
Alois Panholzer



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Analyse von serien-parallelen Graphen und deren Entwicklung unter stochastischen Wachstumsregeln

ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alois Panholzer

durch
Martin Fuchs BSc
Matrikelnummer: 1026455
Albertgasse 14/11 1080 Wien

Wien, 5. Dezember 2016

Martin Fuchs

ERKLÄRUNG ZUR VERFASSUNG DER ARBEIT

Martin Fuchs BSc
Albertgasse 14/11, 1080 Wien

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfsmittel bedient habe.

Wien, 5. Dezember 2016

Martin Fuchs

DANKSAGUNG

Zuerst möchte ich mich bei meinen Eltern für ihre moralische und auch finanzielle Unterstützung bedanken, ohne die mein Studium so nicht möglich gewesen wäre.

Außerdem möchte ich mich bei all meinen Studienkollegen bedanken, von denen ich viele meine Freunde nennen darf. Mit ihnen durfte ich unzählige Stunden an Vorbereitungszeit für Prüfungen und Übungen verbringen, aber ich hatte auch außerhalb der Universität viel Spaß mit ihnen. Ich bedanke mich dafür, dass man sie jederzeit um Rat fragen konnte und auch sonst alle Höhen und Tiefen des Studiums und dieses gesamten Lebensabschnittes mit mir geteilt haben.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei meinem Betreuer Prof. Panholzer, dem ich dieses interessante Thema zu verdanken habe und der mir über alle inhaltlichen Schwierigkeiten hinweggeholfen hat.

Historisch gesehen werden serien-parallele Graphen als erstes im Sinne von elektrischen Schaltungen betrachtet (siehe [12]). In Kapitel 2 wird genau dieses Beispiel als Motivation genommen. Die elektrischen Schaltungen werden abstrahiert und als serien-parallele Graphen interpretiert. So wie elektrische Bauteile lassen sich nämlich auch serien-parallele Graphen, die eine Quelle und eine Senke besitzen, sowohl in Serie als auch parallel schalten. Anschließend werden sie formal rekursiv auf zwei Arten definiert und die Unterscheidung von π - und σ -Netzwerken dargelegt (siehe [15]).

Kapitel 3 geht der Frage nach, wie viele ebene serien-parallele Graphen es gibt. Die Antwort liefern die Schröder-Hipparchus-Zahlen, die auch die Lösung vieler anderer kombinatorischer Probleme darstellen (siehe [19]). Daher ist es naheliegend, Bijektionen zwischen den kombinatorischen Problemen mit der gleichen Lösung zu finden (siehe [4] Part A, Kapitel I.5). Nachher beschäftigen wir uns noch mit Eigenschaften ebener serien-paralleler Graphen, wie der Anzahl der Komponenten aus denen ein π -Netzwerk besteht und der Anzahl der inneren Knoten in einem zufällig gewählten serien-parallelen Graphen mit n Kanten.

In Kapitel 4 schneiden wir kurz die nichtebenen serien-parallelen Graphen an. Resultate darüber existieren nur asymptotisch (siehe [15]) und die genauen Herleitungen würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Eine Sonderform von serien-parallelen Graphen wollen wir in Kapitel 5 betrachten. Bei binären serien-parallelen Graphen ist der Weggrad eines Knotens auf zwei beschränkt (siehe [8]). Die Anzahl solcher Graphen mit genau n Kanten entspricht der $(n - 1)$ -ten Catalanzahl. Eine enge Beziehung zu diesen Zahlen ist offensichtlich, da sie auch in anderen Resultaten über binäre serien-parallele Graphen auftauchen.

Danach gehen wir zum stochastischen Wachstum serien-paralleler Graphen über. Kapitel 6 beleuchtet das uniforme Bernoulli-Wachstumsmodell (siehe [13] und [11]) und die Eigenschaften, die ein serien-paralleler Graph mit sich bringt, der durch dieses Wachstumsmodell entstanden ist. Darunter zählen die Anzahl innerer Knoten, der Knotengrad der Quelle, die Länge eines zufälligen Pfades, beziehungsweise die Größe eines zufälligen Schnittes und die Anzahl der Pfade von der Quelle bis zur Senke beziehungsweise die Anzahl der Schnitte. Um diese Berechnungen anzustellen, betrachten wir Bäume, bei denen jeder Baumknoten eine Kante im Graphen darstellt.

Kurz wird in Kapitel 7 das extrem schnell wachsende hierarchische Wachstumsmodell

erwähnt (siehe [7]), bei dem die Berechnungen hauptsächlich rekursiv erfolgen. Ergebnisse haben wir für den Erwartungswert der Anzahl innerer Knoten, des Knotengrades der Quelle und der Länge des Pfades ganz links.

In Kapitel 8 wird ein Wachstumsmodell für die in Kapitel 5 vorgestellten binären serienparallelen Graphen diskutiert (siehe [14] und [11]). Wir berechnen dabei den Erwartungswert für die Länge eines zufälligen Pfades und für den Knotengrad der Senke, da der Knotengrad der Quelle in diesem Modell immer 2 beträgt, es sei denn, es handelt sich um den trivialen serienparallelen Graphen. Für die Berechnungen verwenden wir wiederum eine Darstellung durch Bäume.

Am Ende, also in Kapitel 9 wird das binäre Wachstumsmodell auf das b -äre Wachstumsmodell, für eine natürliche Zahl b , erweitert (siehe [11]). Der Erwartungswert der Länge eines zufälligen Pfades ist Teil unserer Studien.

From a historic point of view, series-parallel graphs were first seen in the context of electrical circuits (see [12]). In chapter 2 we take this example as motivation. The electric circuits are abstracted and interpreted as series-parallel graphs. Just as electrical components, series-parallel graphs, that contain a source and a sink, can be connected in a parallel way as well as in series. Afterwards they get defined formally and recursively in two different ways and the difference between π - and σ -networks is shown (see [15]).

Chapter 3 is discussing, how many plane series-parallel graphs exist. The answer is given by the Schröder-Hipparchus-numbers, that also give a solution of many other combinatorial problems (see [19]). Therefore it is obvious that we search for bijections between those problems, that have the same solution (see [4] Part A, chapter I.5). Afterwards we consider other properties of plane series-parallel graphs such as the number of components of a π -network and the number of internal nodes in a randomly chosen series-parallel graph of n edges.

In chapter 4 we bring up non-plane series-parallel Graphs. There are only asymptotic results about them (see [15]) and the details would go beyond the scope of this work.

We consider a special type of series-parallel graphs in chapter 5. In binary series-parallel graphs the outdegree of a node is limited to two (see [8]). The number of such graphs with n edges is equal to the $(n - 1)$ -th catalan number. Those graphs are strongly connected to this numbers, because they also appear in other results about binary series-parallel graphs.

Afterwards we turn to the stochastic growth of series-parallel graphs. Chapter 6 illustrates the uniform Bernoulli growth model (see [13] and [11]) and the properties that come with a series-parallel graph, that was generated by this growth model. Those are the number of internal nodes, the degree of the source, the length of a random path, the size of a random cut, the number of paths from the source to the sink and the number of cuts. To carry out the calculations, we have a look at trees, where each node in the tree represents an edge in the graph.

We shortly discuss the fast growing hierarchical growth model in chapter 7 (see [7]), where the calculations mostly work recursively. We calculate the expected value of the number of internal nodes, the degree of the source and the length of the leftmost path.

In chapter 8 a growth model for the binary series-parallel graphs introduced in chapter 5 is discussed (see [14] and [11]). We calculate the expected value for the length of a

random path and for the degree of the sink, since the degree of the source is always 2 in this model, except in the trivial series-parallel graph. Again we use trees to represent the graph in order to make the calculations.

In the end, in chapter 9, we extend the binary growth model to a b -ary growth model for a positive integer b (see [11]). The expected value of the length of a random path are part of our studies.

1 Grundlagen und Vorbemerkungen	13
1.1 Symbole und Bezeichnungen	13
1.1.1 Symbole	13
1.1.2 Kombinatorik	14
1.2 Sätze	15
2 Einleitung	17
2.1 Klassifizierung von serien-parallelen Graphen	19
3 Ebene serien-parallele Graphen	21
3.1 Anzahl ebener Graphen	21
3.1.1 Verwandte kombinatorische Probleme	26
3.2 Anzahl der Komponenten eines π -Netzwerkes	27
3.3 Anzahl innerer Knoten	29
4 Nichtebene serien-parallele Graphen	33
4.1 Nichtebene Graphen mit unmarkierten Kanten	33
4.2 Nichtebene Graphen mit markierten Kanten	34
5 Binäre serien-parallele Graphen	37
5.1 Anzahl binärer serien-paralleler Graphen	37
5.2 Weitere kombinatorische Resultate	40
6 Das uniforme Bernoulli-Wachstumsmodell	43
6.1 Anzahl innerer Knoten	43
6.2 Der Knotengrad der Quelle	44
6.3 Die Länge eines zufälligen Pfades	50
6.3.1 Zusammenhang zwischen dem Knotengrad der Quelle und der Länge des Pfades ganz links	51
6.3.2 Berechnung der Länge eines zufälligen Pfades	52
6.4 Die Größe eines zufälligen Schnittes	58
6.5 Die Anzahl der Pfade von der Quelle zur Senke	60

6.6	Die Anzahl der verschiedenen Schnitte	63
6.7	Andere Auswahlregeln für Kanten	64
6.7.1	Das Modell der bevorzugten Anziehung	64
6.7.2	Das Sättigungsmodell	65
7	Das hierarchische Wachstumsmodell	67
7.1	Die Anzahl innerer Knoten	68
7.2	Der Knotengrad der Quelle	69
7.3	Die Länge des Pfades ganz links	70
8	Das binäre Wachstumsmodell	71
8.1	Die Länge eines zufälligen Pfades	72
8.2	Der Knotengrad der Senke	78
9	Das b-äre Wachstumsmodell	85
9.1	Die Länge eines zufälligen Pfades	86
10	Resümee	93

KAPITEL 1

GRUNDLAGEN UND VORBEMERKUNGEN

In diesem Kapitel werden die in der Arbeit verwendeten Bezeichnungen und Symbole erklärt. Außerdem wollen wir ein paar Sätze auflisten, die für die weiteren Kapitel notwendig sind. Da es sich um wohlbekannte Aussagen handelt, referenzieren wir die Beweise lediglich.

1.1 Symbole und Bezeichnungen

Wir wollen damit beginnen, in der Literatur nicht einheitliche Schreibweisen zu definieren.

1.1.1 Symbole

In der untenstehenden Tabelle finden sich sowohl Kurzschreibweisen für Formeln, als auch Beschreibungen der verwendeten Symbole.

Symbol	Formel	Beschreibung
$x^{\bar{n}}$	$= x(x+1) \dots (x+n-1)$	steigende Faktorielle
$x^{\underline{n}}$	$= x(x-1) \dots (x-n+1)$	fallende Faktorielle
H_n	$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$	n -te Harmonische Zahl
$H_n^{(m)}$	$= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^m}$	n -te Harmonische Zahl der Ordnung m
$\stackrel{(d)}{=}$		Gleichheit in der Verteilung
$\xrightarrow{(d)}$		Konvergenz in der Verteilung
$F'(x_1, \dots, x_n)$	$\frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1, \dots, x_n)$	Ableitung nach der ersten Variable
$[z^n]F(z)$		Koeffizient von z^n in der Funktion $F(z)$
$\{\circ\}$		Objekt der Größe 1 in einer kombinatorischen Familie
$\{\}$		Objekt der Größe 0 in einer kombinatorischen Familie
$S(\mathcal{A})$		Mengenbildung über die kombinatorische Familie \mathcal{A} (siehe Definition 1.1)

$MS(\mathcal{A})$		Multimengenbildung über die kombinatorische Familie \mathcal{A} (siehe Definition 1.1)
\mathcal{A}^*		Bildung von Folgen über die kombinatorische Familie \mathcal{A} (siehe Definition 1.1)

1.1.2 Kombinatorik

Oftmals verwenden wir symbolische Gleichungen, die das Verhältnis von kombinatorischen Familien darstellen sollen. Definitionen und Schreibweisen sind dabei an [4] angelehnt.

Definition 1.1. Eine *kombinatorische Familie* ist ein Paar (C, w) aus einer höchstens abzählbaren Menge C und einer Funktion $w : C \rightarrow \mathbb{N}$, sodass alle Mengen

$$w^{-1}(\{n\}) = \{c \in C \mid w(c) = n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

endlich sind.

Diese werden mit kalligraphischen Buchstaben wie \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{T} oder \mathcal{K} bezeichnet.

Definition 1.2. Ist eine kombinatorische Familie \mathcal{A} mit einer Anordnung der Zahlen $1, 2, \dots, n$ verknüpft, so nennen wir sie eine *markierte kombinatorische Familie*.

Für die markierten kombinatorischen Familien können wir das Boxprodukt definieren.

Definition 1.3. Das *Boxprodukt* $\mathcal{C} = \mathcal{A}^\square * \mathcal{B}$ von zwei markierten kombinatorischen Familien ist jene Familie, die alle Paare (α, β) mit $\alpha \in \mathcal{A}$ und $\beta \in \mathcal{B}$ enthält, wo die Markierung 1 immer der ersten Komponente α zugewiesen wird. Die exponentiell erzeugende Funktion $C(x)$ erfüllt dann

$$C(x) = \int_0^x A'(t)B(x-t)dt$$

Dieses werden wir nie explizit anschreiben, sondern sofort differenzieren und die so entstehende Differentialgleichung formulieren, sodass eine Übersetzung eines Boxproduktes innerhalb einer symbolischen Gleichung in eine Gleichung für erzeugende Funktionen so aussieht:

$$C'(x) = A'(x)B(x).$$

Wollen wir die Größe einer Teilstruktur messen, so können wir zu einer symbolischen Gleichung einen *Parameter* hinzufügen und die Teilstruktur somit *kennzeichnen*. So entstehen bi- oder multivariate erzeugende Funktionen.

1.2 Sätze

Wie so oft in der Kombinatorik benötigen wir die Inversionsformel von Lagrange-Bürmann (siehe [4] Part D, Appendix A.6.).

Satz 1.4 (Inversionsformel von Lagrange-Bürmann). Seien $\phi(w)$ und $f(x)$ formale Potenzreihen mit $\phi(0) \neq 0$ und $t = \frac{w}{\phi(w)}$. Dann gilt:

$$[t^n]f(w(t)) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n f'(u).$$

Viele Sätze brauchen wir zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens. Eines der elementarsten Resultate ist wohl folgendes (siehe [4] Part D, Appendix A.2.).

Satz 1.5 (Stirlingformel).

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Laut Weierstraß (siehe [21]) gilt für die Gammafunktion die folgende Bedingung.

Satz 1.6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)n^x} = 1.$$

Wir benötigen auch ein paar verwandte Resultate von Flajolet und Odlyzko (siehe [3] oder [4] Part B, Kapitel VI.1).

Satz 1.7. Die Koeffizienten einer erzeugenden Funktion $g_\alpha(z) = (1-z)^\alpha$ für eine reelle oder komplexe Zahl α lauten

$$[z^n](1-z)^\alpha = \binom{n-\alpha-1}{n} = \frac{\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(n+1)}$$

und asymptotisch gilt

$$[z^n](1-z)^\alpha \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}.$$

Satz 1.8 (Skalierungsregel für Taylorentwicklungen). Sei $f(z)$ eine Funktion mit einer Singularität an der Stelle $z = \rho$ und sei $g(z) := f(z\rho)$, dann gilt

$$[z^n]f(z) = \rho^{-n}[z^n]f(z\rho) = \rho^{-n}[z^n]g(z)$$

wobei $g(z)$ nun eine Singularität an der Stelle $z = 1$ hat.

Weiters brauchen wir das folgende abgeschwächte Resultat (siehe [4] Part B, Kapitel VI.3).

Satz 1.9 (Sim-Transfer). Sei $f(z)$ analytisch in der auf der reellen Achse bei $[1, \infty)$ aufgeschlitzten Ebene, und es gelte $f(z) \sim (1-z)^{-\alpha}$ in der Umgebung von 1 mit $\alpha \notin \{0, -1, -2, \dots\}$, dann gilt

$$[z^n]f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Wir benötigen ein paar alte und wohlbekannte Resultate zu den Catalanzahlen (siehe [20] oder [2]). Wir notieren diese für C_{n-1} anstatt für C_n , da es für später praktischer ist.

Satz 1.10. Die $(n-1)$ -sten Catalanzahlen $C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ sind die Koeffizienten von x^n der erzeugenden Funktion

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}.$$

Sie sind die Lösung der Rekursion

$$C_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} C_{j-1} C_{n-j-1}, \quad n \geq 2, \quad C_0 = 1,$$

und für sie gilt asymptotisch

$$C_{n-1} \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-1)^3}}.$$

Eine vereinfachte Form eines Satzes aus [22] ist der folgende.

Satz 1.11. Für $n \geq 0$ gilt

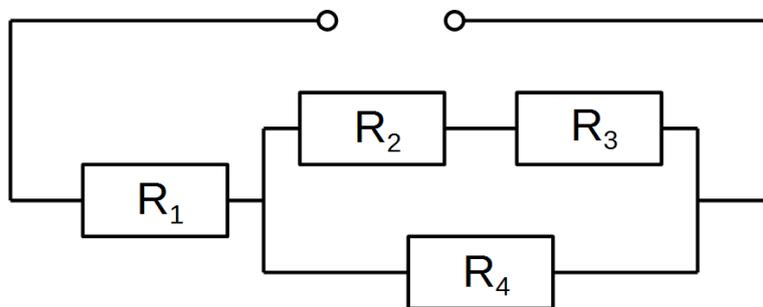
$$\frac{1}{1-z} \log \left(\frac{1}{1-z} \right)^n = \sum_{k \geq 0} (-1)^k B_n \left(-0! H_k^{(1)}, -1! H_k^{(2)}, \dots, -(n-1)! H_k^{(n)} \right) z^k.$$

Wobei B_n , das n -te vollständige Bell-Polynom und $H_n^{(m)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^m}$ die n -te Harmonische Zahl der Ordnung m darstellt.

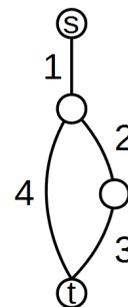
Auch aus der Wahrscheinlichkeitstheorie benötigen wir Resultate (siehe [5]).

Satz 1.12 (Satz von Frechet-Shohat). Sei F_n eine Folge von Verteilungsfunktionen und es gelte für die Momente dieser Verteilungen $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^k) = \mathbb{E}(Z^k)$, dann sind die $(\mathbb{E}(Z^k))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Momenten mit einer Verteilungsfunktion F . Ist F durch die Momente eindeutig bestimmt, dann gilt, dass $F_n \rightarrow F$ für $n \rightarrow \infty$.

Betrachten wir als motivierendes Beispiel eine elektrische Schaltung, die auch historisch gesehen der Beweggrund war, sich mit serien-parallelen Graphen auseinanderzusetzen (siehe [12]). Eine solche besteht aus elektrischen Bauelementen und Kabeln, die diese Bauelemente miteinander verbinden. Zur Vereinfachung werden hier als Bauelemente nur elektrische Widerstände genommen. Um zwei Widerstände zu verbinden gibt es zwei einfache Möglichkeiten: Entweder man schaltet die Widerstände hintereinander in Serie, oder man schaltet sie nebeneinander, also parallel. Natürlich können zwei bereits verbundene Widerstände weiter kombiniert werden. Abbildung 2.1(a) zeigt die in Serie geschalteten Widerstände R_2 und R_3 , die mit Widerstand R_4 parallel geschaltet sind. Diese drei bereits verbundenen Widerstände sind anschließend noch mit R_1 in Serie geschaltet.



(a) Schaltung von 4 Widerständen



(b) zugehöriger Graph

Abbildung 2.1: Eine Schaltung von 4 Widerständen wird als serien-paralleler Graph interpretiert.

Eine solche Schaltung kann als Graph interpretiert werden. Jedes Kabel bzw. jede Menge von verbundenen Kabeln, die nicht durch einen Widerstand getrennt sind werden als Knoten interpretiert, jeder Widerstand als Kante. In Abbildung 2.1(b) wurde das verwirklicht. Jede Kante hat die Nummer des Widerstandes, aus dem sie entstanden ist. Der oberste Knoten s bzw. der unterste Knoten t symbolisieren die Kabeln, die an der Spannungsquelle angeschlossen sind.

Wir wollen nun die Kombination der Widerstände graphentheoretisch formalisieren (siehe [12]).

Definition 2.1. Seien G und G' zwei Graphen, bei denen je ein Knoten als Quelle s bzw. s' und ein Knoten als Senke t bzw. t' ausgezeichnet ist. Wir definieren zwei Arten, auf die die Graphen vereinigt werden können:

- Bei der *Parallelkomposition* werden die Quellen s und s' zu einem einzigen Knoten zusammengefügt. Alle Kanten, die vorher zu s bzw. s' geführt haben, führen nun zu dem neu entstandenen Knoten. Analoges passiert mit t und t' .
- Bei der *Serienkomposition* wird die Senke t mit der Quelle s' zu einem einzigen Knoten zusammengefügt. Alle Kanten, die vorher zu t bzw. s' geführt haben, führen nun zu dem neu entstandenen Knoten.

Alternativ dazu können wir auch innerhalb einer Schaltung einen einzelnen Widerstand durch zwei in Serie oder parallel geschaltete Widerstände ersetzen.

Definition 2.2. Sei e eine Kante, die zwischen den Knoten x und z verläuft.

- Eine *parallele Verdopplung* der Kante bezeichnet das Hinzufügen einer neuen Kante e' , die ebenfalls zwischen den Knoten x und z verläuft.
- Eine *serielle Verdopplung* der Kante bezeichnet das Hinzufügen eines neuen Knotens y und das Ersetzen der Kante e durch die Kante e_1 , die zwischen x und y verläuft, sowie der Kante e_2 , die zwischen y und z verläuft.

Ausgehend von diesen zwei Definitionen können wir den Begriff des serien-parallelen Graphen auf zwei Arten rekursiv formalisieren.

Definition 2.3 (von außen). Ein *serien-paralleler Graph* ist

- entweder der Graph, der aus einer Quelle s und einer Senke t besteht, die mit einer einzelnen Kante verbunden sind (dieser Graph wird auch trivialer serien-paralleler Graph genannt),
- oder ein Graph, der mittels Serienkomposition oder Parallelkomposition aus zwei serien-parallelen Graphen zusammengesetzt ist.

Definition 2.4 (von innen). Ein *serien-paralleler Graph* ist ein Graph, der durch parallele oder serielle Verdopplung von Kanten aus dem trivialen serien-parallelen Graphen entstanden ist.

Laut Definition 2.4 entsteht jeder serien-parallele Graph durch eine Folge von Operationen, die eine Kante des Graphen entweder parallel verdoppelt, oder seriell verdoppelt. Im Umkehrschluss kann man für jeden serien-parallelen Graphen eine Folge von Operationen finden, die mittels Verschmelzung paralleler oder serieller Kanten, aus dem Graphen den trivialen serien-parallelen Graphen macht (nämlich genau die gleichen Operationen wie

bei der Erzeugung, nur in umgekehrter Reihenfolge).

Wie man leicht sieht, sind die Definitionen 2.3 und 2.4 äquivalent, da jede parallele, bzw. serielle Komposition laut Definition 2.3 durch eine parallele, bzw. serielle Verdopplung im ersten Schritt laut Definition 2.4 verwirklicht werden kann und umgekehrt.

Klarerweise erlaubt diese Definition doppelte Kanten. So ein Graph wird in mancher Literatur als Multigraph bezeichnet. Wir bezeichnen ihn aber weiterhin als Graph. Doppelte Kanten sind erlaubt, aber keine Schlingen.

2.1 Klassifizierung von serien-parallelen Graphen

Je nachdem welche der beiden Operationen die äußerste ist, lassen sich serien-parallele Graphen in eine von zwei Klassen einteilen (siehe [15]). Als äußerste Operation ist hier die letzte Operation nach Definition 2.3, bzw. die erste Operation nach Definition 2.4 gemeint.

Definition 2.5. Ein serien-paralleler Graph heißt σ -Netzwerk, wenn die äußerste Operation eine Serienkomposition ist, andernfalls heißt er π -Netzwerk.

Laut dieser Definition ist der triviale serien-parallele Graph also ein π -Netzwerk, da noch gar keine Operation auf ihn gewirkt hat. Daher sind alle serien-parallele Graphen, die einen Schnittpunkt (also ein Knoten, dessen Entfernung den Zusammenhang des Graphen zerstören würde) enthalten, σ -Netzwerke.

Als nächstes wollen wir eine Beziehung zwischen σ -Netzwerken und π -Netzwerken herstellen (siehe [12]).

Definition 2.6. Ein serien-paralleler Graph G' heißt zu einem anderen serien-parallelen Graphen G *konjugiert*, wenn bei der Konstruktion des Graphen G' statt jeder parallelen Komposition eine serielle Komposition vorgenommen wird und umgekehrt.

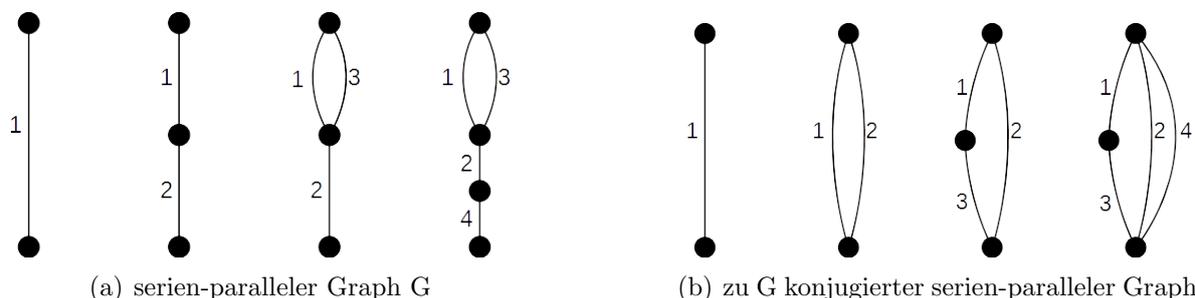


Abbildung 2.2: Entwicklung eines serien-parallelen Graphen und die Entwicklung des dazu konjugierten serien-parallelen Graphen.

Wie in Abbildung 2.2 ersichtlich ist, verwenden wir die Konvention, dass neue Kanten im Falle der seriellen Komposition unterhalb und im Falle der parallelen Komposition rechts angehängt werden.

Offensichtlich ist der konjugierte Graph eines π -Netzwerks ein σ -Netzwerk und umgekehrt. Die Anzahl der π -Netzwerke mit n Kanten ist also gleich der Anzahl der σ -Netzwerke mit n Kanten für $n \geq 2$. Eine Ausnahme bildet der triviale serien-parallele Graph, denn sein konjugierter Graph ist er selbst, bzw. kann man auch definieren, dass er einfach keinen konjugierten Graphen besitzt.

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den kombinatorischen Eigenschaften von ebenen serien-parallelen Graphen mit n Kanten befassen

3.1 Anzahl ebener Graphen

Üblicherweise bestimmt man die Größe eines Graphen über die Anzahl der Knoten. Es macht jedoch wenig Sinn, die Anzahl von serien-parallelen Graphen mit einer bestimmten Anzahl von Knoten zu bestimmen, da selbst ein Graph mit zwei Knoten s und t beliebig viele parallele Kanten zwischen den beiden Knoten haben kann. Daher messen wir in unseren Überlegungen die Größe eines Graphen nach der Anzahl der Kanten. Diese Definition der Größe eines serien-parallelen Graphen gilt in diesem und in allen darauf folgenden Kapiteln.

Wir betrachten nun Graphen mit unmarkierten Kanten. Die Kanten sind also, im Gegensatz zu Abbildung 2.2, nicht nummeriert und demnach nicht unterscheidbar.

