TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Aronszajn-Donoghue Theorie für Selbstadjungierte lineare Relationen

Ausgeführt am Institut für
Analysis und Scientific Computing
der
Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Michael Kaltenbäck, Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn.

durch
Martin Rathmair, B.Sc.

Weißgasse 42/3, 1170 Wien

Wien, Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Zur Beschreibung quantenmechanischer Phänomene hat sich die Hilbertraumtheorie als idealer mathematischer Rahmen erwiesen. Der *Phasenraum* eines Quantensystem, d.h. die Menge aller möglichen Zustände des Systems wird durch einen seperablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ repräsentiert. Jedem Zustand wird ein normierter Vekter $\psi \in \mathcal{H}$ zugeordnet. Zwei normierte Vektoren ψ_1, ψ_2 beschreiben genau dann denselben Zustand, wenn $\psi_1 = \gamma\psi_2$ für ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $|\gamma| = 1$. Jeder messbaren Größe (*Observablen*) a des Systems entspricht ein selbstadjungierter Operatoren A auf $\mathcal{H}$. Bezeichnet $\omega_\psi^a(\Delta)$ für jede Borelmenge $\Delta \subseteq \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Messwert der Observablen a in Δ liegt, wobei sich das System im Zustand ψ befindet, und ist E das Spektralmaß des selbstadjungierten Operators A, dann beschreibt die Gleichung

$$\omega_\psi^a(\Delta) = (E(\Delta)\psi, \psi) \tag{1.1}$$

den Zusammenhang zwischen a und A. Das Spektrum $\sigma(A)$ von A entspricht der Menge der Möglichen Messwerte der Observablen a (da E auf $\sigma(A)$ lebt, wird diese Tatsache bei Betrachtung von Gleichung (1.1) plausibel). Ausführliche Herleitungen sowie zahlreiche Beispiele dazu findet man in [Tes14, Kapitel 2] und [BEH08, Kapitel 7].

Wir werden sehen, dass jeder selbstadjungierte Operator A eine Zerlegung des Hilbertraums

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc} \tag{1.2}$$

induziert. Diese wird durch Lebesgue-Zerlegung der Maße $\Delta \mapsto (E(\Delta)\psi, \psi)$ realisiert.

Die zeitliche Entwicklung eines Quantensystems wird durch die *Schrödinger-Gleichung*

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi(t) = H\psi(t), \quad \psi(0) = \psi \in \operatorname{dom} H^1. \tag{1.3}$$

beschrieben. Dabei repräsentiert der selbstadjungierte Operator H die Energieobservable des Systems. H wird auch *Hamiltonoperator* genannt. Formal ist die Lösung des Anfangswertproblems (1.3) durch

$$\psi(t) = e^{-itH}\psi$$

gegeben, wobei $\hbar = 1$ gesetzt wurde. Von besonderem Interesse ist das Langzeitverhalten von $\psi(.)$. Eine mögliche Fragestellung ist etwa die Suche nach Anfangbedingungen ψ, sodass der *Orbit*

$$\mathcal{O}(\psi) := \left\{ e^{-itH}\psi : t \in \mathbb{R} \right\}$$

präkompakt in $\mathcal{H}$ ist. In [Oli09, Kapitel 13.1] wird gezeigt, dass $\mathcal{O}(\psi)$ genau dann präkomapakt ist, wenn $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$. Für $\psi \in \mathcal{H}_{pp}$ zeigen die Orbits $\mathcal{O}(\psi)$ ein "fast periodisches" Verhalten (vgl. dazu [Oli09, Kapitel 13.2]).

Zwei weitere Größen, die die Dynamik des Systems charakterisieren, sind

[1] dom H bezeichnet den Definitionsbereich des Operators H.

- die *Rückkehrwahrscheinlichkeit* zur Anfangsbedingung ψ zum Zeitpunkt t

$$p_\psi(t) := \left|\left(\psi, e^{-itH}\psi\right)\right|^2, \tag{1.4}$$

- die *mittlere Rückkehrwahrscheinlichkeit* zur Anfangsbedingung ψ bis zum Zeitpunkt $t \neq 0$

$$\langle p_\psi \rangle(t) := \frac{1}{t}\int\limits_0^t p_\psi(s)\ ds. \tag{1.5}$$

Mit $\mu_\psi : \Delta \mapsto (E(\Delta)\psi, \psi)$ besteht ein enger Zusammenhang zwischen p_ψ und der Fouriertransformation $\hat{\mu_\psi}$ von μ_ψ:

$$p_\psi(t) = |\hat{\mu_\psi}|^2 := \left|\int e^{-its}\ d\mu_\psi(s)\right|^2.$$

Zwei allgemeine Resultate über endliche Maße auf $\mathbb{R}$ helfen einen Zusammenhang zwischen den Räumen $\mathcal{H}_\tau$, $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ und $p_\psi(t)$ bzw. $\langle p_\psi \rangle(t)$ herzustellen:

Lemma (Riemann-Lebesgue). *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und bezeichne $\hat{f}$ die Fouriertransformierte von f. Dann ist $\hat{f}$ stetig und es gilt*

$$\lim_{|t|\to+\infty} \hat{f}(t) = 0.$$

Beweis. Siehe [Oli09, Lemma 13.3.2]. □

Lemma (Wiener). *Sei μ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$, dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\ ds = \sum_{x\in\mathbb{R}} \mu(\{x\}).$$

Beweis. Siehe [Oli09, Lemma 13.3.5]. □

Da $\mu_\psi(.) := (E(.)\psi, \psi)$ für $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$ absolut stetig ist ($\mathcal{H}_{ac}$ ist so definiert), gilt mit dem Lemma von Riemann-Lebesgue

$$\lim_{|t|\to+\infty} p_\psi(t) = \lim_{|t|\to+\infty} \left|\int e^{-its}\ d\mu_\psi(s)\right|^2 = \lim_{|t|\to+\infty} \left|\frac{d\hat{\mu}_\psi}{d\lambda}(t)\right|^2 = 0. \tag{1.6}$$

Damit enthält $\mathcal{H}_{ac}$ Anfangsbedingungen für die die Rückkehrwahrscheinlichkeit für $t \to +\infty$ gegen 0 konvergiert.
Verwendung des Lemmas von Wiener ergibt für $\psi \in \mathcal{H}_{pp}^\perp = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sc}$

$$\lim_{t\to+\infty} \langle p_\psi \rangle(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\ ds = 0, \tag{1.7}$$

da in diesem Fall $\mu_\psi(\{x\}) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Die mittlere Rückkehrwahrscheinlichkeit konvergiert dann also gegen 0. Weitere Zusammenhänge von ähnlicher Natur findet man etwa in [Oli09, Kapitel 13], [Tes14, Kapitel 5] und [Las96].

In vielen Fällen ist der Hamiltonoperator H nur nur durch einen formalen Ausdruck wie etwa

$$H = -\Delta + V(x),$$

wobei Δ den Laplaceoperator und V ein reellwertiges Potential bezeichnet, angedeutet. Eine konkrete selbstadjungierte Realisierung entspricht dann der Wahl eines geeigneten Definitionsbereichs, d.h. im Wesentlichen der Wahl von Randbedingungen. Man ist deshalb daran interessiert Aussagen darüber zu treffen, ob/wie gewisse Eigenschaften des Systems von der Wahl einer selbstadjungierten Realisierung abhängen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Fragestellung im abstrakten Rahmen von linearen Relationen, also verallgemeinerten Operatoren behandelt. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Untersuchung verschiedener Komponenten des Spektrums.

Die verwendete Methodik geht im Prinzip auf ein Paper ([Aro57]) von N. Aronszajn aus dem Jahr 1957 zurück: Durch Betrachtung des *Sturm-Liouville-Problems*

$$\begin{cases} (Lf)(x) := -\left(p(x)f'(x)\right)' + q(x)f(x) = \lambda f(x), & x \geq 0, \\ \sin(\alpha)f(0) - \cos(\alpha)p(0)f'(0) = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

für $\alpha \in [0, 2\pi)$ wird hier das Spektrum des zugehörigen selbstadjungierten Operators A in $L^2(0, +\infty)$ in Abhängigkeit von α untersucht. Sind ϕ_α^λ und ψ_α^λ Lösungen der Anfangwertprobleme

$$L\phi_\alpha^\lambda = \lambda\phi_\alpha^\lambda, \quad \phi_\alpha^\lambda(0) = \sin(\alpha), \quad \left(\phi_\alpha^\lambda\right)'(0)\; p(0) = -\cos(\alpha),$$
$$L\psi_\alpha^\lambda = \lambda\psi_\alpha^\lambda, \quad \psi_\alpha^\lambda(0) = \cos(\alpha), \quad \left(\psi_\alpha^\lambda\right)'(0)\; p(0) = \sin(\alpha),$$

dann gibt es unter geeigneten Voraussetzungen eine eindeutige Funktion m_α, sodass

$$\phi_\alpha^\lambda + m_\alpha \psi_\alpha^\lambda \in L^2(0, +\infty) \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Das Verhalten der Funktion m_α in der Nähe der reellen Achse lässt Rückschlüsse auf das Spektrum des Operators A zu. Indem er einen Zusammenhang zwischen den Funktionen m_α, $\alpha \in [0, 2\pi)$ herstellte, gelang es Aronszajn zu zeigen, dass eine gewisse Komponente des Spektrums von A unabhängig von der Wahl von α ist.
W. Donoghue([Don74]) griff die Ideen Aronszajns auf und formulierte die Resultate für die (allgemeinere) Situtation von verschiedenen selbstadjungierten Erweiterungen ein und desselben symmetrischen Operators mit Defekt $(1, 1)$.

Ziel dieser Arbeit ist es, die *Aronszajn-Donoghue*-Theorie für lineare Relationen zu entwickeln. In Kapitel 2 werden zunächst einige elementare Eigenschaften linearer Relationen angeführt. Kapitel 3 beschäftigt sich mit selbstadjungierten Erweiterungen von symmetrischen Relationen. Besonderes Interesse wird hier einfachen, symmetrischen Relationen beigemessen; das Spektrum von selbstadjungierten Erweiterungen solcher Relationen lässt sich nämlich durch Untersuchung eines geeigneten Borelmaßes auf $\mathbb{R}$ sehr gut verstehen. Kapitel 4 besteht vorwiegend aus maßtheoretischen Überlegungen. Wir werden sehen, dass sich einzelne Komponenten des Spektrums geeigneter, selbstadjungierter Relationen durch das Verhalten der sogenannten Q-Funktion [2] ausfindig machen lassen. Da der Zusammenhang zwischen den Q-Funktionen verschiedener selbstadjungierter Erweiterungen einer einfachen, symmetrischen Relation bekannt ist, können wir Vergleiche zwischen deren Spektren anstellen.

Ich möchte mich an dieser Stelle sehr herzlich bei Prof. Kaltenbäck für die sorgfältige Betreuung bedanken. Besonderer Dank gebührt auch meinen Eltern Michaela und Albert, die mich während meines gesamten Studiums moralisch und finanziell unterstützt haben.

[2]Die Q-Funktion übernimmt die Rolle der Funktion m_α aus dem oben skizzierten Sturm-Liouville-Problem.

2 Lineare Relationen

Im folgenden Kapitel befassen wir uns mit dem Konzept der linearen Relationen. Die Ergebnisse werden meist ohne Beweis angeführt. Der interessierte Leser wird auf [Kal10, Kapitel 4] verwiesen.

2.1 Grundlegende Eigenschaften und Resultate

Sind X, Y zwei Vektorräume, so verwenden wir für Elemente aus dem kartesischen Produkt von X und Y die Schreibweise $(f; g) \in X \times Y$, wobei $f \in X$ und $g \in Y$.

Definition 2.1.1. Sind X, Y Vektorräume, dann heißt T *lineare Relation* zwischen X und Y, falls T ein linearer Teilraum des kartesischen Produkts von X und Y ist ($T \leq X \times Y$).
Ist $Y = X$, so sprechen wir von einer linearen Relation *auf* X. Sind X, Y topologische Vektorräume, so heißt T eine *abgeschlossene* lineare Relation, falls T bezüglich der Produkttopologie auf $X \times Y$ abgeschlossen ist.

Insbesondere ist der Graph eines Operators eine lineare Relation.

Definition 2.1.2. Ist T eine lineare Relation zwischen X und Y, so definieren wir

- den *Domain* $\operatorname{dom} T := \{f \in X : \exists g \in Y : (f; g) \in T\}$,
- den *Range* $\operatorname{ran} T := \{g \in Y : \exists f \in X : (f; g) \in T\}$,
- den *Kern* $\ker T := \{f \in X : (f; 0) \in T\}$,
- den Teilraum $T_0 := \ker T \times \{0\}$,
- den *Multi-Valued-Part* $\operatorname{mul} T := \{g \in Y : (0; g) \in T\}$ und
- den Teilraum $T_\infty := \{0\} \times \operatorname{mul} T$.

Fakta 2.1.3. Sei T eine lineare Relation zwischen X und Y.

(i) Ist $(f; g) \in T \leq X \times Y$, dann gilt $\{h \in Y : (f; h) \in T\} = g + \operatorname{mul} T$. In diesem Sinn kann man Relationen als mehrwertige Funktionen auffassen.

(ii) Ist T abgeschlossen, dann sind auch $\ker T, T_0, \operatorname{mul} T$ und T_∞ abgeschlossen.

(iii) Ist $S \leq X \times Y$ mit $S \subseteq T$, dann gilt

$$\operatorname{dom} S \subseteq \operatorname{dom} T, \quad \operatorname{ran} S \subseteq \operatorname{ran} T, \quad \ker S \subseteq \ker T, \dots$$

Eine lineare Relation ist also genau dann Graph eines Operators, wenn $\operatorname{mul} T = \{0\}$.
Ist T ein Operator, so werden wir in weiterer Folge dasselbe Symbol für die zugehörige lineare Relation verwenden.

Satz 2.1.4. *Sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $M \leq X$ und $B : M \to Y$ linear.*

(i) Ist B beschränkt, dann stimmt der Abschluss $\operatorname{cl}(B)$ der Relation B mit dem Graphen der eindeutigen, stetigen und linearen Fortsetzung von B auf $\operatorname{cl}(M)$ überein.

(ii) Ist X ein Banachraum sowie M abgeschlossen, dann ist B stetig.

Es lassen sich die Begriffe *Addition, (Skalar-)Multiplikation* und *Inversion* auf naheliegende Weise für lineare Relationen festlegen:

Definition 2.1.5. Sind X, Y, Z Vektorräume, $S, T \leq X \times Y$, $R \leq Y \times Z$ und $\alpha \in \mathbb{C}$, so definieren wir

- $S + T := \{(f; g) \in X \times Y : \ \exists h, k \in Y : g = h + k, (f; h) \in S, (f; k) \in T\}$,
- $\alpha T := \{(f; g) \in X \times Y : \ \exists h \in Y : (f; h) \in T, g = \alpha h\}$,
- $T^{-1} := \{(g; f) \in Y \times X : \ (f; g) \in T\}$ und
- $RS := \{(f; k) \in X \times Z : \ \exists g \in Y : (f; g) \in S, (g; k) \in R\}$.

Um Verwirrung zu vermeiden, verwenden wir für die Vektorraumsumme zweier Teilräume $S, T \leq X \times Y$ die Schreibweise $S \dotplus T$.

Fakta 2.1.6. Es seien X, Y, Z, S, T, R und α wie in Definition 2.1.5.

(i) Man rechnet nach, dass $S + T, \alpha T, T^{-1}$ und RS selbst wieder lineare Relationen festlegen. Darüber hinaus ist die Addition kommutativ und assoziativ. Auch die Multiplikation ist assoziativ, sprich $P(RS) = (PR)S$, wenn $P \leq Z \times V$ mit einem weiteren Vektorraum V. Es gilt die für Operatoren bekannte Formel $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.

(ii) Sind R, S, T sogar Operatoren, dann stimmt

- $S + T$ mit der punktweisen Addition von S und T auf $\operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T$,
- αT mit der üblichen skalaren Multiplikation der linearen Abbildung T und
- RS mit der üblichen Hintereinanderausführung der beiden Funktionen S und R auf $\{f \in \operatorname{dom} S : \ Sf \in \operatorname{dom} R\}$

überein.

Ist S ein überall definierter Operator und T eine lineare Relation, dann gilt

$$S + T = \{(f; g + Sf) \in X \times Y : \ f \in \operatorname{dom} T, (f; g) \in T\}. \tag{2.1}$$

Ist insbesondere $X = Y$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ ein Skalar, dann gilt

$$T + \alpha I = \big\{(f; g + \alpha f) \in X^2 : \ (f; g) \in T\big\}. \tag{2.2}$$

Wir werden in Zukunft auch $T + \alpha$ statt $T + \alpha I$ schreiben.

Fakta 2.1.7.

(i) Seien X, Y Vektorräume, $T \leq X \times Y$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $B : X \to Y$ linear. Dann gilt

$$(T + B) + (-B) = T, \quad \frac{1}{\alpha}(\alpha T) = T, \quad (T^{-1})^{-1} = T.$$

(ii) Sind zusätzlich X, Y topologische Vektorräume, sodass B stetig ist, dann gilt

$$\mathrm{cl}\,(T+B) = \mathrm{cl}\,(T) + B, \quad \mathrm{cl}\,(\alpha T) = \alpha\ \mathrm{cl}\,(T), \quad \mathrm{cl}\,(T^{-1}) = (\mathrm{cl}\,(T))^{-1}.$$

Insbesondere sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- T ist abgeschlossen,
- $T + B$ ist abgeschlossen,
- αT ist abgeschlossen,
- T^{-1} ist abgeschlossen.

Ab sofort bezeichnet X einen Banachraum. Für eine lineare Relation T auf X legen wir die Konvention

$$(T-\infty)^{-1} := T \quad \text{und} \quad \mathrm{ran}\,(T-\infty) := \mathrm{dom}\,T \tag{2.3}$$

fest.

Definition 2.1.8. Für eine lineare Relation T auf X heißt die Abbildung R mit

$$R(\lambda) := (T-\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_\infty, \tag{2.4}$$

die *Resolvente* von T.

Man beachte, dass im Gegensatz zur klassischen Resolvente in der Operatortheorie R für alle $\lambda \in \mathbb{C}_\infty$ definiert ist. Allerdings handelt es sich bei $R(\lambda)$ nicht zwingend um einen Operator.

Definition 2.1.9. Sei T eine lineare Relation auf X und R die Resolvente von T. Wir definieren folgende Mengen:

- die *Resolventenmenge* $\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}_\infty : \ R(\lambda) \in \mathfrak{B}(X)\}$,
- das *Spektrum* $\sigma(T) := \mathbb{C}_\infty \setminus \rho(T)$ und
- die Menge der *Punkte regulären Typs* $r(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}_\infty : \ R(\lambda) \in \mathfrak{B}(\mathrm{ran}\,(T-\lambda), X)\}$.

Bemerkung 2.1.10. Da für eine lineare Relation T

$$\infty \in \rho(T) \quad \Leftrightarrow \quad T \in \mathfrak{B}(X),$$

liegt ∞ genau dann im Spektrum von T, wenn $T \notin \mathfrak{B}(X)$.

Bemerkung 2.1.11. Ist $R \leq X^2$ abgeschlossen, so folgt aus Satz 2.1.4, dass $R : \mathrm{dom}\,R \to X$ genau dann beschränkt ist, wenn $\mathrm{mul}\,R = \{0\}$ und $\mathrm{dom}\,R$ abgeschlossen ist. Mit $R = R(\lambda)$ erhält man

$$\begin{aligned} \lambda \in r(T) &\Leftrightarrow \ker\,(T-\lambda) = \{0\} \text{ und } \mathrm{ran}\,(T-\lambda) \text{ ist abgeschlossen}, \\ \lambda \in \rho(T) &\Leftrightarrow \ker\,(T-\lambda) = \{0\} \text{ und } \mathrm{ran}\,(T-\lambda) = X. \end{aligned}$$

Satz 2.1.12. *Sei T eine lineare Relation auf X mit Resolvente R. Dann gilt die Resolventengleichung*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu) \tag{2.5}$$

für $\lambda, \mu \in \rho(T) \cap \mathbb{C}$.

Wir beschäftigen uns ab sofort ausschließlich mit linearen Relationen zwischen zwei Hilberträumen $\mathcal{H}$ und $\mathfrak{H}$. Der Produktraum $\mathcal{H} \times \mathfrak{H}$ wird mit dem Summenskalarprodukt

$$((f;g),(h;k))_{\mathcal{H}\times\mathfrak{H}} := (f,h)_{\mathcal{H}} + (g,k)_{\mathfrak{H}} \text{ für } (f;g),(h;k) \in \mathcal{H} \times \mathfrak{H} \tag{2.6}$$

versehen. Wenn aus dem Kontext nachvollziehbar ist, welches Skalarprodukt gemeint ist, dann werden wir im Weiteren darauf verzichten, den Raum explizit anzugeben.

Definition 2.1.13. Ist T eine lineare Relationen zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathfrak{H}$, dann definieren wir die *Adjungierte* T^* gemäß

$$T^* := \{(f;g) \in \mathcal{H} \times \mathfrak{H} : \ (f,k) = (g,h) \ \forall (h;k) \in T\}. \tag{2.7}$$

Ist die Abbildung J auf $\mathcal{H}^2$ durch

$$J : \begin{cases} \mathcal{H} \times \mathfrak{H} & \to & \mathfrak{H} \times \mathcal{H}, \\ (f;g) & \mapsto & (g;-f), \end{cases}$$

gegeben, so prüft man leicht nach, dass $T^* = (JT)^\perp$ und stellt fest, dass die Adjungierte eine lineare Relation ist.

Fakta 2.1.14. Sei $T \leq \mathcal{H} \times \mathfrak{H}$ eine lineare Relation.

(i) Ist T ein beschränkter Operator, dann stimmt T^* mit der operatortheoretischen Adjungierten überein.

(ii) Es gilt $\operatorname{mul} T^* = (\operatorname{dom} T)^\perp$ und $\ker T^* = (\operatorname{ran} T)^\perp$.

(iii) Die Adjungierte T^* ist abgeschlossen.

(iv) Es gilt $(T^*)^* = \operatorname{cl}(T)$. Insbesondere ist T genau dann abgeschlossen, wenn $(T^*)^* = T$.

(v) Ist $S \leq \mathcal{H} \times \mathfrak{H}$ mit $S \subseteq T$, dann gilt $T^* \subseteq S^*$.

(vi) Es ist $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$, und für $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ gilt $(T+B)^* = T^* + B^*$.

Definition 2.1.15. Ist $T \leq \mathcal{H} \times \mathfrak{H}$ eine lineare Relation, dann heißt T

- *isometrisch*, falls $T^{-1} \subseteq T^*$,
- *unitär*, falls $T^{-1} = T^*$.

Ist $T \leq \mathcal{H}^2$ eine lineare Relation, dann heißt T

- *symmetrisch*, falls $T \subseteq T^*$ und
- *selbstadjungiert*, falls $T = T^*$.

Bemerkung 2.1.16. Der Graph eines beschränkten, selbstadjungierten Operators ist auch im Sinn von Relationen selbstadjungiert. Es gibt allerdings selbstadjungierte Relationen die keine Operatoren sind. Man sieht etwa leicht, dass $A = \{0\} \times \mathcal{H}$ eine selbstadjungierte Relation ist. Eine selbstadjungierte Relation A ist wegen

$$(\operatorname{dom} A)^\perp = \operatorname{mul} A$$

genau dann ein Operator, wenn A dicht definiert ist.

Der Isometriebegriff im Sinne von Definition 2.1.15 stimmt mit jenem aus der klassischen Operatortheorie überein; Analoges gilt für unitäre Relationen:

Satz 2.1.17. *Sei $T \leq \mathcal{H} \times \mathfrak{H}$ eine lineare Relation.*

(i) T ist genau dann isometrisch, wenn $T : \operatorname{dom} T \to \mathfrak{H}$ ein isometrischer Operator ist, d.h.: $\operatorname{mul} T = \{0\}$ und $(Tf, Tk) = (f, k)$ für alle $f, k \in \operatorname{dom} T$.

(ii) T ist genau dann unitär, wenn T ein unitärer Operator ist, d.h. $\operatorname{mul} T = \{0\}$, T ist bijektiv und $(Tf, Tk) = (f, k)$ für alle $f, k \in \operatorname{dom} T = \mathcal{H}$.

