TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

DIPLOMARBEIT
MASTER'S THESIS

Eisenbahnbrücken unter seismischer Mehrpunkterregung

Railway bridges under seismic multiple support excitation

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieurs

Autor:
Daniel WATZL, BSc
Zwinzstraße 7/3/9
1160 Wien
Österreich

Betreuer:
Ao. Univ. Prof. DI Dr. Rudolf HEUER
Institut Hochbau und Technologie
Forschungsbereich für Baumechanik
und Baudynamik

Wien 9. April 2015

Unterschrift:

Kapitel 1

Vorwort

Zu Beginn möchte ich mich bei jenen Personen besonders bedanken, ohne deren Unterstützung diese Arbeit wohl nie zustande gekommen wäre:

> Meinem Diplomarbeitsbetreuer *Ao. Univ. Prof. DI Dr. Rudolf Heuer* für das sehr freundliche Arbeitsklima, seine Geduld, die kontinuierliche Unterstützung und für viele konstruktive Ratschläge.
>
> Meiner lieben Frau *Angelika*, die mich stets unterstützt und durch das viele Korrekturlesen schon beinahe von einer Juristin zur Technikerin wurde.
>
> Meinen Eltern *Josef* und *Rosina*, welche immer für mich da sind und mir mein Studium ermöglicht haben.
>
> Meinen Korrekturlesern: *MMag. Angelika Watzl*, und *Dr. Christian Bensel*
>
> All meinen *StudienkollegInnen* und *FreundInnen*, welche mich durch mein Studium begleitet haben. Neben den vielen Stunden an der Universität, in der Bibliothek oder hinter dem Schreibtisch, wurde doch auch so manche Erkenntnis beim gemütlichen Zusammensein gewonnen.

VIELEN DANK

Diese Diplomarbeit ist der Abschluss meines Bauingenieurstudiums und stellt somit auch den Abschluss meiner Studienzeit dar. Anders formuliert beginnt mit Abschluss dieser Arbeit nun eine neue **HERAUSFORDERUNG**!

1.1 Abstract

This diploma thesis deals with the effect of seismic multiple support excitation on railway bridges. Starting with theoretical basics and earthquake dynamics for bridges, it is shown how the conventional solution methods, *Modal Analysis* and $Newmark-\beta$, can be extended to multiple support excitation.
The effect of the often neglected vertical seismic excitation shall also be studied. In addition to the theoretical analysis the applicability of the Eurocode 8 is examined.

In the practical part of this thesis, a bridge constructed as a two span beam, with a field length of $56m$, is subjected to several earthquake excitations. Both the horizontal and vertical component of the earthquake excitation are considered. The bridge is discretized by means of lumped masses in the middle of the span. The effect of discontinuous cross-section profile is considered through a Rayleigh-Ritz approach. The dynamic effect of the spacial variability of the earthquake excitation is compared with conventional earthquake analysis as well as with the analysis procedure shown in Eurocode 8.

1.2 Kurzfassung

Diese Diplomarbeit beschäftigt sich mit den Auswirkungen seismischer Mehrpunkterregung bei Eisenbahnbrücken. Dabei werden die theoretischen Grundlagen zur Erdbebendynamik für Brücken und deren Lösungsverfahren studiert. Es wird gezeigt, wie die *Modale Analyse* und das $Newmark - \beta$ Verfahren für die Anwendung zur Mehrpunkterregung erweitert werden können.
Im Bezug auf die seismischen Grundlagen und die Erdbebenfortpflanzung wird auch auf die Problematik der oft vernachlässigten Vertikalkomponente der Erdbebeneinwirkung aufmerksam gemacht. Neben den theoretischen Grundlagen soll auch die Handhabung des Eurocodes 8 zu dieser Thematik behandelt werden.

Im praktischen Teil der Arbeit wird ein Brückentragwerk, ausgebildet als Zweifeldträger mit einer Feldlänge von je $56m$, mehreren Erdbebenanalysen unterzogen. Es wird sowohl die horizontale als auch die vertikale Erdbebenkomponente beachtet. Das Tragwerk wird dabei durch Punktmassen diskretisiert und die Auswirkungen für die Verschiebungsantworten, eines diskontinuierlichen Querschnittsverlaufs werden durch Anwendung eines Rayleigh-Ritz Ansatzes abgebildet. Die dynamischen Auswirkungen der räumlichen Veränderlichkeit der Erdbebeneinwirkung werden mit einer konventionellen Erdbebenberechnung und mit dem Berechnungsprozedere nach Eurocode 8 verglichen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 2

Einleitung

Seitdem Hindernisse überwunden werden müssen, ist es notwendig, Brücken zu bauen und zu gestalten. Mehlhorn schreibt, die Inspiration zu tatsächlichen Bauwerken hat wahrscheinlich ihren Ursprung in über einen Abgrund gelegten Baumstamm oder einem einen Bach überbrückende Stein. Bereits im Altertum wurden imposante Tragwerke (Brücken, Aquädukte) errichtet. Oftmals werden die Römer als die ersten großen Brückenbauer genannt, jedoch wurden auch in China und im Alten Griechenland schon erstaunliche Tragwerke konstruiert ([12], Seite 2).

> Von allem, was der Mensch in seinem Lebenstrieb errichtet und erbaut, scheint meinen Augen nichts besser und wertvoller zu sein als die Brücken. [...] Allen gehörig und allen gleich nützlich, immer sinnvoll errichtet an dem Orte, an dem die meisten menschlichen Bedürfnisse sich kreuzen, sie sind ausdauernder als andere Gebäude und dienen keinem heimlichen oder bösen Zweck.
> *Ivo Andric* 1961, *Nobelpreisträger*

Brücken gehören zu den wichtigsten Gebäuden der Kulturgeschichte. So dienen sie stets der Verbindung zwischen zwei Punkten - nicht nur als Mittel zum Transport von Materialien und Gütern, sondern auch als Verbindung zwischen Menschen und Kulturen. Brücken werden oft an sehr markanten Stellen gebaut, in der Natur sowie in urbanen Lebensräumen. Durch dieses Einfügen in vorhandene Gegebenheiten ist in der Konzeptionierung von Brücken insbesondere auf deren ästhetische Gestaltung und, über deren normale Funktionsweise hinaus, auch im Fall von Extremereignissen (z.B. Erdbeben) auf deren Tragfähigkeit und Stabilität zu achten. Ebendies ist eine Kernaufgabe des Erdbebeningenieurwesens, da funktionierende Notverkehrswege im Katastrophenfall von enormer Bedeutung sind. Diese Disziplin ist im Vergleich zur klassischen Baustatik noch eher ein junger Tätigkeitsbereich, jedoch kommt seine Wichtigkeit durch zunehmende Urbanisierung in Erdbebengebieten immer mehr zur Geltung. Schließlich befinden sich nicht wenige Großstädte in seismisch hoch aktiven Zonen; z.B. San Francisco mit 0,8 Mio oder Tokio 9,1 Mio Einwohnern.

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein Brückentragwerk unter Erdbebenerregung untersucht werden. Dabei wird besonderes Augenmerk auf den Effekt der Mehrpunkterregung gelegt. Bei der klassischen Erdbebenbemessung, wird die Annahme getroffen, dass das Tragwerk an allen Punkten der Lasteinleitung gleichartig beschleunigt wird. Wenn die Abstände der Auflager nicht allzu groß sind, trifft diese Annahme auch zu, hingegen ist diese Vereinfachung bei weit gespannten Brücken nicht mehr zulässig. Es besteht nämlich die Möglichkeit, dass die Brückenlager im Erdbebenfall verschieden beschleunigt werden, was zu unterschiedlichem Tragwerks- und Tragfähigkeitsverhalten führen kann. Dies erfordert eine gesonderte Betrachtung.

Zunächst werden in dieser Arbeit die dynamischen Grundlagen zur Erdbebenanalyse und deren Erweiterung für Mehrpunkterregung erläutert. Dabei werden zwei Berechnungsmethoden, die $Newmark - \beta\ Methode$ und die $Modale\ Analyse$ vorgestellt, um die dynamische Antwort zu berechnen.
Vergleichend soll auch die Handhabung des Eurocode 8 im Hinblick auf die grundlegenden Anforderungen, die Erdbebenerregung, die räumliche Veränderlichkeit der Erdbebenerregung sowie auf das Berechnungsverfahren erörtert werden.
Abschließend wird ein Brückentragwerk, ausgebildet als Zweifeldträger mit einer Feldlänge von jeweils $56m$, diskretisiert. Die folgende Erdbebenanalyse erfolgt exemplarisch an zwei Erdbebensätzen ($El\ Centro$, Kalifornien und $Christchurch$, Neuseeland). Die Ergebnisse daraus werden einander schließlich gegenübergestellt.

Der Text dieser Diplomarbeit ist mittels des Textverarbeitungsprogramms LaTeX verfasst worden. Alle numerischen Ergebnisse sind durch die mathematische Software $Sci - Lab$ 5.5.1 (Matlab-Derivat) berechnet worden. Abbildungen und Figuren sind zum einen durch LaTeX -interne Illustrationsprogramme bzw. mit $AUTOCAD$ 2014 erstellt worden.

Kapitel 3

Dynamische Grundlagen

3.1 Der Einmassenschwinger

Um dynamische Berechnungen durchführen zu können, muss die geplante kontinuierliche Tragstruktur auf ein dynamisches Modell mit endlich vielen Freiheitsgraden vereinfacht werden. Dieser Schritt wird Diskretisierung genannt. Um die gekoppelten Bewegungsgleichungen eines diskretisierten Brückentragwerks zu lösen werden in dieser Arbeit zwei Verfahren angewendet.

> Bei Anwendung des $Newmark - \beta$ Verfahrens werden die Bewegungsgleichungen direkt durch numerische Integration gelöst.
>
> Bei der *Modalen Analyse* wird das System in seine Modalformen zerlegt und die Antwort durch Überlagerung berechnet. Dabei hat die Bewegungsgleichung jeder Modalform die Form eines Einmassenschwingers.

Um die beiden Verfahren später anwenden und auch für Mehrpunkterregung erweitern zu können, werden zunächst die Grundgleichungen des Einmassenschwingers hergeleitet.
Ein Einmassenschwinger besteht aus einer Punktmasse m und einem Kelvin-Voigt Körper (Abb. 3.1). Der Kelvin-Voigt Körper wiederum ist durch eine masselose Feder mit der Steifigkeit k und einem viskosen geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer mit der Dämpferkonstante c definiert. Die beiden Komponenten sind parallelgeschalten. Bei der Anregung der Masse m unterscheidet man zwischen zwei unterschiedlichen Arten. Einerseits Kraftanregung, bei der eine äußere Kraft $p(t)$ auf die Punktmasse einwirkt. Im Gegensatz dazu die Weganregung, bei der eine Bewegung des Auflagers $x_g(t)$ vorgegeben wird.

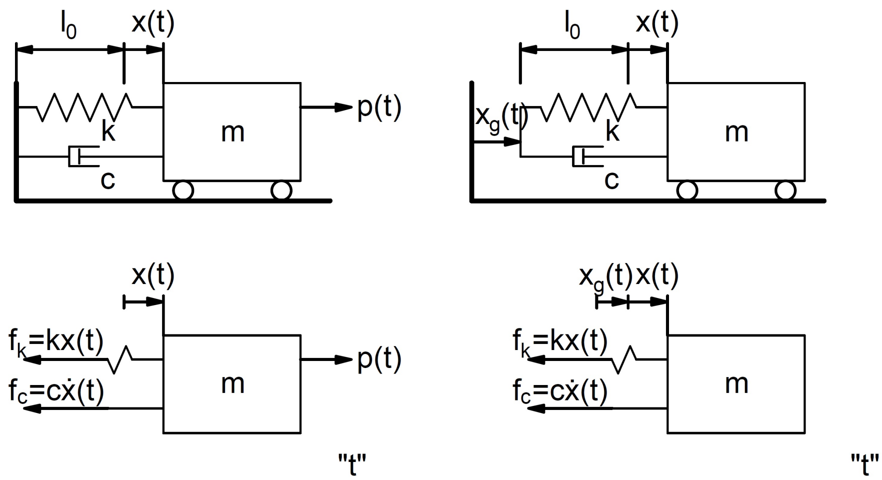

Abbildung 3.1: Kelvin Voigt Körper: Gegenüberstellung Kraft- und Weganregung

3.1.1 Aufstellen der Bewegungsgleichung

Vergleichend zu den hier gezeigten Herleitungen siehe [11] und [3]. Durch Anwendung des Schwerpunktsatzes auf die freigeschnittene Punktmasse laut Abb. 3.1, lässt sich die Bewegungsgleichung für Krafterregung wie folgt anschreiben:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = p(t). \tag{3.1}$$

Bei Weganregung beschreibt die Lagekoordinate x die Bewegung der Masse relativ zur Auflagerbewegung x_g, damit folgt aus dem Schwerpunktsatz:

$$m \cdot \Big(\ddot{x}(t) + \ddot{x}_g(t)\Big) = -c \cdot \dot{x}(t) - k \cdot x(t) \tag{3.2}$$

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = -m \cdot \ddot{x}_g(t). \tag{3.3}$$

Für den Fall einer Erdbebenerregung wird die Bewegung durch den Baugrund eingeleitet. Die Absolutverschiebung besteht daher zu jedem Zeitpunkt aus der Bodenverschiebung $x_g(t)$ und der Relativverschiebung $x(t)$.

$$x^t(t) = x(t) + x_g(t) \tag{3.4}$$

Vergleicht man die Bewegungsleichungen für Kraft (3.1) und Wegerregung (3.3) lässt sich die effektive Erdbebenkraft anschreiben.

$$p_{eff}(t) = -m \cdot \ddot{x}_g(t) \tag{3.5}$$

Daraus folgt, dass die effektive Erdbebenkraft proportional zur Masse des Tragwerks ist. Die Bewegungsgleichung für Erdbebenerregung folgt also in der Form:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = p_{eff}(t). \tag{3.6}$$

3.1.2 Lösung der freien (homogenen) Schwingung

Für eine detaillierte Herleitung wird auf die einschlägige Literatur verwiesen (z.B. [4]). Die Bewegungsgleichungen für die freie ungedämpfte Schwingung zeichnet sich durch $c = 0$ aus.

$$m \cdot \ddot{x}_h(t) + k \cdot x_h(t) = 0 \tag{3.7}$$

Die Eigenkreisfrequenz ω sowie die lineare Eigenfrequenz f und die Eigenschwingungsdauer T können wie folgt angeschrieben werden:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [rad/s]; \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad [Hz]; \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad [s]. \tag{3.8}$$

Die allgemeine Lösung der homogenen ungedämpften Schwingungsgleichung lautet:

$$x_h(t) = A \cdot cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t). \tag{3.9}$$

Wird hingegen eine viskose Dämpfung, welche proportional zur Geschwindigkeit ist, berücksichtigt, lautete die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}_h + 2 \cdot \zeta \cdot \omega \cdot \dot{x}_h + \omega^2 \cdot x_h = 0, \tag{3.10}$$

worin ζ das Lehrsche-Dämpfungsmaß ist,

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega}. \tag{3.11}$$

Die Lösung der homogenen gedämpften Schwingungsgleichung unter Berücksichtigung von inhomogenen Anfangsbedingungen $x_h(0) = x_0,\ \dot{x}_h(0) = \dot{x}_0$ lautet:

$$x_h(t) = e^{(-\zeta\omega t)} \cdot \left[x_0 \cdot \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega}{\omega_d} \cdot sin(\omega_d t) \right) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} \cdot sin(\omega_d t) \right], \tag{3.12}$$

$$\text{mit } \omega_d = \omega \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

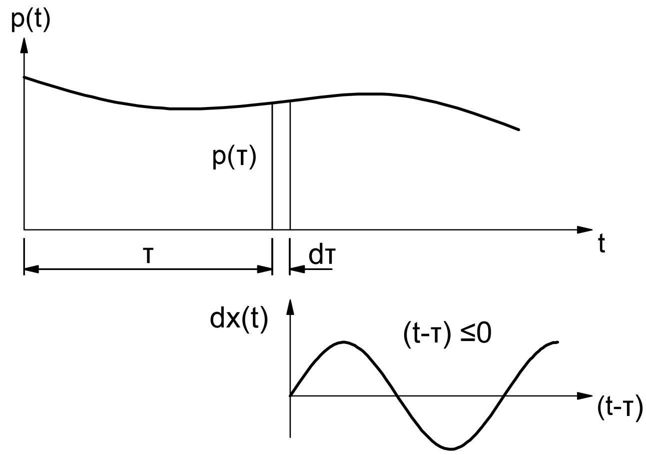

Abbildung 3.2: Allgemeine Last für Duhamel-Integral

3.1.3 Lösung der erzwungenen (inhomogenen) Schwingung

Um die Lösung der erzwungenen Schwingung zu finden, muss ein partikulärer Ansatz angepasst werden. Für den Fall einer allgemeinen nicht periodischen Anregung (z.b. Erdbeben), kann dieser jedoch nicht mehr durch geschlossene mathematische Funktionen beschrieben werden. Die Lösung kann für so einen Fall z.B. durch das Duhamelintegral gefunden werden.

3.1.4 Duhamelintegral

Der Ansatz dafür beruht auf variierenden Kräften, die als eine Abfolge von infinitesimalen kurzen Impulsen gedeutet werden. Zunächst wird der Einfachheit halber wieder das ungedämpfte System betrachtet. Die Antwort einer Impulserregung $p(\tau)$ kann in einem differentiellen Zeitintervall $d\tau$ wie folgt angegeben werden (Abb. 3.2, vergleichend siehe [15], Seite 87 ff.):

$$dx(t) = \frac{p(\tau)d\tau}{m\omega} \cdot sin\big[\omega(t-\tau)\big] \qquad t \geq \tau. \tag{3.13}$$

Die Gleichung kann durch Einführen der $Einheits - Impuls - Antwort - Funktion$ umgeschrieben werden:

$$h(t-\tau) = \frac{1}{m\omega} \cdot sin\big[\omega(t-\tau)\big] \tag{3.14}$$

$$dx(t) = \big[p(\tau) \cdot d\tau\big] \cdot h(t-\tau) \qquad t \geq \tau. \tag{3.15}$$

Der Gesamtverlauf kann durch Aufsummierung der differentiellen Antworten gewonnen werden. Die Integration über den zeitlichen Verlauf ergibt also:

$$x(t) = \int_0^t p(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau \qquad t \geq \tau. \tag{3.16}$$

Die erhaltene Beziehung wird als Duhamel'sches Faltungsintegral bezeichnet. Somit ist die Antwort auf eine Impulserregung zum Zeitpunkt $t = \tau$ für einen ungedämpften Einmassenschwinger bekannt. Für die hier angegebene Lösung befindet sich das System mit den Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, zu Beginn in Ruhe.

Das Prinzip von Duhamel kann auch für gedämpfte Systeme erweitert werden. Die differentielle Antwort der gedämpften Schwingung wird folgendermaßen angeschrieben:

$$dx(t) = \left[\frac{p(\tau) d\tau}{m\omega_d} \cdot sin\big[\omega_d(t-\tau)\big] \right] \cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \qquad t \geq \tau. \tag{3.17}$$

Durch Integration über den zeitlichen Verlauf ergibt sich die Antwort des gedämpften Systems.

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot sin\big[\omega_d(t-\tau)\big] \cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)} d\tau \qquad t \geq \tau. \tag{3.18}$$

Die Gesamtlösungen für die gedämpfte Schwingung unter Berücksichtigung von inhomogenen Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} x(t) = e^{(-\zeta\omega t)} \cdot \left[x_0 \cdot \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega}{\omega_d} \cdot sin(\omega_d t) \right) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} \cdot sin(\omega_d t) \right] + \\ \frac{1}{m\omega_d} \cdot \int_0^t p(\tau) \cdot sin\big[\omega_d(t-\tau)\big] \cdot e^{-\zeta\omega(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \tag{3.19}$$

3.1.5 Numerische Integration

Zeitschrittverfahren

[[4], Kapitel 5]

Das Finden von analytischen Lösungen für dynamische Problemstellungen ist meist sehr aufwendig und in vielen Fällen nicht möglich. Die Lösung solcher Probleme lässt sich numerisch durch Zeitschritt-Methoden zur Integration der Differentialgleichungen finden.

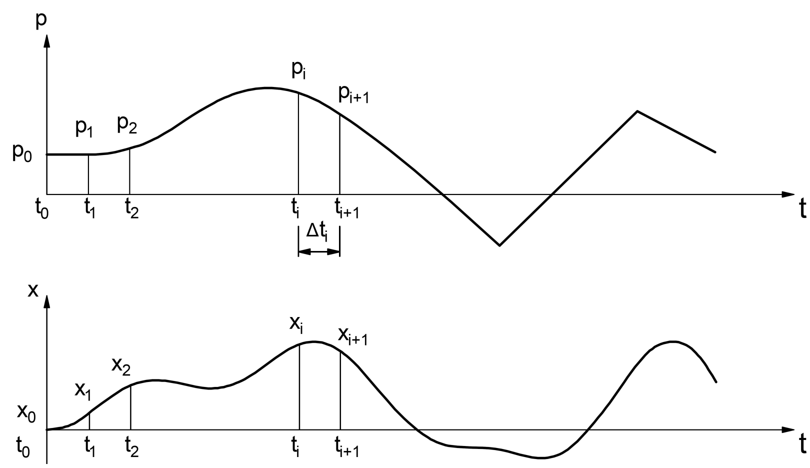

Abbildung 3.3: Notationen Zeitschritte

Die Bewegungsgleichung, welche numerisch zu lösen ist, lautet für ein linear viskoelastisches System.

