

Optimale Temperaturregelung einer Spritzgießmaschine

DIPLOMARBEIT

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

Univ.-Prof. Dr. techn. A. Kugi
Associate Prof. Dr. techn. W. Kemmetmüller
Dipl.-Ing C. Fröhlich

eingereicht an der

Technischen Universität Wien
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

von

Tobias Wolfmayr
Matrikelnummer 0926416
Max-Winter Platz 3/9
1020 Wien
Österreich

Wien, 22. Februar 2018

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Zuge einer Kooperation des Instituts für Automatisierung- und Regelungstechnik der TU-Wien und der lokalen Industrie. Daher möchte ich mich bei meinen Betreuern Christoph Fröhlich und Wolfgang Kemmetmüller für die prompte Beantwortung all meiner Fragen und die vielen hilfreichen Ratschläge während der Entstehung der Diplomarbeit bedanken. Weiters danke ich Andreas Kugi, der mich durch seine interessant gestalteten Vorlesungen stets aufs neue für die Regelungstechnik begeistern konnte.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern Elfriede und Günter, auf deren Unterstützung ich mich über all die Jahre verlassen konnte.

Darüber hinaus erwähnt seien hier all meine Freundinnen und Freunde, durch die es erst möglich ist, in stressigen Zeiten den teilweise notwendigen Abstand zu gewinnen.

Abschließend danke ich Claudia Leichtfried, die schon seit einigen Jahren an meiner Seite ist und mir in jeder Hinsicht während der Diplomarbeit eine Stütze war.

Wien, 22. Februar 2018

Abstract

This thesis deals with the optimal temperature control of an injection molding machine. Based on a nonlinear mathematical model with four in- and outputs and 38 states, different control strategies are designed. A static nonlinear feedforward control is developed and combined with a Multiple-Input-Multiple-Output Proportional-Integral (MIMO-PI) and a Linear-Quadratic-Regulator (LQR) as feedback controller. For the LQR, an integral part is added to avoid a steady control error if there are model parameter uncertainties. To implement an LQR, all of the states of the model have to be known. Since only four states out of 38 are measurable, a Kalman filter is designed.

To determine how the controller reacts in the presence of variations of several model parameters, a sensitivity analysis is presented. After that, the designed controller and observer are tested with several meaningful test cases and compared with a state-of-the-art control strategy.

This analysis is the starting point for the estimation of those parameters, which show the highest influence on model behaviour. For this task, the Kalman filter is extended by a parameter estimator and an optimization problem is formulated to identify unknown parameters. The investigated controller and state observer are finally tested with a model with parameter uncertainties.

Kurzzusammenfassung

Das Thema dieser Arbeit ist die optimale Temperaturregelung einer Spritzgießmaschine. Basierend auf einem nichtlinearen mathematischen Modell mit vier Ein- und Ausgängen und 38 Zuständen werden verschiedene Regelungskonzepte entwickelt. Zum einen wird eine statische nichtlineare Vorsteuerung entworfen und zum anderen ein Multiple-Input-Multiple-Output Proportional-Integral (MIMO-PI) sowie ein Linear-Quadratic (LQ) Regler. Der LQ-Regler wird anschließend um einen Integral-Anteil erweitert um bei Parameterabweichungen des Modells auch eine stationäre Genauigkeit garantieren zu können.

Um den LQ-Regler implementieren zu können, müssen alle Zustände bekannt sein. Da nur vier der insgesamt 38 Zuständen als messbare Ausgangsgrößen zur Verfügung stehen, wird ein Zustandsbeobachter in Form eines Kalman-Filters erstellt. Anschließend werden praxisrelevante Testfälle simuliert und die Ergebnisse mit einer in der Industrie eingesetzten Regelung verglichen und bewertet.

Um die Robustheit des vorgestellten Regelungskonzepts zu untersuchen, wird eine Parametersensitivitätsanalyse durchgeführt. Diese Analyse ist der Ausgangspunkt für den darauffolgenden Entwurf zweier Methoden zum Schätzen von Parametern. Dazu wird einerseits das davor entworfene Kalman-Filter um einen Parameterschätzer erweitert und andererseits ein Optimierungsproblem formuliert, dessen Lösung die gesuchten unbekannt Parameter ergibt. Abschluss der Arbeit bildet eine Gegenüberstellung des nominellen LQ-Reglers mit einem, auf Basis der identifizierten Parameter, entworfenen LQ-Reglers für ein nichtnominelles Streckenmodell.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problembeschreibung	2
1.2	Literaturrecherche	2
1.3	Ziele der Arbeit	3
1.4	Gliederung der Arbeit	3
2	Mathematisches Modell	4
2.1	Wärmeübertragungsarten	4
2.1.1	Thermodynamische Energiebilanz	4
2.1.2	Konduktion in einem Medium	5
2.1.3	Wärmeleitung zwischen zwei unterschiedlichen Materialien	6
2.1.4	Konvektion	7
2.1.5	Wärmestrahlung	8
2.1.6	Wärmeströme am Beispiel Heizelement und Isolationsschild	8
2.2	Galerkin Methode	10
2.3	Finite Volumen Methode	14
2.4	Gesamtsystem	18
3	Regelungsentwurf	20
3.1	Nichtlineare Vorsteuerung	20
3.2	MIMO PI-Regler	21
3.3	LQ-Zustandsregler	23
4	Kalman-Filter	27
4.1	Stationäres Kalman-Filter	27
4.2	Stationäres Kalman-Filter mit nichtlinearem Simulator	29
4.3	Ergebnisse der Zustandsbeobachtung	30
5	Verifikation der Regelungsstrategien bei nominellem Modell	34
5.1	MIMO-PI	35
5.2	LQ-Regler	37
5.2.1	Testfall 1, Aufheizvorgang	38
5.2.2	Testfall 2, Sollwertänderung aller Zonen	39
5.2.3	Testfall 3, Sollwertänderung der Zone 2	40
5.2.4	Testfall 4, Füllen von leerem Massezylinder mit Kunststoff	41
5.2.5	Testfall 5, Start und Stopp von zyklischer Produktion	42

6	Parametersensitivitätsanalyse	43
6.1	Gewählte Parameter	43
6.2	Aufheizvorgang	44
6.3	Füllen der Maschine	46
6.4	Nichtnominelles Modell	47
6.4.1	Schätzgüte bei geänderten Streckenparameter	47
6.4.2	Regelgüte bei geänderten Streckenparameter	49
6.5	Parameterschätzer für die Leistungsfaktoren	51
6.6	Identifikation von α_N und α_{MC}	54
6.7	Zusammenfassung der Sensitivitätsanalyse	59
7	Regelung bei geänderten Streckenparameter	60
7.1	Identifikation von $\check{\mathbf{p}}_u$	61
7.2	Identifikation von α_N und α_{MC}	62
7.3	Nomineller/Adaptierter Regler	64
8	Zusammenfassung und Ausblick	67
A	Anhang	68
A.1	MIMO-PI Regelparameter	68
A.2	LQ-Reglerparameter	68
A.3	Kalman-Filterparameter	69
A.4	Nominelle Parameter der Sensitivitätsanalyse	70

Abbildungsverzeichnis

1.1	Maschinenquerschnitt.	1
2.1	Konduktion in einem Medium.	5
2.2	Konduktion zwischen zwei unterschiedlichen Medien.	6
2.3	Freie Konvektion in Umgebung eines erhitzten Zylinders.	7
2.4	Wärmeströme am Beispiel eines Heizelements.	8
2.5	Wärmeströme am Beispiel eines Isolationsschildes.	9
2.6	Diskretisierung des Kunststoffes im Massezylinder.	15
2.7	Spezifische Wärme c_p und Enthalpie $h(\vartheta)$ von Kunststoff (PP120MO). . .	16
2.8	Eingebrachte Leistung p_{sc} und die Wärmeübergänge mit dem Massezylinder $\dot{q}_a(z)$ bzw. mit der Schnecke $\dot{q}_i(z)$ am Beispiel von Volumen 5.	17
3.1	Nichtlineare Vorsteuerung.	20
3.2	Mehrgrößen PI-Regler.	21
3.3	Eigenwerte der erweiterten Systemdynamikmatrix	23
3.4	Aufheizvorgang der Zone 2 mit dem LQR-Zustandsregler und der nichtlinearen Vorsteuerung bei $\vartheta_\infty = 0.9\vartheta_{\infty,nom}$	25
3.5	Blockschaltbild des LQR-geregelten Systems mit der Annahme, dass alle Zustände messbar sind.	26
3.6	Aufheizvorgang der Zone 1 mit a) klassischen Anti-Windup und b) <i>Conditional Integration</i> ($\epsilon_{AW} = 6^\circ\text{C}$).	26
4.1	Kalman-Filter.	27
4.2	Schätzfehler $\zeta - \hat{\zeta}$ des stationären Kalman-Filters bei einem Leistungssprung der Zone 2 von 10% zum Zeitpunkt $t = 200\text{s}$	29
4.3	Schätzfehler der Galerkinzustände bei fehlerhaftem Anfangszustand $\hat{\zeta}_0 = 1.05\zeta_0$	31
4.4	Simulation (—), Schätzung (—) und Schätzfehler (—) des Temperaturprofils des Massezylinders zu verschiedenen Zeitpunkten bei fehlerhaftem Anfangszustand $\hat{\zeta}_0 = 1.05 \cdot \zeta_0$	31
4.5	Schätzfehler der Galerkinzustände während des Aufheizvorgangs bei nominellem Modell.	32
4.6	Simulation (—), Schätzung (—) und Schätzfehler des Temperaturprofils (—) des Massezylinders zu verschiedenen Zeitpunkten während des Aufheizvorganges.	32
4.7	Schätzfehler der finiten Volumentemperaturen $\vartheta(\zeta_{pl}) - \vartheta(\hat{\zeta}_{pl})$ während der Produktion.	33
4.8	Blockschaltbild des gesamten LQR-geregelten Regelkreis mit Kalman-Filter.	33

5.1	Testfall 1 mit MIMO-PI-Regler: Aufheizvorgang aller Zonen von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C.	36
5.2	Testfall 2 mit MIMO-PI-Regler. Sollwerte aller Zonen werden um 10 °C erhöht und nach dem Einschwingvorgang um 10 °C reduziert.	37
5.3	Testfall 1: Aufheizvorgang aller Zonen von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C.	38
5.4	Testfall 2: Die Solltemperaturen aller Zonen werden gleichzeitig um 10 °C erhöht und anschließend um 10 °C abgesenkt.	39
5.5	Testfall 3: Die Solltemperatur der Zone 2 wird um 10 °C erhöht und anschließend um 10 °C abgesenkt.	40
5.6	Testfall 4: Die aufgeheizte Maschine wird zum Zeitpunkt 200 s mit Kunststoff gefüllt. Dabei bleibt $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C konstant im gesamten Simulationszeitraum.	41
5.7	Testfall 5: Die aufgeheizte Maschine ist bereits mit Kunststoff gefüllt. Bei $t = 200$ s wird die Produktion gestartet und bei $t = 600$ s gestoppt.	42
6.1	Aufheizvorgang der Zone 2 und das entsprechende Fehlerintegral.	45
6.2	Schätzfehler der Galerkinzustände ζ_{gal} beim Aufheizvorgang mit $\vartheta_\infty = 0.9\vartheta_{\infty,nom}$	48
6.3	Simulation (—), Schätzung (—) und Schätzfehler (—) des Temperaturprofils des Massezylinders zu verschiedenen Zeitpunkten während des Aufheizvorganges bei $\vartheta_\infty = 0.9\vartheta_{\infty,nom}$	48
6.4	Schätzfehler der Galerkinzustände ζ_{gal} beim Aufheizvorgang mit $\alpha_{MC} = 1.3\alpha_{MC,nom}$	49
6.5	Simulation (—), Schätzung (—) und Schätzfehler (—) des Temperaturprofils des Massezylinders zu verschiedenen Zeitpunkten während des Aufheizvorganges bei $\alpha_{MC} = 1.3\alpha_{MC,nom}$	49
6.6	Testfall 1: Aufheizvorgang aller Zonen mit Parameterschwankungen aufgrund von $\vartheta_\infty = 1.1\vartheta_{\infty,nom}$, ausgehend von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C.	50
6.7	Testfall 1: Aufheizvorgang aller Zonen mit dem Leistungsparametervektor $\mathbf{p}_u = [1.1, 1.1, 1.1, 1.1]^T$, ausgehend von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C	51
6.8	Schätzung der Leistungsfaktoren $\check{\mathbf{p}}_u$ während eines Aufheizvorgangs von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C mit den Parametervektoren aus (6.17).	53
6.9	Messdaten \mathbf{y}_m und \mathbf{u}_m des Aufheizvorgangs mit aktueller Regelung.	54
6.10	Kostenfunktional $J(\check{\mathbf{p}}_\alpha)$ des Optimierungsproblems (6.20).	55
6.11	Darstellung des Intervallschachtelungsverfahrens.	57
6.12	Kostenfunktional und iterative Lösung des Optimierungsproblems.	58
6.13	Ausgänge \mathbf{y} und Modellfehler $\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}_m - \mathbf{y}$ des nominellen und optimierten Modells durch Aufschaltung der gemessenen Eingangsleistungen \mathbf{u}_m	59

7.1	Schätzung des Leistungsfaktors \check{p}_u während des Aufheizvorgangs, ausgehend von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C mit veränderter Strecke gemäß (7.1).	62
7.2	Kostenfunktional und iterative Lösung des Optimierungsproblems.	63
7.3	Identifikation von \check{p}_{α_N} und $\check{p}_{\alpha_{MC}}$ bei geänderter Strecke laut (7.1).	64
7.4	Testfall 1: Aufheizvorgang von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]$ °C 10 °C abgesenkt.	65
7.5	Testfall 2: Die Solltemperaturen aller Zonen werden gleichzeitig um 10 °C erhöht und anschließend um 10 °C abgesenkt.	66
A.1	Temperatur-Enthalpie-Zusammenhang des nominellen Modells und der geänderten Modelle.	71

Tabellenverzeichnis

2.1	Komponenten des Vektors der Galerkinzustände ζ_{gal} mit entsprechenden Basisfunktionen.	11
6.1	Parametersensitivitätsanalyse anhand des Aufheizvorgangs.	46
6.2	Parametersensitivitätsanalyse anhand des Testfalls Füllen der Maschine. .	47
A.1	Tuningfaktoren a und b des MIMO-PI-Reglers.	68
A.2	Gewichtungen des LQ-Reglers.	69
A.3	Gewichtungen des Kalman-Filters.	70
A.4	Nomineller Parametervektor.	70

1 Einleitung

Spritzgießen ist ein Verfahren, das insbesondere in der Kunststoffverarbeitung eingesetzt wird. Dabei wird Kunststoffgranulat verflüssigt (plastifiziert) und unter hohem Druck in eine Form eingespritzt. Nach der Abkühlphase kann das Werkstück entnommen werden. Mit diesem Verfahren werden Teile mit wenigen Zehntel Gramm bis zu über 100 kg hergestellt.

Die Anforderungen an Plastifiziereinheiten in der Industrie sind sehr hoch. Zum einen ist eine hohe stoffliche und thermische Homogenität bei unterschiedlichen Bedingungen erwünscht und zum anderen hohe Plastifizierleistungen und Durchsätze. Auch die Wiederholgenauigkeit ist für Abnehmer einer Spritzgießmaschine (SGM) ein wesentlicher Parameter. Um diese Qualitätskriterien nicht zu verletzen, muss die Maschine unter anderem mit einem zuverlässigen und stabilen Temperaturregelsystem ausgestattet sein.

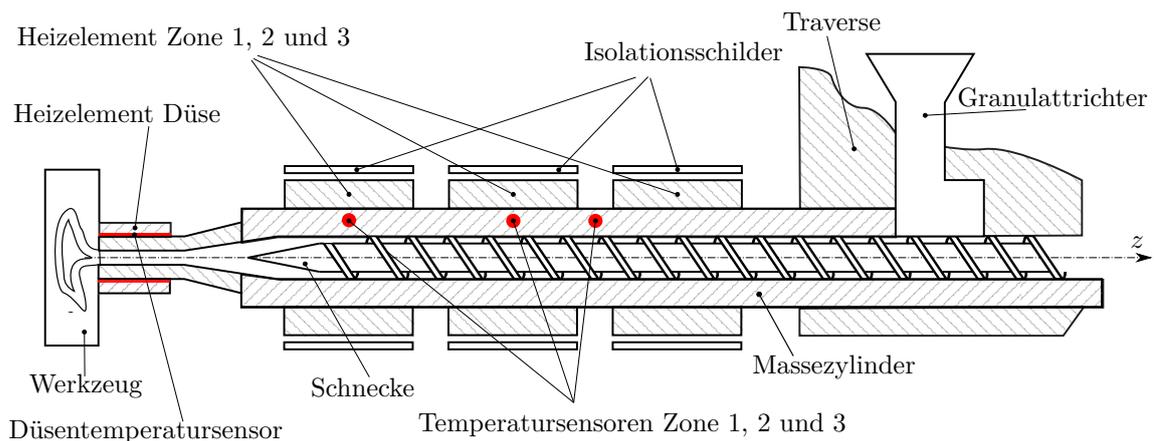


Abbildung 1.1: Maschinenquerschnitt.

Ein Produktionszyklus, der in Abbildung 1.1 dargestellten SGM, besteht aus folgenden Schritten:

- **Aufdosieren**

Der Arbeitszyklus beginnt damit, dass die rotierende Schnecke Kunststoffgranulat aus dem Trichter zieht. Dieses Granulat wird durch die Heizelemente am Massezylinder sowie die mechanische Reibung zwischen Schnecke und Granulat erhitzt und dadurch aufgeschmolzen. Während sich der flüssige Kunststoff im Düsenbereich des Zylinders sammelt, wird die Schnecke durch weitere Rotation zurückgedrängt. Wenn die Schnecke eine vom Spritzvolumen abhängige Position erreicht hat, stoppt die Rotation und damit auch die Bewegung in Längsrichtung.

- **Einspritzen**

Nun wird die gesamte Spritzeinheit gegen das Formwerkzeug gepresst. Die Schnecke wird ohne Drehung in Richtung Düse bewegt und drückt die dosierte Schmelze durch die Düse in die Angussöffnung des Werkzeuges in die Form.

- **Abkühlphase**

In dieser Phase beginnt die Schmelze im Formwerkzeug zu erstarren. Durch Aufbringen eines ausreichend hohen Druckes wird eine mögliche Schwindung der Formmasse während der Abkühlung ausgeglichen. Dabei bewegt sich die Schnecke in die negative z-Richtung

- **Auswurf**

Die Spritzeinheit fährt zurück und das Werkzeug öffnet sich. Anschließend wird das Werkstück ausgeworfen und das Formwerkzeug geschlossen. Anschließend kann der Zyklus erneut starten.

1.1 Problembeschreibung

Die Produktpalette an industriellen SGM ist sehr groß. Daher sei im Folgenden eine repräsentative Maschine beschrieben, welche im Rahmen dieser Arbeit verwendet wird. Es handelt sich dabei um eine Plastifiziereinheit mit drei Heizelementen am Massezylinder und einem Heizelement auf der Düse. Das Düsenheizelement besitzt aufgrund der geringen aufzuheizenden Düsenmasse nur rund 10% Leistung der restlichen Heizelemente. Während der Produktion wird die Traverse gekühlt um ein Aufschmelzen des kalten Granulats im Granulattrichter zu verhindern. Die elektrisch betriebene Schnecke bringt während des Produktionsbetriebes eine Scherleistung in den Kunststoff, die letztlich in thermische Energie umgesetzt wird und den Kunststoff aufschmilzt.

Vier Temperatursensoren messen die Temperatur im Massezylinder bzw. in der Düse. Die Herausforderung der Regelung besteht darin, die starke thermische Kopplung in Längsrichtung über den Massezylinder und der Düse sowohl während des Aufheizvorgangs als auch der Produktion zu berücksichtigen.

1.2 Literaturrecherche

In der Literatur sind verschiedenste Temperaturregelungskonzepte für eine SGM zu finden. Diese reichen von klassischen PID-Reglern [1–3] über PID-Fuzzy Reglern [4] bis hin zu modellprädiktiven Ansätzen in den unterschiedlichsten Ausführungen [5–8]. Konventionelle lineare Single-Input-Single-Output (SISO) Regler haben beschränkte Regelgüte, da Nichtlinearitäten des Systems und thermische Kopplungen vernachlässigt werden. Die genannten Regelungskonzepte basieren meist auf stark vereinfachten Modellen. Einige wesentliche Veröffentlichungen sind im Folgenden genauer beschrieben:

- Die aktuell in der Industrie vorherrschende Regelung berücksichtigt keine thermische Kopplung der einzelnen Zonen. D. h. es werden z. B. für die in Abbildung 1.1 dargestellte Maschine vier unabhängige SISO-PI-Regler verwendet. Das Modell, das

diesem Regler zugrunde liegt, ist ein vereinfachtes Black-Box Modell [9]. Notwendige Parameter dieser Modelle werden bei einem einmaligen Aufheizvorgang identifiziert. In Kapitel 5 sind Ergebnisse dieser Regelung abgebildet.

- Die zweiteilige Veröffentlichung [10] und [11] behandelt bei der Modellierung auch die dissipierte Energie der Spindel und den Druck der Schmelze während der Produktion. Zusätzlich zur Modellbildung wird ein Identifikationsverfahren notwendiger Parameter präsentiert. Für die Regelung ist nur die Kopplung direkt benachbarter Zonen berücksichtigt, welche mittels linearer Übertragungsfunktionen angenähert wird [11]. Dadurch entsteht eine tridiagonale Übertragungsmatrix der vier Eingangsleistungen zu den vier Ausgangstemperaturen. Für dieses Modell wird ein modellprädiktives Regelungskonzept entworfen und einem konventionellen PID-Regler gegenübergestellt.
- Das in [8] verwendete Modell wird als Netzwerk mit Widerständen und Kapazitäten hergeleitet. Darauf aufbauend werden die notwendigen Parameter der Elemente im Netzwerk mit dem Recursive-Least-Squares-Algorithmus bestimmt. Als Regelungskonzept wird ein modellprädiktiver Ansatz vorgestellt und mit einem PI-Regler verglichen.

1.3 Ziele der Arbeit

In dieser Diplomarbeit soll ein optimales Temperaturregelungskonzept für SGM entwickelt werden, welches auf dem von Maderthaner [12] vorgestellten mathematischen Modell basiert. Die Kriterien, die an die Regelung gestellt werden, sind ein geringeres Überschwingen und kürzere Anstiegszeiten beim Aufheizvorgang, sowie kleinere Regelabweichungen während der Produktion im Vergleich zur bestehenden Regelung. Ein weiteres Ziel ist die Verwendbarkeit dieses Regelungskonzeptes unter veränderten Bedingungen. Dazu zählen verschiedene Raumtemperaturen, unterschiedliche Leistungen der Heizelemente aufgrund Produktionsschwankungen und veränderte Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Heizelementen und Massezylinder bzw. Düse.

1.4 Gliederung der Arbeit

Zunächst wird das mathematische Modell einer SGM erläutert. In Kapitel 3 und 4 werden verschiedene Regelstrategien (statische nichtlineare Vorsteuerung, MIMO-PI Regler und LQR-Regler mit Integralanteil) und ein Kalman-Filter als Zustandsbeobachter präsentiert. Anschließend werden in Kapitel 5 die Simulationsergebnisse von fünf praxisrelevanten Testfällen bewertet. Danach wird das Regelungskonzept in Kapitel 6 einer Parametersensitivitätsanalyse unterzogen. Dabei wird untersucht, welche Parameter des vorgestellten Modells das Systemverhalten maßgebend beeinflussen und gleichzeitig nicht genau bekannt sind. Auf Basis dessen wird das in Kapitel 4 entworfene Kalman-Filter um einen Parameterschätzer erweitert und ein Optimierungsproblem definiert, mit welchem Modellparameter zu einer gegebenen Messung offline identifiziert werden können. In Kapitel 7 wird die Regelgüte des vorgestellten Konzeptes mit geänderten Streckenparameter getestet. Dabei wird der nominelle Regler einem, auf Basis der Identifizierung, adaptierten Regler gegenübergestellt. Den Abschluss bildet die Zusammenfassung und der Ausblick in Kapitel 8.

2 Mathematisches Modell

Das Ziel dieses Kapitels ist es, eine Zusammenfassung des in [12] vorgestellten reduzierten mathematischen Modells einer SGM zu geben. Zuerst werden die auftretenden Wärmeübertragungsmechanismen erläutert. Anschließend werden beispielhaft anhand eines Heizelements und eines Isolationsschildes die Wärmestrombilanzen erstellt. Diese bilden die Grundlage für die im nächsten Schritt benutzte Galerkin-Methode. Mit der Finiten Volumen-Methode (FVM) wird das Modell des Fluids innerhalb des Massezylinders beschrieben. Das Ergebnis der mathematischen Modellierung bildet ein Modell der Form

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}) \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (2.1b)$$

mit dem Zustandsvektor $\boldsymbol{\zeta}$, dem Eingangsvektor \mathbf{u} und dem Ausgangsvektor \mathbf{y} . Die Funktionen $\mathbf{f}(\cdot)$ und $\mathbf{h}(\cdot)$ sind im Allgemeinen nichtlinear. Das Modell (2.1) stellt die Basis der Regelung und des Beobachterentwurfs in den folgenden Kapiteln dar.

2.1 Wärmeübertragungsarten

Nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik [13] übertragen Körper mit hoher Temperatur auf Körper niedriger Temperatur oder an die Umgebung Energie in Form von Wärme. Besitzen zwei Körper gleiche Temperatur, so spricht man von thermischem Gleichgewicht und es findet kein Wärmeaustausch statt. Dabei unterscheidet man grundsätzlich drei Arten von Wärmeübertragung:

- Konduktion oder Wärmeleitung
- Konvektion
- Strahlung

2.1.1 Thermodynamische Energiebilanz

Im ersten Schritt wird eine thermische Energiebilanz verwendet, die die Grundlage der anschließenden Wärmeübergänge darstellt. Diese lautet [14]

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + w \quad (2.2)$$

Dabei ist $\dot{\mathbf{q}}$ die Wärmestromdichte, ρ die Massendichte, h die spezifische Enthalpie, ∇ der Nabla Operator, \mathbf{v} die lokale Geschwindigkeit, p der lokale Druck und w die eingebrachte

Leistungsdichte. Der dritte und vierte Term der rechten Seite von (2.2) beschreiben eine Enthalpieänderung zufolge einer lokalen zeitlichen Druckänderung bzw. räumlicher Druckunterschiede bei gleichzeitig bewegtem Medium. Der Massenerhaltungssatz lässt sich mit [14]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3)$$

beschreiben und daraus folgt (2.2) zu

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = \underbrace{-\nabla h \cdot (\rho \mathbf{v})}_{\text{Advektion}} - \underbrace{\nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}}_{\text{Konduktion}} + \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) + w . \quad (2.4)$$

2.1.2 Konduktion in einem Medium

Konduktion herrscht in einem Medium, wenn ein Temperaturgradient besteht. Ist dieses Medium weiters homogen und isotrop ($\rho = \text{konstant}$, thermische Konduktivität $\lambda = \text{konstant}$), ergibt sich die lokale Wärmestromdichte aus dem Gesetz nach Fourier [15] zu

$$\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{x}) = -\lambda \nabla \vartheta(t, \mathbf{x}) , \quad (2.5)$$

mit der Temperatur ϑ abhängig von der Position $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und der Zeit t . Im reduzierten Modell aus [12] wird Konduktion nur in longitudinaler Richtung angenommen. Das wird damit begründet, dass die Wandstärken der Bauelemente relativ zu den Längsabmessungen sehr gering sind. Dadurch ist die Temperatur in radialer Richtung näherungsweise konstant. Abbildung 2.1 zeigt beispielhaft Wärmekonduktion anhand eines Zylinders,

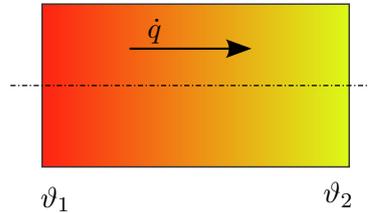


Abbildung 2.1: Konduktion in einem Medium.

wobei $\vartheta_1 > \vartheta_2$ und die radiale Komponente des Gradienten verschwindet. Der Wärmestrom zeigt dabei immer in Richtung niedrigerer Temperatur.

Mit der Annahme eines unbewegten Mediums ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$), konstantem Druck ($\frac{\partial p}{\partial t} = 0$) und dem Zusammenhang von Temperatur und Enthalpie

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \vartheta} \right|_{p=\text{const}} = c_p(\vartheta) \quad (2.6)$$

mit der spezifischen Wärmekapazität c_p ergibt sich die Wärmeleitungsgleichung (2.4) für eine bestimmte Position $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, zu

$$\rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \nabla^2 \vartheta + w(\mathbf{x}) , \quad (t, \mathbf{x}) \in (0, \infty) \times \Omega . \quad (2.7)$$

Bei (2.7) handelt es sich um eine parabolische partielle Differentialgleichung (PDG). Um diese Differentialgleichung lösen zu können, müssen weiters Randbedingungen bekannt sein. Dabei unterscheidet man drei verschiedene Typen [16]:

- Mit Hilfe der Dirichlet-Bedingung (Randbedingung erster Art) wird die Temperatur am Rand von Körpern vorgegeben, d. h.

$$\vartheta|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = \vartheta_b(t, \mathbf{x}) . \quad (2.8)$$

Ein Beispiel hierfür ist die linke Seite der Düse während der Produktion. Durch das Anpressen der Düse auf ein Werkzeug konstanter Temperatur wird dabei eine Dirichlet-Bedingung angesetzt.

- Die Neumann-Bedingung (Randbedingung zweiter Art)

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = - \left(\lambda \frac{\partial \vartheta(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \quad (2.9)$$

mit dem Oberflächennormalvektor \mathbf{n} und dem Zusammenhang $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n}^T \nabla(\cdot)$ legt zufolge des Wärmeleitgesetzes (2.5) den Temperaturgradient am Rand $\partial\Omega$ fest. Ein Spezialfall der Neumann Randbedingung ist, wenn die Wärmestromdichte $\dot{q}_n(t, \mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega}$ verschwindet. Dabei spricht man von einer adiabaten Randbedingung.

- Die Robin-Bedingungen (Randbedingung dritter Art)

$$\dot{q}_n(t, \mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} = \alpha(\mathbf{x}) (\vartheta(t, \mathbf{x}) - \vartheta_b(t, \mathbf{x}))|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} \quad (2.10)$$

mit dem Proportionalitätsfaktor α tritt z. B. bei der Beschreibung von Konvektion und Wärmeleitung in Abschnitt 2.1.3 bzw. 2.1.4 auf.

2.1.3 Wärmeleitung zwischen zwei unterschiedlichen Materialien

Dieser Wärmeübergang findet immer dann statt, wenn zwei Grenzschichten unterschiedlicher Temperatur in Kontakt kommen. Abbildung 2.2 stellt diesen Vorgang dar.

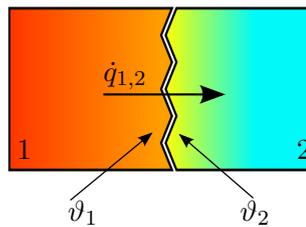


Abbildung 2.2: Konduktion zwischen zwei unterschiedlichen Medien.

Wenn ein Temperaturunterschied zwischen den beiden Grenzschichten besteht, entsteht eine lokale Wärmestromdichte [17]

$$\dot{q}_{1,2} = \alpha_{1,2} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.11)$$

mit dem Wärmeübergangskoeffizienten der beiden Materialien $\alpha_{1,2}$. Bei einer SGM kommt diese Art von Wärmeübergang z. B. zwischen Heizelement und Massezylinder vor.

2.1.4 Konvektion

Der Wärmeübergang bei Konvektion besteht darin, dass sich ein körperumgebendes Fluid bewegt. Die Bewegung des Fluids entsteht im Falle von erhitzten Isolationsschildern in Abbildung 1.1 durch Dichteunterschiede im Schwerfeld. Ist das der Fall, spricht man von freier Konvektion. Die Wärmestromdichte zufolge von Konvektion lautet [17]

$$\dot{q} = \bar{h}(\vartheta_s, \vartheta_\infty)(\vartheta_s - \vartheta_\infty) \quad (2.12)$$

mit dem mittleren Konvektionskoeffizient \bar{h} . Dieser hängt neben der Umgebungstemperatur ϑ_∞ und der Randtemperatur des erhitzten Körpers ϑ_s auch stark von der Geometrie der Wärmequelle und des umgebenden Fluids ab. In Abbildung 2.3 ist freie Konvektion im Falle eines erhitzten Zylinders zu sehen.

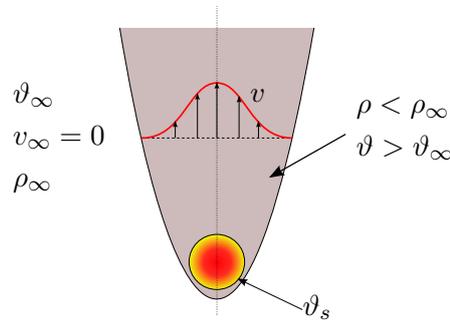


Abbildung 2.3: Freie Konvektion in Umgebung eines erhitzten Zylinders.

Hier bezeichnet ϑ_∞ die Umgebungstemperatur, ρ_∞ die Dichte des umgebenden Fluids, ϑ_s die Randtemperatur des Zylinders, ρ die Dichte und v die Geschwindigkeit des aufsteigenden Fluids. Da die Wärmequellen im Falle einer SGM alle zylindrische Formen haben, sei die Bestimmung von \bar{h} für einen langen Zylinder kurz dargestellt [17]. Die dafür benötigte dimensionslose Rayleighzahl ergibt sich zu

$$\text{Ra}_D = \frac{g\beta(\vartheta_s - \vartheta_\infty)D^3}{\nu\alpha} . \quad (2.13)$$

Dabei ist g die Schwerebeschleunigung, β der Wärmeausdehnungskoeffizient, ν die kinematische Viskosität des Fluids, α die Temperaturleitfähigkeit und D der Zylinderdurchmesser. Wenn das umgebende Fluid als ideales Gas angenommen wird, folgt der Wärmeausdehnungskoeffizient zu

$$\beta = \frac{1}{\vartheta_\infty} . \quad (2.14)$$

Für einen langen horizontalen Zylinder lässt sich ein mittlerer Konvektionskoeffizient darstellen als

$$\bar{h} = C \frac{\lambda}{D} \text{Ra}_D^n . \quad (2.15)$$

C und n sind dimensionslose und von der Rayleighzahl Ra_D abhängige Faktoren. λ ist die thermische Konduktivität des Zylindermaterials und D der Zylinderdurchmesser.

