

# DIPLOMARBEIT

MASTER THESIS

## Vergleichende Versuche zur Schubmittelpunktslage in Hochhauskernen

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs unter der Leitung von

**O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas KOLBITSCH**

und als verantwortlich mitwirkenden Assistenten

**Univ.Ass. Dipl.-Ing. Edmund SPITZENBERGER**

am

**Institut für Hochbau und Technologie**

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Bauingenieurwesen

von

**Martin Pühringer, BSc**

Matrikelnummer 0726466

Gallitzinstraße 33, A - 1160 Wien

Wien, im April 2014

.....

(Martin Pühringer)



## Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Herrn O.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Andreas Kolbitsch für die Möglichkeit bedanken, diese Diplomarbeit am Institut für Hochbau und Technologie an der Technischen Universität Wien durchführen zu können.

Im Speziellen gilt mein Dank Herrn Univ.Ass. Dipl.-Ing. Edmund Spitzenberger, der durch seine fachliche, kompetente und äußerst freundliche, aber zugleich sachliche Betreuung die Umsetzung der Arbeit in dieser Form ermöglicht hat.

Ganz besonderer Dank gebührt meiner Familie und insbesondere meinen Eltern, ohne deren bedingungslose Unterstützung in sämtlichen Lebensbereichen die Durchführung und Absolvierung des Studiums nicht möglich gewesen wäre.

Ein herzliches Dankeschön sende ich an dieser Stelle auch an all meine Freunde, Studienkollegen und Bekannten, die mich zu Höchstleistungen angetrieben und mir das Leben während des Studiums erleichtert haben.

## **Kurzfassung**

Die Lage des Schubmittelpunktes ist besonders bei aussteifenden Bauteilen wie Hochhauskernen von besonderem Interesse. Da bei diesen System abwechselnd offene und geschlossene Querschnitte über die Höhe verteilt sind, kommt es zu einer Lageänderung des Schubmittelpunktes über die Höhe.

Im Jahr 2013 wurde am Institut für Hochbau und Technologie auf der Technischen Universität Wien ein Versuch zur Schubmittelpunktslage in Hochhauskernen durchgeführt. Dabei wurden sieben Querschnittsprofile im Maßstab M 1:50 mit verschiedenen angeordneten Öffnungen im physikalischen Versuchsstand exzentrisch horizontal belastet und die Lage des Schubmittelpunktes über die Höhe ermittelt. Die Lagerung entsprach dabei dem in der Realität existenten Fall eines vertikalen Kragarms mit einer Einspannung. Die Ergebnisse wurden mit jenen einer numerischen Simulation eines Finite-Elemente-Programms verglichen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde vergleichend zu den vorhandenen Ergebnissen des Versuches mit einer Einspannung ein physikalischer Versuchsstand mit einer Gabellagerung aufgebaut. Es wurden die selben Profile verwendet, die Lagerung erfolgte diesmal jedoch horizontal. Durch eine vertikale exzentrische Belastung wurde über die Höhe bzw. Länge des Profils die Lage des Schubmittelpunkts ermittelt. Dieser Versuch wurde ebenfalls mittels eines Finite-Elemente-Programms modelliert und numerisch simuliert.

Um Aussagen über den Einfluss einer Änderung der Lagerungsbedingungen auf die Schubmittelpunktslage zu erhalten, wurden abschließend alle Versuchsergebnisse miteinander verglichen. Dabei wurden sämtliche Ergebnisse der physikalischen Versuche mit einer Einspannung sowie mit einer Gabellagerung und die jeweiligen numerischen Simulationen einander gegenübergestellt.

Die Arbeit beinhaltet weiters einen geschichtlichen Hintergrund über die Entwicklung der Torsionstheorie in der Baustatik sowie die theoretischen Grundlagen zur Berechnung von Torsionsproblemen. Es wird dabei auch besonders auf die Problematik in aussteifenden Hochhauskernen eingegangen.

## **Abstract**

The location of the shear center in stiffening components such as high-rise cores is of particular interest. In this systems alternately open and closed cross sections are distributed over the height. Therefore a change of position of the shear center depending on the height can be observed.

In 2013 an experiment on the shear center location was performed at the Institute for Building Construction and Technology at the Vienna University of Technology. In this process, seven profiles on a scale of 1:50 with differently positioned perforations have been investigated. A horizontal eccentric load within a physical test allowed the determination of the shear center location over the height. Like in the application the static system was realized as a vertical cantilever arm with a rigid clamping. The results have been compared to those of a finite element analysis.

To make the present work comparable to the existing results from 2013, another physical test with two clevis bearings was set up. The same profiles were used, but the bearings changed from a vertical to a horizontal orientation. This time the location of the shear center over the height was determined by a vertical eccentric load. Just like in 2013, the results of the physical measurement were opposed to numerical simulations of a finite element program. To obtain a qualitative statement on the influence of changing bearing conditions on the shear center location, the results were set against each other. All the data of the physical experiment with rigid clamping and clevis bearings as well as the corresponding numerical simulations were compared in diagrams.

Furthermore the work includes a historical background on the development of torsion in building mechanics and the theoretical basis for the calculation of torsion problems. Especially the torsion problems in stiffening high-rise cores are discussed.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Geschichte</b>	<b>1</b>
1.1	SAINT-VENANT als Vorreiter der Torsionstheorie [17] . . . . .	1
1.2	Die Entwicklung nach SAINT-VENANT [17] . . . . .	3
1.3	BACHs Entwicklungen am Ende des 19. Jahrhunderts [17] . . . . .	6
1.4	AUGUST FÖPPL und die Entwicklung von 1900-1920 [17] . . . . .	8
1.5	Die BREDT'schen Formeln [17] . . . . .	12
1.6	Die Entwicklung ab 1940 . . . . .	13
1.6.1	FRIEDRICH-WILHELM BORNSCHEUER und VASILII ZAKHAROVICH VLASOV [17], [26] . . . . .	13
1.6.2	Aussteifende Bauteile von Hochhäusern und deren Berechnung [6] .	15
1.7	Die Finite-Elemente-Methode . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>19</b>
2.1	Einführung zur Berechnung gegliederter Hohlkästen nach BECKER [7] . . .	19
2.1.1	Berechnungsablauf nach BECKER . . . . .	20
2.2	Torsion [11], [19], [23] . . . . .	30
2.2.1	Die SAINT-VENANT'sche Torsion . . . . .	31
2.2.2	Die Wölbkrafttorsion . . . . .	32
2.3	Schubmittelpunkt [11], [19] . . . . .	32
2.3.1	Grund- und Hauptverwölbungen . . . . .	33
2.3.2	Transformation der Verwölbung bei Verlagerung der Drehachse . . .	35
2.4	Bestimmung der Integrationskonstanten $\omega_0$ und der Schubmittelpunktsko- ordinaten $y_M$ und $z_M$ [11] . . . . .	36

2.4.1	Bestimmung der Integrationskonstante $\omega_0$ . . . . .	37
2.4.2	Bestimmung der Koordinaten des Schubmittelpunktes . . . . .	38
2.5	Beispielhafte Schubmittelpunktsermittlung am vorhandenen Querschnitt . . . . .	40
2.6	SAINT-VENANT'sche Torsion dünnwandiger Querschnitte [11] . . . . .	43
2.7	Wölbkrafttorsion für dünnwandige offene Querschnitte [11] . . . . .	44
2.7.1	Einführung . . . . .	44
2.7.2	Wölbnormalspannungen $\sigma_W$ und Wölbschubfluss $T_w$ . . . . .	45
2.7.3	Gesamt-torsionsmoment $M_T$ . . . . .	46
2.7.4	Wölbmoment $M_W$ . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Intention der Versuchsreihe</b> . . . . .	<b>49</b>
3.1	Vorhandene Ergebnisse . . . . .	49
3.1.1	Der Versuchsaufbau . . . . .	50
3.2	Eigene Ergebnisse . . . . .	50
3.2.1	Der Versuchsaufbau . . . . .	50
3.3	Vergleich der Ergebnisse aus eigenen Versuchen . . . . .	51
3.4	Vergleich der Ergebnisse aus eigenen Versuchen mit jenen aus dem vorhandenen Versuch . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Versuchsaufbau</b> . . . . .	<b>53</b>
4.1	Gabellagerung . . . . .	53
4.1.1	Das fixe Auflager . . . . .	55
4.1.2	Das längenvariable Auflager . . . . .	55
4.1.3	Freie Verschiebungen in $x$ -Richtung . . . . .	56
4.1.4	Keine Verschiebungen in $z$ -Richtung . . . . .	57
4.2	Messaufbau und Messpunkte . . . . .	58
4.3	Kraftaufbringung . . . . .	60
4.4	Schubflussklemme . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Versuchsdurchführung und Probekörper</b> . . . . .	<b>65</b>
5.1	Versuchsdurchführung . . . . .	65
5.2	Probekörper . . . . .	70

5.2.1	Dimensionen . . . . .	70
5.2.2	Messpunkte . . . . .	72
5.3	Erläuterungen für die Versuchsauswertungen . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Numerische Simulation</b>	<b>79</b>
6.1	FE-Modell . . . . .	79
6.2	Simulationsdurchführung . . . . .	81
6.3	Erläuterungen für die Versuchsauswertungen . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Versuchsergebnisse aus den physikalischen Versuchen mit Gabellagerung</b>	<b>83</b>
7.1	Probekörper 1 . . . . .	84
7.2	Probekörper 2 . . . . .	86
7.3	Probekörper 3 . . . . .	87
7.4	Probekörper 4 . . . . .	88
7.5	Probekörper 5 . . . . .	89
7.6	Probekörper 6 . . . . .	90
7.7	Probekörper 7 . . . . .	91
7.8	Darstellung aller Schubmittelpunktverläufe physikalisch . . . . .	92
<b>8</b>	<b>Versuchsergebnisse aus den numerischen Simulationen mit Dlubal RFEM</b>	<b>95</b>
8.1	Probekörper 1 . . . . .	96
8.2	Probekörper 2 . . . . .	98
8.3	Probekörper 3 . . . . .	99
8.4	Probekörper 4 . . . . .	100
8.5	Probekörper 5 . . . . .	101
8.6	Probekörper 6 . . . . .	102
8.7	Probekörper 7 . . . . .	103
8.8	Darstellung aller Schubmittelpunktverläufe numerisch . . . . .	104
<b>9</b>	<b>Vergleich der Versuchsergebnisse aus den physikalischen Versuchen mit jenen aus den numerischen Simulationen mit Dlubal RFEM</b>	<b>107</b>
9.1	Einleitung . . . . .	108
9.2	Probekörper 1 . . . . .	108

9.3	Probekörper 2 . . . . .	110
9.4	Probekörper 3 . . . . .	111
9.5	Probekörper 4 . . . . .	113
9.6	Probekörper 5 . . . . .	114
9.7	Probekörper 6 . . . . .	116
9.8	Probekörper 7 . . . . .	117
<b>10</b>	<b>Vergleich der Versuchsergebnisse aus den physikalischen Versuchen mit Gabellagerung mit jenen aus den physikalischen Vergleichsversuchen mit Einspannung</b>	<b>119</b>
10.1	Einleitung . . . . .	120
10.2	Probekörper 1 . . . . .	120
10.3	Probekörper 2 . . . . .	122
10.4	Probekörper 3 . . . . .	123
10.5	Probekörper 4 . . . . .	125
10.6	Probekörper 5 . . . . .	126
10.7	Probekörper 6 . . . . .	128
10.8	Probekörper 7 . . . . .	129
<b>11</b>	<b>Vergleich der Versuchsergebnisse aus den numerischen Simulationen mit Gabellagerung mit jenen aus den numerischen Vergleichssimulationen mit Einspannung</b>	<b>131</b>
11.1	Einleitung . . . . .	132
11.2	Probekörper 1 . . . . .	133
11.3	Probekörper 2 . . . . .	135
11.4	Probekörper 3 . . . . .	137
11.5	Probekörper 4 . . . . .	139
11.6	Probekörper 5 . . . . .	140
11.7	Probekörper 6 . . . . .	142
11.8	Probekörper 7 . . . . .	143
<b>12</b>	<b>Vergleich und Résumé der Versuche</b>	<b>145</b>

12.1 Vergleich mit den Ergebnissen nach BECKER . . . . .	145
12.2 Résumé der Versuche . . . . .	147

---

# Kapitel 1

## Geschichte

### 1.1 Saint-Venant als Vorreiter der Torsionstheorie [17]

Folgt man geschichtlichen Recherchen über die Anfänge der Baustatik und im Speziellen der Torsionstheorie, wird man zunächst im 19. Jahrhundert fündig. In weiterer Folge wird die Entwicklung ab der Mitte des 19. Jahrhunderts beschrieben, wobei auf die zeitlich früher liegenden Leistungen großer Wissenschaftler wie z.B. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY<sup>1</sup>, welche die Basis für die Weiterentwicklung der Baustatik ermöglichten, nicht vergessen werden soll. In dieser Arbeit wird darauf jedoch nicht eingegangen. Die ersten schriftlichen Grundzüge der Torsionstheorie gehen laut mehrfacher Meinung in der Literatur zum Großteil auf ADHÉMAR JEAN-CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT<sup>2</sup> zurück. Dieser schrieb im Jahre 1847 drei Mémoires nieder, welche sich mit dem Verhalten eines Probekörpers unter Torsionseinwirkung beschäftigen. Außerdem waren in diesen drei Mémoires auch bereits Grundgleichungen enthalten, die Lösungen bestimmter einfacher Torsionsprobleme ermöglichen.

SAINT-VENANT wird in der Literatur (siehe [17]) als Wegbereiter für alle darauf folgenden Lösungsansätze in der Torsionstheorie beschrieben. Auch wenn erst Jahre nach der

---

<sup>1</sup>AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789-1857) war ein französischer Mathematiker

<sup>2</sup>ADHÉMAR JEAN CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT (1797-1886) war ein französischer Ingenieur, Mathematiker und Physiker

ersten Veröffentlichung der drei Mémoires die SAINT-VENANT'schen Lösungsansätze in der Fachwelt Einzug fanden (ab 1855), so werden sie dennoch nach wie vor als die Geburt der Torsionstheorie verstanden. Folgende Punkte zeichnen die drei Mémoires aus:

Im ersten Mémoire von SAINT-VENANT ist bereits, obwohl nur Grundgleichungen enthalten sind, die Erkenntnis eingebettet, dass eine nicht kreisförmige Querschnittsfläche eines prismatischen Stabes nach der Torsionsbeanspruchung gekrümmt, also nicht mehr eben ist. Diese Aussage beschreibt erstmals die Verwölbung eines tordierten Stabes. SAINT-VENANT hat diesen Sachverhalt durch Beschreibung eigener Modellversuche festgehalten.



Abbildung 1.1: Torsionsversuch an einem Probekörper mit elliptischem Querschnitt [2]

Im zweiten Mémoire ist der Lösungsweg des Torsionsproblems eines prismatischen Stabes mit Rechteckquerschnitt enthalten. Weiters findet er heraus, dass CAUCHYS Ergebnisse nur bezogen auf sehr schlanke Rechteckquerschnitte Gültigkeit besitzen. Im dritten Mémoire formuliert SAINT-VENANT schließlich die Verwölbungsfunktion eines prismatischen Stabes mit elliptischem Querschnitt infolge eines Torsionsmoments.

SAINT-VENANT machte sich in weiterer Folge seine eigenen Erkenntnisse zunutze und formulierte unter anderem im Jahr 1853 weitere Mémoires, welche durch die oben be-

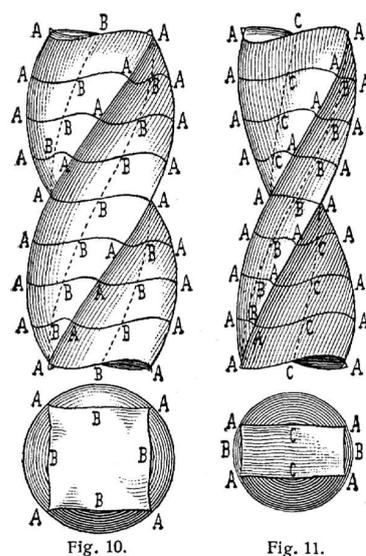


Abbildung 1.2: Torsionsversuch an Probekörpern mit rechteckigem Querschnitt [3]

schriebenen bereits präformiert wurden.

Der besondere Erfolg der von SAINT-VENANT beschriebenen Torsionstheorie liegt in der von ihm selbst entwickelten semiinversen Methode. Dies bedeutet, dass nur ein Teil der unbekanntenen Lösungen vorgegeben wird, die fehlenden Größen werden durch Erfüllen der Differentialgleichungen und der Randbedingungen ermittelt. Der durchschlagende Erfolg dieser Methode beruht darauf, dass die technisierte Elastizitätstheorie und Versuche auf theoretischer Ebene vereint werden. Dies bedeutete insbesondere für die damalige Zeit, dass ein Stilbruch hinsichtlich einer Vereinseitigung von Torsionsproblemen im Ingenieurbau passierte. Dank SAINT-VENANT wurde das Wesensmerkmal der Technikwissenschaften – die Vereinigung von Empirie und Theorie – klar ersichtlich.

## 1.2 Die Entwicklung nach Saint-Venant [17]

Einer der Ersten Wissenschaftler, die sich der SAINT-VENANT'schen Torsionstheorie annahmen, war JULIUS WEISBACH<sup>3</sup>. Dieser wendet sich in seinen Versuchen in erster Linie an den Maschinenbauingenieur. Dies wiederum wird durch seine ergebnisorientiert durchgeführten Versuche an guss- und schmiedeeisernen Wellen verdeutlicht. WEISBACH

<sup>3</sup>JULIUS LUDWIG WEISBACH (1806-1871) war ein deutscher Mathematiker und Ingenieur

hat die SAINT-VENANT'schen Formeln praktisch angewendet, Tabellenwerke erstellt, und erstmals für praxisrelevante Fälle des Maschinenbaus Aussagen über den Proportionalitätsfaktor  $D$  gemacht. Dieser wurde zwar bereits von SAINT-VENANT formuliert, jedoch nicht näher erörtert.

$$D = \frac{\vartheta}{l} = \frac{M_t}{GI_t} \quad (1.1)$$

Ein Verständnis für die in 1.1 vorkommenden Begriffe bietet folgende Skizze:

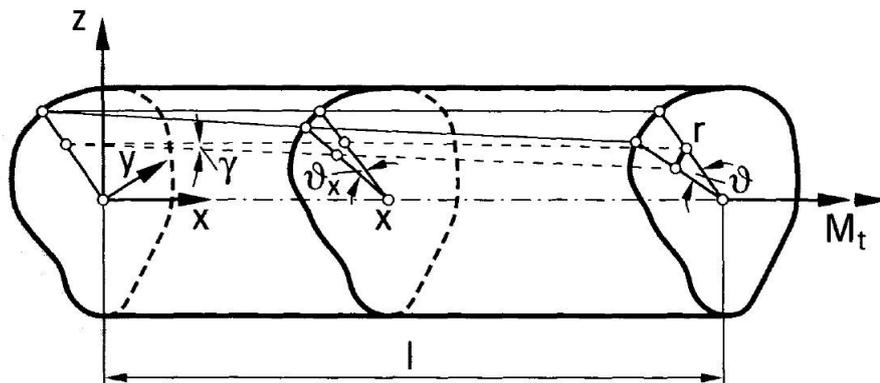


Abbildung 1.3: Prismatischer Stab durch  $M_t$  beansprucht [17]

$D$  als Proportionalitätsfaktor beschreibt nach SAINT-VENANT die Drillung. Diese wird durch das Verhältnis vom Verdrehungswinkel  $\vartheta$  zur Länge  $l$  des Stabes definiert. Dieses Verhältnis setzte er gleich dem Verhältnis von einwirkendem Torsionsmoment  $M_t$  zur Torsionssteifigkeit  $GI_t$ , bestehend aus dem Schubmodul  $G$  und dem Torsionsträgheitsmoment  $I_t$ .

430      Dritter Abschnitt. Sechstes Capitel.

Torsion. 
$$Pa = \frac{3\pi}{16} \frac{\alpha Er^4}{l} = 0,59 \frac{\alpha Er^4}{l}.$$

Bei Körpern, deren Querschnittsdimensionen sehr von einander abweichen, fallen die Abweichungen größer aus. Z. B. für ein Parallelepiped, dessen Höhe  $h$  von seiner Breite  $b$  vielfach übertroffen wird, ist nach Saint-Venant und Cauchy:

$$Pa = \frac{2}{0,841} \frac{\alpha Eb^3h}{16l} = 0,149 \frac{\alpha Eb^3h}{l}.$$

Legt man die letzten Formeln von Bertiheim zu Grunde und verwandelt man die Torsionsbogen  $\alpha$  in Winkel, setzt also:

$$\alpha = \frac{\pi \alpha^\circ}{180} = 0,017453 \cdot \alpha^\circ,$$

so erhält man für den quadratischen Schaft:

$$Pa = 0,0009180 \frac{\alpha^\circ Eb^4}{l},$$

und für die kreisrunde Welle:

$$Pa = 0,010297 \frac{\alpha^\circ Er^4}{l}.$$

Setzt man nun:

$$Pa = \frac{\alpha^\circ b^4}{l} D \quad \text{und} \quad Pa = \frac{\alpha^\circ r^4}{l} D_1,$$

so hat man für die Wellen mit quadratischem Querschnitte:

$$D = 0,0009180 E,$$

und für die Wellen mit kreisförmigem Querschnitte:

$$D_1 = 0,010297 E,$$

und nimmt man nun für die bei Wellen gewöhnlich angewendeten Stoffe die Elasticitätsmodul  $E$  aus der Tabelle in §. 200, so läßt sich folgende Tabelle der Drehungscoefficienten  $D$  und  $D_1$  zusammensetzen.

Materie der Wellen.	Quadratischer Querschnitt.		Kreisförmiger Querschnitt.	
	Französisches Maß.	Preussisches Maß.	Französisches Maß.	Preussisches Maß.
Holz . . . . .	92	1400	1030	15000
Stahl u. Schmiedeeisen . . . . .	1836	27900	20600	310000
Gusseisen . . . . .	872	13000	10000	150000
Reifing . . . . .	1500	22000	17000	250000

Abbildung 1.4: Tabellenwerk von WEISBACH für den Proportionalitätsfaktor  $D$  [17]

WEISBACHS Untersuchungen an Wellen mit quadratischen und kreisförmigen Querschnitten und die daraus bereits erwähnten Tabellenwerke bildeten für die Bau- und Maschineningenieure von 1850 bis ca. 1875 eine Grundlage bei der Anwendung in der Praxis. Dennoch konnte WEISBACH in seinen Niederschriften das Torsionsträgheitsmoment  $I_t$  begrifflich noch nicht erfassen. Auch seine Darstellung des Proportionalitätsfaktors  $D$  hat noch nicht den Status eines technikkwissenschaftlichen Begriffs erreicht.

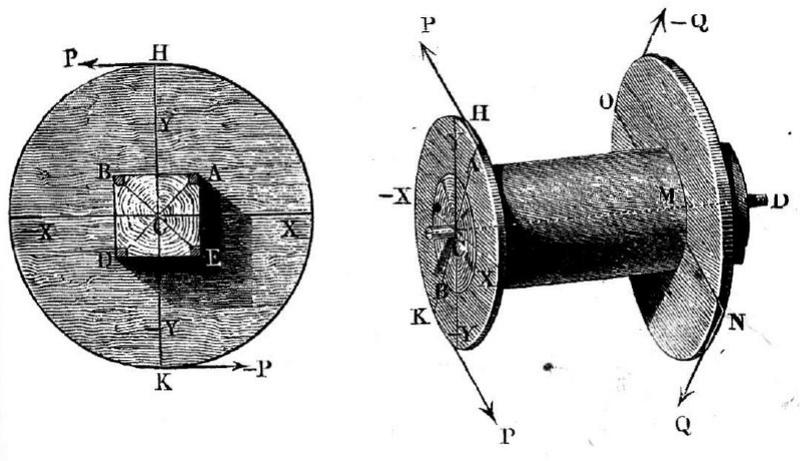


Abbildung 1.5: Torsionsversuch an Wellen mit quadratischen und kreisförmigen Querschnitten [17]

### 1.3 Bachs Entwicklungen am Ende des 19. Jahrhunderts [17]

1889/1890 veröffentlichte CARL BACH<sup>4</sup> das Buch *Elasticität und Festigkeit*, welches der technischen Elastizitätstheorie basierend auf Versuchen eine neue Qualität verleiht. Speziell bezogen auf das Torsionsproblem, welchem er in seinem insgesamt 376 Seiten umfassenden Buch immerhin 50 Seiten widmet, setzt er neue Maßstäbe in der Anwendung. BACH selber beschreibt in seinem Buch die dringende Notwendigkeit, von schwierigen mathematischen Formelapparaten Abstand zu nehmen und sieht im Mangel an verhältnismäßiger Einfachheit der zur Lösung führenden Rechnungen das Problem begraben. Er spielt in seinem Werk auch bereits auf die Wölbkrafttorsion an, indem er beschreibt, man müsse bei der Torsion von prismatischen Stäben nichtkreisförmigen Querschnitts auch Formänderungen (Verformungen) ins Auge fassen.

BACH machte viele Versuche an Stäben mit prismatischen, nichtkreisförmigen Querschnitten und schrieb diese präzise nieder. Er untersuchte dabei ausgehend von einem kreisförmigen Querschnitt nacheinander Stäbe mit elliptischen und rechteckigen Querschnitten. Dank der zu der Zeit schon vorhandenen Fotografie lichtete er seine Versuche auch schon weitgehend ab.

---

<sup>4</sup>JULIUS CARL VON BACH (1847-1931) war ein deutscher Maschinenbau-Ingenieur und Hochschullehrer

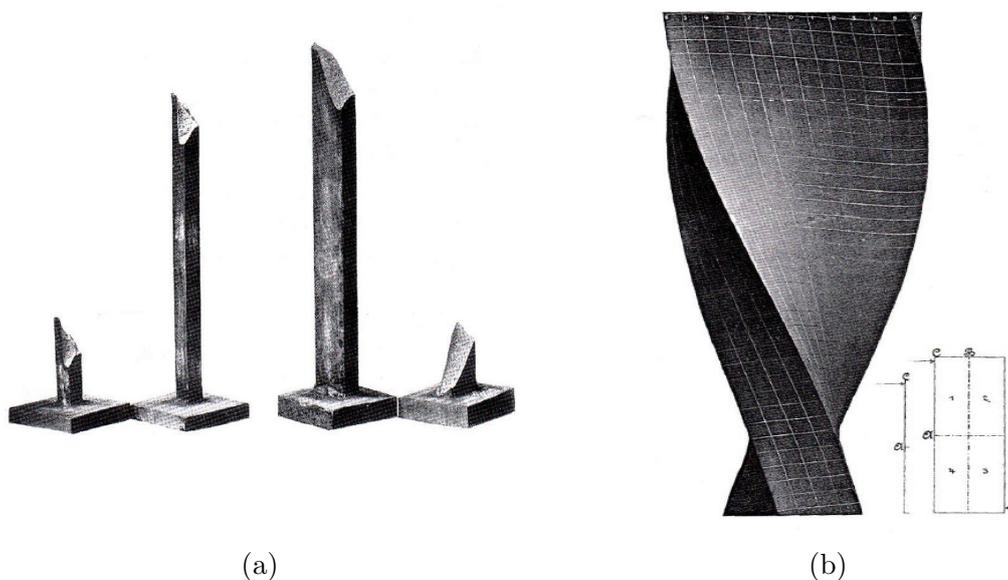


Abbildung 1.6: Fotografien zu BACHS Torsionsversuchen: (a) Stäbe aus Gusseisen, (b) Stab aus Hartblei [17]

Die wesentliche Errungenschaft aus BACHS Werk ist die Formulierung einer Nachweisformel für unterschiedliche Stäbe unter Torsionsbeanspruchung:

$$M_{t,vorh} \leq \varphi \tau_{zul} \frac{I_{min}}{b} \quad (1.2)$$

Die vorangestellte Nachweisformel weist mit  $\varphi$  wieder einen Proportionalitätsfaktor auf. Der Nachweis erfolgt auf Ebene der Schubspannungen  $\tau$  mit  $I_{min}$  als kleinstem Trägheitsmoment des Querschnitts und der Größe  $b$  als Radius bei Kreisquerschnitten, die kleinste Halbachse bei elliptischen Querschnitten und als kleinere Seite bei Rechtecken. Bach brachte in diesem Zusammenhang auch ein Tabellenwerk heraus, das dem Ingenieur eine einfache Anwendung des Schubspannungsnachweises ermöglichte. In diesem Tabellenwerk sind neben kreisförmigen, elliptischen und rechteckigen Querschnitten auch Querschnitte anderer geometrischer Formen, wie z.B. Sechsecke und Dreiecke, angeführt.

BACHs Erkenntnissen liegt jedoch nach wie vor zugrunde, dass sich die Querschnittsverwölbung ungehindert ausbilden kann. An dieser Stelle ist also eine klare Abgrenzung der SAINT-VENANT'schen Torsion zur Wölbkrafttorsion bemerkbar.

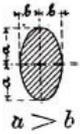
No.	Querschnittsform	Drehungsmoment $M_d$	Drehungswinkel $\vartheta$
1		$\frac{\pi}{16} k_d d^3$	$\frac{32 M_d}{\pi d^4} \beta$
2		$\frac{\pi}{16} k_d \frac{d^4 - d_o^4}{d}$	$\frac{32 M_d}{\pi d^4 - d_o^4} \beta$
3	 $a > b$	$\frac{\pi}{2} k_d a b^2$	$\frac{1}{\pi} M_d \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \beta$
4	 $a > b$ $a_o : a = b_o : b = m$	$\frac{\pi}{2} k_d \frac{a b^3 - a_o b_o^3}{b}$	$\frac{1}{\pi} M_d \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3 (1 - m^4)} \beta,$

Abbildung 1.7: Auszug aus BACHS Tabellenwerk zu Torsionsversuchen [17]

Durch BACHS Beitrag zum Torsionsproblem wurde nun auch dank der Tabellenwerke und der einfachen Nachweisformel die Sparte der Bauingenieure angesprochen. Diesen wurde nun ein Mittel in die Hand gegeben, sich den vor allem im Stahlbau auftretenden Problemen zu stellen und den Einfluss der Torsion auf den Spannungszustand abschätzen zu können.

## 1.4 August Föppl und die Entwicklung von 1900-1920 [17]

In den nachfolgenden Jahrzehnten wurde dem Torsionsproblem wenig Aufmerksamkeit gewidmet. Da vor allem im konstruktiven Ingenieurbau der damaligen Zeit die Baustatik nach verbreiteter Meinung in ihrer Formulierung abgeschlossen war, wurde meist auf Tabellenwerke und bereits existente Nachweisformeln zurückgegriffen. Im Stahlbau überwiegte bis in die 20er Jahre des 20. Jahrhunderts hinein die Bauweise als Fachwerk, wodurch die Torsionsprobleme immer mehr in den Hintergrund rückten.

Die größte Entwicklung, die sich hinsichtlich des Torsionsproblems zu dieser Zeit herauskristallisierte, war die exaktere Formulierung der Nachweisformel von BACH. Im Jahr 1905 widmete LUIGI VIANELLO in seinem Werk *Der Eisenbau* der Untersuchung mehrerer Querschnitte unter Torsionsbeanspruchung gerade einmal drei Seiten. Er führte dort das Widerstandsmoment  $W_t$  für gebräuchliche Querschnitte an, wodurch sich nun BACHS Nachweisformel folgendermaßen darstellte:

$$M_{t,vorh} = \tau_{vorh} W_t \leq \sigma_{zul} \frac{I_{min}}{b} \quad (1.3)$$

mit

$$W_t = \varphi \frac{I_{min}}{b} \quad (1.4)$$

Durch diese Modifikation ist der Nachweis auf Ebene der Schubspannungen zufolge SAINT-VENANT'scher Torsion formidentisch mit jenem der Biegespannungen:

$$M_{b,vorh} = \sigma_{vorh} W_b \leq \sigma_{zul} W_b \quad (1.5)$$

Dieses Verfahren bot den Prüfstatikern der damaligen Zeit eine weitere Vereinfachung für praxisrelevante baustatische Probleme. Neben LUIGI VIANELLO sei an dieser Stelle auch noch HEINRICH MÜLLER-BRESLAU<sup>5</sup> angeführt, der sich ebenfalls in geringem Ausmaß mit dem Torsionsproblem befasste und im frühen 20. Jahrhundert wichtige Aussagen über das polare Trägheitsmoment  $I_p$ , das Torsionsträgheitsmoment  $I_t$ , sowie deren funktionale Zusammenhänge mit  $\vartheta$ ,  $M_t$  und der Torsionssteifigkeit  $GI_t$  tätigte. Somit lieferte er einen kleinen Beitrag zum Verständnis der BACH'schen Tabellenwerke aus dem späten

---

<sup>5</sup>HEINRICH FRANZ BERNHARD MÜLLER-BRESLAU (1851-1925) war ein deutscher Bauingenieur und Hochschullehrer

19. Jahrhundert.

Danach folgte eine lange wissenschaftliche Pause auf dem Gebiet der Torsionstheorie, welche durch signifikante Errungenschaften im Jahr 1917 beendet wurde. AUGUST FÖPPL<sup>6</sup> lieferte in seinen Werken der frühen 1920er Jahre einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis des Torsionsproblems. Er führte unter anderem den Begriff Verdrehsteifigkeit (heute Torsionssteifigkeit  $GI_t$ ) und die Bezeichnung Drillungswiderstand (heute Torsionsträgheitsmoment  $I_t$ ) ein. FÖPPL erbrachte auf Basis der SAINT-VENANT'schen Gleichungen den Nachweis, dass diese innerhalb der bis dato angenommenen Gültigkeitsgrenzen zu falschen Ergebnissen führen.

Aufgrund dieses Nachweises führte er für die Formulierung des Torsionsträgheitsmoments für Querschnitte dünnwandiger offener Profile, welche näherungsweise durch  $n$  Rechtecke formuliert werden

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n t_i^3 b_i \quad (1.6)$$

den Berichtigungswert  $\eta$  ein. Die Formel sieht nach FÖPPL dann folgendermaßen aus:

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum_{i=1}^n t_i^3 b_i \quad (1.7)$$

Dabei beschreibt  $t_i$  die Dicke und  $b_i$  die Breite des  $i$ -ten Rechtecks .

Den Berichtigungswert  $\eta$  gibt FÖPPL in weiterer Folge für gebräuchliche und praxisübliche Walzprofile in seine Werken an. Das von FÖPPL entwickelte Nachweisformat gestaltete sich schlussendlich in folgender Form:

$$\tau_{max} = \frac{M_t t_{max}}{I_t} = \frac{M_t}{W_t} \quad (1.8)$$

---

<sup>6</sup>AUGUST OTTO FÖPPL (1854-1924) war ein deutscher Statiker und Hochschullehrer

mit

$$W_t = \frac{I_t}{t_{max}} \quad (1.9)$$

Diese Nachweisformate der erweiterten Fassung der SAINT-VENANT'schen Torsionstheorie verifizierte FÖPPL durch umfangreiche Versuchsergebnisse.

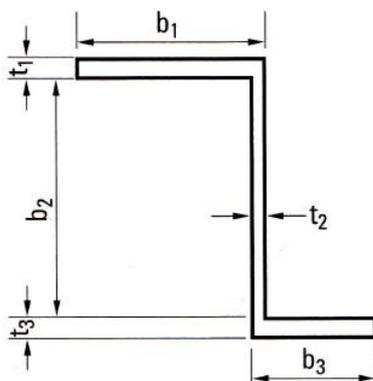


Abbildung 1.8: Offenes Profil, aus schmalen Rechtecken zusammengesetzt [17]

Obwohl, wie bereits angeführt, FÖPPLs erste Veröffentlichung zu diesem Thema bereits im Jahr 1917 erfolgte, wurde seinen Arbeiten wenig Beachtung geschenkt. In vielen fachspezifischen Werken der Folgejahre fanden seine Nachweise keinen Eingang. Ebenso seine Forderung, das Torsionsträgheitsmoment  $I_t$  in allgemein gebräuchliche Profiltafeln aufzunehmen, wurde vorerst nicht berücksichtigt. Dies sollte erst im Jahr 1952 durch FRIEDRICH-WILHELM BORNSCHEUER passieren, der bei seinen Beschäftigungen mit der Wölbkrafttorsion auch Profiltafeln veröffentlichte, welche bald darauf in die deutschen Normen eingingen.

## 1.5 Die Bredt'schen Formeln [17]

Trotz der eher langsamen Entwicklung in der Torsionstheorie am Anfang des 20. Jahrhunderts darf ein weiterer Name in diesem Zusammenhang auf keinen Fall vergessen werden: RUDOLPH BREDT<sup>7</sup>. Auf seine Arbeit gehen die in Ingenieurkreisen auch heute noch sehr gut bekannten BREDT'schen Formeln zurück, welche sich mit dem Torsionsverhalten dünnwandiger Hohlquerschnitte befassen. Diese leitete er schon in den 1890er Jahren her, es wurde ihnen jedoch zunächst keine Beachtung geschenkt. Dies geschah sicher auch dem Umstand zufolge, dass man BREDT als Unternehmer und Konstrukteur im Kranbau auf theoretischer Ebene wenig zutraute. Es war dann erst AUGUST FÖPPL, der die BREDT'schen Berechnungen zur Hand nahm und auch nach ihrem Erschaffer benannte. BREDT bettete seine Theorie in die SAINT-VENANT'sche Torsionstheorie ein und entwickelte so die von FÖPPL getauften BREDT'schen Formeln.

Die erste BREDT'sche Formel:

$$\tau(s) = \frac{M_t}{2 A_m t(s)} \quad (1.10)$$

Die zweite BREDT'sche Formel:

$$I_t = \frac{4 A_m^2}{\oint_C \frac{ds}{t(s)}} \quad (1.11)$$

BREDT begann ausgehend von geometrischen Beobachtungen des tordierten Stabes mit der Herleitung folgender Formel:

$$2 G \vartheta A_m = \oint_C \tau(s) ds \quad (1.12)$$

---

<sup>7</sup>Rudolf Bredt (1842-1900) war ein deutscher Maschinenbauingenieur und Unternehmer

Ausgehend von dieser Formel ist folgende Herleitung möglich:

Setzt man nun Formel (1.10) in Formel (1.12) ein, liefert dies

$$2 G \vartheta A_m = \oint_C \frac{M_t}{2 A_m t(s)} ds \quad (1.13)$$

Daraus ergibt sich die Verwindung  $\vartheta$  zu

$$\vartheta = \frac{M_t}{4 A_m^2 G} \oint_C \frac{ds}{t(s)} \quad (1.14)$$

Wird nun noch der Umstand (1.14) in die Formel

$$\vartheta = \frac{M_t}{GI_t} \quad (1.15)$$

eingetragen, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$I_t = \frac{M_t}{GI_t} = 4 A_m^2 \frac{1}{\oint_C \frac{ds}{t(s)}} \quad (1.16)$$

Die Gleichung (1.16) wurde wie bereits oben erwähnt von AUGUST FÖPPL als 2. BREDT'sche Formel bezeichnet.

## 1.6 Die Entwicklung ab 1940

### 1.6.1 Friedrich-Wilhelm Bornscheuer und Vasilii Zakharovich Vlasov [17], [26]

Die SAINT-VENANT'sche Torsionstheorie findet mit den Formulierungen mit dem Ende der 1940er Jahre ihren Abschluss. Sämtliche folgende Überlegungen gehen über die Torsionsprobleme nach SAINT-VENANT hinaus in die zu diesem Zeitpunkt noch eher unbe-

kannte Wölbkrafttorsionstheorie. Die Theorie dahinter wird in Kapitel 2 näher erläutert. Hier wird zunächst auf die geschichtliche Entwicklung eingegangen. In der deutschen Literatur ist rein geschichtlich gesehen ein Großteil der Entwicklung der Theorie der Wölbkrafttorsion FRIEDRICH-WILHELM BORNSCHEUER zuzuschreiben, der in seinen Veröffentlichungen

- *Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion.* In: *Der Stahlbau*, 21:Heft 1:1-9 u. Heft 12:225-232, 1952
- *Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölb- behindertem Querschnitt.* In: *Der Stahlbau*, 21:Heft 12:225-232 u. 22:Heft 2:32-44, 1952

grundlegende Erkenntnisse niederschrieb und veröffentlichte. Außerdem fand seine Veröffentlichung

- *Tafeln der Torsionskenngrößen für die Walzprofile der DIN1025-1027.* In: *Der Stahlbau*, 30:Heft 3:81-82, 1961

große Beachtung und wurde auch in der deutschen Norm übernommen.



Abbildung 1.9: FRIEDRICH-WILHELM BORNSCHEUER [4]

Bereits in den 1960er Jahren wird FRIEDRICH-WILHELM BORNSCHEUER in einschlägiger Literatur (siehe [16], 1966) als Verfasser einer Systematik von bei Biegung und Verwölbung auftretenden Querschnittswerten erwähnt.

V.Z. VLASOV trug ebenso erheblich zur Entwicklung in der Torsionstheorie bei. Er formulierte bereits 1940 eine Torsionstheorie, bei der er verhinderte Verwölbungen berücksichtigte und den Begriff der Wölbkrafttorsion einbaute. 1961 veröffentlichte er ein Werk, welches auch heute noch als Grundlage für wissenschaftliche Arbeiten im Finite-Elemente-Bereich dient. In diesem Werk (siehe [26]) beschreibt er genau seine Entwicklungen auf Ebene der Wölbkrafttorsion für dünnwandige Profile.

### 1.6.2 Aussteifende Bauteile von Hochhäusern und deren Berechnung [6]

In Rahmen dieser Diplomarbeit werden Profile untersucht, die in einer guten Näherung einen Hochhauskern simulieren sollen. Die Grundlage für diesen Gedankengang wurde zu einem großen Teil von HUBERT BECK<sup>8</sup> und HORST SCHÄFER im Jahr 1969 gelegt. In ihrer Veröffentlichung (siehe [6]) beschreiben sie die Zusammenfassung aller aussteifenden Bauteile eines Hochhauses zu einem Balken im baustatischen Sinn. Sie nehmen von den bis dato üblichen Annahmen Abstand, die Horizontallasten auf die einzelnen Wandscheiben aufzuteilen. Üblicherweise wurde damals bei Torsionsbeanspruchung ein für alle Geschoße gleicher Verteilungsschlüssel ermittelt.

Auch weitere Überlegungen, bei denen nur die im jeweils betrachteten Geschoß liegende Decke als vorhanden angenommen wird, oder Verteilungsschlüssel-Ansätze, die sich nur auf ebene Systeme anwenden lassen, sowie Betrachtungen des Systems als Gelenkfaltwerk mit einem konstanten Verteilungsschlüssel werden in ihrer Veröffentlichung als zu umständlich und rechenaufwendig betrachtet. Aus diesem Grund machen sich HUBERT BECK und HORST SCHÄFER die Annahme zunutze, dass sämtliche Geschoßdecken als gleichzeitig biegeeweiche, aber dehnstarre Querschotte betrachtet werden. Durch eine kontinuierliche Aufteilung über die Gebäudehöhe kann somit das Gebäude in seiner Gesamtheit als Balken berechnet werden. Somit wird die Rechenführung sehr einfach, da simple Einzelstabformeln eines Gesamtstabes, beansprucht auf Biegung und Torsion,

---

<sup>8</sup>HUBERT BECK (1926-1972) war Professor am Institut für Massivbau an der Technischen Universität Darmstadt

angewendet werden können.

In ihrer Arbeit vergleichen sie ihre gewonnenen Ergebnisse bzw. die Verteilungsschlüssel mit jenen aus den vorhandenen Lösungsansätzen. Sie führen außerdem einen Querschnittsparameter ein, der die Schnittkraftberechnung des Gesamtstabes mittels Beziehungen aus der Balkenstatik ermöglicht.

## 1.7 Die Finite-Elemente-Methode

Als nächste einschneidende Entwicklung in der Torsionstheorie als auch im Ingenieurwesen allgemein, sei es in der Baustatik, im Flugzeug- oder Maschinenbau, ist die Finite-Elemente-Methode (FEM) anzuführen. Dieser Begriff wurde erstmals 1966 von RAY WILLIAM CLOUGH<sup>9</sup> eingeführt. Er gilt auch gemeinhin als Begründer der Finite-Elemente-Methode. Bei diesem Verfahren wird eine numerische Simulation an einem aus einer endlichen Anzahl von Teilelementen bestehenden System durchgeführt. Mit dem Fortschreiten der Entwicklung der Computertechnologie wurde die gezielte Verwendung computerorientierter Berechnungsverfahren immer häufiger. Durch immer größere Rechnerleistungen konnten auch immer komplexere Problemstellungen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode in einem zeitlich akkuraten Rahmen gelöst werden. Somit fand diese Methode vor allem ab den 1980er Jahren ihren Einzug im Bauingenieurwesen und ist heute nicht mehr wegzudenken.

Bezogen auf die Torsionstheorie der Wölbkrafttorsion und den Tafelwerken von FRIEDRICH-WILHELM BORNSCHEUER aus dem Jahr 1962 findet die Finite-Elemente-Methode im Jahr 1999 Beachtung, als WERNER WAGNER<sup>10</sup>, ROLAND SAUER<sup>11</sup> und FRIEDRICH GRUTTMANN<sup>12</sup> in ihrer Arbeit *Tafeln der Torsionskenngrößen von Walzprofilen unter Verwendung von FE-Diskretisierungen* (siehe [28]) bei manchen Profilen eine Abweichung der Torsionskenngrößen von über 10% feststellen und aufzeigen. Natürlich finden sich seit

---

<sup>9</sup>RAY WILLIAM CLOUGH (\*1920) ist emeritierter Professor für Baustatik in der Abteilung für Bauingenieurwesen

<sup>10</sup>WERNER WAGNER (\*1952) ist ein deutscher Bauingenieur

<sup>11</sup>ROLAND SAUER ist ein deutscher Bauingenieur

<sup>12</sup>FRIEDRICH GRUTTMANN ist ein deutscher Bauingenieur

den ersten Beschreibungen der Wölbkrafttorsion in der deutschsprachigen Literatur durch FRIEDRICH-WILHELM BORNSCHEUER einige weitere Lehrbücher, welche die analytische Lösung der Wölbkrafttorsionsprobleme näher veranschaulichen. Dazu ist beispielsweise auch in [19] oder [25] einiges zu finden.

Im Jahr 1991 veröffentlichten SIEGFRIED KOCZYK und WALTER WEESE einen FEM-Lösungsansatz für das Problem der SAINT-VENANT'schen Torsion. Sie halten fest, dass den bis dato vorliegenden Lösungsansätzen fast ausschließlich die Spannungsfunktion  $\phi$  zugrunde liegt. Sie nehmen nun aber davon Abstand und benützen die Deformationsmethode mit der Wölbfunktion  $\omega$  als Ausgangspunkt. Bei gleicher Genauigkeit gestaltet sich dadurch der Umfang der Berechnungen wesentlich geringer. Die Variation des FE-Netzes erfolgt durch isoparametrische 8-Knoten-Viereckelemente und hierzu kompatiblen 6-Knoten-Dreieckelemente. Näheres zu dieser Veröffentlichung ist in [15] nachzuschlagen.

WERNER WAGNER und FRIEDRICH GRUTTMANN beschrieben im Jahr 2001 ein Weggrößenverfahren zur numerischen Berechnung von Querkraftschubspannungen. Sie führen eine Querschnittsverwölbung ein und diskretisieren die Querschnittselemente unter Verwendung von 2-Knotenelementen. Das Verfahren dient als gute FEM-Implementation und ist für offene oder geschlossene sowie ein- oder mehrzellige Querschnitte anwendbar. Nähere Informationen dazu sind in [12] nachzuschlagen.

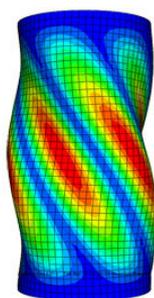


Abbildung 1.10: Beispielhafte Darstellung eines Torsionsproblems mit einem FEM-Programm [5]

Weiters gehen sie auf eine Implementierung der Lösungsansätze in ein FE-Programm mittels Wölbfunktion in ihrer im Jahr 2003 veröffentlichten Arbeit ein. Darin wird ein einheitliches Modell zur Lösung des SAINT-VENANT'schen Torsionsproblems in beliebigen

Querschnitten vorgestellt. Mittels 2-Knotenelementen wird eine exakte Lösung mit der FE-Methode aufbereitet. Näheres dazu ist in [27] zu finden.

Weitere Arbeiten zu diesem Thema wurden im Jahr 2005 von SIEGFRIED EILERING veröffentlicht. In [8] geht er auf die FE-Lösung eines erweiterten Querschnittselementes unter freier Torsion ein. Dabei wird ein 2-Knotenelement mit 6 Freiheitsgraden formuliert, wodurch im Gegensatz zu den 2-Knotenelementen mit nur 2 Freiheitsgraden eine Erfassung der Veränderlichkeit der Verwölbung quer zur Elementachse ermöglicht wird.

