich aufgrund von quantenmechanischen Verboten keine Elektronen und sie können nicht in das Leitungsband gelangen. Abb. 1 zeigt die unterschiedlichen Arten der Bänderstrukturen.

Halbleiter besitzen auch eine derartige Bandlücke, welche aber um einiges kleiner ist als bei Isolatoren. Es ist den Elektronen möglich, diese Lücke zu überwinden, sofern eine bestimmte Energie vorhanden ist. Man nennt diese Fermienergie. Eine Möglichkeit dafür ist eine thermische Anregung, also eine Temperaturerhöhung. Je nach Material

¹<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bändermodell.svg>, 22.02.2015.

bedeutet das, dass manche Halbleiter bereits bei Raumtemperatur leitfähig sind, diese Eigenschaft am absoluten Nullpunkt aber bei allen verloren geht.

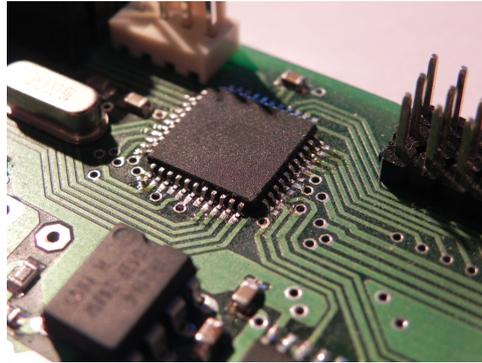


Abbildung 2: Beispiel eines Halbleiters: Platine mit ATMEL Microcontroller, Quelle: Privatfoto²

Beispiele dieser Materialien sind die Elemente Silizium und Germanium, die Anwendung in Computer- und Solartechnik finden, siehe Abb. 2. Es handelt sich also um kleine und kompakte Bauteile, für welche die mathematische Simulation von Elektronenbewegung und Wärmeentwicklung hilfreiche Erkenntnisse liefert.

1.1 Situation und Voraussetzungen

Das hier betrachtete System in Ort und Zeit $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ wird aus der semiklassischen Boltzmann-Gleichung hergeleitet, eine Gleichung für die statistische Verteilung von Teilchen in einem Medium aus der Theorie von Gasen. Eine genaue Herleitung findet sich in Kapitel 6 von [10] beziehungsweise in [2]. Wir erklären hier nur das grobe Vorgehen.

In einem sogenannten Diffusionsgrenzwert erhält man ein System aus zwei Energie-Transport-Gleichungen für die Partikeldichte n und die Energiedichte ne . Die beiden Gleichungen sind zusätzlich durch eine Diffusionsmatrix stark gekoppelt.

Die Streuungsrate der Teilchen wird in einem Ansatz proportional zu der Energie hoch einem reellen Parameter β gesetzt. Dieser Parameter bestimmt die Eigenschaften der Streuung. Mit einer parabolischen Energieband-Approximation können wir die Energiedichte durch die Temperatur $\theta(x, t)$ darstellen, also gilt

$$ne = \frac{3}{2}n\theta.$$

Eine geeignete Skalierung der Größen ermöglicht die Vernachlässigung der physikalischen Konstanten für die Diskussion der mathematischen Lösbarkeit. Die Gestalt der Energie-Transport-Gleichungen vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned} \partial_t n &= \operatorname{div} J_0, \\ \partial_t \left(\frac{3}{2}n\theta \right) &= \operatorname{div} J_1 - J_0 \nabla V + \frac{3}{2} \frac{1}{\tau} n(1 - \theta). \end{aligned}$$

²Zur Verfügung gestellt von Stephan Dobretsberger.

V bezeichnet dabei das elektrische Potential. τ sei die Entspannungs- oder Relaxionszeit, also die typische Zeit, welche benötigt wird, bis das System in einen Gleichgewichtszustand mit konstanter Temperatur verfällt. Die Terme J_0, J_1 beinhalten die Diffusionsmatrix.

Mit weiteren physikalischen Annahmen kann auch die Diffusionsmatrix diagonalisiert werden um die beiden Gleichungen in dieser zu entkoppeln. Zusätzlich nehmen wir noch an, dass kein elektrisches Feld angelegt ist, also ∇V verschwindet. Dann schreibt sich die Klasse von Energie-Transport-Gleichungen, welche hier behandelt wird, als

$$\partial_t n = \Delta (n\theta^{1/2-\beta}), \quad (1.1)$$

$$\partial_t(n\theta) = \kappa\Delta (n\theta^{3/2-\beta}) + \frac{n}{\tau}(1 - \theta) \quad (1.2)$$

mit

$$-\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{1}{2}, \quad \kappa = \frac{2}{3}(2 - \beta). \quad (1.3)$$

Das Intervall, aus dem β gewählt wird, kommt von der typischen Wahl des Parameters aus der Literatur und modelliert das Verhalten der Elektronenstreuung. Diese ist zum Beispiel $\beta = 0$ [6], $\beta = -\frac{1}{2}$ [11] oder $\beta = \frac{1}{2}$ [10, Kapitel 9]. Wir bemerken, dass $\beta = \frac{1}{2}$ in den Voraussetzungen (1.3) explizit ausgeschlossen ist, da es auf den einfacheren Spezialfall

$$\begin{aligned} \partial_t n &= \Delta n, \\ \partial_t(n\theta) &= \kappa\Delta(n\theta) + \frac{n}{\tau}(1 - \theta) \end{aligned}$$

führt. Es sind also voneinander entkoppelte Wärmeleitungsgleichungen und somit wird die hier durchgeführte Argumentation überflüssig.

Das Intervall $[0, T]$ sei beschränkt und $\Omega \subset \mathbb{R}^d, 1 \leq d \leq 3$, sei eine beschränkte, offene Menge, also ein Gebiet. An den Rand $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ werden noch zusätzlich die Voraussetzungen

$$\partial\Omega \in C^1, \quad \text{meas}(\Gamma_D) > 0, \quad \Gamma_N \text{ relativ offen in } \partial\Omega \quad (1.4)$$

getroffen. Dieser ist also insbesondere ein Lipschitz-Rand, vergleiche [1, A6.2], und Ω damit ein sogenanntes Lipschitzgebiet.

Die Randbedingungen sind physikalisch motiviert und ergeben gemischte Dirichlet-Neumann-Randbedingungen

$$n = n_D, \quad n\theta = n_D\theta_D \quad \text{auf } \Gamma_D, t > 0, \quad (1.5)$$

$$\nabla (n\theta^{1/2-\beta}) \cdot \nu = \nabla (n\theta^{3/2-\beta}) \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N, t > 0. \quad (1.6)$$

Γ_D modelliert hier die Kontakte des Halbleiters, während Γ_N die isolierten Randsegmente abbildet. $\nu \in \mathbb{R}^d$ sei dabei die äußere Normale, von welcher angenommen wird, dass sie fast überall existiert.

Da es sich um eine zeitliche Evolution eines Systems handelt, benötigen wir auch noch Anfangsbedingungen zum Zeitpunkt $t = 0$. Es sei dazu

$$n(0, x) = n_0(x), \quad n(0, x)\theta(0, x) = n_0(x)\theta_0(x) \quad \text{auf } \Omega \quad (1.7)$$

gegeben. Weitere technische Voraussetzungen an die Rand- und Anfangsdaten sind

$$\inf_{\Omega} n_0 > 0, \inf_{\Omega} \theta_0 > 0, \quad n_0, \theta_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega), \quad (1.8)$$

$$\inf_{\Gamma_D} n_D > 0, \inf_{\Gamma_D} \theta_D > 0, \quad n_D, \theta_D \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega). \quad (1.9)$$

Die Randdaten seien so fortgesetzt auf Ω , dass

$$\inf_{\Omega} n_D > 0, \inf_{\Omega} \theta_D > 0 \quad (1.10)$$

gilt.

1.2 Lösungsstrategie und Vorgehen

Wir werden nun kurz erklären, wie wir in dieser Arbeit vorgehen, um eine schwache Lösung für die Gleichungen (1.1), (1.2) herzuleiten. Wir orientieren uns dabei an dem in [15] vorgestellten Vorgehen. Durchgeführt wird das Prozedere dann in Kapitel 3. In Kapitel 2 wiederholen wir zunächst noch die verwendete Notation und führen Resultate aus verschiedenen Bereichen der Mathematik an, welche für die Beweise benötigt werden.

Am Beginn des Kapitels 3 formulieren wir das Lösungsergebnis unter den getroffenen Voraussetzungen. Wir werden spezifizieren, welche Regularität erwartet wird und wie genau eine schwache Formulierung des Gleichungssystems aussieht. Anschließend werden wir den Beweis in mehrere Schritte gliedern.

Wir führen diese Schritte zuerst für eine konstante Relaxionszeit τ vor und anschließend in Kapitel 3.6 erweitern wir den Beweis auf eine temperaturabhängige Entspannungszeit.

In ihrer gegebenen Form sind die Gleichungen parabolisch, nicht linear, gekoppelt und degenerieren an $\theta = 0$. Wir haben deshalb keine allgemeine Lösungstheorie, die wir anwenden können, da keine Maximums-Prinzip-Argumente greifen. Wir gehen deshalb in mehreren Schritten vor, um das Problem auf eine lösbare Form zu vereinfachen und werden diese anschließend rückgängig machen, um auf eine Lösung des ursprünglichen Systems zu schließen.

Im ersten Schritt, in Kapitel 3.1, diskretisieren wir das System in der Zeitvariable t , wodurch wir ein elliptisches Problem erhalten. Anschließend wird eine Variablen-Transformation durchgeführt, um zumindest semilineare Struktur zu erhalten. Die Gleichungen werden dann mit einer Stampacchia-Approximation bearbeitet, also mit einem Abschneideterm skaliert. In weiterer Folge ist dies für die Positivität der Lösung von Bedeutung.

Eine Lösungsaussage können wir dann in Kapitel 3.2 formulieren, aber zunächst nur für ein entkoppeltes, elliptisches Modell. Indem wir ein Fixpunktargument mit dem Fixpunktsatz von Leray-Schauder benutzen, können wir von dieser Aussage auf eine schwache Lösung des gekoppelten Systems schließen. Mit einer geeigneten Testfunktion, sowie dem Stampacchia-Abschneideterm, erhalten wir dann die Positivität dieser Lösungsfunktionen.

Die Stampacchia-Approximation wird dann in Kapitel 3.3 rückgängig gemacht, indem wir mit einer passenden Abschneide-Testfunktionen in den schwachen Formulierungen

arbeiten. Anschließend werden wir die im ersten Schritt eingeführte Variablen-Transformation rückgängig machen. Somit haben wir bis zu diesem Schritt eine semidiskrete Lösung des gegebenen Systems gefunden. Die Schwierigkeit besteht dann noch darin, den Grenzübergang für verschwindende Gitterweite zu bilden.

In Kapitel 3.4 definieren wir ein diskretes Entropiefunktional und werden eine nicht logarithmische, diskrete Entropieungleichung herleiten. Diese wird ein wichtiges Werkzeug sein für den Grenzübergang auf eine Lösung des kontinuierlichen Systems und für den Beweis der Langzeitkonvergenz.

Mit der Entropieabschätzung aus dem vorherigen Schritt werden dann in Kapitel 3.5 Abschätzungen für die schwachen Lösungen bestimmt. Diese sind unabhängig von der Gitterweite der Semidiskretisierung und in den Normen der zeitabhängigen Sobolevräume. Mit diesen Aussagen können wir dann die Grenzwerte der semidiskreten Lösungsfunktionen bestimmen und als schwache Lösung des kontinuierlichen Systems identifizieren.

Anschließend erwähnen wir noch, worin sich der Beweis für eine temperaturabhängige Zeit unterscheidet, bevor in Kapitel 4 das Langzeitverhalten der Lösungen bei konstanten Randbedingungen untersucht wird. Wir werden ein Ergebnis präsentieren, welches zumindest Konvergenz gegen konstante Dirichlet-Randdaten in algebraischer Ordnung garantiert. Dieses Resultat wird hauptsächlich über die Entropieungleichung aus Kapitel 3.4 und einem diskreten Lemma von Gronwall hergeleitet.

2 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel werden wir einige elementare Aussagen und Definitionen wiederholen und auch komplizierte Resultate aus der Funktionalanalysis und anderen Bereichen der Mathematik anführen. Für Beweise werden wir hauptsächlich auf Literatur verweisen, um uns mehr auf die Aussagen konzentrieren zu können. Die benutzte Notation orientiert sich hauptsächlich an dem Buch über partielle Differentialgleichungen von Evans [9].

2.1 Sobolevräume

Wir beginnen mit der Definition der Sobolevräume um etwaige Unklarheiten bezüglich der Notation auszuschließen und einigen Eigenschaften letzterer. Die behaupteten Aussagen sind etwa in [9, Kapitel 5.2] bewiesen. Wir bezeichnen mit $L^p(\Omega)$ dabei den Raum der Lebesgue-integrierbaren Funktionen und $D^\alpha u$ die entsprechende partielle Ableitung von u im distributionellen Sinn.

Definition 2.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex. Definiere

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq k : D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

und für $p = 2$

$$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

Es gilt $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

$W^{k,p}(\Omega)$ sind Banachräume mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |D^\alpha u|, & p = \infty \end{cases}$$

und $H^k(\Omega)$ sogar separable Hilberträume mit innerem Produkt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

In der Literatur findet man auch oft die äquivalente Definition der Sobolevräume über den Abschluss der $C^\infty(\Omega)$ -Funktionen in der $W^{k,p}$ -Norm, welche verdeutlicht, dass diese glatten Funktionen dicht in den Räumen liegen.

Wir bemerken, dass durch die Definition der Sobolevräume, an die Funktionen meist nur schwache Bedingungen gestellt werden können, also im Sinne eines Integrals. Darum sind auch die Randbedingungen in (1.5) und (1.6) im L^2 -Sinn zu verstehen. Auch die Positivität von den Anfangs- und Randdaten in (1.8), (1.9) benötigt eigentlich ein essentielles Infimum. Wir werden diese Notation aber hier vernachlässigen, da aus dem

Kontext der schwachen Lösungen hervorgeht, dass Aussagen auf Lebesgue-Nullmengen nicht ausschlaggebend sind.

Wir zitieren zwei wichtige Einbettungssätze für Sobolevfunktionen. Diese erlauben uns Kriterien für stetige und kompakte Einbettungen unter den Räumen aufzustellen. Für Beweise verweisen wir zum Beispiel auf [4], Theorem 9.14 und 9.16.

Theorem 2.2 (Einbettungssatz von Sobolev). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \leq p < d$. Dann gilt die stetige Einbettung*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

für alle $1 \leq q \leq p^* := \frac{pd}{d-p}$.

Für $1 \leq d < p < \infty$ betten die Funktionen aus $W^{1,p}(\Omega)$ sogar stetig in die Hölder-stetigen Funktionen ein, also sind insbesondere in die stetigen Funktionen. Wir können sie deshalb in die beschränkten Funktionen stetig einbetten, also

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Für den Spezialfall $p = d$ gilt die stetige Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

für alle $1 \leq q < \infty$.

Theorem 2.3 (Rellich-Kondrachov). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \leq p < d$. Dann gilt die kompakte Einbettung*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

für alle $1 \leq q < p^* := \frac{pd}{d-p}$.

Für $1 \leq d < p < \infty$ betten die Funktionen aus $W^{1,p}(\Omega)$ nun auch kompakt in die stetigen Funktionen ein,

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\bar{\Omega}).$$

In dem Spezialfall $p = d$ gilt auch für die kompakte Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$$

für $1 \leq q < \infty$.

Insbesondere gilt für alle $1 \leq p \leq \infty$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Der traditionelle Spursatz, aus etwa [9, Kapitel 5.5], erlaubt uns die Sobolevfunktionen auch auf einem glatten Rand des Gebiets auszuwerten. Hier führen wir einen ähnlichen Satz vor, der das Auswerten auf einem Teilstück des glatten Randes ermöglicht. Eine genauere Diskussion dazu findet sich in [13, Kapitel 1.7.2 und 1.7.3]. Dieser Satz wird später essentiell sein, um die Dirichlet-Randbedingungen zu überprüfen.

Theorem 2.4 (Spursatz für Dirichlet-Rand). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $0 \neq \Gamma_D \subset \partial\Omega$. Dann existiert ein linearer, beschränkter Operator $T : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma_D)$, sodass $C > 0$, existiert und*

$$\|Tu\|_{L^2(\Gamma_D)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

gilt.

Bemerkung 2.5. Der Spuroperator aus Theorem 2.4 ist nicht surjektiv, das heißt es gibt nicht zu allen möglichen Randwerten auf Γ_D eine passende Funktion in $H^1(\Omega)$. Der Raum

$$H^{1/2}(\Gamma_D) := T(H^1(\Omega))$$

ist also ein echter Unterraum von $L^2(\Gamma_D)$. In der Literatur bezeichnet man diesen Raum als Sobolevraum mit gebrochener Hochzahl. Genauere Diskussion dazu findet sich in [4, Kapitel 9.8]. Wir können auch Sobolev-Einbettungssätze darauf anwenden. Mit der kompakten Einbettung für allgemeine Hochzahlen aus dem Anhang von [17, S. 1026] erhalten wir

$$H^{1/2}(\Gamma_D) \hookrightarrow L^2(\Gamma_D).$$

Definition 2.6. Mithilfe des Spuroperators aus Theorem 2.4 definieren wir den abgeschlossenen Hilbertraum

$$H_D^k(\Omega) := \{u \in H^k(\Omega) : Tu = 0\}.$$

In weiterer Folge werden wir das Auswerten auf dem Rand nicht extra mit dem Operator T anschreiben, sondern schreiben einfach $u|_{\Gamma_D}$. Diese Definition des Raumes $H_D^k(\Omega)$ ist für Lipschitzgebiete äquivalent zu der in der Literatur auch üblichen Definition als der Abschluss der $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma_N)$ -Funktionen in der H^k -Norm. Für genauere Diskussion verweisen wir wieder auf [13].

Für das nächste Resultat auf dem eben definierten Sobolevraum $H_D^1(\Omega)$, benötigen wir zuerst ein Hilfslemma, welches aus der Dichtheit der glatten Funktionen folgt, siehe [9, Kapitel 5.3.3].

Lemma 2.7. *Sei Ω ein Lipschitzgebiet, $u \in H^1(\Omega)$ und $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$. Dann ist u eine konstante Funktion.*

Nun können wir eine Poincaré-Ungleichung für Funktionen definieren, welche auf dem Dirichlet-Rand verschwinden.

Theorem 2.8 (Poincaré-Ungleichung auf $H_D^1(\Omega)$). *Sei Ω ein Lipschitzgebiet, dann gilt für alle $u \in H^1(\Omega)$*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Gamma_D)}) \tag{2.1}$$

für ein $C > 0$.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen (2.1) gilt nicht. Dann gibt es eine normierte Folge von Funktionen $u_n, n \in \mathbb{N}$, aus $H^1(\Omega)$, sodass

$$1 = \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \geq n (\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|_{L^2(\Gamma_D)}) \quad (2.2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt unmittelbar, dass für $n \rightarrow \infty$

$$\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|u_n\|_{L^2(\Gamma_D)} \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

gelten muss. Wir bemerken, die Einbettung $H^1 \hookrightarrow H^0 = L^2$ ist kompakt, laut dem Satz von Rellich-Kondrachov, Theorem 2.3. Damit hat u_n , welches wegen (2.2) in $H^1(\Omega)$ beschränkt ist, eine in $L^2(\Omega)$ konvergente Teilfolge u_{n_k} . Das heißt, diese Teilfolge ist auch insbesondere eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$. Mit (2.3) folgt

$$\|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u_{n_k} - u_{n_l}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_{n_k} - \nabla u_{n_l}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0, \quad l, k \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Also ist diese Teilfolge sogar im vollständigen Raum $H^1(\Omega)$ eine Cauchy-Folge. Damit existiert ein Grenzwert $u \in H^1(\Omega)$ und wegen (2.2) und (2.3) gilt

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (2.5)$$

Aus der letzten Aussage folgt aber wegen Lemma 2.7, dass u konstant in Ω ist. Einen Widerspruch erhalten wir aber nun aus der zweiten Aussage in (2.3), (2.5) und dem Spursatz 2.4. Daraus folgt mit Dreiecksungleichung

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_D)} \leq \|u - u_{n_k}\|_{L^2(\Gamma_D)} + \|u_{n_k}\|_{L^2(\Gamma_D)} \leq C(\Omega)\|u - u_{n_k}\|_{H^1(\Omega)} + \|u_{n_k}\|_{L^2(\Gamma_D)} \rightarrow 0,$$

für $k \rightarrow \infty$, was aber $u \equiv 0$ bedeutet und Widerspruch zu (2.5) ist. \square

Die zu untersuchenden Funktionen sind hier von Orts- und Zeitvariablen abhängig. Darum führen wir auch noch zeitabhängige Sobolevräume ein, wobei wir uns an den Resultaten aus [9, Kapitel 5.9.2] und [16, Kapitel 23] orientieren.

Definition 2.9. Sei B ein Banachraum, $T > 0$ und $1 \leq p \leq \infty$. Definiere den Banachraum

$$L^p(0, T; B) := \{u : (0, T) \rightarrow B : \|u\|_{L^p(0, T; B)} < \infty\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{L^p(0, T; B)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u\|_B^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u\|_B, & p = \infty. \end{cases}$$

Sei H ein Hilbertraum und $p = 2$, so ist $L^2(0, T; H)$ sogar ein Hilbertraum mit innerem Produkt

$$(u, v)_{L^2(0, T; H)} = \int_0^T (u(t), v(t))_H dt, \quad u, v \in L^2(0, T; H).$$

Bettet ein Banachraum X stetig in B ein, so ist auch die Einbettung

$$L^p(0, T; X) \hookrightarrow L^q(0, T; B)$$

stetig für $1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Wir bezeichnen den topologischen Dualraum eines normierten Raumes V mit V' und das Anwenden eines Funktionals $f \in V'$ auf $v \in V$ mit $\langle f, v \rangle_{V'}$. Mit den Ergebnissen aus [16, Proposition 23.7 und Übung 23.12] können wir die Dualräume der zeitabhängigen Sobolevräume ähnlich wie bei den gewöhnlichen $L^p(\Omega)$ -Räumen identifizieren.

Theorem 2.10. *Sei B ein reflexiver, separabler Banachraum, $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$(L^p(0, T, B))' = L^q(0, T; B').$$

Die bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen vorkommenden Sobolevräume haben manchmal auch eine spezielle, geschachtelte Struktur.

Definition 2.11. Sei H ein separabler Hilbertraum, V ein reflexiver Banachraum, wobei die Einbettung $V \hookrightarrow H$ stetig und dicht sei. Weiters wird H mit H' über die Riesz-Abbildung ([1, Satz 4.1]) identifiziert. Dann ist die Einbettung $H' \hookrightarrow V'$ auch stetig und dicht (siehe [16, Problem 18.6]) und insbesondere gilt

$$\langle u, v \rangle_{V'} = (u, v)_H, \quad u \in H, v \in V.$$

Das Tripel (V, H, V') nennt man *Evolutionstripel* oder *Gelfand-Tripel*.

Eine weitere Eigenschaft der Sobolevfunktionen erhalten wir aus folgendem Resultat, welches sich in der Literatur oft unter dem Begriff Stampacchia-Theorem findet. Ein Beweis findet sich in [13, Kapitel 1.8.2].

Theorem 2.12 (Stampacchia). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. $1 \leq p < \infty, u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $u_+ := \max\{u, 0\}$ gilt*

$$\begin{aligned} u^+ &\in W^{1,p}(\Omega), \\ \nabla u_+ &= \mathbb{1}_{[u>0]} \nabla u. \end{aligned}$$

2.2 Lösungstheorie für PDEs

Die Lösungstheorie für lineare, stationäre partielle Differentialgleichung liefert uns einige wichtige Werkzeuge, die auch bei der Lösung von nichtlinearen Gleichungen eine bedeutende Rolle spielen. Eines davon ist zu finden in [9, Kapitel 6.2] und gibt uns eine Aussage für Existenz und Eindeutigkeit bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen.

Theorem 2.13 (Lax-Milgram). *Sei H ein Hilbertraum, $l \in H'$ und $B : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform. Also existiert ein $C > 0$ mit*

$$|B(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

Weiters sei B koerziv, das heißt es existiert $\alpha > 0$ derart, dass

$$B(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \forall v \neq 0.$$

Dann existiert genau ein $u \in H$, sodass

$$B(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H$$

gilt.

Zusätzlich erfüllt diese Lösung

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|l\|_{H'}.$$

Den folgenden Fixpunktsatz werden wir benötigen, um das System nichtlinearer, gekoppelter Gleichungen auf eine für das Lax-Milgram-Theorem geeignete Form zu bringen. Für den Beweis siehe zum Beispiel [12, S. 303, Th. 5].

Theorem 2.14 (Leray-Schauder). *Sei B ein Banachraum, $S : B \times [0, 1] \rightarrow B$ eine stetige, kompakte Abbildung mit $S(v, 0) = v_0$ für alle $v \in B$. Weiters existiere ein $C > 0$, sodass für alle $u \in B$ und $\sigma \in [0, 1]$ mit $S(u, \sigma) = u$, das heißt für alle Fixpunkte, gilt*

$$\|u\|_B \leq C.$$

Dann hat $v \mapsto S(v, 1)$ einen Fixpunkt.

Wir werden später ein Resultat benötigen, welches die Beschränktheit von schwachen Lösungen garantiert. Dazu zitieren wir das folgende Lemma, welches eine Konsequenz der Resultate aus [13, Kapitel 2.3] ist.

Lemma 2.15. *Sei $w \in H^1(\Omega)$ die eindeutige, schwache Lösung von $-\Delta w + a(x)w = f(x)$ mit gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen. $a \in L^\infty(\Omega)$ sei nichtnegativ und $f \in L^s(\Omega)$ mit $s > \frac{d}{2}$. Dann ist $w \in L^\infty(\Omega)$ mit*

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

wobei $C > 0$ nur von f, Ω und den Randdaten abhängt.

Wir führen folgende Variante des Aubin-Lemmas an. Für einen Beweis siehe [7, Theorem 1]. S_h bezeichne den Shift-Operator in der Zeitvariable, das heißt $S_h u(x, t) = u(x, t - h)$.