2.1.5 Wärmestrahlung

Wärmestrahlung ist eine elektromagnetische Strahlung, welche in heißen Körpern erzeugt und abgestrahlt wird. Diese Art der Wärmeübertragung benötigt keine Materie als Wärmeleiter. Daher ist die Wärmestrahlung die einzige Möglichkeit, um im Vakuum Wärme zu übertragen. Auftreffende Wärmestrahlung kann von einem Körper absorbiert, reflektiert, oder transmittiert werden. Die Summe dieser drei Anteile ergibt immer 100%. Die abgestrahlte Wärmestromdichte eines Körpers mit der Temperatur ϑ_s errechnet sich zu

$$\dot{q} = \sigma \epsilon \vartheta_s^4 \quad (2.16)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstante σ und dem Emissions- bzw. Absorptionsgrad ϵ . Gleichzeitig nimmt der Körper Strahlung aus seiner Umgebung auf. Die resultierende Wärmestromdichte ist damit nach [17]

$$\dot{q} = \sigma \epsilon \left(\vartheta_s^4 - \vartheta_\infty^4 \right) . \quad (2.17)$$

Am Beispiel der SGM ist Strahlung nur bei den Isolationsschildern wesentlich. Theoretisch emittiert oder absorbiert jeder Körper Strahlung, wenn seine Temperatur ungleich der Umgebungstemperatur ist. Jedoch ist im Falle der SGM entweder der Temperaturunterschied zur Umgebung klein (Traverse) oder die abstrahlende Fläche klein (freie Flächen des Massezylinders), sodass hier diese Modellabstraktion gerechtfertigt ist.

2.1.6 Wärmeströme am Beispiel Heizelement und Isolationsschild

In diesem Abschnitt wird anhand von zwei Teilen einer SGM gezeigt, welche Arten von Wärmeübergängen wirken und wie damit die partiellen Differentialgleichungen formuliert werden.

Bei den Heizelementen und Isolationsschildern handelt es sich um rotationssymmetrische Körper. Deshalb folgt die Wärmestromdichte aufgrund von Wärmeleitung in radialer Richtung zu

$$\dot{q}_{1,2} = \frac{1}{r} \frac{\lambda}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (2.18)$$

mit der thermischen Konduktivität λ und $r_2 > r_1$ [12].

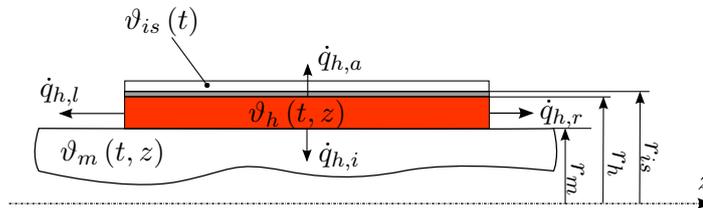


Abbildung 2.4: Wärmeströme am Beispiel eines Heizelements.

Mit (2.18), den Abmessungen aus Abbildung 2.4 und den angeführten Formulierungen von Konduktion und Konvektion, lassen sich für alle Heizelemente der SGM die Wärmeströme

am linken Rand $\dot{q}_{h,l}$, am rechten Rand $\dot{q}_{h,r}$, in radialer Richtung nach innen $\dot{q}_{h,i}$ bzw. nach außen $\dot{q}_{h,a}$ darstellen. Diese lauten

$$\dot{q}_{h,a} = \frac{1}{r_h} \frac{\lambda_{is}}{\ln\left(\frac{r_{is}}{r_h}\right)} (\vartheta_h(t, z) - \vartheta_{is}(t)) \quad (2.19a)$$

$$\dot{q}_{h,l} = 0 \quad (2.19b)$$

$$\dot{q}_{h,i} = \alpha_{MC} (\vartheta_h(t, z) - \vartheta_m(t, z)) \quad (2.19c)$$

$$\dot{q}_{h,r} = 0 \quad (2.19d)$$

mit dem Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Heizelement und Massezylinder α_{MC} . Die Wärmeströme an den Rändern $\dot{q}_{h,l}$ und $\dot{q}_{h,r}$ werden aufgrund der kleinen Abstrahl- bzw. Konvektionsfläche vernachlässigt.

Analog dazu lassen sich die Wärmeströme des Isolationsschildes formulieren. Dabei wird die Temperatur des Isolationsschildes ϑ_{is} in longitudinaler Richtung als konstant angenommen. Das ist zulässig, da die Temperaturverteilung der FDM in [12] auch annähernd konstante Temperaturverläufe des Isolationsschildes liefert und weiters die betrachtete Strahlung von Körpern mit nichtkonstanter Oberflächentemperatur deutlich aufwändiger ist.

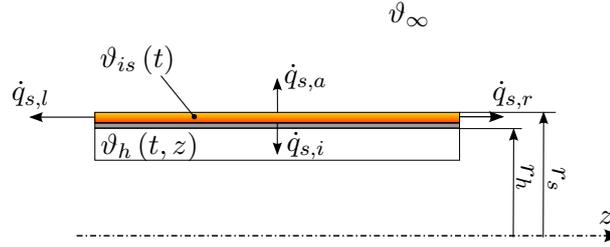


Abbildung 2.5: Wärmeströme am Beispiel eines Isolationsschildes.

Mit den Abmessungen aus Abbildung 2.5 ergeben sich die Wärmeströme des Isolationsschildes zu

$$\dot{q}_{s,a} = \underbrace{\bar{h}(\vartheta_{is}(t), \vartheta_{\infty}) (\vartheta_{is}(t) - \vartheta_{\infty})}_{\text{Konvektion}} + \underbrace{\sigma \epsilon (\vartheta_{is}(t)^4 - \vartheta_{\infty}^4)}_{\text{Strahlung}} \quad (2.20a)$$

$$\dot{q}_{s,l} = 0 \quad (2.20b)$$

$$\dot{q}_{s,i} = \underbrace{\frac{1}{r_{is}} \frac{\lambda_{is}}{\ln\left(\frac{r_{is}}{r_i}\right)} (\vartheta_{is}(t) - \vartheta_h(t, z))}_{\text{Wärmeleitung}} \quad (2.20c)$$

$$\dot{q}_{s,r} = 0 . \quad (2.20d)$$

Die Wärmestromdichten der restlichen Komponenten der SGM können analog zu den obigen Beispielen hergeleitet werden, für Details siehe [12]. Auf Basis der Wärmestromdichten können die PDG der Form (2.7) der einzelnen Teile erstellt werden. Mit dem Laplaceoperator ∇^2 in Zylinderkoordinaten und der Annahme, dass die Temperaturverteilung

unabhängig vom Winkel ϕ ist, kann die Wärmeleitungsgleichung (2.7) in der Form

$$\rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + w(r, z) \quad (2.21)$$

geschrieben werden. Integration nach $r \in [r_i, r_a]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ liefert

$$\pi (r_a^2 - r_i^2) \rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 2\pi \lambda \int_{r_i}^{r_a} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) dr + \lambda \pi (r_a^2 - r_i^2) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \pi (r_a^2 - r_i^2) w. \quad (2.22)$$

Anschließende Integration des ersten Terms der rechten Seite von (2.22) ergibt

$$A \rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 2\pi \lambda \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \Big|_{r_i}^{r_a} + \lambda A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + Aw \quad (2.23)$$

mit der Fläche der Wärmeübergänge in longitudinaler Richtung $A = \pi (r_a^2 - r_i^2)$. Durch Einsetzen der Randbedingung (2.9) erhält man die gesuchte PDG in der Form

$$A \rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -2\pi r_a \dot{q}_a - 2\pi r_i \dot{q}_i + \lambda A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + Aw. \quad (2.24)$$

Die Wärmeströme \dot{q}_a bzw. \dot{q}_i beschreiben dabei den Energieaustausch in radialer Richtung zu benachbarten Körpern bzw. der Umgebung. Nach Formulierung der PDG jeder betrachteten Komponente der SGM entsteht ein System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, das es zu lösen gilt.

2.2 Galerkin Methode

In [12] wurde die Approximation der Lösung einerseits mit der Finiten Differenzen Methode (FDM) und andererseits mit der Galerkin Methode durchgeführt. Die Idee der FDM ist es, Ortsableitungen der Temperatur in der Differentialgleichung an endlich vielen Gitterpunkten durch Differenzenquotienten zu approximieren. Die Lösung der gekoppelten partiellen Differentialgleichungen (2.24) an den Gitterpunkten ergibt sich durch Berechnung des entsprechenden Gleichungssystems. Dabei besteht der Nachteil, dass zum Erreichen einer hohen Genauigkeit der Lösung die Anzahl der Zustände stark ansteigt. Infolgedessen wird ein reduziertes Modell mit der Galerkin Methode hergeleitet. Diese beruht darauf, die Lösungen $\vartheta(t, z)$ des partiellen Differentialgleichungssystems als Linearkombination von gewichteten Basisfunktionen darzustellen. Das angenäherte zeitabhängige Temperaturprofil $\check{\vartheta}_j(t, z)$ eines betrachteten Bauteils j ergibt sich zufolge der Galerkin Methode zu

$$\check{\vartheta}_j(z, t) = \sum_{i=1}^{N_j} \zeta_{j,i}(t) \phi_{j,i}(z) = \zeta_j^T \phi_j. \quad (2.25)$$

$\phi_{j,i}$ sind die bauteilabhängigen Basisfunktionen, $\zeta_{j,i}$ die entsprechenden zeitabhängigen Koeffizienten und $j = 1, 2, \dots, M$ ist der Index der Bauelemente mit der Anzahl der betrachteten Komponenten M . N_j in (2.25) gibt Auskunft darüber, wieviele linear

unabhängige Basisfunktionen je Bauteil vorgesehen sind. Ein Nachteil dieses Verfahrens im Gegensatz zur FDM sind die dimensionslosen und damit nicht einfach interpretierbaren Zustände, da diese im Allg. keine Temperaturen repräsentieren.

Index	Bauteil	$\phi_i(z)$	Index	Bauteil	$\phi_i(z)$
1	Isolationsschild 1, ζ_{s1}	$p_1(z)$	16	Massezylinder, ζ_m	$p_{m,7}(z)$
2	Isolationsschild 2, ζ_{s2}	$p_1(z)$	17		$p_{m,8}(z)$
3	Isolationsschild 3, ζ_{s3}	$p_1(z)$	18		$p_{m,9}(z)$
4	Heizelement 1, ζ_{h1}	$p_1(z)$	19		$p_{m,10}(z)$
5		$p_2(z)$	20	Schnecke, ζ_{sc}	$p_1(z)$
6	Heizelement 2, ζ_{h2}	$p_1(z)$	21		$p_2(z)$
7		$p_2(z)$	22	Heizelement Düse, ζ_{hd}	$p_1(z)$
8	Heizelement 3, ζ_{h3}	$p_1(z)$	23		$p_2(z)$
9		$p_2(z)$	24	Düse, ζ_d	$p_1(z)$
10	Massezylinder, ζ_m	$p_{m,1}(z)$	25		$p_2(z)$ bzw. $p_3(z)$
11		$p_{m,2}(z)$			
12		$p_{m,3}(z)$			
13		$p_{m,4}(z)$			
14		$p_{m,5}(z)$			
15		$p_{m,6}(z)$			

Tabelle 2.1: Komponenten des Vektors der Galerkinzustände ζ_{gal} mit entsprechenden Basisfunktionen.

Der aus M Koeffizientenvektoren bestehende Zustandsvektor aus (2.1) ergibt sich nach Tabelle 2.1 zu

$$\zeta_{gal} = \left[\zeta_{s1}, \zeta_{s2}, \zeta_{s3}, \zeta_{h1}^T, \zeta_{h2}^T, \zeta_{h3}^T, \zeta_m^T, \zeta_{sc}^T, \zeta_{hd}^T, \zeta_d^T \right]^T. \quad (2.26)$$

Es ist es vorteilhaft die Basisfunktionen ϕ_j aus Tabelle 2.1 je Bauteil orthogonal zu wählen, d. h.

$$\int_{z_l}^{z_r} \phi_{j,k}(z) \phi_{j,l}(z) dz = 0, \quad j = 1, 2 \dots N_j, \quad (2.27)$$

für $k \neq l$. z_r und z_l bezeichnen hier die longitudinalen Grenzen des Bauteils. Die Näherungslösung $\check{\vartheta}_j(z, t)$ liegt im Raum V_j , wobei $V_j = \text{span}\{\phi_{j,1}, \phi_{j,2} \dots \phi_{j,N_j}\}$ der von den Basisfunktionen aufgespannte endlichdimensionale Funktionenraum ist. Als Basisfunktionen werden mit entsprechender Randbedingung aus [12]

$$p_1(z) = 1 \quad \dot{q}_l = \dot{q}_r = 0 \quad (2.28a)$$

$$p_2(z) = 4 \left(\frac{z - l_l}{l_r - l_l} \right)^3 - 6 \left(\frac{z - l_l}{l_r - l_l} \right)^2 + 1 \quad \dot{q}_l = \dot{q}_r = 0 \quad (2.28b)$$

$$p_3(z) = \left(\frac{z - l_l}{l_r - l_l} \right)^2 - 2 \left(\frac{z - l_l}{l_r - l_l} \right) + \frac{2}{3} \quad \dot{q}_l \neq 0 \quad \text{und} \quad \dot{q}_r = 0 \quad (2.28c)$$

festgelegt. In Tabelle 2.1 ist der Zustand ζ_{gal} in die M Teilzustände mit den entsprechenden Basisfunktionen aus (2.28) aufgeteilt. Die Basisfunktionen des Massezylinders $\phi_{m,i}$ sind

im Anhang von [12] zusammengefasst. Mit diesen Basisfunktionen kann die Galerkin Methode ausgeführt werden. Dazu wird in einem ersten Schritt ein Differentialoperator \mathcal{D} aus (2.24) definiert. Mit

$$\mathcal{D}(\vartheta) = \rho c_p A \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + 2\pi r_a \dot{q}_a + 2\pi r_i \dot{q}_i - \lambda A \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - Aw(t) \quad (2.29)$$

und dem Skalarprodukt

$$\langle \tau(z), \nu(z) \rangle = \int_{z_l}^{z_r} \tau(z) \nu(z) dz \quad (2.30)$$

muss zufolge der schwachen Formulierung für elliptische Differentialgleichungen aus [18]

$$\langle \tau(z), \mathcal{D}(\vartheta) \rangle = 0 \quad (2.31)$$

für alle Basisfunktionen $\tau(z) \in \phi(z)$ folgender Zusammenhang für alle $t > 0$ gelten:

$$\begin{aligned} 0 = & \langle \tau(z), \rho c_p A \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \rangle + \langle \tau(z), 2\pi r_a \dot{q}_a \rangle + \langle \tau(z), 2\pi r_i \dot{q}_i \rangle - \langle \tau(z), Aw(t) \rangle \\ & + A\lambda \left\langle \frac{\partial \tau(z)}{\partial z}, \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right\rangle + A\tau(z_l) \underbrace{\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=z_l}}_{\dot{q}_l} - A\tau(z_r) \underbrace{\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=z_r}}_{-\dot{q}_r}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Gleichung (2.32) muss für jede Testfunktion $\tau \in \phi_j$ mit entsprechenden Randbedingungen erfüllt sein. Wenn die Testfunktion $\tau(z)$ aus (2.31) gleich den Basisfunktionen ϕ_j gesetzt wird, liefert (2.32) ein System von N_j gewöhnlichen Differentialgleichungen je Bauteil. Für das Heizelement der Zone 2 sei im Folgenden dieses System dargestellt.

Mit dem approximierten Temperaturverlauf des Heizelements 2

$$\check{\vartheta}_{h2} = \zeta_{h2,1} \phi_{h2,1} + \zeta_{h2,2} \phi_{h2,2} = \zeta_{h2}^T \phi_{h2} \quad (2.33)$$

kann die gewöhnliche Differentialgleichung für den Zustand $\zeta_{h2,1}$ hergeleitet werden. Dazu wird in (2.32) $\tau(z)$ durch die Basisfunktion $\phi_{h2,1}$ und ϑ durch $\check{\vartheta}_{h2}$ aus (2.33) ersetzt und die Wärmeströme $\dot{q}_{h2,a}, \dot{q}_{h2,i}, \dot{q}_{h2,l}, \dot{q}_{h2,r}$ aus (2.19) verwendet. Dadurch ergibt sich die

Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned}
0 = & \rho c_p A \underbrace{\int_{z_l}^{z_r} [\phi_{h2,1} \phi_{h2,1} \quad \phi_{h2,1} \phi_{h2,2}] dz}_{\mathbf{k}_1^T} \dot{\zeta}_{h2} \\
& + 2\pi r_a \frac{1}{r_a} \frac{\lambda_h}{\ln\left(\frac{r_{is}}{r_a}\right)} \underbrace{\int_{z_l}^{z_r} [\phi_{h2,1} \phi_{h2,1} \quad \phi_{h2,1} \phi_{h2,2}] dz}_{\mathbf{h}_{a,1}^T} \zeta_{h2} \\
& - 2\pi r_h \frac{1}{r_h} \frac{\lambda_h}{\ln\left(\frac{r_{is}}{r_h}\right)} \underbrace{\int_{z_l}^{z_r} \phi_{h2,1} \phi_{s2,1} dz}_{g_{o,1}} \zeta_{s2} + A w_{h2}(t) \underbrace{\int_{z_l}^{z_r} \phi_{h2,1} dz}_{p_1} \\
& + \lambda A \underbrace{\int_{z_l}^{z_r} \left[\frac{\partial \phi_{h2,1}}{\partial z} \frac{\partial \phi_{h2,1}}{\partial z} \quad \frac{\partial \phi_{h2,1}}{\partial z} \frac{\partial \phi_{h2,2}}{\partial z} \right] dz}_{\mathbf{s}_1^T} \zeta_{h2} \\
& + 2\pi r_m \alpha_{h2}^m \underbrace{\int_{z_l}^{z_r} [\phi_{h2,1} \phi_{h2,1} \quad \phi_{h2,1} \phi_{h2,2}] dz}_{\mathbf{h}_{i,1}} \zeta_{h2} \\
& - 2\pi r_m \alpha_{h2}^m \underbrace{\int_{z_l}^{z_r} [\phi_{h2,1} \phi_{m,1}, \phi_{h2,1} \phi_{m,2}, \dots, \phi_{h2,1} \phi_{m,10}] dz}_{\mathbf{g}_i} \zeta_m .
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Durch die Wahl der Basisfunktionen aus Tabelle 2.1 mit (2.28) kommt $\dot{\zeta}_{h2,2}$ in (2.34) nicht vor. Analoge Vorgehensweise und Ersetzen von $\phi_{h2,1}$ mit $\phi_{h2,2}$ liefert die zweite Differentialgleichung für den Zustand $\zeta_{h2,2}$ von ζ_{h2} . Dadurch entsteht ein System von 2 gekoppelten Differentialgleichungen für die approximierten Temperatur von Heizelement 2. Da die Basisfunktionen ϕ festgelegt sind und damit auch die Integrale aus (2.34) für gegebene Randbedingungen errechnet werden können, folgt

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta}_{h2} = & \mathbf{K}^{-1} \left(\left(\frac{-2}{\rho c_p A} \pi \frac{\lambda_h}{\ln\left(\frac{r_{is}}{r_h}\right)} \mathbf{H}_a - 2\pi r_m \alpha_{h2}^m \mathbf{H}_i - \lambda A \mathbf{S} \right) \zeta_{h2} \right. \\
& + \frac{2r_m \alpha_{h2}^m}{\rho c_p A} \mathbf{G}_i \zeta_m + \frac{2\pi}{\rho c_p A} \frac{\lambda_h}{\ln\left(\frac{r_{is}}{r_h}\right)} \mathbf{g}_o \zeta_{s2} \\
& \left. - \frac{w_{h2}}{\rho c_p} \mathbf{p}_i \right) .
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Mit den Größen \mathbf{K} , \mathbf{H}_a , \mathbf{H}_i , \mathbf{S} , \mathbf{G}_i und \mathbf{g}_o sind Integrale aus (2.35) der 2 gekoppelten Differentialgleichungen des Zustands ζ_{h2} zusammengefasst. In (2.35) ist zu sehen, dass $\dot{\zeta}_{h2}$ linear von den Zuständen ζ_{gal} und von der Eingangsleistung der Heizzone 2, w_{h2} , abhängt. Linearität folgt nicht für alle Zustände. In den Differentialgleichungen der Zustände der Isolationsschilder ζ_{s1} , ζ_{s2} und ζ_{s3} sowie der Düse ζ_{mn} treten nichtlineare Terme zufolge von Konvektion und Strahlung auf.

In Abbildung 1.1 sind die Positionen der vier Temperatursensoren zu sehen. Die drei im Massezylinder befindlichen Sensoren sind von gleicher Bauweise und haben daher auch gleiches dynamisches Verhalten. Diese sind mittels einer Schraubverbindung im Massezylinder befestigt, wodurch an der Kontaktfläche des Sensors ein Temperaturabfall wie in Abbildung 2.2 dargestellt, festgestellt werden kann. Durch die thermische Trägheit des Sensors resultiert ein dynamisches Verhalten, welches mittels eines PT1-Glieds nachgebildet werden kann. Aus Messdaten wurde eine Zeitkonstante von $\tau_{pt1} = 35$ s identifiziert. Der Sensor an der Düse ist mit einem Galerkin-Zustand, welcher das Temperaturprofil der Düse mittelt, nachgebildet. Das Quantisierungsintervall Δ_q der Temperaturen beträgt 0.05 °C und die Abtastrate der Sensoren ist $T_s = 100$ ms. Somit lässt sich das gesamte Differentialgleichungssystem des Galerkinmodells und die nachgebildete Dynamik der Sensoren in der Form

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \zeta_{gal} \\ \zeta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{gal} & \mathbf{\Lambda}_s \\ \mathbf{V}_s & \mathbf{A}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_{gal} \\ \zeta_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{gal} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{gal} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \zeta_{gal} \\ \zeta_s \end{bmatrix}, \vartheta_\infty \right) \quad (2.36a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_{gal} \begin{bmatrix} \zeta_{gal} \\ \zeta_s \end{bmatrix} \quad (2.36b)$$

mit $\zeta_{gal} \in \mathbb{R}^{25}$, $\zeta_s \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{A}_{gal} \in \mathbb{R}^{25 \times 25}$ schreiben. Die Matrix \mathbf{V}_s ergibt sich durch Auswertung des Temperaturprofils des Massezylinders bei der entsprechenden Sensorposition bzw. Mittelung des Temperaturprofils der Düse. $\mathbf{\Lambda}_s$ beschreibt die Rückwirkung der Sensortemperaturen auf die Galerkinzustände. Dabei ist diese nur für den Düsenensor wesentlich und wird daher für die Massezylindersensoren vernachlässigt. Der Aufbau der Matrizen \mathbf{A}_{gal} , \mathbf{B}_{gal} , \mathbf{V}_s , $\mathbf{\Lambda}_s$ und \mathbf{C}_{gal} sowie der Funktion \mathbf{g}_{gal} ist [12] zu entnehmen.

2.3 Finite Volumen Methode

Bei der Temperaturregelung ist neben dem Aufheizvorgang auch die Regelung während der Produktion ein wichtiger Aspekt. Dabei wird kaltes Kunststoffgranulat durch den Massezylinder befördert, aufgeschmolzen und auf die gewünschte Temperatur erhitzt. Dieser Vorgang entnimmt dem Massezylinder in Teilbereichen Energie, worauf die Regelung reagieren muss. Aus diesem Grund wird dem bereits gebildeten Galerkinmodell ein Finite Volumen Modell (FVM) des Kunststoffes hinzugefügt, um den Einfluss der Produktion und damit des bewegten flüssigen Kunststoffes auf die Temperaturverteilung der SGM zu beschreiben.

Bei der FVM wird das betrachtete Volumen in N Teilvolumina diskretisiert. Abbildung 2.6 zeigt die im Folgenden verwendete Diskretisierung mit $N = 9$ Teilvolumina. Die Enthalpie des Kunststoffes in jedem Volumen entspricht einem Zustand im Zustandsvektor ζ_{pl} aus (2.1).

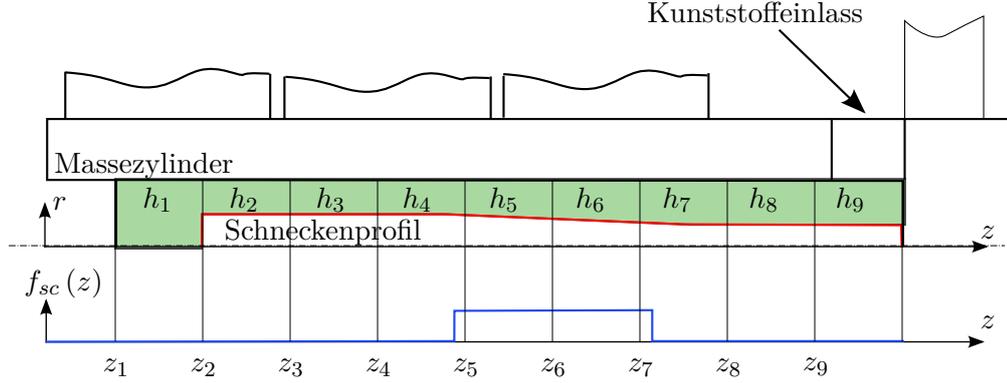


Abbildung 2.6: Diskretisierung des Kunststoffes im Massezylinder.

Jedes dieser Volumina muss dabei der thermodynamischen Energiebilanz (2.4) genügen. Da sich der Kunststoff während der Produktion bewegt ($\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), entfällt der Advektionsterm aus (2.4) nicht. Die zeitliche Druckabhängigkeit kann jedoch vernachlässigt werden. Die Wärmeleitung innerhalb des Kunststoffes ist in Relation zum Wärmeübergang zwischen Kunststoff und Massezylinder bzw. Schnecke sehr gering. Daher wird im Folgenden auch die Konduktion (2.5) vernachlässigt, d. h. (2.4) ergibt sich zu

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\rho \frac{\partial h}{\partial z} v_z(z) + w_{pl}(z) , \quad (2.37)$$

mit der eingebrachten Leistung $w_{pl}(z)$ zufolge der Scherleistung der Schnecke und der Geschwindigkeit in z -Richtung $v_z(z)$. Die Scherleistung errechnet sich zu

$$w_{pl}(z) = \frac{f_{sc}(z) \bar{P}}{A(z)} , \quad \int_{z_1}^{z_N} f_{sc}(z) dz = 1 , \quad (2.38)$$

mit der Leistungsverteilung f_{sc} gemäß Abbildung 2.6, der mittleren mechanischen Leistung der Schnecke während der Produktion \bar{P} und der Kunststoffquerschnittsfläche $A(z) = \pi(r_a^2 - r_i^2(z))$. Die Verteilung f_{sc} entsteht durch den zunehmenden Schneckenradius in diesem Bereich, wodurch ein Energieaustausch aufgrund von starker Reibung stattfindet. Angesichts des komplexen Plastifizierungsprozesses kann nicht einfach bestimmt werden, in welchem Bereich des Massezylinders reine Schmelze bzw. reines Granulat vorliegt. Aus diesem Grund wird die Dichte ρ des Kunststoffes im gesamten Massezylinder als konstant angenommen. Integration von (2.37) nach $r \in [r_i, r_a]$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$, sowie Einsetzen der eingebrachten Leistungen liefert

$$A(z) \rho \frac{\partial h}{\partial t} + A(z) \rho \frac{\partial h}{\partial z} v(z) = -2\pi r_a \dot{q}_a(z) - 2\pi r_i(z) \dot{q}_i(z) + A(z) p_{sc}(z) . \quad (2.39)$$

Die Geschwindigkeit des Kunststoffes in (2.39) lässt sich darstellen als

$$v(z) = \frac{\bar{m}}{\rho A(z)} \quad (2.40)$$

mit dem mittleren Massenstrom eines Produktionszyklus

$$\bar{m} = \frac{m_c}{T_c} \rho \quad (2.41)$$

und zugehöriger Zykluszeit T_c . m_c bezeichnet die pro Zyklus eingespritzte Kunststoffmasse. Die Wärmeströme in radialer Richtung der Volumina können zufolge (2.11) dargestellt werden als

$$\dot{q}_a(z) = -\dot{q}_{m,i} = \alpha_{FV} (\vartheta_p(h) - \vartheta_m(t, z)) \quad (2.42a)$$

$$\dot{q}_i(z) = -\dot{q}_{sc,a} = \alpha_{FV} (\vartheta_p(h) - \vartheta_{sc}(t, z)) \quad (2.42b)$$

mit dem Wärmeübergangskoeffizient zwischen Massezylinder und dem Kunststoff α_{FV} . Die aufgenommene (abgegebene) Wärmestromdichte \dot{q}_a ist gleichzeitig die negative Wärmestromdichte $\dot{q}_{m,i}$, die der Massezylinder abgibt (aufnimmt). Nach Innen interagieren manche Finiten Volumina mit der Schnecke. Der Wärmeübergangskoeffizient wurde dabei gleich dem zwischen Massezylinder und Kunststoff α_{FV} gewählt. $\vartheta_p(h)$ ist die Temperatur des Kunststoffes als Funktion der Enthalpie h . Diese Funktion ist beispielsweise für den Kunststoff PP120MO [19] in Abbildung 2.7a dargestellt.

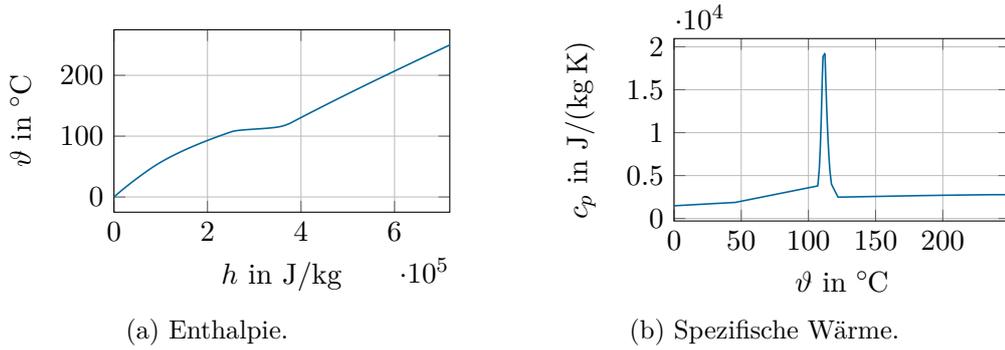


Abbildung 2.7: Spezifische Wärme c_p und Enthalpie $h(\vartheta)$ von Kunststoff (PP120MO).

Der flache Verlauf bei ca. 110 °C liegt darin begründet, dass der Schmelzpunkt von PP120MO bei ca. 110 °C liegt und daher in diesem Bereich Schmelzenthalpie zum Aufschmelzen des Kunststoffes benötigt wird.

Infolge der Traversenkühlung auf konstante Temperatur wird die Enthalpie h_9 aus Abbildung 2.6 während der Produktion konstant gesetzt. Durch diese Vereinfachung ist es nicht notwendig h_9 im neuen Zustandsvektor ζ_{pl} mitzuführen.

Integration von (2.39) über ein finites Volumen liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial t} \int_{z_i}^{z_{i+1}} A(z) dz + \bar{m} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{\partial h}{\partial z} dz = & - \int_{z_i}^{z_{i+1}} 2\pi r_a \dot{q}_a(z) dz - \int_{z_i}^{z_{i+1}} 2\pi r_i(z) \dot{q}_i(z) dz \\ & + \bar{P} \int_{z_i}^{z_{i+1}} f_{sc}(z) dz . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Das Volumenelement 5 mit den entsprechenden Wärmestromdichten ist in Abbildung 2.8 dargestellt.

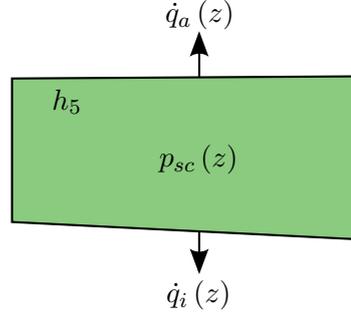


Abbildung 2.8: Eingebachte Leistung p_{sc} und die Wärmeübergänge mit dem Massezylinder $\dot{q}_a(z)$ bzw. mit der Schnecke $\dot{q}_i(z)$ am Beispiel von Volumen 5.

