Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

DIPLOMARBEIT

MASTER THESIS

Auswirkung von lokalen Schädigungen auf das Tragverhalten von Stahlbauteilen am Beispiel der Eisenbahnbrücke Urfahr

Erstellung eines vereinfachten Nachweisformates zur Berechnung der Spannungen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades

eines Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink

und

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Francesco Aigner

E212 - Institut für Tragkonstruktionen

Forschungsbereich für Stahlbau

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Bauingenieurwesen

von

Thomas Schlappal BSc

0825256

Barichgasse 8/22
1030 Wien
Österreich

Wien, im Oktober 2014

_____

Kurzfassung

Autor: Thomas Schlappal

Titel: Auswirkung von lokalen Schädigungen auf das Tragverhalten von Stahlbauteilen am Beispiel der Eisenbahnbrücke Urfahr

In dieser Arbeit wird die Auswirkung von lokalen Schädigungen auf das Tragverhalten von Stahlbauteilen untersucht und Alternativen zur herkömmlichen Spannungsberechnung geschädigter Querschnitte erstellt.

Für die Festlegung der Geometrie werden die Fachwerkstäbe der Eisenbahnbrücke Urfahr herangezogen. Sie bestehen aus jeweils vier L-Profilen und entsprechen somit üblichen Querschnitten historischer Fachwerkbrücken aus Stahl.

Der erste Teil der Diplomarbeit widmet sich der Spannungsermittlung von Querschnitten, bei dem die Einzelprofile als “Punkte“ (ohne Eigenträgheitsmomente) betrachtet werden. Im Zuge dessen wird ein neues Rechenmodell für die Berechnung von allgemein geschädigten Vierpunktquerschnitten erstellt. Mit Hilfe dieses Modells umgeht man Vorlaufrechnungen wie die Berechnung der exakten Querschnittswerte.

Im Anschluss folgt der Übergang auf die Spannungsberechnung von geschädigten realen Querschnitten, bei dem die Gemeinsamkeiten beziehungsweise Unterschiede zu den untersuchten Punktquerschnitten aufgezeigt werden.

Aus den gesammelten Erkenntnissen folgt die Erstellung und Evaluierung neuer Rechenmodelle, mit deren Hilfe die Spannungen von beliebig geschädigten, realen Querschnitten berechnet werden können:

- Modell der starren Platte
- Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen

Verglichen mit der Spannungsberechnung im klassischen Sinn liegt der Vorteil der neuen Rechenmodelle im benutzerfreundlicheren und vereinfachten Rechengang. Die programmtechnisch aufwändige Erfassung der schädigungsabhängigen Querschnittswerte samt Koordinaten- und Schnittgrößentransformation kann auf diese Weise umgangen werden. Sie stellen somit eine praxisorientierte Möglichkeit für die Nachweisführung geschädigter Stahlbauteile dar.

Abstract

Author: Thomas Schlappal

Title: Impact of local damage on structural behaviour of steel components by the example of the Urfahr Railway Bridge

In this paper the effect of local damage on structural behaviour of steel components is studied and simple mathematical models for stress analysis of damaged cross sections are created.

The bars of the Urfahr Railway Bridge are used to determine the geometry. They consist of four L-profiles and comply with usual cross sections of historic truss bridges made of steel.

The first part of the master thesis deals with the stress determination of cross sections, where the individual profiles are considered as ”points” (without moment of inertia). A new and simple mathematical model for calculations of damaged point cross sections is created. As a result it is possible to determine stresses without using cross section values.

In addition to this, the transition to stress analysis of damages real cross sections is performed. The commonalities and differences to the studied point cross sections are shown.

The collected knowledge is used to create and evaluate two mathematical models for determining stresses of damaged real cross sections with a simple calculation process:

- model of a stiff plate
- model of a stiff plate with damage-modifications

As a result of using these models, the complex transformation of coordinates and internal forces caused through damage, as it is usual with the classic stress determination, is no longer necessary. Considering these facts, they represent a practical way to verify damaged steel components.

Danksagungen und Vorwort

Herrn Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink möchte ich für sein Interesse am Inhalt meiner Abhandlung danken, denn dieses erhöhte meine Motivation im Zuge der Verfassung dieser Diplomarbeit.

Bei Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Francesco Aigner möchte ich mich ganz herzlich für sein persönliches Engagement bedanken. Dieses war ausschlaggebend für die Entwicklung meiner Diplomarbeit. Die zahlreichen Unterhaltungen verhalfen mir zu neuen Perspektiven, sowohl in fachspezifischer als auch privater Hinsicht.

Der größte Dank gilt meinen Eltern Maria und Ing. Peter Schlappal, ohne deren persönliche und finanzielle Unterstützung es mir nicht möglich gewesen wäre, meinen bisherigen Ausbildungsweg auf diese Art und Weise zu gehen.

Ein weiterer Dank gilt meinem Freund und Künstler Martin Bogisch, der sich während der Verfassung meiner Arbeit der Malerei widmete. Die in den gemeinsamen Pausen entstandenen Gespräche über die Freuden und Leiden des Lebens halfen mir, den persönlichen Bezug zum Abschluss und dessen Kern nicht aus den Augen zu verlieren.

Der Abschluss meines Studiums stellt die Konsequenz der Verfolgung meiner Interessen dar. Die daraus resultierenden Möglichkeiten und die einhergehende gesellschaftliche Akzeptanz möchte ich als Glück bezeichnen, das leider nicht jedem gewährt ist. Meiner Auffassung nach, sollte die im gesellschaftlichen Austausch vorkommende Bewertung einer Person durch dessen schaffendes Werk aufgehoben und der persönliche, individuelle Weg zur Verwirklichung und Wahrung der Existenz im Mittelpunkt stehen, denn wie ist „Mensch sein“ definiert?

Inhaltsverzeichnis

INHALTSVERZEICHNIS I

FORMELZEICHEN IV

1 EINLEITUNG 1

2 LOKALE SCHÄDIGUNGEN 2

2.1 Mathematische Beschreibung 2
2.2 Geometrie 2

3 VORAUSSETZUNGEN UND ANNAHMEN 3

3.1 Bernoulli - Hypothese 3
3.2 Querschnitt im Regelbereich, ohne Berücksichtigung der Lasteinleitungszonen 3
3.3 Achsensysteme mit Einwirkungen 4
3.3.1 Definition der Achsen, äußeren Einwirkungen und Schnittgrößen 4
3.3.2 Definition der Hauptachsen 5
3.3.3 Bezeichnungen der Hauptachsen 6

4 QUERSCHNITTE DER EISENBAHNBRÜCKE URFAHR 7

5 ZWEI- UND VIERPUNKTQUERSCHNITTE 8

5.1 Zweipunktquerschnitt 8
5.1.1 Allgemeines 8
5.1.2 Querschnitt mit symmetrischer Schädigung 10
5.1.3 Querschnitt mit unsymmetrischer Schädigung 11
5.1.4 Zusammenfassung 15
5.2 Vierpunktquerschnitt 16
5.2.1 Spannungsberechnung mit Hilfe der exakten Querschnittswerte 16
5.2.1.1 Allgemeines 16
5.2.1.2 Querschnitt mit doppeltsymmetrischer Schädigung 18
5.2.1.3 Querschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung 20
5.2.1.4 Querschnitt mit punktsymmetrischer Schädigung 22
5.2.1.5 Zusammenfassung 24
5.2.2 Spannungsberechnung mit Hilfe des Modelles einer starren Platte auf Federlagerung 25
5.2.2.1 Modellbildung 25
5.2.2.2 Ermittlung der Federkräfte 28
5.2.2.3 Ermittlung der Spannungen 32
5.2.3 Beispiel 32
5.2.4 Zusammenfassung 33

6 ÜBERGANG AUF REALE QUERSCHNITTE 35

6.1 Allgemeines 35
6.2 Einschränkungen 36
6.3 Vergleich von Punktquerschnitten mit realen Querschnitten 38
6.3.1 Einfachsymmetrische Schädigung 1 39
6.3.2 Einfachsymmetrische Schädigung 2 42
6.3.3 Punktsymmetrische Schädigung 45
6.4 Zusammenfassung 47

7 RECHENMODELLE FÜR DIE SPANNUNGSERMITTLUNG VON GESCHÄDIGTEN REALEN QUERSCHNITTEN 48

7.1 Allgemeines 48
7.1.1 Modell der starren Platte 48
7.1.2 Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen 49
7.1.3 Übersicht 50
7.2 Geometrie der Schädigung des L-Profils 53

7.3 Vorgehensweise ... 53
7.3.1 Transformation in einen Vierpunktquerschnitt ... 53
7.3.2 Modifizierung der Schädigungen ... 55
7.3.2.1 Vorwerte ... 56
7.3.2.2 Ermittlung der Werte λi ... 57
7.3.2.3 Ermittlung der Werte μi ... 57
7.3.2.4 Ermittlung der Werte νi ... 59
7.3.3 Spannungsberechnung und Superposition ... 61
7.3.3.1 Modell der starren Platte ... 61
7.3.3.2 Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen ... 62
7.3.3.3 Superposition ... 63
7.3.4 Ebenengleichung und Extrapolation ... 63
7.4 Anwendungsgrenze ... 65
7.5 Ablaufschema für die praktische Berechnung ... 66
7.5.1 Kontrolle der Anwendungsgrenze ... 67
7.5.2 Ermittlung der geometrischen Vorwerte ... 67
7.5.3 Transformation in einen Vierpunktquerschnitt ... 67
7.5.4 Modifizierung der Schädigungen ... 68
7.5.4.1 Vorwerte ... 69
7.5.4.2 Ermittlung der Werte λi ... 69
7.5.4.3 Ermittlung der Werte μi ... 69
7.5.4.4 Ermittlung der Werte νi ... 69
7.5.5 Spannungsberechnung und Superposition ... 70
7.5.5.1 Modell der starren Platte ... 70
7.5.5.2 Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen ... 71
7.5.5.3 Superposition ... 71
7.5.6 Ebenengleichung und Extrapolation ... 71

8 BEISPIEL ... 73

8.1 Angabe ... 73
8.2 Spannungsberechnung mit Hilfe der exakten Querschnittswerte ... 74
8.2.1 Ermittlung der Koordinaten ... 74
8.2.2 Ermittlung der Querschnittswerte ... 75
8.2.3 Koordinatentransformation ... 76
8.2.4 Schnittgrößentransformation ... 77
8.2.5 Spannungsermittlung ... 77
8.3 Spannungsberechnung mit „Modell der starren Platte“ ... 78
8.3.1 Kontrolle der Anwendungsgrenze ... 78
8.3.2 Transformation in einen Vierpunktquerschnitt ... 78
8.3.3 Spannungsberechnung und Superposition ... 79
8.3.4 Ebenengleichung und Extrapolation ... 80
8.4 Spannungsberechnung „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ ... 81
8.4.1 Kontrolle der Anwendungsgrenze ... 81
8.4.2 Transformation in einen Vierpunktquerschnitt ... 81
8.4.3 Modifizierung der Schädigungen ... 81
8.4.4 Spannungsberechnung und Superposition ... 83
8.4.5 Ebenengleichung und Extrapolation ... 84
8.5 Vergleich der Ergebnisse ... 85
8.5.1 „Modell der starren Platte“ ... 85
8.5.2 „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ ... 86

9 ZUSAMMENFASSUNG ... 87

10 ANREGUNGEN FÜR ZUKÜNFTIGE UNTERSUCHUNGEN ... 88

10.1 Kontrolle der Voraussetzungen mit Hilfe der Finiten Elemente ... 88
10.2 Modell der starren Platte ... 88
10.3 Aufteilung des Schädigungsbildes in „Einzelmodes“ ... 88

11 LITERATURVERZEICHNIS 89
12 ABBILDUNGSVERZEICHNIS 90
13 TABELLENVERZEICHNIS 92

Formelzeichen

Einzelquerschnitt

A	ungeschädigte Einzelquerschnittsfläche	[cm^2]
ΔA	abgetragene Fläche eines Einzelquerschnitts	[cm^2]
A_κ	geschädigte Einzelquerschnittsfläche	[cm^2]
κ	Schädigungsgrad lt. Kap.2.1	[-]

ungeschädigter Gesamtquerschnitt

y, z	Hauptachsen des ungeschädigten Gesamtquerschnitts	
A_G	Gesamtquerschnittsfläche	[cm^2]
A_{yy}	Trägheitsmoment um die z-Achse	[cm^4]
A_{zz}	Trägheitsmoment um die y-Achse	[cm^4]
N	Zugkraft	[kN]
M_y	rechtsdrehend positives Biegemoment um die y-Achse	[kNm]
M_z	rechtsdrehend positives Biegemoment um die z-Achse	[kNm]

geschädigter Gesamtquerschnitt

y, z	Achsen des Grundsystems	
$\hat{y}, \hat{z}$	Achsen des Einheitssystems	
$\tilde{y}, \tilde{z} \triangleq \eta, \zeta$	Hauptachsen des geschädigten Gesamtquerschnitts	
S	Schwerpunkt	
y_s	y-Koordinate des Schwerpunkts am Grundsystem	[cm]
z_s	z-Koordinate des Schwerpunkts am Grundsystem	[cm]
A_G	Gesamtquerschnittsfläche	[cm^2]
A_y	Statisches Moment um die z-Achse am Grundsystem	[cm^3]
A_z	Statisches Moment um die y-Achse am Grundsystem	[cm^3]
$A_{yz} \triangleq A_{zy}$	Zentrifugalmoment am Grundsystem	[cm^4]
A_{yy}	Trägheitsmoment um die z-Achse am Grundsystem	[cm^4]
A_{zz}	Trägheitsmoment um die y-Achse am Grundsystem	[cm^4]
$A_{\hat{y}\hat{z}}$	Zentrifugalmoment am Einheitssystem	[cm^4]
$A_{\hat{y}\hat{y}}$	Trägheitsmoment um die z-Achse am Einheitssystem	[cm^4]
$A_{\hat{z}\hat{z}}$	Trägheitsmoment um die y-Achse am Einheitssystem	[cm^4]
α	Neigung der Hauptachse	[°]
$A_{\eta\eta}$	Trägheitsmoment um die ζ-Achse am Hauptsystem	[cm^4]
$A_{\zeta\zeta}$	Trägheitsmoment um die η-Achse am Hauptsystem	[cm^4]
N	Zugkraft	[kN]
M_η	rechtsdrehend positives Biegemoment um die η-Achse	[kNm]
M_ζ	rechtsdrehend positives Biegemoment um die ζ-Achse	[kNm]

1 Einleitung

In der vorliegenden Diplomarbeit wird die Auswirkung von lokalen Schädigungen auf das Tragverhalten von Stahlbauteilen untersucht und zwei einfache Rechenmodelle für die Spannungsberechnung von geschädigten Querschnitten erstellt.

Für die Festlegung der Geometrie werden die Fachwerkstäbe der Eisenbahnbrücke Urfahr herangezogen. Sie bestehen aus jeweils vier L-Profilen und entsprechen somit üblichen Querschnitten historischer Fachwerkbrücken aus Stahl. Nebenspannungen aus Biegemomenten, die sich aus den Verschiebungen der Knotenfigur ergeben, müssen bei Spannungsnachweisen (Begrenzung der Spannungen unter Gebrauchslast, Ermüdungsnachweis) berücksichtigt werden. Die einwirkenden Schnittgrößen bestehen somit aus der Normalkraft und den Biegemomenten um beide Achsen des Querschnitts.

In einem ersten Schritt werden Spannungen von Querschnitten ermittelt, bei dem die Einzelprofile als “Punkte“ (ohne Eigenträgheitsmomente) betrachtet werden. Ziel ist es, die Entwicklung der Spannungen infolge Schädigung von Punktquerschnitten zu erfassen, um diese Erkenntnisse für die Berechnung realer Querschnitte zu nutzen. Im Anschluss folgt der Übergang auf die Spannungsberechnung von geschädigten realen Querschnitten, bei dem die Gemeinsamkeiten beziehungsweise Unterschiede zu den untersuchten Punktquerschnitten aufgezeigt werden. Dieser Vergleich dient der Evaluierung von Rechenmodellen, mit deren Hilfe Spannungen von geschädigten realen Querschnitten in einem einfachen Rechengang ermittelt werden können.

Anhand eines Beispiels wird gezeigt, dass die mit den „einfachen Rechenmodellen“ ermittelten, betragsmäßig größten Spannungen gegenüber den Ergebnissen der klassischen Spannungsberechnung (mit Hilfe von Querschnittswerten) auf der „sicheren Seite“ liegen.

2 Lokale Schädigungen

2.1 Mathematische Beschreibung

Die durch eine Schädigung abgetragene Fläche eines Einzelquerschnitts wird mit ΔA bezeichnet. Daraus resultiert die geschädigte Einzelquerschnittsfläche A_κ. Aus rechentechnischen Gründen wird der Schädigungsgrad κ eingeführt:

$$A_\kappa = A - \Delta A = \kappa A$$

$$(0 \leq \kappa \leq 1)$$

Definiert man den Zeitpunkt, an dem der ungeschädigte Ausgangsquerschnitt vorhanden ist, mit $t = 0$ und einen späteren Zeitpunkt, bei dem es zur betrachteten Schädigung gekommen ist mit $t = t_1$, so kann der Zusammenhang zwischen A und A_κ der Abb. 2.1 entnommen werden.

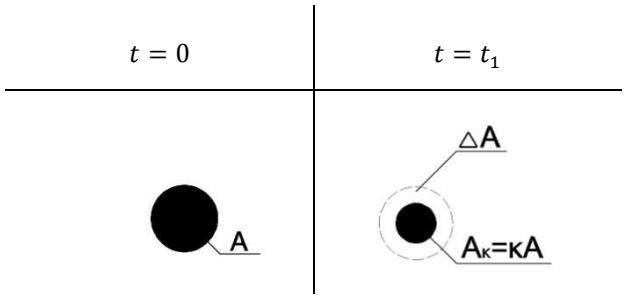


Abb. 2.1: Definition der Schädigung

2.2 Geometrie

Die für reale Profile angenommene Geometrie der Schädigung ist in Abb. 2.2 dargestellt. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass sämtliche Querschnittsabmessungen um denselben Betrag $2x$ reduzieren werden.

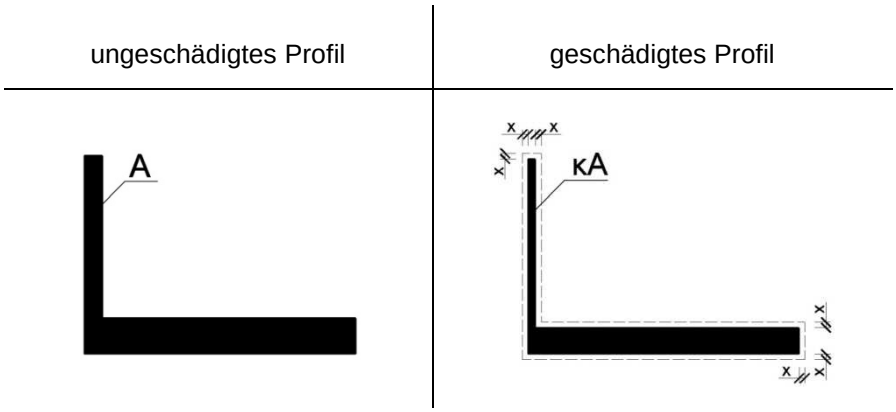


Abb. 2.2: Angenommene Geometrie der Schädigung bei realen Profilen

3 Voraussetzungen und Annahmen

Die Voraussetzungen bestehen aus

- der linear elastischen Stabtheorie, die das Ebenbleiben des Querschnitts beinhaltet und
- der Vereinfachung, dass die Steifigkeit des Systems trotz lokaler Schädigungen konstant bleibt.

3.1 Bernoulli - Hypothese

Die technische Biegelehre setzt die Bernoulli-Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte voraus. Dabei wird der Stab lediglich durch seine Stabachse dargestellt, wobei der Stabachse bestimmte Querschnittseigenschaften (Steifigkeiten) zugewiesen werden.

3.2 Querschnitt im Regelbereich, ohne Berücksichtigung der Lasteinleitungszonen

Wie in Kapitel 2 erläutert, kommt es durch lokale Schädigungen zu einer Querschnittsminderung, aus der wiederum eine kleinere Querschnittsfläche und ein kleineres Trägheitsmoment resultieren. Die Biegesteifigkeit EI des Systems entspricht somit nicht mehr der ursprünglichen Konfiguration, was einen Einfluss auf die inneren Schnittgrößen darstellt. Da dieser Effekt der Spannungsumlagerungen ausschließlich mit numerischen Berechnungen erfasst werden kann, wird hier die Annahme getroffen, dass es sich um eng begrenzte lokale Schwachstellen infolge einer Schädigung handelt und die Steifigkeit des Systems unverändert bleibt.

Um dies zu veranschaulichen, wird ein Stababschnitt mit einer Normalkraft N als einwirkender Schnittgröße betrachtet. In einem Bereich Δx, der klein gegenüber den Querschnittsabmessungen (Stabhöhe h und Stabbreite b) ist, kommt es aufgrund äußerer Gegebenheiten zu einer lokalen Schädigung (Abb. 3.1).

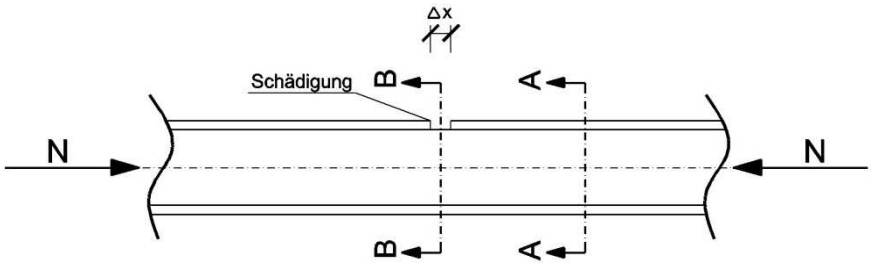


Abb. 3.1: Stababschnitt mit lokaler Schädigung unter Einwirkung einer Normalkraft

$$\Delta x \ll \{h, b\}$$

Im Bereich der Schädigung weist der Träger andere Querschnittswerte $(A_G/A_{\eta\eta}/A_{\zeta\zeta})$ und eine andere Schwerpunktlage auf als im ungeschädigten Bereich $(A_G/A_{yy}/A_{zz})$. Herausschneiden des Übergangbereiches und Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen liefert:

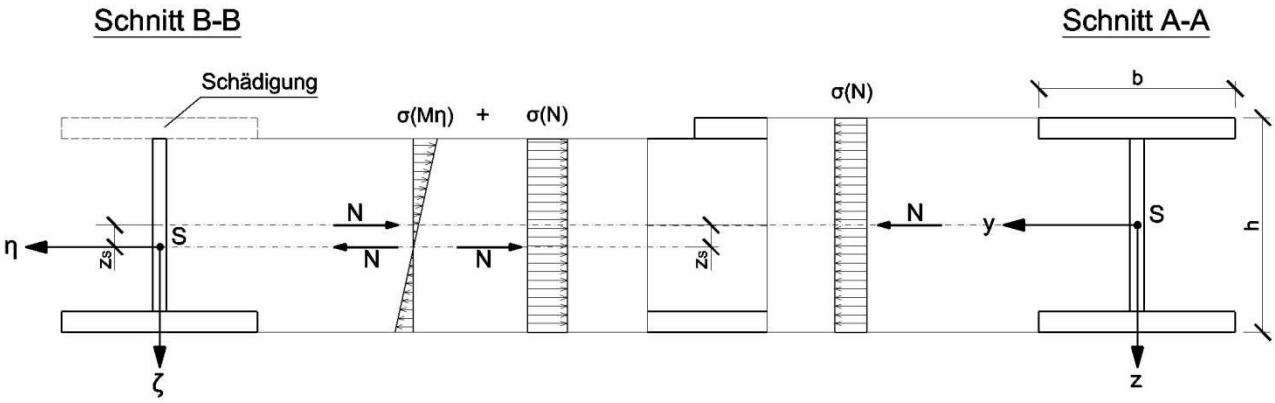


Abb. 3.2: Angenommene Spannungsverteilung im geschädigten Querschnitt

Trotz der aus der Schädigung resultierenden Steifigkeitsänderung des Systems werden die Schnittgrößen unverändert auf die ursprüngliche Lage bezogen. Aufgrund der lokal veränderten Schwerpunktlage im geschädigten Querschnitt (Schnitt B-B) im Bezug auf den ungeschädigten Querschnitt (Schnitt A-A) stellt sich ein Biegemoment $M_\eta = -N z_s$ ein. Die Spannungsberechnung im geschädigten Querschnitt erfolgt mit Hilfe der Querschnittswerte:

$$\sigma(\zeta) = \frac{N}{A_G} + \frac{M_\eta}{A_{\zeta\zeta}}\zeta \tag{3.1}$$

3.3 Achsensysteme mit Einwirkungen

Unter den formulierten Voraussetzungen werden nun die gewählten Achsen, äußeren Einwirkungen und Schnittgrößen sowie die Hauptachsen des Koordinatensystems im geschädigten Querschnitt definiert.

3.3.1 Definition der Achsen, äußeren Einwirkungen und Schnittgrößen

Als System wird ein rechtsdrehendes Koordinatensystem gewählt. Die positiven Richtungen ergeben sich dabei wie folgt:

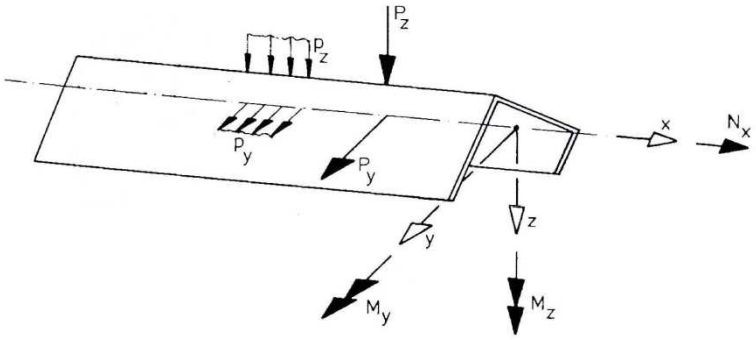


Abb. 3.3: Definition der Achsen, äußeren Einwirkungen und Schnittgrößen [1]

3.3.2 Definition der Hauptachsen

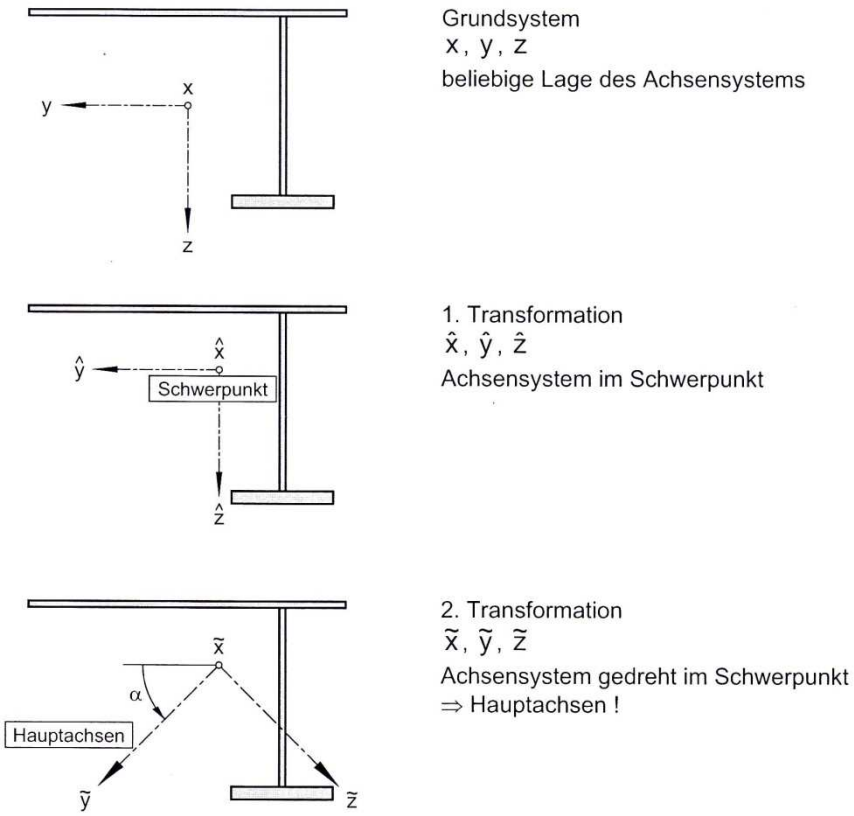


Abb. 3.4: Achsensysteme [1]

Die aus den grundlegenden Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie gewonnen Differentialgleichungen, die den Zusammenhang zwischen äußeren Einwirkungen und Verschiebungen bzw. deren Ableitungen beschreiben, lauten [1]:

- **Grundsystem** (beliebige Lage des Achsensystems)

$$E\begin{bmatrix} A_G & A_y & A_z \\ A_y & 0 & 0 \\ A_z & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{II} \\ v^{III} \\ w^{III} \end{bmatrix} + E\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{yy} & A_{yz} \\ 0 & A_{zy} & A_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ v^{IV} \\ w^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$A_G = \int dA \tag{3.2}$$

$$A_y = \int y dA \tag{3.3}$$

$$A_z = \int z dA \tag{3.4}$$

$$A_{yz} = A_{zy} = \int yz dA \tag{3.5}$$

$$A_{yy} = \int y^2 dA \tag{3.6}$$

$$A_{zz} = \int z^2 dA \tag{3.7}$$

- **1.Transformation: Einheitssystem** (Achsensystem im Schwerpunkt)

$$E\begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_{\hat{y}\hat{y}} & A_{\hat{y}\hat{z}} \\ 0 & A_{\hat{z}\hat{y}} & A_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{II} \\ \hat{v}^{IV} \\ \hat{w}^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_{\hat{y}} \\ p_{\hat{z}} \end{bmatrix}$$

$$y_s = \frac{A_y}{A_G} \tag{3.8}$$

$$z_s = \frac{A_z}{A_G} \tag{3.9}$$

$$A_{\hat{y}\hat{y}} = A_{yy} - {y_s}^2 A_G \tag{3.10}$$

$$A_{\hat{z}\hat{z}} = A_{zz} - {z_s}^2 A_G \tag{3.11}$$

$$A_{\hat{y}\hat{z}} = A_{\hat{z}\hat{y}} = A_{yz} - y_s z_s A_G \tag{3.12}$$

- **2.Transformation: Hauptsystem** (Achsensystem im Schwerpunkt gedreht => Hauptachsen)

$$E\begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & A_{\tilde{y}\tilde{y}} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\tilde{z}\tilde{z}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{II} \\ \tilde{v}^{IV} \\ \tilde{w}^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_{\tilde{y}} \\ p_{\tilde{z}} \end{bmatrix}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2A_{\hat{y}\hat{z}}}{(A_{\hat{y}\hat{y}} - A_{\hat{z}\hat{z}})} \tag{3.13}$$

$$\begin{matrix} A_{\tilde{y}\tilde{y}} \\ A_{\tilde{z}\tilde{z}} \end{matrix} = \frac{1}{2}\left[\left(A_{\hat{y}\hat{y}} + A_{\hat{z}\hat{z}}\right) \pm \sqrt{\left((A_{\hat{y}\hat{y}} - A_{\hat{z}\hat{z}})^2 + 4{A_{\hat{y}\hat{z}}}^2\right)}\right] \tag{3.14}$$

$$\tilde{y} = (y - y_s)\cos\alpha + (z - z_s)\sin\alpha \tag{3.15}$$

$$\tilde{z} = -(y - y_s)\sin\alpha + (z - z_s)\cos\alpha \tag{3.16}$$

3.3.3 Bezeichnungen der Hauptachsen

<u>Ungeschädigter Gesamtquerschnitt:</u>

Die Hauptachsen werden mit y bzw. z bezeichnet. Daraus resultieren die Bezeichnungen der Hauptträgheitsmomente A_{yy} bzw. A_{zz}.

<u>Geschädigter Gesamtquerschnitt:</u>

Die Achsen am Grundsystem des geschädigten Querschnitts entsprechen den Hauptachsen des ungeschädigten Querschnitts (y, z). Nach der 1. und 2. Transformation erhält man die Hauptachsen des geschädigten Querschnitts $(\tilde{y}, \tilde{z})$. Für eine eindeutige Unterscheidung zwischen Grundsystem und Hauptsystem werden sie in Folge mit η bzw. ζ bezeichnet. Daraus resultieren die Bezeichnungen der Hauptträgheitsmomente:

$$A_{\tilde{y}\tilde{y}} = A_{\eta\eta}$$
$$A_{\tilde{z}\tilde{z}} = A_{\zeta\zeta}$$

4 Querschnitte der Eisenbahnbrücke Urfahr

Sämtliche Fachwerksstäbe der Eisenbahnbrücke Urfahr bestehen aus vier L-Profilen, wobei sie durch die Art der Orientierung in zwei Typen von Querschnitten unterschieden werden können. Die Querschnittsabmessungen können folgender Abbildung entnommen werden:

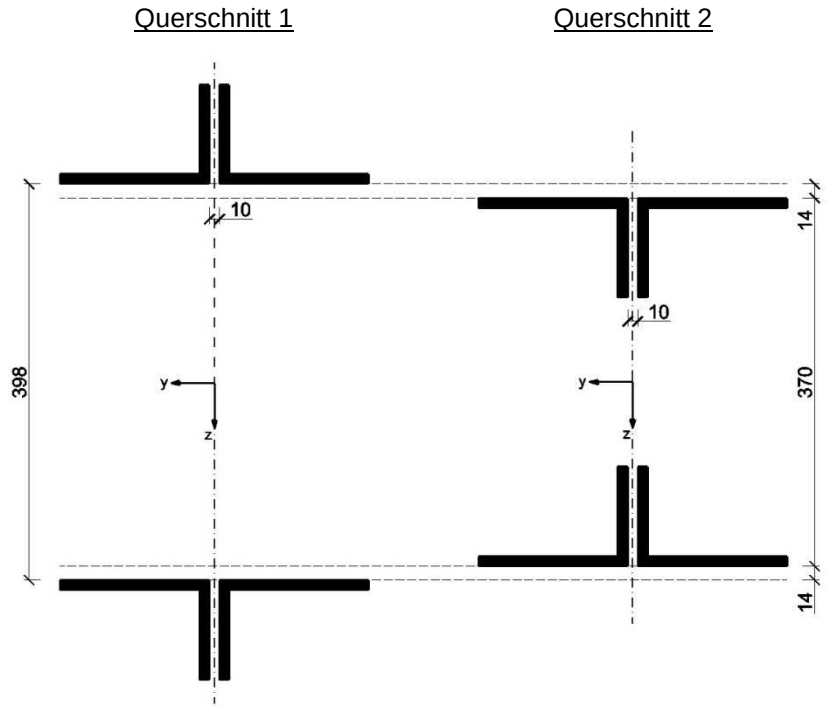


Abb. 4.1: Typische Querschnitte der Eisenbahnbrücke Urfahr

Es wird darauf hingewiesen, dass zur Vereinfachung der Berechnungsformeln die bei Walzprofilen vorhandenen Radien der Profile sowie die Nietlöcher vernachlässigt wurden.

5 Zwei- und Vierpunktquerschnitte

In einem ersten Schritt werden Spannungen von Querschnitten ermittelt, bei dem die Einzelprofile als “Punkte“ (mit A aber ohne ${A_{yy}}^{eig}$ und ${A_{zz}}^{eig}$) betrachtet werden. Ziel ist es, die Entwicklung der Spannungen infolge Schädigung von Punktquerschnitten zu erfassen, um diese Erkenntnisse für die Berechnung realer Querschnitte zu nutzen.

5.1 Zweipunktquerschnitt

5.1.1 Allgemeines

Der ungeschädigte Zweipunktquerschnitt unter den einwirkenden Schnittgrößen M_y und N ist in Abb. 5.1 dargestellt.

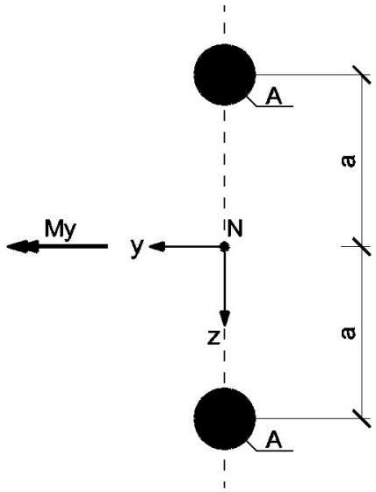


Abb. 5.1: Ungeschädigter Zweipunktquerschnitt

Es lassen sich zwei Typen von Querschnittsschädigungen unterscheiden (Abb. 5.2). Im ersten Fall (a) ist der Querschnitt symmetrisch geschädigt, dadurch kommt es zu keiner Schwerpunktverschiebung. Die Lage des Schwerpunkts ist ident zu jenen des ungeschädigten Querschnitts. Im zweiten Fall (b) wird die Querschnittsfläche lediglich eines “Punktes“ reduziert, der zweite bleibt hingegen unverändert. Hierbei kommt es zu einer Verschiebung des Schwerpunkts, weshalb die auf das ungeschädigte System einwirkenden äußeren Schnittgrößen entsprechend umzurechnen sind. Die für die Spannungsermittlung maßgebenden Größen sind die ungeschädigte Querschnittsfläche $2A$, die Querschnittshöhe $2a$ und der Schädigungsgrad κ.