In [9] stellt er einen Vergleich der Ergebnisse der FE-Methoden einer Linienmodellierung und einer Flächenmodellierung an. Darin wird mitunter gezeigt, dass in bestimmten Fällen eine FE-Modellierung mit 2-Knotenelementen aus ingenieurpraktischer Sicht vollkommen ausreicht.

2007 veröffentlichten ROLF KINDMANN und MATTHIAS KRAUS einen Beitrag (siehe [13]), in der verschiedene FE-Methoden zur Schubmittelpunktslage dünnwandiger Querschnitte beschrieben werden. Sie berechnen die Lage des Schubmittelpunktes mittels der Methode der Verwendung der Schubspannungen und der Methode der Verwendung der Wölbordinate. Beide Verfahren werden mittels 2-Knotenelementen durch die FE-Methode modelliert und berechnet.

# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

### 2.1 Einführung zur Berechnung gegliederter Hohlkästen nach Becker [7]

Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden unterschiedliche dünnwandige Rechteckprofile mit einseitig angeordneten Öffnungen auf Torsion beansprucht. Diese PVC-Profile verformen sich bei den Versuchen entsprechend der aufgetragenen Belastung und bieten durch Messungen die Möglichkeit, den Schubmittelpunkt an jeder Stelle zu ermitteln.

Diesbezüglich sei ein Werk über die Berechnung von Hochhauskernen besonders hervorgehoben. In seiner Dissertation im Jahr 1974 beschäftigte sich GERHARD BECKER ausgiebig mit der Berechnung von Hochhauskernen, welche durch exzentrisch angreifende Horizontalkräfte belastet werden. Er legt seiner Arbeit vor allem die Werke von VLA-SOV zugrunde. In dem bis zu diesem Zeitpunkt kaum verwendeten Verfahren wird statt dem gängigen Kraftgrößenverfahren ein anderes Verfahren angewandt, welches mit der Formänderungsgrößenmethode der Statik zu vergleichen ist. Als Unbekannte werden für Längs- und Querverschiebungen Einheitsverschiebungszustände eingeführt. Diese erfüllen bereits die Verträglichkeitsbedingungen, wodurch nur mehr die Berechnung der Gleichgewichtsbedingungen erforderlich ist. Dabei entsteht für die Unbekannten ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem, welches zur einfacheren Berechnung entkoppelt wird.

Im Nachfolgenden werden die einzelnen Punkte des Rechenablaufes für die Spannungen und Verformungen in Hochhauskernen nach BECKER erläutert. Er führt außerdem einige Überlegungen zur Lage des Schubmittelpunktes an.

### 2.1.1 Berechnungsablauf nach Becker

BECKER beschreibt in seiner Dissertation auf über 100 Seiten ausführlich die einzelnen Berechnungsschritte seines Verfahrens zur Berechnung gegliederter Hohlkästen. Er führt außerdem zwei Zahlenbeispiele an, in welchen er einmal auf einen doppelsymmetrischen Querschnitt und einmal auf einen einfachsymmetrischen Querschnitt näher eingeht. Im Folgenden werden die einzelnen Rechenschritte gekürzt erläutert. Für tiefere Informationen wird auf [7] verwiesen.

#### Festlegung des Koordinatensystems und der Bezeichnungen

In der Arbeit werden Ansätze vorgestellt, die die Verschiebungen  $u$  und  $v$  folgendermaßen darstellen:

$$u(s, x) = \sum_{i=1}^n f_i(s) u_i(x) \tag{2.1}$$

$$v(s, x) = \sum_{k=1}^m g_k(s) v_k(x) \tag{2.2}$$

Die von den Koordinaten  $x$  und  $s$  abhängigen Funktionen für  $u$  und  $v$  bestehen aus den vorher frei wählbaren Funktionen  $f_i(s)$  und  $g_k(s)$ . Dadurch sind die eigentlichen Unbekannten nur die Funktionen  $u_i(x)$  und  $v_k(x)$ . Für die Wahl der Funktionen  $f_i(s)$  und  $g_k(s)$  wird zunächst der Querschnitt näher betrachtet.

Die Knoten des Querschnitts, also all jene Punkte, an denen sich eine Schnittstelle zweier Wände oder ein Übergang zu einer Öffnung befindet, werden durchnummeriert. Die Riegel,

also jene Stellen, an denen die Öffnungen über die Länge  $x$  des Profils unterbrochen sind, werden mit Buchstaben bezeichnet. Das Funktionensystem kann für  $f_i(s)$  zum Beispiel so gebildet werden, dass für den  $i$ -ten Knoten der Wert 1 vorliegt, für alle Nachbarknoten der Wert 0, und dazwischen verläuft die Funktion linear. Diese Verläufe gehören zu den Verformungen in  $x$ -Richtung, wodurch diese auch in  $x$ -Richtung verlaufen (siehe dazu Abbildung 2.1).

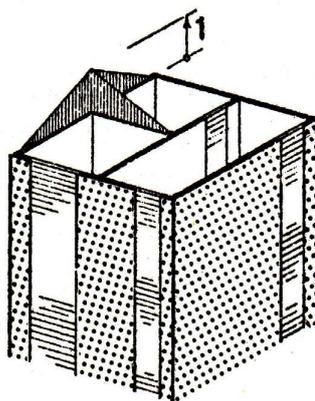


Abbildung 2.1: Wahl der Funktion  $f_i(s)$  [7]

Das Funktionensystem  $g_k(s)$  beschreibt die Verformungen in Querrichtung. Insofern ist es sinnvoll, entsprechend den drei kinematischen Freiheitsgraden für eine starre Scheibe in ihrer Ebene auch drei Querschnittsfunktionen  $g_k(s)$  einzuführen. Dabei erhalten die in Richtung der Verschiebung gelegenen Scheiben den Wert 1 und alle senkrecht dazu liegenden Scheiben den Wert 0. Am zweckmäßigsten scheint eine Abbildung der Verformungen für die Lastfälle Biegung in zwei Ebenen und Torsion (siehe Abbildung 2.2).

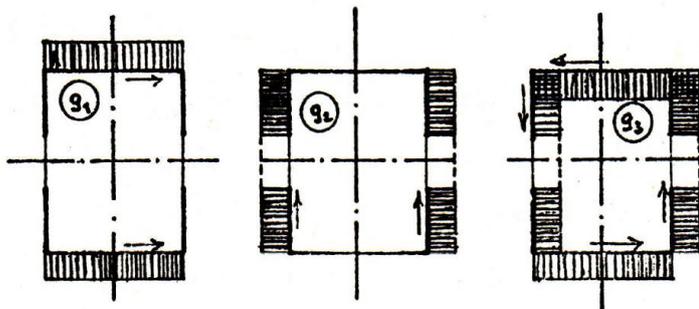


Abbildung 2.2: Wahl der Funktion  $g_k(s)$  [7]

## Berechnung der Riegelsteifigkeiten

Diese Steifigkeiten sind:

- die Drehfedersteifigkeit
- das Ersatzträgheitsmoment
- die Ersatzdicke

Die Berechnung der Drehfedersteifigkeit wird aus dem Ansatz erforderlich, dass das wirkliche System durch ein Ersatzsystem mit Drehfedern dargestellt wird. Die Riegel, welche die Scheiben in jedem Stockwerk miteinander verbinden, werden als Lamellen bezeichnet. BECKER schreibt, dass bei einer ungefähr gleichen Größenordnung der Biegesteifigkeit dieser Lamellen bezogen auf das einspannende Bauteil, ein Anschluss der Riegel mit Drehfedern zu wählen ist. Dieses Ersatzsystem beschreibt die tatsächlichen Verformungen des Systems besser. Die Drehfedersteifigkeiten am Anfang  $a$  und am Ende  $b$  eines Riegels werden nach folgenden Formeln berechnet:

$$c_a = \frac{12 EI_a}{h} \left( \frac{\frac{l_R}{2} + \Delta}{\frac{l_R}{2} + \Delta + r_a} \right)^2 \quad (2.3)$$

$$c_b = \frac{12 EI_b}{h} \left( \frac{\frac{l_R}{2} - \Delta}{\frac{l_R}{2} - \Delta + r_b} \right)^2 \quad (2.4)$$

Darin sind  $EI_a$  und  $EI_b$  die Biegesteifigkeiten der anschließenden Scheiben,  $l_R$  ist die Länge des Riegels,  $r_a$  und  $r_b$  beschreiben die lotrechten Abstände der Riegelanschlüsse zum Momentennullpunkt im Riegel und  $\Delta$  ist der Abstand des Momentennullpunktes von der Riegelmitte.  $\Delta$  ergibt sich zu:

$$\Delta = \frac{1 - \frac{I_b}{I_a} + \frac{2}{l_R} (r_b - \frac{I_b}{I_a} r_a)}{1 + \frac{I_a}{I_b} + 12 \frac{l_R}{h} \frac{I_b}{I_R}} \frac{l_R}{2} \quad (2.5)$$

Diese Gleichung ergibt sich aus der Überlagerung der Lastfälle aus Querkraft und Moment im Riegel. Mehr dazu ist in [7] nachzuschlagen.

Das Ersatzträgheitsmoment ergibt sich für beidseitig starr eingespannte Riegel ( $c_a = c_b = \infty$ ) zu:

$$I_R^* = \frac{I_R}{1 + 12 \frac{E}{G} \frac{I_R}{F_R' l_r}} \quad (2.6)$$

Zugehörig ergibt sich für beidseitig starr eingespannte Riegel folgende Ersatzblechdicke:

$$t_R = 12 \frac{E}{G} \frac{I_R^*}{h l_R^2} \quad (2.7)$$

### Wahl der Querschnittsfunktionen

Wie bereits angesprochen, spielt die Wahl der Funktionensysteme  $f_i(s)$  und  $g_k(s)$  eine große Rolle. Die Funktionen  $f_i(s)$  legen nicht nur die Verteilung der Längsverschiebungen, sondern auch die der Normalspannungen fest. Aus diesem Grund wird die dem elementaren Spannungszustand entsprechende Verteilungsfunktion als erste angesetzt. So ergibt sich nach BECKER:

$$f_1(s) = y \quad (2.8)$$

$$f_2(s) = z \quad (2.9)$$

$$f_3(s) = \int_0^s r_{\perp} ds \quad (2.10)$$

$$f_4(s) = 1 \quad (2.11)$$

Das Funktionensystem  $g_k(s)$  wird nach dem bereits erläuterten Schema nach Abbildung 2.2 gewählt.

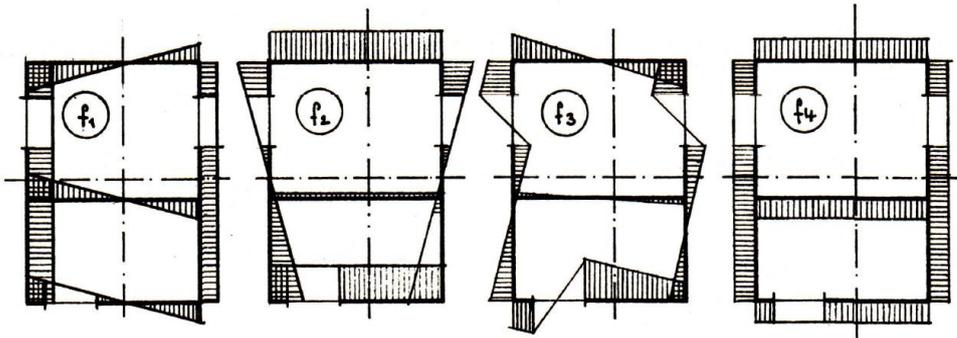


Abbildung 2.3: Wahl der Querschnittsfunktionen  $f_i(s)$  [7]

### Berechnung der Querschnittswerte

Die Berechnung der Querschnittswerte erfolgt über die Betrachtung des inneren Potentials der Scheiben bzw. der Lamellen, welche laut Definition gleich der gespeicherten Formänderungsenergie ist. Nachfolgend die Formulierung für die Scheiben:

$$\Pi_i^{Sch} = A_i^{Sch} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_S \left[ \frac{\sigma^2(x, s)}{E} + \frac{\tau^2(s, x)}{G} \right] dF dx \quad (2.12)$$

Durch Einsetzen der Spannungen in folgender Form

$$\sigma(s, x) = E \sum_{i=1}^n f_i(s) u_i'(x) \quad (2.13)$$

$$\tau(s, x) = G \left[ \sum_{i=1}^n f_i(s) u_i(x) + \sum_{k=1}^m g_k(s) v_k'(x) \right] \quad (2.14)$$

in Gleichung 2.12 und Integration über den Querschnitt (mit Hilfe bekannter  $\delta_{ik}$ -Integraltafeln aus der Baustatik) ergeben sich folgende Querschnittswerte:

$$A_{ij} \stackrel{def}{=} \int f_i(s) f_j(s) dF \quad (2.15)$$

$$B_{ij}^S \stackrel{def}{=} \int \dot{f}_i(s) \dot{f}_j(s) dF \quad (2.16)$$

$$C_{ik}^S \stackrel{def}{=} \int \dot{f}_i(s) g_k(s) dF \quad (2.17)$$

$$D_{kl}^S \stackrel{def}{=} \int g_k(s) g_l(s) dF \quad (2.18)$$

Diese Formeln gelten gleichermaßen für Scheiben wie für Lamellen.

### Ermittlung des Belastungsvektors

Über die Formulierung des äußeren Potentials gelangt man zur Berechnung der Belastungsvektoren. Das äußere Potential ist gleich der negativen Endwertarbeit der äußeren Kräfte. Für Belastungen  $p$ ,  $P$  in Längsrichtung und  $q$ ,  $Q$  in Querrichtung beträgt es

$$\begin{aligned} \Pi_a = -A_{ea} = & - \int_0^l \{ \bar{p}(s_p, x) \bar{u}(s_p, x) + \bar{q}(s_q, x) \bar{v}(s_q, x) \} dx - \\ & - [ \bar{P}(s_P, x) \bar{u}(s_P, x) + \bar{Q}(s_Q, x) \bar{v}(s_Q, x) ]_0^l \end{aligned} \quad (2.19)$$

Das äußere Potential kann durch Einsetzen der in ihm enthaltenen Verschiebungen nach 2.1 und 2.2 und Einführen der Vektorprodukte ausgedrückt werden. Die Vektorprodukte für die Belastungen, welche als Belastungsvektoren bezeichnet werden, werden in folgender Weise dargestellt:

$$p_i(x) = \bar{p}(x, s_p) \bar{f}_i(s_p) \quad (2.20)$$

$$q_k(x) = \bar{q}(x, s_q) \bar{g}_k(s_q) \quad (2.21)$$

$$P_i(x) = \bar{P}(x, s_P) \bar{f}_i(s_p) \quad (2.22)$$

$$Q_k(x) = \bar{Q}(x, s_Q) \bar{g}_k(s_q) \quad (2.23)$$

### Ermittlung der Matrix der Steifigkeiten

Die vorher erläuterten Querschnittswerte können ebenso in Matrizenform angeschrieben werden:

$$A_{ij} \stackrel{def}{=} \mathbf{A} \quad (2.24)$$

$$B_{ij}^S \stackrel{def}{=} \mathbf{B} \quad (2.25)$$

$$C_{ik}^S \stackrel{def}{=} \mathbf{C} \quad (2.26)$$

$$D_{kl}^S \stackrel{def}{=} \mathbf{D} \quad (2.27)$$

Ebenso werden in [7] die Knotenverschiebungen, die Querschnittsfunktionen und die Belastungsvektoren in Matrixschreibweise dargestellt. Dies geschieht, um den Lösungsweg klarer zu beleuchten.

Durch eine Neuformulierung der Energie mit den eingeführten Matrizen wird in BECKERS Arbeit ein Differentialgleichungssystem angeführt, in dem die Längsverschiebungen mit den Querverschiebungen noch gekoppelt sind. Von Interesse ist jedoch ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem, um die Längsverschiebungen zu erhalten.

Nach Integration und Einsetzen in vorangehende Gleichungen erhält BECKER folgende Gleichung:

$$\mathbf{Y} = \frac{G}{E} l^2 \tilde{\mathbf{Y}} = \frac{G}{E} l^2 (\mathbf{B} - \mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}^T) \quad (2.28)$$

Dafür sind als Vorwerte die Matrizen  $\mathbf{D}^{-1}$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{D}^{-1}$  und  $\mathbf{B}\mathbf{C}^T$  zu berechnen. Näheres dazu ist in [7] nachzuschlagen.

### Lösung des Eigenwertproblems

Die Lösung des von BECKER angeführten Differentialgleichungssystems ist besonders einfach, wenn die Differentialgleichungen entkoppelt sind. Dies geschieht durch die Überführung der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{Y}$  in Diagonalf orm. Dies ist im mathematischen Sinne ein allgemeines Eigenwertproblem. Da dies ein mathematischer Vorgang ist, wird in Folge nicht näher darauf eingegangen. Die Ermittlung ist in [7] angeführt. Bei einem oder zwei Eigenwerten führt auch eine Handrechnung schnell zum Ziel.

### Transformierte Größen berechnen

Durch die Transformation des Differentialgleichungssystems auf die Hauptachsen sowie einer Anpassung an die Randbedingungen erfolgt eine Untersuchung der in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fälle, einer konstanten Querbela stung  $q$  oder  $Q$ . Diese transformierten Belastungsvektoren werden folgendermaßen angeschrieben:

$$\mathbf{p}_0^* = \mathbf{T}^T \mathbf{p}_0 \quad (2.29)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{B}^* \mathbf{Q} \quad (2.30)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{B}^* \mathbf{q}_0 \quad (2.31)$$

mit

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{B} \quad (2.32)$$

Die transformierten Querschnittsfunktionen werden in folgender Weise angeschrieben:

$$\mathbf{f}^*(s) = \mathbf{T}^T \mathbf{f}(s) \quad (2.33)$$

$$\bar{\mathbf{g}}(s) = \mathbf{B}^* \mathbf{g}(s) \quad (2.34)$$

$$\bar{\mathbf{H}}^*(s) = \dot{\mathbf{f}}^*(s) - \bar{\mathbf{g}}(s) \quad (2.35)$$

Auf die nähere Erläuterung der einzelnen Matrizen wird hier nicht eingegangen. Diese sind in [7] nachzuschlagen.

### Berechnung der Verformungen

Dieser Teil der Berechnung ist von besonderem Interesse, da durch die Darstellung der Verformung des Querschnitts über die Länge Aussagen über die Verdrehung und damit auch über den Drillruhepunkt, also den Schubmittelpunkt gemacht werden können.

Nach BECKER ergeben sich die Längsverschiebungen  $u(s, \xi)$  an einer beliebigen Stelle zu:

$$u(s, \xi) = \mathbf{f}^T(s) \mathbf{a}(\xi) \quad (2.36)$$

Über eine Transformation der Querschnittsfunktionen erhält BECKER folgende Formel für die Längsverschiebungen:

$$u(s, \xi) = f_1^*(s) F_{11}^1(\xi) \frac{P_1^* l}{E} + f_2^*(s) F_{22}^1(\xi) \frac{P_2^* l}{E} + \dots + f_n^*(s) F_{nn}^1(\xi) \frac{P_n^* l}{E} \quad (2.37)$$

Die Funktionen  $F_{kk}^1(\xi)$  liegen in Tafeln vor, dadurch müssen nur noch die Querschnittsfunktionen  $f_k^*(s)$  gebildet und die Lastfaktoren  $P_k^*$  bestimmt werden.

Für den Verlauf der Querverschiebungen ergibt sich ein ähnlicher Aufbau. BECKER führt exemplarisch die Lösung für eine Querlast an, die sich folgendermaßen ergibt:

$$\begin{aligned} v(s, \xi) = & + \bar{g}_1(s) F_{11}^S(\xi) \frac{\bar{Q}_1 l^3}{E} + \\ & + \bar{g}_2(s) F_{22}^S(\xi) \frac{\bar{Q}_2 l^3}{E} + \\ & \vdots \\ & + \bar{g}_n(s) F_{nn}^S(\xi) \frac{\bar{Q}_n l^3}{E} + \\ & + g_1(s) \xi \frac{Q_1 l}{G d_{11}} + g_2(s) \xi \frac{Q_2 l}{G d_{22}} + g_3(s) \xi \frac{Q_3 l}{G d_{33}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Für andere Belastungsarten ergeben sich Formeln gleichen Aufbaus. Sehr gut zu sehen ist der in Formel 2.38 vorkommende Einfluss der Schubverformung durch Berücksichtigung des Schubmoduls  $G$  in der letzten Zeile. An dieser Stelle sei für nähere Informationen zu den einzelnen Termen auf [7] verwiesen.

### Berechnung der Spannungen

Die Erläuterung der Normalspannungsermittlung ist an dieser Stelle nicht angeführt. In [7] kann diese nachgeschlagen werden.

Für die Schubspannungen entwickelt BECKER über die Grundlage

$$\tau(s, \xi) = G \left[ \mathbf{f}^T(s) \mathbf{a}^*(\xi) + \mathbf{g}^T(s) \mathbf{w}'(\xi) \right] \quad (2.39)$$

und durch Einführen neuer Querschnittsfunktionen folgende Formel für eine exemplarische Querlast:

$$\begin{aligned} \tau(s, \xi) = & + g_1(s) (1 - \xi) \frac{q_1^\circ l}{D_{11}} + g_2(s) (1 - \xi) \frac{q_2^\circ l}{D_{22}} + g_3(s) (1 - \xi) \frac{q_3^\circ l}{D_{33}} - \\ & - [h_1^*(s) F_{11}^3(\xi) \bar{q}_1^\circ + \\ & + h_2^*(s) F_{22}^3(\xi) \bar{q}_2^\circ + \\ & \vdots \\ & + h_n^*(s) F_{nn}^3(\xi) \bar{q}_n^\circ] l^3 \frac{G}{E} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Für andere Belastungen ergeben sich wieder Formeln gleichen Aufbaus. Näheres zu den Formeln ist in [7] nachzuschlagen.

## 2.2 Torsion [11], [19], [23]

Da im Versuch, der in Kapitel 4 und 5 näher erläutert wird, eine Gabellagerung des Profils generiert wird, kommt es bei einer exzentrischen Belastung zu keinen Verformungen in Längsrichtung. Dieser Fall wird in der Torsionstheorie als SAINT-VENANT'sche Torsion beschrieben. Durch Ungenauigkeiten in der Fertigung der Profile und des Versuchsstandes ist es aber doch im Bereich des Möglichen, das Längsbehinderungen des Profils bei den Gabellagern auftreten. Dieser Fall wird als Wölbkrafttorsion bezeichnet, wodurch auch in weiterer Folge auf dieses Thema näher eingegangen wird.

Neben der Belastung der Profile auf Torsion stand wie bereits erwähnt die Ermittlung des Schubmittelpunktes im Vordergrund. Dementsprechend wird in weiterer Folge auch

diesem Thema größere Aufmerksamkeit gewidmet.

Heutzutage wird beim Gebrauch der Torsionstheorie zwischen zwei Arten von Torsion unterschieden. Diese haben sich, wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, geschichtlich gesehen als sinnvoll und anwenderfreundlich herausgestellt. Diese sind

- die SAINT-VENANT'sche Torsion (oder auch „reine Torsion“)

und

- die Wölbkrafttorsion.

Die SAINT-VENANT'sche Torsion stellt eigentlich einen Sonderfall der Wölbkrafttorsion dar. In der Literatur wird aber meist dem geschichtlichen Verlauf der Entwicklung der Torsionstheorien gefolgt, wodurch die Wölbkrafttorsion meist hintangeführt wird. Zum Verständnis der Torsionstheorien erscheint es angebracht, zunächst die Grundlagen der SAINT-VENANT'schen Torsion zu verstehen, bevor man sich der Wölbkrafttorsion zuwendet.

Zufolge eines am Stab angreifenden Torsionsmomentes wird der Stab verdrillt. Dies bedeutet, dass ursprünglich parallel zur Stabachse gelegene Stabfasern zu Schraubenlinien verformt werden. In Abbildung 2.4 sind dies die Linien  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$ , welche zu den Schraubenlinien  $\overline{A'B'}$  und  $\overline{C'D'}$  transformiert werden. Weiters bewirkt eine Torsionsbeanspruchung auch Verschiebungen der Querschnittspunkte in Richtung der Stabachse. Wie bereits auf den Abbildungen 1.1 und 1.2 in Kapitel 1.1 erkennbar, kommt es dadurch zu einer Verformung des Querschnitts. Der ursprünglich ebene Querschnitt wird zu einer räumlich gekrümmten Fläche verformt. Dabei spricht man von der Verwölbung des Querschnitts.

### 2.2.1 Die Saint-Venant'sche Torsion

Von der SAINT-VENANT'schen Torsion oder auch reinen Torsion spricht man, wenn bei einem auf Torsion beanspruchten Stab die Verwölbung des Querschnitts nicht behindert

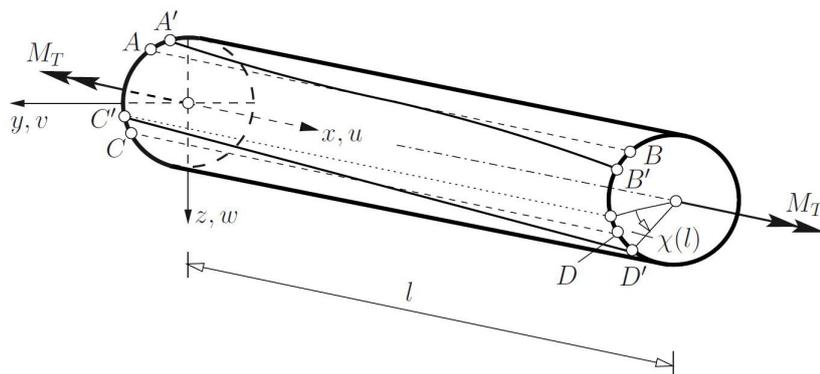


Abbildung 2.4: Transformation von stabachsenparallelen Stabfasern zu Schraubenlinien [18]

wird. Dies bedeutet, dass keine Spannungen in Längsrichtung auftreten, also ist  $\sigma_x \stackrel{def}{=} 0$ . Es tritt ein reiner Schubspannungszustand mit sogenannten primären Torsionsschubspannungen  $\tau_I$  auf.

### 2.2.2 Die Wölbkrafttorsion

Von der Wölbkrafttorsion spricht man, wenn die Verwölbung des Querschnitts behindert wird. Dies bedeutet, dass sich neben den sogenannten primären Torsionsschubspannungen auch Wölbspannungen  $\sigma_\omega$  und sekundäre Torsionsschubspannungen  $\tau_{II}$  einstellen, welche sich den primären Torsionsschubspannungen  $\tau_I$  überlagern. Diesbezüglich sei auf Formel 2.69 verwiesen.

### 2.3 Schubmittelpunkt [11], [19]

Da in der vorliegenden Diplomarbeit die Bestimmung des Schubmittelpunktes bei dünnwandigen Querschnitten eine grundlegende Rolle spielt wird auf diesen Punkt ein besonderes Augenmerk gelegt. Im vorliegenden Fall werden dünnwandige Profile betrachtet, welche abwechselnd aus geschlossenen und offenen Querschnitten zusammengesetzt sind. Da die Lagen des Schubmittelpunktes bei getrennter Betrachtung eines offenen und eines geschlossenen Querschnitts bedeutend voneinander abweichen, stellt sich die Frage, wie

sich die Lage des Schubmittelpunktes entlang der Längsachse eines Profils dann tatsächlich verhält. Die Ermittlung des Schubmittelpunktes bei dünnwandigen Querschnitten kann mittels mehrerer Methoden erfolgen. Zwei davon sind die

- Querkraftmethode

oder die

- Wölbmethode.

Im vorliegenden Fall erfolgt die Ermittlung der Koordinaten des Schubmittelpunktes nach der Wölbmethode. Diese verlangt Grundkenntnisse in der Theorie der Wölbkrafttorsion, welche nachfolgend näher erläutert werden.

### 2.3.1 Grund- und Hauptverwölbungen

Da die Schubspannungen  $\tau_I$  aus der SAINT-VENANT'schen Torsion bzw. Primärtorsion auf der Profilmittellinie  $s$  gleich Null sind, heißt dies, dass alle Elemente auf besagter Profilmittellinie verzerrungsfrei bleiben müssen. Es tritt also keine Gleitung  $\gamma_{xs}$  auf. Verschiebungen infolge einer Verdrehung  $\vartheta$  können daher nur mit einer Rotation, also einer Verdrehung dieser Elemente in Verbindung stehen.

Es wird eine Koordinate  $+s$  eingeführt, welche von einem beliebig gewählten Anfangspunkt  $s = 0$  zu allen freien Profilen hin positiv verläuft. Verdreht sich ein Querschnitt um den Drehpunkt  $D$ , so hat die Verschiebung  $v_t$  eines Punktes in Richtung der Tangente auf der Profilmittellinie die Größe:

$$v_t = r^D(s) \vartheta^D(x) \cos \alpha \quad (2.41)$$

Mit

$$r^D(s) \cos \alpha = r_t^D(s) \quad (2.42)$$

folgt

$$v_t = r_t^D(s) \vartheta(x) \quad (2.43)$$

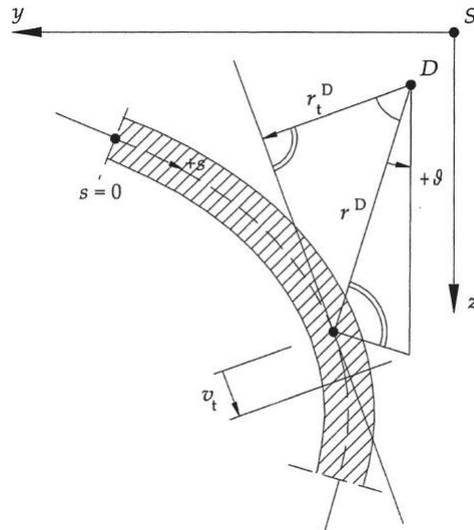


Abbildung 2.5: Verschiebung  $v_t$  eines Elements auf der Profilmittellinie [11]

Der lotrechte Abstand vom Drehpunkt  $D$  zum Punkt auf der Profilmittellinie wird mit  $r_t^D$  bezeichnet, der Winkel  $\alpha$  wird von  $r_t^D$  und  $r^D$  aufgespannt. Die Größe  $r^D$  ist der Abstand zwischen dem Drehpunkt  $D$  und dem Punkt auf der Profilmittellinie. Der Abstand  $r_t^D$  ist definitionsgemäß positiv, wenn die wachsende Koordinate  $+s$  bezogen auf den Drehpunkt  $D$  den gleichen Drehsinn hat wie  $\vartheta$ .

Über die bereits beschriebene Forderung, dass die Gleitung eines Elementes auf der Profilmittellinie gleich Null sein muss, folgt eine Lösung für  $\omega^D(s)$ :

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} [\vartheta'(x) \omega^D(s)] + \frac{\partial}{\partial x} [\vartheta(x) r_t^D(s)] = 0 \quad (2.44)$$

$$\rightarrow \omega^D(s) = - \int r_t^D ds \quad (2.45)$$

Nähere Erläuterungen zu dieser Formel finden sich in [11], Kapitel 8

Bei der Lösung der Formel 2.45 tritt die Integrationskonstante  $\omega_0^D$  auf. Diese beschreibt die Verwölbung am Koordinatenanfangspunkt  $s = 0$ . Die berechneten Wölbordinaten (ohne Berücksichtigung der Integrationskonstante  $\omega_0^D$ ) werden als Grundverwölbungen definiert:

$$\omega^D(s) = - \int_{s=0}^s r_t^D ds \quad (2.46)$$

Unter Berücksichtigung der Integrationskonstante  $\omega_0^D$  werden die Hauptverwölbungen definiert:

$$\bar{\omega}^D(s) = \omega^D(s) + \omega_0^D = - \int_{s=0}^s r_t^D(s) ds + \omega_0^D \quad (2.47)$$

### 2.3.2 Transformation der Verwölbung bei Verlagerung der Drehachse

In weiterer Folge ist der Bezug der Hauptverwölbungen auf den Schubmittelpunkt  $M$  von Interesse. Bisher wurden die Verwölbungen auf einen Drehpunkt  $D$  bezogen. Durch eine Verlagerung der Drehachse von einem Drehpunkt  $D$  in einen Punkt  $M$  verändern sich dementsprechend auch die Abstände  $r_t$ . Der geometrische Zusammenhang zwischen  $r_t^D$  und  $r_t^M$  sieht folgendermaßen aus:

$$r_t^M = r_t^D - (y_M - y_D) \frac{dz}{ds} + (z_M - z_D) \frac{dy}{ds} \quad (2.48)$$

Unter Anwendung der Formel 2.45 können die Verwölbungen bezogen auf den Schubmittelpunkt  $M$  berechnet werden:

$$\omega^M(s) = - \int r_t^M(s) ds = - \int r_t^D(s) ds + (y_M - y_D) z - (z_M - z_D) y \quad (2.49)$$

Die Schubmittelpunktskoordinaten  $y_M$  und  $z_M$  gehen dabei zunächst als Unbekannte in die Formel ein.

Durch Einsetzen von festen Integrationsgrenzen erhält man daraus folgend eine Umrechnungsformel für die Hauptverwölbungen

$$\bar{\omega}^M(s) = \bar{\omega}^D(s) + (y_M - y_D) z - (z_M - z_D) y \quad (2.50)$$

und die Grundverwölbungen:

$$\omega^M(s) = \omega^D(s) + (y_M - y_D) z - (z_M - z_D) y + (\omega_0^D + \omega_0^M) \quad (2.51)$$

## 2.4 Bestimmung der Integrationskonstanten $\omega_0$ und der Schubmittelpunktskoordinaten $y_M$ und $z_M$ [11]

Sofern einem Träger keine andere Drehachse aufgezwungen wird, verdreht sich dieser um die sogenannte natürliche Drillruheachse bzw. Schubmittelpunktsachse. Auf den Schubmittelpunkt  $M$  bezogen stellen sich demnach im Querschnitt Hauptverwölbungen  $\bar{\omega}^M$  ein.

In der SAINT-VENANT'schen Torsionstheorie wird wie bereits oben erwähnt vorausgesetzt, dass die Normalspannungen  $\sigma_x \stackrel{def}{=} 0$  sind. In der Theorie der Wölbkrafttorsion wird diese Voraussetzung fallen gelassen, wodurch sich durch Einsetzen der Axialverschiebung  $u = \vartheta'(x) \omega^D(y, z)$  und der Hauptverwölbung  $\bar{\omega}^M$  folgende Proportionalität von  $\sigma_x$  ergibt:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \vartheta''(x) \bar{\omega}^M(y, z) \quad (2.52)$$

Für diese Art der Normalspannungen, welche dann auftreten, wenn sich die Verwölbungen nicht frei einstellen können, gilt für die daraus resultierenden Schnittgrößen  $N$ ,  $M_y$  und  $M_z$ :

$$N = \int_A \sigma_x dA = E \vartheta''(x) \int_A \bar{\omega}^M(s) dA = 0 \quad (2.53)$$

$$M_\eta = \int_A \sigma_x \zeta dA = E \vartheta''(x) \int_A \bar{\omega}^M(s) \zeta dA = 0 \quad (2.54)$$

$$M_\zeta = \int_A \sigma_x \eta dA = E \vartheta''(x) \int_A \bar{\omega}^M(s) \eta dA = 0 \quad (2.55)$$

Da außerdem  $E \vartheta''(x) \neq 0$  gilt, ist aus den Formeln 2.53, 2.54 und 2.55 abzulesen, dass  $\bar{\omega}_M$  nur vom Querschnitt abhängt.

### 2.4.1 Bestimmung der Integrationskonstante $\omega_0$

Durch Ausformulieren der Formel 2.53 und der oben genannten Bedingung, dass  $E \vartheta'' \neq 0$  gilt, kann die Integrationskonstante  $\omega_0^M$  berechnet werden:

$$\int_A \bar{\omega}^M(s) dA = \int_A (\omega^M(s) + \omega_0^M) dA \quad (2.56)$$

$$\rightarrow \omega_0^M = -\frac{1}{A} \int_A \omega^M(s) dA \quad (2.57)$$

Analog wird auch die Integrationskonstante bezogen auf den Drehpunkt  $D$  berechnet:

$$\omega_0^D = -\frac{1}{A} \int_A \omega^D(s) dA \quad (2.58)$$

Dieser Vorgang wird gemeinhin als 1. Normierung bezeichnet und beschreibt einen Flächenausgleich, welcher für jede Drehachse durchgeführt werden kann. Zu beachten ist, dass  $\omega_0^D$  sowohl vom Drehpunkt  $D$  als auch von der Wahl des Integrationsanfangspunktes  $s = 0$  abhängt. Klug ist die Wahl von  $D$  und  $s = 0$  auf einer Symmetrieachse liegend, weil dadurch die Integrationskonstante  $\omega_0^D$  zu Null wird.

### 2.4.2 Bestimmung der Koordinaten des Schubmittelpunktes

Zunächst werden die beiden weiteren Bedingungen 2.54 und 2.55 formuliert. Diese Umrechnung der Verwölbungen auf den Schubmittelpunkt  $M$  ist gemeinhin als 2. Normierung bekannt. Mit Hilfe von 2.50 bezogen auf die Hauptachsen  $\eta$  und  $\zeta$  erhält man dadurch:

$$\int_A \bar{\omega}^M(s) \zeta dA = \int_A \bar{\omega}^D(s) \zeta dA + (\eta_M - \eta_D) \int_A \zeta^2 dA - (\zeta_M - \zeta_D) \int_A \eta \zeta dA \quad (2.59)$$

$$\int_A \bar{\omega}^M(s) \eta dA = \int_A \bar{\omega}^D(s) \eta dA + (\zeta_M - \zeta_D) \int_A \eta^2 dA - (\eta_M - \eta_D) \int_A \eta \zeta dA \quad (2.60)$$

wobei folgende Terme abgekürzt werden können:

$$I_\eta = \int_A \zeta^2 dA \quad I_\zeta = \int_A \eta^2 dA \quad I_{\eta\zeta} = \int_A \eta \zeta dA$$

Das Deviationsmoment  $I_{\eta\zeta} = \int_A \eta \zeta dA$  wird gleich Null, da die Formulierung bezogen auf die Hauptachsen durchgeführt wurde. Die Integrale  $R_\eta^D$  und  $R_\zeta^D$  werden neu definiert.

Diese können sowohl über die Haupt- als auch über die Grundverwölbungen berechnet werden, da die statischen Momente  $S_\eta$  und  $S_\zeta$  für den Gesamtquerschnitt gleich Null sind.

$$R_\eta^D = \int_A \bar{\omega}^D(s) \zeta \, dA \quad (2.61)$$

$$R_\zeta^D = \int_A \bar{\omega}^D(s) \eta \, dA \quad (2.62)$$

Somit können die Schubmittelpunktskoordinaten im Hauptsystem des Querschnitts ermittelt werden:

$$\eta_M - \eta_D = -\frac{R_\eta^D}{I_\eta} \quad (2.63)$$

$$\zeta_M - \zeta_D = +\frac{R_\zeta^D}{I_\zeta} \quad (2.64)$$

Diese Berechnungsmethode stellt eine Alternative zur Querkraftmethode dar.

Die Formulierung der Bedingungen für 2.54 und 2.55 muss nicht auf die Hauptachsen bezogen werden. Für die Momente können als Bezugsachsen beliebige Schwerachsen  $y$  und  $z$  gewählt werden. Die Formulierung der Schubmittelpunktskoordinaten gestaltet sich dann folgendermaßen:

$$y_M - y_D = -\frac{R_y^D I_z - R_z^D I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (2.65)$$

$$z_M - z_D = +\frac{R_z^D I_y - R_y^D I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad (2.66)$$

Der Unterschied zu 2.63 und 2.64 ist das Aufscheinen des Deviationsmomentes  $I_{yz}$ , welches nun nicht mehr gleich Null ist.

## 2.5 Beispielhafte Schubmittelpunktsermittlung am vorhandenen Querschnitt

Im Versuch wird das Profil durch eine beidseitige Gabellagerung gehalten. Für die Lagermittlung der Hauptachsen wird ein vertikaler Schnitt durch das Profil betrachtet. In Abbildung 2.6a ist ersichtlich, dass es sich um einen einfach symmetrischen Querschnitt handelt. Die Symmetrieachse  $y$  ist demnach bereits eine Hauptachse des Querschnitts. Diese wird mit  $\eta$  bezeichnet.

Es ist auf einen Blick klar, dass die  $z$ -Koordinate des Schwerpunktes gleich Null ist. Das bedeutet, dass nur mehr die  $y$ -Koordinate des Schwerpunktes ermittelt werden muss. Dies erfolgt mittels Rechenprogrammen, die Herleitung ist hier nicht näher erläutert. Der Abstand des Schwerpunkts von der Profilmittellinie beträgt laut Berechnung 14.99 mm, siehe Abbildung 2.6b.

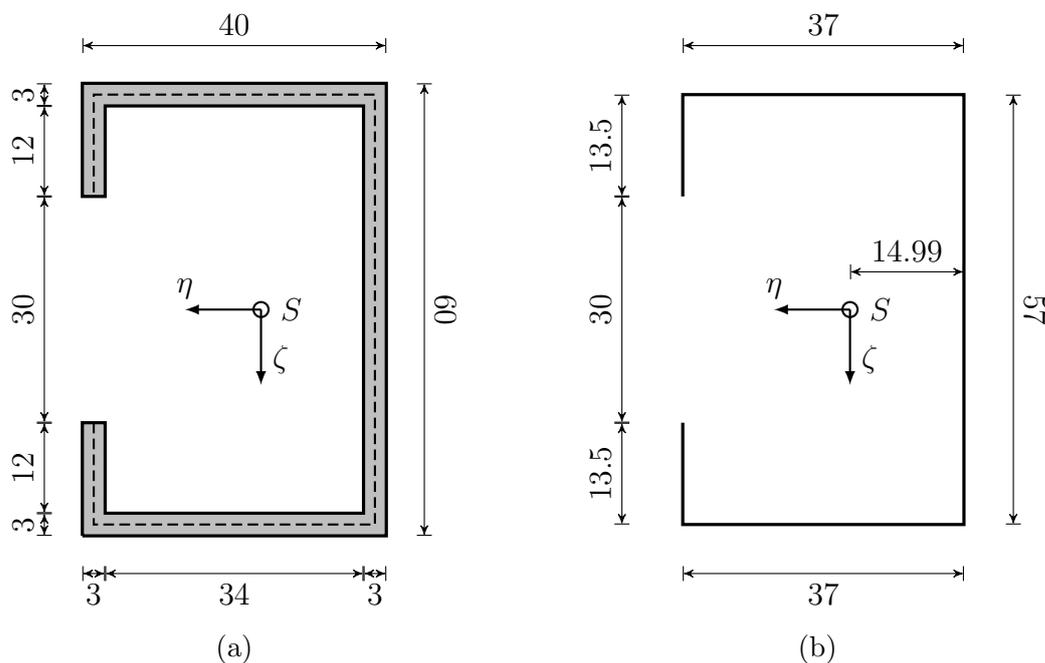


Abbildung 2.6: (a) offener Querschnitt, (b) Darstellung durch Profilmittellinie (Maße in mm)

Durch die Tatsache, dass der Querschnitt einfach symmetrisch um die  $\eta$ -Achse ist, wird die  $\zeta$ -Koordinate für den Schubmittelpunkt gleich Null. Dieser muss also auf der  $\eta$ -Achse lie-

gen. Laut Gleichung 2.63 wird für die Ermittlung des Flächenträgheitsmoment  $I_\eta$  benötigt, was sich laut einem Rechenprogramm zu  $I_\eta = 267\,102\text{ mm}^4$  ergibt. Für die Ermittlung von  $R_\eta^D$  in 2.63 folgt eine sinnvolle Wahl des Drehpunktes  $D$  sowie des Anfangspunktes  $s = 0$ .

$D$  wird daher in den Schwerpunkt gelegt, da durch die Lage beider Punkte ( $S$  und  $D$ ) auf der Symmetrieachse die Integrationskonstante  $\omega_0^D$  gleich Null wird. Somit entsprechen die Grundverwölbungen  $\omega^D(s)$  den Hauptverwölbungen  $\bar{\omega}^D(s)$ . Beim vorliegenden Querschnitt liegt der Schubmittelpunkt  $M$  auf der Symmetrieachse, weshalb nur noch die  $\eta$ -Koordinate von  $M$  ermittelt werden muss.

Für diese Ermittlung muss nach 2.63 zunächst  $R_\eta^D$  berechnet werden. Für die Ermittlung von  $R_\eta^D$  nach 2.61 wird der Verlauf  $\zeta$  benötigt. Dieser ist in Abbildung 2.7a dargestellt. Die weiters benötigten Verwölbungen  $\omega^D(s)$  werden durch Aufintegrieren von  $r_t^D(s)$  nach 2.46 ermittelt.

Der Verlauf von  $r_t^D(s)$  ist in Abbildung 2.7b, die resultierenden erhaltenen Verwölbungen sind in Abbildung 2.7c dargestellt. Die Verwölbungen entsprechen graphisch gesehen dem doppelten Inhalt der vom Fahrstrahl überstrichenen Fläche, beginnend bei  $s = 0$ .

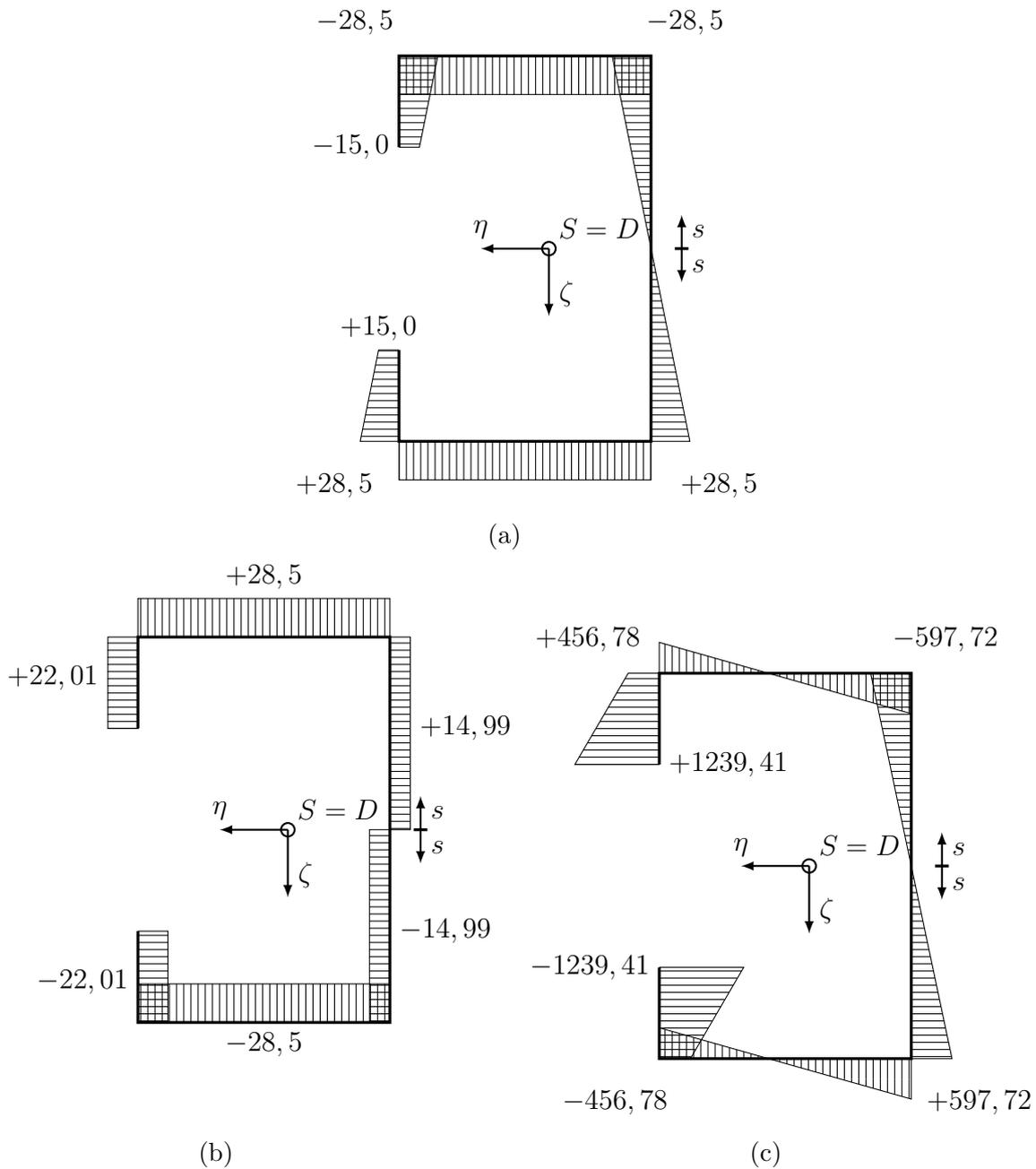


Abbildung 2.7: (a)  $\zeta$ -Verlauf [mm], (b)  $r_t^D$ -Verlauf [mm], (c)  $\omega^D(s)$ -Verlauf [mm<sup>2</sup>]

Um  $R_\eta^D$  berechnen zu können, wird entlang der Profilmittelinie  $s$  integriert. Dadurch ergibt sich im Integral in 2.61 unter Berücksichtigung von  $dA = t ds$  folgendes:

$$R_\eta^D = \int_A \omega^D(s) \zeta dA = \int_s \omega^D(s) \zeta t ds = t \int_s \omega^D(s) \zeta ds \quad (2.67)$$

Die Integration in (2.67) erfolgt unter Zuhilfenahme von Integraltafeln (siehe [1]) und unter Ausnutzung der symmetrischen Verläufe von  $\omega^D(s)$  und  $\zeta$ . Mit der konstanten Wandstärke von  $t = 3 \text{ mm}$  kann dann  $R_\eta^D$  berechnet werden.

