

Diploma Thesis

# Evaluation of a simplified model describing natural vibration of steel web plates for investigation of railway bridge noise

submitted in satisfaction of the requirements for the degree of  
Diplom-Ingenieur  
of the TU Wien, Faculty of Civil Engineering

---

Diplomarbeit

## Entwicklung eines vereinfachten Berechnungsmodells zur Beschreibung des Eigenschwingungsverhaltens von Stegblechen für Untersuchungen des Brückendröhnens anhand einer ausgewählten Stahlbrücke

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs  
eingereicht an der Technischen Universität Wien, Fakultät für Bauingenieurwesen

von

**Robert Koch, BSc**

Matr.Nr.: 1126577

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. **Josef Fink**

Dipl.-Ing. Dr.techn. **Lukas Moschen**

Institut für Tragkonstruktionen – Forschungsbereich für Stahlbau  
Technische Universität Wien  
Karlsplatz 13, A-1040 Wien

Wien, im Februar 2018

---



# Kurzfassung

In der vom Menschen gestalteten Umwelt existiert eine Vielzahl an Lärmquellen. Lärm ist dabei ein vom Menschen unerwünschtes Hörereignis. Ab einem energieäquivalenten Dauerschallpegel im Freien von  $L_{A,eq} = 55$  dB kann es zu einer erheblichen Beeinträchtigung des menschlichen Wohlbefindens kommen. Wird der gesamte vom Verkehr verursachte Lärm betrachtet, so leben mehr als 50 % der Bevölkerung der Europäischen Union in Bereichen mit unzureichendem akustischen Komfort. Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag, um Lärm, welcher bei einer Zugüberfahrt über eine Brücke entsteht, berechenbar zu machen. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf dem sekundären Luftschall, jenem Schall, welcher durch die zum Schwingen angeregte Brücke entsteht. Die Untersuchung erfolgt an einer ausgewählten Brücke in Wien. Im Speziellen wird das Stegblech einer Vollwandträgerbrücke untersucht, da dieses, wenn in Schwingung versetzt, als großer schallabstrahlender Körper angesehen werden kann. Messergebnisse lassen auf einen Zusammenhang zwischen gemessenen Schallwechseldruck und der Geschwindigkeit der Struktur schließen. In gängiger Finite Elemente (FE) Software wird versucht das Schwingungsverhalten des Stegblechs nachzubilden. Dazu wird zunächst eine Konvergenzstudie durchgeführt. Die Eigenfrequenzen einer Kirchhoffplatte werden mit den Ergebnissen aus der FE Berechnung verglichen und die erforderliche Größe der finiten Elemente festgelegt. Die Rechteckplatte wird um weitere Elemente, wie die beiden Gurte des I-Querschnitts, sowie den Stegaussteifungen ergänzt. Der Einfluss der Modellbildung dieser Konstruktionselemente als auch die Veränderung des Verhaltens gegenüber der Rechteckplatte wird untersucht. Das Modell wird weiter zu einem Drei- und einem Fünffeldmodell ausgebaut und wiederum abgeschätzt, ob die benachbarten Felder das Schwingungsverhalten des Mittelfeldes beeinflussen. Die Eigenformen und Eigenfrequenzen, ermittelt aus der Lösung des Eigenwertproblems der FE Modelle, werden mit Messergebnissen einer experimentellen modalen Analyse verglichen, um eine Aussage über die Qualität der FE Berechnung zu treffen. Abschließend wird ein vereinfachtes Modell präsentiert, an welchem die näherungsweise Berechnung der Schallintensität des Stegblech erfolgen kann.





# Abstract

In the built environment there are a lot of sources of noise. Noise can be described as unwanted sound. Studies reveal that more than half of all European Union citizens live in zones that do not ensure acoustical comfort to residents. In this thesis the noise produced by a train running over a bridge is considered. When a train crosses a bridge it is very likely that sound radiation will be amplified in contrast to the plain track. The increase varies from 0 to 20 dB depending on the type of the bridge. This thesis investigates structure borne sound radiated from a steel railway bridge in Vienna, Austria. Especially the web of the H-beam will be considered, due to the relatively large sound radiation surface. To extract meaning full results out of a finite element model a convergence study is made. For this purpose the natural frequencies of a rectangular Kirchhoff plate with various boundary conditions are compared to the results out of a FE Model. The plate represents the web between two transversal stiffeners without the flanges. After determining the size of the elements, the flanges, and web transversal stiffeners are added to the model and their contribution to the vibration behaviour is quantified. Furthermore different methods in modelling the flange, and the joint between the flange, and web are presented, and subsequently their impact on natural frequencies is shown. The 1-field model is then further expanded by adding surrounding fields, such that a 3- and a 5-field model is generated. The mode shapes and corresponding natural frequencies of these models are compared, and the required number of fields is determined. In the same manner the influence of the boundary condition at the side fields on the vibration behaviour is investigated. The mode shapes, and natural frequencies out of FE model are compared with results out of experimental modal analysis, in order to quantify the quality of the FE model. At the end a model is presented on which further research activities can be performed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>12</b>
1.1	Motivation der Arbeit . . . . .	12
1.2	Stand der Technik . . . . .	12
1.2.1	Situation in Österreich . . . . .	12
1.2.2	Situation in der Europäischen Union . . . . .	13
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>14</b>
2.1	Baudynamische Grundlagen . . . . .	14
2.1.1	Einmassenschwinger . . . . .	14
2.1.2	Mehrmassenschwinger . . . . .	17
2.1.3	Modalanalyse . . . . .	17
2.1.4	Dämpfung . . . . .	18
2.2	Akustik und Schallabstrahlung . . . . .	18
2.2.1	Einteilung in Terz- und Oktavbänder . . . . .	18
2.2.2	Schallleistung und Schallenergie . . . . .	19
2.2.3	Pegel . . . . .	21
2.2.4	Körperschallabstrahlung . . . . .	22
2.2.5	Abstrahlgrad . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Ostbahnbrücke</b>	<b>24</b>
3.1	Aufbau der Ostbahnbrücke . . . . .	24
3.2	Messsetup . . . . .	27
3.3	Rohmessdaten bei einer Zugüberfahrt . . . . .	28
3.4	Transformation der Messdaten in den Frequenzbereich . . . . .	29

3.5	Umrechnung in Pegel . . . . .	31
3.5.1	Berechnung des Schalldrucks aufgrund der Stegblechgeschwindigkeit und Vergleich mit Schalldruckmessung . . . . .	32
3.6	Zusammenfassung . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Konvergenzstudie</b>	<b>35</b>
4.1	Beschreibung der verwendeten Finite Elemente Software . . . . .	35
4.2	Grunddaten der untersuchten Platte . . . . .	36
4.3	Eigenwertprobleme von Platten . . . . .	37
4.4	Gelenkig gelagerte Platte . . . . .	37
4.5	Oben und unten gelenkig gelagerte, seitlich eingespannte Platte . . . . .	41
4.6	Oben und unten eingespannte und seitlich gelenkig gelagerte Platte . . . . .	45
4.7	Voll eingespannte Platte . . . . .	48
4.8	Zusammenfassung . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Einfluss der Konstruktionselemente auf das Schwingungsverhalten des Stegblechs</b>	<b>51</b>
5.1	Aufbau der Gurte und Stegaussteifungen . . . . .	51
5.1.1	Gurte . . . . .	51
5.1.2	Stegaussteifungen . . . . .	52
5.2	Einfluss der Diskretisierung der Gurte . . . . .	53
5.2.1	Lagerungsbedingung . . . . .	55
5.2.2	Vergleich des Scheibenmodells mit Stabmodell Typ 1 . . . . .	57
5.2.3	Vergleich des Scheibenmodells mit Stabmodell Typ 2 . . . . .	59
5.2.4	Zusammenfassung . . . . .	60
5.3	Diskretisierung der Stegaussteifung . . . . .	60
5.4	Vergleich von einem mit drei Blechfelder . . . . .	61
5.5	Einfluss der Lagerungsbedingung am Rand bei 3 Felder . . . . .	63
5.5.1	Filterung der Eigenformen und Eigenfrequenzen . . . . .	64
5.5.2	Vergleich anhand Eigenfrequenzen . . . . .	64
5.5.3	Vergleich anhand ausgewählter Eigenformen . . . . .	65
5.5.4	Zusammenfassung . . . . .	67
5.6	Vergleich von drei mit fünf Blechfelder . . . . .	67
5.6.1	Filterung der Eigenfrequenzen und Eigenformen . . . . .	67
5.6.2	Gegenüberstellung der Eigenfrequenzen . . . . .	67

---

5.6.3	Vergleich der Eigenformen . . . . .	68
5.7	Vergleich mit Ergebnissen der experimentellen modalen Analyse . . . . .	70
5.7.1	Dämpfung . . . . .	72
5.7.2	Vergleich der Berechnung mit der experimentellen modalen Analyse . . . . .	73
5.7.3	Zusammenfassung . . . . .	78
5.8	Einfluss der Größe der Finiten Elemente auf die Rechendauer . . . . .	78
5.9	Zusammenfassung . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>80</b>

# Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

## Abkürzungen

FE	Finite Elemente
FEM	Finite Elemente Methoden
EMA	experimentelle modale Analyse
OG	Obergurt
UG	Untergurt
SOK	Schienenoberkante
Versch. a. d. E.	Verschiebung aus der Ebene
lfm	laufender Meter

## Symbole

$m$	Masse
$c$	geschwindigkeitsproportionale Dämpfung
$k$	Federsteifigkeit
$c_{cr}$	kritisches Dämpfung
$\zeta$	Lehr'sches Dämpfungsmaß
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$\mathbf{C}$	Dämpfungsmatrix
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\Phi$	Modale Matrix
$\varphi$	Eigenvektor
$\emptyset$	Nullvektor
$\mathbf{f}(t)$	Vektor der äußeren Kräfte
$\mathbf{x}(t)$	Vektor der Lagekoordinate
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Geschwindigkeitsvektor
$\ddot{\mathbf{x}}(t)$	Beschleunigungsvektor
$E$	Elasizitätsmodul
$\nu$	Querdehnungszahl
$B$	Biegesteifigkeit einer isotropen Platte
$m'$	flächenbezogene Masse
$h$	Dicke einer Platte
$a, b$	Abmessungen einer Rechteckplatte
$\nabla^2$	Laplace-Operator
$w(x, y)$	Funktion der Durchbiegung
$A$	Querschnittsfläche
$A_{yy}, A_{zz}$	Flächenträgheitsmomente
$I_D$	Torsionsträgheitsmoment

$T$	Periodendauer
$\omega$	Kreisfrequenz
$\omega_0$	Eigenkreisfrequenz ungedämpft
$\omega_D$	Eigenkreisfrequenz gedämpft
$f$	Frequenz
$f_{\text{ex}}$	exakte Eigenfrequenz nach Kirchhoff'scher Plattentheorie
$f_{\text{FE}}$	Eigenfrequenz berechnet über FEM
$f_m$	Oktav- und Terzbandmittenfrequenz
$f_u$	untere Grenzfrequenz für Oktav- und Terzbänder
$f_o$	obere Grenzfrequenz für Oktav- und Terzbänder
$L_{\text{A,eq}}$	A-bewerteter energieäquivalenter Dauerschallpegel
$L_{\text{W}}$	Schalleistungspegel
$L'_{\text{W}}$	längenbezogener Schalleistungspegel
$L_{\text{v}}$	Schallschnellepegel
$L_{\text{p}}$	Schalldruckpegel
$P_0$	Bezugsschalleistung
$v_0$	Bezugsschallschnelle
$p_0$	Bezugsschalldruck
$W'_0$	längenbezogene Bezugsschalleistung
$I_0$	Bezugsschallintensität
$P$	Schalleistung
$I$	Schallintensität
$W'$	längenbezogene Schalleistung
$E_{\text{ges}}$	gesamte akustische Energie
$E_{\text{kin}}$	kinetische Energie
$E_{\text{pot}}$	potentielle Energie
$e$	Energiedichte
$\rho_0$	Luftdichte
$c_0$	Schallausbreitungsgeschwindigkeit in der Luft
$\sigma$	Abstrahlgrad
$f_c$	Koinzidenzgrenzfrequenz
$v_{\text{RMS}}$	Effektivwert der Geschwindigkeit
$v(t)$	zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeit
$v_{\text{A}}$	Amplitude der Geschwindigkeit für reine Töne
$p(t)$	zeitlicher Verlauf des Schalldrucks
$Z$	Impedanz
FFT( $x$ )	schnelle Fouriertransformierte von $x$

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation der Arbeit

Der Schall, welcher durch die Fahrt eines Zuges entsteht, kann in unterschiedliche Schallquellen aufgeteilt werden. Zunächst kann man unterteilen in Schall, welcher von Bauteilen abgestrahlt wird (Körperschallabstrahlung) und jenem Schall welcher durch den Luftfluss um den Zug entsteht. Die Körperschallabstrahlung kann weiter unterteilt werden. Die Rollgeräusche entstehen durch das Abrollen des Rads auf der Schiene. Eine weitere Lärmquelle stellt die Kurvenfahrt dar. Das sogenannte Kurvenquietschen wird mit dem in Resonanz schwingenden Rad in Verbindung gebracht [26]. Fährt ein Zug über eine Brücke, so entsteht meist mehr Lärm als auf offener Strecke [26]. Ein Anstieg des Lärmpegels kommt bei einer Brückenüberfahrt vor allem im tieffrequenten Bereich vor, weshalb auch vom Brückendröhnen gesprochen wird. Andere Körperschallquellen stellen beispielsweise noch Bodenvibrationen oder der Antrieb des Zuges dar. In dieser Arbeit wird speziell das Brückendröhnen behandelt. Die Berechnungen beziehen sich auf eine Stahlbrücke, die Ostbahnbrücke in Wien. Die Besonderheit dieser Brücke liegt darin, dass kein Schotterbett vorhanden ist. Die Schwellen sind direkt auf dem Tragwerk befestigt. In [26] wird eine Erhöhung des Lärmpegels von bis zu 16 dB gegenüber der freien Strecke für diese Art von Brücken angegeben. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf dem Stegblech, da dieses, wenn es in Schwingung versetzt wird, als große schallabstrahlende Fläche angesehen werden kann. Anhand der vorliegenden Messdaten [9] wird versucht, dass Schwingungsverhalten in einer gängigen Software über ein vereinfachtes Modell nachzubilden.

### 1.2 Stand der Technik

In Österreich und in der Europäischen Union existieren unterschiedliche Richtlinien und Regelwerke, welche den Einfluss der Schallemissionen von Eisenbahnbrücken bei einer Zugüberfahrt erfassen. Derzeit wird keine Berechnung einer Schalleistung durchgeführt. Es kommt hingegen zur Vereinfachung ein Zuschlag, welcher von verschiedenen Faktoren abhängt, zum Tragen.

#### 1.2.1 Situation in Österreich

Bei Beton- oder Stahlbrücken mit durchgehendem Schotterbett ist eine Erhöhung des Schallpegels um 3 dB gegenüber der freien Strecke anzunehmen. Dies gilt auch für Bahnübergänge. Für Gleise auf Stahlbrücken mit offener Fahrbahn und ohne Schotterbett wird die Durchführung von Messungen empfohlen [18].



### 1.2.2 Situation in der Europäischen Union

Ziel der EU-Richtlinie 2015/996 [21] ist eine Vereinheitlichung der Lärmbewertung innerhalb der Europäischen Union. Für Eisenbahnlärm wird ein Korrekturwert für die Abstrahlung von Brücken und Viadukte verwendet. Dabei wird ein Anstieg der Rollgeräusche bei einer Zugüberfahrt über einen Zuschlag berücksichtigt, um dem Brückendröhnen Rechnung zu tragen. Der Zuschlag bewegt sich dabei zwischen 0 und 9 dB und wird auf dem Schalleistungspegel der Rollgeräusche aufgeschlagen. Der gesamte Schalleistungspegel soll die Rollgeräusche und das Brückendröhnen erfassen.

## 1.3 Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen angeführt. Dabei wird im Speziellen auf den Einmasseschwinger und Mehrmassenschwinger eingegangen, sowie die Grundlagen der Akustik und Schallabstrahlung behandelt. In Kapitel 3 wird der Aufbau der Ostbahnbrücke in Wien erläutert und die vorliegenden Messergebnisse [9] präsentiert. Anhand der Messdaten wird abgeschätzt, welche Bauteile der Brücke maßgebend an der Schallabstrahlung beteiligt sind. Um die Qualität der Ergebnisse einer FE Berechnung sicherzustellen, wird in Kapitel 4 eine Konvergenzstudie durchgeführt. Dabei werden die Eigenfrequenzen einer Rechteckplatte aus einer FE Berechnung mit der Lösung nach der Kirchhoff'schen Plattentheorie [11] verglichen. In Kapitel 5 wird die Rechteckplatte um weitere Konstruktionselemente, wie Stegaussteifungen, Ober- und Untergurt ergänzt. Dabei wird auch untersucht, wie sich unterschiedliche Modellierungen in der Software auf die Eigenfrequenzen auswirken. Das Einfeldmodell wird weiter ausgebaut zu einem Drei- und einem Fünffeldmodell. Durch einen Vergleich mit Messdaten kann die Qualität der FE Berechnung ermittelt werden. Die erforderliche Feldanzahl wird anhand der Untersuchungen abgeschätzt und in Kapitel 6 ein Modell präsentiert, welches für weitere Untersuchungen herangezogen werden kann.

# Kapitel 2

## Grundlagen

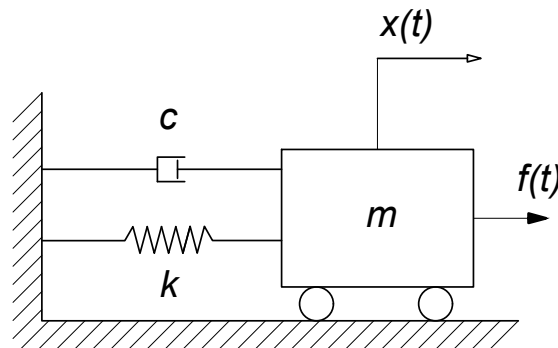
### 2.1 Baudynamische Grundlagen

In den nachfolgenden Absätzen wird eine kurze Einführung in die Baudynamik, speziell zu Ein- und Mehrmassenschwingern gegeben. Hierbei wird auf eine umfangreiche Literatur [5, 6, 14, 19, 29, 30] verwiesen.

#### 2.1.1 Einmassenschwinger

Die Bewegungsgleichung für einen linearen, geschwindigkeitsproportional gedämpften Einmassenschwinger zufolge Kraftanregung lautet [19, 30]:

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = f(t) \quad (2.1)$$



**Abb. 2.1:** Gedämpfter Einmassenschwinger mit äußerer Kraftanregung.

Dabei ist  $m$  die Masse,  $c$  die Dämpfungskonstante,  $k$  die Federsteifigkeit und  $f(t)$  die äußere Krafteinwirkung.  $x(t)$  ist die Lagekoordinate des System,  $\dot{x}(t)$  die Geschwindigkeit und  $\ddot{x}(t)$  die Beschleunigung. Abb. 2.1 zeigt einen gedämpften Einmassenschwinger mit äußerer Krafteinwirkung. Die Dämpfung  $c$  ist dafür verantwortlich, dass eine Schwingung in einem System wieder abklingt. Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich aus einem homogenen Anteil  $x_h(t)$  und einem partikulären Anteil  $x_p(t)$  zusammen [19, 30].

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.2)$$

Für die Lösung des homogenen Teils wird die rechte Seite von Gl. (2.1) zu Null gesetzt. Ist  $f(t) = 0$  so spricht man von freier Schwingung, da nach einer anfänglichen Auslenkung oder Geschwindigkeit keine äußere Kraft mehr auf das System einwirkt [19, 30].

$$m \ddot{x}(t) + c \dot{x}(t) + k x(t) = 0 \quad (2.3)$$

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad (2.4)$$

Der exponentielle Ansatz in Gl. (2.4) erfüllt die Differentialgleichung (2.3) und liefert, eingesetzt in Gl. (2.3), die nachfolgende charakteristische Gleichung zur Bestimmung von  $\lambda$ :

$$m \lambda^2 + c \lambda + k = 0 \quad (2.5)$$

Die quadratische Gleichung liefert die zwei Nullstellen  $\lambda_{1,2}$ :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m} \sqrt{c^2 - 4mk} \quad (2.6)$$

Von besonderem Interesse ist hierbei der Wurzelausdruck. Ist  $c^2 - 4mk > 0$ , so erhält man für  $\lambda$  zwei negative reelle Zahlen. In diesem Fall existiert kein schwingfähiges System [5]. Ist  $c^2 - 4mk = 0$ , so spricht man vom aperiodischen Grenzfall [14]. Diese Beziehung wird genutzt um die kritische Dämpfung Gl. (2.7) zu definieren [5, 14]. Hier liegt gerade noch kein schwingfähiges System vor (darum auch die Bezeichnung des Grenzfalls). Das Lehr'sche Dämpfungsmaß  $\zeta$  gibt das Verhältnis von der vorhandenen Dämpfung zur kritischen Dämpfung an Gl. (2.7) [5, 14].

$$c_{\text{cr}} = \sqrt{4mk} \quad \zeta = \frac{c}{c_{\text{cr}}} \quad (2.7)$$

Ist  $c^2 - 4mk < 0$  und setzt man  $\omega_{\text{D}} = \frac{1}{2m} \sqrt{4mk - c^2}$  erhält man die beiden komplexen Nullstellen der charakteristischen Gleichung:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\omega_{\text{D}} \quad (2.8)$$

Setzt man nun die beiden Lösungen in den Ansatz Gl. (2.4) ein, erhält man unter der Berücksichtigung des Superpositionsprinzips:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \left( c_1 e^{i\omega_{\text{D}}t} + c_2 e^{-i\omega_{\text{D}}t} \right) \quad (2.9)$$

Nutzt man die Euler'sche Beziehung  $e^{i\omega_{\text{D}}t} = \cos(\omega_{\text{D}}t) + i \sin(\omega_{\text{D}}t)$  aus und berücksichtigt, dass Real- und Imaginärteil Lösungen sind, kann die Lösung für die gedämpfte Schwingung angeschrieben werden zu [5] :

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} (A \cos(\omega_{\text{D}}t) + B \sin(\omega_{\text{D}}t)) \quad (2.10)$$

Man erkennt, dass das System mit der gedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega_{\text{D}}$  schwingt. Die Konstanten  $A$  und  $B$  können aus den Anfangsbedingungen  $x(t=0)$  und  $\dot{x}(t=0)$  ermittelt werden. Ist die Dämpfung  $c = 0$  gelangt man zur Lösung des ungedämpften Systems Gl. (2.11). Die Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  des ungedämpften Systems ergibt sich dadurch unmittelbar [5, 19, 30].

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (2.11)$$

Die Partikulärlösung  $x_p$  ist abhängig von der Art der Anregung. In weiterer Folge ist nur eine harmonische Kraftanregung Gl. (2.12) von Interesse.

$$f(t) = p_0 \sin(\omega t) \quad (2.12)$$

Die Partikulärlösung zu dieser Anregung ist in Gl. (2.13) angeführt, wobei die Konstanten  $C$ ,  $D$  von der Erregerkreisfrequenz  $\omega$ , der Erregeramplitude  $p_0$ , der Dämpfung, der Steifigkeit und der Eigenkreisfrequenz abhängen.

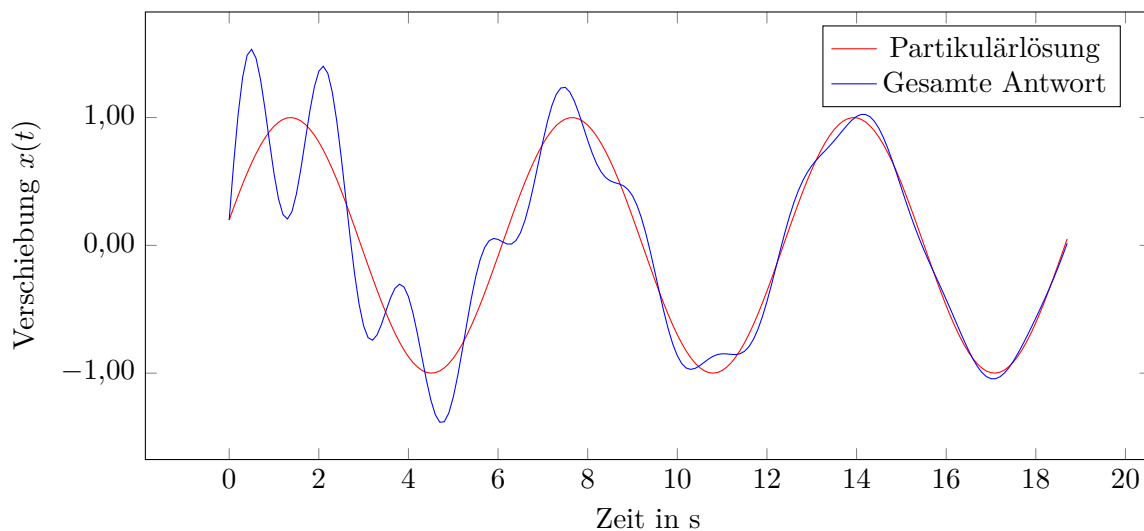
$$x_p(t) = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \quad (2.13)$$

Nach Auffinden von  $C$  und  $D$  können die Konstanten  $A$  und  $B$  bestimmt werden. Die Gesamtantwort eines geschwindigkeitsproportional gedämpften Einmasseschwingers mit äußerer harmonischer Kraftanregung kann zusammengefasst werden zu:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (2.14)$$

$$= e^{-\frac{c}{2m} t} (A \cos(\omega_D t) + B \sin(\omega_D t)) + C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t) \quad (2.15)$$

Abb. 2.2 zeigt eine mögliche Antwort eines gedämpften Einmasseschwingers, wenn dieser einer harmonischen Anregung ausgesetzt wird. Die Schwingung gleicht sich mit der Zeit an die Erregerschwingung an. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom eingeschwungenen Zustand.



**Abb. 2.2:** Antwort eines gedämpften Einmasseschwingers aufgrund einer harmonischen Anregung.

### 2.1.2 Mehrmassenschwinger

Zunächst wird ein diskretisiertes ungedämpftes, elastisches Mehrfreiheitsgradsystem betrachtet. Die Bewegungsgleichung für die freie Schwingung lautet [5, 6]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

In Gl. (2.16) ist  $\mathbf{M}$  die Massenmatrix,  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{x}(t)$  der Vektor der Lagekoordinate,  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  deren zweifache zeitliche Ableitung und  $\mathbf{0}$  ein Nullvektor.  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  können beispielsweise aus einem FE Modell ermittelt werden.  $\mathbf{x}(t)$  wird in einen zeitunabhängigen Anteil  $\varphi$  und in einen zeitabhängigen Anteil, wobei der Exponentialansatz  $e^{i\omega t}$  gewählt wird, zerlegt. Dieser Ansatz genügt der Differentialgleichung.

$$\mathbf{x}(t) = \varphi e^{i\omega t} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = i\omega \varphi e^{i\omega t} \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega^2 \varphi e^{i\omega t} \quad (2.17)$$

Setzt man die Gl. (2.17) in das Differentialgleichungssystem Gl. (2.16) ein, so erhält man nachfolgendes Gleichungssystem.

$$-\omega^2 \mathbf{M}\varphi e^{i\omega t} + \mathbf{K}\varphi e^{i\omega t} = \mathbf{0} \quad (2.18)$$

Dividiert man durch  $e^{i\omega t}$  und formt um, erhält man:

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\right) \varphi = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Die Gl. (2.19) stellt ein Eigenwertproblem dar und bietet zwei Lösungsmöglichkeiten. Die erste ist die triviale Lösung  $\varphi = 0$ . Für die zweite Lösung muss die Determinante des Klammerausdrucks in Gl. (2.19) verschwinden.

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (2.20)$$

Die Gl. (2.20) führt bei  $n$  Freiheitsgraden auf eine charakteristische Gleichung  $n$ -ten Grades in  $\omega^2$ . Es können  $n$  verschiedene Eigenwerte  $\omega_k^2$  und Eigenkreisfrequenzen  $\omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  bestimmt werden. Zu jeder Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  korrespondiert ein Eigenvektor  $\varphi_k$ . Somit ergibt sich die Lösung von Gl. (2.16) aus Linearkombination von Ansatzfunktionen Gl. (2.17).

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k e^{i\omega_k t} \quad (2.21)$$

### 2.1.3 Modalanalyse

Ziel der Modalen Analyse ist eine Entkopplung des Gleichungssystems. Dadurch kann ein Mehrmassenschwinger in ein System von modalen Einmasseschwingern übergeführt werden. Durch diese Transformation können die Vorteile des Einmasseschwingers ausgenutzt werden. Die einzelnen Lösungen  $\mathbf{x}_k(t) = \varphi_k q_k(t)$  können zur Gesamtlösung  $\mathbf{x}(t)$  zusammengefasst werden, wobei  $q_k(t) = e^{i\omega_k t}$  ist. Dabei werden auch die einzelnen Eigenvektoren  $\varphi_k$  als Spaltenvektoren zusammengefasst zur modalen Matrix  $\Phi$ .