2.2 Cayley-Transformation

Um einen Zusammenhang zwischen symmetrischen und isometrischen bzw. selbstadjungierten und unitären Relationen herstellen zu können, definieren wir zunächst zwei Abbildungen auf $\mathcal{H}^2$:

Definition 2.2.1. Die Abbildung

$$\mathcal{C} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^2 & \to & \mathcal{H}^2, \\ (f; g) & \mapsto & (if + g; -if + g), \end{array} \right. \tag{2.8}$$

heißt *Cayley-Transformation*. Die Abbildung

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^2 & \to & \mathcal{H}^2, \\ (f; g) & \mapsto & (-f + g; -if - ig), \end{array} \right. \tag{2.9}$$

heißt *Inverse Cayley-Transformation*.
Ist $T \leq \mathcal{H}^2$ eine lineare Relation, dann heißt $\mathcal{C}(T)$ *Cayley-Transformierte* von T und entsprechend heißt $\mathcal{F}(T)$ *Inverse Cayley-Transformierte* von T.

Bemerkung 2.2.2. In [Kal10] wird die Cayley-Transformation als die Abbildung

$$(f; g) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(if + g; -if + g)$$

definiert. Für die Cayley-Transformierte $\mathcal{C}(T)$ einer linearen Relation T spielt der Vorfaktor keine Rolle. Analoges gilt für $\mathcal{F}$.

Fakta 2.2.3. Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$.

(i) Dann sind $\mathcal{C}(T)$ und $\mathcal{F}(T)$ – als Bild eines linearen Teilraums unter einer linearen Abbildung – lineare Relationen.

(ii) Es gilt $\mathcal{C}(T) = I - 2i(T + iI)^{-1}$ und $\mathcal{F}(T) = -i - 2i(T - I)^{-1}$.

(iii) Es gilt $\mathcal{F}(\mathcal{C}(T)) = \mathcal{C}(\mathcal{F}(T)) = T$.

Satz 2.2.4. *Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Dann ist T genau dann symmetrisch (selbstadjungiert), wenn $\mathcal{C}(T)$ isometrisch (unitär) ist. Umgekehrt ist T genau dann isometrisch (unitär), wenn $\mathcal{F}(T)$ symmetrisch (selbstadjungiert) ist.*

2.3 Defekträume und Defektindizes

Definition 2.3.1. Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$. Dann heißen die Teilräume

$$\mathcal{N}_\lambda := \left(\operatorname{ran}\left[T - \bar{\lambda}\right]\right)^\perp, \quad \lambda \in \mathbb{C}_\infty \tag{2.10}$$

Defekträume von T.

Für $\lambda \in \mathbb{C}_\infty$ ist $\mathcal{N}_\lambda$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ und damit für sich ein Hilbertraum. Mit $\dim \mathcal{N}_\lambda$ ist im Weiteren die Hilbertraumdimension von $\mathcal{N}_\lambda$ gemeint, d.h. die Mächtigkeit einer Orthonormalbasis.

Es sei $\mathbb{C}_\infty$ mit jener Topologie versehen, die durch Alexandroff-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ entsteht. Zur Erinnerung:

Bemerkung 2.3.2. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkompakter, topologischer Raum, der nicht kompakt ist, dann bildet $(Y, \mathcal{O})$ mit

$$\begin{aligned} Y &:= X \cup \{\infty\}, \text{ wobei } \infty \notin X, \\ \mathcal{O} &:= \mathcal{T} \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) : K \text{ kompakt in } X\}, \end{aligned}$$

einen kompakten topologischen Raum. Man nennt $(Y, \mathcal{O})$ Alexandroff-Kompaktifizierung von $(X, \mathcal{T})$ (siehe etwa [Eng89, Satz 3.5.11]).
Es gilt

$$\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \cup \{B \cup \{\infty\} : B \in \mathcal{B}(X)\},$$

wobei $\mathcal{B}(Y)$ und $\mathcal{B}(X)$ die $\sigma-$Algebra der Borelmengen auf den beiden topologischen Räumen X und Y bezeichnet. Um das nachzuvollziehen, überlegt man sich zunächst, dass aus $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$ folgt, dass $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{B}(Y)$. Weil die einpunktige Menge $\{\infty\}$ in Y abgeschlossen ist, gilt für jedes $B \in \mathcal{B}(X)$, dass $B \cup \{\infty\} \in \mathcal{B}(Y)$. Wir haben die Inklusion $\supseteq$ gezeigt; es reicht also nachzuweisen, dass die rechte Seite eine σ-Algebra definiert. Dass die rechte Seite $\emptyset$ und Y enthält, sowie bezüglich Komplementbildung und Vereinigung abzählbarer Mengen abgeschlossen ist, ist eine elementare Rechnung.

Proposition 2.3.3. *Sei $T \leq \mathcal{H}^2$, dann ist $r(T)$ offen und die Abbildung*

$$r(T) \ni \lambda \mapsto \dim \mathcal{N}_\lambda$$

lokal konstant.
Insbesondere gilt für jedes zusammenhängende $\Delta \subseteq r(T)$, dass

$$\Delta \ni \lambda \mapsto \dim \mathcal{N}_\lambda$$

konstant ist.

Proposition 2.3.4. *Sei T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$.*

(i) Ist T symmetrisch bzw. isometrisch, dann gilt $r(T) \supseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ bzw. $r(T) \supseteq \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$.

(ii) Ist T selbstadjungiert bzw. unitär, dann gilt $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ bzw. $\sigma(T) \subseteq \mathbb{T}$.

Kombiniert man die beiden Propositionen, so erhält man folgendes Resultat:

Korollar 2.3.5. *Ist $T \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch bzw. isometrisch mit Defekträumen $\mathcal{N}_\lambda$, dann ist die Abbildung*

$$\lambda \mapsto \dim \mathcal{N}_\lambda$$

auf $\mathbb{C}_+$ und $\mathbb{C}_-$ bzw. $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathrm{cl}(\mathbb{D})$ und $\mathbb{D}$ konstant.

Für eine symmetrische Relation $S \leq \mathcal{H}^2$ sind somit n_+ und n_- durch

$$\begin{aligned} n_+ &:= \dim \mathcal{N}_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \\ n_- &:= \dim \mathcal{N}_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \end{aligned}$$

wohldefiniert.
Analog werden für isometrisches $V \leq \mathcal{H}^2$ die Zahlen

$$\begin{aligned} n_o &:= \dim \mathcal{N}_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{D}, \\ n_i &:= \dim \mathcal{N}_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{D}, \end{aligned}$$

definiert.

Definition 2.3.6. Sei $T \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch bzw. isometrisch. Dann heißt das Paar (n_+, n_-) bzw. (n_o, n_i) *Defektindizes* [1] von T.

Fakta 2.3.7. Es sei S symmetrisch mit Cayley-Transformierter $V = \mathcal{C}(S)$ und es bezeichne (n_+, n_-) bzw. (n_o, n_i) die Defektindizes von S bzw. V. Durch

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}, \\ z & \mapsto \quad \frac{z-i}{z+i}, \end{cases}$$

ist ein Homöomorphismus gegeben. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$\text{ran } [S - z] = \text{ran } [V - \omega],$$

wobei $\omega = \frac{z-i}{z+i}$. Insbesondere liefert die Wahl $z = \pm i$

$$\mathcal{N}_i = (\text{dom } V)^\perp \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_{-i} = (\text{ran } V)^\perp.$$

Für die Defektindizes bedeutet das $n_+ = n_o$ und $n_- = n_i$.

2.4 Spektralsatz für selbstadjungierte Relationen

Definition 2.4.1. Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Eine Abbildung $E : \mathcal{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ mit den folgenden Eigenschaften heißt *Spektralmaß* für $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$.

(i) Für jedes $\Delta \in \mathcal{A}$ ist $E(\Delta)$ eine orthogonale Projektion.

(ii) Es gilt $E(\emptyset) = 0$ und $E(\Omega) = I$.

(iii) Es gilt $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$ für $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{A}$.

(iv) Ist $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\Delta_n \cap \Delta_m = \emptyset$ für $n \neq m$, dann gilt

$$E\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(\Delta_n),$$

wobei die rechte Seite im Sinne der starken Operatortopologie konvergiert.

Um Spektralmaße besser verstehen zu können, beschäftigen wir uns näher mit komplexen Maßen.

Bemerkung 2.4.2. Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, dann heißt eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und μ σ-additiv ist, d.h. ist $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine Folge paarweiser disjunkter

[1] Wir werden die Defektindizes gelegentlich auch kurz *Defekt* nennen.

Mengen aus $\mathcal{A}$, dann konvergiert $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(\Delta_n)$ und

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\Delta_n).$$

Fakta 2.4.3. Wir listen nun einige Resultate für komplexe Maße auf; für Details siehe etwa [Rud87, Kapitel 6].

(i) Für ein komplexes Maß μ ist durch

$$|\mu| : \begin{cases} \mathcal{A} & \to & [0,\infty], \\ \Delta & \mapsto & \sup\left\{ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\mu(\Delta_n)| : \Delta_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} \Delta_n = \Delta \right\}, \end{cases}$$

ein endliches, nichtnegatives Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben. Man nennt $|\mu|$ die Variation von μ. Ein endliches, nichtnegatives Maß μ erfüllt $|\mu| = \mu$.
Es bezeichnet $\|\mu\| := |\mu|(\Omega)$ die Totalvariation von μ. Der Vektorraum $M(\Omega, \mathcal{A})$ aller komplexen Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ bildet, versehen mit der Totalvariation $\|.\|$, einen Banachraum.

(ii) Sind μ, ν zwei komplexe Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$, dann sagen wir, μ ist absolut stetig bezüglich ν (in Zeichen $\mu \ll \nu$), falls $|\mu|$ absolut stetig [2] bezüglich $|\nu|$ ist, d.h. falls jedes $A \in \mathcal{A}$ mit $\nu(A) = 0$ auch $\mu(A) = 0$ erfüllt. Der Satz von Radon-Nikodym lässt sich auch für komplexe Maße formulieren:
Ist ν ein nichtnegatives, σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$, dann ist $\mu \ll \nu$ genau dann, wenn ein $f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ existiert, sodass

$$\nu(A) = \int_A f \; d\mu \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}. \tag{2.11}$$

f ist dabei μ-f.ü. eindeutig bestimmt.

(iii) Für $\mu \in M(\Omega, \mathcal{A})$ sei ν ein nichtnegatives, σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu \ll \nu$ und sei f wie in Gleichung (2.11).

Eine Funktion $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ [3] heißt integrierbar bezüglich μ, falls $g \cdot f$ integrierbar bezüglich ν ist und man definiert

$$\int g \; d\mu := \int gf \; d\nu.$$

Die Definition von $\int g \; d\mu$ ist unabhängig von der Wahl von ν. Das Integral ist sowohl im Maß ν als auch im Integranden g linear. Für $g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ gilt

$$\left| \int g \; d\nu \right| \leq \|g\|_\infty \|\nu\| .$$

(iv) Ist μ ein nichtnegatives Maß auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und $f \in L^1(d\mu)$ dann wird durch

$$\nu(\Delta) := \int\limits_\Delta f \; d\mu, \quad \Delta \in \mathcal{A}$$

[2] Siehe auch Definition 4.1.1.
[3] $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ bezeichnet die Algebra aller komplexwertigen, messbaren Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

ein komplexes Maß festgelegt. Für die Variation von ν gilt

$$|\nu|(\Delta) = \int_\Delta |f| \; d\mu.$$

Zu einem Spektralmaß E auf $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$ wird durch

$$E_{g,h} := \begin{cases} \mathcal{A} & \to \quad \mathbb{C}, \\ \Delta & \mapsto \quad (E(\Delta)g, h), \end{cases} \tag{2.12}$$

für $g, h \in \mathcal{H}$ eine Familie von Mengenfunktionen festgelegt.

Fakta 2.4.4. Es sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$.

(i) Fixiert man $g, h \in \mathcal{H}$, dann ist $E_{g,h}$ ein komplexes Maß auf $\mathcal{A}$. Für die Variation von $|E_{g,h}|$ gilt die Abschätzung

$$|E_{g,h}|(\Delta) \leq \|E(\Delta)g\| \, \|E(\Delta)h\| \quad \text{für alle } \Delta \in \mathcal{A}.$$

Außerdem ist $E_{g,g}$ ein nichtnegatives Maß.

(ii) Für festes $\Delta \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$E_{.,.}(\Delta) \begin{cases} \mathcal{H}^2 & \to \quad \mathbb{C}, \\ (g; h) & \mapsto \quad E_{g,h}(\Delta), \end{cases}$$

eine beschränkte Sesquilinearform.

Für festes $\phi \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ [4] stellt

$$[.,.] : \begin{cases} \mathcal{H}^2 & \to \quad \mathbb{C}, \\ (g; h) & \mapsto \quad \int \phi \; dE_{g,h}, \end{cases} \tag{2.13}$$

eine beschränkte Sesquilinearform dar. Als Konsequenz des *Lemmas von Lax-Milgram* (siehe [WKB12, Proposition 3.2.7]) erhalten wir, dass für festes $\phi \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ ein eindeutiger Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ existiert, sodass

$$(Ag, h) = \int \phi \; dE_{g,h} \quad \text{für alle } g, h \in \mathcal{H}. \tag{2.14}$$

Für $\phi \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ definiert man

$$\int \phi \; dE := A. \tag{2.15}$$

Die Menge $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ ist – versehen mit punktweiser Addition, Skalarmultiplikation, punktweiser Multiplikation, punktweiser Konjugation, der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ und $\phi \equiv 1$ als Einselement – eine C^*-Algebra.

Fakta 2.4.5. Es sei E Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$ und Φ_E definiert durch

$$\Phi_E : \begin{cases} \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A}) & \to \quad \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \\ \phi & \mapsto \quad \int \phi \; dE. \end{cases}$$

(i) Φ_E ist *-Homomorphismus.

[4] $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ bezeichnet den Vektorraum aller beschränkten, komplexwertigen, messbaren Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

(ii) Für $\Delta \in \mathcal{A}$ und die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_\Delta$ ist $\Phi_E(\mathbb{1}_\Delta) = E(\Delta)$.

(iii) Die Operatornorm von Φ_E erfüllt $\|\Phi_E\| = 1$.

(iv) Ein Operator $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ vertauscht dann und nur dann mit allen Operatoren im Bild von Φ_E, wenn B mit allen Projektionen $E(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{A}$ vertauscht.

(v) Für $\phi \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ gilt $\sigma(\Phi_E(\phi)) \subseteq \mathrm{cl}\,(\phi(\Omega))$. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{cl}\,(\phi(\Omega)) \subseteq \rho(\Phi_E(\phi))$ ist

$$(\Phi_E(\phi) - \lambda)^{-1} = \Phi_E\left(\frac{1}{\phi - \lambda}\right).$$

(vi) Ist $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ gleichmäßig beschränkt und punktweise konvergent gegen ϕ, dann ist $\phi \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ und $\Phi_E(\phi_n)$ konvergiert gegen $\Phi_E(\phi)$ bezüglich der starken Operatortopologie.

(vii) Konvergiert $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ gleichmäßig gegen ein ϕ, dann ist $\phi \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ und $\Phi_E(\phi_n)$ konvergiert gegen $\Phi_E(\phi)$ bezüglich der Operatornorm.

(viii) Für $\phi \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ gilt

$$\begin{aligned} \ker\, \Phi_E(\phi) &= E(\{t : \phi(t) = 0\})\mathcal{H}, \\ \mathrm{cl}\,(\mathrm{ran}\, \Phi_E(\phi)) &= E(\{t : \phi(t) \neq 0\})\mathcal{H}. \end{aligned}$$

Bis hierher ist nur festgelegt, wie man beschränkte, messbare Funktionen bezüglich eines Spektralmaßes E integriert. Ist $\phi \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ unbeschränkt, so ist obige Konstruktion von $\int \phi \, dE$ nicht anwendbar, da die Sesquilinearform i.A. nicht beschränkt ist.
Aber jedes $\phi \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ ist zerlegbar in $\phi = \phi_1 + \phi_2$, wobei $\phi_1 \in \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{A})$ und $|\phi_2| \geq \delta$ für ein $\delta > 0$. Die Wahl

$$\begin{aligned} \phi_2 &:= \mathbb{1}_{\{t:|\phi(t)|\geq 1\}}\phi + \mathbb{1}_{\{t:|\phi(t)|<1\}}, \\ \phi_1 &:= \mathbb{1}_{\{t:|\phi(t)|<1\}}(\phi - 1) \end{aligned}$$

erfüllt etwa diese Forderungen.
Wegen Fakta 2.4.5 (viii) erfüllt $\left[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE\right] \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$,

$$\ker \left[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE\right] = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{cl}\left(\mathrm{ran}\, \left[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE\right]\right) = \mathcal{H}.$$

Deshalb ist die Relation $\left[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE\right]^{-1}$ ein abgeschlossener und dicht definierter Operator.

Ist E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$ und $\phi \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ zerlegt in $\phi = \phi_1 + \phi_2$ wie oben, dann setzen wir

$$\int \phi \, dE := \int \phi_1 \, dE + \left[\int \frac{1}{\phi_2} \, dE\right]^{-1}. \tag{2.16}$$

Fakta 2.4.6. Es sei E ein Spektralmaß für $\langle \Omega, \mathcal{A}, \mathcal{H} \rangle$ und $\phi, \psi \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$.

(i) Es gilt $\mathrm{dom}\, [\int \phi \, dE] = \left\{g \in \mathcal{H} : \int |\phi|^2 \, dE_{g,g} < +\infty\right\}$ und für $g \in \mathrm{dom}\, [\int \phi \, dE]$ gilt

$$\left\| \left[\int \phi \, dE\right] g \right\|^2 = \int |\phi|^2 \, dE_{g,g}.$$

(ii) Ist $g \in \operatorname{dom}\ [\int \phi\ dE]$ und $h \in \mathcal{H}$, dann ist ϕ bezüglich $E_{g,h}$ integrierbar, wobei

$$\left(\left[\int \phi\ dE\right] g, h\right) = \int \phi\ dE_{g,h}.$$

(iii) Die Definition von $[\int \phi\ dE]$ (siehe (2.16)) ist unabhängig von der Zerlegung $\phi = \phi_1 + \phi_2$.

(iv) Ist $\lambda \neq 0$, dann gilt $\lambda [\int \phi\ dE] = \int \lambda\phi\ dE$.

(v) Es gilt $[\int \phi\ dE]^* = \int \bar{\phi}\ dE$.

(vi) Es gilt $\operatorname{cl}([\int \phi\ dE] + [\int \psi\ dE]) = \int \phi + \psi\ dE$.

(vii) Es gilt $\operatorname{cl}([\int \phi\ dE] [\int \psi\ dE]) = \int \phi\psi\ dE$.

(viii) Ist $\phi(t) \neq 0$ für $t \in \Omega$, dann gilt $[\int \phi\ dE]^{-1} = \int \frac{1}{\phi}\ dE$.

(ix) Es gilt $\sigma([\int \phi\ dE]) \subseteq \operatorname{cl}(\phi(\Omega))$ als Teilmengen von $\mathbb{C}_\infty$.

(x) Ist $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, sodass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \Omega$ und $\phi\restriction_{\Delta_n}$ für alle n beschränkt ist, dann konvergiert $\{[\int \phi\mathbb{1}_{\Delta_n}\ dE(t)]\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ stark gegen $[\int \phi\ dE]$, d.h. für jedes $g \in \operatorname{dom}\ [\int \phi\ dE]$ gilt

$$\left[\int \phi\mathbb{1}_{\Delta_n}\ dE(t)\right] g \to \left[\int \phi\ dE\right] g \quad \text{für } n \to \infty.$$

Satz 2.4.7 (Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $A \leq \mathcal{H}^2$ ein selbstadjungierter Operator, d.h. A ist selbstadjungiert als Relation und $\operatorname{mul} A = \{0\}$. Dann gibt es ein eindeutiges Spektralmaß E für $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{H}\rangle$, sodass*

$$A = \int_{\mathbb{R}} t\ dE(t). \tag{2.17}$$

Dabei lebt E nur auf $\sigma(A) \cap \mathbb{R}$, d.h.: $E(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$.

Wir sagen, E ist das *Spektralmaß des Operators A*.

Ist E ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{H}\rangle$, so gilt nach Fakta 2.4.6 (v), dass $\int t\ dE(t)$ selbstadjungiert ist. Gemeinsam dem Spektralsatz erhält man folgendes Resultat:

Korollar 2.4.8. *Die Abbildung*

$$E \mapsto \int t\ dE(t)$$

stellt einen bijektiven Zusammenhang zwischen der Menge aller Spektralmaße für $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{H}\rangle$ und der Menge aller selbstadjungierten Operatoren auf $\mathcal{H}$ her.

Man kann auch einer selbstadjungierten Relation auf sinnvolle Art und Weise ein Spektralmaß zuordnen. Die Konstruktion dafür beruht auf der Tatsache, dass jede selbstadjungierte Relation in einen selbstadjungierten Operator und einen trivialen Anteil zerfällt.

Lemma 2.4.9. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathfrak{H} \leq \mathcal{H}$ abgeschlossen* [5]*. Für eine lineare Relation $T \leq \mathfrak{H}^2$ seien $T^\dagger$ bzw. T^* die Adjungierte von T in $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathcal{H}$. Dann gilt*

$$T^\dagger = T^* \cap \mathfrak{H}^2. \tag{2.18}$$

[5] Man beachte, dass dann $\mathfrak{H}$ für sich einen Hilbertraum darstellt.

Insbesondere ist T genau dann symmetrisch (bzw. isometrisch) in $\mathfrak{H}$, wenn T symmetrisch (bzw. isometrisch) in $\mathcal{H}$ ist.

Beweis. Gleichung (2.18) folgt direkt aus der Definition der Adjungierten und der Tatsache, dass $\mathcal{H}$ und $\mathfrak{H}$ (bis auf Einschränkung) dasselbe Skalarprodukt tragen.
Die zweite Aussage folgt dann aus Gleichung (2.18) und der Vorrausetzung dass $T \leq \mathfrak{H}^2$ sowie der Tatsache, dass mit T auch T^{-1} eine Teilmenge von $\mathfrak{H}^2$ ist. □

Jede lineare Relation S induziert gemäß

$$\mathcal{H} = \underbrace{\mathrm{cl}\,(\mathrm{mul}\ S)}_{=:\mathcal{H}_\infty} \oplus \underbrace{(\mathrm{mul}\ S)^\perp}_{=:\mathcal{H}_{op}} \tag{2.19}$$

eine Zerlegung von $\mathcal{H}$. Ist $S \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch, so definieren wir die lineare Relation S_{op} durch

$$S_{op} := S \ominus S_\infty \tag{2.20}$$

und erhalten eine Zerlegung von $S = S_{op} \oplus S_\infty$.

Definition 2.4.10. Für eine symmetrisches $S \leq \mathcal{H}^2$ heißt die in (2.20) definierte Relation S_{op} *Operatoranteil* von S.

Diese Namensgebung wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 2.4.11. *Sei S eine symmetrische (selbstadjungierte) Relation auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei S_{op} der Operatoranteil von S und $\mathcal{H}_{op}$ definiert wie in* (2.19)*. Dann ist S_{op} ein abgeschlossener und symmetrischer (selbstadjungierter) Operator auf $\mathcal{H}_{op}$. Es gilt*

$$S_{op} = S \cap \mathcal{H}_{op}^2. \tag{2.21}$$

Ist S abgeschlossen, dann ist auch S_{op} abgeschlossen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $(S_\infty)^\perp = \mathcal{H} \times (\mathrm{mul}\ S)^\perp$:

$$\begin{aligned}(f;g) \in (S_\infty)^\perp &\Leftrightarrow \underbrace{((f;g),(0;k))}_{=(g,k)} = 0 \quad \forall k \in \mathrm{mul}\ S \\ &\Leftrightarrow g \in (\mathrm{mul}\ S)^\perp.\end{aligned}$$

Aus

$$S_{op} = S \ominus S_\infty \subseteq (S_\infty)^\perp = \mathcal{H} \times (\mathrm{mul}\ S)^\perp = \mathcal{H} \times \mathcal{H}_{op} \tag{2.22}$$

folgt mul $S_{op} \subseteq (\mathrm{mul}\ S)^\perp$; zusammen mit mul $S_{op} \subseteq$ mul S bedeutet das mul $S = \{0\}$, womit S ein Operator ist.
Man entnimmt (2.22), dass ran $S_{op} \subseteq \mathcal{H}_{op}$.
Es bezeichne $.^*$ bzw. $.^\dagger$ das Adjungiertebilden in $\mathcal{H}_{op}$ bzw. $\mathcal{H}$. Aus $S \subseteq S^\dagger$, erhalten wir unter Berücksichtigung von Fakta 2.1.14

$$\mathrm{dom}\ S_{op} \subseteq \mathrm{dom}\ S \subseteq \mathrm{cl}\,(\mathrm{dom}\ S) = (\mathrm{mul}\ S^\dagger)^\perp \subseteq (\mathrm{mul}\ S)^\perp = \mathcal{H}_{op}.$$

Zusammen mit (2.22) ist also S_{op} eine lineare Relation auf $\mathcal{H}_{op}$. Wegen

$$S_{op} \subseteq S \subseteq S^\dagger \subseteq S_{op}^\dagger$$

ist S_{op} in $\mathcal{H}$ symmetrisch. Nach Lemma 2.4.9 ist S_{op} auch in $\mathcal{H}_{op}$ symmetrisch, sprich $S_{op} \subseteq S_{op}^*$.
Wir zeigen nun Gleichung (2.21). Die Inklusion $\subseteq$ folgt aus den bisherigen Überlegungen. Die

Inklusionskette

$$S_{op} = S \ominus S_\infty = S \cap (\mathcal{H} \times \mathcal{H}_{op}) \supseteq S \cap \mathcal{H}_{op}^2$$

zeigt auch die umgekehrte Inklusion.
Mit S ist auch $S_{op} = S \cap S_\infty^\perp$ abgeschlossen.
Es bleibt noch zu zeigen, dass für selbstadjungiertes $S = S^\dagger$ die Inklusion

$$S_{op}^* \subseteq S_{op}$$

erfüllt ist. Dazu sei $(f;g) \in S_{op}^* = S_{op}^\dagger \cap \mathcal{H}_{op}^2$. Für $(x;y) \in S$ bilden wir die Zerlegung

$$(x;y) = \underbrace{(x;y_1)}_{\in S_{op}} + \underbrace{(0;y_2)}_{\in S_\infty}.$$

Wegen $(f;g) \in S_{op}^\dagger$ und $(x;y_1) \in S_{op}$, folgt

$$(f,y) = (f,y_1) + \underbrace{(f,y_2)}_{=0} = (g,x).$$

Da $(x;y) \in S$ beliebig war, schließen wir $(f;g) \in S^\dagger = S$. Wir erhalten $(f;g) \in S \cap \mathcal{H}_{op}^2 = S_{op}$ und somit $S_{op}^* \subseteq S_{op}$.

