



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

DIPLOMARBEIT

# **Einfluss des Abschmelzens von Eismassen auf den Meeresspiegelanstieg**

Ausgeführt am Department für  
Geodäsie und Geoinformation  
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von  
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Johannes Böhm

durch  
**Matthias Schartner**

---

---

## Kurzfassung

Der Klimawandel ist eines der großen und wichtigen Themen, das die Menschheit heute und noch viel mehr in naher Zukunft beschäftigen wird. Eine der sichtbarsten Auswirkungen der globalen Erwärmung ist der jährliche Meeresspiegelanstieg, welcher in Zukunft, sollte er ungebremst weiter steigen, den Lebensraum zahlreicher Menschen bedrohen wird.

Darum ist ein Verständnis des Meeresspiegelanstiegs und dessen Ursachen heute ein wichtiges Forschungsgebiet. Diese Arbeit beschreibt den Einfluss von Massenverlagerungen und deren gravitative Auswirkungen auf den Meeresspiegelanstieg. Dabei wird hauptsächlich das Abschmelzen von Eismassen in der Kryosphäre betrachtet.

Zum besseren Verständnis wird in dieser Arbeit ein kurzer Überblick über den Meeresspiegelanstieg und des damit verknüpften Gravitationsfeld der Erde gegeben. Dabei wird ebenfalls auf die Satellitenmission GRACE eingegangen und auf die Möglichkeiten und Probleme, die bei der Bestimmung von Eismassenverlusten aus GRACE Zeitreihen entstehen.

Die Berechnung selbst erfolgt mit Hilfe von Kugelfunktionsentwicklungen der Massenverlagerungen, wobei das Hauptinteresse nicht nur auf die Bestimmung der Änderung des mittleren Meeresspiegels gelegt wird, sondern die globale räumliche Verteilung untersucht wird. Die Berechnung selbst muss iterativ erfolgen, da sich mit jeder Massenverlagerung die Äquipotentialflächen des Erdschwerefeldes ändern, was wiederum zu Massenverlagerungen führt.

Es wird gezeigt, dass das Abschmelzen der Kryosphäre 50% des jährlichen mittleren Meeresspiegelanstiegs verursacht, wobei die räumliche Verteilung sehr unterschiedlich ausfällt. In den polaren Regionen kommt es zu einem deutlichen Absinken des Meeresspiegels. Hingegen kommt es in den äquatorialen Regionen zu einem Anstieg, welcher deutlich über dem mittleren jährlichen Meeresspiegelanstieg liegt. Die berechneten Werte decken sich gut mit den Ergebnissen aus anderen Publikationen.

Berücksichtigt man nicht nur die Massentrends der Kryosphäre, sondern verwendet die Massentrends aller Landflächen aus monatlichen GRACE Lösungen, zeigt sich, dass die Massenverlagerungen nur noch 33% des jährlichen mittleren Meeresspiegelanstiegs, also deutlich weniger, beschreiben. Problematisch hierbei ist, dass rein aus GRACE Messungen die Massenverluste von kleinräumigen Gebieten wie Gletschern nicht richtig aufgenommen werden. Dies zeigt dass es für die Bestimmung von Eismassenverlusten aus GRACE Messungen spezielle Filterkerne verwendet werden müssen.

## Abstract

Climate change is one of the main issues that is concerning humanity today and will also demand our attention in the future. One of the most visible effects of global warming is the sea level rise, which will, if it should continue to rise unabated, threaten the habitat of many people.

Therefore an understanding of sea level rise and its causes is an important research topic. This work describes the influence of mass displacements, and their gravitational effects on sea level rise. Here, the melting of ice in the cryosphere is mainly considered.

For a better understanding, a brief overview of sea level rise and the associated gravitational field of the earth is given. Also the GRACE satellite mission and the opportunities and problems that arise in the determination of the melting of ice through GRACE time series is discussed.

The calculation itself is done using spherical harmonics of mass displacements. The main interest is not only the determination of changes in mean sea level, but furthermore the spatial distribution of the sea level changes is studied. The calculation itself must be iterative, because every mass redistribution changes the equipotential gravity field, which in turn leads again to mass displacements.

It is shown that the melting of the cryosphere caused 50% of the annual average sea level rise, with a very different spatial distribution. In the polar regions, there is a marked sea level fall. In contrast the sea level rise in the equatorial regions, is well above the average sea level rise.

Considering not only the cryosphere mass trends, but the mass trends of all land-areas through monthly GRACE solutions, it is shown that the mass redistributions describe only 33% of the annual average sea level rise, which is significantly less. The problem is that purely from GRACE measurements, the mass loss of small-scale areas such as glaciers are not properly represented. Therefore it is important to use particular filter kernels for the determination of these ice mass losses.

## Danksagung

Mein allergrößter Dank gebührt Professor Böhm, der mich bei dieser Arbeit, aber auch schon bei meiner Bachelorarbeit und einigen Seminaren betreut und unterstützt hat. Dank seinem hilfreichen Feedback und seiner zielsicheren Art Probleme zu lösen, war es mir möglich, diese Arbeit zu verfassen. Außerdem waren es seine Vorlesungen, die mein Interesse an der Höheren Geodäsie geweckt haben.

Auch gilt mein Dank allen Vortragenden der Technischen Universität Wien, deren Vorlesungen und Übungen ich besucht habe und die mir diese ausgezeichnete Ausbildung ermöglicht haben. Besonders hervorheben möchte ich neben den Vortragenden der Geodäsie auch Professor Schranz-Kirlinger, die mein Interesse für die Mathematik geweckt und es mir ermöglicht hat, mein Wissen in diesem Bereich zu festigen.

Ganz herzlich bedanke ich mich bei meiner Familie, welche mich über all die Jahre unterstützt hat. Ohne Ihren Rückhalt wäre es mir nicht möglich gewesen, mein Studium in der Form, wie ich es gemacht habe, zu absolvieren.

Weiters möchte ich meinen Freunden an der TU Wien danken, die es geschafft haben, den Uni Alltag in jeder Situation zu verbessern und die verantwortlich dafür sind, dass ich die Universität gerne besucht habe.

Schließlich bedanke ich mich bei meiner Freundin Laura, die mit ihrer liebevollen Art dafür gesorgt hat, dass es mir immer gut ging und mein Leben nicht nur vom Studium geprägt war. Unsere gemeinsame Zeit war mein Ausgleich vom Prüfungs- und Abgabestress und dafür möchte ich mich ganz besonders herzlich bedanken.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Danksagung</b>	<b>III</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation und Problemstellung . . . . .	2
1.2 Ziel der Arbeit und Gliederung . . . . .	3
<b>2 Meeresspiegelanstieg</b>	<b>5</b>
2.1 Einflussfaktoren . . . . .	7
2.2 Beobachtung . . . . .	10
2.2.1 Pegelmessungen . . . . .	11
2.2.2 Satellitenaltimetrie . . . . .	12
2.3 Einfluss Kryosphäre . . . . .	16
2.3.1 Eisschilde . . . . .	17
2.3.2 Gletscher . . . . .	19
<b>3 Gravitationsfeld der Erde</b>	<b>22</b>
3.1 Kugelflächenfunktionen . . . . .	26
3.2 Legendre Funktionen . . . . .	28
3.3 Klassifikation der Kugelfunktionen . . . . .	30
3.4 Kugelfunktionen und Erdschwerefeld . . . . .	32
<b>4 Schwerefeldmission GRACE</b>	<b>38</b>
4.1 Messprinzip . . . . .	39
<b>5 Berechnung</b>	<b>40</b>
5.1 Bestimmung Massenverlust . . . . .	43
5.1.1 Grönland . . . . .	46
5.1.2 Antarktis . . . . .	48
5.1.3 Verwendete Massenänderungen . . . . .	51
5.2 Änderung Gravitationsfeld . . . . .	52
5.3 Verlagerung Wassermassen . . . . .	53
5.4 Aufbringen des Wasservolumens . . . . .	55
5.5 Verschiebung des Koordinatenursprungs . . . . .	56

5.6	Änderung Trägheitstensors . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>64</b>
6.1	Szenario I: Jährliches Schmelzen . . . . .	64
6.1.1	Einfluss der Massenverteilung . . . . .	71
6.1.2	Einfluss der postglazialen Landhebung . . . . .	72
6.1.3	Auswirkung auf den Trägheitstensor . . . . .	75
6.2	Szenario II: Jährliches Schmelzen inklusive Landhydrologie . . . . .	77
6.3	Szenario III: Verlust Eisschild Grönland . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>85</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>87</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>88</b>
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>89</b>
	<b>Literatur</b>	<b>90</b>

## 1 Einleitung

Das weltweite Klima hat sich in der Geschichte schon oft verändert. Allein in den letzten 650.000 Jahren gab es sieben Wechsel von Kalt- und Warmzeiten, wobei die letzte Kaltzeit vor 7.000 Jahren abrupt endete und den Beginn des modernen Klimas festlegte. Die meisten dieser Klimaänderungen sind auf sehr kleine Veränderungen in der Erdumlaufbahn zurückzuführen, welche die Menge an Sonnenenergie, die unseren Planeten trifft, verändert [Broecker and Denton, 1990]. Ebenso spielen plattentektonische Verschiebungen und die damit verbundenen Veränderungen der Meeresströmungen sowie vulkanische Aktivitäten eine Rolle [Masson-Delmotte et al., 2013].

Der jetzige Trend der Klimaentwicklung ist von besonderer Bedeutung, weil wahrscheinlich ein großer Teil vom Menschen verursacht wird und die Geschwindigkeit der Änderung in der jüngeren Vergangenheit beispiellos ist [IPCC, 2013].

Die Auswirkungen der Klimaentwicklung sind dabei für den Menschen mit erheblichen Risiken verbunden. Infolge der Klimaerwärmung steigt das Auftreten von extremen Wetterereignissen wie Sturmfluten, Überschwemmungen und Hitzeperioden. Besonders für ärmere Bevölkerungsgruppen in ländlichen Regionen könnten solche extremen Wetterereignisse zum Verlust des Einkommens und der Existenzgrundlage führen. Außerdem wird die Versorgung der Weltbevölkerung mit Nahrungsmitteln und Frischwasser erschwert. Aber nicht nur der Mensch leidet unter einer globalen Erwärmung, sondern auch die Natur und ihre biologische Vielfalt. Die Folgen können bis hin zum Verlust ganzer Ökosysteme mit teils unbekanntem Auswirkungen gehen [IPCC, 2014].

Man geht davon aus, dass die globale durchschnittliche Oberflächentemperatur zwischen dem Mittel der Jahre 1850-1900 und der Periode von 2003-2012 um  $0.78 \pm 0.06^\circ\text{C}$  gestiegen ist, [Hartmann et al., 2013] wobei die Geschwindigkeit des Anstiegs in den letzten Jahren deutlich zulegte [Morice et al., 2012; Vose et al., 2012]. Berechnet man die Werte der globalen Erwärmung mittels gängiger Klimamodelle für das Jahr 2100, ergibt sich eine globale mittlere Oberflächentemperatur, die je nach Klimaszenario, zwischen 1 und  $3.7^\circ\text{C}$  höher als das jetzige Mittel ausfällt [IPCC, 2014].

Eine der zahlreichen sichtbaren Folgen des Klimawandels, die in Zukunft einen großen Teil der Weltbevölkerung betreffen wird, ist der Anstieg des mittleren Meeresspiegels. Dabei liegt die wahrscheinliche globale mittlere Meereshöhe im Jahr 2100, je nach Klimaszenario, 44 bis 74 Zentimeter höher als das heutige Niveau [IPCC, 2014]. Regional können diese Änderungen jedoch noch deutlich höher ausfallen [Church et al., 2013]. Ohne Sicherung der Küsten wird im Jahr 2100 pro Jahr der Lebensraum von 0.2 bis 4.6% der Weltbevölkerung überflutet werden, das entspricht einem jährlichen Verlust

von 0.3 bis 9.3% des globalen Bruttoinlandsproduktes [Hinkel et al., 2014].

Wegen den eben genannten Gründen ist es heute von entscheidender Bedeutung, Wissen über die zugrunde liegenden Systeme der globalen Erwärmung zu sammeln, um die Ursachen und Folgen des Klimawandels und des Meeresspiegelanstiegs besser zu verstehen und beschreiben zu können.

## 1.1 Motivation und Problemstellung

Satelliten in der Erdumlaufbahn und andere technologische Fortschritte haben es der Wissenschaft ermöglicht, viele verschiedene Arten von Information über unseren Planeten und das Klima auf einer globalen Ebene zu sammeln. Diese Menge an Daten, die bereits über viele Jahre hinweg gesammelt wird, enthüllt die Signale des sich verändernden Klimas.

Mit Hilfe der Satellitenaltimetrie ist es möglich, innerhalb weniger Tage Meereshöhen über beinahe das gesamte Gebiet der Ozeane zu bestimmen. Besonderes Merkmal der Satellitenaltimetrie ist neben ihrer hohen Genauigkeit und zeitlichen Auflösung, dass seit Anfang der 90er Jahre mehrere ununterbrochene Zeitserien verschiedener Missionszentren verfügbar sind. Dabei zeigt sich, dass der Meeresspiegelanstieg heute bei  $3.3 \pm 0.4$  Millimetern pro Jahr liegt [Nerem et al., 2010]. Vergleicht man diese Werte mit Pegelmessungen der letzten hundert Jahre [Church and White, 2011; Jevrejeva et al., 2008; Ray and Douglas, 2011] erkennt man eine deutliche Beschleunigung des Meeresspiegelanstiegs.

Besonders sensitiv gegenüber dem heutigen Temperaturanstieg sind die Bereiche der Kryosphäre, also Gletscherregionen sowie die Eisschilde von Grönland und der Antarktis. Der jährliche Massenverlust in diesen Regionen liegt bei mehreren hundert Gigatonnen pro Jahr, mit einer direkten Auswirkung auf den globalen mittleren Meeresspiegel [Velicogna, 2009; Bamber and Riva, 2010; Gardner et al., 2013]. Mit Hilfe von Altimetermessungen können Volumensänderungen für diese Eismassen bestimmt werden. Das Problem hierbei ist die korrekte Umrechnung von Volumen zu Masse, da in der Regel keine Information zur Dichte vorliegt.

Seit 2002 ist es möglich, mit den Zwillingssatelliten des *Gravity Recovery And Climate Experiment* (GRACE), Massenänderungen direkt zu beobachten [Tapley et al., 2004]. Dabei sind die Satelliten sensitiv gegenüber allen Arten der Massenänderung, weshalb eine saubere Trennung zwischen Massenverlust der Eisregionen, Änderungen im Grundwasserspeicher und Effekten der postglaziale Landhebung (*Glacial Isostatic Adjustment*) (GIA) für ein zuverlässiges Ergebnis nötig sind. In dieser Trennung, und in der Tatsache, dass die Auflösung der monatlichen Lösungen bei 300 Kilometern liegt, liegen

die Schwierigkeiten der Ableitung von Eismassenverlusten aus [GRACE](#) Messungen.

## 1.2 Ziel der Arbeit und Gliederung

In dieser Arbeit soll ein Ansatz zur Bestimmung von Meereshöhenänderungen infolge von Massenverlagerungen vorgestellt werden. Dabei bilden monatliche Sätze von Kugelfunktionsentwicklungen aus [GRACE](#)-Daten die Grundlage für die Bestimmung der Eismassenänderungen für den grönländischen und antarktischen Eisschild. Die Eismassenverluste für die wichtigsten Gletscherregionen werden Publikationen entnommen.

Neben dem Aufbringen von Wassermassen, welche durch das Abschmelzen der Eismassen neu gewonnen werden, wird das Hauptaugenmerk auf die gravitativen Einflüsse auf die Meereshöhen gelegt. Dabei wird nicht nur die mittlere Meeresspiegeländerung, sondern speziell das räumlich unterschiedliche Verhalten untersucht.

Annahme für die Berechnung von Meeresspiegeländerungen ist ein Gleichsetzen des mittleren Meeresspiegels mit dem Geoid. Durch eine Entwicklung der Massenverschiebungen in Kugelfunktionen, können Änderungen des Geoids berechnet werden. Diese Berechnung hat iterativ zu erfolgen, da jede Änderung des Geoids mit der Änderung des mittleren Meeresspiegels gleichgesetzt wird und es somit erneut zu einer Verlagerung von Wassermassen kommt.

Dabei zeigt sich, dass es speziell in Bereichen der Kryosphäre zu einem deutlichen Absinken des Meeresspiegels kommt. Dafür ist der Meeresspiegelanstieg in den restlichen Regionen höher, als man alleine durch das gleichmäßige Auftragen des neu gewonnenen Wasservolumens vermuten würde.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich dabei wie folgt: In Kapitel 2 werden Grundlagen des prädierten Meeresspiegelanstiegs in Klimamodellen erörtert, wobei in 2.1 die Größenordnung der Einflussverfahren aufgelistet wird. Kapitel 2.2 vergleicht die Prädiktionen mit Beobachtungen aus Pegelmessungen und Satellitenaltimetrie und 2.3 gibt einen Einblick in den, in dieser Arbeit untersuchten, Einfluss der Kryosphäre auf die Meeresspiegeländerungen.

Kapitel 3 beschreibt kurz die benötigten Grundlagen des Gravitationsfeldes der Erde. In dieser Arbeit werden Kugelfunktionsentwicklungen verwendet, weshalb in Kapitel 3.1 und 3.3 kurz Kugelfunktionen erklärt und in Kapitel 3.2 die dafür benötigten Legendrefunktionen beschrieben werden. Die Beschreibung des Erdschwerefeldes mittels Kugelfunktionen ist in Kapitel 3.4 zusammengefasst.

Da sich Teile der Daten auf Beobachtungen der Satellitenmission [GRACE](#) beziehen, werden dazu in Kapitel 4 einige Hintergründe behandelt.

Die Berechnungsschritte werden in Kapitel 5 genauer beschrieben, wobei in Kapitel 5.1

die Bestimmung der Massenverluste und in Kapitel 5.2 die Änderung des Gravitationsfeldes behandelt wird. Eine kurze Beschreibung, wie die Verlagerung der Wassermassen realisiert wurde, findet sich unter Punkt 5.3. Infolge der Massenänderungen kommt es zu einer Verschiebung des Koordinatenursprungs, siehe Kapitel 5.5, welche für die Bestimmung von absoluten Meereshöhen berücksichtigt werden muss. Als Nebenprodukt lässt sich die Änderung des Trägheitstensors, wie in Kapitel 5.6 gezeigt wird, bestimmen, welcher für weitere Forschungsarbeiten von Interesse sein könnte.

Im darauffolgenden Kapitel 6 werden die Ergebnisse der in Kapitel 5 beschriebenen Berechnungsschritte dargestellt. Dabei werden drei Szenarien behandelt. In Kapitel 6.1 wird die Berechnung mit jährlichen Massenänderungen durchgeführt, um den jährlichen Meeresspiegelanstieg zu berechnen. Dabei wird der Einfluss der Massenverteilung in Kapitel 6.1.1 und der postglazialen Landhebung in Kapitel 6.1.2 visualisiert. In Kapitel 6.2 werden globale GRACE Massentrends verwendet, um den Effekt der Landhydrologie mitzuberücksichtigen. Ausnahme bilden die beiden Eisschilde, wo die Massentrends analog zu Szenario I berechnet werden. Kapitel 6.3 behandelt den hypothetischen Fall, wie sich die Meereshöhen ändern würden, falls ganz Grönland abschmelzen sollte.

Kapitel 7 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere mögliche Forschungsarbeiten.

## 2 Meeresspiegelanstieg

Die Höhe der Ozeanoberfläche in jedem Punkt, also der Meeresspiegel, wird entweder ausgehend von der Oberfläche der starren Erde oder vom Ursprung eines globalen Koordinatensystems aus gemessen. Anstelle des Koordinatenursprungs kann eine auf den Ursprung bezogene Referenzfläche, wie zum Beispiel ein Rotationsellipsoid, verwendet werden.

Misst man die Höhen ausgehend von der festen Erde, spricht man vom relativen Meeresspiegel. Dieser Meeresspiegel ist wichtig für die Abschätzung von Einflüssen der Meereshöhenänderungen auf die Küstengebiete. Mithilfe von Pegelbeobachtungen wird der relative Meeresspiegel schon seit den letzten Jahrhunderten gemessen. Ausgehend von geologischen Untersuchungen sind sogar Rückschlüsse auf längere Zeitspannen möglich. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass die feste Erde selbst infolge der Plattentektonik oder [GIA](#) Höhenunterschieden unterworfen ist. Somit ist es schwierig aus relativen Meereshöhen, Änderungen im globalen Meeresspiegel zu bestimmen.

Bei der Bestimmung der Meereshöhen ausgehend vom Ursprung eines Koordinatensystems spricht man von geozentrischen oder absoluten Meereshöhen, welche mittels Satellitenaltimetrie seit den letzten zwei Jahrzehnten beobachtet werden. Der daraus resultierende Meeresspiegel wird meist für die Bestimmung von globalen Änderungen verwendet. Um auf den mittleren Meeresspiegel (*Mean Sea Level*) [MSL](#) zu kommen, müssen Meereshöhen über eine Zeitspanne gemittelt werden, um kurze periodische Variabilität wie Wellen und Gezeiten zu eliminieren.

Obwohl man die Änderung des Meeresspiegels seit langer Zeit erfasst, ist eine Prädiktion zukünftiger Meeresspiegeländerungen eine schwierige Herausforderung. In den Jahren von 1901 bis 2010 ist der globale mittlere Meeresspiegel, um rund  $0.19 \pm 0.02$  Meter gestiegen. Dabei steigt die Geschwindigkeit des Anstieges seit Mitte des 19. Jahrhunderts stärker als während der letzten zwei Jahrhunderte [[IPCC, 2014](#)].

Während der Meeresspiegel zwischen 1900 und 1990 im Mittel um 1.2 Millimeter pro Jahr anstieg [[Hay et al., 2015](#)], geht man derzeit von 3.3 Millimeter pro Jahr aus [[Nerem et al., 2010](#)]. Auch wenn dies im ersten Moment nicht nach viel klingt, sind die Auswirkungen auf lange Sicht verheerend. [Abbildung 1](#) zeigt den mittleren Meeresspiegelanstieg von vier verschiedenen Klimaszenarien basierend auf repräsentative Konzentrationspfade (*Representative Concentration Pathways*) (RCP) [[van Vuuren et al., 2011](#)]: Das Modell *RCP2.6* mit der geringsten erwarteten Erderwärmung, *RCP4.5* und *RCP6.0*, zwei Modelle mit mittleren Klimaänderungen und *RCP8.5* einem Modell basierend auf starker Erderwärmung [[Moss et al., 2010](#)].

Ausgangspunkt für diese Modelle sind Konzentrationspfade bestimmter Treibhausgase sowie der Strahlungsantrieb. Dabei geben die RCP-Szenarien bestimmte Treibhausgaskonzentrationen vor, aus denen Klimamodelle die Klimaänderungen und Emissionen rückrechnen, die erforderlich sind, um diese Konzentrationen hervorzurufen. Die Zahl im Modellnamen gibt den Strahlungsantrieb im Jahr 2100 bezüglich den vorindustriellen Werten von 1850 an. *RCP2.6* geht dabei von 2.6 Watt pro Quadratmeter, *RCP8.5* von 8.5 Watt pro Quadratmeter aus.

Alle diese Modelle, selbst das sehr positive Szenario *RCP2.6*, in dem die Kohlendioxidemissionen bis zum Jahr 2080 vollständig verschwinden, sagen einen Anstieg des mittleren Meeresspiegels voraus.

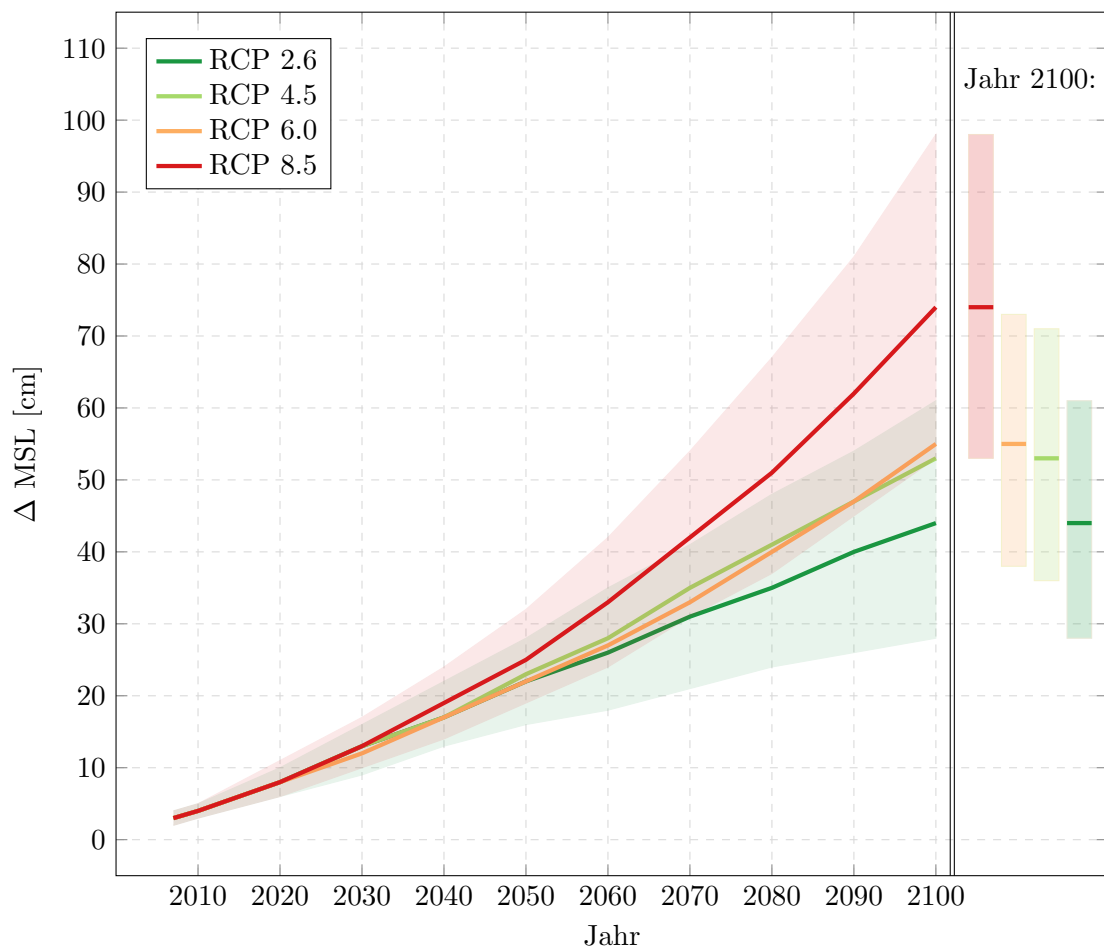


Abbildung 1: Mittlerer Meeresspiegelanstieg verschiedener Klimamodelle in [cm] in Bezug zum 1986-2005 Mittelwert. Transparent ist der Bereich zwischen 5% und 95% Quantil eingezeichnet [IPCC: Annex II, 2013].



## 2.1 Einflussfaktoren

Um den Meeresspiegelanstieg besser verstehen und beschreiben zu können, ist es unumgänglich seine Einflussfaktoren zu entschlüsseln. Haupteinflussfaktoren für den Meeresspiegelanstieg sind:

- Thermale Expansion infolge von steigender Temperatur der Ozeane
- Abschmelzen von Gletschern
- Verluste von Teilen der Eisschilde in Grönland und der Antarktis
- Veränderungen des Gravitationspotentials und dessen Äquipotentialflächen
- Änderungen im Grundwasserspeicher
- Änderungen in der Frischwasserzufuhr
- Atmosphärische Auflasteffekte
- Ozeanographische Effekte

Neben diesen großen Einflussfaktoren gibt es noch eine Vielzahl von kleineren Effekten, deren Größenordnung jedoch viel kleiner als die Ungenauigkeiten der oben genannten Effekte ist. Deshalb spielen sie keine signifikante Rolle in der Beschreibung und Prädiktion des Meeresspiegels.

Änderungen im Meeresspiegel können regional sehr unterschiedlich ausfallen, je nachdem wie die Einflussfaktoren in diesen Gebieten wirken. So kommt es in Bereichen, wo Eismasse verloren geht, zu einem Absinken des Meeresspiegels [Bamber and Riva, 2010] infolge gravitativer Effekte. Deshalb können regional die Änderungen des Meeresspiegels aufgrund von Klimaeffekten um mehr als 100% vom Mittel abweichen. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dass es bis zum Ende des 21. Jahrhunderts bei 95% der Ozeanflächen zu einem Anstieg des Meeresspiegels kommt.

Dabei sind Änderungen in Ozeanströmungen, der Ozeandichte und des Meeresspiegels stark miteinander verbunden. Lokale Änderungen des Meeresspiegels können auch weit entfernt einen großen Einfluss haben, so ist der Meeresspiegel an der Küste stark mit der Temperatur des offenen Ozeans verbunden. Während sowohl die Temperatur als auch der Salzgehalt einen großen Einfluss auf den lokalen Meeresspiegel hat, hat nur die Temperatur einen Einfluss auf den globalen Meeresspiegelanstieg infolge von thermischer Ausdehnung und Schrumpfung. Veränderungen im Salzgehalt haben global

gesehen eine vernachlässigbare Bedeutung [Lowe and Gregory, 2006]. Zusammen mit atmosphärischen Auflasteffekten führen diese Effekte zu räumlich und zeitlich sehr unterschiedlichen Veränderungen des Meeresspiegels, angefangen von kurzlebigen Wellen und Sturmfluten bis hin zu einer über mehrere Jahrzehnte laufende nachhaltige Veränderung der Meeresoberfläche [Church et al., 2013].

Spontaner Wasser- oder Eismassen Austausch zwischen Landflächen und Ozeanen führt ebenfalls zu einer Änderung im globalen Meeresspiegel, wobei sich Änderungen der Meeresoberfläche aufgrund von Massenaustausch sehr schnell über die gesamte Erde ausbreiten [Lorbacher et al., 2012]. Im Gegensatz dazu können Änderungen des mittleren Meeresspiegels infolge von Änderungen der Ozeantemperatur und des Salzgehalts durch veränderten Frischwasserzulauf einige Jahre dauern [Stammer, 2008].

Der Massenaustausch zwischen Ozean und Land, wie das Abschmelzen von Gletschern oder der Eisschilde, hat ein verändertes Gravitationsfeld der Erde zur Folge. Außerdem kommt es durch die Massenverlagerungen zu einer vertikalen Bewegung des Ozeanbodens, sowie zu viskoelastischen Verformungen der Erde. Dabei ändert sich der Trägheitstensor der Erde und dadurch die Erdrotation [Adhikari and Ivins, 2016]. Alle diese Effekte haben einen Einfluss auf den globalen und regionalen Meeresspiegelanstieg.

Um den Einfluss der Klimaerwärmung auf den Meeresspiegelanstieg bestimmen zu können, kommt erschwerend hinzu, dass auch andere Einflüsse vorhanden sind, welche nicht in Zusammenhang mit der Klimaerwärmung stehen. Zum Beispiel dauert die viskoelastische Verformung der Erde aufgrund des Schmelzens von Eismassen während der letzten Eiszeit bis heute an. Aufgrund dieser Massenverlagerung kommt es zu einer langsamen Hebung des Meeresbodens und infolgedessen zu einer Veränderung des Gravitationsfeldes. Dieser Effekt ist unter der Bezeichnung postglaziale Landhebung, kurz **GIA**, bekannt [Lambeck and Nakiboglu, 1984]. Postglaziale Landhebung beeinflusst die Interpretation des Meeresspiegelanstiegs sowohl auf regionaler als auch globaler Ebene.

Während die thermale Expansion und das Abschmelzen der Gletscher im 20. Jahrhundert einen Großteil, nämlich rund 75% des beobachteten Meeresspiegelanstiegs ausmachten, nimmt seit den 1990er Jahren der Einfluss vom Abschmelzen der Eisschilde von Grönland und der Antarktis zu. Natürliche und vom Menschen verursachte Veränderungen in Landwasserspeicher leisten nur einen kleinen Beitrag zum Meeresspiegelanstieg [Church et al., 2013]. Abbildung 2 zeigt eine Auflistung der Größenordnung verschiedener Effekte für das Klimamodell *RCP 4.5*.

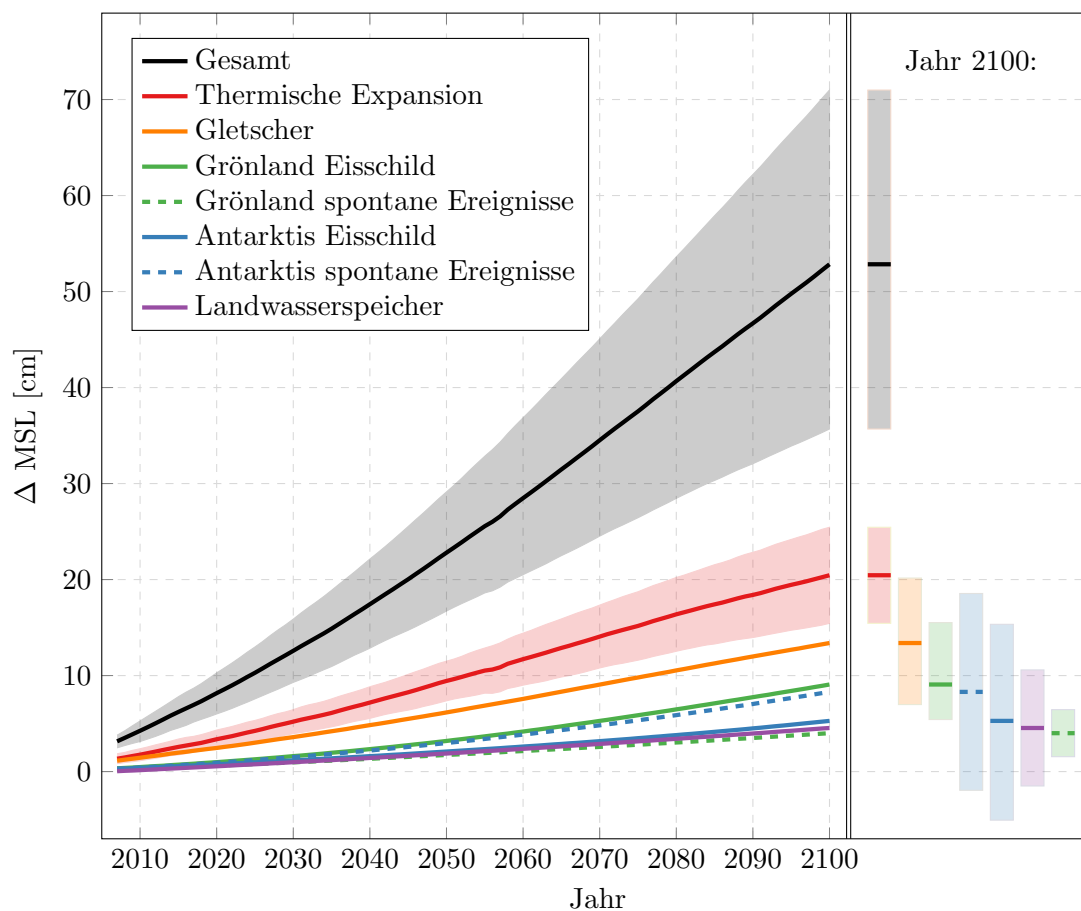


Abbildung 2: Einfluss verschiedener Effekte auf den globalen mittleren Meeresspiegelanstieg für das Szenario RCP4.5. Rechts ist der Bereich zwischen den 5% und 95% Quantile für das Jahr 2100 eingezeichnet. Daten von [Church et al., 2013].

Abbildung 2 zeigt, dass die thermische Expansion den größten Einfluss auf den mittleren globalen Meeresspiegelanstieg hat, gefolgt vom Abschmelzen der Gletscher.

Der Einfluss Grönlands und der Antarktis auf den Meeresspiegelanstieg kann auf unterschiedliche Effekte aufgeteilt werden. Die Oberflächen-Massenbilanz der Eisschilde vergleicht dabei das Abschmelzen von vorhandener Masse mit dem Aufkommen neuer Masse, großteils infolge von Schneefall.

