TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Koalitionsbildung bei fortgesetztem Konflikt und fair division

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexander Mehlmann

durch
Stefan Glantschnig
Weidlinger Straße 49/1/3
3400 Klosterneuburg

Wien, 21. Oktober 2013 ______________________________

Ich möchte an dieser Stelle einige Worte der Dankbarkeit an all jene richten, die mich im Laufe meines Studiums unterstützt und motiviert haben.

Herrn Professor Mehlmann danke ich sehr für die geduldige Betreuung der Arbeit.

Mein großer Dank gilt meiner Familie und besonders meinen Eltern, die mich während meiner gesamten Studienzeit unterstützt haben.

Meiner Freundin Anna, meinen Freunden und Kollegen danke ich für die motivierenden Worte, die sie mir während des Verfassens der Diplomarbeit zukommen haben lassen.

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Das Auftreten von Konflikten ist seit Anbeginn der Menschheit Teil der Entwicklung jeder Art von Gruppe und Gesellschaft. Diese Konflikte können einerseits durch kriegerische Auseinandersetzungen oder körperliche Gewalt ausgetragen werden, sei es zwischen Staaten, die um ein Territorium kämpfen, oder zwischen Interessensgruppen, die eine wichtige Ressource für sich gewinnen wollen. Die Auseinandersetzungen können aber auch ohne offene Gewalt ablaufen, etwa in Form eines Konkurrenzkampfes zwischen Firmen um Marktanteile oder in einem Lobbying, um sich das Wohlwollen einer Regierung zu sichern.

In vielen Konfliktsituationen ist es für die Teilnehmer zur Wahrung ihrer Interessen sinnvoll, sich zu Koalitionen zusammenzuschließen.[1] In einigen Fällen kommt es sogar zu einem Zusammenschluss aller Spieler, der als große Koalition bezeichnet wird. Der Ausbruch eines Konflikts ist dann zwar abgewendet, es muss jedoch eine Aufteilung des verfügbaren Nutzens gefunden werden, die alle Spieler zufriedenstellt. Diesem Problem widmet sich das Gebiet der fair division, das zahlreiche verschiedene Ansätze zur Lösung dieses Problems bietet. Es gibt dabei nicht die eine "faire" Aufteilung, sondern viele Möglichkeiten, die davon abhängen, welche Ansprüche man an diese "faire" Lösung stellt.

Oft wird es jedoch nicht möglich sein, eine Einigung zu erzielen, die alle Spieler gleichermaßen zufriedenstellt. Es stehen sich dann mindestens zwei Spieler oder Koalitionen in einer tatsächlichen Konfliktsituation gegenüber. Viele Modelle beschränken sich dabei auf einen einmaligen Konflikt und nehmen an, dass die siegreiche Koalition einen für alle Mitglieder zufriedenstellenden Weg findet, den erzielten Gewinn aufzuteilen.[2] Bloch (1996) [2] untersuchte dazu ein Modell mit sequentieller Koalitionsbildung, in dem der Nutzen, den die Koalitionen erzielen können, von der gesamten Koalitionsstruktur abhängt und gemäß einer festgelegten Regel aufgeteilt wird. In Ray und Vohra (1999) [19] wird sowohl die Koalitionsstruktur als auch die Art der Aufteilung endogenisiert.

[1] Die Teilnehmer am Konflikt werden ab hier, dem üblichen Sprachgebrauch der Spieltheorie folgend, als Spieler bezeichnet.

[2] Im Fall von identischen Spielern wird der Gewinn trivialerweise gleichmäßig auf alle Spieler aufgeteilt.

Realistischerweise wird in vielen Fällen das Auffinden einer Aufteilung, die alle Mitglieder der siegreichen Koalition zufriedenstellt, genauso unmöglich sein, wie es bei der großen Koalition der Fall ist. Es kommt also neuerlich zu einem Konflikt, in dem sich die ehemaligen Verbündeten gegenüberstehen. Für diesen Vorgang liefert die Geschichte zahllose Beispiele, exemplarisch sei die Situation nach dem Zweiten Weltkrieg erwähnt. Nachdem die Allierten den Sieg davongetragen hatten, zerfiel ihr Bündnis in zwei Blöcke, die sich daraufhin in einem neuerlichen Konflikt, dem Kalten Krieg, gegenüberstanden.

In der Modellierung kann man dieses Problem nun einerseits lösen, indem man annimmt, dass die Mitglieder der siegreichen Koalition die Aufteilung des Gewinns in einem Kampf jeder gegen jeden regeln. Ein entsprechender Ansatz findet sich etwa in Garfinkel und Skaperdas (2007) [8]. Andererseits ist es möglich, dass auch in den Runden, die dem ersten Konflikt folgen, eine gewisse Gruppenstruktur erhalten bleibt. Diese bildet die Ausgangslage für die nächste Stufe des Konflikts. Der Prozess setzt sich, wie in Tan und Wang (2009) [26] beschrieben, so lange fort, bis ein einziger Spieler den endgültigen Sieg davonträgt und den gesamten Gewinn für sich beanspruchen kann.

Der anschließende Teil des aktuellen Kapitels widmet sich der Definition einiger Konzepte der Spieltheorie. Danach werden in Kapitel 2 die wichtigsten Lösungsansätze der fair division vorgestellt und nach den ihnen zugrunde liegenden Überlegungen in zwei Klassen unterteilt.

In Kapitel 3 werden die erwähnten Konzepte des fortgesetzten Konflikts näher ausgeführt. Nach einer Einführung in die Grundlagen des fortgesetzten Konflikts wird in Abschnitt 3.2 ein Modell mit homogenen Spielern näher betrachtet, wobei der Intensität des stattfindenden Konflikts besonderes Augenmerk geschenkt wird. Es folgt in Abschnitt 3.3 die Diskussion eines Modells, in der die zweite Stufe des Konflikts nicht durch einen Kampf, sondern den Beitrag zur gemeinschaftlichen Produktion entschieden wird.

Das letzte betrachtete Modell in Abschnitt 3.4 lässt schließlich heterogene Spieler über mehrere Runden gegeneinander antreten. Neben den Ergebnissen in Tan und Wang (2009) [26] werden einige eigene Erweiterungen des Modells präsentiert und die sich ergebenden Gleichgewichtsstrukturen diskutiert. Als Abschluss werden in Abschnitt 3.5 zwei Ansätze vorgestellt, wie das Auftreten von Konflikten komplett vermieden werden kann.

1.1 Grundlagen der Spieltheorie

Zu Beginn werden nun einige wichtige Begriffe und Konzepte der Spieltheorie vorgestellt. Die Definitionen und Erläuterungen folgen weitgehend Fudenberg und Tirole (1991) [7], Mehlmann (2007) [15] und Myerson (1991) [16].

1.1.1 Normalform

Ein Spiel in *Normalform* (oder *strategischer Form*) ist von der Form

$$\Gamma = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}),$$

wobei $N = \{1, 2, \dots, n\}$ die Menge der Spieler bezeichnet und für jeden Spieler i die Menge seiner *reinen Strategien* mit S_i bezeichnet wird. Die Auszahlungsfunktion $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}$ ordnet dem Spieler für jede strategische Konstellation $s = (s_1, \dots, s_n)$ einen Nutzen zu. Es wird üblicherweise vorausgesetzt, dass die Spieler ihre Strategien zugleich wählen. Sind sowohl die Menge der Spieler N, als auch $S = \times_i S_i$ endlich, so spricht man von einem *endlichen Spiel*. Im Fall von zwei Spielern lässt sich ein Spiel in Normalform durch eine Matrix darstellen, die in den Zeilen und Spalten die Strategien der jeweiligen Spieler enthält. Man spricht in diesem Fall von einem *Matrixspiel*. Die einzelnen Elemente der Matrix enthalten die Auszahlungen der beiden Spieler. Gilt zusätzlich $\sum_{i=1}^{2} u_i(s) = 0$, so spricht man von einem *Zweipersonen-Nullsummenspiel*. Abbildung 1.1.1 zeigt eine Darstellung des bekannten Gefangenendilemmas in Normalform, für eine ausführliche Formulierung des Spiels siehe Mehlmann (2007) [15].

	Gestehen		Nicht gestehen	
Gestehen	-7	-7	-1	-9
Nicht gest.	-9	-1	-3	-3

Abbildung 1.1.1: Darstellung des Gefangenendilemmas in Normalform.

1.1.2 Gemischte Strategien

Eine *gemischte Strategie* σ_i ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über reine Strategien, wobei diese zufällige Auswahl der Strategien durch einen Spieler unabhängig von denen der Mitspieler ist. Der Raum der gemischten Strategien des Spielers

i wird mit Σ_i bezeichnet, $\sigma_i(s_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die reine Strategie s_i gewählt wird. Der Raum der Konstellationen in gemischten Strategien wird mit $\Sigma = \times_i \Sigma_i$ bezeichnet, seine Elemente mit σ. Die Auszahlung von Spieler i unter dem Profil σ ergibt sich somit als

$$\sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s).$$

Die reinen Strategien sind in der Menge aller gemischten Strategien als degenerierte Wahrscheinlichkeitsverteilungen enthalten.

1.1.3 Dominanz

Eine Strategie heißt *streng dominiert,* wenn es eine andere Strategie gibt, die bei jedem möglichen Verhalten des Mitspielers oder der Mitspieler eine höhere Auszahlung liefert. Bezeichnen wir die gesammelten Reaktionen der Mitspieler mit s_{-i}. Dann ist die reine Strategie s_i des Spielers i genau dann streng dominiert, wenn es ein $\sigma_i' \in \Sigma_i$ gibt, sodass

$$u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \, \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

gilt. Lässt man in obiger Ungleichung auch Gleichheit zu und setzt voraus, dass für zumindest ein s_{-i} Ungleichheit gilt, so spricht man von einer *schwach dominierten Strategie.*

Streng dominierte reine Strategien werden also von rational agierenden Spielern nie gespielt und können somit aus der Auswahl "gestrichen" werden. Streicht man nacheinander die streng dominierten Strategien aus dem Spiel, so nennt man diesen Prozess *iterierte strenge Dominanz.* Formal stellt er sich folgendermaßen dar:

Sei $S_i^0 = S_i$ und $\Sigma_i^0 = \Sigma_i$. Definieren wir S_i^n rekursiv durch

$$S_i^n = \{s_i \in S_i^{n-1} \mid \nexists \, \sigma_i \in \Sigma_i^{n-1} : \; u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \, \forall s_{-i} \in S_{-i}^{n-1}\},$$

setzen wir

$$\Sigma_i^n = \{\sigma_i \in \Sigma_i \mid \sigma_i(s_i) > 0 \Rightarrow s_i \in S_i^n\}$$

und

$$S_i^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_i^n.$$

S_i^∞ ist dann die Menge der reinen Strategien von Spieler i, die die iterierte strenge Dominanz überdauern. Definieren wir Σ_i^∞ als Menge aller gemischten Strategien σ_i, sodass es kein σ_i' gibt, für das $u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i})$ für alle $s_{-i} \in S_{-i}^\infty$ gilt. Diese Menge enthält dann alle gemischten Strategien, die nach der Streichung übrig sind. Neben dem beschriebenen Ablauf gibt es auch zahlreiche andere Möglichkeiten, wie das Streichen der streng dominierten Strategien ablaufen kann. Man könnte etwa, anstatt wie oben die Strategien aller Spieler zugleich zu streichen, die Spieler von 1 bis n durchlaufen und im Anschluss von vorne beginnen. Alle möglichen Reihenfolgen des Streichens führen jedoch auf dieselben verbleibenden Strategien S_i^∞ und Σ_i^∞ für alle Spieler i.[3]

1.1.4 Nash-Gleichgewicht

Ein Profil aus gemischten Strategien $\sigma^\star$ wird *Nash-Gleichgewicht* genannt, wenn für alle Spieler i

$$u_i(\sigma_i^\star, \sigma_{-i}^\star) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i}^\star), \ \forall s_i \in S_i$$

gilt. Die Strategie jedes einzelnen Spielers ist also eine beste Antwort auf die Strategien seiner Mitspieler. Benutzt ein Spieler im Nash-Gleichgewicht eine nichtdegenerierte gemischte Strategie, so muss er indifferent zwischen sämtlichen reinen Strategien sein, denen er eine positive Wahrscheinlichkeit zuschreibt. Die Existenz eines Nash-Gleichgewichts ist für endliche Spiele in Normalform sichergestellt, die in jedem Fall zumindest ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien besitzen.[4] Hat jeder Spieler nur eine einzige beste Antwort auf die Strategie seiner Mitspieler, so wird das Nash-Gleichgewicht $s^\star$ als *strikt* bezeichnet. Für alle $s_i \neq s_i^\star$ gilt in diesem Fall

$$u_i(s_i^\star, s_{-i}^\star) > u_i(s_i, s_{-i}^\star).$$

Ein striktes Nash-Gleichgewicht muss somit immer ein Gleichgewicht in reinen Strategien sein.

Bleibt in einem Spiel nach der Anwendung von iterierter strenger Dominanz nur ein einziges Strategieprofil übrig, so ist dieses das eindeutige Nash-Gleichgewicht des Spiels. Umgekehrt kann ein Nash-Gleichgewicht nur jenen reinen Strategien eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnen, die nicht streng dominiert werden. Für schwach dominierte Strategien gilt diese Aussage jedoch nicht.[5]

[3] Vgl. [7], S. 45f.
[4] Vgl. [15], S. 44.
[5] Vgl. [7], S. 11ff.

1.1.5 Extensive Form

Während in Spielen in Normalform alle Spieler ihre Entscheidungen simultan treffen müssen, lässt die im Folgenden vorgestellte extensive Form einen dynamischeren Ablauf zu. Die Spieler machen ihre Züge in einer festgelegten Reihenfolge, und auch "Mutter Natur" kann, festgelegten Wahrscheinlichkeiten folgend, ihre Finger im Spiel haben.

1.1.5.1 Spielbaum

Sämtliche realisierbaren Verläufe eines Spiels, im Folgenden als *Partien* bezeichnet, können in einer Menge $\mathcal{A}$ zusammengefasst werden. Im endlichen Fall kann $\mathcal{A}$ als Indexmenge $\{1, 2, \ldots, k\}$ aller Partien angeschrieben werden. Ein *Spielbaum* eines endlichen Spiels ist nun ein Paar $\mathcal{B} = (\mathcal{A}, \mathcal{N})$, das einerseits aus einer Indexmenge $\mathcal{A}$ aller Partien besteht sowie andererseits aus einer teilgeordneten Menge $\mathcal{N}$ von nichtleeren Teilmengen der Menge $\mathcal{A}$[6], für die folgende Bedingungen gelten

1. $\mathcal{A} \in \mathcal{N}$
2. $\{i\} \in \mathcal{N}, \forall i \in \mathcal{A}$
3. für $a, b \in \mathcal{N}$ gilt: $a \cap b \neq 0 \Rightarrow (a \subset b) \vee (b \subseteq a)$.

Die Elemente von $\mathcal{N}$ nennt man *Knoten* des Baumes, $\mathcal{A}$ ist der *Wurzelknoten.* Die Mengen $\{i\}$, $i \in \mathcal{A}$ stellen die *Endknoten* dar. Alle Knoten, die keine Endknoten sind, sind *Entscheidungsknoten.* Jedem Knoten $a \in \mathcal{N} \backslash \{\mathcal{A}\}$ wird sein unmittelbarer *Vorgänger* $V(a) \in \mathcal{N}$ durch

$$V(a) := \bigcap_{a \subset b \in \mathcal{N}} b$$

zugeordnet und der Wurzelknoten zu seinem eigenen Vorgänger erklärt, also $V(\mathcal{A}) := \mathcal{A}$. Ausgehend von einem Endknoten $\{i\}$ kann man somit den Baum bis zur Wurzel zurückverfolgen.

[6] Diese Ordnung muss jedoch nicht vollständig sein, weil manche Knoten nicht vergleichbar sind, vgl. [7], S. 78.

1.1.5.2 Extensives n-Personenspiel

Sei $N = \{1, \cdots, n\}$ die Menge der Spieler. Ein *extensives n-Personenspiel mit vollkommener Information*[7] hat die Form $\mathcal{G} = (\mathcal{B}, \mathcal{P}, p, w)$ und besteht aus folgenden Teilen[8]:

1. einem Spielbaum $\mathcal{B}$
2. einer Partition $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n)$ der Menge $\mathcal{N} \backslash \{\{i\}\}_{i \in \mathcal{A}}$ aller Entscheidungsknoten in Knoten, die jeweils dem i-ten Spieler zur Verfügung stehen, wobei "Mutter Natur" die Nummer 0 zugeordnet wird
3. einer auf $V^{-1}(\mathcal{P}_0)$ definierten Funktion p, die jedem Knoten, dessen unmittelbarer Vorgänger ein Entscheidungsknoten der Natur ist, eine Wahrscheinlichkeit, mit der er erreicht wird, zuordnet, wobei $\sum_{y \in V^{-1}(x)} p(y) = 1,\ \forall x \in \mathcal{P}_0$ gilt
4. einer Abbildung $u : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$, die jeder Partie $i \in \mathcal{A}$ das N-Tupel $(u_1(i), \ldots, u_n(i))$ von Auszahlungswerten $u_j(i)$ der Spieler $j = 1, \ldots, n$ zuordnet.

Unter einer reine Strategie versteht man in diesem Spiel eine Abbildung $s_i : \mathcal{P}_i \to V^{-1}(\mathcal{P}_i)$, die jedem Knoten $b \in \mathcal{P}_i$ einen unmittelbaren Nachfolger $s_i(b) \in V^{-1}(b)$ zuordnet. Gemischte Strategien werden zur besseren Unterscheidbarkeit in der extensiven Form als *Verhaltensstrategien* bezeichnet. Der Spieler mischt dabei über die verschiedenen Verhaltensweisen in einem seiner Entscheidungsknoten.

Grundsätzlich kann jedes Spiel in extensiver Form in ein Spiel in Normalform umgeschrieben werden und umgekehrt. Bei großen Spielbäumen kann der Umfang der Normalform-Darstellung jedoch sehr aufwendig sein. Die in Abschnitt 1.1.4 getroffene Aussage über Nash-Gleichgewichte von Spielen in Normalform kann für extensive Spiele mit vollkommener Information sogar noch ausgeweitet werden. Für diese existiert nämlich sogar in jedem Fall ein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Ein Beispiel für die Darstellung in extensiver Form findet sich in Abbildung 1.1.2, die ausführliche Formulierung des Spiels ist in Mehlmann (2007) [15] nachzulesen.

[7] Neben Spielen mit vollkommener Information gibt es auch solche mit unvollkommener Information. Den Spielern ist dann in bestimmten Knoten nicht klar, welche Entscheidungen die Spieler vor ihnen getroffen haben. Für eine nähere Ausführung dieses Konzepts siehe [7], [15] oder [16].

[8] Vgl. [15], S. 66.

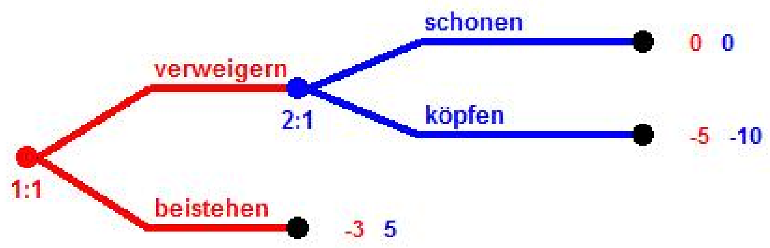

Abbildung 1.1.2: Spielbaum zum "Lord Strange"-Spiel.