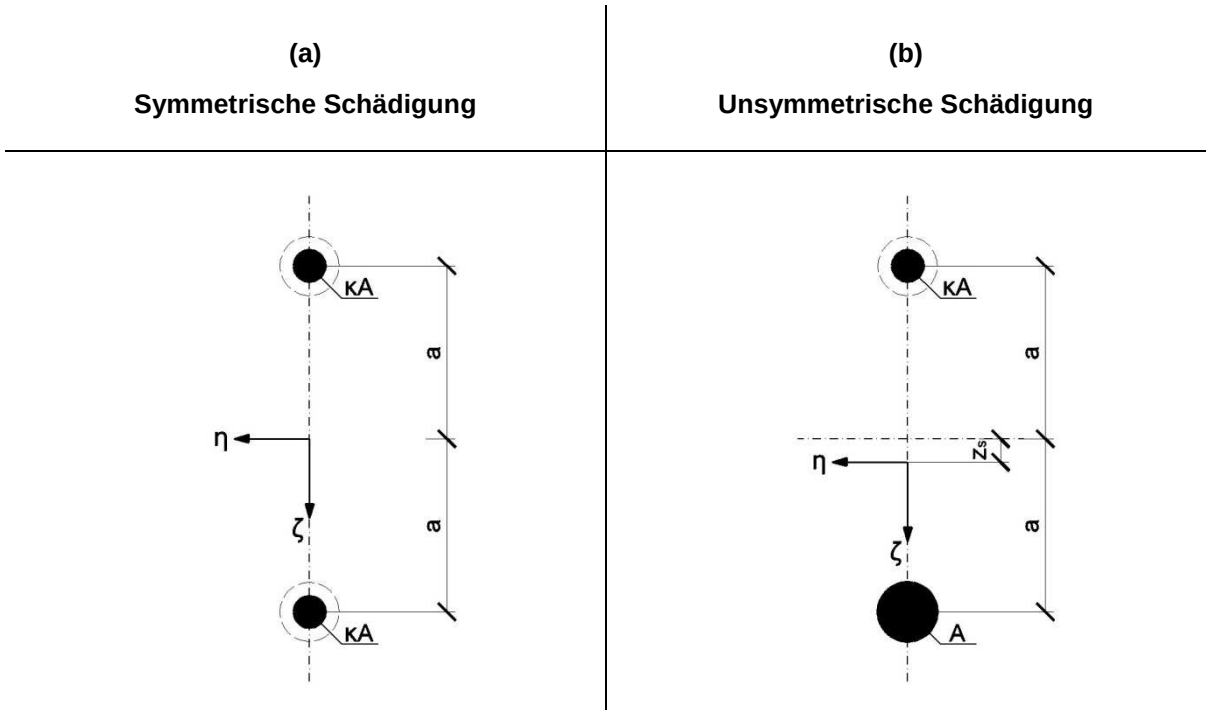


Abb. 5.2: Schädigungsfälle beim Zweipunktquerschnitt

Der Zusammenhang zwischen den ursprünglich einwirkenden Schnittgrößen und den auf den geschädigten Querschnitt einwirkenden Schnittgrößen lässt sich wie folgt darstellen:

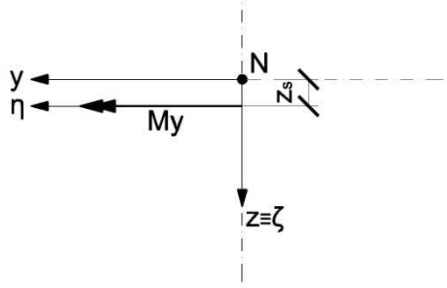


Abb. 5.3: Schnittgrößentransformation beim Zweipunktquerschnitt

Schnittgrößen	Gesamtquerschnitt		
	ohne Schädigung	mit Schädigung	
		M_y	N
$\boldsymbol{M_\eta}$	M_y	M_y	$-Nz_s$
$\boldsymbol{N}$	N	0	N

Tab. 5.1: Schnittgrößentransformation beim Zweipunktquerschnitt

Die aus den Schnittgrößen resultierenden Spannungen lauten:

$$\sigma(\zeta) = \frac{N}{A_G} + \frac{M_\eta}{A_{\zeta\zeta}}\zeta \tag{5.1}$$

5.1.2 Querschnitt mit symmetrischer Schädigung

Querschnittswerte:

$$A_G{}^{(a)} = \int dA = 2\kappa A \tag{5.2}$$

$$A_z{}^{(a)} = \int z dA = a\kappa A - a\kappa A = 0 \tag{5.3}$$

$$A_{zz}{}^{(a)} = A_{\hat{z}\hat{z}}{}^{(a)} = A_{\zeta\zeta}{}^{(a)} = \int z^2 dA = 2a^2\kappa A \tag{5.4}$$

- **Biegemoment M_y**

Das in beiden "Punkten" idente Verhältnis von $\sigma_{max}(M_y, \kappa)$ zu $\sigma_{max}(M_y, \kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ lautet:

$$\frac{\sigma(M_y, \kappa)}{\sigma(M_y, \kappa = 1)} = \frac{\frac{1}{2a^2\kappa A}}{\frac{1}{2a^2 A}} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.5}$$

- **Normalkraft N**

Das in beiden "Punkten" idente Verhältnis von $\sigma_{max}(N, \kappa)$ zu $\sigma_{max}(N, \kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ lautet:

$$\frac{\sigma(N, \kappa)}{\sigma(N, \kappa = 1)} = \frac{\frac{1}{2\kappa A}}{\frac{1}{2A}} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.6}$$

- **Zusammenfassung**

Die Ableitung der Normalspannungen in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ kann unabhängig von der einwirkenden Schnittgröße und den betrachteten Punkt durch die Funktion

$$f(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.7}$$

beschrieben werden. Unabhängig von der Querschnittsfläche und der Querschnittshöhe errechnet sich die Spannung $\sigma(\kappa)$ des geschädigten Querschnitts durch Multiplikation der Spannung $\sigma(\kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts mit der Funktion $f(\kappa)$:

$$\sigma(\kappa) = \sigma(\kappa = 1) \cdot \frac{1}{\kappa} \tag{5.8}$$

Mit diesem Zusammenhang erspart man sich die explizite Berechnung der Querschnittswerte des geschädigten Querschnitts.

5.1.3 Querschnitt mit unsymmetrischer Schädigung

Querschnittswerte:

$$A_G{}^{(b)} = \int dA = A(1+\kappa) \tag{5.9}$$

$$A_z{}^{(b)} = \int z dA = aA - a\kappa A = aA(1-\kappa) \tag{5.10}$$

$$z_s{}^{(b)} = \frac{A_z}{A_G} = \frac{a(1-\kappa)}{(1+\kappa)} \tag{5.11}$$

$$A_{zz}{}^{(b)} = \int z^2 dA = a^2 A + a^2 \kappa A = a^2 A(1+\kappa) \tag{5.12}$$

$$A_{\hat{z}\hat{z}}{}^{(b)} = A_{\zeta\zeta}{}^{(b)} = A_{zz} - z_s{}^2 A_G = a^2 A(1+\kappa) - z_s^2 A(1+\kappa) = A(1+\kappa)(a-z_s)(a+z_s) \tag{5.13}$$

In Folge werden, getrennt nach M_y und N, Zusammenhänge zum symmetrisch geschädigten Querschnitt sowie zum ungeschädigten Querschnitt gezeigt. Wie sich zeigen wird, erübrigt sich die explizite Berechnung der Querschnittswerte des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts.

- **Biegemoment M_y**

Für eine vergleichende Analyse werden der symmetrisch geschädigte Querschnitt und der unsymmetrisch geschädigte Querschnitt unter der einwirkenden Schnittgröße $M_y = M_\eta$ betrachtet (Abb. 5.4). Um die Zusammenhänge des unsymmetrisch geschädigten (b) zum symmetrisch geschädigten (a) bzw. ungeschädigten Querschnitt zu zeigen, werden die Spannungen unabhängig voneinander formuliert und anschließend gleichgesetzt.

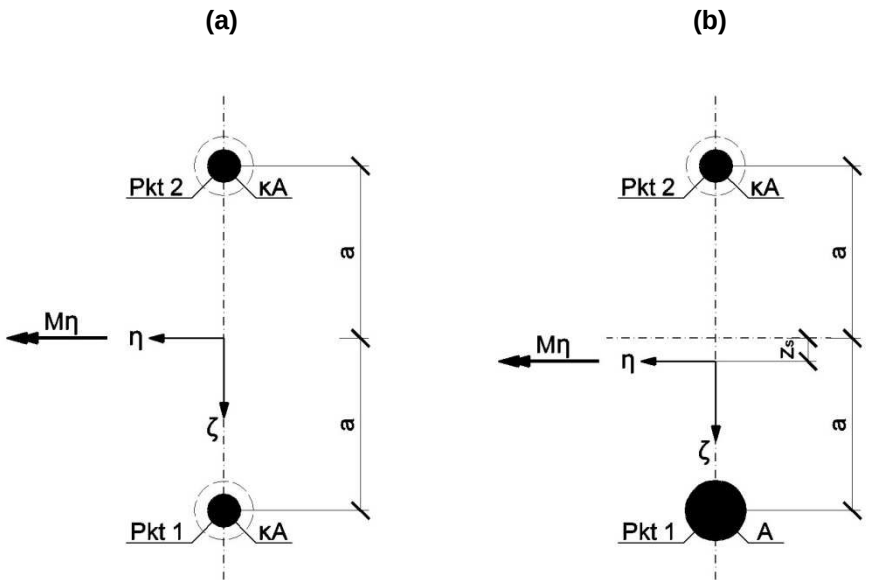


Abb. 5.4: Zweipunktquerschnitte durch Biegemoment beansprucht

In einem ersten Schritt wird die maßgebende Spannung (Pkt.2) des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts (b) mit jener des symmetrisch geschädigten Querschnitts (a) gleichgesetzt.

$$\sigma_{Pkt2}{}^{(a)}(\kappa) = \sigma_{Pkt2}{}^{(b)}(\kappa)$$

$$\frac{M_\eta(-a)}{A_{\zeta\zeta}{}^{(a)}} = \frac{M_\eta(-z_s - a)}{A_{\zeta\zeta}{}^{(b)}}$$

$$\frac{(-a)}{2a^2\kappa A} = \frac{(-z_s - a)}{A(1+\kappa)(a - z_s)(a + z_s)} \tag{5.14}$$

$$\frac{A(1+\kappa)}{a\kappa A} = \frac{(a + z_s)}{(a - z_s)(a + z_s)}$$

$$(1+\kappa)(a - z_s) = a\kappa$$

Einsetzen von Gl.(5.11) in Gl.(5.14) liefert nach weiterer Umformung eine wahre Aussage:

$$0 = 0 \tag{5.15}$$

Damit ist gezeigt, dass die Spannung im Pkt.2 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts infolge Biegemoment ident zur Spannung im Pkt.2 des symmetrisch geschädigten Querschnitts ist. Daraus folgt, dass die Spannungsberechnung im Pkt.2 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts infolge Biegemoment durch die Berechnung der Spannung im Pkt.2 des symmetrisch geschädigten Querschnitts ersetzt werden kann.

Die Spannung im Pkt.1 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts (b) wird mit der Spannung des ungeschädigten Querschnitts $\sigma(\kappa = 1)$ verglichen:

$$\sigma^{(b)}(\kappa = 1) = \sigma_{Pkt1}{}^{(b)}(\kappa)$$

$$\frac{M_\eta a}{A_{\zeta\zeta}{}^{(b)}(\kappa = 1)} = \frac{M_\eta(a - z_s)}{A_{\zeta\zeta}{}^{(b)}}$$

$$\frac{a}{2a^2 A} = \frac{(a - z_s)}{A(1+\kappa)(a - z_s)(a + z_s)} \tag{5.16}$$

$$\frac{A(1+\kappa)}{a\kappa A} = \frac{(a + z_s)}{(a - z_s)(a + z_s)}$$

$$aA(1+\kappa)(a + z_s) = 2aA$$

Einsetzen von Gl.(5.11) in Gl.(5.16) liefert nach weiterer Umformung eine wahre Aussage:

$$0 = 0. \tag{5.17}$$

Damit ist gezeigt, dass die Spannung im Pkt.1 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts infolge Biegemoment ident zur Spannung im Pkt.1 des ungeschädigten Querschnitts ist. Daraus folgt, dass die Spannung im Pkt.1 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts im Zuge der Schädigung unverändert bleibt.

- **Normalkraft N**

Für eine vergleichende Analyse werden der symmetrisch geschädigte Querschnitt und der unsymmetrisch geschädigte Querschnitt unter der einwirkenden Schnittgröße N betrachtet (Abb. 5.5). Der Angriffspunkt der Normalkraft bleibt im Zuge der Schädigung unverändert und

wandert nicht mit dem Schwerpunkt. Der unsymmetrisch geschädigte Querschnitt wird somit durch ein zusätzliches negatives Biegemoment $M_\eta = -Nz_s$ beansprucht. Um die Zusammenhänge des unsymmetrisch geschädigten (b) zum symmetrisch geschädigten (a) bzw. ungeschädigten Querschnitt zu zeigen, werden die Spannungen unabhängig voneinander formuliert und anschließend gleichgesetzt.

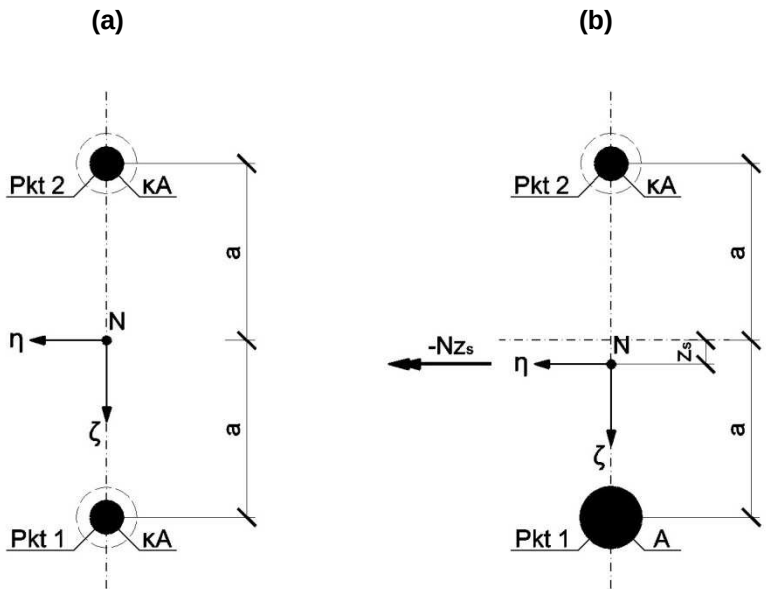


Abb. 5.5: Zweipunktquerschnitte durch Normalkraft beansprucht

Die maßgebende Spannung (Pkt.2) des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts (b) wird mit jener des symmetrisch geschädigten Querschnitts (a) gleichgesetzt.

$$\sigma_{Pkt2}{}^{(a)}(\kappa) = \sigma_{Pkt2}{}^{(b)}(\kappa)$$

$$\frac{N}{A_G{}^{(a)}} = \frac{N}{A_G{}^{(b)}} - \frac{Nz_s(-z_s - a)}{A_{\zeta\zeta}{}^{(b)}} \tag{5.18}$$

$$\frac{1}{2\kappa A} = \frac{1}{A(1+\kappa)} - \frac{z_s(-z_s - a)}{A(1+\kappa)(a - z_s)(a + z_s)}$$

Durch einsetzen von Gl.(5.14) in Gl.(5.18) folgt

$$\frac{1}{2\kappa A} = \frac{1}{A(1+\kappa)} + \frac{z_s a}{2a^2 \kappa A} \tag{5.19}$$

und nach weiterer Umformung

$$\kappa a + z_s(1+\kappa) = a. \tag{5.20}$$

Wie zuvor liefert auch diese Gleichung durch einsetzen von Gl.(5.11) eine wahre Aussage:

$$0 = 0. \tag{5.21}$$

Damit ist gezeigt, dass die Spannung im Pkt.2 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts infolge Normalkraft ident zur Spannung im Pkt.2 des symmetrisch geschädigten Querschnitts ist.

Daraus folgt, dass die Spannungsberechnung im Pkt.2 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts infolge Normalkraft durch die Berechnung der Spannung im Pkt.2 des symmetrisch geschädigten Querschnitts ersetzt werden kann.

Die Spannung im Pkt.1 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts (b) wird mit der Spannung des ungeschädigten Querschnitts $\sigma(\kappa = 1)$ verglichen:

$$\begin{aligned} \sigma^{(b)}(\kappa = 1) &= \sigma_{Pkt1}{}^{(b)}(\kappa) \\ \frac{N}{A_G{}^{(b)}(\kappa = 1)} &= \frac{N}{A_G{}^{(b)}} - \frac{N z_s (a - z_s)}{A_{\zeta\zeta}{}^{(b)}} \\ \frac{1}{2A} &= \frac{1}{A(1+\kappa)} - \frac{z_s (a - z_s)}{A(1+\kappa)(a - z_s)(a + z_s)} \\ \frac{(1+\kappa)}{2} &= 1 - \frac{z_s}{(a + z_s)} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Einsetzen von Gl.(5.11) in Gl.(5.17) liefert nach weiterer Umformung eine wahre Aussage:

$$0 = 0. \tag{5.23}$$

Damit ist gezeigt, dass die Spannung im Pkt.1 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts infolge Normalkraft ident zur Spannung im Pkt.1 des ungeschädigten Querschnitts ist. Daraus folgt, dass die Spannung im Pkt.1 des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts im Zuge der Schädigung unverändert bleibt.

- **Zusammenfassung**

Die hergeleiteten Zusammenhänge zeigen, dass die Spannungsberechnung des unsymmetrisch geschädigten Querschnitts durch die Berechnung der Spannungen des symmetrisch geschädigten bzw. ungeschädigten Querschnitts ersetzt werden kann. Die Ableitung der Normalspannungen im geschädigten “Punkt“ 2 in Abhängigkeit vom Schädigungsgrad κ kann unabhängig von der einwirkenden Schnittgröße durch die in Kap. 5.1.2 hergeleitete Funktion

$$f_{Pkt2}(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.24}$$

beschrieben werden. Die Spannung im ungeschädigten “Punkt“ 1 bleibt im Zuge der Schädigung konstant auf dem Niveau der Spannung des ungeschädigten Querschnitts.

$$f_{Pkt1}(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = 1 \tag{5.25}$$

Mit diesen Zusammenhängen erspart man sich die explizite Berechnung der Querschnittswerte des geschädigten Querschnitts.

5.1.4 Zusammenfassung

Zusammenfassend kann man sagen, dass die symmetrische Abtragung des Zweipunktquerschnittes um die geschädigte Fläche ΔA hinsichtlich der maximalen Spannungen σ_{max} äquivalent zu jenem Querschnitt ist, bei dem nur ein "Punkt" um diese Fläche reduziert wird und umgekehrt. Die Ableitung der Spannung im Zuge der Schädigung kann durch die Funktion

$$f(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.26}$$

beschrieben werden. Sie tritt in jenem "Punkt" auf, bei dem es zur Querschnittsminderung infolge Schädigung gekommen ist. Unabhängig von der Querschnittsfläche und der Querschnittshöhe errechnet sich die Spannung $\sigma(\kappa)$ des geschädigten Querschnitts durch Multiplikation der Spannung $\sigma(\kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts mit der Funktion $f(\kappa)$.

$$\sigma(\kappa) = \sigma(\kappa = 1) \cdot f(\kappa) \tag{5.27}$$

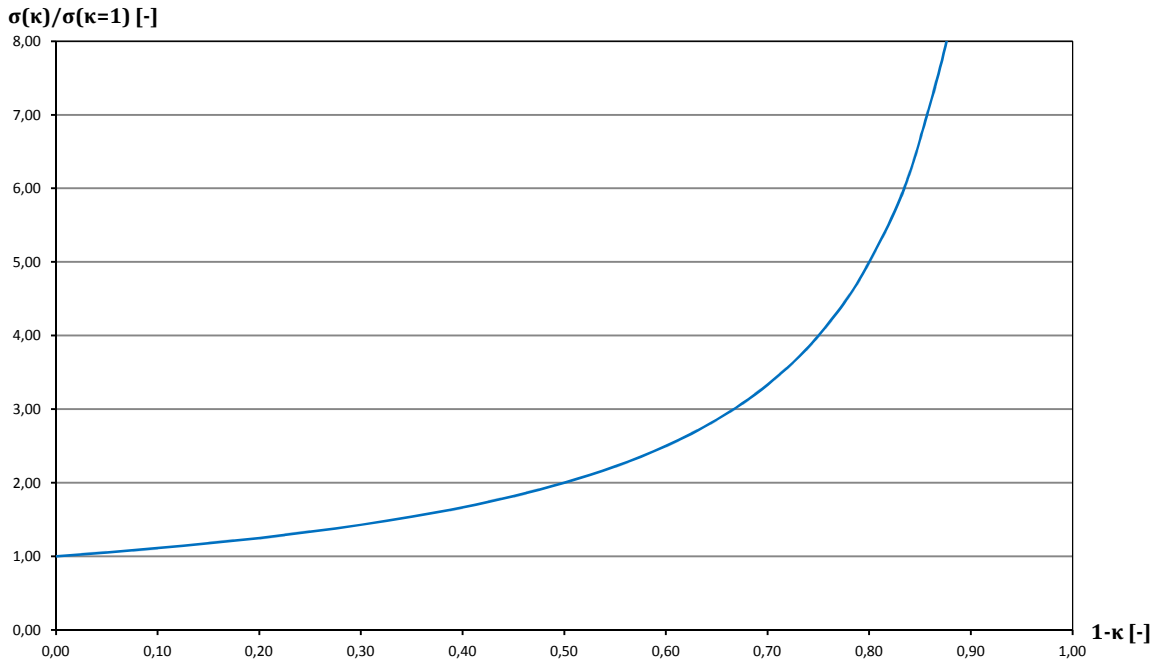
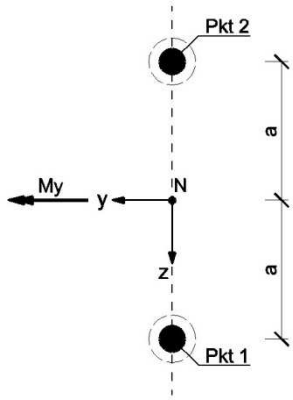
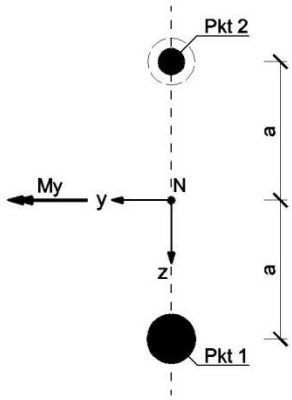


Abb. 5.6: $f(\kappa) = \sigma(\kappa)/\sigma(\kappa = 1) = 1/\kappa$; Spannungserhöhung infolge Schädigung

Die Spannung im ungeschädigten "Punkt" (unsymmetrische Schädigung) bleibt im Zuge der Schädigung konstant auf dem Niveau der Spannung des ungeschädigten Querschnitts.

$$f(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = 1 \tag{5.28}$$

Mit diesen Zusammenhängen erspart man sich die explizite Berechnung der Querschnittswerte der geschädigten Querschnitte. Tab. 5.2 enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse.

Einwirkende Schnittgröße	Spannungsberechnung $\sigma(\kappa = 1)$	Symmetrische Schädigung	Unsymmetrische Schädigung	
				
		Pkt 1,2	Pkt 1	Pkt 2
$\boldsymbol{M_y}$	$\frac{M_y}{2a^2A} \cdot z$	$\frac{1}{\kappa}$	1	$\frac{1}{\kappa}$
$\boldsymbol{N}$	$\frac{N}{2A}$	$\frac{1}{\kappa}$	1	$\frac{1}{\kappa}$

Tab. 5.2: Zusammenfassung Zweipunktquerschnitte

5.2 Vierpunktquerschnitt

5.2.1 Spannungsberechnung mit Hilfe der exakten Querschnittswerte

5.2.1.1 Allgemeines

Der ungeschädigte Vierpunktquerschnitt unter den einwirkenden Schnittgrößen M_y, M_z und N ist in Abb. 5.7 dargestellt.

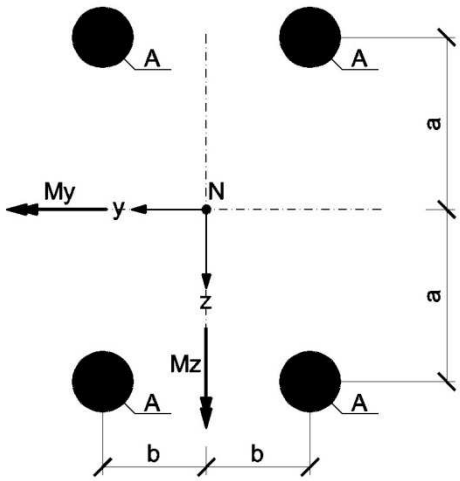


Abb. 5.7: Ungeschädigter Vierpunktquerschnitt

Es lassen sich drei Typen von Querschnittsschädigungen unterscheiden, die hinsichtlich der Entwicklung der Hauptachsen im Zuge der Schädigung als Sonderfälle interpretiert werden können (Abb. 5.8). Im ersten Fall (1) ist der Querschnitt doppeltsymmetrisch geschädigt, dadurch kommt es zu keiner Schwerpunktverschiebung. Die Lage des Schwerpunkts ist ident zum ungeschädigten Querschnitt. Im zweiten Fall (2) kommt es durch die einfachsymmetrische Schädigung zu einer Schwerpunktverschiebung in Richtung der y bzw. z-Achse. Der letzte Fall (3) kennzeichnet sich durch eine Hauptachsendrehung bei unveränderter Schwerpunktlage.

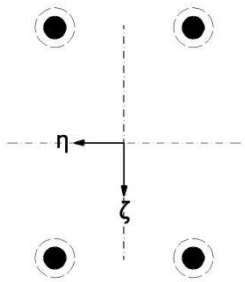
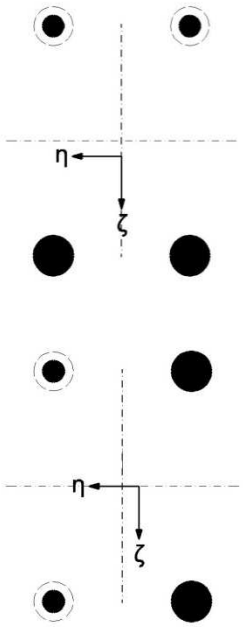
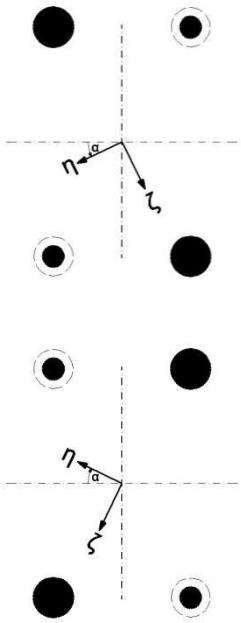
(1) **Doppeltsymmetrische Schädigung**	**(2)** **Einfachsymmetrische Schädigung**	**(3)** **Punktsymmetrische Schädigung**
		

Abb. 5.8: Schädigungsfälle beim Vierpunktquerschnitt

Die für die Spannungsermittlung maßgebenden Größen sind die ungeschädigte Querschnittsfläche $4A$, Querschnittshöhe $2a$, Querschnittsbreite $2b$ und der Schädigungsgrad κ.

Aufgrund der Verschiebung und Verdrehung der Hauptachsen müssen die auf das ungeschädigte System einwirkenden äußeren Schnittgrößen umgerechnet werden. Der Zusammenhang zwischen den ursprünglich einwirkenden Schnittgrößen und den auf den geschädigten Querschnitt einwirkenden Schnittgrößen lässt sich wie folgt darstellen:

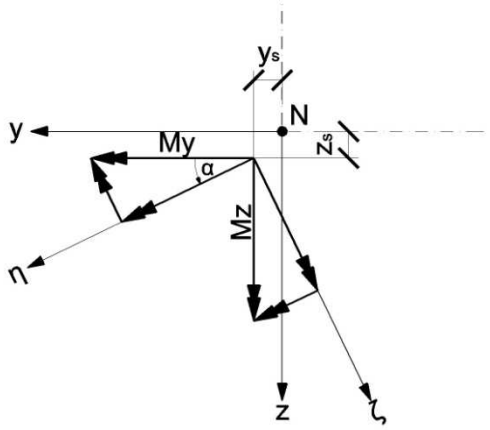


Abb. 5.9: Schnittgrößentransformation beim Vierpunktquerschnitt

Schnittgrößen	Gesamtquerschnitt			
	ohne Schädigung	mit Schädigung		
		M_y	M_z	N
$\boldsymbol{M_\eta}$	M_y	$M_y \cos\alpha$	$M_z \sin\alpha$	$N[y_s \sin\alpha - z_s \cos\alpha]$
$\boldsymbol{M_\zeta}$	M_z	$-M_y \sin\alpha$	$M_z \cos\alpha$	$N[y_s \cos\alpha + z_s \sin\alpha]$
$\boldsymbol{N}$	N	0	0	N

Tab. 5.3: Schnittgrößentransformation beim Vierpunktquerschnitt

Die aus den Schnittgrößen resultierenden Spannungen lauten:

$$\sigma(\eta,\zeta) = \frac{N}{A_G} + \frac{M_\eta}{A_{\zeta\zeta}}\zeta - \frac{M_\zeta}{A_{\eta\eta}}\eta \tag{5.29}$$

5.2.1.2 Querschnitt mit doppeltsymmetrischer Schädigung

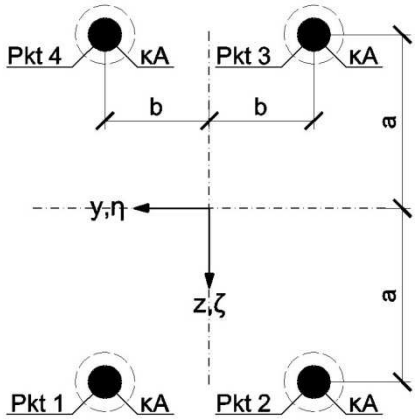


Abb. 5.10: Vierpunktquerschnitt mit doppeltsymmetrischer Schädigung

Querschnittswerte:

$$A_G{}^{(1)} = \int dA = 4\kappa A \tag{5.30}$$

$$A_{yy}{}^{(1)} = A_{\hat{y}\hat{y}}{}^{(1)} = A_{\eta\eta}{}^{(1)} = \int y^2 dA = 4b^2\kappa A \tag{5.31}$$

$$A_{zz}{}^{(1)} = A_{\hat{z}\hat{z}}{}^{(1)} = A_{\zeta\zeta}{}^{(1)} = \int z^2 dA = 4a^2\kappa A \tag{5.32}$$

- **Biegemoment $\boldsymbol{M_y}$**

Das in allen vier "Punkten" idente Verhältnis von $\sigma_{max}(M_y, \kappa)$ zu $\sigma_{max}(M_y, \kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ lautet:

$$\frac{\sigma(M_y, \kappa)}{\sigma(M_y, \kappa = 1)} = \frac{\frac{1}{4a^2\kappa A}}{\frac{1}{4a^2 A}} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.33}$$

- **Biegemoment $\boldsymbol{M_z}$**

Das in allen vier "Punkten" idente Verhältnis von $\sigma_{max}(M_z, \kappa)$ zu $\sigma_{max}(M_z, \kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ lautet:

$$\frac{\sigma(M_z, \kappa)}{\sigma(M_z, \kappa = 1)} = \frac{\frac{1}{4b^2\kappa A}}{\frac{1}{4b^2 A}} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.34}$$

- **Normalkraft $\boldsymbol{N}$**

Das in allen vier "Punkten" idente Verhältnis von $\sigma_{max}(N, \kappa)$ zu $\sigma_{max}(N, \kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ lautet:

$$\frac{\sigma(N, \kappa)}{\sigma(N, \kappa = 1)} = \frac{\frac{1}{4\kappa A}}{\frac{1}{4A}} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.35}$$

- **Zusammenfassung**

Die Ableitung der Normalspannungen in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ kann unabhängig von der einwirkenden Schnittgröße und den betrachteten "Punkt" durch die Funktion

$$f(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.36}$$

beschrieben werden. Unabhängig von der Querschnittsfläche, Querschnittshöhe und Querschnittsbreite errechnet sich die Spannung $\sigma(\kappa)$ des geschädigten Querschnitts durch Multiplikation der Spannung $\sigma(\kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts mit der Funktion $f(\kappa)$.

$$\sigma(\kappa) = \sigma(\kappa = 1) \cdot \frac{1}{\kappa} \tag{5.37}$$

Mit diesem Zusammenhang erspart man sich die explizite Berechnung der Querschnittswerte des geschädigten Querschnitts.

5.2.1.3 Querschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung

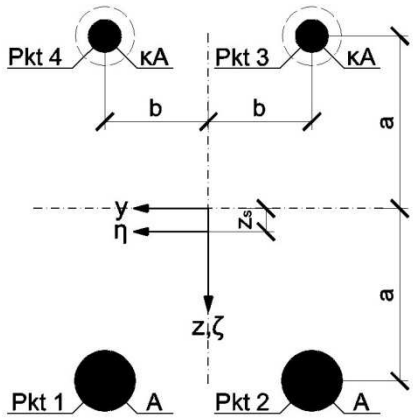


Abb. 5.11: Vierpunktquerschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung

Querschnittswerte:

$$A_G{}^{(2)} = \int dA = 2A(1+\kappa) \tag{5.38}$$

$$A_z{}^{(2)} = \int z dA = 2aA - 2a\kappa A = 2aA(1-\kappa) \tag{5.39}$$

$$z_s{}^{(2)} = \frac{A_z}{A_G} = \frac{a(1-\kappa)}{(1+\kappa)} \tag{5.40}$$

$$A_{yy}{}^{(2)} = A_{\hat{y}\hat{y}}{}^{(2)} = A_{\eta\eta}{}^{(2)} = \int y^2 dA = 2b^2\kappa A + 2b^2 A = 2b^2 A(1+\kappa) \tag{5.41}$$

$$A_{zz}{}^{(2)} = \int z^2 dA = 2a^2\kappa A + 2a^2 A = 2a^2 A(1+\kappa) \tag{5.42}$$

$$A_{\hat{z}\hat{z}}{}^{(2)} = A_{\zeta\zeta}{}^{(2)} = A_{zz} - z_s{}^2 A_G = 2a^2 A(1+\kappa) - z_s^2 2A(1+\kappa) = 2A(1+\kappa)(a-z_s)(a+z_s) \tag{5.43}$$

Der Vergleich zwischen den in Kapitel 5.1 behandelten geschädigten Zweipunktquerschnitten mit dem Vierpunktquerschnitt unter doppeltsymmetrischer und symmetrischer Schädigung ist in Abb. 5.12 dargestellt. Die Querschnittsfläche (A_G) sowie das Trägheitsmoment um die η-Achse ($A_{\zeta\zeta}$) unterscheiden sich um den Faktor 2. Die bereits aufgezeigten Zusammenhänge hinsichtlich $\sigma(M_y, \kappa)$ und $\sigma(N, \kappa)$ gelten somit auch für diese zwei Typen von Vierpunktquerschnitten.

