



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Zinsszenarien und Best Estimate in der Lebensversicherung

Ausgeführt am Institut für
Finanz- und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer
und
Dr. Simon Hochgerner
als mitwirkender Vertreter der Österreichischen Finanzmarktaufsicht

durch
Katharina Laimer, BSc

Operngasse 20/20
1040 Wien

19. März 2015

Unterschrift (StudentIn)

Vorwort

Diese Diplomarbeit ist in Zusammenarbeit mit der österreichischen Finanzmarktaufsicht (FMA) entstanden.

Sie behandelt das Thema Best Estimate Berechnung in der Lebensversicherung mit besonderem Augenmerk auf die Auswirkungen der Verwendung verschiedener Zinsmodelle.

Seitens der Finanzmarktaufsicht wurde ich von Dr. Simon Hochgerner betreut.

Als Grundgerüst habe ich das Best Estimate Modell der FMA (das mit **R** programmiert wurde) erhalten und im Zuge eines Praktikums in der Abteilung "Vor-Ort-Prüfung und interne Modelle von Versicherungsunternehmen und Pensionskassen" dann auch selbst daran mitgearbeitet.

Das Modell konnte mit selbst erzeugten Zinsszenarien die Deckungsrückstellung, den Best Estimate und vieles mehr (siehe Kapitel 2) modellieren. Damit ich verschiedene Zinsmodelle vergleichen konnte, erweiterte ich das Modell. Es konnten nun auch Zinsszenarien in Form von Excel-Dateien eingelesen werden. Den übrigen Code habe ich adaptiert.

Clemens Burger hat im Jahr 2014 auch in Zusammenarbeit mit der FMA ein Modell programmiert, das ich ebenso in das bestehende Best Estimate Modell eingebaut habe.

Um neben den Szenarien von C. Burger weitere Vergleiche zu haben, hat mir die FMA eine Software zur Verfügung gestellt, mit der ich selbst Zinsszenarien erzeugen konnte.

Den Output habe ich so aufbereitet, dass ich ihn danach in eine Excel-Mappe exportieren konnte.

Ich gebe nun einen kurzen Überblick über die einzelnen Kapitel.

Kapitel 1 beinhaltet einige Definitionen. Ich erkläre welche Interest Rates es gibt, was ein Cap bzw. ein Floor ist und wie eine Swaption definiert ist. Danach

werde ich das LIBOR Markt Modell vorstellen und wie man mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation bewerten kann. Als Beispiel folgt eine Bewertung von Caps.

In Kapitel 2 werde ich das Best Estimate Modell der FMA beschreiben. Ich definiere den Best Estimate, beschreibe seine Modellierung und komme zu einer grundlegenden Gleichung der marktkonsistenten Bewertung. Welche Kriterien eine risikolose Zinskurve erfüllen muss ist auch Bestandteil dieses Kapitels. Abschließend zeige ich anhand eines Beispiels wie das Modell funktioniert - ich modelliere einen einzelnen Vertrag. Vorerst nur mit Cash im Portfolio und dann mit einem Bond.

Da das Modell nun erklärt wurde, kann ich in Kapitel 3 verschiedene Zinsszenarien vergleichen. Als erstes habe ich den Unterschied im Best Estimate bzgl. der Deckungsrückstellung berechnet und mir dann die Unterschiede in den Garantiekosten angesehen. Die Berechnungen wurden immer zuerst mit 10 Szenarien und dann mit 100 Szenarien durchgeführt. Was wir sehen werden, ist ein ca. 5%-iger Unterschied beim Best Estimate und ein ca. 8%-iger Unterschied bei den Garantiekosten. Wenn man sich vor Augen hält, dass 1% vom Best Estimate in etwa 10% der Eigenmittel ausmachen, sind 5% enorm für ein Versicherungsunternehmen. Es spielt also eine Rolle welches Zinsmodell verwendet wird.

In Kapitel 4 habe ich mit zwei verschiedenen Spot Rate Kurven als Basiszinskurve einerseits deterministisch und andererseits stochastisch modelliert.

Kapitel 5 beschreibt den sogenannten Leakage Test, welcher überprüft, ob das vorhandene Kapital zum Zeitpunkt 0 den zukünftigen erwarteten diskontierten Cash Flows genügt. Für eine hinreichend große Anzahl an Zinsszenarien ist das zutreffend.

Abschließend wird in Kapitel 6 die Verteilung des Best Estimate bei 100 Szenarien betrachtet.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen bedanken, die mich nicht nur beim Schreiben dieser Diplomarbeit, sondern während meines gesamten Studiums unterstützt haben.

Ein großes Dankeschön geht an Simon Hochgerner, der mir als Betreuer dieser Arbeit alle aufkommenden Fragen beantwortete. Danke Simon, dass ich nun wirklich programmieren kann.

Einen weiteren Dank richte ich an Thorsten Rheinländer, meinen Betreuer seitens der Technische Universität Wien.

Den allergrößten Dank richte ich aber an euch, Stefanie, Mama und Papa. Danke dafür, dass ihr mir mein Studium ermöglicht habt. Danke, dass ihr immer für mich da seid.

Inhaltsverzeichnis

1	Finanzinstrumente	1
1.1	Interest Rates	1
1.1.1	LIBOR	2
1.2	Zinsswap	2
1.3	Caps/Floors	4
1.3.1	Caps	4
1.3.2	Floors	5
1.3.3	Black-Formel	5
1.3.4	Swaptions	5
1.4	Einige Definitionen	7
1.5	Marktmodelle	9
1.5.1	Heath-Jarrow-Morton-Methode	9
1.5.2	LIBOR Markt Modell	12
1.5.3	Monte Carlo Simulation des LMM	14
1.6	Beispiel - Bewertung von Caps	16
2	Modellierung des Best Estimate	23
2.1	Grundlagen des Modells	23
2.2	Risikolose Zinskurve	31
2.3	Ein Modell in R	31
2.4	Modellierung eines einzelnen Vertrages	33
2.4.1	Modellierung mit Cash	36
2.4.2	Modellierung mit einem Bond	38
3	Vergleich von drei Zinsmodellen	43
4	Deterministisch vs. Stochastisch	49
5	Leakage Test	53
6	Verteilung des Best Estimates	55

7	R-Code [13]	57
7.1	Beispiel - Bewertung von Caps	57
7.1.1	Funktion	57
7.1.2	Abbildung 1.1	60
7.1.3	Abbildung 1.2	60
7.1.4	Abbildung 1.3	60
7.1.5	Abbildung 1.4	62
7.1.6	Abbildung 1.5	63
7.2	Vergleich von drei Zinsszenarien	65
7.2.1	Abbildung 3.1	65
7.2.2	Funktion	65
7.2.3	Abbildung 3.2	65
7.2.4	Abbildung 3.3	66
7.3	Deterministisch vs. Stochastisch	66
7.3.1	Abbildung 4.1	66
7.3.2	Abbildung 4.2	66
7.4	Leakage Test	67
7.4.1	Abbildung 5.1	68
7.5	Verteilung des Best Estimates	68
7.5.1	Abbildung 6.1	68

Kapitel 1

Finanzinstrumente

Ganz zu Beginn dieser Arbeit, möchte ich die wichtigsten Finanzinstrumente genauer definieren, um auch eine einheitliche Notation zu erreichen.

Definition 1.0.1 (Nullkuponanleihe [1]). *Eine Nullkuponanleihe (kurz: NKA) mit Fälligkeit T ist ein Vertrag, der dem Besitzer die Zahlung einer Einheit einer Währung zur Zeit T zusagt. Zwischenzeitlich erfolgen keine Zahlungen, also keine Kupons. Der Preis der NKA zur Zeit $t < T$ wird mit $P(t, T)$ bezeichnet. Außerdem gilt $P(T, T) = 1$ für alle T .*

1.1 Interest Rates

In diesem Kapitel werden einige *Implied Interest Rates* vorgestellt. Alle Definitionen stammen aus [1].

Zuerst wollen wir uns die *Simply Compounded Forward Rate* ansehen.

Die Simply Compounded Forward Rate zur Zeit t ist gegeben durch

$$F(t; T, S) = \frac{1}{S - T} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right),$$

was äquivalent ist zu

$$1 + (S - T)F(t; T, S) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)}.$$

Die *Simple Spot Rate* für das Zeitintervall $[t, T]$ ist

$$\begin{aligned} F(t, T) &= F(t; t, T) \\ &= \frac{1}{T - t} \left(\frac{1}{P(t, T)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Die *Continuously Compounded Forward Rate* für $[T, S]$ zur Zeit t ist

$$R(t; T, S) = -\frac{\log P(t, S) - \log P(t, T)}{S - T}$$

$$\Leftrightarrow e^{R(t;T,S)(S-T)} = \frac{P(t,T)}{P(t,S)}.$$

Die *Continuously Compounded Spot Rate* für $[t, T]$ ist

$$R(t, T) = R(t; t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T - t}.$$

Für $S \rightarrow T$, definieren wir zur Zeit t die *Instantaneous Forward Rate* mit Fälligkeit T mit

$$f(t, T) = \lim_{S \searrow T} R(t; T, S) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}. \quad (1.1)$$

Zur Zeit t wird $T \mapsto f(t, T)$ als *Forward Curve* bezeichnet. Die *Instantaneous Short Rate* zur Zeit t ist definiert als

$$\begin{aligned} r(t) &= f(t, t) \\ &= \lim_{T \searrow t} R(t, T). \end{aligned}$$

Gemeinsam mit $P(T, T) = 1$ ergibt (1.1)

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}.$$

1.1.1 LIBOR

Als Beispiel einer Forward Rate folgt die Definition der LIBOR Rate.

Der LIBOR (*London Interbank Offered Rate*) $L(t, T)$ ist der täglich festgelegte Referenzzinssatz im Interbankengeschäft. Das ist jener Zinssatz, zu dem Banken am Markt Gelder von anderen Banken aufnehmen bzw. angeboten bekommen. Die Fälligkeit reicht von *overnight* bis hin zu einem Jahr. Ein 3-Monats-LIBOR ist also jener Zinssatz, der für ein ab heute über drei Monate laufendes Geschäft gilt. Die Periode wird mit δ bezeichnet, wobei $\delta > 0$, und es gilt

$$L(t, T) = F(t; T, T + \delta)$$

1.2 Zinsswap

Bei einem Zinsswap handelt es sich um Zinsen, bei denen zu einem bestimmten Zeitpunkt die variablen Zinsen (*floating Rate*) gegen feste Zinsen getauscht werden. [2]

Ein *Payer Interest Rate Swap* ist definiert durch eine Anzahl von zukünftigen Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \dots < T_n$ mit $T_i - T_{i-1} \equiv \delta$ (T_n beschreibt die Fälligkeit des Swaps), einer festen Strike Rate K und einem Nominalwert N .

Der Käufer zahlt den festen Betrag $K \cdot \delta \cdot N$ und erhält die variablen Zahlungen $F(T_{i-1}, T_i) \cdot \delta \cdot N$. Der Zahlungsstrom zum Zeitpunkt T_i ist daher

$$(F(T_{i-1}, T_i) - K) \delta N \quad (1.2)$$

Zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ ergibt sich ein Wert von

$$N(P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - K \delta P(t, T_i))$$

Der Wert des Swaps zur Zeit $t \leq T_0$ wird mit $\Pi_p(t)$ bezeichnet und es gilt

$$\Pi_p(t) = N \left(P(t, T_0) - P(t, T_n) - K \delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i) \right).$$

Einen *Receiver Interest Rate Swap* erhält man indem man die Vorzeichen der Zahlungsströme zu den Zeitpunkten T_1, \dots, T_n ändert.

Damit erhält man den Wert zur Zeit $t \leq T_0$:

$$\Pi_r(t) = -\Pi_p(t).$$

Jetzt bleibt nur noch zu klären, wie man die Strike Rate K bestimmt. Die *Forward Swap Rate* (auch *Par Swap Rate* genannt) $R_{swap}(t)$ zur Zeit $t \leq T_0$ ist jener Festzinssatz K für den

$$\Pi_p(t) = \Pi_r(t) = 0$$

gilt.

Das impliziert

$$R_{swap}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i)}.$$

Der Wert des Zahlungsstromes (1.2) kann nun geschrieben werden als

$$N \delta P(t, T_i) (F(t; T_{i-1}, T_i) - K).$$

Aufsummiert erhält man

$$\Pi_p(t) = N \delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i) (F(t; T_{i-1}, T_i) - K),$$

d.h. man kann die Swap Rate als gewichtetes Mittel von Simple Forward Rates schreiben

$$R_{swap}(t) = \sum_{i=1}^n \omega_i(t) F(t; T_{i-1}, T_i)$$

mit

$$\omega_i(t) = \frac{P(t, T_i)}{\sum_{j=1}^n P(t, T_j)}.$$

Die Gewichtung folgt einem stochastischen Prozess, aber die Schwankung von $\omega_i(t)$ ist klein im Vergleich zur Schwankung von $F(t; T_{i-1}, T_i)$. Das werden wir später noch benötigen, um Formeln von Swaption-Preisen im LIBOR Market Model zu approximieren: die *Swap Rate Volatility* wird als Linearkombination der Forward LIBOR Volatilities geschrieben.

Interest Rate Swap Markets sind äußerst liquide, d.h. Swaps können zum Hedgen von Zinsrisiken verwendet werden. Fälligkeiten von einem bis zu dreißig Jahren sind Standard, *Swap Rate Quotes* sind sogar mit einer Laufzeit von bis zu 60 Jahren erhältlich. Das gibt Lebensversicherern die Möglichkeit langfristige Investments zu kreieren.

1.3 Caps/Floors

1.3.1 Caps

Ein *Caplet* mit *Reset Date* T und *Settlement Date* $T + \delta$ bezahlt dem Besitzer die Differenz zwischen einer Simple Market Rate $F(T, T + \delta)$ (z.B. dem LIBOR) und einer *Strike Rate* κ . Der Zahlungsstrom zur Zeit $T + \delta$ ist

$$\delta(F(T, T + \delta) - \kappa)^+.$$

Ein *Cap* ist die Summe mehrerer *Caplets* und er besteht aus einer Anzahl von zukünftigen Zeitpunkten $T_0 < T_1 < \dots < T_n$ mit $T_i - T_{i-1} = \delta$, wobei T_n die Fälligkeit des Caps bezeichnet, und einer *Cap Rate* κ .

Die Zahlungsströme finden zu den Zeitpunkten T_1, \dots, T_n statt. Der Besitzer des Caps erhält zum Zeitpunkt T_i

$$\delta(F(T_{i-1}, T_i) - \kappa)^+.$$

Sei nun $t \leq T_0$.

Der Preis des i -ten Caplets mit Reset Date T_{i-1} und Settlement Date T_i wird zur Zeit t mit

$$Cpl(t; T_{i-1}, T_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

bezeichnet und der Preis des Caps zur Zeit t ist

$$Cp(t) = \sum_{i=1}^n Cpl(t; T_{i-1}, T_i).$$

Ein Cap schützt den Besitzer vor steigenden Zinssätzen. Wenn der zu zahlende Zinssatz größer wird als die vorher festgelegte Strike Rate κ , dann erhält der

Besitzer des Caps die Differenz zwischen dem Zinssatz und κ . Es wird ihm also garantiert, nie mehr als κ bezahlen zu müssen.

1.3.2 Floors

Im Gegensatz zu einem Cap, schützt ein *Floor* vor zu niedrigen Zinsen. Ein Floor besteht aus mehreren *Floorlets*. Der Zahlungsstrom zur Zeit T_i ist

$$\delta(\kappa - F(T_{i-1}, T_i))^+.$$

Der Preis des Floorlets zur Zeit t wird mit $Fll(t; T_{i-1}, T_i)$ bezeichnet, und der Preis des Floors zur Zeit $t \leq T_0$ ist

$$Fll(t) = \sum_{i=1}^n Fll(t; T_{i-1}, T_i).$$

1.3.3 Black-Formel

Am Markt werden Caps bzw. Floors üblicherweise mit der *Black-Formel* bewertet.

Sei $t \leq T_0$.

Die Black-Formel für den Wert des i-ten Caplets ist

$$Cpl(t; T_{i-1}, T_i) = \delta P(t, T_i) \left(F(t; T_{i-1}, T_i) \Phi(d_1(i; t)) - \kappa \Phi(d_2(i; t)) \right)$$

mit

$$d_{1,2}(i; t) = \frac{\log\left(\frac{F(t; T_{i-1}, T_i)}{\kappa}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma(t)^2(T_{i-1} - t)}{\sigma(t)\sqrt{T_{i-1} - t}}.$$

Φ bezeichnet die Standardnormalverteilung und $\sigma(t)$ ist die *Cap (Implied) Volatility*. Alle Caplets, die zu einem Cap gehören, haben dieselbe Cap Volatility. Die Black-Formel für den Wert des i-ten Floorlets ist demnach

$$Fll(t; T_{i-1}, T_i) = \delta P(t, T_i) \left(\kappa \Phi(-d_2(i; t)) - F(t; T_{i-1}, T_i) \Phi(-d_1(i; t)) \right).$$

Cap-/Floor-Preise werden am Markt mit ihren Implied Volatilities notiert. Typisch ist $t = 0$, $T_0 = \delta$ und $\delta = T_i - T_{i-1}$, was drei bzw. sechs Monaten entspricht.

1.3.4 Swaptions

Eine europäische *Payer (Receiver) Swaption* mit Strike Rate K ist eine Option, die dem Käufer das Recht einräumt, einen Payer (Receiver) Swap mit festem Zins K zu einem zukünftigen Zeitpunkt, der *Swaption Maturity*, zu erwerben. Die Dauer des Swaps $T_n - T_0$ nennt man Tenor der Swaption.

Wie oben bereits erwähnt, ist der Wert eines Payer Swaps mit festem Zins K beim ersten Reset Date T_0

$$\Pi(T_0, K) = N \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i) \delta(F(T_0; T_{i-1}, T_i) - K).$$

D.h. die Auszahlung der Swaption mit Strike Rate K bei Fälligkeit T_0 ist

$$N \left(\sum_{i=1}^n P(T_0, T_i) \delta(F(T_0; T_{i-1}, T_i) - K) \right)^+. \quad (1.3)$$

Man beachte, dass im Gegensatz zu Caps, die Auszahlung nicht in mehrere Auszahlungen zerlegt werden kann. Das ist der fundamentale Unterschied zwischen Caps/Floors und Swaptions. Bei Swaptions geht die stochastische Abhängigkeit zwischen den unterschiedlichen Forward Rates in das Bewertungsverfahren ein.

