

Diese Arbeit haben begutachtet

Dirk Praetorius

Ernst P. Stephan



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DISSERTATION

Zur Kopplung von finiten Elementen und Randelementen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften unter der Leitung von

Ao. Univ.-Prof. Dipl.-Math. Dr.techn. Dirk Praetorius
E101 - Institut für Analysis und Scientific Computing, TU Wien

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Mathematik und Geoinformation

von

Dipl.Ing. Thomas Führer BSc.

Matrikelnummer: 0425629

Am Spitz 8/8

1210 Wien

Wien, am 05. Juni 2014

Kurzfassung

Für nichtlineare Laplace- und Lamé-Transmissionsprobleme betrachten wir die symmetrische als auch verschiedene Varianten der nicht-symmetrischen Kopplung von FEM und BEM.

Zuerst führen wir die *implizite Stabilisierung* ein, welche es uns erlaubt, Lösbarkeit und Stabilität aller erwähnten Kopplungsmethoden, auch für stark monotone Nichtlinearitäten im inneren Gebiet, zu zeigen. Unsere Theorie enthält und verallgemeinert alle bereits bekannten Resultate zur Stabilität der symmetrischen Kopplung und erweitert die bestehende Theorie zu den nicht-symmetrischen Kopplungen. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten, benötigen wir keine Annahmen an das gegebene Netz \mathcal{T} , so wie z.B., dass das Netz \mathcal{T} am Rand hinreichend fein ist. Ferner gibt diese Arbeit ein erstes mathematisches Fundament der nicht-symmetrischen Kopplung für nichtlineare Probleme.

Danach behandeln wir adaptive Methoden. Unser Hauptaugenmerk liegt dabei in der Konvergenz des mit dem gewichteten Residualschätzer gesteuerten adaptiven Algorithmus, und wir geben den ersten (und bisher einzigen) Beweis für die Konvergenz der adaptiven Kopplung. Zusätzlich untersuchen wir einen ZZ-Fehlerschätzer auf Zuverlässigkeit und Effizienz.

Des Weiteren behandeln wir die Vorkonditionierung von Galerkin-Matrizen, welche von BEM Operatoren auf lokal verfeinerten Triangulierungen stammen. Es ist bekannt, dass die Konditionszahlen der nicht-vorkonditionierten Galerkin-Matrizen steigen, sobald das Netz verfeinert wird und darüber hinaus von dem Verhältnis der maximalen und minimalen Netzweite abhängen. Im Framework von Additiv-Schwarz Zerlegungen definieren wir einen *lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer* für den hypersingulären Operator in 2D und 3D und für den schwach-singulären Operator in 2D. Wir beweisen Optimalität dieser Vorkonditionierer, d.h. die Konditionszahlen der vorkonditionierten Systeme hängen nicht mehr von der Netzweite ab.

Zum Schluss analysieren wir einen (2×2) -Blockdiagonal-Vorkonditionierer für die Galerkin-Matrix der erwähnten FEM-BEM Kopplungen. Diese zwei Blöcke entsprechen dabei Vorkonditionierern für den FEM Teil und den BEM Teil. Sind diese Vorkonditionierer optimal, so zeigen wir, dass der Blockdiagonal-Vorkonditionierer für die symmetrische und nicht-symmetrische FEM-BEM Kopplung optimal ist. Insbesondere gilt so ein Resultat für die lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer und liefert daher, zumindest für Probleme in 2D, optimale Vorkonditionierer für die betrachteten FEM-BEM Kopplungen.

In der vorliegenden Arbeit finden sich zahlreiche numerische Beispiele, welche die genannten theoretischen Resultate bestätigen.

Abstract

In the frame of nonlinear Laplace- and Lamé-type transmission problems, we consider the symmetric coupling as well as certain variants of the non-symmetric coupling of FEM and BEM.

First, we introduce a unified framework, called implicit stabilization, that allows us to prove solvability and stability of the mentioned coupling methods, even in the presence of certain monotone non-linearities in the interior domain. This theory includes and even extends the well-known stability results for the symmetric coupling and extends the existing theory for non-symmetric couplings. Unlike prior work, we remove any assumption on the given mesh \mathcal{T} like, e.g., \mathcal{T} being sufficiently fine along the boundary. Moreover, our work provides the first mathematical stability results for non-symmetric FEM-BEM couplings and nonlinear problems.

Second, we consider adaptive mesh-refining methods. Mainly, we are interested in the convergence of the corresponding adaptive algorithm steered with the weighted-residual error estimator, where we give the first mathematically reliable convergence results. Additionally, we analyze a gradient recovery estimator (ZZ-estimator) in terms of reliability and efficiency.

Third, we consider preconditioning of Galerkin matrices arising from BEM operators on locally refined triangulations. It is well-known that the condition number of the unpreconditioned Galerkin matrices grows if the mesh is refined, and additionally hinges on the ratio between the maximal and minimal mesh-size. Within the framework of additive Schwarz methods, we introduce a local multilevel diagonal preconditioner for the hypersingular operator in 2D and 3D, and for the weakly-singular integral operator in 2D and prove that the condition numbers of the preconditioned systems are optimal, i.e., independent of the mesh-size.

Fourth, we analyze a (2×2) -block-diagonal preconditioner for the Galerkin matrix of the coupling systems. The two blocks correspond to preconditioners for the FEM part and the BEM part, respectively. Provided that we have optimal preconditioners for the FEM part and the BEM part, we prove optimality of the block-diagonal preconditioner for symmetric as well as non-symmetric coupling methods. In particular, such a result applies for the local multilevel diagonal preconditioners and provides, at least for 2D problems, optimal preconditioners for the FEM-BEM couplings under consideration.

Throughout, we give various numerical examples that underline our theoretical findings.

Danksagung

An dieser Stelle bedanke ich mich ganz herzlich bei meinem Betreuer Dirk Praetorius, zum einen für die Möglichkeit das Thema der vorliegenden Arbeit bearbeiten zu dürfen und zum anderen für die äußerst fruchtbare gemeinsame Forschung. Außerdem danke ich Dirk, dass er meinen Kollegen und mir die Möglichkeit gegeben hat, an diversen Konferenzen und Tagungen teilzunehmen und dort die aktuelle Forschung als auch die führenden Wissenschaftler im Bereich der FEM und BEM kennenzulernen. Das wäre ohne seinen großen Einsatz, den er laufend für seine Studenten zeigt, nicht realisierbar gewesen.

Herrn Professor Ernst P. Stephan von der Universität Hannover danke ich für die Begutachtung dieser Dissertation und für die tolle Zusammenarbeit in den letzten zwei Jahren, aus der zahlreiche Arbeiten entstanden sind.

Großer Dank gilt der ganzen Arbeitsgruppe von Dirk, allen voran meinen Büro- und BEM-Kollegen Michael Feischl und Michael Karkulik, aber auch Markus Aurada, Gregor Gantner, Petra Goldenits, Josef F. Kemetmüller, Gregor Mitscha-Eibl, Marcus Page, Michele Ruggeri, und den Kollegen Markus Faustmann und Alexander Rieder. Mit Euch war es immer lustig in und vor allem abseits der Arbeit.

Ein großes Dankeschön auch an Ursula Schweigler, die sich um die ganzen Formalitäten wie Abrechnungen gekümmert und mir somit mehr Zeit für die Forschung verschafft hat.

Für die Unterstützung bei der Implementierung bedanke ich mich bei Timo Betcke, Josef F. Kemetmüller und Gregor Mitscha-Eibl.

Für die Ablenkungen von Universität und Büro danke ich meinen Mitbewohnern und all meinen Freunden, die ich in den letzten Jahren aus der Zeit im Studentenheim, während des Studiums, oder woher auch immer kennengelernt habe. Auf Euch war immer Verlass!

Zum Schluss bedanke ich mich bei meiner ganzen Familie, der ich diese Arbeit widme, allen voran meinen Eltern Christa und Friedrich, und meinen Brüdern Michael, Johannes und Georg.

Finanziert wurde diese Arbeit über die *Innovative Projekte* Initiative der TU Wien. Für diese Unterstützung bin ich sehr dankbar. Außerdem bekam ich von der *Österreichischen Forschungsgemeinschaft (ÖFG)* Reisekostenzuschüsse, die es mir ermöglicht haben, an diversen Konferenzen teilnehmen zu können. Ferner bedanke ich mich für die finanzielle Unterstützung aus dem FWF-Projekt P21732 "*Adaptive Boundary Element Method*".

Erklärung

Hiermit erkläre ich, Thomas Führer, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe. Außerdem bestätige ich, dass diese Arbeit in dieser oder ähnlicher Form noch nie veröffentlicht wurde.

Wien, am 05. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Resultate und Aufbau der Arbeit	2
1.3	Ausblick	8
1.4	Hinweise zu den numerischen Experimenten	9
2	Notationen und Funktionenräume	11
2.1	Sobolevräume und grundlegende Notationen	11
2.2	Dualräume und Normalenableitung	13
2.3	Elastostatik	14
2.4	Triangulierung	15
2.5	Netzverfeinerung	17
2.6	Diskrete Räume	19
2.7	Vektoren, Matrizen, und Konditionszahl	20
3	Wohldefiniiertheit von FEM-BEM Kopplungen für Potentialprobleme	21
3.1	Modellproblem	22
3.2	Vorbereitungen	23
3.2.1	Darstellungsformel und Integraloperatoren	23
3.2.2	Stark monotone Operatoren	27
3.3	Symmetrische Kopplung	28
3.3.1	Herleitung	29
3.3.2	Implizite Stabilisierung	32
3.3.3	Beweis der Lösbarkeit	33
3.4	Johnson-Nédélec Kopplung	35
3.4.1	Herleitung	36
3.4.2	Implizite Stabilisierung	37
3.4.3	Beweis der Lösbarkeit	38
3.5	Bielak-MacCamy Kopplung	40
3.5.1	Herleitung	40
3.5.2	Implizite Stabilisierung	43
3.5.3	Beweis der Lösbarkeit	43
3.6	Numerische Experimente	44
3.6.1	Galerkin-System	45
3.6.2	Lineares Transmissionsproblem mit unbekannter Lösung	49
3.6.3	Lineares Transmissionsproblem auf L-förmigen Gebiet	52
3.6.4	Lineares Transmissionsproblem auf Fichera Würfel	55

4	Wohldefiniertheit von FEM-BEM Kopplungen in Elastostatik	57
4.1	Modellproblem	57
4.2	Vorbereitungen	58
4.2.1	Integraloperatoren	58
4.2.2	Stark monotone Operatoren	60
4.3	Annahme an diskreten Raum	60
4.4	Symmetrische Kopplung	65
4.4.1	Variationelle Formulierung	65
4.4.2	Implizite Stabilisierung	66
4.4.3	Beweis der Lösbarkeit	67
4.5	Johnson-Nédélec Kopplung	69
4.5.1	Variationelle Formulierung	69
4.5.2	Implizite Stabilisierung	71
4.5.3	Beweis der Lösbarkeit	71
4.6	Bielak-MacCamy Kopplung	73
4.6.1	Variationelle Formulierung	74
4.6.2	Implizite Stabilisierung	74
4.6.3	Beweis der Lösbarkeit	75
4.7	Numerische Experimente	75
4.7.1	Galerkin-System	76
4.7.2	Lineares Transmissionsproblem	77
5	Adaptive FEM-BEM Kopplungen	79
5.1	Adaptiver Algorithmus	79
5.2	Residualschätzer	80
5.2.1	Zuverlässigkeit	81
5.2.2	Konvergenz des adaptiven Algorithmus	84
5.2.3	Anmerkungen	89
5.3	ZZ-Schätzer	92
5.4	Numerische Experimente	97
5.4.1	Lineares Problem auf L-förmigen Gebiet in 2D	99
5.4.2	Nichtlineares Problem auf Z-förmigen Gebiet in 2D	100
5.4.3	Lineares Problem auf L-Block in 3D	116
6	Vorkonditionierung von adaptiver BEM	117
6.1	Allgemeine Additiv-Schwarz Theorie	118
6.2	Hypersingulärer Operator	121
6.2.1	Modellproblem	121
6.2.2	Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierer	122
6.2.3	Hilfsresultate	125
6.2.4	Beweis der Hauptresultate	130
6.3	Einfachschichtintegraloperator	136
6.3.1	Modellproblem	136
6.3.2	Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierer	137
6.3.3	Beweis der Hauptresultate	140

6.4	Numerische Experimente	143
6.4.1	Hypersinguläre Gleichungen in 2D	149
6.4.2	Hypersinguläre Gleichungen in 3D	150
6.4.3	Schwach-singuläre Gleichungen in 2D	157
7	Vorkonditionierung von FEM-BEM Kopplungen	159
7.1	Vorkonditioniertes GMRES Verfahren	160
7.2	Modellproblem	162
7.3	Blockdiagonal-Vorkonditionierer	164
7.4	Multilevel Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplung	168
7.4.1	Multilevel Vorkonditionierer für FEM	168
7.4.2	Konditionszahl der FEM-BEM Matrix	171
7.4.3	Diagonalvorkonditionierung der FEM-BEM Matrix	172
7.4.4	Lokaler Multilevel Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplung	172
7.4.5	Globaler Multilevel Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplung	173
7.5	Numerische Experimente	173
7.5.1	Experiment auf L-förmigen Gebiet in 2D	174
7.5.2	Experiment mit künstlicher Verfeinerung in 2D	181
7.5.3	Experiment auf L-Block in 3D	181
	Literaturverzeichnis	187

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Diese Arbeit handelt von der Kopplung zweier wichtiger numerischer Verfahren, der *Finiten Elemente Methode* (FEM) und der *Randelementmethode* (BEM, von engl. *boundary element method*).

Die FEM gilt als eine der bedeutendsten numerischen Methoden der heutigen Zeit. Das liegt zum einen an der relativ simplen Implementierung, wodurch sie für den Anwender ein wichtiges Werkzeug darstellt, und zum anderen an deren Flexibilität als auch der weit fortgeschrittenen mathematischen Theorie. Die Einsatzgebiete der FEM sind weit verbreitet, z.B. Probleme aus der Elektrostatik und Magnetostatik, Probleme aus der Mechanik, aber auch zeitabhängige Probleme.

Für gewisse Fragestellungen ist die FEM aber weniger geeignet, z.B. falls Berechnungen auf unbeschränkten Gebieten erforderlich sind. In vielen solchen Situationen ist dies aber mit BEM möglich. Der Vorteil der BEM liegt darin, dass man die Berechnung auf einem (unbeschränkten) Gebiet auf dessen (beschränkten) Rand zurückführt. Man kann also die Problemdimension reduzieren. Damit einher geht eine etwas anspruchsvollere zugrunde liegende mathematische Theorie.

Als Modellproblem verwenden wir in dieser Arbeit (möglicherweise nichtlineare) Transmissionsprobleme. Dabei werden (nichtlineare) Gleichungen auf einem beschränkten Gebiet (Innenraum) mittels FEM modelliert und außerhalb dieses Gebietes (Außenraum) werden die linearen Gleichungen mit BEM modelliert. Ein Beispiel für solch ein Problem ist die Streufeldberechnung aus der Magnetostatik. Die Lösungen im Innenraum und Außenraum sind mit Transmissionsbedingungen verbunden. Aus diesen ergibt sich in natürlicher Art und Weise die Kopplung der zwei Methoden.

Vom mathematischen Standpunkt gesehen, sind wesentliche Punkte die (eindeutige) Lösbarkeit und numerische Stabilität der diskretisierten gekoppelten Gleichungen, welche auch in der vorliegenden Arbeit untersucht werden.

Darüber hinaus sind in den letzten Jahrzehnten adaptive Verfahren populär geworden. Für die FEM ist die Theorie zur Adaptivität bereits stark ausgebaut, während für die BEM erst in den letzten Jahren große Fortschritte erzielt worden sind. Dadurch ergeben sich auch interessante und offene Fragen für die FEM-BEM Kopplung, von denen wir einige behandeln werden.

Für den Anwender sind effiziente Lösungsmethoden, das sind Verfahren die möglichst wenig von der Problemgröße abhängen, von entscheidender Bedeutung. Speziell für adaptive Verfahren bedarf es dabei einer tiefer gehenden Analyse. Wir werden solche Löser für die BEM und die FEM-BEM Kopplung konstruieren und deren Optimalität sowohl in der Theorie als auch anhand von ausgewählten Beispielen zeigen.

1.2 Resultate und Aufbau der Arbeit

Kapitel 2

Zunächst sammeln wir in Kapitel 2 grundlegende Notationen und Ergebnisse zu Sobolevräumen. Wir wiederholen die Definition regulärer Triangulierungen und definieren darauf diskrete Funktionenräume, welche wir in den weiteren Kapiteln benötigen.

Kapitel 3

In Kapitel 3 untersuchen wir das Laplace-Transmissionsproblem

$$-\operatorname{div}(\mathfrak{A}\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1a)$$

$$-\Delta u^{\text{ext}} = 0 \quad \text{in } \Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}, \quad (1.1b)$$

$$u - u^{\text{ext}} = u_0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (1.1c)$$

$$(\mathfrak{A}\nabla u - \nabla u^{\text{ext}}) \cdot \mathbf{n} = \phi_0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (1.1d)$$

$$u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.1e)$$

wobei der Operator \mathfrak{A} das Material im Gebiet Ω beschreibt und auch nichtlinear sein kann. Es bietet sich daher an, Gleichung (1.1a) mit Hilfe von FEM zu lösen und, aufgrund der Unbeschränktheit von Ω^{ext} , Gleichung (1.1b) mit Hilfe von BEM zu lösen. Die Kopplung der beiden Methoden entsteht durch die Transmissionsbedingungen (1.1c)–(1.1d) am Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Wir behandeln drei verschiedene Varianten von Kopplungen: Die symmetrische Kopplung [Cos88, Han90], die (nicht-symmetrische) Johnson-Nédélec Kopplung [JN80], und die Bielak-MacCamy Eingleichungskopplung [BM84].

Lösbarkeit ist für die symmetrische Kopplung bereits länger bekannt. Für das hier betrachtete Modellproblem mit Nichtlinearitäten wurde das in [CS95], unter der Annahme einer hinreichend kleinen Netzweite des Randnetzes, zum ersten Mal gezeigt. Alle darauf aufbauenden Arbeiten und Resultate hängen daher auch von dieser Bedingung ab. Die Annahme an die Netzweite wurde für die symmetrische Kopplung in [AFP12] mit Hilfe der Analysis aus [CS95] entfernt. Die Beweise beruhen aber allesamt auf den Eigenschaften des *symmetrischen* Steklov-Poincaré Operators. Dadurch lassen sich die entsprechenden Ideen *nicht* auf die nicht-symmetrischen Kopplungen übertragen. Andere Arbeiten, z.B. [GH95] und darin enthaltenen Referenzen, beruhen auf der Verwendung eines inneren Dirichlet-Randes Γ_0 , d.h. es wird eine zusätzliche Randbedingung

$$u = g_0 \quad \text{auf } \Gamma_0$$

vorgeschrieben.

Das Modellproblem (1.1) kann auch mit der Johnson-Nédélec Kopplung [JN80]

$$\langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_{\Omega} - \langle \phi, v \rangle_{\Gamma} = \langle f, v \rangle_{\Omega} + \langle \phi_0, v \rangle_{\Gamma}, \quad (1.2a)$$

$$\langle \psi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u + \mathfrak{B}\phi \rangle_{\Gamma} = \langle \psi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_{\Gamma} \quad (1.2b)$$

reformuliert werden. In der variationellen Formulierung (1.2) entspricht ϕ der äußeren Normalenableitung $\nabla u^{\text{ext}} \cdot \mathbf{n}$, \mathfrak{K} dem Doppelschichtintegraloperator und \mathfrak{B} dem Einfachschichtintegraloperator. Dieses Problem kann kurz in Operatorform als

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle F, \mathbf{v} \rangle \quad (1.3)$$

mit $\mathbf{u} = (u, \phi)$, $\mathbf{v} = (v, \psi)$ geschrieben werden. Durch Einsetzen von $\mathbf{u} = (1, 0) = \mathbf{v}$ in (1.3) sieht man, dass die linke Seite verschwindet und somit der Operator \mathfrak{B} nicht stark monoton sein kann. Daher lassen sich keine Standardmethoden (Hauptsatz der stark monotonen Operatoren) anwenden.

Für die Johnson-Nédélec Kopplung war die mathematische Theorie bis vor Kurzem nur für lineare Probleme auf Gebieten mit glattem Rand Γ vorhanden. In diesem Fall ist \mathfrak{K} kompakt und Lösbarkeit der Gleichungen folgt aus Störungsargumenten (sofern das Randgitter hinreichend fein ist). Erst seit der Arbeit [Say09] ist Lösbarkeit auf allgemeinen Lipschitz-Gebieten bekannt. Aufbauend auf dieser und den Folgearbeiten [GHS12, Ste11, OS13b], welche durchgehend lineare Modellprobleme behandeln, führen wir das komplett neue Konzept der *impliziten Stabilisierung* ein, das es uns erlaubt, Lösbarkeit und Stabilität der Johnson-Nédélec Kopplung auch für nichtlineare Probleme zu zeigen. Wir stellen dazu eine zur FEM-BEM Kopplung (1.3) äquivalente Operatorgleichung (Satz 3.26)

$$\tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} = \tilde{F} \quad (1.4)$$

auf, welche auf einen stark monotonen Operator $\tilde{\mathfrak{B}}$ führt. Äquivalenz bedeutet in unserem Falle, dass \mathbf{u} genau dann eine Lösung von (1.4) ist, wenn \mathbf{u} auch eine Lösung von (1.3) ist und diese Äquivalenz überträgt sich auch auf die Galerkin-Diskretisierungen von (1.3) und (1.4). Das äquivalente System (1.4) ist aufgrund der (starken) Monotonie von $\tilde{\mathfrak{B}}$ eindeutig lösbar (Satz 3.27) und impliziert somit auch die Lösbarkeit der nicht-stabilisierten Gleichungen (1.3) (Satz 3.25).

Des weiteren erlaubt es diese neue Methodik auch, die symmetrische Kopplung zu analysieren (Satz 3.17, Satz 3.19, und Satz 3.22). Insgesamt stellen wir ein neues *theoretisches Werkzeug* bereit, welches für die drei genannten Kopplungsarten benutzt werden kann, und welches die gleichen Resultate wie [AFP12, CS95, GHS12, Ste11, OS13b, Say09] liefert und darüber hinaus Nichtlinearitäten zulässt, ohne Einschränkungen an die Netzweite zu machen oder zusätzliche Randbedingungen zu fordern. Diese Arbeit ist somit die erste, welche eine Analysis für die nichtlineare Johnson-Nédélec Kopplung und nichtlineare Bielak-MacCamy Kopplung zur Verfügung stellt. Im Gegensatz zu der in [Ste11] verwendeten *expliziten Stabilisierung* bedarf es bei der hier neu eingeführten *impliziten Stabilisierung* keiner Pre- oder Postprocessing Schritte.

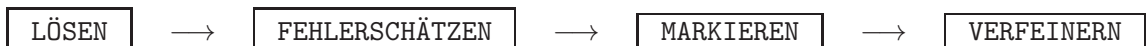
Kapitel 4

In Kapitel 4 werden wir die in Kapitel 3 herausgearbeiteten Ideen auf Probleme in der Elastostatik ausweiten. Als Modellproblem betrachten wir ein Lamé-Transmissionsproblem, wobei wir wieder Nichtlinearitäten im Innenraum zulassen. Das Problem besteht nun darin, dass man auf den mehrdimensionalen Kern des Verzerrungstensors, das sind die Starrkörperbewegungen, Rücksicht nehmen muss. Wir zeigen unter einer Annahme an den

diskreten Raum, welche für die üblichen Diskretisierungen immer erfüllt ist, dass sich das neue Konzept der impliziten Stabilisierung auch auf diese Problemarten übertragen lässt. Wiederum erhalten wir die gleichen Resultate wie in [CS90, CFS97, GH95] für die symmetrische Kopplung bzw. wie in [GHS12, Ste13] für die Johnson-Nédélec Kopplung. Unsere Analysis benötigt dabei weder Annahmen an die Netzweite noch zusätzliche Randbedingungen und lässt stark monotone Nichtlinearitäten (als erste auch für die nicht-symmetrischen Kopplungen) im Innenraum zu.

Kapitel 5

In Kapitel 5 untersuchen wir einen adaptiven Algorithmus der Form



für die FEM-BEM Kopplungsformulierungen des Laplace-Transmissionsproblems aus Kapitel 3. Dabei behandeln wir die bisher offene, aber überaus wichtige Fragestellung der Kon-

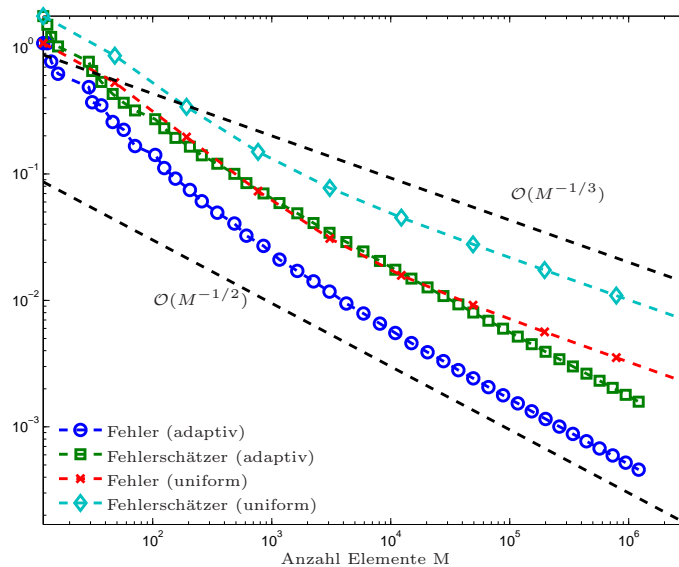


Abbildung 1.1: Fehler und gewichteter Residualfehlerschätzer bei der Johnson-Nédélec Kopplung im adaptiven und uniformen Fall. Durch die Anwesenheit von Singularitäten führt das uniforme Verfahren zu suboptimalen Raten, während das adaptive Verfahren die bestmögliche Konvergenzgeschwindigkeit liefert.

vergenz der vom adaptiven Algorithmus generierten Lösungen gegen die exakte Lösung des Problems. In numerischen Beispielen, siehe Abbildung 1.1, ist das bereits bekannt. A priori gilt das auch im Fall von uniformen Verfahren, da dort die Netzweite (gleichmäßig) gegen Null geht. Bei adaptiven Verfahren ist das unklar und deshalb ist die Konvergenz des adaptiven Algorithmus im Allgemeinen unklar und eine mathematische Herausforderung. Wir zeigen in dieser Arbeit Konvergenz, falls der adaptive Algorithmus mit dem gewichteten

Residualfehlerschätzer gesteuert wird (Satz 5.9), und das ist das erste (und bisher einzige) Konvergenzresultat für die adaptive Kopplung. Der verwendete Fehlerschätzer stammt aus [CS95] für die symmetrische Kopplung und kann für die anderen Kopplungen mit den gleichen Techniken hergeleitet werden [AFF⁺13a, AFKP12]. Der Beweis der Konvergenz des adaptiven Algorithmus hängt an inversen Abschätzungen der zugrunde liegenden Randintegraloperatoren ab, siehe [AFF⁺12, Kar12]. Wir betrachten hier nur die FEM-BEM Kopplungen für das Laplace-Transmissionsproblem, da nur für diesen Fall die nötigen Ungleichungen in [AFF⁺12] hergeleitet wurden. Wir erwarten, dass diese Ideen auch für die Kopplungen in der Elastostatik übertragen werden können.

Zusätzlich definieren wir einen einfach zu implementierenden ZZ-Schätzer (nach [ZZ87] für FEM-Probleme) für die Kopplungsgleichungen. Der Vorteil besteht darin, dass weder die Daten, noch die vorhandene Nichtlinearität im Schätzer benötigt werden. Zuverlässigkeit kann dabei nur unter einer Saturationsannahme gezeigt werden (Satz 5.14), während Effizienz immer bis auf Terme höherer Ordnung gilt (Satz 5.15). Wir adaptieren dazu die für FEM bekannten Resultate [CB02, BC02, Car04] und die neuere Arbeit zu BEM [FFKP14].

Kapitel 6

Kapitel 6 beschäftigt sich mit der Vorkonditionierung von BEM Operatoren auf adaptiv generierten Netzen. Abbildung 1.2 zeigt ein Beispiel für lokal verfeinerte Triangulierungen.

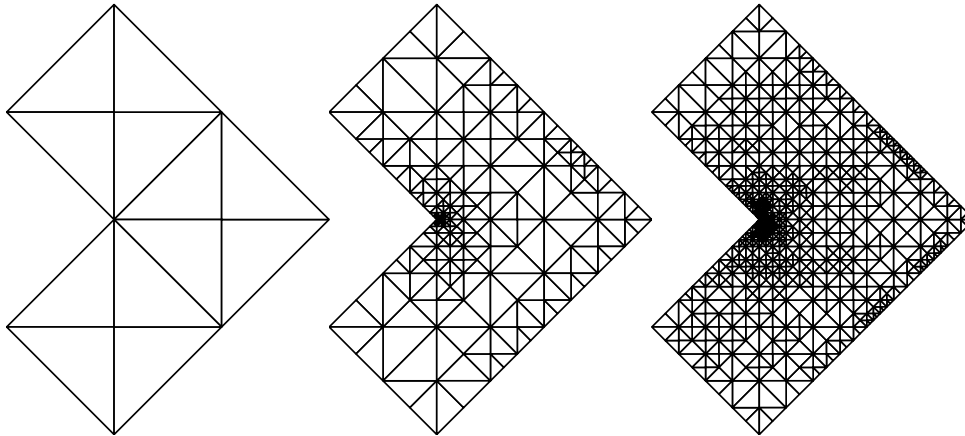


Abbildung 1.2: Adaptive Verfahren führen auf lokal stark verfeinerte Triangulierungen. Ausgehend von einer Starttriangulierung (links) wird dort, wo der geschätzte Fehler am größten ist, die Triangulierung verfeinert. Dadurch kann das Verhältnis vom größten zum kleinsten Elementdurchmesser sehr groß werden, was unmittelbaren Einfluss auf die Konditionszahl der Galerkin-Matrix hat.

Es ist bekannt, dass die Konditionszahl, welche großen Einfluss auf direkte und iterative Löser hat, mit der Anzahl der Elemente wächst und zusätzlich vom Verhältnis zwischen größtem und kleinstem Elementdurchmesser der Triangulierung abhängt, und somit auf adaptiven Gittern explodieren kann. Das Ziel ist es daher, *optimale* Vorkonditionierer zu entwickeln, so dass die Konditionszahl des vorkonditionierten Systems unabhängig von der Anzahl der Elemente und deren Durchmesser (Netzweite) ist. In dieser Arbeit untersuchen wir vorwiegend Multilevel Verfahren, da bei adaptiven Methoden in natürlicher Weise eine Netzhierarchie entsteht, und es sinnvoll ist diese auszunutzen. Speziell behandeln wir Additiv-Schwarz Vorkonditionierer. Aufbauend auf den Arbeiten [WC06, XCH10] zu adaptiver FEM in 2D, und [TS96] zu uniformer BEM in 2D, konstruieren wir einen lokalen Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierer für den hypersingulären Integraloperator in 2D und 3D, welcher optimal auf adaptiven Gittern ist (Satz 6.7). Des weiteren liefert die vorgestellte Analysis auch einen optimalen Vorkonditionierer für den Einfachschichtintegraloperator in 2D (Satz 6.21). In Abbildung 1.3 ist die Optimalität dieses Vorkonditionierers zu sehen. Zum Vergleich sind die Konditionszahl der Galerkin-Matrix und jene bei Verwendung des simplen Diagonalvorkonditionierers eingezeichnet.

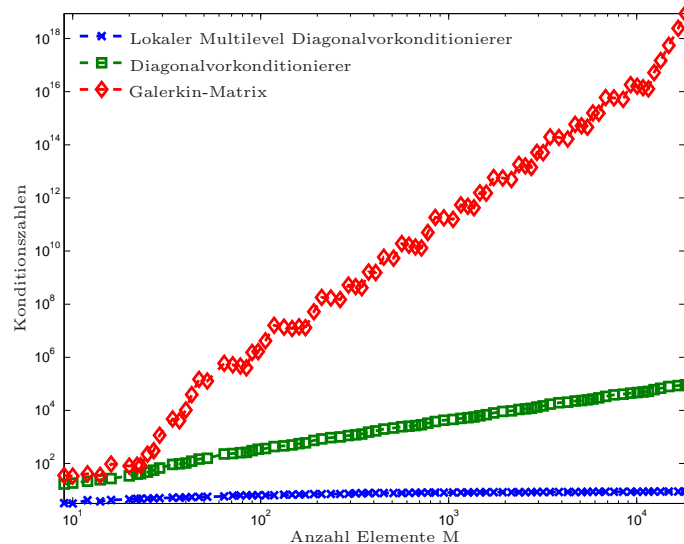


Abbildung 1.3: Konditionszahlen der Galerkin-Matrix des Einfachschichtintegraloperators in 2D, und jene bei Verwendung des simplen Diagonalvorkonditionierers bzw. des lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierers auf adaptiv generierten Triangulierungen.

Zusätzlich definieren wir einen globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer, der quasi-optimal ist (Satz 6.9 für den hypersingulären Fall und Satz 6.23 für den schwach-singulären Fall). Die Konditionszahl hängt in diesem Fall linear von der Anzahl der Level ab, d.h. logarithmisch vom minimalen Elementdurchmesser. Dieses Ergebnis stellt auch eine Verbesserung der Arbeit [Mai09] dar, welche den globalen Multilevel Vorkonditionierer für den hypersingulären Fall auf graduierten Netzen in 2D behandelt. Numerische Experimente belegen, dass die Resultate scharf sind und daher nicht weiter verbessert werden können.

Kapitel 7

In Kapitel 7 beschäftigen wir uns mit der Vorkonditionierung von FEM-BEM Kopplungen. Für die symmetrische Kopplung gibt es bereits eine große Anzahl von Literatur, z.B. [CKL98, FS09, HPPS03, HMS99, MS98] und die darin enthaltenen Referenzen, während für die nicht-symmetrischen Kopplungen nur wenig bekannt ist, z.B. [Med98]. Dies liegt mit Sicherheit auch daran, dass die mathematische Theorie für die nicht-symmetrischen FEM-BEM Kopplungen noch recht jung ist. In dieser Arbeit untersuchen wir einen (2×2) -Blockdiagonal-Vorkonditionierer der Form

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\text{FEM}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\text{BEM}} \end{pmatrix}$$

für die drei vorgestellten FEM-BEM Kopplungen. Der erste Block \mathbf{P}_{FEM} dieses Vorkonditionierers entspricht einem Vorkonditionierer für ein FEM Problem, und der zweite Block \mathbf{P}_{BEM} entspricht einem Vorkonditionierer für den Einfachschichtintegraloperator (BEM). Aufbauend auf [MS98] abstrahieren wir deren Argumente, untersuchen ein vorkonditioniertes GMRES Verfahren und zeigen, dass die Anzahl der Iterationen, um das relative Residuum um einen vorgegebenen Faktor zu verringern und die Konditionszahl des vorkonditionierten Systems, nur von der Wahl von \mathbf{P}_{FEM} und \mathbf{P}_{BEM} abhängen (Satz 7.5). Hat man also optimale Vorkonditionierer aus der FEM und BEM bei der Hand, so erhält

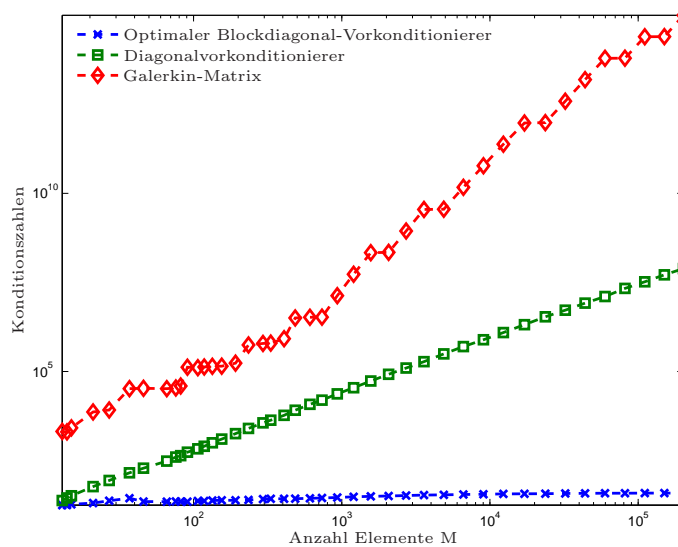


Abbildung 1.4: Konditionszahlen der Galerkin-Matrix der Johnson-Nédélec Kopplung und Konditionszahlen bei Verwendung des simplen Diagonalvorkonditionierers bzw. des optimalen Blockdiagonal-Vorkonditionierers auf adaptiv generierten Triangulierungen.

man direkt einen optimalen Vorkonditionierer für die FEM-BEM Kopplung. Daher implizieren die Optimalität des lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierers aus Kapitel 6 für den Einfachschichtintegraloperator und die Ergebnisse [WC06, XCH10] zu lokalen Mul-

tilevel Diagonalvorkonditionierern für FEM, einen optimalen Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplungen auf adaptiven Gittern in 2D. Abbildung 1.4 zeigt einen Vergleich dieses optimalen Vorkonditionierers mit einem simplen Diagonalvorkonditionierer und der nicht-vorkonditionierten Galerkin-Matrix der Johnson-Nédélec Kopplung.

Numerische Experimente

Am Ende der Kapitel 3–7 finden sich jeweils zahlreiche numerische Beispiele, die unsere theoretischen Überlegungen bestätigen.

Publikationen und Preprints

Die vorliegende Arbeit fasst Teile der in der Promotionszeit entstandenen Resultate aus den Publikationen [AFF⁺13a, AFF⁺14, FFKP14] und den Preprints [AFF⁺12, FFKP12, FFPS13a, FFPS13b] zusammen:

- [AFF⁺13a]: Einführung der impliziten Stabilisierung für die drei genannten FEM-BEM Kopplungen; Herleitung des gewichteten Residualfehlerschätzers für die Bielak-MacCamy Kopplung und Beweis der Konvergenz des adaptiven Algorithmus;
- [AFF⁺14]: Verschiedene Fehlerschätzer für die hypersinguläre Gleichung in 3D, darunter auch ZZ-Schätzer für Diskretisierungen niedrigster Ordnung;
- [FFKP14]: ZZ-Fehlerschätzer für BEM in 2D;
- [AFF⁺12]: Inverse Ungleichungen für die Randintegraloperatoren; Konvergenz des adaptiven Algorithmus im Falle des gewichteten Residualschätzers der symmetrischen Kopplung;
- [FFKP12]: Erweiterung der Idee der impliziten Stabilisierung auf (nichtlineare) Probleme in der Elastostatik;
- [FFPS13a]: Lokale und globale Multilevel Diagonalvorkonditionierer für die hypersinguläre Gleichung in 2D und 3D;
- [FFPS13b]: Lokaler Multilevel Diagonalvorkonditionierer für die schwach-singuläre Gleichung in 2D; Blockdiagonal-Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplungen; Optimaler Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplungen in 2D;

Neben den genannten Arbeiten sind in der Promotionszeit noch weitere 8 Arbeiten entstanden [AEF⁺13, BFF⁺14, BVB⁺13, FFH⁺14, FFK⁺13a, FFK⁺13b, FFME⁺14, FFP14], die allerdings nicht in die vorliegende Schrift eingegangen sind.

1.3 Ausblick

Starke Monotonie des Operators $\tilde{\mathfrak{B}}$ der nicht-symmetrischen Johnson-Nédélec Kopplung bzw. Bielak-MacCamy Kopplung gilt nur unter der Annahme

$$c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{R}}/4,$$

wobei c_{mon} die Monotoniekonstante von \mathfrak{A} und $c_{\mathfrak{R}} \in [\frac{1}{2}, 1)$ die Kontraktionskonstante des Doppelschichtintegraloperators \mathfrak{R} ist [SW01]. Für die symmetrische Kopplung wird diese Annahme nicht benötigt. Bei den nicht-symmetrischen Kopplungen ist diese Annahme aber sogar notwendig für (starke) Monotonie, wie in [OS13b] für spezielle lineare Probleme und in Lemma 3.33 für den hier vorliegenden Fall gezeigt wird. Numerische Experimente belegen jedoch, dass die Kopplungsgleichungen immer noch lösbar sind, falls diese Bedingung verletzt ist, siehe Abschnitt 3.6. Von der theoretischen Seite her ist dazu noch nichts bekannt und es ist interessant, ob Lösbarkeit gezeigt werden kann, falls obige Annahme nicht erfüllt ist. Es ist aber anzumerken, dass beispielsweise für Anwendungen in der Magnetostatik [BFF⁺14] stets $c_{\text{mon}} \geq 1$ gilt, so dass die theoretische Restriktion gar nicht zum Tragen kommt.

Der Beweis der Konvergenz der adaptiven FEM-BEM Kopplungen hängt an inversen Abschätzungen für die Randintegraloperatoren. Diese sind bisher nur für Laplace-Probleme bekannt, für Lamé-Probleme ist das noch offen.

In dieser Arbeit entwickeln wir *optimale* Vorkonditionierer für BEM Operatoren auf adaptiven Netzen mit Diskretisierungen niedrigster Ordnung. Für Diskretisierungen höherer Ordnung ist die Theorie noch offen. Des weiteren wird in der vorliegenden Arbeit ein optimaler Vorkonditionierer für den Einfachschichtintegraloperator in 2D bereitgestellt. Im 3D Fall ist die Konstruktion eines ähnlichen Vorkonditionierers eine offene Fragestellung und bedarf vermutlich neuer Ideen. Bei Vorhandensein eines solchen Vorkonditionierers kann aber mit der hier präsentierten Theorie ein optimaler Vorkonditionierer für die FEM-BEM Kopplungen in 3D definiert werden.

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir Multilevel *Additiv-Schwarz* Verfahren. Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Untersuchung von *BPX*-Vorkonditionierern [BPX90, FS97], und *Multiplikativ-Schwarz* Verfahren auf adaptiv generierten Triangulierungen. Die hier vorgestellten Resultate können unter anderem auch zu deren Analyse benutzt werden.

1.4 Hinweise zu den numerischen Experimenten

Alle in dieser Arbeit vorkommenden Experimente wurden auf einem gewöhnlichen Arbeitsrechner mit Intel(R) Core(TM) i7-3930K Prozessor und dem Linux Betriebssystem Ubuntu 12.04.4 LTS durchgeführt. Als Softwarepakete kamen dabei MATLAB in Version R2012a, die Bibliothek HILBERT [AEF⁺13] bzw. BEMPP [SBA⁺13] in Version 2.0 für die Assemblierung der BEM Operatoren in 2D bzw. 3D, zum Einsatz. Die BEMPP-Bibliothek nutzt dabei zusätzlich das Softwarepaket AHMED [Beb12] zur Kompression der voll besetzten BEM-Matrizen.

2 Notationen und Funktionenräume

Dieses Kapitel dient zur Festlegung von Notationen und zur Definition wichtiger mathematischer Objekte. In den Abschnitten 2.1–2.3 definieren wir Sobolevräume für das Laplace-Problem und das Lamé-Problem. Für Details zu Sobolevräumen verweisen wir auf das Standardwerk [Ada75] als auch auf [HW08, McL00, SS11]. Die Abschnitte 2.4–2.6 befassen sich mit Triangulierungen, Netzverfeinerung, und auf Triangulierungen definierte diskrete Räume. Abschnitt 2.7 stellt die Definition und Eigenschaften der Konditionszahl für unterschiedliche Normen bereit.

2.1 Sobolevräume und grundlegende Notationen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet mit Rand $\partial\Omega$. Punkte in Ω oder $\partial\Omega$ notieren wir mit kursiven, fetten Buchstaben $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d)$. Für vektorwertige Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ bzw. $\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^d$ verwenden wir ebenso kursive, fette Buchstaben, z.B. \mathbf{r} . Die euklidische Länge eines Punktes in \mathbb{R}^d schreiben wir als $|\mathbf{x}|$. Allgemeine Vektoren in \mathbb{R}^n und $(m \times n)$ -Matrizen werden mit fetten Buchstaben gekennzeichnet, z.B. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Für nicht-leere, messbare Mengen $X \subseteq \Omega$ bzw. $X \subseteq \partial\Omega$ bezeichnet $|X|$ das entsprechende Maß.

Mit $a \lesssim b$ bzw. $a \gtrsim b$ kürzen wir die Abschätzung $a \leq Cb$ bzw. $a \geq Cb$ mit einer Konstanten $C > 0$ ab. Gelten die Abschätzungen in beiden Richtungen, so schreiben wir $a \simeq b$.

Es bezeichne mit $L^2(\Omega)$ den Hilbertraum aller quadratintegrierbarer Funktionen mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$ und Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$. Wir definieren den Sobolevraum

$$H^1(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}, \quad (2.1)$$

wobei $\mathbf{L}^2(\Omega) := L^2(\Omega)^d$ und $\nabla v = (\partial v / \partial \mathbf{x}_1, \dots, \partial v / \partial \mathbf{x}_d)$ als *schwache Ableitung* von v zu verstehen ist, d.h. es gilt für $j = 1, \dots, d$

$$\int_\Omega \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_\Omega v(\mathbf{x}) \frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j} d\mathbf{x} \quad \text{für alle } w \in C_0^\infty(\Omega).$$

Hier bezeichnet $C_0^\infty(\Omega)$ die Menge aller unendlich oft differenzierbarer Funktionen mit kompakten Träger $\text{supp}(u)$ in Ω . Der Raum $H^1(\Omega)$ ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

und Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$. Definiere den Raum

$$\mathbf{H}(\text{div}; \Omega) := \{v \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \text{div } v \in L^2(\Omega)\} \quad \text{mit } \text{div } v(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^d \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j}.$$

Wir benötigen auch Sobolevräume $H^s(\partial\Omega)$ auf dem Rand $\partial\Omega$. Die Definition ist auf verschiedenste Arten möglich, siehe [HW08, McL00, SS11]. Sei $L^2(\partial\Omega)$ der Raum aller quadratintegrierbarer Funktionen auf $\partial\Omega$ mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ und Norm $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$. Definiere $\mathbf{L}^2(\partial\Omega) := L^2(\partial\Omega)^d$ als auch $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega} := \sum_{j=1}^d \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \rangle_{\partial\Omega}$ und $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)}^2 := \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\partial\Omega}$. Für die Definition von $H^1(\partial\Omega)$ verweisen wir auf [SS11, Abschnitt 2.4]. Eine äquivalente Norm auf $H^1(\partial\Omega)$ ist gegeben als

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\nabla_{\Gamma} u\|_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)},$$

wobei $\nabla_{\Gamma} : H^1(\partial\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Gamma)$ den Oberflächengradienten bezeichnet. Mit dem von Ω nach $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ gerichteten Normalenvektor gilt für hinreichend glatte Funktionen $\nabla_{\Gamma} u = \nabla u - (\nabla u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$. Nicht-ganzzahlige Sobolevräume $H^s(\partial\Omega)$ mit $s \in (0, 1)$ lassen sich, z.B., durch reelle Interpolation definieren, siehe [SS11, Proposition 2.4.3]. Alternative Definitionen finden sich in [HW08, McL00].

Zusätzlich brauchen wir auch noch Sobolevräume auf Teilmengen des Randes $\partial\Omega$. Sei $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \partial\Omega$ eine zusammenhängende, messbare Teilmenge des Randes. Für $s \in (0, 1)$ sind die Räume $H^s(\Gamma)$ und $\tilde{H}^s(\Gamma)$ definiert als

$$\begin{aligned} H^s(\Gamma) &:= \{v|_{\Gamma} : v \in H^s(\partial\Omega)\}, \\ \tilde{H}^s(\Gamma) &:= \{v|_{\Gamma} : v \in H^s(\partial\Omega), \text{supp}(v) \subseteq \overline{\Gamma}\} \end{aligned}$$

mit Norm $\|v\|_{\tilde{H}^s(\Gamma)} = \|w\|_{H^s(\partial\Omega)}$, wobei w die Fortsetzung von v auf $\partial\Omega$ mit 0 ist. Wir bemerken, dass $\tilde{H}^s(\Gamma) = H^s(\Gamma)$ falls $\Gamma = \partial\Omega$.

Um mit dem unbeschränkten Gebiet $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ arbeiten zu können, benötigen wir spezielle Räume. Sei $C_c^\infty(\Omega^{\text{ext}})$ die Restriktion von $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ auf Ω^{ext} . Wir definieren den Raum $H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ als die Menge aller linearen Funktionale auf $C_c^\infty(\Omega^{\text{ext}})$ mit der Eigenschaft $\varphi u \in H^1(\Omega^{\text{ext}})$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^{\text{ext}})$. Folgendes Resultat findet sich in [SS11, Satz 2.6.7] und charakterisiert die Stetigkeit von Operatoren.

Satz 2.1. *Sei \mathcal{X} ein normierter Raum.*

(i) *Ein linearer Operator $\mathfrak{A} : H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}) \rightarrow \mathcal{X}$ ist genau dann stetig, falls ein $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^{\text{ext}})$ und eine Konstante $C > 0$ existieren, so dass*

$$\|\mathfrak{A}v\|_{\mathcal{X}} \leq C \|\varphi v\|_{H^1(\Omega^{\text{ext}})} \quad \text{für alle } v \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}).$$

(ii) *Ein linearer Operator $\mathfrak{A} : \mathcal{X} \rightarrow H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ ist genau dann stetig, wenn für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega^{\text{ext}})$ eine Konstante $C > 0$ existiert mit*

$$\|\varphi(\mathfrak{A}v)\|_{H^1(\Omega^{\text{ext}})} \leq C \|v\|_{\mathcal{X}} \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}.$$

□

Wir bemerken, dass für unbeschränkte Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^d$ keine Normen auf $H_{\text{loc}}^1(X)$ definiert werden können. Falls X jedoch beschränkt ist, gilt $H^1(X) = H_{\text{loc}}^1(X)$.

Für die Räume $H^1(\Omega)$ und $H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ lassen sich Spurooperatoren definieren.

Satz 2.2. (i) Es existiert ein linearer, stetiger Operator $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ mit

$$\gamma_0 v = v|_{\partial\Omega} \quad \text{für alle } v \in C^0(\overline{\Omega}).$$

(ii) Es existiert ein linearer, stetiger Operator $\gamma_0^{\text{ext}} : H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$ mit

$$\gamma_0^{\text{ext}} v = v|_{\partial\Omega} \quad \text{für alle } v \in C^0(\overline{\Omega^{\text{ext}}}).$$

□

2.2 Dualräume und Normalenableitung

Für einen normierten Raum \mathcal{X} mit Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ bezeichne \mathcal{X}^* den Dualraum mit der dualen Klammer

$$\langle u^*, v \rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} := u^*(v) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{X}^*, v \in \mathcal{X}$$

und Norm

$$\|u^*\|_{\mathcal{X}^*} = \sup_{0 \neq v \in \mathcal{X}} \frac{|\langle u^*, v \rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}}|}{\|v\|_{\mathcal{X}}}.$$

Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, benutzen wir die Kurznotation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ für die duale Klammer.

Sei nun \mathcal{X} ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$. Es bezeichne $J_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$ den Riesz-Isomorphismus. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum der stetig in \mathcal{X} eingebettet ist. Wir fassen $J_{\mathcal{X}}x$ mit der formalen Definition

$$\langle J_{\mathcal{X}}x, h \rangle_{\mathcal{H}^* \times \mathcal{H}} := \langle J_{\mathcal{X}}x, h \rangle_{\mathcal{X}^* \times \mathcal{X}} = \langle x, h \rangle_{\mathcal{X}}$$

für alle $h \in \mathcal{H}$ als lineares Funktional in \mathcal{H}^* auf. Folgendes Resultat erlaubt es uns die duale Klammer $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^* \times \mathcal{H}}$ als stetige Erweiterung des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ aufzufassen.

Lemma 2.3. Seien \mathcal{H} und \mathcal{X} zwei Hilberträume mit stetiger Einbettung $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{X}$. Dann ist $J_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{H}^*$ ein wohldefinierter, stetiger, linearer Operator mit dichtem Bild. □

Wir wenden das letzte Resultat mit $\mathcal{X} = L^2(\Gamma)$ und $\mathcal{H} = \tilde{H}^s(\Gamma)$ bzw. $\mathcal{H} = H^s(\Gamma)$ für $s \in (0, 1)$ an und definieren die Dualräume $H^{-s}(\Gamma) := (\tilde{H}^s(\Gamma))^*$ bzw. $\tilde{H}^{-s}(\Gamma) := (H^s(\Gamma))^*$ mittels dem $L^2(\Gamma)$ -Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$. Die Schreibweise $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$ für die duale Klammer ist daher berechtigt.

Wir können nun auch verallgemeinerte (Ko-)Normalenableitungen definieren. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und sei $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$. Für Details verweisen wir auf [McL00, SS11]. Mit $\mathfrak{L} = -\Delta$ bezeichnen wir den Laplace-Operator, d.h. formal $\Delta u = \sum_{j=1}^d \partial^2 u / \partial x_j^2$.

Satz 2.4. Erfülle $u \in H^1(\Omega)$ die Gleichung $-\Delta u = f \in L^2(\Omega)$ im schwachen Sinne. Dann existiert ein $\gamma_1 u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{\Gamma} = \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\Omega} - \langle f, v \rangle_{\Omega}. \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

□

Die Schreibweise $\gamma_1 u$ ist gerechtfertigt, denn für $u \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt $\gamma_1 u := \partial_{\mathbf{n}} u := \nabla u \cdot \mathbf{n}$. In ähnlicher Weise lässt sich auch die äußere Normalenableitung $\gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}}$ für Funktionen $u^{\text{ext}} \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ definieren, siehe [SS11]. Allgemeiner kann man durch diese Vorgehensweise dem Ausdruck $\mathfrak{A} \nabla u \cdot \mathbf{n}$ über die Gleichung $-\text{div } \mathfrak{A} \nabla u = f$ Sinn geben.

2.3 Elastostatik

Für vektorwertige Sobolevräume benutzen wir fette Symbole $\mathbf{H}^s(X) := H^s(X)^d$. Die Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{H}^s(X)}$ fassen wir komponentenweise auf, d.h. $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^s(X)}^2 = \sum_{j=1}^d \|\mathbf{u}_j\|_{H^s(X)}^2$ für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(X)$. Für je zwei Tensoren $\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ definieren wir $\langle \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \rangle_{\Omega} := \int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} := \sum_{j,k=1}^d \int_{\Omega} \epsilon_{jk}(\mathbf{u}) \sigma_{jk}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x}$. Die Divergenz $\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})$ eines Tensors definieren wir zeilenweise, d.h. $(\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}))_j := \sum_{k=1}^d \partial \sigma_{jk}(\mathbf{u}) / \partial \mathbf{x}_k$.

Wie üblich definieren wir den linearen und symmetrischen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\epsilon}$ komponentenweise als

$$\epsilon_{jk}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial \mathbf{x}_k} + \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_j} \right) \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ und } j, k = 1, \dots, d. \quad (2.2)$$

Zusammen mit dem Young Modul $E > 0$ und dem Poisson Verhältnis $\nu \in (0, \frac{1}{2})$, ist der lineare Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ definiert als

$$\sigma_{jk}(\mathbf{u}) := \delta_{jk} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{div } \mathbf{u} + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{jk}(\mathbf{u}) \quad (2.3)$$

für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $j, k = 1, \dots, d$. Um die Notation zu vereinfachen, verwendet man üblicherweise die Lamé-Konstanten

$$\lambda := \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu := \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.4a)$$

Bezeichne $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die Einheitsmatrix. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ erfüllt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \lambda \text{div}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{als auch} \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \text{div}(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.4b)$$

Der Kern des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon}$ ist gegeben durch den Raum der Starrkörperbewegungen $\mathcal{R}_d = \ker(\boldsymbol{\epsilon}) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$. Für $d = 2$ gilt

$$\mathcal{R}_d := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix} \right\} \quad (2.5a)$$

und für $d = 3$ gilt

$$\mathcal{R}_d := \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{x}_3 \\ 0 \\ -\mathbf{x}_1 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.5b)$$

Aus der Definition (2.3) sieht man auch sofort $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ für alle $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}_d$. Die Vektoren in (2.5) sind dabei als Funktionen in Abhängigkeit von $\boldsymbol{x} \in \Omega$ aufzufassen.

Weiters bemerken wir noch, dass (2.4) ein Spannungsproblem in der Ebene für $d = 2$ definiert. Andererseits kann man für $d = 2$ auch ein ebenes Verzerrungsproblem betrachten. Dazu ersetzt man die Lamé-Konstanten aus (2.4a) durch $\lambda = E\nu/((1 + \nu)(1 - \nu))$, $\mu = E/(2(1 + \nu))$. Die Analysis aus dieser Arbeit gilt aber in beiden Fällen.

Zuletzt definieren wir die Spurooperatoren $\gamma_0 : \boldsymbol{H}^1(\Omega) \rightarrow \boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ komponentenweise über $\gamma_0 \boldsymbol{u} := (\gamma_0 \boldsymbol{u}_1, \dots, \gamma_0 \boldsymbol{u}_d)$. Eine entsprechende Definition gilt für den äußeren Spuroperator $\gamma_0^{\text{ext}} : \boldsymbol{H}_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}}) \rightarrow \boldsymbol{H}^{1/2}(\partial\Omega)$. Die verallgemeinerten Normalenableitungen $\gamma_1 \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{H}^{-1/2}(\partial\Omega)$ definiert man, ähnlich wie im Fall des Laplace-Problems, über die Gleichung $-\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}$, d.h. für hinreichend glatte \boldsymbol{u} gilt $\gamma_1 \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}$. Eine entsprechende Definition gilt auch für die äußere Normalenableitung $\gamma_1^{\text{ext}} \boldsymbol{u}$.

2.4 Triangulierung

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) ein (einfach zusammenhängendes) Gebiet mit polygonalem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Es bezeichne $\text{conv}(\cdot)$ die konvexe Hülle. Wir nennen $\mathcal{T}^\Omega = \{T_1, \dots, T_{M^\Omega}\}$ eine *reguläre Triangulierung* von Ω , falls folgende Punkte erfüllt sind:

- Jedes Element $T \in \mathcal{T}^\Omega$ ist ein $(d + 1)$ -Simplex, d.h. es existieren $d + 1$ verschiedene Punkte $\boldsymbol{z}^1, \dots, \boldsymbol{z}^{d+1} \in \overline{\Omega}$, die nicht in einer $(d - 1)$ -dimensionalen Hyperebene liegen, mit

$$T = \text{conv}\{\boldsymbol{z}^1, \dots, \boldsymbol{z}^{d+1}\}.$$

Die Punkte in der Menge $\mathcal{N}(T) := \{\boldsymbol{z}^1, \dots, \boldsymbol{z}^{d+1}\}$ werden auch Knoten des Elements T genannt.

- Für je zwei verschiedene Elemente $T, T' \in \mathcal{T}^\Omega$ gilt

$$T \cap T' = \text{conv}\{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(T')\}.$$

Falls sich zwei verschiedene Elemente berühren, bedeutet das also nichts anderes, als dass der Schnitt entweder ein gemeinsamer Knoten, eine gemeinsame Kante (konvexe Hülle zweier gemeinsamer Knoten), oder eine gemeinsame Fläche (konvexe Hülle dreier gemeinsamer Knoten) ist.

- Die Vereinigung aller Elemente umschließt das Gebiet Ω , d.h.

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}^\Omega} T.$$

Die Menge aller Knoten \mathcal{N}^Ω der Triangulierung \mathcal{T}^Ω definieren wir als

$$\mathcal{N}^\Omega := \mathcal{N}(\mathcal{T}^\Omega) := \bigcup_{T \in \mathcal{T}^\Omega} \mathcal{N}(T).$$

Analog zur Volumstriangulierung \mathcal{T}^Ω , definieren wir eine *reguläre Triangulierung* $\mathcal{T}^\Gamma = \{T_1, \dots, T_{M^\Gamma}\}$ des Randes über:

- Jedes Element $T \in \mathcal{T}^\Gamma$ ist ein d -Simplex, d.h. es existieren d verschiedene Punkte $\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^d \in \Gamma$, die nicht in einer $(d-2)$ -dimensionalen Hyperebene liegen, mit

$$T = \text{conv}\{\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^d\}.$$

Die Punkte in der Menge $\mathcal{N}(T) := \{\mathbf{z}^1, \dots, \mathbf{z}^d\}$ werden auch Knoten des Elements T genannt.

- Für je zwei verschiedene Elemente $T, T' \in \mathcal{T}^\Gamma$ gilt

$$T \cap T' = \text{conv}\{\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(T')\}.$$

Falls sich zwei verschiedene Elemente berühren, bedeutet das also nichts anderes, als dass der Schnitt entweder ein gemeinsamer Knoten oder eine gemeinsame Kante ist.

- Die Vereinigung aller Elemente umschließt den Rand Γ , d.h.

$$\Gamma = \bigcup_{T \in \mathcal{T}^\Gamma} T.$$

Die Menge aller Knoten \mathcal{N}^Γ der Triangulierung \mathcal{T}^Γ definieren wir als

$$\mathcal{N}^\Gamma := \mathcal{N}(\mathcal{T}^\Gamma) := \bigcup_{T \in \mathcal{T}^\Gamma} \mathcal{N}(T).$$

Darüber hinaus bezeichne $h_{\mathcal{T}} \in L^\infty(\mathcal{T})$ mit $\mathcal{T} \in \{\mathcal{T}^\Omega, \mathcal{T}^\Gamma\}$ die lokale Netzweitenfunktion,

$$h_{\mathcal{T}}|_T := h_T := \text{diam}(T) \quad \text{für } T \in \mathcal{T}, \quad (2.6)$$

und für eine nicht-leere Menge $E \subseteq \overline{\Omega}$, bzw. $E \subseteq \Gamma$ bezeichne

$$\omega_{\mathcal{T}}(E) := \{T \in \mathcal{T} : \overline{E} \cap T \neq \emptyset\} \quad (2.7)$$

den Patch von E . Des weiteren nennen wir $\omega_{\mathcal{T}}(T)$ mit $T \in \mathcal{T}$ den Elementpatch und $\omega_{\mathcal{T}}(\mathbf{z}) := \omega_{\mathcal{T}}(\{\mathbf{z}\})$ den Knotenpatch von $\mathbf{z} \in \mathcal{N}^\Omega$ bzw. $\mathbf{z} \in \mathcal{N}^\Gamma$.

Eine wichtige Kenngröße ist die Formregularität $\sigma_{\mathcal{T}}$, welche ein Maß für die Entartung der Elemente einer Triangulierung darstellt. Für ein Volumselement $T \in \mathcal{T}^\Omega$ definieren wir

$$\sigma(T) := \frac{\text{diam}(T)^d}{|T|},$$

wobei $|\cdot|$ das Volums- bzw. Oberflächenmaß bezeichne. Für ein Randelement $T \in \mathcal{T}^\Gamma$ definieren wir

$$\sigma(T) := \begin{cases} \frac{\text{diam}(T)^2}{|T|} & \text{für } d = 3, \\ \max_{T' \in \mathcal{T}^\Gamma, T' \cap T \neq \emptyset} \max \left\{ \frac{|T|}{|T'|}, \frac{|T'|}{|T|} \right\} & \text{für } d = 2. \end{cases}$$

Die Formregularität $\sigma_{\mathcal{T}}$ für $\mathcal{T} \in \{\mathcal{T}^{\Omega}, \mathcal{T}^{\Gamma}\}$ eines Netzes ist dann gegeben durch

$$\sigma_{\mathcal{T}} := \sigma(\mathcal{T}) := \max_{T \in \mathcal{T}} \sigma(T). \quad (2.8)$$

Wir bezeichnen ein Netz \mathcal{T} als γ -formregulär, falls

$$\sigma_{\mathcal{T}} \leq \gamma. \quad (2.9)$$

Man beachte, dass die Äquivalenzen

$$h_{\mathcal{T}|T} \simeq h_{\mathcal{T}|T'}, \quad h_{\mathcal{T}|T} \simeq \begin{cases} |T|^{1/d} & \text{für } \mathcal{T} = \mathcal{T}^{\Omega}, \\ |T|^{1/(d-1)} & \text{für } \mathcal{T} = \mathcal{T}^{\Gamma} \end{cases} \quad (2.10)$$

für alle $T, T' \in \mathcal{T}$ mit $T \cap T' \neq \emptyset$ gelten. Die involvierten Konstanten hängen dabei nur von der Formregularität ab.

Bemerkung 2.5. Die Restriktion einer Volumstriangulierung \mathcal{T}^{Ω} , d.h.

$$\mathcal{T}^{\Omega}|_{\Gamma} := \{T' \subseteq \Gamma : T' = T \cap \Gamma, T \in \mathcal{T}^{\Omega}\}, \quad (2.11)$$

impliziert eine reguläre Triangulierung von Γ . Aus der γ -Formregularität von \mathcal{T}^{Ω} folgt $\tilde{\gamma}$ -Formregularität von $\mathcal{T}^{\Omega}|_{\Gamma}$, wobei $\tilde{\gamma}$ nur von γ abhängt. Die Analysis im Rest der Arbeit setzt meist voneinander unabhängige Triangulierungen $\mathcal{T}^{\Omega}, \mathcal{T}^{\Gamma}$ voraus. In den numerischen Experimenten werden wir aufgrund der einfacheren Implementierung $\mathcal{T}^{\Gamma} = \mathcal{T}^{\Omega}|_{\Gamma}$ benutzen.

Weiters definieren wir noch \mathcal{E} als die Menge aller Kanten ($d = 2$) bzw. Flächen ($d = 3$) einer Volumstriangulierung \mathcal{T}^{Ω} . Eine Kante bzw. Fläche $E \in \mathcal{E}$ ist dabei gegeben als

$$E = \text{conv}\{z^1, \dots, z^d\} \quad \text{mit unterschiedlichen Knoten } z^1, \dots, z^d \in \mathcal{N}(T) \quad (2.12)$$

für ein $T \in \mathcal{T}^{\Omega}$. Zu guter Letzt unterscheiden wir noch zwischen Kanten bzw. Flächen die am Rand und solchen die nur im Inneren liegen mit den Mengen $\mathcal{E}^{\Gamma} := \mathcal{E} \cap \Gamma$ und $\mathcal{E}^{\Omega} := \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^{\Gamma}$. Nach Definition gilt $\mathcal{T}^{\Omega}|_{\Gamma} = \mathcal{E}^{\Gamma}$.

Meistens arbeiten wir mit einer Folge von Triangulierungen $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_L$. Die zu einem Netz \mathcal{T}_{ℓ} gehörigen Objekte bekommen dann den gleichen Index, z.B. \mathcal{N}_{ℓ} für die Menge der Knoten oder $\omega_{\ell}(\cdot)$ für den Patch.

2.5 Netzverfeinerung

Ein wichtiger Punkt bei adaptiven Verfahren ist die zugrunde liegende Netzverfeinerung. Wir bezeichnen mit \mathcal{T}_0 die Starttriangulierung. Aus dem Netz $\mathcal{T}_{\ell-1}$ wird \mathcal{T}_{ℓ} durch Verfeinerung von markierten Elementen $\mathcal{M}_{\ell-1} \subseteq \mathcal{T}_{\ell-1}$ generiert. Um zu garantieren, dass das Netz \mathcal{T}_{ℓ} regulär ist, d.h. es existieren keine hängenden Knoten, werden üblicherweise auch Elemente in der Umgebung von $\mathcal{M}_{\ell-1}$ verfeinert. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist, dass die γ -Formregularität beschränkt bleibt, d.h.

$$\sigma(\mathcal{T}_{\ell}) \leq C\sigma(\mathcal{T}_0)$$

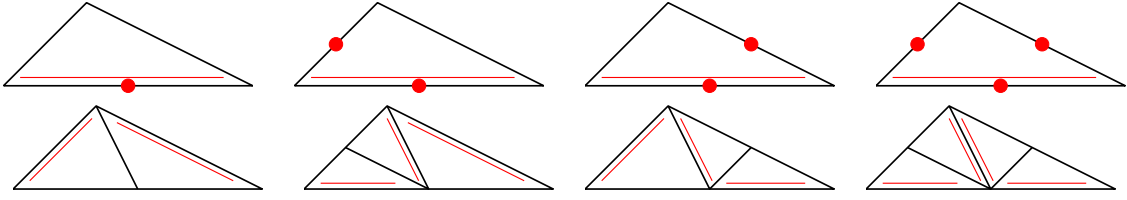


Abbildung 2.1: Für jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}_\ell$ gibt es genau eine *Referenzkante*, welche durch die doppelte Linie gekennzeichnet ist (linkes oberes Bild). Die Verfeinerung von T passiert durch Bisektion der Referenzkante, wodurch auch ein neuer Knoten entsteht. Die Referenzkanten der neu entstandenen Dreiecke (Söhne) liegen gegenüber dieses neuen Knotens (*newest vertex*), siehe linkes unteres Bild. Um hängende Knoten zu vermeiden geht man wie folgt vor: Wir nehmen an, dass bestimmte Kanten von T , zumindest aber die Referenzkante, zur Verfeinerung markiert worden sind (obere Bildreihe). Durch iterative Anwendung der *newest vertex bisection (NVB)*, wird das Element entweder in zwei, drei, oder vier Söhne zerlegt (untere Bildreihe).

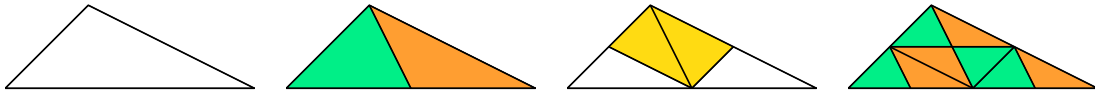


Abbildung 2.2: Die Verfeinerung mittels *newest vertex bisection (NVB)* führt auf höchstens endlich viele verschiedene Ähnlichkeitsklassen von Dreiecken. Um das zu sehen, starten wir mit einem Makroelement (links), wobei die untere Kante die Referenzkante ist. Durch iterative Verwendung von NVB beobachtet man, dass höchstens vier Ähnlichkeitsklassen auftreten, die durch die verschiedenen Farben gekennzeichnet sind. Nach drei Bisektionsschritten (rechtes Bild) treten keine zusätzlichen Ähnlichkeitsklassen mehr auf.

für eine ℓ -unabhängige Konstante $C > 0$.

In dieser Arbeit verwenden wir durchgehend die *newest vertex bisection (NVB)*, welche die genannten Eigenschaften erfüllt. Für Volumstriangulierungen \mathcal{T}_ℓ^Ω im Fall $d = 2$ und für Randtriangulierungen \mathcal{T}_ℓ^Γ im Fall $d = 3$ ist die NVB Verfeinerungsstrategie in Abbildung 2.1 und Abbildung 2.2 visualisiert. Im Fall $d = 3$ wird die NVB für \mathcal{T}_ℓ^Ω in [Ste08b] beschrieben, wobei gewisse Bedingungen an das Startnetz \mathcal{T}_0^Ω gestellt werden, die aber durch einen Initialisierungsschritt gewährleistet werden können, siehe [Ste08b, Appendix]. Für $d = 2$ und für Randtriangulierungen \mathcal{T}_ℓ^Γ benutzen wir den Verfeinerungsalgorithmus aus [AFF⁺13b, Algorithmus 2.2]. Wir bemerken noch, dass nur im Fall $d = 3$ Annahmen an das Startnetz \mathcal{T}_0^Ω der Volumstriangulierung gefordert werden. In allen anderen Fällen werden *keine* Annahmen gebraucht. Insbesondere ist also eine beliebige Verteilung der Referenzkanten im Startnetz möglich, siehe auch [KPP13].

Für die 2D NVB definieren wir die uniforme Verfeinerung folgendermaßen: Das Netz $\widehat{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$ ($d = 2$) bzw. $\widehat{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma$ ($d = 3$) entsteht durch Verfeinerung aller Elemente aus dem Netz $\widehat{\mathcal{T}}_{\ell-1}^\Omega$ bzw. $\widehat{\mathcal{T}}_{\ell-1}^\Gamma$. Jedes Element T wird dabei durch drei Bisektionen in vier Söhne T_1, \dots, T_4

zerlegt mit $|T_j| = |T|/4$, siehe Abbildung 2.1. Das Netz $\widehat{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma$ ($d = 2$) entsteht aus $\widehat{\mathcal{T}}_{\ell-1}^\Gamma$ durch einmalige Bisektion aller Elemente, d.h. jedes Element T wird in zwei Söhne T_1, T_2 zerlegt mit $|T_j| = |T|/2$. In allen Fällen setzen wir $\widehat{\mathcal{T}}_0^\Omega := \mathcal{T}_0^\Omega$ bzw. $\widehat{\mathcal{T}}_0^\Gamma := \mathcal{T}_0^\Gamma$. Für die 3D NVB ist die Definition der uniformen Verfeinerung etwas involvierter, wir verweisen daher auf [Ste08b] für Details.

In den numerischen Experimenten in dieser Arbeit benutzen wir die Implementierungen aus HILBERT [AEF⁺13] für \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ im Fall $d = 2$ und für \mathcal{T}_ℓ^Ω mit $d = 3$ verwenden wir den Code aus [Kem12]. Die Verfeinerungsroutine aus HILBERT für \mathcal{T}_ℓ^Ω mit $d = 2$ kann auf \mathcal{T}_ℓ^Γ mit $d = 3$ erweitert werden.

Alternative Verfeinerungsstrategien findet man in, z.B., [Ver13]. Man beachte aber, dass NVB ein wesentlicher Bestandteil im Beweis der Optimalität von adaptiver FEM [CKNS08], und adaptiver BEM [FFK⁺13a, FFK⁺13b, Gan13] ist.

2.6 Diskrete Räume

Zur Approximation der exakten Lösungen verwenden wir die folgenden endlich-dimensionalen Räume. Sei $\mathcal{T} \in \{\mathcal{T}^\Omega, \mathcal{T}^\Gamma\}$. Dann bezeichne

$$\mathcal{P}^p(\mathcal{T}) := \left\{ f \in L^\infty \left(\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T \right) : f|_T \text{ ist ein Polynom vom Grad } \leq p \right\} \quad (2.13)$$

die Menge aller \mathcal{T} -elementweisen Polynome vom Maximalgrad $p \geq 0$, während

$$\mathcal{S}^q(\mathcal{T}) := \mathcal{P}^q(\mathcal{T}) \cap C \left(\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T \right) \quad \text{mit } q \geq 1 \quad (2.14)$$

die Menge aller \mathcal{T} -elementweisen Polynome vom Maximalgrad q , welche global stetig sind, bezeichnet.

Sei $\Gamma = \partial\Omega$ der Rand eines Lipschitz-Gebietes und \mathcal{T}_ℓ^Γ eine reguläre Triangulierung von Γ . Für $p \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\pi_\ell^p : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ und $\Pi_\ell^q : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ die $L^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektionen, d.h.

$$\begin{aligned} \langle \pi_\ell^p \phi, \psi_\ell \rangle_\Gamma &= \langle \phi, \psi_\ell \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } \psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma), \\ \langle \Pi_\ell^q u, v_\ell \rangle_\Gamma &= \langle u, v_\ell \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } v_\ell \in \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma). \end{aligned}$$

Entsprechende Definitionen gelten auch auf Volumstriangulierungen.

Sei $X \in \{\Omega, \Gamma\}$. Mit $\mathfrak{J}_\ell^X : L^2(X) \rightarrow \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^X)$ bezeichnen wir den Scott-Zhang Operator [SZ90], welcher auch eine Projektion ist. Für den Fall $q = 1$ kann man den Operator wie folgt definieren: Für jeden Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^X$ ordnet man ein Element $T_{\mathbf{z}} \in \mathcal{T}_\ell^X$ zu mit $\mathbf{z} \in T_{\mathbf{z}}$. Es bezeichne $\eta_{\mathbf{z}}$ die nodale Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^X)$, d.h. $\eta_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) = 1$ und $\eta_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}') = 0$ für alle Knoten $\mathbf{z}' \neq \mathbf{z}$. Es bezeichne weiters $\psi_{\mathbf{z}}$ die L^2 -duale Basisfunktion mit $\int_X \psi_{\mathbf{z}} \eta_{\mathbf{z}'} dX = \delta_{\mathbf{z}\mathbf{z}'}$, wobei $\delta_{\mathbf{z}\mathbf{z}'}$ das Kronecker-Delta ist. Der Scott-Zhang Operator $\mathfrak{J}_\ell^X : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^X)$ ist dann gegeben als

$$\mathfrak{J}_\ell^X v := \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^X} \eta_{\mathbf{z}} \int_{T_{\mathbf{z}}} \psi_{\mathbf{z}} v dX.$$

Die $L^2(\Gamma)$ -Projektionen und der Scott-Zhang Operator besitzen bestimmte Stabilitäts- und Approximationseigenschaften. Wir verweisen auf [Ste08a] für Resultate zur $L^2(\Gamma)$ -Projektion, und auf [SS11, SZ90] für Resultate zum Scott-Zhang Operator.

Falls $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$, können die $L^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion und der Scott-Zhang Operator als Operatoren $L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) := \{v \in \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma) : v(\mathbf{x}) = 0 \text{ für } \mathbf{x} \in \partial\Gamma\}$ definiert werden.

2.7 Vektoren, Matrizen, und Konditionszahl

Für zwei Vektoren $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n), \mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 := \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \mathbf{y}_j$ das euklidische Skalarprodukt und $\|\mathbf{x}\|_2^2 := \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2$ die euklidische Norm. Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichnet $\|\mathbf{A}\|_2$ die von der euklidischen Norm induzierte Matrixnorm.

Sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine positiv definite und symmetrische Matrix. Wir definieren ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n über

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}} := \langle \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2 \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

mit induzierter Norm $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{B}}$. Die zugehörige Matrixnorm definieren wir als

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{B}} := \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathbf{B}}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{B}}} \quad \text{für alle } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Für eine reguläre Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die ℓ^2 -Konditionszahl definiert als

$$\text{cond}_2(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\|_2 \|\mathbf{A}^{-1}\|_2,$$

und die Konditionszahl $\text{cond}_{\mathbf{B}}(\cdot)$ ist definiert als

$$\text{cond}_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) := \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{B}} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{\mathbf{B}}.$$

Ist die Matrix \mathbf{A} symmetrisch und positiv definit, dann gilt $\text{cond}_2(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{A})/\lambda_{\min}(\mathbf{A})$, wobei $\lambda_{\max}(\cdot), \lambda_{\min}(\cdot)$ den maximalen und minimalen Eigenwert bezeichnen. Das lässt sich auch auf allgemeine Skalarprodukte übertragen. Ist die Matrix \mathbf{A} symmetrisch und positiv definit bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{B}}$, d.h. es gilt $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y} \rangle_{\mathbf{B}}$ und $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{B}} > 0$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, dann folgt

$$\text{cond}_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A})}.$$

3 Wohldefiniertheit von FEM-BEM Kopplungen für Potentialprobleme

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Wohldefiniertheit und Stabilität von FEM-BEM Kopplungen für Potentialprobleme. Die Grundlage bildet dabei die Arbeit [AFF⁺13a], welche innerhalb der Promotionszeit entstanden ist. Ein wesentlicher Bestandteil der genannten Arbeit ist die Einführung der sogenannten *impliziten Stabilisierung*, die es auf einfache Weise erlaubt, die Lösbarkeit der Kopplungsgleichungen zu zeigen. Dabei wird für jede Kopplungsmethode nach dem gleichen Schema vorgegangen:

- Zuerst werden die Kopplungsgleichungen als Operatorgleichung

$$\mathfrak{B}u = F \tag{3.1}$$

formuliert.

- Da es nicht möglich ist Standardmethoden (Hauptsatz über stark monotone Operatoren) auf \mathfrak{B} anzuwenden, führen wir einen *äquivalenten* Operator $\tilde{\mathfrak{B}} := \mathfrak{B} + \mathfrak{s}$ ein. Dabei ist Äquivalenz so zu verstehen, dass jede Lösung u von

$$\tilde{\mathfrak{B}}u = \tilde{F} \tag{3.2}$$

auch (3.1) löst und vice versa. \tilde{F} steht für eine entsprechend modifizierte rechte Seite.

- Zuletzt zeigen wir eindeutige Lösbarkeit von (3.2), welche aufgrund der Äquivalenz die eindeutige Lösbarkeit von (3.1) liefert.

Der Stabilisierungsterm \mathfrak{s} und \tilde{F} kommen in natürlicher Weise von den Kopplungsgleichungen (genauer: aus der Darstellung der Lösung im Außenraum). Daher nennen wir die oben skizzierte Methode der Stabilisierung auch *implizite Stabilisierung*. Man beachte außerdem, dass jedwede Aussage über Wohldefiniertheit der stabilisierten Gleichung (3.2) die gleiche Aussage zum nicht-stabilisierten System (3.1) liefert. Die Stabilisierung kann deshalb auch als *theoretisches* Werkzeug verstanden werden.

Der Rest dieses Kapitels ist wie folgt aufgebaut: Als Erstes stellen wir in Abschnitt 3.1 ein (nichtlineares) Transmissionsproblem auf, das uns als Modellproblem dient, während wir in Abschnitt 3.2 die für die FEM-BEM Kopplungen wichtige Darstellungsformel angeben und auch elementare Eigenschaften der Randintegraloperatoren und von stark monotonen Operatoren zusammenfassen. Anhand der symmetrischen Kopplung (Abschnitt 3.3) werden wir exemplarisch das Prinzip der impliziten Stabilisierung erarbeiten. Danach wenden wir diese Methode auf die (nicht-symmetrische) Johnson-Nédélec Kopplung (Abschnitt 3.4) und die Bielak-MacCamy Kopplung (Abschnitt 3.5) an. Diese Kopplungsmethoden benötigen dabei etwas stärkere Voraussetzungen an das Modellproblem. In Abschnitt 3.6 präsentieren wir einige numerische Experimente, welche die vorgestellten Resultate unterlegen.

3.1 Modellproblem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein (einfach zusammenhängendes) Gebiet mit polygonalem Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und Normalenvektor \mathbf{n} . Bezeichne mit $\mathfrak{A} : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ einen (möglicherweise) nichtlinearen, Lipschitz-stetigen, und stark monotonen Operator, siehe Abschnitt 3.2.2. Gegeben seien weiters die Daten $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ und $\phi_0 \in H^{-1/2}(\Gamma)$. In diesem Kapitel betrachten wir durchgehend das (nichtlineare) *Transmissionsproblem*

$$-\operatorname{div}(\mathfrak{A}\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (3.3a)$$

$$-\Delta u^{\text{ext}} = 0 \quad \text{in } \Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}, \quad (3.3b)$$

$$u - u^{\text{ext}} = u_0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (3.3c)$$

$$(\mathfrak{A}\nabla u - \nabla u^{\text{ext}}) \cdot \mathbf{n} = \phi_0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (3.3d)$$

$$u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3.3e)$$

wobei die Gleichungen im schwachen Sinn zu verstehen sind. Das Modellproblem besitzt eine eindeutige (schwache) Lösung $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$, wobei wir für $d = 2$ die zusätzliche Kompatibilitätsbedingung

$$\langle f, 1 \rangle_{\Omega} + \langle \phi_0, 1 \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (3.4)$$

an die Daten, als auch die Skalierung $\operatorname{diam}(\Omega) < 1$ fordern.

Bemerkung 3.1. (i) Die eindeutige Lösbarkeit von (3.3) folgt, z.B., aus der eindeutigen Lösbarkeit der symmetrischen Kopplung, siehe Abschnitt 3.3.

(ii) Die Abklingbedingung (3.3e) lässt sich durch die Bedingung

$$u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) + b \quad \text{für ein beliebiges } b \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

ersetzen. Das Gleichungssystem bestehend aus den Gleichungen (3.3a)–(3.3d) mit Abklingbedingung (3.5) besitzt wiederum eine eindeutige Lösung wie folgende Überlegung zeigt. Sei $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ die eindeutige Lösung von (3.3), dann ist $(u + b, u^{\text{ext}} + b)$ eine Lösung von (3.3a)–(3.3d) und (3.5), wie man durch Einsetzen verifizieren kann. Andererseits sei $(\tilde{u}, \tilde{u}^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ eine Lösung von (3.3a)–(3.3d) mit Abklingbedingung (3.5), dann ist $(\tilde{u} - b, \tilde{u}^{\text{ext}} - b)$ eine Lösung von (3.3). Aus der Eindeutigkeit von $(\tilde{u} - b, \tilde{u}^{\text{ext}} - b)$ folgt dann jene von $(\tilde{u}, \tilde{u}^{\text{ext}})$.

(iii) Im Fall $d = 2$ kann die Abklingbedingung (3.3e) durch

$$u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = a \log |\mathbf{x}| + b + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3.6)$$

mit beliebigen $b \in \mathbb{R}$ und für ein $a \in \mathbb{R}$ (welches von u^{ext} abhängt) ersetzt werden. In diesem Fall kann auch auf die Kompatibilitätsbedingung (3.4) verzichtet werden.

(iv) Die Bedingung $\operatorname{diam}(\Omega) < 1$ für $d = 2$ wird gefordert, um Elliptizität des Einfachschichtintegraloperators zu gewährleisten, vgl. Abschnitt 3.2.1. Wir merken an, dass auch ohne diese Einschränkung das Problem (3.3) eine eindeutige Lösung besitzt. \square

Wegen der (möglichen) Nichtlinearität im Inneren als auch im Fall von Inhomogenitäten $f \neq 0$ ist die Verwendung von FEM zur numerischen Lösung von (3.3a) zielführend. Auf der

anderen Seite bietet es sich — aufgrund der Unbeschränktheit von Ω^{ext} — an, die Lösung im Außenraum mittels Integraloperatoren darzustellen, d.h. BEM zu benützen. Bevor wir jedoch mittels den Transmissionsbedingungen (3.3c)–(3.3d) verschiedene Kopplungen zwischen der FEM und BEM herleiten können, brauchen wir noch einige vorbereitende Definitionen und Ergebnisse, welche im folgenden Abschnitt abgehandelt werden.

3.2 Vorbereitungen

In diesem Abschnitt führen wir die Integraloperatoren für Potentialgleichungen mittels Darstellungsformel ein und geben die später benötigten Eigenschaften an. Für eine ausführliche Abhandlung sei auf die Monographien [HW08, McL00, SS11, Ste08a] verwiesen. Zuletzt fassen wir noch die wichtigsten Resultate zu stark monotonen Operatoren zusammen.

3.2.1 Darstellungsformel und Integraloperatoren

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein beschränktes (einfach zusammenhängendes) Gebiet mit polygonalem Lipschitz-Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und äußeren Normalenvektor \mathbf{n} . Gegeben sei die homogene Differentialgleichung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (3.7)$$

Mit der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung,

$$G(\mathbf{z}) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{z}| & d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{z}|} & d = 3, \end{cases} \quad (3.8)$$

gilt für Funktionen $u \in C^2(\overline{\Omega})$ welche (3.7) erfüllen die Darstellungsformel

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}, \mathbf{y}} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.9)$$

Eine analoge Darstellung ist auch für Außenraumprobleme gültig. Im Unendlichen muss noch ein gewisses Verhalten der Lösungen gefordert werden. Sei $\Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}$ und $u^{\text{ext}} \in C^2(\overline{\Omega}^{\text{ext}})$ erfülle

$$-\Delta u^{\text{ext}} = 0 \quad \text{in } \Omega^{\text{ext}}, \quad (3.10a)$$

$$u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} a \log |\mathbf{x}| + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) & d = 2, \\ \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) & d = 3, \end{cases} \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (3.10b)$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}, \mathbf{y}} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ext}}. \quad (3.11)$$

Die Darstellungsformeln (3.9) und (3.11) motivieren die Definition folgender Potentialoperatoren. Das *Einfachschichtpotential*

$$\tilde{\mathfrak{V}}\psi(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \text{für } \psi \in L^1(\Gamma) \text{ und } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma, \quad (3.12)$$

als auch das *Doppelschichtpotential*

$$\tilde{\mathfrak{K}}v(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n},\mathbf{y}}G(\mathbf{x} - \mathbf{y})v(\mathbf{y}) d\Gamma_{\mathbf{y}} \quad \text{für } v \in L^1(\Gamma) \text{ und } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma \quad (3.13)$$

können zu stetigen Operatoren zwischen Sobolevräumen erweitert werden. Das entsprechende Ergebnis findet sich für $d = 3$, z.B. in [SS11, Satz 3.1.16].

Lemma 3.2. *Sei $s \in [-1/2, 1/2]$. Dann können die formal in (3.12)–(3.13) definierten Operatoren zu stetigen, linearen Operatoren*

$$\tilde{\mathfrak{V}} : H^{-1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathfrak{K}} : H^{1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma) \quad (3.14)$$

erweitert werden. □

Wir reformulieren die Darstellungsformeln für schwache Lösungen mit Hilfe der soeben definierten Potentialoperatoren. Das nächste Resultat folgt dabei aus [SS11, Abschnitt 3.1] bzw. [McL00, Satz 7.12] und [McL00, Satz 8.9].

Satz 3.3. *Erfüllt $u \in H^1(\Omega)$ die homogene Laplace-Gleichung (3.7) im schwachen Sinne, dann gilt die Darstellungsformel*

$$u = \tilde{\mathfrak{V}}\gamma_1 u - \tilde{\mathfrak{K}}\gamma_0 u. \quad (3.15)$$

Erfüllt $u^{\text{ext}} \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ das homogene Außenraumproblem (3.10) im schwachen Sinne, dann gilt die Darstellungsformel

$$u^{\text{ext}} = \tilde{\mathfrak{K}}\gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} - \tilde{\mathfrak{V}}\gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}}. \quad (3.16)$$

□

Man kann Abklingbedingung (3.10b) für $d = 2$ noch weiter verallgemeinern. Der Beweis dazu benutzt die Eigenschaft

$$\tilde{\mathfrak{K}}1(\mathbf{x}) = \begin{cases} -1 & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega^{\text{ext}} \end{cases} \quad (3.17)$$

des Doppelschichtpotentials.

