TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

zum Thema

Verteilungen im Rahmen des Limit-Order-Buches

Ausgeführt am
Institut für Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer
und
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch
Sabine Sporer, BSc
0615924
Sieglstraße 18
6200 Jenbach

Wien, am 21. Oktober 2014

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Vewendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungskommission vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Wien, am 21. Oktober 2014 ________________________

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei Herrn Prof. Thorsten Rheinländer und Herrn Prof. Friedrich Hubalek für deren kompetente Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken.

Weiters bedanke ich mich bei meiner Eltern, Ilse und Johann, die mich während des Studiums sowohl finanziell als auch seelisch immer unterstützt haben. Auch bei meinen Brüdern, Alexander und Christoph, möchte ich mich dafür bedanken, dass sie mir zeit meines Lebens mit Rat und Tat zur Seite standen.

Nicht zuletzt gilt auch meinen Studienkollegen und meinen Freunden, denen es immer wieder gelungen ist, für eine willkommene Ablenkung zu sorgen, wenn sie das Gefühl hatten, dass mir die Mathematik über den Kopf wächst, ein ganz besonderer Dank.

Vielen Dank, Sabine

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung diverser Verteilungen und anderer Größen im Rahmen des Limit-Order-Buches. Im Anschluss an die Modellierung des durch die Marktorder induzierten Preisprozesses wird, ausgehend von diesem Modell, die Ausübungswahrscheinlichkeit einer Limit-Verkaufsorder innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls bestimmt. Weiters wird die Anzahl der zu einem bestimmten Preis-Level u im Limit-Order-Buch angesammelten Limit-Verkaufsorder untersucht. Ein weiteres zentrales Thema dieser Arbeit ist der Brownsche Exkursionsprozess, der in engem Zusammenhang mit sogenannten Flash-Crashs steht. Mithilfe zweier unterschiedlicher Beschreibungen des Itô-Maßes n_+ werden zwei Versionen zur Bestimmung der gemeinsamen Mellin-Laplace-Transformierten der Höhe und der Länge einer Brownschen Exkursion unter dem Itô-Maß n_+ angegeben. Im letzten Kapitel wird die Verteilung des totalen Ordervolumens zur Zeit τ_t, wobei τ_t die inverse Brownsche Lokalzeit bezeichnet, für zwei unterschiedliche Volumsdichtefunktionen bestimmt. Dazu werden die mit der Feynman-Kac-Formel verbundenen Differentialgleichungen gelöst.

Abstract

The aim of this thesis is to compute several distributions and other quantities related to the Limit Order Book. Starting with the model for the underlying price process, induced by the market orders, the execution probability of a limit sell order during a given time span is computed. Furthermore, the number of sell orders accumulated in the LOB at a given price level u is investigated. Another central topic of this thesis is the Brownian excursion process, which is closely related to flash-crashs. Using different descriptions of the Itô measure n_+ two versions for the determination of the joint Mellin-Laplace transform of the height and the length of a positive Brownian excursion under the Itô measure n_+ are given. The last chapter is about the computation of the distribution of the total order volume at the inverse Brownian local time τ_t for two different volume density functions using the Feynman-Kac formula and solving the related differential equations.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Wir werden uns in dieser Arbeit mit dem sogenannten Limit-Order-Buch und damit verbundenen Größen, wie z.B. dem totalen Ordervolumen und dessen Verteilung zu bestimmten Zeitpunkten, beschäftigen. Dazu benötigen wir zuerst natürlich etwas terminologische Vorarbeit. Beginnen wir mit dem Begriff einer Order. Eine Order bezeichnet den Auftrag, eine gewisse Anzahl von Wertpapieren zu kaufen (buy-order) oder zu verkaufen (sell-order). Will man sicherstellen, dass ein gewisser Preis nicht unter- (sell-order) bzw. überschritten (buy-order) wird, wählt man eine sogenannte Limit-Order. Eine Limit-Order inkludiert also ein bestimmtes Preis-Limit, das im Falle einer Kaufsorder nicht überschritten bzw., im Falle einer Verkaufsorder, nicht unterschritten werden darf. Alternativ dazu existieren sogenannte Markt-Order, die unverzüglich zu dem aktuell geltenden Marktpreis ausgeführt werden. Die Ausübung einer Limit-Order ist also im Gegensatz zu einer Markt-Order nicht garantiert (siehe [22]). Das Limit-Order-Buch, kurz auch LOB genannt, ist eine elektronische Sammlung der noch nicht ausgeführten Limit-Order. In der Praxis werden nicht ausgeübte Limit-Order nach einem bestimmten Zeitraum, z.B. einem Tag, aus dem Limit-Order-Buch gelöscht. Davon wollen wir in dieser Arbeit allerdings absehen und gehen davon aus, dass die Limit-Order nur dann aus dem Limit-Order-Buch verschwinden, wenn sie mit entsprechenden Markt-Ordern gehandelt wurden. Die Markt-Order induzieren einen Preisprozess $(S_t; t \geqslant 0)$, den wir in Kapitel 2 modellieren werden. Wir gehen davon aus, dass dieser proportional zu einer Standard-Brownschen Bewegung ist. Ausgehend von diesem Preisprozess nehmen wir zusätzlich an, dass die Limit-Order zu deterministischen, äquidistanten Zeitpunkten aufgegeben werden, d.h. wir arbeiten in der sogenannten business-time. Eine realistischere Art der Modellierung wäre natürlich die Zeitpunkte der Orderaufgaben als einen Zufallsprozess anzusetzen, dies würde das Modell allerdings äußert verkomplizieren. Des Weiteren treffen wir die Annahme, dass eine zur Zeit t aufgegebene Limit-Order, in Abhängigkeit davon, ob es sich um eine Verkaufs- oder Kaufsorder handelt, den Limit-Preis $S_t \pm \mu$ inkludiert, wobei $\mu > 0$ deterministisch gewählt wird. Eine zur Zeit t aufgegebene Limit-Verkaufsorder wird ausgeführt, sobald der zugrundeliegende Preisprozess um mindestens μ gestiegen ist. Wir werden im zweiten Kapitel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zur Zeit t aufgegebene Limit-Verkaufsorder im Zeitintervall $[t, t + \varepsilon]$ ausgeführt wird, bestimmen. Da sich die nicht ausgeführten Limit-Order im LOB ansammeln, werden wir

auch die Anzahl der Limit-Verkaufsorder zu einem bestimmten Limit-Preislevel u im LOB, unter den Annahmen, dass zu jedem diskreten Zeitpunkt genau eine Order aufgegeben wird und bis zur Zeit t keine Order ausgeführt wurden, untersuchen. Mithilfe eines Resultats von Jacod [5] werden wir zeigen, dass die Anzahl der Limit-Verkaufsorder im LOB in diesem Modellrahmen gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit gegen die Lokalzeit der Brownschen Bewegung konvergiert.
Im dritten Kapitel befassen wir uns mit der sogenannten Brownschen Exkursion und dem Itô-Maß n, die im Zusammenhang mit sogenannten Flash-Crashs stehen. Ein Flash-Crash bezeichnet einen massiven Einbruch der Marktpreise innerhalb eines sehr kurzen Zeitraums. Wir werden zuerst mithilfe Itôs-Beschreibung des Itô-Maßes n, welche besagt, dass bedingt auf $R = r$ die Verteilung der Brownschen Exkursion auf die Verteilung einer dreidimensionalen Besselbrücke zurückgeführt werden kann, die gemeinsame Dichte der Exkursionshöhe H und der Exkursionslänge R unter n ermitteln und damit die gemischte Mellin-Laplace Transformierte von H und R bestimmen. Alternativ dazu werden wir diese gemischte Mellin-Laplace Transformierte von H und R mithilfe der Beschreibung von Williams des Itô-Maßes n, nach der sich die Brownsche Exkursion bedingt auf $H = m$ in zwei unabhängige Besselprozesse der Dimension 3 zerlegen lässt, herleiten. Im vierten Kapitel wollen wir die Verteilung des totalen Ordervolumens

$$TV_0^s = \int_0^s g(B_u)\, du$$

zuerst für den Fall der bei 0 unbeschränkten Order-Volumsfunktion $g(x) = \frac{\lambda}{2x}$ zum einen zum Zeitpunkt $s = \tau_t$, wobei τ_t die Inverse der Brownschen Lokalteit zur Zeit t bezeichnet, und zum anderen zu einer unabhängigen exponentialverteilten Zufallszeit $s = \theta_k$ untersuchen. Es wird sich herausstellen, dass

$$TV_0^{\tau_t} = \int_0^{\tau_t} g(B_s)\, ds$$

ein symmetrischer Cauchy-Prozess mit Parameter π ist. Auch im zweiten Fall besitzt die charakteristische Funktion, wie wir sehen werden, eine sehr einfache Gestalt. Zuletzt bestimmen wir noch die Vetreilung des totalen Ordervolumens für eine Order-Volumsfunktion der Gestalt $g(x) = e^{\alpha x}$. Dazu werden wir die durch die Feynman-Kac-Formel damit verbundenen Sturm-Liouville Differentialgleichungen für die jeweiligen Order-Volumsfunktionen lösen.

Kapitel 2

Das Limit-Order-Buch-Modell

2.1 Das Modell

Bevor wir mit der Modellierung des zugrundeliegenden Marktpreisprozesses beginnen können, benötigen wir noch etwas terminologische Vorarbeit. Als *Briefkurs* (*ask*) wird der niedrigste Preis bezeichnet, zu dem ein Marktteilnehmer bereit ist, ein Wertpapier zu verkaufen. Der *Geldkurs* (*bid*) ist der höchste Preis, zu dem ein Käufer gewillt ist, ein gewisses Wertpapier zu erwerben. Die Differenz aus Brief- und Geldkurs wird *Geld-Brief-Spanne* (*bid-ask-spread*) genannt (siehe [19]).
Der vorerst letzte, noch benötigte Begriff ist der des *Mittelpreises* (*mid-price*). Der Mittelpreis bezeichnet das arithmetische Mittel zwischen Brief- und Geldkurs (siehe [21]).

Eine einfache Art der Modellierung ist, den zugrundeliegenden Preisprozess, den wir im Folgenden mit $(S_t; t \geqslant 0)$ bezeichnen, als den Mittelpreisprozess des Wertpapiers anzusetzen. Weiters nehmen wir an, dass dieser proportional zu einer Standard-Brownschen Bewegung $(B_t; t \geqslant 0)$ ist, d.h. dass $S_t = \sigma B_t$ für alle $t \geqslant 0$ ist, wobei $\sigma > 0$ die Volatilität der Aktie beschreibt (siehe [15]). Ferner treffen wir die Annahme, dass die Limit-Orders zu deterministischen äquidistanten Zeiten aufgegeben werden, d.h. wir arbeiten mit der sogenannten *business time*.
O.B.d.A betrachten wir nur Verkaufs-Limit-Orders und setzen $\sigma = 1$.

2.2 Ausübungswahrscheinlichkeit

Wie bereits erwähnt, wird eine Verkaufs-Limit-Order erst dann ausgeführt, sobald der Preisprozess den zur Zeit t vereinbarten Limit-Preis überschreitet.
Wir interessieren uns zuerst für die Wahrscheinlichkeit, dass eine zur Zeit $t > 0$ aufgegebene Limit-Order innerhalb eines bestimmten Zeitraums ausgeführt wird. Sei also eine zur Zeit $t > 0$ aufgegebene Limit-Verkaufsorder mit Limitpreis $B_t + \mu$, $\mu > 0$, gegeben. Die Verkaufsorder wird demnach in einem Zeitintervall $[t, t + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, ausgeführt, falls der

zugrundeliegende Preisprozess innerhalb dieses Zeitintervalls um mindestens μ ansteigt, d.h., falls

$$B_t + \mu < \max_{0 \leqslant s \leqslant \varepsilon} B_{t+s}. \tag{2.1}$$

Um die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses zu bestimmen, benötigen wir noch folgendes Theorem.

Theorem 2.2.1. (Spiegelungsprinzip) (siehe [12, Kapitel III])
Sei $(B_t)_{t \geqslant 0}$ eine Standard-Brownsche Bewegung und $M_t = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s$. Dann gilt für alle $a > 0$ und $t \geqslant 0$

$$P(M_t \geqslant a) = 2P(B_t \geqslant a). \tag{2.2}$$

Beweis. Für den Beweis des Theorem sei auf [12, Kapitel III] verwiesen. □

Nun kann man die Wahrscheinlichkeit, dass eine zur Zeit $t > 0$ aufgegebene Verkaufsorder in einem Zeitintervall der Länge $\varepsilon > 0$ ausgeübt wird, mithilfe der Stationarität der Inkremente der Brownschen Bewegung und des Spiegelungsprinzips bestimmen. Es ist

$$\begin{aligned} P(B_t + \mu < \max_{0 \leqslant s \leqslant \varepsilon} B_{t+s}) &= P(\max_{0 \leqslant s \leqslant \varepsilon}(B_{t+s} - B_t) > \mu) = \\ &= P(\max_{0 \leqslant s \leqslant \varepsilon} B_t > \mu) = \\ &= 2P(B_\varepsilon > \mu) = \\ &= 2\left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

wobei $\mathcal{N}$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

2.3 Konvergenz der Anzahl der Limit-Orders im LOB zur Lokalzeit

Eine weitere Frage, die sich im Rahmen dieser Modellierung stellt, ist, wie viele Limit-Orders sich zu einem festen Preis-Level $u > 0$ bis zu einem gegebenen Zeitpunkt $t > 0$ im Limit-Order-Buch angesammelt haben.
Dazu treffen wir die Annahme, dass zu jedem Zeitpunkt $s, s \leqslant t$, genau eine Limit-Order mit Limit-Preis $B_s + \mu$, $\mu > 0$, aufgegeben wird. Weiters nehmen wir an, dass bis zur Zeit $t > 0$ keine Order ausgeführt wurden und verwenden folgende Resultate aus [5, Seiten 505-508].

Wir betrachten einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, P)$ und einen eindimensionalen stetigen $\mathcal{F}_t$- adaptierten Prozess

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s \, ds + \int_0^t \sigma(X_s) \, dB_s,$$

wobei $(B_t; t \geqslant 0)$ eine Standard-Brownsche Bewegung ist, und b, σ folgende Bedingungen erfüllen sollen:
Die Funktion $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ sei stetig differenzierbar und so gewählt, dass die Gleichung

$$dY_t = \sigma(X_t)\, dB_t, \quad Y_0 = X_0$$

eine eindeutige, starke, nicht explodierende Lösung besitzt. Weiters sei der Prozess b derart gewählt, dass die Verteilungen von X und Y lokal äquivalent sind.
Wir betrachten Prozesse der Form

$$U(u_n, h)_t^n = \sum_{i=1}^{[nt]} h\left(u_n X_{\frac{i-1}{n}}, \sqrt{n}\left(X_{\frac{i}{n}} - X_{\frac{i-1}{n}}\right)\right), \tag{2.4}$$

wobei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive Folge reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ ist.
Die Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei Borel-messbar und erfülle für ein $\gamma \geqslant 0$ folgende Bedingungen:
Es gelte

$$h(x, y) \leqslant \hat{h}(x) e^{a|y|}, \tag{2.5}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $\hat{h}$ eine Borel-messbare Funktion auf $\mathbb{R}$ sei, die durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\gamma |\hat{h}(x)|\, dx < \infty \tag{2.6}$$

beschränkt ist.

Für $u > 0$ und eine Borel-messbare Funktion h auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion h_u, gegeben durch

$$h_u(x, y) = h(ux, uy) \tag{2.7}$$

und nehmen an, dass die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingungen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = 0 \tag{2.8}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \tag{2.9}$$

erfüllt.
Um die Konvergenz der Anzahl der Limit-Orders zur Lokalzeit zu zeigen, verwenden wir folgendes Theorem:

Theorem 2.3.1. (siehe [5, Seite 508])
Sind obige Annahmen für σ, b und (u_n) erfüllt und erfüllt h oben genannte Bedingungen für $\gamma = 0$, dann gilt

$$\sup_{s\leqslant t} \left| \frac{u_n}{n} U(u_n, h)_s^n - \frac{1}{\sigma(0)} \lambda(H_{h_{\sigma(0)}}) l_s \right| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{2.10}$$

in Wahrscheinlichkeit. Dabei bezeichnet l_s die Lokalzeit von X bei 0 zur Zeit s und

$$\lambda(H_{h_{\sigma(0)}}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_{\sigma(0)}(x,y)\rho(y)\,dy\,dx, \tag{2.11}$$

wobei $\rho(y)$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist.

Beweis. Für den Beweis sei auf [5, Seite 508 ff] verwiesen.

□

Kommen wir nun zu unserer konkreten Fragestellung zurück und setzen $u_n = \sqrt{n}$ und $h(x,y) = g(x) = 1_{\{|x|\leqslant 1\}}$.
Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

erfüllt.
Weiters erfüllt die Funktion g die Forderung $g(x) \leqslant \hat{h}(x)$ für $\hat{h}(x) = \exp(1-|x|)$, wobei

$$\hat{h}(x) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \exp(1-|x|)\,dx = e^1 \left(\int_{-\infty}^{0} \exp(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} \exp(-x)\,dx \right) = 2e^1.$$

Da wir uns für die Anzahl der Limit-Orders zum Limit-Preis u interessieren und angenommen haben, dass zu jedem Zeitpunkt $s \leqslant t$ genau eine Limit-Order bei $B_s + \mu$ abgegeben wird, setzen wir $X_t = B_t + \mu - u$.

Somit zählt der Prozess

$$U(u_n, h)_t^n = \sum_{i=1}^{[nt]} 1_{\left\{\left|X_{\frac{i-1}{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}} \tag{2.12}$$

die Anzahl der Besuche der zeitdiskretisierten Brownschen Bewegung nach $[nt]$-Zeitschritten im Intervall $[u - \mu - \frac{1}{\sqrt{n}}, u - \mu + \frac{1}{\sqrt{n}}]$.
Nach obigem Satz gilt nun

$$\sup_{s\leqslant t} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} U(u_n, h)_s^n - \lambda(H_h) l_s \right| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{2.13}$$

in Wahrscheinlichkeit, wobei

$$\lambda(H_h) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 1_{|x|\leqslant 1}\rho(y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{|x|\leqslant 1}\,dx = 2.$$

Mithilfe der Tanaka-Formel (siehe [12, Kapitel VI]) folgt

$$\begin{aligned} l_t &= |X_t| - |X_0| - \int_0^t \operatorname{sign}(X_s)\,dX_s = \\ &= |B_t - (u-\mu)| - |B_0 - (u-\mu)| - \int_0^t \operatorname{sign}(B_s - (u-\mu))\,dB_s. \end{aligned}$$

Dies ist nach der Tanaka-Formel gleich der Lokalzeit der Brownschen Bewegung zur Zeit t bei $u-\mu$, welche wir mit $L_t^{u-\mu}$ bezeichnen.