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k(t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k q_k(t) = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N] \mathbf{q}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (2.22)$$

Nun kann ein Übergang auf modale Koordinaten stattfinden. Dazu wird die Gesamtlösung von  $\mathbf{x}(t)$  Gl. (2.22) in die Bewegungsgleichung des ungedämpften Mehrmassenschwingers mit äußerer Krafteinwirkung  $\mathbf{f}(t)$  eingesetzt und mit  $\Phi^T$  von links multipliziert:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.23)$$

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t) \quad (2.24)$$

Da die modale Matrix  $\Phi$  orthogonal bezüglich  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  ist [5], führen die Matrixmultiplikationen  $\Phi^T \mathbf{M} \Phi$ , und  $\Phi^T \mathbf{K} \Phi$  auf diagonale Matrizen  $\mathbf{M}^*$ ,  $\mathbf{K}^*$  Gl. (2.25).

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{M}^* \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{K}^* \quad (2.25)$$

Das Differentialgleichungssystem kann nun laut Gl. (2.26) angeschrieben werden, wobei  $\Phi^T \mathbf{f}(t)$  zusammengefasst wurde zu  $\mathbf{g}(t)$ .

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t) \quad (2.26)$$

Das Gleichungssystem ist nun aufgrund der Diagonalgestalt der Matrizen entkoppelt und so kann jede Zeile des Gleichungssystem als Einmassenschwinger betrachtet werden.

$$m_k \ddot{q}_k(t) + k_k q_k(t) = g_k(t) \quad (2.27)$$

### 2.1.4 Dämpfung

Um eine Dämpfung in einem Mehrmassenschwingersystem zu berücksichtigen, können unterschiedliche Modelle zur Anwendung kommen. Eine modale Dämpfung [5] kann für jeden modalen Einmassenschwinger Gl. (2.28) berücksichtigt werden.

$$m_k \ddot{q}_k(t) + c_k \dot{q}_k(t) + k_k q_k(t) = g_k(t) \quad (2.28)$$

Ein weiteres Dämpfungsmodell ist die Rayleighdämpfung. Da  $\Phi$  orthogonal bezüglich  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  ist, wird eine Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  aus Linearkombination von  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  eingeführt [5].

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.29)$$

Die Multiplikation von  $\Phi^T \mathbf{C} \Phi$  führt bei der Rayleighdämpfung auch auf eine Diagonalmatrix  $\mathbf{C}^*$ .

## 2.2 Akustik und Schallabstrahlung

### 2.2.1 Einteilung in Terz- und Oktavbänder

In der Akustik ist es üblich Frequenzspektren zu sogenannten Bändern zusammenzufassen. Dabei kann eine Einteilung in Terzbänder oder Oktavbänder erfolgen. Bei Oktavbändern ist das Verhältnis von der unteren Frequenz  $f_u$  zur oberen  $f_o$  gleich  $1 : 10^{3/10} \approx 1 : 2$  [17]. Die Bezeichnung der Bänder erfolgt über ihre nominelle (gerundete) Mittenfrequenz  $f_m$ . Ein Oktavband kann in 3 Terzbänder unterteilt werden. Die Grenzfrequenzen eines Terzbandes stehen im Verhältnis

$1 : 10^{1/10} \approx 1 : 1,26$  [17]. Die gerundeten Grenzfrequenzen für ausgewählte Terz- und Oktavbänder sind in den Tabellen 2.1 und 2.2 angeführt.

Terzband $f_m/\text{Hz}$	$f_u/\text{Hz}$	$f_o/\text{Hz}$	Terzband $f_m/\text{Hz}$	$f_u/\text{Hz}$	$f_o/\text{Hz}$
1260	1122	1413	160	141	178
1000	891	1122	125	112	141
800	708	891	100	89	112
630	562	708	80	71	89
500	447	562	63	56	71
400	355	447	50	45	56
315	282	355	40	35	45
250	224	282	31,5	28	35
200	178	224	25	22	28

**Tab. 2.1:** Einteilung in Terzbänder [17].

Oktavband $f_m/\text{Hz}$	$f_u/\text{Hz}$	$f_o/\text{Hz}$
1000	708	1413
500	355	708
250	178	355
125	89	178
63	45	89
31,5	22	45

**Tab. 2.2:** Einteilung in Oktavbänder [17].

### 2.2.2 Schalleistung und Schallenergie

Die in einem diskreten Volumen  $V$  gespeicherte akustische Energie  $E_{\text{ges}}$  setzt sich aus zwei Anteilen, der kinetischen  $E_{\text{kin}}$  und der potentiellen Energie  $E_{\text{pot}}$ , zusammen [16].

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad (2.30)$$

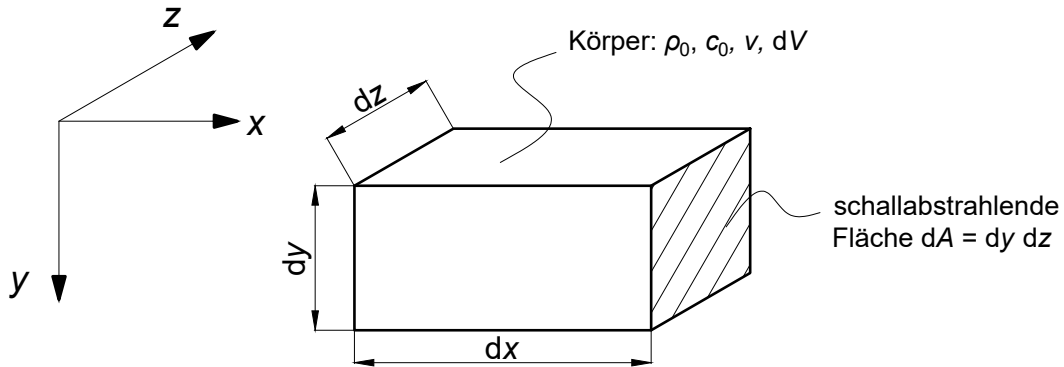
Die kinetische und potentielle Energie des Volumens können über die Energiedichte der einzelnen kleinen Volumina  $dV$  aufintegriert werden.

$$E_{\text{kin}} = \int_V \frac{1}{2} \rho_0 v^2 dV \quad (2.31)$$

$$E_{\text{pot}} = \int_V \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} dV \quad (2.32)$$

Dabei ist  $v$  die Schallschnelle,  $p$  der Schalldruck,  $\rho_0$  die Dichte und  $c_0$  die Schallausbreitungsgeschwindigkeit des Mediums. Für jedes kleine Volumina  $dV$  kann man die gesamte Energiedichte  $e$  aus der potentiellen Energiedichte  $e_{\text{pot}}$  und der kinetischen Energiedichte  $e_{\text{kin}}$  zusammenfassen:

$$e = e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \left( \rho_0 v^2 + \frac{p^2}{\rho_0 c_0^2} \right) \quad (2.33)$$



**Abb. 2.3:** Gasvolumen  $dV$  mit eindimensionaler Ausbreitung der Schallwelle in  $x$ -Richtung über die Fläche  $dA = dy dz$

Es ist zweckmäßig, die transportierte Schalleistung  $P$  über die Fläche  $A$ , durch welche die Leistung hindurchtritt und der Schalleistungs-Flächendichte, auch Intensität  $I$  genannt, zu beschreiben [16]. Setzt man eine eindimensionale Ausbreitung der Schallwelle voraus und nützt man den Zusammenhang zwischen Leistung und Energie  $P = \frac{d}{dt} E$  aus, so erhält man:

$$P = I A = \frac{d}{dt} E \quad (2.34)$$

Pflanzt sich die Schallwelle eindimensional in  $x$ -Richtung (Abb. 2.3) fort, kann die Schalleistung  $dP$  an der Fläche  $dA$  über die Veränderung der Energiedichte im Körper  $dV$  berechnet werden.

$$dP = \frac{d}{dt} e dV = I dA \quad (2.35)$$

$$= \frac{d}{dt} e dx dy dz = I dy dz \quad (2.36)$$

Schließlich gelangt man für den eindimensionalen Fall zur nachfolgenden Gleichung:

$$\frac{d}{dt} e = \frac{d}{dx} I \quad (2.37)$$

Setzt man den Ausdruck für die Energiedichte Gl. (2.33) in Gl. (2.37) ein, kann  $I$  nach Integration für den eindimensionalen Fall angeschrieben werden zu:

$$I(t) = p(t) v(t) \quad (2.38)$$



Für fortschreitende Wellen (im Gegensatz zu stehenden Wellen) stehen Schalldruck und Schallschnelle in einem konstanten, orts- und zeitunabhängigen Verhältnis [16]. Dieses wird über den Wellenwiderstand (auch Kennwiderstand oder Impedanz)  $Z = \rho_0 c_0$  beschrieben .

$$p(x,t) = v(x,t) Z \quad (2.39)$$

Nützt man diese Bedingung im Ausdruck für die Intensität Gl. (2.38) aus, so erhält man:

$$I(t) = \rho_0 c_0 v(t)^2 \quad (2.40)$$

Der zeitliche Verlauf interessiert meist nicht, es wird hingegen mit zeitlichen Mittelwerten gerechnet. Die zeitlich gemittelte Intensität  $\hat{I}$  ergibt sich zu:

$$\hat{I} = \frac{1}{T} \int_T I(t) dt \quad (2.41)$$

Für reine Töne (harmonische Schwingungen) kann der Effektivwert (Root Mean Square) der Geschwindigkeit  $v_{\text{RMS}}$  einfach über den Amplitudenwert  $v_A$  der Sinusschwingung berechnet werden:

$$v_{\text{RMS}} = \frac{v_A}{\sqrt{2}} \quad (2.42)$$

Die zeitlich gemittelte Intensität kann umgeformt werden zu:

$$\hat{I} = \frac{1}{2} \rho_0 c_0 v_A^2 \quad (2.43)$$

### 2.2.3 Pegel

Das menschliche Gehör kann über einen großen Wertebereich Schalldrücke wahrnehmen. Die Spanne reicht dabei von  $2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$  (Hörschwelle) bis  $200 \text{ N/m}^2$  (Schmerzgrenze) [16]. Aus diesem Grund wird in der Akustik mit einer logarithmischen Größe, dem Pegel, gearbeitet. Der Schalldruck wird dabei zu einer Bezugsgröße  $p_0$  gesetzt. Dieser Bezugsschalldruck stellt die Hörschwelle dar. Der Schalldruckpegel  $L_p$  wird berechnet über Gl. (2.44), wobei  $p_0 = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}$  ist.

$$L_p = 20 \lg \left( \frac{p}{p_0} \right) \quad (2.44)$$

Der Bezugsschalldruck kann mithilfe der Gl. (2.34), (2.38) und (2.39) in andere Bezugsgrößen umgerechnet werden. So ist es möglich, einen Leistungspegel und einen Schnellepegel anzugeben. Der Schalleistungspegel  $L_W$  wird berechnet über Gl. (2.45), wobei  $P_0$  die Bezugsschalleistung angibt und  $P_0 = 10^{-12} \text{ W}$  ist.

$$L_W = 10 \lg \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad (2.45)$$

Der Schnellepegel  $L_v$  wird berechnet über Gl. (2.46), wobei  $v_0$  die Bezugsschnelle angibt und  $v_0 = 5 \times 10^{-8} \text{ m/s}$  ist.

$$L_v = 20 \lg \left( \frac{v}{v_0} \right) \quad (2.46)$$

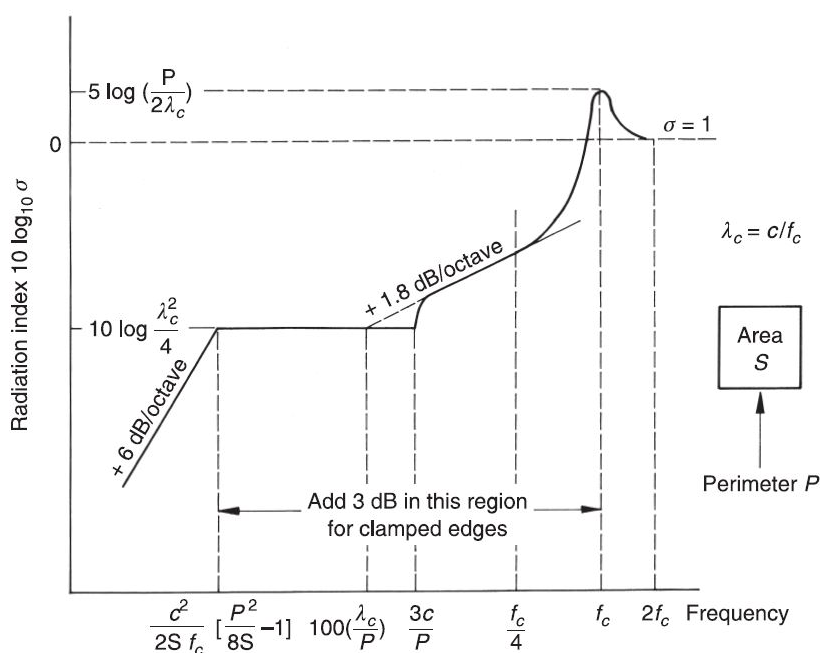
### 2.2.4 Körperschallabstrahlung

Im Falle einer ebenen Fläche, deren Abmessungen wesentlich größer sind als die Wellenlänge im umgebenden Medium ist ein seitliches Ausweichen der Luft nicht möglich; die Schallschnelle der Luft ist also auch außerhalb der unmittelbaren Nachbarschaft der strahlenden Fläche identisch mit der Schnelle der Fläche [15]. Die Schalleistung eines strahlenden Körpers kann demnach sehr einfach berechnet werden. Die Geschwindigkeit der Oberfläche wird der Schallschnelle gleichgesetzt und es kann die Intensität nach Gl. (2.40) einfach berechnet werden. Durch die Integration der Intensität der einzelnen Körperpunkte über die Oberfläche kann die Schalleistung berechnet werden.

### 2.2.5 Abstrahlgrad

Unterhalb der Koinzidenzfrequenz  $f_c$  kann es zu akustischen Kurzschlüssen kommen. Innerhalb der Fläche löschen sich dabei die Geschwindigkeiten bestimmter Bereiche aus und es tragen nur mehr die Randbereiche wesentlich zur Schallabstrahlung bei [8, 15, 27]. Um diesen Einfluss bei der Berechnung der Schalleistung zu berücksichtigen, wird ein Faktor, der sogenannte Abstrahlgrad  $\sigma$  verwendet. Dieser hängt im Wesentlichen von der Geometrie und den Steifigkeitseigenschaften der Platte, sowie der Schallausbreitungsgeschwindigkeit  $c_0$  ab. Er kann näherungsweise über die genannten Parameter berechnet werden, wobei hier auf die Literatur verwiesen wird [8, 15, 27]. In Abb. 2.4 ist ein exemplarischer Verlauf des Abstrahlgrades in Abhängigkeit der Frequenz dargestellt. Unterhalb von  $f_c$  kommt es zu einer Abminderung der Abstrahlung. Die Berechnung von  $f_c$  erfolgt über Gl. (2.47), wobei  $m'$  die flächenbezogene Masse und  $B$  die Biegesteifigkeit der Platte ist.

$$f_c = \frac{c_0^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m'}{B}} \quad (2.47)$$



**Abb. 2.4:** Exemplarischer Verlauf des Abstrahlgrades in Abhängigkeit der Frequenz (Bild entnommen aus [8] )

Um der Abstrahlcharakteristik Rechnung zu tragen, wird die Schallleistung  $P$ , welche auf Grundlage der Oberflächengeschwindigkeit des strahlenden Körpers ermittelt werden kann, mit dem Abstrahlgrad  $\sigma$  multipliziert. Man erhält dadurch die abgestrahlte Schallleistung  $P_{\text{rad}}$  :

$$P_{\text{rad}} = P \sigma \quad (2.48)$$

Über die logarithmischen Rechenregeln kann der Einfluss des Abstrahlgrades auf den Schallleistungspegel separiert werden.

$$L_W = 10 \lg \left( \frac{P}{P_0} \right) + 10 \lg (\sigma) \quad (2.49)$$

## Kapitel 3

### Ostbahnbrücke

Die Ostbahnbrücke ist eine zweigleisige Brücke über die Donau in Wien. Sie wurde in den 1930er Jahren errichtet und besteht südlich aus der Strombrücke in Fachwerksbauart und nördlich aus der Flutbrücke, einer Vollwandträgerbrücke. Die Untersuchungen beziehen sich auf die Vollwandträgerbrücke. Es handelt sich dabei um ein Zweifeldsystem mit Stützweiten von je ca. 36 m. Sechs Zweifeldträger mit je ca. 72 m ergeben eine gesamte Länge der Flutbrücke von etwa 440 m. Abb. 3.1 zeigt eine Ansicht der Vollwandträgerbrücke.



Abb. 3.1: Ansicht der Ostbahnbrücke; Abschnitt mit Vollwandträgerbrücke.

#### 3.1 Aufbau der Ostbahnbrücke

Der Querschnitt der Ostbahnbrücke besteht aus zwei Vollwandträgern pro Gleis. Der Obergurt sowie der Untergurt bestehen aus bis zu drei Lamellen, welche mittels Nieten und zwei Winkelprofilen an den Steg angeschlossen sind. Auf einem Abschnitt der Brücke befindet sich ein Bogen. Dadurch ist ein Vollwandträger höher ausgeführt als der andere, damit das Gleis eine Überhöhung erhält. In Längsrichtung der Brücke befinden sich alle 1980 mm Stegaussteifungen, welche mit zwei bis vier Winkelprofilen ausgeführt sind. Die beiden Vollwandträger werden über einen K-Verband im Querschnitt bei jeder zweiten Stegaussteifung verbunden. Abb. 3.3 und Abb. 3.2 zeigen den Querschnitt mit und ohne K-Verband. In Längsrichtung existieren zwei







**Abb. 3.4:** Ansicht der Ostbahnbrücke mit Beschleunigungssensor. Bild aus [9].

### 3.2 Messsetup

Bei einer Zugüberfahrt wird die Konstruktion zum Schwingen angeregt. Das Verhalten kann über Beschleunigungssensoren erfasst werden. Die Messdatenerhebung an der Ostbahnbrücke erfolgte durch psiacoustic Umweltforschung und Engineering GmbH [9]. Abb. 3.4 zeigt einen Beschleunigungssensor am Stegblech. Am Obergurt wurde auch ein Beschleunigungssensor angebracht. Gleichzeitig erfolgte eine Schalldruckmessung in einer Entfernung von 7,5 m auf Höhe der Schienenoberkante (SOK). Das Messsetup ist in Abb. 3.5 dargestellt.

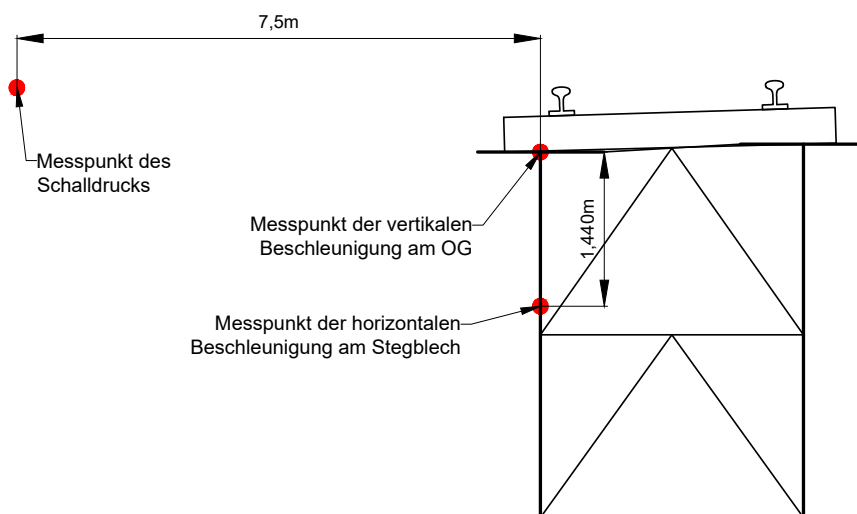


Abb. 3.5: Messsetup: Darstellung der Messpunkte an der Brücke.

### 3.3 Rohmessdaten bei einer Zugüberfahrt

Abb. 3.6 zeigt den gemessenen Schalldruck bei einer Zugüberfahrt in 7,5 m Entfernung. Gleichzeitig zur Schalldruckmessung wurde die Beschleunigung am Stegblech und am Obergurt gemessen. Die Messdaten der Beschleunigungsmessung sind in Abb. 3.7 und 3.8 dargestellt.

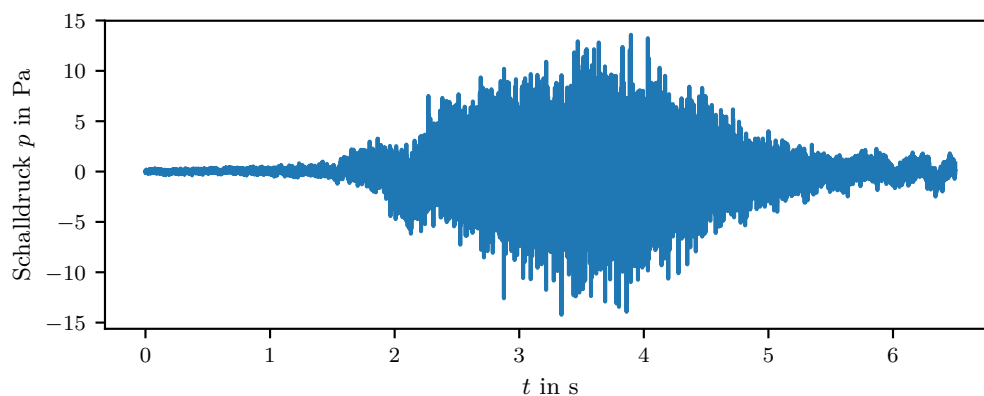


Abb. 3.6: Schalldruckmessung in 7,5 m Entfernung auf Höhe der SOK bei einer Zugüberfahrt.



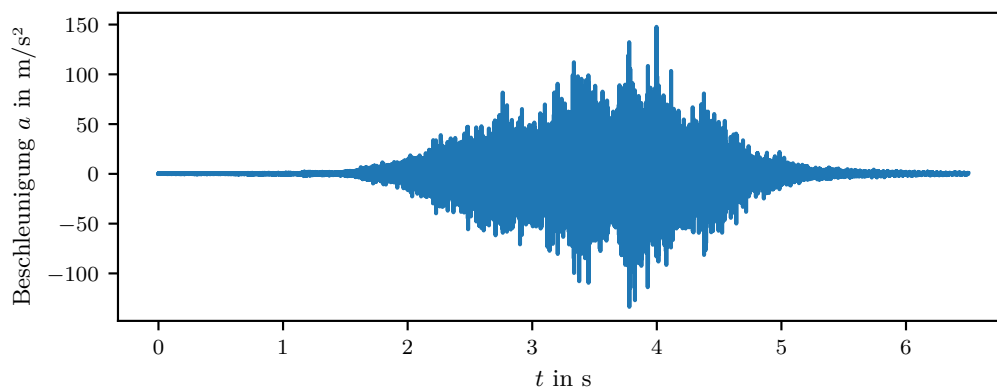


Abb. 3.7: Messung der horizontalen Beschleunigung des Stegblechs bei einer Zugüberfahrt.

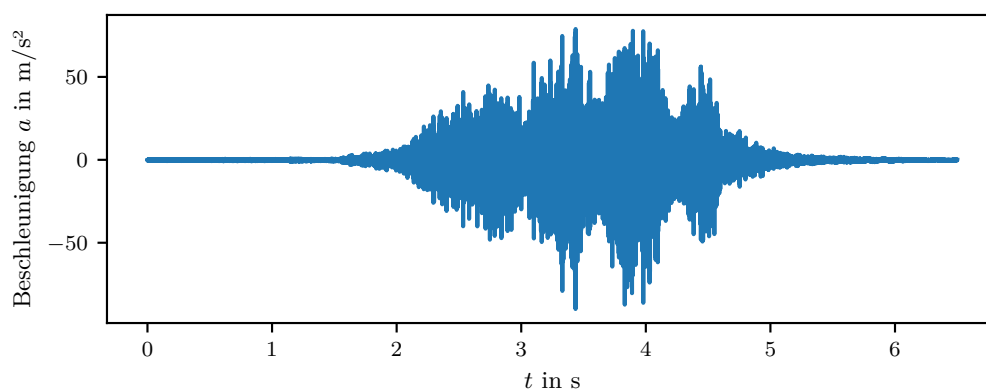
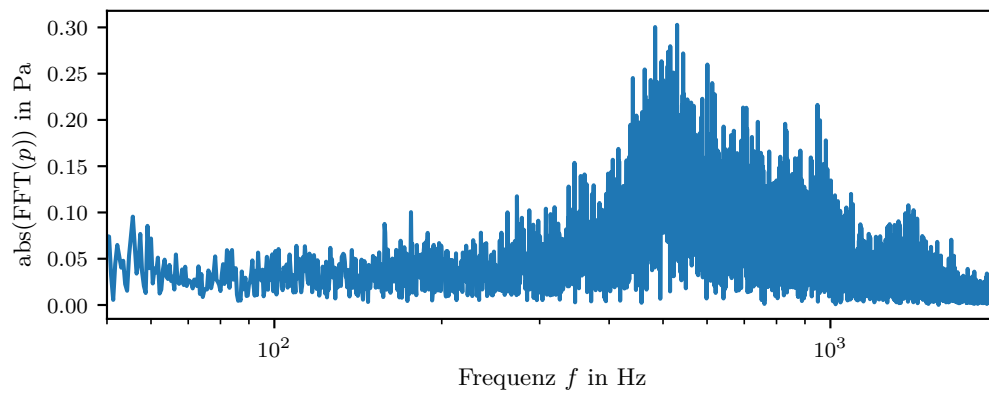


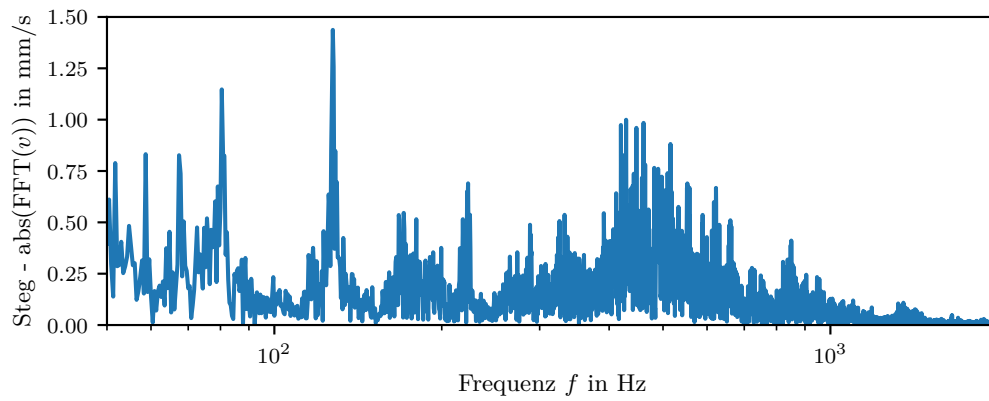
Abb. 3.8: Messung der vertikalen Beschleunigung am Obergurt bei einer Zugüberfahrt.

### 3.4 Transformation der Messdaten in den Frequenzbereich

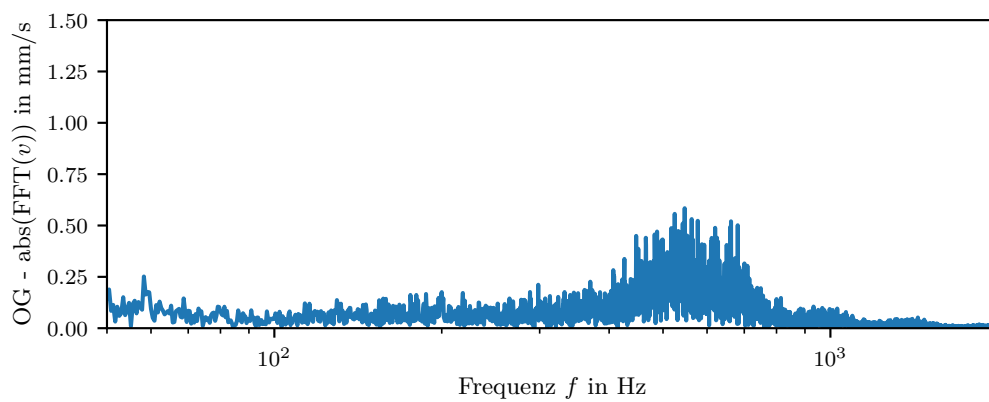
Das Signal der Beschleunigungssensoren und der Schalldruckmessung kann über eine Fouriertransformation in den Frequenzbereich übergeführt werden. Im Frequenzbereich kann die spektrale Geschwindigkeit einfach über  $v = \frac{1}{2\pi f} a$  berechnet werden. Die spektrale Geschwindigkeit wird benötigt um einen Schnellepegel zu errechnen, welcher im Anschluss mit dem Druckpegel verglichen werden kann. In Abb. 3.9 ist die Fouriertransformierte (FFT) der Schalldruckmessung dargestellt. In Abb. 3.10 und 3.11 ist die spektrale Geschwindigkeit der beiden Messpunkte an der Brücke dargestellt. Bei der Betrachtung von Abb. 3.10 fällt auf, dass bis etwa 150 Hz einzelne, gut separierte Spitzen der Beschleunigung auftreten. Anhand dieser Spitzen können Eigenfrequenzen identifiziert werden.