Korollar 3.4. *Erfüllt $u^{\text{ext}} \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ das homogene Laplaceproblem (3.10a) mit der Abklingbedingung*

$$u^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = b + \begin{cases} a \log |\mathbf{x}| + \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) & d = 2, \\ \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) & d = 3, \end{cases} \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3.18)$$

für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt die Darstellungsformel

$$u^{\text{ext}} = \tilde{\mathfrak{K}}\gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} - \tilde{\mathfrak{V}}\gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} + b. \quad (3.19)$$

Beweis. Definiere $v := u^{\text{ext}} - b$. Dann erfüllt v das homogene Außenraumproblem (3.10) im schwachen Sinne und Satz 3.3 ist anwendbar, d.h.

$$v = \tilde{\mathfrak{K}}\gamma_0^{\text{ext}}v - \tilde{\mathfrak{V}}\gamma_1^{\text{ext}}v.$$

Einsetzen von $v = u^{\text{ext}} - b$ und Ausnutzen von $\tilde{\mathfrak{K}}b(\mathbf{x}) = 0$ für $x \in \Omega^{\text{ext}}$ bzw. $\gamma_1^{\text{ext}}b = 0$ liefert das gewünschte Resultat. \square

Das Einfachschicht- und Doppelschichtpotential sind harmonisch. Deren Verhalten im Außenraum wird in folgendem Satz charakterisiert und folgt im Wesentlichen aus der Reihendarstellung durch Kugelflächenfunktionen, siehe [McL00, Theorem 8.8].

Satz 3.5. *Die Potentiale $u := \tilde{\mathfrak{V}}\psi$ bzw. $u := \tilde{\mathfrak{K}}v$ für $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ bzw. $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ erfüllen die Probleme (3.7) und (3.10) im schwachen Sinne. Speziell gilt*

$$|\tilde{\mathfrak{K}}v(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-(d-1)}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

Falls $d = 2$ und $\langle \phi, 1 \rangle_\Gamma = 0$, dann erfüllt das Einfachschichtpotential

$$|\tilde{\mathfrak{V}}\phi(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-(d-1)}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

\square

Die Anwendung des Spuroperators γ_0 und γ_1 auf $\tilde{\mathfrak{V}}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{K}}$ erlaubt die Definition folgender Randintegraloperatoren:

- Einfachschichtintegraloperator

$$\mathfrak{V} := \gamma_0\tilde{\mathfrak{V}}. \tag{3.20}$$

- Doppelschichtintegraloperator

$$\mathfrak{K} := \gamma_0\tilde{\mathfrak{K}} + \frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

- Adjungierter Doppelschichtintegraloperator

$$\mathfrak{K}' := \gamma_1\tilde{\mathfrak{V}} - \frac{1}{2}. \tag{3.22}$$

- Hypersingulärer Integraloperator

$$\mathfrak{W} := -\gamma_1\tilde{\mathfrak{K}}. \tag{3.23}$$

Wir fassen die wichtigsten Eigenschaften dieser Operatoren zusammen. Für detaillierte Beschreibungen sei etwa auf [Ste08a, Kapitel 6] bzw. [SS11, Kapitel 3] verwiesen.

Lemma 3.6. *Die Operatoren $\mathfrak{V}, \mathfrak{K}, \mathfrak{K}', \mathfrak{W}$ sind stetig und linear. Für alle $s \in [-1/2, 1/2]$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} : H^{-1/2+s}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2+s}(\Gamma), & \mathfrak{K}' : H^{-1/2+s}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2+s}(\Gamma), \\ \mathfrak{K} : H^{1/2+s}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2+s}(\Gamma), & \mathfrak{W} : H^{1/2+s}(\Gamma) &\rightarrow H^{-1/2+s}(\Gamma). \end{aligned}$$

\square

Die Operatoren $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ sind symmetrisch, d.h. für alle $\phi, \psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ bzw. alle $u, v \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt

$$\langle \psi, \mathfrak{V}\phi \rangle_{\Gamma} = \langle \phi, \mathfrak{V}\psi \rangle_{\Gamma} \quad \text{bzw.} \quad \langle \mathfrak{W}u, v \rangle_{\Gamma} = \langle \mathfrak{W}v, u \rangle_{\Gamma}. \quad (3.24)$$

Falls $d = 3$, dann gilt Elliptizität

$$\langle \phi, \mathfrak{V}\phi \rangle_{\Gamma} \geq c_{\mathfrak{V}} \|\phi\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } \phi \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad (3.25)$$

wobei die Konstante $c_{\mathfrak{V}}$ nur von Γ abhängt. Um im Fall $d = 2$ Elliptizität von \mathfrak{V} zu gewährleisten, kann z.B. die Skalierung $\text{diam}(\Omega) < 1$ gefordert werden, vgl. [Ste08a, Abschnitt 6.6].

Annahme 3.7. *Im Fall $d = 2$ nehmen wir an, dass $\text{diam}(\Omega) < 1$ ist. Dies kann immer durch Skalierung des Gebietes sichergestellt werden.*

Bemerkung 3.8. *Im Fall $d = 2$ kann Elliptizität (3.25) des Einfachschichtintegraloperators auch erreicht werden, wenn man die Fundamentallösung entsprechend skaliert. Die vorgestellte Analysis behält in beiden Fällen ihre Gültigkeit. \square*

Der hypersinguläre Integraloperator \mathfrak{W} ist positiv auf $H^{1/2}(\Gamma)$,

$$\langle \mathfrak{W}u, u \rangle_{\Gamma} \geq 0 \quad \text{für alle } u \in H^{1/2}(\Gamma), \quad (3.26)$$

und elliptisch auf $H_*^{1/2}(\Gamma) := \{v \in H^{1/2}(\Gamma) : \langle 1, v \rangle_{\Gamma} = 0\}$,

$$\langle \mathfrak{W}u, u \rangle_{\Gamma} \geq c_{\mathfrak{W}} \|u\|_{H_*^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } u \in H_*^{1/2}(\Gamma). \quad (3.27)$$

Der Kern von \mathfrak{W} als auch von $\frac{1}{2} + \mathfrak{K}$ besteht nur aus den konstanten Funktionen,

$$\ker(\mathfrak{W}) = \text{span}\{1\} = \ker(\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K}). \quad (3.28)$$

Weiters bezeichne \mathfrak{C} den Calderón Operator

$$\mathfrak{C} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \mathfrak{K} & \mathfrak{V} \\ \mathfrak{W} & \frac{1}{2} + \mathfrak{K}' \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Bildet man die Spur und die Konormalenableitung der Darstellungsformel (3.15) im Inneren, so ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix} = \mathfrak{C} \begin{pmatrix} \gamma_0 u \\ \gamma_1 u \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Ähnliches gilt auch für den Calderón Operator $\mathfrak{C}^{\text{ext}}$ im Außenraum,

$$\mathfrak{C}^{\text{ext}} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \mathfrak{K} & -\mathfrak{V} \\ -\mathfrak{W} & \frac{1}{2} - \mathfrak{K}' \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Bildet man die äußere Spur und äußere Normalenableitung der Darstellungsformel (3.16), dann erhält man

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} \\ \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} \end{pmatrix} = \mathfrak{C}^{\text{ext}} \begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} \\ \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

unter Zuhilfenahme der nachfolgenden Sprungeigenschaften der Integraloperatoren.

Satz 3.9 ([SS11, Satz 3.3.1]). *Für alle $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ gilt*

$$\begin{aligned} (\gamma_0 - \gamma_0^{\text{ext}})\tilde{\mathfrak{B}}\phi &= 0, & (\gamma_0 - \gamma_0^{\text{ext}})\tilde{\mathfrak{K}}v &= -v, \\ (\gamma_1 - \gamma_1^{\text{ext}})\tilde{\mathfrak{B}}\phi &= \phi, & (\gamma_1 - \gamma_1^{\text{ext}})\tilde{\mathfrak{K}}v &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichheiten sind dabei im Sinne von $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ zu verstehen. \square

Aus elementaren Eigenschaften folgt, dass die Calderón Operatoren Projektionen sind, vgl. [Ste08a, Abschnitt 6.6].

Lemma 3.10. *Die Calderón Operatoren \mathfrak{C} und $\mathfrak{C}^{\text{ext}}$ sind Projektionen, d.h. $\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}$ und $(\mathfrak{C}^{\text{ext}})^2 = \mathfrak{C}^{\text{ext}}$. \square*

3.2.2 Stark monotone Operatoren

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum mit Dualraum \mathcal{H}^* . Wir nennen einen Operator $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$

- *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $C_{\text{lip}} > 0$ existiert mit

$$\|\mathfrak{B}x - \mathfrak{B}y\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{lip}}\|x - y\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H}, \quad (3.33a)$$

- *stark monoton*, falls eine Konstante $C_{\text{mon}} > 0$ existiert mit

$$C_{\text{mon}}\|x - y\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \mathfrak{B}x - \mathfrak{B}y, x - y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H}. \quad (3.33b)$$

Hier bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}^* \times \mathcal{H}}$ die duale Klammer auf $\mathcal{H}^* \times \mathcal{H}$.

Das folgende Standardresultat findet sich in [Zei90, Abschnitt 25.4].

Satz 3.11 (Hauptsatz über stark monotone Operatoren). *Sei $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ ein stark monotoner und Lipschitz-stetiger Operator, d.h. es gelte (3.33). Dann folgt*

- (i) \mathfrak{B} ist bijektiv, und
- (ii) \mathfrak{B}^{-1} ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $1/C_{\text{mon}}$.

Für jedes lineare Funktional $F \in \mathcal{H}^*$ existiert daher eine eindeutige Lösung $x \in \mathcal{H}$ der variationellen Formulierung

$$\langle \mathfrak{B}x, y \rangle = F(y) \quad \text{für alle } y \in \mathcal{H}. \quad (3.34)$$

Darüber hinaus existiert für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$, eine eindeutige Lösung $x_h \in \mathcal{H}_h$, so dass

$$\langle \mathfrak{B}x_h, y_h \rangle = F(y_h) \quad \text{für alle } y_h \in \mathcal{H}_h, \quad (3.35)$$

und es gilt Quasi-Optimalität im Sinne des Céa-Lemmas

$$\|x - x_h\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{y_h \in \mathcal{H}_h} \|x - y_h\|_{\mathcal{H}} \quad (3.36)$$

mit der Konstante $C_{\text{Céa}} = C_{\text{lip}}/C_{\text{mon}}$. \square

Aus dem letzten Satz folgt direkt das Lemma von Lax-Milgram.

Korollar 3.12 (Lemma von Lax-Milgram). *Sei $b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und koerzive Bilinearform, d.h. es gelte*

$$|b(x, y)| \leq C_{\text{lip}} \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}} \quad \text{und} \quad C_{\text{mon}} \|x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq b(x, x) \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H}.$$

Dann besitzt die Formulierung

$$b(x, y) = F(y) \quad \text{für alle } y \in \mathcal{H} \quad \text{bzw.} \quad b(x_h, y_h) = F(y_h) \quad \text{für alle } y_h \in \mathcal{H}_h$$

für jedes $F \in \mathcal{H}^*$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathcal{H}$ bzw. $x_h \in \mathcal{H}_h$. Hier bezeichnet $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ einen abgeschlossenen Unterraum. Speziell gilt auch Quasi-Optimalität im Sinne von (3.36). \square

Zum Abschluss dieses Abschnittes geben wir noch die Annahmen an den Operator $\mathfrak{A} : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ aus dem Modellproblem (3.3) an. Der Operator \mathfrak{A} sei Lipschitz-stetig, d.h. es existiere eine Konstante c_{lip} so dass

$$\|\mathfrak{A}\nabla u - \mathfrak{A}\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq c_{\text{lip}} \|\nabla u - \nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \quad (3.37a)$$

für alle $u, v \in H^1(\Omega)$ gelte. Des weiteren sei \mathfrak{A} stark monoton im Sinne, dass eine Konstante $c_{\text{mon}} > 0$ existiert mit

$$c_{\text{mon}} \|\nabla u - \nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq \langle \mathfrak{A}\nabla u - \mathfrak{A}\nabla v, \nabla u - \nabla v \rangle_{\Omega} \quad (3.37b)$$

für alle $u, v \in H^1(\Omega)$. Für die Definition des Residualschätzers benötigen wir noch weitere Annahmen an \mathfrak{A} , welche wir in Kapitel 5 aufstellen.

3.3 Symmetrische Kopplung

Die symmetrische FEM-BEM Kopplung wurde unabhängig von COSTABEL [Cos88] und HAN [Han90] entwickelt und beruht auf der Verwendung aller vier im äußeren Calderón Operator $\mathfrak{C}^{\text{ext}}$ vorkommenden Integraloperatoren.

Da konstante Funktionen im Kern des Operators $\nabla(\cdot)$ liegen, ist es, wie sich zeigen wird, nicht möglich Lösbarkeit auf direktem Wege zu zeigen. In früheren Arbeiten [CS88, GH95] und Referenzen darin wurde, z.B., ein innerer Dirichlet-Rand $\Gamma_0 \subseteq \Omega$ benützt, der die Konstanten im Inneren fixiert, d.h. zu den Gleichungen (3.3) wird die zusätzliche Randbedingung

$$u = g \quad \text{auf } \Gamma_0 \quad \text{mit } g \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (3.38)$$

gestellt. Es sei angemerkt, dass solch eine Randbedingung in natürlicher Weise von externen Dirichlet-Randwertproblemen kommen. Für eine detaillierte Analysis zu Existenz und Eindeutigkeit im Fall der zusätzlichen Randbedingung (3.38) verweisen wir auf die Monographie [GH95], in dem auch nicht-symmetrische Kopplungsmethoden behandelt werden.

Die erste Arbeit, in welcher eindeutige Lösbarkeit der symmetrischen Kopplung ohne Dirichlet-Rand Γ_0 gezeigt wird, ist [CS95]. Die Autoren zeigen, dass die diskrete Variante

des (äußeren) symmetrischen Steklov-Poincaré Operators elliptisch ist, falls die Netzweite h hinreichend klein ist. In [AFP12] wurde schließlich noch bewiesen, dass die Annahme an die Netzweite h nicht benötigt wird, d.h. der diskrete Steklov-Poincaré Operator ist elliptisch, unabhängig vom Diskretisierungsparameter h .

Zuerst werden wir in Abschnitt 3.3.1 die variationelle Formulierung der symmetrischen Kopplung herleiten. Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, führen wir dann anhand der symmetrischen Kopplung das Prinzip der impliziten Stabilisierung vor. Zuletzt zeigen wir noch die eindeutige Lösbarkeit des stabilisierten Problems. Die vorgestellte Analysis benützt weder den Steklov-Poincaré Operator noch eine Annahme an die Netzweite h und kann daher als Vereinfachung von [CS95] bzw. [AFP12] gesehen werden.

3.3.1 Herleitung

Die erste Green'sche Formel für die Potentialgleichung (3.3a) im Inneren lautet

$$\langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_\Omega - \langle \mathfrak{A}\nabla u \cdot \mathbf{n}, \gamma_0 v \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Omega \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Einsetzen der Transmissionsbedingung (3.3d) für die Konormalenableitung liefert

$$\langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_\Omega - \langle \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}}, \gamma_0 v \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \phi_0, \gamma_0 v \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega). \quad (3.39)$$

Aufgrund von Gleichung (3.3b) und der Abklingbedingung (3.3e) erfüllt u^{ext} die Voraussetzungen von Satz 3.3 und daher gilt die Darstellungsformel (3.16),

$$u^{\text{ext}} = \tilde{\mathfrak{K}}\gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} - \tilde{\mathfrak{W}}\gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}}. \quad (3.40)$$

Aus dem Calderón-System (3.31) folgt

$$\begin{aligned} \gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} &= (\mathfrak{K} + \tfrac{1}{2})\gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} - \mathfrak{W}\gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}}, \\ \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} &= (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K}')\gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} - \mathfrak{W}\gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}}. \end{aligned}$$

Wir definieren $\phi := \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}}$ und setzen die Transmissionsbedingung (3.3c) für $\gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}}$ ein, was auf

$$\gamma_0 u - u_0 = (\mathfrak{K} + \tfrac{1}{2})(\gamma_0 u - u_0) - \mathfrak{W}\phi, \quad (3.41a)$$

$$\phi = (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K}')\phi - \mathfrak{W}\gamma_0 u + \mathfrak{W}u_0 \quad (3.41b)$$

führt. Im Folgenden werden wir — aufgrund der Übersichtlichkeit — u anstelle von $\gamma_0 u$ schreiben, falls die Bedeutung klar ist. Durch Einsetzen von (3.41b) in (3.39) und Testen von (3.41a) in $H^{-1/2}(\Gamma)$ bekommt man die variationelle Formulierung der symmetrischen Kopplung: Gesucht ist das Paar von Funktionen $\mathbf{u} = (u, \phi) \in \mathcal{H} := H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, so dass

$$\langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_\Omega + \langle \mathfrak{W}u, v \rangle_\Gamma + \langle (\mathfrak{K}' - \tfrac{1}{2})\phi, v \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \phi_0 + \mathfrak{W}u_0, v \rangle_\Gamma, \quad (3.42a)$$

$$\langle \psi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u + \mathfrak{W}\phi \rangle_\Gamma = \langle \psi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_\Gamma \quad (3.42b)$$

für alle $\mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H} = H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ gilt.

Ein Beweis für die Äquivalenz zwischen der variationellen Formulierung (3.42) und dem Modellproblem (3.3) findet sich in [CS95] und darin enthaltenen Referenzen. Der Vollständigkeit halber geben wir den Beweis des folgenden Resultats mit an.

Satz 3.13. [CS95, Satz 1] Das Modellproblem (3.3) ist mit der variationellen Formulierung (3.42) im folgendem Sinne äquivalent: Falls $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ Lösung von (3.3) ist, dann löst $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ mit $\phi := \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}}$ die variationelle Formulierung (3.42). Andererseits, falls $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ eine Lösung von (3.42) ist, dann löst $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ mit

$$u^{\text{ext}} := \tilde{\mathfrak{K}}(u - u_0) - \tilde{\mathfrak{V}}\phi$$

das Problem (3.3).

Beweis. Der erste Teil folgt bereits aus der Herleitung. Sei also $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ eine Lösung des variationellen Problems (3.42). Nach Satz 3.5 erfüllt

$$u^{\text{ext}} := \tilde{\mathfrak{K}}(u - u_0) - \tilde{\mathfrak{V}}\phi$$

Gleichung (3.3b) mit Abklingbedingung (3.3e). Man beachte, dass für $d = 2$ die Abklingbedingung (3.3e) aus (3.42a) mit $v = 1$ und der Kompatibilitätsbedingung (3.4) folgt. Aus den Definitionen der Randintegraloperatoren und den Sprungrelationen (Satz 3.9) folgt

$$\begin{pmatrix} \gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} \\ \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} \end{pmatrix} = \mathfrak{C}^{\text{ext}} \begin{pmatrix} u - u_0 \\ \phi \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Ein Vergleich von (3.42a) und der ersten Zeile von (3.43) liefert

$$\left(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}\right)(u - u_0) + \mathfrak{V}\phi = \gamma_0^{\text{ext}} u^{\text{ext}} - \left(\frac{1}{2} + \mathfrak{K}\right)(u - u_0) + \mathfrak{V}\phi$$

und damit die Transmissionsbedingung (3.3c)

$$u - u^{\text{ext}} = u_0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Durch Einsetzen der zweiten Zeile von (3.43) in (3.42a) kommen wir auf

$$\langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_{\Omega} - \langle \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} + \phi_0, v \rangle_{\Gamma} = \langle f, v \rangle_{\Omega} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Für $v \in H_0^1(\Omega)$ ist das äquivalent mit (3.42a) und damit folgt auch $\mathfrak{A}\nabla u \cdot \mathbf{n} = \gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} + \phi_0$. \square

Im weiteren Verlauf bezeichne \mathcal{X}_h einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{X} := H^1(\Omega)$ und \mathcal{Y}_h einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{Y} := H^{-1/2}(\Gamma)$. Damit ist also auch $\mathcal{H}_h := \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H} = H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Speziell kann natürlich $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}$ in der folgenden Analysis gewählt werden.

Bemerkung 3.14. (i) Angenommen \mathfrak{A} ist linear und symmetrisch. Durch Multiplikation der Gleichung (3.42b) mit (-1) ergeben die linken Seiten der Gleichungen (3.42) ein symmetrisches System. Daher stammt auch der Name dieser Kopplungsmethode.
(ii) Damit (3.40) für $d = 2$ die richtige Abklingbedingung (3.3e) erfüllt, muss

$$\langle \phi, 1 \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (3.44)$$

gelten. Wählt man $v = 1$ in (3.42a), so erhält man

$$\langle \mathfrak{W}u, 1 \rangle_\Gamma + \langle (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi, 1 \rangle_\Gamma = \langle f, 1 \rangle_\Omega + \langle \phi_0, 1 \rangle_\Gamma.$$

Aus der Symmetrie von \mathfrak{W} und (3.28) folgt

$$-\langle \phi, 1 \rangle_\Gamma = \langle f, 1 \rangle_\Omega + \langle \phi_0, 1 \rangle_\Gamma.$$

Die Kompatibilitätsbedingung (3.4) impliziert daher (3.44). Falls dasselbe Abklingverhalten auch im Diskreten gelten sollte, dann erlaubt es die Annahme

$$1 \in \mathcal{X}_h$$

wie oben vorzugehen. Wir merken an, dass die nachfolgende Analysis unabhängig von dieser Annahme ist. \square

Wir definieren den Operator $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $F \in \mathcal{H}^*$ über

$$\langle \mathfrak{B}u, v \rangle := \langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_\Omega + \langle \mathfrak{W}u, v \rangle_\Gamma + \langle (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi, v \rangle_\Gamma + \langle \psi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})u + \mathfrak{W}\phi \rangle_\Gamma, \quad (3.45a)$$

$$F(v) := \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \phi_0 + \mathfrak{W}u_0, v \rangle_\Gamma + \langle \psi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_\Gamma \quad (3.45b)$$

für alle $u = (u, \phi), v = (v, \psi) \in \mathcal{H}$. Dann sind die Gleichungen (3.42) äquivalent zu: Finde $u \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle \mathfrak{B}u, v \rangle = F(v) \quad \text{für alle } v \in \mathcal{H}, \quad (3.46)$$

wie sich leicht verifizieren lässt, vgl. [CS95, Korollar 1].

Um zum Hauptresultat dieses Abschnittes zu gelangen, brauchen wir noch folgende Annahme, welche besagt, dass der zugrunde liegende Raum \mathcal{Y}_h genug Funktionen enthält. Diese Aussage ist in ähnlicher Form bereits in [Say09] zu finden.

Annahme 3.15. *Es existiert $\xi \in \mathcal{Y}_h$ mit*

$$\langle \xi, 1 \rangle_\Gamma \neq 0.$$

Bemerkung 3.16. *Sei \mathcal{T}_h^Γ eine Triangulierung von Γ , dann ist Annahme 3.15 erfüllt, falls $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_h^\Gamma) \subseteq \mathcal{Y}_h$ gilt. In dem Fall kann z.B. $\xi = 1$ gewählt werden. Wenn $\mathcal{Y}_h = \mathcal{Y}$ ist Annahme 3.15 trivialerweise erfüllt. \square*

Satz 3.17. *Unter der Annahme 3.15 besitzt die (diskrete) Formulierung*

$$\langle \mathfrak{B}u_h, v_h \rangle = F(v_h) \quad \text{für alle } v_h \in \mathcal{H}_h \quad (3.47)$$

eine eindeutige Lösung $u_h \in \mathcal{H}_h$ mit $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossen. Speziell hat also (3.46) eine eindeutige Lösung $u \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{v_h \in \mathcal{H}_h} \|u - v_h\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.48)$$

wobei $C_{\text{Céa}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω und dem gewählten $\xi \in \mathcal{Y}_h$ aus Annahme 3.15 abhängt.

Des weiteren ist der Operator \mathfrak{B} bi-Lipschitz-stetig

$$C_{\text{bilip}}^{-1} \|u_h - v_h\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathfrak{B}u_h - \mathfrak{B}v_h\|_{\mathcal{H}_h^*} \leq C_{\text{bilip}} \|u_h - v_h\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } u_h, v_h \in \mathcal{H}_h. \quad (3.49)$$

Die Konstante $C_{\text{bilip}} > 0$ hängt nur von \mathfrak{A}, Ω , und dem gewählten $\xi \in \mathcal{Y}_h$ aus Annahme 3.15 ab.

Bemerkung 3.18. (i) Existiert für eine Folge von Unterräumen $(\mathcal{Y}_h)_{h>0}$ ein (fixes) Element $\xi \in \bigcap_{h>0} \mathcal{Y}_h$, welches Annahme 3.15 erfüllt, dann folgt dass $C_{\text{Céa}}$ in Satz 3.17 unabhängig von \mathcal{Y}_h ist. Dies ist wichtig, um Konvergenzaussagen über den Galerkin-Fehler $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{H}}$ treffen zu können.

(ii) Aus (3.49) folgt bi-Lipschitz-Stetigkeit auf ganz \mathcal{H}

$$C_{\text{bilip}}^{-1} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathfrak{B}\mathbf{u} - \mathfrak{B}\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{bilip}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

wobei die Konstante C_{bilip} nur von Ω , und \mathfrak{A} abhängt. □

3.3.2 Implizite Stabilisierung

Zunächst beachte man, dass der Operator \mathfrak{B} nicht stark monoton sein kann, da

$$\langle \mathfrak{B}(1, 0) - \mathfrak{B}(0, 0), (1, 0) \rangle = \langle \mathfrak{A}\nabla 1 - \mathfrak{A}\nabla 0, \nabla 1 \rangle_{\Omega} + \langle \mathfrak{W}1, 1 \rangle_{\Gamma} = 0$$

gilt. Man sieht also, dass konstante Funktionen im Innenraum Ω Probleme bereiten. Um dies zu umgehen, definieren wir einen zu \mathfrak{B} äquivalenten Operator $\tilde{\mathfrak{B}}$, indem wir passende Terme, welche die Kopplungsgleichung (3.42b) erfüllen, zu \mathfrak{B} addieren.

Satz 3.19. Mit ξ aus Annahme 3.15 sind der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $\tilde{F} \in \mathcal{H}^*$, definiert als

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u + \mathfrak{V}\phi \rangle_{\Gamma} \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v + \mathfrak{V}\psi \rangle_{\Gamma}, \quad (3.50a)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{v}) := F(\mathbf{v}) + \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_{\Gamma} \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v + \mathfrak{V}\psi \rangle_{\Gamma} \quad (3.50b)$$

für alle $\mathbf{u} = (u, \phi), \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H}$, mit \mathfrak{B} und F im folgendem Sinne äquivalent: Das Paar $\mathbf{u}_h = (u_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$ ist eine Lösung von Problem (3.47), dann und nur dann falls es eine Lösung von

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle = \tilde{F}(\mathbf{v}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h \quad (3.51)$$

ist.

Beweis. Schritt 1: Sei $\mathbf{u}_h = (u_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$ eine Lösung von (3.47). Wir wählen $\mathbf{v}_h = (0, \xi) \in \mathcal{H}_h$ als Testfunktion in (3.47) und bekommen mit der Definition von \mathfrak{B} und $F(0, \xi) = \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_{\Gamma}$

$$0 = \langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_h, (0, \xi) \rangle - F(0, \xi) = \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})(u_h - u_0) + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_{\Gamma}.$$

Daher gilt $\langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v_h + \mathfrak{V}\psi_h \rangle_{\Gamma} \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})(u_h - u_0) + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_{\Gamma} = 0$ für alle $\mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h$, was äquivalent zu

$$\langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v_h + \mathfrak{V}\psi_h \rangle_{\Gamma} \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_{\Gamma} = \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v_h + \mathfrak{V}\psi_h \rangle_{\Gamma} \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_{\Gamma}$$

für alle $\mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h$ ist. Die Definitionen von $\tilde{\mathfrak{B}}$ und \tilde{F} implizieren nun, dass $\mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_h$ auch die stabilisierte Gleichung (3.51) löst.

Schritt 2: Zum Beweis der anderen Richtung sei $\mathbf{u}_h = (u_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$ eine Lösung von (3.51). Wir wählen $\mathbf{v}_h = (0, \xi) \in \mathcal{H}_h$ als Testfunktion in (3.51) und bekommen

$$\begin{aligned} F(0, \xi) + F(0, \xi) \langle \xi, \mathfrak{V}\xi \rangle_\Gamma &= \langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}_h, (0, \xi) \rangle \\ &= \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma + \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma \langle \xi, \mathfrak{V}\xi \rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

was mit $F(0, \xi) = \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_\Gamma$ äquivalent zu

$$\langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})(u_h - u_0) + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma (1 + \langle \xi, \mathfrak{V}\xi \rangle_\Gamma) = 0$$

ist. Aus der $H^{-1/2}(\Gamma)$ -Elliptizität von \mathfrak{V} folgt $1 + \langle \xi, \mathfrak{V}\xi \rangle_\Gamma > 0$ und daher $\langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma = \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_\Gamma$. Zusammen mit den Definitionen von $\mathfrak{B}, \tilde{\mathfrak{B}}$ und F, \tilde{F} gilt somit

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle - \langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle &= \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v_h + \mathfrak{V}\psi_h \rangle_\Gamma \\ &= \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_\Gamma \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v_h + \mathfrak{V}\psi_h \rangle_\Gamma = \tilde{F}(\mathbf{v}_h) - F(\mathbf{v}_h). \end{aligned}$$

Aus (3.51) folgt schlussendlich, dass $\mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_h$ auch eine Lösung von (3.47) ist. \square

Bemerkung 3.20. In Satz 3.19 kann ξ aus Annahme 3.15 durch ein beliebiges $\tilde{\xi} \in \mathcal{Y}_h$ ersetzt werden. Der Beweis bleibt dabei gleich. \square

3.3.3 Beweis der Lösbarkeit

Für den Beweis von Satz 3.17 zeigen wir zuerst eindeutige Lösbarkeit des stabilisierten Problems (3.51). Dazu benötigen wir folgendes Lemma, welches mit Hilfe eines Kompaktheitsarguments bewiesen wird.

Lemma 3.21. Sei $g \in \mathcal{H}^*$ ein lineares Funktional mit $g(1, 0) \neq 0$. Für $\mathbf{u} = (u, \phi) \in \mathcal{H}$ definiere $\|\mathbf{u}\|$ als

$$\|\mathbf{u}\|^2 := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle \phi, \mathfrak{V}\phi \rangle + |g(1, 0)|^2.$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine zu $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ äquivalente Norm, wobei die Normäquivalenzkonstanten in $\|\cdot\| \simeq \|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ nur von Ω und g abhängen.

Beweis. Klarerweise gilt $\|\mathbf{u}\| \lesssim \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}$. Um die andere Abschätzung zu zeigen, argumentieren wir mit einem Widerspruch und nehmen an, dass $\|\mathbf{u}_n\|_{\mathcal{H}} > n\|\mathbf{u}_n\|$ für gewisse $\mathbf{u}_n \in \mathcal{H}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir definieren $\mathbf{v}_n := \mathbf{u}_n / \|\mathbf{u}_n\|_{\mathcal{H}}$. Offensichtlich gilt

$$\|\mathbf{v}_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{v}_n\| < \frac{1}{n}.$$

Aus der Definition von $\|\cdot\|$ und der Elliptizität von \mathfrak{V} folgt sofort

$$\nabla v_n \rightarrow \mathbf{0} \text{ in } L^2(\Omega) \quad \text{und} \quad \psi_n \rightarrow 0 \text{ in } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Beschränktheit von $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} erlaubt es uns eine (schwach) konvergente Teilfolge $(v_{n_\ell}, \psi_{n_\ell}) \rightharpoonup (v, \psi)$ zu extrahieren. Aus starker Konvergenz der ψ_n folgt sofort $\psi = 0$. Die kompakte Inklusion $H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ impliziert $v_{n_\ell} \rightarrow v$ in $L^2(\Omega)$. Weiters folgt aus schwacher Unterhalb-Stetigkeit $\|(v, \psi)\| = 0$ und daraus $\nabla v = \mathbf{0}$ bzw. $g(v, 0) = 0$. Daher ist v konstant und nach der Definition von g folgt $v = 0$. Also gilt $v_{n_\ell} \rightarrow 0$ in $H^1(\Omega)$ und insgesamt $(v_{n_\ell}, \psi_{n_\ell}) \rightarrow (0, 0)$ in \mathcal{H} , was aber $\|(v_n, \psi_n)\|_{\mathcal{H}} = 1$ widerspricht. \square

Satz 3.22. *Unter der Annahme 3.15 ist der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ stark monoton*

$$C_{\text{mon}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

und Lipschitz-stetig

$$\|\tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{lip}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

wobei die Konstanten $C_{\text{mon}}, C_{\text{lip}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω und ξ aus Annahme 3.15 abhängen.

Die Gleichung (3.51) besitzt für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_h$. Speziell hat (3.51) für $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}} \quad (3.52)$$

mit $C_{\text{Céa}} = C_{\text{lip}}/C_{\text{mon}}$.

Beweis. Wir brauchen nur Lipschitz-Stetigkeit und starke Monotonie von $\tilde{\mathfrak{B}}$ zeigen. Die restlichen Behauptungen folgen aus dem Hauptsatz über stark monotone Operatoren, siehe Satz 3.11. Lipschitz-Stetigkeit von $\tilde{\mathfrak{B}}$ folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit (3.37a) von \mathfrak{A} und der Stetigkeit der Randintegraloperatoren. Die Lipschitz-Konstante C_{lip} hängt dabei nur von c_{lip}, Ω und ξ aus Annahme 3.15 ab.

Seien $\mathbf{u} = (u, \phi), \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H}$ gegeben. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathfrak{A}\nabla u - \mathfrak{A}\nabla v, \nabla u - \nabla v \rangle_{\Omega} + \langle \mathfrak{W}(u - v), u - v \rangle_{\Gamma} \\ &\quad + \langle (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})(\phi - \psi), u - v \rangle_{\Gamma} + \langle \phi - \psi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})(u - v) + \mathfrak{W}(\phi - \psi) \rangle_{\Gamma} \\ &\quad + |\langle \xi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})(u - v) + \mathfrak{W}(\phi - \psi) \rangle_{\Gamma}|^2 \end{aligned}$$

Aus starker Monotonie (3.37b) von \mathfrak{A} und Positivität (3.26) von \mathfrak{W} folgt mit $\mathbf{w} = (w, \chi) = (u - v, \phi - \psi)$

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \geq c_{\text{mon}} \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \langle \chi, \mathfrak{W}\chi \rangle_{\Gamma} + |\langle \xi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})w + \mathfrak{W}\chi \rangle_{\Gamma}|^2.$$

Definiere das lineare Funktional $g \in \mathcal{H}^*$ als $g(w, \chi) := \langle \xi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})w + \mathfrak{W}\chi \rangle_{\Gamma}$ für alle $(w, \chi) \in \mathcal{H}$. Es gilt $(\frac{1}{2} - \mathfrak{K})1 = 1$ aufgrund von (3.28). Somit ist nach Annahme 3.15 $g(1, 0) \neq 0$ und wir können Lemma 3.21 anwenden. Insgesamt erhalten wir also

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \geq C_{\text{mon}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

wobei $C_{\text{mon}} > 0$ nur von c_{mon}, Ω und ξ aus Annahme 3.15 abhängt. \square

Beweis von Satz 3.17. Der erste Teil folgt aus Satz 3.22 und der Äquivalenz 3.19. Es bleibt noch die bi-Lipschitz-Stetigkeit von \mathfrak{B} zu zeigen. Die obere Abschätzung in (3.49) folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit von \mathfrak{A} und der Stetigkeit der Randintegraloperatoren. Für die untere Abschätzung verwenden wir die Definition der Dualnorm

$$\|\mathfrak{B}\mathbf{u}_h - \mathfrak{B}\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}_h^*} = \sup_{\mathbf{w}_h = (w_h, \chi_h) \in \mathcal{H}_h \setminus (0,0)} \frac{\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_h - \mathfrak{B}\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \rangle}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{H}}} \quad (3.53)$$

mit $\mathbf{u}_h = (u_h, \phi_h)$, $\mathbf{v}_h = (v_h, \psi_h) \in \mathcal{H}_h$. Wir wählen

$$\mathbf{w}_h := \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h + (0, \xi) \langle \xi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})(u_h - v_h) + \mathfrak{V}(\phi_h - \psi_h) \rangle_\Gamma. \quad (3.54)$$

in (3.53). Aus $\mathbf{w}_h = (0, 0)$ folgt $u_h - v_h = 0$ und

$$\phi_h - \psi_h + \xi \langle \xi, \mathfrak{V}(\phi_h - \psi_h) \rangle_\Gamma = 0. \quad (3.55)$$

Weiters ist dann $\langle \xi, \mathfrak{V}(\phi_h - \psi_h) \rangle_\Gamma + \langle \xi, \mathfrak{V}\xi \rangle_\Gamma \langle \xi, \mathfrak{V}(\phi_h - \psi_h) \rangle_\Gamma = 0$ und aus Elliptizität von \mathfrak{V} schließen wir $\langle \xi, \mathfrak{V}(\phi_h - \psi_h) \rangle_\Gamma = 0$. Mit (3.55) gilt $\phi_h - \psi_h = 0$. Somit ist also $\mathbf{w}_h = (0, 0)$ äquivalent zu $\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h = (0, 0)$. Aus der Definition (3.54) und Satz 3.22 ergibt sich

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}_h - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h \rangle \gtrsim \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Zusammen mit (3.53) und $\|\mathbf{w}_h\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}}$ folgt die untere Abschätzung in (3.49). \square

3.4 Johnson-Nédélec Kopplung

In diesem Abschnitt behandeln wir die Johnson-Nédélec Kopplung [ZKB79, JN80], welche in der Literatur auch öfters (direkte) Eingleichungskopplung genannt wird, da nur eine Gleichung des Calderón-Systems benutzt wird. Die ersten Stabilitätsaussagen, siehe [JN80], beruhen auf der Kompaktheit des Operators \mathfrak{K} . Dies bringt zwei Nachteile mit sich: Zum einen wird gefordert, dass Γ glatt (und somit \mathfrak{K} kompakt) ist, was für Standard-FEM bzw. -BEM nicht optimal ist. Zum anderen gelten die Aussagen nur für eine hinreichend kleine Netzweite $h < h_0$. Experimentell beobachtet man aber, dass diese Annahme in der Praxis nicht notwendig ist, vgl. [CES91].

Als bahnbrechend in diesem Zusammenhang ist die Arbeit [Say09] zu nennen, in welcher als Erstes für das Laplace-Transmissionsproblem bewiesen wurde, dass die Johnson-Nédélec Kopplung auf polygonalen Gebieten wohldefiniert ist. Der Beweis nutzt stark Linearität aus und zeigt Stabilität des adjungierten Problems. In [GHS12] wurde der Beweis für Yukawa Potentiale vereinfacht und auch auf spezielle Probleme in der linearen Elastostatik angewendet.

Ein etwas anderer Ansatz wurde in [Ste11] entwickelt. Dort wird eine (explizite) Stabilisierung eingeführt, die auf ein (im Kontinuierlichen) äquivalentes Problem führt. Es wird gezeigt, dass dieses äquivalente Problem (mit linearem Operator \mathfrak{A} im Innenraum Ω) unter der Voraussetzung $c_{\text{mon}} > 1/4$ elliptisch ist. Dabei ist c_{mon} der kleinste Eigenwert von \mathfrak{A} . Diese Bedingung wurde dann in [OS13b] weiter verbessert auf $c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{K}}/4$, wobei $c_{\mathfrak{K}} \in [1/2, 1)$ die Kontraktionskonstante von \mathfrak{K} bezeichnet, siehe [SW01]. Ein weiteres wichtiges Ergebnis aus [OS13b] ist, dass diese Bedingung auch scharf ist, d.h. für $c_{\text{mon}} \leq c_{\mathfrak{K}}/4$ wird das Gleichungssystem indefinit. Nachteile oben genannter Stabilisierung sind zum einen, dass Äquivalenz zum originalen Problem nur am kontinuierlichen Level gilt und zum anderen, dass auf jedem diskreten Level eine zusätzliche Randintegralgleichung gelöst werden muss. Für eine Analysis von weiteren Anwendungen der Johnson-Nédélec Kopplung sei noch auf [OS13a] verwiesen.

Im Folgenden präsentieren wir, wie man die im Abschnitt 3.3.2 eingeführte implizite Stabilisierung auf die Johnson-Nédélec Kopplung anwenden kann. Ein Vorteil besteht zum einen darin, dass die Äquivalenz zum originalen Problem auch am diskreten Level gilt und zum anderen, dass keine zusätzlichen Gleichungen gelöst werden müssen. Weiters behandeln wir auch Nichtlinearitäten und erhalten dabei die gleichen Stabilitätsresultate wie [Say09, GHS12, Ste11, OS13b]. Wir merken an, dass die Idee der impliziten Stabilisierung und die zugehörigen Beweise von [Say09, GHS12, Ste11, OS13b] inspiriert wurden.

3.4.1 Herleitung

Aus Gleichung (3.3b) mit Abklingbedingung (3.3e) folgt nach Satz 3.3

$$u^{\text{ext}} = \tilde{\mathfrak{K}}\gamma_0^{\text{ext}}u^{\text{ext}} - \tilde{\mathfrak{V}}\gamma_1^{\text{ext}}u^{\text{ext}}.$$

Im Gegensatz zur symmetrischen Kopplung verwendet man nur die erste Gleichung im Calderón System (3.31). Mit der Definition $\phi := \gamma_1^{\text{ext}}u^{\text{ext}}$ und der Sprungbedingung (3.3c) für die Spuren folgt

$$\mathfrak{V}\phi + \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}\right)u = \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}\right)u_0. \quad (3.56)$$

Wie bei der symmetrischen Kopplung liefert die erste Green'sche Formel und die Transmissionsbedingung (3.3d) Gleichung (3.39). Durch Testen von (3.56) in $H^{-1/2}(\Gamma)$ kommt man auf die variationelle Formulierung der Johnson-Nédélec Kopplung: Finde $\mathbf{u} = (u, \phi) \in \mathcal{H} := H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, so dass

$$\langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_\Omega - \langle \phi, v \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \phi_0, v \rangle_\Gamma, \quad (3.57a)$$

$$\langle \psi, \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}\right)u + \mathfrak{V}\phi \rangle_\Gamma = \langle \psi, \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}\right)u_0 \rangle_\Gamma \quad (3.57b)$$

für alle $\mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H} = H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ gilt.

Der Beweis für die Äquivalenz zwischen variationeller Formulierung (3.57) der Johnson-Nédélec Kopplung und Modellproblem (3.3) ist analog zu dem Beweis von Satz 3.13.

Satz 3.23. *Das Modellproblem (3.3) und die variationelle Formulierung (3.57) sind im folgenden Sinne äquivalent: Falls $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ Lösung von (3.3) ist, dann löst $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ mit $\phi = \gamma_1^{\text{ext}}u^{\text{ext}}$ die variationelle Formulierung (3.57). Andererseits, falls $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ eine Lösung von (3.57) ist, dann löst $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ mit*

$$u^{\text{ext}} := \tilde{\mathfrak{K}}(u - u_0) - \tilde{\mathfrak{V}}\phi$$

das Problem (3.3). □

Man beachte dass der zweite Punkt in Bemerkung 3.14 entsprechend für die Johnson-Nédélec Kopplung gilt.

Wir definieren den Operator $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $F \in \mathcal{H}^*$ über

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_\Omega - \langle \phi, v \rangle_\Gamma + \langle \psi, \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}\right)u + \mathfrak{V}\phi \rangle_\Gamma \quad (3.58a)$$

$$F(\mathbf{v}) := \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \phi_0, v \rangle_\Gamma + \langle \psi, \left(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}\right)u_0 \rangle_\Gamma \quad (3.58b)$$

für alle $\mathbf{u} = (u, \phi), \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H}$. Dann sind die Gleichungen (3.57) äquivalent zu: Finde $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = F(\mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \quad (3.59)$$

wie sich leicht verifizieren lässt, vgl. [CS95, Korollar 1] für die symmetrische Kopplung.

Um Lösbarkeit von (3.59) zeigen zu können, brauchen wir noch eine zusätzliche Annahme an die Monotoniekonstante c_{mon} des Operators \mathfrak{A} , welche die Kontraktionskonstante $c_{\mathfrak{R}} \in [1/2, 1)$ des Doppelschichtintegraloperators, siehe [SW01], beinhaltet. Man beachte, dass das kontinuierliche Problem (3.59) aber immer eine (eindeutige) Lösung besitzt. In [OS13b] wird gezeigt, dass das dort betrachtete System indefinit wird. Dies wird in Lemma 3.33 noch genauer untersucht. Die folgende Annahme stammt aus [OS13b] für einen symmetrischen, linearen Operator \mathfrak{A} und kann, wie im Folgenden gezeigt wird, auch für stark monotone Operatoren verwendet werden.

Annahme 3.24. *Bezeichne mit $c_{\mathfrak{R}} \in [1/2, 1)$ die Kontraktionskonstante des Doppelschichtintegraloperators \mathfrak{R} . Es gelte*

$$c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{R}}/4,$$

wobei c_{mon} die Monotoniekonstante des stark monotonen und Lipschitz-stetigen Operators \mathfrak{A} ist.

Satz 3.25. *Unter der Annahme 3.15 und Annahme 3.24 besitzt die (diskrete) Formulierung*

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle = F(\mathbf{v}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h \quad (3.60)$$

eine eindeutige Lösung $\mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_h$ mit $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossen. Speziell hat also (3.59) eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.61)$$

wobei $C_{\text{Céa}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω und dem gewählten $\xi \in \mathcal{Y}_h$ aus Annahme 3.15 abhängt.

Des Weiteren ist der Operator \mathfrak{B} bi-Lipschitz-stetig

$$C_{\text{bilip}}^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathfrak{B}\mathbf{u}_h - \mathfrak{B}\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}_h^*} \leq C_{\text{bilip}} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h. \quad (3.62)$$

Die Konstante $C_{\text{bilip}} > 0$ hängt nur von \mathfrak{A}, Ω , und dem gewählten $\xi \in \mathcal{Y}_h$ aus Annahme 3.15 ab.

3.4.2 Implizite Stabilisierung

Wir gehen wie in Abschnitt 3.3.2 vor und bemerken, dass aufgrund von

$$\langle \mathfrak{B}(1, 0) - \mathfrak{B}(0, 0), (1, 0) \rangle = \langle \mathfrak{A}\nabla 1 - \mathfrak{A}\nabla 0, \nabla 1 \rangle_{\Omega} = 0$$

der Operator \mathfrak{B} nicht stark monoton sein kann. Wir benützen wiederum die zweite Kopplungsgleichung zum Stabilisieren von \mathfrak{B} . Der Beweis des folgenden Resultats folgt analog zum Satz 3.19.

Satz 3.26. Mit ξ aus Annahme 3.15 sind der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $\tilde{F} \in \mathcal{H}^*$, definiert als

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u + \mathfrak{W}\phi \rangle_{\Gamma} \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v + \mathfrak{W}\psi \rangle_{\Gamma}, \quad (3.63a)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{v}) := F(\mathbf{v}) + \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})u_0 \rangle_{\Gamma} \langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})v + \mathfrak{W}\psi \rangle_{\Gamma} \quad (3.63b)$$

für alle $\mathbf{u} = (u, \phi), \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H}$, mit \mathfrak{B} und F im folgendem Sinne äquivalent: Das Paar $\mathbf{u}_h = (u_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$ ist eine Lösung von Problem (3.60), dann und nur dann falls es eine Lösung von

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle = \tilde{F}(\mathbf{v}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h \quad (3.64)$$

ist. □

3.4.3 Beweis der Lösbarkeit

Satz 3.27. Unter der Annahme 3.15 und Annahme 3.24 ist der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ stark monoton

$$C_{\text{mon}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

und Lipschitz-stetig

$$\|\tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{lip}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

wobei die Konstanten $C_{\text{mon}}, C_{\text{lip}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω und ξ aus Annahme 3.15 abhängen.

Die Gleichung (3.64) besitzt für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_h$. Speziell hat (3.64) für $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}} \quad (3.65)$$

mit $C_{\text{Céa}} = C_{\text{lip}}/C_{\text{mon}}$.

Beweis. Wir brauchen nur Lipschitz-Stetigkeit und starke Monotonie von $\tilde{\mathfrak{B}}$ zeigen. Die restlichen Behauptungen folgen aus dem Hauptsatz über stark monotone Operatoren, siehe Satz 3.11. Lipschitz-Stetigkeit von $\tilde{\mathfrak{B}}$ folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit (3.37a) von \mathfrak{A} und der Stetigkeit der Randintegraloperatoren. Die Lipschitz-Konstante C_{lip} hängt dabei nur von c_{lip}, Ω und ξ aus Annahme 3.15 ab.

Für den Beweis der starken Monotonie des Operators $\tilde{\mathfrak{B}}$ benützen wir die Analysis aus [OS13b]. Sei $\mathfrak{S} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ der innere Steklov-Poincaré Operator, definiert als

$$\mathfrak{S} := \mathfrak{W}^{-1}(\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K}).$$

Aus der Abschätzung

$$\|(\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K})w\|_{\mathfrak{W}^{-1}}^2 \leq c_{\mathfrak{K}} \langle \mathfrak{S}w, w \rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } w \in H^{1/2}(\Gamma)$$

von [OS13b], folgt

$$\langle \chi, (\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K})w \rangle_{\Gamma} \leq \|(\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K})w\|_{\mathfrak{Y}^{-1}} \|\chi\|_{\mathfrak{Y}} \leq \sqrt{c_{\mathfrak{K}}} \langle \mathfrak{S}w, w \rangle_{\Gamma} \|\chi\|_{\mathfrak{Y}} \quad \text{für alle } \mathbf{w} = (w, \chi) \in \mathcal{H}. \quad (3.66)$$

Für beliebige $w \in H^1(\Omega)$, definieren wir die Zerlegung

$$w^0 := w - w^{\text{D}}, \quad (3.67)$$

mit der eindeutigen schwachen Lösung $w^{\text{D}} \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} -\Delta w^{\text{D}} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ w^{\text{D}} &= w \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Klarerweise gilt $\gamma_0(w^0) = 0$ als auch die Orthogonalität $\langle \nabla w^{\text{D}}, \nabla w^0 \rangle_{\Omega} = 0$. Daraus folgt dann

$$\|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \|\nabla w^{\text{D}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2. \quad (3.68)$$

Weiters ist $\gamma_1 w^{\text{D}} = \mathfrak{S}w^{\text{D}}$ und die erste Green'sche Formel zusammen mit $\gamma_0 w^{\text{D}} = \gamma_0 w$ liefert

$$\|\nabla w^{\text{D}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 = \langle \gamma_1 w^{\text{D}}, w^{\text{D}} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathfrak{S}w^{\text{D}}, w^{\text{D}} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathfrak{S}w, w \rangle_{\Gamma}. \quad (3.69)$$

Wir müssen zeigen, dass für alle $\mathbf{u} = (u, \phi), \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H}$

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \geq c_{\text{mon}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}^2$$

gilt. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir $\mathbf{w} := (w, \chi) := (u - v, \phi - \psi)$. Aus der starken Monotonie (3.37b) von \mathfrak{A} folgt

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathfrak{A}\nabla u - \mathfrak{A}\nabla v, w \rangle_{\Omega} - \langle \chi, w \rangle_{\Gamma} + \langle \chi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})w + \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma} \\ &\quad + |\langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})w + \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma}|^2 \\ &\geq c_{\text{mon}} \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 - \langle \chi, (\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K})w \rangle_{\Gamma} + \langle \chi, \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma} + |\langle \xi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})w + \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma}|^2 \\ &=: I_1 - I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Wir benützen die Zerlegung (3.67) für $w := w^0 + w^{\text{D}}$. Es folgt mit (3.68)

$$I_1 = c_{\text{mon}} (\|\nabla w^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w^{\text{D}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2).$$

Mit der Young-Ungleichung $2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ schließen wir aus (3.66) und (3.69)

$$I_2 \leq \sqrt{c_{\mathfrak{K}}} \langle \mathfrak{S}w, w \rangle_{\Gamma} \|\chi\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{\delta}{2} c_{\mathfrak{K}} \langle \mathfrak{S}w, w \rangle_{\Gamma} + \frac{\delta^{-1}}{2} \langle \chi, \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma} = \frac{\delta}{2} c_{\mathfrak{K}} \|w^{\text{D}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta^{-1}}{2} \langle \chi, \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &\geq c_{\text{mon}} \|\nabla w^0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (c_{\text{mon}} - \frac{\delta}{2}) \|\nabla w^{\text{D}}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1 - \frac{\delta^{-1}}{2}) \langle \chi, \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma} \\ &\geq (c_{\text{mon}} - \frac{\delta}{2}) \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + (1 - \frac{\delta^{-1}}{2}) \langle \chi, \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Nach Annahme 3.24 ist $c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{R}}/4$, und deshalb existiert $\delta \in (1/2, 2c_{\text{mon}}/c_{\mathfrak{R}})$, so dass $C := \min\{c_{\text{mon}} - \frac{\delta}{2}, 1 - \frac{\delta^{-1}}{2}\} > 0$. Insgesamt erhalten wir also

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 \geq \min\{C, 1\}(\|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \langle \chi, \mathfrak{A}\chi \rangle_{\Gamma} + |\langle \xi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})w + \mathfrak{A}\chi \rangle_{\Gamma}|^2).$$

Definiere das lineare Funktional $g \in \mathcal{H}^*$ als $g(w, \chi) := \langle \xi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})w + \mathfrak{A}\chi \rangle_{\Gamma}$ für alle $(w, \chi) \in \mathcal{H}$. Es gilt $(\frac{1}{2} - \mathfrak{K})1 = 1$ aufgrund von (3.28). Somit ist nach Annahme 3.15 $g(1, 0) \neq 0$ und wir können Lemma 3.21 anwenden. Dies impliziert

$$I_1 - I_2 + I_3 + I_4 \geq C_{\text{mon}}\|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}}^2$$

und zeigt starke Monotonie von $\tilde{\mathfrak{B}}$, wobei C_{mon} nur von \mathfrak{A}, Ω und ξ aus Annahme 3.15 abhängt. \square

Beweis von Satz 3.25. Der erste Teil folgt aus Satz 3.27 und der Äquivalenz 3.26. Bi-Lipschitz-Stetigkeit (3.62) folgt wie im Beweis von Satz 3.22. \square

3.5 Bielak-MacCamy Kopplung

Das Modellproblem (3.3) kann auch mittels der (Eingleichungs-) Bielak-MacCamy Kopplung, welche in [BM84] erschienen ist, reformuliert werden. Diese Methode wird auch *indirekte Eingleichungskopplung* genannt, da ein indirekter Ansatz für die Lösung im Außenraum, welcher nicht das Calderón System benützt, verwendet wird. Aufgrund der Ähnlichkeit zu der Johnson-Nédélec Kopplung — für linearen Operator \mathfrak{A} ist die Bielak-MacCamy Kopplung das “adjungierte” Problem zur Johnson-Nédélec Kopplung — folgen die meisten Resultate wie in Abschnitt 3.4. Wir verweisen noch auf die Publikation [GHS12], in welcher diese Kopplung zusammen mit der quasi-symmetrischen Bielak-MacCamy Kopplung für (lineare) Probleme mit Yukawa Potential untersucht wird.

3.5.1 Herleitung

Für die Lösung $u^{\text{ext}} \in H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ von (3.3) im Außenraum machen wir den indirekten Potential-Ansatz

$$u^{\text{ext}} = \tilde{\mathfrak{V}}\phi \tag{3.70}$$

mit unbekannter Dichte $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Nach Satz 3.5 erfüllt (3.70) Gleichung (3.3b) mit Abklingbedingung (3.3e). Erstens folgt aus der Sprungbedingung von $\tilde{\mathfrak{V}}$ auf Γ , siehe Satz 3.9, $\mathfrak{A}\phi = \gamma_0^{\text{ext}}\mathfrak{A}\phi$ und daher

$$\gamma_0^{\text{ext}}u^{\text{ext}} = \mathfrak{A}\phi.$$

Nach Einsetzen der Transmissionsbedingung (3.3c) erhalten wir weiters

$$u - u_0 = \mathfrak{A}\phi \quad \text{auf } \Gamma. \tag{3.71}$$

Zweitens gilt nach Satz 3.9 und der Definition (3.22) des adjungierten Doppelschichtintegraloperators

$$\gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} = \gamma_1^{\text{ext}} \tilde{\mathfrak{W}}\phi = -\phi + \gamma_1 \tilde{\mathfrak{W}}\phi = -\phi + (\mathfrak{K}' + \frac{1}{2})\phi = -(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}')\phi. \quad (3.72)$$

Durch Einsetzen der Identität (3.72) in (3.39) und Testen von (3.71) in $H^{-1/2}(\Gamma)$ erhalten wir die variationelle Formulierung der Bielak-MacCamy Kopplung: Finde $\mathbf{u} = (u, \phi) \in \mathcal{H} := H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$, so dass

$$\langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_\Omega + \langle (\frac{1}{2} - \mathfrak{K}')\phi, v \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \phi_0, v \rangle_\Gamma, \quad (3.73a)$$

$$\langle \psi, \mathfrak{B}\phi - u \rangle_\Gamma = -\langle \psi, u_0 \rangle_\Gamma \quad (3.73b)$$

für alle $\mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H} = H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ gilt. Der Beweis für die Äquivalenz zwischen variationeller Formulierung (3.73) der Bielak-MacCamy Kopplung und Modellproblem (3.3) ist analog zu dem Beweis von Satz 3.13 bzw. Satz 3.23. Das folgende Resultat findet sich auch in [CES91, Satz 2.1].

Satz 3.28. *Das Modellproblem (3.3) und die variationelle Formulierung (3.73) sind im folgendem Sinne äquivalent: Falls $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ Lösung von (3.3) ist, dann löst $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ mit $\phi := \mathfrak{B}^{-1}\gamma_0^{\text{ext}}u^{\text{ext}}$ die variationelle Formulierung (3.73). Andererseits, falls $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ eine Lösung von (3.73) ist, dann löst $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ mit*

$$u^{\text{ext}} := \tilde{\mathfrak{W}}\phi$$

das Problem (3.3).

Beweis. Sei zunächst $(u, u^{\text{ext}}) \in H^1(\Omega) \times H_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$ eine Lösung von (3.3). Aus Definition $\phi := \mathfrak{B}^{-1}\gamma_0^{\text{ext}}u^{\text{ext}}$ und Transmissionsbedingung (3.3c) folgt

$$\mathfrak{B}\phi = u - u_0 \quad \text{in } H^{-1/2}(\Gamma)$$

und somit (3.73b). Da u^{ext} Gleichung (3.3b) mit Abklingbedingung (3.3e) erfüllt, gilt nach Satz 3.3 die Darstellungsformel

$$u^{\text{ext}} = \tilde{\mathfrak{K}}\gamma_0^{\text{ext}}u^{\text{ext}} - \tilde{\mathfrak{W}}\gamma_1^{\text{ext}}u^{\text{ext}}.$$

Nach Bildung der Spur erhalten wir die erste Zeile im Calderón System (3.31). Auflösen nach $\gamma_1^{\text{ext}}u^{\text{ext}}$ ergibt

$$\gamma_1^{\text{ext}}u^{\text{ext}} = \mathfrak{B}^{-1}(\mathfrak{K} - \frac{1}{2})\gamma_0^{\text{ext}}u^{\text{ext}}.$$

Ausnützen der Relation $\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'\mathfrak{B}^{-1}$, siehe [Ste08a, Abschnitt 6.6], als auch der Definition von ϕ und Transmissionsbedingung (3.3d) liefert

$$\mathfrak{A}\nabla u \cdot \mathbf{n} - \phi_0 = -(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}')\phi.$$

Zusammen mit (3.3a) und der ersten Green'schen Formel folgt (3.73a).

Sei nun $(u, \phi) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ eine Lösung von (3.73). Aus Satz 3.5 folgt dass $u^{\text{ext}} := \tilde{\mathfrak{V}}\phi$ Gleichung (3.3b) mit Abklingbedingung (3.3e) erfüllt, wobei für $d = 2$ noch zu beachten ist, dass aus (3.73a) mit $v = 1$ und der Kompatibilitätsbedingung (3.4) die richtige Abklingbedingung folgt. Aus (3.73b) folgt $\phi = \mathfrak{V}^{-1}(u - u_0)$ und nach Bildung der Spur von $u^{\text{ext}} = \mathfrak{V}\phi$ folgt die Transmissionsbedingung (3.3c). Weiters ist $\gamma_1^{\text{ext}} u^{\text{ext}} = \gamma_1 \tilde{\mathfrak{V}}\phi - \phi = -(\frac{1}{2} - \mathfrak{K}')\phi$. Einsetzen in (3.73a) liefert

$$\langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_{\Omega} - \langle \gamma_1^{\text{ext}} + \phi_0, v \rangle_{\Gamma} = \langle f, v \rangle_{\Omega} \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Die gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz 3.13 ergibt dann (3.3a) als auch (3.3d). \square

Man beachte dass der zweite Punkt in Bemerkung 3.14 entsprechend für die Bielak-MacCamy Kopplung gilt.

Wir definieren den Operator $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $F \in \mathcal{H}^*$ über

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \langle \mathfrak{A}\nabla u, \nabla v \rangle_{\Omega} + \langle (\frac{1}{2} - \mathfrak{K}')\phi, v \rangle_{\Gamma} + \langle \psi, \mathfrak{V}\phi - u \rangle_{\Gamma}, \quad (3.74a)$$

$$F(\mathbf{v}) := \langle f, v \rangle_{\Omega} + \langle \phi_0, v \rangle_{\Gamma} - \langle \psi, u_0 \rangle_{\Gamma} \quad (3.74b)$$

für alle $\mathbf{u} = (u, \phi), \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H}$. Dann sind die Gleichungen (3.73) äquivalent zu: Finde $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ mit

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = F(\mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \quad (3.75)$$

wie sich leicht verifizieren lässt, vgl. [CS95, Korollar 1] für die symmetrische Kopplung. Satz 3.25 gilt entsprechend für die Bielak-MacCamy Kopplung.

Satz 3.29. *Unter der Annahme 3.15 und Annahme 3.24 besitzt die (diskrete) Formulierung*

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle = F(\mathbf{v}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h \quad (3.76)$$

eine eindeutige Lösung $\mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_h$ mit $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossen. Speziell hat also (3.75) eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.77)$$

wobei $C_{\text{Céa}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω und dem gewählten $\xi \in \mathcal{Y}_h$ aus Annahme 3.15 abhängt.

Des weiteren ist der Operator \mathfrak{B} bi-Lipschitz-stetig

$$C_{\text{bilip}}^{-1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathfrak{B}\mathbf{u}_h - \mathfrak{B}\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}_h^*} \leq C_{\text{bilip}} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h. \quad (3.78)$$

Die Konstante $C_{\text{bilip}} > 0$ hängt nur von \mathfrak{A}, Ω , und dem gewählten $\xi \in \mathcal{Y}_h$ aus Annahme 3.15 ab.

Für den Spezialfall eines linearen Operators \mathfrak{A} folgt Satz 3.29 aus Satz 3.25.

Bemerkung 3.30. *Sei \mathfrak{A} linear und symmetrisch und bezeichne mit \mathfrak{B}_{JN} den in (3.58a) definierten Operator. Dann gilt*

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathfrak{B}_{\text{JN}}\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}.$$

Der Operator \mathfrak{B} ist also der adjungierte Operator zu \mathfrak{B}_{JN} und Satz 3.29 folgt daher aus Satz 3.25. Dies gilt auch falls \mathfrak{A} linear und nicht-symmetrisch ist: Ersetzt man \mathfrak{A} durch \mathfrak{A}' in (3.58a), dann bleibt Satz 3.25 gültig und auch obige Identität. \square

3.5.2 Implizite Stabilisierung

Wir gehen wie in Abschnitt 3.3.2 bzw. 3.4.2 vor und bemerken, dass aufgrund von

$$\langle \mathfrak{B}(1,0) - \mathfrak{B}(0,0), (1,0) \rangle = \langle \mathfrak{A}\nabla 1 - \mathfrak{A}\nabla 0, \nabla 1 \rangle_\Omega = 0$$

der Operator \mathfrak{B} nicht stark monoton sein kann. Wir benützen wiederum die zweite Kopplungsgleichung zum Stabilisieren von \mathfrak{B} , die sich nun jedoch von der zweiten Kopplungsgleichung der symmetrischen und Johnson-Nédélec Kopplung unterscheidet. Der Beweis des folgenden Resultats folgt aber analog.

Satz 3.31. *Mit ξ aus Annahme 3.15 sind der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $\tilde{F} \in \mathcal{H}^*$, definiert als*

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \xi, \mathfrak{B}\phi - u \rangle_\Gamma \langle \xi, \mathfrak{B}\psi - v \rangle_\Gamma, \quad (3.79a)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{v}) := F(\mathbf{v}) - \langle \xi, u_0 \rangle_\Gamma \langle \xi, \mathfrak{B}\psi - v \rangle_\Gamma \quad (3.79b)$$

für alle $\mathbf{u} = (u, \phi), \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H}$, mit \mathfrak{B} und F im folgendem Sinne äquivalent: Das Paar $\mathbf{u}_h = (u_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$ ist eine Lösung von Problem (3.76), dann und nur dann falls es eine Lösung von

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle = \tilde{F}(\mathbf{v}_h) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h \quad (3.80)$$

ist. □

3.5.3 Beweis der Lösbarkeit

Satz 3.32. *Unter der Annahme 3.15 und Annahme 3.24 ist der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ stark monoton*

$$C_{\text{mon}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

und Lipschitz-stetig

$$\|\tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{u} - \tilde{\mathfrak{B}}\mathbf{v}\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{lip}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

wobei die Konstanten $C_{\text{mon}}, C_{\text{lip}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω und ξ aus Annahme 3.15 abhängen.

Die Gleichung (3.80) besitzt für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_h$. Speziell hat (3.80) für $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{H}} \quad (3.81)$$

mit $C_{\text{Céa}} = C_{\text{lip}}/C_{\text{mon}}$.

Beweis. Der Beweis folgt genau den Zeilen für den Beweis von Satz 3.27 und ist daher dem Leser überlassen. □

Beweis von Satz 3.29. Der erste Teil folgt aus Satz 3.32 und der Äquivalenz 3.31. Bi-Lipschitz-Stetigkeit (3.78) folgt wie im Beweis von Satz 3.22. □

3.6 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt präsentieren wir verschiedene numerische Experimente. Das Hauptaugenmerk legen wir dabei auf folgende Punkte:

- Lösen der Kopplungsgleichungen mit bzw. ohne Stabilisierungsterm.
- Lösbarkeit der Johnson-Nédélec Kopplung bzw. Bielak-MacCamy Kopplung falls Annahme 3.24 verletzt ist.

Für den letzten Punkt verwenden wir das überaus interessante Resultat [OS13b, Lemma 3.2], welches zeigt, dass in bestimmten Fällen der zur Johnson-Nédélec Kopplung assoziierte Operator indefinit wird. Wir geben ein entsprechendes, leicht abgewandeltes Resultat im Falle eines stark monotonen und Lipschitz-stetigen Operators \mathfrak{A} an. Der Beweis folgt genau den Zeilen des Beweises von [OS13b, Lemma 3.2].

Lemma 3.33. *Bezeichne mit \mathfrak{B} den in (3.58a) definierten Operator. Annahme 3.24 ist nicht nur hinreichend für Monotonie von \mathfrak{B} , d.h.*

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u} - \mathfrak{B}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H},$$

sondern auch notwendig in gewissem Sinne. Bezeichne mit $c_{\text{mon}}, c_{\text{lip}}$ die Monotonie- bzw. Lipschitz-Konstante von \mathfrak{A} . Falls

$$0 < c_{\text{mon}} \leq c_{\text{lip}} < \frac{c_{\mathfrak{K}}}{4},$$

dann existieren Funktionen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}$ mit $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ und

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u} - \mathfrak{B}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle < 0.$$

Beweis. Die Analysis aus dem Beweis von Satz 3.27 zeigt Monotonie von \mathfrak{B} unter der Annahme 3.24. Diese Annahme ist auch notwendig wie folgende Überlegungen zeigen. Nach [OS13b, Bemerkung 2.1] existiert $0 \neq u_* \in H_*^{1/2}(\Gamma)$ mit

$$\frac{1}{c_{\mathfrak{K}}} \left\| \left(\frac{1}{2} + \mathfrak{K} \right) u_* \right\|_{\mathfrak{Y}^{-1}}^2 = \langle \mathfrak{S}u_*, u_* \rangle_{\Gamma},$$

wobei $\mathfrak{S} := \mathfrak{V}^{-1}(\frac{1}{2} + \mathfrak{K})$ wiederum den inneren (nicht-symmetrischen) Steklov-Poincaré Operator bezeichnet. Wir definieren $u \in H^1(\Omega)$ als harmonische Fortsetzung von u_* auf Ω über

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= u_* && \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

und $\phi_* := \mathfrak{S}u_* \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Es gilt daher, vgl. (3.69),

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle \mathfrak{S}u_*, u_* \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{c_{\mathfrak{K}}} \left\| \left(\frac{1}{2} + \mathfrak{K} \right) u_* \right\|_{\mathfrak{Y}^{-1}}^2 = \frac{1}{c_{\mathfrak{K}}} \langle \phi_*, \mathfrak{V}\phi_* \rangle_{\Gamma}.$$

Wir setzen $\mathbf{u} := (u, \phi) := (u, \alpha\phi_*)$ mit $\alpha > 0$ und $\mathbf{v} := (v, \psi) := (0, 0)$. Mit $\mathbf{w} := (w, \chi) := (u - v, \phi - \psi) = \mathbf{u}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{B}\mathbf{u} - \mathfrak{B}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle &\leq c_{\text{lip}} \|\nabla w\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 - \langle \chi, (\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K})w \rangle_{\Gamma} + \langle \chi, \mathfrak{W}\chi \rangle_{\Gamma} \\ &= c_{\text{lip}} \langle \mathfrak{S}u, u \rangle_{\Gamma} - \alpha \|(\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K})u\|_{\mathfrak{W}^{-1}}^2 + \alpha^2 \langle \phi_*, \mathfrak{W}\phi_* \rangle_{\Gamma} \\ &= \left(\frac{c_{\text{lip}}}{c_{\mathfrak{K}}} + \alpha^2 - \alpha \right) \langle \phi_*, \mathfrak{W}\phi_* \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Die Nullstellen $\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c_{\text{lip}}}{c_{\mathfrak{K}}}}$ > 0 zeigen also

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u} - \mathfrak{B}\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle < 0$$

falls $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$. □

Obiges Resultat kann auch für den in (3.63a) definierten Operator $\tilde{\mathfrak{B}}$ gezeigt werden, falls $\xi = 1$ in der Stabilisierung gewählt wird. Dann gilt nämlich $\langle \xi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})u^* + \mathfrak{W}\mathfrak{S}u^* \rangle_{\Gamma} = \langle 1, u^* \rangle_{\Gamma} = 0$ für die im Beweis definierte Funktion u^* und der Beweis kann genau wie oben geführt werden.

Bemerkung 3.34. (i) Lemma 3.33 gilt für das kontinuierliche System, aber nicht für das diskrete. Auf dem kontinuierlichen Level ist der Operator \mathfrak{B} zwar indefinit, aber die Kopplungsgleichungen sind aufgrund von Satz 3.23 und der Lösbarkeit des Modellproblems (3.3) eindeutig lösbar.

(ii) Lemma 3.33 gilt entsprechend für die Bielak-MacCamy Kopplung. □

Numerische Experimente in [OS13b] belegen, dass auch das diskrete System indefinit ist, falls Annahme 3.24 verletzt wird.

3.6.1 Galerkin-System

Basen

Für die numerischen Experimente betrachten wir speziell die Unterräume $\mathcal{H}_h := \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$, wobei

$$\mathcal{X}_h = \mathcal{S}^q(\mathcal{T}^{\Omega}), \quad \mathcal{Y}_h = \mathcal{P}^p(\mathcal{T}^{\Gamma})$$

mit $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0$ und \mathcal{T}^{Ω} bzw. \mathcal{T}^{Γ} sind wiederum reguläre Triangulierungen von Ω bzw. Γ . Wir nehmen durchgehend an, dass $\mathcal{T}^{\Gamma} = \mathcal{T}^{\Omega}|_{\Gamma}$ gilt.

Definiere $S^{\Omega} := \dim(\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^{\Omega}))$, $S^{\Gamma} := \dim(\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^{\Gamma}))$, und $P^{\Gamma} := \dim(\mathcal{P}^p(\mathcal{T}^{\Gamma}))$. Bezeichne mit $\{z_j\}_{j=1}^{N^{\Omega}}$ die Knoten in \mathcal{N}^{Ω} mit $N^{\Omega} := \#\mathcal{N}^{\Omega}$. Als Basis für $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}^{\Omega})$ verwenden wir die nodale Basis (Hutfunktionen) $\{\eta_j\}_{j=1}^{N^{\Omega}}$ mit

$$\eta_j(z_k) = \delta_{jk} \quad \text{für alle } j, k = 1, \dots, N^{\Omega}.$$

Für $d = 2$ benützen wir noch den Raum $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}^{\Omega})$. Eine Basis ist dabei gegeben durch die Funktionen $\{\eta_j\}_{j=1}^{S^{\Omega}}$, wobei η_j für $j = 1, \dots, N^{\Omega}$ wieder die Hutfunktionen bezeichne. Die

Funktionen η_j für $j = N^\Omega + 1, \dots, S^\Omega$ definieren wir als Produkt zweier Hutfunktionen. Da der Träger vom Produkt zweier Hutfunktionen nur dann ungleich der leeren Menge ist wenn die zugehörigen Knoten auf einer Kante $E \in \mathcal{E}^\Omega$ liegen, kann zu jeder Kante $E_{j-N^\Omega} \in \mathcal{E}^\Omega$ genau eine Funktion η_j zugeordnet werden. Durch Nachrechnen lässt sich zeigen, dass durch $\{\eta_j\}_{j=1}^{S^\Omega}$ eine Basis von $\mathcal{S}^2(\mathcal{T}^\Omega)$ gegeben ist. Für die Anzahl der Freiheitsgrade gilt demnach $S^\Omega = \#\mathcal{N}^\Omega + \#\mathcal{E}^\Omega$.

Eine Basis von $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Gamma)$ kann analog zu $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Omega)$ definiert werden. Da wir annehmen dass \mathcal{T}^Γ die Restriktion von \mathcal{T}^Ω auf Γ ist, kann als Basis für $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Gamma)$ einfach die Spur der Basisfunktionen von $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Omega)$ genommen werden.

Sei $\{\chi_j\}_{j=1}^{P^\Gamma}$ mit $P^\Gamma = M^\Gamma := \#\mathcal{T}^\Gamma$, eine Basis von $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}^\Gamma)$, so dass χ_j die charakteristische Funktion auf $T_j \in \mathcal{T}^\Gamma$ ist. Für $d = 2$ betrachten wir wiederum Ansatz- und Testfunktionen höherer Ordnung. Es bezeichne $\{\chi_j\}_{j=1}^{P^\Gamma}$ eine Basis von $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}^\Gamma)$ mit χ_j ist charakteristische Funktion auf $T_j \in \mathcal{T}^\Gamma$ für $j = 1, \dots, M^\Gamma$, und χ_j ist affin auf $T_{j-M^\Gamma} \in \mathcal{T}^\Gamma$ für $j = M^\Gamma + 1, \dots, 2M^\Gamma$. Speziell definieren wir χ_j , so dass

$$(\chi_j \circ F_{T_{j-M^\Gamma}}^\Gamma)(x) = x \quad \text{für } x \in [-1, 1]$$

und $j = M^\Gamma + 1, \dots, 2M^\Gamma$ gilt. Hier bezeichnet F_T^Γ die affine Abbildung, welche das Referenzintervall $T_{\text{ref}} = [-1, 1]$ auf $T \in \mathcal{T}^\Gamma$ abbildet.

Eine Basis des Produktraums $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Omega) \times \mathcal{P}^p(\mathcal{T}^\Gamma)$ ergibt sich dann in natürlicher Weise aus den Basen von $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Omega)$ und $\mathcal{P}^p(\mathcal{T}^\Gamma)$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \varphi_j &:= (\eta_j, 0) \quad \text{für } j = 1, \dots, S^\Omega, \\ \varphi_{j+S^\Omega} &:= (0, \chi_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, P^\Gamma. \end{aligned}$$

Für eine Folge von Triangulierungen $\{\mathcal{T}_\ell^\Omega\}_{\ell=0}^L$ bzw. $\{\mathcal{T}_\ell^\Gamma\}_{\ell=0}^L$ bezeichnen

$$\mathcal{X}_\ell = \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{Y}_\ell = \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$$

die zugehörigen diskreten Räume. Die Räume $\mathcal{X}_h, \mathcal{Y}_h, \mathcal{H}_h$ werden dann durch $\mathcal{X}_\ell, \mathcal{Y}_\ell$ und $\mathcal{H}_\ell := \mathcal{X}_\ell \times \mathcal{Y}_\ell$ ersetzt.

Galerkin-Matrizen der Integraloperatoren

Es bezeichne $\{\eta_j\}_{j=1}^{S^\Gamma}$ eine Basis von $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Gamma)$ und $\{\chi_j\}_{j=1}^{P^\Gamma}$ eine Basis von $\mathcal{P}^p(\mathcal{T}^\Gamma)$. Wir definieren die zu den Randintegraloperatoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{K}, \mathfrak{W}$ gehörigen Matrizen $\mathbf{V}, \mathbf{K}, \mathbf{W}$ als auch die Massenmatrix \mathbf{M} über

$$\mathbf{V}_{jk} := \langle \chi_j, \mathfrak{A}\chi_k \rangle_\Gamma \quad \text{für } j, k = 1, \dots, P^\Gamma, \quad (3.82a)$$

$$\mathbf{K}_{jk} := \langle \chi_j, \mathfrak{K}\eta_k \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = 1, \dots, P^\Gamma, k = 1, \dots, S^\Gamma, \quad (3.82b)$$

$$\mathbf{W}_{jk} := \langle \mathfrak{W}\eta_k, \eta_j \rangle_\Gamma \quad \text{für } j, k = 1, \dots, S^\Gamma, \quad (3.82c)$$

$$\mathbf{M}_{jk} := \langle \chi_j, \eta_k \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = 1, \dots, P^\Gamma, k = 1, \dots, S^\Gamma. \quad (3.82d)$$

Für $d = 2$ und niedrigste Ordnung ($p = 0, q = 1$) verwenden wir zum Assemblieren der Matrizen die MATLAB-Programm-bibliothek HILBERT, siehe [AEF⁺13]. Für $d = 2$ und höhere

Ordnung ($p = 1, q = 2$) haben wir diese Bibliothek erweitert. Dabei wurden die Rekursionsformeln aus [Mai99] benützt. Aufgrund der dicht besetzten Matrizen ist es sinnvoll Matrixkompressionsalgorithmen zu verwenden. In dieser Arbeit beschränken wir uns darauf solche Techniken nur für $d = 3$ anzuwenden. Das Assemblieren der BEM-Matrizen erfolgt dabei mit Hilfe des C++-Programm Pakets BEMPP [SBA⁺13], welches AHMED [Beb12] zur Kompression nützt.

Nichtlineares Gleichungssystem

Sei $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ einer der Operatoren aus (3.45a), (3.58a), (3.74a) mit zugehöriger rechter Seite $F \in \mathcal{H}^*$. Dann ist das diskrete Gleichungssystem (3.47), (3.60), bzw. (3.76) mit $\mathcal{H}_h := \mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Omega) \times \mathcal{P}^p(\mathcal{T}^\Gamma)$ und $H := \dim(\mathcal{H}_h) = S^\Omega + P^\Gamma$ äquivalent zu: Finde $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^H \mathbf{x}_k \varphi_k \in \mathcal{H}_h$ mit

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \varphi_j \rangle = F(\varphi_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, H. \quad (3.83)$$

Im Allgemeinen ist dieses Gleichungssystem nichtlinear. Besitzt der Operator \mathfrak{A} aber eine spezielle Gestalt, so können Fixpunkt-Iterationen, wie z.B. das Newton-Verfahren, verwendet werden, um obiges Gleichungssystem zu lösen. Beim Newton-Verfahren wird dann in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst. Dazu definieren wir uns den Operator $\mathbf{B} : \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}^H$ als

$$(\mathbf{B}(\mathbf{x}))_j := \langle \mathfrak{A}\mathbf{u}, \varphi_j \rangle \quad \text{für } j = 1, \dots, H \quad \text{und } \mathbf{u} = \sum_{k=1}^H \mathbf{x}_k \varphi_k$$

und teilen diesen in einen nichtlinearen und einen linearen Teil auf:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}\mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^H$$

mit $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{H \times H}$ und

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}(\mathbf{x}))_j &= \langle \mathfrak{A}\nabla u, \eta_j \rangle_\Omega & j = 1, \dots, S^\Omega, \\ (\mathbf{N}(\mathbf{x}))_j &= 0 & j = S^\Omega + 1, \dots, H, \end{aligned}$$

wobei $u = \sum_{k=1}^{S^\Omega} \mathbf{x}_k \eta_k$. Mit $\mathbf{f}_j := F(\varphi_j)$ für $j = 1, \dots, H$ suchen wir also eine Lösung des (möglicherweise nichtlinearen) Problems

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}. \quad (3.84)$$

Es bezeichne mit $\mathbf{JB}(\mathbf{x}) = \mathbf{JN}(\mathbf{x}) + \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{H \times H}$ die Jacobimatrix der Funktion $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}(\mathbf{x})$.

Algorithmus 3.35 (Newton-Verfahren). *Input:* Funktion $\mathbf{B} : \mathbb{R}^H \rightarrow \mathbb{R}^H$, rechte Seite $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^H$ und Startlösung $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^H$.

Für $k = 1, \dots, K - 1$ wiederhole (i)–(ii)

(i) Berechne \mathbf{y}^k aus

$$\mathbf{JB}(\mathbf{x}^k)\mathbf{y}^k = \mathbf{f} - \mathbf{B}(\mathbf{x}^k).$$

(ii) Setze

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{y}^k.$$

Output: Approximationslösung $\mathbf{x}^K \in \mathbb{R}^H$. □

Nehmen wir an, dass \mathfrak{A} die Gestalt $\mathfrak{A}\nabla u = \rho(|\nabla u|)\nabla u$ mit $\rho \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ besitzt, dann lässt sich die Jacobimatrix auf direktem Wege ausrechnen.

Analog können wir für die stabilisierten Operatoren (3.50a), (3.63a), (3.79a) vorgehen. Dazu müssen wir ein Element $\xi \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}^\Gamma)$ wählen, so dass Annahme 3.15 erfüllt ist. In allen hier vorgestellten Resultaten benützen wir $\xi = 1$. Wir definieren zunächst den Stabilisierungsvektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^H$ für die Johnson-Nédélec Kopplung bzw. symmetrische Kopplung über

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_j &:= \langle 1, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\eta_j \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = 1, \dots, S^\Omega, \\ \mathbf{s}_j &:= \langle 1, \mathfrak{V}\chi_{j-S^\Omega} \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = S^\Omega + 1, \dots, H, \end{aligned}$$

und für die Bielak-MacCamy Kopplung als

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_j &:= -\langle 1, \eta_j \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = 1, \dots, S^\Omega, \\ \mathbf{s}_j &:= \langle 1, \mathfrak{V}\chi_{j-S^\Omega} \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = S^\Omega + 1, \dots, H. \end{aligned}$$

Mit $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) := \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}\mathbf{s}^T\mathbf{x} = \mathbf{N}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{s}\mathbf{s}^T\mathbf{x}$ und $\tilde{\mathbf{f}}_j := \tilde{F}(\varphi_j)$ für $j = 1, \dots, H$ ist das diskrete Gleichungssystem (3.51), (3.64), bzw. (3.80) äquivalent zu: Finde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^H$ mit

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{f}}.$$

Es sei angemerkt, dass die Stabilisierungsmatrix $\mathbf{s}\mathbf{s}^T$ Rang 1 besitzt. Wir versehen \mathbf{B} , $\tilde{\mathbf{B}}$ und \mathbf{f} , $\tilde{\mathbf{f}}$ mit Subskripten, um die verschiedenen Kopplungen unterscheiden zu können:

$$\mathbf{B}_{\text{sym}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\text{sym}} \quad \text{symmetrische Kopplung (3.46),} \tag{3.85a}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{sym}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{sym}} \quad \text{stabilisierte symmetrische Kopplung (3.51),} \tag{3.85b}$$

$$\mathbf{B}_{\text{jn}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\text{jn}} \quad \text{Johnson-Nédélec Kopplung (3.59),} \tag{3.85c}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{jn}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{jn}} \quad \text{stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung (3.64),} \tag{3.85d}$$

$$\mathbf{B}_{\text{bmc}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\text{bmc}} \quad \text{Bielak-MacCamy Kopplung (3.75),} \tag{3.85e}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{bmc}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{f}}_{\text{bmc}} \quad \text{stabilisierte Bielak-MacCamy Kopplung (3.80).} \tag{3.85f}$$

Lineares Gleichungssystem

Falls der Operator \mathfrak{A} linear ist, so vereinfacht sich das zu lösende Gleichungssystem zu

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{f}} \tag{3.86}$$

mit $\mathbf{B}_{jk} := \langle \mathfrak{B}\varphi_k, \varphi_j \rangle$ für alle $j, k = 1, \dots, H$ und $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{s}\mathbf{s}^T$. Man kann die Matrizen \mathbf{B} , $\tilde{\mathbf{B}}$ als Blockform anschreiben, wenn wir voraussetzen, dass die Freiheitsgrade in $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Omega)$

so geordnet sind, dass $\eta_j|_\Gamma = 0$ für $j = 1, \dots, S^\Omega - S^\Gamma$ gilt. Mit $\mathbf{A}_{jk} := \langle \mathfrak{A} \nabla \eta_k, \nabla \eta_j \rangle_\Omega$ für $j, k = 1, \dots, S^\Omega$ und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\Omega\Omega} & \mathbf{A}^{\Omega\Gamma} \\ \mathbf{A}^{\Gamma\Omega} & \mathbf{A}^{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{A}^{\Omega\Omega} \in \mathbb{R}^{(S^\Omega - S^\Gamma) \times (S^\Omega - S^\Gamma)}$ den Block bezeichnet der zu den inneren Freiheitsgraden ($j = 1, \dots, S^\Omega - S^\Gamma$) gehört, lassen sich die Systemmatrizen in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{sym}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\Omega\Omega} & \mathbf{A}^{\Omega\Gamma} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{A}^{\Gamma\Omega} & \mathbf{A}^{\Gamma\Gamma} + \mathbf{W} & \mathbf{K}^T - \frac{1}{2}\mathbf{M}^T \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{M} - \mathbf{K} & \mathbf{V} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_{\text{jn}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\Omega\Omega} & \mathbf{A}^{\Omega\Gamma} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{A}^{\Gamma\Omega} & \mathbf{A}^{\Gamma\Gamma} & -\mathbf{M}^T \\ \mathbf{0} & \frac{1}{2}\mathbf{M} - \mathbf{K} & \mathbf{V} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_{\text{bmc}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{\Omega\Omega} & \mathbf{A}^{\Omega\Gamma} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{A}^{\Gamma\Omega} & \mathbf{A}^{\Gamma\Gamma} & \frac{1}{2}\mathbf{M}^T - \mathbf{K}^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} & \mathbf{V} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\mathbf{0}$ einen passenden Matrixblock mit Nulleinträgen. Für die stabilisierten Systemmatrizen gilt ähnliches.

3.6.2 Lineares Transmissionsproblem mit unbekannter Lösung

Sei Ω das in Abbildung 3.1 skizzierte L-förmige Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und Starttrian-gulierung \mathcal{T}_0^Ω .

Wir definieren \mathfrak{A} als

$$\mathfrak{A} := \mu \text{Id} \quad \text{mit} \quad \mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}],$$

wobei $\text{Id} : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ die Identität ist. Daher gilt $c_{\text{mon}} = \mu = c_{\text{lip}}$. Man beachte, dass auf jeden Fall der kritische Wert $\mu = c_{\mathfrak{R}}/4$ in diesem Intervall enthalten ist.

Wir wollen verifizieren, dass Annahme 3.24 nicht notwendig für eindeutige Lösbarkeit der Johnson-Nédélec Kopplung bzw. Bielak-MacCamy Kopplung ist. Dazu berechnen wir sowohl die Konditionszahlen der nicht-stabilisierten Matrizen \mathbf{B}_{jn} , \mathbf{B}_{bmc} als auch jene der stabilisierten Matrizen $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{jn}}$, $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{bmc}}$ für $\mu = \frac{i}{1000}$ mit $i = 1, \dots, 500$ und vergleichen diese mit den entsprechenden Konditionszahlen der Matrizen \mathbf{B}_{sym} , $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{sym}}$. Zur Abschätzung der Konditionszahl $\text{cond}_1(\cdot)$ benutzen wir die Routine `condst`(\cdot) aus `MATLAB`.