Seien \mathcal{P} und \mathcal{Q} die kombinatorischen Familien und $P(x)$ und $Q(x)$ die erzeugenden Funktionen der π -Netzwerke, respektive σ -Netzwerke mit n Kanten. Da jedes π -Netzwerk mit $n \geq 2$ Kanten ein dazu konjugiertes σ -Netzwerk hat, und der triviale serien-parallele Graph ein π -Netzwerk mit einer Kante ist, gilt

$$P(x) = Q(x) + x. \quad (3.1)$$

Als nächsten Schritt überlegen wir uns, dass jeder serien-parallele Graph eine Folge aus π -Netzwerken mit der Länge größer 0 ist. Hat die Folge die Länge 1, so handelt es sich um ein einzelnes π -Netzwerk, ist die Folge länger, dann handelt es sich um ein σ -Netzwerk. Es gilt also die symbolische Gleichung

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathcal{P}^* - \varepsilon. \quad (3.2)$$

Auf der linken Seite stehen offensichtlich alle serien-parallelen Graphen, also sowohl π - als auch σ -Netzwerke. Auf der rechten Seite stehen Folgen von π -Netzwerken, wobei davon

die leere Folge ε abgezogen wird, da diese keinen Graphen darstellt. Diese symbolische Gleichung übersetzt sich in die Gleichung für erzeugende Funktionen

$$P(x) + Q(x) = \frac{1}{1 - P(x)} - 1.$$

Setzt man gemäß Gleichung (3.1) für $Q(x) = P(x) - x$ ein, so ergibt sich

$$1 - x + 2P(x) = \frac{1}{1 - P(x)}. \quad (3.3)$$

Multipliziert man die Gleichung mit $1 - P(x)$, so ergibt sich die quadratische Gleichung $-2P(x)^2 + (x + 1)P(x) - x = 0$ mit den Lösungen

$$P_1(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 6x + 1} \quad \text{und} \quad P_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 6x + 1}. \quad (3.4)$$

Durch Einsetzen von $x = 0$ erhalten wir den Koeffizienten von x^0 , der nur in der Lösung $P_1(x)$ verschwindet. Da es keine π -Netzwerke mit 0 Kanten geben kann, schließen wir die Lösung $P_2(x)$ aus und erhalten, dass die gesuchte erzeugende Funktion $P(x)$ gleich der Lösung $P_1(x)$ ist. Aus Formel (3.1) ergibt sich die erzeugende Funktion für die Anzahl der σ -Netzwerke

$$Q(x) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\sqrt{x^2 - 6x + 1}. \quad (3.5)$$

Für das Ablesen der Koeffizienten verwenden wir die Formel von Lagrange-Bürmann, Satz 1.4. Um diese verwenden zu können, müssen wir die Formel (3.3) zunächst auf die Form $w = t\phi(w)$ also $P(x) = x\phi(P(x))$ bringen (siehe [4] Kapitel I.5, Beispiel I.15). Wir multiplizieren die Gleichung (3.3) mit $1 - P(x)$, erhalten

$$1 - x(1 - P(x)) + P(x)(1 - 2P(x)) = 1$$

und weiters

$$P(x) = x \frac{1 - P(x)}{1 - 2P(x)}.$$

Daraus lesen wir $\phi(P)$ ab.

$$\phi(P) = \frac{1 - P}{1 - 2P}.$$

Durch Definieren von $f = id$ erhalten wir aus der Formel von Lagrange-Bürmann

$$[x^n]P(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}] \left(\frac{1 - u}{1 - 2u} \right)^n.$$

Ablesen der Koeffizienten geschieht mittels folgendem

Lemma 3.1.

$$[u^N] \left(\frac{1 - u}{1 - 2u} \right)^M = \sum_{k=1}^{\min(N, M)} \binom{M}{k} \binom{N - 1}{k - 1} 2^{N - k}$$

Beweis. Wir vereinfachen den Term auf der linken Seite mit Hilfe der geometrischen Summenformel.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-u}{1-2u}\right)^M &= \left(\frac{1}{1-2u} - \frac{u}{1-2u}\right)^M \\ &= \left((1+2u+2^2u^2+2^3u^3+\dots) - (u+2u^2+2^2u^3+2^3u^4+\dots)\right)^M \\ &= (1+u+2u^2+2^2u^3+\dots)^M. \end{aligned}$$

Nun wollen wir davon den N -ten Koeffizienten ablesen. Dazu müssen wir uns überlegen, woraus sich der Koeffizient von u^N zusammensetzt. Für unsere Überlegungen ist es einfacher, sich die M -te Potenz als M Multiplikationen vorzustellen.

$$\underbrace{(1+u+2u^2+2^2u^3+\dots)(1+u+2u^2+2^2u^3+\dots)\dots(1+u+2u^2+2^2u^3+\dots)}_{M \text{ mal}}$$

Dabei muss jeder Summand in jeder Klammer ein mal mit jedem anderen Summanden der anderen Klammern multipliziert werden. Nun überlegen wir uns, welche Summanden gewählt werden können, damit bei der Multiplikation dieser ein u^N zustande kommt. Wird in der i -ten Klammer der k_i -te Summand gewählt (wobei wir die Nummerierung der Summanden bei 0 starten lassen; 1 ist also der 0-te Summand, u ist der erste usw.), so lautet der Ausdruck:

$$\prod_{k_i \geq 1} 2^{k_i-1} u^{k_i} = 2^{\sum_{k_i \geq 1} (k_i-1)} u^{\sum_{k_i \geq 1} k_i}. \quad (3.6)$$

Die k_i , die 0 sind, lassen wir weg, da sie nur eine 1 zu dem Produkt beitragen. Wollen wir erreichen, dass das Produkt $\prod u^{k_i} = u^N$ ergibt, so müssen wir die Bedingung

$$\sum_{k_i \geq 1} k_i = \sum_{i=1}^M k_i = N$$

hinzufügen. Damit wird (3.6) zu

$$2^{\sum_{k_i \geq 1} k_i-1} u^N = 2^{\sum_{k_i \geq 1} k_i - \sum_{k_i \geq 1} 1} u^N = 2^{N - \sum_{k_i \geq 1} 1} u^N = 2^{N-N_0} u^N,$$

wobei N_0 die Anzahl der k_i ist, die ungleich Null sind.

Um nun den Koeffizienten von u^N zu bestimmen, müssen wir noch über alle k_i summieren, für die gilt, dass $\sum_{i=1}^M k_i = N$ ist.

$$\sum_{\sum_{i=1}^M k_i = N} 2^{N-N_0}.$$

Um den Laufindex der Summe zu vereinfachen, fassen wir alle Kompositionen von N mit k Summanden ungleich Null zusammen. Bei der Wahl unserer Komposition von N müssen wir also zuerst auswählen, welche der M Summanden ungleich 0 sind. Wir wählen also k Zahlen aus M aus:

$$\binom{M}{k}.$$

Weiters müssen wir uns überlegen, wie die Komposition von N in die k Summanden aussieht. Elementarkombinatorisch erhalten wir:

$$\binom{N-1}{k-1}.$$

Die Summe kann also wie folgt in einen leichter fassbaren Ausdruck umformuliert werden.

$$\sum_{k=1}^{\min(N,M)} \binom{M}{k} \binom{N-1}{k-1} 2^{N-k}.$$

Die obere Summationsgrenze $\min(N, M)$ ergibt sich dadurch, dass die Anzahl der Summanden k unserer Komposition entweder durch die Anzahl der möglichen Summanden im Produkt M , oder durch die Größe, der zu zerlegenden Zahl N beschränkt ist. □

Mit $N := n - 1$ und $M := n$ erhalten wir also den folgenden Satz.

Satz 3.2. Die Anzahl p_n der ebenen π -Netzwerke mit n Kanten ist

$$p_n = [x^n]P(x) = \frac{1}{n}[u^{n-1}] \left(\frac{1-u}{1-2u} \right)^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n-2}{k-1} 2^{n-1-k}.$$

Berechnen der ersten Zahlen ergibt:

p_2	1	p_7	903	p_{12}	2646723
p_3	3	p_8	4279	p_{13}	13648869
p_4	11	p_9	20793	p_{14}	71039373
p_5	45	p_{10}	103049	p_{15}	372693519
p_6	197	p_{11}	518859	p_{16}	1968801519

Diese Zahlen sind in OEIS A001003 zu finden (siehe [18]) und werden auch *kleine Schröder-Zahlen*, *Schröder-Hipparchus-Zahlen* oder *Super-Catalan-Zahlen* genannt.

Wir wollen nun analysieren, wie diese Zahlen asymptotisch wachsen. Dazu führen wir eine Singularitätenanalyse durch (siehe [4] Part B, Kapitel VI). Wir beginnen also damit, die Singularitäten zu bestimmen.

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3 - \sqrt{8} \quad x_2 = 3 + \sqrt{8}.$$

Die dominante Singularität ist $\rho := x_1$, da diese den Konvergenzkreis um den Ursprung begrenzt. Weiters ist sie die einzige Singularität auf dem Konvergenzkreis. Wir formen den interessanten Teil der erzeugenden Funktion (3.4) um, damit wir den besser abschätzen können.

$$\begin{aligned}
1 - 6x + x^2 &= 1 - 6(\rho + (x - \rho)) + (\rho + (x - \rho))^2 \\
&= 1 - 6\rho - 6(x - \rho) + \rho^2 + 2\rho(x - \rho) + (x - \rho)^2 \\
&= 2(3 - \rho)(\rho - x) + (\rho - x)^2 + (\rho^2 - 6\rho + 1) \\
&= 2\rho(3 - \rho) \left(1 - \frac{x}{\rho}\right) + \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\sqrt{1 - 6x + x^2} = \sqrt{2\rho(3 - \rho)} \sqrt{1 - \frac{x}{\rho}} \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)\right),$$

womit in der Nähe der dominanten Singularität $\rho = 3 - \sqrt{8}$ gilt, dass

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{1 + \rho}{4} - \frac{\sqrt{2\rho(3 - \rho)}}{4} \sqrt{1 - \frac{x}{\rho}} + \mathcal{O}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right), \\
P(x) &\sim \frac{1 + \rho}{4} - \frac{\sqrt{2\rho(3 - \rho)}}{4} \sqrt{1 - \frac{x}{\rho}}.
\end{aligned}$$

Nun wenden wir Satz 1.8 an, und erhalten

$$\begin{aligned}
p_n = [x^n]P(x) &\sim [x^n] \frac{1 + \rho}{4} - \frac{\sqrt{2\rho(3 - \rho)}}{4} \sqrt{1 - \frac{x}{\rho}} \\
&= \rho^{-n} [x^n] \frac{1 + \rho}{4} - \frac{\sqrt{2\rho(3 - \rho)}}{4} \sqrt{1 - x},
\end{aligned}$$

was uns eine Funktion mit einer Singularität an der Stelle 1 liefert. Anwenden von Satz 1.9 darauf ergibt

$$p_n \sim -\frac{\sqrt{2\rho(3 - \rho)}}{4} \frac{n^{-3/2}}{\Gamma(-1/2)\rho^n}.$$

Einsetzen von $\rho = 3 - \sqrt{8}$ liefert

$$p_n \sim \frac{\sqrt{2}\sqrt{3 - \sqrt{8}} \cdot 8^{1/4}}{4} \cdot \frac{n^{-3/2}}{-2\sqrt{\pi}(3 - \sqrt{8})^n}$$

und führt uns zu folgendem Satz.

Satz 3.3. Für die Schröder-Hipparchus-Zahlen aus Satz 3.2, die auch die Anzahl der ebenen π -Netzwerke messen, gilt

$$p_n \sim \frac{(3 + \sqrt{8})^n}{n^{3/2}} \cdot \frac{2^{1/4}\sqrt{3 - \sqrt{8}}}{4\sqrt{\pi}}.$$

3.1.1 Verwandte kombinatorische Probleme

Nicht von ungefähr haben die Schröder-Hipparchus-Zahlen so viele Namen. Neben der Anzahl an π -Netzwerken von serien-parallelen Graphen lösen sie nämlich auch eine Vielzahl von anderen kombinatorischen Abzählproblemen. Laut [19] zählen sie auch:

- die Anzahl der ebenen Bäume mit genau n Blättern, wobei jeder innerer Knoten mindestens 2 Nachfolger hat,
- die Anzahl der Arten, auf die man ein Polygon mit $n + 1$ Seiten entlang der Diagonalen in kleinere Polygone zerteilen kann,
- die Anzahl der Klammerungen um einen String mit n Zeichen, wobei jede Klammer mindestens 2 Zeichen enthalten muss und Klammerungen um den gesamten String nicht erlaubt sind.

Zwischen letzterer Interpretation und unseren ebenen serien-parallelen Graphen lässt sich eine einfache Bijektion finden (siehe [4] Part A, Kapitel I.5 oder auch [17]). Gezählt wird die Anzahl der π -Netzwerke. Diese bestehen ja aus σ -Netzwerken (wir lassen hier auch den trivialen serien-parallelen Graphen als σ -Netzwerk zu). In einem geklammerten String entsprechen nun einzelne gänzlich ungeklammerte Zeichen direkten Kanten von s nach t , geklammerte Gruppen von Zeichen entsprechen einem σ -Netzwerk. Dieses besteht wiederum aus π -Netzwerken. Einzelne Zeichen innerhalb dieser ersten Stufe von Klammern entsprechen einzelnen Kanten, geklammerte Gruppen von Zeichen entsprechen π -Netzwerken usw. Eine Klammer entspricht also immer einem Bestandteil des π - bzw. σ -Netzwerkes. Es gilt dabei zu beachten, dass die Zeichen bzw. die Zeichengruppen, die weiter links stehen, auch im π -Netzwerk weiter links stehen, bzw. im σ -Netzwerk weiter oben stehen. Abbildung 3.1(a) zeigt ein π -Netzwerk mit dem dazugehörigen geklammerten String. Man beachte dabei, dass es sich nicht um einen markierten Graphen handelt. Die Zahlen dienen in dieser Abbildung lediglich dazu, die Kanten im Graphen mit dem entsprechenden Zeichen im String in Verbindung zu bringen.

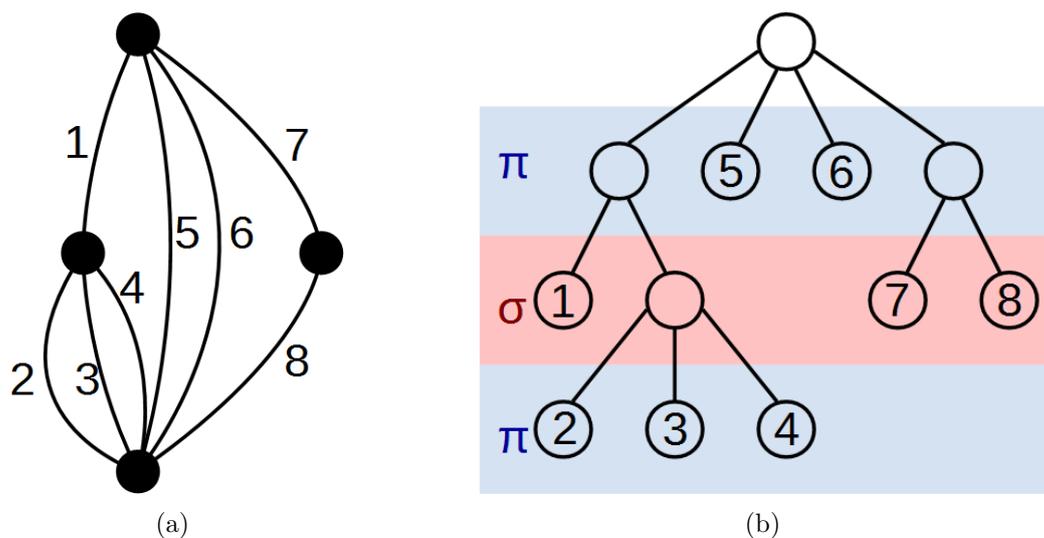


Abbildung 3.1: Das Bild, bzw. Urbild von $(1(234))56(78)$

Genauso lässt sich die Bijektion zu den ebenen Bäumen mit genau n Blättern, wobei jeder innere Knoten mindestens 2 Nachfolger hat, finden. Ein solcher Baum besteht aus einer Wurzel, an der mindestens 2 weitere Bäume angehängt sind. Die Bäume, die direkt an der Wurzel hängen, entsprechen σ -Netzwerken, die parallel verknüpft sind. Die Bestandteile dieser Bäume entsprechen wiederum den π -Netzwerken, aus denen das jeweilige σ -Netzwerk besteht und so weiter. Die Blätter entsprechen schließlich den Kanten (siehe Abbildung 3.1(b)). Es ergibt sich, dass die erste Zeile nach der Wurzel ein π -Netzwerk bestehend aus σ -Netzwerken darstellt und sich dann σ - und π -Netzwerke abwechseln. Diese Bäume werden auch Schröder-Bäume genannt.

Konjugieren wir das π -Netzwerk zu einem σ -Netzwerk, so bleibt der Baum gleich. Eine Zeile, die ein σ -Netzwerk repräsentiert, wird lediglich zu einer Zeile, die ein π -Netzwerk repräsentiert und umgekehrt.

Das Betrachten der erzeugenden Funktion dieser Bäume bestätigt unsere Bijektion. Ein Baum ist entweder ein Blatt, oder eine Folge aus mindestens zwei Bäumen. Man beachte, dass im Falle der Folge die Wurzel nicht mitgezählt wird, da unsere erzeugende Funktion die Anzahl der Blätter zählen soll. Es ergibt sich die Gleichung

$$P(x) = x + \frac{P(x)^2}{1 - P(x)}, \quad (3.7)$$

die Äquivalent zur Gleichung (3.3) ist.

3.2 Anzahl der Komponenten eines π -Netzwerkes

Wir wollen nun die σ -Netzwerke, aus denen ein π -Netzwerk besteht, als Komponenten dieses π -Netzwerkes bezeichnen. Um zu analysieren, aus wie vielen Komponenten ein π -Netzwerk besteht, leiten wir nun die Anzahl der π -Netzwerke mit n Kanten und r Komponenten her. Dazu verwenden wir die Darstellung als Baum und die dazugehörige Gleichung (3.7). Wegen der Korrespondenz von σ - und π -Netzwerken mittels des konjugierten Netzwerkes ist die Anzahl für σ -Netzwerke ident.

Wir erweitern die erzeugende Funktion $P(x)$ der ebenen Bäume mit n Blättern, wobei jeder innere Knoten mindestens zwei Nachfolger hat, um einen Parameter v zu $P(x, v)$. Die Anzahl der Komponenten eines π -Netzwerkes entspricht der Anzahl der Kinder der Wurzel im Baum. Wir erweitern Gleichung (3.7) um den Parameter v .

$$P(x, v) = x + \frac{v^2 P(x)^2}{1 - vP(x)}. \quad (3.8)$$

Da der Parameter nur in der ersten Rekursionsebene zählen soll, schreiben wir auf die linke Seite die bivariate erzeugende Funktion und auf der rechten Seite bleibt die gewöhnliche erzeugende Funktion stehen.

Lesen wir daraus den Koeffizient von v^r heraus, so erhalten wir, dass $[v^r]P(x, v) = P(x)^r$ für $r \geq 2$ ist. Wir wählen in der Formel von Lagrange-Bürmann, Satz (1.4), für $f(u) = u^r$ und das gleiche ϕ wie im vorigen Abschnitt und erhalten für den Koeffizienten von x^n

$$[x^n v^r]P(x, v) = [x^n]P(x)^r = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \left(\frac{1-u}{1-2u} \right)^n r u^{r-1} = \frac{r}{n} [u^{n-r}] \left(\frac{1-u}{1-2u} \right)^n.$$

Mit Lemma (3.1) und $N := n - r$ und $M := n$ ergibt sich folgender Satz.

Satz 3.4. Die Anzahl der π -Netzwerke mit n Kanten und r Komponenten mit $n > r$ ist

$$[x^n v^r]P(x, v) = \frac{r}{n} \sum_{k=1}^{n-r} \binom{n}{k} \binom{n-r-1}{k-1} 2^{n-r-k}.$$

Für den Fall $n = r$ gibt es genau eine Möglichkeit, nämlich ein π -Netzwerk, das aus lauter trivialen serien-parallelen Graphen zusammengesetzt ist.

Berechnen der ersten Koeffizienten ergibt also die folgende Tabelle.

r \ n	2	3	4	5	6	7	8
2	1	2	7	28	121	550	2591
3	0	1	3	12	52	237	1119
4	0	0	1	4	18	84	403
5	0	0	0	1	5	25	125
6	0	0	0	0	1	6	33
7	0	0	0	0	0	1	7
8	0	0	0	0	0	0	1

Die Zeilen der Tabelle sind in OEIS als die Konvolutionen der Schröder-Hipparchus-Zahlen zu finden (siehe [18]). Für $r = 2$ ergeben sie OEIS A010683, die Anzahl der Schröder-Bäume mit Wurzelgrad 2, wie wir sie auch berechnet haben.

Als nächstes wollen wir uns dem Erwartungswert $\mathbb{E}(K_n)$ der Anzahl der Komponenten eines π -Netzwerkes widmen. Sei dazu K_n die Zufallsvariable, die die Anzahl der Komponenten eines π -Netzwerkes misst. Wir leiten die Formel (3.8) nach v ab und setzen $v = 1$ ein und erhalten

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(K_n = k) p_n x^n = P_v(x, v)|_{v=1} = \frac{2vP(x)^2 - v^2P(x)^3}{(1 - vP(x))^2} \Big|_{v=1} = \frac{2P(x)^2 - P(x)^3}{(1 - P(x))^2}.$$

und da $P(x)$ bereits bekannt ist, können wir uns die erzeugende Funktion für den Erwartungswert direkt ausrechnen. Wir verwenden Gleichung (3.7), um die hohen Potenzen loszuwerden und bekommen

$$K(x) := \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(K_n) p_n x^n = \frac{P(x)^2(2 - P(x))}{(1 - P(x))^2} = \frac{(2 - P(x))(P(x) - x)}{(1 - P(x))}.$$

Um den Bruch loszuwerden verwenden wir Gleichung (3.3) und erhalten

$$(2 - P(x))(P(x) - x)(1 - x + 2P(x)).$$

Wir setzen die explizite Form von $P(x)$ ein, multiplizieren die hohen Potenzen aus und erhalten

$$\frac{1}{4}(3 - 11x + 2x^2 + (2x - 3)\sqrt{x^2 - 6x + 1}),$$

aus dem wir wieder $P(x)$ extrahieren, was

$$K(x) = -3x + x^2 + 3P(x) - 2xP(x)$$

ergibt.

Da uns die Koeffizienten von $P(x)$ bereits bekannt sind, ergibt sich für $n \geq 3$ die Darstellung

$$\mathbb{E}(K_n)p_n = 3p_n - 2p_{n-1}.$$

Satz 3.5. Der Erwartungswert für die Anzahl der Komponenten eines π -Netzwerkes mit $n \geq 3$ Kanten ist

$$\mathbb{E}(K_n) = 3 - 2 \frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

Wie man unschwer erkennen kann, ist dieser durch 3 nach oben beschränkt. Mit Hilfe von Satz 3.3 kann man das genaue Konvergenzverhalten bestimmen. Durch Einsetzen der asymptotischen Formel von p_n erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2 \cdot \frac{(3 + \sqrt{8})^{n-1} n^{3/2}}{(n-1)^{3/2} (3 + \sqrt{8})^n} = 3 - 2 \cdot (3 - \sqrt{8}),$$

was numerisch in etwa 2,656854... ergibt. Dieses Ergebnis wird durch die Berechnung der ersten Koeffizienten bestätigt, die in folgender Tabelle aufgelistet sind.

n	$\mathbb{E}(K_n) \cdot p_n$	$\mathbb{E}(K_n)$	n	$\mathbb{E}(K_n) \cdot p_n$	$\mathbb{E}(K_n)$
2	2	2	5	113	$113/45 \approx 2.51$
3	7	$7/3 \approx 2.33$	6	501	$501/197 \approx 2.54$
4	27	$27/11 \approx 2.45$	7	2315	$2315/903 \approx 2.56$

3.3 Anzahl innerer Knoten

Wir leiten nun die erzeugende Funktion für den Erwartungswert der Anzahl der inneren Knoten eines zufällig gewählten ebenen serien-parallelen Graphen her. Als innere Knoten bezeichnen wir alle Knoten außer der Quelle und der Senke. Sei also $\mathbb{E}(I_n^p)$ bzw. $\mathbb{E}(I_n^q)$ der Erwartungswert für die Anzahl der inneren Knoten für ein π -Netzwerk bzw. σ -Netzwerk mit n Kanten. Wir definieren die zugehörigen erzeugenden Funktionen

$$I^p(x) := \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(I_n^p) p_n x^n \quad \text{und} \quad I^s(x) := \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(I_n^q) q_n x^n,$$

wobei p_n bzw. q_n wiederum die Anzahl der π -Netzwerke bzw. σ -Netzwerke ist.

Ein innerer Knoten entsteht immer dann, wenn π -Netzwerke seriell verknüpft werden, da ein neuer Verknüpfungspunkt entsteht. Ein σ -Netzwerk, das aus r π -Netzwerken besteht, erzeugt also $r - 1$ Verknüpfungspunkte, also innere Knoten.

Wiederum erweitern wir die erzeugende Funktion $Q(x)$ der σ -Netzwerke aus (3.5) und die erzeugende Funktion $P(x)$ der π -Netzwerke aus (3.4) um einen Parameter u zu $Q(x, u)$ bzw. $P(x, u)$, der die Anzahl der inneren Knoten zählen soll.

Wir erinnern uns, dass ein serien-paralleler Graph als nichtleere Folge von σ -Netzwerken oder trivialen serien-parallelen Graphen beschrieben werden kann. Ein σ -Netzwerk wäre dann eine Folge der Länge 1 mit einem σ -Netzwerk als Folgenglied und ein π -Netzwerk wäre eine Folge größerer Länge. Zu $Q(x, u)$ addieren wir noch den trivialen serien-parallelen Graphen x und bilden nichtleere Folgen davon. Dies führt uns zur nachfolgenden Gleichung.

$$P(x, u) + Q(x, u) = \frac{1}{1 - (Q(x, u) + x)} - 1.$$

Genauso können wir die serien-parallelen Graphen als nichtleere Folge von π -Netzwerken darstellen. Hier fügen wir allerdings einen Parameter ein. Besteht ein σ -Netzwerk aus r π -Netzwerken, so fügt es $r - 1$ innere Knoten hinzu. Dieser Sachverhalt wird durch folgende Gleichung beschrieben.

$$P(x, u) + Q(x, u) = \frac{P(x, u)}{1 - uP(x, u)}.$$

Differenziert man nun die beiden Gleichungen nach u , so erhält man

$$\begin{aligned} P_u(x, u) + Q_u(x, u) &= \frac{Q_u(x, u)}{(1 - Q(x, u) - x)^2}, \\ P_u(x, u) + Q_u(x, u) &= \frac{P_u(x, u)(1 - uP(x, u)) - P(x, u)(-uP_u(x, u) - P(x, u))}{(1 - uP(x, u))^2}. \end{aligned}$$

Setzt man $u = 1$ und addiert man die beiden Gleichungen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2(I^p(x) + I^q(x)) &= \frac{I^q(x)}{(1 - P(x))^2} + \frac{I^p(x)(1 - P(x)) + P(x)(I^p(x) + P(x))}{(1 - P(x))^2} \\ &= \frac{I^p(x) + I^q(x)}{(1 - P(x))^2} + \frac{P(x)^2}{(1 - P(x))^2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

wobei wiederum Gleichung (3.1) verwendet wird. Wir definieren I_n als die Zufallsvariable, die die Anzahl innerer Knoten in einem beliebigen Graphen (also egal ob π - oder σ -Netzwerk) misst und definieren die erzeugende Funktion

$$I(x) := \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} k \mathbb{P}(I_n = k) (p_n + q_n) x^n = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(I_n) (p_n + q_n) x^n = I^p(x) + I^v(x).$$

Da die Funktion $P(x)$ aus (3.4) schon bekannt ist, können wir sie in (3.9) einsetzen, umformen und erhalten

$$I(x) = \frac{P(x)^2}{2(1 - P(x))^2 - 1} = \frac{1 - 3x}{4\sqrt{x^2 - 6x + 1}} - \frac{1}{4}.$$

Die ersten Koeffizienten ergeben die folgenden Werte und sind in OEIS A050151 zu finden (siehe [18]).

n	$I_n \cdot (p_n + q_n)$	I_n	n	$I_n \cdot (p_n + q_n)$	I_n
2	1	1/2	5	180	2
3	6	1	6	985	5/2
4	33	3/2	7	5418	3

Dass der tatsächliche Erwartungswert $(n - 1)/2$ ist, kann man sich auch direkt überlegen. Entwickelt man einen Graphen nach Definition 2.4 von innen, so gibt es immer eine 50:50-Chance, ob eine Kante parallel verdoppelt wird, oder ob eine Kante seriell verdoppelt wird und ein neuer Knoten entsteht.

Die Analyse der kombinatorischen Eigenschaften von nichtebenen serien-parallelen Graphen entpuppt sich als deutlich schwieriger als bei den ebenen Graphen. Wie bei vielen anderen Strukturen, wie etwa den Bäumen, entstehen auch bei nichtebenen serien-parallelen Graphen viele Symmetrien, die die Analyse sehr schwierig machen.

4.1 Nichtebene Graphen mit unmarkierten Kanten

Es ist naheliegend, eine analoge Gleichung zu (3.2) aufzustellen.

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = MS(\mathcal{P}) - \varepsilon. \quad (4.1)$$

Anstatt einer Folge von π -Netzwerken verwenden wir eine Multimenge von π -Netzwerken, da wir es jetzt mit nichtebenen Graphen zu tun haben. Allerdings stoßen wir bei der weiteren Bearbeitung bei der Verwendung von Gleichung (3.1) auf ein Problem. Nichteben bedeutet, dass die Reihenfolge, in der die Kanten aus der Quelle s weggehen egal ist. Es werden also die Graphen in Abbildung 4.1(a) und 4.1(b) als gleich betrachtet, da es egal ist, ob der Zweig mit den zwei Kanten nach rechts, oder nach links weggeht. Die Graphen 4.1(c) und 4.1(d) sind in dieser Hinsicht jedoch verschieden.