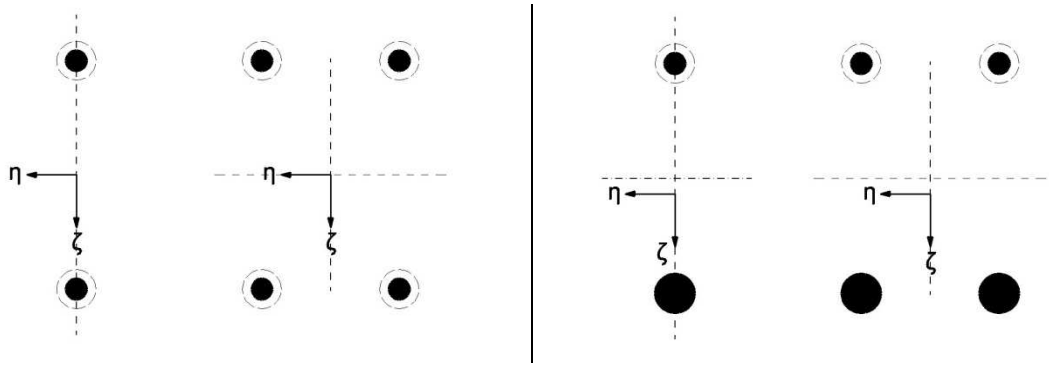


Abb. 5.12: Vergleich Zweipunktquerschnitte - Vierpunktquerschnitte

- **Biegemoment M_y, Normalkraft N**

Geschädigte “Punkte“ (Pkt.3, Pkt.4):

$$f_{Pkt3,Pkt4}(\kappa)\frac{\sigma(M_y,\kappa)}{\sigma(M_y,\kappa=1)}=\frac{\sigma(N,\kappa)}{\sigma(N,\kappa=1)}=\frac{1}{\kappa} \tag{5.44}$$

Ungeschädigte “Punkte“ (Pkt.1, Pkt.2):

$$f_{Pkt1,Pkt2}(\kappa)=\frac{\sigma(M_y,\kappa)}{\sigma(M_y,\kappa=1)}=\frac{\sigma(N,\kappa)}{\sigma(N,\kappa=1)}=1 \tag{5.45}$$

- **Biegemoment M_z**

Das in allen vier “Punkten“ idente Verhältnis von $\sigma(M_z,\kappa)$ zu $\sigma(M_z,\kappa=1)$ des ungeschädigten Querschnitts in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ lautet:

$$f(\kappa)=\frac{\sigma(M_z,\kappa)}{\sigma(M_z,\kappa=1)}=\frac{\frac{1}{2b^2A(1+\kappa)}}{\frac{1}{4b^2A}}=\frac{2}{(1+\kappa)} \tag{5.46}$$

- **Zusammenfassung**

Die Spannungsberechnungen $\sigma(M_y,\kappa)$ und $\sigma(N,\kappa)$ des einfachsymmetrisch geschädigten Vierpunktquerschnitts können durch die Berechnung der Spannungen am doppeltsymmetrisch geschädigten bzw. ungeschädigten Vierpunktquerschnitt ersetzt werden. Die Ableitung der Normalspannungen in den geschädigten “Punkten“ (Pkt.3,4) in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ kann für beide einwirkenden Schnittgrößen (M_y, N) durch die in Kap. 5.2.1.2 hergeleitete Funktion

$$f_{Pkt3,Pkt4}(\kappa)=\frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa=1)}=\frac{1}{\kappa} \tag{5.47}$$

beschrieben werden. Die Spannung in den ungeschädigten “Punkten“ (Pkt.1,2) bleibt im Zuge der Schädigung konstant auf dem Niveau der Spannung des ungeschädigten Querschnitts.

$$f_{Pkt1,Pkt2}(\kappa)=\frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa=1)}=1 \tag{5.48}$$

Bezüglich der Spannungsberechnung infolge Biegung um die z-Achse $\sigma(M_z,\kappa)$ gilt für alle vier “Punkte“:

$$f(\kappa)=\frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa=1)}=\frac{2}{(1+\kappa)} \tag{5.49}$$

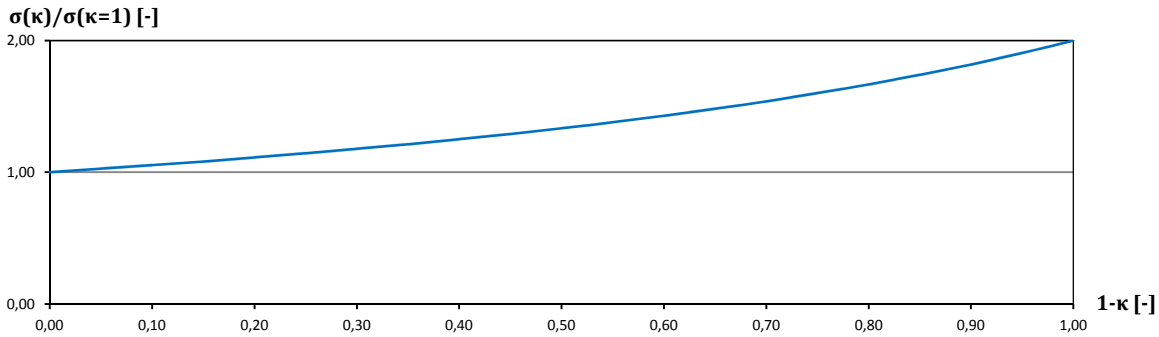


Abb. 5.13: $f(\kappa) = \sigma(\kappa)/\sigma(\kappa = 1) = 2/(1 + \kappa)$; Spannungserhöhung infolge Schädigung

Mit diesen Zusammenhängen erspart man sich die explizite Berechnung der Querschnittswerte des geschädigten Querschnitts.

5.2.1.4 Querschnitt mit punktsymmetrischer Schädigung

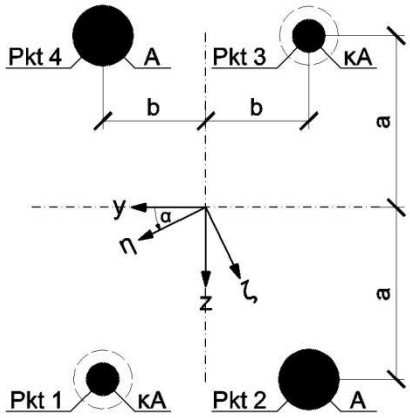


Abb. 5.14: Vierpunktquerschnitt mit punktsymmetrischer Schädigung

Querschnittswerte:

$$A_G{}^{(3)} = \int dA = 2A(1 + \kappa) \tag{5.50}$$

$$A_{yz}{}^{(3)} = \int yzdA = 2ab\kappa A - 2abA = 2abA(\kappa - 1) \tag{5.51}$$

$$A_{yy}{}^{(3)} = \int y^2 dA = 2b^2\kappa A + 2b^2 A = 2b^2 A(1 + \kappa) \tag{5.52}$$

$$A_{zz}{}^{(3)} = \int z^2 dA = 2a^2\kappa A + 2a^2 A = 2a^2 A(1 + \kappa) \tag{5.53}$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2A_{yz}}{A_{yy} - A_{zz}} = \frac{2ab}{(b^2 - a^2)} \frac{(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)} \tag{5.54}$$

$$\begin{matrix} A_{\eta\eta}{}^{(3)} \\ A_{\zeta\zeta}{}^{(3)} \end{matrix} = \frac{1}{2}\left[\left(A_{yy} + A_{zz}\right) \pm \sqrt{\left((A_{yy} - A_{zz})^2 + 4A_{yz}{}^2\right)}\right] \tag{5.55}$$

Es zeigt sich, dass die Ableitung der Spannungen infolge Schädigung durch die gleichen Zusammenhänge beschrieben werden kann, wie sie beim Querschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung (Kap. 5.2.1.3) vorkommen. Die analytische Herleitung der Funktion $f(\kappa)$ für $\sigma(M_y, \kappa)$ bzw. $\sigma(M_z, \kappa)$ erfolgt aufgrund der Komplexität der Querschnittswerte, die aus der Hauptachsendrehung resultiert, mit Hilfe eines neuen Rechenmodells zur Spannungsberechnung von Vierpunktquerschnitten. Das zugehörige Rechenbeispiel kann Kap.5.2.3 entnommen werden.

- **Biegemoment M_y, Biegemoment M_z**

Geschädigte “Punkte“ (Pkt.1, Pkt.3):

$$f_{Pkt1,Pkt3}(\kappa) = \frac{\sigma(M_y, \kappa)}{\sigma(M_y, \kappa = 1)} = \frac{\sigma(M_z, \kappa)}{\sigma(M_z, \kappa = 1)} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.56}$$

Ungeschädigte “Punkte“ (Pkt.2, Pkt.4):

$$f_{Pkt2,Pkt4}(\kappa) = \frac{\sigma(M_y, \kappa)}{\sigma(M_y, \kappa = 1)} = \frac{\sigma(M_z, \kappa)}{\sigma(M_z, \kappa = 1)} = 1 \tag{5.57}$$

- **Normalkraft N**

Das in allen vier “Punkten“ idente Verhältnis von $\sigma(N, \kappa)$ zu $\sigma(N, \kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ lautet:

$$f(\kappa) = \frac{\sigma(N, \kappa)}{\sigma(N, \kappa = 1)} = \frac{\frac{1}{2A(1+\kappa)}}{\frac{1}{4A}} = \frac{2}{(1+\kappa)} \tag{5.58}$$

- **Zusammenfassung**

Die Spannungsberechnungen $\sigma(M_y, \kappa)$ und $\sigma(M_z, \kappa)$ des punktsymmetrisch geschädigten Vierpunktquerschnitts können durch die Berechnung der Spannungen am doppeltsymmetrisch geschädigten bzw. ungeschädigten Vierpunktquerschnitt ersetzt werden. Die Ableitung der Normalspannungen in den geschädigten “Punkten“ (Pkt.1,3) in Abhängigkeit des Schädigungsgrades κ kann für beide einwirkenden Schnittgrößen (M_y, M_z) durch die in Kap. 5.2.1.2 hergeleitete Funktion

$$f_{Pkt1,Pkt3}(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.59}$$

beschrieben werden. Die Spannung in den ungeschädigten “Punkten“ (Pkt.2,4) bleibt im Zuge der Schädigung konstant auf dem Niveau der Spannung des ungeschädigten Querschnitts.

$$f_{Pkt2,Pkt4}(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = 1 \tag{5.60}$$

Bezüglich der Spannungsberechnung infolge Normalkraft $\sigma(N, \kappa)$ gilt für alle vier “Punkte“:

$$f(\kappa) = \frac{\sigma(\kappa)}{\sigma(\kappa = 1)} = \frac{2}{(1+\kappa)} \tag{5.61}$$

Mit diesen Zusammenhängen erspart man sich die explizite Berechnung der Querschnittswerte des geschädigten Querschnitts.

5.2.1.5 Zusammenfassung

Die untersuchten Vierpunktquerschnitte sind dadurch gekennzeichnet, dass einerseits die ganze (doppeltsymmetrisch), andererseits die halbe (einfachsymmetrisch/punktsymmetrisch) Querschnittsfläche geschädigt ist. Daraus resultieren unterschiedliche Lagen bzw. Orientierungen der Hauptachsen des geschädigten Querschnitts.

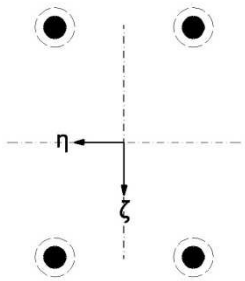
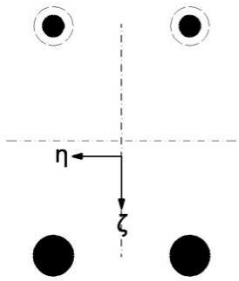
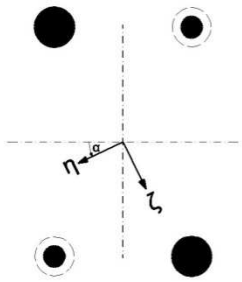
Doppeltsymmetrische Schädigung	Einfachsymmetrische Schädigung	Punktsymmetrische Schädigung
		
unveränderte Hauptachsen	Hauptachsenverschiebung	Hauptachsendrehung

Abb. 5.15: Schädigungsfälle Vierpunktquerschnitt

Es wurde bewusst aufgezeigt, dass es für die Spannungsberechnung infolge Schädigung einer Menge an Vorlaufrechnungen in Form von Querschnittswerten erfordert. Die in diesem Zusammenhang wesentliche Erkenntnis ist, dass die Erhöhung der Spannung infolge Schädigung ausschließlich vom Schädigungsfall, vom betrachteten "Punkt", von der einwirkenden Schnittgröße sowie vom Schädigungsgrad κ abhängt und unabhängig von den Querschnittsabmessungen $2a$ bzw. $2b$ ist.

Die Spannung $\sigma(\kappa)$ des geschädigten Querschnitts errechnet sich durch Multiplikation der Spannung $\sigma(\kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts mit der Funktion $f(\kappa)$:

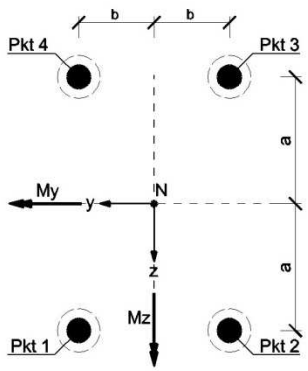
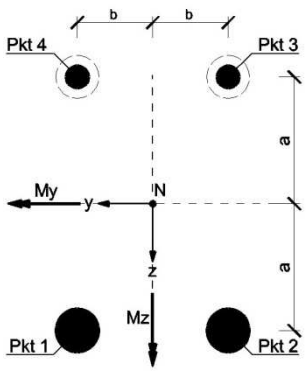
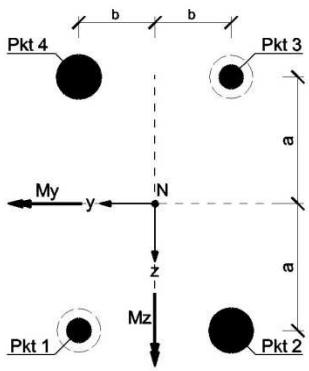
$$\sigma(\kappa) = \sigma(\kappa = 1) \cdot f(\kappa) \tag{5.62}$$

Tab. 5.4 enthält eine Zusammenfassung der Ergebnisse, die teilweise bei den Zweipunktquerschnitten hergeleitet wurden. Trotz unterschiedlicher Lage bzw. Orientierung der Hauptachsen im geschädigten Querschnitt, lässt sich die Spannungsberechnung nach der Schädigung auf die gleichen Funktionen zurückführen.

$$f^{(1)}(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \tag{5.63}$$

$$f^{(2)}(\kappa) = 1 \tag{5.64}$$

$$f^{(3)}(\kappa) = \frac{2}{(1+\kappa)} \tag{5.65}$$

Einwirkende Schnittgröße	Spannungsberechnung $\sigma(\kappa = 1)$	Doppeltsymmetrische Schädigung	Einfachsymmetrische Schädigung		Punktsymmetrische Schädigung	
						
		Pkt 1,2,3,4	Pkt 1,2	Pkt 3,4	Pkt 1,3	Pkt 2,4
$\boldsymbol{M_y}$	$\frac{M_y}{4a^2A} \cdot z$	$\frac{1}{\kappa}$	1	$\frac{1}{\kappa}$	$\frac{1}{\kappa}$	1
$\boldsymbol{M_z}$	$\frac{M_z}{4b^2A} \cdot y$	$\frac{1}{\kappa}$	$\frac{2}{(1+\kappa)}$	$\frac{2}{(1+\kappa)}$	$\frac{1}{\kappa}$	1
$\boldsymbol{N}$	$\frac{N}{4A}$	$\frac{1}{\kappa}$	1	$\frac{1}{\kappa}$	$\frac{2}{(1+\kappa)}$	$\frac{2}{(1+\kappa)}$

Tab. 5.4: Zusammenfassung Vierpunktquerschnitte

5.2.2 Spannungsberechnung mit Hilfe des Modelles einer starren Platte auf Federlagerung

Das Modell der starren Platte auf Federlagerung ermöglicht eine anschauliche und gleichzeitig einfache Spannungsberechnung von Vierpunktquerschnitten.

5.2.2.1 Modellbildung

Die Spannungsberechnung für den Vierpunktquerschnitt beruht auf zwei Grundannahmen:

- Bernoulli-Hypothese: Ebenbleiben der Querschnitte
- Innere Gleichgewichtsbedingungen für die Normalkräfte F_i infolge der Schnittgrößen M_y, M_z sowie N auf die “Punkte“

Die Kombination dieser Annahmen lässt eine Betrachtungsweise zu, die wesentlich anschaulicher ist als jene auf Ebene der exakten Querschnittswerte. Das Modell entspricht einem statisch unbestimmten räumlichen System einer rechteckigen unendlich starren Platte (Bernoulli-Hypothese), die zentrisch durch die Schnittgrößen M_y, M_z sowie N belastet wird. Die Auflager

befinden sich in den Eckpunkten der Platte. Das in Abb. 5.16 dargestellte System entspricht dem eines ungeschädigten Vierpunktquerschnitts mit den Querschnittsabmessungen $2a$ bzw. $2b$ (Die "Punkte" liegen in den Auflagern).

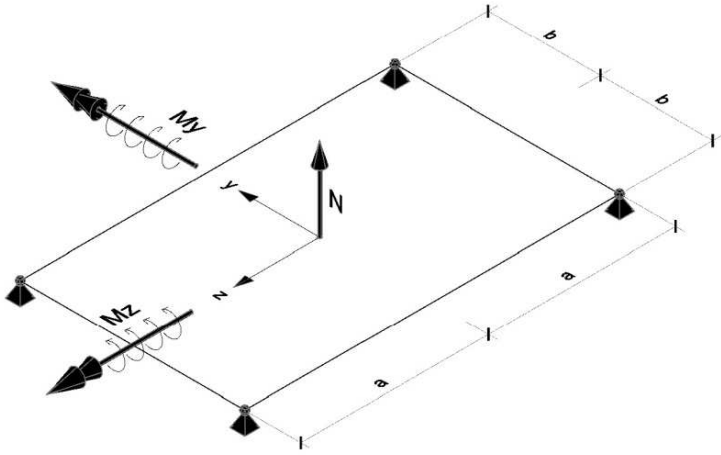


Abb. 5.16: Modell der starren Platte auf fester Lagerung

Durch das Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen $\sum M = 0$ und $\sum N = 0$ erhält man die Normalkräfte F_i in den "Punkten" infolge der Schnittgrößen M_y, M_z und N.

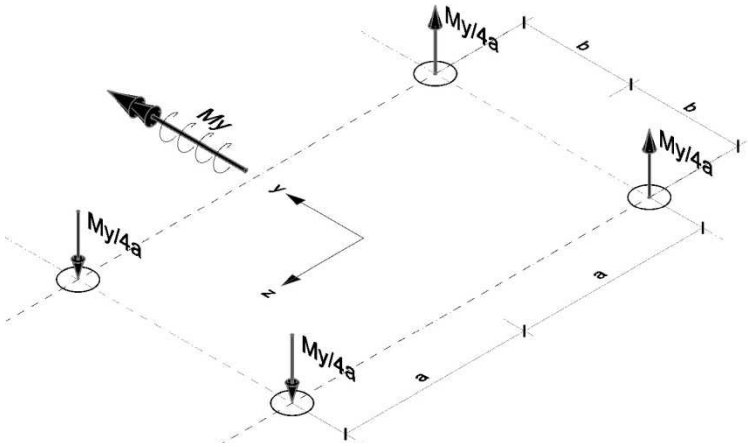


Abb. 5.17: Normalkräfte im ungeschädigten Vierpunktquerschnitt infolge M_y

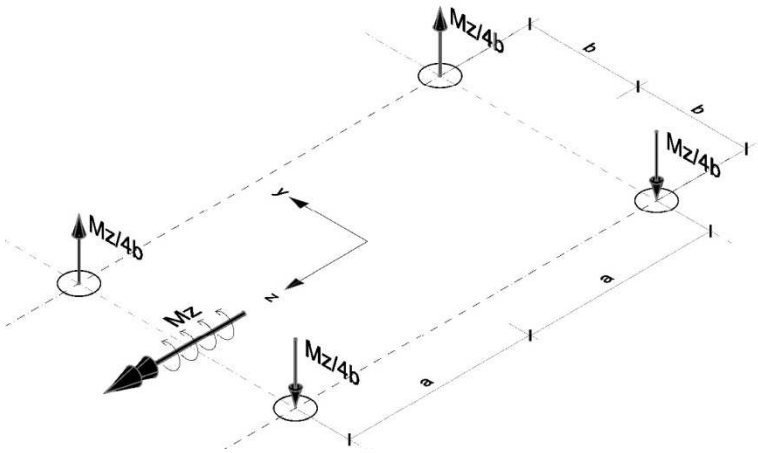


Abb. 5.18: Normalkräfte im ungeschädigten Vierpunktquerschnitt infolge M_z

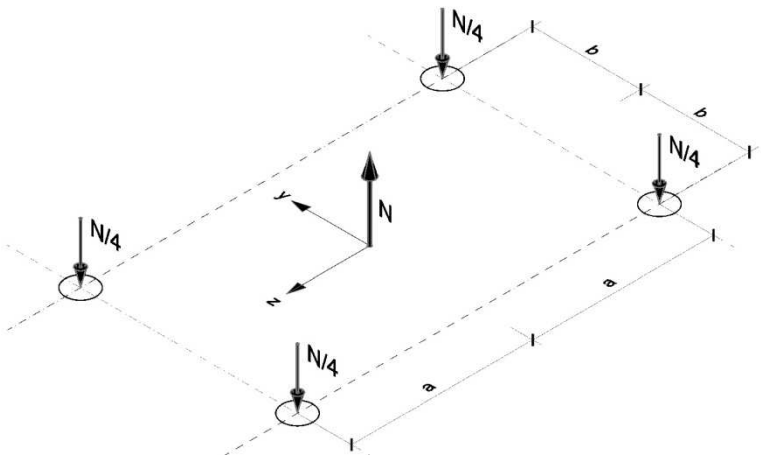


Abb. 5.19: Normalkräfte im ungeschädigten Vierpunktquerschnitt infolge N

Die Spannung σ_i errechnet sich durch Verteilung der Kraft auf die dem "Punkt" i entsprechende Fläche A.

$$\sigma_i = \frac{F_i}{A} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.66}$$

Diese Betrachtungsweise stellt die Motivation für die Erstellung eines neuen Rechenmodells für die Spannungsberechnung von <u>geschädigten</u> Vierpunktquerschnitten dar. Um die Schädigung der "Punkte", und somit die Umverteilung der Normalkräfte einfließen zu lassen, werden die festen Auflager durch Federn ersetzt, deren Federkonstanten c den Schädigungsgraden κ entsprechen (Abb. 5.20).

$$c_i = \kappa_i \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.67}$$

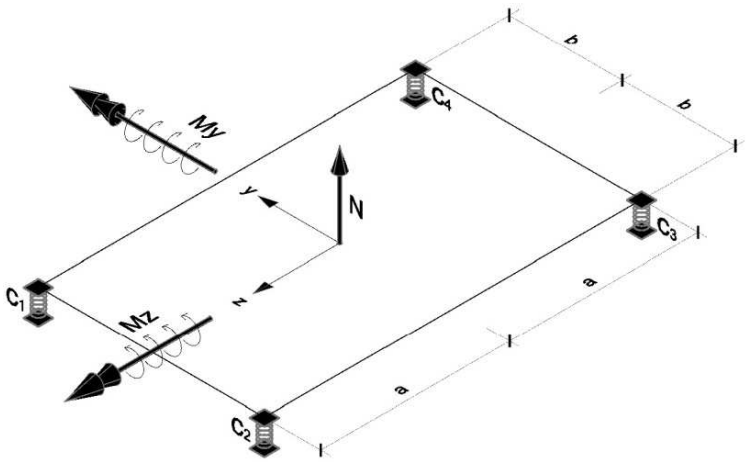


Abb. 5.20: Modell der starren Platte auf Federlagerung

Man ermittelt zunächst, abhängig von den Schädigungen und Querschnittsabmessungen, die Normalkräfte im Querschnitt und errechnet in einem zweiten Schritt die Spannungen in den jeweiligen "Punkten". Dies erspart eine Menge an Vorlaufrechnungen in Form von Querschnittswerten.

5.2.2.2 Ermittlung der Federkräfte

Die Federkräfte des einfach statisch unbestimmten räumlichen Systems werden getrennt nach den Einwirkungen M_y, M_z und N mit Hilfe der rechenoptimierten Fassung des Kraftgrößenverfahrens berechnet. Einen wesentlichen Bestandteil dieses Verfahrens nimmt das Prinzip virtueller Kräfte ein, das die Berechnung von Verschiebungsgrößen bei bekannten Schnittgrößen erlaubt. In einem ersten Schritt (System 0) wird das System durch Lösen der Auflagerbindung im Pkt.1 statisch bestimmt. Im zweiten Schritt (System 1) wird die zur gelösten Auflagerbindung arbeitskonjungierte Kraft $X_1 = 1$ als äußere Kraft auf das statisch bestimmte Grundsystem aufgebracht. Durch Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen werden die Lagerreaktionen beider Systeme ermittelt. In weiterer Folge werden die Verschiebungsgrößen δ_{10} und δ_{11} mit Hilfe des dafür geeigneten Prinzips virtueller Kräfte berechnet [2]:

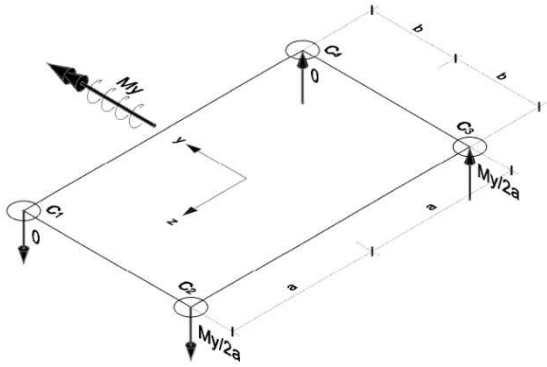
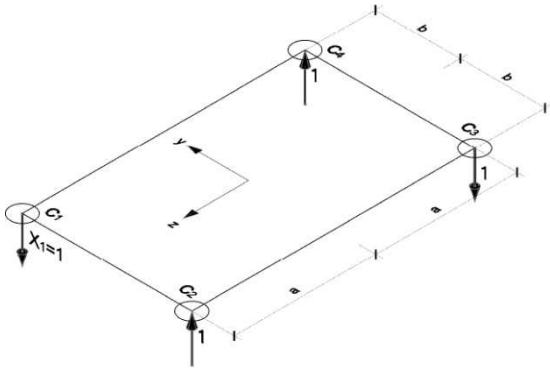
$$\delta \boldsymbol{A}^{(i)} + \delta \boldsymbol{A}^{(a)} = 0 \tag{5.68}$$

Alle geometrischen Randbedingungen des statisch unbestimmten Tragwerks werden nun für das statisch bestimmte Grundsystem vorgeschrieben. Dadurch wird erreicht, dass sich das statisch bestimmte Grundsystem so verhält wie das statisch unbestimmte Tragwerk. Die Formänderungsbedingung lautet [2]:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \delta_{10} = 0 \tag{5.69}$$

Aus dieser Gleichung resultiert die Berechnung der bisher quantitativ noch nicht festgelegten Kraftgröße des statisch unbestimmten Tragwerks, die der Federkraft im Pkt.1 entspricht. Durch eine Nachlaufrechnung erhält man die restlichen Federkräfte.

- **Biegemoment M_y**

	System 0	System 1
		
Pkt.	$\boldsymbol{F_i}$	$\boldsymbol{F_i}$
1	0	1
2	$\frac{M_y}{2a}$	-1
3	$-\frac{M_y}{2a}$	1
4	0	-1

Tab. 5.5: Ermittlung der Federkräfte infolge des Biegemoments M_y

Verschiebungsgrößen im Pkt.1:

$$\delta_{10} = -\frac{M_y}{2a} \cdot \frac{1}{c_2} - \frac{M_y}{2a} \cdot \frac{1}{c_3} = -\frac{M_y}{2a}\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right) \tag{5.70}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \tag{5.71}$$

Kraftgröße im Pkt.1:

$$X_{M_y} = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{M_y}{2a} \cdot \frac{\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}} \tag{5.72}$$

Federkräfte:

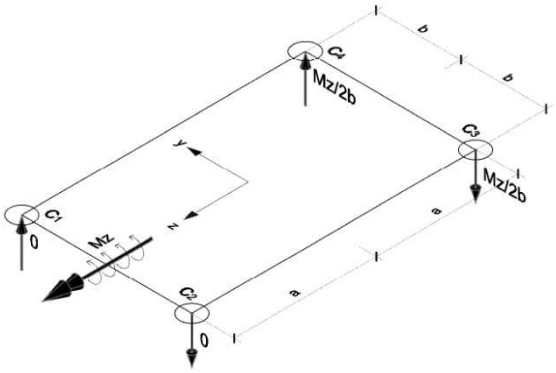
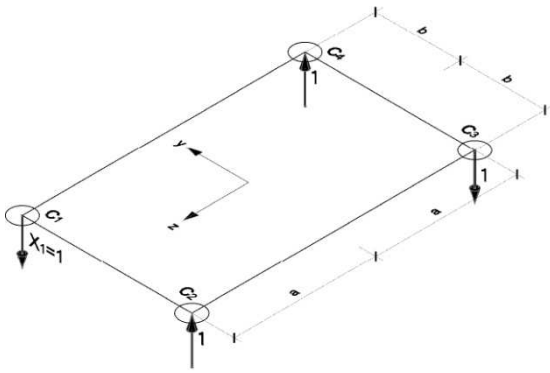
$$F_1 = X_{M_y} \tag{5.73}$$

$$F_2 = \frac{M_y}{2a} - X_{M_y} \tag{5.74}$$

$$F_3 = -\frac{M_y}{2a} + X_{M_y} \tag{5.75}$$

$$F_4 = -X_{M_y} \tag{5.76}$$

- **Biegemoment M_z**

	System 0	System 1
		
Pkt.	$\boldsymbol{F_i}$	$\boldsymbol{F_i}$
1	0	1
2	0	-1
3	$\frac{Mz}{2b}$	1
4	$-\frac{Mz}{2b}$	-1

Tab. 5.6: Ermittlung der Federkräfte infolge des Biegemoments M_z

Verschiebungsgrößen im Pkt.1:

$$\delta_{10} = \frac{M_z}{2b} \cdot \frac{1}{c_3} + \frac{M_z}{2b} \cdot \frac{1}{c_4} = \frac{M_z}{2b}\left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}\right) \tag{5.77}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \tag{5.78}$$

Kraftgröße im Pkt.1:

$$X_{Mz} = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{M_z}{2b} \cdot \frac{\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}} \tag{5.79}$$

Federkräfte:

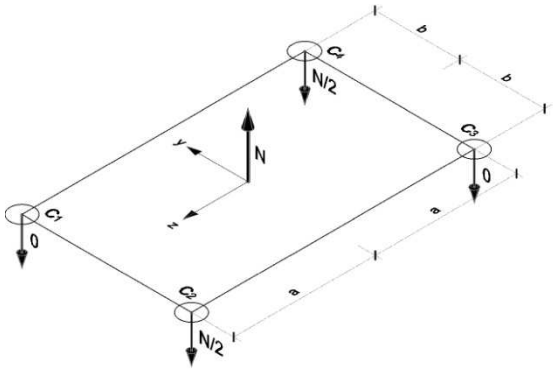
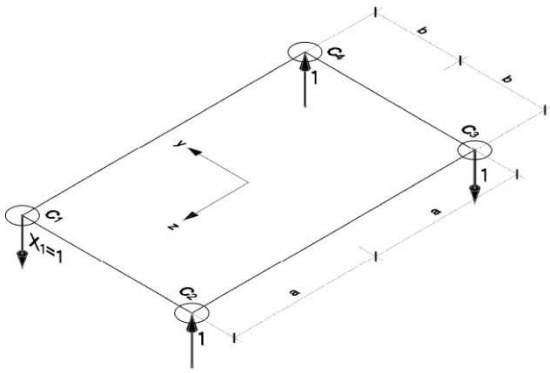
$$F_1 = X_{M_z} \tag{5.80}$$

$$F_2 = -X_{M_z} \tag{5.81}$$

$$F_3 = \frac{M_z}{2b} + X_{M_z} \tag{5.82}$$

$$F_4 = -\frac{M_z}{2b} - X_{M_z} \tag{5.83}$$

- **Normalkraft N**

	System 0	System 1
		
Pkt.	$\boldsymbol{F_i}$	$\boldsymbol{F_i}$
1	0	1
2	$\frac{N}{2}$	-1
3	0	1
4	$\frac{N}{2}$	-1

Tab. 5.7: Ermittlung der Federkräfte infolge der Normalkraft N

Verschiebungsgrößen im Pkt.1:

$$\delta_{10} = -\frac{N}{2} \cdot \frac{1}{c_2} - \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{c_4} = -\frac{N}{2}\left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_4}\right) \tag{5.84}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \tag{5.85}$$

Kraftgröße im Pkt.1:

$$X_N = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{N}{2} \cdot \frac{\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_4}}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}} \tag{5.86}$$

Federkräfte:

$$F_1 = X_N \tag{5.87}$$

$$F_2 = \frac{N}{2} - X_N \tag{5.88}$$

$$F_3 = X_N \tag{5.89}$$

$$F_4 = \frac{N}{2} - X_N \tag{5.90}$$

5.2.2.3 Ermittlung der Spannungen

Die berechneten Federkräfte entsprechen den in den jeweiligen “Punkten“ vorhandenen Normalkräften. Da dem “Punkt“ i per Definition ausschließlich eine (geschädigte) Querschnittfläche und kein Eigenträgheitsmoment zugeschrieben wird, erhält man die Spannung durch Division der Kraft durch die Fläche:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{c_i A} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{5.91}$$

Aus der linearen Stabtheorie resultiert das Superpositionsgesetz und somit die Möglichkeit, die aus den unterschiedlichen Schnittgrößen resultierenden Spannungen zu addieren. Die aus der Bernoulli-Hypothese hervorgehende Tatsache, dass es sich um eine ebene Spannungsverteilung handelt, spielt für die Erstellung eines Rechenmodells für geschädigte reale Querschnitte eine wesentliche Rolle (Kap. 7).

5.2.3 Beispiel

Der folgende Sonderfall soll dazu dienen, dieses Modell zur Spannungsberechnung am Vierpunktquerschnitt anzuwenden. Im Zuge dessen wird auf das Ergebnis des Querschnitts mit punktsymmetrischer Schädigung (Kap. 5.2.1.4) infolge der einwirkenden Schnittgröße M_y eingegangen. Die zugehörige Ableitung der Spannung infolge Schädigung (in den geschädigten “Punkten“) kann durch die Funktion

$$f(\kappa) = \frac{\sigma(M_y, \kappa)}{\sigma(M_y, \kappa = 1)} = \frac{1}{\kappa} \tag{5.92}$$

beschrieben werden. Diese wird nun mit Hilfe des Modelles der starren Platte analytisch hergeleitet. Es wird getrennt für den geschädigten und ungeschädigten $(c_i = 1)$ Querschnitt die Federkraft im Pkt.1 ermittelt und anschließend die Spannung berechnet. Das Verhältnis der Ergebnisse liefert Gl. (5.92).

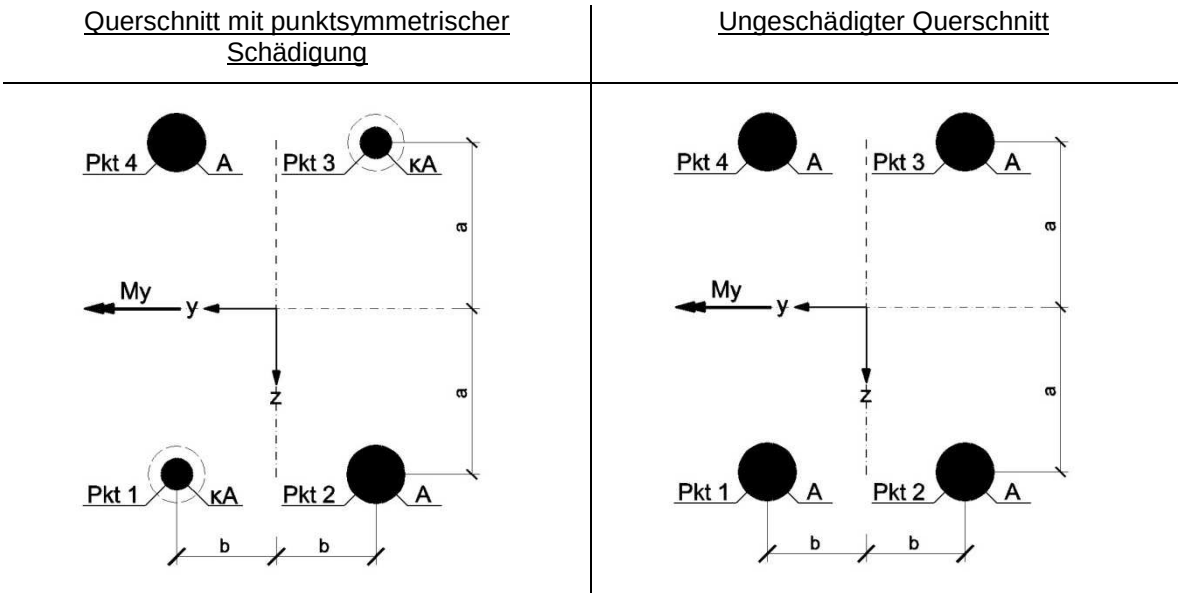


Abb. 5.21: Beispiele zur Anwendung des Modelles der starren Platte auf Federlagerung

Querschnitt mit punktsymmetrischer Schädigung	Ungeschädigter Querschnitt
$c_1 = c_3 = \kappa\ ;\ c_2 = c_4 = 1$	$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$
$X_{M_y} = F_1 = \frac{M_y}{2a} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)}{2\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)} = \frac{M_y}{4a}$	$X_{M_y} = F_1 = \frac{M_y}{2a} \cdot \frac{2}{4} = \frac{M_y}{4a}$
$\sigma_1(M_y, \kappa) = \frac{F_1}{\kappa A} = \frac{M_y}{4a\kappa A}$	$\sigma_1(M_y, \kappa = 1) = \frac{F_1}{A} = \frac{M_y}{4aA}$
$f_1(\kappa) = \frac{\sigma_1(M_y, \kappa)}{\sigma_1(M_y, \kappa = 1)} = \frac{\frac{1}{4a\kappa A}}{\frac{1}{4aA}} = \frac{1}{\kappa}$	

Tab. 5.8: Berechnungen mit Hilfe des Modelles der starren Platte auf Federlagerung

5.2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde aufgezeigt, durch welches einfache und zugleich anschauliche Modell sich der allgemein geschädigte Vierpunktquerschnitt beschreiben lässt. Mit Hilfe des Modelles der starren Platte umgeht man sämtliche Vorlaufrechnungen wie die Berechnung der exakten Querschnittswerte in Abhängigkeit der Schädigung des Punktquerschnitts. Während im Kapitel 5.2.1 Spezialfälle mit einer einheitlichen Schädigung κ untersucht wurden, lässt das Modell der starren Platte eine einfache Spannungsberechnung beliebig geschädigter Vierpunktquerschnitte zu.

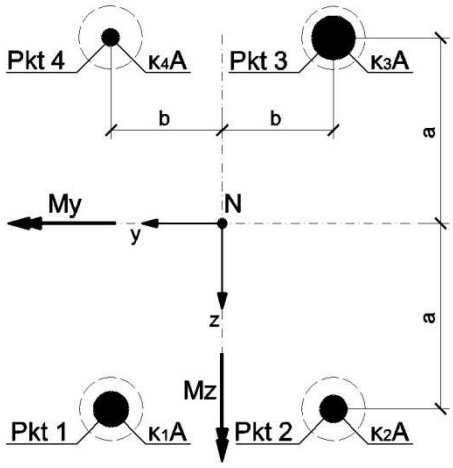


Abb. 5.22: Allgemein geschädigter Vierpunktquerschnitt

Die Federkräfte des Modelles der starren Platte entsprechen den aus dem inneren Gleichgewicht resultierenden Normalkräften F_i in den vier "Punkten". Die Berechnung der Spannungen σ_i erfolgt mit Hilfe dieser Normalkräfte und anschließender Superposition. Tab. 5.9 enthält eine Zusammenfassung der Rechenschritte.