Da $\Pi_p(T_0, R_{swap}(T_0)) = 0$ gilt, kann man zeigen, dass man die Auszahlung der Payer Swaption in (1.3) auch schreiben kann als

$$N \delta(R_{swap}(T_0) - K)^+ \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i)$$

und die Auszahlung der Receiver Swaption zum Zeitpunkt T_0 ist

$$N \delta(K - R_{swap}(T_0))^+ \sum_{i=1}^n P(T_0, T_i).$$

Man sagt, die Payer (Receiver) Swaption mit Strike Rate K sei zur Zeit $t \leq T_0$

- ATM (at-the-money), wenn $K = R_{swap}(t)$
- ITM (in-the-money), wenn $K < (>) R_{swap}(t)$
- OTM (out-of-the-money), wenn $K > (<) R_{swap}(t)$.

Wenn eine Payer/Receiver Swaption mit Fälligkeit in x Jahren einen zugrundeliegenden Swap mit einer Laufzeit von y Jahren hat, dann spricht man kurz von einer Payer/Receiver $x \times y$ -Swaption.

Black-Formel

Die Black-Formel für den Preis einer Payer und Receiver Swaption ($\text{Swpt}_p(t)$ bzw. $\text{Swpt}_r(t)$) zur Zeit $t \leq T_0$ ist

$$\text{Swpt}_p(t) = N \delta \left(R_{swap}(t) \Phi(d_1(t)) - K \Phi(d_2(t)) \right) \sum_{i=1}^n P(t, T_i),$$

$$\text{Swpt}_r(t) = N \delta \left(K \Phi(-d_2(t)) - R_{swap}(t) \Phi(-d_1(t)) \right) \sum_{i=1}^n P(t, T_i)$$

mit

$$d_{1,2}(t) = \frac{\log\left(\frac{R_{\text{swap}}(t)}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma(t)^2(T_0 - t)}{\sigma(t)\sqrt{T_0 - t}}$$

und $\sigma(t)$ ist die übliche *Black's Swaption Volatility*.

1.4 Einige Definitionen

Definition 1.4.1 (σ -Algebra). Sei Ω eine nicht-leere Menge. Eine σ -**Algebra** \mathcal{F} auf Ω ist eine Familie von Untermengen von Ω , so dass

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
3. $I \subset \mathbb{N}$ Indexmenge, $A_i \in \mathcal{F} \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

Definition 1.4.2 (\mathcal{F} -messbar). \mathcal{F} sei eine σ -Algebra auf Ω . Die Funktion $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt \mathcal{F} -**messbar**, wenn

$$\{\xi \in B\} \in \mathcal{F}$$

für jede Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Wenn $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, dann nennt man ξ eine Zufallsvariable.

Definition 1.4.3 (Filtration). Eine Familie \mathcal{F}_t von σ -Algebren auf Ω , $t \in T \subset \mathbb{R}$, nennt man **Filtration**, wenn

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

gilt, für $s, t \in T$ mit $s \leq t$.

Definition 1.4.4 (Stochastischer Prozess). Ein **stochastischer Prozess** ist eine Familie von Zufallsvariablen $\xi(t), t \in T \subset \mathbb{R}$. Für jedes $\omega \in \Omega$ nennt man die Funktion

$$T \ni t \mapsto \xi(t, \omega)$$

den Pfad von $\xi(t)$.

Definition 1.4.5 (adaptiert). Ein stochastischer Prozess $(\xi(t))_{t \in T}$ heißt **adaptiert** bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ wenn $\xi(t)$ stets \mathcal{F}_t -messbar ist für alle t .

Definition 1.4.6 (Martingal). Ein stochastischer Prozess $(\xi(t))_{t \in T}$ heißt **Martingal** bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$, wenn

1. $\xi(t)$ ist integrierbar für alle $t \in T$
2. $\xi(t)$ ist adaptiert bzgl. \mathcal{F}_t für alle $t \in T$
3. $\mathbb{E}[\xi(t)|\mathcal{F}_s] = \xi(s)$ f.s. für alle $s \leq t$.

Definition 1.4.7 (Brownsche Bewegung). Ein stochastischer Prozess $W(t), t \geq 0$, ist eine **Brownsche Bewegung**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

1. $W(0) = 0$ f.s.
2. Die Pfade $t \mapsto W(t)$ sind f.s. stetig.
3. $W(t)$ hat unabhängige stationäre Inkremente
4. $W(t) - W(s)$ ist normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $t - s$ für jedes $0 \leq s \leq t$.

Definition 1.4.8 (progressiv messbar). Ein stochastischer Prozess $f(t), t \geq 0$, heißt **progressiv messbar**, wenn für jedes $t \geq 0$ gilt

$$(s, \omega) \mapsto f(s, \omega)$$

ist eine messbare Funktion aus $[0, t] \times \Omega$ mit der σ -Algebra $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}$ nach \mathbb{R} . $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}$ bezeichnet die Produkt- σ -Algebra auf $[0, t] \times \Omega$. Sie ist die kleinste σ -Algebra die alle Mengen der Form $A \times B$ enthält, wobei $A \subset [0, t]$ eine Borelmenge ist und $B \in \mathcal{F}$.

Definition 1.4.9 (Menge der integrierbaren Funktionen). \mathcal{L} sei eine Menge von \mathbb{R}^d -wertigen progressiven Prozessen $h = (h_1, \dots, h_d)$ mit

$$\int_0^t \|h(s)\| ds < \infty, \forall t > 0.$$

Dann nennt man \mathcal{L} die **Menge der integrierbaren Funktionen**.

Definition 1.4.10 (Stochastisches Exponential und Integral). Das **stochastische Exponential** $\mathcal{E}(X)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{E}_t(X) = \exp\left(X(t) - \frac{1}{2}\langle X, X \rangle_t\right)$$

und das **stochastische Integral** von $h \in \mathcal{L}(X)$ bzgl. X ist

$$(h \bullet X)_t = \int_0^t h(s) dX(s).$$

Lemma 1.4.1 (Maßwechsel nach Girsanov). Sei $\gamma \in \mathcal{L}$, sodass das stochastische Exponential $\mathcal{E}(\gamma \bullet W)$ ein gleichmäßig integrierbares Martingal ist, mit $\mathcal{E}_\infty(\gamma \bullet W) > 0$. Dann definiert

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_\infty(\gamma \bullet W)$$

ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, und der Prozess

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)^\top ds$$

ist eine \mathbb{Q} -Brown'sche Bewegung.

Definition 1.4.11 (T -Forward Maß). Wenn man als Numeraire den Preis $P(t, T)$ der Nullkuponanleihe verwendet, nennt man das äquivalente Martingalmaß T -**Forward Maß**.

Definition 1.4.12 (Arbitrage). Als Arbitrage bezeichnet man eine risikolose Gewinnmöglichkeit.

1.5 Marktmodelle

Das LIBOR-Marktmodell wurde 1997 von Miltersen et al. [3] und Brace et al. [4] eingeführt. Die Idee beruht darauf, dass ein anderes Numeraire als das risikofreie Bankkonto verwendet wird. Die Black-Formel benutzt man dann zur Bewertung von Caps oder Swaptions.

1.5.1 Heath-Jarrow-Morton-Methode

In den späten 80ern haben Heath, Jarrow und Morton eine neue Struktur zur direkten Modellierung der Forward Curve vorgestellt.

Sei \mathbf{W} eine d -dimensionale Brown'sche Bewegung auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t), \mathbb{P})$.

Aus [1, Abschnitt 6, Lemma 6.1] wissen wir, dass der NKA-Preis für jede Fälligkeit T als Itô-Prozess der Form

$$P(t, T) = P(0, T) + \int_0^t P(s, T)(r(s) + b(s, T))ds + \int_0^t P(s, T)v(s, T)dW(s), \quad t \leq T,$$

modelliert werden kann, wobei

$$v(s, T) = - \int_s^T \sigma(s, u) du$$

die T -Bond Volatility und

$$b(s, T) = - \int_s^T \alpha(s, u) du + \frac{1}{2} \|v(s, T)\|^2$$

ist.

α und σ sind \mathbb{R} - bzw. \mathbb{R}^d -wertige Prozesse $\alpha = \alpha(\omega, t, T)$ bzw. $\sigma = (\sigma_1(\omega, t, T), \dots, \sigma_d(\omega, t, T))$, sodass

1. α, σ sind $Prog \otimes \mathcal{B}$ -messbar;
2. $\int_0^T \int_0^T |\alpha(s, t)| ds dt < \infty \forall T$;
3. $\sup_{s, t \leq T} \|\sigma(s, t)\| < \infty \forall T$.

Die Gleichung des diskontierten Bond-Preis-Prozesses lautet

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = P(0, T) + \int_0^t \frac{P(s, T)}{B(s)} b(s, T) ds + \int_0^t \frac{P(s, T)}{B(s)} v(s, T) dW(s), \quad t \leq T.$$

Sei $\gamma \in \mathcal{L}$. Die HJM-Drift-Bedingung besagt, dass \mathbb{Q} ein äquivalentes lokales Martingalmaß ist, dann und nur dann, wenn

$$b(t, T) = -v(t, T)\gamma(t)^\top \forall T, d\mathbb{P} \otimes dt - f.s.$$

Die \mathbb{Q} -Dynamik der Forward Rates $f(t, T)$ sind von der Form

$$f(t, T) = f(0, T) + \underbrace{\int_0^t \int_s^T \sigma(s, u)^\top \sigma(s, T) du ds}_{\text{HJM-Drift}} + \int_0^t \sigma(s, T) dW^*(s)$$

und der diskontierte T -Bond-Preis genügt

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = P(0, T) \mathcal{E}_t(v(\cdot, T) \bullet W^*), \quad t \leq T.$$

HJM-Modell

Sei nun $\delta > 0$. Der Forward δ -Period LIBOR für den zukünftigen Zeitpunkt T betrachtet zur Zeit t ist die Simple Forward Rate

$$L(t, T) = F(t; T, T + \delta) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} - 1 \right).$$

Aus [1, Abschnitt 7] wissen wir, dass $\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)}$ ein Martingal ist für das $(T + \delta)$ -Forward Maß $\mathbb{Q}^{T + \delta}$.

Es gilt

$$d \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \right) = \frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \sigma_{T, T + \delta}(t) dW^{T + \delta}(t)$$

mit

$$\sigma_{T, T + \delta}(t) = \int_T^{T + \delta} \sigma(t, u) du.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} dL(t, T) &= \frac{1}{\delta} d \left(\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)} \right) \\ &= \frac{1}{\delta} \underbrace{\frac{P(t, T)}{P(t, T + \delta)}}_{=\delta L(t, T) + 1} \sigma_{T, T + \delta}(t) dW^{T + \delta}(t) \\ &= \frac{1}{\delta} (\delta L(t, T) + 1) \sigma_{T, T + \delta}(t) dW^{T + \delta}(t). \end{aligned}$$

Wir treffen nun folgende Annahme:

Es existiert eine \mathbb{R}^d -wertige deterministische Funktion $\lambda(t, T)$ mit

$$\sigma_{T, T + \delta}(t) = \frac{\delta L(t, T)}{\delta L(t, T) + 1} \lambda(t, T).$$

Eingesetzt in die obige Formel ergibt das

$$dL(t, T) = L(t, T) \lambda(t, T) dW^{T + \delta}(t),$$

was äquivalent ist zu

$$L(t, T) = L(s, T) \exp \left(\int_s^t \lambda(u, T) dW^{T + \delta}(u) - \frac{1}{2} \int_s^t \|\lambda(u, T)\|^2 du \right), \quad s \leq t \leq T.$$

Der Preis zur Zeit t eines Caplets mit Reset Date T , Settlement Date $T + \delta$ und Strike Rate κ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T + \delta} r(s) ds} \delta (L(t, T) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t \right] \\ &= P(t, T + \delta) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{T + \delta}} [\delta (L(t, T) - \kappa)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= \delta P(t, T + \delta) \left(L(t, T) \Phi(d_1(t, T)) - \kappa \Phi(d_2(t, T)) \right), \end{aligned}$$

mit

$$d_{1,2}(t, T) = \frac{\log\left(\frac{L(t, T)}{\kappa}\right) \pm \frac{1}{2} \int_t^T \|\lambda(s, T)\|^2 ds}{\left(\int_t^T \|\lambda(s, T)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

1.5.2 LIBOR Markt Modell

Als risikoneutrale Martingalmaße verwenden wir nun Forward Maße, das Numeraire wird von Bondpreisen gestellt.

Wir fixieren einen endlichen Zeithorizont $T_M = M\delta$, $M \in \mathbb{N}$, und einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T_M]}, \mathbb{Q}^{T_M})$ mit einer d -dimensionalen Brown'schen Bewegung $W^{T_M}(t)$, $t \in [0, T_M]$. \mathbb{Q}^{T_M} ist das T_M -Forward Maß.

Sei

$$T_m = m\delta, \quad m = 0, \dots, M.$$

Wir konstruieren uns ein Modell für M Forward LIBOR Rates mit Fälligkeiten T_0, \dots, T_{M-1} .

Gegeben ist:

1. $\forall m \leq M-1$ existiert eine \mathbb{R}^d -wertige deterministische, beschränkte, messbare Funktion $\lambda(t, T_m)$, $t \in [0, T_m]$, die die Volatilität von $L(t, T_m)$ wiedergibt,
2. eine positive, nicht-steigende diskrete Zinsstruktur

$$P(0, T_m), \quad m = 0, \dots, M,$$

und, daraus resultierend, nicht-negative Forward LIBOR Rates

$$L(0, T_m) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{P(0, T_m)}{P(0, T_{m+1})} - 1 \right), \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (1.4)$$

Dann gilt

$$dL(t, T_{M-1}) = L(t, T_{M-1}) \lambda(t, T_{M-1}) dW^{T_M}(t), \quad t \in [0, T_{M-1}].$$

Durch Rückwärtsinduktion erhält man

$$L(0, T_{M-1}) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{P(0, T_{M-1})}{P(0, T_M)} - 1 \right),$$

was äquivalent ist zu

$$L(t, T_{M-1}) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{P(0, T_{M-1})}{P(0, T_M)} - 1 \right) \mathcal{E}\left(\lambda(\cdot, T_{M-1}) \bullet W^{T_M}\right).$$

Als nächstes definieren wir den \mathbb{R}^d -wertigen beschränkten progressiven Prozess

$$\sigma_{T_{M-1}, T_M}(t) = \frac{\delta L(t, T_{M-1})}{\delta L(t, T_{M-1}) + 1} \lambda(t, T_{M-1}), t \in [0, T_{M-1}].$$

Dieser induziert ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}^{T_{M-1}} \sim \mathbb{Q}^{T_M}$ auf $\mathcal{F}_{T_{M-1}}$ mittels

$$\frac{d\mathbb{Q}^{T_{M-1}}}{d\mathbb{Q}^{T_M}} = \mathcal{E}_{T_{M-1}} \left(\sigma_{T_{M-1}, T_M} \bullet W^{T_M} \right),$$

und mit dem Satz von Girsanov (1.4.1) folgt

$$W^{T_{M-1}}(t) = W^{T_M}(t) - \int_0^t \sigma_{T_{M-1}, T_M}(s)^\top ds, t \in [0, T_{M-1}],$$

ist eine $\mathbb{Q}^{T_{M-1}}$ -Brown'sche Bewegung. D.h. es gilt

$$\begin{aligned} dL(t, T_{M-2}) &= L(t, T_{M-2}) \lambda(t, T_{M-2}) dW^{T_{M-1}}(t), t \in [0, T_{M-2}], \\ L(0, T_{M-2}) &= \frac{1}{\delta} \left(\frac{P(0, T_{M-2})}{P(0, T_{M-1})} - 1 \right), \end{aligned}$$

wobei die Volatilität und die Brown'sche Bewegung definiert sind wie oben.

Bei wiederholter Ausführung dieses Vorgangs erhalten wir eine Familie von lognormalverteilten Martingalen $(L(t, T_m))_{t \in [0, T_m]}$ unter dem respektiven Maß $\mathbb{Q}^{T_{m+1}}$.

Lemma 1.5.1. *Sei $0 \leq m, n \leq M - 1$. Dann ist die Dynamik von $L(t, T_m)$ unter $\mathbb{Q}^{T_{n+1}}$ durch folgende drei Fälle bestimmt:*

$$\frac{dL(t, T_m)}{L(t, T_m)} = \begin{cases} -\lambda(t, T_m) \sum_{l=m+1}^n \sigma_{T_l, T_{l+1}}(t)^\top dt + \lambda(t, T_m) dW^{T_{n+1}}(t), & m < n, \\ \lambda(t, T_m) dW^{T_{n+1}}(t), & m = n, \\ \lambda(t, T_m) \sum_{l=n+1}^m \sigma_{T_l, T_{l+1}}(t)^\top dt + \lambda(t, T_m) dW^{T_{n+1}}(t), & m > n, \end{cases}$$

für $t \in [0, T_m \wedge T_{n+1}]$.

Für den Beweis verweise ich auf [1, Lemma 11.1].

Als nächstes definieren wir den diskreten *Implied Money-Market Account*

$$B^*(0) = 1,$$

$$B^*(T_m) = (1 + \delta L(T_{m-1}, T_{m-1})) B^*(T_{m-1}), m = 1, \dots, M.$$

Lemma 1.5.2. *Sei $0 \leq m \leq M - 1$. Dann ist die Dynamik von $L(t, T_m)$ unter \mathbb{Q}^* gegeben durch*

$$\frac{dL(t, T_m)}{L(t, T_m)} = \lambda(t, T_m) \sum_{k=\eta(t)}^m \sigma_{T_k, T_{k+1}}(t)^\top dt + \lambda(t, T_m) dW^*(t), t \in [0, T_m].$$

Der Beweis folgt aus Lemma (1.5.1) für $n = M - 1$ und der Definition von W^* .

1.5.3 Monte Carlo Simulation des LMM

Es gibt unzählige Varianten um Forward LIBOR Rates zu simulieren. In dieser Arbeit werden wir ein bestimmtes Euler-Verfahren verwenden.

Wir betrachten das risikoneutrale Martingalmaß \mathbb{Q}^* , wobei man auch jedes andere Forward-Maß \mathbb{Q}^{T_n} verwenden könnte. Unser Ziel ist es, den M -dimensionalen Vektor der Forward LIBOR Rates $(L(t, T_0), \dots, L(t, T_{M-1}))^\top$ zu simulieren.

Wir betrachten die Transformation

$$H_m(t) = \log L(t, T_m).$$

Wenn man die Definition von $\sigma_{T_k, T_{k+1}}(t)$ einsetzt und Itô's Formel anwendet, erhält man

$$dH_m(t) = \alpha_m(t)dt + \lambda(t, T_m)dW^*(t), t \leq T_m, \quad (1.5)$$

mit Drift-Term

$$\alpha_m(t) = \lambda(t, T_m) \sum_{k=\eta(t)}^m \frac{\delta e^{H_k(t)}}{1 + \delta e^{H_k(t)}} \lambda(t, T_k)^\top - \frac{1}{2} \|\lambda(t, T_m)\|^2.$$

Die Betrachtung des Logarithmus von $L(t, T_m)$ hat den Vorteil, dass die simulierte Rate $L(t, T_m)$ positiv ist.

