



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

Diplomarbeit

Asset Allocation über den Lebenszyklus: Ein Binomialmodell mit Einkommen, Sterblichkeit und Bayes'schem Updating

Ausgeführt am

Intstitut für Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

und

Ao.Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.rer.soc.oec. Dr.techn. Thomas Dangl

durch

Thomas Koblichke, BSc.

Martinstraße 36/7
1180 Wien

Danksagung

Ich bedanke mich bei Hrn. Professor Hubalek und Hrn. Professor Dangl für ihre Geduld und die gute Betreuung.

Besonderer Dank gilt meinen Eltern Rudolf und Renate, und Geschwistern Dagmar und Robert, die mir stets Vorbilder waren und mich, sowie meine Freundin Alice, immer unterstützen.

Weiters danke ich meinen Studienkollegen und Freunden Harald Vybiral, Lukas Breiteneder, Lilli Chen und Clemens Grünwald, deren Freundschaft und Zusammenarbeit während der Studienzeit mir in guter Erinnerung bleiben wird.

Vielen Dank!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Mathematische Grundlagen und Annahmen	7
2.1	Budgetbeschränkungen	7
2.1.1	Das Lebenszyklusmodell	7
2.1.2	Einkommensfunktion	7
2.1.3	Vermögensstruktur	9
3	Das Konzept der Nutzenfunktion	11
3.1	Risikoaversion	11
3.2	Die CRRA-Nutzenfunktion	12
4	Das Marktmodell	15
4.1	Veranlagungsmöglichkeiten	15
4.2	Das Black-Scholes Modell	18
4.3	Das Binomialmodell	20
4.3.1	Das Cox-Ross-Rubinstein Binomialmodell	21
4.3.2	Die Bayes'sche Formel und dessen Anwendung im CRR-Binomialbaum	24
5	Optimale Portfolios und dynamische Programmierung	33
5.1	Konsum-Investment und dynamische Programmierung	33
5.2	Dynamische Programmierung im Binomialmodell	36
6	Dynamische Programmierung im Binomialmodell mit erweiterter Parametrisierung und Bayesian Updating	43
	Ergebnisse	53
6.1	Fall 1: Klassische Parameterwahl nach Stanley R. Pliska	53
6.2	Fall 2: Mit Sterblichkeit und Vererben	64
6.3	Fall 3: Mit Arbeitseinkommen	69
6.4	Fall 4: Mit hoher relativer Risikoverversion	76
6.5	Fall 5: Mit Bayes'schem Updating	79
7	Conclusio	93
8	Anhang	95
8.1	Sterbetafel	95
8.2	Programmcodes	96

8.2.1	einkommensfit.R	96
8.2.2	OptimalAssetAllocation.R	97

Abbildungsverzeichnis

2.1.1	Einkommensfunktion des durchschnittlichen Arbeitseinkommens über den Lebenszyklus	9
3.2.1	CRRA-Nutzenfunktion zu verschiedenen Werten von Gamma	13
4.3.1	Entwicklung eines Aktienpreises im CRR-Binomialmodell	24
6.1.1	CRRA-Nutzenfunktion eines log-utility-Investors	55
6.1.2	Wertefunktionen V_t für verschiedene Zeitpunkte zwischen 0 und T	56
6.1.3	Konsumstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen	56
6.1.4	Optimaler Konsum eines log-utility-Investors	57
6.1.5	Aktienanteil des log-utility-Investors	58
6.1.6	Optimale Handelsstrategie eines log-utility-Investors	59
6.1.7	Handelsstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen	59
6.1.8	Vermögensverlauf bei logarithmischem Nutzen	60
6.1.9	Wertefunktion bei relativer Risikoaversion $\gamma=2,5$	61
6.1.10	Wertefunktion bei $\gamma=2,5$ zu unterschiedlichen Zeitpunkten	62
6.1.11	Optimale Handelsstrategie bei $\gamma=2,5$	63
6.1.12	Aktienanteil bei $\gamma=2,5$	63
6.2.1	CRRA-Nutzenfunktion zum Zeitpunkt 0 bei Sterblichkeit und Vererben	64
6.2.2	Wertefunktionen V_t für verschiedene Zeitpunkte zwischen 0 und T	65
6.2.3	Konsumstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen	65
6.2.4	Optimale Konsumstrategie bei Sterblichkeit und Vererben	66
6.2.5	Optimale Handelsstrategie bei Sterblichkeit und Vererben	66
6.2.6	Aktienanteil bei Sterblichkeit und Vererben	67
6.2.7	Handelsstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen	67
6.2.8	Cash-on-Hand bei Sterblichkeit und Vererben	68
6.2.9	Sparquote bei Sterblichkeit und Vererben	68
6.3.1	Wertefunktionen V_t für verschiedene Zeitpunkte zwischen 0 und T	69
6.3.2	Konsumstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen bei Arbeitseinkommen	70
6.3.3	Optimale Konsumstrategie bei Arbeitseinkommen bei Arbeitseinkommen	71

6.3.4	Konsumquote bei Arbeitseinkommen	72
6.3.5	Aktienanteil bei Arbeitseinkommen	72
6.3.6	Optimale Handelsstrategie bei Arbeitseinkommen	73
6.3.7	Handelsstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen bei Arbeitseinkommen	73
6.3.8	Cash-on-Hand bei Arbeitseinkommen	74
6.3.9	Wealth-Income-Ratio bei Arbeitseinkommen	74
6.3.10	Sparquote bei Arbeitseinkommen	75
6.4.1	Aktienanteil bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$	76
6.4.2	Konsumstrategie bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$	77
6.4.3	Cash-on-Hand bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$	77
6.4.4	Wealth-Income-Ratio bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$	78
6.4.5	Sparquote bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$	78
6.5.1	Übergangswahrscheinlichkeiten im Bayes-Binomialbaum	79
6.5.2	Vermögensnutzenfunktion zum Alter 40	80
6.5.3	Vermögensnutzenfunktion zum Pensionsalter	80
6.5.4	Vermögensnutzenfunktion zum Alter 80	81
6.5.5	Vermögensnutzenfunktion zum Endalter	81
6.5.6	Handelsstrategiefunktionen zum Alter 40	82
6.5.7	Handelsstrategiefunktionen zum Pensionsalter	82
6.5.8	Handelsstrategiefunktionen zum Alter 80	83
6.5.9	Handelsstrategiefunktionen zum Endalter	83
6.5.10	Konsumstrategiefunktionen zum Alter 40	84
6.5.11	Konsumstrategiefunktionen zum Pensionsalter	84
6.5.12	Konsumstrategiefunktionen zum Alter 80	85
6.5.13	Konsumstrategiefunktionen zum Endalter	85
6.5.14	Vermögensnutzenfunktionen für verschiedene Zeitpunkte im Lebenszyklus	86
6.5.15	Handelsstrategiefunktionen für verschiedene Zeitpunkte im Lebenszyklus	86
6.5.16	Konsumstrategiefunktionen für verschiedene Zeitpunkte im Lebenszyklus	87
6.5.17	Optimale Konsumstrategie unter Bayes'schem Updating	88
6.5.18	Optimale Handelsstrategie unter Bayes'schem Updating	89
6.5.19	Aktienanteil unter Bayes'schem Updating	89
6.5.20	Cash-on-Hand unter Bayes'schem Updating	90
6.5.21	Wealth-Income-Ratio unter Bayes'schem Updating	91
6.5.22	Sparquote unter Bayes'schem Updating	91
6.5.23	Konsumquote unter Bayes'schem Updating	92

1 Einleitung

Das Thema Vorsorge steht auf Grund der unsicheren wirtschaftlichen Lage der letzten Jahre immer mehr im Vordergrund bei der finanziellen Planung von Einzelpersonen und Familien. Während man einerseits vom Sinken der Ersatzraten in der staatlichen Altersvorsorge spricht, sowie von privaten und betrieblichen Pensionsvorsorgesystemen, wo durch die wirtschaftlich schweren Rahmenbedingungen nicht erreicht werden konnte, was zu Zeiten wirtschaftlichen Aufschwungs versprochen wurde, ist man ebenso dazu gezwungen eine unerwartete Verschlechterung des Arbeitseinkommens zu berücksichtigen. Anleger stehen also mehr denn je vor dem Problem der optimalen Verwaltung des individuellen privaten Finanzhaushaltes.

Problemstellung dieser Diplomarbeit ist die sinnvolle und optimale Zuteilung des vorhandenen Vermögens eines einzelnen Investors auf seine Anlagemöglichkeiten („Assets“). Der Investor entscheidet dabei über die Auswahl der einzelnen Portfoliokomponenten aus einem Investment-Opportunity-Set (i.e. die Gesamtheit aller zur Verfügung stehenden Investitionsmöglichkeiten). Ziel ist es, ausgehend von einem risikolosen, sowie eines riskanten Assets, mittels einer geeigneten Konsum- und Investmentstrategie den Erwartungsnutzen des Vermögens durch eine optimale Asset Allocation (i.e. die Zusammensetzung des Portfolios, die über den Risiko- und Ertrags-Charakter des Portfolios entscheidet) über den gesamten Lebenszyklus zu maximieren. Als Modell für die Entwicklung des Aktienpreisprozesses wird dazu das CRR-Binomialmodell verwendet.

Grundlegend für die Zusammenstellung des vorhandenen Vermögens ist dabei einerseits das aus vorigen Perioden erwirtschaftete Vermögen aus Arbeits- und Kapitaleinkommen, andererseits der Konsum in jeder dieser Perioden. Des Weiteren spielt auch das Motiv, seinen Nachkommen ein gewisses Erbe hinterlassen zu wollen, eine spezielle Rolle, die wir berücksichtigen werden. Bestehende Modelle, wie sie bereits in den Arbeiten von Stanley R. Pliska [16], Cocco/Gomes/Maenhout [7], Bodie/Zvi/Merton/Samuelson [6], etc. eingeführt wurden, gehen von einem konstanten Investment-Opportunity-Set aus. Wir wollen in dieser Diplomarbeit die Annahme eines konstanten und bekannten Investitionsumfeldes lockern, indem wir die Übergangswahrscheinlichkeiten im CRR-Binomialbaum in jedem Zustand durch Bayes'sches Updating anpassen, und somit eine zusätzliche Dynamik bei der optimalen Asset Allocation erzeugen.

In den nächsten Kapiteln werden zunächst die mathematischen Grundlagen vorgestellt, die für die Berechnungen nötig sein werden. In Kapitel 2 legen wir zuerst die Vermögensstruktur des Investors und dessen Budgetbeschränkungen fest. Der Nutzen, den dieser Investor aus dem Vermögen schöpft, soll einer CRRA-Nutzenfunktion folgen, dessen Eigenschaften wir in Kapitel 3 definieren und näher beschreiben.

Das Kapitel 4 beschäftigt sich mit dem Marktmodell, welches das Fundament für unsere späteren Berechnungen bildet. Das CRR-Binomialmodell soll hier für die Wertentwicklung des riskanten Assets in diskreter Zeit erläutert, und im nächsten Schritt durch das Konzept des Bayes'schen Updatings (bzw. Bayes'schen Lernens) für die Aktualisierung der Wahrscheinlichkeiten im Binomialbaum erweitert werden.

Wie das Problem der optimalen Asset Allocation unter vereinfachten Annahmen von Stanley R. Pliska in [16] bereits gelöst wurde, wird in Kapitel 5 beschrieben. Hier wird mittels dynamischer Programmierung die nutzenoptimierende Konsum- und Investmentstrategie für jeden Zustand auf analytischem Wege bestimmt. Da dies durch die Betrachtung des Aktienpreisprozesses im CRR-Binomialbaum mit Bayes'schem Updating jedoch nicht mehr möglich ist, wird in Kapitel 6 die dynamische Programmierung für das erweiterte Problem erklärt, und in Anlehnung an [7] eine Lösung auf numerischem Wege beschrieben, um die optimale Konsum- und Investmentstrategie zu bestimmen. Hierfür wird das Statistikprogramm *R-Project* verwendet, um die Berechnungen durchzuführen und entsprechende Ergebnisse zu erzeugen, die für verschiedene betrachtete Fälle diskutiert werden. Abschließend wollen wir unsere gewonnenen Erkenntnisse aus den Berechnungsergebnissen zusammenfassen.

2 Mathematische Grundlagen und Annahmen

2.1 Budgetbeschränkungen

2.1.1 Das Lebenszyklusmodell

Ein rational- und vorausdenkender Mensch ist nicht nur bemüht seinen Wohlstand im jetzigen Moment zu vergrößern, sondern auch den Nutzen seines Konsums (bzw. Sparens) - je nach individueller Ansprüche und Präferenzen - über seine gesamte Lebensdauer zu maximieren. Er will also in jedem Lebensabschnitt und Investitionszeitpunkt jene Entscheidungen treffen, die ihm den größten Erwartungsnutzen über die Lebensdauer bringen. Dies, aber auch Faktoren wie die Notwendigkeit seinen Lebensunterhalt auch nach dem Ende der Erwerbstätigkeit finanzieren zu können, erfordern, dass die zukünftige Entwicklung von Arbeitseinkommen, Vermögen, Konsumverhalten, etc., berücksichtigt wird. Hierin stecken jedoch viele Unsicherheiten, wie zum Beispiel eine unerwartete Verschlechterungen des Arbeitseinkommens (sogenannte „Einkommensshocks“), Mortalität, Aktienpreisentwicklungen, etc., die durch geeignete Modellierungen möglichst gut dargestellt werden sollen.

2.1.2 Einkommensfunktion

Wie schon in den Arbeiten von Bodie/Zvi/Merton/Samuelson [6], sowie von Cocco/Gomes/Maenhout [7] beschrieben wurde, spielt das Arbeitseinkommen eine wichtige Rolle in den Investitionsentscheidungen eines („Klein“-) Anlegers. Diesen Werken zufolge hängt die Höhe des Vermögensanteils, der in riskante Assets investiert wird, nicht unwesentlich vom Risiko der zukünftigen Arbeitseinkommen ab. Denn umso jünger man ist, und umso mehr Jahre man mit einem gewissen Einkommen rechnen darf, desto eher kann man mögliche Investitionsverluste mit zukünftiger Arbeit ausgleichen. In diesen Werken wird auch das Konzept des „Humankapitals“, also der Summe aller zum Betrachtungszeitpunkt diskontierten Arbeitseinkünfte, vorgestellt. Die Bedeutung des Arbeitseinkommens wird dadurch noch größer, wenn man eine Flexibilität an Arbeits- und Freizeitaufteilung annimmt (siehe [6]). Weiters können unerwartete Veränderungen des Einkommens angenommen werden. Werden diese „Shocks“ in den Prognosen berücksichtigt, führen sie zu einem geringeren Ausgleichspotenzial in der Zukunft, somit zu einer geringeren Risikobereitschaft zum Zeitpunkt der Asset Allocation. Also ergeben sich mit dem Alter und dem Risiko der unerwarteten Einkommensverschlechterung zwei Faktoren, mit denen der riskante Anteil an

Assets negativ korreliert.

Im Folgenden wird das Risiko oben erwähnter Shocks vernachlässigt und eine deterministische Einkommensstruktur für die Funktion des Arbeitseinkommens angenommen. Ausgangspunkt für die Bestimmung einer möglichst realitätsnahen Einkommensentwicklung sind die altersabhängigen jährlichen Personeneinkommen, die von der Statistik Austria bekannt gegeben wurden¹. Betrachtet wird die Gruppe der gesamten unselbständig Erwerbstätigen. Die jährlichen Nettoeinkünfte sind für Kohorten mit einer Breite von jeweils 10 Jahren zusammengefasst dargestellt, und von diesen der Durchschnitt und Median angegeben:

Alter	Anzahl Personen	Median	arithm. Mittel
bis 19 Jahre	179.371	1.422	3.878
20 bis 29 Jahre	927.076	14.424	13.682
30 bis 39 Jahre	934.871	18.894	19.444
40 bis 49 Jahre	1.122.786	21.143	23.362
50 bis 59 Jahre	760.123	23.105	26.312
60 und älter	80.521	28.952	38.417
insgesamt	4.004.748	18.529	20.197

Tabelle 1: Jährliche Personeneinkommen der Statistik Austria für das Jahr 2011

Für die Erstellung einer repräsentativen Einkommensfunktion wird nun angenommen, dass die hier angegebenen durchschnittlichen Jahreseinkommen für die jeweiligen Kohorten das durchschnittliche Jahreseinkommen der Personen mit dem Durchschnittsalter der jeweiligen Kohorte ist. Bei der Gruppe „bis 19 Jahre“ wird als durchschnittliches Alter 18 angenommen, da es nicht viele jüngere Erwerbstätige gibt, und 62 bei der Gruppe „60 und älter“, auf Grund des frühen Durchschnittspensionsalters in Österreich. Wir erhalten somit Daten, die wir als Stützstellen für eine quadratische Regressionsfunktion verwenden können. Durchgeführt wird diese Berechnung (mit dem Titel „einkommensfit.R“²) in R-Project mit Hilfe der Funktion „lm“ (kurz für „linear models“).

Die Funktion wird für die deterministischen Einkommen der Alter 20 bis 65 ausgewertet. Ab dem Pensionsalter von 65 Jahren tritt ein Einkommens-

¹Zuletzt wurden statistische Erhebungen zu Jahres-Personeneinkommen aus dem Jahr 2011 bekannt gegeben, welche für die Berechnungen der Einkommensfunktion verwendet wurden.

²Für den Programmcode siehe Anhang.

shock ein, und es werden 60% des letzten Gehalts als Erwerbstätiger als das Einkommen für die Jahre bis zum Endalter 100 angenommen. Diese Annahmen entsprechen der allgemeinen österreichischen Gehaltsstruktur über den Lebenszyklus.

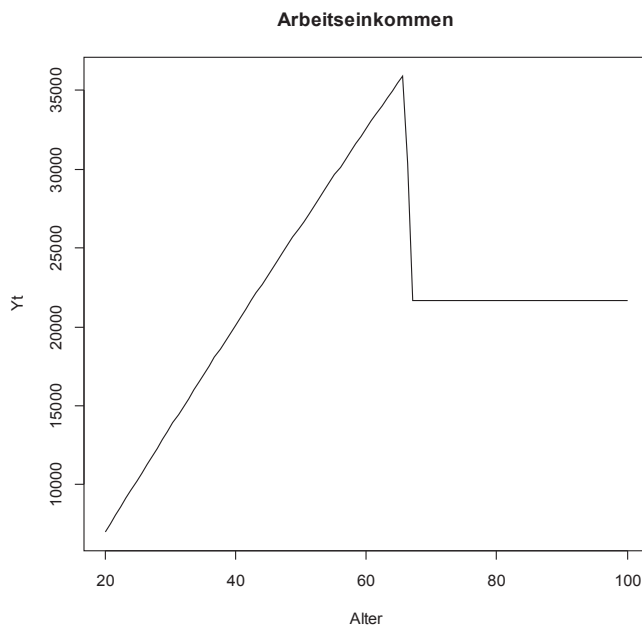


Abbildung 2.1.1: Einkommensfunktion des durchschnittlichen Arbeitseinkommens über den Lebenszyklus

2.1.3 Vermögensstruktur

Das Vermögen des Investors spielt bei den Untersuchungen der Nutzenmaximierung eine zentrale Rolle. Es setzt sich wie folgt aus mehreren Komponenten zusammen (siehe [7], Seite 497, 2. Abs.): Der Investor startet in jedem Zeitabschnitt t mit einem Vermögen W_t . Hinzu kommt das in Periode t verdiente Arbeitseinkommen Y_t , sodass insgesamt $W_t + Y_t$ zur Verfügung stehen. Nun muss der Investor entscheiden, wie viel er davon konsumiert (also den Konsum C_t), und teilt das übrige Vermögen anschließend auf in das Asset, bzw. das Bankkonto B_t . Investiert der Anleger eine Anzahl von H_{t+1} Stück in das Asset mit einem Wert von S_t , dann werden die restlichen $W_t + Y_t - C_t - H_{t+1} \cdot S_t$ in das Bankkonto gelegt. Das Vermögen entwickelt

sich dann bis zum nächsten Zeitpunkt $t + 1$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 W_{t+1} &= (W_t + Y_t - C_t - H_{t+1} \cdot S_t) \frac{B_t}{B_{t-1}} + H_{t+1} \cdot S_{t+1} \\
 &= (W_t + Y_t - C_t) \frac{B_t}{B_{t-1}} + H_{t+1} (S_{t+1} - S_t \frac{B_t}{B_{t-1}}) \\
 &= (W_t + Y_t - C_t) \frac{B_t}{B_{t-1}} + H_{t+1} \cdot S_t (\Delta R_{t+1} - r)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei Y_t den Einkommensprozess, C_t den Konsumprozess und r der konstante Return (Zinssatz) aus dem Bankkonto B_t darstellt. H_{t+1} beschreibt die Anteile am riskanten Asset, die im Zeitabschnitt $(t, t + 1]$ gehalten werden und einen Return ΔR_{t+1} bringen.

In den folgenden Kapiteln wird nochmals näher auf die eben verwendeten Variablen eingegangen.

Im Lebenszyklusmodell ist es das Ziel nun über das gesamte Leben zu maximieren. Dazu wird die Lebensnutzenfunktion betrachtet, die sich aus der Summe der einzelnen Nutzenfunktionen jeder Periode bis zum Endalter ω ergibt. Zukünftige Vermögenswerte werden mit einem Zeitpräferenzparameter ρ gewichtet, die zu einer Abwertung $\delta = \frac{1}{1+\rho}$ führen. Man steht also vor folgendem Maximierungsproblem:

$$\text{maximiere } \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{\omega} \frac{U(C_t)}{(1 + \rho)^t} \right]$$

wobei man bei einem hohen Wert von ρ von einem ausgabefreudigen (bzw. bei einem niedrigen Wert von ρ von einem sparsfreudigen) Investor spricht.

3 Das Konzept der Nutzenfunktion

Bei der Entscheidungsfindung im Optimierungsproblem geht es uns nicht nur um die Anhäufung von Vermögen aus Arbeits- und Kapitaleinkommen, sondern darum den Nutzen, den man entweder dem Anlegen, bzw. Konsumieren, seines Vermögens zuordnet, zu maximieren. Um für dieses Problem eine Lösung finden zu können, bedarf es einerseits einer Konsumfunktion, welche die Konsumpräferenzen des Investors möglichst gut widerspiegelt, sowie einer geeigneten Nutzenfunktion, die, abhängig von Konsum- und Vermögensprozess, ein Maß für den mit dem Konsum verbundenen Nutzen ist. Der Nutzen, der durch eine solche Funktion ausgegeben wird, lässt sich nicht objektiv mit absoluten Zahlen quantifizieren, sondern dient lediglich zur ordinalen Messbarkeit für den Nutzen verschiedener Inputwerte auf subjektiver Ebene. Die Maximierung des Erwartungsnutzen im Optimierungsproblem ist eine Erkenntnis der wissenschaftlichen Entscheidungslehre und beruht auf den Arbeiten von Bernoulli [4], Ramsey [18] und Von Neumann und Morgenstern [21].

3.1 Risikoaversion

Für den Verlauf der Nutzenfunktion ist letztendlich die Risikobereitschaft des Investors, bzw. seine Risikoaversion, entscheidend.

Risikoaversion ist ein Begriff aus der Entscheidungstheorie, und bezeichnet die Eigenschaft eines Investors, bei Risiken mit dem gleichen Erwartungswert, die weniger riskante Option zu wählen. Für einen risikoaversen Investor mit Nutzenfunktion $U(x)$ gilt folgende formale Definition:

$$\mathbb{E}[U(w)] < U(\mathbb{E}[w]) \tag{3.1}$$

Dreht man in dieser Gleichung die Relation um, so spricht man von einem risikofreudigen Investor, bzw. von einem risikoneutralen Investor bei Gleichheit der beiden Seiten.

Ein Maß für die Risikoaversion ist das nach Kenneth Arrow und John Pratt benannte Arrow-Pratt-Maß. Ist $U(x)$ eine zweimal differenzierbare, monoton steigende Nutzenfunktion, dann ist das Arrow-Pratt-Maß für die absolute

Risikoaversion $ARA(x)$ durch

$$ARA(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}, \quad (3.2)$$

sowie für die relative Risikoaversion $RRA(x)$ durch

$$RRA(x) = -\frac{U''(x) \cdot x}{U'(x)}, \quad (3.3)$$

definiert (siehe [15], S. 20). Die $RRA(x)$ entspricht der Elastizität des Grenznutzens bezüglich dem möglichen Vermögen, welche eine Änderung der Risikobereitschaft bei veränderten möglichen Vermögen aus der Entscheidung ausdrückt. Ist das Maß der relativen Risikoaversion konstant, so wird der Entscheider bei einer homogenen Transformation aller möglichen Vermögen den Anteil seines riskant veranlagten Vermögens nicht ändern³.

3.2 Die CRRA-Nutzenfunktion

Der Begriff Nutzen kann auch als der Grad der Bedürfnisbefriedigung identifiziert werden. So kann man beispielsweise sagen, dass eine Person im Allgemeinen einem höheren Konsum (oder Vermögen) eine höhere Zufriedenheit, und somit einen höheren Nutzen, zuordnet. Der Verlauf der Nutzenfunktion ist demnach streng monoton steigend, also ist $U'(x) > 0$ für alle $x > 0$ ⁴.

Ein weiteres Merkmal des Nutzens ist jedoch, dass ab einem gewissen Zeitpunkt (oder Wert) ein Sättigungseffekt eintritt. So wird die Zufriedenheit bei steigendem Konsum zwar größer, die Zunahme der Bedürfnisbefriedigung aus zusätzlichem Konsum nimmt jedoch ab. Zum Beispiel hat für jemanden, der bereits viel konsumiert hat, ein zusätzlicher Konsum nur eine geringe Zufriedenheitssteigerung im Gegensatz zu jemandem, der wenig - oder gar keinen - Konsum in Anspruch genommen hat. Geometrisch spiegelt sich dieser Sättigungseffekt in der Konkavität der Nutzenfunktion und der Eigenschaft $U''(x) < 0$ für alle $x > 0$ wider, und wird auch als abnehmender Grenznutzen bezeichnet (siehe [9], S. 11).

³Für nähere Erläuterungen siehe [17], sowie [1].

⁴Die Bedingung $x > 0$ wird zusätzlich gefordert. In weiterer Folge wird diese Variable mit dem Konsum, bzw. Vermögen, eines Investors identifiziert, die in unseren Überlegungen beide nur unter der Bedingung $x > 0$ relevant sind.

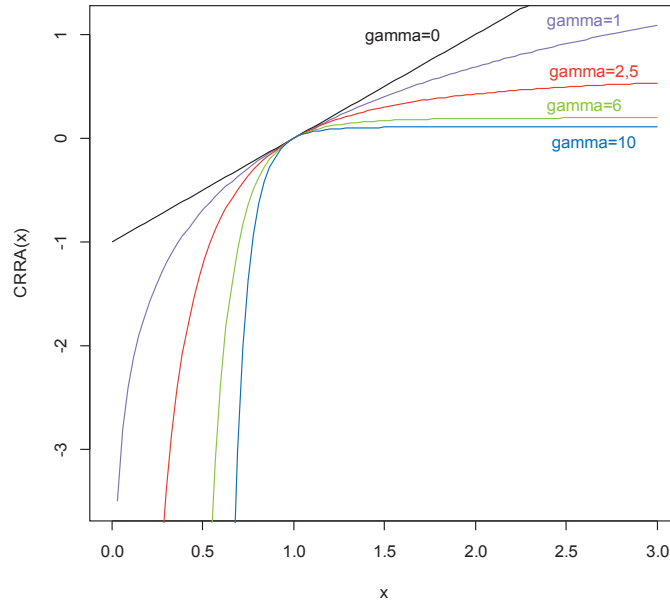


Abbildung 3.2.1: CRRA-Nutzenfunktion zu verschiedenen Werten von Gamma

Insgesamt erhalten wir eine Nutzenfunktion der Form, die den oben angeführten Eigenschaften genügt, und die in Modellierungen der Finanzplanungsökonomik häufig zur Anwendung kommt:

$$U(x) = \begin{cases} \frac{x^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}, & \text{für } \gamma \neq 1 \\ \ln(x), & \text{für } \gamma = 1 \end{cases}$$

das Vermögen, bzw. der Konsum, als Basis x für die Nutzenfunktion dient. Für den Spezialfall $\gamma = 1$ gilt, dass die Funktion den Wert des natürlichen Logarithmus annimmt, was die folgenden Berechnungen zeigen: Für den Fall $\gamma = 1$ erhalten wir die unbestimmte Form „ $\frac{0}{0}$ “. Somit ergibt sich für den Grenzwert der Nutzenfunktion:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{f(\gamma)}{g(\gamma)} = \frac{0}{0} \stackrel{\text{Regel von L'Hôpital}}{=} \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} = \lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{-e^{\ln(x)(1-\gamma)}}{-1} = \ln(x)$$

(3.4)

Als erste und zweite Ableitung für die CRRA-Nutzenfunktion erhalten wir

$$U'(x) = x^{-\gamma}, \quad (3.5)$$

$$U''(x) = -\gamma \cdot x^{-1-\gamma}. \quad (3.6)$$

(3.7)

Dadurch ergeben sich folgendes Arrow-Pratt-Maß $ARA(x)$, bzw. $RRA(x)$, mit

$$ARA(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{\gamma}{x}, \quad (3.8)$$

und

$$RRA(x) = -\frac{U''(x) \cdot x}{U'(x)} = \gamma. \quad (3.9)$$

Wir sehen daraus also, dass für diese Form der Nutzenfunktion die relative Risikoaversion konstant γ , und somit unabhängig vom Vermögen ist. Die Funktion gehört zu der Klasse der CRRA-Nutzenfunktionen, wobei CRRA - gemäß der eben erwähnten Eigenschaft - für „constant relative risk aversion“ steht, bzw. wird auch auf Grund ihrer konstanten Elastizität des Grenznutzen als isoelastische Nutzenfunktion bezeichnet.