In Abbildung 3.2 haben wir Abschätzungen für die Konditionszahlen der erwähnten Matrizen für $\mathcal{H}_7 = \mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{T}}_7^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{T}}_7^\Gamma)$ ($q = 1, p = 0$) und in Abbildung 3.3 jene für $\mathcal{H}_6 = \mathcal{S}^2(\hat{\mathcal{T}}_6^\Omega) \times \mathcal{P}^1(\hat{\mathcal{T}}_6^\Gamma)$ ($q = 2, p = 1$) in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ geplottet. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass $\hat{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$ bzw. $\hat{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma$ die uniforme Verfeinerung von $\hat{\mathcal{T}}_{\ell-1}^\Omega$ bzw. $\hat{\mathcal{T}}_{\ell-1}^\Gamma$ mit $\hat{\mathcal{T}}_0^\Omega = \mathcal{T}_0^\Omega$ und $\hat{\mathcal{T}}_0^\Gamma = \mathcal{T}_0^\Gamma = \mathcal{T}_0^\Omega|_\Gamma$ ist. Vergleiche dazu auch Abschnitt 2.5. Wie aus beiden Abbildungen hervorgeht, sind die nicht-stabilisierten als auch die stabilisierten Matrizen für Werte von $\mu < c_{\mathfrak{R}}/4$ regulär. Weiters ist ersichtlich, dass das qualitative und quantitative Verhalten der

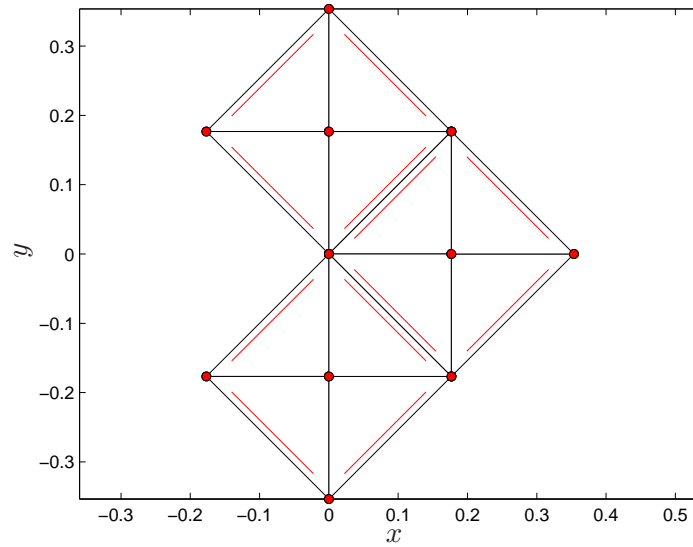


Abbildung 3.1: L-förmiges Gebiet und Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Ω mit $M^\Omega = \#\mathcal{T}_0^\Omega = 12$ und $M^\Gamma = \#\mathcal{T}_0^\Gamma = \#\mathcal{T}_0^\Omega|_\Gamma = 8$. Die roten Punkte markieren die Knoten der Starttriangulierung, während die roten Linien die Referenzkanten kennzeichnen.

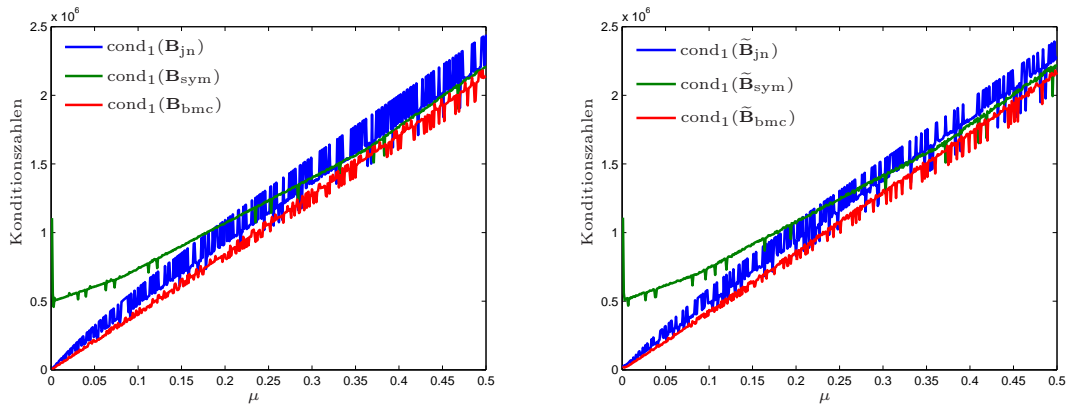


Abbildung 3.2: Konditionszahlen der nicht-stabilisierten Systemmatrizen (links) und der stabilisierten Systemmatrizen (rechts) für das Experiment aus Abschnitt 3.6.2 in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ mit $\mathcal{H}_7 = \mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_7^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\widehat{\mathcal{T}}_7^\Gamma)$. Die Konditionszahlen $\text{cond}_1(\cdot)$ werden dabei mit der MATLAB-Routine `condest` abgeschätzt.

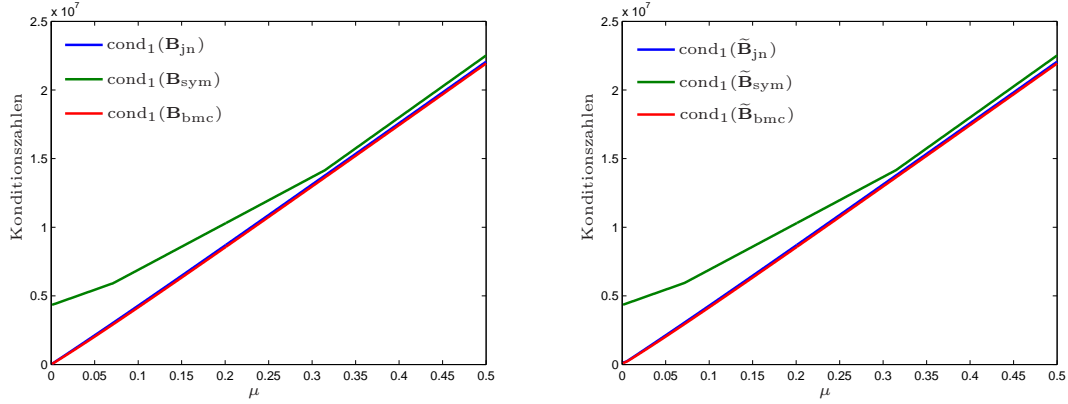


Abbildung 3.3: Konditionszahlen der nicht-stabilisierten Systemmatrizen (links) und der stabilisierten Systemmatrizen (rechts) für das Experiment aus Abschnitt 3.6.2 in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ mit $\mathcal{H}_6 = \mathcal{S}^2(\hat{\mathcal{T}}_6^\Omega) \times \mathcal{P}^1(\hat{\mathcal{T}}_6^\Gamma)$. Die Konditionszahlen $\text{cond}_1(\cdot)$ werden dabei mit der MATLAB-Routine `condest` abgeschätzt.

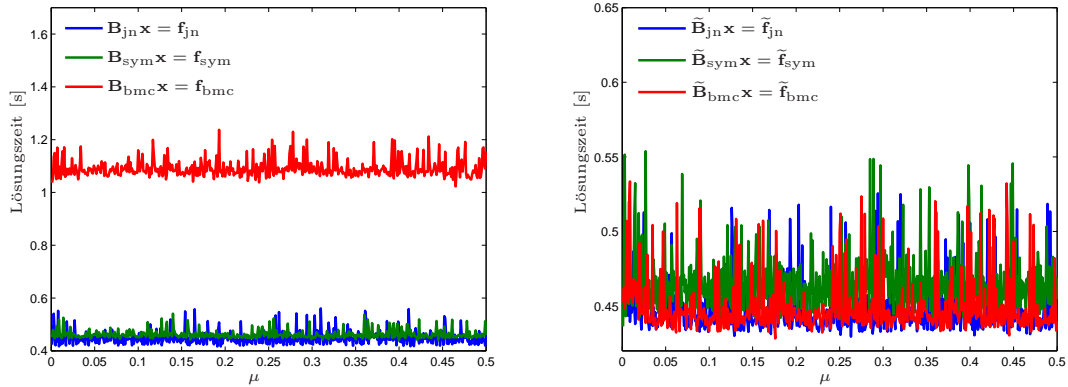


Abbildung 3.4: Lösungszeiten für die nicht-stabilisierten Gleichungssysteme (links) und für die stabilisierten Gleichungssysteme (rechts) für das Experiment aus Abschnitt 3.6.2 in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ mit den Daten $(f, u_0, \phi_0) = (1, 0, 0)$ und $\mathcal{H}_7 = \mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{T}}_7^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{T}}_7^\Gamma)$.

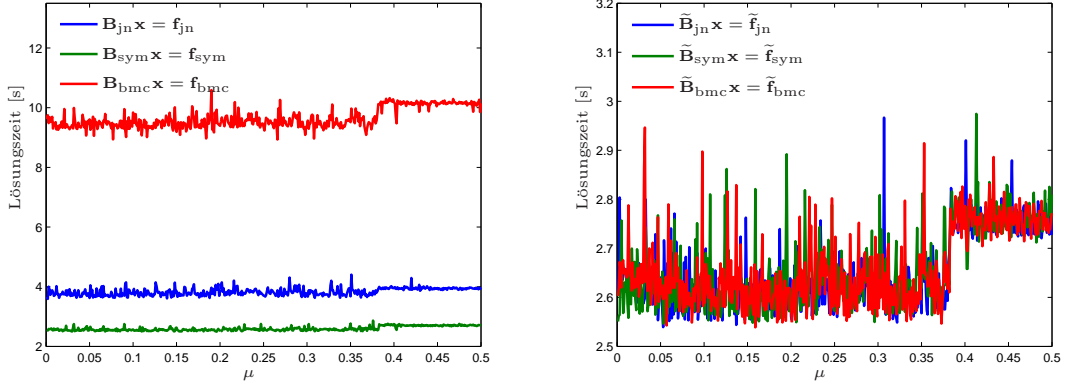


Abbildung 3.5: Lösungszeiten für die nicht-stabilisierten Gleichungssysteme (links) und für die stabilisierten Gleichungssysteme (rechts) für das Experiment aus Abschnitt 3.6.2 in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ mit den Daten $(f, u_0, \phi_0) = (1, 0, 0)$ und $\mathcal{H}_6 = \mathcal{S}^2(\widehat{\mathcal{T}}_6^\Omega) \times \mathcal{P}^1(\widehat{\mathcal{T}}_6^\Gamma)$.

Konditionszahlen der stabilisierten Matrizen ähnlich dem der nicht-stabilisierten Matrizen sind.

Als nächsten Punkt messen wir die Zeit zum Lösen der verschiedenen Gleichungssysteme (3.85). Für die Daten wählen wir $(f, u_0, \phi_0) = (1, 0, 0)$. Man beachte, dass die Kompatibilitätsbedingung (3.4) zwar nicht erfüllt ist, aber nach Bemerkung 3.1 dennoch eine eindeutige Lösung mit modifizierter Abklingbedingung (3.6) existiert. In Abbildung 3.4–3.5 sind die Zeiten, welche zum Lösen der Probleme (3.85) aufgewendet wurden für $\mathcal{H}_7 = \mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_7^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\widehat{\mathcal{T}}_7^\Gamma)$ bzw. für $\mathcal{H}_6 = \mathcal{S}^2(\widehat{\mathcal{T}}_6^\Omega) \times \mathcal{P}^1(\widehat{\mathcal{T}}_6^\Gamma)$ geplottet. Wiederum lässt sich kein Einfluss von kritischen Werten für μ feststellen. Interessanterweise sind die Lösungszeiten bei der stabilisierten Bielak-MacCamy Kopplung bedeutend geringer als jene der nicht-stabilisierten Variante. Dies gilt auch für die Johnson-Nédélec Kopplung für das Setting von Abbildung 3.5.

3.6.3 Lineares Transmissionsproblem auf L-förmigen Gebiet

Sei Ω das in Abbildung 3.1 skizzierte Gebiet mit der ebenfalls eingezeichneten Starttriangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_0^\Omega = \mathcal{T}_0^\Omega$, $\widehat{\mathcal{T}}_0^\Gamma = \mathcal{T}_0^\Gamma = \mathcal{T}_0^\Omega|_\Gamma$. In diesem Experiment setzen wir

$$\mathfrak{A}\nabla u := \begin{pmatrix} \mu \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}].$$

Es gilt $c_{\text{mon}} = \mu$ und $c_{\text{lip}} = 1$. Man beachte, dass für Werte $\mu \leq c_{\mathfrak{R}}/4$ durch unsere Analysis die Lösbarkeit nicht garantiert wird.

Wie in Abschnitt 3.6.2 berechnen wir die Konditionszahlen der Systemmatrizen in Abhängigkeit von μ . Dabei wählen wir $\mu = \frac{i}{1000}$ für $i = 1, \dots, 500$. Diese sind in Abbildung 3.6 für $\mathcal{H}_3 = \mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_3^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\widehat{\mathcal{T}}_3^\Gamma)$ geplottet. Im Gegensatz zu vorhin können wir aufgrund der

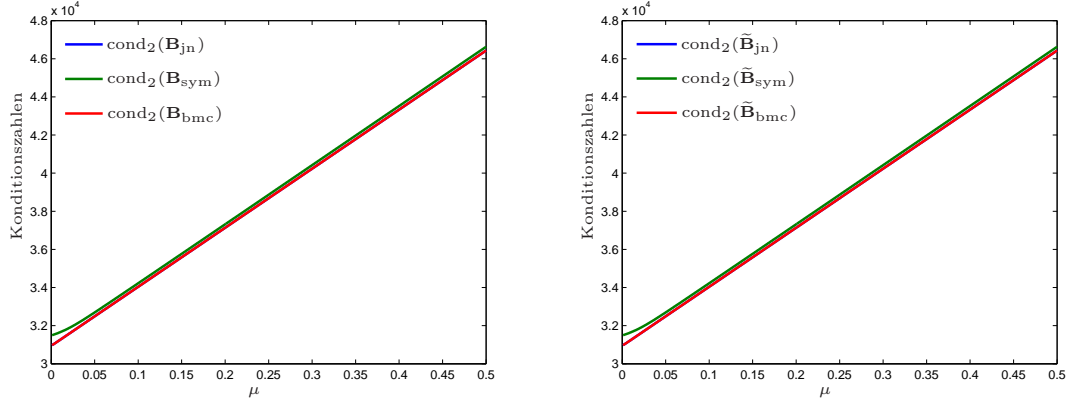


Abbildung 3.6: Konditionszahlen der nicht-stabilisierten Systemmatrizen (links) und der stabilisierten Systemmatrizen (rechts) für das Experiment aus Abschnitt 3.6.3 in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ mit $\mathcal{H}_3 = \mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{T}}_3^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{T}}_3^\Gamma)$. Die Konditionszahlen $\text{cond}_2(\cdot)$ werden dabei mit der MATLAB-Routine `cond` berechnet.

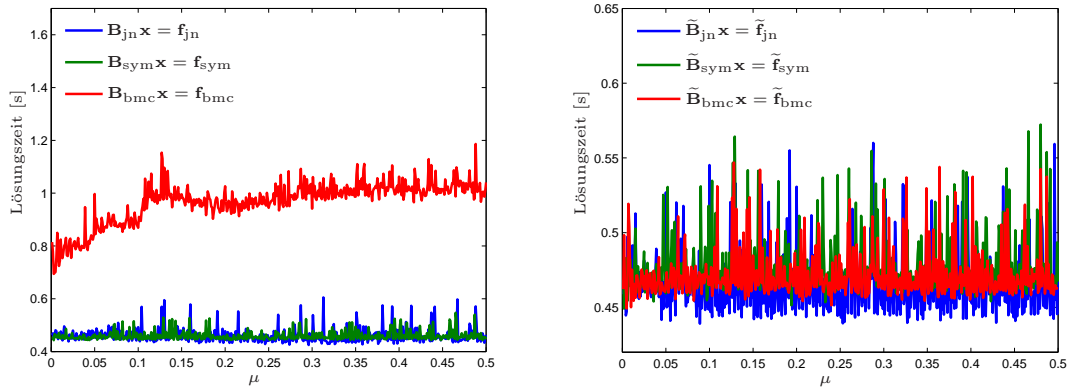


Abbildung 3.7: Lösungszeiten für die nicht-stabilisierten Gleichungssysteme (links) und für die stabilisierten Gleichungssysteme (rechts) für das Experiment aus Abschnitt 3.6.3 in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ mit der vorgeschriebenen exakten Lösung (3.87) und $\mathcal{H}_7 = \mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{T}}_7^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{T}}_7^\Gamma)$.

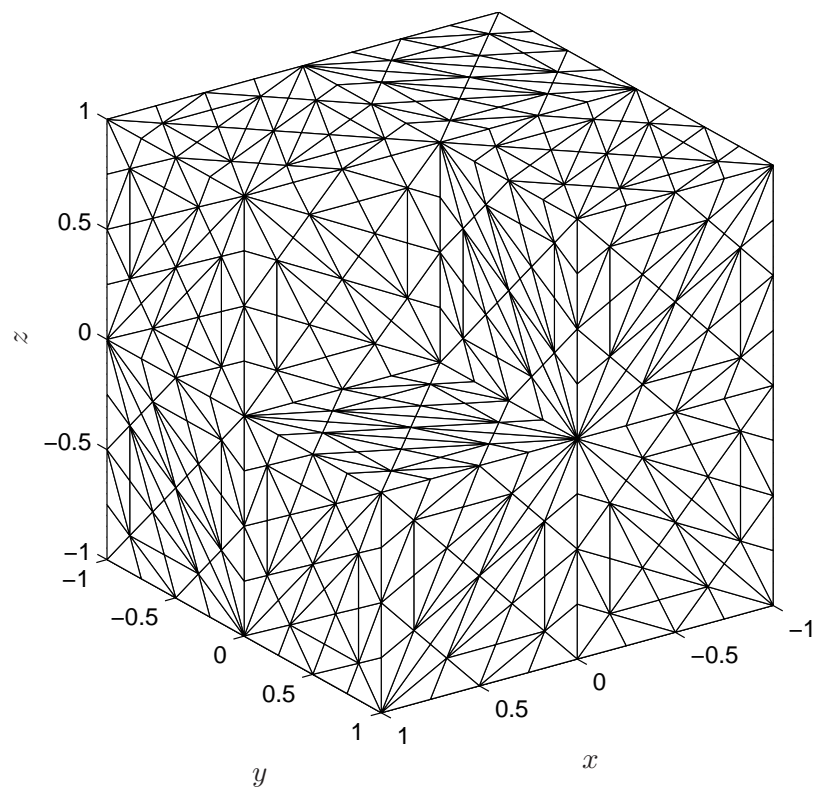


Abbildung 3.8: Fichera Würfel $\Omega = (-1, 1)^3 \setminus [0, 1]^3$ und gegebene Triangulierung mit $\#\mathcal{T}^\Omega = 16128$ und $\#\mathcal{T}^\Gamma = 1152$.

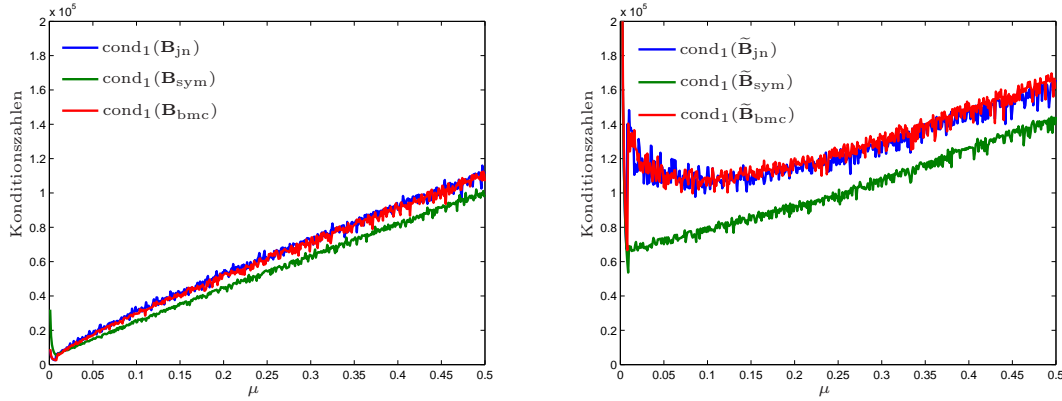


Abbildung 3.9: Konditionszahlen der nicht-stabilisierten Systemmatrizen (links) und der stabilisierten Systemmatrizen (rechts) für das Experiment aus Abschnitt 3.6.4 in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ mit $\mathcal{H}_h = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}^\Gamma)$. Die Konditionszahlen $\text{cond}_1(\cdot)$ werden dabei mit der MATLAB-Routine `condst` abgeschätzt.

kleineren Matrizen Größen die Konditionszahl $\text{cond}_2(\cdot)$ mittels der MATLAB-Routine `cond` bestimmen. Wiederum schließen wir, dass die stabilisierten als auch die nicht-stabilisierten Systemmatrizen regulär sind. Auch das qualitative und quantitative Verhalten der Konditionszahlen ist für die stabilisierten und nicht-stabilisierten Systeme im Wesentlichen gleich. Wir bemerken noch, dass die Konditionszahlen für die Bielak-MacCamy Kopplung und Johnson-Nédélec Kopplung für dieses Experiment übereinstimmen.

Zuletzt schreiben wir noch die exakte Lösung

$$u(x, y) = r^{2/3} \cos(2/3\theta) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega, \quad (3.87a)$$

$$u^{\text{ext}}(x, y) = \frac{1}{10} \frac{x + y - \frac{1}{8}}{(x - \frac{1}{8})^2 + y^2} \quad \text{für } (x, y) \in \Omega^{\text{ext}}, \quad (3.87b)$$

vor und berechnen daraus die Daten f, u_0, ϕ_0 . Hier bezeichnen (r, θ) die Polarkoordinaten von $(x, y) \in \Omega$. In Abbildung 3.7 sind die Zeiten zum Lösen der Systeme (3.85) geplottet. Wir sehen, dass die nicht-stabilisierte Bielak-MacCamy Kopplung wesentlich mehr Zeit in Anspruch nimmt als die stabilisierte Variante. Bei den restlichen Kopplungen ist kein großer Unterschied zwischen den stabilisierten und nicht-stabilisierten Matrizen auszumachen. Auf jeden Fall ist leicht erkennbar, dass unterschiedliche Werte von μ keinen großen Einfluss auf die Lösungszeiten nehmen.

3.6.4 Lineares Transmissionsproblem auf Fichera Würfel

Wir betrachten den Fichera Würfel $\Omega = (-1, 1)^3 \setminus [0, 1)^3$ mit einer Triangulierung $(\mathcal{T}^\Omega, \mathcal{T}^\Gamma)$ für die $\#\mathcal{T}^\Omega = 16128$ und $\#\mathcal{T}^\Gamma = 1152$ gilt. Das Randnetz \mathcal{T}^Γ ist in Abbildung 3.8 skizziert.

Wie in Abschnitt 3.6.2 wählen wir $\mathfrak{A} := \mu \text{Id}$ mit $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$.

Für das Experiment schätzen wir für $\mu = \frac{i}{1000}$, $i = 1, \dots, 500$ die Konditionszahlen der Systemmatrizen ab. Die Ergebnisse sind in Abbildung 3.9 geplottet. Wie auch für den Fall $d = 2$ ist erkennbar, dass die Systemmatrizen für kritische Werte von μ , d.h. $\mu \leq c_{\mathbb{R}}/4$, regulär sind. Weiters stellen wir fest, dass die Konditionszahlen der stabilisierten Systemmatrizen im Allgemeinen etwas größer als jene der nicht-stabilisierten sind.

4 Wohldefiniertheit von FEM-BEM Kopplungen in Elastostatik

In diesem Kapitel werden wir die Idee der impliziten Stabilisierung auf spezielle, (nicht-lineare) Transmissionsprobleme in der Elastostatik ausweiten. Im Gegensatz zu vorhin bereitet uns nicht nur die Menge der konstanten Funktionen im Inneren Probleme, sondern der ganze Raum der Starrkörperbewegungen, das ist der Kern des Verzerrungstensors $\epsilon(\mathbf{u})$. Wir werden zeigen, dass die FEM-BEM Kopplungen am kontinuierlichen Level, d.h. für $\mathcal{H} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, eine eindeutige Lösung besitzen. Dies ist auch am diskreten Level gültig, d.h. für $\mathcal{H}_h = \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h \subseteq \mathcal{H}$, falls eine zusätzliche Annahme, welche die Erweiterung von Annahme 3.15 darstellt, erfüllt ist. Speziell gilt das für $\mathcal{Y}_h = \mathcal{P}^1(\mathcal{T}^\Gamma)^d$, da die Starrkörperbewegungen, eingeschränkt auf Γ , einen Teilraum von $\mathcal{P}^1(\mathcal{T}^\Gamma)^d$ bilden. Mittels einer elementargeometrischen Annahme, welche für reguläre Triangulierungen \mathcal{T}^Γ von Γ immer erfüllt ist, erlaubt auch die Wahl $\mathcal{Y}_h = \mathcal{P}^0(\mathcal{T}^\Gamma)^d$ eine eindeutige Lösung.

Zuerst stellen wir in Abschnitt 4.1 das zugrunde liegende Modellproblem auf und führen in Abschnitt 4.2 Darstellungsformeln und Integraloperatoren für Elastizitätsprobleme ein. In Abschnitt 4.3 zeigen wir, dass die Annahme an die diskreten Räume für die üblichen Triangulierungen $\mathcal{Y}_h = \mathcal{P}^p(\mathcal{T}^\Gamma)^d$ erfüllt ist. Danach behandeln wir nacheinander die symmetrische Kopplung (Abschnitt 4.4), die Johnson-Nédélec Kopplung (Abschnitt 4.5), und die Bielak-MacCamy Kopplung (Abschnitt 4.6). Abschließend präsentieren wir in Abschnitt 4.7 numerische Beispiele.

4.1 Modellproblem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein (einfach zusammenhängendes) Gebiet mit polygonalem Rand $\Gamma := \partial\Omega$ und Normalenvektor \mathbf{n} . Bezeichne mit $\mathfrak{A} : L^2(\Omega)^{d \times d} \rightarrow L^2(\Omega)^{d \times d}$ einen (möglicherweise) nichtlinearen, stark monotonen und Lipschitz-stetigen Operator. Gegeben seien weiters die Daten $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\phi_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. In diesem Kapitel betrachten wir durchgehend das (nichtlineare) *Transmissionsproblem*

$$-\operatorname{div} \mathfrak{A}\epsilon(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \quad (4.1a)$$

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{u}^{\text{ext}}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{\text{ext}} := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}, \quad (4.1b)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{ext}} = \mathbf{u}_0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.1c)$$

$$(\mathfrak{A}\epsilon(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{u}^{\text{ext}})) \cdot \mathbf{n} = \phi_0 \quad \text{auf } \Gamma, \quad (4.1d)$$

$$\mathbf{u}^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (4.1e)$$

wobei die Gleichungen im schwachen Sinn zu verstehen sind. Hier bezeichnet $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}$ den Spannungstensor im Außenraum Ω^{ext} mit den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$. Das Modellproblem

besitzt eine eindeutige (schwache) Lösung $(\mathbf{u}, \mathbf{u}^{\text{ext}}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega^{\text{ext}})$, wobei wir für $d = 2$ die zusätzliche Kompatibilitätsbedingung

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}^j \rangle_{\Omega} + \langle \phi_0, \mathbf{e}^j \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \text{für } j = 1, 2 \quad (4.2)$$

an die Daten fordern. Hier bezeichnet \mathbf{e}^j den kanonischen Einheitsvektor in \mathbb{R}^2 mit $\mathbf{e}_k^j = \delta_{jk}$ für $j, k = 1, 2$.

Bemerkung 4.1. *Man kann die Abklingbedingung (4.1e) zu*

$$\mathbf{u}^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{a} + \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}\left(|\mathbf{x}|^{1-d}\right) \quad \text{für } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ (welches von \mathbf{u}^{ext} abhängt), $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_d$ beliebig verallgemeinern. $\mathbf{G}(\cdot)$ ist der in Abschnitt 4.2.1 definierte Kelvin-Tensor. Es gilt $\mathbf{a}_j = \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{u}^{\text{ext}})\mathbf{n}, \mathbf{e}^j \rangle_{\Gamma}$ für $j = 1, \dots, d$. Aus (4.1a) und (4.1d) folgt weiters $\mathbf{a} = -\int_{\Omega} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \phi_0 \, d\Gamma$. Die Wahl von $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ impliziert also die Kompatibilitätsbedingung (4.2). Es sei noch angemerkt, dass die Analysis in diesem Kapitel gültig bleibt, wenn man die Abklingbedingung (4.1e) durch (4.3) ersetzt. \square

4.2 Vorbereitungen

Im Wesentlichen folgen die Darstellungsformel und die Eigenschaften der Randintegraloperatoren für den Differentialoperator $\mathfrak{L} = -\text{div } \boldsymbol{\sigma}$ wie für die den Operator $\mathfrak{L} = -\Delta$. Wir fassen daher die wichtigsten Resultate im folgenden Unterabschnitt kurz zusammen und geben danach noch Annahmen und Beispiele für den (möglicherweise nichtlinearen) Operator \mathfrak{A} an. Wir verweisen auf die Monographien [HW08, McL00, Ste08a].

4.2.1 Integraloperatoren

Wir betrachten die Lamé-Gleichung

$$-\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega.$$

Die Fundamentallösung $\mathbf{G}(\mathbf{z}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$, der sogenannte Kelvin-Tensor, ist gegeben als

$$\mathbf{G}_{jk}(\mathbf{z}) := \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} G(\mathbf{z}) \delta_{jk} + \frac{1}{2(d-1)\pi} \frac{z_j z_k}{|\mathbf{z}|^d} \right) \quad (4.4)$$

für $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, $j, k = 1, \dots, d$ und $G(\cdot)$ bezeichnet die Fundamentallösung von $-\Delta$, siehe auch Abschnitt 3.2.1. Mit dem Kelvin-Tensor definieren wir das Einfachschichtpotential

$$\tilde{\mathfrak{V}}\phi(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\phi(\mathbf{y}) \, d\Gamma_{\mathbf{y}}$$

und das Doppelschichtpotential

$$\tilde{\mathfrak{K}}\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \gamma_{1,\mathbf{y}} \mathbf{G}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{v}(\mathbf{y}) \, d\Gamma_{\mathbf{y}},$$

welche zu Operatoren

$$\tilde{\mathfrak{V}} : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d), \quad \tilde{\mathfrak{K}} : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d \setminus \Gamma)$$

erweitert werden können. Es gilt folgende Darstellungsformel für Außenraumprobleme.

Satz 4.2. Erfülle \mathbf{u}^{ext} die homogene Gleichung

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{u}^{\text{ext}}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega^{\text{ext}} = \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}, \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-1}) \quad \text{für } \mathbf{x} \rightarrow \infty. \quad (4.5b)$$

Dann gilt die Darstellungsformel

$$\mathbf{u}^{\text{ext}} = \tilde{\mathfrak{K}} \gamma_0^{\text{ext}} \mathbf{u}^{\text{ext}} - \tilde{\mathfrak{V}} \gamma_1^{\text{ext}} \mathbf{u}^{\text{ext}}. \quad (4.6)$$

Die Operatoren $\tilde{\mathfrak{K}}, \tilde{\mathfrak{V}}$ sind bezüglich der Lamé-Konstanten von $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\cdot)$ zu verstehen. \square

Man kann die Abklingbedingung (4.5b) im Allgemeinen durch (4.3) ersetzen. Anwendung der Spuoperatoren γ_0 bzw. γ_1 auf $\tilde{\mathfrak{V}}$ und $\tilde{\mathfrak{K}}$ liefert lineare, stetige Randintegraloperatoren:

- Einfachschichtintegraloperator:

$$\mathfrak{V} := \gamma_0 \tilde{\mathfrak{V}} : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma). \quad (4.7)$$

- Doppelschichtintegraloperator:

$$\mathfrak{K} := \gamma_0 \tilde{\mathfrak{K}} + \frac{1}{2} : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma). \quad (4.8)$$

- Adjungierter Doppelschichtintegraloperator:

$$\mathfrak{K}' := \gamma_1 \tilde{\mathfrak{V}} - \frac{1}{2} : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma). \quad (4.9)$$

- Hypersingulärer Integraloperator:

$$\mathfrak{W} := -\gamma_1 \tilde{\mathfrak{K}} : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma). \quad (4.10)$$

Die Operatoren $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ sind symmetrisch, d.h. für $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ gilt

$$\langle \mathfrak{W} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathfrak{W} \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} \quad \text{und} \quad \langle \boldsymbol{\psi}, \mathfrak{V} \boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma} = \langle \boldsymbol{\phi}, \mathfrak{V} \boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma}. \quad (4.11)$$

Der hypersinguläre Operator ist positiv

$$\langle \mathfrak{W} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} \geq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma),$$

und die Starrkörperbewegungen bilden seinen Kern

$$\ker(\mathfrak{W}) = \mathcal{R}_d = \ker\left(\frac{1}{2} + \mathfrak{K}\right). \quad (4.12)$$

Weiters ist \mathfrak{W} elliptisch auf $\mathbf{H}_*^{1/2}(\Gamma) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) : \langle \mathbf{v}, \mathbf{r} \rangle_{\Gamma} = 0 \text{ für alle } \mathbf{r} \in \mathcal{R}_d\}$, d.h.

$$\langle \mathfrak{W} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} \geq c_{\mathfrak{W}} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in \mathbf{H}_*^{1/2}(\Gamma). \quad (4.13)$$

Für $d = 3$ ist der Einfachschichtintegraloperator \mathfrak{V} elliptisch

$$\langle \boldsymbol{\phi}, \mathfrak{V} \boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma} \geq c_{\mathfrak{V}} \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad \text{für alle } \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma). \quad (4.14)$$

Für $d = 2$ kann Elliptizität (4.14) durch geeignete Skalierung des Gebietes oder durch Ersetzen des logarithmischen Terms $\log |\cdot|$ durch $\log |\alpha(\cdot)|$ für ein geeignetes $\alpha > 0$ in (4.4) erreicht werden. Wir verweisen auf [Ste08a, Abschnitt 6.7] für eine detaillierte Abhandlung.

Annahme 4.3. Für $d = 2$ nehmen wir an Ω sei so skaliert, dass (4.14) gilt.

Satz 4.4. Für alle $\psi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ gilt

$$\begin{aligned} (\gamma_0 - \gamma_0^{\text{ext}}) \tilde{\mathfrak{A}}\phi &= \mathbf{0}, & (\gamma_0 - \gamma_0^{\text{ext}}) \tilde{\mathfrak{K}}\mathbf{v} &= -\mathbf{v}, \\ (\gamma_1 - \gamma_1^{\text{ext}}) \tilde{\mathfrak{A}}\phi &= \phi, & (\gamma_1 - \gamma_1^{\text{ext}}) \tilde{\mathfrak{K}}\mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Die Gleichheiten sind dabei im Sinne von $\mathbf{H}^{\pm 1/2}(\Gamma)$ zu verstehen. \square

Analog wie in Abschnitt 3.2.1 kann man die Calderón Operatoren definieren. Alle Eigenschaften bleiben dabei gleich.

4.2.2 Stark monotone Operatoren

Wir betrachten den Operator $\mathfrak{A} : L^2(\Omega)^{d \times d} \rightarrow L^2(\Omega)^{d \times d}$, welcher üblicherweise eine Beziehung zwischen Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)^{d \times d}$ und Spannung darstellt. Wir nehmen an, dass \mathfrak{A} stark monoton im Sinne von

$$c_{\text{mon}} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \langle \mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle_{\Omega} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (4.15a)$$

und Lipschitz-stetig im Sinne von

$$\|\mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} \leq c_{\text{lip}} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (4.15b)$$

ist. Für den (linearen) Fall $\mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\cdot) = \boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ zeigen simple Rechnungen

$$c_{\text{mon}} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \rangle_{\Omega}, \quad (4.16a)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle_{\Omega} \leq C_{\text{cont}} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.16b)$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit $c_{\text{mon}} = 2\mu > 0$ und $C_{\text{cont}} = 6\lambda + 4\mu > 0$.

Als Beispiel für ein nichtlineares Materialgesetz betrachten wir das nichtlineare elastische Hencky Material, welches der sogenannten Hencky-Von Mises Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

$$\mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) := (K - \frac{2}{d}\tilde{\mu}(\delta(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})))) \operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{I} + 2\tilde{\mu}(\delta(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})))\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad (4.17)$$

folgt. Die Konstante $K > 0$ bezeichnet dabei das Kompressionsmodul und δ die Lamé-Funktion $\delta(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})) := (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \frac{1}{d}\operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{I}) : (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \frac{1}{d}\operatorname{div}(\mathbf{u})\mathbf{I})$. Weiters ist $\tilde{\mu} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichtlineare Funktion, so dass \mathfrak{A} die Beziehungen (4.15a)–(4.15b) erfüllt. Nähere Information zu diesem Materialgesetz findet sich beispielsweise in [CFS97, CS90, Ste92, Zei88].

4.3 Annahme an diskreten Raum

Im Folgenden und für den Rest dieses Kapitels sei $\mathcal{H}_h = \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H} = \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Folgende Annahme ist eine Erweiterung von Annahme 3.15 für Elastizitätsprobleme und besagt im Wesentlichen, dass der diskrete Unterraum \mathcal{Y}_h genug Funktionen enthält, um mit den Starrkörperbewegungen hantieren zu können.

Annahme 4.5. Der bezüglich $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ abgeschlossene Unterraum $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_h \cap \mathbf{L}^2(\Gamma)$ erfüllt

$$\forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_d \setminus \{\mathbf{0}\} \exists \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{Y}_0 \quad \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{r} \rangle_\Gamma \neq \mathbf{0}. \quad (4.18)$$

Wir bemerken noch, dass Annahme 4.5 offensichtlich erfüllt ist falls $\mathcal{Y}_0 := \mathcal{P}^1(\mathcal{T}^\Gamma)^d$, da $\mathcal{R}_d \subseteq \mathcal{P}^1(\mathcal{T}^\Gamma)^d$ und man daher in (4.18) z.B. $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r}$ wählen kann. Glücklicherweise sind — wie wir im Folgenden zeigen werden — auch in $\mathcal{Y}_0 := \mathcal{P}^0(\mathcal{T}^\Gamma)^d$ genug Funktionen enthalten, um (4.18) zu garantieren.

Satz 4.6. Der Raum $\mathcal{Y}_0 := \mathcal{P}^0(\mathcal{T}^\Gamma)^d$ erfüllt Annahme 4.5 für $d = 2, 3$.

Wir starten mit einer elementaren Überlegung, welche wir dann auch im Beweis ausnützen. Bezeichne $\pi^0 : \mathbf{L}^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{Y}_0$ die $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion. Zunächst folgt aus $\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{r} \rangle_\Gamma = \langle \boldsymbol{\xi}, \pi^0 \mathbf{r} \rangle_\Gamma$ für $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{Y}_0, \mathbf{r} \in \mathcal{R}_d$ die Äquivalenz von Bedingung (4.18) zur Injektivität von $\pi^0|_{\mathcal{R}_d}$. Das ist wiederum äquivalent dazu, dass die Funktionen $\boldsymbol{\xi}^j := \pi^0(\mathbf{r}^j)$ linear unabhängig sind, wobei $\mathbf{r}^j, j = 1, \dots, D := \dim(\mathcal{R}_d)$ eine Basis von \mathcal{R}_d bilden. Damit können wir die Bedingung (4.18) umformulieren als

$$\forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_d \exists j \in \{1, \dots, D\} \quad \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathbf{r} \rangle_\Gamma \neq 0. \quad (4.19)$$

Beweis von Satz 4.6 für $d = 2$. Sei

$$\mathbf{r}^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}^3 := \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \end{pmatrix}$$

die kanonische Basis von \mathcal{R}_d , wobei \mathbf{r}^j als Funktionen in Abhängigkeit von \mathbf{x} zu verstehen sind. Wir nehmen an, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 \pi^0(\mathbf{r}^1) + \alpha_2 \pi^0(\mathbf{r}^2) + \alpha_3 \pi^0(\mathbf{r}^3) = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

erfüllen. Es gilt $\pi^0(\mathbf{r}^1) = \mathbf{r}^1$ und $\pi^0(\mathbf{r}^2) = \mathbf{r}^2$. Für beliebiges $T \in \mathcal{T}^\Gamma$ folgt durch Nachrechnen

$$\pi^0(\mathbf{r}^3)|_T = \frac{1}{|T|} \begin{pmatrix} -\int_T \mathbf{x}_2 d\Gamma_{\mathbf{x}} \\ \int_T \mathbf{x}_1 d\Gamma_{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{s}_2^T \\ \mathbf{s}_1^T \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

wobei \mathbf{s}^T den Mittelpunkt (also Schwerpunkt) eines Elements $T \in \mathcal{T}^\Gamma$ bezeichnet. Daher kann (4.20) geschrieben werden als

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -\mathbf{s}_2^T \\ \mathbf{s}_1^T \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}^\Gamma.$$

Es ist also $\alpha_3 \mathbf{s}^T = \alpha_3 \mathbf{s}^{T'}$ für alle $T, T' \in \mathcal{T}^\Gamma$, was aber nur für $\alpha_3 = 0$ gelten kann. Weiters schließen wir daraus $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$ und somit sind $\pi^0(\mathbf{r}^j)$ für $j = 1, \dots, 3$ linear unabhängig, was aber äquivalent zu (4.18) ist. \square

Für den Beweis im Fall $d = 3$ brauchen wir noch folgende (elementare) geometrische Beobachtung.

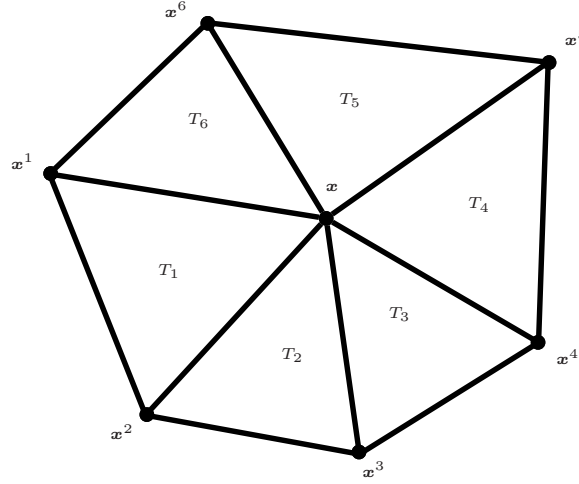


Abbildung 4.1: Für jeden Knoten $\mathbf{x} \in \mathcal{N}^\Gamma$ einer regulären Triangulierung \mathcal{T}^Γ des geschlossenen Randes Γ existieren $k \geq 3$ Knoten $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k \in \mathcal{N}^\Gamma$ und $k \geq 3$ Elemente $T_j = \text{conv}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^{j+1}\}$ mit $j = 1, \dots, k$. Darüber hinaus gilt $T_j \cap T_{j+1} = \text{conv}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}^{j+1}\}$ für $j = 1, \dots, k$ und $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^1$. Diese Abbildung zeigt ein Beispiel für $k = 6$.

Lemma 4.7. Sei $d = 3$ und \mathcal{T}^Γ eine reguläre Triangulierung des geschlossenen Randes Γ in (flache) Dreiecke. Dann existieren mindestens drei unterschiedliche Elemente $A, B, C \in \mathcal{T}^\Gamma$ mit der Eigenschaft, dass die zugehörigen Schwerpunkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nicht auf einer Geraden liegen, d.h. $\mathbf{c} - \mathbf{a} \neq \{t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in \mathbb{R}\}$.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen alle Schwerpunkte liegen auf der Geraden \mathfrak{g} . Sei $\mathbf{x} \in \mathcal{N}^\Gamma$ ein beliebiger Knoten in der Triangulierung. Da \mathcal{T}^Γ eine reguläre Triangulierung von Γ ist, existieren zu \mathbf{x} mindestens $k \geq 3$ Elemente $T_1, \dots, T_k \in \mathcal{T}^\Gamma$ mit \mathbf{x} ist Eckpunkt von T_j für $j = 1, \dots, k$. Sei weiters $\{\mathbf{x}, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$ die Menge aller Knoten der Elemente T_1, \dots, T_k . Man kann die Indizes der Knoten als auch jener der Elemente so permutieren, dass $T_j = \text{conv}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}^j, \mathbf{x}^{j+1}\}$ gilt, wobei man $\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^1$ und $\mathbf{x}^{k+2} := \mathbf{x}^2$ setzt. So eine Sortierung nehmen wir für den Rest des Beweises an. Für $k = 6$ ist in Abbildung 4.1 ein Beispiel gegeben.

Es bezeichne mit $\mathbf{s}^1, \dots, \mathbf{s}^k$ die Schwerpunkte der Elemente T_1, \dots, T_k . Aus der Annahme, dass alle Schwerpunkte auf der Geraden \mathfrak{g} liegen, folgern wir, dass

$$\mathbf{s}^{j+1} - \mathbf{s}^j = \frac{\mathbf{x}^{j+2} + \mathbf{x}^{j+1} + \mathbf{x}}{3} - \frac{\mathbf{x}^{j+1} + \mathbf{x}^j + \mathbf{x}}{3} = \frac{\mathbf{x}^{j+2} - \mathbf{x}^j}{3}$$

proportional zum Richtungsvektor $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ der Geraden \mathfrak{g} ist. Außerdem sehen wir $t\mathbf{d} = \mathbf{s}^{j+3} - \mathbf{s}^{j+2} + \mathbf{s}^{j+1} - \mathbf{s}^j = (\mathbf{x}^{j+4} - \mathbf{x}^j)/3$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Durch Iteration bekommen wir also

für passende $t_m, t_n \in \mathbb{R}$

$$t_m \mathbf{d} = \sum_{j=1}^{2m} (-1)^j \mathbf{s}^j = (\mathbf{x}^{2m+1} - \mathbf{x}^1)/3 \quad \text{für alle } m \text{ mit } 2m \leq k,$$

$$t_n \mathbf{d} = \sum_{j=2}^{2n-1} (-1)^{j+1} \mathbf{s}^j = (\mathbf{x}^{2n} - \mathbf{x}^2)/3 \quad \text{für alle } n \text{ mit } 2n - 1 \leq k.$$

Daraus folgt aber, dass alle Knoten mit geraden Indizes auf einer Linie \mathfrak{h} und alle Knoten mit ungeraden Indizes auf einer dazu parallelen Geraden \mathfrak{f} liegen, d.h.

$$\mathbf{x}^{2j} \in \{\mathbf{x}^2 + t\mathbf{d} : t \in \mathbb{R}\} =: \mathfrak{h} \quad \text{und}$$

$$\mathbf{x}^{2j-1} \in \{\mathbf{x}^1 + t\mathbf{d} : t \in \mathbb{R}\} =: \mathfrak{f}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $2j \leq k$ bzw. $2j - 1 \leq k$. Für den restlichen Beweis unterscheiden wir die Fälle ob k ungerade oder gerade ist.

Fall 1 (k ungerade). Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^3, \dots, \mathbf{x}^k \in \mathfrak{f}$ und daher $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k+2} - \mathbf{x}^k = t\mathbf{d}$ für ein $t \in \mathbb{R}$. Somit gilt $\mathbf{x}^2 \in \mathfrak{f}$ und da \mathfrak{f} und \mathfrak{h} parallel sind folgt $\mathfrak{h} = \mathfrak{f}$. Es liegen also alle Knoten $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ auf einer Linie, was aber einer regulären Triangulierung widerspricht.

Fall 2 (k gerade). Gilt $\mathfrak{h} = \mathfrak{f}$ argumentieren wir wie im Fall 1. Ansonsten ist $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{f}$ und wir merken an, dass alle Kanten $\overline{\mathbf{x}^j \mathbf{x}^{j+1}} := \text{conv}\{\mathbf{x}^j \mathbf{x}^{j+1}\}$ der Dreiecke verbunden sind, d.h.

$$\overline{\mathbf{x}^j \mathbf{x}^{j+1}} \cap \overline{\mathbf{x}^n \mathbf{x}^{n+1}} = \begin{cases} \{\mathbf{x}^j\} & \text{falls } j = n + 1 \\ \{\mathbf{x}^{j+1}\} & \text{falls } j + 1 = n \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiters verbindet jede Kante $\overline{\mathbf{x}^j \mathbf{x}^{j+1}}$ die Geraden \mathfrak{h} und \mathfrak{f} . Daher schließen wir, dass es zwei Kanten $\overline{\mathbf{x}^m \mathbf{x}^{m+1}}, \overline{\mathbf{x}^n \mathbf{x}^{n+1}}$ welche

$$\overline{\mathbf{x}^m \mathbf{x}^{m+1}} \cap \overline{\mathbf{x}^n \mathbf{x}^{n+1}} = \{\mathbf{y}\} \quad \text{mit } \mathbf{y} \neq \mathbf{x}^n \text{ und } \mathbf{y} \neq \mathbf{x}^{n+1},$$

erfüllen, vgl. Abbildung 4.2 für eine Illustration. Das widerspricht aber wiederum einer regulären Triangulierung. \square

Beweis von Satz 4.6 für $d = 3$. Sei

$$\mathbf{r}^1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}^3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{r}^4 := \begin{pmatrix} -\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{r}^5 := \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{r}^6 := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_3 \\ 0 \\ -\mathbf{x}_1 \end{pmatrix}$$

die kanonische Basis von \mathcal{R}_d . Klarerweise gilt $\pi^0(\mathbf{r}^j) = \mathbf{r}^j$ für $j = 1, 2, 3$, und Nachrechnen zeigt für $T \in \mathcal{T}^\Gamma$

$$\pi^0(\mathbf{r}^4)|_T = \begin{pmatrix} -\mathbf{s}_2^T \\ \mathbf{s}_1^T \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^0(\mathbf{r}^5)|_T = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{s}_3^T \\ \mathbf{s}_2^T \end{pmatrix}, \quad \pi^0(\mathbf{r}^6)|_T = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_3^T \\ 0 \\ -\mathbf{s}_1^T \end{pmatrix},$$

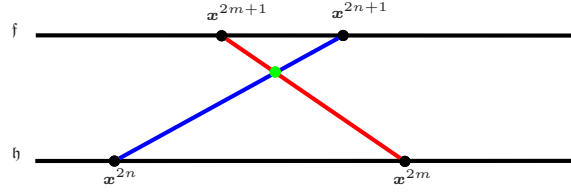


Abbildung 4.2: Bezeichne mit $\mathbf{x} \in \mathcal{N}^\Gamma$ einen beliebigen Knoten in der Triangulierung \mathcal{T}^Γ und seien $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k$ die benachbarten Knoten. Unter der Annahme, dass alle Schwerpunkte der Dreiecke auf einer Geraden liegen, zeigt der Beweis von Lemma 4.7, dass alle Knoten \mathbf{x}^{2j-1} mit ungeraden Indizes auf einer Geraden \mathfrak{f} liegen und alle Knoten mit \mathbf{x}^{2j} auf einer zu \mathfrak{f} parallelen Geraden \mathfrak{h} liegen. Da alle Knoten \mathbf{x}^j durch die Kanten $\overline{\mathbf{x}^j \mathbf{x}^{j+1}}$ verbunden sind, schließen wir, dass es Indizes n, m gibt mit $\overline{\mathbf{x}^{2n} \mathbf{x}^{2n+1}} \cap \overline{\mathbf{x}^{2m} \mathbf{x}^{2m+1}} = \{\mathbf{y}\}$ und $\mathbf{y} \notin \mathcal{N}^\Gamma$.

wobei \mathbf{s}^T wiederum den Schwerpunkt eines Elements $T \in \mathcal{T}^\Gamma$ bezeichnet. Der Kern des Beweises bildet die geometrische Beobachtung aus Lemma 4.7: Es gibt mindestens drei Elemente $A, B, C \in \mathcal{T}^\Gamma$ mit der Eigenschaft, dass die zugehörigen Schwerpunkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nicht auf einer Geraden liegen. Erfülle $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 \pi^0(\mathbf{r}^1) + \alpha_2 \pi^0(\mathbf{r}^2) + \alpha_3 \pi^0(\mathbf{r}^3) + \alpha_4 \pi^0(\mathbf{r}^4) + \alpha_5 \pi^0(\mathbf{r}^5) + \alpha_6 \pi^0(\mathbf{r}^6) = \mathbf{0},$$

was äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{s}_2^T & 0 & \mathbf{s}_3^T \\ \mathbf{s}_1^T & -\mathbf{s}_3^T & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2^T & -\mathbf{s}_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

für beliebige Elemente $T \in \mathcal{T}^\Gamma$ ist.

Der Raum der Starrkörperbewegungen ist invariant unter Translationen und Rotationen. Wir verschieben das Gebiet Ω und damit auch den Rand Γ so, dass A in das Dreieck A' mit Schwerpunkt $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$, B in das Dreieck B' mit Schwerpunkt $\mathbf{b}' = (\mathbf{b}'_1, 0, 0)$ und C in das Dreieck C' mit Schwerpunkt $\mathbf{c}' = (\mathbf{c}'_1, \mathbf{c}'_2, \mathbf{c}'_3)$ übergeht. Man beachte, dass sowohl $\mathbf{b}'_1 \neq 0$ als auch $(\mathbf{c}'_2, \mathbf{c}'_3) \neq \mathbf{0}$ gilt. Betrachten wir A' in (4.22), so folgt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{0}$. Mit B' in (4.22) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{b}'_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{b}'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

und daraus $\alpha_4 = 0 = \alpha_5$. Zum Schluss, setzen wir C' in (4.22) ein und bekommen

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{c}'_2 & 0 & \mathbf{c}'_3 \\ \mathbf{c}'_1 & -\mathbf{c}'_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}'_2 & -\mathbf{c}'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_5 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Wir schließen $\alpha_5 = 0$, da $(\mathbf{c}'_2, \mathbf{c}'_3) \neq \mathbf{0}$. Insgesamt gilt also $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ in (4.22) und deshalb sind die Orthogonalprojektionen $\pi^0(\mathbf{r}^j)$, $j = 1, \dots, 6$, linear unabhängig. Das ist aber äquivalent zu Bedingung (4.18) aus Annahme 4.5. \square

Wir bemerken, dass die Umkehrung aus dem Beweis vom Satz 4.6 für $d = 3$ gilt: Sei \mathbf{r}^j , $j = 1, \dots, 6 = \dim(\mathcal{R}_d)$ eine Basis von \mathcal{R}_d . Dann folgt aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\pi^0(\mathbf{r}^j)$, dass nicht alle Schwerpunkte auf einer Geraden liegen können.

4.4 Symmetrische Kopplung

Wir betrachten in diesem Abschnitt die symmetrische Kopplung für Elastizitätsprobleme. Wie eingangs erwähnt, bereiten die Starrkörperbewegungen Probleme. Um dies zu umgehen, wurde in früheren Arbeiten [CS88, GH95, GHS12, Han90, Ste92] ein (künstlicher) Dirichlet-Rand Γ_0 benutzt, der die Starrkörperbewegungen fixiert. Die erste Arbeit welche ohne solch einen Rand auskommt, ist [CFS97] und damit eine Erweiterung von [CS95] auf Elastizitätsprobleme. In [CFS97] wird positive Definitheit des (äußeren) symmetrischen Steklov-Poincaré Operators gezeigt, unter der Annahme, dass die Netzweite h hinreichend klein ist. Mit Hilfe der im Folgenden eingeführten impliziten Stabilisierung zeigen wir eindeutige Lösbarkeit der symmetrischen Kopplung und benötigen dabei weder einen (künstlichen) Rand Γ_0 , noch eine Annahme an die Netzweite h .

Wir gehen nun wie folgt vor: Zuerst stellen wir die variationelle Formulierung der symmetrischen Kopplung auf und behaupten Lösbarkeit unter Annahme 4.5. Danach führen wir die implizite Stabilisierung ein. Im restlichen Teil dieses Abschnitts zeigen wir dann das Hauptresultat (Satz 4.8).

4.4.1 Variationelle Formulierung

Die Herleitung der symmetrischen Kopplung erfolgt wie in Abschnitt 3.3.1. Wir geben daher direkt die variationelle Formulierung an: Finde $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H} := \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ so dass

$$\langle \mathfrak{A}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle_\Omega + \langle \mathfrak{W}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma + \langle (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi, \mathbf{v} \rangle_\Gamma = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega + \langle \phi_0 + \mathfrak{W}\mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle_\Gamma, \quad (4.23a)$$

$$\langle \boldsymbol{\psi}, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{V}\phi \rangle_\Gamma = \langle \boldsymbol{\psi}, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_\Gamma \quad (4.23b)$$

für alle $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H}$ gilt. Äquivalenz von (4.23) zum Modellproblem (4.1) erfolgt wie in Abschnitt 3.3.1. D.h. Satz 3.13 ist mit den offensichtlichen Änderungen gültig. Der Beweis folgt dabei genau den gleichen Zeilen.

Definiere den Operator $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $F \in \mathcal{H}^*$ über

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle &:= \langle \mathfrak{A}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle_\Omega + \langle \mathfrak{W}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_\Gamma + \langle (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi, \mathbf{v} \rangle_\Gamma \\ &\quad + \langle \boldsymbol{\psi}, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{V}\phi \rangle_\Gamma, \end{aligned} \quad (4.24a)$$

$$F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_\Omega + \langle \phi_0 + \mathfrak{W}\mathbf{u}_0, \mathbf{v} \rangle_\Gamma + \langle \boldsymbol{\psi}, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_\Gamma \quad (4.24b)$$

für alle $(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H}$. Dann ist (4.23) äquivalent zu: Finde $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H}$ so dass

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle = F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H}. \quad (4.25)$$

Satz 4.8. *Unter der Annahme 4.5 besitzt die (diskrete) Formulierung*

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \rangle = F(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h \quad (4.26)$$

eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in \mathcal{H}_h$ mit $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossen. Speziell hat also (4.25) eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) - (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h} \|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.27)$$

wobei $C_{\text{Céa}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω , den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 abhängt.

Des weiteren ist \mathfrak{B} bi-Lipschitz-stetig

$$C_{\text{bilip}}^{-1} \|(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathfrak{B}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - \mathfrak{B}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{bilip}} \|(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}}$$

für alle $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h$. Die Konstante $C_{\text{bilip}} > 0$ hängt nur von \mathfrak{A}, Ω , den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 ab.

Die Konstante $C_{\text{Céa}}$ ist unabhängig von $h > 0$, falls $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_h$ für alle h gilt. Satz 4.8 wird in Abschnitt 4.4.3 bewiesen.

4.4.2 Implizite Stabilisierung

Zunächst beachte man, dass aufgrund von

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{r}, \mathbf{0}) - \mathfrak{B}(\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{r}, \mathbf{0}) \rangle = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{r} \in \mathcal{R}_d$$

der Operator \mathfrak{B} nicht stark monoton sein kann. Um Satz 4.8 zeigen zu können, gehen wir wie in Kapitel 3 vor und addieren passende Terme, welche die zweite Kopplungsgleichung (4.23b) erfüllen, zum Operator \mathfrak{B} .

Satz 4.9. *Sei $\mathcal{H}_h = \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$ ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} . Sei weiters $\{\boldsymbol{\xi}^j : j = 1, \dots, D\} \subseteq \mathcal{Y}_h$, $D \in \mathbb{N}$ eine beliebige Menge von Funktionen. Dann sind der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $\tilde{F} \in \mathcal{H}^*$, definiert als*

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle &:= \langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle \\ &+ \sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{B}\boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma} \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{v} + \mathfrak{B}\boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.28a)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) := F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) + \sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_{\Gamma} \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{v} + \mathfrak{B}\boldsymbol{\psi} \rangle_{\Gamma} \quad (4.28b)$$

für alle $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H}$ äquivalent zu \mathfrak{B} und F in folgendem Sinne: Das Paar $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h$ ist eine Lösung von (4.26) dann und nur dann falls es eine Lösung von

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \rangle = \tilde{F}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h \quad (4.29)$$

ist.

Beweis. Schritt 1: Sei $(\mathbf{u}_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$ eine Lösung von (4.26), dann gilt offensichtlich $\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}_h, \phi_h), (\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}^j) \rangle = F(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}^j)$ und es folgt Gleichung (4.29).

Schritt 2: Sei nun $(\mathbf{u}_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$ eine Lösung von (4.29). Die Wahl von $(\mathbf{v}_h, \psi_h) = (\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}^\ell)$ als Testfunktion in (4.29) liefert

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\xi}^\ell, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma + \sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathfrak{W}\boldsymbol{\xi}^\ell \rangle_\Gamma &= \langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}_h, \phi_h), (\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}^\ell) \rangle \\ &= \tilde{F}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\xi}^\ell) = \langle \boldsymbol{\xi}^\ell, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_\Gamma + \sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_\Gamma \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathfrak{W}\boldsymbol{\xi}^\ell \rangle_\Gamma \end{aligned}$$

oder äquivalent dazu

$$\sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathfrak{W}\boldsymbol{\xi}^\ell \rangle_\Gamma = -\langle \boldsymbol{\xi}^\ell, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma. \quad (4.30)$$

für alle $\ell = 1, \dots, D$. Wir definieren die (symmetrische) Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ mit den Einträgen $\mathbf{A}_{jk} := \langle \boldsymbol{\xi}^k, \mathfrak{W}\boldsymbol{\xi}^j \rangle_\Gamma$ und den Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^D$ mit $\mathbf{x}_j := \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma$ für alle $j, k = 1, \dots, D$. Zusammen mit der $D \times D$ -Einheitsmatrix $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{D \times D}$ ist (4.30) äquivalent zu

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Da \mathfrak{W} elliptisch ist, folgt dass \mathbf{A} positiv semidefinit ist. Deshalb ist $(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ positiv definit und daher $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ oder äquivalent

$$\langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma = \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_\Gamma$$

für alle $j = 1, \dots, D$. Daraus und aus den Definitionen von \mathfrak{B}, F bzw. $\tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{F}$ schließen wir

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}_h, \phi_h) - \mathfrak{B}(\mathbf{u}_h, \phi_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h) \rangle &= \sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_h + \mathfrak{V}\phi_h \rangle_\Gamma \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{v}_h + \mathfrak{V}\psi_h \rangle_\Gamma \\ &= \sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_\Gamma \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{v}_h + \mathfrak{V}\psi_h \rangle_\Gamma \\ &= \tilde{F}(\mathbf{v}_h, \psi_h) - F(\mathbf{v}_h, \psi_h). \end{aligned}$$

Aus (4.29) folgt (4.26) und der Beweis ist fertig. \square

4.4.3 Beweis der Lösbarkeit

Um zu beweisen, dass $\tilde{\mathfrak{B}}$ ein stark monotoner und Lipschitz-stetiger Operator ist, zeigen wir, dass der verwendete Stabilisierungsterm eine zu $\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\phi\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2$ äquivalente Norm auf \mathcal{H} liefert. Das nächste Lemma folgt dabei so wie bei Lemma 3.21 aus einem Kompaktheitsargument und aus der zweiten Korn'schen Ungleichung. Der Beweis ist daher dem Leser überlassen.

Lemma 4.10. Seien $g_j \in \mathcal{H}^*$, $j = 1, \dots, D$ lineare Funktionale mit

$$|g(\mathbf{r}, \mathbf{0})|^2 := \sum_{j=1}^D |g_j(\mathbf{r}, \mathbf{0})|^2 \neq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{r} \in \mathcal{R}_d \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (4.31)$$

Dann liefert die Definition

$$\|(\mathbf{u}, \phi)\|^2 := \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \langle \phi, \mathfrak{B}\phi \rangle_{\Gamma} + |g(\mathbf{u}, \phi)|^2 \quad (4.32)$$

für alle $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H}$ eine äquivalente Norm auf \mathcal{H}

$$C_{\text{norm}}^{-1} \|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathcal{H}} \leq \|(\mathbf{u}, \phi)\| \leq C_{\text{norm}} \|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.33)$$

Die Normäquivalenzkonstante C_{norm} hängt dabei nur von Ω, g und den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ ab. \square

Mit der im folgenden Resultat definierten äquivalenten Norm können wir Lösbarkeit der symmetrischen als auch Lösbarkeit der Johnson-Nédélec Kopplung untersuchen.

Proposition 4.11. Sei $\mathcal{Y}_0 \subseteq \mathcal{Y}_h \cap \mathbf{L}^2(\Gamma)$ ein in $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ abgeschlossener Unterraum, welcher Annahme 4.5 erfüllt. Bezeichne mit $\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^D$, $D = \dim(\mathcal{R}_d)$ eine Basis des Raumes der Starrkörperbewegungen und bezeichne mit $\pi^0 : \mathbf{L}^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{Y}_0$ die $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion. Dann sind $\boldsymbol{\xi}^j := \pi^0(\mathbf{r}^j)$ linear unabhängig und die Funktionale $g_j \in \mathcal{H}^*$ definiert als

$$g_j(\mathbf{u}, \phi) := \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{B}\phi \rangle_{\Gamma} \quad \text{für } (\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H} \quad (4.34)$$

erfüllen die Annahme (4.31) aus Lemma 4.10. Speziell ist also

$$\|(\mathbf{u}, \phi)\|^2 := \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \langle \phi, \mathfrak{B}\phi \rangle_{\Gamma} + \sum_{j=1}^D |\langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{B}\phi \rangle_{\Gamma}|^2$$

eine zu $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ äquivalente Norm und die Normäquivalenzkonstante hängt nur von $\Omega, \mathcal{Y}_0, \lambda^{\text{ext}}$ und μ^{ext} ab.

Beweis. Lineare Unabhängigkeit von $\boldsymbol{\xi}^j = \pi^0(\mathbf{r}^j)$ folgt aus der Beobachtung von Abschnitt 4.3. Die Funktionale g_j sind wohldefiniert, linear und beschränkt. Um Annahme (4.31) zu sehen, merken wir an, dass aufgrund von $\ker(\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K}) = \mathcal{R}_d$,

$$g_j(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = \langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{r} \rangle_{\Gamma} = \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathbf{r} \rangle_{\Gamma} \quad \text{für } j = 1, \dots, D \text{ und } \mathbf{r} \in \mathcal{R}_d$$

gilt. Aus (4.19) schließen wir, dass für jedes $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_d$ ein Index $j \in \{1, \dots, D\}$ mit $g_j(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \neq 0$ existiert. Deshalb ist (4.31) gültig für

$$|g(\mathbf{u}, \phi)|^2 = \sum_{j=1}^D g_j(\mathbf{u}, \phi)^2 = \sum_{j=1}^D |\langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{B}\phi \rangle_{\Gamma}|^2$$

und der Beweis ist damit abgeschlossen. \square

Satz 4.12. Seien die $\{\xi^j\}$ definiert wie in Proposition 4.11. Unter der Annahme 4.5 ist der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ stark monoton

$$C_{\text{mon}} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi) - \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi) \rangle$$

für alle $(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H}$, und Lipschitz-stetig

$$\|\tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi) - \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{lip}} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } (\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H},$$

wobei die Konstanten $C_{\text{mon}}, C_{\text{lip}} > 0$ nur von $\mathfrak{A}, \Omega, \lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 abhängen.

Die Gleichung (4.29) besitzt für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$. Speziell hat (4.29) für $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{u}_h, \phi_h)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{H}_h} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{\mathcal{H}} \quad (4.35)$$

mit $C_{\text{Céa}} = C_{\text{lip}}/C_{\text{mon}}$.

Beweis. Der Beweis folgt genau den Zeilen des Beweises von Satz 3.22. Dazu wird die in Proposition 4.11 definierte äquivalente Norm verwendet. \square

Beweis von Satz 4.8. Der erste Teil folgt aus Satz 4.12 und der Äquivalenz aus Satz 4.9. Bi-Lipschitz-Stetigkeit von \mathfrak{B} kann mit den gleichen Ideen wie im Beweis von Satz 3.17 gezeigt werden. \square

4.5 Johnson-Nédélec Kopplung

In diesem Abschnitt wird die Johnson-Nédélec Kopplung für das Modellproblem (4.1) analysiert, siehe [GHS12, Ste13] für lineare Elastizitätsprobleme. Im Gegensatz zu [GHS12] vermeiden wir einen Dirichlet-Rand zur Fixierung der Starrkörperbewegungen. Außerdem vermeiden wir eine explizite Stabilisierung, welche die Lösung von drei ($d = 2$) bzw. sechs ($d = 3$) zusätzlichen Randintegralgleichungen benötigt, wie sie in [Ste13] eingeführt wird. Die implizite Stabilisierung hat gegenüber der expliziten Stabilisierung aus [Ste13] noch den Vorteil, dass Äquivalenz des stabilisierten Problems zum nicht-stabilisierten Problem auch auf dem diskreten Level gültig bleibt.

4.5.1 Variationelle Formulierung

Die Herleitung funktioniert wie für das Laplaceproblem, d.h. Satz 3.23 gilt entsprechend. Wir verweisen daher auf Satz 3.23 und den dort genannten Referenzen, bzw. auf [GH95]. Das variationelle Problem lautet: Finde $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H} = \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ so dass

$$\langle \mathfrak{A}\epsilon(\mathbf{u}), \epsilon(\mathbf{v}) \rangle_{\Omega} - \langle \phi, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} + \langle \phi_0, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \quad (4.36a)$$

$$\langle \psi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{B}\phi \rangle_{\Gamma} = \langle \psi, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_{\Gamma} \quad (4.36b)$$

für alle $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H}$ gilt. Man beachte, dass die zweite Kopplungsgleichung mit jener der symmetrischen Kopplung übereinstimmt. Die Stabilisierungsterme sehen deswegen gleich aus. Wir definieren noch den Operator $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $F \in \mathcal{H}^*$ über

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle := \langle \mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle_{\Omega} - \langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \boldsymbol{\psi}, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{B}\boldsymbol{\phi} \rangle_{\Gamma} \quad (4.37a)$$

$$F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} + \langle \boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \boldsymbol{\psi}, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_{\Gamma} \quad (4.37b)$$

für alle $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H}$. Dann ist (4.36) äquivalent zu: Finde $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathcal{H}$ so dass

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle = F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H} \text{ gilt.} \quad (4.38)$$

Es bezeichne $c_{\mathfrak{K}} < 1$ die Kontraktionskonstante des Doppelschichtintegraloperators \mathfrak{K} , vgl. [Ste13, SW01], welche

$$\|(\frac{1}{2} + \mathfrak{K})\mathbf{v}\|_{\mathfrak{Y}^{-1}} \leq c_{\mathfrak{K}}\|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{Y}^{-1}} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \text{ erfüllt.}$$

Ähnlich wie in Kapitel 3 benötigen wir noch eine Annahme an die Monotoniekonstante c_{mon} von \mathfrak{A} , um Lösbarkeit und Stabilität der Johnson-Nédélec Kopplung sicherzustellen.

Annahme 4.13. *Bezeichne mit $c_{\mathfrak{K}} \in [1/2, 1)$ die Kontraktionskonstante des Doppelschichtintegraloperators \mathfrak{K} . Dann gelte*

$$2c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{K}}(3\lambda^{\text{ext}} + 2\mu^{\text{ext}})$$

wobei c_{mon} die Monotoniekonstante des stark monotonen und Lipschitz-stetigen Operators \mathfrak{A} ist und $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ die Lamé-Konstanten von $\boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\cdot)$ bezeichnen.

Satz 4.14. *Unter der Annahme 4.5 und Annahme 4.13 besitzt die (diskrete) Formulierung*

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \rangle = F(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h \quad (4.39)$$

eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in \mathcal{H}_h$ mit $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossen. Speziell hat also (4.38) eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) - (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h} \|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.40)$$

wobei $C_{\text{Céa}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω , den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 abhängt.

Des Weiteren ist \mathfrak{B} bi-Lipschitz-stetig

$$C_{\text{bilip}}^{-1} \|(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathfrak{B}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - \mathfrak{B}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}_h^*} \leq C_{\text{bilip}} \|(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}}$$

für alle $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h$. Die Konstante $C_{\text{bilip}} > 0$ hängt nur von \mathfrak{A}, Ω , den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 ab.

Besitzt \mathfrak{A} eine spezielle Struktur, so kann man die Ungleichung aus Annahme 4.13 verbessern.

Bemerkung 4.15. (i) Im linearen Fall $\mathfrak{A}\epsilon(\cdot) = \sigma(\cdot)$ mit den Lamé-Konstanten λ, μ kann die Bedingung $2c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{R}}(3\lambda^{\text{ext}} + 2\mu^{\text{ext}})$ aus Annahme 4.13 durch

$$\eta := \min\{\lambda/\lambda^{\text{ext}}, \mu/\mu^{\text{ext}}\} > \frac{c_{\mathfrak{R}}}{4}$$

ersetzt werden. Das wird in [Ste13] explizit durchgeführt. Wir verweisen daher auf [Ste13] für Details.

(ii) Nimmt man ein Hencky-Von Mises Spannungs-Verzerrungs-Gesetz an, d.h. \mathfrak{A} bezeichne den Operator aus (4.17) mit $\tilde{\mu}(\cdot) \geq \alpha > 0$ und $\tilde{\mu} \leq Kd/2 - \beta$ für gewisse $\alpha, \beta > 0$. Dann können wir die Bedingung $2c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{R}}(3\lambda^{\text{ext}} + 2\mu^{\text{ext}})$ aus Annahme 4.13 durch

$$\eta > \frac{c_{\mathfrak{R}}}{4}$$

mit $\eta := \min\{(K - 2/d \inf_{x \in \mathbb{R}_+} \tilde{\mu}(x))/\lambda^{\text{ext}}, \inf_{x \in \mathbb{R}_+} \tilde{\mu}(x)/\mu^{\text{ext}}\}$ ersetzen. \square

4.5.2 Implizite Stabilisierung

Da die zweite Kopplungsgleichung (4.36b) mit jener der symmetrischen Kopplung übereinstimmt, folgt der Beweis des folgenden Resultats aus dem Beweis von Satz 4.9.

Satz 4.16. Sei $\mathcal{H}_h = \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$ ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} . Sei weiters $\{\xi^j : j = 1, \dots, D\} \subseteq \mathcal{Y}_h$, $D \in \mathbb{N}$ eine beliebige Menge von Funktionen. Dann sind der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $\tilde{F} \in \mathcal{H}^*$, definiert als

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \rangle &:= \langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \rangle \\ &+ \sum_{j=1}^D \langle \xi^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u} + \mathfrak{B}\phi \rangle_{\Gamma} \langle \xi^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{v} + \mathfrak{B}\psi \rangle_{\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.41a)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{v}, \psi) := F(\mathbf{v}, \psi) + \sum_{j=1}^D \langle \xi^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{u}_0 \rangle_{\Gamma} \langle \xi^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{v} + \mathfrak{B}\psi \rangle_{\Gamma} \quad (4.41b)$$

für alle $(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H}$ äquivalent zu \mathfrak{B} und F in folgendem Sinne: Das Paar $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathcal{H}_h$ ist eine Lösung von (4.39) dann und nur dann falls es eine Lösung von

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}_h, \phi_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h) \rangle = \tilde{F}(\mathbf{v}_h, \psi_h) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{H}_h \quad (4.42)$$

ist. \square

4.5.3 Beweis der Lösbarkeit

Satz 4.17. Seien die $\{\xi^j\}$ definiert wie in Proposition 4.11. Unter der Annahme 4.5 und Annahme 4.13 ist der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ stark monoton

$$C_{\text{mon}} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi) - \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi) \rangle$$

für alle $(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H}$, und Lipschitz-stetig

$$\|\tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi) - \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{lip}} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } (\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H},$$

wobei die Konstanten $C_{\text{mon}}, C_{\text{lip}} > 0$ nur von $\mathfrak{A}, \Omega, \lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 abhängen.

Die Gleichung (4.42) besitzt für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$. Speziell hat (4.42) für $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{u}_h, \phi_h)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{H}_h} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{\mathcal{H}} \quad (4.43)$$

mit $C_{\text{Céa}} = C_{\text{lip}}/C_{\text{mon}}$.

Beweis. Der Beweis folgt genau den Zeilen des Beweises von Satz 3.27. Dazu wird die in Proposition 4.11 definierte äquivalente Norm verwendet. Weiters benötigen wir noch ein Analogon zu (3.66)–(3.69) für das Elastizitätsproblem, um starke Monotonie zu zeigen. Wir halten uns dabei an [Ste13] bzw. [OS13b] und skizzieren kurz die Idee: Bezeichne $\mathfrak{S} := \mathfrak{Y}^{-1}(\frac{1}{2} + \mathfrak{K})$ den inneren Steklov-Poincaré Operator, vgl. [HW08], wobei die Integraloperatoren bezüglich den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ im Außenraum zu verstehen sind. Es gilt

$$\langle \chi, (\frac{1}{2} + \mathfrak{K})\mathbf{w} \rangle_{\Gamma} \leq \|(\frac{1}{2} + \mathfrak{K})\mathbf{w}\|_{\mathfrak{Y}^{-1}} \|\chi\|_{\mathfrak{Y}} \leq \sqrt{c_{\mathfrak{K}}} \langle \mathfrak{S}\mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} \|\chi\|_{\mathfrak{Y}} \quad \text{für alle } (\mathbf{w}, \chi) \in \mathcal{H},$$

wobei $\|\chi\|_{\mathfrak{Y}}^2 := \langle \chi, \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma}$. Für $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ definieren wir die Zerlegung $\mathbf{w}^0 := \mathbf{w} - \mathbf{w}^D$, wobei \mathbf{w}^D die harmonische Fortsetzung von $\gamma_0 \mathbf{w}$ auf Ω ist, d.h. $\text{div } \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}^D) = 0$ in Ω und $\mathbf{w}^D = \mathbf{w}$ auf Γ . Es gilt die Orthogonalitätsrelation

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) \rangle_{\Omega} = \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}^D), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^D) \rangle_{\Omega} + \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}^0), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^0) \rangle_{\Omega}, \quad (4.44)$$

und mit der ersten Betti'schen Formel erhält man

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}^D), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^D) \rangle_{\Omega} = \langle \mathfrak{S}\mathbf{w}^D, \mathbf{w}^D \rangle_{\Gamma}. \quad (4.45)$$

Wir zeigen nur starke Monotonie von $\tilde{\mathfrak{B}}$. Der Rest des Beweises verläuft dann analog zu dem Beweis von Satz 3.27. Wir müssen also beweisen, dass für alle $(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H}$

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi) - \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \phi - \psi) \rangle \geq C_{\text{mon}} \|(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \phi - \psi)\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.46)$$

gilt. Sei $(\mathbf{w}, \chi) := (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \phi - \psi)$. Mit starker Monotonie (4.15a) von \mathfrak{A} kommen wir auf

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi) - \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{w}, \chi) \rangle_{\Gamma} &= \langle \mathfrak{B}\mathbf{u} - \mathfrak{B}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\Omega} - \langle \chi, \mathbf{w} \rangle_{\Gamma} + \langle \chi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{w} + \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma} \\ &\quad + \sum_{j=1}^D |\langle \boldsymbol{\xi}^j, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{w} + \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma}|^2 \\ &\geq c_{\text{mon}} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w})\|_{L^2(\Omega)}^2 - \langle \chi, (\frac{1}{2} + \mathfrak{K})\mathbf{w} \rangle_{\Gamma} + \langle \chi, \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma} \\ &\quad + \sum_{j=1}^D |\langle \boldsymbol{\xi}^j, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{w} + \mathfrak{Y}\chi \rangle_{\Gamma}|^2 \\ &=: I_1 - I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Mit der Zerlegung $\mathbf{w} = \mathbf{w}^0 + \mathbf{w}^D$ und der Stetigkeit $\langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) \rangle_{\Omega} \leq C_{\text{cont}}^{\text{ext}} \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2$ aus (4.16b), wobei $C_{\text{cont}}^{\text{ext}} = 6\lambda^{\text{ext}} + 4\mu^{\text{ext}}$ gilt, schätzen wir weiter ab

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \frac{c_{\text{mon}}}{C_{\text{cont}}^{\text{ext}}} \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) \rangle_{\Omega} = \frac{c_{\text{mon}}}{C_{\text{cont}}^{\text{ext}}} \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}^0), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^0) \rangle_{\Omega} + \frac{c_{\text{mon}}}{C_{\text{cont}}^{\text{ext}}} \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}^D), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^D) \rangle_{\Omega} \\ &=: I_{11} + I_{12}. \end{aligned}$$

Weiters liefert die Zerlegung mit der Young'schen Ungleichung für alle $\delta > 0$

$$I_2 = \langle \boldsymbol{\chi}, (\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K})\mathbf{w}^D \rangle_{\Gamma} \leq \sqrt{c_{\mathfrak{R}} \langle \mathfrak{S}\mathbf{w}^D, \mathbf{w}^D \rangle_{\Gamma}} \|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathfrak{B}} \leq \frac{\delta}{2} c_{\mathfrak{R}} \langle \mathfrak{S}\mathbf{w}^D, \mathbf{w}^D \rangle_{\Gamma} + \frac{\delta^{-1}}{2} \|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathfrak{B}}^2.$$

Aus der letzten Ungleichung und der Identität (4.45) erhalten wir

$$I_2 \leq \frac{\delta}{2} c_{\mathfrak{R}} \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}^D), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^D) \rangle_{\Omega} + \frac{\delta^{-1}}{2} \|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathfrak{B}}^2.$$

Wir können nun die Terme $I_1 - I_2 + I_3$ zusammen abschätzen als

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &\geq I_{11} + \left(\frac{c_{\text{mon}}}{C_{\text{cont}}^{\text{ext}}} - \frac{\delta}{2} c_{\mathfrak{R}} \right) \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}^D), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^D) \rangle_{\Omega} + \left(1 - \frac{\delta^{-1}}{2} \right) \|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathfrak{B}}^2 \\ &\geq \left(\frac{c_{\text{mon}}}{C_{\text{cont}}^{\text{ext}}} - \frac{\delta}{2} c_{\mathfrak{R}} \right) \langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) \rangle_{\Omega} + \left(1 - \frac{\delta^{-1}}{2} \right) \langle \boldsymbol{\chi}, \mathfrak{B}\boldsymbol{\chi} \rangle_{\Gamma}, \end{aligned}$$

wobei wir die Orthogonalitätsbeziehung (4.44) ausgenutzt haben. Annahme 4.13, d.h. $2c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{R}}(3\lambda^{\text{ext}} + 2\mu^{\text{ext}})$, ist äquivalent zu $c_{\text{mon}}/C_{\text{cont}}^{\text{ext}} > c_{\mathfrak{R}}/4$ mit $C_{\text{cont}}^{\text{ext}} = 6\lambda^{\text{ext}} + 4\mu^{\text{ext}}$. Daher können wir $\delta > 0$ so wählen, dass $C := \min\{c_{\text{mon}}/C_{\text{cont}}^{\text{ext}} - c_{\mathfrak{R}}\delta/2, 1 - \delta^{-1}/2\} > 0$ gilt. Die Wahl von $\boldsymbol{\xi}^j$ und die äquivalente Norm aus Proposition 4.11 liefern uns weiters

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 + I_4 &\geq C \left(\langle \boldsymbol{\sigma}^{\text{ext}}(\mathbf{w}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) \rangle_{\Omega} + \langle \boldsymbol{\chi}, \mathfrak{B}\boldsymbol{\chi} \rangle_{\Gamma} + \sum_{j=1}^D |\langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{w} + \mathfrak{B}\boldsymbol{\chi} \rangle_{\Gamma}|^2 \right) \\ &\geq \tilde{C} \left(\|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \langle \boldsymbol{\chi}, \mathfrak{B}\boldsymbol{\chi} \rangle_{\Gamma} + \sum_{j=1}^D |\langle \boldsymbol{\xi}^j, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\mathbf{w} + \mathfrak{B}\boldsymbol{\chi} \rangle_{\Gamma}|^2 \right) \\ &= \tilde{C} \|\!(\mathbf{w}, \boldsymbol{\chi})\!\|^2 \geq \tilde{C} C_{\text{norm}}^{-1} \|(\mathbf{w}, \boldsymbol{\chi})\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{C} = C \min\{1, 2\mu^{\text{ext}}\}$. Die Monotoniekonstante $C_{\text{mon}} := \tilde{C} C_{\text{norm}}^{-1} > 0$ des Operators \mathfrak{B} hängt also nur $\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{Y}_0$, und den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ ab. \square

Beweis von Satz 4.14. Der erste Teil folgt aus Satz 4.17 und der Äquivalenz aus Satz 4.16. Bi-Lipschitz-Stetigkeit von \mathfrak{B} kann mit den gleichen Ideen wie im Beweis von Satz 3.17 gezeigt werden. \square

4.6 Bielak-MacCamy Kopplung

In diesem Abschnitt behandeln wir noch die Bielak-MacCamy Eingleichungskopplung, siehe [BM84, CES91] für das lineare Laplaceproblem und [GHS12] für das lineare Elastizitätsproblem. Wir geben nur die wichtigsten Resultate und Skizzen der Beweise an.

4.6.1 Variationelle Formulierung

Die Herleitung und der Beweis der Äquivalenz der Bielak-MacCamy Kopplung zum Modellproblem (4.1) folgen wie in Abschnitt 3.5.1. Die variationelle Formulierung lautet: Finde $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathcal{H} = \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ so dass

$$\langle \mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle_{\Omega} + \langle (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K}')\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} + \langle \boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \quad (4.47a)$$

$$\langle \boldsymbol{\psi}, \mathfrak{B}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} = -\langle \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}_0 \rangle_{\Gamma} \quad (4.47b)$$

für alle $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H}$ gilt. Wir definieren den Operator $\mathfrak{B} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das Funktional $F \in \mathcal{H}^*$ über

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle := \langle \mathfrak{A}\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \rangle_{\Omega} + \langle (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K}')\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} + \langle \boldsymbol{\psi}, \mathfrak{B}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{u} \rangle_{\Gamma}, \quad (4.48a)$$

$$F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle_{\Omega} + \langle \boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} - \langle \boldsymbol{\psi}, \mathbf{u}_0 \rangle_{\Gamma} \quad (4.48b)$$

für alle $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H}$. Dann ist (4.47) äquivalent zu: Finde $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathcal{H}$ so dass

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle = F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\phi}) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathcal{H} \text{ gilt.} \quad (4.49)$$

Satz 4.18. *Unter der Annahme 4.5 und Annahme 4.13 besitzt die (diskrete) Formulierung*

$$\langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \rangle = F(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h \quad (4.50)$$

eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in \mathcal{H}_h$ mit $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ abgeschlossen. Speziell hat also (4.49) eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) - (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h} \|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.51)$$

wobei $C_{\text{Céa}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω , den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 abhängt.

Des weiteren ist \mathfrak{B} bi-Lipschitz-stetig

$$C_{\text{bilip}}^{-1} \|(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathfrak{B}(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - \mathfrak{B}(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{bilip}} \|(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) - (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)\|_{\mathcal{H}}$$

für alle $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h$. Die Konstante $C_{\text{bilip}} > 0$ hängt nur von \mathfrak{A}, Ω , den Lamé-Konstanten $\lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 ab.

Bemerkung 4.15 bleibt auch für die Bielak-MacCamy Kopplung gültig.

4.6.2 Implizite Stabilisierung

Der Beweis des folgenden Resultats verläuft analog zu dem Beweis von Satz 4.9.

Satz 4.19. *Sei $\mathcal{H}_h = \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$ ein abgeschlossener Unterraum von \mathcal{H} . Sei weiters $\{\boldsymbol{\xi}^j : j = 1, \dots, D\} \subseteq \mathcal{Y}_h$, $D \in \mathbb{N}$ eine beliebige Menge von Funktionen. Dann sind der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und das lineare Funktional $\tilde{F} \in \mathcal{H}^*$, definiert als*

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle := \langle \mathfrak{B}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \rangle + \sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathfrak{B}\boldsymbol{\phi} - \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathfrak{B}\boldsymbol{\psi} - \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}, \quad (4.52a)$$

$$\tilde{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) := F(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) - \sum_{j=1}^D \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathbf{u}_0 \rangle_{\Gamma} \langle \boldsymbol{\xi}^j, \mathfrak{B}\boldsymbol{\psi} - \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \quad (4.52b)$$

für alle $(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H}$ äquivalent zu \mathfrak{B} und F in folgendem Sinne: Das Paar $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathcal{H}_h$ ist eine Lösung von (4.50) dann und nur dann falls es eine Lösung von

$$\langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}_h, \phi_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h) \rangle = \tilde{F}(\mathbf{v}_h, \psi_h) \quad \text{für alle } (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{H}_h \quad (4.53)$$

ist. □

4.6.3 Beweis der Lösbarkeit

Satz 4.20. Seien die $\{\xi^j\}$ definiert wie in Proposition 4.11. Unter der Annahme 4.5 und Annahme 4.13 ist der Operator $\tilde{\mathfrak{B}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ stark monoton

$$C_{\text{mon}} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi) - \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{v}, \psi), (\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi) \rangle$$

für alle $(\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H}$, und Lipschitz-stetig

$$\|\tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{u}, \phi) - \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}^*} \leq C_{\text{lip}} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}, \psi)\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } (\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi) \in \mathcal{H},$$

wobei die Konstanten $C_{\text{mon}}, C_{\text{lip}} > 0$ nur von $\mathfrak{A}, \Omega, \lambda^{\text{ext}}, \mu^{\text{ext}}$ und dem Unterraum \mathcal{Y}_0 aus Annahme 4.5 abhängen.

Die Gleichung (4.53) besitzt für jeden abgeschlossenen Unterraum $\mathcal{H}_h \subseteq \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}_h, \phi_h) \in \mathcal{H}_h$. Speziell hat (4.53) für $\mathcal{H}_h = \mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H}$ und es gilt Quasi-Optimalität

$$\|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{u}_h, \phi_h)\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \inf_{(\mathbf{v}_h, \psi_h) \in \mathcal{H}_h} \|(\mathbf{u}, \phi) - (\mathbf{v}_h, \psi_h)\|_{\mathcal{H}} \quad (4.54)$$

mit $C_{\text{Céa}} = C_{\text{lip}}/C_{\text{mon}}$.