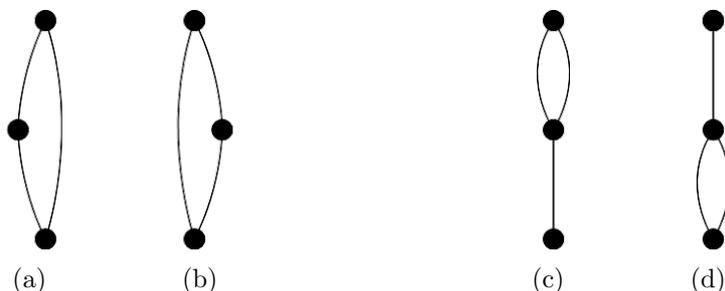


Abbildung 4.1: Die nichtebenen Graphen (a) und (b) sind gleich, die dazu konjugierten Graphen (c) und (d) werden als gleich definiert.

Nach dieser Auffassung wird also die Konjugiertheit zerstört, was verständlich ist, da wir bei einem π -Netzwerk die Reihenfolge der beinhalteten σ -Netzwerke nicht mehr beach-

ten, umgekehrt aber schon. Diese Überlegung suggeriert, dass wir auch bei σ -Netzwerken die Reihenfolge der beinhalteten π -Netzwerke nicht mehr beachten. Es erscheint auch in Hinsicht auf das einführende Beispiel mit den Widerständen in Kapitel 2 logisch so vorzugehen, da es für den Gesamtwiderstand der Schaltung unerheblich ist, in welcher Reihenfolge eine Serienschaltung aufgebaut ist.

Da jedes π -Netzwerk nun wieder genau ein dazu konjugiertes σ -Netzwerk hat, gilt die Formel (3.1) wieder und wir können sie in (4.1) einsetzen (siehe [15]). Sei p_i die Anzahl der π -Netzwerke mit i Kanten, dann erhalten wir

$$1 - x + 2P(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(x^i)}{i}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-p_i}.$$

Diese Gleichung ist zu kompliziert, um eine explizite Lösung zu erhalten. Es ist jedoch möglich, für die Anzahl der unmarkierten nichtebenen serien-parallelen Graphen eine Rekursion aufzustellen, oder deren Wachstum asymptotisch anzugeben. Resultate dafür finden sich etwa in [16], [6], [10] oder [15]. Wir begnügen uns hier damit, diese Ergebnisse ohne Beweis niederzuschreiben. Die Resultate befinden sich in folgender Tabelle.

	Asymptotisches Wachstum
Anzahl der verschiedenen π -Netzwerke mit n Kanten	$(0.2063\dots) \cdot (0.2808\dots)^{-n} n^{-3/2}$
Anzahl der verschiedenen serien-parallelen Graphen mit n Kanten	$\frac{3}{7} \cdot (3.5608\dots)^n n^{-3/2}$
Anzahl der Komponenten eines π - oder σ -Netzwerkes	$(2.5161\dots)$
Erwartungswert für die Anzahl der Multikanten in einem π - oder σ -Netzwerk mit n Kanten (k parallele Kanten liefern den Beitrag $(k - 1)$ für die Anzahl)	$(0.2212\dots)n$
Erwartungswert für die Anzahl innerer Knoten in einem π - oder σ -Netzwerk mit n Kanten (innere Knoten sind wiederum alle Knoten, bis auf die Quelle und die Senke)	$\frac{1}{2}n$
Wahrscheinlichkeit, dass ein π - oder σ -Netzwerk keine Multikanten beinhaltet	$(0.9557\dots) \cdot (0.8109\dots)^n$

4.2 Nichtebene Graphen mit markierten Kanten

Auch bei markierten Kanten lassen sich nur asymptotische Ergebnisse bestimmen (siehe [15] oder [10]). Wiederum schreiben wir sie nur nieder, ohne sie zu beweisen.

	Asymptotisches Wachstum
Anzahl der verschiedenen π - oder σ -Netzwerke mit n Kanten	$\frac{1}{2}(\log(4/e)/\pi)^{1/2} \cdot \log(4/e)^{-n} n^{-3/2} n!$
Anzahl der Komponenten eines π - oder σ -Netzwerkes	$1 + 2 \log(2) = (2.3862\dots)$
Wahrscheinlichkeit, dass es eine direkte Kante von der Quelle zur Senke gibt	$2 - \frac{e}{2} = (0.6408\dots)$
Erwartungswert für die Anzahl der Multikanten in einem π - oder σ -Netzwerk mit n Kanten (k parallele Kanten liefern den Beitrag $(k - 1)$ für die Anzahl)	$(0.1705\dots)n$
Erwartungswert für die Anzahl innerer Knoten in einem π - oder σ -Netzwerk mit n Kanten (innere Knoten sind wiederum alle Knoten, bis auf die Quelle und die Senke)	$\frac{1}{2}n$
Wahrscheinlichkeit, dass ein π - oder σ -Netzwerk keine Multikanten beinhaltet	$(0.9107\dots) \cdot (0.8192\dots)^n$

Wir erinnern uns, dass wir in Abschnitt 3.1 eine Bijektion zwischen den ebenen serienparallelen Graphen mit n Kanten und den Klammerungen um einen String mit n Zeichen beschrieben haben. Auch in diesem Fall lässt sich eine Bijektion zu Klammerungen finden. Da wir es diesmal mit markierten Kanten zu tun haben, müssen die Elemente, um die wir klammern unterscheidbar sein, also nehmen wir beispielsweise die Zahlen von 1 bis n . Wie in Abschnitt 3.1 bezeichnen ungeklammerte Elemente einzelne Kanten von der Quelle zur Senke, mehrere gemeinsam geklammerte Elemente bezeichnen σ -Netzwerke, die damit durch parallele Komposition verbunden sind. Innerhalb der ersten Klammerungsebene, also innerhalb eines σ -Netzwerkes bezeichnen die einzelnen beziehungsweise geklammerten Elemente wiederum einzelne Kanten beziehungsweise π -Netzwerke, aus denen das σ -Netzwerk besteht und so weiter. Da es egal ist, in welcher Reihenfolge die Komponenten angeordnet werden, muss es auch bei unseren Klammerungen egal sein, in welcher Reihenfolge die Elemente angeordnet sind. Wir können uns diese Klammerungen mehr als Mengen (von Mengen) vorstellen.

Interpretiert als Anzahl von Klammerungen ist die Folge schon länger bekannt (siehe [17]). In analoger Weise zu unserem Vorgehen in Abschnitt 3.1 lässt sich auch wieder eine Bijektion zu Bäumen finden. Natürlich werden diesmal aber markierte nichtebene Bäume verwendet.

KAPITEL 5

BINÄRE SERIEN-PARALLELE GRAPHEN

Manchmal will man bei serien-parallelen Graphen nicht zu viele parallele Kanten zulassen. Ein Grund dafür kann zum Beispiel sein, dass man bei einem Transportnetzwerk nicht zu viele Straßen, Schienen etc. parallel bauen kann. In diesem Kapitel wollen wir uns serien-parallelen Graphen widmen, bei denen die Anzahl paralleler Kanten auf 2 begrenzt ist. Genauer gesagt wollen wir keine Weggrade zulassen, die größer als 2 sind. Um die Weggrade genauer zu präzisieren, betrachten wir alle Kanten des serien-parallelen Graphen als gerichtet und zwar in Richtung Senke. Von einem Knoten dürfen also maximal 2 Kanten in Richtung Senke weggehen. Um dies zu realisieren, müssen wir die rekursive Definition 2.4 überarbeiten. Hier fügen wir eine weitere Einschränkung hinzu. Wenn eine Kante parallel verdoppelt werden kann, also der Weggrad ihres Startpunktes nur 1 beträgt, dann wird sie auch parallel verdoppelt. Nur wenn der Weggrad des Startknotens bereits 2 beträgt, wird die Kante seriell verdoppelt. Um alle verschiedenen binären serien-parallelen Graphen zu erzeugen, können wir also wie folgt vorgehen (siehe [8]):

```
for each  $G(V, E) \in \mathcal{G}_n$ 
  for each  $e \in E$ 
    if Startpunkt von  $e$  hat Grad 1
      Verdopple  $e$  parallel
    else
      Verdopple  $e$  seriell
    if der erzeugte Graph existiert noch nicht in  $\mathcal{G}_{n+1}$ 
      fuege ihn zu  $\mathcal{G}_{n+1}$  hinzu
end
```

Die letzte bedingte Anweisung ist notwendig, da der gleiche Graph auf verschiedene Arten erzeugt werden kann, wie das Beispiel in Abbildung 5.1 zeigt.

5.1 Anzahl binärer serien-paralleler Graphen

Wir versuchen zuerst die Struktur binärer serien-paralleler Graphen besser zu verstehen. Bei der Entwicklung dieser wird mit dem trivialen serien-parallelen Graphen begonnen.

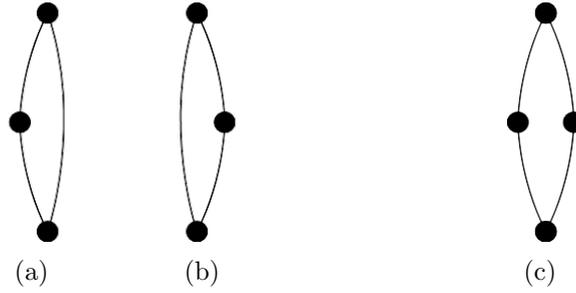


Abbildung 5.1: Sowohl aus Graph (a), als auch aus Graph (b) kann durch serielle Verdopplung der Kante, die direkt von der Quelle zur Senke führt der Graph (c) entstehen.

Im ersten Schritt hat die Quelle Knotengrad 1, also wird die einzelne Kante parallel verdoppelt. Von diesem Zeitpunkt an bleibt die Quelle bei Knotengrad 2, da die beiden weggehenden Kanten nicht mehr parallel verdoppelt werden dürfen. Der serien-parallele Graph besteht also nun aus 2 Komponenten. Da es sich hier wieder um einen rekursiven Aufbau handelt, sind unsere Bausteine, aus denen sich alles zusammensetzt einerseits einzelne Kanten, also triviale serien-parallele Graphen und andererseits serien-parallele Graphen, die aus 2 Komponenten bestehen, die wir *Blöcke* nennen wollen. Natürlich können Blöcke einzelne Kanten, aber auch andere Blöcke enthalten (siehe Abbildung 5.2). Im Kontext von kombinatorischen Familien nennen wir die einzelnen Kanten \mathcal{K} und die Blöcke \mathcal{L} .

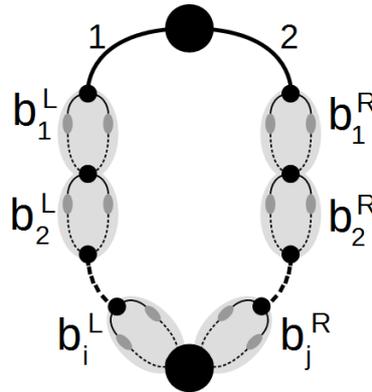


Abbildung 5.2: Ein Block (bzw. es könnte auch ein ganzer Graph sein) besteht auf der linken Seite aus der Kante 1 und den Blöcken b_1^L bis b_i^L und auf der rechten Seite aus der Kante 2 und den Blöcken b_1^R bis b_j^R . Die Senke ist sowohl Teil von b_i^L als auch von b_j^R .

Sei weiters \mathcal{B} die kombinatorische Familie der binären serien-parallelen Graphen. Im Falle eines trivialen serien-parallelen Graphen besteht der binäre serien-parallele Graph also nur aus einer einzelnen Kante \mathcal{K} . Andernfalls ist der gesamte Graph ein Block \mathcal{L} . Betrachten wir eine der beiden Seiten eines Blockes, dann muss diese oben mit einer einzelnen Kante beginnen, da noch eine andere Kante für die zweite Seite übrig bleiben muss und der Startknoten nur maximal den Weggrad 2 haben darf. Danach kommt eine Folge von einzelnen Kanten und Blöcken. Da es zwei Seiten gibt, müssen wir noch quadrieren und wir erhalten die beiden Gleichungen

$$\mathcal{B} = \mathcal{K} + \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \mathcal{L} = (\mathcal{K}(\mathcal{K} + \mathcal{L})^*)^2. \quad (5.1)$$

Wir definieren die erzeugenden Funktionen für \mathcal{B} und \mathcal{L} als

$$B(x) = \sum_{n \geq 0} B_n x^n \quad \text{und} \quad L(x) = \sum_{n \geq 0} L_n x^n,$$

wobei B_n die Anzahl der binären serien-parallelen Graphen und L_n die Anzahl der unterschiedlichen Blöcke angibt. Damit übersetzen sich die Gleichungen aus (5.1) in

$$B(x) = x + L(x) \quad \text{und} \quad L(x) = \left(\frac{x}{1 - x - L(x)} \right)^2. \quad (5.2)$$

Satz 5.1. Die Anzahl der unterschiedlichen binären serien-parallelen Graphen mit n Kanten ist durch die $(n - 1)$ -sten Catalanzahlen

$$B_n = C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

gegeben. Für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich also:

$$B_n \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-1)^3}}.$$

Beweis. Umformen der Gleichung (5.2) liefert eine kubische Gleichung, die wir ausmultiplizieren und dann anders faktorisieren.

$$\begin{aligned} L(x)(1 - x - L(x))^2 &= x^2, \\ (L(x) - L(x)^2) + (L(x)^3 - L(x)^2) + (2L(x)^2x - 2L(x)x) + (L(x)x^2 - x^2) &= 0, \\ (1 - L(x))(L(x) - L(x)^2 - 2L(x)x - x^2) &= 0. \end{aligned}$$

Die linke Klammer liefert die Lösung $L(x) = 1$, die wir ausschließen können, da sonst die zugehörigen Koeffizienten bis auf L_0 alle 0 wären. Wir reduzieren also auf die quadratische Gleichung

$$L(x)^2 + (2x - 1)L(x) + x^2 = 0$$

und lösen diese mit der kleinen Lösungsformel.

$$L(x) = \frac{1 - 2x}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - 2x)^2}{4} - x^2} = \frac{1}{2} - x \pm \sqrt{\frac{1 - 4x}{4}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2} - x$$

Einsetzen von 0 liefert den Koeffizienten $[x^0]L(x)$, der die Anzahl der Blöcke mit 0 Kanten beschreibt und daher 0 sein soll. Dieser verschwindet aber nur bei der Lösung $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} - x$, also schließen wir die Lösung mit dem Pluszeichen aus. Die erzeugende Funktion $L(x)$ und mit (5.2) auch die erzeugende Funktion $B(x)$ ergibt sich also durch

$$L(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} - x \quad \text{bzw.} \quad B(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2}. \quad (5.3)$$

Wir erhalten also, dass die erzeugende Funktion der binären serien-parallelen Graphen $B(x)$ die gleiche ist, wie die um 1 verschobene erzeugende Funktion der Catalanzahlen $C(x)$. Die Ergebnisse folgen also mit Satz 1.10. \square

5.2 Weitere kombinatorische Resultate

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass die binären serien-parallelen Graphen in enger Beziehung zu den Binärbäumen stehen (siehe [8]).

Die Anzahl der Knoten in einem Binärbaum setzt sich aus der Wurzel, der Anzahl der Knoten im linken Teilbaum und aus der Anzahl der Knoten im rechten Teilbaum zusammen. Für die Anzahl der Binärbäume mit $n + 1$ Knoten T_{n+1} gilt also

$$T_{n+1} = \sum_{k=0}^n T_k T_{n-k},$$

was mit den Startbedingungen $T_0 = T_1 = 1$ nach Satz 1.10 die Catalanzahlen ergibt. Auch in den binären serien-parallelen Graphen tritt diese Rekursion in natürlicher Weise auf, wie die nächsten beiden Resultate zeigen.

Satz 5.2. Sei $n \geq 2$ und l_n eine Zufallsvariable, die die Anzahl der Kanten misst, die sich im linken Ast des binären serien-parallelen Graphen mit insgesamt n Kanten befinden, dann gilt

$$\mathbb{P}(l_n = j) = \frac{C_{j-1} C_{n-j-1}}{C_{n-1}}, \quad j \geq 1.$$

Beweis. Sei B ein binärer serien-paralleler Graph mit $n \geq 2$ Kanten und l die Anzahl der Kanten, die sich im linken Ast befinden. Sei weiters R_k die Anzahl der Möglichkeiten, k Kanten innerhalb des linken Astes zu arrangieren. Wenn sich l Kanten im linken Ast befinden, dann befinden sich natürlich $n - l$ Kanten im rechten Ast. Die Anzahl der Möglichkeiten für die linke Seite wird mit der Anzahl der Möglichkeiten für die rechte Seite multipliziert und es wird über die Aufteilung der Kanten auf die linke bzw. rechte Seite summiert. Gesamt liefert der Ausdruck die Anzahl der binären serien-parallelen Graphen mit n Kanten:

$$C_{n-1} = \sum_{l=1}^{n-1} R_l R_{n-l}.$$

Laut Satz 1.10 wird diese Rekursion genau von den Catalanzahlen erfüllt und wir erhalten $R_l = C_{l-1}$, was mit den Startbedingungen $R_1 = C_0 = 1$ verträglich ist. Dividieren wir nun die Anzahl der günstigen Fälle $C_{j-1} C_{n-j-1}$ durch die Anzahl der Möglichen Fälle C_{n-1} , so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(l_n = j)$. \square

Satz 5.3. Sei N_m die Anzahl der Kanten von der Quelle aus bis zum ersten Block in einer Seite, die m Kanten beinhaltet, dann gilt

$$\mathbb{P}(N_m = k) = \begin{cases} \frac{C_{m-k} - C_{m-k-1}}{C_{m-1}}, & \text{falls } 1 \leq k < m, \\ \frac{1}{C_{m-1}}, & \text{falls } k = m. \end{cases}$$

Beweis. Wenn unsere betrachtete Seite m Kanten beinhaltet und k davon bereits seriell hintereinander bis zum ersten Block positioniert sind, so müssen wir uns anschauen, wie

viele Möglichkeiten V_j es gibt, die übrigen $j := m - k$ Kanten anzuordnen. Dazu definieren wir eine kombinatorische Familie \mathcal{V} . Diese soll auf jeden Fall mit einem Block beginnen und dann beliebige andere Blöcke oder Einzelkanten beinhalten, also wird eine Folge von Blöcken oder Einzelkanten angehängt. Die symbolische Gleichung

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}(\mathcal{K} + \mathcal{L})^*$$

ergibt sich aus diesen Überlegungen.

Für die erzeugende Funktion $V(x) := \sum_{j \geq 0} V_j x^j$ gilt also mit (5.3), dass

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{L(x)}{1 - x - L(x)} = \frac{1 - 2x - \sqrt{1 - 4x}}{1 + \sqrt{1 - 4x}} = \frac{1 - 2x - \sqrt{1 - 4x}}{1 + \sqrt{1 - 4x}} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{1 - \sqrt{1 - 4x}} \\ &= \frac{1 - 3x - \sqrt{1 - 4x} + x\sqrt{1 - 4x}}{2x} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} + \frac{-x + x\sqrt{1 - 4x}}{2x} - \frac{2x}{2x}, \end{aligned}$$

und mit (1.10), dass

$$V(x) = \frac{C(x)}{x} - C(x) - 1.$$

Mit dem Auslesen der Koeffizienten aus $C(x)$, erhalten wir

$$[x^n]V(x) = V_n = C_n - C_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1$$

Wir wollen nun, dass k Kanten bereits für den Pfad von der Quelle bis zum ersten Block verwendet wurden, daher bleiben $m - k$ Kanten übrig, um sie in \mathcal{V} zu positionieren. Daher haben wir $C_{m-k} - C_{m-k-1}$ günstige Fälle für die Anordnung der Kanten in dieser Seite. Da auf jeden Fall eine einzelne Kante von der Quelle weggeführt muss, bleiben $m - 1$ Kanten übrig, die in einem binären serien-parallelen Teilgraphen angeordnet werden müssen. Die möglichen Fälle ergeben sich also als C_{m-1} und wir erhalten die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(N_m = k) = \frac{C_{m-k} - C_{m-k-1}}{C_{m-1}}$ für $1 \leq k < m$. Falls $k = m$, so müssen alle Kanten in Serie angeordnet sein, also gibt es nur einen einzigen günstigen Fall. \square

KAPITEL 6

DAS UNIFORME BERNOULLI-WACHSTUMSMODELL

Bereits Definition 2.4 suggeriert ein Wachstumsmodell für serien-parallele Graphen (siehe [13]). Ausgangspunkt ist der triviale serien-parallele Graph. In jedem Schritt wird zuerst zufällig eine Kante gewählt. In unserem Modell soll dabei jede vorhandene Kante gleichwahrscheinlich sein. Die gewählte Kante wird dann mit der Wahrscheinlichkeit p mit $0 < p < 1$ parallel verdoppelt, und mit der Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ seriell verdoppelt. Jede Verdopplung bezeichnen wir dabei als einen Wachstumsschritt und eine neue Kante, die im Wachstumsschritt $n - 1$ dazukommt, erhält die Markierung n . Wiederum halten wir uns an die Konvention, dass die neue Kante im Falle einer parallelen Verdopplung rechts und im Falle einer seriellen Verdopplung unten an die alte Kante hinzugefügt wird.

In diesem Kapitel werden wir versuchen, einige Kennzahlen über Graphen zu ermitteln, die anhand dieser Wachstumsregel entstanden sind und deren Wachstum nach $n - 1$ Schritten gestoppt wurde.

Da in jedem Schritt genau eine Kante dazukommt, ist die Anzahl der Kanten nach $n - 1$ Schritten genau n . Die Zahl n wird im Folgenden immer die Anzahl der Kanten und nicht die Anzahl der Schritte bezeichnen.

6.1 Anzahl innerer Knoten

Als innere Knoten bezeichnen wir alle Knoten außer der Quelle s und der Senke t . Die Anzahl der inneren Knoten, beschrieben durch die Zufallsvariable I_n zu bestimmen ist sehr einfach. Bei einer parallelen Verdopplung wird lediglich eine Kante, aber kein Knoten hinzugefügt, bei der seriellen Verdopplung wird sowohl eine Kante als auch ein Knoten hinzugefügt. Die Anzahl der inneren Knoten entspricht also einer Binomialverteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit $(1 - p)$, da ein Erfolg einer seriellen Verdopplung entspricht. Aus den wohlbekanntem Formeln ergeben sich auch sofort der Erwartungswert und die Varianz.

Satz 6.1. Für die Anzahl der inneren Knoten I_n in einem serien-parallelen Graphen mit n Kanten im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell gilt

$$\mathbb{P}(I_n = k) = \binom{n}{k} (1-p)^k p^{n-k}, \quad \mathbb{E}(I_n) = n(1-p) \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(I_n) = np(1-p).$$

6.2 Der Knotengrad der Quelle

Um weitere Kennzahlen eines zufällig gewachsenen serien-parallelen Graphen zu bestimmen, beschreiben wir das Wachstum des Graphen in diesem und in den folgenden Abschnitten mit Hilfe eines Baumes (siehe [11]). Der Baum startet mit einer einzelnen Wurzel, die als 1 markiert ist. Diese symbolisiert eine einzelne markierte Kante, die zwischen s und t verläuft. Falls eine Kante im Zuge eines Wachstumsschrittes parallel verdoppelt wird, so wird an den Knoten, der diese Kante im Baum symbolisiert, eine blaue Kante mit einem neu markierten Knoten angehängt. Ist die Verdopplung seriell, so wird der neue Knoten mit einer roten Kante angehängt (siehe Abbildung (6.1)).

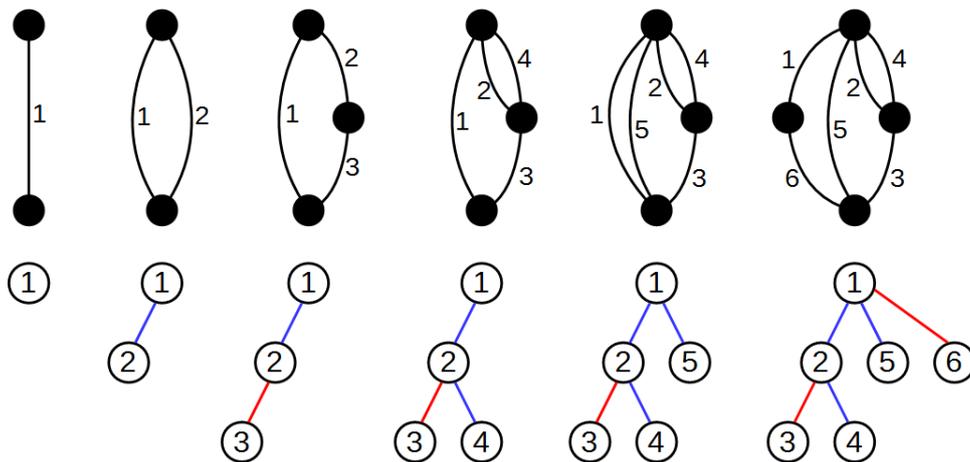


Abbildung 6.1: Wachstum eines Graphen und der dazugehörige Baum

Die Konstruktion eines solchen Baumes kann durch die symbolische Gleichung

$$\mathcal{T} = \{\circ\}^\square * S(BT + RT) \tag{6.1}$$

für die kombinatorische Familie \mathcal{T} beschrieben werden, wobei $\{\circ\}$ die Wurzel darstellt. B und R stehen für eine rote bzw. blaue Kennzeichnung. Ein Baum ist also eine mit 1 markierte Wurzel, an der eine Menge blau oder rot gekennzeichnete Bäume hängt.

Wir wollen nun die Verteilung für den Knotengrad der Quelle bestimmen (siehe [11] und [13]).

Als erstes überlegen wir, wie die Analogie des Knotengrades der Quelle in unserem Baum aussieht. Um die Aussagen eindeutiger zu machen, bezeichnen wir eine Kante bzw. einen Knoten im Baum, der den serien-parallelen Graphen beschreibt, als *Baumkante* bzw

Baumknoten, eine Kante bzw. einen Knoten im eigentlichen serien-parallelen Graphen schlicht als *Kante* bzw. *Knoten*.

Wird die erste Kante parallel verdoppelt, erhöht sich der Knotengrad der Quelle um 1. Wird ein Baumknoten i mit einer blauen Baumkante an einen Baumknoten j gehängt, der mittels ausschließlich blauen Baumkanten mit der Wurzel verbunden ist, so entspricht der Baumknoten i einer Kante, die mittels paralleler Verdopplung aus der Kante j entstanden ist. Die Kante j ist parallel zur Kante 1, also ist die Kante i somit auch parallel zur Kante 1 und trägt zum Knotengrad der Quelle bei. Ist ein Baumknoten i über eine rote Baumkante mit dem Baumknoten j verbunden, so wurde die Kante j bereits seriell verdoppelt. Die Äste, die weiter nach unten führen, sind lediglich Verdopplungen der Kante i , die schon weiter unten im Graphen ist, mit der Quelle nichts mehr zu tun hat und demnach nichts mehr zum Knotengrad der Quelle beiträgt. Der Knotengrad der Quelle ist also genau die Größe (nach Anzahl der Baumknoten) des maximalen blauen Teilbaumes, also des Baumes, der die Wurzel, und alle Baumknoten enthält, die über ausschließlich blaue Baumkanten mit der Wurzel verbunden sind.