Letztlich wird die partielle Ableitung des zweiten Terms aus (2.43) durch ein Upwind-Verfahren aus [20] der Form

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{h_{i+1} - h_i}{z_{i+1} - z_i} \quad (2.44)$$

angenähert. Dadurch kann (2.43) als gewöhnliche Differentialgleichung betrachtet werden. Diese ergibt sich für jedes Volumen zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial t} \rho \int_{z_i}^{z_{i+1}} A(z) dz + \bar{m} (h_{i+1} - h_i) &= -2\pi r_a \alpha_{FV} f_{\vartheta, h}(h_i) (z_{i+1} - z_i) \\ &+ 2\pi r_a \alpha_{FV} \underbrace{\int_{z_i}^{z_{i+1}} (\phi_m)^T dz}_{\mathbf{g}_{a,i}} \zeta_m - 2\pi f_{\vartheta, h}(h_i) \alpha_{FV} \underbrace{\int_{z_i}^{z_{i+1}} r_i(z) dz}_{\mu_i} \\ &+ 2\pi \alpha_{FV} \underbrace{\int_{z_i}^{z_{i+1}} r_i(z) (\phi_{sc})^T dz}_{\mathbf{g}'_{i,i}} \zeta_{sc} + \bar{P} \underbrace{\int_{z_i}^{z_{i+1}} f_{sc}(sc) dz}_{\zeta_i} \end{aligned} \quad (2.45)$$

mit $i = 1, 2, \dots, 8$. Um (2.45) in vektorieller Schreibweise darstellen zu können, werden

die Größen

$$\mathbf{K}_{pl} = \text{diag} \left(\int_{z_1}^{z_2} A(z) dz, \int_{z_2}^{z_3} A(z) dz \dots \int_{z_8}^{z_9} A(z) dz \right) \quad (2.46a)$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}'_a = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_{a,1} \\ \mathbf{g}'_{a,2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}'_{a,8} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_{i,1} \\ \mathbf{g}'_{i,2} \\ \vdots \\ \mathbf{g}'_{i,8} \end{bmatrix} \quad (2.46b)$$

$$\mathbf{L} = \text{diag} ([z_2 - z_1, z_3 - z_2, \dots, z_9 - z_8]) \quad (2.46c)$$

$$\mathbf{M} = \text{diag} ([\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_8]) \quad (2.46d)$$

$$\boldsymbol{\varsigma} = [\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_8]^T \quad (2.46e)$$

eingeführt. Hiermit entsteht ein System mit acht nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungen, das sich schreiben lässt als

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\zeta}}_{pl} &= \underbrace{\frac{\mathbf{K}_{pl}^{-1}}{\rho} \bar{m} \mathbf{\Pi}}_{\mathbf{A}_{pl}} \boldsymbol{\zeta}_{pl} \\ &+ \frac{\mathbf{K}_{pl}^{-1}}{\rho} \left(-2\pi r_a \alpha_{FV} \left(\mathbf{L} \mathbf{f}_h^\vartheta(\boldsymbol{\zeta}^{pl}) + \mathbf{G}'_a \boldsymbol{\zeta}^m \right) - 2\pi \alpha_{FV} \mathbf{M} \mathbf{f}_h^\vartheta(\boldsymbol{\zeta}^{pl}) + 2\pi \alpha_{FV} \mathbf{G}'_i \boldsymbol{\zeta}^{sc} + \boldsymbol{\varsigma} \bar{P} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Aus (2.47) erkennt man, dass $\dot{\boldsymbol{\zeta}}_{pl}$ neben konstanten Parametern aus (2.46) nichtlinear vom Zustand $\boldsymbol{\zeta}_{pl}$ selbst aufgrund von \mathbf{f}_h^ϑ (Abbildung 2.7a) und linear von dem Zustandsvektor $\boldsymbol{\zeta}_{gal}$ abhängt.

2.4 Gesamtsystem

Das gesamte mathematische Modell (2.1) ergibt sich durch Zusammenführen der beiden Teilmodelle. Der neue Zustandsvektor $\boldsymbol{\zeta}$ setzt sich aus dem Galerkinzustandsvektor $\boldsymbol{\zeta}_{gal}$, den gemessenen Temperaturen $\boldsymbol{\zeta}_s$ und dem FVM-Zustandsvektor $\boldsymbol{\zeta}_{pl}$ zusammen, d. h.

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_{gal} \\ \boldsymbol{\zeta}_s \\ \boldsymbol{\zeta}_{pl} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

mit $\boldsymbol{\zeta}_{gal} \in \mathbb{R}^{25}$, $\boldsymbol{\zeta}_s \in \mathbb{R}^4$ und $\boldsymbol{\zeta}_{pl} \in \mathbb{R}^8$. Damit ist das gesamte mathematische Modell in der Form

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}, \vartheta_\infty) \quad (2.49a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\boldsymbol{\zeta} \quad (2.49b)$$

mit $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{37}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{37 \times 37}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{37 \times 4}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{4 \times 37}$ und $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ darstellbar. Der Eingangsvektor \mathbf{u} ist in (2.49) mit $u_i = \tilde{u}_i/u_{max,i}$ normiert und die entsprechenden Leistungen u_{max} der Heizelemente sind in der Matrix \mathbf{B} zusammengefasst, sodass $u_i \in [0, 1]$ gilt.

Die in (2.49) verwendeten Matrizen sind durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{gal} & \mathbf{\Lambda}_s & \mathbf{U} \\ \mathbf{V}_s & \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{pl} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{gal} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.50a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{gal} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{gal}(\boldsymbol{\zeta}_{gal}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{g}_{pl}(\boldsymbol{\zeta}) \end{bmatrix} \quad (2.50b)$$

$$\mathbf{g}_{pl} = \frac{\mathbf{K}_{pl}^{-1}}{\rho} 2\pi\alpha_{FV} \left(r_a \mathbf{L}\mathbf{f}_h^\vartheta(\boldsymbol{\zeta}^{pl}) - \mathbf{M}\mathbf{f}_h^\vartheta(\boldsymbol{\zeta}^{pl}) \right) + \frac{\mathbf{K}_{pl}^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\zeta} \bar{P} \quad (2.50c)$$

gegeben [12]. Die Matrix \mathbf{U} entsteht durch die Rückwirkung des Kunststoffes auf das Temperaturprofil des Massezylinders sowie der Schnecke und damit auf die entsprechenden Galerkinzustände. Umgekehrt kennzeichnet \mathbf{G} die Abhängigkeit der Enthalpien $\boldsymbol{\zeta}_{pl}$ von den Galerkinzuständen. Diese ist durch (2.47) gegeben. Eine detaillierte Darstellung und Herleitung des Modells ist in [12] zu finden.

3 Regelungsentwurf

In diesem Kapitel werden verschiedene Regelungsstrategien untersucht. Die Ziele der Regelung sind ein geringes Überschwingen und kurze Anstiegszeiten bei Sollwertänderungen sowie kleine Regelabweichungen während der Produktion. Die zu entwerfende Regelung soll für alle Betriebszustände eine hohe Regelgüte aufweisen. Eingänge der Regler sind die gemessenen Temperaturen \mathbf{y} und die Sollwerte der Temperaturen \mathbf{y}_d . Die Stellgrößen $u_i \in [0, 1]$ beschreiben, mit welchem Anteil der maximalen Heizleistung das jeweilige Heizelement betrieben wird. Die in diesem Kapitel behandelten Regelungsentwurfsverfahren sind:

- eine statische nichtlineare Vorsteuerung,
- ein MIMO-PI Regler nach [21] und
- ein um einen Integratorzustand erweiterten LQR-Regler mit Zustandsbeobachter.

3.1 Nichtlineare Vorsteuerung

Das Ziel der nichtlinearen Vorsteuerung gemäß Abbildung 3.1 ist, für ein gewähltes Temperaturprofil \mathbf{y}_d den entsprechenden stationären Zustand ζ_d und den Eingangsvektor \mathbf{u}_{ff} zu ermitteln.

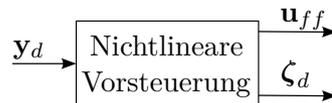


Abbildung 3.1: Nichtlineare Vorsteuerung.

ζ_d wird später in Abschnitt 3.3 als Referenzzustand des LQ-Reglers benötigt. Die gesuchten Größen ζ_d und \mathbf{u}_{ff} stellen die Lösung des Gleichungssystems

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\zeta_d + \mathbf{B}\mathbf{u}_{ff} + \mathbf{g}(\zeta_d) = \mathbf{f}(\zeta_d, \mathbf{u}_{ff}) \quad (3.1a)$$

$$\mathbf{y}_d = \mathbf{C}\zeta_d \quad (3.1b)$$

dar. Da die Ausgänge gleichzeitig Zustände sind, sind durch die Vorgabe von \mathbf{y}_d vier Einträge von ζ_d fixiert. Für die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (3.1) wird das Newton Verfahren aus [22] verwendet. Die Iterationsgleichung dafür lautet

$$\boldsymbol{\chi}_{k+1} = \boldsymbol{\chi}_k - \mathbf{J}_{\boldsymbol{\chi},k}^{-1} \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_{d,k} \\ \mathbf{y}_d \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{ff,k} \right), \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_d \\ \mathbf{u}_{ff} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

mit dem nicht messbaren Zustandsvektor $\tilde{\zeta}_d \in \mathbb{R}^{33}$ und der Jacobimatrix

$$\mathbf{J}_{\chi,k} = \frac{\partial}{\partial \chi} \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_{d,k} \\ \mathbf{y}_d \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{ff,k} \right). \quad (3.3)$$

Als Abbruchbedingung für das Newton-Verfahren wird

$$\left\| \mathbf{f} \left(\begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_{d,k} \\ \mathbf{y}_d \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{ff,k} \right) \right\|_2 < \varepsilon_{br} \quad (3.4)$$

gewählt. Die Größe ε_{br} wird so gewählt, dass einerseits die Änderung je Iteration von \mathbf{u}_{ff} kleiner als die Auflösung der Leistung am realen Aufbau ist, und andererseits die Änderung je Iteration der Temperaturprofile abhängig von $[\tilde{\zeta}_d^T, \mathbf{y}_d^T]^T$ kleiner als die Auflösung der Temperatursensoren ist. Mit $\varepsilon_{br} = 10^{-7}$ wird das nach durchschnittlich 4 Iterationen, abhängig vom Startwert $\tilde{\zeta}_{d,0}$ und $\mathbf{u}_{ff,0}$ erreicht. Die statische nichtlineare Vorsteuerung erlaubt außerdem Rückschlüsse auf die Erreichbarkeit des gewünschten Temperaturprofils. Liefert das Newton Verfahren Leistungsfaktoren $u_{ff,i} \notin [0,1], i = 1, \dots, 4$, so ist das gewünschte Temperaturprofil \mathbf{y}_d mit den gegebenen Parametern nicht einstellbar.

3.2 MIMO PI-Regler

In diesem Abschnitt wird ein Mehrgrößen-PI Regler nach [21] entworfen. Der Vorteil sogenannter Einstellregler ist, dass die Reglerparameter ohne vorherige aufwändige Modellbildung bestimmt werden können. Im Gegensatz dazu ist ein Nachteil, dass scharfe Forderungen an das dynamische Übergangsverhalten meist nicht genau erfüllt werden können. Im Vergleich zu einer Regelungsstrategie mit einzelnen SISO-Reglern wird mit folgenden Entwurf versucht, eine Entkoppelung zu erreichen.

Die Stellgröße \mathbf{u}_{fb} wird aus

$$\mathbf{u}_{fb} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_I \mathbf{e}_I \quad (3.5)$$

mit dem Regelfehlervektor $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$ und dem Integral des Regelfehlervektors

$$\mathbf{e}_I = \int_0^t (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) dt, \quad \mathbf{e}_I(0) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

berechnet. Der Regelkreis des MIMO-PI-Reglers ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Um einen sinnvollen Vergleich mit dem aktuellen in der Industrie verwendeten SISO-Regler anstellen zu können, wird ein Vorsteuerungsanteil hier nicht verwendet.

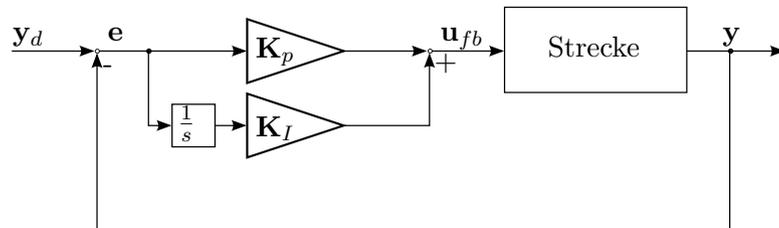


Abbildung 3.2: Mehrgrößen PI-Regler.

Da es sich bei diesem Entwurf um einen linearen Regler handelt, wird zuerst das nichtlineare System aus (2.49) um die Ruhelage $(\zeta_d, \mathbf{u}_{ff})$ linearisiert. Mit den Matrizen

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_d, \mathbf{u}=\mathbf{u}_{ff}} = \mathbf{A} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_d, \mathbf{u}=\mathbf{u}_{ff}} \quad (3.7a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\zeta=\zeta_d, \mathbf{u}=\mathbf{u}_{ff}} = \mathbf{B} \quad (3.7b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \quad (3.7c)$$

lässt sich das linearisierte System in der Form

$$\Delta \dot{\zeta} = \tilde{\mathbf{A}} \Delta \zeta + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (3.8a)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \mathbf{y} \quad (3.8b)$$

schreiben, mit den Auslenkungen aus der Ruhelage $\Delta \zeta = \zeta - \zeta_d$, $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$ und $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{ff}$.

Durch Einführen der Größen

$$\mathbf{K}_p = a \mathbf{K}_s^{-1} \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{K}_I = b \mathbf{K}_s^{-1} \quad (3.9b)$$

mit der statischen Verstärkungsmatrix

$$\mathbf{K}_s = \lim_{s \rightarrow 0} \mathbf{G}(s) = -\mathbf{C} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \mathbf{B} \quad (3.10)$$

reduziert sich der Reglerentwurf auf das Wählen der Tuningparameter a und b . $\mathbf{G}(s)$ bezeichnet hier die Übertragungsfunktion im Frequenzbereich. Die Matrix \mathbf{K}_s ist neben dem analytischen Errechnen nach der Vorschrift (3.10) auch experimentell bestimmbar. Dazu ändert man einzelne Stellgrößen u_i sprungförmig und misst den stationären Ausgang y_∞ . Die i -te Spalte von \mathbf{K}_s ergibt sich dann zu

$$\begin{bmatrix} k_{s1,i} \\ k_{s2,i} \\ k_{s3,i} \\ k_{s4,i} \end{bmatrix} = \frac{1}{u_i} \begin{bmatrix} y_{1,i,\infty} \\ y_{2,i,\infty} \\ y_{3,i,\infty} \\ y_{4,i,\infty} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Aufgrund des Integrators in diesem Regelungskonzept ist hier ein Anti-Windup notwendig. Die Anti-Windup Strategie besteht darin, dass der Integrator der Stellgröße u_i nur dann aktiv ist, wenn die Stellgröße innerhalb der Stellgrößenbeschränkungen ist, d. h.

$$u_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.12)$$

Um den Tuningparameter b zu bestimmen, werden die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Kreises eines reinen I-Reglers betrachtet. Der geschlossene Kreis lässt sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta \zeta \\ \mathbf{e}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & -\mathbf{B} \mathbf{K}_I \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \zeta \\ \mathbf{e}_I \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \zeta \\ \mathbf{e}_I \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

mit \mathbf{K}_I aus (3.9). In Abbildung 3.3 sind die Eigenwerte nahe der Stabilitätsgrenze der erweiterten Dynamikmatrix in Abhängigkeit des Tuningfaktors b zu sehen. Dabei ist zu erkennen, dass durch Erhöhen von b manche Eigenwerte weiter nach links wandern, während sich bei anderen zunehmend der Imaginäranteil erhöht, was Schwingungen im Übergangsverhalten bewirkt. Weiters verschieben sich Eigenwerte in die rechte s-Halbebene und rufen dadurch Instabilität des geschlossenen Kreises hervor. Mit $b = 0.004$ ist ein guter Kompromiss zwischen Schnelligkeit des Übergangsverhaltens und Dämpfung der entstehenden Schwingungen gegeben.

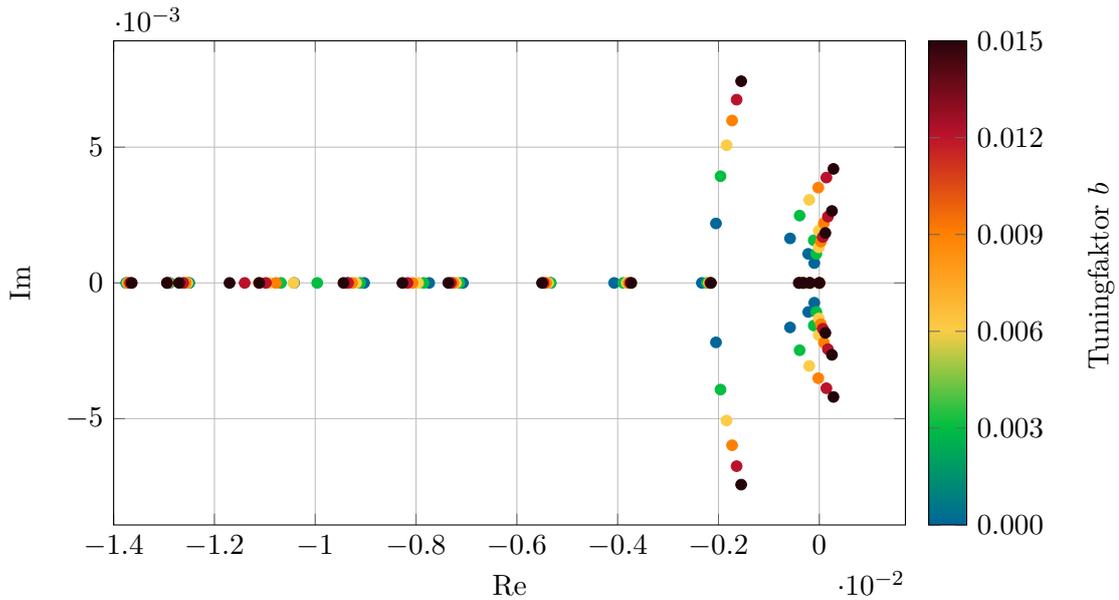


Abbildung 3.3: Eigenwerte der erweiterten Systemdynamikmatrix

Durch die Verwendung eines P-Anteils kann das Übergangsverhalten schneller gemacht werden. Dabei muss wiederum ein Mittelweg zwischen hoher Dynamik und Einschwingdauer der simulierten Führungsübergangsfunktionen gefunden werden. Ein Tuningfaktor $a = 12$ stellt dafür eine geeignete Größe dar.

3.3 LQ-Zustandsregler

In den Modellgleichungen (2.49) ist zu sehen, dass es sich dabei um ein zeitinvariantes nichtlineares System handelt. Da der folgende Linear-Quadratische-Regler Entwurf auf einem zeitinvarianten, linearen, zeitdiskreten System der Form

$$\Delta\zeta_{k+1} = \Phi\Delta\zeta_k + \Gamma\Delta\mathbf{u}_k \quad (3.15a)$$

$$\Delta\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\Delta\zeta_k + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}_k \quad (3.15b)$$

basiert, wird zuerst das System (2.49) um die betrachtete Ruhelage (ζ_d, \mathbf{u}_{ff}) analog zu (3.7) linearisiert. Im Folgenden wird vorerst angenommen, dass alle Zustände ζ messbar

sind. Später wird dazu in Kapitel 4 ein Zustandsbeobachter entworfen. Zum linearisierten zeitkontinuierlichen System (3.8) lässt sich jetzt das zugehörige Abtastsystem

$$\Delta\zeta_{k+1} = \Phi\Delta\zeta_k + \Gamma\Delta\mathbf{u}_k \quad \Delta\zeta(0) = \mathbf{0} \quad (3.16a)$$

$$\Delta\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\Delta\zeta_k \quad (3.16b)$$

mit

$$\Phi = e^{\tilde{\mathbf{A}}T_{a,c}} \quad (3.17)$$

$$\Gamma = \int_0^{T_{a,c}} e^{\tilde{\mathbf{A}}\tau} d\tau \mathbf{B} \quad (3.18)$$

und der Abtastzeit $T_{a,c}$ schreiben.

Ziel eines LQR ist es, ein Gütefunktional der Form

$$J(\mathbf{u}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\Delta\zeta_k^T \mathbf{Q}_c \Delta\zeta_k + \Delta\mathbf{u}_k^T \mathbf{R}_c \Delta\mathbf{u}_k \right) \quad \Delta\zeta_0 = \Delta\zeta(0) \quad (3.19)$$

für geeignete positiv definiten Gewichtungsmatrizen $\mathbf{Q}_c \in \mathbb{R}^{37 \times 37}$ und $\mathbf{R}_c \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ zu minimieren. N ist die Anzahl der Abtastpunkte im betrachteten Zeitintervall. Die gesuchte optimale Eingangsfolge \mathbf{u}_k^* liefert das Minimum hinsichtlich des Kostenfunktionals (3.19). Daher wird ein so entworfener Regler auch als Optimalregler bezeichnet.

Das Regelgesetz zufolge [23]

$$\mathbf{u}_{fb,k}^* = \mathbf{K}_s \Delta\zeta_k \quad (3.20)$$

mit der stationären Verstärkungsmatrix

$$\mathbf{K}_s = - \left(\mathbf{R}_c + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Gamma \right)^{-1} \left(\Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right) \quad (3.21)$$

minimiert das Kostenfunktional (3.19) für $N \rightarrow \infty$. Die Matrix \mathbf{P}_s in (3.21) ist die Lösung der stationären Riccati-Gleichung

$$\mathbf{P}_s = \left(\mathbf{Q}_c + \Phi^T \mathbf{P}_s \Phi \right) - \left(\Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right)^T \left(\mathbf{R}_c + \Gamma^T \mathbf{P}_s \Gamma \right)^{-1} \left(\Gamma^T \mathbf{P}_s \Phi \right) . \quad (3.22)$$

Die Vorsteuerung liefert dabei aus dem gewünschten Temperaturprofil \mathbf{y}_d den Ruhelagenzustand ζ_d und den dazugehörigen Eingangsleistungsvektor \mathbf{u}_{ff} . Der LQ-Regler agiert hier wie ein reiner proportional (P)-Regler. Einer der Nachteile reiner P-Regler in Kombination mit einer statischen Vorsteuerung ist die bleibende Regelabweichung bei Ungenauigkeiten und externen Störungen. In Abbildung 3.4 ist beispielhaft die Simulation des Aufheizvorgangs der Zone 2 mit dem LQ-Regler und der Vorsteuerung zu sehen. Dabei wurde im Modell eine Umgebungstemperatur von $\vartheta_\infty = 0.9\vartheta_{\infty,nom}$ vorgegeben. Nachdem die Vorsteuerung das nominelle Modell verwendet, wird aufgrund der geringeren Umgebungstemperatur die stärkere Abkühlung in \mathbf{u}_{ff} nicht berücksichtigt und eine bleibende Regelabweichung tritt auf.

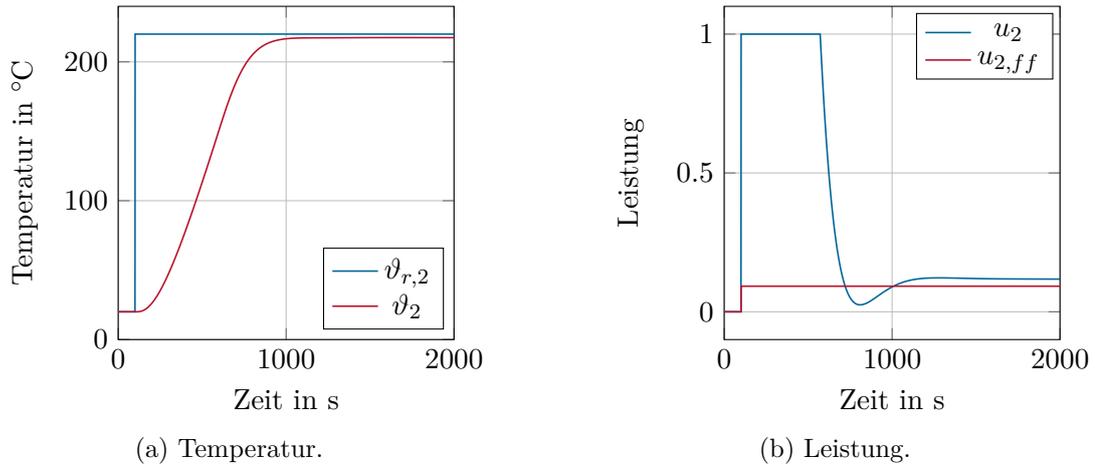


Abbildung 3.4: Aufheizvorgang der Zone 2 mit dem LQR-Zustandsregler und der nichtlinearen Vorsteuerung bei $\vartheta_\infty = 0.9\vartheta_{\infty, nom}$.

Um der stationär bleibenden Regelabweichung entgegenzuwirken wird das Regelungskonzept um den Integratorzustandsvektor $\zeta_I \in \mathbb{R}^4$ erweitert. Dadurch ist eine stationäre Regelabweichung von $\mathbf{0}$ bei erreichbaren Temperaturprofilen auch mit unbekanntem Modellparametern erreichbar. Das erweiterte, zeitdiskrete lineare Modell lautet

$$\begin{bmatrix} \Delta\zeta_{k+1} \\ \zeta_{I,k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{bmatrix}}_{\tilde{\Phi}} \begin{bmatrix} \Delta\zeta_k \\ \zeta_{I,k} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\tilde{\Gamma}} \Delta\mathbf{u}_{fb} \quad (3.23)$$

und die Stellgröße des Reglers wird zu

$$\mathbf{u}_{fb} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_I \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{K}}_s} \begin{bmatrix} \zeta_k \\ \zeta_{I,k} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

erweitert. Die Matrix $\tilde{\mathbf{K}}_s$ ergibt sich analog zu \mathbf{K}_s in (3.21) durch Minimierung des Kostenfunktional aus (3.21) mit den Matrizen $\tilde{\Phi}$ und $\tilde{\Gamma}$ sowie der erweiterten Gewichtungsmatrix $\tilde{\mathbf{Q}}_c$. Die Gewichtungsmatrix der Stellgrößen \mathbf{R}_c bleibt unverändert. In Abbildung 3.5 ist der gesamte resultierende LQ - Regelkreis mit der statischen nichtlinearen Vorsteuerung aus Abschnitt 3.1 dargestellt. Bei der Wahl der Gewichtungsmatrix \mathbf{R}_c wird eine Diagonalmatrix gewählt, wobei alle Diagonaleinträge gleich stark gewichtet sind. D. h. kein Heizelement wird relativ zu den restlichen gedrosselt. Unterschiedliche Gewichtung von \mathbf{R}_c würde bedeuten, dass jene Stellgrößen mit hoher Gewichtung die entsprechenden Heizelemente weniger belasten würden. Kleine Werte in der Diagonalmatrix \mathbf{Q}_c sagen aus, dass der LQ-Regler eine Zustandsabweichung $\Delta\zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i,d}$ nicht stark gewichtet und dadurch das Übergangsverhalten des entsprechenden Zustandes langsam ist. Daher werden die vier Sensorzustände viel stärker gewichtet, damit diese Zustände schneller gegen den Sollzustand \mathbf{y}_d streben. Numerische Werte sind dem Anhang A zu entnehmen.

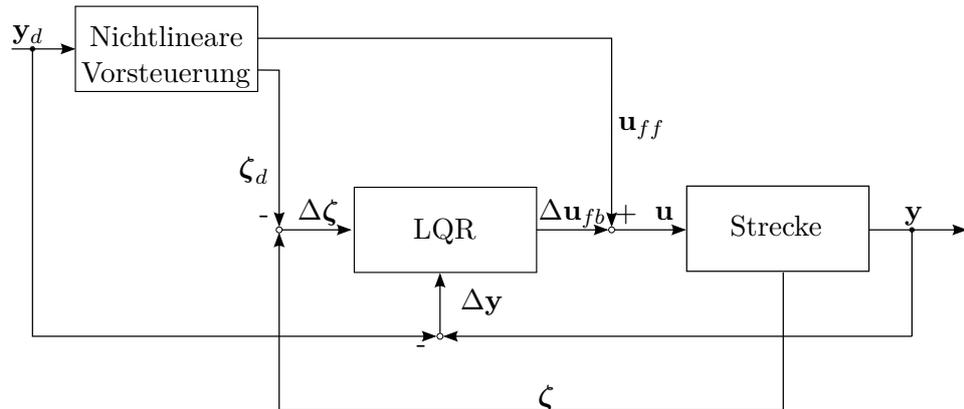


Abbildung 3.5: Blockschaltbild des LQR-geregelten Systems mit der Annahme, dass alle Zustände messbar sind.

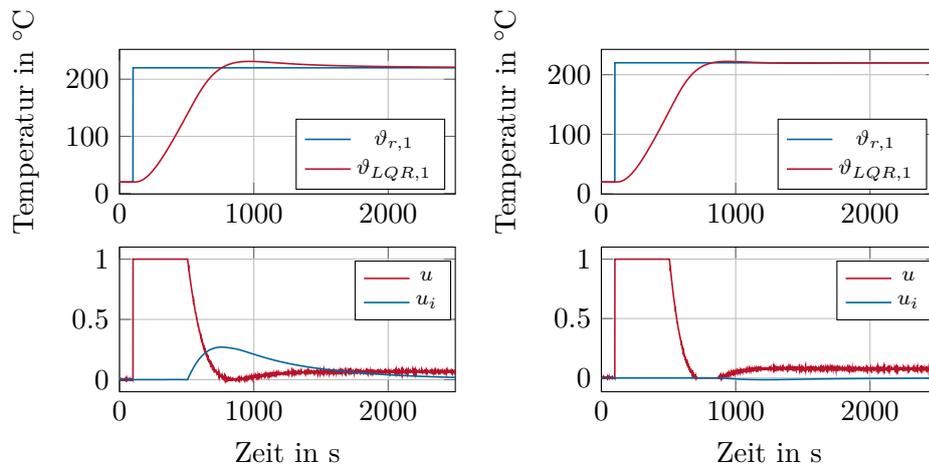
Eine dazugehörige Anti-Windup Methode schließt den LQ-Reglerentwurf ab. Als Anti-Windup Strategie wird die Methode der *Conditional Integration* [24] verwendet. Hierbei wird die Integration von $\zeta_{I,i}$ mit $i = 1, \dots, 4$ nur dann fortgesetzt, wenn die Bedingung

$$|y_i - y_{d,i}| < \varepsilon_{AW} \quad (3.25)$$

erfüllt ist. Die Intervallbreite ε_{AW} wurde durch Simulationsstudien festgelegt. Bei dieser Methode von Anti-Windup ist jedoch Vorsicht geboten. Sollte die stationäre Regelabweichung

$$e_{\infty,i} > \varepsilon_{AW} \quad (3.26)$$

eines Ausgangs i sein, so wird die Integration des zugehörigen Zustands $\zeta_{I,i}$ nie aktiv. Wie in Abbildung 3.6 zu sehen ist, kann das Überschwingen mit der Idee des *Conditional Integration* im Vergleich zu einem klassischen Anti Wind-Up verringert werden. Mit $\vartheta_{LQR,2}$ und $\vartheta_{r,2}$ werden dabei die simulierte bzw. die Solltemperatur der Zone 2 bezeichnet. Die gesamte Stellgröße wird mit u und der Integralanteil mit u_i benannt.



(a) Aufheizvorgang der Zone 2 mit klassischem Anti-Windup. (b) Aufheizvorgang der Zone 2 mit Anti-Windup.

Abbildung 3.6: Aufheizvorgang der Zone 1 mit a) klassischem Anti-Windup und b) *Conditional Integration* ($\varepsilon_{AW} = 6^\circ\text{C}$).

4 Kalman-Filter

Der im vorigen Kapitel entworfene LQ-Regler benötigt den aktuellen Zustand ζ des Systems. Da nur vier Temperaturen gemessen werden, wird in diesem Abschnitt ein Zustandsbeobachter entworfen, der die Modellzustände ζ von (2.1) stabil und stationär genau schätzt. Als Eingänge des Kalman-Filters aus Abbildung 4.1 werden die Signale \mathbf{y} der vier Temperatursensoren und die auf das Modell aufgeschaltete Leistung \mathbf{u} verwendet.

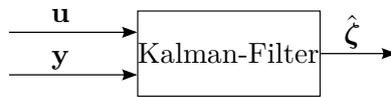


Abbildung 4.1: Kalman-Filter.

Da es sich in (2.49) um ein nichtlineares System handelt, ist die standardmäßige Vorgehensweise einen Extended Kalman-Filter (EKF) zu entwerfen. Dabei findet in jedem Iterationsschritt eine Linearisierung der Systemgleichungen statt. Diese ist sehr rechenaufwendig, was bei den geringen für die Temperaturregelung zur Verfügung gestellten Rechenleistung, zu Problemen führen kann. Deshalb wird in einem ersten Schritt ein stationäres Kalman-Filter entworfen. Anschließend beendet die Erweiterung des stationären Filters mit einem nichtlinearen Simulatoreil den Beobachterentwurf.

4.1 Stationäres Kalman-Filter

Um ein stationäres Kalman-Filter zu entwerfen, wird das System zuerst um einen Arbeitspunkt $(\zeta_d, \mathbf{u}_{ff})$ linearisiert. Bei dem stationären Filterentwurf wird das gleiche System wie bei dem LQ-Regler aus (3.8) verwendet. Dieses lautet

$$\Delta \dot{\zeta} = \tilde{\mathbf{A}} \Delta \zeta + \mathbf{B} \Delta \mathbf{u} \quad (4.1a)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \Delta \zeta \quad (4.1b)$$

mit $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_d}$. Durch Diskretisierung mit der Abtastzeit $T_{a,o}$ und dem Hinzufügen von Prozessstörung \mathbf{w} und Messrauschen \mathbf{v} lässt sich das System in der Form

$$\Delta \zeta_{k+1} = \Phi \Delta \zeta_k + \Gamma \Delta \mathbf{u}_k + \mathbf{G} \mathbf{w}_k \quad (4.2a)$$

$$\Delta \mathbf{y}_k = \mathbf{C} \Delta \zeta_k + \mathbf{H} \mathbf{w}_k + \mathbf{v}_k \quad (4.2b)$$

mit den Matrizen $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{4 \times 37}$ und $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{37 \times 37}$ schreiben. Die Dynamik- und Eingangsmatrix sind durch

$$\Phi = e^{\tilde{\mathbf{A}}T_{a,o}} \text{ und} \quad (4.3)$$

$$\Gamma = \int_0^{T_{a,o}} e^{\tilde{\mathbf{A}}T_{a,o}} dt \mathbf{B} \quad (4.4)$$

gegeben. Die Abtastzeit $T_{a,o}$ wurde gleich der Abtastzeit des LQ-Reglers $T_{a,c}$ mit 0.1 s festgelegt. Für das Prozessrauschen \mathbf{w}_k und das Messrauschen \mathbf{v}_k wird vorausgesetzt, dass gilt

$$\mathbb{E}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0} \quad \mathbb{E}(\mathbf{v}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{R}_o \delta_{kj} \quad (4.5a)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k) = \mathbf{0} \quad \mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{Q}_o \delta_{kj} \quad (4.5b)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{w}_k \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{0} \quad (4.5c)$$

mit dem Erwartungswert $\mathbb{E}(\cdot)$, den positiv definiten Matrizen \mathbf{Q}_o und \mathbf{R}_o sowie $\mathbf{H}_o \mathbf{Q}_o \mathbf{H}_o^T + \mathbf{R}_o > 0$ und dem Kroneckersymbol $\delta_{kj} = 0$ für $k \neq j$ und $\delta_{kj} = 1$ sonst. Die Kovarianzmatrix \mathbf{R}_o wird auf Basis von Messdaten gemäß [25] bestimmt und ergibt sich zu

$$\mathbf{R}_o = \phi \mathbf{E}, \quad (4.6)$$

d. h. die Diagonaleinträge sind gleich groß, was bedeutet, dass die Messwerte der einzelnen Sensoren als gleich zuverlässig angesehen werden. Die Kovarianzmatrix \mathbf{Q}_o wurde mittels Simulationsstudie ermittelt und ist im Anhang (Kapitel A) zu finden.