Zusammenfassend folgt demnach, dass $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{s\leqslant t}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\left\{\left|B_{\frac{i-1}{n}}+\mu-u\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}} - 2L_s^{u-\mu}\right| > \varepsilon\right) = 0. \tag{2.14}$$

Kapitel 3

Flash-Crashs und Brownsche Exkursionen

3.1 Flash-Crashs

Ein weiterer Begriff, der im Zusammenhang mit dem Limit-Order-Buch und dem Hochfrequenzhandel immer wieder auftaucht, ist der des sogenannten *Flash-Crash*. Ein *Flash-Crash* bezeichnet einen massiven Einbruch von Wertpapierpreisen innerhalb eines sehr kurzen Zeitraums, so geschehen z.B. am 6. Mai 2010 an den US-amerikanischen Aktienmärkten (siehe [20]).
Dieses Phänomen steht in engem Zusammenhang mit der sogenannten Brownschen Exkursion, welche wir im folgenden Abschnitt einführen werden.

3.2 Der Brownsche Exkursionsprozess und das Itô-Maß

Im Folgenden bezeichne $(U,\mathcal{U})$ einen Messraum. Weiters sei $U_\delta = U \cup \{\delta\}$, wobei δ einen isolierten Punkt des Zustandsraums bezeichnet, und $\mathcal{U}_\delta = \sigma(\mathcal{U}, \{\delta\})$.

Definition 3.2.1. (siehe [12, Kapitel XII])
Ein Prozess $e = (e_t, t > 0)$, definiert auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mit Werten in $(U_\delta,\mathcal{U}_\delta)$ heißt Punktprozess, falls
(i) die Abbildung $(t, \omega) \mapsto e_t(\omega)$ $\mathcal{B}(]0, \infty[) \otimes \mathcal{F}$-messbar ist,
(ii) die Menge $D_\omega = \{t : e_t(\omega) \neq \delta\}$ f.s. abzählbar ist.

Bemerkung 3.2.2. (siehe [12, Kapitel XII])
Zu einem gegebenen Punktprozess e kann man für jede Menge $\Gamma \in \mathcal{U}_\delta$ einen neuen Punktprozess e^Γ mittels

$$e_t^\Gamma(\omega) := \begin{cases} e_t(\omega) & \text{falls } e_t(\omega) \in \Gamma \\ \delta & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.1}$$

definieren. Weiters definieren wir für eine messbare Teilmenge Λ von $]0,\infty[\times U$ einen Zählprozess

$$N^{\Lambda}(\omega) := \sum_{t>0} 1_{\Lambda}(t, e_t(\omega)). \tag{3.2}$$

Falls $\Lambda =]0,t] \times \Gamma$, schreiben wir N_t^{Γ} für N^{Λ}.

Definition 3.2.3. (siehe [12, Kapitel XII])
Ein Punktprozess heißt diskret, falls $N_t^U < \infty$ f.s. für alle t. Der Prozess e heißt σ-diskret, falls eine Folge von Mengen $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\bigcup_{n\geqslant 1} U_n = U$, sodass jedes e^{U_n} diskret ist.

Definition 3.2.4. (siehe [12, Kapitel XII])
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein $(\mathcal{F}_t)$-Poisson-Prozess N ist ein rechtsstetiger, adaptierter Prozess, sodass $N_0 = 0$ und

$$P(N_t - N_s = k|\mathcal{F}_s) = c^k \frac{(t-s)^k}{k!} \exp(-c(t-s))$$

für alle $s < t$ und $k \in \mathbb{N}$. Dabei heißt $c > 0$ der Parameter des Poisson-Prozesses N.

Proposition 3.2.5. (siehe [12, Kapitel XII])
Ein rechtsstetiger adaptierter Prozess ist genau dann ein $(\mathcal{F}_t)$-Poisson-Prozess, wenn er ein Levy-Prozess ist, der f.s. durch Sprünge der Höhe 1 anwächst.

Beweis. Für den Beweis sei auf [12, Kapitel XII, Seite 472] verwiesen. □

Definition 3.2.6. (siehe [12, Kapitel XII])
Ein $(\mathcal{F}_t)$-Poisson-Punktprozess ist ein σ-diskreter Punktprozess (e_t) mit folgenden Eigenschaften:

(i) der Prozess e ist $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert, d.h. für jedes $\Gamma \in \mathcal{U}$ ist der Prozess N_t^{Γ} $(\mathcal{F}_t)$-adaptiert,
(ii) für alle $s, t > 0$ und jedes $\Gamma \in \mathcal{U}$ ist die Verteilung von $N_{]s,s+t]}$ bedingt auf $\mathcal{F}_s$ gleich der Verteilung von N_t^{Γ}.

Bemerkung 3.2.7. (siehe [12, Kapitel XII])
Nach Proposition 3.2.5 ist jeder Prozess N^{Γ} mit $N_t^{\Gamma} < \infty$ f.s. für alle $t > 0$ ein Poisson-Prozess.

Definition 3.2.8. (siehe [12, Kapitel XII])
Das σ-endliche Maß n auf $\mathcal{U}$, definiert durch

$$n(\Gamma) := \frac{1}{t} E[N_t^{\Gamma}], \quad t > 0, \tag{3.3}$$

heißt charakteristisches Maß von e. Das Maß n wird durch $n(\delta) = 0$ auf $\mathcal{U}_\delta$ fortgesetzt. Falls $n(\Gamma) < \infty$, dann ist $n(\Gamma)$ der Parameter des Poisson-Prozesses N^{Γ}.

Definition 3.2.9. (Der Brownsche Exkursionsprozess) (siehe [12, Kapitel XII])
Es bezeichne $\mathbf{W}$ den Wiener-Raum, P das Wiener Maß und $\mathcal{F}$ die bezüglich P vervollständigte σ-Algebra. Weiters sei nun δ die Funktion, welche identisch Null ist. Für $w \in \mathbf{W}$ sei

$$R(w) := \inf\{t > 0 : w(t) = 0\}$$

und U die Menge aller Funktionen $w \in \mathbf{W}$, sodass $0 < R(w) < \infty$ und $w(t) = 0$ für alle $t \geqslant R(w)$. $\mathcal{U}$ sei die von den Koordinatenabbildungen erzeugte σ-Algebra. Der Brownsche Exkursionsprozess $e = (e_s, s > 0)$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(U_\delta, \mathcal{U}_\delta)$ ist definiert durch:

(i) falls $\tau_s(w) - \tau_{s-}(w) > 0$, dann ist $e_s(w)$ die Abbildung

$$r \mapsto 1_{[r \leqslant \tau_s(w) - \tau_{s-}(w)]} B_{\tau_{s-}(w)+r}(w)$$

(ii) falls $\tau_s(w) - \tau_{s-}(w) = 0$, dann ist $e_s(w) = \delta$,

wobei $\tau_t(w) = \inf\{s > 0 : L_s > t\}$ die Inverse der Lokalzeiten von w bei 0 bezeichnet und $\tau_{s-}(w) = \lim_{t \to s-} \tau_t(w)$.

Satz 3.2.10. (siehe[12, Kapitel XII])
Der Exkursionsprozess (e_t) ist ein σ-diskreter $\mathcal{F}_{\tau_t}$-Poisson-Punktprozess.

Beweis. Für den Beweis sei auf [12, Kapitel XII, Seite 481] verwiesen. □

Bemerkung 3.2.11. Das charakteristische Maß des Exkursionsprozesses wird Itô-Maß genannt. Weiters bezeichne U_+ bzw. U_- die Menge aller positiven bzw. negativen Funktionen $w \in \mathbf{W}$, sodass $0 < R(w) < \infty$ und $w(t) = 0$ für alle $t \geqslant R(w)$. Die Einschränkung von n auf U_+ bzw. U_- bezeichnen wir mit n_+ bzw. n_-.
Für $u \in U_\delta^+$ definiere $H = \sup_{s \leqslant R(u)} u(s)$ die Höhe der positiven Exkursion.

3.3 Die Laplace-Transformierte der Dauer bis zum Start einer Exkursion der Höhe $H \geqslant \mu$, $\mu > 0$

Wir wollen nun die Laplace-Transformierte der Dauer bis zum Beginn einer Exkursion der Höhe $H \geqslant \mu, \mu > 0$, bestimmen.
Nach einem Resultat von Williams (siehe Proposition 2.1.5) lässt sich der Brownsche Pfad $(B_t; 0 \leqslant t \leqslant g_{T_\mu})$, wobei $g_{T_\mu} = \sup\{s < T_\mu : B_t = 0\}$ und $T_\mu = \inf\{t > 0 : B_t = \mu\}$, $\mu > 0$, in zwei unabhängige Zufallsobjekte zerlegen. Wir wollen dieses Resultat nutzen, um die Laplace-Transformierte der Dauer bis zum Start einer Exkursion der Höhe $H \geqslant \mu$ zu berechnen. Ein Bestandteil dieser Zerlegung ist der sogenannte Besselprozess, den wir nun definieren wollen.

Definition 3.3.1. (Der $BESQ^\delta(x)$-Prozes) (siehe [12, Kapitel XI])
Sei $(B_t; t \geqslant 0)$ eine Standard-Brownsche Bewegung und seien $\delta, x \geqslant 0$. Die eindeutige starke Lösung der Gleichung

$$Z_t = x + 2\int_0^t \sqrt{Z_s}\, dB_s + \delta t \tag{3.4}$$

heißt quadrierter δ-dimensionaler Besselprozess, startend in x, oder kurz $BESQ^\delta(x)$-Prozess.

Definition 3.3.2. (Besselprozess der Dimension $\delta \geqslant 0$) (siehe [12, Kapitel XI])
Die Quadratwurzel eines $BESQ^\delta(x^2)$-Prozesses, wobei $\delta, x \geqslant 0$, wird als δ-dimensionaler Besselprozess, startend in x, oder kurz $BES^\delta(x)$-Prozess bezeichnet.

Ein weiteres Resultat, das wir zur Berechnung der Laplace-Transformierten verwenden werden, ist das folgende:

Theorem 3.3.3. (Williams' Zeitumkehr) (siehe [12, Kapitel VII])
Seien $(R_t^3; t \geqslant 0)$ ein $BES^3(0)$-Prozess und $(B_t^b; t \geqslant 0)$ eine in $b > 0$ startende Brownsche Bewegung, dann gilt

$$(R^3_{\gamma_b - t}; 0 \leqslant t \leqslant \gamma_b) \overset{law}{=} (B_t^b; 0 \leqslant t \leqslant T_0), \tag{3.5}$$

wobei $\gamma_b = \sup\{t > 0 : R_t^3 = b\}$ und $T_0 = \inf\{t > 0 : B_t^b = 0\}$.

Beweis. Für den Beweis des Theorems sei auf [12, Kapitel XII, Seite 498] verwiesen. □

Bemerkung 3.3.4.
Theorem 3.3.3 impliziert, dass $\gamma_b \overset{law}{=} T_0$.

Proposition 3.3.5. (Williams' Brownsche Pfadzerlegung) (siehe [12, Kapitel VII])
Für $b > 0$ seien folgende unabhängige Zufallsobjekte gegeben:
(i) eine auf $[0, b]$ gleichverteilte Zufallsvariable U
(ii) eine Standard-Brownsche Bewegung $\widetilde{B}$
(iii) zwei $BES^3(0)$-Prozesse R^3 und $\widetilde{R}^3$.
Definiere weiters

$$\widetilde{T}_U = \inf\{t \geqslant 0 : \widetilde{B}_t = U\},$$

$$g_{\widetilde{T}_b} = \widetilde{T}_U + \sup\{t \geqslant 0 : U - R_t^3 = 0\}$$

und

$$\widetilde{T}_b = g_{\widetilde{T}_b} + \inf\{t \geqslant 0 : \widetilde{R}_t^3 = b\}.$$

Dann gilt für den Prozess $(X_t; 0 \leqslant t \leqslant \widetilde{T}_b)$, definiert durch

$$X_t := \begin{cases} \widetilde{B}_t & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant \widetilde{T}_U, \\ U - R^3_{t - \widetilde{T}_U} & \text{für } \widetilde{T}_U \leqslant t \leqslant g_{\widetilde{T}_b}, \\ \widetilde{R}^3_{t - g_{\widetilde{T}_b}} & \text{für } g_{\widetilde{T}_b} \leqslant t \leqslant \widetilde{T}_b, \end{cases} \tag{3.6}$$

dass

$$(X_t; 0 \leqslant t \leqslant \widetilde{T}_b) \overset{law}{=} (B_t; 0 \leqslant t \leqslant T_b), \tag{3.7}$$

wobei B eine Standard-Brownsche Bewegung bezeichnet und $T_b = \inf\{t > 0 : B_t = b\}$.

Beweis. Siehe [12, Kapitel VII, Seite 319]. □

Kommen wir nun zur Berechnung der Laplace-Transformierten der Dauer bis zum Start einer Brownschen Exkursion der Höhe $H \geqslant \mu$, $\mu > 0$.

Satz 3.3.6.
Sei $(B_t, t \geqslant 0)$ eine Standard-Brownsche Bewegung und $T_\mu = \inf\{t \geqslant 0 : B_t = \mu\}$ für ein $\mu > 0$. Weiters sei $g_{T_\mu} = \sup\{t < T_\mu : B_t = 0\}$. Dann gilt für $\lambda > 0$

$$E\left[e^{-\lambda g_{T_\mu}}\right] = \frac{1}{\mu 2\sqrt{2\lambda}}\left(1 - e^{-2\sqrt{2\lambda}\mu}\right). \tag{3.8}$$

Beweis. Sei U, wie in Proposition 3.3.5, eine auf $[0, \mu]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Mithilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit und der Proposition 3.3.5 folgt

$$\begin{aligned}
E\left[e^{-\lambda g_{T_\mu}}\right] &= \int_0^\mu E\left[e^{-\lambda g_{T_\mu}} | U = u\right] \frac{1}{\mu}\, du = \\
&= \int_0^\mu E\left[e^{-\lambda g_{\widetilde{T}_\mu}} | U = u\right] \frac{1}{\mu}\, du = \\
&= \int_0^\mu E\left[e^{-\lambda(\widetilde{T}_U + \sup\{t : U - R_t^3 = 0\})} | U = u\right] \frac{1}{\mu}\, du = \\
&= \int_0^\mu E\left[e^{-\lambda(\widetilde{T}_u + \sup\{t : u - R_t^3 = 0\})} | U = u\right] \frac{1}{\mu}\, du.
\end{aligned}$$

Wir verwenden hier eine saloppe Schreibweise für den bedingten Erwartungswert. Für die formale Definition einer regulären bedingten Wahrscheinlichkeit, gegeben eine σ-Algebra, sei auf [8, Kapitel 2, Seite 84, Definition 6.12] verwiesen.
Aus der Unabhängigkeit der Zufallsobjekte schließen wir, dass

$$E\left[e^{-\lambda g_{T_\mu}}\right] = \int_0^\mu E\left[e^{-\lambda(\widetilde{T}_u + \sup\{t : u - R_t^3 = 0\})}\right] \frac{1}{\mu}\, du = \int_0^\mu E\left[e^{-\lambda \widetilde{T}_u}\right] E\left[e^{-\lambda \sup\{t : u - R_t^3 = 0\}}\right] \frac{1}{\mu}\, du.$$

Weiters gilt nach Theorem 3.3.3, dass

$$\sup\{t > 0 : u - R_t^3 = 0\} \overset{law}{=} \inf\{t > 0 : B_t^u = 0\},$$

womit also

$$E\left[e^{-\lambda g_{T_\mu}}\right] = \int_0^\mu E\left[e^{-\lambda \widetilde{T}_u}\right] E_u\left[e^{-\lambda T_0}\right] \frac{1}{\mu}\, du$$

folgt.
Nach [4, Seite 198] ist $E_x\left[e^{-\lambda T_z}\right] = e^{-|x-z|\sqrt{2\lambda}}$.
Folglich erhalten wir

$$E\left[e^{-\lambda g_{T_\mu}}\right] = \frac{1}{\mu}\int_0^\mu e^{-u\sqrt{2\lambda}}e^{-u\sqrt{2\lambda}}\,du =$$
$$= \frac{1}{\mu}\int_0^\mu e^{-2u\sqrt{2\lambda}}\,du = \frac{-1}{\mu 2\sqrt{2\lambda}}\left(e^{-2\mu\sqrt{2\lambda}} - 1\right).$$

□

3.4 Die gemeinsame Verteilung der Höhe und der Länge einer Brownschen Exkursion unter n_+, Version 1

Wir interessieren uns nun für gemeinsame Verteilung der Höhe und der Länge einer Brownschen Exkursion unter dem Itô-Maß n_+. Dazu benötigen wir unter anderem die Verteilung der Höhe einer dreidimensionalen Besselbrücke, die wir nun definieren werden.

Definition 3.4.1. (Dreidimensionale Besselbrücke) (siehe [1])
Sei $(B_t; t \geqslant 0)$ eine Standard-Brownsche Bewegung und sei $x \geqslant 0$. Die eindeutige starke Lösung $(r_s; s \leqslant t)$ der Gleichung

$$r_s = x + \int_0^s \left(\frac{y - r_u}{t-u} + \frac{1}{r_u}\right) du + B_s, \quad s < t, \tag{3.9}$$

heißt dreidimensionale Besselbrücke zwischen x und y auf dem Intervall $[0, t]$.

Theorem 3.4.2. (Itôs Beschreibung des Maßes n) (siehe [12, Kapitel XII])
Unter n_+ und bedingt auf $\{R = r\}$ hat der Brownsche Exkursionsprozess e die Verteilung einer dreidimensionalen Besselbrücke auf $[0, r]$ mit $r_0 = r_r = 0$.