Dabei gehen alle Studien davon aus, dass es für Grönland einen starken negativen Trend geben wird. Für die Antarktis kommt man zu anderen Ergebnissen für die Oberflächen-Massenbilanz. Der Verlust von Masse infolge von Schmelze macht nur rund 1%

des Massenzuwachs infolge Schneefalls aus. Der Großteil des Massenverlusts kommt durch den Verlust von soliden Eismassen infolge von spontanen dynamischen Ereignissen [Church et al., 2013]. Generell sind dabei die Unsicherheiten für die Antarktis größer als für Grönland.

Unter spontanen dynamischen Ereignissen werden Ereignisse verstanden, die durch Veränderungen der Strömungsgeschwindigkeit oder durch spontanen Massenabgabe entstehen. Diese Effekte können zu einer größeren Massenveränderung als die Unausgeglichenheit zwischen Schmelze und Schneefall führen. Beispiele für dynamische Effekte sind das Eindringen von warmem Ozeanwasser unter die Eisdecke. Infolgedessen kann es zu einer spontanen Reaktion des Gletschersystems kommen, bei dem ein großer Massenverlust auftreten kann [IPCC: Annex III, 2013].

Tabelle 1 listet die Größenordnung der Einflussfaktoren für den Beobachtungszeitraum von 1993-2010 auf:

Tabelle 1: Größenordnung der beobachteten Einflussfaktoren zwischen den Jahren 1993 und 2010 [Church et al., 2013]

	[mm/Jahr]
Thermale Expansion	$1.10 \pm 0.30$
Gletscher ohne Grönland und Antarktis	$0.76 \pm 0.37$
Gletscher in Grönland	$0.10 \pm 0.03$
Eisschild Grönland	$0.33 \pm 0.08$
Eisschild Antarktis	$0.27 \pm 0.11$
Landwasserspeicher	$0.38 \pm 0.11$
<b>Summe Kryosphäre</b>	<b><math>1.46 \pm 0.40</math></b>

## 2.2 Beobachtung

Seit Anfang des 18. Jahrhunderts gibt es Aufzeichnungen über die relative Meereshöhe bezogen auf Küstengebiete. Während Aufzeichnungen früher nur punktuell anhand von Pegelmessungen durchgeführt wurden, werden seit Anfang der 90er Jahre Satellitenaltimeter-Missionen durchgeführt. Diese Missionen erlauben es, global die absolute Meereshöhe, bezogen auf das Geozentrum, zu bestimmen. Dies führt zu einer signifikanten Verbesserung der Unsicherheiten für die Bestimmung des globalen Meeresspiegels.

### 2.2.1 Pegelmessungen

Seit 1970 gibt es Aufzeichnungen von Ozeanpegeln. Anfangs nur an wenigen Stationen in Europa nimmt ihre Zahl im späten 18. Jahrhunderts langsam zu. Ab dem Ende des 18. Jahrhundert gibt es Stationen in Europa, Nordamerika, Australien und Neuseeland. Pegelstationsmessungen messen den relativen Meeresspiegelanstieg, einen kombinierten Effekt aus Anstieg des Volumens des umgebenden Ozeans und der vertikalen Landerhebung. Diese vertikale Landerhebung muss zur Bestimmung des Meeresspiegelanstiegs korrigiert werden [Rhein et al., 2013]. Heute kann die vertikale Landhebung mit GPS-Systemen direkt gemessen werden.

Das Bestimmen des globalen Meeresspiegels aus punktuellen Messungen an den Küsten ist aufgrund von der starken regionalen Variabilität des Meeresspiegels kompliziert. Es gibt verschiedene Ansätze zur Bestimmung eines globalen mittleren Meeresspiegels aus Pegelmessungen. Abbildung 3 zeigt drei rekonstruierte Zeitserien, welche aus verschiedenen Vorgehensweisen gewonnen wurden [Jevrejeva et al., 2008], [Church and White, 2011] und [Ray and Douglas, 2011].

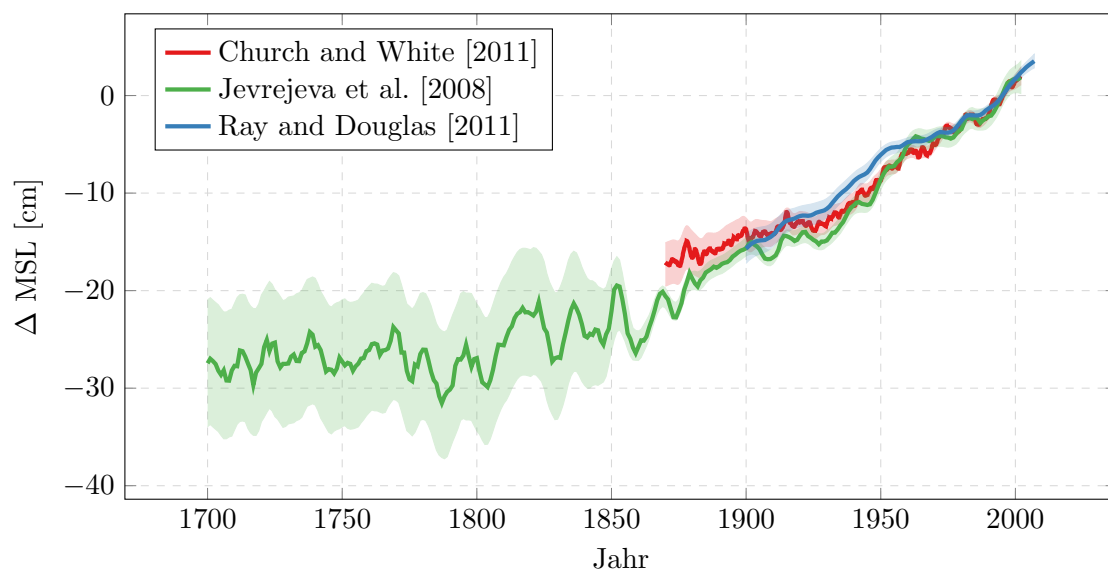


Abbildung 3: Geglätteter globaler mittlerer Meeresspiegelanstieg rekonstruiert aus Pegelmessungen. Referenzpegel ist der mittlere Meeresspiegel von 1990 bis 2000. Daten: Rot von [Church and White, 2011]; Grün von [Jevrejeva et al., 2008]; Blau von [Ray and Douglas, 2011]. Transparent ist die einfache Standardabweichung aufgetragen.

Die verschiedenen Zeitserien in Abbildung 3 zeigen einen ähnlichen Langzeittrend, jedoch gibt es erkennbare mehrjährige Schwankungen. Zwischen den Jahren 1901 bis 2010 kam es laut diesen Modellen zu einem durchschnittlichen Meeresspiegelanstieg von  $1.7 \pm 0.2$  Millimeter pro Jahr.

### 2.2.2 Satellitenaltimetrie

Heute spielt die Satellitenaltimetrie eine entscheidende Rolle in der Beobachtung des Meeresspiegels. Die Satellitenaltimetrie ist ein satellitengestütztes Radar- oder Laser System, welches in Nadirrichtung kurze frequenz-modulierte Impulse aussendet. Diese Impulse werden an der Meeresoberfläche reflektiert, durch Wind und Wellen gestreut und nach circa 5 ms von der Altimeterantenne am Satelliten wieder empfangen. Neben der Bestimmung der Gestalt der Meeresoberfläche kann man direkt aus Altimetermessungen Aufschluss über die signifikante Wellenhöhe und die Windgeschwindigkeit im Messgebiet erhalten, welche routinemäßig in Wettervorhersagen genutzt werden. Aus all diesen Messungen können zum Beispiel Oberflächenströmungen der Ozeane, Schwereanomalien und globale Gezeitenmodelle abgeleitet werden. Außerdem können die entsandten Signale nicht nur an der Meeresoberfläche, sondern auch an beliebigen glatten Flächen reflektiert werden. Somit ist es möglich, durch Messungen auf mit Schnee und Eis bedeckten Gebieten Rückschlüsse über das Volumen kontinentaler Eismassen zu erhalten. Aufgrund von Altimetermessungen ist heute die Meeresoberfläche genauer vermessen als die Topographie der meisten Landgebiete.

Anfängliche Satellitenaltimetrie-Missionen in den 1970er und 1980er Jahren hatten noch eine hohe Ungenauigkeit und nur eine kurze zeitliche Lebensdauer. Seit 1992 sind durchgehend Zeitserien mehrerer Altimetermissionen vorhanden. Wichtig sind dabei zwei Zeitserien, einerseits Missionen aus einer Kooperation von *Centre national d'études spatiales* (CNES) mit *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) und Missionen der *European Space Agency* (ESA). Tabelle 2 und 3 listen einige bereits abgeschlossene beziehungsweise gerade aktuelle Missionen auf. Besonders die Zeitserien von TOPEX/Poseidon und den Nachfolgemissionen Jason-1 und Jason-2 sind wegen ihrer hohen Genauigkeit für die heutige Meeresspiegelbeobachtung von großer Bedeutung. Damit die Zeitserie nicht endet, ist bereits eine Nachfolgemission, die Mission Jason-3 gestartet. Dabei bilden diese Missionen die längste und genaueste durchgehende Zeitserie von Altimeterbeobachtungen.

Bei der Planung der Bahnen von Satelliten-Altimetermissionen muss ein Abwägen zwischen zeitlicher und räumlicher Auflösung erfolgen. Für die Bestimmung von zeitvariablen Vorgängen der Meeresoberfläche wie Gezeiten, Strömungen und Meeresspiegel-

anstieg ist ein kurzer Wiederholzyklus von Vorteil. Hingegen ist für eine hochaufgelöste Kartierung der Meeresoberfläche, wie sie in der Geophysik und Schwerefeldbestimmung benötigt wird, ein dichtes Bahnspurmuster wichtig. Dabei ist es nicht möglich, sowohl eine hohe zeitliche wie auch räumliche Auflösung gleichzeitig zu realisieren. Hinzu kommen weitere Designkriterien, wie eine hohe Inklination zur Erfassung der polaren Eiskappen und von Meereisgebieten. Um allen Anforderungen gerecht zu werden, änderten einige Missionen während ihrer Betriebszeit die Bahnkonfiguration.

Tabelle 2: Übersicht wichtiger Satellitenaltimetrie-Missionen von [CNES/NASA](#)

<a href="#">CNES/NASA</a>	Launch	Missionsende	mittlere Höhe [km]	Inklination [°]
TOPEX/Poseidon	08/1992	01/2006	1336	66.00
Jason-1	01/2002	06/2013	1336	66.00
Jason-2	06/2008	-	1336	66.00
Jason-3	01/2016	-	1336	66.00

Die Missionen TOPEX/Poseidon, sowie die Nachfolgemissionen Jason-1, Jason-2 und Jason-3 fliegen mit derselben Bahnkonfiguration. Der Bodenspurabstand beträgt 311 Kilometer mit einer sehr hohen zeitlichen Auflösung. Der Wiederholzyklus der Messungen liegt knapp unter 10 Tagen. Problematisch ist, dass aufgrund der Inklination nur Messungen bis  $\pm 66^\circ$  Breite durchgeführt werden können. Somit werden die Meereshöhen in polaren Regionen nicht erfasst. Dafür zeichnen sich diese Missionen durch eine sehr hohe Genauigkeit von rund einem Zentimeter aus.

Tabelle 3: Übersicht wichtiger Satellitenaltimetrie-Missionen der [ESA](#)

<a href="#">ESA</a>	Launch	Missionsende	mittlere Höhe [km]	Inklination [°]
ERS-1	07/1991	03/2000	785	98.52
ERS-2	04/1995	07/2011	785	98.52
Envisat	03/2002	04/2012	785	98.52
CryoSat-2	04/2010	-	717	92.00
Sentinel-3	02/2016	-	812	98.65

Der Bodenspurabstand der Missionen ERS-1, ERS-2 und Envisat lag bei 80 Kilometern mit einer Wiederholzeit von 35 Tagen. Die Breitenabdeckung lag bei  $\pm 81.48^\circ$ . Zusätzlich flog der Satellit ERS-1 zeitweise mit einer höheren zeitlichen Auflösung von

3-Tage Wiederholzyklus was einen Bodenspurabstand von 933 Kilometern zur Folge hat. Außerdem gab es eine Missionsphase, in der eine höhere räumliche Auflösung mit 16 Kilometern Bodenspurabstand und einem Wiederholzyklus von 168 Tagen geflogen wurde. Die Genauigkeit dieser Mission ist etwas schlechter als die der TOPEX/Poseidon und Jason Missionen.

CryoSat-2 fliegt mit einem Wiederholzyklus von 369 Tagen und einem Bodenspurabstand von 7.5 Kilometern. Die Breitenabdeckung beträgt  $\pm 88^\circ$ , um die Dicke von Land und Meereis, sowie das Abschmelzen der polaren Eiskappen beobachten zu können.

Abbildung 4 zeigt den mittleren Meeresspiegelanstieg in den letzten Jahren, welcher aus Satellitenaltimetrie-Daten berechnet wurde. Die Daten sind von den periodischen Gezeiteneffekten befreit, außerdem wurden sie vom Einfluss der postglazialen Landhebung korrigiert [Nerem et al., 2010]. Der mittlere Anstieg des Meeresspiegels liegt demnach bei  $3.3 \pm 0.4$  mm/Jahr. Es ist sehr wahrscheinlich, dass die Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs in den letzten Jahren zugenommen hat. Man geht davon aus, dass der Anstieg zwischen 1993 und 2010 bei 3.2 mm pro Jahr lag [IPCC, 2014]. Seit dem Jahr 2005 liegt der Trend bei 3.7 mm pro Jahr [Nerem et al., 2010]. Eine Abschätzung um wie viel die Geschwindigkeit des Meeresspiegelanstiegs zunimmt, ist derzeit aus Satellitenaltimetrie-Daten noch nicht möglich, da die Länge der Zeitserie dafür noch nicht ausreicht. Problematisch sind mehr-jährliche Schwankungen der Meeresoberfläche aufgrund von El Niño und La Niña [Nerem et al., 2010].

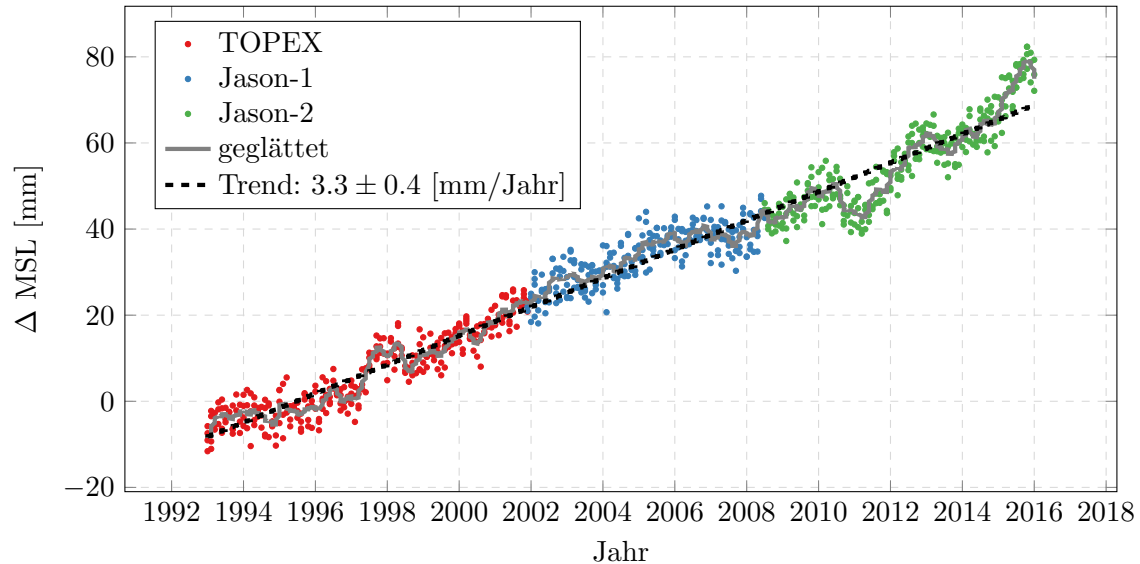


Abbildung 4: Meeresspiegelanstieg beobachtet durch Satellitenaltimetrie-Missionen [Nerem et al., 2010]



Abbildung 5 zeigt eine kombinierte Darstellung der Änderung des mittleren Meeresspiegels aus Pegel- und Satellitenaltimeter Beobachtungen, aus Abbildung 3 und 4 mit den Daten der Prädiktion aus Klimamodellen aus Abbildung 1. Gut zu erkennen ist der bereits mehrmals erwähnte Anstieg der Geschwindigkeit und die erst vergleichsweise kurze Beobachtungsperiode mittels Satellitenaltimetrie, welche die Prädiktion von Geschwindigkeitsänderungen aus Altimeter-Daten schwierig macht.

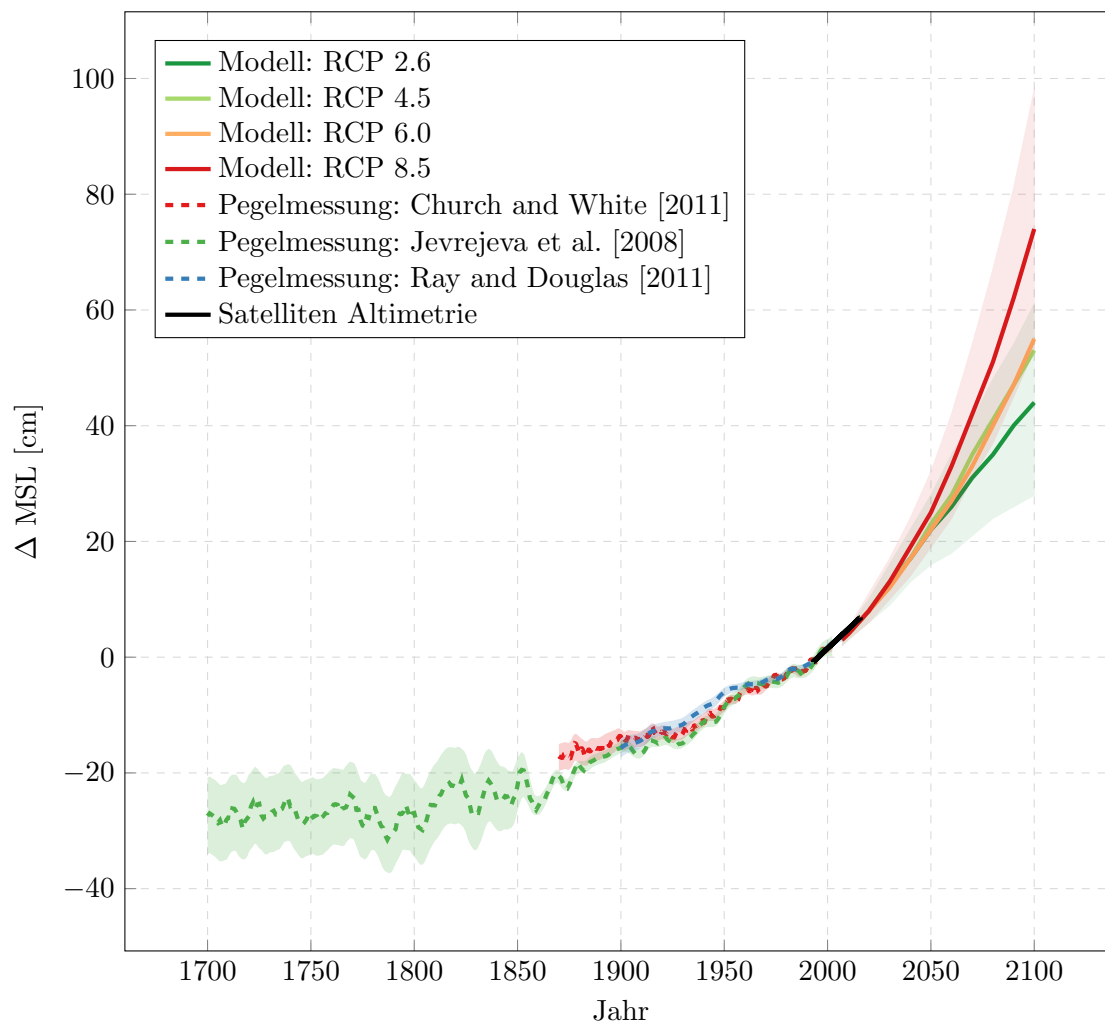


Abbildung 5: Kombinierte Darstellung der Meeresspiegelanstiege aus Klimamodellen (Abbildung 1), Pegelbeobachtungen (Abbildung 3) und Satellitenaltimetrie (Abbildung 4). Beachte, dass für Pegelmessungen transparent die einfache Standardabweichung, für Klimamodelle *RCP2.6* und *RCP8.5* transparent der Bereich zwischen dem 5 und 95% Quantil eingezeichnet ist.

## 2.3 Einfluss Kryosphäre

Die Kryosphäre spielt durch ihren Einfluss auf den Oberflächenenergiehaushalt der Erde, den weltweiten Wasserkreislauf oder den Oberflächengasaustausch eine besonders wichtige Rolle für das weltweite Klima sowie den globalen mittleren Meeresspiegel der Erde [Vaughan et al., 2013a].

Unter Kryosphäre versteht man die Gesamtheit des fest vorkommenden Wassers, also Schnee, Eis und gefrorener Boden auf oder unter der Oberfläche der Erde oder der Ozeane. Dabei ist das meiste Eis in den Eisschilden von der Antarktis und Grönland gespeichert. Die Masse der Eisschilde der Antarktis ist dabei ungefähr achtmal größer als die von Grönland. Geschmolzen würde er einen äquivalenten Meeresspiegelanstieg (*Sea Level Equivalent*) (SLE) um 58.3 Metern bewirken, für den Eisschild in Grönland wären es 7.36 Meter. Zum Vergleich kommt die Gesamtheit aller Gletscher auf rund 41 Zentimeter, terrestrischer Permafrost auf 2-10 Zentimeter und der jährliche variable Schneefall je nach Jahr auf nur 1 bis 10 Millimeter SLE. Dabei ist die Lebensdauer der verschiedenen Komponenten sehr unterschiedlich. Während See- oder Flusseis sowie Schneefall in den mittleren Breiten meist in der Zeit bis zum Sommer schmilzt, geht man davon aus, dass der Eisschild auf der Ostantarktis bereits seit 14 Millionen Jahren stabil ist [Barrett, 2013]. Dabei reagieren alle Teile der Kryosphäre sehr sensitiv auf Änderungen der Lufttemperatur, des Niederschlages und dadurch auf Klimaänderungen.

Änderungen der Kryosphäre wiederum haben ebenfalls weitreichende Folgen für die Erde und die Menschen. Gletscher und Eisschilde bilden eine Schlüsselrolle für den globalen Meeresspiegelanstieg wie in dieser Arbeit verdeutlicht wird. Außerdem kann der rapide Verlust von Eismassen der Gletscher und Eisschilde globale Meeresströmungen sowie marine Ökosysteme verändern. Der Verlust von Gletschern nahe bewohnter Gebiete hat eine direkte Auswirkung auf die Wasserspeicher und den Tourismus der Region. Vielmehr wird ein Rückgang der Schneebedeckung und des Meereises den Effekt der globalen Erwärmung aufgrund von Eis-Albedo Effekten verstärken. Durch den Rückgang von eisreichen Permafrostböden kommt es zu einem Freisetzen von großen Mengen an Methan und somit zu einer wesentlichen Erhöhung der Treibhausgase [Ciais et al., 2013].

Eine genaue Beobachtung der Kryosphäre ist deshalb von immenser Bedeutung für das Verständnis der Erde. Im Folgenden werden Beobachtungsmethoden und Ergebnisse für Eisschilde und Gletscher kurz besprochen. Eine ausführliche Behandlung dieses Themas findet man im IPCC Report 2013, WG1, Kapitel 4 [Vaughan et al., 2013a].

### 2.3.1 Eisschilde

Unter einem Eisschild oder Inlandeis versteht man ein großes mit Eis bedecktes Gebiet. Es gibt zwei große Eisschilde, den grönländischen Eisschild und den antarktischen Eisschild. Der grönländische Eisschild bedeckt rund 1.71 Millionen Quadratkilometer mit einem Gesamtvolumen von 2.85 Millionen Kubikkilometern [Bamber, 2001]. Der antarktische Eisschild erstreckt sich über eine Fläche von 14 Millionen Quadratkilometern mit einem Volumen von 27 Millionen Kubikkilometern Eis [Fretwell et al., 2013]. Zur Beobachtung von Massenänderungen für die beiden Eisschilde in Grönland und der Antarktis gibt es im Wesentlichen drei unterschiedliche Methoden mit unterschiedlichen Stärken und Schwächen, welche von mehreren Forschungsgruppen durchgeführt werden:

- Massenbilanz: Dabei wird die Differenz zwischen Massenzufluss und Massenverlust berechnet. Massengewinn erfolgt meist durch Schneefall oder Niederschlag. Massenverlust tritt infolge von Schmelzen und Verdunstung auf. Gestützt werden diese Modelle oft mit in situ Messungen von meteorologischen Daten und Referenzmessungen.
- Altimetrie: wiederholte Altimetrie erlaubt die Messung von Oberflächenhöhenänderungen der Eisflächen. Sowohl klassische Radar- wie auch neuere Laser-Altimeter werden verwendet. Dabei treten sowohl für Radar- als auch für Lasermessungen einige Schwierigkeiten auf. Bei frühen Radarmessungen traf der Impuls auf eine große Fläche von 20 Kilometern Durchmesser, dem so genannten Footprint, auf. Außerdem dringt das Signal je nach Zusammensetzung des Schnees in den Untergrund ein. Beide Effekte machen die Interpretation der Daten schwierig. Für Laser Altimetrie ist der Footprint viel kleiner, er liegt für flugzeuggestützte Aufnahmen bei einem Meter, für Satelliten bei 60 Meter. Auch tritt kein Eindringen des Signals in den Boden auf. Dafür sind Messungen an bewölkten Tagen nicht möglich und die Genauigkeit wird durch die Atmosphäre stärker beeinflusst. Um aus den Oberflächenhöhenänderungen auf Massenänderungen zu schließen, ist Information über die Dichte der Schnee- und Eismassen nötig.
- Zeitliche Veränderungen im Gravitationsfeld der Erde: Seit 2002 misst die [GRACE](#) Mission das Gravitationsfeld der Erde. Aus diesen Daten lassen sich über monatliche Lösungen Änderungen des Schwerefeldes bestimmen. Diese Änderungen können direkt in Massenänderungen umgerechnet werden. Dabei liegt die räumliche Auflösung der Daten bei 300 Kilometern. Dabei variieren besonders Ergebnisse früherer Studien voneinander, einerseits aufgrund der zeitvariablen Natur des Si-

gnals, andererseits aber auch aufgrund von unterschiedlicher Prozessierung der Rohdaten und der abgeleiteten Massenänderungen sowie Kontamination der Daten infolge von GIA oder Massenänderungen außerhalb der Eisschilde wie Grundwasserspeicher und Ozeanströmungen [Vaughan et al., 2013a]. Kombiniert werden diese Messungen mit Globalen Navigationssatellitensystemen (*Global Navigation Satellite Systems*) GNSS, welche die Hebung der Landmassen infolge der Massenverluste bestimmen.

Für Grönland zeigen Ergebnisse zwischen Altimetriemessungen, Massenbilanzmodellen und GRACE Messungen Übereinstimmung. Dabei hat der Eisschild Grönlands seit den letzten zwei Jahrzehnten Masse verloren. Außerdem nimmt die Geschwindigkeit des Verlusts zu [Velicogna, 2009]. Die Werte der Massenverluste sind in Tabelle 4 aufgelistet. Bis 2005 war der größte Massenverlust im Südosten Grönlands, wobei sich das Maximum nach 2007 Richtung Westen verlagert, vergleiche Kapitel 5.1.1.

Für die Antarktis zeigen Messungen, dass besonders in Teilen der Westantarktis Massen verloren gehen. Für andere Gebiete herrschen große Unsicherheiten in Messungen von GRACE mit GNSS Daten. Grund dafür ist einerseits, dass der GIA Einfluss bei der Antarktis weniger genau bekannt ist und weil ein Großteil des Massenverlusts auf spontane dynamische Effekte, wie das spontane Abbrechen großer Eismassen, rückgeführt werden kann, vergleiche Abbildung 2. Die Massenverluste der Antarktis sind ebenfalls in Tabelle 4 aufgelistet. Kapitel 5.1.2 geht genauer auf die räumliche Verteilung der Massenverluste ein.

In Summe sind über beide Eisschilde im Zeitraum von 1992 bis 2011  $4260 \pm 1200$  Gigatonnen an Eismasse verloren gegangen. Das entspricht einem SLE von  $11.7 \pm 3.3$  Millimeter.

Tabelle 4: Massenverluste der Eisschilde inklusive Gletscherregionen, gemittelt aus 14 Studien für Grönland und 10 Studien für die Antarktis [Vaughan et al., 2013a].

Periode	Grönland			Antarktis		
	Gt/Jahr	mm/Jahr	SLE	Gt/Jahr	mm/Jahr	SLE
1993-2010	$-121 \pm 27$		$0.63 \pm 0.17$	$-97 \pm 38$		$0.41 \pm 0.20$
2005-2010	$-229 \pm 60$		$0.33 \pm 0.08$	$-147 \pm 73$		$0.27 \pm 0.11$

### 2.3.2 Gletscher

Unter Gletscher versteht man alle Flächen, die das ganze Jahr hindurch von Eis bedeckt sind und sich nicht im Gebiet der Eisschilde von Grönland und der Antarktis befinden. Die genaue Anzahl an Gletschern ist nicht exakt bekannt. Speziell die Trennung zwischen den Eisschilden und Gletschern ist schwierig. Für Grönland gibt es einen detaillierten Gletscherkatalog [Rastner et al., 2012], für die Antarktis ist eine saubere Trennung zwischen Gletscher und Eisschilde, speziell im Landinneren, noch nicht vorhanden. Insgesamt geht man von rund 170.000 Gletschern aus, die eine Fläche von rund 730.000 km<sup>2</sup> bedecken, vergleiche Tabelle 5. Das ist in etwa die gemeinsame Fläche von Deutschland, Polen und der Tschechischen Republik. Dabei liegen die meisten Gletscher in den Regionen der Antarktis, Kanada, der Himalaya Region, sowie in Alaska und Grönland. Abbildung 6 visualisiert die Standorte und Größe der Gletschergebiete.

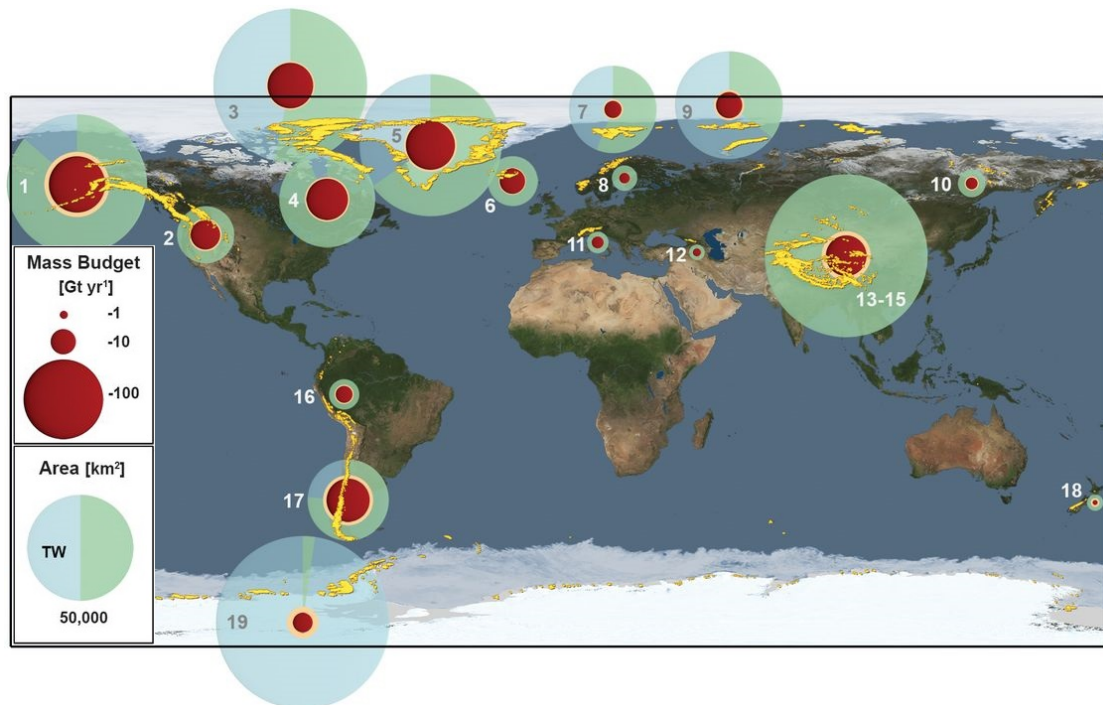


Abbildung 6: Übersicht über die Verteilung von Gletschern. Gelbe Flächen zeigen vergrößert die Standorte von Gletschern. Rote Kreise zeigen das Massenbudget zwischen 2003 und 2009 in Gigatonnen pro Jahr. Die orangen Ringe zeigen den 95% Konfidenzbereich für den Massenverlust. Die blassen grünen und blauen Kreise zeigen die Größe von Gletscherflächen für jede Region. Der Flächenanteil von Gletschern, die in den Ozean ragen, ist blau dargestellt. [Gardner et al., 2013].

Insgesamt liegen für diese große Menge an Gletschern nur sehr wenige detaillierte Messungen über die Dicke der Gletscher vor, die zum Kalibrieren von Modellen für die Bestimmung der globalen Gletschervolumen verwendet werden. Dadurch entstehen größere Ungenauigkeiten bei der Bestimmung des gesamten Gletschervolumens, wahrscheinlich liegt es zwischen 114.000 und 192.000 Gigatonnen, was 31,4 und 52,9 Millimeter [SLE](#) entspricht.

Zur Beobachtung von Gletschern wurden viele verschiedene Methoden entwickelt. Man unterscheidet dabei Beobachtungen von:

- **Längenänderungen:** Insgesamt werden rund 500 Gletscher weltweit meist jährlich gemessen. Dabei werden [GNSS](#), Luftbildaufnahmen oder Satellitenbilder verwendet, um Längenänderungen festzustellen. Es kommen aber auch historische Quellen wie Bilder zum Einsatz, um für einzelne Gletscher Längenänderungen über Zeiträume von bis zu 3000 Jahren zu rekonstruieren [[Holzhauser et al., 2005](#)]. Dabei wird ein über fast alle Gletscher sehr homogener Rückgang der Länge beobachtet. Für Gletscher in mittleren Breiten liegt der jährliche Rückgang durchschnittlich zwischen 5 und 20 Metern, es gibt aber auch Ausreißer wo ein durchschnittlicher jährlicher Rückgang von bis zu 125 Metern beobachtet wird.
- **Flächenänderungen:** Mit Hilfe von Satellitenbildern werden Flächenänderungen von einigen Tausend Gletschern beobachtet, deren Anzahl stetig steigt. Da satellitenbasierte Aufnahmen erst seit rund 40 Jahren verfügbar sind, werden auch Luftbildaufnahmen und alte Karten zum Vergleich verwendet. Dabei zeigt sich, dass für alle Regionen die Fläche an Gletschern stetig abnimmt und die Geschwindigkeit des Rückgangs in den letzten Jahren zugenommen hat [[Vaughan et al., 2013b](#)].
- **Volumen-/Massenänderungen:** Es gibt verschiedene Methoden zur Bestimmung von Massenänderungen für Gletscher. Traditionell wird die jährliche Oberflächenmassenbilanz aus wiederholten Schneedichtemessungen und Messungen der Zusammensetzung von Schnee und Eis entlang von Bohrprofilen bestimmt. Diese aufwändige Methode findet jedoch nur in wenigen gut zugänglichen Gletschern statt. Eine zweite Methode ist die Messung von Änderungen der Oberflächenhöhen. Die Information kommt aus dem Vergleich von digitalen Geländemodellen aus Flugzeug- oder Satellitenaltimetrie. Dabei ist das Problem die Umrechnung von Volumen zu Massenänderung, da dafür Dichteinformationen benötigt werden, die vor Ort gesammelt werden müssen. Eine dritte Methode zur Bestimmung der Gesamtmassenänderung ist die Messung des Erdschwerefeldes mit Satellitenmissionen wie

**GRACE.** Problem hierbei ist einerseits die grobe Auflösung von rund 300 Kilometern und die Trennung der Massenänderung von Gletschern und Grundwasserspeicherung sowie **GIA** [Gardner et al., 2013]. Eine vierte Methode basiert auf mathematischen Modellen, die entweder Längen- oder Flächenänderungen in Massenänderungen umrechnen, oder Zeitserien von meteorologischen Daten zur Simulation nutzen. Beim Vergleich der Ergebnisse unterschiedlicher Methoden zeigt sich, dass es eine Übereinstimmung zwischen Messungen von **GRACE** und Altimetrie in Bereichen mit großer Eisbedeckung gibt. In Regionen mit geringerer Eisbedeckung unterschieden sich die Ergebnisse stärker. Dies zeigt, dass **GRACE** Messungen nicht für kleine Gletscher verwendet werden können [Gardner et al., 2013].