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = p(t). \tag{3.20}$$

Mit den Anfangsbedingungen:

$$x_0 = x(0) \qquad \dot{x}_0 = \dot{x}(0)$$

Die zugrunde liegenden Notationen sind in Abb. 3.3 dargestellt. Die Kraft $p(t)$ is durch diskrete Werte $p_i = p(t_i),\ i = 0\ bis\ N$ gegeben. Das Zeitintervall Δt wird als konstant angenommen.

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \tag{3.21}$$

Die Antwort wird an den diskreten Zeitmomenten t_i bestimmt. Mit der Verschiebung x_i, der Geschwindigkeit $\dot{x}_i$ und der Beschleunigung $\ddot{x}_i$ bestimmt sich Gleichung (3.20) zu:

$$m \cdot \ddot{x}_i + c \cdot \dot{x}_i + k \cdot x_i = p_i. \tag{3.22}$$

Um nun die Antworten von $x_i,\ \dot{x}_i,\ \ddot{x}_i$ zu den Zeitpunkten $i+1$, welche Gleichung (3.20) erfüllen, zu finden, greift man auf numerische Methoden zurück:

$$m \cdot \ddot{x}_{i+1} + c \cdot \dot{x}_{i+1} + k \cdot x_{i+1} = p_{i+1}. \tag{3.23}$$

Newark-β Verfahren

Das Newmark-β Verfahren ist ein von NEWMARK (USA, 1910-1981) entwickeltes $Einschritt-Verfahren$. Die Bezeichnung $Einschritt-Verfahren$ kommt daher, dass für die Berechnung der Werte zum Zeitpunkt t_{n+1} nur die Werte des vorangegangenen Zeitpunktes t_n benötigt werden. Die Genauigkeit und Stabilität wird über die Parameter γ und β gesteuert. Die grundlegenden Gleichungen lauten:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + [(1-\gamma)\cdot\Delta t]\cdot\ddot{x}_i + (\gamma\Delta t)\cdot\ddot{x}_{i+1} \tag{3.24}$$

$$x_{i+1} = x_i + (\Delta t)\cdot\dot{x}_i + \left[(0.5-\beta)\cdot(\Delta t)^2\right]\cdot\ddot{x}_i + \left[\beta\cdot(\Delta t)^2\right]\cdot\ddot{x}_{i+1}. \tag{3.25}$$

Als Kriterium für die Stabilität gilt:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma-2\beta}}. \tag{3.26}$$

Somit ergibt sich beispielsweise für $\gamma = 0.5$ und $\beta = 0.25$,

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \infty. \tag{3.27}$$

Dies bedeutet, dass das Verfahren für jedes beliebige Δt stabil ist. Das Zeitinkrement muss jedoch trotzdem klein genug gewählt werden, um eine ausreichend große Genauigkeit zu erzielen. Im Regelfall werden γ und β wie folgt gewählt:

- $\gamma = 0.5$
- $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$.

Das Verfahren erfordert einen iterativen Prozess. Für linear elastisches Verhalten jedoch, kann eine Modifikation vorgenommen werden, sodass keine Iteration erforderlich ist. Zunächst werden inkrementelle Werte eingeführt:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \qquad \Delta\dot{x}_i = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i \qquad \Delta\ddot{x}_i = \ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i \tag{3.28}$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i. \tag{3.29}$$

Somit folgt aus den Newmarkschen Grundgleichungen:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x}_i &= (\Delta t)\cdot\ddot{x}_i + (\gamma\Delta t)\cdot\Delta\ddot{x}_i\\ \Delta x_i &= (\Delta t)\cdot\dot{x}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\cdot\ddot{x}_i + \beta\cdot(\Delta t)^2\cdot\Delta\ddot{x}_i,\end{aligned}\tag{3.30}$$

wobei die zweite Gleichung aus (3.30) nach $\Delta\ddot{x}_i$ folgendermaßen umgeformt werden kann:

$$\Delta\ddot{x}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\cdot\Delta x_i + \frac{1}{\beta\Delta t}\cdot\dot{x}_i - \frac{1}{2\beta}\cdot\ddot{x}_i.\tag{3.31}$$

Setzt man diese Beziehung in Gleichung (3.30) ein folgt:

$$\Delta\dot{x}_i = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\cdot\Delta x_i - \frac{\gamma}{\beta}\cdot\dot{x}_i + \Delta t\cdot\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\cdot\ddot{x}_i.\tag{3.32}$$

Zieht man wiederum Gleichung (3.22) von Gleichung (3.23) ab, lässt sich auch die Bewegungsleichung in inkrementeller Weise anschreiben:

$$m\cdot\Delta\ddot{x}_i + c\cdot\Delta\dot{x}_i + k\cdot\Delta x_i = \Delta p_i.\tag{3.33}$$

Setzt man nun in weiterer Folge Gleichung (3.31) und Gleichung (3.32) in Gleichung (3.33) ein, so ergibt sich:

$$\Delta\hat{p}_i = \Delta p_i + \left(\frac{1}{\beta\Delta t}\cdot m + \frac{\gamma}{\beta}\cdot c\right)\cdot\dot{x}_i + \left[\frac{1}{2\beta}\cdot m + \Delta t\cdot\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\cdot c\right]\cdot\ddot{x}_i,\tag{3.34}$$

worin unter Annahme linearer Elastizitat gilt:

$$\hat{k}\cdot\Delta x_i = \Delta\hat{p}_i\tag{3.35}$$

$$\hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\cdot c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\cdot m.\tag{3.36}$$

Neben den Newmark Parametern γ und β sind $\hat{k}$ und $\Delta\hat{p}_i$ durch die Systemeigenschaften m, k und c bekannt. Mit $\dot{x}_i$ und $\ddot{x}_i$ am Beginn des Zeitschritts lässt sich die Verschiebung berechnen:

$$\Delta x_i = \frac{\Delta\hat{p}_i}{\hat{k}}.\tag{3.37}$$

Bei bekannter Verschiebung Δx_i lassen sich nun auch $\Delta \dot{x}_i$ sowie $\Delta \ddot{x}_i$ bestimmen. Die Beschleunigung kann auch durch die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt $t_i + 1$ bestimmt werden:

$$\ddot{x}_{i+1} = \frac{p_{i+1} - c\dot{x}_{i1} - kx_{i+1}}{m}. \tag{3.38}$$

3.2 Rayleigh-Ritz'sches Verfahren

Das Rayleigh-Ritz Verfahren wird in dieser Arbeit benötigt, um die Eigenfrequenzen und Eigenformen eines diskontinuierlichen Systems unter Verwendung von geeigneten Ansatzfunktionen zu berechnen. Daher wird hier nur die freie Schwingung betrachtet.
Dem Verfahren nach RITZ (Schweiz, 1878-1909) liegen Energieprinzipien wie z.B. das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials zugrunde ([7], Seite 418):

$$\Pi(y) = \int_0^l F(x, y, y', y'')dx \quad \Rightarrow stationär. \tag{3.39}$$

Die grundlegende Annahme beruht darauf, dass der Verschiebungsvektor durch einen Separationsansatz näherungsweise gefunden werden kann:

$$\tilde{y}(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) \cdot a_i(t). \tag{3.40}$$

Die Ansatzfunktion ψ_i muss dabei so gewählt werden, dass sie die wesentlichen Randbedingungen erfüllt. Setzt man dies in Gleichung (3.39) ein, folgt:

$$\Pi(\tilde{y}) = \int_0^l F(x, \tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}'')dx \quad \Rightarrow stationär. \tag{3.41}$$

Da ψ_i gegebene Funktionen in Abhängigkeit von x sind, kann das Integral gelöst werden. Folglich ist Π nur noch eine Funktion der Freiwerte $a_i(t)$. Um diese zu finden, muss die Extremalbedingung eingeführt werden:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i(t)} = 0. \tag{3.42}$$

Dies liefert für $i = 1...n$ n Gleichungen für n unbekannte Koeffizienten $a_i(t)$.
Das Potential für die Balkenschwingung lautet:

$$\Pi(w) = \frac{1}{2}\int_o^l \left(E \cdot I(x) \cdot w''^2 - \omega^2 \cdot \rho \cdot A(x) \cdot w^2\right) dx, \tag{3.43}$$

worin ω die gesuchte Eigenfrequenz ist. Nun muss für w ein mehrgliedriger Ansatz gewählt werden:

$$w \approx \tilde{w} = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(x) \cdot a_i(t), \tag{3.44}$$

woraus sich das Gesamtpotential wie folgt näherungsweise berechnet:

$$\Pi(\tilde{w}) = \frac{1}{2}\int_o^l \left[E \cdot I(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i'' \cdot a_i\right)^2 - \tilde{\omega}^2 \cdot \rho \cdot A(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot a_i\right)^2\right] dx, \tag{3.45}$$

worin $\tilde{\omega}$ die gesuchten Näherungswerte für die Eigenfrequenzen sind. Die Freiwerte a_i werden durch die Extremalforderung bestimmt:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = \frac{1}{2}\int_o^l \left[E \cdot I(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i'' \cdot a_i\right) \cdot \psi_k'' - \tilde{\omega}^2 \cdot \rho \cdot A(x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \psi_i \cdot a_i\right) \cdot \psi_k\right] dx = 0. \tag{3.46}$$

Gleichung (3.46) stellt ein homogenes Gleichungssystem dar und kann mit:

$$k_{ik} = k_{ki} = \int_0^l \left(E \cdot I(x) \cdot \psi_i'' \cdot \psi_k''\right) dx \quad m_{ik} = m_{ki} = \int_0^l \left(\rho \cdot A(x) \cdot \psi_i \cdot \psi_k\right) dx \tag{3.47}$$

in Matrixform angeschrieben werden:

$$(\boldsymbol{K} - \tilde{\omega}^2 \cdot \boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \qquad mit\ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Dieses homogene Gleichungssystem stellt ein bekanntes Eigenwertproblem dar. Die Eigenkreisfrequenzen $\tilde{\omega}_k$ folgen durch Nullsetzen der Determinante: $det(\boldsymbol{K} - \tilde{\omega}^2 \cdot \boldsymbol{M}) = 0$ Die dazugehörigen Eigenformen (Eigenvektoren $\boldsymbol{a}_k$) berechnen sich aus Gleichung (3.48) mit $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_k$.

Für den Fall, dass nur ein eingliedriger Ansatz gewählt wird, kann der Eigenwert auch durch den RAYLEIGH (England 1842-1919) Quotienten gefunden werden:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\int_0^l \left(E \cdot I(x) \cdot \psi''^2\right) dx}{\int_0^l \left(\rho \cdot A(x) \cdot \psi^2\right) dx}. \tag{3.49}$$

3.3 Multiple Support Excitation

Bei konventionellen Erdbebenbetrachtungen wird die Annahme getroffen, dass alle Auflager einer Struktur gleichzeitig in Bewegung gesetzt werden. Bei weitgespannten Tragwerken, insbesondere Brücken, ist dies jedoch nicht der Fall. Daher ist es notwendig, eine Erdbebenbetrachtung mit unterschiedlichen Bewegungen an den Lagern durchzuführen. Man spricht dann von *Multiple Support Excitation* (MSE, zu deutsch: Mehrpunkterregung). Das System wird dabei in zwei Subsysteme unterteilt:

- Superstructure (Oberbau), Indizes ss
- Groundstructure (Unterbau), Indizes gg

Angewendet auf ein Brückentragwerk entsprechen die Auflager der Groundstructure und der Balken der Superstructure (siehe Abb. 3.4).

Die Gleichung Bewegungsgleichung lässt sich für MSE wie folgt anschreiben ([5], Seite 109):

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{ss} & \boldsymbol{m}_{sg} \\ \boldsymbol{m}_{gs} & \boldsymbol{m}_{gg} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}^t \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{ss} & \boldsymbol{c}_{sg} \\ \boldsymbol{c}_{gs} & \boldsymbol{c}_{gg} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}^t \\ \dot{\boldsymbol{x}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{ss} & \boldsymbol{k}_{sg} \\ \boldsymbol{k}_{gs} & \boldsymbol{k}_{gg} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}^t \\ \boldsymbol{x}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{p}_g(t) \end{Bmatrix}. \tag{3.50}$$

Darin sind:
$\boldsymbol{m}_{ss}$ die Massenmatrix in Bezug auf die Freiheitsgrade der Superstructure;
$\boldsymbol{m}_{gg}$ die Massenmatrix in Bezug auf die Freiheitsgrade der Groundstructure;
$\boldsymbol{m}_{sg}, \boldsymbol{m}_{gs}$ die koppelnden Massenmatrizen, welche die inneren Kräfte der Freiheitsgrade der Superstructure zufolge einer Bewegung der Auflager ausdrücken;
$\boldsymbol{c}_{ss}, \boldsymbol{c}_{gg}, \boldsymbol{c}_{sg}, \boldsymbol{c}_{gs}$ und $\boldsymbol{k}_{ss}, \boldsymbol{k}_{gg}, \boldsymbol{k}_{sg}, \boldsymbol{k}_{gs}$ die Dämpfungs- und Steifigkeitskomponenten, welche analog zu den Massenkomponenten definiert sind;
$\boldsymbol{x}^t$ der Absolutverschiebungsvektor der Superstructure;
$\boldsymbol{x}_g$ der vorgegebene Verschiebungsvektor der Auflager;
$\dot{\boldsymbol{x}}^t, \dot{\boldsymbol{x}}_g, \ddot{\boldsymbol{x}}^t, \ddot{\boldsymbol{x}}_g$ analog die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen;
$\boldsymbol{p}_g(t)$ der Kraftvektor.

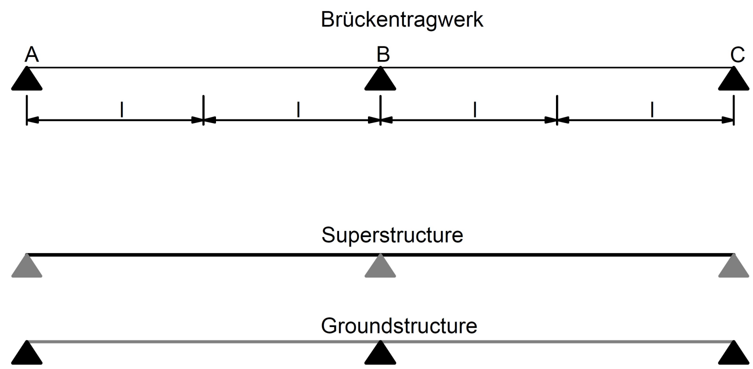

Abbildung 3.4: Unterscheidung Ground- und Superstructure bei einer Brücke

Dabei werden wie in Gleichung (3.50) ersichtlich keine äußeren Kräfte auf die Superstructure aufgebracht. Ziel ist es, die Verschiebungen $\boldsymbol{x}^t$ der Superstructure und die Auflagerkräfte $\boldsymbol{p}_g(t)$ zu ermitteln. Zunächst werden die Verschiebungen in zwei Komponenten geteilt:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}^t \\ \boldsymbol{x}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}^s \\ \boldsymbol{x}_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x} \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{3.51}$$

$\boldsymbol{x}^s$ ist die quasi-statische Komponente der vorgegebenen Lagerverschiebung $\boldsymbol{x}_g$. Eine Beziehung der beiden lässt sich durch

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{ss} & \boldsymbol{k}_{sg} \\ \boldsymbol{k}_{gs} & \boldsymbol{k}_{gg} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}^s \\ \boldsymbol{x}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{p}_g^s \end{Bmatrix} \tag{3.52}$$

angeben. Dabei ist $\boldsymbol{p}_g^s$ die Auflagerkraft, welche notwendig ist, um die zeitlich veränderliche Verschiebung $\boldsymbol{x}_g$ statisch zu erzwingen. Für den Sonderfall eines statisch besimmten Systems gilt $\boldsymbol{p}_g^s = 0$. Die überbleibende Variable $\boldsymbol{x}$ wird dynamische Komponente genannt, da um sie zu bestimmen eine dynamische Analyse notwendig ist. Wendet man diese Beziehung auf Gleichung (3.50) an, lässt sich diese in zwei Gleichungen aufteilen. Nach Umformung folgt:

$$\boldsymbol{m}_{ss} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}^t + \boldsymbol{m}_{sg} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_g + \boldsymbol{c}_{ss} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^t + \boldsymbol{c}_{sg} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_g + \boldsymbol{k}_{ss} \cdot \boldsymbol{x}^t + \boldsymbol{k}_{sg} \cdot \boldsymbol{x}_g = 0 \tag{3.53}$$

$$\boldsymbol{m}_{ss} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}_{ss} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{k}_{ss} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_{eff}(t). \tag{3.54}$$

Für den Vektor der effektiven Erdbebenkräfte gilt:

$$\boldsymbol{p}_{eff}(t) = -(\boldsymbol{m}_{ss} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}^s + \boldsymbol{m}_{sg} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_g) - (\boldsymbol{c}_{ss} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^s + \boldsymbol{c}_{sg} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_g) - (\boldsymbol{k}_{ss} \cdot \boldsymbol{x}^s + \boldsymbol{k}_{sg} \cdot \boldsymbol{x}_g). \tag{3.55}$$

Diese Gleichung lässt sich noch umformen. Zunächst folgt aus Gleichung (3.52):

$$\boldsymbol{k}_{ss} \cdot \boldsymbol{x}^s + \boldsymbol{k}_{sg} \cdot \boldsymbol{x}_g = 0. \tag{3.56}$$

Diese Beziehung erlaubt es, die statische Komponente $\boldsymbol{x}^s$ durch die Auflagerverschiebung auszudücken:

$$\boldsymbol{x}^s = \boldsymbol{\iota} \cdot \boldsymbol{x}_g \qquad \boldsymbol{\iota} = -\boldsymbol{k}_{ss}^{-1} \cdot \boldsymbol{k}_{sg}. \tag{3.57}$$

Worin $\boldsymbol{\iota}$ als Einflussmatrix bezeichnet wird. Sie gibt den Einfluss der Auflagerverschiebungen an den Strukturverschiebungen wieder. Durch Einsetzen ergibt sich die effektive Erdbebenkraft $\boldsymbol{p}_{eff}$ zu:

$$\boldsymbol{p}_{eff}(t) = -(\boldsymbol{m}_{ss} \cdot \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{m}_{sg}) \cdot \boldsymbol{x}_g(t) - (\boldsymbol{c}_{ss} \cdot \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{c}_{sg}) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_g(t). \tag{3.58}$$

Folglich lässt sich bei bekannter Bodenbeschleunigung und Geschwindigkeit die effektive Erdbebenkraft $\boldsymbol{p}_{eff}$ bestimmen. Für viele praktische Anwendungen kann der effektive Kraftvektor noch weiter vereinfach werden. Insbesondere für Systeme mit konzentrierten Massen (engl. lumped mass) ist die Massenmatrix eine Diagonalmatrix und damit sind $\boldsymbol{m}_{sg}, \boldsymbol{m}_{gs}, \boldsymbol{m}_{gg}$ Nullmatrizen. Für den Fall, dass die Dämpfung proportional zur Steifigkeit ist, ergeben sich auch die Dämpfungswerte zu Null:

$$\boldsymbol{p}_{eff}(t) = -\boldsymbol{m}_{ss} \cdot \boldsymbol{\iota} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_g(t). \tag{3.59}$$

Für weitere Berechnungen ist es sinnvoll auch noch folgende Beziehungen anzugeben:

$$\boldsymbol{x}^s = \sum_{l=1}^{N_g} \boldsymbol{\iota}_l \cdot \boldsymbol{x}_{gl}(t) \quad \boldsymbol{p}_{eff}(t) = \sum_{n=l}^{N_g} \boldsymbol{m}_{ss} \cdot \boldsymbol{\iota}_l \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_{gl}(t) \tag{3.60}$$

Dabei steht der Index l für die l-te Spalte der Einflussmatrix bzw. für den Beschleunigungsvektor beim l-ten Auflager.