Die Iterationsgleichung des Schätzzustands $\Delta \hat{\zeta}$ lautet

$$\Delta \hat{\zeta}_{k+1} = \underbrace{\Phi \Delta \hat{\zeta}_k + \Gamma \Delta \mathbf{u}}_{\text{Simulatorteil}} + \underbrace{\hat{\mathbf{K}}_\infty (\Delta \mathbf{y} - \mathbf{C} \hat{\zeta}_k)}_{\text{Korrektorteil}} \quad (4.7)$$

mit

$$\hat{\mathbf{K}}_\infty = \Phi \mathbf{P}_\infty \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_\infty \mathbf{C}^T + \mathbf{H} \mathbf{Q}_o \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_o)^{-1} \quad (4.8)$$

und \mathbf{P}_∞ als Lösung der diskreten algebraischen Riccati-Gleichung

$$\mathbf{P}_\infty = \Phi \mathbf{P}_\infty \Phi^T + \mathbf{G} \mathbf{Q}_o \mathbf{G}^T - \Phi \mathbf{P}_\infty \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_\infty \mathbf{C}^T + \mathbf{H} \mathbf{Q}_o \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_o)^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_\infty \Phi^T. \quad (4.9)$$

In Abbildung 4.2 ist zu sehen, dass die Beobachtungsfehler des stationären Kalman-Filters (4.7) einen bleibenden Schätzfehler hat, wenn sich das System (4.2) von der durch $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C definierten Ruhelage entfernt. Dabei wurde das System in der Ruhelage, indem der Kalman-Filter entworfen wurde simuliert. Zum Zeitpunkt $t = 200s$ erfährt die Zone 2 einen Leistungssprung von 10%, womit sich das System aus der Ruhelage ($\mathbf{y}_d, \zeta_d, \mathbf{u}_{ff}$) entfernt und in eine andere übergeht.

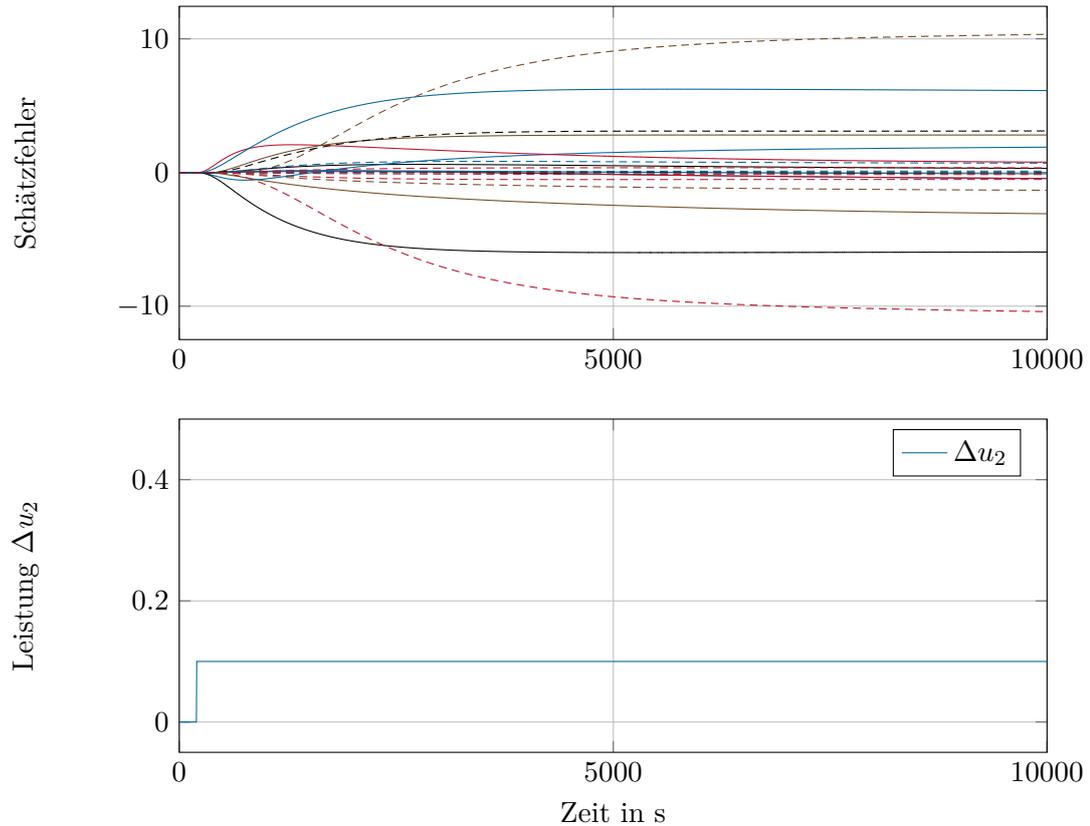


Abbildung 4.2: Schätzfehler $\zeta - \hat{\zeta}$ des stationären Kalman-Filters bei einem Leistungssprung der Zone 2 von 10% zum Zeitpunkt $t = 200$ s.

Da der dadurch entstehende Schätzfehler eine stabile Regelung in Kombination mit dem LQ-Regler aus Abschnitt 3.3 nicht mehr garantiert, wird in weiterer Folge versucht, mit dem Ersetzen des linearen Simulatorteils in (4.7) mit dem nichtlinearen Modell (2.49), die Schätzgüte zu verbessern.

4.2 Stationäres Kalman-Filter mit nichtlinearem Simulator

Dem folgenden Entwurf liegt das zeitinvariante, zeitkontinuierliche System (2.49) zugrunde. Aufgrund der digitalen Implementierung des Kalman-Filters auf einer SGM mit der Abtastzeit $T_{a,o}$, muss das zugehörige Abtastsystem in der Form

$$\zeta_{k+1} = \mathbf{F}_k(\zeta_k, \mathbf{u}_k) \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\zeta_k \quad (4.10b)$$

berechnet werden. Da die exakte Lösung von $\mathbf{F}(\zeta_k, \mathbf{u}_k)$, aufgrund der Nichtlinearitäten nicht in analytischer Form vorliegt, wird diese im Folgenden durch das explizite Eulerverfahren approximiert [23]. Dieses Verfahren ist neben vielen anderen eine einfache Möglichkeit, eine numerische Approximation von (4.10a) zu berechnen. Die Genauigkeit

der Näherungslösung verhält sich dabei indirekt proportional zur Abtastzeit $T_{a,o}$. Dazu wird angenommen, dass die Stellgröße $\mathbf{u}(t)$ im Abtastintervall $kT_{a,o} \leq t \leq (k+1)T_{a,o}$ konstant ist und integriert die Differenzialgleichung (2.49), was zu der Darstellung

$$\zeta_{k+1} = \zeta_k + \int_{kT_{a,o}}^{(k+1)T_{a,o}} \mathbf{f}(\zeta(t), \mathbf{u}_k) dt \quad (4.11)$$

führt. Mit der Approximation des Integrals nach Euler lässt sich (4.10a) in der Form

$$\mathbf{F}_k = \zeta_k + T_{a,o} \mathbf{f}(\zeta_k, \mathbf{u}_k) \quad (4.12)$$

schreiben. Damit ergibt sich die Iterationsgleichung des Schätzzustandes $\hat{\zeta}$ zu

$$\hat{\zeta}_{k+1} = \underbrace{\hat{\zeta}_k + T_{a,o} \mathbf{f}(\hat{\zeta}_k, \mathbf{u}_k)}_{\text{Simulatorteil}} + \underbrace{\hat{\mathbf{K}}_\infty (\mathbf{y} - \mathbf{C} \hat{\zeta}_k)}_{\text{Korrektorteil}}. \quad (4.13)$$

Damit wird erreicht, dass Nichtlinearitäten in die Simulation miteinbezogen werden und dadurch die Schätzung verbessert wird. Der zusätzliche Rechenaufwand für die Iterationsgleichung (4.13) in Relation zu (4.7) ist vernachlässigbar gering.

4.3 Ergebnisse der Zustandsbeobachtung

Nun wird die Güte der Zustandsschätzung aus Abschnitt 4.2 anhand von drei Testfällen untersucht. Die verwendeten Kovarianzmatrizen sind im Anhang A zu finden. Im ersten Testfall wird die Schätzung mit abweichendem Anfangszustand $\hat{\zeta}_{0,i}/\zeta_{0,i} = 1.05$ begonnen. Dies tritt in der Realität immer auf, da die nicht messbaren Zustände zum Anfangszeitpunkt unbekannt sind. Der zweite Testfall ist der Aufheizvorgang, da hier die höchsten Leistungen und damit die größte Dynamik stattfindet. Wie in Abschnitt 2.2 erwähnt, repräsentieren die ersten 29 Zustände von ζ Koeffizienten von Polynomen, welche eine positionsabhängige Temperatur der Spritzgießmaschinenkomponenten definieren. Ein Schätzfehler $\zeta_{gal} - \hat{\zeta}_{gal}$ ist dadurch nicht anschaulich darstellbar. Darum wird zu definierten Zeitpunkten der Schätzfehler des Zustandsvektors in ein entsprechendes Temperaturprofil umgerechnet. Aus Platzgründen wird lediglich das Temperaturprofil des Massezylinders dargestellt. Die restlichen Komponenten unterliegen einer Schätzung mit ähnlicher Genauigkeit. Der Produktionsstart und -stopp stellt den dritten Testfall dar. Dabei wird nur der Schätzfehler $\zeta_{pl} - \hat{\zeta}_{pl}$ untersucht.

In Abbildung 4.3 ist der Schätzfehler $\zeta_{gal} - \hat{\zeta}_{gal}$ bei einem falsch geschätzten Anfangszustand $\hat{\zeta}_0 = 1.05 \cdot \zeta_0$ zu sehen. Die zu den Zeitpunkten $t_0 = 0\text{ s}$, $t_1 = 500\text{ s}$ und $t_2 = 2000\text{ s}$ entsprechenden geschätzten Temperaturprofile sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Hier ist der deutliche Fehler beim Anfangszeitpunkt augenscheinlich, der aber durch den Korrektorteil sehr schnell abnimmt. Zum Zeitpunkt t_1 (Abbildung 4.4b) beträgt der maximale geschätzte Fehler nur noch 2.5°C und bei t_2 (Abbildung 4.4c) liegt der maximale Schätzfehler unter 0.1°C und ist kaum mehr erkennbar.

Der Schätzfehler während des Aufheizvorgangs ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Hier startete die Simulation mit $\hat{\zeta}_0 = \zeta_0$. Die entsprechenden geschätzten Temperaturprofile

sind in Abbildung 4.6 zu sehen. Dabei deckt sich das geschätzte nahezu mit dem simulierten Temperaturprofil zu jedem der 3 Zeitpunkte.

Abbildung 4.7 zeigt den Schätzfehler der 8 finiten Volumstemperaturen $\vartheta(\zeta_{pl}) - \vartheta(\hat{\zeta}_{pl})$ im dritten Testfall. Zum Zeitpunkt $t_1 = 100\text{s}$ beginnt die Produktion und zum Zeitpunkt $t_2 = 1600\text{s}$ findet der Produktionsstopp statt. Der maximale Schätzfehler in diesem Testfall beträgt rund 10°C , was einem relativen Schätzfehler von etwa 2.4% entspricht.

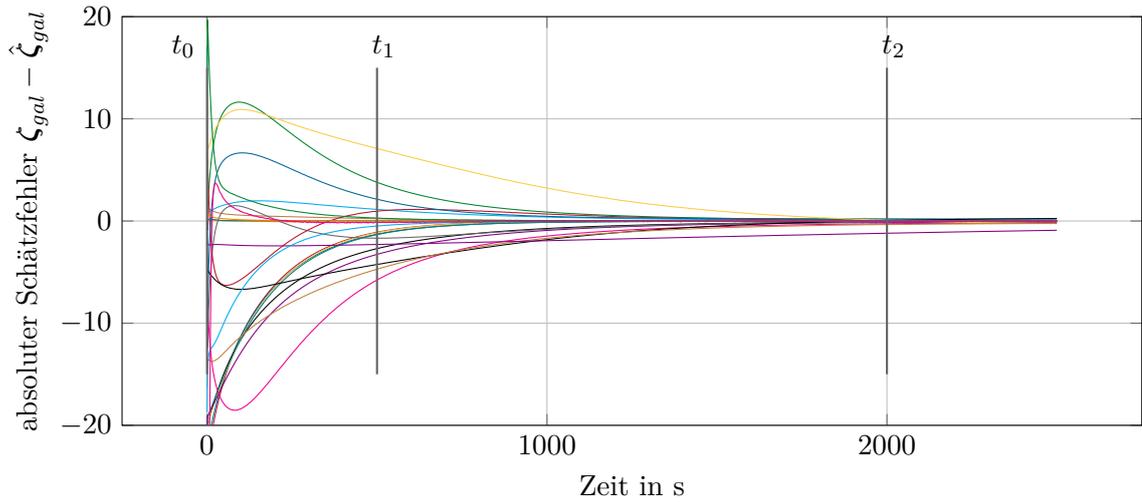


Abbildung 4.3: Schätzfehler der Galerkinzustände bei fehlerhaftem Anfangszustand $\hat{\zeta}_0 = 1.05\zeta_0$.

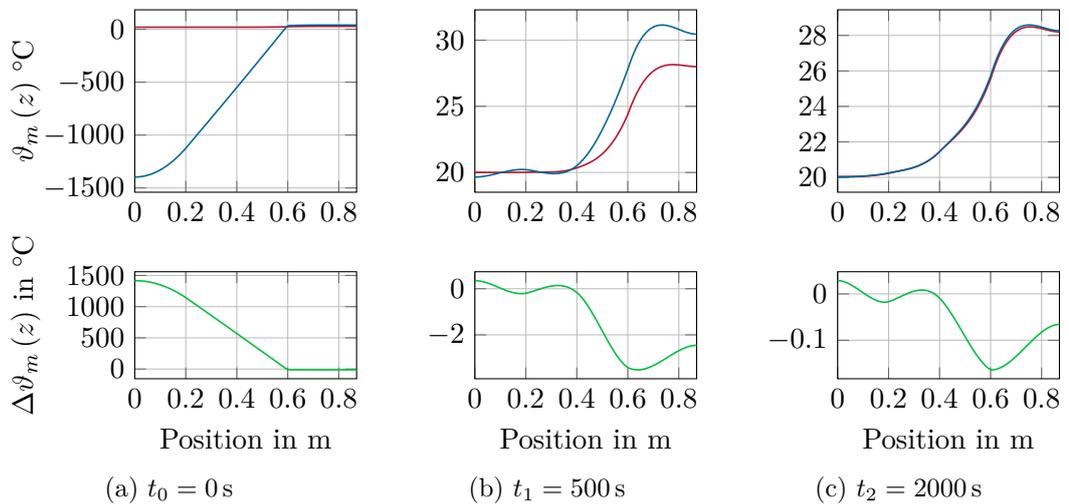


Abbildung 4.4: Simulation (—), Schätzung (—) und Schätzfehler (—) des Temperaturprofils des Massezylinders zu verschiedenen Zeitpunkten bei fehlerhaftem Anfangszustand $\hat{\zeta}_0 = 1.05 \cdot \zeta_0$.

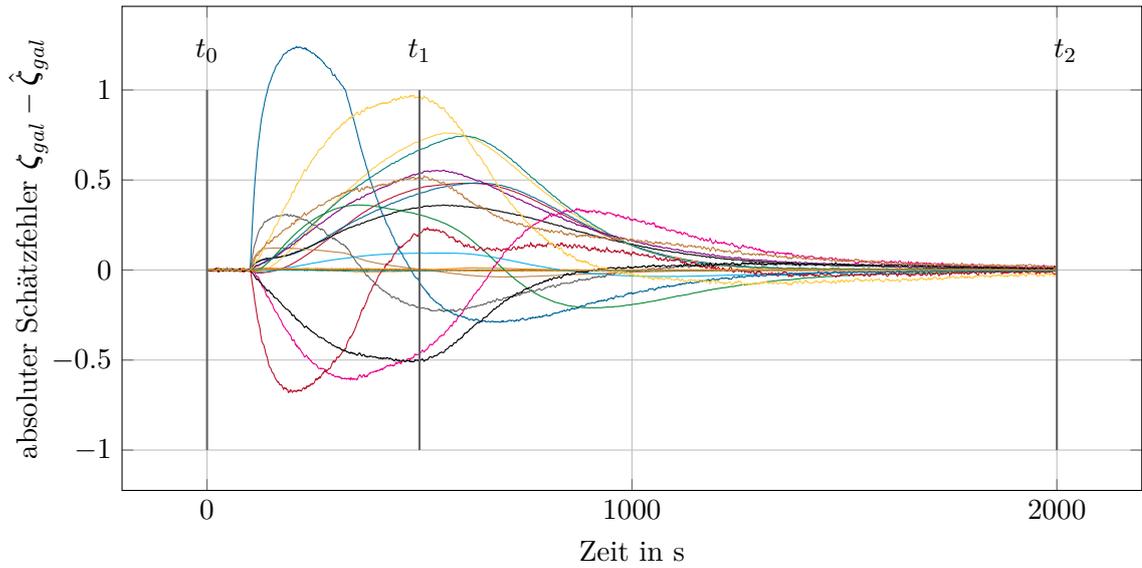


Abbildung 4.5: Schätzfehler der Galerkinzustände während des Aufheizvorgangs bei nominalem Modell.

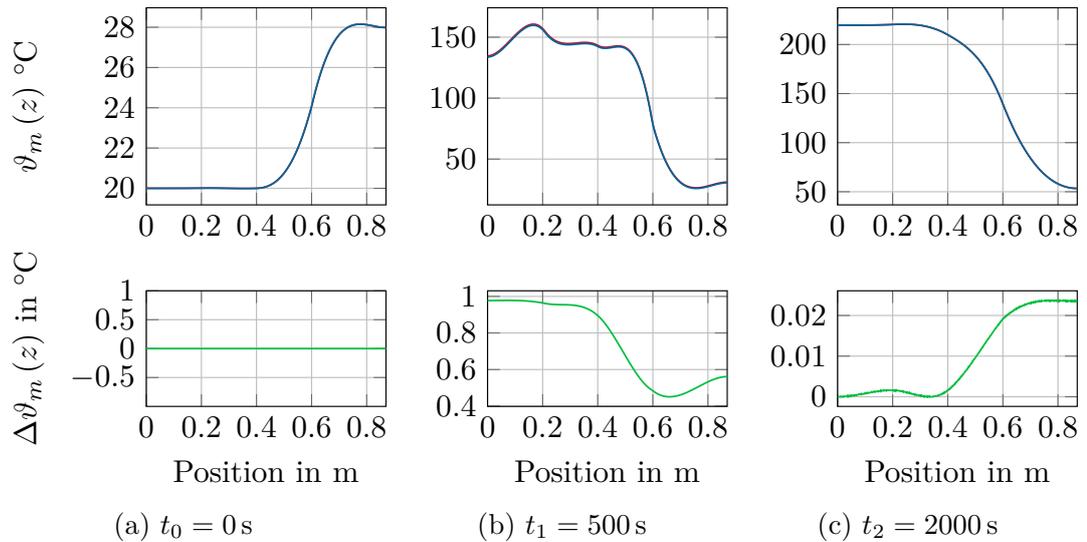


Abbildung 4.6: Simulation (—), Schätzung (—) und Schätzfehler des Temperaturprofils (—) des Massezylinders zu verschiedenen Zeitpunkten während des Aufheizvorganges.

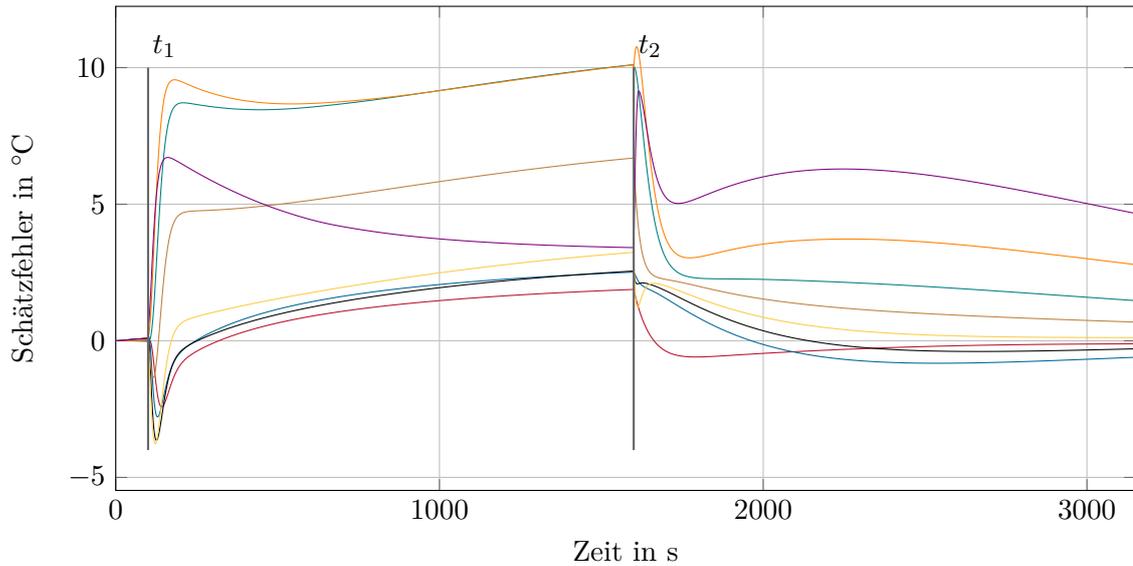


Abbildung 4.7: Schätzfehler der finiten Volumentemperaturen $\vartheta(\zeta_{pl}) - \vartheta(\hat{\zeta}_{pl})$ während der Produktion.

Die dargestellten Testfälle zeigen eine hinreichend gute Schätzgüte, sodass auf einen EKF-Entwurf verzichtet wird. Die Ergebnisse der Schätzfehler bei Abweichungen der Modellparameter vom nominellen Modell werden in Abschnitt 6.4 diskutiert.

Der gesamte Regelkreis inklusive Kalman-Filter ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Eingang des Regelkreises ist die Solltemperatur y_d . Daraus wird von der nichtlinearen Vorsteuerung die dazu entsprechende Ruhelage mit dem Zustand ζ_d , und der Heizleistung \mathbf{u}_{ff} berechnet. Der Ruhelagezustand ζ_d dient dem LQ-Regler als Sollzustand. Den Eingang $\Delta\mathbf{y}$ benötigt der LQ-Regler für den Integratoranteil und das dafür notwendige Anti-Windup. Die gesamte auf die Strecke wirksame Heizleistung $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{ff} + \Delta\mathbf{u}_{fb}$ sowie der gemessene Ausgangszustand sind Eingänge des Kalman-Filters. Der dadurch geschätzte Zustand $\hat{\zeta}$ stellt für den LQ-Regler den Istzustand dar. Die Differenz zwischen Soll- und Istzustand $\Delta\zeta$ ist der Eingang des LQ-Reglers.

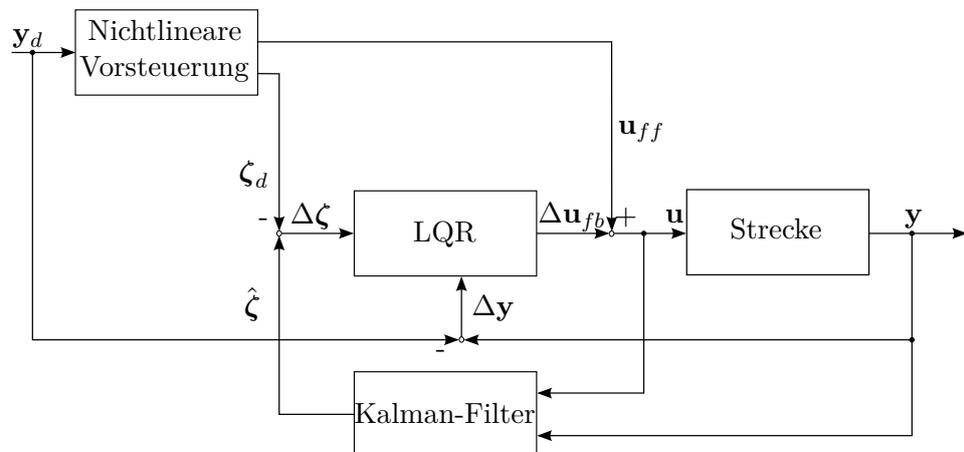


Abbildung 4.8: Blockschaltbild des gesamten LQR-geregelten Regelkreises mit Kalman-Filter.

5 Verifikation der Regelungsstrategien bei nominellem Modell

In diesem Kapitel wird die Regelgüte der MIMO-PI- und LQR-Regelungsstrategie anhand von fünf Testfällen dargestellt.

1. Im ersten Testfall wird der Aufheizvorgang simuliert. Dabei wird die SGM von Umgebungstemperatur auf das Temperaturprofil $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C erhitzt. Als Bewertungskriterien werden die Anstiegszeiten und die Höhe des Überschwingens verwendet. Vor allem ein hohes Überschwingen ist dabei ein Problem, da dieses durch fehlende aktive Kühlung einer SGM zu einem langsamen Erreichen des Sollwertes führen kann.
2. Der zweite Testfall beschreibt einen gleichzeitigen Solltemperatursprung jeder Zone um +10 °C bzw. -10 °C im bereits erhitzten Zustand ($\mathbf{y}_0 = [220, 220, 220, 210]^T$). Dabei werden das Über- und Unterschwingen sowie die Anstiegszeit als Bewertungskriterien herangezogen.
3. Im dritten Testfall wird auf die Entkopplungseigenschaft der Regler eingegangen. Dazu erfährt nur die Zone 2 einen Solltemperatursprung von +10 °C bzw. -10 °C. Entscheidend ist hier der Einfluss auf die benachbarten Zonen 1 und 3, weswegen die maximalen Temperaturabweichungen der Zonen 1 und 3 als Kriterien verwendet werden.
4. In Testfall 4 wird wieder von einer erhitzten Maschine, analog zu Testfall 2, ausgegangen. Bei $t = 200$ s wird der Massezylinder mit Kunststoff gefüllt. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die Enthalpien der finiten Volumina schlagartig den Zustand von erhitzter Luft auf Kunststoff mit Raumtemperatur ϑ_{sur} ändern. Dadurch entzieht der Kunststoff dem Massezylinder Energie, worauf die Regelung reagieren muss. Die maximalen Regelabweichungen werden hier gegenübergestellt.
5. Die Produktion samt Produktionsstart und Produktionsstopp bilden den Testfall 5. Anfangszustand ist eine erhitzte ($\mathbf{y}_0 = [220, 220, 220, 210]^T$ °C) und mit Kunststoff gefüllte Maschine. Zum Zeitpunkt $t = 300$ s beginnt die Schnecke zu rotieren und bringt so Leistung gemäß (2.38) in das System ein. Aufgrund der Schneckenrotation bewegt sich der Kunststoff in negative z-Richtung. Das hat zur Folge, dass kaltes Kunststoffgranulat vom Granulattrichter in Richtung Düse befördert wird und damit ähnlich wie in Testfall 4 dem Massezylinder Energie entzogen wird. Auch hier werden die Regelabweichungen verglichen.

Die dabei verwendeten Reglerparameter a , b , \mathbf{Q}_c und \mathbf{R}_c sowie die Kalman-Filterparameter \mathbf{Q}_o und \mathbf{R}_o sind im Anhang A zu finden. Für den LQ-Regler gibt es zwei unterschiedliche Parametereinstellungen, eine für die Testfälle 1 bis 3 und eine für die Testfälle 4 und 5. In allen fünf Simulationen mit dem LQ-Regler ist die Vorsteuerung und der Kalman-Filter aktiv. Um die Darstellung übersichtlicher zu gestalten sind die Ergebnisse des MIMO-PI Reglers aus Abschnitt 3.2 und des LQ-Reglers aus Abschnitt 3.3 getrennt abgebildet.

5.1 MIMO-PI

Der hier verwendete Regler mit entsprechendem Regelkreis ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Die für die folgenden Simulationen verwendeten Reglerparameter a und b aus (3.9) sind im Abschnitt A.1 zu finden. Die Diskussion des MIMO-PI Ansatzes beschränken sich lediglich auf die Testfälle 1 und 2. Diese zeigen bereits eine unzureichende Regelgüte hinsichtlich Überschwingen und Einschwingdauer, weswegen ein Vergleich in den restlichen Testfällen nicht sinnvoll ist.

In Abbildung 5.1 ist der Aufheizvorgang mit dem in Abschnitt 3.2 präsentierten Regler zu sehen. Der Integralanteil ist mit u_i und die gesamte Stellgröße mit u bezeichnet. Dabei ist eine sehr lange Einschwingdauer erkennbar. Der Grund dafür liegt in der geringen Verstärkung des Integralanteils \mathbf{K}_I . Durch Adaption des Tuningfaktors b könnte erreicht werden, dass der Integrale Fehler e_I stärker gewichtet wird, was aber zu einem größeren Überschwingen führen würde. Das Überschwingen ist mit 15 °C relativ hoch im Vergleich zum LQ-Regler und dem aktuell in der Industrie verwendeten Regler.

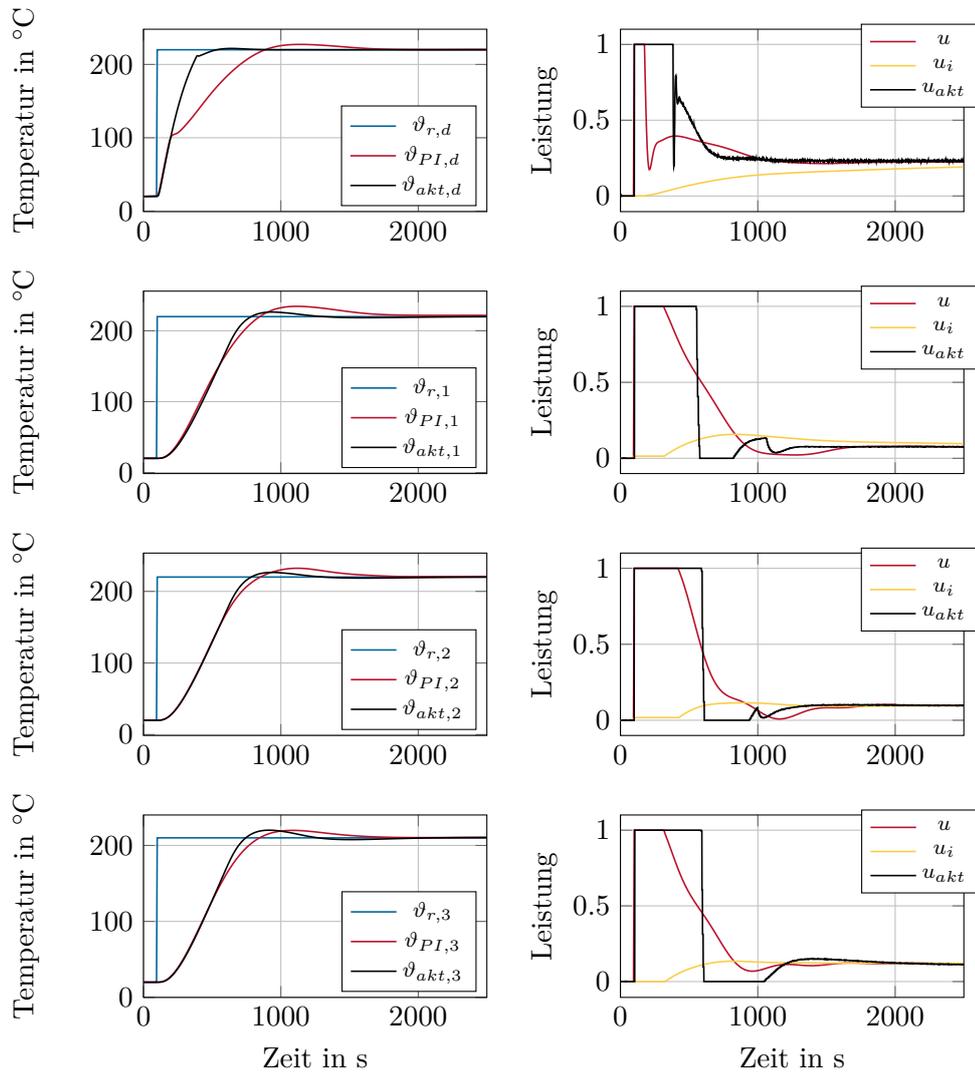


Abbildung 5.1: Testfall 1 mit MIMO-PI-Regler: Aufheizvorgang aller Zonen von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C.

Beim 2. Testfall mit dem MIMO-PI-Regler, dessen Ergebnisse in Abbildung 5.2 dargestellt sind, ist erneut ein sehr großes Überschwingen sichtbar. In diesem Fall beträgt dieses sogar nahezu 30% des SollgrößenSprungs. Auch hier dauert ähnlich zum ersten Testfall der Einschwingvorgang relativ zur aktuellen Regelung lange.