Beweis. Der Beweis läuft wie der Beweis von Satz 4.17. Dazu verwendet man, dass Proposition 4.11 gültig ist, wenn man die Funktionale g_j aus (4.34) durch

$$g_j(\mathbf{u}, \phi) := \langle \xi^j, \mathfrak{A}\phi - \mathbf{u} \rangle_{\Gamma} \quad \text{für } (\mathbf{u}, \phi) \in \mathcal{H}$$

ersetzt. □

Beweis von Satz 4.18. Der erste Teil folgt aus Satz 4.20 und der Äquivalenz aus Satz 4.19. Bi-Lipschitz-Stetigkeit von \mathfrak{B} kann mit den gleichen Ideen wie im Beweis von Satz 3.17 gezeigt werden. □

4.7 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt wollen wir zum einen die nicht-stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung mit der stabilisierten Variante vergleichen und zum anderen Lösbarkeit der Johnson-Nédélec Kopplung in dem Fall, dass Annahme 4.13 nicht erfüllt ist, untersuchen.

4.7.1 Galerkin-System

Die Definition der diskreten Operatoren als auch die Implementierung verläuft ähnlich wie in Abschnitt 3.6.1. Ein Unterschied besteht darin, dass wir nun eine Basis des Raumes $\mathcal{H}_h = \mathcal{X}_h \times \mathcal{Y}_h$ mit

$$\mathcal{X}_h := \mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Omega)^d, \quad \mathcal{Y}_h := \mathcal{P}^p(\mathcal{T}^\Gamma)^d$$

definieren müssen. In kanonischer Weise wird die Basis komponentenweise definiert. Sei $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1}^d$ die kanonische Basis von \mathbb{R}^d . Mit den Notationen aus Abschnitt 3.6.1 definiere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_j &:= \eta_j \mathbf{e}^k \quad \text{für } j = 1 + (k-1)S^\Omega, \dots, kS^\Omega, k = 1, \dots, d, \\ \boldsymbol{\chi}_j &:= \chi_j \mathbf{e}^k \quad \text{für } j = 1 + (k-1)P^\Gamma, \dots, kP^\Gamma, k = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Weiters definiere die Basis $\{\varphi_j\}_{j=1}^H$ von \mathcal{H}_h mit $H := \dim(\mathcal{H}_h) = d(S^\Omega + P^\Gamma)$ über

$$\begin{aligned} \varphi_j &:= (\boldsymbol{\eta}_j, \mathbf{0}) \quad \text{für } j = 1, \dots, dS^\Omega, \\ \varphi_{j+dS^\Omega} &:= (\mathbf{0}, \boldsymbol{\chi}_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, dP^\Gamma. \end{aligned}$$

Hier betrachten wir nur den linearen Fall, dass $\mathfrak{A}\epsilon(\cdot) = \boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ mit Lamé-Konstanten λ, μ und definieren die Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{H \times H}$ über

$$\mathbf{B}_{jk} := \langle \mathfrak{B}\varphi_k, \varphi_j \rangle \quad \text{für alle } j, k = 1, \dots, H.$$

Dann ist das diskrete Gleichungssystem (4.26), (4.39), bzw. (4.50) für $\mathcal{H}_h = \mathcal{S}^q(\mathcal{T}^\Omega)^d \times \mathcal{P}^p(\mathcal{T}^\Gamma)^d$ äquivalent zu: Finde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^H$ mit

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \tag{4.55}$$

wobei $\mathbf{f}_j := F(\varphi_j)$ für $j = 1, \dots, H$.

Es bezeichne mit $\{\mathbf{r}^j\}_{j=1}^D$ die kanonische Basis von \mathcal{R}_d . Für die Stabilisierungsterme wählen wir $\boldsymbol{\xi}^j := \pi^0 \mathbf{r}^j$ mit der $L^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion $\pi^0 : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^0(\mathcal{T}^\Gamma)^d$. Die Stabilisierungsvektoren $\mathbf{s}^k \in \mathbb{R}^H$ seien für die symmetrische Kopplung und Johnson-Nédélec Kopplung gegeben als

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}^k)_j &:= \langle \boldsymbol{\xi}^k, (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})\boldsymbol{\eta}_j \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = 1, \dots, dS^\Omega, \\ (\mathbf{s}^k)_{j+dS^\Omega} &:= \langle \boldsymbol{\xi}^k, \mathfrak{B}\boldsymbol{\chi}_j \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = 1, \dots, dP^\Gamma, \end{aligned}$$

und für die Bielak-MacCamy Kopplung als

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}^k)_j &:= -\langle \boldsymbol{\xi}^k, \boldsymbol{\eta}_j \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = 1, \dots, dS^\Omega, \\ (\mathbf{s}^k)_{j+dS^\Omega} &:= \langle \boldsymbol{\xi}^k, \mathfrak{B}\boldsymbol{\chi}_j \rangle_\Gamma \quad \text{für } j = 1, \dots, dP^\Gamma. \end{aligned}$$

Mit der Definition $\tilde{\mathbf{B}} := \mathbf{B} + \sum_{k=1}^D \mathbf{s}^k (\mathbf{s}^k)^T$ sind die stabilisierten Gleichungssysteme (4.29), (4.42), bzw. (4.53) äquivalent zu: Finde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^H$ mit

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{f}}, \tag{4.56}$$

wobei $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^H$ über $(\tilde{\mathbf{f}})_j := \tilde{F}(\varphi_j)$, $j = 1, \dots, H$ definiert ist. Man beachte, dass aufgrund der Äquivalenz des nicht-stabilisierten Systems zum stabilisierten System, der Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^H$ von (4.56) mit dem Lösungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^H$ aus (4.55) übereinstimmt.

Für das Aufstellen der FEM-BEM Galerkin-Matrix verwenden wir den Code, welcher im Zuge der Diplomarbeit [ME14] entwickelt wurde. Wir verweisen daher auf die genannte Arbeit zu Details der Implementierung, vor allem zur Implementierung der Galerkin-Matrizen der Randintegraloperatoren, die auf dem Programmpaket HILBERT beruht.

4.7.2 Lineares Transmissionsproblem

Sei Ω das in Abbildung 3.1 skizzierte L-förmige Gebiet mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$ und Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Ω . Sei $\mathfrak{A}\epsilon(\cdot) := \boldsymbol{\sigma}(\cdot)$ mit den Lamé-Konstanten λ, μ . Nach Abschnitt 4.2.2 gilt $c_{\text{mon}} = 2\mu$ für die Monotoniekonstante von \mathfrak{A} .

Wir wollen verifizieren, dass Annahme 4.13 nicht notwendig für eindeutige Lösbarkeit der Johnson-Nédélec Kopplung ist. Dazu berechnen wir sowohl die Konditionszahlen der nicht-stabilisierten Matrizen \mathbf{B} , als auch jene der stabilisierten Matrizen $\tilde{\mathbf{B}}$ für $\mu = \frac{i}{1000}$ mit $i = 1, \dots, 500$ und $\lambda \in \{0, 10^{-1}, 1\}$. Für die äußeren Lamé-Parameter wählen wir $\lambda^{\text{ext}} = 1/5$, $\mu^{\text{ext}} = 1/5$. Man beachte, dass auf jeden Fall die kritischen Werte mit $4\mu = 2c_{\text{mon}} \leq c_{\mathfrak{R}}(3\lambda^{\text{ext}} + 2\mu^{\text{ext}}) = c_{\mathfrak{R}}$ abgedeckt sind. Zur Abschätzung der Konditionszahl $\text{cond}_1(\cdot)$ benutzen wir die Routine `condest`(\cdot) aus MATLAB.

In Abbildung 4.3 haben wir Abschätzungen für die Konditionszahlen der erwähnten Matrizen für $\mathcal{H}_5 = \mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{T}}_5^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{T}}_5^\Gamma)$ in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ für verschieden Werte von λ geplottet. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass wir nur die Johnson-Nédélec Kopplung betrachten. Wie aus beiden Abbildungen hervorgeht, sind die nicht-stabilisierten als auch die stabilisierten Matrizen für Werte von μ , welche Annahme 4.13 verletzen, regulär. Weiters ist ersichtlich, dass das qualitative und quantitative Verhalten der Konditionszahlen der stabilisierten Matrizen ähnlich dem der nicht-stabilisierten Matrizen sind.

Zuletzt messen wir die Zeit zum Lösen der Gleichungssysteme (4.55) und (4.56) in Abhängigkeit von $\mu = \frac{i}{1000}$, $i = 1, \dots, 500$ und $\lambda = 1$. Alle Gleichungssysteme werden mit dem Backslash-Operator aus MATLAB gelöst. Für die Daten wählen wir $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1, 1)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \in \Omega$. Darüber hinaus beachte man, dass die Kompatibilitätsbedingung (4.2) zwar nicht erfüllt ist, aber nach Bemerkung 4.1 dennoch eine eindeutige Lösung mit modifizierter Abklingbedingung (4.3) existiert. In Abbildung 4.4 sind die Zeiten, welche zum Lösen der Probleme (4.55), (4.56) aufgewendet wurden für $\mathcal{H}_7 = \mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{T}}_7^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\hat{\mathcal{T}}_7^\Gamma)$ geplottet. Wiederum lässt sich kein Einfluss von kritischen Werten für μ feststellen. Interessanterweise sind die Lösungszeiten bei den stabilisierten Systemen deutlich geringer als jene der nicht-stabilisierten Systeme.

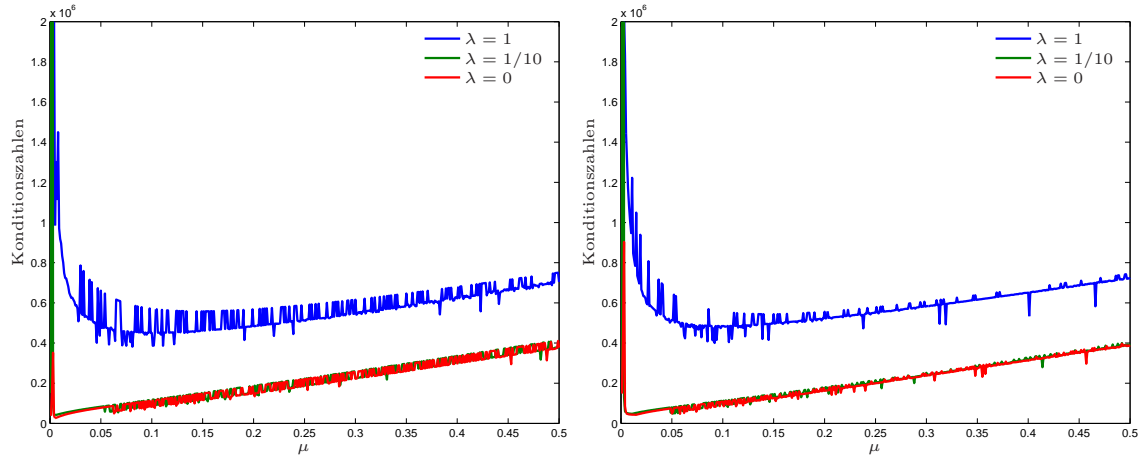


Abbildung 4.3: Konditionszahlen $\text{cond}_1(\cdot)$ der nicht-stabilisierten Systemmatrizen (links) und der stabilisierten Systemmatrizen (rechts) für das Experiment aus Abschnitt 3.6.2 in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ mit $\mathcal{H}_5 = \mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_5^\Omega)^2 \times \mathcal{P}^0(\widehat{\mathcal{T}}_5^\Gamma)^2$. Die Konditionszahlen $\text{cond}_1(\cdot)$ werden dabei mit der MATLAB-Routine `condest` abgeschätzt.

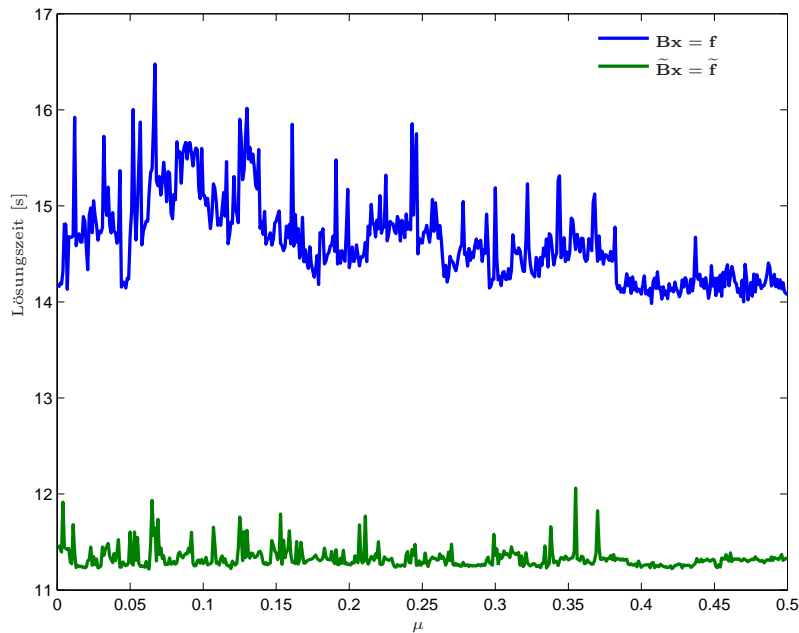


Abbildung 4.4: Lösungszeiten für die nicht-stabilisierten und stabilisierten Gleichungssysteme für das Experiment aus Abschnitt 4.7.2 mit den Daten $\mathbf{f} = (1, 1)$, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$, $\phi_0 = \mathbf{0}$ und $\mathcal{H}_7 = \mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_7^\Omega)^2 \times \mathcal{P}^0(\widehat{\mathcal{T}}_7^\Gamma)^2$ in Abhängigkeit von $\mu \in [10^{-3}, \frac{1}{2}]$ und $\lambda = 1$.

5 Adaptive FEM-BEM Kopplungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit adaptiven FEM-BEM Kopplungen für das Modellproblem (3.3) aus Kapitel 3. Grundsätzlich gehen wir davon aus, dass die hinreichenden Bedingungen für Lösbarkeit der Kopplungsgleichungen, welche in Kapitel 3 herausgearbeitet wurden, erfüllt sind. Im Folgenden verwenden wir immer wieder den Operator \mathfrak{B} , welcher — je nach Kopplungsmethode — der in (3.45a), (3.58a), oder (3.74a) definierte Operator ist. Mit $\tilde{\mathfrak{B}}$ bezeichnen wir den entsprechenden, in (3.50a), (3.63a), bzw. (3.79a) definierten Operator, welcher zum stabilisierten System gehört. Die Galerkin-Lösungen suchen wir im Unterraum $\mathcal{H}_\ell := \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ mit $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}_0$.

Der Aufbau des Kapitels ist wie folgt: In Abschnitt 5.1 stellen wir den adaptiven Algorithmus vor. In Abschnitt 5.2 definieren wir die zuverlässigen Residualschätzer, wobei die Definitionen auf [CS95] aufbauen. Darüber hinaus beweisen wir auch Konvergenz des mit dem Residualschätzer gesteuerten adaptiven Algorithmus. Grundlage dafür bilden inverse Ungleichungen für die Randintegraloperatoren. Der Beweis folgt dabei den Arbeiten [AFF⁺13a] für die Bielak-MacCamy Kopplung und [AFF⁺12] für die symmetrische Kopplung. In Abschnitt 5.3 führen wir noch den ZZ-Schätzer für die FEM-BEM Kopplungen ein und zeigen Effizienz bis auf Terme höherer Ordnung. Unter einer Saturationsannahme kann man auch Zuverlässigkeit des ZZ-Schätzers zeigen. Numerische Experimente aus Abschnitt 5.4 belegen unsere theoretischen Überlegungen.

Wir verweisen noch auf Publikationen zur Analyse alternativer Fehlerschätzer: Der 2-level Fehlerschätzer wird etwa in [MS99] für die (nichtlineare) symmetrische Kopplung und in [AFKP12] für die Johnson-Nédélec Kopplung untersucht. Des weiteren wird in [AFKP12] auch der $(h - h/2)$ -Fehlerschätzer für die Johnson-Nédélec Kopplung definiert und für die symmetrische Kopplung wird in [AFP12] Konvergenz des mit dem $(h - h/2)$ -Fehlerschätzer gesteuerten adaptiven Algorithmus gezeigt.

Der Residualschätzer für die adaptive Johnson-Nédélec Kopplung in der Elastostatik wird in [ME14] bearbeitet, wobei die Definition des Schätzers auf jener aus [CFS97] für die symmetrische Kopplung beruht. In [CFS97] und [ME14] finden sich auch diverse numerische Beispiele.

5.1 Adaptiver Algorithmus

Mit ζ_ℓ bezeichnen wir einen *a posteriori* Schätzer, z.B. den Residualschätzer ρ_ℓ aus Abschnitt 5.2. Des weiteren besitze ζ_ℓ die Bauart

$$\zeta_\ell^2 := \zeta_\ell(\mathcal{I}_\ell)^2 := \sum_{T \in \mathcal{I}_\ell} \zeta_\ell(T)^2, \quad (5.1)$$

wobei \mathcal{I}_ℓ die Menge der Indikatorelemente darstellt. Für den Residualschätzer ρ_ℓ gilt etwa $\mathcal{I}_\ell = \mathcal{T}_\ell^\Omega \cup \mathcal{E}_\ell^\Omega \cup \mathcal{T}_\ell^\Gamma$. Wir bezeichnen $\zeta_\ell(T)$ als lokalen Verfeinerungsindikator für $T \in \mathcal{I}_\ell$.

Heuristisch betrachtet gibt $\zeta_\ell(T)$ an, ob das Element T verfeinert werden soll.

Algorithmus 5.1 (Adaptiver Algorithmus). **Input:** Starttriangulierung \mathcal{T}_0 , Zähler $\ell := 0$, Adaptivitätsparameter $0 < \theta \leq 1$.

- (i) Berechne diskrete Lösung $\mathbf{u}_\ell \in \mathcal{H}_\ell$.
- (ii) Berechne Verfeinerungsindikatoren $\zeta_\ell(T)$ für alle $T \in \mathcal{I}_\ell$.
- (iii) Bestimme $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{I}_\ell$, so dass die Dörfler-Markierungsbedingung

$$\theta \zeta_\ell^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{M}_\ell} \zeta_\ell(T)^2 \quad (5.2)$$

erfüllt ist.

- (iv) Erstelle neue Triangulierung $\mathcal{T}_{\ell+1}$, wobei zumindest alle markierten Elemente $T \in \mathcal{M}_\ell$ verfeinert werden.
- (v) Erhöhe Zähler ℓ und gehe zu (i).

Output: Folge von Galerkin-Lösungen $\{\mathbf{u}_\ell\}_{\ell=0}^L$, Folge von Fehlerschätzern $\{\zeta_\ell\}_{\ell=0}^L$, und Folge von Triangulierungen $\{\mathcal{T}_\ell\}_{\ell=0}^L$. \square

Für die FEM-BEM Kopplungen ist $\mathbf{u}_\ell = (u_\ell, \phi_\ell) \in \mathcal{H}_\ell := \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ die (eindeutige) diskrete Lösung von (3.47), (3.60), oder (3.76) und $\mathcal{T}_\ell = (\mathcal{T}_\ell^\Omega, \mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ im adaptiven Algorithmus 5.1.

Bemerkung 5.2. Die Menge \mathcal{M}_ℓ bei der Dörfler-Markierung (5.2) wird meist von minimaler Kardinalität gewählt. Dies wird, z.B., in [CKNS08] benötigt, um Quasi-Optimalität für FEM zu zeigen. \square

Als Abbruchkriterium des Algorithmus kann Folgendes verwendet werden:

- $\zeta_\ell \leq \tau$ für vorgegebene Schranke $\tau > 0$. Für zuverlässige Schätzer impliziert das $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{rel}}\tau$ für den Galerkin-Fehler.
- Anzahl der Schritte, d.h. $L \in \mathbb{N}$, wird vorgegeben.
- Schranke C_{mem} des zu verwendenden Arbeitsspeichers.

5.2 Residualschätzer

In diesem Abschnitt behandeln wir die Zuverlässigkeit des Residualschätzers und Konvergenz des mit dem Residualschätzer gesteuerten adaptiven Algorithmus 5.1. Wir nehmen an, dass die Randtriangulierung \mathcal{T}_ℓ^Γ mit der Restriktion der Volumstriangulierung am Rand übereinstimmt, d.h. $\mathcal{T}_\ell^\Gamma = \mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma$.

5.2.1 Zuverlässigkeit

Zuverlässigkeit des gewichteten Residualschätzers für die symmetrische Kopplung und $d = 2$ wurde zuerst in [CS95] bewiesen. Darauf aufbauend wird in [AFKP12] ein analoges Resultat für die (lineare) Johnson-Nédélec Kopplung und in [AFF⁺13a] für die Bielak-MacCamy Kopplung gezeigt.

Wir fordern die zusätzliche Regularität

$$u_0 \in H^1(\Gamma), \quad \phi_0 \in L^2(\Gamma) \quad (5.3)$$

an die Daten als auch

$$(\operatorname{div}_{\mathcal{T}_\ell^\Omega} \mathfrak{A} \nabla v_\ell)|_T := \operatorname{div}(\mathfrak{A} \nabla v_\ell|_T) \in L^2(T) \quad (5.4a)$$

$$(\mathfrak{A} \nabla v_\ell)|_T \cdot \mathbf{n}_T \in L^2(\partial T) \quad (5.4b)$$

für alle $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$, $v_\ell \in \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$. Hier bezeichnen wir mit \mathbf{n}_T den nach außen gerichteten Normalenvektor auf ∂T für $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$. Die Annahmen (5.3)–(5.4) stellen sicher, dass die Terme im Residualschätzer wohldefiniert sind. Beispielsweise ist für $\mathfrak{A} = \operatorname{Id}$ Annahme (5.4) automatisch erfüllt.

Wir definieren noch Kantensprünge. Seien $T_+, T_- \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$ die zwei eindeutigen Elemente mit $T_+ \cap T_- = E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega$ und Normalenvektoren \mathbf{n}_\pm . Dann gilt

$$[\mathfrak{A} \nabla v_\ell \cdot \mathbf{n}] := (\mathfrak{A} \nabla v_\ell)|_{T_+} \cdot \mathbf{n}_+ + (\mathfrak{A} \nabla v_\ell)|_{T_-} \cdot \mathbf{n}_- \in L^2(E).$$

Die Beweise der folgenden Resultate folgen analog zu [CS95] und [AFF⁺13a]. Man benötigt einen Approximationsoperator $\mathfrak{P}_\ell : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$, welcher die lokale Approximationseigenschaft

$$\|(1 - \mathfrak{P}_\ell)v\|_{L^2(T)} \leq C_{\text{apx}} |T|^{1/d} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_\ell(T))}$$

und lokale Stabilität

$$\|\nabla(1 - \mathfrak{P}_\ell)v\|_{L^2(T)} \leq C_{\text{stab}} \|\nabla v\|_{L^2(\omega_\ell(T))}$$

für $v \in H^1(\Omega)$ erfüllt. Die Konstanten $C_{\text{apx}}, C_{\text{stab}} > 0$ hängen dabei nur von q und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω ab. Diese Eigenschaften werden, z.B., vom Scott-Zhang Operator [SZ90] erfüllt. Des weiteren benötigt man Zuverlässigkeit des Residualschätzers für die schwach-singuläre Integralgleichung, welche in [CMS01] ($d = 3$) bzw. [CS95] ($d = 2$) zu finden ist.

Satz 5.3 (Residualschätzer für symmetrische Kopplung). *Sei $\mathbf{u} = (u, \phi) \in \mathcal{H}$ die eindeutige Lösung von (3.46) und $\mathbf{u}_\ell = (u_\ell, \phi_\ell) \in \mathcal{H}_\ell$ die diskrete Lösung von (3.47). Dann gilt*

$$C_{\text{rel}}^{-2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \rho_\ell^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega} \rho_\ell(T)^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega} \rho_\ell(E)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} \rho_\ell(T)^2 \quad (5.5)$$

mit den Volumsbeiträgen

$$\rho_\ell(T)^2 := |T|^{2/d} \|\operatorname{div}_{\mathcal{T}_\ell^\Omega} \mathfrak{A} \nabla u_\ell + f\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega, \quad (5.6a)$$

$$\rho_\ell(E)^2 := |E|^{1/(d-1)} \|[\mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(E)}^2 \quad \text{für } E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega, \quad (5.6b)$$

und den Randbeiträgen

$$\begin{aligned} \rho_\ell(T)^2 &:= |T|^{1/(d-1)} \|\phi_0 - \mathfrak{A}\nabla u_\ell \cdot \mathbf{n} + \mathfrak{W}(u_0 - u_\ell) - (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi_\ell\|_{L^2(T)}^2 \\ &\quad + |T|^{1/(d-1)} \|\nabla_\Gamma((\frac{1}{2} - \mathfrak{K})(u_0 - u_\ell) - \mathfrak{V}\phi_\ell)\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma. \end{aligned} \quad (5.6c)$$

Die Konstante $C_{\text{rel}} > 0$ hängt dabei nur von Ω , q , dem Operator \mathfrak{A} , und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω ab. \square

Satz 5.4 (Residualschätzer für Johnson-Nédélec Kopplung). *Sei $\mathbf{u} = (u, \phi) \in \mathcal{H}$ die eindeutige Lösung von (3.59) und $\mathbf{u}_\ell = (u_\ell, \phi_\ell) \in \mathcal{H}_\ell$ die diskrete Lösung von (3.60). Dann gilt*

$$C_{\text{rel}}^{-2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \rho_\ell^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega} \rho_\ell(T)^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega} \rho_\ell(E)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} \rho_\ell(T)^2 \quad (5.7)$$

mit den in (5.6a)–(5.6b) definierten Volumsbeiträgen $\rho_\ell(T), \rho_\ell(E)$ für $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$, $E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega$ und den Randbeiträgen

$$\begin{aligned} \rho_\ell(T)^2 &:= |T|^{1/(d-1)} \|\phi_0 + \phi_\ell - \mathfrak{A}\nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(T)}^2 \\ &\quad + |T|^{1/(d-1)} \|\nabla_\Gamma((\frac{1}{2} - \mathfrak{K})(u_0 - u_\ell) - \mathfrak{V}\phi_\ell)\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Konstante $C_{\text{rel}} > 0$ hängt dabei nur von Ω , q , dem Operator \mathfrak{A} , und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω ab. \square

Satz 5.5 (Residualschätzer für Bielak-MacCamy Kopplung). *Sei $\mathbf{u} = (u, \phi) \in \mathcal{H}$ die eindeutige Lösung von (3.75) und $\mathbf{u}_\ell = (u_\ell, \phi_\ell) \in \mathcal{H}_\ell$ die diskrete Lösung von (3.76). Dann gilt*

$$C_{\text{rel}}^{-2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \rho_\ell^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega} \rho_\ell(T)^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega} \rho_\ell(E)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} \rho_\ell(T)^2 \quad (5.9)$$

mit den in (5.6a)–(5.6b) definierten Volumsbeiträgen $\rho_\ell(T), \rho_\ell(E)$ für $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$, $E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega$ und den Randbeiträgen

$$\begin{aligned} \rho_\ell(T)^2 &:= |T|^{1/(d-1)} \|\phi_0 + (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi_\ell - \mathfrak{A}\nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(T)}^2 \\ &\quad + |T|^{1/(d-1)} \|\nabla_\Gamma(u_\ell - u_0 - \mathfrak{V}\phi_\ell)\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Konstante $C_{\text{rel}} > 0$ hängt dabei nur von Ω , q , dem Operator \mathfrak{A} , und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω ab. \square

Zusätzlich wollen wir wie in [AFKP12] im Fehlerschätzer die Datenapproximation mit steuern. Sei $\mathfrak{P}_\ell^\Gamma : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ eine $H^{1/2}(\Gamma)$ -stabile Projektion. Wir ersetzen das Datum $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ bei der symmetrischen und Johnson-Nédélec Kopplung durch $u_{0,\ell} := \mathfrak{P}_\ell^\Gamma u_0$ und betrachten anstelle von F aus (3.45b) bzw. (3.58b) die gestörten rechten Seiten

$$F_\ell(\mathbf{v}) := \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \mathfrak{W}u_{0,\ell} + \phi_0, v \rangle_\Gamma + \langle \psi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})u_{0,\ell} \rangle_\Gamma, \quad \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H} \quad (5.11)$$

für die symmetrische Kopplung bzw.

$$F_\ell(\mathbf{v}) := \langle f, v \rangle_\Omega + \langle \phi_0, v \rangle_\Gamma + \langle \psi, (\frac{1}{2} - \mathfrak{K})u_{0,\ell} \rangle_\Gamma, \quad \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H} \quad (5.12)$$

für die Johnson-Nédélec Kopplung. Im Diskreten müssen die Galerkin-Matrizen von \mathfrak{W} und \mathfrak{K} für die linke Seite aufgebaut werden. Daher ist es sinnvoll diese Matrizen auch für das Assemblieren der rechten Seite zu verwenden. Bei der Bielak-MacCamy Kopplung vernachlässigen wir die Datenapproximation, da kein Randintegraloperator für die rechte Seite benötigt wird.

Im Folgenden bezeichne $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ die Lösung von

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = F(\mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \quad (5.13)$$

und $\mathbf{u}_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ die diskrete Lösung des gestörten Problems

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_\ell \rangle = F_\ell(\mathbf{v}_\ell) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_\ell \in \mathcal{H}_\ell, \quad (5.14)$$

wobei \mathfrak{B} der Operator aus (3.45a) bzw. (3.58a) ist.

Satz 5.6 (Zuverlässigkeit mit Datenapproximation). *Der Schätzer ρ_ℓ sei definiert wie in Satz (5.3) (symmetrische Kopplung) bzw. wie in Satz (5.4) (Johnson-Nédélec Kopplung), wobei $\mathbf{u}_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ die Lösung des gestörten Problems (5.14) bezeichnet und $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ durch $u_{0,\ell} = \mathfrak{P}_\ell^\Gamma u_0 \in \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ ersetzt wird. Definiere die Oszillationen*

$$\text{osc}_\ell^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} \text{osc}_\ell(T)^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} |T|^{1/(d-1)} \|\nabla_\Gamma(u_0 - u_{0,\ell})\|_{L^2(T)}^2. \quad (5.15)$$

Dann existiert eine Konstante C_{rel} mit

$$C_{\text{rel}}^{-2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \rho_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2 =: \tilde{\rho}_\ell^2. \quad (5.16)$$

Die Konstante $C_{\text{rel}} > 0$ hängt dabei nur von Ω , q , dem Operator \mathfrak{A} , dem Operator \mathfrak{P}_ℓ^Γ , und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω ab.

Beweis. Sei $\tilde{\mathbf{u}}_\ell \in \mathcal{H}$ die eindeutige Lösung des gestörten Problems

$$\langle \mathfrak{B}\tilde{\mathbf{u}}_\ell, \mathbf{v} \rangle = F_\ell(\mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{H}.$$

Man beachte, dass \mathbf{u}_ℓ die Galerkin-Approximation von $\tilde{\mathbf{u}}_\ell$ ist. Aus der Dreiecksungleichung, der bi-Lipschitz-Stetigkeit des Operators \mathfrak{B} , und der Zuverlässigkeit von ρ_ℓ folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_\ell\|_{\mathcal{H}} + \|\tilde{\mathbf{u}}_\ell - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \lesssim \|F - F_\ell\|_{\mathcal{H}^*} + \rho_\ell \\ &\lesssim \|u_0 - u_{0,\ell}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \rho_\ell. \end{aligned}$$

Nach [Kar12, Satz 3.26] gilt $\|(1 - \mathfrak{P}_\ell^\Gamma)u_0\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C_{\text{apx}} \text{osc}_\ell$, wobei die Konstante $C_{\text{apx}} > 0$ nur von der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Γ , der Operatornorm von \mathfrak{P}_ℓ^Γ , und von Γ abhängt. \square

5.2.2 Konvergenz des adaptiven Algorithmus

Dieser Abschnitt behandelt die Konvergenz des adaptiven Algorithmus 5.1, welcher mit dem Residualschätzer $\tilde{\rho}_\ell$ gesteuert wird. Wir halten uns dabei an [AFF⁺12, AFF⁺13a]. Für den Beweis sind die folgenden inversen Ungleichungen für Randintegraloperatoren nötig. Die inverse Ungleichung für den Einfachschichtintegraloperator \mathfrak{W} wurde zuerst in [FKMP13] publiziert. Die restlichen Integraloperatoren werden beispielsweise in [AFF⁺12] und der Promotionsschrift [Kar12] ausführlich behandelt.

Lemma 5.7 (Inverse Ungleichungen für Randintegraloperatoren). *Sei \mathcal{T}_ℓ^Γ eine reguläre Triangulierung von Γ . Ferner sei $h_\ell \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ die Netzweitenfunktion mit $h_\ell|_T = |T|^{1/(d-1)}$. Es existieren $C_{\text{inv}}^{\mathfrak{R}}, C_{\text{inv}}^{\mathfrak{W}} > 0$ mit*

$$\|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma \mathfrak{R} v_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^{\mathfrak{R}} \|v_\ell\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad (5.17)$$

$$\|h_\ell^{1/2} \mathfrak{W} v_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^{\mathfrak{R}} \|v_\ell\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad (5.18)$$

$$\|h_\ell^{1/2} \nabla_\Gamma \mathfrak{W} \psi_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^{\mathfrak{W}} \|\psi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}, \quad (5.19)$$

$$\|h_\ell^{1/2} \mathfrak{R}' \psi_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{\text{inv}}^{\mathfrak{W}} \|\psi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad (5.20)$$

für alle diskreten Funktionen $v_\ell \in \mathcal{S}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$, $\psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$. Die Konstanten $C_{\text{inv}}^{\mathfrak{R}}, C_{\text{inv}}^{\mathfrak{W}}$ hängen nur von der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Γ und von p ab. \square

Das Hauptresultat dieses Abschnitts nutzt die in Abschnitt 2.5 besprochene *newest vertex bisection* (NVB) Verfeinerungsstrategie aus. Es werden dabei folgende Eigenschaften, welche auch für andere Netzverfeinerungsroutinen gültig sind, siehe z.B. [Ver13], verwendet:

- Die aus $\mathcal{T}_\ell = (\mathcal{T}_\ell^\Omega, \mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ entstandenen Netze $\mathcal{T}_{\ell+1} = (\mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega, \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)$ sind regulär (im Sinne von Ciarlet) und γ -formregulär.
- Jedes verfeinerte Element $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$ bzw. $T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma$ ist die Vereinigung seiner Söhne $T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$ bzw. $T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$.
- Es existiert eine ℓ -unabhängige Konstante $0 < \kappa < 1$ mit

$$|T'| \leq \kappa |T| \quad (5.21a)$$

für alle Söhne $T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$ bzw. $T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$ von $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$ bzw. $T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma$ und

$$|E'| \leq \kappa |E| \quad (5.21b)$$

für alle Söhne $E' \in \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega$ von $E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega$.

Die ersten zwei Punkte implizieren vor allem, dass die Räume $\mathcal{H}_\ell \subseteq \mathcal{H}_{\ell+1}$ geschachtelt sind.

Um die Konvergenz des Residualschätzers zeigen zu können, nehmen wir an, dass \mathfrak{A} die lineare Bauart

$$(\mathfrak{A} \nabla v)(\mathbf{x}) = ((\mathfrak{A}_{jk}(\mathbf{x}))_{j,k=1}^d)^d \nabla v(\mathbf{x}) \quad \text{für } v \in H^1(\Omega), \mathbf{x} \in \Omega \quad (5.22)$$

mit Koeffizienten $\mathfrak{A}_{jk} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ besitzt. Es ist daher sinnvoll die Kurzschreibweise $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{jk})_{j,k=1}^d \in W^{1,\infty}(\Omega)^{d \times d}$ zu verwenden. Für nichtlineares \mathfrak{A} kann folgendes Resultat nur in speziellen Fällen gezeigt werden. Wir gehen darauf in Abschnitt 5.2.3 näher ein.

Im Folgenden setzen wir $\tilde{\rho}_\ell := \rho_\ell$ und $u_{0,\ell} := u_0$, falls ρ_ℓ den Fehlerschätzer der Bielak-MacCamy Kopplung bezeichnet.

Lemma 5.8. *Sei $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ die Lösung von (5.13) und $\{\mathbf{u}_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ die vom adaptiven Algorithmus 5.1 mit $\zeta_\ell = \tilde{\rho}_\ell$ generierte Folge der zugehörigen diskreten Galerkin-Lösungen. Für die symmetrische Kopplung bzw. Johnson-Nédélec Kopplung werden die gestörten (diskreten) Probleme (5.14) betrachtet. Dann erfüllt $\tilde{\rho}_\ell$ die Schätzerreduktion*

$$\tilde{\rho}_{\ell+1}^2 \leq \kappa_{\text{red}} \tilde{\rho}_\ell^2 + C_{\text{red}} \left(\|\mathbf{u}_{\ell+1} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_{0,\ell+1} - u_{0,\ell}\|_{H^1/2(\Gamma)}^2 \right) \quad (5.23)$$

mit ℓ -unabhängigen Konstanten $0 < \kappa_{\text{red}} < 1$, $C_{\text{red}} > 0$.

Beweis. Die wesentlichen Bestandteile des Beweises sind die inversen Abschätzungen aus Lemma 5.7, die Annahmen (5.21) und die Dörfler-Markierung (5.2). Weiters benützen wir die Young'sche Ungleichung $(a+b)^2 \leq (1+\delta)a^2 + (1+\delta^{-1})b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ beliebig. Wir zeigen die Schätzerreduktion nur für den Residualschätzer der symmetrischen Kopplung, da die Schätzerreduktion für die Johnson-Nédélec Kopplung bzw. Bielak-MacCamy Kopplung analog folgt. Im Folgenden werden wir die einzelnen Terme von

$$\tilde{\rho}_{\ell+1}^2 = \rho_{\ell+1}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega)^2 + \rho_{\ell+1}(\mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega)^2 + \rho_{\ell+1}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 + \text{osc}_{\ell+1}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 \quad (5.24)$$

separat abschätzen.

Schritt 1. Wir gehen so vor wie in [CKNS08] und kommen mit der Dreiecksungleichung und der Young'schen Ungleichung auf

$$\begin{aligned} \rho_{\ell+1}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega)^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|f + \text{div}(\mathfrak{A} \nabla u_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq (1+\delta) \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|f + \text{div}(\mathfrak{A} \nabla u_\ell)\|_{L^2(T)}^2 \\ &\quad + (1+\delta^{-1}) \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|\text{div} \mathfrak{A} \nabla (u_\ell - u_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Wir zerlegen die erste Summe auf der rechten Seite in eine Summe von nicht-verfeinerten Elementen $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega \cap \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$ und in eine Summe aller Söhne $T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega \setminus \mathcal{T}_\ell^\Omega$ von verfeinerten Elementen:

$$\begin{aligned} &\sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|f + \text{div}(\mathfrak{A} \nabla u_\ell)\|_{L^2(T)}^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega \cap \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|f + \text{div}(\mathfrak{A} \nabla u_\ell)\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega \setminus \mathcal{T}_\ell^\Omega} |T'|^{2/d} \|f + \text{div}(\mathfrak{A} \nabla u_\ell)\|_{L^2(T')}^2. \end{aligned}$$

Nach (5.21a) folgt, dass $|T'| \leq \kappa|T|$ für alle Söhne $T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$ von $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$. Damit können wir die zweite Summe in der letzten Gleichung abschätzen durch

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega \setminus \mathcal{T}_\ell^\Omega} |T'|^{2/d} \|f + \operatorname{div}(\mathfrak{A}\nabla u_\ell)\|_{L^2(T')}^2 \leq \kappa^{2/d} \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|f + \operatorname{div}(\mathfrak{A}\nabla u_\ell)\|_{L^2(T)}^2,$$

und zusammen kommen wir auf

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|f + \operatorname{div}(\mathfrak{A}\nabla u_\ell)\|_{L^2(T)}^2 \\ & \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega \cap \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|f + \operatorname{div}(\mathfrak{A}\nabla u_\ell)\|_{L^2(T)}^2 + \kappa^{2/d} \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega} |T|^{2/d} \|f + \operatorname{div}(\mathfrak{A}\nabla u_\ell)\|_{L^2(T)}^2 \\ & = \rho_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega \cap \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega)^2 + \kappa^{2/d} \rho_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega)^2 = \rho_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)^2 - (1 - \kappa^{2/d})\rho_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega)^2. \end{aligned}$$

Für die zweite Summe auf der rechten Seite in (5.25) benutzen wir (5.22) und berechnen elementweise $\operatorname{div} \mathfrak{A}\nabla(u_\ell - u_{\ell+1}) = (\operatorname{div}^T \mathfrak{A})\nabla(u_\ell - u_{\ell+1}) + \mathfrak{A} : D^{(2)}(u_\ell - u_{\ell+1})$ mit der spaltenweise Divergenz div^T und der Hessematrix $D^{(2)}(\cdot)$. Es folgt mit einem Skalierungsargument

$$\begin{aligned} & \|\operatorname{div} \mathfrak{A}\nabla(u_\ell - u_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2 \\ & \leq \|\operatorname{div}^T \mathfrak{A}\|_{L^\infty(T)}^2 \|\nabla(u_\ell - u_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2 + \|\mathfrak{A}\|_{L^\infty(T)}^2 \|D^{(2)}(u_\ell - u_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2 \\ & \lesssim |T|^{-2/d} \|\mathfrak{A}\|_{W^{1,\infty}(T)}^2 \|u_\ell - u_{\ell+1}\|_{H^1(T)}^2. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für (5.25) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \rho_{\ell+1}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega)^2 & \leq (1 + \delta)(\rho_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)^2 - (1 - \kappa^{2/d})\rho_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega)^2) \\ & \quad + (1 + \delta^{-1})C\|u_\ell - u_{\ell+1}\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned} \tag{5.26}$$

wobei C nur von q , der γ -Formregularität von $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$ und der $W^{1,\infty}$ -Norm von \mathfrak{A} abhängt.

Schritt 2. Für den zweiten Term von (5.24) liefert die Young'sche Ungleichung

$$\begin{aligned} \rho_{\ell+1}(\mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega)^2 & \leq (1 + \delta) \sum_{E \in \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega} |E|^{1/(d-1)} \|\mathfrak{A}\nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 \\ & \quad + (1 + \delta^{-1}) \sum_{E \in \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega} |E|^{1/(d-1)} \|\mathfrak{A}\nabla(u_\ell - u_{\ell+1}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Um die erste Summe auf der rechten Seite von (5.27) abzuschätzen, bemerken wir, dass $\mathfrak{A}\nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}|_E = 0$ für $E \in \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega \setminus \mathcal{E}_\ell^\Omega$ mit $E \not\subseteq E'$ für alle $E' \in \mathcal{E}_\ell^\Omega$, da $\mathfrak{A}\nabla u_\ell \in \mathbf{H}(\operatorname{div}; T_E^+ \cup T_E^-)$ mit $T_E^\pm \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$ und $T_E^+ \cap T_E^- = E$, $T_E^+ \cup T_E^- \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$. Die erste Summe aus (5.27) teilen wir in nicht-verfeinerte Elemente $\mathcal{E}_\ell^\Omega \cap \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega$ und Elemente $\mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega \setminus \mathcal{E}_\ell^\Omega$ auf und bekommen zusammen

mit (5.21b)

$$\begin{aligned}
 \sum_{E \in \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega} |E|^{1/(d-1)} \|\mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 &= \sum_{E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega \cap \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega} |E|^{1/(d-1)} \|\mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 \\
 &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega \setminus \mathcal{E}_\ell^\Omega} |E|^{1/(d-1)} \|\mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 \\
 &\leq \rho_\ell(\mathcal{E}_\ell^\Omega \cap \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega)^2 + \kappa^{1/(d-1)} \rho_\ell(\mathcal{E}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega)^2 \\
 &= \rho_\ell(\mathcal{E}_\ell^\Omega)^2 - (1 - \kappa^{1/(d-1)}) \rho_\ell(\mathcal{E}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega)^2.
 \end{aligned}$$

Die zweite Summe auf der rechten Seite von (5.27) wird mit Hilfe von

$$|E|^{1/(d-1)} \|\mathfrak{A} \nabla(u_\ell - u_{\ell+1}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 \lesssim \|\mathfrak{A}\|_{W^{1,\infty}(E)}^2 \|\nabla(u_\ell - u_{\ell+1})\|_{L^2(\omega_{\ell+1}^\mathcal{E}(E))}^2,$$

wobei $\omega_{\ell+1}^\mathcal{E}(E) := T_+ \cup T_-$ und $E = T_+ \cap T_-$ mit $T^\pm \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$ gilt, abgeschätzt.

Zusammen ergibt sich für den zweiten Term von (5.24)

$$\rho_{\ell+1}(\mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega)^2 \leq \rho_\ell(\mathcal{E}_\ell^\Omega)^2 - (1 - \kappa^{1/(d-1)}) \rho_\ell(\mathcal{E}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{E}_{\ell+1}^\Omega)^2 + C \|\nabla(u_\ell - u_{\ell+1})\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (5.28)$$

Die Konstante $C > 0$ hängt nur von Ω , der γ -Formregularität von $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$, q , und der $W^{1,\infty}$ -Norm von \mathfrak{A} ab.

Schritt 3. Den dritten Term in (5.24) zerlegen wir in

$$\rho_{\ell+1}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 = \rho_{\ell+1}^{(1)}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 + \rho_{\ell+1}^{(2)}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2. \quad (5.29)$$

Mit der Young'schen Ungleichung folgern wir für $T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$

$$\begin{aligned}
 \rho_{\ell+1}^{(1)}(T)^2 &= |T|^{1/(d-1)} \|\phi_0 - \mathfrak{A} \nabla u_{\ell+1} \cdot \mathbf{n} + \mathfrak{W}(u_{0,\ell+1} - u_{\ell+1}) - (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi_{\ell+1}\|_{L^2(T)}^2 \\
 &\leq (1 + \delta) |T|^{1/(d-1)} \|\phi_0 - \mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n} + \mathfrak{W}(u_{0,\ell} - u_\ell) - (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi_\ell\|_{L^2(T)}^2 + \\
 &\quad 3(1 + \delta^{-1}) |T|^{1/(d-1)} \left(\|\mathfrak{A} \nabla(u_\ell - u_{\ell+1}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(T)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \|\mathfrak{W}(u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1} - u_\ell + u_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2 + \|(\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})(\phi_\ell - \phi_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2 \right)
 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Durch Summation über alle $T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$ und gleiches Vorgehen wie vorhin erhalten wir aus dem ersten Term auf der rechten Seite von (5.30)

$$\begin{aligned}
 \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma} |T|^{1/(d-1)} \|\phi_0 - \mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n} + \mathfrak{W}(u_{0,\ell} - u_\ell) - (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi_\ell\|_{L^2(T)}^2 \\
 \leq \rho_\ell^{(1)}(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)^2 - (1 - \kappa^{1/(d-1)}) \rho_\ell^{(1)}(\mathcal{T}_\ell^\Gamma \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2.
 \end{aligned}$$

Weiters folgt aus einem Skalierungsargument

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma} |T|^{1/(d-1)} \|\mathfrak{A} \nabla(u_\ell - u_{\ell+1}) \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(T)}^2 \lesssim \|u_\ell - u_{\ell+1}\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Für die restlichen Terme in (5.30) benützen wir die inversen Ungleichungen aus Lemma 5.7, als auch die inverse Ungleichung aus [GHS05, Satz 3.6] für diskrete Funktionen aus $\mathcal{P}^p(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)$. Wir schließen

$$\begin{aligned} & \sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma} |T|^{1/(d-1)} \left(\|\mathfrak{W}(u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1} - u_\ell + u_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2 + \|(\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})(\phi_\ell - \phi_{\ell+1})\|_{L^2(T)}^2 \right) \\ & \lesssim \|u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|u_\ell - u_{\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\phi_\ell - \phi_{\ell+1}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Der Schätzer $\rho_\ell^{(1)}$ erfüllt also

$$\begin{aligned} \rho_{\ell+1}^{(1)}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 & \leq (1 + \delta) \left(\rho_\ell^{(1)}(\mathcal{T}_\ell^\Gamma) - (1 - q^{1/(d-1)}) \rho_\ell^{(1)}(\mathcal{T}_\ell^\Gamma \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 \right) \\ & \quad + (1 + \delta^{-1}) C \left(\|\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_{\ell+1}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right), \end{aligned}$$

wobei $C > 0$ nur von Ω , der γ -Formregularität von $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega$ und $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$, q , p , und der $W^{1,\infty}$ -Norm von \mathfrak{A} abhängt. Die gleiche Argumentation mit einer zusätzlichen inversen Ungleichung für diskrete Funktionen aus $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$, welche für $d = 2$ in [CP07, Proposition 4.1] und für $d = 3$ in [AFF⁺14, Proposition 5] zu finden ist, liefert für $\rho_\ell^{(2)}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \rho_{\ell+1}^{(2)}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 & \leq (1 + \delta) \left(\rho_\ell^{(2)}(\mathcal{T}_\ell^\Gamma) - (1 - q^{1/(d-1)}) \rho_\ell^{(2)}(\mathcal{T}_\ell^\Gamma \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 \right) \\ & \quad + (1 + \delta^{-1}) C \left(\|\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_{\ell+1}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right). \end{aligned}$$

Die Konstante $C > 0$ hängt dabei nur von Ω , der γ -Formregularität von $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$, q , und p ab. **Schritt 4.** Für den Oszillationsterm osc_ℓ gehen wir analog vor und erhalten

$$\begin{aligned} \text{osc}_{\ell+1}(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 & \leq (1 + \delta) \left(\text{osc}_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)^2 - (1 - \kappa^{1/(d-1)}) \text{osc}_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2 \right) \\ & \quad (1 + \delta^{-1}) C \|u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Die Konstante $C > 0$ hängt nur von Γ , der γ -Formregularität von $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$ und q ab.

Schritt 5. Es bezeichne $\mathcal{I}_\ell := \mathcal{T}_\ell^\Omega \cup \mathcal{E}_\ell^\Omega \cup \mathcal{T}_\ell^\Gamma$. Mit $\kappa^{2/d} \leq \kappa^{1/(d-1)}$ können wir die letzten Beweisschritte zusammenfassen als

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\ell+1}^2 & \leq (1 + \delta) \left(\tilde{\rho}_\ell^2 - (1 - \kappa^{1/(d-1)}) \tilde{\rho}_\ell(\mathcal{I}_\ell \setminus \mathcal{I}_{\ell+1})^2 \right) \\ & \quad + (1 + \delta^{-1}) C \left(\|\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_{\ell+1}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Die Dörfler-Markierung (5.2) und $\mathcal{M}_\ell \subseteq \mathcal{I}_\ell \setminus \mathcal{I}_{\ell+1}$ zeigen $\theta \tilde{\rho}_{\ell+1}^2 \leq \tilde{\rho}_\ell(\mathcal{I}_\ell \setminus \mathcal{I}_{\ell+1})^2$. Daher folgt aus (5.31)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\ell+1}^2 & \leq (1 + \delta) \left(1 - \theta(1 - \kappa^{1/(d-1)}) \right) \tilde{\rho}_\ell^2 \\ & \quad + (1 + \delta^{-1}) C \left(\|\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_{\ell+1}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \right). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Wir bemerken, dass $\kappa < 1$, $\theta \leq 1$ und somit $1 - \theta(1 - \kappa^{1/(d-1)}) < 1$ gilt. Wir wählen nun $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass $\kappa_{\text{red}} := (1 + \delta)(1 - \theta(1 - \kappa^{1/(d-1)})) < 1$. Mit der Definition $C_{\text{red}} := (1 + \delta^{-1})C$ folgt also die Schätzerreduktion (5.23) aus (5.32). \square

Satz 5.9 (Konvergenz). *Die $H^{1/2}$ -stabile Projektion \mathfrak{P}_ℓ^Γ mit $u_{0,\ell} := \mathfrak{P}_\ell^\Gamma u_0 \in \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ erfülle $u_{0,\infty} := \lim_{\ell \rightarrow \infty} u_{0,\ell} \in H^{1/2}(\Gamma)$. Dann gilt*

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \tilde{\rho}_\ell = 0. \quad (5.33)$$

Insbesondere konvergieren die Lösungen \mathbf{u}_ℓ der gestörten diskreten Probleme (5.14) gegen die exakte Lösung \mathbf{u} .

Beweis. Wir benutzen das Resultat [AFLP12, Lemma 2.3], welches besagt, dass aus der Reduktion

$$\tilde{\rho}_{\ell+1}^2 \leq \kappa_{\text{red}} \tilde{\rho}_\ell^2 + C_{\text{red}} \alpha_\ell$$

mit $\kappa_{\text{red}} < 1$, $C_{\text{red}} > 0$ und $\{\alpha_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ ist nicht-negative Nullfolge Konvergenz (5.33) folgt.

Nach Voraussetzung an den Operator \mathfrak{P}_ℓ^Γ und da die Räume $\mathcal{H}_\ell \subseteq \mathcal{H}_{\ell+1}$ geschachtelt sind, gilt nach [AFP12, Beweis von Proposition 10], dass die Folge $\{\mathbf{u}_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ der diskreten gestörten Lösungen eine Cauchy-Folge ist. Es ist also

$$\alpha_\ell := \|\mathbf{u}_\ell - \mathbf{u}_{\ell+1}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|u_{0,\ell} - u_{0,\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2$$

eine Nullfolge.

Konvergenz der diskreten Lösungen \mathbf{u}_ℓ gegen die exakte Lösung \mathbf{u} ist eine direkte Konsequenz aus der Zuverlässigkeit des Schätzers $\tilde{\rho}_\ell$. \square

Die *a priori* Konvergenz von $u_{0,\ell} = \mathfrak{P}_\ell^\Gamma u_0$ ist, z.B., für den Scott-Zhang Operator $\mathfrak{P}_\ell^\Gamma = \mathfrak{J}_\ell^\Gamma$ erfüllt. Das folgende Resultat wird in [FPP14, Lemma 15] für $q = 1$ und $H^1(\Omega)$ bewiesen. Der Beweis gilt aber allgemein für $q \geq 1$ und $H^1(\Gamma)$.

Lemma 5.10. *Es bezeichne $\mathfrak{J}_\ell^\Gamma : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ den Scott-Zhang Operator. Aus der Schachtelung der Räume $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma) \subseteq \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)$ und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Γ folgt, dass $u_{0,\ell} := \mathfrak{J}_\ell^\Gamma u_0$ stark gegen ein Element aus $H^1(\Gamma)$ konvergiert. \square*

5.2.3 Anmerkungen

Approximationsoperatoren und Oszillationen

Falls $q = 1$ und $d = 2$, kann man zur Datenapproximation den nodalen Interpolanten \mathfrak{J}_ℓ^Γ wählen. Wegen der stetigen Einbettung $H^1(\Gamma) \hookrightarrow C(\Gamma)$ und aufgrund der Voraussetzung $u_0 \in H^1(\Gamma)$ ist $u_{0,\ell} := \mathfrak{J}_\ell^\Gamma u_0 \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ wohldefiniert. In [AFLG⁺12, Beweis von Proposition 5.2] wird gezeigt, dass $u_{0,\ell}$ stark gegen $u_{0,\infty}$ in $H^1(\Gamma)$ konvergiert. Insbesondere sind also die Voraussetzungen aus Satz 5.9 erfüllt.

Falls $q = 1$, $d = 2$ und als Netzverfeinerungsstrategie NVB verwendet wird, kann man zur Datenapproximation auch die L^2 -Orthogonalprojektion $\Pi_\ell^1 : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ verwenden. In [KPP13, Satz 3] wird H^1 -Stabilität von Π_ℓ^1 gezeigt und in [KOP13, Lemma 12] wird bewiesen, dass $u_{0,\ell} := \Pi_\ell^1 u_0$ schwach in $H^1(\Gamma)$ konvergiert. Durch Interpolation folgt starke Konvergenz in $H^{1/2}(\Gamma)$ und somit sind die Voraussetzungen aus Satz 5.9 erfüllt.

Wählt man zur Approximation des Datums u_0 den Scott-Zhang Operator \mathfrak{J}_ℓ^Γ , dann kann man den Oszillationsterm osc_ℓ durch

$$\overline{\text{osc}}_\ell^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} |T|^{1/(d-1)} \|(1 - \pi_\ell^{q-1}) \nabla_\Gamma u_0\|_{L^2(T)}^2 \quad (5.34)$$

im Residualschätzer $\tilde{\rho}_\ell$ ersetzen, wobei π_ℓ^{q-1} die $L^2(\Gamma)$ -Orthogonalprojektion auf $\mathcal{P}^{q-1}(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ bezeichnet.

Korollar 5.11. *Definiere $\bar{\rho}_\ell^2 := \rho_\ell^2 + \overline{\text{osc}}_\ell^2$. Dann bleibt Satz 5.6 (Zuverlässigkeit), Lemma 5.8 (Schätzerreduktion), und Satz 5.9 (Konvergenz) gültig, falls für die Datenapproximation der Scott-Zhang Operator \mathfrak{J}_ℓ^Γ gewählt wird und $\tilde{\rho}_\ell$ durch $\bar{\rho}_\ell$ ersetzt wird.*

Beweis. Aufgrund von [AFK⁺13, Proposition 8] gilt

$$\text{osc}_\ell \lesssim \overline{\text{osc}}_\ell,$$

wobei die Konstante hinter \lesssim nur von Γ , q und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Γ abhängt. Daraus folgt Zuverlässigkeit von $\bar{\rho}_\ell$.

Um die Schätzerreduktion zu zeigen, reicht es den Oszillationsterm zu analysieren. Wir betrachten Schritt 4 im Beweis von Lemma 5.8. Die restlichen Schritte im Beweis bleiben gleich. Da $\pi_{\ell+1}^{q-1}$ die Bestapproximation in $L^2(T)$ ist, gilt

$$\text{osc}_{\ell+1}(T)^2 = |T|^{1/(d-1)} \|(1 - \pi_{\ell+1}^{q-1}) \nabla_\Gamma u_0\|_{L^2(T)}^2 \leq |T|^{1/(d-1)} \|(1 - \pi_\ell^{q-1}) \nabla_\Gamma u_0\|_{L^2(T)}^2$$

für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$. Durch Aufteilen von $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma$ in nicht-verfeinerte Elemente $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma \cap \mathcal{T}_\ell^\Gamma$ und Söhne von verfeinerten Elementen folgt mit (5.21a)

$$\text{osc}_{\ell+1}^2 \leq \text{osc}_\ell^2 - (1 - \kappa^{1/(d-1)}) \text{osc}_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma \setminus \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma)^2. \quad (5.35)$$

Konvergenz folgt wie in Satz 5.9. \square

Äquivalenter Residualfehlerschätzer

Alternativ zu ρ_ℓ definieren wir für die Johnson-Nédélec Kopplung den Schätzer $\nu_\ell = \nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ über

$$\begin{aligned} \nu_\ell(T)^2 := & +|T|^{1/3} \|\mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\partial T \setminus \Gamma)}^2 + |T|^{1/3} \|\phi_0 + \phi_\ell - \mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\partial T \cap \Gamma)}^2 \\ & + |T|^{1/3} \|\nabla_\Gamma((\tfrac{1}{2} - \mathfrak{K})(u_0 - u_\ell) - \mathfrak{B} \phi_\ell)\|_{L^2(\partial T \cap \Gamma)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega \text{ und } d = 3. \end{aligned}$$

Falls $d = 2$ definieren wir $\nu_\ell^2 = \nu(\mathcal{T}_\ell^\Omega)^2 + \nu(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)^2$ über

$$\begin{aligned} \nu_\ell(T)^2 := & \rho_\ell(T)^2 + |T|^{1/2} \|\mathfrak{A} \nabla u_\ell \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\partial T \setminus \Gamma)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega, \\ \nu_\ell(T) := & \rho_\ell(T) \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma. \end{aligned}$$

Diese Schätzer spiegeln den Umstand wider, dass wir in den numerischen Beispielen entweder nur Volumenelemente ($d = 3$) oder nur Volums- und Randelemente ($d = 2$), aber keine Flächen- oder Kantelemente \mathcal{E}_ℓ^Ω markieren.

Aufgrund der Formregularität gilt

$$\begin{aligned} |T|^{1/d} &\simeq |E|^{1/(d-1)} && \text{für } E \in \mathcal{E}_\ell^\Omega \text{ mit } E \subseteq T \text{ und} \\ |T|^{1/d} &\simeq |E|^{1/(d-1)} && \text{für } E \in \mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma \text{ mit } E \subseteq T, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten hinter \simeq nur von der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω abhängen. Daraus sieht man sofort die Äquivalenz zu ρ_ℓ .

Klarerweise lassen sich die Schätzer ν_ℓ analog für die symmetrische bzw. Bielak-MacCamy Kopplung definieren.

Weiters kann auch die Datenapproximation mittels der Oszillationen berücksichtigt werden. Dazu definieren wir die Schätzer $\tilde{\nu}_\ell$ und $\bar{\nu}_\ell$ analog zu $\tilde{\rho}_\ell$ und $\bar{\rho}_\ell$. Alle erarbeiteten Resultate für $\tilde{\rho}_\ell, \bar{\rho}_\ell$ bleiben dabei gültig für $\tilde{\nu}_\ell, \bar{\nu}_\ell$. Details sind dem Leser überlassen.

Korollar 5.12. *Definiere $\tilde{\nu}_\ell^2 := \nu_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2$, wobei in ν_ℓ die exakten Daten u_0 durch $u_{0,\ell} := \mathfrak{P}_\ell^\Gamma u_0$, mit $\mathfrak{P}_\ell^\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ ist $H^{1/2}$ -stabile Projektion, ersetzt werden. Weiters definiere $\bar{\nu}_\ell^2 := \nu_\ell^2 + \overline{\text{osc}}_\ell^2$, wobei in ν_ℓ die exakten Daten u_0 durch $u_{0,\ell} := \mathfrak{J}_\ell^\Gamma u_0$, mit dem Scott-Zhang Operator $\mathfrak{J}_\ell^\Gamma : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$, ersetzt werden. Dann bleibt Satz 5.6 (Zuverlässigkeit), Lemma 5.8 (Schätzerreduktion), und Satz 5.9 (Konvergenz) gültig, falls $\tilde{\rho}_\ell$ durch $\tilde{\nu}_\ell$ oder $\bar{\nu}_\ell$ ersetzt wird. \square*

Unterschiedliche Triangulierungen am Rand

Es sei $\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma \neq \mathcal{T}_\ell^\Gamma$. Wir bemerken, dass die Zuverlässigkeit des Residualschätzers mit oder ohne Datenapproximation gültig bleibt. Zu beachten ist nur, dass \mathfrak{P}_ℓ^Γ nach $\mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma)$ abbildet, also $u_{0,\ell} := \mathfrak{P}_\ell^\Gamma u_0 \in \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma)$ gilt. Probleme bereiten inverse Abschätzungen im Beweis von Lemma 5.8. In Schritt 3 vom Beweis von Lemma 5.8 wird zur Abschätzung von $\rho_{\ell+1}^{(2)}$ eine inverse Ungleichung der Form

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma} |T|^{1/(d-1)} \|\nabla_\Gamma v_{\ell+1}\|_{L^2(T)}^2 \leq C_{\text{inv}} \|v_{\ell+1}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2$$

für $v_{\ell+1} \in \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega|_\Gamma)$ benützt. Für $\mathcal{T}_{\ell+1}^\Gamma \neq \mathcal{T}_{\ell+1}^\Omega|_\Gamma$ kann so eine Ungleichung im Allgemeinen nicht mit einer ℓ -unabhängigen Konstante C_{inv} gelten.

Nichtlinearer Fall

Zum Schluss dieses Abschnitts behandeln wir den Fall, dass \mathfrak{A} nichtlinear ist. Im Allgemeinen kann der Beweis von Satz 5.9 nicht durchgehen, da die Skalierungsargumente, z.B. in Schritt 1 des Beweises von Satz 5.9, für nichtlineares \mathfrak{A} nicht gültig sind. Besitzt \mathfrak{A} die spezielle Gestalt $(\mathfrak{A}\nabla u)(\mathbf{x}) = \mathfrak{A}(\nabla u(\mathbf{x}))$, so gilt zumindest, dass $\mathfrak{A}\nabla u_\ell|_T$ konstant auf jedem Element $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$ ist, falls $u_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$. Daher ist also $\text{div}_{\mathcal{T}_\ell^\Omega} \mathfrak{A}\nabla u_\ell = 0$ für alle $u_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ und der Beweis von Satz 5.9 bleibt für diesen Spezialfall gültig.

5.3 ZZ-Schätzer

In diesem Abschnitt analysieren wir den ZZ-Schätzer, der aufgrund der simplen Implementierung in der Praxis sehr beliebt ist. Wir beschränken uns dabei auf den Fall niedrigster Ordnung, d.h. wir betrachten die diskreten Räume $\mathcal{H}_\ell := \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ mit $q = 1, p = 0$. Grundsätzlich folgen alle vorgestellten Resultate aus den bekannten Arbeiten zur FEM [Rod94, ZZ87] bzw. auch [CB02, BC02, Car04] und BEM [FFKP14, FFH⁺14].

Im Gegensatz zu Abschnitt 5.2 setzen wir nun nicht voraus, dass $\mathcal{T}_\ell^\Gamma = \mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma$ gilt. Ein weiterer Vorteil ist, dass in der Definition des Schätzers weder die Daten f, u_0, ϕ_0 noch \mathfrak{A} explizit vorkommen. Man beachte auch, dass der ZZ-Schätzer keine zusätzlichen Annahmen an die Glattheit der Daten oder an \mathfrak{A} benötigt. Zur Definition des ZZ-Schätzers benötigen wir noch verschiedene Glättungsoperatoren. Es bezeichne mit $\mathfrak{C}_\ell^\Omega : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)^d$ den Clément Operator, welcher über

$$\mathfrak{C}_\ell^\Omega \mathbf{v}(\mathbf{z}) := \frac{1}{|\omega_\ell(\mathbf{z})|} \int_{\omega_\ell(\mathbf{z})} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \text{für alle } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^\Omega$$

definiert ist. Mit $\mathfrak{C}_\ell^\Gamma : L^2(\Gamma)^d \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma)^d$ bezeichnen wir analog dazu den Clément Operator für $L^2(\Gamma)^d$ -Funktionen, d.h.

$$\mathfrak{C}_\ell^\Gamma \mathbf{v}(\mathbf{z}) := \frac{1}{|\omega_\ell(\mathbf{z}) \cap \Gamma|} \int_{\omega_\ell(\mathbf{z}) \cap \Gamma} \mathbf{v} \, d\Gamma_{\mathbf{x}} \quad \text{für alle } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^\Omega \cap \Gamma.$$

Die Integrale sind jeweils komponentenweise zu verstehen. Wir benötigen noch einen dritten Operator $\mathfrak{D}_\ell : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ welcher mögliche Sprünge des Normalenvektors berücksichtigt. Wir halten uns hierbei an [FFH⁺14, Abschnitt 4.4]. Sei $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^\Gamma$ ein Knoten der Triangulierung \mathcal{T}_ℓ^Γ mit zugehörigem Patch $\omega_\ell^\Gamma(\mathbf{z}) = T_1 \cup \dots \cup T_{n_z}$. Falls der Normalenvektor \mathbf{n} am Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^\Gamma$ nicht springt, definiere

$$\mathfrak{D}_\ell \psi(\mathbf{z}) := \frac{1}{|\omega_\ell^\Gamma(\mathbf{z})|} \int_{\omega_\ell^\Gamma(\mathbf{z})} \psi \, d\Gamma_{\mathbf{x}}.$$

Falls \mathbf{n} an $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^\Gamma$ springt, finde nicht-leere Mengen C_1, \dots, C_{m_z} mit $m_z \leq n_z$ und $\mathbf{n}|_{C_j}$ ist konstant für alle $j = 1, \dots, m_z$. Für $j = 1, \dots, m_z$ definieren wir dann

$$(\mathfrak{D}_\ell \psi)|_{C_j}(\mathbf{z}) := \frac{1}{|C_j|} \int_{C_j} \psi \, d\Gamma_{\mathbf{x}}.$$

Für eine simple Implementierung kann man für die Mengen C_j einfach die Elemente des Knotenpatches $\omega_\ell^\Gamma(\mathbf{z})$ verwenden.

Wir betrachten wiederum das Problem

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = F(\mathbf{v}) \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \tag{5.36}$$

mit zugehöriger diskreter Formulierung

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_\ell \rangle = F(\mathbf{v}_\ell) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_\ell \in \mathcal{H}_\ell. \tag{5.37}$$

Für gegebene Lösung $\mathbf{u}_\ell = (u_\ell, \phi_\ell) \in \mathcal{H}_\ell$ von (5.37) definieren wir den ZZ-Schätzer

$$\tau_\ell^2 := \tau_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)^2 + \tau_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma)^2 + \tau_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega} \tau_\ell(T)^2 + \sum_{E \in \mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma} \tau_\ell(E)^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} \tau_\ell(T)^2$$

mit den lokalen Fehlerindikatoren

$$\tau_\ell(T)^2 := \|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Omega) \nabla u_\ell\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega, \quad (5.38a)$$

$$\tau_\ell(E)^2 := |E|^{1/(d-1)} \|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Gamma) \nabla_\Gamma u_\ell\|_{L^2(E)}^2 \quad \text{für } E \in \mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma, \quad (5.38b)$$

$$\tau_\ell(T)^2 := |T|^{1/(d-1)} \|(1 - \mathfrak{D}_\ell) \phi_\ell\|_{L^2(T)}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma. \quad (5.38c)$$

Im Fall $d = 2$ entspricht $\nabla_\Gamma(\cdot)$ der Bogenlängenableitung $(\cdot)'$ und \mathfrak{C}_ℓ^Γ ist dann der Standard Clément Operator.

Bemerkung 5.13. Für Probleme aus der Elastostatik, vgl. Kapitel 4, lässt sich der ZZ-Schätzer analog definieren, indem für jede Komponente der Lösung den ZZ-Schätzer definiert. Die vorgestellten Resultate, d.h. Effizienz und Zuverlässigkeit, behalten ihre Gültigkeit.

Mit einer zusätzlichen Annahme, der sogenannten Saturationsannahme, kann man Zuverlässigkeit des Schätzers zeigen.

Satz 5.14 (Zuverlässigkeit des ZZ-Schätzers). Sei \mathcal{T}_ℓ^Ω die uniforme Verfeinerung der Triangulierung $\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$ und sei \mathcal{T}_ℓ^Γ die uniforme Verfeinerung der Triangulierung $\check{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma$. Bezeichne mit $\mathbf{u}_\ell = (u_\ell, \phi_\ell) \in \mathcal{H}_\ell$ bzw. mit $\check{\mathbf{u}}_\ell = (\check{u}_\ell, \check{\phi}_\ell) \in \mathcal{S}^1(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma)$ die entsprechenden Galerkin-Lösungen von (5.37). Es gilt

$$\|\mathbf{u}_\ell - \check{\mathbf{u}}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq \tilde{C}_{\text{rel}}^{\text{ZZ}} \tau_\ell. \quad (5.39)$$

Unter der Saturationsannahme

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa_{\text{sat}} \|\mathbf{u} - \check{\mathbf{u}}_\ell\|_{\mathcal{H}} \quad (5.40)$$

für eine ℓ -unabhängige Kontraktionskonstante $0 < \kappa_{\text{sat}} < 1$ folgt Zuverlässigkeit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{rel}}^{\text{ZZ}} \tau_\ell. \quad (5.41)$$

Die Konstante $\tilde{C}_{\text{rel}}^{\text{ZZ}} > 0$ hängt dabei nur von Ω , dem Operator \mathfrak{B} , der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ , und allen möglichen Patchformen in \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ ab. Die Konstante $C_{\text{rel}}^{\text{ZZ}} > 0$ hängt zusätzlich von κ_{sat} ab.

Beweis. Die Lösung $\check{\mathbf{u}}_\ell$ ist die Quasi-Bestapproximation von \mathbf{u}_ℓ mit

$$\|\mathbf{u}_\ell - \check{\mathbf{u}}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{Céa}} \min_{\check{\mathbf{v}}_\ell \in \mathcal{S}^1(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma)} \|\mathbf{u}_\ell - \check{\mathbf{v}}_\ell\|_{\mathcal{H}},$$

wobei $C_{C\acute{e}a} > 0$ die Quasi-Bestapproximationskonstante ist, welche nur von Ω und dem Operator \mathfrak{B} abhängt, vgl. Kapitel 3. Es sei $\check{\mathfrak{J}}_\ell : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega)$ der Scott-Zhang Operator und $\check{\pi}_\ell : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{P}^0(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma)$ die L^2 -Orthogonalprojektion. Wir wählen in der Quasi-Bestapproximationsabschatzung $\check{\mathbf{v}}_\ell = (\check{\mathfrak{J}}_\ell u_\ell, \check{\pi}_\ell \phi_\ell)$ und folgern mit der Normäquivalenz $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)} \simeq \|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} + \|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\ell - \check{\mathbf{u}}_\ell\|_{\mathcal{H}} &\leq C_{C\acute{e}a} \left(\|(1 - \check{\mathfrak{J}}_\ell)u_\ell\|_{H^1(\Omega)} + \|(1 - \check{\pi}_\ell)\phi_\ell\|_{L^2(\Gamma)} \right) \\ &\lesssim \|\nabla(1 - \check{\mathfrak{J}}_\ell)u_\ell\|_{L^2(\Omega)} + \|(1 - \check{\mathfrak{J}}_\ell)u_\ell\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \|(1 - \check{\pi}_\ell)\phi_\ell\|_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Wir schätzen nun die Terme auf der rechten Seite ab.

Schritt 1. Wir zeigen

$$\|\nabla(1 - \check{\mathfrak{J}}_\ell)u_\ell\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|(1 - \check{\pi}_\ell^\Omega)\nabla u_\ell\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Omega)\nabla u_\ell\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.43)$$

mit der (komponentenweise) $L^2(\Omega)$ -Orthogonalprojektion $\check{\pi}_\ell^\Omega : L^2(\Omega)^d \rightarrow \mathcal{P}^0(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega)^d$, indem wir diese Abschätzungen lokal beweisen. Dazu sei $\check{T} \in \check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$ mit zugehorigem Elementpatch $\check{\omega}_\ell(\check{T})$.

Wir zeigen zuerst, dass

$$A_1(u_\ell) := \|\nabla(1 - \check{\mathfrak{J}}_\ell)u_\ell\|_{L^2(\check{T})} \lesssim A_2(u_\ell) := \|(1 - \check{\pi}_\ell^\Omega)\nabla u_\ell\|_{L^2(\check{\omega}_\ell(\check{T}))} \quad (5.44)$$

gültig ist. Da beide Terme in (5.44) Seminormen definieren, brauchen wir nur zu zeigen, dass $\ker(A_2) \subseteq \ker(A_1)$ gilt. Aus einem Skalierungsargument folgt, dass die Konstante in (5.44) nur von der Form des Patches abhängt. Sei also $v_\ell \in \mathcal{S}^1(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega)$ und $(1 - \check{\pi}_\ell^\Omega)\nabla v_\ell|_T = 0$ für alle $T \in \check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$ mit $T \subseteq \check{\omega}_\ell(\check{T})$. Daraus schließen wir $\nabla v_\ell|_{\check{\omega}_\ell(\check{T})}$ ist konstant und daher ist v_ℓ affin auf $\check{\omega}_\ell(\check{T})$. Aus der Definition und Projektionseigenschaft von $\check{\mathfrak{J}}_\ell$ folgt $\check{\mathfrak{J}}_\ell v_\ell|_{\check{T}} = v_\ell|_{\check{T}}$ und somit (5.44).

Als Nächstes zeigen wir

$$A_3(u_\ell) := \|(1 - \check{\pi}_\ell^\Omega)\nabla u_\ell\|_{L^2(T)} \lesssim A_4(u_\ell) := \|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Omega)\nabla u_\ell\|_{L^2(\omega_\ell(T))} \quad (5.45)$$

für alle Elemente $T \in \check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$ mit Patch $\omega_\ell(T)$. Mit der gleichen Argumentation wie zuvor brauchen wir also nur $\ker(A_4) \subseteq \ker(A_3)$ zu beweisen. Da für $v_\ell \in \mathcal{S}^1(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega)$ der Gradient ∇v_ℓ konstant auf allen Elementen in $\omega_\ell(T)$ ist, folgt aus $\nabla v_\ell|_{\omega_\ell(T)} = \mathfrak{C}_\ell^\Omega \nabla v_\ell|_{\omega_\ell(T)}$ und der Stetigkeit von $\mathfrak{C}_\ell^\Omega \nabla v_\ell$, dass ∇v_ℓ konstant auf $\omega_\ell(T)$ ist. Bezeichne mit $\check{T} \in \check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$ mit $T \subseteq \check{T}$ das Vaterelement von $T \in \check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$. Da $\check{T} \subseteq \omega_\ell(T)$ folgt $\check{\pi}_\ell^\Omega \nabla v_\ell|_{\check{T}} = \nabla v_\ell|_{\check{T}}$ und somit auch (5.45).

Aus (5.44)–(5.45) folgt (5.43) durch Bilden der l^2 -Summe über alle Elemente.

Schritt 2. Es gilt

$$\begin{aligned} \|(1 - \check{\mathfrak{J}}_\ell)u_\ell\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 &\lesssim \sum_{E \in \check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega|_\Gamma} |E|^{1/(d-1)} \|(1 - \check{\pi}_\ell)\nabla_\Gamma u_\ell\|_{L^2(E)}^2 \\ &\lesssim \sum_{E \in \check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega|_\Gamma} |E|^{1/(d-1)} \|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Gamma)\nabla_\Gamma u_\ell\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Die erste Abschätzung folgt dabei aus [Kar12, Satz 3.26] und [AFK⁺13, Proposition 8]. Die zweite Abschätzung wird wie in [FFKP14, Satz 1] ($d = 2$) bzw. [FFH⁺14, Satz 63] ($d = 2, 3$) bewiesen.

Schritt 3. Es gilt

$$\begin{aligned} \|(1 - \tilde{\pi}_\ell)\phi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2 &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} |T|^{1/(d-1)} \|(1 - \tilde{\pi}_\ell)\phi_\ell\|_{L^2(T)}^2 \\ &\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} |T|^{1/(d-1)} \|(1 - \mathfrak{D}_\ell)\phi_\ell\|_{L^2(T)}^2. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Die erste Abschätzung folgt direkt aus der Approximationseigenschaft des Operators $\tilde{\pi}_\ell$, vgl. [FFH⁺14, Lemma 22] mit $r = 1/2$, $s = 0$, und $p = 0$, als auch $(1 - \tilde{\pi}_\ell)\phi_\ell = (1 - \tilde{\pi}_\ell)^2\phi_\ell$. Die zweite Abschätzung wird wie in [FFKP14, Satz 5] ($d = 2$) und [FFH⁺14, Satz 63] ($d = 2, 3$) bewiesen.

Setzen wir alle bisherigen Abschätzungen zusammen, so erhalten wir (5.39).

Es bleibt noch Zuverlässigkeit (5.41) unter der Saturationsannahme (5.40) zu zeigen. Mit der Dreiecksungleichung und (5.39)–(5.40) folgt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa_{\text{sat}} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa_{\text{sat}} (\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_\ell\|_{\mathcal{H}} + \|\tilde{\mathbf{u}}_\ell - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}}) \leq \kappa_{\text{sat}} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} + \tilde{C}_{\text{rel}}^{\text{ZZ}} \tau_\ell),$$

und daraus weiters

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\kappa_{\text{sat}}}{1 - \kappa_{\text{sat}}} \tilde{C}_{\text{rel}}^{\text{ZZ}} \tau_\ell,$$

womit der Beweis abgeschlossen ist. \square

Für den ZZ-Schätzer τ_ℓ lässt sich Effizienz bis auf Terme höherer Ordnung zeigen. Im Gegensatz zur Zuverlässigkeit hängt die Effizienz von keiner Saturationsannahme ab.

Satz 5.15 (Effizienz des ZZ-Schätzers). *Sei $\mathbf{u}_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ die Galerkin-Lösung von (5.37) und $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ die Lösung von (5.36). Dann gilt*

$$\tau_\ell \leq C_{\text{eff}}^{\text{ZZ}} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} + \min_{v_\ell \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})} \|u - v_\ell\|_{H^1(\Omega)} + \min_{\psi_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)} \|\phi - \psi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right). \quad (5.48)$$

Die Konstante $C_{\text{eff}}^{\text{ZZ}} > 0$ dabei nur von Ω , der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ , und allen möglichen Patchformen in \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ ab.

Beweis. Wir schätzen die drei Terme von τ_ℓ separat ab.

Schritt 1. Es gilt

$$\tau_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \lesssim \|u - u_\ell\|_{H^1(\Omega)} + \min_{v_\ell \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})} \|u - v_\ell\|_{H^1(\Omega)}. \quad (5.49)$$

Dazu zeigen wir zuerst

$$\|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Omega)\nabla u_\ell\|_{L^2(T)} \lesssim \|(1 - \mathfrak{J}_\ell)\nabla u_\ell\|_{L^2(\omega_\ell(T))} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega \quad (5.50)$$

mit $\mathfrak{J}_\ell : \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)^d$ ist der (komponentenweise) Scott-Zhang Operator. Da beide Terme in (5.50) Seminormen bilden, gehen wir wie im Beweis von Satz 5.14 vor. Sei $v_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$. Aus $\nabla v_\ell|_{T'} = \mathfrak{J}_\ell \nabla v_\ell|_{T'}$ für $T' \subseteq \omega_\ell(T)$ und der Stetigkeit von \mathfrak{J}_ℓ folgern wir $\nabla v_\ell|_{\omega_\ell(T)}$ ist konstant. Daher gilt $\mathfrak{C}_\ell^\Omega \nabla v_\ell|_T = \nabla v_\ell|_T$. Aus einem Skalierungsargument schließen wir, dass die Konstante in (5.50) unabhängig von T ist. Durch Bilden der ℓ^2 -Summe von (5.50) erhalten wir weiter

$$\|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Omega) \nabla u_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \|(1 - \mathfrak{J}_\ell) \nabla u_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

und mit der Projektionseigenschaft und der $L^2(\Omega)$ -Stetigkeit von \mathfrak{J}_ℓ sogar

$$\|(1 - \mathfrak{J}_\ell) \nabla u_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \|(1 - \mathfrak{J}_\ell)(\nabla u_\ell - \boldsymbol{\psi}_\ell)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla u_\ell - \boldsymbol{\psi}_\ell\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$

für alle $\boldsymbol{\psi}_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)^d$. Zusammen mit der Dreiecksungleichung folgt dann (5.49).

Schritt 2. Es gilt

$$\tau_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma) \lesssim \|u - u_\ell\|_{H^{1/2}(\Gamma)} + \min_{v_\ell \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma) \cap C^1(\Gamma)} \|u - v_\ell\|_{H^{1/2}(\Gamma)}. \quad (5.51)$$

Der Beweis funktioniert mit den gleichen Argumenten wie in Schritt 1. Für Details sei auf [FFKP14, Satz 3] ($d = 2$) bzw. [FFH⁺14, Satz 64] ($d = 2, 3$) verwiesen.

Schritt 3. Es gilt

$$\tau_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma) \lesssim \|\phi - \phi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} + \min_{\psi_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)} \|\phi - \psi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (5.52)$$

Die Aussage findet sich in [FFKP14, Satz 7] ($d = 2$) bzw. [FFH⁺14, Satz 62] ($d = 2, 3$).

Zusammensetzen aller Schritte und Ausnutzen von

$$\begin{aligned} \min_{v_\ell \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma) \cap C^1(\Gamma)} \|u - v_\ell\|_{H^{1/2}(\Gamma)} &= \min_{v_\ell \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})} \|\gamma_0(u - v_\ell)\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \min_{v_\ell \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})} \|u - v_\ell\|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

schließt den Beweis ab. □

Bemerkung 5.16. Bei der NVB Verfeinerungsstrategie entstehen nur endlich viele verschiedene Patchformen. □

Für die Berücksichtigung der Datenapproximationen definieren wir wieder $\mathbf{u}_\ell \in \mathcal{H}_\ell$ als die diskrete Lösung des gestörten Problems

$$\langle \mathfrak{B}\mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_\ell \rangle = F_\ell(\mathbf{v}_\ell) \quad \text{für alle } \mathbf{v}_\ell \in \mathcal{H}_\ell \quad (5.53)$$

mit F_ℓ definiert wie in (5.11)–(5.12), d.h. bei F_ℓ wird das Datum u_0 durch $u_{0,\ell} := \mathfrak{P}_\ell^\Gamma u_0$ ersetzt, wobei $\mathfrak{P}_\ell^\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma)$ ein $H^{1/2}$ -stabiler Projektionsoperator ist.

Satz 5.17. Sei τ_ℓ definiert wie in (5.38), wobei \mathbf{u}_ℓ nun die Lösung von (5.53) ist. Definiere

$$\tilde{\tau}_\ell^2 := \tau_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2. \quad (5.54)$$

Dann existiert eine Konstante $C_{\text{eff}}^{\text{ZZ}} > 0$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_\ell \leq C_{\text{eff}}^{\text{ZZ}} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} + \text{osc}_\ell + \min_{v_\ell \in \mathcal{S}^2(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})} \|u - v_\ell\|_{H^1(\Omega)} \right. \\ \left. + \min_{\psi_\ell \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)} \|\phi - \psi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \right). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Sei \mathcal{T}_ℓ^Ω die uniforme Verfeinerung von $\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega$ und \mathcal{T}_ℓ^Γ die uniforme Verfeinerung von $\check{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma$. Ferner seien $\tilde{\mathbf{u}}_\ell \in \mathcal{H}$ und $\tilde{\mathbf{u}}_\ell \in \check{\mathcal{H}}_\ell := \mathcal{S}^1(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\check{\mathcal{T}}_\ell^\Gamma)$ die Galerkin-Lösungen des gestörten Problems (5.53) in den Unterräumen \mathcal{H} und $\check{\mathcal{H}}_\ell$. Es gelte

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\ell - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa_{\text{sat}} \|\tilde{\mathbf{u}}_\ell - \check{\mathbf{u}}_\ell\|_{\mathcal{H}}$$

mit einer Konstanten $0 < \kappa_{\text{sat}} < 1$. Dann ist $\tilde{\tau}_\ell$ zuverlässig,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{rel}}^{\text{ZZ}} \tilde{\tau}_\ell. \quad (5.56)$$

Die Konstanten $C_{\text{eff}}^{\text{ZZ}}, C_{\text{rel}}^{\text{ZZ}}$ hängen dabei nur von Ω , der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ , und allen möglichen Patchformen in \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ ab. Die Konstante $C_{\text{rel}}^{\text{ZZ}}$ hängt noch zusätzlich vom Operator $\tilde{\mathfrak{B}}$ und von der Konstante κ_{sat} aus der Saturationsannahme ab. \square

Man kann die Oszillationen osc_ℓ durch $\overline{\text{osc}}_\ell$ ersetzen.

Korollar 5.18. Definiere $\bar{\tau}_\ell^2 := \tau_\ell^2 + \overline{\text{osc}}_\ell^2$. Dann bleiben die Aussagen von Satz 5.17 gültig, falls $\tilde{\tau}_\ell$ durch $\bar{\tau}_\ell$ und osc_ℓ durch $\overline{\text{osc}}_\ell$ ersetzt wird. \square

Für die numerischen Experimente verwenden wir $\mathcal{T}_\ell^\Gamma := \mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma$ und definieren den zu τ_ℓ äquivalenten Schätzer $\mu_\ell^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega} \mu_\ell^2(T)$ mit

$$\mu_\ell^2(T) = \|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Omega) \nabla u_\ell\|_{L^2(T)}^2 + |T|^{1/d} \left(\|(1 - \mathfrak{C}_\ell^\Gamma) \nabla_\Gamma u_\ell\|_{L^2(T \cap \Gamma)}^2 + \|(1 - \mathfrak{D}_\ell) \phi_\ell\|_{L^2(T \cap \Gamma)}^2 \right).$$

Äquivalenz $\tau_\ell \simeq \mu_\ell$ folgt dabei aus der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω .

Korollar 5.19. Definiere $\tilde{\mu}_\ell^2 := \mu_\ell^2 + \text{osc}_\ell^2$ und $\bar{\mu}_\ell^2 := \mu_\ell^2 + \overline{\text{osc}}_\ell^2$. Satz 5.17 bleibt gültig falls entweder $\tilde{\tau}_\ell$ durch $\tilde{\mu}_\ell$ oder $\bar{\tau}_\ell$ durch $\bar{\mu}_\ell$ und osc_ℓ durch $\overline{\text{osc}}_\ell$ ersetzt wird. \square

5.4 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt stellen wir numerische Experimente für $d = 2$ als auch für $d = 3$ vor. Diese Experimente dienen auf der einen Seite zum Vergleich zwischen den drei verschiedenen FEM-BEM Kopplungen, auf der anderen Seite zum Vergleich zwischen uniformen und adaptiven Strategien. Speziell werden wir die Vorteile von adaptiven Verfahren gegenüber uniformen herausarbeiten.