Die Koordinate  $\eta_D$  ergibt sich aufgrund der Wahl von  $D$  zu Null. Daher folgt aus 2.63 und  $I_\eta = 267\,102 \text{ mm}^4$ :

$$\eta_M = -\frac{R_\eta^D}{I_\eta} = -35.86 \text{ mm} \quad (2.68)$$

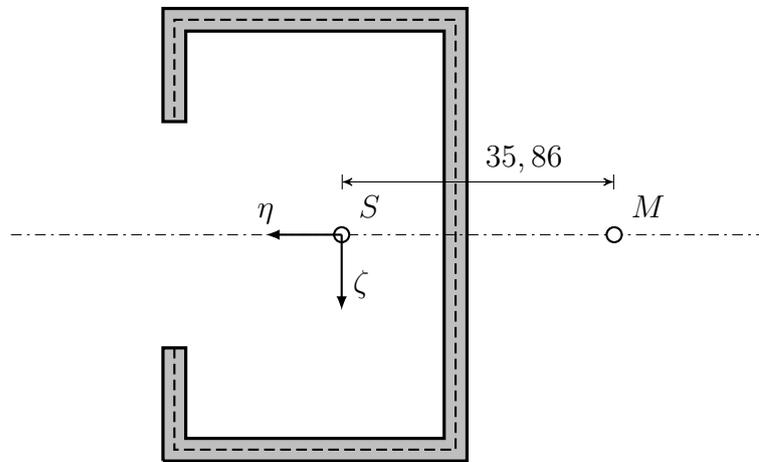


Abbildung 2.8: Schubmittelpunkt  $M$  (Werte in mm)

## 2.6 Saint-Venant'sche Torsion dünnwandiger Querschnitte [11]

Um die näheren Hintergründe im Hinblick auf Aufgaben im Zuge der Wölbkrafttorsion besser verstehen zu können, ist es ratsam, sich zunächst die SAINT-VENANT'sche Torsionstheorie zu Gemüte zu führen. Im Zuge dieser Arbeit werden Untersuchungen an offenen und geschlossenen Querschnitten durchgeführt. Aus diesem Grund sollte dem zugehörigen Kapitel dieser Art der Torsion auch Rechnung getragen werden.

In dieser Arbeit wird dieser Teil übersprungen und als bekannt vorausgesetzt. Die Lösung der Torsionsprobleme bei SAINT-VENANT'scher Torsion für dünnwandige offene sowie für dünnwandige geschlossene Querschnitte kann in [18] und [11] nachgeschlagen werden.

## 2.7 Wölbkrafttorsion für dünnwandige offene Querschnitte [11]

### 2.7.1 Einführung

Wie bereits in Kapitel 2.3 vorweggenommen, kommt es bei einer Torsionsbeanspruchung von Stäben im Allgemeinen zu Querschnittsverwölbungen. Werden diese Verwölbungen behindert, so gilt  $M_T \neq konst.$  und Längsspannungen  $\sigma_x$  sind die Folge. Die für die SAINT-VENANT'sche Torsion getroffene Voraussetzung  $\sigma_x \stackrel{def}{=} 0$  ist somit hinfällig und die Theorie der Wölbkrafttorsion kommt zum Tragen.

Wie bereits eingangs erwähnt, treten bei Behinderung der Verwölbung eines Querschnitts Längsspannungen – sogenannte Wölbspannungen  $\sigma_W$  – auf. Damit einhergehend resultieren aus der Verwölbungsbehinderung auch sekundäre Schubspannungen  $\tau_{II}$  sowie zugehörige Schubverformungen. In [10], [20], [22] und [24] wird gezeigt, dass sekundäre Schubverformungen infolge sekundärer Schubspannungen  $\tau_{II}$  bei geschlossenen, dünnwandigen Querschnitten immer berücksichtigt werden müssen. In [20] und [21] wird gezeigt, dass die sekundären Schubverformungen bei offenen Querschnitten vernachlässigt werden dürfen.

Weiters ist von Interesse, dass die SAINT-VENANT'sche Torsion aus mathematischer Sicht einen Sonderfall der Wölbkrafttorsion darstellt. Dies wird besonders dann ersichtlich, wenn man die Formulierung folgender Gleichgewichtsbeziehung mit den aufgespalteten Schubspannungen betrachtet:

$$\left[ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy,II}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz,II}}{\partial z} \right] + \left[ \frac{\partial \tau_{xy,I}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz,I}}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.69)$$

Werden nun die Längsspannungen  $\sigma_x$  und die sekundären Schubspannungen  $\tau_{xy,II}$  und  $\tau_{xz,II}$  vernachlässigt, degeneriert die Wölbkrafttorsion offenkundig zur SAINT-VENANT'schen Torsion. Durch die Voraussetzung, dass beide Klammernausdrücke zu Null werden sollen, ist außerdem ersichtlich, dass bei fehlender Längsspannung  $\sigma_x$  ein reiner Schubspannungszustand vorliegt, wie er ja bei der SAINT-VENANT'schen Torsion vorausgesetzt wird.

### 2.7.2 Wölbnormalspannungen $\sigma_W$ und Wölbschubfluss $T_w$

Für die Formulierung der Wölbspannungen wird Formel 2.12 herangezogen:

$$\sigma_x = \sigma_W = E \frac{\partial u}{\partial x} = E \vartheta''(x) \bar{\omega}^M(y, z) \quad (2.70)$$

Aus Formel 2.70 wird ersichtlich, dass die Längsspannungen proportional zur Wölbfläche  $\bar{\omega}^M$  sind. Das Spannungsdiagramm  $\sigma_W$  ist daher konstant über die Wanddicke  $t$  verteilt. Als resultierende Schnittgröße sind weder  $N$ ,  $M_y$  oder  $M_z$  vorhanden (siehe 2.53, 2.54 und 2.55). Bei der Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen müssen Wölbschubspannungen  $\tau_{II}$  vorhanden sein, welche ebenfalls konstant über die Wanddicke  $t$  verteilt sind. Diese überlagern sich den über die Wanddicke  $t$  linear veränderlichen primären Schubspannungen  $\tau_I$  und können zu resultierenden Schubflüssen  $T_W$  zusammengefasst werden. Die Bestimmung der sekundären Schubspannungen  $\tau_{II}$  erfolgt anhand der Formulierung einer Gleichgewichtsbeziehung an einem Querschnittselement.

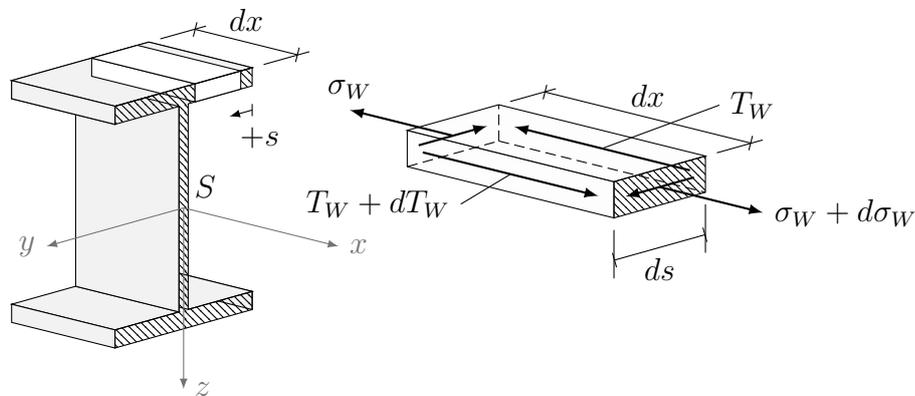


Abbildung 2.9: Gleichgewichtsbeziehungen an einem Querschnittselement [11]

Für die Formulierung in  $x$ -Richtung gilt:

$$d\sigma_W t ds + dT_W dx = 0 \quad (2.71)$$

Durch Integration über die Profilmittellinie kann der Schubfluss  $T_W$  wie folgt angeschrie-

ben werden:

$$T_W(x, s) = - \int_0^s \frac{d\sigma_W}{dx} t ds + T_W|_{s=0} \quad (2.72)$$

Durch die Positionierung des Integrationsanfangspunktes  $s = 0$  an das freie Profilende wird die Integrationskonstante  $T_{W,0}$  gleich Null. Mithilfe von Formel 2.70 erhält man:

$$T_W(x, s) = -E\vartheta'''(x) \int_0^s \bar{\omega}^M(s) dA = -E\vartheta'''(x) S_W \quad (2.73)$$

$S_W$  ist die Abkürzung des zum statischen Moment analogen Integrals in 2.73.  $T_W$  verläuft in Richtung  $+s$  positiv und die Wölbschubspannungen  $\tau_{II}$  sind konstant über  $t$  verteilt:

$$\tau_{xs,II} = \frac{T_W}{t} \quad (2.74)$$

### 2.7.3 Gesamttorsionsmoment $M_T$

Die vorher erwähnten Wölbschubflüsse  $T_W$  können in allen geraden Teilen eines Querschnitts zu Teilresultierenden  $R_W$  zusammengefasst werden, die auf den Schubmittelpunkt bezogen einen zusätzlichen Anteil am Torsionsmoment verursachen:

$$M_T = M_{T,I} + M_{T,II} \quad (2.75)$$

Der erste Teil der Formel ist der Momentenanteil aus der SAINT-VENANT'schen Torsion. Die Formulierung für  $M_{T,II}$  sieht für einen allgemeinen Querschnitt folgendermaßen aus:

$$M_{T,II} = \int_s T_W(x, s) r_t^M(s) ds \quad (2.76)$$

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt durch Teilintegration:

$$\begin{aligned}
 M_{T,II} &= -E\vartheta'''(x) \int_A \left[ \int_0^s \bar{\omega}^M(s) dA \right] r_t^M(s) ds = \\
 &= -E\vartheta'''(x) \left\{ \left[ \int_0^s \bar{\omega}^M(s) dA \int r_t^M(s) \right]_{s=0}^{s=s_e} - \int_A \bar{\omega}^M(s) t \left( \int r_t^M(s) ds \right) ds \right\} = \\
 &= +E\vartheta'''(x) \int_A \bar{\omega}^M(s)(-\bar{\omega}^M(s) + \bar{\omega}_0^M) dA = \\
 &= -E\vartheta'''(x) \int_A [\bar{\omega}^M(s)]^2 dA \tag{2.77}
 \end{aligned}$$

Durch die festen Grenzen  $s = 0$  und  $s = s_e$  verschwindet der erste Term, da  $T_W$  an den Profildenden gleich Null ist. Das Integral über  $r_t^M$  wird, siehe Formel 2.7, durch  $\bar{\omega}^M$  ausgedrückt. Die Konstante  $\omega_0^M$  fällt heraus, da nach 2.13 die Integration der Hauptverwölbungen über die Querschnittsfläche  $A$  den Wert Null ergibt. Es verbleibt folgendes Integral:

$$I_\omega = \int_A [\bar{\omega}^M(s)]^2 dA \tag{2.78}$$

$I_\omega$  wird als Wölbwiderstand definiert. Der sekundäre Momentenanteil  $M_{T,II}$  ergibt sich somit zu :

$$M_{T,II} = -EI_\omega \vartheta'''(x) \tag{2.79}$$

Das Gesamttorsionsmoment ergibt sich folglich zu:

$$M_T = GI_T \vartheta'(x) - EI_\omega \vartheta'''(x) \tag{2.80}$$

### 2.7.4 Wölbmoment $M_W$

Analog zu den Biegemomenten  $M_y$  und  $M_z$  wird in der Theorie der Wölbkrafttorsion eine als Wölbmoment bezeichnete Spannungsergebnante  $M_W$  definiert:

$$M_W = - \int_A \sigma_W \bar{\omega}^M dA \quad (2.81)$$

Nach Einsetzen der Wölbspannungen nach 2.70 erhält man eine zur elastostatischen Grundgleichung der Biegung analoge Gleichung:

$$M_W = -E\vartheta''(x) \int_A [\bar{\omega}^M]^2 dA = -EI_\omega \vartheta(x) \quad (2.82)$$

Somit ist auch ersichtlich, dass eine umgekehrte Ermittlung der Wölbspannungen  $\sigma_W$  direkt aus dem Wölbmoment  $M_W$  möglich ist:

$$\sigma_W = \frac{M_W}{EI_\omega} \bar{\omega}^M \quad (2.83)$$

Die Beziehung zwischen  $M_W$  und  $\sigma_W$  entspricht der allgemeinen Charakteristik einer Schnittgröße, sie wird jedoch oft als „höhere Schnittgröße“ bezeichnet, da eine Veranschaulichung derselben weitgehend nicht mit einfachen Mitteln möglich ist.

# Kapitel 3

## Intention der Versuchsreihe

Die Art und Weise der Durchführung einer Versuchsreihe wird durch bestimmte Intentionen bestimmt. Dies bedeutet, dass es aus wissenschaftlicher Sicht den Hintergrund gibt, im Zuge des Versuchs und deren anschließenden Auswertungen ein besseres Verständnis zu einem Thema zu erlangen. Im vorliegenden Fall war das Ziel, durch den Vergleich zweier Versuche am Institut für Hochbau und Technologie an der Technischen Universität Wien ein Verständnis für das Verhalten der Schubmittelpunktslage in Hochhauskernen zu erhalten. Die Versuchsreihe liegt der Tatsache zugrunde, dass in den Laboratorien des Instituts in naher Vergangenheit (Sommer 2013) bereits Versuche durchgeführt wurden (siehe [29]). Durch die Bereitstellung der dadurch vorhandenen Versuchsmaterialien, insbesondere der Versuchsprofile, wird ein besonders guter Vergleich der Versuchsreihen erwartet.

### 3.1 Vorhandene Ergebnisse

Die bereits angesprochene Versuchsreihe wurde im Sommer 2013 durch einen Diplomanden durchgeführt. Diesem Versuch und der näheren Erläuterung des Aufbaus, der Durchführung, der Theorie dahinter und der Auswertung ist in ausführlicher Weise eine Diplomarbeit gewidmet (siehe [29]). Aus diesem Grund wird in weiterer Folge auf diesen Versuch nur kurz eingegangen.

### 3.1.1 Der Versuchsaufbau

Der physikalische Versuch wurde mit PVC-Profilen durchgeführt, welche durch eine Einspannung vertikal gelagert waren. Diese Lagerung simuliert in guter Näherung die Lage eines Hochhauskerns. Auch die Abmessungen der PVC-Profile wurden so gewählt, dass sie maßstabsgetreu (M 1:50) einem Hochhaus in der Realität entsprechen. Ausgehend von einer begründeten Wahl der Materialien für die Profile, die Lagerung und der angehängten Gewichte wurde schrittweise die Lage des Schubmittelpunktes ermittelt. Die Lageermittlung wurde dabei in definierten Höhenabständen von mehreren Zentimetern durchgeführt. Die Wahl der Gewichte wurde so gewählt, dass größtmäßig annehmbare Verschiebungen entstehen, welche durch zwei Wegaufnehmer gemessen wurden. Weiters wurden numerische Simulationen mit einem FEM-Programm durchgeführt. Im Anschluss wurden die Ergebnisse beider Versuche miteinander verglichen.

## 3.2 Eigene Ergebnisse

Der Versuch und dessen Auswertung im Rahmen dieser Arbeit werden in den folgenden Kapiteln näher erörtert. Die bereits angesprochene Intention des durchgeführten Versuchs ist es, die Lage des Schubmittelpunktes an denselben Profilen zu ermitteln, wobei diese anders gelagert sind. Dies soll einen Eindruck über das generelle Verhalten der Lage des Schubmittelpunktes in Profilen mit offenen und geschlossenen Querschnitten verschaffen, sowie die Frage beantworten, inwieweit die Lagerung einen Einfluss auf die Lage des Schubmittelpunktes hat.

### 3.2.1 Der Versuchsaufbau

Dieses Thema wird in den Folgekapiteln näher erläutert. Vorweggenommen sei nur, dass die Lagerung als beidseitige Gabellagerung vorgenommen wurde. Die PVC-Profile wurden horizontal ausgerichtet und die Wahl der Gewichte wurde den Verformungen entsprechend gewählt. Ebenso kamen zwei Wegaufnehmer zum Einsatz, welche die Messung der Ver-

schiebungen durchführten. Auch bei diesem Versuch wurden im Anschluss numerische Simulationen mit einem FEM-Programm durchgeführt und die Ergebnisse verglichen.

### **3.3 Vergleich der Ergebnisse aus eigenen Versuchen**

Ziel dieser Arbeit ist es, wie bereits angesprochen, einen Eindruck des Verhaltens der Lage des Schubmittelpunktes bei unterschiedlicher Lagerung zu erhalten. Aus diesem Grund liegt eine große Bedeutung bei der genauen Durchführung der physikalischen Versuche, bei der genauen Eingabe der numerischen Simulationen und bei der Auswertung der Ergebnisse. Somit werden auch in dieser Arbeit zunächst die eigenen physikalischen Ergebnisse mit jenen aus der numerischen Simulation verglichen. Dies soll einen Eindruck verschaffen, wie unterschiedlich bzw. exakt die Versuchsergebnisse eines physikalischen Versuchs verglichen mit jenen einer numerischen Simulation sind.

### **3.4 Vergleich der Ergebnisse aus eigenen Versuchen mit jenen aus dem vorhandenen Versuch**

Nach dem Vergleich der eigenen Ergebnisse aus physikalischen Versuchen mit jenen aus der numerischen Simulation erfolgt ein abschnittsweiser Vergleich mit den bereits vorliegenden Ergebnissen des Versuches mit einer eingespannten Lagerung des Profils. Dies erfolgt in folgender Weise:

- Vergleich der Resultate des physikalischen Versuchs mit der Gabellagerung mit jenen des Versuchs mit der Einspannung
- Vergleich der Resultate der numerischen Simulation des Versuchs mit der Gabellagerung mit jenen des Versuchs mit der Einspannung



# Kapitel 4

## Versuchsaufbau

### 4.1 Gabellagerung

Eine wesentliche Herausforderung des physikalischen Versuchs bestand in der Herstellung der Lagerbedingungen für die Profile. Im Unterschied zum Vergleichsversuch wurde keine bodenseitige einfache Einspannung des Profils vorgenommen, sondern eine horizontale beidseitige Gabellagerung. Das statische System der Gabellagerung ist bezogen auf Versuche mit Torsionsbeanspruchung aufgrund der vorteilhaften Bedingungen von besonderer Bedeutung. Die besonderen Eigenschaften eines Gabellagers sind im Folgenden aufgelistet:

- Keine Verschiebungen in Richtung der  $z$ -Achse, also keine Vertikalverschiebungen
- Keine Verdrehung des Querschnitts um die  $x$ -Achse, also eine Behinderung der Längsverdrehung
- Verschiebungen in  $x$ -Richtung können sich frei Einstellen
- Keine Behinderung der Verwölbung des Querschnitts

In Abbildung 4.1 ist zur Veranschaulichung der oben angeführten Achsenrichtungen als Beispiel Probekörper 3 und das zugehörige statische System dargestellt. Dieses statische System besteht aus 2 Gabellagern, von denen eines als Fixlager und das andere als Gleit-

lager ausgeführt wird. Dieses statische System gilt gleichermaßen auch für alle anderen Probekörper.

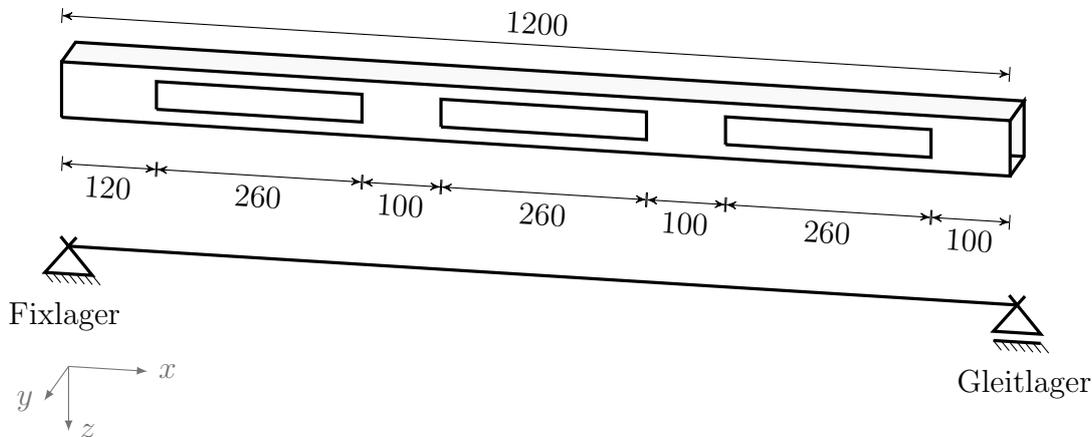


Abbildung 4.1: Probekörper 3 mit statischem System, Maße in mm

Bezogen auf die Planung eines diesen angeführten Kriterien entsprechenden Versuchstandes bedeutete dies eine sachgemäße Beantwortung der Frage nach dem verwendeten Material und der entsprechenden Ausführung. Zunächst wurden die Gabellager selbst konstruiert. Für die Herstellung wurde zunächst an handelsübliche Stahlprofile gedacht, welche im Holzbau zum Einsatz kommen. Diese wären dank des Materials steif genug, um eine Aufnahme des Torsionsmoments  $M_t$  zu gewährleisten. Aufgrund der Tatsache, dass diese Profile jedoch nur in bestimmten Größen im Handel erhältlich sind, welche jedoch den Versuchsanforderungen nicht genügten, wurde diese Methode wieder fallen gelassen. Außerdem galt es zu beachten, dass die Lager einen Austausch der Profile ermöglichen sollten, ohne dass die Lagerung dabei grundlegend verändert oder gar zerstört wird. Aus diesem Grund kamen auch ein selbsterhärtendes Material wie z.B. Beton nicht in Frage.

Nach eingehendem Studium der Problemstellung und den Anforderungen an den Versuchstand wurde, ähnlich dem Vergleichsversuch mit der Einspannung, eine Lösung gefunden, die mit handelsüblichen Holzmaterialien verwirklicht werden konnte. Diese Variante genügt einerseits der Anforderung, dass die Lager ausreichend verdrehsteif sein müssen, andererseits ist ein schnelles Auf- und Abbauen der Lager für eine Anpassung an den Versuch möglich. Die Gesamtlänge der einzelnen Profile ist zwar exakt gleich, jedoch sind die eingebrachten Perforierungen, also die simulierten Liftöffnungen, bei jedem

Probekörper anders positioniert.

Durch diesen Unterschied zwischen den äußersten Abständen der Öffnungen musste also auch eine Variabilität der Abstände der Auflager gewährleistet sein. Auch aus diesem Grund stellte eine Holzkonstruktion eine gute Alternative dar. Für die variable Länge der Profile wurde ein Gabellager als ein unveränderliches Fixlager und das andere als jenes Lager gewählt, an dem profilabhängig Veränderungen durchgeführt wurden. Siehe dazu Abbildung 4.1.

### 4.1.1 Das fixe Auflager

Der generelle Aufbau des fixen Auflagers sah nun so aus, dass fünf Holzstücke zu je 4.5 cm/2.3 cm/12 cm längsseitig miteinander und auf einer Grundplatte aus Holz verschraubt wurden. Dadurch ergaben sich zwei Holzkonstruktionen mit den Maßen 4.5 cm/11.5 cm/12 cm, welche im Abstand von 4 cm voneinander positioniert wurden. Zwischen diese beiden Holzkonstruktionen wurde ein Holzstück mit den Maßen 4 cm/4 cm/12 cm auf die Grundplatte geschraubt. Dadurch wurde eine 12 cm lange Gabel geschaffen, welche eine Öffnung von 4 cm/7.5 cm hat. Es ist also eine ausreichend große Öffnung für den Querschnitt des Profils mit 4 cm/6 cm vorhanden. Eventuelle Ungenauigkeiten in der lotrechten Ausrichtung wurden mit Papiereinlagen ausgeglichen. Für eine ausreichende Steifigkeit des Lagers sorgen bis zu 10 cm lange Holzschrauben, welche die Grundplatte mit den Holzstücken verbinden, sowie vertikal positionierte Schraubklemmen.

### 4.1.2 Das längenvariable Auflager

Beim längenvariablen Auflager wurden vier Holzstücke zu je 4 cm/4 cm/12 cm auf der Grundplatte verschraubt. Die Anordnung erfolgte so, dass sich je zwei Stücke an der Breitseite berührten. Diese so entstandenen zwei Holzlängen zu je 24 cm wurden im Abstand von 4 cm parallel zueinander verschraubt. In dieser nun entstandenen Rille mit den Abmessung 4 cm/4 cm/24 cm ist genug Platz für ein 4 cm/4 cm/12 cm Holzstück, um entlang der Länge der Rille variabel fixiert zu werden. Neben diesem variablen Holzstück

in der Rille wurden, wie beim fixen Auflager, wieder je Seite zwei weitere Holzstücke (4 cm/4 cm/12 cm und 2 cm/4 cm/12 cm) miteinander verschraubt. Diese wurden dann versuchs- bzw. profilabhängig an der richtigen Längenposition auf der bereits fix verschraubten Holzstückbasis von beidseitig je 4 cm/4 cm/24 cm angeschraubt.

Dadurch entstand ein über die Länge von 24 cm verschiebliches, 12 cm langes Gabellager mit einer Gabelöffnung von 4 cm/6 cm. Eventuelle Ungenauigkeiten in der lotrechten Ausrichtung wurden mit Papiereinlagen ausgeglichen. Die Steifigkeit des Lagers wurde wieder durch bis zu 10 cm lange Holzschrauben und vertikal positionierte Schraubklemmen gewährleistet.

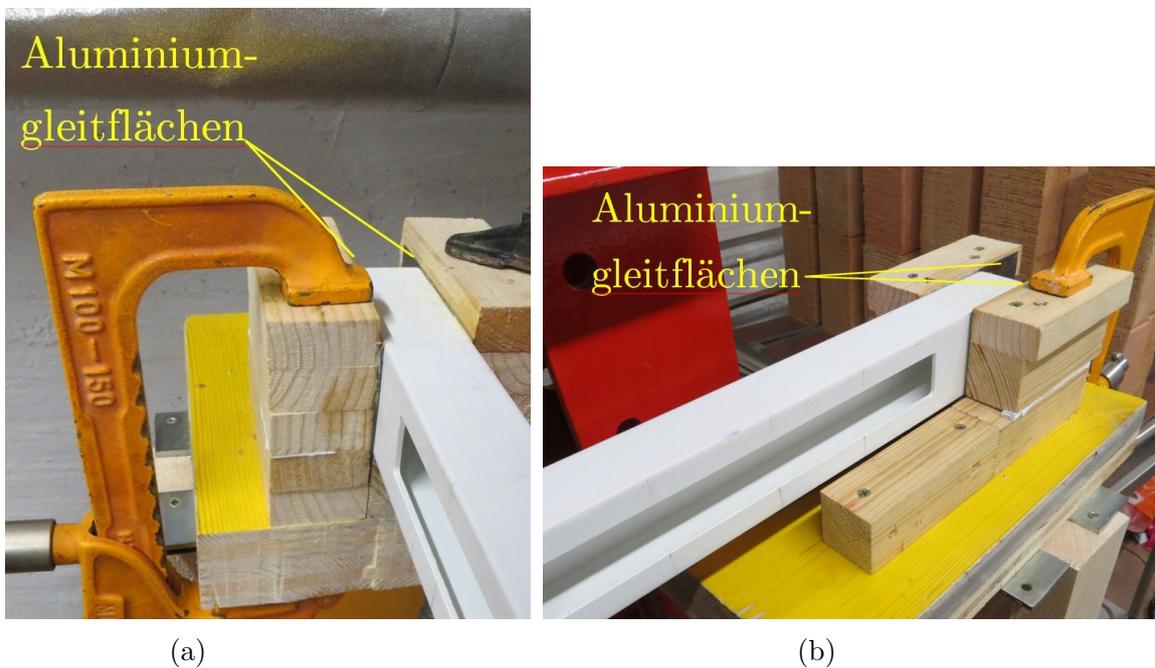


Abbildung 4.2: Gabellager: (a) fixes Auflager, (b) längenvariables Auflager

### 4.1.3 Freie Verschiebungen in $x$ -Richtung

Um die anfangs geforderten Verschiebungen in  $x$ -Richtung ungehindert zulassen zu können, musste auf eine ausreichende Reibungsreduzierung entlang der Gabelöffnungen beider Lager geachtet werden. Zunächst wurden Plastikbezüge in Betracht gezogen, dieser Gedanke wurde jedoch zugunsten einer optimierten Variante fallen gelassen. Die schlussend-

lich ausreichende Reibungsfreiheit wurde durch geschliffene, polierte Aluminiumplatten gewährleistet.

Diese wurden mit der polierten Seite an den im Auflagerbereich dem Profil zugewandten Seiten angebracht. Dies waren je Auflager drei Seiten. Die Dicke der Aluminiumplatten von 1 mm wurde bei der Konstruktion der Gabellager berücksichtigt. Zusätzlich zu der nun schon wesentlich verbesserten Situation der Reibung wurden bei jedem durchgeführten Versuch das Profil selbst und die Aluminiumplatten im Auflagerbereich mit einem handelsüblichen Schmierfett eingerieben.

### 4.1.4 Keine Verschiebungen in $z$ -Richtung

Auch diesem Punkt wurden ausführliche Überlegungen zugrunde gelegt. Beide Grundplatten der Auflager wurden zunächst mit handelsüblichen Winkeleisen ( $90^\circ$ ) aus Stahl verschraubt. Dies erfolgte, um eine einfachere Fixierung an den im Laboratorium vorhandenen Stahlrahmen zu ermöglichen. Diese Fixierung der Auflager erfolgte mit Schraubklemmen. Je Auflager wurden drei Schraubklemmen verwendet. Die Schraubklemmen fixierten die Auflager über die Winkeleisen in horizontaler Richtung an die vertikalen Stahlplatten des vorhandenen Stahlrahmens.

Durch diese Wahl der Fixierung war es auch möglich, etwaige Höhenunterschiede zwischen den Auflagern leichter auszugleichen. Dies wäre bei einer Fixverschraubung oder Ähnlichem nicht möglich gewesen. Mit Hilfe einer Wasserwaage wurden dann auf einer Höhe von 1 m die Auflager im passenden Abstand montiert und in exakt gleiche Höhe gebracht. Der Abstand der Auflager betrug etwa 1 m, wobei die Länge auf einem Auflager wie bereits erläutert dann nochmal variiert werden konnte. Nach der Installation dieser Schraubklemmen war jedoch schnell ersichtlich, dass die Verformungen der Grundplatten bei Belastung in vertikaler Richtung unzufriedenstellend groß waren. Aus diesem Grund wurde auf jeder Seite ein handelsüblicher Holzbalken (10 cm/10 cm) zwischen der Grundplatte und dem Boden des Labors verspannt. Dadurch wurde eine Auflagersituation geschaffen, die selbst in 1 m Höhe keine Vertikalverschiebungen zulässt.



Abbildung 4.3: vertikal verspannte Holzstützen zur Vermeidung der Verschiebungen in  $z$ -Richtung

## 4.2 Messaufbau und Messpunkte

Um die genaue Lage des Schubmittelpunktes zu bestimmen, müssen die zu einer Torsionsbeanspruchung eines Querschnitts zugehörigen Verformungen messtechnisch erfasst werden. Die Torsionsbelastung wird im physikalischen Versuch durch eine angreifende vertikale Einzelkraft generiert, welche exzentrisch angreift und die Last gleichmäßig als Torsionsmoment in den Querschnitt einleitet. Bei Verformungen infolge Torsion kommt es im Allgemeinen zu Verdrehungen und Verschiebungen des Querschnitts. Greift die Einzellast nun genau im Schubmittelpunkt an, kommt es zu keiner Rotation und die Verformungen des Querschnitts bestehen nur aus einer Verschiebung, auch als Translation bezeichnet. Für die Messungen standen für den physikalischen Versuch folgende Materialien zur Verfügung:

- Zwei induktive Wegaufnehmer Typ WA/20 mm
- Messverstärker QuantumX inkl. dazugehöriger Software
- Notebook

Die Verdrehungen können durch zwei jeweilige Verschiebungsmessungen an zwei unterschiedlichen Punkten erfasst werden. Diese zwei Punkte liegen bei einer Querschnittsmessung auf derselben Höhe. Die Profile liegen im physikalischen Versuch aufgestellt in den Gabellagern, also mit der schmälere Seite (4 cm) nach unten. Um größere Verschiebungen und damit bessere Genauigkeiten bei den Messungen zu erhalten, werden die Wegaufnehmer nicht direkt an den Außenkanten der schmälere Seite, sondern an einem Vierkantstahl angesetzt. Dieser Vierkantstahl wurde mit einem doppelseitigen Klebeband auf der Schmalseite aufgebracht und verlängert die Distanz der größtmöglichen Abstände der Wegaufnehmer. Außerdem wird durch diese Maßnahme der Abstand zum Drehpunkt vergrößert. Ein weiterer positiver Effekt zeigt sich im Bezug auf die Tauchanker der Wegaufnehmer, welche durch die größere Auflagefläche des Vierkantstahls bei großen Verdrehungen des Querschnitts weniger abrutschgefährdet sind.

Wird nun eine Last auf das System aufgebracht, so messen beide Wegaufnehmer eine Verschiebung in  $z$ -Richtung. Bei einer Verdrehung des Querschnitts sind diese beiden Werte voneinander unterschiedlich. Dies bedeutet, dass dabei die Differenz der beiden Werte offensichtlich ungleich Null ist. Somit ist in dieser Hinsicht auch schon die Definition des Schubmittelpunktes anhand der Messung augenscheinlich. Verläuft die Wirkungslinie der Einzellast genau durch den Schubmittelpunkt, so ist die Differenz der gemessenen Verschiebungen gleich Null. Da die Messungen im Tausendstel-Millimeterbereich, also im Mikrometerbereich erfolgen, ist eine Differenz gleich Null jedoch sehr unwahrscheinlich. Somit erfolgt die Auffindung des Schubmittelpunktes durch eine schrittweise Änderung der Exzentrizitäten und einer anschließenden linearen Interpolation zwischen den berechneten Differenzen im Plus- und Minusbereich.

Die Fixierung der Wegaufnehmer erfolgte mit handelsüblichen Schraubklammern. Die Halterung der Wegaufnehmer wurde mittig über dem Profil am vorhandenen Stahlrahmen des Versuchslabors fixiert. Die Wegaufnehmer wurden vertikal in die dafür vorgesehene Halterung gesteckt und mittels eines Rädchens feinjustiert. Die Positionierung der Wegaufnehmer in der Nähe der Mitte, also in der Nähe einer fiktiven Symmetrieachse (diese liegt in der Hälfte des Abstandes der beiden äußersten Lochränder) jedes horizontal liegenden Profils, ergibt sich durch die Tatsache, dass sich an dieser Position der größte

Abstand zu den Auflagern ergibt. Die fiktive Symmetrieachse ist für jeden Probekörper in den Abbildungen 5.3 bis 5.9 dargestellt. Dort sind die größten Verschiebungen zu erwarten, welche genauere Messungen und weniger Messabweichungen bedeuten.

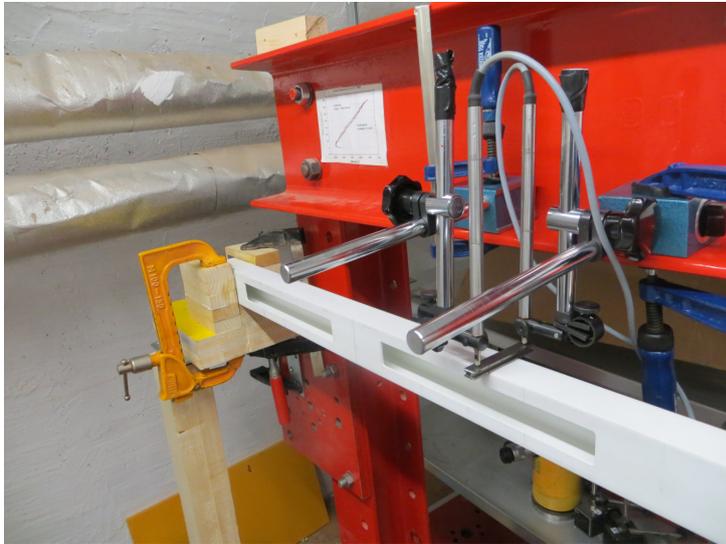


Abbildung 4.4: Fixierung und vertikale Positionierung der Wegaufnehmer nahe der fiktiven Symmetrieachse

### 4.3 Kraftaufbringung

Für die Kraftaufbringung wurde eine ähnliche Vorgehensweise wie im Vergleichsversuch gewählt (siehe [29]). Durch die horizontale Lage der Profile ist jedoch die Kraftaufbringung wesentlich einfacher, da sämtliche eventuelle Umlenkungen durch Schrägstellungen bei einer horizontalen Lasteinleitung nicht berücksichtigt werden müssen. Als Kraft wurde die Gewichtskraft zweier Gewichtsscheiben gewählt (siehe Abbildung 4.5). Durch Probemessungen am Anfang der Versuchsreihe wurde ein Gewicht von 2 kg gewählt. Bei sämtlichen Profilen wurde dieses Gewicht beibehalten, um einen noch genaueren Vergleich zu ermöglichen.

Die zusammengebundenen Gewichtsscheiben wurden über ein Stahlseil mit der Schubflusssklemme verschraubt. Die Schubflusssklemme, welche eine Eigenkonstruktion aus Stahl und Gummi darstellt, sorgt durch eine Umwandlung der Einzelkraft in ein Torsionsmoment für eine gleichmäßige Lasteinleitung in das Profil. Die Schubflusssklemme wird in



Abbildung 4.5: Positionierung der Gewichte

Kapitel 4.4 noch näher erläutert. Über ein kurzes, aus dem Schlitz des kraftaufnehmenden, horizontalen Arms der Schubflussklemme ragendes Gewindestück wurde das Stahlseil mittels Muffe und Ösenshraube verbunden. Das Stahlseil selbst wurde durch die Öse der Schraube geführt und dann bei jeder Messung mittels einer Seilklemme fixiert. Durch diese Art der Krafteinleitung konnten auf den Millimeter genaue, punktuelle Messungen durchgeführt werden.

#### 4.4 Schubflussklemme

Im Rahmen des vorangegangenen Versuches, der dieser Arbeit als Grundlage dient, wurde eine Vorrichtung konstruiert, welche die Einleitung einer Einzellast als Torsionsmoment in das Profil ermöglicht. Im Folgenden soll die Wirkungsweise dieses Bauteils, der als Schubflussklemme bezeichnet wird, für das bessere Verständnis näher erläutert werden. Die Herstellung und der Aufbau werden nicht im Detail behandelt, Informationen dazu finden sich in [29].

Wie bereits erwähnt, ist die primäre Aufgabe der Schubflussklemme die gleichmäßige Lasteinleitung in das Profil. Dies bedeutet, dass ein das Profil umschließender Rahmen die angreifende Einzellast als über den Umfang des Profils verteilten Schubfluss auf den

Querschnitt wirken lässt. Der Schubfluss sollte als längenbezogene Kraft gleichmäßig über den Umfang gewährleistet sein.

Weiters sollte die Konstruktion eine einfache Handhabung bei der Wahl der Exzentrizität der angreifenden Einzellast sowie bei der lagemäßigen Veränderung der Klemme selbst ermöglichen.

Dem ersten dieser beiden Punkte wurde durch eine im Verhältnis zum Profil kleinen Konstruktionshöhe des Stahlrahmens aus Vierkantstahl sowie durch gut positionierte Schraubenöffnungen und Gummieinlagen Rechnung getragen. Über zwei im Winkel von 90° geknickte Vierkantstähle und über angeklebte Gummieinlagen konnte der Rahmen das Profil gut umschließen. Der Anpressdruck des Rahmens der Klemme auf das Profil wurde durch angezogene Schlitzschrauben bewerkstelligt.

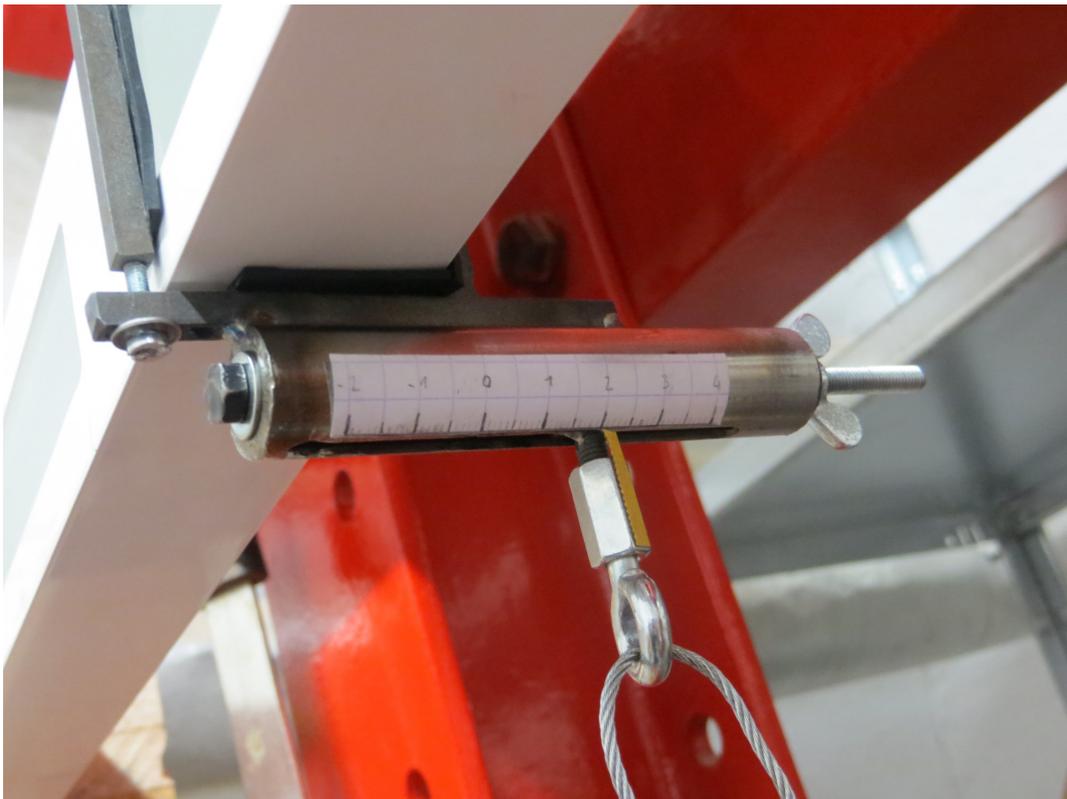


Abbildung 4.6: Montierte Schubflussklemme mit Millimeterabständen

Der zweite Punkt wurde durch ein an der schmälere Seite angeschweißtes Rohr berücksichtigt. In diesem Rohr mit einem Außendurchmesser von 17 mm befindet sich eine Ge-

windestange, welche an beiden Enden des Rohrs befestigt, jedoch weiter mittig drehbar ist. Auf der vom Rahmen abgewandten Seite des Rohres wurde längs des Rohres ein Schlitz gefräßt, wodurch die Gewindestange von außen sichtbar wurde. Innerhalb des Rohres wurde auf die Gewindestange ein Verbindungsstück zur Aufbringung des Anschlussstückes für die Gewichte geschraubt.

Die Länge des Rohres und des Schlitzes und damit einhergehend die Länge des Gewindes wurden durch rechnerische Extrema der Schubmittelpunktslage ermittelt. Durch eine Überlänge in beide Richtungen lag man auf der sicheren Seite. Durch Festhalten des Verbindungsstückes und gleichzeitigem Drehen des Gewindes konnte auf Millimeter genau die Lage der Wirkungslinie der Einzelkraft bestimmt werden. Zur zusätzlichen Orientierung wurden Markierungen im Millimeterabstand auf das Rohr aufgebracht. Im Folgenden finden sich Abbildungen zur Montage der Schubflussklemme auf dem Profil und den einzelnen Bestandteilen sowie Abmessungen derselben.

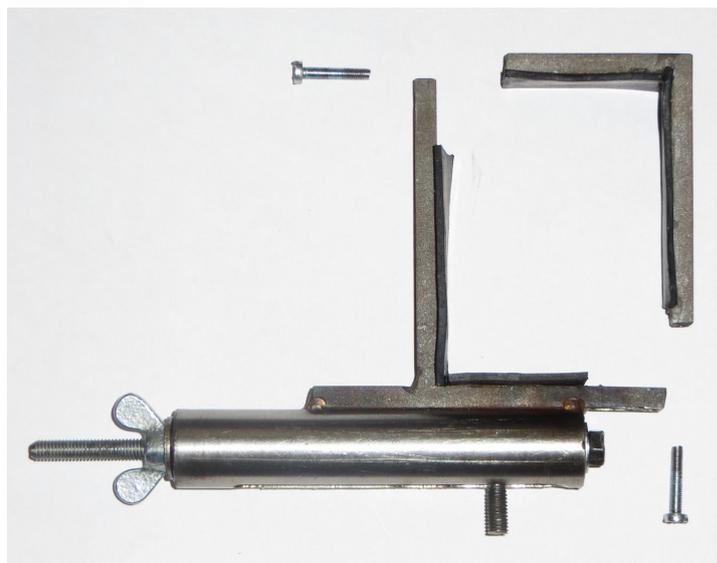
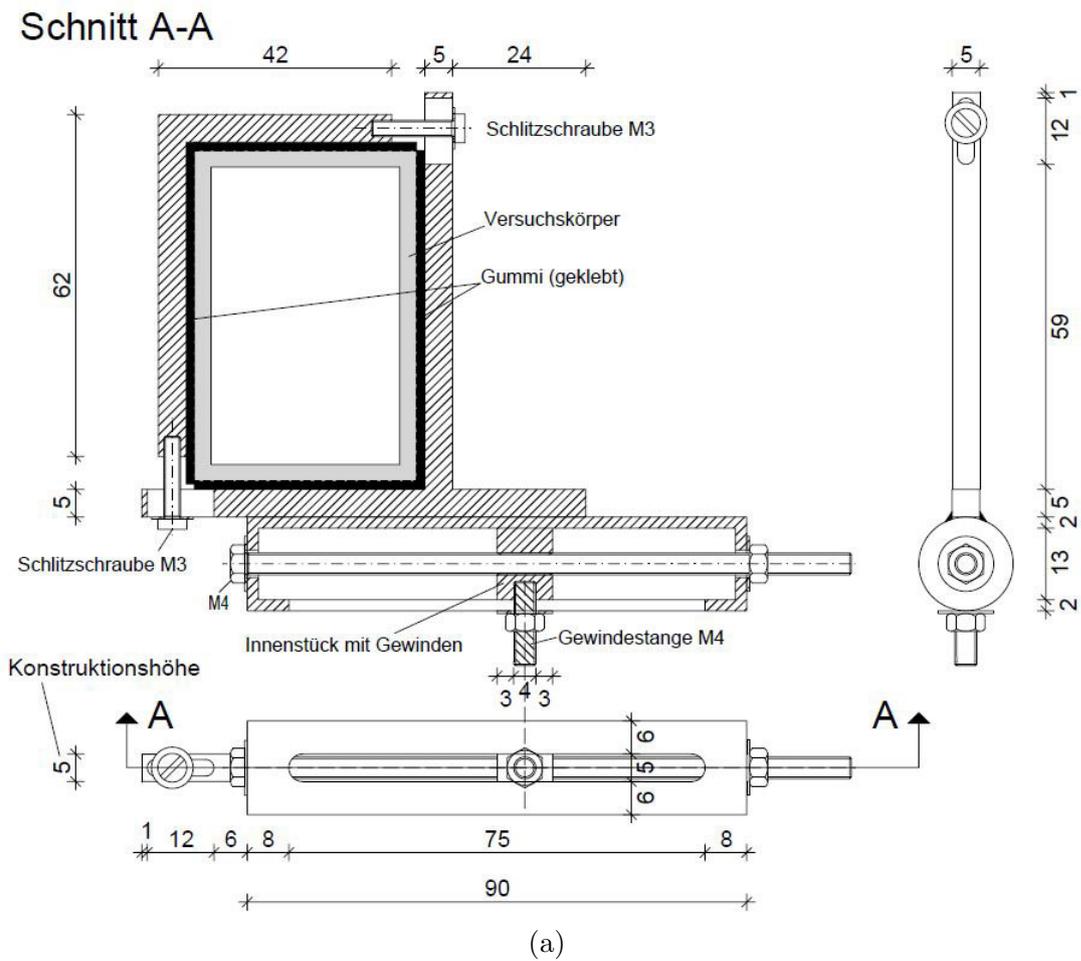


Abbildung 4.7: (a) Plan Schubflussklemme (in mm) [29], (b) Bestandteile der Schubflussklemme [29]

# Kapitel 5

## Versuchsdurchführung und Probekörper

### 5.1 Versuchsdurchführung

Um dem Vergleichsversuch nach [29] möglichst nahe zu kommen, wurde eine ähnliche Versuchsdurchführung gewählt. Der Ablauf und das Ziel des Versuches sind im Wesentlichen gleich, kleine Unterschiede ergeben sich jedoch bei den einzelnen Durchführungsschritten. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Versuchsdurchführung detailliert erläutert.