1.1.6 Teilspielperfektes Gleichgewicht

Nicht alle Nash-Gleichgewichte in extensiven n-Personenspielen sind Gleichgewichte in dem Sinn, dass die darin getroffenen Entscheidungen für alle Spieler rational sind. Oft beruhen sie auf leeren Drohungen, weil ein nutzenmaximierender Spieler seine Entscheidung nicht auf die vorgeschriebene Art treffen würde, wenn er vor der Wahl stünde. Zur Veranschauung dieser Tatsache betrachten wir das Nash-Gleichgewicht (verweigern, köpfen) im "Lord Strange"-Spiel in Abbildung 1.1.2. Ein rationaler Spieler 2 würde im Fall, dass Spieler 1 "verweigern" wählt, die Strategie "schonen" spielen, was dem Nash-Gleichgewicht widerspricht.

Dieses Problem wurde von Selten (1965) [22] erkannt und korrigiert, indem er die Spiele mittels Rückwärtsrekursion löste. Bezeichnen wir ein Spiel, das aus einem Knoten des Baumes und allen davon ausgehend im weiteren Spiel erreichbaren Knoten besteht, als *Teilspiel*.[9] Dann ist eine Verhaltensstrategie σ ein *teilspielperfektes Gleichgewicht*, wenn die Einschränkung von σ auf jedes mögliche Teilspiel ein Nash-Gleichgewicht dieses Teilspiels ist.[10]

1.1.7 Verhandlungsspiel

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellen Formen eines Spiels ist bei einem Verhandlungsspiel eine Zusammenarbeit zwischen den Spielern möglich. Sei N =

[9] Sämtliche Auszahlungen und Informationsmengen werden vom ursprünglichen Spiel übernommen.
[10] Vgl. [7], S. 94f.

$\{1, 2, \ldots, n\}$ die Menge der Spieler und F eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Diese repräsentiert die Menge der erreichbaren Auszahlungen für den Fall, dass alle Spieler zusammenarbeiten. Bezeichnen wir mit $(g_1, \ldots, g_n)$ die Garantiemenge, die die Spieler auch ohne Kooperation erzielen können, und setzen wir voraus, dass $\{y \in F \mid y \geq g_i, \forall i \in N\}$ eine nichtleere, beschränkte Menge ist. Dann bezeichnet man das Paar $(F, (g_1, \ldots, g_n))$ als *n-Personen-Verhandlungsspiel.*[11]

Jede nichtleere Menge von Spielern nennt man eine *Koalition*. Eine solche Koalition kann im Extremfall aus nur einem einzelnen Spieler bestehen, aber genauso alle Spieler umfassen. Im letzteren Fall spricht man von der *großen Koalition*. Bezeichnen wir die Menge der möglichen Koalitionen mit $\Pi = \mathfrak{P}(\{1, \ldots, N\}) - \{\emptyset\}$.[12] Im Unterschied zur nichtkooperativen Spieltheorie wird in der kooperativen Spieltheorie vorausgesetzt, dass jede Koalition *effektiv verhandeln* kann. Das bedeutet, falls es eine mögliche Strategieänderung gibt, von der alle Spieler einer Koalition profitieren, dann werden sie sich auch darauf einigen. Das einzige, was dagegen sprechen würde, wäre eine bereits erfolgte Absprache eines Koalitionsteilnehmers mit anderen Spielern außerhalb der Koalition, mit denen er eine ebenso effektive Koalition bilden kann. Somit muss in kooperativen Spielen mit drei oder mehr Spielern immer die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, dass ein Teil der Spieler innerhalb einer Koalition sich mit Spielern von außerhalb zu einer neuen Koalition zusammenschließt.

1.1.8 Charakteristische Funktion

Grundsätzlich wird jeder Spieler seine Koalition so wählen, dass sein eigener Nutzen maximiert wird. Es kann zu diesem Zweck jedoch sogar sinnvoll sein, einen Teil des Nutzens an einen anderen Spieler abzugeben. Denken wir beispielsweise an den Fall, in dem für Spieler 1 ein höherer Nutzen erreichbar wäre, dieser aber nur in einer Koalition mit Spieler 2 realisierbar ist. In diesem Fall wird Spieler 1 versuchen, Spieler 2 durch Abgabe von Nutzen zu "überzeugen", eine Koalition mit ihm einzugehen. Spieler 2 wird zustimmen, falls sein Nutzen aus dieser neuen Koalition zusammen mit dem von Spieler 1 transferierten Nutzen seinen derzeitigen Nutzen übersteigt.

Falls diese Weitergabe von Nutzen erlaubt beziehungsweise praktisch machbar ist, spricht man von *transferierbarem Nutzen*. Man kann sich das beispielsweise so vorstellen, dass die Auszahlung des Nutzens in Form von Geld erfolgt, das beliebig

---

[11] Vgl. [16], S. 417.
[12] $\mathfrak{P}$ bezeichnet die Potenzmenge; insgesamt sind also 2^n-1 verschiedene Koalitionen möglich.

geteilt und weitergegeben werden kann. Eine Einheit Geld erhöht somit den Nutzen eines Spielers um eine Einheit.[13]

Bei Spielen mit transferierbarem Nutzen können die Möglichkeiten zur Kooperation durch die *charakteristische Funktion* ν beschrieben werden, die jeder Koalition S eine Zahl $\nu(S)$ zuordnet. Diese steht für die Menge an transferierbarem Nutzen, den die Mitglieder von S ohne Hilfe von Spielern außerhalb von S erreichen können, und sie wird *Wert* der Koalition genannt. In jeder charakteristischen Funktion gilt stets

$$\nu(\emptyset)=0.$$

Eine charakteristische Funktion wird auch als *Spiel in Koalitionsform* oder als *Koalitionsspiel* bezeichnet.[14]

[13] Statt Geld kann natürlich auch jede andere beliebig teilbare Einheit gewählt werden, zum Beispiel Land, Lebensmittel etc.

[14] Vgl. [16], S. 422.

2 Lösungskonzepte der fair division

Will eine Gruppe von Spielern den vorhandenen Nutzen unter sich aufteilen, werden alle Betroffenen ein gewisses Maß an "Fairness" einfordern. Aber welche Aufteilungen sind "gerecht" in dem Sinn, dass sowohl die Stärke als auch die Verhandlungsmacht der Spieler in ihre Auszahlungen einfließen? Eine Antwort darauf versuchen die folgenden Konzepte zu geben, deren Definitionen Myerson (1991) [16] sowie Rauhut, Schmitz und Zachow (1971) [18] entnommen sind.

2.1 Kern

Sei $\nu = (\nu(S))_{S \subseteq N}$ ein Spiel in Koalitionsform mit transferierbarem Nutzen, wobei die Menge der Spieler $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist. Eine Nutzen-Aufteilung ist ein Vektor $x = (x_i)_{i \in N}$ in $\mathbb{R}^n$, wobei jede Komponente x_i als Auszahlung an den Spieler i interpretiert wird.

Eine Aufteilung y ist für eine Koalition S genau dann *zulässig*, wenn

$$\sum_{i \in S} y_i \leq \nu(S)$$

gilt. Die Spieler in S können ihre Komponenten dieser Aufteilung also bekommen, indem sie den Wert $\nu(S)$, den sie gemeinsam erreichen können, untereinander aufteilen.

Wir sagen, dass sich eine Koalition bezüglich einer Aufteilung x *verbessern* kann genau dann, wenn

$$\nu(S) > \sum_{i \in S} x_i$$

gilt. S kann sich also bezüglich x genau dann verbessern, wenn eine Aufteilung y existiert, sodass y zulässig für S ist und dabei jeder Spieler in S eine strikt größere Auszahlung erzielt als in x.

Eine Aufteilung befindet sich nun im $Kern$ von ν genau dann, wenn x zulässig ist und keine Koalition sich bezüglich x verbessern kann. Die Aufteilung x ist somit dann und nur dann im Kern, wenn

$$\sum_{i \in N} x_i = \nu(N) \quad \wedge \quad \sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S), \forall S \subseteq N$$

gilt.[15] Das heißt, falls eine zulässige Lösung x nicht im Kern liegt, dann gibt es eine Koalition S, sodass alle Spieler in S eine strikt gößere Auszahlung erhalten können, wenn sie zusammenarbeiten und den Wert der Koalition $\nu(S)$ untereinander aufteilen. Der Kern kann aus nur einem oder aus sehr vielen Punkten bestehen, er kann jedoch auch leer sein.

2.2 Shapley-Wert

Da der Kern eines Koalitionsspiels auch leer oder sehr groß sein kann, wäre es erstrebenswert, einen eindeutigen erwarteten Auszahlungswert für alle Spieler zu erhalten. Dieser sollte die Stärke der Spieler in Bezug auf sämtliche Koalitionen, die sie theoretisch bilden könnten, berücksichtigen. Sei Π die Menge aller möglichen Koalitionen der n Spieler. Wir möchten also eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^{|\Pi|} \to \mathbb{R}^n$, sodass der erwartete Auszahlungswert jedes Spielers i $\phi_i(\nu)$ ist. Hierbei gilt die Notation $\phi(\nu) = (\phi_i(\nu))_{i \in N}$. Shapley (1953) [24] ging axiomatisch an dieses Problem heran und stellte die folgenden drei Anforderungen an die Abbildung ϕ:

1. *Symmetrie:* Für jedes ν in $\mathbb{R}^{|\Pi|}$, jede Permutation $\xi : N \to N$ und jeden Spieler i in N gilt: $\phi_{\xi(i)}(\xi\nu) = \phi_i(\nu)$. Für eine gegebene Permutation bezeichnet $\xi\nu$ das Koalitionsspiel, für das $\xi\nu(\{\xi(i)|i \in S\}) = \nu(S), \forall S \subseteq N$ gilt.
   Diese Eigenschaft verlangt also, dass nur die Rollen der Spieler von Bedeutung sind, nicht aber ihre Namen oder ihre Reihenfolge.

2. *Träger:* Für jedes ν in $\mathbb{R}^{|\Pi|}$ und jede Koalition R gilt: Falls R ein Träger von ν ist, dann gilt die Gleichung $\sum_{i \in R} \phi_i(\nu) = \nu(R)$. Dabei wird R genau dann als *Träger* des Koalitionsspiels ν bezeichnet, wenn $\nu(S \cap R) = \nu(S), \quad \forall S \subseteq N$. Die Spieler außerhalb von R werden *Dummys* genannt.
   Es wird also gefordert, dass diejenigen Spieler, die zum Träger gehören, den gesamten Wert (welcher dem Wert der großen Koalition entspricht) untereinander aufteilen, während die Dummys komplett leer ausgehen. Anders gesagt, wenn jemand nichts zum Wert der Koalition beiträgt, dann soll er auch bei der Auszahlung leer ausgehen.

[15] Vgl. [16], S. 428.

3. *Linearität:* Für zwei Koalitionsspiele ν und ω in $\mathbb{R}^{|\Pi|}$, eine Zahl p mit $0 \leq p \leq 1$ und jeden Spieler i in N gilt:

$$\phi_i(p\nu + (1-p)\omega) = p\phi_i(\nu) + (1-p)\phi_i(\omega).$$

   Für eine genauere Betrachtung dieser Eigenschaft definieren wir das Koalitionsspiel $(p\nu + (1-p)\omega)(S) = p\nu(S) + (1-p)\omega(S)$. Als Interpretation dieses Spiels stellen wir uns vor, dass die Spieler in N morgen eines der Spiele ν und ω spielen werden, abhängig von einem zufälligen, erst morgen beobachtbaren Ereignis. Dabei wird das Spiel ν mit Wahrscheinlichkeit p ausgewählt. Würden die Spieler bereits jetzt verhandeln, wäre die Auszahlung für Spieler i gegeben durch $\phi_i(p\nu + (1-p)\omega)$. Falls die Verhandlungen jedoch erst morgen stattfänden, dann sollte die erwartete Auszahlung von Spieler i $p\phi_i(\nu) + (1-p)\phi_i(\omega)$ betragen. Die Auszahlung darf also laut dieser Eigenschaft nicht davon abhängen, ob die Spieler vor oder nach der zufälligen Entscheidung für Spiel ν oder ω verhandeln.

Shapley zeigte nun, dass es eine eindeutige Abbildung $\phi : \mathbb{R}^{|\Pi|} \to \mathbb{R}^n$ gibt, die diese drei Eigenschaften erfüllt, den *Shapley-Wert*. Für jedes i in N und jedes ν in $\mathbb{R}^{|\Pi|}$ berechnet er sich aus folgender Formel:

$$\phi_i(\nu) = \sum_{S \subseteq N - \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S)).$$

Für den Beweis und die Interpretation der Formel sei auf Myerson (1991) [16] verwiesen.

2.3 Stabile Mengen

Sei ν ein Spiel in Koalitionsform. Ein Vektor $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt eine *Imputation* im Spiel ν, falls gilt:[16]

1. $b_i \geq \nu(\{i\}), \forall i \in N$
2. $\sum_{i=1}^{n} b_i = \nu(N)$.

Die Menge aller Imputationen im Spiel ν wird mit $I(\nu)$ bezeichnet. Die einzelnen Komponenten einer Imputation geben die Auszahlungen an die einzelnen Spieler an. Die erste Bedingung stellt dabei sicher, dass jeder Spieler zumindest die

[16] Vgl. [18], S. 336.

Auszahlung erhält, die er auch alleine erreichen könnte. Die zweite Bedingung verlangt, dass der Nutzen, den die große Koalition erreichen kann, zur Gänze unter den Spielern aufgeteilt wird.

Auf analoge Weise können solche Vektoren auch für eine Partition π von N definiert werden, indem man

$$I(\pi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq \nu(\{i\}), \forall i \in N \quad \wedge \quad \sum_{j \in R} x_j = \nu(R), \forall R \in \pi\}$$

setzt.[17]

Natürlich ist zu Beginn nicht klar, auf welche Imputation sich die Spieler im Verlauf der Verhandlungen einigen werden. Bei zwei gegebenen Imputationen $b, c \in I(\nu)$ werden die beiden Spieler i und j eventuell nicht dieselbe bevorzugen. Ihre Entscheidung hängt davon ab, in welcher Imputation die i-te beziehungsweise j-te Komponente größer ist. Ausgehend davon definieren wir nun den Begriff der Dominanz:

Seien ν ein Spiel in Koalitionsform, $S \in \Pi$ eine Koalition und $b, c \in I(\nu)$ Imputationen. Wir sagen, b *dominiert* c *bezüglich* S (kurz: $b \succ_S c$), falls gilt:

1. $b_i > c_i, \quad \forall i \in S$,
2. $\sum_{i \in S} b_i \leq \nu(S)$.

Wir sagen, b *dominiert* c (kurz: $b \succ c$), falls eine Koalition $S \in \Pi$ existiert, sodass $b \succ_S c$ gilt.[18] [19]

Für ein Koalitionsspiel ν heißt nun $L \subset I(\nu)$ eine *stabile Menge*[20] von ν, falls gilt:

1. Für alle $b, c \in L$ gilt weder $b \succ c$ noch $c \succ b$,
2. zu jedem c $\in I(\nu) - L$[21] existiert ein $b \in L$ mit $b \succ c$.[22]

[17] Vgl. [16], S. 452.
[18] Vgl. [18], S. 337 und [13], S. 25.
[19] Die Dominanzrelation $\succ$ ist nicht transitiv, denn es kann zwei Imputationen $b, c \in I(\nu)$ geben, für die sowohl $b \succ c$ als auch $c \succ b$ gilt. Natürlich können diese beiden Dominanzen nicht bezüglich derselben Koalition gelten, für zwei verschiedene Koalitionen $S_1, S_2 \in \Pi$ sind aber sehr wohl zugleich $b \succ_{S_1} c$ und $b \succ_{S_2} c$ möglich.
[20] Auch: von-Neumann-Morgenstern-Lösung.
[21] Hier bezeichnet $I(\nu) - L$ die Komplementärmenge von L in $I(\nu)$.
[22] Vgl. [18], S. 346.

Die Idee hinter den stabilen Mengen ist, dass alle darin liegenden Imputationen von den Spielern als mögliche Ausgänge des Spiels gesehen werden, wobei aber nicht feststeht, welche davon am Ende zustande kommt. Die beiden Eigenschaften stellen sicher, dass alle außerhalb liegenden Imputationen abgeblockt werden, dasselbe jedoch nicht zwischen zwei Imputationen innerhalb der stabilen Menge passieren kann. Lucas (1969) [14] zeigte, dass für manche Spiele keine stabile Menge existiert.

2.4 Verhandlungsmenge

Aumann und Maschler (1964) [1] führten das Konzept der Verhandlungsmenge ein. Die Idee hinter der Verhandlungsmenge ist, dass ein Spieler i keine für ihn selbst kurzfristig vorteilhafte Änderung der Koalitionsstruktur anstreben wird, wenn er fürchtet, dass er dadurch eine erneute Änderung auf Initiative eines nun schlechter gestellten Spielers j provozieren könnte. Es wäre nämlich möglich, dass Spieler i am Ende schlechter aussteigt, als es bei der ursprünglichen Koalitionsstruktur der Fall gewesen wäre. Dieses Konzept soll nun formal beschrieben werden:

Für jede Koalition S und jede Aufteilung x sei

$$e(S,x) = \nu(S) - \sum_{i \in S} x_i.$$

Diese Menge $e(S,x)$ wird als *Überschuss* von S bei x bezeichnet und ist der transferierbare Nutzen, den Koalition S übrig hätte, nachdem sie an jedes ihrer Mitglieder i die Menge x_i ausgezahlt hat.

Ein *Einwand* eines Spielers i gegen einen Spieler j und eine Aufteilung x ist ein geordnetes Paar (y,S), sodass

$$y \in \mathbb{R}^n,\ S \subseteq N,\ i \in S,\ j \notin S,\ e(S,y) = 0,\ \textit{und} \quad y >_S x$$

gilt.

Ein *Gegeneinwand* zum Einwand des Spielers i gegen j und x ist ein geordnetes Paar (z,T), sodass

$$z \in \mathbb{R}^n,\ T \subseteq N,\ j \in T,\ i \notin T$$
$$T \cap S \neq \emptyset,\ e(T,z) = 0,\ z \geq_T x,\ \textit{und} \quad z \geq_{T \cap S} y$$

gilt.

Die Spieler in S können also unter dem Einwand bei Aufteilung y jeweils eine echt größere Auszahlung erreichen als bei Aufteilung x, dabei wird Spieler j aus der Koalition ausgeschlossen. Der Gegeneinwand ermöglicht es hingegen Spieler j, einige Koalitionspartner von Spieler i zu "stehlen", wobei er diesen eine mindestens genauso hohe Auszahlung wie unter dem Einwand garantieren kann. Er selbst bekommt mindestens die ursprüngliche Auszahlung und schließt jetzt seinerseits Spieler i aus der Koalition aus.

Die *Verhandlungsmenge* wird nun bezüglich einer Partition π von N definiert. Eine Aufteilung x liegt in der Verhandlungsmenge von ν bezüglich der Partition π genau dann, wenn $x \in I(\pi)$ gilt und für jede Koalition R in π und beliebige Spieler i und j in R zu jedem Einwand von Spieler i gegen j und x ein Gegeneinwand existiert.[23]

Peleg (1963) [17] zeigte, dass für jede Partition π die Verhandlungsmenge von ν bezüglich π nichtleer ist, falls $I(\pi)$ nichtleer ist (was immer der Fall ist, wenn ν superadditiv ist, siehe Abschnitt 3.1.3).