Sei nun also D_n eine Zufallsvariable für den Knotengrad der Quelle in einem serien-parallelen Graphen mit n Kanten bzw. die Größe des maximalen blauen Teilbaumes. $D_{n,k}$ bezeichne D_n unter der Bedingung, dass der Baum genau k blaue Baumkanten enthält. T_n bezeichne die Anzahl der (farblosen) Bäume mit genau n Baumknoten. Man überzeugt sich leicht, dass $T_n = (n-1)!$ ist, da es bei der Konstruktion eines Baumes im i -ten Schritt $i-1$ Baumknoten gibt, an die ein neuer Baumknoten gehängt werden kann. Die Anzahl der Bäume mit genau k blauen Baumkanten und einem maximalen blauen Teilbaum der Größe l ergibt sich nun als

$$T_n \binom{n-1}{k} \mathbb{P}(D_{n,k} = l),$$

da der Binomialkoeffizient k blaue Baumkanten aus den $n-1$ Baumkanten auswählt. Die entsprechende trivariate exponentiell erzeugende Funktion lautet demnach

$$G(z, u, v) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} T_n \binom{n-1}{k} \mathbb{P}(D_{n,k} = l) \frac{z^n}{n!} u^k v^l. \quad (6.2)$$

Im Zuge unserer Überlegungen benötigen wir auch die exponentiell erzeugende Funktion, die die Größe des maximalen blauen Teilbaums nicht berücksichtigt.

$$G_1(z, u) = G(z, u, 1) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} T_n \binom{n-1}{k} \frac{z^n}{n!} u^k. \quad (6.3)$$

Sei \mathcal{T} die kombinatorische Familie zu (6.2) und \mathcal{T}_1 die kombinatorische Familie zu (6.3). Um nun die Funktion G berechnen zu können, fügen wir in der symbolischen Gleichung (6.1) die Kennzeichnungen ν für den maximalen blauen Teilbaum und μ für die Anzahl blauer Kanten hinzu.

$$\mathcal{T} = \nu\{\circ\}^\square * S(\mu\mathcal{T} + \mathcal{T}_1)$$

Die Wurzel gehört auf jeden Fall zum maximalen blauen Teilbaum, ein Kindknoten nur dann, wenn er mit einer blauen Kante (μ) verbunden ist. Ansonsten wird ein Baum \mathcal{T}_1

angehängt, bei dem der maximale blaue Teilbaum nicht gezählt wird. Wir wenden das Boxprodukt an, differenzieren nach z und erhalten für die erzeugenden Funktionen die Differentialgleichung

$$G' = ve^{uG+G_1}.$$

Die Funktion G_1 kann explizit berechnet werden.

$$\begin{aligned} G_1(z, u) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} (n-1)! \binom{n-1}{k} \frac{z^n}{n!} u^k = \sum_{n \geq 0} (n-1)! \frac{z^n}{n!} \sum_{k \geq 0} \binom{n-1}{k} u^k \\ &= \sum_{n \geq 0} (n-1)! \frac{z^n}{n!} (u+1)^{n-1} = \frac{1}{u+1} \sum_{n \geq 0} \frac{(z(u+1))^n}{n} \\ &= \frac{1}{u+1} \log \left(\frac{1}{1-z(u+1)} \right) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$G' = ve^{uG} \left(\frac{1}{1-z(u+1)} \right)^{\frac{1}{u+1}}$$

und mit beidseitiger Integration und der Substitution $G = t$ links und $s = 1 - z(1+u)$ rechts

$$\begin{aligned} \int G' e^{-uG} dz &= \int v \left(\frac{1}{1-z(u+1)} \right)^{\frac{1}{u+1}} dz, \\ \int G' e^{-ut} \frac{1}{G'} dt &= v \int s^{-\frac{1}{u+1}} \frac{1}{-1-u} ds, \\ -\frac{e^{-uG}}{u} &= v \frac{1}{-1-u} (1-z(1+u))^{-\frac{1}{u+1}+1} \frac{1}{-\frac{1}{u+1}+1} + c, \\ -\frac{e^{-uG}}{u} &= v \frac{1}{-1-u} (1-z(1+u))^{\frac{u}{u+1}} \frac{u+1}{u} + c, \\ e^{-uG} &= v(1-z(1+u))^{\frac{u}{u+1}} + \bar{c}, \\ G(z, u, v) &= \frac{1}{u} \log \left(\frac{1}{v(1-z(1+u))^{\frac{u}{u+1}} + \bar{c}} \right). \end{aligned}$$

Aufgrund der Anfangsbedingung $G(0, u, v) = 0$, also der Tatsache, dass es keine serienparallelen Graphen mit 0 Kanten gibt, erhalten wir

$$G(z, u, v) = \frac{1}{u} \log \left(\frac{1}{v(1-z(1+u))^{\frac{u}{u+1}} + 1 - v} \right).$$

Die Zufallsvariable D_n lässt sich als Summe der bedingten Wahrscheinlichkeiten $D_{n,k}$ schreiben:

$$\mathbb{P}(D_n = l) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathbb{P}(D_{n,k} = l) p^k q^{n-1-k}. \quad (6.4)$$

Da wir uns nicht für die Anzahl der blauen Baumkanten interessieren, definieren wir die erzeugende Funktion

$$F(z, v) := \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} T_n \mathbb{P}(D_n = l) \frac{z^n}{n!} v^l = \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(D_n = l) \frac{z^n}{n} v^l. \quad (6.5)$$

Setzt man (6.4) in (6.5) ein, so sieht man leicht eine Relation zu der in (6.2) definierten Funktion G :

$$F(z, v) = \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathbb{P}(D_{n,k} = l) p^k q^{n-1-k} \frac{z^n}{n} v^l = \frac{1}{q} G(qz, \frac{p}{q}, v).$$

Ableiten von F nach z ergibt

$$\begin{aligned} F'(z, v) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(D_n = l) z^{n-1} v^l = \left(\frac{1}{q} G(qz, \frac{p}{q}, v) \right)' \\ &= \left(\frac{1}{q} \log \left(\frac{1}{v(1 - qz(1 + \frac{p}{q})^{\frac{p}{q} + 1} + 1 - v)} \right) \right)' \\ &= \frac{v}{v(1 - z) + (1 - v)(1 - z)^{1-p}}, \end{aligned} \tag{6.6}$$

wobei mehrmals verwendet wird, dass $p + q = 1$ ist.

Wir lesen die Koeffizienten ab (siehe [13]), und erhalten den folgenden Satz.

Satz 6.2. Für den Knotengrad D_n der Wurzel eines serien-parallelen Graphen mit n Kanten im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell gilt

$$\mathbb{P}(D_n = l) = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l-1}{k} \binom{pk + p - 1}{n-1} (-1)^{n-k-1}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_n = l) &= [z^{n-1} v^l] \frac{v}{v(1 - z) + (1 - v)(1 - z)^{1-p}} \\ &= [z^{n-1} v^l] - \frac{v}{(v-1)(1-z)^{1-p}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{(v-1)(1-z)^{-p}}} \\ &= [z^{n-1} v^l] - \frac{v}{(v-1)(1-z)^{1-p}} \cdot \sum_{k \geq 0} \left(\frac{v}{(v-1)(1-z)^{-p}} \right)^k \\ &= [z^{n-1} v^l] - \sum_{k \geq 0} \frac{v^{k+1}}{(v-1)^{k+1} (1-z)^{-p(k+1)+1}} \\ &= [z^{n-1} v^l] - \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \left(\sum_{j \geq 0} \binom{-k-1}{j} (-1)^{k+1+j} v^j \cdot \sum_{i \geq 0} \binom{pk + p - 1}{i} (-1)^i z^i \right) \\ &= [v^l] - \sum_{k \geq 0} v^{k+1} \left(\sum_{j \geq 0} \binom{-k-1}{j} (-1)^{k+1+j} v^j \binom{pk + p - 1}{n-1} (-1)^{n-1} \right) \\ &= - \sum_{k \geq 0} \binom{-k-1}{l-k-1} (-1)^l \binom{pk + p - 1}{n-1} (-1)^{n-1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l-1}{k} \binom{pk+p-1}{n-1} (-1)^{n-k-1}.$$

□

Um diese Wahrscheinlichkeitsverteilung besser fassen zu können, bestimmen wir die faktoriellen Momente $\mathbb{E}(D_n^r)$. Für $\bar{F}(x, w) := F'(z, 1+w)$ gilt:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, w) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(D_n = l) z^{n-1} (1+w)^l = \sum_{n \geq 0} \sum_{r \geq 0} z^{n-1} \frac{w^r}{r!} \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(D_n = l) \frac{l!}{(l-r)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{r \geq 0} \mathbb{E}(D_n^r) z^{n-1} \frac{w^r}{r!}. \end{aligned}$$

Satz 6.3. Für den Knotengrad D_n der Quelle eines serien-parallelen Graphen mit n Kanten im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell gilt

$$\mathbb{E}(D_n^r) = r! \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-k-1} \binom{r-1}{k} \binom{p(k+1)+n-1}{n-1}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n^r) &= [z^{n-1} \frac{w^r}{r!}] \frac{1+w}{(1+w)(1-z) - w(1-z)^{1-p}} \\ &= r! [z^{n-1} w^r] \frac{1+w}{(1+w)(1-z)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w}{(1+w)(1-z)^p}} \\ &= r! [z^{n-1} w^r] \frac{1}{(1-z)} \cdot \sum_{k \geq 0} \left(\frac{w}{(1+w)(1-z)^p} \right)^k \\ &= r! [z^{n-1} w^r] \sum_{k \geq 0} \frac{w^k}{(1+w)^k (1-z)^{pk+1}} \\ &= r! [z^{n-1} w^r] \sum_{k \geq 0} w^k \left(\sum_{j \geq 0} \binom{-k}{j} w^j \cdot \sum_{i \geq 0} \binom{-pk-1}{i} (-1)^i z^i \right) \\ &= r! [w^r] \sum_{k \geq 0} w^k \left(\sum_{j \geq 0} \binom{-k}{j} w^j \cdot \binom{-pk-1}{n-1} (-1)^{n-1} \right) \\ &= r! \sum_{k \geq 0} \binom{-k}{r-k} \binom{-pk-1}{n-1} (-1)^{n-1} \\ &= r! \sum_{k=1}^r (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} \binom{pk+n-1}{n-1} \\ &= r! \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-k-1} \binom{r-1}{k} \binom{p(k+1)+n-1}{n-1}. \end{aligned}$$

□

Lesen wir die Koeffizienten auf eine etwas andere Art ab und verwenden wir Satz 1.7, so können wir auch das asymptotische Verhalten der faktoriellen Momente bestimmen.

Satz 6.4. Für den Knotengrad D_n der Wurzel eines serien-parallelen Graphen mit n Kanten im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell gilt

$$\mathbb{E}(D_n^r) \sim r! \frac{n^{pr}}{\Gamma(pr + 1)}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n^r) &= [z^{n-1} \frac{w^r}{r!}] \frac{1+w}{(1-z) + w(1-z) - w(1-z)^{1-p}} \\ &= r! [z^{n-1} w^r] \frac{1+w}{(1-z)(1-w((1-z)^{-p}-1))} \\ &= r! [z^{n-1} w^r] \frac{1+w}{(1-z)} \sum_{k \geq 1} w^k ((1-z)^{-p}-1)^k \\ &= r! [z^{n-1}] \frac{1}{(1-z)} (((1-z)^{-p}-1)^{r-1} + ((1-z)^{-p}-1)^r) \\ &= r! [z^{n-1}] \frac{1}{(1-z)^{p+1}} (((1-z)^{-p}-1)^{r-1}) \\ &= r! [z^{n-1}] \frac{1}{(1-z)^{p+1}} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (1-z)^{-pk} (-1)^{r-1-k} \\ &= r! [z^{n-1}] \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (-1)^{r-1-k} \frac{1}{(1-z)^{p(k+1)+1}}. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun Satz 1.7 und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n^r) &\sim r! \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} (-1)^{r-1-k} \frac{n^{p(k+1)}}{\Gamma(p(k+1)+1)} \\ &\sim r! \frac{n^{pr}}{\Gamma(pr+1)}, \end{aligned}$$

da für große n der letzte Summand dominant ist. □

Für fixe r und $n \rightarrow \infty$ gilt, dass $\mathbb{E}(D_n^r) \sim \mathbb{E}(D_n^r)$. Durch passende Skalierung der r -ten Momente gilt:

$$\mathbb{E} \left(\left(\frac{D_n}{n^p} \right)^r \right) \sim \frac{r!}{\Gamma(pr+1)}.$$

Dies stellt laut [9] die Momente einer Mittag-Leffler Verteilung mit Parameter p dar. Aufgrund des Satzes von Frechet-Shohat 1.12 ist die Grenzverteilung von D_n dadurch eindeutig charakterisiert.

Satz 6.5. Der skalierte Knotengrad D_n der Quelle eines serien-parallelen Graphen mit n Kanten im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell konvergiert in der Verteilung für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Mittag-Leffler verteilte Zufallsvariable mit Parameter p :

$$\frac{D_n}{n^p} \xrightarrow{(d)} D = D(p), \text{ wobei } D \stackrel{(d)}{=} \text{Mittag-Leffler}(p).$$

6.3 Die Länge eines zufälligen Pfades

Um einen zufälligen Pfad von der Quelle zur Senke zu gehen, wählen wir von der Quelle aus eine zufällige Kante, wobei jede dieser Kanten gleichverteilt ist. Wir gehen dieser Kante entlang, erreichen einen neuen Knoten und wählen aus den Kanten, die von diesem Knoten wegführen (also nur solche, die auch wirklich in Richtung der Senke führen) wiederum eine mit gleichverteilter Wahrscheinlichkeit aus und gehen immer so weiter, bis wir die Senke erreichen. Die Verteilung der Länge eines zufälligen Pfades ist die gleiche, wie die Verteilung der Länge des Pfades ganz links. Dieser Sachverhalt erscheint nicht ganz offensichtlich, kann aber in indirekter Weise gezeigt werden (siehe Satz 6.9). Vorerst beschäftigen wir uns also nur mit der Länge des Pfades ganz links und verwenden dabei bereits gezeigte Resultate.

Natürlich lassen sich die Überlegungen aus dem vorigen Abschnitt über den blauen Teilbaum auch auf den roten Teilbaum übertragen. In analoger Weise lässt sich nämlich die Größe des roten Teilbaumes bestimmen. Wir überlegen uns nun, wie dieser rote Teilbaum in unserem serien-parallelen Graphen zu interpretieren ist. Wird eine rote Baumkante an die Wurzel angehängt, so bedeutet das, dass die Kante 1 seriell verdoppelt wird. Wird eine blaue Baumkante angehängt, so wird die Kante unserer Konvention entsprechend rechts davon parallel verdoppelt. Rote Baumkanten, die an einen Baumknoten des roten Teilbaumes angehängt werden, verdoppeln also seriell eine Kante des Pfades, der ganz auf der linken Seite ist, da alle parallel verdoppelten Kanten, die durch eine Verbindung mittels einer blauen Baumkante repräsentiert werden, weiter rechts zu finden sind. Die Größe des roten Teilbaumes entspricht somit der Länge des Pfades ganz links.

Um nun Aussagen über die Verteilung und den Erwartungswert treffen zu können, müssen wir lediglich die Wahrscheinlichkeit p für eine blaue Baumkante durch die Wahrscheinlichkeit $(1 - p)$ bzw. q für eine rote Baumkante austauschen.

Satz 6.6. Für die Länge L_n des Pfades ganz links eines serien-parallelen Graphen

mit n Kanten im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell gelten die Formeln:

$$\mathbb{P}(L_n = l) = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l-1}{k} \binom{qk + q - 1}{n-1} (-1)^{n-k-1},$$

$$\mathbb{E}((L_n)_r) = r! \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} \binom{qk + n - 1}{n-1},$$

$$\mathbb{E}((L_n)_r) \sim r! \frac{n^{qr}}{\Gamma(qr + 1)},$$

$$\frac{L_n}{n^q} \xrightarrow{(d)} L = L(q), \text{ wobei } L \stackrel{(d)}{=} \text{Mittag-Leffler}(q).$$

6.3.1 Zusammenhang zwischen dem Knotengrad der Quelle und der Länge des Pfades ganz links

Natürlich sind die Verteilungen dieser beiden Größen nicht nur zufällig gleich, sondern haben einen simplen Zusammenhang. Verwendet man den gleichen Baum, um einen serienparallelen Graphen zu erzeugen nur ändert man die Farben der Baumkanten von rot zu blau bzw. von blau zu rot, entsteht genau der zum ursprünglichen Graphen konjugierte Graph (siehe Abbildung 6.2). Dieser Zusammenhang ist offensichtlich, da ein Wechsel der Baumkantenfarbe einem Wechsel von serieller Verdopplung und paralleler Verdopplung entspricht, was genau die Definition des konjugierten Graphen ist.

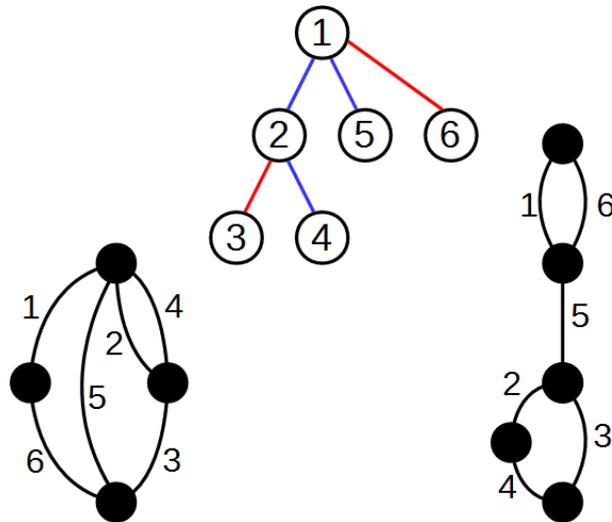


Abbildung 6.2: Baum und zugehöriger Graph (links). Konjugierter Graph, der entsteht, wenn man blaue und rote Baumkanten jeweils umfärbt (rechts).

Wir wollen den Zusammenhang des Knotengrades der Quelle mit der Länge des Pfades ganz links nun auch ohne Bäume zeigen.

Satz 6.7. Der Knotengrad der Quelle in einem serienparallelen Graphen entspricht der Länge des Pfades ganz links in seinem konjugierten Graphen.

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion.

Induktionsannahme: Jede Kante, die als Startknoten die Quelle besitzt, entspricht im konjugierten Graphen einer Kante, die Teil des Pfades ganz links ist.

Induktionsanfang: Die Aussage gilt offensichtlich für den trivialen serien-parallelen Graphen.

Induktionsschritt: Sei e_1 eine Kante, für die die Quelle den Startknoten darstellt. Wird e_1 parallel verdoppelt, so erhöht sich der Knotengrad der Quelle um 1. Im konjugierten Graphen entspricht e_1 laut Induktionsvoraussetzung einer Kante, die Teil des Pfades ganz links ist. Diese wird seriell verdoppelt und so erhöht sich die Länge des Pfades ganz links um 1. Wird e_1 seriell verdoppelt, so hat die neue Kante die Quelle nicht mehr als Startknoten und zählt nicht zum Knotengrad dazu. Im konjugierten Graphen wird die entsprechende Kante parallel verdoppelt und die neue Kante zählt nicht mehr zum Pfad ganz links.

Sei nun e_2 eine Kante, die die Quelle nicht als Endknoten hat. Sowohl eine serielle, als auch eine parallele Verdopplung würde den Knotengrad der Quelle nicht ändern. Die entsprechende Kante im konjugierten Graphen zählt nicht zum Pfad ganz links, also zählt auch die neue Kante, die bei einer seriellen oder parallelen Verdopplung dieser Kante entsteht nicht zum Pfad ganz links und erhöht dessen Länge nicht. \square

6.3.2 Berechnung der Länge eines zufälligen Pfades

Nun möchten wir zeigen, dass die Verteilung der Länge des Pfades ganz links der Verteilung der Länge eines zufälligen Pfades entspricht.

Dazu bedienen wir uns einem rekursiven Zugang. Wir splitten den Baum, der den serien-parallelen Graphen darstellt, entlang der Baumkante 1 – 2 auf, und nummerieren die Knoten in den beiden neu entstandenen Bäumen ordnungserhaltend so um, dass sie die Markierungen von 1 bis k beziehungsweise von 1 bis $n - k$ erhalten (siehe Abbildung 6.3).

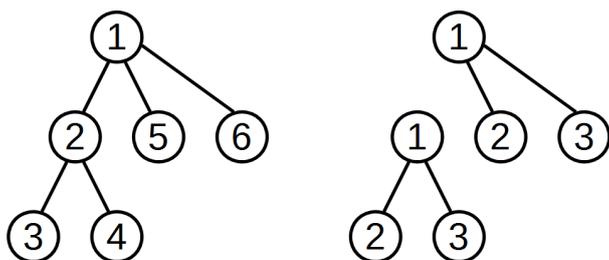


Abbildung 6.3: Baum der Größe 6 und entlang der Baumkante 1 – 2 aufgesplitteter Baum mit zwei neuen Bäumen der Größe 3.

Wir benötigen das folgende Resultat, um die Rekursion (6.7) zu begründen (siehe [1]).

Satz 6.8. Wird ein rekursiver Baum, der anhand des Bernoulli-Wachstumsmodells entsteht entlang der Baumkante 1 – 2 aufgespalten, so ist die Anzahl der Knoten, die in die beiden Teilbäume wandert gleichverteilt und die beiden entstandenen Bäume sind wiederum rekursive Bäume.

Beweis. Wir stellen eine Bijektion von den rekursiven Bäumen der Größe n zu den Permutationen der Größe $n-1$ in Wortschreibweise her. Wir verwenden also jene Darstellung der Permutationen, bei der an der i -ten Stelle $\pi(i)$ steht.

Um das Bild einer Permutation zu ermitteln, beginnen wir den Baum mit einer Wurzel mit der Markierung 0. Die erste Zahl der Permutation wird an die Wurzel ganz rechts angehängt. Jede weitere Zahl i bekommt seinen Vorgänger im Baum wie folgt zugewiesen: Von der Zahl i aus wandert man in der Permutation so lange nach links, bis man eine Zahl j findet, die kleiner ist als i . Der Knoten mit der Markierung i wird an den Knoten mit der Markierung j angehängt. Gibt es links von i keine Zahl, die kleiner ist als i , so wird ein Knoten mit der Markierung i an die Wurzel angehängt. Wird ein Knoten an einen anderen Knoten angehängt, der bereits Kinder hat, so wird der neue Knoten links von den anderen Kindern angehängt (siehe Abbildung 6.4). Um nun zur richtigen Nummerierung zu kommen, können anschließend alle Markierungen um 1 erhöht werden.

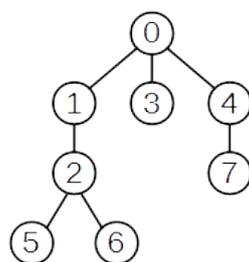


Abbildung 6.4: Das Bild von $(4, 7, 3, 1, 2, 6, 5)$

Will man aus dem Baum die Permutation erhalten, so geht man von der Wurzel weg den Ast entlang, der ganz nach rechts führt und notiert die Markierungen nach der Reihe. Landet man bei einem Blatt, so geht man zur letzten Verzweigung zurück und nimmt den nächsten Ast von rechts und so weiter.

Die Abbildung zwischen den Bäumen und den Permutationen ist also bijektiv. Man betrachte nun die Sonderrolle der 1. Sie ist immer ein direkter Nachfolger der Wurzel, da es keine Zahl gibt, die kleiner ist und steht im Baum immer ganz links, da alle Zahlen, die in der Permutation rechts von ihr stehen, zu einem Nachfolger von 1 werden. Wir spalten nun den Baum entlang der Baumkante $0-1$ auf (also wenn wir die Markierungen um 1 erhöhen, entlang der Baumkante $1-2$, wie im Satz formuliert). Alle Zahlen, die in der Permutation links von der 1 gestanden sind, hängen nun im rechten Teilbaum als Knoten an der Wurzel 0. Alle Knoten, die in der Permutation rechts von der 1 gestanden sind, hängen nun im linken Teilbaum als Knoten an dem Knoten mit der Markierung 1. Die Verteilung der Knoten auf die zwei Teilbäume hängt also von der Position der 1 in der Permutation ab, die offensichtlich gleichverteilt über alle Positionen ist.

Da ein Teilabschnitt einer zufälligen Permutation wiederum eine zufällige Permutation ist, und diese die beiden Teilbäume generieren, handelt es sich bei den beiden Teilbäumen wiederum um rekursive Bäume. \square

Mit diesem Wissen können wir eine Rekursionsgleichung für die Bäume herleiten, die die serien-parallelen Graphen beschreiben.

Sei T ein Baum und U_n eine diskrete Zufallsvariable, die auf der Menge $\{1, 2, \dots, n-1\}$ gleichverteilt ist, dann wird der Baum T in einen kleineren Baum T' der Größe U_n

und einen Baum T'' der Größe $n - U_n$ aufgespalten. Durch die uniforme Verteilung, also Satz (6.8) ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(U_n = k) = \frac{1}{n-1}$ für $1 \leq k \leq n - 1$. Weiters definieren wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten, wobei R_n die Zufallsvariable ist, die die Länge eines zufälligen Pfades in einem zufälligen serien-parallelen Graphen mit n Knoten beschreibt. D_n beschreibt wiederum den Knotengrad der Quelle.

$$\begin{aligned} P_{n,m,l} &:= \mathbb{P}(R_n = m \wedge D_n = l), \\ P_{n,m} &:= \mathbb{P}(R_n = m) = \sum_{l=1}^n P_{n,m,l}, \\ A_{n,l} &:= \mathbb{P}(D_n = l) = \sum_{m=1}^n P_{n,m,l}. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten setzen wir in eine Rekursion ein, die das Aufsplitten des Baumes entlang der Baumkante $1 - 2$ beschreibt.

$$\begin{aligned} P_{n,m,l} &= (1-p) \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} P_{k,i} P_{n-k,m-i,l} \\ &\quad + p \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{l-1} \left(\frac{j}{l} P_{k,m,j} A_{n-k,l-j} + \frac{l-j}{l} P_{n-k,m,l-j} A_{k,j} \right), \quad (6.7) \\ &\text{für } n \geq 2, \quad 1 \leq m \leq n, \quad 1 \leq l \leq n \quad \text{und} \quad P_{1,1,1} = 1. \end{aligned}$$

Die Rekursionsgleichung lässt sich folgendermaßen beschreiben: Bei der rekursiven Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P_{n,m,l}$ wird zunächst unterschieden, ob die Baumkante $1 - 2$ rot oder blau ist.

Die erste Zeile von (6.7) entspricht dabei der Berechnung für eine rote Baumkante, also einer seriellen Verdopplung im ersten Wachstumsschritt, die natürlich mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ auftritt. In diesem Fall spaltet sich der Graph in einen oberen Teil auf, der von der rechten Seite des Baumes definiert wird und einen unteren Teil, der von der linken Seite definiert wird. Die erste Summe unterscheidet, wie viele Kanten im oberen, beziehungsweise unteren Teil des serien-parallelen Graphen sind. Die zweite Summe unterscheidet, wie viele Kanten des Pfades im oberen, beziehungsweise unteren Teil des serien-parallelen Graphen sind. Für den unteren Teil ist der Knotengrad der Quelle unerheblich, sodass $P_{k,i}$ genommen werden kann, der obere Teil muss jedoch den gleichen Knotengrad der Quelle l , wie der ganze Graph haben.

Die zweite Zeile repräsentiert den Fall der blauen Baumkante, also den der parallelen Zusammensetzung, mit der Wahrscheinlichkeit p . Die erste Summe unterscheidet wiederum bezüglich der Verteilung der Kanten in den rechten, beziehungsweise linken Teilgraphen. Die zweite Summe unterscheidet, wie viele Kanten, die zum Knotengrad der Quelle beitragen, im rechten beziehungsweise linken Teilgraphen sind. Mit Wahrscheinlichkeit j/l führt der zufällige Pfad nach links und muss dann in dem Graphen mit k Kanten und Knotengrad der Quelle j ein Pfad der Länge m sein, also brauchen wir $P_{k,m,j}$. Das kann natürlich nur passieren, wenn der rechte Graph die restlichen $l-j$ Kanten für den Knotengrad der Quelle stellt. Das gleiche gilt natürlich genau gegengleich für den rechten Teilgraphen.

Die Startbedingung kommt vom trivialen serien-parallelen Graphen und die Ungleichungen für m und l daher, dass der Knotengrad der Quelle bzw. die Länge eines Pfades nicht größer sein kann, als die Anzahl der Kanten.

Wir definieren die zu $P_{n,m,l}$ zugehörige wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion.

$$\begin{aligned} G(z, v, w) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m,l} \frac{z^n}{n} v^l w^m, \\ G(z, v, 1) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m,l} \frac{z^n}{n} v^l = \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} A_{n,l} \frac{z^n}{n} v^l, \\ G(z, 1, w) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m,l} \frac{z^n}{n} w^m = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m} \frac{z^n}{n} w^m. \end{aligned}$$

Ableiten nach z ergibt

$$\begin{aligned} F(z, v, w) := G_z(z, v, w) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m,l} z^{n-1} v^l w^m, \\ A(z, v) := F(z, v, 1) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m,l} z^{n-1} v^l = \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} A_{n,l} z^{n-1} v^l, \\ H(z, w) := F(z, 1, w) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m,l} z^{n-1} w^m = \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m} z^{n-1} w^m. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die Rekursionsgleichung (6.7) mit $((n-1) \cdot l \cdot z^{n-2} v^{l-1} w^m)$ und bilden die Summe über n, m und l von 0 bis unendlich. Aus dem $P_{n,m,l}$ links vom Gleichheitszeichen wird

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m,l} (n-1) \cdot l \cdot z^{n-2} v^{l-1} w^m = F_{zv}(z, v, w),$$

und aus der ersten Zeile wird

$$\begin{aligned} (1-p) \sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{m \geq 0} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{l \geq 0} P_{k,i} P_{n-k,m-i,l} \cdot l \cdot z^{n-2} v^{l-1} w^m \\ = (1-p) \sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^{n-1} z^{n-2} \left(\sum_{m \geq 0} P_{k,m} w^m \right) \left(\sum_{m \geq 0} \sum_{l \geq 0} l v^{l-1} P_{n-k,m,l} w^m \right) \\ = (1-p) \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} P_{n,m} z^{n-1} w^m \right) \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 0} \sum_{l \geq 0} P_{n,m,l} z^{n-1} \cdot l \cdot v^{l-1} w^m \right) \\ = (1-p) H(z, w) F_v(z, v, w), \end{aligned}$$

wobei hier zwei mal das Cauchyprodukt verwendet wird, indem der Summationsbereich der endlichen Summen erweitert wird, da die Wahrscheinlichkeiten $P_{n,m,l}$ und $P_{n,m}$ gleich 0 sind, wenn ein beliebiger Index gleich 0 ist.