**Abb. 3.9:** Spektraler Schalldruck in 7,5 m Entfernung.



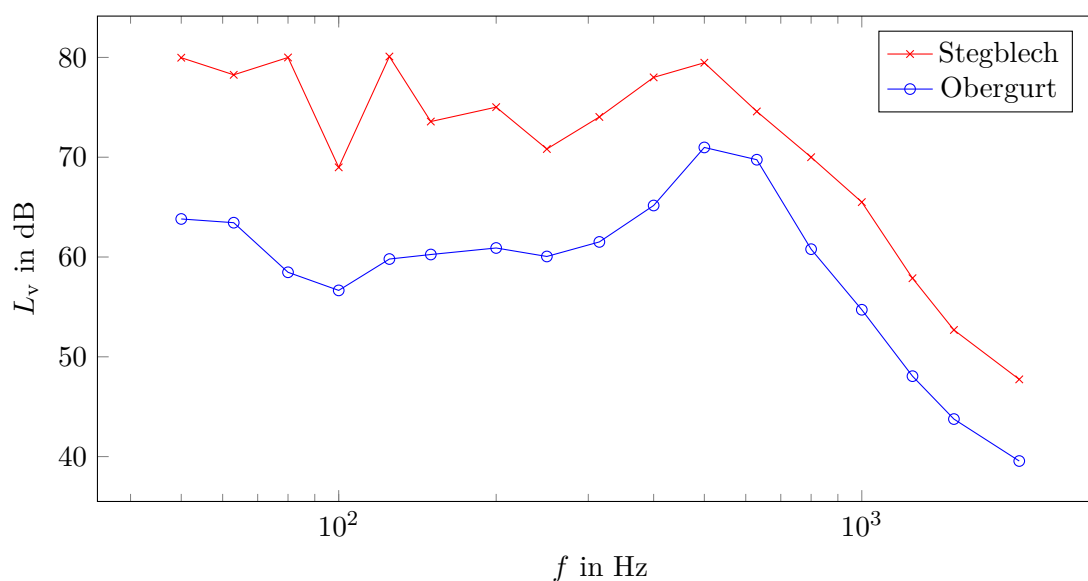
**Abb. 3.10:** Spektrale Geschwindigkeit des Stegblechs.



**Abb. 3.11:** Spektrale Geschwindigkeit des Obergurts.

### 3.5 Umrechnung in Pegel

In Abb. 3.12 ist der Schnellepegel der zwei Messpunkte (OG und Stegblech) aufgetragen. Den Schnellepegel erhält man durch die Anwendung von Gl. (2.46). Dazu wird der spektrale Geschwindigkeitsverlauf (Abb. 3.10 und 3.11) quadriert. Da es sich um Amplitudenwerte einer harmonischen Schwingung handelt, jedoch der zeitlich gemittelte Wert interessiert (Gl. (2.42)), muss noch eine Division mit 2 durchgeführt werden. Die Geschwindigkeitsquadrate werden im Anschluss in den jeweiligen Terzbändern (Tab. 2.1) gemittelt. Nun kann der Schnellepegel der Messpunkte für jede Terzbandmittenfrequenz angegeben werden.

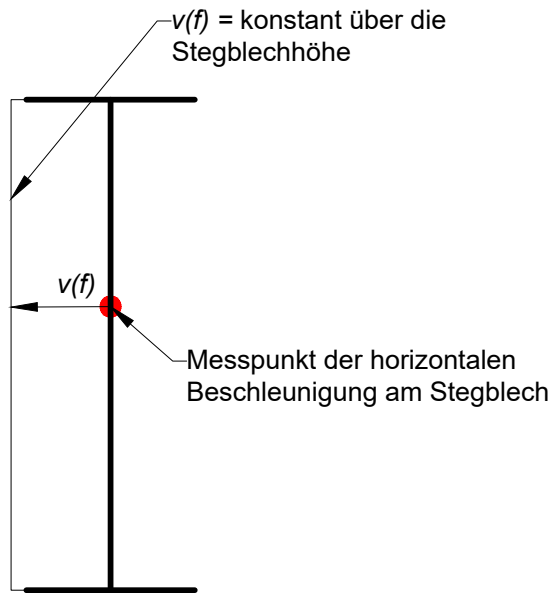


**Abb. 3.12:** Schnellepegel  $L_v$  errechnet aus Beschleunigungsmessungen am Stegblech und am Obergurt.

Bei der Betrachtung von Abb. 3.12 sei angemerkt, dass nur jeweils ein einzelner Punkt erfasst wurde und so nur näherungsweise auf die ganze Struktur geschlossen werden kann. Es kann aber eine gewisse Charakteristik abgelesen werden. Da das Stegblech eine größere Fläche besitzt und der Pegel meist über dem des Obergurts liegt wird das Hauptaugenmerk auf dieses gelegt. Im Bereich zwischen dem 250 Hz und 630 Hz Terzband kommt es zu einem Anstieg des Pegels um etwa 10 dB. Über dem 630 Hz Terzband fällt der Schnellepegel ab. Unterhalb des 250 Hz Terzband springt der Schnellepegel des Stegblechs auf und ab. Da die ersten Eigenfrequenzen noch gut separiert sind (vgl. Abb. 3.10), kann dieses Verhalten dadurch erklärt werden, dass bei 100 Hz eine dominante Eigenform am Messpunkt eine geringe Verschiebung und somit auch eine geringe Geschwindigkeit des Stegblechs aus der Ebene besitzt. Dadurch kann der Einbruch (vgl. rote Linie in Abb. 3.12) erklärt werden. Betrachtet man das 80 Hz und 125 Hz Terzband des Stegblechs, so kommt es genau zum gegenteiligen Effekt: Der Messpunkt wird genau an der Stelle mit der maximalen Geschwindigkeit liegen. Umso höher die Frequenz, desto gleichmäßiger wird der Verlauf, da die zu den einzelnen Eigenformen korrespondierenden Eigenfrequenzen nahe zusammenliegen und dadurch die Strukturantwort gleichmäßiger wird.

### 3.5.1 Berechnung des Schalldrucks aufgrund der Stegblechgeschwindigkeit und Vergleich mit Schalldruckmessung

Um abschätzen zu können, ob zwischen dem gemessenen Schalldruckpegel und der Schwingung des Stegblechs ein Zusammenhang besteht, wird der Schnellepegel des Messpunkts am Stegblech auf den Immissionspunkt der Schalldruckmessung umgerechnet. Dazu wird angenommen, dass die spektrale Geschwindigkeit über die Höhe  $H = 3100$  mm des Stegbleches konstant ist (siehe Abb. 3.13).



**Abb. 3.13:** Annahme der konstanten Verteilung der spektralen Geschwindigkeit  $v(f)$  über die Höhe des Stegblechs.

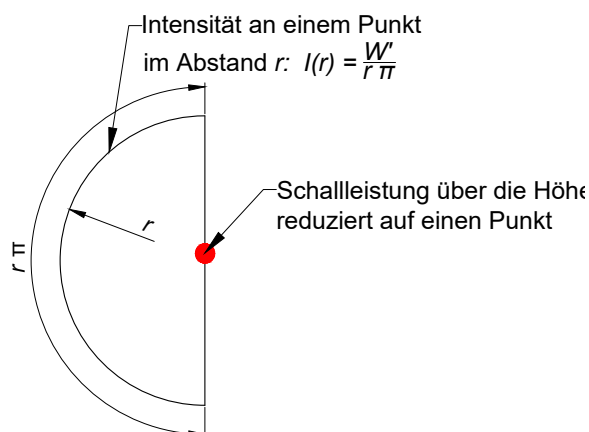
Die längenbezogene Schalleistung  $W'$  des Stegblechs kann nun über die Höhe des Stegblechs und der spektralen Geschwindigkeit berechnet werden (Gl. (3.1)). Da der spektrale Verlauf der Geschwindigkeit  $v(f)$  über die Höhe  $H$  konstant angenommen wird, wird dazu einfach die Intensität  $I$  des Messpunkts mit der Höhe multipliziert (zur Definition von  $I$  siehe Gl. (2.42) und (2.43)).

$$W' = \frac{W}{\text{lfm}} = I H = \rho_0 c_0 v_{\text{RMS}}^2 H \quad (3.1)$$

Der längenbezogene (in Brückenlängsrichtung) Schalleistungspegel  $L'_W$  kann nach Gl. (3.2) berechnet werden. Die längenbezogene Bezugsschalleistung ist dabei  $W'_0 = 10^{-12}$  W/m.

$$L'_W = 10 \log \left( \frac{W'}{W'_0} \right) = 10 \log \left( \frac{\rho_0 c_0 v_{\text{RMS}}^2 H}{W'_0} \right) \quad (3.2)$$

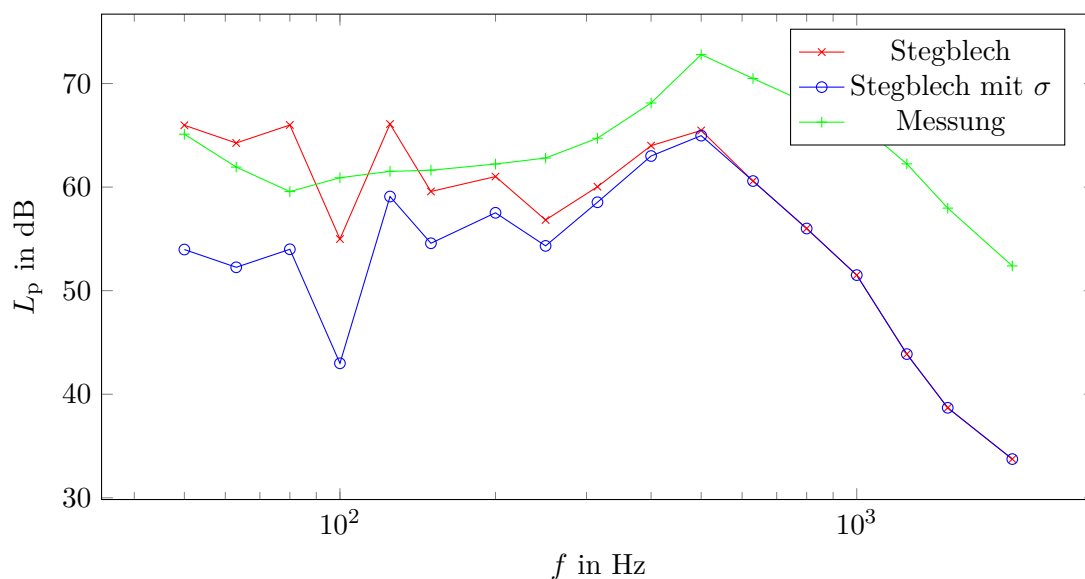
Setzt man eine Linienschallquelle mit halbraumförmiger Ausbreitung voraus, so kann der Schalldruckpegel im Abstand  $r$  von der Quelle nach Gl. (3.3) berechnet werden [16]. Bei dieser Annahme wird die Stegblechhöhe auf einen Punkt reduziert. In Brückenlängsrichtung ergibt sich dadurch die Linienquelle. Diese Annahme wird aus Gründen der Vereinfachung getroffen.



**Abb. 3.14:** Querschnitt einer Linienquelle mit halbraumförmiger Ausbreitung und Berechnung der Intensität im Abstand  $r$ .

$$\begin{aligned}
 L_p(r) &= 10 \log \left( \frac{I(r)}{I_0} \right) &= 10 \log \left( \frac{\frac{W'}{r \pi}}{I_0} \right) &= 10 \log \left( \frac{W'}{I_0} \right) &- 10 \log(r) - 10 \log(\pi) \\
 & & &= L'_W &- 10 \log(r) - 5 \text{ dB} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Der Schalldruckpegel  $L_p$  wurde in 7,5 m horizontaler Entfernung vom Stegblech auf Höhe der SOK gemessen. Für die Berechnung vom Emissionspunkt Stegblech zum Immissionspunkt wird zur Vereinfachung auch dieser Wert verwendet. Der Emissionspunkt bezeichnet dabei die Schallquelle. Der Immissionspunkt bezeichnet den Ort, an welchem die Auswirkung des Schallereignisses durch die Messung erfasst wird. In Abb. 3.15 ist für ausgewählte Terzbänder der Schalldruckpegel aus der Messung aufgetragen. Zusätzlich ist der errechnete Druckpegel vom Stegblech dargestellt. Die Abstrahlcharakteristik wird näherungsweise berücksichtigt. Vergleicht man den Verlauf der Kurven fällt auf, dass ab dem 250 Hz Terzband ein Anstieg des Schalldruckpegels stattfindet. Das Maximum wird beim 500 Hz Terzband erreicht. Über 500 Hz fällt der Pegel bei beiden Verläufen ab. Der errechnete Pegel ist im Bereich 250 Hz bis 500 Hz um etwa 5 dB bis 9 dB geringer als die Messung. Beim 100 Hz Terzband kommt es zu einem Einbruch des Pegels aus der Stegblechmessung. Berücksichtigt man die Abstrahlcharakteristik und vernachlässigt man diesen Einbruch stimmen die Verläufe qualitativ gut überein (vgl. blaue und grüne Kurve in Abb. 3.15).



**Abb. 3.15:** Vergleich des Schalldruckpegels aus der Messung und der Berechnung über dem Schnellepegel des Stegblechs in 7,5 m Entfernung auf Höhe der SOK, Pegel des Stegblechs einmal mit Berücksichtigung der Abstrahlcharakteristik ( $\sigma$ ) und einmal ohne.

### 3.6 Zusammenfassung

Aufgrund der Messergebnisse kann auf einen Zusammenhang zwischen der Schalldruckmessung und der Schwingung der Struktur, im Speziellen der des Stegblechs, geschlossen werden. Der Frequenzbereich, welcher genauer untersucht wird, erstreckt sich bis zum 630 Hz Terzband. Die obere Grenzfrequenz dieses Bands beträgt  $f_o = 708$  Hz. Diese Grenze wird für die weiteren Untersuchungen dieser Brücke festgelegt.

# Kapitel 4

## Konvergenzstudie

Durch die Ähnlichkeit des Schalldruckpegels und des berechneten Druckpegels aufgrund der Geschwindigkeit des Stegbleches kann auf einen Zusammenhang geschlossen werden. Wenn das Schwingungsverhalten des Stegbleches hinreichend genau in einer FE Software nachgebildet werden kann, ist es möglich, die Strukturantwort bei einer Zugüberfahrt zu berechnen. Es kann dadurch die Geschwindigkeitsverteilung am Stegblech angegeben werden. Die Geschwindigkeitsverteilung kann in eine Schallintensität umgerechnet werden. Es ist zunächst eine Konvergenzstudie notwendig, um die Genauigkeit der Finite Elemente Berechnung zu gewährleisten. Dazu werden die Eigenfrequenzen einer FE Berechnung mit unterschiedlicher Elementanzahl mit der Lösung nach der Kirchhoff'schen Plattentheorie verglichen. Dadurch wird sichergestellt, dass hinreichend genaue Ergebnisse erzielt werden.

### 4.1 Beschreibung der verwendeten Finite Elemente Software

In dieser Arbeit wird für die Berechnung eine FE Software eingesetzt. Zu den Grundlagen der Finite Elemente Methoden (FEM) wird auf eine umfangreiche Literatur [1, 31] unter anderem verwiesen. Im nachfolgenden Absatz wird kurz auf die eingesetzte Software eingegangen. Für die FE Berechnungen wird SOFiSTiK - Software Version 2018 [24] verwendet. In Abhängigkeit des verwendeten Moduls in SOFiSTiK können unterschiedliche Formulierungen für die Plattentragwirkung von Flächenelemente verwendet werden. Für die Ermittlung von Eigenwerten stehen das Modul *ASE - Allgemeine Statik Finiter Elemente Strukturen* [22] und das Modul *DYNA - Dynamische Berechnungen* [23] zur Verfügung. Das Modul ASE verwendet zur Beschreibung der Plattentragwirkung Viereckselemente auf Basis der Reissner-Mindlin'schen Plattentheorie [20]. Die Implementierung erfolgt dabei nach der in [7, 10, 25] beschriebenen Methoden [22]. Die Elemente, welche in [25] beschrieben werden, sind Viereckselemente mit linearem Ansatz. Die Diskretisierung erfolgt über die Knotenpunktverschiebungen  $w$  und den Verdrehungen  $\phi_x$  und  $\phi_y$  in den Eckknoten. Das Element besitzt somit 12 Freiheitsgrade zur Beschreibung der Plattentragwirkung. Die Erweiterung um einen quadratischen Ansatz dieser Elemente beschreibt [7]. Zusätzlich werden dabei noch vier Knotenpunkte jeweils in der Mitte der Berandungskanten eingeführt. Die Freiheitsgrade in diesen Knoten beziehen sich auf die Verdrehungen  $\phi_x$  und  $\phi_y$ . Somit besitzt dieses Element zur Beschreibung der Plattentragwirkung 20 Freiheitsgrade. Nach [7] tritt bei diesem Element kein Shear-Locking auf. ASE bietet die Auswahl zwischen konformen und nicht-konformen Elementen. Das Modul DYNA verwendet Bathe-Dvorkin Elemente [2]. Es handelt sich dabei um Viereckselemente, welche über die vier Eckknoten beschrieben werden. Die Freiheitsgrade in den Knoten beziehen sich dabei auf die Verschiebungen aus der Ebene  $w$ , sowie den Querschnittsverdrehungen  $\phi_x$  und  $\phi_y$ . Das Element besitzt somit 12 Freiheitsgrade für die Beschreibung der Plattentragwirkung. Der Unterschied zu [25] besteht darin, dass hier eine gemischte Formulierung verwendet wird. Bei Bathe-Dvorkin Elemente tritt kein Shear-Locking

auf und es existieren auch keine Zero-Energy-Modes [2]. Für Stabelemente wird die Verschiebungen innerhalb des Elements mit einem kubischen Hermitepolynom angenähert [23]. Ein Hermitepolynom wird sowohl in den Verschiebungen als auch in den ersten Ableitungen angepasst [31].

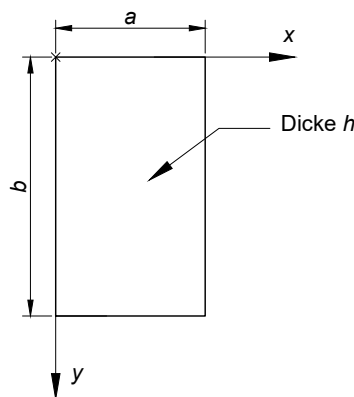
## 4.2 Grunddaten der untersuchten Platte

Um die erforderliche Diskretisierungsgenauigkeit des FE Netzes zu bestimmen, wird ein einzelnes Stegblechfeld mit unterschiedlichen Randbedingungen analysiert. Dabei werden vier Fälle betrachtet:

- gelenkig gelagerte Platte
- voll eingespannte Platte
- oben und unten gelenkig, seitlich eingespannte Platte
- seitlich gelenkig, oben und unten eingespannte Platte

Bei einer gelenkigen Lagerung einer Kante sind die Verschiebungen in alle drei Raumrichtungen gesperrt. Bei einer Einspannung einer Kante sind zusätzlich die Verdrehungen gesperrt. Die Auswertung erfolgt für ein einzelnes Stegblechfeld, wobei die Abmessungen der Ostbahnbrücke herangezogen werden. Ein Stegblechfeld erstreckt sich dabei von einer vertikalen Stegaussteifung zur nächsten. In Abb. 3.4 ist ein ganzes Feld mit den Aussteifungen dargestellt. Die Abmessungen, sowie Steifigkeitseigenschaften können aus der nachfolgenden Auflistung entnommen werden.

- Länge  $a = 1980$  mm
- Höhe  $b = 3100$  mm
- Dicke  $h = 18$  mm
- Elastizitätsmodul  $E = 210\,000$  N/mm<sup>2</sup>
- Querdehnungszahl  $\nu = 0,3$
- Dichte  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>



**Abb. 4.1:** Einzelnes Stegblechfeld mit den Abmessungen  $a$ ,  $b$ , und der Definition des Koordinatensystems.

Die Eigenfrequenzen aus der FE Berechnung werden dann mit den Lösungen nach der Kirchhoff'schen Plattentheorie [11] verglichen, um die erforderliche Netzfeinheit für spätere Berechnungen festzulegen.



### 4.3 Eigenwertprobleme von Platten

Die zugrundeliegende Differentialgleichung, welche die Schwingungen aus der Ebene von dünnen Platten beschreibt, wurde von Kirchhoff im Jahre 1850 formuliert [11].

$$\nabla^2 \nabla^2 W(x,y,t) + \frac{\rho h}{B} \frac{\partial^2 W(x,y,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

In Gl. (4.1) ist  $h$  die Dicke der Platte,  $\rho$  die Dichte,  $B$  die Biegesteifigkeit für isotrope Platten laut Gl. (4.3) und  $W(x,y,t)$  die Funktion der Durchbiegung in Abhängigkeit der Lagekoordinaten  $x$  und  $y$  sowie der Zeit  $t$ .  $\nabla^2$  bezeichnet den Laplace'schen Differentialoperator (4.2).

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.2)$$

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.3)$$

Die Funktion der Durchbiegung  $W(x,y,t)$  kann in einen zeitabhängigen Anteil und einen zeitunabhängigen Anteil  $w(x,y)$  aufgeteilt werden [13].

$$W(x,y,t) = w(x,y) e^{i\omega t} \quad (4.4)$$

Einsetzen von Gl. (4.4) in Gl. (4.1) und Elimination  $e^{i\omega t}$  von liefert:

$$\nabla^2 \nabla^2 w(x,y) - k^4 w(x,y) = 0 \quad (4.5)$$

Wobei  $k$  laut Gl. (4.6) berechnet werden kann. Für die Differentialgleichung (4.5) existieren nur für einige Spezialfälle Lösungen nach der Kirchhoff'schen Plattentheorie. Um eine Lösung zu erhalten, kann eine Separation der Variablen nach Gl. (4.7) vorgenommen werden [13]. Nach Formulieren von Randbedingungen können charakteristische Gleichungen zur Bestimmung von Eigenkreisfrequenzen erhalten werden.

$$k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{B} \quad (4.6)$$

$$w(x,y) = X(x)Y(y) \quad (4.7)$$

In weiterer Folge werden Eigenfrequenzen, welche auf Grundlage der Kirchhoff'schen Plattentheorie ermittelt werden, als „exakte“ Eigenfrequenzen bezeichnet.

### 4.4 Gelenkig gelagerte Platte

Für die allseits gelenkig gelagerte rechteckige Platte existiert eine „exakte“ Lösung, welche aus [13] entnommen wurde. Der Verschiebungsansatz nach Gl. (4.8) befriedigt die Differentialgleichung (4.5) und kann auch für die Randbedingungen (4.10) spezialisiert werden.

$$w_{m,n}(x,y) = A_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.8)$$

Die Randbedingungen für die allseits gelenkig gelagerte Platte lauten:

$$w(0,y) = 0 \quad w(a,y) = 0 \quad \frac{\partial^2 w(0,y)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 w(a,y)}{\partial x^2} = 0 \quad (4.9)$$

$$w(x,0) = 0 \quad w(x,b) = 0 \quad \frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 w(x,b)}{\partial y^2} = 0 \quad (4.10)$$

Durch Auswerten des Ansatzes in Kombination mit den Randbedingungen erhält man eine charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen.  $\omega$  wird berechnet laut nachstehender Formel, wobei  $m,n$  die Anzahl der Sinushalbwellen in die jeweilige Richtung angibt ( $m,n$  müssen ganzzahlig gewählt werden).

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{B}{\rho h} \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right)} \quad (4.11)$$

Tab. 4.1 zeigt die Eigenfrequenzen, welche auf Grundlage von Gl. (4.11) berechnet wurden. Die Spalten und Zeilen geben dabei die Anzahl der Sinushalbwellen ( $m,n$  in Gl. (4.11)) in die Richtungen  $x,y$  an.

		Anzahl der Halbwellen in $x$ - Richtung $\rightarrow$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Halbwel- len in $y$ - Richtung $\downarrow$	1	16	50	106	185	287	411	558	727
	2	30	64	120	199	301	425	572	741
	3	53	87	143	222	324	448	595	764
	4	85	119	175	254	356	480	627	796
	5	126	160	217	296	397	522	668	838
	6	177	211	267	346	448	572	719	888
	7	237	271	327	406	508	632	779	948
	8	306	340	396	475	577	701	848	1.017
	9	384	418	475	554	655	779	926	1.095
	10	472	506	562	641	743	867	1.014	1.183
	11	568	602	659	738	839	964	1.110	1.280
	12	674	708	765	844	945	1.070	1.216	1.386

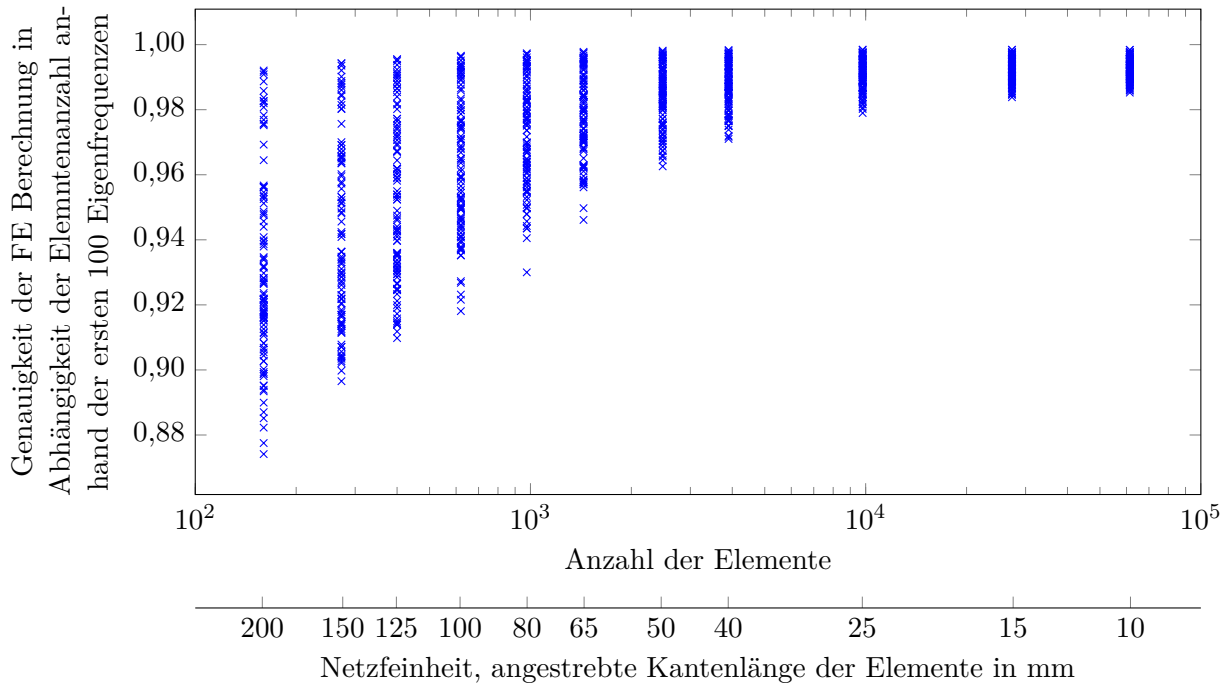
**Tab. 4.1:** „Exakte“ Eigenfrequenzen in Hz in Abhängigkeit von der Halbwellenanzahl in die jeweilige Richtung für die allseits gelenkig gelagerte Platte.

In Tab. 4.2 sind die ersten 100 Eigenfrequenzen  $f = \omega/(2\pi)$  für die gelenkig gelagerte Platte aufgelistet. Die „exakten“ Eigenfrequenzen  $f_{\text{ex}}$  wurden laut Gl. (4.11) berechnet. Die Eigenfrequenzen  $f_{\text{FE}}$  wurden über eine FE Berechnung ermittelt, wobei ein regelmäßiges FE Netz mit einer Kantenlänge von 10 mm verwendet wurde.

Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$
1	16	16	26	296	294	51	558	554	76	779	770
2	30	30	27	301	299	52	562	558	77	790	783
3	50	50	28	306	305	53	568	565	78	796	788
4	53	53	29	324	322	54	572	567	79	823	816
5	64	63	30	327	325	55	572	568	80	838	829
6	85	85	31	340	338	56	577	571	81	839	829
7	87	86	32	346	344	57	595	590	82	844	834
8	106	106	33	356	354	58	602	598	83	848	837
9	119	118	34	384	383	59	627	622	84	867	856
10	120	120	35	396	394	60	632	626	85	880	870
11	126	126	36	397	395	61	641	635	86	888	878
12	143	142	37	406	403	62	655	648	87	914	905
13	160	160	38	411	409	63	659	653	88	919	910
14	175	174	39	418	416	64	668	662	89	926	914
15	177	177	40	425	423	65	674	670	90	933	923
16	185	185	41	448	444	66	701	693	91	945	933
17	199	198	42	448	445	67	708	702	92	948	936
18	211	210	43	472	469	68	719	712	93	948	938
19	217	216	44	475	471	69	727	721	94	956	946
20	222	221	45	475	471	70	738	730	95	959	947
21	237	236	46	480	477	71	741	734	96	964	950
22	254	253	47	506	502	72	743	735	97	988	977
23	267	266	48	508	503	73	764	757	98	1.004	992
24	271	270	49	522	517	74	765	757	99	1.014	999
25	287	286	50	554	549	75	779	770	100	1.017	1.003

**Tab. 4.2:** Vergleich der ersten 100 Eigenfrequenzen für die allseits gelenkig gelagerte Platte, Kantenlänge der finiten Elemente: 10 mm.