Wir wollen einen T_n -Claim mit Auszahlungsprofil

$$f(H_n(T_n), \dots, H_{M-1}(T_n))$$

bewerten. Aus [1, Abschnitt 11.4] wissen wir, dass der Preis zur Zeit $t = 0$

$$\pi = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^*} \left[\frac{f(H_n(T_n), \dots, H_{M-1}(T_n))}{B^*(T_n)} \right]$$

ist, wobei $B^*(T_n)$ den Bankkonto-Prozess bezeichnet.

Sei $t_i = i\Delta t, i = 0, \dots, N$ mit $\Delta t = \frac{T_n}{N}$. N sei groß genug gewählt, sodass wir eine angemessene Anzahl an Simulationen erhalten.

Die Euler-Approximation von Formel (1.5) ist

$$H_m(t_i) = H_m(t_{i-1}) + \alpha_m(t_{i-1})\Delta t + \lambda(t_{i-1}, T_m)Z(i)\sqrt{\Delta t}, 1 \leq i \leq N, \quad (1.6)$$

wobei $Z(1), \dots, Z(N)$ eine Folge von unabhängigen \mathbb{R}^d -wertigen Zufallsvariablen ist. Das Prinzip der Monte Carlo Simulation besteht darin, mittels (1.6) K unabhängige Kopien $\Pi^{(1)}, \dots, \Pi^{(K)}$ der Zufallsvariable

$$\Pi = \frac{f(H_n(T_n), \dots, H_{M-1}(T_n))}{B^*(T_n)}$$

zu simulieren und dann den Mittelwert

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \Pi^{(j)}$$

zu berechnen.

Kalibrierung

In Formel (1.6) sehen wir, dass die Korrelation zwischen den Inkrementen von $\log L(t, T_m)$ und $\log L(t, T_n)$ annähernd

$$\rho_{mn}(t) = \frac{\lambda(t, T_m)\lambda(t, T_n)^\top}{\|\lambda(t, T_m)\| \|\lambda(t, T_n)\|}$$

ist. Diese Korrelationen werden verwendet um sich Marktdaten von Swaptions möglichst gut zu nähern.

Wir schreiben

$$\lambda(t, T_m) = \sigma_m(t)l_m(t),$$

wobei $\sigma_m(t) = \|\lambda(t, T_m)\|$ die Volatilität von $L(t, T_m)$ bezeichnet und $l_m(t) = \frac{\lambda(t, T_m)}{\|\lambda(t, T_m)\|}$ stellt die Korrelation zwischen den verschiedenen Rates dar:

$$\rho_{mn}(t) = l_m(t)l_n(t)^\top.$$

Eine einfache Variante der Wahl der Volatilität wäre, sie nicht von der Zeit abhängen zu lassen:

$$\sigma_m(t) \equiv \sigma_m \quad \forall m.$$

In diesem Fall haben wir

$$\sigma_n = \sigma_{Cpl(T_n, T_{n+1})}, \quad 1 \leq n \leq M-1.$$

Diese Festlegung sieht vor, dass sich die Volatilität mit der Zeit nicht ändert, was nicht sehr glaubhaft ist für langfristige Forward LIBOR Rates.

Deshalb wählen wir eine parametrische Form:

$$\sigma_m(t) = v_m e^{-\beta(T_m - t)}. \quad (1.7)$$

Für $\beta = 0$ erhalten wir die obige konstante Volatilität. Laut [1, Abschnitt 11.7.2] gilt:

$$\int_0^{T_n} \sigma_n(t)^2 dt = \sigma_{Cpl(T_n, T_{n+1})}^2 T_n, \quad 1 \leq n \leq M-1.$$

Daraus erhalten wir

$$v_n^2 \frac{1 - e^{-2\beta T_n}}{2\beta} = \sigma_{Cpl(T_n, T_{n+1})}^2, \quad 1 \leq n \leq M-1. \quad (1.8)$$

Die Anforderung an l_m hängt eng mit der Wahl der Dimension d der Brown'schen Bewegung zusammen.

- Anforderung 1: $d = 1 \Rightarrow l_m = 1 \forall m$. In diesem Fall ist die Korrelation der Inkremente von $\log L(t, T_m)$ und $\log L(t, T_n)$ gleich 1 für alle m, n .
- Anforderung 2: $d = M - 1$, hier hat man genauso viele Brown'sche Bewegungen wie Forward LIBOR Rates und $l_m = e_m^\top$ für alle m . In diesem Fall ist ρ die Einheitsmatrix und das System der stochastischen Differentialgleichungen wird entkoppelt:

$$dH_m(t) = \left(\frac{\delta e^{H_m(t)}}{1 + \delta e^{H_m(t)}} \sigma_m(t)^2 - \frac{1}{2} \sigma_m(t)^2 \right) dt + \sigma_m(t) dW_m(t), \quad t \leq T_m,$$

$$\forall 1 \leq m \leq M - 1.$$

Die Forward LIBOR Rates sind hier unabhängig.

1.6 Beispiel - Bewertung von Caps

In diesem Abschnitt bewerten wir, mittels der Monte Carlo Simulation, Caps.

Wir verwenden dafür die Implied Volatilities (in %) aus [1, Table 11.4, Seite 217] für die Caplets $Cpl(T_{i-1}, T_i)$ mit Strike Rate 3.5%.

```
> sigma <- c(NaN, 2.93, 2.93, 2.93, 2.08, 2.08, 1.83, 1.83, 1.78, 1.78, 1.63, 1.63,
+           1.67, 1.67, 1.61, 1.61, 1.57, 1.57, 1.57, 1.57)
```

Mit Formel (1.8) können wir v_m berechnen, um anschließend mit Formel (1.7) $\sigma_m(t)$ zu erhalten.

Sei $M = 20$.

Dann ist die Tenorstruktur

$$T_i = \frac{i}{2}, \quad i = 0, \dots, 20,$$

wobei $T_1 = \frac{1}{2}$ das erste Caplet Reset Date ist und $T_{20} = 10$ die Fälligkeit des letzten Caps.

Da wir die Transformation

$$H_m(t) = \log L(t, T_m) \Leftrightarrow e^{H_m(t)} = L(t, T_m)$$

verwenden, benötigen wir zur Ermittlung von H_m die Anfangsdaten

$$L(0, T_i), \quad i = 0, \dots, 19.$$

Diese beziehen wir aus [1, Table 11.3, Seite 217] (in %).

```
> L(0, T_i) <- c(4.228, 2.791, 3.067, 3.067, 3.728, 3.728, 4.051, 4.051, 4.199, 4.199, 4.450,
+               4.450, 4.626, 4.626, 4.816, 4.816, 4.960, 4.960, 5.088, 5.088)
```

Wie oben beschrieben, besteht das Prinzip der Monte Carlo Simulation darin, K unabhängige Kopien einer Zufallsvariable zu simulieren, um anschließend das arithmetische Mittel zu berechnen.

Sei $K = 10000$.

Wir berechnen für jede Fälligkeit T_i , $i = 1, \dots, 19$,

$$\Pi^{(j)} = \frac{\delta(L(T_i, T_i) - \kappa)^+}{B^*(T_i)}, \quad j = 1, \dots, K,$$

und daraus dann den Mittelwert

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \Pi^{(j)}.$$

Somit haben wir für jede Fälligkeit das arithmetische Mittel $\bar{\Pi}$ der Caplets und durch Aufsummieren erhält man den Wert der Caps in Basispunkten.

Fälligkeit	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cap	0.00	0.05	0.12	0.31	0.52	0.82	1.12	1.47	1.82	2.26
Fälligkeit	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Cap	2.69	3.17	3.64	4.18	4.71	5.27	5.82	6.40	6.96	

Der zugehörige **R**-Code befindet sich in Kapitel 7.1.1.

Tatsächlich am Markt beobachtete Cap Preise finden sich in [1, Table 11.1, Seite 216], sie sind in Basispunkten angegeben.

```
> euro_cap_price <- c(0.25,0.77,1.485,2.305,3.255,4.315,5.455,6.64)
```

Hier handelt es sich um die Preise für zugehörige Fälligkeiten T_4, T_6, \dots, T_{18} . Verglichen mit den am Markt beobachteten *Euro Cap Prices* (18. November 2008) ergibt sich folgende Grafik:

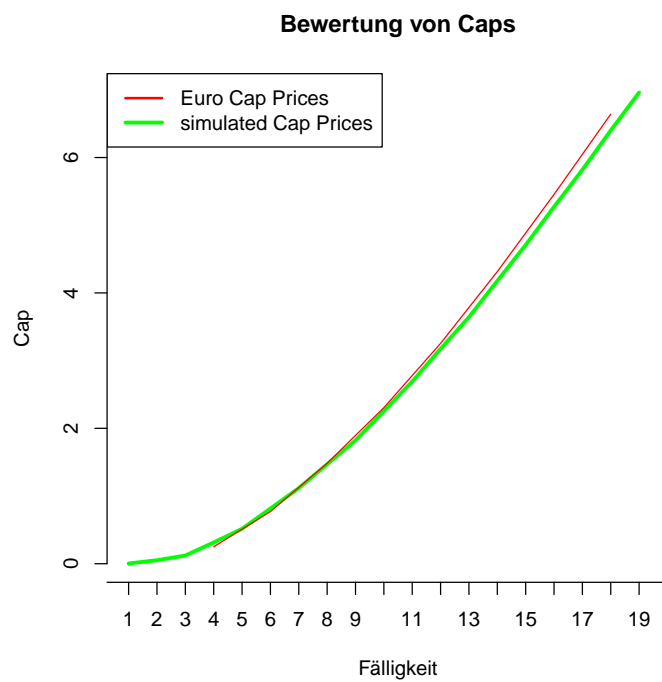


Abbildung 1.1: tatsächliche Marktpreise vs. simulierte Cap-Preise

In (1.7) sieht man, dass σ_m von β abhängig ist. Eine optimale Anpassung an die am Markt beobachteten Cap-Preise erhält man mit $\beta = 1.5$. In den folgenden Grafiken wurde die Berechnung der Cap-Preise für $\beta \in \{0.5, 1.5, 2.1, 3\}$ durchgeführt.

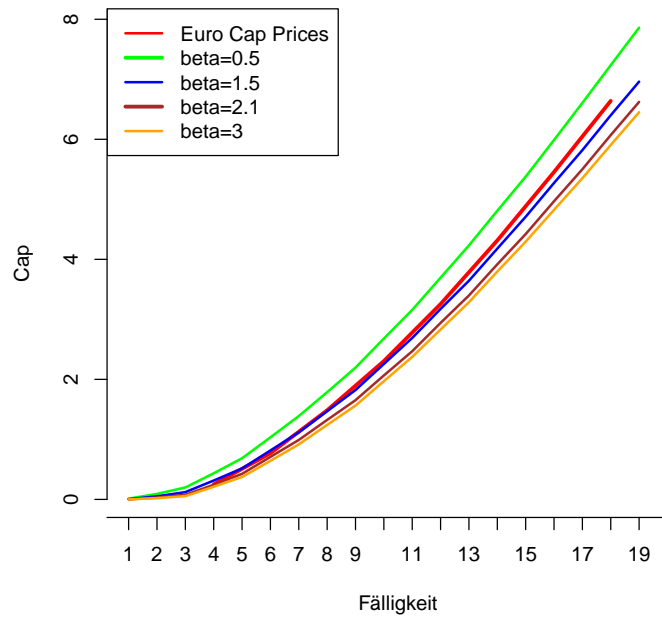


Abbildung 1.2: Vergleich der Cap Preise für verschiedene β

Bisher wurden alle Berechnungen für die Strike Rate $\kappa = 3.5\%$ ausgeführt. Als nächstes sehen wir uns verschiedene Strike Rates an und vergleichen die entstehenden Cap Preise wieder mit den tatsächlich am Markt beobachteten Werten.

Für $\kappa = 4\%, 4.5\%, 5\%$ und 5.5% ergibt sich die nachstehende Grafik. Die dünnen Linien beschreiben hier die Marktpreise aus [1][Table 11.1, Seite 216] und die farblich zugehörigen Linien die simulierten Cap-Preise.

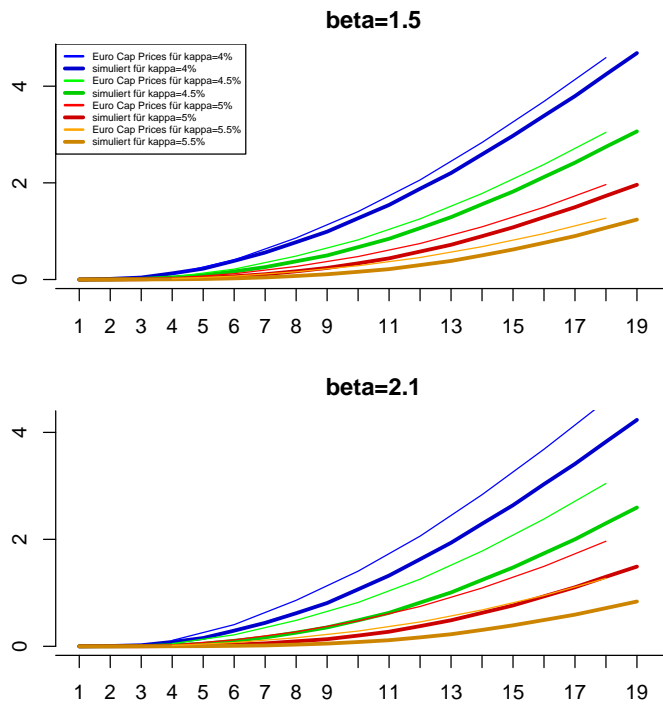


Abbildung 1.3: Vergleich der Strike Rates

Hier erkennt man, dass die simulierten Werte für $\beta = 1.5$ besser sind, als für $\beta = 2.1$.

Der nächste Plot beschreibt die Abhängigkeit der Cap Preise von den Strike Rates und der Fälligkeit des Caps. Da man im 3-dimensionalen keine großen Unterschiede ausmachen kann, folgen darunter 2-dimensionale Plots für die Fälligkeiten 2, 4, 6 und 8 Jahre.

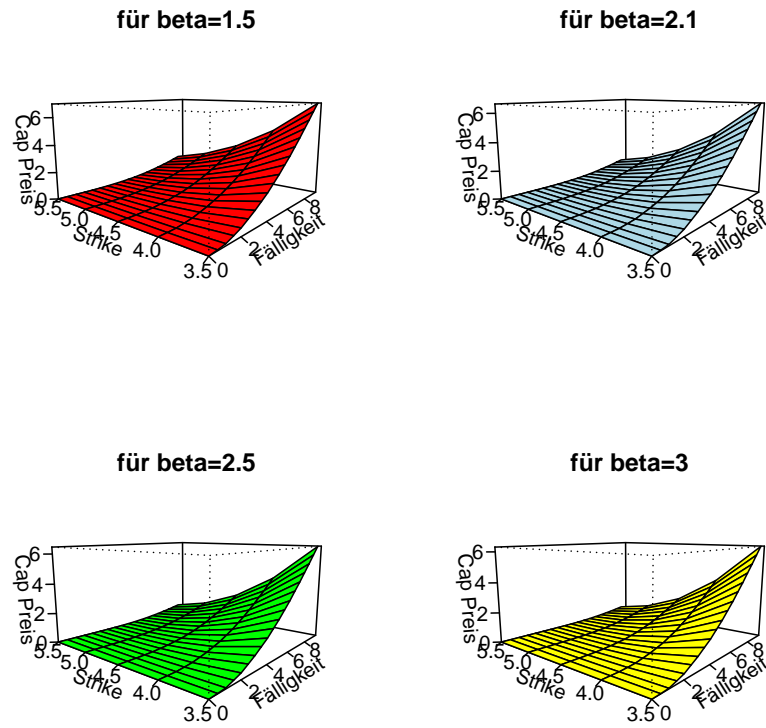


Abbildung 1.4: Cap Price vs. Strike

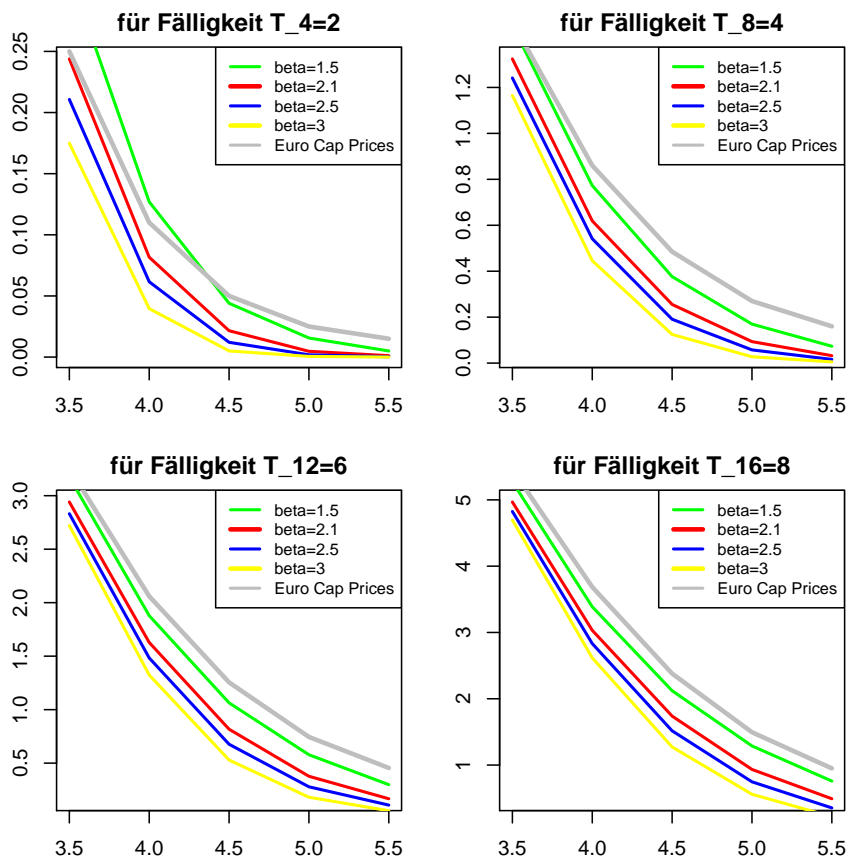


Abbildung 1.5: Smile-Effekt

Kapitel 2

Modellierung des Best Estimate

Das Modell, das die Berechnungen ausführt, stammt von [6]. Es handelt sich dabei um das Best Estimate Modell der Österreichischen Finanzmarktaufsicht (FMA), das von der Fachgruppe Marktwertbilanz unter der Leitung von Simon Hochgerner mit der Software **R** [13] programmiert wurde. Auf welchen Grundlagen es basiert, wird in [7] beschrieben und in diesem Kapitel aufgegriffen.