Lemma 2.16 (Aubins Lemma). *Seien B, X, Y Banachräume mit den Eigenschaften, dass X kompakt in B einbettet und B stetig in Y . Sei weiterhin eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$1 \leq p < \infty, r = 1 \text{ oder} \tag{2.6}$$

$$p = \infty, r > 1. \tag{2.7}$$

Wir betrachten eine Folge von Funktionen (u_h) , die konstant auf jedem Intervall (t_{k-1}, t_k) sind, und für alle $h > 0$, für ein $C_0 > 0$

$$\frac{1}{h} \|u_h - S_h u_h\|_{L^r(h, T; Y)} + \|u_h\|_{L^p(0, T; X)} \leq C_0$$

erfüllen.

Dann gilt im ersten Fall (2.6), dass (u_h) relativ kompakt in $L^p(0, T; B)$ ist. Im zweiten Fall (2.7) folgt die Existenz einer Teilfolge von (u_h) , welche in jedem Raum $L^q(0, T; B)$, für $1 \leq q < \infty$, gegen ein $u \in C^0([0, T]; B)$ konvergiert.

Ein ähnliche Aussage aus [16, Problem 23.13] liefert uns eine stetige Einbettung der zeitabhängigen Sobolevfunktionen. Wir werden sie benötigen um zu argumentieren in welchem Sinn die Anfangsbedingungen angenommen werden.

Lemma 2.17. *Seien B, X und Y wie in Lemma 2.16. Dann gilt die stetige Einbettung*

$$\{u \in L^2(0, T; X) : \partial_t u \in L^2(0, T; Y)\} \hookrightarrow C^0([0, T]; Y).$$

2.3 Allgemeine Resultate

Die in diesem Kapitel angeführten Resultate stammen aus verschiedenen Bereichen, wie der Analysis, Maßtheorie oder linearen Algebra.

Lemma 2.18 (Young-Ungleichung). *Seien $a, b \geq 0, p, q \geq 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Beweis. Wir nutzen aus, dass \log konkav ist und schreiben

$$\log(ab) = \log a + \log b = \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q \leq \log \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right).$$

Exponentieren liefert die Aussage. □

Korollar 2.19 (Skalierte Young-Ungleichung). *Seien a, b, q und p wie in Lemma 2.18 und $\delta > 0$. Dann gilt*

$$ab \leq \frac{\delta}{p} a^p + \frac{1}{q\delta^{q/p}} b^q$$

Beweis. Lemma 2.18 mit $a := \delta^{1/p} a, b := \frac{1}{\delta} b$. □

Das folgende Resultat aus [4, Theorem 3.18]. liefert uns einen Zusammenhang zwischen beschränkten und schwach konvergenten Folgen.

Theorem 2.20. *Sei B ein reflexiver Banachraum. Dann besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge. Das heißt, gilt für $x_n \in B$*

$$\|x_n\| \leq C, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so existiert ein $x \in B$ mit

$$\langle u, x_{n_l} \rangle_{B'} \rightarrow \langle u, x \rangle_{B'}, \quad l \rightarrow \infty$$

für alle $u \in B'$. Wir schreiben dafür

$$x_{n_l} \rightharpoonup x, \quad l \rightarrow \infty.$$

In nicht reflexiven Banachräumen, wie zum Beispiel $L^1(\Omega)$, gibt es eine ähnliche Aussage für beschränkte Folgen. Ein Beweis des folgenden Theorems findet sich in [16, Theorem 21.E].

Theorem 2.21. *Sei B ein separabler Banachraum. Jede beschränkte Folge (u_n) in B' besitzt eine schwach* konvergente Teilfolge. Das heißt es existiert ein $u \in B'$, sodass für alle $\eta \in B$ gilt*

$$\langle u_{n_l}, \eta \rangle_{B'} \rightarrow \langle u, \eta \rangle_{B'}, \quad l \rightarrow \infty.$$

Die nächsten Lemmata liefern wichtige Erkenntnisse über dem Umgang zwischen punktweiser Konvergenz fast überall, der Konvergenz im p -ten Mittel und schwacher Konvergenz. Für Beweise verweisen wir auf Lemma 1.22 und Übung 6.1 in [1].

Lemma 2.22. *Seien $f_n, f \in L^p(\Omega)$ für alle $n \in N$, $1 \leq p \leq \infty$ und konvergiere f_n gegen f in $L^p(\Omega)$, das heißt*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Dann existiert eine Teilfolge f_{n_k} , die punktweise fast überall auf Ω gegen f konvergiert. Sei umgekehrt f_n eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ und f der Grenzwert von f_n punktweise fast überall. Dann ist $f \in L^p(\Omega)$ und auch der Grenzwert im Sinne von $L^p(\Omega)$.

Lemma 2.23. *Seien $f_n, f \in L^p(\Omega)$ für alle $n \in N$, $1 \leq p \leq \infty$. Konvergiert f_n schwach gegen f in $L^p(\Omega)$, in Zeichen*

$$f_n \rightharpoonup f,$$

und f_n punktweise fast überall auf Ω gegen \tilde{f} , so folgt $f = \tilde{f}$ fast überall.

Damit wir später Grenzwerte und Integrale vertauschen können, benötigen wir die Aussage des Lemmas von Fatou aus [14, Seite 23].

Lemma 2.24 (Lemma von Fatou). *Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. (f_n) eine Folge messbarer Funktionen von Ω nach \mathbb{R} . Gilt $f_n \geq 0$ fast überall auf Ω für alle $n \in N$, so folgt*

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu. \quad (2.8)$$

Das nächste Resultat findet sich in [5, Lemma 17]. Wir werden es benötigen um anschließend eine Art diskretes Lemma von Gronwall herleiten zu können.

Lemma 2.25. *Sei $f \in C^1([0, \infty))$ eine positive, nicht fallende, konvexe Funktion, sodass $\frac{1}{f}$ lokal integrierbar ist. Definiere*

$$w(x) := \int_1^x \frac{1}{f(z)} dz, \quad x \geq 0.$$

Sei weiters (x_n) eine Folge nichtnegativer Zahlen mit

$$x_{n+1} - x_n + f(x_{n+1}) \leq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Dann gilt

$$x_n \leq w^{-1} \left(w(x_0) - \frac{n}{1 + f'(x_0)} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Damit können wir nun die folgende Aussage beweisen.

Lemma 2.26. Sei $\alpha > 0$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge nichtnegativer Zahlen mit

$$x_n + \alpha x_n^2 \leq x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$x_n \leq \frac{x_0}{1 + \frac{\alpha x_0 n}{1 + 2\alpha x_0}}. \quad (2.10)$$

Beweis. Wir betrachten diese Situation in der Notation des vorherigen Lemmas 2.25. $f(x) = \alpha x^2 \in C^1([0, \infty))$ ist konvex und monoton wachsend. $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha x^2}$ ist lokal integrierbar weg von 0. Die Funktion w schreibt sich als

$$w(x) = \frac{1}{\alpha} \int_1^x \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha x}$$

mit der Inversen

$$w^{-1}(y) = \frac{1}{\alpha y - 1}.$$

Also sind alle Voraussetzungen erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned} x_n &\leq w^{-1} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha x_0} - \frac{n}{1 + 2\alpha x_0} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha x_0} - \frac{n}{1 + 2\alpha x_0} \right) - 1} \\ &= \frac{x_0}{1 - \frac{n\alpha x_0}{1 + 2\alpha x_0}}. \end{aligned}$$

□

Konvexität und Hessematrizen werden auch in manchen Abschätzungen eine Rolle spielen. Diese Resultate aus der linearen Algebra folgen aus elementaren Rechnungen, aber werden später benötigt, um das Langzeitverhalten der Lösungen abzuschätzen.

Lemma 2.27. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symmetrische, positiv semidefinite Matrizen. Bezeichne die minimalen Eigenwerte von A und B mit $\lambda_{\min}(A)$ und $\lambda_{\min}(B)$. Dann gilt

$$(i) \quad \lambda_{\min}(A + B) \geq \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B),$$

$$(ii) \quad \lambda_{\min}(A) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A) - \left(\frac{1}{4} \operatorname{tr}(A)^2 - \det(A) \right)^{1/2} \geq \frac{\det(A)}{\operatorname{tr}(A)}.$$

Der Operator tr bezeichnet hier die Spur der Matrix.

Beweis. Für (i) benutzen wir die Darstellung der Eigenwerte über den Rayleighquotienten $R_A(v) := \frac{v^T A v}{v^T v}$. Dann gilt laut dem Satz von Courant-Fischer [8, Theorem 10.7] $\lambda_{\min}(A) = \min_{v \neq 0} R_A(v)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A + B) &= \min_{v \neq 0} R_{A+B}(v) = \min_{v \neq 0} \frac{v^T (A + B)v}{v^T v} \\ &\geq \min_{v \neq 0} \frac{v^T A v}{v^T v} + \min_{v \neq 0} \frac{v^T B v}{v^T v} = \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(B). \end{aligned}$$

Um (ii) zu sehen, betrachten wir zunächst, wie die Eigenwerte berechnet werden. Die Gleichung $0 = \det(A - \lambda I)$ führt auf

$$\lambda^2 - \lambda \text{tr}(A) + \det(A) = 0$$

und auflösen dieser quadratischen Gleichung in λ liefert die erste Gleichheit. Um die Ungleichung zu zeigen, sei zunächst

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für positiv semidefinite, 2×2 -Matrizen

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= a + c \geq 0, \\ \det(A) &= ac - b^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Die zu zeigende Ungleichung schreibt sich damit als

$$\frac{ac - b^2}{a + c} \leq \frac{1}{2}(a + c) - \sqrt{\frac{1}{4}(a + c)^2 - (ac - b^2)},$$

beziehungsweise äquivalent ³ dazu

$$\frac{1}{2} \sqrt{(a^2 - c^2)^2 + 4(a + c)^2 b^2} \leq \frac{1}{2}(a^2 + c^2) + (ac + b^2).$$

Da beide Seiten positiv sind können wir den Ausdruck quadrieren und erhalten

$$\frac{1}{4}(a^2 - c^2)^2 + (a + c)^2 b^2 \leq \frac{1}{4}(a^2 + c^2)^2 + (ac + b^2)^2 + (a + c^2)(ac + b^2).$$

Weitere elementare Umformungen liefern die Äquivalenz zu

$$0 \leq \frac{1}{4} ((a^2 + c^2)^2 - (a^2 - c^2)^2) + ac(a^2 + c^2 + ac).$$

Der letzte Ausdruck ist laut der Voraussetzung an A positiv semidefinit zu sein erfüllt und somit gilt auch die Ungleichung in (ii). \square

³ $a + c = 0$ impliziert $b = 0$ und die zu zeigende Ungleichung wird dann trivial.

3 Globale Existenz

Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, eine Lösungsaussage für eine schwache Lösung der Gleichungen (1.1), (1.2) aus Kapitel 1.1 mit den dort angeführten Anfangs- und Randbedingungen zu beweisen. Zunächst wird die Relaxionszeit τ erstmal als temperaturunabhängige, positive Größe betrachtet, wie auch in den Voraussetzungen in Kapitel 1.1 angeführt. Worin sich der Beweis dann für ein von θ abhängiges τ unterscheidet, sehen wir im abschließenden Kapitel 3.6.

Wir formulieren zuerst die Lösungsaussage, mit deren Beweis sich dieses Kapitel beschäftigt. Die nötigen Notationen dafür wurden in Kapitel 2 eingeführt.

Theorem 3.1. *Die Gleichungen (1.1), (1.2) mit den gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen (1.5), (1.6) und Anfangsbedingungen (1.7) haben schwache, positive Lösungen n, θ . Genauer gilt:*

Das Variationsproblem, finde

$n, n\theta \in \{u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) : \partial_t u \in L^2(0, T; H_D^1(\Omega)')\}$, sodass für alle $\varphi \in L^2(0, T; H_D^1(\Omega))$ gilt

$$\int_0^T \langle \partial_t n, \varphi \rangle_{H_D^1(\Omega)'} dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(n\theta^{1/2-\beta}) \nabla \varphi dx dt, \quad (3.1)$$

$$\int_0^T \langle \partial_t(n\theta), \varphi \rangle_{H_D^1(\Omega)'} dt = -\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(n\theta^{3/2-\beta}) \nabla \varphi dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{n}{\tau} (1-\theta) \varphi dx dt, \quad (3.2)$$

besitzt eine Lösung. Die Anfangsbedingungen $n(0) = n_0$, $n(0)\theta(0) = n_0\theta_0$ sind im Sinne von $H_D^1(\Omega)'$ erfüllt.

Insbesondere gilt für die Lösungen

$$\begin{aligned} n, n\theta, n\theta^{1/2-\beta}, n\theta^{3/2-\beta} &\in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ n\theta^{1/2-\beta}, n\theta^{3/2-\beta} &\in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \\ n, \theta &> 0 \quad \text{fast überall in } \Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

Wir arbeiten uns wie in Sektion 1.2 vor, um am Ende dieses Abschnittes dieses Resultat über die Lösbarkeit des gestellten Energie-Transport-Systems beweisen zu können. Wir beginnen damit, das System zu vereinfachen, damit die allgemeine Lösungstheorie für partielle Differentialgleichungen angewandt werden kann.

3.1 Reformulierung und Semidiskretisierung

Im ersten Schritt werden wir eine Semidiskretisierung in der Zeit einführen. Dazu definieren wir ein äquidistantes Gitter auf $[0, T]$ mit Schrittweite $h := T/N$ für $N \in \mathbb{N}$. Wir können damit die Treppenfunktionen in t darstellen durch

$$n_j(x) = n(x, t_j), \quad x \in \Omega, t_j = jh, j = 0, \dots, N. \quad (3.3)$$

Um die Semidiskretisierung auf die Gleichungen (1.1), (1.2) anzuwenden, benutzen wir das implizite Eulerverfahren, also für $\partial_t x = f(x)$, schreiben wir dann

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{h} = f(x_j).$$

Angewandt auf unsere Gleichungen (1.1), (1.2) liefert das

$$n_j - n_{j-1} = h\Delta \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right), \quad (3.4)$$

$$n_j \theta_j - n_{j-1} \theta_{j-1} = h \left(\kappa \Delta (n_j \theta_j^{3/2-\beta}) + \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) \right). \quad (3.5)$$

Als nächstes werden wir noch eine Variablen-Transformation durchführen, um leichter mit den Gleichungen arbeiten zu können. Wir definieren dazu

$$u_j := n_j \theta_j^{1/2-\beta}, \quad v_j := n_j \theta_j^{3/2-\beta}, \quad (3.6)$$

und (3.4), (3.5) werden zu

$$\begin{aligned} u_j^{3/2-\beta} v_j^{\beta-1/2} - h\Delta u_j &= u_{j-1}^{3/2-\beta} v_{j-1}^{\beta-1/2}, \\ u_j^{1/2-\beta} v_j^{\beta+1/2} - h\kappa\Delta v_j - \frac{h}{\tau} u_j^{1/2-\beta} v_j^{\beta-1/2} (u_j - v_j) &= u_{j-1}^{1/2-\beta} v_{j-1}^{\beta+1/2}, \end{aligned}$$

beziehungsweise, falls wir die Terme etwas zusammenfassen,

$$u_j \left(\frac{v_j}{u_j} \right)^{\beta-1/2} - h\Delta u_j = u_{j-1} \left(\frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} \right)^{1/2-\beta}, \quad (3.7)$$

$$\left(1 + \frac{h}{\tau} \right) v_j \left(\frac{v_j}{u_j} \right)^{\beta-1/2} - h\kappa\Delta v_j - \frac{h}{\tau} u_j \left(\frac{v_j}{u_j} \right)^{\beta-1/2} = v_{j-1} \left(\frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} \right)^{1/2-\beta}. \quad (3.8)$$

Die Rand- und Anfangsbedingungen schreiben sich als

$$u_j = u_D := n_D \theta_D^{1/2-\beta}, \quad v_j = v_D := n_D \theta_D^{3/2-\beta} \quad \text{auf } \Gamma_D, j > 0, \quad (3.9)$$

$$\nabla u_j \cdot \nu = \nabla v_j \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N, j > 0, \quad (3.10)$$

$$u_0 = n_0 \theta_0^{1/2-\beta}, \quad v_0 = n_0 \theta_0^{3/2-\beta} \quad \text{auf } \Omega. \quad (3.11)$$

Insbesondere gilt dann für die Anfangs- und Randdaten auch

$$\inf_{\Omega} u_0 > 0, \inf_{\Omega} v_0 > 0, \quad u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \inf_{\Gamma_D} u_D > 0, \inf_{\Gamma_D} v_D > 0, \quad \inf_{\Omega} u_D > 0, \inf_{\Omega} v_D > 0, \\ u_D, v_D \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Beschränktheit und Positivität vererben sich einfach aus der Darstellung der Transformation (3.6) und $-\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{1}{2}$ auf die neuen Variablen. Diese Eigenschaften nutzen wir auch aus, um zu zeigen, dass die gegebenen Daten in $H^1(\Omega)$ sind. Wir betrachten nur

den Gradienten, da die Funktionen wegen ihrer Beschränktheit sicher auch quadratisch integrierbar sind. Dieser lässt sich abschätzen durch

$$\begin{aligned}\|\nabla u_D\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\nabla(n_D \theta_D^{1/2-\beta})|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla n_D \theta_D^{1/2-\beta} + n_D(\frac{1}{2} - \beta) \theta_D^{-1/2-\beta} \nabla \theta_D|^2 dx \\ &\leq C(\|\nabla n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \theta_D\|_{L^2(\Omega)}^2) \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Für die anderen Terme v_D, u_0, v_0 erhalten wir die Aussage analog.

Diese neue Situation liefert zwar noch kein offensichtlich lösbares System, aber transformiert das zeitabhängige System auf N Gleichungssysteme, welche nacheinander behandelt werden können. Für eine Lösbarkeitsaussage müssen wir also noch weiter arbeiten.

3.2 Abgeschnittenes Problem

Wir werden in diesem Kapitel die Gleichungen (3.7),(3.8) weiter bearbeiten und aufbereiten, sodass dann eine Lösungsaussage für ein vereinfachtes, entkoppeltes, elliptisches System gezeigt werden kann. Wir betrachten in weiterer Folge ein festes $j \in \{1, \dots, N\}$ und das zugehörige Gleichungssystem (3.7),(3.8). Wir setzen voraus, dass die vorherigen Systeme für $j-1, j-2, \dots, 1$ bereits gelöst wurden und die Lösungen die Regularitäten

$$\begin{aligned}u_{j-1}, v_{j-1} &\in L^2(\Omega), \\ \inf_{\Omega} u_{j-1} &> 0, \quad \inf_{\Omega} v_{j-1} > 0, \\ \sup_{\Omega} u_{j-1} &< \infty, \quad \sup_{\Omega} v_{j-1} < \infty\end{aligned}\tag{3.14}$$

erfüllen. Für (u_0, v_0) sind diese Bedingungen laut den Voraussetzungen (3.12) erfüllt. Aus der Transformation (3.6) sehen wir auch, dass

$$n_j = u_j^{3/2-\beta} v_j^{\beta-1/2}, \quad \theta_j = \frac{v_j}{u_j}\tag{3.15}$$

gilt. Wir werden jetzt einen Abschneideterm als technisches Hilfsmittel einführen. Diese wird in weiterer Folge für die Positivität der Lösung eine Rolle spielen, aber verändert natürlich die zu lösenden Gleichungen. Das heißt, wir müssen später auch argumentieren können, wie diese Approximation durch diesen Term zu dem ursprünglichen System passt. Man nennt dieses Vorgehen Stampacchia-Approximation. Für den Abschneideausdruck definieren wir nun die wohldefinierten Terme

$$M := \max \left\{ \kappa \sup_{\Omega} \frac{u_{j-1}}{v_{j-1}}, \frac{1}{\inf_{\Gamma_D} \theta_D} \right\},\tag{3.16}$$

mit

$$0 < M = \max \left\{ \kappa \frac{\sup_{\Omega} u_{j-1}}{\inf_{\Omega} v_{j-1}} \frac{1}{\inf_{\Gamma_D} \theta_D} \right\} < \infty,$$

und

$$\varepsilon := \frac{1}{M} > 0, \quad (3.17)$$

$$\theta_{j,\varepsilon} := \max \left\{ \varepsilon, \frac{v_j}{u_j} \right\} > 0. \quad (3.18)$$

Wir ersetzen in (3.7),(3.8) die $\theta_j = v_j/u_j$ Terme durch den regulierten $\theta_{j,\varepsilon}$ Term. Das führt auf die Gleichungen

$$u_j \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} - h \Delta u_j = u_{j-1}^{3/2-\beta} v_{j-1}^{\beta-1/2}, \quad (3.19)$$

$$\left(1 + \frac{h}{\tau}\right) v_j \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} - h \kappa \Delta v_j - \frac{h}{\tau} u_j \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} = u_{j-1}^{1/2-\beta} v_{j-1}^{\beta+1/2}. \quad (3.20)$$

Wir sehen, wenn wir später $\theta_{j,\varepsilon} = \frac{v_j}{u_j}$ und $u_j > 0$ zeigen können, dass die neuen Gleichungen mit dem Abschneideterm (3.19), (3.20) äquivalent zu (3.7), (3.8) sind. Durchgeführt wird dieses Argument in Kapitel 3.3.

Die Gleichungen sind jetzt von semilinearer Struktur, das heißt linear in zumindest der höchsten vorkommenden Ableitung. Damit wir das System jetzt linearisieren und entkoppeln können, werden wir ein Fixpunktargument benutzen. Das bedeutet, wir fassen das Problem in erster Linie nicht als Differentialgleichung, sondern als Fixpunktgleichung in den Parametern

$$\theta \in L^2(\Omega), \quad \sigma \in [0, 1]$$

auf.

Für die weitere Diskussion bezeichnen wir jetzt u_j und v_j einfach mit u und v , um hervorzuheben, welche die gesuchten Größen sind. u_{j-1}, v_{j-1} seien dabei bereits aus den Systemen für $j-1, \dots, 1$ berechnet worden und erfüllen die Voraussetzungen (3.14). Weiters definieren wir für die rechte Seite der Gleichungen die Funktionen

$$f_{j-1} := u_{j-1}^{3/2-\beta} v_{j-1}^{\beta-1/2} = u_{j-1} \left(\frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} \right)^{1/2-\beta}, \quad (3.21)$$

$$g_{j-1} := u_{j-1}^{1/2-\beta} v_{j-1}^{\beta+1/2} = v_{j-1} \left(\frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} \right)^{1/2-\beta}. \quad (3.22)$$

Auf Grund der Voraussetzungen (3.14) und $-\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{1}{2}$ sind $f_{j-1}, g_{j-1} \in L^2(\Omega)$ und fast überall positiv.

Damit wir die Fixpunktgleichung später aufstellen können, ersetzen wir jetzt in dem System (3.19), (3.20) $\theta_{j,\varepsilon} = \max \left\{ \frac{v_j}{u_j}, \varepsilon \right\}$ durch

$$\theta_\varepsilon := \max\{\theta, \varepsilon\}$$

für die feste L^2 -Funktion θ und skalieren alle Terme ohne Ableitung mit σ . Wir bemerken, dass in dieser Konstruktion zunächst kein direkter Zusammenhang zwischen der festen

Funktion θ und u, v besteht und dieser erst durch das Fixpunktargument entsteht. Dieses Vorgehen wird dann genau in dem Beweis von Proposition 3.9 ausgeführt.

Jetzt wird σ zunächst als positiv angenommen. Der Fall $\sigma = 0$ wird gesondert im Anschluss bearbeitet, da es ein einfacher Spezialfall ist. Mit diesen Annahmen schreiben sich die Gleichungen (3.19), (3.20) jetzt als

$$-h\Delta u + \sigma u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} = \sigma f_{j-1}, \quad (3.23)$$

$$\sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) v \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} - h\kappa \Delta v = \sigma g_{j-1} + \sigma \frac{h}{\tau} u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2}. \quad (3.24)$$

In dieser Form sind die beiden Gleichungen nun linear in u und v und die erste Zeile (3.23) ist unabhängig von v , also ist das System auch entkoppelt. Wir können also die allgemeine Lösungstheorie für elliptische Gleichungen anwenden. Betrachten wir also zuerst das Problem in u mit den Randbedingungen

$$u = u_D \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad (3.25)$$

$$\nabla u \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (3.26)$$

Wir leiten jetzt die schwache Formulierung für dieses Problem her und wollen auf diese dann das Lax-Milgram-Theorem 2.13 anwenden.

Die Neumann-Randbedingungen können direkt in die schwache Formulierung eingebaut werden. Für die Dirichlet-Randbedingungen betrachten wir $u_D \in H^1(\Omega)$, also die positive H^1 -Fortsetzung der Randdaten $u_D = n_D \theta_D^{1/2-\beta}$ auf Ω . Die schwache Lösung von (3.23) kann dann als

$$u = u_D + \hat{u} \quad (3.27)$$

mit $\hat{u} \in H_D^1(\Omega)$ dargestellt werden und erfüllt die Dirichlet-Randbedingungen (3.25) zumindest im $L^2(\Gamma_D)$ -Sinn. Wir können ein Variationsproblem jetzt auf $H_D^1(\Omega)$ formulieren.

Dazu multiplizieren wir (3.23) mit einer Testfunktion $\varphi \in H_D^1(\Omega)$ und integrieren über Ω . Unter Benutzung der Neumann-Randbedingungen und partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} h \Delta u \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \varphi dx = \int_{\Omega} \sigma f_{j-1} \varphi dx \\ - \int_{\partial\Omega=\Gamma_N \cup \Gamma_D} h \nabla u \cdot \nu \varphi dx + \int_{\Omega} h \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \varphi dx &= \int_{\Omega} \sigma f_{j-1} \varphi dx \\ & - \int_{\Gamma_N} h \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{=0} \varphi dx - \int_{\Gamma_D} h \nabla u \cdot \nu \underbrace{\varphi}_{=0} dx \\ & + \int_{\Omega} h \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \varphi dx = \int_{\Omega} \sigma f_{j-1} \varphi dx \\ & h \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \varphi dx = \int_{\Omega} \sigma f_{j-1} \varphi dx. \quad (3.28) \end{aligned}$$

Wir ersetzen u durch $\hat{u} + u_D$ und zeigen jetzt die Lösbarkeit dieser schwachen Formulierung in folgendem Resultat.