4 Das Marktmodell

4.1 Veranlagungsmöglichkeiten

Wir betrachten in unserem Modell einen Mehr-Perioden-Markt, wie er in gängigen Finanzmodellen verwendet wird (siehe [16], Kapitel 3), in dem folgende Voraussetzungen gelten:

- Handel ist zu den Zeitpunkten $t \in 0, 1, \dots, T$ möglich.
- Ω bezeichnet einen endlichen Ereignisraum mit $K < \infty$ Elementen:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\},$$

wobei $\omega \in \Omega$ den Marktzustand zum Ende einer Periode t beschreibt.

- Diese Marktzustände ω besitzen mit $\mathbb{P}(\omega) > 0$ eine positive Eintrittswahrscheinlichkeit für alle $\omega \in \Omega$.
- Es sei $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t = 0, 1, \dots, T\}$ eine Filtration, die zu jedem Zeitpunkt angibt, wie viele Informationen zum Zeitpunkt t bekannt sind.

Zudem gibt es für den Investor (bezeichnend für den Anleger, bzw. Aktionär) zwei verschiedene Typen von Anlagemöglichkeiten:

Einerseits existiert die Möglichkeit einer risikolose Geldanlage, die durch einen Bankkontoprozess $B = \{B(t); t = 0, 1, \dots, T\}$ beschrieben wird, wobei B ein Prozess mit $B(0) = 1$ und $B(t) > 0$ für alle t ist. Der Ertrag des Bankkontos ist für jede Periode $(t-1, t)$ der risikolose Zins $r(t) = \frac{(B(t)-B(t-1))}{B(t-1)}$. Andererseits kann ein Anleger sein Vermögen in N riskante Assets (in unserem Modell in der Form von Aktien, bzw. „Stocks“) investieren, die für alle $n = 1, 2, \dots, N$ durch nicht-negative stochastische (Aktienpreis-)Prozesse $S_n = \{S_n(t); t = 0, 1, \dots, T\}$ beschrieben werden, der Startwerte $S_n(0)$ bekannt sind, und alle $S_n(t)$ nicht-negative Zufallsvariablen.

Zusätzlich benötigen wir eine Handelsstrategie $H = (H_0, H_1, \dots, H_N)$, die unser Portfolio in Form eines Vektors adaptierter (also \mathcal{F}_t -messbarer) stochastischer Prozesse $H_n = \{H_n(t); t = 1, 2, \dots, T\}$ beschreibt. H_0 gibt dabei

an, welche Anteile vom Vermögen ins risikolose Asset investiert werden, und $H_n(t)$ ist die Anzahl der Anteile am Asset n im Zeitraum $(t-1, t]$ zum Preis $S_n(t)$.

Der zugehörige Vermögensprozess wird mit $V = \{V(t); t = 0, 1, \dots, T\}$ bezeichnet, und beschreibt den Wert des Portfolios zu jedem Zeitpunkt:

$$V(t) = \begin{cases} H_0(1)B_0 + \sum_{n=1}^N H_n(1)S_n(0), & \text{für } t = 0 \\ H_0(t)B(t) + \sum_{n=1}^N H_n(t)S_n(t), & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

$H_n(0)$ ist nicht spezifiziert, da die Handelsstrategie für jeden Zeitpunkt t die Anzahl der Assets, bzw. des Bankkontos angibt, die der Investor in $(t-1, t]$ hält⁵.

Eine Handelsstrategie H bezeichnen wir genau dann als selbstfinanzierend, wenn das Vermögen zum Zeitpunkt nach der Umschichtung der Assetanteile gleich bleibt, also kein Geld zu den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T-1$ in das Portfolio investiert wird:

$$V(t) = H_0(t+1)B(t) + \sum_{n=1}^N H_n(t+1)S_n(t), \quad \text{für } t = 1, \dots, T-1$$

Sei mit $\Delta S_n(t) = S_n(t) - S_n(t-1)$ die Preisänderung des n -ten Assets zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t , so wird durch den Gewinnprozess $G = \{G(t); t = 1, \dots, T\}$ die Wertänderung des Portfolios bis zum Zeitpunkt t beschrieben mit

$$G(t) = \sum_{k=1}^t H_0(k)\Delta B(k) + \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^t H_n(k)\Delta S_n(k) \quad \text{für } t \geq 1$$

Für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie gilt dann also $V(t) = V(0) + G(t)$ für $t = 1, 2, \dots, T$.

Oft ist es auch nützlich sich obige Prozesse auf einen gemeinsamen Zeitpunkt zu diskontieren, um gewisse Werte in Relation setzen zu können und einen

⁵siehe [16], S. 80.

anschaulicheren Vergleich zu erhalten. Dazu werden wir alle Preisprozesse mittels dem Bankkontoprozess (als *numeraire*) normieren, und erhalten einen diskontierten Preisprozess $S_n^* = \{S_n^*(t); t = 0, 1, \dots, T\}$, der definiert ist durch:

$$S_n^*(t) = \frac{S_n(t)}{B(t)}, \quad t = 0, 1, \dots, T; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Die Gleichung für den diskontierten Vermögensprozess $V^* = \{V(t)^*; t = 0, 1, \dots, T\}$ lautet dann:

$$V(t)^* = \begin{cases} H_0(1) + \sum_{n=1}^N H_n(1)S_n^*(0), & \text{für } t = 0 \\ H_0(t) + \sum_{n=1}^N H_n(t)S_n^*(t), & \text{für } t \geq 1 \end{cases}$$

Zuletzt betrachten wir noch den diskontierten Gewinnprozess $G^* = \{G(t)^*; t = 0, 1, \dots, T\}$, der nun wie folgt aussieht:

$$G(t)^* = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^t H_n(k) \Delta S_n^*(k), \quad \text{für } t \geq 1$$

wobei $\Delta S_n^*(k)$ nach obiger Definition sinngemäß für $S_n^*(k) - S_n^*(k-1)$ steht.

Aus dem Verlauf des Aktienpreisprozesses ergeben sich weitere wichtige Prozesse, die für den Investor im eigentlichen Zentrum des Interesses stehen, nämlich die Renditen (oder auch „Returns“), die dargestellt werden durch den Returnprozess $R_n = \{R_n(t); t = 0, 1, \dots, T\}$ mit $R_n(0) = 0$ und

$$\Delta R_n(t) = \begin{cases} \frac{\Delta S_n(t)}{S_n(t-1)}, & \text{für } S_n(t-1) > 0 \\ 0, & \text{für } S_n(t-1) = 0. \end{cases}$$

Der Return R_0 aus dem Bankkontoprozess ist mit $\Delta R_0(t) = r_t$ der Zins, den das Bankkonto liefert.

Für den Returnprozess gilt dann die Bedingung $\Delta R_n(t) \geq -1$ für alle t , falls der Preisprozess nicht-negativ ist, bzw. $\Delta R_n(t) > -1$ für alle t , falls der Preisprozess strikt positiv ist.

Es ergeben sich für den Preisprozess folgende weitere Darstellungen

$$\begin{aligned}\Delta S_n(t) &= S_n(t-1)\Delta R_n(t), \quad t = 1, \dots, T \\ S_n(t) &= S_n(0) + \sum_{k=1}^t S_n(k-1)\Delta R_n(k), \quad t = 1, \dots, T\end{aligned}$$

sowie weiter wichtige, äquivalente Gleichung für die Aktienpreisentwicklung:

$$S_n(t) = S_n(0) \prod_{k=1}^t (1 + \Delta R_n(k)), \quad t = 1, \dots, T$$

4.2 Das Black-Scholes Modell

Das Black-Scholes-Modell, veröffentlicht von Fischer Black und Myron Samuel Scholes in [5] im Jahr 1973, ist das bekannteste und meist-verwendetste Modell zur Bewertung von Optionspreisen. Robert C. Merton trug auch zur Entwicklung dieses Modells bei, wofür er 1997 zusammen mit M. Scholes - ohne dem zu der Zeit bereits verstorbenen F. Black - den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften.

In diesem Modell stellt man folgende Bedingungen an den Markt⁶:

- Es existiert ein vollkommener und vollständiger Kapitalmarkt, d.h. unter anderem es gibt keine Transaktionskosten, Steuern, Handelsbeschränkungen, bzw. Auszahlungen von Dividenden.
- Der risikolose Zinssatz r ist konstant über die Zeit.
- Jeder Marktteilnehmer hat Zugang zu allen Informationen.

⁶Siehe [5], Seite 640.

- Es existiert keine Arbitragemöglichkeit.

Weiters beruht das Modell auf der Annahme, dass sich ein Aktienpreis $S(t)$ analog einer geometrischen Brown'schen Bewegung mit konstanten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$ verhält, also der linearen stochastischen Differentialgleichung folgt:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad t = 1, \dots, T$$

Der stochastische Prozess $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ bezeichnet dabei einen eindimensionalen Wiener-Prozess bzw. eine standardisierte Brown'sche Bewegung, wobei $\mathcal{N}(0, t)$ die Gauß'sche Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz t ist. Es wird der Parameter μ auch als der Drift, bzw. der Parameter σ als die Volatilität des Aktienkursprozesses bezeichnet.

Der Aktienprozess $S(t)$ lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \quad \text{für } t \geq 0$$

Division durch $S(0)$ und logarithmieren beider Seiten zeigt die Normalverteilung der logarithmierten Aktienkursänderung $\ln \frac{S(t)}{S(0)} \sim \mathcal{N} \left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t} \right]$, sowie (mit $\ln \frac{S(t)}{S(0)} = \ln S(t) - \ln S(0)$) des logarithmierten Aktienkurses $\ln S(t) \sim \mathcal{N} \left[\ln S(0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t} \right]$. Eine Zufallsvariable besitzt eine Lognormalverteilung, wenn ihr natürlicher Logarithmus normalverteilt ist. Demnach sind der Aktienpreis $S(t)$ für alle $t \geq 0$ lognormalverteilt.

Daraus ergibt sich folgender Erwartungswert für den Aktienpreis⁷:

⁷Für die Herleitung der lognormalverteilten Aktienkurse sowie des ersten und zweiten Moments siehe [12], Seiten 346-347.

$$\mathbb{E}[S(t)] = S(0)e^{\mu t}$$

und somit

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(t)] &= \mathbb{E}[S^2(t)] - (\mathbb{E}[S(t)])^2 \\ &= S^2(0)e^{(2\mu+\sigma^2)t} - (S(0)e^{\mu t})^2 \\ &= S^2(0)e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1) \end{aligned}$$

4.3 Das Binomialmodell

Das Binomialmodell bietet eine vereinfachte, jedoch nützliche Modellierung eines Aktienpreisprozesses, die in der Praxis häufig angewendet wird.

Hierbei geht man von einem Preisprozess $S(t)$ ⁸ eines Assets mit einer Filtration $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t; t = 0, 1, \dots, T\}$ und Startwert $S(0)$ aus, und unterstellt dessen Entwicklung zwei mögliche Ausgänge: Der Aktienpreis wird in einer Periode t entweder mit einer Wahrscheinlichkeit p mit dem Faktor u_t (mit $u_t > 1$ für alle t) aufgewertet, oder mit dem Faktor d_t (mit $0 < d_t < 1$ für alle t) abgewertet⁹. Zusammenfassend heißt das also (siehe [16], Seiten 100-106):

$$S(t) = \begin{cases} u_t S(t-1), & \text{wenn } X_t = 1 \\ d_t S(t-1), & \text{wenn } X_t = 0, \end{cases}$$

mit Konstanten $0 < d_t < 1 < u_t$ und Bernoulli-Zufallsvariablen X_t mit Wahrscheinlichkeit p für u_t („up“) und $1-p$ für d_t („down“), für $t = 1, \dots, T$. Jedes Ergebnis zum Zeitpunkt T ist also der Wert zu einem bestimmten Pfad, dessen Beschreibung durch T $\{0, 1\}$ -wertige Zufallsvariablen erfolgt.

⁸Da wir im Binomialmodell nur ein einziges riskantes Asset in unserem Portfolio betrachten, wird der Index „n“ vernachlässigt.

⁹Siehe [16], Seiten 100-106, für eine ausführlichere Beschreibung des Binomialmodells.

Insgesamt gibt es demnach $|\Omega| = 2^T$ mögliche Pfade.

Setzen wir von nun an voraus, dass $u_t = u$ und $d_t = d$ konstant für alle $t = 1, \dots, T$ sind. Der Prozess hat dann zum Zeitpunkt t den Wert

$$S(t) = S(0)u^{N_t}d^{t-N_t}, \quad \text{für } t = 1, 2, \dots, T,$$

mit einer binomialen Verteilungsfunktion für die Anzahl N_t der „ups“ bis zum Zeitpunkt t , also

$$\mathbb{P}(S(t) = S(0)u^k d^{t-k}) = \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k}, \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, t.$$

4.3.1 Das Cox-Ross-Rubinstein Binomialmodell

Wir betrachten nun ein in der Finanzmathematik gängiges diskretes Modell für die Modellierung von Wertpapier- und Aktienkursentwicklungen, welches im Jahr 1979 von John C. Cox, Stephen Ross und Mark Rubinstein erstmals vorgestellt wurde, und welches einen Spezialfall der vorherigen Modellierung im Binomialbaum darstellt¹⁰. Es gilt als eine Approximation des Black-Scholes Modells für diskrete Zeitintervalle.

Hier betrachtet man wieder einen Aktienpreisprozess $S(t)$ in einem Zeitintervall $[0, T]$, welches man in $N + 1$ äquidistante Teilintervalle der Länge $\Delta t = \frac{T}{N}$ und Stützstellen t_k mit $k = 0, 1, \dots, N$ teilt. Der Bankkontoprozess $B(t)$ hat den Startwert $B(0) = 1$, und wird mit einem risikolosen Zinssatz $r > 0$ verzinst, sodass $B(\Delta t) = (1 + r)^{\Delta t}$.

Für den Erwartungswert des Aktienpreisprozess $S(t)$ aus dem kontinuierlichen Black-Scholes-Modell lassen sich nun folgende diskretisierte Darstellungen finden:

$$\mathbb{E}[S(t_{k+1})] = S(t_k)e^{\mu\Delta t},$$

¹⁰Siehe [8].

sowie der Erwartungswert im Binomialmodell

$$\mathbb{E}[S(t_{k+1})] = pS(t_k)u + (1-p)S(t_k)d,$$

wobei p der empirischen Wahrscheinlichkeit der binomialverteilten Aufwärtsbewegung u entspricht. Gleichsetzen und durch den $S(t_k)$ dividieren liefert dann:

$$e^{\mu\Delta t} = pu + (1-p)d$$

bzw. die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung:

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}.$$

Ebenso erhalten wir im Binomialbaum für die Varianz der Aktienrendite¹¹

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(t_{k+1})] &= \mathbb{E}[S^2(t_k)] - (\mathbb{E}[S(t_k)])^2 \\ &= pS^2(t_k)u^2 + (1-p)S^2(t_k)d^2 - S^2(t_k)(pu + (1-p)d)^2 \end{aligned}$$

und setzen diese der Volatilität des Aktienkurses $\sigma^2 S^2(t_k)\Delta t$ gleich¹². Die Parameter u und d werden in diesem Modell nun dermaßen gewählt, dass sie der Volatilität angepasst sind, und sie schließlich folgende Formen¹³ besitzen:

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \end{aligned}$$

¹¹Siehe [12], S. 313.

¹²Die Volatilität des Aktienkurses ergibt sich unter der Voraussetzung, dass man die Terme Δt^2 , sowie alle höheren Potenzen von Δt vernachlässigt. Siehe [12], S. 313.

¹³Hierbei handelt es sich um jene Werte für u und d , die bereits von Cox, Ross und Rubinstein in [8] für die Anpassung an die Volatilität vorgeschlagen wurden.

Im CRR-Modell stehen u und d also in folgendem Verhältnis zueinander:

$$u \cdot d = 1, \quad \text{bzw.} \quad d = \frac{1}{u}$$

Der Aktienprozess lässt sich somit zum Zeitpunkt t vereinfacht darstellen als:

$$S(t_k) = S(0)u^{2N(t_k)-t_k}, \quad \text{für } t_k = 1, 2, \dots, T. \quad (4.1)$$

Die binomialverteilte Zufallsvariable $N(t_k)$ steht für die Anzahl der Aufwärtsbewegungen aus $(0, t_k)$. Somit gibt der Ausdruck $2N(t_k) - t_k$ die Anzahl der bis t_k stattgefundenen Aufwärtsbewegungen („ups“) abzüglich der Anzahl der Abwärtsbewegungen („downs“) an, und kann Werte aus $(-t_k, t_k)$ annehmen.

Das CRR-Modell stellt die Rekombinierbarkeit im Binomialbaum sicher. Falls zuerst eine Aufwärts- und dann eine Abwärtsbewegung stattgefunden hat, führt dies zum selben Ergebnis wie bei umgekehrter Abfolge. Der Wert $S(t_k)$ ist also nicht pfadabhängig (siehe Abbildung 3)¹⁴.

Für die erwartete Rendite wird ein für den ganzen Zeitraum $[0, T]$ ein konstantes μ angenommen. Dieses μ unterliegt jedoch einer gewissen Unsicherheit, sodass sich nur schwer eine Aussage über zukünftige Renditen aus Aktienkursen treffen lässt.

Wir unterstellen der Entwicklung des Aktienkurses deshalb nun zwei mögliche Regime (oder Szenarien), in denen wir uns als Investor befinden können: Wir gehen von einem möglichen, guten Regime H mit Parameter μ_H , und einem schlechten Regime μ_L aus, für die gilt, dass $\mu_L < \mu_H$, die jedoch die selbe Volatilität besitzen:

$$\sigma_L = \sigma_H = \sigma.$$

Was wir über unsere Situation zum Zeitpunkt 0 jedoch nur sagen können ist, dass wir die Wahrscheinlichkeit, dass wir uns entweder in dem einen, oder dem anderen Regime befinden, und dass wir zum Endzeitpunkt T

¹⁴Die Abbildung wurde der Seite <http://financetrain.com/assets/binomial-tree2.png> entnommen.

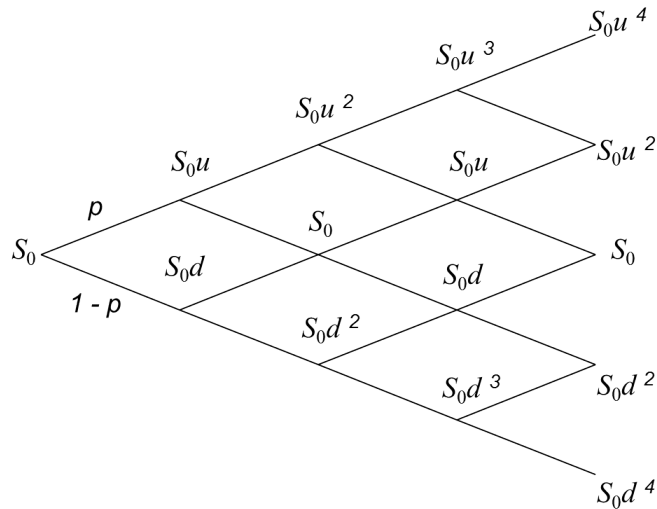


Abbildung 4.3.1: Entwicklung eines Aktienpreises im CRR-Binomialmodell

tatsächlich eine gewisse Rendite erzielen, mit einem Prozentsatz P_0 annehmen. Die Modellierung des Aktienpreisprozesses im Binomialbaum durch Anwendung Bayes'schen Lernens, bzw. der Bayes'schen-Formel, wollen wir in den weiteren Kapiteln betrachten, und deren Auswirkungen bei der Asset Allocation über den Lebenszyklus erforschen.

4.3.2 Die Bayes'sche Formel und dessen Anwendung im CRR-Binomialbaum

Die Einschätzung eines Ereignisses mittels Wahrscheinlichkeiten hängt vom Informationsstand ab und kann sich mit der Zeit ändern. Das Prinzip, wie sich Einschätzungen durch Beobachtungen verändern, ist ein Resultat des englischen Mathematikers und Geistlichen Thomas Bayes, das im Jahre 1763 posthum durch die Abhandlung [3] eines Spezialfalles über bedingte Wahrscheinlichkeiten als Bayes'sche Formel bekannt wurde.

Wir betrachten dafür einen Merkmalsraum Ω aller möglichen Ausgänge eines Experiments, der sich in n disjunkte Ereignisse \hat{H}_i (auch Hypothesen genannt) zerlegen lässt:

$$\Omega = \hat{H}_1 + \dots + \hat{H}_n = \dot{\bigcup}_{i=1}^n \hat{H}_i$$

Sei nun A ein Ereignis, dessen bedingte Wahrscheinlichkeit unter jeder Hypothese \hat{H}_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ festgelegt ist durch:

$$\mathbb{P}(A|\hat{H}_i) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \hat{H}_i)}{\mathbb{P}(\hat{H}_i)}.$$

So ergibt sich die unbedingte Wahrscheinlichkeit durch den Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|\hat{H}_i)\mathbb{P}(\hat{H}_i).$$

Dieser Satz ergibt gemeinsam mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit die prinzipielle Methode der Veränderung der Wahrscheinlichkeitseinschätzungen, auch bekannt als Bayes'sche Formel:

$$\mathbb{P}(\hat{H}_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \hat{H}_i)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|\hat{H}_i)\mathbb{P}(\hat{H}_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|\hat{H}_i)\mathbb{P}(\hat{H}_i)}. \quad (4.2)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(\hat{H}_i)$ werden hierbei die a-priori Wahrscheinlichkeiten genannt, über die man - nach der Beobachtung von A - zu den a-posteriori Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(\hat{H}_i|A)$ gelangt. Durch die Anpassung an den Informationsfluss (bzw. Aktualisierung, deswegen wird dieser Vorgang auch als Bayes-updating bezeichnet) wird die Wahrscheinlichkeitseinschätzung der Hypothesen somit verbessert.

Auf selbigem Weg wollen wir nun unsere Einschätzung über die Erwartung an die Wachstumsrate des Aktienprozesses verbessern. Gehen wir zu der Überlegung aus dem letzten Kapitel zurück, dass wir der Entwicklung des Aktienkurses zwei mögliche Regime unterstellen. Dann bezeichnen wir mit

\widehat{H}_1 die Hypothese, dass wir uns im Regime mit $\mu = \mu_H$ befinden, und mit \widehat{H}_2 die Hypothese für das Regime $\mu = \mu_L$.

Wir gehen zu Beginn, wo noch keine Auf- oder Abwärtsbewegungen stattgefunden haben (was bedeutet, dass $2N_{t_k} - t_k = 0$)¹⁵, davon aus, dass wir uns mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $P_0(0)$ in einer Welt mit $\mu = \mu_H$ befinden. Dies ist also unsere a-priori Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(\widehat{H}_1)$ zum Zeitpunkt 0.

Weiters bezeichnen wir mit A das Ereignis einer Aufwärtsbewegung „up“ im Binomialbaum¹⁶, und stellen mit π_H und π_L die Wahrscheinlichkeiten einer Aufwärtsbewegung im jeweiligen Regime dar durch

$$\pi_H = \mathbb{P}(„up“ | \mu = \mu_H) = \mathbb{P}(A | \widehat{H}_1),$$

bzw.

$$\pi_L = \mathbb{P}(„up“ | \mu = \mu_L) = \mathbb{P}(A | \widehat{H}_2).$$

Dann ist im Zeitpunkt 0 die neue, „aktualisierte“ Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung:

$$\widetilde{\pi}_0(0) = P_0(0)\pi_H + (1 - P_0(0))\pi_L$$

Im nächsten Schritt betrachten wir nun, wie sich die Wahrscheinlichkeit von Hypothese $\widehat{H}_1 = \{\mu = \mu_H\}$ durch unsere Beobachtungen verändert hat. Diese Wahrscheinlichkeit hängt also vom Zeitpunkt t_k , sowie von der Anzahl der bis dahin stattgefundenen „ups“, ab.

Sei die Anzahl der Aufwärtsbewegungen in jedem Zustand wie in Gleichung (4.1) durch die binomialverteilte Zufallsvariable $N(t_k)$ beschrieben, dann ist $2N(t_k) - t_k$ die Summe der bis t_k stattgefundenen Auf- abzüglich

¹⁵Hier gibt $2N_{t_k} - t_k$, wie in Gleichung (4.1), die Potenz des Faktors u des Aktienpreisprozesses wieder.

¹⁶Das komplementäre Ereignis A^C beschreibt dann folglich eine Abwärtsbewegung „down“.

der Abwärtsbewegungen, die zu t_k Werte aus $\{-t_k, -t_k + 2, \dots, t_k - 2, t_k\}$ annehmen kann. Wir definieren in diesem Zusammenhang die Ereignisse $I_{t_k}(n) := \{2N(t_k) - t_k = n\}$, auf die wir bedingen, um in jedem Zustand die gesuchten Wahrscheinlichkeiten $P_{t_k}(n) := \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | A \cap I_{t_k}(n))$ zu erhalten. Bevor wir jedoch einen allgemeinen Ansatz für das Finden der aktualisierten Wahrscheinlichkeiten formulieren, betrachten wir zuerst die Wahrscheinlichkeitsveränderung im Zeitpunkt 1. Ausgehend von der a-priori Wahrscheinlichkeit $P_0(0)$, erhalten wir über die Bayes'sche Formel (4.2), wenn ein „up“ eingetreten ist, unsere a-posteriori Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P_1(1) = \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | A) &= \frac{\mathbb{P}(A | \widehat{H}_1) \mathbb{P}(\widehat{H}_1)}{\mathbb{P}(A | \widehat{H}_1) \mathbb{P}(\widehat{H}_1) + \mathbb{P}(A | \widehat{H}_2) \mathbb{P}(\widehat{H}_2)} \\ &= \frac{\pi_H P_0(0)}{P_0(0) \pi_H + (1 - P_0(0)) \pi_L}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

und im Falle eines „downs“, also dem komplementären Ereignis von A ,

$$\begin{aligned} P_1(-1) = \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | A^C) &= \frac{\mathbb{P}(A^C | \widehat{H}_1) \mathbb{P}(\widehat{H}_1)}{\mathbb{P}(A^C | \widehat{H}_1) \mathbb{P}(\widehat{H}_1) + \mathbb{P}(A^C | \widehat{H}_2) \mathbb{P}(\widehat{H}_2)} \\ &= \frac{(1 - \pi_H) P_0(0)}{P_0(0)(1 - \pi_H) + (1 - P_0(0))(1 - \pi_L)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Daraus erhalten wir die neuen Wahrscheinlichkeiten für die Entwicklungen im Binomialbaum

$$\tilde{\pi}_1(1) = P_1(1) \pi_H + (1 - P_1(1)) \pi_L,$$

und

$$\tilde{\pi}_1(-1) = P_1(-1) \pi_H + (1 - P_1(-1)) \pi_L,$$

Ab dem nächsten Zeitpunkt $t_k = 2$ kann es bereits mehrere Optionen geben, um die nächste a-posteriori Wahrscheinlichkeit zu berechnen. Will man zur Wahrscheinlichkeit $P_2(0)$ gelangen, kann man dies über zwei verschiedene

Pfade erreichen: Entweder es findet im ersten Schritt eine Aufwärtsbewegung statt, gefolgt von einer Abwärtsbewegung, oder dieselben Schritte in umgekehrter Reihenfolge. Dass beide Wege zur selben Wahrscheinlichkeit $P_2(0)$ führen, kann leicht nachgerechnet werden:

Betrachten wir den Fall, dass im ersten Schritt eine Aufwärtsbewegung stattgefunden hat. Dann nehmen wir die Wahrscheinlichkeit $P_1(1)$, die eben noch unsere a-posteriori Wahrscheinlichkeit war, als unsere neue a-priori Wahrscheinlichkeit an. Da sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A|\widehat{H}_1) = \pi_H$ (bzw. $\mathbb{P}(A|\widehat{H}_2) = \pi_L$) nicht ändert, erhalten wir analog zu Formel (4.4) durch die Beobachtung einer Abwärtsperiode in der zweiten Periode:

$$\begin{aligned} P_2(0) = \mathbb{P}(\widehat{H}_1|A^C) &= \frac{\mathbb{P}(A^C|\widehat{H}_1)\mathbb{P}(\widehat{H}_1)}{\mathbb{P}(A^C|\widehat{H}_1)\mathbb{P}(\widehat{H}_1) + \mathbb{P}(A^C|\widehat{H}_2)\mathbb{P}(\widehat{H}_2)} \\ &= \frac{(1 - \pi_H)P_1(1)}{P_1(1)(1 - \pi_H) + (1 - P_1(1))(1 - \pi_L)}. \end{aligned}$$

Setzen wir für $P_1(1)$ das Resultat aus (4.3) ein und kürzen soweit es geht, dann erhalten wir:

$$P_2(0) = \frac{\pi_H(1 - \pi_H)P_0(0)}{\pi_H(1 - \pi_H)P_0(0) + \pi_L(1 - \pi_L)(1 - P_0(0))} \quad (4.5)$$

Ist jedoch zum Zeitpunkt 1 eine Abwärtsbewegung im Binomialbaum beobachtbar, ist $P_1(-1)$ unsere a-priori Wahrscheinlichkeit für den nächsten Schritt. Dann erhalten wir wiederum über die Bayes Formel einer Aufwärtsbewegung laut (4.3):

$$\begin{aligned} P_2(0) = \mathbb{P}(\widehat{H}_1|A) &= \frac{\mathbb{P}(A|\widehat{H}_1)\mathbb{P}(\widehat{H}_1)}{\mathbb{P}(A|\widehat{H}_1)\mathbb{P}(\widehat{H}_1) + \mathbb{P}(A|\widehat{H}_2)\mathbb{P}(\widehat{H}_2)} \\ &= \frac{\pi_H P_1(-1)}{P_1(-1)\pi_H + (1 - P_1(-1))\pi_L}. \end{aligned}$$