Beweis. Siehe [12, Kapitel XII, Seite 497]. □

Wir können also die Verteilung der Höhe eines Exkursionsprozesses der Länge $R = r$ unter n_+ auf die Verteilung der Höhe $m_r = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant r} r_t^3$ einer dreidimensionalen Besselbrücke zurückführen.

Satz 3.4.3. (siehe [11])
Sei $(r_t^3; 0 \leqslant t \leqslant 1)$ eine dreidimensionale Besselbrücke auf dem Intervall $[0, 1]$ mit $r_0 = r_1 = 1$ und $m = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} r_t^3$. Dann ist die Verteilungsfunktion bzw. die Dichte von m gegeben durch

$$F_m(x) = \frac{\sqrt{2\pi^5}}{x^3}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{n^2\pi^2}{2x^2}}, \quad x > 0, \tag{3.10}$$

bzw.

$$f_m(x) = \frac{\sqrt{2\pi^5}}{x^4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{2x^2}} \left(\frac{n^4\pi^2}{x^2} - 3n^2 \right), \quad x > 0. \tag{3.11}$$

Beweis. Siehe [11]. □

Korollar 3.4.4.
Sei $(r_t^3; 0 \leqslant t \leqslant r)$ eine dreidimensionale Besselbrücke auf $[0, r]$ mit $r_0^3 = r_r^3 = 0$ und $m_r = \max_{0 \leqslant t \leqslant r} r_t^3$. Dann ist die Verteilungsfunktion sowie die Dichte von m_r gegeben durch

$$F_{m_r}(x) = \frac{\sqrt{2r^3\pi^5}}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{rn^2\pi^2}{2x^2}}, \quad x > 0, \tag{3.12}$$

bzw.

$$f_{m_r}(x) = \frac{\sqrt{2r^3\pi^5}}{x^4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{rn^2\pi^2}{2x^2}} \left(\frac{rn^4\pi^2}{x^2} - 3n^2 \right), \quad x > 0. \tag{3.13}$$

Beweis. Nach [6] gilt, dass die dreidimensionale Besselbrücke auf dem Intervall $[0, r]$ mit $r_0 = r_r = 0$ verteilungsgleich zu einem dreidimensionalen Besselprozess $(R_t^3; t \leqslant r)$ bedingt auf $R_0 = R_r = 0$ ist. Die Brownsche Skalierungseigenschaft gilt gleichsam für Besselprozesse (siehe [12, Kapitel XI, Seite 474]) und daher auch für Besselbrücken. Demnach ist $m_r \overset{law}{=} \sqrt{r}m$ und folglich gilt

$$F_{m_r}(x) = F_m\left(\frac{x}{\sqrt{r}}\right).$$

Für die Dichte folgt

$$f_{m_r}(x) = \frac{d}{dx} F_{m_r}(x) = \frac{d}{dx} F_m\left(\frac{x}{\sqrt{r}}\right) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_m\left(\frac{x}{\sqrt{r}}\right).$$

□

Proposition 3.4.5. (siehe [12, Kapitel XII])
Für $x > 0$ ist

$$n(R > x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}. \tag{3.14}$$

Beweis. Siehe [12, Kapitel XII, Seite 484]. □

Korollar 3.4.6. (siehe [12, Kapitel XII])
Für $x > 0$ ist

$$n_+(R > x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}. \tag{3.15}$$

Weiters ist die Dichte der Exkursionslänge R unter n_+ gegeben durch

$$f_R(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi x^3}}, \quad x > 0. \tag{3.16}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus der Symmetrie des Itô-Maßes n.
Die Dichte von R unter n_+ ist gegeben durch

$$f_R(x) = \frac{d}{dx}(n_+(R \leqslant x)) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi x^3}}, \quad x > 0.$$

□

Kommen wir nun zur gemeinsamen Dichte der Höhe $H = \sup_{s \leqslant R(u)} u(s)$ und der Länge $R = \inf\{t > 0 : u(t) = 0\}$, $u \in U_\delta^+$, der positiven Brownschen Exkursion.

Satz 3.4.7.
Die gemeinsame Dichte der Exkursionshöhe H und der Exkursionslänge R unter n_+ ist gegeben durch

$$f_{H,R}(h,r) = \frac{\pi^2}{2h^4} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{rn^2\pi^2}{2h^2}} \left(\frac{rn^4\pi^2}{h^2} - 3n^2 \right), \quad h, r > 0. \tag{3.17}$$

Beweis. Die gemeinsame Dichte von H und R berechnet man mittels

$$f_{H,R}(h,r) = f_{H|R}(h,r) f_R(r).$$

Weiters gilt nach Theorem 3.4.2, dass die Brownsche Exkursion unter n_+ und bedingt auf $\{R = r\}$ die Verteilung einer dreidimensionalen Besselbrücke der Länge r besitzt. Demnach gilt unter n_+

$$f_{H|R}(h,r) = f_{m_r}(h),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Definition 3.4.8.
Sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Dann heißt

$$f^*(s) := \int_0^\infty f(t) t^{s-1}\, dt, \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.18}$$

die Mellin-Transformierte von f.

Satz 3.4.9. (siehe [11])
Die Mellin-Transformierte der Dichte f_m ist gegeben durch

$$f_m^*(s) = 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{\frac{s-1}{2}} \xi(s-1), \quad s \in \mathbb{C}, \tag{3.19}$$

wobei $\xi(\cdot)$ die Riemannsche Xi-Funktion (siehe [10, Kapitel 25, Abschnitt 4]) bezeichnet.

Beweis. Siehe [11]. □

Korollar 3.4.10.
Die Mellin-Transformierte der Dichte f_{m_r} ist gegeben durch

$$f^*_{m_r}(s) = r^{\frac{s-1}{2}} 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{s-1}{2}} \xi(s-1), \quad s \in \mathbb{C}. \tag{3.20}$$

Beweis. Aufgrund der Skalierungseigenschaft der Besselbrücke gilt $f_{m_r}(x) = \frac{1}{\sqrt{r}} f_m\left(\frac{x}{\sqrt{r}}\right)$. Demnach ist Mellin-Transformierte von f_{m_r} gegegeben durch

$$f^*_{m_r}(s) = \int_0^\infty f_{m_r}(t) t^{s-1}\, dt = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{r}} f_m\left(\frac{t}{\sqrt{r}}\right) t^{s-1}\, dt.$$

Die Substitution $\frac{t}{\sqrt{r}} = u$ liefert

$$f^*_{m_r}(s) = \int_0^\infty f_m(u)(u\sqrt{r})^{s-1}\, dt = r^{\frac{s-1}{2}} f^*_m(s)$$

und damit das gewünschte Resultat.

□

Wir betrachten nun die gemeinsame Mellin-Laplace-Transformierte von H und R.

Satz 3.4.11.
Für $\lambda > 0, \Re(s) > 2$ gilt

$$\hat{f}_{H,R}(\lambda, s) := \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda r} x^{s-1} f_{H,R}(x,r)\, dx\, dr = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^{\frac{s}{2}-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right) \xi(s-1). \tag{3.21}$$

Beweis. Wie wir bereits wissen, gilt unter n_+, dass $f_{H,R}(h,r) = f_{m_r}(h) f_R(r)$, $h, r > 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} \hat{f}_{H,R}(\lambda, s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda r} x^{s-1} f_{H,R}(x,r)\, dx\, dr = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda r} x^{s-1} f_{m_r}(x) f_R(r)\, dx\, dr. \end{aligned}$$

Für das innere Integral gilt

$$\int_0^\infty x^{s-1} f_{m_r}(x)\, dx = f^*_{m_r}(s) = r^{\frac{s-1}{2}} f^*_m(s).$$

Insgesamt führt dies zu

$$\begin{aligned} \hat{f}_{H,R}(\lambda, s) &= f^*_m(s) \int_0^\infty e^{-\lambda r} r^{\frac{s-1}{2}} f_R(r)\, dr = \\ &= f^*_m(s) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\lambda r} r^{\frac{s}{2}-2}\, dr = \\ &= f^*_m(s) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{s}{2}-2} \frac{1}{\lambda}\, du = \\ &= f^*_m(s) \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{s}{2}-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right). \end{aligned}$$

□

Als Nächstes berechnen wir die Verteilung eines Flash-Crashs unter dem Itô-Maß n_+.

Satz 3.4.12. Für $\varepsilon > 0, \mu > 0$ ist

$$G(\varepsilon, \mu) := n_+(R \leqslant \varepsilon, H > \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(e^{-\frac{\pi^2 n^2 \varepsilon}{2\mu^2}} - 1 \right). \tag{3.22}$$

Beweis. Es ist

$$G(\varepsilon, \mu) = \int_0^\varepsilon \int_\mu^\infty f_{H,R}(h, r)\, dh\, dr = \int_0^\varepsilon \int_\mu^\infty f_{m_r}(h) f_R(r)\, dh\, dr.$$

Aufgrund der Abschätzung

$$\left| n^4 e^{-\frac{rn^2\pi^2}{2h^2}} \right| \leqslant n^4 q^{n^2}$$

und der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 q^{n^2}$, wobei $q := e^{\frac{u\pi^2}{2v^2}} < 1$ und $v \in [\mu, \infty), u \in (0, \varepsilon]$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-\frac{rn^2\pi^2}{2h^2}}$ gleichmäßig für $h \in [\mu, \infty)$. Analog dazu begründet man die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{rn^2\pi^2}{2h^2}}$. Somit kann die Summe mit dem Integral vertauscht werden:

$$G(\varepsilon, \mu) = \int_0^\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2}{2} \int_\mu^\infty e^{-\frac{rn^2\pi^2}{2h^2}} \left(\frac{rn^4\pi^2}{h^6} - \frac{3n^2}{h^4} \right) dh\, dr.$$

Für das innere Integral gilt

$$\int_\mu^\infty e^{-\frac{rn^2\pi^2}{2h^2}} \left(\frac{rn^4\pi^2}{h^6} - \frac{3n^2}{h^4} \right) dh = \left[\frac{n^2 e^{-\frac{\pi^2 n^2 r}{2h^2}}}{h^3} \right]_\mu^\infty = 0 - \frac{n^2 e^{-\frac{\pi^2 n^2 r}{2\mu^2}}}{\mu^3}.$$

Weiters folgt mit derselben Argumentation wie oben, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{\pi^2 n^2 r}{2\mu^2}}$$

für $r \in (0, \varepsilon]$ gleichmäßig konvergent ist, sodass wir neuerlich die Summation mit der Integration vertauschen können. Demnach ist

$$G(\varepsilon, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\pi n^2}{2\mu^3} \int_0^\varepsilon e^{-\frac{\pi^2 n^2 r}{2\mu^2}}\, dr.$$

Weiters ist

$$\int_0^\varepsilon e^{-\frac{\pi^2 n^2 r}{2\mu^2}}\, dr = \left[\frac{-2\mu^2}{\pi^2 n^2} e^{-\frac{\pi^2 n^2 r}{2\mu^2}} \right]_0^\varepsilon = \frac{-2\mu^2}{\pi^2 n^2} \left(e^{-\frac{\pi^2 n^2 \varepsilon}{2\mu^2}} - 1 \right),$$

sodass wir letztendlich zu der Darstellung

$$G(\varepsilon, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(e^{-\frac{\pi^2 n^2 \varepsilon}{2\mu^2}} - 1 \right)$$

gelangen. □

3.5 Die gemeinsame Verteilung der Höhe und der Länge einer Brownschen Exkursion unter n_+, Version 2

Alternativ zu den vorangehenden Berechnungen, kann man auch mit Williams' Beschreibung des Itô-Maßes n arbeiten. Dies führt, wie wir sehen werden, zu demselben Resultat wie in Satz 3.4.11.

Theorem 3.5.1. (Williams' Beschreibung des Itô-Maßes n) (siehe [12, Kapitel XII])
Seien $(R_t^3; t \geqslant 0)$ und $(\widetilde{R}_t^3; t \geqslant 0)$ zwei unabhängige $BES^3(0)$-Prozesse mit den entsprechenden Trefferzeiten $T_c = \inf\{t > 0 : R_t^3 = c\}$ bzw. $T_c = \inf\{t > 0 : \widetilde{R}_t^3 = c\}$, $c > 0$.
Unter n_+ gilt für den Prozess $(Z_t^c; t \geqslant 0)$, definiert durch

$$Z_t^c := \begin{cases} R_t^3 & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant T_c, \\ c - \widetilde{R}_{t-T_c}^3 & \text{für } T_c \leqslant t \leqslant T_c + \widetilde{T}_c, \\ 0 & \text{für } t_c + \widetilde{T}_c, \end{cases} \tag{3.23}$$

dass

$$(e_s; s \geqslant 0 | H = c) \overset{law}{=} (Z_t^c; t \geqslant 0), \tag{3.24}$$

wobei H die Höhe der positiven Exkursion bezeichnet.

Beweis. Für des Beweis des Theorems sei z.B. auf [12, Kapitel XII, Seite 499 ff] verwiesen. □

Mithilfe dieses Resultats können wir die Verteilung der Länge einer Brownschen Exkursion der Höhe $H = \mu$ auf die Verteilung der Summe der Trefferzeiten T_μ und $\widetilde{T}_\mu$ zweier unabhängiger $BES^3(0)$-Prozesse zurückführen.

Lemma 3.5.2.
Es gilt

$$U_\mu := T_\mu + \widetilde{T}_\mu \overset{law}{=} \frac{4\mu^2}{\pi^2} m^2, \tag{3.25}$$

wobei $m = \max_{0 \leqslant u \leqslant 1} r_u^3$.
Somit besitzt U_μ die Verteilungsfunktion

$$F_{U_\mu}(x) = \frac{\mu^3 \sqrt{2^7}}{\sqrt{\pi x^3}} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\frac{2n^2\mu^2}{x}}, \quad x > 0, \tag{3.26}$$

sowie die Dichte

$$f_{U_\mu}(x) = \frac{\mu^3 \sqrt{2^7}}{\sqrt{\pi x^5}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2n^2\mu^2}{x}} \left(\frac{2n^4\mu^2}{x} - \frac{3n^2}{2} \right), \quad x > 0. \tag{3.27}$$

Beweis. Siehe [11]. □

Proposition 3.5.3. (siehe [12, Kapitel XII])
Sei $u \in U_\delta$ und $H = \max_{0 \leqslant t \leqslant R(u)} u_t$ die Höhe der Brownschen Exkursion. Dann ist für $x > 0$

$$n_+(H \geqslant x) = \frac{1}{2x}. \tag{3.28}$$

Weiters besitzt H unter n_+ die Dichte

$$f_H(x) = \frac{1}{2x^2}, \quad x > 0. \tag{3.29}$$

Beweis. Für den Beweis sei auf [12, Kapitel XII, Seite 492] verwiesen. □

Satz 3.5.4.
Die gemeinsame Dichte von H und R unter n_+ ist gegeben durch

$$f_{R,H}(r,h) = \frac{h\sqrt{2^5}}{\pi r^5} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{2h^2n^2}{r}} \left(\frac{2h^2n^4}{r} - \frac{3n^2}{2} \right), \quad h, r > 0. \tag{3.30}$$

Beweis. Es ist

$$f_{R,H}(r,h) = f_{R|H}(r,h) f_H(h).$$

Weiters gilt nach Theorem 3.5.1 unter n_+ und bedingt auf $\{H = h\}$,

$$R \overset{law}{=} T_h + \widetilde{T}_h.$$

□

Da wir uns für die gemeinsame Mellin-Laplace-Transformation von H und R interessieren, bestimmen wir zunächst die Laplace-Transformierte der Summe der Trefferzeiten zweier unabhängiger Besselprozesse der Dimension 3.

Satz 3.5.5. (siehe [4, Seite 398])
Sei $(R_t^\delta, t \geqslant 0)$ ein $BES^\delta(a)$-Prozess mit $\delta > 2$. Weiters sei $T_b = \inf\{t : R_t^\delta = b\}$, $b > 0$. Dann gilt für $0 < a \leqslant b, \lambda > 0$

$$E_a\left[e^{-\lambda T_b}\right] = \left(\frac{b}{a}\right)^\nu \frac{I_\nu\left(a\sqrt{2\lambda}\right)}{I_\nu\left(b\sqrt{2\lambda}\right)}, \tag{3.31}$$

wobei $\nu = \frac{\delta-2}{2}$ und $I_\nu(\cdot)$ die modifizierte Besselfunktion der ersten Art mit Ordnung ν (siehe [10, Kapitel 10]) bezeichnet.