Der adaptive Algorithmus 5.1 mit $\theta < 1$ wird entweder mit dem Residualschätzer aus Abschnitt 5.2 oder mit dem ZZ-Schätzer aus Abschnitt 5.3 gesteuert. Die Strategie mit uniformer Netzverfeinerung entspricht dabei $\theta = 1$. In allen Beispielen gilt $\mathcal{T}_\ell^\Gamma = \mathcal{T}_\ell^\Omega|_\Gamma$. Die Menge der markierten Elemente wird von minimaler Kardinalität gewählt. Für $d = 2$

verwenden wir die im Programmpaket HILBERT [AEF⁺13] bereitgestellten Netzverfeinerungsroutinen. Im Falle $d = 3$ benützen wir jene aus der Arbeit [Kem12]. Zum Lösen der auftretenden linearen Gleichungssystem kommt der MATLAB Backslash-Operator ($d = 2$) bzw. der vorkonditionierte GMRES Algorithmus 7.2 mit $\tau = 10^{-5}$ ($d = 3$) zum Einsatz. Als Vorkonditionierer wählen wir einen Additiv-Schwarz Vorkonditionierer. An dieser Stelle sei auf Kapitel 7 verwiesen, wo das Thema Vorkonditionierung von adaptiven FEM-BEM Kopplungen ausführlich behandelt wird. Bei etwaigen vorkommenden Stabilisierungstermen setzen wir immer $\xi := 1 \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$. Grundlegende Details zur Implementierung von FEM-BEM Kopplungen finden sich in Abschnitt 3.6.1 und zur Netzverfeinerung in Abschnitt 2.5. Um in den Experimenten zwischen den verschiedenen Kopplungen unterscheiden zu können, wählen wir die Kurzschreibweise *SYM* für die symmetrische Kopplung, *JN* für die Johnson-Nédélec Kopplung, und *BMC* für die Bielak-MacCamy Kopplung.

Ist die exakte Lösung $\mathbf{u} = (u, \phi) \in \mathcal{H}$ bekannt, so schätzen wir den Galerkin-Fehler $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} \simeq \|u - u_\ell\|_{H^1(\Omega)} + \|\phi - \phi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ ab, da $\|\phi - \phi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ nicht-lokal ist und daher im Allgemeinen nur schwer zu berechnen ist. Die Quasi-Optimalität der symmetrischen Kopplung (3.48), der Johnson-Nédélec Kopplung (3.61) als auch der Bielak-MacCamy Kopplung (3.77) und die Bestapproximationseigenschaften der L^2 -Projektion implizieren

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\ell\|_{\mathcal{H}} &\lesssim \|u - u_\ell\|_{H^1(\Omega)} + \min_{\psi_\ell \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)} \|\phi - \psi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\lesssim \|u - u_\ell\|_{H^1(\Omega)} + \|h_\ell^{1/2}(\phi - \phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)} =: \text{err}_\ell^\Omega + \text{err}_\ell^\Gamma =: \text{err}_\ell. \end{aligned}$$

Für die Bielak-MacCamy Kopplung gilt $u^{\text{ext}} = \tilde{\mathfrak{V}}\phi$, während bei der symmetrischen und Johnson-Nédélec Kopplung ϕ die äußere Normalenableitung ist. Da bei bekannter Lösung (u, u^{ext}) die Dichte $\phi = \mathfrak{V}^{-1}\gamma_0^{\text{ext}}u^{\text{ext}}$ im Allgemeinen nicht explizit bekannt ist, ersetzen wir bei der Bielak-MacCamy Kopplung den Term err_ℓ^Γ durch $\text{err}_\ell^\Gamma := \|h_\ell^{1/2}(\gamma_1^{\text{ext}}u^{\text{ext}} - (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi_\ell)\|_{L^2(\Gamma)}$. Dies ist motiviert durch den Zusammenhang $\gamma_1^{\text{ext}}\tilde{\mathfrak{V}}\phi = (\mathfrak{K}' - \frac{1}{2})\phi$, welcher aus den Eigenschaften der Randintegraloperatoren folgt. Man beachte, dass der Term err_ℓ^Γ nicht mehr unbedingt eine obere Abschätzung des BEM-Fehlers sein muss. Der Vorteil ist aber, dass sich die Terme err_ℓ^Γ für die verschiedenen Kopplungen vergleichen lassen.

Wir betrachten die Unterräume $\mathcal{H}_\ell := \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ mit $q = 1, p = 0$ bzw. $q = 2, p = 1$ für $d = 2$ und $q = 1, p = 0$ für $d = 3$. Für die Fehler im FEM-Teil und BEM-Teil erwartet man sich

$$\|u - u_\ell\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}((M^\Omega)^{-\alpha}), \quad \|\phi - \phi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \mathcal{O}((M^\Gamma)^{-\beta})$$

mit $M^\Omega = \#\mathcal{T}^\Omega$, $M^\Gamma = \#\mathcal{T}^\Gamma$. Für den FEM-Teil ist die optimale Rate $\alpha = q/d$, für den BEM-Teil $\beta = (p + 3/2)/(d - 1)$. Üblicherweise führen Methoden mit uniformer Netzverfeinerung bei vorhandenen Singularitäten in der Lösung (u, ϕ) bzw. in den Daten (f, u_0, ϕ_0) auf suboptimale Raten, während adaptive Methoden die optimalen Raten wiederherstellen. In manchen der folgenden Konvergenzabbildungen sind Hilfslinien (strichlierte schwarze Linien) mit zugehörigen Rate α, β zur Orientierung eingezeichnet. An dieser Stelle sei noch auf die Arbeit [MPW14] verwiesen, in der quasi-optimale Konvergenzraten für den BEM-Fehler $\|\phi - \phi_\ell\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ bei der symmetrischen Kopplung gezeigt werden.

Neben den Fehlerschätzern und Fehlergrößen $\text{err}_\ell^\Omega, \text{err}_\ell^\Gamma$ plotten wir auch die benötigte Rechenzeit t_ℓ . Dabei verwenden wir für das uniforme und adaptive Verfahren verschiedene

Zeitmessungsmethoden: Beim adaptiven Verfahren entspricht t_ℓ der Zeit, die seit dem Start des Algorithmus bis (einschließlich) des ℓ -ten Schrittes im Algorithmus vergangen ist, d.h. t_ℓ ist die Summe aller $t_{\ell-1}$ mit $t_{-1} := -1$ plus der Zeit die im ℓ -ten Schritt benötigt wurde. Beim uniformen Verfahren ist t_ℓ die Zeit, die für ℓ -maliges uniformes Verfeinern der Starttriangulierung benötigt wurde plus der Zeit die zum Aufbau und Lösen des Galerkin-Systems in Anspruch genommen wurde.

5.4.1 Lineares Problem auf L-förmigen Gebiet in 2D

Sei Ω ein L-förmiges Gebiet mit der in Abbildung 3.1 skizzierten Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Ω . Sei $\mathfrak{A} = \text{Id}$. Wir schreiben die exakte Lösung

$$\begin{aligned} u(x, y) &= r^{2/3} \cos(2/3\varphi) & (x, y) \in \Omega, \\ u^{\text{ext}}(x, y) &= \frac{1}{10} \frac{x + y - \frac{1}{8}}{(x - \frac{1}{8})^2 + y^2} & (x, y) \in \Omega^{\text{ext}} = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \end{aligned}$$

vor, wobei (r, φ) die Polarkoordinaten von $(x, y) \in \Omega$ sind. Wir bemerken, dass u an der einspringenden Ecke $(x, y) = (0, 0)$ singularär ist.

Zur Datenapproximation verwenden wir den Scott-Zhang Operator, d.h. $u_{0,\ell} := \mathfrak{J}_\ell^\Gamma u_0 \in \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$. Den adaptiven Algorithmus 5.1 steuern wir mit $\theta = \frac{1}{4}$ und entweder dem gewichteten Residualschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ oder dem ZZ-Schätzer $\tilde{\tau}_\ell$.

In Abbildung 5.1 sind die Ergebnisse für die nicht-stabilisierte symmetrische Kopplung mit $q = 1, p = 0$ geplottet. Dabei vergleichen wir die Fehlergrößen err_ℓ^Ω mit $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ und err_ℓ^Γ mit $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ und osc_ℓ auf adaptiv und uniform erzeugten Gittern. Analog dazu sind die Ergebnisse für die nicht-stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung bzw. Bielak-MacCamy Kopplung in Abbildung 5.2 bzw. Abbildung 5.3 geplottet. In allen drei Fällen ist zu erkennen, dass die uniformen Methoden suboptimale Konvergenzraten liefern, während die adaptiven Methoden die optimalen Raten wiederherstellen. Wie erwartet verhalten sich der Gesamtfehler err_ℓ als auch der Fehlerschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ mit $\mathcal{O}((M^\Omega)^{-1/2})$, da der Fehler im FEM-Teil dominiert und annähernd $M^\Omega \simeq (M^\Gamma)^2$ gilt. Ein weiterer Vorteil von adaptiven Methoden ist ersichtlich, wenn man, wie in Abbildung 5.4, den Fehler err_ℓ gegen die Rechenzeit t aufträgt. Nach einer präasymptotischen Phase, bedingt durch den Mehraufwand des adaptiven Algorithmus, wird der Fehler bei den adaptiven Verfahren deutlich kleiner. Aus Abbildung 5.4 sieht man auch, dass die nicht-stabilisierte Bielak-MacCamy Kopplung auf uniformen als auch auf adaptiv generierten Gittern viel mehr Zeit benötigt als die anderen beiden Kopplungen. Durch Stabilisierung kann man dies aber verhindern. In Abbildung 5.5 sind die Rechenzeiten für die gleiche Konfiguration wie in Abbildung 5.4, nun aber mit stabilisierten Systemmatrizen, geplottet. Für die adaptive Bielak-MacCamy Kopplung erhält man dann Rechenzeiten, die sich qualitativ als auch quantitativ wie die der Johnson-Nédélec Kopplung verhalten.

Als nächsten Punkt untersuchen wir adaptive Kopplungen für $q = 2, p = 1$. In Abbildung 5.6 werden die Fehlergrößen err_ℓ^Ω mit $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ und err_ℓ^Γ mit $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ und osc_ℓ für die nicht-stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung verglichen. Bei der adaptiven Methode stellt sich für die Größen, welche über die Anzahl der Volumselemente M^Ω geplottet werden, eine Rate von $\alpha = 1$ ein und für die Größen, welche über die Anzahl der Randelemente M^Γ

geplottet werden, eine Rate von $\beta = 5/2$. Im Gegensatz dazu, sind die Raten bei der uniformen Methode, $\alpha = 1/3, \beta = 2/3$, ident mit den entsprechenden im Fall $q = 1, p = 0$. Für Methoden mit Ansatz-/Testfunktionen mit höheren Polynomgraden $q > 1, p > 0$ ist also der Unterschied zwischen uniformen und adaptiven Verfahren noch größer als für $q = 1, p = 0$. Wir bemerken, dass sich der Gesamtfehler err_ℓ und der Fehlerschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ wie $\mathcal{O}((M^\Omega)^\alpha)$ mit $\alpha = 1$ verhalten. Der Fehler aus dem FEM-Teil ist daher wieder dominant. Interessant ist auch der Vergleich der Rechenzeiten zwischen den adaptiven, nicht-stabilisierten Kopplungen für $q = 1, p = 0$ und $q = 2, p = 1$ in Abbildung 5.7. Durch die höhere Konvergenzordnung sind die Fehler für die Kopplungen bei gleicher Rechenzeit im Fall $q = 2, p = 1$ deutlich geringer als im Fall $q = 1, p = 0$.

Zuletzt betrachten wir noch den ZZ-Schätzer für den Fall $q = 1, p = 0$. In Abbildung 5.8 vergleichen wir die Fehlergrößen err_ℓ für die drei adaptiven Kopplungen, wobei der adaptive Algorithmus 5.1 entweder mit $\tilde{\nu}_\ell$ oder $\tilde{\tau}_\ell$ gesteuert wurde. Wie man sieht, ist kein großer Unterschied zwischen den Fehlern auszumachen. Insbesondere fallen alle Größen mit der gleichen Rate. Abbildung 5.9 zeigt dazugehörige adaptiv erzeugte Gitter.

5.4.2 Nichtlineares Problem auf Z-förmigen Gebiet in 2D

Sei Ω das in Abbildung 5.10 skizzierte Z-förmige Gebiet mit Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Ω . Wir wählen $\mathfrak{A}\nabla u = \chi(|\nabla u|)\nabla u$ mit

$$\chi(t) := \begin{cases} 1 + \frac{\tanh(t)}{t} & t > 0, \\ 2 & t = 0. \end{cases}$$

Nach [BFF⁺14, Bemerkung 4.5 (i)] ist \mathfrak{A} stark monoton (3.37b) mit Monotoniekonstante $c_{\text{mon}} = 1$ und Lipschitz-stetig (3.37a) mit Lipschitz-Konstante $c_{\text{lip}} = 2$.

Wir schreiben die exakte Lösung

$$\begin{aligned} u(x, y) &= r^{4/7} \sin(4/7\varphi) & (x, y) \in \Omega, \\ u^{\text{ext}}(x, y) &= \frac{x + y + \frac{1}{4}}{(x + \frac{1}{8})^2 + (y + \frac{1}{8})^2} & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega} \end{aligned}$$

vor und berechnen daraus die Daten f, u_0, ϕ_0 . Hier bezeichnen (r, φ) die Polarkoordinaten von $(x, y) \in \Omega$. Man beachte, dass die Funktion u singularär im Ursprung $(x, y) = (0, 0)$ ist.

In Abbildung 5.11 werden die Fehlergrößen mit dem Residualschätzer für die nicht-stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung mit $q = 1, p = 0$ auf adaptiven und uniformen Gittern verglichen. Der adaptive Algorithmus wird mit $\tilde{\nu}_\ell$ und $\theta = \frac{1}{4}$ gesteuert. Zur Datenapproximation verwenden wir den nodalen Interpolanten $\mathfrak{J}_\ell^\Gamma : H^1(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$. Das uniforme Verfahren führt für den Gesamtfehler auf $\text{err}_\ell = \mathcal{O}((M^\Omega)^{-\alpha})$ mit $\alpha = 2/7$ und ist daher nicht optimal, während das adaptive Verfahren die optimale Rate $\alpha = 1/2$ wiederherstellt. Die Fehlerschätzer zeigen die gleichen Konvergenzraten.

Zuletzt bemerken wir noch, dass die Ergebnisse für die symmetrische Kopplung und die Bielak-MacCamy Kopplung dazu vergleichbar sind und daher nicht näher darauf eingegangen wird.

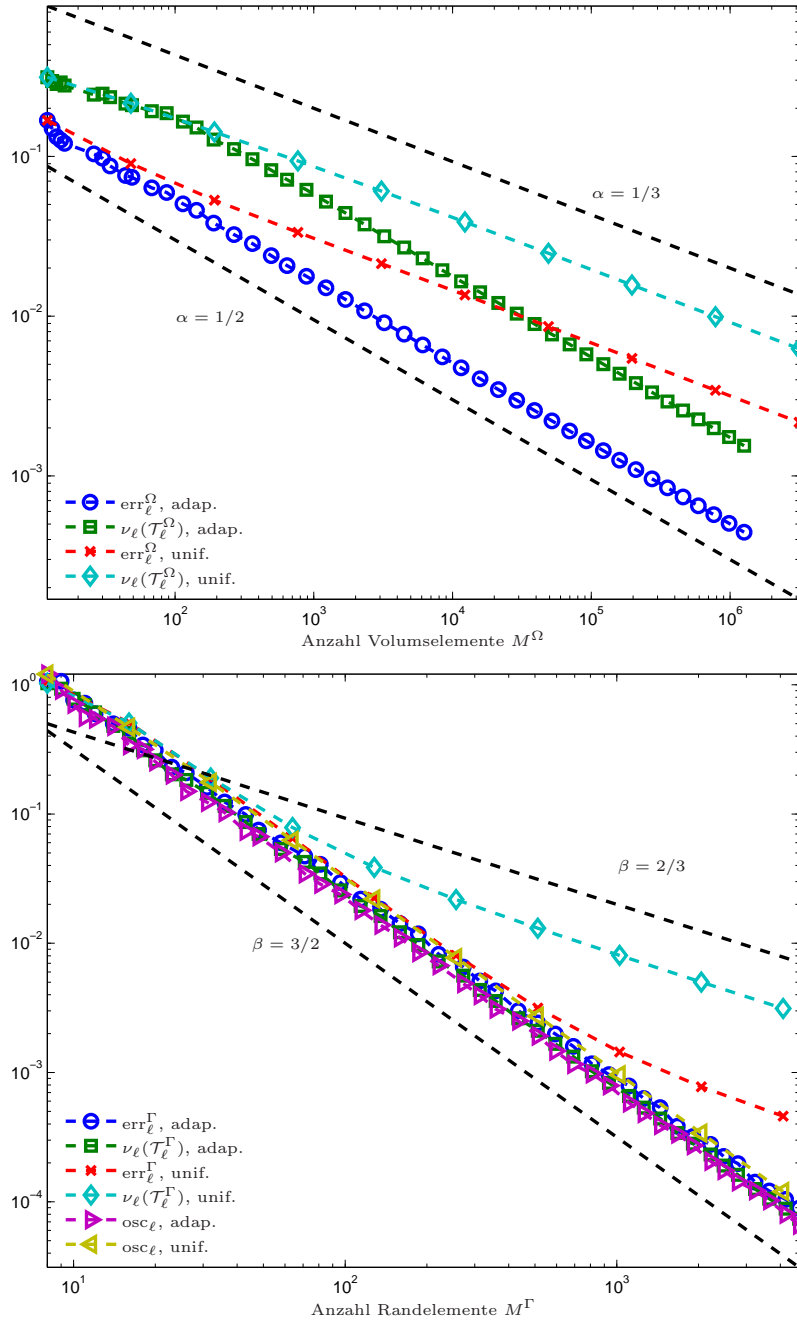


Abbildung 5.1: Vergleich von Fehler und Residualschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ für die nicht-stabilisierte symmetrische Kopplung aus dem Experiment aus Abschnitt 5.4.1 mit $q = 1, p = 0$ auf adaptiv und uniform generierten Gittern. Im oberen Bild sind die Fehlergröße err_ℓ^Ω und $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ über der Anzahl der Volumenelemente M^Ω aufgetragen, im unteren Bild sind err_ℓ^Γ , $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$, als auch osc_ℓ über die Anzahl der Randelemente M^Γ aufgetragen.

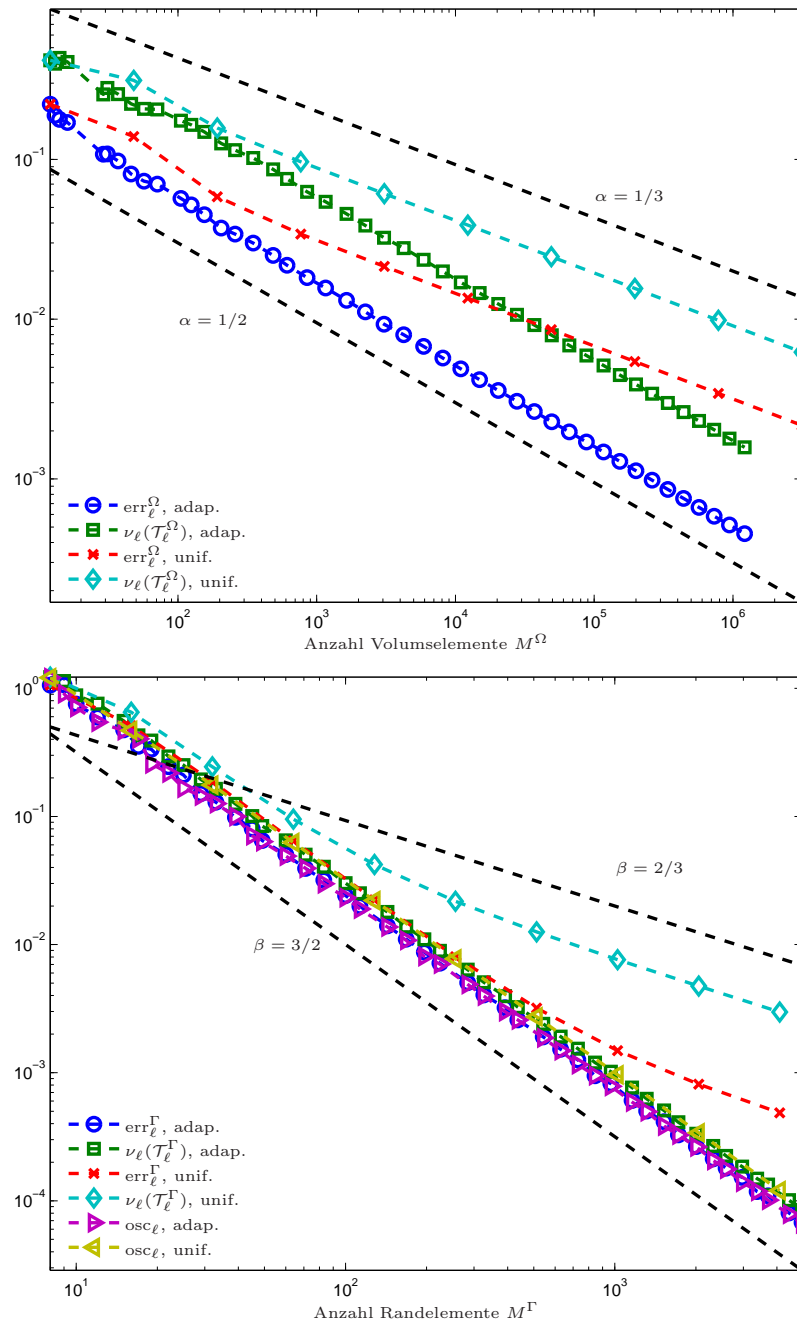


Abbildung 5.2: Vergleich von Fehler und Residualschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ für die nicht-stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung aus dem Experiment aus Abschnitt 5.4.1 mit $q = 1, p = 0$ auf adaptiv und uniform generierten Gittern. Im oberen Bild sind die Fehlergröße err_ℓ^Ω und $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ über der Anzahl der Volumenelemente M^Ω aufgetragen, im unteren Bild sind err_ℓ^Γ , $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$, als auch osc_ℓ über die Anzahl der Randelemente M^Γ aufgetragen.

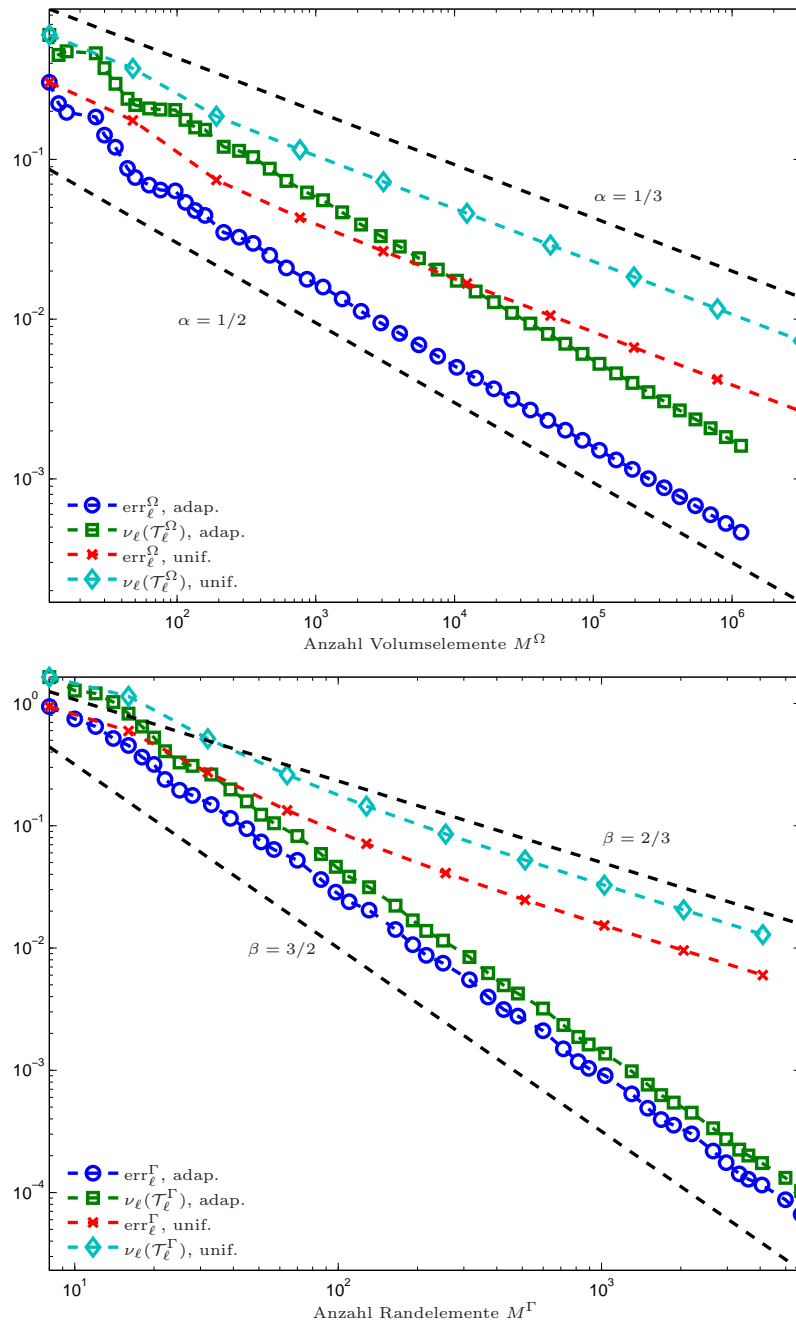


Abbildung 5.3: Vergleich von Fehler und Residualschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ für die nicht-stabilisierte Bielak-MacCamy Kopplung aus dem Experiment aus Abschnitt 5.4.1 mit $q = 1, p = 0$ auf adaptiv und uniform generierten Gittern. Im oberen Bild sind die Fehlergröße err_ℓ^Ω und $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ über der Anzahl der Volumenelemente M^Ω aufgetragen, im unteren Bild sind err_ℓ^Γ und $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ über die Anzahl der Randelemente M^Γ aufgetragen.

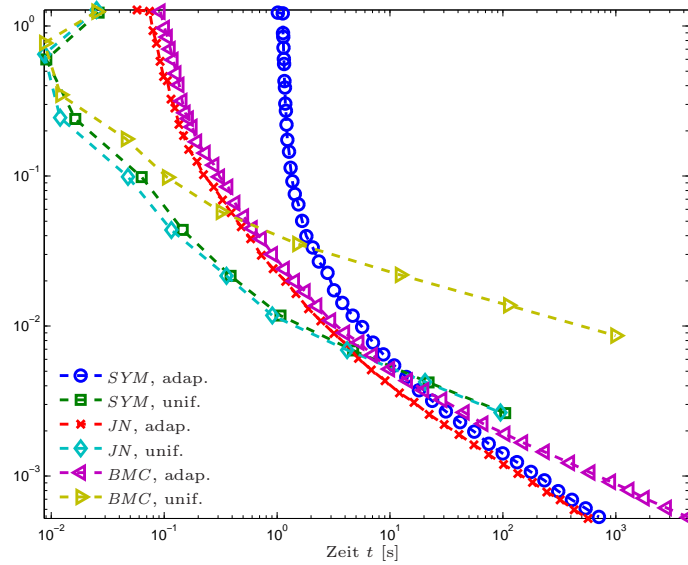


Abbildung 5.4: Fehlergröße err_ℓ gegen Rechenzeit t_ℓ für die nicht-stabilisierten FEM-BEM Kopplungen zu dem Experiment aus Abschnitt 5.4.1 mit $q = 1, p = 0$ auf uniform und adaptiv generierten Gittern; der adaptive Algorithmus wird mit $\tilde{\nu}_\ell$ gesteuert.

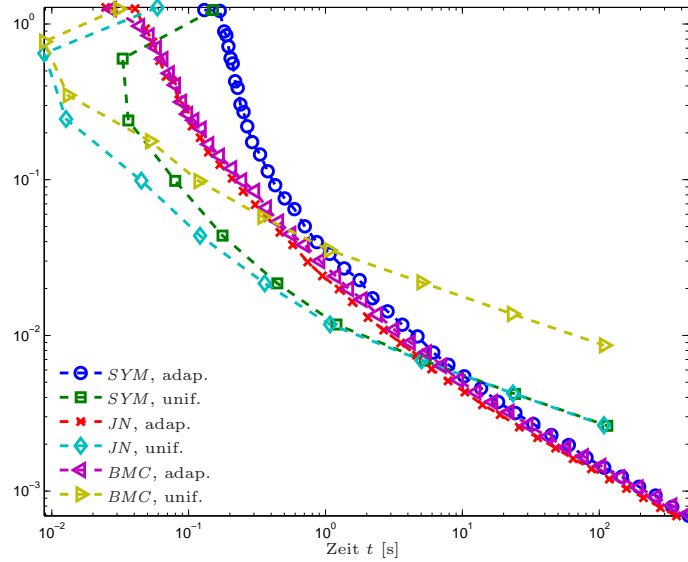


Abbildung 5.5: Fehlergröße err_ℓ gegen Rechenzeit t_ℓ für die stabilisierten FEM-BEM Kopplungen zu dem Experiment aus Abschnitt 5.4.1 mit $q = 1, p = 0$ auf uniform und adaptiv generierten Gittern; der adaptive Algorithmus wird mit $\tilde{\nu}_\ell$ gesteuert.

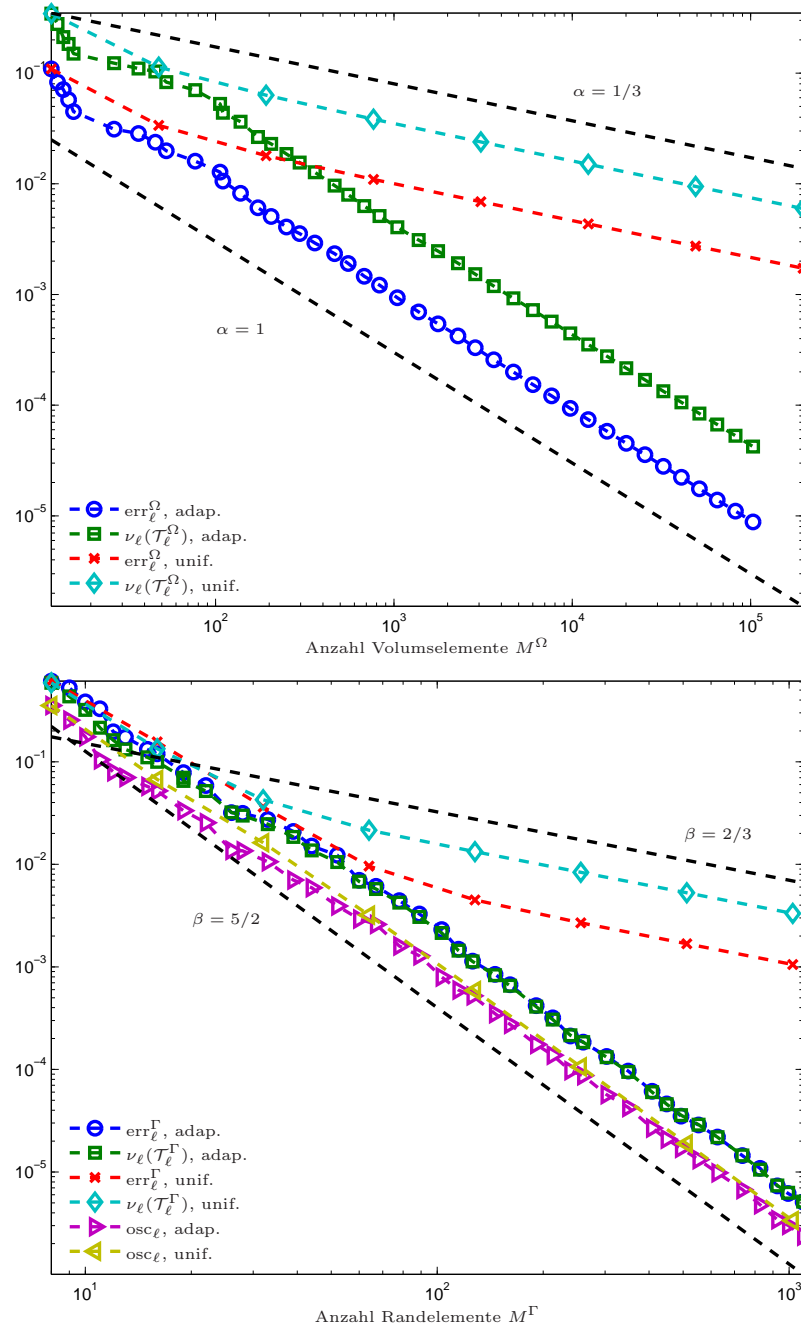


Abbildung 5.6: Vergleich von Fehler und Residualschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ für die nicht-stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung aus dem Experiment aus Abschnitt 5.4.1 mit $q = 2, p = 1$ auf adaptiv und uniform generierten Gittern. Im oberen Bild sind die Fehlergröße err_ℓ^Ω und $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ über der Anzahl der Volumenelemente M^Ω aufgetragen, im unteren Bild sind err_ℓ^Γ , $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$, als auch osc_ℓ über die Anzahl der Randelemente M^Γ aufgetragen.

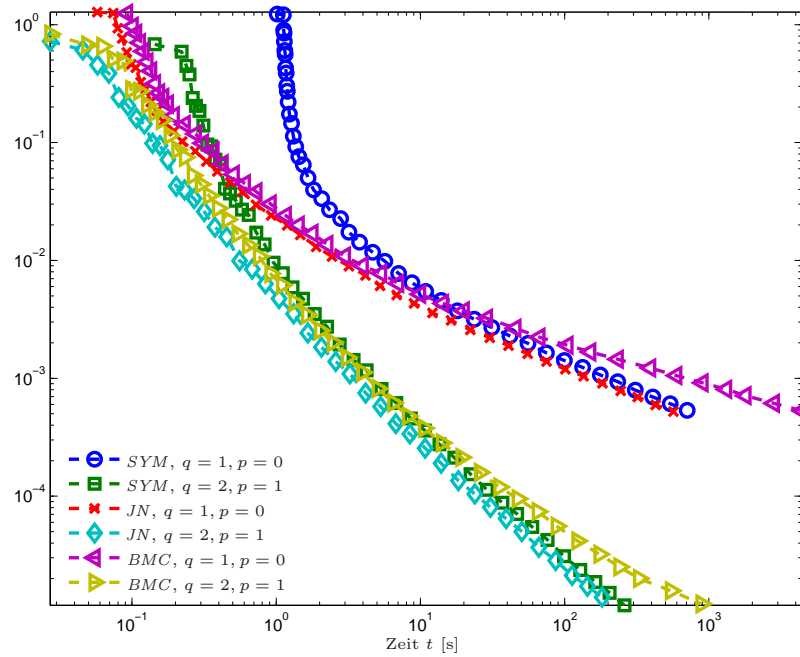


Abbildung 5.7: Vergleich der Fehlergrößen err_ℓ der nicht-stabilisierten, adaptiven Kopplungen für $q = 1, p = 0$ und $q = 2, p = 1$ über den Rechenzeiten t für das Experiment aus Abschnitt 5.4.1; der adaptive Algorithmus 5.1 wurde jeweils mit \tilde{v}_ℓ gesteuert.

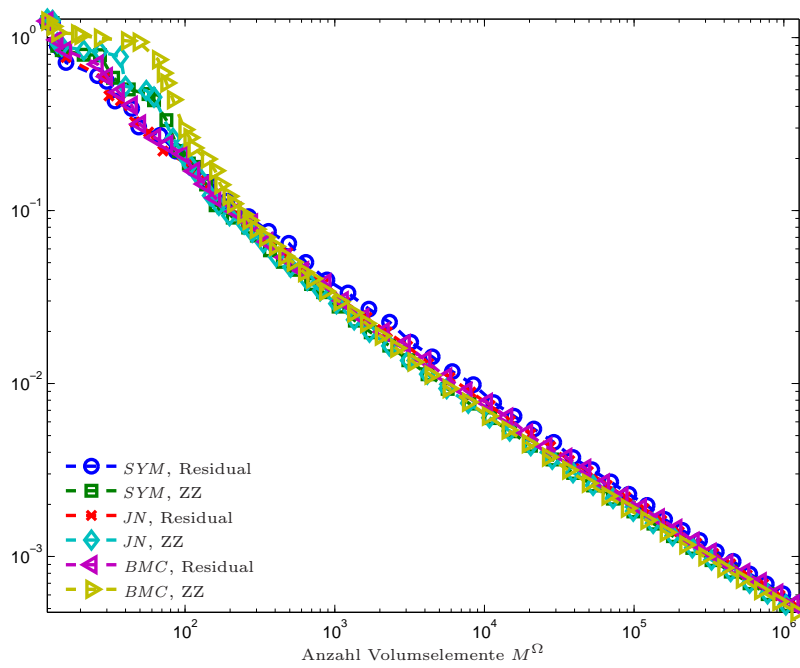


Abbildung 5.8: Vergleich zwischen den Fehlergrößen err_ℓ für die adaptiven Kopplungen mit $q = 1, p = 0$ für das Experiment aus Abschnitt 5.4.1; der adaptive Algorithmus 5.1 wurde mit dem Residualschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ oder dem ZZ-Schätzer $\tilde{\tau}_\ell$ gesteuert.

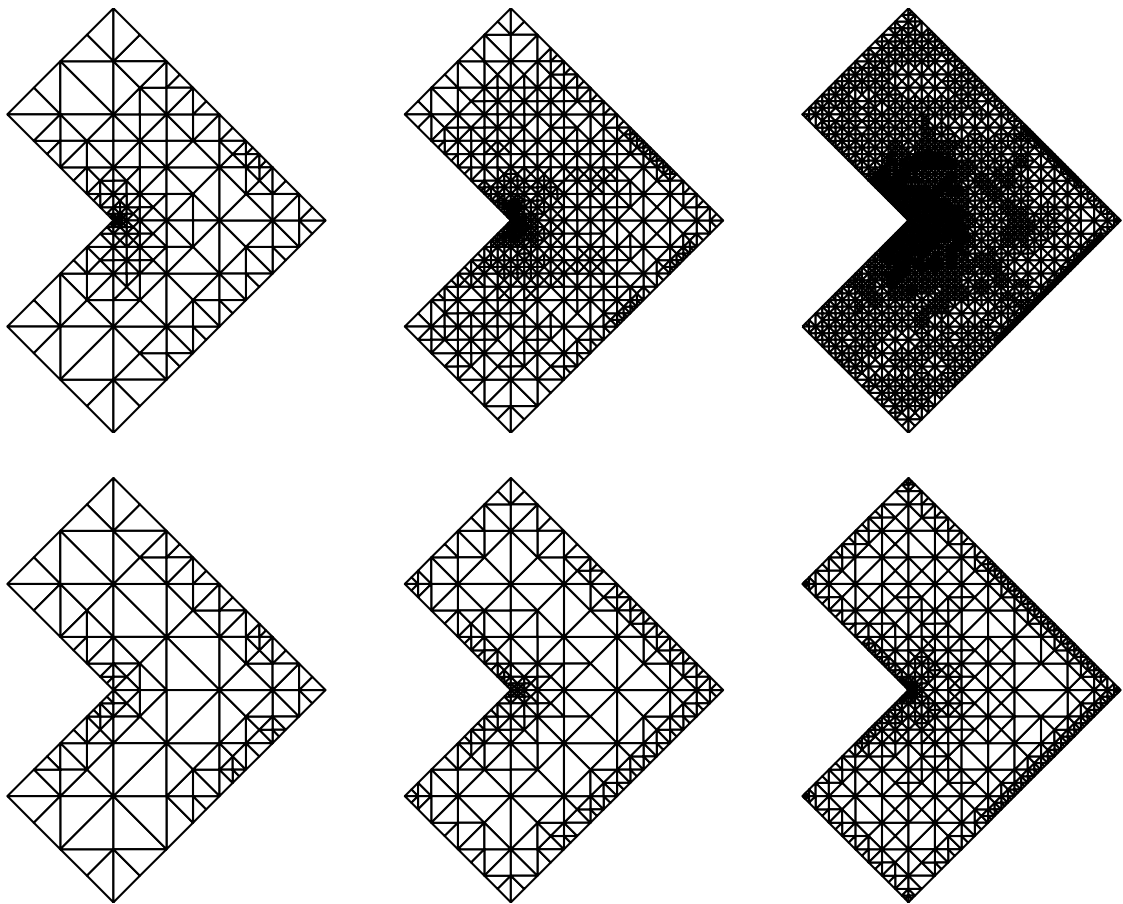


Abbildung 5.9: Adaptiv erzeugte Netze $\mathcal{T}_{15}^{\Omega}, \mathcal{T}_{20}^{\Omega}, \mathcal{T}_{25}^{\Omega}$ für das Experiment aus Abschnitt 5.4.1; hier wurde die nicht-stabilisierte symmetrische Kopplung benutzt. Die obere Zeile zeigt die Netze, welche vom adaptiven Algorithmus mit dem Residualschätzer \tilde{v}_{ℓ} erzeugt wurden, die untere Zeile zeigt die Netze, welche vom adaptiven Algorithmus mit dem ZZ-Schätzer $\tilde{\tau}_{\ell}$ erzeugt wurden.

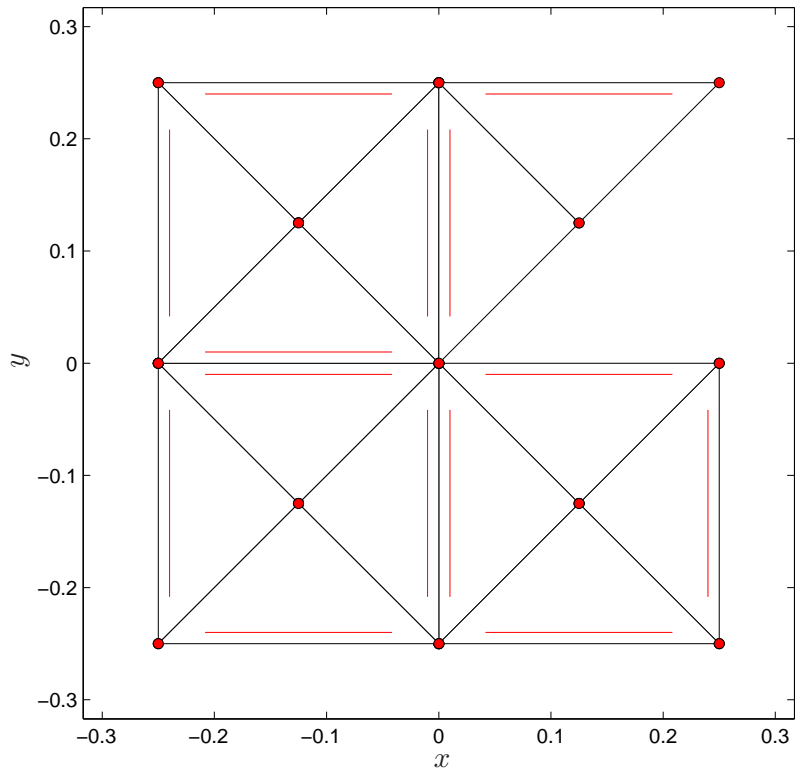


Abbildung 5.10: Z-förmiges Gebiet und Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Ω mit $M^\Omega = \#\mathcal{T}_0^\Omega = 14$ und $M^\Gamma = \#\mathcal{T}_0^\Gamma = \#\mathcal{T}_0^\Omega|_\Gamma = 10$. Die roten Punkte markieren die Knoten der Starttriangulierung, während die roten Linien die Referenzkanten kennzeichnen.

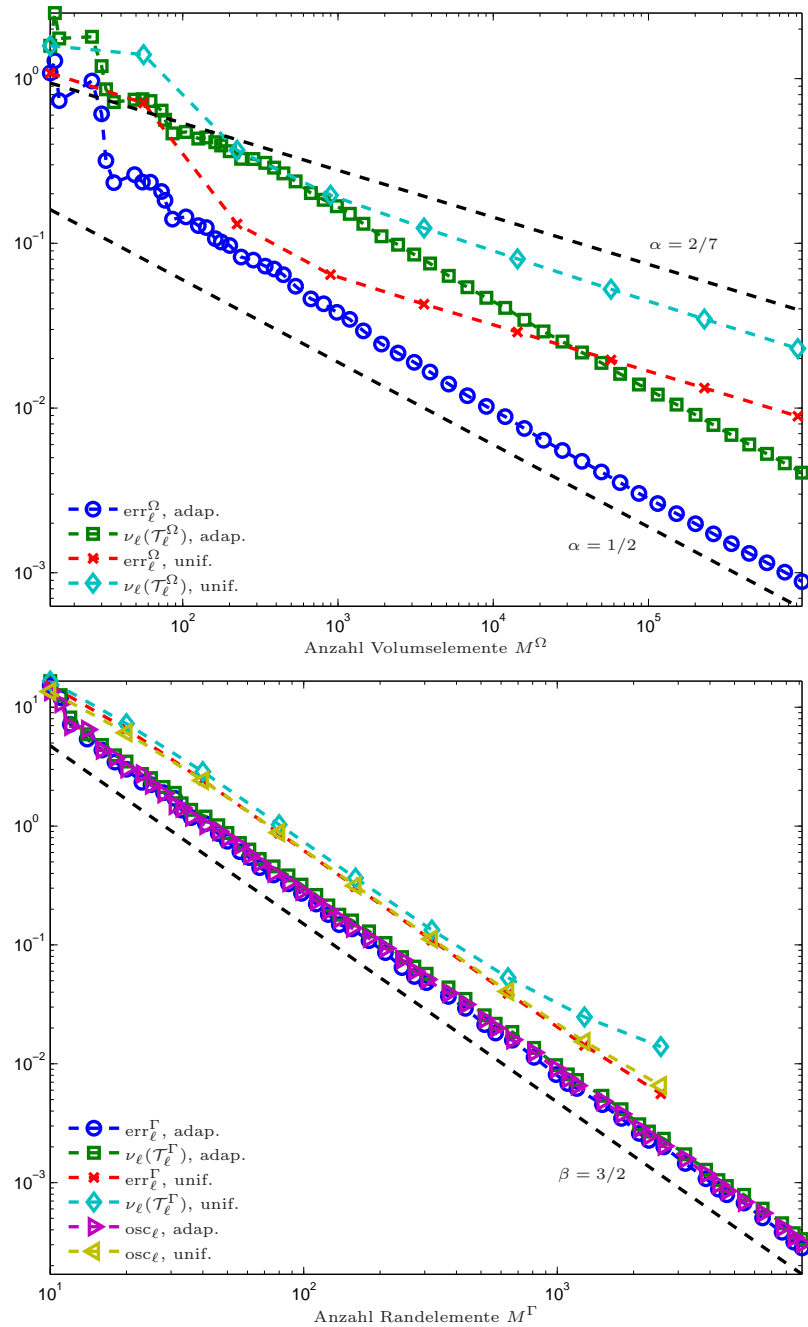


Abbildung 5.11: Vergleich von Fehler und Residualschätzer $\tilde{\nu}_\ell$ für die nicht-stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung aus dem Experiment aus Abschnitt 5.4.2 mit $q = 1, p = 0$ auf adaptiv und uniform generierten Gittern. Im oberen Bild sind die Fehlergröße err_ℓ^Ω und $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ über der Anzahl der Volumenelemente M^Ω aufgetragen, im unteren Bild sind err_ℓ^Γ , $\nu_\ell(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$, als auch osc_ℓ über die Anzahl der Randelemente M^Γ aufgetragen.

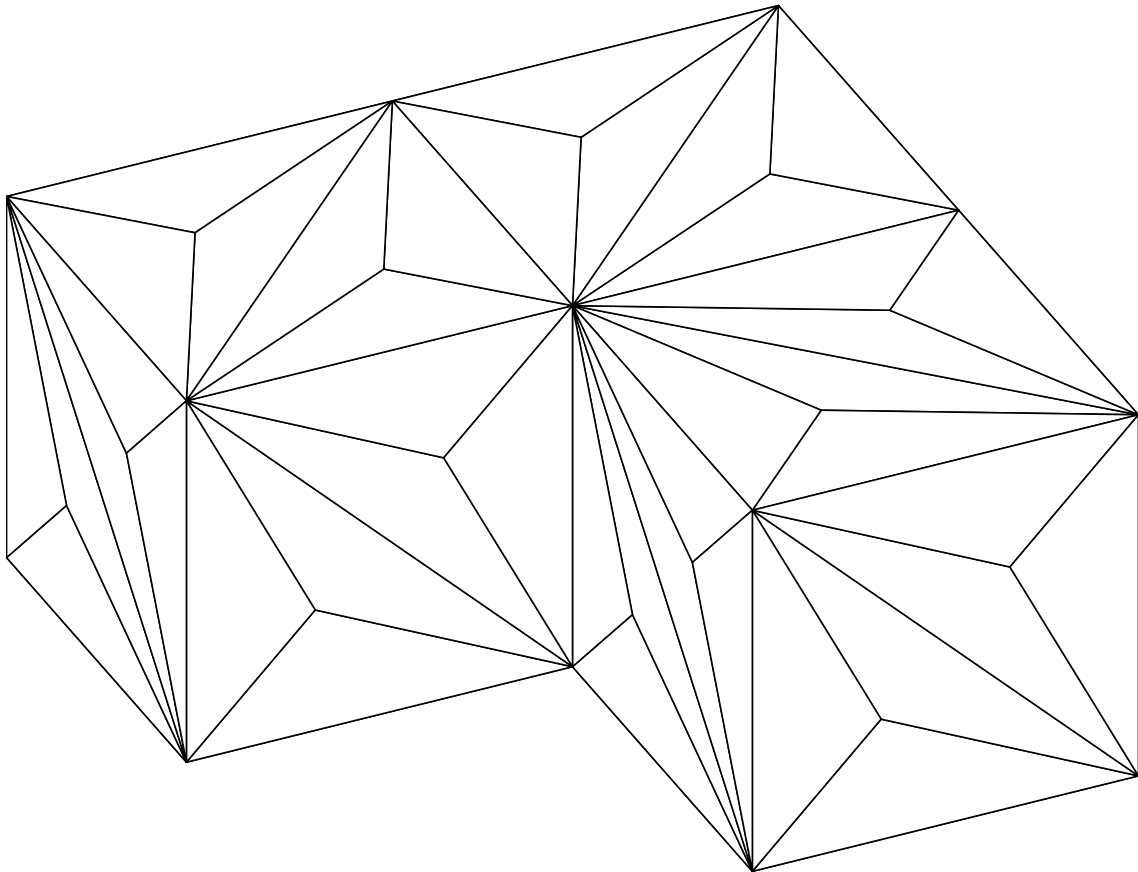


Abbildung 5.12: Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Γ des L-Blocks $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2 \times (0, 1)$ mit $M_0^\Omega = 288$ Volumselementen und $M_0^\Gamma = 84$ Randelementen.

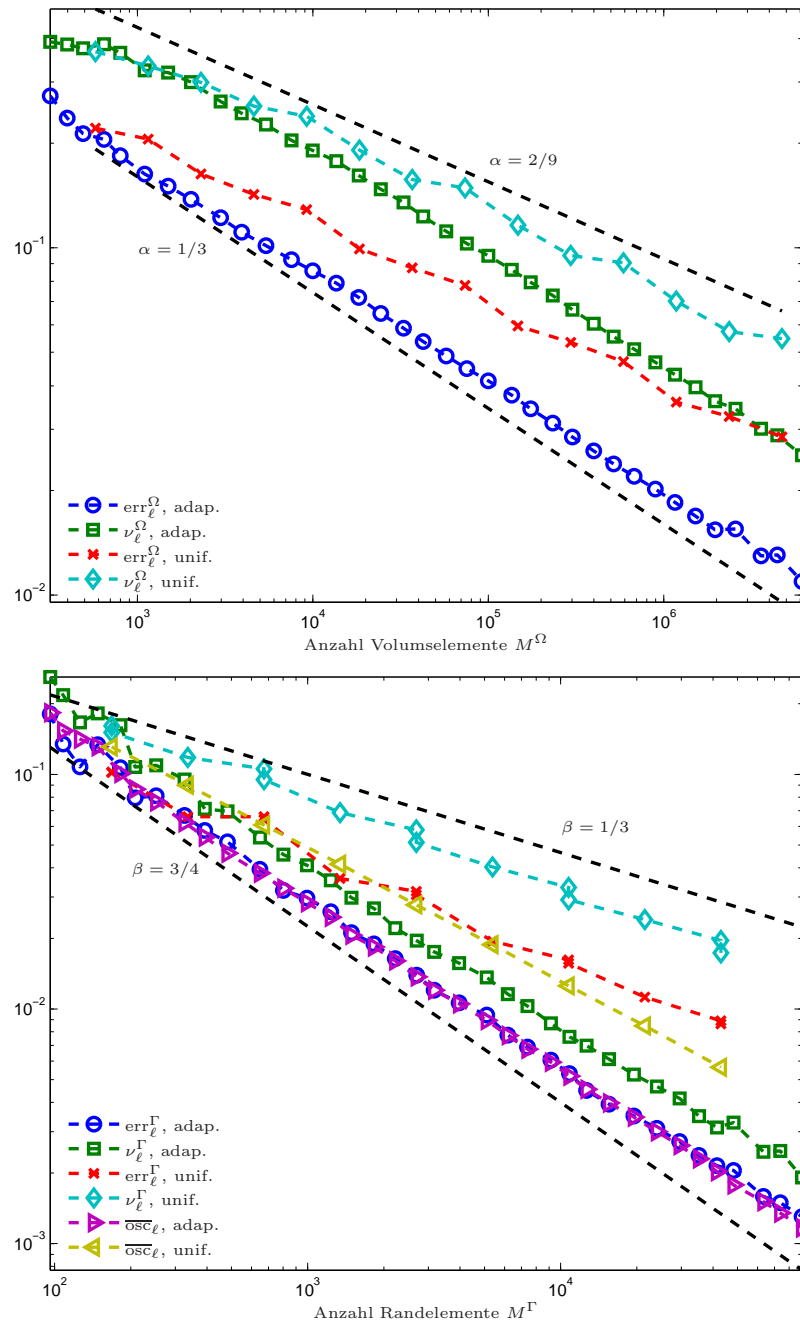


Abbildung 5.13: Vergleich von Fehler und Residualschätzer $\bar{\nu}_\ell$ für die Johnson-Nédélec Kopplung aus dem Experiment aus Abschnitt 5.4.3 mit $q = 1, p = 0$ auf adaptiv und uniform generierten Gittern. Im oberen Bild sind die Fehlergröße err_ℓ^Ω und die Volumsterme ν_ℓ^Ω aufgetragen, im unteren Bild sind err_ℓ^Γ , ν_ℓ^Γ , und \overline{osc}_ℓ über die Anzahl der Randelemente M^Γ aufgetragen.

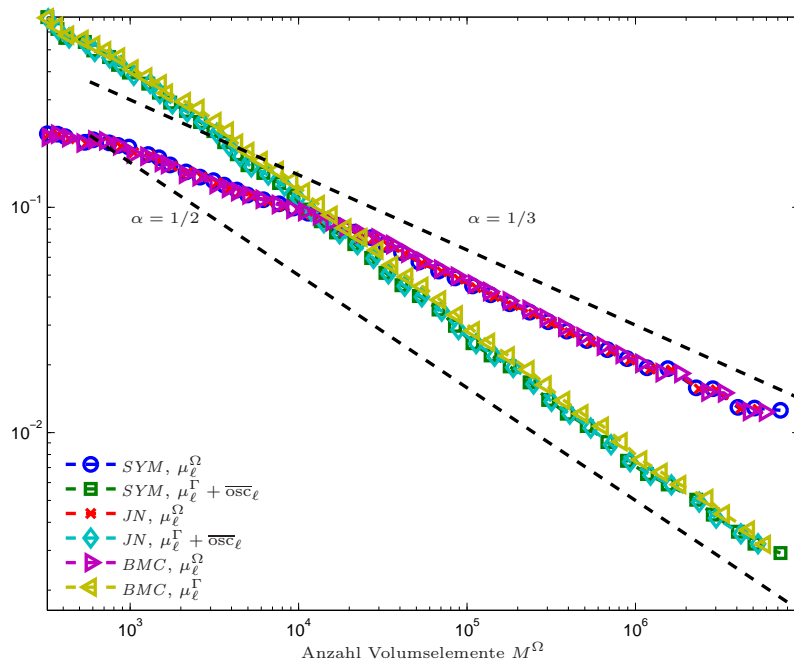


Abbildung 5.14: ZZ-Fehlerschätzer für die drei adaptiven Kopplungen für das Experiment aus Abschnitt 5.4.3 über der Anzahl der Randelemente M^Ω ; es werden die Volumsterme μ_ℓ^Ω mit den Randtermen plus Oszillationen $\mu_\ell^\Gamma + \overline{\text{osc}}_\ell$ verglichen.

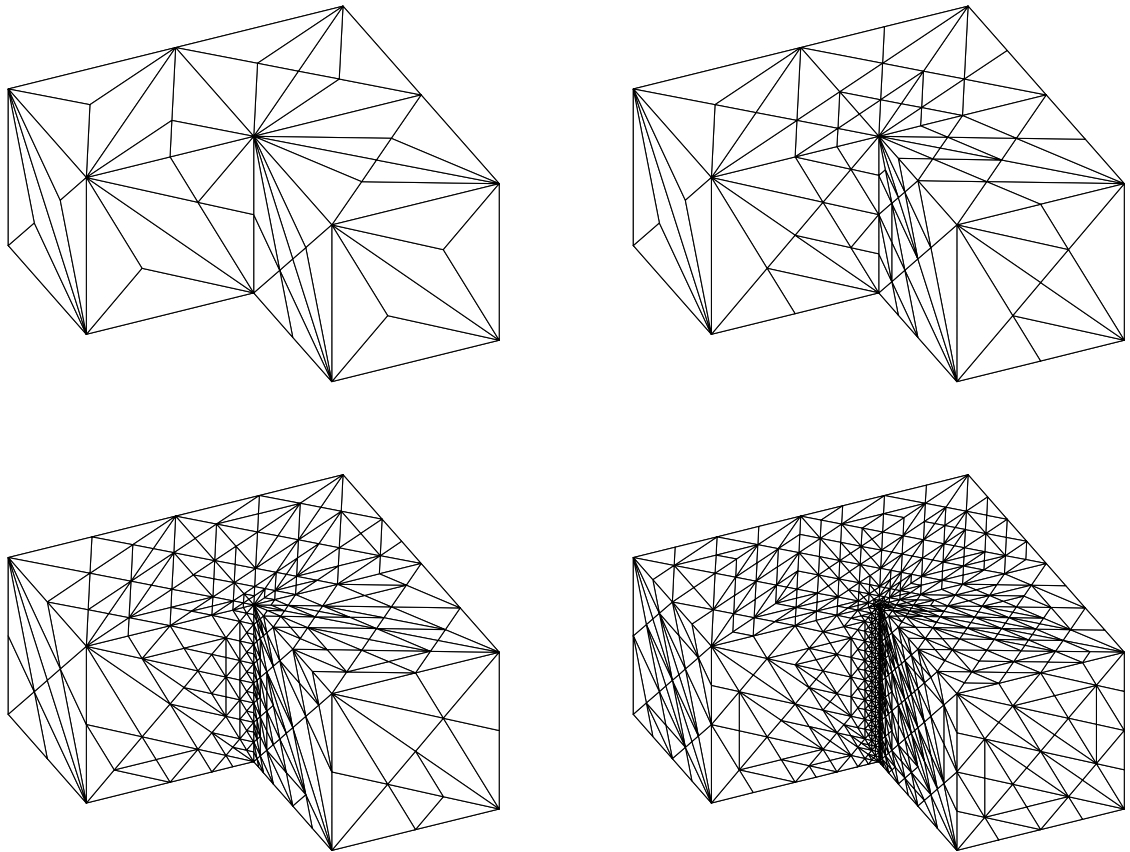


Abbildung 5.15: Adaptiv erzeugte Netze $\mathcal{T}_1^\Omega, \mathcal{T}_6^\Omega, \mathcal{T}_{11}^\Omega, \mathcal{T}_{16}^\Omega$ für das Experiment aus Abschnitt 5.4.1 mit der Johnson-Nédélec Kopplung; der adaptive Algorithmus 5.1 wurde mit dem Residualschätzer $\overline{\nu}_\ell$ gesteuert.

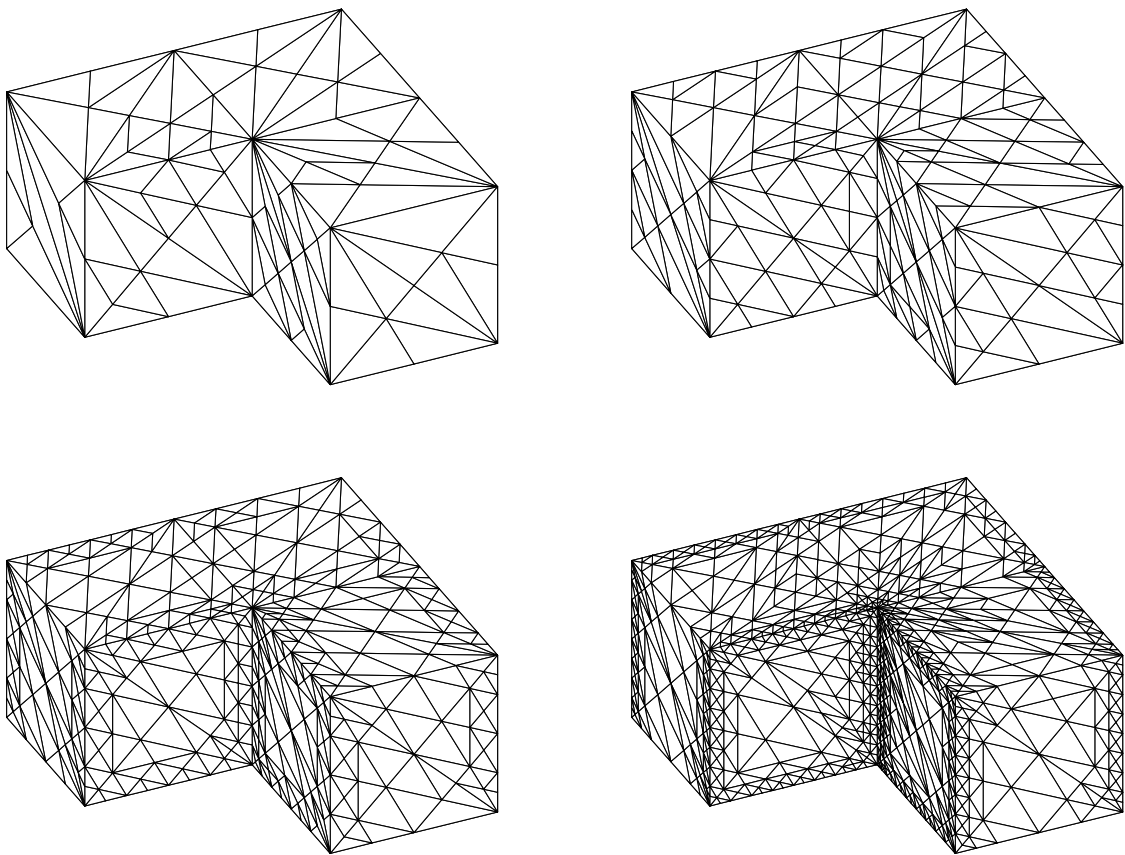


Abbildung 5.16: Adaptiv erzeugte Netze $\mathcal{T}_6^\Omega, \mathcal{T}_{11}^\Omega, \mathcal{T}_{16}^\Omega, \mathcal{T}_{21}^\Omega$ für das Experiment aus Abschnitt 5.4.1 mit der Johnson-Nédélec Kopplung; der adaptive Algorithmus 5.1 wurde mit dem ZZ-Schätzer $\bar{\mu}_\ell$ gesteuert.

5.4.3 Lineares Problem auf L-Block in 3D

Sei $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2 \times (0, 1)$ ein L-Block mit in Abbildung 5.12 skizzierter Starttrian-
gulierung \mathcal{T}_0^Γ des Randes $\Gamma = \partial\Omega$. Als Lösung betrachten wir

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &:= r^{2/3} \cos(2/3\varphi) & (x, y, z) \in \Omega, \\ u^{\text{ext}}(x, y, z) &:= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(x + \sqrt{2}/4)^2 + (y + \sqrt{2}/4)^2 + (z - \frac{1}{2})^2}} & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

wobei (r, φ, z) die Zylinderkoordinaten von $(x, y, z) \in \Omega$ sind. Aus u, u^{ext} werden die Daten f, u_0, ϕ_0 bestimmt. Man beachte, dass die Funktion u singularär an den Punkten $(0, 0, z)$ mit $z \in (0, 1)$ ist.

Zur Datenapproximation verwenden wir durchgehend den Scott-Zhang Operator. Der adaptive Algorithmus wird mit $\theta = \frac{1}{4}$ gesteuert. Des weiteren betrachten wir immer die stabilisierten Kopplungen, da wir einen iterativen Löser zum Lösen verwenden, und die Stabilisierung simpel zu realisieren ist, vgl. Kapitel 7.

Wir zerlegen die Schätzer in $\bar{\nu}_\ell^2 = (\nu_\ell^\Omega)^2 + (\nu_\ell^\Gamma)^2 + \overline{\text{osc}}_\ell^2$ und $\bar{\mu}_\ell^2 = (\mu_\ell^\Omega)^2 + (\mu_\ell^\Gamma)^2 + \overline{\text{osc}}_\ell^2$, wobei $\nu_\ell^\Omega, \mu_\ell^\Omega$ den Volumsteilen in den Schätzern und $\nu_\ell^\Gamma, \mu_\ell^\Gamma$ den Randteilen in den Schätzern entsprechen.

Als Erstes vergleichen wir in Abbildung 5.13 die Ergebnisse zur Johnson-Nédélec Kopplung auf adaptiv und uniform erzeugten Gittern. Der adaptive Algorithmus 5.1 wird mit dem Residualschätzer $\bar{\nu}_\ell$ gesteuert. Wie auch im Fall $d = 2$, siehe Abschnitt 5.4.1, führt die uniforme Strategie zu suboptimalen Raten, während die adaptive Strategie die optimalen Raten $\alpha = 1/3$ wiederherstellt. Wir bemerken, dass man auf isotropen Gittern grundsätzlich keine bessere Rate als $\beta = 1/2$ erwarten kann. Insgesamt dominiert wieder der FEM Fehler, und es ergibt sich $\text{err}_\ell = \mathcal{O}((M^\Omega)^{-\alpha})$ mit $\alpha = 1/3$.

In Abbildung sind die ZZ-Fehlerschätzer $\bar{\mu}_\ell$ für die drei verschiedenen adaptiven Kopplungen über der Anzahl der Volumselemente M^Ω geplottet. Man beobachtet, dass zuerst die Randterme der Fehlerschätzer überwiegen und danach die Volumsterme. Insgesamt stellt sich jedoch eine Rate $\alpha = 1/3$ für den Fehlerschätzer $\bar{\mu}_\ell = \mathcal{O}((M^\Omega)^{-\alpha})$ ein. Wir bemerken, dass sich die Fehler err_ℓ analog verhalten.

Abbildung 5.15 und Abbildung 5.16 zeigen adaptiv generierte Netze, wobei die Johnson-Nédélec Kopplung benutzt wurde und der adaptive Algorithmus mit $\bar{\nu}_\ell$ bzw. $\bar{\mu}_\ell$ gesteuert wurde.

6 Vorkonditionierung von adaptiver BEM

Dieses Kapitel behandelt die Vorkonditionierung von BEM Operatoren auf lokal verfeinerten Triangulierungen. Da die Konditionszahlen der Galerkin-Matrizen des hypersingulären Operators und des Einfachschichtintegraloperators von der Anzahl der Elemente in der Triangulierung, als auch vom minimalen Elementdurchmesser h_{\min} abhängen, ist es auf lokal verfeinerten Triangulierungen erforderlich optimale Vorkonditionierer zu konstruieren. Wir verstehen dabei unter Optimalität, dass die Konditionszahlen der vorkonditionierten Systeme unabhängig von der Anzahl der Elemente und der Netzweite sind.

Frühere Arbeiten beinhalten die Diagonalvorkonditionierung [AMT99, GM06], bei der sich die Konditionszahlen der vorkonditionierten Matrizen im Wesentlichen wie auf uniform verfeinerten Gittern verhalten. Andere Vorkonditionierer finden sich in [TSM97, SW98, TSZ98, Cao02] und Referenzen darin, wobei hauptsächlich quasi-uniforme Triangulierungen betrachtet werden. Die Operatorvorkonditionierung aus [SW98] liefert auch auf adaptiven Gittern optimale Vorkonditionierer. Man braucht aber eine zusätzliche Galerkin-Matrix eines Randintegraloperators. Dies ist mit Mehraufwand bei der Implementierung und größerem Rechen- und Speicherbedarf verbunden.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierern, welche die vom adaptiven Algorithmus generierte Folge von Triangulierungen $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_L$ ausnutzen. Für den hypersingulären Operator wurde solch ein Vorkonditionierer in [AM03] für partiell verfeinerte Triangulierungen untersucht, wo angenommen wird, dass $\mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_{\ell+1} \subseteq \mathcal{T}_{\ell+k}$ für alle $\ell, k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Das bedeutet, sobald ein Element $T \in \mathcal{T}_\ell$ nicht verfeinert wird, bleibt es unverfeinert. In der Praxis ist so eine Annahme nicht erfüllbar. Unsere Analysis eines *lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierers* benötigt diese Annahme an die Folge der Triangulierungen nicht. Die Idee ist prinzipiell, dass man für die Vorkonditionierung nur die neu entstandenen Knoten und deren Nachbarn miteinbezieht. Für die FEM in 2D wurden solche lokale Methoden in [WC06, XCH10] untersucht. Die darin enthaltene Analysis beruht auf einer stabilen Unterraumzerlegung in H^1 , welche in [WC06] mit Hilfe einer speziellen Variante des Scott-Zhang Operators [SZ90] gezeigt wurde. Wir benutzen und erweitern diese Ideen für den Sobolevraum $H^{1/2}$.

Des weiteren behandeln wir in dieser Arbeit nur Randintegraloperatoren für Laplace-Probleme und beschränken uns auf Galerkin-Diskretisierungen niedrigster Ordnung. Unsere Ergebnisse sind prinzipiell für die Randintegraloperatoren aus der Elastostatik übertragbar.

Darüber hinaus bemerken wir noch, dass in [XCN09] lokale Multilevel Methoden für durch Bisektion entstandene Triangulierungen untersucht werden. Deren Analysis beruht auf *kompatiblen Bisektionen*, welche in unserer Analysis nicht benötigt wird. Insbesondere erlauben wir eine beliebige Referenzkantenverteilung in der Starttriangulierung, vgl. Abschnitt 2.5.

Der Rest des Kapitels ist wie folgt aufgebaut: Zuerst werden wir in Abschnitt 6.1 kurz auf die Theorie zu Additiv-Schwarz Operatoren eingehen. In Abschnitt 6.2 betrachten wir

den hypersingulären Operator für $d = 2, 3$ und definieren den *lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer* als auch den *globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer*. Danach zeigen wir die Optimalität des lokalen Vorkonditionierers, während wir für den globalen Vorkonditionierer zeigen, dass die Konditionszahlen linear von der Anzahl der Triangulierungen abhängen. Dies ist eine Verbesserung des in [Mai09] bewiesenen Resultats zum globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer für den hypersingulären Operator mit $d = 2$. In Abschnitt 6.3 übertragen wir die Resultate zum hypersingulären Operator auf den Ein-fachschichtintegraloperator für $d = 2$. Numerische Experimente in Abschnitt 6.4 belegen unsere theoretischen Vorhersagen.

6.1 Allgemeine Additiv-Schwarz Theorie

In diesem Abschnitt fassen wir wichtige Resultate aus der Theorie der Additiv-Schwarz Operatoren zusammen. Für eine ausführliche Darstellung verweisen wir auf [TW05] und darin enthaltenen Referenzen. Sei \mathcal{X} ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ und Norm $\| \cdot \|_{\mathcal{X}}$. Weiters sei $\mathfrak{M} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^*$ ein symmetrischer, elliptischer, und stetiger Operator. Dieser definiert daher eine symmetrische und elliptische Bilinearform, und eine äquivalente Norm auf \mathcal{X} mittels

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := \langle \mathfrak{M}u, v \rangle_{\mathcal{X}}, \quad \| \|u\| \|^2 := \langle\langle u, u \rangle\rangle \quad \text{für alle } u, v \in \mathcal{X}.$$

Seien $\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_\ell, \ell = 0, \dots, L$ endlich-dimensionale Unterräume. Es gelte die, nicht notwendigerweise direkte, Zerlegung

$$\mathcal{X}_h = \sum_{\ell=0}^L \mathcal{X}_\ell. \quad (6.1)$$

Für jeden Unterraum \mathcal{X}_ℓ definieren wir den Operator $\mathfrak{P}_\ell : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_\ell$ als Projektion auf den Unterraum \mathcal{X}_ℓ bezüglich $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, d.h.

$$\langle\langle \mathfrak{P}_\ell v, w_\ell \rangle\rangle = \langle\langle v, w_\ell \rangle\rangle \quad \text{für alle } w_\ell \in \mathcal{X}_\ell.$$

Der Additiv-Schwarz Operator $\mathfrak{P}_{AS} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_h$ ist definiert als

$$\mathfrak{P}_{AS} := \sum_{\ell=0}^L \mathfrak{P}_\ell. \quad (6.2)$$

Das folgende Lemma enthält elementare Eigenschaften des Operators \mathfrak{P}_{AS} und findet sich in [GO94, Lemma 2], siehe auch [TW05, Kapitel 2].

Lemma 6.1. *Der Operator \mathfrak{P}_{AS} ist linear, stetig als auch symmetrisch*

$$\langle\langle \mathfrak{P}_{AS}u, v \rangle\rangle = \langle\langle u, \mathfrak{P}_{AS}v \rangle\rangle \quad \text{für alle } u, v \in \mathcal{X},$$

und positiv definit

$$\langle\langle \mathfrak{P}_{AS}u, u \rangle\rangle > 0 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{X}_h \setminus \{0\}$$

bezüglich $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$. □

In unserer Analysis benötigen wir das folgende Resultat. Der erste Teil davon ist auch bekannt als Lemma von LION [Lio88, Wid89, Zha92].

Lemma 6.2. (i) Sei $c > 0$. Angenommen für alle $v \in \sum_{\ell=0}^L \mathcal{X}_\ell$ existiert eine Zerlegung $v = \sum_{\ell=0}^L v_\ell$ mit $v_\ell \in \mathcal{X}_\ell$ für die gilt

$$\sum_{\ell=0}^L \|v_\ell\|^2 \leq c^{-1} \|v\|^2, \quad (6.3)$$

dann folgt $c\|v\|^2 \leq \langle \mathfrak{P}_{\text{AS}} v, v \rangle$ und der kleinste Eigenwert von $\mathfrak{P}_{\text{AS}} : \mathcal{X}_h \rightarrow \mathcal{X}_h$ ist nach unten beschränkt, d.h. $\lambda_{\min}(\mathfrak{P}_{\text{AS}}) \geq c$.

(ii) Sei $C > 0$. Angenommen für alle $v \in \sum_{\ell=0}^L \mathcal{X}_\ell$ und alle Zerlegungen $v = \sum_{\ell=0}^L v_\ell$ mit $v_\ell \in \mathcal{X}_\ell$ gilt

$$\|v\|^2 \leq C \sum_{\ell=0}^L \|v_\ell\|^2, \quad (6.4)$$

dann folgt $\langle \mathfrak{P}_{\text{AS}} v, v \rangle \leq C\|v\|^2$ und der größte Eigenwert von $\mathfrak{P}_{\text{AS}} : \mathcal{X}_h \rightarrow \mathcal{X}_h$ ist nach oben beschränkt, d.h. $\lambda_{\max}(\mathfrak{P}_{\text{AS}}) \leq C$. \square

Um zu zeigen, dass der maximale Eigenwert von \mathfrak{P}_{AS} beschränkt ist, kann auch das nächste Resultat verwendet werden. Es beruht auf einer Variante der *verschärften Cauchy-Schwarz Ungleichung*. Der Beweis folgt im Wesentlichen den Zeilen von [TS96, Lemma 2.8] bzw. den darin angegebenen Referenzen. Da wir eine etwas modifizierte Variante betrachten, geben wir den Beweis der Vollständigkeit halber mit an.

Lemma 6.3. Seien $\hat{\mathcal{X}}_0 \subseteq \dots \subseteq \hat{\mathcal{X}}_M$ geschachtelte und endlich-dimensionale Unterräume von \mathcal{X} . Der Additiv-Schwarz Operator $\mathfrak{P}_{\text{AS}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_h \subseteq \hat{\mathcal{X}}_M$ besitze die Darstellung

$$\mathfrak{P}_{\text{AS}} = \sum_{m=0}^M \mathfrak{Q}_m \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Q}_m : \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}_m \quad \text{und} \quad \langle \mathfrak{Q}_m \hat{v}_M, \hat{w}_M \rangle = \langle \hat{v}_M, \mathfrak{Q}_m \hat{w}_M \rangle$$

für alle $\hat{v}_M, \hat{w}_M \in \hat{\mathcal{X}}_M$. Angenommen es existieren Konstanten $C_{\text{CS}} > 0$ und $0 < \kappa < 1$, so dass für alle $0 \leq m \leq M$ und $k \leq m$ gilt

$$0 \leq \langle \mathfrak{Q}_m \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle \leq C_{\text{CS}} \kappa^{m-k} \|\hat{v}_k\|^2 \quad \text{für alle } \hat{v}_k \in \hat{\mathcal{X}}_k. \quad (6.5)$$

Dann folgt

$$\langle \mathfrak{P}_{\text{AS}} v, v \rangle \leq C C_{\text{CS}} \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}_h.$$

Die Konstante $C > 0$ hängt nur von $0 < \kappa < 1$ ab.

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass $\langle \mathfrak{Q}_m \cdot, \cdot \rangle$ eine positiv semidefinite und symmetrische Bilinearform definiert. Daher gilt auch eine Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Sei $\hat{\mathfrak{G}}_m : \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}_m$ die Galerkin-Projektion bezüglich dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h.

$$\langle \hat{\mathfrak{G}}_m v, \hat{w}_m \rangle = \langle v, \hat{w}_m \rangle \quad \text{für alle } \hat{w}_m \in \hat{\mathcal{X}}_m.$$

Wir setzen $\widehat{\mathfrak{G}}_{-1} := 0$. Für $v \in \mathcal{X}_h \subseteq \widehat{\mathcal{X}}_M$ gilt

$$\widehat{\mathfrak{G}}_m v = \sum_{k=0}^m (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v \quad \text{als auch} \quad \widehat{\mathfrak{G}}_M v = v.$$

Die Symmetrie der Projektion $\widehat{\mathfrak{G}}_m$ zeigt

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{Q}_m v, v \rangle &= \langle \mathfrak{Q}_m v, \widehat{\mathfrak{G}}_m v \rangle = \sum_{k=0}^m \langle \mathfrak{Q}_m v, (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v \rangle \\ &\leq \sum_{k=0}^m \langle \mathfrak{Q}_m v, v \rangle^{1/2} \langle \mathfrak{Q}_m (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v, (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v \rangle^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung für $\langle \mathfrak{Q}_m v, w \rangle$ mit $w = (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v \in \widehat{\mathcal{X}}_k$ benutzt haben. Für das zweite Skalarprodukt verwenden wir die Voraussetzung (6.5) und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{Q}_m (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v, (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v \rangle &\leq C_{\text{CS}} \kappa^{m-k} \|(\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v\|^2 \\ &= C_{\text{CS}} \kappa^{m-k} \langle (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v, v \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Darstellung von \mathfrak{P}_{AS} und der Young'schen Ungleichung bekommen wir

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{P}_{\text{AS}} v, v \rangle &= \sum_{m=0}^M \langle \mathfrak{Q}_m v, v \rangle \\ &\leq \frac{\delta}{2} \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^m \kappa^{(m-k)/2} \langle \mathfrak{Q}_m v, v \rangle + \frac{\delta^{-1}}{2} C_{\text{CS}} \sum_{m=0}^M \sum_{k=0}^m \kappa^{(m-k)/2} \langle (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v, v \rangle \end{aligned}$$

für alle $\delta > 0$. Es gilt $\sum_{k=0}^m \kappa^{(m-k)/2} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^{k/2} =: K < \infty$. Durch Ändern der Summationsreihenfolge in der zweiten Summe schließen wir

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{P}_{\text{AS}} v, v \rangle &\leq K \frac{\delta}{2} \sum_{m=0}^M \langle \mathfrak{Q}_m v, v \rangle + \frac{\delta^{-1}}{2} C_{\text{CS}} \sum_{k=0}^M \sum_{m=k}^M \kappa^{(m-k)/2} \langle (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v, v \rangle \\ &\leq K \frac{\delta}{2} \sum_{m=0}^M \langle \mathfrak{Q}_m v, v \rangle + K \frac{\delta^{-1}}{2} C_{\text{CS}} \sum_{k=0}^M \langle (\widehat{\mathfrak{G}}_k - \widehat{\mathfrak{G}}_{k-1})v, v \rangle \\ &= K \frac{\delta}{2} \langle \mathfrak{P}_{\text{AS}} v, v \rangle + K C_{\text{CS}} \frac{\delta^{-1}}{2} \langle v, v \rangle, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Teleskopreihe und $\widehat{\mathfrak{G}}_M v = v$ folgt. Wählt man $\delta > 0$ hinreichend klein, so kann man durch Subtraktion den ersten Term auf der rechten Seite absorbieren und wir erhalten das gewünschte Resultat. \square

6.2 Hypersingulärer Operator

6.2.1 Modellproblem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet mit polygonalem Rand $\partial\Omega$. Für einfach zusammenhängendes $\emptyset \neq \Gamma \subsetneq \partial\Omega$ und $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ betrachten wir die hypersinguläre Gleichung: Finde $u \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ mit

$$\langle \mathfrak{W}u, v \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma). \quad (6.6)$$

Für $\Gamma = \partial\Omega$ und $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ betrachten wir die Gleichung: Finde $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ mit

$$\langle \mathfrak{W}u, v \rangle_\Gamma + \langle u, 1 \rangle_\Gamma \langle v, 1 \rangle_\Gamma = \langle f, v \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (6.7)$$

Die Bilinearform

$$\langle u, v \rangle_{\mathfrak{W}} := \begin{cases} \langle \mathfrak{W}u, v \rangle_\Gamma & \text{für } \Gamma \subsetneq \partial\Omega, \\ \langle \mathfrak{W}u, v \rangle_\Gamma + \langle u, 1 \rangle_\Gamma \langle v, 1 \rangle_\Gamma & \text{für } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

ist symmetrisch, stetig, und elliptisch. Dies folgt aus den Eigenschaften des hypersingulären Operators, siehe auch Abschnitt 3.2.1 für den Fall $\Gamma = \partial\Omega$ und, z.B., [HW08] für den Fall $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$. Insbesondere sind die Probleme (6.6)–(6.7) nach dem Lemma von Lax-Milgram, siehe Korollar 3.12, eindeutig lösbar. Weiters definiert $\|\cdot\|_{\mathfrak{W}}^2 := \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{W}}$ eine auf $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ äquivalente Norm. Wir bemerken, dass $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma)$ falls $\Gamma = \partial\Omega$.

Es bezeichne mit \mathcal{T}_ℓ mit $M_\ell := \#\mathcal{T}_\ell$ eine reguläre Triangulierung von Γ und $\mathcal{X}_\ell := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ ist ein endlich-dimensionaler Unterraum von $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$. Die Knoten der Triangulierung \mathcal{T}_ℓ , welche nicht auf $\partial\Gamma$ liegen, bezeichnen wir mit \mathcal{N}_ℓ . Als Basis wählen wir die Hut-Funktionen $\{\eta_j\}_{j=1}^{N_\ell}$. Wir definieren die Galerkin-Matrix $\mathbf{W} := \mathbf{W}^\ell$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{W}}$ bezüglich \mathcal{X}_ℓ als

$$\mathbf{W}_{jk} := \langle \eta_k, \eta_j \rangle_{\mathfrak{W}} \quad \text{für alle } j, k = 1, \dots, N_\ell := \#\mathcal{N}_\ell. \quad (6.8)$$

Die diskrete Formulierung

$$\langle u_\ell, v_\ell \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle f, v_\ell \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } v_\ell \in \mathcal{X}_\ell \quad (6.9)$$

von (6.6) bzw. (6.7) ist äquivalent zur Gleichung: Finde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_\ell}$, so dass

$$\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (6.10)$$

mit $\mathbf{f}_j := \langle f, \eta_j \rangle_\Gamma$ für alle $j = 1, \dots, N_\ell$ und $u_\ell = \sum_{j=1}^{N_\ell} \mathbf{x}_j \eta_j$.

Für eine Folge von adaptiv generierten Netzen $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_L$ seien $\mathcal{X}_0 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{X}_L$ die zugehörigen geschachtelten Räume. Wir bezeichnen mit η_ℓ^z die Hutfunktion auf dem ℓ -ten Gitter zum Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell$, d.h. $\eta_\ell^z(z) = 1$ und $\eta_\ell^z(z') = 0$ für $z' \in \mathcal{N}_\ell \setminus \{z\}$. Nach [AMT99, Satz 4.8] und den Eigenschaften von $\|\cdot\|_{\mathfrak{W}}$ folgt

$$\|\eta_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \simeq \|\eta_\ell^z\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 = \|\eta_\ell^z\|_{\tilde{H}^{1/2}(\omega_\ell(z))}^2 \simeq |T|^{(d-2)/(d-1)} \quad (6.11)$$

für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\mathbf{z} \in T$. Die involvierten Konstanten hängen nur von Γ und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab. Hier bezeichnet $\omega_\ell(\mathbf{z})$ den Patch von $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$.

Folgendes Lemma gibt Abschätzungen für den minimalen und maximalen Eigenwert der Matrix $\mathbf{W} = \mathbf{W}^L$ an und liefert somit Abschätzungen für die ℓ^2 -Konditionszahl $\text{cond}_2(\mathbf{W}) = \lambda_{\max}(\mathbf{W})/\lambda_{\min}(\mathbf{W})$. Der darauf folgende Satz liefert eine Abschätzung der Konditionszahl der diagonalvorkonditionierten Matrix. Die Ergebnisse sind in [AMT99] zu finden. Aufgrund von (6.11) sind die Diagonalelemente von \mathbf{W} im Falle $d = 2$ konstant, und somit bringt eine simple Skalierung mit der Diagonale keinen Vorteil. Sei $h_{\min,\ell} := \min_{T \in \mathcal{T}_\ell} \text{diam}(T)$ die minimale und $h_{\max,\ell} := \max_{T \in \mathcal{T}_\ell} \text{diam}(T)$ die maximale Netzweite von \mathcal{T}_ℓ .

Lemma 6.4. *Es bezeichne $\mathbf{W} = \mathbf{W}^L$ die Galerkin-Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{M}}$ bezüglich \mathcal{X}_L . Für den minimalen und maximalen Eigenwert gilt die Abschätzung*

$$\begin{aligned} C_{\min}^{\mathfrak{M}} M_L^{-1} (1 + |\log(M_L h_{\min,L})|)^{-1} &\leq \lambda_{\min}(\mathbf{W}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{W}) \leq C_{\max}^{\mathfrak{M}} && \text{falls } d = 2, \\ C_{\min}^{\mathfrak{M}} M_L^{-1/2} h_{\min,L} &\leq \lambda_{\min}(\mathbf{W}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{W}) \leq C_{\max}^{\mathfrak{M}} h_{\max,L} && \text{falls } d = 3, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten $C_{\min}^{\mathfrak{M}}, C_{\max}^{\mathfrak{M}} > 0$ nur von Γ und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_L abhängen. \square

Satz 6.5. *Sei $d = 3$. Es bezeichne $\mathbf{W} = \mathbf{W}^L$ die Galerkin-Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{M}}$ bezüglich \mathcal{X}_L , und sei \mathbf{D} die Diagonalmatrix von \mathbf{W} , dann gilt*

$$\text{cond}_{\mathbf{W}}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W}) \leq C_{\text{diag}}^{\mathfrak{M}} M_L^{1/2},$$

wobei die Konstante $C_{\text{diag}}^{\mathfrak{M}} > 0$ nur von Γ und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_L abhängt. \square

6.2.2 Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierer

Lokaler Multilevel Diagonalvorkonditionierer

Um einen optimalen Vorkonditionierer zu konstruieren, muss auf die (lokalen) Bereiche, wo verfeinert worden ist, Rücksicht genommen werden. Dazu definieren wir die Mengen

$$\tilde{\mathcal{N}}_0 := \mathcal{N}_0 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{N}}_\ell := \mathcal{N}_\ell \setminus \mathcal{N}_{\ell-1} \cup \{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_{\ell-1} : \eta_\ell^{\mathbf{z}} \neq \eta_{\ell-1}^{\mathbf{z}}\} \quad \text{für } \ell \geq 1, \quad (6.12)$$

d.h. $\tilde{\mathcal{N}}_\ell$ besteht aus allen neu erzeugten Knoten plus benachbarte Knoten, siehe Abbildung 6.1 für eine Illustration. Darüber hinaus definieren wir für $\ell \geq 0$ und $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ die Unterräume

$$\tilde{\mathcal{X}}_\ell := \text{span}\{\eta_\ell^{\mathbf{z}} : \mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell\} \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_\ell^{\mathbf{z}} := \text{span}\{\eta_\ell^{\mathbf{z}}\}. \quad (6.13)$$

Für die Folge $\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_L$ betrachten wir die Unterraumzerlegung

$$\mathcal{X}_L = \sum_{\ell=0}^L \tilde{\mathcal{X}}_\ell = \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \mathcal{X}_\ell^{\mathbf{z}}. \quad (6.14)$$

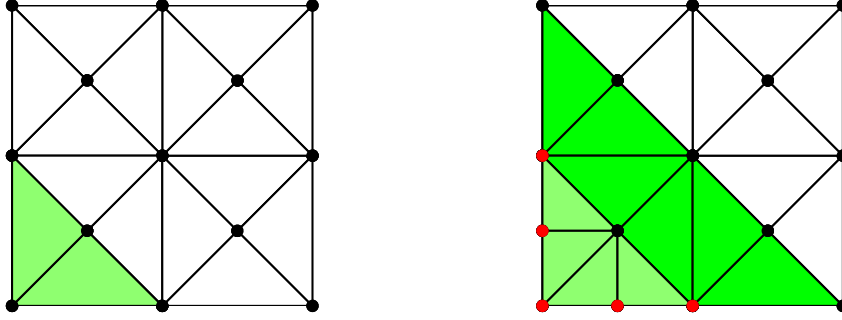


Abbildung 6.1: Das linke Bild zeigt einen Ausschnitt eines Netzes $\mathcal{T}_{\ell-1}$, wo zwei Elemente (grün) verfeinert werden. Bisektion dieser zwei Elemente liefert das Netz \mathcal{T}_ℓ (rechts), wobei zwei *neue* Knoten erzeugt werden. Die Menge $\tilde{\mathcal{N}}_\ell$ (rot) enthält nun diese neuen Knoten plus benachbarte Knoten, wo sich die zugehörigen Basisfunktionen geändert haben. Der Träger aller Basisfunktionen, welche zu den Knoten in $\tilde{\mathcal{N}}_\ell$ gehören, sind durch die grünen Bereiche im rechten Bild gegeben.