Die Grundvoraussetzung für den Versuch war zu diesem Zeitpunkt bereits geschaffen. Die Auflager waren bereits hergestellt und verschraubt (siehe Kapitel 4.1). Auch die Wegaufnehmer waren bereits am Stahlrahmen fixiert. Die Lage der Wegaufnehmer im Raum änderte sich also in weiterer Folge nicht mehr. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte von der Vorbereitung bis zur Messung der einzelnen Profile angeführt:

- Verbinden der Wegaufnehmer mit dem Messverstärker
- Verbinden des Messverstärkers mit dem Laptop
- Längeneinstellung des verschieblichen Auflagers

Wie bereits erläutert, sind die Grundabmessungen der Probekörper zwar gleich, jedoch unterscheiden sich die Abstände von den äußersten Punkten der am weitesten außen liegenden Öffnungen. Dies ergibt sich durch die verschieden großen Öffnungen sowie durch die unterschiedlichen Abstände zwischen den Öffnungen. Die äußersten Längsabstände der Profilöffnungen wurden erfasst und sind in Tabelle 5.1 angeführt. Für den Versuchsaufbau wurden drei verschiedene Abstände von Auflager zu Auflager gewählt. Dadurch konnten alle sieben Profile erfasst werden. Bei der jeweiligen Wahl der Auflagerabstände galt es zu beachten, dass die von der fiktiven Symmetrieachse am weitesten entfernten Öffnungen, bzw. deren äußere Ränder, nicht in die Gabel der Auflager hineinragen. Dies hätte eine Verfälschung der Ergebnisse zur Folge, da diese Öffnungsteile bei einer Belastung des Systems nicht mehr mitwirken würden. Durch die unterschiedliche Beschaffenheit der Profile ergaben sich drei Einstellungen für die Abstände der Auflager:

- 93 cm
- 100 cm
- 105 cm

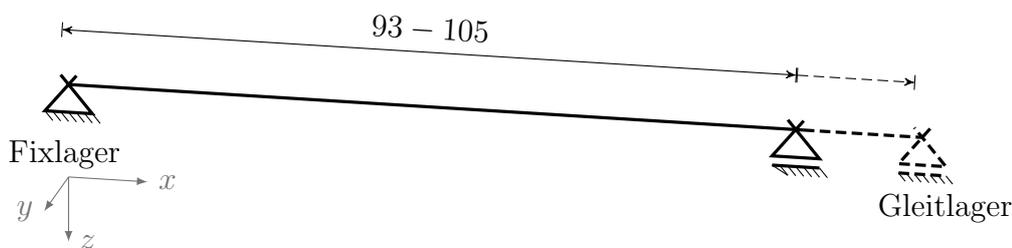


Abbildung 5.1: Probekörper 3, Maße in mm

Das verschiebliche Auflager wurde durch eine Positionsänderung der oberen Holzstücke auf die jeweilige Länge eingestellt. Die Holzstücke wurden jeweils verschraubt und mit Schraubklemmen fixiert.

- Einfetten der Profile und der Auflager

Vor der Positionierung der Profile in die vorgesehene Öffnung der Auflager, wurden

die später in der Gabel befindlichen Seiten des Probekörpers mit Schmierfett eingerieben. Außerdem wurden die in der Gabel befindlichen Aluminiumplatten mit Schmierfett eingerieben.

- Einlegen und Ausrichten des Probekörpers

Im nächsten Schritt wurde das jeweilige Profil in die Auflager hineingelegt bzw. geschoben. Dabei wurde exakt auf eine - bezogen auf die äußersten Lochabstände - symmetrische Lage zwischen den inneren Aufagerrändern geachtet. Die fiktive Symmetrieachse ist jeweils in den Abbildungen 5.3 bis 5.9 abgebildet. Die Öffnungen der Profile wurden dabei nach vorne in Richtung des Beobachters ausgerichtet.

- Anbringen des Balkens aus Vierkantstahl

Im nächsten Schritt erfolgte die Anbringung des Vierkantstahls mittels beidseitigem Klebeband auf der oberen Schmalseite des Profils. Dieser Vierkantstahl dient, wie bereits beschrieben, als Angriffspunkt für die Tauchanker der Wegaufnehmer. Der Vierkantstahl wurde nicht genau über dem ersten Messpunkt angebracht, da dort später die Schubflussklemme montiert wurde. Da die Lage der Wegaufnehmer bei jedem Versuch die Gleiche war, änderte sich in Abhängigkeit der Profile der Abstand von der fiktiven Symmetrieachse. Für die Messungen bedeuteten diese geringfügigen Unterschiede jedoch keine Veränderung.

- Positionierung der Tauchanker der Wegaufnehmer

Die Position der Wegaufnehmer war bereits fixiert, nun mussten lediglich die Tauchanker auf dem Vierkantstahl positioniert werden. Dabei wurde exakt darauf geachtet, dass sich die lotrechte Justierung der Wegaufnehmer selbst nicht verändert. Den Tauchankern stand genügend Messweg für eine fehlerfreie Messung zur Verfügung.

- Lagebestimmung der Schubflussklemme (horizontal)

Auf jedem Profil gibt es durch den Vergleichsversuch vorgegebene Messpunkte entlang der  $x$ -Achse des Probekörpers. Diese befinden sich entweder exakt in der Mitte zwischen zwei Öffnungen, am Rand einer Öffnung oder in den Öffnungen selbst.

Befinden sich die Messpunkte innerhalb der Öffnungen, so sind die Messpunkte in Abhängigkeit von der Länge der Öffnungen gleichmäßig verteilt. Das können je nach Situation unter anderem Halbierungen oder Drittelteilungen sein. Die Aufteilung der Messpunkte gestaltet sich nach Kapitel 5.2.2.

- Einstellen der ersten Exzentrizität an der Klemme

Um sich am Vergleichsversuch zu orientieren, wurde auch in diesem Versuch der Nullpunkt der Exzentrizität an der Außenkante des Profil definiert. Eine negative Exzentrizität  $e$  verläuft in Richtung des Profilquerschnitts, eine positive Exzentrizität  $e$  vom Profil weg nach außen. Die genaue Positionierung der Lage der Wirkungslinie der Einzelkraft wurde durch ein auf das Schlitzrohr aufgeklebtes Lineal vereinfacht (siehe Abbildung 4.6). Die Schraube wurde durch Drehen des Gewindegewindes auf Millimeter genau angepasst. Es wurden an jedem Messpunkt eines Profils so viele Exzentrizitäten gewählt, bis zwei nebeneinanderliegende Millimeterstellen zwei unterschiedliche Vorzeichen bei den Differenzen der von den Wegaufnehmern gemessenen Verschiebungen ergaben. Zwischen diesen beiden Exzentrizitäten befand sich dann der Schubmittelpunkt. Danach folgte ein Messzyklus, der für jede Exzentrizität immer gleich verläuft.

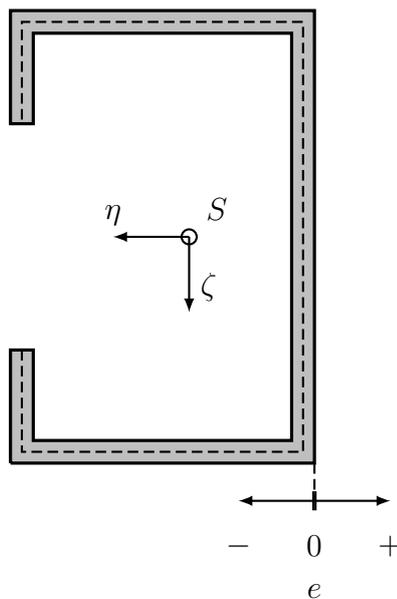


Abbildung 5.2: Einstellen der Exzentrizität  $e$

- Start des Messzyklus für eine Exzentrizität
  - Definition der angeschlossenen Wegaufnehmer in Messsoftware QuantumX
  - Nullstellen der Wegaufnehmer
  - Starten der Aufzeichnung der Messdaten (gemessen wurden die Verschiebungen über die Zeit)
  - Belastung aufbringen durch Einhängen des Stahlseils mit den Gewichten in den an der Schraube im Schlitzrohr befindlichen Karabiner
  - Pendeln der Gewichte dämpfen und warten bis sie ruhig hängen
  - Beobachten der Graphen der beiden Wegaufnehmer am Bildschirm bis sich ein über die Zeit konstanter Verlauf einstellt
  - Beenden der Aufzeichnung der Messdaten
  - Entlasten
  - Exportieren der Messwerte in Microsoft Excel
  - Bilden des Mittelwerts der letzten 100 – 150 Verschiebungswerte pro Wegaufnehmer über die Zeit
  - Bildung der Differenz der beiden gemittelten Verschiebungswerte über die letzten 100 – 150 Werte (Wenn diese Differenz ungleich Null ist, dann rotiert der Querschnitt)
  - Eintragen der Differenz in eine für das jeweilige Profil erstellte Exceltabelle unter Berücksichtigung der zugehörigen Exzentrizität und des Messpunktes
- Ende des Messzyklus für eine Exzentrizität
- Millimeterweise Verschiebung der Exzentrizität an der Schubflussklemme (durch die bereits erfolgte Messung bei der vorherigen Exzentrizität gewonnene Erfahrungs-

werte erlauben Sprünge von mehreren Millimetern um unnötige Messungen zu vermeiden)

- Erneute Durchführung des oben angeführten Messzyklus für die nächste Exzentrizität
- Ändern der Lage der Schubflussklemme von der fiktiven Symmetrieachse (Messpunkt 1) zum nächsten Messpunkt bis hin an den äußersten Messpunkt beim Fixlager und Wiederholen der Messzyklen an jedem Messpunkt
- Beenden der Messungen an einer Symmetriehälfte des Profils
- Ausbauen und Einbauen desselben Profils um  $180^\circ$  um die  $y$ -Achse verdreht, wieder mit den Öffnungen nach vorne in Richtung des Beobachters
- Nochmaliges Durchführen der Messungen nach den oben beschriebenen Schritten

Wie oben angeführt, wurden die Messungen von vorne gesehen ab der Symmetrieachse in Richtung des fixen Auflagers vollzogen. Dadurch musste das Profil nach der Messung an einer Hälfte um  $180^\circ$  gedreht werden. Dies geschah in der Absicht, eventuell vorhandene Ungenauigkeiten im verschieblichen Lager nicht in die Messungen mit einzubeziehen, da durch die Drehung beide Hälften jeweils von der fiktiven Symmetrieachse weg dieselben Lagerbedingungen hatten. Dadurch wurden die Messergebnisse noch genauer.

## 5.2 Probekörper

Auf die Herstellung der verwendeten Probekörper wird in dieser Arbeit nicht näher eingegangen. Der Herstellungsprozess wird in [29] genau erläutert.

### 5.2.1 Dimensionen

Die Probekörper bestehen aus offenen PVC-Rechteckprofilen mit den Maßen  $120\text{ cm}/4\text{ cm}/6\text{ cm}$ . Die Dicke  $t$  der Wände beträgt  $3\text{ mm}$ . In Summe werden sieben Probekörper im

Versuch behandelt. Die Probekörper und deren Abmessungen (in mm) sind in den nachfolgenden Abbildungen 5.3 - 5.9 aufgezeigt.

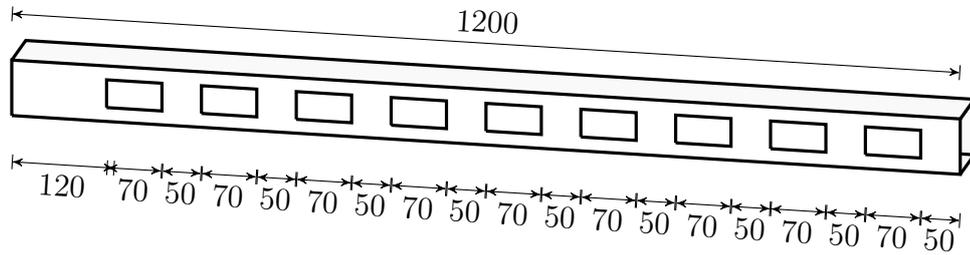


Abbildung 5.3: Probekörper 1, Maße in mm

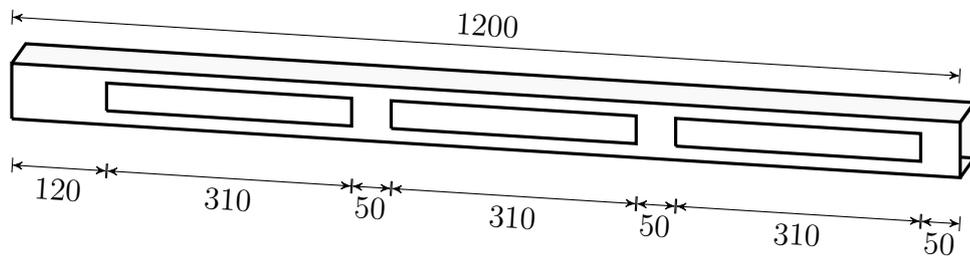


Abbildung 5.4: Probekörper 2, Maße in mm

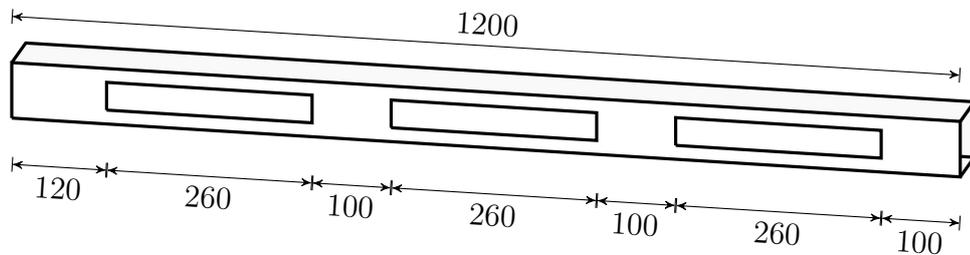


Abbildung 5.5: Probekörper 3, Maße in mm

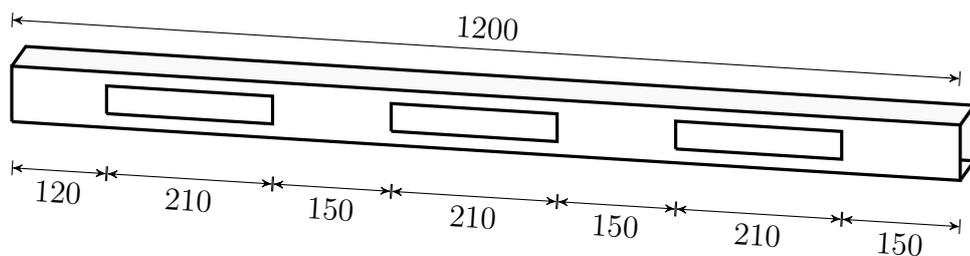


Abbildung 5.6: Probekörper 4, Maße in mm

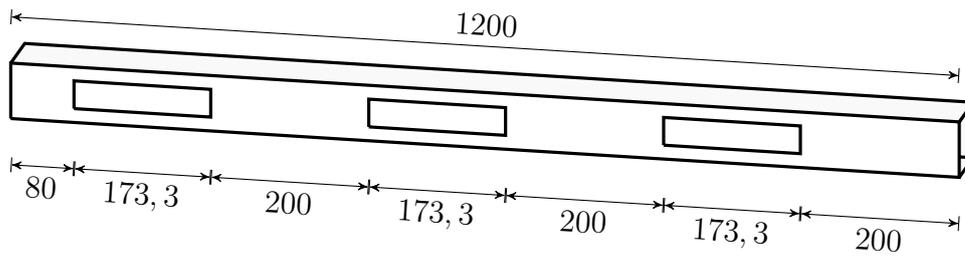


Abbildung 5.7: Probekörper 5, Maße in mm

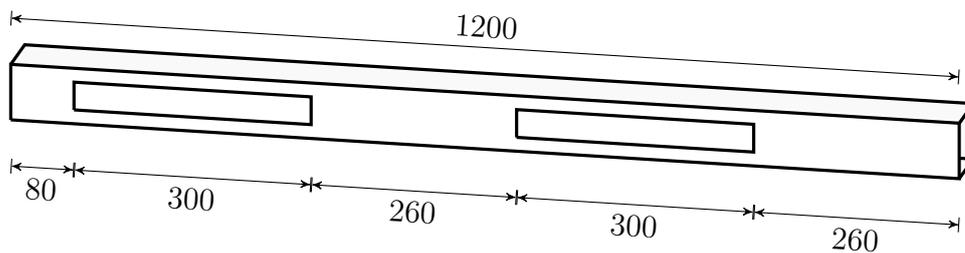


Abbildung 5.8: Probekörper 6, Maße in mm

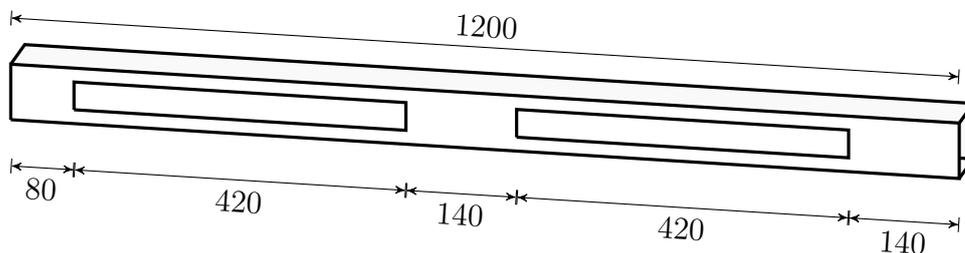


Abbildung 5.9: Probekörper 7, Maße in mm

### 5.2.2 Messpunkte

Wie bereits angesprochen befinden sich auf jedem Profil in Abhängigkeit von den darauf befindlichen Öffnungen unterschiedlich viele Messpunkte für die Krafteinleitung. Die folgenden Abbildungen sollen ein Verständnis für die Positionierung der Profile und die jeweils zugehörigen Lagerabstände sowie sonstige Maße vermitteln. In roter Farbe sind die Positionen der Messpunkte eingezeichnet. Außerdem sind die Lagerabstände sowie die Abstände der Messpunkte voneinander angeführt. Wie bereits bemerkt, wurde die gleiche

Positionierung der Messpunkte wie im Vergleichsversuch nach [29] gewählt. Die Messpunkte sind ab der fiktiven Symmetrieachse nach links zum fixen Auflager eingezeichnet. Wie oben erläutert, wurde die symmetrische Messung danach am um 180° gedrehten Profil durchgeführt.

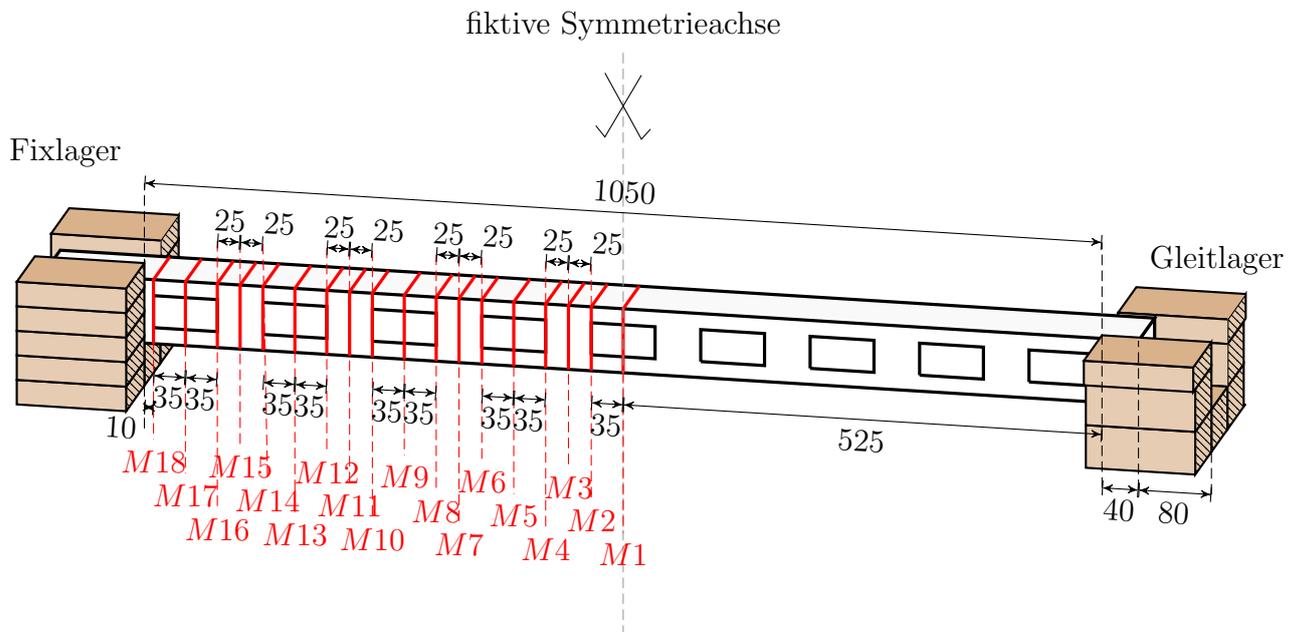


Abbildung 5.10: Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 1, Maße in mm

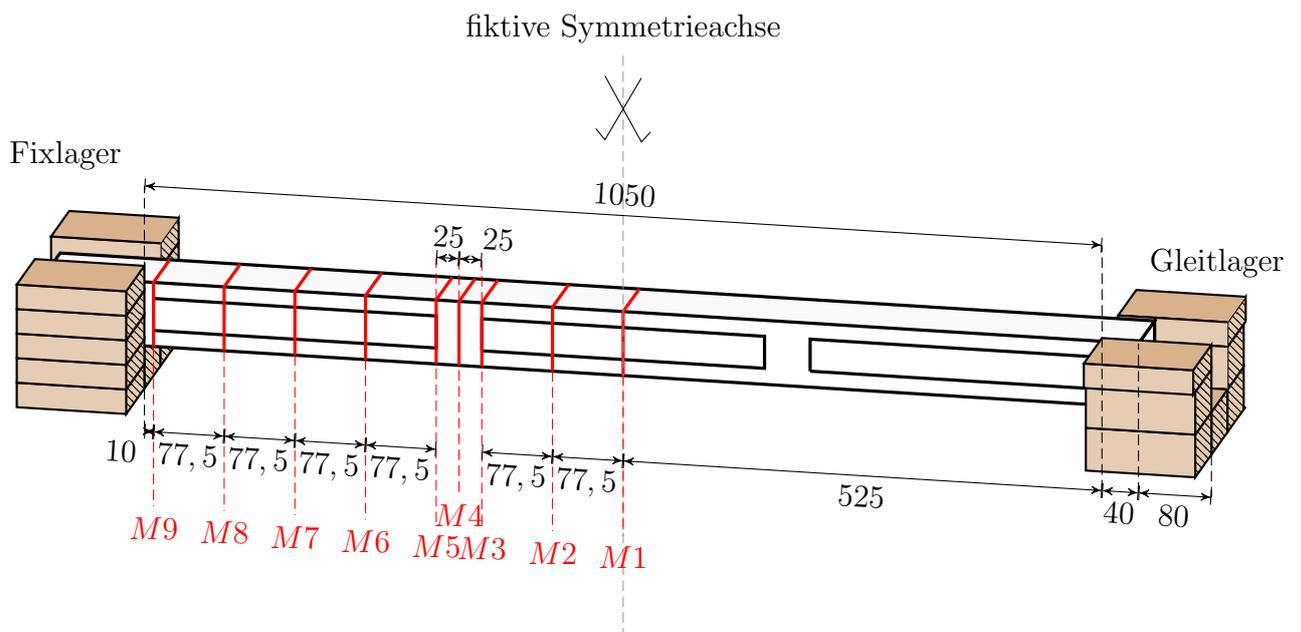


Abbildung 5.11: Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 2, Maße in mm

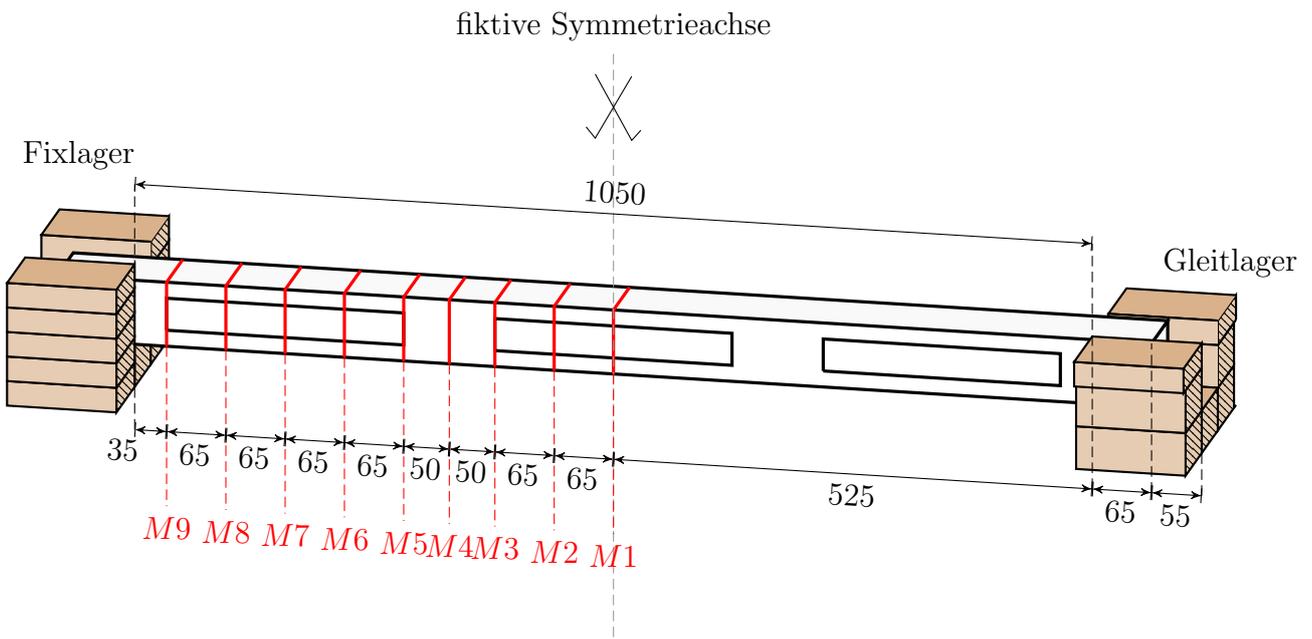


Abbildung 5.12: Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 3, Maße in mm

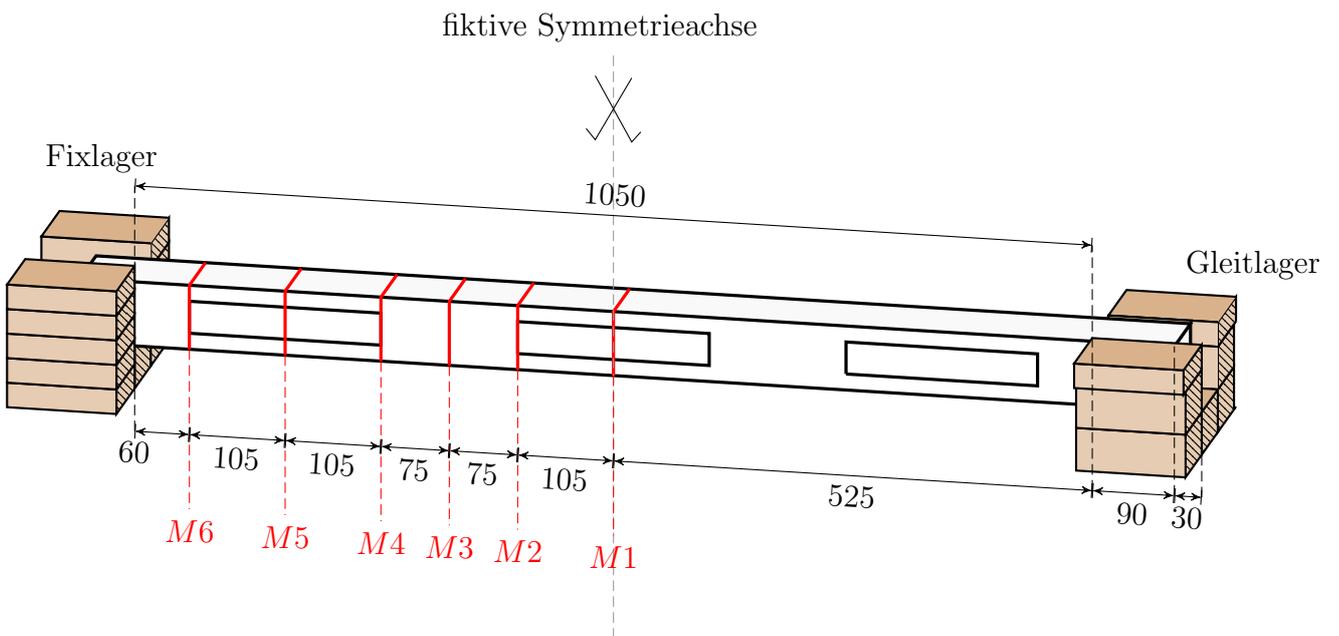


Abbildung 5.13: Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 4, Maße in mm

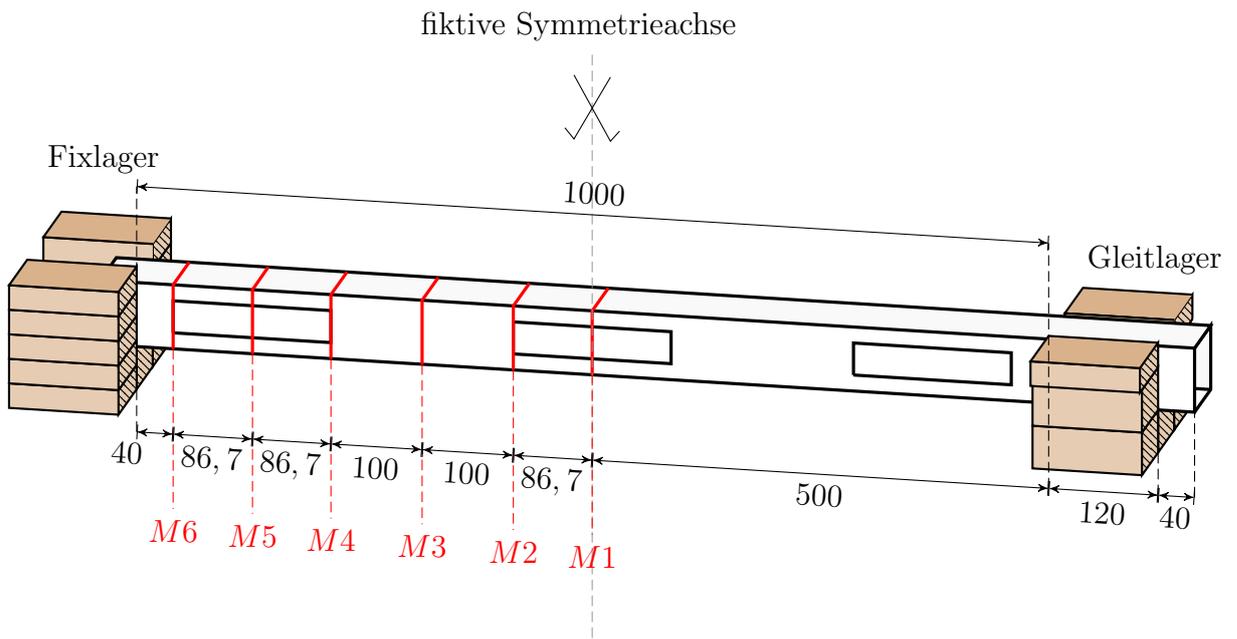


Abbildung 5.14: Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 5, Maße in mm

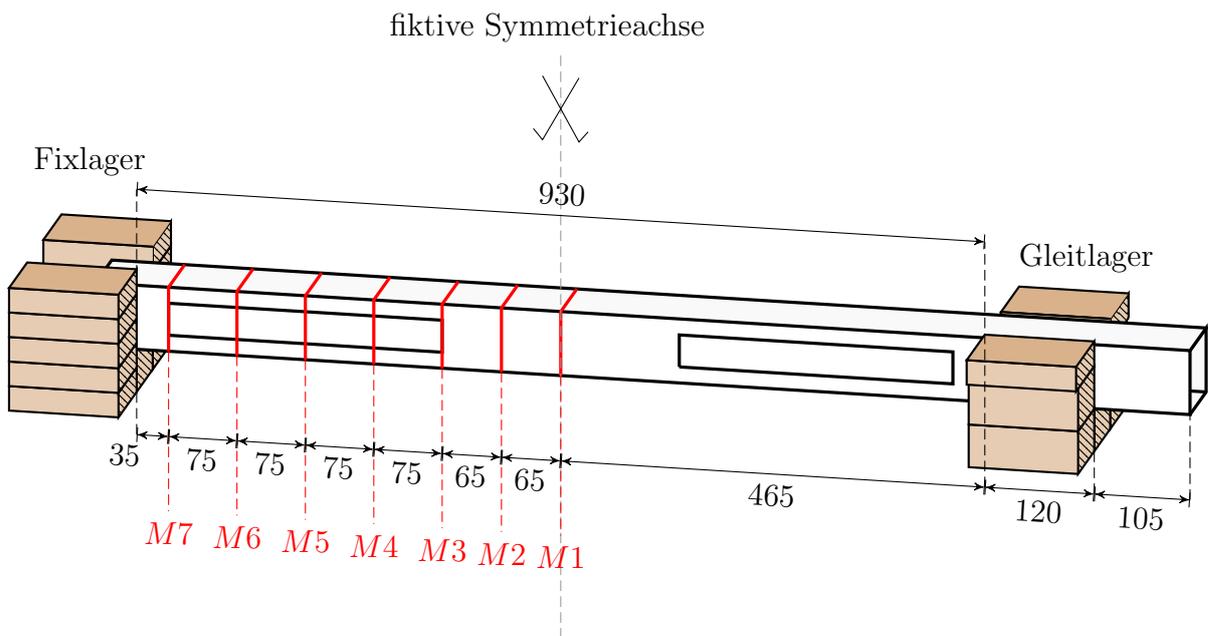


Abbildung 5.15: Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 6, Maße in mm

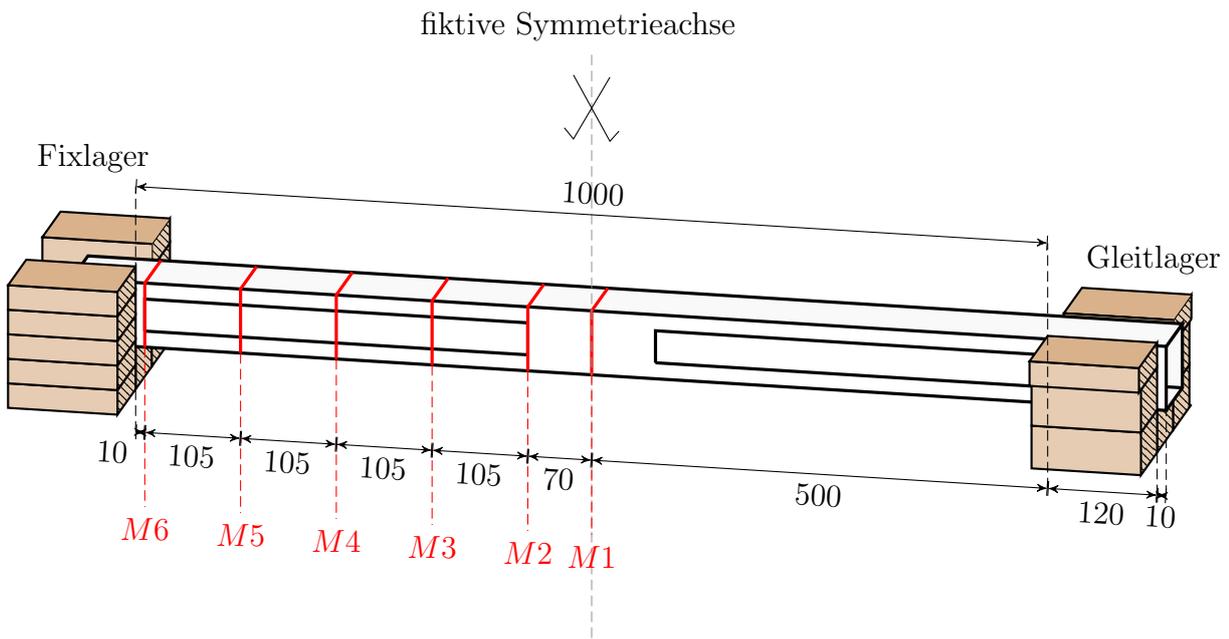


Abbildung 5.16: Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 7, Maße in mm

Die unterschiedlichen Auflagerabstände sowie weitere Abmessungen sind in folgender Tabelle festgehalten:

<b>Probekörper</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>
Abstand Profilanfang - erstes Loch	120	120	120	120	80	80	80
Abstand Profilanfang - rechter Rand letztes Loch	1150	1150	1100	1050	1000	940	1060
Mindestens erforderlicher Abstand Auf- lagerinnenrand - Auflagerinnenrand	1030	1030	980	930	920	860	980
<b>Gewählter Abstand Auflagerinnenrand - Auflagerinnenrand</b>	<b>1050</b>	<b>1050</b>	<b>1050</b>	<b>1050</b>	<b>1000</b>	<b>930</b>	<b>1000</b>
Auflagerlänge des Profils links	110	110	85	60	40	45	70
Auflagerlänge des Profils rechts	40	40	65	90	120	120	120
Überstand rechts	-80	-80	-55	-30	40	105	10
Abstand Symmetrieachse - Auflager	525	525	525	525	500	465	500
Abstand Auflager - nächstes Loch	10	10	35	60	40	35	10

Tabelle 5.1: Auflagerabstände und Abmessungen der Probekörper im Versuchsstand, Maße in mm

### 5.3 Erläuterungen für die Versuchsauswertungen

Die Probekörper wurden im physikalischen Versuch wie auch in der numerischen Simulation - wie bereits erläutert - in horizontaler Lage positioniert. Für die Übersichtlichkeit und für einen besseren Vergleich mit dem zugrunde liegenden Versuch mit einer Einspannung statt zwei Gabellagern werden die Probekörper in den Kapiteln 7 bis 11 vertikal dargestellt. Die negativen oder positiven Exzentrizitäten in den dort vorkommenden Diagrammen sind in Abbildung 5.2 erläutert.



# Kapitel 6

## Numerische Simulation

### 6.1 FE-Modell

Die Modellierung des FE-Modells wurde nach den gleichen Parametern wie im Vergleichsversuch durchgeführt. Die Materialien wurden exakt gleich verwendet, es kommen für die Profiwände vier rechteckige Flächen zum Einsatz, welchen bestimmte Materialparameter zugewiesen werden. Die Versuchskörper liegen horizontal in den Gabellagern auf, welche durch Flächenlager modelliert wurden.

Um eine horizontale Verschiebung zu verhindern, wurden die Probekörper durch ein in  $x$ -Richtung unverschiebliches Knotenlager in Profilmitte festgehalten. Die Seitenlänge der finiten Elemente wurde mit 5 mm festgelegt. Die Vierkantstähle und die Schubflussklemme wurden aus quadratischen Stahlstäben mit einer Seitenlänge von 5 mm modelliert.

Wie im Vergleichsversuch wurden Elastizitäts- und Schubmodul des Stahls um den Faktor 10 erhöht, um die Eigenverformungen zu minimieren. Die automatische Generierung des FE-Netzes erfolgte mit drei- und viereckigen Elementen. Nachfolgend sind die Materialparameter angeführt:

Elastizitätsmodul $E$	$3500 \text{ N/mm}^2$
Schubmodul $G$	$1200 \text{ N/mm}^2$
Querdehnzahl $\nu$	0.458
Spezifisches Gewicht $\gamma$	$15.91 \text{ kN/m}^3$

Tabelle 6.1: Materialparameter von Hart-PVC [29]

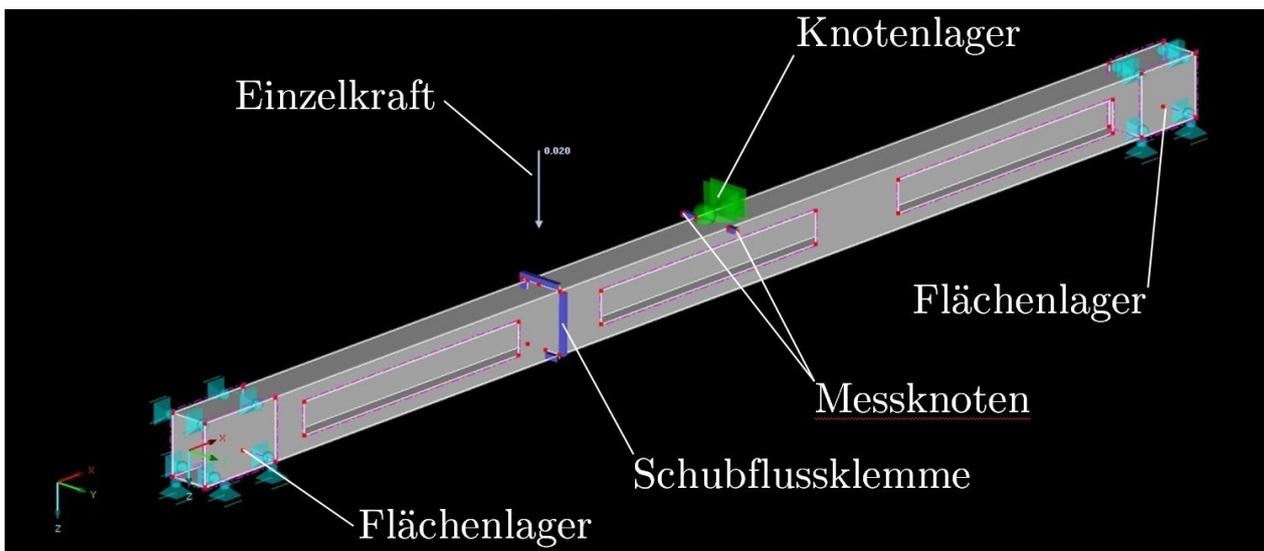


Abbildung 6.1: Modellierung des Probekörpers 3

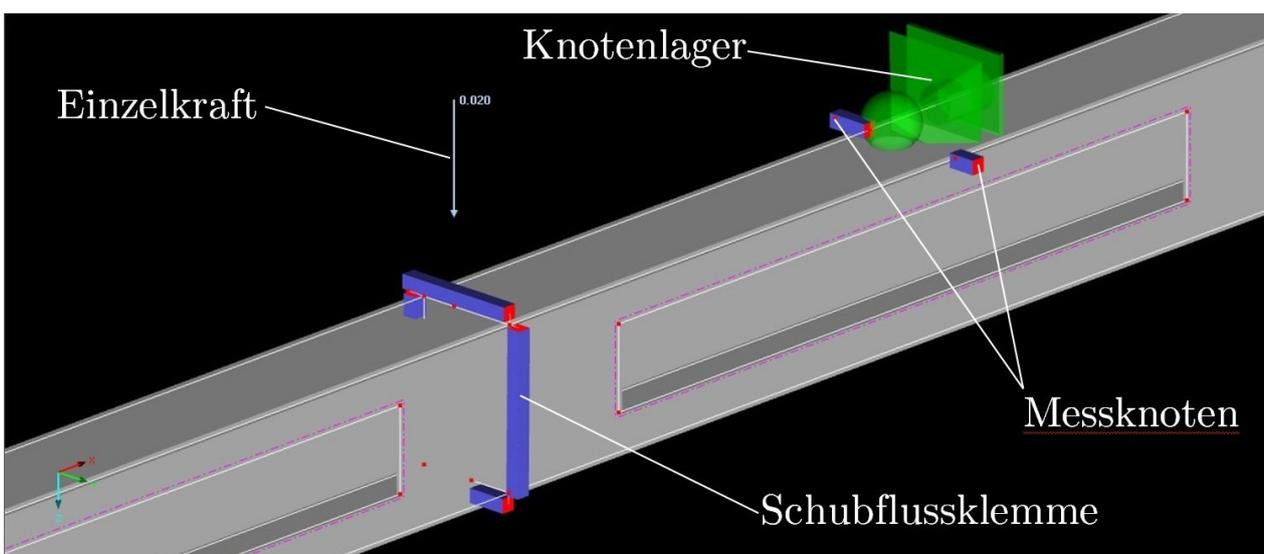


Abbildung 6.2: Größere Darstellung des Mittelbereichs des Probekörpers 3

## 6.2 Simulationsdurchführung

Die Durchführung der numerischen Simulation war für jeden Probekörper gleich. Die einzelnen Schritte sind im Folgenden angeführt:

- Anpassen der Auflager und deren Abmessungen (Positionierung gemäß Kapitel 5)
- Positionierung der Schubflussklemme bei Messpunkt  $M1$
- Einstellen der ersten Exzentrizität durch Verlängern oder Verkürzen des Stabstahls
- Last am Endknoten dieses Stabstahls angreifen lassen
- FE-Berechnung starten
- Verschiebungen  $u_z$  in  $z$ -Richtung bei den beiden Messknoten in Excel-Tabelle eintragen und Differenz berechnen (die  $z$ -Achse ist positiv nach unten zeigend definiert)
- Die letzten drei Punkte mit neuer Exzentrizität wiederholen. Sobald das Vorzeichen der Verschiebungsdifferenz wechselt, wurde der Nulldurchgang gefunden
- Verschieben der Schubflussklemme zum nächsten Messpunkt

Wie bereits bei den physikalischen Versuchen erläutert, ist die Vorgehensweise die Suche nach dem Nulldurchgang des Lastangriffspunktes. Sobald die Verschiebungsdifferenz an den beiden Messknoten gleich Null ist, befindet sich die Schubmittelpunkt bei der zugehörigen Exzentrizität.

Abbildung 6.3 zeigt den Übergang von einer Exzentrizität außerhalb zu einer Exzentrizität innerhalb der Lage des Schubmittelpunktes. In Abbildung 6.3a entsteht in  $x$ -Richtung blickend eine Verdrehung gegen den Uhrzeigersinn, in Abbildung 6.3b eine Verdrehung im Uhrzeigersinn.

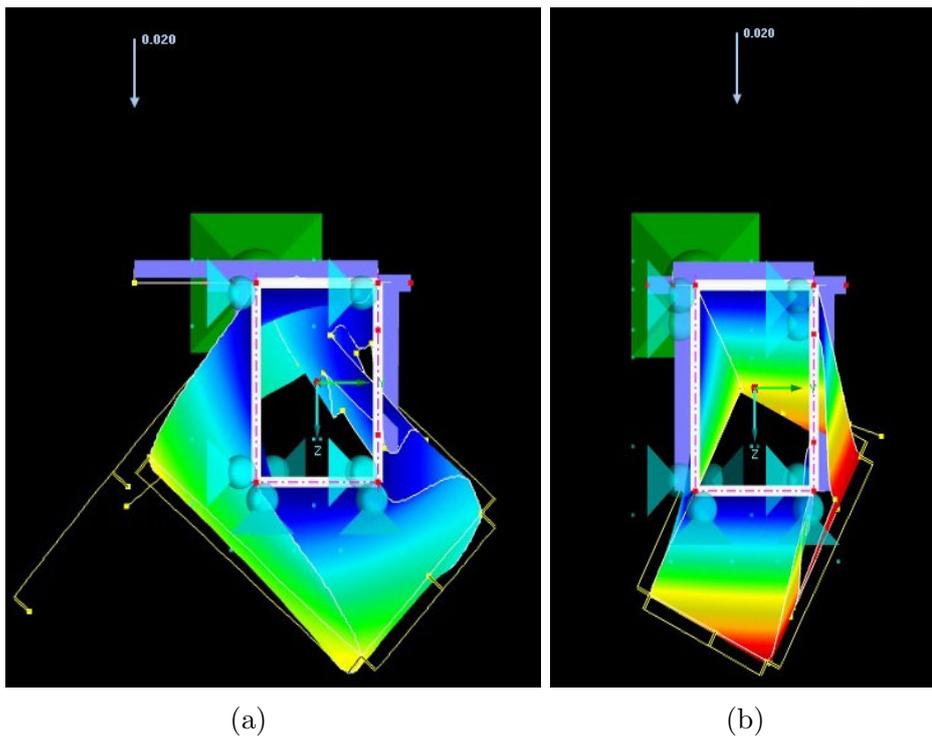


Abbildung 6.3: Überquerung des Schubmittelpunkts (Modell und Verformungen, Blick in  $x$ -Richtung)

### 6.3 Erläuterungen für die Versuchsauswertungen

Die Probekörper wurden im physikalischen Versuch wie auch in der numerischen Simulation - wie bereits erläutert - in horizontaler Lage positioniert. Für die Übersichtlichkeit und für einen besseren Vergleich mit dem zugrundeliegenden Versuch mit einer Einspannung statt zwei Gabellagern werden die Probekörper in den Kapiteln 7 bis 11 vertikal dargestellt. Das Eigengewicht wird in der numerischen Simulation nicht berücksichtigt. Die in den folgenden Diagrammen vorkommenden negativen oder positiven Exzentrizitäten sind in Abbildung 5.2 erläutert.