3.3.1 Modale Analyse

Die Modale-Analyse ist dank ihrer relativ einfachen Handhabung, eines der am meist verbreitetsten Verfahren zur Durchführung von Erdbebenanalysen. Im Zuge der Behandlung des Eigenwertproblems soll nun die Bewegungsgleichung für Erdbebenerregung entkoppelt werden:

$$\boldsymbol{m} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_{eff}(t). \tag{3.61}$$

Bevor die Modale Analyse für MSE erweitert wird, sollen hier einige theoretische Grundlagen erläutert werden (vergleichend siehe: [4] Seiten 404 ff, und [18]). Es wird das Eigenwertproblem (3.62) eingeführt, durch dessen Lösung die Eigenfrequenz und die Modes eines Systems bestimmt werden sollen:

$$\boldsymbol{k} \cdot \phi_n = \omega_n^2 \cdot \boldsymbol{m} \cdot \phi_n. \tag{3.62}$$

Mathematisch ist ω_n der Eigenwert und ϕ_n der zugehörige Eigenvektor. In weiterer Folge wird ω_n nur noch Eigenfrequenz und ϕ_n Mode genannt. In Abhängigkeit der n Freiheitsgrade des Systems erhalten wir die Anzahl der Modes und Eigenfrequenzen. Die Massenmatrix und Steifigkeitsmatrix sind bekannt, daher wird Gleichung (3.62) umgeschrieben:

$$[\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \cdot \boldsymbol{m}] \cdot \phi_n = 0. \tag{3.63}$$

Die triviale Lösung ist stets durch $\phi_n = 0$ gegeben, somit muss die nicht triviale Lösung durch

$$det[\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \cdot \boldsymbol{m}] = 0 \tag{3.64}$$

gefunden werden. Der Verschiebungsvektor $\boldsymbol{x}(t)$ kann durch Überlagerung der Modal-Koordinaten q_r und der linear unabhängigen Modes ϕ_r ausgedrückt werden. Somit gilt für ein Mehrfreiheitsgradsystem:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{r=1}^{N} \phi_r \cdot q_r. \tag{3.65}$$

Setzt man diese Beziehung in die Bewegungsgleichung (3.61) ein, folgt:

$$\sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{m} \cdot \phi_r \cdot \ddot{q}_r + \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{c} \cdot \phi_r \cdot \dot{q}_r + \sum_{r=1}^{N} \boldsymbol{k} \cdot \phi_r \cdot q_r = \boldsymbol{p}(t). \tag{3.66}$$

Multiplikation aller Terme mit ϕ_n^T gibt:

$$\sum_{r=1}^{N} \phi_n^T \cdot \boldsymbol{m} \cdot \phi_r \cdot \ddot{q}_r + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^T \cdot \boldsymbol{c} \cdot \phi_r \cdot \dot{q}_r + \sum_{r=1}^{N} \phi_n^T \cdot \boldsymbol{k} \cdot \phi_r \cdot q_r = \phi_n^T \cdot \boldsymbol{p}(t). \tag{3.67}$$

Da in dieser Arbeit nur modale Dämpfung berücksichtigt wird, entkoppelt sich die Gleichung zu:

$$M_n \cdot \ddot{q}_n + C_n \cdot \dot{q}_n + K_n \cdot q_n = p_n(t) \tag{3.68}$$

mit $M_n = \phi_n^T \cdot \boldsymbol{m} \cdot \phi_r; \quad C_n = \phi_n^T \cdot \boldsymbol{c} \cdot \phi_r; \quad K_n = \phi_n^T \cdot \boldsymbol{k} \cdot \phi_r; \quad p_n(t) = \phi_n^T \cdot \boldsymbol{p}(t).$

Diese Gleichung (3.68) existiert für alle n=1 bis N und kann daher in Matrixform angeschrieben werden:

$$\boldsymbol{M} \cdot \ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C} \cdot \dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}(t). \tag{3.69}$$

Darin sind $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{K}$ Diagonalmatrizen. Division der Gleichung (3.68) durch M_n und Einführug des Dampfungsmaßes $\zeta_n = \frac{C_n}{2M_n\omega_n}$ gibt:

$$\ddot{q}_n + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n + \omega_n^2 \cdot q_n = \frac{p_n(t)}{M_n}. \tag{3.70}$$

Diese Gleichung zeigt die Antwort eines Einmassenschwingers in Abhängigkeit der Modalkoordinate q_n. Somit kann bei gegebener Kraft $\boldsymbol{p}(t)$ die Antwort eines Mehrfreiheitsgradsystemes, durch Lösen von Gleichung (3.70) nach der Modalkoordinate gefunden werden. Jede Modalgleichung hat die gleiche Form, nämlich die eines Einmassenschwingers. Die einzelnen Modes können durch Superposition aufsummiert werden, wodurch die Methode jedoch auch zugleich auf linear elastisches Verhalten reduziert wird, da ansonsten eine Superposition nicht zulässig wäre.

Erweiterung für MSE

Für den effektiven Kraftvektor gilt bei MSE aus Gleichung (3.60):

$$\boldsymbol{p}_{eff}(t) = \sum_{n=1}^{N_g} \boldsymbol{m}_{ss} \cdot \boldsymbol{\iota}_l \cdot \ddot{x}_{gl}(t). \tag{3.71}$$

Damit folgt die Bewegungsgleichung aus Gleichung (3.54) zu

$$\ddot{q}_n + 2 \cdot \zeta_n \cdot \omega_n \cdot \dot{q}_n + \omega_n^2 \cdot q_n = -\Gamma_{nl} \cdot \ddot{x}_{gl}(t), \tag{3.72}$$

worin

$$\Gamma_{nl} = \frac{L_{nl}}{M_n} \quad L_{nl} = \phi_n^T \cdot \boldsymbol{m}_{ss} \cdot \boldsymbol{\iota}_l \quad M_n = \phi_n^T \cdot \boldsymbol{m}_{ss} \cdot \phi_n$$

ist. Die Lösung für $q_n(t)$ folgt in Abhängigkeit der Verschiebungsantwort $D_{nl}(t)$ eines Einmassenschwingers:

$$q_n(t) = \sum_{l=1}^{N_g} \Gamma_{nl} \cdot D_{nl}(t) \tag{3.73}$$

Die Verschiebungsantwort besteht auch hier aus zwei Teilen, einem quasi-statischen und einem dynamischen Teil. Der dynamische Anteil folgt zu:

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{l=1}^{N_g} \sum_{n=1}^{N} \Gamma_{nl} \cdot \phi_n \cdot D_{nl}(t) \tag{3.74}$$

und der quasi-statische Anteil zu:

$$\boldsymbol{x}^s(t) = \sum_{l=1}^{N_g} \boldsymbol{\iota} \cdot x_{gl}(t). \tag{3.75}$$

Somit folgt für die Gesamtverschiebung:

$$\boldsymbol{x}^t(t) = \sum_{l=1}^{N_g} \boldsymbol{\iota} \cdot x_{gl}(t) + \sum_{l=1}^{N_g} \sum_{n=1}^{N} \Gamma_{nl} \cdot \phi_n \cdot D_{nl}(t). \tag{3.76}$$

3.3.2 Newmark-β

Die Newmark-β Methode kann auf Mehrfreiheitsgrade erweitert werden. Die in Kapitel 3.1.5 verwendeteten skalaren Gleichungen werden zu Matrixgleichungen erweitert. Damit folgt aus Gleichung (3.30):

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}}_i = (\Delta t) \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_i + (\gamma \Delta t) \cdot \Delta\ddot{\boldsymbol{x}}_i \tag{3.77}$$

$$\Delta\boldsymbol{x}_i = (\Delta t) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_i + \beta \cdot (\Delta t)^2 \cdot \Delta\ddot{\boldsymbol{x}}_i, \tag{3.78}$$

Mit dem effektiven Kraftvektor aus Gleichung (3.60) kann somit die Trägheitsantwort berechnet werden. Die quasi-statische Komponente wird durch Gleichung (3.60) bestimmt. Dadurch kann die Gesamtverschiebung berechnet werden:

$$\boldsymbol{x}^t(t) = \boldsymbol{x}^s(t) + \boldsymbol{x}^d(t) \tag{3.79}$$

3.4 Erdbebendynamik

Erdbebenerregungen wirken sich durch sogenannte Fußpunkterregungen auf Tragwerke aus. Dies entspricht einer Wegerregung, wie bereits am Beispiel des Einmassenschwingers gezeigt wurde.

3.4.1 Seismische Grundlagen

Der zeitliche Verlauf und die Stärke der Erschütterung, mit der ein Gebäude dynamisch belastet wird, sind durch drei seismische Phänomene beeinflust. Diese sind der Entstehungsort seismischer Wellen, das Übertragungsmedium und der Einwirkungsort. Grundsätzlich wird zwischen zwei Haupttypen von Wellen unterschieden:

- Raumwellen: Primärwellen (P) und Sekundärwellen (S)
- Oberflächenwellen: Lovewellen (L) und Rayleighwellen (R)

Primärwellen ($v_p \approx 5000 - 6000 m/s$) bewegen sich dabei allgemein schneller als Sekundärwellen ($v_s \approx 3000 - 4000 m/s$), daher kann aus der Zeitdifferenz zwischen dem Eintreffen der Wellen, die Entfernung zum Herd bestimmt werden. Die Stärke eines Erdbebens lässt sich nach [13], Seite 131, in instrumentelle und nicht instrumentelle Größen einteilen. Bei ersteren ist die Magnitude die meist verwendete. Sie ist ein Maß für die Herdenergie. Es gilt die folgende empirische Beziehung zwischen Herdenergie und Magnitude:

$$log(E) = 11,8 + 1,5 \cdot M, \tag{3.80}$$

Diese Skala ist nach oben hin offen und ist nach C.F. RICHTER (USA, 1900-1985) benannt. Die nichtinstrumentellen Größen werden meist als Intensitäten bezeichnet. In Europa wird dafür die 12-stufige Medwedew-Sponheuer-Karnik Skala (MSK-Skala) verwendet. Für weitere seismologische Grundlagen wird auf die Literatur verwiesen. (z.b. [13], Kapitel 2)

3.4.2 Vertikale und horizontale Komponente

Erdebeben sind räumliche Ereignisse, welche sich durch dreidimensionale Bodenbewegungen auswirken. Während für die horizontalen Bodenbewegungen bereits eine Vielzahl an Versuchen und wissenschaftlichen Untersuchungen durchgeführt wurde, wird eine genauere Betrachtung der Vertikalkomponente bei Experimenten meist vernachlässigt. In den meisten Fällen wird das von NEWMARK empfohlene Verhältnis zwischen Vertikal- und Horizontalkomponente angewandt:

$$\frac{V}{H} = \frac{2}{3}. \tag{3.81}$$

Die daraus folgende Erkenntniss beschränkt sich nicht nur auf die Annahme, dass die vertikale Komponente stets geringer ist als die horizontale, sondern sie zeigt auch, dass die beiden Komponenten den gleichen dominanten Frequenzbereich haben. Bei einigen der letzten Erdbebenereignissen wie z.B. 1989 Loma Prieta, 1994 Northridge, 1995 Kobe und 1999 Chichi [16], konnte jedoch sogar zum Teil eine größere vertikale Bodenbewegung im Vergleich zur horizontalen gemessen werden. Weiters wurden in [9] mehrere Erdbeben untersucht. Dabei wird zunächst das V/H Verhältniss von 18 kalifornischen Erdbeben (Abb. 3.5, links) in Abhängigkeit der Magnitude aufgetragen. Dabei ist zu erkennen, dass das Median Verhältnis bei $0,47$ und somit unter der 2/3-Marke liegt. Um jedoch die Effekte bei weiter Entfernung zu isolieren, wurden in Abb. 3.5 (rechts) die Aufzeichnungen in einem Radius von $30km$ zur Störung konzentriert. Das Median Verhältniss liegt hier bei 0.9, welches deutlich über den akzeptierten 2/3 liegt.

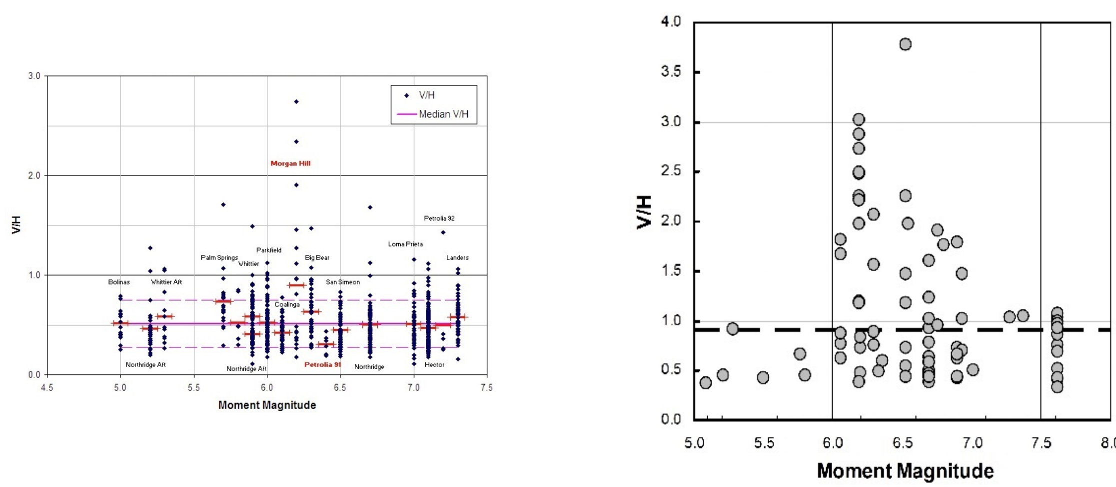

Abbildung 3.5: links: V/H für 18 Erdbeben in Kalifornien; rechts: V/H bei 30km Abstand [9] Abb. 2 und 3

3.5 Handhabung nach Eurocode 8

3.5.1 Grundlegende Anforderungen

Eurocodes (EC) sind die europaweit geltenden vereinheitlichten Normen für die Bemessung im Bauwesen. Es gibt insgesamt 10 Eurocodes, welche die Hauptgebiete des Bauwesens abdecken. Dabei gibt es jeweils ein Hauptdokument, sowie für die regionale Anwendung ein zusätzliches nationales Anwendungsdokument (NAD); letzteres darf jedoch dem Hauptdokument nicht widersprechen. Im Bezug auf Erdbeben, gilt der EC 8: EN 1998 Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben, welcher in sechs Teildokumente gegliedert ist:

- EN 1998-1 Grundlagen, Erdbebeneinwirkungen und Regeln für Hochbauten,
- EN 1998-2 Brücken,
- EN 1998-3 Beurteilung und Verbesserung der Erdbebensicherheit bestehender Hochbauten,
- EN 1998-4 Silos, Tankbauwerke und Rohrleitungen,
- EN 1998-5 Gründungen, Stützbauwerke und geotechnische Aspekte,
- EN 1998-6 Türme, Masten und Schornsteine.

Für die vorliegende Arbeit sind besonders die Dokumente EN 1998-1 und EN 1998-2 von Interesse. Für Brücken gelten nach EN 1998-2 Kapitel 2.2.2 zwei grundlegende Anforderungen:

- Grenzzustand der Tragfähigkeit (ULS): Nach Eintreten eines Bemessungserdbebens darf die Brücke Schäden aufweisen, jedoch muss die Standsicherheit und eine ausreichende Resttragfähigkeit gewährleistet werden. Die Brücke soll schadenstolerant gestaltet werden, sodass bei Auftreten einer Bemessungs-Erdbebeneinwirkung die Struktur Notverkehr ermöglicht und einfach repariert werden kann.
- Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (SLS): Bei hoher Auftretenswahrscheinlichkeit dürfen nur geringe Schäden an den untergeordneten Komponenten und an den für die Energiedissipation vorgesehenen Teilen verursacht werden.

Eine Brücke muss so ausgelegt sein, dass ihre seismische Verhaltensweise duktil (D) bzw. beschränkt duktil (LD) ist (Abb. 3.6). Abhängig ist dies von der vorhandenen Seismizität des Gebietes bzw. davon ob eine seismische Isolation des Tragwerks vorliegt. Die Kraft- (F) Verformungs- (d) Beziehung gilt dabei global für das betrachtete Bauwerk.

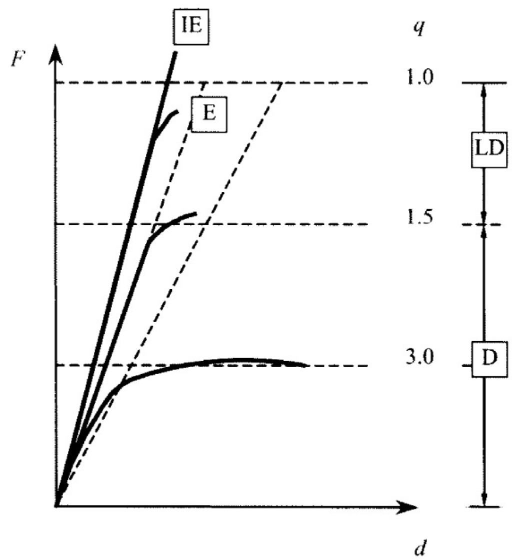

Abbildung 3.6: Seismisches Verhalten; [2], Bild 2.1

3.5.2 Erdbebenerregung

Brücken müssen nach EN 1998-2 2.1 in Bedeutungsklassen eingestuft werden. Dadurch wird die Referenzerdbebeneinwirkung A_{Ek} mit dem Bedeutungsbeiwert γ_l erhöht.

$$A_{ed} = \gamma_l \cdot A_{Ek} \tag{3.82}$$

Allgemein entsprechen Eisenbahnbrücken der Bedeutungskategorie II, was $\gamma_l = 1,0$ zur Folge hat. Die genaue Festlegung der Werte ist dabei den NAD überlassen. Die Darstellung der Erdbebenbewegung erfolgt nach EN 1998-1 3.2.2, entweder über elastische Bodenbeschleunigungs-Antwortspektren oder Zeitverlaufsdarstellungen. Dabei wird die horizontale Einwirkung durch zwei orthogonale Komponenten, die als voneinander unabhängig betrachtet werden, beschrieben. Die elastischen-Antwortspektren der Komponenten sind in Tab. 3.1 wiedergegeben. Der Eurocode gibt zwei unterschiedliche Typen von Antwortspektren an, deren Wahl den NAD obliegt. In Österreich ist nur das Antwortspektrum Typ 1 anzuwenden (Abb. 3.7, links). Darin sind A-E die nach Eurocode geregelten Baugrundklassen. Um die seismische Verhaltensweise des Tragwerks zu berücksichtigen, darf die Antwortbeschleunigung durch den Verhaltensbeiwert q abgemindert werden. Die Maximalwerte von q sind dabei in EN 1998-2 Tabelle 4.1 angegeben. In Abb. 3.7 (rechts) wird gezeigt, wie aus dem elastischen Antwortspektrum das Bemessungsantwortspektrum unter Berücksichtigung des Verhaltensbeiwertes q gewonnen werden kann.

Die horizontalen Komponenten müssen in Abhängigkeit des Bodentyps am Fundament der Brückenlager bestimmt werden. Für den Fall, dass mehrere Bodentypen an den Auflagern

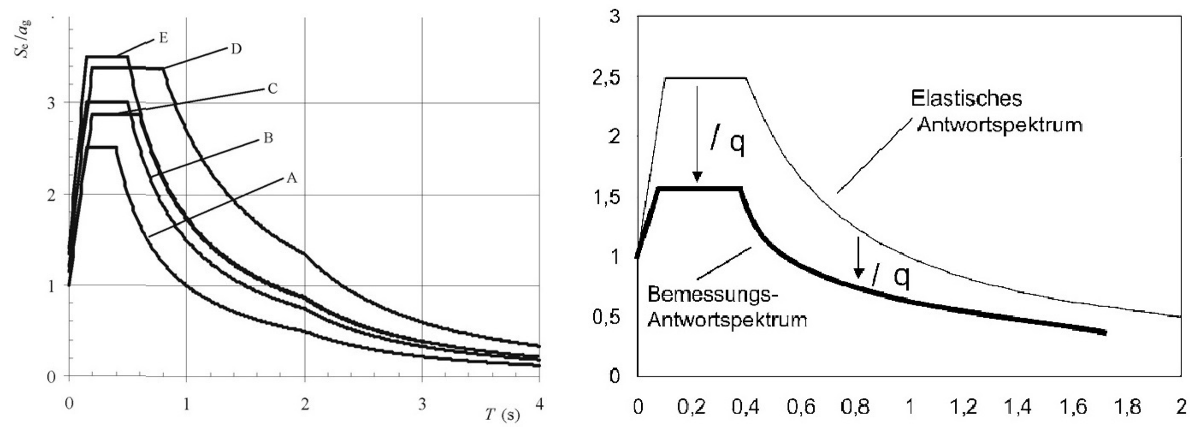

Abbildung 3.7: links: Antwortspektrum Typ 1; rechts: Bemessungsspektrum [12], Seite 793

auftreten, ist eine räumliche Veränderung der Erdbebeneinwirkung zu berücksichtigen (siehe Kapitel 3.5.3).
Die Vertikalkomponente ist nach EN 1998-1 4.3.3.5.2 nur für

$$a_{vg} \geq 0,25 \cdot g \tag{3.83}$$

zu berücksichtigen. Insbesondere gilt für Österreich laut NAD:

$$a_{vg} = \frac{2}{3} \cdot a_g. \tag{3.84}$$

Das hat zur Folge, dass die Vertikalkomponente nicht relevant ist. Für Brücken gibt EN 1998-2 zusätzliche Anforderungen:

- 3.2.2.3 Wenn der Standort der Brücke im 10km Umkreis zu einer bekannten seismotektonischen Verwerfung liegt, die ein Ereignis mit einer Momentenmagnitude $M \geq 6,5$ hervorrufen könnte, sind standortspezifische Spektren, welche Herdnahbereichseffekte berücksichtigen, zu verwenden.