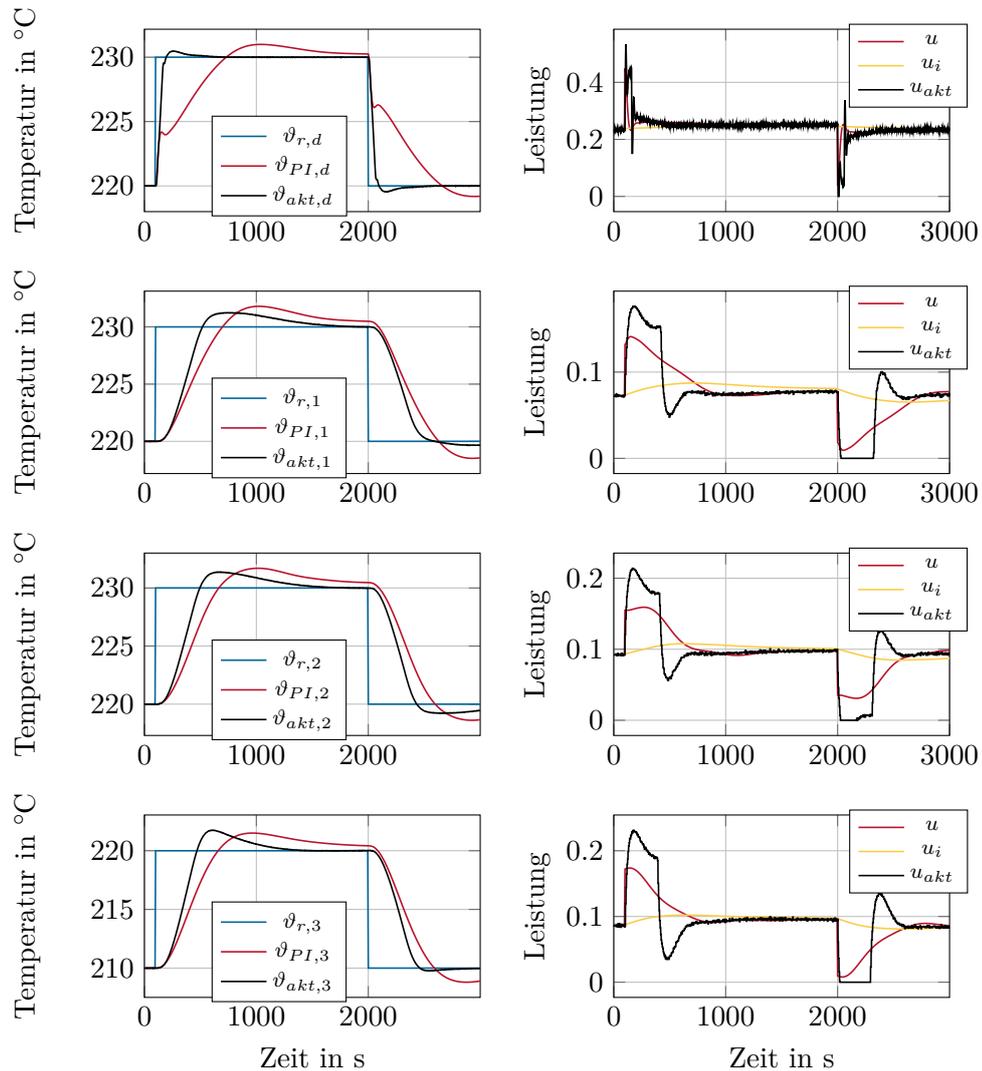


Abbildung 5.2: Testfall 2 mit MIMO-PI-Regler. Sollwerte aller Zonen werden um 10°C erhöht und nach dem Einschwingvorgang um 10°C reduziert.

In den beiden Testfällen zeigt sich, dass eine reine statische Entkopplung gemäß (3.9) nicht ausreicht, um eine verbesserte Regelgüte zu erreichen. Durch das Hinzufügen der nichtlinearen Vorsteuerung kombiniert mit einer fortgeschrittenen Methode eines Anti-Windup könnte das MIMO-PI Konzept erweitert und verbessert werden. Weiters wären unterschiedliche Tuningfaktoren für unterschiedliche Testfälle sinnvoll.

5.2 LQ-Regler

Der LQR wird mit den aktuell in der Industrie verwendeten Regelung verglichen, welche auf Eingrößenregler basiert. In den folgenden Abbildungen wird der Subindex $(\cdot)_{akt}$ zur Kennzeichnung dieser Größen verwendet und bei den Indizes der Leistungen steht

$(\cdot)_i$ für die Integralanteile, $(\cdot)_x$ für die Anteile des Zustandsreglers und $(\cdot)_{ff}$ für die Vorsteuerungsanteile.

5.2.1 Testfall 1, Aufheizvorgang

Der in Abbildung 5.3 dargestellte Aufheizvorgang zeigt, dass hinsichtlich Überschwingen vor allem in der Zone 3 eine Verbesserung im Vergleich zur aktuellen Regelung erreicht werden konnte. Die Amplitude des Überschwingens im Falle der LQ-Regelung beträgt $[0, 2.2, 4.2, 1.8]^\circ\text{C}$. Im Vergleich dazu ist die der aktuellen Regelung $[1.7, 2.3, 6.5, 10.1]^\circ\text{C}$. Da es sich bei dieser Simulation um das nominelle Modell handelt, liefert die Vorsteuerung exakt die Leistung, die im stationären Punkt ($\mathbf{y}_{d,\infty} = [220, 220, 220, 210]^\text{T}^\circ\text{C}$) benötigt wird. Daraus folgt auch, dass der stationäre Integralanteil $u_{i,\infty}$ verschwindet.

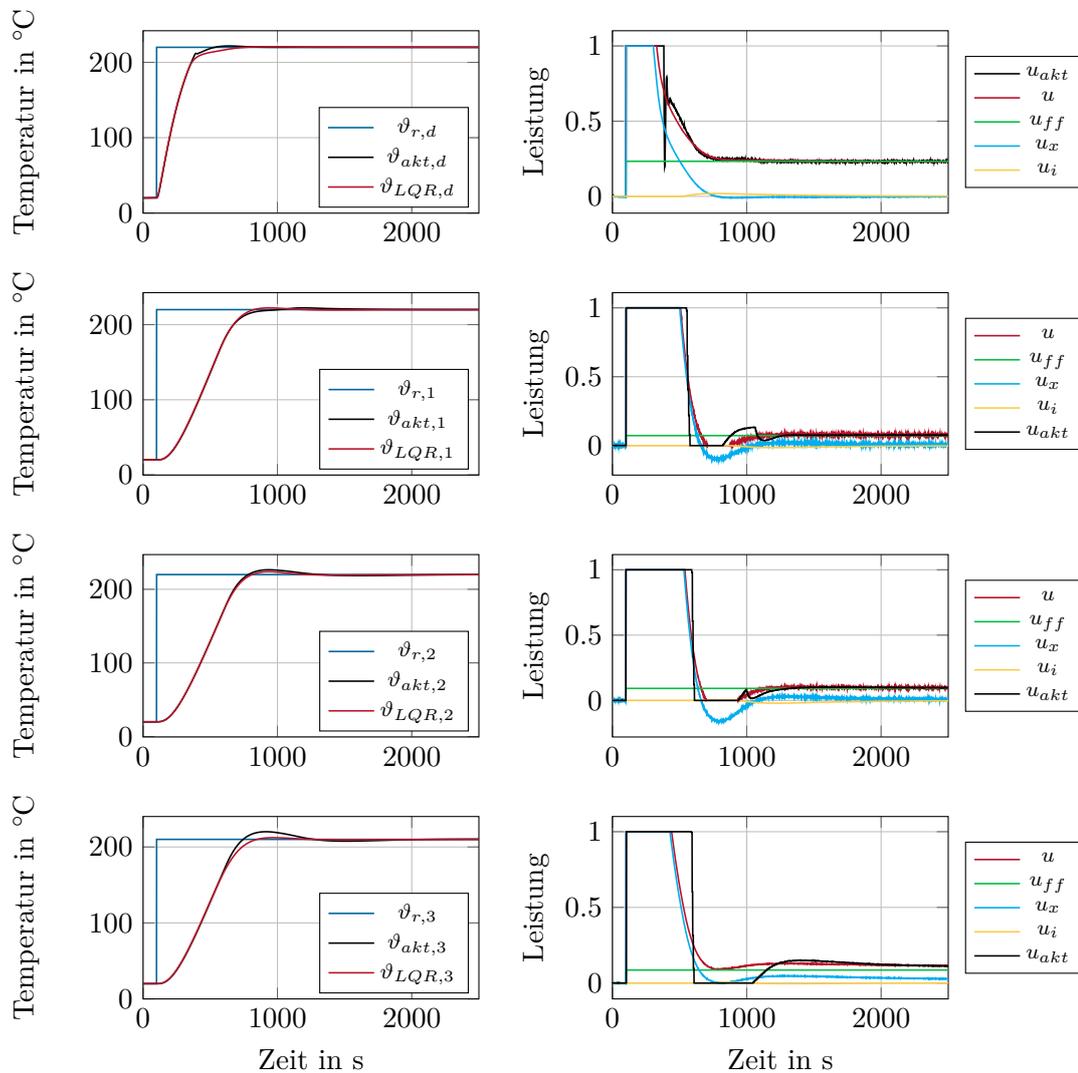


Abbildung 5.3: Testfall 1: Aufheizvorgang aller Zonen von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^\text{T}^\circ\text{C}$.

5.2.2 Testfall 2, Sollwertänderung aller Zonen

In Abbildung 5.4 ist deutlich erkennbar, dass der LQ-Regler in Testfall 2 eine bessere Regelgüte aufweist. Während der aktuelle Regler ein Überschwingen von teilweise 3°C hat, überschreitet der LQ-Regler die Solltemperatur maximal um 0.6°C . Dazu kommt eine kürzere Anstiegszeit in den Zone 1 und Zone 2 von bis zu 60 s. Der Abkühlprozess verläuft bei beiden Regler beinahe gleich. Grund dafür ist die ausschließlich passive Abkühlung, wodurch die Dynamik begrenzt ist.

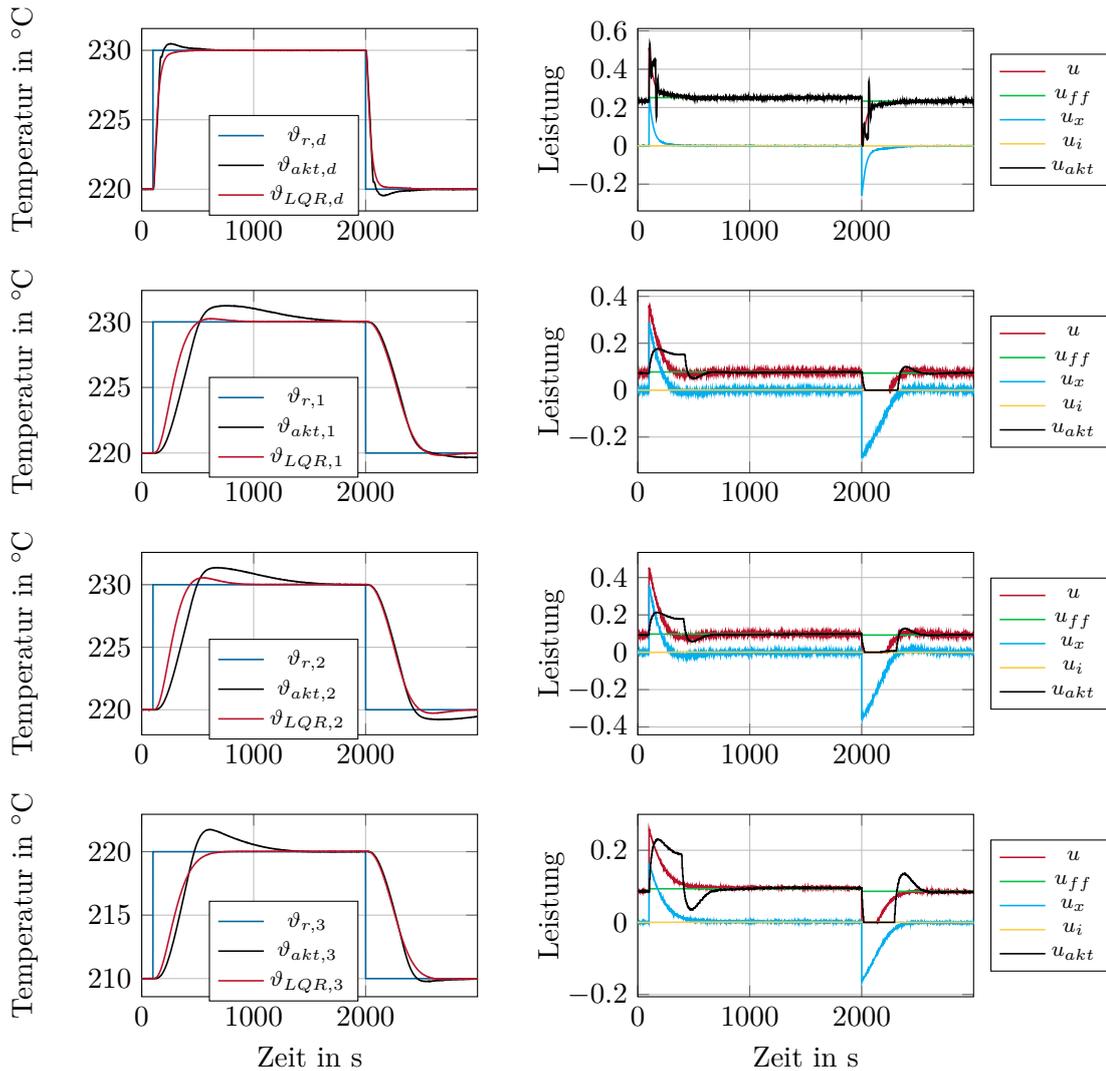


Abbildung 5.4: Testfall 2: Die Solltemperaturen aller Zonen werden gleichzeitig um 10°C erhöht und anschließend um 10°C abgesenkt.

5.2.3 Testfall 3, Sollwertänderung der Zone 2

Abbildung 5.5 zeigt die Simulation des dritten Testfalls. Die aufgeheizte Maschine erfährt bei $t = 200$ s einen Sollgrößensprung der Zone 2 um 10°C . Dabei ist erkennbar, dass die Temperatur der Düsenzone darauf keine Reaktion zeigt und die Zone 3 viel stärker reagiert als die Zone 1. Eine Erklärung dafür ist die Position der Temperatursensoren. Abbildung 1.1 zeigt, dass der Sensor der Zone 3 dem Heizelement der Zone 2 näher ist als der Sensor der Zone 1.

Die maximale Regelabweichung der Zone 1 beträgt 0.27°C für den LQR und 0.45°C für den aktuellen Regler. Aus der kürzeren Anstiegszeit des LQ-Reglers im Vergleich zum aktuellen Regler folgt unweigerlich eine stärkere Regelabweichung von 4°C in Relation zu 2.6°C des aktuellen Reglers in der Zone 3. Diese Abweichung kann ohne Änderung der Gewichtungsmatrix \mathbf{Q}_c nicht verhindert werden, da der LQ-Regler im Zeitbereich des Aufheizens der Zone 2 ohnehin keine Stellgröße auf das Heizelement der Zone 3 aufschaltet.

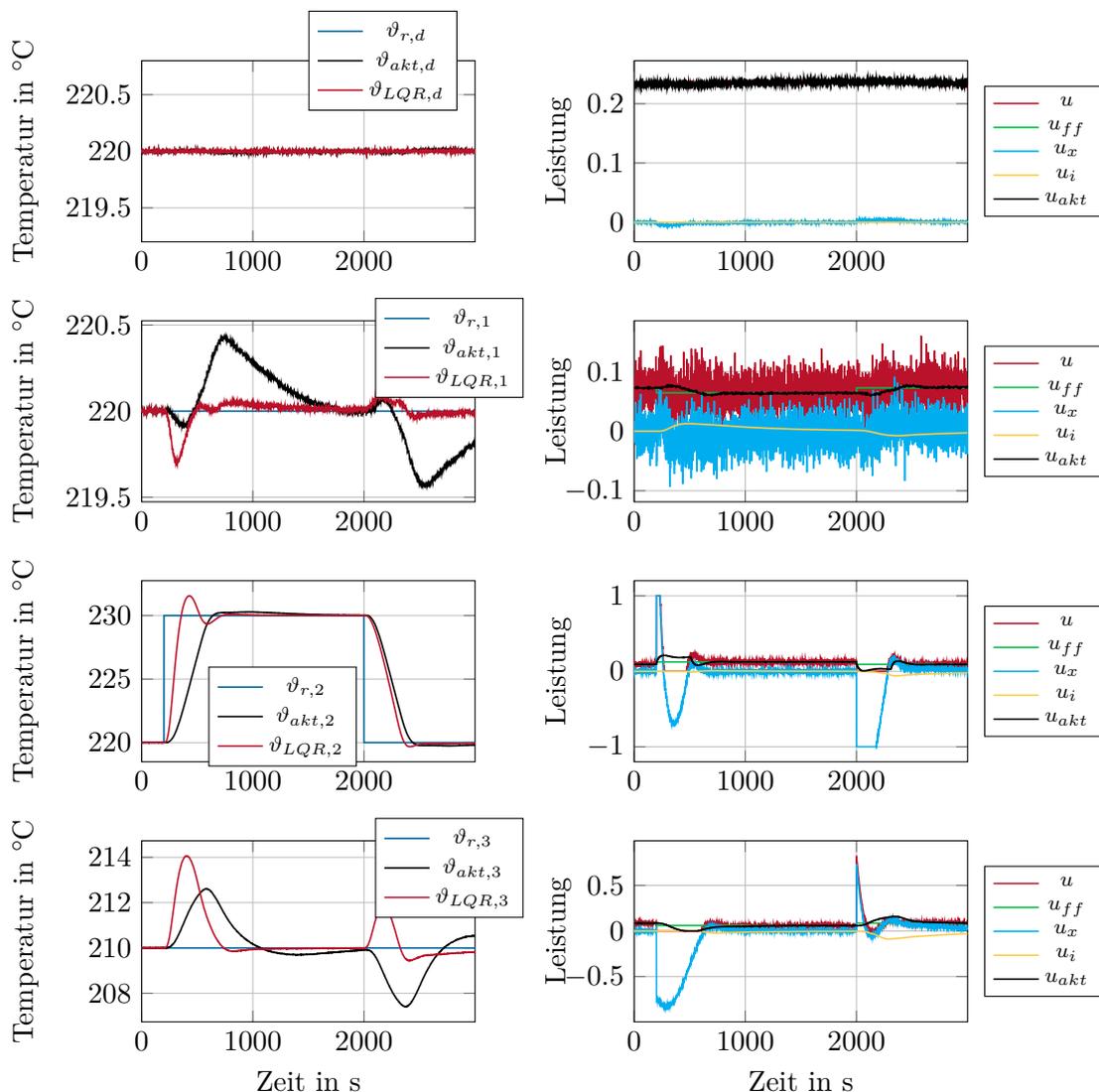


Abbildung 5.5: Testfall 3: Die Solltemperatur der Zone 2 wird um 10°C erhöht und anschließend um 10°C abgesenkt.

5.2.4 Testfall 4, Füllen von leerem Massezylinder mit Kunststoff

Beim Aufdosieren wird der aufgeheizten Maschine durch Zuführen von kaltem Granulat thermische Energie entzogen. Zum Zeitpunkt $t = 200$ s ändern sich die Finiten Volumenzustände schlagartig auf die Enthalpie von Kunststoff mit Raumtemperatur. Die dabei entstehende Regelabweichung des LQ-Reglers konnte jene der aktuellen Regelung um bis zu 50 % reduzieren, siehe Abbildung 5.6. In diesem Testfall ist der LQ-Regler im Vergleich zu den ersten drei Testfällen deutlich aggressiver, aufgrund von unterschiedlicher Q_c Matrix (siehe Anhang A), eingestellt.

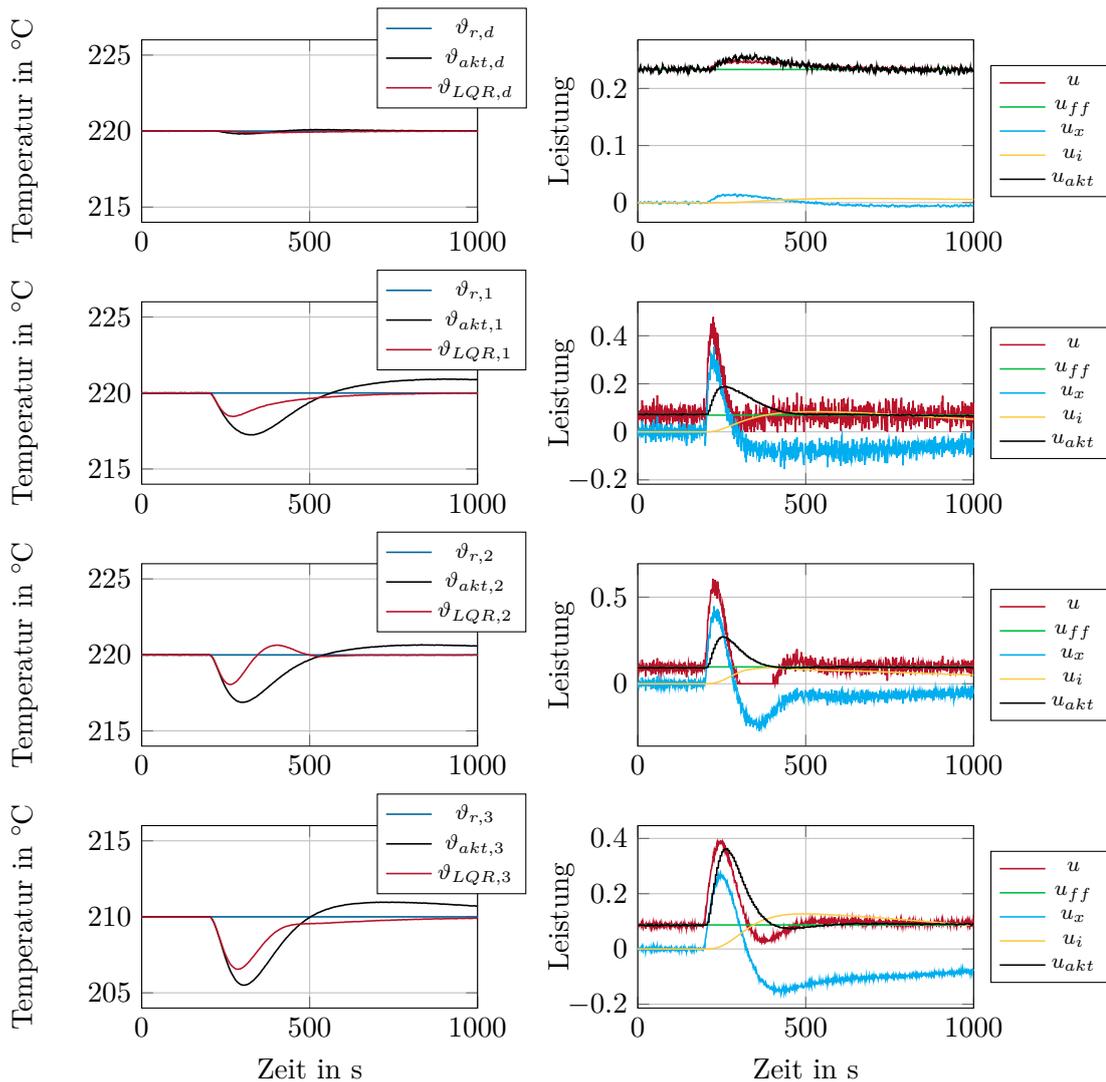


Abbildung 5.6: Testfall 4: Die aufgeheizte Maschine wird zum Zeitpunkt 200 s mit Kunststoff gefüllt. Dabei bleibt $y_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C konstant im gesamten Simulationszeitraum.

5.2.5 Testfall 5, Start und Stopp von zyklischer Produktion

Die Reaktion der Temperaturen auf einen Produktionsstart und -stopp ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Durch die eingebrachte thermische Energie der Schnecke in den Zonen 1 und 2 während der Produktion (siehe Abbildung 2.6), kommt es hier zu einer erhöhten Temperatur. In Zone 3 hingegen sieht man ein deutliches Unterschwingen des aktuellen Reglers. Grund dafür ist das kalte Granulat, das vor allem in diesem Bereich dem Massezylinder thermische Energie entnimmt. Der LQR kann hauptsächlich wegen der Vorsteuerung dieses Unterschwingen sichtbar verkleinern. Die Leistung der Vorsteuerung u_{ff} der Zone 3 während der Produktion liegt bei mehr als 200% von u_{ff} vor der Produktion, wenn nicht produziert wird.

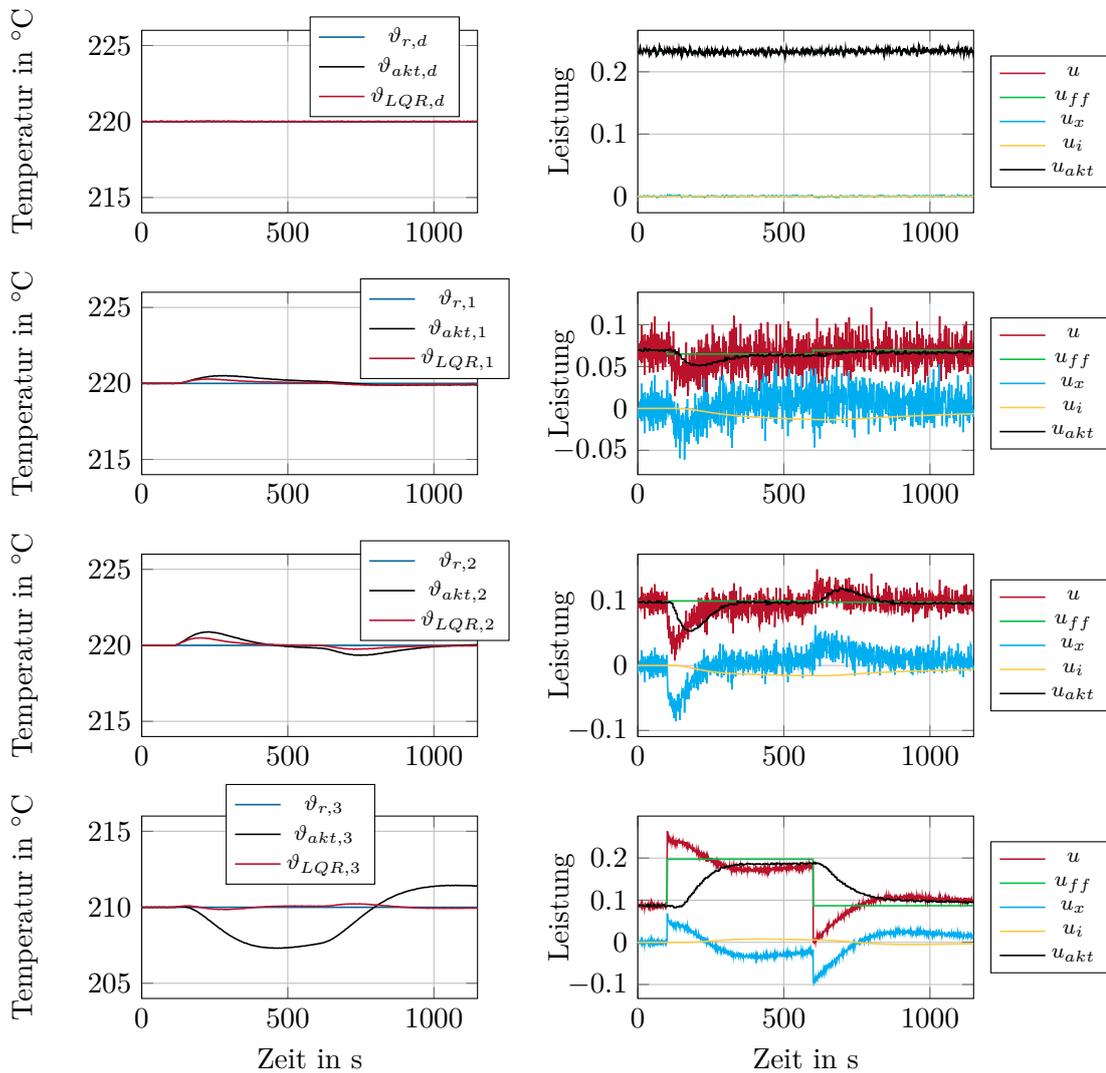


Abbildung 5.7: Testfall 5: Die aufgeheizte Maschine ist bereits mit Kunststoff gefüllt. Bei $t = 200\text{s}$ wird die Produktion gestartet und bei $t = 600\text{s}$ gestoppt.

6 Parametersensitivitätsanalyse

Nachdem die Regler und das Kalman-Filter in Kapitel 3 und Kapitel 4 mit dem nominellen Modell entworfen und in Kapitel 5 die damit erzielten Ergebnisse dargestellt wurden, wird in diesem Kapitel untersucht, wie empfindlich die Regelungsstrategie auf Parameterschwankungen des Modells reagiert. Dazu werden zehn ausgewählte Parameter abwechselnd um realitätsnahe Werte geändert und die Ergebnisse mittels Simulationsstudien anhand von verschiedenen Kriterien bewertet. Simuliert werden der Aufheizvorgang und das Füllen der Maschine mit Kunststoff.

6.1 Gewählte Parameter

Als Parameter werden vor allem jene ausgewählt, die von Maschine zu Maschine unterschiedlich sein können und nicht genau bekannt sind. Dabei kann der Vektor der gewählten Parameter in 3 Teilbereiche unterteilt werden: Zum ersten, Umgebungsparameter wie die Umgebungstemperatur ϑ_∞ , die Werkzeugtemperatur ϑ_T , und der Konvektions- bzw. Strahlungsfaktor $k_{c,r}$. Manche Werkstücke benötigen erhitzte Werkzeuge, um ein schnelles Abkühlen und damit entstehende interne Spannungen zu vermeiden, weshalb die Werkzeugtemperatur stark variieren kann. Der Konvektions- bzw. Strahlungsfaktor kann sich aufgrund möglicher zusätzlicher Isolationsmatten verändern. Zum zweiten die maschinenspezifischen Größen wie die maximale Leistung der Heizelemente u_{max} , die Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Heizelement und Massezylinder α_{MC} bzw. zwischen Heizband und Düse α_N und der Sensorzeitkonstante τ_{pt1} . Ein Grund für die möglichen unterschiedlichen maximalen Leistungen der Heizelemente ist z.B. die ortsabhängige Netzspannung. Die Wärmeübergänge sind unter anderem abhängig von den Anpressdrücken der Heizelemente, welche bedingt durch die Montage variieren können. Da die Modellierung der unterschiedlichen Wärmeübergänge zwischen Heizelemente und Massezylinder mit gleichem α_{MC} erfolgte, wird hier vereinfachend nur ein Parameter für die, genau genommen unterschiedlichen drei, Wärmeübergänge angenommen. Hinsichtlich der großen Anzahl an Materialien, die mit einer SGM verarbeitet werden, ist der dritte Bereich im Parametervektor \mathbf{p} der kunststoffspezifische Teilvektor. Dazu zählen der Wärmeübergangskoeffizient zwischen dem Massezylinder und den finiten Volumina α_{FV} , die spezifische Masse ρ_{pl} und die spezifische Wärmekapazität des Kunststoffs c_p . Der Parametervektor des nominellen Modells \mathbf{p}_{nom} ist im Abschnitt A.4 zu finden.

Das System lässt sich damit in der Form

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) &= \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{A}(\mathbf{p}) \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{B}(\mathbf{p}) \mathbf{u} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) \\ \mathbf{h}(\boldsymbol{\zeta}) &= \mathbf{y} = \mathbf{C} \boldsymbol{\zeta}\end{aligned}\tag{6.1}$$

schreiben, mit dem Vektor der Parameter

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \vartheta_{\infty} \\ \vartheta_T \\ k_{c,r} \\ u_{max} \\ \tau_{pt1} \\ \alpha_{MC} \\ \alpha_N \\ \alpha_{FV} \\ \rho_{pl} \\ c_p \end{bmatrix} . \quad (6.2)$$

Der den Simulationen zugrunde liegende Parametervektor \mathbf{p} wird in der Sensitivitätsanalyse mit den multiplikativen Faktoren

$$\check{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 1 \pm 0.1 \\ 1 \pm 0.1 \\ 1 \pm 0.5 \\ 1 \pm 0.1 \\ 1 \pm 0.5 \\ 1 \pm 0.5 \\ 1 \pm 0.5 \\ 1 \pm 0.1 \\ 1 \pm 0.2 \\ 1 \pm 0.5 \end{bmatrix} . \quad (6.3)$$

verändert. Der Parametervektor ergibt sich dadurch zu

$$\mathbf{p} = \text{diag}(\check{\mathbf{p}}) \mathbf{p}_{nom} . \quad (6.4)$$

Für die Umgebungstemperatur bedeutet das beispielhaft, dass ein Simulation mit $\vartheta_{\infty,+} = 1.1\vartheta_{\infty,nom} = 49.3^\circ\text{C}$ und $\vartheta_{\infty,-} = 0.9\vartheta_{\infty,nom} = -9.3^\circ\text{C}$ bei gleichbleibenden restlichen Parametern durchgeführt wird.

6.2 Aufheizvorgang

Für den Aufheizvorgang werden die ersten sieben Einträge des Parametervektors (6.2) entsprechend dem Vektor $\check{\mathbf{p}}$ verändert und eine Simulation durchgeführt. Die restlichen Parameter beschreiben Eigenschaften des Kunststoffes und beeinflussen den Aufheizvorgang ohne Material nicht. Das Ergebnis der LQ-Regelung mit der nichtlinearen Vorsteuerung für das nominelle Modell ist in Abbildung 5.3 zu sehen. Der Einfluss der Parameteränderung auf die Reglerperformance wird mit folgenden drei Kriterien bewertet:

- der integrale quadratische Fehler

$$E_I = \int_0^{t_{End}} \|\mathbf{y}_d - \mathbf{y}\|^2 dt \quad (6.5)$$

mit den Solltemperaturen \mathbf{y}_d , den Isttemperaturen \mathbf{y} , siehe Abbildung 6.1 und der Endzeit der Simulation t_{End} ,

- die Anstiegszeit τ_r jeder Zone, d. h. die Zeitdauer vom Aufheizstartzeitpunkt, bis die Regelabweichung der Temperatur erstmals unter $0.1\text{ }^\circ\text{C}$ liegt und
- das maximale Überschwingen der vier Zonen \ddot{u}_{max} .