In Abbildung 4.2 ist das Verhältnis  $f_{\text{FE}}/f_{\text{ex}}$  für die ersten 100 Eigenfrequenzen aufgetragen. In dieser Arbeit wird dieses Verhältnis verwendet, um die Genauigkeit der FE Berechnung bei der jeweiligen Anzahl der Elemente zu quantifizieren. Dabei ist zu erkennen, dass die Eigenfrequenzen aus der FE Berechnung geringer sind als die „exakte Lösung“. Dies ist auf die geringere Steifigkeit der FE Berechnung im Vergleich zur geschlossenen Lösung zurückzuführen. Durch Erhöhung der Anzahl der finiten Elemente wird die Streuung geringer und das Ergebnis konvergiert zur „exakten Lösung“. Man kann erkennen, dass für die jeweilige Netzfeinheit keine wesentlichen Ausreißer vorhanden sind.

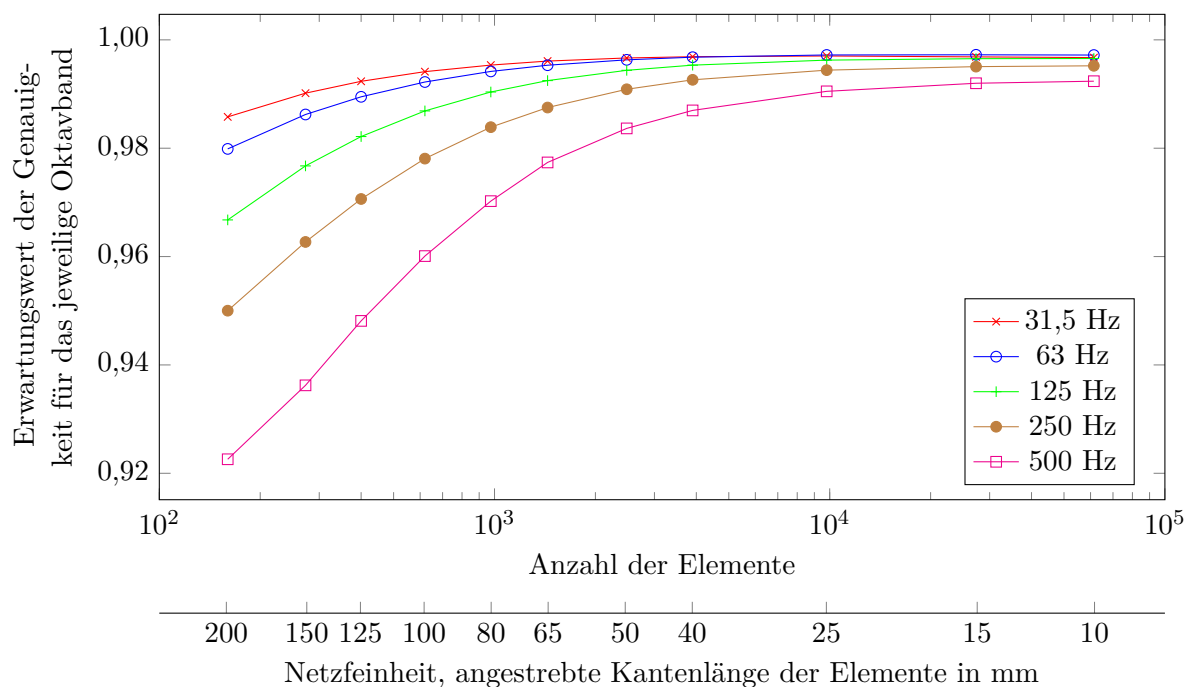


**Abb. 4.2:** Konvergenz der FE Berechnung anhand der gelenkig gelagerten Platte für die ersten 100 Eigenfrequenzen.

Abb. 4.3 zeigt den Erwartungswert [4] der Genauigkeit für das jeweilige Oktavband in Abhängigkeit der Anzahl der Elemente. Der Erwartungswert ist dabei der Mittelwert aus den einzelnen Verhältnissen der Eigenfrequenzen aus der FE Berechnung  $f_{FE}$  und der exakten Berechnung  $f_{ex}$ . Der Mittelwert wird dabei innerhalb eines Oktavbandes gebildet.

$$E = \frac{1}{n} \sum_n \frac{f_{FE\ n}}{f_{ex\ n}} \quad (4.12)$$

Der Erwartungswert wird vom Oktavband mit der Mittenfrequenz  $f_m = 31,5\text{ Hz}$  bis zum Oktavband mit  $f_m = 500\text{ Hz}$  angegeben. Die obere Grenzfrequenz beträgt damit  $f_o = 708\text{ Hz}$ , welche im Abschnitt 3.6 festgelegt wurde. Dabei ist zu erkennen, dass ein gröberes FE Netz in den unteren Frequenzbändern (31,5 Hz und 63 Hz Oktavband) deutlich bessere Ergebnisse liefert als für höhere Frequenzbänder. Es zeigt sich ein monotonen Konvergenzverhalten.



**Abb. 4.3:** Konvergenz der FE Berechnung für die gelenkig gelagerte Platte für ausgewählte Oktavbänder.

## 4.5 Oben und unten gelenkig gelagerte, seitlich eingespannte Platte

Auch für die Platte mit zwei gegenüberliegenden Seiten gelenkig gelagert und die anderen beiden eingespannt existiert eine „exakte“ Lösung nach der Kirchhoff’schen Plattentheorie. Nach Leissa [12] geht die Lösung für Platten mit zwei gegenüberliegenden Seiten gelenkig gelagert auf die Arbeit von Voigt [28] zurück. Die nachfolgenden Gleichungen (4.13) - (4.16) zur Bestimmung der Eigenwerte wurden von Leissa [13] entnommen. Die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte lautet wie folgt:

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \sin(\lambda_1 b) \sinh(\lambda_2 b) + 2\lambda_1 \lambda_2 (\cos(\lambda_1 b) \cosh(\lambda_2 b) - 1) = 0 \quad (4.13)$$

Wobei  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  nachfolgend definiert sind:

$$\lambda_1 = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad \lambda_2 = \sqrt{k^2 + \alpha^2} \quad (4.14)$$

Für  $\alpha$  und  $k$  gilt:

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} \quad k^4 = \frac{\rho h \omega^2}{B} \quad (4.15)$$

In Gl. (4.15) gibt  $m$  die Anzahl der Sinushalbwellen in  $x$ -Richtung an, somit sind für  $m$  ganzzahlige positive Werte einzusetzen (1, 2, 3, ...). Die Eigenform kann nach Bestimmung der  $\lambda$  nach Gl. (4.16) berechnet werden. Für  $m = 1$  sind die Werte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  in der Tab. 4.3 für die ersten 12 Nullstellen der charakteristischen Gleichung aufgelistet.

$n$ -te Nullstelle	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$n$ -te Nullstelle	$\lambda_1$	$\lambda_2$
1	2,302	2,712	7	11,896	11,982
2	3,935	4,188	8	13,484	13,560
3	5,537	5,719	9	15,071	15,139
4	7,130	7,273	10	16,658	16,720
5	8,720	8,837	11	18,245	18,301
6	10,309	10,408	12	19,832	19,884

**Tab. 4.3:** Werte für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  für  $m = 1$  für die oben und unten gelenkig gelagerte, seitlich eingespannte Platte.

$$w(x,y) = \sin(\alpha x) [(\cosh(\lambda_2 b) - \cos(\lambda_1 b))(\lambda_1 \sinh(\lambda_2 y) - \lambda_2 \sin(\lambda_1 y)) - (\cosh(\lambda_2 y) - \cos(\lambda_1 y))(\lambda_1 \sinh(\lambda_2 b) - \lambda_2 \sin(\lambda_1 b))] \quad (4.16)$$

Tab. 4.4 zeigt die „exakten“ Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Halbwellenzahl in die jeweiligen Richtungen.

		Anzahl der Halbwellen in $x$ - Richtung $\rightarrow$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Halbwellen in $y$ - Richtung $\downarrow$	1	28	74	142	233	346	481	639	820
	2	39	85	154	245	358	494	652	833
	3	59	105	174	265	379	515	673	854
	4	90	134	203	294	408	544	703	884
	5	130	173	241	332	446	583	742	923
	6	180	222	289	380	494	630	789	971
	7	240	280	347	437	551	687	846	1.028
	8	308	348	414	504	617	753	912	1.094
	9	386	426	490	580	692	828	987	
	10	474	512	576	665	777	913		
	11	570	609	672	760	872			
	12	676	714	777	864				
	13	791	829	891					

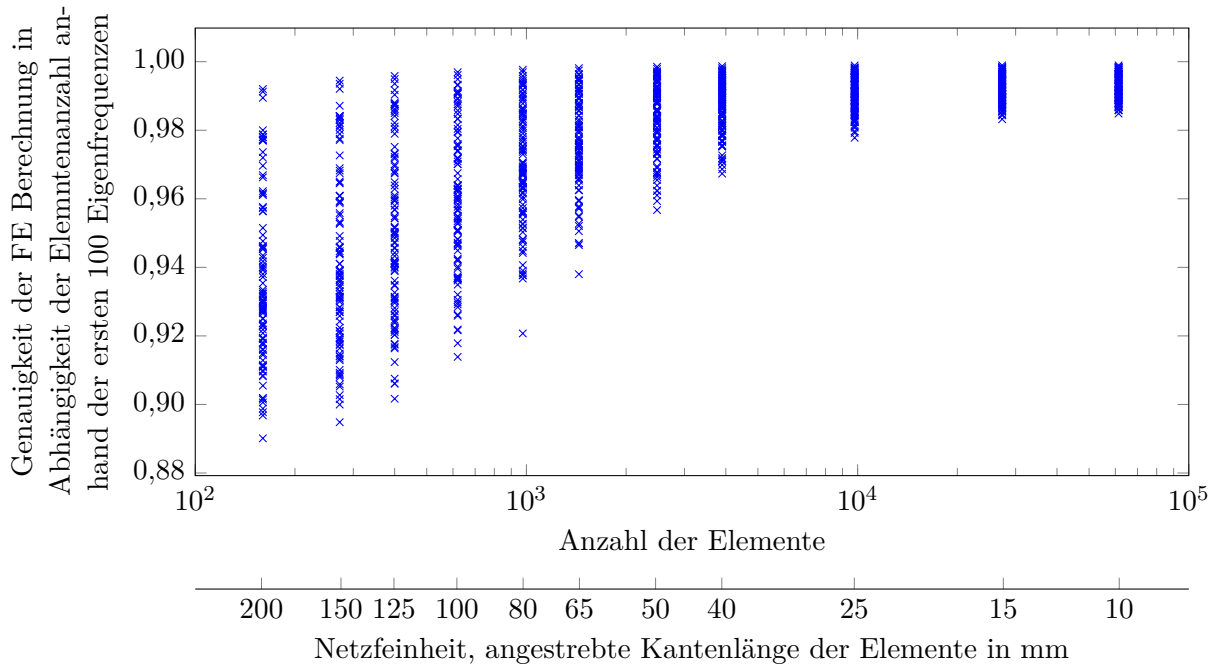
**Tab. 4.4:** „Exakte“ Eigenfrequenzen in Hz in Abhängigkeit von der Halbwellenzahl in die jeweilige Richtung für die oben und unten gelenkig gelagerte und seitlich eingespannte Platte.

Tabelle 4.5 zeigt den Vergleich der „exakten“ Berechnung mit der FE Berechnung für die ersten 100 Eigenfrequenzen, wobei bei der FE Berechnung ein regelmäßiges FE Netz von 10 mm verwendet wurde. Die „exakten“ Eigenfrequenzen  $f_{\text{ex}}$  wurden durch Lösen von Gleichung 4.13 ermittelt.

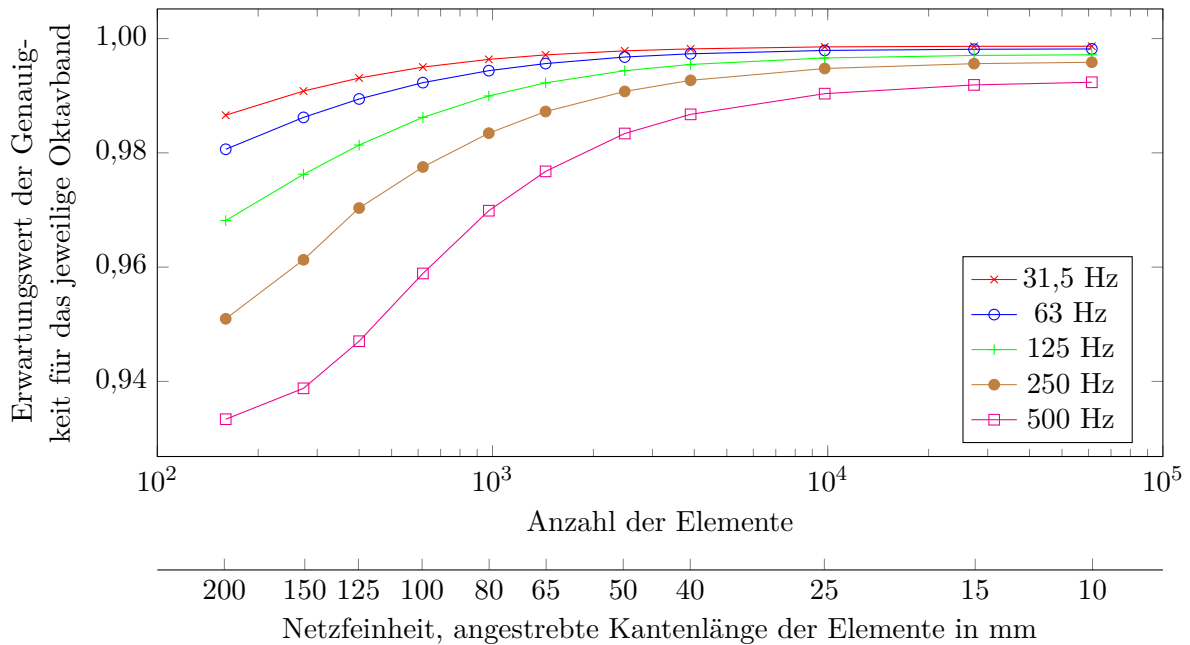
Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$
1	28	28	26	331	330	51	580	575	76	833	824
2	39	39	27	345	344	52	583	578	77	845	836
3	59	59	28	346	345	53	609	604	78	846	845
4	74	74	29	348	347	54	617	611	79	864	855
5	85	85	30	358	356	55	630	624	80	872	861
6	90	90	31	379	376	56	639	634	81	884	874
7	105	105	32	380	378	57	652	646	82	891	882
8	130	130	33	386	385	58	665	659	83	912	900
9	134	134	34	408	405	59	672	666	84	913	901
10	142	142	35	414	411	60	673	667	85	915	906
11	154	153	36	426	423	61	676	671	86	923	912
12	173	173	37	437	434	62	687	680	87	953	943
13	174	173	38	446	443	63	692	685	88	971	958
14	180	180	39	474	471	64	703	696	89	976	963
15	203	202	40	481	478	65	714	708	90	978	966
16	222	221	41	490	487	66	742	734	91	987	973
17	233	232	42	494	490	67	753	745	92	1.007	993
18	240	239	43	494	490	68	760	752	93	1.015	1.003
19	241	240	44	504	500	69	777	769	94	1.023	1.010
20	245	244	45	513	509	70	777	769	95	1.028	1.013
21	265	264	46	515	511	71	789	780	96	1.036	1.023
22	280	279	47	544	540	72	791	784	97	1.049	1.037
23	289	288	48	551	546	73	820	811	98	1.058	1.043
24	294	293	49	570	567	74	828	818	99	1.072	1.056
25	308	307	50	576	572	75	829	821	100	1.086	1.073

**Tab. 4.5:** Vergleich der ersten 100 Eigenfrequenzen für die oben und unten gelenkig gelagerte und seitlich eingespannte Platte, Kantenlänge der finiten Elemente: 10 mm.

In Abbildung 4.4 ist das Verhältnis  $f_{\text{FE}}/f_{\text{ex}}$  für die ersten 100 Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Elementanzahl aufgetragen. Das Verhältnis gibt dabei die Genauigkeit der FE Berechnung an. Durch Erhöhung der Anzahl der finiten Elemente wird der Streubereich geringer und das Ergebnis konvergiert zur „exakten“ Lösung.



**Abb. 4.4:** Konvergenz der FE Berechnung für oben und unten gelenkig gelagerte, seitlich eingespannte Platte für die ersten 100 Eigenfrequenzen.



**Abb. 4.5:** Konvergenz der FE Berechnung anhand der oben und unten gelenkig gelagerten und seitlich eingespannten Platte für ausgewählte Frequenzbereiche.



## 4.6 Oben und unten eingespannte und seitlich gelenkig gelagerte Platte

Für die Lagerungsbedingung oben und unten eingespannt, seitlich gelenkig gelagert, werden die gleichen Berechnungsformeln für die Ermittlung der Eigenfrequenzen, wie für die Platte mit der Lagerungsbedingung seitlich eingespannt und oben und unten gelenkig, jedoch mit den Werten für  $a$ ,  $b$  vertauscht, herangezogen. Tab. 4.7 zeigt die „exakten“ Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Halbwellenzahl in die jeweiligen Richtungen. Die „exakten“ Eigenfrequenzen  $f_{\text{ex}}$  wurden durch Lösung von Gl. (4.13) ermittelt. Für  $m = 1$  sind die Werte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  für die ersten 12 Nullstellen der charakteristischen Gleichung in der Tab. 4.6 aufgelistet.

$n$ -te Nullstelle	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$n$ -te Nullstelle	$\lambda_1$	$\lambda_2$
1	1,316	2,601	7	7,587	7,912
2	2,436	3,312	8	8,603	8,891
3	3,492	4,150	9	9,619	9,877
4	4,525	5,051	10	10,634	10,868
5	5,549	5,986	11	11,648	11,863
6	6,569	6,942	12	12,663	12,860

**Tab. 4.6:** Werte für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  für  $m = 1$  für die oben und unten eingespannte und seitlich gelenkig gelagerte Platte.

		Anzahl der Halbwellen in $x$ - Richtung $\rightarrow$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Halbwellen in $y$ - Richtung $\downarrow$	1	19	51	107	186	287	411	558	727
	2	38	69	124	202	303	427	573	742
	3	66	97	151	228	329	452	598	767
	4	103	134	187	264	364	487	633	801
	5	149	180	234	310	410	532	677	846
	6	205	236	289	365	465	587	732	900
	7	269	301	354	430	529	651	796	963
	8	343	375	428	504	603	724	869	1.036
	9	426	458	512	588	686	807	952	
	10	518	550	604	680	779	900	1.044	
	11	620	652	706	782	880	1.001		
	12	730	763	817	893	991			

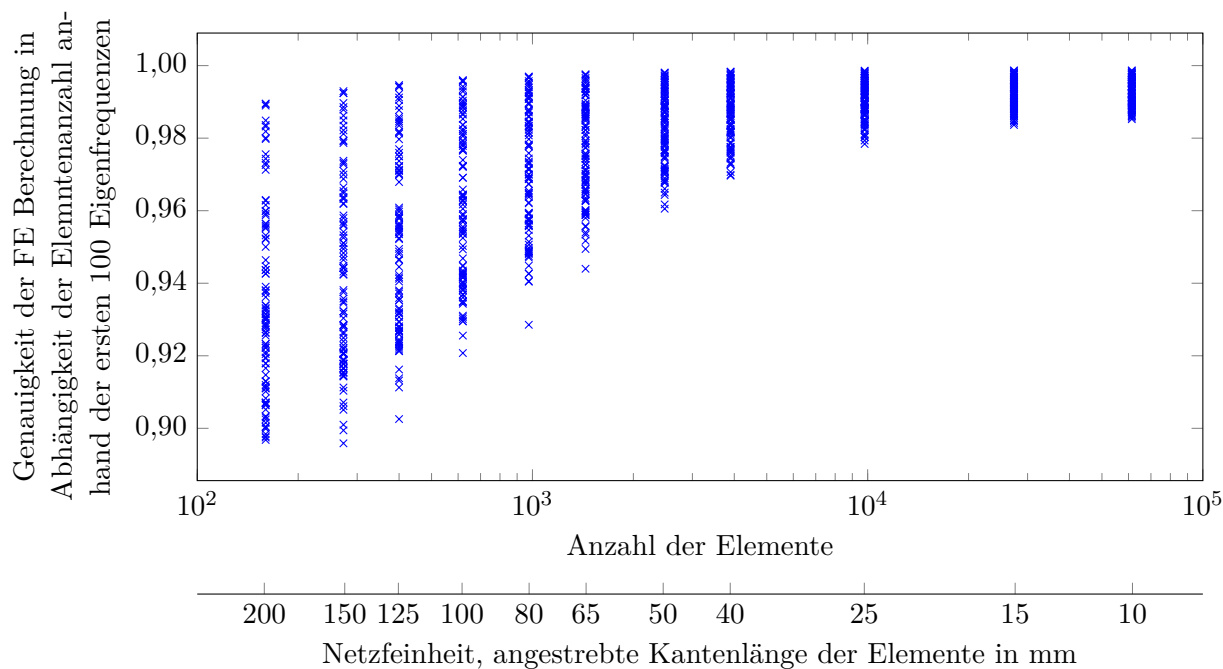
**Tab. 4.7:** „Exakte“ Eigenfrequenzen in Hz in Abhängigkeit von der Halbwellenzahl in die jeweilige Richtung für die oben und unten eingespannte und seitlich gelenkig gelagerte Platte.

Tab.4.8 zeigt den Vergleich der „exakten“ Berechnung mit der FE Berechnung für die ersten 100 Eigenfrequenzen, wobei bei der FE Berechnung ein regelmäßiges FE Netz von 10 mm verwendet wurde.

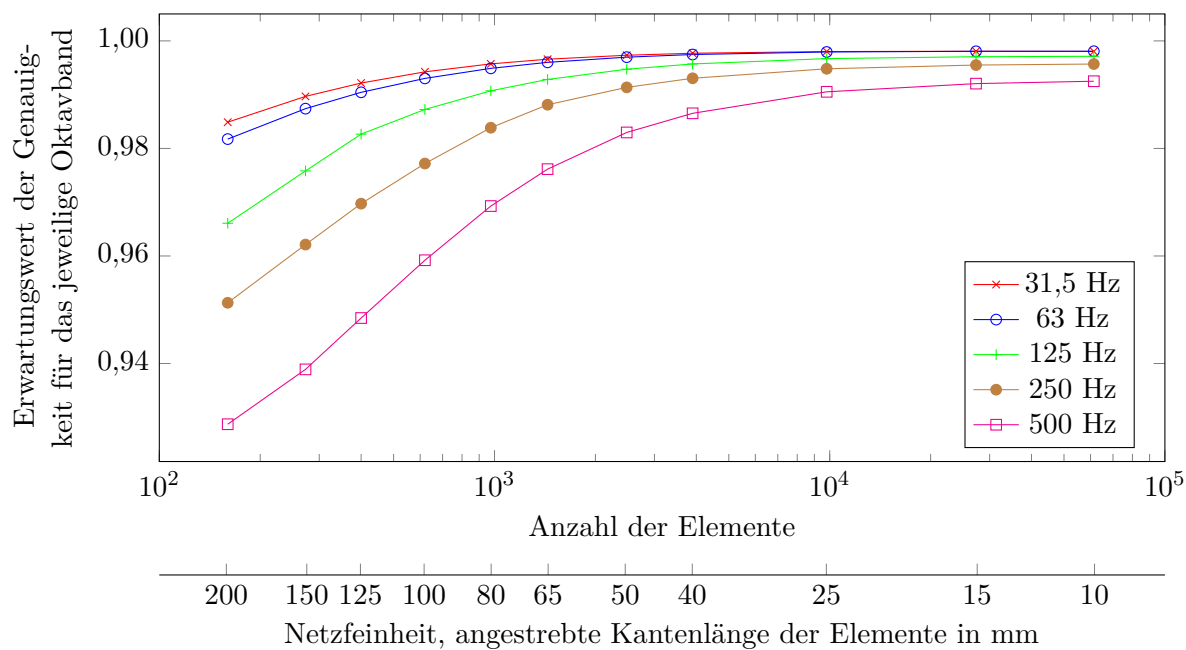
Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$
1	19	19	26	303	302	51	573	569	76	807	798
2	38	38	27	310	308	52	587	582	77	817	808
3	51	51	28	329	327	53	588	582	78	846	837
4	66	66	29	343	342	54	598	594	79	850	841
5	69	69	30	354	352	55	603	597	80	869	858
6	97	96	31	364	362	56	604	599	81	880	869
7	103	103	32	365	363	57	620	615	82	882	873
8	107	107	33	375	373	58	633	628	83	893	882
9	124	123	34	410	407	59	651	644	84	900	888
10	134	133	35	411	410	60	652	646	85	900	889
11	149	149	36	426	424	61	677	671	86	919	910
12	151	150	37	427	425	62	680	673	87	934	925
13	180	180	38	428	425	63	686	679	88	937	925
14	186	186	39	430	427	64	706	699	89	952	939
15	187	187	40	452	449	65	724	717	90	963	948
16	202	201	41	457	455	66	727	722	91	979	951
17	205	204	42	465	461	67	730	724	92	991	968
18	228	227	43	487	484	68	732	724	93	993	977
19	234	233	44	505	500	69	742	736	94	1.001	982
20	236	235	45	512	508	70	763	755	95	1.011	987
21	264	263	46	518	515	71	767	760	96	1.013	999
22	269	268	47	529	524	72	779	770	97	1.036	999
23	287	286	48	532	528	73	782	773	98	1.037	1.022
24	289	288	49	550	546	74	796	787	99	1.037	1.024
25	301	299	50	558	555	75	801	794	100	1.044	1.028

**Tab. 4.8:** Vergleich der ersten 100 Eigenfrequenzen für die oben und unten eingespannte und seitlich gelenkig gelagerte Platte, Kantenlänge der finiten Elemente: 10 mm.

In Abb. 4.6 und Abb. 4.7 ist die Genauigkeit der FE Berechnung dargestellt. Es zeigt sich ein ähnliches Konvergenzverhalten wie im vorigen Abschnitt. Die Streuung der Genauigkeit ist ebenfalls mit den vorigen Ergebnissen vergleichbar.



**Abb. 4.6:** Konvergenz der FE Berechnung anhand der oben und unten eingespannten und seitlich gelenkig gelagerten Platte für die ersten 100 Eigenfrequenzen.



**Abb. 4.7:** Konvergenz der FE Berechnung anhand der oben und unten eingespannten und seitlich gelenkig gelagerten Platte für ausgewählte Frequenzbereiche.

## 4.7 Voll eingespannte Platte

Für die voll eingespannte Platte werden die Eigenkreisfrequenzen über die Galerkin-Methode ermittelt (siehe Gl. (4.17)) [3].

$$\omega^2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\int_A (\nabla^2 \nabla^2 w(x,y)) w(x,y) dA}{\int_A \rho h w^2(x,y) dA} \quad (4.17)$$

Die Funktion der Durchbiegung  $w(x,y)$  wird in zwei unabhängige Funktionen (Gl. (4.7)) in die jeweiligen Flächenrichtungen  $x, y$  aufgeteilt. Für die Werte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  in Gl. (4.18) werden die Werte aus der Tab. 4.3 herangezogen.  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  entsprechen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  aus der Tab. 4.6. So erhält man eine Näherungslösung der Eigenkreisfrequenzen, mit denen die Lösung nach der FE Berechnung verglichen werden kann.

$$\begin{aligned} w(x,y) = & ((\cosh(\lambda_2 b) - \cos(\lambda_1 b)) (\lambda_1 \sinh(\lambda_2 y) - \lambda_2 \sin(\lambda_1 y)) - \\ & (\cosh(\lambda_2 y) - \cos(\lambda_1 y)) (\lambda_1 \sinh(\lambda_2 b) - \lambda_2 \sin(\lambda_1 b))) \\ & ((\cosh(\lambda_4 a) - \cos(\lambda_3 a)) (\lambda_3 \sinh(\lambda_4 x) - \lambda_4 \sin(\lambda_3 x)) - \\ & (\cosh(\lambda_4 x) - \cos(\lambda_3 x)) (\lambda_3 \sinh(\lambda_4 a) - \lambda_4 \sin(\lambda_3 a))) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Durch die Anwendung der Galerkin-Methode werden die Eigenfrequenzen für die allseits eingespannte Platte berechnet. Tab. 4.9 zeigt die berechneten Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Anzahl der Halbwellen in die jeweiligen Richtungen. Die Berechnung der Integrale aus Gl. (4.17) erfolgt dabei über die Simpsonformel, wobei  $w(x,y)$  in einem regelmäßigen Raster von 10 x 10mm berechnet wurde.