Für $\ell \geq 0$ und $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ definieren wir den Projektionsoperator $\mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} : \mathcal{X} := \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{X}_\ell^{\mathbf{z}}$ über

$$\langle \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} v, w_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle v, w_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\mathfrak{W}} \quad \text{für alle } w_\ell^{\mathbf{z}} \in \mathcal{N}_\ell.$$

Zur Zerlegung (6.14) ist der Additiv-Schwarz Operator gegeben als

$$\mathfrak{P}_{\text{LD}} := \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}}. \quad (6.15)$$

Folgende Proposition zeigt, dass die Eigenwerte des Operators $\mathfrak{P}_{\text{LD}}|_{\mathcal{X}_L}$ unabhängig von der Netzweite und der Anzahl der Level L beschränkt ist.

Proposition 6.6. *Der Operator \mathfrak{P}_{LD} erfüllt*

$$c_{\text{LD}} \|v\|_{\mathfrak{W}}^2 \leq \langle \mathfrak{P}_{\text{LD}} v, v \rangle_{\mathfrak{W}} \leq C_{\text{LD}} \|v\|_{\mathfrak{W}}^2 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}_L. \quad (6.16)$$

Die Konstanten $c_{\text{LD}} > 0, C_{\text{LD}} > 0$ hängen nur von Γ und \mathcal{T}_0 ab.

Bevor wir einen Beweis angeben und das Hauptresultat postulieren, definieren wir noch die Matrixform des Operators \mathfrak{P}_{LD} . Da die Unterräume ein-dimensional sind, können wir die explizite Darstellung von $\mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}}$ direkt angeben:

$$\mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} v = \frac{\langle v, \eta_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\mathfrak{W}}}{\|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\mathfrak{W}}^2} \eta_\ell^{\mathbf{z}}. \quad (6.17)$$

Bezeichne mit $\tilde{\mathbf{W}}^\ell$ die Galerkin-Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{W}}$ bezüglich der Basis von $\tilde{\mathcal{X}}_\ell$. Die Diagonalmatrix von $\tilde{\mathbf{W}}^\ell$ bezeichnen wir mit $\tilde{\mathbf{D}}^\ell$, d.h. $(\tilde{\mathbf{D}}^\ell)_{jk} := \delta_{jk} (\tilde{\mathbf{W}}^\ell)_{jj}$. Sei $\tilde{\text{Id}}^\ell : \tilde{\mathcal{X}}_\ell \rightarrow \mathcal{X}_L$ die

kanonische Einbettung, d.h. die formale Identität, und bezeichne mit $\tilde{\mathbf{I}}^\ell$ die zugehörige Matrixdarstellung bezüglich den Basen von $\tilde{\mathcal{X}}_\ell$ und \mathcal{X}_L . Wir definieren den *lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer* \mathbf{P}_{LD} als

$$\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} := \sum_{\ell=0}^L \tilde{\mathbf{I}}^\ell (\tilde{\mathbf{D}}^\ell)^{-1} (\tilde{\mathbf{I}}^\ell)^T. \quad (6.18)$$

Anstelle von (6.10) betrachten wir das vorkonditionierte Gleichungssystem

$$\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{x} = \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{f}, \quad (6.19)$$

wobei $\mathbf{W} = \mathbf{W}^L$. Aus der Standardtheorie zu Additiv-Schwarz Vorkonditionierern, siehe z.B. [TW05, Kapitel 2], folgt, dass $\mathbf{S}_{\text{LD}} := \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{W}$ die Matrixdarstellung von \mathfrak{P}_{LD} ist, d.h.

$$\langle \mathfrak{P}_{\text{LD}} u, v \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle \mathbf{S}_{\text{LD}} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{W}} \quad (6.20)$$

gilt für alle $u, v \in \mathcal{X}_L$ mit $u = \sum_{j=1}^{N_L} \mathbf{x}_j \eta_L^j$ und $v = \sum_{j=1}^{N_L} \mathbf{y}_j \eta_L^j$.

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Abschnitts und zeigt Optimalität des Vorkonditionierers \mathbf{P}_{LD} .

Satz 6.7. *Die Matrix $\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Die Matrix $\mathbf{S}_{\text{LD}} := \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{W}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}_{\text{LD}}}$ und bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}}$. Des weiteren erfüllen der minimale und maximale Eigenwert der Matrix \mathbf{S}_{LD}*

$$c \leq \lambda_{\min}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq C, \quad (6.21)$$

wobei die Konstanten $c, C > 0$ nur von Γ und der Starttriangulierung \mathcal{T}_0 abhängen. Insbesondere ist die Konditionszahl der Matrix \mathbf{S}_{LD} unabhängig von L beschränkt durch

$$\text{cond}_{\mathbf{W}}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) = \text{cond}_{\mathbf{P}_{\text{LD}}}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq C/c. \quad (6.22)$$

Globaler Multilevel Diagonalvorkonditionierer

Anstatt der Zerlegung (6.14) betrachten wir nun die Unterraumzerlegung

$$\mathcal{X}_L = \sum_{\ell=0}^L \mathcal{X}_\ell = \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell} \mathcal{X}_\ell^{\mathbf{z}}, \quad (6.23)$$

und den dazugehörigen Additiv-Schwarz Operator

$$\mathfrak{P}_{\text{GD}} = \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell} \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}}. \quad (6.24)$$

Im Gegensatz zum Operator \mathfrak{P}_{LD} hängt die obere Abschätzung des maximalen Eigenwertes von \mathfrak{P}_{GD} von der Anzahl der Level L ab. Numerische Experimente aus Abschnitt 6.4 belegen, dass diese Schranke auch scharf ist.

Proposition 6.8. *Der Operator \mathfrak{P}_{GD} erfüllt*

$$c_{\text{GD}}\|v\|_{\mathfrak{W}}^2 \leq \langle \mathfrak{P}_{\text{GD}}v, v \rangle_{\mathfrak{W}} \leq C_{\text{GD}}(L+1)\|v\|_{\mathfrak{W}}^2 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}_L. \quad (6.25)$$

Die Konstanten $c_{\text{GD}} > 0, C_{\text{GD}} > 0$ hängen nur von Γ und \mathcal{T}_0 ab.

Wir geben noch die Matrixform von \mathfrak{P}_{GD} an. Sei \mathbf{D}^ℓ die Diagonalmatrix von \mathbf{W}^ℓ , d.h. $(\mathbf{D}^\ell)_{jk} = \delta_{jk}\mathbf{W}_{jj}$. Mit $\text{Id}^\ell : \mathcal{X}_\ell \rightarrow \mathcal{X}_L$ bezeichnen wir die Einbettung mit zugehöriger Matrixdarstellung \mathbf{I}^ℓ bezüglich den Basen von \mathcal{X}_ℓ und \mathcal{X}_L . Wir definieren den *globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer* \mathbf{P}_{GD} als

$$\mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} := \sum_{\ell=0}^L \mathbf{I}^\ell (\mathbf{D}^\ell)^{-1} (\mathbf{I}^\ell)^T. \quad (6.26)$$

Anstelle von (6.10) betrachten wir das vorkonditionierte Gleichungssystem

$$\mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{x} = \mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} \mathbf{f}, \quad (6.27)$$

wobei $\mathbf{W} = \mathbf{W}^L$. Wir bemerken, dass $\mathbf{S}_{\text{GD}} := \mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} \mathbf{W}$ die Matrixdarstellung von \mathfrak{P}_{GD} ist, d.h. es gilt

$$\langle \mathfrak{P}_{\text{GD}}u, v \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle \mathbf{S}_{\text{GD}}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{W}} \quad (6.28)$$

für alle $u, v \in \mathcal{X}_L$ mit $u = \sum_{j=1}^{N_L} \mathbf{x}_j \eta_L^j$ und $v = \sum_{j=1}^{N_L} \mathbf{y}_j \eta_L^j$.

Satz 6.9. *Die Matrix $\mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Die Matrix $\mathbf{S}_{\text{GD}} := \mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} \mathbf{W}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}_{\text{GD}}}$ und bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}}$. Des weiteren erfüllen der minimale und maximale Eigenwert der Matrix \mathbf{S}_{GD}*

$$c \leq \lambda_{\min}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq C(L+1), \quad (6.29)$$

wobei die Konstanten $c, C > 0$ nur von Γ und der Starttriangulierung \mathcal{T}_0 abhängen. Insbesondere ist die Konditionszahl der Matrix \mathbf{S}_{GD} beschränkt durch

$$\text{cond}_{\mathbf{W}}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) = \text{cond}_{\mathbf{P}_{\text{GD}}}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq (L+1)C/c. \quad (6.30)$$

Bemerkung 6.10. *Nach der Theorie von [Osw99] implizieren Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierer im Gebiet Ω entsprechende Vorkonditionierer auf dessen Rand $\Gamma = \partial\Omega$, falls man stetige Erweiterungen von \mathcal{X}_ℓ auf den entsprechenden diskreten Teilraum von $H^1(\Omega)$ konstruieren kann. Für das hier vorliegende Setting ist das, z.B., mit Hilfe des Scott-Zhang Operators möglich, siehe [HM12]. Die Ergebnisse hängen dann klarerweise von der Triangulierung von Ω ab.*

Man beachte, dass die hier vorgestellte Analysis nur von Γ und den darauf definierten Triangulierungen abhängt. \square

6.2.3 Hilfsresultate

In diesem Abschnitt fassen wir wichtige Resultate, die wir im Beweis von Proposition 6.6 bzw. Proposition 6.8 benötigen, zusammen.

Level-Funktion und uniforme Verfeinerung

Für ein Element $T \in \mathcal{T}_\ell$ bezeichne $T_0 \in \mathcal{T}_0$ das eindeutige Element mit $T \subseteq T_0$. Definiere die Generation des Elements als

$$\text{gen}(T) := \frac{\log(|T|/|T_0|)}{\log(1/2)} \in \mathbb{N}_0.$$

Diese Zahl gibt also an, wie oft das Element T_0 geteilt wurde, um T zu erhalten. Zusätzlich ordnen wir mittels

$$\text{level}_\ell(\mathbf{z}) := \lceil \max \{ \text{gen}(T)/(d-1) : T \in \mathcal{T}_\ell \text{ mit } T \subseteq \omega_\ell(\mathbf{z}) \} \rceil$$

jedem Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ einen Level zu. Für $x \geq 0$ bezeichnet $\lceil x \rceil = \min \{ n \in \mathbb{N}_0 : x \leq n \}$ die Gauss'sche Aufrundungsfunktion. Eine alternative Definition der Level-Funktion $\text{level}_\ell(\mathbf{z})$ findet sich in [WC06].

Neben der Folge $\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_L$ von lokal verfeinerten Triangulierungen, betrachten wir eine zweite, dazu unabhängige Folge $\widehat{\mathcal{T}}_\ell$ von uniformen Verfeinerungen. Sei $\widehat{\mathcal{T}}_0 := \mathcal{T}_0$ und bezeichne $\widehat{\mathcal{T}}_{m+1}$ das aus $\widehat{\mathcal{T}}_m$ durch uniforme Verfeinerung entstandene Netz. Für $d = 2$ wird jedes Element einmal bisektiert, während drei Bisektionen im Fall $d = 3$ auftreten, vgl. Abschnitt 2.5. Wir bemerken noch, dass für $d = 3$ jedes Element $\widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_m$ in vier Söhne \widehat{T}_j , $j = 1, \dots, 4$ mit $|\widehat{T}_j| = |\widehat{T}|/4$ zerlegt wird. Definiere die Konstanten $\widehat{h}_0 := \max_{T \in \mathcal{T}_0} \text{diam}(T)$ und

$$\widehat{h}_m := \widehat{h}_0 2^{-m}.$$

Die Konstante \widehat{h}_m ist äquivalent zur Netzweitenfunktion, d.h. $\widehat{h}_m \simeq \text{diam}(T)$ für alle $T \in \widehat{\mathcal{T}}_m$. Mit $\widehat{\mathcal{N}}_m$ werden im Folgenden die Knoten der Triangulierung $\widehat{\mathcal{T}}_m$ bezeichnet und $\widehat{\mathcal{X}}_m := \mathcal{S}^1(\widehat{\mathcal{T}}_m) \cap \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ ist der zugehörige diskrete Raum. Das nächste Resultat findet sich im Wesentlichen in [WC06, Beweis von Lemma 3.3]. Wir geben den Beweis mit an, da die hier verwendete Level-Funktion im Gegensatz zu [WC06] über die Generation $\text{gen}(T)$ der Elemente im Patch $\omega_\ell(\mathbf{z})$ definiert wurde.

Lemma 6.11. *Für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ gilt $\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})}$ und $\eta_\ell^{\mathbf{z}} \in \widehat{\mathcal{X}}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})}$. Des weiteren ist*

$$C_{\text{equiv}}^{-1} \widehat{h}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})} \leq \text{diam}(T) \leq C_{\text{equiv}} \widehat{h}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})} \quad (6.31)$$

für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\mathbf{z} \in T$. Die Konstante $C_{\text{equiv}} > 0$ hängt nur von der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ und von \mathcal{T}_0 ab.

Beweis. Sei $m := \text{level}_\ell(\mathbf{z})$. Nach Definition von $\text{level}_\ell(\mathbf{z})$ folgt

$$m(d-1) \geq \text{gen}(T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_\ell \text{ mit } \mathbf{z} \in T,$$

und nach Definition von $\text{gen}(\cdot)$ folgt

$$\text{gen}(\widehat{T}) = m(d-1) \quad \text{für alle } \widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_m.$$

Für jedes $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\mathbf{z} \in T$ sei $T_0 \in \mathcal{T}_0 = \widehat{\mathcal{T}}_0$ das eindeutige Element mit $T \subseteq T_0$. Weiters sei $\widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_m$ ein beliebiges Element mit $\widehat{T} \subseteq T_0$. Da $\text{gen}(\widehat{T}) \geq \text{gen}(T)$ folgt $\mathbf{z}' \in \widehat{\mathcal{N}}_m$ für alle

Knoten z' des Elements T . Insgesamt können wir schließen, dass alle Knoten des Patches $\omega_\ell(\mathbf{z})$ in $\widehat{\mathcal{N}}_m$ liegen und $\eta_\ell^z \in \widehat{\mathcal{X}}_m$ gilt.

Für den letzten Teil bemerken wir, dass ein Element $T' \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\text{gen}(T') + 1 > m(d-1) \geq \text{gen}(T')$ und $\mathbf{z} \in T'$ existiert. Daraus folgt $\text{diam}(\widehat{T}) \simeq \text{diam}(T') \simeq \text{diam}(T)$ für alle $\widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_m$ und $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\mathbf{z} \in T$. \square

Zur Erinnerung sei angemerkt, dass wir mit $\omega_\ell^k(\mathbf{z}) = \omega_\ell(\omega_\ell^{k-1}(\mathbf{z}))$ den k -ten Patch von $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ bezeichnen. Analog dazu, sei $\widehat{\omega}_m^k(\mathbf{z})$ der k -te Patch von \mathbf{z} bezüglich der uniformen Verfeinerung $\widehat{\mathcal{T}}_m$. Für jeden Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ definieren wir

$$r_\ell(\mathbf{z}) := \min \{ \text{gen}(T) : T \in \mathcal{T}_{\ell-1} \text{ mit } T \subseteq \omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z}) \},$$

als auch

$$R_\ell(\mathbf{z}) := \lfloor r_\ell(\mathbf{z}) / (d-1) \rfloor,$$

wobei $\lfloor x \rfloor := \max \{ n \in \mathbb{N}_0 : n \leq x \}$ die Gauss'sche Abrundungsfunktion ist.

Der Beweis der Punkte (i)–(ii) des folgenden Lemmas findet sich auch in [WC06, Beweis von Lemma 3.3] mit der dort definierten Level-Funktion.

Lemma 6.12. (i) Für alle Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ gilt $\text{level}_\ell(\mathbf{z}) \leq R_\ell(\mathbf{z}) + C_R$ und die Konstante $C_R \in \mathbb{N}$ hängt nur von der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab.

(ii) Für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ und alle $T \in \mathcal{T}_{\ell-1}$ mit $T \subseteq \omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z})$ existiert ein Element $\widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_{R_\ell(\mathbf{z})}$ mit $T \subseteq \widehat{T}$.

(iii) Es existiert $n \in \mathbb{N}_0$, welches nur von \mathcal{T}_0 abhängt, so dass $\omega_\ell(\mathbf{z}) \subseteq \omega_{\ell-1}(\mathbf{z}) \subseteq \widehat{\omega}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})}^n(\mathbf{z})$ für alle Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ gilt.

Beweis. Schritt 1. Für beliebiges $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ sei $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\mathbf{z} \in T$ und sei $T' \in \mathcal{T}_{\ell-1}$ das Vaterelement von T . Wir bemerken, dass $|\text{gen}(T) - \text{gen}(T')| \leq 2$. Darüber hinaus existiert eine Konstante $k \in \mathbb{N}$ mit $|\text{gen}(T') - \text{gen}(T'')| \leq k$ für alle $T'' \in \mathcal{T}_{\ell-1}$ mit $T'' \subseteq \omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z})$, d.h. die Differenz zwischen den Generationen zweier Elemente eines Patches ist uniform beschränkt. Insgesamt schließen wir daher

$$\text{gen}(T) \leq r_\ell(\mathbf{z}) + k'$$

mit $k' \in \mathbb{N}$ unabhängig von \mathbf{z} und ℓ . Die Definition von $\text{level}_\ell(\mathbf{z})$ und $R_\ell(\mathbf{z})$ liefert (i).

Schritt 2. Sei $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ und $T \in \mathcal{T}_{\ell-1}$ mit $T \subseteq \omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z})$. Dann gilt

$$\text{gen}(T) \geq r_\ell(\mathbf{z}) \geq (d-1)R_\ell(\mathbf{z}) = \text{gen}(\widehat{T})$$

für alle $\widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_{R_\ell(\mathbf{z})}$. Daraus folgt (ii).

Schritt 3. Nach Definition der Patches gilt $\omega_\ell(\mathbf{z}) \subseteq \omega_{\ell-1}(\mathbf{z}) \subseteq \omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z})$. Wir brauchen also nur mehr die Inklusion $\omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z}) \subseteq \widehat{\omega}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})}^n(\mathbf{z})$ zu zeigen: Punkt (ii) besagt, dass für $T \in \mathcal{T}_{\ell-1}$, $T \subseteq \omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z})$ ein Element $\widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_{R_\ell(\mathbf{z})}$ existiert mit $T \subseteq \widehat{T} \subseteq \omega_{R_\ell(\mathbf{z})}^2(\mathbf{z})$. Jedes Element $\widehat{T} \in \widehat{\mathcal{T}}_{R_\ell(\mathbf{z})}$ mit $\widehat{T} \subseteq \omega_{R_\ell(\mathbf{z})}^2(\mathbf{z})$ wird in $2(d-1)C_R$ Elemente $\widehat{T}'_j \in \widehat{\mathcal{T}}_{R_\ell(\mathbf{z})+C_R}$ bisektiert, so dass

$$\widehat{T} = \bigcup_{j=1}^{2(d-1)C_R} \widehat{T}'_j$$

gilt. Insbesondere, existiert eine Konstante $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 4(d-1)C_R$ und $\widehat{T} \subseteq \widehat{\omega}_{R_\ell(\mathbf{z})+C_R}^n(\mathbf{z})$. Nach Punkt (i) gilt $\text{level}_\ell(\mathbf{z}) \leq R_\ell(\mathbf{z}) + C_R$. Aus der Definition der Patches schließen wir daher $\widehat{\omega}_{R_\ell(\mathbf{z})+C_R}^n(\mathbf{z}) \subseteq \widehat{\omega}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})}^n(\mathbf{z})$. \square

Für gegebenen Knoten $\mathbf{z} \in \widetilde{\mathcal{N}}_\ell$ kann der Fall auftreten, dass $\mathbf{z} \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\ell+m}$ mit $\text{level}_\ell(\mathbf{z}) = \text{level}_{\ell+m}(\mathbf{z})$. Im Folgenden zählen wir wie oft ein Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_L$ mit dem gleichen Level $k \in \mathbb{N}_0$ in den Mengen $\widetilde{\mathcal{N}}_\ell$ vorkommt. Dazu definieren wir die Menge

$$\widetilde{\mathcal{K}}_k(\mathbf{z}) := \{\ell \in \{0, \dots, L\} : \mathbf{z} \in \widetilde{\mathcal{N}}_\ell \text{ und } \text{level}_\ell(\mathbf{z}) = k\}. \quad (6.32)$$

Des weiteren definieren wir

$$\mathcal{K}_k(\mathbf{z}) := \{\ell \in \{0, \dots, L\} : \mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell \text{ und } \text{level}_\ell(\mathbf{z}) = k\}. \quad (6.33)$$

Eine wichtige Erkenntnis aus [WC06, Lemma 3.1] und ein wichtiger Baustein im Beweis von Proposition 6.6 ist, dass die Kardinalität der Mengen $\widetilde{\mathcal{K}}_k(\mathbf{z})$ uniform beschränkt ist.

Lemma 6.13. *Für alle $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_L$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt*

(i) $\#\mathcal{K}_k(\mathbf{z}) \leq L + 1$, und

(ii) $\#\widetilde{\mathcal{K}}_k(\mathbf{z}) \leq C_{\text{node}}$.

Die Konstante $C_{\text{node}} > 0$ hängt nur von \mathcal{T}_0 ab, ist aber unabhängig von L, k , und \mathbf{z} .

Beweis. Die Aussage (i) folgt direkt aus der Definition von $\mathcal{K}_k(\mathbf{z})$.

Sei $\mathbf{z} \in \widetilde{\mathcal{N}}_\ell$ und $\mathbf{z} \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\ell+m}$ mit $m > 0$ und $\text{level}_\ell(\mathbf{z}) = \text{level}_{\ell+m}(\mathbf{z})$. Damit $\mathbf{z} \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\ell+m}$ mit $m > 0$ gilt, muss mindestens ein Element aus $\omega_\ell(\mathbf{z})$ verfeinert worden sein. Da sich die Generation bei jeder Verfeinerung erhöht und da die Anzahl der Elemente in einem Patch nur von der γ -Formregularität von \mathcal{T}_0 abhängt, schließen wir, dass die Anzahl der Indizes m mit $\mathbf{z} \in \widetilde{\mathcal{N}}_{\ell+m}$ und $\text{level}_{\ell+m}(\mathbf{z}) = \text{level}_\ell(\mathbf{z})$ durch eine Konstante beschränkt ist, die nur von der γ -Formregularität von \mathcal{T}_0 abhängt. \square

Lemma 6.14. *Sei $\widehat{\Pi}_m : L^2(\Gamma) \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_m$ die L^2 -Orthogonalprojektion. Für alle $v \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ gilt*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_m v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C_{\text{norm}} \|v\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2. \quad (6.34)$$

Die Konstante $C_{\text{norm}} > 0$ hängt nur von Γ und \mathcal{T}_0 ab.

Beweis. Wir bemerken, dass $\widehat{\mathcal{X}}_k \subseteq \widehat{\mathcal{X}}_{k+1}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v - \widehat{\Pi}_k v\|_{L^2(\Gamma)} = 0$ für alle $v \in L^2(\Gamma)$ gilt. Daraus folgt

$$\|v - \widehat{\Pi}_m v\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{k=m+1}^{\infty} \|(\widehat{\Pi}_k - \widehat{\Pi}_{k-1})v\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (6.35)$$

Einsetzen von (6.35) in die linke Seite von (6.34) und Vertauschen der Summationsreihenfolge liefert

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_m v\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{h}_m^{-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \|(\widehat{\Pi}_k - \widehat{\Pi}_{k-1})v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{k-1} \widehat{h}_m^{-1} \right) \|(\widehat{\Pi}_k - \widehat{\Pi}_{k-1})v\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Mit der Definition von \widehat{h}_m und der geometrischen Reihe folgern wir weiters

$$\sum_{m=0}^{k-1} \widehat{h}_m^{-1} = \widehat{h}_0^{-1} \sum_{m=0}^{k-1} 2^m < \widehat{h}_0^{-1} 2^k = \widehat{h}_k^{-1}. \quad (6.37)$$

[AM03, Theorem 5] besagt, dass für $s \in [0, 1]$ und $v \in \widetilde{H}^s(\Gamma)$

$$\|v\|_{\widetilde{H}^s(\Gamma)}^2 \simeq \|\widehat{\Pi}_0 v\|_{\widetilde{H}^s(\Gamma)}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{h}_k^{-2s} \|(\widehat{\Pi}_k - \widehat{\Pi}_{k-1})v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (6.38)$$

gilt. Die involvierten Konstanten in (6.38) hängen nur von Γ , \mathcal{T}_0 und s ab. Mit den Abschätzungen (6.36)–(6.37) und der Normäquivalenz (6.38) mit $s = 1/2$ schließen wir die Abschätzung (6.34). \square

Scott-Zhang Operator

Wir benötigen eine spezielle Variante des Scott-Zhang Operators [SZ90]. Zu jedem Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell$ wähle ein Element $T_\ell^z \in \mathcal{T}_\ell$ mit $z \in T_\ell^z$. Sei ψ_ℓ^z die L^2 -duale Basisfunktion mit

$$\int_{T_\ell^z} \psi_\ell^z(x) \eta_\ell^{z'}(x) d\Gamma_x = \delta_{zz'} \quad \text{für alle } z' \in \mathcal{N}_\ell.$$

Der Scott-Zhang Operator $\mathfrak{J}_\ell : L^2(\Gamma) \rightarrow \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell)$ ist dann definiert als

$$\mathfrak{J}_\ell v := \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \eta_\ell^z \int_{T_\ell^z} \psi_\ell^z(x) v(x) d\Gamma_x \quad \text{für alle } v \in L^2(\Gamma),$$

siehe auch Abschnitt 2.6. Falls v linear auf dem Element T_ℓ^z ist, dann gilt

$$\mathfrak{J}_\ell v(z) = v(z).$$

Man beachte, dass die Wahl von T_ℓ^z beliebig ist. Für $z \in \mathcal{N}_\ell \setminus \widetilde{\mathcal{N}}_\ell$ fordern wir aber, dass $T_{\ell-1}^z = T_\ell^z \in \mathcal{T}_\ell \cap \mathcal{T}_{\ell-1}$ gilt. Für Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell \setminus \widetilde{\mathcal{N}}_\ell$ gilt $\eta_\ell^z = \eta_{\ell-1}^z$ und wegen $T_\ell^z = T_{\ell-1}^z$ folgt $\psi_\ell^z = \psi_{\ell-1}^z$. Dies liefert die folgende wichtige Eigenschaft, die es uns erlaubt eine stabile Unterraumzerlegung zu konstruieren:

$$(\mathfrak{J}_\ell - \mathfrak{J}_{\ell-1})v(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in \mathcal{N}_\ell \setminus \widetilde{\mathcal{N}}_\ell. \quad (6.39)$$

Insbesondere gilt also

$$(\mathfrak{J}_\ell - \mathfrak{J}_{\ell-1})v \in \text{span} \{ \eta_\ell^z : z \in \widetilde{\mathcal{N}}_\ell \} = \widetilde{\mathcal{X}}_\ell. \quad (6.40)$$

Lemma 6.15. *Sei $v \in L^2(\Gamma)$ und $z \in \widetilde{\mathcal{N}}_\ell$. Für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $z \in T$ gilt*

$$|(\mathfrak{J}_\ell - \mathfrak{J}_{\ell-1})v(z)| \leq C_{\text{SZ}} |T|^{-1/2} \|v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(z))}. \quad (6.41)$$

Die Konstante $C_{\text{SZ}} > 0$ hängt nur von der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ ab.

Beweis. Nach [SZ90, Lemma 3.1] gilt $\|\psi_\ell^z\|_{L^\infty(T_\ell^z)} \lesssim |T_\ell^z|^{-1}$. Für einen beliebigen Knoten $z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell$ erfüllt $T_\ell^z \subseteq \omega_\ell(z) \subseteq \omega_{\ell-1}^2(z)$ und daher

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}_\ell v(z)| &\leq \int_{T_\ell^z} |\psi_\ell^z(x)v(x)| d\Gamma_x \leq \|\psi_\ell^z\|_{L^\infty(T_\ell^z)} |T_\ell^z|^{1/2} \|v\|_{L^2(T_\ell^z)} \\ &\lesssim |T_\ell^z|^{-1/2} \|v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(z))} \lesssim |T|^{-1/2} \|v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(z))} \end{aligned} \quad (6.42)$$

mit $T \subseteq \omega_\ell(z)$. Falls $z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell \setminus \mathcal{N}_{\ell-1}$, dann existieren zwei Knoten $z^1, z^2 \in \mathcal{N}_{\ell-1}$ mit

$$\mathfrak{J}_{\ell-1} v(z) = \eta_{\ell-1}^{z^1} \int_{T_{\ell-1}^{z^1}} \psi_{\ell-1}^{z^1}(x)v(x) d\Gamma_x + \eta_{\ell-1}^{z^2} \int_{T_{\ell-1}^{z^2}} \psi_{\ell-1}^{z^2}(x)v(x) d\Gamma_x.$$

Falls $z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell \cap \mathcal{N}_{\ell-1}$, so ist obige Gleichung mit $z^1 = z$ und $\eta_{\ell-1}^{z^2} = 0$ zu verstehen. In beiden Fällen gilt $|T_{\ell-1}^{z^i}| \simeq |T|$ für $T \subseteq \omega_\ell(z)$ als auch $T_{\ell-1}^{z^i} \subseteq \omega_{\ell-1}(z^i) \subseteq \omega_{\ell-1}^2(z)$. Analog zu (6.42) ergibt sich

$$|\mathfrak{J}_{\ell-1} v(z)| \lesssim |T_{\ell-1}^{z^1}|^{-1/2} \|v\|_{L^2(T_{\ell-1}^{z^1})} + |T_{\ell-1}^{z^2}|^{-1/2} \|v\|_{L^2(T_{\ell-1}^{z^2})} \lesssim |T|^{-1/2} \|v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(z))}. \quad (6.43)$$

Kombination der Dreiecksungleichung $|(\mathfrak{J}_\ell - \mathfrak{J}_{\ell-1})v(z)| \leq |\mathfrak{J}_\ell v(z)| + |\mathfrak{J}_{\ell-1} v(z)|$ mit (6.42)–(6.43) liefert (6.41). \square

6.2.4 Beweis der Hauptresultate

Beweis von Proposition 6.6

Beweis von Proposition 6.6, untere Schranke. Wir benutzen Lemma 6.2 und müssen daher für jedes $v \in \mathcal{X}_L$ eine geeignete Zerlegung in den Unterräumen \mathcal{X}_ℓ^z finden. Setze $\mathfrak{J}_{-1} := 0$. Aus den Eigenschaften des Scott-Zhang Operators folgt

$$\tilde{v}_\ell := (\mathfrak{J}_\ell - \mathfrak{J}_{\ell-1})v \in \tilde{\mathcal{X}}_\ell \quad \text{für alle } 0 \leq \ell \leq L.$$

Mit der Projektionseigenschaft von \mathfrak{J}_L und der Teleskopreihe, gilt die Zerlegung

$$v = \mathfrak{J}_L v = \sum_{\ell=0}^L \tilde{v}_\ell.$$

Wir zerlegen v weiter in

$$v = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \tilde{v}_\ell(z) \eta_\ell^z =: \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} v_\ell^z \quad \text{mit } v_\ell^z \in \mathcal{X}_\ell^z. \quad (6.44)$$

Äquivalenz (6.11) liefert

$$\|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \simeq \|v_\ell^z\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \simeq |T|^{(d-2)/(d-1)} |(\mathfrak{J}_\ell - \mathfrak{J}_{\ell-1})v(z)|^2 \quad (6.45)$$

für alle $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\mathbf{z} \in T$. Wir setzen $\widehat{\Pi}_m := \widehat{\Pi}_0$ für $m < 0$. Lemma 6.12 zeigt, dass $\widehat{\Pi}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})-C_R} v \in \widehat{\mathcal{X}}_{R_\ell(\mathbf{z})}$ und dass $(\widehat{\Pi}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})-C_R} v)|_T$ linear für alle $T \in \mathcal{T}_{\ell-1}$ mit $T \subseteq \omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z})$ ist. Der Scott-Zhang Operator erhält Linearität auf allen Elementen $T \in \mathcal{T}_{\ell-1}$ bzw. $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\mathbf{z} \in T \subseteq \omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z})$. Zusammen mit Lemma 6.15 liefert dies

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{J}_\ell - \mathfrak{J}_{\ell-1})v(\mathbf{z})|^2 &= |(\mathfrak{J}_\ell - \mathfrak{J}_{\ell-1})(v - \widehat{\Pi}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})-C_R})(\mathbf{z})|^2 \\ &\lesssim |T|^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})-C_R} v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z}))}^2 \quad \text{für } T \in \mathcal{T}_\ell \text{ mit } T \subseteq \omega_\ell(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Mit den letzten zwei Ungleichungen und der Äquivalenz aus Lemma 6.11 kommen wir auf

$$\|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim |T|^{-1/(d-1)} \|v - \widehat{\Pi}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})-C_R} v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z}))}^2 \simeq \widehat{h}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})}^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})-C_R} v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z}))}^2.$$

Summation über alle Level $0 \leq \ell \leq L$ und Knoten $\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell$ liefert

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell} \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 &\lesssim \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell} \widehat{h}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})}^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{\text{level}_\ell(\mathbf{z})-C_R} v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z}))}^2 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell \\ \text{level}_\ell(\mathbf{z})=m}} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z}))}^2. \end{aligned}$$

Lemma 6.12 und die Definition (6.32) von $\widetilde{\mathcal{K}}_k(\mathbf{z})$ zeigen

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell \\ \text{level}_\ell(\mathbf{z})=m}} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\omega_{\ell-1}^2(\mathbf{z}))}^2 \\ \lesssim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell \\ \text{level}_\ell(\mathbf{z})=m}} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\widehat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_L} \sum_{\ell \in \widetilde{\mathcal{K}}_m(\mathbf{z})} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\widehat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2. \end{aligned}$$

Für einen Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ mit $\text{level}_\ell(\mathbf{z}) = m$ besagt Lemma 6.11 $\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_m$. Dies und die Beschränktheit $\#\widehat{\mathcal{K}}_m(\mathbf{z}) \leq C_{\text{node}}$ von Lemma 6.13 liefern

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_L} \sum_{\ell \in \widehat{\mathcal{K}}_m(\mathbf{z})} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\widehat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_L \cap \widehat{\mathcal{N}}_m} \sum_{\ell \in \widehat{\mathcal{K}}_m(\mathbf{z})} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\widehat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 \\ &\lesssim \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_L \cap \widehat{\mathcal{N}}_m} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\widehat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_m} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\widehat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2. \end{aligned}$$

Uniforme γ -Formregularität von $\widehat{\mathcal{T}}_m$ und die Definition $\widehat{\Pi}_m = \widehat{\Pi}_0$ für $m < 0$ zeigen weiters

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_m} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\widehat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 &\lesssim \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_{m-C_R} v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &\lesssim \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_m v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

Durch Kombination der letzten vier Abschätzungen mit Lemma 6.14 und der Normäquivalenz $\|\cdot\|_{\mathfrak{W}} \simeq \|\cdot\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)}$ auf $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ kommen wir auf

$$\sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell} \|v_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{h}_m^{-1} \|v - \widehat{\Pi}_m v\|_{L^2(\Gamma)}^2 \lesssim \|v\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \simeq \|v\|_{\mathfrak{W}}^2.$$

Das zusammen mit Lemma 6.2 zeigt die untere Schranke in (6.16). \square

Wir kommen nun zum Beweis der oberen Schranke in (6.16), welcher aus einer verschärften Cauchy-Schwarz Ungleichung folgt. Sei $M := \max_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_L} \text{level}_L(\mathbf{z})$ der maximale Level aller Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_L$. Nach Lemma 6.11 gilt $\mathcal{N}_L \subseteq \widehat{\mathcal{N}}_M$ und auch $\mathcal{X}_L \subseteq \widehat{\mathcal{X}}_M$. Wir ordnen die Projektionsoperatoren $\mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}}$ im Additiv-Schwarz Operator nach dem Level ihrer zugehörigen Knoten, d.h.

$$\mathfrak{P}_{\text{LD}} = \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell} \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} = \sum_{m=0}^M \widetilde{\mathfrak{Q}}_m \quad \text{mit} \quad \widetilde{\mathfrak{Q}}_m := \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \widehat{\mathcal{N}}_\ell \\ \text{level}_\ell(\mathbf{z})=m}} \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}}. \quad (6.46)$$

Lemma 6.16. *Der Operator $\widetilde{\mathfrak{Q}}_m$ erfüllt*

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_m : \mathcal{X} \rightarrow \widehat{\mathcal{X}}_m \quad \text{und} \quad \langle \widetilde{\mathfrak{Q}}_m \widehat{v}_M, \widehat{w}_M \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle \widehat{v}_M, \widetilde{\mathfrak{Q}}_m \widehat{w}_M \rangle_{\mathfrak{W}} \quad \text{für alle } \widehat{v}_M, \widehat{w}_M \in \widehat{\mathcal{X}}_M.$$

Für alle $0 \leq m \leq M$ und $k \leq m$ gilt

$$0 \leq \langle \tilde{\mathfrak{Q}}_m \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle_{\mathfrak{W}} \leq C_{\text{CS}}^{\text{LD}} 2^{-(m-k)} \|\hat{v}_k\|_{\mathfrak{W}}^2 \quad \text{für alle } \hat{v}_k \in \hat{\mathcal{X}}_k \quad (6.47)$$

Die Konstante $C_{\text{CS}}^{\text{LD}} > 0$ hängt nur von Γ und \mathcal{T}_0 ab.

Beweis. Sei $v \in \mathcal{X}_L$ und $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_L$ mit $\text{level}_\ell(\mathbf{z}) = m$. Nach Lemma 6.11 ist $\mathbf{z} \in \hat{\mathcal{N}}_m$ und $\eta_\ell^{\mathbf{z}} \in \hat{\mathcal{X}}_m$ und daher $\tilde{\mathfrak{Q}}_m v \in \hat{\mathcal{X}}_m$. Symmetrie von $\tilde{\mathfrak{Q}}_m$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{W}}$ folgt aus der Symmetrie der Operatoren $\mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}}$, d.h.

$$\langle \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} v, w \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle w, \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} v \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} w, \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} v \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} v, \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} w \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle v, \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} w \rangle_{\mathfrak{W}}.$$

Nach Definition von $\tilde{\mathfrak{Q}}_m$ gilt weiters

$$\langle \tilde{\mathfrak{Q}}_m \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle_{\mathfrak{W}} = \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell \\ \text{level}_\ell(\mathbf{z})=m}} \langle \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle_{\mathfrak{W}} = \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell \\ \text{level}_\ell(\mathbf{z})=m}} \|\mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} \hat{v}_k\|_{\mathfrak{W}}^2 \geq 0.$$

Es bleibt noch die obere Abschätzung in (6.47) zu zeigen. Im Folgenden betrachten wir den Fall $\Gamma = \partial\Omega$. Aus der Darstellung (6.17) der Operatoren $\mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}}$ folgt

$$\langle \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle_{\mathfrak{W}} = \frac{\langle \hat{v}_k, \eta_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\mathfrak{W}}^2}{\|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\mathfrak{W}}^2} \lesssim \frac{\langle \mathfrak{W} \hat{v}_k, \eta_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\Gamma}^2 + \langle \hat{v}_k, 1 \rangle_{\Gamma} \langle \eta_\ell^{\mathbf{z}}, 1 \rangle_{\Gamma}^2}{\|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\mathfrak{W}}^2}$$

Mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung für $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$, $\|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{L^2(\omega_\ell(\mathbf{z}))} \simeq |T|$, der Normäquivalenz $\|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\mathfrak{W}}^2 \simeq \|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \simeq |T|^{(d-2)/(d-1)}$ für $T \in \mathcal{T}_\ell$ mit $\mathbf{z} \in T$, und Lemma 6.11 bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathfrak{W} \hat{v}_k, \eta_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\Gamma}^2}{\|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\mathfrak{W}}^2} &\lesssim |T|^{1/(d-1)} \|\mathfrak{W} \hat{v}_k\|_{L^2(\omega_\ell(\mathbf{z}))}^2 \lesssim \frac{\hat{h}_m}{\hat{h}_k} \|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}_k\|_{L^2(\omega_\ell(\mathbf{z}))}^2 \\ &\lesssim 2^{-(m-k)} \|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}_k\|_{L^2(\omega_\ell(\mathbf{z}))}^2. \end{aligned}$$

Für den Stabilisierungsterm liefern die gleichen Argumente zusammen mit $\langle \eta_\ell^{\mathbf{z}}, 1 \rangle_{\Gamma} \leq \|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{L^2(\Gamma)} |\omega_\ell(\mathbf{z})|^{1/2}$

$$\frac{\langle \hat{v}_k, 1 \rangle_{\Gamma}^2 \langle \eta_\ell^{\mathbf{z}}, 1 \rangle_{\Gamma}^2}{\|\eta_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\mathfrak{W}}^2} \lesssim |T|^{1/(d-1)} |\omega_\ell(\mathbf{z})| \|\hat{v}_k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \lesssim 2^{-(m-k)} |\omega_\ell(\mathbf{z})| \|\hat{v}_k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2,$$

wobei die letzte Abschätzung aus $|T|^{1/(d-1)} \simeq \hat{h}_m \lesssim \hat{h}_m / \hat{h}_k = 2^{-(m-k)}$ folgt. Die letzten drei Abschätzungen liefern also

$$\langle \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}} \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle_{\mathfrak{W}} \lesssim 2^{-(m-k)} \left(\|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}_k\|_{L^2(\omega_\ell(\mathbf{z}))}^2 + |\omega_\ell(\mathbf{z})| \|\hat{v}_k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right).$$

Lemma 6.12 zeigt $\omega_\ell(\mathbf{z}) \subseteq \hat{\omega}_m^n(\mathbf{z})$. Aus der Definition (6.46) ergibt sich

$$\langle \tilde{\mathfrak{Q}}_m \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle_{\mathfrak{W}} \lesssim 2^{-(m-k)} \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell \\ \text{level}_\ell(\mathbf{z})=m}} \left(\|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}_k\|_{L^2(\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 + |\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z})| \|\hat{v}_k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right)$$

Mit der Definition (6.32) der Menge $\tilde{\mathcal{K}}_k(\mathbf{z})$ und Lemma 6.13 können wir die Doppelsumme umschreiben und weiter abschätzen

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell \\ \text{level}_\ell(\mathbf{z})=m}} (\|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}^k\|_{L^2(\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 + |\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z})| \|\hat{v}^k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2) \\
 &= \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_m \cap \mathcal{N}_L} \sum_{\ell \in \tilde{\mathcal{K}}_m(\mathbf{z})} (\|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}^k\|_{L^2(\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 + |\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z})| \|\hat{v}^k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2) \\
 &\lesssim \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_m \cap \mathcal{N}_L} (\|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}^k\|_{L^2(\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 + |\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z})| \|\hat{v}^k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2) \\
 &\leq \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_m} (\|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}^k\|_{L^2(\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 + |\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z})| \|\hat{v}^k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2).
 \end{aligned}$$

Uniforme γ -Formregularität der Netze $\hat{\mathcal{T}}_m$ impliziert

$$\sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_m} (\|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}^k\|_{L^2(\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z}))}^2 + |\hat{\omega}_m^n(\mathbf{z})| \|\hat{v}^k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2) \lesssim \|\hat{h}_k^{1/2} \mathfrak{W} \hat{v}^k\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\hat{v}^k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2.$$

Aus den letzten drei Abschätzungen, einer inversen Ungleichung für \mathfrak{W} aus Lemma 5.7, und Normäquivalenz $\|\cdot\|_{\mathfrak{W}} \simeq \|\cdot\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}$ erhalten wir

$$\langle \tilde{\mathfrak{Q}}_m \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle_{\mathfrak{W}} \lesssim 2^{-(m-k)} \|\hat{v}_k\|_{\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \simeq 2^{-(m-k)} \|\hat{v}_k\|_{\mathfrak{W}}^2$$

und somit ist (6.47) gezeigt.

Der Beweis für den Fall $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ folgt den gleichen Zeilen. Der Unterschied besteht darin, dass der Stabilisierungsterm weggelassen werden kann. Wir bemerken zum Schluss, dass die benötigte inverse Ungleichung für \mathfrak{W} aus Lemma 5.7 auch für $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ gültig ist, siehe [AFF⁺12, Kar12]. \square

Beweis von Proposition 6.6, obere Schranke. Wir wenden das abstrakte Lemma 6.3 mit $\mathcal{X}_h = \mathcal{X}_L$, $\mathfrak{Q}_m = \tilde{\mathfrak{Q}}_m$, $\mathfrak{P}_{AS} = \mathfrak{P}_{LD}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{W}}$, und $\kappa = 1/2$ an. Die Räume $\hat{\mathcal{X}}_m = \mathcal{S}^1(\hat{\mathcal{T}}_m) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ sind die geschachtelten Unterräume bezüglich der uniformen Triangulierungen $\hat{\mathcal{T}}_m$. Lemma 6.16 zeigt, dass die Voraussetzungen aus Lemma 6.3 erfüllt sind, und daher folgt die untere Schranke in (6.16). \square

Beweis von Proposition 6.8

Beweis von Proposition 6.8, untere Schranke. Wir bemerken, dass im Beweis der unteren Schranke in (6.16) für jedes $v \in \mathcal{X}_L$ eine stabile Zerlegung

$$\sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \|v\|_{\mathfrak{W}}^2$$

mit $v_\ell^z \in \mathcal{X}_\ell^z$ konstruiert wurde. Setzt man $v_\ell^z := 0$ für $z \in \mathcal{N}_\ell \setminus \tilde{\mathcal{N}}_\ell$ liefert das die stabile Zerlegung

$$\sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \|v\|_{\mathfrak{W}}^2$$

bezüglich der Unterraumzerlegung (6.23). Mit Lemma 6.2 folgt wieder die untere Schranke. \square

Für den Beweis der oberen Schranke aus Proposition 6.8 gehen wir analog wie für Proposition 6.6 vor. Sei $M := \max_{z \in \mathcal{N}_L} \text{level}_L(z)$ wieder der maximale Level aller Knoten $z \in \mathcal{N}_L$. Wir ordnen die Projektionsoperatoren \mathfrak{P}_ℓ^z im Additiv-Schwarz Operator \mathfrak{P}_{GD} nach dem Level der zugehörigen Knoten, d.h.

$$\mathfrak{P}_{\text{GD}} = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \mathcal{N}_\ell} \mathfrak{P}_\ell^z = \sum_{m=0}^M \mathfrak{Q}_m \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Q}_m := \sum_{\ell=0}^L \sum_{\substack{z \in \mathcal{N}_\ell \\ \text{level}_\ell(z)=m}} \mathfrak{P}_\ell^z. \quad (6.48)$$

Lemma 6.17. *Der Operator \mathfrak{Q}_m erfüllt*

$$\mathfrak{Q}_m : \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}_m \quad \text{und} \quad \langle \mathfrak{Q}_m \hat{v}_M, \hat{w}_M \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle \hat{v}_M, \mathfrak{Q}_m \hat{w}_M \rangle_{\mathfrak{W}} \quad \text{für alle } \hat{v}_M, \hat{w}_M \in \hat{\mathcal{X}}_M.$$

Für alle $0 \leq m \leq M$ und $k \leq m$ gilt

$$0 \leq \langle \mathfrak{Q}_m \hat{v}_k, \hat{v}_k \rangle_{\mathfrak{W}} \leq C_{\text{CS}}^{\text{GD}} 2^{-(m-k)} (L+1) \|\hat{v}_k\|_{\mathfrak{W}}^2 \quad \text{für alle } \hat{v}_k \in \hat{\mathcal{X}}_k \quad (6.49)$$

Die Konstante $C_{\text{CS}}^{\text{GD}} > 0$ hängt nur von Γ und \mathcal{T}_0 ab.

Beweis. Der Beweis folgt genau den Zeilen des Beweises von Lemma 6.16. Die einzigen Unterschiede bestehen darin, dass $\hat{\mathfrak{Q}}_m$, $\tilde{\mathcal{N}}_\ell$, und $\tilde{\mathcal{K}}_k(z)$ durch \mathfrak{Q}_m , \mathcal{N}_ℓ und $\mathcal{K}_k(z)$ ersetzt werden. Nach Lemma 6.13 ist die Kardinalität von $\mathcal{K}_k(z)$ für jeden Knoten $z \in \mathcal{N}_L$ durch $(L+1)$ beschränkt. Dadurch kommt der zusätzliche Faktor $(L+1)$ in die Abschätzung (6.49). \square

Beweis von Proposition 6.8, obere Schranke. Der Beweis folgt wie bei Proposition 6.6 mit Hilfe des abstrakten Resultats aus Lemma 6.3 und Lemma 6.17. \square

Beweis von Satz 6.7 und Satz 6.9

Die Beweise folgen aus Proposition 6.6 und Proposition 6.8.

Beweis von Satz 6.7. Sei $u \in \mathcal{X}_L$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{N_L}$ mit $u = \sum_{j=1}^{N_L} \mathbf{x}_j \eta_L^{z^j}$. Symmetrie von $\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1}$ folgt aus der Definition (6.18). Aus der Beziehung (6.20) zwischen \mathbf{S}_{LD} und \mathfrak{P}_{LD} , als auch der positiven Definitheit von \mathfrak{P}_{LD} aus Lemma 6.1 beobachten wir

$$\langle \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{x}, \mathbf{W} \mathbf{x} \rangle_2 = \langle \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbf{W}} = \langle \mathfrak{P}_{\text{LD}} u, u \rangle_{\mathfrak{W}} > 0.$$

Positive Definitheit von $\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1}$ folgt, da \mathbf{W} regulär ist.

Aus (6.20) und den Eigenschaften von \mathfrak{P}_{LD} folgt auch sofort, dass \mathbf{S}_{LD} symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{W}}$ ist. Beachte, dass

$$\langle \mathbf{S}_{\text{LD}} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\mathbf{P}_{\text{LD}}} = \langle \mathbf{W} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_2.$$

Daraus ergibt sich Symmetrie und positive Definitheit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}_{\text{LD}}}$.

Schließlich liefert die Identität (6.20) und Proposition 6.6 die Abschätzungen (6.21) für den minimalen und maximalen Eigenwert, und die Abschätzung (6.22) folgt direkt aus $\text{cond}_{\mathbf{P}_{\text{LD}}}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) = \lambda_{\max}(\mathbf{S}_{\text{LD}})/\lambda_{\min}(\mathbf{S}_{\text{LD}})$. \square

Beweis von Satz 6.9. Der Beweis folgt genau so wie der Beweis von Satz 6.7 mit den offensichtlichen Modifikationen. \square

6.3 Einfachschichtintegraloperator

6.3.1 Modellproblem

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Lipschitz-Gebiet mit polygonalem Rand $\partial\Omega$. Sei $\emptyset \neq \Gamma \subseteq \partial\Omega$ einfach zusammenhängend. Wir betrachten die variationelle Formulierung der schwach-singulären Integralgleichung: Für gegebenes $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ finde $\phi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$\langle \psi, \mathfrak{A}\phi \rangle_{\Gamma} = \langle \psi, f \rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } \psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma). \quad (6.50)$$

Falls $d = 2$ und $\Gamma = \partial\Omega$ setzen wir $\text{diam}(\Omega) < 1$ voraus, und somit ist die Bilinearform

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathfrak{A}} := \langle \psi, \mathfrak{A}\phi \rangle_{\Gamma} \quad (6.51)$$

symmetrisch, stetig, und elliptisch. Insbesondere definiert $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{A}}$ eine auf $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ äquivalente Norm. Dies folgt aus den Eigenschaften von \mathfrak{A} aus Abschnitt 3.2.1 bzw. siehe [HW08] für den Fall $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$. Die Gleichung (6.50) besitzt nach dem Lemma von Max-Milgram, siehe Korollar 3.12, eine eindeutige Lösung.

Es bezeichne mit \mathcal{T}_{ℓ} eine reguläre Triangulierung von Γ und $\mathcal{Y}_{\ell} := \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_{\ell})$ ist ein endlich-dimensionaler Unterraum von $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Die Knoten der Triangulierung \mathcal{T}_{ℓ} , welche nicht auf $\partial\Gamma$ liegen, bezeichnen wir mit \mathcal{N}_{ℓ} . Als Basis wählen wir die charakteristischen Funktionen $\{\chi_j\}_{j=1}^{M_{\ell}}$ mit $M_{\ell} := \#\mathcal{T}_{\ell}$ und $\chi_j|_{T_k} = \delta_{jk}$ für alle $j, k = 1, \dots, M_{\ell}$ mit $T_k \in \mathcal{T}_{\ell}$. Wir definieren die Galerkin-Matrix $\mathbf{V} := \mathbf{V}^{\ell}$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{A}}$ bezüglich \mathcal{Y}_{ℓ} als

$$\mathbf{V}_{jk} := \langle \chi_k, \chi_j \rangle_{\mathfrak{A}} \quad \text{für alle } j, k = 1, \dots, M_{\ell} \quad (6.52)$$

Die diskrete Formulierung

$$\langle \phi_{\ell}, \psi_{\ell} \rangle_{\mathfrak{A}} = \langle \psi_{\ell}, f \rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } \psi_{\ell} \in \mathcal{Y}_{\ell} \quad (6.53)$$

von (6.50) ist äquivalent zum Gleichungssystem

$$\mathbf{V} \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (6.54)$$

mit $\mathbf{f}_j := \langle \chi_j, f \rangle_{\Gamma}$ für $j = 1, \dots, M_{\ell}$.

Das nächste Lemma gibt Abschätzungen für den minimalen und maximalen Eigenwert von $\mathbf{V} = \mathbf{V}^L$ und somit eine Abschätzung für die ℓ^2 -Konditionszahl $\text{cond}_2(\mathbf{V}) = \lambda_{\max}(\mathbf{V})/\lambda_{\min}(\mathbf{V})$. Der darauf folgende Satz gibt die Konditionszahl der mit der Diagonalen vorkonditionierten Matrix an. Diese Resultate finden sich alle in [AMT99].

Lemma 6.18. *Es bezeichne $\mathbf{V} = \mathbf{V}^L$ die Galerkin-Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{D}}$ bezüglich \mathcal{X}_L . Für den minimalen und maximalen Eigenwert gilt die Abschätzung*

$$\begin{aligned} C_{\min}^{\mathfrak{D}} h_{\min,L}^2 &\leq \lambda_{\min}(\mathbf{V}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{V}) \leq C_{\max}^{\mathfrak{D}} M_L h_{\max,L}^2 (1 + |\log(M_L h_{\max,L})|) && \text{falls } d = 2, \\ C_{\min}^{\mathfrak{D}} h_{\min,L}^3 &\leq \lambda_{\min}(\mathbf{V}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{V}) \leq C_{\max}^{\mathfrak{D}} M_L^{1/2} h_{\max,L}^3 && \text{falls } d = 3, \end{aligned}$$

wobei die Konstanten $C_{\min}^{\mathfrak{D}}, C_{\max}^{\mathfrak{D}} > 0$ nur von Γ und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_L abhängen. \square

Satz 6.19. *Es bezeichne $\mathbf{V} = \mathbf{V}^L$ die Galerkin-Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{D}}$ bezüglich \mathcal{X}_L , und sei \mathbf{D} die Diagonalmatrix von \mathbf{V} , dann gilt*

$$\text{cond}_{\mathbf{V}}(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{V}) \leq C_{\text{diag}}^{\mathfrak{D}} \begin{cases} M_L (1 + |\log(h_{\min,L})|) \frac{1 + |\log(M_L h_{\min,L})|}{1 + |\log(h_{\max,L})|} & \text{falls } d = 2, \\ M_L^{1/2} & \text{falls } d = 3, \end{cases}$$

wobei die Konstante nur von Γ und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_L abhängt. \square

6.3.2 Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierer

Wir definieren ähnlich wie für den hypersingulären Integraloperator einen *lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer* und einen *globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer* für den Einfachschichtintegraloperator. Wir beschränken uns nur auf den Fall $d = 2$.

Lokaler Multilevel Diagonalvorkonditionierer

Wir benötigen wieder die lokalen Mengen $\tilde{\mathcal{N}}_\ell$ aus (6.12). Für jeden Knoten $\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell$ definieren wir die Haar-Basisfunktion $\chi_\ell^{\mathbf{z}}$ als Bogenlängenableitung der Hut-Funktion $\eta_\ell^{\mathbf{z}}$, d.h.

$$\chi_\ell^{\mathbf{z}} := (\eta_\ell^{\mathbf{z}})' \quad \text{für } \mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell, 0 \leq \ell \leq L.$$

Weiters definiere die ein-dimensionalen Unterräume

$$\mathcal{Y}_{00} := \text{span}\{1\} \quad \text{und} \quad \mathcal{Y}_\ell^{\mathbf{z}} := \text{span}\{\chi_\ell^{\mathbf{z}}\},$$

und bezeichne mit $\mathfrak{T}_{00} : \mathcal{Y} := \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{Y}_{00}$, $\mathfrak{T}_\ell^{\mathbf{z}} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}_\ell^{\mathbf{z}}$ die zugehörigen Projektionen bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{D}}$, d.h.

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{T}_{00}\psi, \psi_{00} \rangle_{\mathfrak{D}} &= \langle \psi, \psi_{00} \rangle_{\mathfrak{D}} \quad \text{für alle } \psi_{00} \in \mathcal{Y}_{00}, \\ \langle \mathfrak{T}_\ell^{\mathbf{z}}\psi, \psi_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\mathfrak{D}} &= \langle \psi, \psi_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\mathfrak{D}} \quad \text{für alle } \psi_\ell^{\mathbf{z}} \in \mathcal{Y}_\ell^{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Die explizite Darstellung dieser Operatoren lautet

$$\mathfrak{T}_{00}\psi = \frac{\langle \psi, 1 \rangle_{\mathfrak{D}}}{\|1\|_{\mathfrak{D}}^2} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{T}_\ell^{\mathbf{z}}\psi = \frac{\langle \psi, \chi_\ell^{\mathbf{z}} \rangle_{\mathfrak{D}}}{\|\chi_\ell^{\mathbf{z}}\|_{\mathfrak{D}}^2} \chi_\ell^{\mathbf{z}}. \quad (6.55)$$

Wir betrachten die Unterraumzerlegung

$$\mathcal{Y}_L = \mathcal{Y}_{00} + \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \mathcal{Y}_\ell^{\mathbf{z}}, \quad (6.56)$$

und definieren den dazugehörigen Additiv-Schwarz Operator $\mathfrak{T}_{\text{LD}} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}_L$ als

$$\mathfrak{T}_{\text{LD}} := \mathfrak{T}_{00} + \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \mathfrak{T}_\ell^{\mathbf{z}} \quad (6.57)$$

Die folgende Proposition wird in Abschnitt 6.3.3 bewiesen.

Proposition 6.20. *Der Operator \mathfrak{T}_{LD} erfüllt*

$$c_{\text{LD}} \|\psi\|_{\mathfrak{B}}^2 \leq \langle \mathfrak{T}_{\text{LD}} \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{B}} \leq C_{\text{LD}} \|\psi\|_{\mathfrak{B}}^2 \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{Y}_L. \quad (6.58)$$

Die Konstanten $c_{\text{LD}} > 0, C_{\text{LD}} > 0$ hängen nur von Γ und \mathcal{T}_0 ab.

Wir geben noch die Matrixform des Vorkonditionierers an. Bezeichne mit $\tilde{\mathbf{D}}^\ell$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $(\tilde{\mathbf{D}}^\ell)_{jk} := \delta_{jk} \langle \chi_\ell^{\mathbf{z}^j}, \chi_\ell^{\mathbf{z}^k} \rangle_{\mathfrak{B}}$ für alle $\mathbf{z}^j \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell$. Sei weiters $\text{Id}^\ell : \mathcal{Y}_\ell \rightarrow \mathcal{Y}_L$ die kanonische Einbettung, d.h. die formale Identität, mit Matrixdarstellung \mathbf{J}^ℓ . Wir definieren die Haar-Matrix $\tilde{\mathbf{H}}^\ell$, welche die Haar-Basisfunktionen $\chi_\ell^{\mathbf{z}}$ bezüglich der kanonischen Basis von \mathcal{Y}_ℓ , d.h. der charakteristischen Funktionen χ_{T_j} , darstellt. Es gilt

$$\chi_\ell^{\mathbf{z}^k} = \sum_{j=1}^{M_\ell} (\tilde{\mathbf{H}}^\ell)_{jk} \chi_{T_j} \quad \text{für } j = 1, \dots, M_\ell, k = 1, \dots, \#\tilde{\mathcal{N}}_\ell.$$

Die Formel von Maue [AEF⁺13, Mau49]

$$\langle \mathfrak{W}v, w \rangle_\Gamma = \langle w', \mathfrak{V}v' \rangle_\Gamma \quad \text{für alle } v, w \in H_0^1(\Gamma) \quad (6.59)$$

spielt beim Beweis des Hauptresultates eine entscheidende Rolle und zeigt auch folgende Identität:

$$\left((\tilde{\mathbf{H}}^\ell)^T \mathbf{V}^\ell \tilde{\mathbf{H}}^\ell \right)_{jk} = \langle \chi_\ell^{\mathbf{z}^j}, \mathfrak{V} \chi_\ell^{\mathbf{z}^k} \rangle_\Gamma = \langle \mathfrak{W} \eta_\ell^{\mathbf{z}^k}, \eta_\ell^{\mathbf{z}^j} \rangle_\Gamma \quad \text{für } j, k = 1, \dots, \#\tilde{\mathcal{N}}_\ell.$$

Die Elemente der Diagonalmatrix $\tilde{\mathbf{D}}^\ell$ sind also die entsprechenden Diagonalelemente der Galerkin-Matrix des hypersingulären Operators. Definiere $D := \langle 1, 1 \rangle_{\mathfrak{B}} = \langle 1, \mathfrak{V}1 \rangle_\Gamma$ und $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{M_L}$ mit $(\mathbf{1})_j = 1$ für $j = 1, \dots, M_L$. Wir definieren den *lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer*

$$\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} := \mathbf{1} D^{-1} \mathbf{1}^T + \sum_{\ell=0}^L \mathbf{J}^\ell \tilde{\mathbf{H}}^\ell (\tilde{\mathbf{D}}^\ell)^{-1} (\tilde{\mathbf{H}}^\ell)^T (\mathbf{J}^\ell)^T. \quad (6.60)$$

Anstelle von (6.54) betrachten wir das vorkonditionierte Gleichungssystem

$$\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{x} = \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{f}, \quad (6.61)$$

wobei $\mathbf{V} = \mathbf{V}^L$.

Satz 6.21. Die in (6.60) definierte Matrix $\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Die Matrix $\mathbf{S}_{\text{LD}} := \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{V}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}_{\text{LD}}}$ und bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}}$. Des weiteren erfüllen der minimale und maximale Eigenwert der Matrix \mathbf{S}_{LD}

$$c \leq \lambda_{\min}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq C, \quad (6.62)$$

wobei die Konstanten $c, C > 0$ nur von Γ und der Starttriangulierung \mathcal{T}_0 abhängen. Insbesondere ist die Konditionszahl der Matrix \mathbf{S}_{LD} unabhängig von L beschränkt durch

$$\text{cond}_{\mathbf{V}}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) = \text{cond}_{\mathbf{P}_{\text{LD}}}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq C/c. \quad (6.63)$$

Globaler Multilevel Diagonalvorkonditionierer

Wir betrachten die Unterraumzerlegung

$$\mathcal{Y}_L = \mathcal{Y}_{00} + \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \mathcal{N}_{\ell}} \mathcal{Y}_{\ell}^z$$

mit dem zugehörigen Additiv-Schwarz Operator

$$\mathfrak{T}_{\text{GD}} := \mathfrak{T}_{00} + \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \mathcal{N}_{\ell}} \mathfrak{T}_{\ell}^z.$$

Proposition 6.22. Der Operator \mathfrak{T}_{GD} erfüllt

$$c_{\text{GD}} \|\psi\|_{\mathfrak{Y}}^2 \leq \langle \mathfrak{T}_{\text{GD}} \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{Y}} \leq C_{\text{GD}} (L+1) \|\psi\|_{\mathfrak{Y}}^2 \quad \text{für alle } \psi \in \mathcal{Y}_L. \quad (6.64)$$

Die Konstanten $c_{\text{GD}} > 0, C_{\text{GD}} > 0$ hängen nur von Γ und \mathcal{T}_0 ab.

Wir definieren den globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer als

$$\mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} := \mathbf{1} D^{-1} \mathbf{1}^T + \sum_{\ell=0}^L \mathbf{J}^{\ell} \mathbf{H}^{\ell} (\mathbf{D}^{\ell})^{-1} (\mathbf{H}^{\ell})^T (\mathbf{J}^{\ell})^T, \quad (6.65)$$

wobei \mathbf{D}^{ℓ} die Diagonalmatrix mit Einträgen $(\mathbf{D}^{\ell})_{jk} := \delta_{jk} \langle \chi_{\ell}^{z^j}, \chi_{\ell}^{z^j} \rangle_{\mathfrak{Y}}$ für $j, k = 1, \dots, N_{\ell} = \#\mathcal{N}_{\ell}$ und \mathbf{H}^{ℓ} die Haar-Matrix bezeichnet, d.h. die Darstellung von χ_{ℓ}^z bezüglich der kanonischen Basis von \mathcal{Y}_{ℓ} . Es gilt

$$\chi_{\ell}^{z^k} = \sum_{j=1}^{M_{\ell}} (\mathbf{H}^{\ell})_{jk} \chi_{T_j} \quad \text{für } j = 1, \dots, M_{\ell}, k = 1, \dots, N_{\ell}.$$

Satz 6.23. Die in (6.65) definierte Matrix $\mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Die Matrix $\mathbf{S}_{\text{GD}} := \mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} \mathbf{V}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}_{\text{GD}}}$ und bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{V}}$. Des weiteren erfüllen der minimale und maximale Eigenwert der Matrix \mathbf{S}_{GD}

$$c \leq \lambda_{\min}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq C(L+1), \quad (6.66)$$

wobei die Konstanten $c, C > 0$ nur von Γ und der Starttriangulierung \mathcal{T}_0 abhängen. Insbesondere ist die Konditionszahl der Matrix \mathbf{S}_{GD} beschränkt durch

$$\text{cond}_{\mathbf{V}}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) = \text{cond}_{\mathbf{P}_{\text{GD}}}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq (L+1)C/c. \quad (6.67)$$

6.3.3 Beweis der Hauptresultate

Der springende Punkt in den nachfolgenden Überlegungen ist Maue's Formel (6.59), welche einen Mechanismus bereitstellt, der es uns erlaubt zwischen den Räumen $H^{-1/2}(\Gamma)$ und $H^{1/2}(\Gamma)$ zu wechseln. Damit folgen die Resultate aus den entsprechenden Ergebnissen zum hypersingulären Operator. Diese Technik wurde, z.B., auch in den Arbeiten [HS96, TS96] verwendet.

Für jedes $\psi \in \mathcal{Y}_L$ betrachten wir wie in [TS96] die eindeutige Zerlegung

$$\psi = \psi_{00} + \psi_* \tag{6.68}$$

mit $\psi_{00} = \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma} / |\Gamma| \in \mathcal{Y}_{00}$ und $\psi_* \in \mathcal{P}_*^0(\mathcal{T}_L) = \{\psi \in \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_L) : \langle \psi, 1 \rangle_{\Gamma} = 0\}$. Man beachte, dass

$$\mathcal{P}_*^0(\mathcal{T}_L) = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_{\ell}} \mathcal{Y}_{\ell}^z,$$

als auch

$$\|\psi_{00}\|_{\mathfrak{Y}} \lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{Y}} \quad \text{und} \quad \|\psi_*\|_{\mathfrak{Y}} \lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{Y}}, \tag{6.69}$$

wobei die involvierten Konstanten nur von Γ abhängen.

Wir fassen den Zusammenhang zwischen den diskreten Räumen $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_L)$ und $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_L)$ in folgendem Lemma zusammen.

Lemma 6.24. *Sei $\psi_* \in \mathcal{P}_*^0(\mathcal{T}_L)$.*

(i) *Falls $\Gamma = \partial\Omega$ existiert ein $v_* \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}_L) = \{v \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_L) : \langle v, 1 \rangle_{\Gamma} = 0\}$ mit*

$$\psi_* = (v_*)' \quad \text{und} \quad \|\psi_*\|_{\mathfrak{Y}} = \|v_*\|_{\mathfrak{W}}.$$

(ii) *Falls $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ existiert ein $v_* \in \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_L) \cap \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$ mit*

$$\psi_* = (v_*)' \quad \text{und} \quad \|\psi_*\|_{\mathfrak{Y}} = \|v_*\|_{\mathfrak{W}}.$$

□

Beweis von Proposition 6.20. Wir behandeln nur den Fall $\Gamma = \partial\Omega$. Der Beweis für $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ verläuft analog.

Zuerst zeigen wir die untere Schranke in (6.58). Im Hinblick auf Lemma 6.2 müssen wir eine stabile Zerlegung bereitstellen. Sei $\psi \in \mathcal{Y}_L$ mit der eindeutigen Zerlegung $\psi = \psi_{00} + \psi_*$ aus (6.68). Nach Lemma 6.24 existiert $v_* \in \mathcal{S}_*^1(\mathcal{T}_L)$ mit $\psi_* = (v_*)'$. Aus der Theorie der Additiv-Schwarz Operatoren folgt die Charakterisierung des minimalen Eigenwertes

$$\lambda_{\min}(\mathfrak{A}_{LD}) = \min_{v \in \mathcal{X}_L} \frac{\|v\|_{\mathfrak{W}}^2}{\min_{\sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_{\ell}} v_{\ell}^z = v} \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_{\ell}} \|v_{\ell}^z\|_{\mathfrak{W}}^2} \tag{6.70}$$

des Operators $\mathfrak{P}_{\text{LD}}|_{\mathcal{X}_L}$ aus Abschnitt 6.2, siehe z.B. [Zha92, Lemma 3.1]. Das Minimum im Nenner ist als Minimum über alle möglichen Zerlegungen von $v = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} v_\ell^z$ mit $v_\ell^z \in \mathcal{X}_\ell^z$ zu verstehen. Aus Proposition 6.6 folgt uniforme Beschränktheit, d.h. $\lambda_{\min}(\mathfrak{P}_{\text{LD}}) \geq c > 0$, wobei c nur von Γ und \mathcal{T}_0 abhängt und aus (6.70) schließen wir die Existenz einer Zerlegung $v_* = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} v_\ell^z$ mit $v_\ell^z \in \mathcal{X}_\ell^z$ und

$$\sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \|v_*\|_{\mathfrak{W}}^2. \quad (6.71)$$

Das liefert uns eine Zerlegung von ψ_* in Funktionen $\psi_\ell^z := (v_\ell^z)'$, d.h.

$$\psi_* = (v_*)' = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \psi_\ell^z.$$

Maue's Formel (6.59), die Abschätzung $\langle \mathfrak{W}v_\ell^z, v_\ell^z \rangle_\Gamma \leq \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2$, und die stabile Zerlegung aus (6.71) zeigen

$$\sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|\psi_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \langle \mathfrak{W}v_\ell^z, v_\ell^z \rangle_\Gamma \leq \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \|v_*\|_{\mathfrak{W}}^2.$$

Man beachte, dass $\langle v_*, 1 \rangle_\Gamma = 0$, und deswegen gilt $\|v_*\|_{\mathfrak{W}}^2 = \langle \mathfrak{W}v_*, v_* \rangle_\Gamma$. Zusammen mit Maue's Formel (6.59) bekommen wir

$$\sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|\psi_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \|v_*\|_{\mathfrak{W}}^2 = \langle \mathfrak{W}v_*, v_* \rangle_\Gamma = \langle \psi_*, \mathfrak{P}\psi_* \rangle_\Gamma = \|\psi_*\|_{\mathfrak{W}}^2. \quad (6.72)$$

Aus der letzten Abschätzung, der Zerlegung (6.68), der Beschränktheit (6.69), und der Dreiecksungleichung folgern wir schlussendlich

$$\|\psi_{00}\|_{\mathfrak{W}}^2 + \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|\psi_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \|\psi_{00}\|_{\mathfrak{W}}^2 + \|\psi_*\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \|\psi\|_{\mathfrak{W}}^2, \quad (6.73)$$

wobei die involvierten Konstanten nur von Γ und \mathcal{T}_0 abhängen.

Für die obere Schranke in (6.58) betrachten wir wieder die Zerlegung $\psi = \psi_{00} + \psi_*$ aus (6.68). Sei nun $\sum_{\ell=0}^L \psi_\ell^z = \psi_*$ eine beliebige Zerlegung von ψ_* mit $\psi_\ell^z \in \mathcal{Y}_\ell^z$. Insbesondere gilt also $\psi_\ell^z = \alpha_\ell^z \chi_\ell^z$ mit $\alpha_\ell^z \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$v := \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} v_\ell^z \quad \text{mit} \quad v_\ell^z := \alpha_\ell^z \eta_\ell^z, \quad (6.74)$$

und bemerken, dass $\psi_* = (v)'$ und $\psi_\ell^z = (v_\ell^z)'$. Die abstrakte Theorie der Additiv-Schwarz Operatoren, siehe, z.B. [Zha92, Lemma 3.1], liefert die Charakterisierung

$$\lambda_{\max}(\mathfrak{P}_{\text{LD}}) = \max_{v \in \mathcal{X}_L} \frac{\|v\|_{\mathfrak{W}}^2}{\min_{\sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} v_\ell^z = v} \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2} \quad (6.75)$$

für den maximalen Eigenwert von $\mathfrak{P}_{\text{LD}}|_{\mathcal{X}_L}$. Nach Proposition 6.6 folgt $\lambda_{\max}(\mathfrak{P}_{\text{LD}}) \leq C < \infty$ und daher ergibt sich für die in (6.74) definierte Zerlegung

$$\|v\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2. \quad (6.76)$$

Mit Maue's Formel (6.59) und der Äquivalenz $\|v_\ell^z\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 = \|v_\ell^z\|_{\tilde{H}^{1/2}(\omega_\ell(z))}^2 \simeq \langle \mathfrak{W}v_\ell^z, v_\ell^z \rangle_\Gamma$ ergibt sich

$$\|\psi_*\|_{\mathfrak{Y}}^2 = \|v\|_{\mathfrak{W}}^2 \lesssim \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|v_\ell^z\|_{\mathfrak{W}}^2 \simeq \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \langle \mathfrak{W}v_\ell^z, v_\ell^z \rangle_\Gamma = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|\psi_\ell^z\|_{\mathfrak{Y}}^2.$$

Aus der Zerlegung $\phi = \phi_{00} + \phi_*$ und der Dreiecksungleichung schließen wir

$$\|\psi\|_{\mathfrak{Y}}^2 \lesssim \|\psi_{00}\|_{\mathfrak{Y}}^2 + \|\psi_*\|_{\mathfrak{Y}}^2 \lesssim \|\psi_{00}\|_{\mathfrak{Y}}^2 + \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \|\psi_\ell^z\|_{\mathfrak{Y}}^2, \quad (6.77)$$

wobei die involvierte Konstante nur von Γ und \mathcal{T}_0 abhängt. Da $\psi_{00} + \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \psi_\ell^z = \psi$ eine beliebige Zerlegung von $\psi \in \mathcal{Y}_L$ war, folgt mit Lemma 6.2 die obere Schranke in Proposition 6.20. \square

Beweis von Proposition 6.22. Folgt mit den gleichen Ideen wie im Beweis von Proposition 6.20. Der Unterschied besteht nur darin, dass in der Abschätzung für den oberen Eigenwert der zusätzliche Faktor $(L+1)$ reinkommt. Dieser Faktor stammt dabei aus Proposition 6.8. \square

Beweis von Satz 6.21. Wir zeigen nur, dass $\mathbf{S}_{\text{LD}} = \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{V}$ die Matrixdarstellung des Operators $\mathfrak{T}_{\text{LD}}|_{\mathcal{Y}_L}$ ist. Die restlichen Aussagen folgen dann wie im Beweis von Satz 6.7.

Sei $\chi_{T_\ell^m} \in \mathcal{Y}_\ell$ die charakteristische Funktion des Elements $T_\ell^m \in \mathcal{T}_\ell$. Zuerst zeigen wir die Beziehung

$$\mathfrak{T}_{\text{LD}}\psi = \sum_{m=1}^{M_\ell} (\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{x})_m \chi_{T_\ell^m} \quad \text{für alle } \psi = \sum_{j=1}^{M_\ell} \mathbf{x}_j \chi_{T_\ell^j} \in \mathcal{Y}_L. \quad (6.78)$$

Die Darstellung von \mathfrak{T}_{00} aus (6.55) und $D := \|1\|_{\mathfrak{Y}}^2$ liefern

$$\mathfrak{T}_{00}\psi = D^{-1} \langle \psi, 1 \rangle_{\mathfrak{Y}} = D^{-1} \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle_{\mathbf{V}} = \sum_{m=1}^{M_\ell} (\mathbf{1} D^{-1} \mathbf{1}^T \mathbf{V} \mathbf{x})_m \chi_{T_\ell^m}, \quad (6.79)$$

wobei $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{M_\ell}$ mit $(\mathbf{1})_j = 1$ für $j = 1, \dots, M_\ell$ gilt. Mit Hilfe der Definition der Matrizen $\tilde{\mathbf{H}}^\ell, \mathbf{J}^\ell$ aus Abschnitt 6.3.2 lässt sich jede Haar-Basisfunktion $\chi_\ell^z \in \tilde{\mathcal{Y}}_\ell$ darstellen als

$$\chi_\ell^z = \sum_{j=1}^{M_\ell} (\tilde{\mathbf{H}}^\ell)_{jk} \chi_{T_\ell^j} = \sum_{j=1}^{M_\ell} \sum_{m=1}^{M_\ell} (\tilde{\mathbf{H}}^\ell)_{jk} (\mathbf{J}^\ell)_{mj} \chi_{T_\ell^m} = \sum_{m=1}^{M_\ell} (\mathbf{J}^\ell \tilde{\mathbf{H}}^\ell)_{mk} \chi_{T_\ell^m}.$$

und daher gilt

$$\langle \psi, \chi_{\ell}^{\mathbf{z}} \rangle_{\mathfrak{Y}} = \sum_{m=1}^{M_L} (\mathbf{J}^{\ell} \tilde{\mathbf{H}}^{\ell})_{mk} \langle \psi, \chi_{T_L^m} \rangle_{\mathfrak{Y}} = \sum_{m=1}^{M_L} ((\tilde{\mathbf{H}}^{\ell})^T (\mathbf{J}^{\ell})^T)_{km} (\mathbf{V}\mathbf{x})_m = ((\tilde{\mathbf{H}}^{\ell})^T (\mathbf{J}^{\ell})^T \mathbf{V}\mathbf{x}).$$

Die explizite Darstellung $\mathfrak{I}_{\ell}^{\mathbf{z}^k} \psi = \langle \psi, \chi_{\ell}^{\mathbf{z}^k} \rangle_{\mathfrak{Y}} / \|\chi_{\ell}^{\mathbf{z}^k}\|_{\mathfrak{Y}}^2 \chi_{\ell}^{\mathbf{z}^k}$ aus (6.55) und $\|\chi_{\ell}^{\mathbf{z}^k}\|_{\mathfrak{Y}}^2 = (\tilde{\mathbf{D}}^{\ell})_{kk}$ ergeben mit der letzten Gleichheit

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{\text{LD}} \psi &= \sum_{m=1}^{M_L} (\mathbf{1} D^{-1} \mathbf{1}^T \mathbf{V}\mathbf{x})_m \chi_{T_L^m} + \sum_{\ell=0}^L \sum_{m=1}^{M_L} (\mathbf{J}^{\ell} \tilde{\mathbf{H}}^{\ell} (\tilde{\mathbf{D}}^{\ell})^{-1} (\tilde{\mathbf{H}}^{\ell})^T (\mathbf{J}^{\ell})^T \mathbf{V}\mathbf{x})_m \chi_{T_L^m} \\ &= \sum_{m=1}^{M_L} (\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{V}\mathbf{x})_m \chi_{T_L^m}. \end{aligned}$$

Somit ist also $\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{V}$ die Matrixdarstellung des Operators \mathfrak{I}_{LD} , was insbesondere die Identität

$$\langle \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{V}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathfrak{V}} = \langle \mathfrak{I}_{\text{LD}} \psi, \psi \rangle_{\mathfrak{Y}} \quad \text{für alle } \psi = \sum_{j=1}^{M_L} \mathbf{x}_j \chi_{T_L^j}$$

liefert. □

Beweis von Satz 6.21. Folgt wie der Beweis von Satz 6.23 mit den offensichtlichen Modifikationen. □

6.4 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt untersuchen wir verschiedenste numerische Beispiele, welche die theoretischen Aussagen dieses Kapitels untermauern sollen. Unser Hauptaugenmerk liegt dabei in der experimentellen Validierung von Satz 6.7 und Satz 6.9 für den hypersingulären Integraloperator bzw. Satz 6.21 und Satz 6.23 für den Einfachschichtintegraloperator.

Wir betrachten zum einen Probleme auf offenen Rändern bzw. geschlossenen Rändern und zum anderen Probleme mit künstlicher Verfeinerung, die auf stark lokal verfeinerte Netze führen. Wir beobachten dabei das Verhalten der Konditionszahlen, als auch die Anzahl der benötigten Iterationen bei Verwendung eines iterativen Löser. Hier betrachten wir den GMRES Algorithmus [SS86] und den CG Algorithmus, siehe z.B. [Saa03]. Diese Verfahren werden in MATLAB von den Routinen `gmres` und `pcg` bereitgestellt. Wir verwenden für die Toleranz `tol`, d.h. der Faktor um welches das Startresiduum reduziert wird, durchgehend den Wert 10^{-8} . Als Startvektor für beide Verfahren verwenden wir den Nullvektor.

Bei den Beispielen ohne künstliche Verfeinerung verwenden wir den ZZ-Schätzer, siehe [FFKP14] für $d = 2$ und [AFF⁺14] für $d = 3$, zur Steuerung des adaptiven Algorithmus 5.1. Für die Konstante in der Dörfler Markierung (5.2) wählen wir $\theta = \frac{1}{4}$.

Wir vergleichen die in Abschnitt 6.2 und Abschnitt 6.3 definierten Vorkonditionierer mit einem simplen Diagonalvorkonditionierer

$$\mathbf{P}_{\text{diag}} := \mathbf{D},$$

wobei \mathbf{D} die Diagonale von \mathbf{W} oder \mathbf{V} ist. Das vorkonditionierte System bezeichnen wir dann mit $\mathbf{S}_{\text{diag}} = \mathbf{P}_{\text{diag}}^{-1} \mathbf{W}$ bzw. $\mathbf{S}_{\text{diag}} = \mathbf{P}_{\text{diag}}^{-1} \mathbf{V}$. Abschätzungen für Konditionszahlen finden sich in Satz 6.5 und Satz 6.19.

Des weiteren definieren wir noch den *hierarchischen Basis Vorkonditionierer* (HB) für den hypersingulären Integraloperator als

$$\mathbf{P}_{\text{HB}}^{-1} := \sum_{\ell=0} \bar{\mathbf{I}}^{\ell} (\bar{\mathbf{D}}^{\ell})^{-1} (\bar{\mathbf{I}}^{\ell}), \quad (6.80)$$

wobei $\bar{\mathbf{D}}^{\ell}$ die Diagonale der Galerkin-Matrix $\bar{\mathbf{W}}^{\ell}$ bezüglich des Unterraumes

$$\bar{\mathcal{X}}_{\ell} = \text{span} \{ \eta_{\ell}^z : z \in \mathcal{N}_{\ell} \setminus \mathcal{N}_{\ell-1} \}$$

ist und $\bar{\mathbf{I}}^{\ell}$ die Matrixdarstellung der kanonischen Einbettung von $\bar{\mathcal{X}}_{\ell}$ nach \mathcal{X}_L ist. Bei diesem Vorkonditionierer wird also nur auf neu erstellte Knoten $z \in \mathcal{N}_{\ell} \setminus \mathcal{N}_{\ell-1}$ skaliert. Diese Art von Vorkonditionierer wurde für die FEM entwickelt [Yse86]. Für die BEM wird der Vorkonditionierer, z.B. in [TSM97] und darin enthaltenen Referenzen analysiert. Wir bemerken, dass der Einsatz von hierarchischen Basis Vorkonditionierern sowohl für FEM als auch BEM nur im Fall $d = 2$ von Vorteil ist, da im Fall $d = 3$ die Konditionszahlen der vorkonditionierten Matrizen exponentiell von der Anzahl der Level L abhängen, siehe dazu [Mun97, Bemerkung 2.1 und Bemerkung 3.3].

Analog dazu definieren wir für den Einfachschichtintegraloperator den *hierarchischen Basis Vorkonditionierer* (HB) als

$$\mathbf{P}_{\text{HB}}^{-1} := \mathbf{1} D^{-1} \mathbf{1}^T + \sum_{\ell=0}^L \mathbf{J}^{\ell} \bar{\mathbf{H}}^{\ell} (\bar{\mathbf{D}}^{\ell})^{-1} (\bar{\mathbf{H}}^{\ell})^T (\mathbf{J}^{\ell})^T,$$

wobei $D = \| \mathbf{1} \|_{\mathfrak{W}}^2$ und $\bar{\mathbf{D}}^{\ell}$ die Galerkin-Matrix von \mathfrak{W} bezüglich der Basis von $\bar{\mathcal{X}}_{\ell}$ ist. Die Matrizen $\bar{\mathbf{H}}^{\ell}$ repräsentieren die Haar-Basisfunktionen in

$$\bar{\mathcal{Y}}_{\ell} = \text{span} \{ \chi_{\ell}^z : z \in \mathcal{N}_{\ell} \setminus \mathcal{N}_{\ell-1} \}$$

bezüglich der Basis von \mathcal{Y}_{ℓ} , siehe dazu auch die Definition von \mathbf{H}^{ℓ} und $\tilde{\mathbf{H}}^{\ell}$. Die vorkonditionierten Systeme bezeichnen wir mit $\mathbf{S}_{\text{HB}} = \mathbf{P}_{\text{HB}}^{-1} \mathbf{W}$ bzw. $\mathbf{S}_{\text{HB}} = \mathbf{P}_{\text{HB}}^{-1} \mathbf{V}$.

Zur Berechnung der Eigenwerte für $d = 2$, benutzen wir die MATLAB-Routine `condst`. Für $d = 3$ benutzen wir die *Power-Iteration* [GVL13, SK11] zur Bestimmung des größten Eigenwertes und die *inverse Power-Iteration* zur Bestimmung des kleinsten Eigenwertes. In beiden Fällen werden 20 Iterationsschritte ausgeführt.

Im Falle $d = 3$ ersetzen wir bei den Vorkonditionierern für den hypersingulären Operator alle vorkommenden Diagonalelemente $\| \eta_{\ell}^z \|_{\mathfrak{W}}^2$ durch $|\omega_{\ell}(z)|^{1/2}$. Die erarbeiteten Ergebnisse behalten ihre Gültigkeit wie wir gleich anführen werden. Für die Praxis ist das nützlich, wenn die verwendeten Programmpakete es nicht erlauben direkt auf Matrixeinträge zuzugreifen. Nach (6.11) gilt Äquivalenz $\| \eta_{\ell}^z \|_{\mathfrak{W}}^2 \simeq |\omega_{\ell}(z)|^{1/2}$. Anstelle der Projektionsoperatoren $\mathfrak{P}_{\ell}^z v = \langle v, \eta_{\ell}^z \rangle_{\mathfrak{W}} / \| \eta_{\ell}^z \|_{\mathfrak{W}}^2$ betrachten wir $\mathfrak{P}_{\ell,*}^z v := \langle v, \eta_{\ell}^z \rangle_{\mathfrak{W}} / |\omega_{\ell}(z)|^{1/2}$ und definieren

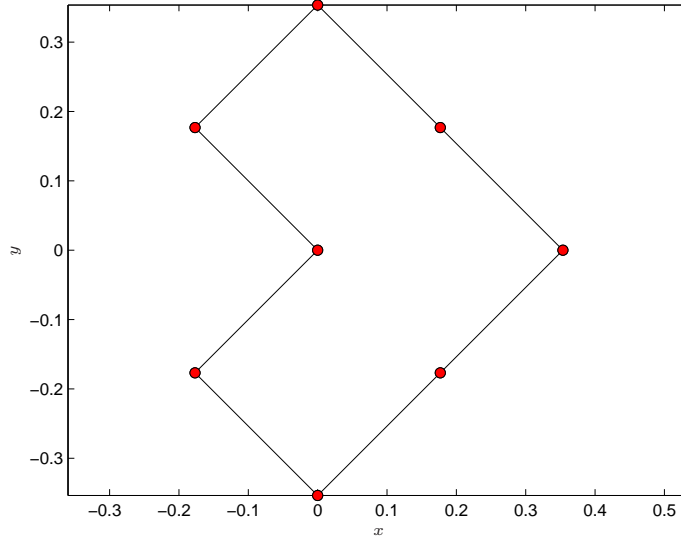


Abbildung 6.2: Rand eines L-förmigen Gebietes und Starttriangulierung \mathcal{T}_0 mit $\#\mathcal{T}_0 = 8$. Die roten Punkte visualisieren die Knoten der Triangulierung.

den Operator

$$\mathfrak{P}_{\text{LD},*} = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell} \mathfrak{P}_{\ell,*}^z.$$

Die Operatoren \mathfrak{P}_{LD} und $\mathfrak{P}_{\text{LD},*}$ sind äquivalent $\langle \mathfrak{P}_{\text{LD}}v, v \rangle_{\mathfrak{W}} \simeq \langle \mathfrak{P}_{\text{LD},*}v, v \rangle_{\mathfrak{W}}$, wie man durch Einsetzen in die Definitionen sieht. Somit gilt Proposition 6.20 auch für den Operator $\mathfrak{P}_{\text{LD},*}$. Das kann man auch für die anderen hier verwendeten Operatoren durchführen.