Beweis. Wir suchen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f mit $f(b) = 1$, sodass $f(R_t^\delta)e^{-\lambda t}$ ein lokales Martingal ist. Dazu wenden wir die Itô-Formel auf die Funktion $v(x,t) = f(x)e^{-\lambda t}$ an:

$$dv(R_t^\delta, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(R_t^\delta, t)\, dR_t^\delta + \frac{\partial}{\partial t} v(R_t^\delta, t)\, dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(R_t^\delta, t)\, d[R^\delta, R^\delta]_t$$

Nach [4, Seite 74] gilt

$$dR_t^\delta = dB_t + \frac{\delta-1}{2}\frac{1}{R_t^\delta}\,dt$$

und

$$d[R^\delta, R^\delta]_t = dt.$$

Demnach ist

$$dv(R_t^\delta, t) = e^{-\lambda t}\left(f'(R_t^\delta)\,dW_t + f'(R_t^\delta)\frac{\delta-1}{2}\frac{1}{R_t^\delta}\,dt - \lambda f(R_t^\delta)\,dt + \frac{1}{2}f''(R_t^\delta)\,dt\right).$$

Damit $v(R_t^\delta, t) = f(R_t^\delta)e^{-\lambda t}$ ein lokales Martingal wird, müssen die dt-Terme verschwinden. Folglich muss die Funktion f der Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}f''(x) + \frac{\delta-1}{2}\frac{1}{x}f'(x) - \lambda f(x) = 0, \quad x > 0,$$

unter den Nebenbedingungen, dass

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \text{ existiert}$$

und

$$f(b) = 1,$$

genügen. Diese Differentialgleichung besitzt nach [4, Seite 654] eine allgemeine Lösung der Form

$$f(x) = C_1 x^{-\nu} I_\nu\left(x\sqrt{2\lambda}\right) + C_2 x^{-\nu} K_\nu\left(x\sqrt{2\lambda}\right),$$

wobei $I_\nu(\cdot)$ bzw. $K_\nu(\cdot)$ modifizierte Besselfunktionen der ersten bzw. zweiten Art (siehe [10, Kapitel 10]) und C_1, C_2 Konstanten sind.
Die modifizierten Besselfunktionen besitzen für $x \to 0$ folgendes asymptotisches Verhalten [10, Kapitel 10, Abschnitt 30] :

$$I_\nu(x) \sim \frac{x}{2}^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}, \quad \nu > -1$$

und

$$K_\nu(x) \sim \frac{\Gamma(\nu)}{2}(\frac{x}{2})^{-\nu}, \quad \Re(\nu) > 0.$$

Somit ist $C_2 = 0$ und aus der Bedingung $f(b) = 1$ folgt $C_2 = \frac{1}{b^{-\nu} I_\nu(b\sqrt{2\lambda})}$.
Nach [4, Seite 398] gilt $P_a\left[T_b < \infty\right] = 1$ für $0 < a \leqslant b$.
Da $R_t \in [0, b]$ für $t \in [0, T_b]$ und die Abbildung $x \mapsto \frac{x^{-\nu} I_\nu\left(x\sqrt{2\lambda}\right)}{b^{-\nu} I_\nu\left(b\sqrt{2\lambda}\right)}$ für $x \in [0, b]$ monoton wachsend und stetig ist, gilt für $t \in [0, T_b]$

$$|v(R_t^\delta, t)| = |f(R_t^\delta)e^{-\lambda t}| \leqslant f(b) = 1.$$

Nun folgt mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz und des Doobschen Stoppsatzes (siehe [12, Kapitel 2]) für die beschränkte Stoppzeit $T_b \wedge t$, dass

$$\begin{aligned} E_a\left[e^{-\lambda T_b}\right] &= E_a\left[v(R^\delta_{T_b}, T_b)\right] = E_a\left[\lim_{t\to\infty} v(R^\delta_{T_b\wedge t}, T_b \wedge t)\right] = \\ &= \lim_{t\to\infty} E_a\left[v(R^\delta_{T_b\wedge t}, T_b \wedge t)\right] = E_a\left[v(R^\delta_0, 0)\right] = E_a[f(a)] = f(a). \end{aligned}$$

□

Korollar 3.5.6. (siehe [4, Seite 463])
Mit der Notation des Satzes 3.5.5 gilt für $\delta = 3$ und $0 < a \leqslant b, \lambda > 0$

$$E_a\left[e^{-\lambda T_b}\right] = \frac{b \sinh\left(a\sqrt{2\lambda}\right)}{a \sinh\left(b\sqrt{2\lambda}\right)}. \tag{3.32}$$

Beweis. Die modifizierte Besselfunktion erfüllt für $\nu = \frac{1}{2}$ die Beziehung

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh(z),$$

woraus die Aussage folgt. □

Satz 3.5.7.
Seien $(R^3_t, t \geqslant 0)$ und $(\widetilde{R}^3_t, t \geqslant 0)$ zwei unabhängige $BES^3(0)$-Prozesse mit den entsprechenden Trefferzeiten $T_\mu = \inf\{t : R^3_t = \mu\}$ bzw. $\widetilde{T}_\mu = \inf\{t : \widetilde{R}^3_t = \mu\}$, $\mu > 0$. Dann gilt für $\lambda > 0$

$$E\left[e^{-\lambda(T_\mu + \widetilde{T}_\mu)}\right] = \left(\frac{\mu\sqrt{2\lambda}}{\sinh(\mu\sqrt{2\lambda})}\right)^2. \tag{3.33}$$

Beweis. Nach Korollar 3.5.6 gilt $E_a\left[e^{-\lambda T_\mu}\right] = \frac{\mu \sinh\left(a\sqrt{2\lambda}\right)}{a \sinh\left(\mu\sqrt{2\lambda}\right)}$ für $0 < a \leqslant \mu$. Mit der Regel von L'Hospital folgt

$$\lim_{a\to 0} \frac{\sinh\left(a\sqrt{2\lambda}\right)}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{\cosh\left(a\sqrt{2\lambda}\right)\sqrt{2\lambda}}{1} = \sqrt{2\lambda}.$$

Somit ist also

$$E\left[e^{-\lambda T_\mu}\right] = \frac{\mu\sqrt{2\lambda}}{\sinh\left(\mu\sqrt{2\lambda}\right)}.$$

Aus der Unabhängigkeit folgt

$$E\left[e^{-\lambda(T_\mu + \widetilde{T}_\mu)}\right] = E\left[e^{-\lambda T_\mu}\right] E\left[e^{-\lambda \widetilde{T}_\mu}\right]$$

und damit die Behauptung. □

Satz 3.5.8.
Es gilt für $\lambda > 0, \Re(s) > 2$

$$\hat{f}_{H,R}(\lambda, s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^{\frac{s}{2}-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)\xi(s-1). \tag{3.34}$$

Beweis. Es ist

$$\hat{f}_{H,R}(\lambda, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda r} h^{s-1} f_{R,H}(r,h)\, dr\, dh = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda r} h^{s-1} f_{U_h}(r) f_H(h)\, dr\, dh.$$

Nach Satz 3.5.7 gilt für das innere Integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda r} f_{U_h}(r)\, dr = \left(\frac{h\sqrt{2\lambda}}{\sinh(h\sqrt{2\lambda})}\right)^2.$$

Somit ist

$$\hat{f}_{H,R}(\lambda, s) = \int_0^\infty h^{s-1}\left(\frac{h\sqrt{2\lambda}}{\sinh(h\sqrt{2\lambda})}\right)^2 \frac{1}{2h^2}\, dh = \lambda \int_0^\infty \frac{h^{s-1}}{\left(\sinh\left(h\sqrt{2\lambda}\right)\right)^2}\, dh.$$

Die Substitution $h\sqrt{2\lambda} = u$ führt zu

$$\hat{f}_{H,R}(\lambda, s) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^s \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{(\sinh(u))^2}\, du.$$

Nach [10, Kapitel 25, Abschnitt 5] besitzt die Riemannsche Zeta-Funktion die Integraldarstellung

$$\zeta(s-1) = \frac{2^{s-2}}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{(\sinh(u))^2}\, du, \quad \Re(s) > 2.$$

Somit ist

$$\hat{f}_{H,R}(\lambda, s) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^s 2^{2-s}\zeta(s-1)\Gamma(s).$$

Unter Verwendung der Funktionalgleichung (siehe [10, Kapitel 5, Abschnitt 5])

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

und der Darstellung der Riemannschen Xi-Funktion (siehe [10, Kapitel 25, Abschnitt 4])

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{s}}\zeta(s)$$

gelangt man zu

$$\hat{f}_{H,R}(\lambda, s) = \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^s 2^{3-s}\pi^{\frac{s-1}{2}}\xi(s-1)\frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}.$$

Die Gamma-Funktion erfüllt gemäß [10, Kapitel 5, Abschnitt 5] für $2z \notin \mathbb{Z}_{\leqslant 0}$ die Duplikationsformel

$$\Gamma(2z) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Demnach gelangen wir letztendlich zu der Darstellung

$$\hat{f}_{H,R}(\lambda, s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^{\frac{s}{2}-1} \Gamma\left(\frac{s}{2} - 1\right) \xi(s-1).$$

$\square$

Dies entspricht genau dem Resultat aus Satz 3.4.11.

Kapitel 4

Die Verteilung des totalen Ordervolumens

4.1 Das Ordervolumen

Wir nehmen an, dass während eines infinitesimalen Zeitintervalls dt neue Limit-Orders bei jedem Level $S_t + u, u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mit Volumen $g(u)dt$, wobei $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$ eine integrierbare Funktion sei, aufgegeben werden.
Weiters sei A_t^u, die letzte Trefferzeit des Levels u, gegeben durch

$$A_t^u = \sup\{s : S_s = u, s < t\}.$$

Definition 4.1.1. (siehe [15])
Sei $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$ eine integrierbare Funktion und $A_t^u = \sup\{s : S_s = u, s < t\}$, dann heißt die Größe V_t^u, definiert durch

$$V_t^u = \int_{A_t^u}^t g(u - S_s)\, ds. \tag{4.1}$$

das Order-Volumen beim Level u zur Zeit $t > 0$.

Definition 4.1.2. (siehe [15])
Sei $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$ eine integrierbare Funktion. Das totale Order-Volumen beim Level u zur Zeit $t > 0$ ist definiert durch

$$TV_t^u = \int_0^t g(u - S_s)\, ds. \tag{4.2}$$

Wir modellieren wiederum den zugrundeliegenden Preisprozess durch $S_t = B_t$ und wählen $u = 0$. In Abschnitt 3.4 werden wir unter anderem die Verteilung von $TV_{\tau_t}^0$, wobei $\tau_t = \inf\{s > 0 : L_s > t\}$ die Inverse der Brownschen Lokalzeit bei 0 bezeichnet, für den speziellen Fall der bei 0+ unbeschränkten Funktion $g(x) = \frac{\lambda^2}{2x}, x \geqslant 0$, untersuchen.

4.2 Die Feynman-Kac-Formel

Satz 4.2.1. (Feynman-Kac) (siehe [6])
Sei $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine Borel-messbare Funktion und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine lokal beschränkte Borel-messbare Funktion. Dann gilt für $k, \lambda > 0$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{2}t} E\left[q(B_t)\exp\left(-\lambda\int_0^t f(B_s)\,ds\right)\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty} q(x)U^{\lambda f}(k,x)\,dx. \tag{4.3}$$

Dabei bezeichnet $(B_t; t \geqslant 0)$ eine Standard-Brownsche Bewegung auf einem filtriertem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, P)$ und $U(x) = U^{\lambda f}(k,x)$ ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}U''(x) = \left(\frac{k^2}{2} + \lambda f(x)\right)U(x) \qquad (x \neq 0), \tag{4.4}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$U'(x) \text{ existiert für } x \neq 0 \text{ und ist gleichmäßig beschränkt in } x, \tag{4.5}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0, \tag{4.6}$$

$$U'(0+) - U'(0-) = -2. \tag{4.7}$$

Um die Feynman-Kac Formel zu beweisen, benötigen wir noch einige zusätzliche Resultate.

Notation
Im Folgenden bezeichne θ_k eine von $(B_t; t \geqslant 0)$ unabhängige exponentialverteilte Zufallszeit mit der Dichte

$$P(\theta_k \in dt) = \frac{k^2}{2}\exp\left(-\frac{k^2 t}{2}\right)dt \qquad (t > 0).$$

Weiters sei $g_t := \sup\{u : u \leqslant t; B_u = 0\}$ für $t > 0$ fix, $T_0 := \inf\{t : B_t = 0\}$ und $A_t^f := \int_0^t f(B_s)\,ds$.
Mit L_t bezeichnen wir die Lokalzeit der Brownschen Bewegung bei 0 zur Zeit t.

Lemma 4.2.2. (siehe [17, Seite 73])
Die Prozesse $(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_{\theta_k})$ und $(B_{\theta_k - u}; 0 \leqslant u \leqslant \theta_k - g_{\theta_k})$ sind unabhängig.

Beweis. Für den Beweis des Lemmas sei auf [17, Seite 73] verwiesen. □

Lemma 4.2.3. (siehe [17, Seite 73])
Die Zufallsvariablen L_{θ_k} und B_{θ_k} sind unabhängig und exponentialverteilt mit

$$P\left(B_{\theta_k} \in dx\right) = \frac{k}{2}e^{-k|x|}\,dx \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{4.8}$$

bzw.

$$P(L_{\theta_k} \in dl) = ke^{-kl}\,dl \qquad (l \geqslant 0). \tag{4.9}$$

Beweis. Die Unabhängigkeit folgt aus der Identität $L_{\theta_k} = L_{g_{\theta_k}}$ und dem Lemma 4.2.2. Um die Verteilung der Zufallsvariable B_{θ_k} zu bestimmen, betrachten wir die Momentenerzeugende Funktion von B_{θ_k}:

$$\begin{aligned}
E[\exp(\beta B_{\theta_k})] &= \int_0^\infty E[\exp(\beta B_t)|\theta_k = t]P(\theta_k \in dt) = \\
&= \int_0^\infty E[\exp(\beta B_t)]\frac{k^2}{2}\exp\left(-\frac{k^2 t}{2}\right)\,dt = \\
&= \frac{k^2}{2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{k^2 t}{2}\right)\int_{-\infty}^\infty \exp(\beta x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)\,dx\,dt = \\
&= \frac{k^2}{2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t(k^2-\beta^2)}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{(\frac{x}{\sqrt{t}}-\beta\sqrt{t})^2}{2}\right)\,dx\,dt = \\
&= \frac{k^2}{2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(k^2-\beta^2)t}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\,dz\,dt = \\
&= \frac{k^2}{2}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{(k^2-\beta^2)t}{2}\right)\,dt = \\
&= \frac{k^2}{k^2-\beta^2}\left[\exp\left(-\frac{(k^2-\beta^2)t}{2}\right)\right]_0^\infty = \\
&= \frac{k^2}{\beta^2-k^2} \qquad \text{für } |\beta| < k.
\end{aligned}$$

Das erste und zweite Gleichheitszeichen folgen aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und der Unabhängigkeit von θ_k und B_t, das dritte Gleichheitszeichen folgt aus der Tatsache, dass $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$.
Das ist die Momentenerzeugende Funktion einer Doppelexponentialverteilten Zufallsvariablen, und da die Verteilung einer Zufallsvariable eindeutig durch ihre Momentenerzeugende bestimmt ist, folgt, dass die Dichte von B_{θ_k} durch

$$P(B_{\theta_k} \in dx) = \frac{k}{2}e^{-k|x|}\,dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben ist.

Wir bestimmen nun die Verteilung von L_{θ_k}:
Es ist

$$P(L_{\theta_k} > l) = P(\theta_k > \tau_l),$$

wobei $\tau_l = \inf\{s \geqslant 0 : L_s > l\}$, $(l \geqslant 0)$, die inverse Brownsche Lokalzeit bei 0 bezeichnet.

Wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit und der Unabhängigkeit von τ_l und

θ_k ist

$$\begin{aligned} P(\theta_k > \tau_l) &= \int_0^\infty P(\theta_k > \tau_l | \tau_l = t) P(\tau_l \in dt) = \\ &= \int_0^\infty P(\theta_k > t | \tau_l = t) P(\tau_l \in dt) = \\ &= \int_0^\infty P(\theta_k > t) P(\tau_l \in dt) = \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{k^2 t}{2}} P(\tau_l \in dt) = \\ &= E\left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}\tau_l\right)\right]. \end{aligned}$$

Sei $M_t = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s$ das laufende Maximum und $T_l = \inf\{t \geqslant 0 : B_t > l\}$, $(l \geqslant 0)$.
Da $(L_t; t \geqslant 0) \stackrel{law}{=} (M_t; t \geqslant 0)$ (siehe [16, Seite 29]), gilt demnach

$$P(\tau_l < t) = P(L_t > l) = P(M_t > l) = P(T_l < t).$$

Folglich ist die Laplace-Transformierte von τ_l gleich der Laplace-Transformierten der Stoppzeit T_l, welche durch

$$E\left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}T_l\right)\right] = \exp(-kl)$$

gegeben ist (siehe [12, Seite 73]).
Insgesamt ist also

$$P(L_{\theta_k} > l) = \exp(-kl) \quad (l \geqslant 0).$$

□

Satz 4.2.4. (siehe [3, Seiten 77-81])

$$\int_0^\infty P^t \, dt = \left(\int_0^\infty P^{\tau_s} \, ds\right) \circ \left(\int_{-\infty}^\infty {}^r(P_a^{T_0}) \, da\right) \tag{4.10}$$

Notation
P^t ist die Verteilung des Koordinatenprozesses $(X_t; t \geqslant 0)$ auf $C[0,\infty]$ unter P, d.h. das auf dem Raum der stetigen Funktionen $t \mapsto \omega(t)$, wobei $t \in [0, \zeta_\omega] \subset [0, \infty]$, definierte Wiener-Maß. Für ein Funktional mit Werten in $\mathbb{R}_+$ meint obige Schreibweise

$$\left(\int_0^\infty P^t \, dt\right) [F(X_u; u \leqslant \zeta) h(\zeta)] = \int_0^\infty h(t) E[F(X_u; u \leqslant t)] \, dt$$

und

$$\left(\int_0^\infty P^{\tau_s} \, ds\right) [F(X_u; u \leqslant \zeta) h(\zeta)] = \int_0^\infty E[F(X_u; u \leqslant \tau_s) h(\tau_s)] \, ds.$$

$P_a^{T_0}$ bezeichnet die Verteilung einer Brownschen Bewegung, die im Punkt a startet und zur Zeit T_0 endet und ${}^r(P_a^{T_0})$ ist die Verteilung mit umgekehrter Zeit, d.h. die Verteilung des Prozesses $(B_{T_0-t}; t \leqslant T_0 | B_0 = a)$. Das Symbol $\circ$ steht für die Zusammensetzung zweier unabhängiger Trajektorien $(\omega(u); u \leqslant \zeta_\omega)$ und $(\widetilde{\omega}(v); v \leqslant \zeta_{\widetilde{\omega}})$ unter der Bedingung $\omega(\zeta_\omega) = \widetilde{\omega}(0)$. Es ist

$$(\omega \circ \widetilde{\omega})(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{für } t \leqslant \zeta_\omega \\ \widetilde{\omega}(t - \zeta_\omega) & \text{für } \zeta_\omega \leqslant t \leqslant \zeta_\omega + \zeta_{\widetilde{\omega}}. \end{cases}$$

Satz 4.2.5. (siehe [17, Seite 73])
Für Brownsche Funktionale F, G mit Werten in $\mathbb{R}_+$ gilt

$$\begin{aligned} &E\left[F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_{\theta_k}) G(B_{\theta_k - u}; 0 \leqslant u \leqslant \theta_k - g_{\theta_k}) | L_{\theta_k} = l, B_{\theta_k} = x\right] = \\ &= \left(e^{kl} E\left[e^{-\frac{k^2 \tau_l}{2}} F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant \tau_l)\right]\right)\left(e^{k|x|} E_x\left[e^{-\frac{k^2 T_0}{2}} G(B_u; 0 \leqslant u \leqslant T_0)\right]\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Beweis. Wir betrachten den Ausdruck

$$E\left[f(L_{\theta_k}) h(B_{\theta_k}) F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_{\theta_k}) G(B_{\theta_k - u}; 0 \leqslant u \leqslant \theta_k - g_{\theta_k})\right],$$

wobei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ Borel-messbare Funktionen sind.