Setzen wir hier nun die Formel für $P_1(-1)$ aus (4.4) ein und kürzen wie zuvor, kommen wir wieder auf das Ergebnis von (4.5). Wir sehen also, dass man $P_2(0)$ über zwei Wege erhält. Diese haben - ausgehen von $P_0(0)$ - einen symmetrischen Verlauf, und führen zum selben Ergebnis. Die neue Wahrscheinlichkeit für eine Aufwärtsbewegung im Zeitpunkt 2 ist dann:

$$\tilde{\pi}_2(0) = P_2(0)\pi_H + (1 - P_2(0))\pi_L,$$

Dieses Ein-Schritt-Verfahren zur Aktualisierung der Wahrscheinlichkeiten einer Aufwärtsbewegung lässt sich nun zu jedem Zeitpunkt und in jedem Zustand anwenden. Wahrscheinlichkeiten, die zu einem Zeitpunkt als a-posteriori Werte errechnet wurden, dienen im nächsten Schritt als a-priori Wahrscheinlichkeiten, wodurch man in jedem Zustand einen unterschiedlichen „Lerneffekt“ beobachten kann. Man muss also noch zusätzlich auf das Ereignis $I_{t_k}(n)$ bedingen, um in jedem Zustand auf die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten zu kommen, die wir mit $P_{t_{k+1}}(n+1) := \mathbb{P}(\hat{H}_1|A \cap I_{t_k}(n))$ bezeichnen. Diese lässt sich über den allgemeinen Multiplikationssatz und den Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit wie folgt bestimmen. Betrachte:

$$\mathbb{P}(\hat{H}_1|A \cap I_{t_k}(n)) = \frac{\mathbb{P}(\hat{H}_1 \cap A \cap I_{t_k}(n))}{\mathbb{P}(A \cap I_{t_k}(n))} = \frac{\mathbb{P}(\hat{H}_1 \cap A \cap I_{t_k}(n))}{\mathbb{P}(A|I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(I_{t_k}(n))}$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir

$$\mathbb{P}(A|\hat{H}_1 \cap I_{t_k}(n)) = \frac{\mathbb{P}(\hat{H}_1 \cap A \cap I_{t_k}(n))}{\mathbb{P}(\hat{H}_1 \cap I_{t_k}(n))} = \frac{\mathbb{P}(\hat{H}_1 \cap A \cap I_{t_k}(n))}{\mathbb{P}(\hat{H}_1|I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(I_{t_k}(n))}$$

Drücken wir in den obigen Gleichungen $\mathbb{P}(\hat{H}_1 \cap A \cap I_{t_k}(n))$ explizit aus und setzen sie gleich, ergibt sich

$$\mathbb{P}(\hat{H}_1|A \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(A|I_{t_k}(n)) = \mathbb{P}(A|\hat{H}_1 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\hat{H}_1|I_{t_k}(n))$$

und lässt uns so in jedem Zustand die gesuchte a-posteriori Wahrscheinlichkeit bestimmen:

$$\begin{aligned}
P_{t_{k+1}}(n+1) &= \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | A \cap I_{t_k}(n)) = \frac{\mathbb{P}(A | \widehat{H}_1 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | I_{t_k}(n))}{\mathbb{P}(A | I_{t_k}(n))} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A | \widehat{H}_1 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | I_{t_k}(n))}{\mathbb{P}(A | \widehat{H}_1 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | I_{t_k}(n)) + \mathbb{P}(A | \widehat{H}_2 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{H}_2 | I_{t_k}(n))} \\
&= \frac{\pi_H P_{t_k}(n)}{P_{t_k}(n)\pi_H + (1 - P_{t_k}(n))\pi_L} \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Analoge Überlegungen der Wahrscheinlichkeitsaktualisierung nach einer Abwärtsbewegung (i.e. das komplementäre Ereignis A^C) unter \widehat{H}_1 ergeben:

$$\begin{aligned}
P_{t_{k+1}}(n-1) &= \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | A^C \cap I_{t_k}(n)) = \frac{\mathbb{P}(A^C | \widehat{H}_1 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | I_{t_k}(n))}{\mathbb{P}(A^C | I_{t_k}(n))} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A^C | \widehat{H}_1 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | I_{t_k}(n))}{\mathbb{P}(A^C | \widehat{H}_1 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{H}_1 | I_{t_k}(n)) + \mathbb{P}(A^C | \widehat{H}_2 \cap I_{t_k}(n)) \cdot \mathbb{P}(\widehat{H}_2 | I_{t_k}(n))} \\
&= \frac{(1 - \pi_H)P_{t_k}(n)}{P_{t_k}(n)(1 - \pi_H) + (1 - P_{t_k}(n))(1 - \pi_L)} \tag{4.7}
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir durch den Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit die aktualisierten Wahrscheinlichkeiten für eine Aufwärtsbewegung:

$$\tilde{\pi}_{t_{k+1}}(n+1) = P_{t_{k+1}}(n+1)\pi_H + (1 - P_{t_{k+1}}(n+1))\pi_L.$$

Die a-posteriori Wahrscheinlichkeit $P_{t_{k+1}}(n+1)$ lässt sich jedoch nicht nur über die a-priori Wahrscheinlichkeit $P_{t_k}(n)$ wie in Gleichung (4.6) berechnen. Befinden wir uns nämlich im „Inneren“ des Binomialbaumes, also einem Zustand, bis zu dem nicht ausschließlich Auf- bzw. Abwärtsbewegungen stattgefunden haben, so lässt sie sich, ausgehend von der a-priori Wahrscheinlichkeit $P_{t_k}(n+2)$, über die Formel (4.7) berechnen. Dass dieser Weg zum

selben Ergebnis führt wie (4.6), ist dadurch gewährleistet, dass sich die a-priori Wahrscheinlichkeit in beiden Fällen über $P_{t_{k-1}}(n+1)$ berechnen lässt, und dass der Binomialbaum, den wir über das Bayes'sche Lernen erhalten, rekombiniert.

Proposition 4.1: Die Rekombinierbarkeit im CRR-Binomialbaum bleibt auch unter variierenden Wahrscheinlichkeiten für die Auf- und Abwärtsbewegungen erhalten.

Beweis: Um zur Wahrscheinlichkeit $P_{t_{k+1}}(n+1)$ zu gelangen, gibt es 2 Pfade, die sich im Baummodell veranschaulichen lassen:

1. Möglichkeit 1: Die Berechnung eines „ups“, ausgehend von der Wahrscheinlichkeit $P_{t_k}(n)$.
2. Möglichkeit 2: Die Berechnung eines „downs“, ausgehend von der Wahrscheinlichkeit $P_{t_k}(n+2)$.

Betrachten wir zuerst den Fall 1. Dann erhalten wir $P_{t_{k+1}}(n+1)$ über die Berechnung eines „ups“:

$$P_{t_{k+1}}(n+1) = \frac{\pi_H P_{t_k}(n)}{P_{t_k}(n)\pi_H + (1 - P_{t_k}(n))\pi_L}. \quad (4.8)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_{t_k}(n)$ lässt sich hier wiederum ausdrücken als Ergebnis einer Abwärtsbewegung über die Wahrscheinlichkeit $P_{t_{k-1}}(n+1)$. Setzen wir diese dann in (4.8) ein, erhalten wir:

$$P_{t_{k+1}}(n+1) = \frac{(1 - \pi_H)\pi_H P_{t_{k-1}}(n+1)}{(1 - \pi_H)\pi_H P_{t_{k-1}}(n+1) + (1 - P_{t_{k-1}}(n+1))(1 - \pi_L)\pi_L} \quad (4.9)$$

Im Fall 2 ergibt für die Berechnung eines „downs“:

$$P_{t_{k+1}}(n+1) = \frac{(1 - \pi_H)P_{t_k}(n+2)}{P_{t_k}(n+2)(1 - \pi_H) + (1 - P_{t_k}(n+2))(1 - \pi_L)}.$$

Auch hier können wir über $P_{t_{k-1}}(n+1)$ - diesmal über ein „up“ - auf $P_{t_k}(n+2)$ kommen. Setzen wir dieses $P_{t_k}(n+2)$ in die obige Gleichung, erhalten wir dasselbe Ergebnis wie in (4.9). Aufgrund der gleichen Ausgangswahrscheinlichkeit $P_{t_{k-1}}(n+1)$ und der Symmetrie der Pfade werden nämlich die selben Wahrscheinlichkeiten verwendet, bloß in umgekehrter Reihenfolge.

Es bleibt also im bedingten Baummodell die rekombinierende Eigenschaft erhalten, sodass das Lernen keine Pfadabhängigkeit erzeugt. Der Zustand ist außerdem zu jedem Zeitpunkt t_k eindeutig durch die Anzahl n charakterisiert. \square

Den Code für die Erzeugung der Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\pi}_{t_k}(n)$ siehe im Anhang.

5 Optimale Portfolios und dynamische Programmierung

Durch die Wahl einer geeigneten Sparrate und der Asset Allocation soll nun der Erwartungsnutzen über die gesamte Lebensspanne optimiert werden. Dieses Optimierungsproblem wurde bereits 1969 von Robert C. Merton in [14] entwickelt, und für geometrische Brown'sche Bewegungen untersucht. In Anlehnung an Pliska [16] formulieren wir ein dynamisches Programm zur Optimierung der Spar- und Portfolio-Entscheidung:

5.1 Konsum-Investment und dynamische Programmierung

Stanley R. Pliska beschreibt in seinem Buch [16] einen analytischen Ansatz zur Lösung des Portfolio-Optimierungsproblems unter gewissen Annahmen, die wir später noch erweitern werden. So werden in hier unter anderem das Arbeitseinkommen, sowie ein Vererbungsmotiv vernachlässigt. Weiters werden wir uns später auf das Binomialmodell konzentrieren. Vorerst betrachten wir aber folgende, allgemeinere Darstellung der Problems und der Bellman-Gleichung:

Wir definieren einen Konsumprozess $C = \{C_t; t = 0, \dots, T\}$, der ein nicht-negativer, adaptierter stochastischer Prozess ist, und die Summe an Ressourcen darstellt, die ein Individuum zum Zeitpunkt t konsumiert. Ein Konsum-Investment-Plan besteht dann aus einem Paar (C, H) , wobei C den Konsumprozess und H eine Handelsstrategie bezeichnen. Der Konsum-Investment-Plan (C, H) ist genau dann zulässig, wenn $C_t \leq W_t$ für alle $t \in \{0, \dots, T\}$. Ein Investor zieht einen gewissen Nutzen aus dem Vermögen, das er in jeder Periode konsumiert. Dieser ist natürlich umso größer, je höher der Konsum ist. Das Ziel ist es aber einen Konsum-Investment-Plan zu wählen, der den erwarteten Nutzen über alle T Perioden zu maximieren. Das führt zu einem Abwägen von Konsum und Investment, das speziell in frühen Jahren einen großen Effekt hat.

Das Konsum-Investment-Problem lässt sich also wie folgt formulieren:

$$\text{maximiere } \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^T \frac{U(C_t)}{(1 + \rho)^t} \right] \quad (5.1)$$

bezüglich einem Startvermögen W_0 ,

und (C, H) ist zulässig.

Hier sei $U : \mathbb{R} \rightarrow [-\infty, \infty]$ eine konkave und streng monoton steigende Nutzenfunktion, und ρ ein Skalar mit $0 \leq \rho$. Da der Konsumprozess ein nicht-negativer Prozess ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $U(W_t) = -\infty$ für alle $W_t < 0$ und alle $t \in \{0, \dots, T\}$ (wobei hingegen natürlich gilt, dass $U(W_t) > -\infty$ für alle $W_t > 0$).

Um das Problem mittels dynamischer Programmierung zu lösen, werden wir, beginnend vom Endzeitpunkt, über eine rekursive Rückwärtsiteration die Wertefunktion $V_t(W_t)$ ermitteln, die den maximalen Erwartungsnutzen des Konsums bis zum Zeitpunkt T darstellt. Ausgangspunkt sind das Vermögen W_t und der Konsum zum Zeitpunkt t und einer Filtration \mathcal{F}_t .

Die Bestimmung des Endnutzen V_T ist einfach, da die Nutzenfunktion streng monoton steigend ist und der Investor - mit der Annahme dass er kein Vererbungsmotiv hat - in der letzten Periode das ganze verfügbare Vermögen konsumiert, sprich $V_T = U$.

Gehen wir nun weiter zum Zeitpunkt $T - 1$, so betrachten wir von nun an für jede Periode folgendes Problem:

$$\begin{aligned} & \text{maximiere} \quad U(C_{T-1}) + \mathbb{E} \left[\frac{V_T(W_T)}{(1 + \rho)} \middle| \mathcal{F}_{T-1} \right] \\ & \text{bezüglich:} \quad W_{T-1} = C_{T-1} + H_0(T)B_{T-1} + \sum_{n=1}^N H_n(T)S_n(T-1) \\ & \quad W_T = H_0(T)B_T + \sum_{n=1}^N H_n(T)S_n(T) \\ & \quad H_n(T) \in \mathcal{F}_{T-1} \quad \text{für } n = 1, \dots, N; \quad C_{T-1} \in \mathcal{F}_{T-1} \end{aligned}$$

Wegen der Annahme dass $U(W_{T-1}) = -\infty$ für alle $W_{T-1} < 0$, gilt stets $C_{T-1} \geq 0$, sowie $W_T \geq 0$. Deswegen können wir $H_0(T)$ nun aus der ersten Bedingung explizit darstellen und in die zweite Bedingung einsetzen, und erhalten:

$$\begin{aligned}
W_T &= (W_{T-1} - C_{T-1}) \frac{B_T}{B_{T-1}} + \sum_{n=1}^N H_n(T) \left[S_n(T) - S_n(T-1) \frac{B_T}{B_{T-1}} \right] \\
&= (W_{T-1} - C_{T-1}) \frac{B_T}{B_{T-1}} + B_T \sum_{n=1}^N H_n(T) \Delta S_n^*(T)
\end{aligned}$$

Somit sieht das Maximierungsproblem wie folgt aus:

maximiere:

$$\begin{aligned}
U(C_{T-1}) + \mathbb{E} \left[\frac{1}{(1+\rho)} V_T \left((W_{T-1} - C_{T-1}) \frac{B_T}{B_{T-1}} + B_T \sum_{n=1}^N H_n(T) \Delta S_n^*(T) \right) \middle| \mathcal{F}_{T-1} \right] \\
\text{bezüglich: } H_n(T) \in \mathcal{F}_{T-1} \text{ für } n = 1, \dots, N \text{ und } C_{T-1} \in \mathcal{F}_{T-1}
\end{aligned}$$

Dieses Maximum ist nun der gesuchte optimale Nutzen $V_{T-1}(W_{T-1})$. Allgemein ergibt sich die Bellman-Gleichung für den optimalen Nutzen $V_{t-1}(W_{t-1})$ aus der dynamischen Programmierungsgleichung

$$\begin{aligned}
V_{t-1}(W_{t-1}) = \max_{0 \leq C_{t-1} \leq W_{t-1}; 0 \leq H_n(t) \leq \frac{W_{t-1} - C_{t-1}}{S(t-1)}} \left\{ U(C_{t-1}) + \right. \\
\left. \frac{1}{(1+\rho)} \mathbb{E} \left[V_t \left((W_{t-1} - C_{t-1}) \frac{B_t}{B_{t-1}} + B_t \sum_{n=1}^N H_n(t) \Delta S_n^*(t) \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] \right\},
\end{aligned}$$

bzw., dargestellt über den Returnprozess R_n aus Kapitel 4.1,

$$V_{t-1}(W_{t-1}) = \max_{0 \leq C_{t-1} \leq W_{t-1}; 0 \leq H_n(t) \leq \frac{W_{t-1} - C_{t-1}}{S(t-1)}} \left\{ U(C_{t-1}) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1+\rho)} \mathbb{E} \left[V_t \left((W_{t-1} - C_{t-1})(1 + \Delta R_0(t)) \right) \right. \\
& \left. + \sum_{n=1}^N H_n(t) S(t-1) (\Delta R_n(t) - \Delta R_0(t)) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right], \tag{5.2}
\end{aligned}$$

wobei man hier das Maximum über alle $H_n(t) \in \mathcal{F}_{t-1}$ für $n = 0, \dots, N$ und $C_{t-1} \in \mathcal{F}_{t-1}$ sucht. Die Returns sind gegeben durch den risikolosen Zins $\Delta R_0(t) = r_t = r$, und dem Return aus der riskanten Anlage $\Delta R_n(t)$ mit $(u-1)$, bzw. $(d-1)$. Der Wert von $V_0(W_0)$ ist somit die Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems, und jene Werte C_{t-1} und $H_n(t)$ sind Komponenten des optimalen Konsum-Investment-Plans. Das gesuchte H_0 kommt letztendlich von der Selbstfinanzierungs-Bedingung (siehe [16], S. 163, Gleichung (5.13)).

5.2 Dynamische Programmierung im Binomialmodell

Um einen konkreten Wert für den optimalen Anteil an riskanten Assets berechnen zu können, müssen wir nun geeignete Parameter in einem gewünschten Modell wählen. Seien dazu ein Asset im Binomialmodell mit den Parametern p, u, d, r , und T , sowie einem Nutzenparameter ρ mit $\frac{1}{1+\rho} = \delta \leq 1$ gegeben. Wir betrachten vorerst einen Investor mit logarithmischen Nutzen (einen sogenannten „*log-utility-Investor*“), also mit einer Nutzenfunktion $U(c) = \ln(c)$. Durch Anwenden des dynamischen Programmierens erhalten wir:

Proposition 5.1:

- Der optimale Konsum ist zu jedem Zeitpunkt t proportional zum Vermögen, also $C_t = c_t W_t$, wobei c_t eine positive Konstante ist, für die gilt:

$$c_t = \frac{1}{1 + \delta + \dots + \delta^{T-t}} \tag{5.3}$$

- Der optimale Anteil riskanter Assets am Vermögen ist zu jedem Zeitpunkt t :

$$\frac{S_t H_1(t+1)}{W_t - C_t} = \frac{(1+r)[p(u-1-r) + (1-p)(d-1-r)]}{(u-1-r)(1+r-d)}, \tag{5.4}$$

wobei wir den Faktor auf der rechten Seite definieren als:

$$\frac{S_t H_1(t+1)}{W_t - C_t} = (1+r) \cdot \tilde{H},$$

mit

$$\tilde{H} = \frac{p(u-1-r) + (1-p)(d-1-r)}{(u-1-r)(1+r-d)}.$$

- Zu jedem Zeitpunkt t erhalten wir eine Vermögensnutzenfunktion der Form $V_t(W_t) = (1+\delta+\dots+\delta^{T-t}) \ln(W_t) + \theta_t$, wobei θ_t eine Konstante ist, für die gilt:

$$\begin{aligned} \theta_t &= \delta \cdot \theta_{t+1} - \ln(1+\delta+\dots+\delta^{T-t}) \\ &+ (\delta+\dots+\delta^{T-t}) \left[\ln \left((1+r) \frac{\delta+\dots+(\delta)^{T-t}}{1+\delta+\dots+\delta^{T-t}} \right) \right. \\ &\left. + p \cdot \ln(1+\tilde{H}(u-1-r)) + (1-p) \cdot \ln(1+\tilde{H}(d-1-r)) \right] \end{aligned}$$

Beweis:

Wir wollen nun also den Wert

$$U(C_t) + \delta \mathbb{E} \left[V_{t+1} \left((W_t - C_t) \frac{B_{t+1}}{B_t} + B_{t+1} \sum_{n=1}^N H_n(t+1) \Delta S_n^*(t) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

maximieren. Die Komponenten $B_{t+1} \Delta S^*(t+1)$ entsprechen im Fall einer Aufwärtsbewegung $S(t)u - (1+r)S(t) = S(t)(u-1-r)$, und im Fall einer Abwärtsbewegung $S(t)d - (1+r)S(t) = S(t)(d-1-r)$, bzw. $-S(t)(1+r-d)$. Unter den oben getroffen Annahmen betrachten wir also zu jedem Zeitpunkt das Problem:

maximiere:

$$U(C_t) + p \cdot \delta \cdot V_{t+1}((W_t - C_t)(1 + r) + H(t + 1)S(t)(u - 1 - r)) \\ + (1 - p) \cdot \delta \cdot V_{t+1}((W_t - C_t)(1 + r) - H(t + 1)S(t)(1 + r - d))$$

Wir beginnen mit unseren Berechnungen im Zeitpunkt $T - 1$, wo wir $V_T = U = \ln$ bereits kennen. Im ersten Schritt wollen wir diese Bellman-Gleichung über den Konsum maximieren, und bilden daher die partielle Ableitung über C_{T-1} und setzen sie gleich 0. Wir erhalten nach einigen Umformungsschritten den optimalen Konsum im Zeitpunkt $T - 1$:

$$C_{T-1} = \frac{W_{T-1}}{1 + \delta} \\ = W_{T-1} \cdot c_{T-1},$$

Als Nächstes bestimmen wir die partielle Ableitung der Bellman-Gleichung über H_T , die wir wiederum gleich 0 setzen, und erhalten als optimales Investment im Zeitpunkt $T - 1$:

$$H(T)S(T-1) = (W_{T-1} - C_{T-1}) \frac{(1 + r) [p(u - 1 - r) + (1 - p)(d - 1 - r)]}{(u - 1 - r)(1 + r - d)},$$

und definieren den Faktor auf der rechten Seite:

$$H(T)S(T-1) = (W_{T-1} - C_{T-1})(1 + r) \cdot \tilde{H},$$

mit

$$\tilde{H} = \frac{p(u - 1 - r) + (1 - p)(d - 1 - r)}{(u - 1 - r)(1 + r - d)}.$$

Durch die eben erhaltenen optimalen Werte für die Konsum- und Investmentstrategie können wir nun die Nutzenfunktion V_{T-1} bestimmen, indem

wir die C_{T-1} und $H(T)S(T-1)$ in die Bellman-Gleichung einsetzen:

$$\begin{aligned}
V_{T-1}(W_{T-1}) &= (1 + \delta) \cdot \ln(W_{T-1}) + \theta_{T-1} \\
\text{mit} \\
\theta_{T-1} &= \ln(1 + \delta) \\
&+ \delta \cdot \left(\ln\left(\frac{\delta}{1 - \delta}(1 + r)\tilde{H}\right) + p \cdot \ln(u - 1 - r) + (1 - p) \cdot \ln(d - 1 - r) \right)
\end{aligned}$$

Führen wir im nächsten Rückwärtsschritt die Bestimmung des optimalen Konsums und Investments für den Zeitpunkt $T - 2$ durch, erhalten wir wieder Resultate, durch die wir nun über Induktion auf den allgemeinen Fall zum Zeitpunkt t schließen können, und erhalten die oben angeführten Ergebnisse der Gleichungen (5.3) und (5.4). \square

Gehen wir nun zum allgemeineren Fall eines CRRA-Investors über und betrachten wir ein Modell wie in [16], S. 168, Exercise 5.12, mit $\gamma \neq 1$. Wir gehen also von einer CRRA-Nutzenfunktion der Form $U(c) = \frac{c^{1-\gamma}-1}{1-\gamma}$ aus. Dann erhalten wir folgende Resultate:

Proposition 5.2:

- Der optimale Konsum ist zu jedem Zeitpunkt t proportional zum Vermögen, also $C_t = c_t W_t$, wobei c_t eine positive Konstante ist, die nur von t , aber nicht vom Zustand ω abhängt.
- Das optimale Investment in das riskante Asset ist zu jedem Zeitpunkt t :

$$\begin{aligned}
S_t H_1(t+1) &= \\
&(W_t - C_t) \cdot \frac{(1+r) \left[(1-p)^{-\frac{1}{\gamma}} (1+r-d)^{-\frac{1}{\gamma}} - p^{-\frac{1}{\gamma}} (u-1-r)^{-\frac{1}{\gamma}} \right]}{(1-p)^{-\frac{1}{\gamma}} (1+r-d)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + p^{-\frac{1}{\gamma}} (u-1-r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}
\end{aligned}$$

- Zu jedem Zeitpunkt t hat die Vermögensnutzenfunktion die Form $V_t = \frac{W_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} K_{t+1} - \sum_{i=0}^{T-t} \frac{\delta^i}{(1-\gamma)}$, wobei K_{t+1} eine Konstante ist, die nur vom Zeitpunkt $t+1$, aber nicht vom Zustand ω abhängt.

Beweis:

Nun gilt es also den Wert

$$U(C_{t-1}) + \delta \cdot \mathbb{E} \left[V_t \left((W_{t-1} - C_{t-1}) \frac{B_t}{B_{t-1}} + B_t \sum_{n=1}^N H_n(t) \Delta S_n^*(t) \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right]$$

zu maximieren. Die Bellman-Gleichung, die im ersten Schritt zum Zeitpunkt $T-1$ zu maximieren ist, sieht in diesem Fall also wie folgt aus:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{T-1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \frac{p \cdot \delta}{1-\gamma} (((W_{T-1} - C_{T-1})(1+r) + H(T)S(T-1)(u-1-r))^{1-\gamma} - 1) \\ & + \frac{(1-p) \cdot \delta}{1-\gamma} (((W_{T-1} - C_{T-1})(1+r) - H(T)S(T-1)(1+r-d))^{1-\gamma} - 1) \end{aligned}$$

Um nun wieder zur optimalen Konsum- und Handelsstrategie in diesem Zeitpunkt zu gelangen, bilden wir die partiellen Ableitungen nach C_{T-1} und H_T , die wir gleich 0 setzen und den jeweiligen zu maximierenden Wert bestimmen. Wir erhalten für H_T :

$$\begin{aligned} H(T)S(T-1) &= \\ &= (W_{T-1} - C_{T-1}) \frac{(1+r) \left[(1-p)^{-\frac{1}{\gamma}} (1+r-d)^{-\frac{1}{\gamma}} - p^{-\frac{1}{\gamma}} (u-1-r)^{-\frac{1}{\gamma}} \right]}{p^{-\frac{1}{\gamma}} (u-1-r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + (1-p)^{-\frac{1}{\gamma}} (1+r-d)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \\ &= (W_{T-1} - C_{T-1})(1+r) \cdot H^*, \end{aligned}$$

wenn wir mit H^* den Faktor

$$H^* = \frac{\left[(1-p)^{-\frac{1}{\gamma}}(1+r-d)^{-\frac{1}{\gamma}} - p^{-\frac{1}{\gamma}}(u-1-r)^{-\frac{1}{\gamma}} \right]}{p^{-\frac{1}{\gamma}}(u-1-r)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + (1-p)^{-\frac{1}{\gamma}}(1+r-d)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

bezeichnen. Für C_{T-1} erhalten wir dementsprechend:

$$\begin{aligned} C_{T-1} &= \frac{W_{T-1}}{1 + \delta^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (1+r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} (p(1+H^*(u-1-r))^{1-\gamma} + (1-p)(1+H^*(1+r-d))^{1-\gamma})} \\ &= W_{T-1} \cdot c_{T-1}, \end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch Einsetzen der errechneten optimalen Werte in die Anfangsgleichung und Umformen, die Nutzenfunktion zum Zeitpunkt $T-1$:

$$\begin{aligned} V_{T-1}(W_{T-1}) &= \\ &= \frac{W_{T-1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot (c_{T-1}^{1-\gamma} + \delta \cdot (1+r)^{1-\gamma} (1-c_{T-1})^{1-\gamma} \{p(1+H^*(u-1-r))^{1-\gamma} \\ &\quad + (1-p)(1+H^*(1+r-d))^{1-\gamma}\}) - \frac{1+\delta}{1-\gamma} \\ &= \frac{W_{T-1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \cdot K_{T-1} - \frac{1+\delta}{1-\gamma} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} K_{T-1} &= c_{T-1}^{1-\gamma} + \delta \cdot (1+r)^{1-\gamma} (1-c_{T-1})^{1-\gamma} \{p(1+H^*(u-1-r))^{1-\gamma} \\ &\quad + (1-p)(1+H^*(1+r-d))^{1-\gamma}\} \end{aligned}$$

Die Nutzenfunktion zum Zeitpunkt $T-1$ für das Vermögen W_{T-1} setzt sich also zusammen aus einem Faktor K_{T-1} , sowie einer additiven Komponente $-\frac{1+\delta}{1-\gamma}$, die in jedem Rückwärtsschritt der Iteration mitgenommen wird.

Gehen wir nun einen Zeitschritt weiter zurück in der Rekursion und verwenden die eben erhaltene Nutzenfunktion als neuen optimalen Wert, dann

erhalten wir auf gleiche Art und Weise wie zu $T - 1$ für den Zeitpunkt $T - 2$ die optimalen Werte für C_{T-2} und $H(T - 1)$, über die wir die Funktion $V_{T-2}(W_{T-2})$. Mittels Induktion können wir C_t , H_t , sowie die Nutzenfunktion $V_t(W_t)$ herleiten, wie sie oben definiert sind.

Aufgrund der iid>Returns im Binomialmodell ergeben sich also Faktoren c_t , H^* und K_t , die zwar vom Zeitpunkt t , aber nicht vom Zustand ω abhängen.

□

6 Dynamische Programmierung im Binomialmodell mit erweiterter Parametrisierung und Bayesian Updating

Die Modellierung der Lebensnutzenfunktion gemäß Stanley R. Pliska in Kapitel 5 hat sich bisher einiger Parameter bedient, die wir nochmals zusammenfassen wollen: Wir gingen aus von einem Startvermögen W_0 zum Startalter x aus. Die Entwicklung des Vermögens war wiederum abhängig von einem Bankkontoprozess $B(t)$ mit risikolosem Zins r , und einem Aktienpreisprozess S_t im Binomialmodell mit einem Startaktienpreis S_0 , der durch die Parameter μ und σ charakterisiert war. Der Lebensnutzenfunktion, die für einen Zeitraum von N Perioden bis zum Endzeitpunkt T betrachtet wurde, lagen ein Zeitpräferenzfaktor ρ , sowie die CRRA-Nutzenfunktion mit Risikoavversionsparameter γ , zugrunde. Mittels diesen verschiedenen Input-Parametern konnten wir durch die Bellmann-Gleichung (5.2) schließlich eine Konsum-Investment-Strategie finden, die für jeden Zeitpunkt den optimalen Konsum und den optimalen Anteil des Vermögens am riskanten Asset S_t angaben.