Theorem 3.2. *Das Variationsproblem, finde $\hat{u} \in H_D^1(\Omega)$, sodass*

$$a(\hat{u}, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_D^1(\Omega),$$

mit

$$\begin{aligned} a(w, \varphi) &= \int_{\Omega} h \nabla w \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma w \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} \varphi dx, \\ l(\varphi) &= \int_{\Omega} \sigma f_{j-1} \varphi dx - \int_{\Omega} \sigma \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} u_D \varphi dx - \int_{\Omega} h \nabla u_D \cdot \nabla \varphi dx, \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösung in $H_D^1(\Omega)$. Insbesondere gilt für \hat{u} , mit einer Konstanten $C > 0$ unabhängig von θ und σ ,

$$\|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C. \quad (3.29)$$

Beweis. Wir überprüfen die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Theorems 2.13.

Für die Stetigkeit von $a(w, \varphi)$ erinnern wir uns an $0 < \sigma \leq 1$ und $\theta_{\varepsilon} = \max\{\varepsilon, \theta\} \geq \varepsilon > 0$, sowie $\beta - \frac{1}{2} < 0$. Dann folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |a(w, \varphi)| &= \left| \int_{\Omega} h \nabla w \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma w \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} \varphi dx \right| \\ &\leq h \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{\beta-1/2} \|w\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \max\{h, \varepsilon^{\beta-1/2}\} \|w\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall w, \varphi \in H_D^1(\Omega). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Linearform l folgt analog

$$\begin{aligned} |l(\varphi)| &= \left| \int_{\Omega} \sigma f_{j-1} \varphi dx - \int_{\Omega} \sigma \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} u_D \varphi dx - \int_{\Omega} h \nabla u_D \cdot \nabla \varphi dx \right| \\ &\leq \|f_{j-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{\beta-1/2} \|u_D\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla u_D\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|f_{j-1}\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{\beta-1/2} \|u_D\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla u_D\|_{L^2(\Omega)}) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H_D^1(\Omega). \end{aligned}$$

Für die Koerzivität von a benutzen wir die Poincaré-Ungleichung auf $H_D^1(\Omega)$, Theorem 2.8, und erhalten

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_{\Omega} h |\nabla w|^2 dx + \int_{\Omega} \sigma \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} w^2 dx \\ &\geq h \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq h C_p \|w\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall w \in H_D^1(\Omega). \end{aligned}$$

Die Aussage folgt nun aus dem Theorem 2.13, da $H_D^1(\Omega)$ ein Hilbertraum ist. Das Lax-Milgram-Theorem liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{h C_p} \|l\|_{H_D^1(\Omega)'} \\ &= \frac{1}{h C_p} \sup_{\varphi \in H_D^1(\Omega), \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |l(\varphi)| \\ &\leq \frac{1}{h C_p} (\|f_{j-1}\|_{L^2(\Omega)} + \varepsilon^{\beta-1/2} \|u_D\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla u_D\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq C, \end{aligned}$$

für eine passende Konstante, unabhängig von θ und σ . Also gilt die behauptete, spezielle Beschränktheit und der Beweis ist abgeschlossen. \square

Die Darstellung (3.27) von u impliziert dann folgende Lösbarkeitsaussage.

Korollar 3.3. *Das Problem (3.28) mit den Randbedingungen (3.25), (3.26) hat für $\theta \in L^2(\Omega)$ und $\sigma \in (0, 1]$ eine eindeutige, schwache Lösung $u \in H^1(\Omega)$. u ist sogar unabhängig von θ und σ in $H^1(\Omega)$ beschränkt.*

Nun können wir uns der schwachen Formulierung der zweiten Gleichung (3.24) widmen. In dieser Gleichung ist $u \in H^1(\Omega)$ bereits die Lösung aus Korollar 3.3. Analog zu vorher betrachten wir dazu die Randbedingungen

$$v = v_D \quad \text{auf } \Gamma_D, \quad (3.30)$$

$$\nabla v \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N. \quad (3.31)$$

Diese werden auch genauso verarbeitet. Wir benutzen wieder $v_D \in H^1(\Omega)$, die positive H^1 -Fortsetzung der Randdaten $v_D = n_D \theta_D^{3/2-\beta}$, und betrachten

$$v = \hat{v} + v_D, \quad (3.32)$$

mit $\hat{v} \in H_D^1(\Omega)$. Die schwache Formulierung ergibt sich nun aus (3.24) durch Multiplikation mit einer Testfunktion $\varphi \in H_D^1(\Omega)$ und integrieren über Ω und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) v \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} \varphi dx - h \int_{\Omega} \kappa \Delta v \varphi dx &= \int_{\Omega} \left(\sigma g_{j-1} + \sigma \frac{h}{\tau} u \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2}\right) \varphi dx \\ h \int_{\Omega} \kappa \nabla v \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) v \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} \varphi dx &= \int_{\Omega} \left(\sigma g_{j-1} + \sigma \frac{h}{\tau} u \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2}\right) \varphi dx. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Wir stellen nun das zu lösende Variationsproblem vor.

Theorem 3.4. *Das Variationsproblem, finde $\hat{v} \in H_D^1(\Omega)$, sodass*

$$a(\hat{v}, \varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_D^1(\Omega),$$

mit

$$\begin{aligned} a(w, \varphi) &= h \int_{\Omega} \kappa \nabla w \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) w \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} \varphi dx, \\ l(\varphi) &= \int_{\Omega} \left(\sigma g_{j-1} + \sigma \frac{h}{\tau} w \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2}\right) \varphi dx \\ &\quad - h \int_{\Omega} \kappa \nabla v_D \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) v_D \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} \varphi dx, \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösung in $H_D^1(\Omega)$. Insbesondere gilt

$$\|\hat{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad (3.34)$$

für eine Konstante $C > 0$, unabhängig von θ und σ .

Beweis. Wir rechnen wieder die Voraussetzungen von dem Theorem von Lax-Milgram nach.

$a(w, \varphi)$ ist stetig, da aus $\theta_\varepsilon \geq \varepsilon > 0, \beta - \frac{1}{2} < 0$ und Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |a(w, \varphi)| &= \left| h \int_{\Omega} \kappa \nabla w \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) w \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \varphi dx \right| \\ &\leq h\kappa \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \varepsilon^{\beta-1/2} \|w\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \max\{h\kappa, (1 + \frac{h}{\tau})\varepsilon^{\beta-1/2}\} \|w\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der Linearform l funktioniert analog mit $\sigma \leq 1$ und

$$\begin{aligned} |l(\varphi)| &= \left| \int_{\Omega} \left(\sigma g_{j-1} + \sigma \frac{h}{\tau} u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \right) \varphi dx \right. \\ &\quad \left. - h \int_{\Omega} \kappa \nabla v_D \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) v_D \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \varphi dx \right| \\ &\leq \|g_{j-1}\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \frac{h}{\tau} \varepsilon^{\beta-1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \kappa h \|\nabla v_D\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \varepsilon^{\beta-1/2} \|v_D\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(\|g_{j-1}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{h}{\tau} \varepsilon^{\beta-1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \kappa h \|\nabla v_D\|_{L^2(\Omega)} + \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \varepsilon^{\beta-1/2} \|v_D\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\quad \cdot \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für die Koerzivität benutzen wir wieder die Positivität des zweiten Terms und die Poincaré-Ungleichung aus Theorem 2.8 und erhalten

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \kappa h \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma h \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} w^2 dx \\ &\geq \kappa h \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \kappa h C_p \|w\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Das Lax-Milgram-Theorem liefert uns jetzt eine eindeutige schwache Lösung, welche durch die Koerzivitätskonstante und die Norm der Linearform beschränkt werden kann. Also gilt mit (3.29) für eine passende Konstante, unabhängig von θ und σ ,

$$\begin{aligned} \|\hat{v}\|_{H^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{h\kappa C_p} \|l\|_{H_D^1(\Omega)'} \\ &= \frac{1}{h\kappa C_p} \sup_{\varphi \in H_D^1(\Omega), \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |l(\varphi)| \\ &\leq \frac{1}{h\kappa C_p} \left(\|g_{j-1}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{h}{\tau} \varepsilon^{\beta-1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + \kappa h \|\nabla v_D\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \varepsilon^{\beta-1/2} \|v_D\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

□

Mit der Darstellung (3.32) folgt dann die Lösbarkeit des Problems mit Dirichlet-Randdaten.

Korollar 3.5. *Das Problem (3.33) mit den Randbedingungen (3.30), (3.31) hat für $\theta \in L^2(\Omega)$ und $\sigma \in (0, 1]$ eine eindeutige, schwache Lösung $v \in H^1(\Omega)$. Insbesondere lässt sich v unabhängig von θ und σ in $H^1(\Omega)$ beschränken.*

Für den Fall $\sigma = 0$ vereinfacht sich das skalierte Problem (3.23), (3.24), wegen $\kappa, h > 0$, zu

$$-\Delta u = 0, \tag{3.35}$$

$$-\Delta v = 0 \tag{3.36}$$

mit den Randbedingungen (3.25), (3.26), (3.30), (3.31).

Als Variationsformulierung schreibt sich dieses Problem dann als, finde $u, v \in H^1(\Omega)$, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi \, dx &= 0, \\ \int_{\Omega} \nabla v \nabla \varphi \, dx &= 0 \end{aligned}$$

für alle Testfunktionen $\varphi \in H_D^1(\Omega)$. Diese beiden entkoppelten Gleichungen können direkt gelöst werden und liefern die schwachen Lösungen $u = u_D \in H^1(\Omega), v = v_D \in H^1(\Omega)$.

Wir fassen die bisher gezeigten Resultate in einem Korollar zusammen.

Korollar 3.6. *Das abgeflachte, σ -skalierte Problem (3.23), (3.24) mit den gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen (3.25), (3.26), (3.30), (3.31) hat für feste $\sigma \in [0, 1]$ und $\theta \in L^2(\Omega)$ eine eindeutige, schwache Lösung $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.*

Wir können für die Lösung aus Korollar 3.6 sogar noch weitere Beobachtungen machen, die sich später als nützlich erweisen werden. In folgendem Lemma werden wir die Positivität diskutieren.

Lemma 3.7. *Die Lösungen des σ -skalierten Problems $u, v \in H^1(\Omega)$ aus Korollar 3.6 erfüllen*

$$u \geq m_1 > 0, \tag{3.37}$$

$$v \geq m_2 > 0, \tag{3.38}$$

fast überall in Ω . m_1, m_2 sind abhängig von ε und j , aber unabhängig von σ und θ .

Beweis. Für $\sigma = 0$ ist die Aussage auf Grund der Voraussetzungen an die Randdaten klar. Sei also $\sigma > 0$. Wir zeigen zuerst die Positivität von u . Wir definieren dazu

$$m_1 := \min \left\{ \inf_{\Gamma_D} u_D, \varepsilon^{1/2-\beta} \inf_{\Omega} f_{j-1} \right\} > 0.$$

Diese Konstante ist positiv laut den Voraussetzungen (3.13) und (3.14). Da $m_1 \in \mathbb{R}$, und $u \in H^1(\Omega)$ ist, folgt mit dem Stampacchia-Theorem 2.12, dass auch die Funktion $(u - m_1)_- := \min\{0, u - m_1\} \in H^1(\Omega)$ ist.

Weiters gilt

$$u_D - m_1 \geq u_D - \inf_{\Gamma_D} u_D \geq 0,$$

woraus folgt, dass $(u - m_1)_-$ auf Γ_D verschwindet und daher eine zulässige Testfunktion aus $H_D^1(\Omega)$ in (3.28) ist. Wir setzen ein und erhalten

$$\int_{\Omega} h \nabla u \cdot \nabla (u - m_1)_- dx + \int_{\Omega} \sigma u \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} (u - m_1)_- dx = \int_{\Omega} \sigma f_{j-1} (u - m_1)_- dx. \quad (3.39)$$

Ersetzen wir im zweiten Integral der linken Seite $u = u - m_1 + m_1$ und ordnen neu an, ergibt das

$$\begin{aligned} & h \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u - m_1)_- dx + \sigma \int_{\Omega} \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} (u - m_1) (u - m_1)_- dx \\ &= \sigma \int_{\Omega} (f_{j-1} - m_1 \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2}) (u - m_1)_- dx \\ &\leq \sigma \int_{\Omega} (f_{j-1} - \underbrace{m_1}_{\leq \varepsilon^{1/2-\beta} \inf_{\Omega} f_{j-1}} \underbrace{\varepsilon^{\beta-1/2}}_{\leq 0}) \underbrace{(u - m_1)_-}_{\leq 0} dx \leq 0. \end{aligned}$$

Beachten wir, dass mit dem Stampacchia-Theorem 2.12 gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla (u - m_1)_-|^2 dx &= \int_{[u-m_1 < 0]} |\nabla (u - m_1)|^2 dx \\ &= \int_{[u-m_1 < 0]} \nabla u \cdot \nabla (u - m_1) dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (u - m_1)_- dx, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - m_1)_-^2 dx &= \int_{[u-m_1 < 0]} (u - m_1)^2 dx \\ &= \int_{\Omega} (u - m_1) (u - m_1)_- dx, \end{aligned}$$

so folgt zusammen mit (3.39), $\|(u - m_1)_-\|_{L^2(\Omega)} = 0$ und damit $(u - m_1)_- = 0$ fast überall in Ω . Damit ist die Aussage für u gezeigt. Für v gehen wir analog vor und definieren

$$m_2 := \min \left\{ \inf_{\Gamma_D} v_D, \left(1 + \frac{h}{\tau}\right)^{-1} \varepsilon^{1/2-\beta} \inf_{\Omega} g_{j-1} \right\} > 0$$

und erhalten wieder mit dem Stampacchia-Theorem $(v - m_2)_- \in H_D^1(\Omega)$ und können letztere Funktion als Testfunktion in (3.33) einsetzen. Das ergibt

$$\begin{aligned} & h \int_{\Omega} \kappa \nabla v \cdot \nabla (v - m_2)_- dx + \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) v \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} (v - m_2)_- dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\sigma g_{j-1} + \sigma \frac{h}{\tau} u \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} \right) (v - m_2)_- dx. \end{aligned}$$

Wiederholen wir die selben Argumente wie vorher bei u , erhalten wir

$$\begin{aligned}
& h\kappa \int_{\Omega} |\nabla(v - m_2)_-|^2 dx + \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} (v - m_2)_-^2 dx \\
&= \int_{\Omega} \underbrace{\frac{\sigma h}{\tau} \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} u}_{\geq 0} \underbrace{(v - m_2)_-}_{\leq 0} dx \\
&\quad + \sigma \int_{\Omega} \left(g_{j-1} - \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) m_2 \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} \right) (v - m_2)_- dx \\
&\leq \sigma \int_{\Omega} \left(g_{j-1} - \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \varepsilon^{\beta-1/2} \underbrace{m_2}_{\leq (1+\frac{h}{\tau})^{-1} \varepsilon^{1/2-\beta} \inf_{\Omega} g_{j-1}} \right) (v - m_2)_- dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\|(v - m_2)_-\|_{L^2(\Omega)} = 0$ und schließlich $(v - m_2)_- = 0$ fast überall in Ω . Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Wir verdeutlichen noch einige Soboleveinbettungen und Regularitätsaussagen, die für die nächsten Argumente von Bedeutung sein werden.

Lemma 3.8. *Für $u, v \in H^1(\Omega)$ aus Korollar 3.6 gilt insbesondere*

- (i) $\frac{1}{u} \in L^\infty(\Omega)$, wobei $\frac{1}{u}$ sogar unabhängig von σ und θ beschränkt ist,
- (ii) $u, v \in H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$,
- (iii) $\frac{v}{u} \in W^{1,3/2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ (kompakte Einbettung).

Beweis. (i) Folgt direkt aus dem Resultat von Lemma 3.7, dass $u \geq m_1 > 0$ fast überall in Ω ist und der Beschränktheit des Gebietes.

(ii) Die stetige Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L^6(\Omega)$ folgt für $d = 1, 2, 3$ aus dem Einbettungssatz von Sobolev, Theorem 2.2. Für $d = 1$ sind die Funktionen stetig, also sicher in $L^\infty(\Omega)$. Falls $d = 2$ ist, liefert der Satz die Einbettung in zumindest alle $L^q(\Omega)$, mit $1 \leq q < \infty$. In dem Fall $d = 3$, gilt $p^* = 6$, also ist die stetige Einbettung auch gesichert.

(iii) Die kompakte Einbettung folgt aus dem Satz von Rellich-Kondrachov, Theorem 2.3. Für $d = 1$ bettet dieser kompakt in die stetigen Funktionen ein und für $d = 2, 3$ gilt $p^* \geq 3$, woraus die kompakte Einbettung in die quadratisch integrierbaren Funktionen garantiert ist.

$\frac{v}{u} \in W^{1,3/2}(\Omega)$ zeigen wir direkt und betrachten die Komponenten in der Norm

$$\left\| \frac{v}{u} \right\|_{W^{1,3/2}(\Omega)}^{3/2}$$

und benutzen die Young-Ungleichung aus Lemma 2.18 mit $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, (ii) und (i).
Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\frac{v}{u}\right)^{3/2} dx &\leq C \int_{\Omega} v^{3/2} dx \\ &\leq C \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega} dx + \frac{3}{4} \int_{\Omega} v^2 dx \right) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\nabla \left(\frac{v}{u}\right)\|_{L^{3/2}(\Omega)} &= \left\| \frac{\nabla v}{u} + \frac{1}{u^2} v \nabla u \right\|_{L^{3/2}(\Omega)} \\ &\leq \left\| \frac{\nabla v}{u} \right\|_{L^{3/2}(\Omega)} + \left\| \frac{1}{u^2} v \nabla u \right\|_{L^{3/2}(\Omega)} \\ &\leq C \|\nabla v\|_{L^{3/2}(\Omega)} + C \|v \nabla u\|_{L^{3/2}(\Omega)} \\ &\leq C \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega} dx + \frac{3}{4} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{2/3} \\ &\quad + C \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega} v^6 dx + \frac{3}{4} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{2/3} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

Wir erinnern uns an die Gestalt des Problems vor der Skalierung mit θ und σ , welches wir zu lösen haben. Mit $\tilde{\theta}_{\varepsilon} = \max\{\frac{v}{u}, \varepsilon\}$ schreibt sich dieses als

$$u \tilde{\theta}_{\varepsilon}^{\beta-1/2} - h \Delta u = f_{j-1}, \quad (3.40)$$

$$\left(1 + \frac{h}{\tau}\right) v \tilde{\theta}_{\varepsilon}^{\beta-1/2} - h \kappa \Delta v - \frac{h}{\tau} u \tilde{\theta}_{\varepsilon}^{\beta-1/2} = g_{j-1}. \quad (3.41)$$

Die Gleichungen sind also genau die Gleichungen aus Korollar 3.6 für $\sigma = 1$ und $\theta = \frac{v}{u}$. Das benutzen wir um mittels dem Fixpunktsatz von Leray-Schauder 2.14 die Lösbarkeit der nicht skalierten Gleichungen zu argumentieren. Wir formulieren jetzt das Fixpunktproblem und benutzen die bisher gezeigten Resultate.

Proposition 3.9. *Das Problem (3.40), (3.41) mit den gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen (3.25), (3.26), (3.30), (3.31) hat eine schwache Lösung $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.*

Beweis. Wir definieren den Operator

$$\begin{aligned} F: L^2(\Omega) \times [0, 1] &\rightarrow L^2(\Omega), \\ (\theta, \sigma) &\mapsto \frac{v}{u}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei $(u, v) \in H^1(\Omega)$ die schwachen Lösungen aus Korollar 3.6 sind. Wegen Lemma 3.8 (iii) ist F wohldefiniert. Können wir für diesen Operator die Voraussetzungen des Leray-Schauder-Fixpunktsatzes 2.14 nachrechnen, erhalten wir einen Fixpunkt θ für $\sigma = 1$, also genau

$$\theta = F(\theta, 1) = \frac{v}{u}$$

mit $u, v \in H^1(\Omega)$ der schwachen Lösung von (3.23), (3.24) aus Korollar 3.6 für $\sigma = 1$, die schwachen Formulierungen von (3.40), (3.41).

Das heißt, wir müssen nachrechnen, dass F stetig und kompakt ist, alle Fixpunkte durch eine Konstante unabhängig von σ beschränkt sind und für $\sigma = 0$ der Operator F konstant in θ ist.

Als erstes bemerken wir, dass für alle $\theta \in L^2(\Omega)$

$$F(\theta, 0) = \frac{v_D}{u_D}$$

gilt. Ein Ergebnis, welches also unabhängig von der Wahl der Funktion θ ist.

Sei nun θ ein Fixpunkt, das heißt $\theta = F(\theta, \sigma)$. Für $\sigma = 0$ gilt wieder $\theta = \frac{v_D}{u_D}$, und ist somit laut (3.13) durch eine positive Konstante unabhängig von θ und σ abschätzbar. Für $\sigma > 0$ erinnern wir uns an die Beschränktheit von $\frac{1}{u}$ aus Lemma 3.8 (i) und v ist laut Korollar 3.5 unabhängig von θ und σ beschränkt. Also erreichen wir auch $\|\theta\|_{L^2(\Omega)} = \|\frac{v}{u}\|_{L^2(\Omega)} < C$.

Für die Kompaktheit sei (θ_n, σ_n) eine in $L^2(\Omega) \times [0, 1]$ beschränkte Folge. Aus Lemma 3.8 (iii) sehen wir, dass dann auch $F(\theta_n, \sigma_n) = \frac{v_n}{u_n} \in W^{1,3/2}(\Omega)$ beschränkt ist. Aus der kompakten Einbettung $W^{1,3/2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ aus demselben Resultat folgt die Existenz einer konvergenten Teilfolge $\frac{v_\mu}{u_\mu}$ in $L^2(\Omega)$.

Sei nun $(\theta_n, \sigma_n) \rightarrow (\theta, \sigma)$ in $L^2(\Omega) \times [0, 1]$. Für die Stetigkeit müssen wir zeigen, dass für $n \rightarrow \infty$

$$F(\theta_n, \sigma_n) = \frac{v_n}{u_n} \rightarrow \frac{v}{u} = F(\theta, \sigma) \quad \text{in } L^2(\Omega)$$

gilt. Wir wissen, dass $\frac{v_n}{u_n} \in L^2(\Omega)$ und $(u_n, v_n) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ positiv sind, unabhängig von n . Wegen der Abschätzung aus dem Lax-Milgram-Theorem sind u_n, v_n auch unabhängig von n beschränkt. Aufgrund der kompakten Einbettung von $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$ aus dem Satz von Rellich-Kondrachov 2.3 und der Aussage über schwach konvergente Folgen aus Theorem 2.20 erhalten wir für Teilfolgen die Konvergenz gegen gewisse u und v aus $H^1(\Omega)$,

$$u_\mu \rightarrow u, v_\mu \rightarrow v \quad \text{in } L^2(\Omega), \tag{3.43}$$

$$u_\mu \rightharpoonup u, v_\mu \rightharpoonup v \quad \text{in } H^1(\Omega) \quad (\text{Schwache Konvergenz}) \tag{3.44}$$

für $\mu \rightarrow \infty$. Um zu sehen, dass diese Grenzwerte auch wirklich $\frac{v}{u} = F(\theta, \sigma)$ erfüllen,

betrachten wir die Definition von $F(\theta_\mu, \sigma_\mu)$. Diese besagt, dass (u_μ, v_μ)

$$h \int_{\Omega} \nabla u_\mu \cdot \nabla \varphi dx + \sigma_\mu \int_{\Omega} u_\mu \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} \varphi dx = \int_{\Omega} \sigma_\mu f_{j-1} \varphi dx, \quad (3.45)$$

$$h\kappa \int_{\Omega} \nabla v_\mu \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \sigma_\mu \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} v_\mu \varphi dx = \sigma_\mu \int_{\Omega} \left(g_{j-1} + \frac{h}{\tau} u_\mu \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2}\right) \varphi dx \quad (3.46)$$

lösen, wobei $\theta_{\varepsilon_\mu} = \max\{\theta_\mu, \varepsilon\}$ bezeichnet. Betrachten wir jetzt (3.45) für eine Testfunktion $\varphi \in H_D^1(\Omega)$ komponentenweise. Dann gilt mit den bisher gezeigten Konvergenzen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_\mu \nabla \varphi dx &\rightarrow \int_{\Omega} \nabla u \nabla \varphi dx, \\ \sigma_\mu \int_{\Omega} f_{j-1} \varphi dx &\rightarrow \sigma \int_{\Omega} f_{j-1} \varphi dx. \end{aligned}$$

Die folgenden Argumente benötigen den Übergang auf Teilfolgen, aber der Übersicht halber ersparen wir uns das Umnummerieren. Nach Voraussetzung erfüllt $\theta_{\varepsilon_\mu} \rightarrow \theta_\varepsilon$ in $L^2(\Omega)$ und somit auch, mit Lemma 2.22, punktweise fast überall auf Ω . Laut Definition ist θ_{ε_μ} unabhängig von μ positiv, also ist $\theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2}$ unabhängig von μ in $L^\infty(\Omega)$ beschränkt. Also gibt es laut Theorem 2.21 eine schwach* konvergente Teilfolge. Also haben wir die Konvergenz

$$\int_{\Omega} \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} \eta dx \rightarrow \int_{\Omega} \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \eta dx \quad (3.47)$$

für alle $\eta \in L^1(\Omega)$ gezeigt. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_\mu \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} \varphi dx - \int_{\Omega} u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \varphi dx \\ &= \int_{\Omega} (u_\mu \varphi - u \varphi) \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} dx + \int_{\Omega} u \varphi \left(\theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} - \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \right) dx \\ &\leq \|\theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2}\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_\mu \varphi - u \varphi\|_{L^1(\Omega)} + \int_{\Omega} u \varphi \left(\theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} - \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \right) dx \\ &\leq \|\theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|u_\mu - u\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} (u \varphi) \left(\theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} - \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \right) dx. \end{aligned}$$

Da aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $u \varphi \in L^1(\Omega)$ folgt, erhalten wir somit auch die Konvergenz des letzten Terms

$$\sigma_\mu \int_{\Omega} u_\mu \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} \varphi dx \rightarrow \sigma \int_{\Omega} u \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \varphi dx.$$

Analog gilt für (3.46) für eine Testfunktion $\varphi \in H_D^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} h\kappa \int_{\Omega} \nabla v_{\mu} \cdot \nabla \varphi dx &\rightarrow h\kappa \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \varphi dx, \\ \sigma_{\mu} \int_{\Omega} \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \theta_{\varepsilon_{\mu}}^{\beta-1/2} v_{\mu} \varphi dx &\rightarrow \sigma \int_{\Omega} \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2} v \varphi dx, \\ \sigma_{\mu} \int_{\Omega} \left(g_{j-1} + \frac{h}{\tau} u_{\mu} \theta_{\varepsilon_{\mu}}^{\beta-1/2}\right) \varphi dx &\rightarrow \sigma \int_{\Omega} \left(g_{j-1} + \frac{h}{\tau} u \theta_{\varepsilon}^{\beta-1/2}\right) \varphi dx. \end{aligned}$$

Damit können wir schließen, dass u und v genau die schwachen Lösungen der Gleichungen (3.40), (3.41) für θ und σ mit Neumann-Randbedingungen sind. Für die Dirichlet-Randbedingungen betrachten wir, dass u_{μ} diese erfüllt und mit der Dreiecksungleichung

$$\|u - u_D\|_{L^2(\Gamma_D)} \leq \|u - u_{\mu}\|_{L^2(\Gamma_D)} + \|u_{\mu} - u_D\|_{L^2(\Gamma_D)} = \|u - u_{\mu}\|_{L^2(\Gamma_D)}$$

gilt. Die schwache Konvergenz von u_{μ} gegen u aus (3.44) impliziert laut Theorem 2.4 und Bemerkung 2.5 die starke Konvergenz einer Teilfolge auf $L^2(\Gamma_D)$. Also gilt

$$\|u - u_D\|_{L^2(\Gamma_D)} = 0.$$

Da man das selbe Argument für v führen kann, erfüllt dieses auch die Dirichlet-Randbedingungen und es folgt $\frac{v}{u} = F(\theta, \sigma)$. Mit der Positivität aus Lemma 3.7 und der L^2 -Konvergenz aus (3.43) folgt dann

$$\frac{v_n}{u_n} \rightarrow \frac{v}{u}, \quad \text{in } L^2(\Omega),$$

also die Stetigkeit von F .