$\boldsymbol{M_y}$	$\boldsymbol{M_z}$	$\boldsymbol{N}$
$X_{M_y} = \frac{M_y}{2a} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$	$X_{Mz} = -\frac{M_z}{2b} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$	$X_N = \frac{N}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_4}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$
$F_1 = X_{M_y}$	$F_1 = X_{M_z}$	$F_1 = X_N$
$F_2 = \frac{M_y}{2a} - X_{M_y}$	$F_2 = -X_{M_z}$	$F_2 = \frac{N}{2} - X_N$
$F_3 = -\frac{M_y}{2a} + X_{M_y}$	$F_3 = \frac{M_z}{2b} + X_{M_z}$	$F_3 = X_N$
$F_4 = -X_{M_y}$	$F_4 = -\frac{M_z}{2b} - X_{M_z}$	$F_4 = \frac{N}{2} - X_N$
$\sigma_i(M_y) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(M_z) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(N) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$
$\sigma_i(M_y, M_z, N) = \sigma_i(M_y) + \sigma_i(M_z) + \sigma_i(N) \quad i = 1,2,3,4$		

Tab. 5.9: Zusammenfassung des Modelles der starren Platte auf Federlagerung

Für die Spannungsberechnung mit Hilfe der exakten Querschnittswerte ist die Ermittlung der Hauptachsen im geschädigten Querschnitt erforderlich, um die Größen $A_{\eta\eta}$ bzw. $A_{\zeta\zeta}$ zu erhalten (vgl. Kap. 3.3.2 bzw. Kap. 3.3.3). Weiters müssen die Koordinaten der “Punkte“ sowie die Schnittgrößen (vgl. Tab. 5.3) in das neue Koordinatensystem transformiert werden. Durch Vergleich mit der oberen Tabelle ist gezeigt, dass sich die Spannungsberechnung mit Hilfe des neuen Modelles wesentlich einfacher gestaltet.

6 Übergang auf reale Querschnitte

6.1 Allgemeines

In den vorangegangenen Kapiteln wurde auf die Spannungsberechnung für Zwei- und Vierpunktquerschnitte mit speziellen Schädigungen eingegangen. In diesem Kapitel folgt der Übergang auf die Spannungsberechnung von geschädigten realen Querschnitten. Sämtliche Fachwerkstäbe der Eisenbahnbrücke Urfahr bestehen aus vier L-Profilen, wobei sie durch die Art der Orientierung in zwei Typen von Querschnitten unterschieden werden können (Abb. 4.1). Sie entsprechen üblichen Querschnitten historischer Fachwerkbrücken aus Stahl.

Es werden die Gemeinsamkeiten beziehungsweise Unterschiede zu den bereits untersuchten Spezialfällen der Vierpunktquerschnitte aufgezeigt (Kap. 5.2.1). Dieser Vergleich dient dazu, den Einfluss der Eigenträgheitsmomente der L-Profile auf die Veränderung der Hauptachsen im Zuge der Schädigung zu erfassen.

Die für die Spannungsberechnung erforderlichen Gesamtquerschnittswerte, d.h. der Flächeninhalte, die statischen Momente, Trägheitsmomente, Widerstandsmomente usw., sind in der herkömmlichen Weise schnell auszurechnen. Aufgrund der Motivation, die Spannungen in Abhängigkeit unterschiedlicher Schädigungen des Querschnitts zu ermitteln, wurde die Berechnung der Querschnittswerte programmtechnisch erfasst [4].

Es wird ein Verfahren verwendet, das für die Berechnung beliebiger Querschnitte eine allgemein gültige Programmierung zulässt. Es beruht auf dem Gaußschen Integralsatz der Funktionentheorie. Der Querschnitt wird durch die Koordinaten der Punkte y_i, z_i definiert, die ihrerseits von den Querschnittsabmessungen sowie von der Schädigung abhängen. Der Flächeninhalt berechnet sich mit der Formel [3]:

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i \cdot z_{i+1} - y_i \cdot y_{i+1}) \tag{6.1}$$

Die Koordinaten der Punkte sind in mathematisch positiver Richtung einzusetzen; $i = 1$ und $i = n + 1$ bezeichnen denselben Endpunkt, da die Randlinie stets geschlossen ist. Mehrfach zusammenhängende Bereiche werden einfach zusammenhängend gemacht und sind so zu umfahren, dass das Flächeninnere beim durchlaufen der Randlinien zur Linken liegt [3].

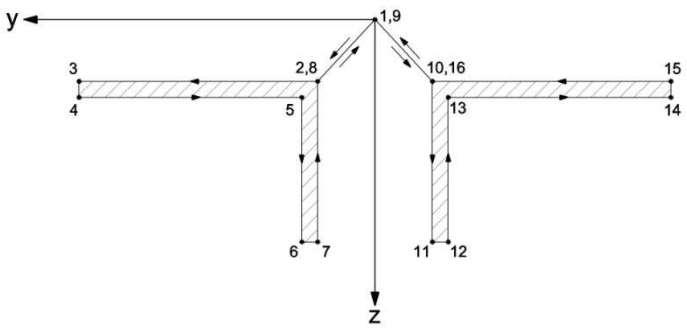


Abb. 6.1: Polygonzug zur Berechnung der Querschnittswerte

Nach dem gleichen Prinzip erfolgt die Ermittlung der restlichen Querschnittswerte [3]:

$$A_y = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n} [(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)(z_i + z_{i+1})] \tag{6.2}$$

$$A_z = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n} [(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)(y_i + y_{i+1})] \tag{6.3}$$

Einsetzen von Gl. (6.2) in Gl. (3.8) und Gl. (6.3) in Gl. (3.9) liefert die Abstände zum Schwerpunkt y_s bzw. z_s.

$$A_{yy} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{n} \{(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)([z_i + z_{i+1}]^2 - z_i \cdot z_{i+1})\} \tag{6.4}$$

$$A_{zz} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{n} \{(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)([y_i + y_{i+1}]^2 - y_i \cdot y_{i+1})\} \tag{6.5}$$

Einsetzen von Gl. (6.4) in Gl. (3.10) und Gl. (6.5) in Gl. (3.11) liefert die Trägheitsmomente $A_{\hat{y}\hat{y}}$ bzw. $A_{\hat{z}\hat{z}}$ (Einheitssystem).

$$A_{yz} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\{(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)\left([y_i + y_{i+1}][z_i + z_{i+1}] - \frac{1}{2}(y_i \cdot z_{i+1} + y_{i+1} \cdot z_i)\right)\right\} \tag{6.6}$$

Einsetzen von Gl. (6.6) in Gl. (3.12) liefert das Zentrifugalmoment $A_{\hat{y}\hat{z}}$ (Einheitssystem). Mit den bekannten Querschnittswerten errechnet sich die Neigung der Hauptachsen (α) durch Einsetzen in Gl. (3.13). Für die Berechnung der Hauptträgheitsmomente ist es Vorteilhaft, die nachstehend angeführten Beziehungen zu benutzen, da die Ergebnisse mit den zugehörigen Vorzeichen behaftet sind.

$$A_{\eta\eta} = \frac{A_{\hat{y}\hat{y}} + A_{\hat{z}\hat{z}}}{2} + \left[\frac{A_{\hat{y}\hat{y}} - A_{\hat{z}\hat{z}}}{2} \cdot \cos 2\alpha - A_{\hat{y}\hat{z}} \cdot \sin 2\alpha\right] \tag{6.7}$$

$$A_{\zeta\zeta} = \frac{A_{\hat{y}\hat{y}} + A_{\hat{z}\hat{z}}}{2} - \left[\frac{A_{\hat{y}\hat{y}} - A_{\hat{z}\hat{z}}}{2} \cdot \cos 2\alpha - A_{\hat{y}\hat{z}} \cdot \sin 2\alpha\right] \tag{6.8}$$

Aufgrund der Verschiebung und Verdrehung der Hauptachsen müssen die Koordinaten der Punkte gemäß Gl. (3.15) bzw. Gl. (3.16) transformiert werden. Die auf das geschädigte System einwirkenden äußeren Schnittgrößen müssen ebenfalls umgerechnet werden. Der Zusammenhang zwischen den ursprünglich einwirkenden Schnittgrößen und den auf den geschädigten Querschnitt einwirkenden Schnittgrößen ist in Abb. 5.9 bzw. Tab. 5.3. dargestellt.

Die aus den Schnittgrößen resultierenden Spannungen errechnen sich nach Gl. (5.29).

6.2 Einschränkungen

Für den Vergleich zu den Punktquerschnitten wird der in Abb. 4.1 dargestellte Querschnitt 1 mit dem bei der Eisenbahnbrücke Urfahr größten vorkommenden L-Profil (L.150.100.10) gewählt.

Die Hauptträgheitsmomente des ungeschädigten realen Querschnitts setzen sich aus den Steiner-Anteilen der Teilflächen zum Gesamtschwerpunkt und dem Anteil aus den Eigenträgheitsmomenten ($A_{yy}{}^{eig}$, $A_{zz}{}^{eig}$) der L-Profile zusammen. Die Querschnittsfläche eines L-Profils wird mit A bezeichnet.

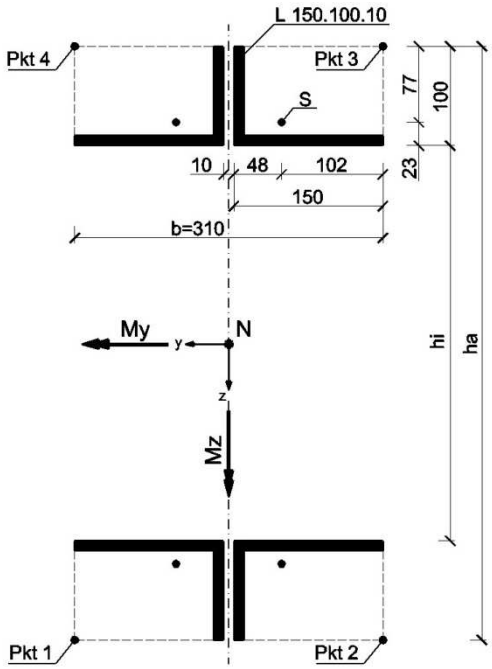


Abb. 6.2: Ungeschädigter Querschnitt 1

$$A_{zz} = 4 \cdot A \cdot \left(\frac{hi}{2} + 23\right)^2 + 4 \cdot A_{zz}{}^{eig} \tag{6.9}$$

$$A_{yy} = 4 \cdot A \cdot \left(\frac{10}{2} + 48\right)^2 + 4 \cdot A_{yy}{}^{eig} \tag{6.10}$$

Um den Einfluss der Eigenträgheitsmomente (L-Profile) auf die Entwicklung der Spannungen infolge Schädigungsfall und Schädigungsgrad für unterschiedliche Größen hi zu erfassen, werden abhängig von der betrachteten Schnittgröße Kurvenparameter definiert, die aus dem Verhältnis der Querschnittsabmessungen resultieren.

- **Biegemoment M_y und Normalkraft N**

$$200 \leq hi \leq 398\ [mm] \quad ha = hi + 2 \cdot 100\ [mm]$$
$$2{,}00 \geq \frac{ha}{hi} \geq 1{,}50\ \ [-] \tag{6.11}$$

- **Biegemoment M_z**

$$310 \leq hi \leq 930\ [mm] \quad b = 310\ [mm]$$
$$1{,}00 \geq \frac{b}{hi} \geq 0{,}33\ \ [-] \tag{6.12}$$

Querschnitte der Eisenbahnbrücke Urfahr: $hi = 398\ [mm]$ (siehe Abb. 4.1)

$$\frac{ha}{hi} = 1{,}50 \qquad \frac{b}{hi} = 0{,}78$$

Es wird die Vereinfachung getroffen, sich bei der Dokumentation der Spannungen auf vier Punkte, die den kompletten Querschnitt einschließen, zu beschränken (Abb. 6.2). Genau genommen liegen diese Punkte nicht auf dem Querschnitt. Aufgrund der getrennten Untersuchung der Spannungen bezüglich der einwirkenden Schnittgröße (M_y, M_z, N), wird diese Betrachtungsweise erst dann unwirtschaftlich, wenn es zur Hauptachsendrehung kommt (punktsymmetrische Schädigungsanteile).

Die Kombination aus der Definition der für die Spannungsauswertung betrachteten Punkte und der Einschränkung hinsichtlich der Querschnittsform samt Abmessungen ist die Voraussetzung für einen anschaulichen Vergleich zu den Punktquerschnitten und zu dessen Schädigungsfällen. Für das folgende Kapitel gelten die Abkürzungen:

PQS ... Punktquerschnitt

RQS ... Realer Querschnitt

6.3 Vergleich von Punktquerschnitten mit realen Querschnitten

Aus einer Querschnittsreduzierung infolge Schädigung resultiert eine Verschiebung bzw. Verdrehung der Hauptachsen. Analog zu den Punktquerschnitten wird der Querschnitt 1 getrennt nach der einwirkenden Schnittgröße M_y, M_z sowie N untersucht und die daraus berechneten Spannungen $\sigma(\kappa)$ des geschädigten Querschnitts mit den Spannungen $\sigma(\kappa = 1)$ des ungeschädigten Querschnitts verglichen. Die untersuchten Schädigungsfälle sind in Abb. 6.3 dargestellt.

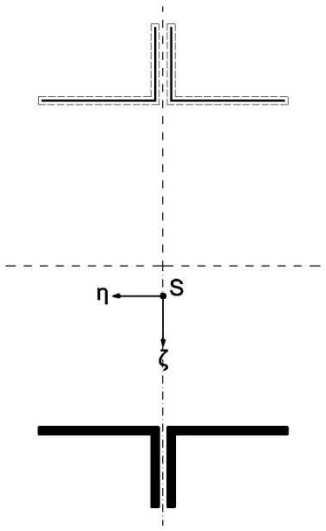
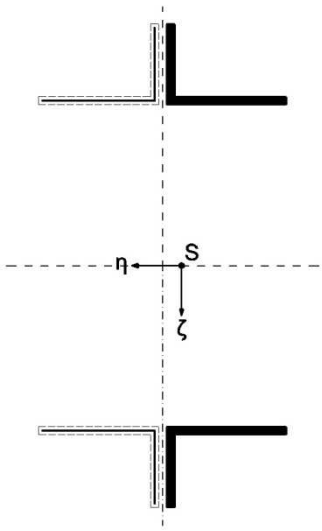
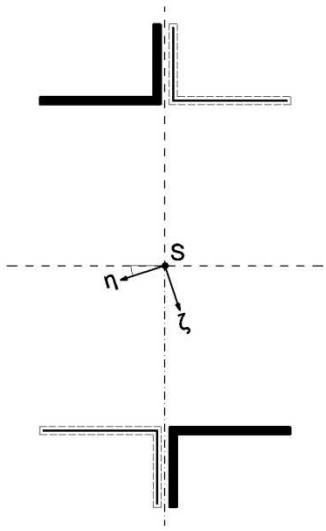
Einfachsymmetrische Schädigung 1	**Einfachsymmetrische Schädigung 2**	**Punktsymmetrische Schädigung**
		
Hauptachsenverschiebung in z-Richtung	Hauptachsenverschiebung in y-Richtung	Hauptachsendrehung

Abb. 6.3: Schädigungfälle realer Querschnitte

Sie wurden so gewählt, dass man die Unterschiede gegenüber den unter Kapitel 5.2.1 untersuchten Schädigungsfällen der Punktquerschnitte erfasst. Die ersten beiden Fälle sind dadurch gekennzeichnet, dass sich im Zuge der Schädigung ausschließlich eine Schwerpunktverschiebung in eine Achsenrichtung einstellt. Im dritten Fall kommt es bei unveränderter Schwerpunktlage zu einer Hauptachsendrehung. Die Ergebnisse der Spannungsberechnung werden mit den zu den Vierpunktquerschnitten zugehörigen, analytisch hergeleiteten Funktionen verglichen. Abhängig von Schädigungsfall, einwirkender Schnittgröße und betrachteten Punkt stellte sich eine der folgenden Funktionen ein (vgl. Tab. 5.4):

$$f^{(1)}(\kappa) = \frac{1}{\kappa} \tag{6.13}$$

$$f^{(2)}(\kappa) = 1 \tag{6.14}$$

$$f^{(3)}(\kappa) = \frac{2}{(1+\kappa)} \tag{6.15}$$

6.3.1 Einfachsymmetrische Schädigung 1

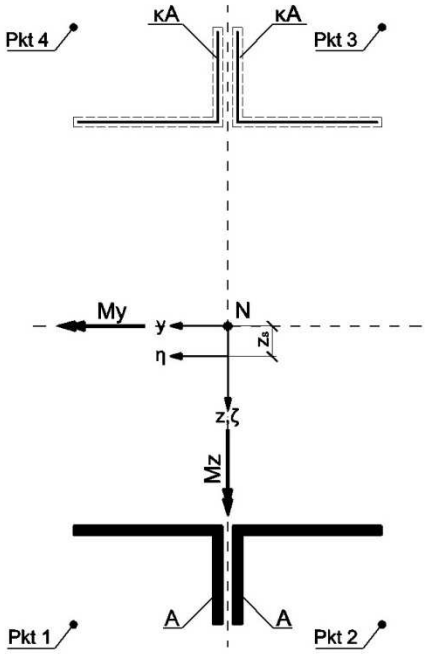


Abb. 6.4: Realer Querschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung 1

Die im geschädigten Querschnitt wirkenden Schnittgrößen lauten:

$$M_\eta = M_y - N z_s \tag{6.16}$$

$$M_\zeta = M_z \tag{6.17}$$

Durch Einsetzten in Gl. (5.29) resultiert:

$$\sigma(M_y) = \frac{M_y}{A_{\zeta\zeta}}\zeta \tag{6.18}$$

$$\sigma(M_z) = -\frac{M_z}{A_{\eta\eta}}\eta \tag{6.19}$$

$$\sigma(N) = \frac{N}{A_G} - \frac{Nz_s}{A_{\zeta\zeta}}\zeta \tag{6.20}$$

Die Eigenträgheitsmomente der L-Profile haben auf das Verhältnis von $\sigma(M_z, \kappa)$ zu $\sigma(M_z, \kappa = 1)$ keinen Einfluss. Die Spannungen $\sigma(M_z)$ verändern sich im Zuge der Schädigung somit unabhängig von den Eigenträgheitsmomenten.

Das Trägheitsmoment $A_{\zeta\zeta}$ setzt sich hauptsächlich aus den Steiner-Anteilen der Teilflächen zum Gesamtschwerpunkt in z-Richtung zusammen. Die Eigenträgheitsmomente der L-Profile nehmen somit bei der Spannungsberechnung eine untergeordnete Rolle ein. Wie den folgenden Abbildungen zu entnehmen ist, stellt die Spannungsberechnung $\sigma(M_y)$ bzw. $\sigma(N)$ des Punktquerschnitts eine akzeptable Näherung für die des realen Querschnitts dar.

- **Biegemoment M_y**

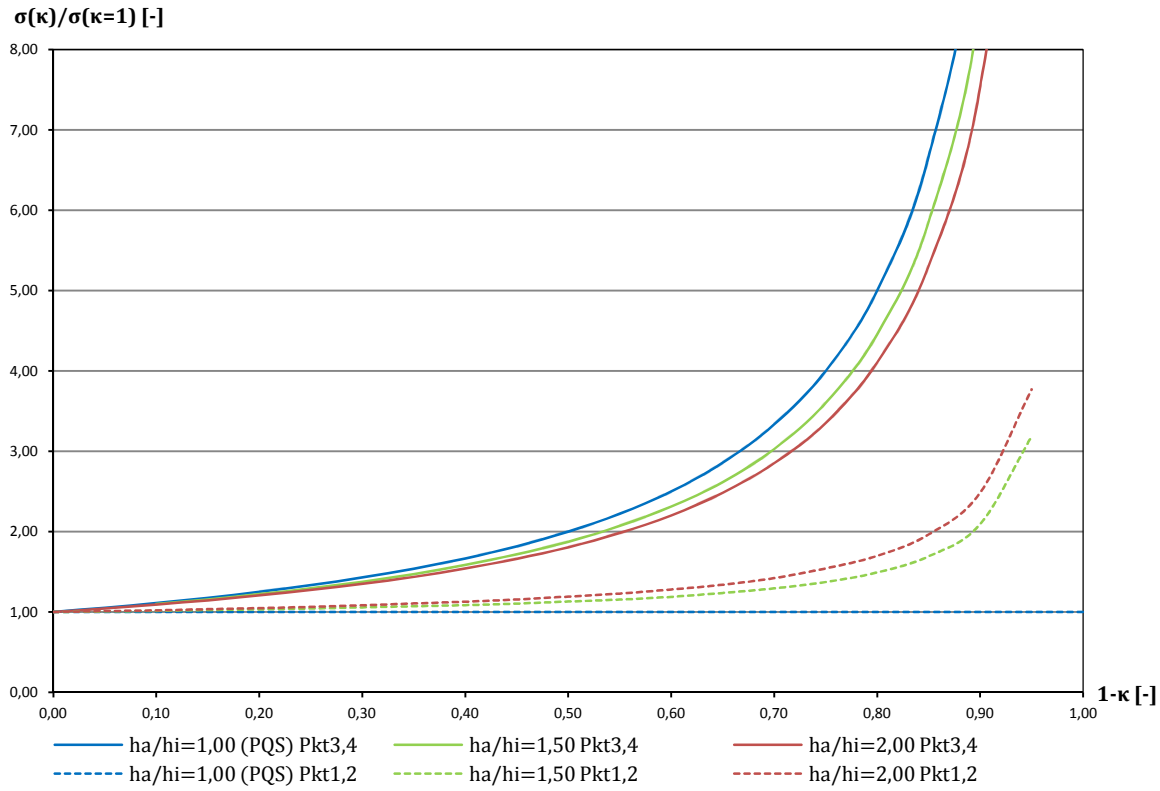


Abb. 6.5: Einfachsymmetrische Schädigung 1: $\sigma(M_y, \kappa)/\sigma(M_y, \kappa = 1)$

- **Biegemoment M_z**

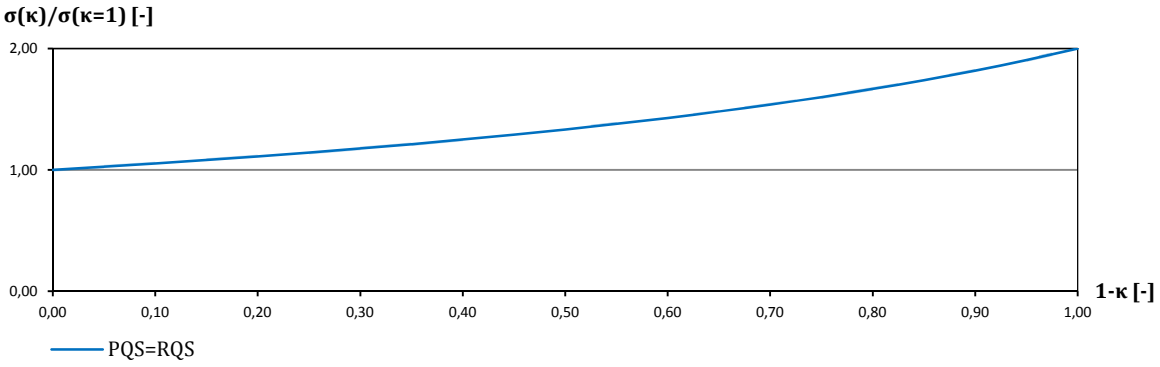


Abb. 6.6: Einfachsymmetrische Schädigung 1: $\sigma(M_z, \kappa)/\sigma(M_z, \kappa = 1)$

- **Normalkraft N**

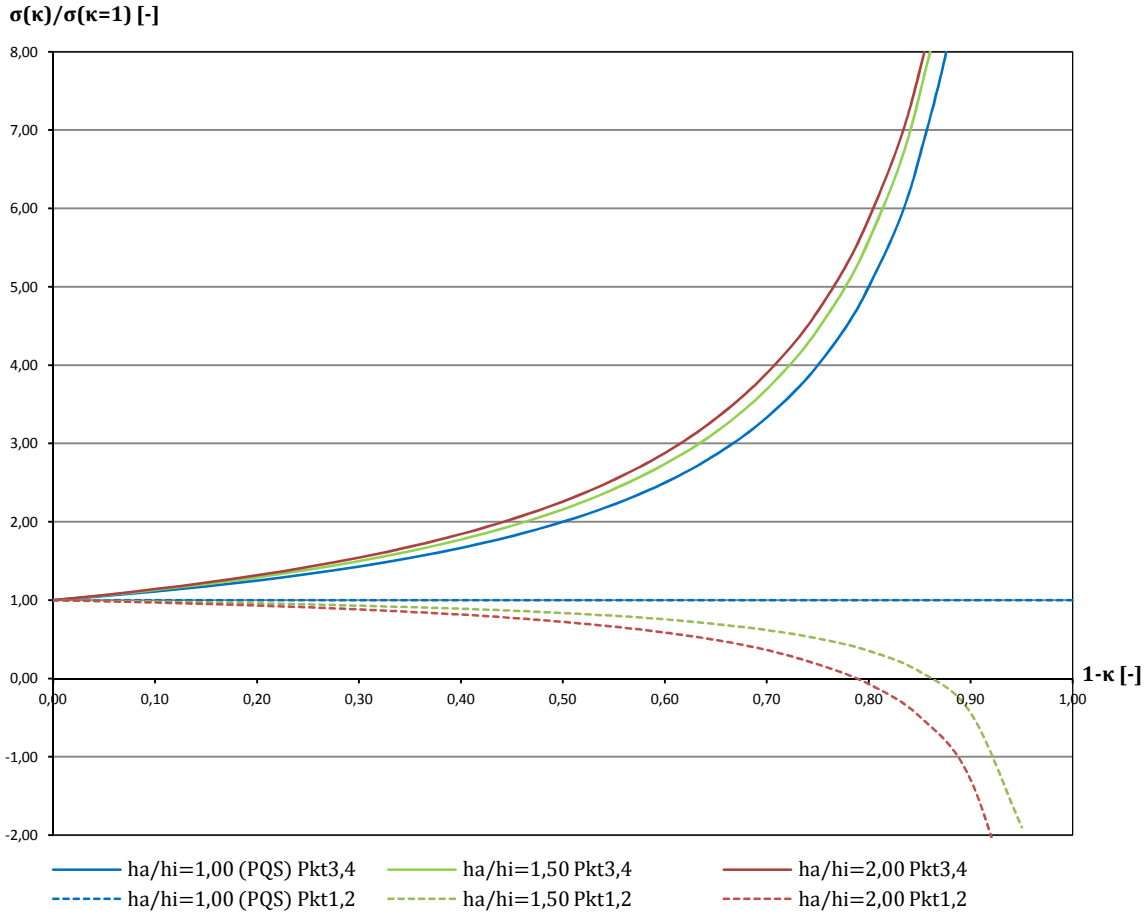


Abb. 6.7: Einfachsymmetrische Schädigung 1: $\sigma(N, \kappa)/\sigma(N, \kappa = 1)$

6.3.2 Einfachsymmetrische Schädigung 2

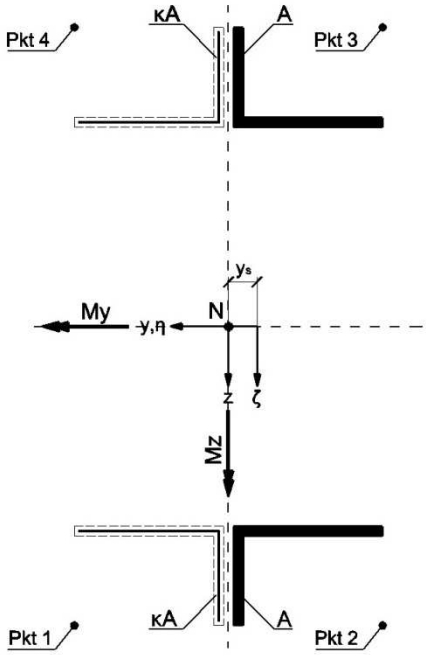


Abb. 6.8: Realer Querschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung 2

Die im geschädigten Querschnitt wirkenden Schnittgrößen lauten:

$$M_\eta = M_y \tag{6.21}$$

$$M_\zeta = M_z + N y_s \tag{6.22}$$

Durch Einsetzten in Gl. (5.29) resultiert:

$$\sigma(M_y) = \frac{M_y}{A_{\zeta\zeta}} \zeta \tag{6.23}$$

$$\sigma(M_z) = -\frac{M_z}{A_{\eta\eta}} \eta \tag{6.24}$$

$$\sigma(N) = \frac{N}{A_G} - \frac{N y_s}{A_{\eta\eta}} \eta \tag{6.25}$$

Die Eigenträgheitsmomente der L-Profile haben auf das Verhältnis von $\sigma(M_y, \kappa)$ zu $\sigma(M_y, \kappa = 1)$ keinen Einfluss. Die Spannungen $\sigma(M_y)$ verändern sich im Zuge der Schädigung somit unabhängig von den Eigenträgheitsmomenten.

Durch den geringen Abstand der Teilflächen zum Gesamtschwerpunkt in y-Richtung liefern die Eigenträgheitsmomente der L-Profile einen wesentlichen Anteil zum Gesamtwert von $A_{\eta\eta}$. Die Ergebnisse der Spannungsberechnung $\sigma(M_z)$ bzw. $\sigma(N)$ des Punktquerschnitts können somit bei großen Schädigungen nicht als Näherung herangezogen werden.

- **Biegemoment M_y**

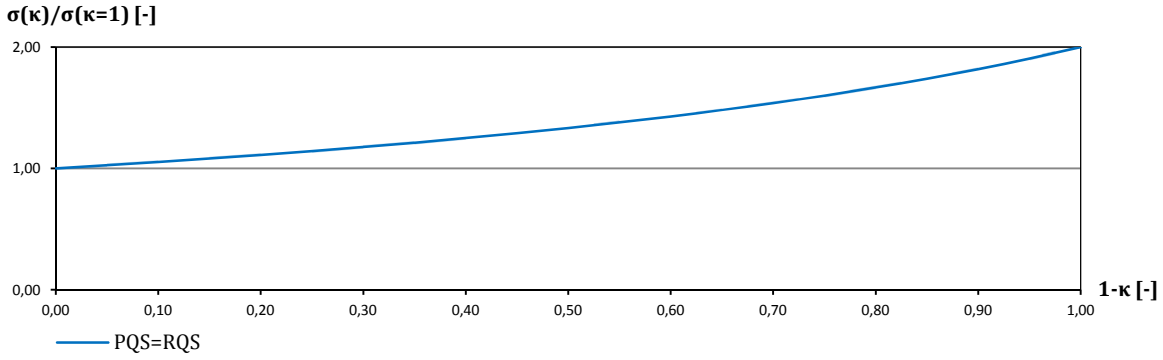


Abb. 6.9: Einfachsymmetrische Schädigung 2: $\sigma(M_y, \kappa)/\sigma(M_y, \kappa = 1)$

- **Biegemoment M_z**

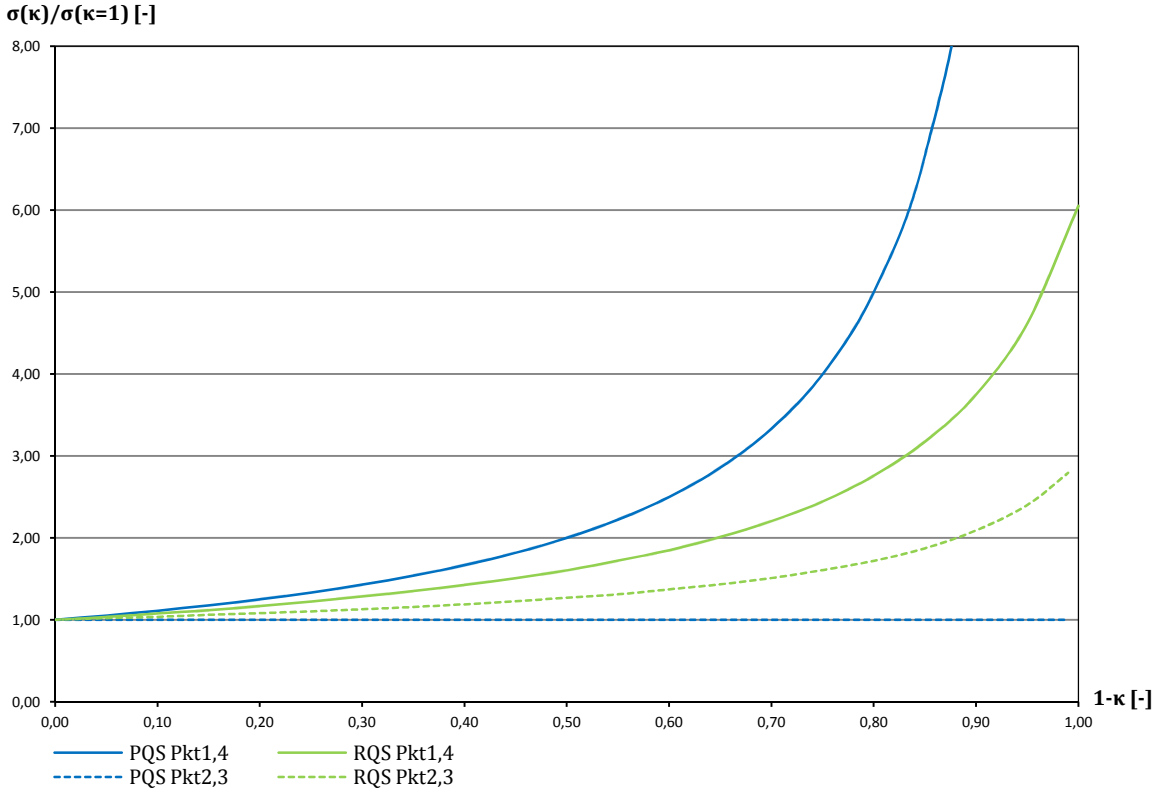


Abb. 6.10: Einfachsymmetrische Schädigung 2: $\sigma(M_z, \kappa)/\sigma(M_z, \kappa = 1)$

- **Normalkraft N**

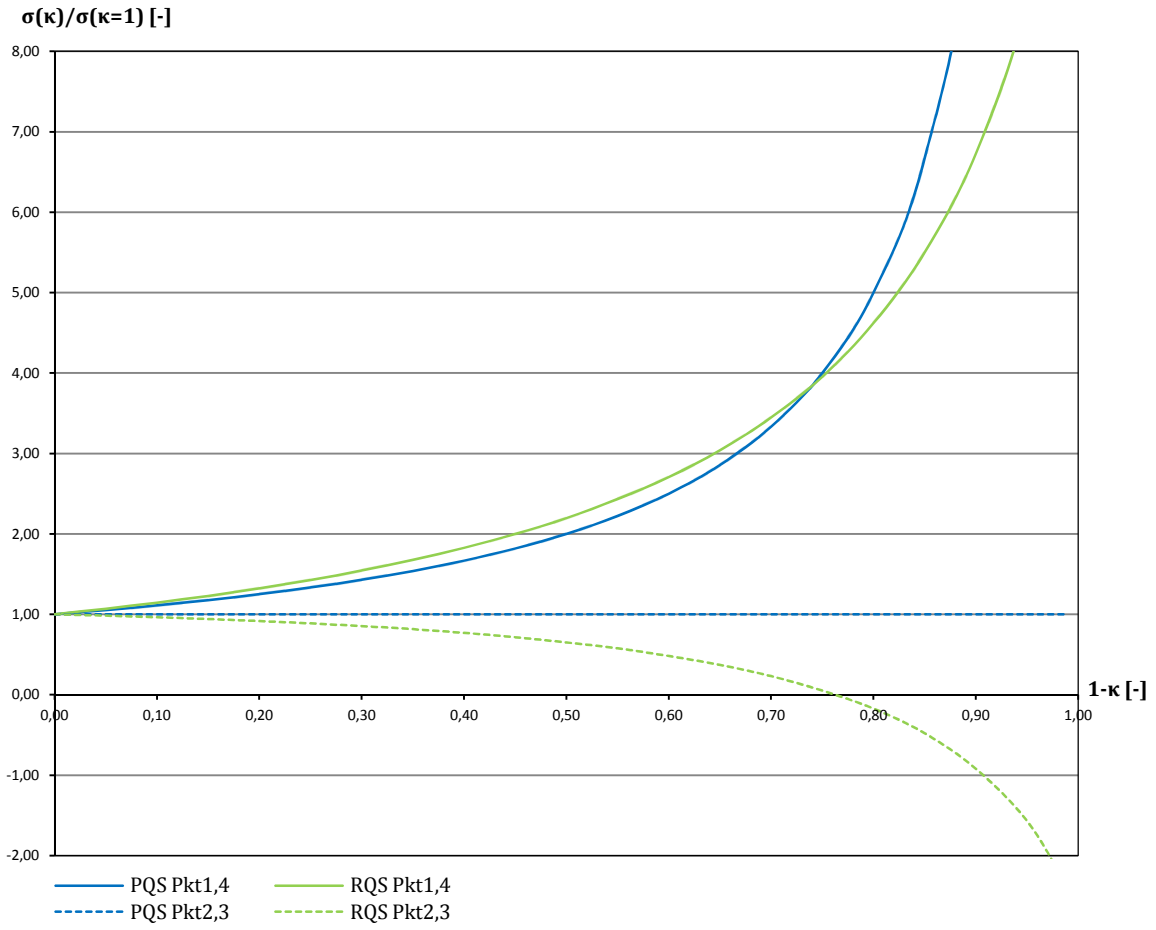


Abb. 6.11: Einfachsymmetrische Schädigung 2: $\sigma(N,\kappa)/\sigma(N,\kappa=1)$

6.3.3 Punktsymmetrische Schädigung

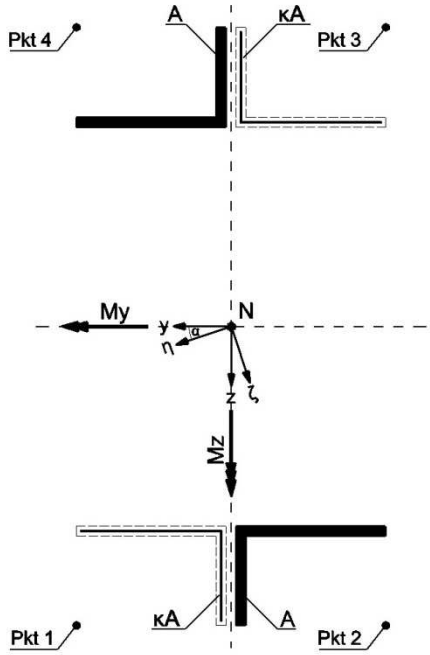


Abb. 6.12: Realer Querschnitt mit punktsymmetrischer Schädigung

Die im geschädigten Querschnitt wirkenden Schnittgrößen lauten:

$$M_\eta = M_y \cos(\alpha) + M_z \sin(\alpha) \tag{6.26}$$

$$M_\zeta = M_z \cos(\alpha) - M_y \sin(\alpha) \tag{6.27}$$

Durch Einsetzten in Gl. (5.29) resultiert:

$$\sigma(M_y) = \frac{M_y \cos(\alpha)}{A_{\zeta\zeta}}\zeta + \frac{M_y \sin(\alpha)}{A_{\eta\eta}}\eta \tag{6.28}$$

$$\sigma(M_z) = \frac{M_z \sin(\alpha)}{A_{\zeta\zeta}}\zeta - \frac{M_z \cos(\alpha)}{A_{\eta\eta}}\eta \tag{6.29}$$

$$\sigma(N) = \frac{N}{A_G} \tag{6.30}$$

Die Schwerpunktlage bleibt im Zuge der Schädigung unverändert. Die Entwicklung der Spannungen $\sigma(N)$ infolge Schädigung ist somit ausschließlich von der Gesamtquerschnittsfläche A_G abhängig und ident zu jener des Punktquerschnitts.