Wir wollen nun jedoch zu einer Darstellung im Binomialmodell unter zusätzlichen Annahmen übergehen und unser Modell wie folgt erweitern:

- Der CRRA-Investor besitzt in folgender Modellierung ein Motiv zu vererben, d.h. er ordnet auch nach seinem Tod einem gewissen Vermögen einen Nutzen zu, der sich hier durch den Parameter b (abgeleitet vom englischen Begriff „bequest“ für „Erbe“) widerspiegelt. In jeder Periode wird also der Nutzen aus möglichen zukünftigen Vermögenszuwächsen aus Kapitalgewinnen und Arbeitseinkommen dem Nutzen aus sofortigem Konsum, sowie der Verfügbarkeit eines - im Falle des Ablebens innerhalb der aktuellen Periode - möglichen Erbes an die Hinterbliebenen, gegenübergestellt. Wir nehmen in unseren Berechnungen an, dass der Investor immer das ganze zum Todeszeitpunkt vorhandene Vermögen hinterlässt, und setzen deswegen ab hier das Erbe mit W_t gleich.
- Es werden einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten verwendet, mittels denen in jeder Periode zwei Fälle parametrisiert werden:
Sei K die ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer des x -jährigen, und bezeichnen wir mit T seine maximale Restlebensdauer, dann ist $P[K \geq k] = p_x p_{x+1} \dots p_{x+k-1} = {}_k p_x$ die k -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit für $k = 0, \dots, T$. Dann verstirbt der x -jährige Investor

mit einer Wahrscheinlichkeit $P[K = k] = {}_k p_x q_{x+k}$ im Alter $x+k$ (siehe [10], S. 19). In diesem Fall erben seine Hinterbliebenen das Vermögen, welches nach der Periode k zur Verfügung steht. Überlebt er jedoch, so verfügt er wie in den vorhergegangenen Perioden selbst über das Vermögen, welches er konsumiert, veranlagt, bzw. spart. Ist einem Investor wichtig, im Falle des Todes seiner Familie ein gewisses Erbe zu hinterlassen, so hat dies natürlich einen Einfluss auf sein Konsum- und Anlageverhalten.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten werden der Website der Statistik Austria entnommen. Die Sterbewahrscheinlichkeiten für jedes Alter sind in der Tabelle im Anhang angeführt.

- Außerdem wird nun das zukünftige Arbeitseinkommen Y_t berücksichtigt, das zu Beginn jeder Periode dem Vermögen hinzukommt, welches sich aus der Entwicklung des Vorjahresvermögens ergibt. Gemeinsam mit dem angehäuften Kapital aus den Vorjahren ergibt es jenes Vermögen, über das der Investor zum Periodenbeginn verfügt. Der Einkommensverlauf, der in diesem Modell als deterministisch angenommen wird, entspricht dem durchschnittlichen Nettojahreseinkommen eines unselbständig Erwerbstätigen. Die Daten für die Berechnung der Nettojahreseinkommen wurde ebenfalls der Website der Statistik Austria entnommen, wie schon in Kapitel 2.1.2 beschrieben.

Bezeichnen wir nun mit der Variable Z_t die Summe des Investments in das riskante Asset zum Zeitpunkt t , für die gilt

$$Z_t = H_{t+1} \cdot S_t \quad \forall \quad t = 0, \dots, T-1,$$

und beziehen all die oben aufgelisteten Parameter in unsere Berechnungen ein, dann erhalten wir folgendes Konsum-Investment-Problem:

$$\text{maximiere} \quad \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^K \delta^k U(C_k) + \delta^{K+1} bU(W_{K+1}) \right] \quad (6.1)$$

über Konsum- und Investmentstrategien C_0, \dots, C_{T-1} und Z_0, \dots, Z_{T-1} ,

bezüglich einem Startvermögen W_0 und

$$W_{t+1} = (W_t + Y_t - C_t)(1 + r) + Z_t(\Delta R_{t+1} - r) \quad \text{für} \quad t = 0, \dots, T-1,$$

wobei das δ für den Abzinsungsfaktor $\frac{1}{1+\rho}$ durch den Zeitpräferenzparameter ρ steht, und wir mit K wieder die ganzzahlig gestutzte zukünftige Lebensdauer bezeichnen.

Wir können nun das Konsum-Investment-Problem aus der Gleichung (5.1) wie folgt umformulieren:

Proposition 6.1: Sind die Konsumstrategien C_0, \dots, C_{T-1} und Vermögen W_1, \dots, W_T unabhängig von K , dann gilt für das Optimierungsproblem aus Gleichung (6.1):

$$\text{maximiere } \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^T \delta^t p_x \left(p_{x+t-1} U(C_t) + q_{x+t-1} bU(W_t) \right) \right] \quad (6.2)$$

Beweis: Wir betrachten für alle Jahre $t = 0, \dots, T$ den Nutzen, der aus Konsum und Erbe gezogen wird. Der Beitrag $\delta^t \cdot U(C_t)$ ergibt sich dabei nur, wenn der Investor nach t Jahren noch lebt, also $K \geq t + 1$, der Beitrag $\delta^t \cdot bU(W_t)$ genau dann, wenn er gerade zum, bzw. unmittelbar vor dem Zeitpunkt t gestorben ist, also $K = t - 1$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^K \delta^k U(C_k) + \delta^{K+1} bU(W_{K+1}) \right] = \\ & \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^T \delta^t \left(U(C_t) I_{\{K \geq t\}} + bU(W_t) I_{\{K=t-1\}} \right) \right] \end{aligned}$$

Mit der Unabhängigkeitsannahme und unter Berücksichtigung der Überlebens- bzw. Sterbewahrscheinlichkeiten folgt die Gleichung (6.2)¹⁷. \square

¹⁷Diese Lebensnutzenfunktion ist vergleichbar mit jener aus [7], wobei in jener Modellierung die Prozesse für den Aktienpreis, das Arbeitseinkommen und den Konsum anders dargestellt werden.

Das Vermögen entwickelt sich (wie schon in 2.1.3 erwähnt) wie folgt:

$$\begin{aligned}
W_{t+1} &= (W_t + Y_t - C_t - H_{t+1} \cdot S_t) \frac{B_t}{B_{t-1}} + H_{t+1} \cdot S_{t+1} \\
&= (W_t + Y_t - C_t) \frac{B_t}{B_{t-1}} + H_{t+1} (S_{t+1} - S_t \frac{B_t}{B_{t-1}}) \\
&= (W_t + Y_t - C_t) \frac{B_t}{B_{t-1}} + H_{t+1} \cdot S_t (\Delta R_{t+1} - r)
\end{aligned}$$

wobei ΔR_{t+1} der Return des riskanten Assets ist, welches vom Zeitpunkt t bis $t + 1$ gehalten wird. Der Aktienpreisprozess S_{t+1} nimmt im Binomialmodell (wie bei obigen Modellen) zwei mögliche Werte an. Er hat mit einer Wahrscheinlichkeit p den Wert $S_t \cdot u$, und mit dessen Gegenwahrscheinlichkeit $(1 - p)$, den Wert $S_t \cdot d$. Dadurch erhalten wir in einer guten Periode W_{t+1}^u , und in einer schlechten Periode W_{t+1}^d , mit

$$\begin{aligned}
W_{t+1}^u &= (W_t + Y_t - C_t)(1 + r) + Z_t(u - 1 - r), \\
W_{t+1}^d &= (W_t + Y_t - C_t)(1 + r) + Z_t(d - 1 - r)
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Auf-, bzw. Abwärtsbewegung, war bisher unabhängig vom jeweiligen Zustand, indem sich das risikobehaftete Asset befindet. Wir wollen nun jedoch den Effekt berücksichtigen, der sich ergibt, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten der Auf-, bzw. Abwärtsbewegung, im Binomialbaum durch Bayes'sches Updating in jedem Zustand anpassen (siehe Kapitel 4.3.2). Dadurch erhalten wir in jedem Vorwärtsschritt aus den Wahrscheinlichkeiten $P_t(n)$ die Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\pi}_t(n)$. Dies führt bei fortlaufender Beobachtung des Aktienprozesses zu einem prozyklischen Verhalten des Investors. So kommt man beispielsweise durch einen positiven Verlauf des Assets zu dem Schluss, dass die Wahrscheinlichkeit eines weiteren positiven Verlaufs steigt. Ebenso wird im Falle eines negativen Verlaufs die Wahrscheinlichkeit auf einen Gewinnzuwachs nach unten revidiert. Wir erhalten also zustandsabhängige Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\pi}_t(n)$ für die Entwicklung des Aktienpreisprozesses S_t . Die Zufallsvariable S_t nimmt in weiterer Folge den Wert $S_{t,n} = S_0 \cdot u^n \cdot d^{t-n}$ genau dann an, wenn die Zahl der bis zum Zeitpunkt t eingetretenen Aufwärtsschritte $N_t = n$ beträgt.

Entsprechend den zusätzlichen Annahmen, die nun getroffen wurden, gilt es die Bellman-Gleichung nun mit den zusätzlichen Parametern anzupas-

sen. Für jeden Zeitpunkt t und jedes n , welches die Anzahl der vergangenen Aufwärtsbewegungen angibt, bezeichnen wir mit $Z_{t,n}$ die Variable für das Investment $H_{t+1,n} \cdot S_{t,n}$ in das riskante Asset. Ausgehend von der letzten Periode T , wo die Vermögensnutzenfunktion der CRRA-Nutzenfunktion $V_{T,n}(W_{T,n}) = U(W_{T,n})$ entspricht, suchen wir nun für $t = T - 1, \dots, 0$ folgendes Maximum¹⁸:

$$V_{t,n}(W_{t,n}) = \max_{0 \leq C_{t,n} \leq (W_{t,n} + Y_t); 0 \leq Z_{t,n} \leq (W_{t,n} + Y_t - C_{t,n})} f_{t,n}(C_{t,n}, Z_{t,n}, W_{t,n})$$

mit

$$f_{t,n}(C_{t,n}, Z_{t,n}, W_{t,n}) = U(C_{t,n}) + \delta \cdot \left(\tilde{\pi}_t(n) \tilde{V}_{t+1,n+1}(W_{t+1}^u) + (1 - \tilde{\pi}_t(n)) \tilde{V}_{t+1,n}(W_{t+1}^d) \right),$$

$$W_{t+1}^u = (W_{t,n} + Y_t - C_{t,n})(1 + r) + Z_{t,n}(u - 1 - r),$$

$$W_{t+1}^d = (W_{t,n} + Y_t - C_{t,n})(1 + r) + Z_{t,n}(d - 1 - r)$$

und

$$\tilde{V}_{t,n}(W) = (1 - q_{t-1}) \cdot V_{t,n}(W) + q_{t-1} \cdot b \cdot U(W)$$

Dieses Optimierungsproblem lässt sich nun auf Grund des Einbezugs der zukünftigen Arbeitseinkommen und der Eigenschaften der CRRA-Nutzenfunktion nicht mehr analytisch lösen wie in Kapitel 5.2. Anstatt dessen lösen wir dieses Problem auf numerischem Wege mittels einer Rückwärtsinduktion und ermitteln für jeden Zeitpunkt und Zustand die Vermögensnutzenfunktion durch Einsetzen der Vermögensnutzenfunktion vorangegangener Schritte in der Bellman-Gleichung. Da wir von einer konkaven Nutzenfunktion $U(W)$

¹⁸Vergleiche die Ansätze der Bellman-Gleichung zur Nutzenmaximierung mittels dynamischer Programmierung von [7], S. 497, sowie [13], S. 6.

ausgehen, erhalten wir in jedem Rückwärtsschritt wieder eine konkave Nutzenfunktion $V_{t,n}$ ¹⁹.

Zur Optimierung bezüglich des Konsums $C_{t,n}$ und dem Investment $Z_{t,n}$ bestimmen wir die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{t,n}}{\partial Z_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}, W_{t,n}) = \\ \delta \cdot \left[\tilde{\pi}_t(n) \cdot (u - 1 - r) \left((1 - q_t) V'_{t+1,n+1}(W_{t+1}^u) + q_t \cdot b \cdot U'(W_{t+1}^u) \right) \right. \\ \left. + (1 - \tilde{\pi}_t(n)) \cdot (d - 1 - r) \left((1 - q_t) V'_{t+1,n}(W_{t+1}^d) + q_t \cdot b \cdot U'(W_{t+1}^d) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}, W_{t,n}) = \\ U'(C_{t,n}) - \delta \cdot \left[\tilde{\pi}_t(n) \left((1 - q_t) V'_{t+1,n+1}(W_{t+1}^u) + q_t \cdot b \cdot U'(W_{t+1}^u) \right) \right. \\ \left. + (1 - \tilde{\pi}_t(n)) \left((1 - q_t) V'_{t+1,n}(W_{t+1}^d) + q_t \cdot b \cdot U'(W_{t+1}^d) \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{t,n}}{\partial W_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}, W_{t,n}) = \\ \delta \cdot \left[\tilde{\pi}_t(n) \left((1 - q_t) V'_{t+1,n+1}(W_{t+1}^u) + q_t \cdot b \cdot U'(W_{t+1}^u) \right) \right. \\ \left. + (1 - \tilde{\pi}_t(n)) \left((1 - q_t) V'_{t+1,n}(W_{t+1}^d) + q_t \cdot b \cdot U'(W_{t+1}^d) \right) \right] \end{aligned}$$

Der Algorithmus zur Bestimmung der optimalen Konsum- und Investmentstrategie funktioniert dann wie folgt: Als ersten Schritt maximieren wir die Funktion über das Investment $Z_{t,n}$ für jedes $C_{t,n}$. Wir lösen also

$$\frac{\partial f_{t,n}}{\partial Z_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}, W_{t,n}) = 0$$

¹⁹Für den Beweis der Konkavitätseigenschaft der Nutzenfunktionen siehe [20], Theoreme 4.8 und 4.9 für den deterministischen Fall, sowie Kapitel 9 für den stochastischen Fall.

Wir bezeichnen die Lösung in Abhängigkeit von $C_{t,n}$ und $W_{t,n}$ mit $Z_{t,n} = Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n})$, für die gilt:

$$\frac{\partial f_{t,n}}{\partial Z_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}), W_{t,n}) = 0 \quad (6.3)$$

Diese Lösungsfunktion machen wir nun zu einem Bestandteil von der Funktion $f_{t,n}$, und definieren

$$g_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}) = f_{t,n}(C_{t,n}, Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}), W_{t,n})$$

und erhalten als neues Maximierungsproblem

$$V_{t,n}(W_{t,n}) = \max_{C_{t,n}} g_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n})$$

Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}, W_{t,n}) &= \frac{\partial f_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}), W_{t,n}) \\ &+ \frac{\partial f_{t,n}}{\partial Z_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}), W_{t,n}) \cdot \frac{\partial Z_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}, W_{t,n}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{t,n}}{\partial W_{t,n}}(C_{t,n}, W_{t,n}) &= \frac{\partial f_{t,n}}{\partial Z_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}), W_{t,n}) \cdot \frac{\partial Z_{t,n}}{\partial W_{t,n}}(C_{t,n}, W_{t,n}) \\ &+ \frac{\partial f_{t,n}}{\partial W_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}), W_{t,n}) \end{aligned}$$

was sich wegen (6.1) vereinfachen lässt zu

$$\frac{\partial g_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}, W_{t,n}) = \frac{\partial f_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}), W_{t,n})$$

sowie

$$\frac{\partial g_{t,n}}{\partial W_{t,n}}(C_{t,n}, W_{t,n}) = \frac{\partial f_{t,n}}{\partial W_{t,n}}(C_{t,n}, Z_{t,n}(C_{t,n}, W_{t,n}), W_{t,n})$$

Im nächsten Schritt maximieren wir die Funktion $g_{t,n}$ über den Konsum $C_{t,n}$ für jedes Vermögen $W_{t,n}$, und lösen

$$\frac{\partial g_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}, W_{t,n}) = 0$$

Wir bezeichnen die Lösung in Abhängigkeit von $W_{t,n}$ mit $C_{t,n} = C_{t,n}(W_{t,n})$, für die gilt:

$$\frac{\partial g_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}(W_{t,n}), W_{t,n}) = 0 \tag{6.4}$$

und erhalten

$$V_{t,n}(W_{t,n}) = g_{t,n}(C_{t,n}(W_{t,n}), W_{t,n})$$

Die Kettenregel liefert

$$\begin{aligned}
V'_{t,n}(W_{t,n}) &= \frac{\partial g_{t,n}}{\partial C_{t,n}}(C_{t,n}(W_{t,n}), W_{t,n}) \cdot C'_{t,n}(W_{t,n}) \\
&+ \frac{\partial g_{t,n}}{\partial W_{t,n}}(C_{t,n}(W_{t,n}), W_{t,n})
\end{aligned}$$

was sich aufgrund (6.2) wiederum vereinfachen lässt zu

$$V'_{t,n}(W_{t,n}) = \frac{\partial g_{t,n}}{\partial W_{t,n}}(C_{t,n}(W_{t,n}), W_{t,n})$$

Mittels der oben ermittelten Ableitungen können wir in zwei Schritten zur optimalen Konsum- und Investmentstrategie für jedes beliebige Vermögen gelangen. Diskretisieren wir demnach das Intervall der im jeweiligen Zustand möglichen Vermögen, und führen diese Schritte für jedes dieser Vermögen durch, erhalten wir einen Vektor der jeweils maximalen Nutzenfunktionswerte, sowie Vektoren der zugehörigen optimalen $C_{t,n}$ und $Z_{t,n}$. Für Vermögen, die innerhalb der Intervalle liegen, werden die Funktionen $V_{t,n}$ und $V'_{t,n}$, sowie die optimalen $C_{t,n}$ und $Z_{t,n}$, mittels linearer Interpolation, gefunden²⁰.

Es ist nun zu erwarten, dass auf Grund des Verlusts der iid-Eigenschaft der Returns, die optimalen Werte nicht mehr konstant sind, also zu jedem Zeitpunkt t vom Zustand n des Aktienpreisprozesses abhängt. Die Bestimmung der optimalen Konsum- und Investment-/Handelsstrategie soll nun auf Grund der aktualisierten Wahrscheinlichkeiten eine dynamischere Prognoseberechnung bieten.

Bevor wir nun die Resultate dieser Berechnungen betrachten, wollen wir einige verwendete Begriffe und Kennzahlen definieren:

²⁰Der Programmcode für die dynamische Programmierung des Konsum- und Investmentplans befindet sich im Anhang.

- **Cash-On-Hand:** Der Wert „Cash-On-Hand“ beschreibt jenes Vermögen, das dem Investor zu Beginn jeder Periode für den Konsum und das Investieren in sein Portfolio, bzw. ins Bankkonto, zur Verfügung steht. Es setzt sich zusammen aus dem Vermögen, welches in vorherigen Perioden aus den Kapital- und Arbeitseinkünften erwirtschaftet wurde, und dem Einkommen der aktuellen Periode:

$$\text{CoH}_{t,n} = W_{t,n} + Y_t$$

- **Konsumquote:** Die Konsumquote steht für den Prozentanteil des ihm verfügbaren Vermögens (also des Cash-On-Hands), den der Investor zu Beginn einer Periode entscheidet zu konsumieren:

$$\text{Konsumquote}_{t,n} = \frac{C_{t,n}}{W_{t,n} + Y_t}$$

- **Sparquote:** Die Sparquote beschreibt jenen Prozentsatz des verfügbaren Vermögens (also des Cash-On-Hands), den der Investor zu Beginn einer Periode entscheidet *nicht* zu konsumieren:

$$\text{Sparquote}_{t,n} = \frac{W_{t,n} + Y_t - C_{t,n}}{W_{t,n} + Y_t}$$

- **Aktienanteil:** Hat der Investor zu Beginn einer Periode entschieden wieviel er von seinem Vermögen konsumieren will, bleiben ihm $W_{t,n} + Y_t - C_{t,n}$ übrig. Den Anteil, den er davon in das riskante Asset investiert, bezeichnen wir in weiterer Folge mit dem Aktienanteil:

$$\text{Aktienanteil}_{t,n} = \frac{H_{t+1,n} S_{t,n}}{W_{t,n} + Y_t - C_{t,n}}$$

- **Wealth-Income-Ratio:** Weiters betrachten wir die sogenannte Wealth-Income-Ratio. Sie gibt an, wie groß zum Zeitpunkt t das Vermögen im Verhältnis zum aktuellen Arbeitseinkommen Y_t ist:

$$\text{Wealth-Income-Ratio}_{t,n} = \frac{W_{t,n}}{Y_t}$$

Ergebnisse

Wir betrachten in diesem Kapitel nun einige Auswertungen des oben beschriebenen (und im Anhang beigefügten) Programms `OptimalAssetAllocation.R`, und wollen anhand der Ergebnisse verschiedener Parametrisierungen deren Auswirkungen herauslesen.

6.1 Fall 1: Klassische Parameterwahl nach Stanley R. Pliska

Zu Beginn wollen wir einen bereits bekannten Fall betrachten, und wählen die Parameter vorerst wie im „klassischen“ Fall nach [16], Seite 167. Bei diesem Ansatz werden weder das Arbeitseinkommen, Sterblichkeit, ein Vererbungsmotiv, oder das Bayes'sche Updating berücksichtigt. Für die Ausführung des Programms starten wir mit folgendem Input:

Startvermögen W_0 :	10.000 €	Alter x :	20
Pensionsalter PA :	65	Endalter:	100
Laufzeit T :	80	Anzahl der Perioden N :	80
Erwartungswert μ_L :	0.03	Erwartungswert μ_H :	0.0357
Rechnungszins r :	0.03	Standardabweichung σ :	0.085
A-priori-Wahrscheinlichkeit P_0 :	0.5	Vererbungsparameter b :	0
Zeitpräferenz/Diskontfaktor ρ :	0.03	Relative Risikoaversion γ :	1
<i>Iteration</i> bei Berechnung von $z(c, w)$:	10		

Unsere Betrachtungen beginnen also mit dem 20. Lebensjahr bei $t = 0$ und hören mit dem 100. Lebensjahr bei $t = T = 80$ auf.

In den folgenden graphischen Darstellungen werden jeweils mehrere mögliche Pfade dargestellt:

- Man kann einerseits das „best-case“-Szenario betrachten, welches immer von der dunkelgrünen Linie dargestellt wird, und den Fall beschreibt, dass das Asset in jeder Periode seinen Wert steigert.
- Dem gegenüber steht die dunkelrote Linie, die den gegenteiligen Fall (also das „worst-case“-Szenario) darstellt, dass das Asset immer an Wert verliert.

- Innerhalb der ersten beiden beschriebenen Linien befinden sich alle möglichen Werte für die betrachtete Größe. Pfad 1 (die blaue Linie) beschreibt den Fall, dass sich das Asset im Binomialbaum gemäß dem Erwartungswert der Binomialverteilung entwickelt. Dazu werden für jeden Zeitpunkt t der Erwartungswert $\mathbb{E}[N_t]$ der binomialverteilten Anzahl der Aufwärtsbewegungen betrachtet. Da wir in den verschiedenen Zuständen im Binomialbaum nur die Werte für die ganzzahligen Anzahlen der Aufwärtsbewegungen haben, wird der Erwartungswert der jeweils untersuchten Größe mittels linearer Interpolation berechnet.
- Die Pfade 2 und 3 beschreiben die Entwicklung im Binomialbaum, wenn man die Pfade mit $\mathbb{E}[N_t] \pm \sqrt{\text{Var}[N_t]}$ betrachtet.
- Pfade 4 und 5 zeigen die Pfade im Binomialbaum mit $\mathbb{E}[N_t] \pm 2 \cdot \sqrt{\text{Var}[N_t]}$.

Betrachten wir in zunächst einen *log-utility-Investor*, also einem Investor der durch eine relative Risikoaversion von $\gamma = 1$ charakterisiert wird, und für den die Nutzenfunktion über den Logarithmus dargestellt wird:

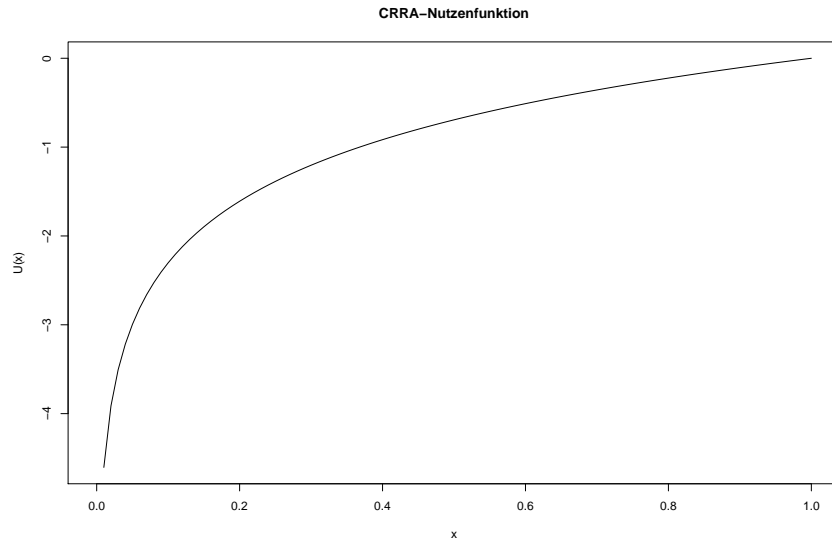


Abbildung 6.1.1: CRRA-Nutzenfunktion eines log-utility-Investors

Die Nutzenfunktion ist für den log-utility-Fall für einen beliebigen Zeitpunkt für verschiedene Zustände immer gleich. Sie verändert sich jedoch bei der dynamischen Programmierung in jedem Rückwärtsschritt, und nimmt zu früheren Zeitpunkten immer größere Werte an. Hierzu betrachten wir verschiedene Vermögensnutzenfunktionen V_t zwischen den Zeitpunkten 0 und T :

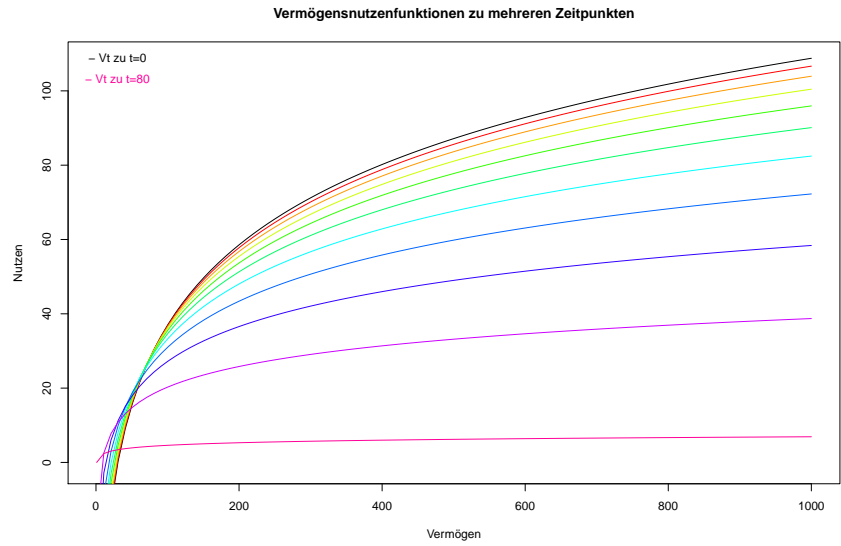


Abbildung 6.1.2: Wertefunktionen V_t für verschiedene Zeitpunkte zwischen 0 und T

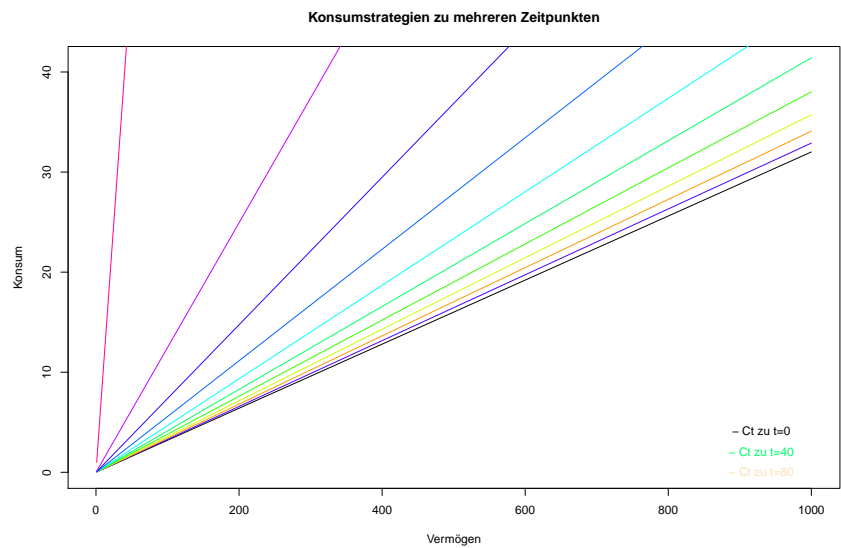


Abbildung 6.1.3: Konsumstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen

Wie es sich bei der Konsumstrategie verhält, die der log-utility-Investor in

jedem Zeitpunkt wählt, sehen wir in Abb. 6.1.3. Wie man erkennen kann ist der Konsum linear in W_t . Vergleichen wir die Konsumstrategien zu verschiedenen Zeitpunkten, so hätte der Investor zu den verschiedenen Vermögen einen höheren Konsum, je später der betrachtete Zeitpunkt ist. Wie die schwarze Linie zeigt ist der Konsum zum Zeitpunkt $t=0$ noch sehr gering, und steigt immer mehr an, je weniger Zeit dem Investor im Leben noch bleibt, bis er schließlich im Zeitpunkt $t = 80$ sein restliches Vermögen konsumiert.