Somit haben wir die Voraussetzungen an den Operator für Leray-Schauder überprüft und erhalten einen Fixpunkt für $\sigma = 1$, das heißt

$$F(\theta, 1) = \frac{v}{u} = \theta,$$

mit $u, v \in H^1(\Omega)$ Lösungen zu den schwachen Formulierungen von (3.40), (3.41) mit den gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen. \square

Wir wollen nun argumentieren, dass wir die Lösungen aus Proposition 3.9 wirklich in einem iteratives Verfahren von $j = 1, \dots, N$ benutzen können, um die N Gleichungssysteme zu lösen. Für die Anfangsdaten $j = 0$ gelten die Voraussetzungen (3.14) offenbar wegen (3.12). Also ist der erste Schritt gesichert. Sei nun also $j \in \{1, \dots, N\}$ fest und u_j, v_j die schwachen Lösungen aus Proposition 3.9. Wir müssen zeigen, dass auch diese die Bedingungen an $j - 1$, (3.14), erfüllen, damit die dieselbe Argumentation, die Lösbarkeit im jeweils nächsten Schritt garantiert. Es gilt

$$\begin{aligned} u_j, v_j &\in L^2(\Omega), \\ \inf_{\Omega} u_j &> 0, \quad \inf_{\Omega} v_j > 0, \end{aligned}$$

laut Proposition 3.9 und Lemma 3.7. Um

$$\sup_{\Omega} u_j < \infty, \quad \sup_{\Omega} v_j < \infty \quad (3.48)$$

zu zeigen, benutzen wir das Resultat aus Lemma 2.15 auf (3.19) und (3.20) in der Gestalt

$$\begin{aligned} -\Delta u_j + \frac{\sigma}{h} \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} u_j &= \frac{\sigma}{h} f_{j-1}, \\ -\Delta v_j + \frac{\sigma}{\kappa h} \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} v_j &= \frac{\sigma}{\kappa h} g_{j-1} + \frac{\sigma}{\kappa \tau} \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} u_j. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen des Lemmas sind erfüllt, da $2 = s > \frac{3}{2} \geq \frac{d}{2}$ für $d = 1, 2, 3$ gilt, und

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{h} f_{j-1}, \frac{\sigma}{\kappa h} g_{j-1} + \frac{\sigma}{\kappa \tau} \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} u_j &\in L^2(\Omega), \\ \frac{\sigma}{h} \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2}, \frac{\sigma}{\kappa h} \left(1 + \frac{h}{\tau}\right) \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} &\in L^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

und diese Terme nichtnegativ sind. Damit folgt (3.48), also dass $u_j, v_j \in L^\infty(\Omega)$ sind.

3.3 Entfernung des Abschneideterms

In diesem Kapitel wollen wir nun die in Kapitel 3.2 für (3.19) und (3.20) eingeführte Stampacchia-Approximation durch den Abschneideterm wieder entfernen. Das heißt, es gilt zu zeigen, dass

$$\theta_{j,\varepsilon} = \max \left\{ \varepsilon, \frac{v_j}{u_j} \right\} = \frac{v_j}{u_j},$$

erfüllt ist, also $\varepsilon \leq \frac{v_j}{u_j}$ hält. Damit sind die Gleichungen (3.19), (3.20) äquivalent zu (3.7) und (3.8). Wir benutzen dafür die schwachen Formulierungen der Gleichungen mit einer passenden Abschneidetestfunktion.

Dazu betrachten wir zuerst die reellwertige Funktion

$$\phi(x) := \begin{cases} 0 & x \leq M, \\ 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{M}\right) & M \leq x \leq 2M, \\ 2 & x \geq 2M. \end{cases} \quad (3.49)$$

Die Konstante $M > 0$ ist bereits in (3.16) definiert. ϕ ist in $C^1(\mathbb{R})$, da

$$\begin{aligned} \phi'(M)^+ &= -\sin(\pi) \frac{\pi}{M} = 0 = \phi'(M)^-, \\ \phi'(2M)^+ &= -\sin(2\pi) \frac{\pi}{M} = 0 = \phi'(2M)^-. \end{aligned}$$

Außerdem ist die Funktion nichtnegativ und monoton wachsend, das heißt $\phi'(x) \geq 0$ auf \mathbb{R} . Weiters folgt aus

$$M \geq \frac{1}{\inf_{\Gamma_D} \theta_D} = \frac{1}{\inf_{\Gamma_D} \frac{v_D}{u_D}} = \sup_{\Gamma_D} \frac{u_D}{v_D} \geq \frac{u_D}{v_D},$$

$\phi\left(\frac{u_D}{v_D}\right) = 0 = \phi\left(\frac{1}{\theta_D}\right)$. Das bedeutet $\phi(x)$ verschwindet für $x = \frac{u_D}{v_D}$. Also verschwindet ϕ auch für alle Funktionen u_j, v_j , die schwache Lösungen zu (3.7) und (3.8) sind und die Randbedingungen (3.9) erfüllen.

Weiters wissen wir, dass $u_j, v_j \in H^1(\Omega)$ gilt, woraus wir

$$v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right), u_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) \in H^1(\Omega)$$

erhalten. Also können wir als Testfunktionen, in den schwachen Formulierungen (3.28) und (3.33),

$$v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right), \frac{1}{\kappa} u_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) \in H_D^1(\Omega)$$

benutzen.

$$h \int_{\Omega} \nabla u_j \cdot \nabla \left(v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) \right) dx + \int_{\Omega} \sigma u_j \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) dx = \int_{\Omega} \sigma f_{j-1} v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) dx \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} h \int_{\Omega} \nabla v_j \cdot \nabla \left(u_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) \right) dx + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} \sigma \left(1 + \frac{h}{\tau} \right) v_j \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} u_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) dx \\ = \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} \left(\sigma g_{j-1} + \sigma \frac{h}{\tau} u_j \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} \right) u_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) dx \end{aligned} \quad (3.51)$$

Bringen wir alle Terme auf die linke Seite und subtrahieren (3.51) von (3.50), erhalten wir unter Benutzung von

$$\nabla \left(v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) \right) = \nabla v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) + v_j \nabla \left(\phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) \right), g_{j-1} \frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} = f_{j-1}$$

die Gleichung

$$\left(1 - \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{h}{\tau} \right) \right) \int_{\Omega} u_j v_j \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) dx \quad (3.52)$$

$$+ h \int_{\Omega} (v_j \nabla u_j - u_j \nabla v_j) \nabla \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) dx \quad (3.53)$$

$$+ \frac{h}{\kappa \tau} \int_{\Omega} u_j^2 \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) dx \quad (3.54)$$

$$+ \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} g_{j-1} v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) \left(\frac{u_j}{v_j} - \kappa \frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} \right) dx \quad (3.55)$$

$$= 0.$$

Betrachten wir diese nun komponentenweise. Für (3.52) gilt

$$\left(1 - \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{h}{\tau} \right) \right) \int_{\Omega} u_j v_j \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) dx \geq 0,$$

da laut den Voraussetzungen (1.3) $\kappa > 1$ ist. $\tau > 0$ ist fest und somit kann $h > 0$ so klein gewählt werden, dass $1 + \frac{h}{\tau} < \kappa$ ist, also der erste Term außerhalb des Integrals nichtnegativ wird. Die Nichtnegativität der Terme innerhalb des Integrals folgt aus der Definition von ϕ und den Resultaten aus Kapitel 3.2.

Der zweite Term (3.53) erfüllt ebenfalls

$$h \int_{\Omega} (v_j \nabla u_j - u_j \nabla v_j) \nabla \phi \left(\frac{u_j}{v_j} \right) dx \geq 0.$$

Dieses Ergebnis erhalten wir durch einfaches Ausdifferenzieren von

$$\begin{aligned} (v_j \nabla u_j - u_j \nabla v_j) \nabla \phi \left(\frac{u_j}{v_j} \right) &= (v_j \nabla u_j - u_j \nabla v_j) \phi' \left(\frac{u_j}{v_j} \right) \frac{1}{v_j^2} (v_j \nabla u_j - u_j \nabla v_j) \\ &= \phi' \left(\frac{u_j}{v_j} \right) \frac{1}{v_j^2} |v_j \nabla u_j - u_j \nabla v_j|^2 \end{aligned}$$

und der Monotonie von ϕ . Für (3.54) führen die gleichen Argumente auf

$$\frac{h}{\kappa \tau} \int_{\Omega} u_j^2 \theta_{j,\varepsilon}^{\beta-1/2} \phi \left(\frac{u_j}{v_j} \right) dx \geq 0.$$

Aus den gezeigten Ungleichungen und ihrer Summe folgt somit, dass für den Term (3.55)

$$\frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} g_{j-1} v_j \phi \left(\frac{u_j}{v_j} \right) \left(\frac{u_j}{v_j} - \kappa \frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} \right) dx \leq 0$$

gelten muss. Äquivalent dazu ist

$$\int_{\Omega} g_{j-1} v_j \phi \left(\frac{u_j}{v_j} \right) \left(\frac{u_j}{v_j} - M \right) dx \leq \int_{\Omega} g_{j-1} v_j \phi \left(\frac{u_j}{v_j} \right) \left(\kappa \frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} - M \right) dx. \quad (3.56)$$

Erinnern wir uns an die Definition von M ,

$$M := \max \left\{ \kappa \sup_{\Omega} \frac{u_{j-1}}{v_{j-1}}, \frac{1}{\inf_{\Gamma_D} \theta_D} \right\},$$

so folgt $\kappa \frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} - M \leq \kappa \sup_{\Omega} \frac{u_{j-1}}{v_{j-1}} - M \leq 0$. Für die linke Seite von (3.56) folgt dann

$$\int_{\Omega} g_{j-1} v_j \phi \left(\frac{u_j}{v_j} \right) \left(\frac{u_j}{v_j} - M \right) dx \leq 0, \quad (3.57)$$

da die anderen Terme der rechten Seite nichtnegativ sind. Auch in (3.57) können dieselben Terme nichtnegativer Funktionen unter dem Integral identifiziert werden und es folgt

$$\left(\frac{u_j}{v_j} - M \right) \leq 0. \quad (3.58)$$

Nutzen wir zusätzlich aus, dass $\phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) = 0$ für $\frac{u_j}{v_j} \leq M$ gilt, siehe Definition von ϕ (3.49), können wir $\frac{u_j}{v_j} - M$ im Integral (3.57) durch $\left(\frac{u_j}{v_j} - M\right)_+ = \max\{\frac{u_j}{v_j} - M, 0\}$ ersetzen. Dadurch stehen im Integral nur nichtnegative Terme und wir können schließen

$$\int_{\Omega} g_{j-1} v_j \phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) \left(\frac{u_j}{v_j} - M\right)_+ dx = 0. \quad (3.59)$$

Aus den Voraussetzungen an die Terme für $j-1$, (3.14), und der Positivität aus Lemma 3.7 können wir schließen, dass entweder $\phi\left(\frac{u_j}{v_j}\right) = 0$ oder $\left(\frac{u_j}{v_j} - M\right)_+ = 0$ gelten muss. Dies impliziert in beiden Fällen $\frac{u_j}{v_j} \leq M$ und mit den Definitionen (3.17) und (3.18) können wir die Ergebnisse in folgender Proposition zusammenfassen, welche die Entfernung des Abschneideterms $\theta_{j,\varepsilon}$ abschließt.

Proposition 3.10. *Seien $(u_j, v_j) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ schwache Lösungen von (3.19), (3.20) mit gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen (3.9), (3.10).*

Dann gilt $\varepsilon \leq \frac{v_j}{u_j}$ fast überall und somit $\theta_{j,\varepsilon} = \frac{v_j}{u_j}$ fast überall auf Ω . Das heißt u_j, v_j sind auch schwache Lösungen von den ursprünglichen Gleichungen ohne Abschneideterm (3.7), (3.8). Genauer, $u_j, v_j \in H^1(\Omega)$ erfüllen

$$\int_{\Omega} u_j^{3/2-\beta} v_j^{\beta-1/2} \varphi dx + h \int_{\Omega} \nabla u_j \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} u_{j-1}^{3/2-\beta} v_{j-1}^{\beta-1/2} \varphi dx, \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_j^{1/2-\beta} v_j^{\beta+1/2} \varphi dx + h \int_{\Omega} \kappa \nabla v_j \varphi dx - h \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} u_j^{1/2-\beta} v_j^{\beta-1/2} (u_j - v_j) \varphi dx \\ = \int_{\Omega} u_{j-1}^{1/2-\beta} v_{j-1}^{\beta+1/2} \varphi dx \end{aligned} \quad (3.61)$$

für alle $\varphi \in H_D^1(\Omega)$.

Wir schließen das Kapitel nun mit der Aussage über die Lösbarkeit des ursprünglichen semidiskreten Problems. Wir werden also die Transformation auf die Funktionen (u_j, v_j) wieder rückgängig machen und die Gleichungen in Partikeldichte und Temperatur $(n_j, n_j \theta_j)$ betrachten, welche aus der physikalischen Problemstellung hergeleitet wurden. Dazu formulieren wir folgendes Korollar.

Korollar 3.11. *Die semidiskreten Energie-Transport-Gleichungen*

$$n_j - n_{j-1} = h \Delta \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right), \quad (3.62)$$

$$n_j \theta_j - n_{j-1} \theta_{j-1} = h \left(\kappa \Delta \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) + \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) \right) \quad (3.63)$$

mit den gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen

$$n_j = n_D, n_j \theta_j = n_D \theta_D \quad \text{auf } \Gamma_D, j > 0, \quad (3.64)$$

$$\nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) \cdot \nu = \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) \cdot \nu = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N, j > 0 \quad (3.65)$$

haben für alle $j = 1, \dots, N$ schwache, positive Lösungen $n_j, \theta_j \in H^1(\Omega)$. Insbesondere gilt

$$n_j, \theta_j, n_j \theta_j, n_j \theta_j^{1/2-\beta}, n_j \theta_j^{3/2-\beta} \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \quad (3.66)$$

Beweis. Die vorherige Proposition 3.10 liefert uns Lösungen für die Gleichungen (3.7), (3.8) in den neuen Funktionen $u_j, v_j \in H^1(\Omega)$. Wir erinnern uns an die Transformation (3.6) mit der diese hergeleitet wurden, und daraus folgend

$$\begin{aligned} n_j &= u_j^{3/2-\beta} v_j^{\beta-1/2}, \\ \theta_j &= \frac{v_j}{u_j}, \\ n_j \theta_j &= u_j^{1/2-\beta} v_j^{\beta+1/2}. \end{aligned}$$

Setzt man das nun in den schwachen Formulierungen (3.60), (3.61) ein, erfüllen $n_j, n_j \theta_j$ für alle $\varphi \in H_D^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} n_j \varphi dx + h \int_{\Omega} \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx &= \int_{\Omega} n_{j-1} \varphi dx, \\ \int_{\Omega} n_j \theta_j \varphi dx + h \int_{\Omega} \kappa \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx &= \int_{\Omega} n_{j-1} \theta_{j-1} \varphi dx + h \int_{\Omega} \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) \varphi dx. \end{aligned}$$

Das bedeutet $n_j, n_j \theta_j$ erfüllen die Gleichungen (3.62), (3.63) schwach mit den Neumann-Randbedingungen, sofern sie glatt genug sind. Können wir noch $n_j, \theta_j \in H^1(\Omega)$ zeigen und die Dirichlet-Randbedingungen, haben wir eine schwache Lösung gefunden. Die Positivität von n_j und θ_j erkennt man sofort aus der Gestalt der Transformation mit der Positivität von u_j und v_j aus Lemma 3.7. Analoges gilt für die Beschränktheit in $L^\infty(\Omega)$, womit $n_j, \theta_j \in L^2(\Omega)$ auch klar ist. Für die Ableitung von θ_j gilt wegen der Positivität von u_j , Cauchy-Schwarz- und Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|\nabla \theta_j\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \frac{1}{u_j^2} (\nabla v_j u_j - \nabla u_j v_j) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C (\|\nabla v_j\|_{L^2(\Omega)} \|u_j\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} \|v_j\|_{L^2(\Omega)}) < \infty. \end{aligned}$$

Bei der Ableitung von n_j benutzen wir $\frac{u_j}{v_j} \leq \frac{1}{\varepsilon}$, was aus Proposition 3.10 folgt, und $\frac{3}{2} - \beta > \frac{1}{2} - \beta > 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \|\nabla n_j\|_{L^2(\Omega)} &= \left\| \nabla \left(u_j^{3/2-\beta} \right) v_j^{\beta-1/2} + u_j^{3/2-\beta} \nabla \left(v_j^{\beta-1/2} \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\| \left(\frac{3}{2} - \beta \right) u_j^{1/2-\beta} v_j^{\beta-1/2} \nabla u_j + \left(\beta - \frac{1}{2} \right) u_j^{3/2-\beta} v_j^{\beta-3/2} \nabla v_j \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left\| \left(\frac{3}{2} - \beta \right) \left(\frac{u_j}{v_j} \right)^{1/2-\beta} \nabla u_j + \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{u_j}{v_j} \right)^{3/2-\beta} \nabla v_j \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C (\|\nabla u_j\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_j\|_{L^2(\Omega)}) < \infty. \end{aligned}$$

Somit haben wir auch $n_j, \theta_j \in H^1(\Omega)$ gezeigt. Dass das Produkt $n_j \theta_j$ auch in $H^1(\Omega)$ ist, folgt unmittelbar aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Für die anderen Terme aus (3.66) folgt die Aussage bereits aus der Gestalt der Transformation (3.6) und der Regularität von u_j, v_j .

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Dirichlet-Randbedingungen auch erfüllt sind. Wie bereits erwähnt, erfüllen u_j, v_j diese im $L^2(\Gamma_D)$ -Sinn und somit gilt auch

$$u_j = u_D, v_j = v_D$$

punktweise fast überall auf Γ_D . Daraus folgt, dass auch $n_j, n_j\theta_j$ die Randbedingungen fast überall erfüllen und konsequent mit der Positivität der Funktionen auch

$$\|n_j - n_D\|_{L^2(\Gamma_D)} = \|n_j\theta_j - n_D\theta_D\|_{L^2(\Gamma_D)} = 0.$$

□

3.4 Entropieabschätzung

Bevor wir nun von diesen semidiskreten Lösungsaussagen auf das ursprüngliche Problem schließen können, benötigen wir einige Abschätzungen über die Beschränktheit der vorkommenden Funktionen, unabhängig von der Gitterweite h . Wir werden in diesem Kapitel eine sogenannte Entropieabschätzung für die semidiskreten Funktionen herleiten und dann im nächsten Kapitel 3.5 diese Abschätzung dazu benutzen, um im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ eine Lösung der kontinuierlichen Gleichung zu erhalten. Dazu definieren wir für $b \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$f_b: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (x, y) \mapsto x^{2-b}y^b. \quad (3.67)$$

Eine wichtige Eigenschaft dieser Funktion halten wir in dem folgenden Lemma fest.

Lemma 3.12. *f_b ist konvex, falls $b \geq 2$ oder $b \leq 0$ ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass D^2f_b positiv semidefinit ist, um daraus auf die Konvexität zu schließen. Dazu benötigen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_x f_b &= (2-b)x^{1-b}y^b, \quad \partial_y f_b = bx^{2-b}y^{b-1}, \\ \partial_{xx} f_b &= (2-b)(1-b)x^{-b}y^b, \quad \partial_{xy} f_b = (2-b)bx^{1-b}y^{b-1}, \\ \partial_{yy} f_b &= (b-1)bx^{2-b}y^{b-2}. \end{aligned}$$

Die Hessematrix schreibt sich dann als

$$D^2 f_b(x, y) = \begin{pmatrix} (2-b)(1-b)x^{-b}y^b & (2-b)bx^{1-b}y^{b-1} \\ (2-b)bx^{1-b}y^{b-1} & (b-1)bx^{2-b}y^{b-2} \end{pmatrix}$$

mit

$$\det D^2 f_b(x, y) = \left(\frac{y}{x}\right)^{2(b-1)} b(b-2).$$

Für $b \geq 2$ oder $b \leq 0$ und positive x, y sind $\det D^2 f_b(x, y)$ und die beiden Diagonaleinträge von $D^2 f_b(x, y)$ nichtnegativ. Für symmetrische 2×2 -Matrizen ist das äquivalent zu der Eigenschaft positiv semidefinit zu sein. □

Damit wir uns für die weitere Diskussion etwas die Schreibarbeit erleichtern, führen wir folgende Abkürzungen ein

$$f_{b,D} := f_b(n_D, n_D\theta_D), \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} := \frac{\partial f_b}{\partial n}(n_D, n_D\theta_D), \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} := \frac{\partial f_b}{\partial(n\theta)}(n_D, n_D\theta_D) \quad (3.70)$$

und definieren damit das Funktional

$$\phi_b(n, n\theta) := \int_{\Omega} \left(f_b(n, n\theta) - f_{b,D} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n}(n - n_D) - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)}(n\theta - n_D\theta_D) \right) dx. \quad (3.71)$$

Lemma 3.13. $\phi_b(n, n\theta)$ ist nichtnegativ für $n, n\theta > 0$ fast überall auf Ω und $b \geq 2$ oder $b \leq 0$.

Beweis. f_b ist eine ausreichend glatte Funktion. Wir können daher die Taylor-Entwicklung an einem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ bis zum Restglied zweiter Ordnung betrachten. Für einen beliebigen Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt dann also

$$f_b(x, y) = f_b(x_0, y_0) + (x - x_0, y - y_0)^T \nabla f_b(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0)^T D^2 f_b(x_{\xi}, y_{\xi})(x - x_0, y - y_0)$$

mit einer Zwischenstelle (x_{ξ}, y_{ξ}) . Daraus folgt

$$f_b(x, y) - f_b(x_0, y_0) - (x - x_0, y - y_0)^T \nabla f_b(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(x - x_0, y - y_0)^T D^2 f_b(x_{\xi}, y_{\xi})(x - x_0, y - y_0) \geq 0,$$

da f_b laut dem vorherigen Lemma 3.12 konvex ist. Mit $(x, y) = (n, n\theta)$ und $(x_0, y_0) = (n_D, n_D\theta_D)$ folgt nun die Aussage nach Integrieren über Ω . \square

Mit diesen Erkenntnissen definieren wir jetzt eine weitere Funktion aus diesen Hilfsfunktionen.

Definition 3.14. Seien f_b, ϕ_b wie in (3.67), (3.71), $n, n\theta > 0$ fast überall. Das *Entropiefunktional* S_{b_1, b_2} ist definiert durch

$$S_{b_1, b_2}(n, n\theta) := \frac{1}{|b_1|} \phi_{b_1}(n, n\theta) + \frac{1}{|b_2|} \phi_{b_2}(n, n\theta). \quad (3.72)$$

Die Parameter b_1, b_2 werden dabei aus folgender, von β abhängigen, Menge gewählt.

$$N_{\beta} = \left\{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_1, b_2 \in N_{\beta}^*, b_1 \leq b_2, b_1 \leq \beta - \frac{1}{2}, b_2 \geq \frac{5}{2} - \beta \right\} \quad (3.73)$$

mit

$$N_{\beta}^* = \left\{ b \in \mathbb{R} : (1 - 2\beta)b + 6 > 0, \quad 4(2\beta - 1)b^3 + 4(4\beta^2 - 12\beta + 11)b^2 + (8\beta^3 - 44\beta^2 + 70\beta - 73)b - 6(2\beta - 1)^2 > 0 \right\}. \quad (3.74)$$

Lemma 3.15. Es gelten diese zwei Resultate über die in Definition 3.14 definierte Menge N_{β} .

(i) $b \in N_{\beta}$ erfüllen die Voraussetzung für Konvexität von f_b aus Lemma 3.12.

(ii) $(\beta - \frac{1}{2}, 5) \in N_{\beta}$.

Beweis. (i) Da $-\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{1}{2}$ laut Voraussetzungen (1.3) gilt, folgt $b_1 < 0$ und $b_2 > 2$ aus den Bedingungen an N_β in (3.73).

(ii) Offenbar gilt $b_1 \leq b_2, b_1 \leq \beta - \frac{1}{2}$ und $b_2 \geq \frac{5}{2} - \beta$, das heißt es sind noch die Bedingungen von N_β^* zu überprüfen. Für $b_1 = \beta - \frac{1}{2}$ ergibt das

$$\begin{aligned} & (1 - 2\beta)(\beta - 1/2) + 6 \geq 4 > 0, \\ & 4(2\beta - 1)(\beta - 1/2)^3 + 4(4\beta^2 - 12\beta + 11)(\beta - 1/2)^2 \\ & \quad + 8(\beta^3 - 44\beta^2 + 70\beta - 73)(\beta - 1/2) - 6(2\beta - 1)^2 \\ & = 32\beta^4 - 128\beta^3 + 176\beta^2 - 144\beta + 42 \stackrel{?}{>} 0. \end{aligned}$$

Die reellen Nullstellen des Polynoms in β sind größer und gleich $\frac{1}{2}$, also gilt auch die letzte Ungleichung.