Details zur Implementierung von Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierern finden sich in diversen Lehrbüchern, z.B. [TW05]. Wir merken nur an, dass etwa die Einbettungsmatrizen \mathbf{I}^ℓ auch als

$$\mathbf{I}^\ell = \mathbf{I}_{L-1}^L \mathbf{I}_{L-2}^{L-1} \dots \mathbf{I}_\ell^{\ell+1}$$

dargestellt werden können, wobei die Matrizen $\mathbf{I}_\ell^{\ell+1}$ die Matrixform der kanonischen Einbettung von $\mathcal{X}_\ell \rightarrow \mathcal{X}_{\ell+1}$ repräsentieren. Diese Matrizen sind dünn-besetzt und können daher kostengünstig gespeichert werden. Die Matrizen $\tilde{\mathbf{I}}^\ell$ kann man auch darstellen als

$$\tilde{\mathbf{I}}^\ell = \mathbf{I}^\ell \tilde{\mathbf{T}}^\ell = \mathbf{I}_{L-1}^L \mathbf{I}_{L-2}^{L-1} \dots \mathbf{I}_\ell^{\ell+1} \tilde{\mathbf{T}}^\ell,$$

wobei $\tilde{\mathbf{T}}^\ell$ die kanonische Einbettung von $\tilde{\mathcal{X}}_\ell$ nach \mathcal{X}_ℓ repräsentiert. Gleiches gilt auch für die Matrizen \mathbf{J}^ℓ .

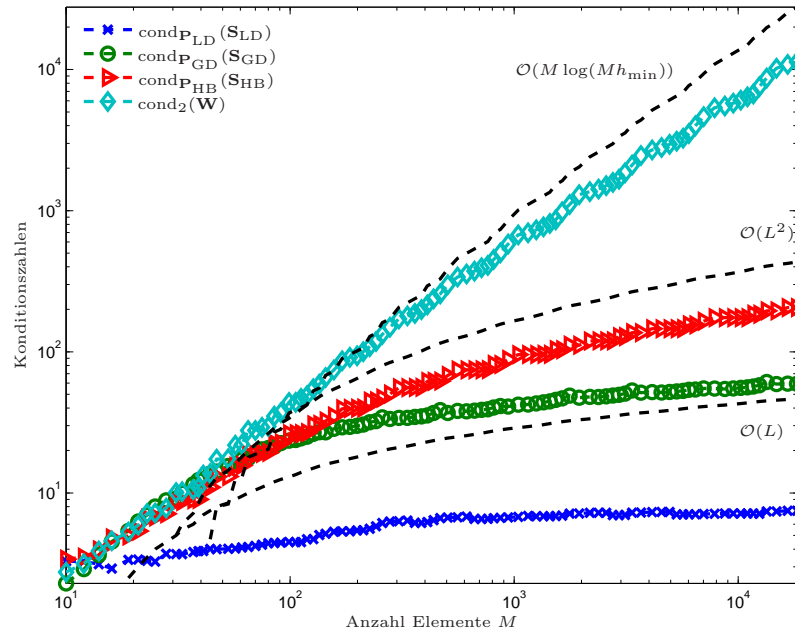


Abbildung 6.3: Konditionszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.1 mit geschlossenem Rand.

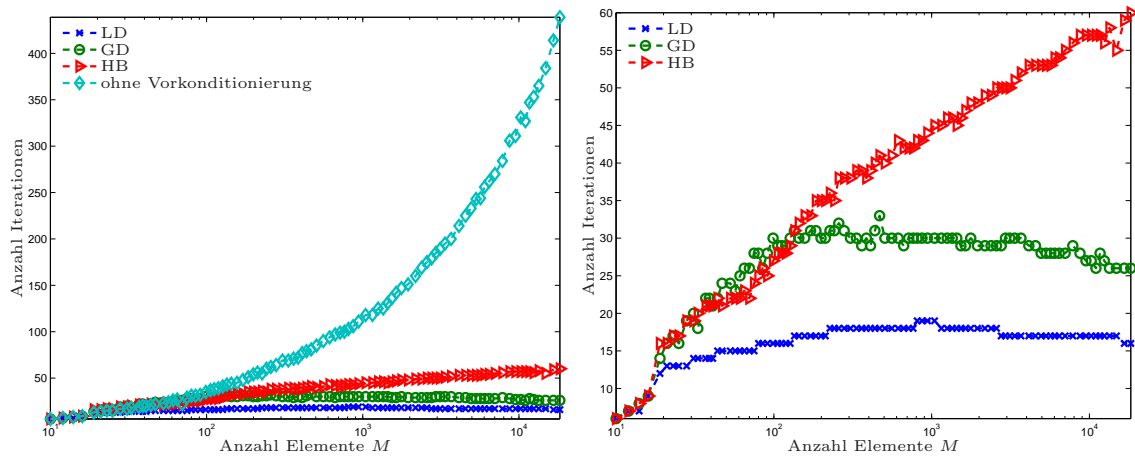


Abbildung 6.4: Iterationszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.1 mit geschlossenem Rand.

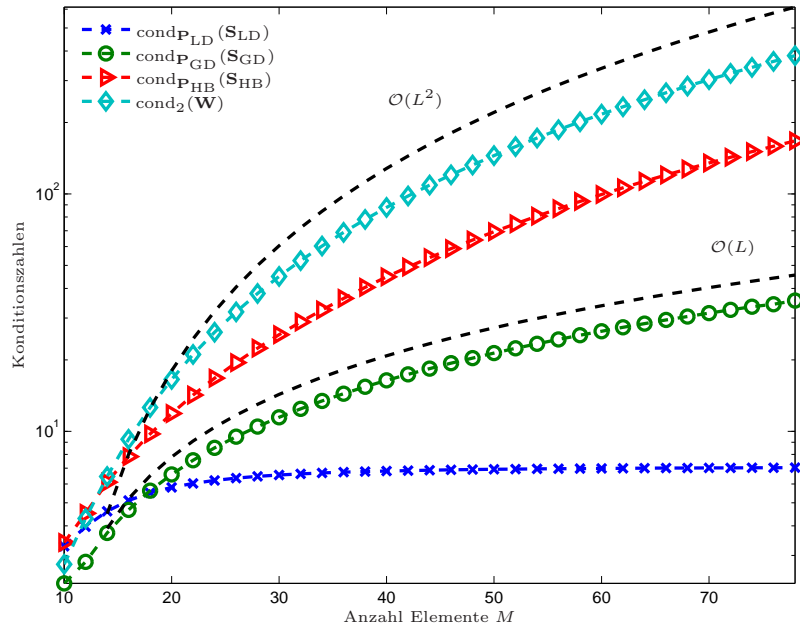


Abbildung 6.5: Konditionszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.1 mit künstlicher Verfeinerung.

L	M_L	$h_{\max,L}$	$h_{\min,L}$	$\lambda_{\max}(W)$	$\lambda_{\min}(W)$	$\lambda_{\max}(S_{LD})$	$\lambda_{\min}(S_{LD})$	$\lambda_{\max}(S_{GD})$	$\lambda_{\min}(S_{GD})$
1	10	0.25	1.25e-01	0.62	2.24e-01	2.12	0.65	2.30	1.01
2	12	0.25	6.25e-02	0.61	1.42e-01	2.63	0.66	3.46	1.23
3	14	0.25	3.12e-02	0.61	9.38e-02	3.07	0.67	4.64	1.24
4	16	0.25	1.56e-02	0.61	6.56e-02	3.41	0.67	5.83	1.25
5	18	0.25	7.81e-03	0.61	4.81e-02	3.67	0.67	7.02	1.25
6	20	0.25	3.91e-03	0.61	3.67e-02	3.87	0.67	8.22	1.25
7	22	0.25	1.95e-03	0.61	2.88e-02	4.02	0.67	9.43	1.25
8	24	0.25	9.77e-04	0.61	2.32e-02	4.14	0.67	10.65	1.25
9	26	0.25	4.88e-04	0.61	1.91e-02	4.23	0.67	11.87	1.25
10	28	0.25	2.44e-04	0.61	1.59e-02	4.30	0.67	13.09	1.25
11	30	0.25	1.22e-04	0.61	1.35e-02	4.36	0.67	14.31	1.25
12	32	0.25	6.10e-05	0.61	1.16e-02	4.41	0.67	15.54	1.25
13	34	0.25	3.05e-05	0.61	1.01e-02	4.45	0.67	16.77	1.25
14	36	0.25	1.53e-05	0.61	8.81e-03	4.48	0.67	18.00	1.25
15	38	0.25	7.63e-06	0.61	7.78e-03	4.51	0.67	19.24	1.25
16	40	0.25	3.81e-06	0.61	6.92e-03	4.53	0.67	20.47	1.25
17	42	0.25	1.91e-06	0.61	6.19e-03	4.55	0.67	21.71	1.25
18	44	0.25	9.54e-07	0.61	5.57e-03	4.57	0.67	22.95	1.25
19	46	0.25	4.77e-07	0.61	5.04e-03	4.58	0.67	24.19	1.25
20	48	0.25	2.38e-07	0.61	4.59e-03	4.60	0.67	25.43	1.25
21	50	0.25	1.19e-07	0.61	4.19e-03	4.61	0.67	26.67	1.25
22	52	0.25	5.96e-08	0.61	3.84e-03	4.62	0.67	27.94	1.25
23	54	0.25	2.98e-08	0.61	3.53e-03	4.63	0.67	29.20	1.25
24	56	0.25	1.49e-08	0.61	3.26e-03	4.63	0.67	30.46	1.25
25	58	0.25	7.45e-09	0.61	3.02e-03	4.64	0.67	31.72	1.25
26	60	0.25	3.73e-09	0.61	2.80e-03	4.65	0.67	32.99	1.25
27	62	0.25	1.86e-09	0.61	2.61e-03	4.65	0.67	34.25	1.25
28	64	0.25	9.31e-10	0.61	2.43e-03	4.66	0.67	35.52	1.25
29	66	0.25	4.66e-10	0.61	2.28e-03	4.66	0.67	36.78	1.25
30	68	0.25	2.33e-10	0.61	2.13e-03	4.67	0.67	38.05	1.25
31	70	0.25	1.16e-10	0.61	2.00e-03	4.67	0.67	39.31	1.25
32	72	0.25	5.82e-11	0.61	1.89e-03	4.67	0.67	40.58	1.25
33	74	0.25	2.91e-11	0.61	1.78e-03	4.68	0.67	41.84	1.25
34	76	0.25	1.46e-11	0.61	1.68e-03	4.68	0.67	43.11	1.25
35	78	0.25	7.28e-12	0.61	1.59e-03	4.68	0.67	44.38	1.25

Tabelle 6.1: Vergleich der Eigenwerte der Matrizen W , $S_{LD} = P_{LD}^{-1}W$, und $S_{GD} = P_{GD}^{-1}W$ für das Experiment aus Abschnitt 6.4.1 mit künstlicher Verfeinerung.

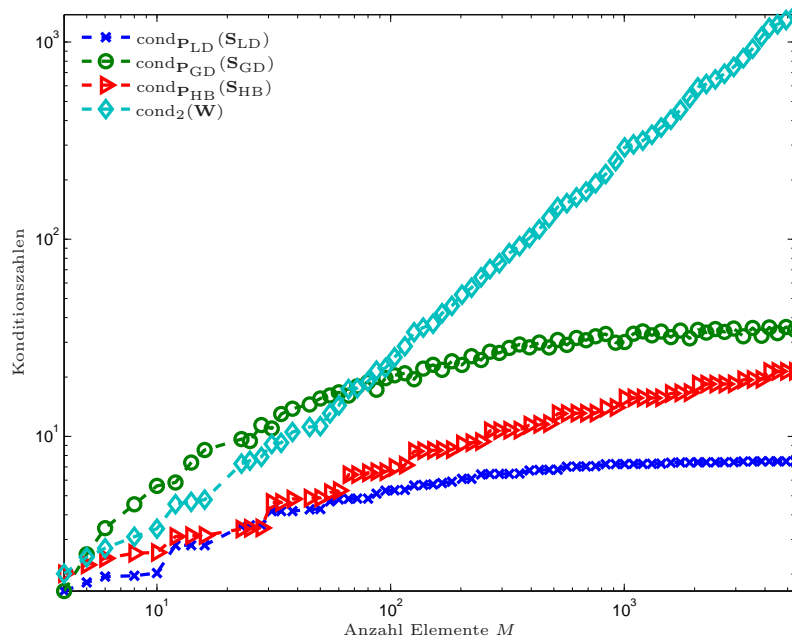


Abbildung 6.6: Konditionszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.1 mit offenem Rand.

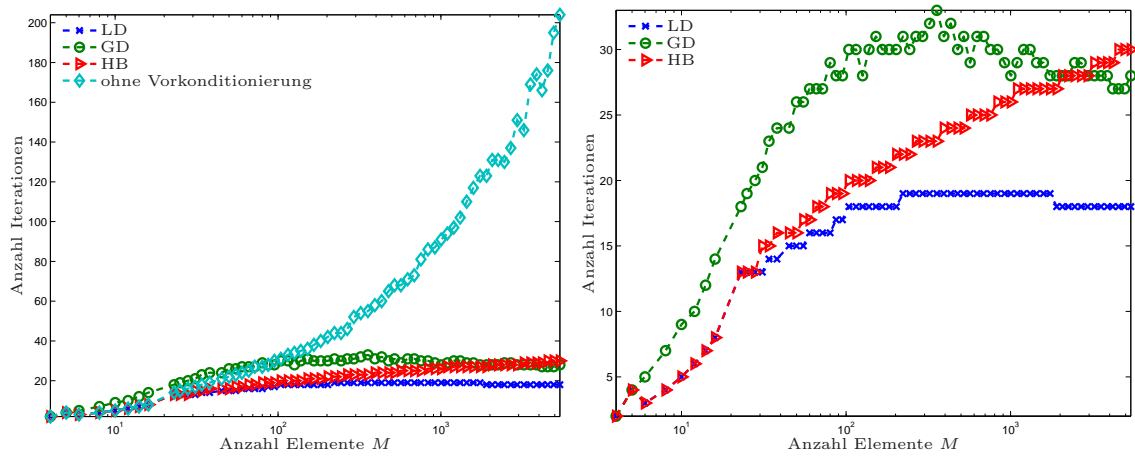


Abbildung 6.7: Iterationszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.1 mit offenem Rand.

6.4.1 Hypersinguläre Gleichungen in 2D

Geschlossener Rand

Sei Ω ein L-förmiges Gebiet mit geschlossenem Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Die Starttriangulierung \mathcal{T}_0 mit $M_0 = \#\mathcal{T}_0 = 8$ ist in Abbildung 6.2 skizziert. Wir betrachten die hypersinguläre Gleichung

$$\langle u, v \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle (\frac{1}{2} - \mathfrak{K}')\phi, v \rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } v \in H^{1/2}(\Gamma) \quad (6.81)$$

Aufgrund der Eigenschaften der Randintegraloperatoren folgt, dass diese Gleichung äquivalent zu einem Neumann-Problem im Gebiet Ω ist. Wir schreiben eine exakte Lösung vor: Sei

$$w(x, y) = r^{2/3} \cos(2/3\varphi) \quad (x, y) \in \Omega, \quad (6.82)$$

wobei (r, φ) die Polarkoordinaten von (x, y) sind. Mit der Normalenableitung $\phi := \gamma_1 w$ definieren wir die exakte Lösung u als — bis auf Konstanten — Spur von w , d.h. $u := \gamma_0 w - \langle \gamma_0 w, 1 \rangle_{\Gamma} / |\Gamma|$. Wir bemerken, dass die Lösung eine Singularität im Punkt $(0, 0)$ aufweist.

Abbildung 6.3 visualisiert die Konditionszahlen der vorkonditionierten Matrizen $\mathbf{S}_{\text{LD}} = \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{W}$, $\mathbf{S}_{\text{GD}} = \mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} \mathbf{W}$, und $\mathbf{S}_{\text{HB}} = \mathbf{P}_{\text{HB}}^{-1} \mathbf{W}$ als auch der nicht-vorkonditionierten Matrix \mathbf{W} auf der Folge $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_L$ der adaptiv generierten Triangulierungen über der Anzahl der Elemente. Wir beobachten, dass die Konditionszahlen von \mathbf{S}_{LD} annähernd konstant bleiben, während die Konditionszahlen von \mathbf{S}_{GD} und \mathbf{S}_{HB} mit der Anzahl der Level wachsen. Dies sieht man auch anhand der Iterationszahlen in Abbildung 6.4. Zum Lösen der auftretenden Gleichungssysteme verwenden wir den GMRES Algorithmus.

Künstliche Verfeinerung

Sei Γ wieder der Rand eines L-förmigen Gebietes mit der in Abbildung 6.2 gegebenen Starttriangulierung \mathcal{T}_0 . Man beachte, dass jedes Element den Durchmesser $h_0 = 1/4$ besitzt. Wir wählen nun eine künstliche Verfeinerung: Die Triangulierung \mathcal{T}_ℓ entsteht aus der Triangulierung $\mathcal{T}_{\ell-1}$ indem immer nur jene zwei Elemente bisektiert werden, welche den Knoten $z = (0, 0)$ als Eckpunkt besitzen. Offensichtlich führt dies zu einer starken Verfeinerung hin zum Punkt $(0, 0)$. Für die minimale Netzweite gilt dann $h_{\min, L} = h_0 2^{-L}$ und für die maximale Netzweite $h_{\max, L} = h_0$. Man beachte, dass obwohl eine starke lokale Verfeinerung vorliegt, alle Netze uniform γ -formregulär sind. Abbildung 6.5 zeigt die Konditionszahlen der vorkonditionierten Gleichungssysteme als auch jene der nicht-vorkonditionierten Systeme. Man kann sehr gut erkennen, dass der lokale Multilevel Vorkonditionierer optimal ist, während beim globalen Multilevel Vorkonditionierer und beim hierarchische Basis Vorkonditionierer die Konditionszahlen von L und L^2 abhängen. Tabelle 6.1 zeigt die maximalen und minimalen Eigenwerte der Matrizen \mathbf{W} , \mathbf{S}_{LD} , und \mathbf{S}_{GD} . Die Zahlen passen mit den Aussagen von Satz 6.7 als auch Satz 6.9 perfekt überein, d.h. man sieht, dass der minimale und maximale Eigenwert von \mathbf{S}_{LD} und der minimale Eigenwert von \mathbf{S}_{GD} beschränkt sind, während der maximale Eigenwert von \mathbf{S}_{GD} linear in der Anzahl der Level L wächst.

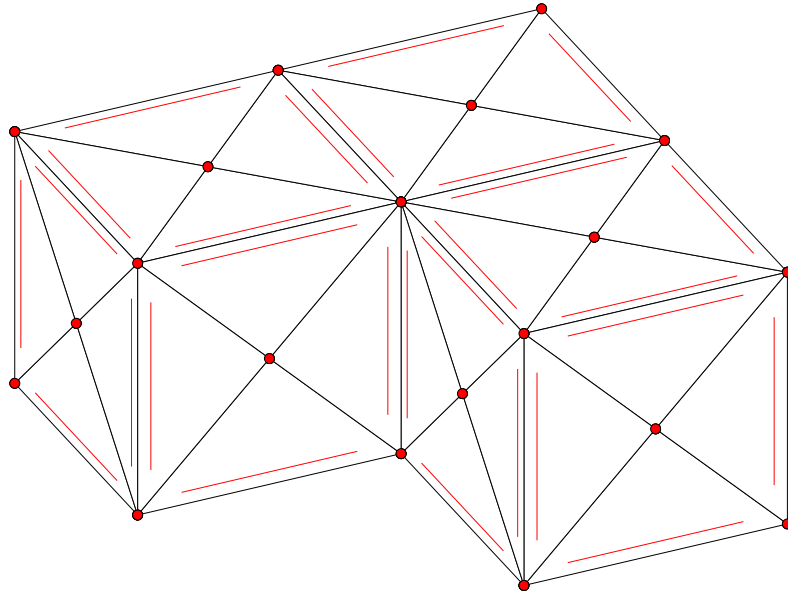


Abbildung 6.8: Rand eines L-Blocks mit Starttriangulierung \mathcal{T}_0 mit $M_0 = \#\mathcal{T}_0 = 56$ und $N_0 = \#\mathcal{N}_\ell = 30$ Knoten. Die roten Linien kennzeichnen die Referenzkanten, während die roten Punkte, die Knoten der Triangulierung visualisieren.

Offener Rand

Sei $\Gamma = (-1, 1) \times \{0\}$ ein Schlitz. Wir betrachten die hypersinguläre Gleichung

$$\langle u, v \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle f, v \rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } v \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma),$$

und schreiben die exakte Lösung $u(x, 0) = 2\sqrt{1-x^2}$ mit Datum $f(x, 0) = 1$ vor. Wir bemerken, dass der Einsatz von adaptiven Methoden Sinn macht, da bei offenen Randstücken die Lösungen üblicherweise Singularitäten an den Endpunkten — in unserem Fall die Punkte $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ — auftreten und daher die Verwendung von uniformer Verfeinerung zu reduzierter Konvergenzordnung führt.

In Abbildung 6.6 sind die Konditionszahlen der vorkonditionierten Matrizen und der nicht-vorkonditionierten Matrix geplottet, während in Abbildung 6.7 die Iterationszahlen bei Verwendung des GMRES-Algorithmus geplottet sind. Wiederum beobachten wir Optimalität des lokalen Multilevel Vorkonditionierers im Hinblick auf beschränkte Konditions- und Iterationszahlen.

6.4.2 Hypersinguläre Gleichungen in 3D

Geschlossener Rand

Sei $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2 \times (0, 1)$ mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Die Starttriangulierung \mathcal{T}_0 von Γ ist in Abbildung 6.8 skizziert. Wir betrachten wieder die hypersinguläre Integralgleichung (6.81)

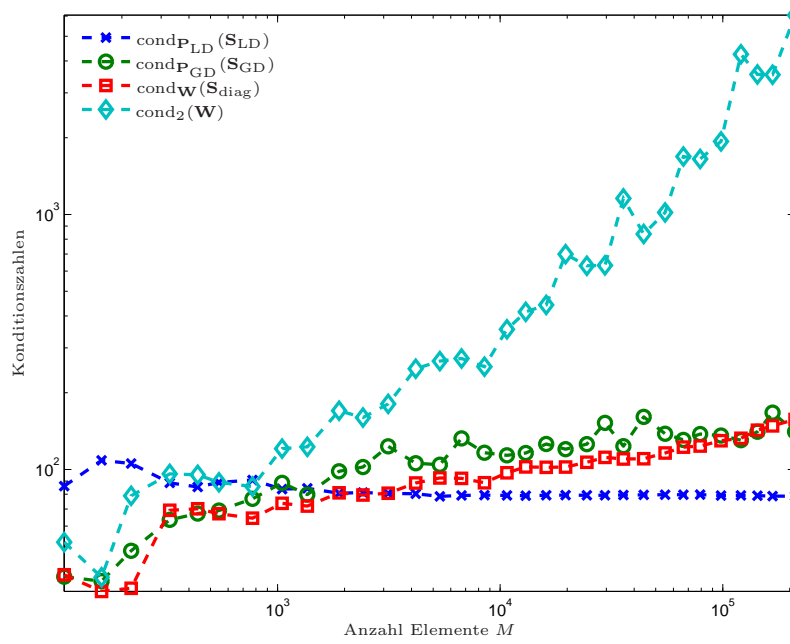


Abbildung 6.9: Konditionszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.2 mit geschlossenem Rand.

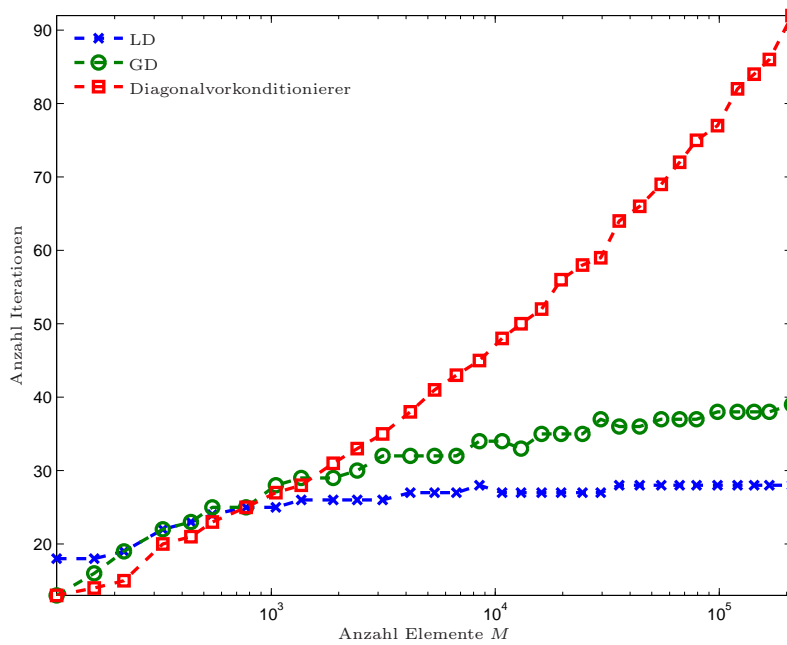


Abbildung 6.10: Iterationszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.2 mit geschlossenem Rand.

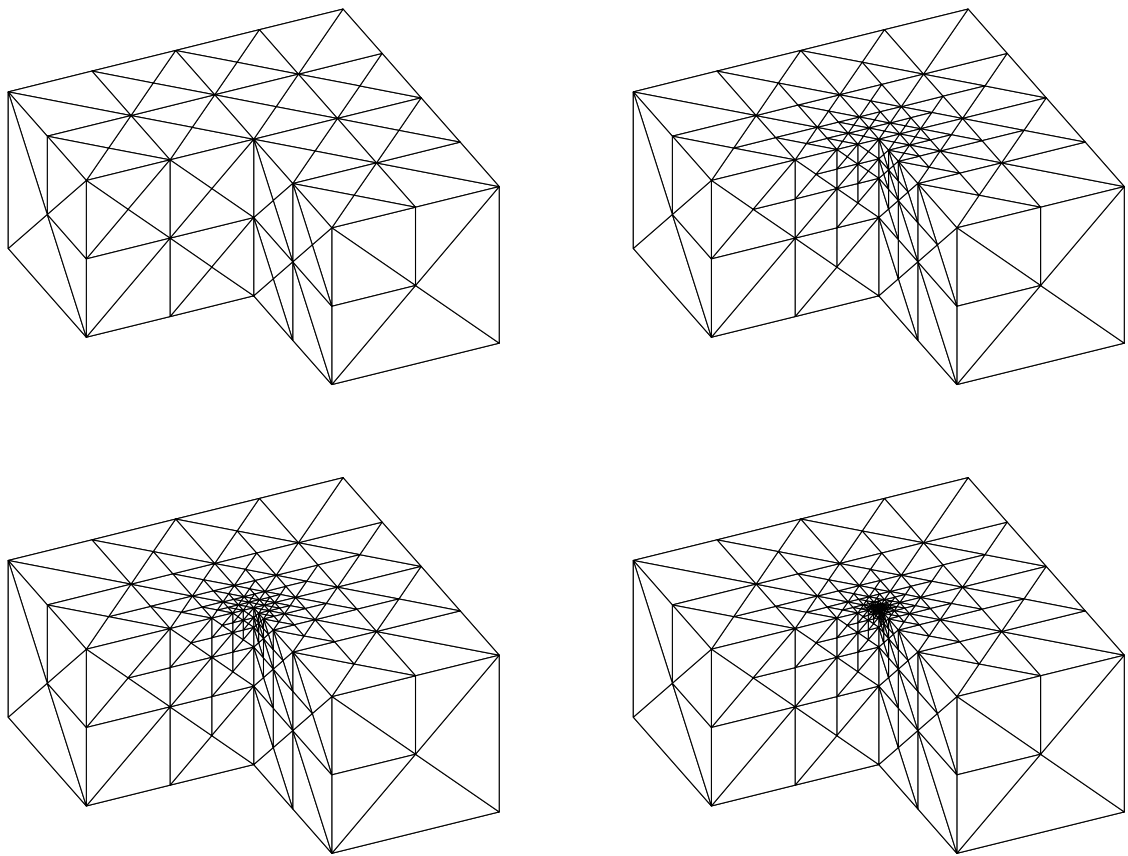


Abbildung 6.11: Verschiedene Triangulierungen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.2 mit künstlicher Verfeinerung.

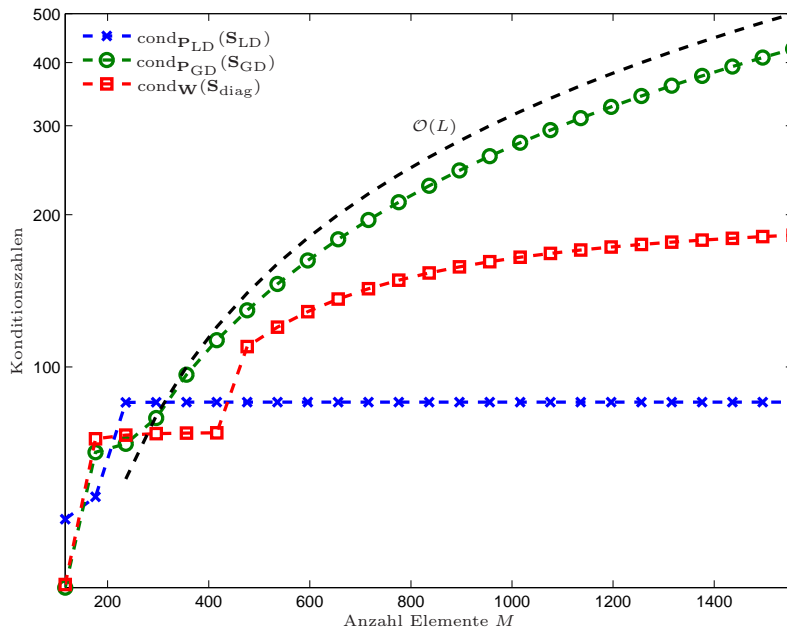


Abbildung 6.12: Konditionszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.2 mit künstlicher Verfeinerung.

L	M_L	$h_{\max,L}$	$h_{\min,L}$	$\lambda_{\max}(\mathbf{W})$	$\lambda_{\min}(\mathbf{W})$	$\lambda_{\max}(\mathbf{S}_{LD})$	$\lambda_{\min}(\mathbf{S}_{LD})$	$\lambda_{\max}(\mathbf{S}_{GD})$	$\lambda_{\min}(\mathbf{S}_{GD})$
1	116	1.00	5.00e-01	4.57	8.83e-02	19.63	0.39	27.30	0.75
2	176	1.00	2.50e-01	4.38	3.71e-02	21.11	0.38	42.07	0.62
3	236	1.00	1.25e-01	4.36	1.41e-02	21.29	0.25	56.76	0.81
4	296	1.00	6.25e-02	4.36	6.02e-03	21.32	0.25	71.46	0.90
5	356	1.00	3.12e-02	4.36	2.76e-03	21.32	0.25	86.16	0.89
6	416	1.00	1.56e-02	4.36	1.32e-03	21.32	0.25	100.86	0.89
7	476	1.00	7.81e-03	4.36	6.44e-04	21.32	0.25	115.56	0.89
8	536	1.00	3.91e-03	4.36	3.18e-04	21.32	0.25	130.26	0.89
9	596	1.00	1.95e-03	4.36	1.58e-04	21.32	0.25	144.96	0.89
10	656	1.00	9.77e-04	4.36	7.87e-05	21.32	0.25	159.66	0.89
11	716	1.00	4.88e-04	4.36	3.93e-05	21.32	0.25	174.36	0.89
12	776	1.00	2.44e-04	4.36	1.96e-05	21.32	0.25	189.07	0.89
13	836	1.00	1.22e-04	4.36	9.81e-06	21.32	0.25	203.77	0.89
14	896	1.00	6.10e-05	4.36	4.90e-06	21.32	0.25	218.47	0.89
15	956	1.00	3.05e-05	4.36	2.45e-06	21.32	0.25	233.18	0.89
16	1016	1.00	1.53e-05	4.36	1.23e-06	21.32	0.25	247.88	0.89
17	1076	1.00	7.63e-06	4.36	6.13e-07	21.32	0.25	262.58	0.89
18	1136	1.00	3.81e-06	4.36	3.06e-07	21.32	0.25	277.29	0.89
19	1196	1.00	1.91e-06	4.36	1.53e-07	21.32	0.25	291.99	0.89
20	1256	1.00	9.54e-07	4.36	7.66e-08	21.32	0.25	306.69	0.89
21	1316	1.00	4.77e-07	4.36	3.83e-08	21.32	0.25	321.40	0.89
22	1376	1.00	2.38e-07	4.36	1.91e-08	21.32	0.25	336.10	0.89
23	1436	1.00	1.19e-07	4.36	9.57e-09	21.32	0.25	350.80	0.89
24	1496	1.00	5.96e-08	4.36	4.79e-09	21.32	0.25	365.51	0.89
25	1556	1.00	2.98e-08	4.36	2.39e-09	21.32	0.25	380.21	0.89

Tabelle 6.2: Vergleich der Eigenwerte der Matrizen \mathbf{W} , $\mathbf{S}_{LD} = \mathbf{P}_{LD}^{-1}\mathbf{W}$, und $\mathbf{S}_{GD} = \mathbf{P}_{GD}^{-1}\mathbf{W}$ für das Experiment aus Abschnitt 6.4.2 mit künstlicher Verfeinerung.

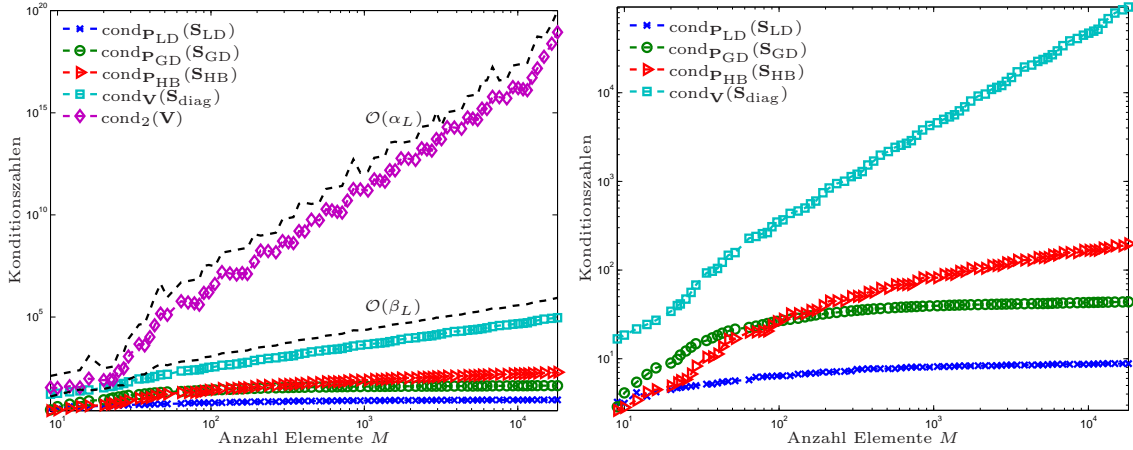


Abbildung 6.13: Konditionszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.3 mit geschlossenem Rand. Die Größen α_L , β_L sind in (6.84) definiert.

und schreiben eine exakte Lösung vor: Sei

$$w(x, y, z) = r^{2/3} \cos(2/3\varphi) \quad \text{für } (x, y, z) \in \Omega,$$

wobei (r, φ, z) die Zylinderkoordinaten von (x, y, z) sind. Mit der Normalenableitung $\phi := \gamma_1 w$ ergibt sich die exakte Lösung von (6.81) zu $u = \gamma_0 w - \langle \gamma_0 w, 1 \rangle_{\Gamma} / |\Gamma|$. Man beachte, dass die Lösung singularär an den Punkten $(x, y, z) = (0, 0, z)$ mit $z \in (0, 1)$ ist.

In Abbildung 6.9 sind die Konditionszahlen der vorkonditionierten Matrizen \mathbf{S}_{LD} , \mathbf{S}_{GD} , und \mathbf{S}_{diag} als auch die Konditionszahlen der nicht-vorkonditionierten Matrizen \mathbf{W} geplottet, während Abbildung 6.10 die Anzahl der benötigten Iterationen bei Verwendung des GMRES-Algorithmus zeigt. Wir beobachten, dass der vorgestellte lokale Multilevel Vorkonditionierer auf optimale Ergebnisse führt.

Künstliche Verfeinerung

Sei $\Omega = (-1, 1)^2 \setminus [0, 1)^2 \times (0, 1)$ mit Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Die Starttriangulierung \mathcal{T}_0 von Γ ist in Abbildung 6.8 skizziert. Wir betrachten eine künstliche Verfeinerung: In jeder Triangulierung $\mathcal{T}_{\ell-1}$ werden nur jene Elemente zur Verfeinerung markiert welche den Punkt $(0, 0, 0)$ als Knoten besitzen. Dies liefert, wie aus Abbildung 6.11 ersichtlich ist, stark lokal verfeinerte Triangulierungen.

Die Konditionszahlen aus Abbildung 6.9 belegen wiederum, dass der lokale Multilevel Vorkonditionierer auf optimale Konditionszahlen führt, während der globale Multilevel Vorkonditionierer von der Anzahl der Level L abhängt. Tabelle 6.2 verdeutlicht das nochmal anhand dem Vergleich der maximalen und minimalen Eigenwerte. Dort kann man auch die theoretischen Aussagen von Satz 6.7 und Satz 6.9 ablesen.

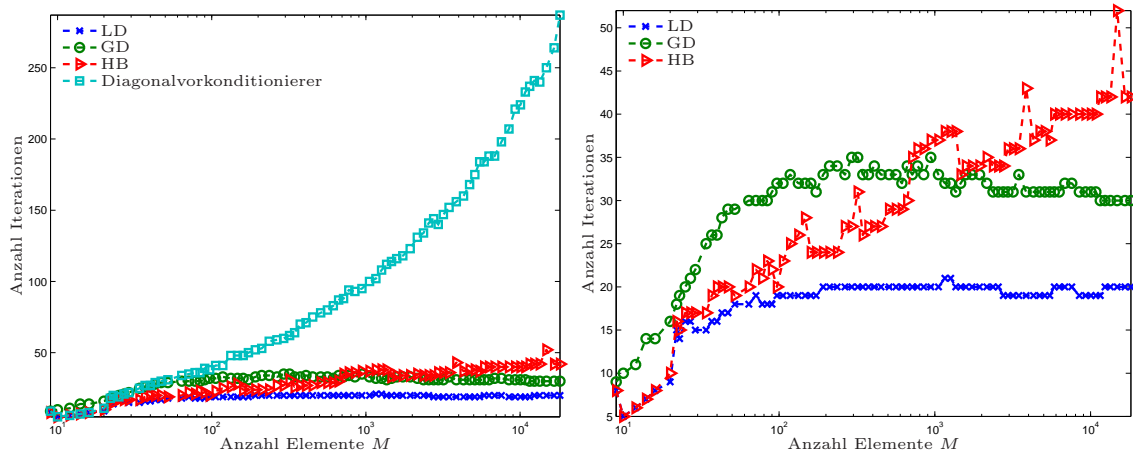


Abbildung 6.14: Iterationszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.3 mit geschlossenem Rand.

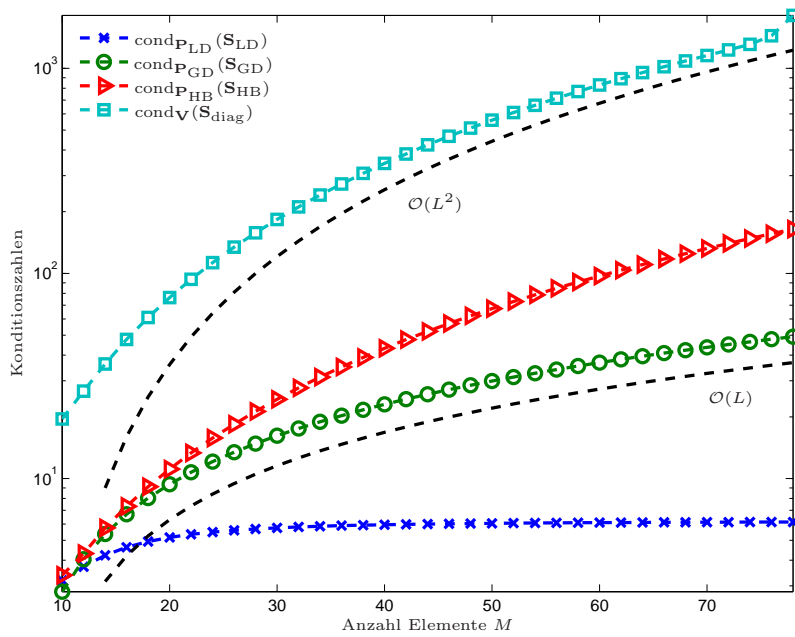


Abbildung 6.15: Konditionszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.3 mit künstlicher Verfeinerung.

6 Vorkonditionierung von adaptiver BEM

L	M_L	$h_{\max,L}$	$h_{\min,L}$	$\lambda_{\max}(\mathbf{V})$	$\lambda_{\min}(\mathbf{V})$	$\lambda_{\max}(\mathbf{S}_{LD})$	$\lambda_{\min}(\mathbf{S}_{LD})$	$\lambda_{\max}(\mathbf{S}_{GD})$	$\lambda_{\min}(\mathbf{S}_{GD})$
1	10	0.25	1.25e-01	0.09	2.16e-03	2.33	0.73	2.60	0.92
2	12	0.25	6.25e-02	0.09	5.44e-04	2.82	0.76	3.88	0.96
3	14	0.25	3.12e-02	0.09	1.36e-04	3.22	0.76	5.19	0.97
4	16	0.25	1.56e-02	0.09	3.40e-05	3.53	0.76	6.50	0.97
5	18	0.25	7.81e-03	0.09	8.49e-06	3.76	0.76	7.82	0.97
6	20	0.25	3.91e-03	0.09	2.12e-06	3.94	0.76	9.14	0.97
7	22	0.25	1.95e-03	0.09	5.31e-07	4.08	0.76	10.46	0.97
8	24	0.25	9.77e-04	0.09	1.33e-07	4.18	0.76	11.79	0.98
9	26	0.25	4.88e-04	0.09	3.32e-08	4.27	0.76	13.12	0.98
10	28	0.25	2.44e-04	0.09	8.29e-09	4.33	0.76	14.45	0.98
11	30	0.25	1.22e-04	0.09	2.07e-09	4.39	0.76	15.79	0.98
12	32	0.25	6.10e-05	0.09	5.18e-10	4.43	0.76	17.13	0.98
13	34	0.25	3.05e-05	0.09	1.30e-10	4.47	0.76	18.46	0.98
14	36	0.25	1.53e-05	0.09	3.24e-11	4.50	0.76	19.80	0.98
15	38	0.25	7.63e-06	0.09	8.10e-12	4.52	0.76	21.15	0.98
16	40	0.25	3.81e-06	0.09	2.03e-12	4.54	0.76	22.49	0.98
17	42	0.25	1.91e-06	0.09	5.06e-13	4.56	0.76	23.83	0.98
18	44	0.25	9.54e-07	0.09	1.27e-13	4.58	0.76	25.18	0.98
19	46	0.25	4.77e-07	0.09	3.16e-14	4.59	0.76	26.52	0.98
20	48	0.25	2.38e-07	0.09	7.91e-15	4.60	0.76	27.87	0.98
21	50	0.25	1.19e-07	0.09	1.98e-15	4.61	0.76	29.21	0.98
22	52	0.25	5.96e-08	0.09	4.94e-16	4.62	0.76	30.56	0.98
23	54	0.25	2.98e-08	0.09	1.24e-16	4.63	0.76	31.91	0.98
24	56	0.25	1.49e-08	0.09	3.09e-17	4.64	0.76	33.26	0.98
25	58	0.25	7.45e-09	0.09	7.73e-18	4.64	0.76	34.61	0.98
26	60	0.25	3.73e-09	0.09	1.93e-18	4.65	0.76	35.96	0.98
27	62	0.25	1.86e-09	0.09	4.83e-19	4.66	0.76	37.31	0.98
28	64	0.25	9.31e-10	0.09	1.21e-19	4.66	0.76	38.66	0.98
29	66	0.25	4.66e-10	0.09	3.02e-20	4.67	0.76	40.01	0.98
30	68	0.25	2.33e-10	0.09	7.54e-21	4.67	0.76	41.36	0.98
31	70	0.25	1.16e-10	0.09	1.89e-21	4.67	0.76	42.71	0.98
32	72	0.25	5.82e-11	0.09	4.72e-22	4.68	0.76	44.06	0.98
33	74	0.25	2.91e-11	0.09	1.18e-22	4.68	0.76	45.41	0.98
34	76	0.25	1.46e-11	0.09	2.95e-23	4.68	0.76	46.76	0.98
35	78	0.25	7.28e-12	0.09	7.37e-24	4.68	0.76	48.11	0.98

Tabelle 6.3: Vergleich der Eigenwerte der Matrizen \mathbf{V} , $\mathbf{S}_{LD} = \mathbf{P}_{LD}^{-1}\mathbf{V}$, und $\mathbf{S}_{GD} = \mathbf{P}_{GD}^{-1}\mathbf{V}$ für das Experiment aus Abschnitt 6.4.3 mit künstlicher Verfeinerung.

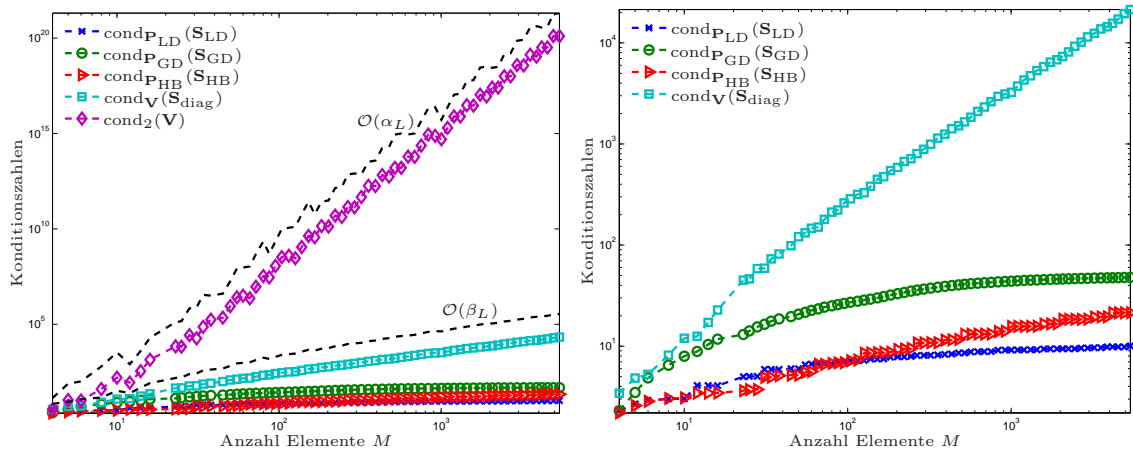


Abbildung 6.16: Konditionszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.3 mit offenem Rand. Die Größen α_L , β_L sind in (6.84) definiert.

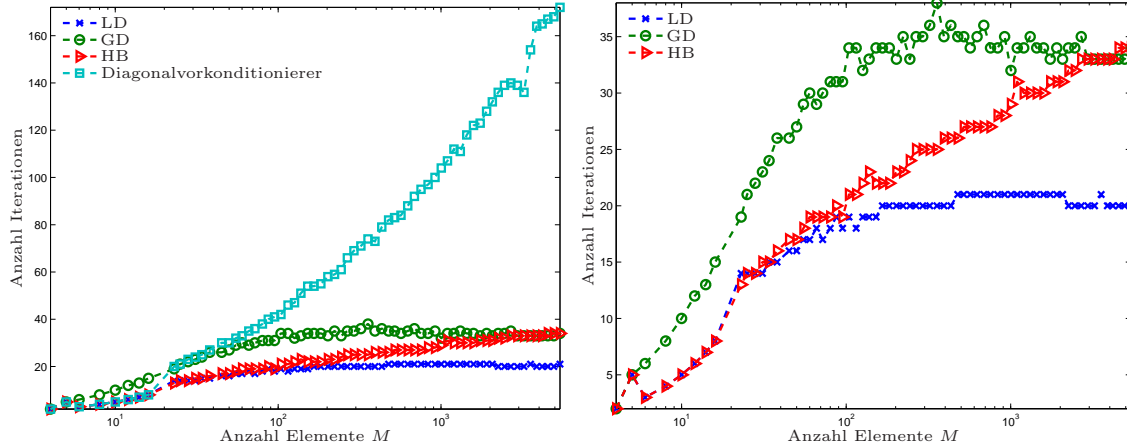


Abbildung 6.17: Iterationszahlen für das Experiment aus Abschnitt 6.4.3 mit offenem Rand.

6.4.3 Schwach-singuläre Gleichungen in 2D

Geschlossener Rand

Sei Γ der Rand eines L-förmigen Gebietes Ω mit der in Abbildung 6.2 skizzierten Starttriangulierung \mathcal{T}_0 mit $M_0 = \#\mathcal{T}_0 = 8$ Elementen. Wir betrachten die schwach-singuläre Gleichung: Für $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, finde $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathfrak{W}} = \langle \psi, (\tfrac{1}{2} + \mathfrak{K})g \rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } \psi \in H^{-1/2}(\Gamma). \quad (6.83)$$

Dieses Problem ist äquivalent zu einem Dirichlet-Problem im Gebiet Ω . Wir schreiben die exakte Lösung vor: Sei

$$w(x, y) = r^{2/3} \cos(2/3\varphi) \quad \text{für } (x, y) \in \Omega,$$

wobei (r, φ) die Polarkoordinaten von (x, y) sind. Wir definieren $g := \gamma_0 w$, dann ist die exakte Lösung von (6.83) gegeben als die Normalenableitung $\phi := \gamma_1 w$. Man beachte, dass die Funktionen in der einspringenden Ecke singulär sind.

Abbildung 6.13 zeigt die Konditionszahlen der vorkonditionierten Matrizen $\mathbf{S}_{\text{LD}} = \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \mathbf{V}$, $\mathbf{S}_{\text{GD}} = \mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} \mathbf{V}$, $\mathbf{S}_{\text{HB}} = \mathbf{P}_{\text{HB}}^{-1} \mathbf{V}$, und $\mathbf{S}_{\text{diag}} = \mathbf{P}_{\text{diag}}^{-1} \mathbf{V}$ als auch jene der nicht-vorkonditionierten Matrizen \mathbf{V} . Die Größen α_L und β_L sind dabei Abschätzungen für die Konditionszahlen

$$\text{cond}_2(\mathbf{V}) \lesssim M_L \left(\frac{h_{\max,L}}{h_{\min,L}} \right)^2 (1 + |\log(M_L h_{\max,L})|) =: \alpha_L, \quad (6.84)$$

$$\text{cond}_{\mathbf{V}}(\mathbf{S}_{\text{diag}}) \lesssim M_L (1 + |\log(M_L h_{\min,L})|) \frac{1 + |\log(h_{\min,L})|}{1 + |\log(h_{\max,L})|} =: \beta_L. \quad (6.85)$$

Die Iterationszahlen bei Verwendung des CG-Algorithmus sind in Abbildung 6.14 angeführt.

Künstliche Verfeinerung

Sei Γ wieder der Rand eines L-förmigen Gebietes mit der in Abbildung 6.2 gegebenen Starttriangulierung \mathcal{T}_0 . Man beachte, dass jedes Element den Durchmesser $h_0 = 1/4$ besitzt. Wir wählen nun eine künstliche Verfeinerung: Die Triangulierung \mathcal{T}_ℓ entsteht aus der Triangulierung $\mathcal{T}_{\ell-1}$ indem immer nur jene zwei Elemente bisektiert werden, welche den Knoten $z = (0, 0)$ als Eckpunkt besitzen. Offensichtlich führt dies zu einer starken Verfeinerung hin zum Punkt $(0, 0)$. Für die minimale Netzweite gilt dann $h_{\min, L} = h_0 2^{-L}$ und für die maximale Netzweite $h_{\max, L} = h_0$. Man beachte, dass obwohl eine starke lokale Verfeinerung vorliegt, alle Netze uniform γ -formregulär sind.

Abbildung 6.15 zeigt die Konditionszahlen der vorkonditionierten Gleichungssysteme. Man kann sehr gut erkennen, dass der lokale Multilevel Vorkonditionierer optimal ist, während beim globalen Multilevel Vorkonditionierer, beim hierarchischen Basis Vorkonditionierer, und beim Diagonalvorkonditionierer die Konditionszahlen von der Anzahl der Level abhängen.

Tabelle 6.3 zeigt die maximalen und minimalen Eigenwerte der Matrizen \mathbf{V} , \mathbf{S}_{LD} , und \mathbf{S}_{GD} . Die Zahlen passen mit den Aussagen von Satz 6.21 als auch Satz 6.23 perfekt überein, d.h. man sieht, dass der minimale und maximale Eigenwert von \mathbf{S}_{LD} und der minimale Eigenwert von \mathbf{S}_{GD} beschränkt sind, während der maximale Eigenwert von \mathbf{S}_{GD} linear in der Anzahl der Level L wächst.

Offener Rand

Sei $\Gamma = (-1, 1) \times \{0\}$. ein offenes Randstück. Wir betrachten die schwach-singuläre Gleichung

$$\langle \phi, \psi \rangle_{\mathfrak{B}} = \langle \psi, f \rangle_{\Gamma} \quad \text{für alle } \psi \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

mit der exakten Lösung $\phi(x, 0) = 2x/\sqrt{1-x^2}$ und Datum $f(x, 0) = x$. Man beachte, dass ϕ singulär an den Endpunkten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ ist.

Abbildung 6.16 zeigt die Konditionszahlen der vorkonditionierten und nicht-vorkonditionierten Matrizen, während die Iterationszahlen bei Verwendung des CG-Algorithmus in Abbildung 6.14 gegeben sind.

7 Vorkonditionierung von FEM-BEM Kopplungen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit der Vorkonditionierung der symmetrischen Kopplung und der beiden nicht-symmetrischen FEM-BEM Kopplungen. Das Hauptaugenmerk liegt dabei in der Konstruktion von *optimalen* Vorkonditionierern auf adaptiv generierten Triangulierungen. Unter Optimalität verstehen wir, dass die Konditionszahl der vorkonditionierten Systemmatrix unabhängig von der Netzweite und der Anzahl der Elemente ist.

Zur symmetrischen Kopplung existieren bereits viele Arbeiten, welche aber hauptsächlich quasi-uniforme Netze behandeln, z.B. [CKL98, FS09, HPPS03, HMS99, HS98, KS02, MS98] und darin enthaltenen Referenzen. Im Gegensatz dazu ist nur wenig über die Vorkonditionierung von nicht-symmetrischen Kopplungen, siehe z.B. [Med98] für die Johnson-Nédélec Kopplung, oder die Vorkonditionierung auf adaptiven Triangulierungen bekannt.

Für die symmetrische Kopplung kann der Ansatz von [BP88] verwendet werden, welcher positive Definitheit und Symmetrie der Galerkin-Matrix bezüglich einem speziellen inneren Produkt sicherstellt [CKL98, HPPS03, KS02]. Dadurch sind effiziente iterative Löser, die für positiv definite und symmetrische Matrizen konstruiert wurden, anwendbar. Aufgrund der Nicht-Symmetrie ist ein solches Vorgehen für die Johnson-Nédélec Kopplung oder die Bielak-MacCamy Kopplung in der Regel nicht anwendbar. In der Arbeit [Med98] wird angenommen, dass der Kopplungsrand Γ glatt ist. Daher ist der Doppelschichtintegraloperator \mathfrak{K} kompakt. Die Galerkin-Matrix kann daher in einen symmetrischen und einen nicht-symmetrischen Teil (dieser entspricht der Galerkin-Matrix \mathbf{K} des Doppelschichtintegraloperators \mathfrak{K}) aufgespalten werden. Es wird nur der symmetrische Teil mit der Theorie aus [BP88] vorkonditioniert. Konvergenzresultate für iterative Löser können dann mit kompakten Störungsargumenten und der Annahme einer hinreichenden kleinen Netzweite gezeigt werden. Im Allgemeinen ist der Rand Γ aber nicht glatt und die Theorie aus [Med98] kann somit nicht verwendet werden.

In diesem Kapitel untersuchen wir wie in [FS09, MS98] einen (2×2) -Blockdiagonal-Vorkonditionierer der Bauart

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\text{FEM}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\text{BEM}} \end{pmatrix}$$

für die Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ der (stabilisierten) FEM-BEM Kopplung. Wir können dabei alle drei vorgestellten Kopplungen simultan behandeln. Ein wesentlicher Punkt in der Analysis ist die Verwendung der Galerkin-Matrizen $\tilde{\mathbf{B}}$ der stabilisierten FEM-BEM Kopplungen, da diese Matrizen positiv definit sind. In den numerischen Experimenten aus Abschnitt 7.5 werden wir aber sehen, dass die Stabilisierung weggelassen werden kann.

Der Block \mathbf{P}_{FEM} entspricht einem Vorkonditionierer für ein FEM Problem und \mathbf{P}_{BEM} entspricht einem Vorkonditionierer für die Galerkin-Matrix \mathbf{V} des Einfachschichtintegraloperators. Aufbauend auf [MS98] zeigen wir Abschätzungen für die Konditionszahl $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ des vorkonditionierten Systems, welche nur von den gewählten Vorkonditionierern \mathbf{P}_{FEM} und \mathbf{P}_{BEM} abhängen. Darüber hinaus beweisen wir, dass die Anzahl der Iterationen, um das relative Residuum unter eine Schranke τ zu bringen, bei Verwendung des vorkonditionierten GMRES Algorithmus mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}}$ auch nur von der Wahl von \mathbf{P}_{FEM} und \mathbf{P}_{BEM} abhängen.

Mit den Resultaten aus [WC06, XCH10] zu lokalen Multilevel Vorkonditionierern für 2D FEM und unseren Resultaten aus Kapitel 6 zu lokalen Multilevel Vorkonditionierern für 2D BEM konstruieren wir einen *optimalen* Vorkonditionierer für die drei FEM-BEM Kopplungen in 2D.

Der Rest des Kapitels ist folgendermaßen aufgebaut: In Abschnitt 7.1 stellen wir den vorkonditionierten GMRES Algorithmus mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}}$ vor und geben einige Anmerkungen zur Implementierung an. In Abschnitt 7.2 behandeln wir kurz das verwendete Modellproblem und definieren später verwendete Hilfsoperatoren. Der Blockdiagonal-Vorkonditionierer wird in Abschnitt 7.3 definiert. Aufbauend auf der Arbeit [MS98], in welcher nur die symmetrische Kopplung für ein etwas anderes Modellproblem untersucht wird, beweisen wir unser Hauptresultat (Satz 7.5). Damit definieren wir für $d = 2$ und Diskretisierungen niedrigster Ordnung einen optimalen Vorkonditionierer, der auf lokalen Multilevel Diagonal Vorkonditionierern aufbaut. Zusätzlich untersuchen wir einen suboptimalen globalen Multilevel Diagonal Vorkonditionierer als auch einen simplen Diagonalvorkonditionierer. Das Kapitel wird mit verschiedensten numerischen Experimenten (Abschnitt 7.5) in 2D und 3D beendet.

Zum Schluss bemerken wir noch, dass im Folgenden nur Laplace-Transmissionsprobleme behandelt werden, die grundlegenden Ideen sind aber auch auf Transmissionsprobleme in der Elastostatik übertragbar.

7.1 Vorkonditioniertes GMRES Verfahren

Sei $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix und sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ eine (nicht-symmetrische) positiv definite Matrix. Bezeichne mit $\mathbf{e}^k \in \mathbb{R}^N$ den kanonischen Einheitsvektor in \mathbb{R}^N , d.h. $(\mathbf{e}^k)_j = \delta_{jk}$. Wir betrachten im Folgenden eine Variante des GMRES Algorithmus [SS86] zur Lösung des vorkonditionierten Gleichungssystems

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N.$$

Algorithmus 7.1 (Vorkonditionierter GMRES Algorithmus, Variante 1). *Input:* Matrizen $\mathbf{P}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, rechte Seite $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$, Startlösung $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^N$, relative Toleranz $\tau > 0$, und maximale Anzahl Iterationen $K \in \mathbb{N}$ mit $K \leq N$.

- (a) Allokieren Speicher für die Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(K+1) \times K}$, für die Vektoren $\mathbf{v}^i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, \dots, K$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{r}^0 \in \mathbb{R}^N$, und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$.
- (b) Berechne Residuum $\mathbf{r}^0 \leftarrow \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}^0)$ und $\mathbf{v}^1 \leftarrow \mathbf{r}^0 / \|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}$.

(c) Setze $k \leftarrow 1$ und initialisiere Matrix $\mathbf{H}_{ij} \leftarrow 0$ für alle $i = 1, \dots, K+1, j = 1, \dots, K$.

Wiederhole die Schritte (i)–(vii):

(i) Berechne $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{v}^k$.

(ii) Für alle $i = 1, \dots, k$ berechne

$$\mathbf{H}_{jk} \leftarrow \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}^i \rangle_{\mathbf{P}} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} - \mathbf{v}^i \mathbf{H}_{ik}.$$

(iii) Berechne $H_{k+1,k} \leftarrow \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{P}}$.

(iv) Definiere den Teilblock $\overline{\mathbf{H}}^k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times k}$ als $(\overline{\mathbf{H}}^k)_{ij} := \mathbf{H}_{ij}$ für $i = 1, \dots, k+1, j = 1, \dots, k$ und berechne

$$\mathbf{y}^k \leftarrow \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} \|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}} \mathbf{e}^1 - \overline{\mathbf{H}}^k \mathbf{y}\|_2. \quad (7.1)$$

(v) Berechne $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}^0 + \sum_{j=1}^k (\mathbf{y}^k)_j \mathbf{v}^j$ und $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x})$.

(vi) Beende Algorithmus falls $\|\mathbf{r}\|_{\mathbf{P}} \leq \tau \|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}$ oder $k \geq K$.

(vii) Ansonsten, berechne $\mathbf{v}^{k+1} \leftarrow \mathbf{w}/\mathbf{H}_{k+1,k}$, setze $k \leftarrow k+1$, und gehe zu (i).

Output: Näherungslösung \mathbf{x} , Anzahl der Iterationen k , und $\|\mathbf{r}\|_{\mathbf{P}}/\|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}$. □

Falls \mathbf{P} die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{N \times N}$ ist, dann entspricht Algorithmus 7.1 dem üblichen GMRES Algorithmus [SS86].

In der Praxis ist oft nur die Matrix-Vektor Multiplikation mit \mathbf{P}^{-1} bekannt, aber nicht jene mit \mathbf{P} , man denke etwa an die Multilevel Vorkonditionierer aus Kapitel 6. Daher ist es schwierig die inneren Produkte $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}}$ bzw. die Normen $\|\cdot\|_{\mathbf{P}}$ zu bestimmen. Man kann aber den Algorithmus so modifizieren, dass die explizite Anwendung von \mathbf{P} nicht bekannt sein muss. Dazu beachte man, dass für beliebiges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ die Identität $\|\mathbf{y}\|_{\mathbf{P}}^2 = \langle \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} \rangle_{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2$ gilt.

Algorithmus 7.2 (Vorkonditionierter GMRES Algorithmus, Variante 2). **Input:** Matrizen $\mathbf{P}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, rechte Seite $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$, Startlösung $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^N$, relative Toleranz $\tau > 0$, und maximale Anzahl Iterationen $K \in \mathbb{N}$ mit $K \leq N$.

(a) Allokieren Speicher für die Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(K+1) \times K}$, für die Vektoren $\mathbf{v}^i, \tilde{\mathbf{v}}^i \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, \dots, K$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{r}^0 \in \mathbb{R}^N$, und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$.

(b) Berechne $\|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}} = \sqrt{\langle \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}), \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle_2}$ und setze $\tilde{\mathbf{v}}^1 \leftarrow (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x})/\|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}$.

(c) Berechne $\mathbf{v}^1 = \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{v}}^1$.

(d) Setze $k \leftarrow 1$ und initialisiere Matrix $\mathbf{H}_{ij} \leftarrow 0$ für alle $i = 1, \dots, K+1, j = 1, \dots, K$.

Wiederhole die Schritte (i)–(vii):

(i) Berechne $\tilde{\mathbf{w}} \leftarrow \mathbf{A}\mathbf{v}^k$.

(ii) Für alle $i = 1, \dots, k$ berechne

$$\mathbf{H}_{jk} \leftarrow \langle \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{v}^i \rangle_{\mathbf{P}} = \langle \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{v}^i \rangle_2 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{w}} \leftarrow \tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{v}}^i \mathbf{H}_{ik}.$$

(iii) Berechne $H_{k+1,k} \leftarrow \|\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{w}}\|_{\mathbf{P}} = \sqrt{\langle \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}} \rangle_2}$.

(iv) Definiere den Teilblock $\overline{\mathbf{H}}^k \in \mathbb{R}^{(k+1) \times k}$ als $(\overline{\mathbf{H}}^k)_{ij} := \mathbf{H}_{ij}$ für $i = 1, \dots, k+1, j = 1, \dots, k$ und berechne

$$\mathbf{y}^k \leftarrow \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k} \|\|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}} \mathbf{e}^1 - \overline{\mathbf{H}}^k \mathbf{y}\|_2. \quad (7.2)$$

(v) Berechne $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x}^0 + \sum_{j=1}^k (\mathbf{y}^j)_j \mathbf{v}^j$ und $\tilde{\mathbf{r}} \leftarrow (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x})$.

(vi) Beende Algorithmus falls $\|\mathbf{r}\|_{\mathbf{P}} := \|\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}\|_{\mathbf{P}} = \sqrt{\langle \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}} \rangle_2} \leq \tau \|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}$ oder $k \geq K$.

(vii) Ansonsten, berechne $\tilde{\mathbf{v}}^{k+1} \leftarrow \tilde{\mathbf{w}}/\mathbf{H}_{k+1,k}$ und $\mathbf{v}^{k+1} \leftarrow \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}$, setze $k \leftarrow k+1$, und gehe zu (i).

Output: Näherungslösung \mathbf{x} , Anzahl der Iterationen k , und $\|\mathbf{r}\|_{\mathbf{P}}/\|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}$. □

Wir geben noch einige Bemerkungen an: Das GMRES Verfahren ist ein exaktes Iterationsverfahren, d.h. nach maximal $K = N$ Iterationsschritten erhält man die exakte Lösung. Normalerweise will man aber nur $K \ll N$ Schritte verwenden, um eine hinreichend genaue Näherung an die exakte Lösung zu erhalten. Man kann für den vorliegenden Fall auch die Konvergenzgeschwindigkeit abschätzen. Dies wird im Beweis des Hauptresultats (Satz 7.5) auch explizit ausgenutzt.

Die benötigte Minimierung im Schritt (iv) kann mit Hilfe einer QR-Zerlegung von $\overline{\mathbf{H}}^k$ durchgeführt werden, siehe z.B. [SS86, Abschnitt 3.2]. Für die Matrix $\overline{\mathbf{H}}^k$ muss kein extra Speicher angelegt werden da es sich um einen Teilblock der Matrix \mathbf{H} handelt. Der größte Speicheraufwand besteht für die Vektoren \mathbf{v}^i in Algorithmus 7.1 bzw. für die Vektoren $\mathbf{v}^i, \tilde{\mathbf{v}}^i$ in Algorithmus 7.2. Man kann Algorithmus 7.2 auch ohne die Vektoren \mathbf{v}^i implementieren, indem alle vorkommenden \mathbf{v}^i durch $\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{v}}^i$ ersetzt werden. Dies bedeutet aber mehr Auswertungen von $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$. Um den Speicheraufwand zu senken, geht man üblicherweise zu einem GMRES Verfahren mit Neustart über. Dabei wird der komplette Algorithmus nach K_{restart} Iterationen neu gestartet und als Startlösung wird die zuletzt berechnete Näherungslösung verwendet [SS86].

7.2 Modellproblem

Wir beschäftigen uns wieder mit dem Modellproblem (3.3) aus Kapitel 3, wobei wir \mathfrak{A} als linear und symmetrisch voraussetzen, d.h.

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{d \times d} \quad \text{für fast alle } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Um die Lösbarkeit der Kopplungsgleichungen zu garantieren, fordern wir für die symmetrische Kopplung

$$0 \leq c_{\text{mon}} := \operatorname{ess\,inf}_{\mathbf{x} \in \Omega} \lambda_{\min}(\mathfrak{A}(\mathbf{x})) \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{x} \in \Omega} \lambda_{\max}(\mathfrak{A}(\mathbf{x})) =: c_{\text{lip}} < \infty, \quad (7.3)$$

und für die beiden nicht-symmetrischen Kopplungen zusätzlich

$$c_{\text{mon}} > c_{\mathfrak{R}}/4,$$

wobei $c_{\mathfrak{R}} \in [\frac{1}{2}, 1)$ wieder die Kontraktionsgröße des Doppelschichtintegraloperators bezeichnet.

Der Operator $\mathfrak{B} : \mathcal{H} = H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{H}^*$ bezeichnet entweder den Operator für die symmetrische Kopplung (3.45a), den Operator für die Johnson-Nédélec Kopplung (3.58a), oder den Operator für die Bielak-MacCamy Kopplung (3.74a). Für unsere Analysis benötigen wir die stabilisierten Operatoren $\tilde{\mathfrak{B}}$ aus (3.50a) (symmetrische Kopplung), (3.63a) (Johnson-Nédélec Kopplung), bzw. (3.79a) (Bielak-MacCamy Kopplung). Da wir im Folgenden nur mit den Unterräumen $\mathcal{H}_\ell = \mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ hantieren, wählen wir als Funktion für die Stabilisierung $\xi = 1 \in \mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$, welche Annahme 3.15 erfüllt. Wir bemerken, dass die Überlegungen nicht von der expliziten Wahl von ξ abhängen, solange die Annahme 3.15 erfüllt ist. Unsere Voraussetzungen implizieren daher, dass die Operatoren $\tilde{\mathfrak{B}}$, da \mathfrak{A} linear ist, elliptisch sind. Insbesondere sind also die zugehörigen Galerkin-Matrizen $\tilde{\mathbf{B}}$ positiv definit.

Für die Vorkonditionierung definieren wir noch zwei Hilfsoperatoren $\tilde{\mathfrak{C}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$ und $\tilde{\mathfrak{A}} : H^1(\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^*$ als

$$\langle \tilde{\mathfrak{C}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \langle \tilde{\mathfrak{A}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \psi, \mathfrak{B}\phi \rangle_\Gamma := \langle \tilde{\mathfrak{B}}(u, 0), (v, 0) \rangle + \langle \psi, \mathfrak{B}\phi \rangle_\Gamma \quad (7.4)$$

für alle $\mathbf{u} = (u, \phi), \mathbf{v} = (v, \psi) \in \mathcal{H}$. Der Operator $\tilde{\mathfrak{A}}$ entspricht also dem stabilisierten FEM-Teil. Das folgende Lemma fasst die wichtigsten Eigenschaften zusammen. Der Beweis der Elliptizität folgt mit den gleichen Argumenten wie im Beweis von Lemma 3.21.

Lemma 7.3. *Der Operator $\tilde{\mathfrak{A}}$ aus (7.4) ist stetig, symmetrisch, und elliptisch. Die Konstanten*

$$0 < c_{\tilde{\mathfrak{A}}} := \inf_{0 \neq u \in H^1(\Omega)} \frac{\langle \tilde{\mathfrak{A}}u, u \rangle}{\|u\|_{H^1(\Omega)}^2} \leq \sup_{0 \neq u \in H^1(\Omega)} \frac{\|\tilde{\mathfrak{A}}u\|_{(H^1(\Omega))^*}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}} =: C_{\tilde{\mathfrak{A}}} < \infty$$

hängen nur von $c_{\text{mon}}, c_{\text{lip}}$ aus (7.3) und Ω ab.

Der Operator $\tilde{\mathfrak{C}}$ aus (7.4) ist stetig, symmetrisch, und elliptisch. Die Konstanten

$$0 < c_{\tilde{\mathfrak{C}}} := \inf_{0 \neq \mathbf{u} \in \mathcal{H}} \frac{\langle \tilde{\mathfrak{C}}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2} \leq \sup_{0 \neq \mathbf{u} \in \mathcal{H}} \frac{\|\tilde{\mathfrak{C}}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^*}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}} =: C_{\tilde{\mathfrak{C}}} < \infty$$

hängen nur von $c_{\text{mon}}, c_{\text{lip}}$ aus (7.3) und Ω ab. □

Als Nächstes behandeln wir die Diskretisierung dieser Operatoren. Mit φ_j für $j = 1, \dots, H := S^\Omega + P^\Gamma := \dim(\mathcal{S}^q(\mathcal{T}_\ell^\Omega)) + \dim(\mathcal{P}^p(\mathcal{T}_\ell^\Gamma))$ bezeichnen wir wieder die in Abschnitt 3.6.1 definierte Basis von \mathcal{H}_ℓ . Definiere $\tilde{\mathbf{C}}$ als $\tilde{\mathbf{C}}_{jk} := \langle \tilde{\mathcal{C}}\varphi_k, \varphi_j \rangle$ für alle $j, k = 1, \dots, H$. Insbesondere können wir $\tilde{\mathbf{C}}$ als Blockmatrix schreiben

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

wobei $\tilde{\mathbf{A}}$ die Galerkin-Matrix von $\tilde{\mathfrak{A}}$ bezeichnet.

Bemerkung 7.4. Die Definition (7.4) kann durch

$$\langle \tilde{\mathcal{C}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \langle \tilde{\mathfrak{A}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \tilde{\mathfrak{B}}(0, \phi), (0, \psi) \rangle := \langle \tilde{\mathfrak{B}}(u, 0), (v, 0) \rangle + \langle \tilde{\mathfrak{B}}(0, \phi), (0, \psi) \rangle$$

ersetzt werden, da $\langle \tilde{\mathfrak{B}}(0, \phi), (0, \psi) \rangle = \langle \psi, \mathfrak{B}\phi \rangle_\Gamma + \langle 1, \mathfrak{B}\phi \rangle_\Gamma \langle 1, \mathfrak{B}\psi \rangle_\Gamma \simeq \langle \psi, \mathfrak{B}\phi \rangle_\Gamma$. Die in diesem Kapitel erarbeiteten Resultate behalten weiterhin ihre Gültigkeit. \square

7.3 Blockdiagonal-Vorkonditionierer

In diesem Abschnitt analysieren wir (2×2) -Blockdiagonal-Vorkonditionierer von der Bauart

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathfrak{B}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{H \times H} \quad (7.6)$$

mit den symmetrischen und positiv definiten Matrizen $\mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}} \in \mathbb{R}^{S^\Omega \times S^\Omega}$ und $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^{P^\Gamma \times P^\Gamma}$. Insbesondere ist also auch \mathbf{P} symmetrisch und positiv definit. Anstelle der Gleichungssysteme

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (7.7)$$

für die FEM-BEM Kopplungen, siehe Abschnitt 3.6.1 für die entsprechenden Definitionen, betrachten wir das vorkonditionierte System

$$\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{f}} \quad (7.8)$$

mit

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathfrak{B}}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{H \times H}. \quad (7.9)$$

Die Blöcke $\mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ und $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}}$ entsprechen dabei Vorkonditionierern von $\tilde{\mathbf{A}}$ und \mathbf{V} . Wir nehmen an, die Matrizen $\mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ und $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}}$ sind *spektral äquivalent* zu $\tilde{\mathbf{A}}$ und \mathbf{V} , d.h. es existieren Konstanten $d_{\tilde{\mathfrak{A}}}, D_{\tilde{\mathfrak{A}}} > 0$ und $d_{\mathfrak{B}}, D_{\mathfrak{B}} > 0$ mit

$$d_{\tilde{\mathfrak{A}}} \langle \mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2 \leq \langle \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2 \leq D_{\tilde{\mathfrak{A}}} \langle \mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_2 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{S^\Omega}, \quad (7.10a)$$

$$d_{\mathfrak{B}} \langle \mathbf{P}_{\mathfrak{B}}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_2 \leq \langle \mathbf{V}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_2 \leq D_{\mathfrak{B}} \langle \mathbf{P}_{\mathfrak{B}}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_2 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{P^\Gamma}. \quad (7.10b)$$

Satz 7.5. Seien $\mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}} \in \mathbb{R}^{S^\Omega \times S^\Omega}$, $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{R}^{P^\Gamma \times P^\Gamma}$ zwei symmetrische und positive Matrizen, welche (7.10) erfüllen. Sei \mathbf{P} der Blockdiagonal-Vorkonditionierer aus (7.6). Dann gilt

$$\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) \leq C \text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}) \leq C \frac{\max\{D_{\tilde{\mathfrak{A}}}, D_{\mathfrak{B}}\}}{\min\{d_{\tilde{\mathfrak{A}}}, d_{\mathfrak{B}}\}}. \quad (7.11)$$

Die Konstante $C > 0$ hängt nur von $c_{\text{mon}}, c_{\text{lip}}$ aus (7.3) und Ω ab.

Des Weiteren, gilt für das j -te Residuum \mathbf{r}^j aus dem vorkonditionierten GMRES Algorithmus

$$\|\mathbf{r}^j\|_{\mathbf{P}} \leq q_{\text{GMRES}}^j \|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}. \quad (7.12)$$

Die Konstante $0 < q_{\text{GMRES}} < 1$ hängt nur von $c_{\text{mon}}, c_{\text{lip}}$ aus (7.3), Ω , und dem Verhältnis $\max\{D_{\tilde{\mathfrak{A}}}, D_{\mathfrak{B}}\}/\min\{d_{\tilde{\mathfrak{A}}}, d_{\mathfrak{B}}\}$ ab.

Bevor wir zum Beweis kommen, machen wir uns kurz mit den Konsequenzen dieses Satzes vertraut. Das Ziel ist es Vorkonditionierer $\mathbf{P}_{\tilde{\mathfrak{A}}}$ und $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}}$ zu finden, so dass das Verhältnis $\max\{D_{\tilde{\mathfrak{A}}}, D_{\mathfrak{B}}\}/\min\{d_{\tilde{\mathfrak{A}}}, d_{\mathfrak{B}}\}$ mit den Konstanten aus (7.10) uniform beschränkt ist, d.h. unabhängig von der Anzahl der Elemente in \mathcal{T}_ℓ^Ω , \mathcal{T}_ℓ^Γ und deren Durchmesser ist. Satz 7.5 impliziert dann, dass die Konditionszahlen beschränkt sind, und dass in jedem Schritt des vorkonditionierten GMRES Algorithmus beim Lösen von (7.8) das relative Residuum um den Faktor $0 < q_{\text{GMRES}} < 1$ reduziert wird.

Wir benötigen das folgende elementare Resultat.

Lemma 7.6. Bezeichne mit $\tilde{\mathfrak{B}}_\ell : \mathcal{H}_\ell \rightarrow \mathcal{H}_\ell^*$ und $\tilde{\mathfrak{C}}_\ell : \mathcal{H}_\ell \rightarrow \mathcal{H}_\ell^*$ die auf den endlich-dimensionalen Unterraum \mathcal{H}_ℓ eingeschränkten Operatoren $\tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{\mathfrak{C}}$, d.h.

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle \tilde{\mathfrak{B}} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_\ell, \\ \langle \tilde{\mathfrak{C}}_\ell \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle \tilde{\mathfrak{C}} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_\ell. \end{aligned}$$

Definiere $\mathfrak{Z}_\ell := \tilde{\mathfrak{B}}_\ell^* \tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell : \mathcal{H}_\ell \rightarrow \mathcal{H}_\ell^*$. Sei \mathbf{Z} die Galerkin-Matrix von \mathfrak{Z}_ℓ bezüglich der Basis $\{\varphi_j\}_{j=1}^H$ von \mathcal{H}_ℓ , d.h. $\mathbf{Z}_{jk} := \langle \mathfrak{Z}_\ell \varphi_k, \varphi_j \rangle$ für $j, k = 1, \dots, H$. Dann gilt

$$\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}. \quad (7.13)$$

Beweis. Sei $\{\mathbf{e}^j\}_{j=1}^H$ die kanonische Basis von \mathbb{R}^H mit $(\mathbf{e}^j)_k = \delta_{jk}$. Der Matrixeintrag in der j -ten Zeile und k -ten Spalte ist gegeben als

$$\mathbf{Z}_{jk} = \langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell^* \tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \varphi_k, \varphi_j \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \varphi_j, \tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \varphi_k \rangle.$$

Sei $\mathbf{w}_k := \tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \varphi_k$. Nach der Definition der Inversen des diskreten Operators $\tilde{\mathfrak{C}}_\ell$ gilt

$$\langle \tilde{\mathfrak{C}}_\ell \mathbf{w}_k, \varphi_m \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \varphi_k, \varphi_m \rangle \quad \text{für alle } m = 1, \dots, H. \quad (7.14)$$

Man beachte, dass $\langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \varphi_k, \varphi_m \rangle = \tilde{\mathbf{B}}_{mk} = (\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{e}^k)_m$. Zusammen mit der Darstellung $\mathbf{w}_k = \sum_{j=1}^H \mathbf{w}_j \varphi_j$ ist die Galerkin-Formulierung aus (7.14) äquivalent zu

$$\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{e}^k.$$

Die Wahl von \mathbf{w}_k liefert weiters

$$\mathbf{z}_{jk} = \langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \varphi_j, \mathbf{w}_k \rangle = \sum_{m=1}^H (\mathbf{w})_m \langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \varphi_j, \varphi_m \rangle = \sum_{m=1}^H (\tilde{\mathbf{C}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{e}^k)_m (\tilde{\mathbf{B}} \mathbf{e}^j)_m$$

□

Beweis von Satz 7.5. Definiere $d_{\tilde{\mathfrak{C}}} := \lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{C}})$ und $D_{\tilde{\mathfrak{C}}} := \lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{C}})$. Man beachte, dass $\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}$ symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}}$ ist. Daher sind alle Eigenwerte reell und positiv. Für das Spektrum von $\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}$ gilt

$$d_{\tilde{\mathfrak{C}}} \langle \mathbf{P} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_2 \leq \langle \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_2 \leq D_{\tilde{\mathfrak{C}}} \langle \mathbf{P} \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_2 \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^H. \quad (7.15)$$

Aus den spektralen Äquivalenzen (7.10) folgt direkt

$$\min\{d_{\tilde{\mathfrak{A}}}, d_{\tilde{\mathfrak{B}}}\} \leq d_{\tilde{\mathfrak{C}}} \leq D_{\tilde{\mathfrak{C}}} \leq \max\{D_{\tilde{\mathfrak{A}}}, D_{\tilde{\mathfrak{B}}}\} \quad (7.16)$$

Die Abschätzungen (7.15) sind äquivalent zu

$$d_{\tilde{\mathfrak{C}}} \leq \langle \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 \leq \langle \mathbf{P}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 \leq D_{\tilde{\mathfrak{C}}} \langle \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 \quad \text{für alle } \mathbf{u} \in \mathbb{R}^H. \quad (7.17)$$

Die Äquivalenz folgt dabei aus der Wahl $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{C}}^{1/2} (\tilde{\mathbf{C}}^{-1/2} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}}^{-1/2})^{1/2} \tilde{\mathbf{C}}^{1/2} \mathbf{v}$ bzw. $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1/2} (\tilde{\mathbf{C}}^{-1/2} \mathbf{P} \tilde{\mathbf{C}}^{-1/2})^{-1/2} \tilde{\mathbf{C}}^{-1/2} \mathbf{u}$ und elementaren Rechnungen.

Schritt 1. Wir zeigen

$$d_{\tilde{\mathfrak{C}}} \lesssim \inf_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\langle \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{P}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}^2} \leq \inf_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}} = \|(\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}})^{-1}\|_{\mathbf{P}^{-1}}, \quad (7.18a)$$

$$D_{\tilde{\mathfrak{C}}} \gtrsim \sup_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}} = \|\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}\|_{\mathbf{P}}. \quad (7.18b)$$

Aus der Definition der Konditionszahl $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\cdot)$ und den Eigenschaften von $\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}$ folgt daraus weiters

$$\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}) = \|\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}}\|_{\mathbf{P}} \|(\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}})^{-1}\|_{\mathbf{P}} \lesssim \frac{D_{\tilde{\mathfrak{C}}}}{d_{\tilde{\mathfrak{C}}}} = \text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}). \quad (7.19)$$

Zusammen mit (7.16) schließen wir (7.11).

Wir starten zunächst mit (7.18a). Sei $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^H$ mit zugehöriger Funktion $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$, d.h. $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^H \mathbf{u}_j \varphi_j$. Dann gilt mit (7.15)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{P}} &= \langle \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 = \langle \tilde{\mathfrak{B}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq C_{\text{mon}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2 \geq C_{\text{mon}} C_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-1} \langle \tilde{\mathfrak{C}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &= C_{\text{mon}} C_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-1} \langle \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 \geq d_{\tilde{\mathfrak{C}}} C_{\text{mon}} C_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-1} \langle \mathbf{P} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 = d_{\tilde{\mathfrak{C}}} C_{\text{mon}} C_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-1} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}^2, \end{aligned}$$

wobei C_{mon} die Elliptizitätskonstante C_{mon} und C_{lip} die Stetigkeitskonstante des Operators $\tilde{\mathfrak{B}}$ bezeichnet.

Für (7.18b) benutzen wir den diskreten Operator $\mathfrak{Z}_\ell := \tilde{\mathfrak{B}}_\ell^* \tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell$ mit Galerkin-Matrix \mathbf{Z} aus Lemma 7.6 und schließen mit (7.17)

$$\|\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}^2 = \langle \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}, \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u} \rangle_2 \leq D_{\tilde{\mathfrak{C}}} \langle \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u} \rangle_2 = D_{\tilde{\mathfrak{C}}} \langle \mathbf{Z} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 = D_{\tilde{\mathfrak{C}}} \langle \mathfrak{Z}_\ell \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{Z}_\ell \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell^* \tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \mathbf{u}, \tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \mathbf{u} \rangle \leq \|\tilde{\mathfrak{B}} \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^*} \|\tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq C_{\text{lip}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \|\tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass $\mathbf{w} := \tilde{\mathfrak{C}}_\ell^{-1} \tilde{\mathfrak{B}}_\ell \mathbf{u} \in \mathcal{H}_\ell$ die Galerkin-Lösung von

$$\langle \tilde{\mathfrak{C}} \mathbf{w}, \mathbf{v}_\ell \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{B}} \mathbf{u}, \mathbf{v}_\ell \rangle \quad \text{für alle } \mathbf{v}_\ell \in \mathcal{H}_\ell,$$

ist. Somit können wir die Norm von \mathbf{w} abschätzen durch

$$c_{\tilde{\mathfrak{C}}} \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \tilde{\mathfrak{C}} \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle = \langle \tilde{\mathfrak{B}} \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \leq \|\tilde{\mathfrak{B}} \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^*} \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}} \leq C_{\text{lip}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{w}\|_{\mathcal{H}}.$$

Zusammen mit (7.17) bekommen wir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}^2 &\leq D_{\tilde{\mathfrak{C}}} c_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-1} C_{\text{lip}}^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq D_{\tilde{\mathfrak{C}}} c_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-2} C_{\text{lip}}^2 \langle \tilde{\mathfrak{C}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = D_{\tilde{\mathfrak{C}}} c_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-2} C_{\text{lip}}^2 \langle \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 \\ &\leq D_{\tilde{\mathfrak{C}}}^2 c_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-2} C_{\text{lip}}^2 \langle \mathbf{P} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_2 = D_{\tilde{\mathfrak{C}}}^2 c_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-2} C_{\text{lip}}^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt (7.18b).

Schritt 2. Wir benutzen das folgende Resultat zur Reduktion des relativen Residuums im vorkonditionierten GMRES Algorithmus, siehe Abschnitt 7.1. Das Resultat findet sich, z.B., in [HS98, Abschnitt 3]: Nach [EES83, SS86] ist das j -te Residuum im vorkonditionierten GMRES Algorithmus beschränkt durch

$$\|\mathbf{r}^j\|_{\mathbf{P}} \leq \left(1 - \alpha^2 / \beta^2\right)^{j/2} \|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}} \quad (7.20a)$$

mit Konstanten

$$\alpha := \inf_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\langle \mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{P}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}^2}, \quad \beta := \sup_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{P}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{P}}}, \quad (7.20b)$$

falls $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}}$ als inneres Produkt verwendet wird. Wir verweisen hier noch auf [SS07] für eine Diskussion zu vorkonditionierten GMRES Verfahren mit verschiedenen inneren Produkten.