Wie den folgenden Abbildungen zu entnehmen ist, stellt die Hauptachsendrehung das größte Problem in Bezug auf eine Näherung durch Punktquerschnitte dar. Dies resultiert aus der Tatsache, dass die Eigenträgheitsmomente der L-Profile einen wesentlichen Einfluss auf den Drehwinkel α und somit auf die Berechnung von $A_{\eta\eta}$ bzw. $A_{\zeta\zeta}$ haben. Es kann lediglich festgehalten werden, dass die Abweichung von den Punktquerschnitten bis zu einer Schädigung von $\kappa = 0{,}7$ $(1 - \kappa = 0{,}3)$ tolerierbar erscheint.

- **Biegemoment M_y**

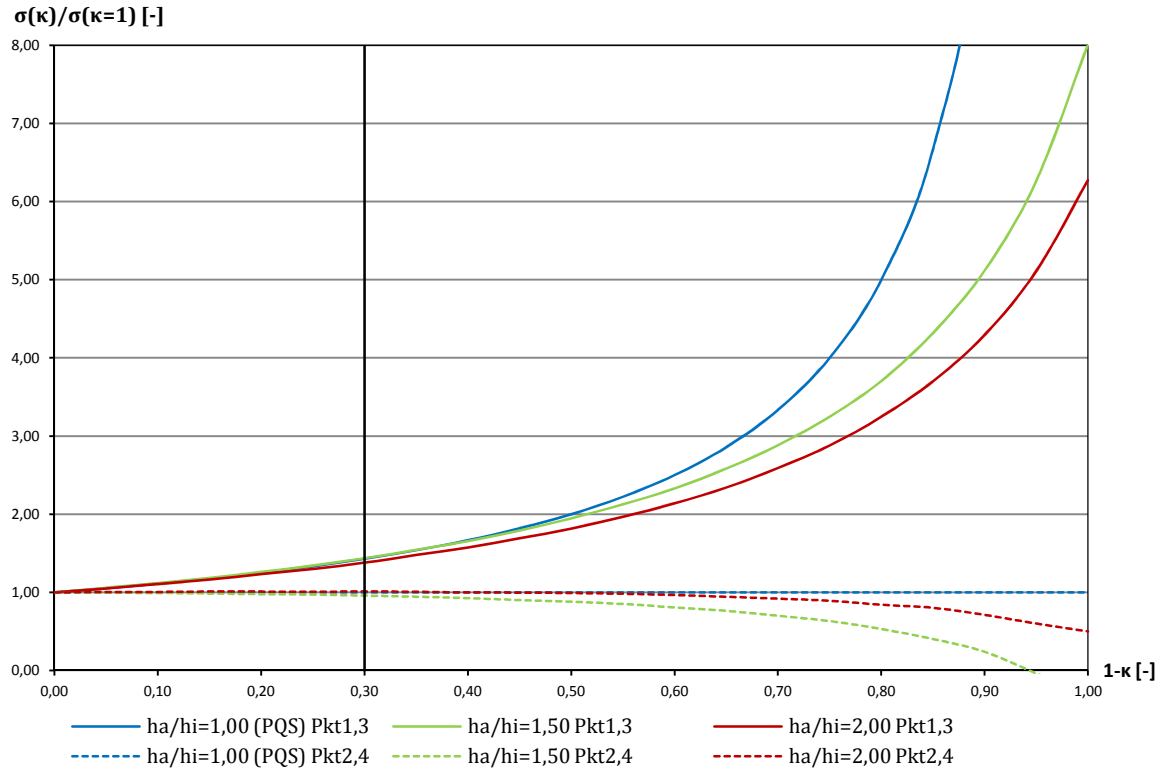


Abb. 6.13: Punktsymmetrische Schädigung: $\sigma(M_y, \kappa)/\sigma(M_y, \kappa = 1)$

- **Biegemoment M_z**

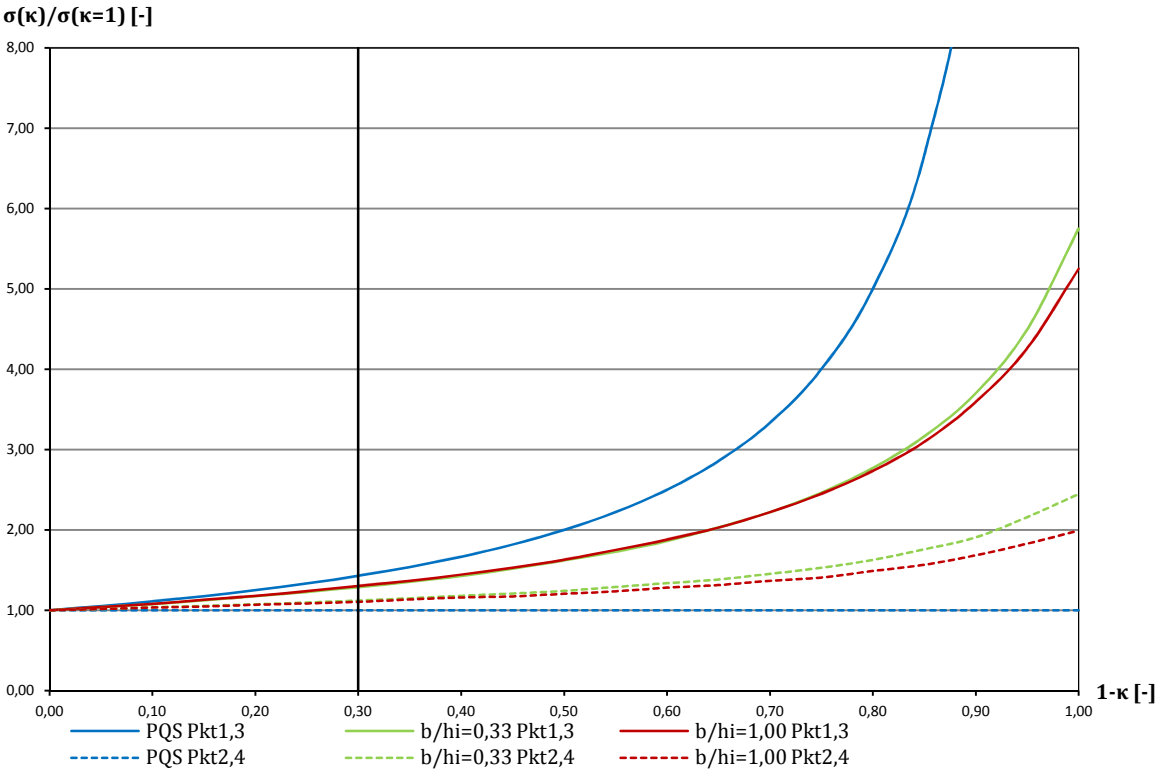


Abb. 6.14: Punktsymmetrische Schädigung: $\sigma(M_z, \kappa)/\sigma(M_z, \kappa = 1)$

- **Normalkraft N**

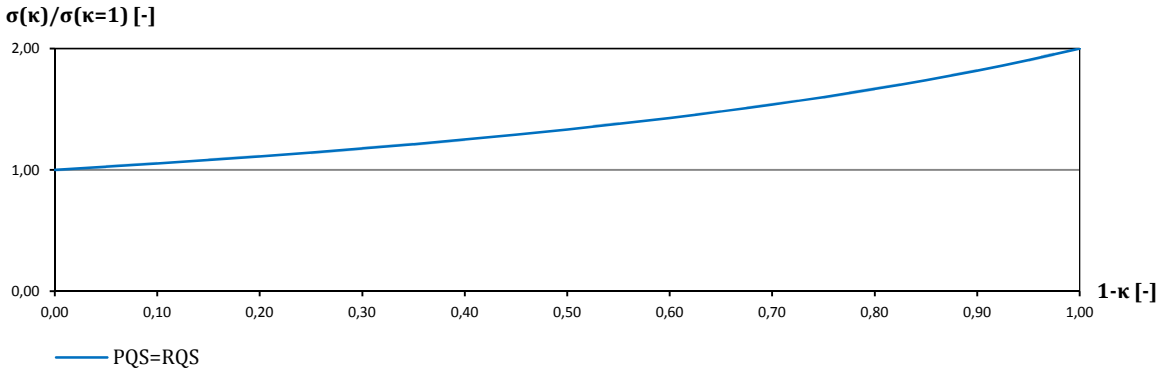


Abb. 6.15: Punktsymmetrische Schädigung: $\boldsymbol{\sigma(N,\kappa)/\sigma(N,\kappa=1)}$

6.4 Zusammenfassung

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Entwicklung der Spannungen infolge Schädigung von Punktquerschnitten bei Hauptachsenverschiebung in z-Richtung eine gute Näherung zu jener von realen Querschnitten darstellt.

Die Entwicklung der Spannungen infolge Schädigung bei Hauptachsenverschiebung in y-Richtung weicht durch den Einfluss der Eigenträgheitsmomente relativ weit von den realen Querschnitten ab (bei großen Schädigungen). Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, kann durch die Einführung ideeler Ersatzquerschnitte eine gute Näherung erzielt werden.

Die Hauptachsendrehung stellt klar die Grenze für die Verwendung der Ergebnisse von Punktquerschnitten dar. Mit Hilfe einer Begrenzung der Schädigung bzw. des Drehwinkels können jedoch die Ergebnisse genutzt werden.

7 Rechenmodelle für die Spannungsermittlung von geschädigten realen Querschnitten

7.1 Allgemeines

Aus den Ergebnissen der Untersuchungen der Spezialfälle von Schädigungen an Punktquerschnitten resultierte die Motivation, ein neues Modell für die Spannungsberechnung zu erstellen (Kap. 5.2.2: Modell der starren Platte auf Federlagerung). Mit diesem Modell war es möglich, mit einem geringen Rechenaufwand die Spannungen von Punktquerschnitten mit beliebigen Schädigungen zu berechnen. Im Kapitel 6 wurden für die Spezialfälle die Spannungen von Punktquerschnitten mit realen Querschnitten verglichen und die Unterschiede hinsichtlich der Entwicklung der Spannungen im Zuge der Schädigung bei Vernachlässigung der Eigenträgheitsmomente (L-Profile) aufgezeigt. Mit Hilfe der folgenden Rechenmodelle können die Spannungen von beliebig geschädigten realen Querschnitten ohne die Kenntnis der exakten Querschnittswerte berechnet werden (Abb. 7.1, Abb. 7.2). Es wird zwischen den folgenden Rechenmodellen unterschieden:

- Modell der starren Platte (Übersicht Seite 51, Tab. 7.1)
- Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen (Übersicht Seite 52, Tab. 7.2)

Das „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ erfordert einen größeren Rechenaufwand, liefert jedoch bessere Ergebnisse verglichen mit der exakten Spannungsberechnung von geschädigten realen Querschnitten. Ein Beispiel für die Anwendung der Rechenmodelle inklusive Gegenüberstellung der Ergebnisse ist Kapitel 8 zu entnehmen.

7.1.1 Modell der starren Platte

In einem ersten Schritt wird der ungeschädigte reale Querschnitt in einen Vierpunktquerschnitt transformiert. Den “Punkten“ wird die (ungeschädigte) Einzelquerschnittsfläche A eines L-Profils zugeschrieben. Die ideellen Abmessungen y^*, z^* des Punktquerschnitts werden so gewählt, dass die Hauptträgheitsmomente A_{yy} bzw. A_{zz} ident zu jenen des realen Querschnitts sind.

Die tatsächlichen Schädigungen κ_i werden auf den Vierpunktquerschnitt übertragen und die Spannungsermittlung in den “Punkten“ erfolgt gemäß Kapitel 5.2.2 (Modell der starren Platte auf Federlagerung). Daraus resultiert ein Spannungsbild, das durch die Spannungen in den vier “Punkten“ beschrieben wird, die aus der vorausgesetzten Bernoulli-Hypothese (Ebenbleiben des Querschnitts, siehe Kap. 3.1) auf einer Ebene liegen.

Um die Spannungen in den Stellen des realen Querschnitts zu erhalten, kann mit Hilfe einer Ebenengleichung extrapoliert werden.

Wie dem Beispiel in Kapitel 8 zu entnehmen ist, befindet sich unabhängig von der einwirkenden Schnittgröße die Spannung der maßgebenden Stelle auf der „sicheren Seite“.

7.1.2 Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen

Die Transformation des ungeschädigten realen Querschnitts in einen Vierpunktquerschnitt erfolgt analog zum „Modell der starren Platte“.

Aufgrund der im Kapitel 6 aufgezeigten Unterschiede zwischen realen Querschnitten und Punktquerschnitten werden bei diesem Modell die realen Schädigungen κ_i abhängig von der einwirkenden Schnittgröße M_y, M_z und N modifiziert. Man erhält drei unterschiedlich geschädigte Vierpunktquerschnitte mit den ideelen Schädigungsgraden λ_i, μ_i und ν_i. Die Spannungsermittlung in den “Punkten“ erfolgt gemäß Kapitel 5.2.2 (Modell der starren Platte auf Federlagerung).

Die lineare Elastizitätstheorie erlaubt die Superposition der unabhängig von der einwirkenden Schnittgröße induzierten Spannung in den “Punkten“. Daraus resultiert ident zum „Modell der starren Platte“ ein Spannungsbild, das durch die Spannungen in den vier “Punkten“ beschrieben wird. Mit Hilfe einer Ebenengleichung kann zu beliebigen Stellen des realen Querschnitts extrapoliert werden.

Wie dem Beispiel in Kapitel 8 zu entnehmen ist, befindet sich unabhängig von der einwirkenden Schnittgröße die Spannung der maßgebenden Stelle auf der „sicheren Seite“.

7.1.3 Übersicht

Analog zu den Querschnitten der Eisenbahnbrücke Urfahr werden abhängig von der Orientierung der L-Profile zwei Typen unterschieden.

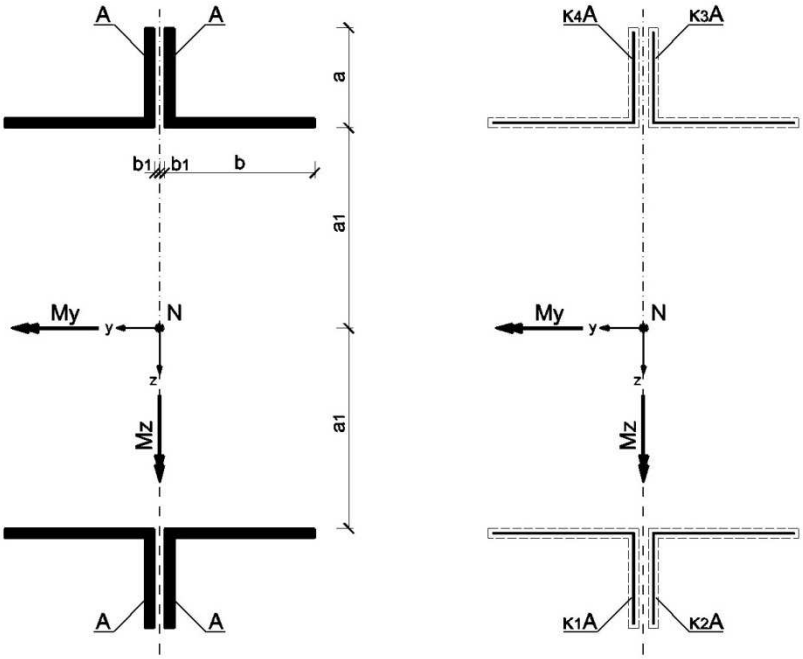


Abb. 7.1: Querschnitt 1

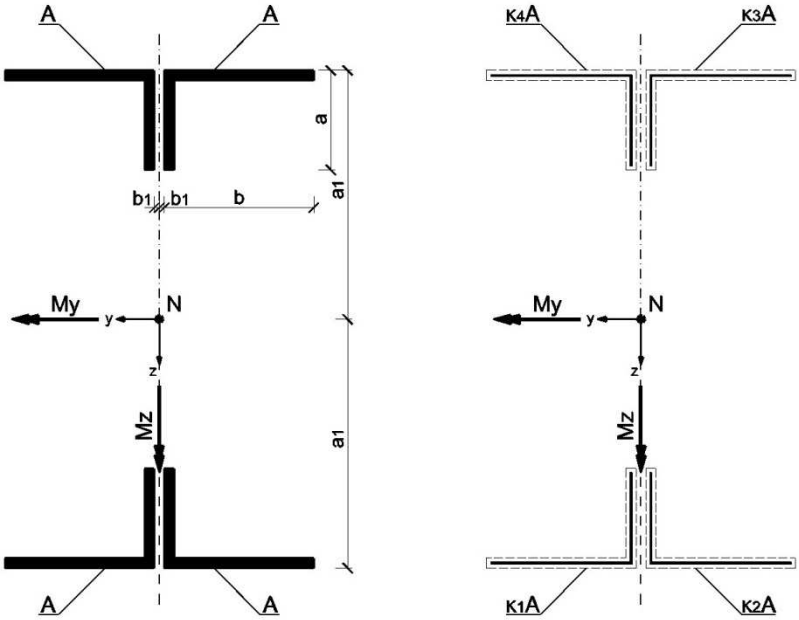
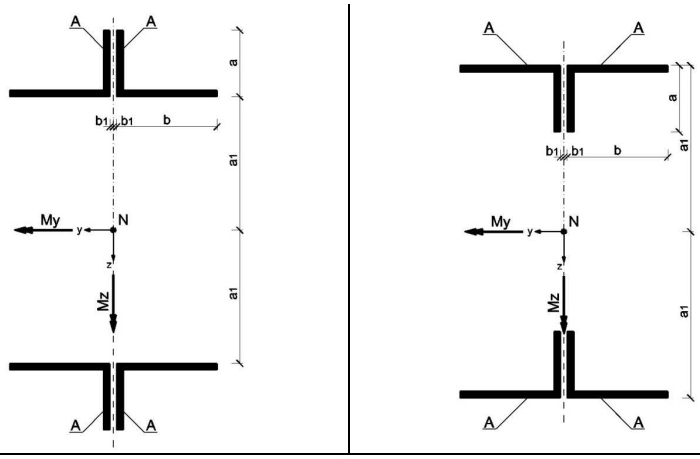
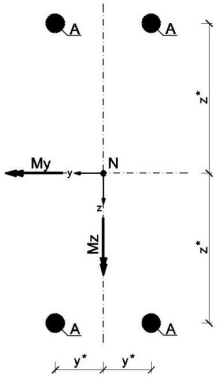
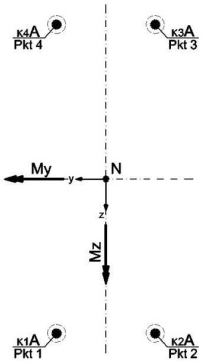
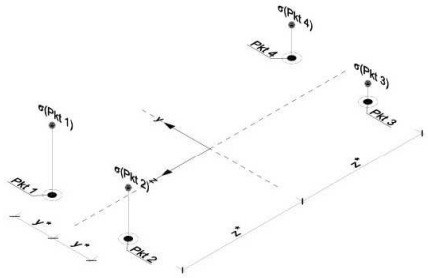
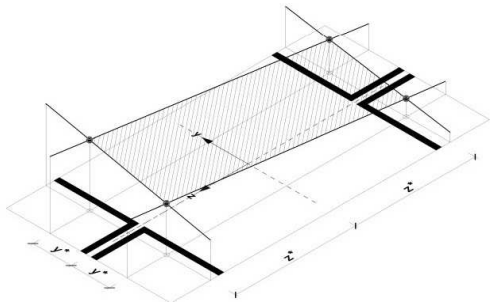
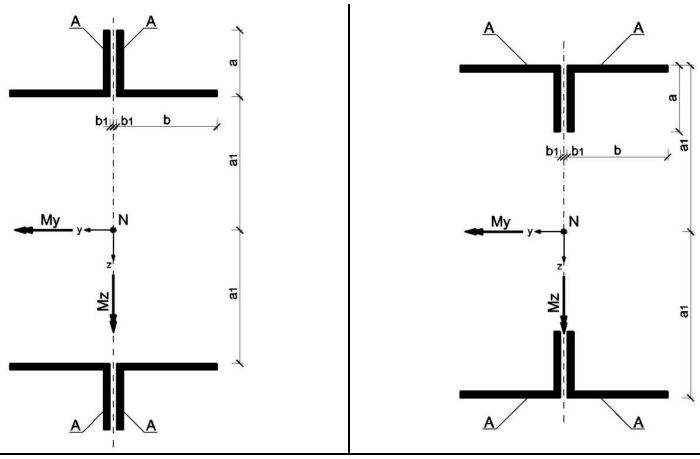
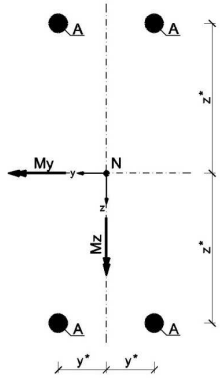
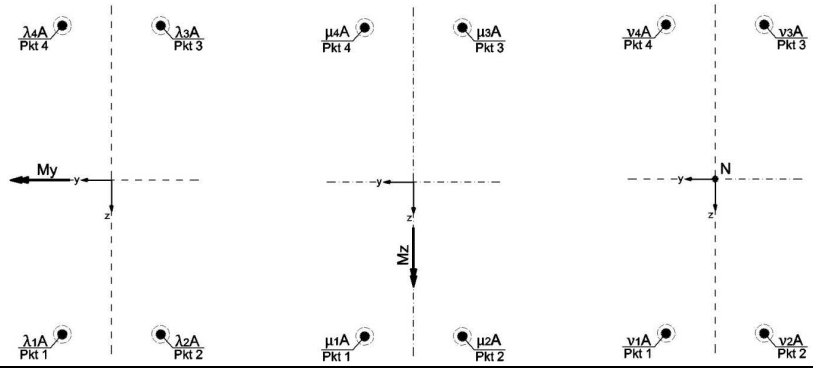
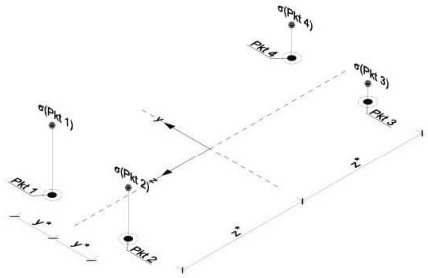
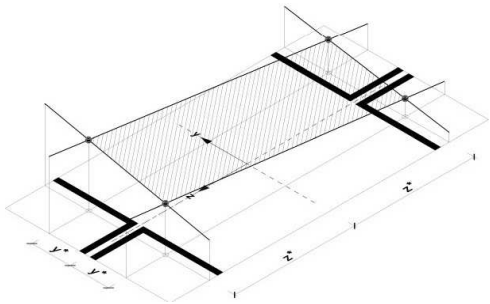


Abb. 7.2: Querschnitt 2

Ungeschädigter realer Querschnitt	
Kap. 7.3.1 Transformation in einen Vierpunktquerschnitt	
Tatsächliche Schädigungen κ_i werden auf Vierpunktquerschnitt übertragen	
Kap. 7.3.3 Spannungsermittlung $\sigma(M_y), \sigma(M_z), \sigma(N)$ in den "Punkten" und Superposition	
Kap. 7.3.4 Ebenengleichung und Extrapolation	

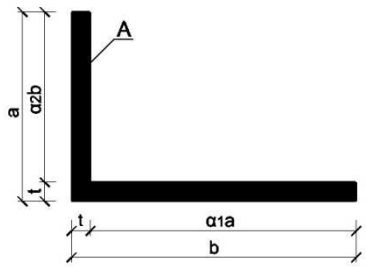
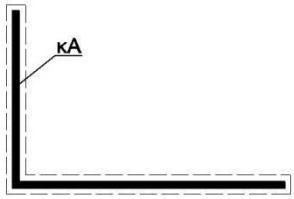
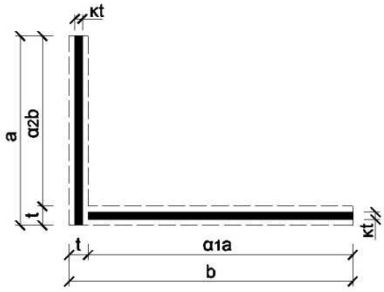
Tab. 7.1: Übersicht „Modell der starren Platte"

Ungeschädigter realer Querschnitt	
Kap. 7.3.1 Transformation in einen Vierpunktquerschnitt	
Kap. 7.3.2 Schnittgrößenabhängige Modifizierung der tatsächlichen Schädigungen	
Kap. 7.3.3 Spannungsermittlung $\sigma(M_y), \sigma(M_z), \sigma(N)$ in den "Punkten" und Superposition	
Kap. 7.3.4 Ebenengleichung und Extrapolation	

Tab. 7.2: Übersicht „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen"

7.2 Geometrie der Schädigung des L-Profils

Um die Schädigung eines L-Profils rechentechnisch besser zu erfassen, wurde die Geometrie gemäß Tab. 7.3 modifiziert (vgl. Kap. 2.2). Das geschädigte L-Profil wird durch die Größen $a, b, t, \alpha_1, \alpha_2$ und κ definiert.

Ungeschädigtes Profil	Geschädigtes Profil	
	Real (gemäß Kap. 2.2)	Rechenmodell
		
$A = at(1+\alpha_1) = bt(1+\alpha_2)$	$A_\kappa = \kappa A = a(\kappa t) + \alpha_1 a(\kappa t) = b(\kappa t) + \alpha_2 b(\kappa t)$	

Tab. 7.3: Geometrie der Schädigung eines L-Profils

$$\alpha_1 = \frac{b-t}{a} \tag{7.1}$$

$$\alpha_2 = \frac{a-t}{b} \tag{7.2}$$

7.3 Vorgehensweise

7.3.1 Transformation in einen Vierpunktquerschnitt

Der ungeschädigte reale Querschnitt ist so in einen Vierpunktquerschnitt zu transformieren, dass man die gleichen Hauptträgheitsmomente erhält. Dabei werden die Eigenträgheitsmomente der L-Profile berücksichtigt. Aus dieser Bedingung erhält man die ideelen Abmessungen y^*, z^* des Vierpunktquerschnitts. Sie entsprechen nicht den Abständen der lokalen Schwerpunktlagen der L-Profile.

Für den Vierpunktquerschnitt gilt:

$$A_{yy}{}^{PQS} = 4Ay^{*2} = 4bt(1+\alpha_2)y^{*2} \tag{7.3}$$

$$A_{zz}{}^{PQS} = 4Az^{*2} = 4at(1+\alpha_1)z^{*2} \tag{7.4}$$

Für den Querschnitt 1 (siehe Abb. 7.1) gilt:

$$A_{yy}{}^{(1)} = \frac{4}{3}bt(b^2 + \alpha_2 t^2) + 4bt(b + \alpha_2 t)b_1 + 4bt(1 + \alpha_2)b_1{}^2 \tag{7.5}$$

$$A_{zz}{}^{(1)} = \frac{4}{3}at(a^2 + \alpha_1 t^2) + 4at(a + \alpha_1 t)a_1 + 4at(1 + \alpha_1)a_1{}^2 \tag{7.6}$$

Für den Querschnitt 2 (siehe Abb. 7.2) gilt:

$$A_{yy}{}^{(2)} = \frac{4}{3}bt(b^2 + \alpha_2 t^2) + 4bt(b + \alpha_2 t)b_1 + 4bt(1 + \alpha_2)b_1{}^2 \tag{7.7}$$

$$A_{zz}{}^{(2)} = \frac{4}{3}at(a^2 + \alpha_1 t^2) - 4at(a + \alpha_1 t)a_1 + 4at(1 + \alpha_1)a_1{}^2 \tag{7.8}$$

Die Umrechnung für den Querschnittstyp 1 kann Abb. 7.3, jene für den Querschnittstyp 2 Abb. 7.4 entnommen werden. Es wird darauf hingewiesen, dass sich die Formeln zur Berechnung von z^* lediglich in einem Vorzeichen unterscheiden, die Größe y^* ist für beide Querschnittstypen gleich.

- **Querschnitt 1**

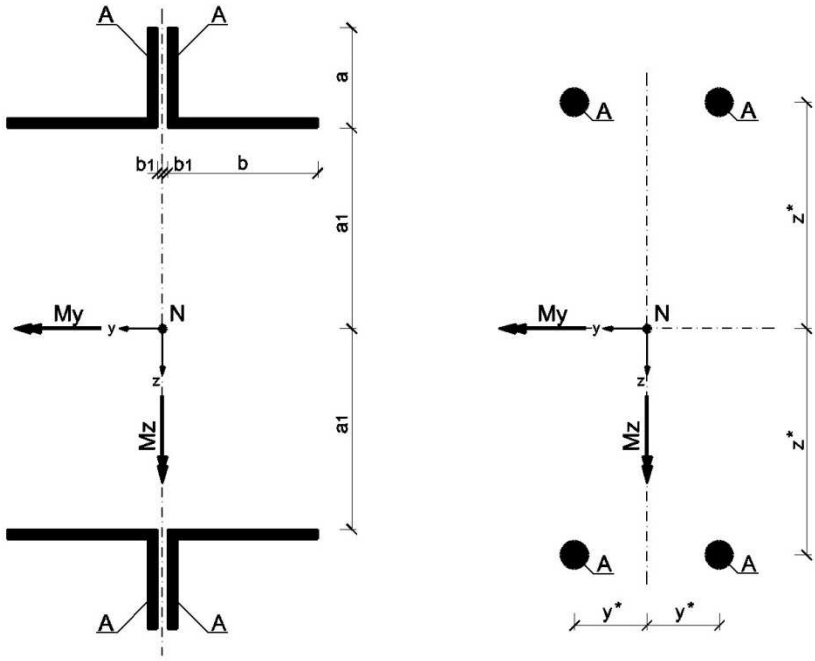


Abb. 7.3: Transformation in Vierpunktquerschnitt 1

Aus der Bedingung $A_{yy}{}^{PQS} = A_{yy}{}^{(1)}$ und durch Umformen auf y^* resultiert:

$$y^{*(1)} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(b^2 + \alpha_2 t^2)}{1 + \alpha_2} + \frac{(b + \alpha_2 t)b_1}{1 + \alpha_2} + b_1{}^2} \tag{7.9}$$

Aus der Bedingung $A_{zz}{}^{PQS} = A_{zz}{}^{(1)}$ und durch Umformen auf z^* resultiert:

$$z^{*(1)} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(a^2 + \alpha_1 t^2)}{1 + \alpha_1} + \frac{(a + \alpha_1 t)a_1}{1 + \alpha_1} + a_1{}^2} \tag{7.10}$$

- **Querschnitt 2**

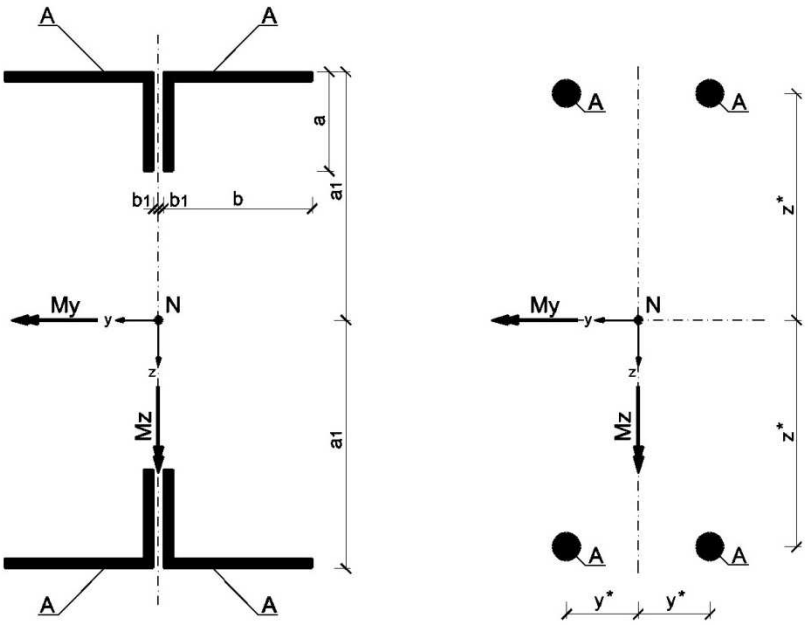


Abb. 7.4: Transformation in Vierpunktquerschnitt 2

Aus der Bedingung ${A_{yy}}^{PQS} = {A_{yy}}^{(2)}$ und durch Umformen auf y^* resultiert:

$$y^{*(2)} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(b^2 + \alpha_2 t^2)}{1 + \alpha_2} + \frac{(b + \alpha_2 t)b_1}{1 + \alpha_2} + {b_1}^2} \tag{7.11}$$

Aus der Bedingung ${A_{zz}}^{PQS} = {A_{zz}}^{(2)}$ und durch Umformen auf z^* resultiert:

$$z^{*(2)} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(a^2 + \alpha_1 t^2)}{1 + \alpha_1} - \frac{(a + \alpha_1 t)a_1}{1 + \alpha_1} + {a_1}^2} \tag{7.12}$$

7.3.2 Modifizierung der Schädigungen

Die Modifizierung der Schädigungen ist ausschließlich für die Anwendung des „Modelles der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ erforderlich.

Im Kapitel 6 wurden die Spezialfälle von Schädigungen an realen Querschnitten mit jenen der Punktquerschnitte verglichen. Den “Punkten“ wurden tatsächliche Schädigungen κ_i zugeschrieben. Es wurde gezeigt, dass der Einfluss der Eigenträgheitsmomente der L-Profile auf die Spannungsberechnung nicht in allen Fällen vernachlässigt werden kann. Kommt es im Zuge der Schädigung zu einer Hauptachsenverschiebung in z-Richtung, stellt die Spannungsberechnung mit Hilfe des transformierten Punktquerschnitts eine gute Näherung dar. Daher kann für die Biegung um die y-Achse (M_y) die reale Schädigung auf den Vierpunktquerschnitt übertragen werden (vgl. Kap. 6.3.1). Für die Verschiebung der Hauptachsen in y-Richtung sollten die Schädigungen κ_i abgeändert werden, da sonst die Spannungsergebnisse des Punktquerschnitts weit von den

exakten abweichen können (bei großen Schädigungen). Dies hat Auswirkungen sowohl für die Biegung um die z-Achse (M_z) als auch für die Normalkraft (N) (vgl. Kap. 6.3.2).

Daraus folgt die Aufteilung des Vierpunktquerschnitts in die äußeren Schnittgrößen M_y, M_z und N. Die realen Schädigungen κ_i werden teilweise modifiziert und die Berechnungen mit diesen ideelen Größen λ_i, μ_i und ν_i durchgeführt. Abhängig von der einwirkenden Schnittgröße erhält man drei unterschiedlich geschädigte Vierpunktquerschnitte (Abb. 7.5). Die Spannungsermittlung in den "Punkten" erfolgt gemäß Kapitel 5.2.2 (Modell der starren Platte auf Federlagerung).