2.1 Grundlagen des Modells

Definition 2.1.1 (Best Estimate). *Der Best Estimate (kurz: BE) ist der Durchschnitt zukünftiger Cash Flow Szenarien unter Berücksichtigung von Wahrscheinlichkeiten und risikofreier Diskontierung. [8, Artikel 77 Absatz 2]*

Der Best Estimate wird also wie folgt berechnet:

Zuerst werden alle zukünftigen Cash Flows (Zahlungsströme) ermittelt. Mithilfe einer risikofreien Zinskurve wird der Zeitwert dieser Zahlungsströme berechnet. D.h. es wird diskontiert, und der BE ergibt sich als wahrscheinlichkeitsgewichteter Durchschnitt dieser diskontierten zukünftigen Zahlungsströme. [7]

Es müssen also alle ein- und ausgehenden Zahlungen, ohne Abzug der von Rückversicherungsverträgen und Zweckgesellschaften einforderbaren Beträge - d.h. brutto - berücksichtigt werden. In Art 78 Abs 3 RRL [8] werden hier explizit die Zahlungen zukünftiger Überschussbeteiligungen (bei gewinnberechtigten Verträgen) erwähnt, welche nach aktuellen UGB/VAG Prinzipien nicht rückgestellt werden.

In dem Modell, das dieser Diplomarbeit zu Grunde liegt, werden Lebensversicherungsverträge betrachtet, die gemäß Aktuarsberichtsverordnung [15, §1] in folgende Tarifklassen einzuordnen sind:

- a) Kapitalversicherungen mit Sparanteil und Gewinnbeteiligung
- c) Liquide Rentenversicherungen mit Gewinnbeteiligung
- d) Renten- und Erlebensversicherungen mit Gewinnbeteiligung in der Aufschubphase

Alle drei Tarifklassen beinhalten eine Gewinnbeteiligung, sprich eine erfolgsabhängige Beitragsrückerstattung.

Die Gesamtverzinsung setzt sich demnach aus einem garantierten Zins auf die Sparbeiträge und einer variablen Überschussbeteiligung zusammen.

Wie hoch diese Überschussbeteiligung sein wird, weiß man zu Vertragsbeginn noch nicht, sie hängt unter anderem davon ab, wie erfolgreich die Kapitalanlagestrategie eines Versicherungsunternehmens ist.

Als Basis für die Zuteilung der Überschüsse dient die Bemessungsgrundlage lt. [10, §3(1)].

Die Gewinnbeteiligung die an die Versicherungsnehmer geht ist ein bestimmter Prozentsatz μ an der Bemessungsgrundlage. Der restliche Anteil $1 - \mu$, aber höchstens 15% in Österreich, geht an die Shareholder, sprich jenen Personen, die gemäß [11, §11b (1)] eine Beteiligung am Versicherungsunternehmen haben. Der Anteil μ an die Versicherungsnehmer wird wiederum aufgeteilt.

Die tatsächliche Zuteilung wird durch ϕ beschrieben - ϕ ist jener prozentuelle Anteil an μ der direkt an den Versicherungsnehmer geht, während der Rest (also $1 - \phi$) der *freien Rückstellung für Beitragsrückerstattung* zugeführt wird. Dabei handelt es sich um eine versicherungstechnische Rückstellung, die unter anderem zu einer niedrigeren Volatilität der Gewinnbeteiligung führt.

Das Modell berücksichtigt sowohl Einmalerläge als auch laufende Prämienzahlungen.

Der marktkonsistente Wert der Verbindlichkeiten (Liabilities) eines Lebensversicherungsunternehmens, ist wie oben schon definiert wurde, der Durchschnitt der Summe der diskontierten Zahlungsströme. Wobei der Durchschnitt von einer Menge arbitragefreier Szenarien genommen wird. Da arbitragefreie Szenarien verwendet werden, ist der Wert von Optionen und Garantien Teil des Best Estimates.

Das Modell behandelt diskrete Zeitpunkte

$$0, \dots, T,$$

wobei jeder Zeitschritt ein Jahr beschreibt. Alle stochastischen Prozesse sind bezüglich eines filtrierten Wahrscheinlichkeitsraumes adaptiert und erfüllen die üblichen Bedingungen.

\mathcal{X} sei eine Menge von Lebensversicherungsverträgen. Jedes $x \in \mathcal{X}$ kann als einzelner Vertrag angesehen werden, oder als Model Point, der aus mehreren Verträgen besteht, die als äquivalent vorausgesetzt werden.

Wir nehmen an, wir haben ein Zinsmodell, dem ein Bankkonto B_t als Numeraire zu Grunde liegt.

$$B_0 = 1,$$

$$B_t, t = 0, \dots, T.$$

\mathbb{Q} sei ein risikoneutrales Martingalmaß.

Für $0 \leq t \leq s$ sei $P(t, s)$ der Wert zur Zeit t einer Einheit einer Währung zur Zeit s , also eine Nullkuponanleihe [Abschnitt 1.0.1]. Dann gilt für jedes Zinsmodell

$$B_t^{-1}P(t, s) \text{ ist ein } \mathbb{Q}\text{-Martingal} \quad (2.1)$$

bzgl. der Filtration (\mathcal{F}_t) . Das gilt sowohl für Short Rate Modelle als auch für LIBOR Markt Modelle, die üblicherweise ein Spot Maß verwenden. (2.1) ist laut dem *Fundamental Theorem of Asset Pricing* [12] die hinreichende Bedingung, um ein arbitragefreies Modell zu erhalten, was man lt. Solvency II benötigt.

Der Best Estimate bezüglich \mathcal{X} ist dann gegeben durch

$$\text{BE} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=1}^T B_t^{-1} \sum_{x \in \mathcal{X}} CF_t^x \right], \quad (2.2)$$

wobei CF_t^x der Cash Flow des x -ten Vertrages zur Zeit t ist.

Dabei hängen die Cash Flows insbesondere von den ökonomischen Zinsszenarien ab.

Ich möchte an dieser Stelle auf [9] verweisen. Darin wird ein Modell vorgestellt, in dem Aufwendungen repliziert werden, indem man ein Portfolio konstruiert, das dieselben Cash Flows wie die Passivseite generiert. Um den Best Estimate zu berechnen, müsste man also das Portfolio bewerten. Die Gewinnbeteiligung, wie sie

in der Realität vorkommt, wird in diesem Ansatz nicht modelliert. Das Modell, das dieser Diplomarbeit zu Grunde liegt, modelliert hingegen auch Überschüsse.

Um zu Formel (2.2) zurückzukehren, merken wir an, dass für alle $x \in \mathcal{X}$ der Prozess CF_t^x durch den Reserveprozess R_t^x festgelegt ist. Dieser bezeichnet die technische Reserve zur Zeit t (inkl. Gewinnbeteiligung).

Dann ist der Cash Flow zur Zeit t

$$CF_t^x = -l_t^x \Pi^x + P^x(t, R_t^x) + C_t^x, \quad (2.3)$$

wobei l_t^x die Anzahl der aktiven Personen im Vertrag x bezeichnet. Π^x ist die Prämie von Vertrag x . Wir lassen die Inflation außer Acht und nehmen an die Prämie sei konstant. P^x ist eine deterministische Funktion, die die fälligen Zahlungen zur Zeit t in Abhängigkeit von der Reserve angibt. C_t^x sind die Kosten von Vertrag x zur Zeit t . Üblicherweise sind Kosten deterministisch. Sie können aber auch als Prozentsatz der Reserve gesehen werden.

Die Reserve wird in einen garantierten Teil und einen Teil mit Gewinnbeteiligung zerlegt.

$$R_t^x = V_t^x + (R_t^x - V_t^x) = \underbrace{V_t^x}_{\text{garantierter Teil}} + \underbrace{S_t^x}_{\text{Gewinnbeteiligung}}. \quad (2.4)$$

$V_t^x = V^x(t)$ ist eine deterministische Funktion, die die Entwicklung der technischen Reserve in Abhängigkeit vom technischen (garantierten) Zinssatz r^x beschreibt. In unserem Modell ist die Entwicklung des Gewinnbeteiligungskontos gegeben durch

$$S_t^x = (1 + r^x)S_{t-1}^x + (\Phi_t - r^x)_+ \cdot \underbrace{(V_{t-1}^x + S_{t-1}^x)}_{R_{t-1}^x},$$

wobei $(\cdot)_+$ den Positivteil bezeichnet und Φ_t den Gesamtzins gemäß [10, Bemessungsgrundlage § 3(1)], der weiter oben schon definiert wurde.

Φ_t hängt sehr stark von $ROAP_t$ ab. $ROAP_t$ bedeutet *Return on Assets Percentage*, also der Prozentsatz der Buchwertgewinne der Assets.

Die Buchwertgewinne sind definiert durch

$$ROA_t = BV_t - BV_{t-1},$$

wobei BV_t bzw. MV_t den Buch- bzw. Marktwert des Asset-Portfolios zur Zeit t bezeichnen.

$ROAP_t$ kann nicht für ein individuelles $x \in X$ berechnet werden, da nicht ein bestimmtes Asset einem bestimmten Versicherungsvertrag zugeordnet wird.

$ROAP_t$ hängt von den Bilanzierungsvorschriften bzgl. unrealisierten Gewinnen, Überschussfonds, Vermögensportfolios, Anlagezielen, etc. ab. Wenn man einen einzelnen Vertrag betrachtet, sieht man, dass der Anteil am Gewinn $(\Phi_t - r^x)_+$ kleiner wird, wenn r^x größer wird. Der Gesamtzinssatz Φ_t hängt aber nicht nur von $ROAP_t$ ab.

Das Modell wird so konstruiert, dass es das “No-Leakage”-Kriterium erfüllt. D.h. Geld kann ohne Cash Flow weder “auftauchen” noch “verschwinden”. Um dieses Kriterium zu überprüfen, müssen noch einige Variablen definiert werden.

BSF_t bzw. MSF_t bezeichnen den Buch- bzw. Marktwert des Surplus Funds zur Zeit t , sprich der freien Rückstellungen für die Beitragsrückerstattung (kurz: freie RfB). Zur Zeit 0 haben wir also

$$BV_0 = (1 + \epsilon) \sum_{x \in X} R_0^x,$$

wobei $\epsilon \geq 0$ die anfängliche prozentuelle Überdeckung der Deckungsrückstellung bezeichnet. Unter Solvency I gibt es nur die Voraussetzung, dass $\epsilon \geq 0.04$.

Nun können wir $ROAP_t$ definieren.

$$ROAP_t = \frac{ROA_t}{(BV_{t-1} + BSF_{t-1})}. \quad (2.5)$$

Die Steuer, die zur Zeit t fällig wird, bezeichnen wir mit tax_t . Es gilt also

$$\begin{aligned} BV_t + BSF_t &= (1 + F_{t-1})(BV_{t-1} + BSF_{t-1}) - CF_t - tax_t - SCF_t \\ &\quad + ROA_t - F_{t-1}(BV_{t-1} + BSF_{t-1}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei $CF_t = \sum_{x \in X} CF_t^x$.

Die Forward Rate von $t - 1$ bis t ist

$$F_{t-1} = \frac{B_t}{B_{t-1}} - 1$$

und der Shareholder bekommt zur Zeit t SCF_t (*Shareholder Cash Flow*).

Wir definieren nun

$$UR_t := ROA_t - F_{t-1}(BV_{t-1} + BSF_{t-1}).$$

UR_t bezeichnet den *Unexpected Return* zur Zeit t , also jenen Gewinn der über den Zinsgewinn hinaus erwirtschaftet wird.

Daraus folgt durch Abzinsen von (2.6)

$$B_T^{-1}(BV_T + BSF_T) = BV_0 + BSF_0 - \sum_{t=1}^T B_t^{-1}(CF_t + tax_t + SCF_t - UR_t)$$

oder wenn man den Erwartungswert bzgl. des risikoneutralen Maßes \mathbb{Q} nimmt

$$\begin{aligned} BV_0 + BSF_0 - BE - TAX - VIF &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1}(BV_T + BSF_T)] \\ &\quad - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^T B_t^{-1}UR_t\right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit

$$TAX = \sum_{t=1}^T B_t^{-1}tax_t.$$

VIF bezeichnet den Value of In-Force Business und ist definiert durch

$$VIF = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^T B_t^{-1}SCF_t\right].$$

ER bezeichnet den modellabhängigen Teil des *Market Consistent Embedded Value*, den wir in Formel (2.8) definieren werden.

(2.7) kann als eine der wichtigsten Gleichungen in der marktkonsistenten Bewertung von Lebensversicherungsportfolios gesehen werden.

Nach dem strengen Niederstwertprinzip (das in Kapitel 2.3 anhand eines Beispiels erklärt wird) erfüllen die unrealisierten Gewinne

$$UG_t := MV_t - BV_t \geq 0 \text{ für alle } t.$$

Da ROA von UG abhängt, spielen die unrealisierten Gewinne eine große Rolle in (2.7).

Mit Hilfe von VIF und UG_t können wir nun den Market Consistent Embedded Value definieren

$$MCEV = VIF + \epsilon \cdot \sum_{x \in X} R_0^x + SF_0 + UG_0. \quad (2.8)$$

Dieser ist ein Maß für den Shareholder, wie gut das Geld angelegt wird.

Der Term $B_T^{-1}(BV_T + BSF_T)$ kann für $T \rightarrow \infty$ vernachlässigt werden, wobei "∞" als 80 Jahre oder mehr interpretiert wird.

Das folgt einerseits daraus, dass das Portfolio mit der Zeit abnimmt und andererseits aus der Diskontierung.

Nun betrachten wir das Asset-Portfolio \mathcal{A}_{t-1} zur Zeit $t-1$. Das Portfolio beinhaltet Bonds, Aktien, Immobilien und Cash. Den Cash Flow zur Zeit s bzgl. des i -ten Bonds in \mathcal{A}_{t-1} bezeichnen wir mit cf_s^i .

Angenommen das Portfolio besteht nur aus Bonds und Cash, wobei Cash den 1-jährigen Forwards entspricht. Dann können wir, unter Vernachlässigung der Differenz zwischen Markt- und Buchwert, schreiben

$$\begin{aligned} UR_t &= ROA_t - F_{t-1}(BV_{t-1} + BSF_{t-1}) \\ &\cong \sum_{i \in \mathcal{A}_{t-1}} \sum_{s > t} \left(P(t, s) - (1 + F_{t-1})P(t-1, s) \right) cf_s^i. \end{aligned}$$

Diese Summe ist endlich, da das Portfolio endlich ist und $cf_s^i = 0$ für hinreichend großes s . Für die Approximation dieses Marktwertes nehmen wir an, dass es keine unrealisierten Gewinne gibt. Mit (2.1) folgt dann

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_t^{-1} (P(t, s) - (1 + F_{t-1})P(t-1, s)) | \mathcal{F}_{t-1} \right] = 0.$$

Der Term $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=1}^T B_t^{-1} UR_t \right]$ verschwindet also unter dieser Annahme. Daher kann in speziellen Fällen die rechte Seite von (2.7) mit 0 approximiert werden.

Betrachten wir $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t=1}^T B_t^{-1} UR_t \right]$ in (2.7) genauer. Es ist klar, dass $UR_t = \sum_b UR_t^b$ gilt, wobei UR_t^b den Beitrag von Bond b bezeichnet. Für einen Bond b , der zur Zeit $t=0$ existiert, gilt

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T B_t^{-1} UR_t^b &= \sum_{t=1}^T B_t^{-1} \left(cf_t^b + BV_t^b - (1 + F_{t-1})BV_{t-1}^b \right) \\ &= \sum_{t=1}^T \left(B_t^{-1} cf_t^b + B_t^{-1} BV_t^b - B_{t-1}^{-1} BV_{t-1}^b \right) \\ &= \sum_{t=1}^M \left(B_t^{-1} cf_t^b + B_{M^b}^{-1} BV_{M^b}^b - BV_0^b \right), \end{aligned}$$

mit BV_t^b ist der Buchwert von b zur Zeit t und $M^b \leq T$ bezeichnet die Fälligkeit von b , sodass $BV_{M^b}^b = 0$. Da $P(0, t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_t^{-1}]$, gilt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t > 0} B_t^{-1} UR_t^b \right] = MV_0^b - BV_0^b = UG_0^b,$$

wobei MV_t^b und UG_t^b den Marktwert sowie die unrealisierten Gewinne von b zur Zeit t bezeichnen. Bonds b , die im Zuge von Reinvestitionen zur Zeit $t > 0$ gekauft werden, erfüllen $UG(t, b) = 0$. Daraus folgt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t > 0} B_t^{-1} UR_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\sum_{t > 0, b \in \mathcal{B}_t} B_t^{-1} UR_t^b \right] = UG_0,$$

wobei \mathcal{B}_t die Menge der Bonds im Portfolio zur Zeit t beschreibt.

Wir definieren $SHG_t := (SCF_t)_+$ und $COG_t := (-SCF_t)_+$. Daraus folgt $SCF_t = SHG_t - COG_t$ und $VIF = SHG - COG$. Der Value of In-Force Business kann als Differenz der Erträge der Aktionäre und der Kosten der Garantien geschrieben werden. Wir betrachten hier die Gesamtkosten der Garantie und nicht nur den Zeitwert der Optionen und Garantien.

Proposition 2.1.1 (grundlegende Gleichung der marktkonsistenten Bewertung).

$$BV_0 + BSF_0 + UG_0 = BE + TAX + SHG - COG + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_T^{-1}(BV_T + BSF_T) \right] \quad (2.9)$$

und

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_T^{-1}(BV_T + BSF_T) \right] \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad T \rightarrow \infty.$$

Normalerweise wird in der Best Estimate Kalkulation ein Zeithorizont von 80 Jahren betrachtet.

Gleichung (2.9) beschreibt auf der linken Seite die Summe der Buchwerte der Assets und der freien Rückstellung für Beitragsrückerstattung (kurz: freie RfB), sowie der unrealisierten Gewinne zum Zeitpunkt 0. Dieser Wert muss genau so groß sein, wie die Summe aus Best Estimate, Steuern, des Shareholder Cash Flows und der erwarteten diskontierten Buchwerte der Assets und der freien RfB zum Zeitpunkt T .

Um das zu überprüfen, wird in Kapitel 5 ein sogenannter Leakage Test durchgeführt. Für eine hinreichend große Anzahl von Zinsszenarien sollte diese Gleichung erfüllt sein. Ohne Cash Flow kann Geld weder "auftauchen" noch "verschwinden", was man in etwa mit einem selbstfinanzierenden Portfolio vergleichen könnte: wenn alle Cash Flows berücksichtigt werden, können Wertänderungen im Portfolio nur auf Zinseffekte zurückgeführt werden.