- 4.1.7 (1) In Zonen hoher Seismizität müssen die Auswirkungen der Vertikalkomponente für den Fall, dass die Pfeiler hohen Biegespannungen des Überbaus aus vertikaler ständiger Einwirkung unterliegen, oder wenn die Brücke im Umkreis von 5km einer aktiven seismotektonischen Verwerfung liegt, berücksichtigt werden.

- 4.1.7 (2) (3) Die Auswirkungen auf Lager, Verbindungen und vorgespannte Betonfahrbahnplatten müssen immer berücksichtigt werden.

	Horizontalkomponente	Vertikalkomponente
$0 \leq T \leq T_B:$	$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1)\right]$	$S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 3,0 - 1)\right]$
$T_B \leq T \leq T_C:$	$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5$	$S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0$
$T_C \leq T \leq T_D:$	$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \left[\frac{T_C}{T}\right]$	$S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0 \cdot \left[\frac{T_C}{T}\right]$
$T_D \leq T \leq 4s:$	$S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \cdot \left[\frac{T_C T_D}{T^2}\right]$	$S_{ve}(T) = a_{vg} \cdot \eta \cdot 3,0 \cdot \left[\frac{T_C T_D}{T^2}\right]$

$S_e(T)$ Ordinate des elastischen Antwortspektrums
T Schwingungsdauer eines linearen Einmassenschwingers
T_B untere Grenze des Bereichs konstanter Spektralbeschleunigung
T_C obere Grenze des Bereichs konstanter Spektralbeschleunigung
T_D Wert, der den Beginn des Bereichs konstanter Verschiebungen des Spektrums definiert
S Bodenparameter
η Dämpfungskorrekturbeiwert
a_g Bodenbeschleunigung

Tabelle 3.1: Antwortspektren Horizontal und Vertikal; [1], 3.2.2.2 und 3.2.2.3

Die Kombination der drei Komponenten ist in EN 1998-2 4.2.1.4 geregelt. Dabei darf die maximale Zustandsgröße E entweder durch Anwendung der SRSS Regel (Gleichung (3.85)), oder durch die in EN 1998-1 4.3.3.5.2 (4) gegebene Kombinationsregel (Gleichung (3.86)), ermittelt werden.

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \tag{3.85}$$

$$E = max \begin{cases} E_x + 0,30 \cdot E_y + 0,30 \cdot E_z \\ 0,30 \cdot E_x + E_y + 0,30 \cdot E_z \\ 0,30 \cdot E_x + 0,30 \cdot E_y + E_z \end{cases} \tag{3.86}$$

3.5.3 Räumliche Veränderlichkeit der Erdbebenerregung

Die räumliche Veränderlichkeit der Erdbebeneinwirkung ist nach EN 1998-2 3.3 zu berücksichtigen, wenn folgende Bedingungen zutreffen:

- Die Bodeneigenschaften der Brücke schwanken derart, dass mehr als ein Bodentyp an den Auflagern anzutreffen ist;
- Die Länge des Überbaus überschreitet einen angemessenen Grenzwert, L_{lim}. Dieser Grenzwert ist von der Baugrundklasse abhängig und darf im NAD festgelegt werden. Der empfohlene Wert ist: $L_{lim} = L_g/1,5$ (siehe Tab. 3.2).

Klasse	A	B	C	D	E
L_g (m)	600	500	400	300	500

Tabelle 3.2: Entfernung, ab der die Bodenbewegungen unkorrelliert sind. [2] Tab. 3.1N

Insofern keine genauere Untersuchung durchgeführt wird, darf die räumliche Veränderlichkeit durch pseudo-statische Zustandsgrößen infolge von geeigneten Sätzen (A,B) von Verschiebungsgrößen berücksichtigt werden.

Satz A:
Die Relativverschiebungen d_{ri} werden gleichzeitig mit + oder - auf alle Lager der Brücke aufgebracht (siehe Abb. 3.8)

$$d_{ri} = \epsilon_r \cdot L_i \leq d_g \cdot \sqrt{2} \quad mit\ \epsilon_r = \frac{d_g\sqrt{2}}{L_g} \tag{3.87}$$

d_g ist die Bemessungsbodenverschiebung
L_i Entfernung des Lagers i vom Endauflager

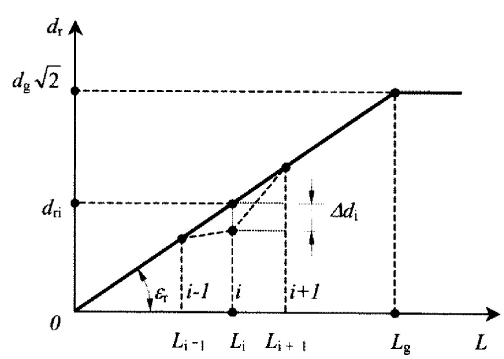

Abbildung 3.8: Verschiebungssatz A [2] Bild 3.1

Satz B:
Der Einfluss von an benachbarten Pfeilern in entgegengesetzte Richtung auftretenden Bodenverschiebungen, wird durch Verschiebungen Δd_i berücksichtigt. Dies sind Verschiebungen eines Zwischenlagers, welche relativ zu seinen benachbarten Auflagern, die festgehalten werden, angenommen werden (siehe Abb. 3.9).

$$\Delta d_i = \pm\beta_r \cdot \epsilon_r \cdot L_{\alpha v,i} \tag{3.88}$$

$L_{\alpha v,i}$ Mittelwert der Entfernungen des Zwischenauflagers zu seinen benachbarten Auflagern
β_r Beiwert nach NAD

Satz B besteht aus Konfigurationen von absoluten Verschiebungen:

$$d_i = \pm\frac{\Delta d_i}{2} \tag{3.89}$$

$$d_{i+1} = \pm\frac{\Delta d_{i+1}}{2} \tag{3.90}$$

Diese müssen mit unterschiedlichem Vorzeichen an den Auflagern aufgebracht werden.

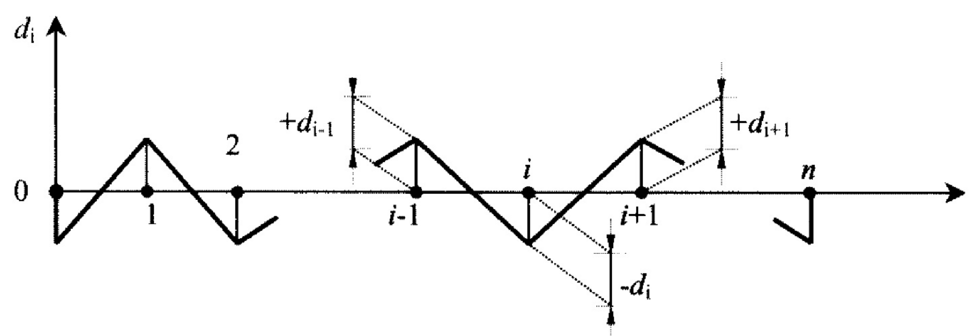

Abbildung 3.9: Verschiebungssatz B [2] Bild 3.2

Die Zustandsgrößen aus den Sätzen A und B müssen nicht miteinander überlagert werden. Nach EN 1998 3.3 (7) müssen die ungünstigsten Zustandsgrößen aus den pseudo-statischen Untersuchungen mit den Zustandsgrößen aus den Trägheitsantworten durch Anwendung der SRSS-Regel kombiniert werden.

Wenn eine Zeitverlaufsberechnung durchgeführt wird, wird es nach EN 1998-2 3.3 (8) als ausreichend erachtet, wenn an jedem Auflager die aufgebrachte Erdbebenbewegung berücksichtigt wird. In Anhang D (informativ) von EN 1998-2 werden Modell und Berechnungsmethoden zur Berücksichtigung der räumlichen Veränderlichkeit von Erdbebenbewegungen angegeben. Dabei wird auch eine Antwortspektrenmethode, welche auf den Ergebnissen von [6] fußt, vorgestellt. Durch stochachstische Prozesse wird ein Zusammenhang zwischen der Leistungspektraldichte und dem elastischen Verschiebungsspektrum gefunden.

3.5.4 Berechnungsverfahren

Bei der Modellierung der Brücke muss die Wahl der dynamischen Freiheitsgrade so gestaltet werden, dass alle wesentlichen Verformungsformen und Trägheitskräfte unter einem Bemessungserdbeben aktiviert werden. Angaben zu nichtlinearen Berechnungsmethoden (z.B. Pushover) sind in EN 1998-2 unter 4.2.4 und 4.2.5 angegeben, jedoch wird hier nicht näher darauf eingegangen.

Modale Analyse

Bei der modalen Analyse wird die Gesamtantwort des Systems dadurch erhalten, indem die Maxima der einzelnen Modalformen statistisch überlagert werden. Für Brücken gilt unter EN 1998-2 4.2.1.2 (2), dass bei Tragwerken, bei welchen die Gesamtmasse M als Summe von effektiven modalen Massen M_i betrachtet werden kann, soviele Eigenformen zu berücksichtigen sind, dass die Summe der Modalbeiträge $\sum M_i$ mindestens 90% der Gesamtmasse beträgt.

Für die Überlagerung der Modalbeiträge kann die unter EN 1998-2 4.2.1.3 (1) vorgestellte SRSS Regel verwendet werden, mit der Einschränkung, dass bei zwei eng beieinander liegenden Eigenschwingungsdauern diese Regel nicht auf der sicheren Seite liegt. Für diesen Fall ist die CQC (=Complete Quadratic Combination) anzuwenden.

Zeitverlaufsverfahren

Werden Zeitverlaufsverfahren angewendet, gibt EN 1998-2 unter 4.2.3.1 (1) vor, dass die Bemessungserdbebeneinwirkung als Mittel der Größtwerte, die aus einem Satz berücksichtigter Zeitverläufe berechnet wurden, angenommen werden. Dabei darf auch, falls die geforderte Anzahl an Datensätzen nicht verfügbar ist, mit entsprechenden simulierten Beschleunigungsverläufen gearbeitet werden.

Kapitel 4

Modell und Diskretisierung

4.1 Tragwerk

Bei dem zu untersuchenden Tragwerk handelt es sich um eine eingleisige Eisenbahnbrücke, ausgebildet als Durchlaufträger über zwei Felder mit jeweils $56m$. Der Querschnitt der Brücke ist in Abb.4.1 dargestellt. Die Brücke erhält an den Widerlagern und an der Zwischenstützung jeweils zwei Vertikalauflager. Für die Aufnahme der Horizontalkräfte in Längsrichtung befindet sich in der Achse A eine längsfeste Lagerung: ein allseits festes und ein nur längsfestes Lager. Zur Lastabtragung quer zur Brückenachse werden beide Widerlager sowie die Zwischenstützung herangezogen, indem jeweils ein Lager in Querrichtung unverschieblich angeordnet wird (Abb. 4.2). Die gegebenen Querschnittswerte sind in Tab. 4.1 angeführt.

Wie in Tab. 4.1 ersichtlich, gliedert sich das Tragwerk in drei unterschiedliche Querschnitte. Diese Querschnitte wurden in der Vorbemessung festgelegt und sind laut Abb. 4.3 über die Tragwerkslänge verteilt. Für die Berechnungen nach Newmark und nach der Modale Analyse wird mit dem gemittelten Querschnitt gerechnet (Indizes g); die veränderlichen Querschnittswerte werden durch das Verfahren von Rayleigh-Ritz berücksichtigt.

4.2 Dynamisches Modell

In Abb. 4.4 ist das diskretisierte Modell für das zu untersuchende Tragwerk dargestellt. Die Freiheitsgrade x_g beziehen sich dabei auf die Auflagerverschiebungen (Groundstructure). Hingegen sind die Freiheitsgrade x_1 und x_2 der Superstructure zugeordnet. Im unteren Teil der Abbildung sind die einzelnen Freiheitsgrade so durchnummeriert, wie sie für die Berechnung verwendet werden. Die ebenfalls angegebenen rotatorischen Freiheitsgrade können später durch statische Kondensation reduziert werden. Die Masse des Systems wird vereinfacht durch konzentrierte Massen m_i in Feldmitte wiedergegeben.

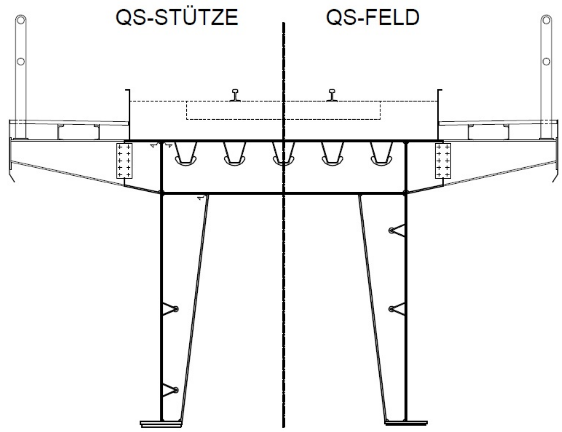

Abbildung 4.1: Brückenquerschnitt

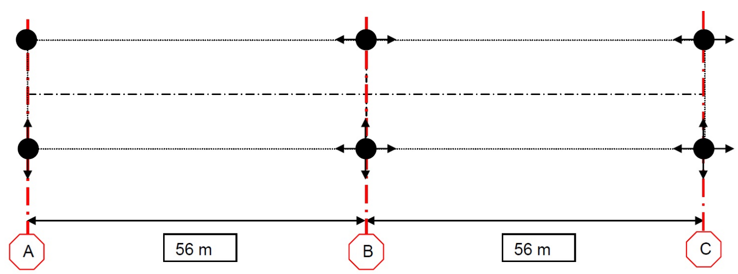

Abbildung 4.2: Lagerung der Brücke

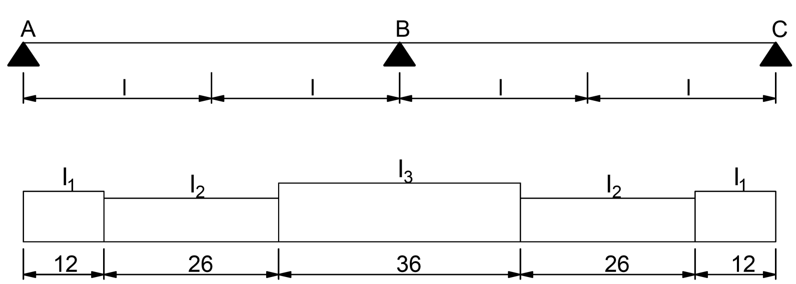

Abbildung 4.3: Aufteilung Querschnitte

Tabelle 4.1: Querschnittswerte eingleisige Eisenbahnbrücke

	Wert	Einheit	Bezeichnung
E	210000	$[KN/m^2]$	E-Modul Stahl
ρ_{Stahl}	7.85	$[to/m^3]$	Dichte Stahl
g	9,81	$[m/s^2]$	Erdbeschleunigung
$I_z^{(1)}$	0.8382	$[m^4]$	Flächenträgheitsmoment z-Achse (1)
$I_z^{(2)}$	0.7200	$[m^4]$	Flächenträgheitsmoment z-Achse (2)
$I_z^{(3)}$	0.9733	$[m^4]$	Flächenträgheitsmoment z-Achse (3)
$I_z^{(g)}$	0.8438	$[m^4]$	Flächenträgheitsmoment z-Achse-gemittelt
$I_y^{(1)}$	0.9912	$[m^4]$	Flächenträgheitsmoment y-Achse (1)
$I_y^{(2)}$	0.8389	$[m^4]$	Flächenträgheitsmoment y-Achse (2)
$I_y^{(3)}$	1.099	$[m^4]$	Flächenträgheitsmoment y-Achse (3)
$I_y^{(g)}$	0.9766	$[m^4]$	Flächenträgheitsmoment y-Achse-gemittelt
g_A	54	$[KN/m]$	Ausbaulast Brücke
g_{Eig}	31	$[KN/m]$	Eigengewicht Brücke
g_{QT}	2.434	$[KN/m]$	Eigengewicht Querträger
$A^{(1)}$	0.3465	$[m^2]$	Querschnittsfläche (1)
$A^{(2)}$	0.3082	$[m^2]$	Querschnittsfläche (2)
$A^{(3)}$	0.3905	$[m^2]$	Querschnittsfläche (3)

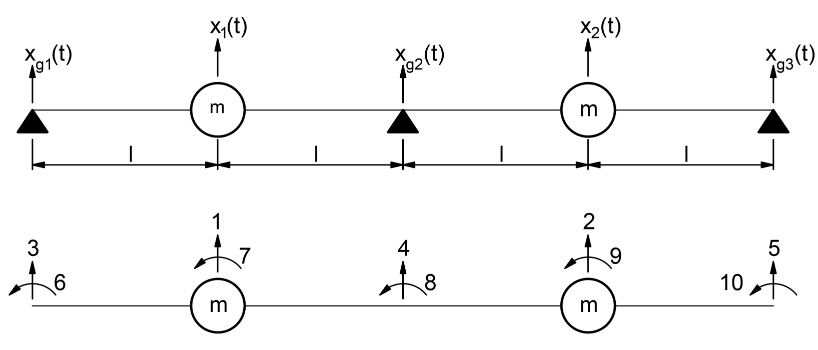

Abbildung 4.4: Dynamisches Modell

4.2.1 Massenmatrix

Wie in Abb. 4.4 ersichtlich, besitzt das dynamische Modell zwei konzentrierte Massen. Da keiner der Auflagerpunkte mit Masse belegt ist, ergeben sich die Komponenten $\boldsymbol{m}_{sg}, \boldsymbol{m}_{gs}$, und $\boldsymbol{m}_{gg}$ zu 0. Die Massenmatrix aus Gleichung (3.50) kann also wie folgt angeschrieben werden:

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Wie später gezeigt werden wird, können die rotatorischen Freiheitsgrade durch statische Kondensation reduziert werden, weswegen hier nur die Massenmatrix bezugnehmend auf die aktiven Freiheitsgrade angeschrieben wird.

Die einzelnen Submatrizen für Gleichung (3.50) ergeben sich zu:

$$\boldsymbol{m}_{ss} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{m}_{sg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{m}_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{m}_{gg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

4.2.2 Dämpfung

Diese Struktur hat keine externen dynamischen Dämpfungselemente an ausgewählten Positionen. Insofern wird nur eine modale Dämpfung berücksichtigt. EN 1998-2 empfiehlt unter Kapitel 4.1.3 (1) für Bauteile mit geschweißtem Stahl:

$$\zeta = 0.02. \tag{4.3}$$

4.2.3 Steifigkeitsmatrix

In einem ersten Schritt wird eine konstante Biegesteifigkeit über die gesamte Tragwerkslänge angenommen. Bezugnehmend auf die 10 Freiheitsgrade laut Abb. 4.4 ergibt sich die Steifigkeitsmatrix durch das Anwenden von Steifigkeitseinflussfaktoren zu:

$$\boldsymbol{k}_{10x10} = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 & 0 & 6l & 6l & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 24 & -12 & 0 & 0 & -6l & 0 & 6l \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 12 & 0 & 0 & 0 & -6l & -6l \\ 6l & -6l & 0 & 0 & 0 & 4l^2 & 1l^2 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6l & 0 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6l & -6l & 0 & 0 & 0 & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Statische Kondensation

Die oben angeführte Steifigkeitsmatrix kann durch statische Kondensation reduziert werden. Bei diesem Verfahren werden diejenigen Freiheitsgrade eliminiert, welchen keine Massen zugeordnet sind. Die Bewegungsgleichung ohne Dämpfung ergibt sich zu:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{tt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}^t \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{tt} & \boldsymbol{k}_{t0} \\ \boldsymbol{k}_{0t} & \boldsymbol{k}_{00} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}^t \\ \boldsymbol{x}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{p}^t(t) \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{4.5}$$

Dadurch ergeben sich zwei partitionierte Gleichungen:

$$\boldsymbol{m}_{tt} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_t + \boldsymbol{k}_{tt} \cdot \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{k}_{t0} \cdot \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{p}^t(t) \qquad \boldsymbol{k}_{0t} \cdot \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{k}_{00} \cdot \boldsymbol{x}_0 = 0. \tag{4.6}$$

Formt man den zweiten Teil von Gleichung (4.6) zu

$$\boldsymbol{x}_0 = -\boldsymbol{k}_{00}^{-1} \cdot \boldsymbol{k}_{0t} \cdot \boldsymbol{x}_t \tag{4.7}$$

um, und setzt wieder in den ersten Teil von Gleichung (4.6) ein, folgt:

$$\boldsymbol{m}_{tt} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_t + \hat{\boldsymbol{k}}_{tt} \cdot \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{p}^t(t). \tag{4.8}$$

Darin ist $\hat{\boldsymbol{k}}_{tt}$ die kondensierte Steifigkeitsmatrix:

$$\hat{\boldsymbol{k}}_{tt} = \boldsymbol{k}_{tt} - \boldsymbol{k}_{t0} \cdot \boldsymbol{k}_{00}^{-1} \cdot \boldsymbol{k}_{0t}. \tag{4.9}$$

Durch Anwenden der statischen Kondensation werden die Komponenten der Steifigkeitsmatrix nach den kondensierten Freiheitsgraden angeordnet. Folglich muss die Matrix ebenfalls nach den aktiven Freiheitsgraden umgeordnet werden. Dies ergibt:

$$\boldsymbol{k} = \frac{EI}{28l^3} \cdot \begin{bmatrix} 276 & 108 & -102 & -264 & -18 \\ 108 & 276 & -18 & -264 & -102 \\ -102 & -18 & 45 & 72 & 3 \\ -264 & -264 & 72 & 384 & 72 \\ -19 & -102 & 3 & 72 & 45 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Separiert man diese Matrix, ergeben sich die einzelnen Submatrizen für Gleichung (3.50):

$$\boldsymbol{k}_{ss} = \tfrac{EI}{28l^3} \cdot \begin{bmatrix} 276 & 108 \\ 108 & 276 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{k}_{sg} = \tfrac{EI}{28l^3} \cdot \begin{bmatrix} -102 & -264 & -18 \\ -18 & -264 & -102 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{k}_{gs} = \tfrac{EI}{28l^3} \cdot \begin{bmatrix} -102 & -18 \\ -264 & -264 \\ -18 & -102 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{k}_{gg} = \tfrac{EI}{28l^3} \cdot \begin{bmatrix} 45 & 72 & 3 \\ 72 & 384 & 72 \\ 3 & 72 & 45 \end{bmatrix}.$$

4.2.4 Einflussmatrix

Die Einflussmatrix beschreibt den Einfluss der Auflagerverschiebungen zu den Strukturverschiebungen. Sie wird zur Berechnung des effektiven Kraftvektors und der quasi-statischen Verschiebungen benötigt. Für konstant verteilte Querschnittswerte kann sie laut der folgenden Gleichung (4.11) angegeben werden:

$$\boldsymbol{\iota} = -\boldsymbol{k}_{ss}^{-1} \cdot \boldsymbol{k}_{sg} = \frac{1}{32} \cdot \begin{bmatrix} 13 & 22 & -3 \\ -3 & 22 & 13 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Die Verschiebungen der Struktur zufolge der Einflussvektoren sind in Abb. 4.5 dargestellt.

