



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Konsistente Bewertung mittels des Esschermaßes

Ausgeführt am Institut für

Finanz- und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch

Marie Reichstein BSc

Postgasse 13/18

1010 Wien

Wien, 10.Oktober 2014

Kurzfassung

Aufgrund des enormen Anstiegs von Derivaten in der heutigen Finanzwelt, wird auch deren Bewertung immer wichtiger. In der vorliegenden Arbeit werden Bepreisungsmethoden und vor allem die Begriffe Deflator, Valuation Portfolio und Esscher Transformation dem Leser näher gebracht. Auf Basis eines Beispiels aus dem Buch "Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance" von Wüthrich-Merz, wurde die Deflator-Konstruktion, anders als im Buch, mittels der Esscher Transformation, versucht. Die Ergebnisse waren zufriedenstellend, sprich diese Art der Konstruktion lieferte brauchbare und, mit der im Buch verwendeten Methode, vergleichbare Werte.

Abstract

Due to the rapid increase of derivatives in the financial industry, the pricing of these become more and more important. In this thesis different kinds of methods for pricing, the terms deflator, valuation portfolio and Esscher transform are introduced to the reader. Based on an example from the book "Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance" by Wüthrich-Merz, I try the construction of a deflator by using the Esscher transform. The results are useful and satisfying, meaning that the values are similar to the method used in the book.

Danksagung

Ich danke an dieser Stelle dem Betreuer meiner Diplomarbeit Herrn Prof. Rheinländer, der mir beim Verfassen der Arbeit immer half und mich unterstützte.

Mein größter Dank aber gilt meiner Familie und besonders meiner Mutter, die mir eine beschwerdefreie Studienzeit ermöglicht hat und mir jederzeit so gut es ging zur Seite stand.

Weiters möchte ich meinen Studienkolleginnen und Kollegen danken für die lehrreiche und schöne Studienzeit, für die gute Zusammenarbeit und die vielen Unternehmungen abseits der Universität.

Weiters ein großes Dankeschön an all jene, die mir wertvolle Denkanstöße für die Arbeit gegeben haben und natürlich auch allen, die die Diplomarbeit Korrektur gelesen haben. Danke meinem Bruder Oskar, Joel, Flo und meinem Freund Christoph, dem ich weiters die schöne Zeit neben dem Studium verdanke und der mir immer Kraft und Motivation verleiht.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	6
Tabellenverzeichnis	6
1 Grundlagen	7
1.1 Einleitung	7
1.2 Derivate und deren Bewertung	8
1.2.1 Derivate im Einperiodenmodell	14
1.2.2 Hedgingstrategien	16
1.2.3 Cox Ross Rubinstein Modell	18
1.3 Replikationsprinzip	18
1.4 Esscher Transformation	19
1.5 Nullkupon-Anleihen	23
1.6 Short Rate Modelle	24
1.6.1 LIBOR	25
1.7 Vasicek Modell	26
1.8 Der Deflator	29
1.9 Das Valuation Portfolio	33
1.9.1 Konstruktion des $VaPo$	34
1.9.2 Konstruktion des $VaPo^{prot}$	37
2 Beispiele aus der Lebensversicherung	38
2.1 Vergleich des Verbraucherpreisindex mit dem LIBOR	38
2.1.1 Empirischer Korrelationskoeffizient	39
2.1.2 Maximum Likelihood Schätzung	39
2.2 Deflatoorkonstruktion	41
2.2.1 Testung	44
2.2.2 Zusammenhang zwischen x und h	48
3 Zusammenfassung/Ausblick	49
Literaturverzeichnis	50
4 Appendix A	52
5 Appendix B	55

Abbildungsverzeichnis

1	Marktkonsistente Bewertung	8
2	Vergleichsgrafik zwischen Derivatmarkt und Bruttoinlandsprodukt	9
3	Grafik zum Beispiel eines Einperiodenmodells	15
4	Grafik zur mean reversion rate	25
5	Veranschaulichung des LIBOR in Euro	26
6	Grafik zum Ornstein-Uhlenbeck-Prozess	28
7	Modellierung von Zinskurven durch das Vasicek Modell	29
8	Veranschaulichung des Deflators	30
9	Financial Deflator	33
10	Datenvergleich VPI und LIBOR	38
11	Überlebenswahrscheinlichkeit p_{x+t+1} für $m=92,16$ und $m^+ = 94,16$	42
12	Gegenwahrscheinlichkeit q_{x+t+1} für $m=92,16$ und $m^+ = 94,16$	43
13	Esscher Transformation von q_{65+t+1}^+ mit $h = 0.06; 0.05; 0.04; 0.03$	46

Tabellenverzeichnis

1	Tabelle zum Hedgingbeispiel	17
2	Tabelle bei der Konstruktion des VaPo	36
3	Daten von 2004-2013 von VPI und LIBOR	38
4	p-Quantile zum Vergleich verschiedener Funktionen	46

1 Grundlagen

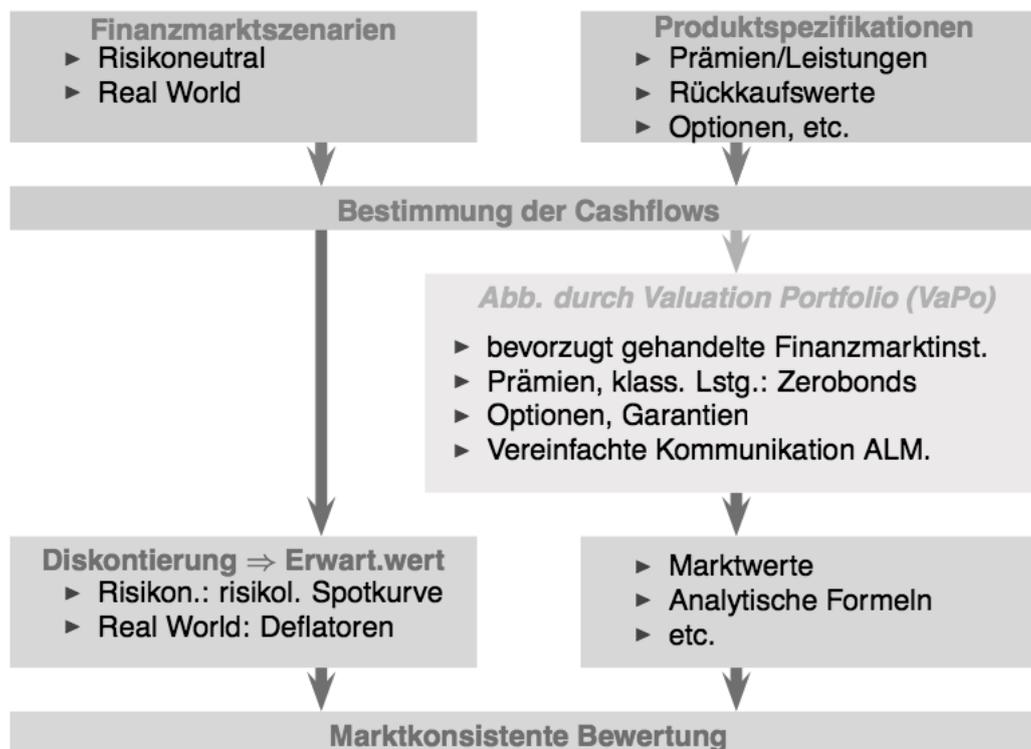
1.1 Einleitung

Das erste Kapitel dieser Diplomarbeit möchte dem Leser ein Grundwissen, zu dem Thema der konsistenten Bewertung mittels des Esschermaßes, vermitteln. Dieses Kapitel der vorliegenden Diplomarbeit basiert, neben den im Literaturverzeichnis, angeführten Büchern und Internetquellen, auf der Vorlesung “Finanzmathematik 1“ an der Technischen Universität Wien im Sommersemester 2011.

Der erste Teil der Arbeit beinhaltet diverse notwendige Definitionen, die Bedeutung von Derivaten in der heutigen Zeit, sowie Möglichkeiten zur Bewertung dieser Finanzinstrumente. Dafür wird unter anderem die Esscher Transformation als Grundlage für das Esschermaß benötigt. Wir betrachten die Nullkupon-Anleihe, als Sonderform des verzinslichen Wertpapiers, und ihre Bepreisung. Im Unterkapitel 1.6 und 1.7 werden dem Leser sogenannte Short Rate Modelle, also Modelle zur Beschreibung der Dynamik von Zinssätzen nähergebracht. Als wichtiges Beispiel eines solchen Modells, dient das Vasicek Modell, bei dem die Dynamik des Zinssatzes durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess simuliert wird. Dieser stochastische Prozess wird über eine stochastische Differentialgleichung gelöst und ist, aufgrund der Tatsache, dass es sich um einen Gaußprozess handelt, durch seine Verteilung eindeutig bestimmt. Anschließend folgt im Subkapitel 1.8 noch die Bedeutung und Verwendung von Deflatoren. Im Gegensatz zur Finanzmathematik, wo äquivalente Martingalmaße verwendet werden, um konsistente Modelle zur Bewertung von Zahlungsströmen zu definieren, hilft man sich in der aktuariellen Mathematik mit Deflatoren. Eine Bewertung mittels dieser Hilfsmittel führt zu Marktwerten, die zur risikoneutralen Bewertung konsistent sind. Im letzten Teil des Theoriekapitels wird noch ein Bewertungsportfolio, das sogenannte Valuation Portfolio, definiert. In nachfolgender Abbildung 1 werden die verschiedenen Möglichkeiten für eine marktkonsistente Bewertung zusammengefasst.

All dies wird dann im praxisrelevanten Teil der Arbeit (siehe Kapitel 2) verwendet.

Hinsichtlich der verwendeten Betriebsmittel dieser Diplomarbeit wurden die Berechnungen einerseits in Matlab R2012b als auch in R-3.0.2. vorgenommen. Die jeweiligen Codes befinden sich im Anhang der Arbeit.

Abbildung 1: Methoden zur konsistenten Bewertung¹

1.2 Derivate und deren Bewertung

Unter einem Kapitalmarkt versteht man einen Finanzmarkt mit mittel- und längerfristigen Transaktionen, zu dem verschiedene Arten von Finanzinstrumenten zählen. Beispiele für diese Instrumente wären Wertpapiere, Kredite, Schuldscheine und Derivate. Die größte Entwicklung und den stärksten Handel nehmen die Derivate ein. Diese existieren bereits seit langer Zeit, 500 v. Chr. sind Termingeschäfte mit Oliven nämlich schon dokumentiert. Im richtig großen Ausmaß kamen Derivate im 17. Jahrhundert zum Vorschein, als in Holland extreme Mengen an Tulpenzwiebel gehandelt wurden.²

Derivate werden entweder außerhalb der Börse gehandelt (OTC = 'Over The Counter'), oder auf Derivatbörsen, sogenannten Terminbörsen. Die weltweit größte Börse dieser Art, hat ihren Sitz im US-amerikanischen Bundesstaat Illinois und heißt Chicago Mercantile Exchange. Im Jahr 2000 betrug der Nominalwert aller Derivate noch 95 Billionen US-Dollar, im Gegensatz dazu waren es 2012 schon 638 Billionen US-Dollar, was in etwa

¹Quelle:<http://www.actuaries.ch/images/getFile?t=pruefungen&f=dokument&id=34>
[Stand: 28.8.2014]

²<http://www.4finance.ch/literatur/derivatgeschichte.pdf> [Stand: 31.7.2014]

zehnmal so viel ist, wie das Bruttoinlandsprodukt der ganzen Welt. (siehe folgende Grafik)

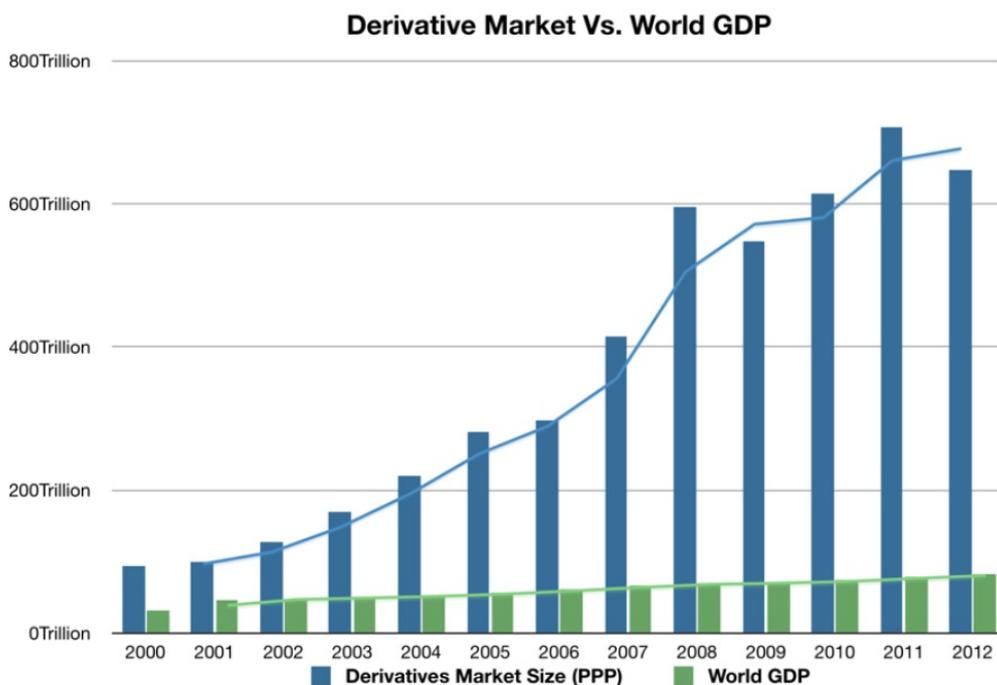


Abbildung 2: Derivate versus Bruttoinlandsprodukt³

Ein derivatives Finanzinstrument (lat. derivare 'ableiten') ist ein Vertrag zwischen zwei Parteien, bei dem der Preis eines künftigen Kaufes beziehungsweise Verkaufes von Finanzinstrumenten, bereits zum Abschlusszeitpunkt des Vertrages festgelegt wird. Als Preis gilt auch, der Austausch von künftigen Zahlungen, deren expliziter Preis noch nicht feststeht, da er zum Beispiel von Zinssätzen abhängt, dies bedeutet, dass der Wert an andere Finanzinstrumente gekoppelt ist. Diese Basiswerte (underlyings) von Derivaten sind, wie oben schon erwähnt, Zinssätze, aber auch Wertpapiere, Kreditindizes, Wechselkurse, Bonitätsrankings oder nichtfinanzielle Instrumente. Zu jedem Derivat existiert eine genaue Laufzeit und am Anfang dieser Laufzeit, also zum Abschluss des Vertrages, wird oftmals ein Betrag, auch bekannt unter "Barwert des Derivats" gezahlt, wobei der Betrag auch Null sein kann. Derivate werden in drei unterschiedliche Arten eingeteilt: Festgeschäfte, Swaps und Optionen. Wichtige Beispiele für derivative Finanzinstrumente sind Call- und Putoptionen.

³Quelle: <http://deutsche-wirtschafts-nachrichten.de/wp-content/uploads/2013/01/Unbenannt15.jpg>
[Stand: 11.2.2014]

Definition 1.1. Ein Optionsgeschäft ist ein Termingeschäft, bei dem der Händler das Recht, aber nicht die Pflicht hat, eine im Vorhinein bestimmte Menge von einem bestimmten Basiswert zu einem festgelegten Kurs (=Strike, oder auch Ausübungspreis genannt) zu kaufen (Calloption) beziehungsweise zu verkaufen (Putoption). Sei der Ausübungspreis mit K , der Ausübungszeitpunkt mit $T > 0$ und der Preis des Basiswertes mit S bezeichnet, so ist der Wert der europäischen⁴ Calloption

$$C = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+.$$

Der Wert der Putoption hingegen sei

$$P = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+.$$

Händler von Derivaten kann man im Groben in drei Kategorien einteilen, nämlich Absicherer, Arbitrageure und Spekulanten. Erstere Gruppe möchte das Risiko, dass sich durch eine Veränderung in der Zukunft ergeben könnte, mit Hilfe von Derivaten, ausgleichen. Arbitrageure (vgl. Definition 1.4) hingegen versuchen einen Gewinn zu erzielen und Spekulanten benutzen Derivate, um auf die Entwicklung von Marktvariablen, zu wetten. Üblicherweise sagt man, dass der Vorteil von Derivaten für den Käufer die Reduzierung der Gefahr von Kursschwankungen ist, jedoch ist genau dieses Risiko auch der Nachteil für den Verkäufer. Sozusagen dienen diese Finanzinstrumente hauptsächlich dem Transfer von Risiken und hierbei ergibt sich nun für den Verkäufer die wichtige Frage, wie dieses Risiko durch den Handel reduziert beziehungsweise abgesichert ('gehedged') werden kann. Der Verkäufer bekommt, für das von ihm eingegangene Risiko, eine monetäre Entschädigung (=Optionspreis). Der Optionspreis hängt von verschiedenen Faktoren ab, zum einen vom aktuellen Marktpreis des Basiswertes S_0 , dann von der Restlaufzeit $T - t$, dem Ausübungspreis K , der Zinsrate r , den Dividenden und von der, vom Käufer und Verkäufer, geschätzten Entwicklung der zukünftigen Marktpreisentwicklungen.