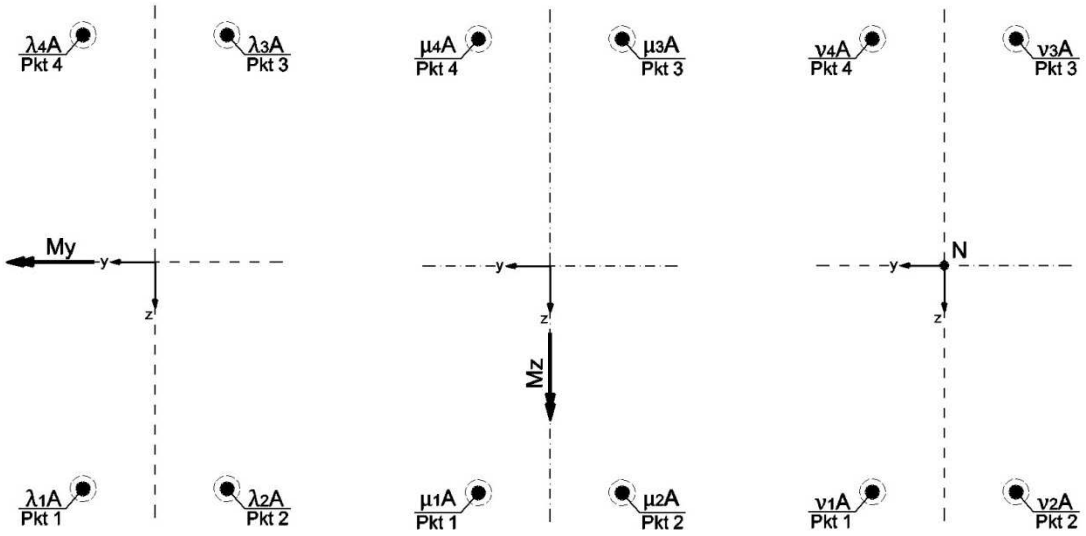


Abb. 7.5: Geschädigte Vierpunktquerschnitte

7.3.2.1 Vorwerte

Kommt es im Zuge einer Schädigung zu einer Hauptachsenverschiebung in y-Richtung, spielen die Eigenträgheitsmomente für die Entwicklung der Spannungen eine nicht zu vernachlässigbare Rolle (vgl. Kap. 6.3.2). Um dies zu berücksichtigen, werden zunächst die Verschiebung der Schwerachse sowie das Trägheitsmoment von den realen Schädigungen formuliert (Abb. 7.6). Sie bilden die Vorwerte für die Modifizierung der Schädigungen. Wie aus Abb. 7.7 ersichtlich, erfolgt die Modifizierung getrennt nach „oberen" und „unteren" Profilen. Daher müssen die schädigungsabhängigen Querschnittswerte (Schwerpunktverschiebung e_s, Trägheitsmoment I_ζ) für lediglich zwei Winkelprofile hergeleitet werden. Die Vorwerte errechnen sich nach den folgenden Gleichungen. Die Größen κ_a und κ_b stellen lediglich eine allgemeine Definition dar, für die in weiterer Folge die Größen κ_1 und κ_2 bzw. κ_4 und κ_3 eingesetzt werden. Die Eigenträgheitsmomente der um die schwache Achse beanspruchten Schenkel der L-Profile werden dabei vernachlässigt.

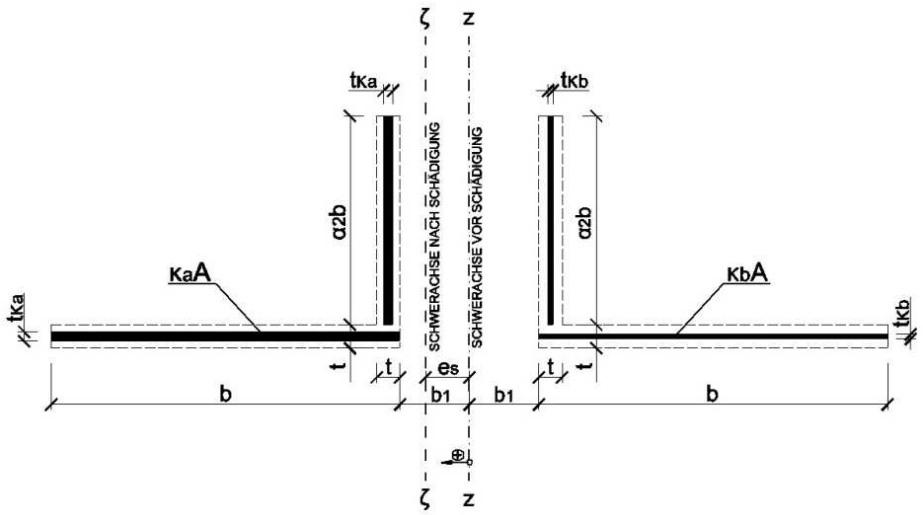


Abb. 7.6: Vowerte

$$e_s(\kappa_a,\kappa_b) = \frac{\kappa_a - \kappa_b}{\kappa_a + \kappa_b}\frac{\left[\left(b_1 + \frac{b}{2}\right) + \alpha_2\left(b_1 + \frac{t}{2}\right)\right]}{(1+\alpha_2)}$$

$$I_\zeta(\kappa_a,\kappa_b) = bt(\kappa_a + \kappa_b)\left[\frac{b^2}{12} + \left(b_1 + \frac{b}{2}\right)^2 + \alpha_2\left(b_1 + \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{(\kappa_a - \kappa_b)^2}{(\kappa_a + \kappa_b)^2}\frac{\left(\left(b_1 + \frac{b}{2}\right) + \alpha_2\left(b_1 + \frac{t}{2}\right)\right)^2}{1+\alpha_2}\right]$$

Es sei hier darauf hingewiesen, dass eine einmalige Programmierung dieser Querschnittswerte in Abhängigkeit von den Schädigungen κ_a bzw. κ_b ausreicht, die modifizierten Schädigungen λ_i, μ_i und ν_i mit einem leichten Rechenalgorithmus zu erfassen. Die erforderlichen Berechnungen reduzieren sich auf die Größen:

- $e_s(\kappa_1,\kappa_2)$, $I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)$
- $e_s(\kappa_4,\kappa_3)$, $I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)$

7.3.2.2 Ermittlung der Werte λ_i

Die realen Schädigungsgrade κ_i können auf den Vierpunktquerschnitt übertragen werden.

$$\lambda_i = \kappa_i \qquad i = 1,2,3,4 \tag{7.13}$$

7.3.2.3 Ermittlung der Werte μ_i

Um die Schädigungen für die Biegung um die z-Achse zu modifizieren, wird der Querschnitt gedanklich in zwei Hälften geteilt. Der Schnitt erfolgt in Richtung der y-Achse. Die beiden Teile werden getrennt voneinander betrachtet und die schädigungsabhängigen Querschnittswerte (Vorwerte) verwendet, um die Spannungen $\sigma(M_z)$ in jenen Punkten zu formulieren, durch die der Vierpunktquerschnitt definiert ist (y^*, z^*). Diese Spannungen werden mit jenen der

Punktquerschnitte gleichgesetzt. Die folgenden Gleichungen gelten für Querschnittstyp 1 (Abb. 7.1) und 2 (Abb. 7.2).

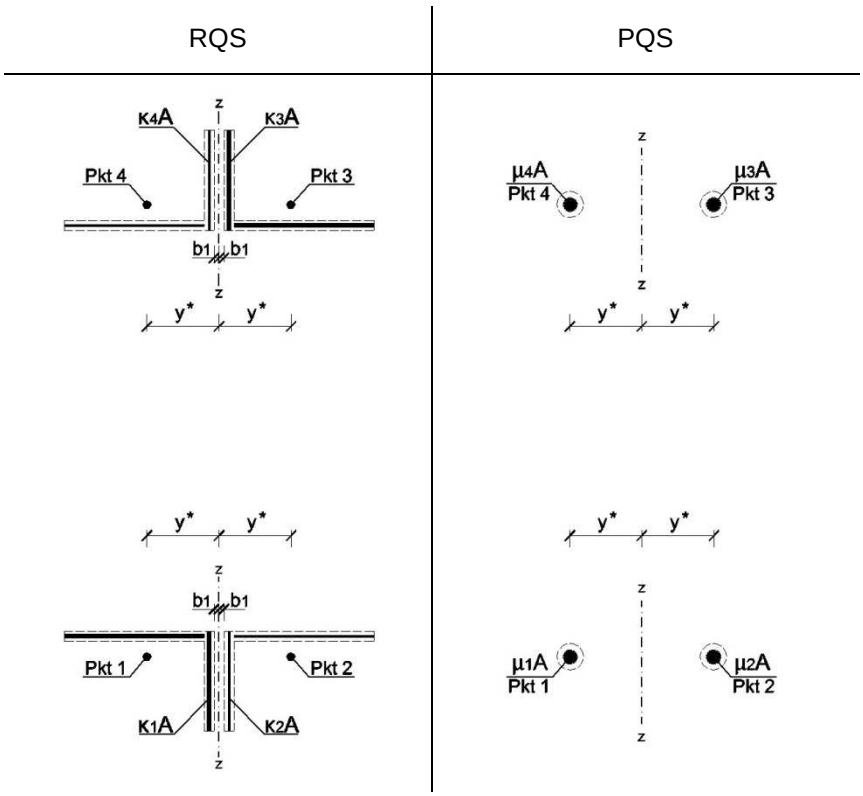


Abb. 7.7: Modifizierung der Schädigung

$$\sigma_1{}^{RQS} = \frac{M_z\big(y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)\big)}{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)} = \frac{M_z}{2y^*A\mu_1} = \sigma_1{}^{PQS} \tag{7.14}$$

$$\sigma_2{}^{RQS} = \frac{M_z\big(-y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)\big)}{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)} = -\frac{M_z}{2y^*A\mu_2} = \sigma_2{}^{PQS} \tag{7.15}$$

$$\sigma_3{}^{RQS} = \frac{M_z\big(-y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)\big)}{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)} = -\frac{M_z}{2y^*A\mu_3} = \sigma_3{}^{PQS} \tag{7.16}$$

$$\sigma_4{}^{RQS} = \frac{M_z\big(y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)\big)}{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)} = \frac{M_z}{2y^*A\mu_4} = \sigma_4{}^{PQS} \tag{7.17}$$

Umformen auf μ_i liefert die modifizierten Schädigungen:

$$\mu_1 = \frac{1}{2y^*A} \cdot \frac{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)}{y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)} \tag{7.18}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2y^*A} \cdot \frac{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)}{y^* + e_s(\kappa_1,\kappa_2)} \tag{7.19}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2y^*A} \cdot \frac{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)}{y^* + e_s(\kappa_4,\kappa_3)} \tag{7.20}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{2y^*A} \cdot \frac{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)}{y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)} \tag{7.21}$$

7.3.2.4 Ermittlung der Werte ν_i

Die Entwicklung der Spannungen infolge Normalkraft hängt von der Verschiebung der Hauptachsen sowohl in y-Richtung als auch von der in z-Richtung ab. Die Schädigungsgrade, die der Hauptachsenverschiebung in y-Richtung zugehörig sind, werden in Folge mit ${\nu_i}^y$ bezeichnet und entsprechen den tatsächlichen Schädigungen:

$$ {\nu_i}^y = \kappa_i \qquad i = 1,2,3,4 \tag{7.22} $$

Die Schädigungen ${\nu_i}^z$, die von der Hauptachsenverschiebung in z-Richtung abhängig sind, werden mit demselben Prinzip, wie es bei der Ermittlung der Werte μ_i aufgezeigt wurde, modifiziert (Abb. 7.7):

$$ {\sigma_1}^{RQS} = \frac{N}{(\kappa_1+\kappa_2)A} - \frac{N e_s(\kappa_1,\kappa_2)[y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)]}{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)} = \frac{N}{2A{\nu_1}^z} = {\sigma_1}^{PQS} \tag{7.23} $$

$$ {\sigma_2}^{RQS} = \frac{N}{(\kappa_1+\kappa_2)A} - \frac{N e_s(\kappa_1,\kappa_2)[-y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)]}{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)} = \frac{N}{2A{\nu_2}^z} = {\sigma_2}^{PQS} \tag{7.24} $$

$$ {\sigma_3}^{RQS} = \frac{N}{(\kappa_4+\kappa_3)A} - \frac{N e_s(\kappa_4,\kappa_3)[-y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)]}{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)} = \frac{N}{2A{\nu_3}^z} = {\sigma_3}^{PQS} \tag{7.25} $$

$$ {\sigma_4}^{RQS} = \frac{N}{(\kappa_4+\kappa_3)A} - \frac{N e_s(\kappa_4,\kappa_3)[y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)]}{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)} = \frac{N}{2A{\nu_4}^z} = {\sigma_4}^{PQS} \tag{7.26} $$

Umformen auf die Schädigungsgrade ${\nu_i}^z$ liefert:

$$ {\nu_1}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{\kappa_1+\kappa_2} - \frac{A e_s(\kappa_1,\kappa_2)[y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)]}{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)}\right]} \tag{7.27} $$

$$ {\nu_2}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{\kappa_1+\kappa_2} - \frac{A e_s(\kappa_1,\kappa_2)[-y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)]}{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)}\right]} \tag{7.28} $$

$$ {\nu_3}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{\kappa_4+\kappa_3} - \frac{A e_s(\kappa_4,\kappa_3)[-y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)]}{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)}\right]} \tag{7.29} $$

$$ {\nu_4}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{\kappa_4+\kappa_3} - \frac{A e_s(\kappa_4,\kappa_3)[y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)]}{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)}\right]} \tag{7.30} $$

Die Schädigung ν_i hängt von den Größen ${\nu_i}^y$ sowie ${\nu_i}^z$ ab. Für die Ermittlung von ν_i ist es erforderlich, den Schwerpunkt des geschädigten Gesamtquerschnitts zu ermitteln. Abhängig vom untersuchten Querschnittstyp können die Koordinaten des Schwerpunktes den folgenden Gleichungen entnommen werden. Es wird darauf hingewiesen, dass sich die Berechnung von z_s lediglich in zwei Vorzeichen unterscheidet und der Wert y_s für beide Querschnittstypen gleich ist.

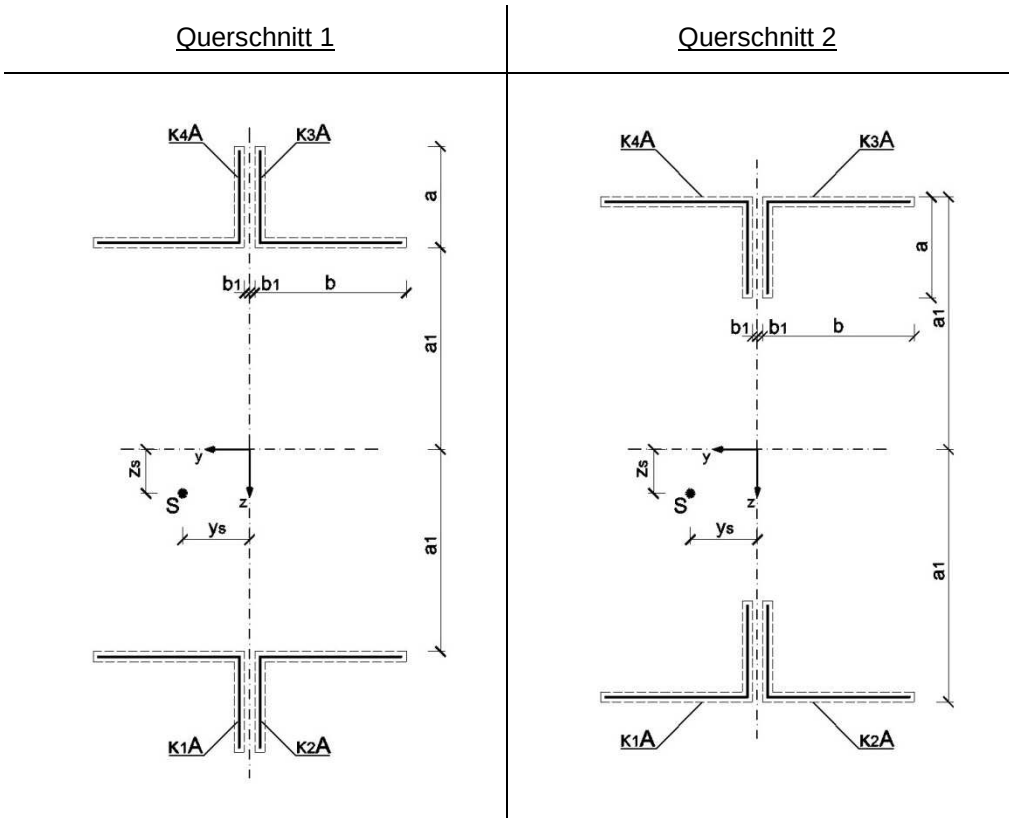


Abb. 7.8: Schwerpunkt des geschädigten Gesamtquerschnitts

Querschnitt 1:

$$y_s{}^{(1)} = \frac{\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \frac{\left[\left(b_1 + \frac{b}{2}\right) + \alpha_2 \left(b_1 + \frac{t}{2}\right)\right]}{1 + \alpha_2} \tag{7.31}$$

$$z_s{}^{(1)} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \frac{\left[\left(a_1 + \frac{a}{2}\right) + \alpha_1 \left(a_1 + \frac{t}{2}\right)\right]}{1 + \alpha_1} \tag{7.32}$$

Querschnitt 2:

$$y_s{}^{(2)} = \frac{\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \frac{\left[\left(b_1 + \frac{b}{2}\right) + \alpha_2 \left(b_1 + \frac{t}{2}\right)\right]}{1 + \alpha_2} \tag{7.33}$$

$$z_s{}^{(2)} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \frac{\left[\left(a_1 - \frac{a}{2}\right) + \alpha_1 \left(a_1 - \frac{t}{2}\right)\right]}{1 + \alpha_1} \tag{7.34}$$

Die modifizierten Schädigungen ν_i ergeben sich aus einer linearen Interpolation, die aus dem Verhältnis der Schwerpunktverschiebung in y bzw. z-Richtung zur Summe der beiden Schwerpunktverschiebungen resultiert.

$$\nu_i = \frac{\nu_i{}^y \cdot z_s + \nu_i{}^z \cdot y_s}{y_s + z_s} \qquad i = 1,2,3,4 \tag{7.35}$$

7.3.3 Spannungsberechnung und Superposition

Die Spannungsermittlung des Punktquerschnitts erfolgt mit Hilfe des Modelles der starren Platte auf Federlagerung (Kap.5.2.2). Die Federkräfte (Kap. 5.2.2.2) und Spannungen (Kap. 5.2.2.3) werden getrennt nach den äußeren Schnittgrößen M_y, M_z bzw. N ermittelt.

7.3.3.1 Modell der starren Platte

Bei dem „Modell der starren Platte“ werden die tatsächlichen Schädigungsgrade κ_i auf den Vierpunktquerschnitt übertragen.

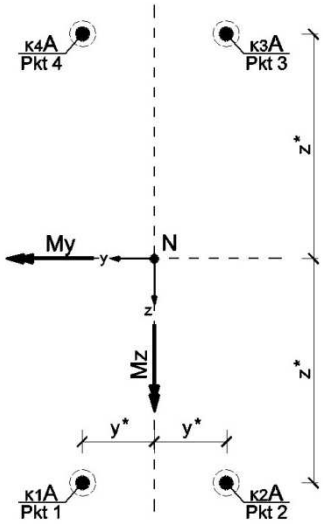


Abb. 7.9: Geschädigter Vierpunktquerschnitt bei dem „Modell der starren Platte“

$\boldsymbol{M_y}$	$\boldsymbol{M_z}$	$\boldsymbol{N}$
$X_{M_y} = \frac{M_y}{2z^*} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$	$X_{Mz} = -\frac{M_z}{2y^*} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$	$X_N = \frac{N}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_4}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$
$F_1 = X_{M_y}$	$F_1 = X_{M_z}$	$F_1 = X_N$
$F_2 = \frac{M_y}{2z^*} - X_{M_y}$	$F_2 = -X_{M_z}$	$F_2 = \frac{N}{2} - X_N$
$F_3 = -\frac{M_y}{2z^*} + X_{M_y}$	$F_3 = \frac{M_z}{2y^*} + X_{M_z}$	$F_3 = X_N$
$F_4 = -X_{M_y}$	$F_4 = -\frac{M_z}{2y^*} - X_{M_z}$	$F_4 = \frac{N}{2} - X_N$
$\sigma_i(M_y) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(M_z) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(N) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$

Tab. 7.4: Spannungsberechnung mit dem „Modell der starren Platte“

7.3.3.2 Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen

Bei dem „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ werden dem Punktquerschnitt gemäß Kap. 7.3.2 die Schädigungsgrade λ_i, μ_i und ν_i zugewiesen. Daraus folgt, dass es sich um drei unterschiedlich geschädigte Vierpunktquerschnitte handelt.

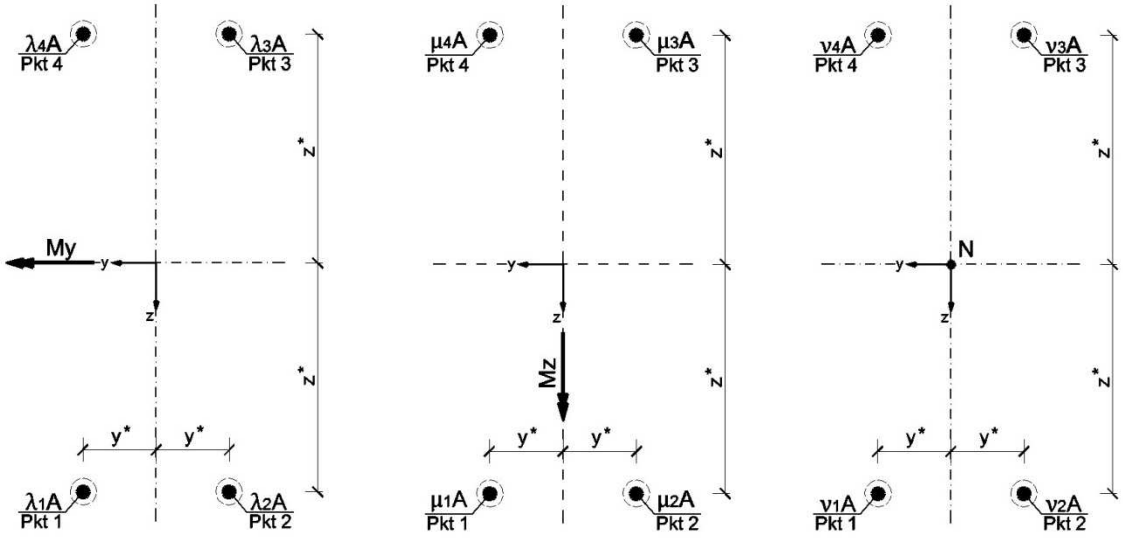


Abb. 7.10: Geschädigte Vierpunktquerschnitte bei dem „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“

$\boldsymbol{M_y}$	$\boldsymbol{M_z}$	$\boldsymbol{N}$
$X_{M_y} = \frac{M_y}{2z^*} \cdot \frac{\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4}}$	$X_{Mz} = -\frac{M_z}{2y^*} \cdot \frac{\frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4}}$	$X_N = \frac{N}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_4}}{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} + \frac{1}{\nu_4}}$
$F_1 = X_{M_y}$	$F_1 = X_{M_z}$	$F_1 = X_N$
$F_2 = \frac{M_y}{2z^*} - X_{M_y}$	$F_2 = -X_{M_z}$	$F_2 = \frac{N}{2} - X_N$
$F_3 = -\frac{M_y}{2z^*} + X_{M_y}$	$F_3 = \frac{M_z}{2y^*} + X_{M_z}$	$F_3 = X_N$
$F_4 = -X_{M_y}$	$F_4 = -\frac{M_z}{2y^*} - X_{M_z}$	$F_4 = \frac{N}{2} - X_N$
$\sigma_i(M_y) = \frac{F_i}{\lambda_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(M_z) = \frac{F_i}{\mu_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(N) = \frac{F_i}{\nu_i A} \quad i = 1,2,3,4$

Tab. 7.5: Spannungsberechnung mit dem „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“

7.3.3.3 Superposition

Die lineare Elastizitätstheorie erlaubt die Superposition der unabhängig von der einwirkenden Schnittgröße induzierten Spannung in den “Punkten“. Daraus resultiert ein Spannungsbild, das durch die Spannungen in vier “Punkten“ beschrieben wird.

$$\sigma_i(M_y, M_z, N) = \sigma_i(M_y) + \sigma_i(M_z) + \sigma_i(N) \qquad i = 1,2,3,4 \tag{7.36}$$

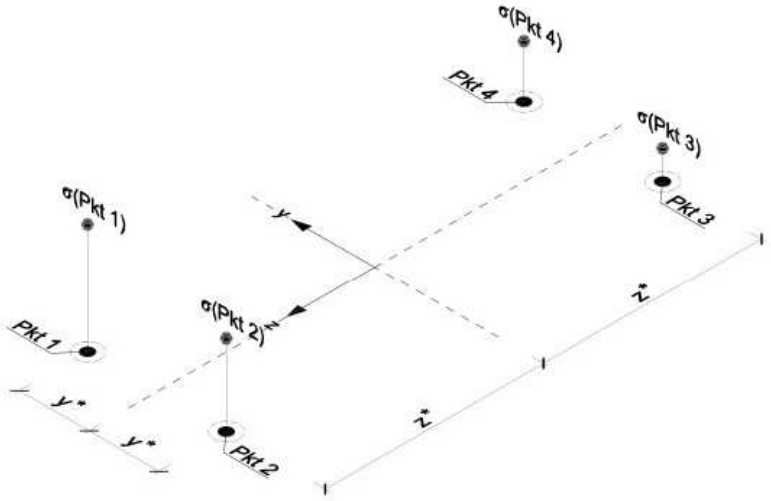


Abb. 7.11: Spannungsbild nach Superposition

7.3.4 Ebenengleichung und Extrapolation

Aus der vorausgesetzten Bernoulli-Hypothese (Ebenbleiben des Querschnitts, siehe Kap. 3.1) liegen die Spannungen der vier “Punkte“ auf einer Ebene. Mit Hilfe einer Ebenengleichung kann zu beliebigen Stellen des realen Querschnitts extrapoliert werden.

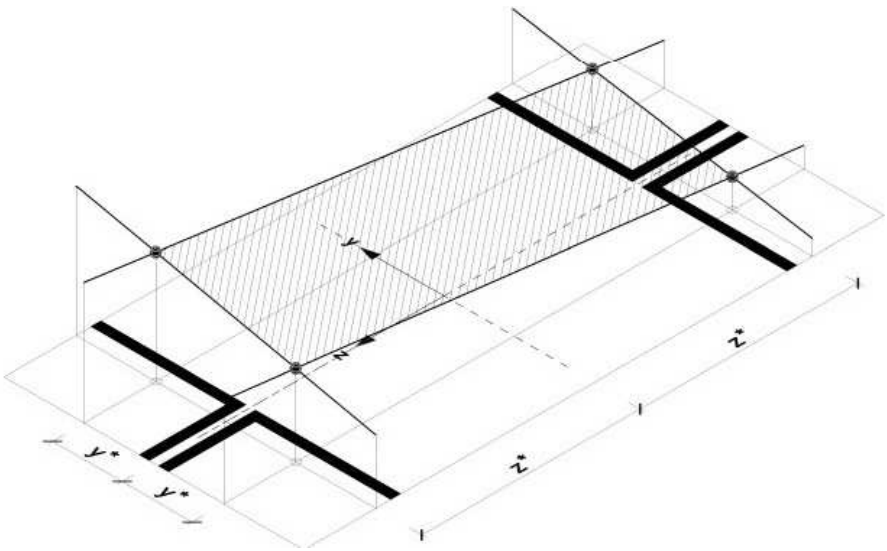


Abb. 7.12: Spannungsbild nach Extrapolation

Ein Normalvektor $\vec{n}$ dieser Ebene errechnet sich zu:

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} -y^* \\ z^* \\ \sigma_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^* \\ z^* \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} -2y^* \\ 0 \\ \sigma_2 - \sigma_1 \end{pmatrix}} \tag{7.37}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} y^* \\ -z^* \\ \sigma_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y^* \\ z^* \\ \sigma_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ -2z^* \\ \sigma_4 - \sigma_1 \end{pmatrix}} \tag{7.38}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} -2y^* \\ 0 \\ \sigma_2 - \sigma_1 \end{pmatrix}} \times \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ -2z^* \\ \sigma_4 - \sigma_1 \end{pmatrix}} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2z^*(\sigma_2 - \sigma_1) \\ 2y^*(\sigma_4 - \sigma_1) \\ 4y^*z^* \end{pmatrix}} \tag{7.39}$$

Mit Hilfe dieses Normalvektors kann die Ebene definiert werden:

$$\overrightarrow{\begin{pmatrix} y^* \\ z^* \\ \sigma_1 \end{pmatrix}} \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2z^*(\sigma_2 - \sigma_1) \\ 2y^*(\sigma_4 - \sigma_1) \\ 4y^*z^* \end{pmatrix}} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} y \\ z \\ \sigma(y,z) \end{pmatrix}} \cdot \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2z^*(\sigma_2 - \sigma_1) \\ 2y^*(\sigma_4 - \sigma_1) \\ 4y^*z^* \end{pmatrix}} \tag{7.40}$$

Vereinfachen und Umformen auf $\sigma(y,z)$ liefert die Ebenengleichung:

$$\sigma(y,z) = \frac{(\sigma_2 + \sigma_4)}{2} - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2y^*} \cdot y - \frac{(\sigma_4 - \sigma_1)}{2z^*} \cdot z \tag{7.41}$$

Die für die Spannungsermittlung maßgebenden Stellen hängen vom Querschnittstyp ab und sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

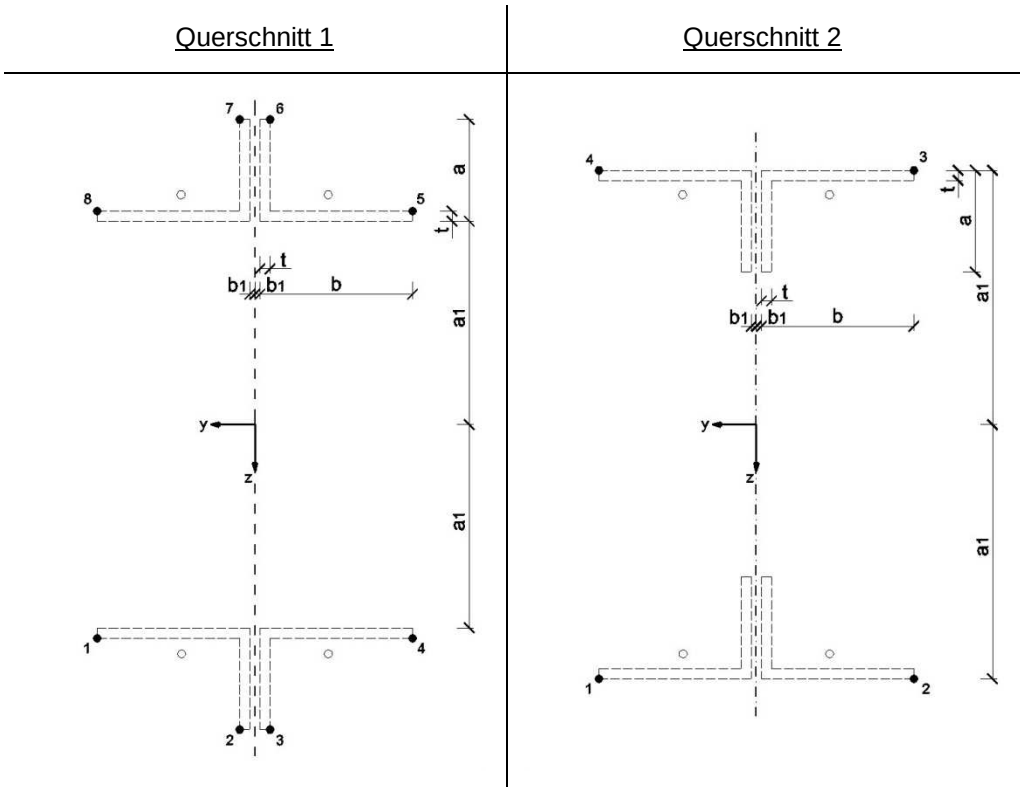


Abb. 7.13: Maßgebende Stellen für die Spannungsermittlung

Abhängig vom Querschnittstyp lauten die Koordinaten:

Pkt.	Querschnitt 1		Querschnitt 2	
	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{z}$
1	$b_1 + b$	$a_1 + t$	$b_1 + b$	a_1
2	$b_1 + t$	$a_1 + a$	$-(b_1 + b)$	a_1
3	$-(b_1 + t)$	$a_1 + a$	$-(b_1 + b)$	$-a_1$
4	$-(b_1 + b)$	$a_1 + t$	$b_1 + b$	$-a_1$
5	$-(b_1 + b)$	$-(a_1 + t)$		
6	$-(b_1 + t)$	$-(a_1 + a)$		
7	$b_1 + t$	$-(a_1 + a)$		
8	$b_1 + b$	$-(a_1 + t)$		

Tab. 7.6: Koordinaten der maßgebenden Stellen

Die Spannungen errechnen sich durch einsetzen der Koordinaten (Tab. 7.6) in Gleichung (7.41).

7.4 Anwendungsgrenze

Aufgrund der im Kapitel 6.3.3 aufgezeigten Problematik in Bezug auf die unterschiedliche Entwicklung der Spannungen von Punktquerschnitten zu realen Querschnitten bei punktsymmetrischer Schädigung muss die Hauptachsendrehung begrenzt werden. Dies wird durch eine Begrenzung des Verhältnisses der diagonalen Schädigungsgrade gewährleistet. Sowohl für Querschnittstyp 1 (Abb. 7.1) als auch für Querschnittstyp 2 (Abb. 7.2) gilt:

$$\frac{7}{10} \leq \frac{\kappa_1 + \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_4} \leq \frac{10}{7} \tag{7.42}$$

7.5 Ablaufschema für die praktische Berechnung

Es wird zwischen den folgenden Rechenmodellen unterschieden:

- Modell der starren Platte (Übersicht Seite 51, Tab. 7.1)
- Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen (Übersicht Seite 52, Tab. 7.2)

Bei dem „Modell der starren Platte“ entfällt die Modifizierung der Schädigungen (Kap. 7.5.4).

Die Definition der Querschnittstypen, Querschnittsabmessungen, Schädigungen und einwirkenden Schnittgrößen können folgenden Abbildungen entnommen werden.

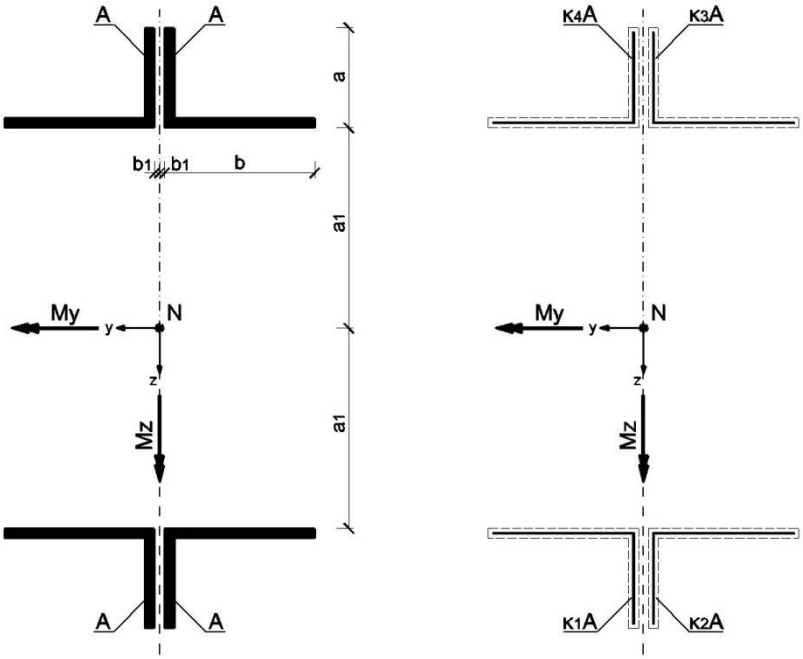


Abb. 7.14: Querschnitt 1

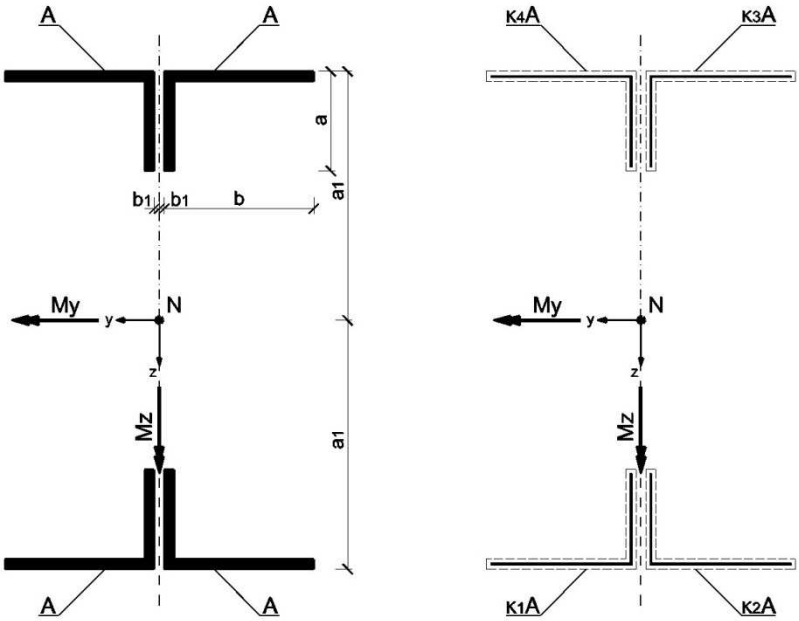


Abb. 7.15: Querschnitt 2

7.5.1 Kontrolle der Anwendungsgrenze

Bezugnehmend auf Kap. 7.4 ist die Anwendung beider Rechenmodelle durch das Verhältnis der diagonalen Schädigungsgrade begrenzt:

$$\frac{7}{10} \leq \frac{\kappa_1 + \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_4} \leq \frac{10}{7}$$

7.5.2 Ermittlung der geometrischen Vorwerte

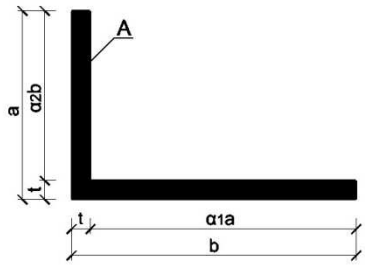


Abb. 7.16: Profilabmessungen

Nach Kap. 7.2 erhält man die Verhältniswerte:

$$\alpha_1 = \frac{b - t}{a}$$

$$\alpha_2 = \frac{a - t}{b}$$

und damit die Fläche des ungeschädigten Einzelwinkels:

$$A = at(1 + \alpha_1) = bt(1 + \alpha_2)$$

7.5.3 Transformation des realen ungeschädigten Querschnitts in einen Vierpunktquerschnitt

Bezugnehmend auf Kap. 7.3.1 gilt:

Querschnitt 1	Querschnitt 2
$z^{*(1)} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(a^2 + \alpha_1 t^2)}{1 + \alpha_1} + \frac{(a + \alpha_1 t)a_1}{1 + \alpha_1} + {a_1}^2}$	$z^{*(2)} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(a^2 + \alpha_1 t^2)}{1 + \alpha_1} - \frac{(a + \alpha_1 t)a_1}{1 + \alpha_1} + {a_1}^2}$
$y^{*(1)} = y^{*(2)} = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(b^2 + \alpha_2 t^2)}{1 + \alpha_2} + \frac{(b + \alpha_2 t)b_1}{1 + \alpha_2} + {b_1}^2}$	

Tab. 7.7: Transformation des realen ungeschädigten Querschnitts in einen Vierpunktquerschnitt

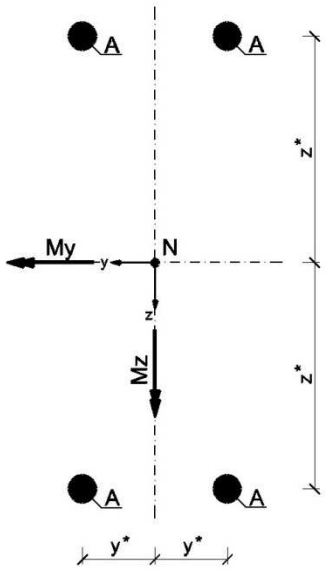


Abb. 7.17: Ungeschädigter Vierpunktquerschnitt

7.5.4 Modifizierung der Schädigungen

Die Modifizierung der Schädigungen ist ausschließlich für die Anwendung des „Modelles der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ erforderlich.