4.2.5 Rayleigh-Ritz'scher Ansatz

Bei den bisherigen Berechnungen wurde stets von einem, über die Tragwerkslänge l konstantem, Querschnitt ausgegangen. Üblicherweise hat ein Brückentragwerk bei Ausbildung als Mehrfeldträger jedoch keinen konstanten Querschnittsverlauf. Dies ist zum Einen durch den Wechsel von Feld- und Stützmomenten begründet, und wird andererseits zum Zwecke der Materialoptimierung angewandt. Das vorhandene Tragwerk wurde im Grenzzustand der Tragfähigkeit bemessen, wobei drei unterschiedliche Querschnittstypen festgesetzt wurden.

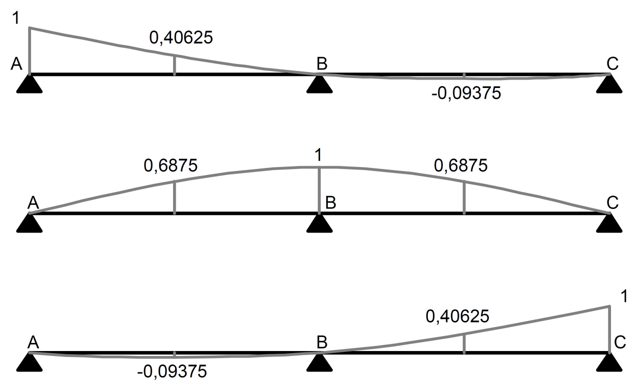

Abbildung 4.5: Verschiebungen der Einflussmatrix

Eine Verteilung der Querschnitte ist in Abb. 4.3 zu finden. Das Verfahren von Rayleigh-Ritz ermöglicht es, auf relativ einfach Art und Weise, die Eigenfrequenz und Modes des Brückentragwerkes mit verteilter Masse und Steifigkeit zu berechnen. Einen Überblick für einige geeignete Ansatzfunktionen findet man in [17]. Passt man diese Funktionen an die Trägerlänge an, kann zur Ermittlung der ersten und zweiten Eigenfrequenz folgender Ansatz gewählt werden:

$$\psi_1 = sin\Big(\frac{\pi x}{2l}\Big); \quad \psi_2 = sin\Big(\frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{2}\Big) \cdot sin\Big(\frac{\pi x}{2l} - 2\pi\Big). \tag{4.12}$$

Zunächst soll nun die Qualität dieses Ansatz überprüft werden.
Dies geschieht durch einen Vergleich mit der analytischen Lösung. Die analytische Lösung für einen Zweifeldträger mit konstant verteilter Masse und Steifigkeit wird in [14] seite 145, angegeben:

$$f_n = \frac{\lambda_i^2}{2\pi(2l)^2} \cdot \left(\frac{EI}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Darin ist EI die Biegesteifigkeit, μ die Masse pro Längeneinheit und λ_i ein Faktor in Abhängigkeit der Felderanzahl und der gesuchten Eigenform. Für die ersten beiden Eigenfrequenzen eines Zweifeldträgers gilt:

$$\lambda_1 = 3,142; \quad \lambda_2 = 3,927. \tag{4.14}$$

Mit den gemittelten Querschnittswerten aus Tab. 4.1 um die z-Achse kann die Eigenfrequenz mit

$$I_z^g = 0,8439 \qquad [m^4] \tag{4.15}$$
$$\mu = g_A + g_{Eig} = (54 + 31) \cdot 1000/9,81 = 8664,6279 \qquad [kg/m] \tag{4.16}$$
$$l = 28 \qquad [m], \tag{4.17}$$

berechnet werden. Wendet man dieselben Querschnitts- und Tragwerkswerte auf das Verfahren von Rayleigh-Ritz an, kann man die erhaltenen Eigenfrequenzen nach Lösen des Eigenwertproblems vergleichen.

	Rayleigh-Ritz	Analytisch	Abweichung
Mode 1	2,2652 [Hz]	2,2657 [Hz]	0,022 [%]
Mode 2	3,6260 [Hz]	3,5393 [Hz]	2,44 [%]

Tabelle 4.2: Vergleich der Eigenfrequenzen: Analytisch und Rayleigh-Ritz

Wie in Tab. 4.2 ersichtlich, ist die Abweichung der Eigenfrequenz für konstant verteilte Querschnittswerte minimal. Insbesondere die erste Eigenfrequenz weist nur äußerst geringfügige Abweichungen auf. Mit der Höhe der Ordnung steigt auch die Fehlersensibilität, jedoch ist eine Abweichung von $2,44\%$ bei der zweiten Eigenfrequenz eine sehr gute Näherung. Daher kann davon ausgegangen werden, dass der Ansatz, auch für veränderliche Querschnittswerte plausible Ergebnisse liefert.

Kapitel 5

Berechnung und Ergebnisse

Im nun folgenden Kapitel werden für die zuvor beschriebene Brücke mehrere Berechnungen durchgeführt. Sämtliche numerische Berechnungen wurden durch das Programm $Sci-Lab$ 5.5.1 ausgeführt. Die Programmcodes/sheets sind im Anhang abgedruckt. Exemplarisch wurden zur Ergebnisauswertung zwei unterschiedliche Erdbebensätze verwendet. Für den ersten Erdbebensatz (*El Centro*, Kalifornien 1940) sollen folgende Punkte analysiert werden:

- Berechnung einer MSE durch eine Modale Analyse;
- Berechnung einer MSE durch eine Modale Analyse unter Verwendung eines Rayleigh-Ritz Ansatzes um die Eigenfrequenzen und Modes zu ermitteln;
- Berechnung einer MSE durch das Newmark-β Verfahren;
- Berechnung durch idente Auflagerverschiebung, sowie Betrachtung einer räumlichen Veränderlichkeit der Erdbebeneinwirkung, wie sie nach Eurocode 8 vorgesehen wäre.

Für den zweiten Erdbebensatz (*Christchurch*, Neuseeland 2011) hingegen, sollen folgende Punkte beachtet werden:

- Berechnung einer MSE für die horizontale Komponente;
- Berechnung einer MSE für die vertikale Komponente;
- Neben den Verschiebungen sollen auch die Schnittgrößen (Biegemomente) gegenübergestellt werden.

Bei beiden Erdbeben wird eine zeitliche Versetzung der Erregung von $t' = 2s$ verwendet. Dabei wird zuerst das Auflager A zum Zeitpunkt (t) mit der Verschiebung beaufschlagt. Die Lager B und C jeweils zwei Sekunden $(t - t')$ und $(t - 2t')$ später.

5.1 El Centro, Kalifornien

Die horizontal-Bodenbeschleunigungen für das Erdbeben von El-centro (Abb. 5.1) können von der Internetseite [8] entnommen werden. Die dazugehörigen Bodenverschiebungen werden durch zweimalige Integration erhalten.

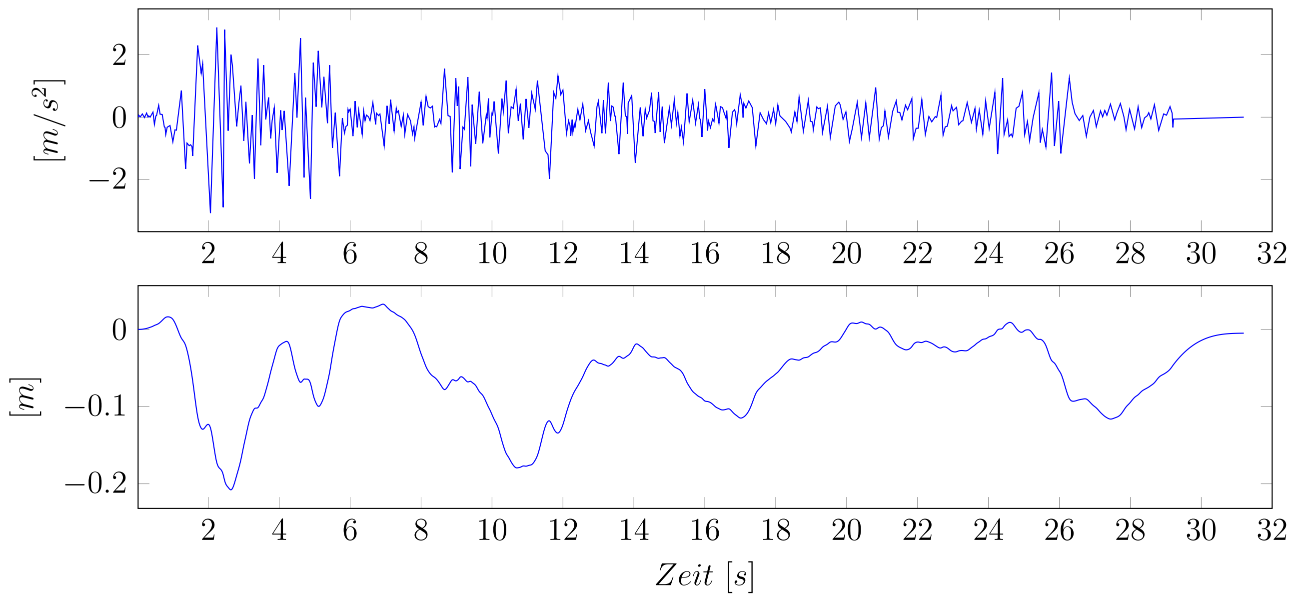

Abbildung 5.1: Bodenbeschleunigungen und Verschiebungen für El-Centro

5.1.1 Modale Analyse

Die Steifigkeits- und die Massenmatrix ergeben sich für gemittelte Querschnittswerte nach Tab. 4.1 mit

$$
\begin{aligned}
I_z^g &= 0,8382 && [m^4] \\
\mu_i &= \frac{1}{2} \cdot (g_{Eig} + g_A) = \frac{1}{2} \cdot (54 + 31) \cdot 1000/9,81 = 4332,3140 && [kg/m] \\
l &= 28 && [m],
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

zu:

$$
\boldsymbol{m}_{ss} = \begin{bmatrix} 242609,58 & 0 \\ 0 & 242609,58 \end{bmatrix} \quad [kg]; \quad \boldsymbol{k}_{ss} = \begin{bmatrix} 12972964 & -29405384 \\ -29405384 & 79567511 \end{bmatrix} \quad [N/m]. \tag{5.2}
$$

Aus dem Eigenwertproblem lassen sich zunächst die Eigenfrequenz und die normierten Eigenvektoren berechnen:

$$\boldsymbol{k}_{ss} \cdot \phi = \omega^2 \cdot \boldsymbol{m}_{ss} \cdot \phi \tag{5.3}$$

$$\omega_1 = 1,3093 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\mu(2l)^3}} = 14,129084 \quad [rad/sek] \quad = 2,2487 \quad [Hz] \tag{5.4}$$

$$\omega_2 = 1,9795 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\mu(2l)^3}} = 21,361167 \quad [rad/sek] \quad = 3,3997 \quad [Hz] \tag{5.5}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{5.6}$$

Durch Einsetzen folgen M_n, L_{nl} und in weiterer Folge $\mathbf{\Gamma}_{nl}$:

$$M_{1,2} = 485219,16 \quad [kg]; \tag{5.7}$$

$$L_{nl} = m \cdot \begin{Bmatrix} -0,5 & 0.00000 & 0,5 \\ 0,3125 & 1,375 & 0,3125 \end{Bmatrix}; \tag{5.8}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{Bmatrix} -0,25000 & 0,00000 & 0,25000 \\ 0,15625 & 0,68750 & 0,15625 \end{Bmatrix}. \tag{5.9}$$

Die Antwort des Einmassenschwingers ausgewertet durch das Duhamelintegral für die versetzte Bodenbeschleunigung $\ddot{x}_g^A(t) = \ddot{x}_g(t)$, $\ddot{x}_g^B(t) = \ddot{x}_g(t-t')$, $\ddot{x}_g^C(t) = \ddot{x}_g(t-2t')$ gibt:

$$D_n^A(t) = D_n(t) \quad D_n^B(t) = D_n(t-t') \quad D_n^C(t) = D_n(t-2t'). \tag{5.10}$$

Somit kann die Verschiebung der beiden Superstructure Freiheitsgrade angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1^t \\ x_2^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40625 \\ -0,09375 \end{bmatrix} \cdot x_g(t) \quad &+ \begin{bmatrix} 0,68750 \\ -0,68750 \end{bmatrix} \cdot x_g(t-t') \quad + \begin{bmatrix} -0,09375 \\ 0,40625 \end{bmatrix} \cdot x_g(t-2t') \\
-0,25 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(t) \quad &+0 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(t-t') \quad + 0,25 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot D_1(t-2t') \\
+ 0,15625 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(t) \quad &+0,6875 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(t-t') \quad + 0,15625 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot D_2(t-2t')
\end{aligned} \tag{5.11}$$

In der ersten Zeile befinden sich die Terme für die quasi-statischen Verschiebungen. Die dynamische Komponente gliedert sich in zwei Teile, nach dem Verschiebungsspektrum einmal für ω_1 durch $D_1(t)$ und für ω_2 durch $D_2(t)$. Die genauen Zeitverläufe sind in Abb. 5.2 geplottet. Die Maximalwerte für die einzelnen Verschiebungsterme folgen:

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0,17129 \\ 0,15021 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_d = \begin{bmatrix} 0,02183 \\ 0,01912 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} 0,19155 \\ 0,15357 \end{bmatrix} \quad [m]. \tag{5.12}$$

Plot: Modale Analyse

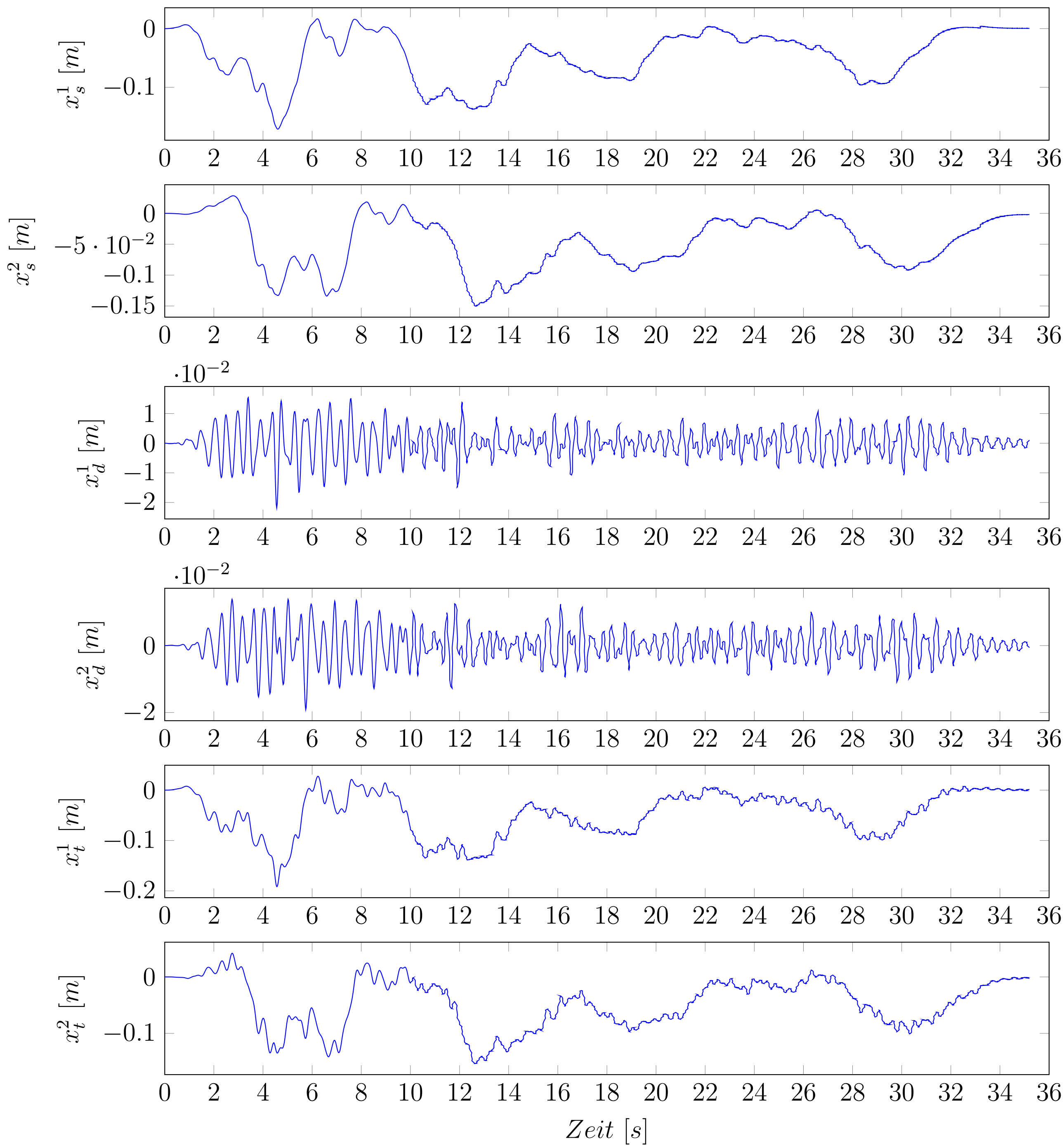

Abbildung 5.2: Verschiebungen durch Modale Analyse

5.1.2 Modale Analyse mit Rayleigh-Ritz Ansatz

Der in Gleichung (4.12) gewählte Ansatz wird nochmal angeschrieben:

$$\psi_1 = sin\Big(\frac{\pi x}{2l}\Big) \quad \psi_2 = sin\Big(\frac{\pi x}{4l} + \frac{\pi}{2}\Big) \cdot sin\Big(\frac{\pi x}{2l} - 2\pi\Big). \tag{5.13}$$

Um die Komponenten der Steifigkeits- und Massenmatrix zu erhalten, muss der Ansatz zweimal nach x abgeleitet und dann über die Tragwerkslänge aufintegriert werden. Das Tragwerk hat laut Tab. 4.1 drei unterschiedliche Querschnitte. Diese sind laut Abb. 4.3 über die Tragwerkslänge verteilt und dabei abschnittsweise konstant. Die Integration erfolgt daher auch abschnittsweise. Zunächst sollen die Massenkomponenten zur Integration ermittelt werden:

$$m_i = \Big(g_A + g_{QT} + A^{(i)} \cdot \rho_{Stahl}\Big) \cdot \frac{1000}{g}. \tag{5.14}$$

Damit erhält man nach Auswerten des Integrals aus Gleichung (3.47):

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 465089.57 & 7.458E-11 \\ 7.458E-11 & 230647.47 \end{bmatrix} \quad [kg] \tag{5.15}$$

Für die Komponenten der Steifigkeitsmatrix wird analog vorgegangen. Nach zweifacher Ableitung des Ansatzes können auch die Komponenten der Steifigkeitsmatrix angeschrieben werden:

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 89933079. & 6.404E-09 \\ 6.404E-09 & 1.190E+08 \end{bmatrix} \quad [N/m]. \tag{5.16}$$

Durch Lösen des Eigenwertproblems und nachfolgender Normierung folgen die Eigenfrequenzen und die Eigenformen zu:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= 13.9057 \quad [rad/sek] \quad = 2,2132 \quad [Hz] \\ \tilde{\omega}_2 &= 22.7129 \quad [rad/sek] \quad = 3,6149 \quad [Hz] \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\tilde{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \tilde{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{5.18}$$

Die Einflussmatrix $\boldsymbol{\iota}$ wird statisch berechnet. Dabei wird abwechselnd die Bindung des Lagers A,B bzw. C gelöst und die Verschiebung der Freiheitsgrade zufolge einer Einheitsverschiebung am Auflager der Größe $x = 1$ ermittelt:

$$\boldsymbol{\iota} = \begin{bmatrix} 0,395748 & 0,708438 & -0,104252 \\ -0,104252 & 0,708438 & 0.395748 \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Die weitere Berechnung wird analog zum vorigen Beispiel durch die Modale Analyse ausgeführt. Die genauen Zeitverläufe sind in Abb. 5.3 geplottet. Die maximalen Verschiebungen ergeben sich zu:

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0,17501 \\ 0,15263 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_d = \begin{bmatrix} 0,02489 \\ 0,02077 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} 0,19823 \\ 0,16624 \end{bmatrix} \quad [m]. \tag{5.20}$$

Plot: Modale Analyse mit Rayleigh-Ritz Ansatz

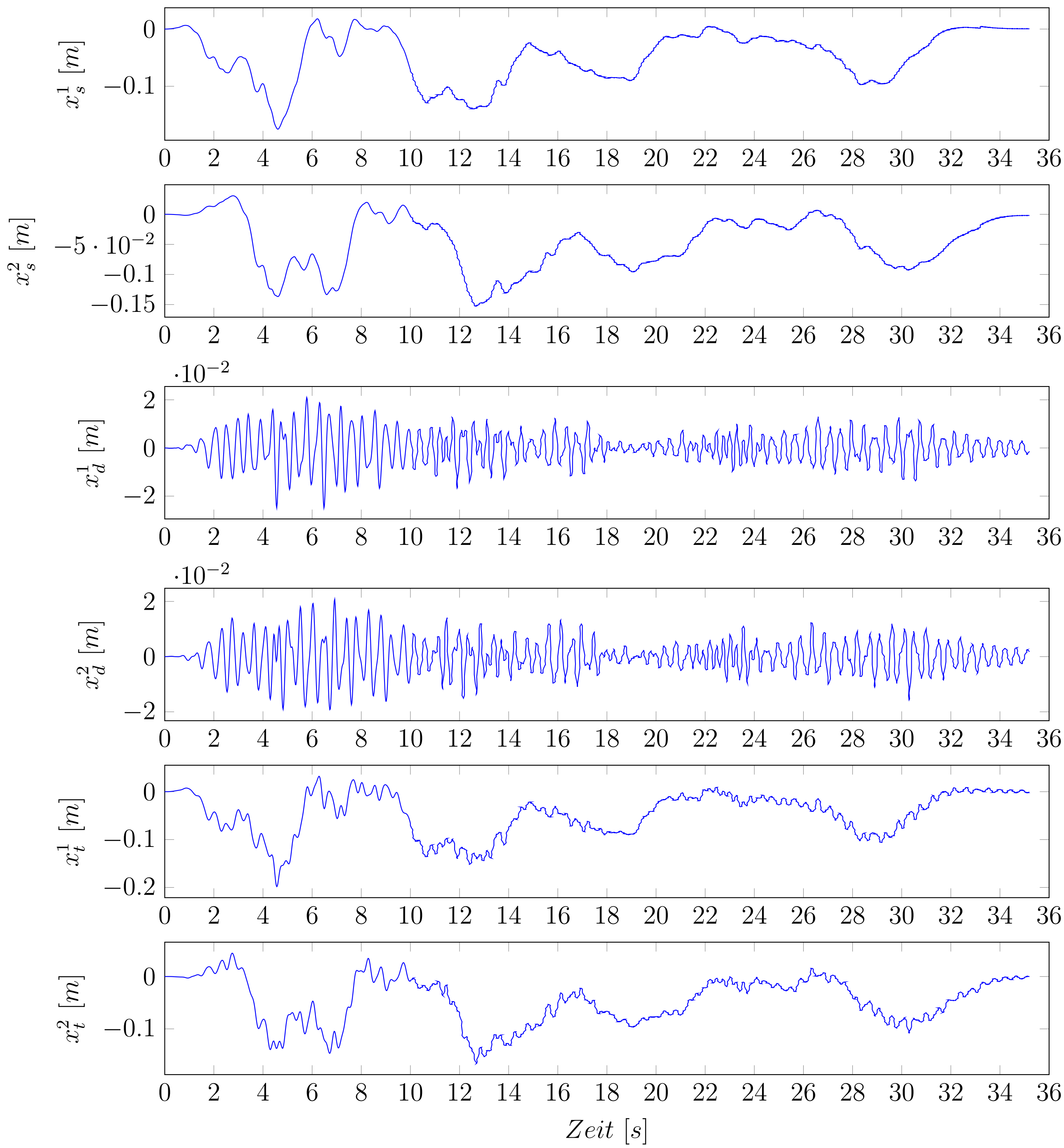

Abbildung 5.3: Verschiebungen durch Modale Analyse mit Rayleigh-Ritz Ansatz

5.1.3 Newmark-β

Der Newmark Algorithmus wurde in den vorstehenden Kapiteln bereits hergeleitet. Die Daten des Erdbebensatz sind durch ein Zeitintervall von $\Delta t = 0.02$ Sekunden gegeben; dies ist für die geforderte Genauigkeit im Bauwesen ausreichend. Die Newmark Parameter werden mit

- $\gamma = 0.5$
- $\beta = 0.25$

festgesetzt, wodurch die Stabilität des Verfahrens gewährleistet ist. Die Massen-, Steifigkeits- und Einflussmatrix wurden in Kapitel 4 bereits gebildet. Somit kann der effektive Kraftvektor gemäß Gleichung (3.60) berechnet werden. Die nun zu lösende Bewegungsgleichung lautet:

$$\boldsymbol{m}_{ss} \cdot \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}_{ss} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{k}_{ss} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p}_{eff}. \tag{5.21}$$

Die quasi-statische Komponente der Verschiebung ist durch

$$\boldsymbol{x}^s = \sum_{l=1}^{N_g} \boldsymbol{\iota}_l \cdot \boldsymbol{x}_{gl}(t) \tag{5.22}$$

gegeben.

Die genauen Zeitverläufe sind in Abb. 5.4 geplottet. Die Maximalwerte für die einzelnen Verschiebungsterme folgen:

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0.17129 \\ 0.15021 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_d = \begin{bmatrix} 0.02488 \\ 0.02120 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} 0.19460 \\ 0.15686 \end{bmatrix} \quad [m] \tag{5.23}$$

Plot: Newmark-β

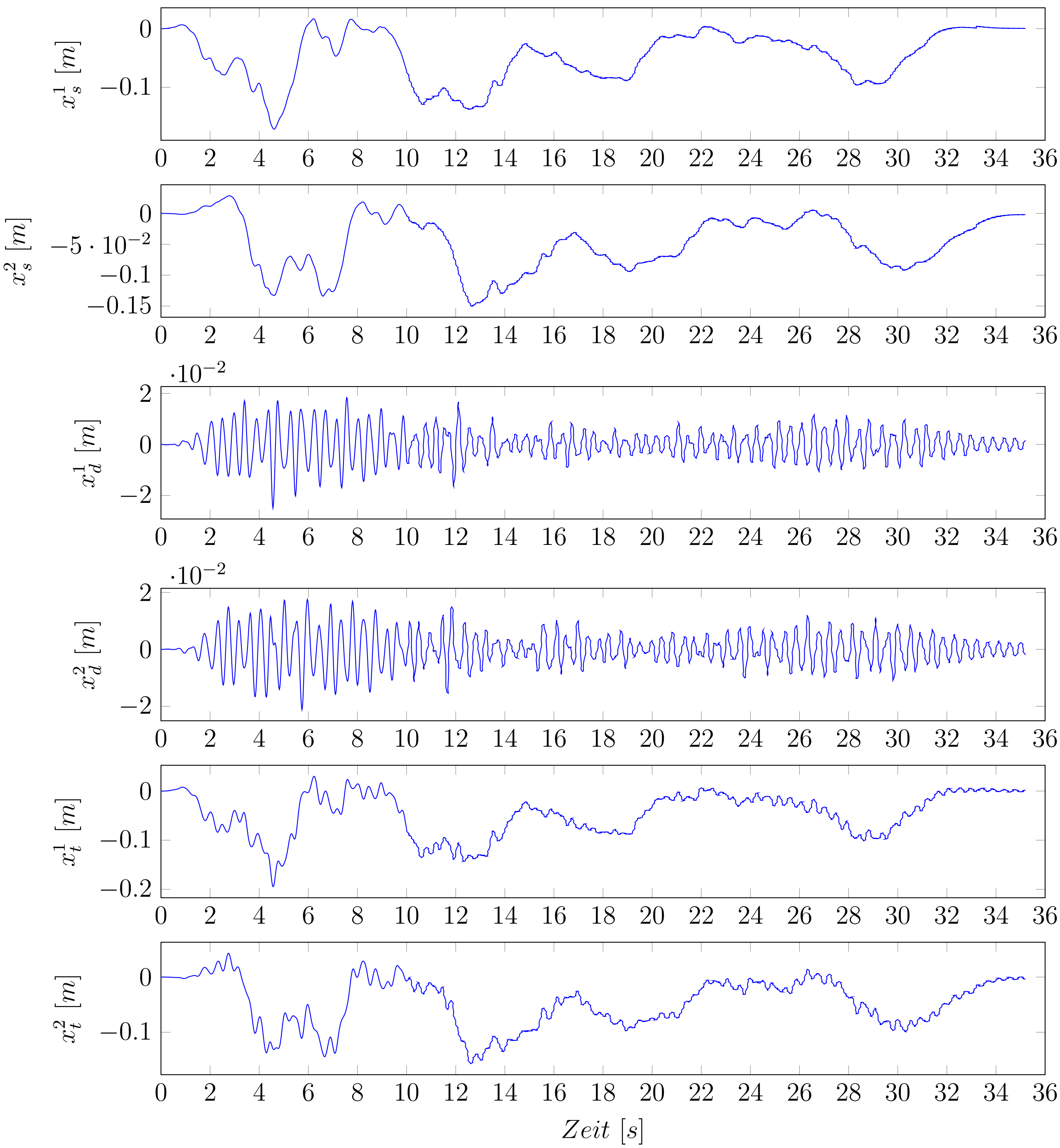

Abbildung 5.4: Verschiebungen durch das Newmark-β Verfahren

5.1.4 Idente Auflagererregung

Für den Sonderfall, dass sich alle Auflager (A,B und C) ident bewegen, ergibt sich die Einflussmatrix $\boldsymbol{\iota}$ zu 1. Für die zu lösende Bewegungsgleichung folgt damit der effektive Kraftvektor:

$$\boldsymbol{p}_{eff}(t) = \sum_{n=l}^{N_g} \boldsymbol{m}_{ss} \cdot [1] \cdot \ddot{\boldsymbol{x}}_{gl}(t). \tag{5.24}$$

Dies entspricht einem regulären Erdbebenproblem ohne die Effekte der Mehrpunkterregung. Nach einer Berechnung nach Newmark folgen die maximalen Verschiebungen zu:

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0,20785 \\ 0,20785 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_d = \begin{bmatrix} 0,01690 \\ 0,01690 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} 0,22351 \\ 0,22351 \end{bmatrix} \quad [m]. \tag{5.25}$$

Die genauen Zeitverläufe sind in Abb. 5.5 dargestellt.

Veränderliche Einwirkung nach Eurocode 8

Wie bereits im vorstehenden Kapitel erläutert, kann nach Eurocode 8 die räumliche Veränderlichkeit der Erdbebeneinwirkung (=RVdE) durch quasi-statische Verschiebungen berücksichtigt werden. Dabei müssen die Verschiebungen aus den Sätzen A und B jeweils mit den Trägheitsantworten überlagert werden.

Satz A:
Um die Relativverschiebung d_{ri} zu berechnen, muss zunächst die Bemessungsbodenverschiebung d_g ermittelt werden. Diese ergibt sich zunächst nach [1] 3.2.2.4 zu:

$$d_g = 0,025 \cdot a_g \cdot S \cdot T_C \cdot T_D. \tag{5.26}$$

Da jedoch für den vorliegenden Erdbebensatz die Bodenerschiebungen bekannt sind, als auch eine Vergleichbarkeit zu den anderen Berechnungen hergestellt werden soll, wird die maximal Verschiebung des *El Centro* Datensatzes verwendet. Die Bemessungsverschiebung folgt also zu:

$$d_g = 0.20785 \quad [m]. \tag{5.27}$$

Als Referenzbodenklasse wird beispielhaft die Klasse A ($\Rightarrow L_g = 600m$) verwendet. Somit können die Relativverschiebungen nach Gleichung (3.87) berechnet werden:

$$d_{r1} = 0.02743 \quad [m] \quad mit\ L_1 = 56m \tag{5.28}$$
$$d_{r2} = 0.05487 \quad [m] \quad mit\ L_2 = 112m. \tag{5.29}$$

Diese müssen an den Auflagern angesetzt werden, wodurch sich eine Verschiebung an den Freiheitsgraden 1 und 2 ergibt.

$$x_1 = 0,01371 \quad [m] \tag{5.30}$$
$$x_2 = 0,04115 \quad [m] \tag{5.31}$$

Satz B:
Da die Feldlängen der Brücke ident sind, folgt für $L_{\alpha v,1,2,3} = 56m$, sowie auch alle Lager die gleiche Baugrundklasse (A) aufweisen ($\Rightarrow \beta = 0,5$), kann die Verschiebung Δd_i berechnet werden:

$$\Delta d_{1,2,3} = \pm\beta_r \cdot \epsilon_r \cdot 56 = 0.01372 \quad [m]. \tag{5.32}$$

Satz B besteht aus der Konfiguration von aufgezwungenen absoluten Verschiebungen an den benachbarten Auflagern.

$$d_i = \pm\Delta d_i/2 = 0,00686 \quad [m] \tag{5.33}$$

Diese müssen wiederum an den Auflagern mit unterschiedlichen Vorzeichen angesetzt werden, wodurch sich eine Verschiebung an den Freiheitsgraden 1 und 2 ergibt.

$$x_1 = 0,00257 \quad [m] \tag{5.34}$$
$$x_2 = 0,00257 \quad [m] \tag{5.35}$$

Da die Ergebnisse zwischen den Sätzen nicht kombiniert werden müssen, werden nur die maximalen Verschiebungen (=Satz A) mit der Trägheitsantwort überlagert. Dies geschieht durch die SRSS Regel. Somit folgen die maximalen Gesamtverschiebungen zu:

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} 0,20785 \\ 0,20785 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_d = \begin{bmatrix} 0,02176 \\ 0,04449 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} 0.22754 \\ 0.25026 \end{bmatrix} \quad [m]. \tag{5.36}$$

Plot: Idente Auflagerverschiebung

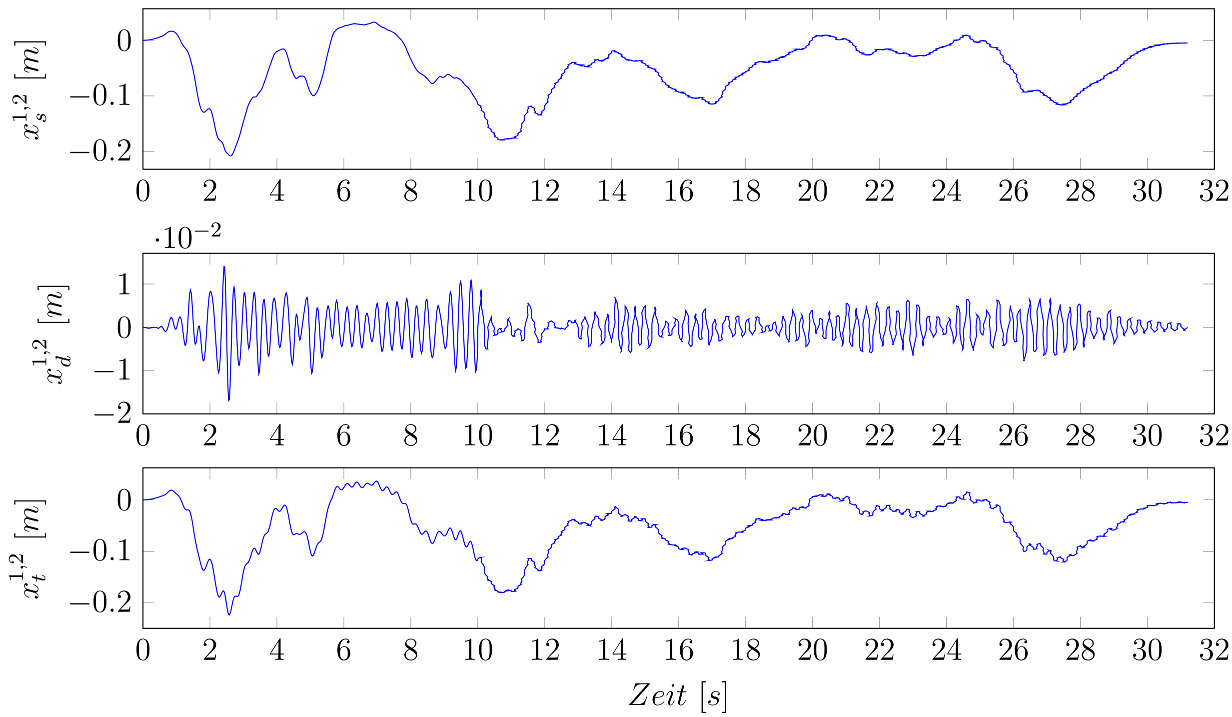

Abbildung 5.5: Verschiebungen bei identer Auflagerverschiebung

5.1.5 Gegenüberstellung

In Tab. 5.1 sind die maximalen Verschiebungen gegenübergestellt. Betrachtet man die Ergebnisse in Tab. 5.1 lässt sich erkennen, dass die Gesamtverschiebung bei identer Auflagerbewegung am größten sind. Jedoch ist zu beachten, dass die Trägheitsantworten bei MSP über jenen der identen Auflagerbewegungen sind.

Bei der Berücksichtigung nach EC 8 werden die Verschiebungen überschätzt, wodurch das Verfahren in diesem Fall auf der sicheren Seite liegt.

Da die Einflussmatrix sowohl für Newmark-β als auch für die Modale Analyse ident ist, sind auch die quasi statischen Komponenten ident. Sie sind somit unäbhängig von der Trägheitsantwort.

Das $Newmark - \beta$ Verfahren liefert etwas größere Verschiebung als die $Modale\ Analyse$. Diese bewegen sich jedoch im mm Berich.

Auch die Berechnung der *Modal Analyse* mit Rayleigh-Ritz Ansatz liefert etwas größere Verschiebungen. Dies ist darin begründet, die erste Eigenfrequenz etwas niedriger ist. Es ist daher sinnvoll, die Massen und Steifigkeitsverhältnisse bei der Modellierung zu beachten.

	$\boldsymbol{x}_s$	$\boldsymbol{x}_d$	$\boldsymbol{x}_t$	$[-]$
Modale Analyse	0,17129	0,02183	0,19155	$[m]$
	0,15021	0,01912	0,15357	$[m]$
Modale Analyse mit Rayleigh-Ritz Ansatz	0,17501	0,02489	0,19823	$[m]$
	0,15263	0,02077	0,16624	$[m]$
Newmark-β	0,17129	0,02488	0,19460	$[m]$
	0,15021	0,02120	0,15686	$[m]$
Idente Auflagererregung	0,20785	0,01690	0,22351	$[m]$
	0,20785	0,01690	0,22351	$[m]$
Idente Auflagererregung mit RVdE nach EC 8	0,20785	0,02176	0,22754	$[m]$
	0,20785	0,04449	0,25026	$[m]$

Tabelle 5.1: Gegenüberstellung für das Erdbeben El Centro

5.2 Erdbeben Christchurch, Neuseeland

Die Daten, für das hier als Beispiel herangezogene Erdbeben, können von der Internetseite [10] entnommen werden. Die Beschleunigungen des Bebens und die dazugehörigen Verschiebungen sind in Abb. 5.7 abgebildet. Die Daten wurden im Februar 2011 in der Nähe von Christchurch, Neuseeland, aufgezeichnet. Betrachtet man die maximalen Beschleunigungswerte aus den beiden Komponenten, ist klar ersichtlich, dass für diesen Zeitverlauf eine Anwendung des klassischen V/H Verhältnisses nicht ausreichend ist:

$$a_{gh} = 12.28 \quad a_{gv} = 14.34 \quad [m/s^2] \qquad \frac{V}{H} = 1,17 \geq \frac{2}{3} \tag{5.37}$$

Neben den Verschiebungen sollen in diesem Abschnitt auch die Biegemomente des Balkens in Feldmitte und über dem Mittelauflager ausgewertet werden. Dazu müssen zunächst die äquivalenten statischen Kräfte berechnet werden:

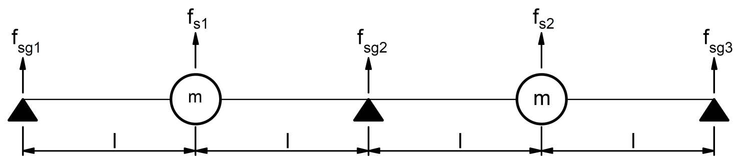

Abbildung 5.6: Statisch equivalente Kräfte

$$\boldsymbol{f}_s(t) = \boldsymbol{k}_{ss} \cdot \boldsymbol{x}^t(t) + \boldsymbol{k}_{sg} \cdot \boldsymbol{x}_g(t), \tag{5.38}$$

$$\boldsymbol{f}_{sg}(t) = \boldsymbol{k}_{sg}^T \cdot \boldsymbol{x}^t(t) + \boldsymbol{k}_{gg} \cdot \boldsymbol{x}_g(t). \tag{5.39}$$

Die Biegemomente können durch eine statische Analyse des Systems, wie in Abb. 5.6 dargestellt, ermittelt werden.