Nun ist ersichtlich, dass es ein Ziel der Finanzmathematik ist, diese Derivate zu bewerten. Sofern ein Derivat einen eindeutigen, endlichen und arbitragefreien Preis besitzt, wird dieser der faire Preis eines Finanzderivats genannt. Die sogenannte 'risikoneutrale Bewertung' ist eine, 1976 von John Cox und Stephen Ross, entwickelte Methode zur Bestimmung des fairen Preises von Derivaten.

⁴Eine europäische Option kann nur zum Ausübungszeitpunkt $T > 0$ ausgeübt werden. Eine amerikanische Option im Gegensatz dazu, kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ausgeübt werden.

Als Beispiel der risikoneutralen Bewertung wird das Black Scholes Modell genannt, das zur Bewertung von Optionen dient oder auch das Cox Ross Rubinstein Modell (siehe 1.2.3). Bevor wir auf die Idee der risikoneutralen Bewertung etwas genauer eingehen, zwei wichtige Definitionen.

Definition 1.2. Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wird als Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet. Ω beschreibt dabei eine nichtleere Menge, \mathcal{A} sei eine σ -Algebra und \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{A}) .

Die mathematische Modellierung von Zufallsphänomenen erfolgt mit Hilfe von Zufallsvariablen. Dynamische Zufallsphänomene werden durch stochastische Prozesse modelliert. σ -Algebren repräsentieren die aktuell verfügbare Information. Die dynamische Entwicklung von Information, also ihr Anwachsen über die Zeit, wird durch Filtrationen ausgedrückt.

Definition 1.3. Haben wir nun einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gegeben und sei $T \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, so wird $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ auf T eine Filtration genannt, wenn es sich um eine wachsende Familie von Teil- σ -Algebren von \mathcal{A} handelt, also wenn gilt $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A} \forall s, t \in T$ mit $s \leq t$. Liegt in einem Wahrscheinlichkeitsraum eine Filtrierung vor, so sprechen wir einfach von einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum.

Für die Filtration \mathcal{F}_t muss gelten, dass W_t , das wir später noch bei den Short Rate Modellen brauchen, ein Wiener Prozess bezüglich \mathcal{F}_t ist. Weiters muss die Filtration rechtsstetig sein, also $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ und \mathcal{F}_0 muss alle \mathcal{P} -Nullmengen beziehungsweise alle Teilmengen von \mathcal{P} -Nullmengen enthalten.

Nun wieder zur vorher erwähnten risikoneutralen Bewertungsformel, die Idee hinter dieser Methode besteht darin, das Derivat zu replizieren. Dies bedeutet, dass man das Derivat in der realen Welt, mit einem Derivat, das denselben Wert in einer risikoneutralen Welt besitzt, vergleicht. Der Vorteil hiervon ist, dass sich Derivate, unter risikoneutralen Bedingungen, leicht bewerten lassen. Für diese Art der Bewertung müssen folgende zwei Bedingungen erfüllt sein:

(i) No-Arbitrage-Bedingung (=kein risikoloser Gewinn)

Definition 1.4. Eine selbstfinanzierende Strategie $(\varphi_n)_{n \in 0, \dots, N}$ heißt Arbitrage, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $V_0(\varphi) = 0$
- (2) $V_N(\varphi) \geq 0 \quad \mathbb{P} - f.s.$
- (3) $\mathbb{P}(V_N(\varphi) > 0) > 0$

Hier steht $V(\varphi) = \varphi^T S$ für den Wertprozess und S in der Definition für den Preisprozess. Ein Markt heißt nun arbitragefrei, falls gilt, dass keine solchen Strategien existieren. Man kann annehmen, dass die meisten Finanzmärkte arbitragefrei sind, da bei Eintreten einer Arbitragemöglichkeit, die Anfrage steigt und sich somit der Preis wieder in die "richtige" Richtung verändert und damit diese Möglichkeit wieder verschwindet. Es herrscht ein gewisses Gleichgewicht in diesem Sinne, dass man nicht von außen eingreifen muss, um die Arbitragefreiheit wieder herzustellen.

(ii) Vollständiger Kapitalmarkt

Ein Markt ist vollständig, wenn jeder Contingent Claim⁵, also jede Zahlung zu $t_1 = 1$, deren Höhe vom Marktzustand abhängt, durch eine Handelsstrategie erreichbar ist.

Definition 1.5. Ein Contingent Claim X heißt erreichbar, wenn es eine Handelsstrategie Y gibt, sodass $X(\omega_i) = Y(\omega_i), \forall \omega_i \in \Omega$.

Eine Folgerung von vollständigen Kapitalmärkten ist, dass sich Derivate, mit anderen Finanzinstrumenten, replizieren lassen. Sonst heißt der Markt unvollständig und in unvollständigen Märkten lassen sich Optionen nur mit Hilfe von Martingalmaßen bewerten. Anhand des Beispiels 1.13 sieht man die Vorgehensweise der risikoneutralen Bewertung.

Definition 1.6. Ein Prozess $(X_n)_{n \geq 0}$ heißt Martingal in diskreter Zeit, falls gilt,

- (i) $(X_n)_{n \geq 0}$ besteht aus integrierbaren Zufallsvariablen, also $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty \quad \forall n \geq 0$
- (ii) $(X_n)_{n \geq 0}$ ist adaptiert, also \mathcal{F}_n -messbar $\forall n \geq 0$
- (iii) $(X_n)_{n \geq 0}$ erfüllt die Martingaleigenschaft, also $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$

⁵Ein Contingent Claim ist ein zu $t = 0$ abgeschlossenes Derivat, welches nur zum Endzeitpunkt eine Auszahlung liefert.

Definition 1.7. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf Ω heißt Martingalmaß (oder auch: 'risikoneutrales Maß'), falls gilt:

- (i) $\mathbb{P}(w) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$
- (ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[S_1^{(n)}] = S_0^{(n)}$ für $n = 1, \dots, N$ ('Martingaleigenschaft')

Definition 1.8. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf (Ω, \mathcal{F}) heißt äquivalentes Martingalmaß, falls gilt:

- (i) \mathbb{Q} ist äquivalent zu \mathbb{P} , d.h. $\mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ (in Zeichen: $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$)
- (ii) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_i(s)|\mathcal{F}_t] = S_i(t)$ ('Martingaleigenschaft')

Ein äquivalentes Martingalmaß hat nun, laut Definition, dieselben Nullmengen wie die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten, also $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Die oben geforderte No-Arbitrage-Bedingung, also die Bedingung, dass es keinen risikolosen Gewinn gibt, ist laut dem ersten Fundamentalsatz der arbitragefreien Bewertung gleichbedeutend mit der Aussage, dass es ein äquivalentes Martingalmaß gibt.

Definition 1.9. Eine zufällige Auszahlung X heißt duplizierbar, falls es eine selbstfinanzierende Strategie φ gibt mit der Eigenschaft $X = V_N(\varphi)$.

Das φ wird in diesem Fall dann Hedgingstrategie von X (siehe 1.2.2) genannt. Gilt, dass in einem Markt jede zufällige Auszahlung duplizierbar ist, so nennt man ihn perfekt.

Der zweite Fundamentalsatz gibt Auskunft über die Äquivalenz von verschiedenen Eigenschaften in einem arbitragefreien Finanzmarkt.

Theorem 1.10. (*2. Fundamentalsatz der Preistheorie*)

In einem arbitragefreien Markt sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (1) *Der Markt ist vollständig.*
- (2) *Der Markt ist perfekt.*
- (3) *Es existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß.*

Die Vollständigkeit in einem Finanzmarktmodell besagt weiters, dass jedes Finanzderivat hedgebar (siehe Definition 1.14) ist. In einem unvollständigen Markt gibt es unendlich viele Martingalmaße und nun gilt das Interesse der Wahl des Maßes. Eine oft angewandte Herangehensweise bei der Bewertung von Derivaten in unvollständigen Märkten, ist es nämlich, ein Maß aus der Klasse von äquivalenten Martingalmaßen zu wählen, und dann analog zu vollständigen Märkten, den Preis als Erwartungswert unter dem einen ausgewählten Maß zu bestimmen. Nun gibt es jedoch verschiedene Ansätze zur Auswahl des,

aufgrund eines bestimmten Kriteriums, optimalen Maßes.

Beispiele für wichtige Martingalmaße wären das Varianz-optimale Maß, das minimale Maß und das Esschermaß. Letzteres Martingalmaß wird durch die Esscher Transformation (siehe 1.4) hergeleitet und ist die vermutlich einfachste Variante ein Maß zu bestimmen.

1.2.1 Derivate im Einperiodenmodell⁶

Ein Einperiodenmodell besteht aus einem einzigen Finanzinstrument und zwei Zeitpunkten, wobei es vom Ursprungszeitpunkt S_0 zum nächsten entweder um einen Faktor $u > 1$ (up) steigt oder um einen Faktor $0 < d < 1$ (down) sinkt. Somit gilt $0 < d < u$ und es kann gezeigt werden, dass in einem Einperiodenmodell, genau dann die No-Arbitrage-Bedingung erfüllt ist, wenn

$$0 < d \leq 1 + r \leq u < \infty, \quad (1)$$

wobei r der risikolose Zinssatz ist. Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu

$$1 + r = q_u u + q_d d,$$

wobei gelten muss, dass $q_u \geq 0$, $q_d \geq 0$ und $q_u + q_d = 1$. Aufgrund dieser Darstellung, lässt sich der Aktienpreis zum Ursprungszeitpunkt als diskontierter Erwartungswert des zukünftigen Zeitpunkts darstellen, also

$$S_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_1),$$

wobei \mathbb{Q} ein Martingalmaß ist. Unter der No-Arbitrage-Bedingung gilt in einem Einperiodenmodell, dass \mathbb{Q} eindeutig bestimmt ist und

$$q_u = \frac{1+r-d}{u-d} \Rightarrow q_d = 1 - q_u = \frac{u-(1+r)}{u-d}.$$

Theorem 1.11. *(risikoneutrale Bewertungsformel)*

Für ein Derivat in einem Einperiodenmodell, unter der Annahme der No-Arbitrage-Bedingung, gilt für den Barwert zum Ursprungszeitpunkt, dass er eindeutig bestimmt ist durch $\frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X)$, wobei X eine vom Kurs abhängige Auszahlungsfunktion ist.

Das folgende Beispiel eines einperiodigen Binomialmodells, das noch zu verschiedenen Berechnungen verwendet wird, soll nun zur Veranschaulichung der risikoneutralen Bewertungsformel dienen.

⁶vgl. [8], 73ff

Beispiel 1.12. Eine Aktie kostet zum heutigen Zeitpunkt 20 Geldeinheiten und nimmt mit positiver Wahrscheinlichkeit entweder 10 (Callzahlung = 0) oder 30 (Callzahlung = 1) Geldeinheiten im nächsten Zeitschritt an. (siehe Abbildung 2) Der risikolose Zinssatz r sei 5 Prozent.

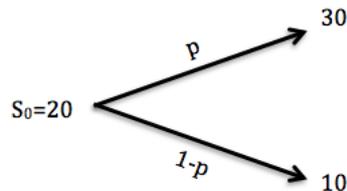


Abbildung 3: Beispiel zum Einperiodenmodell

Die Faktoren u und d sind leicht bestimmt, also

$$u = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ und } d = \frac{10}{20} = 0,5.$$

Überprüft man die obige Bedingung für Arbitragelosigkeit (1), also

$$d \leq 1 + r \leq u \Rightarrow 0,5 \leq 1,05 \leq 1,5,$$

so sieht man, dass das Modell arbitragefrei ist. Demnach ist

$$q_u = \frac{1+r-d}{u-d} = 0,55$$

und aufgrund der risikoneutralen Bewertungsformel gilt:

$$\text{Barwert} = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \frac{1}{1,05} (1 q_u + 0 q_d) = \frac{1}{1,05} 0,55 \approx \underline{\underline{0,5238}}$$

Es wurde gezeigt, dass in einem arbitragefreien Einperiodenmodell, der Barwert von einem Derivat eindeutig, durch die risikoneutrale Bewertungsformel, bestimmt ist.

Beispiel 1.13. Dieses Beispiel ⁷ dient nun der Demonstration der Verwendung der risikoneutralen Bewertung. Nimmt man dieselbe Aktie, wie im vorigen Beispiel, also $S_0 = 20$, und $S_1 = \{30, 10\}$. Den Zinssatz nehmen wir nun einfachheitshalber mit 0% an. Nennt man das dazugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß P^* , so ist dieses dadurch bestimmt, dass der Erwartungswert von S_1 unter diesem Maß gleich dem Ursprungswert S_0 ist, also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P^*}[S_1] &= S_0 \\ 30p + 10(1-p) &= 20 \end{aligned}$$

⁷vgl. http://de.wikipedia.org/wiki/Risikoneutrale_Bewertung [Stand: 27.8.2014]

Die Wahrscheinlichkeit sei durch $p = P^*[S_1 = 30] \in (0, 1)$ und $q = 1 - p = P^*[S_1 = 10] \in (0, 1)$ gegeben. Nun ergibt sich durch obige Zusammenhänge $p = 0,5$ und damit auch $q = 1 - p = 0,5$. Zur Kontrolle kann man schauen, ob der Preis der Option dem Erwartungswert des Gewinns entspricht, also

$$S_0 = 20 \stackrel{!}{=} \mathbb{E}[S_1] = 30 * p + 10 * (1 - p) = 30 * 0,5 + 10 * 0,5$$

Nehmen wir nun eine Calloption mit Ausübungspreis 22, auf die Aktie als Basiswert, in unser Beispiel auf, so ist die Auszahlung

$$\begin{aligned} C &= \max\{S_T - K, 0\} \\ &= \max\{30 - 22, 0\} \\ &= \max\{8, 0\}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet dass der Käufer der Option bei steigendem Kurs 8, und bei fallendem Aktienkurs 0 Geldeinheiten bekommt. Der faire Preis der Calloption, mithilfe der Methode der risikoneutralen Bewertung, ist folgender:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P^*}[C] &= (S_T - K) * p + 0 * (1 - p) \\ &= 8 * 0,5 + 0 * 0,5 \\ &= 4 \end{aligned}$$

1.2.2 Hedgingstrategien

Bei Hedgingstrategien wird im Groben zwischen zwei Arten unterschieden und zwar einerseits dem Hedgen mit Futures⁸ und andererseits dem Hedgen mit Optionen. Der Unterschied dieser beider Arten liegt im Gewinn- und Verlustprofil. Eine Hedgingstrategie ist eine Portfoliostrategie, die die Auszahlung von einem Derivat repliziert. Durch die Hedgebarkeit von Derivaten, lässt sich der Anfangspreis eindeutig bestimmen. Man sucht eine selbstfinanzierende Portfoliostrategie, deren Eigenschaft es ist, zum Endzeitpunkt T denselben Wert zu haben wie das Derivat selbst.

Definition 1.14. Ein Contingent Claim C heißt hedgebar, oder auch absicherbar, wenn es ein Portfolio $x \in \mathbb{R}^n$ gibt mit der Eigenschaft $\langle x, S(1) \rangle = C$, wobei $\langle x, S(1) \rangle = \sum_{i=1}^N x_i S_i(1)$ und $S_i(1)$ die zufälligen Endpreise sind.