Die zweite Zeile von (6.7) behandeln wir analog und sie ergibt nach Multiplikation und Summation

$$\begin{aligned}
& p \sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l \geq 0} \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{m \geq 0} (j P_{k,m,j} A_{n-k,l-j} z^{n-2} v^{l-1} w^m + (l-j) P_{n-k,m,l-j} A_{k,j} z^{n-2} v^{l-1} w^m) \\
&= p \sum_{n \geq 0} \sum_{k=1}^{n-1} z^{n-2} \left(\left(\sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} l P_{k,m,l} v^{l-1} w^m \right) \left(\sum_{l \geq 0} A_{n-k,l} v^l \right) \right. \\
&\quad \left. + z^{n-2} \left(\sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} l P_{n-k,m,l} v^{l-1} w^m \right) \left(\sum_{l \geq 0} A_{k,l} v^l \right) \right) \\
&= p \left(\left(\sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} l P_{n,m,l} z^{n-1} v^{l-1} w^m \right) \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} A_{n,l} z^{n-1} v^l \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} l P_{n,m,l} z^{n-1} v^{l-1} w^m \right) \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} A_{n,l} z^{n-1} v^l \right) \right) \\
&= p (F_v(z, v, w) A(z, v) + F_v(z, v, w) A(z, v)) \\
&= 2p F_v(z, v, w) A(z, v).
\end{aligned}$$

Alle drei Ergebnisse zusammengenommen ergeben die partielle Differentialgleichung

$$F_{zv}(z, v, w) = (1-p)H(z, v)F_v(z, v, w) + 2pF_v(z, v, w)A(z, v)$$

oder

$$F_{zv}(z, v, w) = (1-p)F(z, 1, w)F_v(z, v, w) + 2pF_v(z, v, w)F(z, v, 1). \quad (6.8)$$

Für den Knotengrad der Quelle haben wir mit (6.6) schon eine erzeugende Funktion gefunden. Da wir davon ausgehen, dass der Knotengrad der Quelle eng mit der Länge eines zufälligen Pfades verknüpft ist, bringen uns Symmetrieüberlegungen zu einer Vermutung über die Lösung der Differentialgleichung:

$$F(z, v, w) = \frac{vw}{(1-v(1-(1-z)^p))(1-w(1-(1-z)^{1-p}))}. \quad (6.9)$$

Durch Einsetzen von $w = 1$ wird F zu der erzeugenden Funktion, bei der Koeffizient $[z^{n-1}v^l]$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(D_n = l)$ angibt. Nachrechnen führt uns tatsächlich zurück auf (6.6) und unsere Vermutung ist somit konsistent. Einsetzen von $v = 1$ und Ausrechnen hingegen führt uns zur erzeugenden Funktion, bei der Koeffizient $[z^{n-1}w^m]$ die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(L_n = m)$, also dass der Pfad ganz links die Länge m hat. Um zu zeigen, dass die Verteilung für den Pfad ganz links die gleiche ist, wie für einen zufälligen Pfad, zeigen wir, dass die vermutete Lösung (6.9), die die erzeugende Funktion für den Pfad ganz links darstellt, die Differentialgleichung (6.8) für die erzeugende Funktion für einen zufälligen Pfad erfüllt.

Mit der Quotientenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}
F_v(z, v, w) &= \frac{w}{1 - w(1 - (1 - z)^{1-p})} \cdot \left(\frac{1}{(1 - v(1 - (1 - z)^p))} + \frac{v(1 - (1 - z)^p)}{(1 - v(1 - (1 - z)^p))^2} \right) \\
&= \frac{w}{1 - w(1 - (1 - z)^{1-p})} \cdot \frac{(1 - v(1 - (1 - z)^p)) + v(1 - (1 - z)^p)}{(1 - v(1 - (1 - z)^p))^2} \\
&= \frac{w}{(1 - w(1 - (1 - z)^{1-p}))(1 - v(1 - (1 - z)^p))^2}
\end{aligned}$$

und wieder mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
F_{vz}(z, v, w) &= \frac{w}{(1 - w(1 - (1 - z)^{1-p}))^2(1 - v(1 - (1 - z)^p))^4} \cdot \\
&\quad [(1 - p)w(1 - z)^{-p}(1 - v(1 - (1 - z)^p))^2 - \\
&\quad (1 - w(1 - (1 - z)^{1-p})) \cdot 2 \cdot (1 - v(1 - (1 - z)^p)) \cdot pv(1 - z)^{p-1}(-1)] \\
&= \frac{w}{(1 - w(1 - (1 - z)^{1-p}))^2(1 - v(1 - (1 - z)^p))^3} \cdot \\
&\quad [(1 - p)w(1 - z)^{-p}(1 - v(1 - (1 - z)^p)) + \\
&\quad 2pv(1 - w(1 - (1 - z)^{1-p}))(1 - z)^{p-1}] \\
&= F_v(z, v, w) \left(\frac{(1 - p)w(1 - z)^{-p}}{(1 - w(1 - (1 - z)^{1-p}))} + \frac{2pv(1 - z)^{p-1}}{(1 - v(1 - (1 - z)^p))} \right) \\
&= F_v(z, v, w)((1 - p)F(z, 1, w) + 2pF(z, v, 1)).
\end{aligned}$$

Wir erhalten den folgenden Satz.

Satz 6.9. Im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell für serien-parallele Graphen gilt: Die Verteilung der Länge des Pfades ganz links entspricht der Verteilung eines zufälligen Pfades.

Beweis. Wie eben gezeigt, erfüllt die erzeugende Funktion für die Länge des Pfades ganz links (6.9), die Differentialgleichung (6.8) für die erzeugende Funktion eines zufälligen Pfades. \square

Damit erhalten wir also:

Satz 6.10. Für die Länge eines zufälligen Pfades R_n eines serien-parallelen Graphen

mit n Kanten im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell gelten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_n = l) &= \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l-1}{k} \binom{qk + q - 1}{n-1} (-1)^{n-k-1}, \\ \mathbb{E}((R_n)_r) &= r! \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} \binom{qk + n - 1}{n-1}, \\ \mathbb{E}((R_n)_r) &\sim r! \frac{n^{qr}}{\Gamma(qr + 1)}, \\ \frac{R_n}{n^q} &\xrightarrow{(d)} R = R(q), \text{ wobei } R \stackrel{(d)}{=} \text{Mittag-Leffler}(q).\end{aligned}$$

6.4 Die Größe eines zufälligen Schnittes

Wir haben also für die Länge des Pfades ganz links die Verteilung berechnet und haben weiters gezeigt, dass diese der Verteilung eines zufälligen Pfades entspricht. Durch Ersetzen der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ durch p ergibt sich mit Satz 6.7 ein Äquivalent zur Länge des Pfades ganz links, nämlich der Knotengrad der Quelle. Nun stellt sich die Frage, ob es auch ein randomisiertes Äquivalent zu den zufälligen Pfaden gibt, wenn wir die Wahrscheinlichkeiten austauschen. Wenn wir den serien-parallelen Graphen als Flussnetzwerk betrachten, bei dem jede Kante die Kapazität 1 hat, dann findet sich dieses Äquivalent ganz leicht in der Größe eines zufälligen Schnittes, wie der folgende Satz zeigt, der ganz analog zu Satz 6.7 funktioniert (siehe auch Abbildung 6.6). Abbildung 6.5 zeigt, wie unsere Sätze die betrachteten Größen in Beziehung setzen.

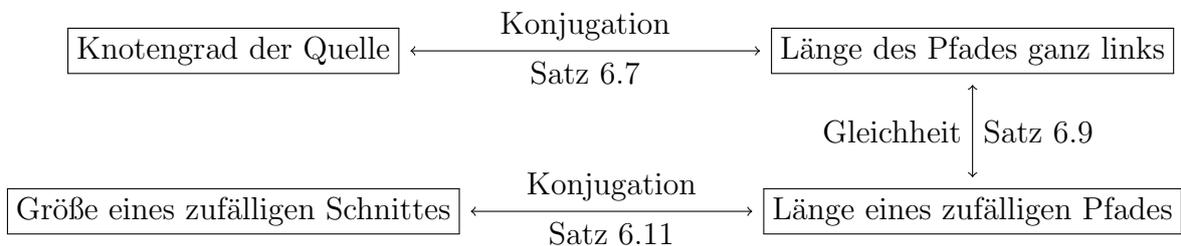


Abbildung 6.5: Beziehungen zwischen den Verteilungen.

Satz 6.11. Die Größe eines Schnittes in einem serien-parallelen Graphen entspricht der Länge eines zugehörigen Pfades in seinem konjugierten Graphen.

Beweis. Wir verwenden vollständige Induktion.

Induktionsannahme: Die Kanten jedes Schnittes entsprechen im konjugierten Graphen den Kanten eines eindeutigen zugehörigen Pfades.

Induktionsanfang: Die Aussage gilt offensichtlich für den trivialen serien-parallelen Graphen.

Induktionsschritt: Wir wählen einen beliebigen aber festen Schnitt S_0 im serien-parallelen Graphen. Sei e_1 eine beliebige Kante, die Teil von S_0 ist. Wird e_1 parallel verdoppelt,

so geht der neue Schnitt nun durch beide neu entstandenen Kanten und die Größe des Schnittes erhöht sich um 1. Im konjugierten Graphen entspricht e_1 einer Kante, die Teil des zu S_0 zugehörigen Pfades ist. Diese wird seriell verdoppelt und so erhöht sich die Länge des Pfades auch um 1. Wird e_1 seriell verdoppelt, so entstehen zwei unterschiedliche neue Schnitte S_1 und S_2 . S_1 beinhaltet alle Kanten von S_0 ohne e_1 , dafür mit der oberen der neu entstandenen Kanten. S_2 beinhaltet alle Kanten von S_0 ohne e_1 , dafür mit der unteren der neu entstandenen Kanten. Im konjugierten Graphen wird die entsprechende Kante parallel verdoppelt. Natürlich geht dadurch der zu S_0 gehörige Pfad verloren und es entstehen zwei neue Pfade, die sich vom alten Pfad nur dadurch unterscheiden, dass der eine die linke und der andere die rechte der neu entstandenen Kanten beinhaltet. Wir weisen dem Pfad, der die linke Kante beinhaltet S_1 zu und dem Pfad, der die rechte Kante beinhaltet S_2 zu. Es gilt, dass die Größen von S_0 , S_1 und S_2 gleich sind und die Länge der zugehörigen Pfade auch.

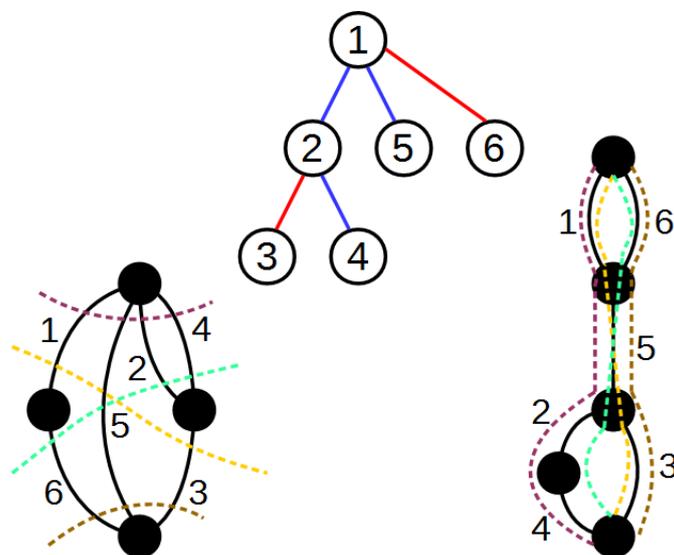


Abbildung 6.6: Baum und zugehöriger Graph (links). Konjugierter Graph, der entsteht, wenn man blaue und rote Baumkanten jeweils umfärbt (rechts). Die bunt eingefärbten Schnitte beim Graphen auf der linken Seite entsprechen den Pfaden mit der gleichen Farbe im rechten Graphen.

Sei nun e_2 eine Kante, die nicht zu dem gewählten Schnitt gehört. Sowohl eine serielle, als auch eine parallele Verdopplung würde die Größe des Schnittes nicht ändern. Die entsprechende Kante im konjugierten Graphen zählt nicht zu dem zugehörigen Pfad, also zählt auch die neue Kante, die bei einer seriellen oder parallelen Verdopplung dieser Kante entsteht nicht zu diesem Pfad und erhöht dessen Länge nicht. \square

Analog zu den zufälligen Pfaden können wir auch einen zufälligen Schnitt definieren. Wir beginnen auf der linken Seite und wählen eine Kante auf dem Pfad ganz links zufällig aus, wobei jede Kante gleich wahrscheinlich ist. Wir sind nun in einer Fläche innerhalb des Graphen angekommen und wählen wiederum zufällig eine Kante, die uns um eine Fläche weiter nach rechts bringt. Wir wiederholen das so lange, bis wir auf der rechten Seite den Graphen verlassen.

Da jeder Schnitt einem Pfad im konjugierten Graphen entspricht, können wir auch hier die Ergebnisse übernehmen.

Satz 6.12. Für die Größe eines zufälligen Schnittes S_n eines serien-parallelen Graphen mit n Kanten im uniformen Bernoulli Wachstumsmodell gelten

$$\mathbb{P}(S_n = l) = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l-1}{k} \binom{pk + p - 1}{n-1} (-1)^{n-k-1},$$

$$\mathbb{E}((S_n)_r) = r! \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-k} \binom{r-1}{k-1} \binom{pk + n - 1}{n-1},$$

$$\mathbb{E}((S_n)_r) \sim r! \frac{n^{pr}}{\Gamma(pr + 1)},$$

$$\frac{S_n}{n^p} \xrightarrow{(d)} S = S(p), \text{ wobei } S =_{(d)} \text{ Mittag-Leffler}(p).$$

6.5 Die Anzahl der Pfade von der Quelle zur Senke

Ein weiteres Merkmal, bei dem wir Aussagen über die Verteilung treffen können, ist die Anzahl der verschiedenen Pfade von der Quelle bis zur Senke, wobei zwei Pfade verschieden sind, wenn es mindestens eine Kante gibt, die in dem einen Pfad vorkommt und in dem anderen nicht.

Wir können die obigen Überlegungen weiterhin verwenden, stellen den serien-parallelen Graphen als Baum dar und spalten diesen wiederum entlang der Kante 1 – 2 auf. Sei A_n die Zufallsvariable für die Anzahl der Pfade von der Quelle bis zur Senke und A'_n und A''_n unabhängige Kopien davon, die wir für die Teilbäume verwenden werden. Sei weiters U_n die uniform verteilte Zufallsvariable, die die Aufteilung der Knoten in den linken und den rechten Teilbaum misst und B_n eine Bernoulli verteilte Zufallsvariable. Wir stellen eine stochastische Rekursionsgleichung auf.

$$A_n =_{(d)} \mathbf{1}_{\{B_n=1\}}(A'_{U_n} + A''_{n-U_n}) + \mathbf{1}_{\{B_n=0\}}(A'_{U_n} \cdot A''_{n-U_n}) \quad \text{für } n \geq 2, A_1 = 1 \quad (6.10)$$

Begründen lässt sich diese wie folgt:

Die Anzahl der Pfade von der Quelle bis zur Senke wird zusammengesetzt aus dem Fall, dass die Baumkante 1 – 2 eine blaue Baumkante ist und dem Fall, dass sie eine rote Baumkante ist. Im Falle der roten Baumkante, die einem erfolgreichen Ausgang des Bernoulli-Experiments gleichkommt, liegt eine parallele Zusammensetzung zweier Graphen vor. Die Anzahl der Pfade beider Teilgraphen wird addiert, wobei die Größe dieser Teilgraphen mittels der uniform verteilten Zufallsvariable U_n bestimmt wird.

Beim negativen Ausgang des Bernoulli-Experiments liegt eine serielle Komposition vor. In diesem Fall kann natürlich jeder Pfad des oberen Teilgraphen mit jedem Pfad des unteren Teilgraphen zusammengesetzt werden und die Gesamtanzahl der Pfade ergibt sich durch $A'_{U_n} \cdot A''_{n-U_n}$.

Nun bilden wir den Erwartungswert auf beiden Seiten der Rekursion.

$$\mathbb{E}(A_n) = \frac{2p}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(A_k) + \frac{1-p}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(A_k) \mathbb{E}(A_{n-k}) \quad \text{für } n \geq 2, \mathbb{E}(A_1) = 1$$

Wir definieren die erzeugende Funktion für den Erwartungswert

$$E(z) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(A_n) z^{n-1}, \quad E'(z) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(A_n)(n-1)z^{n-2},$$

multiplizieren die Rekursionsgleichung mit $(n-1)z^{n-2}$ und bilden die Summe über n .

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(A_n)(n-1)z^{n-2} &= 2p \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(A_k) z^{n-2} + (1-p) \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(A_k) \mathbb{E}(A_{n-k}) z^{n-2}, \\ E'(z) &= 2p \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(A_n) z^{n-1} \cdot \sum_{n \geq 1} z^{n-1} + (1-p) \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(A_n) z^{n-1} \cdot \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(A_n) z^{n-1}, \\ E'(z) &= \frac{2p}{1-z} E(z) + (1-p) E(z)^2. \end{aligned}$$

Diese resultierende Differentialgleichung ist vom Bernoulli-Typ und kann mittels der einfachen Substitution $u(z) = E(z)^{-1}$ gelöst werden. Wenn wir in die erzeugende Funktion 0 einsetzen, so erhalten wir $\mathbb{E}(A_1)$, das gleich 1 ist. Somit kommt zur Differentialgleichung noch die Anfangsbedingung $E(0) = 1$ hinzu. Wir setzen die Substitution ein und erhalten

$$\begin{aligned} -u(z)^{-2} u'(z) &= \frac{2p}{1-z} u(z)^{-1} + (1-p) u(z)^{-2}, \\ u'(z) &= \frac{2p}{z-1} u(z) - (1-p). \end{aligned}$$

Um die homogene Lösung zu bestimmen, verwenden wir Trennung der Variablen und erhalten

$$u_h(z) = c(1-z)^{2p}.$$

Die Partikulärlösung ergibt sich mit der Variation der Konstanten.

$$c'(z) = \frac{1-p}{(1-z)^{2p}}.$$

Um Aufzuintegrieren, müssen wir unterscheiden, ob $p = 1/2$ ist, oder nicht. Wir erhalten als Partikulärlösung für $u(z)$:

$$\begin{aligned} u(z) &= c(1-z)^{2p} + \frac{(1-p)(1-z)}{1-2p}, \quad \text{für } p \neq 1/2, \\ u(z) &= c(1-z) - \frac{1}{2}(z-1) \log(z-1), \quad \text{für } p = 1/2. \end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution $u(z) = E(z)^{-1}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1-2p}{-c(1-z)^{2p}(2p-1) + (1-p)(1-z)}, \quad \text{für } p \neq 1/2, \\ E(z) &= \frac{1}{c(1-z) + \frac{1}{2}(1-z) \log(1-z)}, \quad \text{für } p = 1/2. \end{aligned}$$

Nun setzen wir nur noch die Anfangsbedingung $E(0) = 1$ ein und erhalten

$$E(z) = \frac{1 - 2p}{-p(1 - z)^{2p} + (1 - p)(1 - z)}, \quad \text{für } p \neq 1/2,$$

$$E(z) = \frac{1}{(1 - z) + \frac{1}{2}(1 - z) \log(1 - z)}, \quad \text{für } p = 1/2.$$

Es ergibt sich der folgende Satz.

Satz 6.13. Für die Anzahl der Pfade A_n eines zufälligen serien-parallelen Graphen von der Quelle zur Senke gilt:

$$\mathbb{E}(A_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+j-1} \binom{(2p-1)j-1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{j} \left(\frac{p}{2p-1}\right)^k, \quad \text{für } p \neq 1/2,$$

$$\mathbb{E}(A_n) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} (-1)^k B_k \left(-0!H_{n-1}^{(1)}, -1!H_{n-1}^{(2)}, \dots, -(k-1)!H_{n-1}^{(k)}\right), \quad \text{für } p = 1/2.$$

Beweis. Da wir zwischen zwei Fällen unterscheiden müssen, lesen wir zuerst den Erwartungswert für $p \neq 1/2$ ab.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(A_n) &= [z^{n-1}]E(z) = [z^{n-1}] \frac{1 - 2p}{(1 - p)(1 - z) - p(1 - z)^{2p}} \\ &= [z^{n-1}] \frac{1 - 2p}{(1 - p)(1 - z) - p((1 - z)^{2p} - (1 - z) + (1 - z))} \\ &= [z^{n-1}] \frac{1 - 2p}{(1 - 2p)(1 - z) - p((1 - z)^{2p} - (1 - z))} \\ &= [z^{n-1}] \frac{1}{(1 - z) - \frac{p}{2p-1}((1 - z) - (1 - z)^{2p})} \\ &= [z^{n-1}] \frac{1}{(1 - z)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{p}{2p-1}(1 - (1 - z)^{2p-1})} \\ &= [z^{n-1}] \frac{1}{(1 - z)} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{p}{2p-1}\right)^k (1 - (1 - z)^{2p-1})^k \\ &= [z^{n-1}] \frac{1}{(1 - z)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{p}{2p-1}\right)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (1 - z)^{(2p-1)j} \\ &= [z^{n-1}] \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{p}{2p-1}\right)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j (1 - z)^{(2p-1)j-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{p}{2p-1}\right)^k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \binom{(2p-1)j-1}{n-1} (-1)^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+j-1} \binom{(2p-1)j-1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{j} \left(\frac{p}{2p-1}\right)^k. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Satz 1.11 können wir nun den Erwartungswert von A_n für $p = 1/2$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_n) &= [z^{n-1}]E(z) = [z^{n-1}]\frac{1}{(1-z) + \frac{1}{2}(1-z)\log(1-z)} \\
&= [z^{n-1}]\frac{1}{(1-z)(1 - \frac{1}{2}\log(\frac{1}{1-z}))} \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} [z^{n-1}] \frac{1}{1-z} \log\left(\frac{1}{1-z}\right)^k \\
&= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} (-1)^k B_k \left(-0!H_{n-1}^{(1)}, -1!H_{n-1}^{(2)}, \dots, -(k-1)!H_{n-1}^{(k)}\right).
\end{aligned}$$

□

6.6 Die Anzahl der verschiedenen Schnitte

Auch das obige Ergebnis lässt sich wiederverwerten. So wie wir gezeigt haben, dass die Länge eines zufälligen Pfades mit der Größe eines zufälligen Schnittes korrespondiert, stimmt auch die Anzahl der Pfade von der Quelle bis zur Senke mit der Anzahl der verschiedenen Schnitte überein. Dies ist bereits durch Satz (6.11) klar, da jeder Pfad genau einem Schnitt im konjugierten Graphen entspricht.

Das Ergebnis lässt sich aber auch direkter sehen. Wir gehen komplett analog zur Berechnung der Anzahl der Pfade vor, spalten die Bäume auf und kommen zur Rekursion (6.10), die nun aber etwas abgewandelt wird. S_n soll nun die Zufallsvariable für die Anzahl der Schnitte sein.

$$S_n \stackrel{(d)}{=} \mathbf{1}_{\{B_n=1\}}(S'_{U_n} \cdot S''_{n-U_n}) + \mathbf{1}_{\{B_n=0\}}(S'_{U_n} + S''_{n-U_n}), \quad \text{für } n \geq 2, S_1 = 1.$$

Es wird lediglich die Rolle von paralleler und serieller Komposition vertauscht. Werden zwei serien-parallele Graphen parallel zusammengefügt, also hat das Bernoulli-Experiment Erfolg, so kann ein Schnitt durch den neuen Graphen aus einem beliebigen Schnitt in der linken Komponente und einem beliebigen Schnitt in der rechten Komponente zusammengesetzt werden. Die Anzahl der Möglichkeiten wird also multipliziert. Ist das Bernoulli-Experiment nicht erfolgreich, so werden zwei Graphen seriell aneinandergehängt und die Anzahl der Schnitte addiert sich, da es keinen Schnitt geben kann, der teilweise in der einen und teilweise in der anderen Komponente liegt. Die Startbedingung bleibt unverändert, da der triviale serien-parallele Graph nur einen Schnitt besitzt. Das Lösen dieser Rekursion kann nun komplett analog wie zuvor geschehen, es werden lediglich p und q vertauscht.

Sowohl die Interpretation mit dem konjugierten serien-parallelen Graphen als auch die Neuberechnung mit der adaptierten Rekursion führen also zum gleichen Ergebnis.

Satz 6.14. Für die Anzahl der Schnitte S_n eines zufälligen serien-parallelen Graphen gilt

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+j-1} \binom{(2q-1)j-1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{j} \left(\frac{q}{2q-1}\right)^k, \text{ für } q \neq 1/2,$$

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k} (-1)^k B_k \left(-0!H_{n-1}^{(1)}, -1!H_{n-1}^{(2)}, \dots, -(k-1)!H_{n-1}^{(k)}\right), \text{ für } q = 1/2.$$

6.7 Andere Auswahlregeln für Kanten

Ein Wachstumsschritt in dem in diesem Kapitel beschriebenen Wachstumsmodell besteht aus zwei Zufallsexperimenten. Im ersten Experiment wird eine Kante des Graphen zufällig ausgewählt, die verdoppelt werden soll und im zweiten Experiment wird entschieden, ob die Verdopplung seriell oder parallel erfolgen soll. Bisher haben wir für die Auswahl der Kante immer nur eine Gleichverteilung angenommen, wie der Name uniformes Bernoulli-Wachstumsmodell suggeriert. In diesem Abschnitt wollen wir Modelle betrachten, bei der die Auswahl der Kanten nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit für jede Kante passiert. Die Wahl zwischen serieller oder paralleler Verdopplung soll wiederum durch ein Bernoulli-Experiment entschieden werden und ist somit gleich wie in den vorigen Abschnitten.

6.7.1 Das Modell der bevorzugten Anziehung

In diesem Modell soll eine Kante, die bereits in früheren Wachstumsschritten zur Verdopplung ausgewählt worden ist, mit höherer Wahrscheinlichkeit wieder gewählt werden. Je öfter die Kante bereits gewählt worden ist, desto „anziehender“ ist sie in zukünftigen Wachstumsschritten. Dies soll dadurch verwirklicht werden, dass jede Kante i bei einem Wachstumsschritt mit einer Wahrscheinlichkeit proportional zu $1+a_i$ gewählt wird, wobei a_i angeben soll, wie oft die Kante i bereits verdoppelt worden ist.

Die Berechnungen für den Knotengrad der Quelle in diesem Modell funktionieren ähnlich, wie die in Abschnitt 6.2. Wir werden hier nur die Resultate anführen und verweisen für die Beweise auf [11].

Wir definieren S_α als eine α -stabile Verteilung (siehe [9]) mit der Laplacetransformierten $\mathbb{E}(e^{-tS_\alpha}) = e^{-t^\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$ und formulieren damit den folgenden Satz.

Satz 6.15. Der skalierte Knotengrad D_n der Quelle in einem zufälligen serien-parallelen Graphen mit n Kanten, der nach dem Modell der bevorzugten Anziehung entsteht, konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen eine α -stabile Verteilung.

$$\frac{(p+1)^2}{p2^{p+1}n^{\frac{p+1}{2}}} D_n \xrightarrow{(d)} D = D(p), \quad \text{mit } D =_{(d)} S_{\frac{2p}{p+1}}^{-p}.$$

D kann auch durch ihre Momente charakterisiert werden.

$$\mathbb{E}(D^r) = \frac{\Gamma(r\frac{p+1}{2} + 1)}{\Gamma(rp + 1)}, \quad r \geq 0.$$

6.7.2 Das Sättigungsmodell

Den gegenteiligen Ansatz zum Modell der bevorzugten Anziehung verfolgt das Sättigungsmodell. Je öfter eine Kante bereits zur Verdopplung gewählt worden ist, desto unwahrscheinlicher ist es, dass sie wieder zur Verdopplung ausgewählt wird. Ist die Kante schon zu oft gewählt worden, so sinkt die Wahrscheinlichkeit auf 0. Konkret soll die Auswahlwahrscheinlichkeit der Kante i proportional zu $\max(m - a_i, 0)$ sein, wobei $m \in \mathbb{N}$ ist und a_i wiederum angeben soll, wie oft die Kante i bereits verdoppelt worden ist.

Resultate für $m = 2$ finden sich im folgenden Satz, bei dem wir für den Beweis auf [11] verweisen.

Satz 6.16. Sei p die Wahrscheinlichkeit für eine parallele Verdopplung einer Kante. Für den Knotengrad D_n der Quelle in einem zufälligen serien-parallelen Graphen mit n Kanten, der nach dem Sättigungsmodell mit $m = 2$ entsteht, gilt:

- Für $0 < p \leq 1/2$ konvergiert D_n gegen eine Verteilung, die durch die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion charakterisiert ist.

$$D_n \xrightarrow{(d)} D = D(p), \quad \mathbb{P}(D = m) = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} p^{m-1} (1-p)^{m+1} \text{ für } m \geq 1$$

- Für $1/2 < p < 1$ konvergiert D_n für $n \rightarrow \infty$ nach einer passenden Skalierung gegen eine Mischung aus Bernoulli-Verteilung und Mittag-Leffler-Verteilung.

$$\frac{(2p-1)^2}{p^2} \cdot \frac{D_n}{n^{2p-1}} \xrightarrow{(d)} D = D(p),$$

mit

$$D =_{(d)} \text{Bernoulli} \left(\frac{2p-1}{p^2} \right) \cdot \text{Mittag-Leffler}(2p-1).$$

KAPITEL 7

DAS HIERARCHISCHE WACHSTUMSMODELL

Ein anderes Wachstumsmodell entsteht, wenn man einen Graphen als Grundgerüst eines neuen Graphen betrachtet (siehe [7]). In Kapitel 6 haben wir für einen Wachstumsschritt immer eine zufällige Kante seriell bzw. parallel verdoppelt. Nun wird nicht nur eine, sondern jede einzelne Kante im Graphen verdoppelt, wobei jede Verdopplung mit der Wahrscheinlichkeit p parallel und mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ seriell erfolgt. Außerdem soll jede Verdopplung unabhängig von den anderen erfolgen. Ausgangspunkt des Wachstums ist wiederum der triviale serien-parallele Graph. Die ersten 4 Wachstumsschritte eines Graphen könnten also in etwa so aussehen wie in Abbildung 7.1.