# Kapitel 7

## Versuchsergebnisse aus den physikalischen Versuchen mit Gabellagerung

### 7.1 Probekörper 1

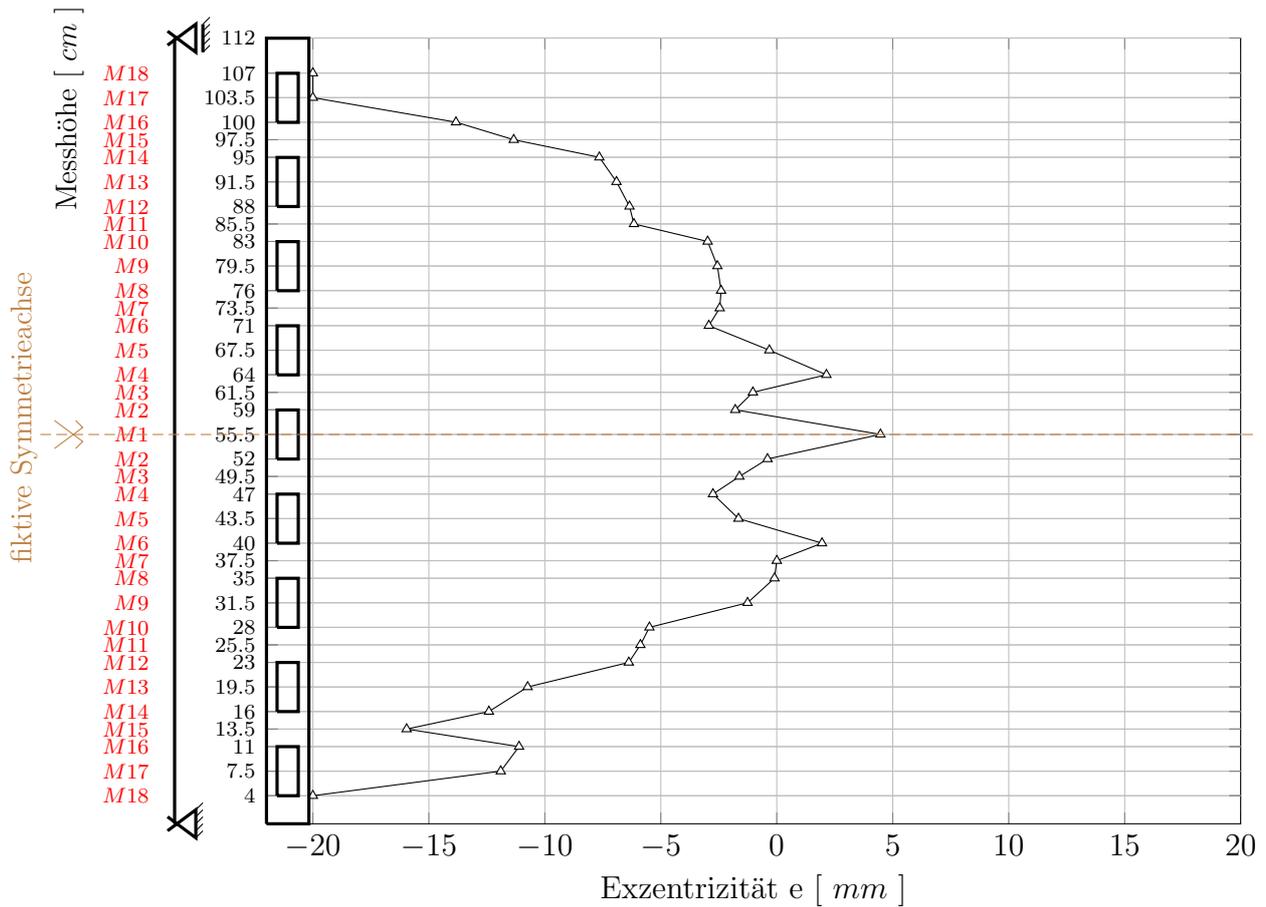


Abbildung 7.1: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 1 aus physikalischem Versuch

<b>Messpunkt</b>	M18	M17	M16	M15	M14	M13	M12	M11
<b>Höhe [cm]</b>	4	7.5	11	13.5	16	19.5	23	25.5
<b>e [mm]</b>	-20.00	-11.90	-11.11	-15.96	-12.41	-10.74	-6.38	-5.88
<b>Messpunkt</b>	M10	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3
<b>Höhe [cm]</b>	28	31.5	35	37.5	40	43.5	47	49.5
<b>e [mm]</b>	-5.49	-1.26	-0.10	0.00	1.95	-1.65	-2.75	-1.61

<b>Messpunkt</b>	M2	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
<b>Höhe [cm]</b>	52	55.5	59	61.5	64	67.5	71	73.5
<b>e [mm]</b>	-0.40	4.47	-1.79	-1.03	2.14	-0.32	-2.93	-2.46
<b>Messpunkt</b>	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
<b>Höhe [cm]</b>	76	79.5	83	85.5	88	91.5	95	97.5
<b>e [mm]</b>	-2.40	-2.56	-2.98	-6.16	-6.35	-6.91	-7.65	-11.34
<b>Messpunkt</b>	M16	M17	M18					
<b>Höhe [cm]</b>	100	103.5	107					
<b>e [mm]</b>	-13.83	-20.00	-20.00					

Tabelle 7.1: Ergebniswerte Probekörper 1 aus physikalischem Versuch

## 7.2 Probekörper 2

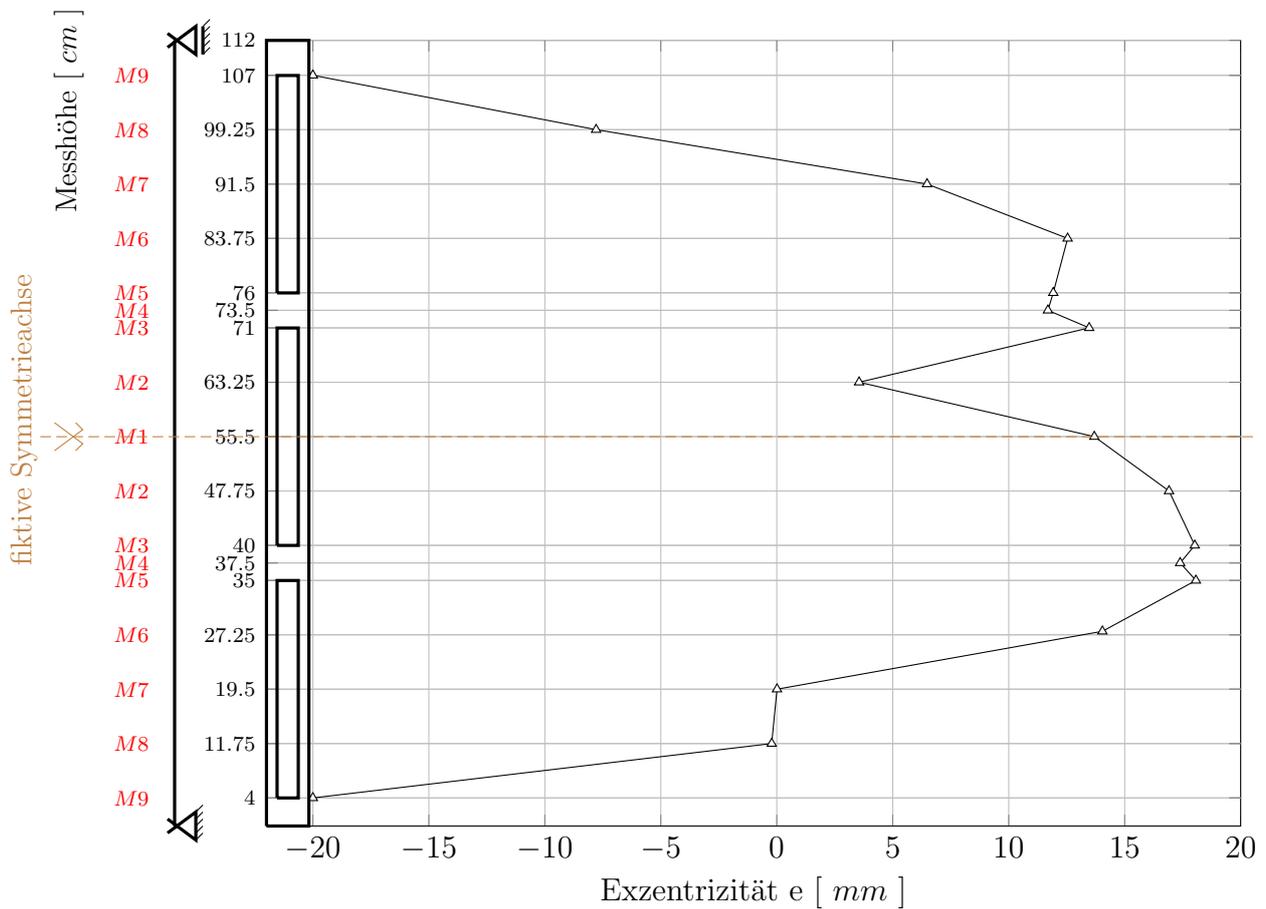


Abbildung 7.2: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 2 aus physikalischem Versuch

<b>Messpunkt</b>	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1
<b>Höhe [cm]</b>	4	11.75	19.5	27.25	35	37.5	40	47.75	55.5
<b>e [mm]</b>	-20.00	-0.22	0.01	14.04	18.07	17.39	18.02	16.91	13.69
<b>Messpunkt</b>	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	
<b>Höhe [cm]</b>	63.25	71	73.5	76	83.75	91.5	99.25	107	
<b>e [mm]</b>	3.55	13.47	11.69	11.92	12.54	6.48	-7.79	-20.00	

Tabelle 7.2: Ergebniswerte Probekörper 2 aus physikalischem Versuch

### 7.3 Probekörper 3

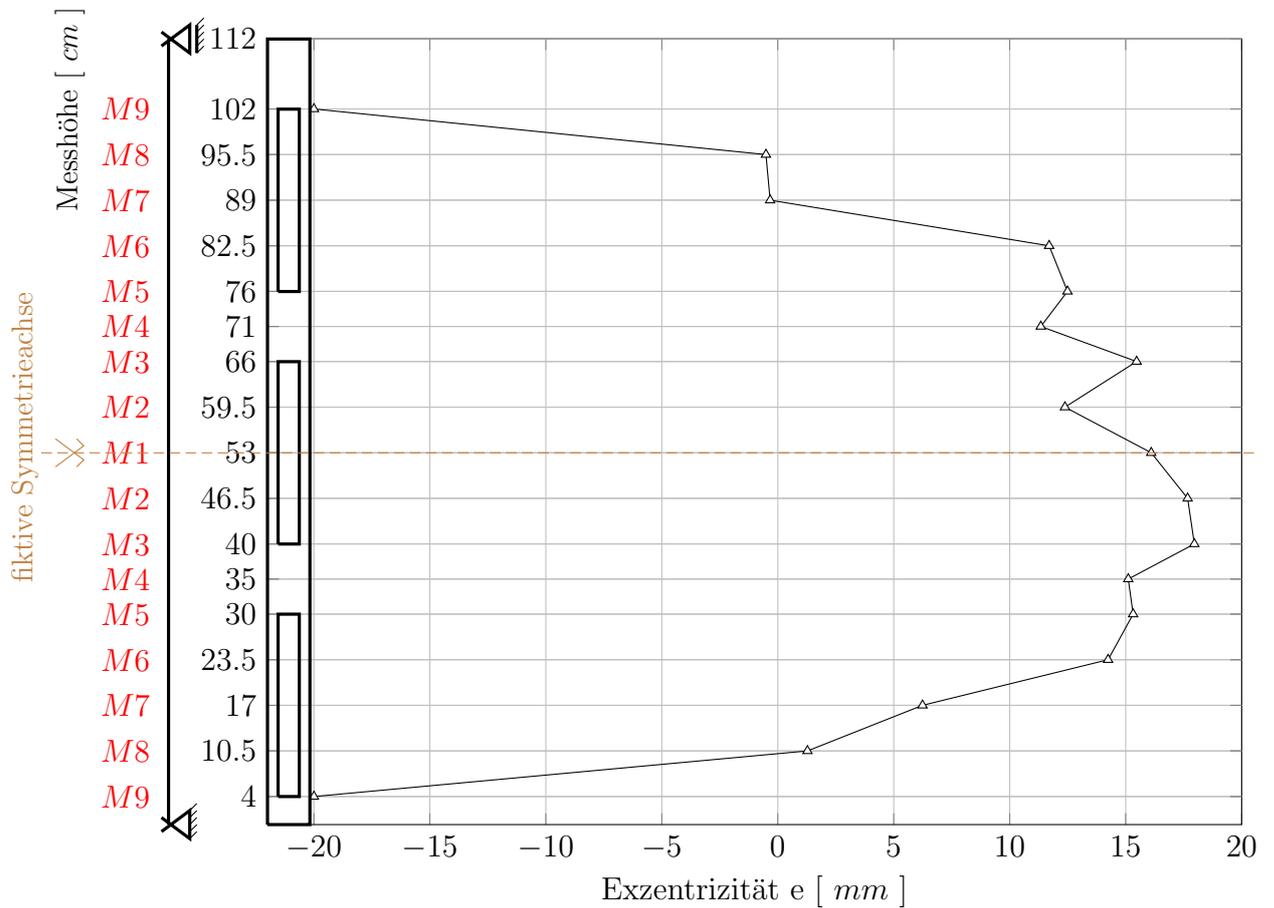


Abbildung 7.3: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 3 aus physikalischem Versuch

<b>Messpunkt</b>	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1
<b>Höhe [cm]</b>	4	10.5	17	23.5	30	35	40	46.5	53
<b>e [mm]</b>	-20.00	1.28	6.24	14.24	15.32	15.11	17.96	17.67	16.10
<b>Messpunkt</b>	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	
<b>Höhe [cm]</b>	59.5	66	71	76	82.5	89	95.5	102	
<b>e [mm]</b>	12.38	15.47	11.34	12.49	11.70	-0.33	-0.51	-20.00	

Tabelle 7.3: Ergebniswerte Probekörper 3 aus physikalischem Versuch

### 7.4 Probekörper 4

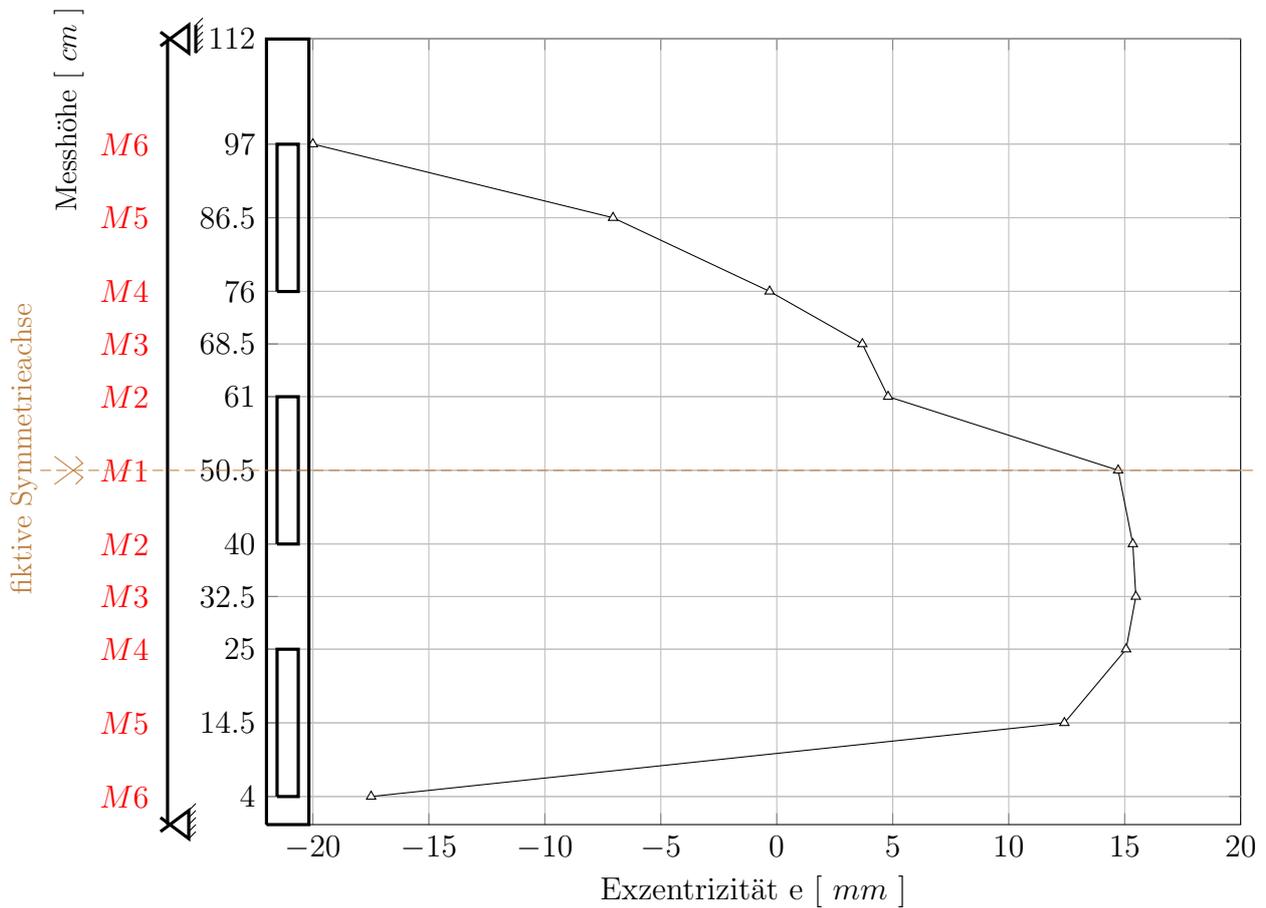


Abbildung 7.4: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 4 aus physikalischem Versuch

<b>Messpunkt</b>	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
<b>Höhe [cm]</b>	4	14.5	25	32.5	40	50.5	61	68.5
<b>e [mm]</b>	-17.49	12.40	15.06	15.48	15.35	14.72	4.80	3.69
<b>Messpunkt</b>	M4	M5	M6					
<b>Höhe [cm]</b>	76	86.5	97					
<b>e [mm]</b>	-0.31	-7.06	-20.00					

Tabelle 7.4: Ergebniswerte Probekörper 4 aus physikalischem Versuch

### 7.5 Probekörper 5

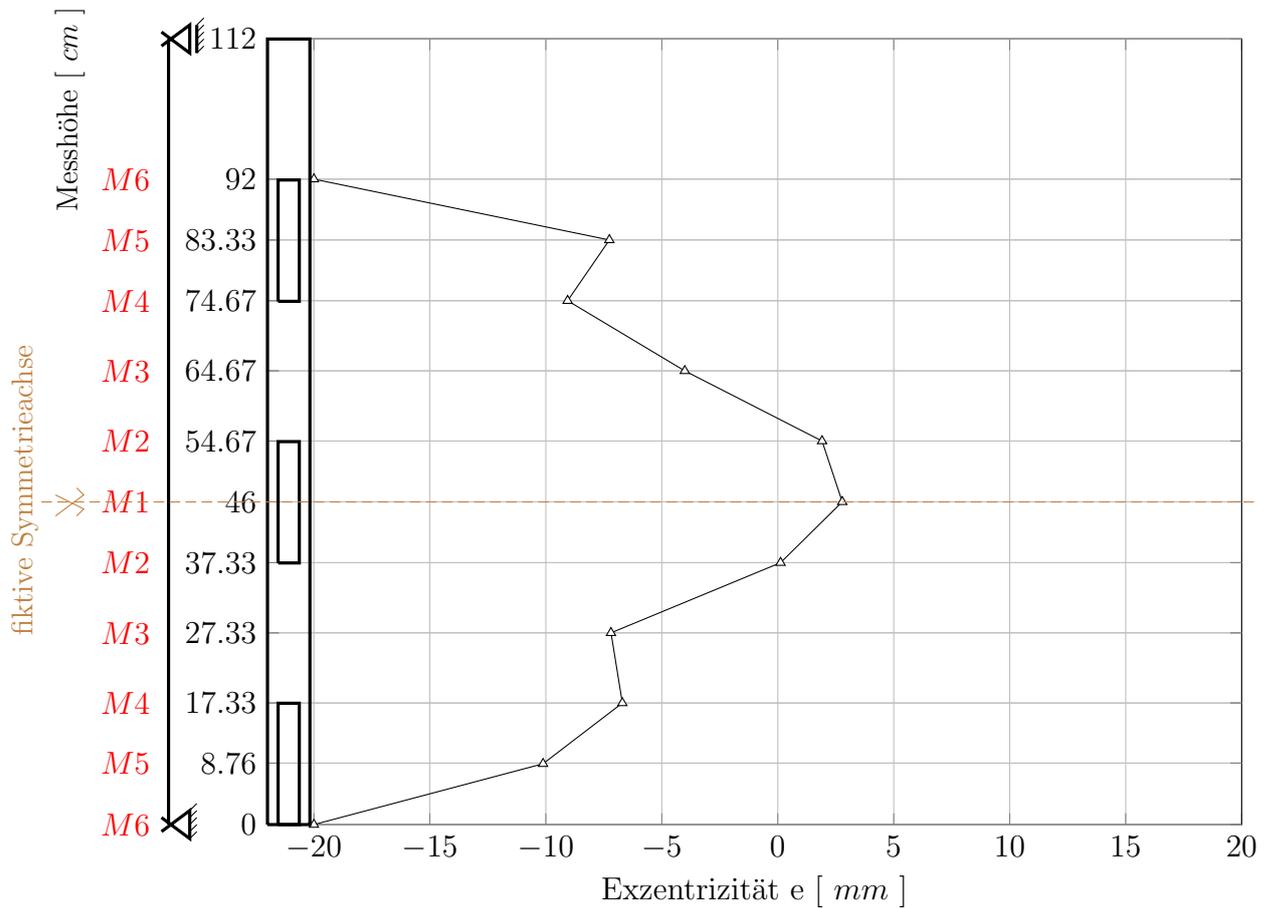


Abbildung 7.5: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 5 aus physikalischem Versuch

<b>Messpunkt</b>	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
<b>Höhe [cm]</b>	0	8.76	17.33	27.33	37.33	46	54.67	64.67
<b>e [mm]</b>	-20.00	-10.12	-6.70	-7.19	0.12	2.78	1.91	-4.01
<b>Messpunkt</b>	M4	M5	M6					
<b>Höhe [cm]</b>	74.67	83.3	92					
<b>e [mm]</b>	-9.06	-7.26	-20.00					

Tabelle 7.5: Ergebniswerte Probekörper 5 aus physikalischem Versuch

### 7.6 Probekörper 6

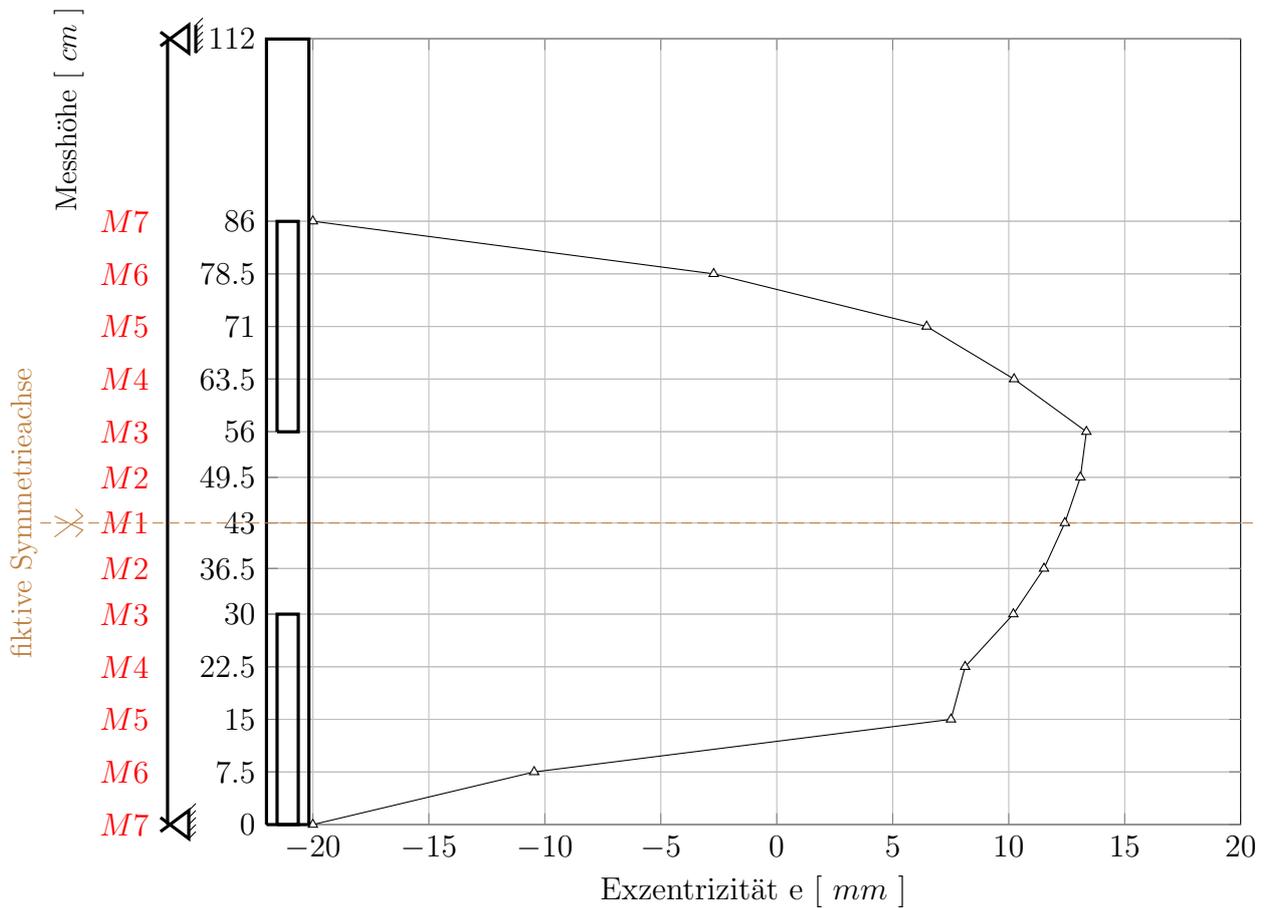


Abbildung 7.6: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 6 aus physikalischem Versuch

<b>Messpunkt</b>	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2
<b>Höhe [cm]</b>	0	7.5	15	22.5	30	36.5	43	49.5
<b>e [mm]</b>	-20.00	-10.46	7.51	8.12	10.20	11.52	12.42	13.09
<b>Messpunkt</b>	M3	M4	M5	M6	M7			
<b>Höhe [cm]</b>	56	63.5	71	78.5	86			
<b>e [mm]</b>	13.35	10.23	6.46	-2.72	-20.00			

Tabelle 7.6: Ergebniswerte Probekörper 6 aus physikalischem Versuch

### 7.7 Probekörper 7

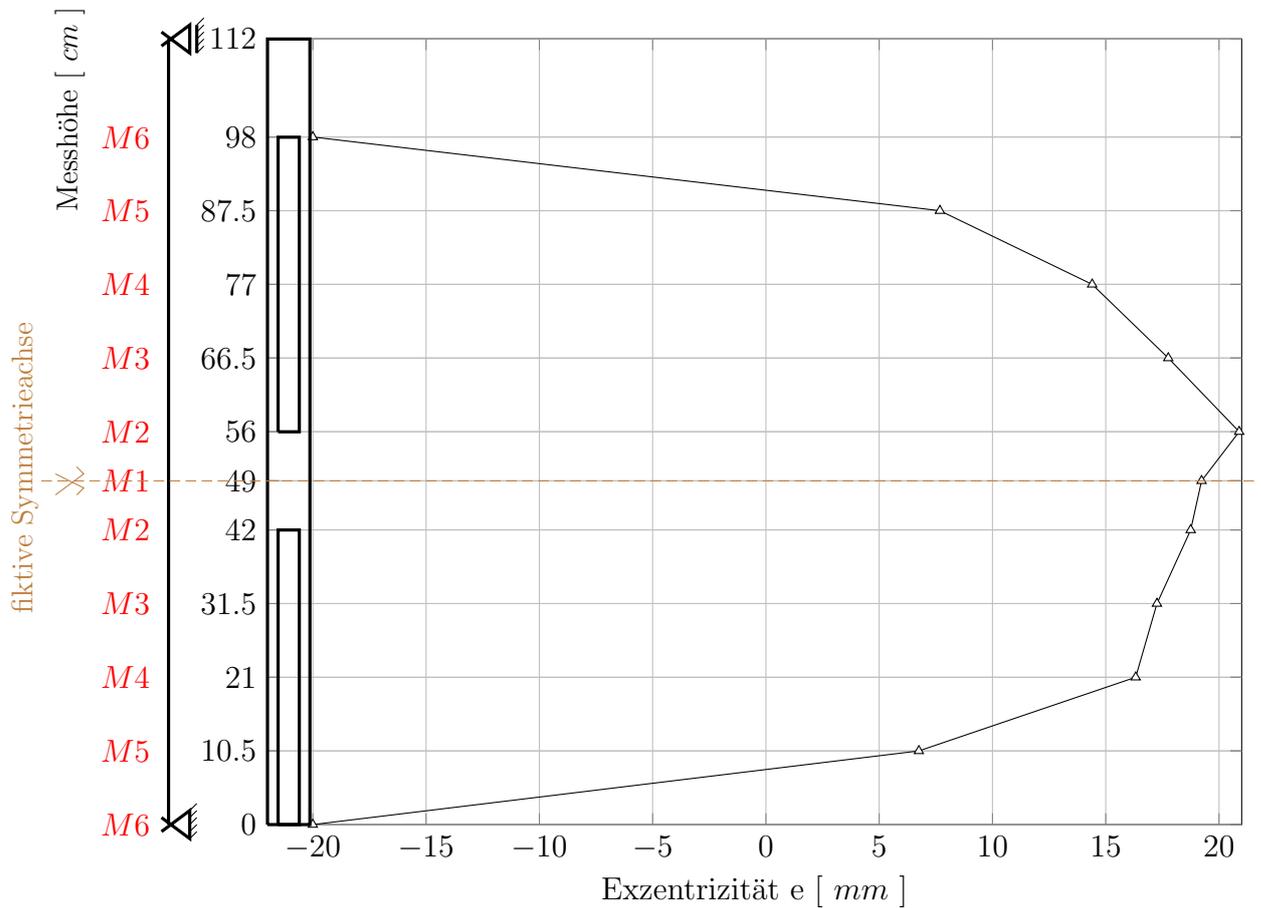


Abbildung 7.7: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 7 aus physikalischem Versuch

Messpunkt	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
Höhe [cm]	0	10.5	21	31.5	42	49	56	66.5
e [mm]	-20.00	6.75	16.32	17.26	18.75	19.23	20.89	17.76

Messpunkt	M4	M5	M6
Höhe [cm]	77	87.5	98
e [mm]	14.40	7.68	-20.00

Tabelle 7.7: Ergebniswerte Probekörper 7 aus physikalischem Versuch

7.8 Darstellung aller Schubmittelpunktsverläufe physikalisch

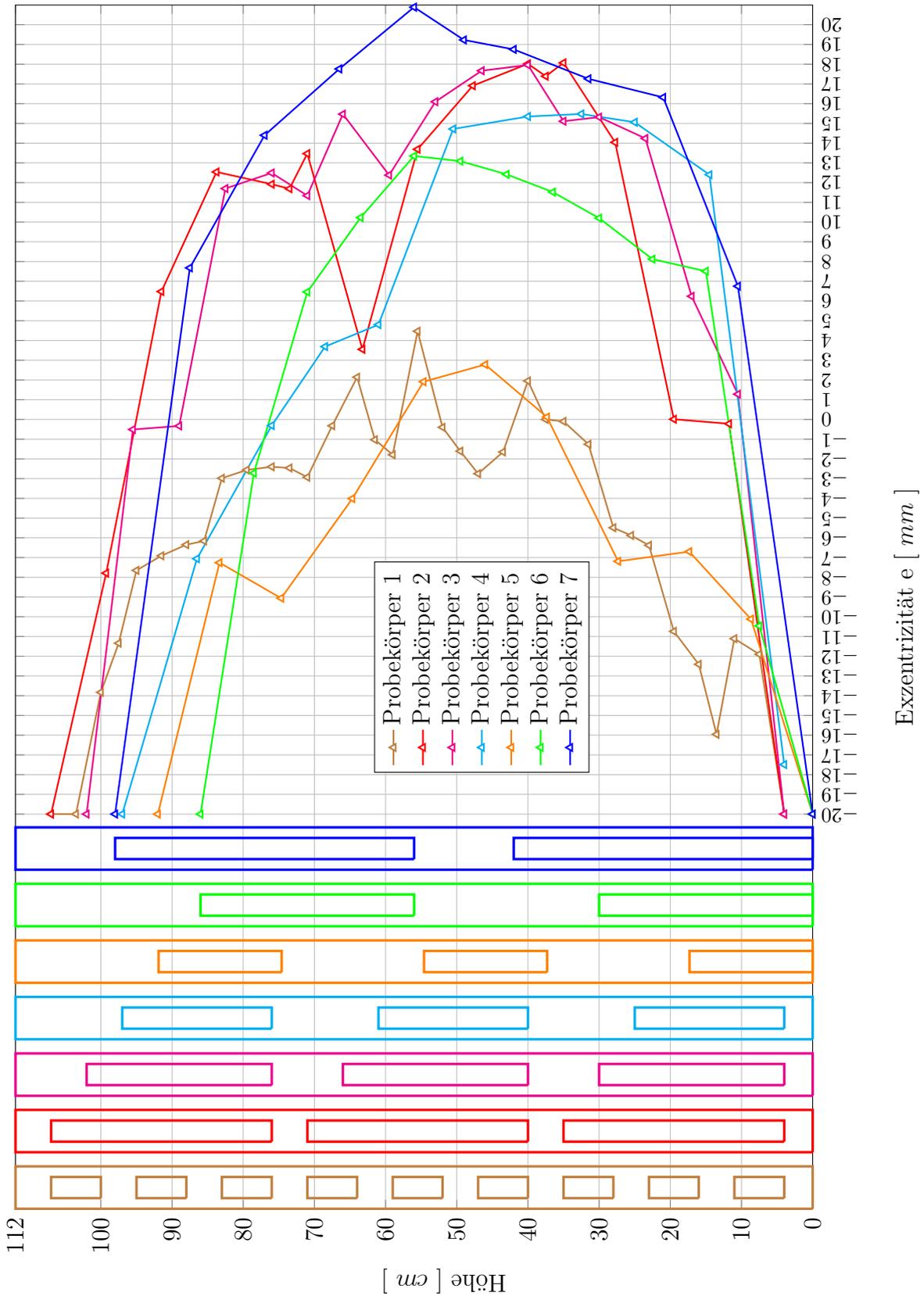


Abbildung 7.8: Übersicht der Schubmittelpunktsverläufe aus physikalischen Versuchen

Abbildung 7.8 stellt einen zusammenfassenden Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe aller sieben Probekörper aus den physikalischen Versuchen dar. Eindeutig zu erkennen ist, dass die Exzentrizitäten abnehmen, je näher die Messpunkte bei einem Auflager liegen. Dies liegt möglicherweise an der Auflagersituation, welche eine Verdrehung des Körpers um die Längsachse verhindert. Dieser Sachverhalt wurde auch im Vergleichsversuch festgehalten (siehe [29]), wo abnehmende Exzentrizitäten nahe der Einspannung beobachtet wurden. Allgemein ist zu beobachten, dass die größten Exzentrizitäten meist in der Mitte des Profils bei Messpunkt  $M1$  liegen, dort ist der größte Längsabstand zu den Auflagern. Weiters ist zu erkennen, dass jene Profile mit den kleineren Öffnungen auch geringere Exzentrizitäten aufweisen. Dies ist möglicherweise auf den Sachverhalt zurückzuführen, dass diese Profile größere Anteile an geschlossenen Querschnitten am gesamten Probekörper besitzen. Über ein generelles Verhalten der Exzentrizitäten bezogen auf die Öffnungen im Profilkörper lässt sich keine Aussage treffen, vereinzelt sind sprunghafte Änderungen der Exzentrizität bei den Übergängen von geschlossenen zu offenen Profilquerschnitten zu beobachten.



# Kapitel 8

Versuchsergebnisse aus den  
numerischen Simulationen mit  
Dlubal RFEM

### 8.1 Probekörper 1

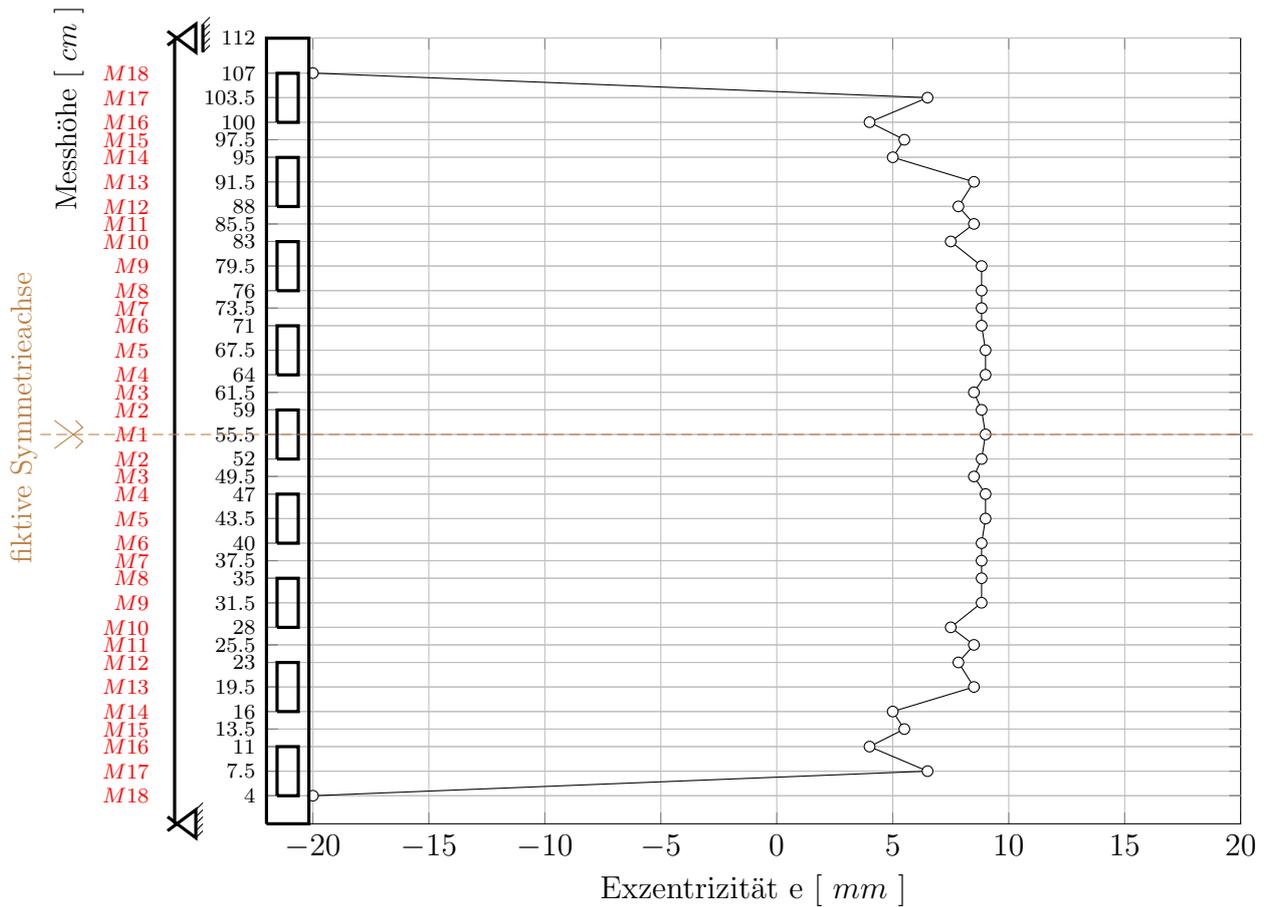


Abbildung 8.1: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 1 aus numerischer Simulation

<b>Messpunkt</b>	M18	M17	M16	M15	M14	M13	M12	M11
<b>Höhe [cm]</b>	4	7.5	11	13.5	16	19.5	23	25.5
<b>e [mm]</b>	-20.00	6.50	4.00	5.50	5.00	8.50	7.83	8.50
<b>Messpunkt</b>	M10	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3
<b>Höhe [cm]</b>	28	31.5	35	37.5	40	43.5	47	49.5
<b>e [mm]</b>	7.50	8.83	8.83	8.83	8.83	9.00	9.00	8.50

<b>Messpunkt</b>	M2	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
<b>Höhe [cm]</b>	52	55.5	59	61.5	64	67.5	71	73.5
<b>e [mm]</b>	8.83	9.00	8.83	8.50	9.00	9.00	8.83	8.83
<b>Messpunkt</b>	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
<b>Höhe [cm]</b>	76	79.5	83	85.5	88	91.5	95	97.5
<b>e [mm]</b>	8.83	8.83	7.50	8.50	7.83	8.50	5.00	5.50
<b>Messpunkt</b>	M16	M17	M18					
<b>Höhe [cm]</b>	100	103.5	107					
<b>e [mm]</b>	4.00	6.50	-20.00					

Tabelle 8.1: Ergebniswerte Probekörper 1 aus numerischer Simulation

## 8.2 Probekörper 2

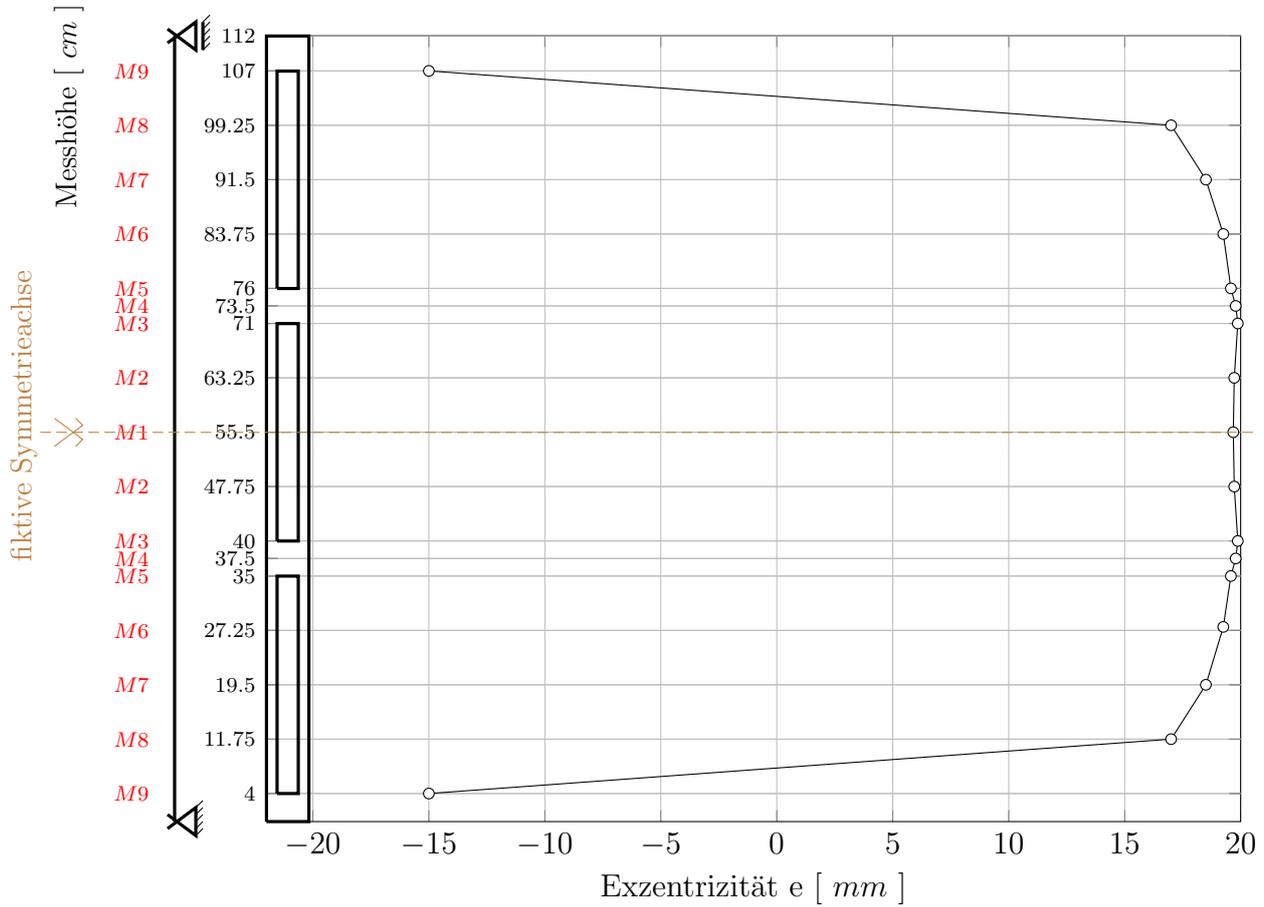


Abbildung 8.2: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 2 aus numerischer Simulation

<b>Messpunkt</b>	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1
<b>Höhe [cm]</b>	4	11.75	19.5	27.25	35	37.5	40	47.75	55.5
<b>e [mm]</b>	-15.00	17.00	18.50	19.25	19.58	19.79	19.88	19.72	19.68
<b>Messpunkt</b>	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	
<b>Höhe [cm]</b>	63.25	71	73.5	76	83.75	91.5	99.25	107	
<b>e [mm]</b>	19.72	19.88	19.79	19.58	19.25	18.50	17.00	-15.00	

Tabelle 8.2: Ergebniswerte Probekörper 2 aus numerischer Simulation

### 8.3 Probekörper 3

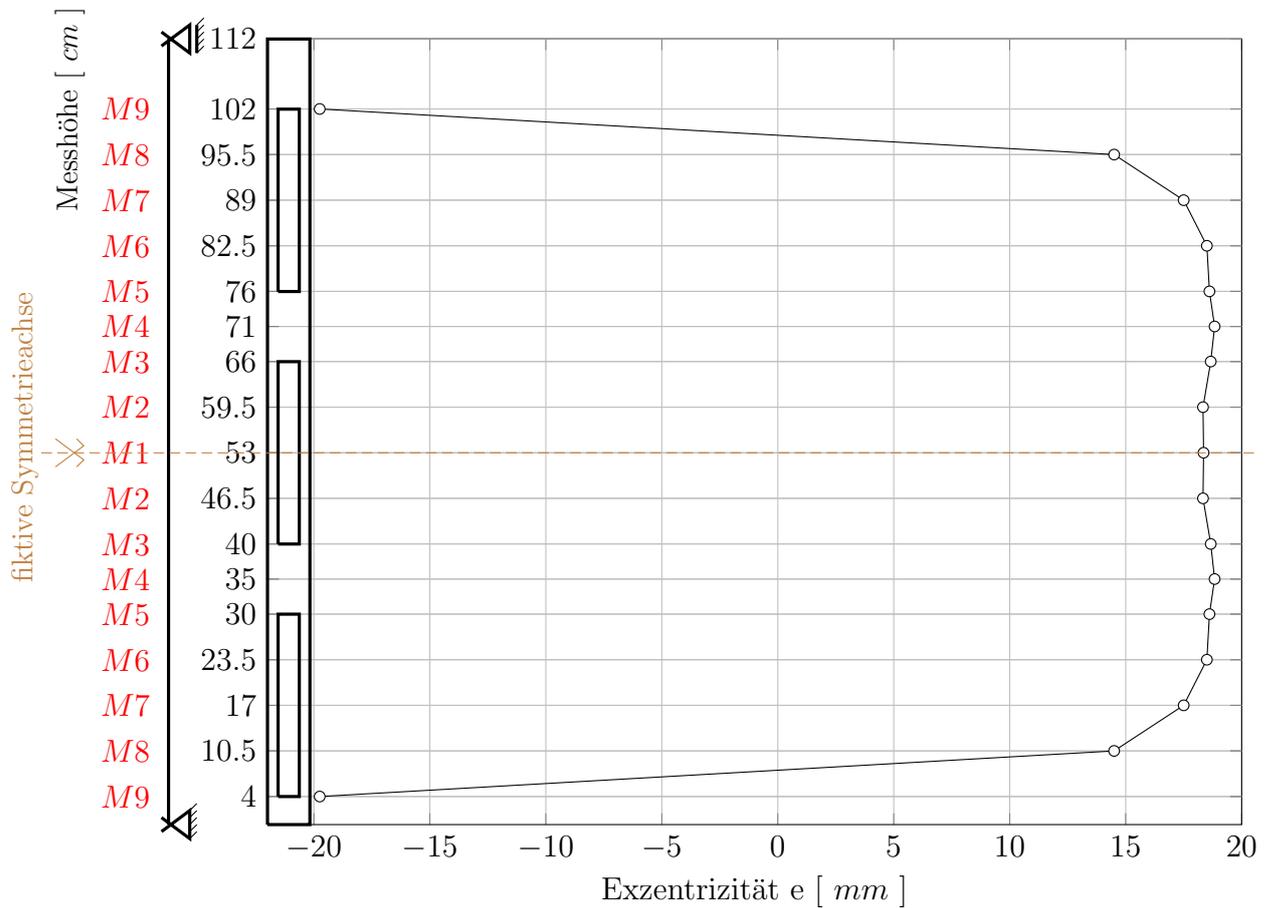


Abbildung 8.3: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 3 aus numerischer Simulation