2.5 Kernel

Davis und Maschler (1965) [4] definierten den Kernel von ν bezüglich der Partition π als die Menge aller Aufteilungen x, sodass $x \in I(\pi)$ ist und für jede Koalition T in π und zwei beliebige Spieler i und j in T

$$\max_{S \subseteq N - \{j\},\, i \in S} e(S, x) = \max_{T \subseteq N - \{i\},\, j \in T} e(T, x)$$

gilt.[24] Sind also zwei Spieler i und j in derselben Koalition in der Partition π, so ist der höchste Überschuss, den Spieler i in einer Koalition ohne Spieler j erzielen kann, gleich groß wie der Überschuss, den Spieler j in einer Koalition ohne Spieler i erzielen kann.

2.6 Nucleolus

Für eine beliebige Aufteilung x sei $\zeta_k(x)$ der der Größe nach k-te Überschuss, der von einer beliebigen Koalition in x erzielt wird. Das heißt

$$|\{S \in \Pi \mid e(S, x) \geq \zeta_k(x)\}| \geq k,$$

[23] Vgl. [16], S. 453f.
[24] Vgl. [16], S. 454.

$$|\{S \in \Pi \mid e(S,x) > \zeta_k(x)\}| < k.$$

Somit liegt x genau dann im Kern, wenn $\zeta_1(x) \leq 0$ gilt.

Sei $A(1)$ die Menge aller Imputationen, die ζ_1 minimieren. Das heißt

$$A(1) = \operatorname*{arg\,min}_{x \in I(\{N\})} \zeta_1(x).$$

Falls der Kern nichtleer ist, so muss $A(1)$ eine Teilmenge des Kerns sein. Nun kann man $A(k)$ für alle $k = 2, 3, \dots, 2^{|N|} - 1$ induktiv durch die Gleichung

$$A(k) = \operatorname*{arg\,min}_{x \in A(k-1)} \zeta_k(x)$$

definieren.[25] Schmeidler (1969) [23] zeigte, dass $A(2^{|N|} - 1)$ aus einem einzelnen Punkt bestehen muss, dem *Nucleolus* von ν.

2.7 Zusammenhänge und Klassifizierung

Als nächstes betrachten wir die Art und Weise, wie die verschiedenen Lösungskonzepte zusammenhängen. Dazu lassen sich folgende Aussagen festhalten:[26]

1. Der Kern liegt in jeder stabilen Menge, falls überhaupt eine solche existiert.
2. Der Kern ist Teilmenge der Verhandlungsmenge von ν bezüglich der Partition $\{N\}$.
3. Der Kernel ist eine nichtleere Teilmenge der Verhandlungsmenge.
4. Der Nucleolus liegt im Kernel, dem Kern (falls dieser nichtleer ist) und der Verhandlungsmenge bezüglich der Partition $\{N\}$.

Sämtliche vorgestellten Lösungskonzepte lassen sich in naheliegender Weise klassifizieren, indem man ihre Ergebnisse in Hinblick auf ein einfaches Spiel mit zwei Spielern betrachtet, in dem gilt[27]:

$$N = \{1,2\}, \quad \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 0, \quad \nu(\{1,2\}) = 1$$

[25] Vgl. [16], S. 454f.
[26] Vgl. [16], S. 454f und [18], S. 355.
[27] Vgl. [16], S. 455.

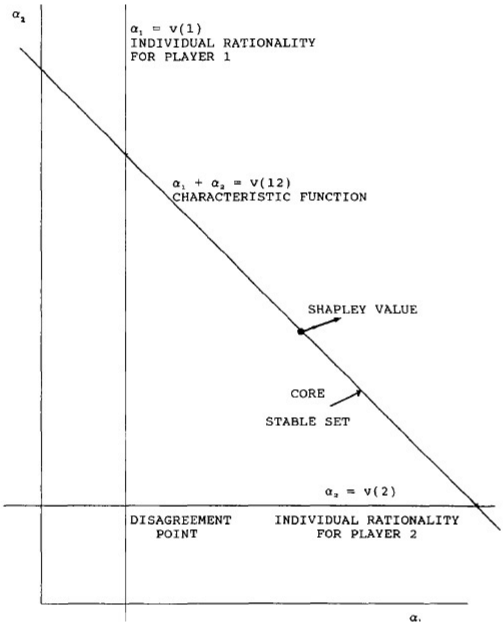

Abbildung 2.7.1: Grafische Darstellung von stabiler Menge, Kern und Shapley Value im Fall von zwei Spielern.
Quelle: Lemaire (1991) [13].

Falls ein Lösungskonzept nur darauf aufbaut, koalitionäre Einwände zu vermeiden, dann sollte die Lösung dieses Spiels die Menge aus der Menge aller Imputationen $\{(\alpha, 1-\alpha) \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ bestehen. Solche "nicht beanstandbaren" Lösungen sind der Kern, die Verhandlungsmenge (in Bezug auf $\{N\}$) und die stabilen Mengen. Wenn ein Lösungskonzept auf der anderen Seite Überlegungen zur Ausgeglichenheit zwischen den Spielern einbezieht, so sollte die Lösung die Zuteilung $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ sein. Zu diesen "fairen" Methoden zählen der Shapley-Wert, der Kernel und der Nucleolus.

3 Fortgesetzter Konflikt

3.1 Grundlagen des fortgesetzten Konflikts

Im Folgenden werden die grundlegenden Konzepte des fortgesetzten Konflikts vorgestellt, die in den anschließend diskutierten Modellen Verwendung finden. Die Formulierungen folgen Garfinkel und Skaperdas (2007) [8].

3.1.1 Die Konflikttechnologie

Der Ausdruck "technologies of conflict" wurde in Hirshleifer (1989) [11] eingeführt. Die Konflikttechnologie stellt gewissermaßen das Äquivalent zur Produktionsfunktion dar und ordnet den einzelnen Spielern eine Gewinnwahrscheinlichkeit in einem Konflikt zu. Während bei der Produktion die Ressourcen gebündelt werden, um einen gemeinsamen Output zu erzeugen, werden sie im Konflikt gegeneinander eingesetzt. Die Inputs sind hier aber nicht Arbeitskraft oder Maschinen, sondern je nach Art des Konflikts beispielsweise Soldaten, Waffen, Lobbyingaktivitäten oder Anwaltskosten. In den folgenden Ausführungen wird, Garfinkel und Skaperdas (2007) [8] folgend, der Fall des Konflikts mittels Waffen betrachtet, die Ergebnisse gelten analog für die anderen Fälle.

3.1.1.1 Die allgemeine Form

Stellen wir uns für den Anfang zwei konkurrierende Spieler $i = 1, 2$ vor, die sich im Kampf gegenüberstehen. Die beiden investieren jeweils einen Teil ihrer Ressourcen, G_1 beziehungsweise G_2, in den Konflikt. Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $p_i(G_1, G_2)$, dass Spieler i gewinnt. Diese soll natürlich steigend in G_i sein.

Eine weitverbreitete Art der Konflikttechnologie ist die additive Form:

$$p_1(G_1, G_2) = \begin{cases} \frac{f(G_1)}{f(G_1)+f(G_2)} & wenn \quad \sum_{i=1}^{2} f(G_i) > 0 \\ \frac{1}{2} & sonst, \end{cases}$$

wobei $f(\cdot)$ eine nichtnegative, monoton steigende Funktion ist. Eine praktische Eigenschaft dieser Form ist die Tatsache, dass sie sich sehr einfach auf mehrere Spieler erweitern lässt. Lassen wir nun n Teilnehmer in unserer Konfliktsituation zu und bezeichnen wir den Waffeneinsatz von Spieler i mit G_i sowie den Vektor der Waffeneinsätze der anderen Spieler j$\neq$ i mit G_{-i}, so ergibt sich die Gewinnwahrscheinlichkeit von i als

$$p_i(G_i, G_{-i}) = \begin{cases} \frac{f(G_i)}{\sum_{j=1}^{n} f(G_j)} & wenn \quad \sum_{j=1}^{n} f(G_j) > 0; \\ \frac{1}{n} & sonst. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Die beiden wichtigsten Gestalten der Funktion $f(\cdot)$ werden im Folgenden für den Fall von zwei Spielern vorgestellt. Die Verallgemeinerung auf n Spieler erfolgt analog zur soeben vorgestellten Erweiterung.

3.1.1.2 Die Potenzform

Die gebräuchlichste Form ist die Potenzform, für die $f(G_i) = G_i^m$ gilt, wobei $m > 0$ ist, sodass die Wahrscheinlichkeit von der Form

$$p_1(G_1, G_2) = \frac{G_1^m}{G_1^m + G_2^m}$$

ist. Wie Hirshleifer (1989) [11] bemerkte, hängt die Gewinnwahrscheinlichkeit in diesem Fall nur vom Verhältnis des Waffeneinsatzes der beiden Spieler, also $\frac{G_1}{G_2}$, ab. Diese Konflikttechnologie ist homogen vom Grad null bezüglich Waffengewalt, im Fall von n Spielern gilt also $p_i(tG_i, tG_{-i}) = p_i(G_{i.}, G_{-i})$ für alle $t > 0$.

3.1.1.3 Die Logit-Form

Ebenfalls verbreitet ist die Logit-Form, in der $f(G_i) = e^{kG_i}$ mit $k > 0$ gilt. Hier hat die Gewinnwahrscheinlichkeit die Form

$$p_1(G_1, G_2) = \frac{e^{kG_1}}{e^{kG_1} + e^{kG_2}} = \frac{1}{1 + e^{k(G_2 - G_1)}}.$$

In diesem Fall merkte Hirshleifer an, dass die Siegeswahrscheinlichkeit von der Differenz zwischen den Waffeneinsätzen der beiden Konfliktparteien abhängt. Damit sind die Wahrscheinlichkeiten invariant gegenüber der Addition einer Konstante C zur Waffengewalt jedes Spielers, also $p_i(G_i + C, G_{-i} + C) = p_i(G_i, G_{-i})$ für alle C, für die $G_j + C > 0$ gilt. Obwohl die Logit-Form analytische Vorteile hat, wird sie nicht im selben Ausmaß genutzt wie die Potenzform. Der Grund dafür ist, dass für eine große Anzahl wohldefinierter Modelle dann kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien existiert.[28]

Sowohl die Potenzform als auch die Logit-Form können sowohl axiomatisch als auch stochastisch abgeleitet werden.[29] Beide vorgestellte Formen sind symmetrisch und anonym, das heißt nur die Waffeneinsatz eines Spielers und seines Gegenübers haben einen Einfluss auf den Ausgang. Sinnvollerweise haben also zwei Spieler, die Waffen in derselben Intensität einsetzen, die gleiche Wahrscheinlichkeit zu gewinnen oder zu verlieren. Obwohl es die Möglichkeit gibt, dass einer der beiden Waffen billiger produzieren kann und es somit zu Asymmetrien kommt, bevorzugt die Grundform der Konflikttechnologie keine der beiden Parteien auf diese Art.

3.1.2 Asymmetrischer Konflikt

Es gibt jedoch Fälle, in denen ein Spieler sehr wohl gegenüber dem anderen im Vorteil ist, obwohl er die gleiche Menge an Bewaffnung besitzt. Ein Beispiel dafür ist die Situation, in der einer der beiden eine offensive, der andere eine defensive Position einnimmt. Normalerweise, wenn auch nicht immer, hat der Verteidiger in diesem Fall einen Vorteil. Eine einfache Art, die Konflikttechnologie an diese Möglichkeit anzupassen, ist die folgende Form:

$$p_1(G_1, G_2) = \frac{\varphi f(G_1)}{\varphi f(G_1) + (1 - \varphi) f(G_2)},$$

wobei $\varphi \in (0, 1)$ gilt. Bei gleichem Waffeneinsatz, also wenn $G_1 = G_2 > 0$ gilt, entspricht die Gewinnwahrscheinlichkeit von Spieler 1 φ, die von Spieler 2 $1 - \varphi$. Somit ist Spieler 1 im Vorteil, wenn $\varphi > \frac{1}{2}$ gilt, Spieler 2 hingegen, wenn $\varphi < \frac{1}{2}$ ist. Umso näher φ bei 0 oder 1 liegt, umso stärker ist dieser Vorteil ausgeprägt. Für den Fall, dass sich beide Spieler gegen den Einsatz von Waffen entscheiden, könnte man hier wie oben die Gewinnwahrscheinlichkeiten durch $p_i(G_1, G_2) = \frac{1}{2}$ definieren. Eine andere naheliegende Möglichkeit wäre, diese Wahrscheinlichkeiten als $p_1(G_1, G_2) = \varphi$ und $p_2(G_1, G_2) = 1 - \varphi$ zu definieren.[30]

[28]Vgl. [8], S. 5.
[29]Nachzulesen in Garfinkel & Skaperdas (2007) [8] beziehungsweise Hirshleifer & Riley (1992) [12].
[30]Vgl. [8], S. 6f.

3.1.3 Superadditivität

In vielen Fällen besteht der Anreiz zur Koalitionsbildung darin, dass ein Bündeln der Kräfte die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen mehr als linear erhöht. Gilt für die Spieler i einer Koalition S also die Eigenschaft

$$f(\sum_{i\in S} G_i) > \sum_{i\in S} f(G_i),$$

so nennt man die Funktion $f(\cdot)$ *superadditiv.*[31] Im Spezialfall $f(\cdot) = G^m$ ist die Superadditivität erfüllt, wenn $m > 1$ gilt.

3.1.4 Free-riding

Ein bei kooperativen Spielen oft auftretendes Phänomen ist das free-riding-Problem. Es tritt immer dann auf, wenn Spieler von einer Kooperation auch dann profitieren können, wenn sie selbst nichts oder nur wenig beisteuern. Nehmen wir etwa an, dass in einem Konflikt zwischen zwei Koalitionen jeder Spieler seinen Beitrag für seine Koalition frei wählen darf. Die Möglichkeit zum free-riding wird im Normalfall dazu führen, dass die Beiträge der einzelnen Spieler mit der Koalitionsgröße abnehmen, weil jeder sich auf die Beiträge der anderen verlässt. Ein anderer Fall, in dem das free-riding auftritt, ist die gemeinsame Nutzung eines öffentlichen Gutes, das zuvor gemeinsam produziert werden muss. Jeder möchte dieses gerne nutzen, würde es aber vorziehen, wenn die anderen Spieler die Kosten für die Bereitstellung tragen.[32]

3.2 Fortgesetzter Konflikt bei identischen Spielern

Im Folgenden wird ein einfaches Modell zur Koalitionsbildung unter fortgesetztem Konflikt aus Garfinkel & Skaperdas (2007) [8] vorgestellt, das auf den Arbeiten von Wärneryd (1998) [27] und Esteban & Sákovics (2003) [5] aufbaut. Die Ergebnisse beziehen sich auf einen bewaffneten Konflikt zwischen den Spielern, gelten aber, genau wie bei der Definition der Konflikttechnologie in 3.1.1, auch für die gewaltlosen Varianten.

Der Konflikt zwischen den n identischen, risikoneutralen Spielern $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ um einen nicht teilbaren Gewinn $\overline{R}$ findet in zwei Runden statt. Zuerst treten die

[31] Vgl. [26], S. 281.
[32] Vgl. [7], S. 211.

Koalitionen gegeneinander an, danach kämpfen die Mitglieder der siegreichen Koalition um den Preis. In beiden Runden können die Spieler festlegen, wie viel Aufwand sie in den Konflikt investieren wollen. Dabei werden wir zwei gegenläufige Effekte beobachten: Einerseits erhöht eine steigende Mitgliederzahl in einer Koalition die Wahrscheinlichkeit, dass in der ersten Runde ein Sieg errungen wird. Andererseits führt eine große Gruppe zu einem intensiveren Konflikt in der zweiten Runde.

Die Koalitionsstruktur wird in diesem Modell als gegeben angenommen. Die Ergebnisse beziehen sich also nicht darauf, wie die Koalitionsbildung abläuft, sondern auf welche Weise der andauernde Konflikt die Intensität des Waffeneinsatzes beeinflusst. Eine Koalition wird als $S_k \subseteq N$ definiert und die jeweilige Koalitionsgröße mit $n_k \geq 1$ für $k = 1, 2, \ldots, A$ bezeichnet, wobei A für die Anzahl der Koalitionen steht. Die Koalitionsstruktur hat die Form $\pi = \{n_{1,}n_2, \ldots, n_A\}$, wobei $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \cdots \geq n_A$ gelte. Definitionsgemäß gehört jeder Spieler zu einer Koalition, kann aber auch deren einziges Mitglied sein. Im anderen Extremfall bilden alle Spieler gemeinsam die große Koalition.

3.2.1 Der Konflikt zwischen den Koalitionen

Ausgehend von der gegebenen Koalitionsstruktur wählt jeder Spieler i seinen Beitrag zur Bewaffnung seiner Koalition, der als g_i bezeichnet wird. Gehört der Spieler zu Koalition k, so ergibt sich die Stärke der Gruppe als $G_k = \sum_{i \in S_k} g_i$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich Gruppe k den gesamten Gewinn $\overline{R}$ sichern kann, berechnet sich gemäß der Konflikttechnologie in Formel 3.1.1 mit $f(G) = G^m$ als

$$p_k(G_k, G_{-k}) = \begin{cases} \frac{G_k^m}{\sum_{j=1}^{A} G_j^m} & f\ddot{u}r \ \sum_{j=1}^{A} G_j^m > 0; \\ \frac{1}{A} & sonst. \end{cases}$$

Um die Analyse übersichtlich zu halten, setzen die Autoren im Weiteren $m = 1$ voraus. Sie weisen jedoch darauf hin, dass das Voraussetzen von Superadditivität (siehe 3.1.3) die Vorteile der Koalitionsbildung in diesem Konflikt herausstreichen würde.[33] Einen großen Einfluss auf die Intensität des Konflikts wird im Folgenden die Tatsache haben, dass die Aufwendungen für den Konflikt, den die einzelnen Mitglieder einer Koalition beisteuern, perfekte Substitute sind. Damit ergeben sich Probleme bezüglich free-riding (siehe Abschnitt 3.1.4), weil sich die Spieler auf die jeweils anderen verlassen, um selbst möglichst wenig beisteuern zu müssen.

[33] Vgl. [8], S. 44.

3.2.2 Der Konflikt innerhalb der Koalition

Nehmen wir nun an, dass Koalition k mit $n_k > 1$ aus der ersten Runde als Sieger hervorgegangen ist. Alle anderen Koalitionen $k' \neq k$ seien von der Niederlage in der ersten Runde dermaßen geschwächt, dass sie an der zweiten Runde nicht teilnehmen können. Für die Spieler in den unterlegenen Koalitionen ergibt sich somit über die beiden Runden ein Verlust, der ihrem Kräfteeinsatz in der ersten Runde entspricht, in Zeichen $V_{ik'} = -g_i$.

Die Mitglieder der siegreichen Koalition, $i \in S_k$, kämpfen nun in der zweiten Runde um die Aufteilung von $\overline{R}$. Der Bruchteil σ_{ik}, den sich Spieler i in diesem internen Konflikt sichern kann, hängt natürlich sowohl von seinem Einsatz s_i als auch von den Einsätzen seiner vormaligen Verbündeten, s_j für $j \neq i \in A_k$ (kurz s_{-i}) ab. Daneben ist es auch möglich, dass ein Teil des Preises unabhängig von diesen Einsätzen gleichmäßig auf die Spieler aufgeteilt wird. Für $n_k > 1$ berechnet sich der Teil, den Spieler i erhält, nun aus

$$\sigma_{ik}(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} \frac{1-\mu}{n_k} + \frac{\mu s_i}{\sum_{j \in S_k} s_j} & \textit{für } \sum_{j \in S_k} s_j > 0; \\ \frac{1}{n_k} & \textit{sonst}, \end{cases}$$

wobei $\mu \in (0, 1]$ für alle $i \in S_k$ gilt. Der Parameter μ lässt hierbei die Möglichkeit offen, dass öffentliche Institutionen existieren, die eine friedliche Beilegung des inneren Konflikts anstreben. Wie effektiv diese Institutionen arbeiten, misst der Ausdruck $1-\mu$. Diese Einrichtungen sind also umso stärker, je kleiner μ ist. Dieser Parameter wird der Einfachheit halber im Folgenden gleich 1 gesetzt, was einem kompletten Fehlen von öffentlichen Institutionen entspricht.