Einerseits gilt aufgrund des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} &E\left[f(L_{\theta_k}) h(B_{\theta_k}) F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_{\theta_k}) G(B_{\theta_k - u}; 0 \leqslant u \leqslant \theta_k - g_{\theta_k})\right] = \frac{k^2}{2} \int_0^\infty e^{-kl} f(l) \times \\ &\times \int_{-\infty}^\infty e^{-k|x|} h(x) E\left[F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_{\theta_k}) G(B_{\theta_k - u}; 0 \leqslant u \leqslant \theta_k - g_{\theta_k}) | L_{\theta_k} = l, B_{\theta_k} = x\right] dx\, dl \end{aligned}$$

und andererseits gelangt man mithilfe des Satzes 4.2.4 zu

$$\begin{aligned} &E\left[f(L_{\theta_k}) h(B_{\theta_k}) F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_{\theta_k}) G(B_{\theta_k - u}; 0 \leqslant u \leqslant \theta_k - g_{\theta_k})\right] = \\ &= \frac{k^2}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{k^2 t}{2}} E\left[f(L_t) h(B_t) F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_t) G(B_{t-u}; 0 \leqslant u \leqslant t - g_t) | \theta_k = t\right] dt = \\ &= \frac{k^2}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{k^2 t}{2}} E\left[f(L_t) h(B_t) F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_t) G(B_{t-u}; 0 \leqslant u \leqslant t - g_t)\right] dt = \\ &= \frac{k^2}{2} \int_0^\infty E\left[e^{-\frac{k^2 \tau_s}{2}} f(s) F(B_u; u \leqslant \tau_s)\right] ds \int_{-\infty}^\infty E_a\left[e^{-\frac{k^2 T_0}{2}} h(a) G(B_u; u \leqslant T_0)\right] da. \end{aligned}$$

Vergleicht man nun die Ausdrücke miteinander, gelangt man zur Aussage des Satzes. □

Korollar 4.2.6.
Es gilt

$$E\left[F(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_{\theta_k})\right] = k \int_0^\infty E\left[e^{-\frac{k^2 \tau_s}{2}} F(B_u; u \leqslant \tau_s)\right] ds \tag{4.12}$$

und

$$E\left[G(B_{\theta_k-u};0\leqslant u\leqslant\theta_k-g_{\theta_k})\right]=\frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty}E_a\left[e^{-\frac{k^2T_0}{2}}G(B_u;u\leqslant T_0)\right]\,da. \tag{4.13}$$

Beweis. Wählt man $F\equiv 1$ in Satz 4.2.5, dann folgt

$$\begin{aligned}
&E\left[G(B_{\theta_k-u};0\leqslant u\leqslant\theta_k-g_{\theta_k})|L_{\theta_k}=l,B_{\theta_k}=x\right]=\\
&=E\left[G(B_{\theta_k-u};0\leqslant u\leqslant\theta_k-g_{\theta_k})|B_{\theta_k}=x\right]=\\
&=\left(e^{kl}E\left[e^{-\frac{k^2\tau_l}{2}}\right]\right)\left(e^{k|x|}E_x\left[e^{-\frac{k^2T_0}{2}}G(B_u;0\leqslant u\leqslant T_0)\right]\right)=\\
&=e^{kl}e^{-kl}\left(e^{k|x|}E_x\left[e^{-\frac{k^2T_0}{2}}G(B_u;0\leqslant u\leqslant T_0)\right]\right).
\end{aligned}$$

Weiters ist

$$\begin{aligned}
&E\left[G(B_{\theta_k-u};0\leqslant u\leqslant\theta_k-g_{\theta_k})\right]=\\
&=\frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k|x|}E\left[G(B_{\theta_k-u};0\leqslant u\leqslant\theta_k-g_{\theta_k})|B_{\theta_k}=x\right]\,dx=\\
&=\frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k|x|}e^{k|x|}E_x\left[e^{-\frac{k^2T_0}{2}}G(B_u;0\leqslant u\leqslant T_0)\right]\,dx.
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit ist

$$\begin{aligned}
&E\left[F(B_u;0\leqslant u\leqslant g_{\theta_k})G(B_{\theta_k-u};0\leqslant u\leqslant\theta_k-g_{\theta_k})|L_{\theta_k}=l,B_{\theta_k}=x\right]=\\
&=E\left[F(B_u;0\leqslant u\leqslant g_{\theta_k})|L_{\theta_k}=l,B_{\theta_k}=x\right]E\left[G(B_{\theta_k-u};0\leqslant u\leqslant\theta_k-g_{\theta_k})|L_{\theta_k}=l,B_{\theta_k}=x\right]=\\
&=E\left[F(B_u;0\leqslant u\leqslant g_{\theta_k})|L_{\theta_k}=l\right]E\left[G(B_{\theta_k-u};0\leqslant u\leqslant\theta_k-g_{\theta_k})|B_{\theta_k}=x\right]=\\
&=E\left[F(B_u;0\leqslant u\leqslant g_{\theta_k})|L_{\theta_k}=l\right]\left(e^{k|x|}E_x\left[e^{-\frac{k^2T_0}{2}}G(B_u;0\leqslant u\leqslant T_0)\right]\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$E\left[F(B_u;0\leqslant u\leqslant g_{\theta_k})|L_{\theta_k}=l\right]=e^{kl}E\left[e^{-\frac{k^2\tau_l}{2}}F(B_u;0\leqslant u\leqslant\tau_l)\right]$$

und

$$\begin{aligned}
&E\left[F(B_u;0\leqslant u\leqslant g_{\theta_k})\right]=\\
&=k\int_0^{\infty}e^{-kl}E\left[F(B_u;0\leqslant u\leqslant g_{\theta_k})|L_{\theta_k}=l\right]\,dl=\\
&=k\int_0^{\infty}e^{-kl}e^{kl}E\left[e^{-\frac{k^2\tau_l}{2}}F(B_u;0\leqslant u\leqslant\tau_l)\right]\,dl.
\end{aligned}$$

□

4.2.1 Ein Exkurs zu Sturm-Liouville Differentialgleichungen

Betrachte die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}F''(x) = m(x)F(x) \tag{4.14}$$

für eine unbekannte Funktion $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und eine gegebene lokal integrierbare Borel-messbare Funktion $m\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.
Diese besitzt zwei fundamentale Lösungen:
Zum einen die nicht-wachsende Lösung

$$F(x) = \Phi(x), \text{ sodass } F(0) = 1 \tag{4.15}$$

und zum anderen die Lösung

$$F(x) = \Psi(x), \text{ sodass } F(0) = 0 \text{ und } F'(0+) = 1. \tag{4.16}$$

Es gilt (siehe [6])

$$\Phi(a) = E_a\left[\exp\left(-\int_0^{T_0} m(B_s)\,ds\right)\right] \qquad (a \geqslant 0). \tag{4.17}$$

Im Folgenden betrachten wir die Lösung $\Phi(x)$ für die Fälle

$$m(x) = \frac{k^2}{2} + \lambda f_+, \quad \text{und} \tag{4.18}$$

$$m(x) = \frac{k^2}{2} + \lambda f_-, \tag{4.19}$$

wobei $f_+ = f_{|\mathbb{R}_+}$ und $f_-(x) = f(-x), x \geqslant 0$, für eine beliebige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.
Der Einfachheit halber wählen wir o.B.d.A. $\lambda = 1$ und ersetzen f durch λf für ein beliebiges $\lambda > 0$. Wir bezeichnen die Lösungen in den beiden obigen Fällen mit $\Phi^{f_+}(k,a)$ bzw. mit $\Phi^{f_-}(k,a)$, $a \geqslant 0$.

Satz 4.2.7. (siehe [6])
Sei $f_+\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ eine lokal beschränkte Borel-messbare Funktion und sei

$$\phi^{f_+}(k,a) := E_a\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2}{2}T_0 + \int_0^{T_0} f_+(B_s)\,ds\right)\right)\right] \qquad (a \geqslant 0). \tag{4.20}$$

Die Funktion $u(a) = \phi^{f_+}(k,a)$ ist die eindeutige beschränkte Lösung der Sturm-Liouville Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}u'' = \left(\frac{k^2}{2} + f_+\right)u; \qquad u(0) = 1. \tag{4.21}$$

Satz 4.2.8. (siehe [6])
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine lokal beschränkte Borel-messbare Funktion. Dann gilt mit obiger Notation

$$E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_l}{2}+A^f_{\tau_l}\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{l}{2}\left[(\Phi^{f_+})'(k,0+)+(\Phi^{f_-})'(k,0+)\right]\right), \tag{4.22}$$

wobei $(\Phi^{f_+})'(k,0+) = \frac{\partial}{\partial a}\Phi^{f_+}(k,a)\big|_{a=0+}$ und $(\Phi^{f_-})'(k,0+) = \frac{\partial}{\partial a}\Phi^{f_-}(k,a)\big|_{a=0+}$.

Beweis. Sei $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine lokal beschränkte Borel-messbare Funktion.
Weiters bezeichne $b_+ = b_{|\mathbb{R}_+}$ und $b_-(x) = b(-x), x \geqslant 0$.
Betrachte die Funktion

$$v(x,y,m) = \Phi^{b_+}(x)\Phi^{b_-}(y)\exp\left(-\frac{m}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0)+(\Phi^{b_-})'(0)\right)\right),$$

wobei $\Phi^{b_+}(x)$ bzw. $\Phi^{b_-}(x)$ die Lösungen der Sturm-Liouville Gleichungen

$$F''(x) = b_+(x)F(x), \quad F(0) = 1$$

bzw.

$$F''(x) = b_-(x)F(x), \quad F(0) = 1$$

sind.
Sei $B_t^+ = \max(0, B_t)$ und $B_t^- = \max(0, -B_t)$.
Anwenden der Itô-Formel (siehe [12, Kapitel IV]) führt zu

$$\begin{aligned} v(B_t^+, B_t^-, L_t) = v(B_0^+, B_0^-, L_0) &+ \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(B_s^+, B_s^-, L_s)\,dB_s^+ + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial y}(B_s^+, B_s^-, L_s)\,dB_s^- + \\ &+ \int_0^t \frac{\partial v}{\partial m}(B_s^+, B_s^-, L_s)\,dL_s + \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}(B_s^+, B_s^-, L_s)\,d[B^+, B^-]_s + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(B_s^+, B_s^-, L_s)\,d[B^+, B^+]_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(B_s^+, B_s^-, L_s)\,d[B^-, B^-]_s. \end{aligned}$$

Aus der Tanaka-Formel (siehe [12, Kapitel VI]) folgt

$$dB_t^+ = 1_{B_t>0}\,dB_t + \frac{1}{2}\,dL_t$$

und

$$dB_t^- = -1_{B_t\leqslant 0}\,dB_t + \frac{1}{2}\,dL_t.$$

Daher ist

$$d[B^+, B^-]_t = -1_{B_t>0}1_{B_t\leqslant 0}\,dt = 0,$$
$$d[B^+, B^+]_t = 1_{B_t>0}\,dt$$

und

$$d[B^-, B^-]_t = 1_{B_t\leqslant 0}\,dt.$$

Somit ist also

$$
\begin{aligned}
v(B_t^+, B_t^-, L_t) = 1 + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(B_s^+, B_s^-, L_s) 1_{B_s>0}\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(B_s^+, B_s^-, L_s)\, dL_s - \\
- \int_0^t \frac{\partial v}{\partial y}(B_s^+, B_s^-, L_s) 1_{B_s\leqslant 0}\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial v}{\partial y}(B_s^+, B_s^-, L_s)\, dL_s + \\
+ \int_0^t \frac{\partial v}{\partial m}(B_s^+, B_s^-, L_s)\, dL_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(B_s^+, B_s^-, L_s) 1_{B_s>0}\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(B_s^+, B_s^-, L_s) 1_{B_s\leqslant 0}\, ds.
\end{aligned}
$$

Da das Maß dL_t f.s. auf der Menge $\{t : B_t = 0\}$ lebt (siehe [12, Kapitel VI]), ersetze in den Integralen bezüglich dL_t B_t^+ und B_t^- durch 0.
Für die partiellen Ableitungen gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,m) &= (\Phi^{b_+})'(x)\Phi^{b_-}(y) \exp\left(-\frac{m}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right), \\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,m) &= \Phi^{b_+}(x)(\Phi^{b_-})'(y) \exp\left(-\frac{m}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\frac{\partial v}{\partial m}(x,y,m) = -\frac{1}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\Phi^{b_+}(x)\Phi^{b_-}(y) \exp\left(-\frac{m}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right).
$$

Aufgrund der Nebenbedingungen $\Phi^{b_+}(0) = 1$ und $\Phi^{b_-}(0) = 1$ folgt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(0,0,L_s)\, dL_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial v}{\partial y}(0,0,L_s)\, dL_s + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial m}(0,0,L_s)\, dL_s = \\
= \frac{1}{2}\int_0^t (\Phi^{b_+})'(0)\Phi^{b_-}(0) \exp\left(-\frac{L_s}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right) dL_s + \\
+ \frac{1}{2}\int_0^t \Phi^{b_+}(0)(\Phi^{b_-})'(0) \exp\left(-\frac{L_s}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right) dL_s - \\
- \frac{1}{2}\int_0^t \left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\Phi^{b_+}(0)\Phi^{b_-}(0) \exp\left(-\frac{L_s}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right) dL_s = 0.
\end{aligned}
$$

Somit ist nun

$$
\begin{aligned}
v(B_t^+, B_t^-, L_t) = 1 + \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(B_s^+, B_s^-, L_s) 1_{B_s>0}\, dB_s - \int_0^t \frac{\partial v}{\partial y}(B_s^+, B_s^-, L_s) 1_{B_s\leqslant 0}\, dB_s + \\
+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(B_s^+, B_s^-, L_s) 1_{B_s>0}\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(B_s^+, B_s^-, L_s) 1_{B_s\leqslant 0}\, ds.
\end{aligned}
$$

Als Nächstes zeigen wir, dass

$$
v(B_t^+, B_t^-, L_t) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t b(B_s)\, ds\right)
$$

ein lokales Martingal ist.
Sei dazu $X_t := v(B_t^+, B_t^-, L_t)$ und $Y_t := \exp(C_t)$, wobei $C_t := -\frac{1}{2}\int_0^t b(B_s)\,ds$.
Nach dem Satz über die partielle Integration von Semimartingalen (siehe [12, Kapitel IV]) ist

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + d[X,Y]_t,$$

wobei

$$X_0Y_0 = v(B_0^+, B_0^-, L_0)\exp(C_0) = 1,$$
$$dY_t = d(\exp(C_t)) = \exp(C_t)\,dC_t = -\frac{1}{2}\exp(C_t)b(B_t)\,dt,$$

$$dX_t = dv(B_t^+, B_t^-, L_t) = \frac{\partial v}{\partial x}(B_t^+, B_t^-, L_t)1_{B_t>0}\,dB_t - \frac{\partial v}{\partial y}(B_t^+, B_t^-, L_t)1_{B_t\leqslant 0}\,dB_t +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(B_t^+, B_t^-, L_t)1_{B_t>0}\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(B_t^+, B_t^-, L_t)1_{B_t\leqslant 0}\,dt.$$

und

$$d[X,Y]_t = 0.$$

Demnach ist

$$v(B_t^+, B_t^-, L_t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t b(B_s)\,ds\right) = 1 + \int_0^t \exp(C_s)\,dv(B_s^+, B_s^-, L_s) -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t v(B_s^+, B_s^-, L_s)\exp(C_s)b(B_s)\,ds.$$

Da

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(B_t^+, B_t^-, L_t)1_{B_t>0} = (\Phi^{b_+})''(B_t^+)\Phi^{b_-}(B_t^-)\exp\left(-\frac{L_t}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right)1_{B_t>0} =$$
$$= b_+(B_t^+)\Phi^{b_+}(B_t^+)\Phi^{b_-}(B_t^-)\exp\left(-\frac{L_t}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right)1_{B_t>0} =$$
$$= b_+(B_t^+)1_{B_t>0}v(B_t^+, B_t^-, L_t) = b_+(B_t)v(B_t^+, B_t^-, L_t)$$

und

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(B_t^+, B_t^-, L_t)1_{B_t\leqslant 0} = \Phi^{b_+}(B_t^+)(\Phi^{b_-})''(B_t^-)\exp\left(-\frac{L_t}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right)1_{B_t\leqslant 0} =$$
$$= \Phi^{b_+}(B_t^+)b_-(B_t^-)\Phi^{b_-}(B_t^-)\exp\left(-\frac{L_t}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right)1_{B_t\leqslant 0} =$$
$$= b_-(B_t^-)1_{B_t\leqslant 0}v(B_t^+, B_t^-, L_t) = b_-(B_t)v(B_t^+, B_t^-, L_t),$$

gilt somit

$$v(B_t^+, B_t^-, L_t) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t b(B_s)\,ds\right) = 1 + \int_0^t \exp(C_s)\frac{\partial v}{\partial x}(B_t^+, B_t^-, L_t) 1_{B_t>0}\,dB_t -$$

$$-\int_0^t \exp(C_s)\frac{\partial v}{\partial y}(B_t^+, B_t^-, L_t) 1_{B_t\leqslant 0}\,dB_t + \frac{1}{2}\int_0^t v(B_t^+, B_t^-, L_t)\exp(C_s)\left(b_+(B_t)+b_-(B_t)\right)\,ds -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t v(B_s^+, B_s^-, L_s)\exp(C_s) b(B_s)\,ds = 1 + \int_0^t \exp(C_s)\frac{\partial v}{\partial x}(B_t^+, B_t^-, L_t) 1_{B_t>0}\,dB_t -$$

$$-\int_0^t \exp(C_s)\frac{\partial v}{\partial y}(B_t^+, B_t^-, L_t) 1_{B_t\leqslant 0}\,dB_t$$