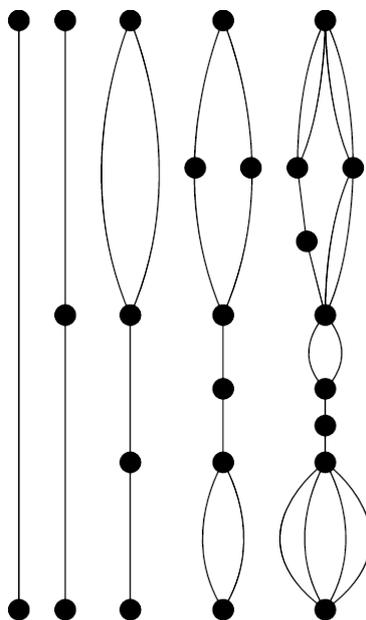


Abbildung 7.1: Wachstum eines Graphen nach dem hierarchischen Wachstumsmodell.

Die hierarchische Struktur dieser Graphen wird bei der Analyse ihrer Eigenschaften deutlich. Da jede Kante in jedem Schritt verdoppelt wird, verdoppelt sich auch die Anzahl der Kanten in jedem Schritt. Die Anzahl der Kanten eines zufälligen Graphen $G^{(n)}$ nach n Schritten beträgt also genau 2^n . Da sich alle Kanten unabhängig voneinander entwi-

ckeln, besteht ein zufälliger Graph $G^{(n)}$ aus zwei unabhängigen zufälligen Graphen $G_1^{(n-1)}$ und $G_2^{(n-1)}$. Im ersten Schritt wird nämlich die einzelne Kante verdoppelt und von da an wachsen die beiden neuen Kanten gleichzeitig, jedoch haben sie nur noch $n - 1$ Schritte zu Verfügung.

Aus diesem Grund können wir Eigenschaften von den untergeordneten Graphen ableiten. Seien nun $x_1^{(n-1)}$ und $x_2^{(n-1)}$ Messvariablen einer bestimmten Eigenschaft der beiden zufälligen, aber festen Graphen $G_1^{(n-1)}$ und $G_2^{(n-1)}$, dann gibt es zwei Funktionen f_p und f_q sodass

$$\begin{aligned} f_p(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}) &= x^{(n)} \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ f_q(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}) &= x^{(n)} \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p, \end{aligned}$$

wobei $x^{(n)}$ die Messvariable der gleichen Eigenschaft für $G^{(n)}$ darstellt. Um $x^{(n)}$ zu erhalten, wird also mit Wahrscheinlichkeit p die Funktion f_p angewendet und mit Wahrscheinlichkeit q wird f_q angewendet.

Aus diesem Grund können wir eine stochastische Rekursion für eine Zufallsvariable ableiten, die eine Eigenschaft eines so konstruierten serien-parallelen Graphen beschreibt.

Proposition 7.1. Sei $X^{(n)}$ eine Zufallsvariable für serien-parallele Graphen mit hierarchischer Wachstumsregel nach n Schritten, $X_1^{(n-1)}$ und $X_2^{(n-1)}$ zwei unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen für serien-parallele Graphen mit hierarchischer Wachstumsregel nach $n - 1$ Schritten und B_n eine Zufallsvariable einer Bernoulli-Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p , dann gilt

$$X^{(n)} =_{(d)} \mathbf{1}_{\{B_n=0\}} \cdot f_p(X_1^{(n-1)}, X_2^{(n-1)}) + \mathbf{1}_{\{B_n=1\}} \cdot f_q(X_1^{(n-1)}, X_2^{(n-1)})$$

für zwei Funktionen f_p und f_q , die das Verhalten der Eigenschaft, die die Zufallsvariable beschreibt, bei einer parallelen bzw. seriellen Komposition ausdrücken.

Wir können nun erste Analysen vornehmen, indem wir für bestimmte Größen die beiden Funktionen f_p und f_q bestimmen und die Rekursion lösen. Damit lassen sich aber nur relativ einfache Ergebnisse zeigen, wie die folgenden Abschnitte verdeutlichen.

7.1 Die Anzahl innerer Knoten

Die Anzahl innerer Knoten wächst durch eine serielle Komposition um 1, da eine Senke t und eine Quelle s zu einem neuen inneren Knoten verschmolzen werden. Bei der parallelen Komposition besitzt der neue Graph lediglich die inneren Knoten der beiden Graphen, aus denen er zusammengesetzt ist. Die Funktionen f_p und f_q lauten demnach

$$\begin{aligned} f_p(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}) &= x_1^{(n-1)} + x_2^{(n-1)} \text{ und} \\ f_q(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}) &= x_1^{(n-1)} + x_2^{(n-1)} + 1. \end{aligned}$$

Sei nun $K^{(n)}$ eine Zufallsvariable, die die Anzahl der inneren Knoten misst. Einsetzen der obigen Funktionen in Proposition 7.1 liefert

$$K^{(n)} =_{(d)} \mathbf{1}_{\{B_n=0\}} \cdot (K'^{(n-1)} + K''^{(n-1)} + 1) + \mathbf{1}_{\{B_n=1\}} \cdot (K'^{(n-1)} + K''^{(n-1)}) \quad (7.1)$$

mit unabhängig identisch verteilten $K'^{(n-1)}$ und $K''^{(n-1)}$. Der Erwartungswert dieser Größe ist somit leicht zu berechnen, was wir im nächsten Satz auch tun.

Satz 7.2. Für die Anzahl der inneren Knoten $K^{(n)}$ eines serien-parallelen Graphen mit hierarchischer Wachstumsregel nach n Schritten gilt:

$$\mathbb{E}(K^{(n)}) = (2^n - 1)(1 - p).$$

Beweis. Wir bilden den Erwartungswert um die Rekursion (7.1) und erhalten

$$\mathbb{E}(K^{(n)}) = (1 - p) \cdot (\mathbb{E}(K'^{(n-1)}) + \mathbb{E}(K''^{(n-1)}) + 1) + p \cdot (\mathbb{E}(K'^{(n-1)}) + \mathbb{E}(K''^{(n-1)})).$$

Da $K'^{(n-1)}$ und $K''^{(n-1)}$ unabhängig identisch verteilt sind, erhalten wir

$$\mathbb{E}(K^{(n)}) = 2\mathbb{E}(K^{(n-1)}) + (1 - p).$$

Die allgemeine Lösung dieser Rekursion lautet

$$\mathbb{E}(K^{(n)}) = c2^n + p - 1$$

und mit der Startbedingung $\mathbb{E}(K^{(0)}) = 0$, also der Bedingung, dass der triviale serien-parallele Graph keine inneren Knoten besitzt, erhält man

$$\mathbb{E}(K^{(n)}) = (2^n - 1)(1 - p).$$

□

7.2 Der Knotengrad der Quelle

Um dieses sehr einfache Ergebnis zu erhalten, bestimmen wir zuerst die Funktionen f_p und f_q . Werden zwei Graphen parallel zusammengefügt, so verschmelzen die beiden Quellen zu einer einzigen Quelle und die Knotengrade addieren sich. Bei serieller Komposition ist nur der Knotengrad der Quelle des oberen Graphen von Relevanz, da die Quelle des unteren Graphen zu einem inneren Knoten wird. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} f_p(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}) &= x_1^{(n-1)} + x_2^{(n-1)} \text{ und} \\ f_q(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}) &= x_1^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Sei $Q^{(n)}$ die Zufallsvariable, die den Knotengrad der Quelle nach n Schritten misst, dann ergibt sich die Rekursion durch

$$Q^{(n)} \stackrel{(d)}{=} \mathbf{1}_{\{B_n=0\}} \cdot Q^{(n-1)} + \mathbf{1}_{\{B_n=1\}} \cdot (Q'^{(n-1)} + Q''^{(n-1)}),$$

wobei $Q'^{(n-1)}$ und $Q''^{(n-1)}$ wiederum unabhängig identisch verteilt sind. Nun können wir diese Rekursionsgleichung wie vorhin behandeln und zeigen damit den folgenden Satz.

Satz 7.3. Für den Knotengrad der Quelle $Q^{(n)}$ eines serien-parallelen Graphen mit hierarchischer Wachstumsregel nach n Schritten gilt

$$\mathbb{E}(Q^{(n)}) = (1 + p)^n.$$

Wir bilden wieder den Erwartungswert in der Rekursion.

$$\mathbb{E}(Q^{(n)}) = (1 - p) \cdot \mathbb{E}(Q^{(n-1)}) + p \cdot (\mathbb{E}(Q^{(n-1)}) + \mathbb{E}(Q''^{(n-1)})).$$

Da $Q^{(n-1)}$ und $Q''^{(n-1)}$ unabhängig identisch verteilt sind, erhalten wir

$$\mathbb{E}(Q^{(n)}) = (1 + p)\mathbb{E}(Q^{(n-1)}).$$

Die offensichtliche Lösung dieser Rekursion ist

$$\mathbb{E}(Q^{(n)}) = c(1 + p)^n.$$

Der Knotengrad der Quelle ist im trivialen serien-parallelen Graphen 1 und somit ergibt sich die Startbedingung $\mathbb{E}(Q^{(0)}) = 1$, die uns die Konstante $c = 1$ liefert.

7.3 Die Länge des Pfades ganz links

Aus der Konjugiertheit von serien-parallelen Graphen ergibt sich genauso wie in Kapitel 6 die Länge $L^{(n)}$ des Pfades ganz links ganz einfach aus dem Knotengrad der Quelle mit Hilfe von Satz 6.7. Aber auch diesmal können wir eine direkte Berechnung anstellen. Da bei einer parallelen Komposition zweier Graphen nur der linke in die Berechnung der Länge des Pfades ganz links miteinfließt und die Längen sich bei serieller Komposition addieren, erhalten wir eine ähnliche stochastische Rekursionsgleichung, nämlich

$$L^{(n)} =_{(d)} \mathbf{1}_{\{B_n=0\}} \cdot (L^{(n-1)} + L''^{(n-1)}) + \mathbf{1}_{\{B_n=1\}} \cdot L^{(n-1)}.$$

Das Lösen funktioniert wieder analog, nur, dass p durch $q = 1 - p$ ersetzt wird, was uns zu dem folgenden Satz bringt.

Satz 7.4. Für die Länge $L^{(n)}$ des Pfades ganz links eines serien-parallelen Graphen mit hierarchischer Wachstumsregel nach n Schritten gilt:

$$\mathbb{E}(L^{(n)}) = (1 + q)^n.$$

Für andere Größen haben wir keine exakten Resultate mehr, jedoch finden sich asymptotische Ergebnisse in [7].

KAPITEL 8

DAS BINÄRE WACHSTUMSMODELL

Auch die binären serien-parallelen Graphen aus Kapitel 5 können durch ein einfaches Wachstumsmodell erzeugt werden (siehe [14]). Wiederum beginnen wir mit dem trivialen serien-parallelen Graphen. In jedem Schritt wird nun zufällig eine Kante gewählt, wobei jede Kante gleichwahrscheinlich ist. Die gewählte Kante wird verdoppelt. Ob diese Verdopplung parallel oder seriell erfolgt, wird nicht mehr zufällig entschieden, sondern hängt vom Weggrad des Startknotens der Kante ab. Ist dieser Weggrad 1, also ist die gewählte Kante die einzige, die von diesem Knoten aus in Richtung der Senke führt, dann erfolgt die Verdopplung parallel. Ist der Weggrad 2, so ist der Knoten bereits gesättigt, also er darf keine weiteren Kanten besitzen, die in Richtung der Senke führen, sonst wäre der entstandene Graph kein binärer serien-paralleler Graph mehr. Demnach wird die Kante seriell verdoppelt.

Wie schon in Kapitel 6 verwenden wir Bäume, um die Eigenschaften der zufällig erzeugten Graphen zu analysieren. In diesem Fall verwenden wir für alle nachfolgenden Resultate Bucket-Bäume, also Bäume, bei denen jeder Knoten einen oder zwei Einträge beinhalten kann (siehe [11]). Der Baum startet mit einem einzelnen Knoten mit dem Eintrag 1. Im $(n - 1)$ -ten Wachstumsschritt wird eine Kante im Graphen gewählt. Diese wird durch einen Eintrag im Bucket-Baum repräsentiert. Hat der Knoten, in dem sich der gewählte Eintrag befindet, außer dem gewählten Eintrag keinen zweiten Eintrag, so wird der neue Eintrag n in den gleichen Knoten eingetragen, was symbolisiert, dass diese Kanten parallel verlaufen. Zwei Einträge im Bucket-Baum, die sich im selben Knoten befinden, repräsentieren Kanten im Graphen, die den selben Startknoten haben. Ist der gewählte Eintrag bei einem Wachstumsschritt nicht alleine in seinem Knoten, dann ist dieser also bereits gesättigt und der neue Eintrag n wird in einen neuen Knoten geschrieben, der an den gewählten Eintrag angehängt wird. Es macht also einen Unterschied, an welchen Eintrag ein Knoten angehängt wird und nicht nur an welchen Knoten. Dies entspricht im Graphen natürlich einer seriellen Verdopplung. Abbildung 8.1 zeigt ein Beispiel für ein solches Wachstum eines binären serien-parallelen Graphen. Wie aus der Konstruktion hervorgeht, hat man für den n -ten Knoten $n - 1$ verschiedene Möglichkeiten, den neuen Knoten an einen bestehenden Eintrag anzuhängen. Die Anzahl dieser Bucket-Bäume ist also $T_n = (n - 1)!$.

Wir versuchen nun den Bucket-Baum im Kontext kombinatorischer Strukturen zu be-

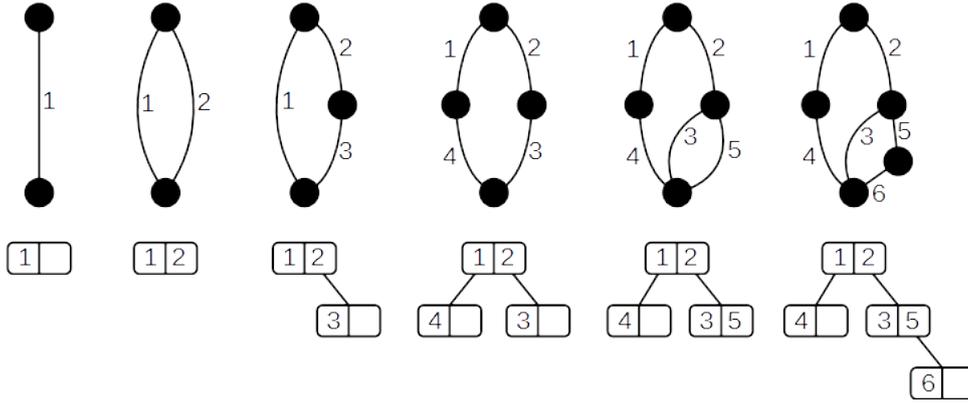


Abbildung 8.1: Wachstum eines binären Graphen und der dazugehörige Bucket-Baum.

trachten und eine symbolische Gleichung dafür und somit auch für die binären serienparallelen Graphen zu finden.

Ein Bucket-Baum kann ein einzelner Eintrag mit der Nummer 1 in einem einzelnen Knoten sein. Ist das nicht der Fall, so ist der Wurzelknoten auf jeden Fall mit den Einträgen 1 und 2 gefüllt. Weiters kann sowohl am Eintrag 1 als auch am Eintrag 2 eine Menge weiterer Bäume hängen. Insgesamt ergibt sich die folgende symbolische Gleichung:

$$\mathcal{T} = \{\circ\}^\square + \{\circ\}^\square * (\{\circ\}^\square * (S(\mathcal{T}) * S(\mathcal{T}))). \quad (8.1)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung können wir einige Kennzahlen berechnen.

8.1 Die Länge eines zufälligen Pfades

Wie in Kapitel 6 berechnen wir die Länge eines zufälligen Pfades von der Quelle bis zur Senke. Ein zufälliger Pfad soll wiederum ein Pfad sein, bei dem wir bei jedem Knoten, dessen Weggrad größer als 1 ist, entlang einer zufälligen Kante weitergehen, wobei jede weggehende Kante gleich wahrscheinlich ist. In diesem Fall kann ein Knoten aber nicht mehr als 2 Kanten haben, die von ihm in Richtung Senke weggehen. Dadurch greift das Symmetrieargument, das wir in Kapitel 6 nicht verwenden konnten: Die Länge des Pfades ganz links ist genauso verteilt, wie die Länge eines zufälligen Pfades. Das liegt daran, dass eine gewählte Abzweigung nach links genau symmetrisch zu einer Abzweigung nach rechts ist, was zum Beispiel im Falle von 3 weggehenden Kanten nicht der Fall wäre, da man ja noch eine mittlere Kante zu betrachten hat. Sei L_n also die Zufallsvariable, die die Länge des Pfades ganz links, also auch die Länge eines zufälligen Pfades misst. Sei außerdem die exponentiell erzeugende Funktion $F(z, v)$ gegeben durch

$$F(z, v) := \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} T_n \mathbb{P}(L_n = k) \frac{z^n}{n!} v^k = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(L_n = k) \frac{z^n}{n} v^k. \quad (8.2)$$

Nun überlegen wir uns, wie der Pfad ganz links in unserem Bucket-Baum repräsentiert wird. Die Struktur der binären serienparallelen Graphen haben wir schon in Kapitel 5 diskutiert. Wie in Abbildung 5.2 ersichtlich ist, interessieren wir uns also nur für die Blöcke, die auf der linken Seite sind, also b_1^L bis b_i^L . Diese werden im Bucket-Baum durch

die Menge der Bäume repräsentiert, die am Eintrag 1 angehängt sind. Die Länge des Pfades ganz links ist also 1, für die Kante mit der Markierung 1, plus die Länge des Pfades ganz links in den Blöcken auf der linken Seite.

Um diese im Kontext von kombinatorischen Familien zu verwenden, fügen wir zur symbolischen Gleichung (8.1) die Kennzeichnung ν hinzu, die für die Länge eines zufälligen Pfades steht. Einerseits zählt ν den trivialen serien-parallelen Graphen, andererseits, also im nichttrivialen Fall, wird die erste Kante gezählt, und alles, was aus den linken Blöcken kommt. Die rechten Blöcke sind uns egal, daher verwenden wir für diese eine Struktur \mathcal{T}_1 , die nur die Bucket-Bäume und nicht die Pfadlänge zählt.

$$\mathcal{T} = \nu\{\circ\}^\square + \nu\{\circ\}^\square * (\{\circ\}^\square * (S(\mathcal{T}) * S(\mathcal{T}_1))). \quad (8.3)$$

Da es $(n-1)!$ Bucket-Bäume mit n Einträgen gibt, wird \mathcal{T}_1 durch die erzeugende Funktion

$$F_1(z) := \sum_{n \geq 1} T_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} = \log\left(\frac{1}{1-z}\right) \quad (8.4)$$

gezählt.

Nach Anwendung des Boxproduktes und zweifacher Differentiation nach z entsteht aus Gleichung 8.3 eine Differentialgleichung für F , die durch Einsetzen von F_1 eine schönere Form bekommt.

$$F''(z, v) = v e^{F(z, v)} e^{F_1(z)} = \frac{v}{1-z} e^{F(z, v)}, \quad F(0, v) = 0, \quad F'(0, v) = v. \quad (8.5)$$

Die Anfangswerte ergeben sich, da es keinen serien-parallelen Graphen mit 0 Kanten gibt und aus der Tatsache, dass die Länge des Pfades ganz links im trivialen serien-parallelen Graphen 1 ist.

Das Lösen dieser Differentialgleichung entpuppt sich als zu schwierig. Deshalb leiten wir sie nach v ab, und setzen danach für $v = 1$ ein, um eine Differentialgleichung für $E(z) := F_v(z, v)|_{v=1} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(L_n) \frac{z^n}{n}$, die erzeugende Funktion für den Erwartungswert von L_n , zu erhalten.

$$E''(z) = \frac{1}{(1-z)^2} E(z) + \frac{1}{(1-z)^2}, \quad E(0) = 0, \quad E'(0) = 1. \quad (8.6)$$

Diese Differentialgleichung ist vom eulerschen Typ und kann mit den Substitutionen $z = -e^t + 1$ und $u(t) = E(-e^t + 1)$ gelöst werden. Ableiten von $u(t)$ ergibt:

$$\begin{aligned} u'(t) &= -E'(-e^t + 1)e^t = -E'(z)(z - 1), \\ u''(t) &= E''(-e^t + 1)(e^t)^2 + E'(-e^t + 1)e^t = E''(z)(z - 1)^2 + E'(z)(-z + 1), \end{aligned}$$

also gilt

$$(z - 1)^2 E''(z) = u''(t) - u'(t).$$

In der umgeformten Differentialgleichung von oben $(z - 1)^2 E''(z) - E(z) = 1$ ersetzen wir die entsprechenden Terme und erhalten

$$u''(t) - u'(t) - u(t) = 1.$$

Mit Hilfe der charakteristischen Gleichung und dem Ansatz $u_p = c$ für die Partikulärlösung erhalten wir

$$u(t) = \bar{c}_1 e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t} + \bar{c}_2 e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} - 1$$

und mit der Rücksubstitution $t = \log(1 - z)$:

$$E(z) = c_1(1 - z)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + c_2(1 - z)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen $E(0) = 0$ und $E'(0) = 1$ führen zu einem linearen Gleichungssystem und schließlich zur Lösung

$$E(z) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(1 - z)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{\sqrt{5} - 3}{2\sqrt{5}}(1 - z)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} - 1. \quad (8.7)$$

Um den Erwartungswert zu erhalten, müssen wir nur noch die Koeffizienten auslesen.

Satz 8.1. Sei L_n die Länge eines zufälligen Pfades von der Quelle bis zur Senke in einem, nach dem binären Wachstumsmodell entstandenen, serien-parallelen Graphen mit n Kanten, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_n) &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \binom{\frac{-3+\sqrt{5}}{2} + n}{n-1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \binom{\frac{-3-\sqrt{5}}{2} + n}{n-1}, \\ \mathbb{E}(L_n) &\sim \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{n^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{\Gamma(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}. \end{aligned}$$

Beweis. Da die erzeugende Funktion $E(z) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(L_n) \frac{z^n}{n}$ lautet, müssen wir die Funktion aus (8.7) zuerst ableiten und dann den Koeffizienten $[z^{n-1}]E'(z)$ ablesen.

$$E'(z) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(1 - z)^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}}(1 - z)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

Die Koeffizienten erhalten wir durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_n) &= [z^{n-1}]E'(z) = [z^{n-1}] \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \sum_{k \geq 0} \binom{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{k} (-1)^k z^k + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \sum_{k \geq 0} \binom{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{k} (-1)^k z^k \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \binom{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{n-1} (-1)^{n-1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \binom{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{n-1} (-1)^{n-1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \binom{\frac{-3+\sqrt{5}}{2} + n}{n-1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \binom{\frac{-3-\sqrt{5}}{2} + n}{n-1}. \end{aligned}$$

Um die asymptotische Abschätzung zu erhalten, stellen wir die Binomialkoeffizienten mit Hilfe der Gammafunktion dar.

$$\mathbb{E}(L_n) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + n)}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{1+\sqrt{5}}{2})} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} + n)}{\Gamma(n)\Gamma(\frac{1-\sqrt{5}}{2})}.$$

Mit Satz 1.6 ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_n) &\sim \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{n^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{\Gamma(\frac{1+\sqrt{5}}{2})} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{n^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}{\Gamma(\frac{1-\sqrt{5}}{2})} \\ &\sim \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{n^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{\Gamma(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}.\end{aligned}$$

□

Als nächstes wollen wir die Grenzverteilung durch die r -ten Momente charakterisieren, die wir durch die r -ten faktoriellen Momente annähern.

Wir leiten $F(z, v)$ aus (8.2) ab und erhalten

$$G(z, v) := F'(z, v) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(L_n = k) z^{n-1} v^k.$$

Auch Differentialgleichung (8.5) wird mit der Produktregel abgeleitet

$$F'''(z, v) = \frac{1}{1-z} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-z} e^{F(z,v)}}_{=F''(z,v)} + \underbrace{\frac{1}{1-z} e^{F(z,v)}}_{=F''(z,v)} F'(z, v),$$

wobei wir teile der Gleichung mittels (8.5) nochmals ersetzen und in der Gleichung $F'(z, v)$ durch $G(z, v)$ ersetzen.

$$G''(z, v) = G'(z, v)G(z, v) + \frac{1}{1-z} G'(z, v), \quad G(0, v) = v, \quad G'(0, v) = v. \quad (8.8)$$

Die Startbedingungen ergeben sich durch den Graphen mit einer Kante und dem Graphen mit zwei Kanten, die zwangsweise parallel sein müssen. Es werden die erzeugenden Funktionen $M_r(z) := \frac{\partial^r}{\partial v^r} G(z, v)|_{v=1} = \sum_{n \geq 1} z^{n-1} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(L_n = k) k^r v^{k-r} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(L_n^r) z^{n-1}$ für die r -ten Momente eingeführt. Wir leiten (8.8) r mal nach v ab, setzen für $v = 1$ ein und erhalten mit der verallgemeinerten Form der Produktregel

$$M_r''(z) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} M_k'(z) M_{r-k}(z) + \frac{1}{1-z} M_r'(z), \quad M_r(0) = M_r'(0) = 0.$$

Wir nehmen den ersten und den letzten Summanden aus der Summe heraus und setzen $M_0(z) = \frac{1}{1-z}$ ein, da es definitionsgemäß gilt.

$$M_r''(z) = \frac{2}{1-z} M_r'(z) + \frac{1}{(1-z)^2} M_r(z) + \underbrace{\sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} M_k'(z) M_{r-k}(z)}_{=:R_r(z)}, \quad (8.9)$$

$$M_r(0) = M_r'(0) = 0.$$

Die gesuchte Funktion $M_r(z)$ erfüllt also eine Differentialgleichung vom euler'schen Typ, bei der die Inhomogenität aus Funktionen $M_k(z)$ für $k < r$ zusammengesetzt ist. Wir

wollen uns zuerst dem homogenen Teil widmen, der ganz leicht mit dem Ansatz ${}_hM_r(z) := \frac{1}{(1-z)^{\lambda+1}}$ zu lösen ist. Eingesetzt in den homogenen Teil erhalten wir

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) \frac{1}{(1-z)^{\lambda+3}} = 2(\lambda + 1) \frac{1}{(1-z)^{\lambda+3}} + \frac{1}{(1-z)^{\lambda+3}},$$

was uns die Lösungen $\lambda_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ liefert. Die homogene Lösung lautet also

$${}_hM_r(z) = {}_1c_r \underbrace{\frac{1}{(1-z)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}}_{=: {}_1M_r(z)} + {}_2c_r \underbrace{\frac{1}{(1-z)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}}_{=: {}_2M_r(z)}. \quad (8.10)$$

Die Variation der Konstanten liefert das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} {}_1c'_r(z) \cdot {}_1M_r(z) + {}_2c'_r(z) \cdot {}_2M_r(z) &= 0, \\ {}_1c'_r(z) \cdot {}_1M'_r(z) + {}_2c'_r(z) \cdot {}_2M'_r(z) &= R_r(z). \end{aligned}$$

Dieses lösen wir mit Hilfe der cramerschen Regel

$$\begin{aligned} {}_1c'_r(z) &= \frac{-{}_2M_r(z)R_r(z)}{{}_1M_r(z) {}_2M'_r(z) - {}_1M'_r(z) {}_2M_r(z)} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-z)^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} R_r(z), \\ {}_2c'_r(z) &= \frac{{}_1M_r(z)R_r(z)}{{}_1M_r(z) {}_2M'_r(z) - {}_1M'_r(z) {}_2M_r(z)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}(1-z)^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} R_r(z). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Die spezielle Lösung lautet also:

$$M_r(z) = \frac{1}{\sqrt{5}(1-z)^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \int_0^z (1-t)^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} R_r(t) dt - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-z)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \int_0^z (1-t)^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} R_r(t) dt.$$

Wir treffen nun eine Annahme über das asymptotische Verhalten der erzeugenden Funktion der Momente und beweisen sie anschließend mittels Induktion. Die Annahme kann durch Singularitätenanalyse begründet werden. Wir begnügen uns aber damit, diese anzugeben und zu beweisen.