3.2.3 Zuteilungen im Gleichgewicht

Jeder Spieler wird versuchen, seine erwartete Auszahlung über beide Stufen des Konflikts zu maximieren, der sich ausgehend von den vorangegangenen Uberlegungen als

$$V_{ik}^e = p_k(G_k, G_{-k})[\sigma_{ik}(s_i, s_{-i})\overline{R} - s_i] - g_i$$

ergibt. Der Ausdruck in den eckigen Klammern gibt dabei die Auszahlung aus der zweiten Runde an, gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit eines Sieges in der ersten Runde. Der zweite Teil sind die Kosten für den Waffeneinsatz in der ersten Runde, die natürlich auch bei einer Niederlage in der ersten Runde anfallen. Ausgehend von diesem Ausdruck wird das Modell rückwärts gelöst, um ein teilspielperfektes Gleichgewicht zu erhalten:

Aus Symmetriegründen muss innerhalb einer Koalition $s_i = s > 0$ gelten. Als Nash-Gleichgewicht der zweiten Runde für Koalition k ergibt sich nun

$$s(n_k) = \frac{n_k - 1}{n_k^2}\overline{R}$$

$$V_i(n_k) = \frac{1}{n_k^2}\overline{R} - g_i,$$

für $i \in S_k$. In diesem Gleichgewicht erhält jedes Mitglied der siegreichen Koalition k einen gleich großen Anteil des Gewinns $\sigma(n_k) = \frac{1}{n_k}$, der abnehmend in der Gruppengröße n_k ist. Gleichzeitig bewirkt ein größeres n_k zunehmende Aufwendungen für den Konflikt. Diese beiden Effekte bewirken, dass die Auszahlungen der einzelnen Spieler quadratisch im Verhältnis zur Gruppengröße sinken.[34]

Betrachten wir nun die erste Stufe des Konflikts, wobei die Koalitionsstruktur, wie eingangs erwähnt, als gegeben angenommen wird. Jeder Spieler i, der zu Koalition k gehört, wählt sein g_i so, dass seine erwartete Auszahlung

$$V_i^e(n_k) = p_k(G_k, G_{-k})\tfrac{1}{n_k^2}\overline{R} - g_i$$

maximiert wird. Dabei treffen alle Spieler in sämtlichen Gruppen ihre Entscheidung simultan. Die Gewichtung $\frac{1}{n_k^2}$ spiegelt den negativen Effekt der Gruppengröße auf die Auszahlung wider, der natürlich auch einen Einfluss auf die Aufwendungen hat, die die einzelnen Spieler zum Konflikt zwischen den Gruppen in der ersten Runde beisteuern. Da diese Kosten unabhängig von der Größe der Koalition sind, werden die g_i negativ von der Gruppengröße abhängen.

Die Konflikttechnologie impliziert zwar, dass $\sum_{j=1}^{A} \sum_{i \in S_j} g_i > 0$ gelten muss, für $A > 2$ kann jedoch nicht für jede Koalitionsstruktur eine innere Lösung garantiert werden. Es kann also vorkommen, dass alle Mitglieder von einer oder mehreren Koalitionen $g_i = 0$ wählen. Um eine stabile Lösung zu erhalten, müssen jedoch alle Koalitionen aktiv an der zweiten Stufe des Konflikts teilnehmen.[35] Die folgenden Ergebnisse beschränken sich auf diesen Fall.

[34] Vgl. [8], S. 46f.
[35] Vgl. [8], S. 47.

Berücksichtigt man die Symmetrie innerhalb der Koalitionen, ergibt sich als Waffeneinsatz eines Spielers in Koalition k bei gegebener Koalitionsstruktur $\pi = \{n_{1,}n_2, \ldots, n_k\}$ der Ausdruck

$$g(n_k, \pi) = \tfrac{A-1}{n_k H^2}[H - (A-1)n_k^2]\overline{R}$$

für alle k, wobei $H = \sum\limits_{j=1}^{A} n_j^2$ gilt.[36]

Für jede gegebene Koalitionsstruktur nimmt also der Einsatz jedes einzelnen Mitglieds von Koalition k im Konflikt zwischen den Koalitionen mit der Koalitionsgröße n_k ab. Dasselbe gilt für den aggregierten Waffeneinsatz der Koalition, $G_k = n_k g(n_k, \pi)$. Somit ist auch die Wahrscheinlichkeit $p(n_k, \pi) = \frac{1}{H}[H - (A-1)n_k^2]$ für $A > 1$, den Konflikt in der ersten Stufe zu gewinnen, abnehmend in der Koalitionsgröße. Ausgehend von diesen Ergebnissen kann man nun die erwartete Auszahlung eines einzelnen Spielers k am Beginn der ersten Stufe des Konflikts als

$$V^e(n_k, S) = \tfrac{1}{n_k^2 H^2}[H - (A-1)n_k^2][H - (A-1)n_k]\overline{R}$$

für $k = 1, 2, \ldots, A$ anschreiben. Spieler in großen Koalitionen dürfen somit eine kleinere Auszahlung erwarten als Spieler in kleinen Gruppen, also

$$V^e(n_1, S\pi) \leq V^e(n_2, \pi) \leq \cdots \leq V^e(n_A, \pi),$$

wobei laut Voraussetzung $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_A$ gilt.[37] Diese Ungleichung sagt aber natürlich nichts über Anreize für die Spieler zum Gruppenwechsel aus. Genausowenig berücksichtigt sie eventuelle Abweichungen einzelner Spieler von ihrer Strategie und die entsprechenden Reaktionen der anderen Spieler.

3.2.4 Intensität des Konflikts bei symmetrischen Koalitionsstrukturen

Um einen Eindruck zu bekommen, wie Änderungen in der Koalitionsstruktur die Intensität des Konflikts beeinflussen, werden im Folgenden die Ergebnisse bei symmetrischen Strukturen präsentiert. Haben alle Koalitionen dieselbe Größe $n \geq 1$, so hat die Koalitionsstruktur die Form $\hat{\pi} = \{e, \ldots, e\}$. Die Lösung des letzten Abschnitts vereinfacht sich dann zu $g(n, \hat{\pi}) = \frac{n-e}{n^2 e}\overline{R}$. Die beiden Extremfälle im

[36] Vgl. [8], S. 48.
[37] Vgl. [8], S. 48.

symmetrischen Fall sind erstens der individuelle Konflikt, bei dem $e = 1$ und $A = n$ gilt, und zweitens die große Koalition mit $e = n$ und $A = 1$. Im Fall des individuellen Konflikts vereinfacht sich die Lösung weiter zu $g(1, \hat{\pi}) = \frac{n-1}{n^2}\overline{R}$, wogegen sich unter der großen Koalition $g(n, \hat{\pi}) = 0$ ergibt. Insgesamt lässt sich feststellen, dass $g(e, \hat{\pi})$ für $e \geq 2$ fallend bezüglich e ist.

Um den Effekt der Koalitionsstruktur auf die Intensität des Konflikts direkt beobachten zu können, werden nun die Aufwendungen für den Kampf in beiden Runden aufsummiert. Bei symmetrischen Koalitionen gilt $n_k = e$ für alle k sowie $p(e, n) = \frac{1}{A} = \frac{e}{n}$, außerdem ergibt sich $s(e) = \frac{e-1}{e^2}\overline{R}$. Insgesamt ergibt sich für den gesamten Konflikt der Ausdruck[38]

$$A[eg(e, \hat{\pi}) + ep(e, n)s(e)] = \frac{1}{A}[\frac{n-1}{n}]\overline{R}.$$

Wie man sieht, nimmt die Intensität des Konflikts mit der Anzahl der Koalitionen A ab. Die Auszahlung eines einzelnen Spielers ist im Fall $e > 1$ echt größer als bei individuellem Konflikt, dieser Zugewinn nimmt jedoch mit der Koalitionsgröße e ab und reduziert sich im Fall $e = n$ auf 0.

In diesem einfachen Modell entstehen die Vorteile der symmetrischen Koalitionsbildung also durch eine reduzierte Intensität in der ersten Runde des Konflikts. Kein Mitglied einer Koalition kann diesen Vorteil jedoch vollständig auskosten, weil in der zweiten Runde innerhalb der Koalition erneut gekämpft wird. Das führt wegen der Symmetrie dazu, dass alle Spieler ihren Einsatz in der ersten Runde reduzieren. Umso größer nun $e > 1$ wird, umso schwächer wird der Konflikt in der ersten Runde ausfallen, und umso stärker in der zweiten. Dabei übersteigen die Kosten, die durch den koalitionsinternen Konflikt entstehen, die Ersparnis aus dem Kampf zwischen den einzelnen Koalitionen. Wenn sich nun e der Gesamtspielerzahl n nähert, bewegen sich die Vorteile aus der Gruppenbildung gegen null.

Im Allgemeinen wird sich nun das Ergebnis im Fall $e = n$ vom individuellen Konflikt unterscheiden. Da jedoch die Annahme $\mu = 1$ getroffen wurde, können Konflikte innerhalb der Koalition nicht effektiver gelöst werden als zwischen einzelnen Spielern. Unter der Annahme, dass die Spieler risikoneutral sind, wird es also hier keinen Unterschied zwischen den Fällen $e = 1$ und $e = n$ geben. Man kann jedoch festhalten, dass für $e < n$ die symmetrische Koalitionsbildung die erwarteten Auszahlungen erhöht.[39]

[38] Vgl. [8], S. 49.
[39] Vgl. [8], S. 48ff.

3.2.5 Stabilitätsbedingungen

Aber reicht dieser Zugewinn aus, damit eine symmetrische Koalitionsstruktur $\hat{\pi}$ ein stabiles Gleichgewicht ist? Falls es keine speziellen Vorteile der Koalitionsbildung bezüglich Konflikt- oder Produktionstechnologie gibt, hat jeder einzelne Spieler bei gegebener Struktur π einen Anreiz, seine Koalition zu verlassen und alleine zu kämpfen. Wie weiter oben bereits besprochen wurde, ist nämlich der Aufwand g_i, den ein einzelner Spieler in den Konflikt der ersten Stufe investiert, fallend bezüglich der Koalitionsgröße. Sobald der Spieler also seine Koalition verlassen hat, gibt es für ihn einen Anreiz, seinen Einsatz für die erste Runde zu steigern. Gleichzeitig verringert sein Austritt auch den Einsatz der Spieler, die nicht in seiner ehemaligen Koalition sind. Ein Spieler kann sich also durch das Verlassen seiner Koalition einen großen Vorteil in der ersten Runde verschaffen und im Fall seines Sieges zusätzlich den gesamten Gewinn $\overline{R}$ für sich behalten. Diese Tatsache stellt natürlich die Stabilität der gegebenen Koalitionsstruktur infrage.

Geht man einen Schritt weiter, so stellt sich die Frage nach der Stabilität der Abweichung selbst. Ein Ausbrechen eines einzelnen Spielers aus der Koalitionsstruktur wird einen Anreiz für andere Spieler darstellen, seinem Beispiel zu folgen. Dieser Ansatz definiert ein stabiles Gleichgewicht, indem möglichen Abweichungen bestimmte interne Konsistenzbedingungen auferlegt werden. Eine Möglichkeit ist hierbei die *weitsichtige Stabilität*, die zuerst in Chwe (1994) [3] erwähnt wurde. Die Spieler betrachten hierbei die endgültigen Auswirkungen ihrer Abweichung, also sämtliche nachfolgenden Abweichungen anderer Spieler und den Einfluss auf die eigene erwartete Auszahlung. Im vorliegenden Modell könnte also ein Ausbrechen eines Spielers aus der Koalitionsstruktur am Ende etwa zur Rückkehr zu individuellem Konflikt führen und somit alle, inklusive des Spielers selbst, schlechterstellen. Solche Abweichungen würden also als unprofitabel angesehen und wären keine Gefahr für die vorherrschende Koalitionsstruktur.

3.3 Produktion statt Kampf in der zweiten Stufe

Der Konflikt in der zweiten Stufe muss nicht immer gewaltsam ablaufen. Im folgenden Modell aus Sanchez-Pages (2007) [21] setzen die Spieler der siegreichen Koalition die nach dem Konflikt der ersten Runde verbleibenden Kräfte für die produktive Nutzung der gewonnenen Ressource ein. Zu Beginn wird eine Aufteilungsregel festgesetzt, die sicherstellt, dass Spieler, die mehr zur Produktion beisteuern, einen größeren Teil der produzierten Menge bekommen. Somit kommt es in der zweiten Runde zwar zu keinem Kampf, aber trotzdem zu einem Konflikt darum, wer den größten Arbeitseinsatz stellen kann. Die Spieler müssen also einerseits sicherstellen, dass sie einen ausreichend großen Teil ihrer limitierten Ausstattung für den tatsächlichen Kampf in der ersten Runde einsetzen. Andererseits sollten sie genug davon für die zweite Runde aufheben, um sich mit ihrer Arbeitskraft einen möglichst großen Teil der Gesamtproduktion sichern zu können.

3.3.1 Modellformulierung

Die Menge der Spieler ist gegeben durch $N = \{1, \ldots, n\}$. Jeder dieser identischen Spieler besitzt eine Einheit an Ausstattung, die er entweder für Konflikt oder für Arbeit einsetzen kann. Wir bezeichnen diese Intensitäten des Einsatzes mit r_i und l_i, wobei offensichtlich $r_i + l_i \leq 1$ gelten muss. Spieler dürfen Koalitionen bilden, woraus sich die Koalitionsstruktur π als Partition von N ergibt. Sie besteht aus den disjunkten Koalitionen $\{S_k\}_{k \in K}$, deren jeweilige Größen mit s_k bezeichnet werden.

Sobald die Koalitionsstruktur feststeht, findet in der ersten Runde der Kampf zwischen den Koalitionen um eine Ressource statt. Bezeichne $r(\pi) = (r^{S_1}, r^{S_2}, \ldots, r^{S_K})$ den Vektor der Aufwendungen der Koalitionen für Konflikt, wobei $r^{S_k} = \sum_{i \in S_{k,}} r_i$ gilt. Die Konflikttechnologie liegt in der Potenzform vor, wobei die Kampfstärke aller anderen Koalitionen zusammengefasst wird zu $r^{-S} = \sum_{S_k \in \pi \setminus \{S\}} (r^{S_k})^m$. Es gilt also

$$p^S(r) = \frac{(r^S)^m}{(r^S)^m + r^{-S}},$$

wobei $m \geq 1$ vorausgesetzt wird.

In der zweiten Runde wird die Ressource von der siegreichen Koalition genutzt. Wie effektiv das geschieht, gibt die Produktionsfunktion $f(L)$ an. Dabei steht $L = \sum_{i \in S} l_i$ für den gesamten Arbeitseinsatz der Koalition. Die Funktion f ist stetig und konkav bezüglich der Arbeit und erfüllt die Eigenschaften $f(0) = 0$ sowie $f'(0) > n\omega$, wobei ω die Stückkosten der Arbeit angibt. Damit ist die Existenz einer inneren Lösung für das Produktionsproblem für alle Koalitionen sichergestellt.[40]

Die Arbeitselastizität der Produktion

$$\varepsilon = \frac{f'(L)L}{f(L)}$$

[40] Vgl. [21], S. 7.

bildet die Knappheit der Ressource ab, wegen der Konkavität muss $\varepsilon \leq 1$ gelten. Technologie f dominiert nun Technologie g genau dann, wenn $\varepsilon_f > \varepsilon_g$ für alle L gilt. Im Folgenden werden zwei Familien von Produktionsfunktionen verwendet: Einerseits die quadratische Form mit $f(L) = aL - bL^2$, bei der $\theta = \frac{a}{b}$ ein Maß für die Knappheit ist. Andererseits die Potenzform mit $f(L) = L^\alpha$ mit $\alpha \leq 1$, bei der die Arbeitselastizität konstant ist, also $\varepsilon = \alpha$ gilt.

Jedes Mitglied der siegreichen Koalition erhält den Anteil

$$\alpha_i = \frac{\lambda}{s} + (1 - \lambda)\frac{l_i}{L}$$

der produzierten Güter, somit ergibt sich

$$\alpha_i f(L) - \omega l_i$$

als individuelle Auszahlung in der zweiten Runde. Der Parameter λ gibt an, wie stark die Anteile der einzelnen Spieler an der Gesamtproduktion von ihrem Arbeitseinsatz abhängen. Für $\lambda = 1$ bekommt jedes Mitglied der Koalition dieselbe Auszahlung, ungeachtet des Arbeitseinsatzes. Im anderen Extremfall $\lambda = 0$ hingegen hängt die Auszahlung komplett vom Arbeitseinsatz der einzelnen Koalitionsmitglieder ab, was zur "Tragedy of the Commons"[41] führt. In diesem Kontext bedeutet das, dass jeder seinen Arbeitseinsatz in der zweiten Runde des Spiels so stark erhöht, dass fast keine oder sogar gar keine Ausstattung mehr für den Konflikt in der ersten Runde zur Verfügung steht.

3.3.2 Der Konflikt zwischen den Koalitionen

Bevor der Prozess der Koalitionsbildung an sich näher untersucht wird, wollen wir vorerst einige Eigenschaften des Spiels betrachten, wenn die Koalitionsstruktur π bereits feststeht. Die Spieler sind dabei in dem Sinn identisch, dass jeder seine Ausstattung gleichermaßen effizient in Konflikt und Arbeit investieren kann und dass die marginalen Kosten für Arbeit ω für jeden Spieler gleich sind. Die Auszahlung eines Spielers $i \in S$ ist durch

$$u_i^S = \frac{(r^S)^m}{(r^S)^m + r^{-S}}[\alpha_i f(L) - \omega l_i]$$

[41] Der Begriff "Tragedy of the Commons" wurde 1968 von Garrett Hardin im Journal "Science" eingeführt, vgl. [9], und hängt eng mit dem free-riding-Problem zusammen. Das Modell beschreibt die Ausbeutung eines Gemeingutes, etwa einer Weide oder eines Fischgewässers. Da die Kosten der Gemeinschaft auferlegt werden, die Gewinne aber dem Einzelnen zugute kommen, wird die Ressource immer weiter ausgebeutet, bis sie für alle verloren ist.

gegeben. Alle Spieler treffen die Entscheidung, wie hoch ihr Einsatz für den Kampf $r_i \in [0,1]$ sein soll, simultan. Bei einer optimalen Entscheidung wird niemand einen Teil seiner Ausstattung ungenutzt lassen, womit sich der Arbeitseinsatz einer Koalition als $L = s - r^S$ ergibt. Nach Einsetzen in die Auszahlungsfunktion kann diese nun zu

$$u_i^S = \frac{(r^S)^m}{(r^S)^m + r^{-S}}[\alpha_i f(s - r^S) - \omega(1 - r_i)]$$

umgeschrieben werden. Daraus kann nun ein Spiel $\Gamma = (N, \{X_i, u_i^S\}_{i \in S \in \pi}, f, \omega, \lambda, m)$ definiert werden, das durch diese Auszahlungsfunktion induziert wird. Es hat ein eindeutiges inneres Nash-Gleichgewicht und ist außerdem symmetrisch, es gilt also $r_i = r_j \, \forall i, j \in S, \forall S \in \pi$.[42]

Betrachten wir nun den Effekt verschiedener Produktions- und Konflikttechnologien (gegeben durch ε und m) sowie verschiedener Aufteilungsregeln (abhängig von λ) auf die optimalen Entscheidungen der Spieler im Gleichgewicht. Im oben definierten Spiel Γ ist der aggregierte Einsatz für den Kampf $\sum_{S_k \in \pi}(r^{S_k})^m$

1. höher unter g als unter f, wenn g von f dominiert wird
2. steigend bezüglich λ
3. steigend bezüglich m, wenn

$$\sum_{k \in \pi \setminus S} (r^{S_k})^m (ln \frac{r^{S_k}}{r^S}) \geq 0$$

erfüllt ist.[43]

Die erste Eigenschaft lässt darauf schließen, dass eine effektive Möglichkeit zur Produktion den Konflikt eindämmen kann. Umso höher nämlich der Ertrag, der mit einem bestimmten Arbeitseinsatz erzielt werden kann, umso weniger Sinn macht es, die Ausstattung in Konflikt zu investieren. Die zweite Aussage kommt dadurch zustande, dass Gruppen mit einem hohen λ die Gesamtproduktion nahezu gleichmäßig verteilen. Dadurch hängt der Nutzen jedes einzelnen nicht besonders stark von seinem Beitrag zur Produktion ab. Somit wird jeder einen kleineren Teil seiner Ausstattung für die Produktion einsetzen, was höhere Aufwendungen für den Konflikt bedeutet. Die dritte Eigenschaft lässt nur teilweise Schlüsse zu: Sicher ist, dass bei symmetrischen Koalitionsstrukturen die Ausgaben für den Konflikt steigen, wenn die Konflikttechnologie effektiver wird.