⁸Ein Future stellt einen verbindlichen Börsenvertrag dar und ist im Unterschied zu Optionen, beidseitig.

Lemma 1.15. *Sei ein Derivat hedgebar, so ist der Anfangspreis des Derivats, eindeutig durch den Anfangspreis der Hedgingstrategie bestimmt.*

Folgendes Beispiel zeigt die Anwendung von Hedgingstrategien mit Hilfe von Optionen.

Beispiel 1.16. Ziel dieses Beispiels⁹ ist es, für die oben beschriebene Aktie, eine Hedgingstrategie $\varphi = (\theta_0, \theta_1)$ zu finden. θ_0 beschreibt dabei Einheiten von Bargeld und θ_1 Einheiten der Aktie, so dass die Strategie φ den Wert zum Endzeitpunkt T der Aktie repliziert. In einem Binomialmodell ist so eine Hedgingstrategie immer zu finden, da $S_1 = \{30, 10\}$ eben nur zwei Werte annehmen kann und wir auch zwei Variablen zur Verfügung haben. Sobald es für S_1 drei verschiedene Werte geben kann, ist es nicht mehr so einfach eine Hedgingstrategie $\varphi = (\theta_0, \theta_1)$ zu konstruieren.

Wir nehmen nun wieder eine Calloption mit Ausübungspreis $K = 22$ und der Zinssatz sei wieder $r = 0\%$. Nun ist der Wert des Portfolios durch $V_t = \theta_0 + \theta_1 S_t$ gegeben. Dadurch ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$8 = \theta_0 + 30\theta_1$$

$$0 = \theta_0 + 10\theta_1$$

Somit ist $\theta_0 = -4$ und $\theta_1 = 0,4$ und wir erhalten

$$V_0 = \theta_0 + \theta_1 S_0 = -4 + 0,4 * 20 = 4.$$

Um nun zur Hedgingstrategie zu gelangen verkauft man zum Zeitpunkt S_0 die Option, erhält wie oben ausgerechnet 4 Geldeinheiten, leiht sich (θ_0) 4 Einheiten aus und investiert somit 8 Geldeinheiten in Aktien. Somit bekommt man $\frac{8}{20} = 0,4$ Aktienanteile und hat zum Zeitpunkt S_1 nun zwei Möglichkeiten. Bei dem Fall, dass $S_1 = 30$ ist, wird die Option ausgeübt, bei $S_1 = 10$ jedoch nicht. In folgender Tabelle sieht man, dass sich die Option und die Hedgingstrategie genau ausgleichen und somit das Ergebnis der Gesamtbilanz Null beträgt.

Tabelle 1: Tabelle zu Beispiel 1.16

	$S_T = 30$	$S_T = 10$
Aktie verkaufen	-8	0
Kredit zurückzahlen	-4	-4
Aktienanteile verkaufen	12	4
Gesamtbilanz	0	0

⁹vgl. http://www.math.tugraz.at/~aistleitner/Lehre/WS2011/Finanz_Vers/FinanzVersicherung20112012/skriptum_finanz_und_versicherungsmathematik.pdf [Stand: 1.9.2014]

1.2.3 Cox Ross Rubinstein Modell

Wie oben erwähnt, ist das 1979 veröffentlichte Cox Ross Rubinstein Modell eines der wenigen zeitdiskreten Modelle, die vollständig sind, und in dem somit, laut obigen Definitionen, faire Preise für jegliche Derivate existieren. Bei diesem Binomialmodell wird die Methode der risikoneutralen Bewertung benutzt. Hierbei wird die Aktienkursentwicklung modelliert und in jedem Zeitschritt gibt es genau zwei Möglichkeiten zur Entwicklung, weshalb das Modell auch Binomialmodell genannt wird. In jedem Zeitschritt tritt mit einer positiven Wahrscheinlichkeit p ein sogenanntes "up" ein und mit einer Wahrscheinlichkeit von $1-p$ ein "down" ein. Das Cox Ross Rubinstein Modell ist aufgrund der Bedingungen für die risikoneutrale Bewertung arbitragefrei und vollständig.

Beispiel 1.17. (Binomialmodell ¹⁰)

In unserem Ein-Perioden-Binomialmodell möchten wir nun den Optionspreis f berechnen. Wir nehmen dieselben Werte wie im vorigen Beispiel, also eine Aktie kostet zum heutigen Zeitpunkt $S_0 = 20$ und im nächsten Zeitschritt $S_{1d} = 10$ beziehungsweise $S_{1u} = 30$. Die Auszahlung beträgt im Fall von S_{1u} Eins und im Fall von S_{1d} Null und der Zinssatz 5 Prozent.

Daraus ergibt sich für die Berechnung von Delta:

$$30\Delta - 1 = 10\Delta \Rightarrow \Delta = 0,05$$

Somit wäre der Portfoliowert zum Endzeitpunkt T in beiden Situationen gleich 0,5. Der Barwert zum Zeitpunkt $t = 0$ berechnet sich wie folgt:

$0,5e^{-0,05} \approx 0,4756$ und daraus folgt für den Optionspreis f :

$$\Rightarrow 20\Delta - f = 0,4756 \iff 1 - f = 0,4756$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f = 0,5244}}$$

1.3 Replikationsprinzip

Das Replikationsprinzip beschreibt die künstliche Erzeugung eines Portfolios, welches aber dieselben Zahlungsflüsse beinhalten soll, wie das ursprüngliche Wertpapier. Man betrachtet also den Wert des ursprünglichen Portfolios und erzeugt ein neues, mit der Voraussetzung, dass es zum Endzeitpunkt risikolos denselben Ertrag hat. Sei die No-Arbitrage-Bedingung erfüllt, so haben das Portfolio und das zu replizierende Wertpapier zu jedem Zeitpunkt den exakt selben Wert. Man sichert sich so gegen das Risiko ab, das

¹⁰vgl. <http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialmodell> [Stand: 10.2.2014]

bei dem Verkauf des Portfolios entsteht. Aus dem Prinzip folgt die Methode der risikoneutralen Bewertung.

Beispiel 1.18. (Replikationsprinzip ¹¹)

Wendet man das Prinzip auf das obige Beispiel an, so erhält man, wenig überraschend, denselben Optionspreis. Die Variable a beschreibt den Betrag, der zu Beginn der Periode in die risikolose Geldanlage investiert wird, und die Variable b steht für die Anzahl der erworbenen Aktien. Im obigen Beispiel haben wir bei einem u eine Callzahlung von Eins und im Falle eines d eine Zahlung von Null. Die Replikationsstrategie führt nun zu einem linearen Gleichungssystem, das wie folgt aussieht:

$$\left. \begin{array}{l} \text{I : } ae^{0,05} + 30b = 1 \\ \text{II : } ae^{0,05} + 10b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -\frac{0,5}{e^{0,05}} \text{ und } b = 0,05$$

Man erhält nun eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems und aus dem Replikationsprinzip folgt nun, dass der Preis der Option gleich dem Preis der Replikationsstrategie (a, b) ist: $\Rightarrow a + 20b \approx \underline{\underline{0,5244}}$

Aus dem Replikationsprinzip lässt sich folgern, dass in einem vollständigen Markt der Preis der Option eindeutig als der Preis der Replikationsstrategie festgelegt ist.

1.4 Esscher Transformation

Der skandinavische Mathematiker Frederik Esscher erfand 1932 eine Methode zur Bewertung von derivativen Wertpapieren. Diese Vorgehensweise ist vor allem dann sehr effizient und sinnvoll, wenn die Logarithmen der Preise durch stochastische Prozesse mit stationären und unabhängigen Inkrementen modelliert werden können. Zu diesen Prozessen zählen der Wiener Prozess, der Poisson Prozess, der Gamma Prozess und der inverse Gauß Prozess. Die Esscher Transformation findet man ebenfalls in der Versicherungsmathematik. Hier beschreibt diese Maßtransformation ein Prämienkalkulationsprinzip und deshalb schrieben 1994 die Wissenschaftler Hans Gerber und Elias Shiu in ihrem Paper 'Option pricing by Esscher Transforms' nicht umsonst "The Esscher Transform is a time-honored tool in actuarial science."¹². In genau diesem Paper gehen die beiden Mathematiker auf den Zusammenhang zwischen Finanz- und Versicherungsmathematik ein. Seit der Erfindung 1932 stellt die Esscher Transformation für eindimensionale Verteilungen eine wichtige Rolle in der Finanzmathematik dar und zwar wird durch die Transformation ein

¹¹vgl. http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaesch/veroeffentlichungen/ver_texte/bm_option.pdf [Stand:12.2.2014]

¹²Quelle : http://pages.stern.nyu.edu/~dbackus/Disasters/Gerber_Shui_94.pdf [Stand: 8.2.2014]

Wechsel des Wahrscheinlichkeitsmaßes durch die Transformation der eindimensionalen Randverteilungen von unendlich-dimensionalen stochastischen Prozessen vorgenommen. Aus der Esscher Transformation lassen sich die berühmte Black Scholes Formel, die binomiale Optionspreisformel und weitere Formeln für die Optionsbewertung herleiten.

Mathematisch gesehen ist die Esscher Transformation eigentlich eine Transformation von Dichten. Hat man nun eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ und einen Parameter $h \in \mathbb{R}$ gegeben, so definiert die Esscher Transformation eine neue Dichte $f(x, t; h)$.

$$f(x, t; h) = \frac{e^{hx} f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} f(x) dx} = \frac{e^{hx} f(x)}{M(h, t)}$$

$M(h, t)$ bezeichnet hier die momenterzeugende Funktion, die allgemein folgendermaßen definiert ist:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

Die momenterzeugende Funktion zu der neuen Dichte $f(x, t; h)$ sieht so aus:

$$M(z, t; h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t; h) dx = \frac{M(z+h, t)}{M(h, t)}$$

Im allgemeinen Fall, in dem die Verteilungsfunktion $F(x)$ nicht unbedingt integrierbar ist, ist die Esscher Transformation mit dem Parameter h , unter der Voraussetzung, dass das folgende Integral existiert, so definiert:

$$dF(x, t; h) = \frac{e^{hx} dF(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dF(y)}$$

Allgemeiner könnte man sagen, dass die Esscher Transformation von einem Wahrscheinlichkeitsmaß μ wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß $E_h(\mu)$, mit folgender Dichte

$$f(x, t; h) = \frac{e^{hx}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hx} d\mu(x)},$$

ist. Der Parameter h wird so ausgewählt, dass das neue Wahrscheinlichkeitsmaß ein äquivalentes Martingalmaß ist, in Bezug auf die erwarteten diskontierten Auszahlungen der Wertpapiere. Aufgrund der Tatsache, dass die Exponentialfunktion positiv ist, lässt sich weiters feststellen, dass das neue Wahrscheinlichkeitsmaß äquivalent zum Ursprünglichen ist, also dass die beiden Maße dieselben Nullmengen besitzen.

Lemma 1.19. (*Eigenschaften der Esscher Transformation*¹³)

(i) **Kombination:** Die Esscher Transformation einer Esscher Transformation ist wieder eine Esscher Transformation: $E_{h_1}E_{h_2} = E_{h_1+h_2}$

(ii) **Inverse:** Die Inverse der Esscher Transformation ist die ursprüngliche Transformation mit negativem Parameter: $E_h^{-1} = E_{-h}$

(iii) **Mittelwertveränderung:** Die Anwendung der Esscher Transformation auf die Normalverteilung ändert nur den Mittelwert: $E_h(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)) = \mathcal{N}(\mu + h\sigma^2, \sigma^2)$

Zur besseren Lesbarkeit befindet sich der dazugehörige Beweis in Appendix B der Arbeit.

Mit $(S_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet man den Preis einer dividendenlosen Aktie, mit strikt positiven \mathbb{A} -adaptierten, also bezüglich der finanziellen Filtration messbaren, Preisprozessen. Wir nehmen an, dass ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit unabhängigen, stationären Inkrementen existiert, so dass $S(t) = S(0)e^{X(t)}$ für alle $t \geq 0$ gilt, wobei $X(0) = 0$. Die Esscher Transformation von $(S_t)_{t \geq 0}$ hat wieder dieselben Eigenschaften, also unabhängige und stationäre Inkremente und die momenterzeugende Funktion sieht so aus, dass

$$\begin{aligned} M(z, t; h) &= \frac{M(z + h, t)}{M(h, t)} \\ &= \left[\frac{M(z + h, 1)}{M(h, 1)} \right]^t \\ &= [M(z, 1; h)]^t. \end{aligned}$$

Die dazugehörige Verteilungsfunktion ist folgendermaßen definiert

$$\begin{aligned} F(x, t; h) &= Pr[X(t) \leq x; h] \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x e^{hy} dF(y, t)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{hy} dF(y, t)} \\ &= \frac{1}{M(h, t)} \int_{-\infty}^x e^{hy} dF(y, t) \end{aligned}$$

Fordert man nun konsistente Aktienkurse des Modells, so wird nach dem Parameter h^* so gesucht, dass der diskontierte Aktienpreis $e^{-\delta t}S(t)_{t \geq 0}$, in Bezug auf das Wahrscheinlichkeitsmaß, ein Martingal ist.

¹³vgl. [18], Stand: [25.6.2014]

Insbesondere gilt

$$S(0) = \mathbb{E}^*[e^{-\delta t}S(t)] = e^{-\delta t}\mathbb{E}^*[S(t)]$$

und um die Martingaleigenschaft zu zeigen geht man folgendermaßen für $t > 0$ und $s \in [0, t]$ vor¹⁴:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*[e^{-\delta t}S_t|\mathbb{A}_s] &= e^{-\delta t}S_0\mathbb{E}^*[\exp\{X_t\}|\mathbb{A}_s] \\ &= e^{-\delta t}S_0\mathbb{E}^*[\exp\{X_t - X_s + X_s\}|\mathbb{A}_s] \\ &= e^{-\delta t}S_0\exp\{X_s\}\mathbb{E}^*[\exp\{X_t - X_s\}|\mathbb{A}_s] \\ &= e^{-\delta t}S_0e^{-\delta(t-s)}\mathbb{E}^*[\exp\{X_t - X_s\}|\mathbb{A}_s] \\ &= e^{-\delta t}S_0e^{-\delta(t-s)}\mathbb{E}^*[\exp\{X_{t-s}\}] \\ &= e^{-\delta t}S_0e^{-\delta(t-s)}e^{\delta(t-s)} \\ &= e^{-\delta t}S_0 \end{aligned}$$

Dies impliziert nun

$$\begin{aligned} e^{-\delta(t-s)} &= \mathbb{E}^*[\exp\{X_{t-s}\}] \\ &= \mathbb{E}_{h^*}[\exp\{X_{t-s}\}] \\ &= M(1, t-s; h^*) = [M(1, 1; h^*)]^{t-s} \end{aligned}$$

und daraus folgt wiederum

$$e^\delta = M(1, 1; h^*).$$

Es kann gezeigt werden¹⁵, dass der Parameter h^* eindeutig bestimmt ist, und obige Gleichung $e^\delta = M(1, 1; h^*)$ erfüllt. Weiters nennt man die Esscher Transformation zu diesem Parameter **risikoneutrale Esscher Transformation** und das äquivalente Martingalmaß dazu wird als **risikoneutrales Esschermaß** betitelt. Es gibt zwar mehrere äquivalente Martingalmaße, sofern der Finanzmarkt nicht vollständig ist, jedoch ist das risikoneutrale Esschermaß eindeutig, da eben auch der Parameter h^* eindeutig bestimmt ist.