Abhängig von der einwirkenden Schnittgröße werden die tatsächlichen Schädigungsgrade κ_i modifiziert. Man erhält drei unterschiedlich geschädigte Vierpunktquerschnitte, wobei die modifizierten Schädigungsgrade mit λ_i, μ_i und ν_i bezeichnet werden.

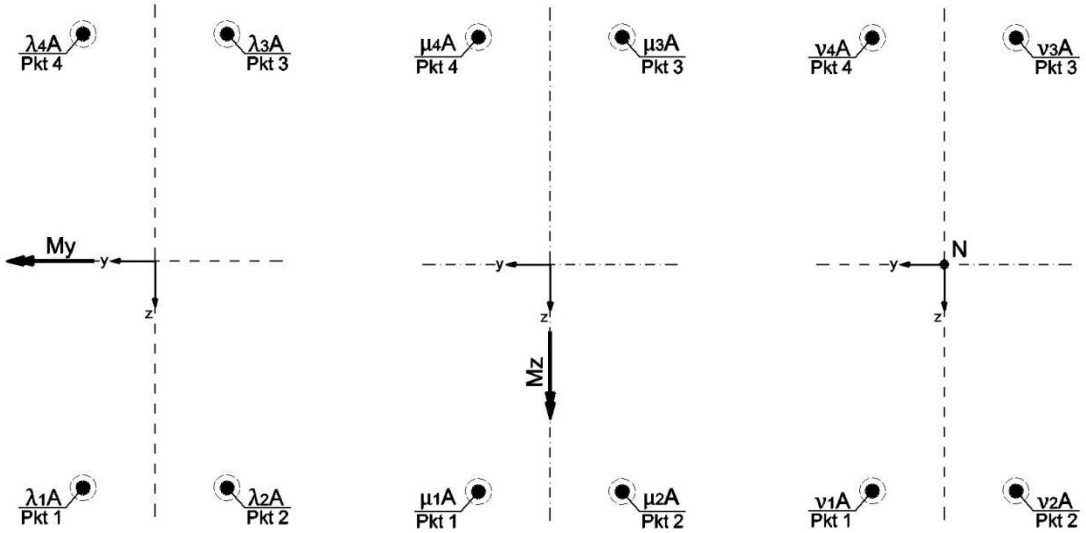


Abb. 7.18: Geschädigte Vierpunktquerschnitte

Gemäß Kap. 7.3.2.1 werden zunächst Vorwerte ermittelt:

7.5.4.1 Vorwerte

$$e_s(\kappa_a,\kappa_b) = \frac{\kappa_a - \kappa_b}{\kappa_a + \kappa_b}\frac{\left[\left(b_1 + \frac{b}{2}\right) + \alpha_2\left(b_1 + \frac{t}{2}\right)\right]}{(1+\alpha_2)}$$

$$I_\zeta(\kappa_a,\kappa_b) = bt(\kappa_a + \kappa_b)\left[\frac{b^2}{12} + \left(b_1 + \frac{b}{2}\right)^2 + \alpha_2\left(b_1 + \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{(\kappa_a - \kappa_b)^2}{(\kappa_a + \kappa_b)^2}\frac{\left(\left(b_1 + \frac{b}{2}\right) + \alpha_2\left(b_1 + \frac{t}{2}\right)\right)^2}{1+\alpha_2}\right]$$

$\kappa_a = \kappa_1;\ \kappa_b = \kappa_2 \quad \rightarrow \quad e_s(\kappa_1,\kappa_2),\ I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)$

$\kappa_a = \kappa_4;\ \kappa_b = \kappa_3 \quad \rightarrow \quad e_s(\kappa_4,\kappa_3),\ I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)$

7.5.4.2 Ermittlung der Werte λ_i

Für Biegung um die y-Achse kann die reale Schädigung auf den Vierpunktquerschnitt übertragen werden (Kap.7.3.2.2):

$\lambda_i = \kappa_i \qquad i = 1,2,3,4$

7.5.4.3 Ermittlung der Werte μ_i

Für Biegung um die z-Achse gelten die Gleichungen (7.18) bis (7.21):

$$\mu_1 = \frac{1}{2y^*A}\cdot\frac{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)}{y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2y^*A}\cdot\frac{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)}{y^* + e_s(\kappa_1,\kappa_2)}$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2y^*A}\cdot\frac{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)}{y^* + e_s(\kappa_4,\kappa_3)}$$

$$\mu_4 = \frac{1}{2y^*A}\cdot\frac{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)}{y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)}$$

7.5.4.4 Ermittlung der Werte ν_i

Für die Normalkraft ermittelt man zunächst die Größen ${\nu_i}^y$ bzw. ${\nu_i}^z$ nach den Gleichungen (7.22) bzw. (7.27) bis (7.30):

$${\nu_1}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{\kappa_1+\kappa_2} - \frac{Ae_s(\kappa_1,\kappa_2)[y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)]}{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)}\right]} \qquad {\nu_1}^y = \kappa_1$$

$${\nu_2}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{\kappa_1+\kappa_2} - \frac{Ae_s(\kappa_1,\kappa_2)[-y^* - e_s(\kappa_1,\kappa_2)]}{I_\zeta(\kappa_1,\kappa_2)}\right]} \qquad {\nu_2}^y = \kappa_2$$

$${\nu_3}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{\kappa_4+\kappa_3} - \frac{Ae_s(\kappa_4,\kappa_3)[-y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)]}{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)}\right]} \qquad {\nu_3}^y = \kappa_3$$

$${\nu_4}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{\kappa_4+\kappa_3} - \frac{Ae_s(\kappa_4,\kappa_3)[y^* - e_s(\kappa_4,\kappa_3)]}{I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3)}\right]} \qquad {\nu_4}^y = \kappa_4$$

Die Koordinaten des Gesamtschwerpunkts erhält man durch Einsetzen in die Gleichungen (7.31) bis (7.34).

Querschnitt 1	Querschnitt 2
$z_s{}^{(1)} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \frac{\left[\left(a_1 + \frac{a}{2}\right) + \alpha_1\left(a_1 + \frac{t}{2}\right)\right]}{1 + \alpha_1}$	$z_s{}^{(2)} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \frac{\left[\left(a_1 - \frac{a}{2}\right) + \alpha_1\left(a_1 - \frac{t}{2}\right)\right]}{1 + \alpha_1}$
$y_s{}^{(1)} = y_s{}^{(2)} = \frac{\kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \frac{\left[\left(b_1 + \frac{b}{2}\right) + \alpha_2\left(b_1 + \frac{t}{2}\right)\right]}{1 + \alpha_2}$	

Tab. 7.8: Ermittlung des Gesamtschwerpunkts

Die modifizierten Schädigungsgrade für den Vierpunktquerschnitt ergeben sich nach den Gleichungen (7.35):

$$\nu_i = \frac{\nu_i{}^y \cdot z_s + \nu_i{}^z \cdot y_s}{y_s + z_s} \qquad i = 1,2,3,4$$

7.5.5 Spannungsberechnung und Superposition

7.5.5.1 Modell der starren Platte

Die tatsächlichen Schädigungen κ_i werden auf den Vierpunktquerschnitt übertragen. Für den geschädigten Vierpunktquerschnitt werden die Federkräfte und in Folge die Spannungen in den "Punkten" ermittelt. Bezugnehmend auf Kap. 7.3.3.1 gilt:

$\boldsymbol{M_y}$	$\boldsymbol{M_z}$	$\boldsymbol{N}$
$X_{M_y} = \frac{M_y}{2z^*} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$	$X_{Mz} = -\frac{M_z}{2y^*} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$	$X_N = \frac{N}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_4}}{\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4}}$
$F_1 = X_{M_y}$	$F_1 = X_{M_z}$	$F_1 = X_N$
$F_2 = \frac{M_y}{2z^*} - X_{M_y}$	$F_2 = -X_{M_z}$	$F_2 = \frac{N}{2} - X_N$
$F_3 = -\frac{M_y}{2z^*} + X_{M_y}$	$F_3 = \frac{M_z}{2y^*} + X_{M_z}$	$F_3 = X_N$
$F_4 = -X_{M_y}$	$F_4 = -\frac{M_z}{2y^*} - X_{M_z}$	$F_4 = \frac{N}{2} - X_N$
$\sigma_i(M_y) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(M_z) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(N) = \frac{F_i}{\kappa_i A} \quad i = 1,2,3,4$

Tab. 7.9: Spannungsberechnung mit dem „Modell der starren Platte"

7.5.5.2 Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen

Für die drei geschädigten Vierpunktquerschnitte (je einer für M_y, M_z bzw. N) werden die Federkräfte und in Folge die Spannungen in den "Punkten" ermittelt. Bezugnehmend auf Kap. 7.3.3.2 gilt:

$\boldsymbol{M_y}$	$\boldsymbol{M_z}$	$\boldsymbol{N}$
$X_{M_y} = \frac{M_y}{2z^*} \cdot \frac{\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4}}$	$X_{Mz} = -\frac{M_z}{2y^*} \cdot \frac{\frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3} + \frac{1}{\mu_4}}$	$X_N = \frac{N}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_4}}{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} + \frac{1}{\nu_4}}$
$F_1 = X_{M_y}$	$F_1 = X_{M_z}$	$F_1 = X_N$
$F_2 = \frac{M_y}{2z^*} - X_{M_y}$	$F_2 = -X_{M_z}$	$F_2 = \frac{N}{2} - X_N$
$F_3 = -\frac{M_y}{2z^*} + X_{M_y}$	$F_3 = \frac{M_z}{2y^*} + X_{M_z}$	$F_3 = X_N$
$F_4 = -X_{M_y}$	$F_4 = -\frac{M_z}{2y^*} - X_{M_z}$	$F_4 = \frac{N}{2} - X_N$
$\sigma_i(M_y) = \frac{F_i}{\lambda_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(M_z) = \frac{F_i}{\mu_i A} \quad i = 1,2,3,4$	$\sigma_i(N) = \frac{F_i}{\nu_i A} \quad i = 1,2,3,4$

Tab. 7.10: Spannungsberechnung mit dem „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen"

7.5.5.3 Superposition

Für beide Rechenmodelle gilt (vgl. Kap. 7.3.3.3):

$$\sigma_i(M_y, M_z, N) = \sigma_i(M_y) + \sigma_i(M_z) + \sigma_i(N) \qquad i = 1,2,3,4$$

7.5.6 Ebenengleichung und Extrapolation

Bezugnehmend auf Abb. 7.12 kann mit den Größen y^*, z^* des Vierpunktquerschnitts und den Spannungen σ_i in den vier "Punkten" eine Ebenengleichung erstellt werden, mit der zu beliebigen Stellen des realen Querschnitts extrapoliert wird. Die Ebene kann durch folgende Gleichung definiert werden (vgl. Kap. 7.3.4):

$$\sigma(y,z) = \frac{(\sigma_2 + \sigma_4)}{2} - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{2y^*} \cdot y - \frac{(\sigma_4 - \sigma_1)}{2z^*} \cdot z$$

Die für die Spannungsermittlung maßgebenden Stellen sind in folgender Abbildung dargestellt:

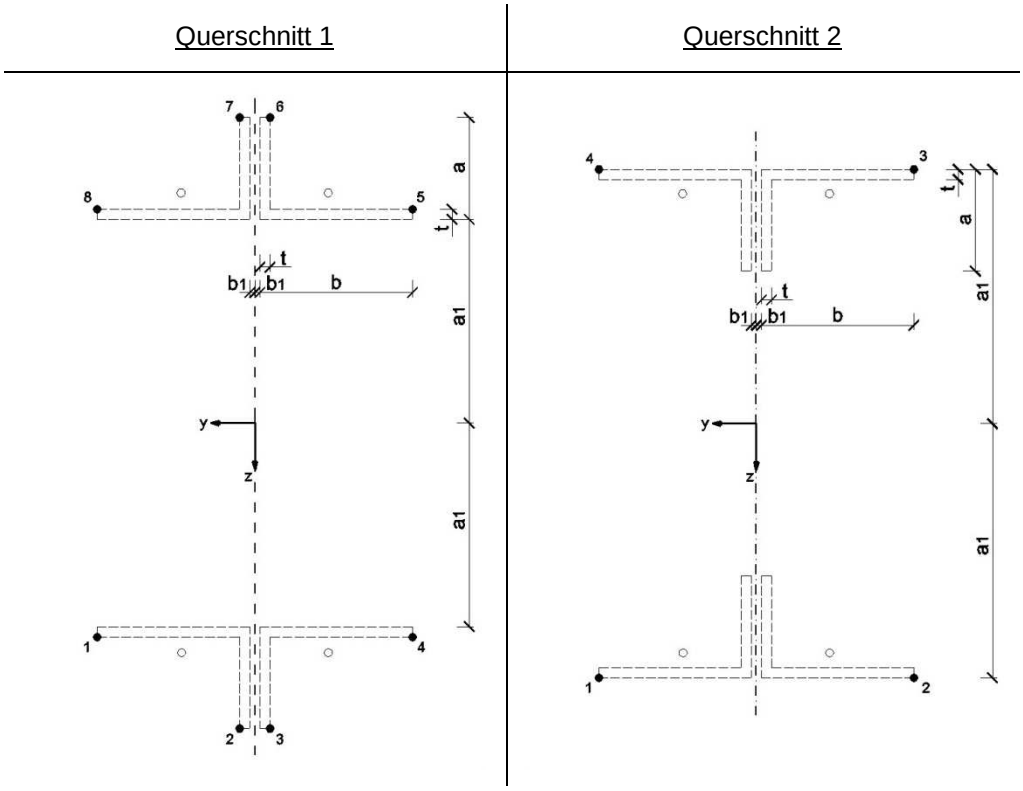


Abb. 7.19: Maßgebende Stellen für die Spannungsermittlung

Abhängig vom Querschnittstyp lauten die Koordinaten:

Pkt.	Querschnitt 1		Querschnitt 2	
	y	z	y	z
1	$b_1 + b$	$a_1 + t$	$b_1 + b$	a_1
2	$b_1 + t$	$a_1 + a$	$-(b_1 + b)$	a_1
3	$-(b_1 + t)$	$a_1 + a$	$-(b_1 + b)$	$-a_1$
4	$-(b_1 + b)$	$a_1 + t$	$b_1 + b$	$-a_1$
5	$-(b_1 + b)$	$-(a_1 + t)$		
6	$-(b_1 + t)$	$-(a_1 + a)$		
7	$b_1 + t$	$-(a_1 + a)$		
8	$b_1 + b$	$-(a_1 + t)$		

Tab. 7.11: Koordinaten der maßgebenden Stellen

Die Spannungen errechnen sich durch einsetzen der Koordinaten in die Ebenengleichung.

8 Beispiel

8.1 Angabe

Profil

$a = 100\ [mm]$ $\qquad \alpha_1 = \frac{150-10}{100} = 1{,}4\ [-]$

$b = 150\ [mm]$ $\qquad \alpha_2 = \frac{100-10}{150} = 0{,}6\ [-]$

$t = 10\ [mm]$ $\qquad A = 100 \cdot 10 \cdot (1 + 1{,}4) = 2400\ [mm^2]$

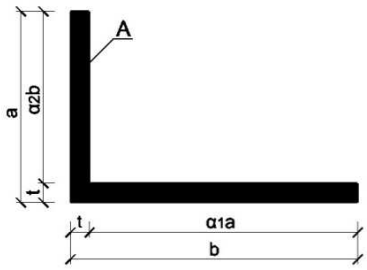


Abb. 8.1: Profil

Querschnittstyp 1

Abmessungen:	**Schnittgrößen:**	**Schädigungen**
$a_1 = 200\ [mm]$	$M_y = 50\ [kNm] \triangleq 5.000\ [kNcm]$	$\kappa_1 = 0{,}6\ [-]$
$b_1 = 5\ [mm]$	$M_z = 50\ [kNm] \triangleq 5.000\ [kNcm]$	$\kappa_2 = 0{,}8\ [-]$
	$N = 1.000\ [kN]$	$\kappa_3 = 0{,}9\ [-]$
		$\kappa_4 = 0{,}7\ [-]$

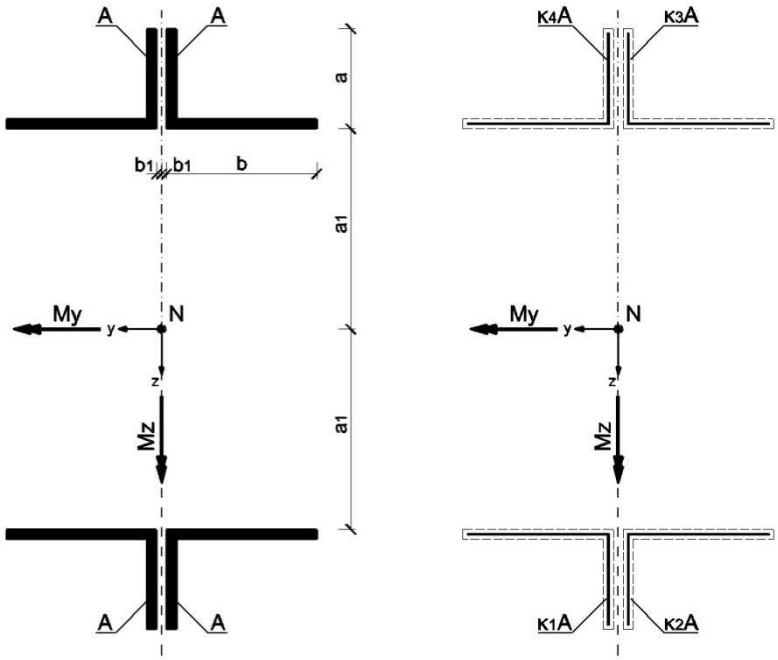


Abb. 8.2: Querschnitt 1

8.2 Spannungsberechnung mit Hilfe der exakten Querschnittswerte

8.2.1 Ermittlung der Koordinaten

Angenommene reale Schädigung gemäß Kapitel 2.2 sowie Polygonzug gemäß Kapitel 6.1:

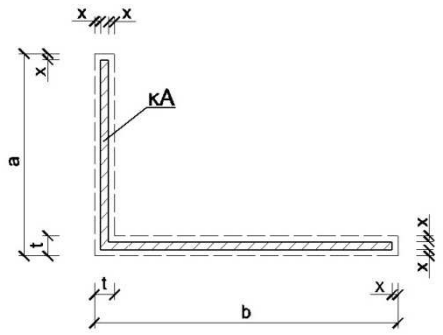


Abb. 8.3: Profilabmessungen

$$x_i = 0{,}25\left[a + b - \sqrt{(a+b)^2 - 4A(1-\kappa_i)}\right] \qquad i = 1{,}2{,}3{,}4$$

$$x_1 = 0{,}25\left[100 + 150 - \sqrt{(100+150)^2 - 4 \cdot 2400(1-0{,}6)}\right] = 1{,}95\ [mm]$$

$$x_2 = 0{,}25\left[100 + 150 - \sqrt{(100+150)^2 - 4 \cdot 2400(1-0{,}8)}\right] = 0{,}97\ [mm]$$

$$x_3 = 0{,}25\left[100 + 150 - \sqrt{(100+150)^2 - 4 \cdot 2400(1-0{,}9)}\right] = 0{,}48\ [mm]$$

$$x_4 = 0{,}25\left[100 + 150 - \sqrt{(100+150)^2 - 4 \cdot 2400(1-0{,}7)}\right] = 1{,}46\ [mm]$$

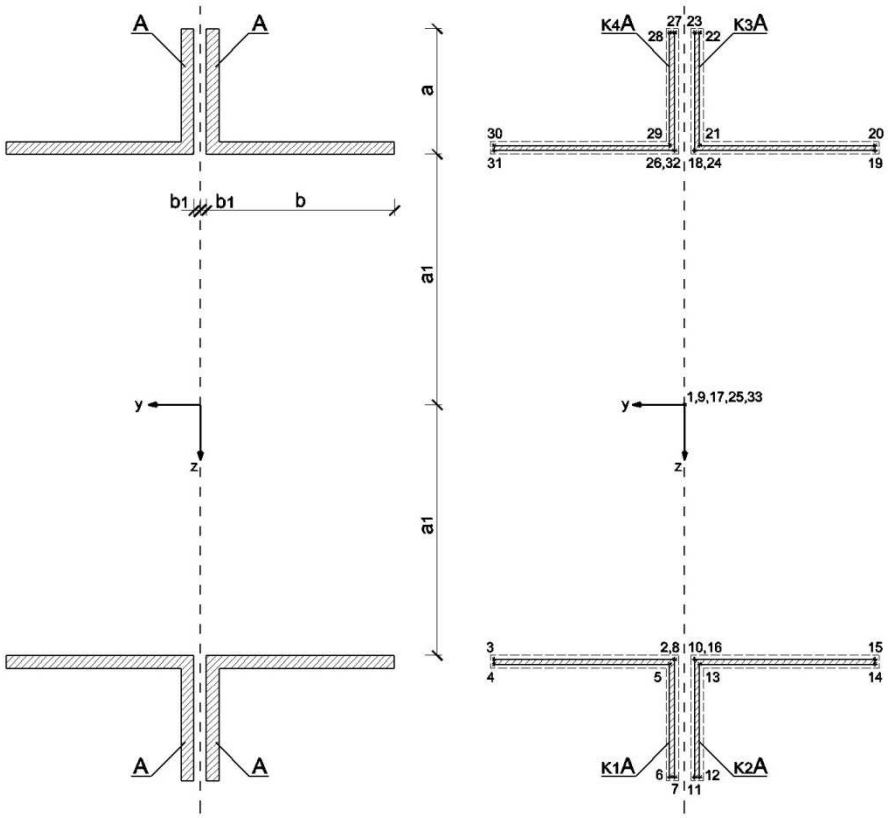


Abb. 8.4: Polygonzug Querschnitt 1

Pkt.	y	z
1	0	0
2	$b_1 + x_1$	$a_1 + x_1$
3	$b_1 + b - x_1$	$a_1 + x_1$
4	$b_1 + b - x_1$	$a_1 + t - x_1$
5	$b_1 + t - x_1$	$a_1 + t - x_1$
6	$b_1 + t - x_1$	$a_1 + a - x_1$
7	$b_1 + x_1$	$a_1 + a - x_1$
8	$b_1 + x_1$	$a_1 + x_1$
9	0	0
10	$-(b_1 + x_2)$	$a_1 + x_2$
11	$-(b_1 + x_2)$	$a_1 + a - x_2$
12	$-(b_1 + t - x_2)$	$a_1 + a - x_2$
13	$-(b_1 + t - x_2)$	$a_1 + t - x_2$
14	$-(b_1 + b - x_2)$	$a_1 + t - x_2$
15	$-(b_1 + b - x_2)$	$a_1 + x_2$
16	$-(b_1 + x_2)$	$a_1 + x_2$
17	0	0
18	$-(b_1 + x_3)$	$-(a_1 + x_3)$
19	$-(b_1 + b - x_3)$	$-(a_1 + x_3)$
20	$-(b_1 + b - x_3)$	$-(a_1 + t - x_3)$
21	$-(b_1 + t - x_3)$	$-(a_1 + t - x_3)$
22	$-(b_1 + t - x_3)$	$-(a_1 + a - x_3)$
23	$-(b_1 + x_3)$	$-(a_1 + a - x_3)$
24	$-(b_1 + x_3)$	$-(a_1 + x_3)$
25	0	0
26	$b_1 + x_4$	$-(a_1 + x_4)$
27	$b_1 + x_4$	$-(a_1 + a - x_4)$
28	$b_1 + t - x_4$	$-(a_1 + a - x_4)$
29	$b_1 + t - x_4$	$-(a_1 + t - x_4)$
30	$b_1 + b - x_4$	$-(a_1 + t - x_4)$
31	$b_1 + b - x_4$	$-(a_1 + x_4)$
32	$b_1 + x_4$	$-(a_1 + x_4)$
33	0	0

Pkt.	$y\ [mm]$	$z\ [mm]$
1	0	0
2	$6{,}95$	$201{,}95$
3	$153{,}35$	$201{,}95$
4	$153{,}35$	$208{,}05$
5	$13{,}05$	$208{,}05$
6	$13{,}05$	$298{,}05$
7	$6{,}95$	$298{,}05$
8	$6{,}95$	$201{,}95$
9	0	0
10	$-5{,}97$	$200{,}97$
11	$-5{,}97$	$299{,}03$
12	$-14{,}03$	$299{,}03$
13	$-14{,}03$	$209{,}03$
14	$-154{,}03$	$209{,}03$
15	$-154{,}03$	$200{,}97$
16	$-5{,}97$	$200{,}97$
17	0	0
18	$-5{,}48$	$-200{,}48$
19	$-154{,}52$	$-200{,}48$
20	$-154{,}52$	$-209{,}52$
21	$-14{,}52$	$-209{,}52$
22	$-14{,}52$	$-299{,}52$
23	$-5{,}48$	$-299{,}52$
24	$-5{,}48$	$-200{,}48$
25	0	0
26	$6{,}46$	$-201{,}46$
27	$6{,}46$	$-298{,}54$
28	$13{,}54$	$-298{,}54$
29	$13{,}54$	$-208{,}54$
30	$153{,}54$	$-208{,}54$
31	$153{,}54$	$-201{,}46$
32	$6{,}46$	$-201{,}46$
33	0	0

Tab. 8.1: Ermittlung der Koordinaten

8.2.2 Ermittlung der Querschnittswerte [3],

$$A_G = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i \cdot z_{i+1} - y_i \cdot y_{i+1}) = 72{,}00\ [cm^2]$$

$$A_y = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n} [(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)(z_i + z_{i+1})] = -52{,}13\ [cm^3]$$

$$A_z = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^{n} [(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)(y_i + y_{i+1})] = -107{,}66\ [cm^3]$$

$$y_s = \frac{A_y}{A_G} = \frac{-52{,}13}{72{,}00} = -0{,}724\ [cm]$$

$$z_s = \frac{A_z}{A_G} = \frac{-107{,}66}{72{,}00} = -1{,}495\ [cm]$$

$$A_{yy} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{n} \{(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)([z_i + z_{i+1}]^2 - z_i \cdot z_{i+1})\} = 3.705{,}99\ [cm^4]$$

$$A_{zz} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{n} \{(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)([y_i + y_{i+1}]^2 - y_i \cdot y_{i+1})\} = 36.556{,}21\ [cm^4]$$

$$A_{yz} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left\{(y_i \cdot z_{i+1} - y_{i+1} \cdot z_i)\left([y_i + y_{i+1}][z_i + z_{i+1}] - \frac{1}{2}(y_i \cdot z_{i+1} + y_{i+1} \cdot z_i)\right)\right\} = 2{,}12\ [cm^4]$$

$$A_{\hat{y}\hat{y}} = A_{yy} - {y_s}^2 A_G = 3.705{,}99 - (-0{,}724)^2 \cdot 72{,}00 = 3.668{,}25\ [cm^4]$$

$$A_{\hat{z}\hat{z}} = A_{zz} - {z_s}^2 A_G = 36.556{,}21 - (-1{,}495)^2 \cdot 72{,}00 = 36.395{,}21\ [cm^4]$$

$$A_{\hat{y}\hat{z}} = A_{\hat{z}\hat{y}} = A_{yz} - y_s z_s A_G = 2{,}12 - (-0{,}724)(-1{,}495)72{,}00 = -75{,}83\ [cm^4]$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2A_{\hat{y}\hat{z}}}{(A_{\hat{y}\hat{y}} - A_{\hat{z}\hat{z}})} = \frac{2 \cdot (-75{,}83)}{(3.668{,}25 - 36.395{,}21)} \quad \rightarrow \quad 2\alpha = 0{,}26\ [°]$$

$$A_{\eta\eta} = \frac{A_{\hat{y}\hat{y}} + A_{\hat{z}\hat{z}}}{2} + \left[\frac{A_{\hat{y}\hat{y}} - A_{\hat{z}\hat{z}}}{2} \cdot \cos 2\alpha - A_{\hat{y}\hat{z}} \cdot \sin 2\alpha\right] =$$

$$= \frac{3.668{,}25 + 36.395{,}21}{2} + \left[\frac{3.668{,}25 - 36.395{,}21}{2} \cdot \cos(0{,}26) - (-75{,}83)\sin(0{,}26)\right] = 3.668{,}07\ [cm^4]$$

$$A_{\zeta\zeta} = \frac{A_{\hat{y}\hat{y}} + A_{\hat{z}\hat{z}}}{2} - \left[\frac{A_{\hat{y}\hat{y}} - A_{\hat{z}\hat{z}}}{2} \cdot \cos 2\alpha - A_{\hat{y}\hat{z}} \cdot \sin 2\alpha\right] =$$

$$= \frac{3.668{,}25 + 36.395{,}21}{2} - \left[\frac{3.668{,}25 - 36.395{,}21}{2} \cdot \cos(0{,}26) - (-75{,}83)\sin(0{,}26)\right] = 36.395{,}39\ [cm^4]$$

8.2.3 Koordinatentransformation

Die Koordinatentransformation der für die Spannungsermittlung maßgebenden Stellen erfolgt gemäß Gl. (3.15) bzw. Gl. (3.16):

$$\eta = (y - y_s)\cos\alpha + (z - z_s)\sin\alpha$$

$$\zeta = -(y - y_s)\sin\alpha + (z - z_s)\cos\alpha$$

Pkt.	η $[mm]$	ζ $[mm]$
4	160,81	222,63
6	21,01	312,96
12	−6,06	314,00
14	−146,74	224,33
20	−147,73	−194,22
22	−7,94	−284,55
28	20,13	−283,64
30	160,34	−193,96

Tab. 8.2: Koordinaten der maßgebenden Stellen

8.2.4 Schnittgrößentransformation

Die Ermittlung der auf den geschädigten Querschnitt einwirkenden Schnittgrößen erfolgt gemäß Tab. 5.3.

$$M_\eta = M_y \cos\alpha + M_z \sin\alpha + N[y_s \sin\alpha - z_s \cos\alpha]$$
$$= 5.000\cos(0{,}13) + 5.000\sin(0{,}13) + 1000[(-0{,}724)\sin(0{,}13) - (-1{,}495)\cos(0{,}13)] = 5.175\ [kNcm]$$
$$M_\zeta = -M_y \sin\alpha + M_z \cos\alpha + N[y_s \cos\alpha + z_s \sin\alpha]$$
$$= -5.000\sin(0{,}13) + 5.000\cos(0{,}13) + 1.000[(-0{,}724)\cos(0{,}13) + (-1{,}495)\sin(0{,}13)] = 5.194\ [kNcm]$$
$$N = 1.000\ [kN]$$

8.2.5 Spannungsermittlung

Die aus den Schnittgrößen resultierenden Spannungen errechnen sich nach Gl. (5.29):

$$\sigma(\eta,\zeta) = \frac{N}{A_G} + \frac{M_\eta}{A_{\zeta\zeta}}\zeta - \frac{M_\zeta}{A_{\eta\eta}}\eta$$

Pkt.	$\boldsymbol{\sigma(N)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(M_\eta)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(M_\zeta)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(N, M_\eta, M_\zeta)}$ $[kN/cm^2]$
4	18,00	3,11	−21,91	−0,81
6	15,59	4,31	−2,85	17,04
12	15,06	4,31	0,84	20,20
14	11,91	3,04	19,94	34,89
20	10,16	−2,71	20,13	27,58
22	12,56	−3,91	1,07	9,72
28	13,12	−3,89	−2,75	6,48
30	16,28	−2,61	−21,86	−8,20

Tab. 8.3: Spannungsermittlung der maßgebenden Stellen

8.3 Spannungsberechnung mit „Modell der starren Platte“

Die Formelsätze können Kap. 7.5 (Ablaufschema für die praktische Berechnung) entnommen werden

8.3.1 Kontrolle der Anwendungsgrenze

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_4} = \frac{0{,}6 + 0{,}9}{0{,}8 + 0{,}7} = 1$$

$\frac{7}{10} < 1 < \frac{10}{7}$, damit ist das Modell anwendbar.

8.3.2 Transformation des realen ungeschädigten Querschnitts in einen Vierpunktquerschnitt

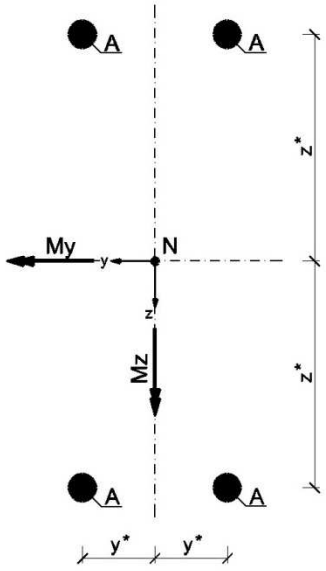


Abb. 8.5: Vierpunktquerschnitt

$$z^* = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(100^2 + 1{,}4 \cdot 10^2)}{1 + 1{,}4} + \frac{(100 + 1{,}4 \cdot 10)200}{1 + 1{,}4} + 200^2} = 225{,}6\ [mm]$$

$$y^* = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(150^2 + 0{,}6 \cdot 10^2)}{1 + 0{,}6} + \frac{(150 + 0{,}6 \cdot 10)5}{1 + 0{,}6} + 5^2} = 72{,}2\ [mm]$$

Die tatsächlichen Schädigungen κ_i werden auf den Vierpunktquerschnitt übertragen.