Satz 8.2. Für die Länge L_n eines zufälligen Pfades von der Quelle bis zur Senke in einem, nach dem binären Wachstumsmodell entstandenen, serien-parallelen Graphen mit n Kanten gilt, dass

$$\frac{L_n}{n^\phi} \xrightarrow{(d)} L = L(p),$$

wobei $\phi := \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und die Grenzverteilung L durch ihre r -ten Momente

$$\mathbb{E}(L^r) = \frac{r!d_r}{\Gamma(r\phi + 1)}, \quad \text{für } r \geq 0,$$

charakterisiert ist. Die d_r erfüllen dabei die Rekursion

$$d_r = \frac{1}{\phi(r-1)((r+1)\phi+1)} \sum_{k=1}^{r-1} (k\phi+1)d_k d_{r-k}, \quad \text{für } r \geq 2, \quad d_0 = 1, \quad d_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Beweis. Wir beginnen mit der Induktionsannahme

$$M_k(z) \sim c_k \frac{1}{(1-z)^{k\phi+1}}, \quad \text{für } k < r.$$

Den Induktionsanfang liefert bereits Satz 8.1. Um diese Annahme auch für $k = r$ zu zeigen, setzen wir sie und die Ableitung

$$M'_k(z) \sim (k\phi+1)c_k \frac{1}{(1-z)^{k\phi+2}}$$

in $R_r(z)$ aus (8.9) ein.

$$\begin{aligned} R_r(z) &\sim \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} (k\phi+1) \cdot c_k \frac{1}{(1-z)^{k\phi+2}} \cdot c_{r-k} \frac{1}{(1-z)^{(r-k)\phi+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} (k\phi+1) \cdot c_k c_{r-k} \frac{1}{(1-z)^{r\phi+3}}. \end{aligned}$$

Dieses setzen wir wiederum in (8.11) ein.

$$\begin{aligned} {}_1c'_r(z) &\sim \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} (k\phi+1) \cdot c_k c_{r-k} \frac{1}{(1-z)^{(r-1)\phi+1}}, \\ {}_2c'_r(z) &\sim -\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} (k\phi+1) \cdot c_k c_{r-k} \frac{1}{(1-z)^{(r+1)\phi+2}}. \end{aligned}$$

Wir integrieren auf, setzen diese Abschätzungen in die allgemeine Lösung (8.10) ein und heben so viel wie möglich heraus.

$$M_r(z) \sim \frac{1}{(1-z)^{r\phi+1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} (k\phi+1) \cdot c_k c_{r-k} \left(\frac{1}{(r-1)\phi} - \frac{1}{(r+1)\phi+1} \right)}_{=c_r}.$$

Damit ist die Induktion bereits gezeigt, aber wir wollen dennoch genaueres über die c_r in Erfahrung bringen. Wir bringen auf gemeinsamen Nenner und da $\sqrt{5} = 2\phi + 1$ ist, erhalten wir die Rekursion für c_r

$$c_r = \frac{1}{2\phi+1} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} (k\phi+1) \cdot c_k c_{r-k} \frac{2\phi+1}{(r\phi-\phi)(r\phi+\phi+1)}, \quad \text{für } r \geq 2,$$

bei der wir noch durch $2\phi+1$ kürzen können. Durch Definition von $d_r := \frac{c_r}{r!}$ können wir den Binomialkoeffizienten auflösen und wir erhalten die Rekursion wie sie im Satz

formuliert ist. Die Startwerte ergeben sich mit Satz 8.1.

Um die r -ten faktoriellen Momente zu erhalten, lesen wir die abgeschätzten Koeffizienten der Funktion ab. Dazu verwenden wir Satz 1.7.

$$\mathbb{E}(L_n^r) = [z^{n-1}]M_r(z) \sim [z^{n-1}]\frac{c_r}{(1-z)^{r\phi+1}} \sim \frac{c_r n^{r\phi}}{\Gamma(r\phi+1)}.$$

Da $\mathbb{E}(L_n^r) \sim \mathbb{E}(L_n^r)$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, erhalten wir

$$\mathbb{E}(L_n^r) \sim \frac{c_r n^{r\phi}}{\Gamma(r\phi+1)},$$

und mit Skalierung der Zufallsvariable

$$\mathbb{E}\left(\left(\frac{L_n}{n^\phi}\right)^r\right) \sim \frac{c_r}{\Gamma(r\phi+1)} = \frac{r!d_r}{\Gamma(r\phi+1)}.$$

Mittels Satz 1.12 ist die Grenzverteilung somit charakterisiert. □

8.2 Der Knotengrad der Senke

In einem binären serien-parallelen Graphen darf kein Knoten einen Weggrad größer als 2 haben. Wegen der Konstruktion ist es daher offensichtlich, dass der Knotengrad der Quelle genau 2 ist, es sei denn, es handelt sich um den trivialen serien-parallelen Graphen. Keiner Limitierung hingegen unterliegt die Anzahl der Kanten, die in der Senke enden.

Für diese wollen wir nun den Erwartungswert berechnen. Wieder überlegen wir uns, wie der Knotengrad der Senke in unserem Bucket-Baum dargestellt wird. Wie aus Abbildung 5.2 ersichtlich ist, setzt sich dieser aus dem letzten Block auf der rechten Seite und aus dem letzten Block auf der linken Seite zusammen. Wir definieren eine einzelne Seite als die kombinatorische Familie \mathcal{A} . Im Bucket-Baum entspricht dieses \mathcal{A} der Menge von Bäumen, also dem Wald, der an den Wurzelknoten (Eintrag 1 oder Eintrag 2, je nach betrachteter Seite) hängt. Weiters führen wir die Markierung μ ein, die den Knotengrad der Senke messen soll. Handelt es sich bei dem betrachteten Graphen um den trivialen serien-parallelen Graphen, so zählt μ also für 1. Andernfalls besteht der Bucket-Baum aus einem Wurzelknoten mit den Einträgen 1 und 2, an die jeweils ein Wald \mathcal{A} angehängt ist. Die Beiträge zum Knotengrad der Senke kommen ausschließlich aus den Wäldern \mathcal{A} . Gleichung (8.1) wird also zu

$$\mathcal{T} = \mu\{\circ\}^\square + \{\circ\}^\square * (\{\circ\}^\square * (\mathcal{A} * \mathcal{A})). \quad (8.12)$$

Der Block ganz unten in unserer betrachteten Seite wird durch den ersten Baum, also den Baum ganz links im Wald \mathcal{A} repräsentiert. Alle weiteren Bäume in \mathcal{A} entsprechen im Graphen Verdopplungen der Kante 1 bzw. 2 und liegen daher oberhalb der letzten Blöcke. Diese sind nicht mehr für den Knotengrad der Senke interessant. Ein Wald \mathcal{A} besteht daher aus einem Baum, der die niedrigste Markierung haben soll und der für uns noch relevant ist, und einer Menge anderer Bäume, die wir wiederum mit \mathcal{T}_1 bezeichnen wollen. Ein Wald \mathcal{A} kann aber auch leer sein. In diesem Fall besteht die Seite aus einer

einzelnen Kante und trägt daher 1 zu μ , dem Knotengrad der Senke, bei. Für \mathcal{A} erhalten wir also

$$\mathcal{A} = \mu\{\} + \mathcal{T}^\square * S(\mathcal{T}_1). \quad (8.13)$$

Sei nun D_n eine Zufallsvariable, die den Knotengrad der Senke in einem binären serienparallelen Graphen misst und \bar{D}_n eine Zufallsvariable, die den Knotengrad der Senke für eine Seite misst. Wir führen nun die erzeugenden Funktionen

$$F(z, u) := \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 1} T_n \mathbb{P}(D_n = l) \frac{z^n}{n!} u^l \quad \text{und} \quad A(z, u) := \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 1} A_n \mathbb{P}(\bar{D}_n = l) \frac{z^n}{n!} u^l$$

ein. $T_n = (n-1)!$ repräsentiert wieder die Anzahl der verschiedenen Bucket-Bäume mit n Knoten. A_n repräsentiert die Anzahl der Möglichkeiten für einen Wald mit n Knoten. Es gilt, dass $A_n = n!$, da man, wenn man einen neuen Knoten zu dem Wald hinzufügt, ihn entweder an einen der bestehenden $n-1$ Knoten hängen kann, oder mit ihm einen neuen Baum anfängt, was insgesamt n Möglichkeiten im n -ten Schritt ergibt. Man beachte auch, dass die Summe über n bei der Funktion $F(z, u)$ bei 1 und bei der Funktion $A(z, u)$ schon bei 0 beginnt. Das liegt daran, dass n bei der Funktion $F(z, u)$ die binären serienparallelen Graphen mit n Kanten misst, wobei es keinen Graphen mit 0 Kanten gibt, und n bei der Funktion $A(z, u)$ die Anzahl der Wälder mit n Knoten misst, der leere Wald aber zugelassen ist. Setzen wir diese erzeugenden Funktionen in die symbolischen Gleichungen (8.12) und (8.13) ein, so erhalten wir nach Anwendung des Boxproduktes und Differentiation die beiden Differentialgleichungen

$$F''(z, u) = (A(z, u))^2 \quad \text{und} \quad A'(z, u) = F'(z, u)e^{F_1(z)} = \frac{1}{1-z} F'(z, u), \quad (8.14)$$

wobei $F_1(z) = \log\left(\frac{1}{1-z}\right)$ die erzeugende Funktion der Bucket-Bäume laut der Definition in Formel (8.4) ist.

Wir ziehen bei der linken Gleichung die Wurzel und leiten noch einmal nach z ab, um eine Gleichung zu erhalten, die $A(z, u)$ nicht mehr enthält.

$$\begin{aligned} \sqrt{F''(z, u)} &= A(z, u), \\ \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{F''(z, u)} &= \frac{F'''(z, u)}{2\sqrt{F''(z, u)}} = A'(z, u) = \frac{1}{1-z} F'(z, u). \end{aligned}$$

Zusätzlich ergeben sich die Anfangswerte $F(0, u) = 0$, da es keinen serienparallelen Graphen mit 0 Kanten gibt, $F'(0, u) = v$ und $F''(0, u) = v^2$, da der Graph mit einer, respektive zwei Kanten einen Knotengrad der Senke von 1, respektive 2 aufweist.

Mit der Substitution

$$G(z, u) := F'(z, u) = \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 1} \mathbb{P}(D_n = l) z^{n-1} u^l$$

vereinfacht sich diese Differentialgleichung zu

$$G''(z, u) = \frac{2}{1-z} \sqrt{G'(z, u)} G(z, u).$$

Die Differentialgleichung ist aber immer noch zu kompliziert, daher leiten wir nach u ab und setzen danach $u = 1$ ein. Wir erhalten eine Differentialgleichung für $E(z) := G_u(z, u)|_{u=1} = \sum_{n \geq 1} \sum_{l \geq 1} l \mathbb{P}(D_n = l) z^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(D_n) z^{n-1}$.

$$(1-z)^2 E''(z) - (1-z)E'(z) - 2E(z) = 0, \quad E(0) = 1, \quad E'(0) = 2.$$

Die Anfangsbedingungen kommen wieder vom Graphen mit 1 bzw. 2 Kanten, der eindeutig bestimmt ist. Diese Differentialgleichung ist wiederum vom euler'schen Typ und kann mit den gleichen Substitutionen wie (8.6) gelöst werden, also $z = -e^t + 1$, $u(t) = E(-e^t + 1)$, $u'(t) = -E'(z)(z-1)$ und $u''(t) = E''(z)(z-1)^2 + E'(z)(-z+1)$. Damit wird die Differentialgleichung zu

$$u''(t) - 2u(t) = 0.$$

Mit Hilfe der charakteristischen Gleichung erhalten wir die Lösung $\bar{c}_1 e^{-\sqrt{2}t} + \bar{c}_2 e^{\sqrt{2}t}$ und mit der Rücksubstitution $t = \log(1-z)$ ergibt sich

$$E(z) = \frac{c_1}{(1-z)^{\sqrt{2}}} + c_2(1-z)^{\sqrt{2}}. \quad (8.15)$$

Wir leiten ab, setzen die Nebenbedingungen $E(0) = 1$ und $E'(0) = 2$ ein und lösen das resultierende lineare Gleichungssystem. Wir erhalten

$$E(z) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2(1-z)^{\sqrt{2}}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2}(1-z)^{\sqrt{2}}. \quad (8.16)$$

Satz 8.3. Sei D_n der Knotengrad der Senke in einem, nach dem binären Wachstumsmodell entstandenen, serien-parallelen Graphen mit n Kanten, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n) &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \binom{n + \sqrt{2} - 2}{n-1} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \binom{n - \sqrt{2} - 2}{n-1}, \\ \mathbb{E}(D_n) &\sim \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n^{\sqrt{2}-1}}{\Gamma(\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Beweis. Wir verwenden die Binomialformel und lesen die Koeffizienten von (8.16) aus.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n) &= [z^{n-1}]E(x) = [z^{n-1}] \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \sum_{k \geq 0} \binom{-\sqrt{2}}{k} z^k (-1)^k + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \sum_{k \geq 0} \binom{\sqrt{2}}{k} z^k (-1)^k \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \binom{-\sqrt{2}}{n-1} (-1)^{n-1} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \binom{\sqrt{2}}{n-1} (-1)^{n-1} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \binom{n + \sqrt{2} - 2}{n-1} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \binom{n - \sqrt{2} - 2}{n-1}. \end{aligned}$$

Für die asymptotische Abschätzung verwenden wir wieder (1.6) und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_n) &\sim \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n^{\sqrt{2}-1}}{\Gamma(\sqrt{2})} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n^{-\sqrt{2}-1}}{\Gamma(-\sqrt{2})} \\ &\sim \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{n^{\sqrt{2}-1}}{\Gamma(\sqrt{2})}.\end{aligned}$$

□

Wir wollen wieder die Grenzverteilung durch die r -ten Momente charakterisieren, die wir durch die r -ten faktoriellen Momente annähern. Ableiten der rechten Gleichung in (8.14) und nochmaliges einsetzen beider Gleichungen aus (8.14) führt zu

$$A''(z, u) = \frac{1}{1-z} F''(z, u) + \frac{1}{(1-z)^2} F'(z, u) = \frac{1}{1-z} (A(z, u))^2 + \frac{1}{1-z} A'(z, u). \quad (8.17)$$

Die Startbedingungen $A(0, v) = v$ und $A'(0, v) = v$ ergeben sich, da der leere Wald eine Seite darstellt, die nur aus einer einzelnen Kante besteht, und der Wald, der aus einem Knoten besteht eine Seite mit zwei seriell verbundenen Kanten darstellt. In beiden Fällen ist der Knotengrad der Senke 1. Wir führen die erzeugende Funktion $N_r(z) := \frac{\partial^r}{\partial u^r} A(z, u)|_{u=1} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(\bar{D}_n^r) z^n$ für die faktoriellen Momente ein. Wir leiten (8.17) mit Hilfe der verallgemeinerten Produktregel r mal nach v ab und setzen für $v = 1$ ein.

$$N_r''(z) = \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} N_k(z) N_{r-k}(z) + \frac{1}{1-z} N_r'(z).$$

Da $N_0(z) = A(z, 1) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$ ist, können wir den ersten und den letzten Summanden wie folgt aus der Summe herausziehen:

$$N_r''(z) = \frac{1}{1-z} N_r'(z) + \frac{2}{(1-z)^2} N_r(z) + \underbrace{\frac{1}{1-z} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} N_k(z) N_{r-k}(z)}_{=: R_r(z)}. \quad (8.18)$$

Der homogene Teil ist uns bereits untergekommen und hat uns die Lösung (8.15) geliefert. Wir definieren

$${}_1N_r(z) := \frac{1}{(1-z)^{\sqrt{2}}} \quad \text{und} \quad {}_2N_r(z) := (1-z)^{\sqrt{2}}.$$

Die Variation der Konstanten führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}{}_1c_r'(z) {}_1N_r(z) + {}_2c_r'(z) {}_2N_r(z) &= 0, \\ {}_1c_r'(z) {}_1N_r'(z) + {}_2c_r'(z) {}_2N_r'(z) &= R_r(z),\end{aligned}$$

das wir mit der crammerschen Regel lösen.

$$\begin{aligned}{}_1c_r'(z) &= \frac{-{}_2N_r(z) R_r(z)}{{}_1N_r(z) {}_2N_r'(z) - {}_1N_r'(z) {}_2N_r(z)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-z)^{\sqrt{2}+1} R_r(z), \\ {}_2c_r'(z) &= \frac{{}_1N_r(z) R_r(z)}{{}_1N_r(z) {}_2N_r'(z) - {}_1N_r'(z) {}_2N_r(z)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-z)^{\sqrt{2}-1}} R_r(z).\end{aligned} \quad (8.19)$$

Die spezielle Lösung lautet also:

$$N_r(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-z)^{\sqrt{2}}} \int_0^z (1-t)^{\sqrt{2}+1} R_r(t) dt - \frac{1}{2\sqrt{2}} (1-z)^{\sqrt{2}} \int_0^z \frac{1}{(1-t)^{\sqrt{2}-1}} R_r(t) dt.$$

Wie im vorigen Abschnitt wollen wir mittels Induktion unsere Annahme über das asymptotische Verhalten der erzeugenden Funktion der Momente beweisen.

Satz 8.4. Für den Knotengrad D_n der Senke in einem, nach dem binären Wachstumsmodell entstandenen, serien-parallelen Graphen mit n Kanten gilt, dass

$$\frac{D_n}{n^{\sqrt{2}-1}} \xrightarrow{(d)} D = D(p),$$

wobei die Grenzverteilung D durch ihre r -ten Momente

$$\mathbb{E}(D^r) = \frac{r! \cdot d_r \cdot (r(\sqrt{2}-1) + 1)}{\Gamma(r(\sqrt{2}-1) + 1)}, \quad \text{für } r \geq 0,$$

charakterisiert ist. Die d_r erfüllen dabei die Rekursion

$$d_r = \frac{1}{(r(\sqrt{2}-1) + 1)^2 - 2} \sum_{k=1}^{r-1} d_k d_{r-k}, \quad \text{für } r \geq 2, \quad d_0 = 1, \quad d_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}.$$

Beweis. Der Beweis funktioniert analog zu Satz 8.2. Wir beginnen mit der Induktionsannahme

$$N_k(z) \sim c_k \frac{1}{(1-z)^{k(\sqrt{2}-1)+1}}, \quad \text{für } k < r.$$

Der Induktionsanfang geht bereits aus Satz 8.3 hervor, also gehen wir zum Induktionsschritt über, indem wir die Annahme in $R_r(z)$ aus (8.18) einsetzen.

$$\begin{aligned} R_r(z) &\sim \frac{1}{1-z} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} c_k \frac{1}{(1-z)^{k(\sqrt{2}-1)+1}} \cdot c_{r-k} \frac{1}{(1-z)^{(r-k)(\sqrt{2}-1)+1}} \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} c_k c_{r-k} \frac{1}{(1-z)^{r(\sqrt{2}-1)+2}} \\ &= \frac{1}{(1-z)^{r(\sqrt{2}-1)+3}} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} c_k c_{r-k}. \end{aligned}$$

Dieses setzen wir wiederum in (8.19) ein.

$$\begin{aligned} {}_1c'_r(z) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-z)^{(r-1)\sqrt{2}-r+2}} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} c_k c_{r-k}, \\ {}_2c'_r(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(1-z)^{(r+1)\sqrt{2}-r+2}} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} c_k c_{r-k}. \end{aligned}$$

Wir integrieren auf, setzen diese Abschätzungen in die allgemeine Lösung (8.15) ein und heben so viel wie möglich heraus.

$$N_r(z) \sim \frac{1}{(1-z)^{r(\sqrt{2}-1)+1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{(r-1)\sqrt{2}-r+1} - \frac{1}{(r+1)\sqrt{2}-r+1} \right)}_{=c_r} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} c_k c_{r-k}.$$

Die Induktion ist damit schon gezeigt, also schauen wir uns nur noch die c_r genauer an. Wir bringen auf gemeinsamen Nenner erhalten die Rekursion für c_r .

$$c_r = \frac{1}{((r-1)\sqrt{2}-r+1)((r+1)\sqrt{2}-r+1)} \sum_{k=1}^{r-1} \binom{r}{k} c_k c_{r-k}.$$

Durch Definition von $d_r := \frac{c_r}{r!}$ können wir den Binomialkoeffizienten auflösen. Der Nenner wird umgeformt und wir erhalten die Rekursion wie sie im Satz formuliert ist. Die Startwerte ergeben sich mit Satz 8.3.

Nun haben wir eine Abschätzung für die r -ten faktoriellen Momente für den Knotengrad der Senke für eine Seite gefunden. Wir interessieren uns aber nicht nur für eine Seite, sondern für den ganzen Graphen. Die Beziehung dazwischen wird durch die Differentialgleichung $F'(z, u) = (1-z)A'(z, u)$ aus (8.14) beschrieben. Ableiten dieser Gleichung nach z ergibt $F''(z, u) = (1-z)A''(z, u) - A'(z, u)$ und Definieren von $M_r(z) := \frac{\partial^r}{\partial u^r} F(z, u)|_{u=1} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(D_n^r) \frac{z^n}{n}$ führt uns zur Gleichung

$$M_r''(z) = (1-z)N_r''(z) - N_r'(z), \quad (8.20)$$

wobei wir schon wissen, dass für die Ableitungen

$$N_r'(z) \sim \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2}-1) + 1)}{(1-z)^{r(\sqrt{2}-1)+2}} \quad N_r''(z) \sim \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2}-1) + 1)(r(\sqrt{2}-1) + 2)}{(1-z)^{r(\sqrt{2}-1)+3}}$$

gilt. Dadurch erhalten wir mit Gleichung (8.20)

$$\begin{aligned} M_r''(z) &\sim \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2}-1) + 1)(r(\sqrt{2}-1) + 2)}{(1-z)^{r(\sqrt{2}-1)+2}} - \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2}-1) + 1)}{(1-z)^{r(\sqrt{2}-1)+2}} \\ &\sim \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2}-1) + 1)^2}{(1-z)^{r(\sqrt{2}-1)+2}} \end{aligned}$$

Um die r -ten faktoriellen Momente zu erhalten, lesen wir die abgeschätzten Koeffizienten $n[z^n]M_r(z) = n[z^n] \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(D_n^r) \frac{z^n}{n} = \frac{1}{n-1} [z^{n-2}] \sum_{n \geq 1} (n-1) \mathbb{E}(D_n^r) z^{n-2} = \frac{1}{n-1} [z^{n-2}] M_r''(z)$ ab. Dazu verwenden wir Satz 1.6.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_n^r) &= \frac{1}{n-1} [z^{n-2}] M_r''(z) \sim \frac{1}{n-1} \cdot \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2}-1) + 1)^2 n^{r(\sqrt{2}-1)+1}}{\Gamma(r(\sqrt{2}-1) + 2)} \\ &\sim \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2}-1) + 1) n^{r(\sqrt{2}-1)}}{\Gamma(r(\sqrt{2}-1) + 1)}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{E}(D_n^r) \sim \mathbb{E}(D_n^r)$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, erhalten wir

$$\mathbb{E}(D_n^r) \sim \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2} - 1) + 1)n^{r(\sqrt{2}-1)}}{\Gamma(r(\sqrt{2} - 1) + 1)},$$

und mit Skalierung der Zufallsvariable

$$\mathbb{E} \left(\left(\frac{D_n}{n^{\sqrt{2}-1}} \right)^r \right) \sim \frac{c_r \cdot (r(\sqrt{2} - 1) + 1)}{\Gamma(r(\sqrt{2} - 1) + 1)} \sim \frac{r! \cdot d_r \cdot (r(\sqrt{2} - 1) + 1)}{\Gamma(r(\sqrt{2} - 1) + 1)}.$$

Mittels Satz 1.12 ist die Grenzverteilung somit charakterisiert. □

Natürlich spielen binäre Objekte oft eine Sonderrolle, aber es erscheint naheliegend, die Begrenzung des Weggrades eines jeden Knotens von 2 auf eine beliebige natürliche Zahl b auszuweiten (siehe [11]). Die Entwicklung eines b -ären serien-parallelen Graphen funktioniert dabei analog wie im binären Fall. Wird eine Kante zufällig ausgewählt, so wird sie, wenn der Weggrad ihres Startknotens geringer ist als b , parallel verdoppelt. Ist der Knoten schon gesättigt, also hat der Startknoten bereits Weggrad b , so wird die Kante seriell verdoppelt. Anhand dieser Definition sind die ersten b Graphen eindeutig bestimmt, da es immer nur zu parallelen Verdopplungen kommen kann. Anstatt 2 Zweigen, wie im binären Fall, hat ein Graph nun b Zweige und jeder Block, der innerhalb eines solchen Graphen existiert, besitzt auch b Zweige, falls er aus mindestens b Kanten besteht.

Der generelle Aufbau eines solchen Graphen ist also eine Quelle, an der b Objekte angehängt sind, die wir im binären Fall *Seiten* genannt haben. Da diese Bezeichnung jetzt nicht mehr sinnvoll ist, wollen wir sie nun *Zweige* nennen. Jede davon besteht aus einer Kante, an der eine Menge von Blöcken angehängt ist (siehe Abbildung 9.1(a)).

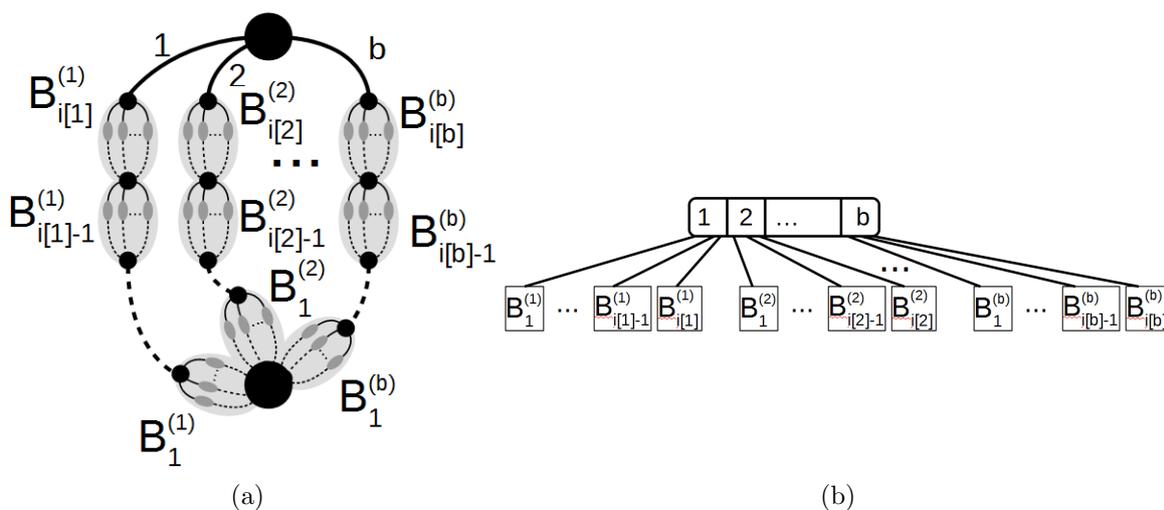


Abbildung 9.1: Der Aufbau eines b -ären serien-parallelen Graphen und dessen Repräsentation als Bucket-Baum.

Auch diesmal bedienen wir uns in unseren Berechnungen einer Bijektion zu Bucket-Bäumen. Jeder Knoten darf in diesem Fall natürlich bis zu b Einträge beinhalten, wobei jeder Eintrag einer Kante entspricht. Der Wald an weiteren Bucket-Bäumen steht für die Blöcke, die an der Kante angehängt sind (siehe Abbildung 9.1(b)). Die Bezeichnung $B_{i[1]}^{(1)}$ soll dabei bedeuten, dass der Block aus dem ersten Zweig von links stammt, also steht (1) im Index rechts oben. Der erste Zweig beinhaltet $i[1]$ Blöcke und die Nummerierung der Blöcke erfolgt im Index rechts unten. Zu beachten ist, dass die Nummerierung im Graphen unten beginnt, damit der Block mit der Nummer 1 im Wald ganz links steht. Wir stellen wieder eine symbolische Gleichung für die Konstruktion der Bucket-Bäume auf.

$$\mathcal{T} = \{ \boxed{1} \}^{\square} + \{ \boxed{1|2} \}^{2\square} + 2 \{ \boxed{1|2|3} \}^{3\square} + \dots \\ + (b-2)! \{ \boxed{1|2|\dots|b-1} \}^{(b-2)\square} + (b-1)! \{ \boxed{1|2|3|\dots|b} \}^{b\square} * (S(\mathcal{T}))^b. \quad (9.1)$$

Alle Fälle, bei denen die Wurzel keine Kinder hat, müssen einzeln betrachtet werden. Der Faktor vor der Wurzel ergibt sich, da der dritte Summand beispielsweise durch eine parallele Verdopplung der Kante 1, oder durch die parallele Verdopplung der Kante 2 entstehen kann. Beide Fälle betrachten wir als gleich, da es uns egal ist, in welcher Reihenfolge die Einträge im Knoten stehen. Die Zahl vor der Box \square soll andeuten, dass es sich hierbei um eine mehrfache Anwendung des Boxproduktes handelt, da ja mehrere Zahlen in den ersten Knoten wandern sollen. Ist die Wurzel mit Einträgen befüllt, so werden b Mengen von Bäumen (also b Wälder) angehängt.

9.1 Die Länge eines zufälligen Pfades

Auch in diesem Modell wollen wir den Erwartungswert für die Länge eines zufälligen Pfades von der Quelle bis zur Senke bestimmen (siehe [11]). Dies soll wieder mit Hilfe des Pfades ganz links geschehen. Ein Zufallspfad wählt in jedem Schritt mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Kante um zum nächsten Knoten zu kommen. Hat man einen Block mit b Kanten, also b parallelen Kanten und macht man einen weiteren Entwicklungsschritt, so wird jede Kante mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen. Jeder Pfad durch den Block ist also in gleicher Weise repräsentativ für einen zufälligen Pfad, also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Pfad ganz links betrachten. Beim uniformen Bernoulli-Wachstumsmodell war das nicht möglich, da dort auch später in der Entwicklung des Graphen neue Pfade entstehen können und sich die Knotengrade und Wahrscheinlichkeiten noch ändern könnten.