□

Das Resultat lässt sich in folgendem Sinn umkehren:

Lemma 2.4.12. *Für $i = 1,2$ sei S_i eine symmetrische Relation auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}_i$ und es bezeichne $S_i^\dagger$ die Adjungierte von S_i in $\mathcal{H}_i$. Die Relation $S := S_1 \oplus S_2$ auf [6] $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ist symmetrisch und es gilt*

$$S^* = S_1^\dagger \oplus S_2^\dagger. \tag{2.23}$$

Insbesondere ist S genau dann selbstadjungiert, wenn S_1 und S_2 selbstadjungiert sind.

Beweis. Offenbar reicht es, Gleichung (2.23) zu zeigen. Für $i = 1,2$ bezeichne P_i die orthogonale Projektion in $\mathcal{H}$ mit ran $P_i = \mathcal{H}_i$.

Sei $(f;g) \in S_i^\dagger$. Für jedes $(\xi;\eta) \in S$ gilt, wegen $(P_i\xi; P_i\eta) \in S_i$

$$(g,\xi) = (P_i g, \xi) = (g, P_i\xi) = (f, P_i\eta) = (P_i f, \eta) = (f,\eta),$$

d.h. $S_i^\dagger \subseteq S^*$ für $i = 1,2$. Da S^* ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ ist, folgt die Inklusion $\supseteq$ in (2.23).

Ist umgekehrt $(f;g) \in S^*$, dann gilt für jedes $(\xi,\eta) \in S_i \subseteq S$, dass

$$(P_i g, \xi) = (g, P_i\xi) = (g,\xi) = (f,\eta) = (f, P_i\eta) = (P_i f, \eta);$$

d.h. $(P_i f; P_i g) \in S_i^\dagger$. Damit gilt auch die Inklusion $\subseteq$ in (2.23). □

Eine orthogonale Projektion $P \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ist durch Festlegung von ran P eindeutig definiert. Also ist die Abbildung

$$P \mapsto \text{ran } P$$

eine Bijektion von der Menge aller Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{H}$ in die Menge aller abgeschlossenen Teilräume von $\mathcal{H}$. Ist nun $\mathfrak{H} \leq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$, so ist jeder Orthogonalprojektion $P \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ mit ran $P \subseteq \mathfrak{H}$ auf natürliche Weise eine Orthogonalprojektion im

[6] $\mathcal{H}$ ist dabei mit Summenskalarprodukt versehen.

Hilbertraum $\mathfrak{H}$ zugeordnet; und zwar genau die orthogonale Projektion in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit Bildbereich ran P.
Umgekehrt assoziert man mit einer Orthogonalprojektion $Q \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ jene orthogonale Projektion $P \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ mit ran $P =$ ran Q.
Wir werden in weiterer Folge solch ein $P \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ gemäß obiger Überlegung als Element in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ auffassen (und umgekehrt) ohne explizit darauf hinzuweisen.

Wir versehen die Menge $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit der in Bemerkung 2.3.2 konstruierten Topologie (Alexandroff-Kompaktifizierung). Für die Borelmengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty)$ auf $\mathbb{R}_\infty$ gilt dann

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{C}_\infty) : \; B \subseteq \mathbb{R}_\infty\},$$

d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty)$ stimmt mit der Spur-σ-Algebra von $\mathcal{B}(\mathbb{C}_\infty)$ in $\mathbb{R}_\infty$ überein.

Proposition 2.4.13. *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.*

(i) Ist E ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty), \mathcal{H}\rangle$, dann ist $F := E\restriction_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{H}\rangle$ mit $\mathfrak{H} :=$ ran $E(\mathbb{R}) = ($ran $E(\{\infty\}))^\perp$.

(ii) Ist umgekehrt $\mathfrak{H}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$, $P_{\mathfrak{H}^\perp}$ die orthogonale Projektion auf $\mathfrak{H}^\perp$ und F ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathfrak{H}\rangle$, dann definiert

$$E(\Delta) := \begin{cases} F(\Delta) & \text{falls } \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \\ F(\Delta \cap \mathbb{R}) + P_{\mathfrak{H}^\perp} & \text{falls } \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty) \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty), \mathcal{H}\rangle$.

Beweis. Wir zeigen nur Aussage (i); der Beweis für (ii) kann analog geführt werden.
Für $f \in \mathcal{H}$ ist

$$f = E(\mathbb{R})f + \underbrace{[I - E(\mathbb{R})]}_{=E(\{\infty\})} f,$$

was $\mathcal{H} =$ ran $E(\mathbb{R}) +$ ran $E(\{\infty\})$ impliziert. Für $f \in$ ran $E(\mathbb{R}), g \in$ ran $E(\{\infty\})$ gilt

$$(f, g) = (E(\mathbb{R})f, E(\{\infty\})g) = (E(\{\infty\})E(\mathbb{R})f, g) = (E(\{\infty\} \cap \mathbb{R})f, g) = (E(\emptyset)f, g) = 0,$$

und wir schließen $\mathcal{H} =$ ran $E(\mathbb{R}) \oplus$ ran $E(\{\infty\})$ und ran $E(\mathbb{R}) = ($ran $E(\{\infty\}))^\perp$.
Nach Definition ist $F(\Delta)$ für jedes $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine orthogonale Projektion auf $\mathfrak{H}$. Aus

$$\text{ran } F(\emptyset) = \text{ran } E(\emptyset) = \{0\}$$
$$\text{ran } F(\mathbb{R}) = \text{ran } E(\mathbb{R}) = \mathfrak{H}$$

schließen wir $F(\emptyset) = 0_{\mathfrak{H}}$ und $F(\mathbb{R}) = I_{\mathfrak{H}}$. Für $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $f \in \mathfrak{H}$ gilt

$$F(\Delta_1 \cap \Delta_2)f = E(\Delta_1 \cap \Delta_2)f = E(\Delta_1)E(\Delta_2)f = \text{ran } E(\Delta_1) \cap \text{ran } E(\Delta_2) = F(\Delta_1)F(\Delta_2)f.$$

Ist $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine Folge paarweiser disjunkter Borelmengen und $f \in \mathfrak{H}$, dann gilt

$$F(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n)f = E(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n)f = \sum_{n\in\mathbb{N}} E(\Delta_n)f = \sum_{n\in\mathbb{N}} F(\Delta_n)f.$$

□

Für eine selbstadjungierte Relation A auf $\mathcal{H}$ sei die Zerlegung

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{op} \oplus \mathcal{H}_\infty$$

definiert wie oben. Sei E konstruiert wie in Propositon 2.4.13 (ii), wobei $\mathfrak{H} = \mathcal{H}_{op}$ und F das Spektralmaß von A_{op} ist. Wir nennen die Abbildung E *Spektralmaß der Relation* A.

Bemerkung 2.4.14. Ist die Relation $A \leq \mathcal{H}^2$ ein selbstadjungierter Operator, dann ist $E(\{\infty\}) = 0$. Im Hinblick auf die Frage, welche Definition des Spektralmaßes man verwendet, ist es also unerheblich ob man A als Operator oder als Relation auffasst.

Mithilfe von Satz 2.4.11, Lemma 2.4.12, Proposition 2.4.13 und der Tatsache, dass das Bild einer orthogonalen Projektion stets abgeschlossen ist, erhält man das folgende Analogon zu Korollar 2.4.8:

Korollar 2.4.15. *Die Abbildung*

$$E \mapsto \left[\int_{\mathbb{R}} t \; dE(t)\right] \oplus [\{0\} \times ran \; E(\{\infty\})] \tag{2.24}$$

stellt einen bijektiven Zusammenhang zwischen der Menge aller Spektralmaße für $\langle \mathbb{R}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty), \mathcal{H}\rangle$ *und der Menge aller selbstadjungierten Relationen auf* $\mathcal{H}$ *her.*

Ist E ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty), \mathcal{H}\rangle$ und A eine selbstadjungierte Relation auf $\mathcal{H}$, dann sagen wir, E *ist Spektralmaß von* A, falls A mit der rechten Seite in (2.24) übereinstimmt.
Nach Korollar 2.4.15 besitzt jede selbstadjungierte Relation ein eindeutiges Spektralmaß.

Satz 2.4.16. *Sei* A *eine selbstadjungierte Relation auf* $\mathcal{H}$ *mit zugehörigem Spektralmaß* E*, dann liegt genau einer der folgenden Fälle vor:*

(1) $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ *und* E *lebt auf einer beschränkten Teilmenge von* $\mathbb{R}$*, d.h.*

$$\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ beschränkt, sodass } E(\mathbb{R} \setminus B) = 0 \quad \text{und} \quad E(\{\infty\}) = 0. \tag{2.25}$$

(2) $A : dom\, A \to \mathcal{H}$ *ist unbeschränkt und* E *lebt auf einer unbeschränkten Teilmenge von* $\mathbb{R}$*, d.h.*

$$\forall \text{ beschränkte } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ gilt } E(\mathbb{R} \setminus B) \neq 0 \quad \text{und} \quad E(\{\infty\}) = 0. \tag{2.26}$$

(3) A *ist kein Operator und* $E(\{\infty\}) \neq 0$.

Beweis. Jedes Spektralmaß E für $\langle \mathbb{R}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty), \mathcal{H}\rangle$ erfüllt entweder $E(\{\infty\}) \neq 0$ oder (2.25) oder (2.26); offenbar schließen die drei Fälle einander jeweils aus. Eine selbstadjungierte Relation A ist entweder ein beschränkter Operator oder ein unbeschränkter Operator oder kein Operator. Auch diese drei Möglichkeiten schließen einander aus. Es reicht also die folgenden beiden Äquivalenzen zu zeigen:

(i) $E(\{\infty\}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad A$ ist kein Operator.

(ii) (2.25) $\quad \Leftrightarrow \quad A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Aussage (i) folgt aus der Definition des Spektralmaßes für selbstadjungierte Relationen; vgl. Abbildung (2.24).

Ist A ein Operator, dann gilt $E(\mathbb{R} \setminus \sigma(A)) = 0$ nach Satz 2.4.7. Im Falle $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ist das Spektrum $\sigma(A)$ kompakt und damit gilt (2.25).
Setzt man umgekehrt (2.25) voraus, dann gilt für $g \in \mathcal{H}$

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 \; dE_{g,g}(t) = \int_B t^2 \; dE_{g,g}(t) \leq \sup_{t \in B} t^2 \int_{\mathbb{R}} \; dE_{g,g}(t) = \sup_{t \in B} t^2 \, \|g\|^2 < +\infty.$$

Nach Fakta 2.4.6 (i) ist $A = \int t \, dE$ auf ganz $\mathcal{H}$ definiert. Als selbstadjungierte Relation ist A abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist A damit beschränkt. $\square$

Satz 2.4.17. *Sei A eine selbstadjungierte Relation auf $\mathcal{H}$ mit Operatoranteil A_{op} und Spektralmaß E. Sei die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_{op} := (mul\ A)^{\perp}$ mit P bezeichnet, dann gilt für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*

$$[A - z]^{-1} = [A_{op} - z]^{-1} P = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dE(t). \tag{2.27}$$

Ist umgekehrt F ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty), \mathcal{H} \rangle$, sodass für ein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Gleichung

$$[A - z]^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dF(t). \tag{2.28}$$

gilt, dann ist F das Spektralmaß von A.

Beweis. Da A und A_{op} selbstadjungiert sind, stellen $[A - z]^{-1}$ und $[A_{op} - z]^{-1} P$ auf ganz $\mathcal{H}$ definierte Operatoren dar.
Ist $(f; g) \in [A_{op} - z]^{-1} P$, dann folgt

$$(Pf; g) \in [A_{op} - z]^{-1} \subseteq [A - z]^{-1}.$$

Insbesondere stimmen die Einschränkungen der beiden Operatoren auf $\mathcal{H}_{op}$ überein.
Ist $f \in \mathcal{H}_{op}^{\perp} = \operatorname{mul} A$, dann zeigt

$$(0; f) \in A \quad \Rightarrow \quad (0; f) \in [A - z] \quad \Rightarrow \quad (f; 0) \in [A - z]^{-1},$$

dass $[A - z]^{-1} \restriction_{\operatorname{mul} A} \equiv 0$. Damit ist die erste Gleichheit in (2.27) gezeigt.

Bezeichne F das Spektralmaß von A_{op}. Dann ist $F(\Delta) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{op})$ für alle $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Für $\xi, \eta \in \mathcal{H}_{op}$ und $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt $F_{\xi,\eta}(\Delta) = E_{\xi,\eta}(\Delta)$. Sei nun $f \in \mathcal{H}$ und $g \in \mathcal{H}_{op}$, dann erhalten wir mithilfe von Fakta 2.4.6 (viii) mit $\phi = \frac{1}{.-z}$

$$\begin{aligned}
\big([A - z]^{-1} f, g\big) = \big([A_{op} - z]^{-1} P f, g\big) &= \left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dF(t) \right] Pf, g \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dF_{Pf,g}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dE_{Pf,g}(t) \\
&= \left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dE \right] E(\mathbb{R}) f, g \right) = \left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dE \right] f, g \right).
\end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{ran} [A - z]^{-1} = \operatorname{dom} A \subseteq \mathcal{H}_{op}$ und wegen $\operatorname{ran} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} \, dE(t) \right] \subseteq \operatorname{ran} E(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_{op}$ gilt

$$[A - z]^{-1} = \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dE(t) \right].$$

Ist F ein Spektralmaß, welches (2.28) für ein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ leistet, dann bezeichne A' jene selbstadjungierte Relation, die F als Spektralmaß hat. Wegen der Voraussetzung und wegen der ersten Aussage des Satzes gilt

$$[A - z]^{-1} = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} \, dF(t) = [A' - z]^{-1}.$$

Für festes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist
$$A \mapsto [A - z]^{-1}$$
als Abbildung von der Menge aller selbstadjungierten Relationen auf $\mathcal{H}$ nach $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ injektiv und wir schließen $A = A'$. F ist also das Spektralmaß von A. $\square$

3 Erweiterungstheorie

Im folgenden Kapitel beschäftigen wir uns mit der Suche nach Erweiterungen von symmetrischen Relationen. Dabei sind vor allem die selbstadjungierten Erweiterungen interessant. Insbesondere werden die beiden zentralen Fragen, die sich auftun, nämlich

1. Wann hat eine symmetrische Relation selbstadjungierte Erweiterungen?

2. Wie kann man alle selbstadjungierten Erweiterungen beschreiben?

beantworten. Vermöge der Cayley-Transformation ist die Problemstellung äquivalent zu der Suche nach unitären Erweiterungen von isometrischen Relationen. Diese Tatsache wird an einigen Stellen hilfreich sein.

Definition 3.0.18. Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und sind $S, T \leq \mathcal{H}^2$ zwei lineare Relationen, dann heißt T eine *Erweiterung* von S, falls $S \subseteq T$. Ist S eine symmetrische Relation, dann schreiben wir $\mathfrak{E}(S)$ für die Menge aller selbstadjungierten Erweiterungen von S.

Ist S eine symmetrische Relation auf $\mathcal{H}$ und A eine selbstadjungierte Erweiterung von S, dann gilt

$$S \subseteq \operatorname{cl}(S) \subseteq A,$$

da A abgeschlossen ist. Damit sind die selbstadjungierten Erweiterungen von S genau die gleichen, wie die von $\operatorname{cl}(S)$. Also stellt die Voraussetzung, dass S stets abgeschlossen ist, keine wesentliche Einschränkung dar.

3.1 Geometrische Überlegungen

Es stellt sich heraus, dass die Kenntnis des Defektindizes ausreicht, um Frage 1 aus der Einleitung des Kapitels zu beantworten.

Satz 3.1.1. *Sei S eine abgeschlossene, symmetrische Relation auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Defektindizes (n_+, n_-). Dann gilt:*

(i) S ist genau dann selbstadjungiert, wenn $n_+ = n_- = 0$.

(ii) S hat genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung, wenn $n_+ = n_-$.

Beweis. Sei $V = \mathcal{C}(S)$ die Cayley-Transformierte von S, und bezeichne (n_o, n_i) die Defektindizes von V. Da $\mathcal{C}$ ein Homöomorphismus auf $\mathcal{H}^2$ ist, ist mit S auch V abgeschlossen. Aus der Symmetrie von S folgt, dass V isometrisch ist.
Mit Satz 2.1.4 schließt man, dass der Domain einer abgeschlossenen, isometrischen Relation immer abgeschlossen ist. Weil mit V auch V^{-1} abgeschlossen und isometrisch ist, kann dasselbe Argument auf V^{-1} angewandt werden und wir erhalten, dass

$$\operatorname{ran} V = \operatorname{dom} V^{-1}$$

ebenfalls abgeschlossen ist.

ad (i) Ist nun $n_+ = n_- = 0$ so schließt man mithilfe von Fakta 2.3.7, dass dom V ein dichter Teilraum von $\mathcal{H}$ ist. Weil dom V abgeschlossen ist, ist V eine auf ganz $\mathcal{H}$ definierte Isometrie. Wegen ran $V = \mathcal{H}$ ist V damit unitär; vgl. Satz 2.1.17.
Ist umgekehrt S selbstadjungiert, dann ist V unitär und damit auf ganz $\mathcal{H}$ definiert, was $n_+ = 0$ impliziert. Mit V ist auch V^{-1} unitär und gleiche Argumentation, liefert

$$\text{ran } V = \text{dom } V^{-1} = \mathcal{H}$$

und damit $n_- = 0$.

ad (ii) Sei $A \supseteq S$ eine selbstadjungierte Erweiterung von S und bezeichne $U := \mathcal{C}(A)$ die Cayley-Transformierte von S. Die Abbildung $W := U\restriction_{(\text{dom } V)^\perp}$ ist unitär von $(\text{dom } V)^\perp$ auf $(\text{ran } V)^\perp$. Damit stimmen die Hilbertraumdimensionen der beiden Teilräume überein, und wir erhalten

$$n_+ = n_o = \dim \left\{ (\text{dom } V)^\perp \right\} = \dim \left\{ (\text{ran } V)^\perp \right\} = n_i = n_-$$

Geht man umgekehrt von $n_+ = n_-$ aus, so existiert eine unitäre Abbildung

$$W : (\text{dom } V)^\perp \to (\text{ran } V)^\perp,$$

da die Dimensionen der beiden Teilräume übereinstimmen. Wir definieren die Abbildung U durch

$$U : \begin{cases} \mathcal{H} & \to \quad \mathcal{H}, \\ f & \mapsto \quad VPf + W[I-P]f, \end{cases}$$

wobei P die orthogonale Projektion auf dom V bezeichnet. Offensichtlich ist U eine Erweiterung von V. Aus ran $U \supseteq$ ran V, ran W und, da ran $W = (\text{ran } V)^\perp$, schließen wir, dass U surjektiv ist. Da für $f, g \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(Uf, Ug) &= (VPf + W[I-P]f, VPg + W[I-P]g) \\ &= (VPf, VPg) + (W[I-P]f, W[I-P]g) \\ &= (Pf, Pg) + ([I-P]f, [I-P]g) = (Pf, g) + ([I-P]f, g) = (f, g)\end{aligned}$$

gilt, ist U unitär und infolge $\mathcal{F}(U)$ eine selbstadjungierte Erweiterung von S.

□

Lemma 3.1.2. *Es seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $M, N \leq \mathcal{H}$ zwei abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}$ mit $M \subseteq N$. Dann gilt*

$$\dim N^\perp + \dim(N \ominus M) = \dim M^\perp.$$

Beweis. Wir zeigen, dass die Zerlegung

$$M^\perp = N^\perp \oplus (N \ominus M)$$

gültig ist. Die Inklusion $\supseteq$ erhält man aus

$$N^\perp \subseteq M^\perp, \quad (N \ominus M) = N \cap M^\perp \subseteq M^\perp.$$

Ist $f \in M^\perp \leq \mathcal{H}$, so zerlegen wir

$$f = f_N + f_{N^\perp} \text{ mit } f_N \in N \text{ und } f_{N^\perp} \in N^\perp.$$

Wegen $f_N \in N \cap M^\perp = N \ominus M$, gilt auch die umgekehrte Inklusion. Die Aussage des Lemmas folgt direkt aus der Zerlegung. $\square$

Proposition 3.1.3. *Sei S eine abgeschlossene, symmetrische Relation auf $\mathcal{H}$ mit Defektindizes (n_+, n_-), wobei $n_+ = n_- < +\infty$. Ist $S' \supseteq S$ eine abgeschlossene, symmetrische Erweiterung von S mit Defektindizes (n'_+, n'_-), dann gilt*

(i) $n'_+ = n'_-$ und

(ii) S' ist genau dann selbstadjungiert, wenn $\text{codim}_{S'} S = n_+ = n_-$.

Beweis. Wir definieren die Isometrien $V := \mathcal{C}(S)$ und $V' := \mathcal{C}(S')$. Dann sind mit $n := n_- = n_+$ die Defektindizes von V durch (n, n) gegeben. Die Defektindizes von V' sind genau (n'_+, n'_-). Wir definieren die Abbildung $W := V'\restriction_{\text{dom } V' \ominus \text{dom } V}$ und behaupten, dass

$$W : \text{dom } V' \ominus \text{dom } V \to \text{ran } V' \ominus \text{ran } V$$

unitär ist. Dazu reicht es zu zeigen, dass

$$\text{ran } W = \text{ran } V' \ominus \text{ran } V. \tag{3.1}$$

Klarerweise gilt ran $W \subseteq$ ran V'. Ist $g \in$ ran W, dann gibt es ein $f \in (\text{dom } V' \ominus \text{dom } V)$, sodass $g = V'f$. Für jedes $h \in$ dom W gilt

$$0 = (f, h) = (V'f, V'h) = (g, Vh),$$

und man schließt, dass $g \in (\text{ran } V)^\perp$.
Ist umgekehrt $g \in (\text{ran } V' \ominus \text{ran } V)$, dann gibt es ein $f \in$ dom V, sodass $V'f = g$. Es gilt für jedes $h \in$ dom V

$$(f, h) = (V'f, V'h) = (g, Vh) = 0,$$

da $g \in (\text{ran } V)^\perp$. Also ist $f \in (\text{dom } V' \ominus \text{dom } V)$ und damit $g \in$ ran W. Aus (3.1) erhält man

$$\dim(\text{dom } V' \ominus \text{dom } V) = \dim(\text{ran } V' \ominus \text{ran } V).$$

Zweimalige Verwendung des vorangehenden Lemmas (mit $M =$ dom V und $N =$ dom V' bzw. mit $M =$ ran V und $N =$ ran V') liefert

$$\begin{aligned} n'_+ &= \dim\left\{(\text{dom } V')^\perp\right\} = \dim\left\{(\text{dom } V)^\perp\right\} - \dim\{\text{dom } V' \ominus \text{dom } V\} \\ &= \dim\left\{(\text{ran } V)^\perp\right\} - \dim\{\text{ran } V' \ominus \text{ran } V\} = \dim\left\{(\text{ran } V')^\perp\right\} = n'_-. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Hier geht die Tatsache, dass sämtliche Dimensionen in der obigen Gleichung endlich sind, entscheidend ein.