		Anzahl der Halbwellen in $x$ - Richtung $\rightarrow$							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Halbwellen in $y$ - Richtung $\downarrow$	1	30	75	143	233	346	482	640	821
	2	46	90	157	248	361	496	655	835
	3	72	114	181	271	384	520	678	859
	4	108	149	214	304	417	552	710	891
	5	153	193	258	346	459	594	752	933
	6	208	247	311	399	510	645	803	984
	7	273	311	374	461	572	706	864	1.044
	8	346	385	447	533	643	776	934	1.114
	9	429	467	529	614	724	857	1.013	1.193
	10	521	559	620	705	814	946	1.103	1.282
	11	620	658	719	803	911	1.043	1.199	1.377

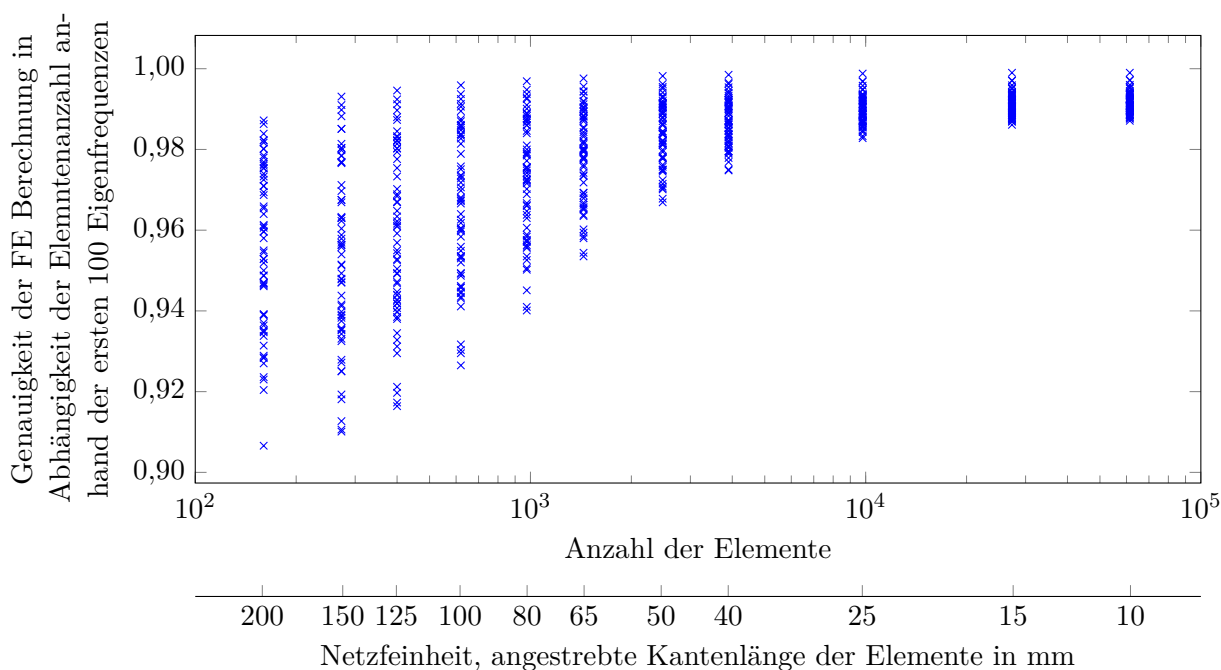
**Tab. 4.9:** Berechnete Eigenfrequenzen nach der Galerkin-Methode in Hz in Abhängigkeit von der Halbwellenanzahl in die jeweilige Richtung für die allseits eingespannte Platte.

Tab. 4.10 stellt die ersten 62 Eigenfrequenzen der Näherungslösung mit der FE Berechnung gegenüber.

Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$	Nr.	$f_{\text{ex}}/\text{Hz}$	$f_{\text{FE}}/\text{Hz}$
1	30	30	18	248	246	35	447	442	52	620	616
2	46	45	19	258	256	36	459	454	53	640	634
3	72	71	20	271	269	37	461	456	54	643	635
4	75	75	21	273	271	38	467	462	55	645	638
5	90	89	22	304	302	39	482	478	56	655	648
6	108	107	23	311	308	40	496	492	57	658	652
7	114	113	24	311	308	41	510	505	58	678	670
8	143	143	25	346	344	42	520	515	59	705	696
9	149	148	26	346	344	43	521	517	60	706	698
10	153	152	27	346	344	44	529	523	61	710	702
11	157	156	28	361	358	45	533	527	62	719	711
12	181	180	29	374	370	46	552	546			
13	193	192	30	384	381	47	559	553			
14	208	207	31	385	381	48	572	566			
15	214	213	32	399	395	49	594	587			
16	233	232	33	417	413	50	614	607			
17	247	245	34	429	426	51	620	613			

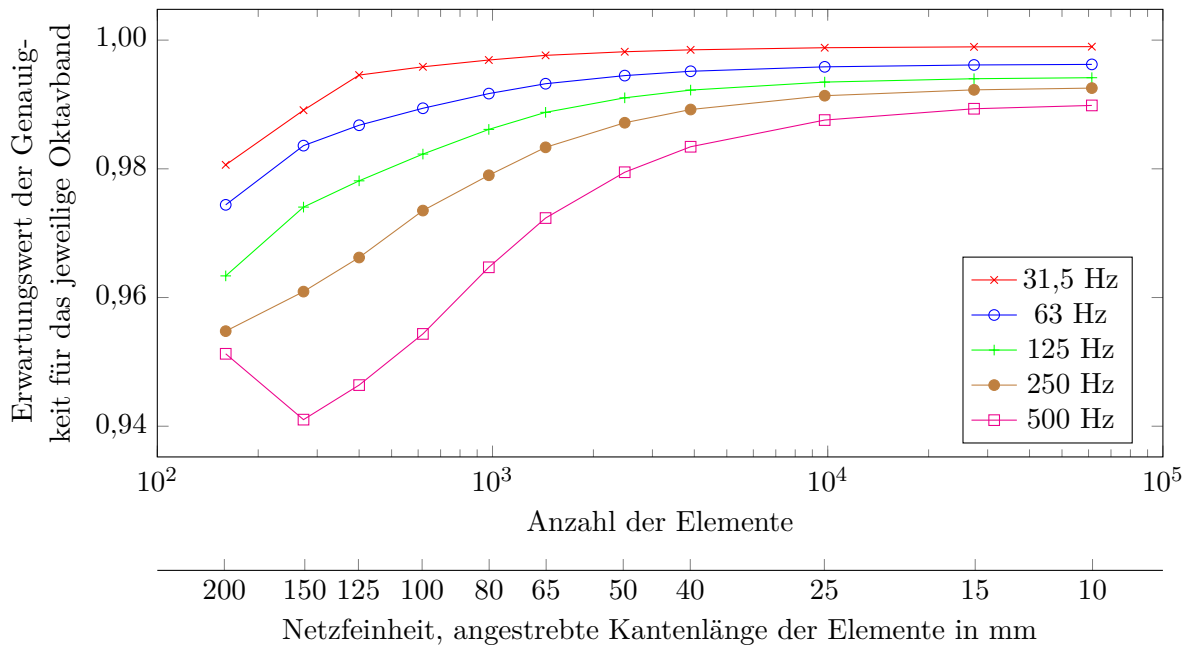
**Tab. 4.10:** Vergleich der Eigenfrequenzen für die allseits eingespannte Platte, Kantenlänge der finiten Elemente: 10 mm.

In Abb. 4.8 ist die Genauigkeit der FE Berechnung dargestellt. Die Streuung wird mit zunehmender Elementanzahl geringer. Es zeigt sich, dass eine gute Verteilung ohne wesentliche Ausreißer erreicht werden kann.



**Abb. 4.8:** Konvergenz der FE Berechnung anhand der allseits eingespannten Platte.

Abb. 4.9 zeigt den Erwartungswert der Genauigkeit der FE Berechnung. Bei zu geringer Elementanzahl kommt es dabei im 500 Hz Oktavband zu einer Versteifung. Hier ist keine monotone Konvergenz mehr gegeben, weshalb die Kantenlänge von 150 mm als absolutes Maximum für weitere Berechnungen der ausgewählten Brücke festgelegt wird.



**Abb. 4.9:** Konvergenz der FE Berechnung anhand der am Rand voll eingespannten Platte für ausgewählte Oktavbänder.

## 4.8 Zusammenfassung

Für alle vier Arten der Lagerung zeigt sich ein ähnliches Konvergenzverhalten. Für die Kantenlänge der finiten Elemente wird 150 mm als Maximum festgelegt. Für die weiteren Berechnungen wird, soweit nicht anders angegeben, eine Kantenlänge der finiten Elemente von 20 mm verwendet.

# Kapitel 5

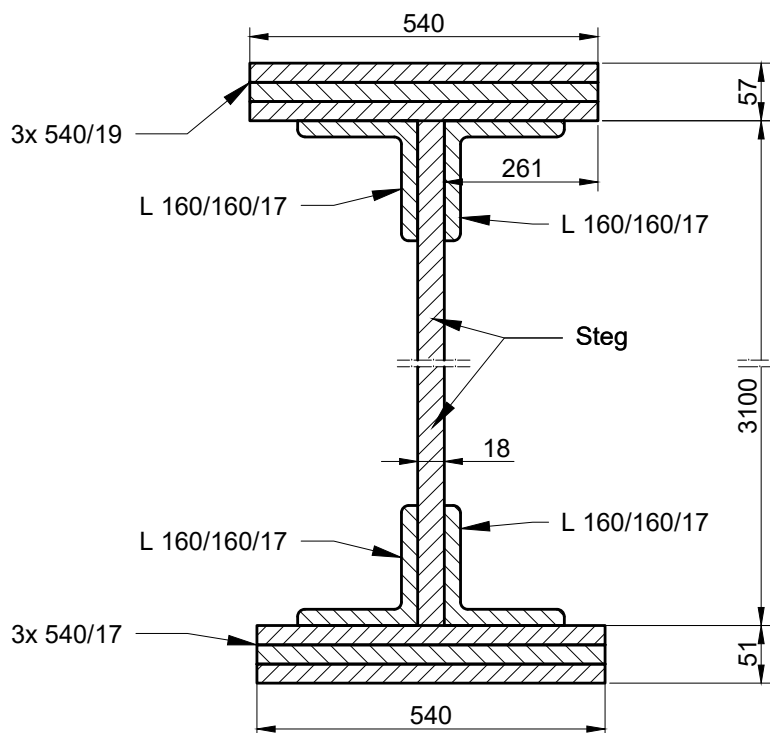
## Einfluss der Konstruktionselemente auf das Schwingungsverhalten des Stegblechs

In diesem Kapitel wird untersucht, wie sich das Schwingungsverhalten des Stegblechs ändert, wenn zusätzliche Elemente zum Modell hinzugefügt werden. Zunächst werden der Ober- und Untergurt ergänzt. Unterschiedliche Modellbildungen des Gurts und der Verbindung des Gurts mit dem Steg werden analysiert. Der Einfluss auf das Schwingungsverhalten gegenüber der einfachen Rechteckplatte aus der Konvergenzstudie wird aufgezeigt. In weiterer Folge wird das Modell an den Rändern um die Stegaussteifungen ergänzt. Es werden ein Ein-, Drei- und ein Fünffeldmodell mit unterschiedlichen Randbedingung vorgestellt und untereinander verglichen. Die Lagerungsbedingungen werden dabei möglichst realitätsgetreu nachgebildet. Anhand der Berechnungsergebnisse wird eine erforderliche Feldanzahl festgelegt, damit das Schwingungsverhalten im Mittelfeld möglichst genau abgebildet werden kann. Am Schluss erfolgt ein Vergleich ausgewählter Modelle mit den Ergebnissen aus einer experimentellen modalen Analyse (EMA).

### 5.1 Aufbau der Gurte und Stegaussteifungen

#### 5.1.1 Gurte

Abb. 5.1 zeigt den Querschnitt des Vollwandträgers. Es handelt sich um einen genieteten I-Querschnitt, wobei das Stegblech über Winkelprofile mit den Gurtlamellen verbunden ist. Die Nietverbindungen besitzen eine Vorspannung, welche durch die Abkühlung des heißen Niets entsteht. Die gesamte Verbindung kann daher als steif angenommen werden. Die Untergurtlamellen sind in Abhängigkeit der Momentenbeanspruchung abgestuft (Momentendeckung). Da Messergebnisse an der Stelle mit drei Untergurtlamellen vorliegen, wird der Untergurt auch dementsprechend mit drei Lamellen modelliert. Der Obergurt besteht durchgehend aus drei Lamellen.

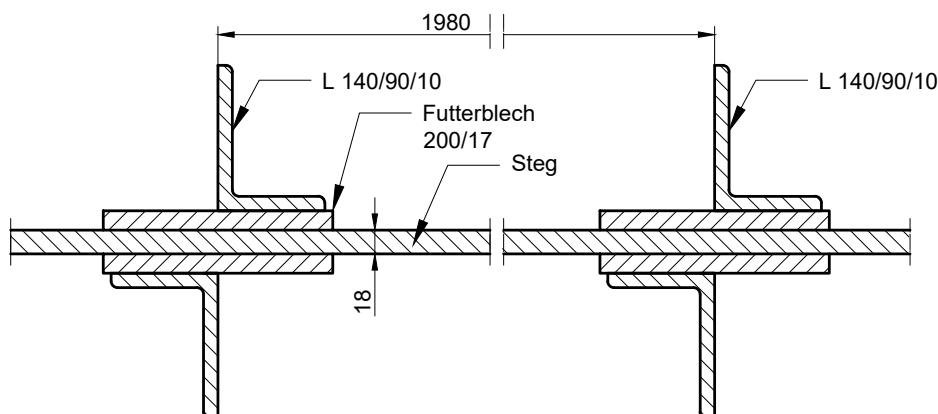


**Abb. 5.1:** Querschnitt des Vollwandträgers, Verbindungen mittels Nieten nicht dargestellt, Maße in mm.

### 5.1.2 Stegaussteifungen

Die vertikalen Stegaussteifungen sind bis auf die Auflagerpunkte regelmäßig alle 1980 mm angeordnet. Es wird dabei beidseitig vom Stegblech ein Futterblech mit  $t = 17\text{mm}$  eingesetzt. Dieses dient dazu, eine Ebene mit dem Gurtwinkel (ebenfalls mit 17 mm Dicke) herzustellen. Je nach Belastung der Stegaussteifung kommen zwei, drei oder vier L-Winkel zum Einsatz. Da Messergebnisse im Bereich mit zwei L-Winkel vorliegen, wird in weiterer Folge die Stegaussteifung immer mit dieser Anzahl modelliert.

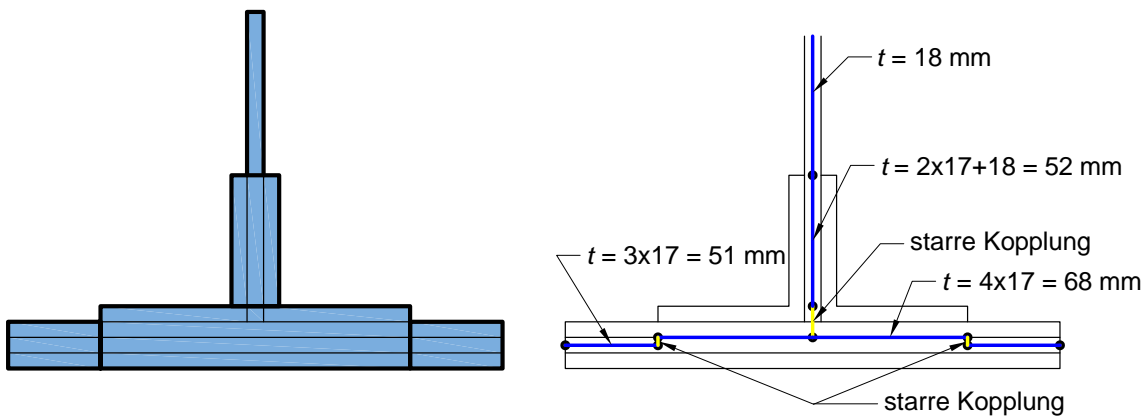




**Abb. 5.2:** Anordnung der vertikalen Stegaussteifungen mit zwei L-Winkel, Verbindungen mittels Nieten nicht dargestellt, Maße in mm.

## 5.2 Einfluss der Diskretisierung der Gurte

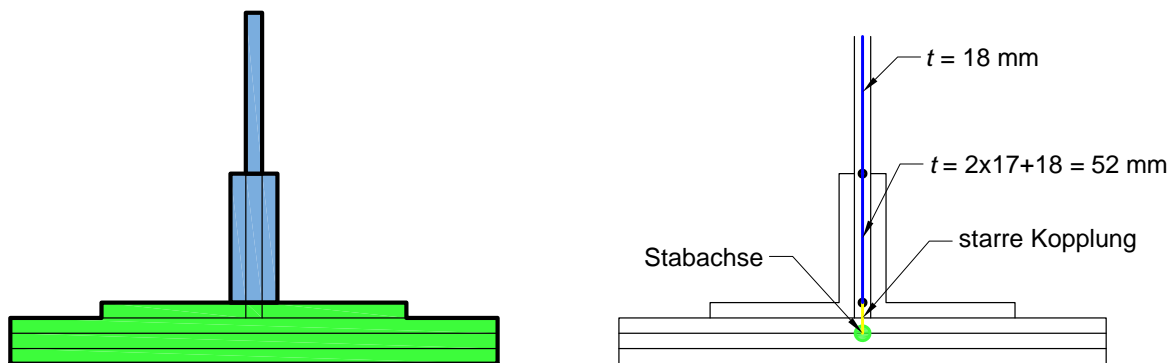
Im nachfolgenden Abschnitt wird untersucht, wie sich die Diskretisierung der Gurte auf die Eigenfrequenzen auswirkt. Ziel ist eine Reduktion der Flächenelemente zu Stabelemente. Die nachfolgenden Abbildungen 5.3, 5.4 und 5.5 zeigen die drei verschiedenen Modellbildungen, wobei Teile des Querschnitts mit einer blauen Färbung über Scheibenelemente und grüne über Stabelemente diskretisiert werden. Dargestellt ist jeweils nur der Untergurt, für den Obergurt gelten die selben Modellbildungen, wobei die Lamellen des Gurts eine andere Dicke aufweisen. Beim Schalenmodell (Abb. 5.3) wird der gesamte Gurt inklusive der Winkelprofile über Schalenelemente diskretisiert. Damit die verschiedenen Dicken der Elemente berücksichtigt werden können ist eine entsprechende Abstufung notwendig. Zwischen Steg und Gurt kommt eine Kopplung (in Abb. 5.3 gelb dargestellt) zum Einsatz, damit die Exzentrizität exakt erfasst werden kann. Durch die verschiedenen Dicken der Scheibenelemente des Gurts ist ein Versatz der Flächenmittelebenen notwendig. An der Stoßstelle werden die Verschiebung gekoppelt. Die Ausrundungen der Winkelprofile werden aus Gründen der Vereinfachung des Modells nicht berücksichtigt.



**Abb. 5.3:** Schalenmodell: Diskretisierung des gesamten Untergurts über Schalenelemente.

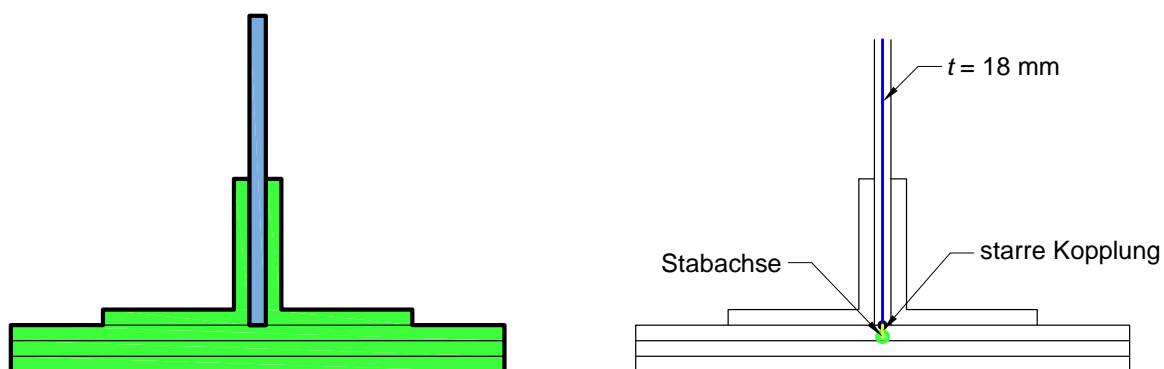
Beim Stabmodell Typ 1 (Abb. 5.4) wird im Gegensatz zum Scheibenmodell der Gurt, je ein Schenkel des Winkelprofils und ein kleiner Teil des Stegs als Stab modelliert (grün gefärbte Teil in Abb. 5.4). Die Querschnittswerte ( $A$ ,  $A_{yy}$ ,  $A_{zz}$ ,  $I_D$ , ...) des Stabes werden ermittelt, indem der grüne Querschnittsteil separat betrachtet wird. Eine Zwangsdrillachse des Stabes wird nicht in Rechnung gestellt. Die Stabachse wird über eine Kopplung (gelbe Linie in Abb. 5.4) mit dem Steg verbunden. Die Stabachse liegt dabei im Schwerpunkt des grünen Querschnittsteil.

Der zweite Schenkel der Winkelprofile wird zusammen mit dem Stegblech zu einer Fläche verbunden. Hier ist eine Abstufung aufgrund der unterschiedlichen Dicken des Stegs notwendig.



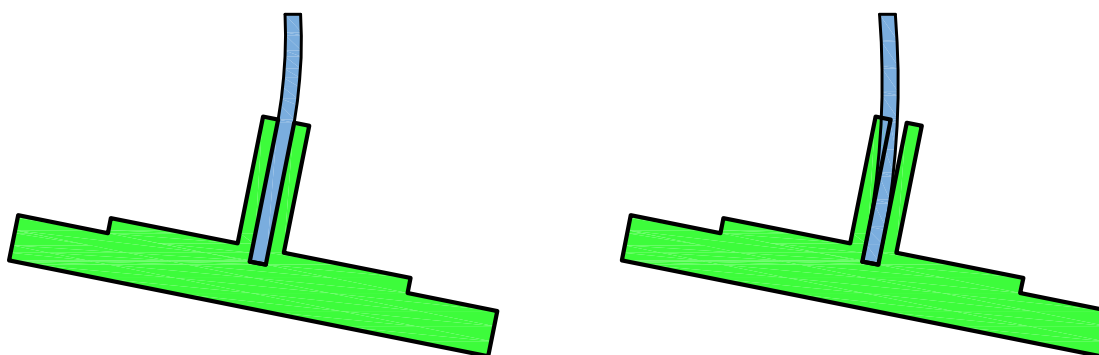
**Abb. 5.4:** Stabmodell Typ 1: Diskretisierung des Untergurts und jeweils eines Winkelschenkels als Stab.

Beim Stabmodell Typ 2 werden im Gegensatz zum Stabmodell Typ 1 die gesamten Gurtlamellen und die beiden Winkelprofile zu einem Stab zusammengefügt. Die Dicke der Scheibenelemente des Stegs muss dadurch nicht angepasst werden.



**Abb. 5.5:** Stabmodell Typ 2: Diskretisierung des Untergurts und der gesamten Winkelprofile als ein einziger Stab.

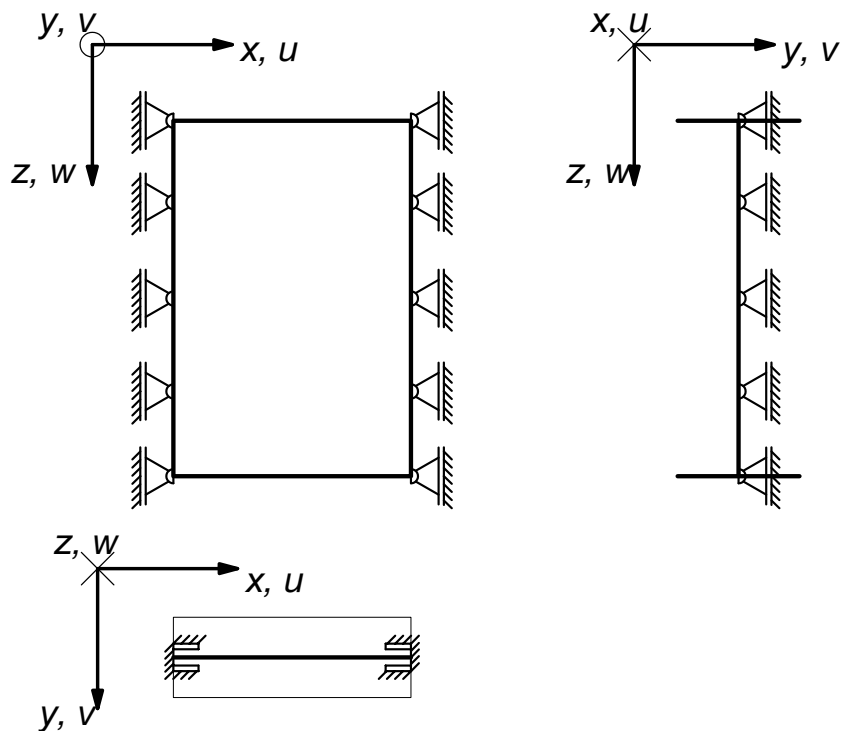
Wegen einer fehlenden Kontaktbedingung vom Stegblech zum Winkelprofil ist eine Verformung wie in Abb. 5.6 möglich. Dieses Modell besitzt dadurch weniger Steifigkeit als die beiden vorher genannten Modelle.



**Abb. 5.6:** Stabmodell Typ 2: Fehlende Kontaktbedingung bei Verformung des Stegs unter Annahme eines steifen Winkels; **links:** tatsächliche Verformung des Stegs, wenn der Gurt verdreht wird; **rechts:** Verformung des Stegs aufgrund der Modellbildung.

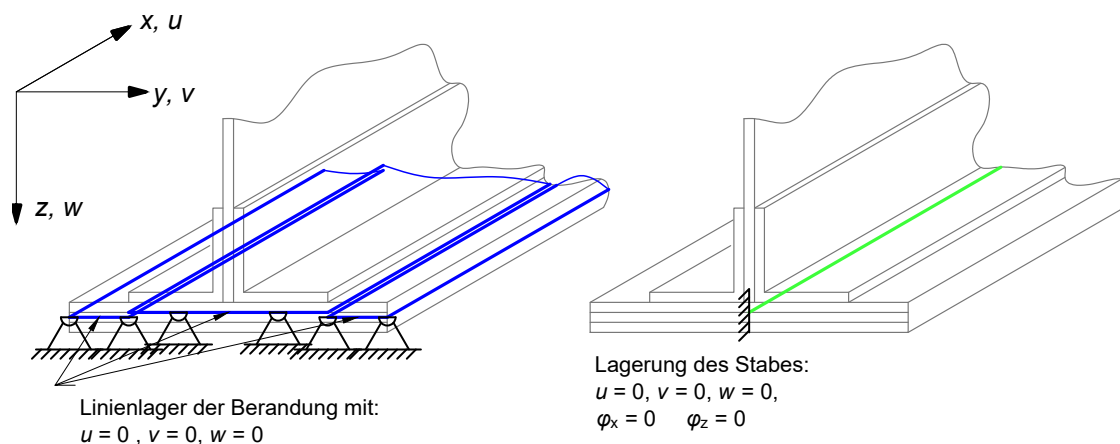
### 5.2.1 Lagerungsbedingung

Die Lagerung des Stegblechs erfolgt wie in Abb. 5.7 dargestellt. Der Einfluss der seitlich benachbarten Felder wird hier nur über die Einspannung erfasst. Das Stegblech ist an den seitlichen Rändern aus der Ebene ( $y$ -Richtung) unverschieblich gelagert. In vertikaler ( $z$ -) Richtung ist das Stegblech verschieblich und in Richtung der benachbarten Felder ( $x$ -Richtung) unverschieblich. Um die  $y$ -Achse wird der Rand eingespannt.



**Abb. 5.7:** Lagerung des Stegblechs: An den seitlichen Rändern unverschieblich in Längsrichtung ( $x$ -Richtung) und unverschieblich aus der Ebene ( $y$ -Richtung), sowie eine Einspannung um die  $z$ -Achse.

Die Lagerung der Gurte erfolgt wie in Abb. 5.8 dargestellt bei  $x = 0$  mm und bei  $x = 1980$  mm. Die dargestellte Lagerung dient in erster Linie dazu, um die Verschiebungen der beiden Modelle in Einklang zu bringen. Für das Scheibenmodell wird die Berandungskurve unverschieblich gelagert. Die Stabmodelle müssen dadurch unverschieblich in alle Raumrichtungen und eingespannt um die  $x$ - und  $z$ -Achse ausgeführt werden, damit die Verschiebungen der beiden Modelle kompatibel sind.