Für die folgenden Berechnungen zur Ermittlung der Verschiebungsantworten, der horizontal- bzw. Vertikalkomponente des Erdbebens, wurde das Newmark-β Verfahren verwendet.

5.2.1 Horizontalkomponente

Für die Berechnung der Horizontalkomponente wird analog vorgegangen wie bei der Berechnung für das Erdbeben von *El Centro*. Mit den Beschleunigungs- und Verschiebungswerten aus Abb. 5.7 kann die Antwort des Brückentragwerks berechnet werden. Der zeitliche Verlauf des Erdbebens ist in Abb. 5.9 dargestellt. Eine Gegenüberstellung der dabei erzielten Maximalwerte ist in Tab. 5.2 zu finden.

5.2.2 Vertikalkomponente

Für die Berechnung der Vertikalkomponente muss zunächst die Steifigkeitsmatrix neu aufgebaut werden. Die Massen- und Dämpfungsmatrix bleiben ident. Mit den Werten um die y-Achse aus Tab. 4.1 folgt die Steifigkeitsmatrix zu:

$$\boldsymbol{k}_{ss} = \begin{bmatrix} 92090106 & 36035259 \\ 36035259 & 92090106 \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{k}_{sg} = \begin{bmatrix} -34033300 & -88086188 & -6005876,5 \\ -6005876,5 & -88086188 & -34033300 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{k}_{gs} = \begin{bmatrix} -34033300 & -6005876,5 \\ -88086188 & -88086188 \\ -6005876,5 & -34033300 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{k}_{gg} = \begin{bmatrix} 15014691 & 24023506 & 1000979,4 \\ 24023506 & 1.281E+08 & 24023506. \\ 1000979.4 & 24023506 & 15014691. \end{bmatrix}; \qquad [N/m].$$

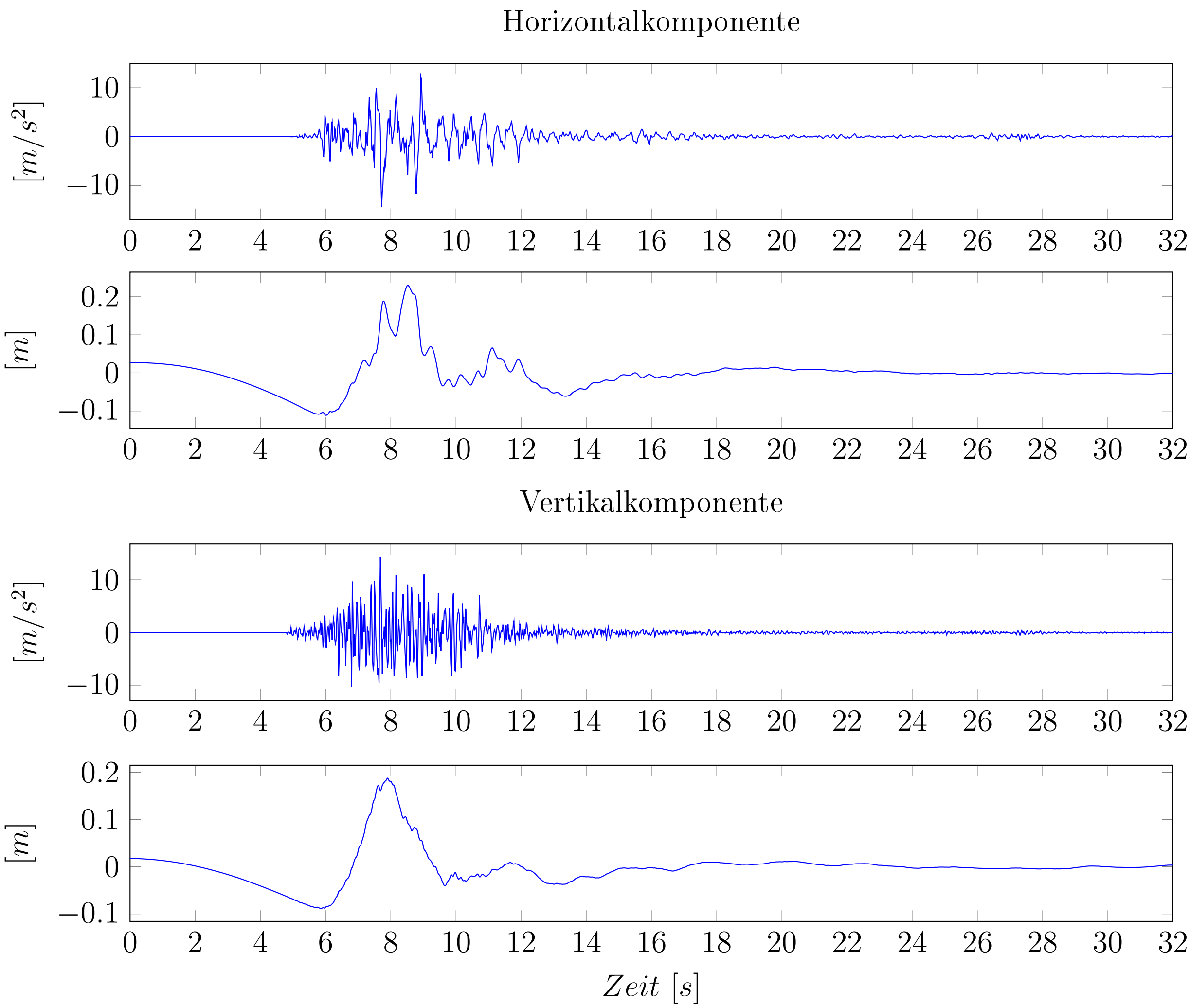

Abbildung 5.7: Bodenbeschleunigungen und Verschiebungen für Christchurch

Da die Steifigkeiten über die Tragwerkslänge konstant verteilt sind, bleibt auch die Einflussmatrix $\boldsymbol{\iota}$ unverändert. Die Verschiebungen sind in Abb. 5.10 dargestellt.

5.2.3 Überlagerung

Die maximalen Verschiebungen und Biegemomente für die Horizontal- und Vertikalkomponente des Brückentragwerks sind in Tab. 5.2 dargestellt. Eine Überlagerung der beiden Komponenten wird gemäß der SRSS Regel durchgeführt. Der Verlauf der zu den jeweiligen Maxima bzw. Minima gehörigen Momente kann in Abb. 5.8 gefunden werden.

$$SRSS \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_z^2} \tag{5.40}$$

	$\boldsymbol{x}_s$ $[m]$	$\boldsymbol{x}_d$ $[m]$	$\boldsymbol{x}_t$ $[m]$	M_1 $[KNm]$	M_B $[KNm]$	M_2 $[KNm]$
Horizontal	0.15679	0,09450	0,19298	76298,45	47122,49	68941,73
	0,12880	0,11322	0,16914	-97957,34	-101199,89	-96899,96
Vertikal	0,12879	0.02801	0.15680	39852,81	54916,89	30472,39
	0.09519	0.02498	0.11267	-53183,35	-76885,65	-46328,86
Überlagerung				±86079,62	±72362,93	±75375,91
				±111463,49	±127093,14	±107405,61

Tabelle 5.2: Gegenüberstellung und Überlagerung für das Erdbeben Neuseeland

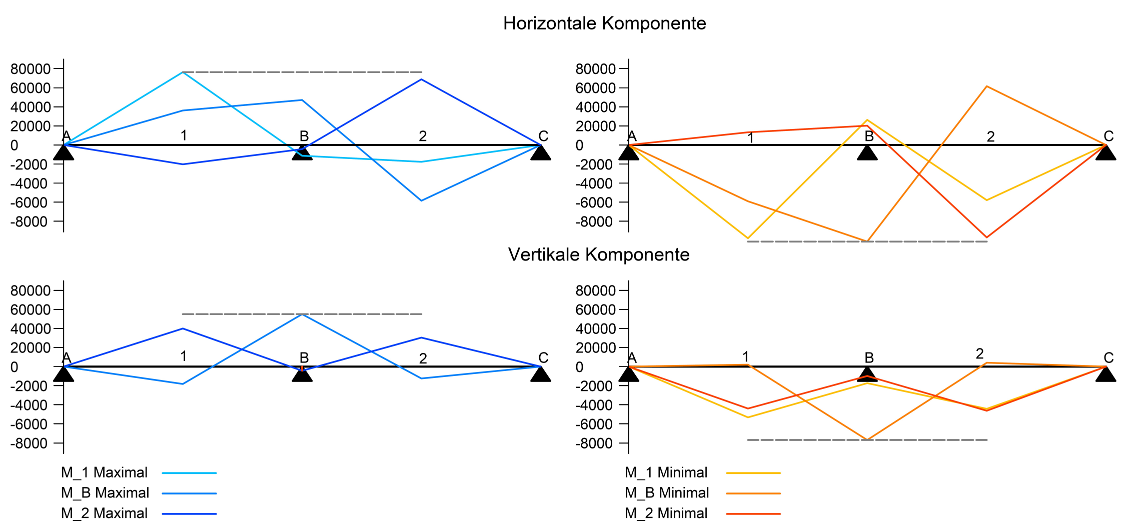

Abbildung 5.8: Biegemomente

Wie auch schon aus den Beschleunigungsverläufen ersichtlich, ist die vertikale Komponente für dieses Erdbeben nicht zu vernachlässigen. Dies spiegelt sich auch in den Verschiebungen wieder, bei welchen die Vertikal- und Horizontalanteile von gleicher Größenordnung sind.

Betrachtet man die Biegemomente, sind die Maxima und Minima an den drei Stellen jeweils von ähnlicher Größenordung, jedoch treten diese zu unterschiedlichen Zeitpunkten auf.

Moment	Horizontal	Vertikal	Einheit
M_$1_{Maximal}$	$12,28$	$11,74$	[s]
M_$B_{Maximal}$	$11,80$	$11,88$	[s]
M_$2_{Maximal}$	$12,00$	$11,74$	[s]
M_$1_{Minimal}$	$9,80$	$9,88$	[s]
M_$B_{Minimal}$	$10,26$	$9,74$	[s]
M_$2_{Minimal}$	$10,40$	$10,16$	[s]

Bei der Vertikalkomponente treten die Maxima an den Punkten 1 und 2 zum gleichen Zeitpunkt auf, daher sind auch die Momentenlinien von $M\_1\ Maximal$ und $M\_2\ Maximal$ ident.

Plot: Horizontalkomponente

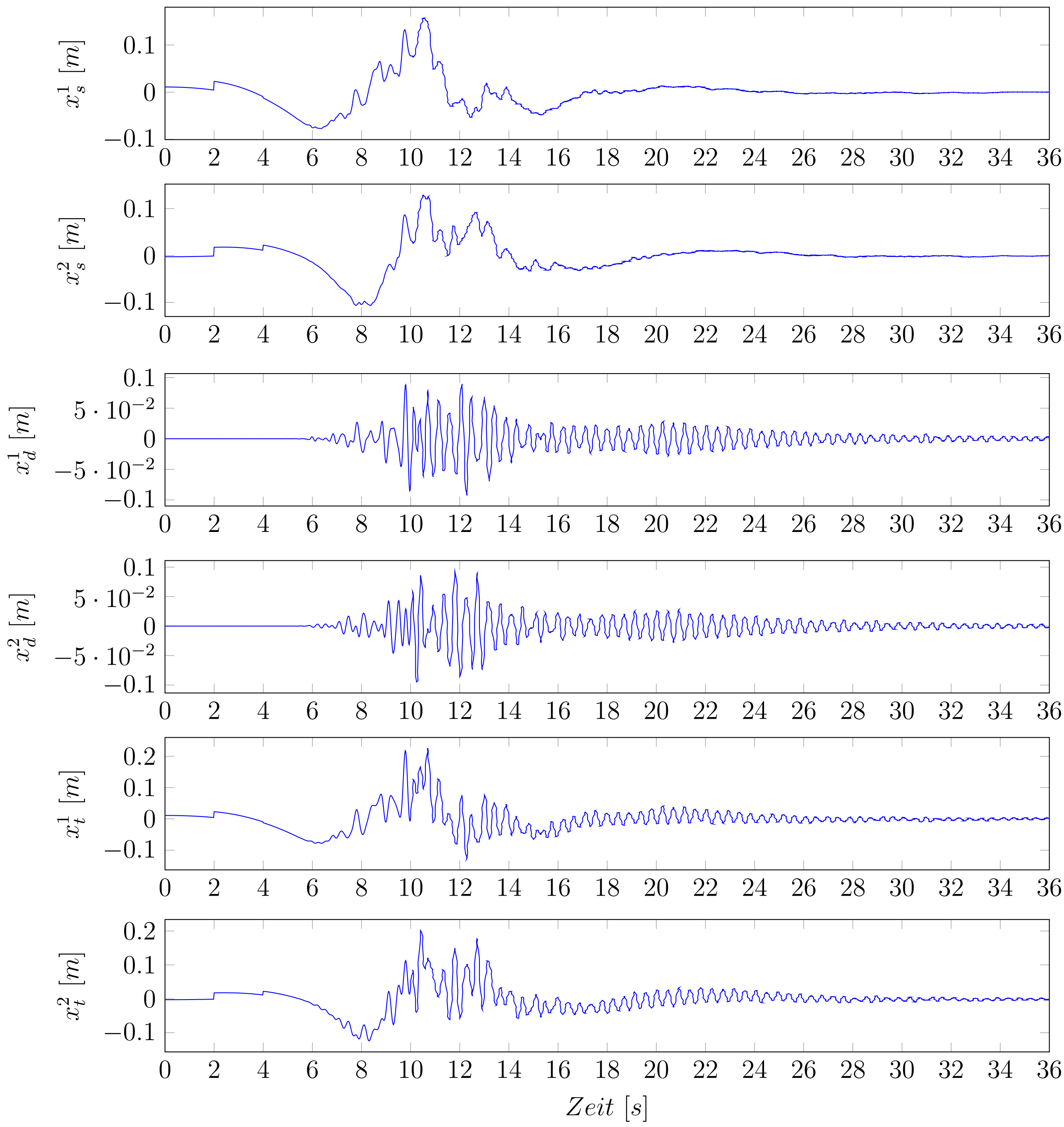

Abbildung 5.9: Verschiebungen zufolge horizonztaler Erdbebeneinwirkung

Plot: Vertikalkomponente

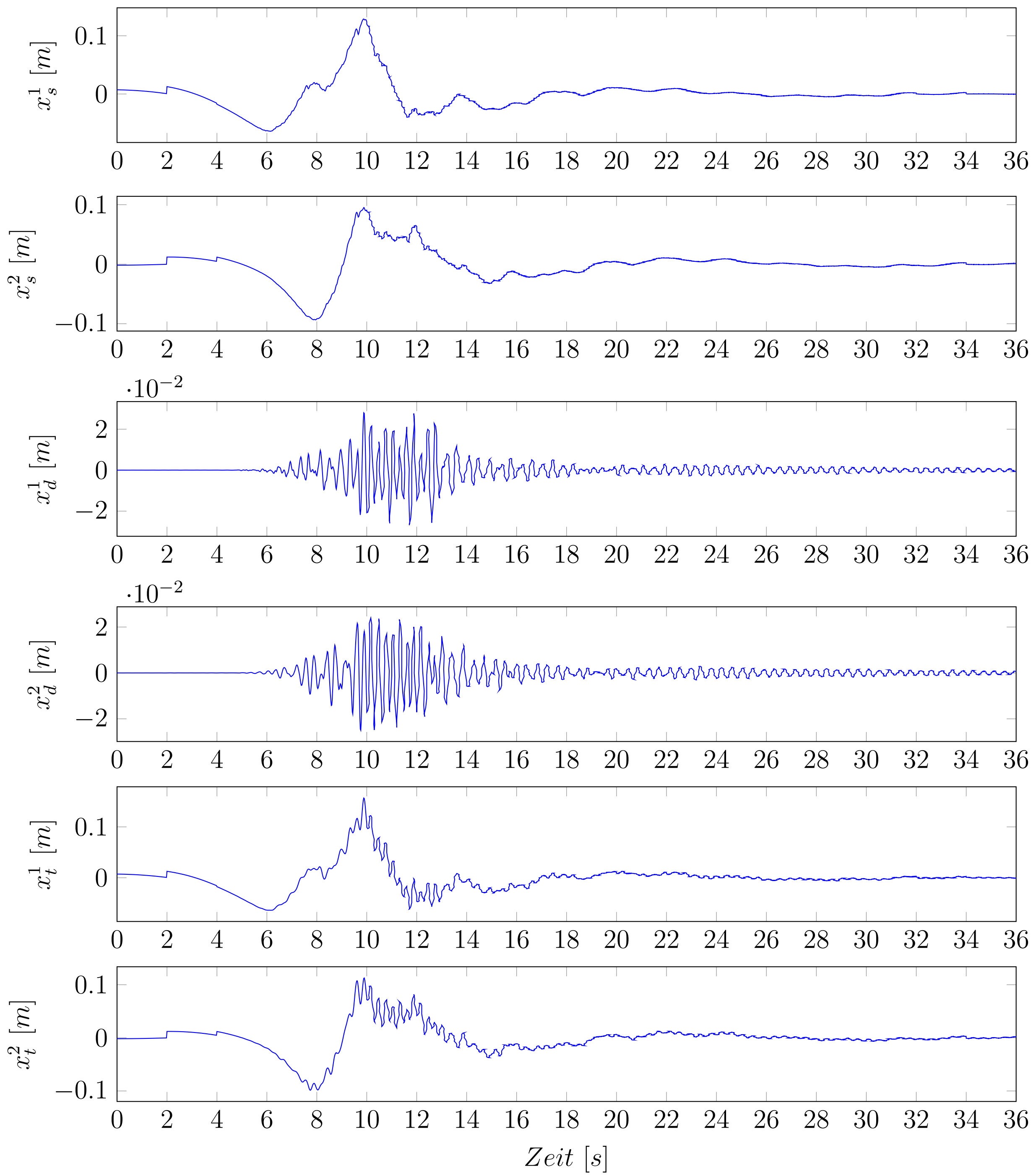

Abbildung 5.10: Verschiebungen zufolge vertikaler Erdbebeneinwirkung

Kapitel 6

Konklusion und Ausblick

6.1 Konklusion

Die Auswirkungen von seismischen Aktivitäten bei Brücken zu errechnen, war Ziel dieser Diplomarbeit. Zu Beginn werden theoretische Grundlagen erläutert und zwei unterschiedliche Lösungsverfahren vorgestellt, anhand derer gezeigt wird, wie die *Modale Analyse* und das $Newmark - \beta$ Verfahren für die Problematik der Mehrpunkterregung erweitert werden können.
Die Modale Analyse ist durch ihre Anwendung für genormte Antwortspektren weit verbreitet, während für die $Newmark - \beta$ Methode stets die Zeitverläufe bekannt sein müssen. Beide Verfahren sind in Ihrer Anwendung nach Norm zulässig. Die normative Behandlung von Erdbebenanalysen ist in Europa im Eurocode 8 geregelt. Dabei wird in EN 1998-2 eine räumliche Veränderung der Erdbebeneinwirkung durch die Anwendung von quasi-statischen Verschiebungssätzen berücksichtigt. Eine genauere dynamische Berechnung ist im Anhang nur mit informativem Charakter zu finden. Die Auswirkungen der Vertikalkomponente sind insbesondere in Abhängigkeit des Standortes zu berücksichtigen.