[42]Vgl. [21], S. 9.
[43]Vgl. [21], S. 10.

3.3.3 Koalitionsbildung bei gemeinschaftlicher Produktion

Im Folgenden wird der Fall $\lambda = 1$ betrachtet, in dem die Spieler der siegreichen Koalition die Gesamtproduktion zu gleichen Teilen aufteilen. Der Einfachheit halber wird $\omega = 0$ gesetzt, somit kann die Auszahlungsfunktion zu

$$u_i^S = \frac{(r^S)^m}{(r^S)^m + r^{-S}} \frac{1}{s} f(L)$$

umgeschrieben werden. Betrachten wir zunächst die Vorzeichen der Spillover-Effekte, die in diesem Fall wirken. Sie geben an, welchen Einfluss ein Zusammenschluss von Koalitionen auf den Rest der Spieler hat, wobei ein positives Vorzeichen einen positiven Effekt bedeutet und umgekehrt. Es stellt sich heraus, dass sie in diesem Modell von der Effektivität der Konflikttechnologie abhängen. Im Fall $m \geq 2$ hat das Koalitionsbildungs-Spiel bei gemeinschaftlicher Produktion negative Spillover-Effekte. Gröbere Koalitionsstrukturen bewirken in diesem Fall ein Ansteigen der insgesamten Aufwendungen für den Konflikt. Dagegen ergeben sich bei quadratischer Form oder Potenzform der Produktionsfunktion und $m = 1$ positive Spillover-Effekte.[44]

Liegt nicht nur eine Produktionsfunktion in einer dieser Formen vor, sondern auch eine symmetrische Koalitionsstruktur, so gilt $u_i^S < u_i^N$. Daraus folgt, dass es nie zu einem Konflikt jeder gegen jeden kommen wird, weil alle Spieler unter der großen Koalition besser gestellt sind. Außerdem kann generell nur eine asymmetrische Koalitionsstruktur entstehen, wenn die große Koalition zerbricht. Damit es gar nicht zu diesem Zerfall kommt, bieten sich im Fall des Austritts eines einzelnen Spielers mehrere Arten der Reaktion durch die übrigen Spieler an. Eine Möglichkeit wäre, die Strategien so zu wählen, dass dem austretenden Spieler der größtmögliche Schaden zugefügt wird. Dann zahlt sich für diesen ein Austritt nicht aus, und die große Koalition bleibt als optimale Lösung erhalten. Diese Drohung auch durchzusetzen wirft jedoch Probleme auf, weil die bestrafende Strategie für zumindest einen Teil der Spieler im Allgemeinen nicht rational ist.[45]

Um die Stabilität der großen Koalition zu untersuchen, bietet es sich also an, nur beste Antworten auf den Austritt eines Spielers oder mehrerer Spielers zuzulassen. Hart & Kurz (1983) [10] folgend, wird der Prozess der Koalitionsbildung als Spiel in Normalform modelliert, dabei sind die Strategiemenge der Spieler durch $S_i = \{S \subseteq N \mid i \in S\}$ gegeben. Es gibt zwei mögliche Varianten: Im γ-Spiel formiert sich eine Koalition genau dann, wenn alle Mitglieder diese Koalition gewählt haben.

[44] Vgl. [21], S. 12.
[45] Vgl. [21], S. 12ff.

Dagegen geben im δ-Spiel alle Teilnehmer nur die maximale Menge der Mitglieder an, mit denen sie sich verbünden wollen. Eine Koalition kommt unter Umständen also auch dann zustande, wenn ein Teil der Mitglieder eine andere Möglichkeit wählt (die jedoch die Spieler der Koalition, in der sie schlussendlich landen, als Teilmenge enthält).

Im Fall der gemeinschaftlichen Produktion ist die große Koalition eine in der Hinsicht effiziente Struktur, dass die Summe der individuellen Auszahlungen maximal ist. Will man ihre Stabilität untersuchen, so kann man die γ- und δ- Konzepte als Erwartungen der Spieler bezüglich der Koalitionsstruktur interpretieren, die sich nach dem Ausscheren eines einzelnen Spielers oder einer ganzen Gruppe ergibt. Im γ-Spiel rechnen sie mit einer Kettenreaktion nach dem Austritt, die schlussendlich zur kompletten Auflösung der Koalition in einzelne Spieler führt. Im δ-Spiel setzen sie voraus, dass die übrigen Spieler weiterhin zusammenhalten.

Bezeichnen wir mit $\nu_\gamma(S)$ beziehungsweise $\nu_\delta(S)$ den aggregierten Nutzen der Koalition S bei rationaler Wahl der Einsätze für Konflikt und Arbeit durch sämtliche Spieler in den beiden Arten des Spiels. Die große Koalition heißt nun *γ-stabil* beziehungsweise *δ-stabil*, wenn es keine Koalition $S \subset N$ gibt, sodass $v_\gamma(S) > \sum_{i \in S} u_i^N$ beziehungsweise $v_\delta(S) > \sum_{i \in S} u_i^N$ gilt. Bei gemeinschaftlicher Produktion, konstanten Skalenerträgen im Konflikt ($m = 1$) und Potenzform der Produktionsfunktion lassen sich folgende Ergebnisse festhalten:[46]

1. Die große Koalition ist γ-stabil.

2. Die große Koalition ist δ-stabil gegenüber Abweichungen von Koalitionen der Größe $s \geq \frac{n}{2}$, aber nicht gegenüber Abweichungen von kleineren Koalitionen.

Die Stabilität hängt jedoch stark von der Effektivität der Konflikttechnologie m ab. Steigt diese stark genug, so können sich obige Ergebnisse sogar komplett umkehren. Betrachten wir zur Illustration dieser Tatsache folgendes Zahlenbeispiel:

Seien $n = 5$ und $\alpha = 0.1$. Dann sind die Auszahlungen pro Spieler bei rationalen Antworten der übrigen Spieler gegeben durch die Werte in den Tabellen 3.1 und 3.2.[47]

Man sieht, dass nur im Fall $m \geq 2$ die Auszahlungen im δ-Fall kleiner sind als im γ-Fall. Vor allem Koalitionen mit vielen Mitgliedern haben hier einen Anreiz für Abweichungen von der großen Koalition. Im Fall $m = 2$ ist die große Koalition nicht γ-stabil, und im Fall $m = 3$ ist sie weder γ- noch δ-stabil. Sanchez-Pages

[46] Vgl. [21], S. 15.
[47] Vgl. [21], S. 15.

m	$\nu_\gamma(1)$	$\nu_\gamma(2)/2$	$\nu_\gamma(3)/3$	$\nu_\gamma(4)/4$	$\nu_\gamma(5)/5$
1	0.160	0.172	0.182	0.193	0.234
2	0.142	0.233	0.241	0.228	0.234
3	0.138	0.291	0.280	0.246	0.234

Tabelle 3.1: γ-charakteristische Funktion im Fall $n = 5$.

m	$\nu_\delta(1)$	$\nu_\delta(2)/2$	$\nu_\delta(3)/3$	$\nu_\delta(4)/4$	$\nu_\delta(5)/5$
1	0.160	0.183	0.185	0.193	0.234
2	0.080	0.147	0.210	0.228	0.234
3	0.039	0.105	0.218	0.246	0.234

Tabelle 3.2: δ-charakteristische Funktion im Fall $n = 5$.

äußert die Vermutung, dass die Stabilität der großen Koalition allgemein stark vom Verhältnis zwischen m und α abhängt. Bei gegebener Produktionsfunktion müsse die Konflikttechnologie nur effektiv genug sein, um die große Koalition zerbrechen zu lassen.[48]

3.3.4 Sequentielle Koalitionsbildung

In Rubinstein (1982) [20] wird ein Modell zur Koalitionsbildung vorgestellt, das auf Vorschlägen von Spielern und der anschließenden Annahme oder Ablehnung durch die anderen Spieler beruht. Bloch (1996) [2] und Ray & Vohra (1999) [19] bauten in ihren Untersuchungen auf diesen Ansatz auf. Im Folgenden werden die Grundlagen des Modells sowie seine Anwendung im Fall der gemeinschaftlichen Produktion präsentiert.

3.3.4.1 Modellformulierung

Auf der Menge der Spieler $N = \{1, \dots, n\}$ wird die Menge aller Koalitionsstrukturen Π, deren Elemente mit π bezeichnet werden, sowie eine charakteristische Funktion $\nu = \{\nu(S, \pi)_{S \in \pi}\}_{\pi \in \Pi}$ definiert. Dabei gilt $\nu(\{i\}, \pi) \geq 0$ für alle $i \in N$ und $\pi \in \Pi$ mit $\{i\} \in \pi$. Jeder Koalition S wird für den Fall, dass S die Menge der verbleibenden Spieler ist, ein zu Beginn vorschlagender Spieler $\varrho^p(S)$ zugewiesen. Ebenso wird eine Reihenfolge von reagierenden Spielern $\varrho^r(S)$ festgelegt. Die Menge $\varrho = \{\varrho^p(S), \varrho^r(S)\}_{S \subseteq N}$ wird als Protokoll bezeichnet, das Tripel $\{N, \nu, \varrho\}$ als Verhandlungsspiel.

[48] Vgl. [21], S. 15.

Dieses Verhandlungsspiel beginnt mit dem Vorschlag des Spielers $\varrho^p(N)$ gegenüber einer Koalition S, in der er selbst Mitglied sein muss. Dieser Vorschlag entspricht einfach gesagt der Aufteilung des Wertes der Koalition unter ihren Mitgliedern. Bei gegebener charakteristischer Funktion ist dieser Wert jedoch nicht wohldefiniert, bevor sich eine endgültige Koalitionsstruktur herausgebildet hat. Somit muss der Vorschlag aus einer Menge von bedingten Aussagen bestehen, die die Aufteilung des Wertes der Koalition für jede mögliche endgültige Koalitionsstruktur angeben. Eine naheliegende Möglichkeit, diesen Prozess etwas übersichtlicher zu gestalten, ist, dass die vorschlagenden Spieler sich bei ihren Vorschlägen auf den gerade vorliegenden Stand der Koalitionsbildung beschränken. Sollten sich also schon einige Koalitionen formiert und das Spiel verlassen haben, bezieht der Vorschlag nur endgültige Koalitionsstrukturen mit ein, die mit dieser Tatsache vereinbar sind.

In Zeichen stellt sich dieser Prozess folgendermaßen dar: Sei $\Pi(S)$ die Menge aller Partitionen einer Koalition S. Hat eine Menge von Koalitionen π das Spiel bereits verlassen, so ist ein Vorschlag ein geordnetes Paar (S, y), wobei $y = \{y(\pi')\}_{\pi'}$ ist, sodass $\pi' = (\pi, S, \hat{\pi})$ mit $\hat{\pi} \in \Pi(N \backslash (\pi \cup S))$ gilt. Für jedes solche π' ist $y(\pi') \in \mathbb{R}^{\mathbb{S}}$ in dem Sinn zulässig, dass

$$\sum_{i \in S} y_i(\pi') = \nu(S, \pi')$$

gelten muss.

Sobald ein Vorschlag (S, y) von Spieler $\varrho^p(S)$ gemacht wurde, sind die Spieler in $\varrho^r(S)$ in der festgelegten Reihenfolge am Zug. Das bedeutet, dass sie den Vorschlag entweder annehmen oder ablehnen. Nehmen alle reagierenden Spieler an, so klinken sich die Spieler in S aus den Verhandlungen aus. Das weitere Spiel beschränkt sich dann auf die Menge der verbleibenden Spieler T, wobei der nächste vorschlagende Spieler $\varrho^p(T)$ ist.

Für den Fall, dass ein reagierender Spieler den Vorschlag ablehnt, ist es an ihm, den nächsten Vorschlag zu machen.[49] Außerdem gibt es eine Strafe für alle Spieler, die durch den geometrischen Diskontfaktor $\delta \in (0, 1)$ beschrieben wird. Sie kann als Zeitverlust durch die Nachverhandlungen interpretiert werden, der alle Spieler schlechterstellt.[50] Nachdem der nächste Vorschlag gemacht worden ist, geht das Spiel wie oben beschrieben weiter. Der Ablauf ist in Abbildung 3.3.1 für den Fall von drei Spielern und in Abbildung 3.3.2 für den allgemeinen Fall dargestellt.

[49]Es können auch mehrere Spieler den Vorschlag ablehnen, an der Reihe ist jedoch der erste, der das tut.

[50]Vgl. [19] S. 293.

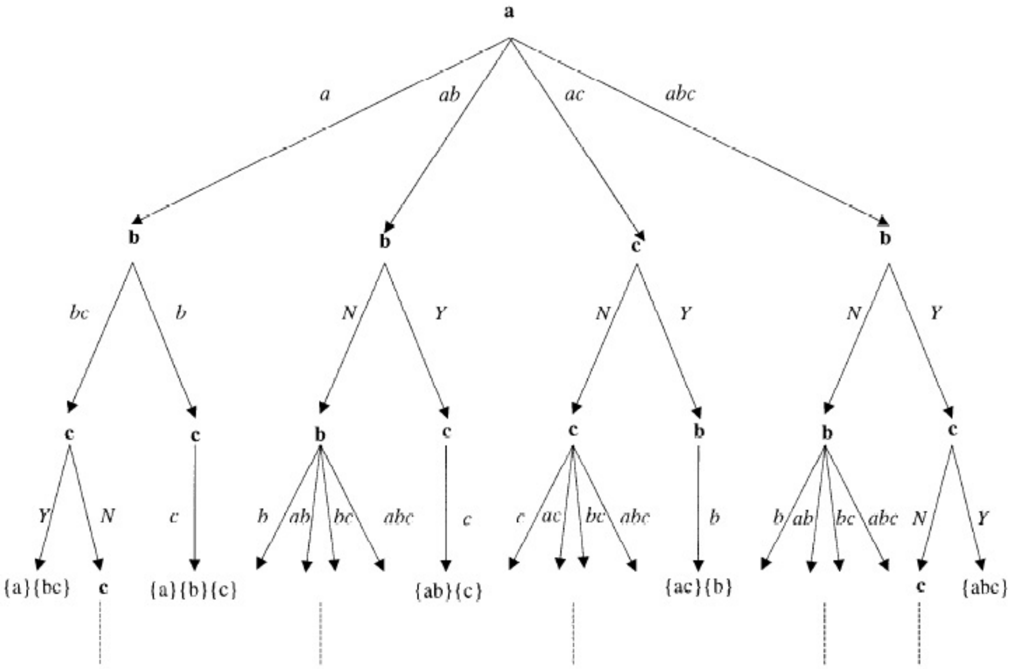

Abbildung 3.3.1: Der Entscheidungsbaum im Fall von drei Spielern. Quelle: Bloch (1996) [2].

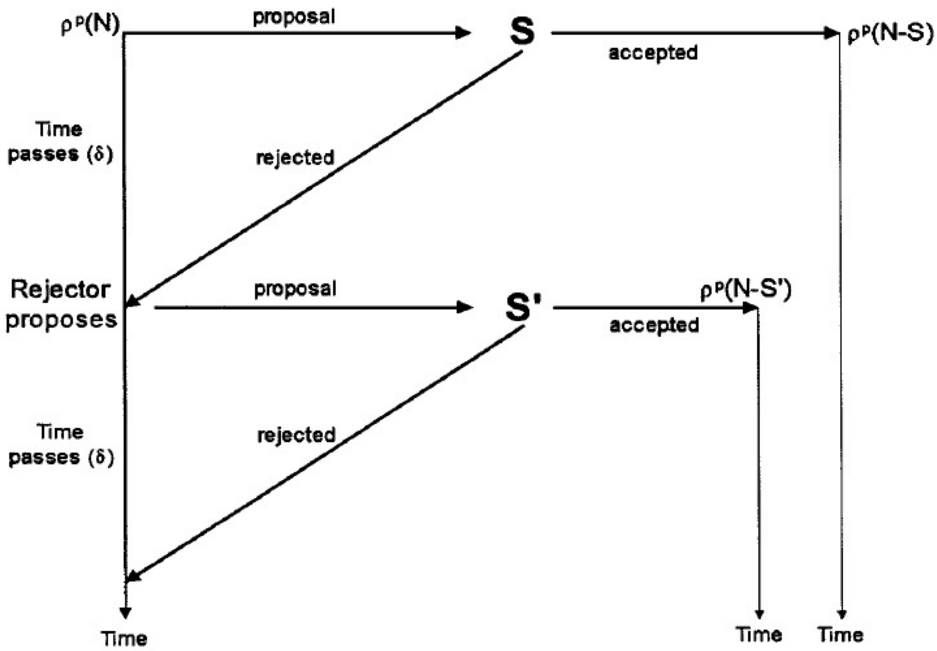

Abbildung 3.3.2: Illustration des Ablaufes der Koalitionsbildung. Quelle: Ray und Vohra (1999) [19].

Sind sämtliche Vereinbarungen geschlossen, formiert sich die endgültige Koalitionsstruktur. Alle Koalitionen müssen ihren Wert entsprechend den Vorschlägen aufteilen, denen alle Mitglieder zugestimmt hatten. Sollte der Verhandlungsprozess unendlich lang weitergehen, wird angenommen, dass alle Spieler eine Auszahlung von 0 erhalten.