Der integrale Fehler und die Anstiegszeit werden dabei auf das nominelle Modell bezogen um einen Vergleich zu erleichtern.

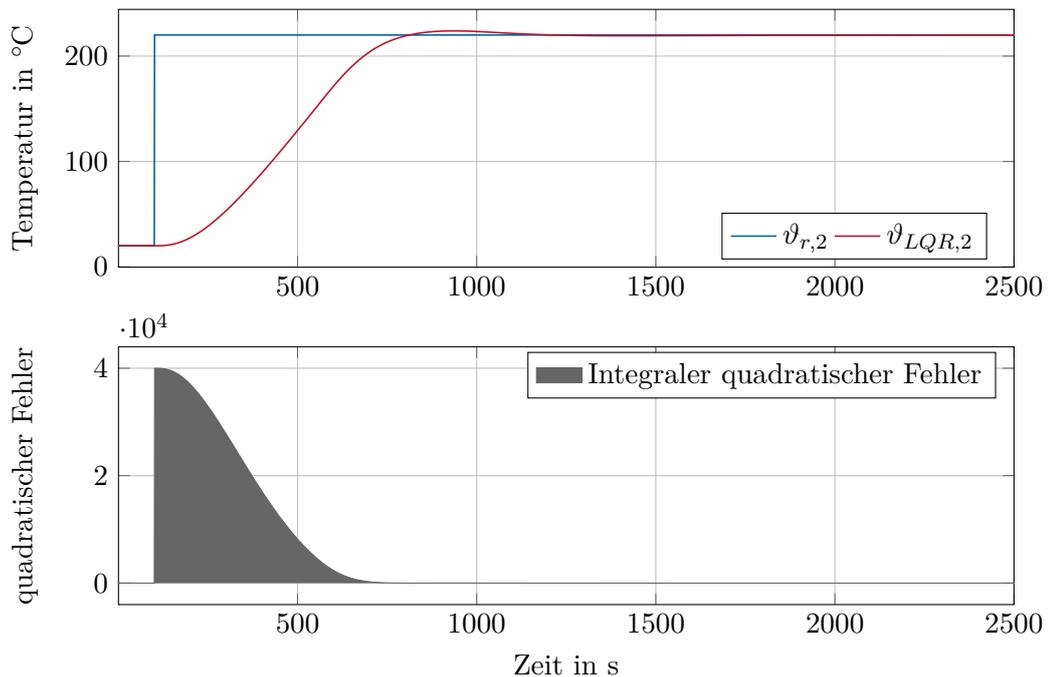


Abbildung 6.1: Aufheizvorgang der Zone 2 und das entsprechende Fehlerintegral.

Die Ergebnisse der Simulationsstudie sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Farblich hinterlegte Einträge zeigen eine starke Abweichung der Regelgüte vom nominellen Modell. Es ist erkennbar, dass die Elemente α_{MC} , $k_{c,r}$ und u_{max} aus dem Parametervektor \mathbf{p} die Performance der Regelung stark beeinflussen. Im Fall eines kleinen Wärmeübergangskoeffizienten α_{MC} dauert die Energieübertragung zwischen Heizelement und Massezylinder länger, was dazu führt, dass während der Aufheizphase die Temperaturen der Heizelemente deutlich höher sind als im nominellen Fall. Weiters bewirkt dies ein verstärktes Überschwingen. Durch das Erhöhen von $k_{c,r}$ wird mehr Energie durch Konvektion und Strahlung an die Umgebung abgegeben, wodurch im stationären Zustand mehr Heizleistung benötigt wird. Da die nichtlineare Vorsteuerung die Heizleistungen des nominellen Falls liefert, muss den restlichen Anteil der Integralanteile des LQ-Reglers liefern, wodurch sich die hohen Anstiegszeiten für diesen Fall erklären lassen. Für die umgekehrte Annahme mit kleinem $k_{c,r}$ wird weniger Energie an die Umgebung abgegeben, was zu einem Überschwingen von über

10 °C führt. Eine Änderung der Sensorzeitkonstante τ_{pt1} oder der Werkzeugtemperatur ϑ_T wirkt sich nur schwach auf die genannten 3 Kriterien aus. Das liegt daran, dass der Aufheizvorgang relativ zu Sensorzeitkonstante lange dauert und die Werkzeugtemperatur vor allem die Düse beeinflusst und diese eine vergleichsweise hohe Dynamik hat.

Parameter	E_I	\ddot{u}_{max}	τ_r			
nominell	1	3.88 °C	1.00	1.00	1.00	1.00
$\vartheta_\infty \cdot 1.1$	0.99	4.84 °C	0.92	0.98	0.98	0.98
$\vartheta_\infty \cdot 0.9$	1.00	3.04 °C	1.14	1.01	1.01	1.02
$\vartheta_T \cdot 1.1$	0.99	3.91 °C	0.89	0.99	0.99	1.00
$\vartheta_T \cdot 0.9$	1.00	3.86 °C	1.15	1.00	1.00	0.99
$k_{c,r} \cdot 1.5$	1.08	0.26 °C	4.47	3.20	4.00	3.37
$k_{c,r} \cdot 0.5$	1.02	10.33 °C	0.45	0.92	0.94	0.92
$u_{max} \cdot 1.1$	0.95	8.65 °C	0.83	0.89	0.90	0.88
$u_{max} \cdot 0.9$	1.08	0.53 °C	2.64	1.17	1.16	2.34
$\tau_{pt1} \cdot 1.5$	1.05	3.88 °C	0.92	0.96	0.98	0.96
$\tau_{pt1} \cdot 0.5$	0.96	3.88 °C	1.04	1.11	1.09	1.17
$\alpha_{MC} \cdot 1.5$	0.90	1.02 °C	0.92	1.45	1.40	1.52
$\alpha_{MC} \cdot 0.5$	1.98	17.00 °C	1.34	1.52	1.56	1.53
$\alpha_N \cdot 0.5$	1.06	2.99 °C	1.00	0.98	1.01	0.99
$\alpha_N \cdot 1.5$	0.97	3.47 °C	0.99	1.00	1.00	1.00

Tabelle 6.1: Parametersensitivitätsanalyse anhand des Aufheizvorgangs.

6.3 Füllen der Maschine

Um die Sensitivität des Modells im Hinblick auf kunststoffspezifische Parameter zu untersuchen, wird das Füllen der Maschine simuliert. Ausgehend von einem Ruhezustand ζ_d , der entsprechenden vorgesteuerten Leistung \mathbf{u}_{ff} und dem Ausgang $\mathbf{y} = \mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C, wird die SGM mit Kunststoff gefüllt. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass der Zustand ζ_{pl} die Enthalpie von heißer Luft schlagartig auf die Enthalpie von Kunststoff bei Raumtemperatur ändert und mit η die Parameter des FV-Modells umgeschaltet werden. Das Ergebnis der Regelung mit nominellem Modell ist in Abbildung 5.6 zu sehen. Für die Analyse dieses Testfalls werden folgende Kriterien herangezogen:

- der integrale quadratische Fehler analog zum Aufheizvorgang

$$E_I = \int_0^{t_{End}} \|\mathbf{y}_d - \mathbf{y}\|^2 dt \quad (6.6)$$

- und der maximale Regelfehler der vier Zonen e_{max} .

Parameter	E_I	e_{max}
nominell	1	2.71 °C
$\vartheta_\infty \cdot 1.1$	1.25	2.62 °C
$\vartheta_\infty \cdot 0.9$	0.97	2.80 °C
$u_{max} \cdot 1.1$	1.33	2.52 °C
$u_{max} \cdot 0.9$	1.09	2.97 °C
$\alpha_{MC} \cdot 1.5$	0.75	2.22 °C
$\alpha_{MC} \cdot 0.5$	1.69	3.67 °C
$\alpha_{FV} \cdot 1.5$	1.22	3.20 °C
$\alpha_{FV} \cdot 0.5$	0.73	1.80 °C
$\rho_{pl} \cdot 1.5$	1.16	3.01 °C
$\rho_{pl} \cdot 0.5$	0.81	2.35 °C
$c_p \cdot 1.5$	1.39	3.44 °C
$c_p \cdot 0.5$	0.45	1.57 °C

Tabelle 6.2: Parametersensitivitätsanalyse anhand des Testfalls Füllen der Maschine.

In Tabelle 6.2 ist der Einfluss der Parameteränderungen auf die Regelgüte beim Füllen der Maschine zu sehen. Nicht gelistete Parameter wirken sich vernachlässigbar schwach auf das Reglerverhalten aus. Dabei ist zu sehen, dass ähnlich zum Aufheizvorgang der Parameter α_{MC} die Regelgüte entscheidend beeinflusst. Aus diesem Grund werden in den Abschnitten 6.5 und 6.6 Methoden vorgestellt, um die Größen α_{MC} und u_{max} zu schätzen. Da der Parameter $k_{c,r}$ stationär einen ähnlichen Einfluss wie u_{max} hat und anhand von Simulationsergebnissen schwer zu unterscheiden ist, wird versucht, mit der Identifikation von u_{max} gleichzeitig auch eine Parameteränderung von $k_{c,r}$ zu berücksichtigen. Da der Parameter α_N gleiche Eigenschaften wie α_{MC} hat, wird auch versucht, diesen zu identifizieren. Dabei machen sich die Wärmeübertragungskoeffizienten vor allem im dynamischen Bereich bemerkbar, wohingegen die maximalen Leistungen u_{max} bzw. $k_{c,r}$ im stationären Fall leichter zu schätzen sind.

6.4 Regelungs- und Schätzgüte bei geänderten Streckenparameter

In diesem Abschnitt sind die Regelgüte und der Schätzfehler der Simulationen aus Abschnitt 6.2 dargestellt. Der hier verwendete LQ-Regler und die Vorsteuerung sowie der Zustandsbeobachter sind auf Basis des nominellen Modells und den Gewichtungsmatrizen aus dem Angang A entworfen.

6.4.1 Schätzgüte bei geänderten Streckenparameter

Im Folgenden sind die Verläufe der Schätzfehler des Testfalls 1 bei Simulation mit geänderten Streckenparameter dargestellt. In Abbildung 6.2 ist der Schätzfehler während dem Aufheizvorgang bei 90 % der Umbeugungstemperatur ϑ_∞ zu sehen. Darunter sind in Abbildung 6.3 die Temperaturprofile $\vartheta(z)$ und die geschätzten Temperaturprofile $\hat{\vartheta}(z)$

zu verschiedenen Zeitpunkten gezeigt. Diese zeigen trotz eines bleibenden Schätzfehlers $\zeta_{gal,\infty} - \hat{\zeta}_{gal,\infty}$ fast deckungsgleiche Profile der Schätzung und des Modellzustands.

Eine Änderung des Wärmeübergangskoeffizienten α_{MC} wirkt sich auf die Schätzung ungleich stärker aus als eine abweichende Umgebungstemperatur. Abbildung 6.4 zeigt den Schätzfehler der Galerkinzustände. Dabei ist zu sehen, dass sich die Schätzung des Temperaturprofils zum Zeitpunkt $t_1 = 500$ s deutlich von dem simulierten Temperaturprofil unterscheidet. Zum Zeitpunkt t_1 werden alle Heizelemente mit voller Leistung betrieben, was eine rasche Temperaturänderung hervorruft.

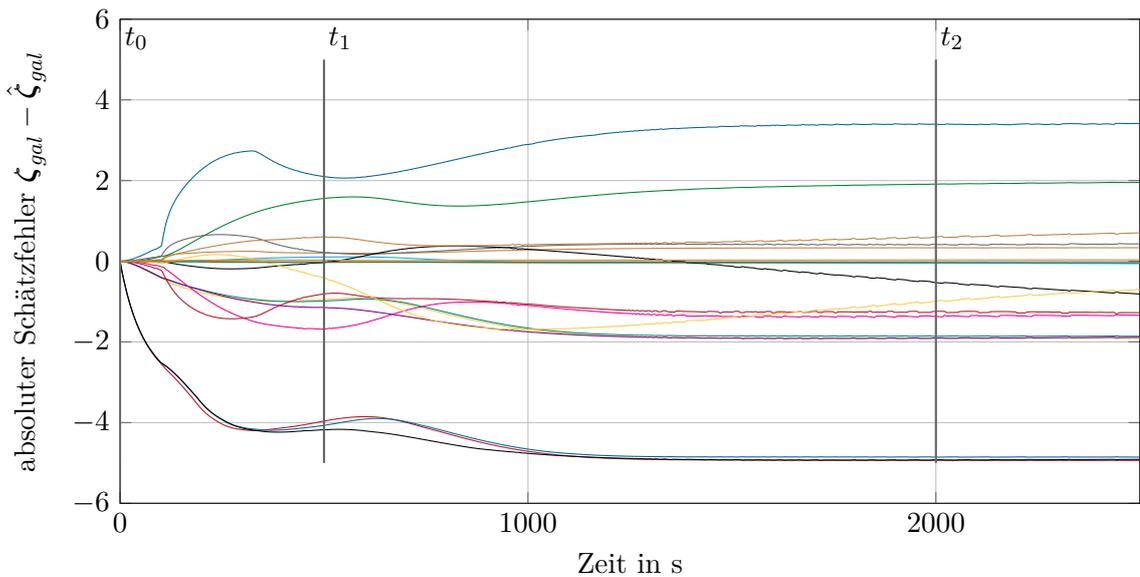


Abbildung 6.2: Schätzfehler der Galerkinzustände ζ_{gal} beim Aufheizvorgang mit $\vartheta_\infty = 0.9\vartheta_{\infty,nom}$

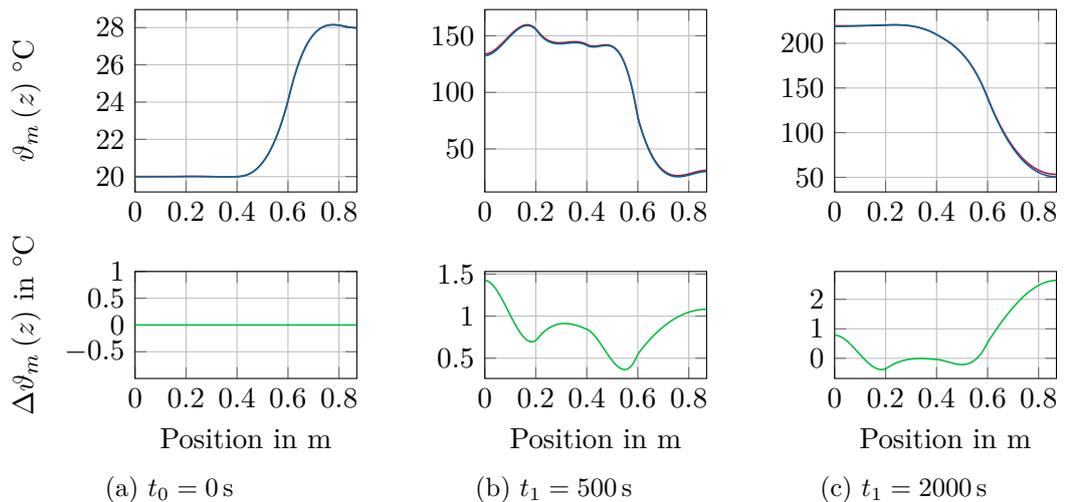


Abbildung 6.3: Simulation (—), Schätzung (—) und Schätzfehler (—) des Temperaturprofils des Massezylinders zu verschiedenen Zeitpunkten während des Aufheizvorganges bei $\vartheta_\infty = 0.9\vartheta_{\infty,nom}$.

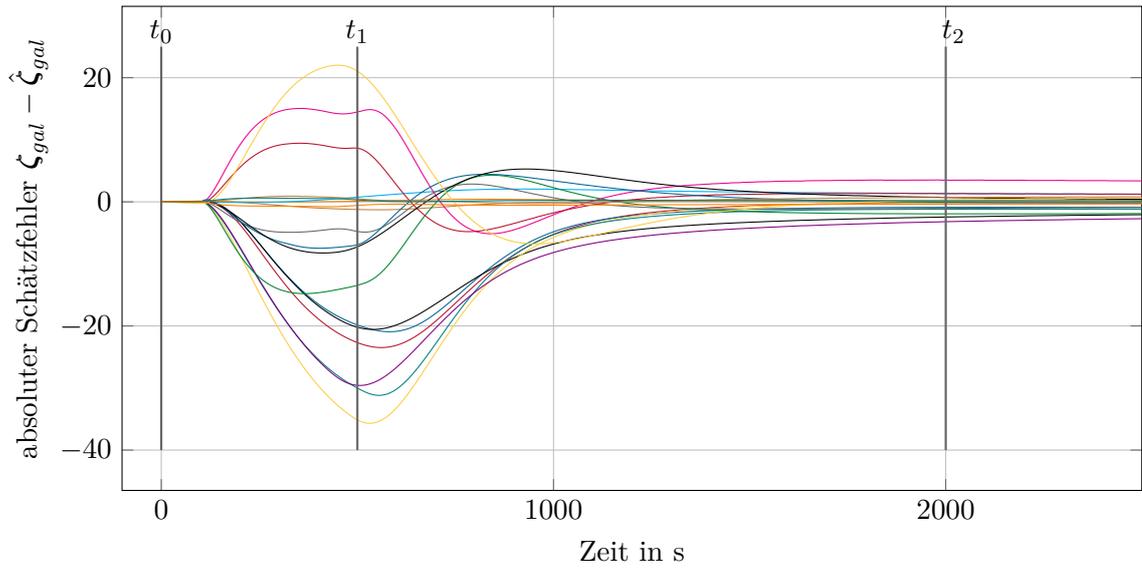


Abbildung 6.4: Schätzfehler der Galerkinzustände ζ_{gal} beim Aufheizvorgang mit $\alpha_{MC} = 1.3\alpha_{MC,nom}$

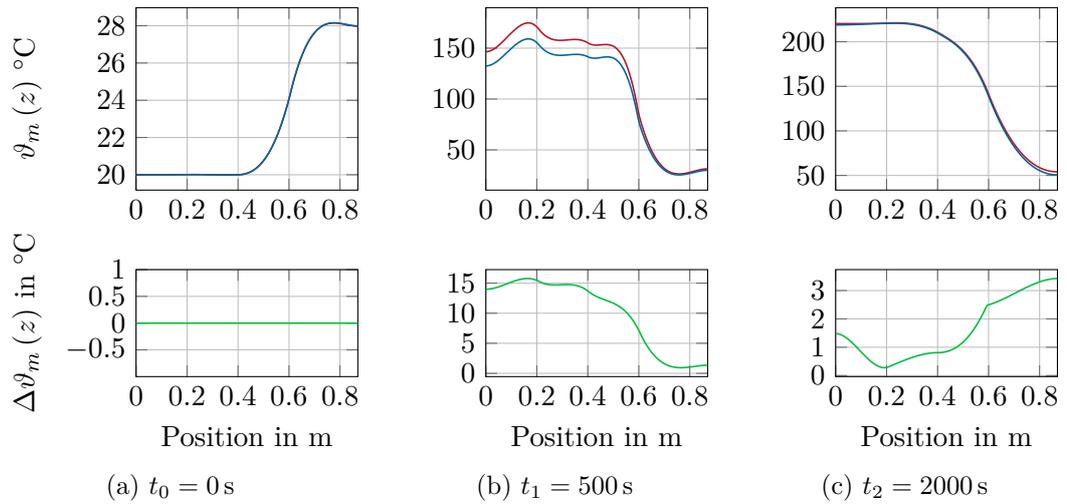


Abbildung 6.5: Simulation (—), Schätzung (—) und Schätzfehler (—) des Temperaturprofils des Massezylinders zu verschiedenen Zeitpunkten während des Aufheizvorganges bei $\alpha_{MC} = 1.3\alpha_{MC,nom}$.

6.4.2 Regelgüte bei geänderten Streckenparameter

Die Abbildungen 6.6 und 6.7 in diesem Abschnitt zeigen den Testfall 1 mit LQR und Kalman-Filter bei geänderten Streckenparameter und nominellen Regler- und Kalman-Filter Entwurfsmodell. Die dabei verwendeten Gewichtungsfaktoren sind im Anhang

A zu finden. Auf diesen Simulationen basiert die Parametersensitivitätsanalyse aus Abschnitt 6.2.

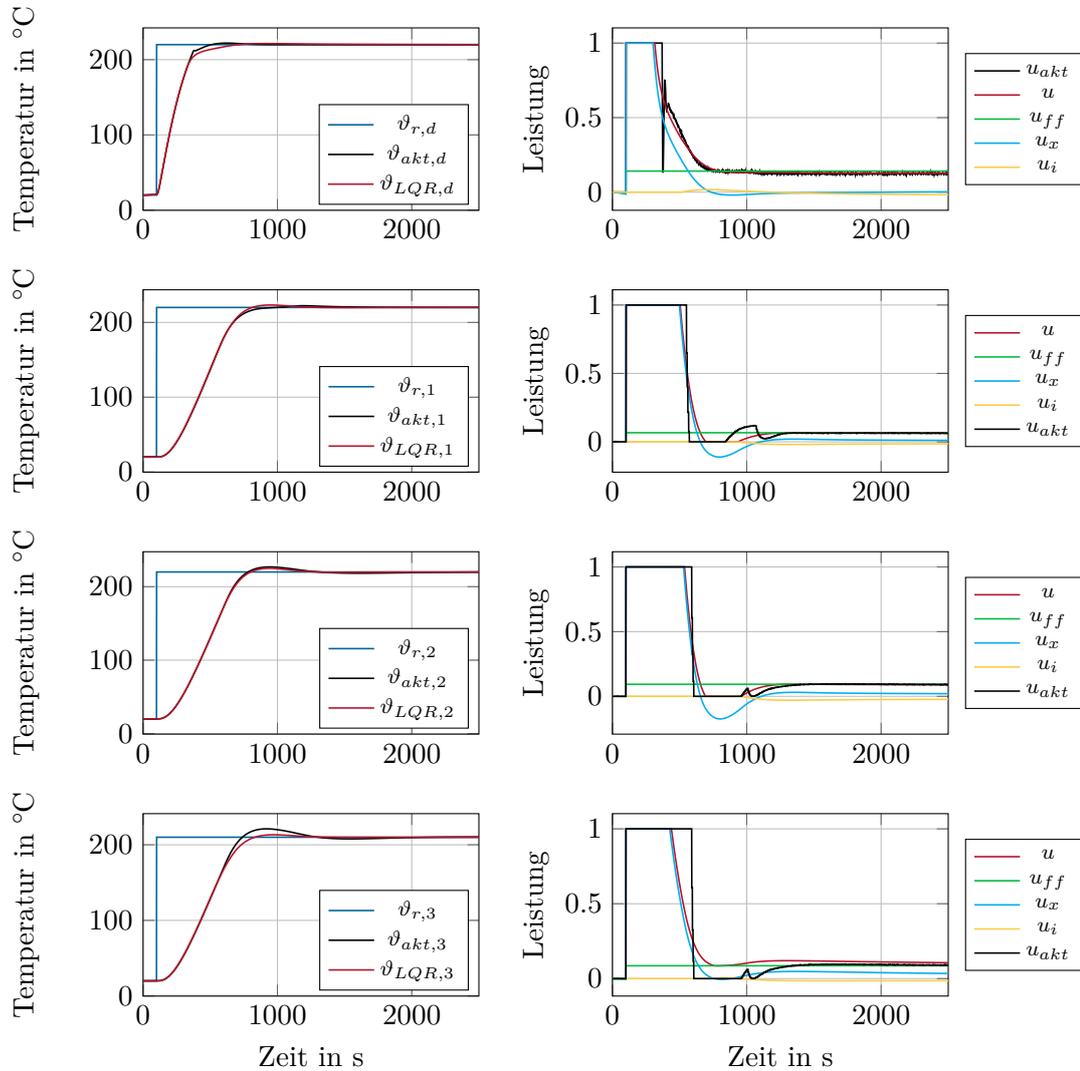


Abbildung 6.6: Testfall 1: Aufheizvorgang aller Zonen mit Parameterschwankungen aufgrund von $\vartheta_{\infty} = 1.1\vartheta_{\infty,nom}$, ausgehend von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C.

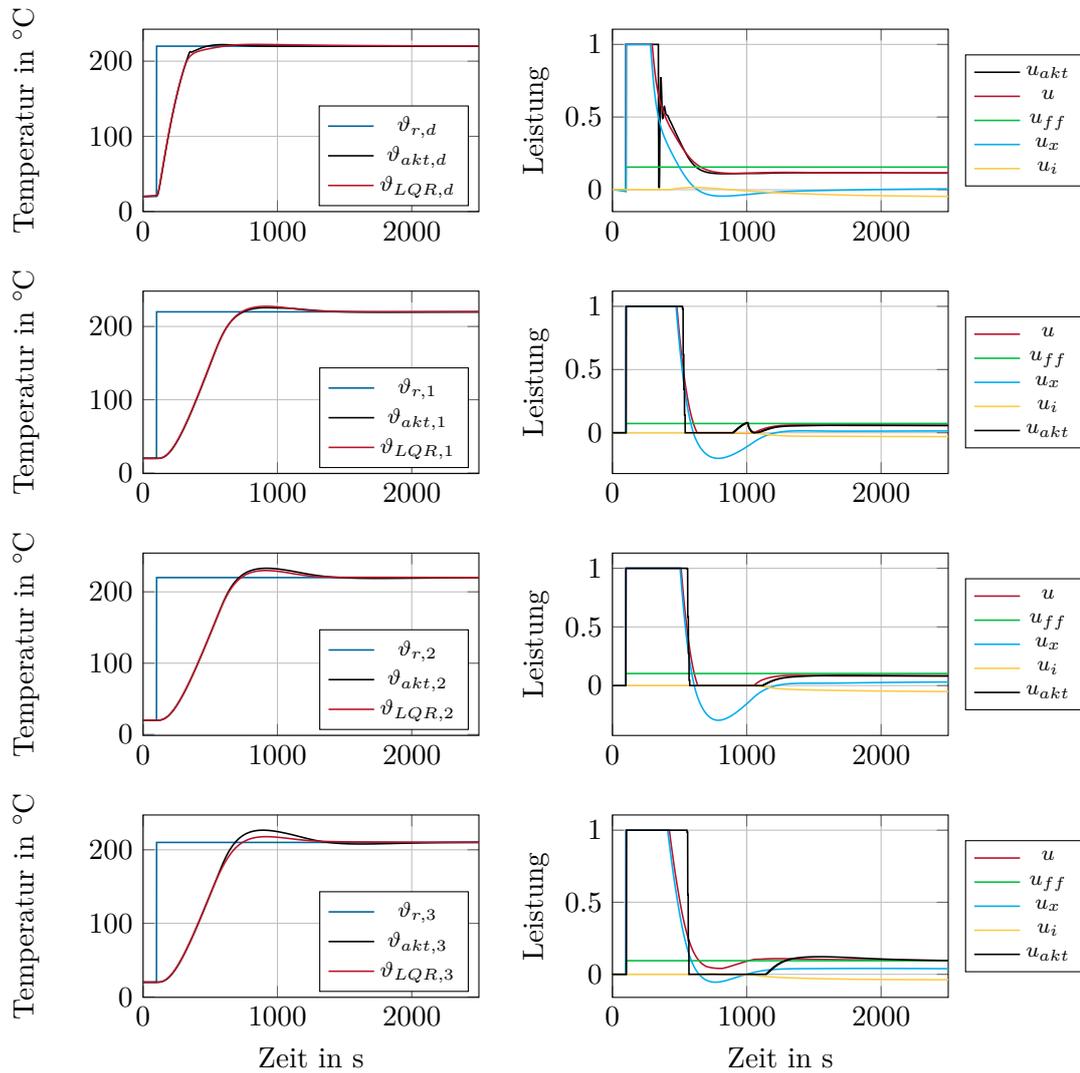


Abbildung 6.7: Testfall 1: Aufheizvorgang aller Zonen mit dem Leistungsparametervektor $\mathbf{p}_u = [1.1, 1.1, 1.1, 1.1]^T$, ausgehend von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C

6.5 Parameterschätzer für die Leistungsfaktoren

In der Sensitivitätsanalyse der letzten beiden Abschnitte 6.2 und 6.3 wurde gezeigt, dass eine Änderung der maximalen Heizelementleistungen sich stark auf die Reglergüte auswirkt. Im Folgenden wird mit $\check{p}_{(\cdot)}$ der Faktor des entsprechenden Parameters (\cdot) bezeichnet. Beispielsweise bedeutet $\check{p}_{\vartheta_\infty} = 1.1$, dass $\vartheta_\infty = 1.1\vartheta_{\infty, \text{nom}}$ ist.

In diesem Abschnitt wird ein Parameterschätzer entworfen, der die im Allg. unterschiedlichen Leistungsfaktoren $\check{p}_{u,i} = u_i/u_{i, \text{nom}}$, $i = 1, 2, \dots, 4$, schätzt. Man beachte, dass bei der Sensitivitätsanalyse die Simulation mit gleichen Leistungsfaktoren

($\check{p}_{u,1} = \check{p}_{u,2} = \check{p}_{u,3} = \check{p}_{u,4}$) der einzelnen Heizelemente durchgeführt wurde. In einem ersten Schritt wird der Zustandsvektor ζ um den zu schätzenden Parametervektor $\check{\mathbf{p}}_u$ erweitert, d. h.

$$\check{\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta \\ \check{\mathbf{p}}_u \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Mit der Annahme, dass die Störung der Leistungsfaktoren konstant ist und damit der Gleichung

$$\dot{\check{\mathbf{p}}}_u = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

genügt, ergibt sich folgendes dynamisches System

$$\begin{aligned} \dot{\check{\zeta}} &= \check{\mathbf{A}}\check{\zeta} + \check{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \check{\mathbf{g}}(\check{\zeta}) \\ \mathbf{y} &= \check{\mathbf{C}}\check{\zeta} \end{aligned} \quad (6.9)$$

mit den Matrizen

$$\check{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \check{\mathbf{p}}_u} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \check{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \check{\mathbf{C}} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{0}] \quad \check{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Da die Eingangsmatrix $\check{\mathbf{B}}$ als einzige Größe aus (6.10) von $\check{\mathbf{p}}_u$ abhängt, lässt sich die Jacobimatrix $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \check{\mathbf{p}}_u}$ mit $\mathbf{f}(\zeta, \mathbf{u}, \mathbf{p})$ aus (6.1) leicht errechnen. Diese ergibt sich zu

$$\left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \check{\mathbf{p}}_u} \right|_{\zeta=\zeta_d, \mathbf{u}=\mathbf{u}_{ff}} = \check{\mathbf{B}}\mathbf{u}_{ff} \quad (6.11)$$

mit \mathbf{u}_{ff} der stationären Leistung in diesem Punkt. Nach Diskretisierung mit $T_s = T_{a,o}$, lässt sich das lineare, zeitdiskrete, dynamische erweiterte System analog zu Abschnitt 4.1 in der Form

$$\check{\zeta}_{k+1} = \check{\Phi}\check{\zeta}_k + \check{\Gamma}\mathbf{u} \quad (6.12)$$

schreiben. Die Iterationsvorschrift des gesamten Schätzzustandes lautet daher

$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta}_{k+1} \\ \hat{\mathbf{p}}_{u,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_k \\ \hat{\mathbf{p}}_{u,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{a,o}\mathbf{f}(\zeta_k, \mathbf{u}_k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \check{\mathbf{K}}_\infty \left(\mathbf{y} - \check{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_k \\ \hat{\mathbf{p}}_{u,k} \end{bmatrix} \right). \quad (6.13)$$

mit der gesamten stationären Verstärkungsmatrix

$$\check{\mathbf{K}}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\zeta,\infty} \\ \mathbf{K}_{\check{\mathbf{p}},\infty} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Die Iterationsgleichung des geschätzten Leistungsfaktors kann aufgrund von (6.8) in der Form

$$\hat{\mathbf{p}}_{u,k+1} = \hat{\mathbf{p}}_{u,k} + \mathbf{K}_{\check{\mathbf{p}},\infty} \left(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\zeta}_k \right) \quad (6.15)$$

dargestellt werden. Infolge der schlechten Schätzbarkeit des Leistungsfaktors $\check{\mathbf{p}}_u$ im dynamischen Bereich, wird mit

$$\sum_{i=1}^4 u_i \leq \varepsilon_{\check{\mathbf{p}}_u}, \quad \varepsilon_{\check{\mathbf{p}}_u} = 1 \quad (6.16)$$

dem Parameterschätzer eine Aktivitätsbedingung gestellt. Ist (6.16) nicht erfüllt, so wird die Iteration (6.15) gestoppt. Damit wird erreicht, dass die Schätzung auf quasi-stationäre Systemzustände beschränkt ist. Der Parameter $\varepsilon_{\check{\mathbf{p}}_u}$ ist so gewählt, dass auch bei einem möglichen Temperaturprofil von $\mathbf{y}_d = [300, 300, 280, 260]^T$ °C die Summe der entsprechenden stationären Leistungen darunter fällt.

In Abbildung 6.8 ist eine Identifikation von $\check{\mathbf{p}}_u$ während eines Aufheizvorgangs mit

$$\check{\mathbf{p}}_u = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \check{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \check{p}_{\vartheta_\infty} \\ \check{p}_{\vartheta_T} \\ \check{p}_{k_{c,r}} \\ \check{p}_{u_{max}} \\ \check{p}_{\tau_{pt1}} \\ \check{p}_{\alpha_{MC}} \\ \check{p}_{\alpha_N} \\ \check{p}_{\alpha_{FV}} \\ \check{p}_{\rho_{pl}} \\ \check{p}_{c_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \sim \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

zu sehen. Der Parameterfaktor $\check{p}_{u_{max}}$ aus Abschnitt 6.1 wird hier nicht verwendet, da die Heizleistungen nun separat geschätzt werden. Dabei ist gut zu erkennen, dass wegen (6.16) die Schätzung in der Aufheizphase inaktiv ist. Weiters konvergiert der Schätzfehler zu $\mathbf{0}$. Damit ist gezeigt, dass der Schätzer für das nominelle Modell und veränderte Leistungen der Heizelemente, die Parameter des Modells richtig schätzt. Eine Identifikation mit geänderten Modell und der Einfluss des Parameters $k_{c,r}$ wird in Kapitel 7 untersucht.