Tabelle 5 listet die Massentrends der Gletscher, eingeteilt in 19 Regionen, auf. Insgesamt gingen in diesem Zeitraum 259 Gigatonnen an Eismasse verloren. Dabei entfallen 80% auf die Regionen der Kanadischen Arktis, Alaska, Grönland, den südlichen Anden und dem Himalaya. Die Antarktis und Sub-Antarktis sind fast im Gleichgewicht, was daraus folgt, dass in Teilen der Antarktis ein Massenverlust, in anderen Teilen jedoch eine Massenzunahme stattfindet, vergleiche Kapitel 5.1.2.

Tabelle 5: Fläche der Gletscherregionen und ihre Massentrends zwischen 2003 und 2009

	Region	km <sup>2</sup>	Gt/Jahr
1	Alaska	87100	-50 ± 17
2	West Kanada	14600	-14 ± 3
3	Kanadische Arktis (Nord)	104900	-33 ± 4
4	Kanadische Arktis (Süd)	40900	-27 ± 4
5	Grönland	89700	-38 ± 7
6	Island	11100	-10 ± 2
7	Spitzbergen	34000	-5 ± 2
8	Skandinavien	2900	-2 ± 0
9	Russische Arktis	51600	-11 ± 4
10	Nord Asien	3400	-2 ± 1
11	Zentral Europa	2100	-2 ± 0
12	Mittlerer Westen	1100	-1 ± 0
13-15	Himalaya Region	118200	-26 ± 12
16	Nördliche Anden	4100	-4 ± 1
17	Südliche Anden	29400	-29 ± 10
18	Neuseeland	1200	0 ± 1
19	Antarktis / Sub-Antarktis	133200	-6 ± 10
	<b>Gesamt</b>	<b>21</b>	<b>729400</b>
			<b>-259 ± 28</b>



### 3 Gravitationsfeld der Erde

Dieses Kapitel gibt einen kurzen Einblick über die Theorie des Erdschwerefeldes, wobei nur auf die in dieser Arbeit benötigten Teile eingegangen wird. Dabei folgt der Aufbau am Beginn einer Publikation von [Barthelemes \[2013\]](#). Für eine ausführlichere Behandlung dieses Themas sei auf entsprechende Fachliteratur wie [\[Blakely, 1996\]](#) oder [\[Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2005\]](#) verwiesen.

Der Ursprung in der Modellierung des Gravitationsfeldes der Erde liegt im Newtonschen Gravitationsgesetz. Das Potential  $W_a$  eines Körpers mit der Dichte  $\rho$  lässt sich in kartesischen Koordinaten mit dem Integral

$$W_a(x, y, z) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \quad (3.1)$$

über das Volumen  $\Omega$  der Masse bestimmen. Dabei bezeichnet  $G$  die Gravitationskonstante mit  $G = 6.672 \times 10^{-11} [\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]$ . Die Gravitationskonstante ist eine universelle Konstante, welche unabhängig von der stofflichen Zusammensetzung der Massen ist. Ihr Wert hängt allein von unserem willkürlichen Maßsystem ab.

Geht  $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \rightarrow \infty$  verhält sich das Potential  $W_a$  wie das Potential einer Punktmasse, welche im Massenschwerpunkt liegt und deren Masse der Gesamtmasse des Körpers entspricht. Es kann gezeigt werden, dass  $W_a$  innerhalb der Masse die Poissonsche Gleichung

$$\Delta W_a = -4\pi G\rho \quad (3.2)$$

erfüllt. Dabei bezeichnet  $\Delta$  den Differentialoperator 2. Stufe, genannt Laplace Operator. Mit der Abkürzung Nabla  $\nabla$  für den Differenzoperator 1. Stufe ergibt sich der Laplace Operator folgendermaßen  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ .

Außerhalb der Masse erfüllt das Potential  $W_a$  die Laplace Gleichung.

$$\Delta W_a = 0 \quad (3.3)$$

Infolge dessen handelt es sich bei  $W_a$  um eine harmonische Funktion für den Außenraum [\[Blakely, 1996\]](#).

Auf einer rotierenden Erde tritt zusätzlich zur Anziehungskraft auch die Zentrifugalkraft auf, welche durch ihr Zentrifugalpotential  $\Phi$  beschrieben werden kann,

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}\omega^2 d_z^2 \quad (3.4)$$



wobei  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ist und  $d_z = \sqrt{x^2 + y^2}$  die Distanz zur Rotationsachse, die z-Achse, beschreibt. Somit ergibt sich das Schwerefeld der Erde  $W$  in einem erdfesten Bezugssystem als die Summe des Anziehungspotentials und des Zentrifugalpotentials.

$$W(x, y, z) = W_a(x, y, z) + \phi(x, y, z) \quad (3.5)$$

Dabei macht das Zentrifugalpotential nur etwa 1/300 der Gravitationsbeschleunigung aus.

Der zugehörige Kraftvektor, der auf die Einheitsmasse wirkt, wird Schwerebeschleunigungsvektor  $\vec{g}$  genannt. Man berechnet ihn über den Gradienten des Potentials.

$$\vec{g} = \nabla W \quad (3.6)$$

Der Betrag des Schwerebeschleunigungsvektors ist die Schwerebeschleunigung  $g$ .

$$g = |\vec{g}| \quad (3.7)$$

Potentiale können durch ihre Niveau- oder Äquipotentialflächen beschrieben werden. Aus der Theorie von harmonischen Funktionen ist bekannt, dass die Kenntnis einer Äquipotentialfläche genügt, um die gesamte harmonische Funktion außerhalb der Fläche zu beschreiben.

Das bedeutet, dass die Dichteverteilung im Erdinneren nicht benötigt wird. Für die Erde ist das Geoid als eine solche ausgezeichnete Äquipotentialfläche von besonderer Bedeutung. Aus allen Äquipotentialflächen ist das Geoid jene, die im Mittel mit der Meeresoberfläche, genauer der Meeresoberfläche, welche sich im statischen Gleichgewicht befindet, zusammenfällt, wobei man sich ihre Ausdehnung unter den Kontinenten hindurch fortgesetzt vorstellt [[Hofmann-Wellenhof and Moritz, 2005](#)].

Da das Geoid eine Niveaufäche ist, steht in jedem Punkt die Schwerebeschleunigung lotrecht auf das Geoid. Jedoch ist der Betrag der Schwerebeschleunigung nicht notwendigerweise gleich. Um das Geoid im Raum zu definieren, muss der korrekte Wert  $W_0$  für das Potential  $W$  gewählt werden.

$$W(x, y, z) = W_0 = \text{konstant} \quad (3.8)$$

Üblicherweise splittet man das Erdschwerefeld  $W$  in ein Normalschwerefeld  $U$  und ein Störpotential  $T$  auf

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z) \quad (3.9)$$

Dabei wird ein Rotationsellipsoid als Niveauläche  $U_0$  des Normalschwerefeldes  $U$  angenommen  $U(x, y, z) = U_0$ . Dieses Niveuellipsoid soll die Normalfigur des Geoids sein, welches selbst eine Niveauläche des tatsächlichen Schwerefeldes ist. Wesentlich ist, dass durch die Vorgabe der Gesamtmasse  $E$  und durch das Ellipsoid als Normalfläche das Normalpotential  $U$  vollständig beschrieben ist. Die große Halbachse des Niveuellipsoids wird derart gewählt, dass das Integral der Normalabstände zwischen Ellipsoid und Geoid verschwindet. Somit hat das Niveuellipsoid dasselbe Volumen wie das Geoid und dasselbe Potential  $W_0 = U_0$ , wobei das Potential  $W_0$  im tatsächlichen Schwerefeld und das Potential  $U_0$  im theoretischen Schwerefeld des Niveuellipsoides festgelegt wird.

Das Niveuellipsoid wird dabei über folgende Größen definiert [Moritz, 1980].

Äquatorradius	$a$	6378137	[m]
geozentrische Gravitationskonstante	$GE$	$3.986005 \cdot 10^{14}$	[m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup> ]
dynamischer Formfaktor	$J_2$	$108263 \cdot 10^{-8}$	
Winkelgeschwindigkeit	$\omega$	$7.292115 \cdot 10^{-5}$	[rad s <sup>-1</sup> ]

Aus dem dynamischen Formfaktor lässt sich die Abplattung des Ellipsoides rückrechnen.

Es ist vorteilhaft, Ellipsoidkoordinaten  $(h, \lambda, \phi)$  zur Beschreibung der Potentiale zu verwenden, wobei die Höhe des Ellipsoides  $U(h = 0) = U_0 = W_0$  als Referenz dient. Somit beschreibt  $h$  die Höhe über dem Ellipsoid, welche entlang der Ellipsoidnormalen gemessen wird.  $\lambda$  ist die ellipsoidische Länge und  $\phi$  die ellipsoidische Breite.

Der Gradient des Normalpotentials nennt man den Normalschwerevektor  $\vec{\gamma}$ .

$$\nabla U = \vec{\gamma} \tag{3.10}$$

Der Betrag des Normalschwerevektors  $\vec{\gamma}$  ist die Normalschwere  $\gamma$ , welche sich am Niveuellipsoid über die Formel von Somigliana berechnen lässt.

$$\gamma(\phi) = |\nabla U(h = 0, \phi)| = \frac{\gamma_a a \cos^2 \phi + \gamma_b b \sin^2 \phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}} \tag{3.11}$$

Dabei sind  $\gamma_a$  und  $\gamma_b$  Konstanten,  $\gamma_a = 9.7803267715$  [m/s<sup>2</sup>] ist die Normalschwere am Äquator und  $\gamma_b = 9.8321863685$  [m/s<sup>2</sup>] die Normalschwere an den Polen. Die Abkürzungen  $a$  und  $b$  stehen für die Halbachsen des Ellipsoides.

Da das Niveuellipsoid rotationssymmetrisch ist und somit nicht von der Länge  $\lambda$  abhängt, kann man Gleichung (3.9) folgendermaßen schreiben:

$$W(h, \lambda, \phi) = U(h, \phi) + T(h, \lambda, \phi) \tag{3.12}$$

Das Geoid ist in ellipsoidischen Koordinaten die Äquipotentialfläche für die gilt

$$W(h = N(\lambda, \phi), \lambda, \phi) = U(h = 0, \phi) = U_0 \quad (3.13)$$

wobei  $N(\lambda, \phi)$  die Repräsentation des Geoids, ausgedrückt als Höhen, bezogen auf das Niveauellipsoid  $U = U_0$  ist. Man nennt  $N$  die Geoidundulation, welche die Höhe der Oberfläche des Geoids bezüglich des Niveauellipsoides beschreibt. Sie kann aus dem wichtigen Theorem von Bruns berechnet werden. Man versteht darunter den Vergleich der wahren Niveaufläche  $W = W_0$  mit dem Niveauellipsoid desselben Potentialwertes.

$$N = \frac{T_P}{\gamma_Q} \quad (3.14)$$

Dabei stehen  $T_P$  für den Wert des Störpotentials am Geoid und  $\gamma_Q$  für den Wert der Normalschwere am Ellipsoid. Das Störpotential  $T_P$  ist bestimmend für die Hebung und Senkung des Geoids, da der Wert der theoretischen Schwere nur um 0.5% über die gesamte Erde variiert.

Abbildung 7 visualisiert das Geoid durch ihre Geoidundulation  $N$ .

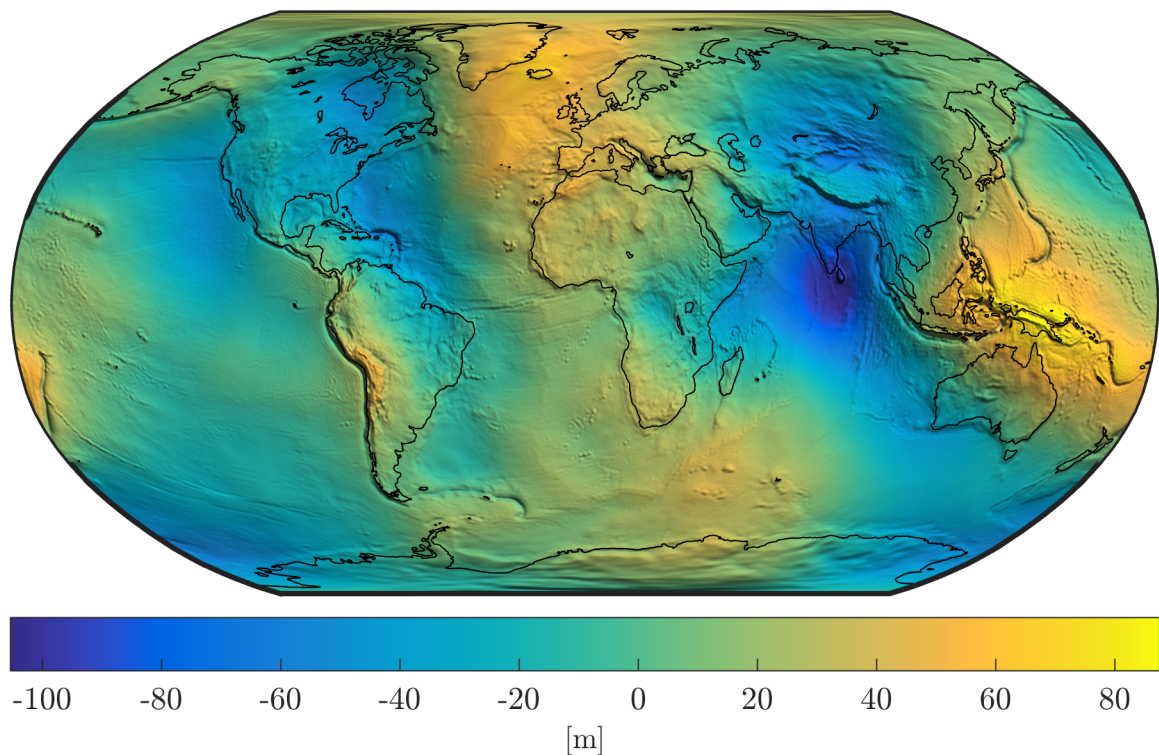


Abbildung 7: Visualisierung des Geoids durch Geoidundulation  $N$

Somit kann die Höhe eines Punktes bezüglich zweier Referenzflächen, dem Geoid und dem Niveauellipsoid beschrieben werden. Bezeichnet man die Höhe über dem Geoid mit  $H$  und die Höhe über dem Ellipsoid mit  $h_t$  gilt folgender Zusammenhang

$$h_t(\lambda, \phi) = N(\lambda, \phi) + H(\lambda, \phi) \quad (3.15)$$

Gleich wie das Schwerefeld  $W$  besteht auch das Normalpotential  $U$  aus einem Anziehungspotential  $U_a$  und einem Fliehkraftpotential  $\Phi$ .

$$U = U_a + \Phi \quad (3.16)$$

Daraus folgt, dass für das Störpotential keine Fliehkraftkomponente mehr vorhanden ist und es außerhalb der Masse harmonisch ist.

$$T(h, \lambda, \phi) = W_a(h, \lambda, \phi) - U_a(h, \phi) \quad (3.17)$$

### 3.1 Kugelflächenfunktionen

Die Kugelfunktionen spielen eine überragende Rolle in der Geodäsie zur Darstellung des Schwerefeldes der Erde. Dabei werden orthogonale harmonische Polynome  $P_n(x, y, z)$  gesucht, welche homogen in den Variablen  $x, y, z$  sind und die Laplace Gleichung (3.3) erfüllen, für die also gilt:

$$\Delta P_n(x, y, z) = \frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_n}{\partial z^2} = 0 \quad (3.18)$$

Homogen bedeutet, dass wenn man bei einer Funktion von beliebig vielen Elementen alle Elemente mit einem konstanten Faktor  $k$  multipliziert, sich die Funktion mit  $k^n$  multipliziert. Dabei bezeichnet  $n$  den Grad der Homogenität in den Veränderlichen.

$$P_n(kx, ky, kz) = k^n P_n(x, y, z) \quad (3.19)$$

Diese Funktionen sollen als Bausteine dienen, um durch Linearkombination wesentlich kompliziertere harmonische Funktionen  $V$  zu approximieren.

Man transformiert das Problem auf Kugelkoordinaten mit der Poldistanz  $\vartheta$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \lambda \\ \sin \vartheta \sin \lambda \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Somit ergeben sich unter Berücksichtigung von Gleichung (3.19) neue Polynome mit den Argumenten  $(r, \vartheta, \lambda)$ ,

$$P_n(x, y, z) = r^n P_n(\sin \vartheta \cos \lambda, \sin \vartheta \sin \lambda, \cos \vartheta) \quad (3.21)$$

welche räumliche Kugelfunktionen genannt werden. Betrachtet man diese Polynome auf der Einheitskugel mit  $r = 1$  spricht man von Kugelflächenfunktionen, kurz Laplacesche Ypsilon  $Y_n(\vartheta, \lambda)$ .

$$P_n(\sin \vartheta \cos \lambda, \sin \vartheta \sin \lambda, \cos \vartheta) = Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (3.22)$$

Zur Bestimmung der Laplaceschen Ypsilons muss man sie in die Laplacesche Differentialgleichung (3.3) einsetzen und anschließend lösen. Dazu ist es nötig, den zu untersuchenden Ausdruck  $\Delta V(x, y, z)$  auf Kugelkoordinaten zu transformieren  $\Delta V(x, y, z) \rightarrow \Delta V(r, \vartheta, \lambda)$ , woraus sich die Laplace Gleichung in sphärischen Koordinaten ergibt

$$r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (3.23)$$

welche mittels Separationsansatz

$$V(r, \vartheta, \lambda) = f(r) \cdot Y_n(\vartheta, \lambda) \quad (3.24)$$

gelöst werden kann. Für eine ausführliche Lösung dieser und der folgenden Gleichungen ist auf entsprechende Fachliteratur wie [Blakely, 1996] verwiesen. Daraus folgen für die Funktion  $f(r)$  die folgenden zwei unabhängigen Lösungen:

$$f_1(r) = r^n \quad \text{und} \quad f_2(r) = \frac{1}{r^{n+1}} \quad (3.25)$$

Für uns ist nur der zweite Fall  $f_2(r)$  von Interesse, da dieser für den Außenraum mit  $r > 1$  konvergiert, wohingegen  $f_1(r)$  für  $r > 1$  divergiert. Kennt man von einer linearen Differentialgleichung mehrere partikuläre Lösungen, so sind auch Linearkombinationen von Partikulärlösungen eine Lösung der Differentialgleichung und es gilt:

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n Y_n(\vartheta, \lambda) \quad \text{und} \quad V(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\vartheta, \lambda)}{r^{n+1}} \quad (3.26)$$

Für die Laplaceschen Ypsilons  $Y_n(\vartheta, \lambda)$  ergeben sich nach neuerlichem Separationsansatz

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = g(\vartheta)h(\lambda) \quad (3.27)$$

die beiden unabhängigen Lösungen der Funktion  $h(\lambda)$ , nämlich  $h_1(\lambda) = \cos(m\lambda)$  und  $h_2(\lambda) = \sin(m\lambda)$ . Für die Funktion  $g(\vartheta)$  ergeben sich unter anderem die zugeordneten Legendreschen Funktionen  $P_{nm}(\cos \vartheta)$  als Lösung.

Da, wie bereits erwähnt, eine Linearkombination aus Partikulärlösungen einer Differentialgleichung wieder eine Lösung der Differentialgleichung ist, hat die allgemeine Lösung von  $Y_n(\vartheta, \lambda)$  die Gestalt:

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [A_{nm}P_{nm}(\cos \vartheta) \cos(m\lambda) + B_{nm}P_{nm}(\cos \vartheta) \sin(m\lambda)] \quad (3.28)$$

Dabei nennt man die Koeffizienten der Linearkombination  $A_{nm}$  und  $B_{nm}$  die Stokes-Koeffizienten.  $n$  nennt man den Grad und  $m$  die Ordnung. In den Stokes-Koeffizienten steckt die Massenverteilung der Erde.

Somit ergibt sich durch Einsetzen der Lösung von (3.28) und der zweiten Lösung von (3.25) in (3.24) die Entwicklung einer harmonischen Funktion  $V$  nach Kugelfunktionen als

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [A_{nm}P_{nm}(\cos \vartheta) \cos(m\lambda) + B_{nm}P_{nm}(\cos \vartheta) \sin(m\lambda)] \quad (3.29)$$

wobei es vorteilhaft ist folgende Abkürzungen zu verwenden

$$\left. \begin{array}{l} C_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ S_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right\} = P_{nm}(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{array} \right. \quad (3.30)$$

wodurch sich Gleichung (3.28) und (3.29) kompakter umschreiben lassen zu

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [A_{nm}C_{nm}(\vartheta, \lambda) + B_{nm}S_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (3.31)$$

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n [A_{nm}C_{nm}(\vartheta, \lambda) + B_{nm}S_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (3.32)$$

### 3.2 Legendre Funktionen

Die zugeordneten Legendre Funktionen  $P_{nm}(\cos \vartheta)$  berechnen sich nach Substitution von  $\cos \vartheta \rightarrow t$  mit folgender Formel:

$$P_{nm}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2-1)^n \quad (3.33)$$

Eine Sonderstellung nehmen die Fälle  $m = 0$  ein. Dadurch vereinfacht sich Formel (3.33) zur Formel von Rodrigues

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \quad (3.34)$$

mit welcher sich die Legendreschen Polynome berechnen lassen. Üblicherweise wird dabei der Index  $m = 0$  weggelassen.

Im Folgenden werden die ersten 5 Legendre Polynome mit dem Argument ( $t$ ) aufgelistet.

$$P_0(t) = 1 \quad (3.35)$$

$$P_1(t) = t \quad (3.36)$$

$$P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \quad (3.37)$$

$$P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \quad (3.38)$$

$$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3) \quad (3.39)$$

Abbildung 8 zeigt sie mit dem in der Geodäsie verwendeten Argument ( $\cos \vartheta$ ). Abbildung 9 zeigt die zugeordneten Legendre Polynome bis Grad 2.

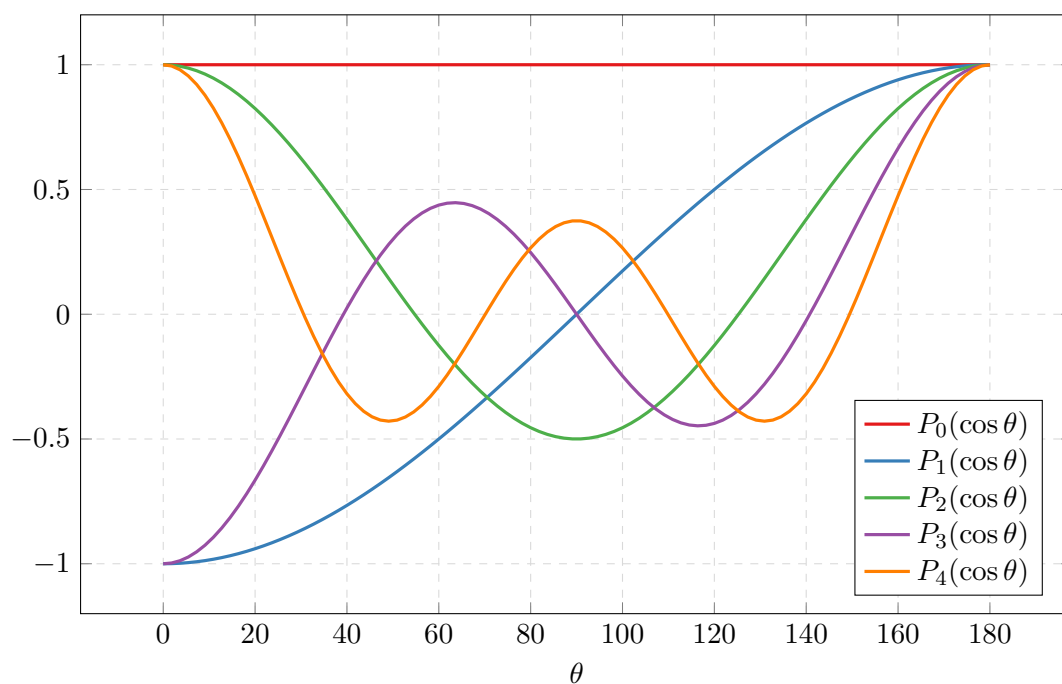


Abbildung 8: Die ersten fünf Legendre Polynome mit dem Argument  $\cos \theta$

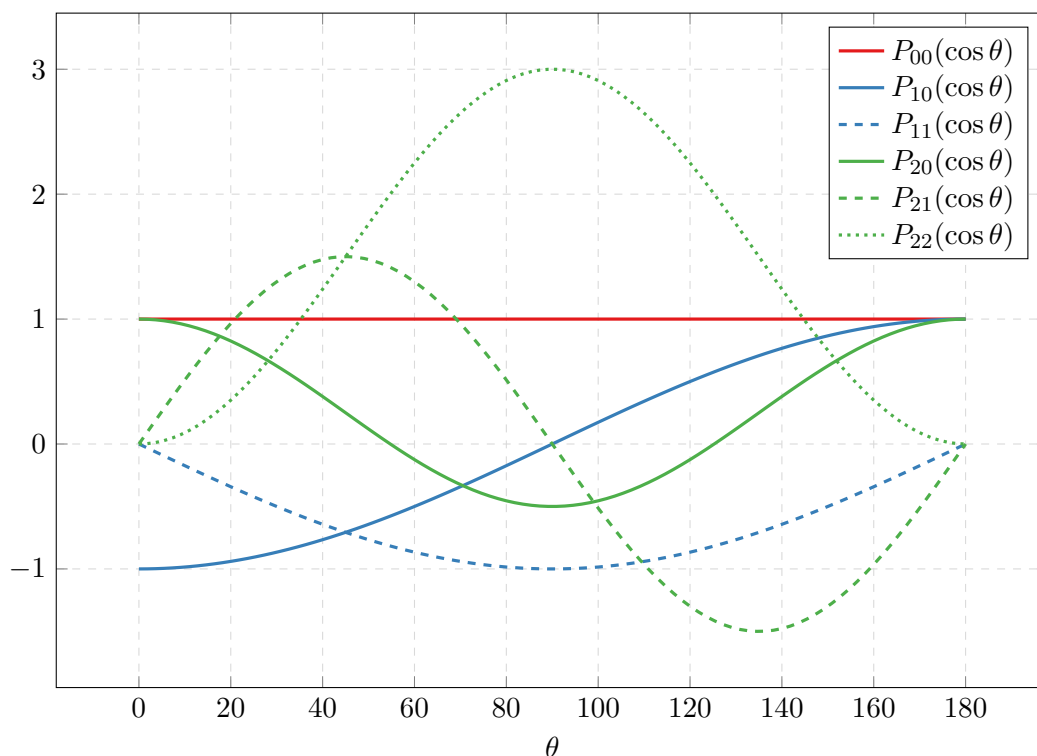


Abbildung 9: Die ersten zugeordneten Legendre Polynome

### 3.3 Klassifikation der Kugelfunktionen

Man unterscheidet drei Arten von Kugelflächenfunktionen. Kugelfunktionen mit der Ordnung  $m = 0$  nennt man zonale Kugelfunktionen. Sie sind nur von der Poldistanz  $\vartheta$  abhängig. Es gibt  $n$  Nullstellen, die entlang von Parallelkreisen verlaufen. Ist die Ordnung  $m \neq 0$  und  $m \neq n$  spricht man von tesseralen Kugelfunktionen. Diese bilden ein schachbrettartiges Muster auf sphärischen Vierecken mit alternierenden Vorzeichen. Entlang der Parallelkreise haben die Funktionen  $\cos(m\lambda)$  und  $\sin(m\lambda)$  insgesamt  $2m$  Nullstellen. Entlang der Meridiane haben die Funktionen  $P_{nm}(\cos \vartheta)$  genau  $n - m$  Nullstellen. Im Sonderfall  $n = m$  treten nur mehr  $2m$  Nullstellen entlang der Meridiane auf, man nennt diese sektorielle Kugelfunktionen. In [Abbildung 10](#) ist ein Beispiel für zonale-, tesserale- und sektorielle Kugelflächenfunktionen dargestellt. [Abbildung 11](#) zeigt die Kugelflächenfunktionen bis Grad und Ordnung 2.





Abbildung 10: Arten von Kugelflächenfunktionen. Zum besseren Verständnis wird nur das Signum der Funktion dargestellt. Links: sektorielle Kugelflächenfunktion  $n = 10$ ,  $m = 0$ . Mitte: tesserale Kugelflächenfunktion  $n = 17$ ,  $m = 8$ . Rechts: sektorielle Kugelflächenfunktion  $n = 9$ ,  $m = 9$

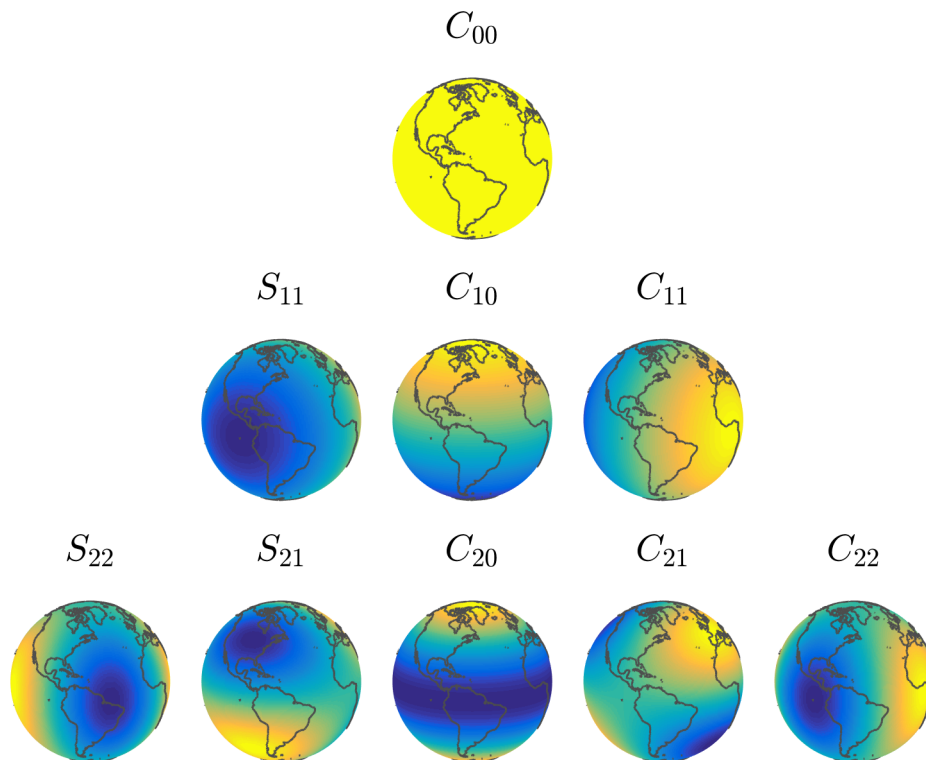


Abbildung 11: Kugelflächenfunktionen bis Grad und Ordnung 2

Die Kugelflächenfunktionen mit Grad Eins  $C_{10}, C_{11}, S_{11}$  sind direkt mit der Wahl des Ursprungs des Koordinatensystems verbunden, wie man in Abbildung 11 sieht. Fällt der Ursprung mit dem Massenschwerpunkt der Erde zusammen, entfallen die Terme ersten Grades in der Kugelfunktionsentwicklung. Der Koeffizient  $C_{20}$  beschreibt die Abplattung der Erde an den Polen und die Koeffizienten  $C_{22}, S_{22}$  beschreiben die äquatoriale Abplattung der Erde. Außerdem gibt es eine direkte Verbindung der Koeffizienten  $C_{21}, S_{21}$  mit der mittleren Rotationsachse der Erde [Barthelemes, 2013].

### 3.4 Kugelfunktionen und Erdschwerefeld

Man kann alle auf einer Kugel gegebenen Funktionen nach Kugelflächenfunktionen entwickeln.

$$f(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [A_{nm}C_{nm}(\vartheta, \lambda) + B_{nm}S_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (3.40)$$

Dies ist besonders wichtig, wenn die Funktion nur aus Messungen an diskreten Punkten gegeben ist, was in der Regel zutrifft. Dann sind die Stokes-Koeffizienten  $A_{nm}$  und  $B_{nm}$  von der Funktion abhängig. Zur Berechnung der Koeffizienten wird die Orthogonalitätseigenschaft der Kugelfunktionen ausgenutzt. Um die Koeffizienten eines bestimmten Grades und Ordnung zu erhalten multipliziert man Gleichung (3.40) mit der entsprechenden Kugelflächenfunktion und integriert über die Einheitskugel.

$$A_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\Sigma} f(\vartheta, \lambda) C_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma \quad (3.41)$$

$$B_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \iint_{\Sigma} f(\vartheta, \lambda) S_{nm}(\vartheta, \lambda) d\sigma \quad (3.42)$$

Dabei bezeichnet  $\Sigma$  die Oberfläche der Kugel und  $d\sigma$  das Oberflächenelement.

Praktisch führt der Nenner  $(n+m)!$  sehr rasch zu sehr kleinen Werten, was zu numerischen Problemen führen kann. Dem wird durch die Einführung von vollständig normierten Kugelfunktionen entgegengewirkt.

$$\bar{P}_n(\cos \vartheta) = \sqrt{2n+1} P_n(\cos \vartheta) \quad (3.43)$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{array} \right\} = \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \left\{ \begin{array}{l} C_{nm} \\ S_{nm} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Dabei ändern sich natürlich auch die Werte der Stokes-Koeffizienten, welche infolge auch durch einen Querstrich gekennzeichnet werden  $A_{nm}, B_{nm} \rightarrow \bar{A}_{nm}, \bar{B}_{nm}$ .

Mit vollständig normierten Kugelfunktionen lässt sich das Gravitationsfeld der Erde

in Kugelkoordinaten, genauer das Anziehungspotential  $W_a(r, \vartheta, \lambda)$ , wie folgt darstellen:

$$W_a(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n [\bar{A}_{nm} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{B}_{nm} \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (3.45)$$

Äquivalent dazu ist die Schreibweise

$$W_a(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [\bar{A}_{nm} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{B}_{nm} \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (3.46)$$

dabei wurde folgende Notation verwendet

$r, \vartheta, \lambda$	–	sphärische Koordinaten des Aufpunktes
$R$	–	Referenzradius
$GM$	–	Produkt von Gravitationskonstante und Erdmasse
$n, m$	–	Grad und Ordnung der Entwicklung
$\bar{A}_{nm}, \bar{B}_{nm}$	–	Vollständig normierte Stokes-Koeffizienten

Praktisch ist ein Durchführen einer Kugelfunktionsentwicklung bis  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  nicht möglich, weshalb die Entwicklung nach einem bestimmten  $n_{max}$  abgebrochen werden muss. Dabei besteht eine Entwicklung bis Grad  $n_{max}$  aus  $(n_{max} + 1)^2$  Stokes-Koeffizienten. Somit ist die Genauigkeit der Kugelfunktionsentwicklung einerseits von der Genauigkeit der Stokes-Koeffizienten, aber auch vom maximalen Entwicklungsgrad abhängig. Genauer gibt der maximale Entwicklungsgrad die räumliche Auflösung der Entwicklung vor. Abbildung 12 zeigt eine Berechnung der Geoidundulation mit verschiedenen maximalen Entwicklungsgraden.