Eine *stationäre Strategie* verlangt von einem Spieler, dass er jedesmal einen Vorschlag macht, wenn er dafür an der Reihe ist. Sein Vorschlag hängt dabei nur vom aktuellen Stand des Spiels ab, das heißt von der aktuellen Menge an Spielern und den Koalitionen, die bereits gebildet wurden. Genauso muss ein Spieler jedes Mal, wenn von ihm eine Reaktion verlangt wird, den Vorschlag entweder akzeptieren oder ablehnen. Auch diese Entscheidung hängt von nichts anderem ab als der aktuellen Menge von Spielern, den bereits ausgeschiedenen Koalitionen sowie der Identität des vorschlagenden Spielers und der Art des Vorschlages. Ein *stationäres Gleichgewicht* wird als Menge von stationären Strategien definiert, sodass es keinen Verlauf gibt, in dem ein Spieler von einer Abweichung von seiner vorgegebenen Strategie profitiert.[51]

Diese Art von Gleichgewicht erlaubt drei Arten von gemischten Strategien:

1. der vorschlagende Spieler wählt eine zufällige Koalition
2. bei gegebener Koalition wählt der vorschlagende Spieler eine zufälligen Vorschlag zur Aufteilung des Wertes der Koalition
3. die antwortenden Spieler mischen zwischen dem Annehmen und dem Ablehnen des Vorschlages

Ray und Vohra (1999) [19] zeigten, dass ein stationäres Gleichgewicht existiert, in dem die einzige Art des Mischens die (möglicherweise) probabilistische Wahl der Koalition durch den vorschlagenden Spieler ist.[52]

3.3.4.2 Anwendung bei gemeinschaftlicher Produktion

Im γ- und δ-Fall ist nach der Abweichung eines Spielers oder einer ganzen Gruppe von Spielern nur einer von zwei Extremfällen möglich: entweder der komplette Zerfall in einzelne Spieler oder das Intaktbleiben der übrigen Koalitionsstruktur. Wenn man voraussetzt, dass die Spieler die nach einer Abweichung entstehende Koalitionsstruktur rational voraussagen, ist das zuletzt vorgestellte Modell der

[51] Vgl. [19], S. 293f.
[52] Vgl. [19], S. 294.

Koalitionsbildung ein möglicher Ansatz. Wegen der Produktions-Stufe des Spiels kann die Auszahlungsfunktion jedoch nicht nur aus der Anzahl der Koalitionen in π bestimmt werden, wie das bei einfacheren Modellen der Fall ist. Es können daher nur Teilresultate angegeben werden, die die Wichtigkeit des Verhältnisses zwischen Produktions- und Konflikttechnologie für die Stabilität der großen Koalition unterstreichen.

Bei gemeinschaftlicher Produktion, Potenzform der Produktionsfunktion und der in Abschnitt 3.3.4.1 definierten Art der Koalitionsbildung ergeben sich nun folgende stabile Koalitionsstrukturen:[53]

1. die große Koalition bei konstanten Skalenerträgen der Arbeit ($\alpha = 1$).
2. nicht die große Koalition, wenn die Arbeit unproduktiv ist ($\alpha = 0$) und bei steigenden Skalenerträgen der Konflikttechnologie. Genauer gesagt hat die Struktur die Form $\{s, n - s\}$, wenn $m \geq 2$ gilt, wobei s die Eigenschaft
$$(\tfrac{n}{s} - 1)^{m-1}((m-1)\tfrac{n}{s} + 1) = 1$$
erfüllt.
3. eine Struktur der Form $\{s, n - s\}$ mit $s \geq \min\{\frac{n}{2(1-\alpha)}, n\}$ im "first-price-auction-like"- Fall[54], wobei die gröbste stabile Partition gewählt wird.

Bei konstanten Skalenerträgen der Arbeit sind Aufwendungen für Konflikt aus Sicht des einzelnen Spielers Verschwendung. Der erste vorschlagende Spieler wählt die Koalition, die mit der höchsten Wahrscheinlichkeit angenommen wird, weil die Absorption eines Rivalen keine Kosten verursacht. Im zweiten Fall erhöht der Einsatz von Arbeitskraft nicht die Menge der Ressource, somit investieren die Spieler ihre komplette Ausstattung in den Konflikt. Bei steigenden Skalenerträgen der Konflikttechnologie gibt es eine starke Tendenz zum bipolaren Konflikt, weil die Bildung einer fremden Gruppe die Kosten für den Zusammenschluss mit anderen verringert. Die erste Koalition, die sich formiert, ist dabei umso kleiner, je größer m ist. Ignoriert man Probleme mit der Ganzzahligkeit, hat sie die Größe $\frac{\sqrt{2}}{2}n$ im Fall $m = 2$, $\frac{2}{3}n$ im Fall $m = 3$ und $0.54n$ im Fall $m = 20$.[55]

Im "first-price-auction-like"-Fall schließlich ist jede Koalitionsstruktur stabil, in der die erste Koalition größer oder gleich $\frac{n}{2}$ ist. Um Konsistenz mit den vorangegangenen Ergebnissen sicherzustellen, wird die gröbste Struktur gewählt. Somit hat die

[53] Vgl. [21], S. 16.
[54] Bei diesem Spiel gewinnt die Koalition mit den höchsten Aufwendungen für den Konflikt den Kampf mit Wahrscheinlichkeit 1.
[55] Vgl. [21], S. 17.

erste Koalition, die sich im Fall $\alpha = 0$ formiert, die Größe $\frac{n}{2}$. Die große Koalition ergibt sich in diesem Fall genau dann, wenn $\alpha \geq \frac{1}{2}$ gilt.

Abschließend wollen wir die obigen Ergebnisse anhand einer quadratischen Produktionsfunktion illustrieren. Wir gehen von $N = 4$ aus und teilen jedem Spieler 35 Einheiten Ausstattung zu. Die Produktionsfunktion sei $f(l) = 20L - \frac{1}{8}L^2$ und wir erlauben für m die Werte 1 und 2. Als Auszahlung ergeben sich bei den verschiedenen Koalitionsstrukturen folgende Werte:[56]

	m=1				m=2			
π	$u_a(\pi)$	$u_b(\pi)$	$u_c(\pi)$	$u_d(\pi)$	$u_a(\pi)$	$u_b(\pi)$	$u_c(\pi)$	$u_d(\pi)$
a | b | c | d	83	83	83	83	60	60	60	60
ab | c | d	144	144	85	85	151	151	50	50
abc | d	184	184	184	90	202	202	202	42
ab | cd	150	150	150	150	123	123	123	123
abcd	200	200	200	200	200	200	200	200

Tabelle 3.3: Auszahlungen der Spieler bei unterschiedlichen Koalitionsstrukturen.

Für Spieler a, der im Protokoll an erster Stelle steht, ist es also eine dominante Strategie, $\{a, b, c, d\}$ vorzuschlagen, wenn $m = 1$ gilt. Im Fall $m = 2$ wird er jedoch $\{a, b, c\}$ vorschlagen. Der Grund dafür ist, dass wegen der steigenden Skalenerträge des Konflikts das Ausschließen eines Spielers für zahlenmäßig große Koalitionen vorteilhaft ist. In diesem Fall führt also die Möglichkeit, sich die Ressource in der ersten Runde durch einen Konflikt anzueignen, zum Auseinanderbrechen der großen Koalition.

3.4 Fortgesetzter Konflikt bei heterogenen Spielern

Tan und Wang (2009) [26] untersuchen ein Modell zum fortgesetzten Konflikt, in dem Spieler mit unterschiedlichen Stärken ausgestattet sind. Der Konflikt ist hier nicht auf zwei Runden limitiert, sondern kann je nach Komplexität der Koalitionsstruktur auch mehrere Runden andauern. Es wird so lange weitergekämpft, bis nur noch ein einzelner Spieler verbleibt, der den Preis zur Gänze bekommt. Ein anderer Ansatz nimmt an, dass sich die Spieler einer Koalition auf eine fixe Aufteilung des Preises für den Fall, dass sie siegreich aus der ersten Runde hervorgehen, einigen können. Die Koalitionsstrukturen im Gleichgewicht unterscheiden sich bei den beiden Versionen deutlich, was den Einfluss des fortgesetzten Konflikts auf den Prozess der Koalitionsbildung unterstreicht.

[56] Vgl. [21], S. 17.

3.4.1 Modellformulierung

Wir betrachten eine Konfliktsituation zwischen n Spielern, die um einen festgelegten Gewinn kämpfen, welcher von jedem dieser Spieler auf dieselbe Art und Weise bewertet und auf 1 standardisiert wird. Die Menge der Spieler bezeichnen wir mit $N = \{1, \ldots, n\}$, und jeder Spieler verfügt über eine Stärke a_i, wobei $a_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Je nach Anwendung kann die Stärke eines Spielers unterschiedlich interpretiert werden, etwa als militärische Stärke, finanzielle Ausstattung, Marktmacht oder Anzahl der Personen mit selben Interessen.

Wir setzen voraus, dass die Spieler Koalitionen bilden dürfen, um sich mithilfe der Synergieeffekte Vorteile gegenüber ihren Gegnern zu verschaffen. Diese Koalitionen sind jedoch nicht mehr als Zweckgemeinschaften, denn sobald ein solches Bündnis den Sieg davongetragen hat, wenden sich seine Mitglieder sofort gegeneinander. Die Bildung einer Koalition selbst verursacht keine Kosten. Koalitionen sind nicht mehr aufkündbar, es ist aber jederzeit möglich, dass sich zwei oder mehr bereits bestehende Koalitionen zusammenschließen. In diesem Fall bleibt die Struktur der vorherigen Koalitionen erhalten. Entschließen sich also zum Beispiel die Koalitionen S_1=$\{1,2\}$, S_2=$\{3\}$ und S_3=$\{4\}$ zu einem Bündnis, so entsteht die Koalition S'=$[\{1,2\},\{3\},\{4\}]$. Ein anderer Fall ergibt sich, wenn sich im ersten Schritt der Koalitionsbildung die beiden einzelnen Spieler schon zur Koalition $\{3,4\}$ zusammengeschlossen hatten. In diesem Fall entsteht die Koalition S''=$[\{1,2\},\{3,4\}]$.

Am Ende dieses Koalitionsbildungsprozesses ergibt sich eine Stuktur π= $[S_1, \ldots, S_m]$ mit $1 < m \leq n$. In ihr können Koalitionen vertreten sein, die aus nur einem Spieler bestehen, sie können aber auch mehr oder weniger komplizierte Strukturen haben wie die obigen Koalitionen S' und S''. Im Anschluss an die Koalitionsbildung kommt es zum direkten Konflikt zwischen den Spielern, der über mehrere Runden abläuft: Nachdem eine der Koalitionen den Sieg davongetragen hat, wenden sich die ehemaligen Verbündeten (Spieler oder Sub-Koalitionen) gegeneinander und tragen nun ihrerseits einen Kampf um den Gewinn aus, woraufhin zwischen den Mitgliedern der siegreichen Sub-Koalition die nächste Ebene des Konfliktes beginnt. Auf diese Art geht es so lange weiter, bis der siegreiche Spieler feststeht. Die Reihenfolge, in der sich die Koalitionen zusammengefunden haben, spielt dabei eine entscheidende Rolle, denn sie legt die Form der Bündnisse ab der zweiten Runde des Konflikts fest. Im Fall einer siegreichen Koalition S' aus obigem Beispiel kämpfen somit Spieler 1 und 2 gemeinsam gegen die Einzelkämpfer 3 und 4. Hat die siegreiche Koalition jedoch die Form S'', so ergibt sich im weiteren Verlauf ein Kampf zwischen den verbündeten Spielern 1 und 2 sowie den gemeinsam kämpfenden 3 und 4, im Anschluss wendet sich das siegreiche Duo dieser Runde gegeneinander.

Im Kampf wirken Synergieeffekte bezüglich der Stärke der Spieler, die sich in der Synergiefunktion $f(\cdot)$ widerspiegeln. Treten m Koalitionen gegeneinander an, ergeben sich gemäß der Konflikttechnologie in 3.1.1 somit die Gewinnwahrscheinlichkeiten

$$P_{S_k}(\pi) = \frac{f(\sum_{j \in S_k} a_j)}{\sum_{i=1}^{m} f(\sum_{j \in S_i} a_j)} \tag{3.4.1}$$

für $k = 1, \ldots, m$.

Zusätzlich zu den in Abschnitt 3.1.1 definierten Eigenschaften der Synergiefunktion - nichtnegativ und monoton steigend - wird vorausgesetzt, dass $f(\cdot)$ stetig differenzierbar und superadditiv ist und dass für alle $y > 0$ der Ausdruck $\frac{f(x+y)-f(y)}{f(x)}$ monoton fallend bezüglich x für $x > 0$ ist. Die Superadditivität ist sichergestellt, wenn $f(x)$ strikt konvex ist und $f(0) = 0$ gilt.[57] Im Folgenden verwendete Formen, die diese Eigenschaften erfüllen, sind die Potenzform $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha > 0$ und die exponentielle Form $f(x) = e^{\gamma x} - 1$ für $\gamma > 0$. Die übliche Logit-Form $f(x) = e^{\gamma x}$ wird hier leicht abgeändert, sodass die geforderte Eigenschaft $f(0) = 0$ erfüllt ist.

3.4.2 Der Koalitionsbildungsprozess

Die Koalitionsbildung findet über mehrere Runden statt, wobei zu Beginn jeder Spieler eine eigene Koalition bildet. Bezeichnen wir die Koalitionen in Stufe i mit $S_1, S_2, \ldots, S_m$, dann schlägt "Mutter Natur" in Stufe $i+1$ alle möglichen, strikt größeren Koalitionen in einer zufälligen, vollständigen Reihenfolge vor, wobei keine Koalition zweimal vorkommt. Über die Bildung einer vorgeschlagenen Koalition stimmen die betroffenen Spieler nach der Reihe ab, und nur dann, wenn alle zustimmen, formiert sich die neue Koalition tatsächlich. Koalitionen, die sich einmal formuliert haben, dürfen sich nicht mehr auflösen. Außerdem bleibt die Struktur der Koalitionen, die sich zusammenschließen, erhalten.[58] Der Formationsprozess ist beendet, sobald sich in einer Stufe keine neue Koalition formiert. Die Eigenschaft, dass die Struktur von sich zusammenschließenden Koalitionen erhalten bleibt, stellt die Konvergenz des Formationsprozesses sicher. Trotzdem ist dieser flexibel genug, die Formation jeder beliebigen Koalition zu erlauben, solange die Mitglieder warten, bis diese Koalition vorgeschlagen wird. Die auftretende Verzögerung ist dabei kein Problem, weil keine Diskontierung stattfindet.[59]

[57] Vgl. [26], S. 281.
[58] Siehe Abschnitt 3.4.1 für ein Beispiel.
[59] Vgl. [26], S. 279f.

3.4.3 Gleichgewichtsstrukturen bei fortgesetztem Konflikt

Durch die Superadditivität ist sichergestellt, dass die Spieler einen Anreiz zur Koalitionsbildung haben. Daraus folgt sofort eine wichtige Tatsache: Unter der Annahme, dass sich die restliche Bündnisstruktur nicht ändert, werden zwei Spieler immer lieber eine Koalition bilden, als alleine zu kämpfen. Im Fall von drei Spielern gibt es somit immer ein eindeutiges Gleichgewicht, in dem sich zwei Spieler gegen den dritten verbünden. Natürlich hängt die Struktur dieses Gleichgewichts sowohl von der Stärke der Spieler als auch von der Synergiefunktion $f(\cdot)$ ab. Falls $a_1 > max\{a_2, a_3\}$ gilt, so ist [{1},{2,3}] die eindeutige Gleichgewichtsstruktur. Solch eine eindeutige Aussage ist jedoch nicht möglich, wenn man die Superadditivitätseigenschaft fallen lässt. In diesem Fall geht der stärkste Spieler eine Koalition mit demjenigen Spieler ein, der ihm die größtmögliche Gewinnwahrscheinlichkeit verschafft.

Im Fall von vier Spielern und unter der Annahme $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ gilt:[60]

1. Falls $a_1 > a_3+a_4$, so ist die Koalitionsstruktur im Gleichgewicht [{2,{3,4}},{1}].

2. Falls $a_1 < a_3 + a_4$, so ist die Koalitionsstruktur im Gleichgewicht eindeutig und hat die Form [{i,j},{k,l}], wobei i,j,k und l für die Spieler stehen.

Diese Ergebnisse können so interpretiert werden, dass im Fall $a_1 > a_3 + a_4$ zuerst die Spieler 3 und 4 eine Koalition bilden. Dadurch, dass sie auch gemeinsam immer noch schwächer als Spieler 1 sind, können sie danach Spieler 2 für ein Bündnis gewinnen. Anders sieht es im Fall $a_1 < a_3+a_4$ aus, denn weil Spieler 2 in diesem Fall kein Bündnis mit den bereits verbündeten Spielern 3 und 4 eingehen wird, werden diese in Hinblick darauf zu Beginn keine Koalition eingehen. Welche Struktur sich am Ende in diesem Fall tatsächlich ergibt, ist für nicht näher spezifizierte Konflikttechnologie $f(\cdot)$ schwer zu sagen. Ihre Eindeutigkeit steht jedoch fest, und sie muss von der Form sein, dass sich zwei Koalitionen mit jeweils zwei Spielern ergeben. Für spezielle Form der Konflikttechnologie lässt sich die Koalitionsstruktur aber genau angeben. So ist etwa für $f(x) = x^2$, falls $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ und $a_1 < a_3 + a_4$, die eindeutige Struktur durch [{1,4},{2,3}] gegeben.[61]

Die obigen Ergebnisse deuten darauf hin, dass die Koalitionsbildung tendentiell zu einem Gleichgewicht der Kräfte führt. Es ist also sehr wahrscheinlich, dass sich in der ersten Runde ungefähr gleich starke Koalitionen gegenüberstehen. Man sollte jedoch im Hinterkopf behalten, dass in einigen Fällen strategische Überlegungen schwerer wiegen als das Streben nach Ausgeglichenheit. Betrachten wir als Beispiel

[60] Vgl. [26], S. 285.
[61] Vgl. [26], S. 286.

die Kräfteverteilung $a_1 = 15$, $a_2 = 13$, $a_3 = 7$ und $a_4 = 5$, es gilt also $a_1 > a_3 + a_4$. Als Gleichgewichtsstruktur ergibt sich [{2,{3,4}},1}] anstatt der komplett ausgeglichenen Struktur [{1,4},{2,3}]. Zuerst verbünden sich nämlich Spieler 3 und 4, danach schließt sich Spieler 2 den beiden an.

Es muss festgehalten werden, dass für andere Formen der Synergiefunktion $f(\cdot)$ als der Potenzfunktion nicht notwendigerweise [{1,4},{2,3}] die Gleichgewichtsstruktur sein muss. Für $f(x) = e^x - 1$ zieht es etwa bei nahe beieinander liegenden a_2, a_3 und a_4 Spieler 2 vor, sich mit Spieler 1 zu verbünden anstatt mit Spieler 3. Indem er sich mit Spieler 1 zusammenschließt, hat Spieler 2 bessere Chancen gegen das Bündnis der Spieler 3 und 4, aber eine kleinere Wahrscheinlichkeit, gegen Spieler 1 zu gewinnen. Bei einer Synergiefunktion in exponentieller Form kann es also passieren, dass der Nachteil im inneren Konflikt durch den Vorteil in der ersten Runde mehr als ausgeglichen wird. Im speziellen Fall $a_1 = 1$, $a_2 = 0.52$, $a_3 = 0.51$ und $a_4 = 0.50$ verspricht die Koalitionsstruktur [{1,2},{3,4}] die höchste Gewinnwahrscheinlichkeit für die Spieler 1 und 2 und ist somit die eindeutige Gleichgewichtsstruktur.