Für $b_2 = 5$ überprüfen wir

$$\begin{aligned} & (1 - 2\beta)5 + 6 \geq 6 > 0, \\ & 4(2\beta - 1)5^3 + 4(4\beta^2 - 12\beta + 11)5^2 + (8\beta^3 - 44\beta^2 + 70\beta - 73)5 - 6(2\beta - 1)^2 \\ & = 40\beta^3 + 156\beta^2 + 174\beta + 229 > 0. \end{aligned}$$

□

Wir formulieren noch einige kurze Resultate, welche für den Beweis des danach folgenden Theorems 3.17 benötigt werden.

Lemma 3.16. *Für n_j, θ_j aus Korollar 3.11 und $b_1, b_2 \in N_\beta$ gilt*

$$(i) \quad \theta_j^2 |\nabla n_j|^2 \leq \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right) |\nabla n_j|^2,$$

$$(ii) \quad 1 + \theta_j^{1-2\beta} + \theta_j^{3-2\beta} \leq C \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta}\right),$$

$$(iii) \quad 1 + \theta_j^{-1-2\beta} + \theta_j^{1-2\beta} \leq C \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta}\right),$$

wobei $C > 0$ sogar von b_1, b_2 und β unabhängig ist.

Beweis. Für (i) reicht es zu zeigen, dass

$$\theta_j^2 \leq \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right)$$

gilt. Falls $0 < \theta_j \leq 1$, dann folgt

$$\theta_j^2 \leq 1 \leq \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right).$$

Für $\theta_j > 1$ folgt aus $3 - 2\beta \in (2, 4]$

$$\theta_j^2 \leq \theta_j^{3-2\beta} \leq \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right).$$

Um (ii) und (iii) zu zeigen, bemerken wir, dass laut Definition

$$b_1 \leq \beta - \frac{1}{2}, b_2 \geq \frac{5}{2} - \beta$$

gilt. Diese Ungleichungen implizieren

$$\begin{aligned} b_1 + \frac{1}{2} - \beta \leq 0 < 1 - 2\beta < 3 - 2\beta, b_2 + \frac{1}{2} - \beta \geq 3 - 2\beta > 1 - 2\beta, \\ b_1 - \beta - \frac{3}{2} \leq -1 - 2\beta \leq 0 < 1 - 2\beta, b_2 - \frac{3}{2} - \beta \geq 1 - 2\beta > -1 - 2\beta. \end{aligned}$$

Also steht auf der rechten Seite der Ungleichungen jeweils ein dominanter θ_j -Term für $0 < \theta_j \leq 1$ und für $\theta_j > 1$. Wählen wir also zum Beispiel $C = 3$ als Konstante, folgen die beiden Aussagen. \square

Für das in Definition 3.14 in (3.72) definierte Entropiefunktional können wir jetzt eine Abschätzung bezüglich dem Zeitgitter formulieren, welche die Hauptaussage dieses Abschnittes darstellt.

Theorem 3.17 (Diskrete Entropieabschätzung). *Seien $(b_1, b_2) \in N_\beta, h > 0$ und n_j, θ_j die schwachen Lösungen aus Korollar 3.11. Dann gilt*

$$\begin{aligned} S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) + C_1 h \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta} \right) |\nabla n_j|^2 dx \\ + C_1 h \int_{\Omega} n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta} \right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\ \leq C_2 h + S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

mit $C_1 > 0$, abhängig von β und b_1, b_2 , und $C_2 \geq 0$, abhängig von der Relaxionszeit τ und den Randdaten n_D, θ_D .

Für $n_D = \text{const.}$ und $\theta_D = 1$ verschwindet C_2 sogar.

Beweis. Analog zu vorher führen wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} f_{b,j} &:= f_b(n_j, n_j \theta_j), \\ \frac{\partial f_{b,j}}{\partial n} &:= \frac{\partial f_b}{\partial n}(n_j, n_j \theta_j), \\ \frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} &:= \frac{\partial f_b}{\partial(n\theta)}(n_j, n_j \theta_j) \end{aligned}$$

ein. Wir betrachten für beliebiges $b \in N_\beta$ und nutzen die, durch Lemma 3.12 gesicherte, Konvexität von f_b aus, um $f_{b,j} - f_{b,j-1}$ durch den Gradienten an $n_j, n_j \theta_j$ abzuschätzen, und erhalten

$$\frac{1}{h} (\phi_b(n_j, n_j \theta_j) - \phi_b(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1})) \quad (3.76)$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\Omega} \left(f_{b,j} - f_{b,j-1} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n}(n_j - n_{j-1}) - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)}(n_j \theta_j - n_{j-1} \theta_{j-1}) \right) dx \quad (3.77)$$

$$\leq \frac{1}{h} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial n} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right) (n_j - n_{j-1}) + \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) (n_j \theta_j - n_{j-1} \theta_{j-1}) dx. \quad (3.78)$$

Wir erinnern uns an die schwache Formulierung von (3.62), (3.63) mit den gemischten Dirichlet-Neumann-Randbedingungen. Sei dafür $\varphi \in H_D^1(\Omega)$, dann gilt

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (n_j - n_{j-1}) \varphi dx = - \int_{\Omega} \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx, \quad (3.79)$$

$$\frac{1}{h} \int_{\Omega} (n_j \theta_j - n_{j-1} \theta_{j-1}) \varphi dx = -\kappa \int_{\Omega} \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) \varphi dx. \quad (3.80)$$

Da f_b eine glatte Funktion ist, sind

$$\frac{\partial f_{b,j}}{\partial n} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n}, \frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)}$$

zulässige Testfunktionen aus $H_D^1(\Omega)$ in (3.79) und (3.80). Die Randbedingungen sind definitionsgemäß erfüllt. Wir können also mit (3.79) und (3.80), (3.78) umschreiben und erhalten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} (\phi_b(n_j, n_j \theta_j) - \phi_b(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1})) \\ & \leq - \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial n} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) dx \\ & \quad - \kappa \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) dx. \end{aligned}$$

Wir strukturieren die Terme noch um, bevor wir sie einzeln abschätzen. Die rechte Seite lässt sich schreiben als

$$- \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial n} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) + \kappa \nabla \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) dx \quad (3.81)$$

$$+ \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) + \kappa \nabla \left(\frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) dx \quad (3.82)$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) dx. \quad (3.83)$$

Betrachten wir den ersten Term (3.81). Wir wollen den Term ohne Vorzeichen nach unten abschätzen und werden ihn deshalb als quadratische Form in $\theta_j^{(b+1/2-\beta)/2} \nabla n_j$ und $n_j \theta_j^{(b+3/2-\beta)/2} \nabla \theta_j$ anschreiben. Wir schreiben die Ableitungen von $f_b(n, n\theta) = n^{2-b} (n\theta)^b$

aus und differenzieren aus und erhalten unter Berücksichtigung von $\kappa = \frac{2}{3}(2 - \beta)$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla \left((2-b)n_j^{1-b}(n_j\theta_j)^b \right) \nabla \left(n_j\theta_j^{1/2-\beta} \right) + \frac{2}{3}(2-\beta) \nabla \left(bn_j^{2-b}(n_j\theta_j)^{b-1} \right) \nabla \left(n_j\theta_j^{3/2-\beta} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} (2-b) \nabla \left(n_j\theta_j^b \right) \nabla \left(n_j\theta_j^{1/2-\beta} \right) + \frac{2}{3}(2-\beta)b \nabla \left(n_j\theta_j^{b-1} \right) \nabla \left(n_j\theta_j^{3/2-\beta} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} (2-b) \left(\nabla n_j\theta_j^b + bn_j\theta_j^{b-1}\nabla\theta_j \right) \left(\nabla n_j\theta_j^{1/2-\beta} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) n_j\theta_j^{1/2-\beta}\nabla\theta_j \right) \\
&\quad + \frac{2}{3}(2-\beta)b \left(\nabla n_j\theta_j^{b-1} + (b-1)n_j\theta_j^{b-2}\nabla\theta_j \right) \left(\nabla n_j\theta_j^{3/2-\beta} + \left(\frac{3}{2} - \beta \right) n_j\theta_j^{1/2-\beta}\nabla\theta_j \right) dx \\
&= \int_{\Omega} (2-b) \left(|\nabla n_j|^2\theta_j^{b+1/2-\beta} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) n_j \nabla n_j\theta_j^{b-1/2-\beta}\nabla\theta_j \right. \\
&\quad \left. + bn_j \nabla n_j\theta_j^{b-1/2-\beta}\nabla\theta_j + b \left(\frac{1}{2} - \beta \right) n_j^2 |\nabla\theta_j|^2\theta_j^{b-3/2-\beta} \right) \\
&\quad + \frac{2}{3}(2-\beta)b \left(|\nabla n_j|^2\theta_j^{b+1/2-\beta} + \left(\frac{3}{2} - \beta \right) n_j \nabla n_j\theta_j^{b-1/2-\beta}\nabla\theta_j \right. \\
&\quad \left. + (b-1)n_j \nabla n_j\theta_j^{b-1/2-\beta}\nabla\theta_j + (b-1) \left(\frac{3}{2} - \beta \right) n_j^2 |\nabla\theta_j|^2\theta_j^{b-3/2-\beta} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} |\nabla n_j|^2\theta_j^{b+1/2-\beta} \underbrace{\frac{1}{3}(b+6-2\beta b)}_{=:A} \\
&\quad + n_j \nabla n_j\theta_j^{(b+1/2-\beta)/2}\theta_j^{b-1/2-\beta}\nabla\theta_j 2 \underbrace{\frac{1}{12}(-2b\beta+b+6)(2b-2\beta+1)}_{=:B} \\
&\quad + n_j^2\theta_j^{b-3/2-\beta} |\nabla\theta_j|^2 \underbrace{\frac{1}{6}b(-4\beta^2+4\beta^2b-8\beta b+2\beta+9b-6)}_{=:C} dx,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile schon quadratische Form, $\int v^T M v dx$ für $v = (\theta_j^{(b+1/2-\beta)/2}\nabla n_j, n_j\theta_j^{(b-3/2-\beta)/2}\nabla\theta_j)$ und die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

besitzt. Fordern wir jetzt, dass diese quadratische Form positiv definit ist, so erhalten wir die Bedingungen an die Hauptminoren

$$\begin{aligned}
A &> 0, \\
AC - B^2 &> 0.
\end{aligned}$$

Diese sind ausgeschrieben genau die Ungleichungen in der Definition von N_{β}^* (3.74) und somit für $(b_1, b_2) \in N_{\beta}$ erfüllt. Daraus schließen wir die Existenz einer Konstante $C_1^* > 0$, sodass $v^T M v \geq C_1^* |v|^2$. Somit können wir (3.81) abschätzen durch

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial n} \right) \nabla \left(n_j\theta_j^{1/2-\beta} \right) + \kappa \nabla \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} \right) \nabla \left(n_j\theta_j^{3/2-\beta} \right) dx \\
& \leq -C_1^* \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b+1/2-\beta} |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \theta_j^{b-3/2-\beta} |\nabla\theta_j|^2 \right) dx. \quad (3.85)
\end{aligned}$$

Betrachten wir nun (3.82). Die Beträge der Produkte im Integral schätzen wir mit der skalierten Young-Ungleichung, Korollar 2.19, mit $p = q = 2$ und $\delta > 0$ ab und erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) + \kappa \nabla \left(\frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) dx \\ & \leq \int_{\Omega} \frac{1}{2\delta} \left| \nabla \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right|^2 + \frac{\delta}{2} \left| \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) \right|^2 + \frac{1}{2\delta} \left| \nabla \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right|^2 + \frac{\delta}{2} \kappa^2 \left| \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) \right|^2 dx \\ & = \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega} \left| \nabla \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \left| \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) \right|^2 + \kappa^2 \left| \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Das erste Integral hängt nur von den Randdaten und δ ab und kann daher durch eine positive Konstante C_D abgeschätzt werden. Für das zweite Integral differenzieren wir die Terme aus und schätzen das Quadrat mit der Young-Ungleichung aus Lemma 2.18 ab, um die gemischten Terme vernachlässigen zu können. Mit $\kappa = \frac{2}{3}(2 - \beta)$ folgt dann

$$\begin{aligned} & C_D + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \nabla n_j \theta_j^{1/2-\beta} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) n_j \theta_j^{-1/2-\beta} \nabla \theta_j \right|^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{2}{3}(2 - \beta) \right)^2 \left| \nabla n_j \theta_j^{3/2-\beta} + \left(\frac{3}{2} - \beta \right) n_j \theta_j^{1/2-\beta} \nabla \theta_j \right|^2 \right) dx \\ & \leq C_D + \frac{\delta}{2} C_{\beta} \int_{\Omega} \left(\left(\theta_j^{1-2\beta} + \theta_j^{3-2\beta} \right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{-1-2\beta} + \theta_j^{1-2\beta} \right) |\nabla \theta_j|^2 \right) dx, \end{aligned}$$

mit $C_{\beta} > 0$ abhängig von β . Also gilt insgesamt für den Term (3.82)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \left(\frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{1/2-\beta} \right) + \kappa \nabla \left(\frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) \nabla \left(n_j \theta_j^{3/2-\beta} \right) dx \\ & \leq C_D + \frac{\delta}{2} C_{\beta} \int_{\Omega} \left(\left(\theta_j^{1-2\beta} + \theta_j^{3-2\beta} \right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{-1-2\beta} + \theta_j^{1-2\beta} \right) |\nabla \theta_j|^2 \right) dx. \quad (3.86) \end{aligned}$$

Den letzten Term (3.83), den es abzuschätzen gilt, betrachten wir in der Form, in welcher er in S_{b_1, b_2} vorkommt, also die Summe über $b = b_1, b_2$ und skaliert mit $\frac{1}{|b|}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{b=b_1, b_2} \frac{1}{|b|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) dx \\ & = \sum_{b=b_1, b_2} \frac{b}{|b|} \int_{\Omega} \left(n_j \theta_j^{b-1} - n_D \theta_D^{b-1} \right) \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) dx \\ & \stackrel{b_1 < 0, b_2 > 0}{=} - \int_{\Omega} \left(n_j \theta_j^{b_1-1} - n_D \theta_D^{b_1-1} \right) \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) dx + \int_{\Omega} \left(n_j \theta_j^{b_2-1} - n_D \theta_D^{b_2-1} \right) \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) dx \\ & = \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} n_j n_D (\theta_j - 1) \left(\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1} \right) dx - \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} n_j^2 \theta_j^{b_1-1} (\theta_j - 1) \left(\theta_j^{b_2-b_1} - 1 \right) dx \\ & \leq \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} n_j n_D (\theta_j - 1) \left(\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1} \right) dx. \quad (3.87) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei daraus, dass $\frac{1}{\tau} n_j^2 \theta_j^{b_1-1} \geq 0$ ist und $(\theta_j - 1)$, $(\theta_j^{b_2-b_1} - 1)$ gleiche Vorzeichen haben, da $b_2 - b_1 > 0$ ist. Durch Addieren von $\pm n_D^2 \theta_D \pm n_D^2$ im Integral

können wir (3.87) weiter bearbeiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} n_j n_D (\theta_j - 1) (\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1}) dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} (n_j n_D \theta_j - n_j n_D \pm n_D^2 \theta_D \pm n_D^2) (\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1}) dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} ((n_j \theta_j - n_D \theta_D) n_D - (n_j - n_D) n_D + n_D^2 (\theta_D - 1)) (\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1}) dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} \left(n_D (n_j \theta_j - n_D \theta_D) (\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1}) \right. \\
&\quad \left. - (n_j - n_D) n_D (\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1}) + n_D^2 (\theta_j - 1) (\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1}) \right) dx \\
&\leq \int_{\Omega} g_D |n_j \theta_j - n_D \theta_D| dx + \int_{\Omega} g_D |n_j - n_D| dx + \int_{\Omega} g_D^* dx,
\end{aligned}$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned}
g_D &:= \frac{n_D}{\tau} |\theta_D^{b_2-1} - \theta_D^{b_1-1}| \geq 0, \\
g_D^* &:= n_D (\theta_D - 1) g_D,
\end{aligned}$$

welche nur von den Randdaten abhängig sind. Die ersten beiden Integrale der letzten Ungleichung schätzen wir jetzt mit der skalierten Young-Ungleichung, Korollar 2.19, mit $\delta > 0$ und $p = q = 2$ ab und schließen auf

$$\frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |n_j \theta_j - n_D \theta_D|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |n_j - n_D|^2 dx + \int_{\Omega} \left(g_D^* + \frac{1}{\delta} g_D^2 \right) dx. \quad (3.88)$$

Da $n_j \theta_j - n_D \theta_D$ und $n_j - n_D$ $H_D^1(\Omega)$ -Funktionen sind, können wir die L^2 -Normen in (3.88) mit der Poincaré-Ungleichung, Theorem 2.8, abschätzen. Sei also $C_p > 0$ die Konstante aus der Poincaré-Ungleichung. Wir schätzen (3.88) ab und mit Hilfe der Young-Ungleichung, um beim Quadrieren die gemischten Terme vernachlässigen zu können, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& C_p \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\nabla(n_j \theta_j - n_D \theta_D)|^2 + |\nabla(n_j - n_D)|^2 dx + \int_{\Omega} \left(g_D^* + \frac{1}{\delta} g_D^2 \right) dx \\
&= C_p \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |\nabla(n_j \theta_j) - \nabla(n_D \theta_D)|^2 + |\nabla n_j - \nabla n_D|^2 dx + \int_{\Omega} \left(g_D^* + \frac{1}{\delta} g_D^2 \right) dx \\
&\leq C_p \delta \int_{\Omega} (|\nabla n_j|^2 \theta_j^2 + |\nabla \theta_j|^2 n_j^2 + |\nabla n_j|^2) dx \\
&\quad + C_p \delta \int_{\Omega} (|\nabla n_D|^2 + |\nabla(n_D \theta_D)|^2) dx + \int_{\Omega} \left(g_D^* + \frac{1}{\delta} g_D^2 \right) dx \\
&\leq C_p \delta \int_{\Omega} (|\nabla n_j|^2 \theta_j^2 + |\nabla \theta_j|^2 n_j^2 + |\nabla n_j|^2) dx + C_{p,D},
\end{aligned}$$

wobei die Integrale über die Randterme mit der Poincaré-Konstante und δ in eine Kon-

stante $C_{p,D} > 0$ zusammengefasst wurden. Insgesamt ergibt das für den Term (3.83)

$$\begin{aligned} & \sum_{b=b_1, b_2} \frac{1}{|b|} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial(n\theta)} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) \frac{n_j}{\tau} (1 - \theta_j) dx \\ & \leq C_p \delta \int_{\Omega} (|\nabla n_j|^2 \theta_j^2 + |\nabla \theta_j|^2 n_j^2 + |\nabla n_j|^2) dx + C_{p,D}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Betrachten wir jetzt die zu zeigende Aussage (3.75) mit $\tilde{C}_1 := \max\{|b_1|, |b_2|\}^{-1} C_1^* > 0$ in der Form

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} (S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) - S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1})) \\ & + \tilde{C}_1 \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta} \right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta} \right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\ & = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{|b_1|} (\phi_{b_1}(n_j, n_j \theta_j) - \phi_{b_1}(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1})) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{|b_2|} (\phi_{b_2}(n_j, n_j \theta_j) - \phi_{b_2}(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1})) \right) \\ & + \tilde{C}_1 \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta} \right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta} \right) |\nabla \theta_j|^2 dx. \end{aligned}$$

Können wir diesen Term durch eine Konstante $C_2 > 0$ abschätzen, sind wir fertig. Benutzen wir also die zuvor gezeigten Abschätzungen (3.85), (3.86) und (3.89), um diesen Ausdruck nach oben zu beschränken durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|b_1|} \left(-C_1^* \int_{\Omega} |\nabla n_j|^2 \theta_j^{b_1+1/2-\beta} + n_j^2 |\nabla \theta_j|^2 \theta_j^{b_1-3/2-\beta} dx \right) \\ & + \frac{1}{|b_2|} \left(-C_1^* \int_{\Omega} |\nabla n_j|^2 \theta_j^{b_2+1/2-\beta} + n_j^2 |\nabla \theta_j|^2 \theta_j^{b_2-3/2-\beta} dx \right) \\ & + \tilde{C}_1 \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta} \right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta} \right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\ & + \frac{1}{|b_1|} \left(C_D + \frac{\delta}{2} C_{\beta} \int_{\Omega} \left(\theta_j^{1-2\beta} + \theta_j^{3-2\beta} \right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 |\nabla \theta_j|^2 \left(\theta_j^{-1-2\beta} + \theta_j^{1-2\beta} \right) dx \right) \\ & + \frac{1}{|b_2|} \left(C_D + \frac{\delta}{2} C_{\beta} \int_{\Omega} \left(\theta_j^{1-2\beta} + \theta_j^{3-2\beta} \right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 |\nabla \theta_j|^2 \left(\theta_j^{-1-2\beta} + \theta_j^{1-2\beta} \right) dx \right) \\ & + C_p \delta \int_{\Omega} (|\nabla n_j|^2 \theta_j^2 + |\nabla \theta_j|^2 n_j^2 + |\nabla n_j|^2) dx + C_{p,D}. \end{aligned}$$

Mit elementaren Umformungen schätzen wir diese Summe weiter ab durch

$$\begin{aligned}
& - \min\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}\right\} C_1^* \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta}\right) |\nabla n_j|^2 \\
& + n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\
& + \tilde{C}_1 \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\
& + \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}\right\} 2C_D \\
& + \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}\right\} \delta C_{\beta} \left(\int_{\Omega} \left(\theta_j^{1-2\beta} + \theta_j^{3-2\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 |\nabla \theta_j|^2 \left(\theta_j^{-1-2\beta} + \theta_j^{1-2\beta}\right) dx\right) \\
& + C_p \delta \int_{\Omega} (|\nabla n_j|^2 \theta_j^2 + |\nabla \theta_j|^2 n_j^2 + |\nabla n_j|^2) dx + C_{p,D}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von $\tilde{C}_1 = \max\{|b_1|, |b_2|\}^{-1} C_1^*$ heben sich die ersten beiden Summanden auf. Für den ersten Ausdruck im letzten Integral, $|\nabla n_j|^2 \theta_j^2$, benutzen wir Lemma 3.16 (i) und fassen die Ausdrücke mit den passenden Termen im Integral davor zusammen. Mit $C_2 := C_{p,D} + \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}\right\} 2C_D$ haben wir eine obere Schranke gefunden durch

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} (S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) - S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1})) \\
& + \tilde{C}_1 \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\
& \leq C_2 + 2\delta \left(\max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}\right\} C_{\beta} + C_p\right) \int_{\Omega} \left(1 + \theta_j^{1-2\beta} + \theta_j^{3-2\beta}\right) |\nabla n_j|^2 \\
& + n_j^2 |\nabla \theta_j|^2 \left(1 + \theta_j^{-1-2\beta} + \theta_j^{1-2\beta}\right) dx.
\end{aligned} \tag{3.90}$$

Jetzt benutzen wir Lemma 3.16 (ii), (iii) um die Summe der θ_j -Terme im Integral durch die passenden Terme abzuschätzen, die auch auf der linken Seite der Ungleichung zu finden sind. Mit einer neuen, positiven Konstante C^* , abhängig von dem Gebiet Ω und β, b_1, b_2 schreiben wir dann

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h} (S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) - S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1})) \\
& + C_1 \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\
& \leq C_2 + \delta C^* \int_{\Omega} \left(\theta_j^{b_1+1/2-\beta} + \theta_j^{b_2+1/2-\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{b_1-3/2-\beta} + \theta_j^{b_2-3/2-\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Wählen wir jetzt δ klein genug, so dass $C_1 := \tilde{C}_1 - \delta C^* > 0$ gilt, können wir die Aussage (3.75) schließen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass C_2 für konstantes n_D und $\theta_D = 1$ verschwindet. Wir

erinnern uns dazu an die Herleitung der Konstante

$$\begin{aligned}
C_2 &= C_{p,D} + \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}\right\} 2C_D \\
&= C_p \delta \int_{\Omega} (|\nabla n_D|^2 + |\nabla(n_D \theta_D)|^2) dx + \int_{\Omega} (g_D^* + \frac{1}{\delta} g_D^2) dx \\
&\quad + \max\left\{\frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|}\right\} 2 \frac{1}{2\delta} \int_{\Omega} \left(\left| \nabla \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right|^2 + \left| \nabla \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right|^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

In den Integralen kommen nur Ableitungen der Randterme vor, also verschwinden diese für konstante Daten und somit auch C_2 . \square

3.5 Übergang $h \rightarrow 0$

In diesem Kapitel können wir nun schließlich die Existenz einer schwachen Lösung $n, n\theta$ von (1.1), (1.2) zeigen, indem wir den Beweis von Theorem 3.1 formulieren. In dem vorherigen Kapitel 3.3 haben wir in Korollar 3.11 die Existenz semidiskreter Lösungen von (3.62), (3.63) gezeigt, beziehungsweise der N Systeme. Hier wollen wir nun diesen Prozess des Festhaltens einer Variablen wieder umkehren und auf eine kontinuierliche Lösung der ursprünglichen Gleichungen schließen.