<b>Messpunkt</b>	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1
<b>Höhe [cm]</b>	4	10.5	17	23.5	30	35	40	46.5	53
<b>e [mm]</b>	-19.75	14.50	17.50	18.50	18.61	18.83	18.67	18.33	18.36
<b>Messpunkt</b>	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	
<b>Höhe [cm]</b>	59.5	66	71	76	82.5	89	95.5	102	
<b>e [mm]</b>	18.33	18.67	18.83	18.61	18.50	17.50	14.50	-19.75	

Tabelle 8.3: Ergebniswerte Probekörper 3 aus numerischer Simulation

### 8.4 Probekörper 4

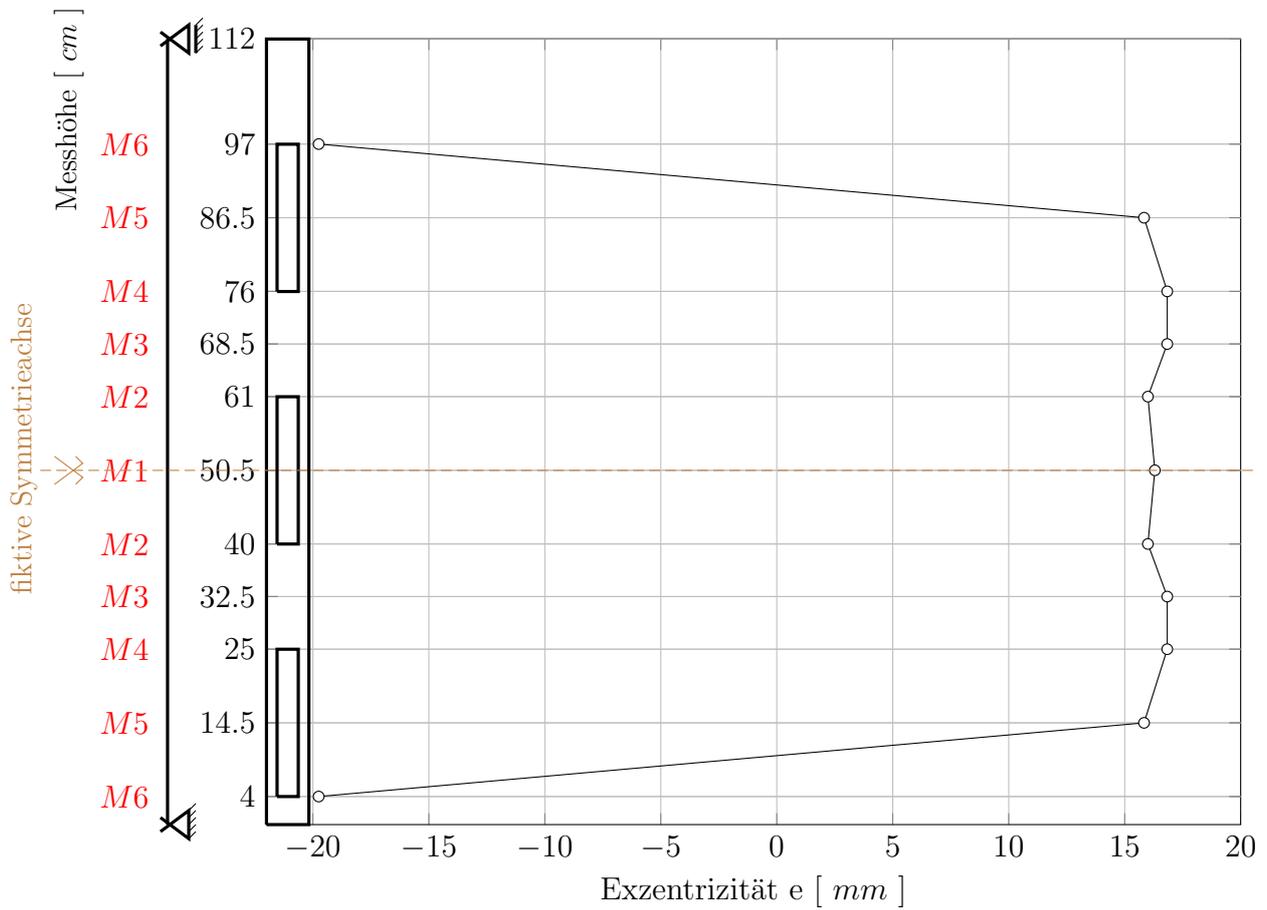


Abbildung 8.4: Schubmittelpunktverlauf Probekörper 4 aus numerischer Simulation

<b>Messpunkt</b>	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
<b>Höhe [cm]</b>	4	14.5	25	32.5	40	50.5	61	68.5
<b>e [mm]</b>	-19.75	15.83	16.83	16.83	16.00	16.30	16.00	16.83
<b>Messpunkt</b>	M4	M5	M6					
<b>Höhe [cm]</b>	76	86.5	97					
<b>e [mm]</b>	16.83	15.83	-19.75					

Tabelle 8.4: Ergebniswerte Probekörper 4 aus numerischer Simulation

### 8.5 Probekörper 5

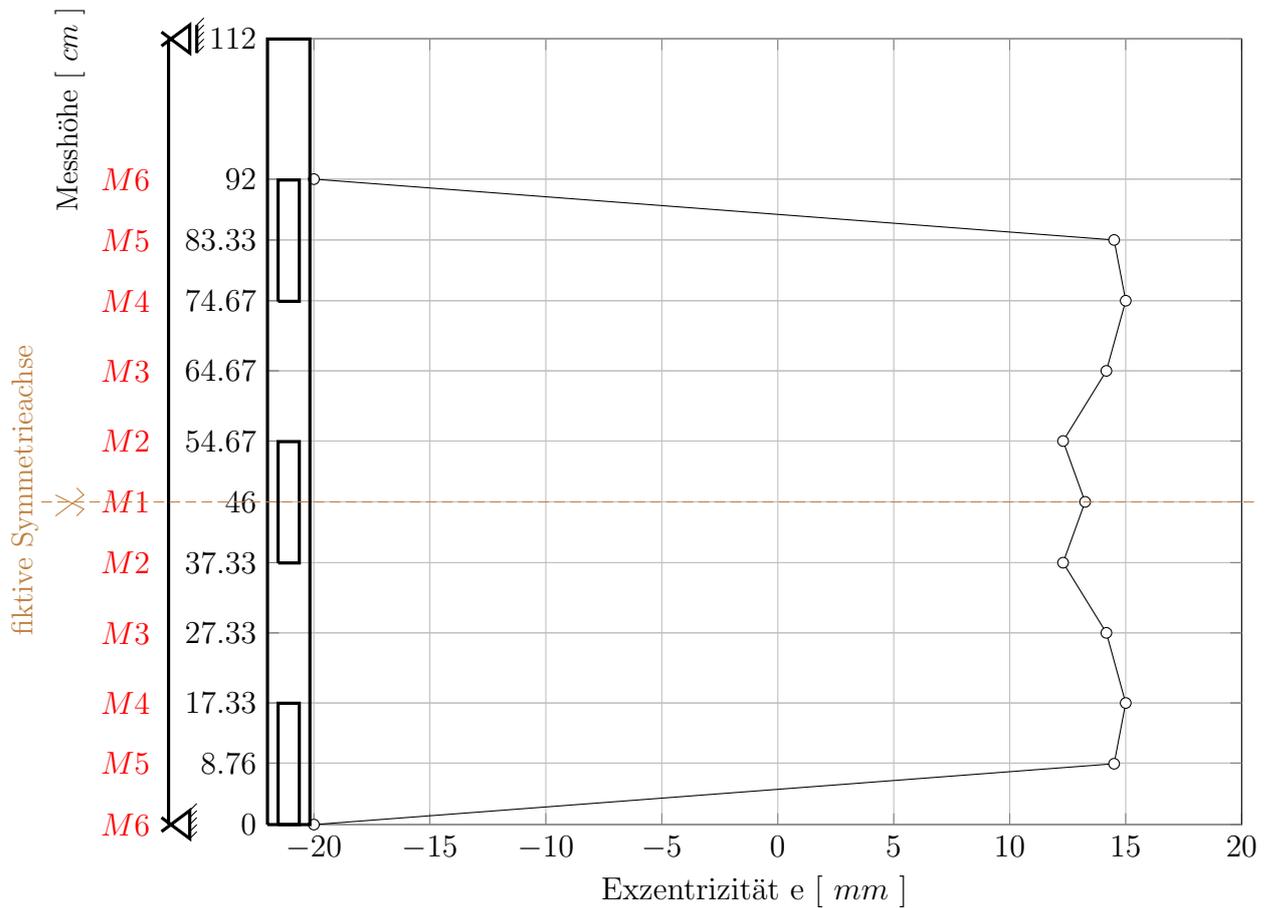


Abbildung 8.5: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 5 aus numerischer Simulation

Messpunkt	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
Höhe [cm]	0	8.76	17.33	27.33	37.33	46	54.67	64.67
e [mm]	-20.00	14.50	15.00	14.17	12.30	13.25	12.30	14.17

Messpunkt	M4	M5	M6
Höhe [cm]	74.67	83.3	92
e [mm]	15.00	14.50	-20.00

Tabelle 8.5: Ergebniswerte Probekörper 5 aus numerischer Simulation

### 8.6 Probekörper 6

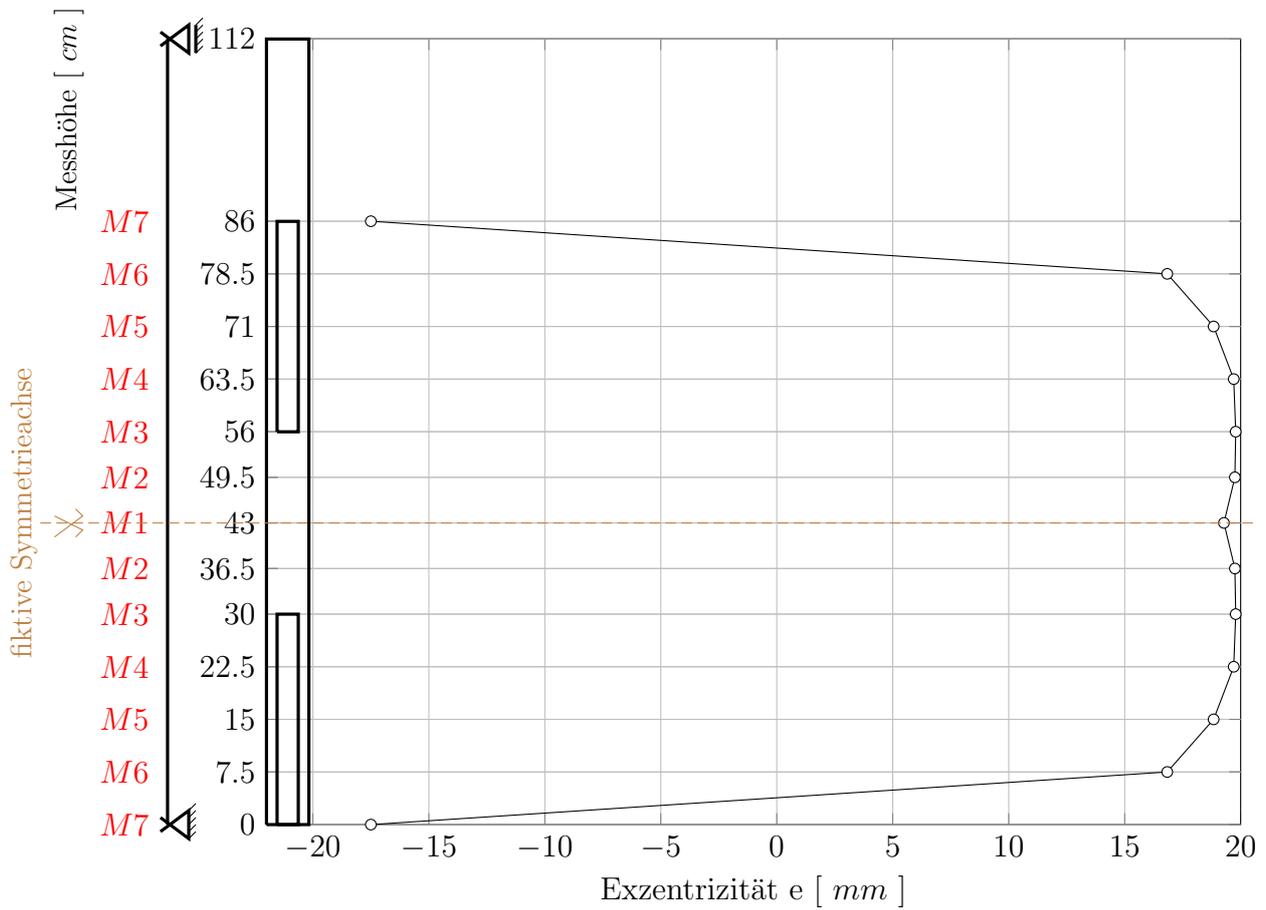


Abbildung 8.6: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 6 aus numerischer Simulation

<b>Messpunkt</b>	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2
<b>Höhe [cm]</b>	0	7.5	15	22.5	30	36.5	43	49.5
<b>e [mm]</b>	-17.50	16.83	18.83	19.70	19.79	19.75	19.28	19.75
<b>Messpunkt</b>	M3	M4	M5	M6	M7			
<b>Höhe [cm]</b>	56	63.5	71	78.5	86			
<b>e [mm]</b>	19.79	19.70	18.83	16.83	-17.50			

Tabelle 8.6: Ergebniswerte Probekörper 6 aus numerischer Simulation

### 8.7 Probekörper 7

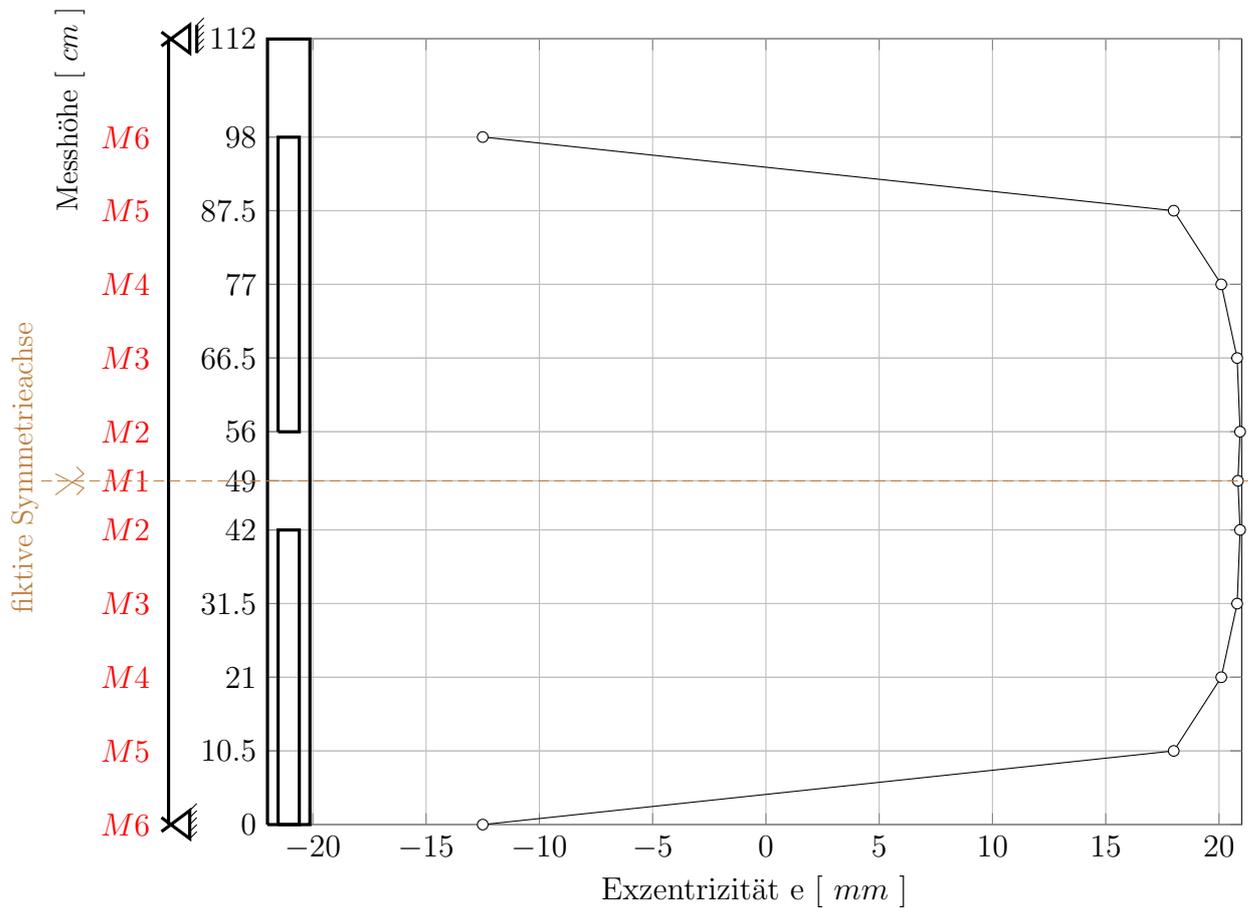


Abbildung 8.7: Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 7 aus numerischer Simulation

Messpunkt	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
Höhe [cm]	0	10.5	21	31.5	42	49	56	66.5
e [mm]	-12.50	18.50	20.10	20.80	20.93	20.83	20.93	20.80

Messpunkt	M4	M5	M6
Höhe [cm]	77	87.5	98
e [mm]	20.10	18.00	-12.50

Tabelle 8.7: Ergebniswerte Probekörper 7 aus numerischer Simulation

### 8.8 Darstellung aller Schubmittelpunktsverläufe numerisch

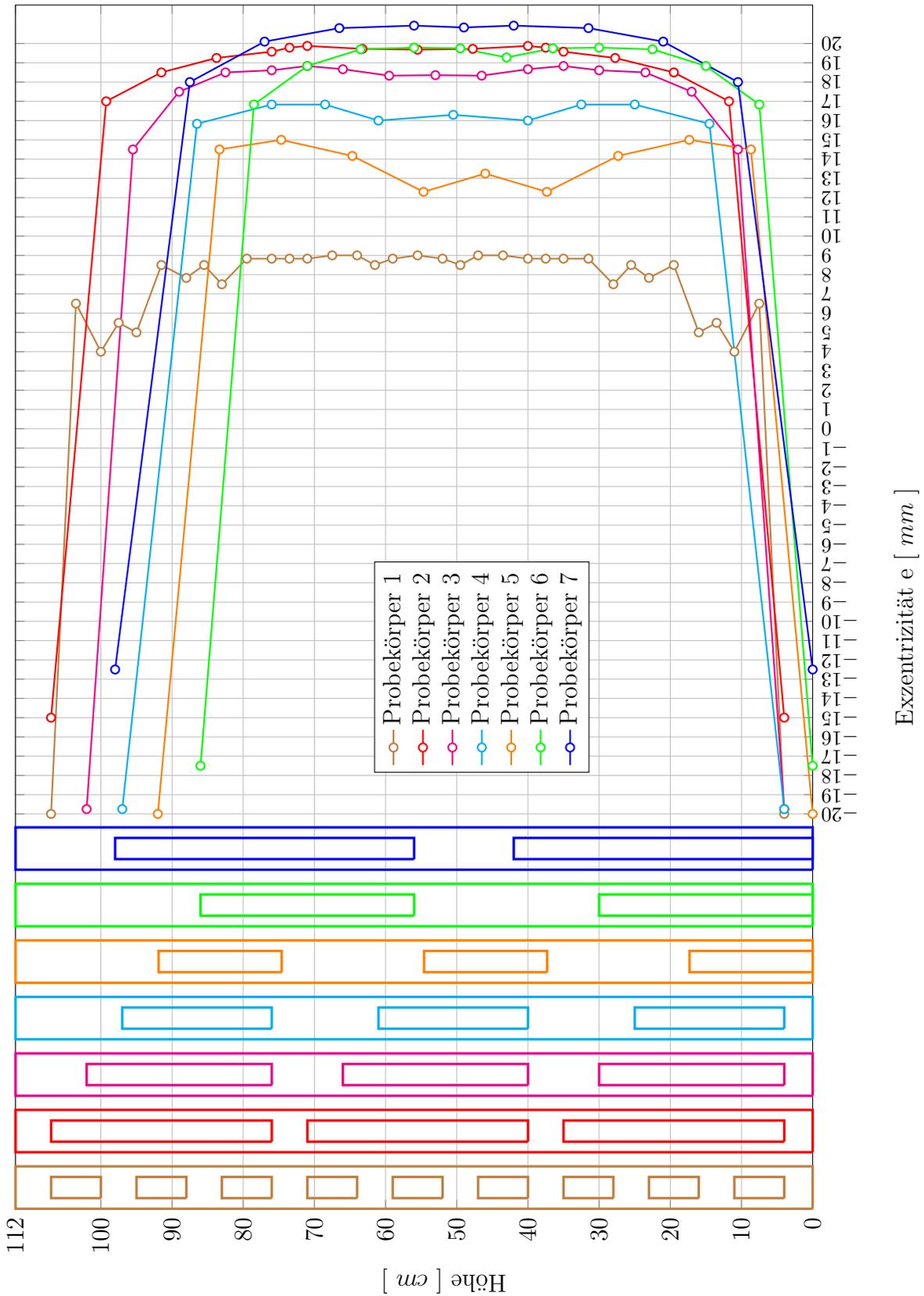


Abbildung 8.8: Übersicht der Schubmittelpunktsverläufe aus numerischen Simulationen

Abbildung 8.8 stellt einen Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe der sieben Probekörper aus den numerischen Simulationen mittels RFEM dar. Gut zu erkennen sind auch hier die Abnahme der Exzentrizitäten zu den Auflagern hin. Außerdem ist sehr gut ersichtlich, dass das Simulationsprogramm exakt symmetrische Schubmittelpunktsverläufe berechnet. Die größten Exzentrizitäten liegen auch hier meist in der Profilmitte beim Messpunkt  $M1$ . Der Einfluss der Öffnungen auf die Lage des Schubmittelpunkts ist insofern ersichtlich, dass auch hier die Probekörper mit den kleineren Profilöffnungen kleinere Exzentrizitäten aufweisen. Ein sprunghaftes Verhalten der Schubmittelpunktslage bei Übergängen von geschlossenen zu offenen Querschnitten kann nicht beobachtet werden.



## Kapitel 9

Vergleich der Versuchsergebnisse aus  
den physikalischen Versuchen mit  
jenen aus den numerischen  
Simulationen mit Dlubal RFEM

## 9.1 Einleitung

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus den physikalischen Versuchen mit jenen aus den numerischen Simulationen verglichen. Jeder Probekörper wird separat dargestellt und die Verläufe sind in einem beiliegenden Diagramm ersichtlich.

## 9.2 Probekörper 1

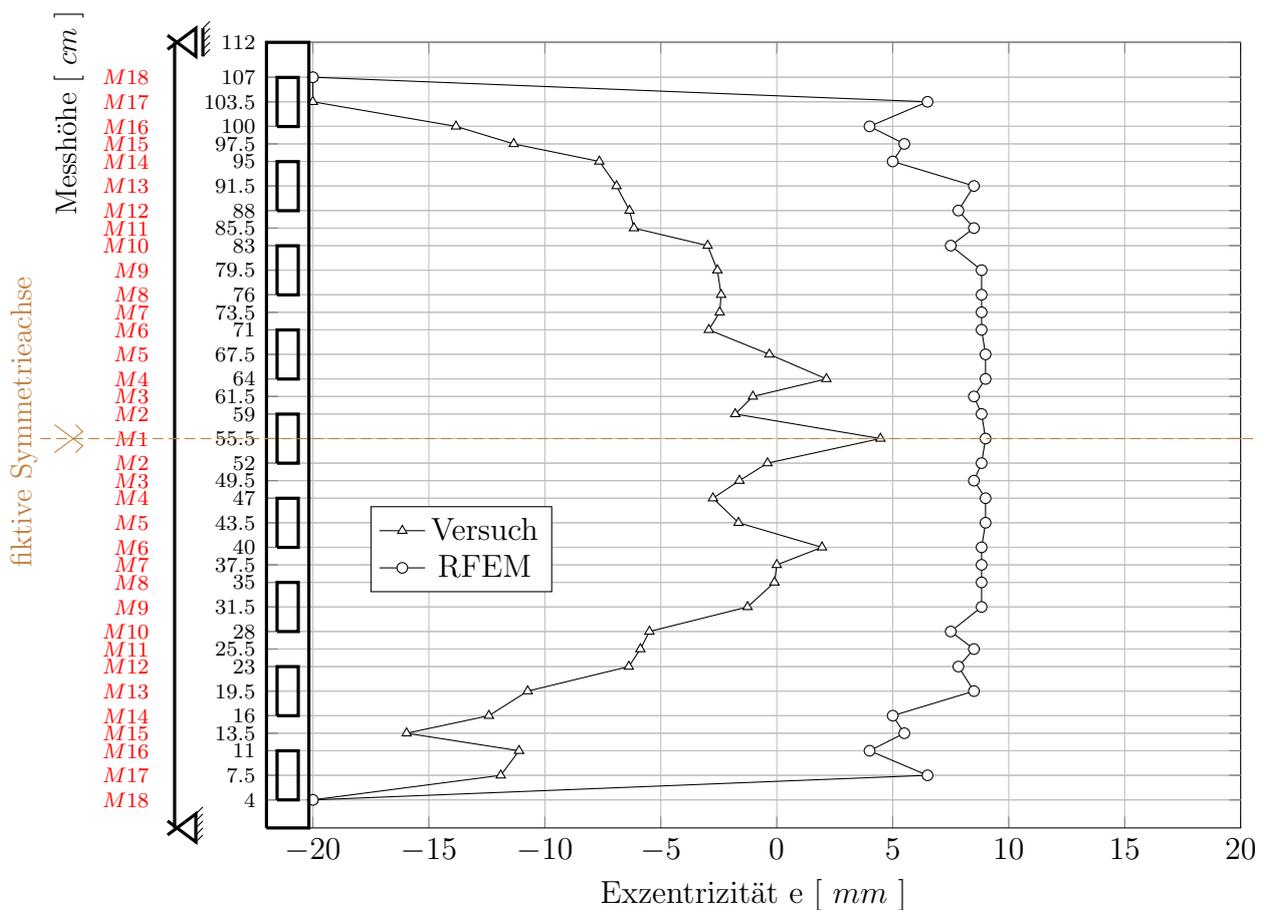


Abbildung 9.1: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 1

<b>Messpunkt</b>	M18	M17	M16	M15	M14	M13	M12	M11
<b>e [mm] Versuch</b>	-20.00	-11.90	-11.11	-15.96	-12.41	-10.74	-6.38	-5.88
<b>e [mm] RFEM</b>	-20.00	6.50	4.00	5.50	5.00	8.50	7.83	8.50
<b>Messpunkt</b>	M10	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3
<b>e [mm] Versuch</b>	-5.49	-1.26	-0.10	0.00	1.95	-1.65	-2.75	-1.61
<b>e [mm] RFEM</b>	7.50	8.83	8.83	8.83	8.83	9.00	9.00	8.50
<b>Messpunkt</b>	M2	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
<b>e [mm] Versuch</b>	-0.40	4.47	-1.79	-1.03	2.14	-0.32	-2.93	-2.46
<b>e [mm] RFEM</b>	8.83	9.00	8.83	8.50	9.00	9.00	8.83	8.83
<b>Messpunkt</b>	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
<b>e [mm] Versuch</b>	-2.40	-2.56	-2.98	-6.16	-6.35	-6.91	-7.65	-11.34
<b>e [mm] RFEM</b>	8.83	8.83	7.50	8.50	7.83	8.50	5.00	5.50
<b>Messpunkt</b>	M16	M17	M18					
<b>e [mm] Versuch</b>	-13.83	-20.00	-20.00					
<b>e [mm] RFEM</b>	4.00	6.50	-20.00					

Tabelle 9.1: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 1

Der generelle Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe in Abbildung 9.1 zeigt einen ähnlichen Verlauf der Lage des Schubmittelpunktes auf. Die Exzentrizitäten weichen zwar um mehrere Millimeter voneinander ab, dies könnte mitunter auf Ungenauigkeiten beim physikalischen Versuch zurückgeführt werden. Wichtig ist, dass die Abnahme der Exzentrizitäten zu den Auflagern hin gut erkennbar ist.

### 9.3 Probekörper 2

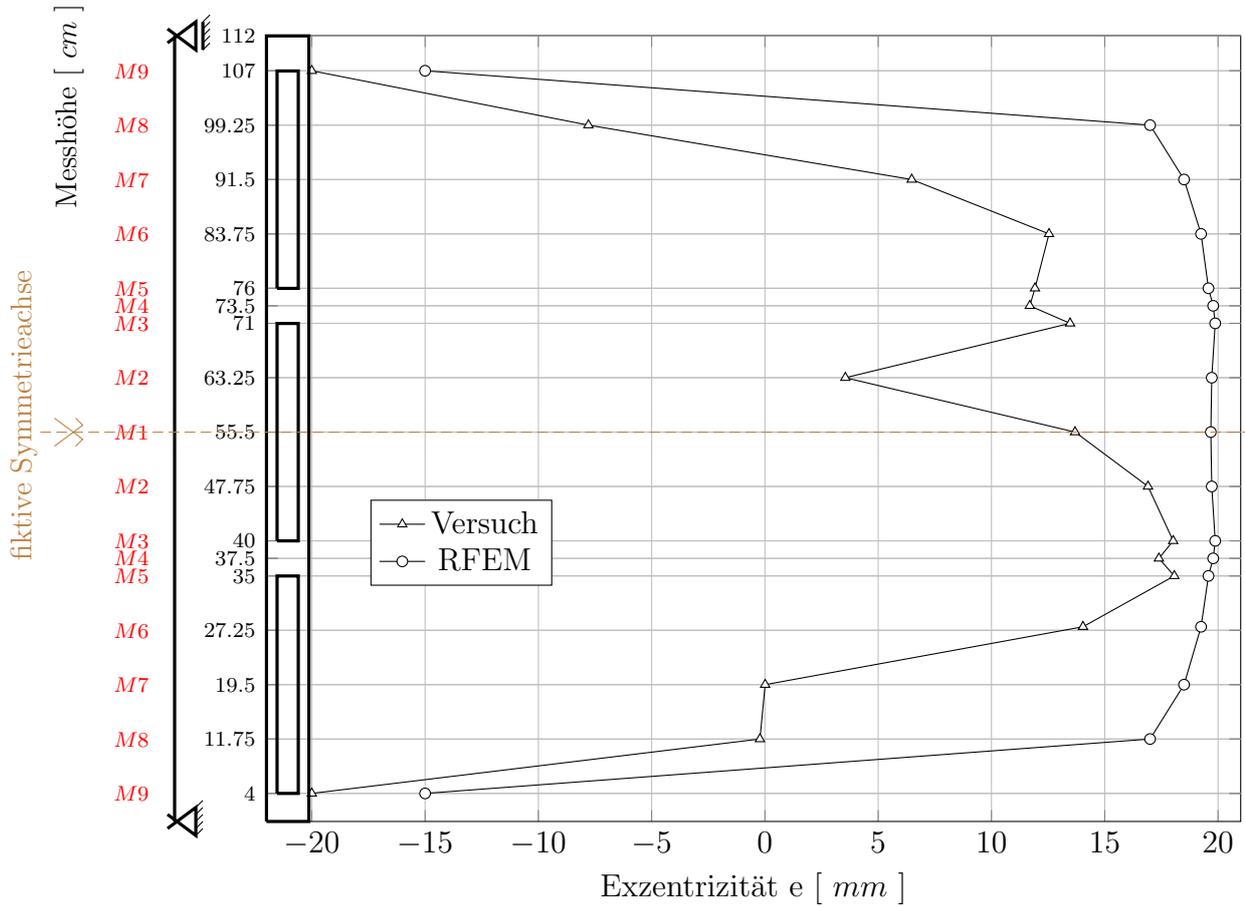


Abbildung 9.2: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 2

Messpunkt	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1
e [mm] Versuch	-20.00	-0.22	0.01	14.04	18.07	17.39	18.02	16.91	13.69
e [mm] RFEM	-15.00	17.00	18.50	19.25	19.58	19.79	19.88	19.72	19.68

Messpunkt	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9
e [mm] Versuch	3.55	13.47	11.69	11.92	12.54	6.48	-7.79	-20.00
e [mm] RFEM	19.72	19.88	19.79	19.58	19.25	18.50	17.00	-15.00

Tabelle 9.2: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 2

Auch der Vergleich bei Probekörper 2 in Abbildung 9.2 zeigt generell einen ähnlichen Schubmittelpunktsverlauf. Die nicht symmetrische Messung im physikalischen Versuch im Gegensatz zur exakt symmetrischen Lage der Schubmittelpunkte bei der numerischen Simulation ist klar ersichtlich. Beide Verläufe weichen nur wenige Millimeter voneinander ab und zeigen eine Abnahme der Exzentrizität zu den Auflagern auf.

### 9.4 Probekörper 3

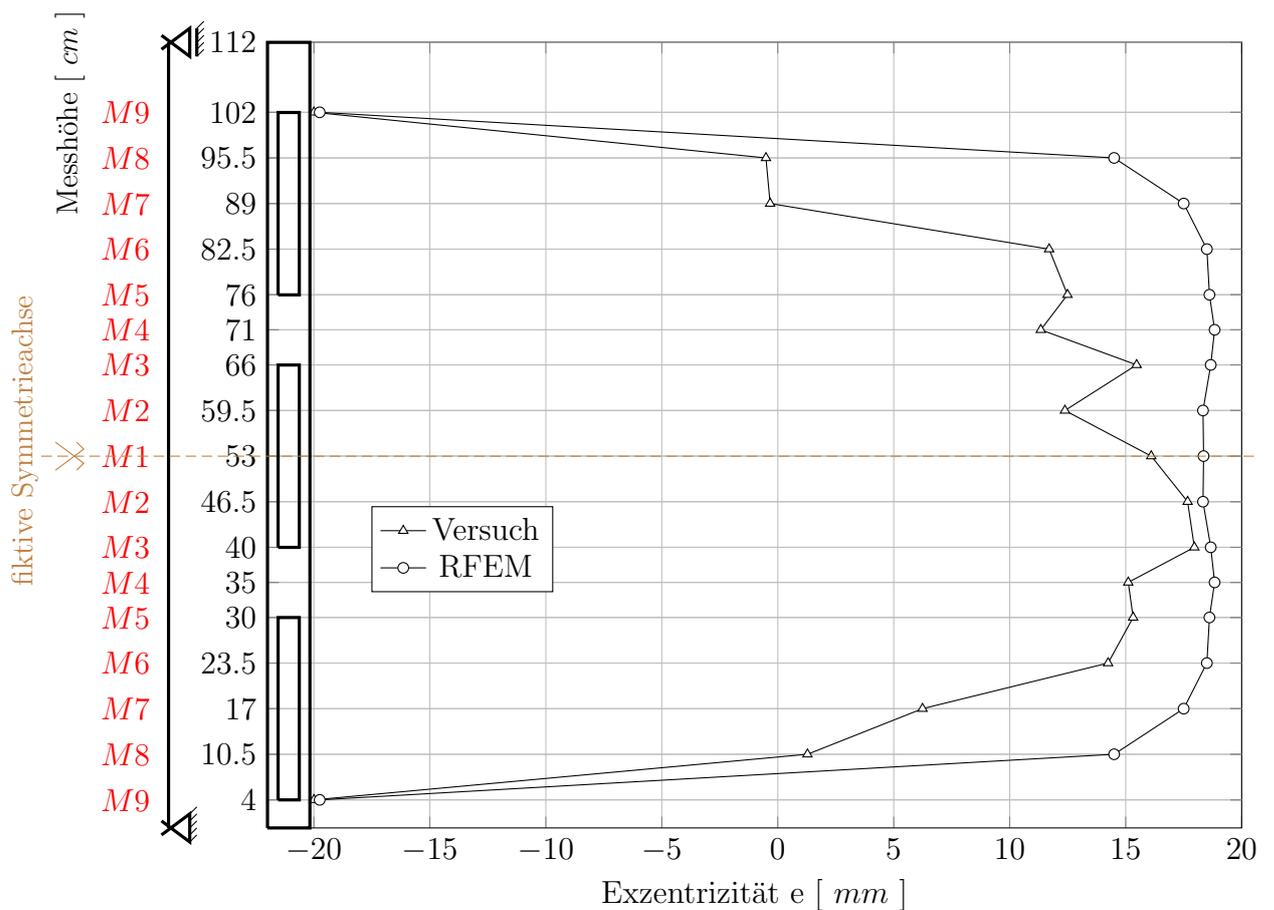


Abbildung 9.3: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 3

<b>Messpunkt</b>	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1
<b>e [mm] Versuch</b>	-20.00	1.28	6.24	14.24	15.32	15.11	17.96	17.67	16.10
<b>e [mm] RFEM</b>	-19.75	14.50	17.50	18.50	18.61	18.83	18.67	18.33	18.36
<b>Messpunkt</b>	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	
<b>e [mm] Versuch</b>	12.38	15.47	11.34	12.49	11.70	-0.33	-0.51	-20.00	
<b>e [mm] RFEM</b>	18.33	18.67	18.83	18.61	18.50	17.50	14.50	-19.75	

Tabelle 9.3: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 3

Abbildung 9.3 zeigt ähnliche Tendenzen wie die vorhergehenden Profile auf. Die Messungen aus dem physikalischen Versuch liegen nun jedoch schon in manchen Messpunkten sehr nah an der Lösung der numerischen Simulation. Es ist weiters wieder bei beiden Verläufen die Abnahme der Exzentrizitäten zu den Auflagern hin festzustellen.

### 9.5 Probekörper 4

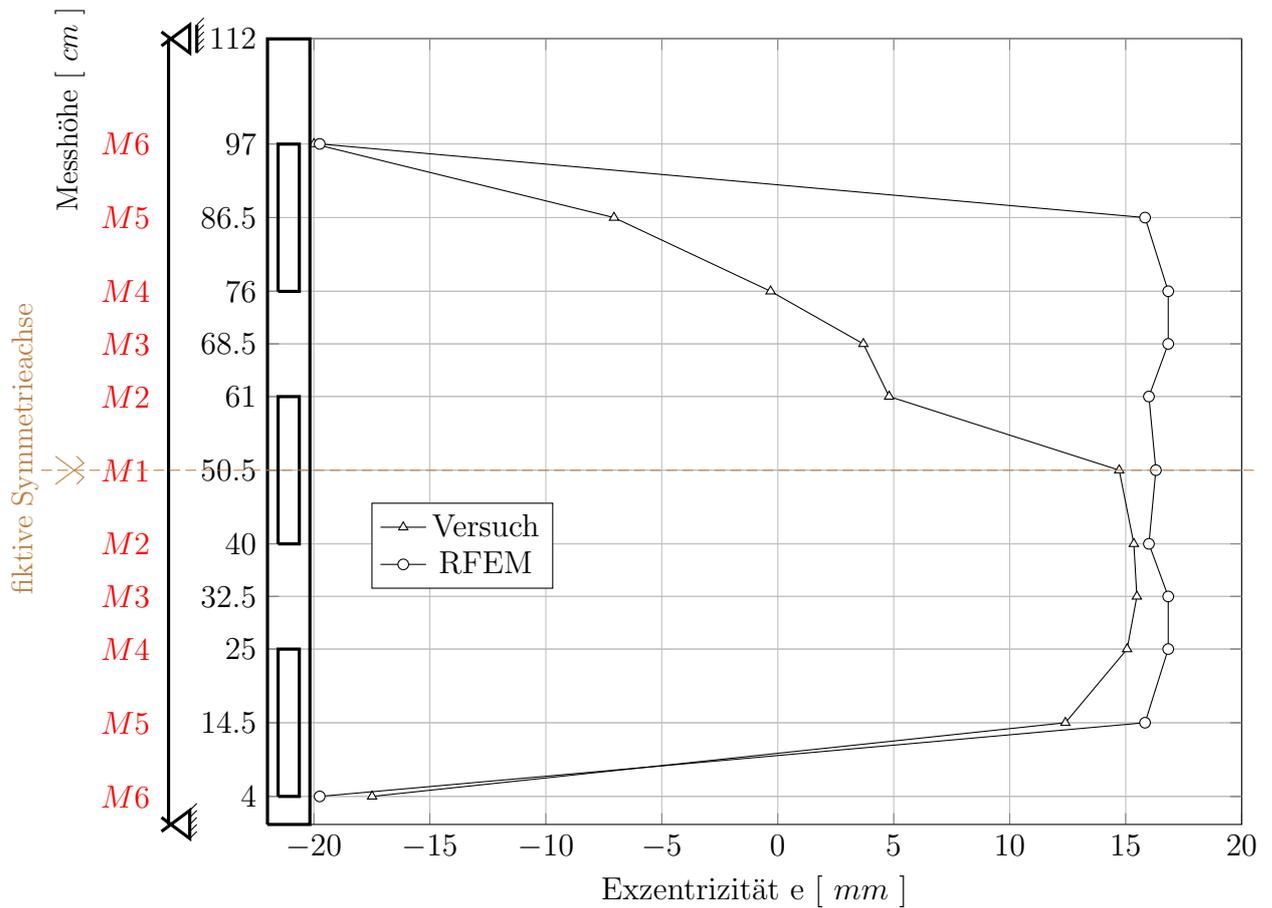


Abbildung 9.4: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 4

Messpunkt	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
e [mm] Versuch	-17.49	12.40	15.06	15.48	15.35	14.72	4.80	3.69
e [mm] RFEM	-19.75	15.83	16.83	16.83	16.00	16.30	16.00	16.83

Messpunkt	M4	M5	M6
e [mm] Versuch	-0.31	-7.06	-20.00
e [mm] RFEM	16.83	15.83	-19.75

Tabelle 9.4: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 4

Die Verläufe des Probekörpers 4 in Abbildung 9.4 zeigen die nicht symmetrischen Messverläufe beim physikalischen Versuch. Die in der Abbildung untere Seite kommt der numerischen Simulation jedoch schon sehr nah. Die Schubmittelpunktslagen liegen bei den unteren Messpunkten  $M2$  bis  $M6$  nur im Millimeterbereich voneinander entfernt. Dies entspricht im Maßstab M 1:1 einem Abstand im Zentimeterbereich. Es sind dort außerdem prinzipiell gleiche Tendenzen bei den Exzentrizitäten zu bemerken.

## 9.6 Probekörper 5

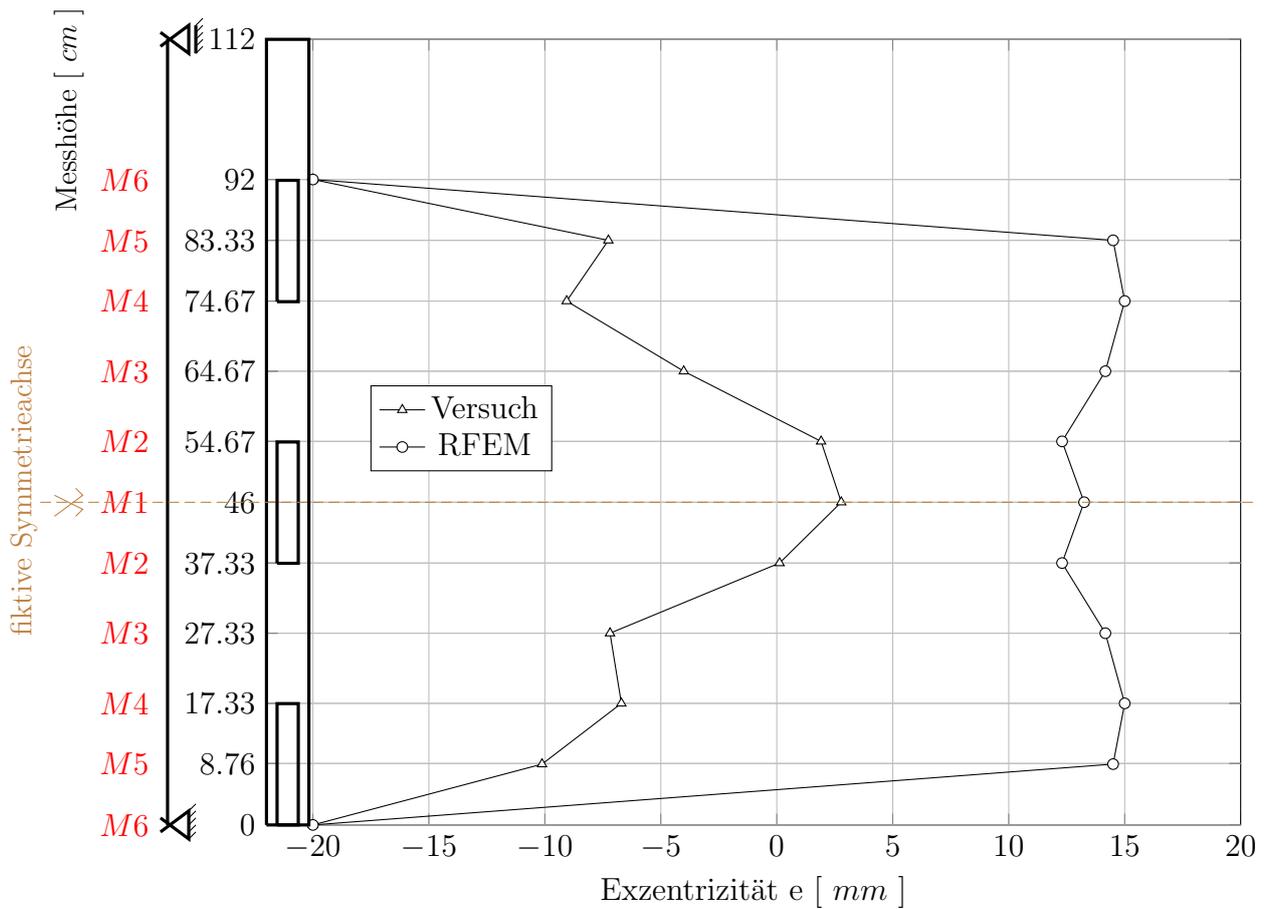


Abbildung 9.5: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 5

<b>Messpunkt</b>	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
<b>e [mm] Versuch</b>	-20.00	-10.12	-6.70	-7.19	0.12	2.78	1.91	-4.01
<b>e [mm] RFEM</b>	-20.00	14.50	15.00	14.17	12.30	13.25	12.30	14.17
<b>Messpunkt</b>	M4	M5	M6					
<b>e [mm] Versuch</b>	-9.06	-7.26	-20.00					
<b>e [mm] RFEM</b>	15.00	14.50	-20.00					

Tabelle 9.5: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 5

Probekörper 5 zeigt in Abbildung 9.5 sehr große Abweichungen bei der Lage der Schubmittelpunkte auf. Einzig die abnehmende Tendenz zu den Auflagern hin ist bei beiden Verläufen gut zu beobachten. Abgesehen von den großen Abweichungen, welche hier bereits zum Teil im Zentimeterbereich liegen, ist ein relativ symmetrischer Verlauf aus dem physikalischen Versuch zu beobachten.