Um nun eine allgemeine Optionspreis-Formel herzuleiten¹⁶, deren Spezialfall die Black-Scholes-Formel ist, nutzt man obige Definitionen. Man sieht sich den Wert einer europäischen Option zum Zeitpunkt 0 an mit dem Ausübungspreis

$$K = \ln \left[\frac{K}{S(0)} \right].$$

¹⁴vgl. [2], 79

¹⁵siehe [4], 198f

¹⁶siehe [3], 104ff

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^*[e^{-\delta T}(S_T - K)_+] \\
&= e^{-\delta T} \int_K^\infty [S(0)e^x - K]f(x, T; h^*)dx \\
&= e^{-\delta T} S(0) \int_K^\infty \underbrace{e^x f(x, T; h^*)}_{\frac{e^{(h^*+1)x} f(x, T)}{M(h^*, T)}} dx - e^{-\delta T} K[1 - F(K, T; h^+)] \\
&= \frac{M(h^* + 1, T)}{M(h^*, T)} f(x, T; h^* + 1) \\
&= M(1, T; h^*)f(x, T; h^* + 1) \\
&= e^{\delta T} f(x, T; h^* + 1) \\
&= S(0)[1 - F(K, T; h^* + 1)] - e^{-\delta T} K[1 - F(K, T; h^*)] \\
&= S(0)Pr[S_T > K; h^* + 1] - e^{-\delta T} KPr[S_T > K; h^*]
\end{aligned}$$

1.5 Nullkupon-Anleihen

Eine Nullkupon-Anleihe (Zero-coupon bond, kurz: ZCB) ist ein Vertrag ohne laufende Zinszahlung, der nur zum Ende der Laufzeit $m \geq 0$ genau eine Geldeinheit abgibt. Das bedeutet, dass es sich um eine Anleihe ohne laufende Verzinsung handelt und somit der Gewinn für den Anleger lediglich die Differenz zwischen Anschaffungspreis und Auszahlungspreis ist. Der Preis zum Zeitpunkt $t \in [0, m]$ wird mit $P(t, m)$ bezeichnet. Aus dieser Definition ist ersichtlich, dass $P(m, m) = 1$ und $P(t, m) < 1$ für $t < m$.

Es gibt zwei Möglichkeiten zur Bestimmung des Preises einer ZCB und zwar:

(i) Im diskreten Zeitfall:

$$P(t, m) = \exp\left\{-\sum_{s=t+1}^m F(t, s)ds\right\},$$

hier steht $F(t, s + 1) = -\log \frac{P(r, s+1)}{P(t, s)}$ für die Forward Rate.

(ii) Im stetigen Zeitfall:

$$P(t, m) = \exp\left\{-\int_t^m f(t, s)ds\right\},$$

wobei $f(t, s)$ die sofortige Forward Rate bezeichnet und durch $f(t, s) = -\frac{\partial \log P(t, s)}{\partial s}$ mit Fälligkeit $s > t$ berechnet wird. Der Zusammenhang zwischen sofortiger Forward Rate und Forward Rate ist $F(t, s + 1) = \int_s^{s+1} f(t, u) du$ für $s \geq t$.

Eine weitere wichtige Größe im Zusammenhang mit Nullkupon-Anleihen ist der Kassazins, oder auch die Spot Rate genannt. Bezeichnet man mit τ die Restlaufzeit dieser Anleihen, also $\tau = m - t$, so ist die Spot Rate $R(t, \tau)$ der Zinssatz mit dem die Anleihen über diese Zeit verzinst sind.

$$R(t, \tau) = -\frac{\ln P(t, \tau)}{\tau}$$

Mit folgendem Satz lässt sich der Preis einer Nullkupon-Anleihe mittels der stetig gebundenen Spot Rate $r_t = R(t, t + 1) = -\log P(t, t + 1)$ bestimmen.

Theorem 1.20. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ der Wahrscheinlichkeitsraum und \mathbb{Q} ein äquivalentes Martingalmaß, so gilt für den Preis des ZCB $\forall t < m$:*

$$P(t, m) = \mathbb{E}^*[\exp\{-\sum_{s=t}^{m-1} r_s\} | \mathcal{F}_t].$$

1.6 Short Rate Modelle

Bei der Bewertung von Zinsderivaten, also Derivaten, deren Basiswert ein Zins ist, greift man zu verschiedenen Modellen, um die Zinsstruktur zu modellieren. Das in der Praxis meist angewendete Modell ist das Marktmodell, bei dem z.B der LIBOR als Zinssatz verwendet wird. Weiters gibt es Forward Rate Modelle, die jedoch lediglich eine Verallgemeinerung der Short Rate Modelle sind.

Es gibt grundsätzlich zwei unterschiedlichen Varianten für die Modellierung. Einerseits gibt es die Möglichkeit die bereits vorhandenen Daten auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zu untersuchen. Die zweite Variante ist, dass man sich die Dynamik der Zinsstruktur unter einem äquivalenten Martingalmaß ansieht. Man nimmt ein äquivalentes Martingalmaß, um die Eindeutigkeit der zu errechnenden Preise, zu gewährleisten. Bei Short Rate Modellen wird also versucht, die weitere Zinskurve mittels der Short Rate r , also einem Zinssatz auf einem unendlich kleinen Zeitintervall, herauszufinden.

$$r(t) := \lim_{\tau \rightarrow 0} R(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} -\frac{\ln P(t, \tau)}{\tau}$$

$r(t)$ stellt die Verzinsung der ZCB in jeder Sekunde dar und um nun für beliebige Zeitpunkte $t < m$ die Werte zu berechnen wird $r(t)$ durch stochastische Differentialgleichungen beschrieben. Die allgemeine Differentialgleichung für Short Rate Modelle lautet wie folgt:

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma r(t)^\beta dW_t, \quad (2)$$

wobei σ die Volatilität, θ die mean reversion rate (siehe Abbildung 4), κ die Reversionsgeschwindigkeit und W_t der Wiener Prozess¹⁷.

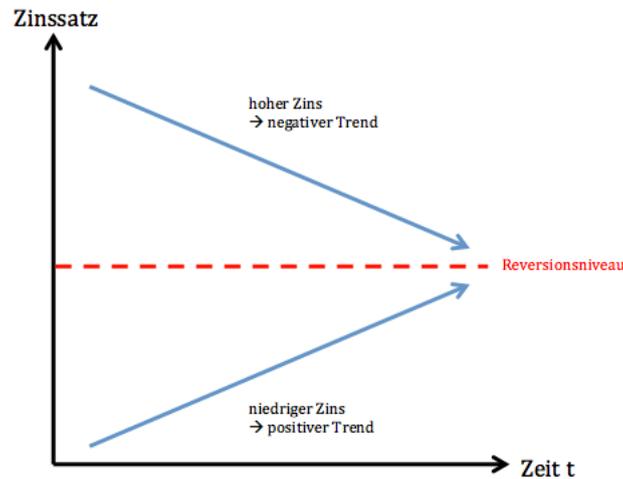


Abbildung 4: "What goes up, must come down and vice versa."¹⁸

Die Short Rate stellt einen stochastischen Prozess dar. Damit sie keine Sprünge beinhaltet und der zukünftige Wert nur vom heutigen Wert, und nicht der Vergangenheit, abhängt, fordern wir stetige Pfade und die Markov-Eigenschaft. Beispiele für Short Rate Modelle sind das Hull White Modell, das Cox Ingersoll Ross Modell und das Vasicek Modell (siehe 1.7).

1.6.1 LIBOR

Der LIBOR (London Interbank Offered Rate) ist ein durchschnittlicher Interbankenzinssatz und wird mit den Werten aus ausgewählten Londoner Banken berechnet. Die British Bankers' Association erfragt von diversen Banken, die mindestens ein AA-Rating (zweitbeste Stufe) der Rating Agentur S & P vorweisen, den Zinssatz, mit welchem sie sich gegenseitig einen Kredit gewähren würden. Der LIBOR existiert in 10 verschiedenen Währungen und für 15 unterschiedliche Laufzeiten und zwar von einem Tag bis zu einem Jahr hin.

Der nominale Zinssatz, oder auch LIBOR Spot Rate genannt, wird wie folgt berechnet:

$$L(t, m) = \frac{1}{\frac{P(t, m)}{m-t} - 1}$$

¹⁷Ein Wiener Prozess modelliert die Brownsche Bewegung und ist definitionsgemäß ein zeitstetiger stochastischer Prozess mit normalverteilten und unabhängigen Zuwächsen.

¹⁸Quelle: "http://de.wikipedia.org/wiki/Mean-Reversion-Effekt" [Stand: 13.8.2014]

Dieser Zinssatz wird für die risikolose Anlage, bei linearer Verzinsung, für das Zeitintervall $[t, m]$ benötigt. Um nun zur Short Rate $r(t)$ zu gelangen, muss man $m \searrow t$ laufen lassen, also

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \lim_{m \searrow t} L(t, m) \\
 &= \lim_{m \searrow t} \frac{\frac{1}{P(t, m)} - 1}{m - t} \\
 &= \lim_{m \searrow t} \frac{1}{P(t, m)} \frac{1 - P(t, m)}{m - t} \\
 &\stackrel{P(t, t)=1}{=} \lim_{m \searrow t} \frac{1}{P(t, m)} \frac{P(t, m) - P(t, t)}{m - t} \\
 &= -\frac{\partial}{\partial m} \log(P(t, m)) \Big|_{m=t}
 \end{aligned}$$

In nachstehender Abbildung sieht man als Beispiel den Interbankenzinssatz in inländischer Währung für die Laufzeit von 3 Monaten.



Abbildung 5: LIBOR in Euro für die Laufzeit von 3 Monaten¹⁹

1.7 Vasicek Modell

Eines der ersten Short Rate Modelle, ist das 1977 veröffentlichte Vasicek Modell. Benannt nach dem tschechischen Mathematiker Oldrich Vasicek (*1942), liegt dem Modell ein eindimensionaler Wiener Prozess zu Grunde, deshalb nennt man das Modell auch Ein-Faktor-Modell. Das diskrete Ein-Faktor Vasicek Modell ist ein Spezialfall des diskreten Gaußschen und affinen Zinsstrukturmodells. Im Gegensatz dazu, würde die Beschreibung der Zinsstrukturkurve bei Mehr-Faktor-Modellen durch, wie der Name schon

¹⁹Quelle: <http://www.finanzen.net/zinsen/libor/Libor-EUR-3-Monate> [Stand: 28.7.2014]

sagt, mehrere Faktoren vorgenommen werden. Im Vasicek Modell wird $r(t)$ durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (OU-Prozess) beschrieben.

Definition 1.21. $(X_t)_{t \geq 0}$ ist ein Vasicek-Prozess²⁰, wenn er die folgende stochastische Differentialgleichung löst:

$$dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t \quad (3)$$

mit Anfangsbedingung $X(0)=a$, Gleichgewichtsniveau μ , Diffusion σ und mean reversion rate α . (W_t) steht hierbei für den Wiener Prozess. Die Lösung zu diesem stochastischen Anfangswertproblem ist

$$X_t = e^{-\alpha t}a + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s.$$

Im Spezialfall, dass das Gleichgewichtsniveau $\mu = 0$ ist, handelt es sich bei der Lösung dieser Differentialgleichung um einen OU-Prozess. Dieser stochastische Prozess würde demnach wie oben, nur ohne dem zweiten Term, aussehen, also

$$X_t = e^{-\alpha t}a + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s.$$

Eigenschaften eines OU-Prozesses sind die Markoveigenschaft und die Gaußprozesseigenschaft.

Eine äquivalente Darstellung der obigen stochastischen Differentialgleichung (3) ist

$$dX_t = (\Theta_1 - \Theta_2 X_t)dt + \Theta_3 dW_t.$$

Auch hier gilt wieder im Falle von $\Theta_1 = 0$, dass es sich um einen OU-Prozess handelt. Im folgenden Plot sieht man den zeitlichen Verlauf dreier verschiedener Pfade des OU-Prozesses. Der Unterschied liegt lediglich in der Wahl des Startwertes. Die Wahl der Parameter lautet wie folgt $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 3$, $\Theta_3 = 2$ und der Startwert variiert zwischen -10,0 und 10.

²⁰vgl. [11], [Stand: 4.2.2014]

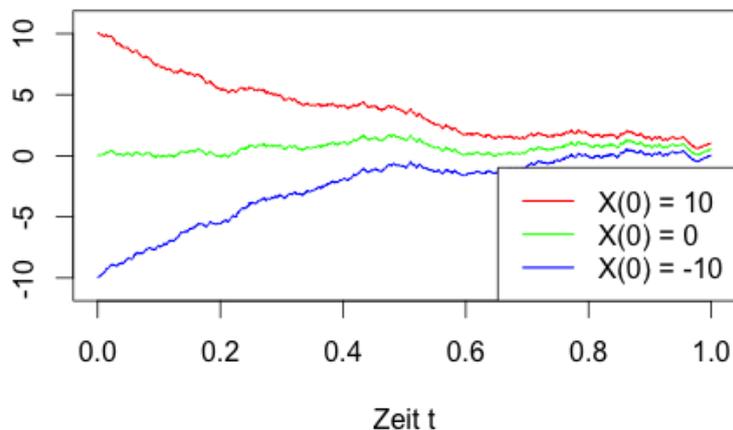


Abbildung 6: Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit verschiedenen Startwerten

Der Short Rate Prozess des Vasicek Modells ist nun, nach obigen Definitionen, die Lösung von folgender Differentialgleichung und somit ein Spezialfall von (2):

$$dr(t) = \kappa(\theta - r(t))dt + \sigma d\overline{W}_t$$

mit Anfangsbedingung $r(0) = b$, Volatilität σ , mean reversion rate θ und Reversionsgeschwindigkeit κ , dass die Geschwindigkeit der Rückkehr zur mean reversion rate beeinflusst. (\overline{W}_t) steht hier für den Wiener Prozess, bezüglich dem zu \mathbb{P} äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} . Für die Short Rate ergibt sich somit folgende Darstellung:

$$r(t) = e^{-\kappa t}r(0) + (1 - e^{-\kappa t})\theta + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s. \quad (4)$$

Man erkennt, dass der letzte Summand ein Ito-Integral über eine deterministische Funktion ist und mit der Ito-Isometrie gilt

$$\int_0^t (\sigma e^{-\kappa(t-s)})^2 ds < \infty \forall t \geq 0.$$

Aus dieser Tatsache folgt, dass die Short Rate normalverteilt ist mit

$$r(t) \sim \mathcal{N}(e^{-\kappa t}r(0) + (1 - e^{-\kappa t})\theta, \sigma^2(\frac{1-e^{-2\kappa t}}{2\kappa})).$$

Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert die Short Rate gegen $\sim \mathcal{N}(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$, was veranschaulicht, dass das Gleichgewichtsniveau θ für den langfristigen Mittelwert, die mean reversion rate, steht.

Die Verteilung der Short Rate ist jedoch in der Praxis ein Nachteil des Vasicek Modells, da $r(t)$ mit einer Wahrscheinlichkeit größer Null negative Werte annehmen kann. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu einem immer positiven Zins und das trägt auch dazu bei, dass das Vasicek Modell in der Praxis nicht verwendet wird. Ein weiterer Grund ist, dass es nicht genügend Parameter besitzt, um die Zinskurve gut und wirklichkeitsgetreu zu modellieren. In folgender Abbildung wurden, mit Hilfe der Statistiksoftware R, 5 mögliche Zinskurven durch das Vasicek Modell modelliert. (Code siehe Appendix A)

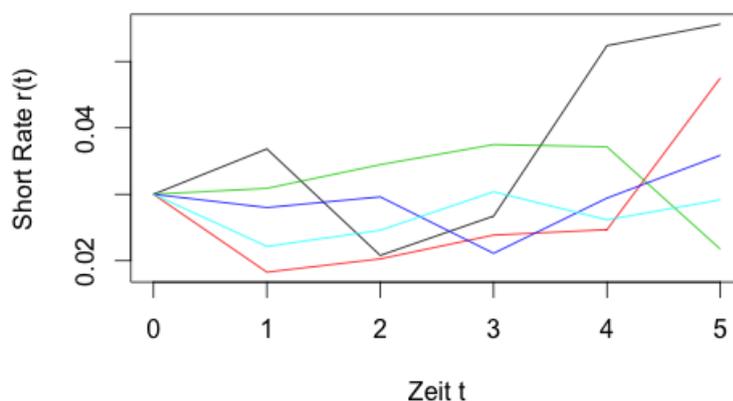


Abbildung 7: Short Rate Pfade

Mittels des Short Rate Prozesses (4) des Vasicek Modells lässt sich der Preis einer ZCB folgendermaßen darstellen:

$$P(t, m) = \exp\left(-\frac{1-e^{-\kappa(m-t)}}{\kappa}r(t) - \left((m-t) - \frac{1-e^{-\kappa(m-t)}}{\kappa}\right)\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2\kappa^2}\right) - \left(\frac{1-e^{-\kappa(m-t)}}{\kappa}\right)^2 \frac{\sigma^2}{4\kappa}\right)$$

1.8 Der Deflator

Es gibt zwei Möglichkeiten, um Arbitragemöglichkeiten zu vermeiden, also um ein konsistentes Modell zur Bewertung von Zahlungsströmen zu schaffen. Erstens die bereits genannten äquivalenten Martingalmaße und zweitens Deflatoren. Letztere stehen allgemein zur Modellierung von Garantien und Optionen zur Verfügung und werden also zum Beispiel, bei der Bewertung von Lebensversicherungsverträgen verwendet.