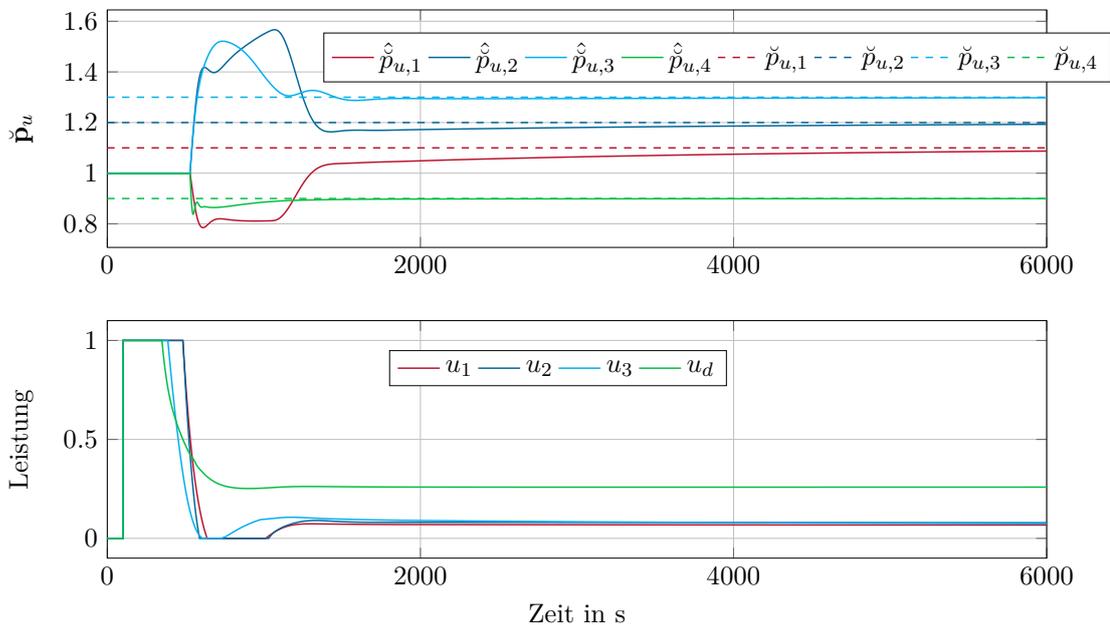


Abbildung 6.8: Schätzung der Leistungsfaktoren $\check{\mathbf{p}}_u$ während eines Aufheizvorgangs von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C mit den Parametervektoren aus (6.17).

6.6 Identifikation von α_N und α_{MC}

In Abschnitt 6.1 wurde gezeigt, dass die Regelgüte stark von den Wärmeübergangskoeffizienten zwischen Heizelement und Massezylinder bzw. zwischen Düsenheizband und Düse abhängt. Diese Koeffizienten ändern sich unter anderem mit verschiedenen Anpressdrücke der Elemente am Massezylinder und sind damit von Maschine zu Maschine unterschiedlich. Um diese Parameter zu identifizieren, wird im folgenden Abschnitt ein Identifikationsverfahren mit Hilfe eines Optimierungsproblems entwickelt. Da sich Änderungen der Wärmeübergangskoeffizienten vor allem in dynamischen Betriebszuständen bemerkbar machen, genügt ein Aufheizvorgang um diese zu identifizieren. In Abbildung 6.9 sind die Messdaten, die dem folgenden Optimierungsproblem zugrunde liegen, dargestellt. Dabei handelt es sich um einen Aufheizvorgang von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [230, 230, 220, 210]^\circ\text{C}^\text{T}$ und den gemessenen Leistungen \mathbf{u}_m .

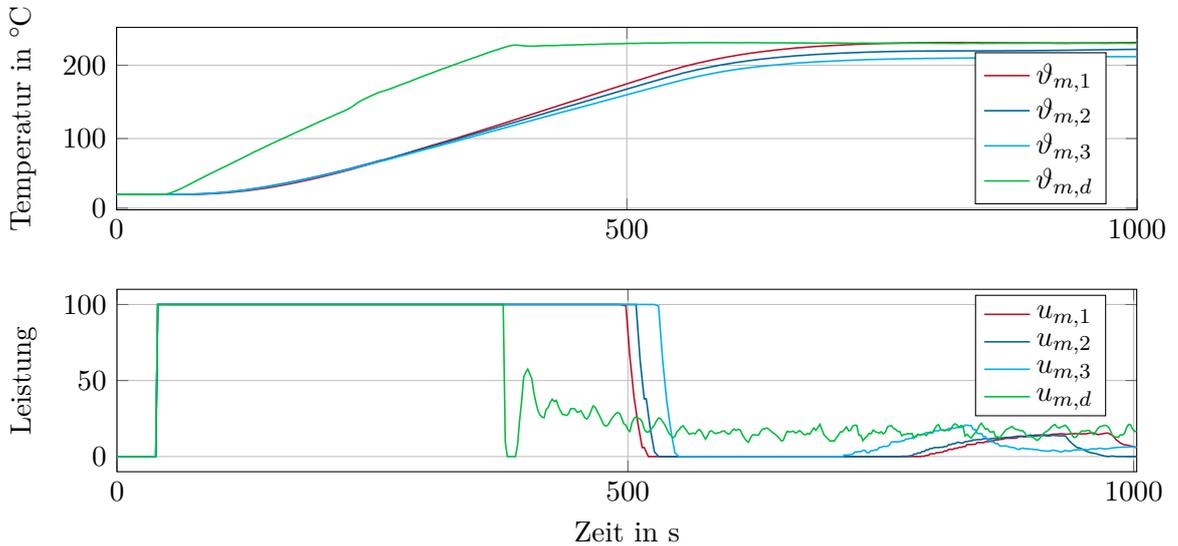


Abbildung 6.9: Messdaten \mathbf{y}_m und \mathbf{u}_m des Aufheizvorgangs mit aktueller Regelung.

Für die Optimierung wird das Kostenfunktional

$$J(\check{\mathbf{p}}_\alpha) = \sum_{i=1}^4 \int_0^T (y_{m,i}(t) - y_{\alpha,i}(t))^2 dt, \quad \check{\mathbf{p}}_\alpha = \begin{bmatrix} \check{p}_{\alpha_{MC}} \\ \check{p}_{\alpha_N} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

mit den gemessenen Ausgangstrajektorien \mathbf{y}_m aus Abbildung 6.9 und \mathbf{y}_α aus (6.1), verwendet. Um sicher zu gehen, dass das gesuchte Optimum im Definitionsbereich des untersuchten Parameterraumes liegt, wird dieses hinreichend groß mit

$$\mathcal{D} = \check{p}_{\alpha_N} \times \check{p}_{\alpha_{MC}} = [0.2, 5] \times [0.2, 5.1] \quad (6.19)$$

definiert. Die restlichen Parameter aus $\check{\mathbf{p}}$ werden als nominell angenommen. Das Kostenfunktional ausgewertet in \mathcal{D} ist in Abbildung 6.10 dargestellt. Die Optimierungsaufgabe

besteht darin, das erstellte Kostenfunktional zu minimieren und so die Faktoren der Wärmeübertragungskoeffizienten $\check{p}_{\alpha,N}$ und $\check{p}_{\alpha,MC}$ zu bestimmen, sodass das Modell (6.1) die Messung aus Abbildung 6.9 bestmöglich nachbildet. Zusammengefasst lässt sich das Optimierungsproblem darstellen als

$$\min_{\check{\mathbf{p}}_{\alpha} \in \mathbb{R}_+^2} J(\check{\mathbf{p}}_{\alpha}) \quad (6.20a)$$

$$\text{u.B.v. } \dot{\zeta} = \mathbf{f}(\zeta, \mathbf{u}_m, \check{\mathbf{p}}_{\alpha}) \quad (6.20b)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\dot{\zeta} . \quad (6.20c)$$

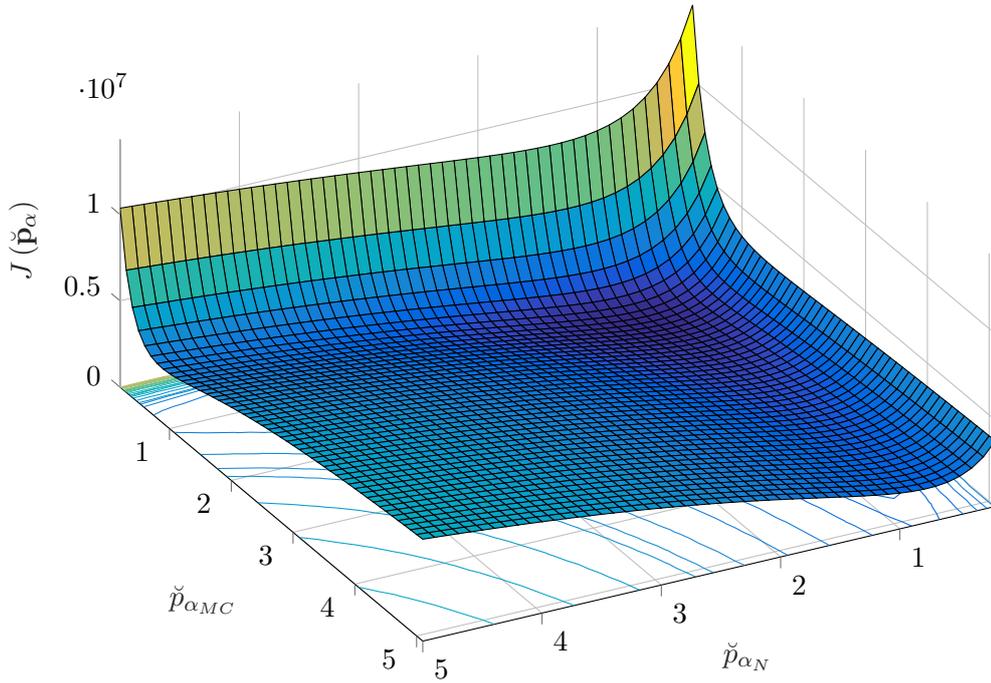


Abbildung 6.10: Kostenfunktional $J(\check{\mathbf{p}}_{\alpha})$ des Optimierungsproblems (6.20).

Das Kostenfunktional ist unimodal und besitzt ein eindeutiges Minimum auf dem gesamten Definitionsbereich. Weiters ist die Funktion stetig, was vorteilhaft für die Optimierung ist. Im Zuge dieser Arbeit stellt das Liniensuchverfahren mit Hilfe der Intervallschachtelung [26] ein robustes und effizientes Verfahren zur Lösung von (6.20) dar. Die Idee eines Liniensuchverfahrens ist, ausgehend von einem Startpunkt $\check{\mathbf{p}}_{\alpha,0}$ das mehrdimensionale Optimierungsproblem auf ein eindimensionales Optimierungsproblem entlang einer Linie zu reduzieren. Diese Linie definiert sich durch eine zu wählende Suchrichtung $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$. Die Iterationsgleichung der Optimierung von (6.20) mittels Liniensuchverfahren lässt sich schreiben als

$$\check{\mathbf{p}}_{\alpha,k+1} = \check{\mathbf{p}}_{\alpha,k} + \beta \mathbf{s}_k \quad (6.21)$$

und erfüllt bei geeigneter Suchrichtung und Schrittweite β die Ungleichungsbedingung

$$J(\check{\mathbf{p}}_{\alpha,k+1}) < J(\check{\mathbf{p}}_{\alpha,k}) . \quad (6.22)$$

In einem ersten Schritt wird die Suchrichtung festgelegt. Dazu ist es hilfreich die Abbildung 6.10 genauer zu betrachten. Dabei ist zu sehen, dass der optimale Wärmeübergangsfaktor $\check{p}_{\alpha_{MC}}^*$ hinsichtlich der Kostenfunktion $J(\check{\mathbf{p}}_\alpha)$ quasi unabhängig von \check{p}_{α_N} ist, und vice versa. Daher ist auch bei einer Liniensuche mit konstantem \check{p}_{α_N} der ermittelte Faktor $\check{p}_{\alpha_{MC}}$ nahe dem globalen Minimum $p_{\alpha_{MC}}^*$, d. h.

$$\min_{\beta} h_{MC}(\beta) \approx J\left(\begin{bmatrix} \check{p}_{\alpha_{MC}}^* \\ \check{p}_{\alpha_N} \end{bmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \min_{\beta} h_N(\beta) \approx J\left(\begin{bmatrix} \check{p}_{\alpha_{MC}} \\ \check{p}_{\alpha_N}^* \end{bmatrix}\right) \quad (6.23)$$

mit den Abkürzungen

$$h_{MC}(\beta) = J\left(\check{\mathbf{p}}_{\alpha,k} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad (6.24)$$

$$h_N(\beta) = J\left(\check{\mathbf{p}}_{\alpha,k} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \quad (6.25)$$

Darum ist mit

$$\mathbf{s}_k = \begin{bmatrix} \text{mod}(k+1, 2) \\ \text{mod}(k, 2) \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

eine geeignete Suchrichtung vorgegeben. Der Operator mod in (6.26) ist der Modulooperator. Gleichung (6.26) besagt, dass in der ersten Iteration \check{p}_{α_N} konstant ist, anschließend $\check{p}_{\alpha_{MC}}$, danach wiederum \check{p}_{α_N} usw.. Im Gegensatz zur Suchrichtung wird im nächsten Abschnitt die Schrittweite β_k in jeder Iteration neu mittels Intervallschachtelungsverfahren ermittelt. Zunächst müssen die Intervallgrenzen l_0 und r_0 festgelegt werden, die der Forderung

$$\begin{aligned} p_{\alpha_{MC},k}^* &\in [l_0, r_0] \quad \text{für} \quad \text{mod}(k, 2) = 0 \\ p_{\alpha_N,k}^* &\in [l_0, r_0] \quad \text{für} \quad \text{mod}(k, 2) = 1 \end{aligned} \quad (6.27)$$

gerechtfertigt werden. Das ist erreichbar durch Auswählen eines hinreichend kleinen l_0 und sukzessivem Erhöhen bis $h_{MC,k}$ bzw. h_N erstmals steigt. Nachdem die Intervallgrenzen festgelegt sind, wird iterativ das Minimum von $h_{MC}(\beta_k)$ bzw. $h_N(\beta_k)$ gesucht. In Abbildung 6.11 ist das Prinzip der Intervallschachtelung in einer Dimension dargestellt. $h(\beta_k)$ steht dabei für entweder $h_{MC}(\beta_k)$ oder $h_N(\beta_k)$, je nach dem welche Suchrichtung zufolge (6.26) bei der aktuellen Liniensuche verwendet wird [26]. Neben den äußeren Punkten l_j und r_j werden zwei innere Punkte im Intervall $[l_j, r_j]$

$$\hat{l}_j = l_j + (1-a)(r_j - l_j) \quad (6.28a)$$

$$\hat{r}_j = l_j + a(r_j - l_j) \quad (6.28b)$$

mit $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ berechnet. Anschließend sind die entsprechenden Funktionswerte $h(\cdot)$ von $l_j, \hat{l}_j, \hat{r}_j$ und r_j zu ermitteln. Abhängig davon wird im nächsten Iterationsschritt $j+1$ eine Intervallgrenze l_j oder r_j verworfen. Für den Fall, dass $h(r_j) > h(l_j)$ ist, wird im darauffolgenden Schritt $r_{j+1} = \hat{r}_j$ gesetzt und mit (6.28) die inneren Punkte der nächsten Iteration

$$\hat{l}_{j+1} = l_{j+1} + (1-a)(r_{j+1} - l_{j+1}) = l_j + (1-a)a(r_j - l_j) \quad (6.29a)$$

$$\hat{r}_{j+1} = l_{j+1} + a(r_{j+1} - l_{j+1}) = l_j + a^2(r_j - l_j) \quad (6.29b)$$

berechnet. Durch die Wahl von

$$a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (6.30)$$

kann erreicht werden, dass $\hat{r}_{j+1} = \hat{l}_j$ bzw. $\hat{l}_{j+1} = \hat{r}_j$ gilt. Damit ist in jedem Iterationsschritt j nur eine Auswertung des Kostenfunktionalen nötig, was die Rechenzeit erheblich verringert.

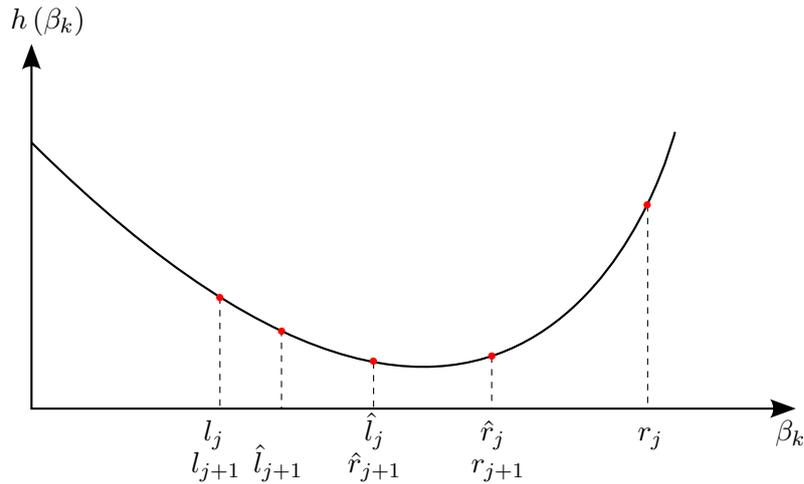


Abbildung 6.11: Darstellung des Intervallschachtelungsverfahrens.

Da es sich bei der in (6.30) berechneten Größe um das inverse Verhältnis $1/\varphi$ des goldenen Schnitts handelt, ist das Verfahren in der Literatur auch unter dem Namen "Intervallschachtelung nach dem Goldenen Schnitt" [26] bekannt.

In Abbildung 6.12 ist die Minimierung des Kostenfunktionalen aus Abbildung 6.10 mit dem Startwert $\check{\mathbf{p}}_{\alpha,0} = [1.5, 1.4]^T$ zu sehen. Als Abbruchkriterium wurde

$$r_j - l_j < \varepsilon_j \quad (6.31)$$

gewählt. D. h. wenn der Abstand von l_j und r_j erstmals unter ε_j liegt, wird die Schrittweitensuche abgebrochen und das Optimum ergibt sich zu

$$\beta^* = \frac{r_{N_j} + l_{N_j}}{2} \quad (6.32)$$

mit der Anzahl der Iterationen N_j . Da sich das untersuchte Intervall in jeder Iteration j um das $1/\varphi$ fache verkleinert, sind abhängig vom Startintervall $[l_0, r_0]$

$$N_j = \log \left(\frac{r_0 - l_0}{\varepsilon_j} \right) \frac{1}{\log(\varphi)} \quad (6.33)$$

Iterationen notwendig.

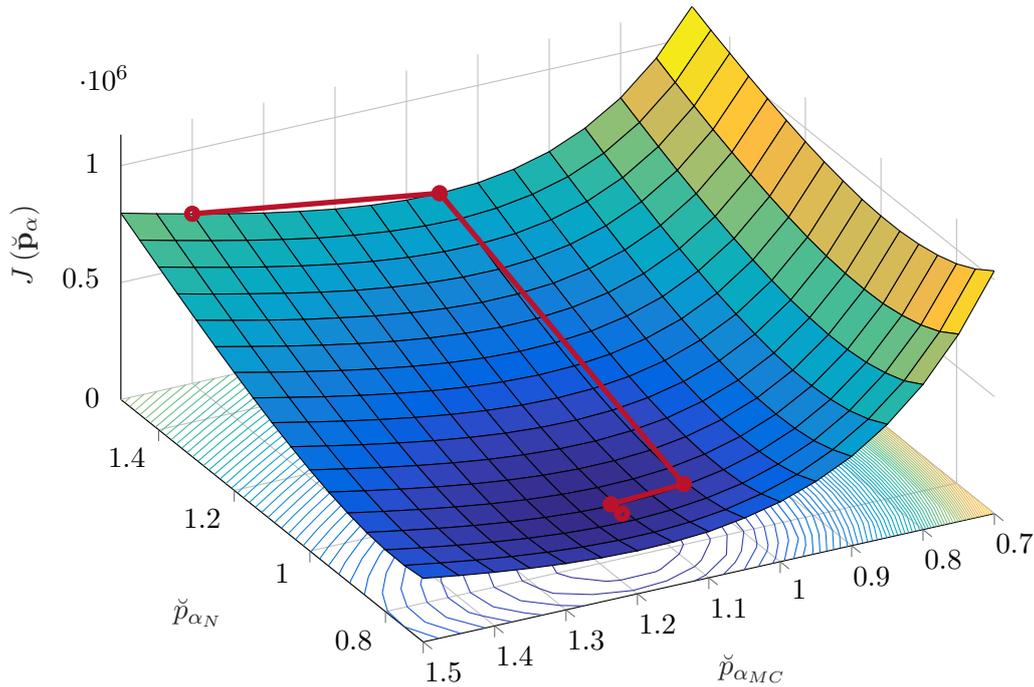


Abbildung 6.12: Kostenfunktional und iterative Lösung des Optimierungsproblems.

Bei der Optimierung in Abbildung 6.12 wurde in jeder Iteration ein Startintervall $[l_0, r_0] = [0.2, 5]$ und eine Abbruchbedingung $\varepsilon_i = 0.01$ gewählt, was zu 13 Iterationen je Schrittweitsuche führte. Das gefundene Minimum liegt bei

$$\check{\mathbf{p}}_\alpha^* = \begin{bmatrix} 0.806 \\ 1.163 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Das bedeutet, dass durch multiplikative Anpassung der Wärmeübergangskoeffizienten α_{MC} und α_N entsprechend (6.34) und Aufschalten der gemessenen Eingangsgrößen \mathbf{u}_m , der quadratische Fehler aus (6.18) am Geringsten wird. In Abbildung 6.13 ist der Aufheizvorgang mit dem nominellen und optimierten Modell zu sehen. Die ermittelten Werte von α_{MC}^* und α_N^* lassen dabei keinen direkten Rückschluss auf die Wärmeübergangskoeffizienten des realen Versuchsaufbau zu, sondern geben lediglich eine Aussage darüber, wie gut das dynamische Verhalten mit dem nominellen Modell ohne weitere Anpassung abgebildet wurde. Je näher die Werte des gefundenen Minimums bei 1 liegen, desto höher ist die Modellgüte. Eine Identifikation mit simulierten \mathbf{y} und \mathbf{u} sowie veränderten Streckenparameter $\check{\mathbf{p}}$ wird in Kapitel 7 diskutiert.

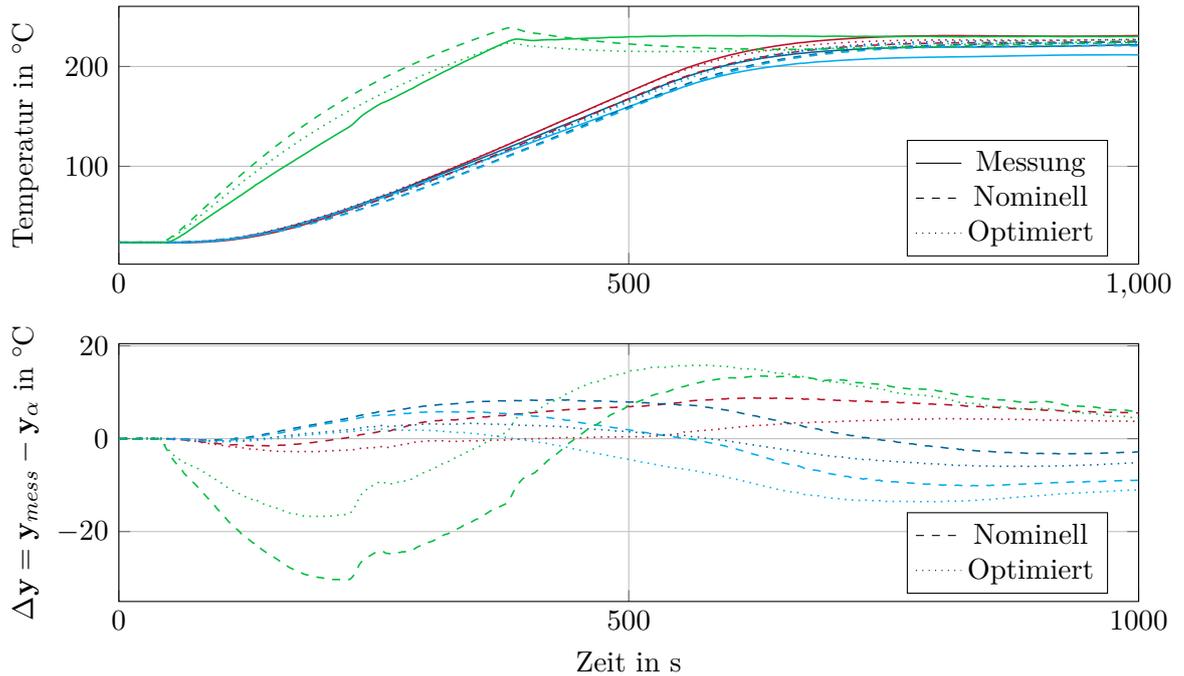


Abbildung 6.13: Ausgänge \mathbf{y} und Modellfehler $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}_m - \mathbf{y}$ des nominellen und optimierten Modells durch Aufschaltung der gemessenen Eingangsleistungen \mathbf{u}_m .

6.7 Zusammenfassung der Sensitivitätsanalyse

Ausgehend von zehn Parametern wurde eine Sensitivitätsanalyse am Beispiel von zwei Testfällen durchgeführt um die Auswirkungen von sowohl Maschinenparameter als auch Kunststoffparameter zu untersuchen. Dabei stellte sich das Modell und damit die Regelung besonders empfindlich auf Parameterschwankungen der Heizleistungen $\check{\mathbf{p}}_u$, des Wärmeübergangs zwischen Heizelemente und Massezylinder α_{MC} und des Wärmeübergangs zwischen Heizelement der Düse und Düse α_N dar. In weiterer Folge wurde eine Schätzstrategie für $\check{\mathbf{p}}_u$ sowie eine Möglichkeit zur Identifikation von optimalen α_{MC} und α_N vorgestellt.

Durch eine Erweiterung des Zustandsvektors ζ mit dem zu schätzenden Leistungsvektor $\check{\mathbf{p}}_u$ und dem Störmodell (6.8) konnte der Schätzzustand $\hat{\check{\mathbf{p}}}_u$ dem Kalman-Filterentwurf aus Kapitel 4 hinzugefügt werden. Für die beiden Wärmeübertragungskoeffizienten wurde ein Optimierungsproblem auf Basis einer Messung des Aufheizvorgangs formuliert. Die Lösung dieses Problems wird mittels Intervallschachtelung nach dem Goldenen Schnitt durchgeführt und liefert die Parameter $\check{p}_{\alpha,MC}^*$ und $\check{p}_{\alpha,N}^*$. Darauf aufbauend kann der LQ-Regler adaptiert werden. Ein Vergleich zwischen nominellen und adaptierten LQ-Regler bei geänderten Streckenparameter wird in Kapitel 7 diskutiert.

7 Verifikation für geänderte Streckenparameter

In diesem Kapitel wird die Identifikation von \check{p}_{α_N} , $\check{p}_{\alpha_{MC}}$ und $\check{\mathbf{p}}_u$ auf Basis einer Simulation des Aufheizvorgangs mit bekanntem $\check{\mathbf{p}}$ untersucht. Mit den identifizierten Parameter wird das Entwurfsmodell des Reglers adaptiert und damit der Regler inklusive Vorsteuerung und Kalman-Filter neu entworfen. Ein Vergleich des adaptierten mit dem nominellen Regler stellt den Abschluss dieses Kapitels dar. Die einzelnen Schritte sind hier dargestellt:

1. Der LQ-Regler mit Vorsteuerung und Kalmanfilter wird mit dem nominellen Modell entworfen.
2. Das Streckenmodell basiert auf den geänderten Parametern $\check{\mathbf{p}}_u$ und $\check{\mathbf{p}}$.
3. Der Aufheizvorgang wird mit dem nominellen LQR, aktiven Kalman-Filter mit Leistungsschätzer und geänderter Strecke simuliert und die Leistungsfaktoren geschätzt. Dabei werden die Stellgrößen und Temperaturtrajektorien aufgezeichnet.
4. Offline werden die Wärmeübergangskoeffizienten $\check{p}_{\alpha_{MC}}$ und \check{p}_{α_N} identifiziert.
5. Mit den ermittelten Parametern wird das Entwurfsmodell des Reglers, der Vorsteuerung und des Kalman-Filters adaptiert und der Regler neu entworfen.
6. Ein Vergleich des nominellen mit dem adaptierten Regler schließt dieses Kapitel ab.

Bei den folgenden Simulationen wird eine veränderte Strecke gemäß den Parametervektoren

$$\check{\mathbf{p}}_u = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.1 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \check{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \check{p}_{\vartheta_\infty} \\ \check{p}_{\vartheta_T} \\ \check{p}_{k_{c,r}} \\ \check{p}_{u_{max}} \\ \check{p}_{\tau_{pt1}} \\ \check{p}_{\alpha_{MC}} \\ \check{p}_{\alpha_N} \\ \check{p}_{\alpha_{FV}} \\ \check{p}_{\rho_{pl}} \\ \check{p}_{c_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1 \\ 0.8 \\ \sim \\ 1 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

verwendet. D. h. die Umgebungstemperatur liegt bei ca. 49 °C, die Isolationsschilder geben nur 80% der Energie im Vergleich zum nominellen Fall an die Umgebung ab und die Wärmeübergänge α_{MC} und α_N wurden verringert, wodurch die Strecke an Dynamik verliert. Der Parameterfaktor $\check{p}_{u_{max}}$ aus Abschnitt 6.1 wird hier nicht verwendet, da die

Heizleistungen nun separat geschätzt werden. Dabei wird die Leistung des Heizelement der Düse mit 90% der nominellen Leistung definiert und die Leistung der Zonen 1, 2 und 3 entsprechend (7.1).

7.1 Identifikation von $\check{\mathbf{p}}_u$

In Abbildung 7.1 sind die geschätzten Heizleistungen während dem Aufheizvorgang dargestellt. Es ist gut erkennbar, dass während der hochdynamischen Phase, in der die Heizelemente maximale Leistung benötigen, die Schätzung inaktiv ist. Die Abbildung 7.1b zeigt dabei den Detailausschnitt von Abbildung 7.1a damit der Unterschied zwischen Schätzung und Streckenmodellparameter sichtbar wird. Dabei erkennt man, dass die geschätzten Leistungen mit einem stationären Endwert von

$$\hat{\mathbf{p}}_u = \begin{bmatrix} 1.1656 \\ 1.3707 \\ 1.4828 \\ 1.5210 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

über den eingestellten Wert $\check{\mathbf{p}}_u$ liegen. Das lässt sich durch den kleineren Konvektions- bzw. Strahlungsfaktor erklären. Mit $k_{c,r} = 0.8$ gibt das System weniger Energie an die Umgebung ab, was zur Folge hat, dass mehr Energie im System bleibt. Das wirkt auf den Kalmanfilter so, als wären die Heizelemente stärker als nominell angenommen. Dieser Sachverhalt bestätigt die Vermutung aus Abschnitt 6.2 und 6.3, dass sich eine Änderung von $k_{c,r}$ stark auf die Identifikation von $\check{\mathbf{p}}_u$ auswirkt. Die Unterschiede zwischen der Strecke und dem Reglerentwurfsmodell der Wärmeübergänge α_{MC} und α_N wirken sich dabei nicht auf die Schätzung von $\check{\mathbf{p}}_u$ aus. Der Grund dafür ist, dass die Schätzung erst im stationären Fall konvergiert und dabei kein maßgeblicher Wärmeübergang zwischen den Heizelementen und Massezylinder bzw. Düse stattfindet.