2.2 Risikolose Zinskurve

Wie weiter oben schon erwähnt, werden bei der Berechnung des BE die künftigen Cash Flows risikofrei abgezinst, um den aktuellen Wert zu erhalten. [8, Artikel 77, Absatz 2] Zum Abzinsen haben wir die jeweils aktuelle Zinskurve verwendet. Unter UGB wurde für Rückstellungsberechnungen ein konstanter Rechenzins verwendet. Laut Solvency II ist es nun aber notwendig, eine komplette Zinskurve zu verwenden, die auf aktuellen Marktdaten basiert. Je höher der Zinssatz ist mit dem diskontiert wird, umso kleiner ist der BE und umgekehrt. Die risikolose Zinskurve setzt sich zusammen aus einer von EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority) vorgegebenen risikolosen Basiszinskurve und etwaigen Auf- bzw. Abschlägen. Diese Kurve dient nur als Anfangswert, von ihr können z.B. im LIBOR Market Modell die künftigen Spot Rates berechnet werden. Aufschläge erhöhen die Zinsen mit denen diskontiert wird und vermindern dadurch den BE. Die risikofreie Basiszinskurve muss folgendes erfüllen:

- Versicherer können diese Zinsen in der Praxis wirklich risikofrei verdienen
- Die Zinskurve basiert auf handelbaren, liquiden Finanzinstrumenten, wie z.B. Zinsswaps (Kapitel 1.2).

2.3 Ein Modell in R

Wie die eben beschriebenen Grundlagen implementiert werden, wird nun näher erläutert.

Zu Beginn werden Versicherungsverträge in Form einer Matrix eingelesen. Außerdem werden Zinsszenarien eingelesen, bzw. selbst erzeugt. Bei den eingelesenen Szenarien handelt es sich um die vorhin beschriebenen Spot Rates. Wenn man Szenarien selbst erzeugt, kann auch zu Beginn des Codes die Volatilität festgelegt werden, mit der gerechnet werden soll.

Wenn eine Datei mit Versicherungsverträgen eingelesen wird, kann man auswählen, mit wie vielen davon man tatsächlich rechnen möchte. Für den Vergleich der Zinsmodelle in Kapitel 3 wurden 24 Verträge ausgewählt.

Als Rechnungsgrundlagen dienen Sterbetafeln 1. und 2. Ordnung, die dem Modell ebenfalls übergeben werden. Das Modell unterscheidet zwischen Einmalermäßigungen und laufender Prämienzahlung.

Es werden T Jahre modelliert, wobei T die maximale Restlaufzeit der Verträge ist.

Aktivseitig spielt das Asset-Management eine wesentliche Rolle. Wie weiter oben erwähnt wurde, besteht das Asset-Portfolio aus vier verschiedene Klassen:

1. Bonds
2. Aktien
3. Immobilien
4. Cash

Bei den Bonds werden die Nominale, der fixe Kupon, die Laufzeit sowie die Restlaufzeit und Buch- bzw. Marktwerte übergeben. Bei den Aktien und Immobilien werden die Laufzeit, Buch- und Marktwerte übergeben und beim Geld der Buchwert, der ja auch dem Marktwert entspricht.

Die Bewertung der Aktiva erfolgt nach Buchwerten. Es kann entweder mit dem strengen oder mit dem gemilderten Niederstwertprinzip bewertet werden. Die Berechnungen dieser Diplomarbeit wurden mit dem strengen Niederstwertprinzip durchgeführt.

Hierzu ein kleines Beispiel:

Ein Asset hat zu Beginn der Modellierung einen Marktwert von 100€. Im nächsten Zeitschritt ist der Marktwert auf 80€ gefallen. Der Buchwert des Assets wird also abgewertet und beträgt fortan nur noch 80€. Sollte sich der Marktwert in den darauf folgenden Zeitschritten wieder erhöhen, bleibt der Buchwert dennoch bei 80€. Außer er sinkt, dann wird erneut abgeschrieben.

Beim gemilderten Niederstwertprinzip darf auch wieder aufgewertet werden, allerdings nur bis zum ursprünglichen Wert. Also in diesem Beispiel bis zu den 100€.

Immobilien werden zusätzlich linear abgeschrieben, also z.B. über einen Zeitraum von 40 Jahren.

Es wird nun ein Portfolio erstellt, das als Output all jene Werte liefert, die wir vergleichen möchten: Best Estimate, Deckungsrückstellung, Garantiekosten, Value of in-force Business, Shareholder Gewinne sowie der Leakage Test.

Als Alternative zum Einlesen der Assets, können sie auch vom Modell selbst erzeugt werden. Dazu wählt man die anfängliche prozentuelle Aufteilung der verschiedenen Klassen, also z.B. könnte der Anteil der Bonds zu Beginn der Modellierung bei 70% liegen.

In Kapitel 3 werden zuvor selbst konstruierte Assets eingelesen, also nicht mit dem Modell erzeugt.

Jede der 4 Asset-Klassen wird in das Portfolio geschrieben, das nun alle zu Beginn der Modellierung erforderlichen Informationen enthält: Nominale, Kupon, Laufzeit, Restlaufzeit, Buchwert, Marktwert, Volatilität. Auch die Return on Assets (kurz: *ROA*) werden in das Portfolio geschrieben. Dabei handelt es sich um Gewinne aus Kapitalanlagen und Zinsen, die auf der Aktivseite erwirtschaftet werden. *ROA* besteht aus der Summe von Nominale, Kupons, stillen Reserven und Zinsen auf Cash abzüglich den Abschreibungen von Anleihen, Aktien und Immobilien.

Als nächstes wird die Deckungsrückstellung für T Jahre projiziert.

Die anfängliche Deckungsrückstellung wird entweder aus den eingelesenen Vertragsdaten übernommen oder selbst erzeugt. Neben der Deckungsrückstellung wird auch die Gewinnbeteiligung, abhängig vom Parameter μ , projiziert. μ beschreibt den Anteil der Gewinnbeteiligung an den Versicherungsnehmer an der Bemessungsgrundlage gemäß VAG GBVVU [10]. Außerdem werden unter anderem noch die Bemessungsgrundlage, die freie RfB, sowie die Zahlungen an den Shareholder projiziert. Zu guter Letzt werden die Entwicklungen des Best Estimates sowie der Assets dargestellt.

2.4 Modellierung eines einzelnen Vertrages

Das soeben beschriebene Modell sehen wir uns nun genauer anhand eines einzelnen Vertrages an.

Wir wählen einen Vertrag vom Typ a, eine Kapitalversicherung mit Gewinnbeteiligung. Die versicherte Person ist 30 Jahre alt und die Laufzeit beträgt 5 Jahre. Die bisherige Laufzeit ist 3 Jahre. Der Rechenzins sei 0% und der Erlebens- sowie Ablebenswert beträgt 100€.

Kosten werden in diesem Beispiel nicht berücksichtigt. Es handelt sich um laufende Prämienzahlungen und die Anzahl der Personen im Vertrag ist 1. Zur vereinfachten Darstellung rechnen wir mit nur einem zufälligen stochastischen Zinsszenario.

Neben den Kosten berücksichtigen wir auch weder das Sterblichkeitsrisiko noch die Stornowahrscheinlichkeit.

Die Assets sollen vom Modell erzeugt werden und sie sollen nur aus Cash bestehen.

Jener Anteil μ der Gewinnbeteiligung an der Bemessungsgrundlage, der an die Versicherungsnehmer geht, sei 90% und der Anteil ϕ der ihnen davon direkt zugeführt wird sei auch 90%. Die restlichen 10% fließen also in die freie RfB.

Da es sich um laufende Prämienzahlungen handelt, bezahlt der Versicherungsnehmer über die gesamte Laufzeit hinweg jährlich die Prämie ein und erhält nach Ablauf der Laufzeit eine einmalige Auszahlung. Die jährliche Bruttoprämie wird vom Modell berechnet. Dazu benötigen wir in unserem Beispiel die Laufzeit n , den Diskontierungsfaktor d und die Erlebens- bzw. Ablebensleistung.

Es gilt

> *Vertragsdaten*

```
x n r d EL AL
1 30 5 0 1 100 100
```

Der Prämienzahlungsbarwert ergibt sich mit

$$PZBW = \sum_{j=0}^{n-1} {}_j p_x \cdot (P_{in})_j \cdot d^j,$$

mit

$$(P_{in})_t = \begin{cases} 1, & t < n \\ 0, & t = n. \end{cases}$$

Wobei ${}_l p_x$ die l -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x -jährigen bezeichnet und in diesem Beispiel konstant 1 ist, da wir ohne Sterbewahrscheinlichkeit rechnen. D.h. es gilt

$$PZBW = 5.$$

Der Erlebensbarwert berechnet sich durch

$$ELBW = \sum_{j=0}^n {}_j p_x \cdot (P_{out})_j \cdot d^j,$$

mit

$$(P_{out})_t = \begin{cases} 0, & t < n \\ 1, & t = n. \end{cases}$$

P_{in} bzw. P_{out} geben an wie lange die Prämien einbezahlt werden, bzw. wann die Auszahlung erfolgt.

Der Ablebensbarwert ist $ALBW = 0$, da wir keine Sterbewahrscheinlichkeit berücksichtigen.

Ohne Kosten ($Kosten = 0$) ergibt sich eine jährliche Bruttoprämie von

$$\begin{aligned} BP &= \frac{EL \cdot ELBW + AL \cdot ALBW + EL \cdot Kosten}{PZBW} \\ &= 20. \end{aligned}$$

Die anfängliche Deckungsrückstellung wird folgendermaßen modelliert. Zuerst berechnen wir die minimale Deckungsrückstellung V_0 (ohne Gewinnbeteiligung) laut UGB. Da ${}_j q_x \equiv 0 \forall j$, folgt ${}_j p_x = 1 - {}_j q_x \equiv 1 \forall j$.

$$V_0 = d \cdot {}_1 p_x \cdot DR_0^{\text{UGB}} + d \cdot {}_1 q_x \cdot AL$$

DR_0^{UGB} bezeichnet die Deckungsrückstellung laut UGB zum Zeitpunkt 0. Bei ihrer Berechnung wird die bisherige Vertragslaufzeit schon berücksichtigt.

Der Prämienzahlungsbarwert ist $PZBW = 1$, der Erlebensbarwert beträgt $ELBW = 1$ und der Ablebensbarwert ist 0, wie oben.

Insgesamt ergibt sich für die anfängliche Deckungsrückstellung ohne Gewinnbeteiligung

$$\begin{aligned} DR_0^{\text{UGB}} &= EL \cdot ELBW + AL \cdot ALBW - BP \cdot PZBW \\ &= 80, \end{aligned}$$

und eingesetzt in V_0 liefert das $V_0 = 80$.

Die Deckungsrückstellung zum Zeitpunkt 0 mit Gewinnbeteiligung wird folgendermaßen modelliert:

$$\begin{aligned} DR_0 &= V_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(10 \cdot BLZ) \cdot \frac{1}{5}\right) \\ &= 95,6606 \end{aligned}$$

Die Projektionsdauer ist $T = LZ - BLZ = 2$. Für die Gewinnbeteiligung GB_0 ergibt sich

$$\begin{aligned} GB_0 &= (DR_0 - V_0)_+ \\ &= 15,6606. \end{aligned}$$

Die freie RfB zum Zeitpunkt 0 beträgt 5% der Deckungsrückstellung zur Zeit 0, d.h.

$$fRfB_0 = 4,78303.$$

Der Garantiezins ist $GZ_0 = 0$.

2.4.1 Modellierung mit Cash

Kommen wir nun zur Erzeugung der Assets. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Cash. Es werden also keine Bonds, Aktien oder Immobilien erzeugt.

Als erstes werden Zinsszenarien in das Modell eingelesen. Dabei handelt es sich um eine Matrix, die in der 1. Spalte die Spot Rates zum Zeitpunkt 0 stehen hat, in der 2. Spalte die Spot Rates zum Zeitpunkt 1, usw. In der 1. Zeile stehen dann die 1-jährigen Forward Rates. Auf diese Matrix wird später bei der Verzinsung zugegriffen.

Der Buchwert der Assets beträgt zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} BV_0 &= fRfB_0 + DR_0 \\ &= 100,44363. \end{aligned}$$

Da es nur Cash gibt, gilt

$$CP_0 = 1.$$

CP bezeichnet den Cash-Prozentsatz der Assets. Wenn wir Cash zur Zeit t mit C_t bezeichnen, folgt

$$\begin{aligned} C_0 &= BV_0 \cdot CP_0 \\ &= 100,44363. \end{aligned}$$

Die Überschüsse zur Zeit 0 betragen

$$\begin{aligned} surplus_0 &= BV_0 - (fRfB_0 - DR_0 - GB_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

und $ROA_0 = 0$, da noch keine Rendite auf die Assets gemacht wurden. In den späteren Zeitpunkten ist $ROAP$ immer die Forward Rate zum jeweiligen Zeitpunkt. Deshalb ist auch $UR_t = 0$ für alle t .

Insgesamt ergibt sich zur Zeit 0 ein Portfolio mit folgenden Werten

BV_0	sR_0	surplus_0	cash_0	CP_0	ROA_0	DR_0	fRfB_0
100.44	0.00	0.00	100.44	1.00	0.00	95.66	4.78

Wir haben das Asset-Portfolio erzeugt und projizieren als nächstes die Deckungsrückstellung und die Gewinnbeteiligung für $T = 2$ Jahre, sowie die Bemessungsgrundlage, die freie RfB und die Zahlungen an den Shareholder. Der Best Estimate wird auch für 2 Jahre projiziert.

Lt. Gleichung (2.9) ist der Best Estimate die Summe aus den zukünftigen diskontierten Cash Flows.

Der diskontierte Cash Flow setzt sich zum Zeitpunkt $t = 1$ aus der Prämie und den Steuern zusammen und beträgt

$$CF_1 = -19,9298.$$

Im Zeitpunkt $t = 2$, in dem der Vertrag ausläuft, muss die Versicherungssumme sowie die Gewinnbeteiligung ausbezahlt werden. Wenn wir die Summe aus den beiden noch diskontieren, folgt

$$CF_2 = 114,982.$$

Der Best Estimate ist dann

$$\begin{aligned} BE &= CF_1 + CF_2 \\ &= 95,0522. \end{aligned}$$

Wie oben erwähnt und wie wir in Kapitel 5 noch sehen werden, ist LT ein Test zur Überprüfung, ob auch wirklich nirgends Geld einfach auftaucht bzw. verschwindet.

LT ergibt sich einerseits aus der Summe der Buchwerte der Assets zum Zeitpunkt 0, sowie der Überschüsse und unrealisierten Gewinne, von der dann der Best Estimate, die Steuern, der Shareholder Cash Flow und die erwarteten diskontierten Buchwerte der Assets zum Zeitpunkt $T = 2$ abgezogen werden.

Die Assets zur Zeit $t = 0$ sind

$$\begin{aligned} Asset_0 &= DR_0 + fRfB_0 + sR_0 + surplus_0 \\ &= 100,44363. \end{aligned}$$

Zur Zeit $T = 2$ erhalten wir $Asset_T = 5,30292$. Das entspricht der diskontierten Summe aus freier RfB, Gewinnbeteiligung und vorhandenen Überschüssen. Für die Garantiekosten gilt $COG = 0$ und für die Gewinne der Shareholder $SHG = 0,08907$.

Insgesamt ergibt das

$$\begin{aligned} LT &= Asset_0 - Asset_T - \sum SHG + \sum COG - BE \\ &= 100,44363 - 5,30292 - 0,08907 + 0 - 95,0522 \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

Für nicht gerundete Werte ist $LT = 0$.

2.4.2 Modellierung mit einem Bond

Als Vergleich sehen wir uns nun dieselbe Modellierung mit einem Bond mit Restlaufzeit 5 Jahren statt Cash an.

Bis zur Berechnung des Buchwertes der Assets zum Zeitpunkt 0 verläuft die Modellierung analog. Danach setzen wir den anfänglichen Prozentsatz der Bonds auf 100%, d.h.

$$BP_0 = 1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} Bond_0 &= BP_0 \cdot BV_0 \\ &= 100,44363, \end{aligned}$$

wobei $Bond_t$ den Wert des Bonds zur Zeit t bezeichnet.

Da der Vertrag nur noch $T = 2$ Jahre läuft, ist der Kupon die 2-jährige Spot Rate 0,004374. Die Nominale beträgt $N = 100,443$.

Wiederum haben wir das Asset-Portfolio erzeugt und projizieren als nächstes die Deckungsrückstellung, die Gewinnbeteiligung, die Bemessungsgrundlage und freie RFB, sowie die Zahlungen an den Shareholder.

Wir werden hier jetzt nicht auf jeden Berechnungsschritt eingehen. Die genaue Entwicklung entnehmen wir Abbildung (2.2). Der Best Estimate ergibt sich wieder als Summe der diskontierten Cash Flows und ist

$$\begin{aligned} BE &= CF_1 + CF_2 \\ &= 95,101968. \end{aligned}$$

Um LT zu berechnen, benötigen wir folgende Werte.

$$\begin{aligned} Asset_0 &= 100,4436 \\ Asset_T &= 5,3084673. \end{aligned}$$

Für die Garantiekosten gilt wieder $COG = 0$ und die Gewinne der Shareholder sind $SHG = 0,0944597$.

LT ist demnach

$$LT = -0,061297.$$

Da wir nicht deterministisch sondern mit einem stochastischen Zinsszenario gerechnet haben, steht die zukünftige Entwicklung der Bond-Preise noch nicht fest und LT ist nicht automatisch 0. In Kapitel 5 werden wir noch sehen, dass LT trotzdem gegen 0 konvergiert, wenn die Anzahl der Zinsszenarien groß genug ist.

Der Output beim Best Estimate Modell der FMA entspricht einer Excel-Datei, die alle erforderlichen Ergebnisse zusammenfasst. In Abbildung (2.1) sehen wir einen Teil des Outputs für unser Beispiel, in dem wir nur mit Cash modelliert haben. In Abbildung (2.2) ist der Output für das Beispiel mit der Modellierung mit einem Bond.