Natürlich kann man auch das Normalschwerefeld  $U_a$  und das Störpotential  $T$  nach Kugelfunktionen entwickeln. Bezeichnet man die Stokes-Koeffizienten des Erdschwerefelds mit  $A_{nm}^W, B_{nm}^W$ , des Normalschwerefelds mit  $A_{nm}^U, B_{nm}^U$  und des Störpotentials mit  $A_{nm}^T, B_{nm}^T$ , gilt analog zu Formel (3.17) folgender Zusammenhang:

$$A_{nm}^T = A_{nm}^W - A_{nm}^U \quad \text{und} \quad B_{nm}^T = B_{nm}^W - B_{nm}^U \quad (3.47)$$

Aufgrund der Rotationssymmetrie kommt für die Beschreibung des Normalschwerefelds  $U$  nur eine Linearkombination aus zonalen Kugelflächenfunktionen in Frage, was automatisch alle  $S_{nm}^U$  ausschließt. Außerdem treten aufgrund der Symmetrie bezüglich der Äquatorebene nur gerade Stokes-Koeffizienten auf, vergleiche  $C_{20}$  in Abbildung 11. Praktisch reicht es für die Berechnung des Normalschwerefeldes, wenn man nur die Koeffizien-

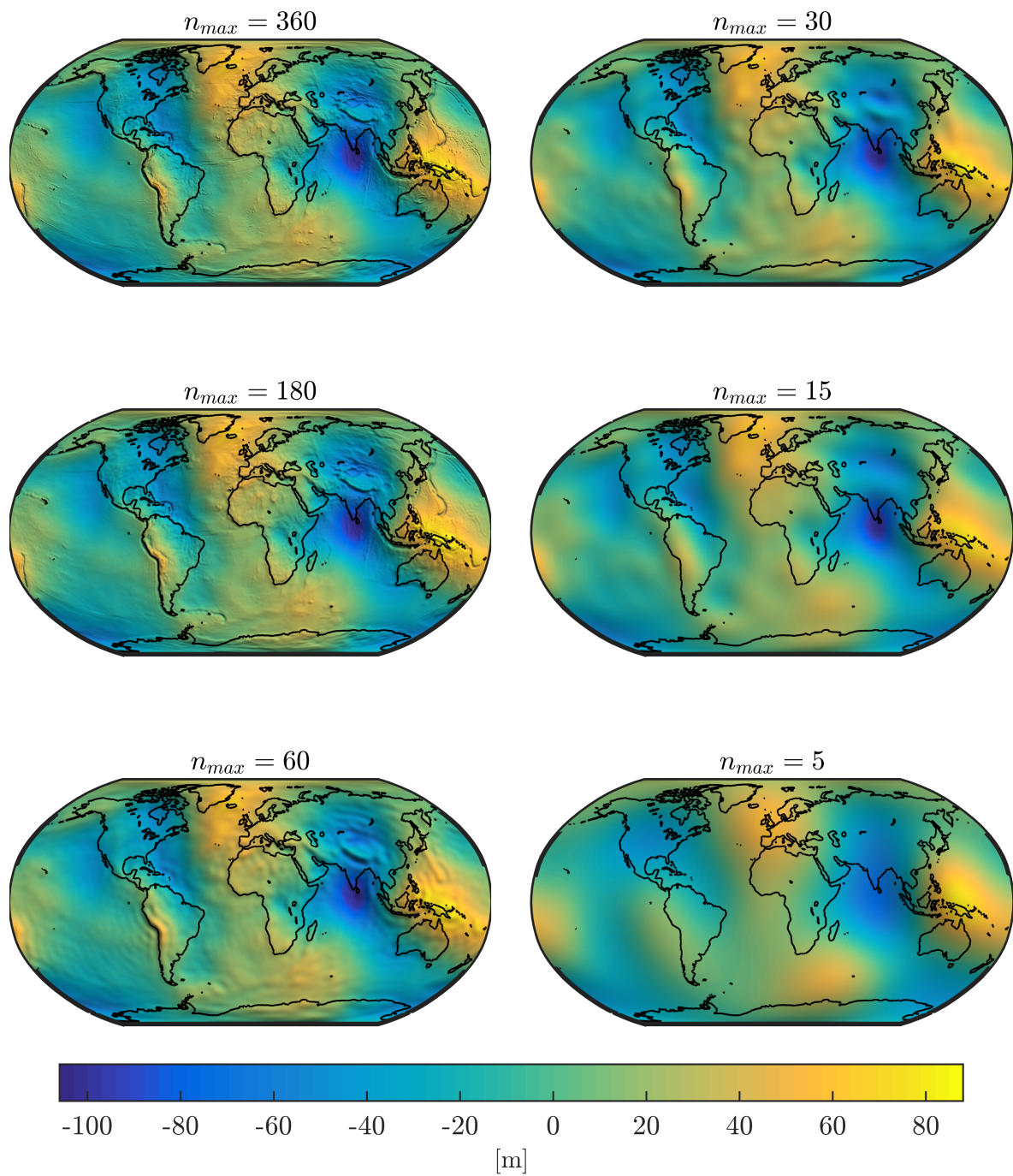


Abbildung 12: Räumliche Auflösung von Kugelfunktionsentwicklungen mit unterschiedlichen Entwicklungsgraden  $n_{max}$ . Die Anzahl der Koeffizienten ist in Tabelle 6 aufgelistet

ten  $A_{00}^U$ ,  $A_{20}^U$ ,  $A_{40}^U$ ,  $A_{60}^U$  und vielleicht  $A_{80}^U$  verwendet. Somit ergibt sich das Störpotential entwickelt nach Kugelfunktionen, analog Gleichung (3.46), zu

$$T(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=2}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [\bar{A}_{nm}^T \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{B}_{nm}^T \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (3.48)$$

Dabei wird angenommen, dass die Werte für  $GM$  und  $R$  für das Erdschwerefeld  $W$  und das Normalschwerefeld  $U$  identisch sind. Ist das nicht der Fall, ist eine Umrechnung der Stokes-Koeffizienten mittels

$$A_{nm}^U = \hat{A}_{nm}^U \frac{GM^U}{GM^W} \left(\frac{R^U}{R^W}\right)^n \quad (3.49)$$

notwendig, wobei  $\hat{C}_{nm}^U$  die Stokes-Koeffizienten bezüglich der Werte  $GM^U$  und  $R^U$  sind.

Jede Entwicklung nach Kugelfunktionen mit einem maximalen Grad  $n_{max} < \infty$  verhält sich wie ein Tiefpassfilter. Dabei bestimmt  $n_{max}$  die räumliche Auflösung auf der Erdoberfläche. Ein einfacher Weg, das kleinste darstellbare Signal, oder in anderen Worten die kleinste halbe Wellenlänge  $\psi_{min}$ , als sphärische Distanz auszudrücken, erfolgt über folgende Formel:

$$\psi_{min}(n_{max}) \approx \frac{\pi R}{n_{max}} \quad (3.50)$$

Diese Formel basiert auf der Anzahl an möglichen Nullstellen am Äquator.

Nach [Barthelemes, 2013] erfolgt eine bessere Methode zur Bestimmung der räumlichen Auflösung mittels Formel

$$\psi_{min}(n_{max}) \approx 4 \arcsin \left( \frac{1}{n_{max} + 1} \right) \quad (3.51)$$

Hintergrund ist, dass man die Oberfläche einer Kugel in so viele Teile, wie es Koeffizienten in der Kugelfunktionsentwicklung gibt, aufteilt. Anschließend wird der Durchmesser einer Kugelkappe gesucht, welcher genau dieser Fläche entspricht. Tabelle 6 gibt Beispiele für die räumliche Auflösung und die Anzahl an Stokes-Koeffizienten für verschiedene  $n_{max}$  an. Man sieht, dass die Anzahl an Koeffizienten mit steigendem Entwicklungsgrad stark ansteigt.

Es sei erwähnt, dass man oft an den Werten des Potentials an der Erdoberfläche interessiert ist, es gilt also  $r = R$ .

Liegt eine Entwicklung des Störpotentials als Kugelfunktion  $T(r, \vartheta, \lambda)$  vor, wie in Gleichung (3.48), so kann man über das Theorem von Bruns (3.14) die Geoidundulation bestimmen. Dabei gilt für die Normalschwere in sphärischer Näherung  $\gamma = GM/R^2$ .

Tabelle 6: Beispiele der räumlichen Auflösung von Kugelfunktionsentwicklungen nach Gleichung (3.50) und (3.51).  $\sum(n_{max})$  gibt die Gesamtanzahl an Stokes-Koeffizienten für den Entwicklungsgrad  $n_{max}$  an.

$n_{max}$	$\sum(n_{max})$	$\psi_{min}$ infolge (3.50)		$\psi_{min}$ infolge (3.51)	
		[°]	[km]	[°]	[km]
2	9	90.000	10000.000	77.885	8653.876
5	36	36.000	4000.000	38.376	4264.030
10	121	18.000	2000.000	20.864	2318.182
15	256	12.000	1333.333	14.333	1592.587
30	961	6.000	666.667	7.394	821.587
36	1369	5.000	555.556	6.195	688.321
40	1681	4.500	500.000	5.590	621.154
45	2116	4.000	444.444	4.983	553.626
50	2601	3.600	400.000	4.494	499.342
75	5776	2.400	266.667	3.016	335.073
90	8281	2.000	222.222	2.519	279.888
180	32761	1.000	111.111	1.266	140.690
360	130321	0.500	55.556	0.635	70.540
500	251001	0.360	40.000	0.457	50.828
1000	1002001	0.180	20.000	0.229	25.439
2000	4004001	0.090	10.000	0.115	12.726
5000	25010001	0.036	4.000	0.046	5.092
10000	100020001	0.018	2.000	0.023	2.546

Somit folgt als gute Näherung der Geoidundulation

$$N(\vartheta, \lambda) = \frac{R^2}{GM} T(r = R, \vartheta, \lambda) \tag{3.52}$$

oder mit Einsetzen von (3.48) in Gleichung (3.52):

$$N(\vartheta, \lambda) = R \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n [\bar{A}_{nm}^T \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{B}_{nm}^T \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)] \tag{3.53}$$

Bisher wurde nur die direkte Wirkung des Gravitationsfelds behandelt. Will man jedoch Massenverlagerungen beschreiben, kommt es notwendigerweise zu einer sich ändernden Auflast der festen Erde und somit zu einer vertikalen und radialen Verformung der Erde. Dadurch kommt es erneut zu einer Änderung des Gravitationspotentials, die man als indirekten Effekt  $\delta W$  bezeichnet. Die Änderung des Gravitationspotentials wird

durch

$$\delta W(\vartheta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n k'_n [\bar{A}_{nm} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{B}_{nm} \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (3.54)$$

beschrieben [Peters, 2007]. Dabei sind  $k'_n$  die Love-Zahlen des indirekten Effektes. Diese liegen tabellarisch, zum Beispiel bei [Farrell, 1972] vor. Dabei ergibt sich eine Vertikaldeformation von

$$\Delta h = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{h'_n}{1 + k'_n} [\bar{A}_{nm} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) + \bar{B}_{nm} \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda)] \quad (3.55)$$

$h'_n$  bezeichnet die jeweilige Love-Zahl der Vertikaldeformation [Farrell, 1972]. Interessant ist, dass sich über Gleichung (3.55) ein direkter Zusammenhang zwischen den mittels GNSS messbaren Höhenänderungen  $\Delta h$  und den mit GRACE bestimmbaren Schwereänderungen  $A_{nm}, B_{nm}$  herstellen lässt.

Oft werden im Umgang mit hydrologischen oder ozeanischen Daten Schwerevariationen in der Einheit äquivalente Wassersäule (*Equivalent Water Height*) (EWH) angegeben. Dabei handelt es sich um den Druck  $p$  den eine bestimmte Wasserhöhe  $h$  der Dichte  $\rho$  über eine gewisse Fläche aufgrund der Schwerkraft  $g$  ausübt, für den also gilt  $p = h\rho g$ . Zur näherungsweisen Umrechnung von Änderungen der Geoidundulation  $\Delta N$  kann man folgende Faustformel verwenden: 1 [mm]  $\Delta N \approx 2$  [cm] EWH [Peters, 2007].



## 4 Schwerefeldmission GRACE

Ziel der Forschungsmission *Gravity Recovery And Climate Experiment* (**GRACE**) ist die genaue Bestimmung des Erdschwerefeldes und dessen zeitliche Änderung. Dazu wurden im Mai 2002 die zwei GRACE-Satelliten ins All geschickt. Ursprünglich war die Missionsdauer auf fünf Jahre ausgelegt, wobei die beiden Satelliten heute immer noch aktiv sind. Betreiber der Satelliten sind die *National Aeronautics and Space Administration* (**NASA**) sowie das Deutsche Zentrum für Luft- und Raumfahrt (**DLR**).

Ein Produkt der **GRACE** Mission sind monatliche Lösungen des Erdschwerefeldes. Diese werden als vollständig normierte Kugelfunktionen bis Grad und Ordnung 90 von drei Forschungsgruppen berechnet. Die Genauigkeit der monatlichen Lösungen überstieg dabei die Genauigkeit früherer Erdschweremodelle bei Weitem [Tapley et al., 2004]. Somit ist es möglich, aus den monatlichen Lösungen Änderungen im Geoid zu bestimmen. Außerdem sind Daten, welche die Massenveränderung ausgedrückt als **EWH** beschreiben verfügbar. Die Einsatzmöglichkeiten solcher Daten sind vielfältig, wie folgende Auswahl zeigt:

- Bestimmung des Meeresspiegelanstiegs
- Bestimmung von Ozeanströmungen und deren Änderung
- Änderungen der Bodenfeuchte
- Massenbilanz der Eisschilde und Gletscher
- Dichteänderungen im Erdmantel und der Lithosphäre
- Bestimmung der postglazialen Landhebung **GIA**
- exakte Bestimmung von Bahnparametern...

Infolge der weit überschrittenen geplanten Lebensdauer der Satelliten kommt es zu Problemen mit den Batterien. Befinden sich die Satelliten auf der Nachtseite der Erde, ist es nicht mehr möglich durchgehend zu messen. Wegen des großen Erfolges der Mission ist bereits eine Nachfolgemission geplant, welche 2017 starten soll.

Die Bahn der beiden Satelliten startete in  $\approx 500$  Kilometern Höhe mit einer Inklination von  $89.5^\circ$ , wobei die Satellitenhöhe pro Tag um etwa 30 Meter abnimmt [Tapley et al., 2004]. Darum ist es nicht möglich, eine fixe Wiederholzeit anzugeben. Derzeit liegt die Höhe bei etwas unter 400 Kilometern. Pro Tag umfliegen die Satelliten dabei 15 mal die Erde. Die hohe Inklination ist notwendig, um globale Messungen zu erhalten.



Es bleibt im Hinblick auf diese Arbeit zu erwähnen, dass die **GRACE** Satelliten sensitiv gegenüber jeder Form von Massenverlagerung sind. Somit ist es zur Bestimmung von Eismassenverlust nötig, Effekte wie **GIA** oder Änderungen im Grundwasserspeicher durch Modelle zu eliminieren, worin eine Schwierigkeit in der Verwendung von **GRACE** Daten liegt.

#### 4.1 Messprinzip

Beide Satelliten fliegen auf derselben Bahn mit einem Abstand von etwa 220 Kilometern, wobei dieser Abstand zwischen den Satelliten mit Mikrowellen kontinuierlich gegenseitig gemessen wird. Dabei ist nicht der Gesamtabstand sondern viel mehr die Abstandsänderung von Interesse. Die Messung erfolgt mit zwei Frequenzen, um den Einfluss der Ionosphäre, sowie Instabilitäten der Oszillatoren weitgehend eliminieren zu können. Neben der Verbindung zwischen den Satelliten sorgen hochgenaue **GPS** Antennen, Satellite Laser Ranging (**SLR**) Messungen, sowie präzise Beschleunigungsmesser und Sternkameras für eine hochgenaue Bahnbestimmung.

Dabei bestimmt **GRACE** das Erdschwerefeld, indem der Abstand der beiden Satelliten mit Hilfe von Mikrowellen, genauer mit 24 und 32 GHz im k- und ka-Band, gemessen wird. Die Genauigkeit der Abstandsmessung liegt im Mikrometerbereich. Fliegt der erste Satellit über eine etwas größere Massenansammlung mit höherer Anziehungskraft, so wird er dadurch etwas beschleunigt. Dadurch wird der Abstand zwischen den Satelliten etwas vergrößert. Hat der erste Satellit die Masse überflogen, erfolgt analog ein Abbremsen, was die Distanz wieder verringert. Währenddessen wird der zweite Satellit von der Massenansammlung angezogen und abschließend abgebremst. Aus der Messung des sich durchgehend ändernden Abstands zwischen den Satelliten kombiniert mit der präzisen Bahnbestimmung mittels **GPS** und **SLR** kann ein detailliertes Erdschwerefeld abgeleitet werden.

Um die Beschleunigung der Satelliten infolge von Störbeschleunigungen, wie der Luftwiderstand vom Rest der Atmosphäre, trennen zu können, befinden sich in jedem Satelliten nahe des Massenschwerpunkts Beschleunigungsmesser mit einer Genauigkeit von  $1 \cdot 10^{-10}$  [m/s<sup>2</sup>] [Dunn et al., 2003].

Sternkameras mit einer Genauigkeit von 25 Bogensekunden und Magnetometer messen die Ausrichtung der Satelliten und stellen die exakte Verbindung der Mikrowellenstrahlen sicher.

## 5 Berechnung

Im folgenden Kapitel wird die Grundüberlegung sowie die Schritte und Annahmen, die für die Berechnung notwendig sind, beschrieben.

Der globale mittlere Meeresspiegel berechnet sich mittels

$$\Delta MSL = \frac{\iint_{\Omega} \mathcal{O}(\vartheta, \lambda) \Delta SL(\vartheta, \lambda) d\Omega}{\iint_{\Omega} \mathcal{O}(\vartheta, \lambda) d\Omega} \quad (5.1)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} \Delta MSL &= \text{Änderung des globalen mittleren Meeresspiegels} \\ \Delta SL(\vartheta, \lambda) &= \text{Änderung des Meeresspiegels an Position } (\vartheta, \lambda) \\ \mathcal{O}(\vartheta, \lambda) &= \text{Ozeanmaske} = \begin{cases} 1 & \text{über den Ozeanen} \\ 0 & \text{über den Landmassen} \end{cases} \\ \vartheta &= \text{Kobweite ab Nordpol} \\ \lambda &= \text{Länge ab Greenwich} \\ \Omega &= \text{Oberfläche der Erde} \end{aligned}$$

Als Approximation des Integrals wird ein regelmäßiges Raster mit einer Auflösung von  $1 \times 1$  Grad gewählt. Somit ergibt sich am Äquator eine Auflösung von  $\approx 111$  Kilometern, welche zu den Polen hin größer wird. Gleichung (5.1) kann nun folgendermaßen approximiert werden, wobei  $A(\vartheta, \lambda)$  für die Fläche der jeweiligen Rasterzelle steht.

$$\Delta MSL = \frac{\sum_{\vartheta} \sum_{\lambda} \mathcal{O}(\vartheta, \lambda) A(\vartheta, \lambda) \Delta SL(\vartheta, \lambda)}{\sum_{\vartheta} \sum_{\lambda} \mathcal{O}(\vartheta, \lambda) A(\vartheta, \lambda)} \quad (5.2)$$

Abbildung 13 zeigt die verwendete Ozeanmaske  $\mathcal{O}(\lambda, \theta)$ . Dabei gelten Rasterzellen, welche mehr als 50% über den Ozeanen liegen als Ozean. Ziel dieser Arbeit ist es, folgende Effekte zu berücksichtigen:

- Massenverlust von Eisschilden und Gletschern
- Änderung des Gravitationsfeldes und somit der Äquipotentialflächen, infolge der Massenverlagerung
- Verlagerung von Wassermassen als Reaktion auf verändertes Gravitationspotential
- Verschiebung des Koordinatenursprungs

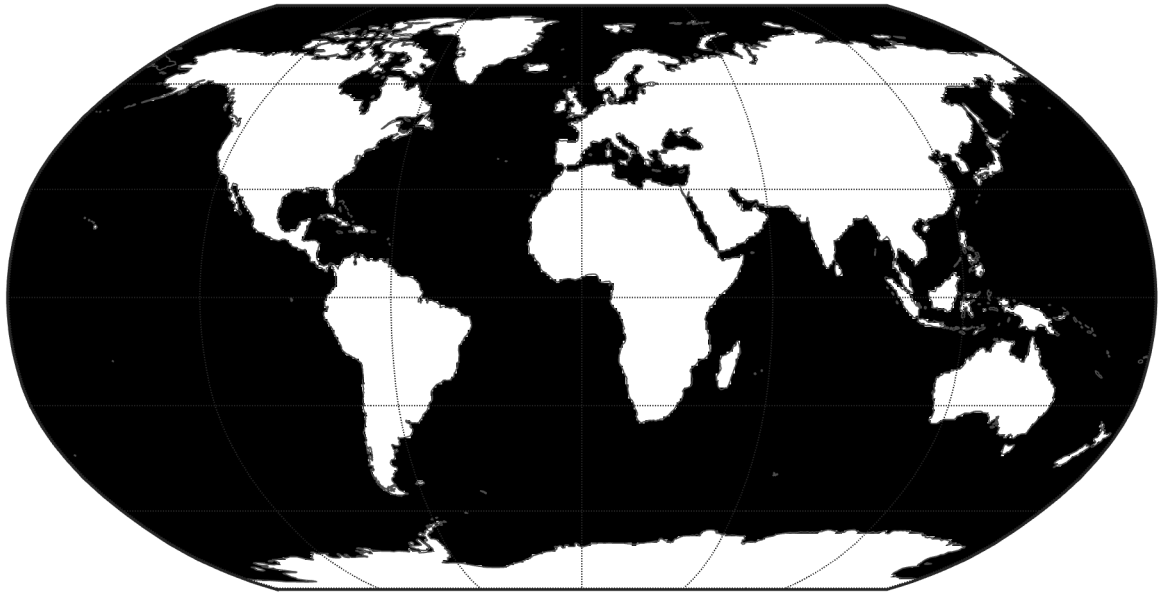


Abbildung 13: Verwendete Ozeanmaske  $\mathcal{O}(\lambda, \theta)$

Ausgegangen wird von einem mittleren Meeresspiegel, welcher einer Äquipotentialfläche, dem Geoid, gleichgesetzt wird, siehe Abbildung 14. Dies trifft streng genommen nicht ganz zu, jedoch ist diese Annahme für den Zweck dieser Arbeit ausreichend.

Infolge der Klimaerwärmung kommt es zu einem Abschmelzen der Gletscher und Eisschilde. Somit gehen Eismassen auf den Landflächen verloren, welche sich als Wassermassen über die Ozeane verteilen, vergleiche Abb. 14a).

In einem ersten Schritt werden die Wassermassen gleichmäßig über die Ozeane verteilt, Abb. 14b). Infolge des Verlusts von Eismassen und des Aufbringens der Wassermassen ändert sich das Erdschwerefeld und dessen Äquipotentialflächen, Abb. 14c). Die Wassermassen werden so angepasst, dass sie sich der Äquipotentialfläche angleichen, was erneut zu einer Massenverlagerung und in einer Änderung der Äquipotentialfläche resultiert, siehe Abb. 15. Dieser Schritt wird iterativ wiederholt, bis Konvergenz eintritt und sich die Meeresoberfläche im Gleichgewicht mit der Äquipotentialfläche befindet.

Infolge der Massenverlagerungen ändert sich der Schwerpunkt der Erde und somit der Ursprung eines globalen Koordinatensystems in Bezug dessen die absolute Änderung des Meeresspiegels gemessen wird. Diese Effekte müssen ebenfalls berücksichtigt werden.

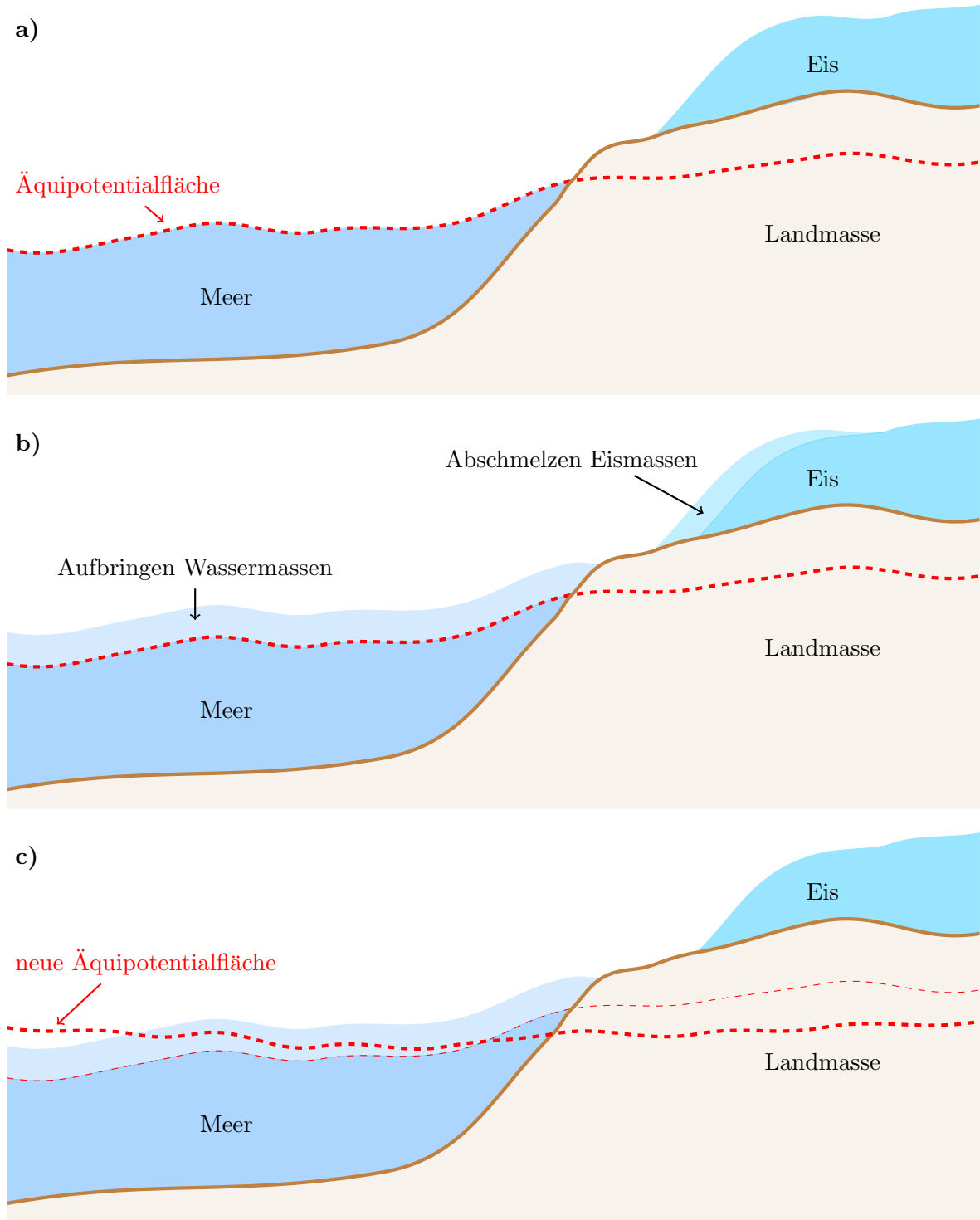


Abbildung 14: **a)** Ausgangslage: Meeresoberfläche ist im Gleichgewicht mit Äquipotentialfläche. **b)** Massenverlagerung infolge von Eisverlust und Schmelzwasser. **c)** Ausbilden neuer Äquipotentialfläche

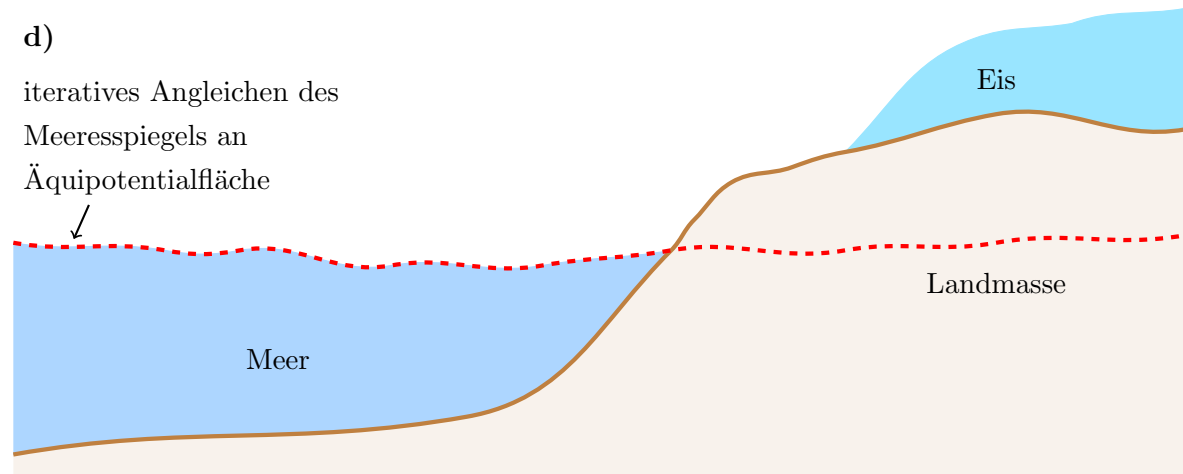


Abbildung 15: d) Iteratives Angleichen Meeresoberfläche an neue Äquipotentialfläche

## 5.1 Bestimmung Massenverlust

Grundlage für die Berechnung liefern quasimonatliche Lösungen der [GRACE Mission](#) [Dahle et al., 2013]. Dabei handelt es sich um Kugelfunktionsentwicklungen, welche üblicherweise bis Grad und Ordnung 90 durchgeführt werden. Aus diesen Datensätzen können Oberflächen-Massenverlagerungen rückgerechnet werden. Solche Massenverlagerungen sind in Form von regelmäßigen Rastern verfügbar und werden für die Berechnung der Massenänderungen verwendet [Swenson, 2012], [Landerer and Swenson, 2012] und [Swensons and Wahr, 2006]. Seit dem Start der [GRACE Mission](#) im Jahr 2002 stehen 149 solcher monatlichen Lösungen zur Verfügung.

Dabei werden die  $C_{20}$  Koeffizienten der monatlichen GRACE-Lösungen aufgrund ihrer starken Variabilität durch genauere Lösungen von [SLR](#) verwendet [Cheng et al., 2011].

Die Grad 1 Koeffizienten, welche den Ursprung des Koordinatensystems beschreiben, werden mit einer Methode von Swenson et al. [2008] bestimmt.

Nach dem Anbringen eines Korrekturmodells, um die Effekte der postglazialen Landhebung zu berücksichtigen [Geruo et al., 2013], wird auf die Daten ein Filter angewendet, um den Effekt von korrelierten Fehlern, welche sich in den monatlichen Lösungen von [GRACE](#) als Nord-Süd Streifen ausbilden, zu verringern. Die Daten werden anschließend erneut mit einem 300 Kilometer weitem Gauß-Filter geglättet.

Für die Bestimmung der Ungenauigkeiten in den Daten pro Pixel  $\delta_i$  muss neben der Messungenauigkeit  $\delta_m$ , auch der Leakage-Effekt  $\delta_l$  eingerechnet werden. Dabei handelt es sich um Restfehler nach der Filterung und Reskalierung der Daten aufgrund der

zeitlichen Begrenztheit der Daten. Der gesamte Fehler eines Pixels  $i$  ergibt sich aus

$$\delta_i = \sqrt{\delta_{m,i}^2 + \delta_{l,i}^2} \quad (5.3)$$

wobei  $\delta_{m,i}$  und  $\delta_{l,i}$  empirisch verfügbar sind. Bei der Bestimmung der Gesamtungenauigkeit über eine Region ist zu beachten, dass die Fehler korreliert sind. Die Messungenauigkeit einer Region  $\sigma_{\delta_m}$  und der Leakage-Effekt einer Region  $\sigma_{\delta_l}$  berechnen sich zwischen zwei Pixeln  $i$  und  $j$  einer Region folgendermaßen:

$$\sigma_{\delta_m} = \sum_i \sum_j \delta_{m,i} \cdot \delta_{m,j} \cdot e_m \quad (5.4)$$

$$\sigma_{\delta_l} = \sum_i \sum_j \delta_{l,i} \cdot \delta_{l,j} \cdot e_l \quad (5.5)$$

mit

$$e_m = \exp\left(-\frac{d_{i,j}^2}{2 \cdot \beta_m^2}\right)$$

$$e_l = \exp\left(-\frac{d_{i,j}^2}{2 \cdot \beta_l^2}\right)$$

$$d_{i,j} = \sqrt{((\lambda_i - \lambda_j) \cos(\phi_i))^2 + (\phi_i - \phi_j)^2} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot 6371 \text{ [km]}$$

$$\beta_m = 300 \text{ [km]}$$

$$\beta_l = 100 \text{ [km]}$$

Dabei bezeichnet  $\beta$  die Dekorrelationslänge,  $d_{i,j}$  die Distanz zwischen den Punkten,  $\lambda$  die Länge in Grad,  $\phi$  die Breite in Grad und  $\exp(x)$  bedeutet  $e^x$ .

Streng genommen sind die Daten für eine hoch genaue Bestimmung von Eismassenveränderungen für Grönland, Antarktis oder Gletscherregionen nicht geeignet, da die Schwerefeldmission [GRACE](#) sensitiv gegenüber allen Arten von Massenverlagerungen ist, nicht nur für Eismassen. Diese Gebiete erfordern für höchste Genauigkeitsansprüche einen regionsspezifischen Filterkern sowie eine genauere Trennung der Massenverluste in Eisschmelze, Landhydrologie und postglazialer Landhebung.

Außerdem ist es nicht möglich, die Unsicherheit mittels (5.4) und (5.5) zu berechnen, da diese Unsicherheiten die Aufteilung der Massen in Eisschmelze, Landhydrologie und postglazialer Landhebung nicht berücksichtigen und das [GIA](#)-Modell besonders bei den polaren Regionen Unsicherheiten aufweist, vergleiche [6.1.2](#).

Darum wird in dieser Arbeit nur die räumliche Verteilung der Massentrends aus

GRACE Monatslösungen berechnet, nicht jedoch deren Größe, da angenommen werden kann, dass die räumliche Verteilung infolge der Schwerefeldmissionen gut bestimmbar ist. Die Größe der Massenveränderung wird aus Publikationen entnommen, vergleiche Tabelle 4 und 5.

Für die weiteren Berechnungen ist es nötig, aus den Rohdaten einen Trend zu bestimmen, um auftretende jährliche Signale aus den Daten zu filtern. Abbildung 16 zeigt den Massenverlauf exemplarisch an drei verschiedenen Orten in Grönland. Dabei ist der Massenverlauf an den verschiedenen Orten sehr unterschiedlich. Somit ist es nicht möglich, einen generellen Trend für ganz Grönland zu bestimmen. Vielmehr wird für jeden Rasterpunkt ein eigener Trend berechnet. Der Trend wird in Form eines ausgeglichenen Polynoms zweiten Grades bestimmt (5.6), da die Geschwindigkeit des Massenverlusts in den späteren Jahren zugenommen hat und somit ein Polynom zweiten Grades den zeitlichen Verlauf besser repräsentiert, vergleiche auch [Velicogna, 2009].

$$m_i(t) = a_i + b_i t + c_i t^2 \quad (5.6)$$

Dabei steht  $m_i(t)$  für den Massenverlust am Rasterpunkt  $i$  und  $t$  für den Zeitpunkt der Messung.  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sind die zu bestimmenden Koeffizienten. Für jeden Rasterpunkt steht eine Zeitreihe von 149 Monatslösungen zur Verfügung, wodurch es zu einer Überbestimmung des Gleichungssystems kommt.

$$\mathbf{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & t_{149} & t_{149}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_{149} \end{pmatrix} = \vec{l} \quad (5.7)$$

Dabei bezeichnet in (5.7)  $\mathbf{A}$  die Designmatrix,  $\vec{x}$  den Unbekanntenvektor und  $\vec{l}$  den Beobachtungsvektor, in welchem die beobachteten Massenveränderungen stehen. Gelöst werden kann dieses Gleichungssystem über eine kleinste Quadrate Ausgleichung.

$$\vec{x} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \vec{l} \quad (5.8)$$

Die Designmatrix ist in diesem Fall die Fandermonde-Matrix, welche sehr schlecht konditioniert ist, weshalb es numerisch sinnvoll sein würde, einen Basiswechsel von Monom-Polynomen auf die Newton- oder Lagrange-Polynome durchzuführen.

In Kapitel 5.1.1 sowie 5.1.2 werden Trends für Grönland und für die Antarktis berechnet. Weitere Daten für Gletschergebiete werden verschiedenen Publikationen entnom-

men. Tabelle 7 listet die verwendeten Massen für die Berechnung auf.