Definition 1.22. Der strikt positive Zufallsvektor $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \in L_{n+1}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ mit der Normierung $\varphi_0 \equiv 1$, wird, samt seinen Komponenten φ_t , als Preisdeflator (state price deflator) bezeichnet.

Aus $\varphi_0 \equiv 1$ folgt, dass ein Wert zum Zeitpunkt 0 nicht wieder zum Zeitpunkt 0 transportiert wird und die strikte Positivität des Zufallsvektors garantiert die Wohldefiniertheit.

Lemma 1.23. (*Eigenschaften eines Deflators*²¹)

- (i) *integrierbare Komponenten* φ_t
- (ii) \mathbb{F} -*adaptiert*
- (iii) *strikt positiv*
- (iv) *normiert*

Die zweite Eigenschaft existiert, um sicherzustellen, dass die Deflationierung, die Informationen die zu diesem Zeitpunkt vorliegen, berücksichtigen kann. Die strikte Positivität wird für die Wohldefiniertheit gebraucht.

Die Komponenten φ_t des Deflator transportieren Geldbeträge im Zeitpunkt t in einem Wert zum Zeitpunkt 0 und zwar stochastisch (siehe Abbildung 8). Somit könnte man sagen, dass φ_t ein stochastischer Abzinsungsfaktor ist. Ein Abzinsungsfaktor, oder auch Diskontfaktor genannt, wird dazu verwendet Aktiva und Passiva mit einem monetären Wert zu versehen. Dieser Faktor hängt von nicht deterministischen Größen ab und deshalb benutzt man Deflatoren für die stochastische Modellierung von Abzinsungsfaktoren.

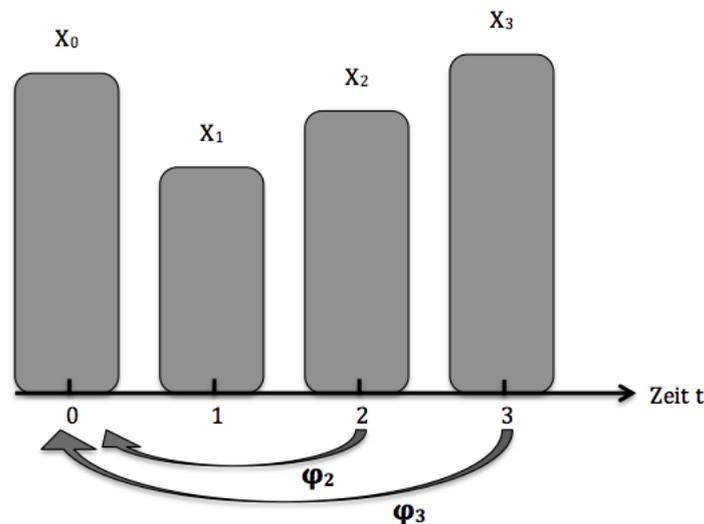


Abbildung 8: Cashflow mit Deflator φ

²¹vgl. [8], 21

Somit wäre nun ersichtlich, dass ein Cashflow $X_t = (0, \dots, 0, X_t, 0, \dots, 0)$ nicht notwendigerweise unabhängig ist von dem Deflator, also:

$$\mathcal{Q}[X_t] = \mathbb{E}[\varphi_t X_t] \neq \mathbb{E}[\varphi_t] \mathbb{E}[X_t].$$

$\mathcal{Q}[X_t]$ beschreibt den Wert von X_t zur Zeit 0, wobei X_t stochastisch diskontiert ist mit dem Deflator φ_t .

Sei die Menge der bepreisbaren Cashflows X in Bezug auf den Deflator φ mit \mathcal{L}_φ bezeichnet, so gilt für den Wert eines Cashflows $X \in \mathcal{L}_\varphi$ zur Zeit 0

$$\mathcal{Q}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_t \varphi_t X_t \mid \mathcal{F}_0\right].$$

Sei nun der Cashflow $X_t = (0, \dots, 0, X_t, 0, \dots, 0)$, so gilt für den Wert

$$\mathcal{Q}[X_t] = \mathbb{E}[\varphi_t X_t \mid \mathcal{F}_0].$$

und für den Preis zu einem Zeitpunkt $t > 0$

$$\mathcal{Q}_t[X_t] = \frac{1}{\varphi_t} \mathbb{E}\left[\sum_t \varphi_t X_t \mid \mathcal{F}_t\right].$$

$\mathcal{Q}_t[X_t]$ wird der Preisprozess eines Zahlungsstromes genannt und, um nun arbitragefreie Preisfindungsprozesse zu erhalten, ist es erforderlich, dass der deflationierte Preisprozess ein Martingal ist.

Definition 1.24. Sei ein Deflator $\varphi \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ gegeben und der deflationierte Preisprozess $(\varphi_t \mathcal{Q}_t[X])_{t \in \mathcal{J}}$ ein (\mathbb{P}, \mathbb{F}) -Martingal, so ist $(\mathcal{Q}_t[X])_{t \in \mathcal{J}}$ φ -konsistent.

Es gibt natürlich aber auch Preisprozesse die nicht φ -konsistent sind. Durch die Martingaleigenschaft kann der Deflator aber als Dichteprozess für den Masswechsel verwendet werden. Zieht man die Esscher Transformation heran (siehe 1.4), so sei ein Deflator, der die Martingaleigenschaft für alle Assets aufweist, gewährleistet.

Nimmt man den Cashflow einer Nullkupon-Anleihe mit Laufzeit t , also $X_t = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, so ist der Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben durch:

$$P(0, t) = \mathbb{E}[\varphi_t \mid \mathcal{F}_0].$$

Während φ_t , wie oben erwähnt, \mathcal{F}_t messbar war, ist nun $P(0, t)$ \mathcal{F}_0 messbar. Eine Schlussfolgerung daraus ist, dass für deterministische Zahlungsströme, φ_t und $P(0, t)$ gleichwertig sind, andererseits kennt man $P(0, t)$ schon am Anfang des Zeitintervalls $(0, t]$ und φ_t erst am Ende der Zeitperiode. Ein weiteres Resultat ist, dass man bei der Bestimmung des Wertes von deterministischen Zahlungsströmen zur Zeit 0, sowohl die Preise

von Nullkupon-Anleihen $P(0, t)$, als auch die Deflatoren verwenden kann. Handelt es sich jedoch um stochastische Zahlungsströme, so ist die Verwendung von Nullkupon-Anleihen nicht mehr sinnvoll.

Eine Annahme in Bezug zum Preisdeflators $\varphi \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ ist, dass er sich folgendermaßen

$$\varphi_t = \varphi_t^A \varphi_t^T$$

zerlegen lässt. Hier ist φ_t^A ein sogenannter finanzieller Deflator, der die Preisbildung auf dem Finanzmarkt wiedergibt. φ_t^T hingegen wird als eine versicherungstechnische Wahrscheinlichkeitsdistortion bezeichnet und bietet einen Risikomarge für die nicht absicherbaren versicherungstechnischen Risiken. φ_t^A soll \mathbb{A} -adaptiert sein, also messbar bezüglich der finanziellen Filtration und φ_t^T messbar bezüglich der aktuariellen Filtration \mathbb{T} .

Eine andere Art der Zerlegung des Deflators, ist die in Periodendeflatoren $\tilde{\varphi}_t$, wobei $\tilde{\varphi}_0=1$. Diese sind \mathcal{F}_t -messbar und transportieren Geldbeträge vom Zeitpunkt t in den Zeitpunkt $t-1$ und dies genauso wie der Deflator auf stochastische Weise, also

$$\tilde{\varphi}_t = \frac{\varphi_t}{\varphi_{t-1}}.$$

Der Deflator kann somit über das Produkt der einzelnen Preisdeflatoren dargestellt werden:

$$\varphi_t = \prod_{s=0}^t \tilde{\varphi}_s.$$

Sei der Deflator $\varphi \in L^1_{n+1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ durch das Vasicek Modell gegeben, so wird φ folgendermaßen definiert:

$$\varphi_t = \exp\left(-\sum_{s=1}^t [r_{s-1} + \frac{1}{2}\lambda^2 r_{s-1}^2] + \sum_{s=1}^t \lambda r_{s-1} \epsilon_s\right).$$

λ steht in obiger Definition für das Marktpreisrisiko, ϵ_t ist ein \mathbb{F} -adaptierter Prozess und r_t steht für die Spot Rate Dynamik, wobei hierfür

$$r_t = b + \beta r_{t-1} + g\epsilon_t = b + (1 - (k + \lambda g))r_{t-1} + g\epsilon_t$$

gilt.

In nachfolgender Abbildung wird der zeitliche Verlauf des Deflators im Vasicek Modell simuliert.²² Die dafür durchgeführten Berechnungen wurden mit der Statistiksoftware R berechnet. (Code siehe Appendix A)

²²vgl. Daten aus [8], Seite 142, 246

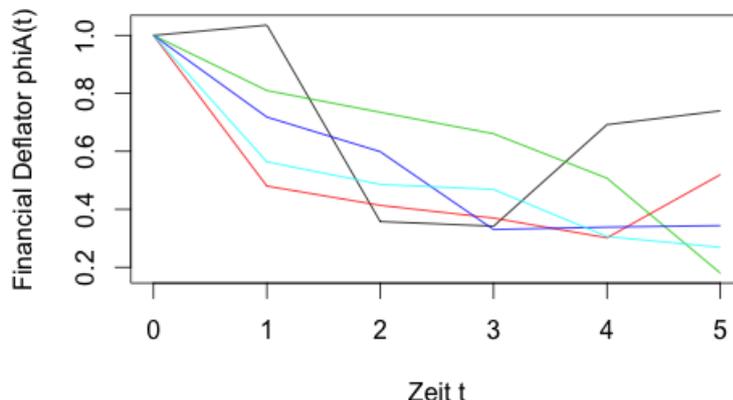


Abbildung 9: Financial Deflator mit dem Vasicek Modell

1.9 Das Valuation Portfolio

Für Versicherungsunternehmen ist es wichtig, den verschiedensten Parametern Beachtung zu schenken, um sich sowohl abzusichern, als auch langfristig als Unternehmen bestehen zu können. Zu diesen Parametern zählen zum einen die Marktrisiken, zum anderen aber auch die Kreditrisiken und natürlich auch die versicherungstechnischen Risiken. Diese Einflussfaktoren können durch den Cashflow-Ansatz dargestellt werden und dadurch lassen sich die Barwerte für die Unternehmen berechnen.

Das Valuation Portfolio (kurz: VaPo) ist ein Instrument, um die Darstellung von genau diesen Risikobewertungen zu vereinfachen und dient gleichzeitig auch dazu, die Berechnung eines Sicherheitsfaktors zu ermöglichen. Theoretisch gesehen ist das VaPo ein multidimensionales, positives, stetiges, lineares Funktional, dass die Versicherungsverpflichtungen auf ein replizierendes Portfolio von Finanzinstrumenten abbildet. In der Praxis deckt das VaPo, die vom Versicherungsunternehmen, erwarteten Versicherungsverbindlichkeiten ab und resultiert weiters in Best Estimate Reserven.

Prinzipiell ist zu unterscheiden, ob $\varphi^T \equiv 1$ oder $\varphi^T \neq 1$. Sei $\varphi^T \equiv 1$, so wird das Bewertungsportfolio für die Best Estimate Reserve gebildet, im anderen Fall jedoch wird es für die risikoadjustierte Reserve verwendet. Sei $\varphi^T \neq 1$, so spricht man vom Protected Valuation Portfolio (kurz: $VaPo^{prot}$), doch dazu später.

Das Ziel sei nun die Bewertung von einem Zahlungsstrom X zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in \mathcal{J}$, wobei wir einen fixen Zeithorizont $n \in \mathbb{N}$ in diskreter Zeit mit Zeitpunkten $t \in \mathcal{J} = \{0, \dots, n\}$ wählen. Wir verwenden ein Finanzportfolio, um den Zahlungsstrom darzustellen und hierfür ist nicht nur die Auswahl der Basisfinanzinstrumente wichtig, sondern auch wann diese verkauft werden, da erst dadurch ein Zahlungsstrom generiert wird. Somit wird in den folgenden Konstruktionen der dritte Schritt verständlicher, da nämlich das Finanzportfolio $\mathcal{U}^{(k)}$ zum Zeitpunkt k verkauft wird.

1.9.1 Konstruktion des VaPo²³

Das VaPo wird nun in zwei Schritten konstruiert und im dritten und letzten Schritt dann bewertet.

- 1) Definiere Einheiten, die dann die Basis (Finanzinstrumente) bilden, mit der wir den Vertrag weiters messen können.
- 2) Bestimme die Anzahl jeder Einheit zu Beginn des Vertrages.
- 3) Um einen Geldwert für die Cashflows zu erhalten, müssen wir ein Bilanzierungsprinzip²⁴ auf das VaPo anwenden.

1.Schritt:

Zuerst wird eine geeignete Basis an Finanzportfolios $\mathcal{U}^{(k)}$ gewählt, wobei jenes zur Zeit k verkauft wird. Damit lässt sich der Zahlungsstrom X gemeinsam mit den versicherungstechnischen Variablen $\Lambda^{(k)}$ darstellen durch

$$X = (\Lambda^{(0)}U_0^{(0)}, \dots, \Lambda^{(k)}U_k^{(k)}).$$

$\Lambda^{(k)}$ ist \mathbb{T} -adaptiert und $\mathcal{U}^{(k)}$ \mathbb{A} -adaptiert. Wir erhalten des Weiteren folgende Abbildung, welche die Versicherungsverbindlichkeiten über die Portfolios darstellt und den Zahlungsstrom X auf einen mehrdimensionalen Vektorraum mit Basis $\mathcal{U}^{(k)}$ abbildet

$$X \mapsto \sum_{k \in \mathcal{J}} \Lambda^{(k)}\mathcal{U}^{(k)}.$$

2.Schritt:

Als zweiter Schritt der Konstruktion, werden nun die versicherungstechnischen Variablen $\Lambda^{(k)}$ für festes $t \in \mathcal{J}$ durch deren Best-Estimate Werte ersetzt. Das führt nun zu der Abbildung (5), die dem Zahlungsstrom X ein \mathcal{F}_t -messbares Finanzportfolio zuordnet.

²³vgl. [8], 172ff

²⁴Ein Bilanzierungsprinzip ordnet einem Finanzinstrument einen Wert zu. Die Festsetzung des Bilanzierungsprinzips hängt von der Zielsetzung der Bilanzierung ab.

Durch diese Abbildung wird eine Replikation der erwarteten Versicherungszahlungsströme über die Finanzportfolios und Basisfinanzinstrumente vorgenommen.

$$X \mapsto VaPo_t(X) = \sum_{k \in \mathcal{J}} \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{J}_t] \mathcal{U}^{(k)} \quad (5)$$

Durch die Integrierbarkeit von $\Lambda^{(k)}$ ist $VaPo_t(X)$ wohldefiniert.

3.Schritt:

Nun wird dem VaPo der Geldwert zum Zeitpunkt t durch

$$VaPo_t(X) \mapsto \mathcal{Q}_t^0[X] = \sum_{k \in \mathcal{J}} \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{J}_t] U_t^{(k)} \quad (6)$$

zugewiesen, wobei \mathcal{Q}_t^0 , das Bewertungsfunktional zur Zeit $t \in \mathcal{J}$ ist.

Lemma 1.25. (*Selbstfinanzierende Eigenschaft*) Eine wichtige Eigenschaft des Valuation Portfolio ist, dass es sich selbstfinanziert. Für $X \in L_{n+1}^2$ gilt

$$VaPo(X_{(k)}) = VaPo(X_{(k+1)}) + VaPo(X_k)$$

Der letzte Term in dieser Gleichung kann zur Zeit k gleich dem Barwert gesetzt werden, also $VaPo(X_k) = X_k$.