Gehen wir - wie bei den Berechnungsparametern festgelegt - von einem Startkapital von 10.000 Euro, so ist die erwartete optimale Konsumstrategie über den Lebenszyklus wie folgt:

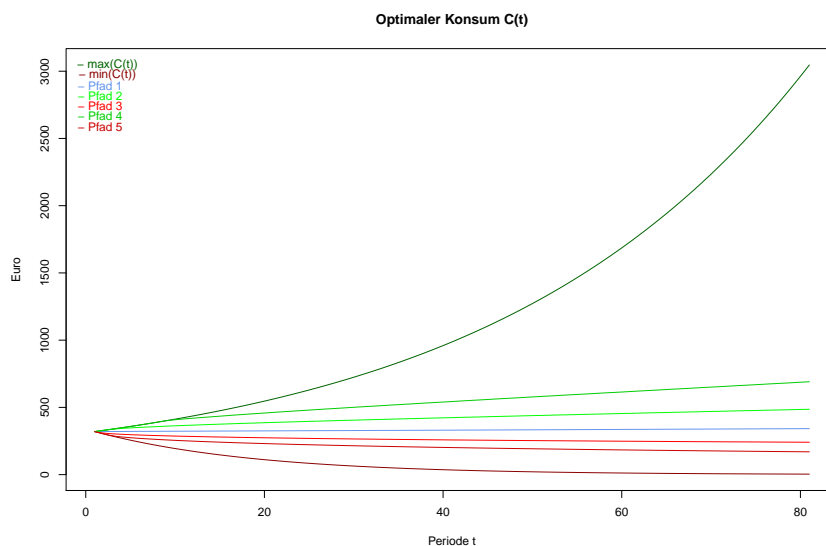


Abbildung 6.1.4: Optimaler Konsum eines log-utility-Investors

Abhängig vom ausgewählten Konsum entscheidet er sich als Nächstes eine gewisse Stückzahl des riskanten Assets zu investieren, was sich wie in Abbildung 6.1.5 auch als Anteil vom verfügbaren Vermögen ausdrücken lässt. Da der Aktienanteil in jedem Zustand gleich ist, sich aber der Aktienwert anders entwickelt, muss man bei einem niedrigeren Wert von S_t mehr Stücke H_t investieren. Betrachtet man hingegen in Abb. 6.1.7 die Handelsstrategien zu verschiedenen Zeitpunkten des Lebenszyklus, so sieht man, dass das Investment in das riskante Asset mit der Zeit immer geringer wird. Wie wir in der Graphik 6.1.5 sehen können, ist der Aktienanteil in jedem

Zustand konstant. Dies stimmt auch mit der analytischen Lösung von [16], Seite 167, überein. Für unseren log-utility-Investor ergibt sich daher die optimale Handelsstrategie für die betrachteten 80 Perioden gemäß Abb. 6.1.6. Da jedoch der Aktienpreis umso höher ist, je mehr Aufwärtsbewegungen stattgefunden haben, kauft der Investor in jedem Zustand verschieden viele Aktien, um auf die gleiche, optimale Summe des Investments zu gelangen. So muss er beispielsweise im schlechtesten Verlauf verhältnismäßig viele Aktien kaufen, da deren Wert bereits beträchtlich gesunken ist, wie der Verlauf der dunkelroten Kurve in Abbildung 6.1.6 zeigt.

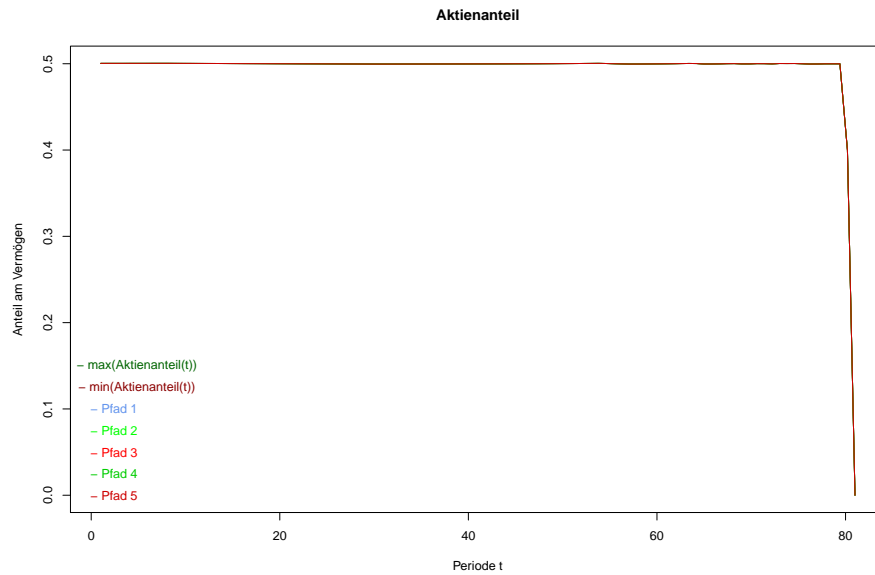


Abbildung 6.1.5: Aktienanteil des log-utility-Investors

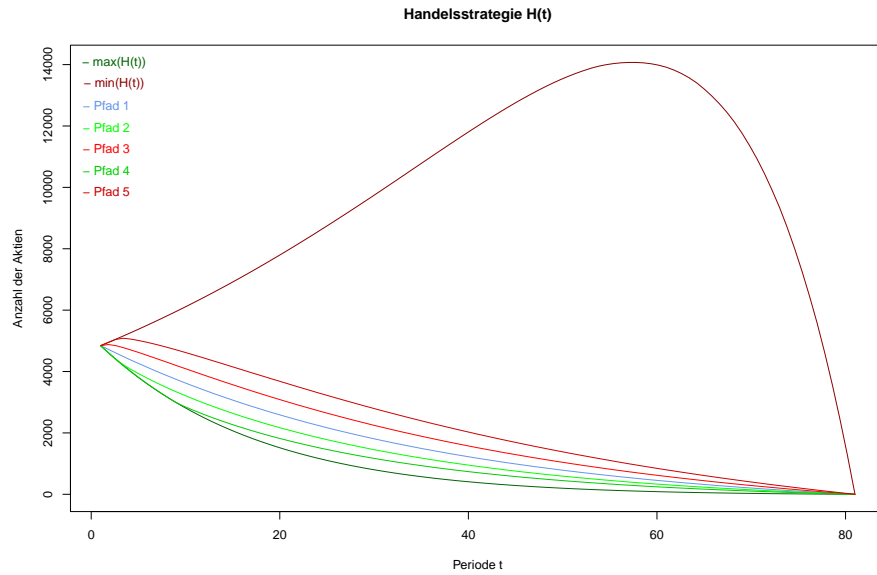


Abbildung 6.1.6: Optimale Handelsstrategie eines log-utility-Investors

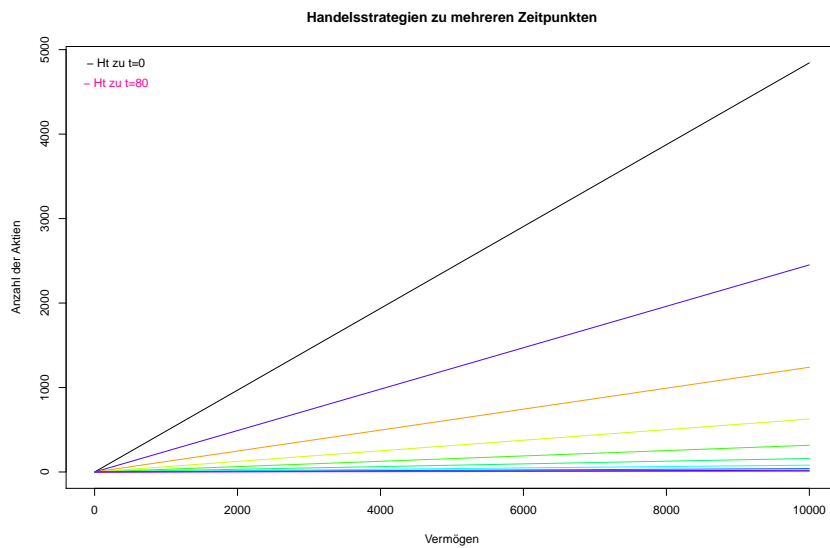


Abbildung 6.1.7: Handelsstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen

Das Vermögen entwickelt sich infolge der bisher betrachteten Strategien wie

folgt:

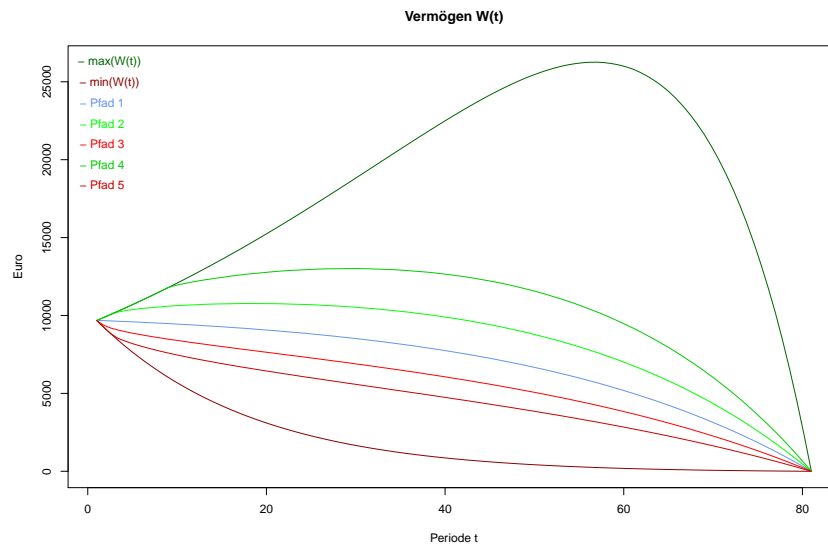


Abbildung 6.1.8: Vermögensverlauf bei logarithmischem Nutzen

Bleiben wir vorerst im klassischen Fall, wechseln jedoch vom log-utility-Investor zu einem Investor mit höherer Risikoaversion. Betrachten wir nun einen Investor mit relativer Risikoaversion $\gamma = 2,5$, dann sieht die Nutzenfunktion wie folgt aus:

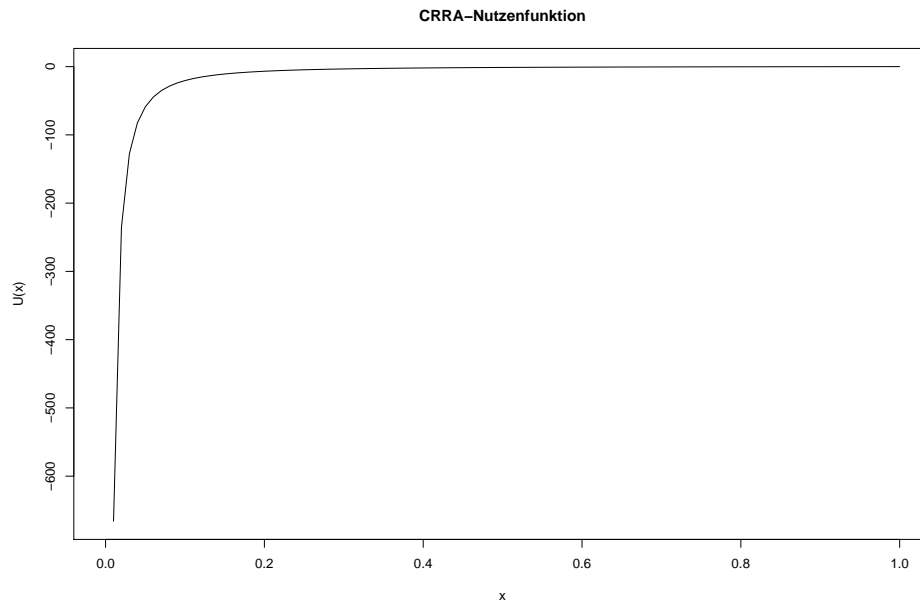


Abbildung 6.1.9: Wertefunktion bei relativer Risikoaversion $\gamma=2,5$

bzw., wenn wir die Vermögensnutzenfunktionen mehrerer Perioden betrachten, wie folgt:

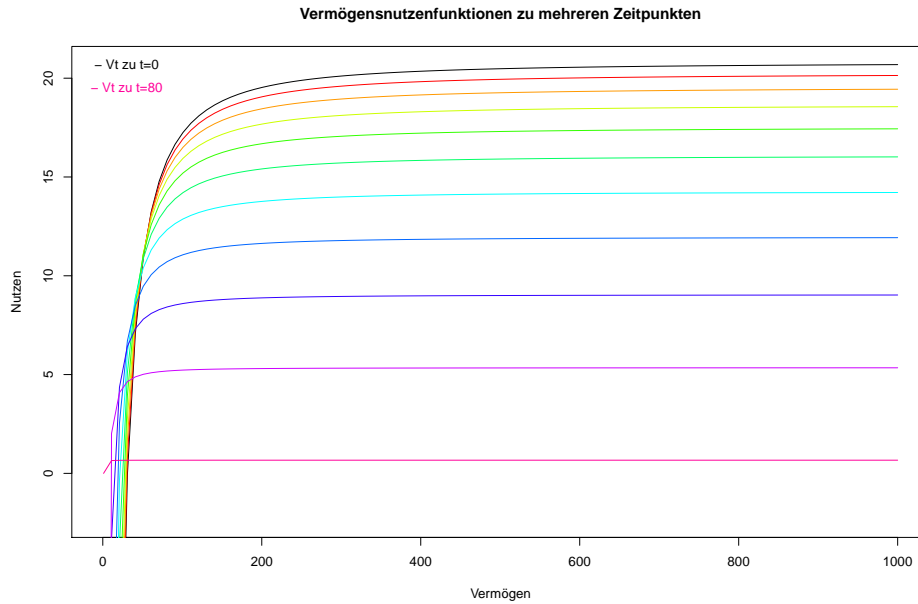


Abbildung 6.1.10: Wertefunktion bei $\gamma=2,5$ zu unterschiedlichen Zeitpunkten

Man erkennt hier den deutlich flacheren Verlauf der Vermögensnutzenfunktion, was zur Folge hat, dass für den Investor der Sättigungseffekt der konkaven Nutzenfunktion wesentlich früher eintritt als bei der logarithmischen Nutzenfunktion.

Dies führt nun dazu, dass der Investor weniger in das riskante Asset investiert, was man beim Vergleich der Graphiken 6.1.6 und 6.1.11 erkennen kann. Der Aktienanteil verringert sich um mehr als die Hälfte.

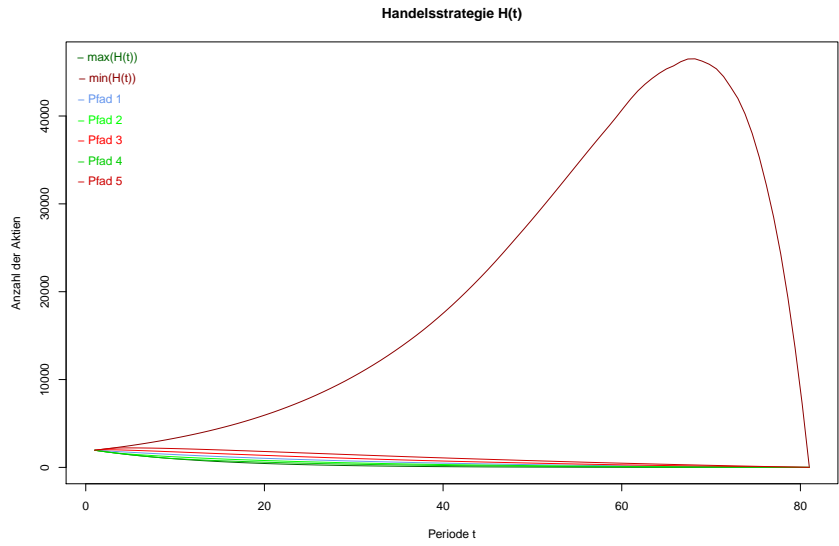


Abbildung 6.1.11: Optimale Handelsstrategie bei $\gamma=2,5$

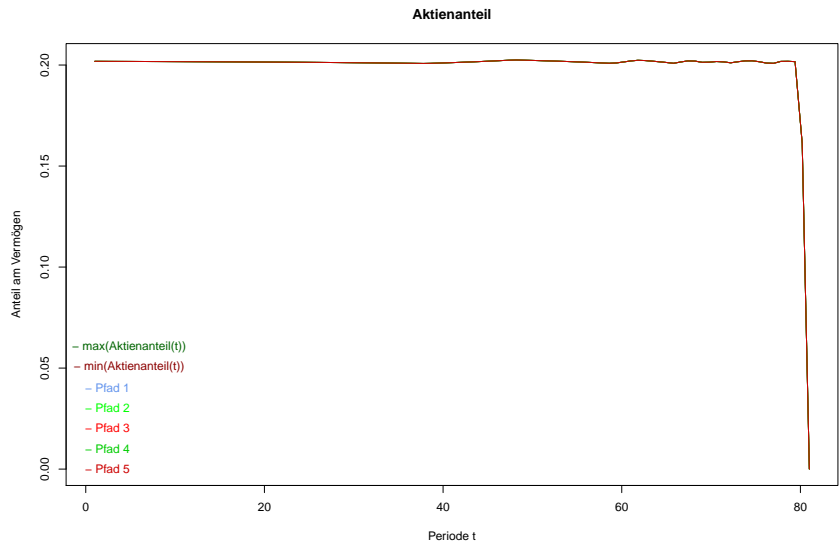


Abbildung 6.1.12: Aktienanteil bei $\gamma=2,5$

6.2 Fall 2: Mit Sterblichkeit und Vererben

Fügen wir nun weitere Parameter zu unserer Berechnung hinzu. Vorerst wollen wir die Auswirkungen betrachten, die sich ergeben, wenn man dem Investor die Faktoren Sterblichkeit, sowie einen Vererbungsparameter hinzufügen. Als Sterbewahrscheinlichkeiten nehmen wir die bereits oben erwähnten einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten q_x , die wir den Daten der Statistik Austria entnehmen.

Des Weiteren unterstellen wir ein Vererbungsmotiv, welches sich durch den Parameter b darstellen. Dadurch erhöht sich der Nutzen aus zusätzlichem Vermögen zu jedem Zeitpunkt um den Nutzen aus einem theoretischen Erbe im Falle des Ablebens des Investors. Der Konsum verliert dadurch für den Investor an Wert, und es wird in diesem Fall mehr gespart, bzw. investiert, um für die Zukunft vorzusorgen.

Wir nehmen dazu einen Vererbungsparameterwert mit $b = 0,5$ an, der einen „moderaten“ Vererbungswunsch darstellt, wenn man $b = 1$ als „volles“, und $b > 1$ als sehr starkes Vererbungsmotiv ansieht.

Die Sterblichkeit verringert jedoch den Nutzen aus zukünftigem Vermögen, weshalb durch die beiden Faktoren gegenteilige Effekte auftreten.

Die Vermögensnutzenfunktionen sehen demnach nun wie folgt aus:

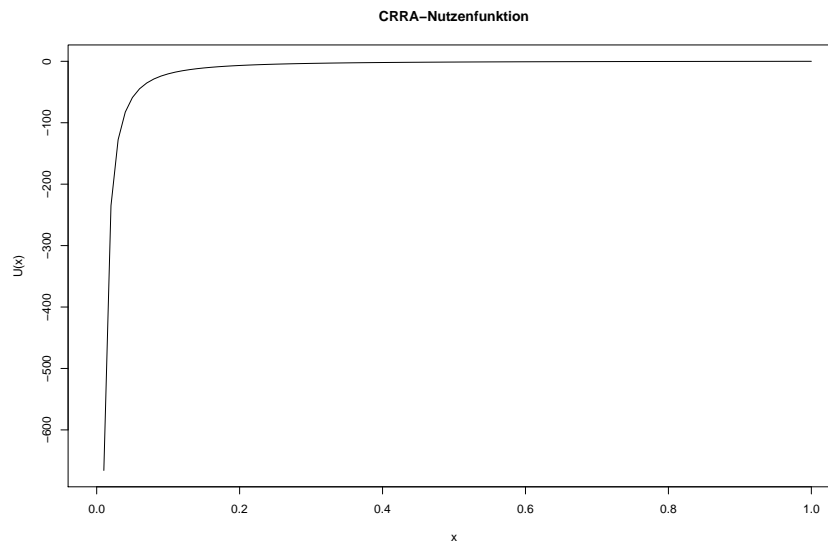


Abbildung 6.2.1: CRRA-Nutzenfunktion zum Zeitpunkt 0 bei Sterblichkeit und Vererben

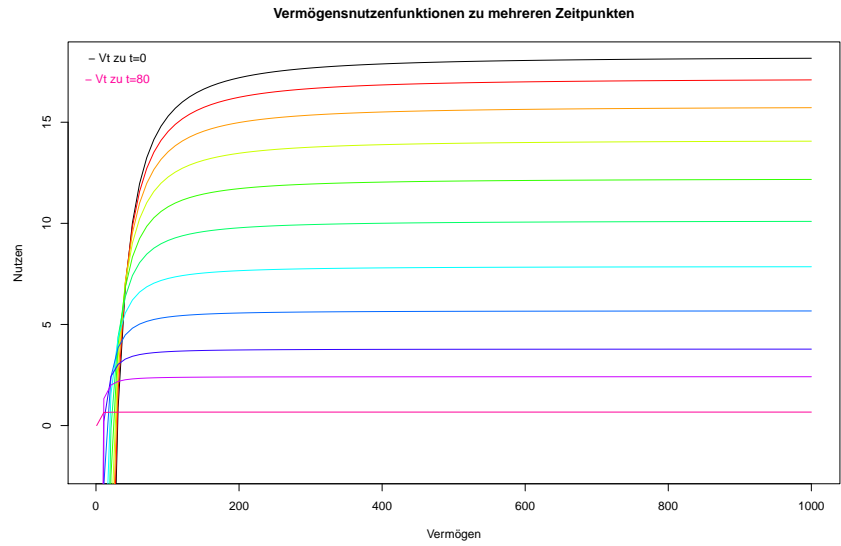


Abbildung 6.2.2: Wertefunktionen V_t für verschiedene Zeitpunkte zwischen 0 und T

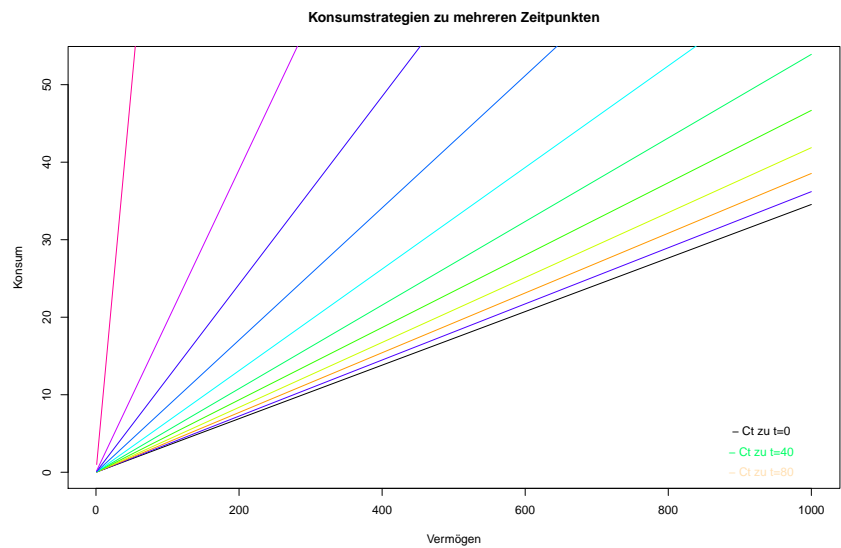


Abbildung 6.2.3: Konsumstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen

Wir erhalten eine Konsum- und Handelsstrategie, die wie folgt aussehen:

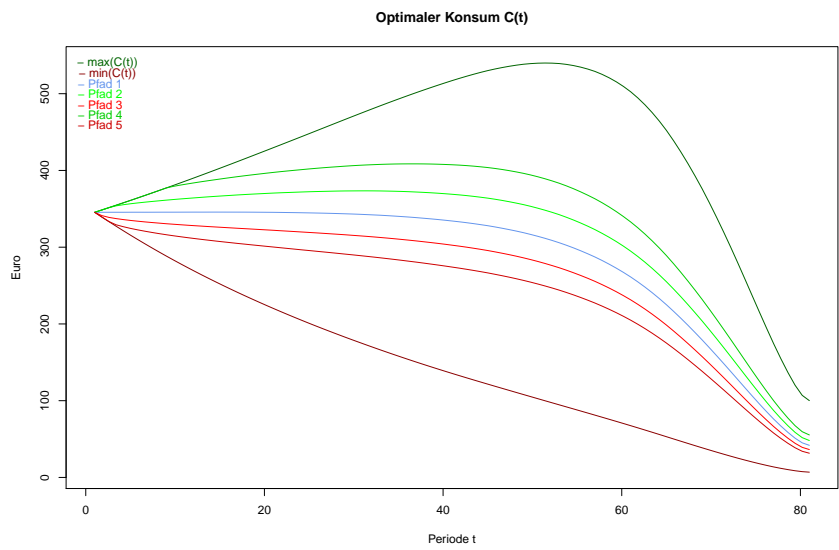


Abbildung 6.2.4: Optimale Konsumstrategie bei Sterblichkeit und Vererben

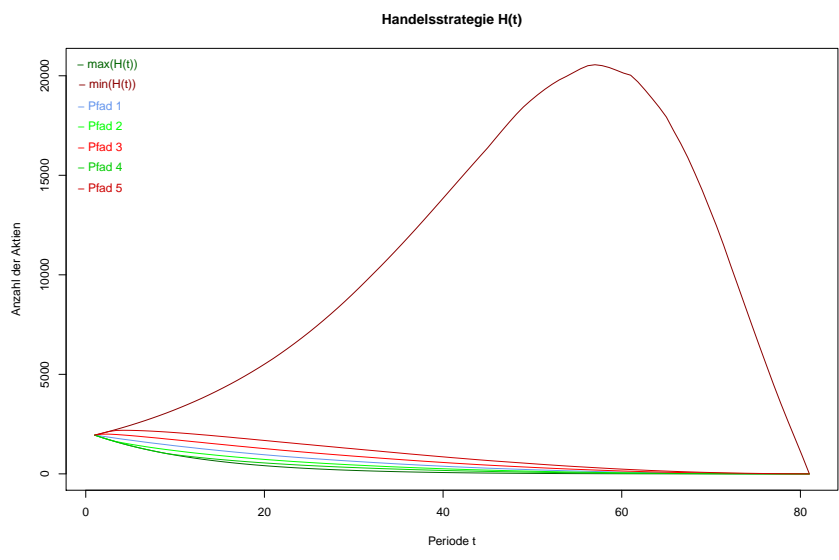


Abbildung 6.2.5: Optimale Handelsstrategie bei Sterblichkeit und Vererben

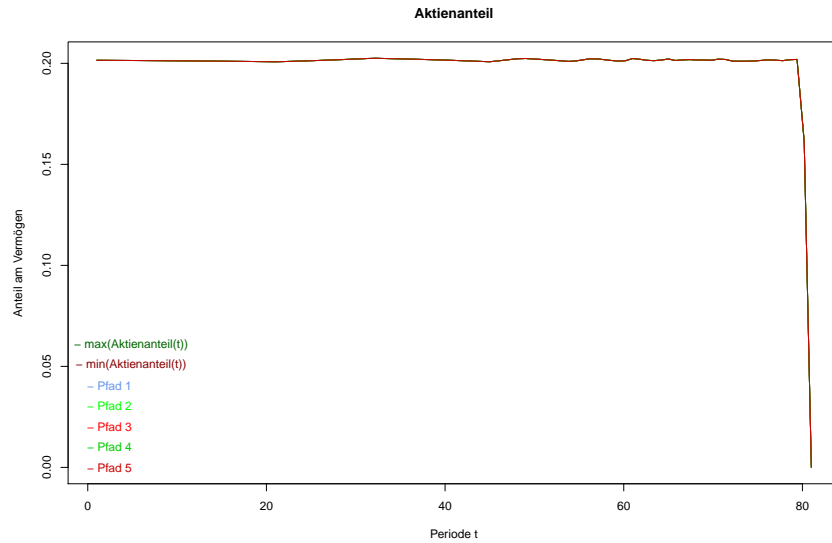


Abbildung 6.2.6: Aktienanteil bei Sterblichkeit und Vererben

Man sieht in Abbildung 6.2.6, dass der Aktienanteil wieder konstant und im selben Ausmaß wie im Fall 1 ist.