Für den Beweis von Aussage (ii) betrachten wir die Abbildung

$$\Theta : \begin{cases} \text{dom } V' \ominus \text{dom } V & \to \quad V' \ominus V, \\ f & \mapsto \quad (f; V'f), \end{cases}$$

wobei noch zu prüfen ist, ob Θ tatsächlich nach $V' \ominus V$ abbildet: Ist $f \in (\text{dom } V' \ominus \text{dom } V)$, dann gilt für jedes $g \in$ dom V

$$((f; V'f), (g; Vg)) = (f, g) + (V'f, V'g) = 2(f, g) = 0,$$

da $f \in (\text{dom } V)^\perp$, d.h. $(f; V'f) \in V' \cap V^\perp = V' \ominus V$.
Um die Surjektivität von Θ zu zeigen, argumentiert man analog: Ist $(f; V'f) \in V' \ominus V$, dann

gilt für jedes $g \in \mathrm{dom}\ V$

$$(f,g) = \frac{1}{2}\left((f,g) + (V'f, V'g)\right) = \frac{1}{2}\left((f;V'f),(g;Vg)\right)) = 0,$$

d.h. $f \in \mathrm{dom}\ V' \ominus \mathrm{dom}\ V$. Da Θ bijektiv ist, erhalten wir

$$\mathrm{codim}_{V'}V = \dim\{V' \ominus V\} = \dim\{\mathrm{dom}\ V' \ominus \mathrm{dom}\ V\}. \tag{3.3}$$

Wir wissen bereits, dass V' genau dann unitär ist, wenn $\mathrm{dom}\ V' = \mathcal{H}$ erfüllt ist. Nach (3.2) und (3.3) ist dies äquivalent dazu, dass

$$\mathrm{codim}_{V'}V = n.$$

Anwendung der Inversen Cayley-Transformation liefert schließlich die Aussage. □

Der letzte Satz besagt, dass die Defektindizes einer Relation S in gewissem Sinn als Abstandsbegriff aufgefasst werden kann. Salopp gesagt, je kleiner die Defektindizes, desto weniger Spielraum ist gegeben, eine selbstadjungierte Erweiterung zu konstruieren.

Korollar 3.1.4. *Sei S ein abgeschlossener, symmetrischer Operator auf $\mathcal{H}$ mit Defektindizes $(1,1)$. Dann ist genau eine der folgenden Aussagen zutreffend:*

(1.) S ist dicht definiert und $\mathfrak{E}(S)$ beinhaltet nur Operatoren.

(2.) $(dom\ S)^\perp$ ist eindimensional und die Relation $S' := S \hat{+} \left[\{0\} \times (dom\ S)^\perp\right]$ ist die einzige selbstadjungierte Erweiterung von S, die kein Operator ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass S' symmetrisch ist. Dazu sei $(f;g) \in S$ und $h \in (\mathrm{dom}\ S)^\perp$ fest. Wegen der Symmetrie von S gilt für jedes $(\xi,\eta) \in S$, $\chi \in (\mathrm{dom}\ S)^\perp$

$$(g+h,\xi) = (g,\xi) = (f,\eta) = (f,\eta+\chi),$$

was genau der Symmetrie von S' entspricht.
Wegen $S' \supseteq S$ hat S' nach Proposition 3.1.3 entweder Defektindizes $(0,0)$ oder $(1,1)$. Sei nun $A' \in \mathfrak{E}(S') \neq \emptyset$. Da wegen $\mathfrak{E}(S') \subseteq \mathfrak{E}(S)$

$$\dim(\mathrm{dom}\ S)^\perp = \mathrm{codim}_{S'}S \leq \mathrm{codim}_{A'}S = 1$$

gilt, ist $(\mathrm{dom}\ S)^\perp$ entweder eindimensional oder gleich $\{0\}$.

Für $A \in \mathfrak{E}(S)$ zeigt die Inklusion

$$\mathrm{mul}\ A = \mathrm{mul}\ A^* = (\mathrm{dom}\ A)^\perp \subseteq (\mathrm{dom}\ S)^\perp, \tag{3.4}$$

dass A im Fall $(\mathrm{dom}\ S)^\perp = \{0\}$ ein Operator sein muss.

Im Falle $\dim(\mathrm{dom}\ S)^\perp = 1$ ist S' nach Proposition 3.1.3 selbstadjungiert. Falls $A \in \mathfrak{E}(S)$ kein Operator ist, folgt aus (3.4) die Inklusion $A \supseteq S'$. Wegen

$$A = A^* \subseteq (S')^* = S' \subseteq A.$$

folgt $A = S'$. S' ist also die einzige selbstadjungierte Fortsetzung, die keinen Operator darsellt. □

Bemerkung 3.1.5. Ist $T \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch (bzw. isometrisch) mit $n_+ \neq n_i$ (bzw. $n_o \neq n_i$), so gibt es keine selbstadjungierten (bzw. unitären) Erweiterungen. Jedoch hat T in geeignet

gewählten Hilberträumen $\mathfrak{H} \supset \mathcal{H}$ sehr wohl selbstadjungierte (bzw. unitäre) Erweiterungen:
Es reicht wieder, sich den Fall einer isometrischen Relation T zu überlegen. Nach dem vorangehenden Satz, existieren genau dann unitäre Erweiterungen, wenn $(\text{dom } T)^\perp$ und $(\text{ran } T)^\perp$ dieselbe Dimension haben. Definiert man den Hilbertraum $\mathfrak{H}$ durch

$$\mathfrak{H} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}',$$

wobei $\mathcal{H}'$ irgendein Hilbertraum ist, dann erfüllt T, interpretiert als Relation auf $\mathfrak{H}$,

$$\begin{aligned}(\text{dom } T)^\perp &= \text{span}\,\{\mathcal{H}' \cup \mathcal{N}_\infty\} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{N}_\infty,\\ (\text{ran } T)^\perp &= \text{span}\,\{\mathcal{H}' \cup \mathcal{N}_0\} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{N}_0,\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{N}_.$ die Defekträume von T in $\mathcal{H}$ bezeichnet. Die Voraussetzung bedeutet $\dim \mathcal{N}_0 \neq \dim \mathcal{N}_\infty$. Damit $(\text{dom } T)^\perp$ und $(\text{ran } T)^\perp$ dieselbe Dimension haben, muss $\mathcal{H}'$ groß genug gewählt werden, d.h.:

- Falls $\max\{\dim \mathcal{N}_\infty, \dim \mathcal{N}_0\} \leq \aleph_0$ ist jede Wahl von $\mathcal{H}'$ mit $\dim \mathcal{H}' = \infty$ (d.h. abzählbar unendlich oder überabzählbar) zielführend.
- Für den Fall, dass $\max\{\dim \mathcal{N}_\infty, \dim \mathcal{N}_0\} > \aleph_0$, muss $\mathcal{H}'$ überabzählbare Dimension haben.

Korollar 3.1.6. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ abgeschlossen und symmetrisch und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $h \in$ ran $[S-\lambda] \cap$ ran $[S-\mu]$ mit $[S-\mu]^{-1}h \in$ ran $[S-\lambda]$, dass*

$$[S-\lambda]^{-1}h - [S-\mu]^{-1}h = (\lambda-\mu)[S-\lambda]^{-1}[S-\mu]^{-1}h. \tag{3.5}$$

Beweis. Die Relation S hat – gegebenfalls in einem vergrößerten Hilbertraum – eine selbstadjungierte Erweiterung A. Die Resolvente R von A erfüllt die Resolventengleichung; siehe Satz 2.1.12). Da die Operatoren in Gleichung (3.5) Einschränkungen von $R(\lambda)$ bzw. $R(\mu)$ sind, folgt die Behauptung. $\square$

Wir beschäftigen uns im weiteren Verlauf ausschließlich mit der Erweiterung von symmetrischen Relationen mit Defektindizes $(1,1)$.

Ist also S eine abgeschlossene und symmetrische Relation auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Defektindizes $(1,1)$, dann bezeichnen wir mit $V = \mathcal{C}(S)$ wiederum die Cayley-Transformierte von S. Die Relation V ist eine Isometrie, mit

$$\text{dom } V = \mathcal{N}_i^\perp \quad \text{und} \quad \text{ran } V = \mathcal{N}_{-i}^\perp.$$

Wir fixieren nun $u_\pm \in \mathcal{N}_{\pm i}$, sodass $\|u_\pm\| = 1$. Wegen $\dim \mathcal{N}_\pm = 1$, sind u_+ und u_- bis auf eine Konstante mit Betrag 1 eindeutig bestimmt, und es gilt span $\{u_\pm\} = \mathcal{N}_{\pm i}$.
Wir wollen uns nun überlegen, wie alle unitären Erweiterungen von V aussehen: Eine Relation U ist genau dann eine unitäre Erweiterung von V, wenn

(1) $U\restriction_{\text{dom } V} = V$ und

(2) $U\restriction_{(\text{dom } V)^\perp}$ eine Isometrie von $(\text{dom } V)^\perp$ nach $(\text{ran } V)^\perp$ ist;

vergleiche Beweis von Satz 3.1.3.
Weil die beiden Defekträume eindimensional sind, ist ein unitäre Erweiterung durch Wahl von $\theta \in [0, 2\pi)$ gemäß

$$u_+ \mapsto e^{i\theta} u_-$$

vollständig festgelegt. Die unitären Erweiterungen von V sind genau die Relationen der Bauart

$$U_\theta := \left\{(f + cu_+; Vf + ce^{i\theta}u_-) : \ f \in \operatorname{dom} V, c \in \mathbb{C}\right\} \text{ mit } \theta \in [0, 2\pi). \tag{3.6}$$

Damit sind aber auch alle selbstadjungierten Erweiterungen von S bekannt und ebenfalls durch $\theta \in [0, 2\pi)$ parametrisierbar:

$$\begin{aligned} A_\theta := \mathcal{F}(U_\theta) &= \left\{\left(Vf - f + c(e^{i\theta}u_- - u_+); -iVf - if - ic(e^{i\theta}u_- + u_+)\right) : f \in \operatorname{dom} V, c \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \left\{(Vf - f; -iVf - if) + c(e^{i\theta}u_- - u_+; -ie^{i\theta}u_- - iu_+) : f \in \operatorname{dom} V, c \in \mathbb{C}\right\} \\ &= \underbrace{\{(Vf - f; -iVf - if) : f \in \operatorname{dom} V\}}_{=\mathcal{F}(V)=S} \hat{+} \left\{c(e^{i\theta}u_- - u_+; -ie^{i\theta}u_- - iu_+) : c \in \mathbb{C}\right\} \end{aligned}$$

Wir wollen diese Erkenntnis in Form eines Satzes festhalten.

Satz 3.1.7. *Sei S eine abgeschlossene, symmetrische Relation auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Defektindizes $(1, 1)$. Es seien $u_\pm$ wie oben festgehalten. Dann ist $A \leq \mathcal{H}^2$ genau dann eine selbstadjungierte Erweiterung von S, wenn*

$$A = S \hat{+} Z_\theta \text{ für ein } \theta \in [0, 2\pi),$$

wobei $Z_\theta := \operatorname{span} \left\{\left(u_+ - e^{i\theta}u_-; iu_+ + ie^{i\theta}u_-\right)\right\}$.

Bemerkung 3.1.8. Will man sämtliche selbstadjungierte Erweiterungen einer symmetrischen Relation S mit Defekt (n, n) beschreiben, wobei $n > 1$, so kann dies durch eine analoge Konstruktion geschehen. Da in diesem Fall die Menge aller unitären Abbildungen von $\mathcal{N}_i$ nach $\mathcal{N}_{-i}$ durch eine n-dimensionale Größe parametrisiert wird, ist dieses Unterfangen jedoch notationell deutlich aufwendiger.

3.2 Einfache Relationen

Es bezeichne S wieder eine symmetrische Relation auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und A eine selbstadjungierte Erweiterung von S. Wir wollen später relativ einfache und leicht zu verstehende Modelle für solche Paare (S, A) bilden. Dabei spielt ein Minimalitätsbegriff eine entscheidende Rolle. Wir gehen dazu ähnlich vor wie in [BS07, Kapitel 1.6].

Definition 3.2.1. Eine abgeschlossene, symmetrische (bzw. isometrische) Relation $T \leq \mathcal{H}^2$ heißt *einfach*, wenn es keinen abgeschlossenen Teilraum $\{0\} \neq \mathcal{M} \leq \mathcal{H}$ gibt, sodass $T \cap \mathcal{M}^2$ selbstadjungiert (bzw. unitär) in $\mathcal{M}$ ist.

Bemerkung 3.2.2. Da für symmetrisches S und für $\mathcal{M} = \mathcal{H}_\infty := \operatorname{mul} S$ der Ausdruck $T \cap \mathcal{M}^2$ selbstadjungiert ist, ist eine einfache Relation stets ein Operator.

Lemma 3.2.3. *Sei $\mathcal{M} \leq \mathcal{H}$ abgeschlossen und T eine lineare Relation auf $\mathcal{H}$, dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\left(T \cap \mathcal{M}^2\right) &= \mathcal{C}(T) \cap \mathcal{M}^2 \\ \mathcal{F}\left(T \cap \mathcal{M}^2\right) &= \mathcal{F}(T) \cap \mathcal{M}^2. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Gleichung. Die Inklusion $\subseteq$ ist klar. Sei $(f; g) \in \mathcal{C}(S) \cap \mathcal{M}^2$, dann existiert $(\xi, \eta) \in T$, sodass

$$f = i\xi + \eta \text{ und } g = -i\xi + \eta.$$

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt, dass $\xi, \eta \in \mathcal{M}$ und damit $(\xi, \eta) \in T \cap \mathcal{M}^2$. $\square$

Proposition 3.2.4. *Sei S eine abgeschlossene, symmetrische Relation auf $\mathcal{H}$ und bezeichne $V = \mathcal{C}(S)$ die Cayley-Transformierte von S. Für einen abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{M} \leq \mathcal{H}$ ist $S \cap \mathcal{M}^2$ genau dann in $\mathcal{M}$ selbstadjungiert, wenn $V \cap \mathcal{M}^2$ unitär in $\mathcal{M}$ ist. Insbesondere ist S genau dann einfach, wenn V einfach ist.*

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener Teilraum, sodass $S \cap \mathcal{M}^2$ selbstadjungiert ist.
Wir erhalten mit Lemma 3.2.3, dass

$$V \cap \mathcal{M}^2 = \mathcal{C}(S) \cap \mathcal{M}^2 = \mathcal{C}(S \cap \mathcal{M}^2);$$

gemeinsam mit der Voraussetzung bedeutet das, dass die Relation $V \cap \mathcal{M}^2$ unitär in $\mathcal{M}$ ist.
Der Beweis für die andere Implikation verläuft ganz analog. $\square$

Proposition 3.2.5. *Es sei T abgeschlossen und symmetrisch (bzw. isometrisch) und $\mathcal{M}$ ein abgeschlossener Teilraum, sodass $T \cap \mathcal{M}^2$ selbstadjungiert (bzw. unitär) ist. Dann gilt*

$$T = \left[T \cap \mathcal{M}^2\right] \oplus \left[T \cap (\mathcal{M}^\perp)^2\right]. \tag{3.7}$$

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall, dass T isometrisch ist. Nach Voraussetzung ist $T\restriction_{\mathcal{M}}$ ein unitärer Operator auf $\mathcal{M}$. Da T isometrisch ist, gilt

$$\text{ran } (T\restriction_{\mathcal{M}^\perp}) \subseteq (\text{ran } T\restriction_{\mathcal{M}})^\perp = \mathcal{M}^\perp.$$

Wir schließen, dass der Operator $T\restriction_{\mathcal{M}^\perp}$ genau der Relation $T \cap (\mathcal{M}^\perp)^2$ entspricht.
Die Inklusion $\supseteq$ in (3.7) ist trivial. Wird $f \in \text{dom } T$ gemäß der Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ in $f = f_1 + f_2$ zerlegt, wobei $f_1 \in \mathcal{M}$ und $f_2 \in \mathcal{M}^\perp$, dann gilt $f_1 \in \mathcal{M} \subseteq \text{dom } T$ und $f_2 = f - f_1 \in \text{dom } T$. Die obigen Überlegungen zeigen

$$(f_1; Tf_1) \in T \cap \mathcal{M}^2 \quad \text{und} \quad (f_2; Tf_2) \in T \cap (\mathcal{M}^\perp)^2.$$

Wegen $Tf = Tf_1 + Tf_2$ gilt also auch die Inklusion $\subseteq$ in (3.7).

Für den Fall, dass T symmetrisch ist, betrachten wir die Isometrie $V = \mathcal{C}(T)$. Nach Proposition 3.2.4 ist $V \cap \mathcal{M}^2$ unitär auf $\mathcal{M}$ und nach dem ersten Teil des Beweises gilt die Zerlegung

$$V = \left[V \cap \mathcal{M}^2\right] \oplus \left[V \cap (\mathcal{M}^\perp)^2\right].$$

Anwendung der inversen Cayley-Transformation $\mathcal{F}$, gemeinsam mit Lemma 3.2.3, beschließt den Beweis. $\square$

Im Folgenden stellt sich heraus, dass jede abgeschlossene und symmetrische Relation als Summe einer selbstadjungierten Relation und einer einfachen, symmetrischen Relation darstellbar ist.

Für abgeschlossenes und symmetrisches S betrachten wir parallel dazu die Cayley-Transformierte $V = \mathcal{C}(S)$. Es bezeichne $\mathcal{N}_.(S)$ bzw. $\mathcal{N}_.(V)$ die Defekträume von S bzw. V. Laut Fakta 2.3.7 gilt dann für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\omega = \omega(z) = \frac{z-i}{z+i}$

$$\text{ran } [S - z] = \text{ran } [V - \omega].$$

Wegen $\omega(\bar{z}) = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = \ldots = \overline{\omega(z)}^{-1} = \overline{\omega(z)^{-1}}$ gilt

$$\mathcal{N}_z(S) = \mathcal{N}_{\omega(z)^{-1}}(V).$$

Nachdem die beiden Abbildungen $\omega : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$ und

$$\begin{cases} \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T} & \to & \mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}, \\ w & \mapsto & w^{-1}, \end{cases}$$

bijektiv sind, ist auch die Zusammensetzung $z \mapsto \omega(z)^{-1}$ von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{T}$ bijektiv.
Wir nehmen die Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ vor, wobei

$$\mathcal{M} := \bigcap_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \operatorname{ran}\,[S - z] = \bigcap_{\omega\in\mathbb{C}_\infty\setminus\mathbb{T}} \operatorname{ran}\,[V - \omega], \tag{3.8}$$

$$\mathcal{N} := \mathcal{M}^\perp = \operatorname{clspan}\left\{ \bigcup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \mathcal{N}_z(S) \right\} = \operatorname{clspan}\left\{ \bigcup_{\omega\in\mathbb{C}_\infty\setminus\mathbb{T}} \mathcal{N}_\omega(V) \right\}, \tag{3.9}$$

und definieren

$$\begin{aligned} S_\mathcal{M} &:= S \cap \mathcal{M}^2, \quad V_\mathcal{M} := V \cap \mathcal{M}^2, \\ S_\mathcal{N} &:= S \cap \mathcal{N}^2, \quad V_\mathcal{N} := V \cap \mathcal{N}^2. \end{aligned}$$

Satz 3.2.6. *Sei $S \le \mathcal{H}^2$ abgeschlossen und symmetrisch und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ definiert wie in* (3.8) *und* (3.9) *, dann gilt*

- *$S_\mathcal{M}$ ist selbstadjungiert in $\mathcal{M}$,*
- *$S_\mathcal{N}$ ist einfach in $\mathcal{N}$ und*
- *es gilt $S = S_\mathcal{M} \oplus S_\mathcal{N}$.*

Die Zerlegung $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ ist die einzige, die diese Bedingungen erfüllt.

Bemerkung 3.2.7. Die Aussage von Satz 3.2.6 lässt sich sinngemäß auch für isometrische Relationen formulieren.

Wir zeigen zunächst ein Lemma:

Lemma 3.2.8. *Ist $S \le \mathcal{H}^2$ eine abgeschlossene, symmetrische Relation und $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dann gilt $\left\|[S-\mu]^{-1}\right\| \le \frac{1}{|\Im\mu|}$, wobei hier die Operatornorm auf $\mathfrak{B}(\text{ran}\,[S-\mu], \mathcal{H})$ gemeint ist.*

Beweis. Gemäß Proposition 2.3.4 (i) ist $[S-\mu]^{-1} : \operatorname{ran}\,[S-\mu] \to \mathcal{H}$ ein beschränkter Operator. Für $f \in \operatorname{ran}\,[S-\mu]$ gilt

$$g = [S-\mu]^{-1} f \quad \Leftrightarrow \quad (g; f) \in [S-\mu] \quad \Leftrightarrow \quad (g; f + \mu g) \in S;$$

Verwendung der Symmetrie von S liefert

$$(f + \mu g, g) = (g, f + \mu g).$$

Umformen ergibt

$$(\Im\mu)\, \|g\|^2 = \operatorname{Im}(f, g),$$

und damit gilt

$$|\Im\mu|\, \|g\|^2 = |\operatorname{Im}(g, f)| \le \|f\|\, \|g\|\,.$$

Division durch $|\Im\mu|\,\|g\|$ beschließt den Beweis. □

Beweis von Satz 3.2.6. Nach Lemma 3.2.8 ist die Relation

$$S_\mu := \left\{ \left([S-\mu]^{-1}h; (I+\mu[S-\mu]^{-1})h \right) : \ h \in \mathcal{M} \right\}$$

wohldefiniert. Wir zeigen zunächst, dass

(i) $S_\mu \subseteq S$ und

(ii) $\operatorname{ran}\, [S-\mu]^{-1}\restriction_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$.

ad (i) Wegen

$$f = [S-\mu]^{-1}h \quad \Leftrightarrow \quad (f;h) \in [S-\mu] \quad \Leftrightarrow \quad (f; h+\mu f) \in S,$$

und da $\left(I+\mu[S-\mu]^{-1}\right)h = h+\mu f$, gilt die Inklusion.

ad (ii) Gemäß Fakta 2.1.14 (ii) gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\operatorname{ran}\, [S-z] = (\ker [S^* - \bar{z}])^\perp ,$$

wobei $k \in \ker [S^*-\bar{z}]$ genau dann, wenn $(k;\bar{z}k) \in S^*$.
Ist wieder $f := [S-\mu]^{-1}h$ mit $h \in \mathcal{M}$, d.h. $(f;h+\mu f) \in S$, dann gilt für $k \in \ker\, [S^*-\bar{z}]$

$$z(f,k) = (f,\bar{z}k) = (h+\mu f,k) = \mu(f,k),$$

da $h \in \mathcal{M} \subseteq \operatorname{ran}\, [S-z]$, und wir schließen auf $f \in (\ker\, [S^*-\bar{z}])^\perp = \operatorname{ran}\, [S-z]$ für $z \neq \mu$.
Infolge gilt $f \in \bigcap_{\substack{z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \\ z \neq \mu}} \operatorname{ran}\, [S-z]$.

Um $f \in \operatorname{ran}\, [S-\mu]$ zu zeigen, sei $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine gegen μ konvergente Folge mit $\mu_n \neq \mu$ für alle n. Wir wissen, dass $[S-\mu_n]^{-1}h \in \operatorname{ran}\, [S-\mu]$; es folgt unter Verwendung von Korollar 3.1.6 und Lemma 3.2.8, dass

$$\left\| [S-\mu]^{-1}h - [S-\mu_n]^{-1}h \right\| = |\mu-\mu_n| \left\| [S-\mu]^{-1}[S-\mu_n]^{-1}h \right\| \leq \frac{|\mu-\mu_n|}{|\Im\mu|\,|\Im\mu_n|} \|h\| .$$

Somit konvergiert die Folge $\left\{[S-\mu_n]^{-1}h\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{ran}\, [S-\mu]$ gegen f; aus der Abgeschlossenheit von $\operatorname{ran}\, [S-\mu]$ folgt $f \in \operatorname{ran}\, [S-\mu]$.

Damit ist $S_\mu \leq \mathcal{M}^2$ und symmetrisch; siehe Lemma 2.4.9. Wegen

$$\operatorname{ran}\, [S_\mu - \mu] = \mathcal{M} \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

ist S_μ sogar selbstadjungiert, und wir schließen aus

$$(S_\mu)^\dagger = S_\mu \subseteq S_{\mathcal{M}} \subseteq (S_{\mathcal{M}})^\dagger \subseteq (S_\mu)^\dagger,$$

wobei $.^\dagger$ das Adjungiertebilden in $\mathcal{M}$ bezeichnet, dass $S_\mu = S_{\mathcal{M}}$ und die Definition der Relation S_μ unabhängig von $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist. Nach Proposition 3.2.5 gilt die Zerlegung $S = S_{\mathcal{M}} \oplus S_{\mathcal{N}}$.