8.3.3 Spannungsberechnung und Superposition

Biegemoment M_y:

$$X_{M_y} = \frac{5000}{2 \cdot 22{,}56} \cdot \frac{\frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{0{,}9}}{\frac{1}{0{,}6} + \frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{0{,}9} + \frac{1}{0{,}7}} = 47{,}95\ [kN]$$

$F_1 = 47{,}95\ [kN]$ $\qquad \sigma_1 = \frac{47{,}95}{0{,}6 \cdot 24} = 3{,}33\ [kN/cm^2]$

$F_2 = \frac{5000}{2 \cdot 22{,}56} - 47{,}95 = 62{,}86\ [kN]$ $\qquad \sigma_2 = \frac{62{,}86}{0{,}8 \cdot 24} = 3{,}27\ [kN/cm^2]$

$F_3 = -\frac{5000}{2 \cdot 22{,}56} + 47{,}95 = -62{,}86\ [kN]$ $\qquad \sigma_3 = \frac{-62{,}86}{0{,}9 \cdot 24} = -2{,}91\ [kN/cm^2]$

$F_4 = -47{,}95\ [kN]$ $\qquad \sigma_4 = \frac{-47{,}95}{0{,}7 \cdot 24} = -2{,}85\ [kN/cm^2]$

Biegemoment M_z:

$$X_{M_z} = -\frac{5000}{2 \cdot 7{,}22} \cdot \frac{\frac{1}{0{,}9} + \frac{1}{0{,}7}}{\frac{1}{0{,}6} + \frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{0{,}9} + \frac{1}{0{,}7}} = -161{,}17\ [kN]$$

$F_1 = -161{,}17\ [kN]$ $\qquad \sigma_1 = \frac{-161{,}36}{0{,}6 \cdot 24} = -11{,}19\ [kN/cm^2]$

$F_2 = 161{,}17 [kN]$ $\qquad \sigma_2 = \frac{161{,}36}{0{,}8 \cdot 24} = 8{,}39\ [kN/cm^2]$

$F_3 = \frac{5000}{2 \cdot 7{,}22} + (-161{,}36) = 185{,}10\ [kN]$ $\qquad \sigma_3 = \frac{184{,}91}{0{,}9 \cdot 24} = 8{,}57\ [kN/cm^2]$

$F_4 = -\frac{5000}{2 \cdot 7{,}22} - (-161{,}36) = -185{,}10\ [kN]$ $\qquad \sigma_4 = \frac{-184{,}91}{0{,}7 \cdot 24} = -11{,}02\ [kN/cm^2]$

Normalkraft N:

$$X_N = \frac{1000}{2} \cdot \frac{\frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{0{,}7}}{\frac{1}{0{,}6} + \frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{0{,}9} + \frac{1}{0{,}7}} = 245{,}46\ [kN]$$

$F_1 = 245{,}46\ [kN]$ $\qquad \sigma_1 = \frac{245{,}84}{0{,}6 \cdot 24} = 17{,}05\ [kN/cm^2]$

$F_2 = \frac{1000}{2} - 245{,}83 = 254{,}55\ [kN]$ $\qquad \sigma_2 = \frac{254{,}16}{0{,}8 \cdot 24} = 13{,}26\ [kN/cm^2]$

$F_3 = 245{,}46\ [kN]$ $\qquad \sigma_3 = \frac{245{,}84}{0{,}9 \cdot 24} = 11{,}36\ [kN/cm^2]$

$F_4 = \frac{1000}{2} - 245{,}83 = 254{,}55\ [kN]$ $\qquad \sigma_4 = \frac{254{,}16}{0{,}7 \cdot 24} = 15{,}15\ [kN/cm^2]$

Superposition:

$\sigma_1 = 3{,}33 - 11{,}19 + 17{,}05 = 9{,}18\ [kN/cm^2]$

$\sigma_2 = 3{,}27 + 8{,}39 + 13{,}26 = 24{,}93\ [kN/cm^2]$

$\sigma_3 = -2{,}91 + 8{,}57 + 11{,}36 = 17{,}02\ [kN/cm^2]$

$\sigma_4 = -2{,}85 - 11{,}02 + 15{,}15 = 1{,}28\ [kN/cm^2]$

8.3.4 Ebenengleichung und Extrapolation

Ebenengleichung:

$$\sigma(y,z) = \frac{(24{,}93\ +1{,}28)}{2} - \frac{(24{,}93-9{,}18)}{2\cdot 7{,}22}\cdot y - \frac{(1{,}28-9{,}18)}{2\cdot 22{,}56}\cdot z$$

Die maßgebenden Stellen sind in folgender Abbildung dargestellt. Die Beschriftung erfolgt analog zur Spannungsberechnung mit Hilfe der exakten Querschnittswerte.

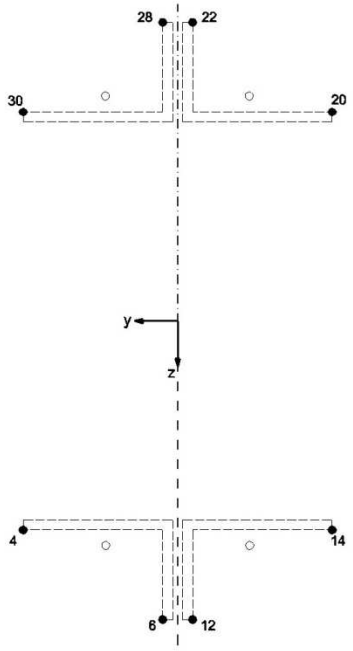


Abb. 8.6: Maßgebende Stellen für die Spannungsermittlung

Pkt.	$\boldsymbol{y}\ [cm]$	$\boldsymbol{z}\ [cm]$	$\boldsymbol{\sigma(N)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(M_y)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(M_z)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(N,M_y,M_z)}$ $[kN/cm^2]$
4	15,5	21	19,15	3,15	−22,42	−0,12
6	1,5	30	15,86	4,33	−3,46	16,72
12	−1,5	30	15,07	4,32	0,61	20,00
14	−15,5	21	11,02	3,03	19,63	33,68
20	−15,5	−21	9,26	−2,73	19,80	26,33
22	−1,5	−30	12,55	−3,91	0,84	9,48
28	1,5	−30	13,34	−3,90	−3,23	6,21
30	15,5	−21	17,39	−2,61	−22,26	−7,47

Tab. 8.4: Spannungsermittlung in den maßgebenden Stellen

8.4 Spannungsberechnung mit „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“

8.4.1 Kontrolle der Anwendungsgrenze

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_3}{\kappa_2 + \kappa_4} = \frac{0{,}6 + 0{,}9}{0{,}8 + 0{,}7} = 1$$

$\frac{7}{10} < 1 < \frac{10}{7}$, damit ist das Modell anwendbar.

8.4.2 Transformation in einen Vierpunktquerschnitt

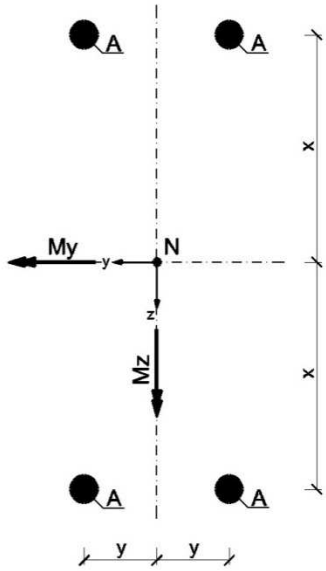


Abb. 8.7: Vierpunktquerschnitt

$$z^* = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(100^2 + 1{,}4 \cdot 10^2)}{1 + 1{,}4} + \frac{(100 + 1{,}4 \cdot 10)200}{1 + 1{,}4} + 200^2} = 225{,}6\ [mm]$$

$$y^* = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{(150^2 + 0{,}6 \cdot 10^2)}{1 + 0{,}6} + \frac{(150 + 0{,}6 \cdot 10)5}{1 + 0{,}6} + 5^2} = 72{,}2\ [mm]$$

8.4.3 Modifizierung der Schädigungen

Vorwerte:

$$e_s(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{0{,}6 - 0{,}8}{0{,}6 + 0{,}8}\frac{\left[\left(0{,}5 + \frac{15}{2}\right) + 0{,}6\left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right)\right]}{1 + 0{,}6} = -0{,}767\ [cm]$$

$$I_\zeta(\kappa_1, \kappa_2) = 15(0{,}6 + 0{,}8)\left[\frac{15^2}{12} + \left(0{,}5 + \frac{15}{2}\right)^2 + 0{,}6\left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{(0{,}6 - 0{,}8)^2}{(0{,}6 + 0{,}8)^2}\frac{\left(\left(0{,}5 + \frac{15}{2}\right) + 0{,}6\left(0{,}5 + \frac{1}{2}\right)\right)^2}{1 + 0{,}6}\right]$$

$$= 1730{,}54\ [cm^4]$$

$$e_s(\kappa_4,\kappa_3) = \frac{0{,}7-0{,}9}{0{,}7+0{,}9}\frac{\left[\left(0{,}5+\frac{15}{2}\right)+0{,}6\left(0{,}5+\frac{1}{2}\right)\right]}{1+0{,}6} = -0{,}672\ [cm]$$

$$I_\zeta(\kappa_4,\kappa_3) = 15(0{,}7+0{,}9)\left[\frac{15^2}{12}+\left(0{,}5+\frac{15}{2}\right)^2+0{,}6\left(0{,}5+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(0{,}7-0{,}9)^2}{(0{,}7+0{,}9)^2}\frac{\left(\left(0{,}5+\frac{15}{2}\right)+0{,}6\left(0{,}5+\frac{1}{2}\right)\right)^2}{1+0{,}6}\right]$$

$$= 1983{,}07\ [cm^4]$$

Ermittlung der Werte $\boldsymbol{\lambda_i}$:

$\lambda_1 = 0{,}6\ [-]$

$\lambda_2 = 0{,}8\ [-]$

$\lambda_3 = 0{,}9\ [-]$

$\lambda_4 = 0{,}7\ [-]$

Ermittlung der Werte $\boldsymbol{\mu_i}$:

$$\mu_1 = \frac{1}{2\cdot 7{,}22\cdot 24}\cdot\frac{1730{,}54}{7{,}22-(-0{,}767)} = 0{,}625\ [-]$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2\cdot 7{,}22\cdot 24}\cdot\frac{1730{,}54}{7{,}22+(-0{,}767)} = 0{,}774\ [-]$$

$$\mu_3 = \frac{1}{2\cdot 7{,}22\cdot 24}\cdot\frac{1983{,}07}{7{,}22+(-0{,}672)} = 0{,}874\ [-]$$

$$\mu_4 = \frac{1}{2\cdot 7{,}22\cdot 24}\cdot\frac{1983{,}07}{7{,}22-(-0{,}672)} = 0{,}725\ [-]$$

Ermittlung der Werte $\boldsymbol{\nu_i}$:

$${\nu_1}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{0{,}6+0{,}8}-\frac{24\cdot(-0{,}767)\cdot[7{,}22-(-0{,}767)]}{1730{,}54}\right]} = 0{,}626\ [-]$$

$${\nu_2}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{0{,}6+0{,}8}-\frac{24\cdot(-0{,}767)\cdot[-7{,}22-(-0{,}767)]}{1730{,}54}\right]} = 0{,}774\ [-]$$

$${\nu_3}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{0{,}7+0{,}9}-\frac{24\cdot(-0{,}672)\cdot[-7{,}22-(-0{,}672)]}{1983{,}07}\right]} = 0{,}874\ [-]$$

$${\nu_4}^z = \frac{1}{2\left[\frac{1}{0{,}7+0{,}9}-\frac{24\cdot(-0{,}672)\cdot[7{,}22-(-0{,}672)]}{1983{,}07}\right]} = 0{,}726\ [-]$$

$$y_s = \frac{0{,}6-0{,}8-0{,}9+0{,}7}{0{,}6+0{,}8+0{,}9+0{,}7}\frac{\left[\left(0{,}5+\frac{15}{2}\right)+0{,}6\left(0{,}5+\frac{1}{2}\right)\right]}{1+0{,}6} = -0{,}717\ [cm]$$

$$z_s = \frac{0{,}6+0{,}8-0{,}9-0{,}7}{0{,}6+0{,}8+0{,}9+0{,}7}\frac{\left[\left(20+\frac{10}{2}\right)+1{,}4\left(20+\frac{1}{2}\right)\right]}{1+1{,}4} = -1{,}492\ [cm]$$

$$\nu_1 = \frac{0{,}6\cdot(-1{,}492)+0{,}626\cdot(-0{,}717)}{-1{,}492-0{,}717} = 0{,}608\ [-]$$

$$\nu_2 = \frac{0{,}8\cdot(-1{,}492)+0{,}774\cdot(-0{,}717)}{-1{,}492-0{,}717} = 0{,}792\ [-]$$

$$\nu_3 = \frac{0{,}9\cdot(-1{,}492)+0{,}874\cdot(-0{,}717)}{-1{,}492-0{,}717} = 0{,}892\ [-]$$

$$\nu_4 = \frac{0{,}7\cdot(-1{,}492)+0{,}726\cdot(-0{,}717)}{-1{,}492-0{,}717} = 0{,}708\ [-]$$

8.4.4 Spannungsberechnung und Superposition

Biegemoment M_y:

$$X_{M_y} = \frac{5000}{2 \cdot 22{,}56} \cdot \frac{\frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{0{,}9}}{\frac{1}{0{,}6} + \frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{0{,}9} + \frac{1}{0{,}7}} = 47{,}95\ [kN]$$

$F_1 = 47{,}95\ [kN]$ $\qquad \sigma_1 = \frac{47{,}95}{0{,}6 \cdot 24} = 3{,}33\ [kN/cm^2]$

$F_2 = \frac{5000}{2 \cdot 22{,}56} - 47{,}95 = 62{,}86\ [kN]$ $\qquad \sigma_2 = \frac{62{,}86}{0{,}8 \cdot 24} = 3{,}27\ [kN/cm^2]$

$F_3 = -\frac{5000}{2 \cdot 22{,}56} + 47{,}95 = -62{,}86\ [kN]$ $\qquad \sigma_3 = \frac{-62{,}86}{0{,}9 \cdot 24} = -2{,}91\ [kN/cm^2]$

$F_4 = -47{,}95\ [kN]$ $\qquad \sigma_4 = \frac{-47{,}95}{0{,}7 \cdot 24} = -2{,}85\ [kN/cm^2]$

Biegemoment M_z:

$$X_{M_z} = -\frac{5000}{2 \cdot 7{,}22} \cdot \frac{\frac{1}{0{,}874} + \frac{1}{0{,}725}}{\frac{1}{0{,}625} + \frac{1}{0{,}774} + \frac{1}{0{,}874} + \frac{1}{0{,}725}} = -161{,}36\ [kN]$$

$F_1 = -161{,}36\ [kN]$ $\qquad \sigma_1 = \frac{-161{,}36}{0{,}625 \cdot 24} = -10{,}76\ [kN/cm^2]$

$F_2 = 161{,}36 [kN]$ $\qquad \sigma_2 = \frac{161{,}36}{0{,}774 \cdot 24} = 8{,}69\ [kN/cm^2]$

$F_3 = \frac{5000}{2 \cdot 7{,}22} + (-161{,}36) = 184{,}91\ [kN]$ $\qquad \sigma_3 = \frac{184{,}91}{0{,}874 \cdot 24} = 8{,}82\ [kN/cm^2]$

$F_4 = -\frac{5000}{2 \cdot 7{,}22} - (-161{,}36) = -184{,}91\ [kN]$ $\qquad \sigma_4 = \frac{-184{,}91}{0{,}725 \cdot 24} = -10{,}63\ [kN/cm^2]$

Normalkraft N:

$$X_N = \frac{1000}{2} \cdot \frac{\frac{1}{0{,}792} + \frac{1}{0{,}708}}{\frac{1}{0{,}608} + \frac{1}{0{,}792} + \frac{1}{0{,}892} + \frac{1}{0{,}708}} = 245{,}84\ [kN]$$

$F_1 = 245{,}84\ [kN]$ $\qquad \sigma_1 = \frac{245{,}84}{0{,}608 \cdot 24} = 16{,}84\ [kN/cm^2]$

$F_2 = \frac{1000}{2} - 245{,}83 = 254{,}16\ [kN]$ $\qquad \sigma_2 = \frac{254{,}16}{0{,}792 \cdot 24} = 13{,}38\ [kN/cm^2]$

$F_3 = 245{,}84\ [kN]$ $\qquad \sigma_3 = \frac{245{,}84}{0{,}892 \cdot 24} = 11{,}49\ [kN/cm^2]$

$F_4 = \frac{1000}{2} - 245{,}83 = 254{,}16\ [kN]$ $\qquad \sigma_4 = \frac{254{,}16}{0{,}708 \cdot 24} = 14{,}95\ [kN/cm^2]$

Superposition:

$\sigma_1 = 3{,}33 - 10{,}76 + 16{,}84 = 9{,}41\ [kN/cm^2]$

$\sigma_2 = 3{,}27 + 8{,}69 + 13{,}38 = 25{,}34\ [kN/cm^2]$

$\sigma_3 = -2{,}91 + 8{,}82 + 11{,}49 = 17{,}40\ [kN/cm^2]$

$\sigma_4 = -2{,}85 - 10{,}63 + 14{,}95 = 1{,}47\ [kN/cm^2]$

8.4.5 Ebenengleichung und Extrapolation

Ebenengleichung:

$$\sigma(y,z) = \frac{(25{,}34\ +1{,}47)}{2} - \frac{(25{,}34-9{,}41)}{2\cdot 7{,}22}\cdot y - \frac{(1{,}47-9{,}41)}{2\cdot 22{,}56}\cdot z$$

Die maßgebenden Stellen sind in folgender Abbildung dargestellt. Die Beschriftung erfolgt analog zur Spannungsberechnung mit Hilfe der Querschnittswerte.

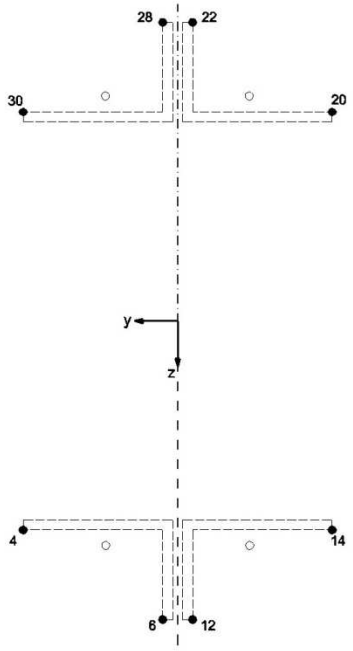


Abb. 8.8: Maßgebende Stellen für die Spannungsermittlung

Pkt.	$\boldsymbol{y}\ [cm]$	$\boldsymbol{z}\ [cm]$	$\boldsymbol{\sigma(N)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(M_y)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(M_z)}$ $[kN/cm^2]$	$\boldsymbol{\sigma(N,M_y,M_z)}$ $[kN/cm^2]$
4	15,5	21	18,76	3,15	−21,91	0,00
6	1,5	30	15,78	4,33	−3,08	17,03
12	−1,5	30	15,06	4,32	0,96	20,34
14	−15,5	21	11,32	3,03	19,84	34,19
20	−15,5	−21	9,57	−2,73	19,96	26,80
22	−1,5	−30	12,55	−3,91	1,14	9,78
28	1,5	−30	13,27	−3,90	−2,90	6,47
30	15,5	−21	17,00	−2,61	−21,78	−7,38

Tab. 8.5: Spannungsermittlung in den maßgebenden Stellen

8.5 Vergleich der Ergebnisse

8.5.1 Vergleich der exakten Spannungsberechnung mit dem „Modell der starren Platte“

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Ergebnisse des neuen Rechenmodelles („RM1“) nur geringfügig von jenen der klassischen Spannungsberechnung mit Hilfe der exakten Querschnittswerte („exakt“) abweichen. Die ermittelten betragsmäßig größten Spannungen für die drei Einwirkungen liegen gegenüber den „exakten“ Werten sämtlich auf der „sicheren Seite“ (Verhältnis > 1). Sie treten in jenem Einzelprofil mit der größten Schädigung auf.

Pkt.	$\sigma(N)$ $[kN/cm^2]$		Verhältnis	$\sigma(M_y)$ $[kN/cm^2]$		Verhältnis	$\sigma(M_z)$ $[kN/cm^2]$		Verhältnis
	„exakt“	„RM1“		„exakt“	„RM1“		„exakt“	„RM1“	
4	18,00	19,15	1,06	3,11	3,15	1,01	−21,91	−22,42	1,02
6	15,59	15,86	1,02	4,31	4,33	1,00	−2,85	−3,46	1,21
12	15,06	15,07	1,00	4,31	4,32	1,00	0,84	0,61	0,72
14	11,91	11,02	0,92	3,04	3,03	1,00	19,94	19,63	0,98
20	10,16	9,26	0,91	−2,71	−2,73	1,01	20,13	19,80	0,98
22	12,56	12,55	1,00	−3,91	−3,91	1,00	1,07	0,84	0,79
28	13,12	13,34	1,02	−3,89	−3,90	1,00	−2,75	−3,23	1,17
30	16,28	17,39	1,07	−2,61	−2,61	1,00	−21,86	−22,26	1,02

Tab. 8.6: Schnittgrößenabhängige Gegenüberstellung der Spannungsergebnisse

Nach der Superposition kann keine allgemeine Aussage über die Stelle der betragsmäßig größten Spannung gemacht werden. In diesem Beispiel tritt sie im Pkt. 14 auf:

Pkt.	$\sigma(N, M_y, M_z)$ $[kN/cm^2]$	
	„exakt“	„RM1“
4	−0,81	−0,12
6	17,04	16,72
12	20,20	20,00
14	34,89	33,68
20	27,58	26,33
22	9,72	9,48
28	6,48	6,21
30	−8,20	−7,47

Tab. 8.7: Gegenüberstellung der Spannungsergebnisse

$$\frac{34{,}89 - 33{,}68}{34{,}89} = 0{,}03\ [-]\ \triangleq 3\ [\%]$$

Bei der Spannungsberechnung mit Hilfe des „Modelles der starren Platte“ befindet man sich in diesem Beispiel 3% auf der „unsicheren Seite“.

8.5.2 Vergleich der exakten Spannungsberechnung mit dem „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“

Zusammenfassend kann man sagen, dass die Ergebnisse des neuen Rechenmodelles („RM2“) nur geringfügig von jenen der klassischen Spannungsberechnung mit Hilfe der exakten Querschnittswerte („exakt“) abweichen. Die ermittelten betragsmäßig größten Spannungen für die drei Einwirkungen liegen gegenüber den „exakten“ Werten sämtlich auf der „sicheren Seite“ (Verhältnis > 1). Sie treten in jenem Einzelprofil mit der größten Schädigung auf.

Pkt.	$\sigma(N)$ $[kN/cm^2]$		Verhältnis	$\sigma(M_y)$ $[kN/cm^2]$		Verhältnis	$\sigma(M_z)$ $[kN/cm^2]$		Verhältnis
	„exakt“	„RM2“		„exakt“	„RM2“		„exakt“	„RM2“	
4	18,00	18,76	1,04	3,11	3,15	1,01	−21,91	−21,91	1,00
6	15,59	15,78	1,01	4,31	4,33	1,00	−2,85	−3,08	1,08
12	15,06	15,06	1,00	4,31	4,32	1,00	0,84	0,96	1,14
14	11,91	11,32	0,95	3,04	3,03	1,00	19,94	19,84	0,99
20	10,16	9,57	0,94	−2,71	−2,73	1,01	20,13	19,96	0,99
22	12,56	12,55	1,00	−3,91	−3,91	1,00	1,07	1,14	1,07
28	13,12	13,27	1,01	−3,89	−3,90	1,00	−2,75	−2,90	1,05
30	16,28	17,00	1,04	−2,61	−2,61	1,00	−21,86	−21,78	1,00

Tab. 8.8: Schnittgrößenabhängige Gegenüberstellung der Spannungsergebnisse

Nach der Superposition kann keine allgemeine Aussage über die Stelle der betragsmäßig größten Spannung gemacht werden. In diesem Beispiel tritt sie im Pkt. 14 auf:

Pkt.	$\sigma(N, M_y, M_z)$ $[kN/cm^2]$	
	„exakt“	„RM2“
4	−0,81	0,00
6	17,04	17,03
12	20,20	20,34
14	34,89	34,19
20	27,58	26,80
22	9,72	9,78
28	6,48	6,47
30	−8,20	−7,38

Tab. 8.9: Gegenüberstellung der Spannungsergebnisse

$$\frac{34{,}89 - 34{,}19}{34{,}89} = 0{,}02\ [-]\ \triangleq 2\ [\%]$$

Bei der Spannungsberechnung mit Hilfe des „Modelles der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ befindet man sich in diesem Beispiel 2% auf der „unsicheren Seite“.

9 Zusammenfassung

Bei den Untersuchungen der Spezialfälle von geschädigten Punktquerschnitten wurde gezeigt, dass die Spannungsberechnung einer Menge an Vorlaufrechnungen in Form von Querschnittswerten erfordert. Die in diesem Zusammenhang wesentliche Erkenntnis ist, dass sich die betragsmäßig größte Spannung infolge Schädigung unabhängig von den Querschnittsabmessungen entwickelt und für alle Spezialfälle durch die gleiche Funktion beschrieben werden kann.

Weiters wurde ein neues Rechenmodell für die Berechnung von beliebig geschädigten Vierpunktquerschnitten erstellt: „Modell der starren Platte auf Federlagerung“. Mit Hilfe dieses Modells umgeht man sämtliche Vorlaufrechnungen wie die Berechnung der exakten Querschnittswerte. Die Spannungsberechnung erfolgt über die aus Gleichgewichtsbedingungen resultierende Verteilung von Normalkräften im Querschnitt.

Für den Übergang zu realen, aus jeweils vier Winkelprofilen bestehenden Querschnitten wurden die Ergebnisse der Spezialfälle der geschädigten Punktquerschnitte herangezogen und die Unterschiede hinsichtlich der Entwicklung der Spannungen im Zuge der Schädigung bei Vernachlässigung der Eigenträgheitsmomente (L-Profile) aufgezeigt. Es stellte sich heraus, dass die Hauptachsendrehung das größte Problem in Bezug auf eine Näherung durch Punktquerschnitte darstellt, da die Eigenträgheitsmomente der L-Profile einen wesentlichen Einfluss auf den Drehwinkel α (Neigung des Grundsystems gegenüber dem Hauptsystem) haben.

Es wurden neue Rechenmodelle erstellt, mit deren Hilfe die Spannungen von beliebig geschädigten, realen Querschnitten berechnet werden können ohne auf die Querschnittswerte im üblichen Sinn einzugehen.

- Modell der starren Platte
- Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen

Das „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ erfordert einen größeren Rechenaufwand als das „Modell der starren Platte“. Es liefert jedoch bessere Ergebnisse verglichen mit der exakten Spannungsberechnung von geschädigten realen Querschnitten (bei großen Schädigungen).

Bei getrennter Spannungsberechnung nach den einwirkenden Schnittgrößen befindet man sich bei der Verwendung der neuen Rechenmodelle auf der „sicheren Seite“. Die geringe Abweichung zu den Ergebnissen der Spannungsberechnung mit Hilfe der Querschnittswerte lässt folgern, dass auch nach Superposition eine ausreichende Genauigkeit gegeben ist. Hierbei kann die maßgebende Spannung jedoch auf der „sicheren“, aber auch – geringfügig – auf der „unsicheren Seite“ liegen. Verglichen mit der Spannungsberechnung im klassischen Sinn liegt der Vorteil der neuen Rechenmodelle im benutzerfreundlicheren und vereinfachten Rechengang. Die programmtechnisch aufwändige Erfassung der schädigungsabhängigen Querschnittswerte samt Koordinaten- und Schnittgrößentransformation kann auf diese Weise umgangen werden. Sie stellen somit eine praxisorientierte Möglichkeit für die Nachweisführung geschädigter Stahlbauteile dar.

10 Anregungen für zukünftige Untersuchungen

10.1 Kontrolle der Voraussetzungen mit Hilfe der Finiten Elemente

Die in dieser Arbeit getroffenen Voraussetzungen hinsichtlich der Spannungsverteilung im geschädigten Querschnitt (Kap.3.2) lassen sich mit Hilfe der Finiten Elemente nachrechnen. Dabei können die im Übergangsbereich zwischen geschädigten und ungeschädigten Querschnitt vorhandenen Schubspannungen eine gewisse Rolle spielen. Sie wurden bei der Erstellung des hier abgeleiteten Rechenmodells vernachlässigt.

10.2 Modell der starren Platte

Das Modell der starren Platte auf Federlagerung (Kap. 5.2.2), das der Berechnung der Spannungen von geschädigten Vierpunktquerschnitten dient, ist sehr einfach, aber in Bezug auf die Verwendung für reale Querschnitte teilweise sehr grob (vgl. Kap. 6.3.3). Das Einfließen der Eigenträgheitsmomente der L-Profile könnte durch ersetzen der Federn mit „biegesteifen Balken“ erreicht werden. Dieses Modell hätte jedoch zwei Nachteile zur Konsequenz:

- Das räumliche System wäre für die betrachteten Einwirkungen “aus der Ebene“ 9-fach statisch unbestimmt;
- Die statisch unbestimmten Biegemomente M_y und M_z müssten auf die „lokalen Hauptachsen“ bezogen werden, was eine Berechnung der „lokalen“ Querschnittswerte erfordern würde.

Angesichts dieser Tatsachen ist eine Erweiterung des Modells der starren Platte nicht zielführend.

10.3 Aufteilung des Schädigungsbildes in „Einzelmodes“

Eine Entkopplung des Schädigungsbildes durch systematische Ausnützung von Symmetrie/ Antimetrie, d.h. durch die Aufspaltung des gegebenen Schädigungsbildes in „Modes“, wurde nicht eigens untersucht. Gegebenfalls könnte die auf Seite 25 dargestellte Zusammenfassung der behandelten Spezialfälle verallgemeinert werden.

11 Literaturverzeichnis

[1] Fink, Josef: Studienblätter zur Vorlesung Stahlbau 1, Institut für Tragkonstruktionen, Technischer Universität Wien, WS 2010/11

[2] Pichler/Eberhardsteiner: Manuskript zur Vorlesung Baustatik 1, Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen, Technische Universität Wien, SS 2010

[3] Fleßner, Hermann: Beitrag zur Ermittlung von Querschnittswerten mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen, Der Bauingenieur, Springer-Verlag, 1962

[4] Maple 17.00: Copyright © Maplesoft, a division of Waterloo Inc. 1981-2013

12 Abbildungsverzeichnis

Abb. 2.1: Definition der Schädigung ... 2
Abb. 2.2: Angenommene Geometrie der Schädigung bei realen Profilen ... 2
Abb. 3.1: Stababschnitt mit lokaler Schädigung unter Einwirkung einer Normalkraft ... 3
Abb. 3.2: Angenommene Spannungsverteilung im geschädigten Querschnitt ... 4
Abb. 3.3: Definition der Achsen, äußeren Einwirkungen und Schnittgrößen [1] ... 4
Abb. 3.4: Achsensysteme [1] ... 5
Abb. 4.1: Typische Querschnitte der Eisenbahnbrücke Urfahr ... 7
Abb. 5.1: Ungeschädigter Zweipunktquerschnitt ... 8
Abb. 5.2: Schädigungsfälle beim Zweipunktquerschnitt ... 9
Abb. 5.3: Schnittgrößentransformation beim Zweipunktquerschnitt ... 9
Abb. 5.4: Zweipunktquerschnitte durch Biegemoment beansprucht ... 11
Abb. 5.5: Zweipunktquerschnitte durch Normalkraft beansprucht ... 13
Abb. 5.6: $f\kappa = \sigma\kappa/\sigma(\kappa = 1) = 1/\kappa$; Spannungserhöhung infolge Schädigung ... 15
Abb. 5.7: Ungeschädigter Vierpunktquerschnitt ... 16
Abb. 5.8: Schädigungsfälle beim Vierpunktquerschnitt ... 17
Abb. 5.9: Schnittgrößentransformation beim Vierpunktquerschnitt ... 18
Abb. 5.10: Vierpunktquerschnitt mit doppeltsymmetrischer Schädigung ... 18
Abb. 5.11: Vierpunktquerschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung ... 20
Abb. 5.12: Vergleich Zweipunktquerschnitte - Vierpunktquerschnitte ... 20
Abb. 5.13: $f\kappa = \sigma\kappa/\sigma(\kappa = 1) = 2/(1 + \kappa)$; Spannungserhöhung infolge Schädigung ... 22
Abb. 5.14: Vierpunktquerschnitt mit punktsymmetrischer Schädigung ... 22
Abb. 5.15: Schädigungsfälle Vierpunktquerschnitt ... 24
Abb. 5.16: Modell der starren Platte auf fester Lagerung ... 26
Abb. 5.17: Normalkräfte im ungeschädigten Vierpunktquerschnitt infolge My ... 26
Abb. 5.18: Normalkräfte im ungeschädigten Vierpunktquerschnitt infolge Mz ... 26
Abb. 5.19: Normalkräfte im ungeschädigten Vierpunktquerschnitt infolge N ... 27
Abb. 5.20: Modell der starren Platte auf Federlagerung ... 27
Abb. 5.21: Beispiele ... 32
Abb. 5.22: Allgemein geschädigter Vierpunktquerschnitt ... 33
Abb. 6.1: Polygonzug zur Berechnung der Querschnittswerte ... 35
Abb. 6.2: Ungeschädigter Querschnitt 1 ... 37
Abb. 6.3: Schädigungfälle realer Querschnitte ... 38
Abb. 6.4: Realer Querschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung 1 ... 39
Abb. 6.5: Einfachsymmetrische Schädigung 1: $\sigma(My, \kappa)/\sigma(My, \kappa = 1)$ ... 40
Abb. 6.6: Einfachsymmetrische Schädigung 1: $\sigma(Mz, \kappa)/\sigma(Mz, \kappa = 1)$ ... 41
Abb. 6.7: Einfachsymmetrische Schädigung 1: $\sigma(N, \kappa)/\sigma(N, \kappa = 1)$ ... 41
Abb. 6.8: Realer Querschnitt mit einfachsymmetrischer Schädigung 2 ... 42

Abb. 6.9: Einfachsymmetrische Schädigung 2: $\sigma(My,\kappa)/\sigma(My,\kappa=1)$ 43
Abb. 6.10: Einfachsymmetrische Schädigung 2: $\sigma(Mz,\kappa)/\sigma(Mz,\kappa=1)$ 43
Abb. 6.11: Einfachsymmetrische Schädigung 2: $\sigma(N,\kappa)/\sigma(N,\kappa=1)$ 44
Abb. 6.12: Realer Querschnitt mit punktsymmetrischer Schädigung 45
Abb. 6.13: Punktsymmetrische Schädigung: $\sigma(My,\kappa)/\sigma(My,\kappa=1)$ 46
Abb. 6.14: Punktsymmetrische Schädigung: $\sigma(Mz,\kappa)/\sigma(Mz,\kappa=1)$ 46
Abb. 6.15: Punktsymmetrische Schädigung: $\sigma(N,\kappa)/\sigma(N,\kappa=1)$ 47
Abb. 7.1: Querschnitt 1 50
Abb. 7.2: Querschnitt 2 50
Abb. 7.3: Transformation in Vierpunktquerschnitt 1 54
Abb. 7.4: Transformation in Vierpunktquerschnitt 2 55
Abb. 7.5: Geschädigte Vierpunktquerschnitte 56
Abb. 7.6: Vowerte 57
Abb. 7.7: Modifizierung der Schädigung 58
Abb. 7.8: Schwerpunkt des geschädigten Gesamtquerschnitts 60
Abb. 7.9: Geschädigter Vierpunktquerschnitt bei dem „Modell der starren Platte“ 61
Abb. 7.10: „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ 62
Abb. 7.11: Spannungsbild nach Superposition 63
Abb. 7.12: Spannungsbild nach Extrapolation 63
Abb. 7.13: Maßgebende Stellen für die Spannungsermittlung 64
Abb. 7.14: Querschnitt 1 66
Abb. 7.15: Querschnitt 2 66
Abb. 7.16: Profilabmessungen 67
Abb. 7.17: Ungeschädigter Vierpunktquerschnitt 68
Abb. 7.18: Geschädigte Vierpunktquerschnitte 68
Abb. 7.19: Maßgebende Stellen für die Spannungsermittlung 72
Abb. 8.1: Profil 73
Abb. 8.2: Querschnitt 1 73
Abb. 8.3: Profilabmessungen 74
Abb. 8.4: Polygonzug Querschnitt 1 74
Abb. 8.5: Vierpunktquerschnitt 78
Abb. 8.6: Maßgebende Stellen für die Spannungsermittlung 80
Abb. 8.7: Vierpunktquerschnitt 81
Abb. 8.8: Maßgebende Stellen für die Spannungsermittlung 84

13 Tabellenverzeichnis

Tab. 5.1: Schnittgrößentransformation beim Zweipunktquerschnitt 9
Tab. 5.2: Zusammenfassung Zweipunktquerschnitte 16
Tab. 5.3: Schnittgrößentransformation beim Vierpunktquerschnitt 18
Tab. 5.4: Zusammenfassung Vierpunktquerschnitte 25
Tab. 5.5: Ermittlung der Federkräfte infolge des Biegemoments My 29
Tab. 5.6: Ermittlung der Federkräfte infolge des Biegemoments Mz 30
Tab. 5.7: Ermittlung der Federkräfte infolge der Normalkraft N 31
Tab. 5.8: Berechnungen mit Hilfe des Modelles der starren Platte auf Federlagerung 33
Tab. 5.9: Zusammenfassung des Modelles der starren Platte auf Federlagerung 34
Tab. 7.1: Übersicht „Modell der starren Platte“ 51
Tab. 7.2: Übersicht „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ 52
Tab. 7.3: Geometrie der Schädigung eines L-Profils 53
Tab. 7.4: „Modell der starren Platte“ 61
Tab. 7.5: „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ 62
Tab. 7.6: Koordinaten der maßgebenden Stellen 65
Tab. 7.7: Transformation in einen Vierpunktquerschnitt 67
Tab. 7.8: Ermittlung des Gesamtschwerpunkts 70
Tab. 7.9: „Modell der starren Platte“ 70
Tab. 7.10: „Modell der starren Platte mit Modifizierung der Schädigungen“ 71
Tab. 7.11: Koordinaten der maßgebenden Stellen 72
Tab. 8.1: Ermittlung der Koordinaten 75
Tab. 8.2: Koordinaten der maßgebenden Stellen 76
Tab. 8.3: Spannungsermittlung der maßgebenden Stellen 77
Tab. 8.4: Spannungsermittlung in den maßgebenden Stellen 80
Tab. 8.5: Spannungsermittlung in den maßgebenden Stellen 84
Tab. 8.6: Schnittgrößenabhängige Gegenüberstellung der Spannungsergebnisse 85
Tab. 8.7: Gegenüberstellung der Spannungsergebnisse 85
Tab. 8.8: Schnittgrößenabhängige Gegenüberstellung der Spannungsergebnisse 86
Tab. 8.9: Gegenüberstellung der Spannungsergebnisse 86