### 9.7 Probekörper 6

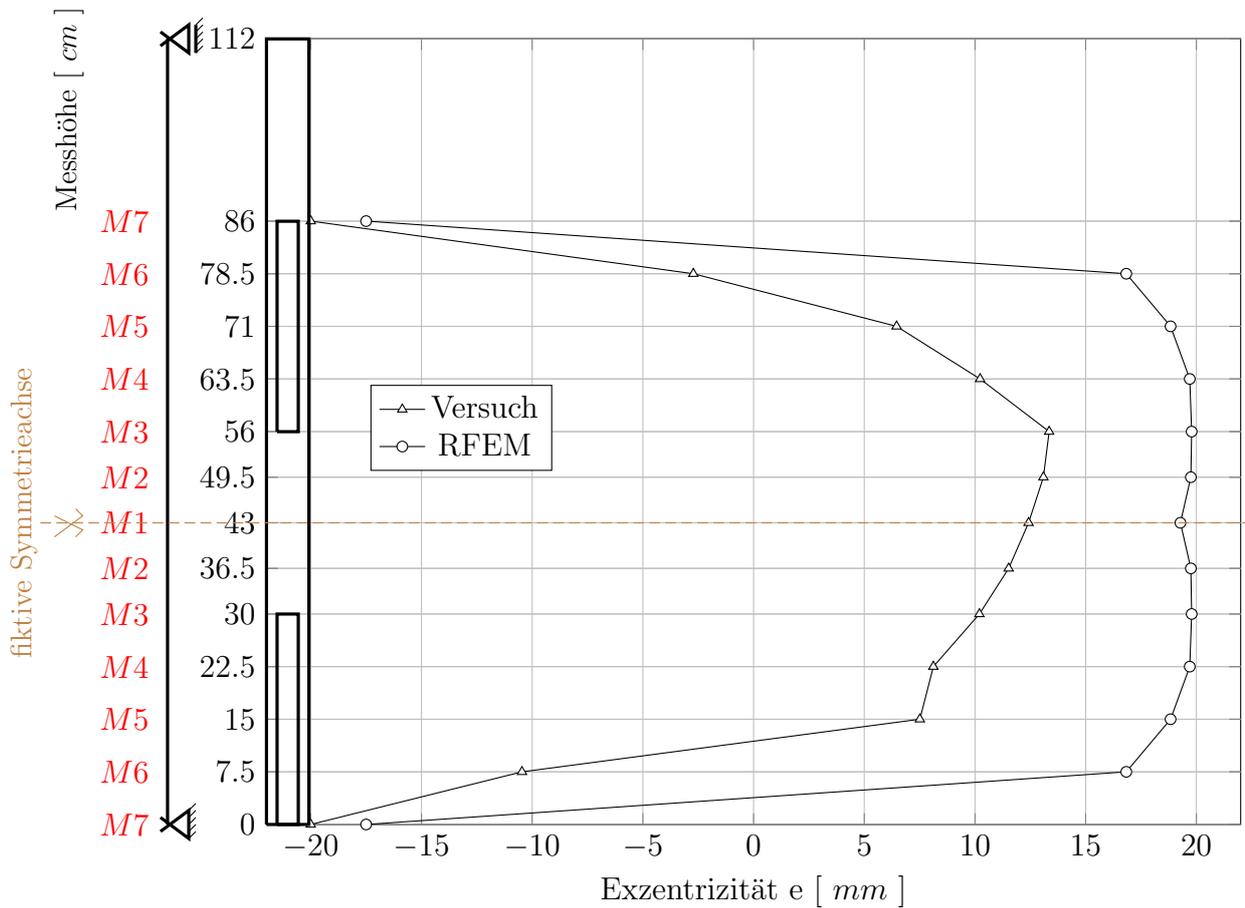


Abbildung 9.6: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 6

Messpunkt	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
e [mm] Versuch	-20.00	-10.46	7.51	8.12	10.20	11.52	12.42	13.09	13.35
e [mm] RFEM	-17.50	16.83	18.83	19.70	19.79	19.75	19.28	19.75	19.79

Messpunkt	M4	M5	M6	M7
e [mm] Versuch	10.23	6.46	-2.72	-20.00
e [mm] RFEM	19.70	18.83	16.83	-17.50

Tabelle 9.6: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 6

Abbildung 9.6 zeigt die Verläufe des Probekörpers 6. Neben den größeren Abweichungen der Exzentrizitäten ist prinzipiell jedoch eine sehr ähnliche Tendenz bei der Lage der Schubmittelpunkte zu beobachten. Die oberen Messpunkte  $M3$  bis  $M7$  zeigen einen ähnlichen Verlauf. Die Abnahme der Exzentrizitäten zu den Auflagern hin ist wieder bei beiden Verläufen ersichtlich.

## 9.8 Probekörper 7

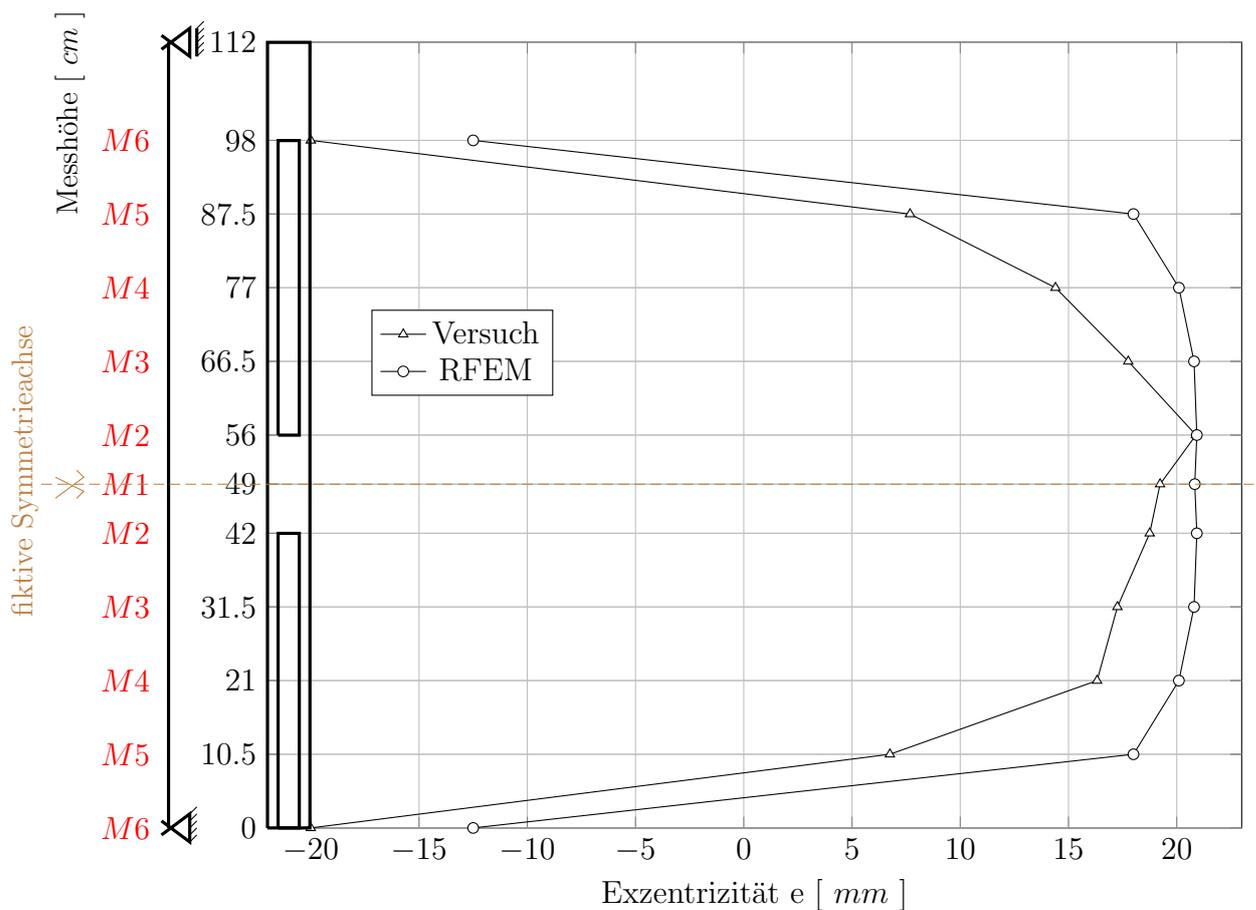


Abbildung 9.7: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 7

<b>Messpunkt</b>	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3	M4
<b>e [mm] Versuch</b>	-20.00	6.75	16.32	17.26	18.75	19.23	20.89	17.76	14.40
<b>e [mm] RFEM</b>	-12.50	18.50	20.10	20.80	20.93	20.83	20.93	20.80	20.10
<b>Messpunkt</b>	M5	M6							
<b>e [mm] Versuch</b>	7.68	-20.00							
<b>e [mm] RFEM</b>	18.00	-12.50							

Tabelle 9.7: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 7

Probekörper 7 zeigt sehr ähnliche Ergebnisse aus dem physikalischen Versuch und der numerischen Simulation. Abbildung 9.7 zeigt bei Messpunkt  $M2$  sogar eine beinahe exakte Übereinstimmung der Schubmittelpunktslage. Die Tendenzen des Verlaufes sind auf beiden Seiten der Symmetrieachse gleich und die Abnahme zu den Auflagern ist gut zu beobachten.

## Kapitel 10

Vergleich der Versuchsergebnisse aus den physikalischen Versuchen mit Gabellagerung mit jenen aus den physikalischen Vergleichsversuchen mit Einspannung

### 10.1 Einleitung

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus den physikalischen Versuchen mit Gabellagerung mit jenen aus den physikalischen Versuchen mit Einspannung aus [29] verglichen. Jeder Probekörper wird separat dargestellt und die Verläufe sind in einem beiliegenden Diagramm ersichtlich.

### 10.2 Probekörper 1

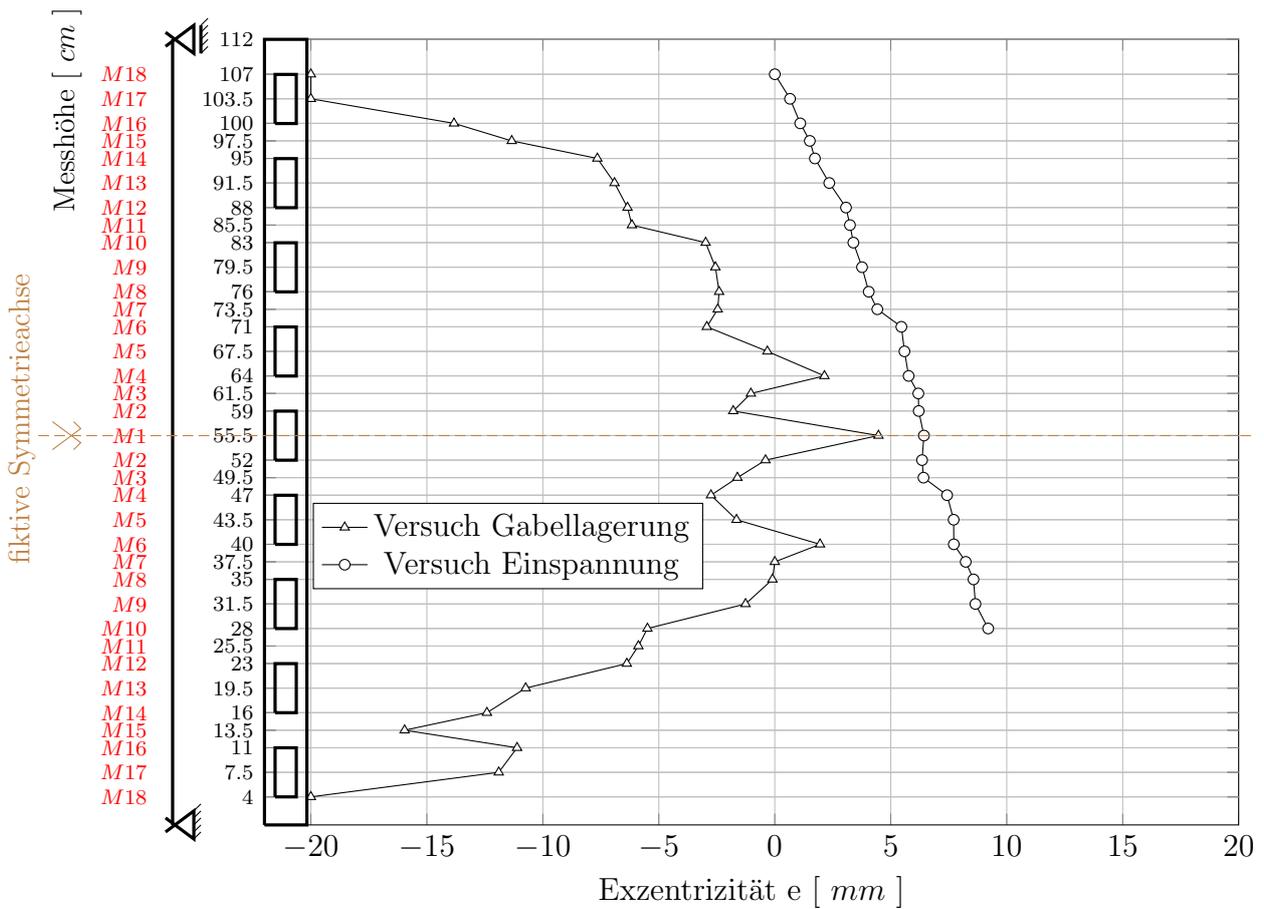


Abbildung 10.1: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 1 (physikalisch)

<b>Messpunkt</b>	M18	M17	M16	M15	M14	M13	M12	M11
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-20.00	-11.90	-11.11	-15.96	-12.41	-10.74	-6.38	-5.88
<b>e [mm] Einspannung</b>								
<b>Messpunkt</b>	M10	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-5.49	-1.26	-0.10	0.00	1.95	-1.65	-2.75	-1.61
<b>e [mm] Einspannung</b>	8.57	8.23	7.72	7.71	7.43	6.41	6.35	6.43
<b>Messpunkt</b>	M2	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-0.40	4.47	-1.79	-1.03	2.14	-0.32	-2.93	-2.46
<b>e [mm] Einspannung</b>	9.2	8.65	6.21	6.19	5.77	5.59	5.46	4.42
<b>Messpunkt</b>	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-2.40	-2.56	-2.98	-6.16	-6.35	-6.91	-7.65	-11.34
<b>e [mm] Einspannung</b>	4.05	3.76	3.39	3.24	3.07	2.35	1.73	1.51
<b>Messpunkt</b>	M16	M17	M18					
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-13.83	-20.00	-20.00					
<b>e [mm] Einspannung</b>	1.10	0.66	0.00					

Tabelle 10.1: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 1 (physikalisch)

Abbildung 10.1 zeigt die Verläufe des Probekörpers 1. Dieser Probekörper zeigt im Vergleichsversuch am oberen Ende eine Abnahme der Exzentrizität auf. Am unteren Ende, in Richtung der Einspannung, nimmt die Exzentrizität gegenläufig zu den vorher gezeigten Ergebnissen zu. Eine Aussage über mögliches ähnliches Verhalten ist bei diesem Probekörper nur schwer zu treffen. Möglicherweise sind Ungenauigkeiten bei der physikalischen Messung im Vergleichsversuch mit Einspannung (siehe [29]) ausschlaggebend.

### 10.3 Probekörper 2

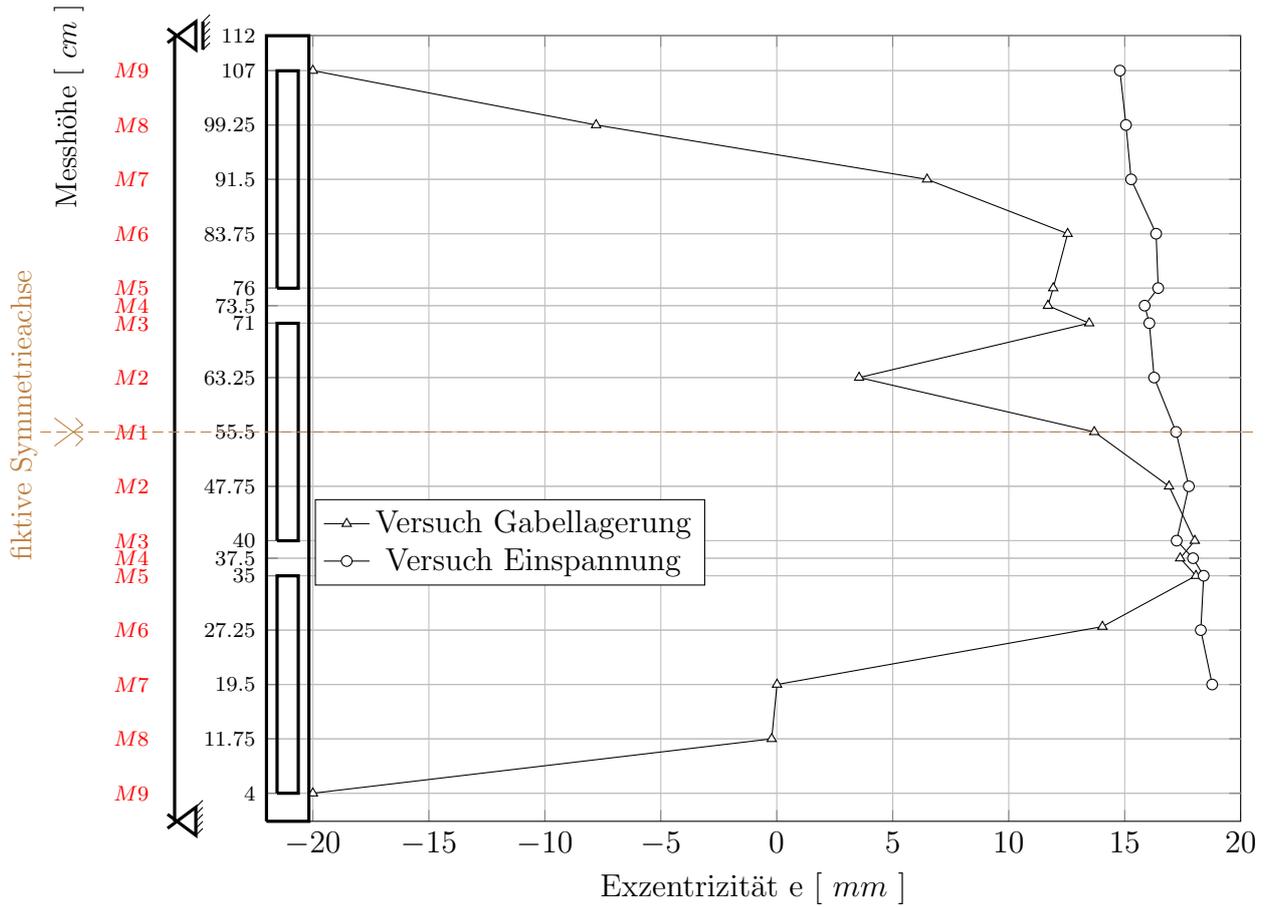


Abbildung 10.2: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 2 (physikalisch)

Messpunkt	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1
e [mm] Gabellagerung	-20.00	-0.22	0.01	14.04	18.07	17.39	18.02	16.91	13.69
e [mm] Einspannung			18.77	18.28	18.40	17.95	17.24	17.76	17.21

Messpunkt	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9
e [mm] Gabellagerung	3.55	13.47	11.69	11.92	12.54	6.48	-7.79	-20.00
e [mm] Einspannung	16.27	16.06	15.86	16.44	16.35	15.28	15.05	14.79

Tabelle 10.2: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 2 (physikalisch)

Auch Abbildung 10.2 zeigt eine widersprüchliche Tendenz der Schubmittelpunktslage des Probekörpers im Vergleichsversuch bei der Näherung zur unten liegenden Einspannung. Wie bei Probekörper 1 wird auch hier im Vergleichsversuch die zunehmende Tendenz des Schubmittelpunktsverlaufs zur Einspannung hin erwähnt. Gut zu erkennen sind sehr ähnliche Messergebnisse bei den unteren Messpunkten  $M5$  bis  $M2$ .

### 10.4 Probekörper 3

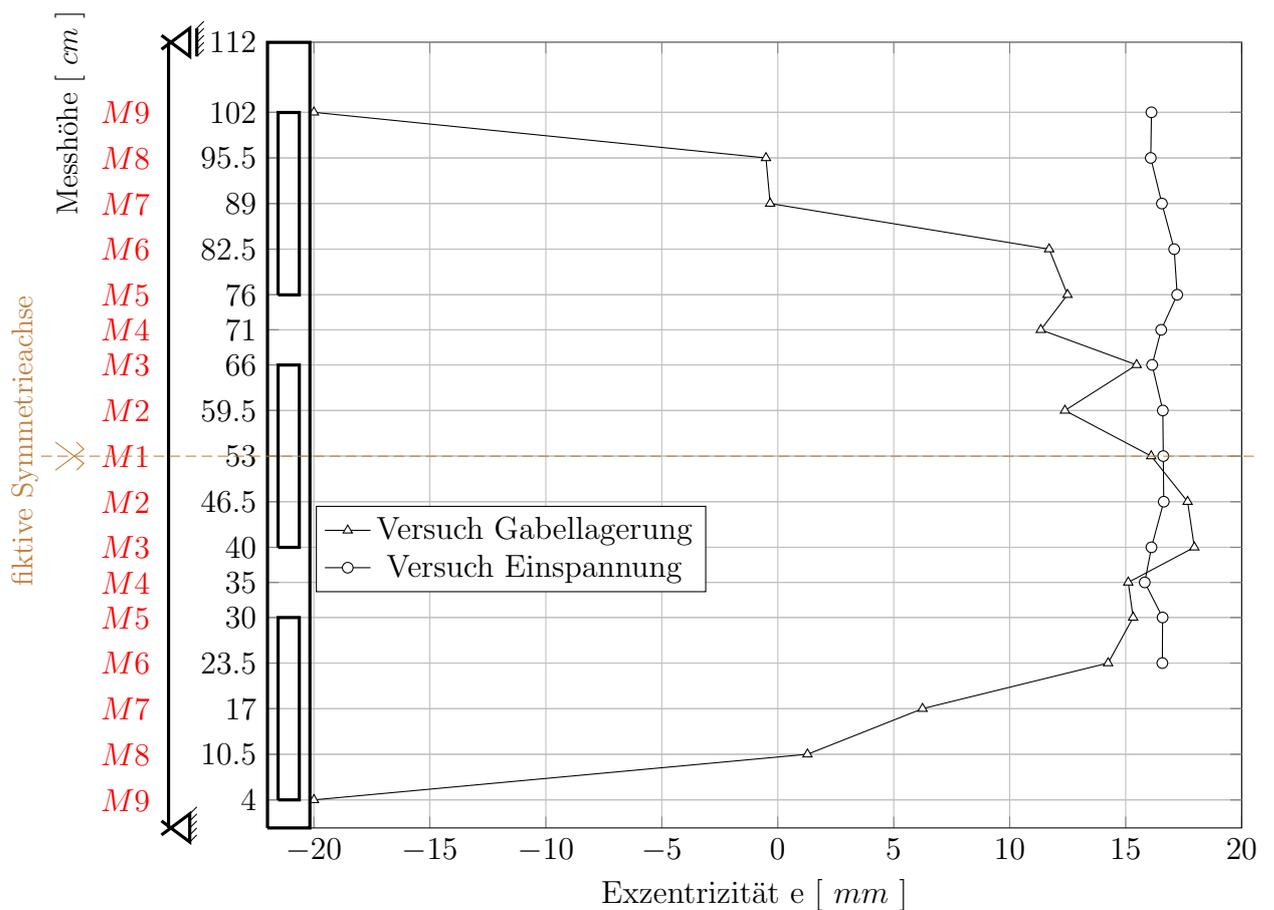


Abbildung 10.3: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 3 (physikalisch)

<b>Messpunkt</b>	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-20.00	1.28	6.24	14.24	15.32	15.11	17.96	17.67	16.10
<b>e [mm] Einspannung</b>				16.58	16.59	15.82	16.11	16.64	16.62
<b>Messpunkt</b>	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	12.38	15.47	11.34	12.49	11.70	-0.33	-0.51	-20.00	
<b>e [mm] Einspannung</b>	16.60	16.14	16.53	17.22	17.09	16.56	16.08	16.11	

Tabelle 10.3: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 3 (physikalisch)

Probekörper 3 weist bereits sehr ähnliche Messergebnisse bei den Exzentrizitäten auf. Beim Vergleichsversuch ist in Abbildung 10.3 eine ganz leichte Tendenz einer Abnahme der Exzentrizität zur Einspannung hin erkennbar. Dies würde den bisherigen Beobachtungen entsprechen.

### 10.5 Probekörper 4

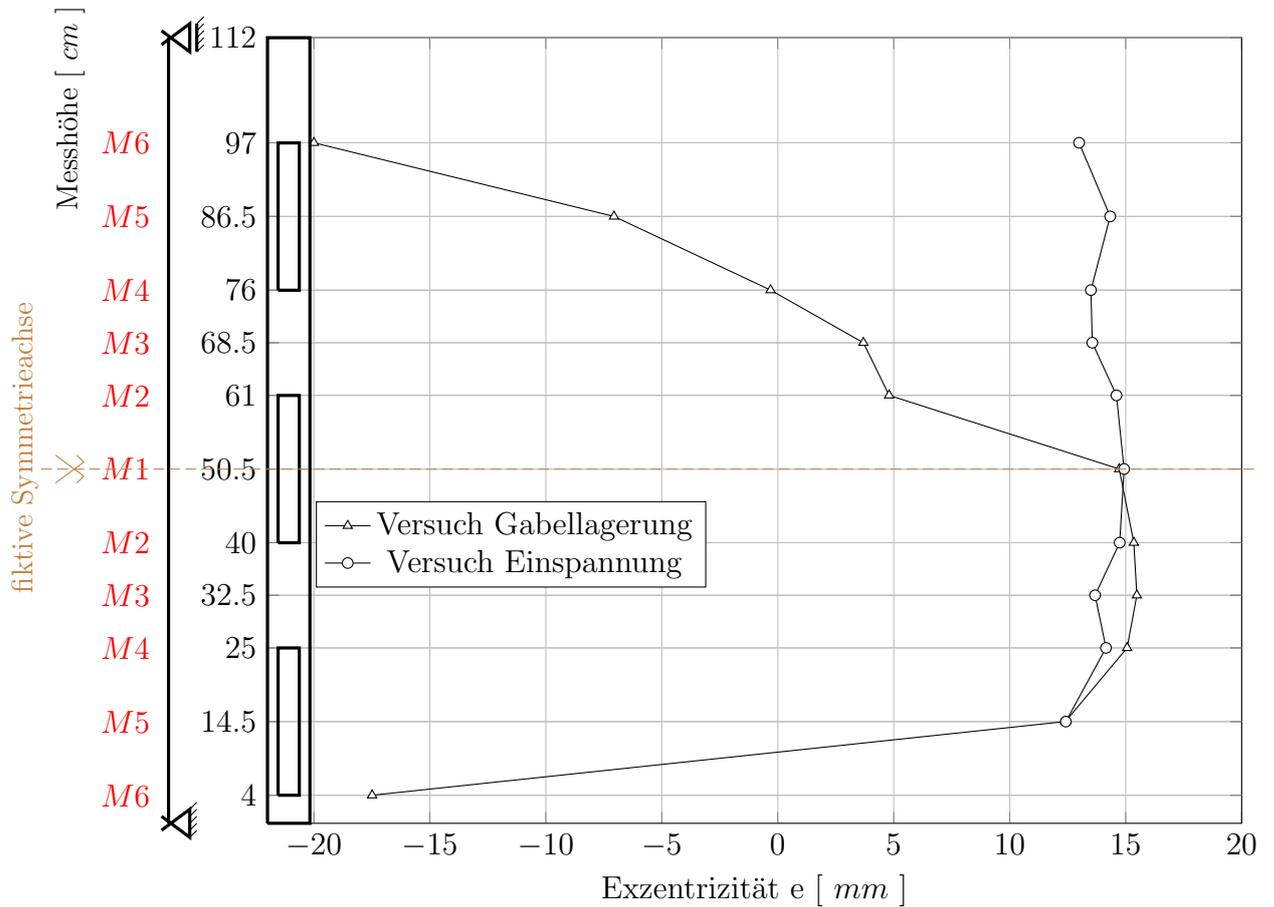


Abbildung 10.4: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 4 (physikalisch)

Messpunkt	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
e [mm] Gabellagerung	-17.49	12.40	15.06	15.48	15.35	14.72	4.80	3.69
e [mm] Einspannung		12.42	14.15	13.68	14.74	14.93	14.60	13.56
Messpunkt	M4	M5	M6					
e [mm] Gabellagerung	-0.31	-7.06	-20.00					
e [mm] Einspannung	13.50	14.33	12.99					

Tabelle 10.4: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 4 (physikalisch)

Abbildung 10.4 zeigt bereits eine sehr gute Übereinstimmung der Verläufe im Bereich der Einspannung (unten) von Messpunkt  $M1$  bis  $M5$ . Eine Abnahme der Exzentrizitäten im Vergleichsversuch zur Einspannung hin ist gut erkennbar. Außerdem liegen die Werte in diesem Bereich nur unwesentlich auseinander.

## 10.6 Probekörper 5

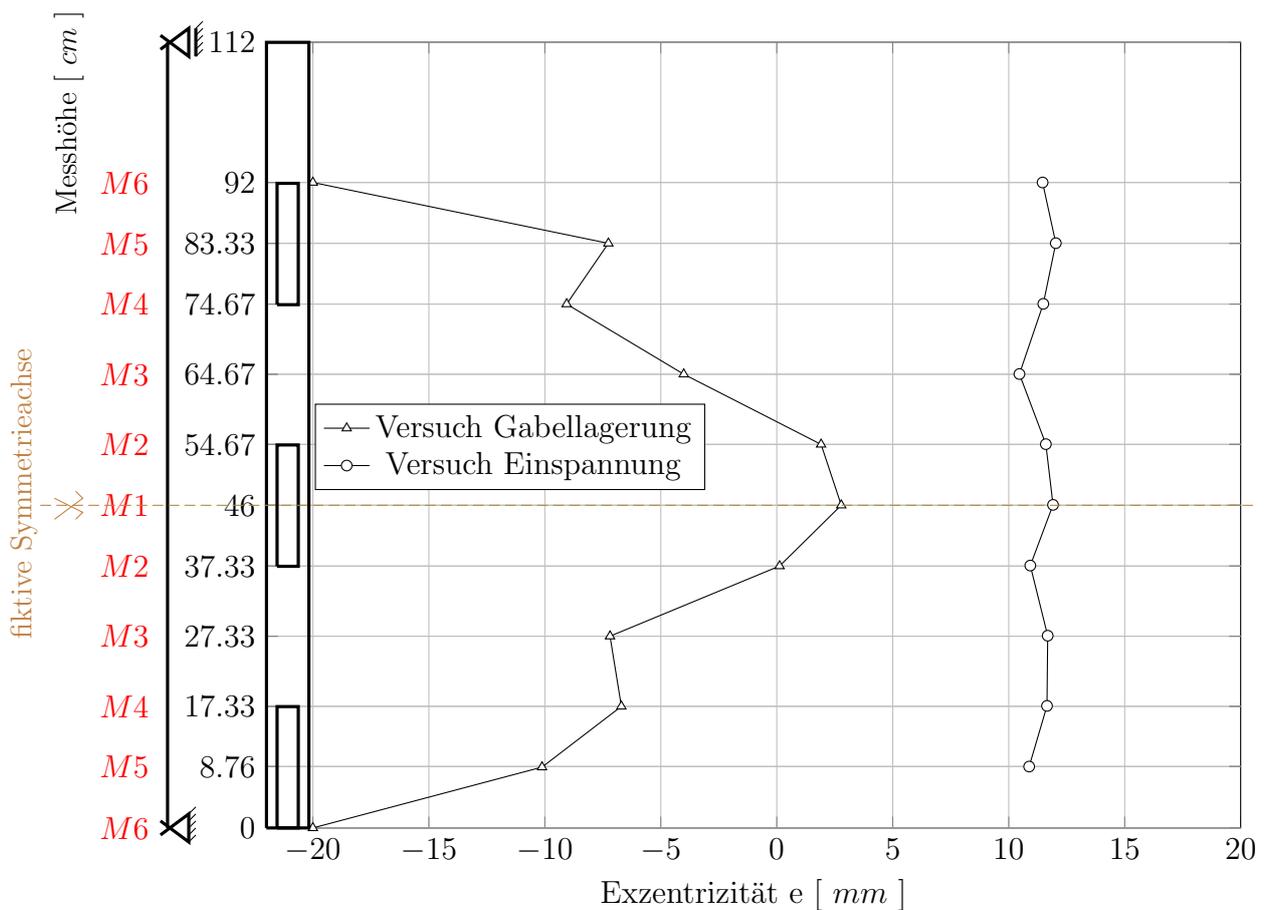


Abbildung 10.5: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 5 (physikalisch)

<b>Messpunkt</b>	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-20.00	-10.12	-6.70	-7.19	0.12	2.78	1.91	-4.01
<b>e [mm] Einspannung</b>		10.88	11.65	11.68	10.93	11.91	11.60	10.46
<b>Messpunkt</b>	M4	M5	M6					
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-9.06	-7.26	-20.00					
<b>e [mm] Einspannung</b>	11.49	12.03	11.46					

Tabelle 10.5: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 5 (physikalisch)

Während in Abbildung 10.5 im Vergleichsversuch ein Schwanken der Exzentrizitäten zu beobachten ist, welches auf die Öffnungen zurückgeführt werden kann, liegen die Werte jedoch mehrere Millimeter auseinander. Eine leichte abnehmende Tendenz der Exzentrizitäten im Versuch mit Einspannung (siehe [29]) zum unteren Ende, also zur Einspannung hin, ist zu erkennen.

### 10.7 Probekörper 6

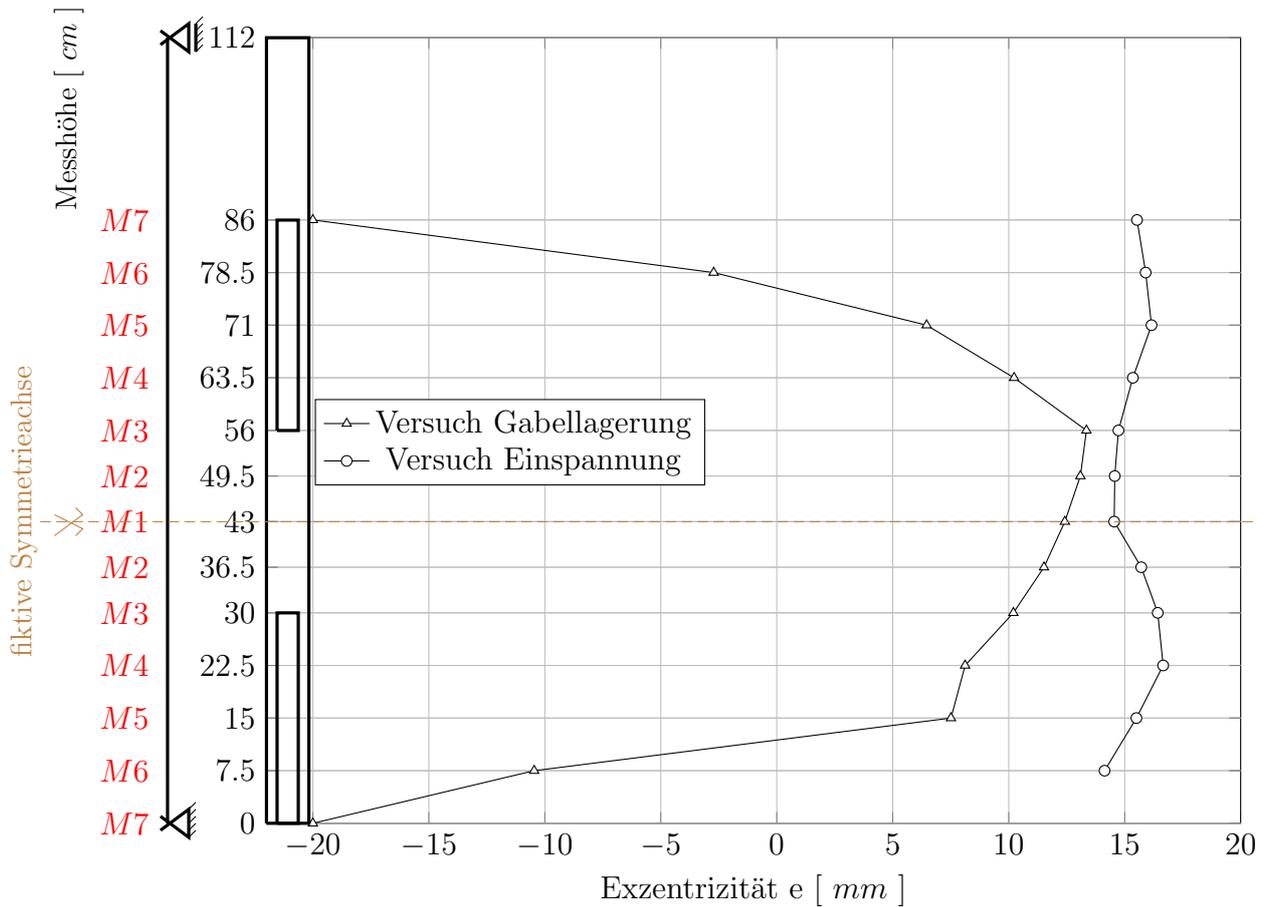


Abbildung 10.6: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 6 (physikalisch)

<b>Messpunkt</b>	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-20.00	-10.46	7.51	8.12	10.20	11.52	12.42	13.09
<b>e [mm] Einspannung</b>		14.10	13.91	14.91	15.53	15.90	16.16	15.35
<b>Messpunkt</b>	M3	M4	M5	M6	M7			
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	13.35	10.23	6.46	-2.72	-20.00			
<b>e [mm] Einspannung</b>	14.73	14.57	14.55	15.71	16.42			

Tabelle 10.6: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 6 (physikalisch)

Beobachtet man in Abbildung 10.6 den unteren Bereich ab dem Messpunkt  $M1$ , ist eine abnehmende Tendenz der Exzentrizitäten zur Einspannung bzw. zum Auflager in beiden Verläufen zu beobachten. In der Mitte des Profils liegen die Messwerte nah beieinander, zur Einspannung und zum freien Ende hin weichen sie jedoch wieder deutlicher voneinander ab.

### 10.8 Probekörper 7

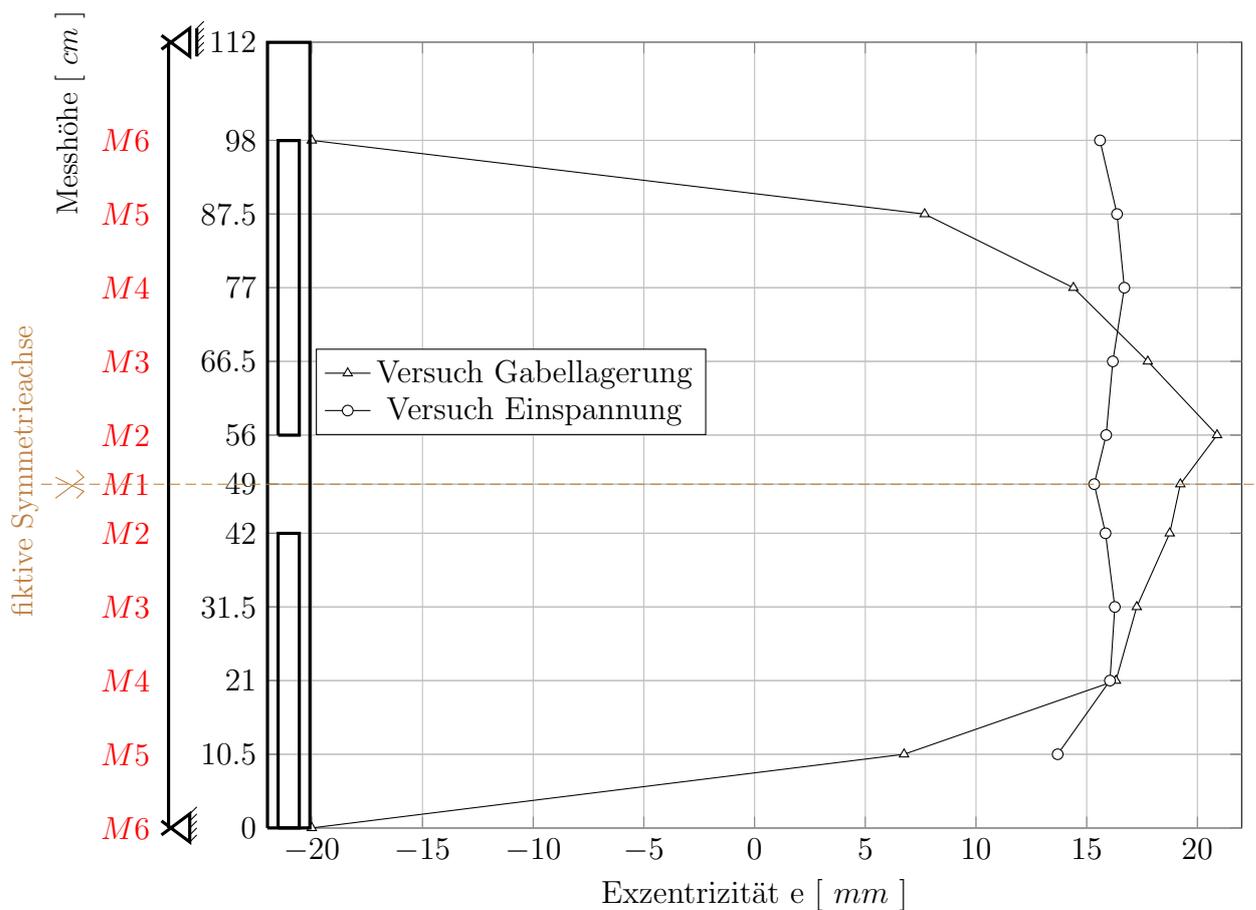


Abbildung 10.7: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 7 (physikalisch)

Messpunkt	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
e [mm] Gabellagerung	-20.00	6.75	16.32	17.26	18.75	19.23	20.89	17.76
e [mm] Einspannung		13.69	16.05	16.27	15.85	15.34	15.88	16.18

Messpunkt	M4	M5	M6
e [mm] Gabellagerung	14.40	7.68	-20.00
e [mm] Einspannung	16.70	16.37	15.60

Tabelle 10.7: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 7 (physikalisch)

Abbildung 10.7 zeigt, dass die Werte aus dem Versuch mit Gabellagerung im mittleren Bereich weiter außerhalb von jenen des Vergleichsversuchs liegen. Eine zur Einspannung abnehmende Tendenz ist wieder zu beobachten, im Bereich der unteren Messpunkte  $M3$  bis  $M5$  liegen die Ergebniswerte sehr nah beieinander.

## Kapitel 11

Vergleich der Versuchsergebnisse aus den numerischen Simulationen mit Gabellagerung mit jenen aus den numerischen Vergleichssimulationen mit Einspannung

## 11.1 Einleitung

Im Folgenden werden die Versuchsergebnisse der numerischen Simulationen aus der Modellierung mit Gabellagern mit jenen aus der Modellierung mit einer Einspannung verglichen. Diese Vergleiche sind insofern von Interesse, da sie mit dem selben Simulationsprogramm (RFEM) durchgeführt wurden. Dadurch ist ein direkter Abgleich der Ergebnisse möglich und lässt auch Rückschlüsse auf die prinzipielle Richtigkeit der Simulationsparameter des Programms sowie auf die richtige Modellierung zu. Die Verläufe können ab Messpunkt  $M1$  in Richtung beider Lager gut verglichen werden. Ebenso wird beobachtet, welche Rolle die Öffnungen beim Schubmittelpunktsverlauf spielen.

## 11.2 Probekörper 1

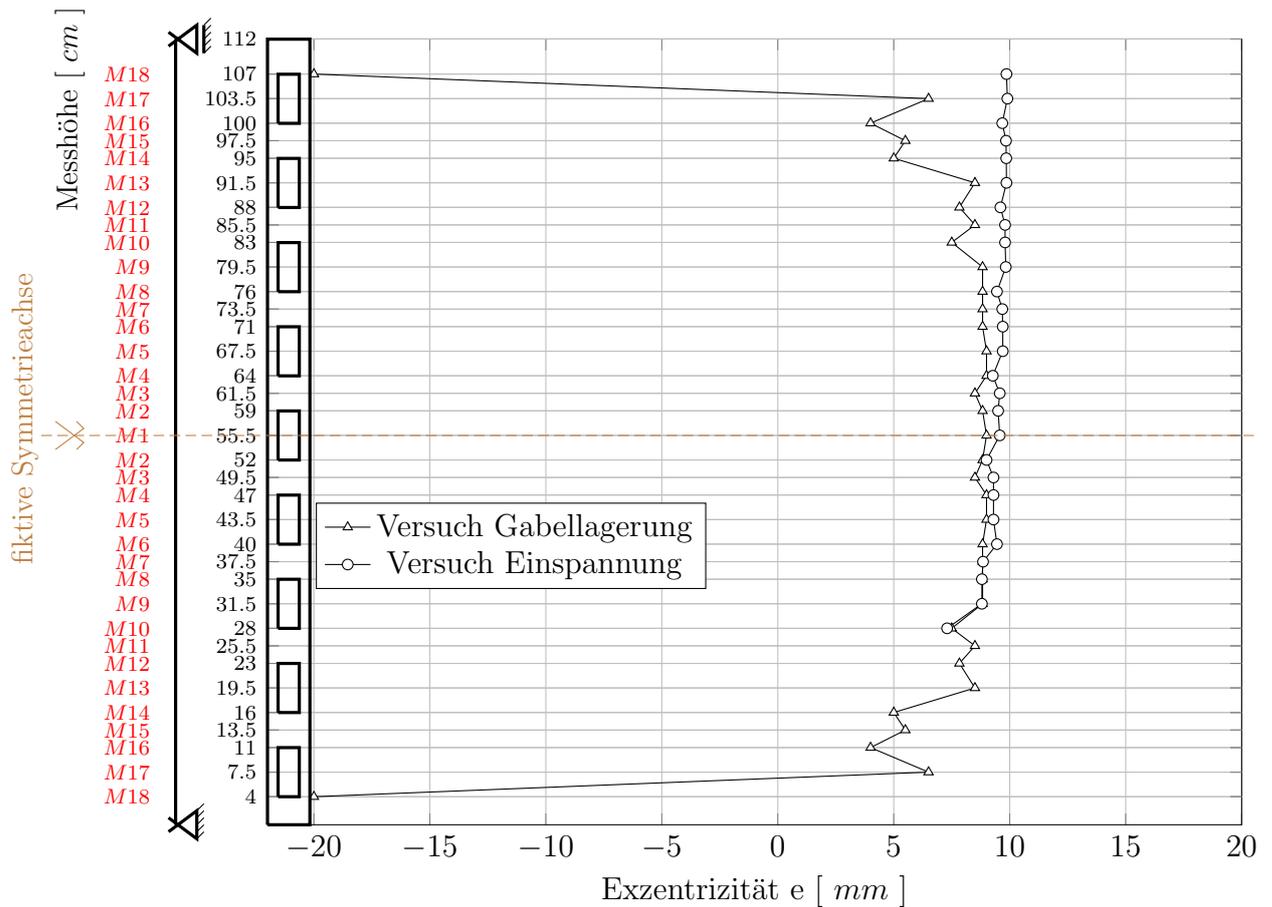


Abbildung 11.1: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 1 (numerisch)

Messpunkt	M18	M17	M16	M15	M14	M13	M12	M11
e [mm] Gabellagerung	-20.00	6.50	4.00	5.50	5.00	8.50	7.83	8.50
e [mm] Einspannung								
Messpunkt	M10	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3
e [mm] Gabellagerung	7.50	8.83	8.83	8.83	8.83	9.00	9.00	8.50
e [mm] Einspannung	7.30	8.80	8.80	8.85	9.45	9.30	9.30	9.30

<b>Messpunkt</b>	M2	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	8.83	9.00	8.83	8.50	9.00	9.00	8.83	8.83
<b>e [mm] Einspannung</b>	9.00	9.57	9.50	9.57	9.27	9.70	9.70	9.68
<b>Messpunkt</b>	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	8.83	8.83	7.50	8.50	7.83	8.50	5.00	5.50
<b>e [mm] Einspannung</b>	9.45	9.83	9.80	9.80	9.60	9.86	9.85	9.84
<b>Messpunkt</b>	M16	M17	M18					
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	4.00	6.50	-20.00					
<b>e [mm] Einspannung</b>	9.68	9.90	9.86					

Tabelle 11.1: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 1 (numerisch)

Probekörper 1 zeigt bereits sehr gut, dass die Modellierung im Versuch mit Gabellagerung offensichtlich gut gewählt wurde. Die Ergebnisse weichen insbesondere im unteren Teil kaum voneinander ab, wie in Abbildung 11.1 ersichtlich. Auch ähnliche Tendenzen bei den Schwankungen der Exzentrizitäten sind zu erkennen. Im Vergleichsversuch mit Einspannung (siehe [29]) wurden die Messungen nur bis zum unteren Messpunkt  $M10$  durchgeführt, wodurch keine Aussage über ein Verhalten der Schubmittelpunktslage zur Einspannung hin möglich ist.