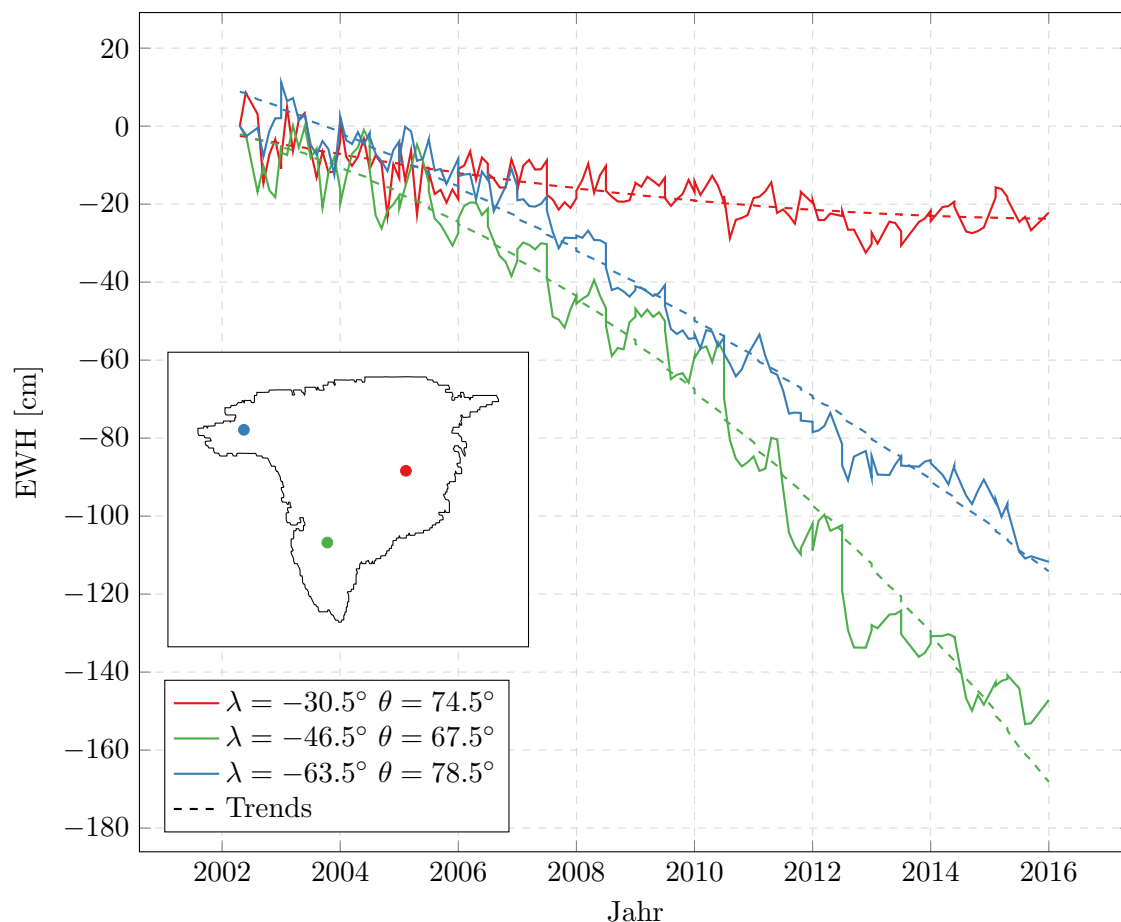


Abbildung 16: Exemplarische Darstellung der unterschiedlichen Massenverluste und Trends in Grönland an verschiedenen Positionen ausgedrückt als EWH

### 5.1.1 Grönland

Grönland gilt mit seinen zahlreichen Gletschern, seinem Eisschild und seiner geographischen Lage als größter Einflussfaktor für den Meeresspiegelanstieg infolge globaler Erwärmung. Abbildung 17 zeigt den Verlauf des Massenverlustes für Grönland, bezüglich der ersten GRACE-Monatslösung am Beginn des Jahres 2002. Dick ist der mittlere Massenverlust eingezeichnet, der transparente Bereich kennzeichnet die maximalen und minimalen Massenverluste über Grönland.

In Summe hat Grönland seit 2002 eine Eisschicht von über 80 Zentimeter Dicke verloren, wobei sich das Abschmelzen sowohl zeitlich als auch räumlich stark unterscheidet.



Manche Gebiete haben nur rund 20 Zentimeter, andere Gebiete bis zu 150 Zentimeter Wasser verloren. Ebenfalls zu erkennen ist, dass die Geschwindigkeit des Abschmelzens später stärker zugenommen hat. Beide Effekte führen dazu, dass das Abschmelzen nicht als gleichmäßig eingestuft werden kann, vergleiche Abbildung 18.

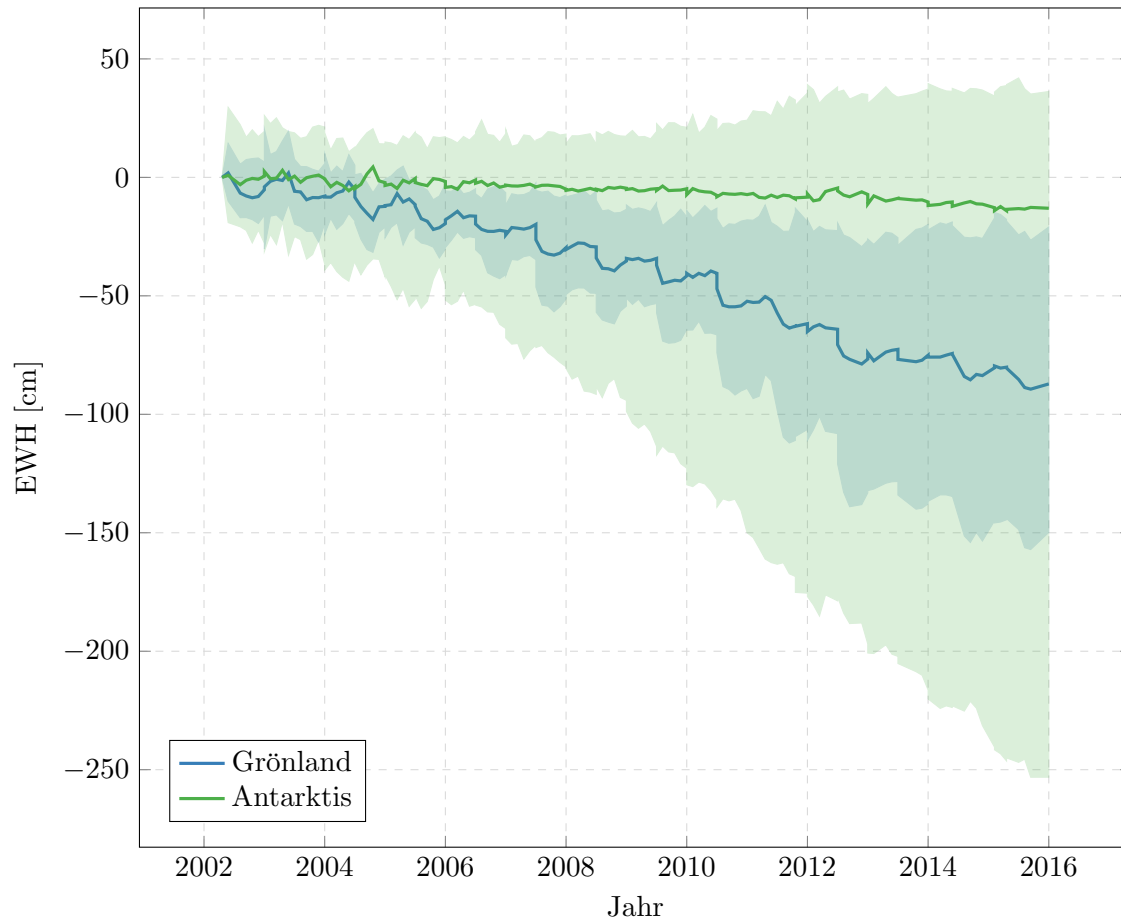


Abbildung 17: Massenverluste für Grönland und der Antarktis, ausgedrückt als **EWH** aus monatlichen **GRACE** Lösungen. Fest ist der mittlere Massenverlust eingezeichnet, die transparenten Bereiche zeigen die maximalen und minimalen Massenverluste.

Abbildung 18 zeigt den berechneten Trend des Abschmelzens exemplarisch zwischen den Jahren 2004-05 und 2015-16. Tendenziell ist in den frühen Beobachtungsjahren weniger Eismasse verloren gegangen als heute. Während zwischen den Jahren 2004-05 die meiste Masse im Südosten und Nordwesten von Grönland verloren gegangen ist, hat sich der Trend im Jahr 2015-16 auf Südwesten verlagert. Im Osten und Nordosten ist über

alle Jahre die geringste Schmelzrate verzeichnet worden.

### 5.1.2 Antarktis

Abbildung 17 zeigt ebenfalls den Massenverlauf relativ zur ersten GRACE-Monatslösung für die Antarktis. Im Vergleich zur Berechnung von Grönland sind einige Unterschiede zu erkennen:

Die Berechnungen zeigen, dass im Mittel über die Fläche der Antarktis nur 13 Zentimeter Wasser geschmolzen sind, also viel weniger als im Durchschnitt in Grönland. Dabei muss man jedoch bedenken, dass die Fläche der Antarktis rund siebenmal so groß ist, wie die Fläche Grönlands.

Die räumliche Verteilung ist sehr viel unterschiedlicher als in Grönland. Während in Grönland durchwegs überall ein negativer Trend beobachtet wird, gibt es in der Antarktis Gebiete, wo eine Massenzunahme stattfindet. Der Massenverlust der Antarktis findet fast ausschließlich in dem kleinen Gebiet der Westantarktis statt, vergleiche Abbildung 19. Seit den Messungen von 2002 ist in manchen Gebieten eine Eisschicht geschmolzen, welche äquivalent zu einer 2.5 Meter hohen Wassersäule ist. Der Trend liegt in diesen Gebieten bei bis zu -25 Zentimetern pro Jahr. Hingegen kommt es in Gebieten zwischen 30 Grad West und 60 Grad Ost zu einem Massenanstieg von knapp unter 10 Zentimetern pro Jahr. In Summe überwiegt jedoch der negative Trend.

Generell bleibt zu erwähnen, dass die Unsicherheiten der Massenverluste für die Regionen der Antarktis größer sind, als für Grönland. Erklärt werden kann dies durch die Tatsache, dass in Grönland viel mehr Messungen vor Ort durchgeführt wurden, außerdem sind auch die Effekte der postglazialen Landhebung für diese Region besser bekannt.

Abbildung 19 zeigt exemplarisch den Trend zwischen den Jahren 2004-05 und 2015-16. Während der Wert von Grönland zwischen den Jahren 2015-16 deutlich niedriger ausfällt als bei anderen Publikationen, scheint der Wert für die Antarktis in diesen Zeitraum etwas besser zu passen. Jedoch liegen die Werte innerhalb der Genauigkeitsangaben. Aufgrund der hohen jährlichen Fluktuation der Daten ist es nicht sinnvoll, absolute Werte für ein Jahr anzugeben. Die Massenverluste von zwei aufeinanderfolgenden Jahren können aufgrund von klimatischen Einflüssen, wie zum Beispiel einem milden Winter, sehr weit streuen. Darum sollte man Werte immer über mehrere Jahre mitteln. Abbildung 18 und 19 dienen primär der Visualisierung der räumlichen Verteilung der Massenverluste und deren Änderung.

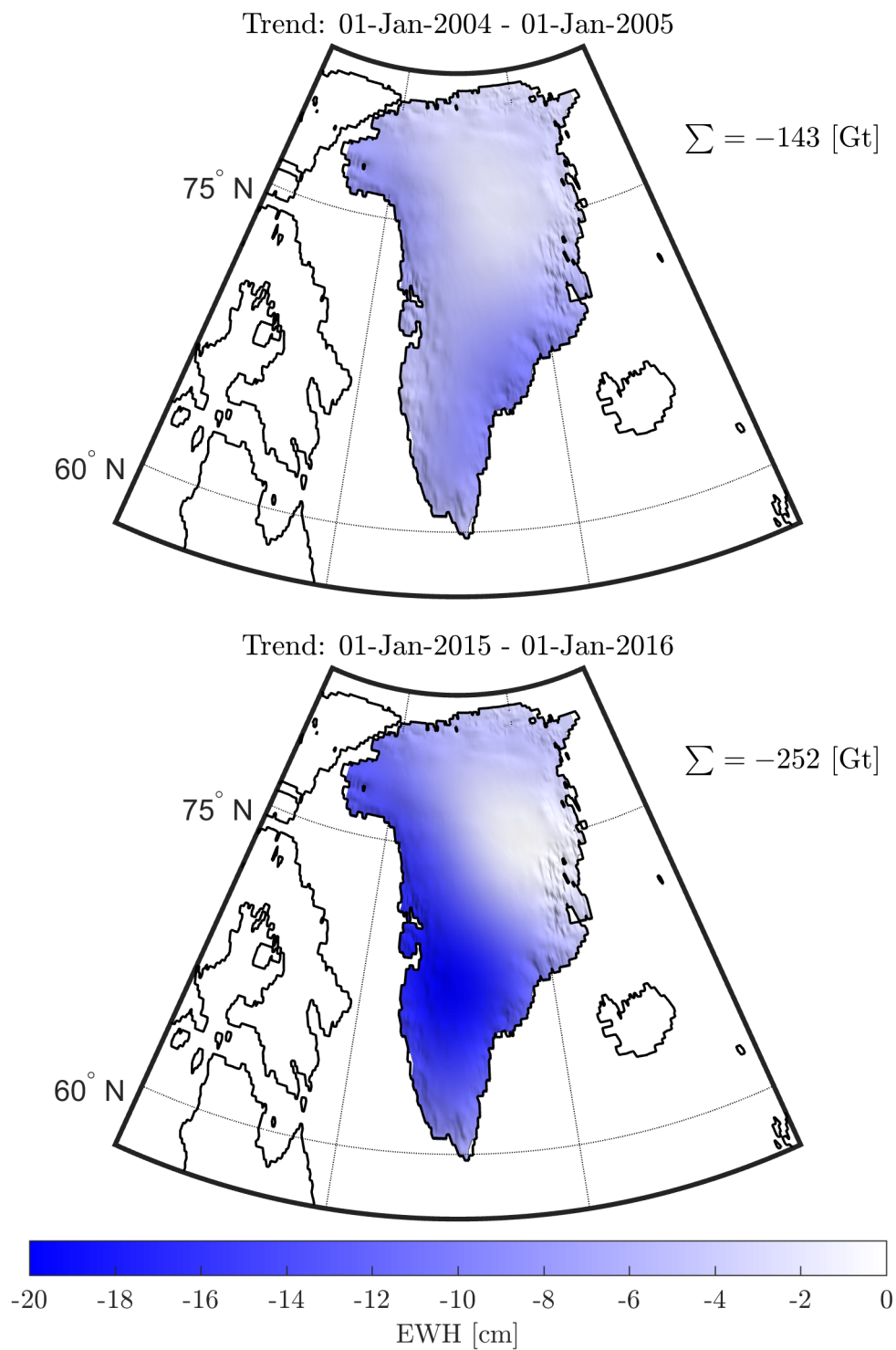


Abbildung 18: Veränderung des Massenverlusts von Grönland ausgedrückt als EWH

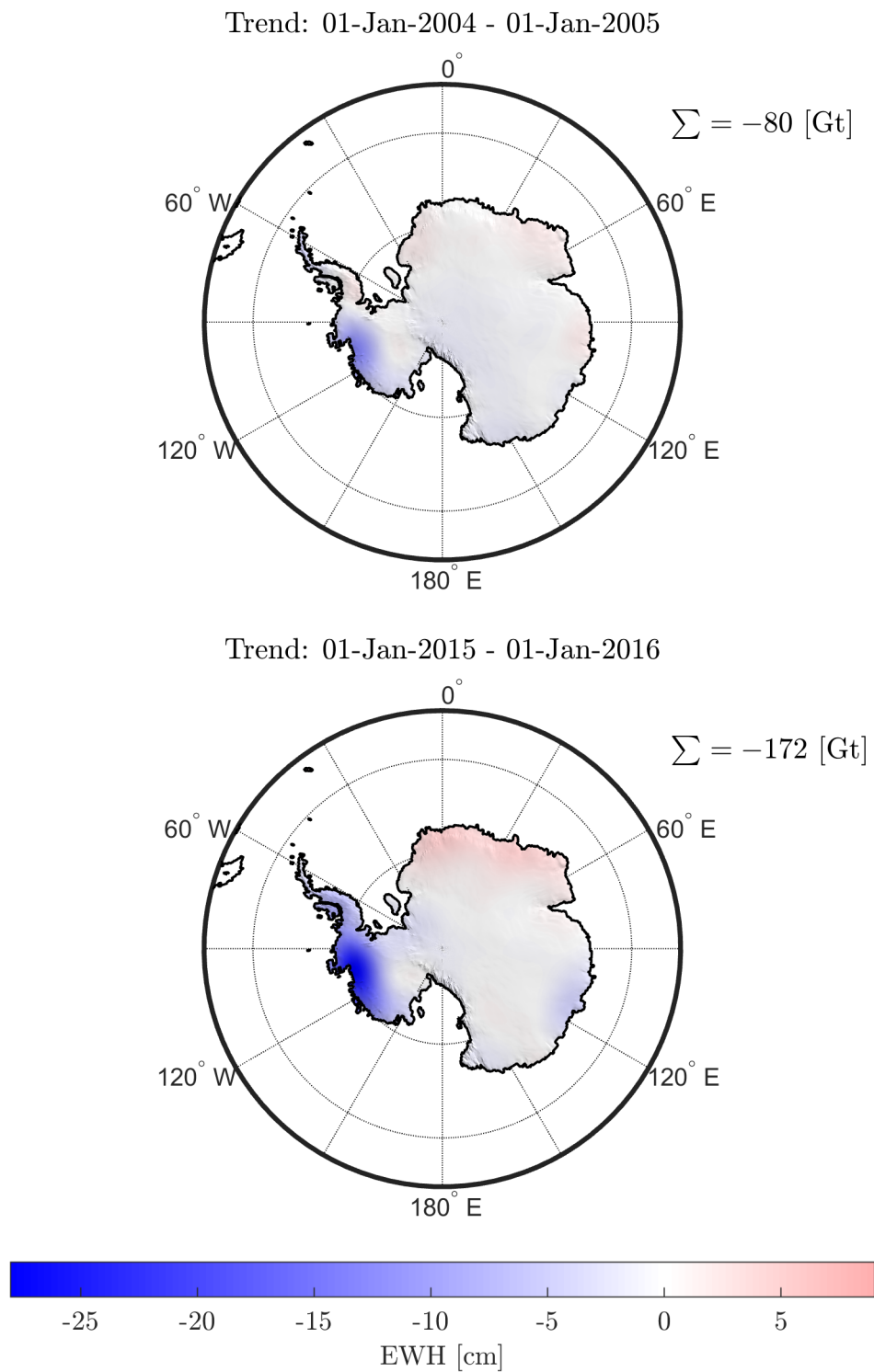


Abbildung 19: Veränderung des Massenverlusts der Antarktis ausgedrückt als EWH

### 5.1.3 Verwendete Massenänderungen

Die Berechnung wird mit drei verschiedenen Szenarien durchgeführt. Szenario I behandelt dabei den mittleren Meeresspiegelanstieg.

Für Gletschergebiete außerhalb von Grönland und der Antarktis werden die Größenordnungen aus Tabelle 5 entnommen. Kleinere Gletschergebiete mit einem Massenverlust  $< 5$  Gigatonnen werden in der Berechnung nicht berücksichtigt, da ihr Einfluss vergleichsweise klein ist. Außerdem werden die Gletscher vom Himalaya Gebiet für die Berechnung nicht verwendet, da nicht vollständig bekannt ist, ob die geschmolzenen Wassermassen den Ozean überhaupt erreichen oder als Grundwasser gespeichert werden [Bamber and Riva, 2010].

Tabelle 7 listet die verwendeten Massen auf. Die Massen für die Gletscherregionen werden aus Tabelle 5 entnommen, für die Eisschilde werden die mittleren Werte zwischen den Jahren 2005 und 2010 aus Tabelle 4 verwendet. Dabei wird für die Gletscherregionen eine gleichmäßige Verteilung der Massen entlang der Küstengebiete angenommen. Für die Eisschilde wird die räumliche Verteilung der GRACE Messungen für das Jahr 2015 verwendet, welche in Abbildung 18 und 19 unten dargestellt ist. Kapitel 6.1.1 behandelt den Einfluss der Massenverteilung. Insgesamt gehen 555 Gigatonnen an Eismassen verloren. In Abbildung 21 sind die Massenverluste für Szenario I dargestellt.

Tabelle 7: Auflistung der verwendeten Massenverluste in Gigatonnen pro Jahr

	Gt pro Jahr
Grönland	$-229 \pm 60$
Antarktis	$-147 \pm 73$
Alaska und Westkanada	$-64 \pm 17$
Kanadische Arktis	$-60 \pm 6$
Anden	$-29 \pm 10$
Russische Arktis	$-11 \pm 4$
Island	$-10 \pm 2$
Spitzbergen	$-5 \pm 2$
<b>Gesamt</b>	<b><math>-555 \pm 97</math></b>

Szenario II verwendet globale GRACE Massenänderungen für die Berechnung und berücksichtigt somit den Einfluss der Landhydrologie. Einzig für die beiden Eisschilde werden die Massenänderungen aus Tabelle 4 mit der räumlichen Verteilung aus den

unteren Abbildung von 18 und 19 verwendet.

Szenario III behandelt den hypothetischen Fall, dass der gesamte Eisschild von Grönland abschmelzen würde. Insgesamt sind im grönländischen Eisschild 2676 Teratonnen Eis, das sind  $2.676 \cdot 10^{15}$  Tonnen, beziehungsweise  $2.676 \cdot 10^{18}$  Kilogramm gebunden [Bamber, 2001]. In Abbildung 31 sind die Massenverluste für Szenario III abgebildet.

## 5.2 Änderung Gravitationsfeld

Ausgegangen wird von einem aktuellen Erdschwerefeldmodell, dem Modell GGM05C [Ries et al., 2016]. Dabei handelt es sich um ein Modell aus GRACE- und GOCE-Daten, kombiniert mit terrestrischen Gravimeter-Messungen. Der maximale Grad der Entwicklung ist 360, wobei in dieser Arbeit nur Koeffizienten bis Grad 180 verwendet werden. Aus diesem Schwerefeldmodell können nun über Formel (3.47) die Stokes-Koeffizienten  $\bar{A}_{nm}^T, \bar{B}_{nm}^T$  des Störpotentials berechnet werden. Dabei werden für die Koeffizienten des Normalschwerefelds  $\bar{A}_{nm}^U$  folgende Werte verwendet [Moritz, 1980]

$$\begin{aligned} A_{20}^U &= 1.08263 \cdot 10^{-03} \\ A_{40}^U &= -2.37091222 \cdot 10^{-06} \\ A_{60}^U &= 6.08347 \cdot 10^{-09} \\ A_{80}^U &= -1.427 \cdot 10^{-11} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Wobei sich die vollständig normierten Koeffizienten einfach durch Multiplikation mit  $-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$  ergeben. Der Koeffizient  $\bar{A}_{00}^T$  wird Null gesetzt.

$$\begin{aligned} \bar{A}_{00}^T &= A_{00}^W - 1 = 0 \\ \bar{A}_{20}^T &= -A_{20}^U \frac{1}{\sqrt{5}} - \bar{A}_{20}^W \\ \bar{A}_{40}^T &= -A_{40}^U \frac{1}{\sqrt{9}} - \bar{A}_{40}^W \\ \bar{A}_{60}^T &= -A_{60}^U \frac{1}{\sqrt{13}} - \bar{A}_{60}^W \\ \bar{A}_{80}^T &= -A_{80}^U \frac{1}{\sqrt{17}} - \bar{A}_{80}^W \end{aligned} \quad (5.10)$$

Über Formel (3.53) kann die Geoidundulation  $N$  berechnet werden, welche der Meeresoberfläche gleichgesetzt wird.

Zur Berechnung der Änderung des Gravitationsfeldes werden die Massen aus Tabelle 7, welche auf einem regelmäßiges  $1 \times 1$  Grad Raster verteilt wurden, verwendet. Da keine Massen verloren gehen können, muss die Gesamtmasse an geschmolzenem Eis als Wassermasse gleichmäßig über die Ozeane verteilt werden, vergleiche Abbildung 14 b), damit in Summe kein Massenverlust oder Überschuss entsteht. Die vorhandenen

Massenänderungen werden ebenfalls nach Kugelfunktionen bis Grad und Ordnung 180 entwickelt.

Es wird angenommen, dass sich die Massen nur auf der Oberfläche der Kugel verändern. Dadurch berechnen sich die vollständig normierten Stokes-Koeffizienten wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{A}_{nm} \\ \Delta \bar{B}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{M_E} \iint_{\Omega} m(\lambda, \theta) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{cases} dm \quad (5.11)$$

Dabei bezeichnet  $m(\lambda, \theta)$  die Massenveränderung auf der Kugeloberfläche, alle anderen Abkürzungen sind analog zu Kapitel 3.

Verwendet man die Abkürzungen aus Formel (3.30) und approximiert man das Integral in Formel (5.11) durch Summation über das gleichmäßige Raster, kann man die Stokes-Koeffizienten über Formel (5.12) bestimmen.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{A}_{nm} \\ \Delta \bar{B}_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{M_E} \sum_{\lambda} \sum_{\theta} m(\lambda, \theta) \begin{cases} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{cases} \quad (5.12)$$

Addiert man nun  $\bar{A}_{nm}^T, \bar{B}_{nm}^T$  mit  $\Delta \bar{A}_{nm}, \Delta \bar{B}_{nm}$  erhält man die Koeffizienten  $\bar{A}_{nm}^{(1)}, \bar{B}_{nm}^{(1)}$ , welche für die Iteration verwendet werden.

$$\begin{aligned} \bar{A}_{nm}^{(1)} &= \bar{A}_{nm}^T + \Delta \bar{A}_{nm} \\ \bar{B}_{nm}^{(1)} &= \bar{B}_{nm}^T + \Delta \bar{B}_{nm} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die neuen Koeffizienten  $\bar{A}_{nm}^{(1)}, \bar{B}_{nm}^{(1)}$  bestimmen nun eine neue Äquipotentialfläche, vergleiche Abbildung 14 c), welche als Start für das iterative Angleichen der Verlagerung der Wassermassen verwendet wird.

### 5.3 Verlagerung Wassermassen

Über den Vergleich der Geoidundulation aus den Koeffizienten des ursprünglichen Störpotentials  $\bar{A}_{nm}^T, \bar{B}_{nm}^T$  und der neuen Entwicklung  $\bar{A}_{nm}^{(1)}, \bar{B}_{nm}^{(1)}$  kann für die Meeresregionen die Differenz des Meeresspiegels allein aus gravitativen Effekten berechnet werden. Wegen unserer Annahme, dass sich der Meeresspiegel an einer Äquipotentialfläche orientiert, kommt es erneut zu einer Massenverlagerung, vergleiche Abbildung 15.

Über die Ozeane verteilt kommt es besonders in Gebieten, wo an Land Eismassen verloren gehen, zu einem Absenken der Geoidundulation und dadurch zu einem Verlust an Wasservolumen, wenn man das Wasservolumen als den Raum zwischen Ozeanboden und Äquipotentialfläche betrachtet. In den restlichen Gebieten kommt es durch das

gleichmäßige Aufbringen der Wassermassen über die Ozeane zu einer Erhöhung der Geoidundulation und somit zu einem Gewinn an Wasservolumen. Da in Summe der Gewinn und Verlust der Wassermassen nicht Null ergibt, es jedoch auch nicht zu einer Änderung der Gesamtmasse kommen kann, bildet sich der neue Meeresspiegel streng genommen entlang einer neuen Äquipotentialfläche mit einem neuen Wert für  $W_0$  aus, vergleiche Formel (3.8). Praktisch wird in dieser Arbeit die neue Äquipotentialfläche so gewählt, dass sie parallel zur neuen Äquipotentialfläche liegt und in Summe das neugewonnene Volumen an Wassermassen und das wegfallende Volumen Null ergibt.

Streng genommen sind zwei Äquipotentialflächen unterschiedlichen Potentials nicht parallel. Da sich jedoch der Abstand zwischen den Äquipotentialflächen im Zehntel-Millimeterbereich befindet, kann die Parallelität als gute Näherung angenommen werden.

Das neu gewonnene Wasservolumen wird in Wassermassen  $m^{(1)}$  umgerechnet, wobei eine Dichte des Wassers von  $\rho_W = 1000$  Kilogramm pro Kubikmeter angenommen wird. Infolge der Bedingung, dass sich die Gesamtmasse im System nicht ändern darf, gilt:

$$\sum_{\vartheta} \sum_{\lambda} m(\vartheta, \lambda) = 0 \quad (5.14)$$

Diese Wassermassen werden erneut in Kugelfunktionen entwickelt

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{A}_{nm}^{(1)} \\ \Delta \bar{B}_{nm}^{(1)} \end{array} \right\} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{M_E} \sum_{\lambda} \sum_{\theta} m^{(1)}(\lambda, \theta) \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right. \quad (5.15)$$

und somit ergeben sich die neuen Stokes-Koeffizienten zu

$$\begin{aligned} \bar{A}_{nm}^{(2)} &= \bar{A}_{nm}^{(1)} + \Delta \bar{A}_{nm}^{(1)} \\ \bar{B}_{nm}^{(2)} &= \bar{B}_{nm}^{(1)} + \Delta \bar{B}_{nm}^{(1)} \end{aligned} \quad (5.16)$$

wobei diese Schritte iterativ wiederholt werden, bis Konvergenz eintritt. Da die Wassermassen im ersten Schritt bereits ein Vielfaches kleiner sind als die abgeschmolzenen Eismassen, wird die Konvergenz schnell erreicht.

Zusammengefasst gilt für die Iteration:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{nm}^{(n+1)} &= \bar{A}_{nm}^{(n)} + \Delta \bar{A}_{nm}^{(n)} \\ \bar{B}_{nm}^{(n+1)} &= \bar{B}_{nm}^{(n)} + \Delta \bar{B}_{nm}^{(n)} \end{aligned} \quad (5.17)$$



mit den Startwerten:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{nm}^{(0)} &= \bar{A}_{nm}^T \\ \bar{B}_{nm}^{(0)} &= \bar{B}_{nm}^T \\ \left. \begin{array}{l} \Delta \bar{A}_{nm}^{(0)} \\ \Delta \bar{B}_{nm}^{(0)} \end{array} \right\} &= \frac{1}{2n+1} \frac{1}{M_E} \sum_{\lambda} \sum_{\theta} m(\lambda, \theta) \left\{ \begin{array}{l} \bar{C}_{nm}(\vartheta, \lambda) \\ \bar{S}_{nm}(\vartheta, \lambda) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Konvergiert das Ergebnis nach ( $n$ ) Iterationen, so kann man die Änderung des Meeresspiegels infolge von gravitativen Effekten  $\Delta h_{grav}$  als die Differenz der Geoidundulation des Störpotentials vor den Massenverlagerungen  $N^{(0)}(\vartheta, \lambda)$  und der Geoidundulation nach der  $n$ -ten Iteration  $N^{(n)}(\vartheta, \lambda)$  berechnen.

$$\Delta h_{grav}(\vartheta, \lambda) = N^{(n)}(\vartheta, \lambda) - N^{(0)}(\vartheta, \lambda) \quad (5.19)$$

#### 5.4 Aufbringen des Wasservolumens

Bisher wurden nur über die Differenzen der Geoidundulation die gravitativen Änderungen infolge der Massenverlagerungen berücksichtigt. Das durch das Abschmelzen der Eismassen frei gewordene Wasser wirkt jedoch nicht nur als Masse auf die Äquipotentialfläche, und somit auf den Meeresspiegel, sondern auch als Wasservolumen.

Aufgrund des iterativen Angleichens der Wassermassen ist bekannt, wie sich das Wasser massenmäßig über die Ozeane verteilt. Diese Massen können einfach in Volumsänderungen und somit Höhenänderungen der Meeresoberfläche umgerechnet werden. Dabei wird eine Dichte des Wassers von  $\rho_W = 1000$  Kilogramm pro Kubikmeter angenommen. Somit ergibt sich für das gleichmäßige Auftragen der Wassermassen auf ein  $1 \times 1$  Grad großes Raster zum Beginn der Iteration

$$\Delta h_{gl} = - \frac{\sum_{\vartheta} \sum_{\lambda} m_{Eis}(\vartheta, \lambda) \rho_W^{-1}}{\sum_{\vartheta} \sum_{\lambda} A(\vartheta, \lambda) \mathcal{O}(\vartheta, \lambda)} \quad (5.20)$$

Dabei bezeichnet die Abkürzung  $A(\vartheta, \lambda)$  die Fläche der Rasterzelle an der Stelle  $(\vartheta, \lambda)$ . Das negative Vorzeichen kommt durch die Umrechnung der verlorenen Eismassen in neu gewonnene Wassermassen. Der Ausdruck  $\sum_{\vartheta} \sum_{\lambda} A(\vartheta, \lambda) \mathcal{O}(\vartheta, \lambda)$  steht für die Summe der Ozeanfläche, welche bei rund  $3.64 \cdot 10^{14}$  Quadratmetern liegt.

Der Einfluss des iterativen Angleichens auf eine Rasterzelle kann über Formel (5.22) berechnet werden, wobei  $m_i$  die Summe aller Massenverlagerungen, welche iterativ auf

dieser Rasterzelle durchgeführt worden sind, bezeichnet.

$$\mathbf{m}(\vartheta, \lambda) = \sum_k \mathbf{m}^{(k)}(\vartheta, \lambda) \quad (5.21)$$

$$\Delta h_{it}(\vartheta, \lambda) = \frac{\mathbf{m}(\vartheta, \lambda) \rho_W^{-1}}{A(\vartheta, \lambda)} \quad (5.22)$$

Dabei gilt wegen der Bedingung (5.14):

$$\sum_{\vartheta} \sum_{\lambda} \Delta h_{it} = 0 \quad (5.23)$$

Somit ergibt sich die Änderung des Meeresspiegels infolge des Aufbringens des Volumens unter Berücksichtigung von (5.20) und (5.22) zu:

$$\Delta h_{vol}(\vartheta, \lambda) = \Delta h_{gl} + \Delta h_{it}(\vartheta, \lambda) \quad (5.24)$$

## 5.5 Verschiebung des Koordinatenursprungs

Die Koeffizienten von Grad Eins der Kugelfunktionsentwicklung sind direkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems verbunden. Bestimmt man den absoluten Meeresspiegelanstieg, so ist es unbedingt nötig, dass der Koordinatenursprung möglichst stabil ist [Blewitt et al., 2010]. Veränderungen werden eins zu eins in einen veränderten Meeresspiegel übertragen.

Koordinatensysteme werden meist so gewählt, dass ihr Ursprung im Schwerpunkt der Erde liegt. Durch Massenverlagerungen kann es zu einer Verschiebung des Schwerpunkts und somit zu einer Verschiebung des Koordinatenursprungs kommen. Dieser Einfluss muss bei der Berechnung berücksichtigt werden, da sich der absolute Meeresspiegel auf den Koordinatenursprung bezieht.

Abbildung 20a) verdeutlicht den Effekt für eine angenommene Verschiebung des Koordinatenursprungs in Richtung  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$  Zentimeter. Aufgrund der inhomogenen Verteilung der Landmassen, vergleiche Abbildung 20b), kommt es bei der Berechnung des mittleren Meeresspiegelanstiegs über alle Ozeane mittels Formel (5.1) zu einem scheinbaren Ansteigen beziehungsweise Abfallen des mittleren Meeresspiegels. Zur besseren Darstellung des Effekts wird in Abbildung 20 eine flächentreue kartographische Abbildung verwendet. Bereits eine Änderung des Koordinatenursprungs von nur 1 Millimeter, kann einen Fehler des mittleren globalen Meeresspiegels von 0.4 Millimeter verursachen [Kierulf and Plag, 2006].