Balance Sheet										
BE	DR	frFB	sR	surplus	VIF	SH_gains	COG	LT		
95,05	95,66	4,78	0	0	0,09	0,09	0	0		
99,36	100	5	0	0	0,09	0,09	0	0		
Vergleich mit DR (in %):										
Projektion der DR										
DRproj										
Jahr_0	Jahr_1	Jahr_2								
95,660595	115,89916	0								
BemGrü GewBet frFB SH										
t=0	0	15,66	0	4,78	0					
t=1	0,2945266	0,24	0,25	4,81	0,0294527					
t=2	0,5962231	0	0	5,35	0,0596223					
DR SH_val cf bp zg el al ko tax										
t=0	95,660595	95,052199	0,088504							
t=1	115,54905	114,98199	0,0591403	-19,929795	-19,939583	-0,3034248	0	0	0	0,009787897
t=2	0	0	0	114,98199	0	-0,6111169	114,96228	0	0	0,019713449
Asset Daten										
BW	sR	surplus	cash	CP	BP	EP	RP	ROA	ROAP	
t=0	100,44362	0	0	100,44362	1	0	0	0	0	0
t=1	120,7087	0	4,441E-15	120,7087	1	0	0	0	0,3043442	0,303
t=2	5,3461379	0	4,441E-15	5,3461379	1	0	0	0	0,6160972	0,5104

Abbildung 2.1: Ergebnisse der Modellierung eines Vertrages (mit Cash)

Balance Sheet											
BE	DR	frfB	sR	surplus	VfF	SH_gains	COG	LT			
95,1	95,66	4,78	0	0	0,09	0,09	0	-0,06			
99,41	100	5	0	0	0,09	0,09	0	-0,06			
Vergleich mit DR (in %):											
Projektion der DR											
DRproj											
Jahr_0	Jahr_1	Jahr_2									
Vertrag 1	95,660595	115,94734	0								
BemGru											
GewBet	GZ	frfB	SH								
t=0	0	15,66	0	4,78	0						
t=1	0,3540006	0,29	0,3	4,81	0,0354001						
t=2	0,5964875	0	0	5,35	0,0596487						
Asset Daten											
DR	be	SH_val	cf	bp	zg	el	al	ko	tax		
t=0	95,660595	95,101969	0,0944597								
t=1	115,59708	115,02979	0,0591666	-19,927819	-19,939583	-0,3646956	0	0	0	0,011764375	
t=2	0	0	0	115,02979	0	-0,6113879	115,01007	0	0	0,019722191	
BW	sR	surplus	cash	CP	BP	EP	RP	ROA	ROAP		
t=0	100,44362	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
t=1	120,76223	0	-1,066E-14	12,076223	0,1	0,9	0	0	0,3658007	0,364185037	
t=2	5,3517285	0	-1,066E-14	5,3517285	1	0	0	0	0,6163704	0,5104	

Abbildung 2.2: Ergebnisse der Modellierung eines Vertrages (mit einem Bond)

Kapitel 3

Vergleich von drei Zinsmodellen

Wir vergleichen nun drei verschiedene Zinsmodelle.

Wie im vorigen Kapitel beschrieben, werden in das Best Estimate Modell der FMA [6] Verträge eingelesen, Parameter gewählt und Zinsszenarien übergeben, um den gewünschten Output zu erhalten.

Zum Vergleich wurden 24 Verträge vom Typ a (Kapitalversicherung mit Gewinnbeteiligung) herangezogen. Alle Verträgen wurden selbst konstruiert.

Zwei Zinsmodelle habe ich von [6] zur Verfügung gestellt bekommen. Es handelt sich bei beiden um Spot Rate Matrizen, die in das Best Estimate Modell eingelesen werden.

Das dritte Modell wurde von Clemens Burger, BSc, im Rahmen seiner Diplomarbeit entwickelt. [14] Es entspricht einem LIBOR Market Modell und basiert auf der im Kapitel 1.5.3 beschriebenen Monte Carlo Methode.

Um die benötigten Forward Rates zu erhalten, werden zuerst die EIOPA Spot Rates in Forwards umgewandelt.

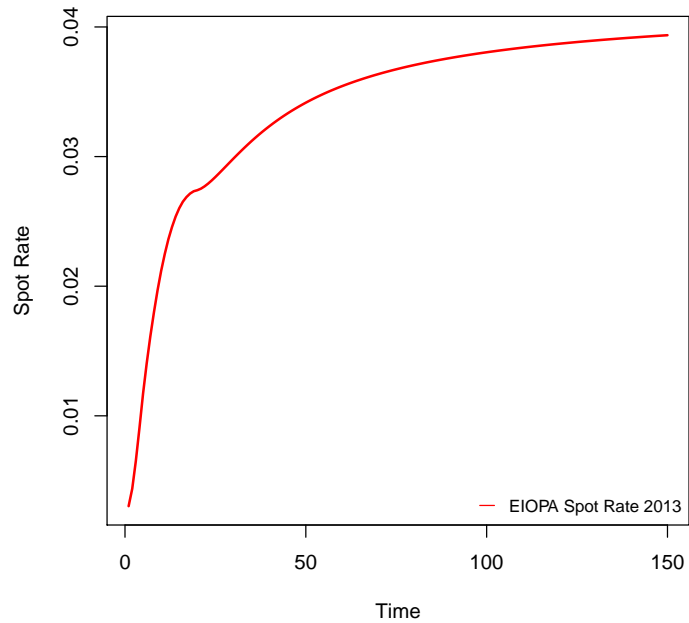


Abbildung 3.1: EIOPA Spot Rate 2013

Die erforderlichen Swaptionvolatilitäten und Korrelationen stammen von [6].

Wir berechnen aus der aktuellen Forwardkurve, aus historischen Korrelationen $\rho_{mn}(t)$ [6] und aus aktuellen Swaption Volatilitäten $\sigma_m^{swap}(t)$ [6] die Volatilitäten $\sigma_m^{FR}(t)$ der LIBOR Forward Rates.

Die Forwardkurve sieht so aus: (in % und gerundet)

```
> forward[1:20]
```

```
[1] 0.3030000 0.5719671 1.0831567 1.6720555 2.2451017 2.5727880 2.8666940
[8] 3.1082831 3.3390965 3.4830561 3.5596453 3.6226378 3.5955965 3.5861240
[15] 3.5065315 3.4106972 3.2642461 3.1740839 3.0512864 2.8951763
```

Anschließend werden Zinsszenarien erzeugt, die Forward Rates enthalten. Diese müssen nun wieder in Spot Rates umgewandelt werden, um in das Best Estimate Modell eingelesen werden zu können.

Wir verwenden im folgenden 24 Verträge und eine wachsende Anzahl von Zinsszenarien. Wie im vorigen Kapitel beschrieben, ist ein Szenario eine Matrix, in deren 1. Spalte die Spot Rates zur Zeit $t = 0$ stehen, in der 2. Spalte die Spot Rates zur Zeit $t = 1$ und so weiter.

Als erstes rechnen wir mit 10 und anschließend mit 100 Szenarien.

Das Szenario "M1" von [6] hat als Basiszinskurve die EIOPA Spot Rate (in %).

```
> eiopa_spot_rate <- 100*eiopa_spot[1:20]
> eiopa_spot_rate

[1] 0.3030000 0.4373935 0.6521882 0.9061919 1.1725638 1.4046000 1.6121913
[8] 1.7980091 1.9680998 2.1185920 2.2487640 2.3625544 2.4568805 2.5371309
[15] 2.6014742 2.6518646 2.6877863 2.7147426 2.7324280 2.7405593
```

Das Szenario "M2" rechnet mit einer etwas höheren Kurve als Anfangswert (in %).

```
> spot_rate_M2

[1] 0.556496 0.690962 0.905952 1.160279 1.414134 1.659719 1.867725 2.054037
[9] 2.224613 2.375580 2.506167 2.620325 2.715051 2.795653 2.860215 2.910785
[17] 2.946794 2.973735 2.991420 2.999442
```

In Abbildung 3.2 sehen wir die Ergebnisse der Modellierung mit 10 Zinsszenarien.

BE_szen_10_M1	BE_szen_10_M2	BE_szen_10_C
68637.51	80384.41	73981.41

Das Modell "M2" weist den größten Best Estimate auf, wohingegen das Modell "M1" den kleinsten Best Estimate hat. Die Deckungsrückstellung ist, unabhängig vom verwendeten Zinsmodell,

```
> DR <- 49756.17
```

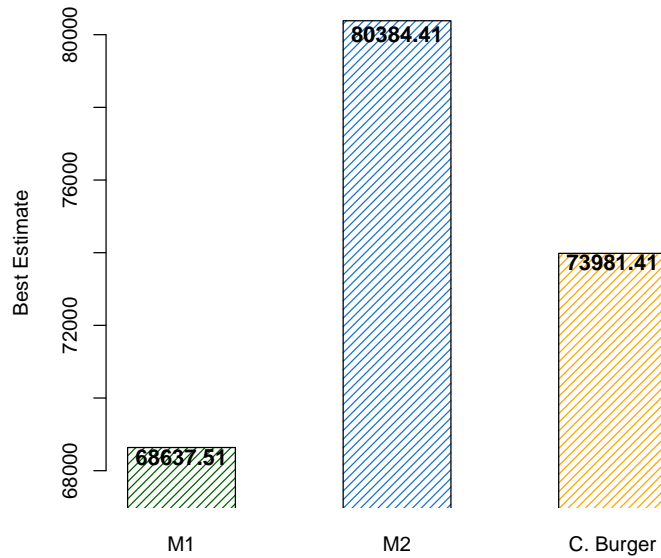


Abbildung 3.2: Best Estimate mit 10 Zinsszenarien

Bei 100 Szenarien sind die Unterschiede nicht mehr ganz so groß wie bei 10 Szenarien, siehe (Abbildung 3.3).

BE_szen_100_M1	BE_szen_100_M2	BE_szen_100_C
70437.74	73339.95	70888.35

Welchen Prozentsatz das im Vergleich zur Deckungsrückstellung ausmacht, zeigt uns die nächste Tabelle.

	M1	M2	M3
BE	70437.74	73339.95	70888.35
% der DR	141.57	147.40	142.47

Der Best Estimate im Modell "M2" ist bzgl. der Deckungsrückstellung um 5.83% höher als in Modell "M1". Zwischen dem Modell "M2" und dem Modell von C.

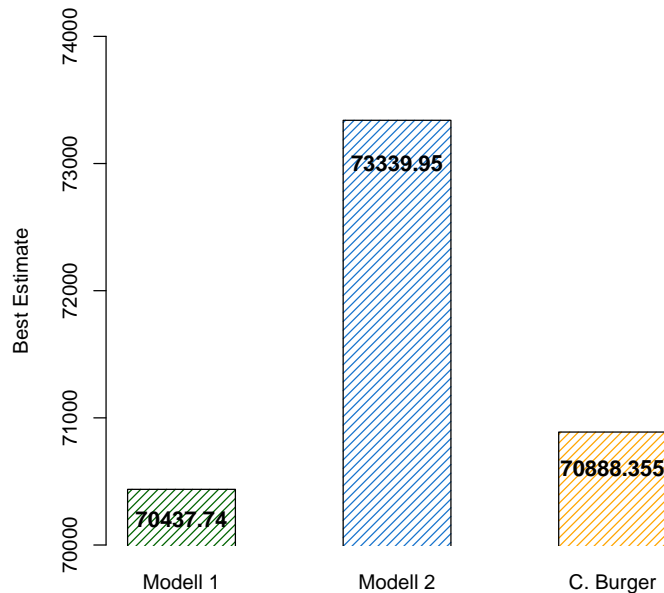


Abbildung 3.3: Best Estimate 100 Zinsszenarien

Burger beträgt der Unterschied im Bezug auf die Deckungsrückstellung 4.93%. Wenn der Best Estimate eines großen Versicherungsunternehmens mehrere Milliarden Euro beträgt, ist ein Unterschied von ca. 5% also nicht zu vernachlässigen. 1% vom Best Estimate beträgt etwa 10% der Eigenmittel.

In einem guten *Asset-Liability-Management* Modell mit guten Assets kann man das Ergebnis des Best Estimates als mehr oder weniger unabhängig von den verwendeten Szenarien betrachten. Die Garantiekosten hingegen hängen stark von den Szenarien ab. Folgende Tabelle gibt die Garantiekosten sowie die Kosten in Prozent der Deckungsrückstellung der drei verschiedenen Modelle an.

	M1	M2	M3
COG	16947.27	21288.12	17951.73
% der DR	34.06	42.78	36.08

Zwischen Modell "M1" und Modell "M2" beträgt der Unterschied der Garantiekosten 8,74% in Bezug auf die Deckungsrückstellung.

Die Garantiekosten sind Bestandteil des Value of In-Force Business. Es gilt

$$VIF = SHG - COG.$$

Je größer *COG* ist, umso kleiner wird *VIF*, was sich wiederum auf den Market Consistent Embedded Value auswirkt (siehe Kapitel 2), der sich dann in den Geschäftsplänen der Versicherungsunternehmen wiederfindet.

Kapitel 4

Deterministisch vs. Stochastisch

In diesem Kapitel werden die Unterschiede des Best Estimates hinsichtlich unterschiedlicher Basiszinskurven bzw. hinsichtlich deterministischer bzw. stochastischer Modellierung untersucht.

Es wurden 12 selbst konstruierte Verträge für die Berechnungen verwendet. Zuerst sehen wir uns die deterministische Modellierung an.

Hier wird mit nur einem Zinsszenario gerechnet. Die Basiszinskurve ist einerseits die EIOPA Spot Rate 2013 und zum Vergleich sehen wir uns die nach unten geschockte EIOPA Spot Rate 2013 (in %) an.

```
> eiopa_spot_down_shock[1:20]
```

```
[1] 0.1430000 0.1240883 0.0804598 0.2767095 0.4839892 0.6767186 0.8443931  
[8] 1.0054705 1.1503432 1.2753714 1.3954517 1.4993012 1.5841359 1.6551568  
[15] 1.7107836 1.7529730 1.7813890 1.8012115 1.8122644 1.8143966
```

Je niedriger wir die Basiszinskurve in diesem Modell wählen, umso höher resultiert der Best Estimate.

Als erstes wird also deterministisch mit der EIOPA Spot Rate 2013 als Basiszinskurve gerechnet. Der Best Estimate beträgt

```
> BE_eiopa_det
```

```
[1] 154029.8
```


Wenn wir nun dieselben Berechnungen mit der nach unten geschockten EIOPA Spot Rate durchführen, sehen wir, dass der Best Estimate größer wird.

```
> BE_eiopa_down_shock_det
```

```
[1] 163415.3
```

Die Differenz der Best Estimates bei deterministischer Berechnung beträgt

```
> BE_diff_det <- BE_eiopa_down_shock_det - BE_eiopa_det
```

```
> BE_diff_det
```

```
[1] 9385.5
```

Dieses Ergebnis vergleichen wir nun mit der Differenz bei stochastischer Berechnung. Ist der Unterschied auch so groß bzw. vielleicht noch größer?

Wir führen die stochastische Berechnungen im Modell von C. Burger durch und rechnen mit 100 Zinsszenarien.

Als erstes wurden die Szenarien auf die EIOPA Kurve kalibriert. Der Best Estimate beträgt

```
> BE_eiopa_stoch
```

```
[1] 159809.3
```

Bei Kalibrierung auf die nach unten geschockte EIOPA Kurve erhalten wir

```
> BE_eiopa_down_shock_stoch
```

```
[1] 169156.8
```

Die Differenz beträgt

```
> BE_diff_stoch <- BE_eiopa_down_shock_stoch - BE_eiopa_stoch
```

```
> BE_diff_stoch
```

```
[1] 9347.58
```

Sie ist demnach annähernd gleich groß wie bei deterministischer Betrachtung. Mit der nach unten geschockten Zinskurve erhalten wir einen Best Estimate der um 5.84% größer ist, als mit der "normalen" Zinskurve.

```
> BE_diff_stoch_prozent
```

```
[1] 5.84921
```

Die Ergebnisse der Vergleiche werden in der nachstehenden Grafik noch einmal zusammengefasst.

In Abbildung (4.2) sieht man die Differenz zwischen einerseits deterministischer und stochastischer Berechnungen mit der EIOPA Spot Rate und andererseits mit der nach unten geschockten EIOPA Spot Rate.

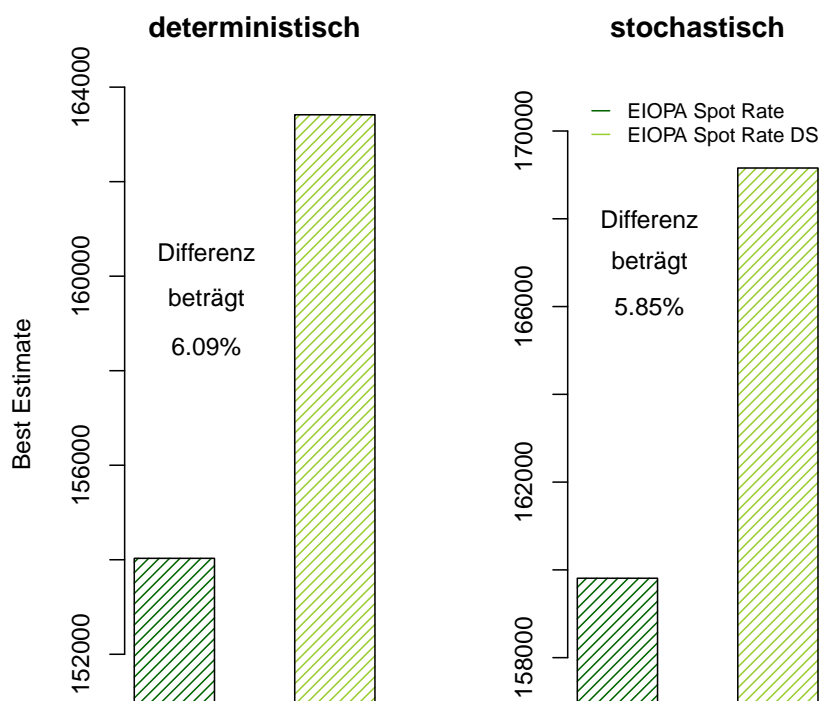


Abbildung 4.1: Deterministisch vs. Stochastisch

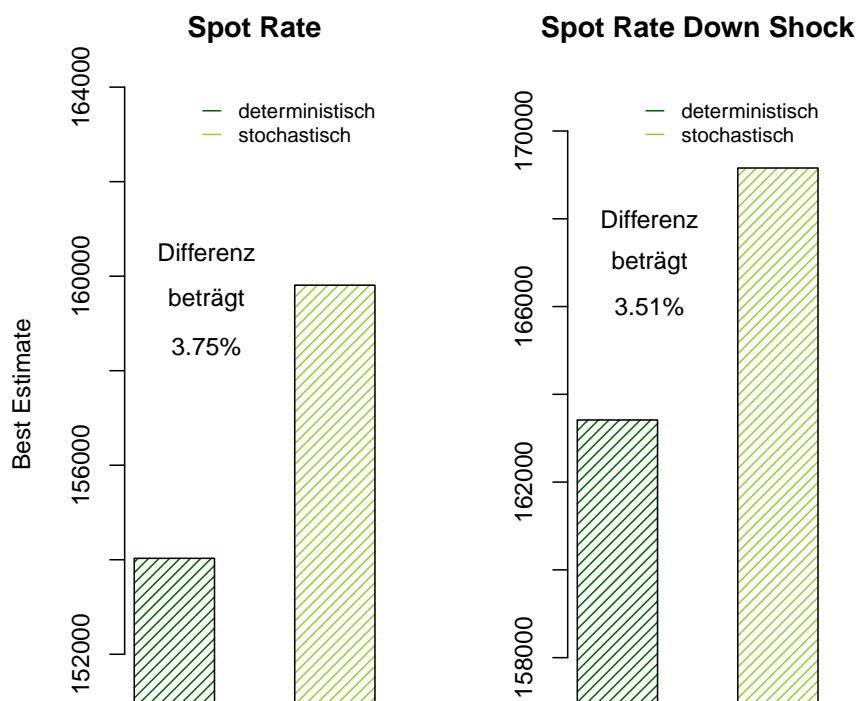


Abbildung 4.2: EIOPA Spot Rate vs. EIOPA Spot Rate Down Shock

Kapitel 5

Leakage Test

In Formel (2.9) haben wir gesehen, dass die Summe aus Buchwerten, Überschüssen und unrealisierten Gewinnen, auf der linken Seite der Gleichung, zum Zeitpunkt 0 genau so hoch sein müssen wie auf der rechten Seite die Summe des Best Estimates, der Steuern, des Share Holder Cash Flows und des erwarteten diskontierten Buchwertes zum Zeitpunkt T . Der Erwartungswert der Buchwerte sollte für $T \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen. Das überprüfen wir in diesem Kapitel mit einem sogenannten *Leakage Test*.