Da sich die dt-Terme weggehoben haben, ist der Prozess

$$M_t := v(B_t^+, B_t^-, L_t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t b(B_s)\,ds\right)$$

ein lokales Martingal, welches für alle $l > 0$ auf $[0, \tau_l]$ beschränkt ist:
Es ist $-\frac{1}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right) \geqslant 0$, da $\Phi^{b_+}(x)$ bzw. $\Phi^{b_-}(x)$ nicht-wachsende Lösungen obiger Sturm-Liouville Gleichungen sind. Weiters ist $\int_0^t b(B_s)\,ds \geqslant 0$, da $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.
Also gilt für $t \in [0, \tau_l]$

$$\exp\left(-\frac{L_t}{2}((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)) - \frac{1}{2}\int_0^t b(B_s)\,ds\right) \leqslant \exp\left(-\frac{l}{2}((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0))\right),$$

da $L_t \leqslant l$ für $t \in [0, \tau_l]$.
Da $\Phi^{b_+}(x)$ und $\Phi^{b_-}(x)$ beschränkt sind, folgt

$$|M_t| \leqslant C\exp\left(-\frac{l}{2}((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0))\right) \qquad \text{für } t \in [0, \tau_l].$$

Nun folgt mithilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz und des Doobschen-Stoppsatzes (siehe [12, Kapitel II]) für die beschränkte Stoppzeit $\tau_l \wedge t$

$$E[M_{\tau_l}] = E[\lim_{t\to\infty} M_{t\wedge\tau_l}] = \lim_{t\to\infty} E[M_{t\wedge\tau_l}] = \lim_{t\to\infty} E[M_0] = E[M_0] = 1 \quad \text{f.s.}$$

Da τ_l ein Wachstumszeitpunkt von L_t ist, folgt $B_{\tau_l}^+ = 0$ und $B_{\tau_l}^- = 0$ f.s. (siehe [12, Kapitel VI]).
Somit folgt mit $L_{\tau_l} = l$

$$E[M_{\tau_l}] = E[v(0,0,l)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_l} b(B_s)\,ds\right)] =$$

$$= E[\Phi^{b_+}(0)\Phi^{b_-}(0)\exp\left(-\frac{l}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_l} b(B_s)\,ds\right)] =$$

$$= \exp\left(-\frac{l}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right) E[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_l} b(B_s)\,ds\right)].$$

Also ist

$$E[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{\tau_l} b(B_s)\,ds\right)] = \exp\left(\frac{l}{2}\left((\Phi^{b_+})'(0) + (\Phi^{b_-})'(0)\right)\right).$$

Mit der Wahl

$$b(x) = k^2 + 2f(x)$$

folgt die Aussage. □

4.2.2 Beweis der Feynman-Kac-Formel

Beweis. Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned}\frac{2}{k^2}E\left[q(B_{\theta_k})\exp\left(-A^{\lambda f}_{\theta_k}\right)\right] &= \frac{2}{k^2}\int_0^\infty \frac{k^2}{2}e^{-\frac{k^2 t}{2}}E\left[q(B_t)\exp\left(-A^{\lambda f}_t\right)\Big|\theta_k = t\right]dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\frac{k^2 t}{2}}E\left[q(B_t)\exp\left(-A^{\lambda f}_t\right)\right]dt.\end{aligned}$$

Dies entspricht gerade der linken Seite der Feynman-Kac-Formel (4.3).
Wegen der Unabhängigkeit von $(B_u; 0 \leqslant u \leqslant g_{\theta_k})$ und $(B_{\theta_k - u}; 0 \leqslant u \leqslant \theta_k - g_{\theta_k})$ ist

$$E\left[q(B_{\theta_k})\exp\left(-A^f_{\theta_k}\right)\right] = E\left[\exp\left(-A^f_{g_{\theta_k}}\right)\right]E\left[q(B_{\theta_k})\exp\left(-\left(A^f_{\theta_k} - A^f_{g_{\theta_k}}\right)\right)\right].$$

Nach Korollar 4.2.6 gilt

$$E\left[\exp\left(-A^f_{g_{\theta_k}}\right)\right] = k\int_0^\infty E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_l}{2} + A^f_{\tau_l}\right)\right)\right]dl$$

und

$$E\left[q(B_{\theta_k})\exp\left(-\left(A^f_{\theta_k} - A^f_{g_{\theta_k}}\right)\right)\right] = \frac{k}{2}\int_{-\infty}^\infty q(a)E_a\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2 T_0}{2} + A^f_{T_0}\right)\right)\right]da.$$

Aus Satz 4.2.8 wissen wir, dass

$$E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_l}{2} + A^f_{\tau_l}\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{l}{2}\left[(\Phi^{f_+})'(k,0+) + (\Phi^{f_-})'(k,0+)\right]\right).$$

Somit ist also

$$\begin{aligned}E\left[\exp\left(-A^f_{g_{\theta_k}}\right)\right] &= k\int_0^\infty \exp\left(\frac{l}{2}\left[(\Phi^{f_+})'(k,0+) + (\Phi^{f_-})'(k,0+)\right]\right)dl = \\ = \frac{2k}{(\Phi^{f_+})'(k,0+) + (\Phi^{f_-})'(k,0+)}&\exp\left(\frac{l}{2}\left[(\Phi^{f_+})'(k,0+) + (\Phi^{f_-})'(k,0+)\right]\right)\Bigg|_0^\infty = \\ &= \frac{2k}{-(\Phi^{f_+})'(k,0+) - (\Phi^{f_-})'(k,0+)}.\end{aligned}$$

Weiters gilt wegen Satz 4.2.7

$$E_a\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2T_0}{2}+A^f_{T_0}\right)\right)\right]=\Phi^{f_+}(k,a)1_{(a\geqslant 0)}+\Phi^{f_-}(k,-a)1_{(a<0)},$$

sodass

$$E\left[q(B_{\theta_k})\exp\left(-\left(A^f_{\theta_k}-A^f_{g_{\theta_k}}\right)\right)\right]=\frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty}q(a)\left(\Phi^{f_+}(k,a)1_{(a\geqslant 0)}+\Phi^{f_-}(k,-a)1_{(a<0)}\right)\,da.$$

Insgesamt gelangt man folglich zu

$$E\left[q(B_{\theta_k})\exp\left(-A^f_{\theta_k}\right)\right]=\frac{k^2\int_{-\infty}^{\infty}q(a)\left(\Phi^{f_+}(k,a)1_{(a\geqslant 0)}+\Phi^{f_-}(k,-a)1_{(a<0)}\right)\,da}{-(\Phi^{f_+})'(k,0+)-(\Phi^{f_-})'(k,0+)}.$$

Vergleicht man dies mit der rechten Seite der Feynman-Kac-Gleichung (4.3) und ersetzt f durch λf, resultiert daraus, dass

$$U^{\lambda f}(k,x)=\frac{2\left(\Phi^{\lambda f_+}(k,x)1_{(x\geqslant 0)}+\Phi^{\lambda f_-}(k,-x)1_{(x<0)}\right)}{-(\Phi^{\lambda f_+})'(k,0+)-(\Phi^{\lambda f_-})'(k,0+)}.$$

Insbesondere erfüllt $U(x)=U^{\lambda f}(k,x)$ die Nebenbedingungen der Feynman-Kac-Formel.

□

4.3 Beispiele

4.3.1 Der Fall $f_+=\frac{\lambda^2}{2x}$

Die Verteilung des totalen Ordervolumens zur Zeit τ_t

Für den Spezialfall der bei 0+ unbeschränkten Funktion $f_+=\frac{\lambda^2}{2x}$ betrachten wir den Cauchyschen Hauptwert

$$H_t := p.v.\int_0^t\frac{ds}{B_s}:=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\frac{1_{|B_s|\geqslant\varepsilon}}{B_s}\,ds.$$

Durch Anwenden der Occupation-times Formel (siehe [12, Seite 224]) und der Substitution $x\mapsto -x$ gelangt man zu

$$\begin{aligned}
H_t&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t\frac{1_{|B_s|\geqslant\varepsilon}}{B_s}\,ds=\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}1_{|x|\geqslant\varepsilon}L_t^x\,dx=\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}L_t^x\,dx+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{x}L_t^x\,dx\right)=\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{L_t^x-L_t^{-x}}{x}\,dx.
\end{aligned}$$

Da die Abbildung $x \mapsto L_t^x$ eine Hölderstetige Modifikation der Ordnung $\gamma < \frac{1}{2}$ besitzt (siehe [12, Seite 226]), folgt mithilfe des Cauchy-Kriteriums für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{L_t^x - L_t^{-x}}{x}\, dx - \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{L_t^x - L_t^{-x}}{x}\, dx \right| = \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{L_t^x - L_t^{-x}}{x}\, dx \right| \leqslant \\ \leqslant \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{|L_t^x - L_t^{-x}|}{|x|}\, dx \leqslant C_{t,\omega} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{|x|^\gamma}{|x|}\, dx = \\ = C_{t,\omega} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |x|^{\gamma-1}\, dx = C_{t,\omega} \frac{|x|^\gamma}{\gamma}\Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \to 0 \end{aligned}$$

für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$. Daher existiert der Limes fast sicher gleichmäßig in t auf jedem beschränkten Intervall.
Wir betrachten nun die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\Upsilon''(x) = \left(\frac{\lambda^2}{x} + k^2 \right) \Upsilon(x)$$

und setzen

$$\Upsilon(x) = \widetilde{\Upsilon}(2kx).$$

Dies führt zu einer Differentialgleichung der Form

$$\widetilde{\Upsilon}''(2kx)4k^2 = \left(\frac{\lambda^2}{2kx} 2k + k^2 \right) \widetilde{\Upsilon}(2kx).$$

Durch eine einfache Umformung gelangt man schließlich zu

$$\widetilde{\Upsilon}''(2kx) + \left(-\frac{\lambda^2}{2k(2kx)} - \frac{1}{4} \right) \widetilde{\Upsilon}(2kx) = 0,$$

was eine spezielle Form der Whittaker-Differentialgleichung (siehe [10, Kapitel 13, Abschnitt 14]) darstellt.
Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lässt sich als

$$\Upsilon(x) = C_1 W_{-a,\frac{1}{2}}(2kx) + C_2 W_{a,\frac{1}{2}}(-2kx)$$

schreiben, wobei $a := \frac{\lambda^2}{2k}$, C_1, C_2 Konstanten sind und $W_{k,m}$ die Whittaker-Funktion bezeichnet.
Da wir nach einer beschränkten Lösung suchen, betrachten wir das asymptotische Verhalten der Whittaker-Funktion für $|z| \to \infty$, welches durch

$$\begin{aligned} W_{k,m}(z) = z^k e^{-\frac{z}{2}} \left(1 + \mathcal{O}\left(z^{-1}\right)\right), \qquad |arg(z)| < \pi \\ W_{-k,m}(-z) = (-z)^{-k} e^{\frac{z}{2}} \left(1 + \mathcal{O}\left(z^{-1}\right)\right), \qquad |arg(-z)| < \pi \end{aligned}$$

gegeben ist. Somit schließen wir, dass $C_2 = 0$ sein muss.

Für $|z| \to 0$ gilt ([10, Kapitel 13, Abschnitt 14])

$$W_{k,\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-k)} + \mathcal{O}\left(z \ln(z)\right).$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 benützt man die Nebenbedingung $\lim\limits_{x\to 0+} \Upsilon(x) = 1$ und gelangt mithilfe des asymptotischen Verhalten der Whittaker-Funktion bei 0 zum Ergebnis

$$C_1 = \Gamma(1+a).$$

Setzen wir nun die in [10, Kapitel 13, Abschnitt 14] gegebene Darstellung der Whittaker-Funktion ein, kommen wir zu folgendem Endresultat:

$$\Upsilon(x) = 2kxe^{-kx}\Gamma(1+a)U(1+a,2,2kx)$$

U bezeichnet die Kummersche konfluente hypergeometrische Funktion ([10, Kapitel 13, Abschnitt 4]), welche die Beziehung

$$\Gamma(1+a)U(1+a,2,z) = \int_0^\infty e^{-zt}\left(\frac{t}{1+t}\right)^a dt$$

erfüllt.
Definiere nun

$$H_t^+ := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^t \frac{1_{B_s\geqslant\varepsilon}}{B_s}\, ds + (\ln\varepsilon)L_t^0\right)$$

und

$$\tau_t^+ := \int_0^\infty L_{\tau_t}^a\, da,$$

wobei $\tau_t = \inf\{s \geqslant 0 : L_s^0 > t\}$ die Inverse der Brownschen Lokalzeiten $(L_t^0; t \geqslant 0)$ bezeichnet. Wir müssen noch klären, ob obiger Limes in der Definition von H_t^+ existiert. Dazu verwenden wir wiederum die Occupation-times Formel und formen H_t^+ folgendermaßen um:

$$\begin{aligned}
H_t^+ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^t \frac{1_{B_s\geqslant\varepsilon}}{B_s}\, ds + (\ln\varepsilon)L_t^0\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{L_t^x}{x}\, dx + (\ln\varepsilon)L_t^0\right) = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{L_t^x}{x}\, dx - \int_\varepsilon^1 \frac{L_t^0}{x}\, dx\right)
\end{aligned}$$

Mithilfe des Cauchy-Kriteriums und der Tatsache, dass die Abbildung $x \mapsto L_t^x$ eine Hölderstetige Modifikation der Ordnung $\gamma < \frac{1}{2}$ besitzt, folgt für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\varepsilon_1}^{\infty} \frac{L_t^x}{x}\, dx - \int_{\varepsilon_1}^{1} \frac{L_t^0}{x}\, dx - \int_{\varepsilon_2}^{\infty} \frac{L_t^x}{x}\, dx + \int_{\varepsilon_2}^{1} \frac{L_t^0}{x}\, dx \right| &= \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{L_t^x}{x}\, dx - \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{L_t^0}{x}\, dx \right| = \\
&= \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{L_t^x - L_t^0}{x}\, dx \right| \leqslant \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{|L_t^x - L_t^0|}{|x|}\, dx \leqslant \\
&\leqslant C_{t,\omega} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{|x|^\gamma}{|x|}\, dx = C_{t,\omega} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} |x|^{\gamma-1}\, dx = \\
&= C_{t,\omega} \frac{|x|^\gamma}{\gamma} \bigg|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \to 0 \text{ für } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0.
\end{aligned}$$

Daher existiert der Limes f.s. gleichmäßig in t auf jedem beschränkten Intervall.

Theorem 4.3.1.
Für $\lambda \geqslant 0$ und $k > 0$ gilt

$$E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} H_{\tau_t}^+ - \frac{k^2 \tau_t^+}{2}\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}\left(-k + \lambda^2\left(2\gamma + \ln 2k + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)\right)\right)\right).$$

Beweis. Aus der Definition von H_t^+ und der Identität $L_{\tau_t}^0 = t$ folgt

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} H_{\tau_t}^+ - \frac{k^2 \tau_t^+}{2}\right)\right] = \\
&= E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^{\tau_t} \frac{1_{B_s \geqslant \varepsilon}}{B_s}\, ds + (\ln \varepsilon) t\right) - \frac{k^2}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty L_{\tau_t}^a\, da\right)\right] = \\
&= E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^\infty \frac{L_{\tau_t}^a}{a}\, da + (\ln \varepsilon) t\right) - \frac{k^2}{2} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty L_{\tau_t}^a\, da\right)\right] = \\
&= E\left[\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{L_{\tau_t}^a}{a}\, da - \frac{k^2}{2} \int_\varepsilon^\infty L_{\tau_t}^a\, da\right) \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} (\ln \varepsilon) t\right)\right)\right] = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[I_\varepsilon \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} (\ln \varepsilon) t\right)\right],
\end{aligned}$$

wobei

$$I_\varepsilon := E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} \int_\varepsilon^\infty \frac{L_{\tau_t}^a}{a}\, da - \frac{k^2}{2} \int_\varepsilon^\infty L_{\tau_t}^a\, da\right)\right].$$

Um das Vertauschen von Limes und Erwartungswert zu begründen, verwenden wir folgende Abschätzung

$$\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_\varepsilon^\infty \frac{L^a_{\tau_t}}{a}\,da - \frac{\lambda^2}{2}(\ln\varepsilon)t - \frac{k^2}{2}\int_\varepsilon^\infty L^a_{\tau_t}\,da\right) \leqslant \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_\varepsilon^\infty \frac{L^a_{\tau_t}}{a}\,da - \frac{\lambda^2}{2}(\ln\varepsilon)t\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_\varepsilon^\infty \frac{L^a_{\tau_t}}{a}\,da + \frac{\lambda^2}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{L^0_{\tau_t}}{a}\,da\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{L^a_{\tau_t}}{a}\,da + \frac{\lambda^2}{2}\int_\varepsilon^1 \frac{L^0_{\tau_t}}{a}\,da - \frac{\lambda^2}{2}\int_1^\infty \frac{L^a_{\tau_t}}{a}\,da\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\int_\varepsilon^1 \frac{L^0_{\tau_t} - L^a_{\tau_t}}{a}\,da\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\left|\int_\varepsilon^1 \frac{L^0_{\tau_t} - L^a_{\tau_t}}{a}\,da\right|\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\int_\varepsilon^1 \frac{|L^0_{\tau_t} - L^a_{\tau_t}|}{|a|}\,da\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\left(\int_\varepsilon^1 C_{t,\omega}|a|^{\gamma-1}\,da\right)\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\frac{C_{t,\omega}}{\gamma}\left(1-\varepsilon^\gamma\right)\right) \leqslant \exp\left(\frac{C_{t,\omega}\lambda^2}{2\gamma}\right).$$

Somit haben wir eine integrierbare Majorante gefunden, und das Vertauschen des Limes mit dem Erwartungswert kann mithilfe des Satzes über die majorisierte Konvergenz gerechtfertigt werden.

Aus Satz 4.2.8 folgt, dass $I_\varepsilon = \exp\left(\frac{t}{2}u'_{(\varepsilon)}(k,0+)\right)$, wobei $u_{(\varepsilon)}(k,0+)$ die nicht-wachsende Lösung von

$$\begin{cases} u''(x) = \left(\frac{\lambda^2}{x} + k^2\right)u(x) & \text{für } x \in [\varepsilon,\infty[\\ u(x) = \alpha x + 1 & \text{für } x \in [0,\varepsilon] \end{cases}$$

ist.

Die Stetigkeitsanforderungen an u und u' an der Stelle $x = \varepsilon$ führen zu den Bedingungen

$$\begin{cases} u(\varepsilon-) = \alpha\varepsilon + 1 \overset{!}{=} \Upsilon(\varepsilon) = u(\varepsilon+) \\ u'(\varepsilon-) = \alpha \overset{!}{=} \Upsilon'(\varepsilon) = u'(\varepsilon+). \end{cases}$$

Demnach ist $u'_{(\varepsilon)}(0+) = \alpha = \frac{\Upsilon'(\varepsilon)}{\Upsilon(\varepsilon) - \varepsilon\Upsilon'(\varepsilon)}$.