Praktisch wird der Koordinatenursprung derart verschoben, dass die Koeffizienten

vom Grad Eins Null werden.

$$\bar{A}_{10} = \bar{A}_{11} = \bar{B}_{11} = 0 \quad (5.25)$$

Durch die Verschiebung des Koordinatenursprungs verändern sich die Höhen aller Punkte der Meeresoberfläche  $\Delta h_{urisp}(\vartheta, \lambda)$ , weshalb die Änderung des absoluten Meeresspiegels angepasst wird. Die Änderung der Meereshöhen berechnen sich einfach über den Vergleich der Geoidundulation vor dem Nullsetzen der Grad Eins Koeffizienten  $N(\vartheta, \lambda)$  mit der Geoidundulation nach dem Nullsetzen  $N^0(\vartheta, \lambda)$

$$\Delta h_{urisp}(\vartheta, \lambda) = N^0(\vartheta, \lambda) - N(\vartheta, \lambda) \quad (5.26)$$

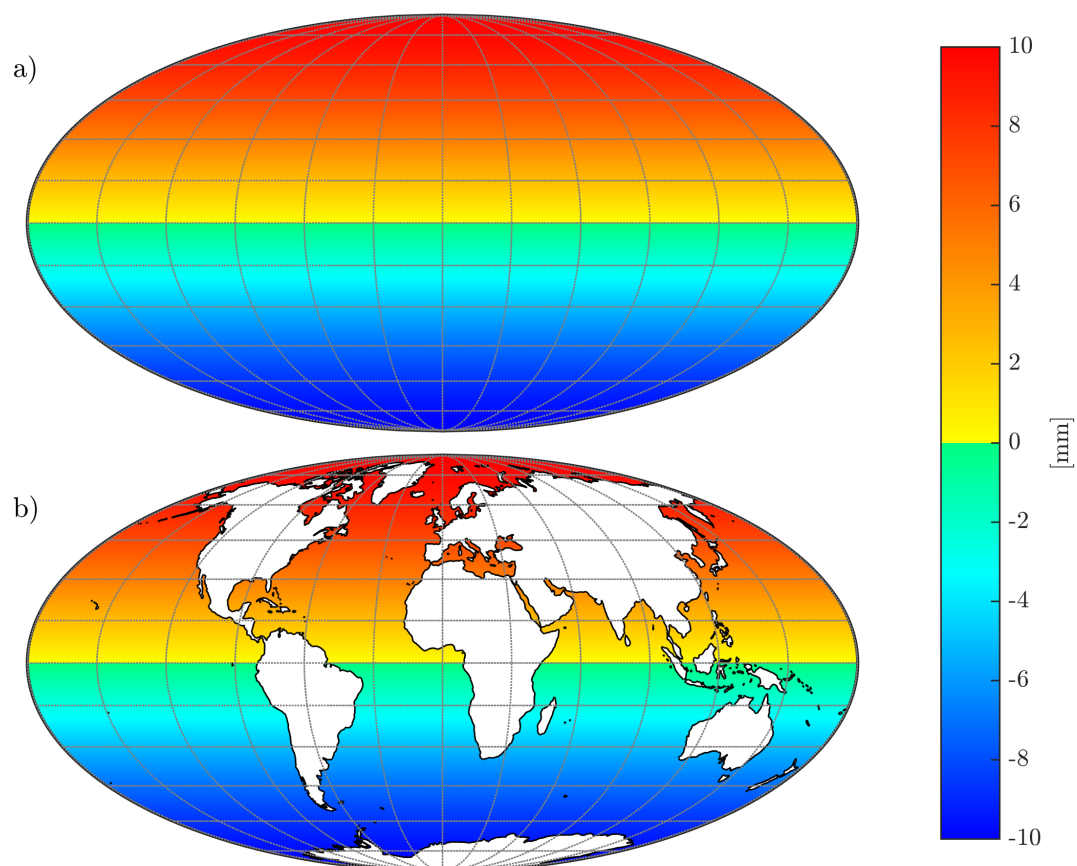


Abbildung 20: Einfluss der Verschiebung des Koordinatenursprungs auf die mittlere Meereshöhe. **a)** infolge einer Verschiebung von einem Zentimeter in Richtung z-Achse, **b)** durch die inhomogene Verteilung der Landmassen kommt es zu einem scheinbaren Meeresspiegelabfall von 0.95 Millimeter.

Berechnet man die Änderung des mittleren Meeresspiegels wie in Gleichung (5.2), so gilt in unserem Fall für die Berechnung des Meeresspiegels an der Position  $(\vartheta, \lambda)$  unter Berücksichtigung der Effekte von (5.19), (5.24) und (5.26):

$$\Delta SL(\vartheta, \lambda) = \Delta h_{grav}(\vartheta, \lambda) + \Delta h_{vol}(\vartheta, \lambda) + \Delta h_{urisp}(\vartheta, \lambda) \quad (5.27)$$

Bestimmt man die Änderung des mittleren Meeresspiegels wie in Gleichung (5.28), kann die Anzahl an Effekten für die Berechnung der Änderung der Meereshöhe beliebig erweitert werden. Beispielsweise kann der Effekt der thermischen Ausdehnung  $\Delta h_{therm}(\vartheta, \lambda)$ , der atmosphärischen Auflast  $\Delta h_{atm}(\vartheta, \lambda)$  oder der Frischwasserzufuhr  $\Delta h_{wasser}(\vartheta, \lambda)$  mitberücksichtigt werden.

$$\Delta SL(\vartheta, \lambda) = \Delta h_{grav}(\vartheta, \lambda) + \Delta h_{vol}(\vartheta, \lambda) + \Delta h_{urisp} + \dots \quad (5.28)$$

## 5.6 Änderung Trägheitstensors

Als ein Nebenprodukt der Berechnung kann die Auswirkung der Massenverlagerungen infolge des Abschmelzens der Kryosphäre auf den Trägheitstensor der Erde  $\mathbf{C}$  bestimmt werden. Dies ist vor allem für Studien der Erdrotation von Interesse, da Änderungen der Trägheitsachse direkten Einfluss auf die Erdrotation haben.

Der Trägheitstensor der Erde  $\mathbf{C}$  gibt die Trägheit der Erde bezüglich einer Drehung an.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Dabei bezeichnet man die Hauptdiagonalelemente  $C_{i,j}$  mit  $i = j$  als Trägheitsmomente und die Nebendiagonalelemente  $i \neq j$  als Deviationsmomente. Kennt man die Massenverteilung eines Körpers, sprich die Massenpunkte  $m_i$  und deren Ortsvektoren  $\vec{x}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^\top$ , so kann der Trägheitstensor folgendermaßen berechnet werden:

$$C_{\alpha,\beta} = \sum_i m_i (\langle \vec{x}_i, \vec{x}_i \rangle \delta_{\alpha,\beta} - x_{i\alpha} x_{i\beta}) \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\} \quad (5.30)$$

mit  $\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{falls } \alpha \neq \beta \end{cases}$ ,  $x_{i1} = x_i$ ,  $x_{i2} = y_i$  und  $x_{i3} = z_i$ . Daraus folgt

$$\mathbf{C} = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Man sieht, dass  $\mathbf{C}$  symmetrisch ist, es gilt

$$C_{\alpha,\beta} = C_{\beta,\alpha} \quad (5.32)$$

Jede reelle Matrix ist diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Orthonormalbasis aus ihren Eigenvektoren für die gilt

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Die Eigenvektoren definieren die Hauptträgheitsachsen,  $A, B, C$  sind die Hauptträgheitsmomente. Dabei bedeutet „~“, dass es sich um Variablen bezüglich des Hauptachsensystems handelt.

Die Massenverteilung der Erde ist nicht genau genug bekannt, um daraus mittels (5.31) den Trägheitstensor bestimmen zu können. Man kann ihn jedoch direkt aus den Grad Zwei Kugelfunktionskoeffizienten bestimmen [Marchenko and Abrikosov, 2001].

Folgt man Chen and Shen [2010] gilt in einem Internationalen Terrestrischen Referenzrahmen für das Grad Zwei Gravitationspotential, vergleiche auch Formel (3.45):

$$W_2 = \frac{GM_E R^2}{r^3} \sum_{m=0}^2 [\bar{A}_{2m} \bar{C}(\vartheta, \lambda) + \bar{B}_{2m} \bar{S}(\vartheta, \lambda)] \quad (5.34)$$

Dabei bezeichnet  $G$  die Gravitationskonstante,  $M_E$  die Erdmasse und  $a$  den mittleren Erdradius.  $\bar{A}_{2,m}$  und  $\bar{B}_{2,m}$  sind die vollständig normierten Grad zwei Kugelfunktionskoeffizienten,  $\bar{C}(\vartheta, \lambda)$ ,  $\bar{S}(\vartheta, \lambda)$  stehen für die Abkürzungen in (3.30) und  $(r, \lambda, \theta)$  stehen für die Polarkoordinaten des Aufpunkts. Dabei gilt,  $r$  ist der Abstand zwischen dem Koordinatensystem und dem Aufpunkt,  $\lambda$  ist dessen Länge und  $\theta$  dessen Breite.

In einem kartesischen Koordinatensystem mit x-Achse Richtung Greenwich, y-Achse Richtung 90° Osten und z-Achse Richtung mittleren Rotationspol *Conventional Inter-*

national Origin (CIO) gilt für (5.34) Folgendes:

$$W_2 = \frac{\sqrt{15} GM_E R^2}{2} \frac{1}{r^5} \tilde{r}^\top \mathbf{Q} \tilde{r} \quad (5.35)$$

wobei für  $\mathbf{Q}$  gilt

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{2,2} - \frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} & \bar{B}_{2,2} & \bar{A}_{2,1} \\ \bar{B}_{2,2} & -\bar{A}_{2,2} - \frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} & \bar{B}_{2,1} \\ \bar{A}_{2,1} & \bar{B}_{2,1} & \frac{2\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

Im Hauptachsensystem der Erde, also wenn die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, können die Gleichungen (5.34) bis (5.36) wie in (5.37) bis (5.39) dargestellt werden.

$$W_2 = \frac{GM_E R^2}{\tilde{r}^3} \sum_{m=0}^2 [\tilde{A}_{2m} \tilde{C}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\lambda}) + \tilde{B}_{2m} \tilde{C}(\tilde{\vartheta}, \tilde{\lambda})] \quad (5.37)$$

$$W_2 = \frac{\sqrt{15} GM_E R^2}{2} \frac{1}{\tilde{r}^5} \tilde{r}^\top \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{r} \quad (5.38)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{2,2} - \frac{\tilde{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{A}_{2,2} - \frac{\tilde{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\tilde{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Dabei gilt für die Koeffizienten  $\tilde{A}_{2m}$  und  $\tilde{B}_{2m}$ , dass diese nicht die Koeffizienten aus den Schwerefeldmodell sind und deshalb bestimmt werden müssen. Dabei handelt es sich um ein Eigenwertproblem.

Um die Eigenwerte  $\epsilon_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$  zu bekommen, müssen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix  $\mathbf{Q}$  bestimmt werden, also  $|\mathbf{Q} - \epsilon I_3| = 0$ , dabei steht  $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  für die Einheitsmatrix.

Die Eigenwerte berechnen sich mittels [Marchenko and Abrikosov, 2001]

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\phi + \pi}{3}\right) \\ \epsilon_2 &= -2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\phi}{3}\right) \\ \epsilon_3 &= 2\sqrt{\frac{p}{3}} \sin\left(\frac{\phi - \pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned}
 p &= \bar{A}_{2,0}^2 + \bar{A}_{2,1}^2 + \bar{B}_{2,1}^2 + \bar{A}_{2,2}^2 + \bar{B}_{2,2}^2 \\
 q &= \frac{2\bar{A}_{2,0}^3}{3\sqrt{3}} + \frac{\bar{A}_{2,0}^2}{\sqrt{3}} (\bar{A}_{2,1}^2 + \bar{B}_{2,1}^2 - 2\bar{A}_{2,2}^2 - 2\bar{B}_{2,2}^2) + \\
 &\quad + \bar{A}_{2,2}^2 (\bar{A}_{2,1}^2 - \bar{B}_{2,1}^2) + 2\bar{A}_{2,1}^2 \bar{B}_{2,1}^2 \bar{B}_{2,2}^2 \\
 \phi &= \arcsin \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} p^{-3/2} q \right)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Eigenwerte aus (5.40) kann die Matrix  $\tilde{\mathbf{Q}}$  folgendermaßen angeschrieben werden.

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Vergleicht man (5.41) mit (5.39) erkennt man, dass

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= \tilde{A}_{2,2} - \frac{\tilde{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \\
 \epsilon_2 &= -\tilde{A}_{2,2} - \frac{\tilde{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \\
 \epsilon_3 &= \frac{2\tilde{A}_{2,0}}{\sqrt{3}}
 \end{aligned} \quad (5.42)$$

woraus durch Umformen von (5.42) folgt

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{2,0} &= \frac{\sqrt{3}\epsilon_3}{2} \\
 \tilde{A}_{2,2} &= \epsilon_1 + \frac{\epsilon_3}{2}
 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Aus dem Verhältnis

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{2,0} &= \frac{A + B - 2C}{2\sqrt{5}a^2M_E} \\
 \tilde{A}_{2,2} &= \frac{\sqrt{3}(B - A)}{2\sqrt{5}a^2M_E}
 \end{aligned} \quad (5.44)$$

und der dynamischen Erdabplattung

$$H = \frac{C - \frac{A+B}{2}}{C} \quad (5.45)$$

welche unabhängig aus astronomischen Beobachtungen bestimmt werden kann, folgt aus Formel (5.44) und (5.45)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{5}M_E a^2 \left[ \left(1 - \frac{1}{H}\right) \tilde{A}_{2,0} - \frac{\tilde{A}_{2,2}}{\sqrt{3}} \right] \\ B &= \sqrt{5}M_E a^2 \left[ \left(1 - \frac{1}{H}\right) \tilde{A}_{2,0} + \frac{\tilde{A}_{2,2}}{\sqrt{3}} \right] \\ C &= -\sqrt{5}M_E a^2 \frac{\tilde{A}_{2,0}}{H} \end{aligned} \quad (5.46)$$

und somit der zugehörige Trägheitstensor  $\tilde{\mathbf{C}}$  der Erde im Hauptachsensystem

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Die zugehörigen normierten Eigenvektoren  $\vec{r}_i^0$  der Eigenwerte  $\epsilon_i$  sind die Kerne der Matrizen  $\mathbf{Q} - \epsilon_i I_3$ , welche durch Lösung der Gleichung

$$(\mathbf{Q} - \epsilon_i I_3) \vec{r}_i = \vec{0} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (5.48)$$

und anschließendem Normieren gefunden werden können. Somit ergeben sich für die Eigenvektoren

$$\vec{r}_i = \begin{pmatrix} l_i \\ m_i \\ n_i \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} l_i &= \frac{n_i}{\bar{A}_{2,1}} \left( \epsilon_i - \frac{2\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} - \bar{B}_{2,1} u_i \right) \\ m_i &= u_i n_i \\ n_i &= \left[ 1 + u_i^2 + \left( \frac{\bar{B}_{2,1} u_i - \epsilon_i + 2\frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}}}{\bar{A}_{2,1}} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ u_i &= \frac{\bar{A}_{2,1} \bar{B}_{2,1} + \bar{B}_{2,2} \left( \epsilon_i - 2\frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \right)}{\bar{B}_{2,1} \bar{B}_{2,2} + \bar{A}_{2,1} \left( \epsilon_i + \bar{A}_{2,2} + \frac{\bar{A}_{2,0}}{\sqrt{3}} \right)} \end{aligned}$$



Die Vektoren  $\vec{r}_i$  bilden eine orthonormale Basis, das heißt, es gilt für das Skalarprodukt

$$\langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle = \delta_{ij} \text{ mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (5.50)$$

Sie sind die in die Hauptachsen gedrehten Einheitsvektoren. Somit ergibt sich die Rotationsmatrix einfach, indem man spaltenweise die  $\vec{r}_i$  einsetzt.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

Die Drehung des Trägheitstensors in das ursprüngliche kartesische Koordinatensystem erfolgt unter Berücksichtigung von (5.47) und (5.51) durch

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{R}^\top \quad (5.52)$$

Damit ist es möglich, Trägheitstensoren, welche bezüglich derselben Achsen gegeben sind, zu addieren und deren Änderung zu bestimmen. Somit kann der Trägheitstensor der ursprünglichen Kugelfunktionsentwicklung, welcher durch die Stokes-Koeffizienten des ursprünglichen Erdschweremodells bestimmt wird, mit dem Trägheitstensor der Massenverlagerungen, welcher zum Beispiel aus Formel 5.31 berechnet wird, verglichen werden.

Die Änderung des Trägheitstensors ist im Vergleich zu den Größen der Trägheits- und Deviationsmomente sehr klein, weshalb speziell auf numerische Probleme geachtet werden muss. Deshalb ist eine geschlossene analytische Lösung der Eigenwerte und Eigenvektoren, wie sie hier beschrieben wird, von Vorteil.

Die Ergebnisse der Berechnung der Änderung des Trägheitstensors werden im Folgenden nicht weiter verwendet, um den Einfluss der veränderten Erdrotation auf den Meeresspiegelanstieg zu berechnen, da die erwarteten Änderungen im Vergleich zu den Änderungen infolge der gravitativen Effekte und des neuen Volumens sehr klein ausfallen werden. Speziell ist die Unsicherheit der Massenverluste und die daraus entstehende Unsicherheit der Berechnung deutlich größer als der Einfluss der Erdrotation. Hingegen könnten die Daten verwendet werden, um den Einfluss auf die Polbewegung zu untersuchen [Adhikari and Ivins, 2016].

## 6 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Arbeit präsentiert, wenn die Berechnung wie in Kapitel 5 durchgeführt wird.

Insgesamt werden drei Szenarien behandelt:

- Szenario I behandelt den Meeresspiegelanstieg infolge des jährlichen Abschmelzens der Kryosphäre. Dabei werden nur Massenverlagerungen für die Eisschilde und Gletscherregionen berücksichtigt.
- Szenario II berücksichtigt zusätzlich zum Abschmelzen der Kryosphäre die durchschnittliche Massenänderung der Landhydrologie aus [GRACE](#) Messungen.
- Szenario III behandelt den hypothetischen Fall, dass der gesamte Eisschild in Grönland abschmelzen würde.

Dabei wird besonders für Szenario I auf die Zwischenergebnisse eingegangen. Zusätzlich wird in Szenario I die Notwendigkeit der Berücksichtigung der räumlichen Verteilung der Massenverlagerungen für die Eisschilde, sowie der Einfluss infolge der postglazialen Landhebung ([GIA](#)) visualisiert.

### 6.1 Szenario I: Jährliches Schmelzen

Für das erste Szenario werden die Massenverlagerungen, wie in Tabelle 7 aufgelistet, angenommen, wobei für die Gletscherregionen eine gleichmäßige Verteilung und für die Regionen der Eisschilde eine Verteilung gleich der bestimmten Massentrends für das Jahr 2015 aus monatlichen [GRACE](#) Lösungen angenommen wird, vergleiche Kapitel 5.1 beziehungsweise 5.1.3.

Abbildung 21a) zeigt die räumliche Verteilung der Massenänderungen ausgedrückt in Zentimetern [EWH](#), welche für den Start der Iteration in der Berechnung verwendet wird. Die Massen entsprechen jenen aus Gleichung (5.12). Es handelt sich dabei um alle Eismassenänderungen und das gleichmäßige Auftragen der Wassermassen auf die Ozeane, vergleiche Abbildung 14b). Weiße Flächen zeigen Gebiete, für die keine Massenänderung angenommen wird. In Summe kommt es zu einem Eismassenverlust von  $-555$  Gigatonnen. Diese Masse wird gleichmäßig über die Ozeane aufgeteilt.

In Abbildung 21a) sind die Massen dargestellt, welche durch das iterative Angleichen der Wasseroberfläche an die neue Äquipotentialfläche entstehen. Sie entsprechen den iterativ gewonnenen Massen von Gleichung (5.15), vergleiche Abbildung 15.

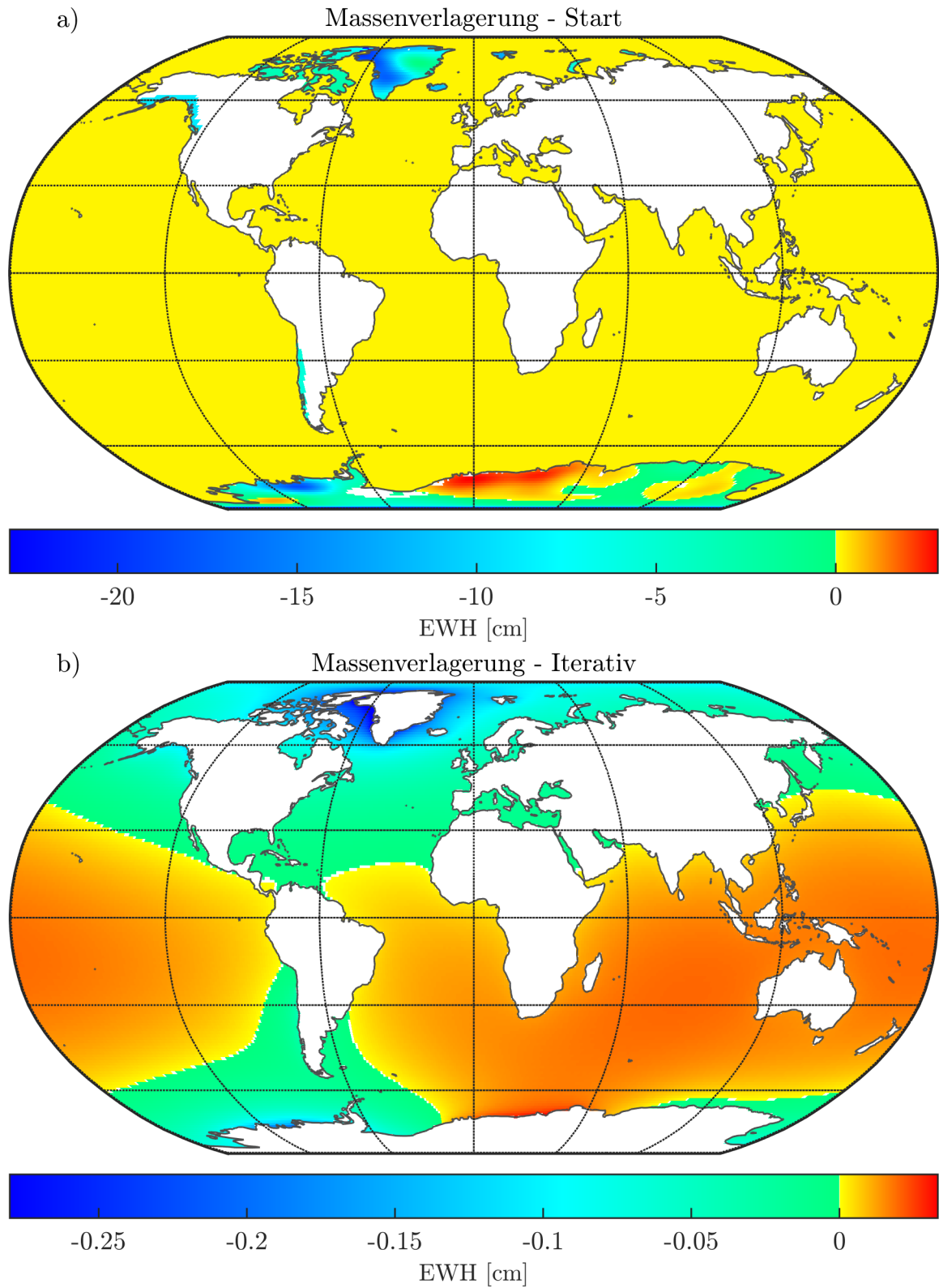


Abbildung 21: a) verwendete Massenänderungen für den Start der Iteration. b) Massenänderungen infolge des iterativen Angleichens

Vergleicht man Abbildung 21a) mit Abbildung 21b) sieht man, wie gering die Massenänderung infolge des iterativen Angleichen im Vergleich zur Massenänderung infolge des Abschmelzens der Wassermassen ausfällt. Das erklärt auch die schnelle Konvergenz der Iteration.

Abbildung 22a) fasst die Ergebnisse der iterativen Massenverlagerung zusammen und visualisiert die gesamte Änderung, welche aufgrund der gravitativen Effekte entsteht, vergleiche Kapitel 5.2 und 5.3. Die Änderung des Meeresspiegels wird durch Vergleich der Geoidundulationen vor und nach den Massenverlagerungen, analog zu Formel (5.19) berechnet. Insgesamt haben die gravitativen Effekte eine Größenordnung von maximal  $\pm 0.5$  Millimeter für die meisten Ozeangebiete. Ausnahmen bilden die polaren Regionen, wo die Differenz an den Ozeanen über zwei Millimeter steigen kann.

Auf den globalen mittleren Meeresspiegel haben die gravitativen Effekte keinen Einfluss. Bestimmt man

$$\Delta MS L_{grav} = \frac{\iint_{\Omega} \mathcal{O}(\vartheta, \lambda) \cdot \Delta h_{grav}(\vartheta, \lambda) d\Omega}{\iint_{\Omega} \mathcal{O}(\vartheta, \lambda) d\Omega} \quad (6.1)$$

so liegt das Ergebnis deutlich unter einem Zehntel Millimeter, vergleiche Tabelle 8.

Infolge der angenommenen Massenverlagerungen kommt es zu einer Verschiebung des Schwerpunktes der Erde, also des Geozentrums und infolgedessen auch des Koordinatenursprungs, welcher wie in Kapitel 5.5 beschrieben, berücksichtigt werden muss.

$$\Delta \vec{x} = \begin{pmatrix} -0.08 \\ 0.13 \\ -0.29 \end{pmatrix} \text{ [mm]} \quad (6.2)$$

Dabei zeigt die x-Achse Richtung Greenwich, die y-Achse Richtung  $90^\circ$  Ost und die z-Achse Richtung Nordpol. Die große Verschiebung in z-Richtung lässt sich aus der ungleichen Verteilung der Massenverluste erklären. Auf der Nordhalbkugel gehen vergleichsweise mehr Massen verloren als auf der Südhalbkugel. Durch den Verlust der Massen im Norden verschiebt sich der Schwerpunkt Richtung Süden. Betrachtet man nur die Verschiebung in x- und y-Richtung, so wandert der Massenschwerpunkt Richtung  $122^\circ$  Ost. Diese Verschiebung kann durch den Indischen und Pazifischen Ozean erklärt werden, wo sich die Wassermassen sammeln, vergleiche Abbildung 22a).

In Summe verlagert sich der Massenschwerpunkt der Erde, und somit der Ursprung des Koordinatensystems um 0.33 Millimeter. Dies hat eine Änderung des mittleren Meeresspiegels von  $-0.03$  Millimeter zur Folge, vergleiche Tabelle 8.

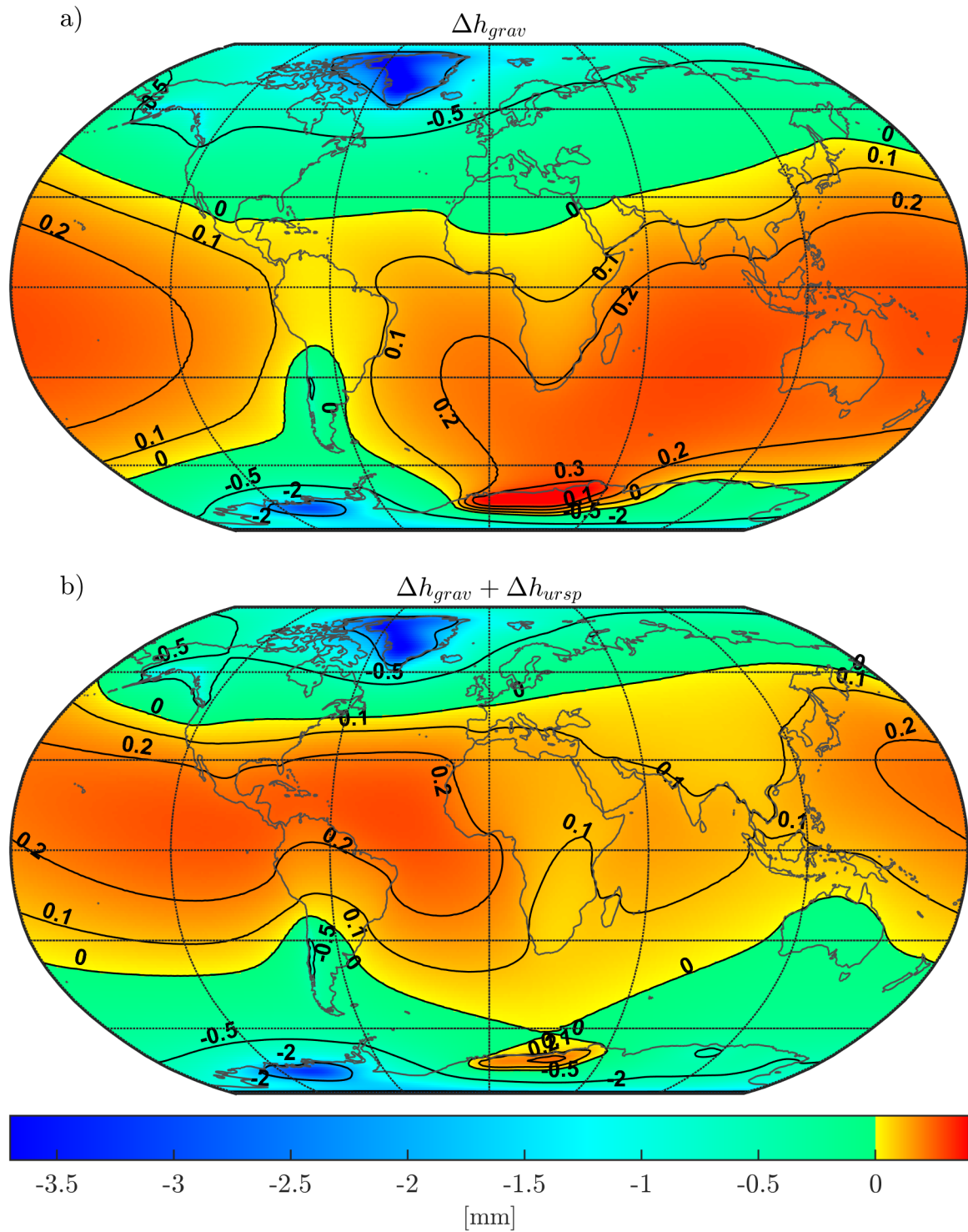


Abbildung 22: a) Visualisierung des gravitativen Einflusses auf den Meeresspiegel. b) Kombination aus gravitativem Einfluss und Verschiebung des Koordinatenursprungs

Abbildung 22b) zeigt die Änderung der absoluten Meereshöhe nach Berücksichtigung der gravitativen Einflüsse und der Verlagerung des Geozentrums. Vergleicht man Abbildung 22b) mit 22a) erkennt man deutlich die Verlagerung des Meeresspiegelanstiegs in Richtung Norden. Außerdem erkennt man die Abnahme des Meeresspiegelanstiegs zwischen Indien und Australien, genau dort, wohin sich das Geozentrum verlagert. Auf der entgegengesetzten Seite der Erde, östlich und westlich von Südamerika, kommt es infolge dieser Verlagerung zu einem Anstieg des absoluten Meeresspiegels.

Abbildung 23 visualisiert den Meeresspiegelanstieg nach Aufbringen des Schmelzwasservolumens, wie in Kapitel 5.4 beschrieben. Sie zeigt den kombinierten Effekt von gravitativen Einflüssen, kombiniert mit dem Einfluss der Änderung des Koordinatenursprungs und dem Aufbringen des Schmelzwasservolumens.

Der größte Meeresspiegelanstieg wird in den äquatorialen Regionen erwartet. In den polaren Regionen, speziell im Bereich des Nordpols kommt es zu einem Absinken des Meeresspiegels. Für Europa und die Regionen mittlerer Breite fällt der Meeresspiegelanstieg nicht so dramatisch aus.

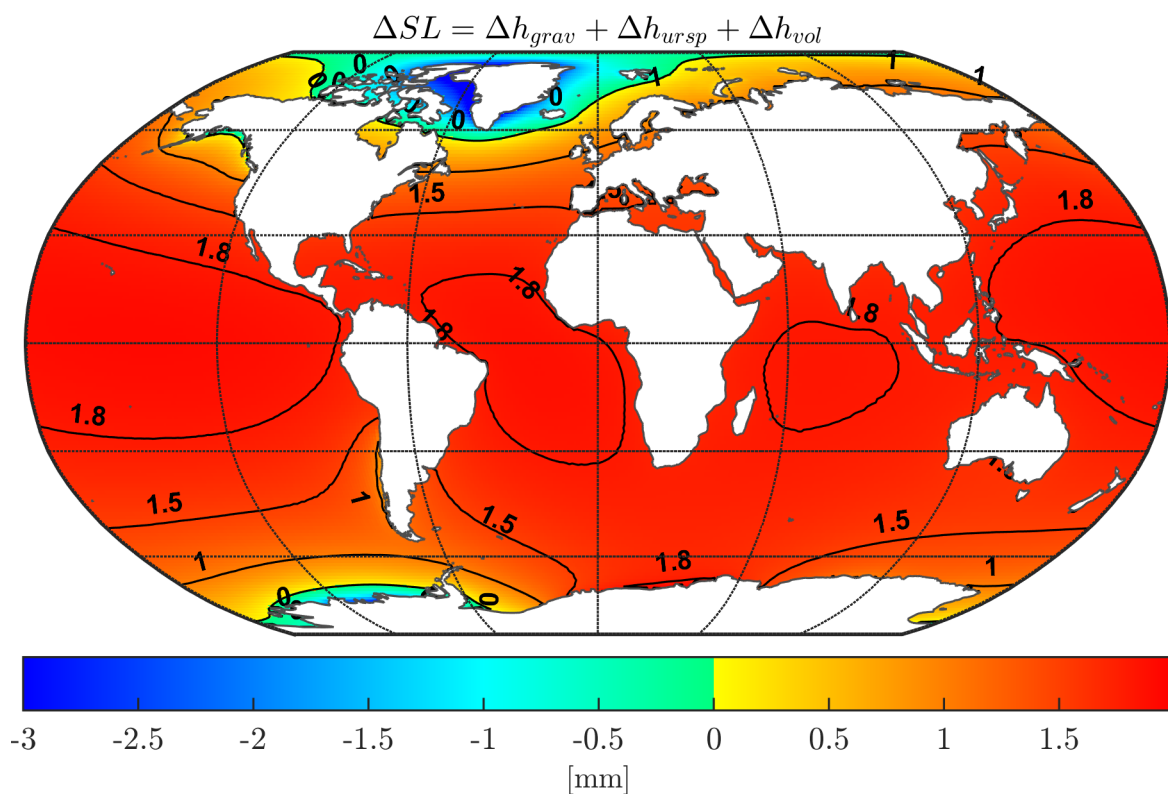


Abbildung 23: Berechneter Meeresspiegelanstieg infolge der gravitativen Einflüsse, kombiniert mit dem Einfluss der Änderung des Koordinatenursprungs und dem Aufbringen des Schmelzwasservolumens



Tabelle 8: Änderung des mittleren Meeresspiegels  $\Delta MSL$  infolge der Massenverlagerungen aus Szenario I

Einfluss	[mm]
$\Delta h_{grav}$	$0.068 \pm 0.018$
$\Delta h_{ursp}$	$-0.030 \pm 0.003$
$\Delta h_{vol}$	$1.525 \pm 0.473$
<b><math>\Delta MSL</math></b>	<b><math>1.562 \pm 0.488</math></b>

Tabelle 8 listet die Ergebnisse der Änderung des mittleren Meeresspiegelanstiegs auf. Die Änderung des mittleren Meeresspiegels infolge von Massenverlagerungen beträgt ungefähr  $1.5 \pm 0.5$  Millimeter pro Jahr. Der beobachtete Meeresspiegelanstieg liegt bei  $3.3 \pm 0.4$  Millimeter pro Jahr, vergleiche Abbildung 4. Dabei ist der Haupteinfluss der Meeresspiegelerhöhung die thermische Expansion, vergleiche Kapitel 2.1, weshalb die berechneten Werte als plausibel angenommen werden können. Laut IPCC Report liegt der Einfluss der Kryosphäre derzeit bei  $1.46 \pm 0.40$  Millimeter, vergleiche Tabelle 1. Die Fehlerabschätzung in Tabelle 8 berechnet sich anhand der Verwendung der Massen aus Tabelle 7 inklusive ihrer Standardabweichungen.