Für den Fall von fünf oder mehr Spielern kann nur festgestellt werden, dass es im Gleichgewicht nur zwei Koalitionen geben kann. Intuitiv kann diese Tatsache folgendermaßen erklärt werden: Falls sich im Laufe des bisherigen Koalitionsbildungsprozesses die Gruppierungen $S_1, S_2, ..., S_m$ gebildet haben, wobei $m \geqslant 3$ ist, so haben $S_2, ..., S_m$ einen Anreiz, die Koalition $S' = \{S_2, ..., S_m\}$ zu bilden. In dieser größeren Koalition sind sämtliche Spieler in S' bessergestellt, weil sie durch den Synergieeffekt eine höhere Chance haben, die Koalition S_1 zu besiegen. Bei dieser Überlegung spielt die Voraussetzung, dass die Struktur der sich zusammenschließenden Koalitionen erhalten bleibt, eine entscheidende Rolle. Diese besagt ja, dass nach dem Sieg über S_1 jede der Koalitionen $S_2, ..., S_m$ gegen die anderen Sub-Koalitionen von S' kämpft. Würde die Bildung von S' die Struktur der teilnehmenden Koalitionen selbst verändern, so könnten einzelne Spieler schlechtergestellt werden und das Bündnis verhindern. In diesem Fall wären somit mehr als zwei Koalitionen möglich.

3.4.4 Gleichgewichtsstrukturen bei proportionaler Aufteilung

Wenn es die Möglichkeit gibt, den Preis zu teilen, und die Mitglieder der einzelnen Koalitionen verbindliche Verträge dafür festlegen können, so endet der Konflikt nach der ersten Runde. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten, wie diese Aufteilung aussehen könnte. In Tan und Wang (2009) [26] wird exemplarisch die proportionale Aufteilung bezüglich der Stärke der Spieler genauer betrachtet. Wenn also die

Koalition S in der ersten Runde gewinnt, so erhält jeder Spieler i in dieser Koalition den Anteil

$$\frac{a_i}{\sum\limits_{j \in S} a_j}$$

des Preises. Diese Auszahlung hängt dabei nicht von der Sub-Struktur der Koalition ab, somit sind die Auszahlungen der Spieler 1, 2 und 3 ceteris paribus in den Konstellationen S'=[{1,2},{3}] und S''=[{1},{2,3}] identisch. Die Auszahlung jedes einzelnen Spielers ergibt sich damit als Produkt des obigen Ausdrucks und der Gewinnwahrscheinlichkeit von Koalition S.

Die proportionale Aufteilung kann zum einen das Ergebnis von Verhandlungen zwischen den Mitgliedern einer Koalition sein, die sich darauf einigen, im Fall eines Sieges den Preis gemäß ihrer Stärken aufzuteilen. Es gibt auch eine andere mögliche Interpretation, die jedoch eine gewisse Inkonsistenz in der Konflikttechnologie der verschiedenen Runden beinhaltet. Gemäß dieser ist die proportionale Aufteilung das Ergebnis fortgesetzten Konflikts, in dem ab der zweiten Runde jedoch keine Synergiefunktion mehr existiert oder äquivalenterweise $f(a) = a$ gilt. Um das Prinzip zu verdeutlichen, nehmen wir an, dass Spieler 1 mit Stärke a_1 sich in Koalition C_1 befindet, die ihrerseits in der größeren Koalition C_2 liegt, C_2 in C_3 und so weiter, bis schließlich C_{n-1} in C_n liegt. Bezeichnen wir die Gesamtstärke der Koalition C_i mit A_i, dann ist ohne Synergie die Auszahlung von Spieler 1 gegeben durch

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} \cdot \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{A_2}{A_3} \cdot \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{a_1}{A_1} = \frac{a_1}{A_n}.$$

Im Spezialfall von identischen Spielern ist die proportionale Auszahlung äquivalent zur Auszahlung zu gleichen Teilen.[62]

Die durchschnittliche effektive Stärke eines einzelnen Spielers beziehungsweise einer Koalition ist durch $\frac{f(x)}{x}$ gegeben. Ist dieser Ausdruck konvex, was bei der exponentiellen Form $f(x) = e^{\gamma x} - 1$ mit $\gamma > 1$ und der Potenzfunktion $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \geq 2$ sichergestellt ist, so bewirkt ein Anstieg der Stärke x einen immer schnelleren Anstieg der durchschnittlichen effektiven Stärke. In diesem Fall gilt für beliebige x, y und C, sodass $f(x) < f(y) + C$, die Gleichung

$$\frac{f(x+y)}{f(x+y)+C}\left(\frac{1}{x+y}\right) > \frac{f(x)}{f(x)+f(y)+C}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.4.2}$$

[62] Vgl. [26], S. 287f.

Wenn also die Synergie der Koalitionsformation hinreichend stark ist und die effektive Stärke $f(x)$ der ersten Koalition relativ klein im Vergleich zur aggregierten effektiven Stärke $f(y) + C$ der anderen Koalitionen ist, haben die Mitglieder einer beliebigen Koalition immer einen Anreiz, sich mit einer anderen Koalition zu verbünden.

Sei S eine Koalition und nehmen wir an, dass alle übrigen Spieler gemeinsam eine andere Koalition bilden. Bei proportionaler Aufteilung hat jeder Spieler in S denselben Auszahlungsmultiplikator, da man seine Auszahlung als

$$\frac{f\left(\sum_{j\in S} a_j\right)}{f(\sum_{j\in S} a_j) + f(\sum_{j\notin S} a_j)}\left(\frac{1}{\sum_{j\in S} a_j}\right)a_i = g(S)a_i$$

darstellen kann. Bezeichnen wir die Koalition, die $g(S)$ maximiert, mit $S^\star$, das heißt $S^\star = \arg\max_{S\subset N} g(S)$. Ist nun $\frac{f(x)}{x}$ konvex und $n \geq 3$, so gibt es bei anteilsmäßiger Aufteilung in jedem Gleichgewicht nur zwei Koalitionen, $S^\star$ und $N/S^\star$, wobei $\sum_{j\in S^\star} a_j \geq \sum_{j\notin S^\star} a_j$ gilt. Es ergibt sich also ein bipolares System mit asymmetrischen Koalitionsgrößen.[63]

Für eine intuitive Erklärung nehmen wir zunächst an, dass nur zwei Koalitionen gebildet werden dürfen. Die Spieler, die die erste Koalition bilden, müssen zwei gegenläufige Effekte berücksichtigen: Einerseits bietet eine größere Koalition eine höhere Wahrscheinlichkeit, die erste Runde zu gewinnen, andererseits muss der Preis jedoch unter mehr Spielern aufgeteilt werden. Umso stärker der Synergieeffekt dabei wirkt, umso unbedeutender wird der positive Effekt einer größeren Koalition. Erlauben wir nun die Bildung von mehr als zwei Koalitionen, so haben die kleineren Koalitionen laut Formel 3.4.2 immer einen Anreiz sich zu verbünden. Das führt zu einem Gleichgewicht mit nur zwei Koalitionen.

Im Fall von identischen Spielern, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_i = 1$ für alle i vorausgesetzt wird, folgt aus obigem Ergebnis, dass die Größe $k^\star$ der ersten gebildeten Koalition die ganze Zahl ist, die den Ausdruck

$$\frac{f(k)}{f(k) - f(n-k)}\left(\frac{1}{k}\right)$$

maximiert. Im Fall $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \geq 2$ ist die Größe der ersten gebildeten Koalition im Gleichgewicht eine ganze Zahl nahe der Zahl k_1, die aus der Gleichung

$$\left(\frac{n}{k_1} - 1\right)^{\alpha-1}\left((\alpha-1)\frac{n}{k_1} + 1\right) = 1$$

[63] Vgl. [26], S. 288f.

bestimmt wird. Dabei ist k_1 fallend bezüglich α. Wenn α größer und somit der Synergieeffekt stärker wird, wird die Zunahme in der Koalitionsgröße im Vergleich zu den negativen Effekten der proportionalen Aufteilung nämlich immer unbedeutender. Wenn sich α gegen unendlich bewegt, was einem "auction-like"-Spiel entspricht[64], sinkt die Größe der ersten Gruppe und nähert sich $\frac{n}{2}$.

Betrachten wir nun wieder den Fall von heterogenen Spielern. Für das Spiel mit drei Spielern und spezieller Form von $f(\cdot)$ lässt sich die Koalitionsstruktur im Gleichgewicht genau bestimmen. Setzen wir etwa $f(x) = x^2$ und $a_1 > a_2 > a_3$ voraus, so ist bei proportionaler Aufteilung die Struktur [{1,2},{3}] im Fall $a_3^2 + a_2^2 > a_1^2$ und [{1,3},{2}] im Fall $a_3^2 + a_2^2 < a_1^2$.[65] Jeder der beiden schwächeren Spieler hat nämlich Interesse daran, sich mit dem stärksten zu verbünden. Dieser wiederum wird sich bei hinreichend großer eigener Stärke mit dem schwächsten verbünden und andernfalls eine Koalition mit dem mittleren eingehen.

3.4.4.1 Drei Spieler im Fall $f(x) = x^3$

Während sich Tan & Wang (2009) [26] auf den Fall $f(x) = x^2$ beschränken, soll hier der Fall $f(x) = x^3$ untersucht werden.

Behauptung: Es gelte $n = 3$ und $f(x) = x^3$ sowie $a_1 > a_2 > a_3$. Bei anteilsmäßiger Aufteilung ist die Gleichgewichtsstruktur [{1,2},{3}], falls die Bedingung $a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3 > a_1^2$ erfüllt ist. Gilt hingegen $a_2^2 + a_3^2 - a_2 a_3 < a_1^2$, so hat sie die Form [{1,3},{2}].

Beweis: Es seien die Stärken der drei Spieler gegeben durch x, y und z. Unter der Voraussetzung $f(x) = x^3$ werden wir nun die Auszahlung des Spielers x in den beiden Fällen vergleichen, wenn er sich mit y beziehungsweise z verbündet. In Zeichen bedeutet das

$$u_x[xy] = \frac{(x+y)^3}{(x+y)^3 + z^3} \cdot \frac{x}{x+y}$$

und

$$u_x[xz] = \frac{(x+z)^3}{(x+z)^3 + y^3} \cdot \frac{x}{x+z}.$$

[64] Siehe Fußnote 54.
[65] Vgl. [26], S. 290.

Es gilt nun $u_x[xz] > u_x[xy]$ genau dann, wenn

$$\frac{(x+z)^2}{(x+z)^3+y^3} > \frac{(x+y)^2}{(x+y)^3+z^3},$$

was sich vereinfachen lässt zu

$$(z-y)(y^2+z^2-yz-x^2)(x+y+z)^2 > 0.$$

Ausgehend von der Tatsache, dass die Spieler ein Bündnis dem Kampf alleine immer vorziehen[66], lassen sich nun folgende Ergebnisse ableiten:

1. Spieler 3 will immer mit Spieler 1 koalieren (setze $x = a_3, y = a_2, z = a_1$).
2. Spieler 2 will unter der Voraussetzung $a_1^2 + a_3^2 - a_1a_3 > a_2^2$ mit Spieler 1 koalieren (setze $x = a_2, y = a_3, z = a_1$).
3. Spieler 1 will unter der Bedingung $a_2^2+a_3^2-a_2a_3 > a_1^2$ mit Spieler 2 koalieren (setze $x = a_1, y = a_3, z = a_2$).

Da sich Spieler 3 in jedem Fall mit Spieler 1 verbünden will, kann Spieler 1 im Fall $a_2^2 + a_3^2 - a_2a_3 < a_1^2$ problemlos seinen Wunsch durchsetzen und es ergibt sich die Struktur [{1,3},{2}]. Das gleichzeitige Eintreten der zweiten und dritten Bedingung ist laut Voraussetzung nicht möglich. Damit bleibt der Fall zu betrachten, in dem sowohl $a_1^2+a_3^2-a_1a_3 < a_2^2$ als auch $a_2^2+a_3^2-a_2a_3 > a_1^2$ gilt. Spieler 1 möchte dann mit Spieler 2 eine Koalition bilden, Spieler 2 würde jedoch Spieler 3 bevorzugen. Weil Spieler 3 jedoch nicht für ein Bündnis mit Spieler 2 zu gewinnen ist, wird die Gleichgewichtsstruktur dennoch [{1,2},{3}] sein. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

3.4.5 Erweiterungen des Modells

Wie die obigen Ergebnisse zeigen, können sich die Koalitionsstrukturen im Gleichgewicht unter fortgesetztem Konflikt erheblich von denen bei proportionaler Aufteilung entscheiden. Im Folgenden werden einige eigene Erweiterungen des Modells von Tan und Wang (2009) [26] präsentiert und anhand von numerischen Berechnungen analysiert. Die Erweiterungen werden für den allgemeinen Fall formuliert, die Berechnungen beschränken sich jedoch auf den Fall $n = 3$ mit der Synergiefunktion $f(x) = x^2$.[67] In diesem Abschnitt wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 > a_2 > a_3$ vorausgesetzt.

[66] Vgl. [26], S. 282.
[67] Sämtliche Berechnungen wurden mit dem Programm Maple 15 durchgeführt.

3.4.5.1 Aufteilung zu gleichen Teilen

Wir nehmen hier an, dass die siegreiche Koalition S der ersten Runde den Preis zu gleichen Teilen untereinander aufteilt, anstatt ihn wie oben proportional bezüglich ihrer Stärke zu teilen. Jeder Spieler in dieser Koalition bekommt also einen Anteil $\frac{1}{|S|}$ zugesprochen. Intuitiv werden wir hier annehmen, dass sich Spieler, die eine im Verhältnis zu ihren Mitspielern große Stärke besitzen, der Koalitionsbildung verweigern werden. Bündnisse werden, wenn überhaupt, zwischen Spielern mit ähnlicher Stärke stattfinden.

Betrachten wir zuerst den Fall $a_1 = 7$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 3$. Die entsprechenden Gewinnwahrscheinlichkeiten unter den verschiedenen Koalitionsstrukturen finden sich in Tabelle 3.4a. Der stärkere Spieler 1 hat in diesem Fall kein Interesse, mit einem der anderen Spieler eine Koalition einzugehen. Die Spieler 2 und 3 profitieren jedoch von einem Zusammenschluss, was zur Koalitionsstruktur [{1},{2,3}] führt.

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3
$[\{1\},\{2\},\{3\}]$	0.7903	0.1452	0.0645
$[\{1,2\},\{3\}]$	0.4808	0.4808	0.0385
$[\{1,3\},\{2\}]$	0.4500	0.1000	0.4500
$[\{1\},\{2,3\}]$	0.6622	0.1689	0.1689

(a) Der Fall $a_1 = 7$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 3$.

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3
$[\{1\},\{2\},\{3\}]$	0.5213	0.3830	0.0957
$[\{1,2\},\{3\}]$	0.4747	0.4747	0.0505
$[\{1,3\},\{2\}]$	0.3676	0.2647	0.3676
$[\{1\},\{2,3\}]$	0.3769	0.3115	0.3115

(b) Der Fall $a_1 = 7$, $a_2 = 6$ und $a_3 = 3$.

Tabelle 3.4: Gewinnwahrscheinlichkeiten der Spieler bei Aufteilung zu gleichen Teilen mit $f(x) = x^2$.

Sehen wir uns nun die Situation an, wenn zwei starke Spieler auf einen schwachen treffen. Man würde vermuten, dass sich die beiden starken Spieler zusammentun, was bei ausreichendem Abstand zur Stärke des schwächsten Spielers auch passieren wird. Im Fall $a_1 = 7$, $a_2 = 6$ und $a_3 = 3$ kommt es jedoch ganz anders. Die Auszahlungen sind in Tabelle 3.4b dargestellt. Spieler 2 würde das soeben erwähnte Bündnis mit Spieler 1 zwar vorziehen, Spieler 1 hat jedoch andere Pläne. Er weiß, dass er in einem Kampf jeder gegen jeden die größte Wahrscheinlichkeit hat, zu gewinnen. Wird im Koalitionsbildungsprozess zuerst die Koalition {1,2} vorgeschlagen, so verweigert er Spieler 2 das gewünschte Bündnis. Dieser wird daraufhin rationalerweise auch das Bündnisangebot von Spieler 3 ausschlagen. Seine Auszahlung ist nämlich unter der Struktur [{1},{2},{3}] höher als unter [{1},{2,3}]. Wird hingegen zuerst {2,3} vorgeschlagen, so kann sich Spieler 2 dadurch gegenüber dem Kampf jeder gegen jeden nicht verbessern. Da er auch weiß, dass ein rationaler Spieler 1 sich danach nicht mit Spieler 3 verbünden wird, muss er im Anschluss keine Änderung der Koalitionsstruktur befürchten. Damit ist [{1},{2},{3}] die Koalitionsstruktur im Gleichgewicht.

3.4.5.2 Machtverlust bei starken Spielern

Dieser Modellerweiterung liegt die Annahme zugrunde, dass sich während der Kampfhandlungen in einer Runde des Konflikts die Machtverhältnisse innerhalb der siegreichen Koalition verschieben. Wir nehmen hierzu an, dass in einer Konfliktsituation ein stärkerer Spieler verhältnismäßig mehr Energie in den Kampf investiert, und damit mehr an Stärke verliert als seine schwächeren Verbündeten. Dadurch sind in der nächsten Runde des Konflikts die schwächeren Spieler in einer besseren Position. Gehen wir aus von einer Koalition S_p der Größe s, setzen wir in der aktuellen Runde die Koalitionsstruktur $\pi = [S_1, \ldots, S_r]$ voraus und bezeichnen wir die Menge der noch aktiven Spieler der Runde mit V. Der beschriebene Stärkeverlust betrifft alle Spieler und wird über einen Vektor von Faktoren $v = (v_1, \ldots, v_s)$ angegeben, der zur Berechnung der Kampfstärken in der folgenen Runde zu den Stärken der Spieler multipliziert wird, also $a'_i = a_i v_i$, $\forall i \in S_p$. Diese Faktoren ergeben sich für jeden Spieler i auf dieselbe Art und Weise, wobei die v_i folgende Eigenschaften erfüllen sollen:

1. $\lim\limits_{a_i \to 0} v_i = 1$
2. v_i ist fallend bezüglich der relativen Stärke des Spielers i in seiner Koalition, $\frac{a_i}{\sum_{j \in S_p} a_j}$
3. v_i ist fallend bezüglich des Verhältnisses der Stärke der Gegner zur Gesamtstärke $\frac{\sum_{l \notin S_p, l \in V} a_l}{\sum_{m=1}^{r} \sum_{j \in S_m} a_j}$
4. Invarianz gegenüber einer Multiplikation der Stärken aller Spieler mit $k > 0$

Wir definieren den Faktor[68] durch

$$v_i = 1 - \frac{a_i}{\sum_{j \in S_p} a_j} \frac{\sum_{l \notin S_p, l \in V} a_l}{\sum_{m=1}^{r} \sum_{j \in S_m} a_j}, \ \forall i \in S.$$

Die Gültigkeit der geforderten Eigenschaften lässt sich leicht nachprüfen. Im Fall von drei Spielern und unter der Annahme, dass Spieler 1 und 2 verbündet gegen Spieler 3 kämpfen, lässt sich der entsprechende Faktor von Spieler 1 somit als

$$v_1 = 1 - \tfrac{a_1}{a_1 + a_2} \tfrac{a_3}{a_1 + a_2 + a_3}$$

anschreiben.

[68] Es gibt natürlich auch zahlreiche andere Möglichkeiten für einen Faktor mit den gewünschten Eigenschaften. Der Gewählte erscheint hier jedoch zweckmäßig.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich ein ähnliches Bild wie beim in Tan und Wang (2009) [26] beschriebenen fortgesetzten Konflikt ohne Machtverlust. In Tabelle 3.5 sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten im Fall $a_1 = 13$, $a_2 = 6$ und $a_3 = 2$ mit und ohne Machtverlust bei starken Spielern gegenübergestellt.