**Abb. 5.8:** Lagerung der Gurte: **links:** Lagerung der Berandungskurve bei Diskretisierung über Flächenelemente; **rechts:** Lagerung des Stabes bei Diskretisierung über Stabelemente.

### 5.2.2 Vergleich des Scheibenmodells mit Stabmodell Typ 1

Für die Berechnung der Eigenfrequenzen der unterschiedlichen Modelle wird eine maximale Kantenlänge der finiten Elemente von 20 mm verwendet. Es ergeben sich die in Tab. 5.1 angeführten Knotenanzahlen.

	Scheibenmodell	Stabmodell Typ 1	Stabmodell Typ 2
Anzahl FE-Knoten	21895	16719	16889

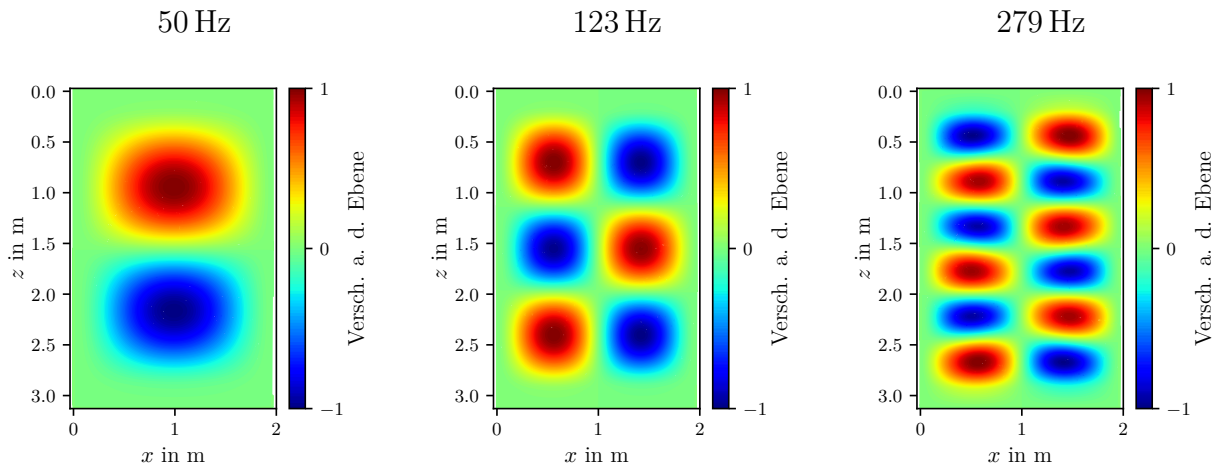
**Tab. 5.1:** Anzahl der FE Knoten in Abhängigkeit des verwendeten Modells.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Eigenfrequenzen des Scheibenmodells  $f_{\text{Scheibe}}$  und die zugehörigen Eigenfrequenzen des Stabmodells Typ 1  $f_{\text{Stab}}$  dargestellt. Bei einigen Eigenformen kommt es zu größeren Abweichungen (vgl. Nr. 37, 40, 76).

Abb. 5.9 und 5.10 zeigen ausgewählte Eigenformen. Vergleicht man die den Eigenformen zugehörigen Eigenfrequenzen aus der Konvergenzstudie mit den Ergebnissen dieses Abschnitts, so kann man feststellen, dass die Gurte einen wesentlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten besitzen. Im mittleren Bild in Abb. 5.9 ist eine 2x3 Eigenform dargestellt (2x3 beschreibt die Anzahl der Halbwellen in die jeweilige Raumrichtung  $x \times y$ ). Berücksichtigt man die Gurte so erhält man eine Eigenfrequenz von  $f = 123$  Hz bzw.  $f = 124$  Hz. Vergleicht man dies mit dem Ergebnis der eingespannten Platte ohne die Gurte, so beträgt die Eigenfrequenz nur  $f = 114$  Hz (siehe Tab. 4.9). Im rechten Bild in Abb. 5.9 ist eine 2x6 Eigenform dargestellt. Mit Berücksichtigung der Gurte erhält man eine Eigenfrequenz von 279 Hz bzw. 280 Hz. Die Eigenfrequenz der eingespannten Platte (Tab. 4.9) beträgt für diese Eigenform nur  $f = 249$  Hz.

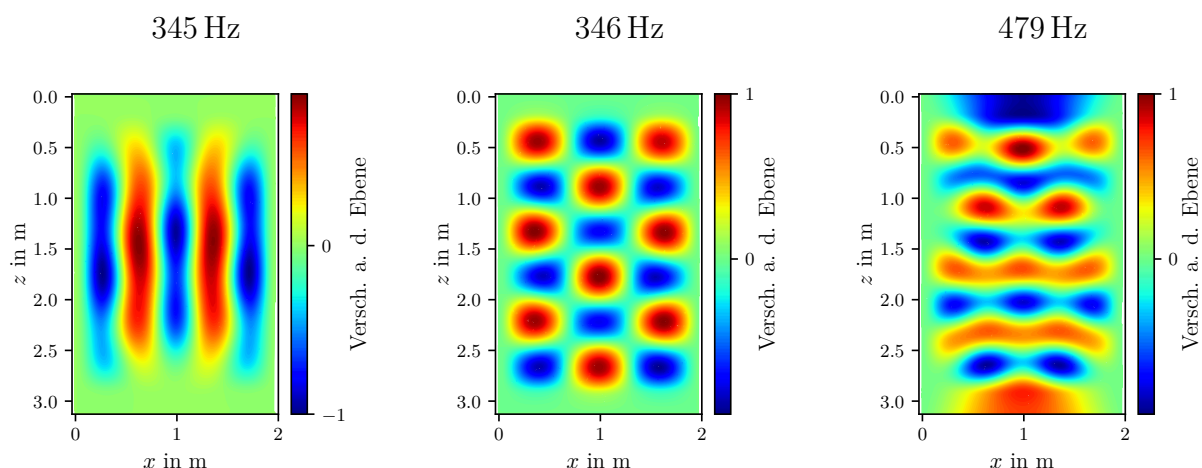
Nr.	$f_{\text{Scheibe}}/\text{Hz}$	$f_{\text{Stab}}/\text{Hz}$		Nr.	$f_{\text{Scheibe}}/\text{Hz}$	$f_{\text{Stab}}/\text{Hz}$		Nr.	$f_{\text{Scheibe}}/\text{Hz}$	$f_{\text{Stab}}/\text{Hz}$
1	32	32		27	346	347		53	615	615
2	50	50		28	362	362		54	632	636
3	76	76		29	370	370		55	634	635
4	80	80		30	390	390		56	651	652
5	94	94		31	402	404		57	654	656
6	120	120		32	417	418		58	662	667
7	123	124		33	418	419		59	674	674
8	144	144		34	429	429		60	678	679
9	161	161		35	432	433		61	682	684
10	163	164		36	441	442		62	698	699
11	165	165		37	465	454		63	701	702
12	189	190		38	479	479		64	717	717
13	198	199		39	480	480		65	746	746
14	217	218		40	479	467		66	746	752
15	228	228		41	486	487		67	752	756
16	230	230		42	495	496		68	767	767
17	233	233		43	501	502		69	770	778
18	250	250		44	506	506		70	783	786
19	273	273		45	523	524		71	792	793
20	278	279		46	532	532		72	810	813
21	279	280		47	542	542		73	827	829
22	282	282		48	562	562		74	828	827
23	318	318		49	563	566		75	829	829
24	340	341		50	586	588		76	843	850
25	345	345		51	589	590				
26	345	346		52	612	612				

**Tab. 5.2:** Vergleich der Eigenfrequenzen des Scheibenmodells  $f_{\text{Scheibe}}$  mit den Eigenfrequenzen des Stabmodells Typ 1  $f_{\text{Stab}}$ .



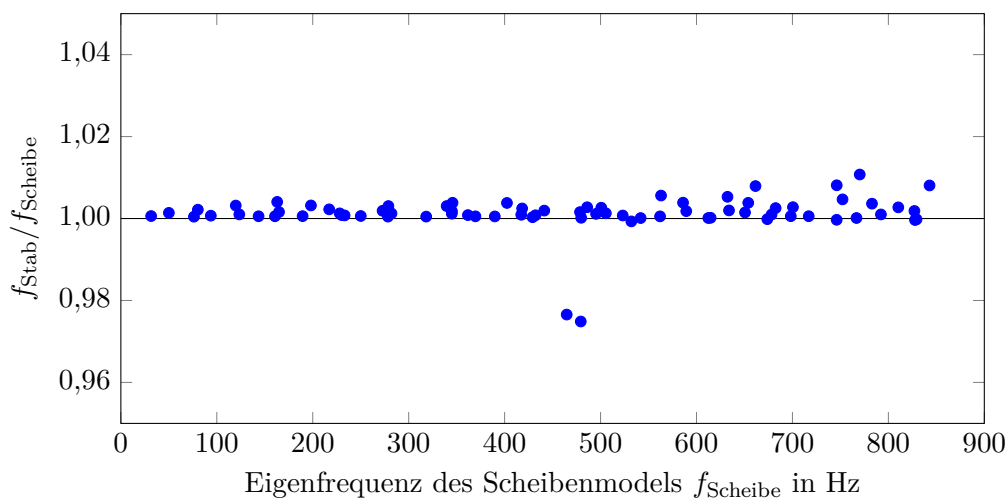
**Abb. 5.9:** Darstellung verschiedener Eigenformen, links: 2., mitte: 7., rechts: 21. Eigenform, Angabe der Eigenfrequenz bezieht sich auf das Scheibenmodell.

Im mittleren Bild in Abb. 5.10 ist eine 3x6 Eigenform dargestellt. Das Scheibenmodell liefert dazu  $f = 346 \text{ Hz}$  und die eingespannte Platte ohne Gurte  $f = 311 \text{ Hz}$  (Tab. 4.9). Im linken und rechten Bild in Abb. 5.10 erkennt man, dass die Eigenform nicht mehr das regelmäßige Muster annimmt.



**Abb. 5.10:** Darstellung verschiedener Eigenformen, **links:** 26., **mitte:**27., **rechts:** 40. Eigenform, Angabe der Eigenfrequenz bezieht sich auf das Scheibenmodell.

In Abb. 5.11 ist das Verhältnis der Eigenfrequenz des Stabmodells  $f_{\text{Stab}}$  zur Eigenfrequenz des Scheibenmodells  $f_{\text{Scheibe}}$  aufgetragen. Die Eigenfrequenzen können aus der Tabelle 5.2 entnommen werden. Dabei erkennt man, dass es im betrachteten Bereich zu keinen wesentlichen Abweichungen zwischen den beiden Modellen kommt. Das Scheibenmodell kann ohne nennenswerten Genauigkeitsverlust durch das Stabmodell ersetzt werden.



**Abb. 5.11:** Vergleich der Eigenfrequenzen des Scheibenmodells mit dem Stabmodell Typ 1.

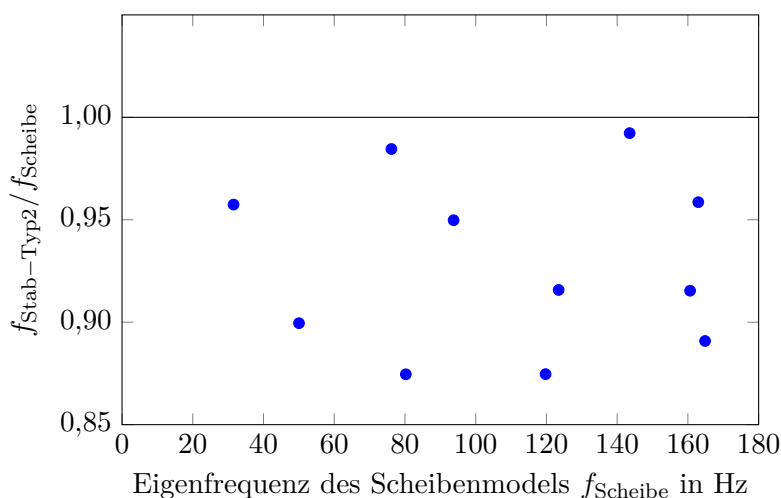
### 5.2.3 Vergleich des Scheibenmodells mit Stabmodell Typ 2

In Tabelle 5.3 sind für die ersten 11 Eigenfrequenzen des Scheibenmodells die Eigenfrequenzen des Stabmodells Typ 2  $f_{\text{Stab-Typ2}}$  aufgelistet. Die Eigenfrequenzen werden beim Stabmodell Typ 2 stets unterschätzt und weichen mit Erhöhung der Eigenfrequenz immer mehr vom Scheibenmodell ab. Dies ist auf den in Abb. 5.6 beschriebenen Effekt zurückzuführen. Auch treten beim Typ 2 die Eigenformen nicht in der selben Reihenfolge auf wie bei dem Scheibenmodell.

In Abb. 5.12 ist das Verhältnis der Eigenfrequenzen des Stabmodells Typ 2  $f_{\text{Stab-Typ2}}$  zu den Eigenfrequenzen des Scheibenmodells  $f_{\text{Scheibe}}$  dargestellt.

Nr.	$f_{\text{Scheibe}}/\text{Hz}$	$f_{\text{Stab-Typ2}}/\text{Hz}$		Nr.	$f_{\text{Scheibe}}/\text{Hz}$	$f_{\text{Stab-Typ2}}/\text{Hz}$
1	32	30		7	123	113
2	50	45		8	144	142
3	76	75		9	161	147
4	80	70		10	163	156
5	94	89		11	165	147
6	120	105				

**Tab. 5.3:** Vergleich der Eigenfrequenzen des Scheibenmodells mit den Eigenfrequenzen des Stabmodells Typ 2.



**Abb. 5.12:** Eigenfrequenzen der Eigenformen in Abhängigkeit des verwendeten Modells.

### 5.2.4 Zusammenfassung

Der Vergleich anhand der Eigenfrequenzen der Modelle zeigt, dass das Scheibenmodell mit dem Stabmodell Typ 1 ohne nennenswerte Verminderung der Genauigkeit ersetzt werden kann. Das Stabmodell Typ 2 hingegen eignet sich nicht, da mit größeren Abweichungen (10% und mehr) gerechnet werden muss. Durch die Diskretisierung der Gurte über Stabelemente können die Anzahl der Knoten gegenüber dem Scheibenmodell um ca. 25% reduziert werden. Über den Vergleich der Ergebnisse aus der Konvergenzstudie mit den Modellen, welche den Gurt beinhalten, kann festgestellt werden, dass die Gurte einen wesentlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Stegblechs besitzen.

## 5.3 Diskretisierung der Stegaussteifung

Die Stegaussteifung wird zur Gänze über Scheibenelemente diskretisiert. Der Effekt der fehlenden Kontaktbedingung wie in Abb. 5.6 kann bei einer falschen Modellierung über Stabelemente hier auch auftreten, weshalb auf Stabelemente verzichtet wird. Die Nietverbindung der einzelnen Bleche und Profile wird als starr angenommen. Die Dicke der Elemente wird entsprechend der Materialverteilung abgestuft. Es kommen starre Kopplungen zum Einsatz um Materialüberschneidungen zu verhindern. Die Ausrundungen der Winkelprofile werden nicht berücksichtigt.



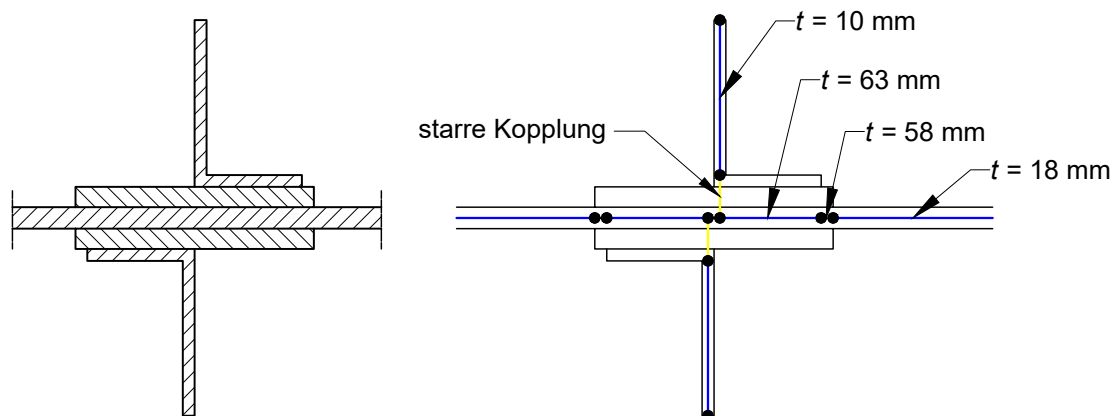


Abb. 5.13: Diskretisierung der Stegaussteifung.

## 5.4 Vergleich von einem mit drei Blechfelder

Wird nur ein einzelnes Feld betrachtet, so kann der Einfluss der Randfelder nur über die Randlagerung erfasst werden. Abb. 5.14 und 5.15 zeigen je ein Dreifeldmodell mit einer bestimmten Eigenform, sowie das dazu passende Einfeldmodell mit vergleichbarer Auslenkung. Ein Einfeldmodell kann nur begrenzte Eigenformen liefern, da die Lagerung (gelenkig oder eingespannt) die Ausbildung der Eigenformen erheblich beeinflusst. Das Dreifeldmodell kann die möglichen Eigenformen der beiden Einfeldmodelle näherungsweise abbilden. Der Einfluss der seitlichen Lagerung des Dreifeldmodells (gelenkig oder eingespannt) wird später untersucht.

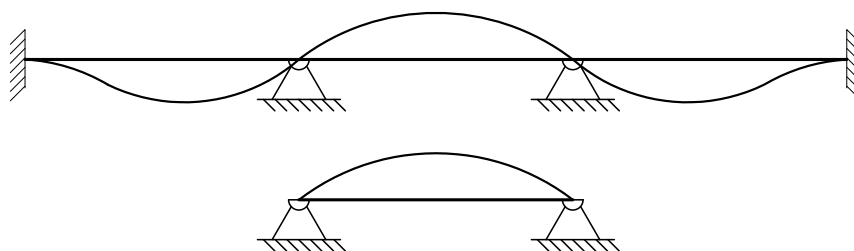
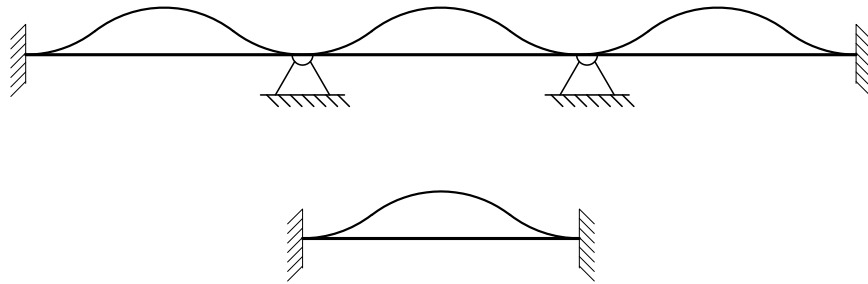
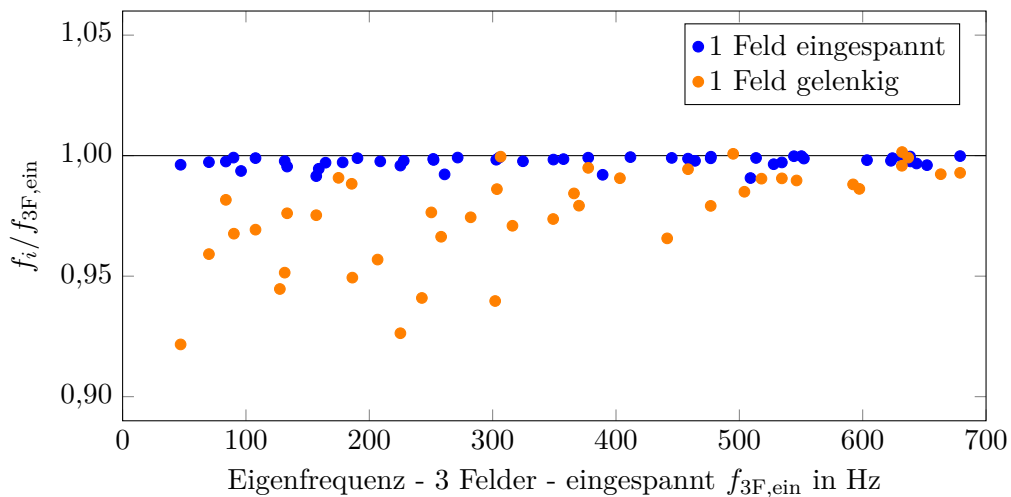


Abb. 5.14: **oben:** Schnitt durch das Dreifeldmodell - mögliche Ausbildung einer Eigenform, **unten:** Abbildung des Dreifeldmodells über Einfeldmodell mit gelenkiger Lagerung.



**Abb. 5.15:** oben: Schnitt durch das Dreifeldmodell - mögliche Ausbildung einer Eigenform, unten: Abbildung des Dreifeldmodells über Einfeldmodell mit Einspannung am Rand.

In Abb. 5.16 ist das Verhältnis der Eigenfrequenzen des dreifeldrigen Modells  $f_{3F,ein}$  zu den Frequenzen der beiden einfeldrigen Modelle  $f_{1F,i}$  dargestellt. Der Index "3F" steht dabei für drei Blechfelder, "1F" analog dazu für 1 Feld. Der Index "ein" bezeichnet dabei eine Einspannung am Rand. Der Index "i" bei den Einfeldmodellen steht für die unterschiedliche Lagerungsbedingung am Rand (eingespannt oder gelenkig). Hier sei angemerkt, dass zwar eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem Einfeldmodell "eingespannt" und dem Dreifeldmodell existiert, jedoch das einfeldrige Modell nur begrenzte Eigenformen liefert. Das Einfeldmodell "gelenkig" kann gut über das Dreifeldmodell abgebildet werden. Es zeigt sich, dass mit höherer Frequenz die Übereinstimmung besser wird. Die einzelnen Datenpunkte aus Abb. 5.16 können aus Tab. 5.4 und Tab. 5.5 errechnet werden.



**Abb. 5.16:** Verhältnis der Eigenfrequenzen  $f_{1F,i} / f_{3F,ein}$ .

In Tab. 5.4 sind für zusammengehörige Eigenformen der beiden "eingespannten" Modelle (Dreifeld- und Einfeldmodell) die zugehörigen Eigenfrequenzen aufgelistet.

$f_{3F,ein}/\text{Hz}$	$f_{1F,ein}/\text{Hz}$	$f_{3F,ein}/\text{Hz}$	$f_{1F,ein}/\text{Hz}$	$f_{3F,ein}/\text{Hz}$	$f_{1F,ein}/\text{Hz}$	$f_{3F,ein}/\text{Hz}$	$f_{1F,ein}/\text{Hz}$
36	36	209	208	412	411	623	622
47	47	225	224	445	445	624	623
70	70	228	227	458	458	632	631
84	84	252	251	464	463	638	638
90	90	252	252	477	476	639	637
96	95	261	259	477	477	644	642
108	108	272	271	509	504	652	650
131	131	303	302	514	513	679	679
133	133	305	305	528	526	730	729
157	156	325	324	534	533	734	732
159	158	349	349	544	544	755	754
165	164	357	357	550	550	755	755
178	178	377	377	552	552	757	756
190	190	389	386	603	602	763	763

**Tab. 5.4:** Gegenüberstellung ausgewählter Eigenfrequenzen des "eingespannten" Dreifeldmodell und des "eingespannten" Einfeldmodell.

In Tab. 5.5 sind für zusammengehörige Eigenformen des "eingespannten" Dreifeldmodells und des "gelenkigen" Einfeldmodells die zugehörigen Eigenfrequenzen aufgelistet.

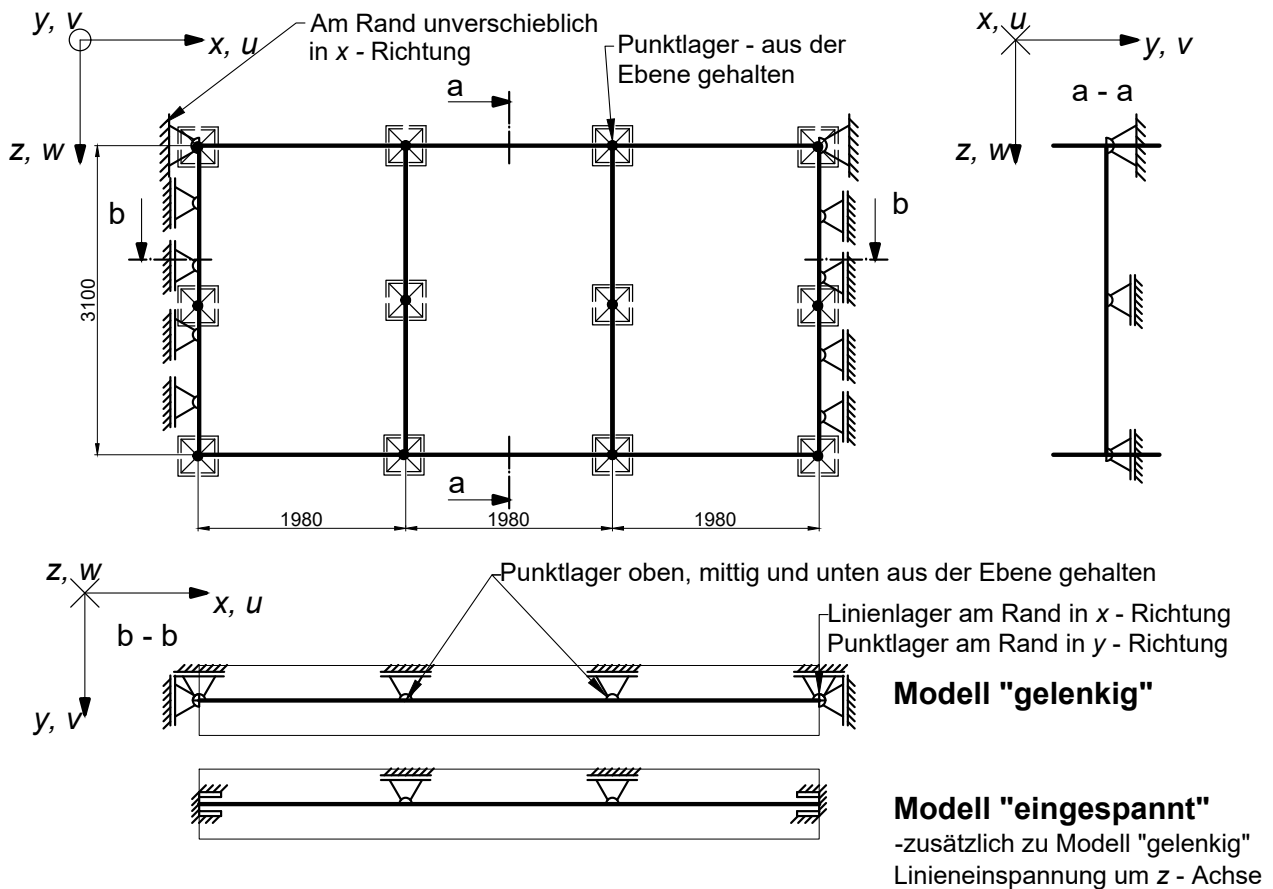
$f_{3F,ein}/\text{Hz}$	$f_{1F,gel}/\text{Hz}$	$f_{3F,ein}/\text{Hz}$	$f_{1F,gel}/\text{Hz}$	$f_{3F,ein}/\text{Hz}$	$f_{1F,gel}/\text{Hz}$	$f_{3F,ein}/\text{Hz}$	$f_{1F,gel}/\text{Hz}$
30	26	186	177	370	362	632	629
47	43	207	198	377	376	632	633
70	67	225	209	403	399	637	636
71	63	243	228	441	426	663	658
84	82	250	244	458	456	679	674
90	87	258	250	477	467	723	723
108	104	282	275	495	495	734	731
127	120	302	284	504	497	748	734
131	125	303	299	518	513	755	753
133	130	306	306	534	529	759	756
157	153	316	307	546	541		
175	173	349	340	592	585		
186	184	366	360	597	589		

**Tab. 5.5:** Gegenüberstellung ausgewählter Eigenfrequenzen des "eingespannten" Dreifeldmodell und des "gelenkigen" Einfeldmodell.

## 5.5 Einfluss der Lagerungsbedingung am Rand bei 3 Felder

Im nachfolgenden Abschnitt wird anhand von drei Stegblechfeldern untersucht, wie sich die Lagerung der Randfelder auf das Schwingungsverhalten des Mittelfelds auswirkt. Dies ist notwendig, da an den Randfeldern weitere Felder angeschlossen sind und somit ein Einfluss auf das Mittelfeld besteht. Es werden dabei zwei Modelle wie in Abb. 5.17 gegenübergestellt. Das Modell "gelenkig" und das Modell "eingespannt" stellen dabei zwei Grenzbetrachtungen dar. Das tatsächliche Verhalten wird zwischen diesen beiden Grenzfällen liegen. Die Stegbleche werden zusätzlich jeweils am Obergurt, Untergurt und in der Mitte bei jeder Stegauseifung unverschieblich aus der Ebene gelagert, da hier der K-Verband angeschlossen ist. Am Obergurt erfolgt noch zusätzlich eine unverschiebliche Lagerung in vertikaler Richtung, damit kein kinematisches System vorliegt.