Zu bestimmen ist also der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\Upsilon'(\varepsilon)}{\Upsilon(\varepsilon) - \varepsilon\Upsilon'(\varepsilon)} - \lambda^2(\ln\varepsilon)\right).$$

Die Substitution $2kxt = u$ führt zu

$$\Upsilon(x) = e^{-kx}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{u+2kx}\right)^a du,$$

womit für die Ableitung von Υ folgt [1]

$$\begin{aligned}\Upsilon'(x) = -ke^{-kx}\int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{u+2kx}\right)^a du + e^{-kx}\int_0^\infty e^{-u}u^a(-a)\left(u+2kx\right)^{-a-1}2k\,du = \\ = 2k\left(-\frac{1}{2}\Upsilon(x) - ae^{-kx}\int_0^\infty e^{-u}\frac{1}{u+2kx}\left(\frac{u}{u+2kx}\right)^a du\right).\end{aligned}$$

Die Whittaker-Funktion erfüllt die Rekursion

$$zW'_{k,m}(z) = \left(k-\frac{1}{2}z\right)W_{k,m}(z) - \left(m^2 - \left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right)W_{k-1,m}(z).$$

In dem konkreten Fall $\Upsilon(x) = C_1 W_{-a,\frac{1}{2}}(2kx)$ mit $C_1 = \Gamma(a+1)$ folgt also:

$$\begin{aligned}x\Upsilon'(x) &= C_1 2kxW'_{-a,\frac{1}{2}}(2kx) = \\ &= \Gamma(a+1)\left(-a-\frac{1}{2}2kx\right)W_{-a,\frac{1}{2}}(2kx) + a\underbrace{(a+1)\Gamma(a+1)}_{=\Gamma(a+2)}W_{-a-1,\frac{1}{2}}(2kx)\end{aligned}$$

Aufgrund des bereits bekannten asymptotischen Verhaltens der Whittaker Funktion bei 0 ist nun

$$\begin{aligned}x\Upsilon'(x) &= (-a-kx)\left(1+\mathcal{O}(x\ln x)\right) + a\left(1+\mathcal{O}(x\ln x)\right) = \\ &= -kx + \mathcal{O}\left(x^2\ln x\right) + \mathcal{O}(x\ln x),\end{aligned}$$

woraus folgt, dass $\lim_{x\to 0} x\Upsilon'(x) = 0$.

Da $\lim_{x\to 0}\Upsilon(x) = 1$ und auch der Grenzwert $\lim_{x\to 0} x\Upsilon'(x)$ existiert, kann man nach den Rechenregeln für Grenzwerte obigen Limes umschreiben zu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Upsilon'(\varepsilon) - \lambda^2(\ln\varepsilon)\left(\Upsilon(\varepsilon) - \varepsilon\Upsilon'(\varepsilon)\right)\right).$$

Um diesen Grenzwert zu bestimmen, untersucht man zuerst das asymptotische Verhalten des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u+z}\left(\frac{u}{u+z}\right)^a du$$

für $z\to 0$. Die Substitution $u = zt$ liefert

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u+z}\left(\frac{u}{u+z}\right)^a du = \int_0^\infty e^{-zt}t^a\left(t+1\right)^{-a-1}\,dt,$$

und nachdem die konfluente hypergeometrische Funktion U die Darstellung (siehe [10, Kapitel 13, Abschnitt 4])

$$U(\widetilde{a},b,z) = \frac{1}{\Gamma(\widetilde{a})}\int_0^\infty e^{-zt}t^{\widetilde{a}-1}\left(t+1\right)^{b-\widetilde{a}-1}\,dt \quad \text{für } \mathrm{Re}(\widetilde{a}) > 0, |arg(z)| < \frac{\pi}{2}$$

[1] An dieser Stelle hat sich in [6] ein Tippfehler eingeschlichen: es gehört e^{-kx} statt e^{kx}

besitzt, können wir das Integral als

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u+z}\left(\frac{u}{u+z}\right)^a du = \Gamma(a+1)U(a+1,1,z)$$

schreiben.
Für $|z| \to 0$ und $b = 1$ besitzt die konfluente hypergeometrische Funktion folgendes asymptotische Verhalten (siehe [10, Kapitel 13, Abschnitt 2]):

$$U(a+1,1,z) = -\frac{1}{\Gamma(1+a)}\left[\ln z + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1) + 2\gamma\right] + \mathcal{O}\left(z \ln z\right),$$

wobei γ die Eulersche-Konstante bezeichnet.
Demnach gilt für den Grenzwert

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\Upsilon'(\varepsilon) - \lambda^2(\ln\varepsilon)\left(\Upsilon(\varepsilon) - \varepsilon\Upsilon'(\varepsilon)\right)\right) = \\ &= -k + \lambda^2\left(2\gamma + \ln 2k\varepsilon - \ln\varepsilon + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)\right) = \\ &= -k + \lambda^2\left(2\gamma + \ln 2k + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)\right). \end{aligned}$$

Insgesamt führt dies zu

$$E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}H^+_{\tau_t} - \frac{k^2\tau_t^+}{2}\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}\left(-k + \lambda^2\left(2\gamma + \ln 2k + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a+1)\right)\right)\right).$$

□

Als Nächstes betrachten wir die Funktion $f_-(x) = -\frac{\lambda^2}{2x}, x \geqslant 0$, welche ebenfalls bei $0+$ unbeschränkt ist.
Wir lösen analog zu oben die entsprechende Sturm-Liouville Differentialgleichung

$$\psi''(x) = \left(-\frac{\lambda^2}{x} + k^2\right)\psi(x)$$

und setzen

$$\psi(x) = \widetilde{\psi}(2kx).$$

Dies führt nun wiederum zu einer Whittaker-Differentialgleichung

$$\widetilde{\psi}''(2kx) + \left(\frac{\lambda^2}{2k(2kx)} - \frac{1}{4}\right)\widetilde{\psi}(2kx) = 0,$$

welche eine Lösung der Form

$$\psi(x) = C_1 W_{a,\frac{1}{2}}(2kx) + C_2 W_{-a,\frac{1}{2}}(-2kx)$$

besitzt, wobei $a := \frac{\lambda^2}{2k}$.

Da wir nach einer beschränkten Lösung suchen und $\lim_{x\to\infty} W_{-a,\frac{1}{2}}(-2kx) = \infty$, ist $C_2 = 0$. Aus dem asymptotischen Verhalten der Whittaker-Funktion für $x \to 0$ folgt, dass $C_1 = \Gamma(1-a)$. Es ist also

$$\psi(x) = \Gamma(1-a)W_{a,\frac{1}{2}}(2kx) = 2kxe^{-kx}\Gamma(1-a)U(1-a,2,2kx).$$

Definiere nun

$$H_t^- := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^t \frac{1_{-B_s\geqslant\varepsilon}}{B_s}\,ds - (\ln\varepsilon)L_t^0\right)$$

und

$$\tau_t^- := \int_0^\infty L_{\tau_t}^{-a}\,da.$$

Die Existenz von H_t^- begründet man analog zur Existenz von H_t^+.

Theorem 4.3.2.
Für $\lambda \geqslant 0$ und $k > 0$ gilt

$$E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}H_{\tau_t}^- - \frac{k^2\tau_t^-}{2}\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}\left(-k-\lambda^2\left(2\gamma+\ln 2k+\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-a)\right)\right)\right).$$

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Theorem 4.3.1. □

Wir wollen als Nächstes die charakteristische Funktion von H_{τ_t} berechnen. Definiere dazu

$$Q(x,y) := -\sqrt{2y} + 2x\left(2\gamma + \ln(2\sqrt{2y}) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{x}{\sqrt{2y}}+1\right)\right), \quad x\in\mathbb{C}, y\in\mathbb{R}_+,$$

womit

$$E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}H_{\tau_t}^+ - \frac{k^2\tau_t^+}{2}\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}Q\left(\frac{\lambda^2}{2},\frac{k^2}{2}\right)\right)$$

und

$$E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}H_{\tau_t}^- - \frac{k^2\tau_t^-}{2}\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}Q\left(-\frac{\lambda^2}{2},\frac{k^2}{2}\right)\right)$$

folgt.

Mithilfe der Occupation-times Formel erhalten wir

$$H_t^- = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty -\frac{L_t^{-a}}{a}\,da - (\ln\varepsilon)L_t^0\right)$$

und

$$H_t^+ = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{L_t^a}{a}\,da + (\ln\varepsilon)L_t^0\right).$$

Somit ist $H_t = H_t^+ + H_t^-$ und $\tau_t = \tau_t^+ + \tau_t^-$.

Nach dem ersten Satz von Ray und Knight (siehe [16, Seite 17]) sind die Prozesse $(L^a_{\tau_t}; a \geqslant 0)$ und $(L^{-a}_{\tau_t}; a \geqslant 0)$ unabhängig, woraus nun für $\lambda \in \mathbb{R}, k > 0$ folgt, dass

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(i\lambda H_{\tau_t} - \frac{k^2}{2}\tau_t\right)\right] &= E\left[\exp\left(i\lambda\left(H^+_{\tau_t} + H^-_{\tau_t}\right) - \frac{k^2}{2}\left(\tau_t^+ + \tau_t^-\right)\right)\right] = \\ &= E\left[\exp\left(i\lambda H^+_{\tau_t} - \frac{k^2}{2}\tau_t^+\right)\exp\left(i\lambda H^-_{\tau_t} - \frac{k^2}{2}\tau_t^-\right)\right] = \\ &= E\left[\exp\left(i\lambda H^+_{\tau_t} - \frac{k^2}{2}\tau_t^+\right)\right] E\left[\exp\left(i\lambda H^-_{\tau_t} - \frac{k^2}{2}\tau_t^-\right)\right] = \\ &= \exp\left(\frac{t}{2}Q\left(-i\lambda, \frac{k^2}{2}\right)\right)\exp\left(\frac{t}{2}Q\left(i\lambda, \frac{k^2}{2}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\frac{t}{2}\left(Q\left(-i\lambda, \frac{k^2}{2}\right) + Q\left(i\lambda, \frac{k^2}{2}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Definition von Q und Kürzen der symmetrischen Terme gelangt man zu

$$Q\left(-i\lambda, \frac{k^2}{2}\right) + Q\left(i\lambda, \frac{k^2}{2}\right) = -2k + 2i\lambda\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(i\frac{\lambda}{k} + 1\right)\right) - 2i\lambda\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(-i\frac{\lambda}{k} + 1\right)\right).$$

Die Digamma Funktion erfüllt für $z \in \mathbb{C}$ ([10, Kapitel 5, Abschnitt 15])

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-z) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \pi\cot(\pi z)$$

und

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+z) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = \frac{1}{z},$$

woraus durch Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten folgt, dass

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1+z) = \frac{1}{z} - \pi\cot(\pi z) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-z).$$

Verwenden wir nun diese Rekursion der Digamma-Funktion und die Beziehung $\cot(ix) = -i\coth(x)$, erhalten wir

$$\begin{aligned} Q\left(i\lambda, \frac{k^2}{2}\right) + Q\left(-i\lambda, \frac{k^2}{2}\right) &= -2k + 2i\lambda\left(-i\frac{k}{\lambda} + i\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(-i\frac{\lambda}{k} + 1\right)\right) - \\ &\quad -2i\lambda\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(-i\frac{\lambda}{k} + 1\right)\right) = \\ &= 2i^2\lambda\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right) = -2\lambda\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right). \end{aligned}$$

Also ist
$$E\left[\exp\left(i\lambda H_{\tau_t}-\frac{k^2}{2}\tau_t\right)\right]=\exp\left(-t\lambda\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)\right).$$
Um die Randverteilung zu bekommen, berechnen wir in obiger Formel den Limes für $k\to 0$. Da $\lim_{x\to\infty}\coth(x)=1$, gilt für $\lambda\geqslant 0$
$$\begin{aligned}E\left[\exp\left(i\lambda H_{\tau_t}\right)\right]&=\lim_{k\to 0}\exp\left(-t\lambda\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)\right)\\&=\exp\left(-t\lambda\pi\lim_{k\to 0}\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)\right)\\&=\exp(-t\lambda\pi).\end{aligned}$$
Falls $\lambda<0$, folgt wegen $\lim_{x\to-\infty}\coth(x)=-1$, dass
$$\begin{aligned}E\left[\exp\left(i\lambda H_{\tau_t}\right)\right]&=\lim_{k\to 0}\exp\left(-t\lambda\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)\right)\\&=\exp\left(-t\lambda\pi\lim_{k\to 0}\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)\right)\\&=\exp(t\lambda\pi).\end{aligned}$$
Die charakteristische Funktion von H_{τ_t} ist somit durch
$$E\left[\exp\left(i\lambda H_{\tau_t}\right)\right]=\exp(-t|\lambda|\pi)$$
gegeben, also ist $(H_{\tau_t};t\geqslant 0)$ ein symmetrischer Cauchy-Prozess mit Parameter π.

Die Verteilung des totalen Ordervolumens zur Zeit θ_k

Sei nun θ_k eine von $(B_t;t\geqslant 0)$ unabhängige exponentialverteilte Zufallszeit mit der Dichte
$$P(\theta_k\in dt)=\frac{k^2}{2}\exp\left(-\frac{k^2t}{2}\right)\,dt\qquad(t>0).$$
Weiters definiere
$$H_{\theta_k}:=\int_0^{\theta_k}\frac{ds}{B_s},$$
$$H^-_{\theta_k}:=\int_0^{g_{\theta_k}}\frac{ds}{B_s}$$
und
$$H^+_{\theta_k}:=\int_{g_{\theta_k}}^{\theta_k}\frac{ds}{B_s}.$$

Satz 4.3.3.
Es gilt für $\lambda > 0$

$$E\left[\exp\left(i\lambda H^-_{\theta_k}\right)\right] = \frac{k\tanh\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)}{\lambda\pi}$$

und

$$E\left[\exp\left(i\lambda H^+_{\theta_k}\right)\right] = \frac{\lambda}{k}\frac{\pi}{\sinh\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)}.$$

Beweis. Nach Korollar 4.2.6 gilt

$$E\left[\exp\left(i\lambda H^-_{\theta_k}\right)\right] = k\int_0^\infty E\left[\exp\left(-\frac{k}{2}\tau_t + i\lambda H_{\tau_t}\right)\right]\, dt.$$

Setzen wir für den Integranden das Resultat aus Theorem 4.3.2 ein, folgt

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(i\lambda H^-_{\theta_k}\right)\right] &= k\int_0^\infty \exp\left(-t\lambda\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)\right)\, dt = \\
&= k\left(-\frac{1}{\lambda\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)}\right)\left[\exp\left(-t\lambda\pi\coth\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)\right)\right]_0^\infty = \\
&= \frac{k\tanh\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)}{\lambda\pi}.
\end{aligned}$$

Weiters ist nach Korollar 4.2.6

$$E\left[\exp\left(i\lambda H^+_{\theta_k}\right)\right] = \frac{k}{2}\int_{-\infty}^\infty E_x\left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}T_0 + i\lambda H_{T_0}\right)\right]\, dx =$$

$$= \frac{k}{2}\left(\int_0^\infty E_x\left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}T_0 + i\lambda H_{T_0}\right)\right]\, dx + \int_0^\infty E_{-x}\left[\exp\left(-\frac{k^2}{2}T_0 + i\lambda H_{T_0}\right)\right]\, dx\right).$$

Mit Satz 4.2.7 gelangt man zu

$$E\left[\exp\left(i\lambda H^+_{\theta_k}\right)\right] = \frac{k}{2}\int_0^\infty\left(\Gamma\left(1-\frac{i\lambda}{k}\right)W_{\frac{i\lambda}{k},\frac{1}{2}}(2kx) + \Gamma\left(1+\frac{i\lambda}{k}\right)W_{-\frac{i\lambda}{k},\frac{1}{2}}(2kx)\right)\, dx.$$

Gemäß [10, Kapitel 13, Abschnitt] ist

$$\int_0^\infty W_{\frac{i\lambda}{k},\frac{1}{2}}(2kx)\, dx = \frac{1}{2k}\frac{1}{\Gamma(2-\frac{i\lambda}{k})}\,{}_2F_1\left(1,2;2-\frac{i\lambda}{k};\frac{1}{2}\right)$$

und

$$\int_0^\infty W_{-\frac{i\lambda}{k},\frac{1}{2}}(2kx)\, dx = \frac{1}{2k}\frac{1}{\Gamma(2+\frac{i\lambda}{k})}\,{}_2F_1\left(1,2;2+\frac{i\lambda}{k};\frac{1}{2}\right),$$

wobei ${}_2F_1(a,b;c;z)$ die Gaußsche hypergeometrische Funktion (siehe [10, Kapitel 15]) bezeichnet. Zur Verkürzung der Schreibarbeit setzen wir $\boldsymbol{F}(a,b;c;z) := \frac{1}{\Gamma(c)}{}_2F_1(a,b;c;z)$. Nach [10, Kapitel 15, Abschnitt 8] gilt

$$\frac{\sin(\pi(c-a-b))}{\pi}\boldsymbol{F}(a,b;c;z) = \frac{1}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\boldsymbol{F}(a,b;a+b-c+1;1-z) - \\ - \frac{(1-z)^{c-a-b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\boldsymbol{F}(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z),$$

sodass

$$\boldsymbol{F}\left(1,2;2+\frac{i\lambda}{k};\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi(\frac{i\lambda}{k}-1))}\left(\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{i\lambda}{k}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda}{k}\right)}\boldsymbol{F}\left(1,2;2-\frac{i\lambda}{k};\frac{1}{2}\right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{i\lambda}{k}-1}\boldsymbol{F}\left(1+\frac{i\lambda}{k},\frac{i\lambda}{k};\frac{i\lambda}{k};\frac{1}{2}\right)\right).$$