Wir definieren

$$\begin{aligned} LT := & (BV_0 + BSF_0 + UG(0)) \\ & - SHG + COG - BE - TAX \\ & - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[B_T^{-1} (BV_T + BSF_T) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Wenn der Erwartungswert gegen 0 konvergiert, dann müsste LT auch gegen 0 konvergieren.

Wir wählen für die folgenden Berechnungen einen Vertrag mit langer Laufzeit aus.

Typ	RZ	Alter	EL	AL	LZ	BLZ	10	EE
a	3.50	60	10000	10000	50	45	1	n

LT soll nun für 10, 100 bzw. 1000 Szenarien berechnet werden.

Mit einer hinreichenden Anzahl von Zinsszenarien konvergiert bei allen drei Modellen $LT \rightarrow 0$.

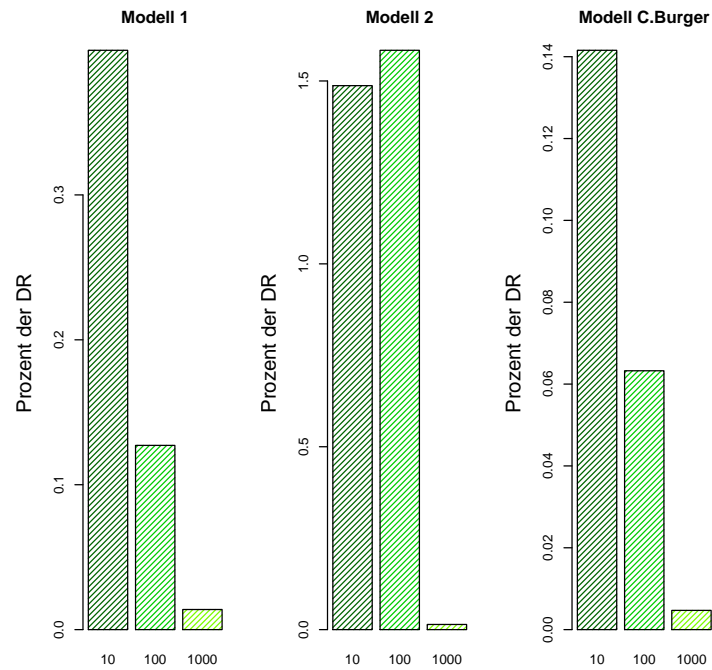


Abbildung 5.1: Vergleich Leakage Test (in%)

In Abbildung (5.1) sieht man LT bzgl. den Assets zum Zeitpunkt 0.

Wenn man mit größeren Portfolios rechnet, sprich mit mehr Verträgen, kommt man zu dem selben Ergebnis - LT geht für eine große Anzahl an Szenarien gegen 0.

Bei deterministischer Berechnung ist LT (bis auf Unschärfen) exakt gleich 0, da die zukünftige Entwicklung der Bond-Preise zum Zeitpunkt $t = 0$ schon feststeht.

Kapitel 6

Verteilung des Best Estimates

Bei der Berechnung mit n Zinsszenarien erhalten wir n Best Estimates. Nach der Monte Carlo Methode (vgl. Kapitel 1.5.3) wird davon dann das arithmetische Mittel gebildet. Wir können uns also die Verteilung dieser Best Estimate Werte ansehen.

Dazu verwenden wir Boxplots.

Ein Boxplot ist ein Diagramm, welches man zur grafischen Darstellung der Verteilung von Daten verwendet.

In der Box liegen die mittleren 50% der Daten, mit einer Linie an der Stelle des Medians. Der Median teilt das gesamte Diagramm in zwei Hälften, in denen jeweils 50% der Daten liegen. Durch seine Lage innerhalb der Box bekommt man einen Eindruck von der Schiefe der Verteilung.

Minimum und Maximum der Daten sind sehr empfindlich gegenüber extremen Datenpunkten, dies würde den grafischen Eindruck verfälschen. Deshalb verwendet man das Konzept des "potentiellen Ausreißers". Dabei handelt es sich um Punkte, die außerhalb der Einzäunung liegen. Sie werden als einzelne Punkte dargestellt. Die Linien, die sich vom Rand der Box bis zu den äußersten Punkten innerhalb der Einzäunung erstrecken nennt man "Whiskers". [17]

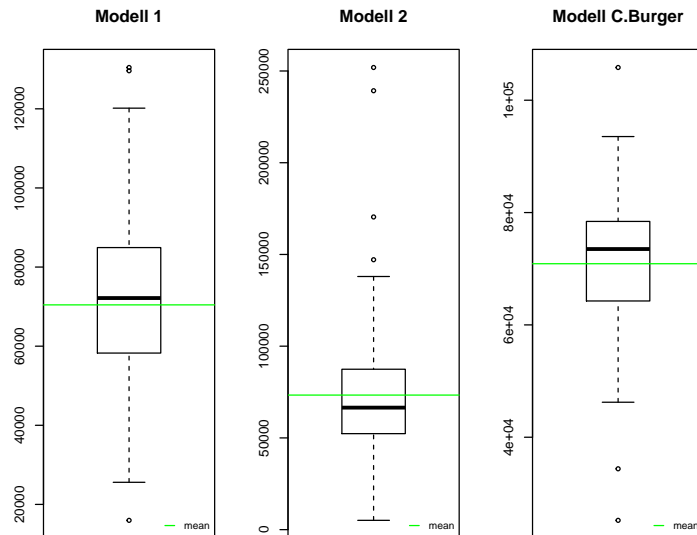


Abbildung 6.1: Verteilung des Best Estimates

Bei Modell "M1" und beim Modell von C. Burger kann man eine linksschiefe Verteilung erkennen, da der Median über dem arithmetischen Mittel liegt. Bei Modell "M2" hingegen, liegt eine rechtsschiefe Verteilung vor.

Die maximale Differenz bei den Ausreißern weist Modell "M2" auf. Hier liegt der minimale Best Estimate unter den 100 Szenarien bei

```
> BE_M2_min
```

```
[1] 5066.07
```

und der maximale ist

```
> BE_M2_max
```

```
[1] 251902.6
```

Es ergibt sich eine Differenz von

```
> BE_M2_diff <- BE_M2_max - BE_M2_min
```

```
> BE_M2_diff
```

```
[1] 246836.5
```

Dieser Wert ist ca. doppelt so groß wie die Differenz bei Modell "M1" und dreimal so groß wie beim Modell von C. Burger.

Kapitel 7

R-Code [13]

7.1 Beispiel - Bewertung von Caps

7.1.1 Funktion

```
> sigma <- c(NaN,0.293,0.293,0.293,0.208,0.208,0.183,0.183,0.178,
+           0.178,0.163,0.163,0.167,0.167,0.161,0.161,0.157,0.157,0.157,0.157)
> M=20
> beta=2.1
> sigma_m <- function(t,beta){
+   for (i in 1:(M+1)){
+     T[i]<-(i-1)/2 #Zeitschritte
+   }
+   v <- double(M-1)
+   for (i in 1:(M-1)){
+     v[i]<-sqrt(((sigma[i+1])^2*T[i+1]*2*beta)/(1-exp(-2*beta*T[i+1]))))
+   }
+   sigma_m1 <-double(M-1)
+   for (i in 1:(M-1)){
+     sigma_m1[i]<-v[i]*exp(-beta*(T[i+1]-t))
+   }
+   sigma_m1
+ }
> for (i in 1:(M+1)){
+   T[i]<-(i-1)/2
+ }
> eta <- function(t,T){
+   for (i in 1:M){
+     if(T[i]<=t && t<T[i+1]){
```



```

+     eta<-i
+   }
+ }
+ eta
+}
> delta = 0.5
> alpha_m <- function(t,beta,h){
+   m<-length(h)-1
+   k<-eta(t,T)
+   help_summe <- 0
+   if(k<=m){
+     for(j in (k+1):(m+1)){
+       help_summe <- help_summe + ((delta*exp(h[j]))/(1+delta*exp(h[j]))
+                                     *sigma_m(t,beta)[j-1])
+     }
+   }
+   alpha <- sigma_m(t,beta)[m]*help_summe-1/2*(sigma_m(t,beta)[m])^2
+   alpha
+}
> N<-20
> t<-seq(from=0,to=10,by=0.5)
> dt<-t[2]
> ##L1 entspricht L(0,T_i);
> L2 <- c(4.228,2.791,3.067,3.067,3.728,3.728,4.051,4.051,4.199,4.199,
+         4.450,4.450,4.626,4.626,4.816,4.816,4.960,4.960,5.088,5.088)
> L1 <- L2/100
> ##H1 entspricht H_i(0): H_1(0),...,H_20(0)
> H1 <- log(L1)
> L_function <- function(beta){
+   H <- matrix (0,nrow=M,ncol=N)
+   H[,1]<-H1
+   for (i in 1:19){
+     for (j in 1:i){
+       H[i+1,j+1] <- H[i+1,j] + alpha_m(t[j],beta,H[1:(i+1),j])*dt
+                                     + sigma_m(t[j],beta)[i]*rnorm(1,0,1)*sqrt(dt)
+     }
+   }
+   L <- matrix(0,nrow=M,ncol=N)
+   for (i in 1:20){
+     for (j in 1:i){
+       L[i,j]<-exp(H[i,j])

```

```

+   }
+ }
+ for (i in 1:19){
+   for (j in (i+1):20){
+     L[i,j]<-NaN
+   }
+ }
+ L
+}
> K=10
> LL=list()
+ for (s in 1:K){
+   LL[[s]]=L_function(beta)
+}
> CC=list()
> kappa=0.035
> BB=list() #implied market account
> for(j in 1:K){
+   BB[[j]] <- double(19)
+}
> for (j in 1:K){
+   for (i in 1:19){
+     BB[[j]][1] <- 1
+     BB[[j]][i+1] <- (1+delta*LL[[j]][i,i])*BB[[j]][i]
+   }
+}
> for (i in 1:19){
+   for (j in 1:K){
+     pi[j] <- delta*(max(LL[[j]][i+1,i+1]-kappa,0))/BB[[j]][i+1]
+   }
+   CC[[i]] <-pi
+}
> arith_mitt <- double(19)
> for (i in 1:19){
+   arith_mitt[i] <- sum(CC[[i]])/K
+}
> cap <- double(20)
> cap[1] <- arith_mitt[1]
> for (i in 1:19){
+   cap[i+1] <- cap[i] + arith_mitt[i+1]
+}

```

```

> cap <- cap*100
> datentabelle <- data.frame(Fälligkeit = seq(from=1,to=20,by=1), Caps = cap)
> datentabelle

```

7.1.2 Abbildung 1.1

```

> plot(Cap_Vergleich[[2]][,1],type="l",col="green",lwd=3,axes=FALSE,
+      main="Bewertung von Caps",xlab="Fälligkeit",ylab="Cap",col.main="black")
> xtickplaces <- seq(from=0,to=20,by=1)
> ytickplaces <- seq(from=0,to=12,by=2)
> axis(side=1, at=xtickplaces,col="black")
> axis(side=2, at=ytickplaces,col="black")
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.25,0.77,1.485,2.305,3.255,4.315,5.455,6.64),
+       col="red",type="l")
> legend("topleft", c("Euro Cap Prices","simulated Cap Prices"),lty=c(1,1),
+       lwd=c(2,3),col=c("red","green"),border = "black")

```

7.1.3 Abbildung 1.2

```

> plot(Cap_Vergleich[[1]][,1],type="l",col="green",lwd=2,axes=FALSE,
+      xlab="Fälligkeit",ylab="Cap",col.main="black")
> xtickplaces <- seq(from=0,to=20,by=1)
> ytickplaces <- seq(from=0,to=12,by=2)
> axis(side=1, at=xtickplaces,col="black")
> axis(side=2, at=ytickplaces,col="black")
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.25,0.77,1.485,2.305,3.255,4.315,5.455,6.64),
+       col="red",type="l",lwd=3)
> lines(Cap_Vergleich[[2]][,1],type="l",col="blue",lwd=2)
> lines(Cap_Vergleich[[3]][,1],type="l",col="brown",lwd=2)
> lines(Cap_Vergleich[[4]][,1],type="l",col="orange",lwd=2)
> legend("topleft", c("Euro Cap Prices","beta=0.5","beta=1.5","beta=2.1","beta=3"),
+       lty=c(1,1),lwd=c(2,3),col=c("red","green","blue","brown","orange"),
+       border = "black")

```

7.1.4 Abbildung 1.3

```

> par(mfrow=c(2,1),mar=c(3,2,2,2))
> plot(Cap_Vergleich[[2]][,2],type="l",col="blue3",lwd=3,axes=FALSE,
+      xlab="Fälligkeit",ylab="Cap",col.main="black")
> xtickplaces <- seq(from=0,to=20,by=1)
> ytickplaces <- seq(from=0,to=12,by=2)
> axis(side=1, at=xtickplaces,col="black")
> axis(side=2, at=ytickplaces,col="black")

```

```

> title(main="beta=1.5")
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.11,0.405,0.86,1.405,2.06,2.835,
+     3.685,4.59),col="blue1",type="l",lwd=1)
+     #Marktpreise für kappa=4%
> points(Cap_Vergleich[[2]][,3],type="l",col="green3",lwd=3)
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.05,0.215,0.485,0.82,1.255,
+     1.78,2.38,3.045),col="green1",type="l",lwd=1)
+     #Marktpreise für kappa=4.5%
> points(Cap_Vergleich[[2]][,4],type="l",col="red3",lwd=3)
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.025,0.12,0.27,0.475,0.745,
+     1.09,1.495,1.965),col="red1",type="l",lwd=1)
+     #Marktpreise für kappa=5%
> points(Cap_Vergleich[[2]][,5],type="l",col="orange3",lwd=3)
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.015,0.07,0.16,0.285,0.455,
+     0.68,0.95,1.27),
+     col="orange1",type="l",lwd=1) #Marktpreise für kappa=5.5%
> legend("topleft", c("Euro Cap Prices für kappa=4%",
+     "simuliert für kappa=4%",
+     "Euro Cap Prices für kappa=4.5%",
+     "simuliert für kappa=4.5%",
+     "Euro Cap Prices für kappa=5%",
+     "simuliert für kappa=5%",
+     "Euro Cap Prices für kappa=5.5%",
+     "simuliert für kappa=5.5%"),
+     lty=c(1,1),lwd=c(2,3),col=c("blue1","blue3","green1",
+     "green3","red1","red3",
+     "orange1","orange3"),
+     border = "black", cex=0.5)
> plot(Cap_Vergleich[[3]][,2],type="l",col="blue3",lwd=3,axes=FALSE,
+     xlab="Fälligkeit",ylab="Cap",col.main="black")
> xtickplaces <- seq(from=0,to=20,by=1)
> ytickplaces <- seq(from=0,to=12,by=2)
> axis(side=1, at=xtickplaces,col="black")
> axis(side=2, at=ytickplaces,col="black")
> title(main="beta=2.1")
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.11,0.405,0.86,1.405,2.06,
+     2.835,3.685,4.59),
+     col="blue1",type="l",lwd=1) #Marktpreise für kappa=4%
> points(Cap_Vergleich[[3]][,3],type="l",col="green3",lwd=3)
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.05,0.215,0.485,0.82,1.255,
+     1.78,2.38,3.045),

```

```

+         col="green1",type="l",lwd=1) #Marktpreise für kappa=4.5%
> points(Cap_Vergleich[[3]][,4],type="l",col="red3",lwd=3)
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.025,0.12,0.27,0.475,0.745,
+     1.09,1.495,1.965),
+     col="red1",type="l",lwd=1) #Marktpreise für kappa=5%
> points(Cap_Vergleich[[3]][,5],type="l",col="orange3",lwd=3)
> points(c(4,6,8,10,12,14,16,18),c(0.015,0.07,0.16,0.285,0.455,
+     0.68,0.95,1.27),
+     col="orange1",type="l",lwd=1) #Marktpreise für kappa=5.5%

```

7.1.5 Abbildung 1.4

```

> par(mfrow=c(2,2),oma=c(0,0,0,0))
> x <- seq(0,9.5,by=0.5) #ist wie t
> y <- c(3.5,4,4.5,5,5.5)
> z_1.5 <- cbind(Cap_Vergleich[[2]][,1],Cap_Vergleich[[2]][,2],
+     Cap_Vergleich[[2]][,3],Cap_Vergleich[[2]][,4],
+     Cap_Vergleich[[2]][,5])
> persp(x,y,z_1.5,xlab="Fälligkeit",ylab="Strike",zlab="Cap Preis",
+     phi=10,theta=-50,main="für beta=1.5",ticktype="detailed",
+     expand=0.5,col="red")
> z_2.1 <- cbind(Cap_Vergleich[[3]][,1],Cap_Vergleich[[3]][,2],
+     Cap_Vergleich[[3]][,3],Cap_Vergleich[[3]][,4],
+     Cap_Vergleich[[3]][,5])
> #auf der z-Achse wird der Cap-Preis aufgetragen
> persp(x,y,z_2.1,xlab="Fälligkeit",ylab="Strike",zlab="Cap Preis",
+     phi=10,theta=-50,main="für beta=2.1",ticktype="detailed",
+     expand=0.5,col="lightblue")
> z_2.5 <- cbind(Cap_Vergleich[[4]][,1],Cap_Vergleich[[4]][,2],
+     Cap_Vergleich[[4]][,3],Cap_Vergleich[[4]][,4],
+     Cap_Vergleich[[4]][,5])
> persp(x,y,z_2.5,xlab="Fälligkeit",ylab="Strike",zlab="Cap Preis",
+     phi=10,theta=-50,main="für beta=2.5",ticktype="detailed",
+     expand=0.5,col="green")
> z_3 <- cbind(Cap_Vergleich[[5]][,1],Cap_Vergleich[[5]][,2],
+     Cap_Vergleich[[5]][,3],Cap_Vergleich[[5]][,4],
+     Cap_Vergleich[[5]][,5])
> persp(x,y,z_3,xlab="Fälligkeit",ylab="Strike",zlab="Cap Preis",
+     phi=10,theta=-50,main="für beta=3",ticktype="detailed",
+     expand=0.5,col="yellow",type="l")