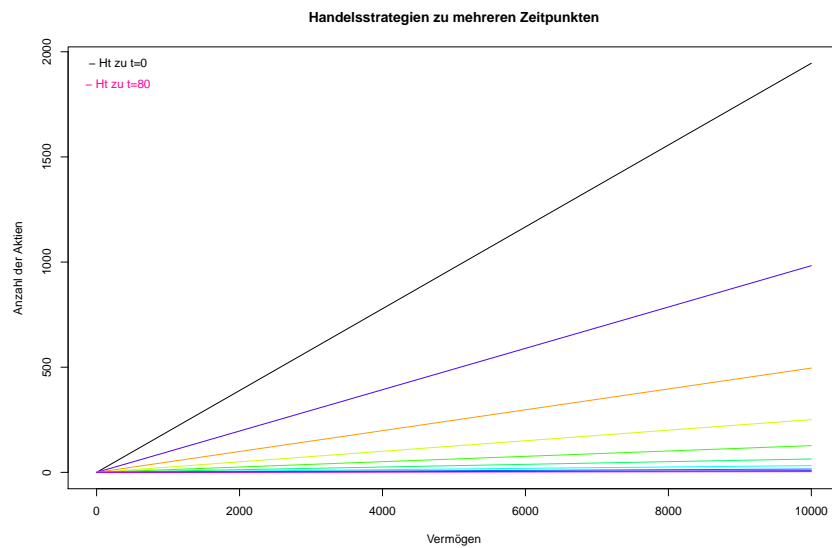


Abbildung 6.2.7: Handelsstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen

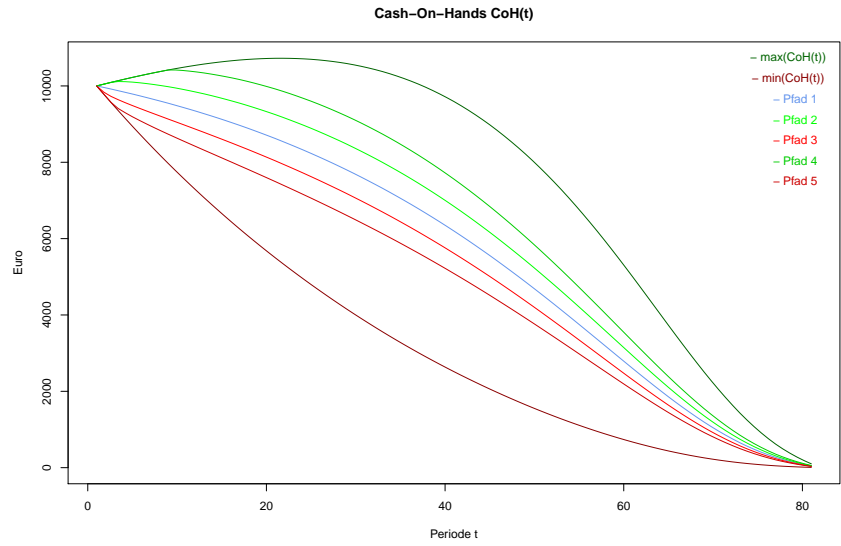


Abbildung 6.2.8: Cash-on-Hand bei Sterblichkeit und Vererben

Der Konsum hat sich zum vorherigen Fall etwas reduziert. Hingegen ist dem Investor das Sparen wichtiger geworden, was man in Abbildung 6.2.9 erkennen kann.

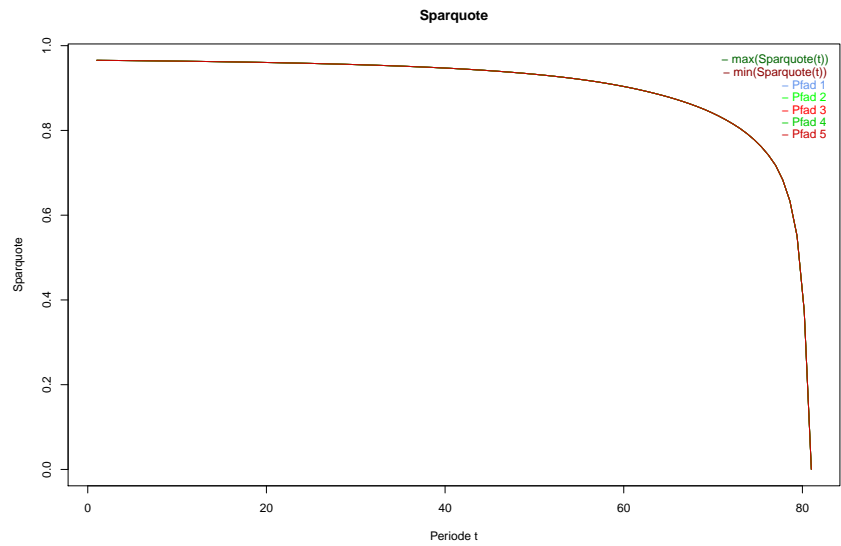


Abbildung 6.2.9: Sparquote bei Sterblichkeit und Vererben

6.3 Fall 3: Mit Arbeitseinkommen

Wir fügen nun mit dem Arbeitseinkommen Y_t eine weitere wichtige Komponente in unsere Berechnungen ein, und wollen seine Auswirkungen beobachten. Die Einkommensfunktion wurde in Kapitel 2.1.2 bereits definiert und erklärt, und ist eine vom Alter abhängige, deterministische Funktion, die das durchschnittliche Nettoeinkommen in Österreich präsentieren soll. Die Daten hierzu stammen ebenfalls dem Datenbestand der Statistik Austria.

Wir unterstellen also in unseren Berechnungen nun auch die Tatsache, dass ein Investor neben Kapitaleinkünften ein Einkommen aus einer Beschäftigung bezieht. Das führt zu einer Verschiebung der Nutzenfunktion, die zu jeder Periode nun auch kleinen Einkommen einen entsprechend größeren Nutzen zuordnet, da von einer fixen Einnahme aus eben jener Beschäftigung gerechnet wird. So sehen die Vermögensnutzenfunktionen über den Lebenszyklus wie folgt aus:

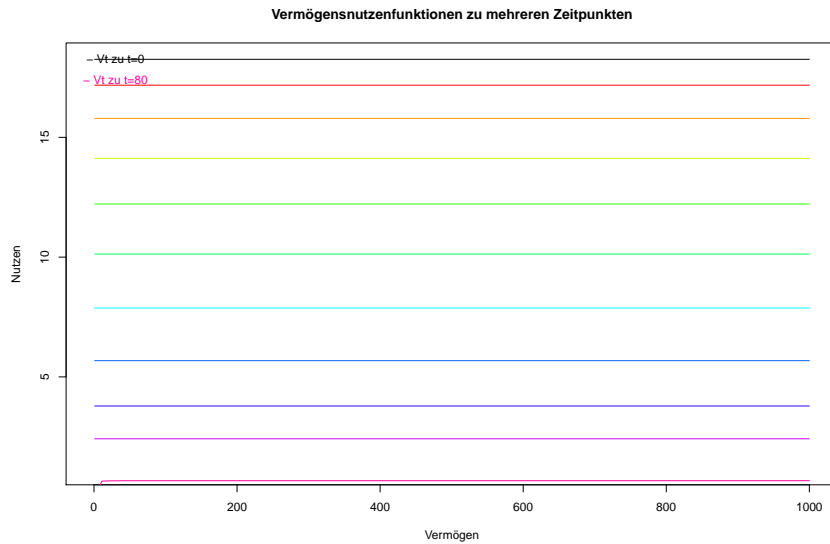


Abbildung 6.3.1: Wertefunktionen V_t für verschiedene Zeitpunkte zwischen 0 und T

Die Vermögensnutzenfunktionen wirken linear, da sie einerseits durch die relative Risikoaversion $\gamma = 2,5$ schon ab geringem Vermögen stark abflachen, andererseits nun auch durch das Arbeitseinkommen eine Verschiebung des Nutzens stattfindet, und die Nutzenfunktion bei einem höheren Wert be-

ginnt, nämlich beim Nutzen für die Höhe des Einkommens. Dies beeinflusst die Strategien des Investors natürlich sehr, da man nun mit dem fixen Einkommen immer eine gewisse Absicherung hat, und man Verluste des Kapitalgeschäfts aus frühen Jahren später wieder ausgleichen kann. Genauso verhält es sich mit dem Konsum, wo das insbesondere anhand der Konsumquote in Abb. 6.3.4 ersichtlich ist.

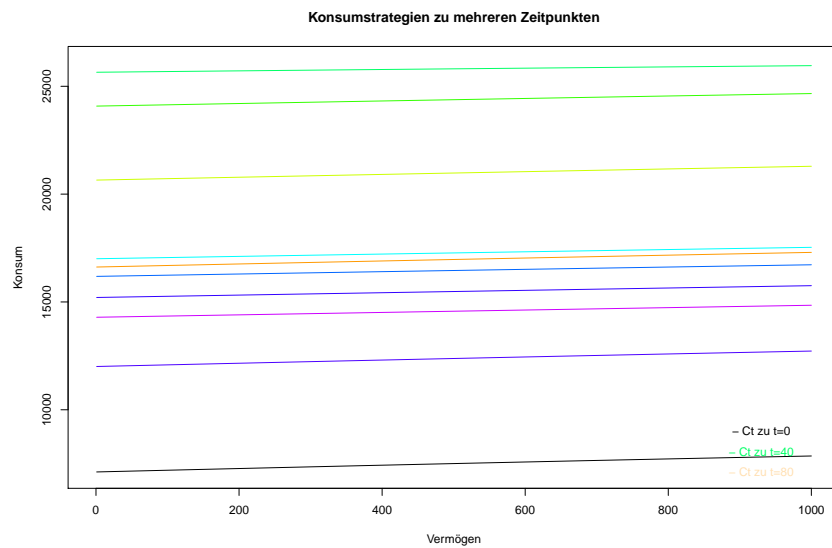


Abbildung 6.3.2: Konsumstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen bei Arbeitseinkommen

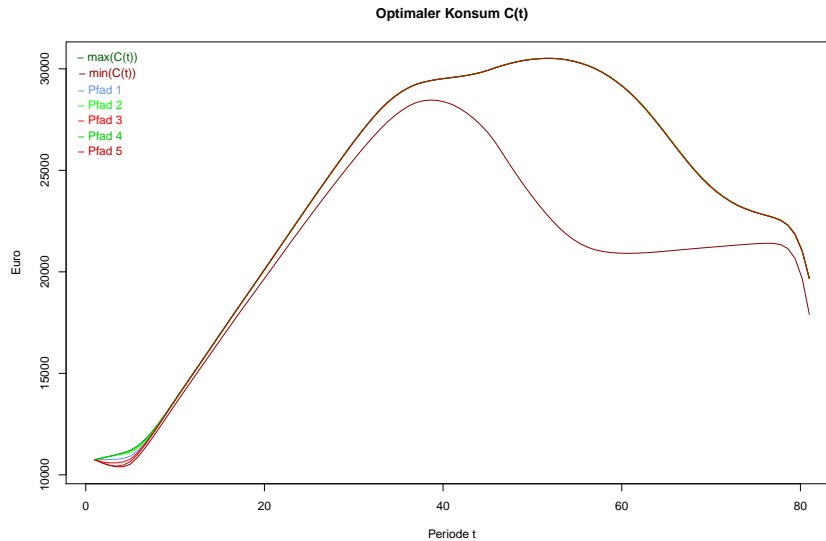


Abbildung 6.3.3: Optimale Konsumstrategie bei Arbeitseinkommen bei Arbeitseinkommen

Wegen der Gewissheit, dass in späteren Jahren noch genug Kapital für ein potentielles Erbe erwirtschaftet wird, kann in frühen ein Großteil konsumiert werden, und der Rest ins riskante Asset investiert werden. Umso älter der Investor wird, desto mehr wechselt er seine Strategie vom riskanten Asset zum risikolosen Bankkonto.

Ein weiterer Faktor, der sich in den Darstellungen bemerkbar macht, ist der „Einkommenshock“. Im Alter von 65 Jahren geht der Investor in Pension und bezieht fortan nur noch 60% seines letzten Einkommens. Ab diesem Zeitpunkt wird jener Anteil des Vermögens, den der Investor ins riskante Asset steckt, immer kleiner. Er konsumiert bis zum Ende der Lebenszeit dafür wieder mehr, sodass das Vermögen bis zum Endalter schließlich fast aufgebraucht ist. Er konsumiert jedoch immer nur so viel, dass ein gewisses Erbe für den möglichen Todesfall bestehen bleibt. Der Betrag, der nach dem Konsum noch zur Verfügung steht, wird überwiegend auf das Bankkonto gelegt.

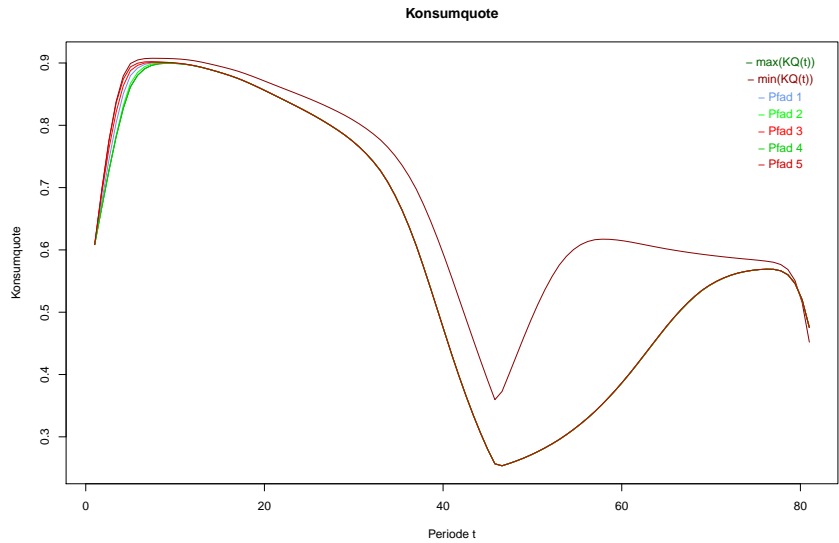


Abbildung 6.3.4: Konsumquote bei Arbeitseinkommen

Aufgrund des Einkommens unterscheiden sich nun die verschiedenen Pfade kaum voneinander. Lediglich der ganz schlechte Verlauf der Aktienentwicklung führt zu einer sichtlich schlechteren Entwicklung des Vermögens.

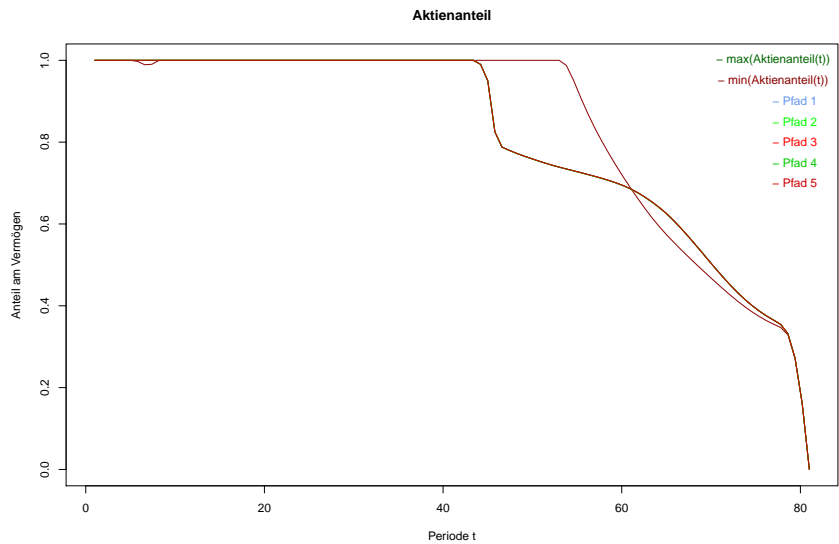


Abbildung 6.3.5: Aktienanteil bei Arbeitseinkommen

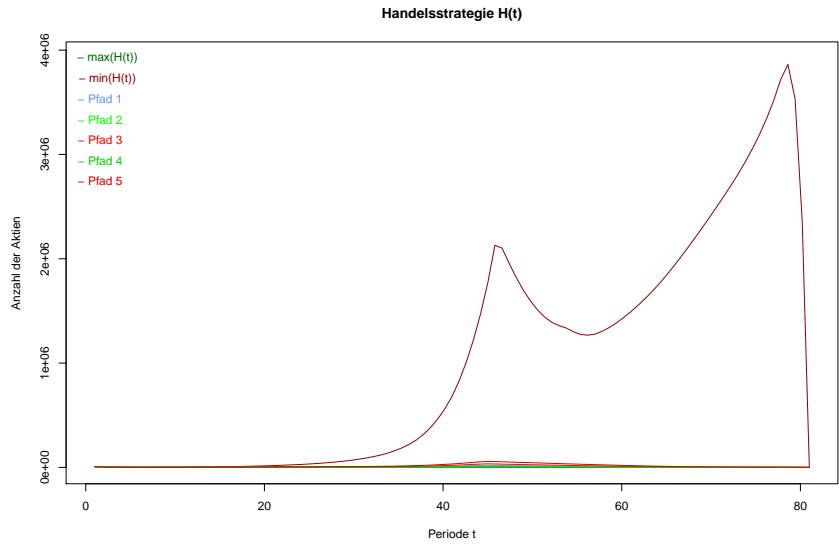


Abbildung 6.3.6: Optimale Handelsstrategie bei Arbeitseinkommen

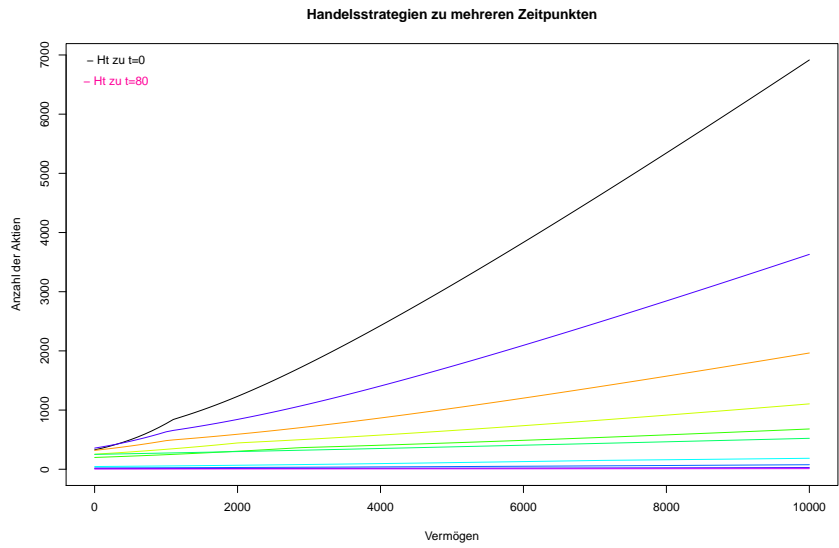


Abbildung 6.3.7: Handelsstrategien für verschiedene Zeitpunkte und Vermögen bei Arbeitseinkommen

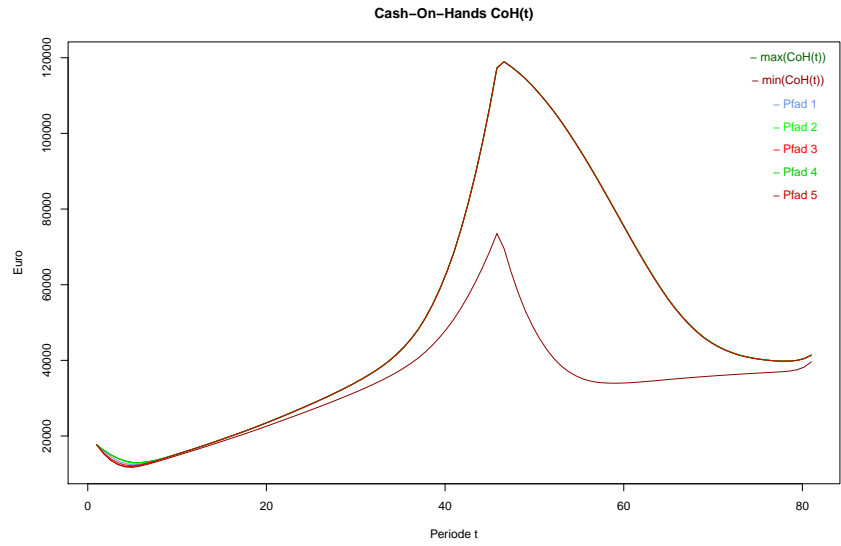


Abbildung 6.3.8: Cash-on-Hand bei Arbeitseinkommen

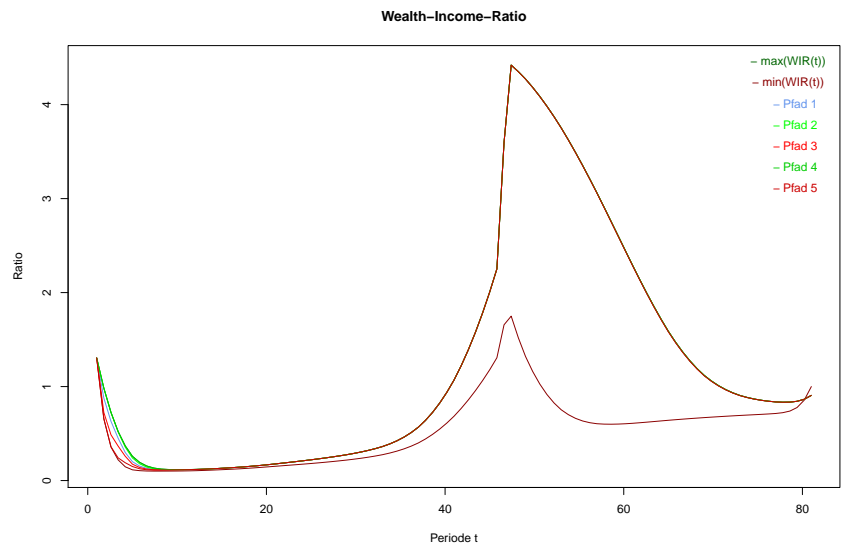


Abbildung 6.3.9: Wealth-Income-Ratio bei Arbeitseinkommen

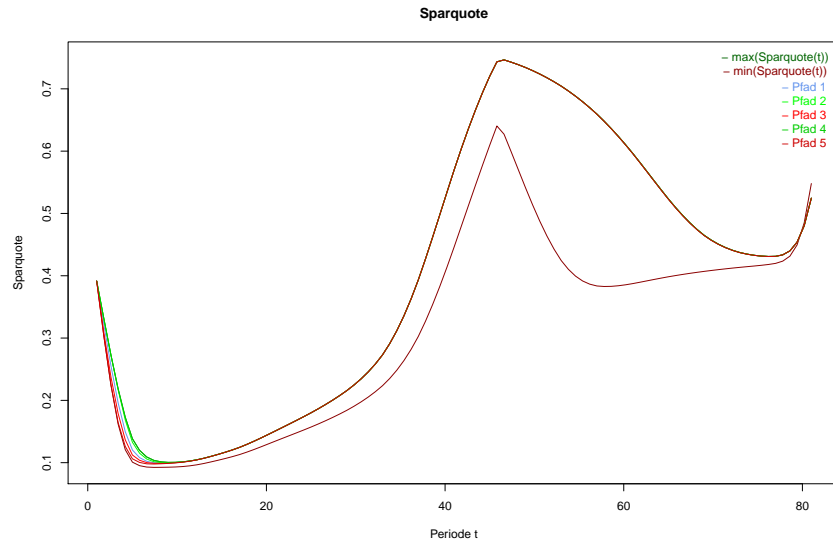


Abbildung 6.3.10: Sparquote bei Arbeitseinkommen

6.4 Fall 4: Mit hoher relativer Risikoaversion

Als nächstes schauen wir noch an, welche Auswirkungen eine Erhöhung der relativen Risikoaversion auf $\gamma = 5$ hat. Eine intuitive Einschätzung lässt uns vermuten, dass sich dadurch der Anteil am riskanten Asset deutlich senkt. Die Abbildung 6.4.1 bestätigt dies auch:

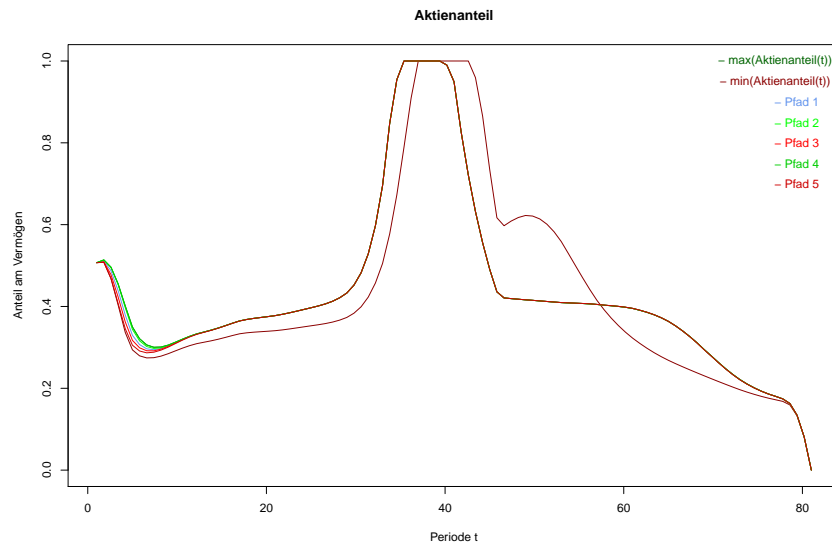


Abbildung 6.4.1: Aktienanteil bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$

Was sich jedoch nicht geändert hat ist das Konsumverhalten, welches in Abb. 6.4.2 dargestellt ist. Der Konsum ist also nur etwas geringer, die Sparquote dafür leicht größer. Das Cash-On-Hand unterscheidet sich kaum, jedoch merkt man an der Wealth-Income-Ratio ein etwas höheres Vermögen, welches eher gespart als investiert wird.

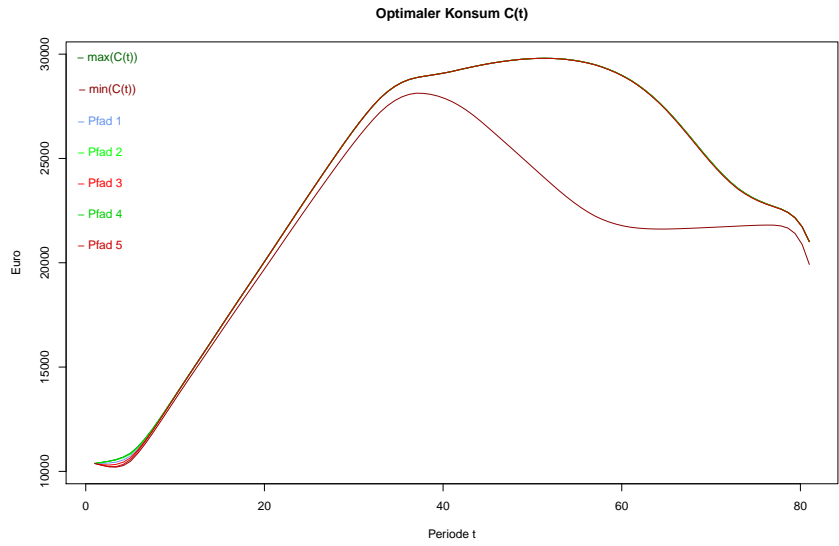


Abbildung 6.4.2: Konsumstrategie bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$

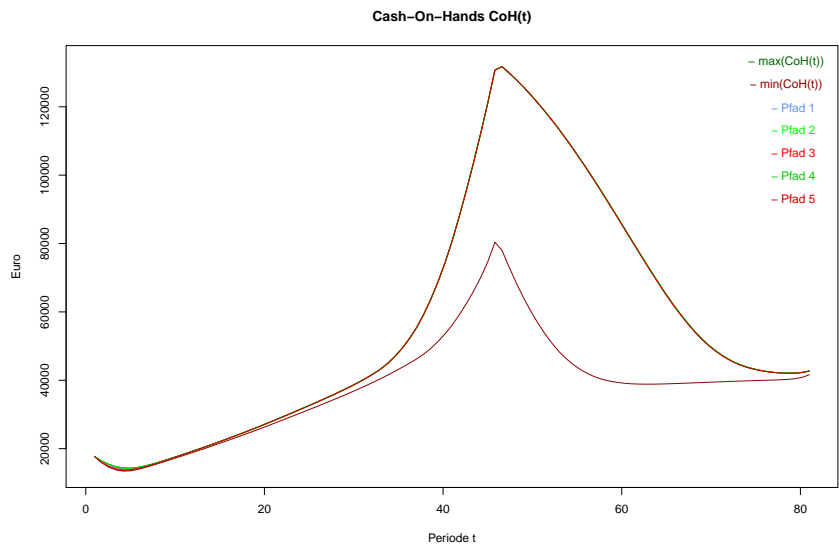


Abbildung 6.4.3: Cash-on-Hand bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$

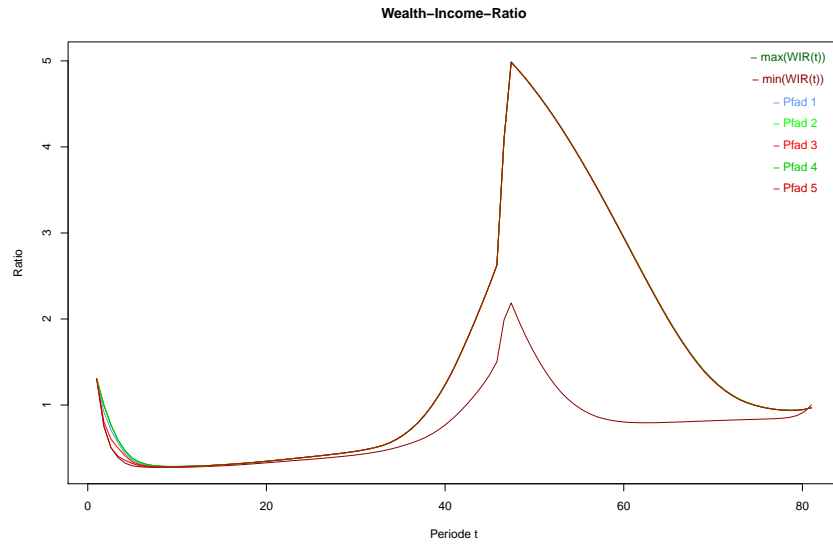


Abbildung 6.4.4: Wealth-Income-Ratio bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$