Ist $\mathfrak{H} \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum, sodass $S \cap \mathfrak{H}^2$ selbstadjungiert in $\mathfrak{H}$ ist, dann gilt für jedes $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dass $\mathfrak{H} = \operatorname{ran}\, [(S \cap \mathfrak{H}^2) - \mu]$. Wir erhalten

$$\mathfrak{H} = \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \operatorname{ran}\, [(S\cap\mathfrak{H}^2)-\mu] \subseteq \bigcap_{\mu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \operatorname{ran}\, [S-\mu] = \mathcal{M}.$$

Insbesondere ist $S_{\mathcal{N}}$ einfach. Außerdem folgt, dass $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}'$ für alle Teilräume $\mathcal{M}'$, für die $S \cap \mathcal{M}'^2$ selbstadjungiert ist.
Gilt nun $\mathcal{H} = \mathcal{M}' \oplus \mathcal{N}'$, sodass $S_{\mathcal{M}'} := S \cap \mathcal{M}'^2$ selbstadjungiert und $S_{\mathcal{N}'} := S \cap \mathcal{N}'^2$ einfach ist,

dann erhalten wir mit Proposition 3.2.5 angewandt auf $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}'$, dass

$$S_{\mathcal{M}} = S_{\mathcal{M}'} \oplus S_{\mathcal{M}\ominus\mathcal{M}'},$$

wobei $S_{\mathcal{M}\ominus\mathcal{M}'} := S \cap (\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}')^2$. Nach Lemma 2.4.12 ist $S_{\mathcal{M}\ominus\mathcal{M}'}$ selbstadjungiert. Wegen $\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}' \subseteq (\mathcal{M}')^\perp = \mathcal{N}'$ und der Einfachheit von $S_{\mathcal{N}'}$ folgt $\mathcal{M} \ominus \mathcal{M}' = \{0\}$ und damit die Eindeutigkeit der Zerlegung. □

Korollar 3.2.9. *Eine abgeschlossene und symmetrische Relation S auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Defekträumen $\mathcal{N}_.$ ist dann und nur dann einfach, wenn*

$$\operatorname{clspan}\left\{\bigcup_{z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} \mathcal{N}_z\right\} = \mathcal{H}.$$

Wir nennen $S_{\mathcal{M}}$ den *selbstadjungierten Anteil* und $S_{\mathcal{N}}$ den *einfachen Anteil* von S. Mit $\mathfrak{E}(S_{\mathcal{N}})$ ist die Menge aller selbstadjungierten Erweiterungen von $S_{\mathcal{N}}$ in $\mathcal{N}$ gemeint.
Zum Abschluss dieses Abschnitts zeigen wir, dass einander die selbstadjungierten Erweiterungen von S und die des einfachen Anteils $S_{\mathcal{N}}$ in natürlicher Weise entsprechen.

Satz 3.2.10. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ abgeschlossen und symmetrisch, seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ wie oben, dann gilt für jedes $A \in \mathfrak{E}(S)$, dass $\mathcal{A} \cap \mathcal{N}^2 \in \mathfrak{E}(S_{\mathcal{N}})$.*
Ist umgekehrt $A_{\mathcal{N}} \in \mathfrak{E}(S_{\mathcal{N}})$, dann gilt $A := A_{\mathcal{N}} \oplus S_{\mathcal{M}} \in \mathfrak{E}(S)$.

Beweis. Wir gehen wieder über zur Cayley-Transformierten $V = \mathcal{C}(S)$. Ist $A \in \mathfrak{E}(S)$, dann ist $U := \mathcal{C}(A)$ eine unitäre Erweiterung von V. Da $U\restriction_{\mathcal{M}} = \mathcal{C}(S_{\mathcal{M}})$ unitär in $\mathcal{M}$ ist, muss

$$U\restriction_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$$

unitär sein. Wegen

$$S_{\mathcal{N}} = \mathcal{F}(V \cap \mathcal{N}^2) \subseteq \mathcal{F}(U \cap \mathcal{N}^2) = A \cap \mathcal{N}^2$$

ist $A \cap \mathcal{N}^2 \in \mathfrak{E}(S_{\mathcal{N}})$.
Ist umgekehrt $A_{\mathcal{N}} \in \mathfrak{E}(S_{\mathcal{N}})$, dann stellt $\mathcal{C}(A_{\mathcal{N}}) \oplus \mathcal{C}(S_{\mathcal{M}})$ eine unitäre Relation dar. Anwendung der inversen Cayley-Transformation liefert die selbstadjungierte Relation

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{C}(A_{\mathcal{N}}) \oplus \mathcal{C}(S_{\mathcal{M}})\right) = A_{\mathcal{N}} \oplus S_{\mathcal{M}}.$$

□

3.3 Q-Funktion

Die Ausführungen in diesem Abschnitt orientieren sich an [LT77], [HLS95] und [GT00]. Dabei bezeichnet S stets eine abgeschlossene, symmetrische Relation mit gleichen Defektindizes auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Für festes $A \in \mathfrak{E}(S)$ definieren wir eine Familie von Operatoren in $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ durch

$$\Gamma^\mu_\lambda := I + (\mu - \lambda)[A - \mu]^{-1} \quad \text{für } \lambda, \mu \in \rho(A) \cap \mathbb{C}. \tag{3.10}$$

Lemma 3.3.1. *Es seien S, A und Γ^μ_λ wie oben und $\mathcal{N}_.$ die Defekträume von S, dann ist*

$$\Gamma^\mu_\lambda\restriction_{\mathcal{N}_\lambda} : \mathcal{N}_\lambda \to \mathcal{N}_\mu$$

für $\lambda, \mu \in \rho(A) \cap \mathbb{C}$ bijektiv und bistetig.

Beweis. Da A selbstadjungiert ist, folgt für $f, g \in \mathcal{H}$

$$(\Gamma_\lambda^\mu f, g) = \left((I + (\mu - \lambda)[A - \mu]^{-1})f, g\right) = (f, g) + \left(f, (\bar{\mu} - \bar{\lambda})[A - \bar{\mu}]^{-1} g\right) = (f, \Gamma_{\bar{\lambda}}^{\bar{\mu}} g),$$

d.h. $(\Gamma_\lambda^\mu)^* = \Gamma_{\bar{\lambda}}^{\bar{\mu}}$.
Nach der Resolventengleichung gilt

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^\lambda \Gamma_\lambda^\mu &= \left(I + (\lambda - \mu)[A - \lambda]^{-1}\right)\left(I + (\mu - \lambda)[A - \mu]^{-1}\right) \\ &= I + (\lambda - \mu)[A - \lambda]^{-1} - (\lambda - \mu)[A - \mu]^{-1} - (\lambda - \mu)^2 [A - \lambda]^{-1}[A - \mu]^{-1} = I;\end{aligned}$$

analog zeigt man $\Gamma_\lambda^\mu \Gamma_\mu^\lambda = I$. Also gilt $(\Gamma_\lambda^\mu)^{-1} = \Gamma_\mu^\lambda$. Sei nun $f \in \mathcal{N}_\lambda = (\operatorname{ran} S - \lambda)^\perp$. Für jedes $(\xi; \eta) \in S$ gilt $(\eta - \bar{\mu}\xi; \xi) \in [S - \bar{\mu}]^{-1}$ und, da $A \supseteq S$, folgt

$$[A - \bar{\mu}]^{-1}(\eta - \bar{\mu}\xi) = \xi.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}(\Gamma_\lambda^\mu f, \eta - \bar{\mu}\xi) &= \left(f, \Gamma_{\bar{\lambda}}^{\bar{\mu}}(\eta - \bar{\mu}\xi)\right) \\ &= \left(f, \eta - \bar{\mu}\xi + (\bar{\mu} - \bar{\lambda})[A - \bar{\mu}]^{-1}(\eta - \bar{\mu}\xi)\right) = (f, \eta - \bar{\lambda}\xi) = 0,\end{aligned}$$

für alle $(\xi; \eta) \in S$; d.h.: $\Gamma_\lambda^\mu(\mathcal{N}_\lambda) \subseteq \mathcal{N}_\mu$.
Andererseits gilt nach dem eben Gezeigten

$$\mathcal{N}_\mu = \left[\Gamma_\lambda^\mu \circ \Gamma_\mu^\lambda\right](\mathcal{N}_\mu) \subseteq \Gamma_\lambda^\mu(\mathcal{N}_\lambda).$$

□

Lemma 3.3.2. *Seien S, A und Γ wie oben, dann gilt für $\lambda, \mu, \nu \in \rho(A) \cap \mathbb{C}$*

$$\Gamma_\mu^\nu \circ \Gamma_\lambda^\mu = \Gamma_\lambda^\nu.$$

Beweis. Es bezeichne R die Resolvente von A. Anwendung der Resolventengleichung liefert

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^\nu \circ \Gamma_\lambda^\mu &= I + (\nu - \mu)R(\nu) + (\mu - \lambda)R(\mu) + \frac{(\nu - \mu)(\mu - \lambda)}{\nu - \mu}\left(R(\nu) - R(\mu)\right) \\ &= I + (\nu - \mu + (\mu - \lambda))\,R(\nu) + (\mu - \lambda - (\mu - \lambda))\,R(\mu) = I + (\nu - \lambda)R(\nu) = \Gamma_\lambda^\nu\end{aligned}$$

□

Wir setzen ab nun voraus, dass S Defektindizes $(1,1)$ hat. Zu jedem $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{N}_\lambda \setminus \{0\}$ definieren wir die Abbildung

$$\gamma = \gamma_{\lambda,u} : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \to \quad \mathcal{H}, \\ \mu & \mapsto \quad \Gamma_\lambda^\mu u, \end{cases}.$$

Nach Lemma 3.3.1 ist $\gamma(\mu) \in \mathcal{N}_\mu$ für jedes $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho(A) \cap \mathbb{C}$. Wir nennen γ eine *Defektabbildung* von (S, A). Da die Defekträume eindimensional sind, ist – bei gegebenen Paar (S, A)– die Defektabbildung γ eindeutig bis auf eine multiplikative Konstante, d.h. sind $\lambda, \lambda' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $u \in \mathcal{N}_\lambda \setminus \{0\}$ sowie $u' \in \mathcal{N}_{\lambda'} \setminus \{0\}$, dann existiert ein $c \neq 0$, sodass $\gamma_{\lambda,u} \equiv c\gamma_{\lambda',u'}$.

Definition 3.3.3. Eine Funktion $q : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *Q-Funktion* von (S, A), falls es eine

Defektabbildung γ von (S, A) gibt, sodass

$$\frac{q(\lambda) - \overline{q(\mu)}}{\lambda - \overline{\mu}} = (\gamma(\lambda), \gamma(\mu)) \quad \text{für alle } \lambda \neq \bar{\mu} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Definition 3.3.4. Eine Funktion $q : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *Nevanlinna-Funktion*, wenn

- q holomorph ist,
- $q(\bar{\lambda}) = \overline{q(\lambda)}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und
- $\operatorname{Im} q(\lambda) \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Wir zeigen nun einige Eigenschaften von Q-Funktionen, etwa dass eben diese stets der Klasse der Nevanlinna-Funktionen angehören.

Lemma 3.3.5. *Ist A eine selbstadjungierte Relation auf $\mathcal{H}$, dann ist die Abbildung*

$$\begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \to \quad \mathfrak{B}(\mathcal{H}), \\ \lambda & \mapsto \quad [A - \lambda]^{-1}, \end{cases}$$

stetig.

Beweis. Wir verwenden die Schreibweise $R(\lambda) := [A - \lambda]^{-1}$. Nach Korollar 3.1.6 gilt für $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Resolventengleichung

$$R(\lambda) - R(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) R(\lambda) R(\lambda_0).$$

Damit gilt für jedes $h \in \mathcal{H}$ unter Verwendung von Lemma 3.2.8 die Abschätzung

$$\|[R(\lambda) - R(\lambda_0)]\, h\| \leq |\lambda - \lambda_0|\, \|R(\lambda)\|\, \|R(\lambda_0)\|\, \|h\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\Im\lambda|\, |\Im\lambda_0|} \|h\|.$$

Wir erhalten

$$\|R(\lambda) - R(\lambda_0)\| \leq \frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\Im\lambda|\, |\Im\lambda_0|}.$$

Da die rechte Seite für $\lambda \to \lambda_0$ gegen 0 konvergiert, ist die Abbildung $\lambda \mapsto R(\lambda)$ stetig. □

Satz 3.3.6. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ abgeschlossen und symmetrisch, mit Defektindizes $(1, 1)$ und $A \in \mathfrak{E}(S)$. Dann gilt:*

(i) Für $u \in \mathcal{N}_i \setminus \{0\}$ mit $\|u\| = 1$ ist die Abbildung

$$q : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{C}, \\ \lambda & \mapsto \quad \lambda + (\lambda^2 + 1) \left([A - \lambda]^{-1} u, u \right), \end{cases} \tag{3.11}$$

eine Q-Funktion von (S, A).

(ii) Sind q und $\tilde{q}$ zwei Q-Funktionen von (S, A), dann existieren $c > 0$ und $d \in \mathbb{R}$, sodass

$$\tilde{q} \equiv cq + d.$$

Ist q eine Q-funktion und c, d wie zuvor, dann ist auch $\tilde{q} := cq + d$ eine Q-Funktion.

(iii) Jede Q-Funktion ist eine Nevanlinna-Funktion mit positivem Imaginärteil auf $\mathbb{C}_+$.

Beweis.

ad (ii) Seien nun q und $\tilde{q}$ zwei Q-Funktionen von (S, A) mit zugehörigen Defektabbildungen γ und $\tilde{\gamma}$. Setzt man $\lambda = \mu = i$ in der definierenden Gleichung der Q-Funktion, so erhält man $\Im q(i) = \|\gamma(i)\|^2$. Analoges gilt für $\tilde{q}$. Damit erhalten wir aus $\frac{q(\lambda)-\overline{q(i)}}{\lambda+i} = (\gamma(\lambda), \gamma(i))$

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \overline{q(i)} + (\lambda + i)\left((I + (\lambda - i)[A-\lambda]^{-1})\gamma(i), \gamma(i)\right) \\ &= \overline{q(i)} + (\lambda + i)\left\|\gamma(i)\right\|^2 + (\lambda^2+1)\left([A-\lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\right) \\ &= \Re q(i) + \lambda\left\|\gamma(i)\right\|^2 + (\lambda^2+1)\left([A-\lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\right). \end{aligned}$$

Sei nun a jene Konstante, die $\tilde{\gamma}(i) = a\gamma(i)$ leistet, dann zeigt eine ähnliche Rechnung

$$\begin{aligned} \tilde{q}(\lambda) &= \Re\tilde{q}(i) + \lambda\left\|\tilde{\gamma}(i)\right\|^2 + (\lambda^2+1)\left([A-\lambda]^{-1}\tilde{\gamma}(i), \tilde{\gamma}(i)\right) \\ &= \Re\tilde{q}(i) + \lambda\left|a\right|^2\left\|\gamma(i)\right\|^2 + (\lambda^2+1)\left|a\right|^2\left([A-\lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\left|a\right|^2 q(\lambda) - \tilde{q}(\lambda) = \left|a\right|^2 \Re q(i) - \Re\tilde{q}(i).$$

Für eine Q-Funktion q mit zugehöriger Defektabbildung γ sei umgekehrt $\tilde{q} := cq + d$. Dann ist $\tilde{\gamma} := \sqrt{c}\gamma$ klarerweise ebenfalls eine Defektabbildung für (S, A). Wir erhalten für $\lambda \neq \bar{\mu}$

$$(\tilde{\gamma}(\lambda), \tilde{\gamma}(\mu)) = c\ (\gamma(\lambda), \gamma(\mu)) = c\ \frac{q(\lambda) - \overline{q(\mu)}}{\lambda - \bar{\mu}} = \frac{\tilde{q}(\lambda) - \overline{\tilde{q}(\mu)}}{\lambda - \bar{\mu}},$$

wobei in der letzten Gleichung entscheidend eingeht, dass d reell ist.

ad (i) Wir definieren die Defektabbildung γ durch $\gamma(\lambda) := \Gamma_i^{\lambda} u$. Es bezeichne R die Resolvente von A, dann gilt für $\lambda \neq \bar{\mu} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (\gamma(\lambda), \gamma(\mu)) &= \left(\Gamma_{-i}^{\bar{\mu}}\Gamma_i^{\lambda} u, u\right) \\ &= \left([I + (\bar{\mu}+i)R(\bar{\mu}) + (\lambda - i)R(\lambda) + (\bar{\mu}+i)(\lambda-i)R(\bar{\mu})R(\lambda)]u, u\right) \\ &= \left((I + (\bar{\mu}+i)R(\bar{\mu}) + (\lambda-i)R(\lambda) + \frac{(\bar{\mu}+i)(\lambda-i)}{\bar{\mu}-\lambda}[R(\bar{\mu}) - R(\lambda)])u, u\right) \\ &= \left((I + (\bar{\mu} + i - i + \frac{\bar{\mu}\lambda+1}{\bar{\mu}-\lambda})R(\bar{\mu}) + (\lambda - i + i - \frac{\bar{\mu}\lambda+1}{\bar{\mu}-\lambda})R(\lambda))u, u\right) \\ &= \left((I + \frac{\bar{\mu}^2+1}{\bar{\mu}-\lambda}R(\bar{\mu}) - \frac{\lambda^2+1}{\bar{\mu}-\lambda}R(\lambda))u, u\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\bar{\mu}-\lambda}\left((\bar{\mu}^2+1)R(\bar{\mu}) - (\lambda^2+1)R(\lambda))u, u\right), \end{aligned}$$

und man erkennt, dass die rechte Seite mit $\frac{q(\lambda)-q(\bar{\mu})}{\lambda-\bar{\mu}}$ für das in (3.11) definierte q übereinstimmt. Wegen

$$\overline{q(\lambda)} = \bar{\lambda} + (\bar{\lambda}^2 + 1)(u, [A-\lambda]^{-1}u) = q(\bar{\lambda}), \tag{3.12}$$

gilt $(\gamma(\lambda), \gamma(\mu)) = \frac{q(\lambda)-\overline{q(\mu)}}{\lambda-\bar{\mu}}$, d.h. q ist eine Q-Funktion.

ad (iii) Nach Aussage (ii) lässt sich jede Q-Funktion $\tilde{q}$ als $cq(z) + d$ mit $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ und der in (3.11) definierten Funktion q darstellen. Da die definierenden Eigenschaften von Nevanlinna-Funktionen durch diese Transformation erhalten bleiben, reicht es zu zeigen, dass q eine Nevanlinna-Funktion ist.

Wegen

$$\frac{\Im q(\lambda)}{\Im\lambda} = \frac{q(\lambda) - \overline{q(\lambda)}}{\lambda - \bar{\lambda}} = \left\|\gamma(\lambda)\right\|^2$$

hat q sogar strikt positiven Imaginärteil auf $\mathbb{C}_+$. Es sei die Funktion r durch

$$r : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}, \\ \lambda & \mapsto & \left([A-\lambda]^{-1}u, u\right), \end{cases}$$

definiert. Bezeichne R die Resolvente von A, dann gilt für $\lambda \neq \mu$

$$\frac{r(\lambda) - r(\mu)}{\lambda - \mu} = \frac{1}{\lambda - \mu} \left([R(\lambda) - R(\mu)]u, u\right) = \left(R(\lambda)R(\mu)u, u\right).$$

Wir erhalten

$$\left| \frac{r(\lambda) - r(\mu)}{\lambda - \mu} - (R(\lambda)^2 u, u) \right| = |(R(\lambda)[R(\mu) - R(\lambda)]u, u)| \leq \|R(\lambda)\| \, \|R(\mu) - R(\lambda)\| \, \|u\|^2$$

und schließen mithilfe von Lemma 3.3.5, dass der Ausdruck im Grenzübergang für $\mu \to \lambda$ verschwindet. Mit r ist offenbar auch q holomorph.
Die Eigenschaft $q(\bar{\lambda}) = \overline{q(\lambda)}$ wurde bereits in (3.12) gezeigt.

□

Aussage (ii) des letzten Satzes impliziert, dass die Q-Funktion von (S, A) eindeutig bis auf Normierung ist. Seien $\mu_0, q_0 \in \mathbb{C}_+$, dann ist q durch die Forderung

$$q(\mu_0) = q_0 \tag{3.13}$$

eindeutig festgelegt. Wir sagen die Q-Funktion q ist *normiert*, wenn $q(i) = i$.

Fakta 3.3.7.

(i) Die normierte Q-Funktion ist genau durch die in (3.11) definierte Funktion gegeben.

(ii) Ist q eine normierte Q-Funktion und γ eine zugehörige Defektabbildung, d.h.

$$\frac{q(\lambda) - \overline{q(\mu)}}{\lambda - \overline{\mu}} = (\gamma(\lambda), \gamma(\mu)).$$

Dann gilt $\|\gamma(i)\| = 1$.

3.3.1 Integraldarstellung für Nevanlinna-Funktionen

Jede Nevanlinna-Funktion q besitzt eine Integraldarstellung der Form

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1} \right) \, d\sigma(t),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und σ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ ist.
Um das zu zeigen, leiten wir zunächst eine Integraldarstellung für nichtnegative, harmonische Funktionen auf der offenen Einheitskugel $U_1(0)$ her. Wir halten uns dafür an die Ausführungen in [Kal13, Kapitel 2].

Definition 3.3.8. Ist $(X, \mathcal{T})$ ein Hausdorffraum und bezeichne $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf X, dann heißt ein Maß $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ *Borelmaß*, falls $\mu(K) < +\infty$ für alle kompakten $K \subseteq X$.

Eine Borelmenge $A \in \mathcal{B}$ heißt *von innen regulär*, falls

$$\mu(A) = \sup \{\mu(K) : \ K \subseteq A, \ K \text{ kompakt}\}$$

und sie heißt *von außen regulär*, falls

$$\mu(A) = \inf \{\mu(O) : \ O \supseteq A, \ O \text{ offen}\} .$$

Ein Borelmaß μ, das auf allen Borelmengen $B \in \mathcal{B}$ von außen regulär und auf allen offenen Mengen $O \in \mathcal{T}$ von innen regulär ist, nennen wir *Riesz-regulär.*
Ein Borelmaß, das auf allen Borelmengen sowohl von innen als auch von außen regulär ist, heißt *regulär.*

Bemerkung 3.3.9. Auf einem lokalkompakten Hausdorffraum $(X, \mathcal{T})$, dessen Topologie $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt, ist jedes Borelmaß regulär (vgl. [Kal13, Korollar 1.2.8 (v)]). Insbesondere sind alle Borelmaße auf $\mathbb{R}$ regulär.

Wir wollen zunächst an den *Darstellungssatz von Riesz* und an die *Poisson-Darstellung* harmonischer Funktionen erinnern:

Satz 3.3.10 (Darstellungssatz von Riesz)**.** *Sei* $(X, \mathcal{T})$ *ein lokalkompakter Hausdorffraum. Ist* $\Lambda : C_{00}(X)$[1] $\to \mathbb{R}$ *ein positives* [2], *lineares Funktional, dann gibt es ein eindeutiges Riesz-reguläres Borelmaß* μ*, sodass*

$$\Lambda(f) = \int_X f \ d\mu, \quad f \in C_{00}(X). \tag{3.14}$$

Umgekehrt legt die rechte Seite in Gleichung (3.14) *ein positives, lineares Funktional auf* $C_{00}(X)$ *fest.*

Beweis. Siehe [Kal13, Satz 2.1.4]. □

Satz 3.3.11 (Poisson-Darstellung)**.** *Sei* h *auf* $K_1(0)$[3] $\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *stetig und* $u\restriction_{U_1(0)}$ *harmonisch. Dann gilt für jedes* $x \in U_1(0)$

$$h(x) = \int_{S^{n-1}} \mathfrak{k}(x, y) h(y) \ d\sigma(y)^{4}, \tag{3.15}$$

wobei $\mathfrak{k}(x, y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^n}$ *der Poissonkern ist.*

Beweis. Siehe [Kal13, Satz 2.3.7]. □

Satz 3.3.12. *Sei* $h : U_1(0) \to [0, +\infty)$ *harmonisch, dann gibt es ein eindeutiges Borelmaß* ν *auf* S^{n-1}*, sodass für alle* $x \in U_1(0)$

$$h(x) = \int_{S^{n-1}} \mathfrak{k}(x, y) \ d\nu(y), \tag{3.16}$$

wobei $\mathfrak{k}(x, y) = \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^n}$ *der Poissonkern ist.*

[1] $C_{00}(X)$ bezeichnet die Menge aller stetigen Funktionen auf $(X, \mathcal{T})$ mit kompaktem Träger.
[2] Λ ist *positiv*, wenn $\Lambda(f) \geq 0$ für alle $f \geq 0$.
[3] $K_1(0)$ bezeichnet die abgeschlossene Einheitskugel.
[4] S^{n-1} bezeichnet die Oberfläche der Einheitskugel und σ das Oberflächenmaß auf S^{n-1}.