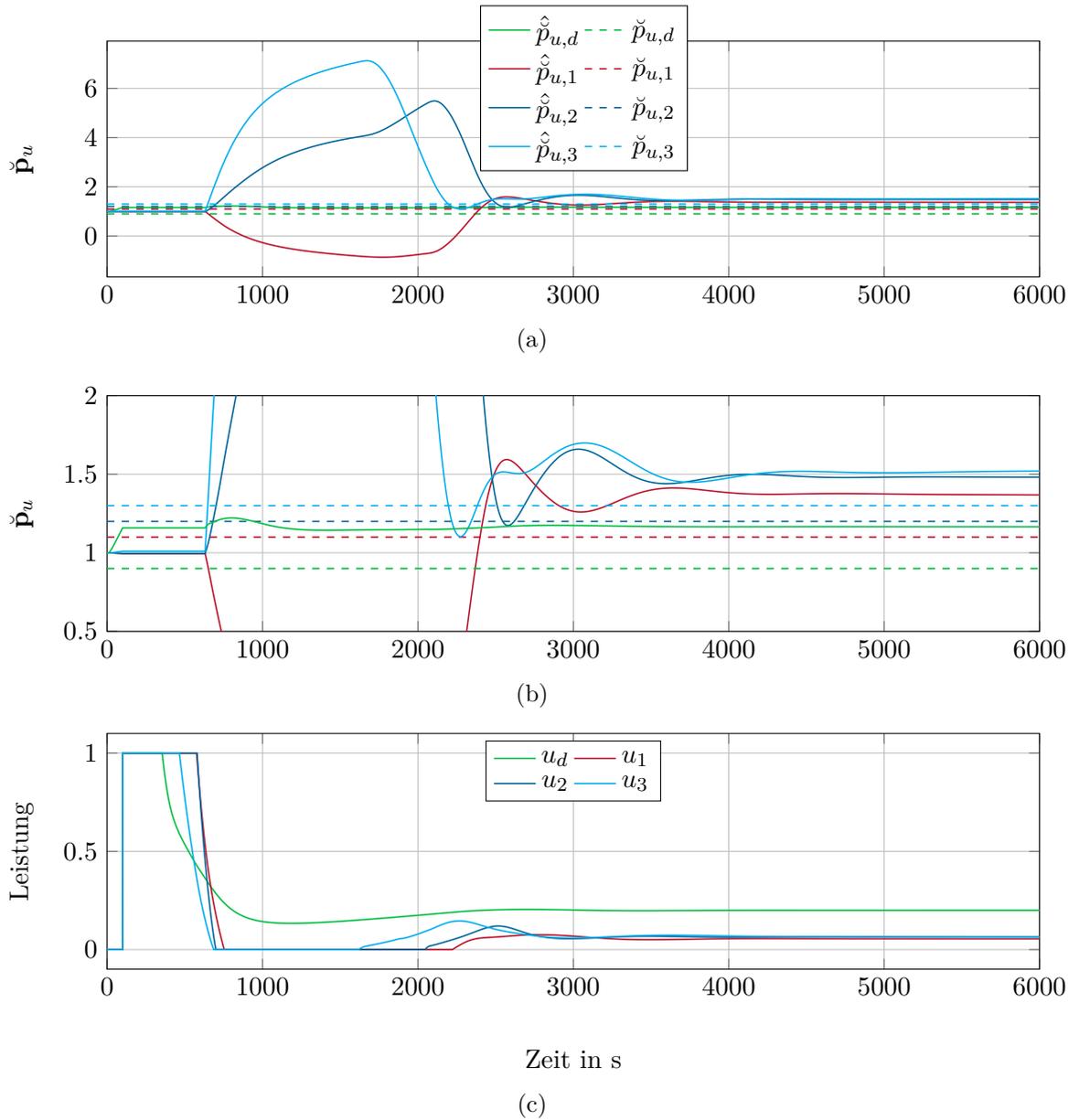


Abbildung 7.1: Schätzung des Leistungsfaktors \check{p}_u während des Aufheizvorgangs, ausgehend von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^T$ °C mit veränderter Strecke gemäß (7.1).

7.2 Identifikation von α_N und α_{MC}

Mit den geschätzten Parameter \check{p}_u kann jetzt das Streckenmodell für die Identifikation von α_{MC} und α_N angepasst werden. Dazu werden die einzelnen aufgezeichneten Stellgrößen mit den entsprechenden identifizierten Leistungsfaktor gewichtet. Damit wird versucht

den unbekanntem Streckenparametern der Konvektion und Strahlung $\check{p}_{k,c,r}$ sowie der Leistungen der Heizelemente \check{p}_u zu kompensieren. Diese Kompensation funktioniert im stationären Bereich sehr gut, da hier kein maßgeblicher Wärmeübergang zwischen den Heizelementen und dem Massezylinder stattfindet und die gesamte eingebrachte Leistung an die Umgebung abgegeben wird.

Die anschließende Identifikation der Wärmeübergänge ist in Abbildung 7.2 zu sehen. Die entsprechenden Werte $\hat{p}_{\alpha_{MC},k}$ und $\hat{p}_{\alpha_N,k}$ sind in Abbildung 7.3 dargestellt. Dabei liefert die Optimierung die Parameter

$$\hat{\mathbf{p}}_\alpha = \begin{bmatrix} 0.3604 \\ 0.2449 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

im Unterschied zu den Wärmeübergangskoeffizienten der Strecke

$$\check{\mathbf{p}}_\alpha = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Der Fehler in der Schätzung lässt sich durch die nicht berücksichtigte Umgebungstemperatur von ca. 49 °C und der fehlerhaften Adaption der Heizleistungen im dynamischen Bereich erklären. Die Optimierung liefert zwar nicht die genauen Werte des Modells, jedoch Werte deutlich kleiner als 1, was dem nominellen Fall entsprechen würde. Wäre dies keine Simulation, sondern eine Identifikation auf einer echten Maschine, könnte man mit dieser Information auf mögliche Montagefehler der Heizelemente schließen.

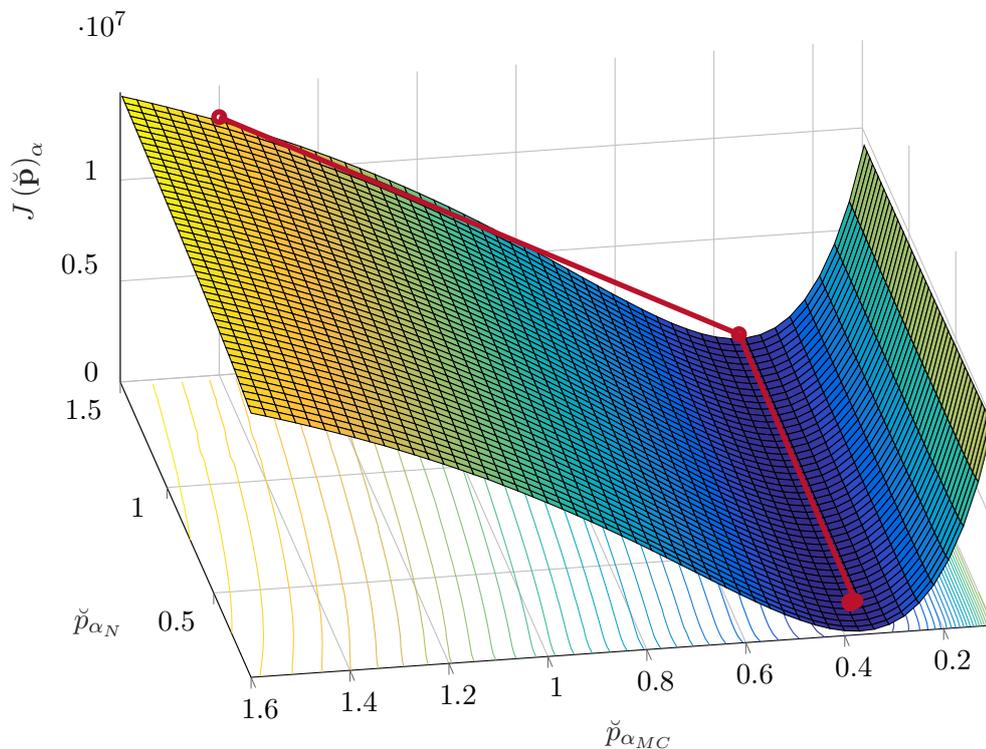


Abbildung 7.2: Kostenfunktional und iterative Lösung des Optimierungsproblems.

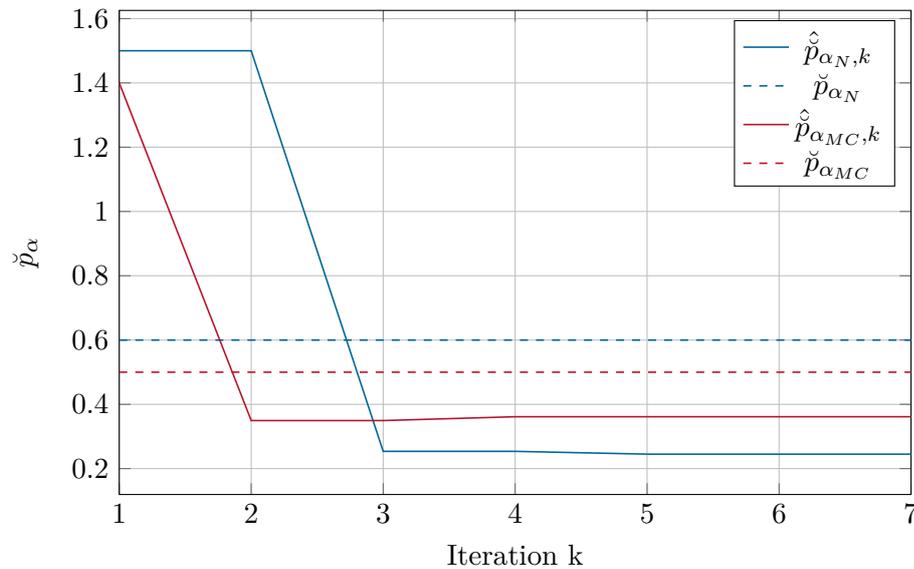


Abbildung 7.3: Identifikation von \check{p}_{α_N} und $\check{p}_{\alpha_{MC}}$ bei geänderter Strecke laut (7.1).

7.3 Vergleich des nominellen mit dem adaptierten Regler

Nachdem die Parameter $\check{\mathbf{p}}_u$, $\check{p}_{\alpha_{MC}}$ und \check{p}_{α_N} geschätzt wurden, kann jetzt das Kalman-Filter- und Reglerentwurfsmodell angepasst werden. Dazu werden die Parametervektoren

$$\check{\mathbf{p}}_u = \begin{bmatrix} 1.1656 \\ 1.3707 \\ 1.4828 \\ 1.5210 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \check{p}_{\vartheta_\infty} \\ \check{p}_{\vartheta_T} \\ \check{p}_{k_{c,r}} \\ \check{p}_{u_{max}} \\ \check{p}_{\tau_{pt1}} \\ \check{p}_{\alpha_{MC}} \\ \check{p}_{\alpha_N} \\ \check{p}_{\alpha_{FV}} \\ \check{p}_{\rho_{pl}} \\ \check{p}_{c_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \sim \\ 1 \\ 0.3604 \\ 0.2449 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

verwendet. In Abbildung 7.4 ist der Aufheizvorgang mit nominellen und adaptierten Regler bzw. Kalman-Filter dargestellt. Mit $(\cdot)_{nom}$ wird der Regler bezeichnet, der auf Basis des nominellen Modells entworfen wurde und mit $(\cdot)_{adapt}$ der adaptierte Regler. Hier ist zu erkennen, dass sich durch die Anpassung des Reglers an das identifizierte Modell die Reglerperformance in diesem Testfall verbessert. Das Überschwingen konnte in jeder Zone verringert werden. Weiters ist sichtbar, dass die adaptierten Vorsteuerleistungen $u_{ff,adapt}$ näher am stationären Endwert der Heizleistungen sind als die Vorsteuerung des nominellen Modells $u_{ff,nom}$. Deutlicher erkennt man den Unterschied zwischen adaptierten und nominellen Regler in Testfall 2, dargestellt in Abbildung 7.5. Hier ist die längere Einschwingdauer des nominellen Reglers wiederum in der falschen Vorsteuerleistung

begründet. Den Unterschied zwischen nomineller Vorsteuerung und tatsächlich benötigter Leistung im stationären Fall muss der Integralanteil kompensieren. Das zeigt, dass eine Anpassung des Reglers an die identifizierte Strecke Verbesserungen liefert.

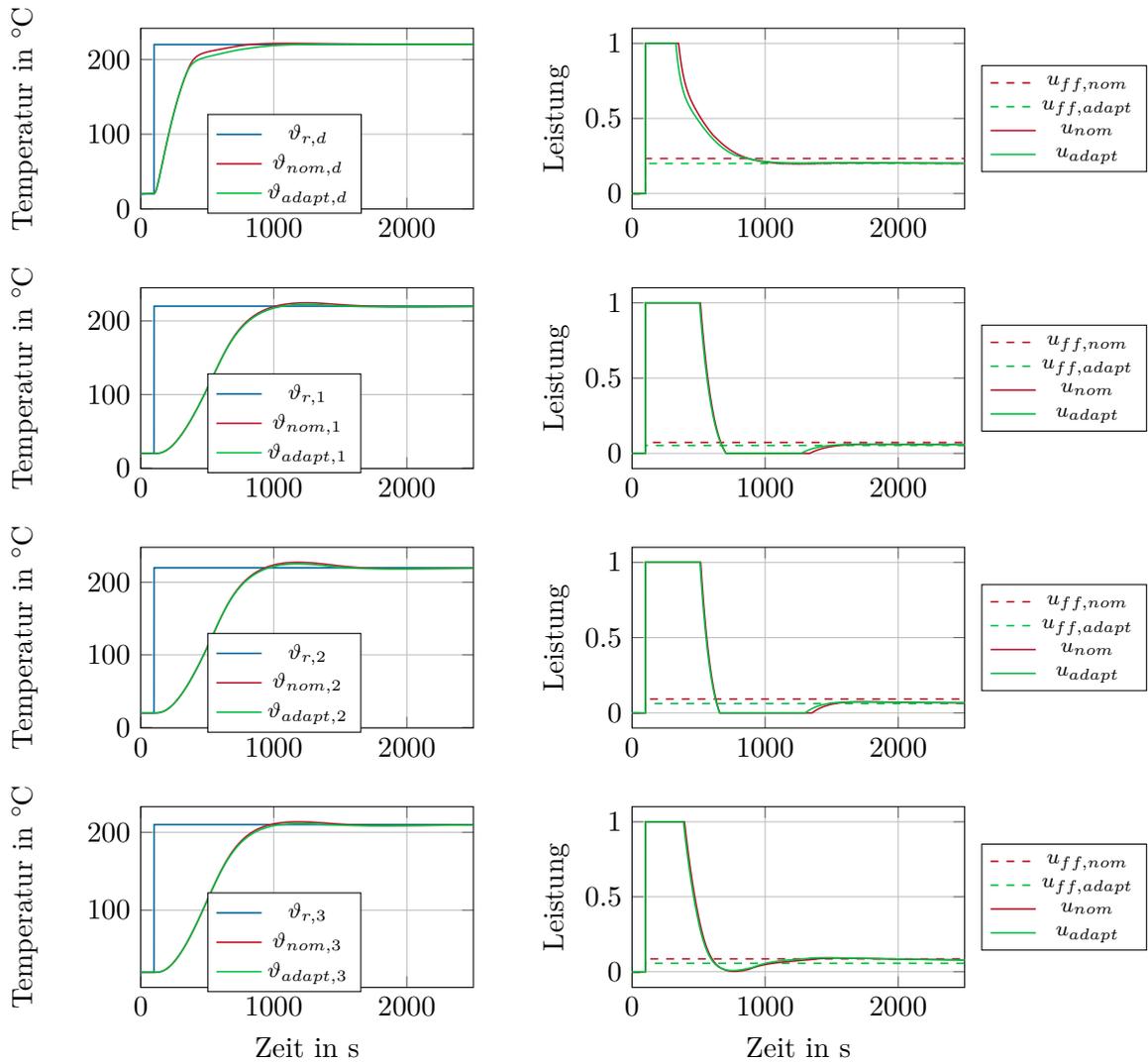


Abbildung 7.4: Testfall 1: Aufheizvorgang von Raumtemperatur auf $\mathbf{y}_d = [220, 220, 220, 210]^\top$ °C 10 °C abgesenkt.

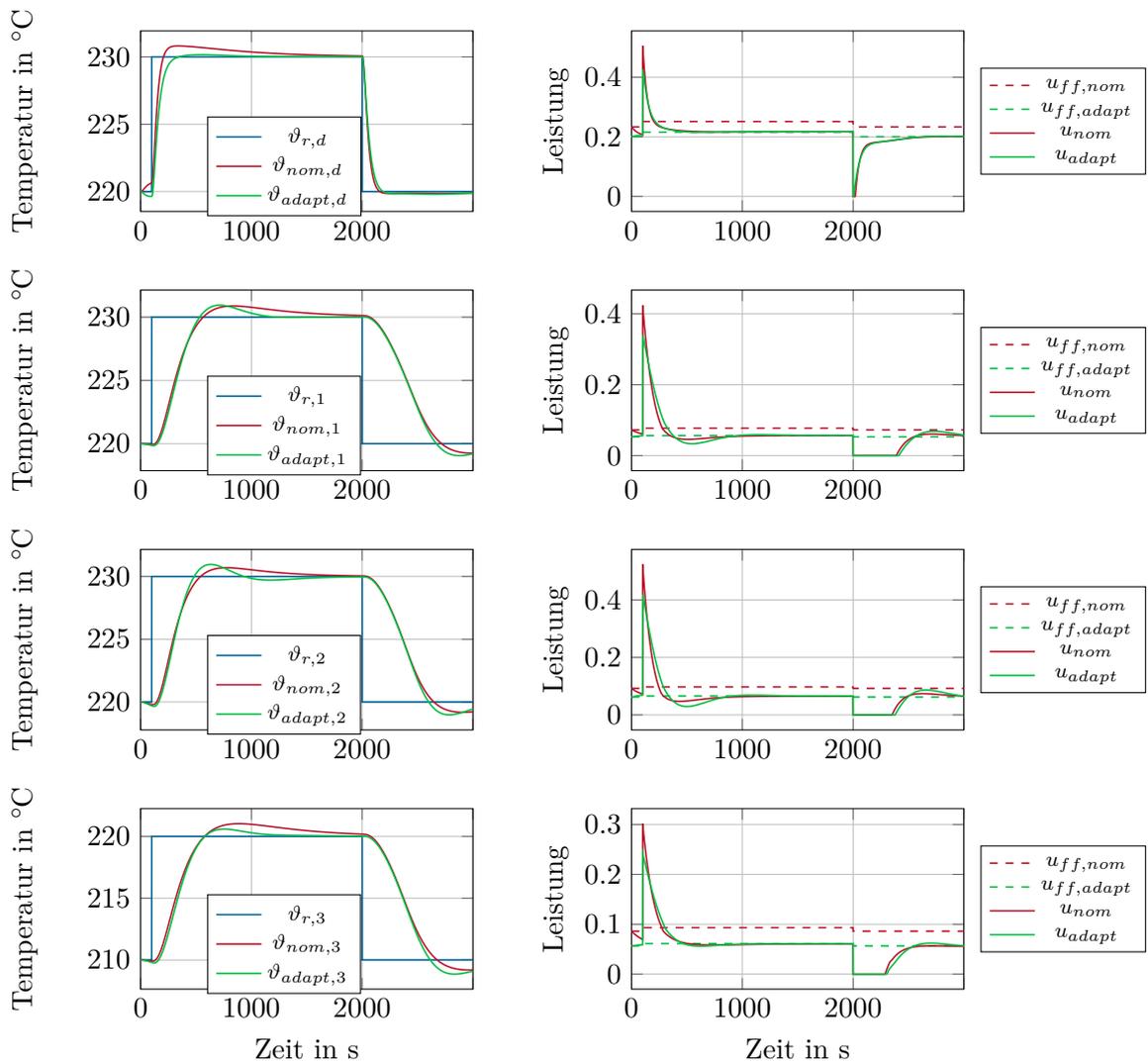


Abbildung 7.5: Testfall 2: Die Solltemperaturen aller Zonen werden gleichzeitig um 10°C erhöht und anschließend um 10°C abgesenkt.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 2 wurde ein aus zwei Teilen bestehendes thermodynamisches mathematisches Modell einer Spritzgießmaschine aus [12] präsentiert. Das Ergebnis der Modellbildung ist ein Modell in Zustandsraumdarstellung (2.1).

Dieses Modell stellt die Basis der in dem darauf folgenden Kapitel 3 entworfenen Regler dar. Zum Einen wurde ein MIMO-PI Regler, dessen Verstärkungsmatrizen von der statischer Entkopplungsmatrix des Modells im betrachteten Arbeitspunkt abhängen, entworfen. Zum Vergleich wurde ein LQ-Regler mit Integralanteil und dazugehörigem Anti-Windup entworfen. Aufgrund der Notwendigkeit eines Zustandsregler, alle Zustände zu kennen, wurde in Kapitel 4 ein stationäres Kalman-Filter mit nichtlinearem Simulator entworfen. Auf ein Extended-Kalman-Filter wurde während des Beobachterentwurfs aufgrund hinreichend guter Schätzgüte und Effizienz des stationären Kalman-Filters mit nichtlinearem Simulator verzichtet.

Anschließend wurde die Regelungsstrategie in Kapitel 5 verifiziert. Dazu wurden fünf praxisrelevante Testfälle definiert und simuliert. Dabei erwies sich der MIMO-PI Ansatz als nicht ausreichend. Daher wurde der LQ-Regler mit nichtlinearer Vorsteuerung dem aktuellen in der Industrie verwendeten Regler gegenübergestellt. Diesbezüglich stellt das LQ-Regelkonzept in allen Testfällen eine zur aktuellen Regelung verbesserte Regelgüte dar.

Danach beantwortete die Parametersensitivitätsanalyse in Kapitel 6 die Frage, welche Modellparameter das Modell und damit die Regelung maßgebend beeinflussen. Das Ergebnis dieser Analyse sind vier Parameter. Diese sind die maximale Heizleistung jedes Heizbandes an der SGM, der Konvektions- bzw. Strahlungsfaktor $k_{c,r}$ und die Wärmeübergangskoeffizienten α_{MC} zwischen Heizbänder und Massezylinder sowie α_N zwischen Düsenheizband und Düse. Mit der Erweiterung des Kalman-Filters und der Lösung eines Optimierungsproblems wurden zwei Methoden zur Identifikation der einflussreichsten Parameter der Sensitivitätsanalyse vorgestellt. In Kapitel 7 wurde anhand von einer veränderten Strecke die Schätzung der Heizelementleistungen und der Wärmeübergangskoeffizienten durchgeführt. Auf Basis der identifizierten Parameter wurde der Regler neu entworfen und mittels zwei Testfällen dem nominellen Regler gegenübergestellt. Dabei zeigte sich vor allem wegen der angepassten Vorsteuerung eine verbesserte Regelgüte.

Aus Zeitgründen wurde das entwickelte Regelungskonzept noch nicht am realen Versuchsaufbau getestet. Ausgehend von den Ergebnissen einer Implementierung des Reglers am Versuchsaufbau kann das Regelkonzept erweitert werden. Eine Erweiterung der Parameterschätzung, eine Skalierung des Modells, unterschiedliche Leistungen der Massezylinderheizelemente oder ein modellprädiktiver Regelungsansatz stellen möglicherweise weitere Aufgabenstellungen dar. Die Identifikation und Schätzung der Parameter könnten auch für eine Maschinendiagnose oder Condition Monitoring verwendet werden.

A Anhang

In diesem Kapitel sind die Regler und Beobachterparameter der Ergebnisse aus Kapitel 5 angeführt.

A.1 MIMO-PI Regelparameter

Die beiden Parameter aus (3.9) wurden anhand einer Simulationsstudie gewählt. Die daraus entnommenen Werte sind

a	0.004
b	12

Tabelle A.1: Tuningfaktoren a und b des MIMO-PI-Reglers.

A.2 LQ-Reglerparameter

Die Abtastzeit des LQ-Reglers wurde aufgrund der Abtastzeit der Sensoren von 0.1 s auch mit

$$T_{a,c} = 0.1 \text{ s} \quad (\text{A.1})$$

festgelegt.

Die Gewichtungsmatrizen für den LQ-Regler mit I-Anteil sind allesamt Diagonalmatrizen. Für die Gewichtungsmatrix der Zustände \mathbf{Q}_c aus (6.18) und der Gewichtungsmatrix der Stellgrößen \mathbf{R}_c wurde die Form folgendermaßen gewählt:

$$\mathbf{Q}_c = \text{diag} \left(\left[\boldsymbol{\eta}_1^T, \boldsymbol{\theta}^T, \boldsymbol{\eta}_2^T, \boldsymbol{\kappa}^T \right] \right), \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{R}_c = \phi \mathbf{E} \quad (\text{A.3})$$

mit dem Zustandsgewichtungsvektor $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{33}$, dem Ausgangsgewichtungsvektor $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^4$ und dem Gewichtungsvektor der Integralzustände $\boldsymbol{\kappa}$. Die Elemente der einzelnen Gewichtungsvektoren sind jeweils gleich und in Tabelle A.2 zu sehen.

	Testfall 1-3	Testfall 4-5
η	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-6}$
θ	$4 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^5$
κ	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
ϕ	$1 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^7$

Tabelle A.2: Gewichtungen des LQ-Reglers.

A.3 Kalman-Filterparameter

Die Abtastzeit des Kalman-Filters wurde mit

$$T_{a,o} = 0.1 \text{ s} \quad (\text{A.4})$$

genau gleich der Abtastzeit der Sensoren gewählt. Der Kalmanfilter besitzt für alle Testfälle die gleichen Gewichtungsmatrizen. Die Kovarianzmatrix der Prozessstörung ist mit

$$\mathbf{Q}_o = \text{diag}(\boldsymbol{\psi}^T, \boldsymbol{\omega}^T) \quad (\text{A.5})$$

festgelegt. Für den erweiterten Kalman-Filter aus Abschnitt 6.5 wird eine Kovarianzmatrix der Prozessstörung der Form

$$\check{\mathbf{Q}}_o = \text{diag}(\boldsymbol{\psi}^T, \boldsymbol{\omega}^T, \boldsymbol{\chi}^T) \quad (\text{A.6})$$

verwendet. Dabei ist $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{29}$ der Gewichtsvektor der Galerkinzustände $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^8$ der Gewichtsvektor der Enthalpiezustände und $\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^4$ der Gewichtsvektor der Schätzzustände. Der Grund für die unterschiedliche Wahl von $\boldsymbol{\psi}$ und $\boldsymbol{\omega}$ in Tabelle A.3 liegt in der Relation der Größenordnungen von ζ_{gal} und ζ_{pl} . Weiters wurde bei der Finiten Volumen Methode ein stark vereinfachtes Modell verwendet, was eine hohe Prozessstörung der Zustände ζ_{pl} rechtfertigt. Die Kovarianzmatrix der Messungen \mathbf{R}_o wird dabei auf Basis von Messdaten berechnet. Dazu wird eine stationäre Temperaturmessung herangezogen. Die Standardabweichung der Messung ergibt sich zu

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (\vartheta_i - \bar{\vartheta}_i)^2, \quad (\text{A.7})$$

$i = 1, \dots, 4$ und die Einträge von \mathbf{R} sind σ_i , was der Varianz der Messung entspricht. Aufgrund ähnlicher Werte für $\sigma_1, \dots, \sigma_4$ lautet die Kovarianzmatrix des Messrauschens

$$\mathbf{R}_o = \sigma \mathbf{E}. \quad (\text{A.8})$$

Die Form der Matrizen zur Berechnung der statischen Verstärkungsmatrix (4.8) aus Tabelle A.3 bedeutet, dass die Prozessstörung \mathbf{w} auf jeden Zustand bzw. Ausgang gleich wirkt.

	Kalman-Filter	Kalman-Filter mit Parameterschätzer
ψ	0.1	0.1
ω	10^4	10^4
χ	-	10^3
σ	0.1	0.1
G	$\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{37 \times 37}$	$\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{41 \times 41}$
H	$\underbrace{\begin{bmatrix} & & \mathbb{R}^{4 \times 8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{4 \times 37}}$	$\underbrace{\begin{bmatrix} & & \mathbb{R}^{4 \times 12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{4 \times 41}}$

Tabelle A.3: Gewichtungen des Kalman-Filters.

A.4 Nominelle Parameter der Sensitivitätsanalyse

Parameter	nomineller Wert
ϑ_∞	293.15 K
ϑ_T	303.15 K
$k_{c,r}$	2.4 für Zone 1,2 und 3, 1.14 für die Düse
u_{max}	2200 W
τ_{pt1}	35 s
α_{MC}	154.1324 W/(m ² K)
α_N	400 W/(m ² K)
α_{FV}	200 W/(m ² K) für Kunststoff und 9.6 W/(m ² K) für Luft
ρ_{pl}	950 kg/m ³
c_{pl}	Temperatur - Enthalpie - Beziehung in Abbildung A.1

Tabelle A.4: Nomineller Parametervektor.

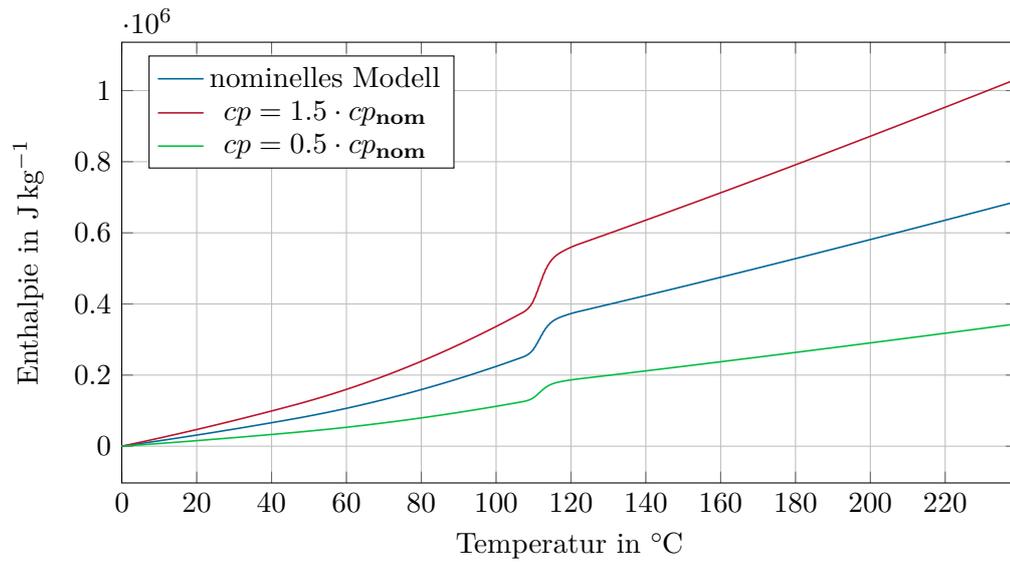


Abbildung A.1: Temperatur-Enthalpie-Zusammenhang des nominellen Modells und der geänderten Modelle.

Literatur

- [1] P. J. Gawthrop und P. E. Nomikos, „Automatic tuning of commercial PID controllers for single-loop and multi-loop applications“, *IEEE Control Systems Magazine*, Bd. 10, Nr. 1, S. 34–42, 1990.
- [2] N. Golden, N. Schott und R. Youndsaye, „An experimental evaluation of a peak cavity pressure controller in injection molding“, in *SPE ANTEC*, 1975, S. 158–160.
- [3] V. Vandoren, „Inside self-tuning pid controllers“, *Control Engineering*, Bd. 40, Nr. 9, S. 67–70, 1993.
- [4] J. Taur, C. Tao und C. Tsai, „Temperature control of a plastic extrusion barrel using pid fuzzy controllers“, in *Industrial Automation and Control: Emerging Technologies, 1995.*, *International IEEE/IAS Conference on*, IEEE, 1995, S. 370–375.
- [5] Y. Peng, W. Wei und J. Wang, „Model predictive synchronous control of barrel temperature for injection molding machine based on diagonal recurrent neural networks“, *Materials and Manufacturing Processes*, Bd. 28, Nr. 1, S. 24–30, 2012.
- [6] R. Dubay und J. Beyea, „Predictive control of melt temperature incorporating the effect of screw rotation“, in *SPE ANTEC, Orlando, Florida*, Bd. 1, 2000, S. 675–681.
- [7] C.-H. Lu und C.-C. Tsai, „Adaptive decoupling predictive temperature control for an extrusion barrel in a plastic injection molding process“, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Bd. 48, Nr. 5, S. 968–975, 2001.
- [8] C.-C. Tsai und C.-H. Lu, „Multivariable self-tuning temperature control for plastic injection molding process“, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Bd. 34, Nr. 2, S. 310–318, 1998.
- [9] T. Greul, „Modellbildung und Identifikation der Zylinderheizung einer Spritzgießmaschine“, Diplomarbeit, FH-Oberösterreich, 2011.
- [10] C. Diduch, R. Dubay und W. G. Li, „Temperature control of injection molding. part i: modeling and identification“, *Polymer Engineering and Science*, Bd. 44, Nr. 12, S. 2308–2317, 2004.
- [11] R. Dubay, C. Diduch und W. G. Li, „Temperature control in injection molding. part ii: controller design, simulation, and implementation“, *Polymer Engineering and Science*, Bd. 44, Nr. 12, S. 2318–2326, 2004.
- [12] J. Maderthaner, „Mathematical modeling and analysis of the barrel temperature dynamics of injection molding machines“, Diplomarbeit, TU-Wien, 2017.
- [13] M. J. Moran, H. N. Shapiro, D. D. Boettner und M. B. Bailey, *Fundamentals of engineering thermodynamics*. John Wiley & Sons, 2010.

-
- [14] A. Faghri, Y. Zhang und J. R. Howell, *Advanced heat and mass transfer*. Columbia, U.S.A: Global Digital Press, 2010.
- [15] W. Polifke, *Wärmeübertragung: Grundlagen, analytische und numerische Methoden*. Pearson Deutschland GmbH, 2009.
- [16] C. Meyer, „Skript zur Vorlesung partielle Differentialgleichungen, klassische Methoden“, *TU Darmstadt, Vorlesungsskript*, 2011.
- [17] T. L. Bergman und F. P. Incropera, *Fundamentals of heat and mass transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [18] A. Steinböck, D. Wild, T. Kiefer und A. Kugi, „A fast simulation method for 1D heat conduction“, *Mathematics and Computers in Simulation*, Bd. 82, S. 392–403, 2011.
- [19] Borealis, „Autodesk Moldflow Advisor 2016 - Thermoplastics Material Database“, Techn. Ber., 2016.
- [20] M. Schäfer, *Computational engineering: Introduction to numerical methods*. Springer, 2006.
- [21] J. Lunze, *Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Berlin: Springer, 2010.
- [22] P. Deuffhard, *Newton methods for nonlinear problems: affine invariance and adaptive algorithms*. Berlin: Springer, 2011, Bd. 35.
- [23] W. Kemmetmüller und A. Kugi, *Skriptum zur Vorlesung Regelungssysteme 1 (WS 2015/2016)*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik (ACIN), TU Wien, 2015.
- [24] A. Visioli, „Modified anti-windup scheme for pid controllers“, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Bd. 150, Nr. 1, S. 49–54, 2003.
- [25] K. Speicher, A. Steinböck, A. Kugi, D. Wild und T. Kiefer, „Analysis and design of an extended kalman filter for the plate temperature in heavy plate rolling“, *Journal of Process Control*, Bd. 24, Nr. 9, S. 1371–1381, 2014.
- [26] A. Steinböck, *Skriptum zur Vorlesung Optimierung*, Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik (ACIN), TU Wien, 2015.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit gemäß dem Code of Conduct – Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis (in der aktuellen Fassung des jeweiligen Mitteilungsblattes der TU Wien), insbesondere ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel, angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, 22. Februar 2018

Tobias Wolfmayr