Sollte es bei diesen beiden Modellen zu größeren Abweichungen kommen, muss der Effekt der Lagerung am Rand genauer untersucht werden oder das Modell um weitere Felder ergänzt werden.



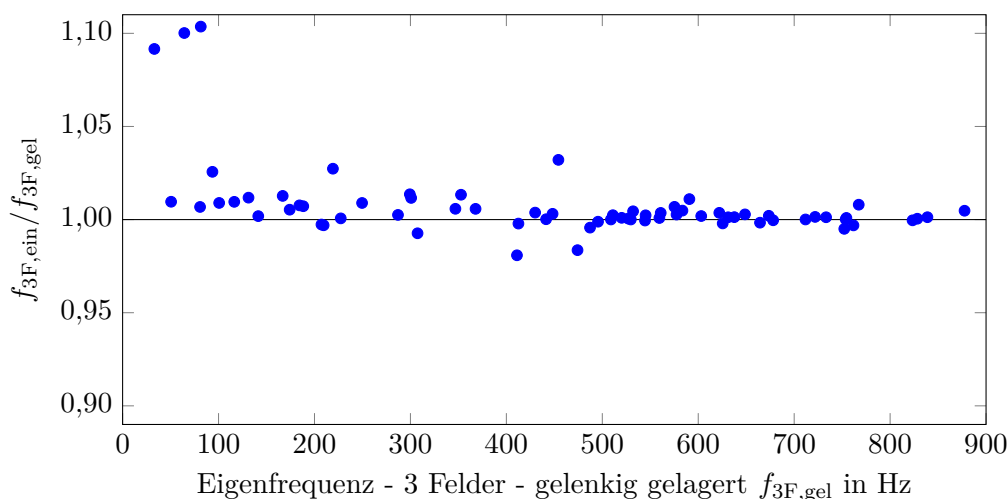
**Abb. 5.17:** Modell mit drei Stegblechfelder: Lagerung der beiden Modelle gelenkig und eingespannt, Maße in mm.

### 5.5.1 Filterung der Eigenformen und Eigenfrequenzen

Da nun auch Eigenformen vorkommen, welche im Randfeld eine dominante Auslenkung besitzen, werden die Eigenformen anhand der maximalen Auslenkung gefiltert. Ist der Maximalwert im mittleren Feld, so wird die entsprechende Eigenform und Eigenfrequenz für die weitere Auswertung herangezogen. Liegt die Maximalauslenkung in einem der Randfelder, so wird dies nicht weiter berücksichtigt.

### 5.5.2 Vergleich anhand Eigenfrequenzen

In Abb. 5.18 sind die Verhältnisse  $f_{3F,ein}/f_{3F,gel}$  dargestellt.  $f_{3F,ein}$  beschreibt dabei die Eigenfrequenz des eingespannten Dreifeldmodells und  $f_{3F,gel}$  die Eigenfrequenz des gelenkigen Dreifeldmodells. Je näher das Verhältnis bei 1 liegt, desto geringer ist der Unterschied in den Eigenfrequenzen zwischen der gelenkigen und eingespannten Lagerung. Es zeigt sich, dass der Einfluss der Lagerung der Randfelder mit zunehmender Frequenz abnimmt. Bei den ersten Eigenfrequenzen kommt es zu größeren Abweichungen. Hier spielt die Lagerung der Randfelder (gelenkig oder eingespannt) eine größere Rolle.



**Abb. 5.18:** Verhältnis der Eigenfrequenzen  $f_{3F,ein}/f_{3F,gel}$  zur Abschätzung des Einflusses der Lagerungsbedingung am Rand bei drei Felder.

In Tab. 5.6 sind die Eigenfrequenzen der beiden Modelle aufgelistet. Die einzelnen Punkte aus Abb. 5.18 können aus der Tabelle errechnet werden.

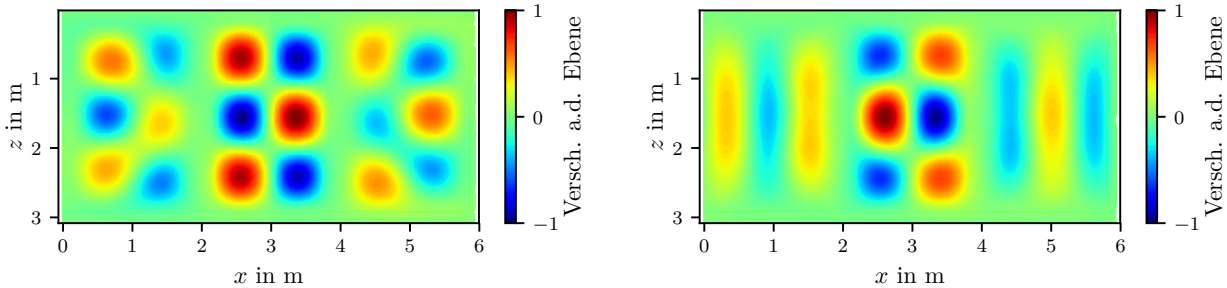
$f_{gel}/\text{Hz}$	$f_{ein}/\text{Hz}$	$f_{gel}/\text{Hz}$	$f_{ein}/\text{Hz}$	$f_{gel}/\text{Hz}$	$f_{ein}/\text{Hz}$	$f_{gel}/\text{Hz}$	$f_{ein}/\text{Hz}$
33	36	250	252	511	512	649	651
51	51	287	288	520	521	664	663
64	71	299	303	527	527	674	675
81	81	301	304	530	530	678	678
81	90	307	305	532	534	712	712
94	96	347	349	545	544	722	723
101	102	353	357	545	546	733	734
116	117	368	370	560	560	752	748
131	133	411	403	561	563	754	754
141	142	413	412	575	579	754	755
167	169	430	432	577	579	762	759
174	175	441	441	584	586	767	773
184	186	448	450	591	597	823	823
188	190	454	469	603	604	828	829
207	207	474	466	622	624	839	840
210	209	487	485	625	624	878	882
219	225	496	495	631	632	920	920
227	228	509	509	638	638	936	946

**Tab. 5.6:** Gegenüberstellung ausgewählter Eigenfrequenzen für die Dreifeldmodelle "gelenkig" und "eingespannt".

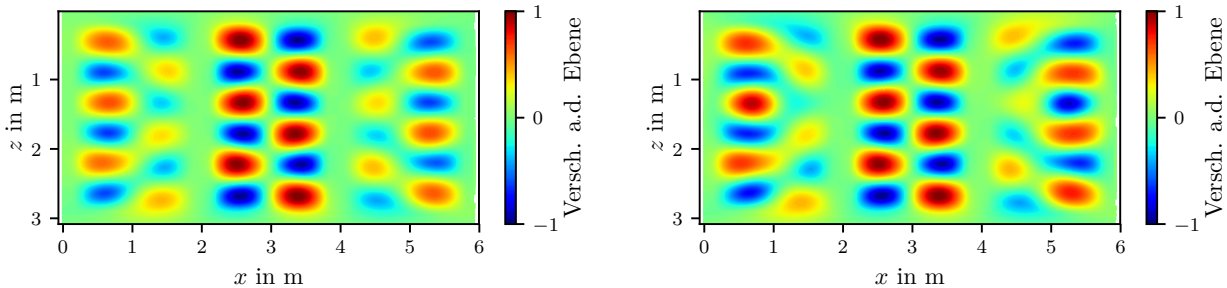
### 5.5.3 Vergleich anhand ausgewählter Eigenformen

In Abb. 5.19 - 5.21 sind ausgewählte Eigenformen dargestellt. Auf der linken Seite befinden sich die Eigenformen für den eingespannten Rand und auf der rechten Seite jene der gelenkigen Lagerung. Man kann erkennen, dass die Verformungen der Randfelder voneinander abweichen, jedoch die Eigenform im Mittelfeld als auch die Eigenfrequenz sehr gut übereinstimmen. Vergleicht man die Eigenfrequenz einer 2x3 Eigenform der eingespannten Platte aus der Konvergenzstudie,

$f = 114$  Hz (siehe Tab. 4.9), mit jenem der Dreifeldmodelle mit Gurte und Stegaussteifungen (Abb. 5.19)  $f = 131$  Hz und  $f = 133$  Hz, so lässt sich feststellen, dass die Randfelder und die Stegaussteifung einen Einfluss auf das Schwingungsverhalten besitzen.

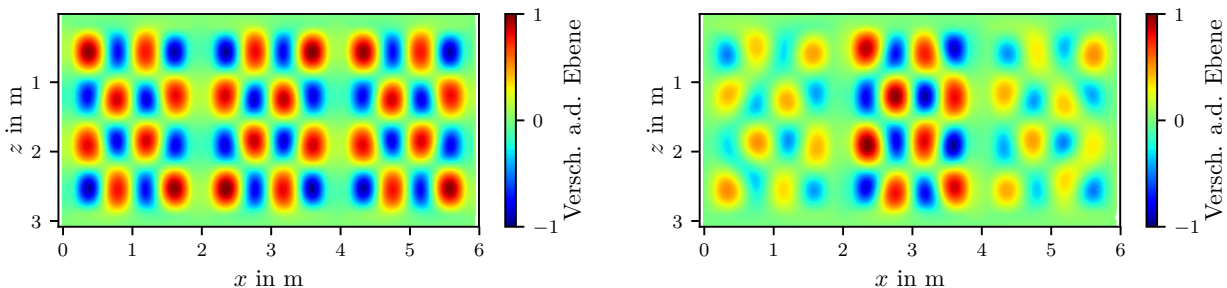


**Abb. 5.19:** Darstellung ausgewählter Eigenformen, **links:** eingespannt:  $f = 133$  Hz; **rechts:** gelenkig gelagert:  $f = 131$  Hz.



**Abb. 5.20:** Darstellung ausgewählter Eigenformen, **links:** eingespannt:  $f = 288$  Hz; **rechts:** gelenkig gelagert  $f = 287$  Hz.

Die Eigenfrequenz aus der Konvergenzstudie für die eingespannte Platte mit der 4x4 Eigenform beträgt  $f = 304$  Hz (Tab. 4.9). Vergleicht man diese mit den Eigenfrequenzen aus Abb. 5.21:  $f = 357$  Hz und  $f = 353$  Hz, so zeigt sich recht deutlich, dass die Nachbarfelder und Konstruktionselemente wie Stegaussteifung und Gurte einen wesentlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten besitzen.



**Abb. 5.21:** Darstellung ausgewählter Eigenformen, **links:** eingespannt:  $f = 357$  Hz; **rechts:** gelenkig gelagert  $f = 353$  Hz.

### 5.5.4 Zusammenfassung

Werden mehrere Felder betrachtet, so besitzt die Lagerung der Randfelder keinen wesentlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten im Mittelfeld. Der Einfluss der Randlagerung auf das Mittelfeld wird mit zunehmender Eigenfrequenz geringer.

## 5.6 Vergleich von drei mit fünf Blechfelder

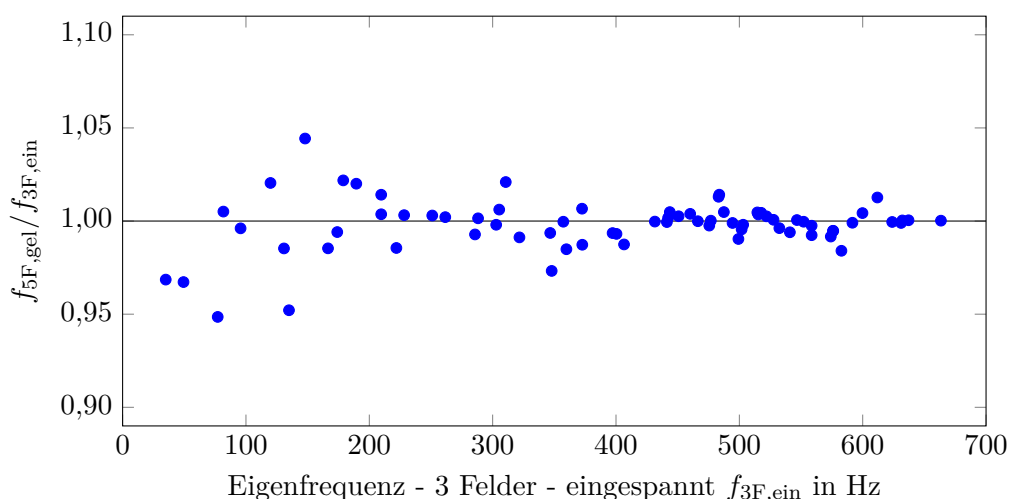
Im diesem Abschnitt wird das Schwingungsverhalten von drei Feldern mit jenem von fünf Feldern verglichen. Die Lagerungsbedingungen für das Modell mit drei Felder entspricht dem aus Abb. 5.17, wobei das Modell "eingespannt" verwendet wird. Für das Modell mit fünf Feldern wird die Lagerungsbedingung "gelenkig" verwendet. Durch den Vergleich kann das Ergebnis aus dem vorigen Abschnitt evaluiert werden. Gleichzeitig kann eine Aussage über die notwendige Feldanzahl getroffen werden.

### 5.6.1 Filterung der Eigenfrequenzen und Eigenformen

Da wie in Abschnitt 5.5 nun auch Eigenformen vorkommen, bei denen die Randfelder dominante Auslenkungen gegenüber dem Mittelfeld besitzen, werden nur solche berücksichtigt, welche die maximale Auslenkung im Mittelfeld besitzen.

### 5.6.2 Gegenüberstellung der Eigenfrequenzen

Abbildung 5.22 zeigt den Vergleich der Eigenfrequenzen des Modells mit fünf Felder  $f_{5F, \text{gel}}$  mit jenen des Modells mit drei Feldern  $f_{3F, \text{ein}}$ . Der erste Index gibt hierbei an ob es sich um eine Eigenfrequenz aus einem Dreifeldmodell "3F" oder aus einem Fünffeldmodell "5F" handelt. der zweite Index gibt die Randlagerung an ("gel" für gelenkig, "ein" für eingespannt). Der Effekt, wonach mit zunehmender Frequenz die Abweichungen geringer werden, findet sich auch bei dieser Gegenüberstellung. Im unteren Frequenzbereich kommt es zu kleineren Abweichungen, jedoch kann eine gute Übereinstimmung der beiden Modelle gezeigt werden.



**Abb. 5.22:** Verhältnis der Eigenfrequenzen  $f_{5F, \text{gel}} / f_{3F, \text{ein}}$  zur Abschätzung der erforderlichen Feldanzahl.

In Tab. 5.7 sind die Eigenfrequenzen der beiden Modelle aufgelistet. Das Verhältnis für die Datenpunkte aus Abb. 5.22 kann daraus errechnet werden.

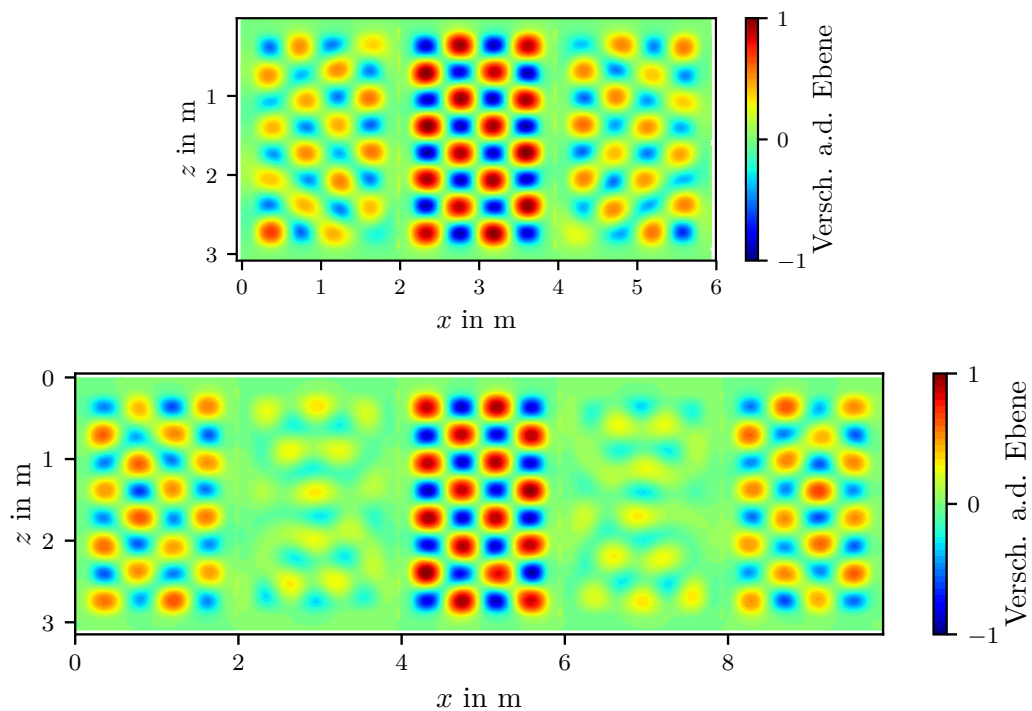
$f_{5F, \text{gel}}/\text{Hz}$	$f_{3F, \text{ein}}/\text{Hz}$	$f_{5F, \text{gel}}/\text{Hz}$	$f_{3F, \text{ein}}/\text{Hz}$	$f_{5F, \text{gel}}/\text{Hz}$	$f_{3F, \text{ein}}/\text{Hz}$	$f_{5F, \text{gel}}/\text{Hz}$	$f_{3F, \text{ein}}/\text{Hz}$
35	36	286	288	451	450	547	546
49	51	288	288	460	458	552	552
77	81	303	303	466	466	559	560
82	81	305	303	476	477	559	563
96	96	311	304	477	477	574	579
120	117	322	325	483	477	576	579
131	133	347	349	484	477	576	579
135	142	348	357	487	485	583	592
148	142	357	357	494	495	592	592
167	169	360	365	499	504	600	597
174	175	372	370	502	504	612	604
179	175	373	377	503	504	624	624
189	186	397	400	515	512	631	632
210	207	400	403	515	514	632	632
210	209	407	412	518	515	637	637
222	225	431	432	522	521	663	663
228	228	441	441	528	527		
251	250	442	441	532	534		
262	261	444	441	541	544		

**Tab. 5.7:** Gegenüberstellung ausgewählter Eigenfrequenzen.

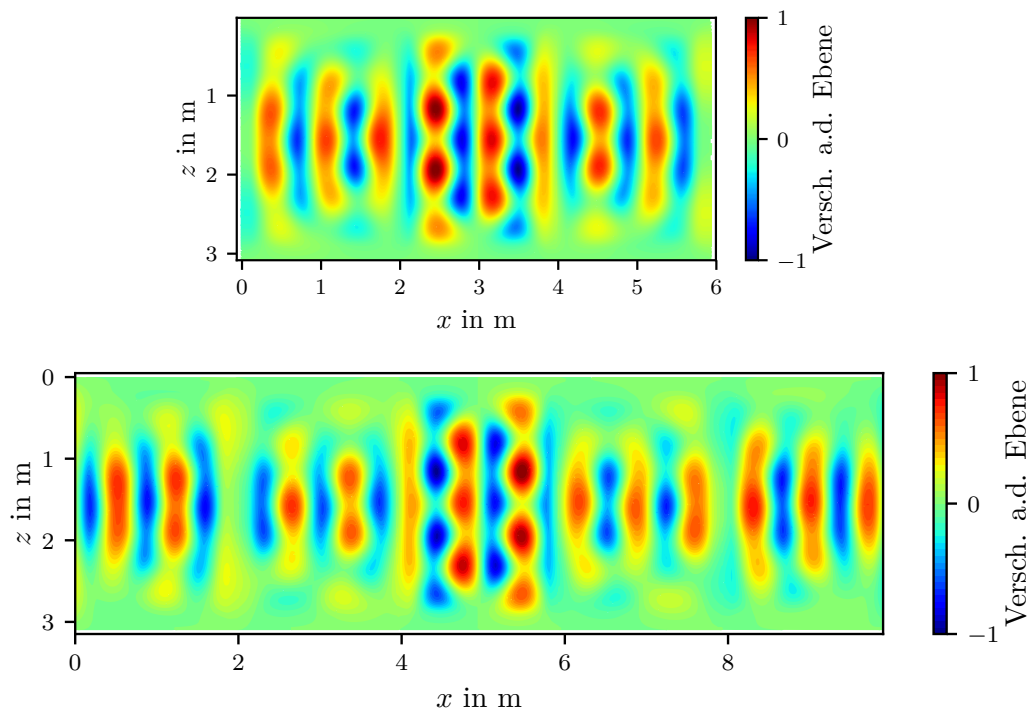
### 5.6.3 Vergleich der Eigenformen

Ausgewählte Eigenformen und zugehörige Eigenfrequenzen sind in den Abb. 5.23 - 5.25 dargestellt. Dabei kann man erkennen, dass die Eigenform im Mittelfeld sehr gut übereinstimmen.

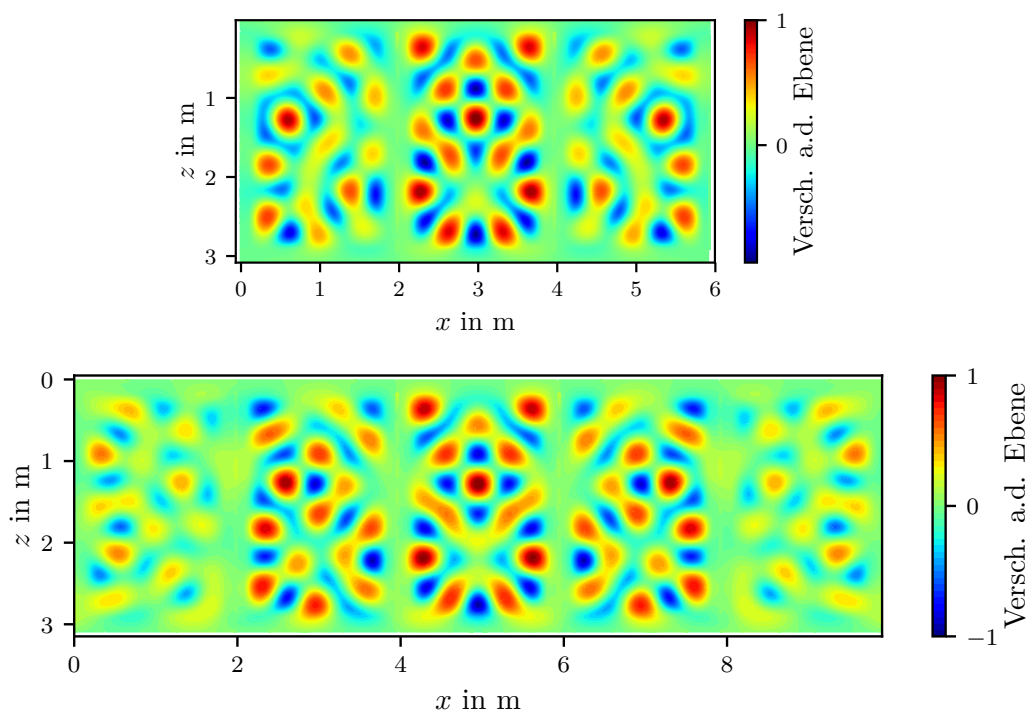




**Abb. 5.23:** Darstellung ausgewählter Eigenformen, **oben:** 3 Felder eingespannt  $f = 632$  Hz; **unten:** 5 Felder gelenkig gelagert  $f = 632$  Hz.



**Abb. 5.24:** Darstellung ausgewählter Eigenformen, **oben:** 3 Felder eingespannt  $f = 365$  Hz; **unten:** 5 Felder gelenkig gelagert  $f = 360$  Hz.



**Abb. 5.25:** Darstellung ausgewählter Eigenformen, **oben:** 3 Felder eingespannt  $f = 597$  Hz; **unten:** 5 Felder gelenkig gelagert  $f = 600$  Hz.

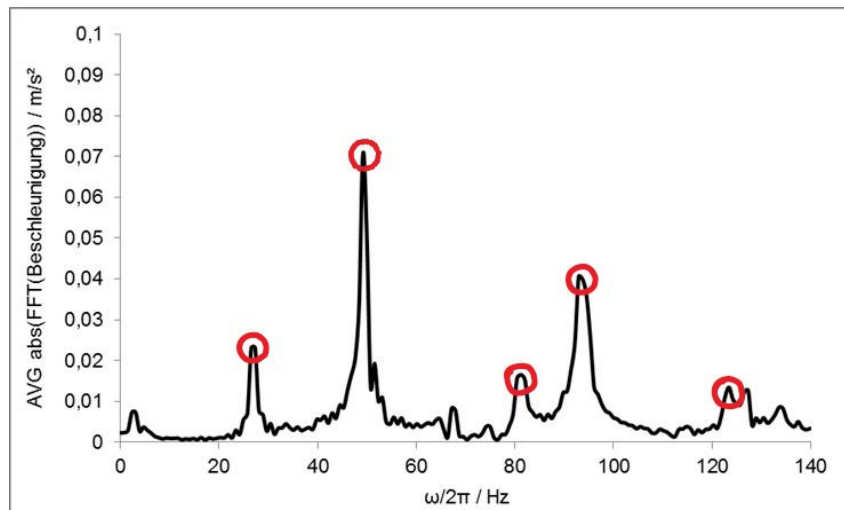
## 5.7 Vergleich mit Ergebnissen der experimentellen modalen Analyse

Im nachfolgenden Absatz werden Eigenformen und die zugehörigen Eigenfrequenzen aus einer experimentellen modalen Analyse (EMA) mit der FE-Berechnung verglichen. Die Ergebnisse der EMA [9] wurden von FCP ZT GmbH zur Verfügung gestellt. In Abb. 5.26 ist das Messraster dargestellt, wobei die Unterteilung in  $5 \times 8$  Messpunkte erfolgte. Auf jedem Punkt wurde nacheinander ein Beschleunigungssensor angebracht und das Blech auf der Rückseite mit einem Impulshammer angeregt. Pro Messpunkt wurde zehnmals ein Hammerschlag ausgeführt. Der verwendete Sensor ist ein Beschleunigungssensor, somit wurden Beschleunigungen über eine gewisse Zeitspanne gemessen. Das Signal wird im Anschluss über eine Fouriertransformation in den Frequenzbereich übergeführt.



**Abb. 5.26:** Ansicht des Stegblechs der Ostbahnbrücke: Einteilung des Messfeldes in ein Raster für EMA.

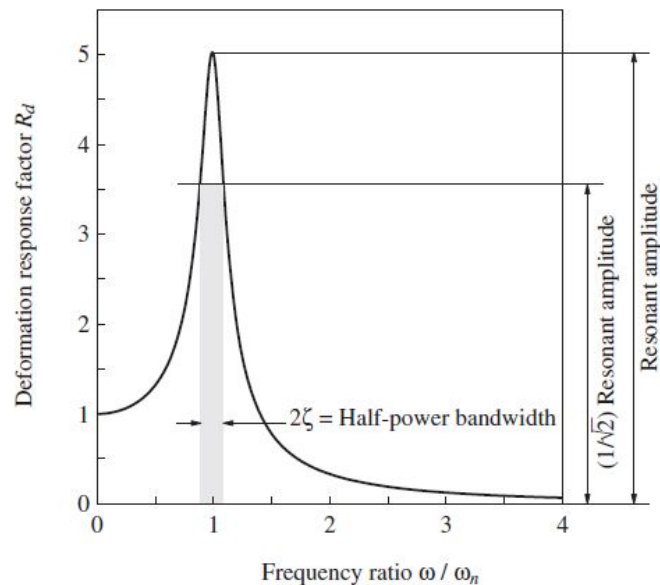
Für jeden Messpunkt wird der Erwartungswert der 10 einzelnen Messungen im Frequenzbereich ermittelt. Für einen ausgewählten Punkt ist in Abb. 5.27 der Erwartungswert des Beschleunigungsspektrums dargestellt. Anhand von lokalen Maxima (rote Kreise in Abb. 5.27) können gedämpfte Eigenfrequenzen identifiziert werden..



**Abb. 5.27:** Erwartungswert des Spektralwerts der Beschleunigung eines ausgewählten Messpunktes, lokale Maxima (rote Kreise) werden als Eigenfrequenzen identifiziert. Abbildung modifiziert von [9].