Beweis. Da S^{n-1} ein kompakter topologischer Raum ist, stimmt $C_{00}(S^{n-1})$ mit $C(S^{n-1})$, dem Vektorraum aller reellwertigen, stetigen Funktionen auf S^{n-1} überein. $C(S^{n-1})$ stellt, versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$, einen Banachraum dar. Wir definieren für $r \in (0,1)$ die Abbildung

$$\Lambda_r : \begin{cases} C(S^{n-1}) & \to \quad \mathbb{R}, \\ f & \mapsto \quad \int\limits_{S^{n-1}} f(y)h(ry)\; d\sigma(y). \end{cases}$$

Offenbar handelt es sich bei Λ_r um ein positives, lineares Funktional. Da mit h auch $h_r : y \mapsto h(ry)$ harmonisch ist, erfüllt h_r die Voraussetzungen von Satz 3.3.11. Damit erhalten wir für $f \in C(S^{n-1})$

$$|\Lambda_r(f)| = \left| \int\limits_{S^{n-1}} f(y)h_r(y)\; d\sigma(y) \right| \le \|f\|_\infty \left| \int\limits_{S^{n-1}} h_r(y)\; d\sigma(y) \right| = \|f\|_\infty\, h(0),$$

d.h. $\|\Lambda_r\| \le |h(0)|$. Demnach liegt $\{\Lambda_r\}_{r\in(0,1)}$ in der Kugel mit Radius $h(0)$ um 0 in $C(S^{n-1})'$. Nach dem Satz von Banach-Alaoglu ist diese Kugel $w*$-kompakt. Da $\{\Lambda_r\}_{r\in(0,1)}$ ein nach 1 hin gerichtetes Netz darstellt, gibt es ein Teilnetz $\{\Lambda_{r_i}\}_{i\in I}$ und ein $\Lambda \in C(S^{n-1})'$ mit $\|\Lambda\| = h(0)$, sodass

$$\Lambda_{r_i} \xrightarrow{w*} \Lambda, i \in I.$$

Teilnetz bedeutet

$$\forall r \in (0,1)\ \exists i_0 \in I :\ i \succeq i_0\ \Rightarrow r_i \ge r,$$

womit $\lim_{i\in I} r_i = 1$. Somit gilt

$$h(x) = \lim_{i\in I} h(r_i x) = \lim_{i\in I} h_{r_i}(x) = \int\limits_{S^{n-1}} \mathfrak{k}(x,y)h_{r_i}(y)\; d\sigma(y) = \lim_{i\in I} \Lambda_{r_i}\left(\mathfrak{k}(x,.)\right) = \Lambda\left(\mathfrak{k}(x,.)\right).$$

Wegen $\Lambda(\mathbb{1}_{S^{n-1}}) = \lim_{i\in I} \Lambda_{r_i}(\mathbb{1}_{S^{n-1}}) = h(0)$ gilt für jedes $f \in C(S^{n-1})$ mit $f \ge 0$ und $f \ne 0$, wegen $\left\| \frac{f}{\|f\|_\infty} - \mathbb{1}_{S^{n-1}} \right\|_\infty \le 1$

$$\Lambda(f) = \underbrace{\Lambda\left(\frac{f}{\|f\|_\infty} - \mathbb{1}_{S^{n-1}}\right)}_{\in[-h(0),h(0)]} + \underbrace{\Lambda\left(\mathbb{1}_{S^{n-1}}\right)}_{=h(0)} \ge 0,$$

damit ist Λ positiv. Nach Satz 3.3.10 gibt es ein Maß ν auf S^{n-1}, das

$$\Lambda(f) = \int\limits_{S^{n-1}} f\; d\nu, \quad f \in C(S^{n-1})$$

leistet. Insbesondere gilt dann für $x \in U_1(0)$

$$h(x) = \Lambda\left(\mathfrak{k}(x,.)\right) = \int\limits_{S^{n-1}} \mathfrak{k}(x,y)\; d\nu(y).$$

□

Bemerkung 3.3.13. Vermöge

$$\iota : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \quad \mathbb{C}, \\ (x_1,x_2) & \mapsto \quad x_1 + ix_2, \end{cases} \tag{3.17}$$

können wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Für eine Funktion $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ werden wir in diesem

Sinne f als Funktion zweier reellwertiger Variablen auffassen, d.h.

$$f(x_1, x_2) := f(x_1 + ix_2), \quad (x_1, x_2) \in \left\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \ \xi + i\eta \in G\right\}.$$

Da ι die Topologien von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ (bzw. von S^1 und $\mathbb{T}$) ineinander überführt, sind die Borelmaße auf S^1 genau die Borelmaße auf $\mathbb{T}$, d.h.

$$\nu \text{ ist Borelmaß auf } S^1 \quad \Leftrightarrow \quad \nu \circ \iota^{-1} \text{ ist Borelmaß auf } \mathbb{T}.$$

Satz 3.3.14 (Integraldarstellung für Nevanlinna-Funktionen). *Sei q eine Nevanlinna-Funktion, dann existieren $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und ein Borelmaß μ auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty$, sodass*

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Umgekehrt ist jede Funktion dieser Bauart eine Nevanlinna-Funktion.

Beweis. Wir zeigen zunächst die zweite Aussage. Sei dazu q wie Gleichung (3.18). Wegen $\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} = \frac{1-zt}{(t-z)(t^2+1)}$ und weil $\mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{1-zt}{t-z}$ für jedes feste $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt ist, gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right| \, d\mu(t) \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty,$$

d.h. q ist wohldefiniert. Wegen der Vertauschbarkeit von Konjugation und Integration sowie wegen $\overline{\left(\frac{1}{t-z}\right)} = \frac{1}{t-\overline{z}}$ stellen wir fest, dass $\overline{q(z)} = q(\overline{z})$. Für $\Im z > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\Im q(z) &= \frac{1}{2i}\left(q(z) - \overline{q(z)}\right) = \frac{1}{2i}\left(q(z) - q(\overline{z})\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(2ib\Im z + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\overline{z}}\right) \, d\mu(t)\right) \\
&= b\Im z + \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}} \frac{2i\Im z}{|t-z|^2} \, d\mu(t) = b\Im z + \int_{\mathbb{R}} \frac{\Im z}{|t-z|^2} \, d\mu(t) \geq 0.
\end{aligned}$$

Für die Holomorphie von q reicht es nachzuweisen, dass

$$z \mapsto \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{3.19}$$

holomorph ist. Sei dazu $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ festgehalten. Für hinreichend kleines $\delta > 0$ gilt dann $\epsilon := \mathit{dist}\,(K_\delta(z_0), \mathbb{R}) > 0$. Für $|z - z_0| \leq \delta$ gilt

$$\left| \frac{1+zt}{t-z} \right| \leq \frac{1}{|t-z|} + |z| \frac{|t|}{|t-z|} \leq \frac{1}{\epsilon} + |z| \left(1 + \frac{|z|}{|t-z|} \right) \leq |z| + \frac{1+|z|^2}{\epsilon}.$$

Da $z \mapsto |z| + \frac{1+|z|^2}{\epsilon}$ stetig ist, nimmt diese Abbildung auf der kompakten Menge $K_\delta(z_0)$ ein Maximum $C > 0$ an. Insbesondere lassen sich die Funktionen $t \mapsto \left|\frac{1+zt}{t-z}\right|$ gleichmäßig bzgl. $z \in K_\delta(z_0)$ durch C abschätzen. Ist $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kompakt, dann zeigt ein Kompaktheitsargument, dass eine Konstante $C' > 0$ existiert, sodass

$$\left| \frac{1+zt}{t-z} \right| \leq C', \quad z \in K, \ t \in \mathbb{R}.$$

Verwendung der bzgl. μ integrierbaren Majorante $t \mapsto \frac{C'}{t^2+1}$ liefert die Holomorphie der in (3.19) definierten Funktion; vgl. [KW13, Lemma 2.3.3].

Für den ersten Teil der Behauptung betrachten wir die zwei Abbildungen

$$z : \begin{cases} \mathbb{C}_\infty & \to & \mathbb{C}_\infty, \\ \omega & \mapsto & i\frac{1+\omega}{1-\omega}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \omega : \begin{cases} \mathbb{C}_\infty & \to & \mathbb{C}_\infty, \\ z & \mapsto & \frac{z-i}{z+i}, \end{cases} .$$

Die beiden Abbildungen sind invers zueinander und die Restriktion $z\restriction_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}_+$ ist biholomorph. Damit ist die Funktion

$$f(\omega) := -iq\left(z(\omega)\right), \quad \omega \in \mathbb{D}$$

holomorph und hat wegen

$$\Re f(\omega) = \Re\left[-iq\left(z(\omega)\right)\right] = \Im q\left(z(\omega)\right) \geq 0$$

nichtnegativen Realteil.

Anwendung von Satz 3.3.12 auf $\Re f(\omega),\ \omega \in \mathbb{D}$ liefert die Existenz eines Borelmaßes ν auf $\mathbb{T}$, sodass für $\omega \in \mathbb{D}$

$$\Re f(\omega) = \int_{\mathbb{T}} \mathfrak{k}(x,y)\ d\nu(y),$$

wobei [5] $\mathfrak{k}(x,y) = \frac{1-|\omega|^2}{|\omega-y|^2}$.

Die Abbildung $\omega\restriction_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{T} \setminus \{1\}$ ist bistetig. Damit ist

$$\rho(\Delta) := \nu\left(\omega^{-1}(\Delta)\right), \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

ein wohldefiniertes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Wegen $\rho(\mathbb{R}) \leq \nu(\mathbb{T}) < +\infty$ ist ρ endlich.

Man rechnet leicht nach, dass die folgenden Gleichungen für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$ gültig sind:

$$\begin{aligned} 1 - |\omega(z)|^2 &= \frac{4\Im z}{|z+i|^2}, \\ |1-\omega(z)|^2 &= \frac{4}{|z+i|^2}, \\ |\omega(z)-\omega(t)|^2 &= 4\frac{|z-t|^2}{|z+i|^2\,(t^2+1)}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Wegen $q(z) = if\left(\omega(z)\right)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ folgt mit (3.20)

$$\begin{aligned} \Im q(z) = \Re f\left(\omega(z)\right) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1-|\omega(z)|^2}{|\omega(z)-y|^2}\ d\nu(y) \\ &= \underbrace{\nu(\{1\})}_{=:b\geq 0} \frac{1-|\omega(z)|^2}{|1-\omega(z)|^2} + \int_{\mathbb{T}\setminus\{1\}} \frac{1-|\omega(z)|^2}{|\omega(z)-y|^2}\ d\nu(y) \\ &= b\Im z + \int_{\mathbb{R}} \frac{1-|\omega(z)|^2}{|\omega(z)-\omega(t)|^2}\ d\rho(t) = b\Im z + \int_{\mathbb{R}} \frac{\Im z}{|t-z|^2} \underbrace{(t^2+1)\ d\rho(t)}_{=:d\mu(t)}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

[5] Vgl. Bemerkung 3.3.13.

Da ρ endlich ist, folgt $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t^2+1} = \rho(\mathbb{R}) < +\infty$.
Mithilfe von (3.21) stellen wir fest, dass der Imaginärteil die Nevanlinna-Funktion

$$\tilde{q}(z) := bz + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t)$$

mit dem Imaginärteil von q übereinstimmt. Damit ist die holomorphe Funktion $g := q - \tilde{q}$ rein reell. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen liefern

$$\frac{\partial}{\partial x} \Re g = 0 = \frac{\partial}{\partial y} \Re g,$$

und wir schließen, dass $g \equiv a \in \mathbb{R}$ auf der zusammenhängenden Menge $\mathbb{C}_+$ gilt. Damit erhalten wir

$$q(z) = a + \tilde{q}(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{3.22}$$

Wegen $\overline{q(z)} = q(\bar{z})$ gilt Gleichung (3.22) sogar auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. □

Der folgende Satz macht die Parameter a, b und μ greifbarer:

Satz 3.3.15. *Sei q eine Nevanlinna-Funktion mit Darstellung*

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t). \tag{3.23}$$

Dann gilt

(i) $a = \Re q(i)$,

(ii) $b = \lim\limits_{y \to \infty} \frac{q(iy)}{iy}$ *und*

(iii) für $t_1 < t_2$

$$\frac{1}{2}\mu(\{t_1\}) + \mu\left((t_1, t_2)\right) + \frac{1}{2}\mu(\{t_2\}) = \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{t_1}^{t_2} \Im q(x + iy) \, dx.$$

Insbesondere sind a, b und μ eindeutig durch q bestimmt.

Beweis.

ad (i) Einsetzen in (3.23) gibt

$$q(i) = a + bi + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-i} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t) = a + bi + i \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t^2+1},$$

und damit $\Re q(i) = a$.

ad (ii) Wir setzen wieder in die Integraldarstellung ein und erhalten

$$\frac{q(iy)}{iy} = \frac{a}{iy} + b + \frac{1}{iy} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-iy} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t).$$

Es reicht also zu zeigen, dass der dritte Summand im Grenzübergang verschwindet; dazu betrachten wir

$$\left|\frac{1}{iy}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{t-iy}-\frac{t}{t^2+1}\right)\,d\mu(t)\right|\le\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{y}\left|\frac{1+iyt}{t-iy}\right|\frac{d\mu(t)}{t^2+1}.$$

Weil für $y>1$

$$\left|\frac{1}{y}\cdot\frac{1+iyt}{t-iy}\right|^2=\frac{1+y^2t^2}{y^2t^2+y^4}\le 1,$$

weil $\frac{d\mu(t)}{t^2+1}$ endlich ist und weil für festes $t\in\mathbb{R}$

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\left|\frac{1+iyt}{t-iy}\right|=0,$$

schließen wir mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz auf das gewünschte Ergebnis.

ad (iii) Für $z=x+iy$ ist

$$\begin{aligned}\Im q(z)&=by+\frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{1}{t-\bar{z}}\right)\,d\mu(t)\\&=by+\frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\frac{2iy}{(t-x)^2+y^2}\,d\mu(t)=by+\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,d\mu(t).\end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst an, dass μ kompakten Träger hat; insbesondere ist μ dann endlich. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\Im q(x+iy)\,dx&=\int_{t_1}^{t_2}\left[by+\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,d\mu(t)\right]dx\\&=by(t_2-t_1)+\int_{\mathbb{R}}\int_{t_1}^{t_2}\frac{y\,dx}{(t-x)^2+y^2}\,d\mu(t).\end{aligned}$$

Die Substitution $\xi=\frac{x-t}{y}$ zeigt, dass das innere Integral mit

$$\int_{\frac{t_1-t}{y}}^{\frac{t_2-t}{y}}\frac{d\xi}{\xi^2+1}=\arctan\left(\frac{t_2-t}{y}\right)-\arctan\left(\frac{t_1-t}{y}\right)=:g_y(t)$$

übereinstimmt. Die Familie von Funktionen ist gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$|g_y(t)|\le\pi,\ \text{für } t\in\mathbb{R},\quad y>0.$$

Der punktweise Grenzwert lautet

$$\lim_{y\searrow 0}g_y(t)=\begin{cases}0 & \text{für } t\notin[t_1,t_2],\\ \pi & \text{für } t\in[t_1,t_2],\\ \frac{\pi}{2} & \text{für } t\in\{t_1,t_2\}.\end{cases}$$

Wir erhalten wieder mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz, dass

$$\begin{aligned}\lim_{y\searrow 0}\frac{1}{\pi}\int_{t_1}^{t_2}\Im q(x+iy)\;dx &= \lim_{y\searrow 0}\frac{1}{\pi}\left[\int_{\mathbb{R}} g_y(t)\;d\mu(t)+by(t_2-t_1)\right]\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left[\lim_{y\searrow 0}\frac{1}{\pi}g_y(t)\right]\;d\mu(t)=\frac{1}{2}\mu(\{t_1\})+\mu\left((t_1,t_2)\right)+\frac{1}{2}\mu(\{t_2\}).\end{aligned}$$

Für ein allgemeines Borelmaß μ mit $\int\frac{d\mu(t)}{t^2+1}<+\infty$ nehmen wir die Zerlegung

$$\mu(.)=\underbrace{\mu\left(.\cap(t_1-1,t_2+1)\right)}_{=:\mu_1(.)}+\underbrace{\mu\left(.\cap(t_1-1,t_2+1)^c\right)}_{=:\mu_2(.)}$$

vor. Wegen

$$\Im q(z)=by+\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}d\mu_1(t)+\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}d\mu_2(t)$$

reicht es zu zeigen, dass die Funktion $x\mapsto\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}d\mu_2(t)$ gleichmäßig (bezüglich y) auf $[t_1,t_2]$ gegen 0 konvergiert. Dazu betrachten wir die Funktion

$$h:\begin{cases}[t_1,t_2]\times\mathbb{R}\setminus(t_1-1,t_2+1) & \to\quad\mathbb{R},\\ (x,t) & \mapsto\quad\frac{t^2+1}{(t-x)^2}.\end{cases}$$

Für $M:=\max\{|t_1|,|t_2|\}$ sei $R>0$ so gewählt, dass

$$t^2-4M|t|\geq 1\qquad\text{für }\;|t|>R.$$

Wir zeigen, dass $h(x,t)\leq 2$ für $|t|>R$. Nach Definition von h ist dies äquivalent zu

$$t^2+1\leq 2t^2-4tx+2x^2.$$

Die Wahl von R erlaubt es nun wegen $|x|\leq M$ die rechte Seite gemäß

$$2t^2-4tx+2x^2\geq t^2+t^2-4M|t|\geq t^2+1$$

abzuschätzen. Auf der kompakten Menge $[t_1,t_2]\times\;[-R,R]\setminus(t_1-1,t_2+1)$ ist h als stetige Funktion beschränkt. Wir schließen, dass h auf dem gesamten Definitionsbereich durch eine Konstante C beschränkt ist. Insbesondere folgt daraus die Gültigkeit der Abschätzung

$$(t-x)^2\geq\frac{t^2+1}{C}\quad\text{ für }(x,t)\in[t_1,t_2]\times(t_1-1,t_2+1)^c.\tag{3.24}$$

Für $x\in[t_1,t_2]$ und $y>0$ gilt mit (3.24)

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}d\mu_2(t)=\int_{(t_1-1,t_2+1)^c}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}d\mu_2(t)\leq y\;C\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\frac{d\mu(t)}{t^2+1}}_{<+\infty}.$$

□

Als Nevanlinna-Funktion besitzt jede Q-Funktion q nach Satz 3.3.14 eine eindeutige Integraldarstellung

$$q(z) = a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t), \tag{3.25}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und $\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty$.

Proposition 3.3.16. *Sei q eine Q-Funktion von (S, A) mit Integraldarstellung (3.25) und γ eine zugehörige Defektabbildung. Es bezechne P die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_{op} = (mul\ A)^{\perp}$ und E das Spektralmaß von A, dann gilt*

(i) $a = \Re q(i)$,

(ii) $b = \|(1-P)\gamma(i)\|^2$ *und*

(iii) $d\mu(t) = (1+t^2)\ dE_{\gamma(i),\gamma(i)}(t)$.

Beweis. Für Aussage (i) siehe Satz 3.3.15. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt mit Satz 2.4.17

$$\begin{aligned}
q(\lambda) &= \overline{q(i)} + (\lambda + i)\,(\gamma(\lambda), \gamma(i)) \\
&= \overline{q(i)} + (\lambda + i)\,\big((I + (\lambda - i)[A-\lambda]^{-1})\gamma(i), \gamma(i)\big) \\
&= \overline{q(i)} + (\lambda + i)\,\|\gamma(i)\|^2 + (\lambda^2+1)\,\big([A-\lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\big) \\
&= \overline{q(i)} + i\,\|\gamma(i)\|^2 + \lambda \left(\|P\gamma(i)\|^2 + \|(1-P)\gamma(i)\|^2 \right) + (\lambda^2+1) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda}\ dE_{\gamma(i),\gamma(i)}(t)
\end{aligned}$$

Da $P = E(\mathbb{R})$, erhalten wir

$$\|P\gamma(i)\|^2 = (E(\mathbb{R})\gamma(i), \gamma(i)) = \int_{\mathbb{R}} 1\ dE_{\gamma(i),\gamma(i)}(t).$$

Wegen

$$\overline{q(i)} + i\,\|\gamma\|\,(i)^2 = \overline{q(i)} + i\frac{q(i) - \overline{q(i)}}{2i} = \frac{q(i) + \overline{q(i)}}{2} = \Re q(i) = a$$

folgt

$$q(\lambda) = a + \lambda\,\|(I-P)\gamma(i)\|^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\lambda^2+1}{t-\lambda} + \lambda \right)\ dE_{\gamma(i),\gamma(i)}(t).$$

Aus der Eindeutigkeit der Integraldarstellung für Nevanlinna-Funktionen und aus

$$\frac{\lambda^2+1}{t-\lambda} + \lambda = \frac{\lambda t + 1}{t - \lambda} = \frac{\lambda t + 1}{(t-\lambda)(t^2+1)}(t^2+1) = \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{t^2+1} \right)(t^2+1)$$

folgen die Behauptungen (ii) und (iii). □

Bemerkung 3.3.17. Ist q die normierte Q-Funktion von (S, A) mit Integraldarstellung (3.25), dann folgt $a = 0$.

Korollar 3.3.18. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ abgeschlossen, symmetrisch und einfach mit Defektindizes* $(1,1)$ *und sei $A \in \mathfrak{E}(A)$. Es sei q eine Q-Funktion von (S, A) mit Integraldarstellung* (3.25), *dann ist A genau dann ein Operator, wenn $b = 0$.*

Beweis. Nach Propositon 3.3.16 ist $b = 0$ genau dann, wenn $\gamma(i) \in \mathcal{H}_{op}$, mit $\mathcal{H}_{op} = (\text{mul } A)^{\perp}$. Ist A ein Operator, dann gilt $\mathcal{H}_{op} = \mathcal{H}$ und damit $b = 0$.

Ist umgekehrt $\gamma(i) \in \mathcal{H}_{op}$, dann gilt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit Satz 2.4.17

$$\gamma(\lambda) = \left(I + (\lambda - i)[A - \lambda]^{-1}\right)\gamma(i) = \gamma(i) + (\lambda - i)\underbrace{[A_{op} - \lambda]^{-1}P\gamma(i)}_{\in \mathcal{H}_{op}},$$

wobei P die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_{op}$ bezeichnet. Mit Korollar 3.2.9 schließen wir

$$\mathcal{H} = \operatorname{clspan}\{\gamma(\lambda) : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{H}_{op} \subseteq \mathcal{H};$$

demnach ist A ein Operator. □

3.4 Ein universelles Beispiel

Die Q-Funktion beinhaltet einiges an Information über die Relationen S und A. Etwa kann unter geeigneten Voraussetzungen bei Kenntnis der Q-Funktion entschieden werden, ob A ein Operator ist. Darüber hinaus besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Spektralmaß von A und dem in der Nevanlinna-Integraldarstellung auftauchenden Maß. Diese Tatsache nutzen wir dazu, um aus der Q-Funktion einen Prototypen zu basteln; d.h. wir konstruieren allein aus der Q-Funktion von (S, A) einen Hilbertraum $\hat{\mathcal{H}}$, sowie Relationen $\hat{S}, \hat{A} \leq \hat{\mathcal{H}}^2$, sodass

$$U^{-1}SU = \hat{S} \quad \text{und} \quad U^{-1}AU = \hat{A},$$

für ein unitäres $U : \hat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$.
In [HLS95, Kapitel 2] findet man weitere Eigenschaften, die aus der Q-Funktion abgeleitet werden können.

Das folgende Lemma gibt an, wie man aus einer selbstadjungierten Relation A abgeschlossene, symmetrische Relationen $S \subseteq A$ mit Defekt $(1, 1)$ gewinnen kann. Es handelt sich dabei also gewissermaßen um eine Umkehrung der bisherigen Vorgangsweise.

Lemma 3.4.1. *Sei $A \leq \mathcal{H}^2$ selbstadjungiert und $\gamma : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathcal{H}$, sodass*

$$\gamma(\mu) = \left(I + (\mu - \lambda)[A - \mu]^{-1}\right)\gamma(\lambda) \quad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.^{6}$$

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sei die Relationen S_λ durch

$$S_\lambda := \left\{(f; g) \in A : \left(g - \bar{\lambda}f, \gamma(\lambda)\right) = 0\right\}, \tag{3.26}$$

definiert.