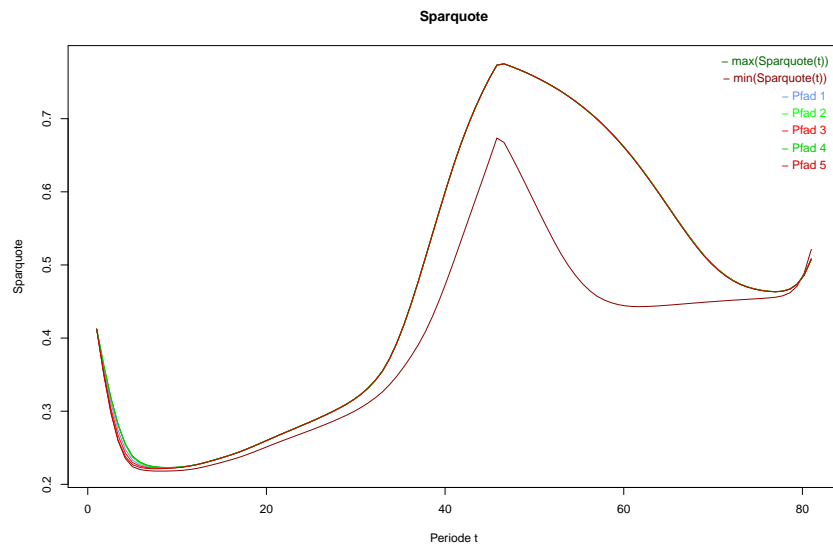


Abbildung 6.4.5: Sparquote bei höherer relativer Risikoaversion $\gamma=5$

6.5 Fall 5: Mit Bayes'schem Updating

Nun kommen wir zur letzten Betrachtung unserer Berechnung. Wie in Kapitel 4.3.2 hergeleitet, gehen wir jetzt nicht mehr von konstanten Übergangswahrscheinlichkeiten im Binomialmodell aus, sondern beachten die bisherige Entwicklung des Aktienpreisprozess und aktualisieren diese Wahrscheinlichkeiten entsprechend. Wir simulieren also ein prozyklisches Verhalten, bei dem der Investor auf Aktienwertsteigerungen mit einem höheren Investment in die Aktie reagiert.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten $\tilde{\pi}_t(n)$ bewegen sich dann in folgendem Rahmen:

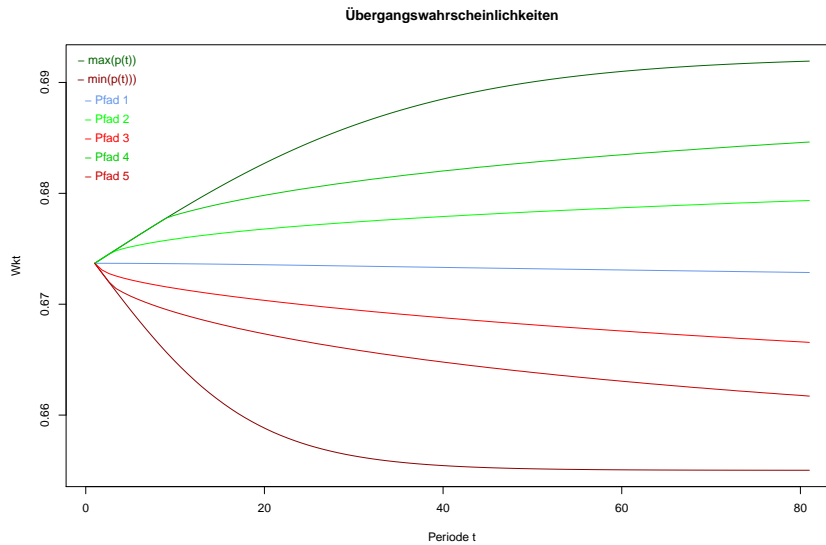


Abbildung 6.5.1: Übergangswahrscheinlichkeiten im Bayes-Binomialbaum

Durch das Unterscheiden der verschiedenen Übergangswahrscheinlichkeiten für alle Zustände im Binomialbaum ergeben sich auch Unterschiede bei der Vermögensnutzenfunktion, sowie der Konsum- und Investmentstrategie. Vergleichen wir diese Funktionen für die Alter 40, 65 (zum Pensionsalter), 80 und 100 (zum Endalter), dann können wir zu diesen Zeitpunkten je nach Zustand unterscheiden:

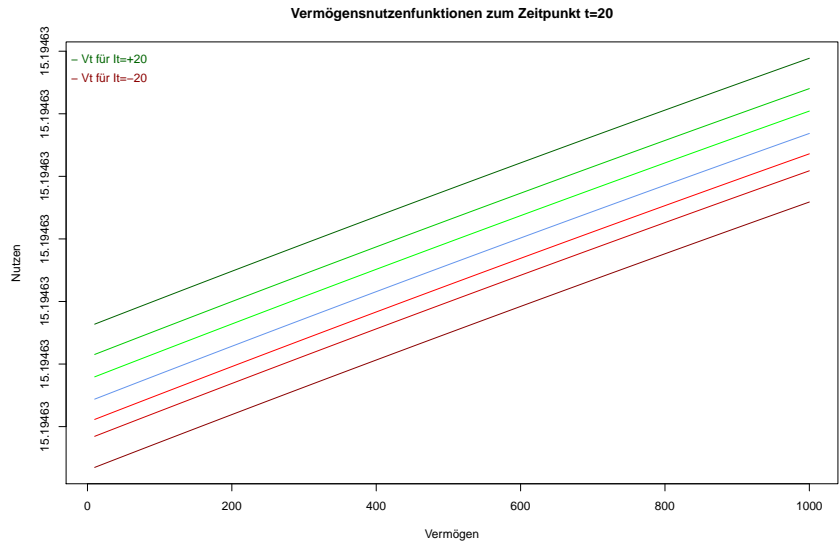


Abbildung 6.5.2: Vermögensnutzenfunktion zum Alter 40

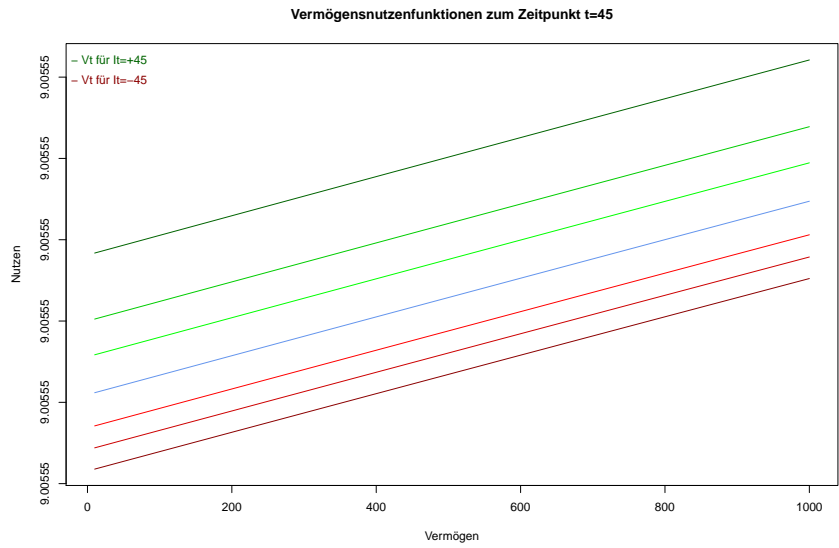


Abbildung 6.5.3: Vermögensnutzenfunktion zum Pensionsalter

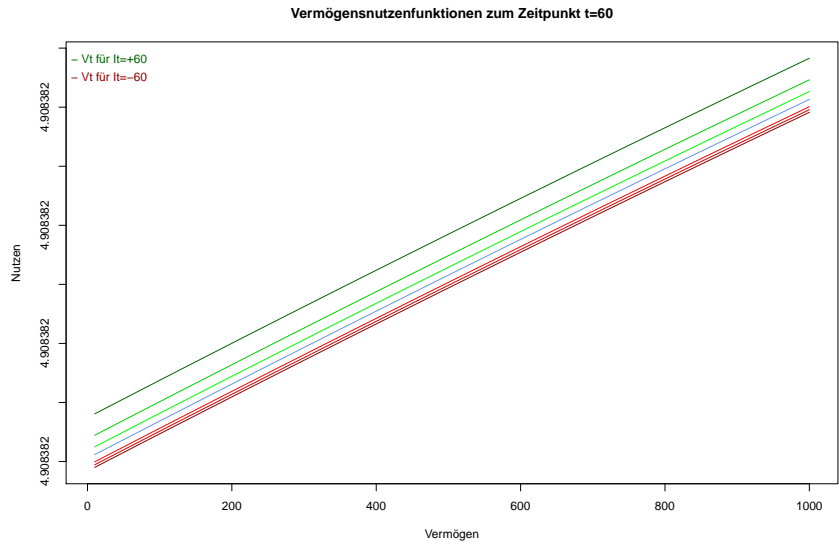


Abbildung 6.5.4: Vermögensnutzenfunktion zum Alter 80

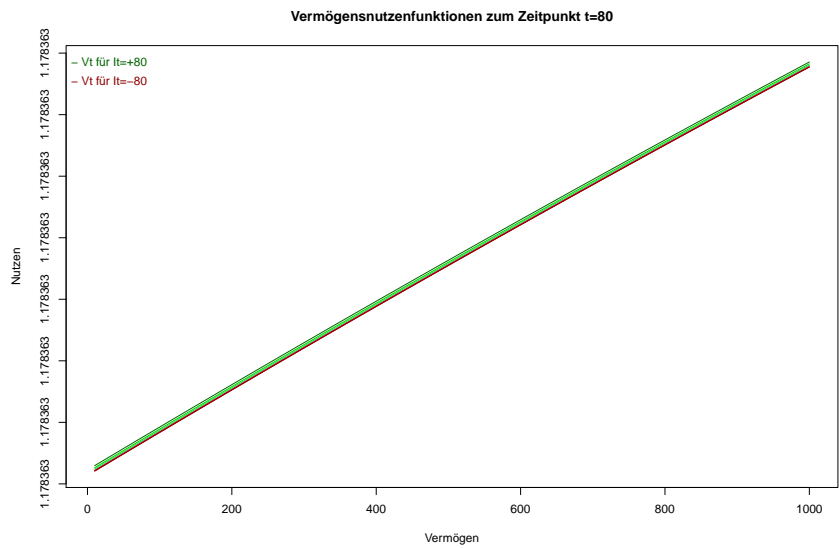


Abbildung 6.5.5: Vermögensnutzenfunktion zum Endalter

Ebenso treten Differenzen in den Handelsstrategien auf, die in jedem Zustand der verschiedenen Perioden zu wählen sind. Die Konsumentenscheidun-

gen werden durch das Bayes'sche Updating hingegen kaum beeinflusst:

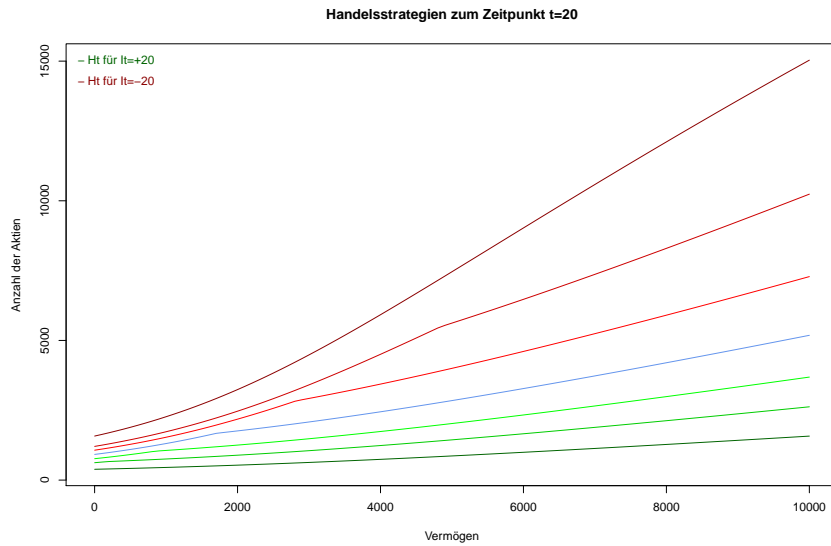


Abbildung 6.5.6: Handelsstrategiefunktionen zum Alter 40

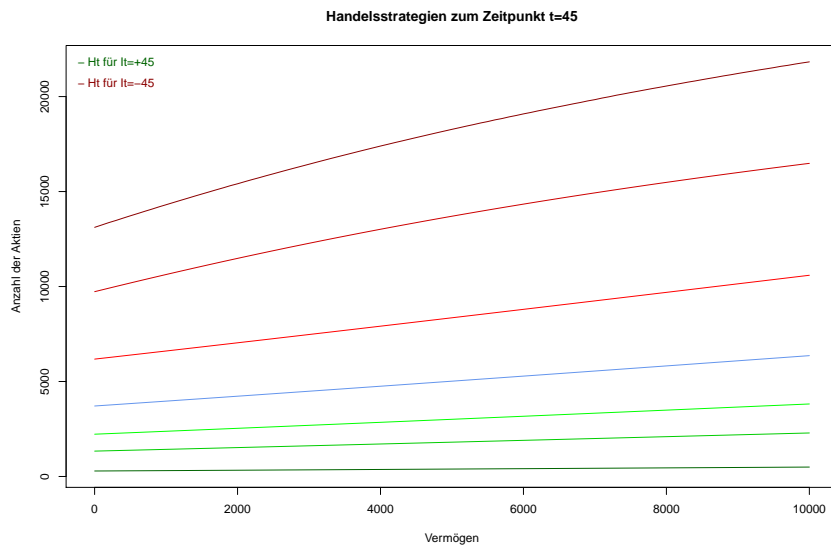


Abbildung 6.5.7: Handelsstrategiefunktionen zum Pensionsalter

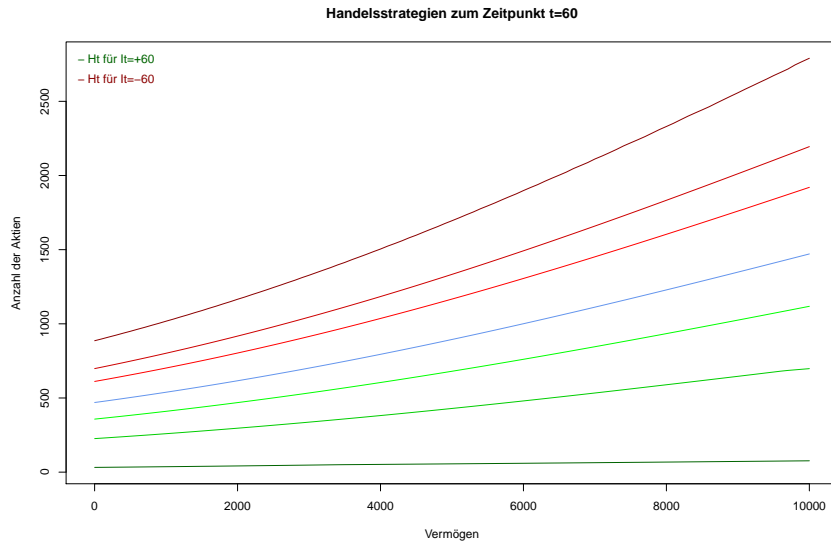


Abbildung 6.5.8: Handelsstrategiefunktionen zum Alter 80

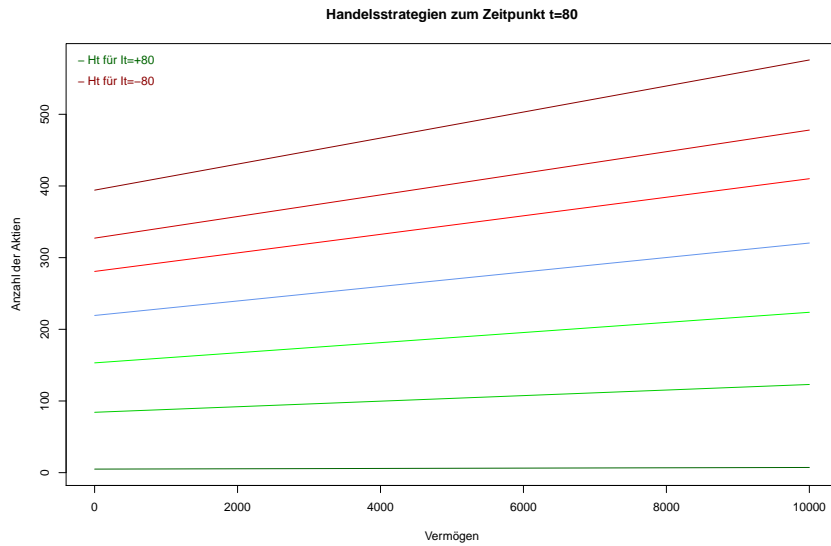


Abbildung 6.5.9: Handelsstrategiefunktionen zum Endalter

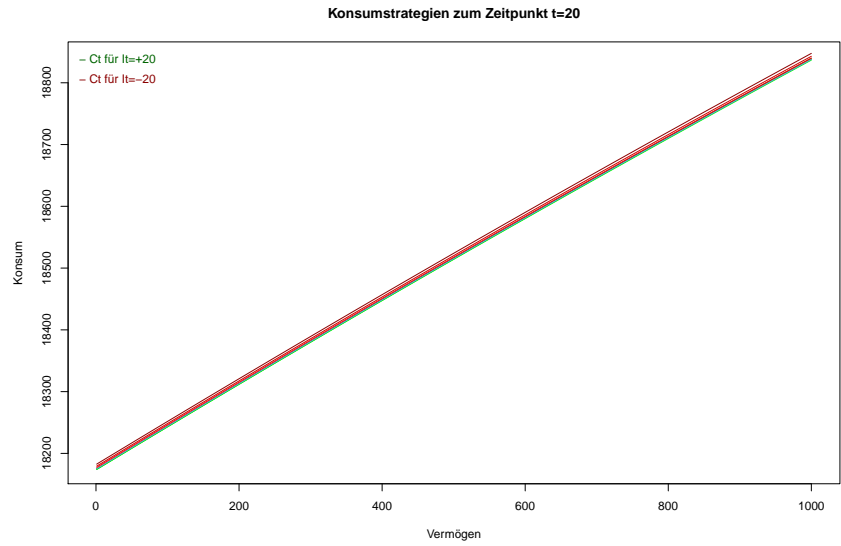


Abbildung 6.5.10: Konsumstrategiefunktionen zum Alter 40



Abbildung 6.5.11: Konsumstrategiefunktionen zum Pensionsalter

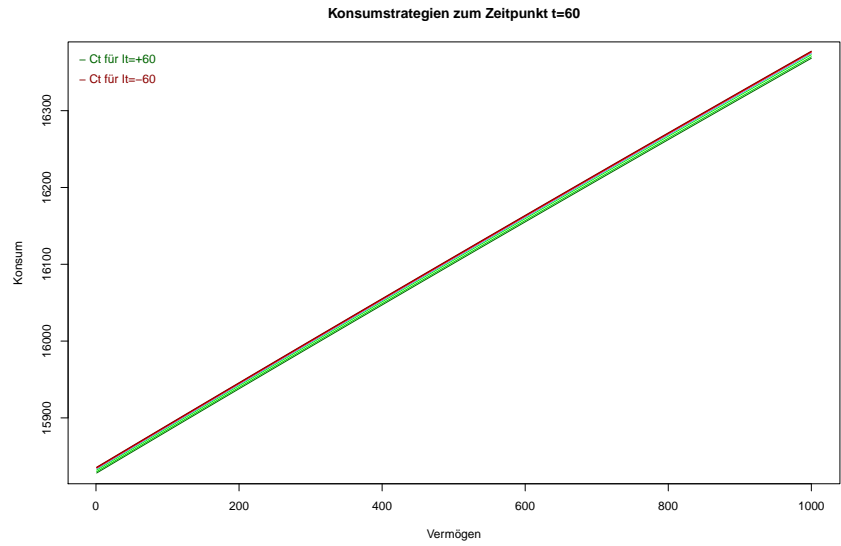


Abbildung 6.5.12: Konsumstrategiefunktionen zum Alter 80

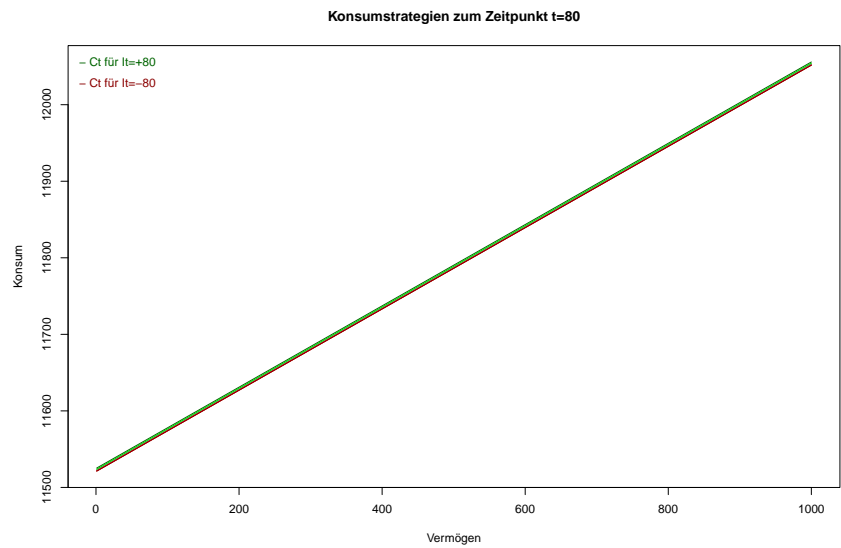


Abbildung 6.5.13: Konsumstrategiefunktionen zum Endalter

Ein Vergleich der Funktionen über verschiedene Zeitpunkte im Lebenszyklus (für die Funktionen in den „best-case“-Zuständen) sieht wie folgt aus:

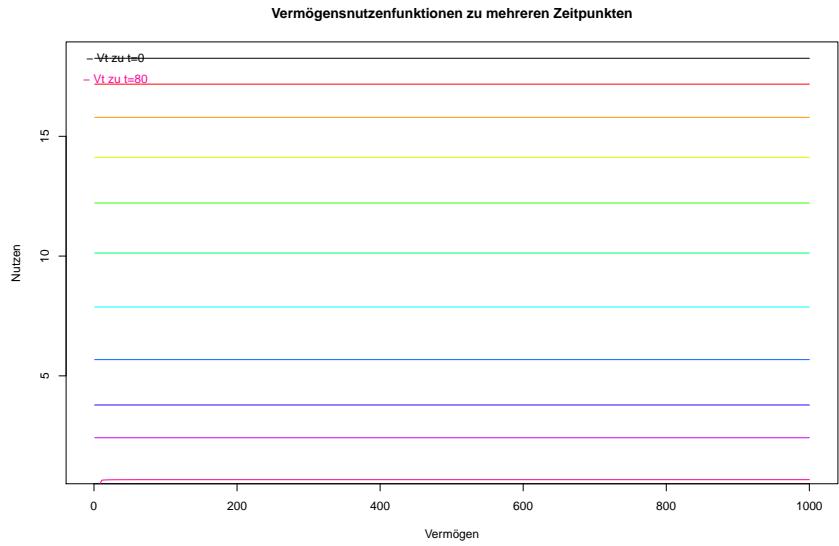


Abbildung 6.5.14: Vermögensnutzenfunktionen für verschiedene Zeitpunkte im Lebenszyklus

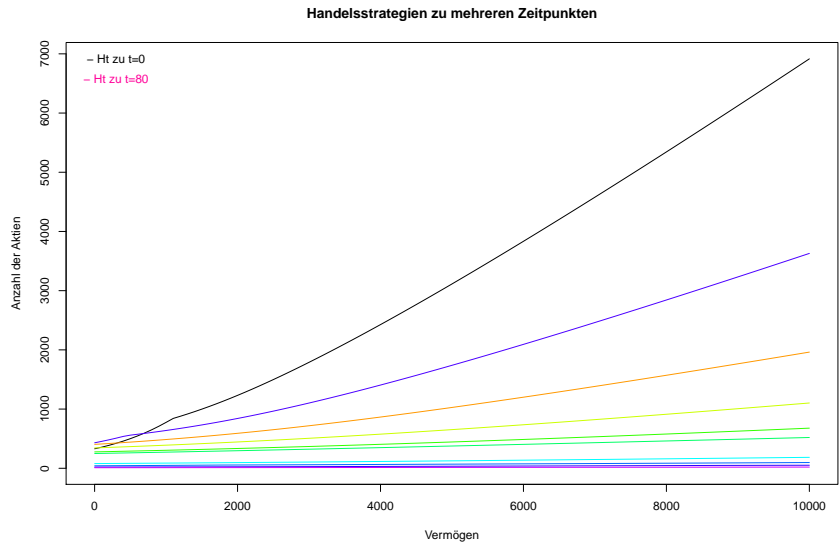


Abbildung 6.5.15: Handelsstrategiefunktionen für verschiedene Zeitpunkte im Lebenszyklus

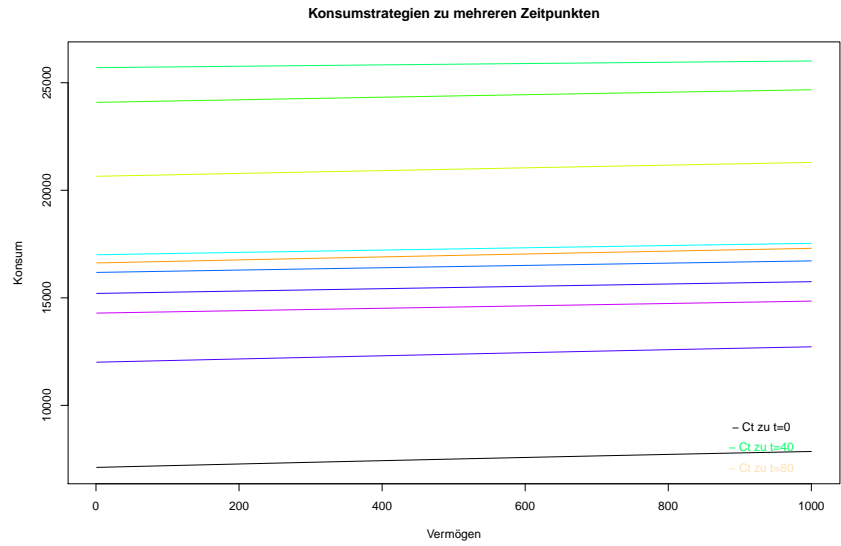


Abbildung 6.5.16: Konsumstrategiefunktionen für verschiedene Zeitpunkte im Lebenszyklus

Für den bereits aus vorherigen Fällen bekannten Fall des Investors mit einem bestimmten Startkapital ergibt sich folgende Entwicklung der Konsumstrategie:

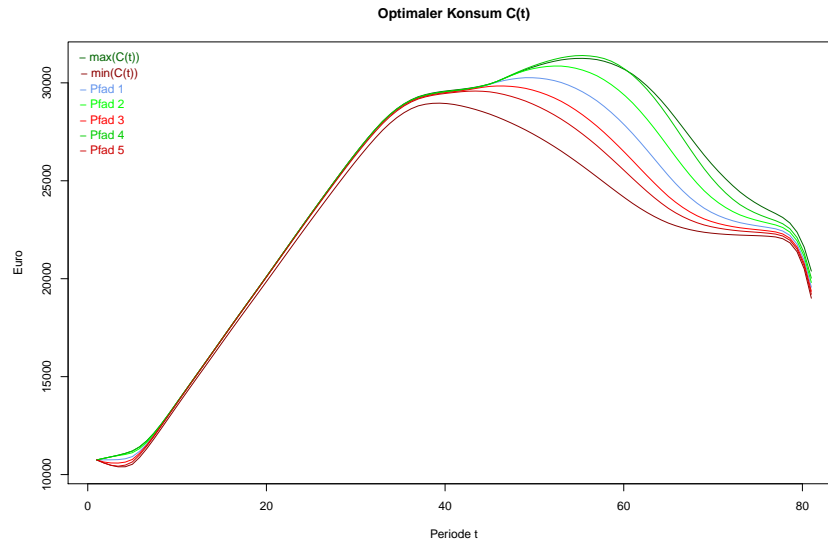


Abbildung 6.5.17: Optimale Konsumstrategie unter Bayes'schem Updating

Anhand der gewählten Konsumstrategie und des daraus resultierenden Vermögens kann man erkennen, dass das Einfließen des Bayes'schen Lernens zu generell höheren Maximalwerten (vergleiche dazu die „best-case“-Pfade) führt. Gleichzeitig wird bei den untersuchten Größen die Differenz zwischen den Werten des besten und des schlechtesten Pfades kleiner.

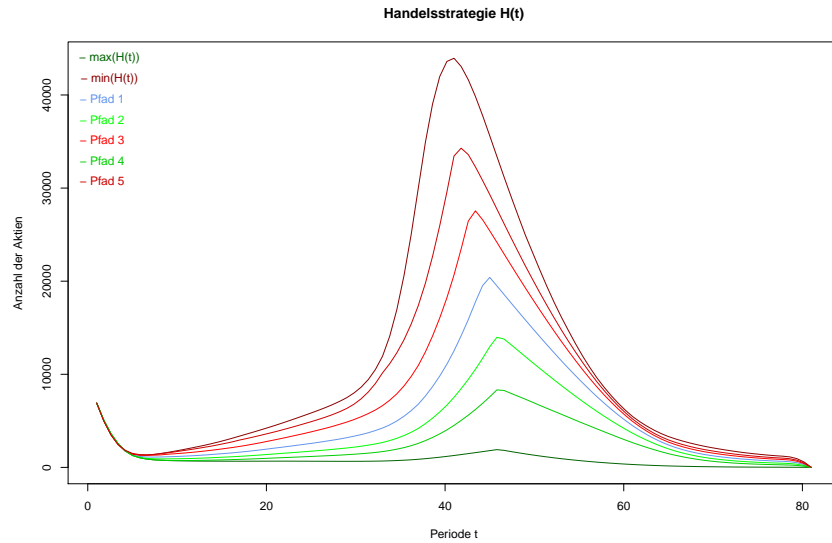


Abbildung 6.5.18: Optimale Handelsstrategie unter Bayes'schem Updating

Große Unterschiede der Strategien in den verschiedenen Zuständen findet man beim Aktienanteil. Je mehr Aufwärtsbewegungen bereits stattgefunden haben, desto höher wird der Aktienanteil.