Dafür erweitern wir die semidiskreten Funktionen zuerst auf das ganze Intervall $[0, T]$, indem wir die stückweise konstanten Funktionen in t definieren durch

$$\begin{aligned}
n_h: \Omega \times ((j-1)h, jh] &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, t) &\mapsto n_j(x), \\
\theta_h: \Omega \times ((j-1)h, jh] &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, t) &\mapsto \theta_j(x)
\end{aligned}$$

mit $1 \leq j \leq N = T/h$ und $n_h(x, 0) = n_0(x)$, $\theta_h(x, 0) = \theta_0(x)$. Weiters definieren wir die diskrete Zeitableitung für beliebige Funktionen $w(x, t)$ durch

$$(D_h w)(x, t) := \frac{w(x, t) - w(x, t-h)}{h}$$

für $x \in \Omega, t \geq h$. Damit lassen sich die semidiskreten Gleichungen (3.62), (3.63) für festes $t \in (0, T)$ schreiben als

$$D_h n_h = \Delta \left(n_h \theta_h^{1/2-\beta} \right), \quad (3.92)$$

$$D_h(n_h \theta_h) = \Delta \left(n_h \theta_h^{3/2-\beta} \right) + \frac{n_h}{\tau} (1 - \theta_h). \quad (3.93)$$

Das Variationsproblem mit Dirichlet-Neumann-Randbedingungen schreibt sich dann als, finde $n_h(\cdot, t), \theta_h(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$, sodass für alle $\varphi \in H_D^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} D_h n_h \varphi dx &= - \int_{\Omega} \nabla \left(n_h \theta_h^{1/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx, \\
\int_{\Omega} D_h(n_h \theta_h) \varphi dx &= -\kappa \int_{\Omega} \nabla \left(n_h \theta_h^{3/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \frac{n_h}{\tau} (1 - \theta_h) \varphi dx.
\end{aligned}$$

Die Gelfand-Identifizierung aus Definition 2.11 erlaubt uns die schwache Formulierung mit Dualitätsklammern zu schreiben. Wir benutzen das Tripel $V = H_D^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $V' = H_D^1(\Omega)'$. Dann lässt sich das H -Innenprodukt als das Auswerten eines Funktionals aus V' auffassen. Für festes $t \in (0, T)$ können wir dann mit $(D_h n_h)(\cdot, t)$, $(D_h(n_h \theta_h))(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ die schwache Formulierung umschreiben auf

$$\langle D_h n_h, \varphi \rangle_{H_D^1(\Omega)'} = - \int_{\Omega} \nabla \left(n_h \theta_h^{1/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx, \quad (3.94)$$

$$\langle D_h(n_h \theta_h), \varphi \rangle_{H_D^1(\Omega)'} = -\kappa \int_{\Omega} \nabla \left(n_h \theta_h^{3/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx + \int_{\Omega} \frac{n_h}{\tau} (1 - \theta_h) \varphi dx \quad (3.95)$$

für alle $\varphi \in H_D^1(\Omega)$.

Laut Lemma 3.15 (ii) gilt $(\beta - \frac{1}{2}, 5) \in N_{\beta}$. Betrachten wir jetzt die diskrete Entropiegleichung (3.75) aus Theorem 3.17 mit $(b_1, b_2) = (\beta - \frac{1}{2}, 5)$ für ein $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) + C_1 h \int_{\Omega} \left(1 + \theta_j^{11/2-\beta} \right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{-2} + \theta_j^{7/2-\beta} \right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\ \leq C_2 h + S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1}). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Führt man diese Abschätzung induktiv für alle $j - 1, j - 2, \dots, 1$ weiter, erhält man

$$\begin{aligned} S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) + C_1 \sum_{l=0}^j h \int_{\Omega} \left(1 + \theta_l^{11/2-\beta} \right) |\nabla n_l|^2 + n_l^2 \left(\theta_l^{-2} + \theta_l^{7/2-\beta} \right) |\nabla \theta_l|^2 dx \\ \leq C_2 j h + S_{b_1, b_2}(n_0, n_0 \theta_0). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Verbinden wir die Notation der stückweise konstanten Funktionen in t mit den semidiskreten Funktionen, so gilt $f_l = f_h(lh)$ für allgemeine, semidiscrete Funktionen f_l und $l = 0, \dots, N$. Weiters gilt für die Summe mit $t = jh$

$$\sum_{l=0}^j h f_l = \sum_{l=0}^{j=t/h} h f_h(lh) = \int_0^{t/h} h f_h(lh) dl = \int_0^t f_h(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Mit diesen Erkenntnissen können wir (3.97) umschreiben zu

$$\begin{aligned} S_{b_1, b_2}(n_h(t), n_h(t) \theta_h(t)) + C_1 \int_0^t \int_{\Omega} \left(1 + \theta_h^{11/2-\beta} \right) |\nabla n_h|^2 + n_h^2 \left(\theta_h^{-2} + \theta_h^{7/2-\beta} \right) |\nabla \theta_h|^2 dx d\tilde{t} \\ \leq C_2 t + S_{b_1, b_2}(n_0, n_0 \theta_0), \end{aligned} \quad (3.98)$$

mit $(b_1, b_2) = (\beta - \frac{1}{2}, 5)$. $S_{b_1, b_2}(n_0, n_0 \theta_0)$ ist dabei laut Lemma 3.13 positiv und durch die Anfangsdaten bestimmt.

Bevor wir nur den Übergang $h \rightarrow 0$ für die semidiskreten Lösungen durchführen können, müssen wir einige Abschätzungen zeigen.

Lemma 3.18. *Es existiert ein $C > 0$, sogar unabhängig von $\beta \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, sodass für stückweise konstante Funktionen $\theta_h > 0$ gilt*

- (i) $1 + \theta_h^2 + \theta_h^{1-2\beta} + \theta_h^{3-2\beta} \leq C \left(\theta_h^{\beta-1/2} + \theta_h^5 \right),$
(ii) $1 + \theta_h^2 + \theta_h^{1-2\beta} + \theta_h^{3-2\beta} \leq C \left(1 + \theta_h^{11/2-\beta} \right),$
(iii) $1 + \theta_h^{-1-2\beta} + \theta_h^{1-2\beta} \leq C \left(\theta_h^{-2} + \theta_h^{7/2-\beta} \right).$

Beweis. Wir werden zeigen, dass der jeweils erste Term der rechten Seite die linke Seite für $\theta_h \leq 1$ kontrolliert und der zweite Term analog für $\theta_h > 1$ fungiert. Konsequenterweise kann man zum Beispiel als Konstante $C = 4$ in allen drei Punkten wählen.

Wir betrachten zuerst (i) und erinnern an $-\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{1}{2}$. Die Hochzahlen erfüllen

$$\beta - \frac{1}{2} < 0, \beta - \frac{1}{2} \leq 2, \beta - \frac{1}{2} \leq 1 - 2\beta, \beta - \frac{1}{2} \leq 3 - 2\beta, \\ 2 \leq 5, 1 - 2\beta \leq 5, 3 - 2\beta \leq 5.$$

Die erste Zeile garantiert dabei, dass im Fall $\theta_h \leq 1$, der Term $\theta_h^{\beta-1/2}$ größer oder gleich jedem einzelnen Ausdruck auf der linken Seite ist. Die zweite Zeile liefert die analoge Aussage für den Fall $\theta_h > 1$ und θ_h^5 .

Für (ii) dominiert 1 für kleine θ_h und wir überprüfen für $\theta_h > 1$, dass

$$2 \leq \frac{11}{2} - \beta, 1 - 2\beta \leq \frac{11}{2} - \beta, 3 - 2\beta \leq \frac{11}{2} - \beta$$

gilt. In (iii) erkennen wir, dass auch

$$-2 < 0, -2 \leq -1 - 2\beta, -2 \leq 1 - 2\beta, \\ 0 \leq \frac{7}{2} - \beta, -1 - 2\beta \leq \frac{7}{2} - \beta, 1 - 2\beta \leq \frac{7}{2} - \beta$$

erfüllt sind, und somit die Argumentation analog zu vorher verläuft. \square

Lemma 3.19. *Das Entropiefunktional S_{b_1, b_2} erfüllt für $(b_1, b_2) = (\beta - \frac{1}{2}, 5)$, für zwei Konstanten $C_1, C_2 > 0$, unabhängig von h ,*

$$S_{b_1, b_2}(n_h, n_h \theta_h) \geq -C_1 + C_2 \int_{\Omega} n_h^2 \left(\theta_h^{\beta-1/2} + \theta_h^5 \right) dx. \quad (3.99)$$

n_h, θ_h sind dabei die stückweise konstanten Funktionen der semidiskreten Lösungen n_j, θ_j aus Korollar 3.11.

Beweis. Laut Definition gilt

$$S_{b_1, b_2}(n_h, n_h \theta_h) = \frac{1}{|\beta - \frac{1}{2}|} \phi_{b_1}(n_h, n_h \theta_h) + \frac{1}{5} \phi_{b_2}(n_h, n_h \theta_h)$$

mit

$$\phi_b(n_h, n_h \theta_h) = \int_{\Omega} f_b(n_h, n_h \theta_h) - f_{b,D} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} (n_h - n_D) - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} (n_h \theta_h - n_D \theta_D) dx$$

und

$$f_{b_1}(n_h, n_h \theta_h) = n_h^2 \theta_h^{\beta-1/2}, \quad f_{b_2}(n_h, n_h \theta_h) = n_h^2 \theta_h^5.$$

Hier kann $f_{b,D}$ durch eine positive Konstante, abhängig von den Randdaten $C_D > 0$, nach unten abgeschätzt werden. Die Ableitungen von f_b betrachten wir einzeln und benutzen die skalierte Young-Ungleichung, Korollar 2.19, mit $\delta > 0, p = q = 2$ für

$$\begin{aligned} \sum_{b=b_1, b_2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n}(n_h - n_D) \right| dx &\leq \sum_{b=b_1, b_2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} n_h \right| dx + \tilde{C}_D \\ &\leq \sum_{b=b_1, b_2} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{2\delta} \left| \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right|^2 dx + \frac{\delta}{2} \int_{\Omega} |n_h|^2 dx \right) + \tilde{C}_D \\ &\leq \delta \int_{\Omega} n_h^2 dx + \frac{1}{\delta} C_D \end{aligned}$$

und analog für

$$\sum_{b=b_1, b_2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)}(n_h \theta_h - n_D \theta_D) \right| dx \leq \delta \int_{\Omega} n_h^2 \theta_h^2 dx + \frac{1}{\delta} C_D.$$

Die Terme, welche nur von den Randdaten und β abhängen, wurden dabei in positive Randkonstanten $\tilde{C}_D, C_D > 0$ zusammengefasst. Benutzen wir jetzt Lemma 3.18 (i), können wir für die Summe der letzten beiden Ungleichung schließen

$$\begin{aligned} &\sum_{b=b_1, b_2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n}(n_h - n_D) \right| dx + \sum_{b=b_1, b_2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)}(n_h \theta_h - n_D \theta_D) \right| dx \\ &\leq \frac{2}{\delta} C_D + 2\delta \int_{\Omega} n_h^2 (1 + \theta_h^2) dx \\ &\leq \frac{2}{\delta} C_D + 2\delta \int_{\Omega} n_h^2 \left(1 + \theta_h^2 + \underbrace{\theta_h^{1-2\beta} + \theta_h^{3-2\beta}}_{\geq 0} \right) dx \\ &\leq \frac{2}{\delta} C_D + 2C\delta \int_{\Omega} n_h^2 (\theta_h^{\beta-1/2} + \theta_h^5) dx. \end{aligned}$$

Setzen wir diese Erkenntnisse in die Definition des Entropiefunktionals erhalten wir für passende, positive Konstanten, unabhängig von h ,

$$\begin{aligned} S_{b_1, b_2}(n_h, n_h \theta_h) &\geq \min \left\{ \frac{1}{|\beta - \frac{1}{2}|}, \frac{1}{5} \right\} (\phi_{b_1}(n_h, n_h \theta_h) + \phi_{b_2}(n_h, n_h \theta_h)) \\ &\geq \frac{1}{|\beta - \frac{1}{2}|} \left(\int_{\Omega} n_h^2 (\theta_h^{\beta-1/2} + \theta_h^5) dx - C_D - \frac{2}{\delta} C_D - 2C\delta \int_{\Omega} n_h^2 (\theta_h^{\beta-1/2} + \theta_h^5) dx \right) \\ &\geq \frac{1}{|\beta - \frac{1}{2}|} \left(\left(- \left(1 + \frac{2}{\delta} \right) C_D \right) + (1 - 2C\delta) \int_{\Omega} n_h^2 (\theta_h^{\beta-1/2} + \theta_h^5) dx \right). \end{aligned}$$

Wählen wir jetzt $\delta > 0$ so klein, dass $(1 - 2\delta C) > 0$ ist, können wir das Ganze mit zwei Konstanten $C_1, C_2 > 0$ schreiben und erhalten

$$S_{b_1, b_2}(n_h, n_h \theta_h) \geq -C_1 + C_2 \int_{\Omega} n_h^2 (\theta_h^{\beta-1/2} + \theta_h^5) dx,$$

was wir zeigen wollten. □

Mit diesen Erkenntnissen und der Entropieabschätzung aus Theorem 3.17 werden wir nun h -unabhängige Abschätzungen für die semidiskreten Lösungen $n_h, n_h\theta_h$ in den Normen der zeitabhängigen Sobolevräume herleiten.

Lemma 3.20. *Seien n_h, θ_h die stückweise konstanten Funktionen der Lösungen aus Korollar 3.11. Es existiert eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $h > 0$ folgende Ungleichungen gelten:*

- (i) $\|n_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|n_h\theta_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C,$
- (ii) $\|n_h\theta_h^{1/2-\beta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|n_h\theta_h^{3/2-\beta}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C,$
- (iii) $\|n_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|n_h\theta_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C,$
- (iv) $\|n_h\theta_h^{1/2-\beta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + \|n_h\theta_h^{3/2-\beta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C,$
- (v) $\|D_h n_h\|_{L^2(h,T;H_D^1(\Omega)')} + \|D_h(n_h\theta_h)\|_{L^2(h,T;H_D^1(\Omega)')} \leq C.$

Beweis. Wir betrachten die Ungleichung aus Lemma 3.18 (i), multiplizieren mit n_h^2 und integrieren über Ω . Dann erhalten wir für passende, positive Konstanten, welche der Reihe nach nummeriert werden,

$$\begin{aligned}
& \|n_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h\theta_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h\theta_h^{1/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h\theta_h^{3/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= \int_{\Omega} n_h^2 + n_h^2\theta_h^2 + n_h^2\theta_h^{1-2\beta} + n_h^2\theta_h^{3-2\beta} dx \\
&\leq C_1 \int_{\Omega} n_h^2 (\theta_h^{\beta-1/2} + \theta_h^5) dx \\
&\leq C_2 + C_3 S_{b_1, b_2}(n_h, n_h\theta_h).
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt dabei aus Lemma 3.19. Mit (3.98) kann man den letzten Ausdruck weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned}
& C_2 + C_3 S_{b_1, b_2}(n_0, n_0\theta_0) + C_4 t \\
&\quad - C_5 \int_0^t \int_{\Omega} \left(1 + \theta_h^{11/2-\beta}\right) |\nabla n_h|^2 + n_h^2 \left(\theta_h^{-2} + \theta_h^{7/2-\beta}\right) |\nabla \theta_h|^2 dx d\tilde{t} \\
&\leq C_2 + C_3 S_{b_1, b_2}(n_0, n_0\theta_0) + C_4 t \\
&\leq \max\{C_2, C_3, C_4\}(1 + S_{b_1, b_2}(n_0, n_0\theta_0) + T).
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also, wegen der Beschränktheit der Anfangsdaten, für eine passende, positive Konstante

$$\|n_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h\theta_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h\theta_h^{1/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h\theta_h^{3/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C + CT.$$

Daraus folgen (i) und (ii). Für (iii) und (iv) benutzen wir Lemma 3.18 (ii) und (iii) und

die Young-Ungleichung, Lemma 2.18. Wir schätzen damit die folgenden Terme ab durch

$$\begin{aligned}
& |\nabla n_h|^2 + |\nabla(n_h\theta_h)|^2 + |\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta})|^2 + |\nabla(n_h\theta_h^{3/2-\beta})|^2 \\
& \leq |\nabla n_h|^2 + C(|\nabla n_h|^2\theta_h^2 + n_h^2|\nabla\theta_h|^2) + C(|\nabla n_h|^2\theta_h^{1-2\beta} + n_h^2\theta_h^{-1-2\beta}|\nabla\theta_h|^2) \\
& \quad + C(|\nabla n_h|^2\theta_h^{3-2\beta} + n_h^2\theta_h^{1-2\beta}|\nabla\theta_h|^2) \\
& \leq C\left(\left(1 + \theta_h^2 + \theta_h^{1-2\beta} + \theta_h^{3-2\beta}\right)|\nabla n_h|^2 + n_h^2\left(1 + \theta_h^{-1-2\beta} + \theta_h^{1-2\beta}\right)|\nabla\theta_h|^2\right) \\
& \leq C\left(1 + \theta_h^{11/2-\beta}\right)|\nabla n_h|^2 + Cn_h^2\left(\theta_h^{-2} + \theta_h^{7/2-\beta}\right)|\nabla\theta_h|^2.
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung und erneutes Anwenden der Young-Ungleichung für die Mischterme in den Quadraten liefert

$$\begin{aligned}
& |\nabla(n_h - n_D)|^2 + |\nabla(n_h\theta_h - n_D\theta_D)|^2 \\
& \quad + |\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta} - n_D\theta_D^{1/2-\beta})|^2 + |\nabla(n_h\theta_h^{3/2-\beta} - n_D\theta_D^{3/2-\beta})|^2 \\
& \leq \tilde{C}\left(|\nabla n_h|^2 + |\nabla(n_h\theta_h)|^2 + |\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta})|^2 + |\nabla(n_h\theta_h^{3/2-\beta})|^2\right) + C_D \\
& \leq C\left(1 + \theta_h^{11/2-\beta}\right)|\nabla n_h|^2 + Cn_h^2\left(\theta_h^{-2} + \theta_h^{7/2-\beta}\right)|\nabla\theta_h|^2 + C_D,
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C_D > 0$, abhängig von den Gradienten der Randdaten n_D, θ_D . C_D verschwindet also für konstante Randbedingungen. Integrieren wir die Ungleichung nun über $(0, T) \times \Omega$ ergibt das

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \|\nabla(n_h - n_D)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(n_h\theta_h - n_D\theta_D)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \|\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta} - n_D\theta_D^{1/2-\beta})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(n_h\theta_h^{3/2-\beta} - n_D\theta_D^{3/2-\beta})\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tilde{t} \\
& \leq \tilde{C} \int_0^T \int_{\Omega} \left(1 + \theta_h^{11/2-\beta}\right) |\nabla n_h|^2 + n_h^2 \left(\theta_h^{-2} + \theta_h^{7/2-\beta}\right) |\nabla\theta_h|^2 dx d\tilde{t} + T \text{meas}(\Omega) C_D.
\end{aligned}$$

Der Integralterm ist auch in der Entropieungleichung (3.98) zu finden und wir können den Ausdruck umschreiben und die Nichtnegativität von S_{b_1, b_2} , folgend aus Lemma 3.13, ausnutzen. Mit $(b_1, b_2) = (\beta - \frac{1}{2}, 5)$ gilt dann für ein $C > 0$

$$\begin{aligned}
& \tilde{C} \int_0^T \int_{\Omega} \left(1 + \theta_h^{11/2-\beta}\right) |\nabla n_h|^2 + Cn_h^2 \left(\theta_h^{-2} + \theta_h^{7/2-\beta}\right) |\nabla\theta_h|^2 dx d\tilde{t} + T \text{meas}(\Omega) C_D \\
& \leq \tilde{C} \left(C_2 T + \underbrace{S_{b_1, b_2}(n_0, n_0\theta_0)}_{\text{beschränkt}} - \underbrace{S_{b_1, b_2}(n_h(T), n_h(T)\theta_h(T))}_{\geq 0} \right) + T \text{meas}(\Omega) C_D \\
& \leq C.
\end{aligned}$$

Zusammengesetzt mit den davor gezeigten Ungleichungen ergibt das

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \|\nabla(n_h - n_D)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(n_h\theta_h - n_D\theta_D)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \|\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta} - n_D\theta_D^{1/2-\beta})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(n_h\theta_h^{3/2-\beta} - n_D\theta_D^{3/2-\beta})\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tilde{t} \\
& \leq C.
\end{aligned}$$

Die Funktionen in den H^1 -Seminormen in der letzten Ungleichung sind laut Konstruktion sogar in $H_D^1(\Omega)$ und daher können wir die Poincaré-Ungleichung 2.8 benutzen, um sogar die Summe von

$$\begin{aligned} & \|n_h - n_D\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}, \|n_h\theta_h - n_D\theta_D\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}, \\ & \|n_h\theta_h^{1/2-\beta} - n_D\theta_D^{1/2-\beta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}, \|n_h\theta_h^{3/2-\beta} - n_D\theta_D^{3/2-\beta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \end{aligned}$$

durch eine Konstante zu beschränken. Aus

$$\|n_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq \|n_h - n_D\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + C_D$$

für eine Konstante $C_D > 0$, abhängig von den Randdaten, folgen dann (iii) und (iv). Für (v) benutzen wir die Gleichungen in den schwachen Formulierungen (3.94), (3.95) und die Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Für $D_h n_h$ schließen wir auf

$$\begin{aligned} \|D_h n_h\|_{L^2(h,T;H_D^1(\Omega)')}^2 &= \int_h^T \|D_h n_h\|_{H_D^1(\Omega)'}^2 dt \\ &= \int_h^T \sup_{\|v\| \leq 1, v \in H_D^1(\Omega)} |\langle D_h n_h, v \rangle_{H_D^1(\Omega)'}|^2 dt \\ &= \int_h^T \sup_{\|v\| \leq 1, v \in H_D^1(\Omega)} |(\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta}), \nabla v)_{L^2(\Omega)}|^2 dt \\ &\leq \int_h^T \sup_{\|v\| \leq 1, v \in H_D^1(\Omega)} \|\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta})\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &\leq \int_0^T \|\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta})\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \|\nabla(n_h\theta_h^{1/2-\beta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \\ &\stackrel{(iv)}{\leq} C \end{aligned}$$

und für $D_h(n_h\theta_h)$ liefert analoge Vorgehensweise

$$\begin{aligned} \|D_h(n_h\theta_h)\|_{L^2(h,T;H_D^1(\Omega)')}^2 &= \int_h^T \|D_h(n_h\theta_h)\|_{H_D^1(\Omega)'}^2 dt \\ &= \int_h^T \sup_{\|v\| \leq 1, v \in H_D^1(\Omega)} |\langle D_h(n_h\theta_h), v \rangle_{H_D^1(\Omega)'}|^2 dt \\ &= \int_h^T \sup_{\|v\| \leq 1, v \in H_D^1(\Omega)} |(\kappa\nabla(n_h\theta_h^{3/2-\beta}), \nabla v)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + (\frac{n_h}{\tau}(1 - \theta_h), v)_{L^2(\Omega)}|^2 dt \\ &\leq 2 \int_h^T \sup_{\|v\| \leq 1, v \in H_D^1(\Omega)} \left(\|\kappa\nabla(n_h\theta_h^{3/2-\beta})\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\frac{1}{\tau}(n_h - n_h\theta_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4\kappa^2 \int_0^T \left(\|\nabla(n_h \theta_h^{3/2-\beta})\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \frac{1}{\tau} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\|n_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h \theta_h\|_{L^2(\Omega)}^2) \right) dt \\
&= 4\kappa^2 \left(\|\nabla(n_h \theta_h^{3/2-\beta})\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \right. \\
&\quad \left. + \left\| \frac{1}{\tau} \right\|_{L^\infty(\Omega)}^2 (\|n_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|n_h \theta_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2) \right) \\
&\stackrel{(iii),(iv)}{\leq} C.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Lemmas abgeschlossen. \square

In diesem Kapitel wollen wir den Grenzwert identifizieren, falls die Gitterweite h gegen Null geht. Wir werden dazu eine Variante des Aubin-Lemmas benutzen, Lemma 2.16. Betrachten wir unsere Situation zuerst in der dort verwendeten Notation. Es gilt mit Rellich-Kondrachov und der Riesz-Identifizierung

$$X = H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{kompakt}} B = L^2(\Omega) \simeq L^2(\Omega)' \xrightarrow{\text{stetig}} Y = H_D^1(\Omega)'$$

und $r = 1, p = 2$. $n_h, n_h \theta_h$ erfüllen laut Lemma 3.20

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \|n_h - S_h n_h\|_{L^1(h,T;H_D^1(\Omega)')} + \|n_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad \leq \tilde{C} \|D_h n_h\|_{L^2(h,T;H_D^1(\Omega)')} + \|n_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C, \\
&\frac{1}{h} \|n_h \theta_h - S_h(n_h \theta_h)\|_{L^1(h,T;H_D^1(\Omega)')} + \|n_h \theta_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&\quad \leq \tilde{C} \|D_h(n_h \theta_h)\|_{L^2(h,T;H_D^1(\Omega)')} + \|n_h\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C.
\end{aligned}$$

Also garantiert die erste Aussage dieses Aubin-Lemmas 2.16, dass $(n_h), (n_h \theta_h)$ relativ kompakt in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ sind. Damit existieren konvergente Teilfolgen, welche der Übersicht halber nicht unnummeriert werden, sodass

$$n_h \rightarrow n \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.100)$$

$$n_h \theta_h \rightarrow w \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.101)$$

für $h \rightarrow 0$.