(i) S_λ ist unabhängig von $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und es gilt

$$S_\lambda = S := \{(f; g) \in A : (g - \bar{\nu}f, \gamma(\nu)) = 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$$

(ii) S ist symmetrisch und abgeschlossen und die Defekträume von S sind durch

$$\mathcal{N}_\lambda = \operatorname{span}\{\gamma(\lambda)\} \tag{3.27}$$

gegeben. Dabei ist S die einzige Relation mit diesen Eigenschaften.

(iii) Für $\gamma \neq 0$ hat S Defektindizes $(1, 1)$.

---

[6] Die Abbildung ist durch Festlegung von $\gamma(\lambda_0)$ für beliebiges $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ vollständig definiert.

Beweis. Da für $\lambda, \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $(f; g) \in A$

$$\begin{aligned}(g - \bar{\nu} f, \gamma(\nu)) &= \big(g - \bar{\nu} f, (I + (\nu - \lambda)[A - \nu]^{-1})\gamma(\lambda)\big)\\ &= \big(g - \bar{\nu} f + (\bar{\nu} - \bar{\lambda})\underbrace{[A - \bar{\nu}]^{-1}(g - \bar{\nu} f)}_{=f}, \gamma(\lambda)\big) = \Big(g - \bar{\lambda} f, \gamma(\lambda)\Big)\end{aligned}$$

gilt, schließen wir auf $S_\lambda = S_\nu$ und infolge

$$S = \bigcap_{\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} S_\nu = S_\lambda.$$

Wegen $S \subseteq A$ ist S symmetrisch. Als Kern einer beschränkten, linearen Abbildung ist $S = S_\lambda$ abgeschlossen. Aus der Definition von S_λ erhalten wir für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\operatorname{ran}\,[S - \bar{\lambda}] = \operatorname{ran}\,[A - \bar{\lambda}] \cap \{\gamma(\lambda)\}^\perp = \{\gamma(\lambda)\}^\perp, \tag{3.28}$$

wobei die letzte Gleichheit auf der Selbstadjungiertheit von A beruht. Orthogonalisieren von Gleichung (3.28) liefert $\mathcal{N}_\lambda = \operatorname{span}\{\gamma(\lambda)\}$.

Für die Eindeutigkeit halten wir $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fest. Verwendung von (3.28) gibt

$$[S - \bar{\lambda}]^{-1} = [A - \bar{\lambda}]^{-1}\restriction_{\operatorname{ran}\,[S - \bar{\lambda}]} = [A - \bar{\lambda}]^{-1}\restriction_{\{\gamma(\lambda)\}^\perp} = [A - \bar{\lambda}]^{-1}\restriction_{\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}^\perp}.$$

Da $S \mapsto [S - \lambda]^{-1}$ bijektiv ist, wird S durch $\mathcal{N}_\lambda = \operatorname{span}\{\gamma_\lambda\}$ eindeutig bestimmt.

Gilt $\gamma \neq 0$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, sodass $\gamma(\lambda) \neq 0$. Es sei die Familie von Operatoren wie in Gleichung (3.10) definiert. Dann gilt

$$\left\|\gamma(\bar{\lambda})\right\|^2 = \left(\Gamma_\lambda^{\bar{\lambda}}\gamma(\lambda), \Gamma_\lambda^{\bar{\lambda}}\gamma(\lambda)\right) = \left(\underbrace{\Gamma_{\bar{\lambda}}^{\lambda}\Gamma_\lambda^{\bar{\lambda}}}_{=I}\gamma(\lambda), \gamma(\lambda)\right) = \|\gamma(\lambda)\|^2 \neq 0$$

Damit sind die Defekträume $\mathcal{N}_\lambda$ und $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ eindimensional, d.h. S hat Defekt $(1, 1)$. □

Für ein Maß μ auf $\mathbb{R}$ definieren wir den *Multiplikationsoperator* M_t auf $L^2(d\mu)$ durch

$$M_t : \begin{cases} \operatorname{dom} M_t \subseteq L^2(d\mu) & \to \quad L^2(d\mu), \\ \phi & \mapsto \quad M_t\phi, \end{cases} \tag{3.29}$$

wobei $\operatorname{dom} M_t := \left\{\phi \in L^2(d\mu) : M_t\phi \in L^2(d\mu)\right\}$ und $(M_t\phi)(t) := t\phi(t)$.

Unter der Voraussetzung $\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty$ liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für $\phi \in \operatorname{dom} M_t$

$$\int |\phi(t)|\ d\mu(t) = \int |(t+i)\phi(t)|\,\frac{1}{|t+i|}\ d\mu(t) \leq \sqrt{\int |(t+i)\phi(t)|^2\ d\mu(t)}\ \sqrt{\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1}} < +\infty.$$

In diesem Fall ist also jedes $\phi \in \operatorname{dom} M_t$ bezüglich μ integrierbar.

Bemerkung 3.4.2. Ist μ das Nullmaß, dann ist $L^2(d\mu)$ nulldimensional und die obige Konstruktion liefert nur triviale Ergebnisse.

Bemerkung 3.4.3. Ist ν ein komplexes Maß auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$, dann sind $\Re\nu$ und $\Im\nu$ zwei signierte Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Nach dem Zerlegungssatz von Hahn (vgl. [Kus14, Kapitel 11.1]) lässt sich jedes signierte Maß σ auf $(\Omega, \mathcal{A})$ Hahn-zerlegen, d.h. es gibt ein $P \in \mathcal{A}$, sodass

$$\mathcal{A} \ni \Delta \mapsto \sigma(\Delta \cap P) \text{ und } \mathcal{A} \ni \Delta \mapsto -\sigma(\Delta \cap P^c)$$

nichtnegative Maße sind. Damit erhalten wir, dass sich jedes komplexe Maß als Linearkombination von vier nichtnegativen Maßen ν_1, ν_2, ν_3 und ν_4 darstellen lässt:

$$\nu = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$$

Sei $P \in \mathcal{A}$ mit $\nu_1(P^c) = \nu_2(P) = 0$. Wegen

$$\nu_1(\mathbb{R}) = \nu_1(P) \leq |\nu_1(P) + i\Im\nu(P)| = |\nu(P)| \leq |\nu|(\mathbb{R}) < +\infty$$

ist ν_1 endlich. Ähnliche Argumentation zeigt, dass auch ν_2, ν_3 und ν_4 endlich sind.

Bemerkung 3.4.4. Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass ein σ-endliches Maß μ auf einem Semiring $\mathfrak{T}$ auf eindeutige Art und Weise zu einem Maß auf der kleinsten, $\mathfrak{T}$ umfassenden σ-Algebra $\mathcal{A}$ fortgesetzt werden.
Im Beweis der Eindeutigkeitsaussage dieses Resultats (siehe [Kus14, Satz 4.13 und Bemerkung 4.14]) wird für eine weitere Fortsetzung $\hat{\mu}$ von μ auf $\mathcal{A}$ gezeigt, dass

$$\hat{\mu}(\Delta) = \mu(\Delta) \quad \forall \Delta \in \mathcal{A}.$$

Dabei wirde lediglich verwendet, dass μ und $\hat{\mu}$ σ-additiv sind und, dass die beiden Maße auf $\mathfrak{T}$ übereinstimmen.

Damit können wir das Resultat in folgendem Sinne auf komplexe Maße ausdehnen: Sind $\nu, \hat{\nu}$ zwei komplexe Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ und ist $\mathfrak{T}$ ein Semiring auf Ω, sodass $\mathcal{A}$ die kleinste σ-Algebra ist, die $\mathfrak{T}$ enthält. Dann gilt:

$$\nu\restriction_{\mathfrak{T}} = \hat{\nu}\restriction_{\mathfrak{T}} \quad \Rightarrow \quad \nu = \hat{\nu}.$$

Lemma 3.4.5. *Ist μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$, dann ist die Menge*

$$D := \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$$

höchstens abzählbar.

Beweis. Mit $D_n := \left\{x \in [-n, n] : \mu(\{x\}) > \frac{1}{n}\right\}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Da μ auf beschränkten Mengen endlich ist, sind die Mengen D_n endlich. Damit ist D höchstens abzählbar. □

Lemma 3.4.6. *Ist ν ein komplexes Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dann gilt*

$$\nu((a, b]) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \nu((a + \epsilon, b + \epsilon])$$

für alle $a < b$.

Beweis. Nach Bemerkung 3.4.3 lässt sich ν als Linearkombination von Borelmaßen darstellen. Es reicht also die Aussage für Borelmaße zu zeigen.

Ist μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$, dann gilt

$$|\mu((a, b]) - \mu((a + \epsilon, b + \epsilon])| \leq \mu((a, a + \epsilon]) + \mu((b, b + \epsilon]). \tag{3.30}$$

Da μ stetig von oben ist, konvergiert die rechte Seite in (3.30) für $\epsilon \searrow 0$ gegen 0. □

Satz 3.4.7. *Sei μ ein Borelmaß mit $\mu \neq 0$ und $\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty$ und sei der Multiplikationsoperator M_t auf $L^2(d\mu)$ definiert wie in* (3.29)*. Dann ist M_t selbstadjungiert und die Relation S, definiert durch*

$$S := M_t\restriction_{dom\ S} \quad \text{mit } dom\ S := \left\{ \phi \in dom\ M_t : \int \phi\ d\mu = 0 \right\}, \tag{3.31}$$

ist symmetrisch und einfach mit Defektindizes $(1,1)$*. Die Funktion*

$$q(\lambda) := \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{t^2+1} \right)\ d\mu(t) \tag{3.32}$$

ist eine Q-Funktion von (S, M_t). Das Spektralmaß von M_t ist durch

$$E : \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \rightarrow \quad \mathfrak{B}(L^2(d\mu)), \\ \Delta & \mapsto \quad [\phi \mapsto \mathbb{1}_\Delta \phi], \end{cases} \tag{3.33}$$

gegeben.

Beweis. Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte:

(1.) M_t ist selbstadjungiert.

(2.) S ist symmetrisch mit Defekt $(1,1)$.

(3.) S ist einfach.

(4.) Die in (3.33) definierte Abbildung ist das Spektralmaß von M_t.

ad (1.) Wir zeigen zunächst, dass M_t dicht definiert ist. Sei dazu $\phi \in L^2(d\mu)$ beliebig, dann definieren wir eine Folge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^2(d\mu)$ durch

$$\phi_n(t) := \phi(t)\ \mathbb{1}_{[-n,n]}(t)$$

Wegen

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^2 |\phi_n(t)|^2\ d\mu(t) = \int\limits_{[-n,n]} t^2 |\phi(t)|^2\ d\mu(t) \leq n^2 \|\phi\|^2 < +\infty$$

gilt $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq$ dom M_t; mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz schließen wir, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\phi_n - \phi|^2\ d\mu = \int\limits_{(-\infty,-n)\cup(n,+\infty)} |\phi|^2\ d\mu$$

im Grenzübergang $n \to \infty$ verschwindet, d.h. ϕ_n konvergiert gegen ϕ. Insbesondere liegt dom M_t dicht in $L^2(d\mu)$.

Der Multiplikationsoperator ist symmetrisch, denn für $\phi, \psi \in$ dom M_t gilt

$$(M_t\phi, \psi) = \int t\phi(t)\overline{\psi(t)}\ d\mu(t) = (\phi, M_t\psi)\,.$$

Sei nun $\psi \in$ dom M_t^*, d.h. es gibt ein $\chi \in L^2(d\mu)$, sodass

$$(\psi, M_t\phi) = (\chi, \phi) \quad \text{für alle } \phi \in \text{dom } M_t.$$

Damit gilt für jedes $\phi \in \operatorname{dom} M_t$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (t\psi(t) - \chi(t))\, \overline{\phi(t)}\; d\mu(t) = 0;$$

wählt man $\phi(t) := (t\psi(t) - \chi(t))\, \mathbb{1}_{[-n,n]}$ für $n \in \mathbb{N}$ – um zu zeigen, dass $\phi \in \operatorname{dom} M_t$ argumentiert man ähnlich wie oben – so erhält man

$$\int\limits_{[-n,n]} |t\psi(t) - \chi(t)|^2\; d\mu(t) = 0.$$

Es folgt $t\psi(t) = \chi(t)$ μ-fast überall in $[-n,n]$. Bezeichne D_n die Menge aller $t \in [-n,n]$ mit $t\psi(t) \neq \chi(t)$, dann ist

$$\{t \in \mathbb{R} : t\psi(t) \neq \chi(t)\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$$

eine μ-Nullmenge. Damit haben wir gezeigt, dass $t\psi(t)$ auf dem Komplement einer Nullmenge mit $\chi \in L^2(d\mu)$ übereinstimmt. Es folgt $\psi \in \operatorname{dom} M_t$. Also gilt $M_t^* \subseteq M_t$. Aus der Symmetrie von M_t folgt auch die umgekehrte Inklusion.

ad (2.) Wir definieren die Abbildung

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{C}\setminus\mathbb{R} & \to & L^2(d\mu), \\ \lambda & \mapsto & \frac{1}{.-\lambda}. \end{cases}$$

Die Voraussetzung $\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty$ garantiert, dass γ tatsächlich Werte in $L^2(d\mu)$ hat. Da für $\lambda, \nu \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$\gamma(\nu) = \frac{1}{t-\nu} = \left(1 + \frac{\nu-\lambda}{t-\nu}\right)\frac{1}{t-\lambda} = \left(I + (\nu-\lambda)[M_t-\nu]^{-1}\right)\gamma(\lambda)$$

gilt, wird für festes $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ nach Lemma 3.4.1 durch

$$\tilde{S} := \left\{\phi \in \operatorname{dom} M_t : \left((M_t - \bar{\lambda})\phi, \gamma(\lambda)\right) = 0\right\}$$

eine symmetrische Relation mit Defektindizes $(1,1)$ definiert. Da für $\phi \in \operatorname{dom} M_t$

$$\left((M_t - \bar{\lambda})\phi, \gamma(\lambda)\right) = \int (t-\bar{\lambda})\phi(t)\frac{1}{t-\bar{\lambda}}\; d\mu(t) = \int \phi(t)\; d\mu(t)$$

stimmt S mit $\tilde{S}$ überein.

ad (3.) Für die Einfachheit von S reicht es nach Korollar 3.2.9

$$\operatorname{clspan}\{\gamma(\lambda) :\ \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\} = L^2(d\mu) \tag{3.34}$$

zu zeigen. Sei dazu f im orthogonalen Komplement der linken Seite von (3.34).
Wir zerlegen f gemäß

$$f = (\Re f)_+ - (\Re f)_- + i(\Im f)_+ - i(\Im f)_- =: f_1 - f_2 + if_3 - if_4,$$

wobei für eine reellwertige Funktion g mit g_+ bzw. g_- der Positivteil bzw. der Negativteil von g gemeint ist. Damit sind die Funktion f_j positiv und erfüllen $|f_j| \leq |f|$. Durch

$$\nu_j(\Delta) := \int\limits_{\Delta} f_j \; d\mu, \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

werden für $j = 1, \ldots, 4$ Maße definiert. Wegen $\frac{1}{(t^2+1)^2} \leq \frac{1}{t^2+1}$ folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\nu_j(t)}{t^2+1} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f_j(t)}{t^2+1} \; d\mu(t) \leq \|f\|_{L^2(d\mu)} \left\| \frac{1}{.^2+1} \right\|_{L^2(d\mu)} \leq \|f\|_{L^2(d\mu)} \int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty.$$

Insbesondere sind die Maße ν_j Borelmaße. Für $j = 1, \ldots, 4$ seien durch

$$q_j(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) \; d\nu_j(t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

vier Nevanlinna-Funktionen definiert. Nach Satz 3.3.15 (iii) gilt nun für $t_1 < t_2$

$$\frac{1}{2}\nu_j(\{t_1\}) + \nu_j\left((t_1, t_2)\right) + \frac{1}{2}\nu_j(\{t_2\}) = \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{t_1}^{t^2} \left(q_j(x+iy) - q_j(x-iy)\right) \, dx. \tag{3.35}$$

Da für $q := q_1 - q_2 + iq_3 - iq_4$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ wegen der Voraussetzung an f

$$q(z) - q(\bar{z}) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right) f \; d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z} \; d\mu(t) - \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-\bar{z}} \; d\mu(t) = 0$$

gilt, liefert geeignete Linearkombination von (3.35)

$$\frac{1}{2} f(t_1)\mu(\{t_1\}) + \int\limits_{(t_1,t_2)} f \; d\mu + \frac{1}{2} f(t_2)\mu(\{t_2\}) = 0. \tag{3.36}$$

Nach Lemma 3.4.5 ist mit $\mathcal{C} := \{N > 0 : \; \mu(\{-N\}) = \mu(\{N\}) = 0\}$ die Menge $(0, +\infty) \setminus \mathcal{C}$ höchstens abzählbar. Anwendung der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung zeigt, dass für $N \in \mathcal{C}$ die Funktion $f\mathbb{1}_{(-N,N]}$ bezüglich μ integrierbar ist. Damit wird durch $\nu(\Delta) := \int_\Delta f\mathbb{1}_{(-N,N]} d\mu$ ein komplexes Maß festgelegt. Mit Gleichung (3.36) erhalten wir

$$\frac{1}{2}\nu(\{t_1\}) + \nu\left((t_1, t_2)\right) + \frac{1}{2}\nu(\{t_2\}) = 0 \tag{3.37}$$

für alle $-N < t_1 < t_2 \leq N$. Wegen $\nu(\{-N\}) = \mu(\{-N\}) = 0$ gilt Gleichung (3.37) sogar für $-N \leq t_1 < t_2 \leq N$. Da ν als Linearkombination von endlichen Borelmaßen (vgl. Bemerkung 3.4.3) dargestellt werden kann, ist die Menge

$$D := \{x \in \mathbb{R} : \; \nu(\{x\}) \neq 0\}$$

höchstens abzählbar.

Mit (3.37) folgt, dass $\nu(I) = 0$ für jedes Intervall $I = (a, b]$, dessen Randpunkte in $(-N, N] \setminus D$ liegen.

Für allgemeines $I = (a, b] \subseteq (-N, N]$ gibt es eine monoton fallende Folge $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, +\infty)$, sodass

$$a + \epsilon_n, \; b + \epsilon_n \notin D \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit Lemma 3.4.6 folgt dann

$$\nu\left((a,b]\right) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \nu\left((a+\epsilon_n, b+\epsilon_n]\right) = 0.$$

Für $I = (a,b] \subseteq \mathbb{R}$ gilt also

$$\nu(I) = \underbrace{\nu\left(I \cap (-\infty,-N]\right)}_{=0} + \nu\left(I \cap (-N,N]\right) + \underbrace{\nu\left(I \cap (N,+\infty)\right)}_{=0} = 0,$$

weil die Randpunkte des Intervalls $I \cap (-N,N]$ wegen $N \in \mathcal{C}$ nicht in D liegen.

Da der Semiring aller halboffenen Intervalle $(a,b]$ die Borelmengen auf $\mathbb{R}$ erzeugt, folgt mit Bemerkung 3.4.4, dass ν das Nullmaß ist. Mit Fakta 2.4.3 (iv) folgt

$$0 = |\nu|(\mathbb{R}) = \int\limits_{(-N,N]} |f| \; d\mu,$$

d.h. $f = 0$ $\mu-$f.ü. in $(-N,N]$. Da man in $\mathcal{C}$ eine gegen $+\infty$ konvergierende Folge finden kann, und $N \in \mathcal{C}$ beliebig war, schließen wir $f = 0$ $\mu-$f.ü.

ad (4.) Die in (3.32) definierte Funktion erfüllt für $\lambda \neq \bar{\nu} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{q(\lambda) - \overline{q(\nu)}}{\lambda - \bar{\nu}} &= \frac{1}{\lambda - \bar{\nu}} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda}\frac{1}{t-\bar{\nu}} \; d\mu(t) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{(t-\lambda)(t-\bar{\nu})} \; d\mu(t) = \left(\gamma(\lambda), \gamma(\nu)\right);\end{aligned}$$

demnach ist q eine Q-Funktion von (S, M_t).

Dass die Abbildung E die definierenden Eigenschaften eines Spektralmaßes erfüllt, ist eine einfache Rechnung. Für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\phi \in L^2(d\mu)$ gilt

$$E_{\phi,\phi}(\Delta) = (E(\Delta)\phi, \phi) = \int\limits_{\Delta} |\phi|^2 \; d\mu$$

und damit folgt

$$\left(\int t \; dE(t)\phi, \phi\right) = \int t \; dE_{\phi,\phi}(t) = \int t\,|\phi(t)|^2 \; d\mu(t) = (M_t\phi, \phi)\,.$$

Anwendung der Polarformel liefert $(\int t \; dE(t)\phi, \psi) = (M_t\phi, \psi)$ für alle $\psi \in \operatorname{dom} M_t$. Da M_t dicht definiert ist, ist E das Spektralmaß von M_t.

□

Für ein Borelmaß μ und ein $b \geq 0$ schreiben wir Elemente aus $L^2(d\mu) \times \mathbb{C}$ als Spaltenvektoren $\binom{\phi}{c}$ mit $\phi \in L^2(d\mu)$ und $c \in \mathbb{C}$. Der Raum wird versehen mit dem inneren Produkt

$$\left(\begin{pmatrix}\phi \\ c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi \\ d\end{pmatrix}\right) := (\phi, \psi)_{L^2(d\mu)} + bcd.$$

zu einem Hilbertraum, den wir im Folgenden mit $L^2(d\mu) \oplus \mathbb{C}_b$ bezeichnen.
Ist $b = 0$, dann gilt $L^2(d\mu) \oplus \mathbb{C}_b \simeq L^2(d\mu)$ und im Falle $\mu = 0$ gilt $L^2(d\mu) \oplus \mathbb{C}_b \simeq \mathbb{C}_b$.

Beispiel 3.4.8. Bezeichnet M_t wieder den Multiplkationsoperator auf $L^2(d\mu)$ (vgl. (3.29)), dann wird durch

$$A := M_t \oplus [\{0\} \times \mathbb{C}_b] \tag{3.38}$$

eine selbstadjungierte Relation auf $\mathfrak{H} := L^2(d\mu) \oplus \mathbb{C}_b$ festgelegt; vgl. Lemma 2.4.12. Offenbar entspricht M_t genau dem Operatoranteil von A. Die Abbildung γ sei durch

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} & \to \quad \mathfrak{H}, \\ \lambda & \mapsto \quad \left(\begin{smallmatrix} \frac{1}{\cdot - \lambda} \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \end{cases}$$

definiert. Es bezeichne $P \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ die orthogonale Projektion auf $(\operatorname{mul} A)^\perp = L^2(d\mu) \leq \mathfrak{H}$. Da für $\lambda, \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ nach Satz 2.4.17

$$\begin{aligned} \big(I + (\nu - \lambda)[A - \nu]^{-1}\big)\, \gamma(\lambda) &= \big(I + (\nu - \lambda)[M_t - \nu]^{-1} P\big)\, \gamma(\lambda) \\ &= \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\nu - \lambda}{t - \nu}\right) \frac{1}{t - \lambda} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t - \nu} \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma(\nu) \end{aligned}$$

gilt, wird nach Lemma 2.4.9 für festes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ durch

$$S := \Big\{ (f; g) \in A : \big(g - \bar{\lambda} f, \gamma(\lambda)\big) = 0 \Big\}$$

eine symmetrische Relation mit Defekträumen $\mathcal{N}_\lambda = \operatorname{span}\ \{\gamma(\lambda)\}$ festgelegt.
Für $(g; f) = \left(\left(\begin{smallmatrix} \phi(t) \\ 0 \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} t\phi(t) \\ c \end{smallmatrix}\right) \right) \in A$ gilt

$$\big(g - \bar{\lambda} f, \gamma(\lambda)\big) = \left((t - \bar{\lambda})\phi(t), \frac{1}{t - \lambda} \right) + (c, 1) = \int \phi \; d\mu + bc$$

und wir schließen

$$S = \left\{ \left(\begin{pmatrix} \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} t\phi(t) \\ c \end{pmatrix} \right) : \int \phi \; d\mu + cb = 0, \quad \phi \in \operatorname{dom} M_t, \quad c \in \mathbb{C} \right\}. \tag{3.39}$$

Um nachzuweisen, dass S einfach ist, zeigen wir

$$\operatorname{clspan} \{\gamma(z) : \ z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\} = L^2(d\mu) \oplus \mathbb{C}_b.$$

Sei dazu $\binom{\psi}{d}$ im orthogonalen Komplement der linken Seite, d.h.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\psi(t)}{t - z} \; d\mu(t) + bd = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R};$$

d.h. $z \mapsto \int \frac{\psi(t)}{t - z} \; d\mu$ ist konstant. Für $z = iy$ gilt

$$\left\| \frac{1}{. - z} \right\|^2_{L^2(d\mu)} = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{t^2 + y^2} \overset{y \nearrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Damit folgt wegen

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\psi(t)}{t - iy} \; d\mu(t) \right| \leq \|\psi\|_{L^2(d\mu)} \left\| \frac{1}{. - iy} \right\|_{L^2(d\mu)},$$

dass $z \mapsto \int \frac{\psi(t)}{t-z}\, d\mu$ identisch Null ist. Im Beweis von Satz 3.4.7 wurde gezeigt, dass dies $\psi = 0$ in $L^2(d\mu)$ impliziert. Wegen

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi}{t-z}\, d\mu(t) = -bd$$

gilt entweder $b = 0$ oder $d = 0$. In beiden Fällen ist $\binom{\psi}{d}$ der Nullvektor in $L^2(d\mu) \oplus \mathbb{C}_b$.