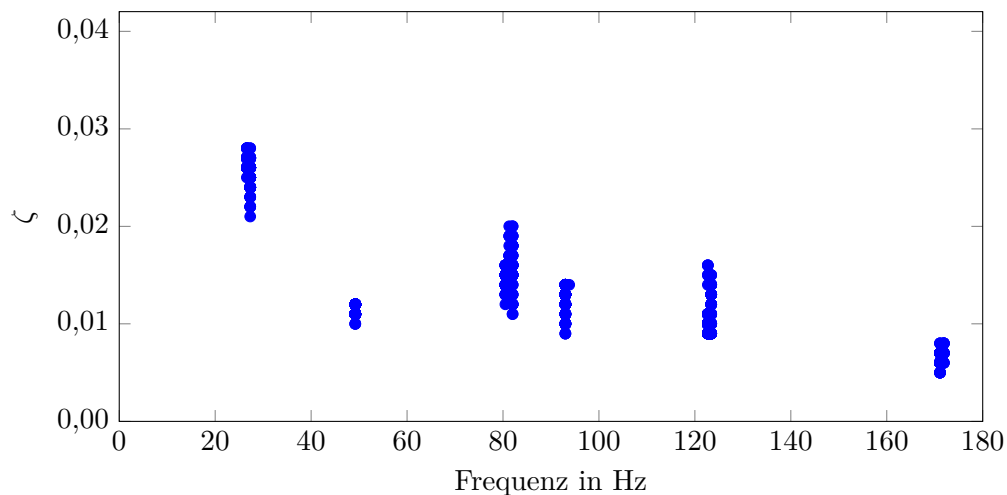
### 5.7.1 Dämpfung

Bei der EMA wurden Eigenfrequenzen eines gedämpften Systems ermittelt. In der FE Berechnung wurde die Dämpfung nicht berücksichtigt, weshalb die Ergebnisse aus der Berechnung mit jenen der Messung nicht ohne Weiteres verglichen werden können. Das Dämpfungsmaß  $\zeta$  in Abhängigkeit der Eigenfrequenz kann näherungsweise aus den Messergebnissen über die Wurzel-Zwei Methode [5] ermittelt werden (siehe Abb. 5.28).



**Abb. 5.28:** Bestimmung von  $\zeta$  über die Half-Power-Bandwidth Methode, Bild entnommen aus [5].

Abb. 5.29 zeigt die Streuung des Dämpfungswerts für die jeweiligen Eigenfrequenzen. Die Daten wurden von FCP ZT GmbH zur Verfügung gestellt [9]. Ein Punkt in Abb. 5.29 kann aus einem Verlauf wie in Abb. 5.27 berechnet werden. Dazu wird der Verlauf der spektralen Beschleunigung bei einer Eigenfrequenz extrahiert. Der spektrale Beschleunigungsverlauf kann einfach in einem spektralen Verschiebungsverlauf  $R_d$  umgerechnet werden ( $R_d = \frac{a}{\omega^2}$ ). Durch die Anwendung der Wurzel-Zwei Methode (Abb. 5.28) kann für diese Eigenfrequenz das Lehr'sche Dämpfungsmaß berechnet werden. Wird dies für alle identifizierbaren Eigenfrequenzen der einzelnen Messpunkte im Messraster ausgeführt, erhält man die Datenpunkte in Abb. 5.29. Anhand der Streuung kann für jede Eigenfrequenz ein Dämpfungsmaß angegeben werden.

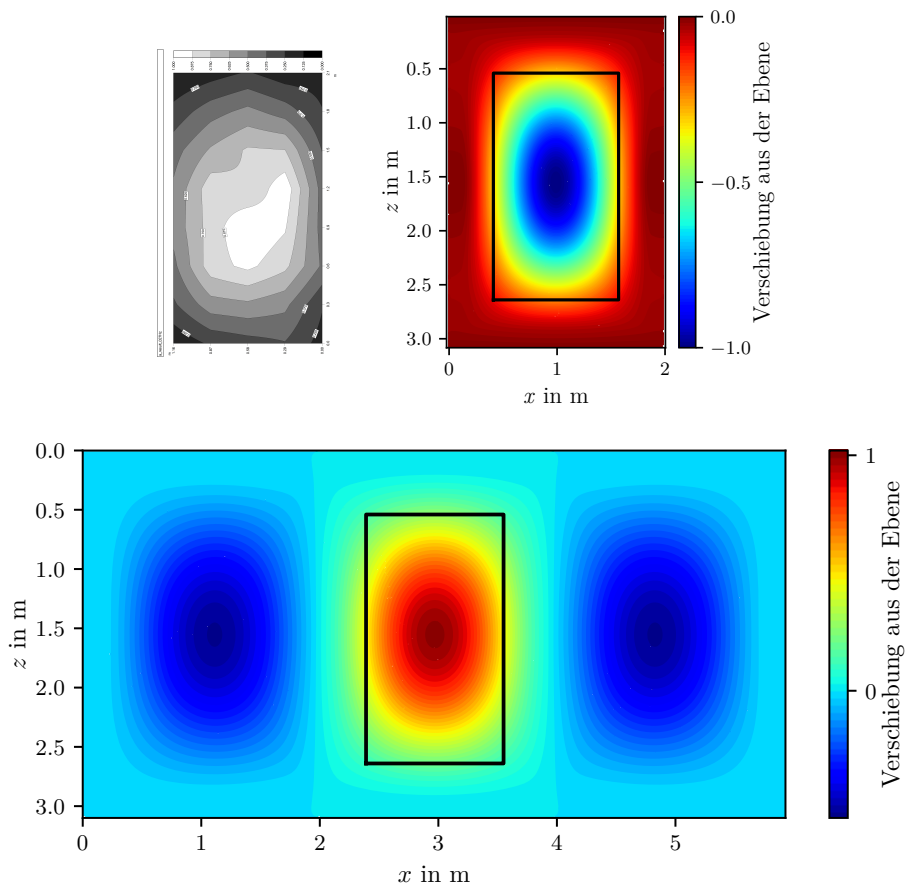


**Abb. 5.29:** Streuung der Dämpfung  $\zeta$  in Abhängigkeit der Eigenfrequenz. Abbildung modifiziert aus [9].

Nimmt man den maximalen Wert aus Abb. 5.29 ( $\zeta \approx 0,03$ ) und berechnet den Faktor  $\sqrt{1 - \zeta^2} = 0,9995$ , so kann festgehalten werden, dass sich die Eigenfrequenzen eines gedämpften und ungedämpften Systems vernachlässigbar unterscheiden. Die Dämpfung kann für den Vergleich der Eigenfrequenz vernachlässigt werden.

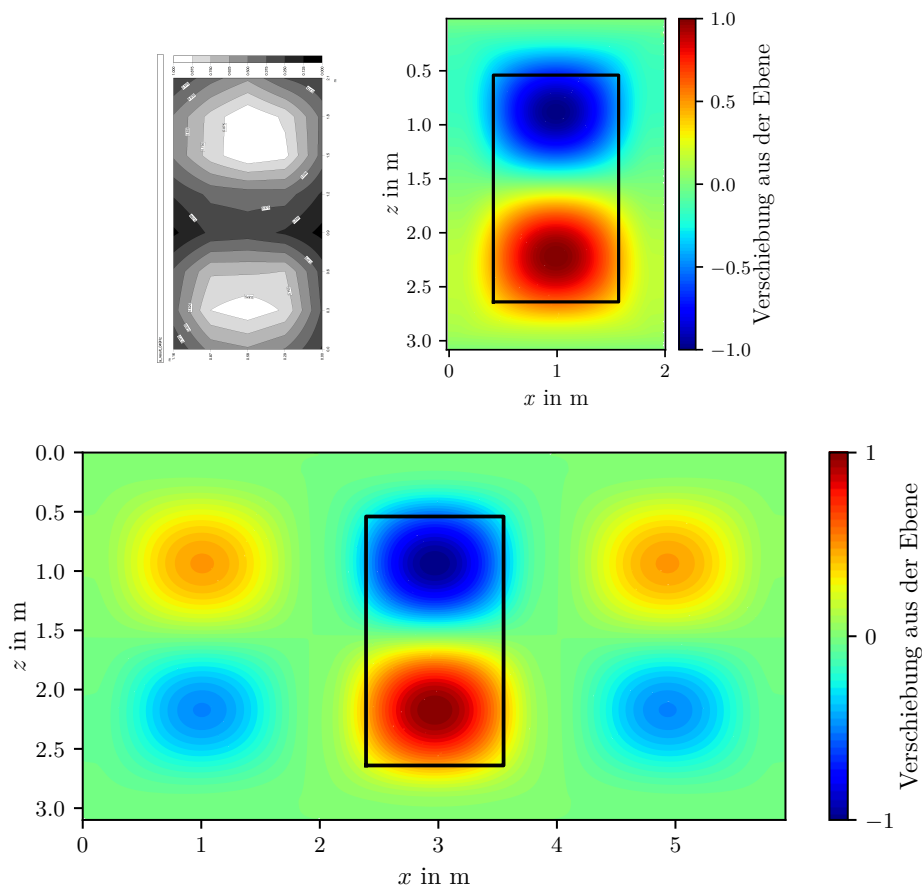
### 5.7.2 Vergleich der Berechnung mit der experimentellen modalen Analyse

Wird für jeden Punkt die Beschleunigungsamplitude einer bestimmten gedämpften (Eigen)Frequenz im Messraster aufgetragen, so kann zu dieser Eigenfrequenz die Eigenform graphisch dargestellt werden. Die Qualität der FE Berechnungen kann anhand der Messergebnisse ermittelt werden. Da das Raster kein gesamtes Feld (von Obergurt zu Untergurt und von einer Stegaussteifung zur Nächsten) abdeckt, ist der Umriss des Messrasters in den Eigenformen der Berechnung (siehe Abb. 5.30 bis Abb. 5.34) entsprechend dargestellt. In den nachfolgenden Abbildungen sind die Eigenformen aus der EMA und die Eigenformen eines Einfeldmodell und eines Dreifeldmodell dargestellt. Die Eigenfrequenz der EMA stellt eine Gedämpfte dar. Bei der FE Berechnung ist der Wert des ungedämpften Systems angeführt.



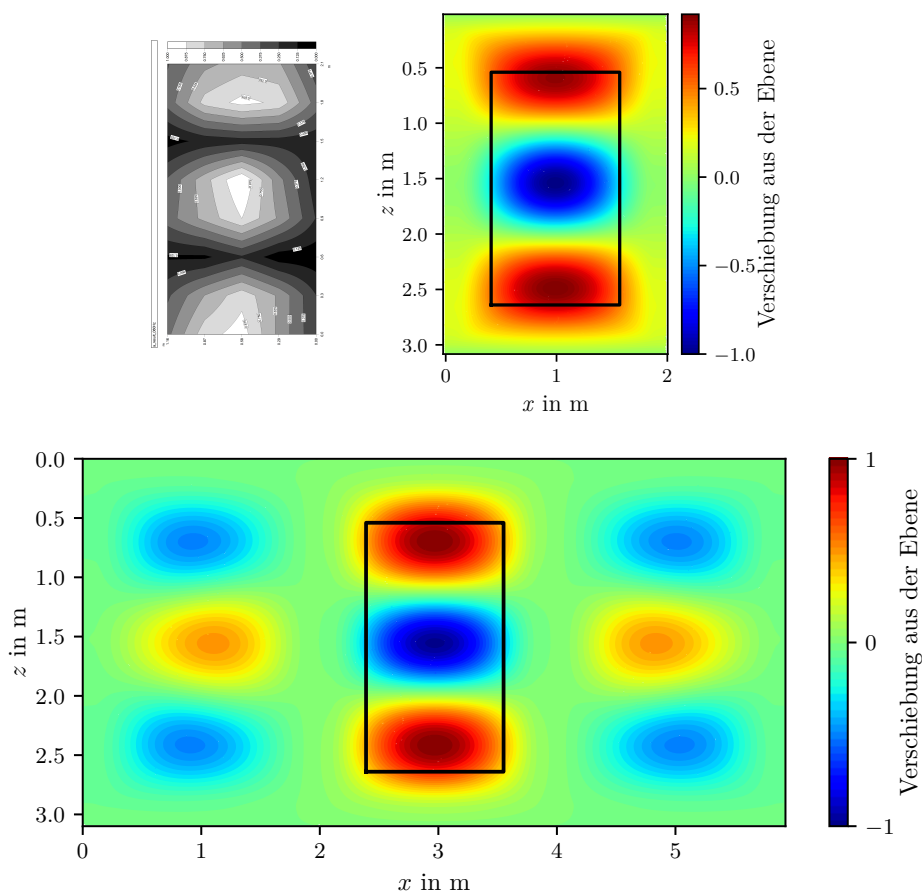
**Abb. 5.30:** Vergleich der Eigenformen aus EMA mit FE Berechnung;  
**links oben:** EMA mit  $f = 27$  Hz,  
**rechts oben:** Berechnung 1 Feld mit  $f = 36$  Hz,  
**unten:** Berechnung 3 Felder mit  $f = 30$  Hz.

Die Eigenfrequenz der Berechnung wird bei der ersten Eigenform deutlich überschätzt. Das Einfeldmodell liefert eine Eigenfrequenz, welche sehr deutlich (vgl. Abb. 5.30 EMA:  $f = 27$  Hz, Berechnung:  $f = 36$  Hz) über der EMA liegt. Das Dreinfeldmodell liegt um einige Hz über der EMA, ist jedoch im Vergleich zum Einfeldmodell wesentlich genauer.



**Abb. 5.31:** Vergleich der Eigenformen aus EMA mit FE Berechnung;  
**links oben:** EMA mit  $f = 49$  Hz,  
**rechts oben:** Berechnung 1 Feld mit  $f = 46$  Hz ,  
**unten:** Berechnung 3 Felder mit  $f = 51$  Hz.

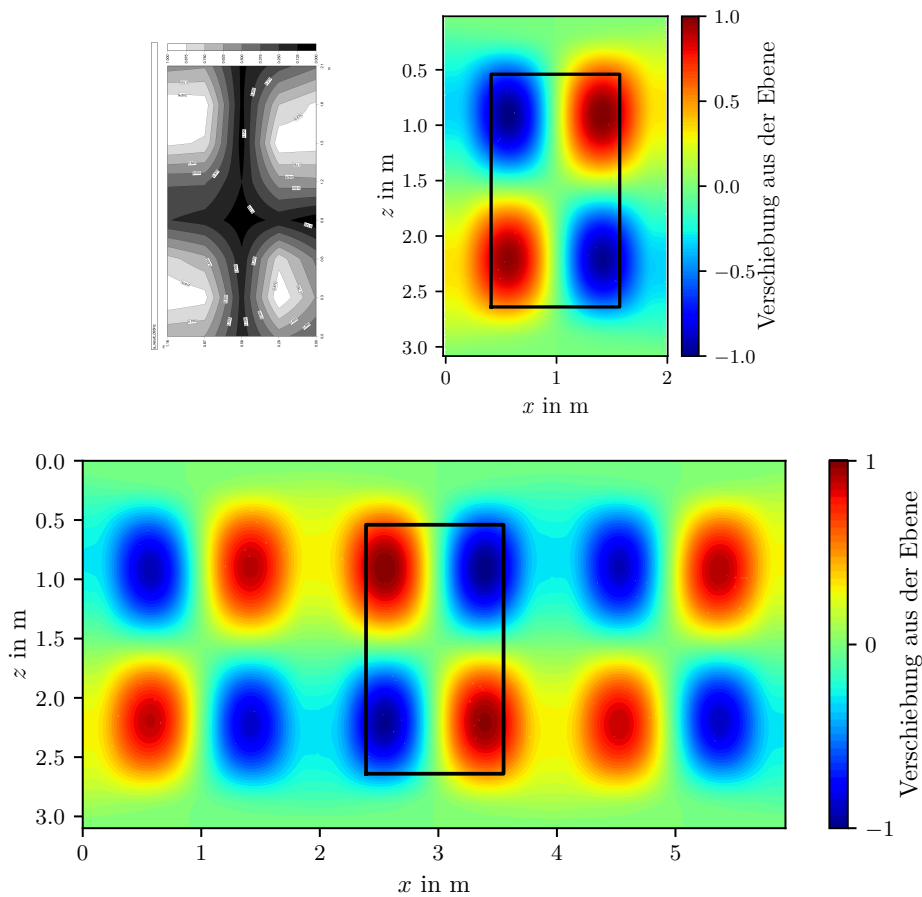
Der Vergleich der 1x2 Eigenform zeigt, dass das Einfeldmodell, verglichen mit der EMA, zu wenig Steifigkeit besitzt. Das Dreifeldmodell liegt etwas über der EMA. Die Abweichungen der Berechnung gegenüber der EMA sind im Vergleich zu der 1x1 Eigenform geringer.



**Abb. 5.32:** Vergleich der Eigenformen aus EMA mit FE Berechnung;  
**links oben:** EMA mit  $f = 80$  Hz,  
**rechts oben:** Berechnung 1 Feld mit  $f = 70$  Hz,  
**unten:** Berechnung 3 Felder mit  $f = 81$  Hz.

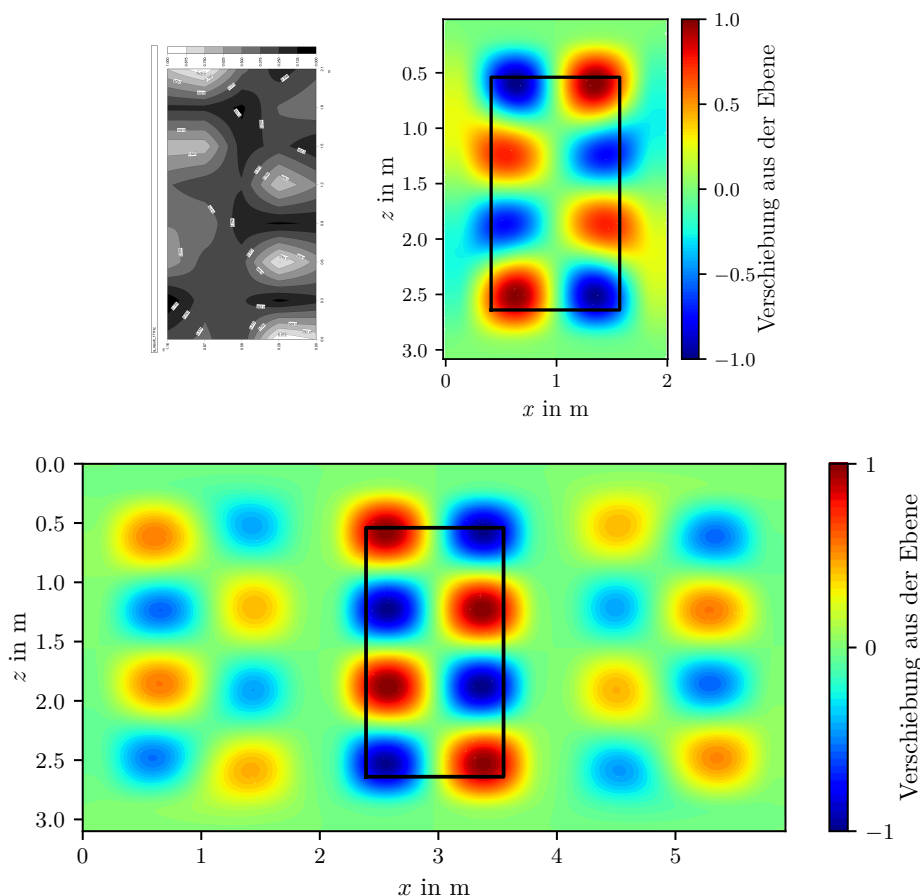
Vergleicht man das Einfeldmodell mit der EMA aus Abb. 5.32, so erkennt man, dass das Einfeldmodell bei dieser Eigenform die Frequenz deutlich unterschätzt. Die Eigenfrequenz des Dreinfeldmodell bei dieser Eigenform stimmt sehr gut mit der EMA überein.





**Abb. 5.33:** Vergleich der Eigenformen aus EMA mit FE Berechnung;  
**links oben:** EMA mit  $f = 93$  Hz,  
**rechts oben:** Berechnung 1 Feld mit  $f = 95$  Hz,  
**unten:** Berechnung 3 Felder mit  $f = 96$  Hz.

Die Eigenfrequenz aus der Konvergenzstudie der eingespannten Platte für die 2x2 Eigenform (Tab. 4.9) beträgt  $f = 90$  Hz. Vergleicht man diese mit dem Ergebnis der EMA  $f = 93$  Hz, so zeigt sich, dass das eingespannte Plattenmodell ohne Gurte und Stegaussteifungen die Realität unterschätzt. Das Einfeldmodell als auch das Dreifeldmodell stimmen mit der EMA gut überein.



**Abb. 5.34:** Vergleich der Eigenformen aus EMA mit FE Berechnung;  
**links oben:** EMA mit  $f = 171$  Hz,  
**rechts oben:** Berechnung 1 Feld mit  $f = 177$  Hz,  
**unten:** Berechnung 3 Felder mit  $f = 175$  Hz.

Die Eigenfrequenz aus der Konvergenzstudie der eingespannten Platte für die 2x4 Eigenform (Tab. 4.9) beträgt  $f = 149$  Hz. Vergleicht man diese mit dem Ergebnis der EMA  $f = 171$  Hz, so zeigt sich deutlich, dass das eingespannte Plattenmodell ohne Gurte und Stegaussteifungen die Realität unterschätzt. Die Eigenfrequenz des Einfeldmodellss liegt hier über der des Dreifeldmodells.

### 5.7.3 Zusammenfassung

Die Eigenfrequenz des Dreifeldmodells liegt bei den betrachteten Eigenformen stets etwas über der EMA. Das Einfeldmodell über- und unterschätzt die EMA bei einigen Vergleichen deutlich. Generell zeigt sich, dass das Dreifeldmodell bessere Ergebnisse liefert als das Einfeldmodell.

## 5.8 Einfluss der Größe der Finiten Elemente auf die Rechendauer

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die FE Netzgröße auf die Rechendauer der verwendeten Software auswirkt. Die zu erwartende Genauigkeit in Abhängigkeit der Anzahl der Finiten Elemente kann in Kapitel 4 nachgeschlagen werden. Untersucht wird ein Dreifeldmodell,

wobei die ersten 360 Eigenfrequenzen berechnet werden. Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen wird das Lanczos-Verfahren eingesetzt. Die Berechnung erfolgt auf einem handelsüblichen Rechner. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.8 aufgelistet.

max. Kantenlänge in mm	100	80	60	40	20
Rechendauer in s	220	250	320	625	2040

**Tab. 5.8:** Rechendauer zur Ermittlung der ersten 360 Eigenfrequenzen des Dreifeldmodell auf einem handelsüblichen Rechner in Abhängigkeit der Kantenlänge der Finiten Elemente.

## 5.9 Zusammenfassung

Bei einem einzelnen Feld kann der Einfluss der Nachbarfelder über die Randlagerung (gelenkig, eingespannt oder Drehfeder) näherungsweise beschrieben werden. Eine Einspannung bildet das Verhalten im Vergleich zu drei Blechfelder gut ab, jedoch kann ein einzelnes Feld nicht die gesamte Bandbreite an Eigenformen und Eigenfrequenzen abbilden. Um das Schwingungsverhalten eines Blechfeldes möglichst realitätsnahe zu beschreiben, ist es ausreichend, drei Blechfelder zu betrachten. Der Einfluss der benachbarten Felder auf das Mittelfeld kann somit gut beschrieben werden. Die seitliche Lagerung der Randfelder, ob gelenkig oder eingespannt, wirkt sich kaum auf das Schwingungsverhalten im Mittelfeld aus. Mit fünf Blechfeldern kann keine wesentliche Verbesserung der Genauigkeit, verglichen mit drei Feldern, erzielt werden. Es reicht nicht, nur das Stegblech an sich zu betrachten. Konstruktionselemente wie Obergurt, Untergurt und Stegaussteifungen wirken sich auf das Schwingungsverhalten maßgebend aus. Eine Modellierung über Stabelemente ist möglich, um die Anzahl der Knoten und somit die Berechnungszeit zu reduzieren. Eine ungenaue Modellierung, wie die fehlende Kontaktbedingung in Abb. 5.6 kann jedoch zu unbrauchbaren Ergebnissen führen. Über den Vergleich mit der EMA können diese Aussagen bestätigt werden.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

Über die Konvergenzstudie ist die Genauigkeit der Finite Elemente Berechnung gewährleistet. Der Vergleich mit der Lösung nach der Kirchhoff'schen Plattentheorie der gelenkig gelagerten Platte bietet sich auf Grund der Einfachheit an. Die anderen vorgestellten Lagerungsbedingungen (voll eingespannte Platte, zwei gegenüberliegende Seiten gelenkig, die anderen eingespannt) eignen sich nur bedingt, da die Ermittlung der Eigenfrequenzen aufwendig ist. Es konnte aber in allen vier Fällen ein sehr ähnliches Konvergenzverhalten gezeigt werden.

Das vorgestellte Dreifeldmodell eignet sich sehr gut, um das Schwingungsverhalten des mittleren Stegblechs mit entsprechender Genauigkeit nachzubilden. Es müssen jedoch alle Aussteifungselemente in der Software modelliert werden, um gute Ergebnisse zu erhalten. Ein Fünffeldmodell erhöht die Genauigkeit nur unwesentlich. Auf Grundlage des Dreifeldmodells können weitere Berechnungen stattfinden. Wird eine Anregung der Struktur über die Schwellen modelliert, so kann die Geschwindigkeit eines jeden (Finite Elemente) Punktes bei einer Zugüberfahrt errechnet werden. Bereiche mit hoher Geschwindigkeit in den jeweiligen Frequenzbereichen können dadurch identifiziert werden. In weiterer Folge können gezielte Maßnahmen getroffen werden, um die Schallemissionen der Ostbahnbrücke zu reduzieren. Die Erkenntnisse sind auch auf andere Bestandsbrücken und Neubaubrücken übertragbar.

# Literaturverzeichnis

- [1] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, 2006.
- [2] K.-J. Bathe und E. N. Dvorkin. „A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation“. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **21.2** (1985), S. 367–383.
- [3] R. D. Blevins. *Formulas for dynamics, acoustics and vibration*. Wiley, 2016.
- [4] C. Bucher. *Computational analysis of randomness in structural mechanics: structures and infrastructures book series*. Bd. 3. CRC Press, 2009.
- [5] A. Chopra. *Dynamics of structures*. Prentice Hall, 2012.
- [6] R. W. Clough und J. Penzien. *Dynamics of structures*. Computers & Structures, Inc, 2003.
- [7] M. Crisfield. „A quadratic mindlin element using shear constraints“. In: *Computers and Structures* **18.5** (1984), S. 833–852.
- [8] F. Fahy und P. Gardonio. *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. Elsevier Science, 2007.
- [9] FCP - Fritsch Chiari und Partner ZT GmbH. *AP 3 Bericht zu FFG Forschungsprojekt SAVE - Schalltechnische Verbesserung von Eisenbahbrücken*. Techn. Ber. 2017.
- [10] T. Hughes und T. Tezduyar. „Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element“. In: *Journal of Applied Mechanics* **48.3** (1981), S. 587–596.
- [11] G. Kirchhoff. „Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.“ In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **40** (1850), S. 51–88.
- [12] A. W. Leissa. „The free vibration of rectangular plates“. In: *Journal of Sound and Vibration* **31** (1973), S. 257–293.
- [13] A. W. Leissa. *Vibration of plates*. Techn. Ber. Ohio State University at Columbus, 1969.
- [14] L. Meirovitch. *Fundamentals of vibrations*. McGraw-Hill, 2001.
- [15] M. Möser und W. Kropp. *Körperschall - Physikalische Grundlagen und technische Anwendungen*. Springer, 2010.
- [16] M. Möser. *Technische Akustik*. Springer, 2015.
- [17] ÖNORM EN 61260-1: *Elektroakustik - Bandfilter für Oktaven und Bruchteile von Oktaven*. Norm. Juni 2014.
- [18] ONR 305011: *Berechnung der Schallimmission durch Schienenverkehr - Zugverkehr, Vershub- und Umschlagbetrieb*. Norm. Nov. 2009.
- [19] H. Parkus. *Mechanik der festen Körper*. Springer-Verlag, 2013.
- [20] E. Reissner. „On bending of elastic plates“. In: *Quarterly of Applied Mathematics* **5.1** (1947), S. 55–68.

- 
- [21] *Richtlinie (EU) 2015/996 der Kommission zur Festlegung gemeinsamer Lärmbewertungsmethoden gemäß der Richtlinie 2002/49/EG des Europäischen Parlaments und des Rates.* Mai 2015.
- [22] SOFiSTiK AG. *ASE - Allgemeine Statik Finiter Elemente Strukturen.* 2017.
- [23] SOFiSTiK AG. *DYNA - Dynamische Berechnungen.* 2017.
- [24] SOFiSTiK AG. *SOFiSTiK - Basisfunktionalitäten.* 2017.
- [25] A. Tessler und T. Hughes. „An improved treatment of transverse shear in the mindlin-type four-node quadrilateral element“. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **39.3** (1983), S. 311–335.
- [26] D. Thompson. *Railway noise and vibration: mechanisms, modelling and means of control.* Elsevier, 2008.
- [27] T. E. Vigran. *Building acoustics.* CRC Press, 2008.
- [28] W. Voigt. „Bemerkung zu dem Problem der transversalen Schwingungen rechteckiger Platten“. In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1893), S. 225–230.
- [29] E. L. Wilson. *Three dimensional static and dynamic analysis of structures.* Computers und Structures, Inc, 1995.
- [30] F. Ziegler. *Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper.* Springer-Verlag, 2013.
- [31] O. C. Zienkiewicz und R. L. Taylor. *The finite element method for solid and structural mechanics.* Butterworth-heinemann, 2005.