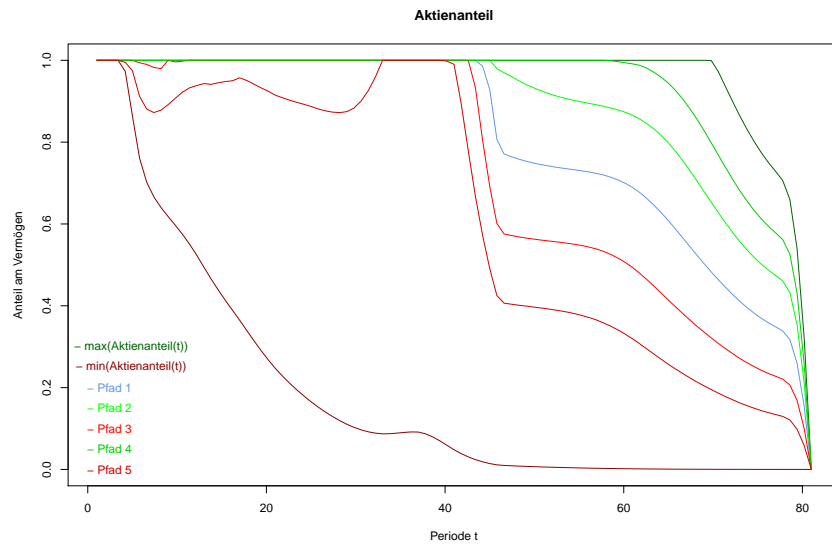


Abbildung 6.5.19: Aktienanteil unter Bayes'schem Updating

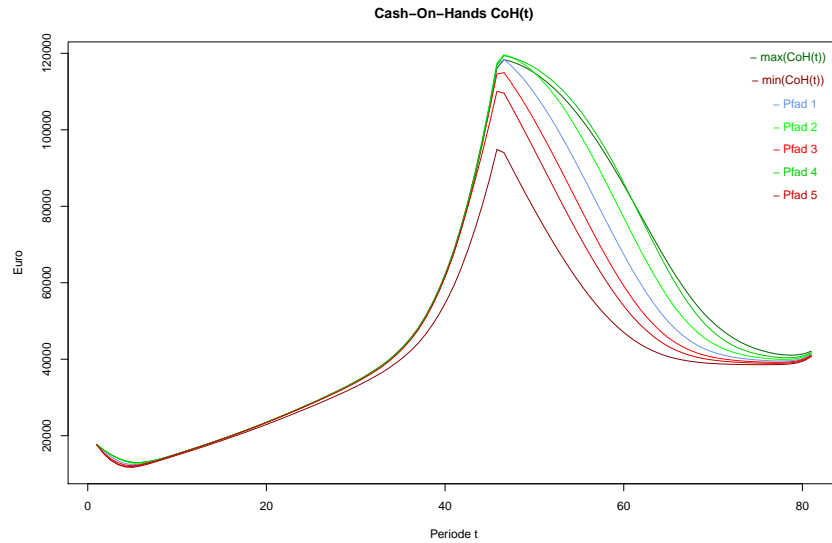


Abbildung 6.5.20: Cash-on-Hand unter Bayes'schem Updating

Auch hier kann man einen eindeutigen Shock im Pensionsalter, also in der 45. Periode, erkennen. Von hier an wird das Investment ins riskante Asset in allen Szenarien - bis auf das „best-case“-Szenario - drastisch verringert. Von da an wird hauptsächlich in das risikolose Sparkonto angelegt, und zwar bis zum theoretischen Endalter. Das Vermögen wiederum wird bis auf ein gewisses Erbe bis zum Schluss gleichmäßig aufgebraucht.

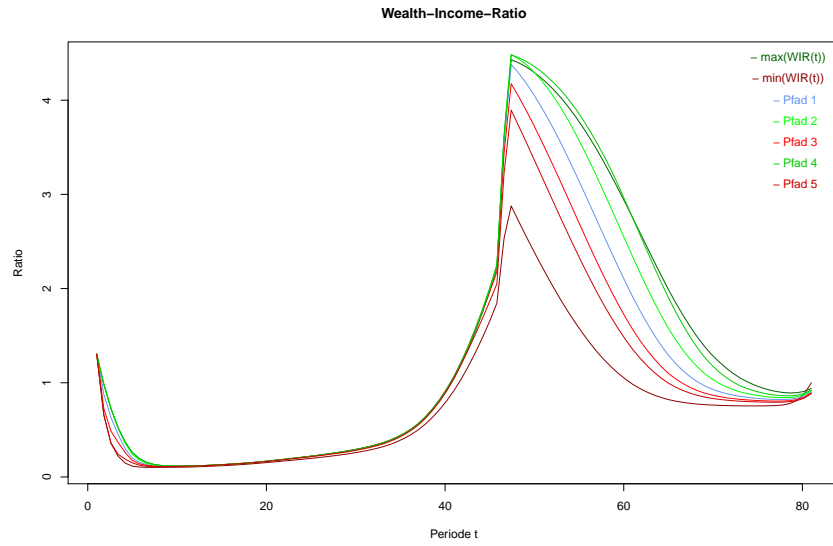


Abbildung 6.5.21: Wealth-Income-Ratio unter Bayes'schem Updating

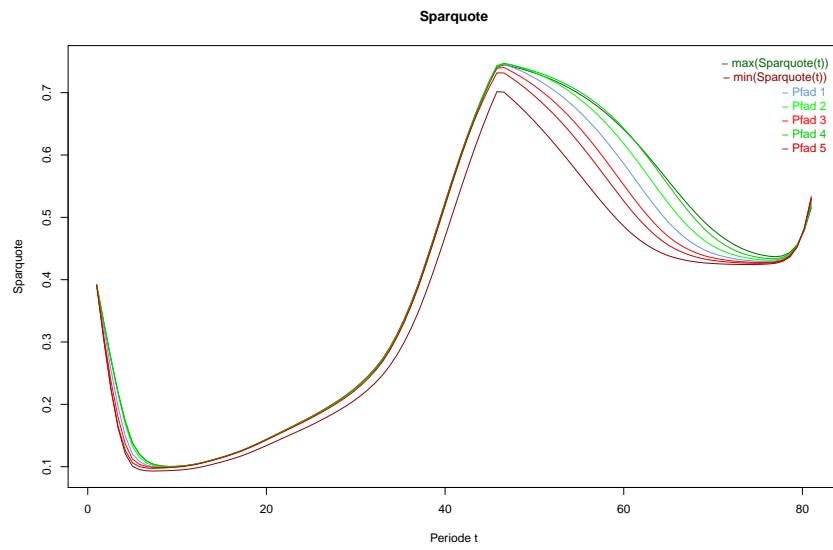


Abbildung 6.5.22: Sparquote unter Bayes'schem Updating

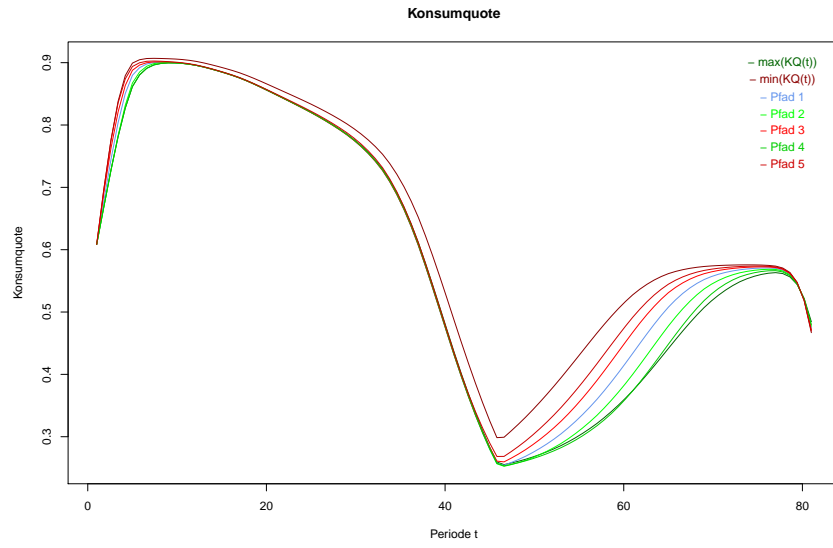


Abbildung 6.5.23: Konsumquote unter Bayes'schem Updating

7 Conclusio

Wir haben uns in dieser Diplomarbeit mit bereits bestehenden Modellen zur Bestimmung der optimalen Asset Allocation beschäftigt, und im Anschluss deren Erweiterung durch die Adaption Bayes'schen Updatings untersucht und diskutiert. Das Ziel dieser Erweiterung war es die Annahmen eines konstanten Investitionsumfeldes zu lockern und eine fortlaufende Entwicklung des Investment-Opportunity-Sets zu simulieren.

Als Grundlage dienten uns dazu u.a. die Ergebnisse der Berechnungen aus [16], die ebenfalls von einem CRRA-Investor ausgehen. Diese führen bei gegebener Parameterwahl zu einer konstanten Investitionsstrategie, wobei sich das Investitionsvolumen bei steigender Risikoaversion γ drastisch verringert, wie der Vergleich zwischen dem log-utility Investor und einem Investor mit Risikoaversion $\gamma = 2,5$ im Fall 1 zeigt.

Als nächstes haben wir die Berücksichtigung von einem Vererbungsmotiv, sowie von Sterblichkeitswahrscheinlichkeiten, untersucht. Diese beiden Faktoren weisen konträre Effekte auf, da die Sterblichkeit den erwarteten zukünftigen Nutzen von heute angespartem Vermögen verringert, der Vererbungswunsch diesen Nutzen jedoch wiederum erhöht. Während die Investitionsstrategie durch die Hinzunahme dieser Faktoren nicht beeinflusst wird und konstant bleibt, gewinnt durch den Wunsch zu vererben das Sparen über den ganzen Lebenszyklus hinweg an Bedeutung.

Im Fall 3 haben wir nun das Arbeitseinkommen als zusätzliche Einnahmequelle für den Investor hinzugefügt. Dieses Einkommen erhält der Investor in jedem Zustand garantiert, wodurch er in der Zukunft gegen Verluste aus einem schlechten Aktienkurs eine gewisse Absicherung besitzt. Der Investor kann also zu jedem Zeitpunkt einen für alle Zustände ähnlich hohen Betrag konsumieren, und investiert im Anschluss den Rest in das riskante Asset. Durch das zukünftige Einkommen und der daraus resultierenden hohen Konsumquote am Anfang, sowie der zunehmend hohen Sparquote ab der Mitte der betrachteten Zeitraumes, bewegen sich die Vermögenswerte des Investors in jedem Zustand eines gewissen Zeitpunkts auf demselben Niveau. Der Betrag, der dann noch für das Investment verwendet wird und einen unterschiedlichen Return im jeweiligen Zustand erwirtschaften kann, ist somit sehr gering. Lediglich bei einem sehr schlechten Aktienpreisverlauf hat der Investor eine niedrigere Vermögensentwicklung als bei den restlichen Pfaden.

Ebenso wie im Fall 3 verhält es sich, wenn die relative Risikoaversion γ wie

in Fall 4 verdoppelt wird. Man kann jedoch feststellen, dass anstatt eines geringen Investments nun noch mehr gespart wird. Von dem Vermögen, das nach dem Konsum zur Verfügung steht und in den vorherigen Fällen zum Großteil investiert wurde, wird nun weniger als die Hälfte für das riskante Asset verwendet, während der Rest auf das Bankkonto gelegt wird. Letztendlich haben wir die Übergangswahrscheinlichkeiten im CRR-Binomialbaum durch Bayes'sches Updating in jedem Schritt angepasst, und im Fall 5 in unsere Berechnungen einfließen lassen. Es entstehen also nach jeder betrachteten Periode Veränderungen in den Voraussetzungen für das Anlegen, auf die der Investor entsprechend reagiert. Daraus resultiert, dass er von einer dynamischen Entwicklung des Investitionsumfeldes ausgeht und somit ein prozyklisches Verhalten annimmt. Wir haben in den Ergebnissen erkennen können, dass dadurch im Gegensatz zu Fall 3 eine deutlichere Differenzierung zwischen den einzelnen Zuständen entsteht. Während sich die Konsum- und Investmentstrategie, sowie das daraus resultierende Vermögen, im vorherigen Fall für die verschiedenen Zustände nicht sehr unterschieden hat, spielt es nun eine größere Rolle, wie sich das riskante Asset bis zum jeweiligen Zustand entwickelt hat.

8 Anhang

8.1 Sterbetafel

Alter x	q(x)	Alter x	q(x)	Alter x	q(x)
0	0,005343	34	0,0010528	68	0,0233625
1	0,0003452	35	0,0011164	69	0,0257042
2	0,0002639	36	0,0011973	70	0,0282537
3	0,0001984	37	0,0013159	71	0,0310362
4	0,0001512	38	0,0014696	72	0,0340867
5	0,0001295	39	0,0016474	73	0,0374562
6	0,0001226	40	0,00184	74	0,0412038
7	0,000117	41	0,0020376	75	0,0453985
8	0,0001106	42	0,0022378	76	0,0501132
9	0,0001114	43	0,0024482	77	0,0554263
10	0,0001138	44	0,0026829	78	0,0614277
11	0,000113	45	0,0029503	79	0,0682233
12	0,000115	46	0,0032555	80	0,0759351
13	0,0001428	47	0,0035965	81	0,0846979
14	0,0002217	48	0,0039826	82	0,0946637
15	0,0003679	49	0,0044224	83	0,1053137
16	0,0005631	50	0,004917	84	0,1161986
17	0,0007744	51	0,0054561	85	0,1276845
18	0,0009476	52	0,0060208	86	0,139904
19	0,0010207	53	0,0065971	87	0,1531484
20	0,0010268	54	0,0071772	88	0,1676838
21	0,0010239	55	0,0077607	89	0,1839279
22	0,0010166	56	0,0083568	90	0,2020555
23	0,0010061	57	0,0089745	91	0,2221826
24	0,0009997	58	0,0096238	92	0,2440479
25	0,0009973	59	0,0103254	93	0,2672621
26	0,0009856	60	0,0111153	94	0,2914275
27	0,0009627	61	0,0120316	95	0,3162331
28	0,0009286	62	0,0131064	96	0,3414812
29	0,0008961	63	0,0143678	97	0,3670574
30	0,0008793	64	0,0158211	98	0,3928725
31	0,0008905	65	0,0174507	99	0,4188563
32	0,0009343	66	0,0192473	100	1,000000
33	0,0009913	67	0,021214		

Tabelle 2: Sterbetafel (Männer Generation 2000/2002)

8.2 Programmcodes

8.2.1 einkommensfit.R

```
# Quadratische Regression einer Einkommensfunktion zu
# gegebenen Stützstellen mit Daten der Statistik Austria

# Eingabe der Parameter

Alter <- c(18,25,35,45,55,62)
Einkommen <- c(3878,13682,19444,23362,26312,38417)

# Anwendung der Funktion lm für die quadratische Regression

einkommensfit <- lm(Einkommen ~ Alter + I(Alter^2))

# Ausgabe der Koeffizienten der quadratischen Einkommensfunktion

summary(einkommensfit)

# curve(a+b*x+c*x^2, add=T, col="'red'') mit Koeffizienten
# aus der Summary

# Hintereinanderausführung der Kurvenplots und addieren der Linien

curve(-5979.9598+x*685.3130-0.3163*x^2, 20, 65, add=TRUE,
xlab="'Alter'", ylab="'Einkommen'", xlim=c(20,100) col="'red'')

curve($(-5979.9598+x/x*65*685.3130-0.3163*x/x*65^2)*0.6$, 65, 100,
add=TRUE, xlab="'Alter'", ylab="'Einkommen'", xlim=c(20,100), col="'red'')
```

8.2.2 OptimalAssetAllocation.R

```
OptimalAssetAllocation <- function(W_0, S_0, x, N, Y, qx, a, de, u, d, pp,
gamma, skal, b, Iteration){

# Aktienpreisprozess S
S <- matrix(data=NA, nrow=(N+1), ncol=(N+1));
S[1,1] <- S_0;
for (j in 2:(N+1)) {
S[1,j] <- S[1,j-1]*d
for (i in 2:j) {
S[i,j] <- S[i-1,j-1]*u
}
}

#-----
# (1) Definition der CRRA-Nutzenfunktion fuer ein fixes gamma

if (gamma==1) {
CRRA <- function(x) {
return (log(x/skal))
}
} else {
CRRA <- function(x) {
gammaInv <- 1-gamma
return (((x/skal)^gammaInv)-1)/gammaInv
}
}
U=cmpfun(CRRA);

if (gamma==1) {
dCRRA <- function(x) {
return (1/x)
}
} else {
dCRRA <- function(x) {
return ((1/skal)*(x/skal)^(-gamma))
}
}
dU=cmpfun(dCRRA);
```

```

#-----
# (2) Erstellung der Hilfsmatrix W_max sowie der Listen Vt, dVt, Ct und Ht fuer
# berechnete Funktionen

# Matrix mit den oberen Schranken fuer das Vermoegen in jedem Zustand
W_max <- matrix(data=NA, nrow=N, ncol=N);
W_max[1,1] <- (W_0 + Y[1])*u;

for (j in 2:N) {
  for (i in 1:(j-1)) {
    W_max[i,j] <-
      (W_max[i,max(min(ceiling(N/2),j-1),i)] + Y[max(min(ceiling(N/2),j),i)])*a;
  }
  W_max[j,j] <-
    (W_max[min(ceiling(N/2)-1,j-1),min(ceiling(N/2)-1,j-1)] + Y[min(ceiling(N/2),j)])*u;
}

# Liste zur Speicherung der Vermoegensnutzenfunktion zu jedem Zeitpunkt
# und Zustand, wobei die Vermoegensnutzenfunktion zum Endzeitpunkt der
# CRRA-Nutzenfunktion entspricht
Vt <- list();
length(Vt) <- N+1;

for (i in (N+1):1) {
  Vt[[i]] <- list();
  length(Vt[[i]]) <- i;
  Vt[[N+1]][[i]] <- U;
}

# Liste zur Speicherung der Ableitungen der Vermoegensnutzenfunktion
dVt <- list();
length(dVt) <- N+1;

for (i in (N+1):1) {
  dVt[[i]] <- list();
  length(dVt[[i]]) <- i;
  dVt[[N+1]][[i]] <- dU;
}

# Ebenso werden fuer jeden Zustand Funktionen (Ht und Ct) fuer die optimale
# Handelsstrategie sowie den optimalen Konsum bestimmt, die nur vom Vermoegen
# abhaengen.
Ht <- list();
length(Ht) <- N+1;

```

```

zero <- function(x){
return(0)
}

for (i in (N+1):1) {
Ht[[i]] <- list();
length(Ht[[i]]) <- i;
Ht[[N+1]][[i]] <- zero;
}

Zt <- list();
length(Zt) <- N+1;

for (i in (N+1):1) {
Zt[[i]] <- list();
length(Zt[[i]]) <- i;
Zt[[N+1]][[i]] <- zero;
}

Ct <- list();
length(Ct) <- N+1;

id <- function(x){
return(x)
}

for (i in (N+1):1) {
Ct[[i]] <- list();
length(Ct[[i]]) <- i;
Ct[[N+1]][[i]] <- id;
}

#-----
# (3) Dynamische Programmierung des optimalen Konsums und Invesments:
# Algorithmus zur Bestimmung der Funktionen zur Maximierung des Vermoegensnutzen
# ueber den Lebenszyklus.

for (t in (N):1) {
# Arbeitseinkommen in der Periode t
y <- Y[t];
# einjaehrige Sterbewahrscheinlichkeit in der Periode t
q <- qx[x+t,2];

```

```

for (n in 1:t) {

p <- pp[n,t];
s <- S[n,t];

# Bestimmung der Interpolationsstellen, also aller Vermoegen, an
# denen die Nutzenfunktion ausgewertet werden soll
W_disk <- c(0.0001,0.001,0.01);
w0 <- tail(W_disk,n=1);
while(w0<W_max[n,t]){
w0<- w0*1.003;
W_disk = c(W_disk,w0);
}

dimW <- length(W_disk);

# Vektor zum Speichern des Investments mit maximalem
# Vermoegensnutzen fuer ein bestimmtes Vermoegen
Z_max <- rep(NA, times=dimW);

# Vektor zum Speichern der Handelsstrategie mit maximalem
# Vermoegensnutzen fuer ein bestimmtes Vermoegen
H_max <- rep(NA, times=dimW);

# Vektor zum Speichern des Konsums mit maximalen Vermoegensnutzen
# fuer ein bestimmtes Vermoegen
C_max <- rep(NA, times=dimW);

# Vektor zum Speichern des maximalen Nutzen fuer ein bestimmtes
# Vermoegen
V_max <- rep(NA, times=dimW);

# Vektor zum Speichern der Ableitung der maximierenden
# Nutzenfunktion fuer ein bestimmtes Vermoegen
dV_max <- rep(NA, times=dimW);

# Nutzenfunktion aus nächster Periode bei Aufwaertsbewegung
Vu <- Vt[[t+1]][[n+1]];
# Nutzenfunktion aus nächster Periode bei Abwaertsbewegung
Vd <- Vt[[t+1]][[n]];

# Ableitung der Nutzenfunktion aus nächster Periode bei Aufwaertsbewegung
dVu <- dVt[[t+1]][[n+1]];
# Ableitung der Nutzenfunktion aus nächster Periode bei Abwaertsbewegung
dVd <- dVt[[t+1]][[n]];

```

```

for (k in 1:(dimW)) {

w <- W_disk[k];

# Bestimmung der Auswertungsstellen fuer Konsum. c muss dabei
# immer > 0 sein, damit  $U(c) < \infty$ , und hoechstens  $w-0.00001$ ,
# damit investment (in Vektor invst) immer  $< 0$  ist
c_disk <- seq(0.00001,(w+y-0.00001), length.out=Iteration);
invst <- rep(NA,Iteration)

# Schritt 1: Investment maximieren

for (i in 1:Iteration){

c <- c_disk[i];
wa <- (w+y-c)*a;

dfdZ <- function(z){
wu= wa + z*(u-a)
wd= wa + z*(d-a)

dZu=(1-q)*dVu(wu)+b*q*dU(wu)
dZd=(1-q)*dVd(wd)+b*q*dU(wd)

return(de*(p*(u-a)*dZu+(1-p)*(d-a)*dZd))
} # Ende dfdz

if(sign(dfdZ(0))==-1){
invst[i]<- 0;
}else if(sign(dfdZ(w+y-c))==1){
invst[i]<- (w+y-c);
}else{
invst[i] <- uniroot(dfdZ, lower = 0, upper = (w+y-c), tol = 10^(-20))$root;
}

} # Ende for i

# Funktion z(c,w) der optimalen investments fuer alle c
zf <- approxfun(c_disk,invst, method="linear")

```

```

# Schritt 2: Konsum maximieren

dgdc <- function(c){
wu= (w+y-c)*a + zf(c)*(u-a)
wd= (w+y-c)*a + zf(c)*(d-a)

dZu=(1-q)*dVu(wu)+b*q*dU(wu)
dZd=(1-q)*dVd(wd)+b*q*dU(wd)

return(dU(c) - a*de*(p*dZu+(1-p)*dZd))
} # Ende dgdc

if (sign(dgdc(0.00001))==-1){
c1<- 0.00001;
}else if(sign(dgdc(w+y-0.00001))==1){
c1<- w+y-0.00001;
}else{
c1 <- uniroot(dgdc, lower = 0.00001, upper = (w+y-0.00001), tol = 10^(-20))$root;
}

# Schritt 3: erneute Optimierung ueber z

wa <- (w+y-c1)*a;

dfdz1 <- function(z){
wu= wa + z*(u-a)
wd= wa + z*(d-a)

dZu=(1-q)*dVu(wu)+b*q*dU(wu)
dZd=(1-q)*dVd(wd)+b*q*dU(wd)

return(de*(p*(u-a)*dZu+(1-p)*(d-a)*dZd))
} # Ende dfdz1

if(sign(dfdz1(0))==-1){
z1 <- 0;
}else if(sign(dfdz1(w+y-c1))==1){
z1 <- (w+y-c1);
}else{
z1 <- uniroot(dfdz1, lower = 0, upper = (w+y-c1), tol = 10^(-20))$root;
}

```

```

h1 <- z1/s;
C_max[k] <- c1;
H_max[k] <- h1;
Z_max[k] <- z1;

# Schritt 4: Funktion mit maximalen Nutzen
# fuer alle w erstellen

wu=(w+y-c1)*a+z1*(u-a)
wd=(w+y-c1)*a+z1*(d-a)
Zu=(1-q)*Vu(wu)+b*q*U(wu)
Zd=(1-q)*Vd(wd)+b*q*U(wd)

V_max[k] <- U(c1) + de*(p*Zu+(1-p)*Zd);

# Schritt 5: Funktion V' fuer analytische Ableitungen fuer
# jedes w erstellen

dZu=(1-q)*dVu(wu)+b*q*dU(wu)
dZd=(1-q)*dVd(wd)+b*q*dU(wd)

dV_max[k] <- a*de*(p*dZu+(1-p)*dZd);

} # Ende for k

# lineare Interpolation der optimalen Handelsstrategie und
# des optimalen Konsums (inklusive angehaengter Stelle 0 fuer
# Interpolation im Bereich(0,W_disk[1]))
Zt[[t]][[n]] <-
approxfun(c(0,W_disk),c(max(0,(2*Z_max[1]-Z_max[2])),Z_max), method="linear");

Ht[[t]][[n]] <-
approxfun(c(0,W_disk),c(max(0,(2*H_max[1]-H_max[2])),H_max), method="linear");

Ct[[t]][[n]] <-
approxfun(c(0,W_disk),c(max(0,(2*C_max[1]-C_max[2])),C_max), method="linear");

Vt[[t]][[n]] <-
approxfun(c(0,W_disk),c((2*V_max[1]-V_max[2]),V_max), method="linear",rule = 1:2);

dVt[[t]][[n]] <-
approxfun(c(0,W_disk),c((2*dV_max[1]-dV_max[2]),dV_max),method="linear",rule = 1:2);

} # Ende for n
} # Ende for t

```



```
#-----  
# (4) Outputvariablen in globaler Umgebung setzen  
  
assign("S", value=S, envir=.GlobalEnv)  
assign("U", value=U, envir=.GlobalEnv)  
assign("dU", value=dU, envir=.GlobalEnv)  
assign("W_max", value=W_max, envir=.GlobalEnv)  
assign("Vt", value=Vt, envir=.GlobalEnv)  
assign("dVt", value=dVt, envir=.GlobalEnv)  
assign("Ht", value=Ht, envir=.GlobalEnv)  
assign("Ct", value=Ct, envir=.GlobalEnv)  
assign("Zt", value=Zt, envir=.GlobalEnv)  
  
}
```

Literatur

- [1] ARROW, KENNETH J.: The theory of risk aversion. In: *Essays in the theory of risk-bearing* (1971), S. 90–120
- [2] BAUER, Heinz: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 5. Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002
- [3] BAYES, THOMAS: A Mathematical Theory of Saving. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 53 (1763), S. 370–418
- [4] BERNOULLI, DANIEL: Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk. In: *Econometrica* 22 (1954), Nr. 1, S. 23–36
- [5] BLACK, FISCHER UND MYRON SHOLES: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: *The Journal of Political Economy* 81 (1973), Nr. 3, S. 637–654
- [6] BODIE, ZVI, ROBERT C. MERTON UND WILLIAM F. SAMUELSON: Labor supply flexibility and portfolio choice in a life cycle model. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 16 (1992), S. 427–449
- [7] COCCO, JOÃO F. UND FRANCISCO J. GOMES UND PASCAL J. MAENHOUT: Consumption and Portfolio Choice over the Life Cycle. In: *The Review of Financial Studies* 18 (2005), Nr. 2, S. 491–533
- [8] COX, J. C., S. A. ROSS UND M. RUBINSTEIN: Option Pricing: A Simplified Approach. In: *Journal of Financial Economics* 7 (1979), S. 229–263
- [9] CUTHBERTSON, KEITH: *Quantitative financial economics*. Wiley, Chichester, 1997
- [10] GERBER, H. U.: *Lebensversicherungsmathematik*. Springer-Verlag, 1986
- [11] HEUSER, Harro: *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2009
- [12] HULL, John C.: *Optionen, Futures und andere Derivate*. 6. Auflage. Pearson Studium, München, 2006

- [13] KAHVECIOGLU, DAVER C.: *Asset Allocation, Bequests, and Wealth Dynamics of the Elderly*. Department of Economics, UNC-Chapel Hill, 2005
http://www.unc.edu/~daver/JobMarketPaper_KAHVECIOGLU.pdf
- [14] MERTON, ROBERT C.: Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. In: *The Review of Economics and Statistics* 51 (1969), Nr. 3, S. 247–257
- [15] MERTON, ROBERT C.: *Continuous-time finance*. Blackwell, Boston, 1992
- [16] PLISKA, STANLEY R.: *Introduction to Mathematical Finance - Discrete Time Models*. 1. Auflage. Blackwell, Malden, Mass., 1997
- [17] PRATT, JOHN W.: Risk Aversion in the Small and in the Large. In: *Econometrica* 32 (1964), S. 122–136
- [18] RAMSEY, FRANK P.: A Mathematical Theory of Saving. In: *Economic Journal* 38 (1928), Nr. 152, S. 543–559
- [19] SHREVE, STEVEN E.: *Stochastic Calculus for Finance 1 - The Binomial Asset Pricing Model*. Springer, New York, 2004
- [20] STOKEY, NANCY L.: *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press, 1989
- [21] VON NEUMANN, JOHN UND OSKAR MORGENSTERN: *Theory of games and economic behavior*. 3. Auflage. Princeton Univ. Press, Princeton, 1953