Beispiel 1.26.

 (lebenslange Rente ²⁵)

Um sich nun die Konstruktion in praktischer Weise anzusehen, halte ich mich sehr an das Beispiel von Wüthrich-Merz [8].

Nehmen wir nun eine homogene Gruppe an Personen L_x mit Rentenalter $x = 65$, so sind wir an der lebenslangen Rentensumme interessiert. Die jährliche Rentenzahlung sei $a > 0$ und diese hängt vom Inflationsindex I_t , mit Startwert $I_0 = 1$, ab. Die Überlebenswahrscheinlichkeiten p_{x+t} , $t \geq 0$ erfüllen $p_{121} = 0$, das heißt, dass alle Personen mit Wahrscheinlichkeit 1 im Alter von 121 Jahren nicht mehr am Leben sind. Somit ergibt sich für die Rentensumme der Zeithorizont $n = 120 - 65 = 55$. Die Überlebenden zur Zeit t werden mit L_{x+t} bezeichnet. Somit ergibt sich folgende Tabelle:

²⁵vgl. [8], 180f

Tabelle 2: Tabelle zu Beispiel 1.26

Zeit	Geldfluss	Rentenzahlung
0	X_0	/
1	X_1	$L_{66}aI_1$
2	X_2	$L_{67}aI_2$
\vdots	\vdots	\vdots
54	X_{54}	$L_{119}aI_{54}$
55	X_{55}	$L_{120}aI_{55}$

Wir müssen nun einen Fond \mathfrak{J} kaufen, der durch den Inflationsindex $(I_t)_{t \in \mathcal{J}}$ bestimmt ist. Nun können wir uns der eigentlichen Konstruktion des VaPo widmen:

1.Schritt:

$$X \mapsto \sum_{k \in \mathcal{J}} \Lambda^{(k)} \mathcal{U}^{(k)}$$

$$X \mapsto \sum_{k=1}^{55} L_{x+k} a \mathfrak{J}$$

2.Schritt

$$X \mapsto VaPo_t(X) = \sum_{k \in \mathcal{J}} \mathbb{E}[\Lambda^{(k)} | \mathcal{J}_t] \mathcal{U}^{(k)}$$

$$VaPo_t(X) = \sum_{k=1}^{55} \mathbb{E}[L_{x+k} | \mathcal{J}_t] a \mathfrak{J} = L_{x+k} \sum_{k=1}^{55} \left(\prod_{s=1}^k p_{x+s} \right) a \mathfrak{J}$$

Das VaPo für die noch ausstehenden Verbindlichkeiten, also für $t = 0, \dots, 54$, würde wie folgt aussehen:

$$VaPo_t(X_{(t+1)}) = \sum_{k=t+1}^{55} \mathbb{E}[L_{x+k} | \mathcal{J}_t] a \mathfrak{J} = L_{x+k} \sum_{k=t+1}^{55} \left(\prod_{s=t+1}^k p_{x+s} \right) a \mathfrak{J}$$

3.Schritt

Nun wird dem VaPo ein Geldwert zugewiesen. Die Best Estimate Reserven für die ausstehenden Verbindlichkeiten sind durch

$$\mathcal{Q}_t^0[X_{(t+1)}] = L_{x+t} \sum_{k=t+1}^{55} \left(\prod_{s=t+1}^k p_{x+s} \right) a I_t$$

gegeben. Wie man sieht, ist der einzige Unterschied zum zweiten Schritt, dass der Inflationsindex direkt zur Berechnung herangezogen wird.

1.9.2 Konstruktion des $VaPo^{prot}$ ²⁶

Nun betrachten wir den Fall, dass $\varphi^T \neq 1$ ist und werden sehen, dass die Konstruktion in diesem Fall ähnlich der Konstruktion des VaPo ist. Das $VaPo^{prot}$ wird in zwei Schritten konstruiert und dann im dritten Schritt bewertet und wird für die risikoadjustierte Reserve, welches das Versicherungsunternehmen gegen versicherungstechnische Risiken absichern soll, herangezogen.

1.Schritt:

Der erste Schritt ist äquivalent wie bei der Konstruktion des VaPo. Es wird eine geeignete Basis an Finanzportfolios $\mathcal{U}^{(k)}$ gewählt und mit Hilfe von $\Lambda^{(k)}$ lässt sich der Zahlungsstrom durch

$$X = (\Lambda^{(0)}U_0^{(0)}, \dots, \Lambda^{(k)}U_k^{(k)})$$

darstellen. $\Lambda^{(k)}$ sei wieder \mathbb{T} -adaptiert und $\mathcal{U}^{(k)}$ \mathbb{A} -adaptiert. Wieder können wir uns nun folgende Abbildung definieren

$$X \mapsto \sum_{k \in \mathcal{J}} \Lambda^{(k)} \mathcal{U}^{(k)}.$$

2.Schritt:

Nun werden, wie im 2.Schritt der Konstruktion des VaPo, die versicherungstechnischen Variablen $\Lambda^{(k)}$ ersetzt, und zwar durch deren wahrscheinlichkeitsverzerrten bedingten Erwartungswert.

$$X \mapsto VaPo_t^{prot}(X) = \sum_{k \in \mathcal{J}} \frac{1}{\varphi_t^T} \mathbb{E}[\varphi_k^T \Lambda^{(k)} | \mathcal{J}_t] \mathcal{U}^{(k)} = \sum_{k \in \mathcal{J}} \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)} \quad (7)$$

Dadurch kann nun ein Vergleich der Versicherungsverbindlichkeiten mit dem Portfolio der Aktiva vorgenommen werden.

3.Schritt:

In diesem Schritt, wird dem protected VaPo zum Zeitpunkt t ein Geldwert zugewiesen und dieser Geldwert ist nun mit dem Wert des Versicherungsportfolio vergleichbar.

$$VaPo_t^{prot}(X) \mapsto \mathcal{Q}_t[X] = \sum_{k \in \mathcal{J}} \Lambda_t^{(k)} U_t^{(k)} \quad (8)$$

²⁶vgl. [8], 205ff

2 Beispiele aus der Lebensversicherung

2.1 Vergleich des Verbraucherpreisindex mit dem LIBOR

Mit den österreichischen Daten des Verbraucherpreisindex (kurz: VPI) und des Euro LIBOR Zinssatzes der Jahre 2004 bis 2013²⁷ (siehe Tabelle 3) ergibt sich folgende Grafik, die bereits vermuten lässt, dass die Daten miteinander korrelieren, sprich einen positiven Korrelationskoeffizienten haben.

Tabelle 3: Daten von 2004-2013 von VPI und LIBOR

	VPI	LIBOR
2004	2.262	2.273
2005	2.024	2.332
2006	1.797	3.438
2007	1.668	4.451
2008	3.668	4.822
2009	0.279	1.604
2010	1.671	1.327
2011	3.505	1.969
2012	2.222	1.072
2013	1.796	0.448

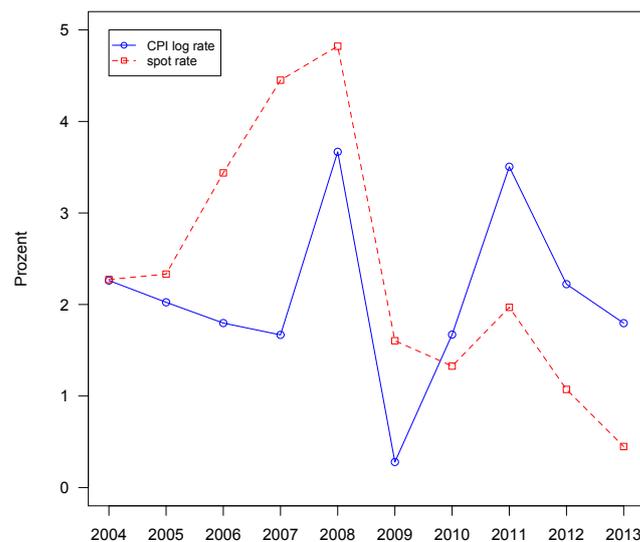


Abbildung 10: Daten von 2004-2013 von VPI und LIBOR

²⁷Quelle : <http://www.global-rates.com> [Stand: 4.11.2013]

2.1.1 Empirischer Korrelationskoeffizient

Der empirische oder auch Pearson - Korrelationskoeffizient genannt, ist nach dem britischen Mathematiker Karl Pearson benannt und ist ein Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Stichproben. Der Korrelationskoeffizient ist nur zwischen den Werten -1 und 1 definiert, wobei bei 0 von keiner Abhängigkeit gesprochen wird und je höher der Koeffizient, desto mehr Abhängigkeit herrscht zwischen den zwei Merkmalen. Der Korrelationskoeffizient r ist folgendermaßen definiert:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}},$$

wobei \bar{x} und \bar{y} die empirischen Mittelwerte der Messreihen sind. Zu dem Koeffizienten existiert folgender Standardfehler s :

$$s = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}.$$

Zu unserem Beispiel mit den Daten des LIBOR und denen des Verbraucherpreisindex, ergibt sich als Korrelationskoeffizient

$$r \approx \frac{4,315}{12,498} = 0,345$$

und als Standardfehler

$$s \approx 0,332.$$

2.1.2 Maximum Likelihood Schätzung

Die Log-Likelihood Funktion sei wie folgt gegeben:

$$l_{y_{1:T}}(\sigma, c) = \sum_{t=1}^T -\log(2\pi T \det(\Sigma)^{1/2}) - \frac{1}{2}(y_t - \mu_t)' \Sigma^{-1} (y_t - \mu_t),$$

wobei $(y_t)'_{t \in 1, \dots, T} = (R_t^{(\tau)}, \varepsilon_t)'_{t \in 1, \dots, T}$ und

$$\mu_t = \left((1 + \lambda \sigma c) r_{t-1} - \frac{1}{2} \sigma^2, 0 \right)'.$$

Hier sind $R_t^{(\tau)}$ die Werte des Verbraucherpreisindex, r_t die Werte des Euro LIBOR Zinssatzes und λ stellt das Marktpreisrisiko dar. Um nun zu den Schätzern $\hat{\sigma}$ und \hat{c} zu gelangen, wird die Log-Likelihood Funktion nach c und σ abgeleitet und Null gesetzt, wobei das Marktpreisrisiko in [8] mit $\lambda = 10$ angenommen wird.

Für die Log-Likelihood-Funktion braucht man nun die inverse Matrix von

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\sigma c \\ -\sigma c & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{\det \Sigma} \begin{pmatrix} 1 & \sigma c \\ \sigma c & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

mit $\det \Sigma = \sigma^2 - \sigma^2 c^2$, daraus ergibt sich für die Ableitungen:

$$\frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial \sigma} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(c^2-1)\sigma^3} & \frac{c}{(c^2-1)\sigma^2} \\ \frac{c}{(c^2-1)\sigma^2} & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \Sigma^{-1}}{\partial c} = \begin{pmatrix} \frac{2c}{(c^2-1)^2\sigma^2} & \frac{c^2+1}{(c^2-1)^2\sigma} \\ \frac{c^2+1}{(c^2-1)^2\sigma} & \frac{2c}{(c^2-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Weiters braucht man folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_t}{\partial \sigma} &= (\lambda c r_{t-1} - \sigma, 0)' & \frac{\partial \mu_t}{\partial c} &= (\lambda \sigma r_{t-1}, 0)', \\ \frac{\partial \sqrt{\det \Sigma}}{\partial \sigma} &= \sqrt{1 - c^2} & \frac{\partial \sqrt{\det \Sigma}}{\partial c} &= -\frac{c\sigma}{\sqrt{1-c^2}}, \\ \frac{\partial(-\log(2\pi T \sqrt{\det \Sigma}))}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} & \frac{\partial(-\log(2\pi T \sqrt{\det \Sigma}))}{\partial c} &= \frac{c}{1-c^2}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich durch die oben angegebenen Ableitungen und durch Nullsetzung folgende zwei Gleichungen:

i) Ableitung nach σ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} &= \sum_{t=1}^{10} -\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2}((y_t - \lambda c r_{t-1} + \sigma)^2 \frac{2}{(c^2-1)\sigma^3}) \stackrel{!}{=} 0 \\ \sum_{t=1}^{10} -\frac{1}{\sigma} - \frac{y_t^2 - 2y_t \lambda c r_{t-1} + 2y_t \sigma + (\lambda c r_{t-1})^2 - 2\lambda c r_{t-1} \sigma + \sigma^2}{(c^2-1)\sigma^3} &= 0 \\ \sum_{t=1}^{10} \frac{y_t^2 - 2y_t \lambda c r_{t-1} + (\lambda c r_{t-1})^2 + \sigma(2y_t - 2\lambda c r_{t-1}) + \sigma^2}{(c^2-1)\sigma^3} &= -\frac{10}{\sigma} \\ \Rightarrow \hat{\sigma} &= -10 \cdot \sum_{t=1}^{10} \frac{y_t^2 - 2y_t \lambda c r_{t-1} + (\lambda c r_{t-1})^2 + \sigma(2y_t - 2\lambda c r_{t-1}) + \sigma^2}{(c^2-1)\sigma^3} \end{aligned}$$

ii) Ableitung nach c :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c} &= \sum_{t=1}^{10} \frac{c}{1-c^2} - \frac{1}{2}((y_t - \lambda \sigma r_{t-1})^2 \frac{2c}{(c^2-1)^2\sigma^2}) \stackrel{!}{=} 0 \\ \sum_{t=1}^{10} \frac{(y_t^2 - 2y_t \lambda \sigma r_{t-1} + (\lambda \sigma r_{t-1})^2)c}{(c^2-1)^2\sigma^2} &= \frac{10c}{1-c^2} \\ \Rightarrow \hat{c} &= \sqrt{\frac{50}{(\sum_{t=1}^{10} \frac{(y_t^2 - 2y_t \lambda \sigma r_{t-1} + (\lambda \sigma r_{t-1})^2)c}{(c^2-1)^2\sigma^2})^2} + 2} \end{aligned}$$

2.2 Deflatorskonstruktion

Um sich einen Deflator zu konstruieren gibt es im Groben zwei fundamental unterschiedliche Ansätze. Die traditionellere Methode ist es, von der ersten Basis zur zweiten Basis überzugehen, also die Prämie von den Sterbetafeln erster Ordnung zu berechnen. Der zweite Ansatz ist jener, der die Esscher Transformation beinhaltet. Bei dieser Transformation gibt es genau einen freien Parameter und zwar den Risikoaversionparameter.

Im Beispiel 8.3.2 von Wüthrich-Merz [8] wird die traditionellere Variante gewählt und beim Übergang von erster zu zweiter Basis wird $m^+ = m + 2$ gewählt. Dies bedeutet, dass eine x -jährige Person dann die Sterblichkeit einer $(x - 2)$ -jährigen Person hat. In Grafik 11 sieht man den Unterschied zwischen erster und zweiter Ordnung, sprich für $m = 92, 16$ und für $m^+ = m + 2$.

Meine Frage ist nun, wenn man das Esschermaß auf dieses Beispiel anwendet, ob es einen Wert für den freien Parameter gibt, sodass es circa der Erhöhung um 2 entspricht oder ob es fundamental andere Ergebnisse liefert und somit auch eine andere Verteilung hat?