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3
$[\{1\},\{2\},\{3\}]$	0.8086	0.1722	0.0191
$[\{1,2\},\{3\}]$	0.80346	0.18545	0.0110
$[\{1,3\},\{2\}]$	0.8300	0.1379	0.0321
$[\{1\},\{2,3\}]$	0.7253	0.2152	0.0595

(a) Mit Machtverlust.

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3
$[\{1\},\{2\},\{3\}]$	0.8086	0.1722	0.0191
$[\{1,2\},\{3\}]$	0.8154	0.1737	0.0110
$[\{1,3\},\{2\}]$	0.8421	0.1379	0.0199
$[\{1\},\{2,3\}]$	0.7253	0.2472	0.0275

(b) Ohne Machtverlust.

Tabelle 3.5: Gewinnwahrscheinlichkeiten der Spieler im Fall $f(x) = x^2$, $a_1 = 13$, $a_2 = 6$ und $a_3 = 2$.

Die Koalitionsstruktur im Gleichgewicht ist auch im Fall von Machtverlust der starken Spieler von der Form [{1},{2,3}], die Gewinnwahrscheinlichkeiten verschieben sich jedoch deutlich zugunsten des schwächeren Spielers 3.

Es soll hier auch auf die Möglichkeit hingewiesen werden, die Synergiefunktion in den Faktor mit einfließen zu lassen. In diesem Fall wäre etwa ein Faktor der Form

$$v_i = 1 - \frac{a_i}{\sum_{j \in S_p} a_j} \frac{\sum_{m=1}^{r} f(\sum_{j \in S_m} a_j) - f(\sum_{l \in S_p} a_l)}{\sum_{m=1}^{r} f(\sum_{j \in S_m} a_j)}$$

denkbar.

3.4.5.3 Aufteilung der Ressourcen der Unterlegenen

Ein weiterer Ansatz ist, dass die Ausstattung der besiegten Spieler nicht komplett verschwindet, sondern teilweise den Siegern zugute kommt. Denken wir hierbei etwa an einen Konflikt um einen Markt, wobei sich die siegreichen Firmen die

Marktanteile der ehemaligen Konkurrenten aufteilen und damit ihre Ausgangsposition für zukünftige Runden des Konflikts verbessern. Eine andere mögliche Interpretation ist ein Konflikt zwischen Staaten, in dem die Sieger die eroberten Gebiete untereinander aufteilen.

Wir treffen nun die Annahme, dass ein Teil der Ausstattung der besiegten Spieler im Laufe des Konflikts verloren gegangen ist und der Rest unter den Siegern aufgeteilt wird. Gehen wir aus von der Koalitionsstruktur $\pi = [S_1, \ldots, S_r]$, bezeichnen wir die Menge der noch aktiven Spieler der Runde mit V und die neue Stärke des Spielers i mit a_i', so gilt

$$a_i' = a_i + \frac{f(a_i)}{\sum_{l \in S_p} f(a_l)} \sum_{j \notin S_p, j \in V} a_j \left(1 - \frac{f(\sum_{k \in S_p} a_k)}{f(\sum_{k \in S_p} a_k) + f(a_j)}\right).$$

Der Teil, der zur ursprünglichen Stärke eines siegreichen Spielers addiert wird, setzt sich dabei folgendermaßen zusammen: Jeder besiegte Gegner hinterlässt einen Teil seiner Ausstattung, dessen Größe, neben der ursprünglichen Ausstattung, von seiner eigenen Stärke sowie der Stärke seiner Gegner und der Synergiefunktion abhängt. Je schwächer der Gegner in Relation zu den Siegern ist, umso größer ist der Teil seiner Ausstattung, der verloren geht. Die Restausstattungen aller unterlegenen Spieler werden aufsummiert und danach mit dem Anteil multipliziert, den der jeweilige Spieler der Siegerkoalition bekommt. Die Größen dieser Anteile sind ebenfalls abhängig von der Synergiefunktion, stärkere Spieler können sich einen größeren Anteil sichern.

Wenden wir uns wieder dem Fall von drei Spielern zu. Im Fall eines Bündnisses der Spieler 1 und 2 gegen Spieler 3 ergibt sich für Spieler 1 die neue Stärke

$$a_1' = a_1 + \frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} a_3 \left(1 - \frac{(a_1 + a_2)^2}{(a_1 + a_2)^2 + a_3^2}\right).$$

Betrachten wir zuerst die Ergebnisse bei $a_1 = 13$, $a_2 = 6$ und $a_3 = 2$ in Tabelle 3.6a. Mit der Aufteilung der Ressourcen der besiegten Gegner geht immer eine Verschlechterung der Position von schwächeren Bündnispartnern einher. Bei der vorliegenden Stärkeverteilung führt das dazu, dass [{1},{2,3}] nicht mehr die Gleichgewichtsstruktur ist, weil sich Spieler 2 nach dem Sieg über Spieler 1 einen so großen Teil von dessen Ausstattung sichert, dass Spieler 3 immens schlechtergestellt wird. Spieler 3 würde nun zwar einen Kampf jeder gegen jeden bevorzugen. Um ein Bündnis der Spieler 1 und 2 abzuwenden, das bei seiner Weigerung zur Koalitionsbildung zustandekommen würde, wird er sich jedoch mit Spieler 1 verbünden. Damit steht die Gleichgewichtsstruktur [{1,3},{2}] fest.

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3
$[\{1\},\{2\},\{3\}]$	0.8086	1.1722	0.0191
$[\{1,2\},\{3\}]$	0.8156	0.1735	0.0110
$[\{1,3\},\{2\}]$	0.8440	0.1379	0.0181
$[\{1\},\{2,3\}]$	0.7253	0.2638	0.0110

(a) Der Fall $a_1 = 13$, $a_2 = 6$ und $a_3 = 2$.

	Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3
$[\{1\},\{2\},\{3\}]$	0.7642	0.1509	0.0849
$[\{1,2\},\{3\}]$	0.7948	0.1546	0.0505
$[\{1,3\},\{2\}]$	0.8141	0.1000	0.0859
$[\{1\},\{2,3\}]$	0.6231	0.2622	0.1147

(b) Der Fall $a_1 = 9$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 3$.

Tabelle 3.6: Gewinnwahrscheinlichkeiten bei Aufteilung der Ressourcen der Unterlegenen mit $f(x) = x^2$.

Anders stellt sich die Situation dar, wenn die Stärken durch $a_1 = 9$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 3$ gegeben sind. Wie man in Tabelle 3.6b sieht, bleibt die Gleichgewichtsstruktur [{1},{2,3}] erhalten. Zusammenfassend kann man unter der gegebenen Voraussetzung $a_1 > a_2 > a_3$ festhalten, dass eine Änderung der Koalitionsstruktur im Gleichgewicht durch zwei Effekte bewirkt werden kann: Einerseits kann Spieler 1 sehr stark im Verhältnis zu den Spielern 2 und 3 sein, sodass die Aufteilung seiner Ressourcen zu einer zu großen Verschiebung der Machtverhältnisse in der Koalition {2,3} führt. Bei ausreichend großer Stärke von Spieler 1 können die Stärken der Spieler 2 und 3 in diesem Fall auch nahe beieinander liegen. Andererseits kann der Unterschied zwischen den Stärken der beiden Koalitionspartner so groß sein, dass sich Spieler 2 einen zu großen Teil der Ressourcen des besiegten Spielers 1 sichern kann. Spieler 3 wird in diesem Fall eine Koalition mit Spieler 1 bevorzugen.

3.5 Konfliktvermeidung

Zum Abschluss wollen wir uns der Frage widmen, wie sich eine Gruppe von Spielern oder eine ganze Gesellschaft nach Beendigung eines fortgesetzten Konflikts weiterentwickeln kann, um zukünftige Kampfhandlungen zu vermeiden. Der erstrebenswerte Fall ist der, in dem das ohne die ständige gegenseitige Androhung von Waffengewalt funktioniert. Die Ausführungen folgen den Überlegungen in Garfinkel und Skaperdas (2007) [8], die zur Beilegung zukünftiger Konflikte entweder einen starken Herrscher mit ausreichender Durchsetzungsgewalt oder die Bildung eines Staates vorschlagen, der über andere Arten von Kontrollmechanismen verfügt.

3.5.1 Hierarchische Strukturen

Betrachten wir zuerst den Fall, dass es in einem zurückliegenden Konflikt einen Gewinner gab, der den gesamten Preis für sich beanspruchen konnte. Da er nun das Gewaltmonopol innehat, gibt es eine hierarchische Struktur, in der die Verlierer die Bedingungen des Siegers akzeptieren müssen. In der Geschichte finden sich hierfür zahlreiche Beispiele, man denke nur an die zahlreichen Fürsten und Könige, die die Herrschaft über ihre gesamte Bevölkerung innehatten. Die Überlegungen lassen sich auch auf einen isolierten Markt übertragen, in dem ein Teilnehmer durch feindliche Übernahmen seine Konkurrenten ausschalten konnte und somit den Markt beherrscht. Solch eine Dominanzsituation führt jedoch nicht zwingendermaßen zu einer Reduktion der Gewalt insgesamt, sie findet nur in anderer Form statt. So wird es Konflikte mit anderen großen Staaten bzw. Firmen geben, die sich durch den erstarkten Konkurrenten bedroht fühlen. Auch intern kann es Streit geben, zum Beispiel wenn die Nachfolge des Herrschers geregelt werden muss.[69]

3.5.2 Der moderne Staat

Die andere Möglichkeit zur Konfliktvermeidung ist eine Vereinbarung zwischen gleichgestellten Partnern. Dieser Vertrag soll jedoch nicht so verstanden werden, dass er in einem Umfeld der gegenseitigen Bedrohung entsteht, im Gegenteil bedeutet er eine Abrüstung oder sogar den kompletten Verzicht auf Waffengewalt. Für ein Beispiel eines Modells, das zu einer Verhandlungslösung führt, die zwar auf der Bedrohung durch einen möglichen Konflikt beruht, aber ohne Waffengewalt auskommt, sei auf Esteban & Sákovics (2006) [6] verwiesen. Es stellt sich nun die Frage, wie eine solche Vereinbarung durchgesetzt werden soll, wenn dafür definitionsgemäß keine Waffen zur Verfügung stehen.

In modernen Staaten wird dieses Problem dadurch gelöst, dass die Konflike, die normalerweise mit allen möglichen Arten von Gewalt ausgetragen würden, in andere Bereiche verschoben werden. Das kann die Konsultation eines Gerichts bedeuten, bürokratische Vorschriften oder eine Entscheidung durch die Wähler. Durch die Gewaltentrennung wird die Macht im Staat so stark verteilt, dass eine unautorisierte Anwendung von Gewalt unmittelbar Sanktionen nach sich zieht. Kleine Ausbrüche von Gewalt wie Proteste und Streiks finden zwar weiterhin statt, aber organisierte kriegerische Auseinandersetzungen innerhalb der Staaten werden effektiv unterbunden.

[69] Vgl. [8], S. 55.

Eine Frage bleibt jedoch: Wie kommt es zur Gründung dieser modernen Staaten? Paradoxerweise sind lange vorhergehende gewaltsame Auseinandersetzungen nötig, um im Angesicht des fortgesetzten Konflikts ihre Entwicklung zu fördern. Schlussendlich einigen sich die ehemaligen Konfliktparteien auf die Gründung eines Staates, um zukünftige Gewaltausbrüche zu vermeiden.

4 Zusammenfassung

Finden die Teilnehmer eines Spiels einen Weg, sich auf die Bildung der großen Koalition zu einigen, so lässt sich ein Ausbrechen von offenem Konflikt komplett vermeiden. Unter dieser Konstellation stehen zahlreiche Ansätze zur Verfügung, um jedem Spieler einen angemessenen Teil des gemeinsam erzielten Gewinns zukommen zu lassen. Die Form der Aufteilungsregel hängt davon ab, welche Ansprüche an eine gerechte Aufteilung gestellt werden.

In vielen Situationen ist jedoch ein Kampf unvermeidbar. Wenn nämlich ein nutzenmaximierender Spieler die Möglichkeit hat, alleine oder in einer Koalition mit anderen Spielern einen größeren Teil des Gewinns für sich zu beanspruchen als unter der großen Koalition, so wird er diese Gelegenheit ergreifen. Die große Koalition zerbricht in diesem Fall in zwei oder mehr Teile. Kann sich die Koalition, die siegreich aus dem anschließenden Konflikt hervorgeht, auf keine Aufteilungsregel einigen, wird neuerlich ein Kampf entbrennen, der nun zwischen den ehemaligen Verbündeten stattfindet.

Diesen fortgesetzten Konflikt kann man auf verschiedene Arten modellieren. Die erste betrachtete Möglichkeit aus Garfinkel und Skaperdas (2007) [8] ist der komplette Zerfall der siegreichen Koalition nach der ersten Runde. Hier konnten wir einen negativen Effekt der Gruppengröße auf die endgültige Auszahlung beobachten, weil die negativen Auswirkungen einer großen Konkurrenz innerhalb der Gruppe stärker sind als der positive Effekt einer hohen Gewinnwahrscheinlichkeit in der ersten Runde. Setzt man eine symmetrische Koalitionsstruktur voraus, so nimmt die Intensität des Konflikts mit der Anzahl der Koalitionen ab.

Wie der Modellierungsansatz von Sanchez-Pages (2007) [21] zeigt, muss sich der Konflikt jedoch nicht immer in neuerlichen Kampfhandlungen fortsetzen. Kämpfen die Koalitionen zuerst um eine Ressource, die dann durch die siegreiche Koalition genutzt werden kann, so konkurrieren die Spieler mittels ihres Beitrags zur Produktion, der zu einem gewissen Anteil ihre Auszahlung beeinflusst. Je höher diese Abhängigkeit vom Beitrag zur Produktion ist, umso kleiner wird der Teil der limitierten Ausstattung sein, den die Spieler für Kampf aufwenden wollen. Auch eine Steigerung in der Effektivität der Produktion sorgt für niedrigere Aufwendungen für Konflikt. Ändert man die Voraussetzungen ab und nimmt eine gleichmäßige Aufteilung nach der ersten Runde des Konflikts an, so hängt die Stabilität der großen Koalition vom Verhältnis zwischen der Effektivität der Produktionsfunktion und der Konflikttechnologie ab. Umso schlechter die Produktion im Verhältnis abschneidet, umso leichter zerbricht die große Koalition. Setzt man sequentielle Koalitionsbildung und konstante Skalenerträge der Arbeit voraus, so kann die Stabilität der großen Koalition jedoch sichergestellt werden.

Der fortgesetzte Konflikt muss nicht unbedingt nach der zweiten Runde ein Ende finden, sondern kann auch über mehrere Runden weiterlaufen, wie im Modell vom Tan und Wang (2009) [26]. Die Sub-Strukturen der siegreichen Koalition bleiben erhalten und bestimmen die Bündnisse in der nächsten Stufe des Konflikts. Erfüllt die Synergiefunktion in der Konflikttechnologie gewisse Anforderungen, so stehen sich in der ersten Runde immer genau zwei Koalitionen gegenüber, wobei die Koalitionsbildung zu einem Gleichgewicht der Kräfte tendiert. Nimmt man an, dass sich die Spieler auf eine festgelegte Aufteilung nach der ersten Runde des Konflikts einigen, so weichen die Koalitionsstrukturen deutlich von denen bei fortgesetztem Konflikt ab. Auch unter den zusätzlichen Annahmen, dass sich entweder die siegreiche Koalition die Ressourcen der Unterlegenen aufteilt oder dass starke Spieler im Kampf einen größeren Teil ihrer Stärke einbüßen als schwache, können die Gleichgewichtsstrukturen stark von denen im ursprünglichen Modell abweichen.

Literaturverzeichnis

[1] Aumann R. J. & Maschler M. (1964), *The Bargaining Set for Cooperative Games.* In: M. Dresher, L.S. Shapley and A. W. Tucker, eds., Advances in Game Theory, pp. 443-447, Princeton: Princeton University Press.

[2] Bloch F. (1996), *Sequential Formation of Coalitions in Games with Externalities and Fixed Payoff Division.* Games and Economic Behavior, 14(1):90-123.

[3] Chwe M.S.Y (1994), *Farsighted Coalition Stability.* Journal of Economic Theory 63:299-325.

[4] Davis M. & Maschler M. (1965), *The Kernel of a Cooperative Game.* Naval Research Logistics Quarterly 12:223-295.

[5] Esteban J. M. & Sákovics J. (2003), *Olson vs. Coase: Coalition Worth in Conflict.* Theory and Decision 55:663-672.

[6] Esteban J. M. & Sákovics J. (2006), *A Theory of Agreements in the Shadow of Conflict.* Unpublished manuscript, University of Edinburgh, Edinburgh, UK.

[7] Fudenberg D. & Tirole J. (1991), *Game Theory.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

[8] Garfinkel M. & Skaperdas S. (2007), *Economics of Conflict: An Overview.* In: T. Sandler, K. Hartley (eds) Handbook of defense economics, vol II, pp 649-709. Elsevier Science, Amsterdam.

[9] Hardin G. (1968), *The Tragedy of the Commons.* Science 162:1243–1248.

[10] Hart S. & Kurz M. (1983), *Endogenous Formation of Coalitions.* Econometrica 51:1047-1064.

[11] Hirshleifer J. (1989), *Conflict and Rent-seeking Success Functions: Ratio vs. Difference Models of Relative Success.* Public Choice 63:101-112.

[12] Hirshleifer J. & Riley J. (1992), *The Analytics of Uncertainty and Information.* Cambridge University Press, New York, NY.

[13] Lemaire J. (1991), *Cooperative Game Theory and its Insurance Applications.* ASTIN Bulletin 21:17-40.

[14] Lucas W. F. (1969), *The Proof That a Game May Not Have a Solution.* Transactions of the American Mathematical Soociety 137:219-229.

[15] Mehlmann A. (2007), *Strategische Spiele für Einsteiger.* Friedrich Vieweg & Sohn Verlag, Wiesbaden.

[16] Myerson R. B. (1991), *Game Theory: Analysis of Conflict.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

[17] Peleg B. (1963), *Existence Theorem for the Bargaining Set* $M_1^{(i)}$. Bulletin of the American Mathematical Society 69:109-110.

[18] Rauhut B. & Schmitz N. & Zachow E.-W. (1979), *Spieltheorie.* B. G. Teubner, Stuttgart.

[19] Ray D. & Vohra R. (1999), *A Theory of Endogenous Coalition Structure.* Games and Economic Behaviour 26:286-336.

[20] Rubinstein A. (1982), *Perfect Equilibium in a Bargaining Model.* Econometrica 50:97-109.

[21] Sanchez-Pages S. (2007), *Rivalry, Exclusion and Coalitions.* Journal of Public Economic Theory 9:809-830.

[22] Selten R. (1965), *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit.* Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 121:301-324.

[23] Schmeidler D. (1969), *The Nucleolus of a Characteristic Function Game.* SIAM Journal of Applied Mathematics 17:63-70.

[24] Shapley L. S. (1953), *A Value for n-person Games.* Contributions to the Theory of Games II, Princeton University Press, Princeton.

[25] Skaperdas S. (1996), *Contest success functions.* Economic Theory 7:283-290.

[26] Tan G. & Wang R. (2009), *Coalition Formation in the Presence of Continuing Conflict.* International Journal of Game Theory 39:237-299.

[27] Waerneryd K. (1998), *Distributional Conflict and Jurisdictional Organization.* Journal of Public Economics 69:435-450.