```

7.1.6 Abbildung 1.5

```
> par(mfrow=c(2,2),mar=c(3,2,2,2))
> ## für Fälligkeit T_4=2
> plot(y,c(Cap_Vergleich[[3]][4,1],Cap_Vergleich[[3]][4,2],
+         Cap_Vergleich[[3]][4,3],Cap_Vergleich[[3]][4,4],
+         Cap_Vergleich[[3]][4,5]),type="l",col="red",
+     main="für Fälligkeit T_4=2",xlab="Strike",ylab="Cap Preis",
+     lwd=2)#[4] bedeutet T_4
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[2]][4,1],Cap_Vergleich[[2]][4,2],
+         Cap_Vergleich[[2]][4,3],Cap_Vergleich[[2]][4,4],
+         Cap_Vergleich[[2]][4,5]),type="l",col="green",lwd=2)
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[4]][4,1],Cap_Vergleich[[4]][4,2],
+         Cap_Vergleich[[4]][4,3],Cap_Vergleich[[4]][4,4],
+         Cap_Vergleich[[4]][4,5]),type="l",col="blue",lwd=2)
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[5]][4,1],Cap_Vergleich[[5]][4,2],
+         Cap_Vergleich[[5]][4,3],Cap_Vergleich[[5]][4,4],
+         Cap_Vergleich[[5]][4,5]),type="l",col="yellow",lwd=2)
> lines(y,c(0.25,0.11,0.05,0.025,0.015),type="l",col="grey",lwd=3)
> legend("topright",c("beta=1.5","beta=2.1","beta=2.5","beta=3",
+         "Euro Cap Prices"),lty=c(1,1),lwd=c(2,3),
+     col=c("green","red","blue","yellow","grey"),cex=0.8)
> ## für Fälligkeit T_8=4
> plot(y,c(Cap_Vergleich[[3]][8,1],Cap_Vergleich[[3]][8,2],
+         Cap_Vergleich[[3]][8,3],Cap_Vergleich[[3]][8,4],
+         Cap_Vergleich[[3]][8,5]),type="l",col="red",
+     main="für Fälligkeit T_8=4",xlab="Strike",ylab="Cap Preis",
+     lwd=2)#[4] bedeutet T_4
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[2]][8,1],Cap_Vergleich[[2]][8,2],
+         Cap_Vergleich[[2]][8,3],Cap_Vergleich[[2]][8,4],
+         Cap_Vergleich[[2]][8,5]),type="l",col="green",lwd=2)
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[4]][8,1],Cap_Vergleich[[4]][8,2],
+         Cap_Vergleich[[4]][8,3],Cap_Vergleich[[4]][8,4],
+         Cap_Vergleich[[4]][8,5]),type="l",col="blue",lwd=2)
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[5]][8,1],Cap_Vergleich[[5]][8,2],
+         Cap_Vergleich[[5]][8,3],Cap_Vergleich[[5]][8,4],
+         Cap_Vergleich[[5]][8,5]),type="l",col="yellow",lwd=2)
> lines(y,c(1.485,0.86,0.485,0.27,0.16),type="l",col="grey",lwd=3)
> legend("topright",c("beta=1.5","beta=2.1","beta=2.5","beta=3",
+         "Euro Cap Prices"),lty=c(1,1),lwd=c(2,3),
+     col=c("green","red","blue","yellow","grey"),cex=0.8)
> ## für Fälligkeit T_12=6
```

```

> plot(y,c(Cap_Vergleich[[3]][12,1],Cap_Vergleich[[3]][12,2],
+         Cap_Vergleich[[3]][12,3],Cap_Vergleich[[3]][12,4],
+         Cap_Vergleich[[3]][12,5]),type="l",col="red",
+     main="für Fälligkeit T_12=6",xlab="Strike",ylab="Cap Preis",lwd=2)
> #[4] bedeutet T_4
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[2]][12,1],Cap_Vergleich[[2]][12,2],
+         Cap_Vergleich[[2]][12,3],Cap_Vergleich[[2]][12,4],
+         Cap_Vergleich[[2]][12,5]),type="l",col="green",lwd=2)
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[4]][12,1],Cap_Vergleich[[4]][12,2],
+         Cap_Vergleich[[4]][12,3],Cap_Vergleich[[4]][12,4],
+         Cap_Vergleich[[4]][12,5]),type="l",col="blue",lwd=2)
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[5]][12,1],Cap_Vergleich[[5]][12,2],
+         Cap_Vergleich[[5]][12,3],Cap_Vergleich[[5]][12,4],
+         Cap_Vergleich[[5]][12,5]),type="l",col="yellow",lwd=2)
> lines(y,c(3.255,2.06,1.255,0.745,0.455),type="l",col="grey",lwd=3)
> legend("topright",c("beta=1.5","beta=2.1","beta=2.5","beta=3",
+         "Euro Cap Prices"),lty=c(1,1),lwd=c(2,3),
+     col=c("green","red","blue","yellow","grey"),cex=0.8)
> ## für Fälligkeit T_16=8
> plot(y,c(Cap_Vergleich[[3]][16,1],Cap_Vergleich[[3]][16,2],
+         Cap_Vergleich[[3]][16,3],Cap_Vergleich[[3]][16,4],
+         Cap_Vergleich[[3]][16,5]),type="l",col="red",
+     main="für Fälligkeit T_16=8",xlab="Strike",ylab="Cap Preis",lwd=2)
> #[4] bedeutet T_4
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[2]][16,1],Cap_Vergleich[[2]][16,2],
+         Cap_Vergleich[[2]][16,3],Cap_Vergleich[[2]][16,4],
+         Cap_Vergleich[[2]][16,5]),type="l",col="green",lwd=2)
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[4]][16,1],Cap_Vergleich[[4]][16,2],
+         Cap_Vergleich[[4]][16,3],Cap_Vergleich[[4]][16,4],
+         Cap_Vergleich[[4]][16,5]),type="l",col="blue",lwd=2)
> lines(y,c(Cap_Vergleich[[5]][16,1],Cap_Vergleich[[5]][16,2],
+         Cap_Vergleich[[5]][16,3],Cap_Vergleich[[5]][16,4],
+         Cap_Vergleich[[5]][16,5]),type="l",col="yellow",lwd=2)
> lines(y,c(5.455,3.685,2.38,1.495,0.95),type="l",col="grey",lwd=3)
> legend("topright",c("beta=1.5","beta=2.1","beta=2.5","beta=3",
+         "Euro Cap Prices"),lty=c(1,1),lwd=c(2,3),
+     col=c("green","red","blue","yellow","grey"),cex=0.8)

```

7.2 Vergleich von drei Zinsszenarien

7.2.1 Abbildung 3.1

```
> plot(eiopa_spot,col="red",type="l",xlab="Time",ylab="Spot Rate",lwd=2)
> legend("bottomright",legend=c("EIOPA Spot Rate 2013"),
+       col=c("red"),lty=1,seg.len=1,cex=.8,bty='n')
```

7.2.2 Funktion

```
> spot_to_forwards <-function(spot_vector){
+   forward_vector = c()
+   forward_vector[1] <- spot_vector[1]
+   for(i in 2:(length(spot_vector))){
+     forward_vector[i] <-
+       (1+spot_vector[i])^i/(prod(1+forward_vector[1:(i-1)]))-1
+   }
+   abs(forward_vector)
+ }

> BE_szen_10_M1 <- 68637.51
> BE_szen_10_M2 <- 80384.41
> BE_szen_10_C <- 73981.41
> BE_szen_10 <- cbind(BE_szen_10_M1,BE_szen_10_M2,BE_szen_10_C)
```

7.2.3 Abbildung 3.2

```
> barplot(BE_szen_10, width=1, space=NULL, beside=TRUE,
+         ylim=c(67000,81000),
+         names.arg =c("M1","M2","C. Burger"),xpd=FALSE,
+         density=20,col=c("darkgreen","dodgerblue3","orange"),
+         ylab="Best Estimate")
> text(x=c(1.5,3.5,5.5),y=c(68370,80000,73720),
+      labels=c(BE_szen_10_M1,BE_szen_10_M2,BE_szen_10_C),
+      cex=1.1,font=2)

> BE_szen_10 <- as.data.frame(BE_szen_10)
> xtable(BE_szen_10)

> BE_szen_100_M1 <- 70437.74
> BE_szen_100_M2 <- 73339.95
> BE_szen_100_C <- 70888.355
> BE_szen_100 <- cbind(BE_szen_100_M1,BE_szen_100_M2,BE_szen_100_C)
```


7.2.4 Abbildung 3.3

```
> BE_szen_100 <- cbind(BE_szen_100_M1,BE_szen_100_M2,BE_szen_100_C)
> barplot(BE_szen_100, width=1, space=NULL, beside=TRUE,
+         ylim=c(70000,74000),
+         names.arg =c("Modell 1","Modell 2","C. Burger"),xpd=FALSE,
+         density=20,col=c("darkgreen","dodgerblue3","orange"),
+         ylab="Best Estimate")
> text(x=c(1.5,3.5,5.5),y=c(70200,73000,70600),
+      labels=c(BE_szen_100_M1,BE_szen_100_M2,BE_szen_100_C),
+      cex=1.1,font=2)

> BE_szen_100 <- as.data.frame(BE_szen_100)
> xtable(BE_szen_100)
```

7.3 Deterministisch vs. Stochastisch

7.3.1 Abbildung 4.1

```
> par(mfrow=c(1,2))
> barplot(cbind(BE_eiopa_det,BE_eiopa_down_shock_det),ylab="Best Estimate",
+         width=1,space=NULL,beside=TRUE,main="deterministisch",
+         ylim=c(151000,164000),names.arg=c("",""),xpd=FALSE,
+         density=20,col=c("darkgreen","olivedrab3"))
> text(x=c(1.9,1.9,1.9),y=c(160500,159500,158500),
+      labels=c("Differenz","beträgt",
+              paste(round(BE_diff_det_prozent,2),"%",sep="")))
> barplot(cbind(BE_eiopa_stoch,BE_eiopa_down_shock_stoch),width=1,space=NULL,
+         beside=TRUE,main="stochastisch",ylim=c(157000,171000),
+         names.arg=c("",""),xpd=FALSE,density=20,col=c("darkgreen",
+                                                       "olivedrab3"))
> text(x=c(1.9,1.9,1.9),y=c(168000,167000,166000),
+      labels=c("Differenz","beträgt",
+              paste(round(BE_diff_stoch_prozent,2),"%",sep="")))
> legend("topright",legend=c("EIOPA Spot Rate","EIOPA Spot Rate DS"),
+       col=c("darkgreen","olivedrab3"),lty=1,seg.len=1,cex=.8,bty='n')
```

7.3.2 Abbildung 4.2

```
> par(mfrow=c(1,2))
> barplot(cbind(BE_eiopa_det,BE_eiopa_stoch),ylab="Best Estimate",
+         width=1,space=NULL,beside=TRUE,main="Spot Rate",
+         ylim=c(151000,164000),names.arg=c("",""),xpd=FALSE,
```

```

+           density=20,col=c("darkgreen","olivedrab3"))
> text(x=c(1.9,1.9,1.9),y=c(160500,159500,158500),
+      labels=c("Differenz","beträgt",
+              paste(round(BE_eiopa_stoch/BE_eiopa_det*100-100,2),"%",sep="")))
> legend("topright",legend=c("deterministisch","stochastisch"),
+       col=c("darkgreen","olivedrab3"),lty=1,seg.len=1,cex=.8,bty='n')
> barplot(cbind(BE_eiopa_down_shock_det,BE_eiopa_down_shock_stoch),
+         width=1,space=NULL,beside=TRUE,main="Spot Rate Down Shock",
+         ylim=c(157000,171000),names.arg=c("", ""),xpd=FALSE,
+         density=20,col=c("darkgreen","olivedrab3"))
> text(x=c(1.9,1.9,1.9),y=c(168000,167000,166000),
+      labels=c("Differenz","beträgt",
+              paste(round(BE_eiopa_down_shock_stoch/
+                        BE_eiopa_down_shock_det*100-100,2),"%",sep="")))
> legend("topright",legend=c("deterministisch","stochastisch"),
+       col=c("darkgreen","olivedrab3"),lty=1,seg.len=1,cex=.8,bty='n')

```

7.4 Leakage Test

```

> LT <- list()
> Assets_0 <- list()
> LT_prozent <- list()
> LT[[1]] <- matrix(NA,nrow=3,ncol=4,
+                  dimnames=list(c(1,2,3),
+                                c("AnzS","LT1","LT2","LTC")))
> LT[[1]][,1] <- c(10,100,1000)
> LT[[1]][,2] <- c(37.42,11.9,1.3) #szenBH=1
> LT[[1]][,3] <- c(71.69,76.35,0.68) #szenBH=4
> LT[[1]][,4] <- c(13.25,5.92,0.44) #szen=2
> Assets_0[[1]] <- 9359.634
> Assets_0[[2]] <- 4820.474
> Assets_0[[3]] <- 9359.634
> LT_prozent[[1]] <-c()
> LT_prozent[[2]] <-c()
> LT_prozent[[3]] <-c()
> LT_prozent[[1]] <- LT[[1]][,2]/Assets_0[[1]]*100
> LT_prozent[[2]] <- LT[[1]][,3]/Assets_0[[2]]*100
> LT_prozent[[3]] <- LT[[1]][,4]/Assets_0[[3]]*100

```

7.4.1 Abbildung 5.1

```
> par(mfrow=c(1,3),oma=c(0,0,0,0))
> barplot(LT_prozent[[1]],width=1,col=c("darkgreen","green3","lawngreen"),
+       density=30,main="Modell 1",
+       names.arg=c("10","100","1000"),cex.lab=1.5,ylab="Prozent der DR")
> barplot(LT_prozent[[2]],width=1,col=c("darkgreen","green3","lawngreen"),
+       density=30,main="Modell 2",
+       names.arg=c("10","100","1000"),cex.lab=1.5,ylab="Prozent der DR")
> barplot(LT_prozent[[3]],width=1,col=c("darkgreen","green3","lawngreen"),
+       density=30,main="Modell C.Burger",
+       names.arg=c("10","100","1000"),cex.lab=1.5,ylab="Prozent der DR")
```

7.5 Verteilung des Best Estimates

7.5.1 Abbildung 6.1

```
> par(mfrow=c(1,3),pin=c(1.4,4))
> #title(main="Verteilung des Best Estimates der drei Zinsmodelle")
> boxplot(BE_szen_100_M1,ylab="Best Estimate",main="Modell 1",
+       ylab="Best Estimate")
> abline(h=mean(BE_szen_100_M1),col='green')
> legend("bottomright","mean",col="green",lwd=1,seg.len=1,cex=.8,bty='n')
> boxplot(BE_szen_100_M2,main="Modell 2",ylab="Best Estimate")
> abline(h=mean(BE_szen_100_M2),col='green')
> legend("bottomright","mean",col="green",lwd=1,seg.len=1,cex=.8,bty='n')
> boxplot(BE_szen_100_C,main="Modell C.Burger",ylab="Best Estimate")
> abline(h=mean(BE_szen_100_C),col='green')
> legend("bottomright","mean",col="green",lwd=1,seg.len=1,cex=.8,bty='n')
```

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe, dass ich die verwendeten Quellen und Hilfsmittel vollständig angegeben habe und dass ich die Stellen der Arbeit - einschließlich Tabellen, Karten und Abbildungen -, die anderen Werken oder dem Internet im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht habe.

Wien, am 19. März 2015
(Ort, Datum)

(Unterschrift)

Literaturverzeichnis

- [1] Damir Filipovic. *Term-Structure Models: A Graduate Course (Springer Finance / Springer Finance Textbooks)*. 2009. Aufl. Springer, Aug. 2009. ISBN: 9783540097266
- [2] Thorsten Rheinländer. Vorlesung zu *Höhere Lebensversicherungsmathematik*, SS 2013, TU Wien
- [3] Miltersen, K., Sandmann, K., Sondermann, D.: *Closed form solutions for term structure derivatives with lognormal interest rates*. J. Finance **52**, 409-430 (1997)
- [4] Brace, A., Gatarek, D., Musiela, M.: *The market model of interest rate dynamics*. Math. Finance 7(2), 127-155 (1997)
- [5] Karsten Webel, Dominik Wied: *Stochastische Prozesse*. 2012
- [6] Simon Hochgerner. *FMA*. Otto-Wagner-Platz 5, 1090 Wien: Österreichische Finanzmarktaufsicht, 2014.
- [7] Florian Gach, Simon Hochgerner. *Best Estimate Calculation in Life Insurance: A market-consistent ALM model*. (in Arbeit)
- [8] Amtsblatt der Europäischen Union: Richtlinie 2009/138/EG
- [9] Wüthrich, Bühlmann, Furrer: *Market-Consistent Actuarial Valuation*, Springer Verlag, 2008.
- [10] Verordnung der Finanzmarktaufsichtsbehörde (FMA) über die Gewinnbeteiligung in der Lebensversicherung (Gewinnbeteiligungs-Verordnung, GBVVU)(2006): BGBl. II Nr. 398/2006
- [11] Bundesgesetz vom 18. Oktober 1978 über den Betrieb und die Beaufsichtigung der Vertragsversicherung (Versicherungsaufsichtsgesetz - VAG), StF: BGBl. Nr. 569/1978
- [12] Freddy Delbaen, Walter Schachermayer: *The mathematics of arbitrage*, Springer Verlag, 2006.
- [13] **R**: A Language and Environment for Statistical Computing, R Core Team, R Foundation for Statistical Computing, Wien, 2014, www.R-project.org
- [14] Clemens Burger. *Vergleich von Zinsmodellen in der Lebensversicherung*, Institut für Wirtschaftsmathematik, TU Wien, 2014
- [15] *Aktuarsberichtsverordnung*. www.ris.bka.gv.at, 04.02.2015.
- [16] Amtsblatt der Europäischen Union L12, 17. Januar 2015
- [17] Werner Gurker. *Angewandte Mathematische Statistik*. VO 107.A067, TU Wien