Nach Lemma 3.20 sind $n_h, \theta_h, n_h \theta_h^{1/2-\beta}$ und $n_h \theta_h^{3/2-\beta}$ beschränkt in $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ und $D_h n, D_h(n_h \theta_h)$ beschränkt in $L^2(h, T; H_D^1(\Omega)')$. Mit Theorem 2.20 haben wir daher schwach konvergente Teilfolgen, welche hier aber auch nicht extra unnummeriert werden. Also konvergieren für $h \rightarrow 0$

$$n_h \rightharpoonup n \quad \text{in } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.102)$$

$$n_h \theta_h \rightharpoonup w \quad \text{in } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.103)$$

$$n_h \theta_h^{1/2-\beta} \rightharpoonup y \quad \text{in } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.104)$$

$$n_h \theta_h^{3/2-\beta} \rightharpoonup z \quad \text{in } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \quad (3.105)$$

und

$$\begin{aligned} D_h n_h &\rightharpoonup \tilde{N} \quad \text{in } L^2(0, T; H_D^1(\Omega)'), \\ D_h(n_h \theta_h) &\rightharpoonup \tilde{W} \quad \text{in } L^2(0, T; H_D^1(\Omega)'). \end{aligned}$$

Wir können die Grenzwerte der diskreten Ableitungen \tilde{N}, \tilde{W} mithilfe der starken Konvergenz (3.100), (3.101) besser charakterisieren. Sei dazu $\varphi \in C_0^\infty([0, T]; H_D^1(\Omega))$ eine glatte Testfunktion mit kompaktem Träger in $(0, T)$. h sei so klein, dass der Träger von φ komplett in $(h, T - h)$ enthalten ist. Dann gilt mit der Gelfand-Identifizierung

$$\begin{aligned} \int_h^T \langle D_h n_h, \varphi \rangle_{H_D^1(\Omega)'} dt &= \int_h^T \int_\Omega D_h n_h \varphi dx dt \\ &= \int_h^T \int_\Omega \frac{1}{h} n_h(x, t) \varphi(x, t) dx dt - \int_h^T \int_\Omega \frac{1}{h} n_h(x, t - h) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \int_0^{T-h} \int_\Omega \frac{1}{h} n_h(x, t) \varphi(x, t) dx dt \\ &\quad - \int_0^{T-h} \int_\Omega \frac{1}{h} n_h(x, t) \varphi(x, t + h) dx dt \\ &= - \int_0^{T-h} \int_\Omega n_h(x, t) D_{-h} \varphi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Eine Taylor-Entwicklung von $D_{-h} \varphi(x, t) = \partial_t \varphi(x, t) + \mathcal{O}(h)$ zeigt uns die starke Konvergenz von $D_{-h} \varphi$ gegen $\partial_t \varphi$ in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Benutzen wir jetzt die Konvergenz von n_h aus (3.100) so folgt für $h \rightarrow 0$

$$- \int_0^{T-h} \int_\Omega n_h D_{-h} \varphi dx dt \rightarrow - \int_0^T \int_\Omega n \partial_t \varphi dx dt.$$

Also erhalten wir

$$\int_0^T \int_\Omega \langle \partial_t n - \tilde{N}, \varphi \rangle_{H_D^1(\Omega)'} dt = 0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty([0, T]; H_D^1(\Omega))$, woraus $\tilde{N} = \partial_t n$ folgt. Die gleichen Schritte liefern uns auch $\tilde{W} = \partial_t w$ und somit

$$D_h n_h \rightharpoonup \partial_t n \quad \text{in } L^2(0, T; H_D^1(\Omega)'), \quad (3.106)$$

$$D_h(n_h \theta_h) \rightharpoonup \partial_t w \quad \text{in } L^2(0, T; H_D^1(\Omega)'). \quad (3.107)$$

Unser Ziel ist es, die Grenzwerte w, y und z zu identifizieren. Dazu zeigen wir zuerst, dass für n, w aus (3.100), (3.101) gilt

$$n(x, t), w(x, t) > 0 \quad \text{fast überall in } \Omega \times (0, T). \quad (3.108)$$

Damit werden wir dann aus der starken Konvergenz in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ einen Grenzwert von θ_h bestimmen. Dafür beweisen wir zuerst noch zwei Lemmata, welche für den Beweis benötigt werden.

Lemma 3.21. Die stückweise konstanten Funktionen n_h, θ_h der Lösungen aus Korollar 3.11 erfüllen

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (n_h \theta_h)^{1/2-\beta} \nabla \left(n_h^{\beta+1/2} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h} \right) + n_h^{\beta-1/2} \nabla \left((n_h \theta_h)^{3/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h \theta_h} \right) \\ & + (n_h \theta_h)^{3/2-\beta} \nabla \left(n_h^{\beta-1/2} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h \theta_h} \right) + n_h^{\beta+1/2} \nabla \left((n_h \theta_h)^{1/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h} \right) dx \quad (3.109) \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} & n_h^{\beta+1/2} \nabla \left((n_h \theta_h)^{1/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h} \right) + (n_h \theta_h)^{3/2-\beta} \nabla \left(n_h^{\beta-1/2} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h \theta_h} \right) \\ & = n_h^{\beta+1/2} \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) (n_h \theta_h)^{-1/2-\beta} \nabla (n_h \theta_h) \right) \left(-\frac{\nabla n_h}{n_h^2} \right) \\ & + (n_h \theta_h)^{3/2-\beta} \left(\left(\beta - \frac{1}{2} \right) n_h^{\beta-3/2} \nabla n_h \right) \left(-\frac{\nabla (n_h \theta_h)}{(n_h \theta_h)^2} \right) \\ & = - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) n_h^{\beta-3/2} (\nabla n_h) (n_h \theta_h)^{-1/2-\beta} \nabla (n_h \theta_h) \\ & - \left(\beta - \frac{1}{2} \right) n_h^{\beta-3/2} (\nabla n_h) (n_h \theta_h)^{-1/2-\beta} \nabla (n_h \theta_h) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich die linke Seite von (3.109) zu

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (n_h \theta_h)^{1/2-\beta} \nabla \left(n_h^{\beta+1/2} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h} \right) + n_h^{\beta-1/2} \nabla \left((n_h \theta_h)^{3/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h \theta_h} \right) dx \\ & = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) n_h^{\beta-5/2} (n_h \theta_h)^{1/2-\beta} |\nabla n_h|^2 + \left(\frac{3}{2} - \beta \right) n_h^{\beta-1/2} (n_h \theta_h)^{-3/2-\beta} |\nabla (n_h \theta_h)|^2 dx. \end{aligned}$$

Die Aussage des Lemmas folgt nun aus $-\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{1}{2}$ und der Positivität von n_h, θ_h aus Korollar 3.11. \square

Lemma 3.22. Sei $t = jh, j \in \mathbb{N}_0$ und f_h eine stückweise konstante Funktion. Dann folgt aus

$$D_h f_h(t) \leq g_h(t), \quad (3.110)$$

für $g_h(t) > 0$, stückweise konstant, dass

$$f_h(t) \leq f_h(0) + \int_0^T g_h(\tilde{t}) d\tilde{t}, \quad t \in [0, T] \quad (3.111)$$

gilt.

Beweis. Laut Voraussetzung gilt

$$f_h(jh) - f_h((j-1)h) = f_h(t) - f_h(t-h) \leq h g_h(t).$$

Nun schreiben wir die Summe $f_h(t) - f_h(0)$ als Teleskopsumme an. Dann nutzen wir diese Abschätzung und die Äquivalenz von Summe und Integral für stückweise konstante Funktionen, wie am Anfang des Kapitels, und erhalten

$$\begin{aligned}
f_h(t) - f_h(0) &= \sum_{l=1}^j (f_h(lh) - f_h((l-1)h)) \\
&\leq \sum_{l=1}^j h g_h(lh) \\
&= \int_h^t g_h(\tilde{t}) d\tilde{t} \\
&\leq \int_0^T g_h(\tilde{t}) d\tilde{t}.
\end{aligned}$$

□

Wir können jetzt das Resultat über die Positivität der Grenzwerte n und w beweisen.

Lemma 3.23. *Für n, w aus (3.100), (3.101) gilt (3.108).*

Beweis. Wir definieren als Hilfsfunktion ein diskretes Entropiefunktional,

$$\Lambda(n_h, n_h \theta_h) := \int_{\Omega} \left(-\log n_h - \frac{1}{\kappa} \log(n_h \theta_h) + \frac{n_h}{n_D} + \frac{1}{\kappa} \frac{n_h \theta_h}{n_D \theta_D} \right) dx. \quad (3.112)$$

Da n_h, θ_h positiv und beschränkt fast überall auf Ω sind, ist Λ sinnvoll definiert und stückweise konstant in t . Außerdem sind

$$\frac{1}{n_h}, \frac{1}{n_h \theta_h}, \frac{1}{n_D}, \frac{1}{n_D \theta_D} \in H^1(\Omega),$$

aufgrund der Positivität der Funktionen. Wir bemerken die Konvexität von $x \mapsto -\log x$ und daraus folgend, dass

$$\begin{aligned}
D_h(-\log n_h) &\leq -\frac{1}{n_h} D_h n_h, \\
D_h(-\log(n_h \theta_h)) &\leq -\frac{1}{n_h \theta_h} D_h(n_h \theta_h)
\end{aligned}$$

gilt. Damit betrachten wir die diskrete Ableitung D_h von Λ und benutzen die schwache

Formulierung der semidiskreten Gleichungen (3.94), (3.95) und erhalten

$$\begin{aligned}
D_h \Lambda(n_h, n_h \theta_h) &= D_h \left(\int_{\Omega} \left(-\log n_h - \frac{1}{\kappa} \log(n_h \theta_h) + \frac{n_h}{n_D} + \frac{1}{\kappa} \frac{n_h \theta_h}{n_D \theta_D} \right) dx \right) \\
&\leq \int_{\Omega} (D_h n_h) \underbrace{\left(\frac{1}{n_D} - \frac{1}{n_h} \right)}_{\in H_D^1(\Omega)} + \frac{1}{\kappa} D_h(n_h \theta_h) \underbrace{\left(\frac{1}{n_D \theta_D} - \frac{1}{n_h \theta_h} \right)}_{\in H_D^1(\Omega)} dx \\
&= \int_{\Omega} \left(\nabla \left(n_h \theta_h^{1/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h} \right) + \nabla \left(n_h \theta_h^{3/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h \theta_h} \right) \right) dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \left(\nabla \left(n_h \theta_h^{1/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_D} \right) + \nabla \left(n_h \theta_h^{3/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_D \theta_D} \right) \right) dx \\
&\quad + \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa \tau} \left(\frac{1}{n_D \theta_D} - \frac{1}{n_h \theta_h} \right) n_h (1 - \theta_h) dx.
\end{aligned}$$

Verwenden wir jetzt $n_h \theta_h^{1/2-\beta} = n_h^{1/2+\beta} (n_h \theta_h)^{1/2-\beta}$, $n_h \theta_h^{3/2-\beta} = n_h^{\beta-1/2} (n_h \theta_h)^{3/2-\beta}$ und differenzieren die Gradienten aus, können wir die diskrete Ableitung abschätzen mit

$$\begin{aligned}
D_h \Lambda(n_h, n_h \theta_h) &\leq \\
&\int_{\Omega} (n_h \theta_h)^{1/2-\beta} \nabla \left(n_h^{\beta+1/2} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h} \right) + n_h^{\beta-1/2} \nabla \left((n_h \theta_h)^{3/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h \theta_h} \right) \\
&\quad + (n_h \theta_h)^{3/2-\beta} \nabla \left(n_h^{\beta-1/2} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h \theta_h} \right) + n_h^{\beta+1/2} \nabla \left((n_h \theta_h)^{1/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_h} \right) dx \tag{3.113}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Omega} \nabla \left(n_h \theta_h^{1/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_D} \right) + \nabla \left(n_h \theta_h^{3/2-\beta} \right) \nabla \left(\frac{1}{n_D \theta_D} \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} \frac{1}{n_D \theta_D} \frac{n_h}{\tau} (1 - \theta_h) dx - \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} \frac{1}{\tau \theta_h} dx + \frac{1}{\kappa} \int_{\Omega} \frac{1}{\tau} dx. \tag{3.114}
\end{aligned}$$

Den ersten Term (3.113) können wir mit Lemma 3.21 beim Abschätzen nach oben vernachlässigen. Den zweiten Term (3.114) schätzen wir termweise mit der Young-Ungleichung, Lemma 2.18, und Konstanten für Randterme und gegebene Größen, wie τ, κ und dem beschränkten Gebiet Ω , ab. Die negativen Ausdrücke können wir vernachlässigen, da wir eine obere Schranke suchen. Also gibt es ein $\tilde{C} > 0$, abhängig von $\tau, n_D, \theta_D, \kappa$ und Ω , sodass

$$D_h \Lambda(n_h, n_h \theta_h) \leq \tilde{C} \left(1 + \|n_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h \theta_h^{1/2-\beta}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|n_h \theta_h^{3/2-\beta}\|_{H^1(\Omega)}^2 \right). \tag{3.115}$$

Damit schließen wir mit Lemma 3.22 auf die Existenz einer Konstanten $C > 0$, für welche auf $[0, T]$

$$\begin{aligned}
&\Lambda(n_h(t), n_h(t) \theta_h(t)) \\
&\leq \Lambda(n_0, n_0 \theta_0) \tag{3.116}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\quad + \tilde{C} \left(1 + \|n_h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|n_h \theta_h^{1/2-\beta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|n_h \theta_h^{3/2-\beta}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 \right) \\
&\leq C \tag{3.117}
\end{aligned}$$

gilt. Für die letzte Ungleichung wurden die Abschätzungen (iii), (iv) aus Lemma 3.20 benutzt. $n_h, \theta_h, n_D, \theta_D$ sind fast überall positiv und beschränkt unabhängig von h . Wir können also das Lemma von Fatou 2.24 anwenden, da $-\log n_h, -\log(n_h\theta_h)$ fast überall nach unten durch eine von h unabhängige Konstante abgeschätzt werden können. Diese ist zwar nicht notwendigerweise positiv aber das Lemma von Fatou bleibt auch gültig für eine negative, integrierbare Schranke⁴. Dann folgt mit der Stetigkeit von $-\log$ und der Konvergenz (3.100), (3.101)

$$\begin{aligned}
\Lambda(n, w) &= \int_{\Omega} \left(-\log n - \frac{1}{\kappa} \log w + \frac{n}{n_D} + \frac{1}{\kappa} \frac{w}{n_D \theta_D} \right) dx \\
&= \int_{\Omega} \liminf_{h \rightarrow 0} \left(-\log n_h - \frac{1}{\kappa} \log(n_h \theta_h) + \frac{n_h}{n_D} + \frac{1}{\kappa} \frac{n_h \theta_h}{n_D \theta_D} \right) dx \\
&\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left(-\log n_h - \frac{1}{\kappa} \log(n_h \theta_h) + \frac{n_h}{n_D} + \frac{1}{\kappa} \frac{n_h \theta_h}{n_D \theta_D} \right) dx \\
&= \liminf_{h \rightarrow 0} \Lambda(n_h, n_h \theta_h) \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Die Konstante $C > 0$ ist insbesondere unabhängig von $t \in [0, T]$. Es gilt dann sogar

$$\sup_{t \in [0, T]} \Lambda(n(t), w(t)) \leq C. \quad (3.118)$$

Das bedeutet Λ ist für n, w für alle $t \in [0, T]$ beschränkt. Laut Definition (3.112) muss dann aber insbesondere

$$-\log n(x, t) - \frac{1}{\kappa} \log w(x, t) < \infty \quad (3.119)$$

fast überall auf $\Omega \times (0, T)$ gelten. Aufgrund der starken Konvergenz (3.100), (3.101) sind $n, w \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ und sind damit zusätzlich fast überall endlich. Zusammen mit (3.119) folgt dann die Positivität von n, w fast überall. \square

Mit der Positivität können wir nun die Grenzwerte identifizieren.

Korollar 3.24. *Für die Grenzwerte w, y und z aus (3.100) bis (3.105) gilt für eine passende Funktion θ*

$$w = n\theta, \quad (3.120)$$

$$y = n\theta^{1/2-\beta}, \quad (3.121)$$

$$z = n\theta^{3/2-\beta}. \quad (3.122)$$

Die Konvergenzaussagen lassen sich zusätzlich auf punktweise Konvergenz fast überall in $\Omega \times (0, T)$ erweitern.

⁴Falls $f_n \geq -g$ gilt, für eine integrierbare, nichtnegative Funktion g , wendet man die Aussage des Lemmas von Fatou einfach auf $f_n + g$ an.

Beweis. Mit dem Lemma 2.22 über den Zusammenhang von punktweiser Konvergenz und Konvergenz in L^p -Norm folgt aus (3.100), (3.101) ⁵

$$n_h \rightarrow n \quad \text{fast überall in } \Omega \times (0, T), \quad (3.123)$$

$$n_h \theta_h \rightarrow w \quad \text{fast überall in } \Omega \times (0, T). \quad (3.124)$$

Die Beschränktheit fast überall von n, w und die Positivität fast überall von n implizieren weiter für ein $C > 0$ und hinreichend kleines $h > 0$

$$\begin{aligned} \left| \theta_h - \frac{w}{n} \right| &= \left| \frac{\theta_h n_h}{n_h} - \frac{w}{n} \right| \\ &= \left| \frac{\theta_h n_h n - w n_h}{n_h n} \right| \\ &\leq C |\theta_h n_h n - w n + w n - w n_h| \\ &\leq C (|\theta_h n_h n - w n| + |w n - w n_h|) \\ &\leq C (|n| |\theta_h n_h - w| + |w| |n - n_h|). \end{aligned}$$

Die letzte Zeile konvergiert aber für $h \rightarrow 0$ fast überall auf $\Omega \times (0, T)$ gegen Null. Also haben wir die Konvergenz für $h \rightarrow 0$ von

$$\theta_h \rightarrow \theta := \frac{w}{n} \quad \text{fast überall in } \Omega \times (0, T).$$

Insbesondere gilt $0 < \theta < \infty$ fast überall in $\Omega \times (0, T)$. Aus der Stetigkeit der Multiplikation und der Potenzfunktion $x \mapsto x^\alpha, \alpha > 0$, folgt die Konvergenz der anderen Terme fast überall in $\Omega \times (0, T)$ gegen

$$\begin{aligned} n_h \theta_h &\rightarrow n \theta, \\ n_h \theta_h^{1/2-\beta} &\rightarrow n \theta^{1/2-\beta}, \\ n_h \theta_h^{3/2-\beta} &\rightarrow n \theta^{3/2-\beta}. \end{aligned}$$

Die Grenzwerte in der punktweisen Konvergenz fast überall stimmen laut Lemma 2.23 mit den schwachen Grenzwerten in der $L^2(\Omega \times (0, T))$ -Konvergenz überein. Mit der stetigen Einbettung

$$L^2(0, T; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega))$$

wird die schwache Konvergenz erhalten und können wir auch die schwachen Grenzwerte y und z aus (3.104) und (3.105) derart bestimmen. Das schließt den Beweis ab. \square

Diese Identifizierung zeigt uns also, dass die semidiskreten Funktionen gegen sinnvolle Grenzwerte konvergieren. Das war die letzte, noch fehlende Aussage, um den Beweis des Hauptresultats des Kapitels formulieren zu können.

Beweis von Theorem 3.1. Seien $n_h(t, \cdot), \theta_h(t, \cdot) \in H^1(\Omega)$ die semidiskreten Funktionen der Lösungen n_j, θ_j aus Korollar 3.11. Diese erfüllen die Dirichlet-Randbedingungen

$$n_h(t, \cdot)|_{\Gamma_D} = n_D, (n_h \theta_h)(t, \cdot)|_{\Gamma_D} = n_D \theta_D$$

⁵Man beachte $L^2(0, T; L^2(\Omega)) \simeq L^2(\Omega \times (0, T))$.

zumindest im $L^2(\Gamma_D)$ -Sinn und die schwachen Formulierungen mit Neumann-Randbedingungen (3.94), (3.95).

Wählen wir die Testfunktion $\varphi \in H_D^1(\Omega)$ in der Variationsformulierung nun zusätzlich zeitabhängig, also $\varphi \in L^2(0, T; H_D^1(\Omega))$, und integrieren über $(0, T)$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle D_h n_h, \varphi \rangle_{H_D^1(\Omega)'} dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left(n_h \theta_h^{1/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx dt, \\ \int_0^T \langle D_h(n_h \theta_h), \varphi \rangle_{H_D^1(\Omega)'} dt &= -\kappa \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \left(n_h \theta_h^{3/2-\beta} \right) \nabla \varphi dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \frac{n_h}{\tau} (1 - \theta_h) \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Seien nun $n, n\theta$ die Grenzwerte aus (3.100), (3.101). Die Konvergenzen (3.100) bis (3.107) und die gleichmäßige Beschränktheit der Folgen aus Lemma 3.20 (i) und (ii) garantieren uns jetzt, dass $n, n\theta, n\theta^{1/2-\beta}$ und $n\theta^{3/2-\beta}$ in den passenden Räumen für die Behauptung dieses Theorems sind. Weiters erhalten wir durch diese Konvergenzen, dass für alle Testfunktionen $\varphi \in L^2(0, T; H_D^1(\Omega))$ gilt

$$\begin{aligned} (D_h n_h, \varphi)_{L^2(0, T; H_D^1(\Omega)')} &\rightarrow (\partial_t n, \varphi)_{L^2(0, T; H_D^1(\Omega)')}, \\ (D_h(n_h \theta_h), \varphi)_{L^2(0, T; H_D^1(\Omega)')} &\rightarrow (\partial_t(n\theta), \varphi)_{L^2(0, T; H_D^1(\Omega)')}, \\ \left(\nabla(n_h \theta_h^{1/2-\beta}), \nabla \varphi \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} &\rightarrow \left(\nabla(n\theta^{1/2-\beta}), \nabla \varphi \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}, \\ \left(\nabla(n_h \theta_h^{3/2-\beta}), \nabla \varphi \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} &\rightarrow \left(\nabla(n\theta^{3/2-\beta}), \nabla \varphi \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}, \\ \left(\frac{1}{\tau} n_h, \varphi \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} - \left(\frac{1}{\tau} n_h \theta_h, \varphi \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} & \\ \rightarrow \left(\frac{1}{\tau} n, \varphi \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} - \left(\frac{1}{\tau} n\theta, \varphi \right)_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}. & \end{aligned} \quad (3.125)$$

Also erfüllen $n, n\theta$ genau die schwachen Formulierungen (3.1), (3.2) mit Neumann-Randbedingungen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass auch die Dirichlet-Randbedingungen bei der Grenzwertbildung erhalten bleiben. Es gilt

$$\begin{aligned} \|n - n_D\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_D))} &\leq \|n - n_h\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_D))} + \|n_h - n_D\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_D))} \\ &= \|n - n_h\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma_D))}. \end{aligned}$$

Die schwache Konvergenz in $H^1(\Omega)$ impliziert laut Theorem 2.4 und Bemerkung 2.5 die starke Konvergenz einer Teilfolge in $L^2(\Gamma_D)$. Das bedeutet im Allgemeinen aber nicht, dass $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ auch kompakt in $L^2(0, T; L^2(\Gamma_D))$ einbettet. Wir benutzen dazu die in Kapitel 2.2 vorgestellte Variante des Aubin-Lemmas, Lemma 2.16. Damit haben wir in diesem Abschnitt bereits die starke Konvergenz von n_h und $n_h \theta_h$ in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ gezeigt. Wir benutzen wieder $r = 1, p = 2$ und diesmal die Räume $X = H^1(\Omega), B = L^2(\Gamma_D), Y = H_D^1(\Omega)'$. Mit der Beschränktheit aus Lemma 3.20 und den schwachen Konvergenzen (3.102), (3.103) schließen wir auf

$$\begin{aligned} n_h &\rightarrow n \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Gamma_D)), \\ n_h \theta_h &\rightarrow n\theta \quad \text{in } L^2(0, T; L^2(\Gamma_D)). \end{aligned}$$

Also sind die Dirichlet-Randbedingungen im Sinn von

$$\|n - n_D\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_D))} = \|n\theta - n_D\theta_D\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_D))} = 0$$

erfüllt.

Aus Lemma 2.17 folgt, dass die Anfangsbedingungen im Sinne von $H_D^1(\Omega)'$ erfüllt sind. Es liefert uns nämlich die Einbettung

$$\{u \in L^2(0, T; H^1(\Omega)) : \partial_t u \in L^2(0, T; H_D^1(\Omega)')\} \hookrightarrow C([0, T]; H_D^1(\Omega)'),$$

wenn wir das Tripel $H^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ und $H_D^1(\Omega)'$ benutzen. Damit ist der Beweis des Theorems abgeschlossen. \square

3.6 Temperaturabhängige Relaxionszeit

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass das Lösbarkeitsresultat aus Theorem 3.1 auch gilt, falls die Relaxionszeit von der Temperatur θ abhängig ist. Wir wählen einen Ansatz aus [10, Beispiel 6.8] und setzen

$$\tau = \tau(\theta) = \tau_0 + \tau_1 \theta^{1/2-\beta}, \quad (3.126)$$

mit $\tau_0, \tau_1 > 0$. In diesem Fall gilt auch $\tau(\theta) > 0$, unabhängig von θ . Damit formulieren wir eine analoge Lösungsaussage zu Theorem 3.1.

Korollar 3.25. *Die Lösbarkeitsaussage aus Theorem 3.1 gilt mit den gleichen Voraussetzungen auch für die in (3.126) definierte, temperaturabhängige Relaxionszeit $\tau(\theta)$.*

Beweis. Da der Beweis prinzipiell analog zu dem für Theorem 3.1 funktioniert, betrachten wir nur die Stellen, an denen die Änderung eine Rolle spielt.

Der erste Punkt ist beim Nachrechnen der Voraussetzungen von Leray-Schauder an den Fixpunktoperator im Beweis von Proposition 3.9. Die Konvergenz von $\theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2}$ in (3.47) reicht nicht mehr aus, da $\tau = \tau(\theta_\mu)$ gilt. Mit analoger Argumentation erhält man aber auch die schwach* Konvergenz des Terms $\tau(\theta_\mu)^{-1} \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2}$ und somit

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\tau(\theta_\mu)} \theta_{\varepsilon_\mu}^{\beta-1/2} \eta dx \rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{\tau(\theta)} \theta_\varepsilon^{\beta-1/2} \eta dx$$

für alle $\eta \in L^1(\Omega)$. Dadurch ist die Konvergenz in diesem Beweisschritt gesichert.

Eine weitere Anpassung wird bei der Entfernung des Stampacchia-Abschneideterms in Kapitel 3.3 benötigt. In der Ungleichung für (3.52) sind wir auf

$$\left(1 - \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{h}{\tau(\theta_j)}\right)\right) > 0.$$

angewiesen. Wählt man aber h klein genug, genauer $0 < h < (\kappa - 1)\tau_0$, folgt $1 + \frac{h}{\tau(\theta_j)} < \kappa$ und die restliche Argumentation verläuft analog.

Zuletzt muss noch in Kapitel 3.5 beim Übergang $h \rightarrow 0$ eine Korrektur vorgenommen werden. Für die Konvergenz der schwachen Formulierung beim Beweis von Theorem 3.1 in (3.125) muss noch

$$\frac{n_h}{\tau(\theta_h)}(1 - \theta_h) \rightharpoonup \frac{n}{\tau(\theta)}(1 - \theta) \quad \text{schwach in } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.127)$$

gezeigt werden. Aus der punktweisen Konvergenz fast überall von n_h, θ_h folgt, dass auch $\tau(\theta_h) \rightarrow \tau(\theta)$ punktweise fast überall gilt und somit auch

$$\frac{n_h}{\tau(\theta_h)}(1 - \theta_h) \rightarrow \frac{n}{\tau(\theta)}(1 - \theta) \quad \text{punktweise fast überall in } \Omega \times (0, T),$$

da $\tau(\theta)$ strikt positiv ist.