Als praktischer Teil der Arbeit wurde ein Brückentragwerk, ausgebildet als Zweifeldträger mit je 56m, vorgestellt und dessen Systemeigenschaften berechnet. Die Diskretisierung erfolgt durch zwei Punktmassen jeweils in Feldmitte. Für die Berechnung wurden zwei unterschiedliche Erdbebensätze (*El Centro*, *Christchurch*) verwendet und die dynamische Verhaltensweise des Tragwerks analysiert. Es konnte gezeigt werden, dass bei einer zeitlichen Versetzung des Erdbebens an den Lagern von jeweils 2 Sekunden, die Trägheitsantwort größer ist bzw. sein kann als bei identischer Auflagererregung. Die Unterschiede zwischen der *Modalen Analyse* und dem $Newmark - \beta$ sind nur geringfügig.
Eine Vergleichsrechnung durch Anwendung der quasi-statischen Sätze nach Eurocode 8 liefert größere Verschiebungen. Die Gesamtverschiebungen nach Eurocode 8 sind daher für diesen Fall als konservativ einzustufen.

Das Verfahren nach Rayleigh-Ritz ist eine gute Möglichkeit um die Veränderlichkeit des Querschnittes über die Trägerlänge zu erfassen. Die Ergebnisse sind jedoch sehr stark von der Qualität des Ansatzes abhängig.
Für die Vertikalkomponente der Erdbebeneinwirkung konnte gezeigt werden, dass die Verschiebungen hier von der gleichen Größenordnung sein können wie jene in horizontaler Richtung. Die Auswirkungen sind umso größer, je näher das Tragwerk sich am Erdbebenherd befindet.

6.2 Ausblick

Die Bedeutung von zuverlässigen Erdbebenanalysen nimmt stark zu. Die klassischen Analysemethoden können auch für räumliche Veränderlichkeiten angepasst werden. Es sollte daher nicht auf eine dynamische Berechnung verzichtet werden. Während die $Modale\ Analyse$ auf linear elastisches Systemverhalten beschränkt ist, kann das $Newmark - \beta$ Verfahren auch auf nichtlineares Verhalten erweitert werden.
Die Qualität der Ergebnisse ist stark von der Diskretisierung des Tragwerks abhängig. Da die Ansatzfunktionen für das Rayleigh-Ritz Verfahren stets an das Tragwerk und deren Randbedingungen angepasst werden, ist diese Berechnungsform für automatisierte Computerberechnungen wenig zielführend. Hier wird auf die Methode der finiten Elemente zurückgegriffen, welche vollständige Lösungsansätze liefert.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

[1] EN 1998-1 Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben: Grundlagen Erdbebeneinwirkungen und Regeln für Hochbauten.

[2] EN 1998-2 Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben: Brücken.

[3] Christoph Adam. Studienblätter zur Vorlesung aus Mechanik 2 im WS 2009/10, Universität Innsbruck. 2009/10.

[4] Anil K. Chopra. *Dynamics of Structures, theory and aplication to earthquake engineering.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2011.

[5] T.K. Datta. *Seismic Ananlysis of Structures.* John Miley & Sons, 2010.

[6] A. Der Kiureghian and A Neuenhofer. Response spectrum method for multi support seismic excitation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 21*, 1992.

[7] Peter Wriggers Dietmar Gross, Werner Hauger. *Technische Mechanik 4.* Springer Vieweg, 2014.

[8] El Centro Erdbebendaten. *http : //www.vibrationdata.com/elcentro.htm*, Februar 2015.

[9] Vladimir Graizer Erol Kalkan. Multi component ground motion response spectra for coupled horizontal, vertical, angular accelerations and tilt. *ISET Journal of Earthquake Technology No. 485, Vol 44*, 2007.

[10] Strong motion FTP site GeoNet. *ftp : //ftp.geonet.org.nz/strong/processed/Proc /2011/06_Christchurch_13_June_extended20pass20band/Vol2/data20in20csv20 format/*, Jänner 2015.

[11] Rudolf Heuer. Studienblätter zur Vorlesung aus Mechanik 2 im WS 2006/07 Technische Universität Wien. 2006/07.

[12] Gerhard Mehlhorn. *Handbuch Brücken, Entwerfen, Konstruieren, Berechnen, Bauen und Erhalten.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007,2010.

[13] Butenweg Mistler Meskouris, Hinzen. *Bauwerke und Erdbeben.* Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 2007.

[14] Robert D. Blevins Ph.D. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape.* Malabor [u.a.] : Krieger Publ., 2001.

[15] Joseph Penzien Ray W. Clough. *Dynamics of Structures.* McGraw-Hill, 1975.

[16] Bipin Shrestha. Vertical ground motion and its effect on engineering structures: A state of the art review. *International Seminar in Hazard Management for Sustainable Development*, 2009.

[17] Mayuresh J. Patil Thi D. Dang, Rakesh K. Kapania. Ritz analysis of discontinuous beams using local trigonometric functions. *Computational Mechanics, Volume 47, Issue 3, pp 235-250*, 2011.

[18] Dr. Benedikt Weber. Tragwerksdynamik.

Kapitel 7

Anhang

7.1 Berechnungsprogramme

Die nachfolgenden Programme wurden in $Sci-Lab$ programmiert. Dabei handelt es sich um ein freies MATLAB-Derivat für Anwendungen in der numerischen Mathematik. Die Programme wurden speziell für diese Diplomarbeit entwickelt.

7.1.1 Newmark-β Verfahren

```
//SCI – LAB SHEET FÜR DAS NEWMARK – BETA VERFAHREN
//Autor : Daniel Watzl
//Technische Universität Wien
//Februar 2015
clear

//NOTWENDIGE PARAMETER
//
-----------------------------------------------------------

//Belastung
mg=54*1000/9.81*56; //Ausbaulast
meig=31*1000/9.81*56; //Eigengewicht
m1=(mg+meig)*0.5;
m2=m1;
M=[m1 0;0 m2];

//Einlesen der Steifigkeitsmatrix und erstellen der Einflussmatrix
exec Zweifeldträger_MSE_Steifigkeitsmatrix.sce;
```

```
[K,KK,Kg,Kgg]=Steif(28,0.8438,210000000000);
infl=-KK^-1*Kg;

//Erstellen der Dämpfungsmatrix
zeta=0.02;
C=zeta*2*sqrt(KK*M);

//Einlesen der Erdbebendaten für El Centro
datei = './Erdbebendaten/elcentro.txt';
fid = mopen(datei, "r");
if (fid == -1);
    error("cannot open file for reading");
end;
l = mfscanf(-1,fid,'%lg %lg %lg %lg %lg %lg %lg %lg');
mclose(datei);
b = l'; b(:);
x2g=(matrix(b,1,-1)*9.81);

n0=2/0.02
for i=1:n0-1
    e0(i+1)=0
    vec0(i+1)=e0(i+1)
end

x2g1=[x2g';vec0;vec0];   //Beschleunigungsvektor 1
x2g2=[vec0;x2g';vec0];   //Beschleunigungsvektor 2
x2g3=[vec0;vec0;x2g'];   //Beschleunigungsvektor 3

//Berechnen der Bodenverschiebungen
u2p=x2g;
u3p=0;
up=0;
ug=0;

for i=1:1560-1
    dt=0.02
    u3p=1/dt*(u2p(i+1)-u2p(i));
    u2p(i+1)=u2p(i)+dt*u3p;
    up(i+1)=up(i)+dt*u2p(i)+dt^2/2*u3p;
    ug(i+1)=ug(i)+dt*up(i)+dt^2/2*u2p(i)+dt^3/6*u3p;
```

```
end

xg1=[ug;vec0;vec0];   //Verschiebungsvektor 1
xg2=[vec0;ug;vec0];   //Verschiebungsvektor 2
xg3=[vec0;vec0;ug];   //Verschiebungsvektor 3
xgg=[ug1 ug2 ug3];

//BERECHNEN DER LÖSUNG DURCH DAS NEWMARK−BETAVERFAHREN
//
−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

t0=0; //Startwert
t=35.2; //Endwert
dt=0.02; //Intervall
n=(t-t0)/dt; //Zeitschritte n

vel0=zeros(2,1);
x0=zeros(2,1);
n_gamma=0.5;
n_beta=0.25;

//Konstanten a0 − a7
a0=1/(n_beta*dt*dt);
a1=n_gamma/(n_beta*dt);
a2=1/(n_beta*dt);
a3=1/(n_beta*2)-1;
a4=n_gamma/n_beta-1;
a5=dt*0.5*(n_gamma/n_beta-2);
a6=dt*(1-n_gamma);
a7=n_gamma*dt;

//Effektive Steifigkeitsmatrix
K_eff=KK+a0*M+a1*C;
Kinv=inv(K_eff);

//Erstellen des effektiven Kraftvektors
for i=1:n-1
    peff(:,i+1)=-M*infl1*x2g1(i+1)+-M*infl2*x2g2(i+1)+-M*infl3*x2g3(i+1)
end
```

```
R0=peff(:,1);
acc0=inv(M)*(R0-KK*x0-C*vel0);

//Integration über den ersten Zeitschritt
peff(:,1)=peff(:,1)+M*(a0*x0+a2*vel0+a3*acc0)+C*(a1*x0+a4*vel0+a5*acc0);
xd(:,1)=Kinv*peff(:,1);
acc(:,1)=a0*(xd(:,1)-x0)-a2*vel0-a3*acc0;
vel(:,1)=vel0+a6*acc0+a7*acc(:,1);

//Integration über die fortfolgenden Zeitschritte
for j=1:n-1
    peff(:,j+1)=peff(:,j+1)+M*[a0*xd(:,j)+a2*vel(:,j)+a3*acc(:,j)]+C*[a1*xd(:,j)+a4*vel(:,j)+
a5*acc(:,j)];
    xd(:,j+1)=Kinv*peff(:,j+1);
    acc(:,j+1)=a0*(xd(:,j+1)-xd(:,j))-a2*vel(:,j)-a3*acc(:,j);
    vel(:,j+1)=vel(:,j)+a6*acc(:,j)+a7*acc(:,j+1);
end

//AUSGABE DER VERSCHIEBUNGSKOMPONENTEN
//
-----------------------------------------------------------

//Berechnung der quasi - statischen Komponente
xs=infl*ugg';

//Berechnung der Gesamtverschiebung
xt=xd+xs;

//Auflistung der Maximalwerte
x_ maxs=[max(abs(xs(1,:)));max(abs(xs(2,:)))];
x_ maxd=[max(abs(xd(1,:)));max(abs(xd(2,:)))];
x_ maxt=[max(abs(xt(1,:)));max(abs(xt(2,:)))];
```

7.1.2 Modale Analyse

```
//SCI - LAB SHEET FÜR MODALE ANALYSE
//Autor : Daniel Watzl
//Technische Universität Wien
//Februar 2015
```

```
clear //
//NOTWENDIGE PARAMETER
//
---------------------------------------------------------------

//Belastungen
mg=54*1000/9.81*56; //Ausbaulast
meig=31*1000/9.81*56; //Eigengewicht
m1=(mg+meig)*0.5;
m2=m1;
M=[m1 0;0 m2];

//Einlesen der Steifigkeitsmatrix und erstellen der Einflussmatrix
exec Zweifeldträger_MSE_Steifigkeitsmatrix.sce;
[K,KK,Kg,Kgg]=Steif(28,0.8438,210000000000);
infl=-KK^-1*Kg;

//Erstellen der Dämpfungsmatrix
zeta=[0.02;0.02];

//Lösen des Eigenwertproblems
L=chol(M)';
LI=inv(L);
LKL=LI*KK*LI';

[q, om2]=spec(LKL);
om=sqrt(diag(om2));
phi=LI'*q;
phinorm=phi(1,1)/-phi(1,1);

//Einlesen der Erdbebendaten für El Centro
datei = './Erdbebendaten/elcentro.txt';
fid = mopen(datei, "r");
if (fid == -1);
    error("cannot open file for reading")
end
l = mfscanf(-1,fid,'%lg %lg %lg %lg %lg %lg %lg %lg');
mclose(datei);
b = l'; b(:);
x2g=(matrix(b,1,-1)*9.81);
```

```
e=[1 1]';

//Berechnen der Bodenverschiebungen
u2p=x2g;
u3p=0;
up=0;
ug=0;

for i=1:1560-1
    dt=0.02;
    u3p=1/dt*(u2p(i+1)-u2p(i));
    u2p(i+1)=u2p(i)+dt*u3p;
    up(i+1)=up(i)+dt*u2p(i)+dt^2/2*u3p;
    ug(i+1)=ug(i)+dt*up(i)+dt^2/2*u2p(i)+dt^3/6*u3p;
end

//Berechnen des Verschiebungsspektrums
for k=1:2
    omDk=om(k)*sqrt(1-zeta(k)^2);
    j=1;
    for t=0:0.02:31.18;
        i=1;
        I1=0;
        //Duhamel Integration über tau
        for tau=0:0.02:t
            I1=I1+(x2g(i)*exp(-zeta(k)*om(k)*(t-tau))*sin(omDk*(t-tau)));
            i=i+1;
        end
    D(j,k)=-I1/omDk*0.02;
    zeit(j)=t;
    j=j+1;
end
end

//Bestimmung der Partizipationsfaktoren
L_nl=phinorm'*M*infl;
M_n=phinorm'*M*phinorm;

Gamma_nl=[L_nl(1,1)/M_n(1,1) L_nl(1,2)/M_n(1,1) L_nl(1,3)/M_n(1,1);
L_nl(2,1)/M_n(2,2) L_nl(2,2)/M_n(2,2) L_nl(2,3)/M_n(2,2)];
```

```
//Erstellen der zeitlichen Verläufe 0+2s+4s
D1=D(:,1);
D2=D(:,2);

n0=2/0.02;
for i=1:n0-1
    e0(i+1)=0;
    D0(i+1)=[e0(i+1)];
end

D11=[D1(:);D0;D0];
D12=[D0;D1(:);D0];
D13=[D0;D0;D1(:)];

D21=[D2(:);D0;D0];
D22=[D0;D2(:);D0];
D23=[D0;D0;D2(:)];

ug1=[ug;D0;D0];
ug2=[D0;ug;D0];
ug3=[D0;D0;ug];

//BERECHNEN DER VERSCHIEBUNGSKOMPONENTEN
//
---------------------------------------------------

//Berechnen der dynamischen Komponente
for t=1:1760
    x1d(t)=Gamma_nl(1,1)*phinorm(1,1)*D11(t)+Gamma_nl(1,2)*phinorm(1,1)*D12(t)
+Gamma_nl(1,3)*phinorm(1,1)*D13(t)+Gamma_nl(2,1)*phinorm(1,2)*D21(t)
+Gamma_nl(2,2)*phinorm(1,2)*D22(t)+Gamma_nl(2,3)*phinorm(1,2)*D23(t);
    x2d(t)=Gamma_nl(1,1)*phinorm(2,1)*D11(t)+Gamma_nl(1,2)*phinorm(2,1)*D12(t)
+Gamma_nl(1,3)*phinorm(2,1)*D13(t)+Gamma_nl(2,1)*phinorm(2,2)*D21(t)
+Gamma_nl(2,2)*phinorm(2,2)*D22(t)+Gamma_nl(2,3)*phinorm(2,2)*D23(t);
end
xd=[x1d x2d];

//Berechnenen der quasi-statischen Komponente
for t=1:1760
```

```
    x1s(t)=infl(1,1)*ug1(t)+infl(1,2)*ug2(t)+infl(1,3)*ug3(t);
    x2s(t)=infl(2,1)*ug1(t)+infl(2,2)*ug2(t)+infl(2,3)*ug3(t);
end
xs=[x1s x2s];

//Berechnen der Gesamtverschiebung
xt=xd+xs;

//Auflistung der Maximalwerte
x_ maxs=[max(abs(xs(:,1)));max(abs(xs(:,2)))];
x_ maxd=[max(abs(xd(:,1)));max(abs(xd(:,2)))];
x_ maxt=[max(abs(xt(:,1)));max(abs(xt(:,2)))];
```

7.1.3 Funktion Steifigkeitsmatrix

```
//SCI – LAB SHEET FÜR FUNCTION Steifigkeitsmatrix
//Autor : Daniel Watzl
//Technische Universität Wien
//Februar 2015
clear

function[K,KK,Kg,Kgg,KKK,k00,k0l,kl0]=Steif(l,I,E)

//Berechnung der Komponenten für die Steifigkeitmatrix

EI=E*I;

kll=EI/(l^3)*[12 -12 0 0 0;-12 24 -12 0 0;0 -12 24 -12 0;0 0 -12 24 -12;0 0 0 -12 12];
kl0=EI/(l^3)*[6*l 6*l 0 0 0;-6*l 0 6*l 0 0;0 -6*l 0 6*l 0;0 0 -6*l 0 6*l;0 0 0 -6*l -6*l];
k0l=kl0';
k00=EI/(l^3)*[4*l^2 2*l^2 0 0 0;2*l^2 8*l^2 2*l^2 0 0;0 2*l^2 8*l^2 2*l^2 0;0 0 2*l^2 8*l^2
2*l^2;0 0 0 2*l^2 4*l^2];
ksc=[kll kl0;k0l k00]; //10x10 Matrix

//Statische Kondensation
K=kll-k0l'*inv(k00)*k0l;
KK=[K(2,2) K(2,4);K(4,2) K(4,4)]; //Umordnung nach den aktiven Freiheitsgraden
Kgg=[K(1,1) K(1,3) K(1,5);K(3,1) K(3,3) K(3,5);K(5,1)
K(5,3) K(5,5)];
```

```
Kg=[K(1,2) K(2,3) K(1,4);K(4,1) K(3,2) K(2,1)];
KKK=[KK Kg;Kg' Kgg];
endfunction
```

7.2 Zeichen und Symbole

Symbol	**Bedeutung**
A	Querschnittsfläche
A_{ek}	Referenzerdbebeneinwirkung
A_{ed}	Bemessungserdbebeneinwirkung
$a_i(t)$	Freiwert
a_{vg}	Vertikale Bodenbeschleunigung
a_g	Horizontale Bodenbeschleunigung
β	Newmark Parameter
ζ	Lehr'sches Dämpfungsmaß
c	Dämpfung
$\boldsymbol{c}_{ss}$	Dämpfungsmatrix Superstructure
$\boldsymbol{c}_{sg}$	Koppelnde Dämpfungsmatrix
$\boldsymbol{c}_{gs}$	Koppelnde Dämpfunsgmatrix
$\boldsymbol{c}_{gg}$	Dämpfungsmatrix Groundstructure
$D_{nl}(t)$	Verschiebungsspektrum
Δd_i	Relativverschiebungen für Satz B
d_i	Verschiebungen für Satz B
d_{ri}	Relativverschiebung für Satz A
d_g	Bemessungsbodenverschiebung
E	Elastizitätsmodul
η	Dämpfunsgkorrekturbeiwert
ϕ_n	Eigenvektor (Mode)
f	Eigenfrequenz
f_s	äquivalente statische Kräfte
f_{sg}	äquivalente statische Kräfte
Γ_{nl}	Partizipationsfaktor
γ_l	Bedeutungsbeiwert
g	Erdbeschleunigung
γ	Newmark Parameter
$h(t-\tau)$	Einheits-Impuls-Antwort-Funktion
$\boldsymbol{\iota}$	Einflussmatrix
I	Flächenträgheistmoment
k	Steifigkeit
$\tilde{\boldsymbol{k}}_{tt}$	Kondensierte Steifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{k}_{ss}$	Steifigkeitsmatrix Superstructure
$\boldsymbol{k}_{gs}$	Koppelnde Steifigkeitsmatrix

$\boldsymbol{k}_{sg}$	Koppelnde Steifigkeitsmatrix
$\boldsymbol{k}_{gg}$	Steifigkeitsmatrix Groundstructure
L_{nl}	Partizipationsfaktor
L_g	Entfernung ab der die Bodenbewegungen unkorreliert sind
M_n	Modale Masse
m	Masse
$\boldsymbol{m}_{ss}$	Massenmatrix Superstructure
$\boldsymbol{m}_{sg}$	Koppelnde Massenmatrix
$\boldsymbol{m}_{gs}$	Koppelnde Massenmatrix
$\boldsymbol{m}_{gg}$	Massenmatrix Groundstructure
ω	Eigenkreisfrequenz
ω_d	Eigenkreisfrequenz gedämpft
Π	Gesamtpotential
ψ	Ansatzfunktion
p_{eff}	Effektive Erdbebenkraft/Vektor
$p(\tau)$	Impulserregung
$p_g(t)$	Kraftvektor
q_r	Modal Koordinate
ρ	Dichte
$S_e(T)$	Ordinate des elastischen Antwortspektrums
S	Bodenparameter
T	Eigenschwingungsdauer, Schwingungsdauer eines linearen Einmassenschwingers
T_B	untere Grenze des Bereichs konstanter Spektralbeschleunigung
T_C	obere Grenze des Bereichs konstanter Spektralbeschleunigung
T_D	Beginn des Bereichs konstanter Verschiebungen des Spektrums
t_i	Zeitpunkt i
Δt_i	Zeitintervall
w	Durchbiegung Balken
Δx	inkrementelle Verschiebung
x	Lagekoordinate, dynamische Verschiebung
x_g	Bodenverschiebung
x^s	quasi-statische Verschiebung
x^t	Absolutverschiebung
x_h	Verschiebung der homogenen Lösung
x_0	Verschiebungen an den Anfangsbedingungen