Bei den folgenden Werten und Formeln halte ich mich an die, des Buches von Wüthrich-Merz ²⁸. Das Mortalitätsgesetz von Gompertz, benannt nach dem britischen Mathematiker Benjamin Gompertz, liefert nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein x -Jähriger zur Zeit $t + 1$ noch lebt:

$$\mathbb{P}[T_x > t + 1 | \mathcal{J}_0] = \prod_{s=1}^{t+1} p_{x+s},$$

wobei T_x die Restlebenszeit einer x -jährigen Person zur Zeit 0 beschreibt. Nach Gompertz ist somit die Überlebenswahrscheinlichkeit für t

$$P[T_x > t | \mathcal{J}_0] = \exp\{-\xi_x(e^{\frac{t}{\zeta}} - 1)\},$$

und

$$\xi_x = \exp\left(\frac{(x+t)-m}{\zeta}\right)$$

mit $\zeta = 8, 11$ und $m = 92, 16$. Die Überlebenswahrscheinlichkeit p_{x+t+1} sei nun durch obige Definition bestimmt:

$$p_{x+t+1} = \frac{P[T_x > t+1 | \mathcal{J}_0]}{P[T_x > t | \mathcal{J}_0]} = \exp\{-\xi_x(e^{\frac{t+1}{\zeta}} - e^{\frac{t}{\zeta}})\}.$$

²⁸vgl. [8], 244

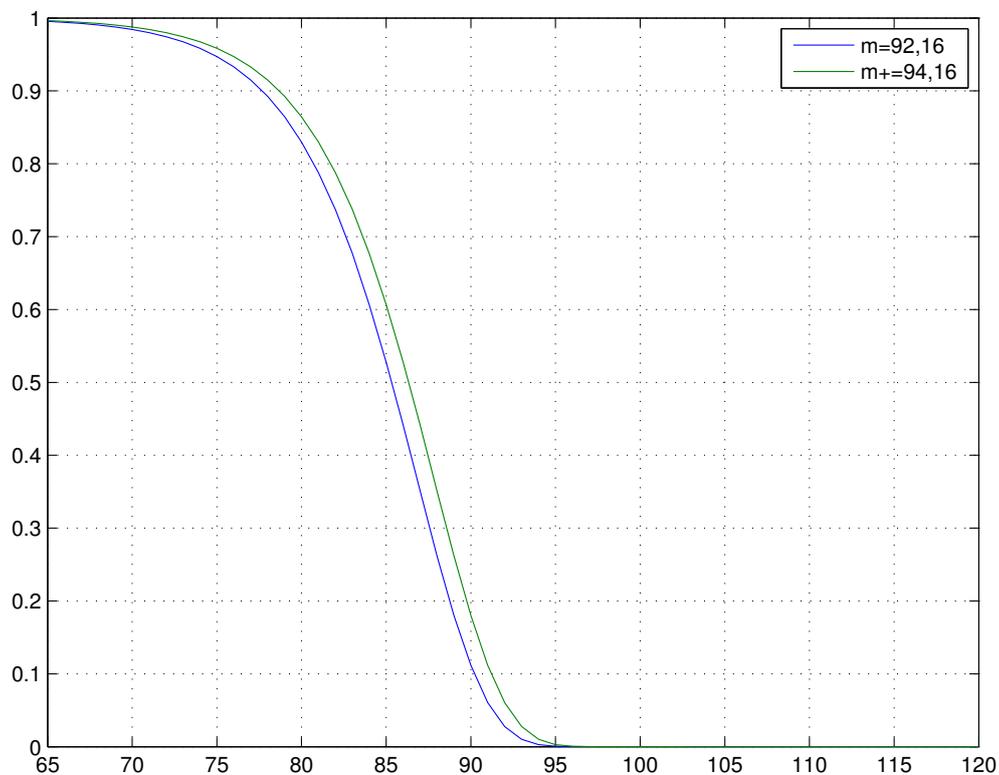


Abbildung 11: Überlebenswahrscheinlichkeit p_{x+t+1} und p_{x+t+1}^+

Wir setzen $p_{x+n+1} = 0$, also wir nehmen an, dass zur Zeit $n + 1$ alle Personen bereits gestorben sind. Nun wählen wir in diesem Beispiel den Startwert $x = 65$. Die Gegenwahrscheinlichkeit sei $q_{x+t+1} = 1 - p_{x+t+1}$, also mit eingesetzten Werten:

$$q_{65+t+1} = 1 - e^{-e^{\frac{(65+t)-92,16}{8,11}} (e^{\frac{t+1}{8,11}} - e^{\frac{t}{8,11}})}.$$

In Abbildung 12 wird genau diese Gegenwahrscheinlichkeit in blau geplottet für den Startwert $x = 65$ und für den Zeitparameter t bis 120 Jahre. Die grüne Funktion zeigt im Vergleich die Gegenwahrscheinlichkeit q_{x+t+1}^+ mit $m^+ = 94,16$.

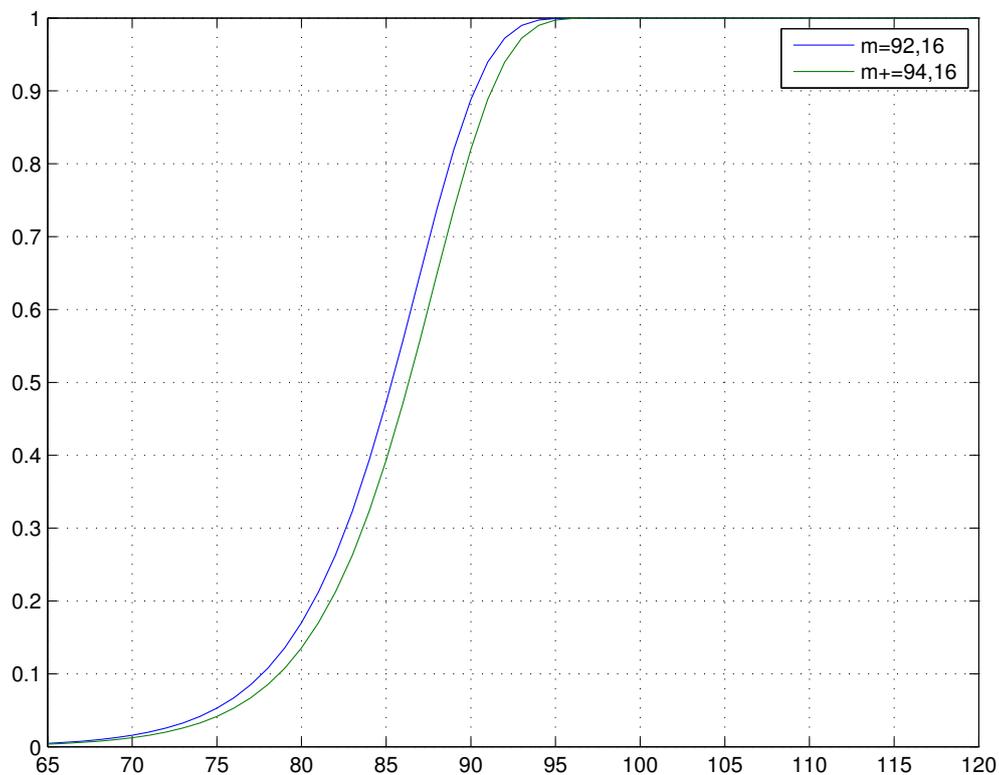


Abbildung 12: Gegenwahrscheinlichkeit q_{x+t+1} und q_{x+t+1}^+

Nun geht es darum, q_{65+t+1}^+ mit der Esscher Transformation von q_{65+t+1} zu vergleichen und eben zu schauen ob man den Risikoavversionsparameter so wählen kann, dass es einer Erhöhung um zwei entspricht.

Damit man auf die Dichtefunktion kommt leitet man nach t ab, also allgemein

$$f(x, t) = \frac{d(q_{x+t})}{dt}$$

oder in unserem Beispiel

$$\begin{aligned} f(65, t + 1) &= \frac{d(q_{65+t+1})}{dt} \\ &= 0,0011366e^{0,246609t-0,00460891e^{0,246609t}} \end{aligned}$$

Zur Überprüfung, ob es sich wirklich um eine Dichte handelt kann man folgende Gleichheit testen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(65, t + 1) dt \stackrel{!}{=} 1.$$

Um nun die Esscher Transformation (siehe 1.4) anzuwenden, benutzt man folgende Vorgehensweise

$$f(x, t + 1; h) = \frac{e^{ht} f(x, t+1)}{M(h)},$$

mit der momenterzeugenden Funktion

$$M(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ht} f(x, t + 1) dt.$$

Die Momenterzeugende von $f(65, t + 1)$ liefert für verschiedene h einfach Normierungsfaktoren. Die Esscher Transformation von q_{65+t+1} würde demnach so aussehen:

$$\tilde{q}(x, t + 1; h) = \int_{-\infty}^t f(x, s + 1; h) ds.$$

2.2.1 Testung

Ich teste die Herangehensweise, ob man die Esscher Transformation verwenden kann, für verschiedene h .

- $h = 0.06$

$$\begin{aligned} M(0.06) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{0,06t} 0,0011366 e^{0,246609t - 0,00460891 e^{0,246609t}} dt \\ &= 3,36079 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(65, t; 0.06) &= \frac{e^{0,06t} f(65, t + 1)}{M(0.06)} \\ &= 0,000338194 e^{0,306609t - 0,00460891 e^{0,246609t}} \end{aligned}$$

- $h = 0.05$

$$\begin{aligned} M(0.05) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{0,05t} 0,0011366 e^{0,246609t - 0,00460891 e^{0,246609t}} dt \\ &= 2,73077 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(65, t; 0.05) &= \frac{e^{0,05t} f(65, t + 1)}{M(0.05)} \\ &= 0,00041622 e^{0,296609t - 0,00460891 e^{0,246609t}} \end{aligned}$$

- $h = 0.04$

$$\begin{aligned} M(0.04) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{0,04t} 0,0011366 e^{0,246609t-0,00460891e^{0,246609t}} dt \\ &= 2,22347 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(65, t; 0.04) &= \frac{e^{0,04t} f(65, t+1)}{M(0.04)} \\ &= 0,000511183 e^{0,286609t-0,00460891e^{0,246609t}} \end{aligned}$$

- $h = 0.03$

$$\begin{aligned} M(0.03) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{0,03t} 0,0011366 e^{0,246609t-0,00460891e^{0,246609t}} dt \\ &= 1,81437 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(65, t; 0.03) &= \frac{e^{0,03t} f(65, t+1)}{M(0.03)} \\ &= 0,000626443 e^{0,276609t-0,00460891e^{0,246609t}} \end{aligned}$$

Der Programmcode, in Matlab implementiert, ist für folgenden Plot in Appendix A zu finden, jedoch nur für $h = 0.06$, da der Code sich nur in der Funktion $f1$ ändert.

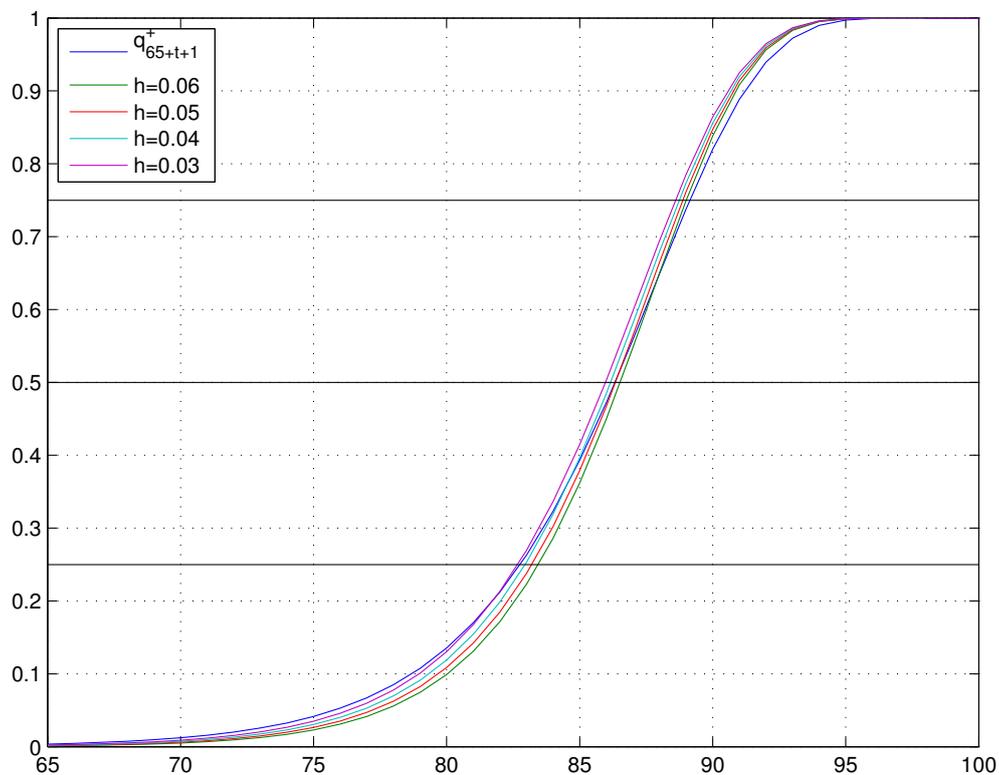


Abbildung 13: $\tilde{q}(65, t + 1; h)$ mit $h = 0.06; 0.05; 0.04; 0.03$ im Vergleich zu q_{65+t+1}^+

Die drei schwarzen horizontalen Linien in obigem Plot 13 entsprechen dem 25%-, dem 50%- und dem 75%-Quantil²⁹. Die Quantile der jeweiligen Funktionen sind in folgender Tabelle aufgelistet und zwecks besserer Lesbarkeit auf drei Kommastellen gerundet.

Tabelle 4: p-Quantile

	25%	50%	75%
q_{65+t+1}^+	82,762	86,329	89,139
$\tilde{q}(65, t + 1; 0.06)$	83,454	86,523	89,004
$\tilde{q}(65, t + 1; 0.05)$	83,208	86,346	88,875
$\tilde{q}(65, t + 1; 0.04)$	82,949	86,161	88,740
$\tilde{q}(65, t + 1; 0.03)$	82,676	85,968	88,599

Mit Hilfe des euklidischen Abstands kann man sich das "beste" h bestimmen.

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^2},$$

²⁹Ein Quantil ist ein Lagemaß, mit dem Aussagen über Datenreihen getätigt werden können. Bei dem Wert des p%-Quantil sind p% kleiner als der Wert und 1-p% größer. Das 50%-Quantil entspricht somit dem Median.

wobei x_n die Werte der Quantile von q_{65+t+1}^+ und y_n die Werte der Quantile von $\tilde{q}(65, t + 1; h)$ sind.

- euklidischer Abstand von q_{65+t+1}^+ und $\tilde{q}(65, t + 1; 0.06)$:

$$|x_1 - y_1| = |82,762 - 83,454| = 0,692$$

$$|x_2 - y_2| = |86,329 - 86,523| = 0,194$$

$$|x_3 - y_3| = |89,139 - 89,004| = 0,135$$

$$\implies d(v, w) \approx \underline{0,731}$$

- euklidischer Abstand von q_{65+t+1}^+ und $\tilde{q}(65, t + 1; 0.05)$:

$$|x_1 - y_1| = |82,762 - 83,208| = 0,446$$

$$|x_2 - y_2| = |86,329 - 86,346| = 0,017$$

$$|x_3 - y_3| = |89,139 - 88,875| = 0,264$$

$$\implies d(v, w) \approx \underline{0,519}$$

- euklidischer Abstand von q_{65+t+1}^+ und $\tilde{q}(65, t + 1; 0.04)$:

$$|x_1 - y_1| = |82,762 - 82,949| = 0,187$$

$$|x_2 - y_2| = |86,329 - 86,161| = 0,168$$

$$|x_3 - y_3| = |89,139 - 88,740| = 0,399$$

$$\implies d(v, w) \approx \underline{0,472}$$

- euklidischer Abstand von q_{65+t+1}^+ und $\tilde{q}(65, t + 1; 0.03)$:

$$|x_1 - y_1| = |82,762 - 82,676| = 0,086$$

$$|x_2 - y_2| = |86,329 - 85,968| = 0,361$$

$$|x_3 - y_3| = |89,139 - 88,599| = 0,54$$

$$\implies d(v, w) \approx \underline{0,655}$$

Wie man nun am euklidischen Abstand, erkennen kann, ist der Wert $h = 0.04$ für die Esscher Transformation der am besten geeignete Parameter, da sowohl der Abstand für $h = 0.03$ als auch für $h = 0.05$ höher ist.

2.2.2 Zusammenhang zwischen x und h

Im vorigen Abschnitt dieser Arbeit haben wir uns nun den Vergleich zwischen $q_{65,t+1}^+$ und $\tilde{q}(65, t; h)$ für verschiedene h angesehen. Wir sind zu der Erkenntnis gekommen, dass für den Startwert $x = 65$, der freie Parameter der Esscher Transformation cirka $h = 0.04$ sein muss, um der Erhöhung um zwei, also wie im Buch Beispiel 8.3.2 von Wüthrich-Merz [8] dem $m^+ = m + 2$, zu entsprechen.