Aus Schritt 1 des Beweises, ergeben sich die Abschätzungen

$$d_{\tilde{\mathfrak{C}}} C_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-1} C_{\text{mon}} \leq \alpha \leq \beta \leq D_{\tilde{\mathfrak{C}}} c_{\tilde{\mathfrak{C}}}^{-1} C_{\text{lip}}. \quad (7.21)$$

Mit (7.16), der Definition

$$q_{\text{GMRES}} := \left(1 - \left(\frac{C_{\text{mon}} c_{\tilde{\mathfrak{C}}} \min\{d_{\mathfrak{A}}, d_{\mathfrak{B}}\}}{C_{\text{lip}} C_{\tilde{\mathfrak{C}}} \max\{D_{\mathfrak{A}}, D_{\mathfrak{B}}\}}\right)^2\right)^{1/2}, \quad (7.22)$$

und (7.20) ist der Beweis fertig. \square

7.4 Multilevel Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplung

Ab hier betrachten wir nur mehr Diskretisierungen niedrigster Ordnung, d.h. $\tilde{\mathbf{B}}$ bezeichnet durchgehend die Galerkin-Matrix von $\tilde{\mathfrak{B}}$ bezüglich der Basis von $\mathcal{H}_\ell = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^1(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$. Gleiches gilt für die Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{C}}$ von $\tilde{\mathfrak{C}}$. Die Basis von $\mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ bilden die Hut-Funktionen und die Basis von $\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$ sind die charakteristischen Funktionen auf den Elementen.

7.4.1 Multilevel Vorkonditionierer für FEM

In diesem Abschnitt behandeln wir Multilevel Additiv-Schwarz Vorkonditionierer für FEM Probleme. Die Vorgehensweise ist dabei die gleiche wie in Abschnitt 6.2 für den hypersingulären Operator. Speziell definieren wir also einen *lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer* und einen *globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer*. Im Folgenden behandeln wir den Fall niedrigster Ordnung, d.h. wir wählen $\mathcal{X}_\ell := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ als diskreten Unterraum.

Wir betrachten das Problem: Für gegebenes $f \in H^1(\Omega)^*$, finde $u_\ell \in \mathcal{X}_\ell := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega)$ mit

$$\langle \tilde{\mathfrak{A}}u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \text{für alle } v \in H^1(\Omega).$$

Nach Lemma 7.3 ist die Bilinearform

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle := \langle \tilde{\mathfrak{C}}u, v \rangle \quad \text{für alle } u, v \in H^1(\Omega)$$

symmetrisch, stetig, und elliptisch. Die induzierte Norm $\|\cdot\|^2 := \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ ist daher äquivalent zur Norm $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Als Basis von \mathcal{X}_ℓ wählen wir die Hut-Funktionen $\{\eta_j\}_{j=1}^{N_\ell^\Omega}$ mit $N_\ell^\Omega = \#\mathcal{N}_\ell^\Omega$. Die Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}^\ell$ ist definiert als $\tilde{\mathbf{A}}_{jk} := \langle\langle \eta_k, \eta_j \rangle\rangle$ für $j, k = 1, \dots, N_\ell^\Omega$. Wir betrachten eine Folge von Triangulierungen $\mathcal{T}_0^\Omega, \dots, \mathcal{T}_L^\Omega$. Bezeichne η_ℓ^z die Hut-Funktion zum Knoten $z \in \mathcal{N}_\ell^\Omega$. Eine einfache Rechnung zeigt

$$\|\eta_\ell^z\|^2 \simeq \|\eta_\ell^z\|_{H^1(\Omega)}^2 \simeq \text{diam}(T)^{(d-2)/d} \quad (7.23)$$

für alle $T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega$ mit $z \in T$. Die involvierten Konstanten hängen nur von \mathfrak{A} , Ω , und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω ab.

Abschätzungen für die Eigenwerte und die Konditionszahl der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ finden sich im nächsten Lemma. Der darauf folgende Satz gibt die Konditionszahl bei Verwendung des simplen Diagonalvorkonditionierers an. Die Resultate stammen aus der Arbeit [BS89]. Für $d = 2$ bringt, wie im Fall des hypersingulären Operators, die Vorkonditionierung mit der Diagonalen nichts, da die Diagonalelemente nach (7.23) im Wesentlichen konstant. Wir bemerken, dass die Eigenwertabschätzung der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ für $d = 3$ nicht explizit in [BS89] steht, aber mit den gleichen Argumenten wie in [BS89, Satz 4.1] nachgerechnet werden kann. Wir lassen daher die Details aus. Sei $h_{\min, \ell}^\Omega := \min_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega} \text{diam}(T)$ der minimale und $h_{\max, \ell}^\Omega := \max_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Omega} \text{diam}(T)$ der maximale Elementdurchmesser in der Volumstriangulierung \mathcal{T}_ℓ^Ω .

Lemma 7.7. Sei $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}^L$ die Galerkin-Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis von \mathcal{X}_L . Die Eigenwerte der Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ erfüllen

$$\begin{aligned} C_{\min}^{\tilde{\mathfrak{A}}}(M_L^\Omega)^{-1}(1+|\log(M_L^\Omega(h_{\min,L}^\Omega)^2)|)^{-1} &\leq \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}}) \leq \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) \leq C_{\max}^{\tilde{\mathfrak{A}}} && \text{für } d = 2, \\ C_{\min}^{\tilde{\mathfrak{A}}}(M_L^\Omega)^{-2/3}h_{\min,L}^\Omega &\leq \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}}) \leq \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}}) \leq C_{\max}^{\tilde{\mathfrak{A}}}h_{\max,L}^\Omega && \text{für } d = 3. \end{aligned}$$

Die Konstanten $C_{\min}^{\tilde{\mathfrak{A}}}, C_{\max}^{\tilde{\mathfrak{A}}} > 0$ hängen nur von \mathfrak{A}, Ω , und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_L^Ω ab.

Insbesondere erfüllt die ℓ^2 -Konditionszahl

$$\text{cond}_2(\tilde{\mathbf{A}}) = \frac{\lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{A}})}{\lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{A}})} \leq \frac{C_{\max}^{\tilde{\mathfrak{A}}}}{C_{\min}^{\tilde{\mathfrak{A}}}}(M_L^\Omega)^{2/d} \begin{cases} (1 + |\log(M_L^\Omega(h_{\min,L}^\Omega)^2)|) & d = 2, \\ \frac{h_{\max,L}^\Omega}{h_{\min,L}^\Omega} & d = 3. \end{cases}$$

□

Satz 7.8. Sei $d = 3$. Es bezeichne $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{A}}^L$ die Galerkin-Matrix von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich \mathcal{X}_L , und sei \mathbf{D} die Diagonalmatrix von $\tilde{\mathbf{A}}$, dann gilt

$$\text{cond}_{\tilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}) \leq C_{\text{diag}}^{\tilde{\mathfrak{A}}}(M_L^\Omega)^{2/3},$$

wobei die Konstante $C_{\text{diag}}^{\tilde{\mathfrak{A}}} > 0$ nur von \mathfrak{A}, Ω und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_L^Ω abhängt. □

Lokaler Multilevel Diagonalvorkonditionierer

Wir definieren die lokale Menge von Knoten

$$\tilde{\mathcal{N}}_\ell^\Omega := \mathcal{N}_\ell^\Omega \setminus \mathcal{N}_{\ell-1}^\Omega \cup \{z \in \mathcal{N}_{\ell-1}^\Omega : \eta_{\ell-1}^z \neq \eta_\ell^z\}. \quad (7.24)$$

In Abbildung 6.1 ist ein Beispiel mit $d = 2$ visualisiert.

Wir betrachten die Unterraumzerlegung

$$\mathcal{X}_L = \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell^\Omega} \mathcal{X}_\ell^z \quad \text{mit} \quad \mathcal{X}_\ell^z := \text{span}\{\eta_\ell^z\}. \quad (7.25)$$

Sei $\mathfrak{P}_\ell^z : \mathcal{X} := H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}_\ell^z$ die Projektion auf \mathcal{X}_ℓ^z bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$, d.h.

$$\langle \mathfrak{P}_\ell^z v, w_\ell^z \rangle = \langle v, w_\ell^z \rangle \quad \text{für alle } w_\ell^z \in \mathcal{X}_\ell^z.$$

Der Additiv-Schwarz Operator $\mathfrak{P}_{\text{LD}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_L$ zur Zerlegung (7.25) ist definiert als

$$\mathfrak{P}_{\text{LD}} := \sum_{\ell=0}^L \sum_{z \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell^\Omega} \mathfrak{P}_\ell^z.$$

Proposition 7.9. Der Operator \mathfrak{P}_{LD} erfüllt

$$c_{\text{LD}} \|v\|^2 \leq \langle \mathfrak{P}_{\text{LD}} v, v \rangle \leq C_{\text{LD}} \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}_L. \quad (7.26)$$

Die Konstanten $c_{\text{LD}} > 0, C_{\text{LD}} > 0$ hängen nur von \mathfrak{A}, Ω und \mathcal{T}_0^Ω ab.

Wir geben noch die Matrixform des Operators $\mathfrak{P}_{\text{LD}}|_{\mathcal{X}_L}$ und den zugehörigen Vorkonditionierer an. Sei $\tilde{\mathbf{D}}^\ell$ die Diagonalmatrix der Galerkin-Matrix von $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ bezüglich des Unterraumes $\tilde{\mathcal{X}}_\ell := \text{span}\{\eta_\ell^{\mathbf{z}} : \mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell^\Omega\}$, d.h. $(\tilde{\mathbf{D}}^\ell)_{jk} := \langle\langle \eta_\ell^{\mathbf{z}^k}, \eta_\ell^{\mathbf{z}^j} \rangle\rangle$ für $\mathbf{z}^j, \mathbf{z}^k \in \tilde{\mathcal{N}}_\ell^\Omega$. Weiters sei $\tilde{\text{Id}}_\ell : \tilde{\mathcal{X}}_\ell \rightarrow \mathcal{X}_L$ die kanonische Einbettung mit Matrixdarstellung $\tilde{\mathbf{I}}^\ell$. Der lokale Multilevel Diagonalvorkonditionierer ist dann gegeben als

$$\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} := \sum_{\ell=0}^L \tilde{\mathbf{I}}^\ell (\tilde{\mathbf{D}}^\ell)^{-1} (\tilde{\mathbf{I}}^\ell)^T. \quad (7.27)$$

Die Matrix $\mathbf{S}_{\text{LD}} := \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ ist die Matrixdarstellung von $\mathfrak{P}_{\text{LD}}|_{\mathcal{X}_L}$, d.h. es gilt

$$\langle\langle \mathfrak{P}_{\text{LD}} u, v \rangle\rangle = \langle \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\tilde{\mathbf{A}}} \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N_L^\Omega} \text{ mit } u = \sum_{j=1}^{N_L^\Omega} \mathbf{x}_j \eta_L^{\mathbf{z}^j}, v = \sum_{j=1}^{N_L^\Omega} \mathbf{y}_j \eta_L^{\mathbf{z}^j}.$$

Satz 7.10. Sei $d = 2$. Die Matrix $\mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Die Matrix $\mathbf{S}_{\text{LD}} := \mathbf{P}_{\text{LD}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}_{\text{LD}}}$ und bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathbf{A}}}$. Des weiteren erfüllen der minimale und maximale Eigenwert der Matrix \mathbf{S}_{LD}

$$c \leq \lambda_{\min}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq C, \quad (7.28)$$

wobei die Konstanten $c, C > 0$ nur von \mathfrak{A} , Ω , und der Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Ω abhängen. Insbesondere ist die Konditionszahl der Matrix \mathbf{S}_{LD} unabhängig von L beschränkt durch

$$\text{cond}_{\tilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) = \text{cond}_{\mathbf{P}_{\text{LD}}}(\mathbf{S}_{\text{LD}}) \leq C/c. \quad (7.29)$$

Globaler Multilevel Diagonalvorkonditionierer

Wir betrachten die Unterraumzerlegung

$$\mathcal{X}_L = \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^\Omega} \mathcal{X}_\ell^{\mathbf{z}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{X}_\ell^{\mathbf{z}} = \text{span}\{\eta_\ell^{\mathbf{z}}\} \quad (7.30)$$

mit dem zugehörigen Additiv-Schwarz Operator $\mathfrak{P}_{\text{GD}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_L$,

$$\mathfrak{P}_{\text{GD}} := \sum_{\ell=0}^L \sum_{\mathbf{z} \in \mathcal{N}_\ell^\Omega} \mathfrak{P}_\ell^{\mathbf{z}}. \quad (7.31)$$

Proposition 7.11. Der Operator \mathfrak{P}_{GD} erfüllt

$$c_{\text{GD}} \|v\|^2 \leq \langle\langle \mathfrak{P}_{\text{GD}} v, v \rangle\rangle \leq C_{\text{GD}} (L+1) \|v\|^2 \quad \text{für alle } v \in \mathcal{X}_L. \quad (7.32)$$

Die Konstanten $c_{\text{GD}} > 0, C_{\text{GD}} > 0$ hängen nur von \mathfrak{A} , Ω , und \mathcal{T}_0^Ω ab.

Für die Matrixdarstellung von \mathfrak{P}_{LD} benötigen wir die Diagonalmatrix \mathbf{D}^ℓ von $\tilde{\mathbf{A}}^\ell$ und die Einbettung $\text{Id}_\ell : \mathcal{X}_\ell \rightarrow \mathcal{X}_L$ mit Matrixdarstellung \mathbf{I}^ℓ . Den *globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer* definieren wir als

$$\mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} := \sum_{\ell=0}^L \mathbf{I}^\ell (\mathbf{D}^\ell)^{-1} (\mathbf{I}^\ell)^T. \quad (7.33)$$

Satz 7.12. *Sei $d = 2$. Die Matrix $\mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Die Matrix $\mathbf{S}_{\text{GD}} := \mathbf{P}_{\text{GD}}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}$ ist symmetrisch und positiv definit bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}_{\text{GD}}}$ und bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathbf{A}}}$. Des weiteren erfüllen der minimale und maximale Eigenwert der Matrix \mathbf{S}_{GD}*

$$c \leq \lambda_{\min}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq C(L+1), \quad (7.34)$$

wobei die Konstanten $c, C > 0$ nur von \mathfrak{A} , Ω , und der Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Ω abhängen. Insbesondere ist die Konditionszahl der Matrix \mathbf{S}_{GD} beschränkt durch

$$\text{cond}_{\tilde{\mathbf{A}}}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) = \text{cond}_{\mathbf{P}_{\text{GD}}}(\mathbf{S}_{\text{GD}}) \leq (L+1)C/c. \quad (7.35)$$

Beweis Proposition 7.9 und Proposition 7.11. Die Aussagen können dabei mit den gleichen Schritten wie in Abschnitt 6.2 (Multilevel Vorkonditionierer für den hypersingulären Operator) gezeigt werden. Die einzelnen Bausteine für den lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer finden sich in den Arbeiten [WC06] und [XCH10] für $d = 2$. Wir geben daher nur kurz die Beweisskizzen an.

Stabilität der Unterraumzerlegung (7.25) wird in [WC06] gezeigt. Nach Lemma 6.2 folgen daher die unteren Schranken in Proposition 7.9 und Proposition 7.11.

Für den Beweis der oberen Schranken, kann man wie in Abschnitt 6.2 vorgehen. Die Argumentation folgt dabei den gleichen Zeilen.

In [XCH10] findet sich ein alternativer Beweis für die obere Schranke des lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierers. Der globale Multilevel Diagonalvorkonditionierer wird in [XCH10] nicht behandelt. \square

Beweis von Satz 7.10 und Satz 7.12. Die Beweise der Aussagen folgen den gleichen Zeilen wie im Beweis von Satz 6.7 und Satz 6.9 unter Zuhilfenahme von Proposition 7.9 und Proposition 7.11. \square

Bemerkung 7.13. *Die Resultate über den lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer und den globalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer sind für $d = 2$ dargestellt, gelten aber auch für $d = 3$, wobei prinzipiell die gleiche Argumentation verwendet werden kann.*

Wir bemerken noch, dass in [HWZ12] uniforme Konvergenz von lokalen Multigrid Methoden in $H^1(\Omega)$ für $d = 3$ untersucht wird.

7.4.2 Konditionszahl der FEM-BEM Matrix

Wir untersuchen die Konditionszahl der nicht-vorkonditionierten FEM-BEM Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$. Dazu wählen wir für $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$ und die $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}}$ die entsprechenden Einheitsmatrizen. Der Blockdiagonalvorkonditionierer \mathbf{P} aus (7.6) entspricht dann der $H \times H$ -Einheitsmatrix. Sei $h_{\min, \ell}^\Gamma :=$

$\min_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} \text{diam}(T)$ und $h_{\max, \ell}^\Gamma := \max_{T \in \mathcal{T}_\ell^\Gamma} \text{diam}(T)$ der maximale und minimale Elementdurchmesser in \mathcal{T}_ℓ^Γ . Lemma 7.7 und Lemma 6.18 ergeben zusammen mit Satz 7.5 das folgende Resultat zur Konditionszahl der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$.

Korollar 7.14. *Sei $\tilde{\mathbf{B}}$ die Galerkin-Matrix von $\tilde{\mathfrak{B}}$ bezüglich der Basis von $\mathcal{H}_\ell := \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_\ell^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_\ell^\Gamma)$. Die ℓ^2 -Konditionszahl erfüllt für $d = 2$*

$$\begin{aligned} \text{cond}_2(\tilde{\mathbf{B}}) &\leq C M_\ell^\Gamma (h_{\max, \ell}^\Gamma)^2 (1 + |\log(M_\ell^\Gamma h_{\max, \ell}^\Gamma)|) \\ &\quad \times \max\{M_\ell^\Omega (1 + |\log(M_\ell^\Omega (h_{\min, \ell}^\Omega)^2)|), (h_{\min, \ell}^\Gamma)^{-2}\}, \end{aligned} \quad (7.36)$$

und für $d = 3$

$$\text{cond}_2(\tilde{\mathbf{B}}) \leq C \max\{h_{\max, \ell}^\Omega, (M_\ell^\Gamma)^{1/2} (h_{\max, \ell}^\Gamma)^3\} \max\{(M_\ell^\Omega)^{2/3} (h_{\min, \ell}^\Omega)^{-1}, (h_{\min, \ell}^\Gamma)^{-3}\}. \quad (7.37)$$

Die Konstante $C > 0$ hängt dabei nur von \mathfrak{A} , Ω , und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ ab. \square

7.4.3 Diagonalvorkonditionierung der FEM-BEM Matrix

Wir untersuchen nun einen simplen Diagonalvorkonditionierer für $\tilde{\mathbf{B}}$. Das folgende Resultat folgt dabei aus Satz 7.5 und aus Eigenwertabschätzungen, welche in den Arbeiten [BS89] bzw. [AMT99] zu Diagonalvorkonditionierung von FEM und BEM Operatoren auf adaptiven Triangulierungen zu finden sind. Wir bemerken, dass diese Abschätzungen auch benutzt werden, um Satz 6.5, Satz 6.19, und Satz 7.8 zu zeigen.

Korollar 7.15. *Bezeichne \mathbf{D} die Diagonalmatrix von $\tilde{\mathbf{B}}$. Die Konditionszahl des vorkonditionierten Systems $\mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}$ erfüllt für $d = 2$*

$$\begin{aligned} \text{cond}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) &\leq C M_\ell^\Gamma \frac{1 + |\log(M_\ell^\Gamma h_{\min, \ell}^\Gamma)|}{1 + |\log(h_{\max, \ell}^\Gamma)|} \\ &\quad \times \max\{M_\ell^\Omega (1 + |\log(M_\ell^\Omega (h_{\min, \ell}^\Omega)^2)|), 1 + |\log(h_{\min, \ell}^\Gamma)|\}, \end{aligned} \quad (7.38)$$

und für $d = 3$

$$\text{cond}_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) \leq C (M_\ell^\Omega)^{2/3} (M_\ell^\Gamma)^{1/2}. \quad (7.39)$$

Die Konstante $C > 0$ hängt dabei nur von \mathfrak{A} , Ω , und der γ -Formregularität von \mathcal{T}_ℓ^Ω und \mathcal{T}_ℓ^Γ ab. \square

7.4.4 Lokaler Multilevel Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplung

Sei $\mathcal{T}_0 = (\mathcal{T}_0^\Omega, \mathcal{T}_0^\Gamma), \dots, \mathcal{T}_L = (\mathcal{T}_L^\Omega, \mathcal{T}_L^\Gamma)$ eine Folge von Triangulierungen. Wir definieren nun einen *lokalen* Multilevel Vorkonditionierer für die Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ im Fall $d = 2$. Das nächste Resultat ist dabei eine direkte Folgerung aus Satz 6.21, Satz 7.10, und Satz 7.5.

Korollar 7.16. Sei $d = 2$. Bezeichne mit $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}^L$ die Galerkin-Matrix von $\tilde{\mathfrak{B}}$ bezüglich der Basis von $\mathcal{H}_L = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_L^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_L^\Gamma)$. Sei $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$ der lokale Multilevel Diagonalvorkonditionierer aus Abschnitt 7.4.1 und sei $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}}$ der lokale Multilevel Diagonalvorkonditionierer aus Abschnitt 6.3.2. Sei \mathbf{P} der Blockdiagonal-Vorkonditionierer (7.6). Die Konditionszahl erfüllt

$$\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) \leq C, \quad (7.40)$$

wobei die Konstante $C > 0$ nur von \mathfrak{A} , Ω , \mathcal{T}_0^Ω , und \mathcal{T}_0^Γ abhängt.

Für das j -te Residuum \mathbf{r}^j bei Verwendung des vorkonditionierten GMRES Algorithmus (Abschnitt 7.1) zum Lösen von (7.8) gilt

$$\|\mathbf{r}^j\|_{\mathbf{P}} \leq q_{\text{GMRES}}^j \|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}.$$

Die Konstante $0 < q_{\text{GMRES}} < 1$ hängt nur von \mathfrak{A} , Ω , \mathcal{T}_0^Ω , und \mathcal{T}_0^Γ ab. \square

7.4.5 Globaler Multilevel Vorkonditionierer für FEM-BEM Kopplung

Sei $\mathcal{T}_0 = (\mathcal{T}_0^\Omega, \mathcal{T}_0^\Gamma), \dots, \mathcal{T}_L = (\mathcal{T}_L^\Omega, \mathcal{T}_L^\Gamma)$ eine Folge von Triangulierungen. Wir definieren nun einen *globalen* Multilevel Vorkonditionierer für die Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$. Das nächste Resultat ist dabei eine direkte Folgerung aus Satz 6.23, Satz 7.12, und Satz 7.5.

Korollar 7.17. Sei $d = 2$. Bezeichne $\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}}^L$ die Galerkin-Matrix von $\tilde{\mathfrak{B}}$ bezüglich der Basis von $\mathcal{H}_L = \mathcal{S}^1(\mathcal{T}_L^\Omega) \times \mathcal{P}^0(\mathcal{T}_L^\Gamma)$. Sei $\mathbf{P}_{\mathfrak{A}}$ der globale Multilevel Diagonalvorkonditionierer aus Abschnitt 7.4.1 und sei $\mathbf{P}_{\mathfrak{B}}$ der globale Multilevel Diagonalvorkonditionierer aus Abschnitt 6.3.2. Sei \mathbf{P} der Blockdiagonal-Vorkonditionierer (7.6). Die Konditionszahl erfüllt

$$\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) \leq C(L+1), \quad (7.41)$$

wobei die Konstante $C > 0$ nur von \mathfrak{A} , Ω , \mathcal{T}_0^Ω , und \mathcal{T}_0^Γ abhängt.

Für das j -te Residuum \mathbf{r}^j bei Verwendung des vorkonditionierten GMRES Algorithmus (Abschnitt 7.1) zum Lösen von (7.8) gilt

$$\|\mathbf{r}^j\|_{\mathbf{P}} \leq q_{\text{GMRES}}^j \|\mathbf{r}^0\|_{\mathbf{P}}.$$

Die Konstante $0 < q_{\text{GMRES}} < 1$ hängt nur von \mathfrak{A} , Ω , \mathcal{T}_0^Ω , \mathcal{T}_0^Γ , und L ab. \square

7.5 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt präsentieren wir unterschiedliche Beispiele, bei denen wir für die drei verschiedenen Kopplungen die Konditionszahlen der vorgestellten Vorkonditionierer als auch die Anzahl der Iterationen bei Verwendung des GMRES Algorithmus 7.2 vergleichen.

Die Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$, wobei \mathbf{P} einen der vorgestellten Vorkonditionierer bezeichnet, schätzen wir mit Hilfe von Satz 7.5 ab, d.h.

$$\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}) \lesssim \text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}) = \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{C}})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{C}})}. \quad (7.42)$$

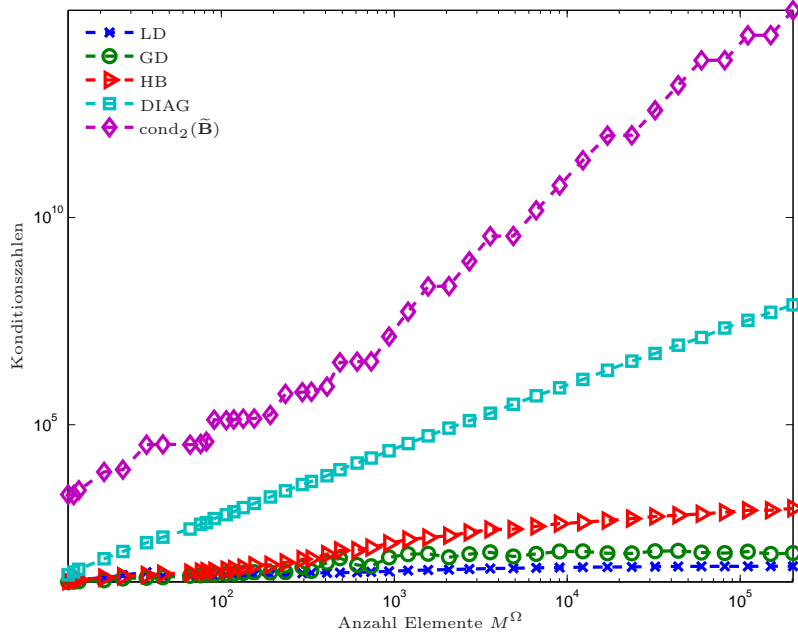


Abbildung 7.1: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LD}}$ (LD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{GD}}$ (GD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{HB}}$ bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) für die Johnson-Nédélec Kopplung und das Experiment aus Abschnitt 7.5.1. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

Zur Berechnung der Eigenwerte $\lambda_{\max}(\cdot)$ bzw. $\lambda_{\min}(\cdot)$ verwenden wir wie in Abschnitt 6.4 die *Power-Iteration* bzw. *inverse Power-Iteration*.

Im Folgenden bezeichnen wir mit \mathbf{P}_{LD} (LD) den Vorkonditionierer aus Korollar 7.16 und mit \mathbf{P}_{GD} (GD) den Vorkonditionierer aus Korollar 7.17. Die Diagonale von $\tilde{\mathbf{B}}$ bezeichnen wir mit \mathbf{D} (DIAG).

Zusätzlich definieren wir einen *hierarchischen Basis* Vorkonditionierer (HB)

$$\mathbf{P}_{\text{HB}} := \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\text{HB}}^{\text{FEM}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\text{HB}}^{\text{BEM}} \end{pmatrix},$$

wobei der Block $\mathbf{P}_{\text{HB}}^{\text{FEM}}$ der hierarchische Basis Vorkonditionierer für den FEM Teil ist, siehe z.B. [Yse86] für die entsprechende Definition und Analyse, und $\mathbf{P}_{\text{HB}}^{\text{BEM}}$ der hierarchische Basis Vorkonditionierer aus (6.80) für den BEM Teil ist.

7.5.1 Experiment auf L-förmigen Gebiet in 2D

Wir verwenden für dieses Experiment die gleiche Konfiguration wie in Abschnitt 5.4.1. Den adaptiven Algorithmus 5.1 steuern wir mit dem ZZ-Schätzer aus Kapitel 5 und dem Markierungsparameter $\theta = \frac{1}{4}$.

Als Startvektor \mathbf{x}^0 im vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 prolongieren wir jeweils die auf $\mathcal{H}_{\ell-1}$ berechnete Näherungslösung auf \mathcal{H}_ℓ . Auf dem Netz \mathcal{T}_0 wählen wir $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ als Startvektor. Den Parameter τ setzen wir auf 10^{-4} .

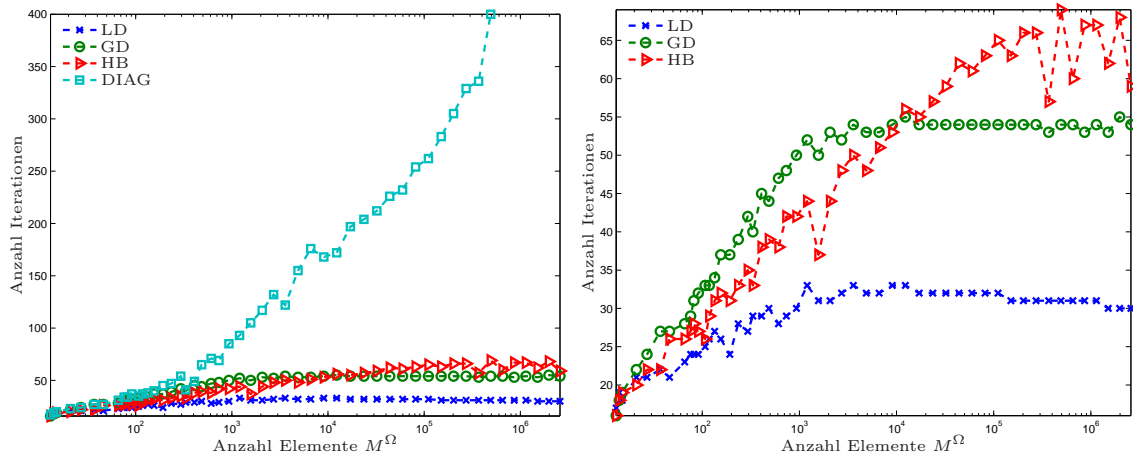


Abbildung 7.2: Vergleich der benötigten Iterationen im vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 für das Experiment aus Abschnitt 7.5.1 und die Johnson-Nédélec Kopplung. Als Vorkonditionierer wird entweder $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{LD}$ (LD), $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{GD}$ (GD), $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{HB}$, oder $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) verwendet.

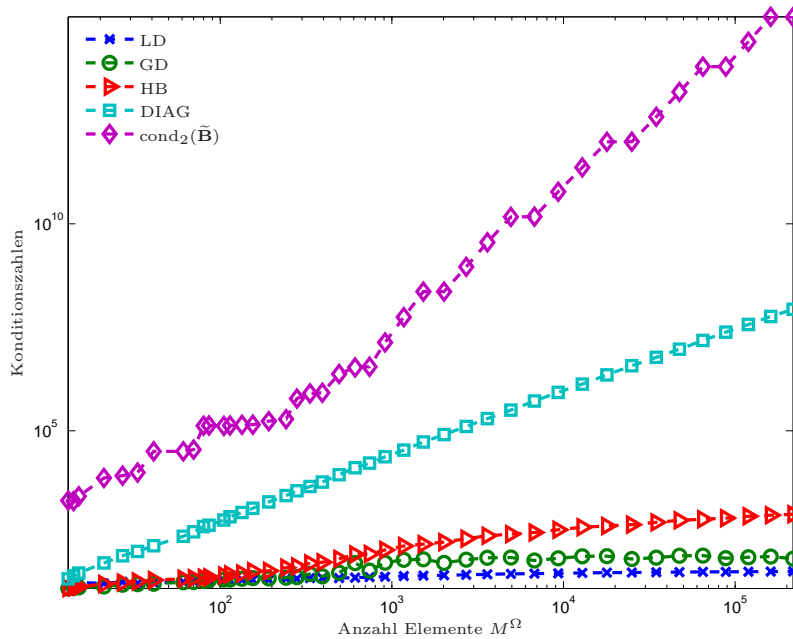


Abbildung 7.3: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{LD}$ (LD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{GD}$ (GD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{HB}$ bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) für die symmetrische Kopplung und das Experiment aus Abschnitt 7.5.1. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

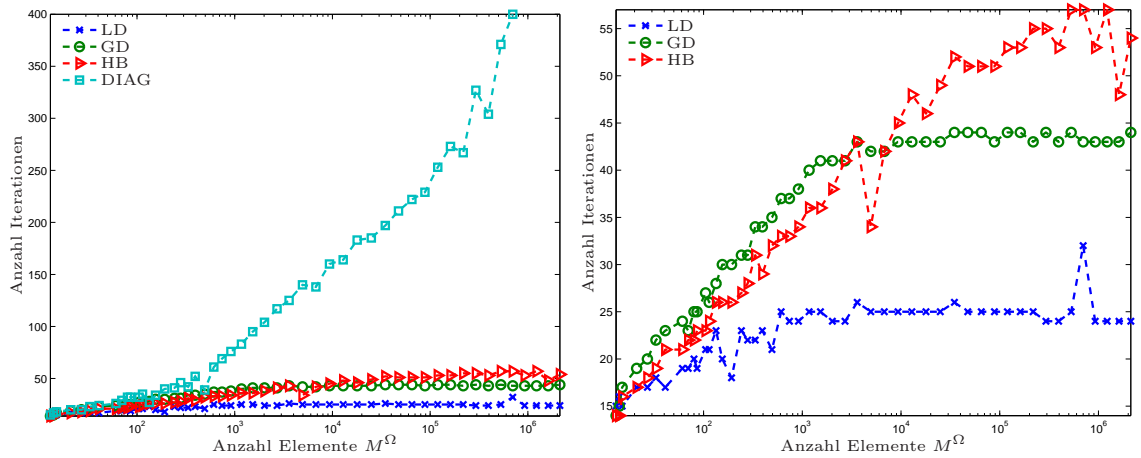


Abbildung 7.4: Vergleich der benötigten Iterationen im vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 für das Experiment aus Abschnitt 7.5.1 und die symmetrische Kopplung. Als Vorkonditionierer wird entweder $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{LD}$ (LD), $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{GD}$ (GD), $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{HB}$, oder $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) verwendet.

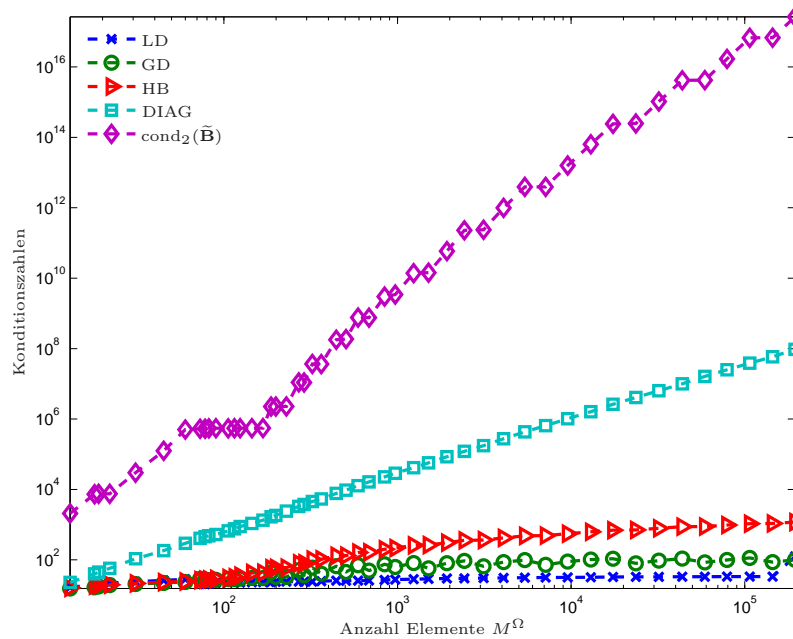


Abbildung 7.5: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{LD}$ (LD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{GD}$ (GD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{HB}$ bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) für die Bielak-MacCamy Kopplung und das Experiment aus Abschnitt 7.5.1. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

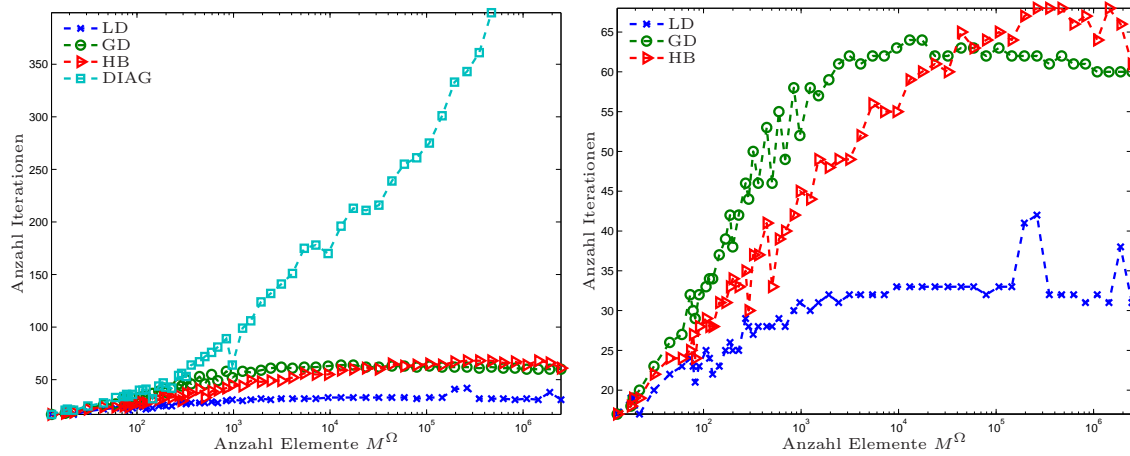


Abbildung 7.6: Vergleich der benötigten Iterationen im vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 für das Experiment aus Abschnitt 7.5.1 und die Bielak-MacCamy Kopplung. Als Vorkonditionierer wird entweder $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{LD}$ (LD), $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{GD}$ (GD), $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{HB}$, oder $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) verwendet.

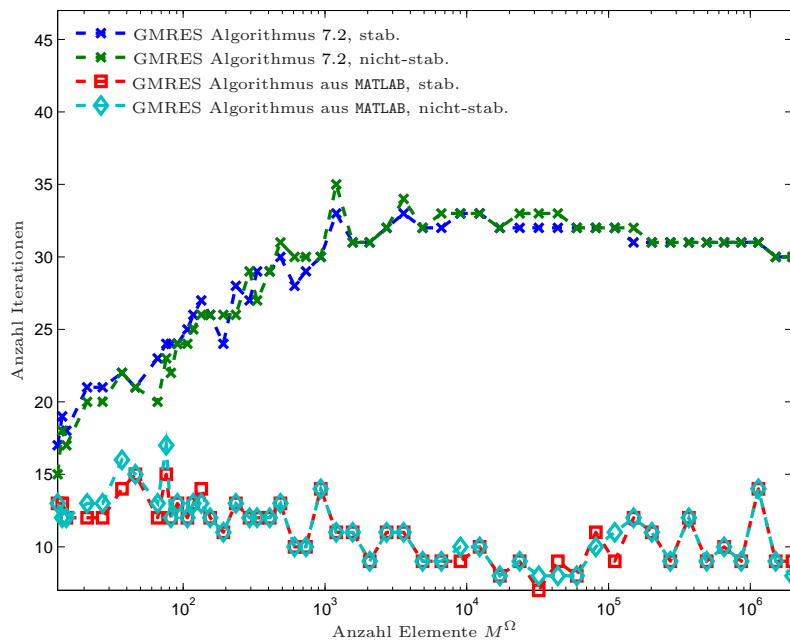


Abbildung 7.7: Anzahl der Iterationen bei Verwendung des vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 für die stabilisierte Johnson-Nédélec Kopplung und die nicht-stabilisierte Variante aus dem Experiment von Abschnitt 7.5.1. Zusätzlich sind die Anzahl der Iterationen bei Verwendung des GMRES Algorithmus, welcher in MATLAB durch die Routine `gmres` bereitgestellt wird, aufgetragen.

Abbildung 7.1 zeigt die Abschätzungen der Konditionszahlen (7.42) mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{LD}$ (LD), $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{GD}$ (GD), $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{HB}$ (HB), bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) für die Johnson-Nédélec Kopplung. Zum Vergleich ist auch die ℓ^2 -Konditionszahl $\text{cond}_2(\tilde{\mathbf{B}})$ aufgetragen. Man sieht, dass der Vorkonditionierer (LD) optimal ist, d.h. unabhängig von der Netzweite, der Anzahl der Elemente, und von L ist, während die Vorkonditionierer (GD) und (HB) von L abhängen. Weiters ist zu erkennen, dass eine simple Skalierung mit der Diagonalmatrix \mathbf{D} zu deutliche höheren Konditionszahlen als mit den Vorkonditionierern (LD), (GD), (HB) führt.

Die Ergebnisse zu den Konditionszahlen spiegeln sich auch in der Anzahl der verwendeten Iterationen im vorkonditionierten GMRES Algorithmus wieder, welche in Abbildung 7.2 geplottet sind. Der *optimale* Vorkonditionierer \mathbf{P}_{LD} (LD) benötigt die geringste Anzahl der Iterationen, gefolgt von dem Vorkonditionierer \mathbf{P}_{GD} (GD) und \mathbf{P}_{HB} (HB). Bei Verwendung von \mathbf{D} als Vorkonditionierer schnellte die Anzahl der benötigten Iterationen bereits nach wenigen Schritten steil nach oben.

Für die symmetrische Kopplung bzw. die Bielak-MacCamy Kopplung erhalten wir analoge Ergebnisse, siehe Abbildung 7.3 und Abbildung 7.4 bzw. Abbildung 7.5 und Abbildung 7.6.

Die Resultate in diesem Abschnitt beruhen alle auf der positiven Definitheit der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ der stabilisierten Kopplungen. Man kann die Stabilisierung aber auch weglassen. Dazu definieren wir den Vorkonditionierer \mathbf{R}_{LD} genau so wie \mathbf{P}_{LD} , nur dass wir alle auftretenden Stabilisierungsterme weglassen. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\mathbf{R}_{LD}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{x} = \mathbf{R}_{LD}^{-1} \mathbf{f}, \quad (7.43)$$

welches mit dem vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 mit $\mathbf{P} = \mathbf{R}_{LD}$ gelöst wird. Man beachte aber, dass im Allgemeinen keine Konvergenzaussagen für den Algorithmus 7.2 möglich sind, da die Galerkin-Matrix \mathbf{B} von \mathfrak{B} nicht positiv definit ist. In Abbildung 7.7 werden die Anzahl der Iterationen zum Lösen des nicht-stabilisierten Problems (7.43) und zum Lösen des stabilisierten Problems $\mathbf{P}_{LD}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_{LD}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}$ für die Johnson-Nédélec Kopplung verglichen. Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, besteht kein großer Unterschied zwischen den beiden Varianten.

Üblicherweise wird in vielen mathematischen Softwarepaketen ein GMRES Algorithmus mitgeliefert. Die Implementierungen dieser Algorithmen unterscheiden sich zu dem GMRES Algorithmus 7.2 meistens darin, dass das euklidische innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ anstelle von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}}$ verwendet werden. Die Aussagen dieses Kapitels gelten aber nur bei Verwendung des Algorithmus 7.2 mit dem speziellen inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{P}}$. Nichtsdestotrotz kann man auch mit diesen mitgelieferten Algorithmen gute Ergebnisse erzielen. In Abbildung 7.7 sieht man die Anzahl der Iterationen bei Verwendung des in MATLAB mitgelieferten GMRES Algorithmus, der in der Routine `gmres` bereitgestellt wird. Wir bemerken, dass sich die Anzahl der Iterationen bei Verwendung des GMRES Algorithmus aus MATLAB nicht direkt mit der Anzahl der Iterationen bei Verwendung von Algorithmus 7.2 vergleichen lässt. Dies liegt natürlich an den unterschiedlichen inneren Produkten. Wir verweisen noch auf die Arbeit [SS07], in welcher verschiedene Varianten des GMRES Algorithmus untersucht werden.

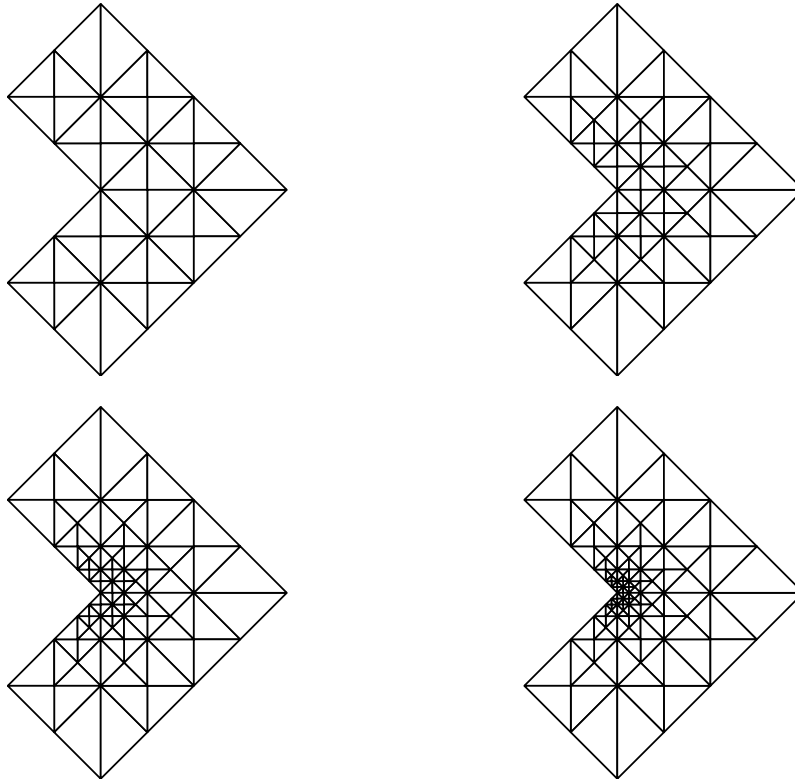


Abbildung 7.8: Triangulierungen \mathcal{T}_1^Ω , \mathcal{T}_2^Ω , \mathcal{T}_3^Ω , \mathcal{T}_4^Ω für die Beispiele mit künstlicher Verfeinerung aus Abschnitt 7.5.2.

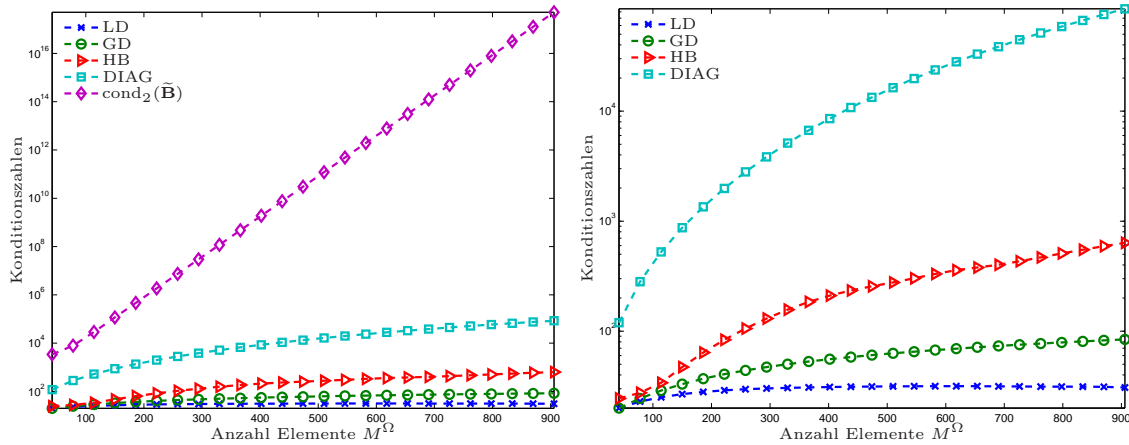


Abbildung 7.9: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LD}}$ (LD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{GD}}$ (GD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{HB}}$ bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) für die Johnson-Nédélec Kopplung und das Experiment mit künstlicher Verfeinerung aus Abschnitt 7.5.2. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

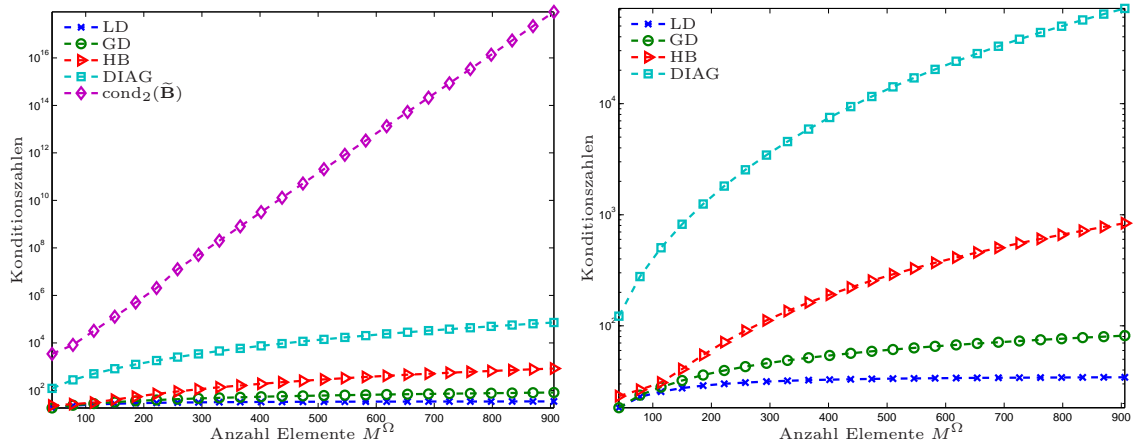


Abbildung 7.10: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LD}}$ (LD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{GD}}$ (GD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{HB}}$ bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) für die symmetrische Kopplung und das Experiment mit künstlicher Verfeinerung aus Abschnitt 7.5.2. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

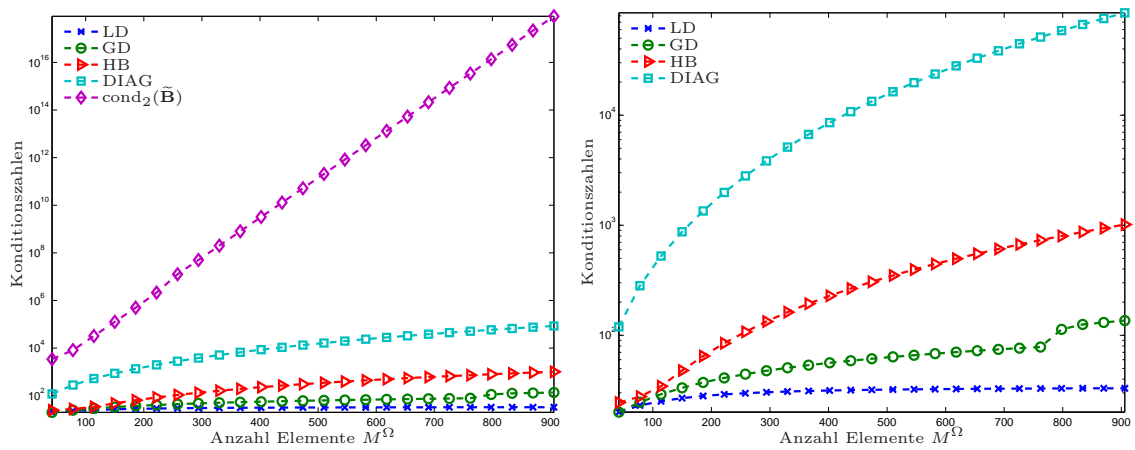


Abbildung 7.11: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LD}}$ (LD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{GD}}$ (GD) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{HB}}$ bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG) für die Bielak-MacCamy Kopplung und das Experiment mit künstlicher Verfeinerung aus Abschnitt 7.5.2. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

7.5.2 Experiment mit künstlicher Verfeinerung in 2D

Sei Ω ein L-förmiges Gebiet mit in Abbildung 3.1 gegebenen Starttriangulierung \mathcal{T}_0^Ω . Wir betrachten eine künstliche Verfeinerung die auf lokal stark verfeinerte Triangulierungen führt: Um die Triangulierung \mathcal{T}_ℓ^Ω zu erhalten, markieren wir all jene Elemente $T \in \mathcal{T}_{\ell-1}^\Omega$ und $T \in \mathcal{T}_{\ell-1}^\Gamma := \mathcal{T}_{\ell-1}^\Omega|_\Gamma$ mit $(0,0) \in T$. Eine Folge von solchen Netzen ist in Abbildung 7.8 visualisiert.

Wir untersuchen die Konditionszahlen der vorkonditionierten Systeme und der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$. Die Ergebnisse für die Johnson-Nédélec Kopplung sind in Abbildung 7.9 aufgetragen. Wiederum beobachten wir, dass der Vorkonditionierer \mathbf{P}_{LD} (LD) optimal ist, während die Vorkonditionierer (GD) und (HB) von L abhängen. Die simple Diagonalvorkonditionierung führt auf deutlich größere Konditionszahlen. Zum Vergleich sind die ℓ^2 -Konditionszahlen der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

Analoge Resultate gelten für die symmetrische Kopplung und die Bielak-MacCamy Kopplung, wie aus Abbildung 7.10 und Abbildung 7.11 ersichtlich ist.

7.5.3 Experiment auf L-Block in 3D

Wir verwenden das gleiche Beispiel wie in Abschnitt 5.4.3. Der adaptive Algorithmus 5.1 wird mit dem ZZ-Schätzer aus Kapitel 5 gesteuert. Als Startvektor \mathbf{x}^0 im vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 prolongieren wir jeweils die auf $\mathcal{H}_{\ell-1}$ berechnete Näherungslösung auf \mathcal{H}_ℓ . Auf dem Netz \mathcal{T}_0 wählen wir $\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$ als Startvektor. Den Parameter τ setzen wir auf 10^{-5} .

Da für den BEM Teil der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ im Fall $d = 3$ kein, auf adaptiv generierten Triangulierungen, optimaler Multilevel Vorkonditionierer zur Verfügung steht, definieren wir einen suboptimalen Vorkonditionierer wie folgt: Es bezeichne \mathbf{P}_{FEM} den lokalen Multilevel Diagonalvorkonditionierer aus Abschnitt 7.4.1. Dieser Vorkonditionierer wird für $d = 3$ wie für $d = 2$ definiert, siehe dazu auch die entsprechenden Bemerkungen in Abschnitt 7.4.1. Weiters bezeichne $\mathbf{D}_{\mathfrak{B}}$ die Diagonale von \mathbf{V} . Wir untersuchen den Vorkonditionierer

$$\mathbf{P}_{\text{LDIAG}} := \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{\text{FEM}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}.$$

Da \mathbf{P}_{FEM} ein optimaler Vorkonditionierer ist und aus den Eigenschaften des Diagonalvorkonditionierers $\mathbf{D}_{\mathfrak{B}}$, siehe [AMT99], folgt nach Satz 7.5, dass die Konditionszahl

$$\text{cond}_{\mathbf{P}_{\text{LDIAG}}}(\mathbf{P}_{\text{LDIAG}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}})$$

nur von der Anzahl der Randelemente M_L^Γ abhängt. Diesen Vorkonditionierer vergleichen wir mit dem simplen Diagonalvorkonditionierer $\mathbf{P} = \mathbf{D}$, wobei \mathbf{D} die Diagonalmatrix der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ bezeichnet, siehe dazu auch Korollar 7.15.

In Abbildung 7.12 sind Abschätzungen für die Konditionszahlen der Vorkonditionierer im Fall der Johnson-Nédélec Kopplung zu sehen. Darüber hinaus wird auch die ℓ^2 -Konditionszahl angegeben. Wie im Fall $d = 2$ ist zu erkennen, dass die simple Skalierung mit der Diagonalmatrix zu keinen optimalen Konditionszahlen führt. Es hat den Anschein,

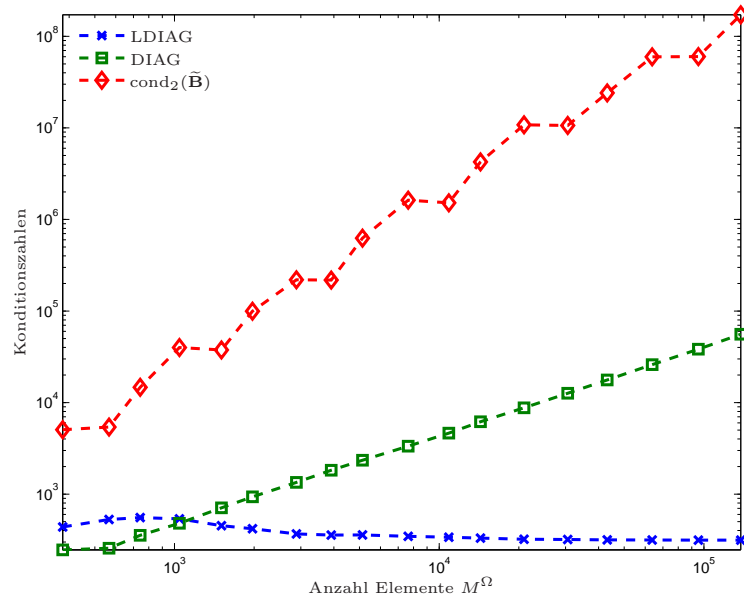


Abbildung 7.12: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LDIAG}}$ (LDIAG) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{DIAG}}$ (DIAG) für die Johnson-Nédélec Kopplung und das Experiment aus Abschnitt 7.5.3. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

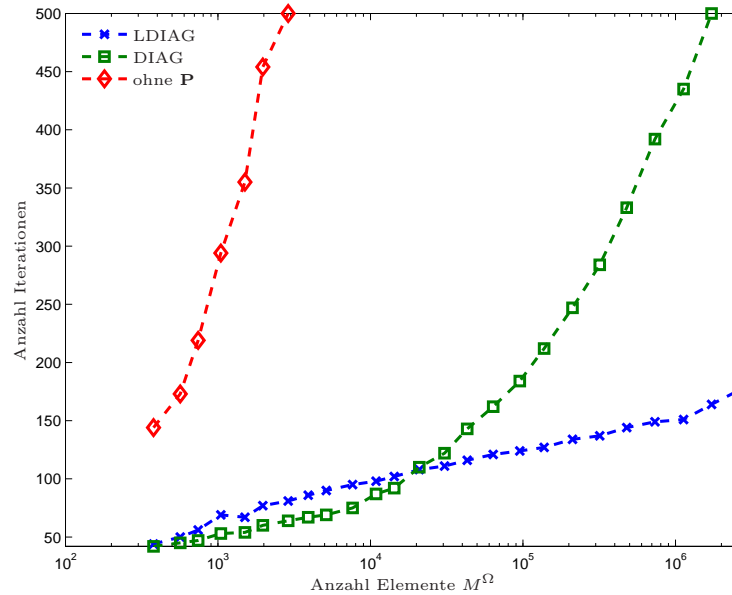


Abbildung 7.13: Vergleich der benötigten Iterationen im vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 für das Experiment aus Abschnitt 7.5.3 und die Johnson-Nédélec Kopplung. Als Vorkonditionierer wird entweder $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LDIAG}}$ (LDIAG), $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG), oder *kein* Vorkonditionierer verwendet.

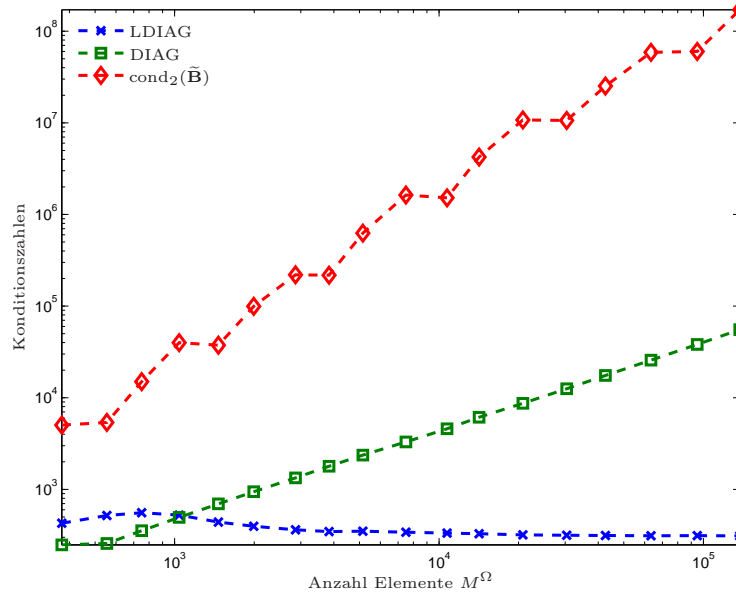


Abbildung 7.14: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LDIAG}}$ (LDIAG) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{DIAG}}$ (DIAG) für die symmetrische Kopplung und das Experiment aus Abschnitt 7.5.3. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

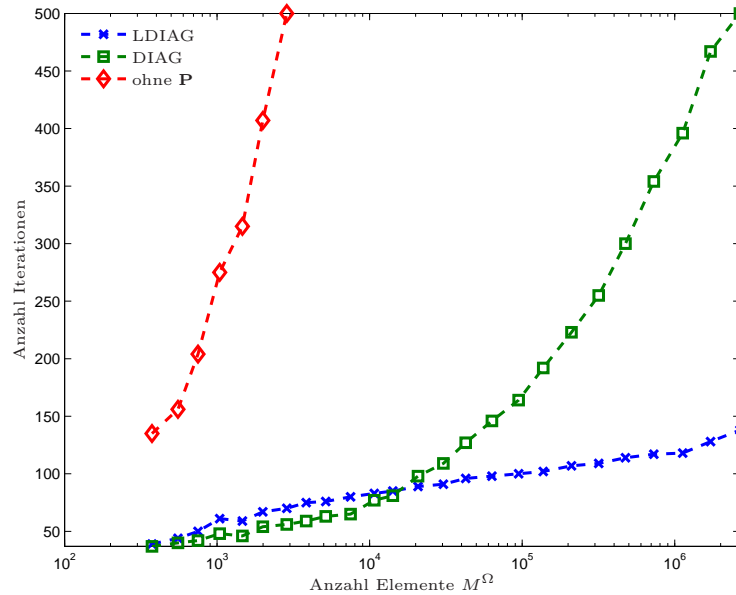


Abbildung 7.15: Vergleich der benötigten Iterationen im vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 für das Experiment aus Abschnitt 7.5.3 und die symmetrische Kopplung. Als Vorkonditionierer wird entweder $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LDIAG}}$ (LDIAG), $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG), oder *kein* Vorkonditionierer verwendet.

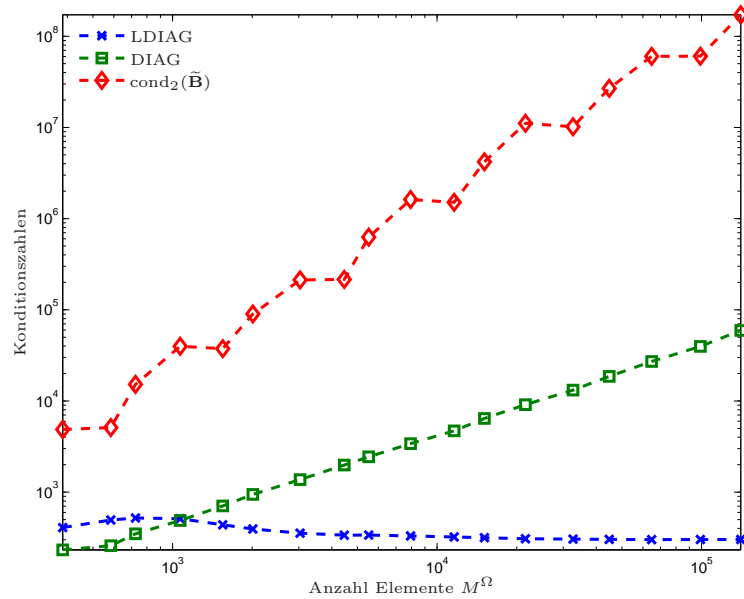


Abbildung 7.16: Abschätzungen der Konditionszahlen $\text{cond}_{\mathbf{P}}(\mathbf{P}^{-1}\tilde{\mathbf{B}})$ mit $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LDIAG}}$ (LDIAG) bzw. $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{DIAG}}$ (DIAG) für die Bielak-MacCamy Kopplung und das Experiment aus Abschnitt 7.5.3. Zum Vergleich ist die ℓ^2 -Konditionszahl der Galerkin-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}$ aufgetragen.

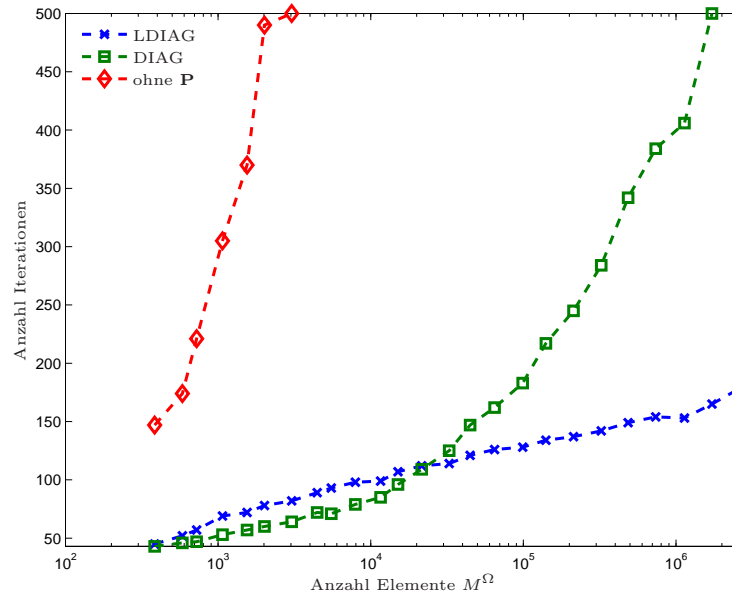


Abbildung 7.17: Vergleich der benötigten Iterationen im vorkonditionierten GMRES Algorithmus 7.2 für das Experiment aus Abschnitt 7.5.3 und die Bielak-MacCamy Kopplung. Als Vorkonditionierer wird entweder $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{LDIAG}}$ (LDIAG), $\mathbf{P} = \mathbf{D}$ (DIAG), oder *kein* Vorkonditionierer verwendet.

dass der Vorkonditionierer $\mathbf{P}_{\text{LDIAG}}$ (LDIAG) auf von \mathcal{T}_L^Ω bzw. \mathcal{T}_L^Γ unabhängigen Konditionszahlen führt. Ein Blick auf die Anzahl der verwendeten Iterationen, welche in Abbildung 7.13 zu finden sind, zeigt aber, dass dieser Vorkonditionierer nicht optimal sein kann. Dies stimmt daher mit unseren theoretischen Überlegungen von vorhin überein.

Für die symmetrische Kopplung bzw. die Bielak-MacCamy Kopplung erhält man analoge Resultate, siehe Abbildung 7.14 und Abbildung 7.15 bzw. Abbildung 7.16 und Abbildung 7.17.

Literaturverzeichnis

- [Ada75] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [AEF⁺13] Markus Aurada, Michael Ebner, Michael Feischl, Samuel Ferraz-Leite, Thomas Führer, Petra Goldenits, Michael Karkulik, Markus Mayr, and Dirk Praetorius. A MATLAB implementation of adaptive 2D-BEM. *Accepted for publication in Numer. Algorithms*, 2013.
- [AFF⁺12] Markus Aurada, Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, Jens M. Melenk, and Dirk Praetorius. Inverse estimates for elliptic boundary integral operators and their application to the adaptive coupling of FEM and BEM. *ASC Report*, 07/2012, Vienna University of Technology, 2012.
- [AFF⁺13a] Markus Aurada, Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, Jens M. Melenk, and Dirk Praetorius. Classical FEM-BEM coupling methods: nonlinearities, well-posedness, and adaptivity. *Comput. Mech.*, 51(4):399–419, 2013.
- [AFF⁺13b] Markus Aurada, Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius. Efficiency and optimality of some weighted-residual error estimator for adaptive 2D boundary element methods. *Comput. Methods Appl. Math.*, 13(3):305–332, 2013.
- [AFF⁺14] Markus Aurada, Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius. Energy norm based error estimators for adaptive BEM for hyper-singular integral equations. *Accepted for publication in Appl. Numer. Math.*, 2014.
- [AFK⁺13] Markus Aurada, Michael Feischl, Josef Kemetmüller, Marcus Page, and Dirk Praetorius. Each $H^{1/2}$ -stable projection yields convergence and quasi-optimality of adaptive FEM with inhomogeneous Dirichlet data in R^d . *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 47:1207–1235, 2013.
- [AFKP12] Markus Aurada, Michael Feischl, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius. A posteriori error estimates for the Johnson-Nédélec FEM-BEM coupling. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 36(2):255–266, 2012.
- [AFLG⁺12] Markus Aurada, Samuel Ferraz-Leite, Petra Goldenits, Michael Karkulik, Markus Mayr, and Dirk Praetorius. Convergence of adaptive BEM for some mixed boundary value problem. *Appl. Numer. Math.*, 62:226–245, 2012.

- [AFLP12] Markus Aurada, Samuel Ferraz-Leite, and Dirk Praetorius. Estimator reduction and convergence of adaptive BEM. *Appl. Numer. Math.*, 62:787–801, 2012.
- [AFP12] Markus Aurada, Michael Feischl, and Dirk Praetorius. Convergence of some adaptive FEM-BEM coupling for elliptic but possibly nonlinear interface problems. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 46(5):1147–1173, 2012.
- [AM03] Mark Ainsworth and William McLean. Multilevel diagonal scaling preconditioners for boundary element equations on locally refined meshes. *Numer. Math.*, 93(3):387–413, 2003.
- [AMT99] Mark Ainsworth, William McLean, and Thanh Tran. The conditioning of boundary element equations on locally refined meshes and preconditioning by diagonal scaling. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(6):1901–1932, 1999.
- [BC02] Sören Bartels and Carsten Carstensen. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. II. Higher order FEM. *Math. Comp.*, 71(239):971–994 (electronic), 2002.
- [Beb12] Mario Bebendorf. *Another software library on hierarchical matrices for elliptic differential equations (AHMED)*. <http://bebendorf.ins.uni-bonn.de/AHMED.html>, 2012.
- [BFF⁺14] Florian Bruckner, Michael Feischl, Thomas Führer, Petra Goldenits, Marcus Page, Dirk Praetorius, Michele Ruggeri, and Dieter Suess. Multiscale Modelling in Micromagnetics: Existence of Solutions and Numerical Integration. *Accepted for publication in Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2014.
- [BM84] Jacobo Bielak and Richard C. MacCamy. An exterior interface problem in two-dimensional elastodynamics. *Quart. Appl. Math.*, 41(1):143–159, 1983/84.
- [BP88] James H. Bramble and Joseph E. Pasciak. A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems. *Math. Comp.*, 50(181):1–17, 1988.
- [BPX90] James H. Bramble, Joseph E. Pasciak, and Jinchao Xu. Parallel multilevel preconditioners. *Math. Comp.*, 55(191):1–22, 1990.
- [BS89] Randolph E. Bank and L. Ridgway Scott. On the conditioning of finite element equations with highly refined meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(6):1383–1394, 1989.
- [BVB⁺13] Florian Bruckner, Christoph Vogler, Bernhard Bergmair, Thomas Huber, Markus Fuger, Dieter Suess, Michael Feischl, Thomas Führer, Marcus Page, and Dirk Praetorius. Combining micromagnetism and magnetostatic Maxwell equations for multiscale magnetic simulations. *J. Magn. Magn. Mater.*, 343:163–168, 2013.

-
- [Cao02] Thang Cao. Adaptive-additive multilevel methods for hypersingular integral equation. *Appl. Anal.*, 81(3):539–564, 2002.
- [Car04] Carstensen Carstensen. All first-order averaging techniques for a posteriori finite element error control on unstructured grids are efficient and reliable. *Math. Comp.*, 73(247):1153–1165 (electronic), 2004.
- [CB02] Carsten Carstensen and Sören Bartels. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I. Low order conforming, nonconforming, and mixed FEM. *Math. Comp.*, 71(239):945–969 (electronic), 2002.
- [CES91] Martin Costabel, Vincent J. Ervin, and Ernst P. Stephan. Experimental convergence rates for various couplings of boundary and finite elements. *Math. Comput. Modelling*, 15(3-5):93–102, 1991.
- [CFS97] Carsten Carstensen, Stefan A. Funken, and Ernst P. Stephan. On the adaptive coupling of FEM and BEM in 2-d-elasticity. *Numer. Math.*, 77(2):187–221, 1997.
- [CKL98] C. Carstensen, M. Kuhn, and U. Langer. Fast parallel solvers for symmetric boundary element domain decomposition equations. *Numer. Math.*, 79(3):321–347, 1998.
- [CKNS08] J. Manuel Cascon, Christian Kreuzer, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(5):2524–2550, 2008.
- [CMS01] Carsten Carstensen, Matthias Maischak, and Ernst P. Stephan. A posteriori error estimate and h -adaptive algorithm on surfaces for Symm’s integral equation. *Numer. Math.*, 90(2):197–213, 2001.
- [Cos88] Martin Costabel. A symmetric method for the coupling of finite elements and boundary elements. In *The mathematics of finite elements and applications, VI (Uxbridge, 1987)*, pages 281–288. Academic Press, London, 1988.
- [CP07] Carsten Carstensen and Dirk Praetorius. Averaging techniques for the a posteriori BEM error control for a hypersingular integral equation in two dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(2):782–810 (electronic), 2007.
- [CS88] Martin Costabel and Ernst P. Stephan. Coupling of finite elements and boundary elements for inhomogeneous transmission problems in \mathbf{R}^3 . In *The mathematics of finite elements and applications, VI (Uxbridge, 1987)*, pages 289–296. Academic Press, London, 1988.
- [CS90] Martin Costabel and Ernst P. Stephan. Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(5):1212–1226, 1990.

- [CS95] Carsten Carstensen and Ernst P. Stephan. Adaptive coupling of boundary elements and finite elements. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 29(7):779–817, 1995.
- [EES83] Stanley C. Eisenstat, Howard C. Elman, and Martin H. Schultz. Variational iterative methods for nonsymmetric systems of linear equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(2):345–357, 1983.
- [FFH⁺14] Michael Feischl, Thomas Führer, Norbert Heuer, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius. Adaptive boundary element methods: A posteriori error estimators, adaptivity, convergence, and implementation. *ASC Report*, 09/2014, Vienna University of Technology, 2014.
- [FFK⁺13a] Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, Jens M. Melenk, and Dirk Praetorius. Quasi-optimal convergence rates for adaptive boundary element methods with data approximation, part I: weakly-singular integral equation. *Calcolo*, 2013.
- [FFK⁺13b] Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, Jens M. Melenk, and Dirk Praetorius. Quasi-optimal convergence rates for adaptive boundary element methods with data approximation, part II: hyper-singular integral equation. *ASC Report*, 30/2013, Vienna University of Technology, 2013.
- [FFKP12] Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius. Stability of symmetric and nonsymmetric FEM-BEM couplings for nonlinear elasticity problems. *ASC Report*, 52/2012, Vienna University of Technology, 2012.
- [FFKP14] Michael Feischl, Thomas Führer, Michael Karkulik, and Dirk Praetorius. ZZ-type a posteriori error estimators for adaptive boundary element methods on a curve. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 38:49–60, 2014.
- [FFME⁺14] Michael Feischl, Thomas Führer, Gregor Mitscha-Eibl, Dirk Praetorius, and Ernst P. Stephan. Convergence of adaptive BEM and adaptive FEM-BEM coupling for estimators without h-weighting factor. *ASC Report*, 16/2014, Vienna University of Technology, 2014.
- [FFP14] Michael Feischl, Thomas Führer, and Dirk Praetorius. Adaptive FEM with optimal convergence rates for a certain class of non-symmetric and possibly non-linear problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 52:601–625, 2014.
- [FFPS13a] Michael Feischl, Thomas Führer, Dirk Praetorius, and Ernst P. Stephan. Efficient additive Schwarz preconditioning for hypersingular integral equations on locally refined triangulations. *ASC Report*, 25/2013, Vienna University of Technology, 2013.
- [FFPS13b] Michael Feischl, Thomas Führer, Dirk Praetorius, and Ernst P. Stephan. Optimal preconditioning for the symmetric and non-symmetric coupling of ad-

- aptive finite elements and boundary elements. *ASC Report*, 36/2013, Vienna University of Technology, 2013.
- [FKMP13] Michael Feischl, Michael Karkulik, Jens M. Melenk, and Dirk Praetorius. Quasi-optimal convergence rate for an adaptive boundary element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 51:1327–1348, 2013.
- [FPP14] Michael Feischl, Marcus Page, and Dirk Praetorius. Convergence and quasi-optimality of adaptive FEM with inhomogeneous Dirichlet data. *J. Comput. Appl. Math.*, 255:481–501, 2014.
- [FS97] Stefan A. Funken and Ernst P. Stephan. The BPX preconditioner for the single layer potential operator. *Appl. Anal.*, 67(3-4):327–340, 1997.
- [FS09] Stefan A. Funken and Ernst P. Stephan. Fast solvers with block-diagonal preconditioners for linear FEM-BEM coupling. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 16(5):365–395, 2009.
- [Gan13] Tsogtgerel Gantumur. Adaptive boundary element methods with convergence rates. *Numer. Math.*, 124(3):471–516, 2013.
- [GH95] Gabriel N. Gatica and George C. Hsiao. *Boundary-field equation methods for a class of nonlinear problems*, volume 331 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman, Harlow, 1995.
- [GHS05] Ivan G. Graham, Wolfgang Hackbusch, and Stefan A. Sauter. Finite elements on degenerate meshes: inverse-type inequalities and applications. *IMA J. Numer. Anal.*, 25(2):379–407, 2005.
- [GHS12] Gabriel N. Gatica, George C. Hsiao, and Francisco-Javier Sayas. Relaxing the hypotheses of Bielak-MacCamy’s BEM-FEM coupling. *Numer. Math.*, 120(3):465–487, 2012.
- [GM06] Ivan G. Graham and William McLean. Anisotropic mesh refinement: the conditioning of Galerkin boundary element matrices and simple preconditioners. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(4):1487–1513, 2006.
- [GO94] Michael Griebel and Peter Oswald. On additive Schwarz preconditioners for sparse grid discretizations. *Numer. Math.*, 66(4):449–463, 1994.
- [GVL13] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, fourth edition, 2013.
- [Han90] Hou De Han. A new class of variational formulations for the coupling of finite and boundary element methods. *J. Comput. Math.*, 8(3):223–232, 1990.
- [HM12] Ralf Hiptmair and Shipeng Mao. Stable multilevel splittings of boundary edge element spaces. *BIT*, 52(3):661–685, 2012.

- [HMS99] Norbert Heuer, Matthias Maischak, and Ernst P. Stephan. Preconditioned minimum residual iteration for the h - p version of the coupled FEM/BEM with quasi-uniform meshes. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 6(6):435–456, 1999.
- [HPPS03] Helmut Harbrecht, Freddy Paiva, Cristian Pérez, and Reinhold Schneider. Multiscale preconditioning for the coupling of FEM-BEM. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 10(3):197–222, 2003.
- [HS96] Manfred Hahne and Ernst P. Stephan. Schwarz iterations for the efficient solution of screen problems with boundary elements. *Computing*, 56(1):61–85, 1996.
- [HS98] Norbert Heuer and Ernst P. Stephan. Preconditioners for the p -version of the Galerkin method for a coupled finite element/boundary element system. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 14(1):47–61, 1998.
- [HW08] George C. Hsiao and Wolfgang L. Wendland. *Boundary integral equations*, volume 164 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, Berlin, 2008.
- [HWZ12] Ralf Hiptmair, Haijun Wu, and Weiyang Zheng. Uniform convergence of adaptive multigrid methods for elliptic problems and Maxwell’s equations. *Numer. Math. Theory Methods Appl.*, 5(3):297–332, 2012.
- [JN80] Claes Johnson and Jean-Claude Nédélec. On the coupling of boundary integral and finite element methods. *Math. Comp.*, 35(152):1063–1079, 1980.
- [Kar12] Michael Karkulik. *Zur Konvergenz und Quasioptimalität adaptiver Randelementmethoden*. PhD thesis, Technische Universität Wien, 2012.
- [Kem12] Josef K. Kemetmüller. Vektorisierte Implementierung von P1-FEM in 3D. Vienna University of Technology, 2012.
- [KOP13] Michael Karkulik, Günther Of, and Dirk Praetorius. Convergence of adaptive 3D BEM for weakly singular integral equations based on isotropic mesh-refinement. *Numer. Methods for Partial Differential Equations*, 29(6):2081–2106, 2013.
- [KPP13] Michael Karkulik, David Pavlicek, and Dirk Praetorius. On 2D newest vertex bisection: Optimality of mesh-closure and H^1 -stability of L_2 -projection. *Constr. Approx.*, 38:213–234, 2013.
- [KS02] Michael Kuhn and Olaf Steinbach. Symmetric coupling of finite and boundary elements for exterior magnetic field problems. *Math. Methods Appl. Sci.*, 25(5):357–371, 2002.
- [Lio88] Pierre-Louis Lions. On the Schwarz alternating method. I. In *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Paris, 1987)*, pages 1–42. SIAM, Philadelphia, PA, 1988.

-
- [Mai99] Matthias Maischak. The Analytical Computation of the Galerkin Elements for the Laplace, Lamé and Helmholtz Equation in 2D-BEM. *Preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover*, 1999.
- [Mai09] Matthias Maischak. A multilevel additive Schwarz method for a hypersingular integral equation on an open curve with graded meshes. *Appl. Numer. Math.*, 59(9):2195–2202, 2009.
- [Mau49] August W. Maue. Zur Formulierung eines allgemeinen Beugungs-problems durch eine Integralgleichung. *Zeitschrift für Physik*, 126(7-9):601–618, 1949.
- [McL00] William McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [ME14] Gregor Mitscha-Eibl. Adaptive FEM-BEM Kopplungen für Lamé in 2D. Master’s thesis, Vienna University of Technology, 2014.
- [Med98] Salim Meddahi. An optimal iterative process for the Johnson-Nedelec method of coupling boundary and finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(4):1393–1415 (electronic), 1998.
- [MPW14] Jens M. Melenk, Dirk Praetorius, and Barbara Wohlmuth. Simultaneous quasi-optimal convergence in FEM-BEM coupling. *ASC Report*, 13/2014, Vienna University of Technology, 2014.
- [MS98] Patrick Mund and Ernst P. Stephan. The preconditioned GMRES method for systems of coupled FEM-BEM equations. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2):131–144, 1998. Numerical treatment of boundary integral equations.
- [MS99] Patrick Mund and Ernst P. Stephan. An adaptive two-level method for the coupling of nonlinear FEM-BEM equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(4):1001–1021, 1999.
- [Mun97] Patrick Mund. *Zwei-Level-Verfahren für Randintegralgleichungen mit Anwendungen auf die nichtlineare FEM-BEM-Kopplung*. PhD thesis, Universität Hannover, 1997.
- [OS13a] G. Of and O. Steinbach. On the ellipticity of coupled finite element and one-equation boundary element methods for boundary value problems. *Numerische Mathematik*, pages 1–27, 2013.
- [OS13b] Günther Of and Olaf Steinbach. Is the one-equation coupling of finite and boundary element methods always stable? *Z. Angew. Math. Mech.*, 93:476–484, 2013.
- [Osw99] Peter Oswald. Interface preconditioners and multilevel extension operators. In *Eleventh International Conference on Domain Decomposition Methods (London, 1998)*, pages 97–104 (electronic). DDM.org, Augsburg, 1999.

- [Rod94] Rodolfo Rodríguez. Some remarks on Zienkiewicz-Zhu estimator. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 10(5):625–635, 1994.
- [Saa03] Yousef Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, second edition, 2003.
- [Say09] Francisco-Javier Sayas. The validity of Johnson-Nédélec’s BEM-FEM coupling on polygonal interfaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(5):3451–3463, 2009.
- [SBA⁺13] Wojciech Śmigaj, Timo Betcke, Simon Arridge, Joel Phillips, and Martin Schweiger. Solving boundary integral problems with BEM++. *ACM*, 2013.
- [SK11] Hans-Rudolf Schwarz and Norbert Köckler. *Numerische Mathematik*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [SS86] Youcef Saad and Martin H. Schultz. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7(3):856–869, 1986.
- [SS07] Marcus Sarkis and Daniel B. Szyld. Optimal left and right additive Schwarz preconditioning for minimal residual methods with Euclidean and energy norms. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(8):1612–1621, 2007.
- [SS11] Stefan A. Sauter and Christoph Schwab. *Boundary element methods*, volume 39 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2011. Translated and expanded from the 2004 German original.
- [Ste92] Ernst P. Stephan. Coupling of finite elements and boundary elements for some nonlinear interface problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 101(1-3):61–72, 1992.
- [Ste08a] Olaf Steinbach. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems*. Springer, New York, 2008.
- [Ste08b] Rob Stevenson. The completion of locally refined simplicial partitions created by bisection. *Math. Comp.*, 77(261):227–241 (electronic), 2008.
- [Ste11] Olaf Steinbach. A note on the stable one-equation coupling of finite and boundary elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 49(4):1521–1531, 2011.
- [Ste13] Olaf Steinbach. On the stability of the non-symmetric BEM/FEM coupling in linear elasticity. *Comput. Mech.*, 51(4):421–430, 2013.
- [SW98] Olaf Steinbach and Wolfgang L. Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2):191–216, 1998. Numerical treatment of boundary integral equations.
- [SW01] Olaf Steinbach and Wolfgang L. Wendland. On C. Neumann’s method for second-order elliptic systems in domains with non-smooth boundaries. *J. Math. Anal. Appl.*, 262(2):733–748, 2001.

-
- [SZ90] L. Ridgway Scott and Shangyou Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493, 1990.
- [TS96] Thanh Tran and Ernst P. Stephan. Additive Schwarz methods for the h -version boundary element method. *Appl. Anal.*, 60(1-2):63–84, 1996.
- [TSM97] Thanh Tran, Ernst P. Stephan, and Patrick Mund. Hierarchical basis preconditioners for first kind integral equations. *Appl. Anal.*, 65(3-4):353–372, 1997.
- [TSZ98] Thanh Tran, Ernst P. Stephan, and Stefan Zaprianov. Wavelet-based preconditioners for boundary integral equations. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2):233–249, 1998. Numerical treatment of boundary integral equations.
- [TW05] Andrea Toselli and Olof Widlund. *Domain decomposition methods—algorithms and theory*, volume 34 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [Ver13] Rüdiger Verfürth. *A posteriori error estimation techniques for finite element methods*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, Oxford, 2013.
- [WC06] Haijun Wu and Zhiming Chen. Uniform convergence of multigrid V-cycle on adaptively refined finite element meshes for second order elliptic problems. *Sci. China Ser. A*, 49(10):1405–1429, 2006.
- [Wid89] Olof B. Widlund. Optimal iterative refinement methods. In *Domain decomposition methods (Los Angeles, CA, 1988)*, pages 114–125. SIAM, Philadelphia, PA, 1989.
- [XCH10] Xuejun Xu, Huangxin Chen, and Ronald H. W. Hoppe. Optimality of local multilevel methods on adaptively refined meshes for elliptic boundary value problems. *J. Numer. Math.*, 18(1):59–90, 2010.
- [XCN09] Jinchao Xu, Long Chen, and Ricardo H. Nochetto. Optimal multilevel methods for $H(\text{grad})$, $H(\text{curl})$, and $H(\text{div})$ systems on graded and unstructured grids. In *Multiscale, nonlinear and adaptive approximation*, pages 599–659. Springer, Berlin, 2009.
- [Yse86] Harry Yserentant. On the multilevel splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49(4):379–412, 1986.
- [Zei88] Eberhard Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. IV*. Springer, New York, 1988.
- [Zei90] Eberhard Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B*. Springer, New York, 1990.

- [Zha92] Xuejun Zhang. Multilevel Schwarz methods. *Numer. Math.*, 63(4):521–539, 1992.
- [ZKB79] Olgierd C. Zienkiewicz, Donald W. Kelly, and Peter Bettess. Marriage à la mode—the best of both worlds (finite elements and boundary integrals). In *Energy methods in finite element analysis*, pages 81–107. Wiley, Chichester, 1979.
- [ZZ87] Olgierd C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 24(2):337–357, 1987.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Geburtsdatum 20.03.1986
Geburtsort Zwettl
Nationalität Österreich
E-Mail thomas.fuehrer@tuwien.ac.at
Homepage <http://asc.tuwien.ac.at/~tfuehrer>

Ausbildung

Seit 08/2011 **Doktoratsstudium**, Mathematik, *Technische Universität Wien*.
10/2006–03/2011 **Bachelorstudium**, Technische Physik, *Technische Universität Wien*.
10/2004–10/2010 **Diplomstudium**, Technische Mathematik, *Technische Universität Wien*.
09/1996–06/2004 **Schule**, *BG/BRG Wieselburg*.

Weitere Ausbildung

03/2012 **Winterschule**, Hierarchische Matrizen, *Max Planck Institut Leipzig*.
08/2012 **Sommerschule**, 7th-summer school on adaptivity, *Universität Zürich, ETH Zürich*.

Zivildienst

11/2010–07/2011 **Lebenshilfe Niederösterreich**, Betreuung von geistig und körperlich behinderten Personen, *Wohnhaus Bad Vöslau*.

Förderungen

05/2014 **Reisekostenzuschuss**, Österreichische Forschungsgemeinschaft (ÖFG), *WCCM Konferenz in Barcelona (Juli 2014)*.
04/2013 **Reisekostenzuschuss**, Österreichische Forschungsgemeinschaft (ÖFG), *MAFELAP Konferenz in London (Juni 2013)*.