Wie man aus der Berechnung des mittleren Meeresspiegels aus Tabelle 8 erkennt, ändert sich der mittlere Meeresspiegel nur merklich infolge des Aufbringens des neuen Volumens an Schmelzwasser. Allein die Berechnung des mittleren Meeresspiegels gibt jedoch keinen guten Überblick über den tatsächlichen Meeresspiegelanstieg, da dieser räumlich nicht gleichmäßig erfolgt. In den äquatorialen Regionen steigt der Meeresspiegel stärker als das globale Mittel, in den Polarregionen weniger.

Deshalb ist es wichtig, neben dem mittleren Meeresspiegel auch die globale Verteilung zu berechnen. Die gravitativen Einflüsse und zu einem kleineren Teil der Einfluss der Änderung des Koordinatenursprungs bestimmen dabei die räumliche Verteilung.

Abbildung 24 zeigt den Einfluss der einzelnen Eisschilde und Gletscherregionen auf den mittleren Meeresspiegel. Dabei zeigt sich ein großer Unterschied des Einflusses zwischen den Eisschilden und den Gletscherregionen infolge des viel größeren Massenverlustes. Nur die Gletscherregionen von Alaska, Kanada und den Anden verändern die Lösung sichtbar. Speziell die Massenverluste der Region Alaska haben einen Rückgang des Meeresspiegels westlich von Nordamerika zur Folge. Selbes gilt für die Anden in Südamerika.

Die Massenverluste in Russland, Island und Spitzbergen haben kaum Einfluss auf die regionale Änderung des Meeresspiegels. Dies rechtfertigt das Vorgehen, dass Gletschergebiete, deren Verluste kleiner als 5 Gigatonnen sind, vernachlässigt werden.

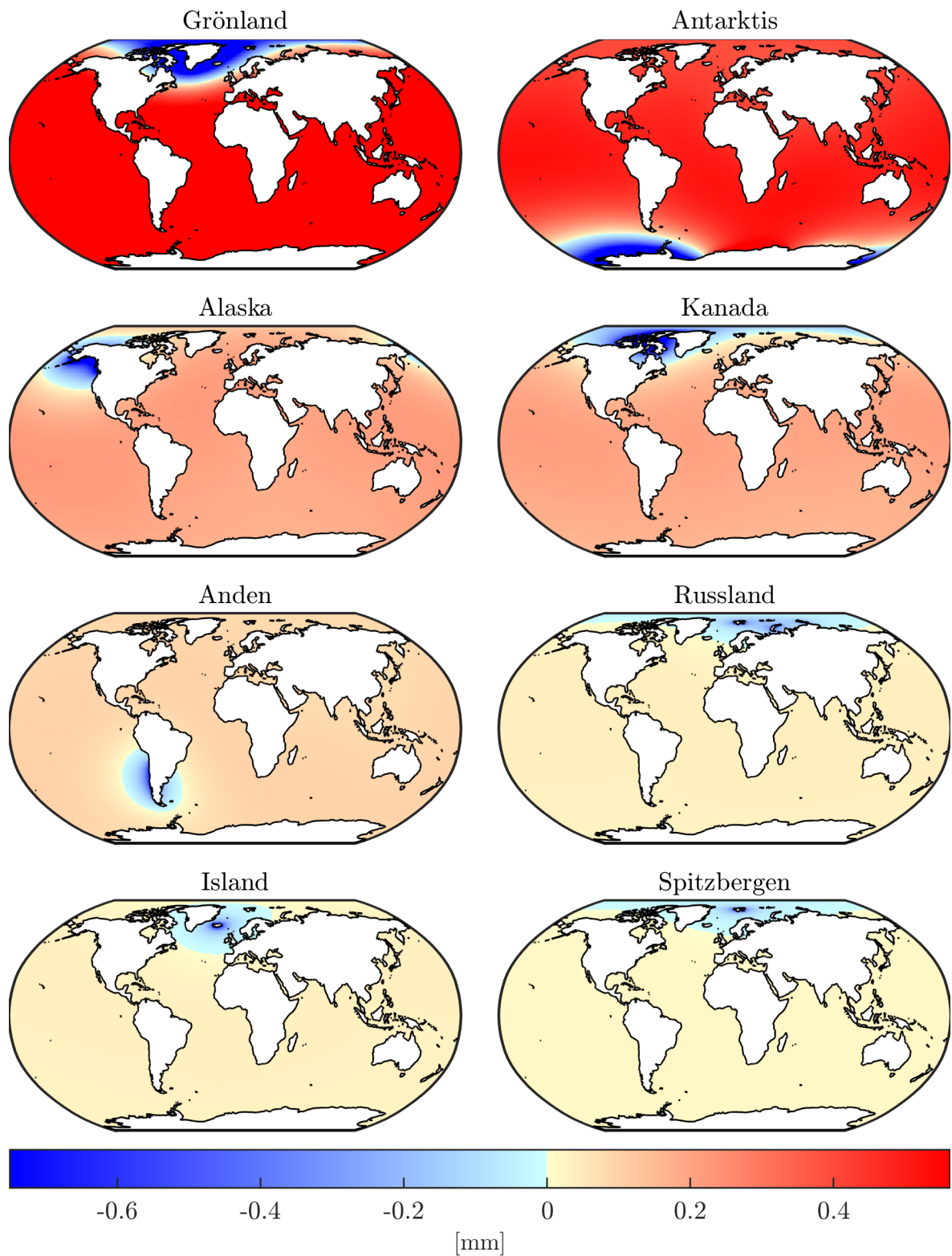


Abbildung 24: Einfluss der einzelnen Regionen auf den Meeresspiegelanstieg



### 6.1.1 Einfluss der Massenverteilung

Abbildung 25 zeigt, warum die räumliche Verteilung für die Eisschilde nicht als gleichmäßig angenommen werden kann und die räumliche Verteilung in der Berechnung berücksichtigt werden muss.

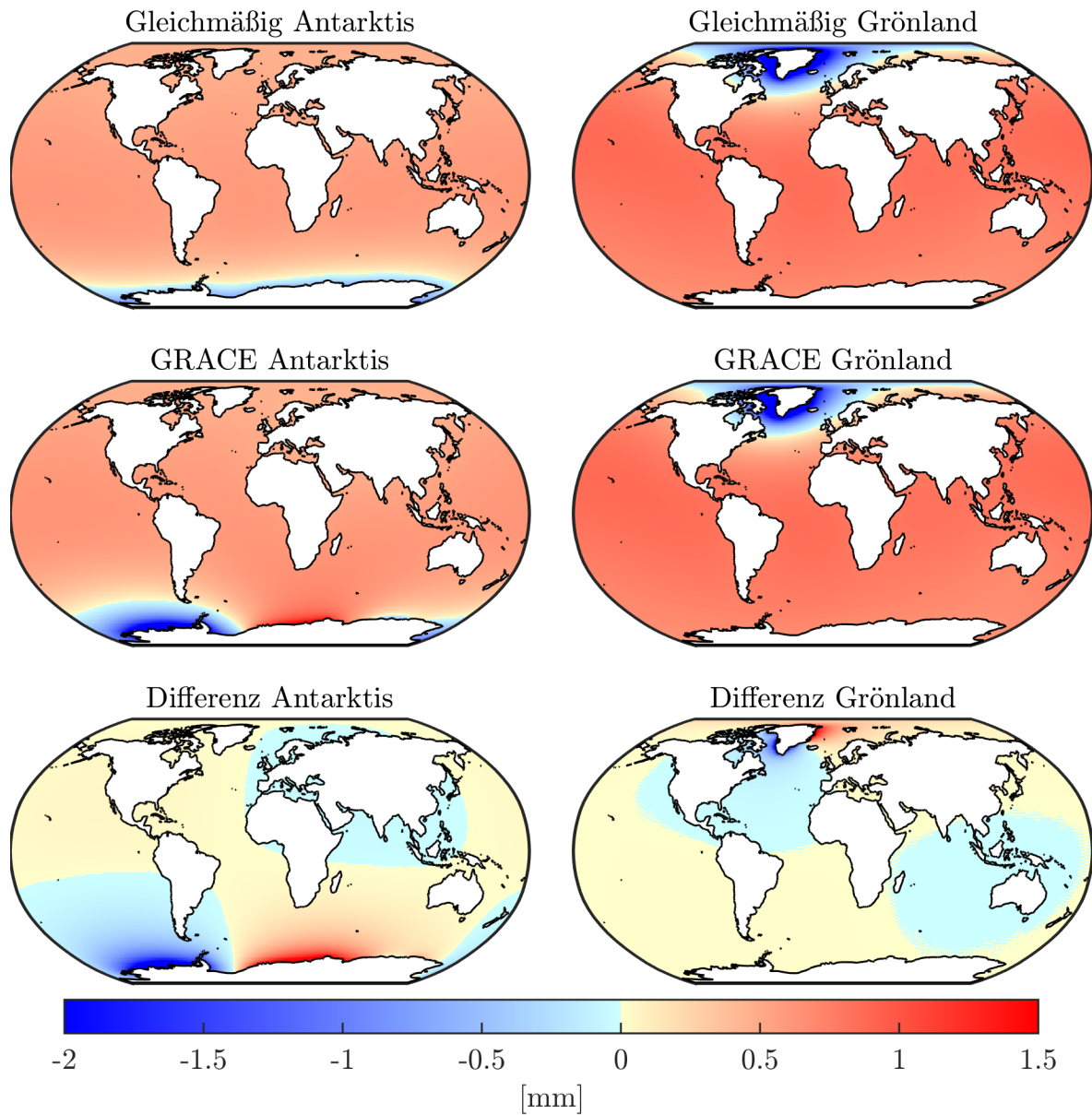


Abbildung 25: Einfluss der Massenverteilung auf den Meeresspiegelanstieg

Links ist in Abbildung 25 die Änderung des Meeresspiegels infolge der Massenverlagerungen bei der Antarktis, rechts bei Grönland dargestellt. Dabei wird für die oberen Bilder eine gleichmäßige Verteilung angenommen. Die mittleren Bilder zeigen die Verteilung aus den GRACE Messungen und unten ist die Differenz eingezeichnet.

Besonders für die Antarktis gibt es große Unterschiede. Eine gleichmäßige Verteilung hat ein deutlich niedrigeres maximales Absinken zur Folge. Dies wird dadurch erklärt, dass sich mehr Massenverluste im Landesinneren konzentrieren. Diese Massenverlagerungen haben weniger Einfluss auf das küstennahe Absinken. Für die Westantarktis fällt das Absinken im Fall einer gleichmäßigen Verteilung viel niedriger aus. Die Differenz beträgt teilweise zwei Millimeter, sie ist damit fast so groß wie die generelle Änderung des Meeresspiegels in dieser Region. Außerdem verschwinden die Flächen, bei denen eine Massenzunahme auftritt, wodurch es zu keinem Anstieg des Meeresspiegels im Bereich zwischen  $0^\circ$  und  $60^\circ$  Grad Ost kommt.

Für Grönland hat die räumliche Verteilung einen kleineren Einfluss als für die Antarktis. Vergleicht man Abbildung 18 und 19 erkennt man, dass die Verteilung des Abschmelzens in Grönland gleichmäßiger ist als für die Antarktis. Eine gleichmäßige Annahme der Verteilung in Grönland zeigt eine geringere Abnahme des Meeresspiegels im Südwesten. Für den Nordosten würde dagegen der Meeresspiegelanstieg stärker ausfallen.

### 6.1.2 Einfluss der postglazialen Landhebung

Während der letzten Eiszeit waren große Gebiete in höheren Breiten von einer dicken Eisschicht bedeckt. Diese Eisschicht hat infolge ihrer großen Masse die Erdoberfläche verformt. Durch das Abschmelzen der Eisschicht und dem Wegfallen der Massen kam es erneut zu einer viskoelastischen Verformung der Erde, welche bis heute anhält. Diesen Effekt nennt man die postglaziale Landhebung (*Glacial Isostatic Adjustment*) (GIA).

In den Regionen, die zuvor vergletschert waren, wie Kanada oder Nordwesteuropa kommt es zu einer Hebung der Landmassen, teilweise von bis zu 1 Zentimeter pro Jahr, Abbildung 26 visualisiert die Landhebung für das verwendete GIA Modell von [Geruo et al., 2013]. Diese Hebung hat einen großen Einfluss auf den relativen Meeresspiegel, welcher direkt mit der Küste verbunden ist. Dies ist auch ein großer Einflussfaktor, warum der relative Meeresspiegel in Teilen von Kanada und Skandinavien fällt.

Die Hebung und somit Verschiebung der Massen hat ebenfalls einen Einfluss auf die Geoidundulation, siehe Abbildung 27b). Somit gibt es einen Einfluss auf den absoluten Meeresspiegel, welcher in dieser Arbeit betrachtet wird. Abbildung 27a) zeigt den Einfluss der postglazialen Landhebung, ausgedrückt als Masse äquivalenter Wasserhöhe. Der Effekt ist besonders groß in Kanada, Nordwesteuropa und der Antarktis, aber auch

Bereiche, die während der letzten Eiszeit nicht vergletschert waren, werden beeinflusst.

Die Satellitenmission [GRACE](#) misst jede Form von Massenveränderung. Somit wird auch der Effekt infolge der Hebung von Landmassen mitbeobachtet. Ist man an der Veränderung von Eismassen aufgrund der Klimaerwärmung interessiert, muss der Effekt der postglazialen Landhebung berücksichtigt und aus der beobachteten Massenänderung entfernt werden, da die Größenordnung durchaus im signifikanten Bereich liegt. (Vergleiche Abbildung 27a) mit den Trends aus Abbildung 18 und 19.

Die Unsicherheiten dieses Modells von [\[Geruo et al., 2013\]](#) liegen bei  $\pm 20\%$ . Dieser Wert kommt nicht aus einer strengen Fehlerbetrachtung sondern aus dem Vergleich dieses Modells mit anderen verfügbaren Modellen. Dabei überschätzen diese 20% den Fehler für Kanada wahrscheinlich, da dort die Veränderung der Eismassen und deren Abschmelzen relativ genau bekannt ist. Der Fehler für Grönland und für die Antarktis könnte höher liegen, da man in diesen Gebieten weniger geschichtliche Aufzeichnungen zur Verfügung hat. Ebenfalls werden die  $\pm 20\%$  den Fehler in Gebieten, wo der Einfluss nahe Null liegt, unterschätzen, da 20% von Werten nahe Null zu niedrig ausfallen werden.

#### Hebung der Landmassen infolge GIA

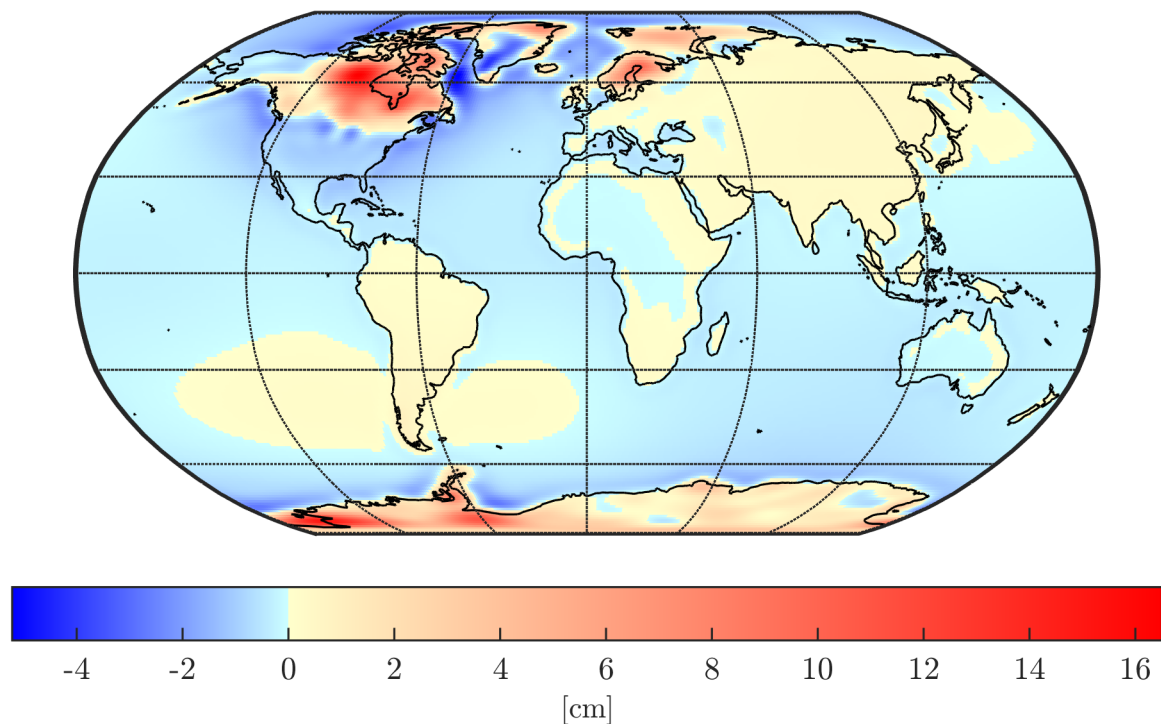


Abbildung 26: Größenordnung postglazialer Landhebung [\[Geruo et al., 2013\]](#)

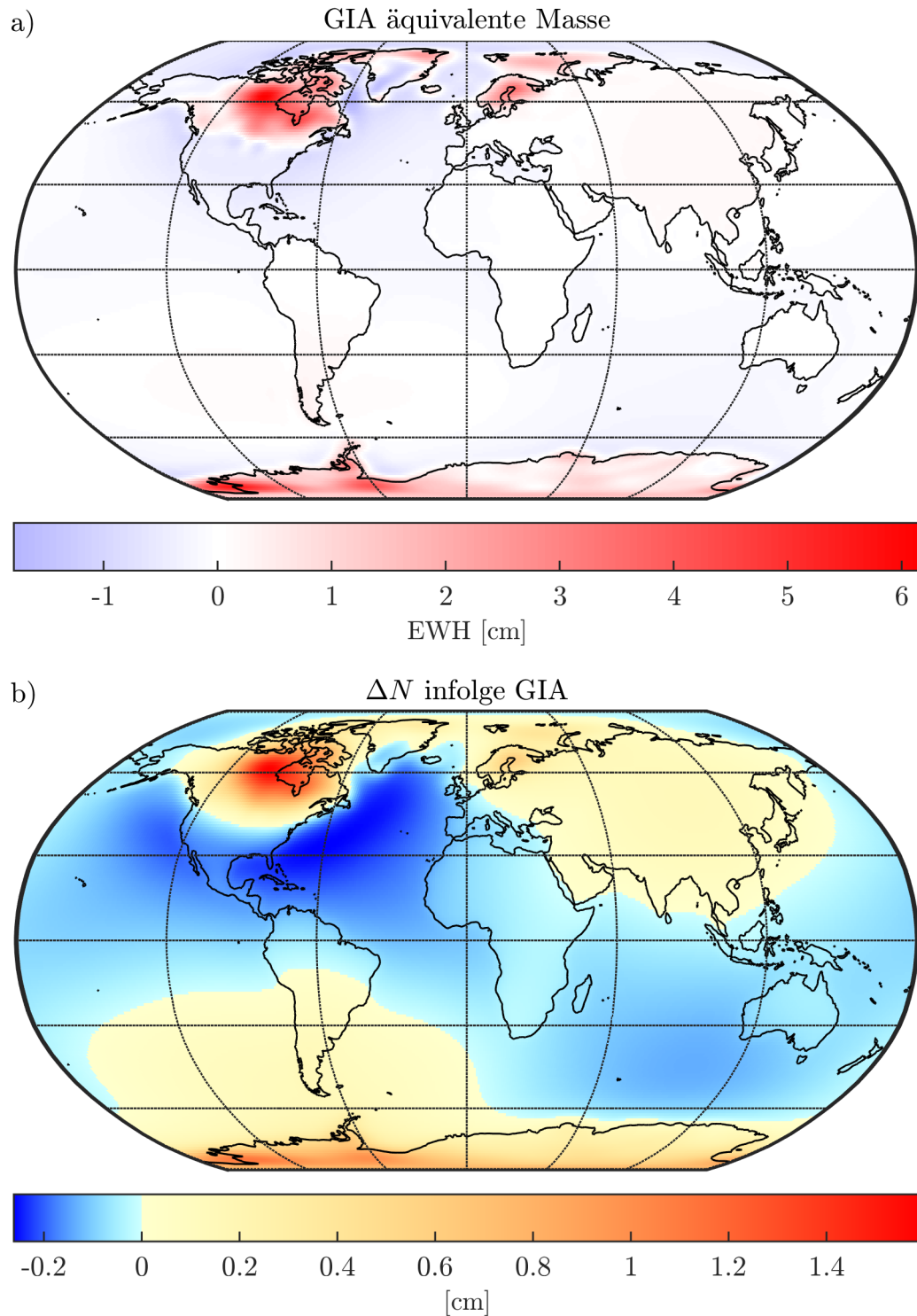


Abbildung 27: a) Jährlicher Einfluss der postglazialen Landhebung ausgedrückt in Masse äquivalenter Wasserhöhe. b) resultierende jährliche Änderung der Geoidundulation

### 6.1.3 Auswirkung auf den Trägheitstensor

Infolge der Massenverlagerungen ändert sich der Trägheitstensor der Erde. Aus den ursprünglichen Kugelfunktionskoeffizienten kann wie in Kapitel 5.6 der Trägheitstensor bestimmt werden.

Im Folgenden werden alle Trägheitstensoren bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems, also nicht in Hauptlage, dargestellt. Für den Trägheitstensor der ursprünglichen Kugelfunktionsentwicklung  $C_0$  ergeben sich folgende Werte:

$$C_0 = 1 \cdot 10^{37} \begin{pmatrix} 8.0025 & 0.0044 & 0.0000 \\ 0.0044 & 8.0179 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 8.0365 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Die Hauptachsen zeigen in die Richtungen, welche in Tabelle 9 aufgelistet sind.

Tabelle 9: Hauptträgheitsmomente und ihre Richtungen aus der ursprünglichen Kugelfunktionsentwicklung

	[kg·m <sup>2</sup> ]	Breite $\theta$ [°]	Länge $\lambda$ [°]
$A_0$ :	$8.0025 \cdot 10^{37}$	0.00	165.07
$B_0$ :	$8.0179 \cdot 10^{37}$	0.00	75.07
$C_0$ :	$8.0365 \cdot 10^{37}$	90.00	-77.75

Man sieht also, dass das Hauptträgheitsmoment  $C_0$  gut mit der z-Achse und somit mit dem Nordpol zusammenfällt, wobei nahe des Nordpols die Länge relativ unbestimmt ist. Die Richtung der Hauptträgheitsmomente  $A_0$  und  $B_0$  liegen in der Äquatorebene. Aufgrund der annähernden Radialsymmetrie der Erde sind die Längen beim Äquator schlecht bestimmbar.

Berechnet man sich die Werte nach den Massenverlagerungen bekommt man folgende Ergebnisse:

$$C_1 = 1 \cdot 10^{37} \begin{pmatrix} 8.0025 & 0.0044 & 0.0000 \\ 0.0044 & 8.0179 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 8.0365 \end{pmatrix} \approx C_0 \quad (6.4)$$

mit den Hauptachsen in Richtung der Werte aus Tabelle 10.

Tabelle 10: Hauptträgheitsmomente und ihre Richtungen nach den Massenverlagerungen

	[kg·m <sup>2</sup> ]	Breite $\theta$ [°]	Länge $\lambda$ [°]
$A_1$ :	$8.0025 \cdot 10^{37}$	0.00	165.07
$B_1$ :	$8.0179 \cdot 10^{37}$	0.00	75.07
$C_1$ :	$8.0365 \cdot 10^{37}$	90.00	-77.52

Vergleicht man die Werte aus Tabelle 9 und 10, wird kaum ein Unterschied erkannt. Einzig der Wert der Länge für das Trägheitsmoment  $C$  ändert sich, wobei die Länge in solchen Breiten sehr schlecht bestimmt ist.

Grund dafür sind die relativ kleinen Massenänderungen im Bezug zur Gesamtmasse der Erde, welche bei  $E = 5.973 \cdot 10^{24}$  Kilogramm liegt.

Der Trägheitstensor rein aus den Massenverlagerungen, welcher mittels (5.31) berechnet wird, beträgt:

$$C_m = 1 \cdot 10^{28} \begin{pmatrix} -0.7423 & -0.0401 & 0.2101 \\ -0.0401 & -0.5787 & -0.0958 \\ 0.2101 & -0.0958 & 1.3388 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Die Richtungen der Hauptträgheitsmomente sind in Tabelle 11 aufgelistet.

Tabelle 11: Hauptträgheitsmomente und ihre Richtungen nur aus Massenverlagerungen

	[kg·m <sup>2</sup> ]	Breite $\theta$ [°]	Länge $\lambda$ [°]
$A_m$ :	$-0.7423 \cdot 10^{28}$	5.20	-170.64
$B_m$ :	$-0.5787 \cdot 10^{28}$	3.80	99.01
$C_m$ :	$1.3388 \cdot 10^{28}$	83.55	-27.02

Dabei liegen die Werte der Massenverlagerungen teils um 12 Größenordnungen unter jenen der gesamten Erde. Dies hat besondere numerische Konsequenzen, da infolge der Gleitkommadarstellung der Zahlen im Computer nur eine begrenzte Anzahl an Zahlen zur Verfügung stehen. Beispielsweise unterscheiden sich die nächsten darstellbaren Zahlen für einen Wert von  $8 \cdot 10^{37}$ , mit *double precision* Verspeicherung, um  $9.4447 \cdot 10^{21}$ . Addiert man die Werte aus Tabelle 11 mit jenen aus Tabelle 9 so kommt es zu einer Auslöschung von signifikanten Stellen. Darum ist es numerisch besser, die Werte für Tabelle 10 über die Stokes-Koeffizienten zu berechnen.

Berechnet man die Bewegung der Trägheitsachse  $C$ , so kommt man auf folgendes Ergebnis:

Tabelle 12: Änderung der Hauptträgheitsachse  $C$

x:	1.5923 [mas]
y:	-0.7492 [mas]
Richtung:	25.2 [°W]

Die Größenordnung der Änderung beträgt rund eine Millibogensekunde. Wobei die Änderung in Richtung 25.2° West erfolgt.

Unter der vereinfachten Annahme, dass der Gesamtdrehimpuls der Erde gleich bleibt, kann man mit Hilfe des neuen Trägheitstensors (6.3) eine neue Drehgeschwindigkeit der Erde berechnen. Vergleicht man diese mit der Drehgeschwindigkeit der Erde mittels (6.4) errechnet sich, dass sich die Drehrate um  $5.565^{-12}$  Radiant pro Sekunde, und somit die Tageslänge um 0.027 Millisekunden ändert.

Generell bleibt zu erwähnen, dass die Berechnung der Änderung der Erdrotation infolge von Massenverlagerungen jedenfalls eine genauere Betrachtung erfordert. Hier bietet sich die Möglichkeit für weitere Forschungsarbeiten an.

## 6.2 Szenario II: Jährliches Schmelzen inklusive Landhydrologie

Szenario II betrachtet ebenfalls die jährliche Änderung des Meeresspiegels. Unterschied zu Szenario I ist, dass nicht nur Massenänderungen der Kryosphäre, sondern von allen Landflächen bestimmt werden. Dabei wird angenommen, dass es sich bei den Massenänderungen um Wassermassenverlagerungen handelt und dass somit Änderungen der atmosphärischen Auflasten von vernachlässigbarer Größenordnung sind.

Abbildung 28 zeigt die veränderten Massenverlagerungen. Die Massentrends für die Gebiete von Grönland und der Antarktis entsprechen jenen aus Szenario I.

Für alle weiteren Landflächen werden die Massentrends ebenfalls aus monatlichen GRACE Lösungen berechnet. Im Unterschied zur Berechnung für die Gebiete der Kryosphäre wird ein linearer Trend angenommen, da dieser die Zeitreihe der Landflächen besser widerspiegelt. Da die Massentrends zwischen benachbarten Rasterzellen viel ungleichmäßiger sind als bei den Eisschilden, wird das Ergebnis nachträglich mit einem Gauß-Filter von der Größe  $5^\circ \times 5^\circ$  und einer Standardabweichung von  $1.5^\circ$  gefiltert.

Hier sei nochmals auf einen Vergleich von Abbildung 28 und 27a) hingewiesen, welcher recht deutlich den großen Einfluss der postglazialen Landhebung, besonders für



Massenzunahmen wie in Skandinavien, zeigt.

Die Gletschergebiete werden bei diesem Szenario nicht speziell behandelt. Ihre Änderung ist in den Massentrends aus den [GRACE](#) Monatslösungen enthalten, wobei sich dabei die Änderungen infolge von Eisschmelze und andere Massenänderungen überlagern.

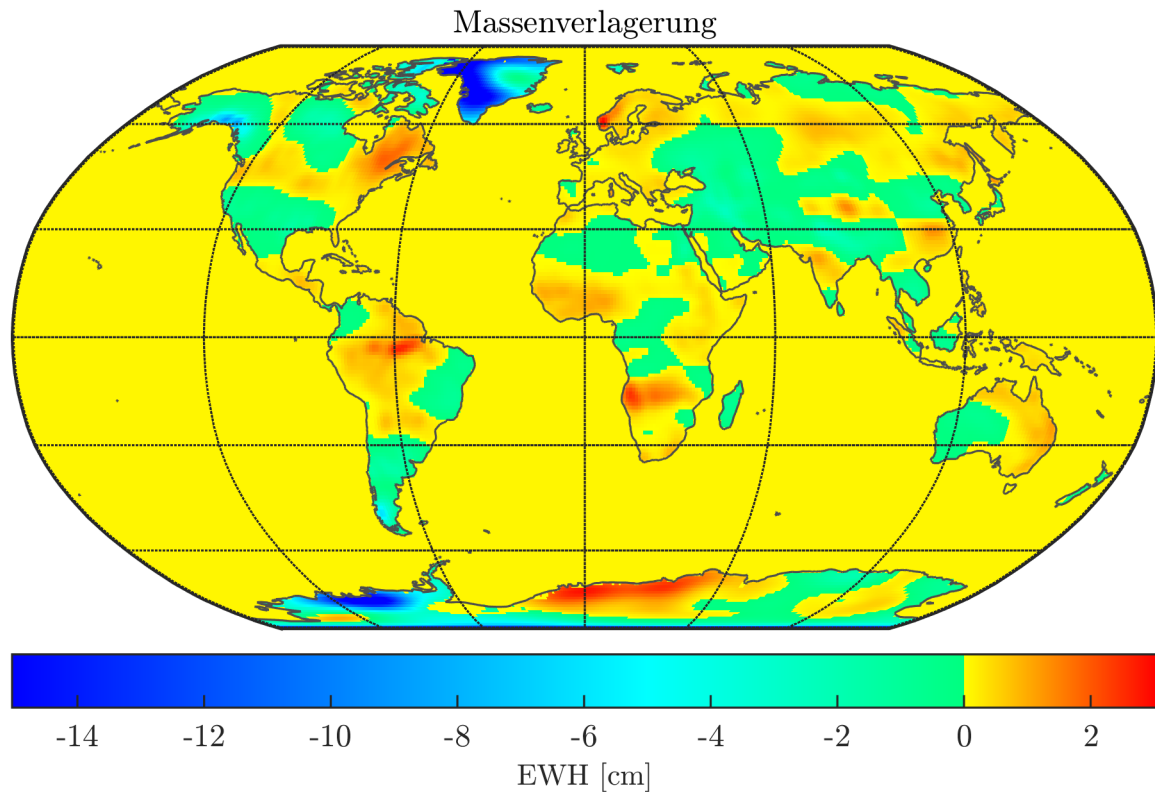


Abbildung 28: Visualisierung der gesamten Massenverlagerungen inklusive der Änderungen der Landhydrologie

Insgesamt kommt es zu einer Massenverlagerung von  $-399.1$  Gigatonnen, also deutlich weniger als in Szenario I, vergleiche Tabelle 7. Grund dafür ist, dass in Szenario I nur negative Massenverlagerungen berücksichtigt werden. Wie man in [Abbildung 28](#) sieht, gibt es jedoch auch Gebiete, wo tendenziell eine Massenzunahme stattfindet, zum Beispiel in Gebieten von Brasilien, Südafrika, Indien und in Teilen von Russland. Außerdem fallen die negativen Massentrends der Gletscherregionen geringer aus, als in Szenario I.

[Abbildung 29](#) zeigt die Änderung der Geoidundulation infolge der gravitativen Effekte und infolge der Verschiebung des Koordinatenursprungs. Die Höhenunterschiede fallen infolge der geringeren Massenverlagerungen tendenziell etwas geringer aus als in [Abbildung 22](#).



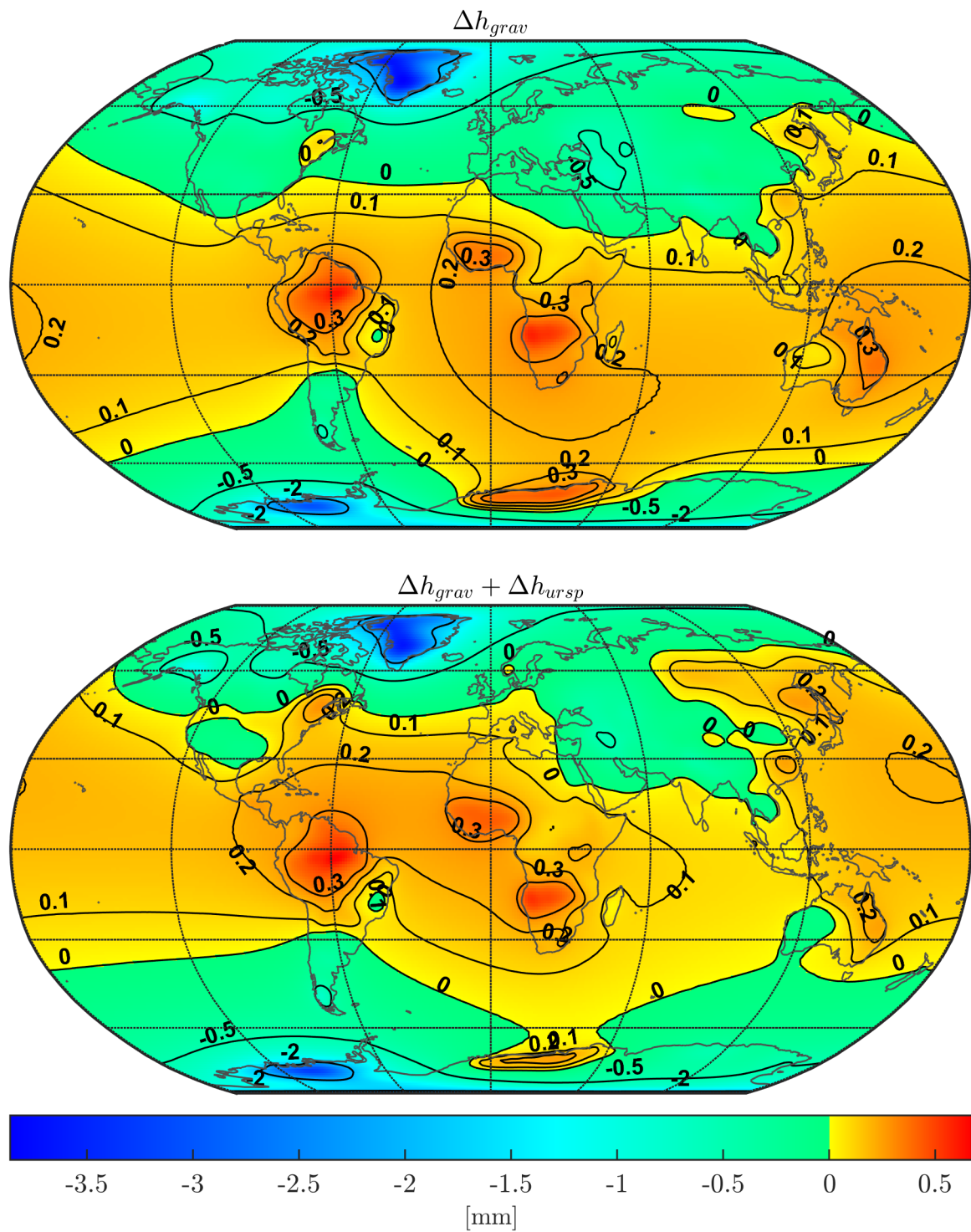


Abbildung 29: Visualisierung der Ergebnisse. Oben: infolge gravitativer Änderungen. Unten: infolge gravitativer Änderungen und der Verschiebung des Ursprungs

Die Verschiebung des Ursprungs ergibt sich für Szenario II folgendermaßen:

$$\Delta\vec{x} = \begin{pmatrix} -0.03 \\ 0.04 \\ -0.21 \end{pmatrix} \text{ [mm]} \quad (6.6)$$

Vergleicht man diese Verschiebung mit jener aus Szenario I (6.2) erkennt man, dass sich die Verschiebung viel mehr auf die z-Richtung konzentriert.