Jetzt zeigen wir noch, dass die Folge $\frac{n_h}{\tau(\theta_h)}(1 - \theta_h)$ unabhängig von h in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ beschränkt ist, womit dann (3.127), zumindest für eine Teilfolge, gezeigt ist. Mit Lemma 3.20 (i) folgt

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (0, T)} \left\| \frac{n_h}{\tau(\theta_h)}(1 - \theta_h) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} \frac{n_h^2}{\tau(\theta_h)^2} (1 - \theta_h)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\tau_0^2} \sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} n_h^2 (1 + \theta_h^2) dx \\ &\leq \frac{1}{\tau_0^2} \left(\sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} n_h^2 dx + \sup_{t \in (0, T)} \int_{\Omega} (n_h \theta_h)^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{\tau_0^2} \left(\|n_h\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|n_h \theta_h\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 \right) \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Die restlichen Resultate können mit der Positivität von $\tau(\theta)$ in dem Beweis von Theorem 3.1 übernommen werden. \square

4 Langzeitverhalten

In diesem Kapitel werden wir betrachten, wie sich die schwachen Lösungen $n, n\theta$ aus Theorem 3.1 im Vergleich zu den Dirichlet-Randdaten über den Verlauf der Zeit t verhalten. Der Einfachheit halber treffen wir in diesem Kapitel für die Randbedingungen aus (1.5) die Annahmen

$$n_D = \text{const.}, \theta_D = 1, \quad (4.1)$$

und β sei nicht negativ, $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$.

Dann werden wir zeigen, dass folgendes Theorem über die zeitliche Entwicklung der erhaltenen schwachen Lösungen gilt.

Theorem 4.1. *Sei $0 \leq \beta < \frac{1}{2}, \tau > 0$ und die Dirichlet-Randbedingungen gegeben durch (4.1). Dann konvergiert die schwache Lösung $(n, n\theta)$ aus Theorem 3.1 gegen die Dirichlet-Randdaten in folgendem Sinn.*

Es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, abhängig von β, n_D, n_0 und θ_0 , sodass für alle $t > 0$ gilt

$$\|n(t) - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n(t)\theta(t) - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_1}{1 + C_2 t}. \quad (4.2)$$

Die hier gezeigte Konvergenzaussage liefert eine relativ schwache Konvergenzrate. In [15] durchgeführte numerische Experimente für glatte Anfangsdaten und konstante Randdaten $n_D = \theta_D = 1$ auf $\Omega = (0, 1)$ suggerieren, dass diese Rate nicht optimal ist. Nach einer Anfangsphase kann eventuell sogar eine exponentielle Konvergenz erwartet werden. Die numerischen Ergebnisse liefern nicht nur Konvergenz für $-\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{1}{2}$, sondern auch für eine Wahl des Parameters außerhalb dieses Intervalls.

Wir bereiten jetzt den Beweis des Resultats vor und erinnern uns an das Entropiefunktional S_{b_1, b_2} aus Definition 3.14 und die dort angeführte Menge für die Parameter $b_i, i = 1, 2$.

Lemma 4.2. *Sei N_β die Menge aus Definition 3.14. Dann gilt*

$$\left(\beta - \frac{1}{2}, \frac{5}{2} - \beta \right), (-3, 5) \in N_\beta. \quad (4.3)$$

Beweis. Die Bedingungen aus (3.73) sind offenbar erfüllt. Wir betrachten daher die Ungleichungen in (3.74). $\beta - \frac{1}{2}$ und 5 erfüllen diese laut dem Beweis von Lemma 3.15 (ii) bereits. Für $\frac{5}{2} - \beta$ erkennen wir

$$\begin{aligned} & (1 - 2\beta) \left(\frac{5}{2} - \beta \right) + 6 \geq 6 > 0, \\ & 4(2\beta - 1) \left(\frac{5}{2} - \beta \right)^3 + 4(4\beta^2 - 12\beta + 11) \left(\frac{5}{2} - \beta \right)^2 \\ & \quad + (8\beta^3 - 44\beta^2 + 70\beta - 73) \left(\frac{5}{2} - \beta \right) - 6(2\beta - 1)^2 \\ & = 24(1 - 2\beta) > 0 \end{aligned}$$

und für -3 folgt

$$\begin{aligned} & (1 - 2\beta)(-3) + 6 \geq 3 > 0, \\ & 4(2\beta - 1)(-3)^3 + 4(4\beta^2 - 12\beta + 11)(-3)^2 \\ & \quad + (8\beta^3 - 44\beta^2 + 70\beta - 73)(-3) - 6(2\beta - 1)^2 \\ & > 0 \end{aligned}$$

unter Benutzung von $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$. □

Für $(n_j, n_j\theta_j)$, die schwachen Lösungen aus Korollar 3.11 mit Randbedingungen (3.64), (3.65), gilt die diskrete Entropieabschätzung, Theorem 3.17, für $(b_1, b_2) \in N_\beta$. Für die speziellen Randbedingungen (4.1) verschwindet die zweite Konstante in der Abschätzung sogar. Mit den Parametern aus Lemma 4.2 gelten also die Ungleichungen

$$\begin{aligned} & S_{b_1, b_2}(n_j, n_j\theta_j) + C_1 h \int_{\Omega} \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{-2} + \theta_j^{1-2\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\ & \leq S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1}\theta_{j-1}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

für $(b_1, b_2) = \left(\beta - \frac{1}{2}, \frac{5}{2} - \beta\right)$ und

$$\begin{aligned} & S_{b_1, b_2}(n_j, n_j\theta_j) + C_1 h \int_{\Omega} \left(\theta_j^{-5/2-\beta} + \theta_j^{11/2-\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{-9/2-\beta} + \theta_j^{7/2-\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\ & \leq S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1}\theta_{j-1}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

für $(b_1, b_2) = (-3, 5)$. Führen wir die Abschätzung in der letzten Ungleichung für alle $j - 1, \dots, 1$ weiter erhalten wir sogar

$$\begin{aligned} & S_{b_1, b_2}(n_j, n_j\theta_j) + C_1 \sum_{l=1}^j h \int_{\Omega} \left(\theta_l^{-5/2-\beta} + \theta_l^{11/2-\beta}\right) |\nabla n_l|^2 + n_l^2 \left(\theta_l^{-9/2-\beta} + \theta_l^{7/2-\beta}\right) |\nabla \theta_l|^2 dx \\ & \leq S_{b_1, b_2}(n_0, n_0\theta_0) \leq C, \end{aligned} \quad (4.6)$$

für ein $C > 0$, abhängig von den Anfangsbedingungen n_0, θ_0 .

Das nächste Lemma liefert uns eine implizite Abschätzung für das Entropiefunktional.

Lemma 4.3. *Sei $(b_1, b_2) = \left(\beta - \frac{1}{2}, \frac{5}{2} - \beta\right) \in N_\beta$, S_{b_1, b_2} das Entropiefunktional und $(n_j, n_j\theta_j)$ die schwachen Lösungen aus Korollar 3.11. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$S_{b_1, b_2}(n_j, n_j\theta_j) + Ch S_{b_1, b_2}(n_j, n_j\theta_j)^2 \leq S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1}\theta_{j-1}). \quad (4.7)$$

Beweis. Wir erinnern uns zunächst an die Definition von

$$S_{b_1, b_2}(n_j, n_j\theta_j) = \frac{1}{|b_1|} \phi_{b_1}(n_j, n_j\theta_j) + \frac{1}{|b_2|} \phi_{b_2}(n_j, n_j\theta_j)$$

mit

$$\phi_b(n_j, n_j\theta_j) = \int_{\Omega} f_b(n_j, n_j\theta_j) - f_{b,D} - \frac{f_{b,D}}{\partial n}(n_j - n_D) - \frac{f_{b,D}}{\partial(n\theta)}(n_j\theta_j - n_D \cdot 1) dx.$$

Nutzen wir die Konvexität von f_b , die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Beschränktheit der Randdaten, können wir ϕ_b abschätzen mit

$$\begin{aligned} \phi_b(n_j, n_j\theta_j) &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_{b,j}}{\partial n} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n} \right) (n_j - n_D) + \left(\frac{f_{b,j}}{\partial(n\theta)} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)} \right) (n_j\theta_j - n_D) dx \\ &= \int_{\Omega} (n_j - n_D)(2n_j\theta_j^b - 2n_D) + (n_j\theta_j - n_D)(bn_j\theta_j^{b-1} - bn_D) dx \\ &\leq 2\|n_j\theta_j^b - n_D\|_{L^2(\Omega)}\|n_j - n_D\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + |b|\|n_j\theta_j^{b-1} - n_D\|_{L^2(\Omega)}\|n_j\theta_j - n_D\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(1 + \|n_j\theta_j^b\|_{L^2(\Omega)})\|n_j - n_D\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C(1 + \|n_j\theta_j^{b-1}\|_{L^2(\Omega)})\|n_j\theta_j - n_D\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

für ein $C > 0$, abhängig von den Randdaten und b . Wenden wir diese Abschätzung nun auf die Terme von S_{b_1, b_2} mit $(b_1, b_2) = (\beta - \frac{1}{2}, \frac{5}{2} - \beta)$ an, können wir dies durch

$$\begin{aligned} S_{b_1, b_2}(n_j, n_j\theta_j) &\leq C \left(1 + \|n_j\theta_j^{\beta-1/2}\|_{L^2(\Omega)} + \|n_j\theta_j^{5/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|n_j - n_D\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C \left(1 + \|n_j\theta_j^{\beta-3/2}\|_{L^2(\Omega)} + \|n_j\theta_j^{3/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|n_j\theta_j - n_D\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

beschränken. Verwenden wir $0 \leq \beta < \frac{1}{2}$ und daraus folgend

$$2\beta - 1, 2\beta - 3, 3 - 2\beta, 5 - 2\beta \in [-3, 5],$$

zeigt eine Fallunterscheidung für θ_j kleiner oder größer Eins, dass auch

$$n_j^2\theta_j^{2\beta-1} + n_j^2\theta_j^{2\beta-3} + n_j^2\theta_j^{3-2\beta} + n_j^2\theta_j^{5-2\beta} \leq 4n_j^2(\theta_j^{-3} + \theta_j^5)$$

gilt. Integriert man diese Ungleichung über Ω , so folgt

$$\begin{aligned} \|n_j\theta_j^{\beta-1/2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j\theta_j^{\beta-3/2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j\theta_j^{3/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j\theta_j^{5/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq C\|n_j(\theta_j^{-3/2} + \theta_j^{5/2})\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Wir benutzen jetzt als Abkürzung

$$F_{b,j} := f_{b,D} + \frac{f_{b,D}}{\partial n}(n_j - n_D) + \frac{f_{b,D}}{\partial(n\theta)}(n_j\theta_j - n_D \cdot 1).$$

Mithilfe der Beschränktheit von $\|n_j\|_{L^2(\Omega)}, \|n_j\theta_j\|_{L^2(\Omega)}$ aus Lemma 3.20 (i) für alle $j > 0$

und der Ungleichung (4.6) schreiben wir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5} \int_{\Omega} n_j^2 (\theta_j^{-3} + \theta_j^5) dx &= \frac{1}{5} \left(\phi_{-3}(n_j, n_j \theta_j) + \phi_5(n_j, n_j \theta_j) + \int_{\Omega} F_{-3,j} + F_{5,j} dx \right) \\
&\leq \frac{1}{3} \phi_{-3}(n_j, n_j \theta_j) + \frac{1}{5} \phi_5(n_j, n_j \theta_j) \\
&\quad + \frac{1}{5} C_D \left(1 + \|n_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j \theta_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq S_{-3,5}(n_j, n_j \theta_j) + \frac{1}{5} C_D \left(1 + \|n_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j \theta_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq S_{-3,5}(n_j, n_j \theta_j) + C_1 \sum_{l=1}^j h \int_{\Omega} \left(\theta_l^{-5/2-\beta} + \theta_l^{11/2-\beta} \right) |\nabla n_l|^2 \\
&\quad + n_l^2 \left(\theta_l^{-9/2-\beta} + \theta_l^{7/2-\beta} \right) |\nabla \theta_l|^2 dx \\
&\quad + \frac{1}{5} C_D \left(1 + \|n_j\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j \theta_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

Die gegebenen Randdaten n_D , $\frac{f_{b,D}}{\partial n}$ und $\frac{f_{b,D}}{\partial(n\theta)}$ wurden dabei in eine Konstante $C_D > 0$ zusammengefasst. Also haben wir damit insgesamt erhalten, dass die Summe

$$\|n_j \theta_j^{\beta-1/2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j \theta_j^{\beta-3/2}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j \theta_j^{3/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j \theta_j^{5/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

unabhängig von j beschränkt ist. Insbesondere ist damit die Existenz einer Konstanten $C > 0$ gesichert, sodass

$$\begin{aligned}
\|n_j \theta_j^{\beta-1/2}\|_{L^2(\Omega)} + \|n_j \theta_j^{\beta-3/2}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C, \\
\|n_j \theta_j^{3/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)} + \|n_j \theta_j^{5/2-\beta}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C
\end{aligned}$$

gilt. Eingesetzt in (4.8) ergibt dies für eine passende, positive Konstante

$$S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) \leq C \|n_j - n_D\|_{L^2(\Omega)} + C \|n_j \theta_j - n_D\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quadriert man diesen Ausdruck und schätzt die Mischterme mittels Young-Ungleichung ab, erhält man für eine neue, positive Konstante

$$S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j)^2 \leq C \left(\|n_j - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j \theta_j - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Diese Funktionen sind laut Konstruktion in $H_D^1(\Omega)$ und wir können die Poincaré-Ungleichung, Theorem 2.8, benutzen, um sie durch ihre Gradienten abzuschätzen. Zusammen mit erneutem Anwenden der Young-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|n_j - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_j \theta_j - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \int_{\Omega} |\nabla n_j|^2 + |\nabla(n_j \theta_j)|^2 dx \\
&\leq 2C \int_{\Omega} (1 + \theta_j^2) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 |\nabla \theta_j|^2 dx.
\end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir noch die Ungleichungen für $\beta \in [0, \frac{1}{2})$,

$$2 < 3 - 2\beta, 1 - 2\beta > 0.$$

Aus diesen folgt nämlich

$$1 + \theta_j^2 \leq 2 \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right), \quad 1 \leq \theta_j^{-2} + \theta_j^{1-2\beta}$$

und wir können damit die Abschätzungen für $S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j)^2$ zusammensetzen. Also erhalten wir für ein passendes $\tilde{C} > 0$

$$S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j)^2 \leq \tilde{C} \int_{\Omega} \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{-2} + \theta_j^{1-2\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx.$$

Der letzte Term ist auch in der Abschätzung (4.4) mit einer Konstanten C_1 zu finden. Wählen wir nun eine Konstante $C > 0$ derart, dass $C\tilde{C} = C_1$, dann erhalten wir durch Addieren die Aussage des Lemmas,

$$\begin{aligned} & S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) + Ch S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j)^2 \\ & \leq S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) + Ch \tilde{C} \int_{\Omega} \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{-2} + \theta_j^{1-2\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\ & = S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) + C_1 h \int_{\Omega} \left(1 + \theta_j^{3-2\beta}\right) |\nabla n_j|^2 + n_j^2 \left(\theta_j^{-2} + \theta_j^{1-2\beta}\right) |\nabla \theta_j|^2 dx \\ & \leq S_{b_1, b_2}(n_{j-1}, n_{j-1} \theta_{j-1}). \end{aligned}$$

□

Wir definieren die Abkürzung $S_0 := S_{b_1, b_2}(n_0, n_0 \theta_0)$, sofern aus dem Kontext klar ist, wie die Parameter b_1, b_2 gewählt sind. Mit den gezeigten Aussagen ist es uns jetzt möglich, eine explizite Schranke für das Entropiefunktional $S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j)$, $j > 0$, herzuleiten. Dazu werden wir Lemma 2.26 benutzen. Es ist eine Art diskretes Lemma von Gronwall. Die geforderten Voraussetzungen sind laut dem letzten Lemma 4.3 erfüllt. Also folgt für $(b_1, b_2) = (\beta - \frac{1}{2}, \frac{5}{2} - \beta)$

$$S_{b_1, b_2}(n_j, n_j \theta_j) \leq \frac{S_0}{1 + \frac{ChjS_0}{1+2ChS_0}}, \quad j > 0,$$

beziehungsweise in Schreibweise der stückweise konstanten Funktionen mit $t = hj$

$$S_{b_1, b_2}(n_h(t), n_h(t) \theta_h(t)) \leq \frac{S_0}{1 + \frac{CtS_0}{1+2ChS_0}}, \quad t > 0. \quad (4.9)$$

Das Entropiefunktional lässt sich also durch diesen Term beschränken. Um daraus eine Aussage für das Langzeitverhalten formulieren zu können, leiten wir eine untere Schranke für $S_{b_1, b_2}(n_h, n_h \theta_h)$ her, welche die Randdaten mit den Lösungen in Zusammenhang bringt.

Lemma 4.4. *Wir können die Differenz der Randdaten zu den Lösungen durch das Entropiefunktional beschränken. Genauer gilt, für $(b_1, b_2) = (\beta - \frac{1}{2}, \frac{5}{2} - \beta)$ gibt es ein $C > 0$, sodass für $t \in (0, T)$ gilt*

$$C \int_{\Omega} |n_h - n_D|^2 + |n_h \theta_h - n_D|^2 dx \leq S_{b_1, b_2}(n_h, n_h \theta_h). \quad (4.10)$$

Beweis. Wir erinnern uns wieder an die Definition von ϕ_b und die Glattheit und Konvexität von f_b . Mit einer Taylor-Entwicklung folgt dann

$$\begin{aligned} \phi_b(n_h, n_h \theta_h) &= \int_{\Omega} f_b(n_h, n_h \theta_h) - f_{b,D} - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial n}(n_h - n_D) - \frac{\partial f_{b,D}}{\partial(n\theta)}(n_h \theta_D - n_D \cdot 1) dx \\ &= \int_{\Omega} (n_h - n_D, n_h \theta_h - n_D) D^2 f_b(\xi) (n_h - n_D, n_h \theta_h - n_D)^T dx, \end{aligned}$$

für eine Zwischenstelle $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. Den letzten Ausdruck können wir weiter nach unten abschätzen durch

$$\lambda_{\min} \int_{\Omega} |n_h - n_D|^2 + |n_h \theta_h - n_D|^2 dx.$$

λ_{\min} bezeichnet hier den minimalen Eigenwert der symmetrischen, positiv semidefiniten, 2×2 -Matrix $D^2 f_b$. Mit Lemma 2.27 (i) folgt dann für das Entropiefunktional

$$\begin{aligned} S_{b_1, b_2}(n_h, n_h \theta_h) &\geq \min \left\{ \frac{1}{|b_1|}, \frac{1}{|b_2|} \right\} (\phi_{b_1}(n_h, n_h \theta_h) + \phi_{b_2}(n_h, n_h \theta_h)) \\ &= C \int_{\Omega} (n_h - n_D, n_h \theta_h - n_D) D^2 ((f_{b_1} + f_{b_2})(\xi)) (n_h - n_D, n_h \theta_h - n_D)^T dx \\ &\geq C \lambda_{\min} ((f_{b_1} + f_{b_2})(\xi)) \int_{\Omega} |n_h - n_D|^2 + |n_h \theta_h - n_D|^2 dx \\ &\geq C (\lambda_{\min}(f_{b_1}(\xi)) + \lambda_{\min}(f_{b_2}(\xi))) \int_{\Omega} |n_h - n_D|^2 + |n_h \theta_h - n_D|^2 dx. \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir noch diese minimalen Eigenwerte durch eine, von ξ unabhängige, Konstante nach unten abschätzen um den Beweis abzuschließen.

Betrachten wir dazu die Hesse-Matrix von $f_b(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^{2-b} \xi_2^b$ genauer. Aus dem Beweis von Lemma 3.12 kennen wir die Gestalt der Determinante bereits und berechnen noch die Spur. Wir definieren $\eta := \frac{\xi_2}{\xi_1}$. Es gilt $\eta > 0$ fast überall, da $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ zwischen (n_D, n_D) und $(n_h, n_h \theta_h)$ liegt, welche beide fast überall positiv sind. Wir schreiben damit die Determinante und Spur als

$$\begin{aligned} \det(D^2 f_b(\xi_1, \xi_2)) &= \eta^{2b-2} (b-2)b, \\ \text{tr}(D^2 f_b(\xi_1, \xi_2)) &= (b-1) ((b-2)\eta^b + b\eta^{b-2}). \end{aligned}$$

Benutzen wir diese Darstellung und Lemma 2.27 (ii) um die Summe der Eigenwerte

umzuschreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_{\min}(f_{b_1}(\xi)) + \lambda_{\min}(f_{b_2}(\xi)) &\geq \frac{\det(D^2 f_{b_1}(\xi_1, \xi_2))}{\operatorname{tr}(D^2 f_{b_1}(\xi_1, \xi_2))} + \frac{\det(D^2 f_{b_2}(\xi_1, \xi_2))}{\operatorname{tr}(D^2 f_{b_2}(\xi_1, \xi_2))} \\
&= \frac{\eta^{2b_1-2}(b_1-2)b_1}{(b_1-1)((b_1-2)\eta^{b_1} + b_1\eta^{b_1-2})} \\
&\quad + \frac{\eta^{2b_2-2}(b_2-2)b_2}{(b_2-1)((b_2-2)\eta^{b_2} + b_2\eta^{b_2-2})} \\
&= \frac{\eta^{b_1}(b_1-2)b_1}{(b_1-1)((b_1-2)\eta^2 + b_1)} + \frac{\eta^{b_2}(b_2-2)b_2}{(b_2-1)((b_2-2)\eta^2 + b_2)} \\
&= \frac{\eta^{\beta-1/2}}{(C_1\eta^2 + C_2)} + \frac{\eta^{5/2-\beta}}{(C_3\eta^2 + C_4)} \\
&\geq \min_{i=1,\dots,4} \frac{1}{C_i} \frac{\eta^{\beta-1/2} + \eta^{5/2-\beta}}{(\eta^2 + 1)}.
\end{aligned}$$

Die Funktion $x \mapsto \frac{x^{\beta-1/2} + x^{5/2-\beta}}{(x^2+1)}$ ist positiv auf der positiven reellen Achse und divergiert für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$, wegen $\frac{5}{2} - \beta > 2, \beta - \frac{1}{2} < 0$, gegen $+\infty$. Daher kann die Funktion, und damit die Summe der Eigenwerte, durch eine Konstante $C > 0$ nach unten abgeschätzt werden. Damit ist (4.10) gezeigt. \square

Schließlich können wir das Hauptresultat dieses Kapitels beweisen.

Beweis von Theorem 4.1. Aus Lemma 4.4 und (4.9) erhalten wir für die semidiskreten Lösungen

$$\|n_h - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h\theta_h - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tilde{C} \frac{S_0}{1 + \frac{CS_0}{1+2ChC_0}t}, \quad t > 0.$$

Nach Lemma 3.20 (i) sind $n_h, n_h\theta_h$ in $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ unabhängig von h beschränkt, also auch $n_h - n_D$ und $n_h\theta_h - n_D$. Weiters konvergieren laut Korollar 3.24 $n_h, n_h\theta_h$ punktweise fast überall gegen $n, n\theta$. Das Lemma von Fatou liefert dann

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |n - n_D|^2 + |n\theta - n_D|^2 dx &= \int_{\Omega} \liminf_{h \rightarrow 0} (|n_h - n_D|^2 + |n_h\theta_h - n_D|^2) dx \\
&\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \left(\|n_h - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|n_h\theta_h - n_D\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \tilde{C} \frac{S_0}{1 + \frac{CS_0}{1+2ChC_0}t} \\
&= \tilde{C} \frac{S_0}{1 + CS_0t}.
\end{aligned}$$

\square

Literaturverzeichnis

- [1] H. W. Alt: Lineare Funktionalanalysis, Eine anwendungsorientierte Einführung, 6. überarbeitete Auflage, Springer, Berlin, 2012.
- [2] N. Ben Abdallah und P. Degond: On a hierarchy of macroscopic models for semiconductors, *Journal of Mathematical Physics* 37 (1996), S. 3306.
- [3] W. Braunbek: Einführung in die Physik und Technik der Halbleiter, Springer, Berlin, 1970, S. 1-54.
- [4] H. Brezis: Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Springer, New York, 2011.
- [5] C. Chainais-Hillairet, A. Jüngel und S. Schuchnigg: Entropy-dissipative discretization of nonlinear diffusion equations and discrete Beckner inequalities. Preprint, 2013, [arXiv: 1303.3791](https://arxiv.org/abs/1303.3791).
- [6] D. Chen, E. Kan, U. Ravaioli, C. Shu und R. Dutton: An improved energy transport model including nonparabolicity and non-Maxwellian distribution effects, *IEEE Electr. Device Letters* 13 (1992), S. 26-28.
- [7] M. Dreher und A. Jüngel: Compact families of piecewise constant functions in $L^p(0, T; B)$, *Nonlin. Anal.* 75 (2012), S. 3072-3077.
- [8] H. Dym: Linear Algebra in Action, Graduate Studies in Mathematics, Volume 78, American Mathematical Society, Providence, 2006.
- [9] L. Evans: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19, American Mathematical Society, Providence, 1998.
- [10] A. Jüngel: Transport Equations for Semiconductors, Lecture Notes in Physics 733, Springer, Berlin, 2009.
- [11] E. Lyumkis, B. Polsky, A. Shur und P. Visocky: Transient semiconductor device simulation including energy balance equation, *COMPELL* 11 (1992), S. 311-325.
- [12] M. Taylor: Partial Differential Equations III - Nonlinear Equations, Second Edition, Springer, New York, 2010.
- [13] G. Troianiello: Elliptic Differential Equation and Obstacle Problems, The University Series in Mathematics, Springer, New York, 1987.
- [14] W. Rudin: Real and Complex Analysis, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.
- [15] N. Zamponi und A. Jüngel: Global Existence Analysis for Degenerate Energy-Transport Models for Semiconductors, erscheint in *Journal of Differential Equations* (2015).

- [16] E. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/A
Linear Monotone Operators, Springer, New York, 1990.
- [17] E. Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B
Nonlinear Monotone Operators, Springer, New York, 1990.

Abbildungsverzeichnis

1	Energiebandmodell	1
2	Beispiel eines Halbleiters: Platine mit ATMEL Microcontroller	2