Verwendet man nun die Identität (siehe [10, Kapitel 15, Abschnitt 4])

$${}_2F_1\left(1+\frac{i\lambda}{k},\frac{i\lambda}{k};\frac{i\lambda}{k};\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-\frac{i\lambda}{k}}$$

und die Beziehung (siehe [10, Kapitel 5, Abschnitt 5])

$$\frac{\pi}{\sin(\pi(\frac{i\lambda}{k}-1))} = -\frac{\pi}{\sin(\pi(1-\frac{i\lambda}{k}))} = -\Gamma\left(1-\frac{i\lambda}{k}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda}{k}\right),$$

gelangt man zu

$$E\left[e^{i\lambda H^+_{\theta_k}}\right] = \Gamma\left(1+\frac{i\lambda}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{i\lambda}{k}\right) = \frac{i\lambda}{k}\Gamma\left(\frac{i\lambda}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{i\lambda}{k}\right).$$

Mithilfe von [10, Kapitel 5, Abschnitt 5] folgt

$$E\left[e^{i\lambda H^+_{\theta_k}}\right] = \frac{i\lambda}{k}\frac{\pi}{\sin\left(i\pi\frac{\lambda}{k}\right)}.$$

Verwenden wir nun die Beziehung $\sin(ix) = i\sinh(x)$, gelangen wir schlussendlich zu der Darstellung

$$E\left[e^{i\lambda H^+_{\theta_k}}\right] = \frac{\lambda}{k}\frac{\pi}{\sinh\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)}.$$

□

Korollar 4.3.4.
Es gilt für $\lambda > 0$

$$E\left[\exp\left(i\lambda H_{\theta_k}\right)\right] = \frac{1}{\cosh\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)}.$$

Beweis. Es ist
$$E\left[\exp\left(i\lambda H_{\theta_k}\right)\right] = E\left[\exp\left(i\lambda\left(H_{\theta_k}^{+} + H_{\theta_k}^{-}\right)\right)\right]$$
und nach Lemma 4.2.2 sind die Zufallsobjekte $H_{\theta_k}^{+}$ und $H_{\theta_k}^{-}$ unabhängig. Daraus folgt nun mithilfe von Satz 4.3.3
$$E\left[\exp\left(i\lambda H_{\theta_k}\right)\right] = E\left[e^{i\lambda H_{\theta_k}^{+}}\right] E\left[e^{i\lambda H_{\theta_k}^{-}}\right] = \frac{1}{\cosh\left(\pi\frac{\lambda}{k}\right)}.$$
□

4.3.2 Der Fall $f(x) = \frac{\lambda^2}{2}e^{\alpha x}, \alpha > 0$

Wir betrachten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form
$$u''(x) = (k^2 + \lambda^2 e^{\alpha x})u(x)$$
und setzen
$$u(x) = \tilde{u}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right).$$
Somit ist
$$\begin{aligned} u'(x) &= \tilde{u}'\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= \lambda\tilde{u}'\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)e^{\alpha\frac{x}{2}} \end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned} u''(x) &= \lambda\tilde{u}''\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)\left(e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)^2\frac{2\lambda}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \lambda\tilde{u}'\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)e^{\alpha\frac{x}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \\ &= \tilde{u}''\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)\left(\lambda e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)^2 + \tilde{u}'\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)\frac{\lambda\alpha}{2}e^{\alpha\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$
Setzen wir nun obige Ausdrücke in die Differentialgleichung ein, erhalten wir
$$\tilde{u}''\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)\left(\lambda e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)^2 + \tilde{u}'\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)\frac{\lambda\alpha}{2}e^{\alpha\frac{x}{2}} - (k^2 + \lambda^2 e^{2\alpha\frac{x}{2}})\tilde{u}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right) = 0.$$
Multipliziert man nun diese Differentialgleichung mit $\frac{4}{\alpha^2}$, führt dies zu
$$\tilde{u}''\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)^2 + \tilde{u}'\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}} - \left(\frac{4k^2}{\alpha^2} + \left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right)^2\right)\tilde{u}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}e^{\alpha\frac{x}{2}}\right) = 0.$$
Diese Differentialgleichung hat die Gestalt einer modifizierten Bessel-Differentialgleichung (siehe [10, Kapitel 10, Abschnitt 25])
$$x^2y''(x) + xy'(x) - (m^2 + x^2)y(x) = 0,$$

die eine allgemeine Lösung der Form

$$y(x) = C_1 I_m(x) + C_2 K_m(x)$$

besitzt.
Dabei bezeichnen C_1, C_2 Konstanten und $I_m(x)$ bzw. $K_m(x)$ modifizierte Bessel-Funktionen der ersten bzw. zweiten Art der Ordnung m. Für die Definition dieser Funktionen sei auf [10, Kapitel 10] verwiesen.
Die allgemeine Lösung der Sturm-Liouville Differentialgleichung ist somit durch

$$u(x) = C_1 I_{\frac{2k}{\alpha}} \left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{\alpha \frac{x}{2}} \right) + C_2 K_{\frac{2k}{\alpha}} \left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{\alpha \frac{x}{2}} \right)$$

gegeben.

Mit $\Phi^+(k, x)$ bzw. $\Phi^-(k, x)$ bezeichnen wir die Lösungen von

$$u''(x) = (k^2 + \lambda^2 f_+(x))u(x)$$

bzw.

$$u''(x) = (k^2 + \lambda^2 f_-(x))u(x).$$

Weiters definieren wir zur Verkürzung der Schreibarbeit

$$A_t^{\pm} := \int_0^t \exp(\alpha B_s) 1_{B_s \in \mathbb{R}_{\pm}} \, ds,$$

und

$$\tau_t^{\pm} = \int_0^{\tau_t} 1_{B_s \in \mathbb{R}_{\pm}} \, ds.$$

Theorem 4.3.5.
Für $\lambda > 0, k \geqslant 0$ gilt

$$E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2 \tau_t^+}{2} + A_{\tau_t}^+\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}\left(k - \lambda\left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} K_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)\right)$$

und

$$E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2 \tau_t^-}{2} + A_{\tau_t}^-\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}\left(-k - \lambda\left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} I_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)\right),$$

wobei $a := \frac{2k}{\alpha}$.

Beweis. Wir bestimmen zuerst die allgemeine Lösung von

$$u''(x) = (k^2 + \lambda^2 f_+(x))u(x),$$

wobei $f_+(x) = \frac{\lambda^2}{2} e^{\alpha x}, x \geqslant 0$. Diese ist durch

$$\Phi^+(k,x) = C_1 I_{\frac{2k}{\alpha}}\left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{\alpha \frac{x}{2}}\right) + C_2 K_{\frac{2k}{\alpha}}\left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{\alpha \frac{x}{2}}\right), \quad x \geqslant 0,$$

gegeben.
Die modifizierten Besselfunktionen besitzen gemäß [10, Kapitel 10] folgendes asymptotisches Verhalten für $z \in \mathbb{C}$, $|z| \to \infty$

$$K_k(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \qquad |arg(z)| < \frac{3\pi}{2}$$

und

$$I_k(z) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} e^{z}, \qquad |arg(z)| < \frac{\pi}{2}.$$

Da wir nach einer beschränkten Lösung suchen und $\lim\limits_{x\to\infty} I_k(x) = \infty$, folgt, dass $C_1 = 0$ sein muss.

Zur Bestimmung der Konstanten C_2 zieht man die Nebenbedingung

$$\Phi^+(k,0) = 1$$

heran.
Wegen

$$\Phi^+(k,0) = C_2 K_{\frac{2k}{\alpha}}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)$$

schließen wir, dass $C_2 = \left(K_{\frac{2k}{\alpha}}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}$.

Für $f_-(x) = \frac{\lambda^2}{2} e^{-\alpha x}, x \geqslant 0$, erhalten wir eine allgemeine Lösung der Form

$$\Phi^-(k,x) = C_1 I_{\frac{2k}{\alpha}}\left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\alpha \frac{x}{2}}\right) + C_2 K_{\frac{2k}{\alpha}}\left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\alpha \frac{x}{2}}\right) \quad x \geqslant 0.$$

Für $|z| \to 0$ gilt

$$K_k(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(k)\left(\frac{z}{2}\right)^{-k}, \qquad Re(k) > 0$$

und

$$I_k(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^{k} (\Gamma(k+1))^{-1}, \qquad k \notin \mathbb{Z}_{<0}.$$

Da wir wiederum eine beschränkte Lösung suchen und $\lim_{x\to 0} K_k(x) = \infty$, folgt $C_2 = 0$. Zur Bestimmung der Konstanten C_1 verwendet man wiederum die Nebenbedingung

$$\Phi^-(k,0) = 1.$$

Es ist

$$\Phi^-(k,0) = C_2 I_{\frac{2k}{\alpha}}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right),$$

woraus wir nun mithilfe der Nebenbedingung schließen, dass $C_1 = \left(I_{\frac{2k}{\alpha}}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}$.
Aus Satz 4.2.8 folgt für $\lambda > 0, k \geqslant 0$

$$E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_t^+}{2} + A^+_{\tau_t}\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}(\Phi^+)'(k,0+)\right)$$

und

$$E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_t^-}{2} + A^-_{\tau_t}\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}(\Phi^-)'(k,0+)\right).$$

Zur Bestimmung von $(\Phi^+)'(k,x)$ und $(\Phi^+)'(k,x)$ verwendet man die in [10, Kapitel 10, Abschnitt 29] angeführten Rekursionen für $I_k(x)$ bzw. $K_k(x)$, welche durch

$$\frac{\partial I_k(x)}{\partial x} = \frac{k}{x} I_k(x) + I_{k+1}(x)$$

bzw.

$$\frac{\partial K_k(x)}{\partial x} = \frac{k}{x} K_k(x) - K_{k+1}(x)$$

gegeben sind.
Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $z := \frac{2\lambda}{\alpha} e^{\alpha\frac{x}{2}}$ und $w := \frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\alpha\frac{x}{2}}$. Somit ist die Ableitung von $\Phi^+(k,x)$ nach x durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^+(k,x)}{\partial x} &= \left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} \frac{\partial K_a(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \\
&= \left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} \frac{\partial K_a(z)}{\partial z}\frac{2\lambda}{\alpha} e^{\alpha\frac{x}{2}} \frac{\alpha}{2} = \\
&= \left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} \frac{\partial K_a(z)}{\partial z} z \frac{\alpha}{2} = \\
&= \left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} z\frac{\alpha}{2}\left(\frac{a}{z} K_a(z) - K_{a+1}(z)\right) = \\
&= \left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} \left(a\frac{\alpha}{2} K_a(z) - z\frac{\alpha}{2} K_{a+1}(z)\right)
\end{aligned}$$

gegeben.

Demnach ist

$$
\begin{aligned}
(\Phi^+)'(k,0+) &= \left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}\left(\frac{2k}{\alpha}\frac{\alpha}{2}K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)-\frac{2\lambda}{\alpha}\frac{\alpha}{2}K_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)= \\
&= \left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}\left(kK_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)-\lambda K_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)= \\
&= k-\lambda\left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}K_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Fasst man nun diese Ergebnisse zusammen, gelangt man zu

$$
E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_t^+}{2}+A^+_{\tau_t}\right)\right)\right]=\exp\left(\frac{t}{2}\left(k-\lambda\left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}K_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)\right).
$$

In analoger Weise berechnet man die Ableitung von $\Phi^-(k,x)$ nach x

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi^-(k,x)}{\partial x} &= \left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}\frac{\partial I_a(w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}= \\
&= \left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}\frac{\partial I_a(w)}{\partial w}\frac{2\lambda}{\alpha}e^{-\alpha\frac{x}{2}}\frac{-\alpha}{2}= \\
&= \left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}\frac{\partial I_a(w)}{\partial w}w\frac{-\alpha}{2}= \\
&= \left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}w\frac{-\alpha}{2}\left(\frac{a}{w}I_a(w)+I_{a+1}(w)\right)= \\
&= \left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}\left(-a\frac{\alpha}{2}I_a(w)-w\frac{\alpha}{2}I_{a+1}(w)\right).
\end{aligned}
$$

Demzufolge ist

$$
\begin{aligned}
(\Phi^-)'(k,0+) &= \left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}\left(-\frac{2k}{\alpha}\frac{\alpha}{2}I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)-\frac{2\lambda}{\alpha}\frac{\alpha}{2}I_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)= \\
&= \left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}\left(-kI_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)-\lambda I_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)= \\
&= -k-\lambda\left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}I_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right).
\end{aligned}
$$

Somit lautet das Ergebnis in diesem Fall

$$
E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_t^-}{2}+A^-_{\tau_t}\right)\right)\right]=\exp\left(\frac{t}{2}\left(-k-\lambda\left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1}I_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)\right).
$$

$\square$

Sei $A_t := \int_0^t \exp(\alpha B_s)\, ds = A_t^+ + A_t^-$. Als Nächstes wollen wir die gemeinsame Verteilung von (τ_t, A_{τ_t}) berechnen.

Theorem 4.3.6. Für $\lambda > 0, k \geqslant 0$ gilt

$$E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_t}{2} + A_{\tau_t}\right)\right)\right] = \exp\left(\frac{t}{2}\left(-\frac{\alpha}{2}K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^{-1} I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^{-1}\right)\right).$$

Beweis. Mithilfe der Occupation-times Formel folgt

$$\frac{k^2\tau_t^+}{2} + A_{\tau_t}^+ = \frac{k^2}{2}\int_0^\infty L_{\tau_t}^x\, dx + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^\infty e^{\alpha x} L_{\tau_t}^x\, dx$$

und

$$\frac{k^2\tau_t^-}{2} + A_{\tau_t}^- = \frac{k^2}{2}\int_{-\infty}^0 L_{\tau_t}^x\, dx + \frac{\lambda^2}{2}\int_{-\infty}^0 e^{\alpha x} L_{\tau_t}^x\, dx.$$

Wegen der Unabhängigkeit von $(L_{\tau_t}^x, x \geqslant 0)$ und $(L_{\tau_t}^x, x \leqslant 0)$ gilt

$$\begin{aligned}
E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2\tau_t}{2} + A_{\tau_t}\right)\right)\right] &= E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2}{2}\tau_t^+ + A_{\tau_t}^+\right)\right)\exp\left(-\left(\frac{k^2}{2}\tau_t^- + A_{\tau_t}^-\right)\right)\right] = \\
&= E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2}{2}\tau_t^+ + A_{\tau_t}^+\right)\right)\right] E\left[\exp\left(-\left(\frac{k^2}{2}\tau_t^- + A_{\tau_t}^-\right)\right)\right] = \\
&= \exp\left(\frac{t}{2}\left(k - \lambda\left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} K_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right) - k - \lambda\left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} I_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit der Beziehung (siehe [10, Kapitel 10, Abschnitt 28])

$$I_k(x)K_{k+1}(x) + I_{k+1}(x)K_k(x) = \frac{1}{x}$$

noch vereinfachen:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{t}{2}\left(-\lambda\left(K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} K_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right) - \lambda\left(I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)^{-1} I_{a+1}\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)\right)\right) = \\
&\qquad \exp\left(\frac{t}{2}\left(-\frac{\alpha}{2}K_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^{-1} I_a\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^{-1}\right)\right).
\end{aligned}$$

□

Setzen wir $k=0$, erhalten wir die Laplace-Transformierte von $\int_0^t \exp(\alpha B_s)\, ds$

$$E\left[\exp\left(-A_{\tau_t}\right)\right] = E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\left(\int_0^t \exp(\alpha B_s)\, ds\right)\right]\right] =$$
$$= \exp\left(\frac{t}{2}\left(-\frac{\alpha}{2} K_0\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^{-1} I_0\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right)^{-1}\right)\right).$$

Literaturverzeichnis

[1] Larbi Alili, Pierre Patie, and Jesper Lund Pedersen. Representations of first hitting time density of an Ornstein-Uhlenbeck Process. *Stochastic Models*, 21(4):967–980, 2005.

[2] Philippe Biane, Jim Pitman, and Marc Yor. Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and the Brownian excursions. *Bulletin (New series) of the American Mathematical Society*, pages 435–465, 2001.

[3] Philippe Biane and Marc Yor. Valeurs principales associées aux temps locaux Browniens. *Bull. Sci. Math., II. Sér.*, 111:23–101, 1987.

[4] Andrei N. Borodin and Paavo Salminen. *Handbook of Brownian motion: facts and formulae.* Probability and its applications. Birkhäuser Verlag, second edition, 2002.

[5] Jean Jacod. Rates of convergence to the local time of a diffusion. *Annales de l'institut Henri Poincaré (B)*, 34:505–544, 1998.

[6] Monique Jeanblanc, Jim Pitman, and Marc Yor. The Feynman-Kac formula and decomposition of Brownian paths, 1996.

[7] Thierry Jeulin and Marc Yor. Sur les distributions de certaines fonctionelles du mouvement brownien. *Séminaire de Probabilités de Strasbourg*, 15:210–226, 1981.

[8] Ioannis Karatzas and Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer-Verlag, 1988.

[9] Roger Masury and Marc Yor. *Aspects of Brownian Motion.* Universitext. Springer, 2008.

[10] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, editors. *NIST Handbook of Mathematical Functions.* Cambridge University Press, New York, NY, 2010.

[11] Jim Pitman and Marc Yor. The law of the maximum of a Bessel bridge. *Electronic Journal Probability*, 4:1–35, 1999.

[12] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer, 1999.

[13] Thorsten Rheinländer and Friedrich Hubalek. A Feynman-Kac Approach to the Limit Order Book. 2014. working paper.

[14] Edmund T. Whittaker and George N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, fourth edition, 1927. Reprinted 1990.

[15] Laurent Dudok de Wit. Liquidity risks based on the limit order book. Master's thesis, Technische Universität Wien, 2013.

[16] Ju-Yi Yen and Marc Yor. *Local Times and Excursion Theory for Brownian Motion: A Tale of Wiener and Itô Measures*. Lecture Notes in Mathematics. Springer International Publishing, 2013.

[17] Marc Yor. *Local Times and Excursions for Brownian Motion: A Concise Introduction*. Lecciones em Matemáticas. Universidad Central de Venezuela, 1995.

[18] Marc Yor, editor. *Exponential Functionals and Principal Values Related to Brownian Motion: A Collection of Research Papers*. Biblioteca de la Revista matemática iberoamericana. Revista Matemática Iberoamericana, 1997.

Internetquellenverzeichnis

[19] Investopedia. Bid-ask spread. Letzter Zugriff am 5.10.2014.

[20] Investopedia. Flash crash. Letzter Zugriff am 3.09.2014.

[21] Wikipedia. Mid price. Letzter Zugriff am 5.10.2014.

[22] Wikipedia. Wertpapierorder. Letzter Zugriff am 5.10.2014.