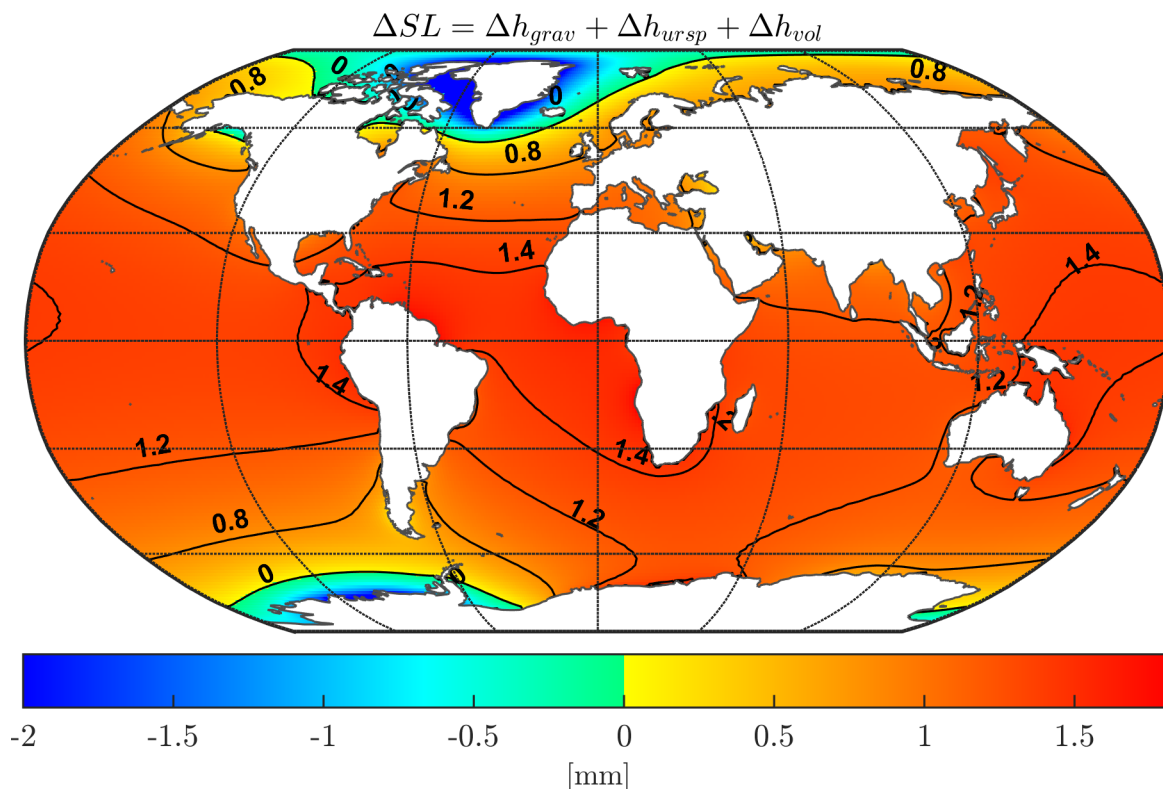


Abbildung 30: Visualisierung des berechneten Meeresspiegelanstiegs für Szenario II

Abbildung 30 visualisiert das Ergebnis der Änderung des Meeresspiegels nach Berücksichtigung aller in dieser Arbeit angeführten Effekte. Der Meeresspiegelanstieg ist verglichen mit Abbildung 23 etwas niedriger. Tabelle 13 listet die Änderung des mittleren Meeresspiegels analog zu Tabelle 8 auf. Dabei wird jedoch auf eine Betrachtung der Genauigkeit verzichtet, da eine Berechnung der Genauigkeit der Landmassentrends, wie in Kapitel 5.1, zwar möglich ist, jedoch wahrscheinlich das Ergebnis nicht korrekt sein wird, wenn ein sehr großes Gebiet, wie in unserem Fall die gesamten Landmassen, betrachtet werden.

Tabelle 13: Änderung des mittleren Meeresspiegels  $\Delta MSL$  infolge der Massenverlagerungen aus Szenario II

Einfluss	[mm]
$\Delta h_{grav}$	0.053
$\Delta h_{ursp}$	-0.021
$\Delta h_{vol}$	1.096
<b><math>\Delta MSL</math></b>	<b>1.129</b>

Der mittlere Meeresspiegelanstieg infolge der Massenverlagerungen von Szenario II beträgt rund 1.1 Millimeter und erklärt somit rund 33% des beobachteten mittleren Meeresspiegelanstieg von  $3.3 \pm 0.4$  Millimetern.

Vergleicht man diesen Wert mit den beobachteten Werten aus Tabelle 1 und der Berechnung aus Szenario I in Tabelle 8 zeigt sich, dass die berechneten Werte deutlich niedriger ausfallen. Dies liegt in der Tatsache, dass nur GRACE Messungen für die Bestimmung der Massenverluste verwendet werden. Wahrscheinlich werden aufgrund der geringen räumlichen Auflösung der GRACE Messungen, die Massentrends der Gletscher nicht vollständig erfassen, vergleiche Kapitel 2.3.2.

Für die Änderung des Trägheitstensors ergeben sich folgende Werte für die Verdrehung der Trägheitsachse für  $C$ :

Tabelle 14: Änderung der Hauptträgheitsachse  $C$ 

x:	1.8519 [mas]
y:	-0.4973 [mas]
Richtung:	15.0 [°O]

Auch wenn Szenario II die tatsächlichen Massenverlagerungen besser widerspiegeln, liegt der wesentliche Nachteil im Gegensatz zu Szenario I darin, dass die Einflussfaktoren für die Massenverlagerungen nicht bekannt sind. Für das Verständnis des Meeresspiegelanstiegs ist es von entscheidender Wichtigkeit, die unterschiedlichen Einflussfaktoren und ihre genauen Auswirkungen zu verstehen.

### 6.3 Szenario III: Verlust Eisschild Grönland

Szenario III beschreibt den hypothetischen Fall, was passieren würde, wenn der Eisschild von Grönland vollständig abschmelzen würde.

Bei diesem Szenario ändert sich die Dimension der Massenverluste im Gegensatz zu Szenario I und II deutlich. Um zu veranschaulichen aus wie viel Eismasse der grönländische Eisschild besteht, zeigt Abbildung 31 die Dicke des Eisschildes.

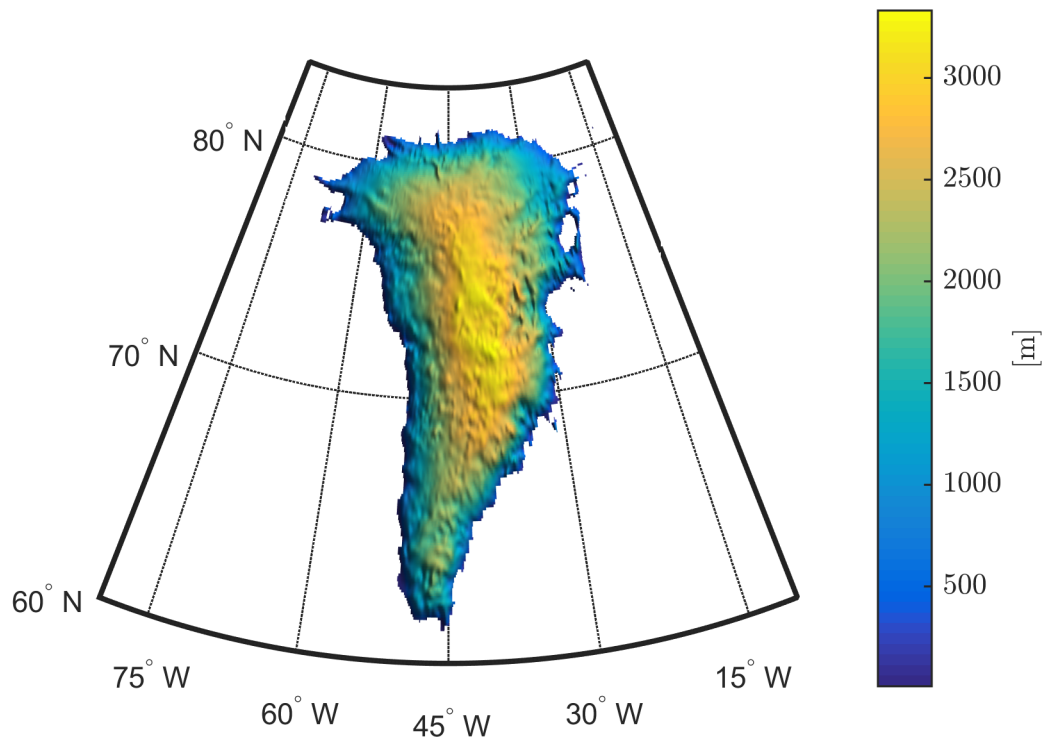


Abbildung 31: Dicke des Eisschildes in Grönland [Bamber, 2001]

Wie in Abbildung 31 zu sehen ist, ist der Eisschild im Zentrum Grönlands über drei Kilometer dick. Insgesamt besteht der Eisschild aus 2.85 Millionen Kubikkilometer Eis, welcher eine Fläche von 1.71 Millionen Quadratkilometern bedeckt.

Für die Berechnung ergibt sich ein Massenverlust von 2.68 Petatonnen, spricht  $2.68 \cdot 10^{15}$  Tonnen.

Abbildung 32 zeigt den berechneten Meeresspiegelanstieg infolge dieses riesigen Massenverlustes.

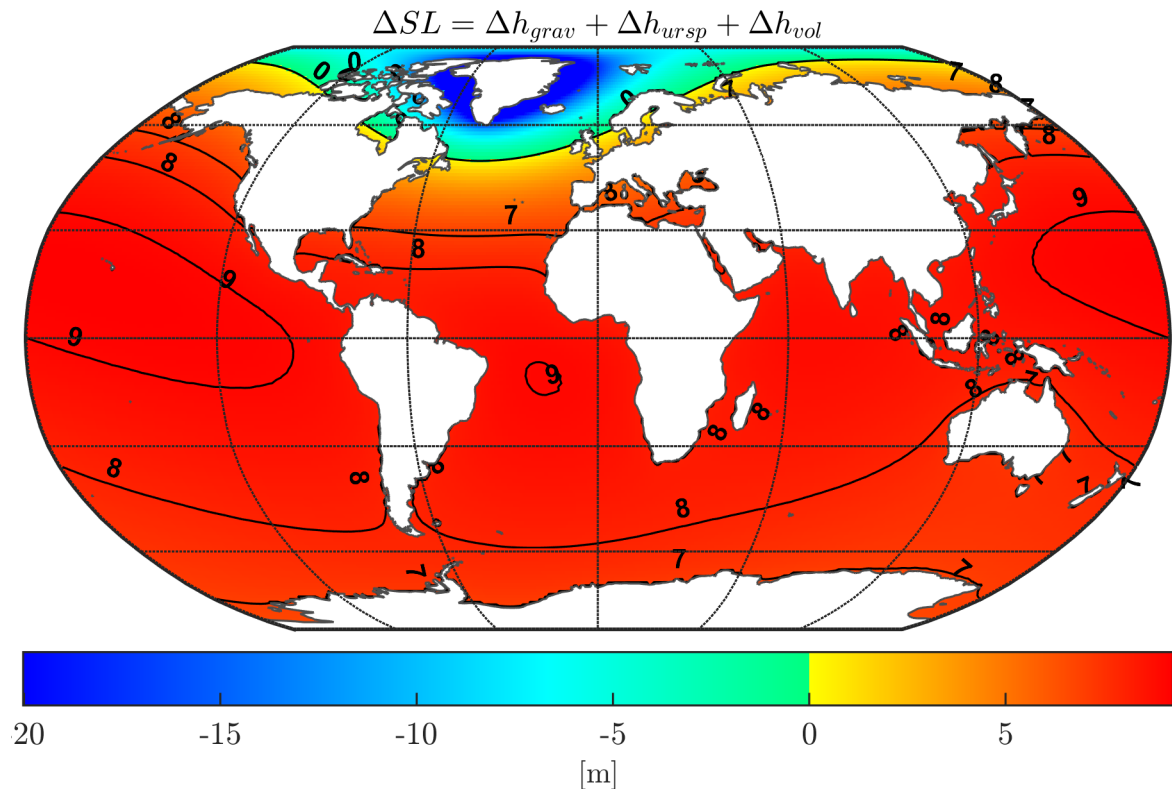


Abbildung 32: Visualisierung des berechneten Meeresspiegelanstiegs für Szenario III

Dabei gilt für die Änderung des mittleren Meeresspiegels:

Tabelle 15: Änderung des mittleren Meeresspiegels  $\Delta MSL$  infolge der Massenverlagerungen aus Szenario III

Einfluss	[m]
$\Delta h_{grav}$	0.467
$\Delta h_{ursp}$	-0.398
$\Delta h_{vol}$	7.353
<b><math>\Delta MSL</math></b>	<b>7.422</b>

Man beachte, dass im Unterschied zu Tabelle 8 und 13 die Einheit diesmal Meter und nicht Millimeter sind.

Für dieses Szenario lässt sich gut der Unterschied zwischen der Änderung des mittleren Meeresspiegels und der räumlich verteilten Änderung zeigen. Laut Tabelle 15 ändert sich der mittlere Meeresspiegel um 7.4 Meter. Vergleicht man diesen Wert mit Abbildung 32

erkennt man, dass es viele Küstenregionen gibt, bei denen die Änderung größer als 8 Meter ausfällt. Hingegen kommt es um Grönland zu einem Meeresspiegelrückgang von über 20 Metern, stellenweise bis zu 40 Metern.

Dies verdeutlicht nochmals die Notwendigkeit der Berücksichtigung der räumlichen Unterschiede für die Betrachtung des Meeresspiegelanstiegs. Ein Wert, der die mittlere Meeresspiegeländerung angibt, kann nur als grober Richtwert verstanden werden.

Der Vollständigkeit halber werden im Folgenden die Verschiebung des Ursprungs, sowie die Drehung der Hauptträgheitsachse  $C$  aufgelistet.

Der Ursprung verschiebt sich infolge der Massenverlagerungen um einige Meter.

$$\begin{pmatrix} -1.001 \\ 0.468 \\ -3.367 \end{pmatrix} \text{ [m]} \quad (6.7)$$

Tabelle 16 listet die Änderung der Hauptträgheitsachse  $C$  auf. Dabei muss wieder beachtet werden, dass die Winkleinheiten im Gegensatz zu Tabelle 12 und 14 in Bogensekunden anstelle von Millibogensekunden angegeben werden. Die Richtung der Verdrehung entspricht mit 36.3 Grad West genau der Richtung zu Grönland.

Tabelle 16: Änderung der Hauptträgheitsachse  $C$

x:	19.88 [as]
y:	-14.56 [as]
Richtung:	36.2 [°W]

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren vorgestellt, mit dem man die Änderung des Meeresspiegels infolge von Massenverlagerungen bestimmen kann. Die Berechnung erfolgt dabei mittels Kugelfunktionsentwicklungen. Dabei wurde großteils das Abschmelzen der Eismassen als Massenverlagerung aufgefasst, wobei die Eismassen der Eisschilde in Grönland und der Antarktis anders behandelt werden müssen als Gletscherregionen. Speziell wurde veranschaulicht, wie wichtig das Berücksichtigen der räumlichen Verteilung der Eismassen der Eisschilde auf das Ergebnis ist. Dabei wurde die Verteilung der Massenveränderungen aus monatlichen **GRACE** Lösungen berechnet. Die Größe der Massenänderung wurde aus Publikationen entnommen. Grund dafür ist, dass die Auflösung von **GRACE** Messungen es nicht erlaubt, für kleinere Gletscherregionen Eismassenverluste zu bestimmen. Ebenfalls sind für die Verwendung der **GRACE** Zeitreihe für die Eisschilde individuelle Filterkerne vonnöten.

Ein kritischer Punkt bei der Berechnung ist der Einfluss der postglazialen Landhebung, da sich die Massenänderungen, welche durch **GIA** verursacht werden, mit den Massenänderungen infolge von Eisschmelzen, überlagern.

Insgesamt wurden drei Szenarien untersucht:

- Szenario I berechnet den jährlichen Meeresspiegelanstieg infolge des mittleren jährlichen Abschmelzens der Kryosphäre.
- Szenario II berücksichtigt nicht nur Massenverlagerungen von Eismassen, sondern alle auf Landflächen auftretenden Massentrends, wobei angenommen wird, dass es sich hierbei um Änderungen von Wassermassen handelt.
- Szenario III behandelt den Fall, dass der gesamte Eisschild von Grönland abschmelzen würde.

Beim Vergleich der Ergebnisse aus Szenario I und II zeigt sich das Problem bei der reinen Verwendung von **GRACE** Beobachtungen. Während Szenario I mit einem berechneten Meeresspiegelanstieg von  $1.56 \pm 0.49$  Millimeter pro Jahr sehr nahe an den Werten anderer Publikationen liegt, wie die des IPCC Berichts mit  $1.46 \pm 0.40$  Millimeter, fällt das Ergebnis für Szenario II mit 1.13 Millimeter deutlich geringer aus.

Als Nebenprodukt der Berechnung ließ sich die Änderung des Trägheitstensors infolge der Massenverlagerungen bestimmen. Diese Änderung könnte in weiter folgenden Arbeiten verwendet werden, um den Einfluss auf die Erdrotation zu untersuchen. Eine Änderung der Erdrotation würde über das Fliehkraftpotential ebenfalls eine Auswirkung auf die Meereshöhen haben.

Ebenso wäre es möglich, noch weitere Einflussfaktoren auf den Meeresspiegelanstieg zu berechnen, um diesen besser bestimmen zu können. Dazu würde sich in erste Linie der Einfluss der thermalen Expansion anbieten, da dadurch der Großteil der Änderungen im Meeresspiegel bestimmt wird. Unter Verwendung von diversen CMIP5 Modellen könnten auch weitere Effekte, wie Ozeanströmungen berücksichtigt werden, um das Ergebnis weiter zu verbessern.



## Abbildungsverzeichnis

1	Meeresspiegelanstieg infolge verschiedener Klimamodelle . . . . .	6
2	Größenordnung von Einflussfaktoren auf Meeresspiegelanstieg . . . . .	9
3	Meeresspiegelanstieg aus Pegelmessungen . . . . .	11
4	Meeresspiegelanstieg aus Altimeter-Messungen . . . . .	14
5	Meeresspiegelanstieg: Kombination aller Beobachtungen . . . . .	15
6	Übersicht über Gletscherverteilung . . . . .	19
7	Das Geoid . . . . .	25
8	Legendre-Polynome . . . . .	29
9	zugeordnete Legendre-Polynome . . . . .	30
10	Arten von Kugelflächenfunktionen . . . . .	31
11	Kugelflächenfunktionen bis Grad 2 . . . . .	31
12	räumliche Auflösung Kugelfunktionsentwicklung . . . . .	34
13	verwendete Ozeanmaske . . . . .	41
14	Visualisierung Berechnung (a-c) . . . . .	42
15	Visualisierung Berechnung (d) . . . . .	43
16	Trend Massenverlust Einzelpunkte . . . . .	46
17	Massenverluste aus GRACE Lösungen . . . . .	47
18	Trends für Massenverlust Grönland . . . . .	49
19	Trends für Massenverlust Antarktis . . . . .	50
20	Einfluss Verschiebung Koordinatenursprung . . . . .	57
21	Szenario I: Massenverlagerungen . . . . .	65
22	Szenario I: $h_{grav}$ und $h_{ursp}$ . . . . .	67
23	Szenario I: Meeresspiegelanstieg . . . . .	68
24	Meeresspiegelanstieg infolge Masseverlustes einzelner Regionen . . . . .	70
25	Einfluss der Massenverteilung auf den Meeresspiegelanstieg . . . . .	71
26	Größenordnung der jährlichen postglazialen Landhebung . . . . .	73
27	Einfluss der postglazialen Landhebung . . . . .	74
28	Szenario II: Massenverlagerungen . . . . .	78
29	Szenario II: $h_{grav}$ und $h_{ursp}$ . . . . .	79
30	Szenario II: Meeresspiegelanstieg . . . . .	80
31	Dicke Eisschild Grönland . . . . .	82
32	Szenario III: Meeresspiegelanstieg . . . . .	83

## Tabellenverzeichnis

1	Größenordnung der Einflussfaktoren zwischen 1993 und 2010 . . . . .	10
2	Satellitenaltimetrie-Missionen CNES/NASA . . . . .	13
3	Satellitenaltimetrie-Missionen ESA . . . . .	13
4	Massenverluste der Eisschilde . . . . .	18
5	Fläche der Gletscherregionen und ihre Massentrends . . . . .	21
6	räumliche Auflösung Kugelfunktionen . . . . .	36
7	Auflistung verwendeter Massenverluste . . . . .	51
8	Szenario I: Änderung des mittleren Meeresspiegels . . . . .	69
9	Hauptträgheitsmomente der ursprünglichen Kugelfunktionsentwicklung . .	75
10	Szenario I: Hauptträgheitsmomente nach Massenverlagerung . . . . .	76
11	Szenario I: Hauptträgheitsmomente der Massenverlagerung . . . . .	76
12	Szenario I: Änderung der Hauptträgheitsachse $C$ . . . . .	77
13	Szenario II: Änderung des mittleren Meeresspiegels . . . . .	81
14	Szenario II: Änderung der Hauptträgheitsachse $C$ . . . . .	81
15	Szenario III: Änderung des mittleren Meeresspiegels . . . . .	83
16	Szenario III: Änderung der Hauptträgheitsachse $C$ . . . . .	84

## **Abkürzungsverzeichnis**

**CIO** Mittlerer Rotationspol *Conventional International Origin*

**CNES** *Centre national d'études spatiales*

**DLR** Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

**ESA** *European Space Agency*

**EWH** äquivalente Wassersäule (*Equivalent Water Height*)

**GIA** postglaziale Landhebung (*Glacial Isostatic Adjustment*)

**GNSS** Globales Navigationssatellitensystem (*Global Navigation Satellite System*)

**GOCE** *Gravity and steady-state Ocean Circulation Explorer*

**GPS** Global Positioning System

**GRACE** *Gravity Recovery And Climate Experiment*

**MSL** mittlerer Meeresspiegel (*Mean Sea Level*)

**NASA** *National Aeronautics and Space Administration*

**SLE** äquivalenten Meeresspiegelanstieg (*Sea Level Equivalent*)

**SLR** Satellite Laser Ranging

**RCP** repräsentative Konzentrationspfade (*Representative Concentration Pathways*)

## Literatur

- Adhikari, S. and Ivins, E. R. (2016). Climate-driven polar motion: 2003–2015. *Science Advances*, 2(4).
- Bamber, J. (2001). Greenland 5 km dem, ice thickness, and bedrock elevation grids, version 1. *Boulder, Colorado USA. NASA National Snow and Ice Data Center Distributed Active Archive Center*.
- Bamber, J. and Riva, R. (2010). The sea level fingerprint of recent ice mass fluxes. *The Cryosphere*, 4.
- Barrett, P. J. (2013). Resolving views on antarctic neogene glacial history – the sirus debate. *Earth and Environmental Science Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 104:29–51.
- Barthelemes, F. (2013). Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models : theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM) ; <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM/> ; revised Edition. *Potsdam : Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ*.
- Blakely, R. J. (1996). Potential theory in gravity and magnetic applications. *Cambridge Univ. Press, Cambridge*.
- Blewitt, G., Altamimi, Z., Davis, J., Gross, R., Kuo, C.-Y., Lemoine, F. G., Moore, A. W., Neilan, R. E., Plag, H.-P., Rothacher, M., Shum, C. K., Sideris, M. G., Schöne, T., Tregoning, P., and Zerbini, S. (2010). Geodetic observations and global reference frame contributions to understanding sea-level rise and variability, in understanding sea-level rise and variability (eds j. a. church, p. l. woodworth, t. aarup and w. s. wilson). *Wiley-Blackwell, Oxford, UK*.
- Broecker, W. and Denton, G. (1990). What drives glacial cycles? *Scientific American*, 262(1):43–50.
- Chen, W. and Shen, W. (2010). New estimates of the inertia tensor and rotation of the triaxial nonrigid earth. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 115(B12). B12419.

- Cheng, M., Ries, J. C., and Tapley, B. D. (2011). Variations of the earth's figure axis from satellite laser ranging and grace. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 116(B1):n/a–n/a. B01409.
- Church, J., Clark, P., Cazenave, A., Gregory, J., Jevrejeva, S., Levermann, A., Merrifield, M., Milne, G., Nerem, R., Nunn, P., Payne, A., Pfeffer, W., Stammer, D., and Unnikrishnan, A. (2013). Sea Level Change. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. . *Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA*.
- Church, J. A. and White, N. J. (2011). Sea-level rise from the late 19th to the early 21st century. *Surveys in Geophysics*, 32(4):585–602.
- Ciais, P., Sabine, C., Bala, G., Bopp, L., Brovkin, V., Canadell, J., Chhabra, A., DeFries, R., Galloway, J., Heimann, M., Jones, C., Le Quéré, C., Myneni, R., Piao, S., and Thornton, P. (2013). Carbon and Other Biogeochemical Cycles. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. *Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA*.
- Dahle, C., Flechtner, F., Gruber, C., König, D., König, R., Michalak, G., and Neumayer, K.-H. (2013). Gfz grace level-2 processing standards document for level-2 product release 0005, (scientific technical report - data ; 12/02 rev. ed.). *Potsdam : Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, 21 p.*
- Dunn, C., Bertiger, W., Bar-Sever, Y., Desai, S., Haines, B., Kunang, D., Franklin, G., Harris, I., Kruizinga, G., Meehan, T., Nandi, S., Nguyen, D., Rogstad, T., Brooks, T., Tien, J., Romans, L., Watkins, M., Wu, S., Bettadpur, S., and Kim, J. (2003). Instrument of grace: Gps augments gravity measurements. *GPS World*, 14(2).
- Farrell, W. E. (1972). Deformation of the earth by surface loads. *Reviews of Geophysics*, 10(3):761–797.
- Fretwell, P., Pritchard, H. D., Vaughan, D. G., Bamber, J. L., Barrand, N. E., Bell, R., Bianchi, C., Bingham, R. G., Blankenship, D. D., Casassa, G., Catania, G., Callens,

- D., Conway, H., Cook, A. J., Corr, H. F. J., Damaske, D., Damm, V., Ferraccioli, F., Forsberg, R., Fujita, S., Gim, Y., Gogineni, P., Griggs, J. A., Hindmarsh, R. C. A., Holmlund, P., Holt, J. W., Jacobel, R. W., Jenkins, A., Jokat, W., Jordan, T., King, E. C., Kohler, J., Krabill, W., Riger-Kusk, M., Langley, K. A., Leitchenkov, G., Leuschen, C., Luyendyk, B. P., Matsuoka, K., Mouginot, J., Nitsche, F. O., Nogi, Y., Nost, O. A., Popov, S. V., Rignot, E., Rippin, D. M., Rivera, A., Roberts, J., Ross, N., Siegert, M. J., Smith, A. M., Steinhage, D., Studinger, M., Sun, B., Tinto, B. K., Welch, B. C., Wilson, D., Young, D. A., Xiangbin, C., and Zirizzotti, A. (2013). Bedmap2: improved ice bed, surface and thickness datasets for antarctica. *The Cryosphere*, 7(1):375–393.
- Gardner, A., Moholdt, G., Cogley, J., Wouters, B., Arendt, A., Wahr, J., Berthier, E., Hock, R., Pfeffer, W., Kaser, G., Ligtenberg, S. R. M., Bolch, T., Sharp, M., Hagen, J. O., Van de Broeke, M., and Paul, F. (2013). A reconciled estimate of glacier contributions to sea level rise: 2003 to 2009. *Science*, 340:852–857.
- Geruo, A., J., W., and S., Z. (2013). Computations of the viscoelastic response of a 3-d compressible earth to surface loading: An application to glacial isostatic adjustment in antarctica and canada. *Geophys. J. Int.*, 192.
- Hartmann, D., Klein Tank, A., Rusticucci, M., Alexander, L., Brönnimann, S., Charabi, Y., Dentener, F., Dlugokencky, E., Easterling, D., Kaplan, A., Soden, B., Thorne, P., Wild, M., and Zhai, P. (2013). Observations: Atmosphere and Surface. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. . *Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA*.
- Hay, C. C. and Morrow, E., Kopp, E. R., and Mitrovica, J. X. (2015). Probabilistic reanalysis of twentieth-century sea-level rise. *Nature*.
- Hinkel, J., Lincke, D., Vafeidis, A. T., Perrette, M., Nicholls, R. J., Tol, R. S. J., Marzeion, B., Fettweis, X., Ionescu, C., and Levermann, A. (2014). Coastal flood damage and adaptation costs under 21st century sea-level rise. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 111(9):3292–3297.
- Hofmann-Wellenhof, B. and Moritz, H. (2005). *Physical geodesy. Springer Verlag Wien*.

- Holzhauser, H., Magny, M., and Zumbuhl, H. J. (2005). Glacier and lake-level variations in west-central Europe over the last 3500 years. *Holocene*, 15(6):789–801.
- IPCC (2013). Summary for Policymakers. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. *Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA*.
- IPCC (2014). *Climate Change 2014: Synthesis Report. Contribution of Working Groups I, II and III to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Core Writing Team, R.K. Pachauri and L.A. Meyer (eds.)]. *IPCC, Geneva, Switzerland, 151 pp.*
- IPCC: Annex II (2013). Climate System Scenario Tables [Prather, M., G. Flato, P. Friedlingstein, C. Jones, J.-F. Lamarque, H. Liao and P. Rasch (eds.)]. *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel*.
- IPCC: Annex III (2013). Glossary [Planton, S. (ed.)]. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. *Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA*, page 1447–1466.
- Jevrejeva, S., Moore, J., Grinsted, A., and Woodworth, P. (2008). Recent global sea level acceleration started over 200 years ago? *Geophysical Research Letters*, 35(8):L08715.
- Kierulf, H. and Plag, H.-P. (2006). Precise point positioning requires consistent global products. *EUREF Publication No*, 14:111–120.
- Lambeck, K. and Nakiboglu, S. M. (1984). Recent global changes in sealevel. *Geophysical Research Letters*, 11(10).
- Landerer, F. and Swenson, S. C. (2012). Accuracy of scaled grace terrestrial water storage estimates. *Water Resources Research*, 48(W04531).
- Lorbacher, K., Marsland, S., Church, J., Griffies, S., and Stammer, D. (2012). Rapid barotropic sea-level rise from ice-sheet melting scenarios. *Journal of Geophysical Research*, 117:C06003.

- Lowe, J. A. and Gregory, J. M. (2006). Understanding projections of sea level rise in a hadley centre coupled climate model. *Journal of Geophysical Research-Oceans*, 111(C11):C11014.
- Marchenko, A. N. and Abrikosov, O. A. (2001). Evolution of the earth's principal axes and moments of inertia: the canonical form of solution. *Journal of Geodesy*, 74(9):655–669.
- Masson-Delmotte, V., Schulz, M., Abe-Ouchi, A., Beer, J., Ganopolski, A., González Rouco, J., Jansen, E., Lambeck, K., Luterbacher, J., Naish, T., Osborn, T., Otto-Bliesner, B., Quinn, T., Ramesh, R., Rojas, M., Shao, X., and Timmermann, A. (2013). 2013: Information from Paleoclimate Archives. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. *Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA*.
- Morice, C. P., Kennedy, J. J., Rayner, N. A., and Jones, P. D. (2012). Quantifying uncertainties in global and regional temperature change using an ensemble of observational estimates: The hadcrut4 data set. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, 117(D8):n/a–n/a. D08101.
- Moritz, H. (1980). Geodetic reference system 1980. *Bulletin géodésique*, 54(3):395–405.
- Moss, R. H., Edmonds, J. A., Hibbard, K. A., Manning, M. R., Rose, S. K., van Vuuren, D. P., Carter, T. R., Emori, S., Kainuma, M., Kram, T., Meehl, G. A., Mitchell, J. F. B., Nakicenovic, N., Riahi, K., Smith, S. J., Stouffer, R. J., Thomson, A. M., Weyant, J. P., and Wilbanks, T. J. (2010). The next generation of scenarios for climate change research and assessment. *Nature*, 463(7282):747–756.
- Nerem, R. S., Chambers, D., Choe, C., and Mitchum, G. T. (2010). Estimating mean sea level change from the topex and jason altimeter missions. *Marine Geodesy*, 33:435.
- Peters, T. (2007). Modellierung zeitlicher schwerevariationen und ihre erfassung mit methoden der satellitengravimetrie. *Technische Universität Munchen Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie*.
- Rastner, P., Bolch, T., Mölg, N., Machguth, H., and Paul, F. (2012). The first complete glacier inventory for entire greenland. *The Cryosphere*, 6:1483–1495.



- Ray, R. and Douglas, B. (2011). Experiments in reconstructing twentieth-century sea levels. *Progress in Oceanography*, 91(4):495–515.
- Rhein, M., Rintoul, S., Aoki, S., Campos, E., Chambers, D., Feely, R., Gulev, S., Johnson, G., Josey, S., Kostianoy, A. and Mauritzen, C., Roemmich, D., Talley, L., and Wang, F. (2013). Observations: Ocean. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. . *Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA*.
- Ries, J., Bettadpur, S., Eanes, R., Kang, Z., Ko, U., McCullough, C., Nagel, P., Pie, N., Poole, S., Richter, T., Save, H., and Tapley, B. (2016). The combination global gravity model ggm05c. *Center for Space Research, University of Texas at Austin, Austin, Texas*.
- Stammer, D. (2008). Response of the global ocean to greenland and antarctic ice melting. *Journal of Geophysical Research - Oceans*, 113:C06022.
- Swenson, S. (2012). Grace monthly land water mass grids netcdf release 5.0. ver. 5.0. po.daac, ca, usa. dataset accessed [2016-03-01]. at <http://dx.doi.org/10.5067/TELND-NC005>.
- Swenson, S., Chambers, D., and Wahr, J. (2008). Estimating geocenter variations from a combination of grace and ocean model output. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 113(B8):n/a–n/a. B08410.
- Swensons, S. C. and Wahr, J. (2006). Post-processing removal of correlated errors in grace data. *Geophys. Res. Lett.*, 33(L08402):L08402.
- Tapley, B. D., Bettadpur, S., Watkins, M., and Reigber, C. (2004). The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 31(9). L09607.
- van Vuuren, D. P., Edmonds, J., Kainuma, M., Riahi, K., Thomson, A., Hibbard, K., Hurtt, G. C., Kram, T., Krey, V., Lamarque, J.-F., Masui, T., Meinshausen, M., Nakicenovic, N., Smith, S. J., and Rose, S. K. (2011). The representative concentration pathways: an overview. *Climatic Change*, 109(1-2):5–31.
- Vaughan, D., Comiso, J., Allison, I., Carrasco, J., Kaser, G., Kwok, R., Mote, P., Murray, T., Paul, F., Ren, J., Rignot, E., Solomina, O., Steffen, K., and Zhang, T. (2013a).

- Observations: Cryosphere. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. *Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA*.
- Vaughan, D., Comiso, J., Allison, I., Carrasco, J., Kaser, G., Kwok, R., Mote, P., Murray, T., Paul, F., Ren, J., Rignot, E., Solomina, O., Steffen, K., and Zhang, T. (2013b). Observations: Cryosphere Supplementary Material. In: *Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change* [Stocker, T.F., D. Qin, G.-K. Plattner, M. Tignor, S.K. Allen, J. Boschung, A. Nauels, Y. Xia, V. Bex and P.M. Midgley (eds.)]. *Available from [www.climatechange2013.org](http://www.climatechange2013.org) and [www.ipcc.ch](http://www.ipcc.ch)*.
- Velicogna, I. (2009). Increasing rates of ice mass loss from the greenland and antarctic ice sheets revealed by grace. *Geophysical Research Letters*, 36(19):n/a–n/a. L19503.
- Vose, R. S., Arndt, D., Banzon, V. F., Easterling, D. R., Gleason, B., Huang, B., Kearns, E., Lawrimore, J. H., Menne, M. J., Peterson, T. C., et al. (2012). Noaa’s merged land-ocean surface temperature analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 93(11):1677–1685.