### 11.3 Probekörper 2

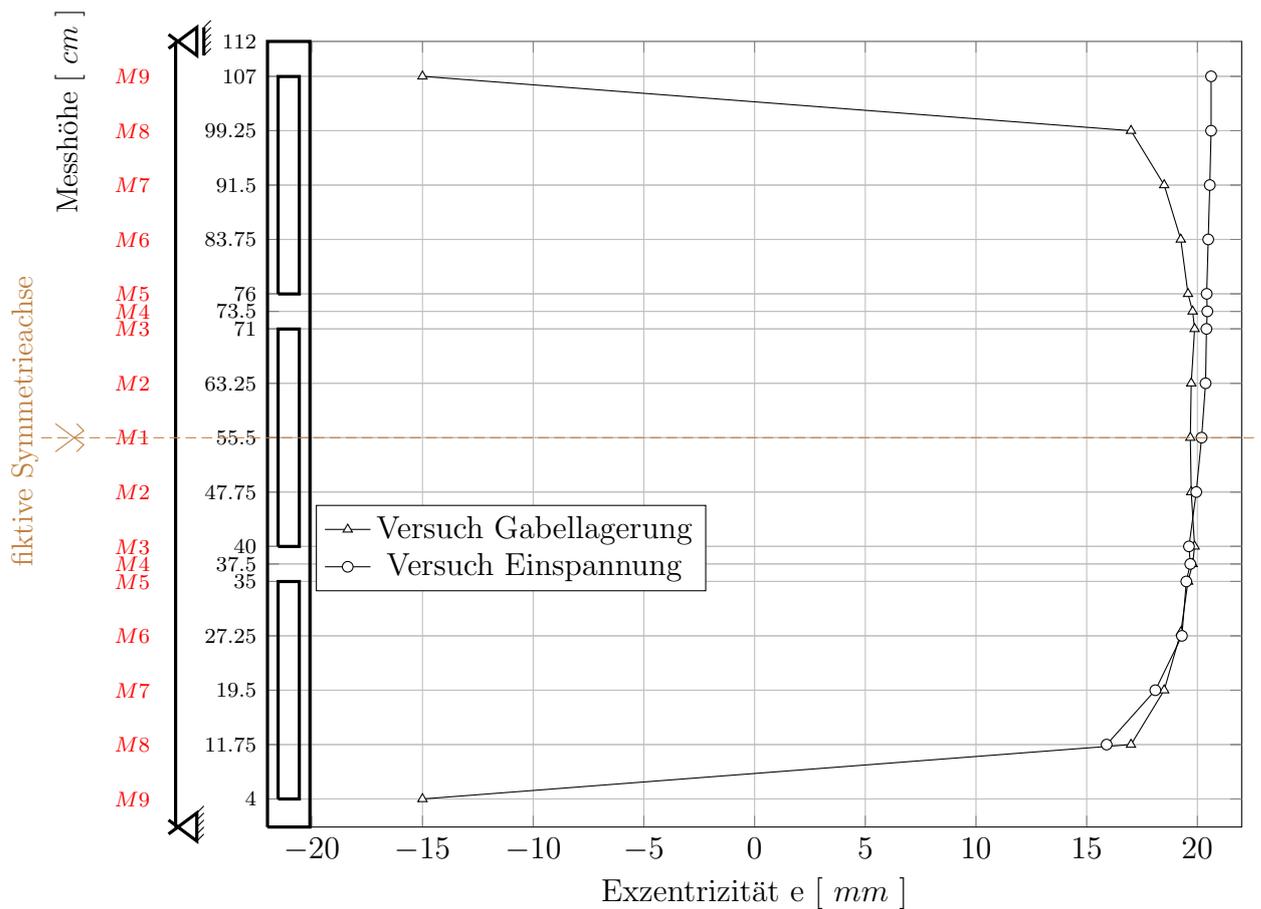


Abbildung 11.2: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 2 (numerisch)

Messpunkt	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3
e [mm] Gabellagerung	-15.00	17.00	18.50	19.25	19.58	19.79	19.88
e [mm] Einspannung		15.90	18.10	19.30	19.50	19.68	19.62
Messpunkt	M2	M1	M2	M3	M4	M5	M6
e [mm] Gabellagerung	19.72	19.68	19.72	19.88	19.79	19.58	19.25
e [mm] Einspannung	19.95	20.19	20.37	20.41	20.45	20.42	20.49

Messpunkt	M7	M8	M9
e [mm] Gabellagerung	18.50	17.00	-15.00
e [mm] Einspannung	20.56	20.62	20.62

Tabelle 11.2: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 2 (numerisch)

Auch Abbildung 8.2 zeigt in der unteren Hälfte ab Messpunkt  $M1$  sehr ähnliche Tendenzen im Verlauf der Schubmittelpunktslage. Die Ergebnisse liegen sehr nah beieinander und eine Abnahme der Exzentrizität zum Auflager bzw. zur Einspannung hin ist klar zu erkennen.

### 11.4 Probekörper 3

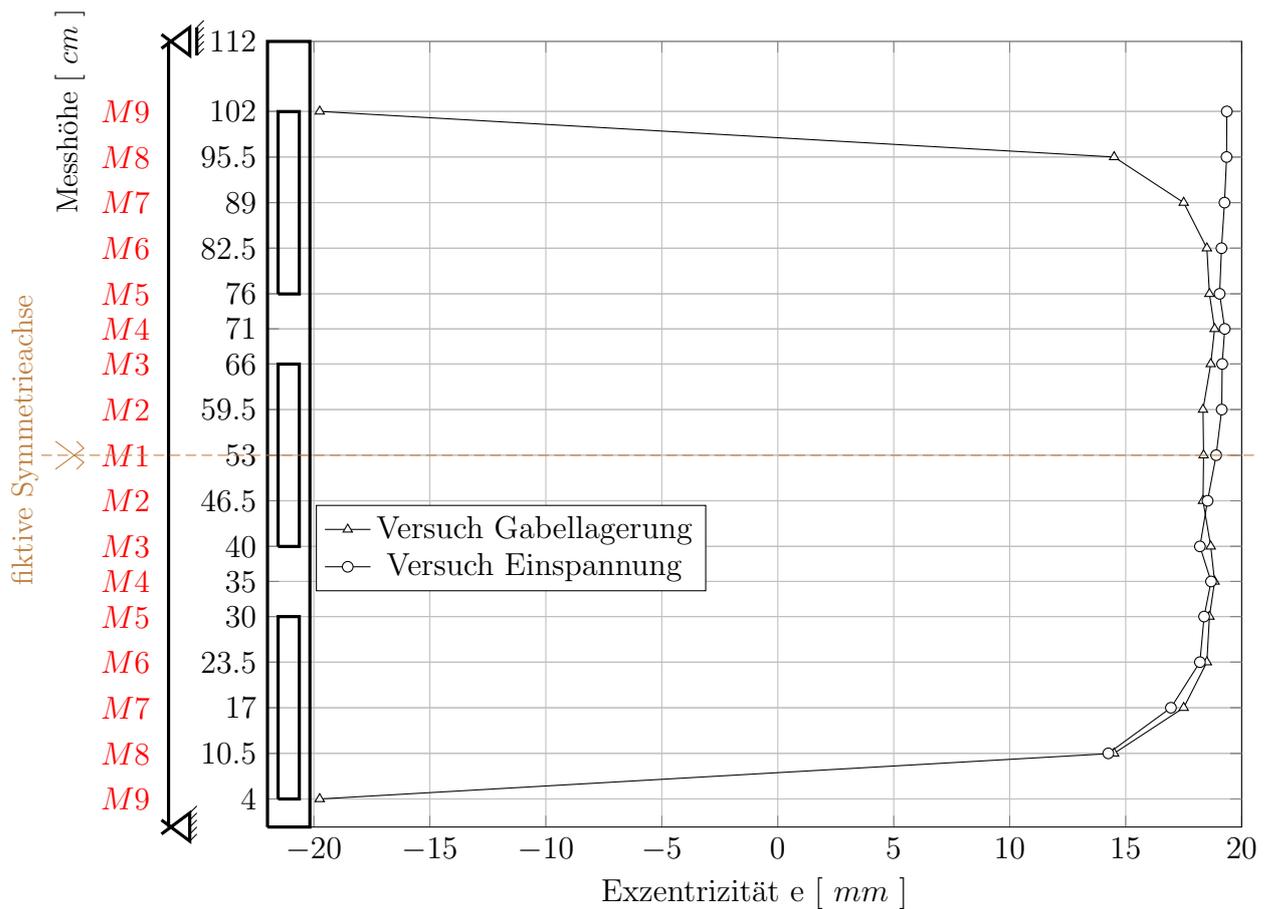


Abbildung 11.3: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 3 (numerisch)

<b>Messpunkt</b>	M9	M8	M7	M6	M5	M4	M3
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-19.75	14.50	17.50	18.50	18.61	18.83	18.67
<b>e [mm] Einspannung</b>		14.25	16.95	18.20	18.38	18.68	18.20
<b>Messpunkt</b>	M2	M1	M2	M3	M4	M5	M6
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	18.33	18.36	18.33	18.67	18.83	18.61	18.50
<b>e [mm] Einspannung</b>	18.53	18.90	19.14	19.16	19.27	19.05	19.13

Messpunkt	M7	M8	M9
e [mm] Gabellagerung	17.50	14.50	-19.75
e [mm] Einspannung	19.26	19.35	19.36

Tabelle 11.3: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 3 (numerisch)

Bei diesem Probekörper ist in Abbildung 8.3 vor allem bei den unteren Messpunkten  $M3$  bis  $M8$  ein nahezu identischer Verlauf zu beobachten. Die Abweichungen liegen zum Teil weniger als einen Millimeter auseinander, die Richtigkeit der Ergebnisse im Vergleichsversuch scheint offensichtlich.

### 11.5 Probekörper 4

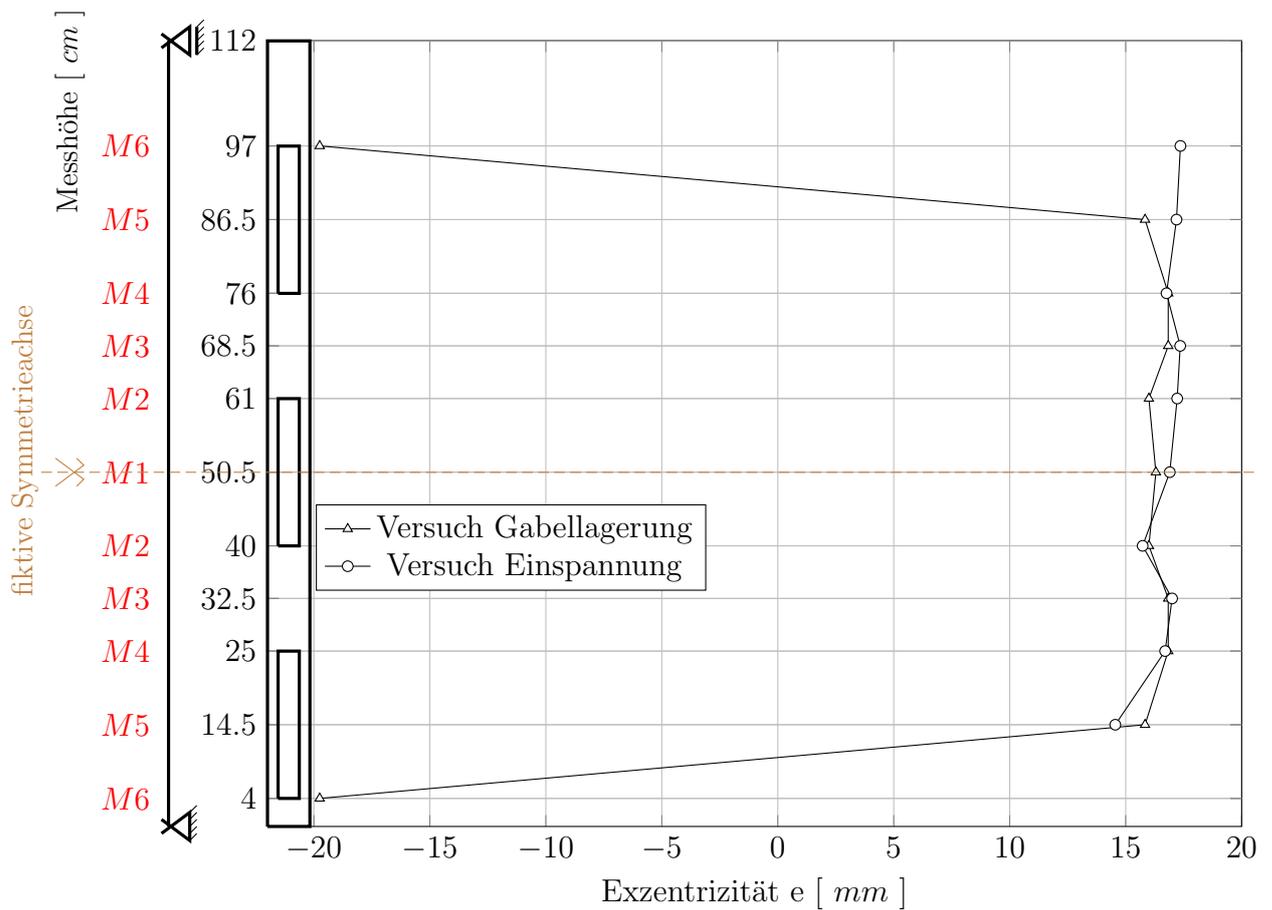


Abbildung 11.4: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 4 (numerisch)

Messpunkt	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
e [mm] Gabellagerung	-19.75	15.83	16.83	16.83	16.00	16.30	16.00	16.83
e [mm] Einspannung		14.55	16.70	17.00	15.73	16.90	17.22	17.35
Messpunkt	M4	M5	M6					
e [mm] Gabellagerung	16.83	15.83	-19.75					
e [mm] Einspannung	16.76	17.19	17.36					

Tabelle 11.4: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 4 (numerisch)

Probekörper 4 erlaubt sogar eine Aussage über das Verhalten der Schubmittelpunktslage beim Übergang von offenen zu geschlossenen Querschnittsteilen. Bei den unteren Messpunkten  $M2$  und  $M4$  sieht man bei beiden Verläufen gleiche Verhaltenstendenzen nach der Änderung des Querschnitts. Die Ergebnisse liegen generell wieder nah beieinander und eine Abnahme zum Auflager hin ist bei beiden Verläufen wieder zu erkennen.

### 11.6 Probekörper 5

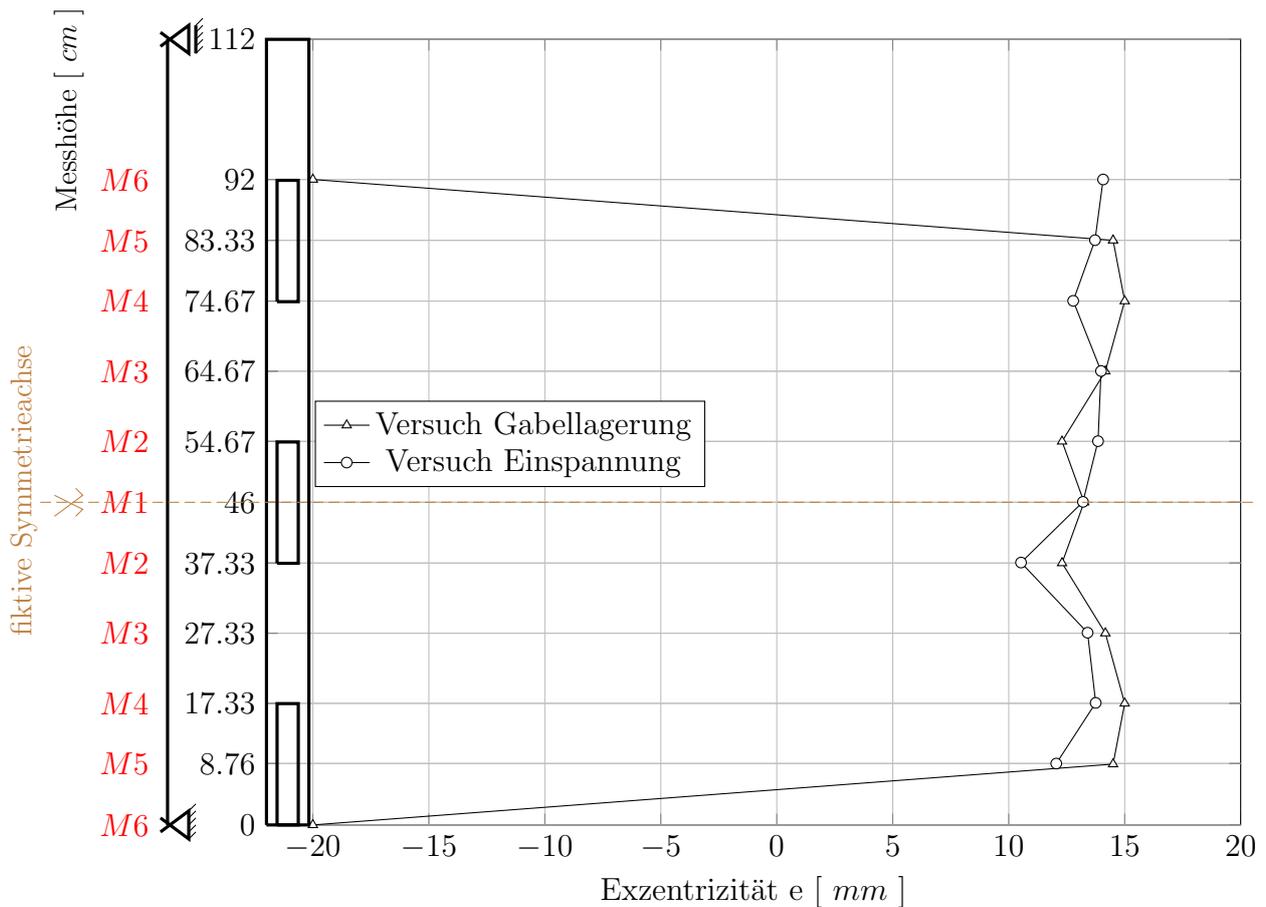


Abbildung 11.5: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 5 (numerisch)

<b>Messpunkt</b>	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	-20.00	14.50	15.00	14.17	12.30	13.25	12.30	14.17
<b>e [mm] Einspannung</b>		12.05	13.75	13.40	10.53	13.20	13.85	13.98
<b>Messpunkt</b>	M4	M5	M6					
<b>e [mm] Gabellagerung</b>	15.00	14.50	-20.00					
<b>e [mm] Einspannung</b>	12.78	13.72	14.07					

Tabelle 11.5: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 5 (numerisch)

In Abbildung 8.5 sind die Verläufe des Probekörpers 5 dargestellt. Die Abweichungen der Ergebniswerte sind nun etwas größer, wenngleich sie immer noch im Millimeterbereich liegen. Eindeutige Änderungen der Exzentrizität in der unteren Hälfte sind bei beiden Verläufen gleichermaßen ausgeprägt und gut zu erkennen. Auch hier ist bei beiden Simulationen eine Abnahme der Exzentrizität zum Auflager bzw. zur Einspannung hin erkennbar.

### 11.7 Probekörper 6

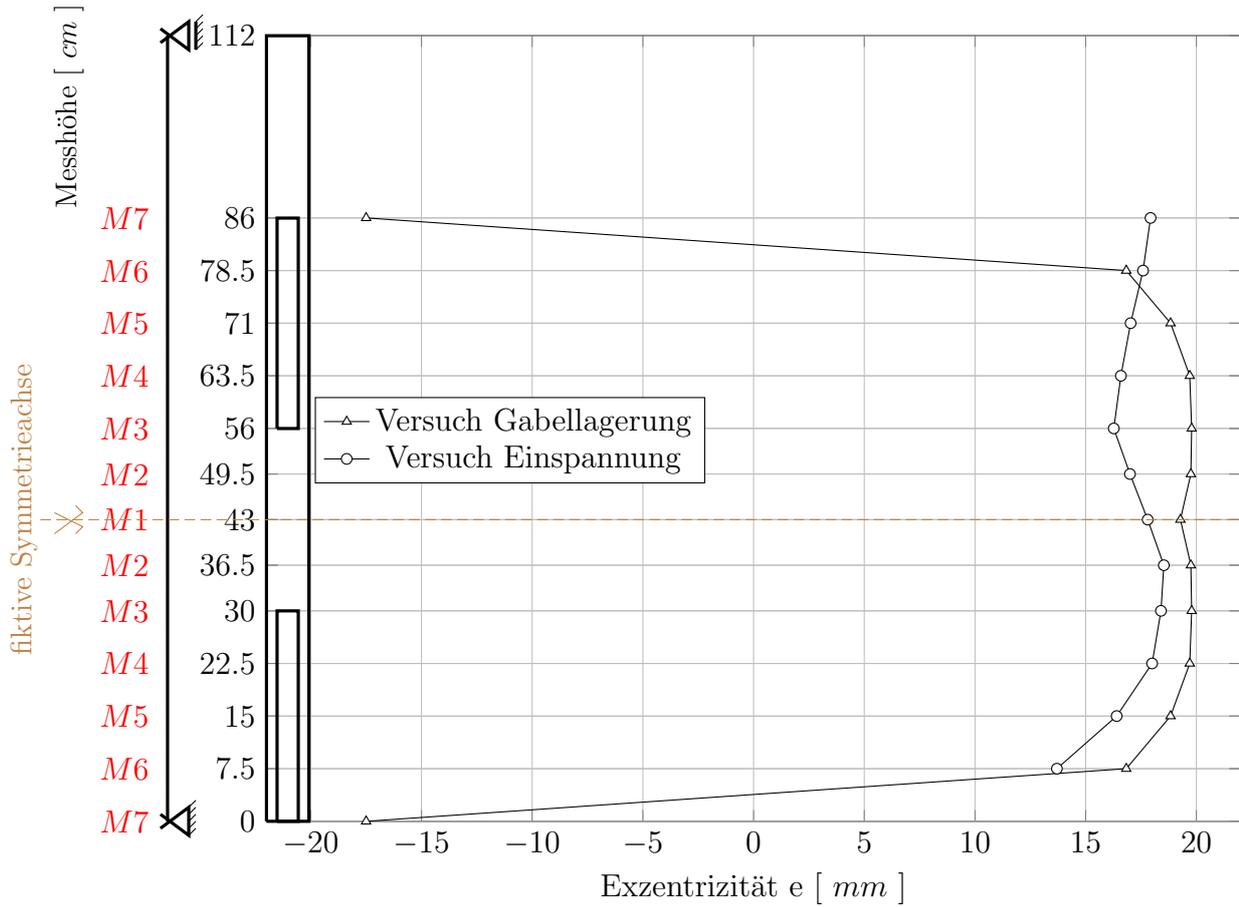


Abbildung 11.6: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 6 (numerisch)

Messpunkt	M7	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2
e [mm] Gabellagerung	-17.50	16.83	18.83	19.70	19.79	19.75	19.28	19.75
e [mm] Einspannung		13.70	16.40	18.00	18.40	18.53	17.80	17.00

Messpunkt	M3	M4	M5	M6	M7
e [mm] Gabellagerung	19.79	19.70	18.83	16.83	-17.50
e [mm] Einspannung	16.27	16.59	17.03	17.59	17.93

Tabelle 11.6: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 6 (numerisch)

Abbildung 11.6 zeigt generell die größten quantitativen Abweichungen der Ergebnisse der Verläufe voneinander. Qualitativ ist aber eine vor allem in der unteren Hälfte eindeutig gleiche Tendenz festzustellen. Die Exzentrizität nimmt bei beiden Verläufen gleichermaßen zur Einspannung bzw. zum Auflager hin ab.

### 11.8 Probekörper 7

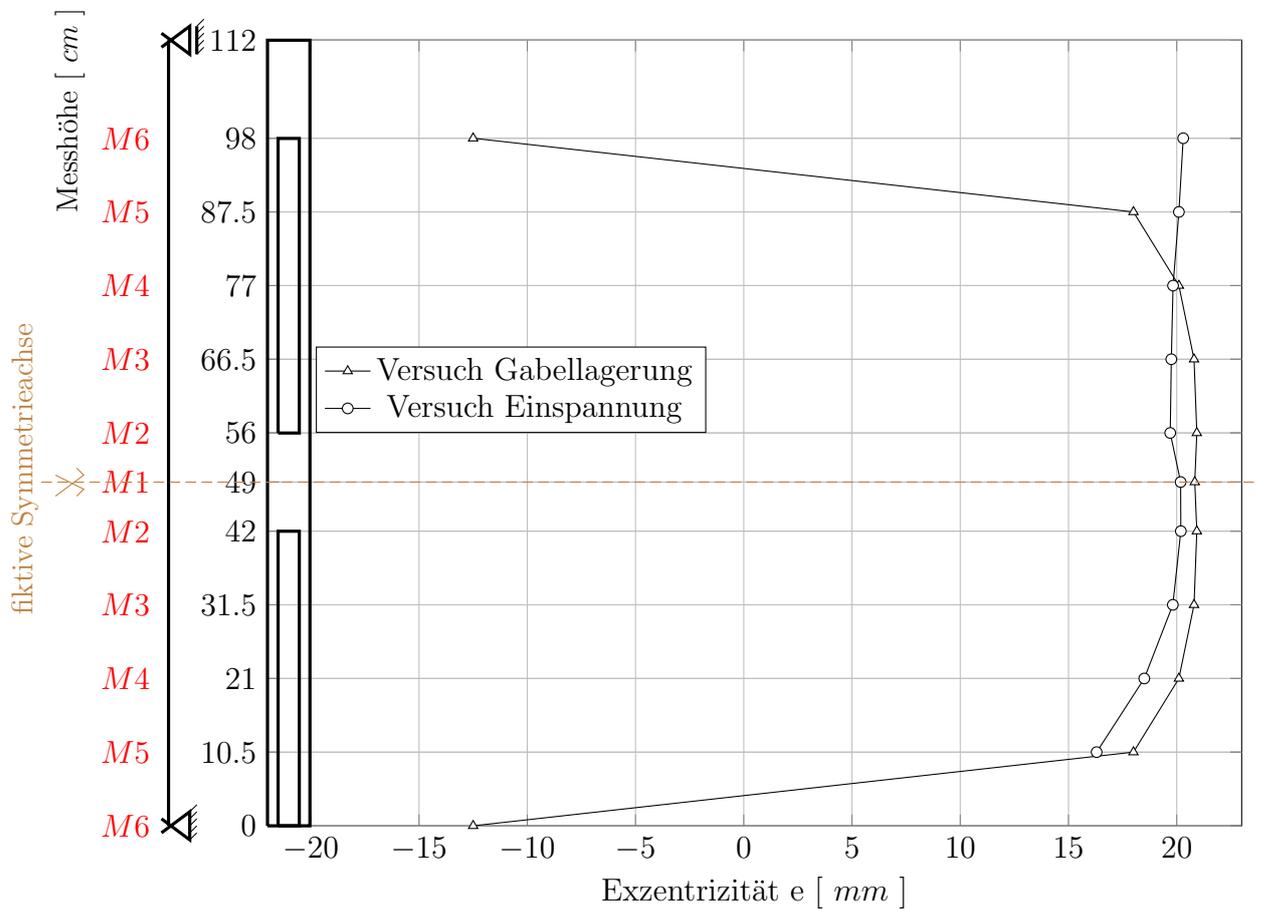


Abbildung 11.7: Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 7 (numerisch)

Messpunkt	M6	M5	M4	M3	M2	M1	M2	M3
e [mm] Gabellagerung	-12.50	18.00	20.10	20.80	20.93	20.83	20.93	20.80
e [mm] Einspannung		16.30	18.50	19.82	20.19	20.18	19.70	19.75

Messpunkt	M4	M5	M6
e [mm] Gabellagerung	20.10	18.00	-12.50
e [mm] Einspannung	19.83	20.10	20.30

Tabelle 11.7: Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 7 (numerisch)

Die Ergebnisse des Probekörpers 7 aus den numerischen Simulationen sind in Abbildung 11.7 ersichtlich. Wie bei Probekörper 6 liegen die Ergebniswerte etwas weiter auseinander, obgleich diese Abweichungen wieder nur im Millimeterbereich liegen. Das Verhalten der Verläufe in der unteren Hälfte ab Messpunkt  $M1$  ist qualitativ sehr ähnlich und zeigt auch eine offensichtlich richtige Modellierung des Versuchs mit Gabellagerung.

# Kapitel 12

## Vergleich und Résumé der Versuche

### 12.1 Vergleich mit den Ergebnissen nach Becker

In der in Kapitel 2.1 vorgestellten Arbeit von GERHARD BECKER wird in einem Zahlenbeispiel für einen einfachsymmetrischen Querschnitt nach der Berechnung der Verformungen auch auf die Lage des Drillruhepunktes, heute als Schubmittelpunkt bezeichnet, eingegangen. Über die Querverschiebungen an der Stelle des Riegels, also an der Stelle der Öffnung, und über die auf der gegenüberliegenden Seite liegende Querverschiebung wird über einen linearen Zusammenhang die Lage des Drillruhepunktes bestimmt.

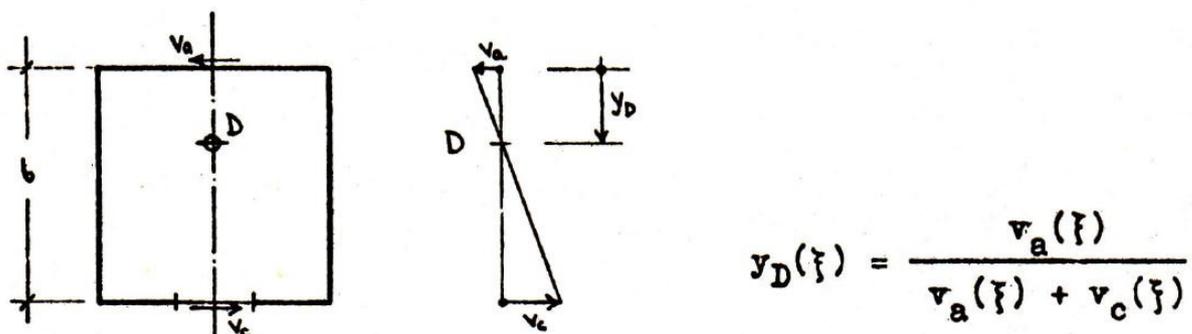


Abbildung 12.1: Querverschiebungen  $v_a$  und  $v_b$  und Drillruhepunktsermittlung [7]

BECKER führt in seiner Arbeit an, dass die Verschiebungen  $v_a$  und  $v_b$  nicht affin sind,

wodurch der Drillruhepunkt entlang der  $x$ -Achse nicht auf einer Geraden liegen kann. Die folgende Abbildung zeigt diesen Sachverhalt. Der Wert  $\xi$  ist als Verhältnis  $\frac{x}{l}$  definiert,  $\frac{y_d}{b}$  ist das Verhältnis des Abstandes von  $D$  zur oberen Scheibe zur Breite bzw. Tiefe des Querschnitts und  $l$  ist die Länge des Profils.

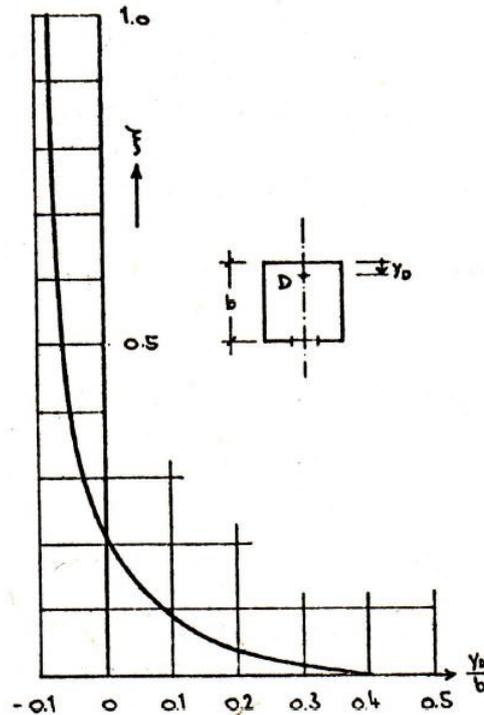


Abbildung 12.2: Verlauf der Lage des Drillruhepunktes

Sehr gut ist zu erkennen, dass sich die Lage des Drillruhepunktes über die Länge ändert. Bei der Einspannung liegt sie nahezu beim Schubmittelpunkt des geschlossenen Querschnitts, je größer  $\xi$  wird, desto weiter wandert auch die Lage des Drillruhepunktes aus dem Querschnitt hinaus. Die Ergebnisse der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten physikalischen Versuche (siehe Kapitel 7) und der numerischen Simulation (siehe Kapitel 8) decken sich mit den Erkenntnissen von BECKER.

Weiters wird in [7] angeführt, dass die Kurve in Abbildung 12.2 für jeden Belastungsfall und jedes Verhältnis der Länge zur Breite bzw. Tiefe  $\frac{l}{b}$  anders aussieht. Dies bedeutet, dass der Drillruhepunkt bei gegliederten Hohlkästen kein Querschnittswert ist, wodurch er laut BECKER praktisch Bedeutungslos ist. Er untermauert diese Aussage auch mit der Tatsache, dass vor dessen Ermittlung die Verformungen berechnet werden müssen.

## 12.2 Résumé der Versuche

Die in den Kapiteln 7 bis 11 angeführten Vergleiche der Versuchsergebnisse legen deutlich die Tatsache auf, dass die Lage des Schubmittelpunktes primär durch die verhinderte Torsion im Auflager beeinflusst wird. Während in den Vergleichsversuchen in [29] eine Änderung der Schubmittelpunktslage bezogen auf die Wandöffnungen zum Teil beobachtet werden konnte, kann in den vorliegenden Versuchen mit einer Gabellagerung darüber keine ausreichende Aussage getroffen werden. Zu beobachten ist jedoch, dass die Einspannung sowie die Gabellagerung eine Veränderung der Schubmittelpunktslage bewirken, je näher der Messpunkt beim Auflager liegt. Diese Erkenntnis ist in fast allen Vergleichen, sei es physikalisch oder numerisch, klar ersichtlich. Diese Beobachtung deckt sich auch mit den Aussagen von BECKER, welche im vorigen Kapitel 12.1 angeführt wurden.

Die Versuche zeigen abgesehen von leichten quantitativen Unterschieden, welche teilweise nur im Millimeterbereich liegen, ein ähnliches Verhalten der Schubmittelpunktslage auf. Qualitativ ist vor allem von Messpunkt  $M1$  abwärts in Richtung des unteren Auflagers eine Ähnlichkeit der Verläufe zu erkennen. Die Auflager, welche sowohl als Einspannung sowie als Gabellagerung eine Verdrehung um die  $x$ -Achse, also eine Torsion, verhindern, dürften aus Sicht des Autors ausschlaggebend für die Lageänderung in Richtung des Schubmittelpunkts des geschlossenen Querschnitts sein. Weitere Aussagen darüber könnten womöglich in Versuchen mit anderen Materialien, anderen Dimensionen der Profile sowie anderen Lasten getroffen werden. Außerdem sei vermerkt, dass im Rahmen dieser Arbeit mit nur einer Software für die numerischen Simulationen gearbeitet wurde. Ein Vergleich der durch RFEM erhaltenen Ergebnisse mit jenen einer anderen Software wäre für die Beurteilung der Ergebnisse aufschlussreich.



# Quellen- und Literaturverzeichnis

- [1] *Formelsammlung zur Vorlesung Baustatik 1*. S.11, 2004/2005.
- [2] <https://www.vulcanhammer.org/2012/11/09/taking-the-last-voyage-with-newton-and-pascal>, Feb. 2014.
- [3] <http://www.zeno.org/Lueger-1904/I/TL080982>, Feb. 2014.
- [4] <http://www.ibb.uni-stuttgart.de/institut/ehemalig/bornscheuer.jpg>, Feb. 2014.
- [5] <http://www.pmw-magazine.com/news.php?NewsID=24698>, Feb. 2014.
- [6] BECK, H., SCHÄFER, H. *Die Berechnung von Hochhäusern durch Zusammenfassung aller aussteifenden Bauteile zu einem Balken*. In: *Der Bauingenieur*, 44:Heft 3:80-87, 1969.
- [7] BECKER, G. *Die Berechnung gegliederter Hohlkästen*. Dissertation, Fachbereich Konstruktiver Ingenieurbau, Technische Hochschule Darmstadt, 1974.
- [8] EILERING, S. *Eine Finite-Elemente-Lösung auf der Basis eines erweiterten eindimensionalen Querschnittselementes für die freie Torsion dünnwandiger prismatischer Stäbe*. In: *Stahlbau*, 74:Heft 12:925-931, 2005.
- [9] EILERING, S. *Zur Berechnung der Wölbfunktion und Torsionskennwerte dünnwandiger Querschnitte von prismatischen Stäben*. In: *Der Bauingenieur*, 80:142-150, 2005.

- [10] EILERING, S. *Zur Berechnung von Torsionsschubspannungen und Wölbschubzahlen an geraden dünnwandigen Stäben.* In: *Der Bauingenieur*, 80:491ff., 2005.
- [11] FRANCKE, W., FRIEMANN, H. *Schub und Torsion in geraden Stäben. Grundlagen - Berechnungsbeispiele.* Vieweg, 3. Auflage, 2005.
- [12] GRUTTMANN, F., WAGNER, W. *Ein Weggrößenverfahren zur Berechnung von Querkraftschubspannungen in dünnwandigen Querschnitten.* In: *Der Bauingenieur*, 76:474-480, 2001.
- [13] KINDMANN, R., KRAUS, M. *FE-Methoden zur Bestimmung der Lage des Schubmittelpunktes dünnwandiger Querschnitte.* In: *Bautechnik*, 84:Heft 10:682-690, 2007.
- [14] KINDMANN, R., KRAUS, M. *Finite-Elemente-Methoden im Stahlbau.* Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, 2007.
- [15] KOCZYK, S., WEESE, W. *FEM-Lösung des Problems der St.-Venantschen Torsion mit Hilfe der Wölbfunktion.* In: *Technische Mechanik*, 12:Heft 2:125-130, 1991.
- [16] KOLLBRUNNER, K.C., BASLER, K. *Torsion.* Springer-Verlag, 1966.
- [17] KURRER, K.-E. *Geschichte der Baustatik.* Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH & Co. KG, Korrigierter Nachdruck, 2003.
- [18] MANG, H., HOFSTETTER, G. UND EBERHARDSTEINER, J. *Festigkeitslehre.* Springer-Verlag Wien, 3. Auflage, 2008.
- [19] PETERSEN, C. *Stahlbau. Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten.* Springer Vieweg, 4. Auflage, 2013.
- [20] ROIK, K. *Vorlesungen über Stahlbau.* Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 2. Auflage, 1983.
- [21] ROIK, K., CARL, J. UND LINDNER, J. *Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe.* Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1972.

- [22] RUBIN, H. *Wölbkrafttorsion von Durchlaufträgern mit konstantem Querschnitt unter Berücksichtigung sekundärer Schubverformungen*. In: *Stahlbau*, 74:Heft 11:826ff., 2005.
- [23] SEESSELBERG, C. *Umdrucke Baustatik II*. 2. Teil, Ausgabe SS 2005, FH München, 2005.
- [24] SPITZENBERGER, E. *Wölbkrafttorsion gemischt offen-geschlossener Querschnitte*. VDM Verlag Dr. Müller, 2008.
- [25] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N. *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill International Book Company, 3. Auflage, 1984.
- [26] VLASOV, V.Z. *Thin-Walled Elastic Beams*. Israel Program for Scientific Translations, 1961.
- [27] WAGNER, W., GRUTTMANN, F. *Ein einheitliches Modell zur Berechnung der Schubspannungen aus St. Venant'scher Torsion in beliebigen Querschnitten prismatischer Stäbe*. In: *Technische Mechanik*, 23:Heft 2-4:251-264, 2003.
- [28] WAGNER, W., SAUER, R., GRUTTMANN, F. *Tafeln der Torsionskenngrößen von Walzprofilen unter Verwendung von FE Diskretisierungen*. Mitteilung 5, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH), 1999.
- [29] ZIERHOFER, R. *Untersuchungen zum Schubmittelpunktsverlauf von Hochhauskernen mit Öffnungsreihen*. Diplomarbeit, Institut für Hochbau und Technologie, Technische Universität Wien, 2014.



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Torsionsversuch an einem Probekörper mit elliptischem Querschnitt [2] . . .	2
1.2	Torsionsversuch an Probekörpern mit rechteckigem Querschnitt [3] . . . . .	3
1.3	Prismatischer Stab durch $M_t$ beansprucht [17] . . . . .	4
1.4	Tabellenwerk von WEISBACH für den Proportionalitätsfaktor $D$ [17] . . . . .	5
1.5	Torsionsversuch an Wellen mit quadratischen und kreisförmigen Querschnitten [17] . . . . .	6
1.6	Fotografien zu BACHs Torsionsversuchen: (a) Stäbe aus Gusseisen, (b) Stab aus Hartblei [17] . . . . .	7
1.7	Auszug aus BACHs Tabellenwerk zu Torsionsversuchen [17] . . . . .	8
1.8	Offenes Profil, aus schmalen Rechtecken zusammengesetzt [17] . . . . .	11
1.9	FRIEDRICH-WILHELM BORNSCHEUER [4] . . . . .	14
1.10	Beispielhafte Darstellung eines Torsionsproblems mit einem FEM-Programm [5] . . . . .	17
2.1	Wahl der Funktion $f_i(s)$ [7] . . . . .	21
2.2	Wahl der Funktion $g_k(s)$ [7] . . . . .	21
2.3	Wahl der Querschnittsfunktionen $f_i(s)$ [7] . . . . .	24
2.4	Transformation von stabachsenparallelen Stabfasern zu Schraubenlinien [18]	32
2.5	Verschiebung $v_t$ eines Elements auf der Profilmittellinie [11] . . . . .	34
2.6	(a) offener Querschnitt, (b) Darstellung durch Profilmittellinie (Maße in mm)	40
2.7	(a) $\zeta$ -Verlauf [mm], (b) $r_t^D$ -Verlauf [mm], (c) $\omega^D(s)$ -Verlauf [mm <sup>2</sup> ] . . . . .	42
2.8	Schubmittelpunkt $M$ (Werte in mm) . . . . .	43
2.9	Gleichgewichtsbeziehungen an einem Querschnittselement [11] . . . . .	45

4.1	Probekörper 3 mit statischem System, Maße in mm . . . . .	54
4.2	Gabellager: (a) fixes Auflager, (b) längenvariables Auflager . . . . .	56
4.3	vertikal verspannte Holzstützen zur Vermeidung der Verschiebungen in $z$ - Richtung . . . . .	58
4.4	Fixierung und vertikale Positionierung der Wegaufnehmer nahe der fiktiven Symmetrieachse . . . . .	60
4.5	Positionierung der Gewichte . . . . .	61
4.6	Montierte Schubflussklemme mit Millimeterabständen . . . . .	62
4.7	(a) Plan Schubflussklemme (in mm) [29], (b) Bestandteile der Schubfluss- klemme [29] . . . . .	64
5.1	Probekörper 3, Maße in mm . . . . .	66
5.2	Einstellen der Exzentrizität $e$ . . . . .	68
5.3	Probekörper 1, Maße in mm . . . . .	71
5.4	Probekörper 2, Maße in mm . . . . .	71
5.5	Probekörper 3, Maße in mm . . . . .	71
5.6	Probekörper 4, Maße in mm . . . . .	71
5.7	Probekörper 5, Maße in mm . . . . .	72
5.8	Probekörper 6, Maße in mm . . . . .	72
5.9	Probekörper 7, Maße in mm . . . . .	72
5.10	Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 1, Maße in mm . . .	73
5.11	Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 2, Maße in mm . . .	73
5.12	Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 3, Maße in mm . . .	74
5.13	Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 4, Maße in mm . . .	74
5.14	Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 5, Maße in mm . . .	75
5.15	Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 6, Maße in mm . . .	75
5.16	Messpunkte und Auflagerpositionierung Probekörper 7, Maße in mm . . .	76
6.1	Modellierung des Probekörpers 3 . . . . .	80
6.2	Größere Darstellung des Mittelbereichs des Probekörpers 3 . . . . .	80
6.3	Überquerung des Schubmittelpunkts (Modell und Verformungen, Blick in $x$ -Richtung) . . . . .	82

7.1	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 1 aus physikalischem Versuch . . . .	84
7.2	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 2 aus physikalischem Versuch . . . .	86
7.3	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 3 aus physikalischem Versuch . . . .	87
7.4	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 4 aus physikalischem Versuch . . . .	88
7.5	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 5 aus physikalischem Versuch . . . .	89
7.6	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 6 aus physikalischem Versuch . . . .	90
7.7	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 7 aus physikalischem Versuch . . . .	91
7.8	Übersicht der Schubmittelpunktsverläufe aus physikalischen Versuchen . .	92
8.1	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 1 aus numerischer Simulation . . .	96
8.2	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 2 aus numerischer Simulation . . .	98
8.3	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 3 aus numerischer Simulation . . .	99
8.4	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 4 aus numerischer Simulation . . .	100
8.5	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 5 aus numerischer Simulation . . .	101
8.6	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 6 aus numerischer Simulation . . .	102
8.7	Schubmittelpunktsverlauf Probekörper 7 aus numerischer Simulation . . .	103
8.8	Übersicht der Schubmittelpunktsverläufe aus numerischen Simulationen . .	104
9.1	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 1 . . . . .	108
9.2	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 2 . . . . .	110
9.3	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 3 . . . . .	111
9.4	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 4 . . . . .	113
9.5	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 5 . . . . .	114
9.6	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 6 . . . . .	116
9.7	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 7 . . . . .	117
10.1	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 1 (physikalisch) . . .	120
10.2	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 2 (physikalisch) . . .	122
10.3	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 3 (physikalisch) . . .	123
10.4	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 4 (physikalisch) . . .	125
10.5	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 5 (physikalisch) . . .	126
10.6	Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 6 (physikalisch) . . .	128

10.7 Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 7 (physikalisch) . . .	129
11.1 Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 1 (numerisch) . . . .	133
11.2 Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 2 (numerisch) . . . .	135
11.3 Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 3 (numerisch) . . . .	137
11.4 Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 4 (numerisch) . . . .	139
11.5 Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 5 (numerisch) . . . .	140
11.6 Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 6 (numerisch) . . . .	142
11.7 Vergleich der Schubmittelpunktsverläufe Probekörper 7 (numerisch) . . . .	143
12.1 Querverschiebungen $v_a$ und $v_b$ und Drillruhepunktslageermittlung [7] . . .	145
12.2 Verlauf der Lage des Drillruhepunktes . . . . .	146

# Tabellenverzeichnis

5.1	Auflagerabstände und Abmessungen der Probekörper im Versuchsstand, Maße in mm . . . . .	77
6.1	Materialparameter von Hart-PVC [29] . . . . .	80
7.1	Ergebniswerte Probekörper 1 aus physikalischem Versuch . . . . .	85
7.2	Ergebniswerte Probekörper 2 aus physikalischem Versuch . . . . .	86
7.3	Ergebniswerte Probekörper 3 aus physikalischem Versuch . . . . .	87
7.4	Ergebniswerte Probekörper 4 aus physikalischem Versuch . . . . .	88
7.5	Ergebniswerte Probekörper 5 aus physikalischem Versuch . . . . .	89
7.6	Ergebniswerte Probekörper 6 aus physikalischem Versuch . . . . .	90
7.7	Ergebniswerte Probekörper 7 aus physikalischem Versuch . . . . .	91
8.1	Ergebniswerte Probekörper 1 aus numerischer Simulation . . . . .	97
8.2	Ergebniswerte Probekörper 2 aus numerischer Simulation . . . . .	98
8.3	Ergebniswerte Probekörper 3 aus numerischer Simulation . . . . .	99
8.4	Ergebniswerte Probekörper 4 aus numerischer Simulation . . . . .	100
8.5	Ergebniswerte Probekörper 5 aus numerischer Simulation . . . . .	101
8.6	Ergebniswerte Probekörper 6 aus numerischer Simulation . . . . .	102
8.7	Ergebniswerte Probekörper 7 aus numerischer Simulation . . . . .	103
9.1	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 1 . . . . .	109
9.2	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 2 . . . . .	110
9.3	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 3 . . . . .	112
9.4	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 4 . . . . .	113

9.5	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 5 . . . . .	115
9.6	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 6 . . . . .	116
9.7	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 7 . . . . .	118
10.1	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 1 (physikalisch) . . . . .	121
10.2	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 2 (physikalisch) . . . . .	122
10.3	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 3 (physikalisch) . . . . .	124
10.4	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 4 (physikalisch) . . . . .	125
10.5	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 5 (physikalisch) . . . . .	127
10.6	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 6 (physikalisch) . . . . .	128
10.7	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 7 (physikalisch) . . . . .	130
11.1	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 1 (numerisch) . . . . .	134
11.2	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 2 (numerisch) . . . . .	136
11.3	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 3 (numerisch) . . . . .	138
11.4	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 4 (numerisch) . . . . .	139
11.5	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 5 (numerisch) . . . . .	141
11.6	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 6 (numerisch) . . . . .	142
11.7	Vergleich der Ergebniswerte Probekörper 7 (numerisch) . . . . .	144