Die nächste Frage wäre nun, ob sich auch eine allgemein gültige Aussage, über h in Abhängigkeit von x , tätigen lässt, also ein Vergleich zwischen $q_{x,t}^+$ und $\tilde{q}(x, t; h)$. Gibt es eine explizit definierbare Funktion $h(x)$, sodass gilt

$$f(x, t; h(x)) = f(x - 2, t).$$

Sieht man sich dazu $f(x, t)$, also die Ableitung von q_{x+t} nach t , mit allgemeinem x , an, so sieht dies wie folgt aus:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \frac{d(q_{x+t})}{dt} \\ &= 3,75686 \cdot 10^{-7} e^{-1,52341 \cdot 10^{-6} e^{0,246609t+0,123305x} + 0,246609t+0,123305x} \end{aligned}$$

Demnach müsste $f(x, t; h)$ folgende Gestalt besitzen:

$$\begin{aligned} f(x, t + 1; h) &= \frac{e^{ht} f(x, t + 1)}{M(h)} \\ &= \frac{3,75686 \cdot 10^{-7}}{M(h)} e^{-1,52341 \cdot 10^{-6} e^{0,246609t+0,123305x} + 0,246609t+0,123305x+ht}, \end{aligned}$$

jedoch ist $M(h)$ nicht explizit kalkulierbar und somit gibt es keine explizite Transformation, so dass man h , in Abhängigkeit von x , bestimmen kann.

3 Zusammenfassung/Ausblick

Die vorliegende Diplomarbeit hat sich intensiv mit dem Thema der konsistenten Bewertung beschäftigt.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurden dem Leser grundlegende Definitionen und Zusammenhänge näher gebracht. Derivate, die in diesem Abschnitt erläutert wurden, haben in den letzten Jahrzehnten an enormer Bedeutung für die Finanzwirtschaft gewonnen. Anhand von einem Einperiodenmodell wurden verschiedene Berechnungen, wie zum Beispiel der faire Preis, der Optionspreis und eine Methode zum Hedgen dieses Modells, durchgeführt.

Im zweiten Kapitel wurde, anhand eines Beispiels aus Wüthrich-Merz [8], der Frage nachgegangen, ob es außer, der im Buch etwas adhocen Methode, auch eine Lösung mit Hilfe der Esscher Transformation, zur Deflator-Konstruktion gibt. Wüthrich-Merz verwendet die zwar traditionellere Art und Weise, sprich den Übergang von zweiter zu erster Ordnung der Sterbetafeln, jedoch setzen sie dort für die erste Ordnung, ohne Begründung $m^+ = m + 2$. Dies bedeutet, dass dann eine x -jährige Person eine $x - 2$ -jährige Sterblichkeitswahrscheinlichkeit zugeordnet bekommt. Doch warum genau 2? Dieser Frage, wurde mit Hilfe der Esscher Transformation nachgegangen, bei der es einen freien Parameter, nämlich den Risikoaversionparameter gibt. Die Fragestellung war, ob man den Parameter so wählen könnte, dass er der Erhöhung um 2 entspricht und im Falle dieses Beispiels mit dem Startalter $x = 65$ gab es eine zufriedenstellende Lösung mit $h = 0,04$. Weiters wurde in der Arbeit untersucht, ob man auch ohne diesem bestimmten Startalter eine explizit angebbare Transformation finden kann. Jedoch kann man keine allgemeine Transformation explizit angeben.

Durch dieses Beispiel wurde gezeigt, dass sich die klassische Vorgehensweise der Aktuarien sehr gut mittels Esschertransformierten abbilden lässt. Die Esscher Transformation ist eine vielseitig nutzbare und brauchbare Transformation und findet in vielen Bereichen Anwendung, zum Beispiel bei der Optionspreisbewertung oder bei Energiemärkten. Allgemein kann man sagen, dass die Esscher Transformation in der Versicherungsbranche, der Finanzwirtschaft und dem Wirtschaftssektor gebraucht wird.

Für die zukünftige Konstruktion von Deflatoren, ohne der Variante des Übergangs, wie im Buch, könnte man nach anderen Transformationen suchen, für die es allgemein, also ohne vorher definiertes Startalter, eine gültige Transformation gibt.

Literaturverzeichnis

- [1] Bühlmann Hans, Delbaen Freddy, Embrechts Paul, 1998 *On Esscher Transforms in discrete finance models*, The Journal of the International Actuarial Association Vol.28 No.2
- [2] Bühlmann Hans, Furrer Hansjörg, Wüthrich Mario V., 2007. *Market-Consistent Actuarial Valuation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [3] Gerber Hans, Shiu Elias, 1994. *Option pricing by Esscher transforms*, Transactions of the Society of Actuaries 46
- [4] Gerber Hans, Shiu Elias, 1994. *Martingale Approach to Pricing Perpetual American Options*, HEC Ecole des hautes études commerciales
- [5] Irle Albrecht, 2012. *Finanzmathematik - Die Bewertung von Derivaten*, Springer Spektrum
- [6] Krischanitz Christoph, Aktuarielle Modellierung Vorlesung, Tu Wien, WS 2012
- [7] Krol Katja, 2007. *Das Martingalmaß mit minimaler relativer Entropie für Levy-Prozesse*, Diplomarbeit an der Humboldt-Universität zu Berlin
- [8] Merz Michael, Wüthrich Mario V., 2013. *Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [9] Reitz Stefan, 2011. *Mathematik in der modernen Finanzwelt - Derivate, Portfolio-modelle und Ratingverfahren*, Vieweg+Teubner Verlag
- [10] Schmock Uwe, Finanzmathematik 1 Vorlesung, Tu Wien, SS 2011

Internetquellen

- [11] <http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/lehre/SS10/Seminar-Finanzmathematik/daten/DanielSchlotmann-DasVasicekModell.pdf> [Stand: 4.2.2014]
- [12] <http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialmodell> [Stand: 10.2.2014]
- [13] http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaesch/veroeffentlichungen/ver_texte/bm_option.pdf [Stand:12.2.2014]
- [14] <http://www.biom.uni-freiburg.de/Dateien/PDF/parametrische-statistik-fuer-oekologen.pdf> [Stand: 13.2.2014]

[15] <http://www.is-frankfurt.de/uploads/down492.pdf> [Stand: 21.7.2014]

[16] http://de.wikipedia.org/wiki/Risikoneutrale_Bewertung [Stand: 27.8.2014]

[17] http://www.math.tugraz.at/~aistleitner/Lehre/WS2011/Finanz_Vers/FinanzVersicherung20112012/skriptum_finanz_und_versicherungsmathematik.pdf
[Stand: 1.9.2014]

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Esscher_transform [Stand: 25.6.2014]

[19] http://www.stochastik.uni-hannover.de/fileadmin/institut/pdf/Tagungsband_KVW.pdf
[Stand: 21.7.2014]

[20] <http://www.bruns-software.de/studium/downloads/FinanzmatheWS200910.pdf>
[Stand: 12.8.2014]

4 Appendix A

R-Code zu der Abbildung 6 ³⁰:

```

1 BM <- function(x=0,t0=0,T=1,N=1000){
2   if(T <= t0){stop("wrong times")}
3   dt <- (T-t0)/N
4   t <- seq(t0,T,length=N+1)
5   X <- ts(cumsum(c(x,rnorm(N)*sqrt(dt))),start=t0,deltat=dt)
6   return(X)
7 }
8
9 Ornstein <- function(x_0,theta1,theta2,theta3,seed=F,num){
10  if(seed){ set.seed(num)}
11  W <- BM();
12  t <- time(W);
13  N <- length(t);
14  X <- numeric(N);
15  X[1] <- x_0
16  ito.sum <- c(0,sapply(2:N,function(x){exp(theta2*t[x-1])*(W[x] - W[x-1])}))
17  X <- sapply(1:N,function(x){X[1]*exp(-theta2*t[x])+theta3*exp(-theta2*t[x])*sum(ito.
18    sum[1:x])})
19  X <- ts(X,start=start(W),deltat=deltat(W))
20 }
21 plot(Ornstein(-10,0,3,2,num=321,seed=T),col="blue",ylab="",xlab="Zeit t",ylim=c
22   (-11,11))
23 lines(Ornstein(0,0,3,2,num=321,seed=T),col="green")
24 lines(Ornstein(10,0,3,2,num=321,seed=T),col="red")
25 legend("bottomright",legend=c("X(0) = 10","X(0) = 0","X(0) = -10"),col=c("red","green",
26   ,"blue"),lwd=1.5)

```

ornstein_uhlenbeck.R

R-Code zu den Abbildungen 7 und 9:

```

1 r0 <- 0.03
2 theta <- 0.1
3 k <- 0.2
4 beta <- 0.7994
5 b<-0.0102
6 g<-sqrt(5.25*10^(-5))
7
8 n <- 5 # Anzahl der Pfade
9 T <- 5 # Laufzeit
10 lambda<-10 # Market price of risk
11 cHat<- -0.3 # Korrelation
12 m <- T # Anzahl der Zeitschritte
13 dt <- T/m # Laenge der Zeitschritte
14
15 r <- matrix(0,m+1,n)
16 r[1,] <- r0
17 z1u = matrix(rnorm(m*n), nrow=m)
18 z2u = matrix(rnorm(m*n), nrow=m)

```

³⁰vgl. https://www.statistik.tu-dortmund.de/fileadmin/user_upload/Lehrstuehle/Ingenieur/Mueller/Lehre/Seminar/SS2012/Ausarbeitung_Meinke_Seminar.pdf [Stand: 23.7.2014]

```

19 epsilon=matrix(0,m*n,nrow=m)
20 delta=matrix(0,m*n,nrow=m)
21 phiA<-matrix(1,m+1,n)
22
23 for (i in 1:m){
24   for (j in 1:n){
25     epsilon[i,j]=z1u[i,j]+cHat*z2u[i,j]
26     delta[i,j]=sqrt(1-cHat^2)*z2u[i,j]
27   }
28 }
29 for(j in 1:n){
30   for(i in 2:(m+1)){
31     #dr <- k*(theta-r[i-1,j])*dt + beta*sqrt(dt)*z1[i-1,j]
32     #r[i,j] <- r[i-1,j] + dr
33     r[i,j] <- r[i-1,j]*beta+b+g*epsilon[i-1,j]
34     phiA[i,j]<-phiA[i-1,j]*exp(-(r[i-1,j]+0.5*lambda^2*r[i-1,j]^2)+lambda*r[i-1,j]*
35       epsilon[i-1,j])
36   }
37 }
38 t <- seq(0, T, dt)
39 rT.expected <- theta + (r0-theta)*exp(-k*t)
40 rT.stdev <- sqrt( beta^2/(2*k)*(1-exp(-2*k*t)))
41 matplot(t, r[,1:5], type="l", lty=1, xlab="Zeit t", ylab="Short Rate r(t)")
42 abline(h=theta, col="red", lty=2)
43 text(0, theta+0.005,paste("theta =",theta),adj=0)
44 matplot(t, phiA[,1:5], type="l", lty=1, xlab="Zeit t", ylab="Financial Deflator phiA(t)"
45 )

```

rcode_short_rate.R

Matlab-Code zu den Abbildungen 11 und 12:

```

1 p=@(x,t) exp(-exp(((x+t)-92.16)/8.11)).*(exp((t+1)/8.11)-exp(t/8.11))
2 p2=@(x,t) exp(-exp(((x+t)-94.16)/8.11)).*(exp((t+1)/8.11)-exp(t/8.11))
3 plot(65:120,p(65,0:55));
4 hold all;
5 plot(65:120,p2(65,0:55))
6 hleg1 = legend('m=92,16','m+=94,16')
7
8 q=@(x,t) 1-exp(-exp(((x+t)-92.16)/8.11)).*(exp((t+1)/8.11)-exp(t/8.11))
9 q2=@(x,t) 1-exp(-exp(((x+t)-94.16)/8.11)).*(exp((t+1)/8.11)-exp(t/8.11))
10 plot(65:120,q(65,0:55));
11 hold all;
12 plot(65:120,q2(65,0:55))
13 hleg1 = legend('m=92,16','m+=94,16')

```

Matlab_Code.m

Matlab-Code der grünen Funktion der Esscher Transformation in Abbildung 13:

```
1 function [y] = F1(t)
2 f1=@(s)0.000338194.*exp(0.306609.*s-0.00460891.*exp(0.246609.*s)) ;
3 y=integral(f1,-Inf,t);
4 end
5
6 v=zeros(56,1);
7 for i=0:55
8 v(i+1)=F1(i);
9 end
10
11 plot(65:120,v)
12 ylim([0 1])
```

F1.m

5 Appendix B

Beweis. (von Lemma 1.19)

(i)

$$z.z. : E_{h_1} E_{h_2} = E_{h_1+h_2}$$

$$d\mu_{h_2} = f_{h_2}(x) = E_{h_2}(\mu) = \frac{e^{h_2 x}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{h_2 y} d\mu(y)} d\mu$$

$$d\mu_{h_2 h_1} = E_{h_1} E_{h_2}(\mu) = \frac{e^{h_1 x}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{h_1 y} d\mu_{h_2}(y)} d\mu_{h_2}(x)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{h_1 x} \frac{e^{h_2 x}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{h_2 y} d\mu(y)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{h_1 z} e^{h_2 z} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{h_2 y} d\mu(y)} d\mu(z)} d\mu \\ &= \frac{e^{(h_1+h_2)x}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{(h_1+h_2)z} d\mu(z)} d\mu \end{aligned}$$

Mit der Radon-Nikodym Dichte wäre nun ersichtlich, was zu zeigen war:

$$\frac{d\mu_{h_2 h_1}}{d\mu} = \frac{d\mu_{h_1+h_2}}{d\mu}$$

(ii)

$$z.z. : E_h^{-1} = E_{-h}$$

Eine Methode um dieses Charakteristikum zu beweisen, wäre, folgende zwei Gleichungen zu zeigen:

$$1) E_h \circ E_h^{-1} = Id \text{ }^{31}$$

$$2) E_h \circ E_{-h} = Id$$

³¹Mit Id bezeichnet man hier die Identität, ergo eine Funktion, die genau ihr Argument zurückgibt. Sei M eine Menge so gilt $id_M : M \rightarrow M, x \mapsto x$ also $id_M(x) = x$.

Über die erste Gleichung wird die Inverse von E_h definiert und die zweite Gleichung lässt sich mit der ersten, bereits bewiesenen Eigenschaft der Esscher Transformation, zeigen, nämlich

$$E_h \circ E_{-h} \stackrel{(i)}{=} E_{h-h} = E_0 = Id$$

Aufgrund der Eindeutigkeit und Kommutativität der Esscher Transformation ist die Rechtsinverse gleich der Linksinversen und somit ist die folgende Schreibweise sinnvoll, also $E_h^{-1} = E_{-h}$.

(iii)

$$z.z. : E_h(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)) = \mathcal{N}(\mu + h\sigma^2, \sigma^2)$$

Seien nun die Aktienpreise log-normal-verteilt und der stochastische Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Wiener Prozess mit Mittelwert μ und Varianz σ^2 . Somit gilt dann für die Verteilungsfunktion

$$F(x, t) = \mathbb{P}[X(t) \leq x] = \mathcal{N}(x; \mu t, \sigma^2 t)$$

und für die momenterzeugende Funktion

$$M(z, t) = \mathbb{E}[e^{zX(t)}] = \exp[(\mu z + \frac{\sigma^2 z^2}{2})t].$$

Die modifizierte Verteilung von $(X_t)_{t \geq 0}$ ist die Esscher Transformation der ursprünglichen Verteilung. Die entsprechende momenterzeugende Funktion wäre somit

$$M(z, t; h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} f(x, t; h) dx$$

und damit gilt, dass

$$M(z, t; h) = \exp[(\mu + h\sigma^2)z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}]t.$$

Dies bedeutet dass die Esscher Transformation des Wiener Prozesses wieder ein Wiener Prozess ist, nur mit einem veränderten Mittelwert. \square

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe und dass ich die Stellen der Arbeit – einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen –, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Wien, am 10.Oktober 2014

Ort, Datum

Unterschrift