Wir definieren L_n als die Zufallsvariable, die die Länge eines zufälligen Pfades, beziehungsweise die Länge des Pfades ganz links misst. Wir führen wieder eine exponentiell erzeugende Funktion und ihre Ableitung nach z ein.

$$F(z, v) := \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} T_n \mathbb{P}(L_n = k) \frac{z^n}{n!} v^k = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(L_n = k) \frac{z^n}{n} v^k, \\ G(z, v) := F'(z, v) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(L_n = k) z^{n-1} v^k.$$

Dabei symbolisiert T_n die Anzahl der b -ären Bucket-Bäume. Dass die Anzahl $T_n = (n-1)!$ ist, ergibt sich leicht durch die Konstruktion, da auch hier ein neuer Knoten an jeden anderen Knoten angehängt werden kann und der n -te Knoten daher $(n-1)$ Möglichkeiten hat, platziert zu werden. Die kombinatorische Struktur \mathcal{T}_1 , zu der T_n gehört, hat also wieder die exponentiell erzeugende Funktion $F_1(z) := \sum_{n \geq 1} T_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n} = \log\left(\frac{1}{1-z}\right)$. Analog wie in Abschnitt 8.1 fügen wir die Kennzeichnung ν zur Gleichung (9.1) hinzu, der die Länge des Pfades ganz links zählen soll.

$$\mathcal{T} = \nu\{\boxed{1}\}^\square + \nu\{\boxed{1|2}\}^{2\square} + 2\nu\{\boxed{1|2|3}\}^{3\square} + \dots \\ + (b-2)!\nu\{\boxed{1|2|\dots|b-1}\}^{(b-2)\square} + (b-1)!\nu\{\boxed{1|2|3|\dots|b}\}^{b\square} * (S(\mathcal{T}) * S(\mathcal{T}_1)^{b-1}).$$

Beinhaltet ein Block weniger als b Kanten, also besteht der zugehörige Bucket-Baum nur aus einer Wurzel, so ist die Länge des Pfades ganz links 1, da alle anderen Kanten parallel dazu verlaufen. Ansonsten besteht der Pfad ganz links aus einer Kante und den jeweiligen Beiträgen aus den Blöcken darunter, also des Waldes im Bucket-Baum, der an den Eintrag 1 angehängt ist. Die anderen $b-1$ Wälder sind uns egal und bestehen nur aus Bucket-Bäumen \mathcal{T}_1 , bei denen die Kennzeichnung ν nicht gezählt wird.

In die symbolische Gleichung setzen wir die jeweiligen erzeugenden Funktionen ein, wenden b mal das Boxprodukt an und differenzieren b mal nach z . Wir erhalten die Differentialgleichung

$$F^{(b)}(z, v) = (b-1)!v e^{F(z, v)} e^{(b-1)F_1(z)} = \frac{(b-1)!v}{(1-z)^{b-1}} e^{F(z, v)}.$$

mit den Startbedingungen $F(0, v) = 0$, $F^{(k)}(0, v) = (k-1)!v$ für $1 \leq k \leq b-1$, die von den eindeutigen Graphen mit 0 bis $b-1$ Kanten kommen. Leiten wir die Differentialgleichung noch einmal nach z ab, so erfüllt die Funktion $G(z, v)$ die Gleichung

$$G^{(b)}(z, v) = \frac{(b-1)!v(b-1)}{(1-z)^b} e^{F(z, v)} + \underbrace{\frac{(b-1)!v}{(1-z)^{b-1}} e^{F(z, v)} G(z, v)}_{=F^{(b)}(z, v)},$$

wobei im rechten Summanden die Funktion $F^{(b)}(z, v) = G^{(b-1)}(z, v)$ aufscheint, und diese sich im linken Summanden leicht herausheben lässt, was zu

$$G^{(b)}(z, v) = \frac{b-1}{1-z} G^{(b-1)}(z, v) + G(z, v) G^{(b-1)}(z, v), \quad (9.2)$$

mit den Startbedingungen $G^{(k)}(0, v) = k!v$ für $0 \leq k \leq b-1$ führt.

Die erzeugende Funktion für den Erwartungswert erhalten wir durch Ableiten nach v und dem Einsetzen von $v = 1$, also $E(z) := G_v(z, v)|_{v=1} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(L_n) z^{n-1}$. Um diese verwenden zu können, leiten wir die Gleichung (9.2) nach v ab, erhalten

$$G_v^{(b)}(z, v) = \frac{b-1}{1-z} G_v^{(b-1)}(z, v) + G_v(z, v) G^{(b-1)}(z, v) + G(z, v) G_v^{(b-1)}(z, v)$$

und setzen auch in diese Gleichung $v = 1$ ein.

$$E^{(b)}(z) = \frac{b-1}{1-z} E^{(b-1)}(z) + E(z) F_1^{(b)}(z) + F_1'(z) E^{(b-1)}(z).$$

Man überzeugt sich schnell von $F_1^{(b)}(z) = \frac{(b-1)!}{(1-z)^b}$ und erhält

$$\begin{aligned} E^{(b)}(z) &= \frac{b-1}{1-z} E^{(b-1)}(z) + E(z) \frac{1}{(1-z)^b} + \frac{1}{1-z} E^{(b-1)}(z) \\ &= \frac{b}{1-z} E^{(b-1)}(z) + \frac{1}{(1-z)^b} E(z), \end{aligned} \quad (9.3)$$

mit den Startbedingungen $E^{(b)}(0) = k!$ für $0 \leq k \leq b-1$.

Um diese Differentialgleichung vom eulerschen Typ zu lösen, verwenden wir den Ansatz $E(z) = \frac{1}{(1-z)^{\lambda+1}}$ und setzen ihn in ein. Die Ableitungen ergeben $E^{(b)}(z) = \frac{(\lambda+b)!}{\lambda!} \frac{1}{(1-z)^{\lambda+b+1}}$, also erhalten wir

$$\frac{(\lambda+b)!}{\lambda!} \frac{1}{(1-z)^{\lambda+b+1}} = \frac{b}{1-z} \frac{(\lambda+b-1)!}{\lambda!} \frac{1}{(1-z)^{\lambda+b}} + \frac{(b-1)!}{(1-z)^b} \frac{1}{(1-z)^{\lambda+1}}$$

und durch Multiplikation mit $(1-z)^{\lambda+b+1}$

$$\begin{aligned} \frac{(\lambda+b)!}{\lambda!} &= \frac{b(\lambda+b-1)!}{\lambda!} + (b-1)!, \\ \frac{(\lambda+b-1)!}{\lambda!} ((\lambda+b) - b) &= (b-1)!, \\ 0 &= \underbrace{\lambda^{\bar{b}} - (b-1)!}_{=: P(\lambda)}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Um genaueres über die Lösung der Differentialgleichung zu sagen, müssen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^{\bar{b}} - (b-1)!$ betrachten. Wir können einige Aussagen über deren Lage treffen:

- Laut Definition ist $P(\lambda)$ im positiven Bereich eine streng monoton steigende Funktion und kann daher höchstens eine Nullstelle haben. Da $P(0) = -(b-1)! < 0$ und $P(1) = b! - (b-1)! > 0$ gilt, ist auch ihre Existenz gesichert und zwar im Intervall $(0, 1)$. Diese einzige positive reelle Nullstelle wollen wir λ_1 nennen.
- Im Intervall $(-\infty, -(b-1)]$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden: Ist b ungerade, so ist $\lambda^{\bar{b}}$ negativ, also ist $P(\lambda) < 0$ und es gibt keine reellen Nullstellen in diesem Intervall. Für den Fall, dass b gerade ist, betrachten wir $\lambda^{\bar{b}} = (-\lambda)(-\lambda-1) \dots (-\lambda-(b-1)) = (-\lambda-(b-1))^{\bar{b}}$. Mit der Definition von $\mu := -\lambda-(b-1)$ und $\tilde{P}(\mu) := \mu^{\bar{b}} - (b-1)!$ ist die Funktion $\tilde{P}(\mu)$ nach unseren obigen Überlegungen streng monoton steigend für $\mu \geq 0$ mit einer eindeutigen reellen Nullstelle $\mu \in (0, 1)$. Für $\lambda \leq -(b-1)$ existiert demnach genau eine Nullstelle $\lambda \in (-b, -(b-1))$.
- Im Intervall $(-(b-1), 0)$ gibt es keine reellen Nullstellen. Sei $\lambda \in [-t, -(t-1)]$ für $t \in \{1, 2, \dots, b-1\}$ und $k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$, dann gilt, dass $|\lambda+k| \leq t-k$ für $k < t$ und $|\lambda+k| \leq b-t-(b-1-k) = k-t+1$ für $k \geq t$. Daraus folgern wir die Abschätzung

$$|\lambda^{\bar{b}}| = |\lambda| \cdot |\lambda+1| \dots |\lambda+b-1| < t! \cdot (b-t)! \leq (b-1)!.$$

Dadurch ist $P(\lambda) = \lambda^{\bar{b}} - (b-1)! < 0$ für $\lambda \in (-(b-1), 0)$ und es gibt in diesem Intervall keine reellen Nullstellen.

- Wir betrachten nun die $b - 1$ Nullstellen der Ableitung von $P(\lambda)$, die wir mit Hilfe der Produktregel erhalten.

$$P'(\lambda) = \sum_{j=0}^{b-1} \prod_{0 \leq k \leq b-1, k \neq j} (\lambda + k).$$

Wir setzen für $\lambda = -t$ mit $t \in \{0, 1, \dots, b - 1\}$ ein und erhalten

$$P'(-t) = \sum_{j=0}^{b-1} \prod_{0 \leq k \leq b-1, k \neq j} (-t + k) = \prod_{0 \leq k \leq b-1, k \neq t} (-t + k) = (-1)^t \cdot t! \cdot (b - 1 - t)!,$$

da alle bis auf einen Summanden gleich 0 werden. Es gibt also $b - 1$ reelle Intervalle $(-(b - 1), -(b - 2)), (-(b - 2), -(b - 3)), \dots, (-1, 0)$, in denen sich das Vorzeichen ändert. In jedem dieser Intervalle muss $P'(\lambda)$ also eine Nullstelle haben.

Wichtig für die Lösung der Differentialgleichung sind die Vielfachheiten der Nullstellen. Ist eine Nullstelle mehrfach, so ist diese Stelle nicht nur eine Nullstelle der Funktion, sondern auch eine Nullstelle der ersten Ableitung. Wir haben gezeigt, dass alle Nullstellen der ersten Ableitung im Intervall $(-(b - 1), 0)$ liegen, alle Nullstellen der Funktion aber außerhalb dieses Intervalles, also kann keine der Nullstellen eine vielfache Nullstelle sein. Mit diesem Wissen können wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung anschreiben.

$$E(z) = \sum_{i=1}^b \frac{c_i}{(1 - z)^{\lambda_i + 1}}. \quad (9.5)$$

Die λ_i sind die gerade beschriebenen (teilweise komplexen) Nullstellen, des Polynoms $P(\lambda)$ in (9.4). Um die (komplexen) Koeffizienten c_i zu erhalten, müssen wir die Startbedingungen $E^{(b)}(0) = k!$ für $0 \leq k \leq b - 1$ einsetzen und wir erhalten

$$E^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^b c_i (\lambda_i + 1)^{\bar{k}} = k!, \quad \text{für } 0 \leq k \leq b - 1. \quad (9.6)$$

Um den folgenden Beweis besser zu fassen, schicken wir zwei Lemmata voraus.

Lemma 9.1. Für die komplexen Zahlen λ_i mit $1 \leq i \leq b$ gilt:

$$\prod_{l \neq i} (\lambda_i - \lambda_l) \prod_{1 \leq j < l \leq b, j, l \neq i} (\lambda_l - \lambda_j) = \prod_{1 \leq j < l \leq b} (\lambda_l - \lambda_j).$$

Beweis. Wir spalten das erste Produkt weiter auf und vertauschen im zweiten Teil λ_i mit λ_l , damit der Index des Minuenden in jedem Produkt größer ist, als der Index des Subtrahenden.

$$\prod_{l \neq i} (\lambda_i - \lambda_l) \prod_{1 \leq j < l \leq b, j, l \neq i} (\lambda_l - \lambda_j) = \prod_{l=1}^{i-1} (\lambda_i - \lambda_l) \cdot (-1)^{b-i} \prod_{l=i+1}^b (\lambda_l - \lambda_i) \prod_{1 \leq j < l \leq b, j, l \neq i} (\lambda_l - \lambda_j).$$

So entstehen genau die Terme, die im zweiten Produkt fehlen, also gliedern wir sie darin ein und erhalten den rechten Teil. \square

Wir schreiben $(H_{x+m} - H_x)$ als Abkürzung für $\sum_{k=1}^m \frac{1}{x+k}$ und zeigen das folgende Lemma.

Lemma 9.2. Das Gleichungssystem (9.6) besitzt die Lösungen

$$c_i = \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})}.$$

Beweis. Wir faktorisieren das Polynom (9.4) und leiten es in zwei Formen mit Hilfe der Produktregel ab.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^{\bar{b}} - (b-1)! = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_b), \\ P'(\lambda) &= \lambda^{\bar{b}} \sum_{k=0}^{b-1} \frac{1}{\lambda + k} = \sum_{p=1}^b \prod_{l \neq p} (\lambda - \lambda_l). \end{aligned}$$

Einsetzen von λ_i lässt alle bis auf einen Summanden in der Darstellung auf der rechten Seite verschwinden.

$$\begin{aligned} \prod_{l \neq i} (\lambda_i - \lambda_l) &= P'(\lambda_i) = \lambda_i^{\bar{b}} \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i-1}) = \lambda_i^{\bar{b}} \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i}) \\ &= (\lambda + 1)^{\bar{b}-1} \cdot (1 + \lambda_i(H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})). \end{aligned}$$

Durch diese Gleichung lassen sich die c_i in eine Produktschreibweise bringen, wobei der Term ganz rechts mit Hilfe von Lemma 9.1 folgt.

$$c_i = \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})} = \frac{(\lambda_i + 1)^{\bar{b}-1}}{\prod_{l \neq i} (\lambda_i - \lambda_l)} = \frac{(\lambda_i + 1)^{\bar{b}-1} (-1)^{b-i} \prod_{1 \leq j < l \leq b, j, l \neq i} (\lambda_l - \lambda_j)}{\prod_{1 \leq j < l \leq b} (\lambda_l - \lambda_j)}.$$

Diese Form setzen wir für $k \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ in (9.6) ein und heben aus der Summe heraus.

$$E^{(k)}(0) = \frac{1}{\prod_{1 \leq j < l \leq b} (\lambda_l - \lambda_j)} \sum_{i=1}^b (\lambda_i + 1)^{\bar{k}} (\lambda_i + 1)^{\bar{b}-1} (-1)^{b-i} \prod_{1 \leq j < l \leq b, j, l \neq i} (\lambda_l - \lambda_j).$$

Die Summe wird als Determinante der folgenden $b \times b$ Matrix interpretiert.

$$E^{(k)}(0) = \frac{1}{\prod_{1 \leq j < l \leq b} (\lambda_l - \lambda_j)} \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_b \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{b-2} & \lambda_2^{b-2} & \cdots & \lambda_b^{b-2} \\ (\lambda_1 + 1)^{\bar{k}} (\lambda_1 + 1)^{\bar{b}-1} & (\lambda_2 + 1)^{\bar{k}} (\lambda_2 + 1)^{\bar{b}-1} & \cdots & (\lambda_b + 1)^{\bar{k}} (\lambda_b + 1)^{\bar{b}-1} \end{pmatrix}.$$

Um diese Gleichheit zu sehen, entwickeln wir nach der untersten Zeile, wobei wir $(-1)^{b-i}$ aus der Schachbrettregel erhalten und $\prod_{1 \leq j < l \leq b, j, l \neq i} (\lambda_l - \lambda_j)$ die Determinante der verbleibenden Vandermonde-Matrix ist, bei der die i -te Spalte ausgelassen wird, da diese Spalte durch die Entwicklung wegfällt.

Wir betrachten die beiden Terme, die die Einträge der letzten Zeile darstellen, genauer. Es gilt

$$\begin{aligned} (\lambda_i + 1)^{\bar{k}} &= (\lambda_i + 1)(\lambda_i + 2) \cdots (\lambda_i + k) = k! + \lambda_i Q_{k-1}^{(1)}(\lambda_i), \\ (\lambda_i + 1)^{\bar{b-1}} &= (\lambda_i + 1)(\lambda_i + 2) \cdots (\lambda_i + b - 1) = \lambda_i^{b-1} + Q_{b-2}^{(2)}(\lambda_i), \end{aligned}$$

wobei $Q_{k-1}^{(1)}(\lambda_i)$ ein Polynom vom Grad $(k - 1)$ und $Q_{b-2}^{(2)}(\lambda_i)$ ein Polynom vom Grad $(b - 2)$ ist. Damit und mit Formel (9.4) formen wir weiter um.

$$(\lambda_i + 1)^{\bar{k}} (\lambda_i + 1)^{\bar{b-1}} = k! (\lambda_i + 1)^{\bar{b-1}} + \lambda_i^{\bar{b}} Q_{k-1}^{(1)}(\lambda_i) = k! \lambda_i^{b-1} + k! Q_{b-2}^{(2)}(\lambda_i) + \lambda_i^{\bar{b}} Q_{k-1}^{(1)}(\lambda_i).$$

Wenn wir die Einträge der letzten Zeile der Matrix so umschreiben, dann stehen dort nur noch Polynome. Der Koeffizient der höchsten Potenz $(b - 1)$ lautet $k!$. Alle anderen Terme im Polynom können durch Zeilenumformungen, also Additionen der Zeilen 1 bis $(b - 1)$ zur Zeile b , eliminiert werden. Es bleibt eine Matrix, aus der wir durch Herausheben des Faktors $k!$ eine klassische Vandermonde-Matrix machen können, was den Beweis abschließt.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_b \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_b^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k! \lambda_1^{b-1} & k! \lambda_2^{b-1} & \cdots & k! \lambda_b^{b-1} \end{pmatrix} = k! \prod_{1 \leq j < l \leq b} (\lambda_l - \lambda_j).$$

□

Satz 9.3. Sei L_n die Länge eines zufälligen Pfades von der Quelle bis zur Senke in einem, nach dem b -ären Wachstumsmodell entstandenen, serien-parallelen Graphen mit n Kanten, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_n) &= \sum_{i=1}^b \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})} \binom{\lambda_i + n - 1}{n - 1}, \\ \mathbb{E}(L_n) &\sim \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_1+b-1} - H_{\lambda_1})} \cdot \frac{n^{\lambda_1}}{\Gamma(\lambda_1 + 1)}. \end{aligned}$$

Beweis. Lemma 9.2 zeigt uns die spezielle Lösung der Differentialgleichung (9.3), von der

wir nur noch die Koeffizienten ablesen müssen.

$$\begin{aligned}
[z^{n-1}]E(z) &= [z^{n-1}] \sum_{i=1}^b \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})} \cdot \frac{1}{(1-z)^{\lambda_i+1}} \\
&= [z^{n-1}] \sum_{i=1}^b \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})} \sum_{k \geq 0} \binom{-\lambda_i - 1}{k} (-1)^k z^k \\
&= \sum_{i=1}^b \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})} \binom{-\lambda_i - 1}{n-1} (-1)^{n-1} \\
&= \sum_{i=1}^b \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})} \binom{\lambda_i + n - 1}{n-1}
\end{aligned}$$

Für die Asymptotische Abschätzung verwenden wir wieder (1.6).

$$\mathbb{E}(L_n) \sim \sum_{i=1}^b \frac{1}{1 + \lambda_i \cdot (H_{\lambda_i+b-1} - H_{\lambda_i})} \cdot \frac{n^{\lambda_i}}{\Gamma(\lambda_i + 1)} = \frac{1}{1 + \lambda_1 \cdot (H_{\lambda_1+b-1} - H_{\lambda_1})} \cdot \frac{n^{\lambda_1}}{\Gamma(\lambda_1 + 1)}.$$

Bei der zweiten Gleichheit wird aus den Summanden die einzige positive reelle Nullstelle λ_1 von (9.4) gewählt und alle anderen weggelassen. Wir wollen noch zeigen, dass λ_1 tatsächlich der dominante Wert mit dem größten Realteil ist.

Sei $\lambda_c \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_c$ und sei $\Re(\lambda_c) \geq \lambda_1$. Da $\lambda_c = \lambda_1 + a + ib$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ gilt, folgern wir $|\lambda_c + k| > \lambda_1 + k$ für $k \in \mathbb{N}$. Dadurch ist $|\lambda_c^{\bar{b}}| > \lambda_1^{\bar{b}} = (b-1)!$. Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt, dass

$$|P(\lambda_c)| = |\lambda_c^{\bar{b}} - (b-1)!| \geq |\lambda_c^{\bar{b}}| - |(b-1)!| > 0.$$

Also gilt für jedes λ_c mit $\Re(\lambda_c) \geq \lambda_1$ und $\lambda_c \neq \lambda_1$, dass es keine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist. □

Wir haben also gesehen, dass es verschiedene Typen von serien-parallelen Graphen gibt. Die größte Unterscheidung ist hierbei die zwischen ebenen und nichtebenen Graphen. Wie es bereits von anderen Strukturen, wie etwa Bäumen bekannt ist, sind die nichtebenen Graphen viel schwieriger zu analysieren, da sich Symmetrien auftun, die schwer zu behandeln sind. Daher haben wir exakte Ergebnisse für die ebenen serien-parallelen Graphen hergeleitet, die leider nur asymptotischen Ergebnisse für die nichtebenen Graphen nur referenziert. Bei den nichtebenen Graphen haben wir außerdem zwischen markierten und unmarkierten Kanten unterschieden. Als eine Spezialform von ebenen Graphen haben wir die binären serien-parallelen Graphen kennengelernt, die aufgrund der Einschränkung, dass jeder Knoten maximal den Weggrad 2 haben darf, auch nicht so einfach zu analysieren sind.

Im hinteren Teil der Arbeit haben wir uns stochastischen Wachstumsprozessen gewidmet, die die besprochenen Typen von Graphen erzeugen. Das uniforme Bernoulli-Wachstumsmodell generiert uns ebene serien-parallele Graphen. Diese haben wir mit Hilfe einer Bijektion zu markierten Bäumen und der erzeugenden Funktion dieser Bäume analysiert. Nicht besprochen haben wir ein Wachstumsmodell zu den nichtebenen serien-parallelen Graphen. Dieses zu definieren und zu analysieren könnte ein Thema zukünftiger Nachforschungen in diesem Bereich sein. Aufgrund der erwähnten Symmetrien kann sich das allerdings als schwierig erweisen. Stattdessen haben wir das hierarchische Wachstumsmodell betrachtet, das wiederum ebene serien-parallele Graphen erzeugt. Aufgrund seiner stark rekursiv orientierten Definition können dadurch jedoch nur Graphen mit 2^n Kanten erzeugt werden. Für die binären serien-parallelen Graphen haben wir uns ein relativ naheliegendes Wachstumsmodell überlegt und dieses mit Hilfe von Bucket-Bäumen und deren erzeugender Funktion analysiert.

Im Zuge dieser Arbeit haben wir einige Kennzahlen von den verschiedenen Arten serien-paralleler Graphen sehr gut in den Griff gekriegt, sind jedoch an anderen gescheitert und manche haben wir gar nicht betrachtet. Anhand dessen kann man sehr gut sehen, dass oft unscheinbar kleine Veränderungen der Aufgabenstellung die Aufgabe um ein Vielfaches verkomplizieren und es ist klar, dass es im Bereich der serien-parallelen Graphen und deren Wachstum noch genügend Ansätze für weitere Forschungen gibt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. Dobrow and J. Fill. *Total path length for random recursive trees*. Combinatorics, Probability and Computing. 1999.
- [2] Leonhard Euler. *Brief von Euler an Goldbach vom 4. September 1751*. Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle. (Band 1), St.-Pétersbourg, 549-552. 1843.
- [3] P. Flajolet and A. Odlyzko. *Singularity analysis of generating functions*. Siam Journal on Discrete Mathematics Vol. 3, 216–240. 1990.
- [4] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press. 2009.
- [5] J. Galambos. *Advanced Probability Theory, Second Edition*. Probability: Pure and Applied. Taylor & Francis, 1995.
- [6] O. Golinelli. *Asymptotic behavior of two-terminal series-parallel networks*. Technical Report t97/074, CEA Saclay, Service de Physique Theorique. 2014.
- [7] B. Hambly and J. Jordan. *A random hierarchical lattice: The series-parallel graph and its properties*. Advances in Applied Probability, 824-838. 2004.
- [8] Micha Hofri, Chao Li, and Hosam Mahmoud. *On the combinatorics of binary series-parallel graphs*. Probability in the Engineering and Informational Sciences 30 pp, 244-260. 1999.
- [9] S. Janson. *Moments of Gamma type and the Brownian supremum process area*. Probability Surveys 7, 1-52. 2010.
- [10] W. Knödel. *Über Zerfällungen*. Monatshefte für Mathematik 55, 20-27. 1951.
- [11] Markus Kuba and Alois Panholzer. *Combinatorial analysis of growth models for series-parallel networks*. Manuskript, 2016.
- [12] P.A. Macmahon. *The combinations of resistances*. The Electrician 28, 601-602. 1892.

- [13] Hosam M. Mahmoud. *Some node degree properties of series-parallel graphs evolving under a stochastic growth model*. Probability in the Engineering and Informational Sciences 27, 297–307. 2013.
- [14] Hosam M. Mahmoud. *Some properties of binary series-parallel graphs*. Probability in the Engineering and Informational Sciences 28, 565–572. 2014.
- [15] John W. Moon. *Some Enumerative Results on Series-Parallel Networks*. Annals of Discrete Mathematics 33, 199-226. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1987.
- [16] J. Riordan and C. E. Shannon. *The number of two-terminal series-parallel networks*. Journal of Mathematics and Physics 21, 83-93. 1942.
- [17] Ernst Schröder. *Vier combinatorische Probleme*. Zeitschrift für Mathematik und Physik 15, 361-376. 1870.
- [18] N. J. A. Sloane. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. published electronically at <https://oeis.org>, 1964.
- [19] Richard P. Stanley. *Hipparchus, Plutarch, Schröder, and Hough*. American Mathematical Monthly 104 (4), 344–350. 1997.
- [20] Johann Andreas von Segner. *Enumeratio modorum quibus figurae planae rectilineae per diagonales dividuntur in triangula*. Novi commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae 7, 203–210. 1758.
- [21] Karl Weierstraß. *Über die Theorie der analytischen Facultäten*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 51, 36. 1856.
- [22] D. Zave. *A series expansion involving the harmonic numbers*. Information Processing Letters 5, 75-77. 1976.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

2.1	Eine Schaltung von 4 Widerständen wird als serien-paralleler Graph interpretiert.	17
2.2	Entwicklung eines serien-parallelen Graphen und die Entwicklung des dazu konjugierten serien-parallelen Graphen.	19
3.1	Das Bild, bzw. Urbild von $(1(234))56(78)$	26
4.1	Die nichtebenen Graphen (a) und (b) sind gleich, die dazu konjugierten Graphen (c) und (d) werden als gleich definiert.	33
5.1	Sowohl aus Graph (a), als auch aus Graph (b) kann durch serielle Verdopplung der Kante, die direkt von der Quelle zur Senke führt der Graph (c) entstehen.	38
5.2	Ein Block (bzw. es könnte auch ein ganzer Graph sein) besteht auf der linken Seite aus der Kante 1 und den Blöcken b_1^L bis b_i^L und auf der rechten Seite aus der Kante 2 und den Blöcken b_1^R bis b_j^R . Die Senke ist sowohl Teil von b_i^L als auch von b_j^R	38
6.1	Wachstum eines Graphen und der dazugehörige Baum	44
6.2	Baum und zugehöriger Graph (links). Konjugierter Graph, der entsteht, wenn man blaue und rote Baumkanten jeweils umfärbt (rechts).	51
6.3	Baum der Größe 6 und entlang der Baumkante 1 – 2 aufgesplitteter Baum mit zwei neuen Bäumen der Größe 3.	52
6.4	Das Bild von $(4, 7, 3, 1, 2, 6, 5)$	53
6.5	Beziehungen zwischen den Verteilungen.	58
6.6	Baum und zugehöriger Graph (links). Konjugierter Graph, der entsteht, wenn man blaue und rote Baumkanten jeweils umfärbt (rechts). Die bunt eingefärbten Schnitte beim Graphen auf der linken Seite entsprechen den Pfaden mit der gleichen Farbe im rechten Graphen.	59
7.1	Wachstum eines Graphen nach dem hierarchischen Wachstumsmodell. . .	67
8.1	Wachstum eines binären Graphen und der dazugehörige Bucket-Baum. .	72

9.1	Der Aufbau eines b -ären serien-parallelen Graphen und dessen Repräsentation als Bucket-Baum.	85
-----	---	----