Wir rechnen nun nach, dass

$$q(\lambda) := b\lambda + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{t^2+1}\, d\mu(t), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

eine Q-Funktion von (S, A) ist: Für $\lambda \neq \bar{\nu}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{q(\lambda) - \overline{q(\nu)}}{\lambda - \bar{\nu}} &= \frac{b(\lambda - \bar{\nu})}{\lambda - \bar{\nu}} + \frac{1}{\lambda - \bar{\nu}} \int \frac{1}{t-\lambda} - \frac{1}{t-\bar{\nu}}\, d\mu(t) \\ &= b + \int \frac{d\mu(t)}{(t-\lambda)(t-\bar{\nu})} = (\gamma(\lambda), \gamma(\nu))\,. \end{aligned}$$

Da M_t der Operatoranteil von A ist und das Spektralmaß von M_t bekannt ist (siehe Satz 3.4.7), ist das Spektralmaß von A charakterisiert durch

$$E(\Delta) : \begin{pmatrix} \phi \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \phi \mathbb{1}_\Delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad E(\{\infty\}) : \begin{pmatrix} \phi \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Mithilfe von Satz 3.3.6 (ii) erhalten wir das folgende Resultat:

Korollar 3.4.9. *Sei q eine Nevanlinna-Funktion mit Integraldarstellung*

$$q(\lambda) = a + b\lambda + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-\lambda} - \frac{t}{t^2+1} \right) d\mu(t),$$

sodass entweder $b > 0$ oder $\mu \neq 0$, dann gibt es einen Hilbertraum $\mathcal{H}$, eine einfache und symmetrische Relation S mit Defektindizes $(1, 1)$ und $A \in \mathfrak{E}(S)$, sodass q eine Q-Funktion von (S, A) ist.

Wir haben also Beispiele von symmetrischen, einfachen Relationen mit Defekt $(1, 1)$ gefunden. Tatsächlich liegt eine der beiden obigen Situation bis auf unitäre Transformation immer vor, wenn S symmetrisch und einfach mit Defektindizes $(1, 1)$ ist. Es kommt dabei in erster Linie auf die richtige Wahl des Raumes, sprich die Wahl des Maßes μ an.

Definition 3.4.10. Ist $S \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch, $A \in \mathfrak{E}(A)$ und $\hat{\mathcal{H}}$ ein weiterer Hilbertraum und sind $\hat{S}, \hat{A}$ zwei lineare Relationen auf $\hat{\mathcal{H}}$, dann sagen wir $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}, \hat{A})$ ist ein *Modell* für $(\mathcal{H}, S, A)$, falls es eine unitäre Abbildung $U : \hat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ gibt, sodass

$$U\hat{S} = SU \quad \text{und} \quad U\hat{A} = AU.$$

Man beachte, dass für $T \leq \mathcal{H}^2$, $\hat{T} \leq \hat{\mathcal{H}}^2$ und bijektives U (d.h. insbesondere auch für unitäres U)

$$U\hat{T} = TU \quad \Leftrightarrow \quad \hat{T} = U^{-1}TU \quad \Leftrightarrow \quad T = U\hat{T}U^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad T = (U \times U)(\hat{T}).$$

Diese Tatsache folgt direkt aus der Definition des Relationenprodukts.

Lemma 3.4.11. *Es sei $U : \hat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ unitär. Dann gilt:*

(i) Für $T \leq \mathcal{H}^2$ und $\hat{T} \leq \hat{\mathcal{H}}^2$ mit $U\hat{T} = TU$ ist $\hat{T}$ genau dann selbstadjungiert, wenn T selbstadjungiert ist.

(ii) Sind $A \leq \mathcal{H}^2$ und $\hat{A} \leq \hat{\mathcal{H}}^2$ selbstadjungierte Relationen mit Spektralmaßen E und $\hat{E}$, dann gilt

$$U\hat{A} = AU \quad \Leftrightarrow \quad U\hat{E}(.) = E(.)U. \tag{3.41}$$

Beweis.

ad (i) Falls T selbstadjungiert ist, dann gilt

$$(\hat{T})^* = (U^{-1}TU)^* = U^*T^*(U^{-1})^* = U^{-1}TU = \hat{T},$$

d.h. $\hat{T}$ ist selbstadjungiert. Für die andere Implikation argumentiert man genauso.

ad (ii) Es gelte $\hat{A}U = UA$. Dann erfüllen die Resolventen R und $\hat{R}$ von A und $\hat{A}$

$$\hat{R}(\lambda) = [\hat{A} - \lambda]^{-1} = [UAU^{-1} - \lambda UU^{-1}]^{-1} = \left[U(A-\lambda)U^{-1}\right]^{-1} = UR(\lambda)U^{-1}.$$

Man überlegt sich leicht, dass durch $F(.) := UE(.)U^{-1}$ ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty), \hat{\mathcal{H}} \rangle$ festgelegt wird. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\xi, \eta \in \hat{\mathcal{H}}$ gilt damit

$$\begin{aligned}\left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda}\, dF(t)\right]\xi, \eta\right) &= \left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda}\, dE(t)\right]U^{-1}\xi, U^{-1}\eta\right) \\ &= \left(R(\lambda)U^{-1}\xi, U^{-1}\eta\right) = \left(\hat{R}(\lambda)\xi, \eta\right).\end{aligned}$$

Mit Satz 2.4.17 folgt $F = \hat{E}$, also $U\hat{E}(.) = E(.)U$.

Geht man umgekehrt von $U\hat{E}(.) = E(.)U$ aus, dann gilt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\xi, \eta \in \hat{\mathcal{H}}$ wieder nach Satz 2.4.17

$$\left(\hat{R}(\lambda)\xi, \eta\right) = \left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda}\, d\hat{E}\right]\xi, \eta\right) = \left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda}\, dE\right]U^{-1}\xi, U^{-1}\eta\right) = \left(UR(\lambda)U^{-1}\xi, \eta\right),$$

d.h. $\hat{R}(\lambda) = UR(\lambda)U^{-1}$. Damit erhalten wir

$$\hat{A} = \hat{R}(\lambda)^{-1} + \lambda = \left[URU^{-1}\right]^{-1} + \lambda UU^{-1} = U\left[R(\lambda)^{-1} + \lambda\right]U^{-1} = UAU^{-1}.$$

□

Satz 3.4.12. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch mit Defektindizes $(1,1)$ und $A \in \mathfrak{E}(S)$. Für ein Modell $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}, \hat{A})$ von $(\mathcal{H}, S, A)$ gilt*

(i) $\hat{S}$ ist symmetrisch mit Defektindizes $(1,1)$,

(ii) $\hat{S}$ ist genau dann abgeschlossen, wenn S abgeschlossen ist,

(iii) $\hat{A} \in \mathfrak{E}(\hat{S})$ und

(iv) Eine Funktion q ist genau dann eine Q-Funktion von $(\hat{S}, \hat{A})$, wenn q eine Q-Funktion von (S, A) ist.

Beweis. Es bezeichne q eine Q-Funktion von (S, A) und γ eine zu q gehörige Defektabbildung. Es bezeichne U die unitäre Abbildung zwischen $\hat{\mathcal{H}}$ und $\mathcal{H}$, die

$$U\hat{S} = SU \quad \text{und} \quad U\hat{A} = AU$$

leistet. Es gilt $\hat{S} = U^{-1}SU$, sowie $\hat{A} = U^{-1}AU$. Nach Lemma 3.4.11 ist A selbstadjungiert. Die Inklusion $S \subseteq A$ impliziert $\hat{S} \subseteq \hat{A}$ und damit ist $\hat{S}$ symmetrisch und $A \in \mathfrak{E}(\hat{S})$.

Wegen $S = (U \times U)(\hat{T})$ und da $U \times U$ ein Homöomorphismus ist, folgt Aussage (ii).

Bezeichnet $\mathcal{N}_.$ bzw. $\hat{\mathcal{N}}_.$ die Defekträume von S bzw. $\hat{S}$, dann gilt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\phi \in \hat{\mathcal{N}}_\lambda &\Leftrightarrow (\eta - \bar{\lambda}\xi, \phi) = 0 \quad \forall (\xi; \eta) \in \hat{S} \\
&\Leftrightarrow \left(U^{-1}(g - \bar{\lambda}f), \phi\right) = 0 \quad \forall (f; g) \in S \\
&\Leftrightarrow (g - \bar{\lambda}f, U\phi) = 0 \quad \forall (f; g) \in S \Leftrightarrow U\phi \in \mathcal{N}_\lambda,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

und wir schließen $\hat{\mathcal{N}}_\lambda = U^{-1}(\mathcal{N}_\lambda)$. Wir definieren die Abbildung $\hat{\gamma}(\lambda) := U^{-1}\gamma(\lambda)$ auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Weil für $\lambda, \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\left(I + (\nu - \lambda)[\hat{A} - \lambda]^{-1}\right)\hat{\gamma}(\lambda) &= \left(I + (\nu - \lambda)[U^{-1}AU - \lambda U^{-1}U]^{-1}\right)\hat{\gamma}(\lambda) \\
&= \left(U^{-1}U + (\nu - \lambda)[U^{-1}(A - \lambda)U]^{-1}\right)\hat{\gamma}(\lambda) \\
&= U^{-1}\left(I + (\nu - \lambda)[A - \lambda]^{-1}\right)\underbrace{U\hat{\gamma}(\lambda)}_{=\gamma(\lambda)} = U^{-1}\gamma(\nu) = \hat{\gamma}(\nu)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

gilt, ist $\hat{\gamma}$ eine Defektabbildung für $(\hat{S}, \hat{A})$.
Weil sich für $\lambda \neq \bar{\nu}$

$$(\hat{\gamma}(\lambda), \hat{\gamma}(\nu)) = \left(U^{-1}\gamma(\lambda), U^{-1}\gamma(\nu)\right) = (\gamma(\lambda), \gamma(\nu)) = \frac{q(\lambda) - \overline{q(\nu)}}{\lambda - \bar{\nu}}$$

ergibt, ist q eine Q-Funktion von $(\hat{S}, \hat{A})$. □

Proposition 3.4.13. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch mit Defekt $(1, 1)$ und sei $A \in \mathfrak{E}(S)$. Es sei γ eine Defektabbildung von (S, A). Ist $\hat{\mathcal{H}}$ ein weiterer Hilbertraum und $U : \hat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ unitär, dann ist mit*

$$\hat{A} := U^{-1}AU \quad \text{und} \quad \hat{S} := U^{-1}SU$$

das Tripel $\left(\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}, \hat{A}\right)$ ein Modell für $(\mathcal{H}, S, A)$. Die Abbildung $\hat{\gamma}(.) := U^{-1}\gamma(.)$ ist eine Defektabbildung von $(\hat{S}, \hat{A})$.

Beweis. Da U unitär ist gilt für eine Relationen $T \leq \mathcal{H}^2, \hat{T} \leq \hat{\mathcal{H}}^2$, dass $U\hat{T} = TU$ äquivalent zu $\hat{T} = U^{-1}TU$ ist. Daraus ergibt sich sofort, dass $\left(\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}, \hat{A}\right)$ ein Modell für $(\mathcal{H}, S, A)$ ist.

Die Identitäten (3.42) und (3.43) aus dem Beweis des vorangehenden Satzes zeigen, dass $\hat{\gamma}$ eine Defektabbildung von $(\hat{S}, \hat{A})$ ist. □

Satz 3.4.14. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ abgeschlossen, symmetrisch und einfach mit Defektindizes $(1, 1)$. Es sei $A \in \mathfrak{E}(S)$ und q eine Q-Funktion von (S, A) mit Integraldarstellung*

$$q(\lambda) = a + b\lambda + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t - \lambda} - \frac{t}{t^2 + 1}\right) d\mu(t), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Dann tritt genau einer der folgenden beiden Fälle ein:

(O) $b = 0$ und das Tripel aus Satz 3.4.7 ist ein Modell für $(\mathcal{H}, S, A)$.

(R) $b \neq 0$ und das Tripel aus Beispiel 3.4.8 ist Modell für $(\mathcal{H}, S, A)$.

Beweis. Angenommen es gilt $b = 0$ und $\mu = 0$, dann ist q konstant und reell. Für die zugehörige Defektabbildung γ gilt dann

$$\|\gamma(\lambda)\|^2 = \frac{\Im q(\lambda)}{\Im \lambda} = 0 \quad \text{für jedes } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

d.h. $\gamma \equiv 0$. Nach Lemma 3.4.1 sind die Defekträume von S nulldimensional. Dies ergibt einen Widerspruch zur Annahme, dass S Defektindizes $(1, 1)$ hat.

$b = 0$: Es bezeichne E das Spektralmaß von A und γ eine zu q gehörige Defektabbildung, d.h.

$$\frac{q(\lambda) - \overline{q(\nu)}}{\lambda - \bar{\nu}} = (\gamma(\lambda), \gamma(\nu)) \quad \text{für } \lambda \neq \bar{\nu}.$$

Wir definieren die Abbildung U durch

$$U : \begin{cases} L^2(d\mu) & \rightarrow & \mathcal{H}, \\ \phi & \mapsto & \left[\int (t - i)\phi(t)\; dE(t)\right] \gamma(i). \end{cases}$$

Wegen Proposition 3.3.16 (iii) gilt für $\phi \in L^2(d\mu)$

$$\int |(t - i)\phi(t)|^2 \;\; dE_{\gamma(i),\gamma(i)}(t) = \int |\phi|^2 \;\; d\mu(t) = \|\phi\|^2 < +\infty, \tag{3.44}$$

d.h. $\gamma(i) \in \operatorname{dom}\left[\int (t - i)\phi(t)\; dE(t)\right]$ und U ist damit wohldefiniert. Gemeinsam mit Fakta 2.4.6 erhalten wir somit für $\phi, \psi \in L^2(d\mu)$ und $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} U(\phi + \psi) &= \left[\int (t - i)(\phi(t) + \psi(t))\; dE(t)\right] \gamma(i) \\ &= \operatorname{cl}\left(\left[\int (t - i)\phi(t)\; dE(t)\right] + \left[\int (t - i)\psi(t)\; dE(t)\right]\right) \gamma(i) = U\phi + U\psi, \\ U(\lambda\phi) &= \lambda U\phi, \\ U(0\phi) &= 0 = 0U(\phi). \end{aligned}$$

Nach Fakta 2.4.6 (i) und wegen Gleichung (3.44) ist U linear und beschränkt.

Die Menge

$$\mathcal{D} := \left\{\phi \in L^2(d\mu) : \; (. - i)\phi(.) \text{ ist beschränkt}\right\} \tag{3.45}$$

enthält den dichten Teilraum [7] $\operatorname{span}\left\{\frac{1}{. - z} : \; z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right\}$ und liegt damit selbst dicht in

[7] Vgl. dazu Beweis von Satz 3.4.7, Punkt (3.).

$L^2(d\mu)$. Für $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ gilt

$$\begin{aligned}
(U\phi, U\psi) &= \left(\left[\int (t-i)\phi(t)\; dE(t)\right]\gamma(i), \left[\int (t-i)\psi(t)\; dE(t)\right]\gamma(i)\right) \\
&= \left(\left[\int (t-i)\psi(t)\; dE(t)\right]^* \left[\int (t-i)\phi(t)\; dE(t)\right]\gamma(i), \gamma(i)\right) \\
&= \left(\left[\int (t+i)\overline{\psi(t)}\; dE(t)\right] \left[\int (t-i)\phi(t)\; dE(t)\right]\gamma(i), \gamma(i)\right) \\
&= \left(\left[\int \phi(t)\overline{\psi(t)}(t^2+1)\; dE(t)\right]\gamma(i), \gamma(i)\right) \\
&= \int \phi(t)\overline{\psi(t)}(t^2+1)\; dE_{\gamma(i),\gamma(i)}(t) = \int \phi(t)\overline{\psi(t)}\; d\mu(t) = (\phi, \psi).
\end{aligned}$$

$U\restriction_{\mathcal{D}}$ ist damit isometrisch. Da U beschränkt ist, ist auch U als stetige Fortsetzung von $U\restriction_{\mathcal{D}}$ isometrisch.

Der Teilraum $\mathcal{N} := \operatorname{span}\{\gamma(\lambda) : \; \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}$ liegt wegen der Einfachheit von S dicht in $\mathcal{H}$. Da für $\hat{\gamma}(\lambda) := \frac{1}{.-\lambda} \in L^2(d\mu)$

$$\begin{aligned}
U\hat{\gamma}(\lambda) &= \left[\int \frac{t-i}{t-\lambda}\; dE(t)\right]\gamma(i) = \left[\int 1 + \frac{\lambda-i}{t-\lambda}\; dE(t)\right]\gamma(i) \\
&= \left(I + (\lambda-i)[A-\lambda]^{-1}\right)\gamma(i) = \gamma(\lambda);
\end{aligned}$$

gilt, folgt, dass $\mathcal{N} \subseteq \operatorname{ran} U$; da $\operatorname{ran} U$ abgeschlossen ist, erkennen wir, dass $\operatorname{ran} U = L^2(d\mu)$, d.h. U ist unitär.

Nach Proposition 3.4.13 wird durch

$$\hat{A} := U^{-1}AU \quad \text{und} \quad \hat{S} := U^{-1}SU$$

eine selbstadjungierte und eine symmetrische Relation auf $L^2(d\mu)$ festgelegt. Weiters ist $\hat{\gamma}(.) = U^{-1}\gamma(.)$ eine Defektabbildung von $(\hat{S}, \hat{A})$. Nach Lemma 3.4.11 ist das Spektralmaß von $\hat{A}$ durch $\hat{E}(.) := U^{-1}E(.)U$ gegeben. Für $\phi, \psi \in \mathcal{D}$ und $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}
E_{U\phi,U\psi}(\Delta) &= \left(E(\Delta)\left[\int (t-i)\phi(t)\; dE(t)\right]\gamma(i), \left[\int (t-i)\psi(t)\; dE(t)\right]\gamma(i)\right) \\
&= \left(\left[\int_\Delta \phi(t)\overline{\psi(t)}(t^2+1)\; dE(t)\right]\gamma(i), \gamma(i)\right) = \int_\Delta \phi(t)\overline{\psi(t)}\; d\mu(t).
\end{aligned}$$

Da sowohl die linke als auch die rechte Seite in obiger Gleichung stetig von $(\phi; \psi) \in \left(L^2(d\mu)\right)^2$ abhängen und da $\mathcal{D}$ dicht liegt, gilt

$$E_{U\phi,U\psi}(\Delta) = \int_\Delta \phi(t)\overline{\psi(t)}\; d\mu(t) \quad \text{für alle } \phi, \psi \in L^2(d\mu).$$

Sei mit F das Spektralmaß von M_t bezeichnet (vgl. Satz 3.4.7), dann gilt für $\phi, \psi \in L^2(d\mu)$ und $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\left(\hat{E}(\Delta)\phi, \psi\right) = \left(U^{-1}E(\Delta)U\phi, \psi\right) = E_{U\phi,U\psi}(\Delta) = \int (\mathbb{1}_\Delta(t)\phi(t))\overline{\psi(t)}\; d\mu(t) = (F(\Delta)\phi, \psi)\,.$$

Es stimmen also die Spektralmaße von $\hat{A}$ und M_t überein; damit gilt wegen der Eindeutigkeit des Spektralmaßes $A = M_t$.

Proposition 3.4.13 und Lemma 3.4.1 implizieren gemeinsam mit $\hat{\gamma}(.) = U^{-1}\gamma(.)$

$$\begin{aligned}\hat{S} &= \left\{(\xi;\eta) \in \hat{A} : \left(\eta - \bar{\lambda}\xi, \hat{\gamma}(\lambda)\right) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\xi \in \operatorname{dom} M_t : \left((M_t - \bar{\lambda})\xi, \frac{1}{. - \lambda}\right) = 0 \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Wegen $\left((M_t - \bar{\lambda})\xi, \frac{1}{.-\lambda}\right) = \int \xi \, d\mu$, stimmt $\hat{S}$ mit der in Satz 3.4.7 definierten Symmetrie überein.

$b \neq 0$: Sei wieder E das Spektralmaß von A (das auf $\mathbb{R}_\infty$ lebt) und γ eine zu q gehörige Defektabbildung. Es bezeichne $P := E(\mathbb{R})$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_{op} = (\text{mul } A)^\perp$. Wir definieren die Abbildung

$$U : \begin{cases} L^2(d\mu) \times \mathbb{C}_b & \to \quad \mathcal{H}, \\ \binom{\phi}{c} & \mapsto \quad \left[\int\limits_{\mathbb{R}} (t-i)\phi(t) \, dE(t)\right] \gamma(i) + c(I-P)\gamma(i). \end{cases} \tag{3.46}$$

Wir zeigen, dass U auch in diesem Fall unitär ist: Man argumentiert genau so wie oben, dass U wohldefiniert und dass $U\restriction_{L^2(d\mu)\times\{0\}}$ isometrisch ist. Für $\phi \in \mathcal{D}$, wobei $\mathcal{D}$ wie in (3.45) definiert ist, und $m \in \text{mul } A$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\left[\int\limits_{\mathbb{R}} (t-i)\phi(t) \, dE(t)\right] \gamma(i), m\right) &= \left(\left[\int\limits_{\mathbb{R}} (t-i)\phi(t) \, dE(t)\right] \gamma(i), E(\{\infty\})m\right) \\ &= \left(E(\{\infty\}) \left[\int\limits_{\mathbb{R}} (t-i)\phi(t) \, dE(t)\right] \gamma(i), m\right) = 0;\end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von $U\restriction_{L^2(d\mu)\times\{0\}}$, gilt dies für alle $\phi \in L^2(d\mu)$.
Damit ergibt sich für $\binom{\phi}{c}, \binom{\psi}{d} \in L^2(d\mu) \oplus \mathbb{C}_b$ mit Proposition 3.3.16 (ii)

$$\begin{aligned}\left(U\begin{pmatrix}\phi\\c\end{pmatrix}, U\begin{pmatrix}\psi\\d\end{pmatrix}\right) &= \left(U\begin{pmatrix}\phi\\0\end{pmatrix}, U\begin{pmatrix}\psi\\0\end{pmatrix}\right) + (c(I-P)\gamma(i), d(I-P)\gamma(I)) \\ &= \int \phi\bar{\psi} \, d\mu + c\bar{d} \underbrace{\|(I-P)\gamma(i)\|^2}_{=b} = \left(\begin{pmatrix}\phi\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi\\d\end{pmatrix}\right),\end{aligned}$$

d.h. U ist eine Isometrie. Für die Surjektivität von U argumentieren wir ähnlich wie zuvor: Sei die Abbildung $\hat{\chi}$ durch

$$\hat{\chi}(\lambda) := \begin{pmatrix}\hat{\gamma}(\lambda)\\1\end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

definiert. Mit Satz 2.4.17 folgt wegen $\frac{\lambda - i}{t-\lambda} = \frac{t-i}{t-\lambda} - 1$

$$\begin{aligned}\gamma(\lambda) &= \left[I + (\lambda - i)[A-\lambda]^{-1}\right]\gamma(i) = \gamma(i) + \left[\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\lambda - i}{t-\lambda} \, dE(t)\right]\gamma(i) \\ &= \gamma(i) + \left[\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{t-i}{t-\lambda} - 1\right) \, dE(t)\right]\gamma(i) = (I-P)\gamma(i) + \left[\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{t-i}{t-\lambda} \, dE(t)\right] = U\hat{\chi}(\lambda).\end{aligned}$$

Wie im ersten Beweisteil können wir nun auf die Surjektivität von U schließen.

Laut Propositon 3.4.13 stellt $\left(L^2(d\mu) \oplus \mathbb{C}_b, \hat{S}, \hat{A}\right)$, mit

$$\hat{A} := U^{-1}AU \quad \text{und} \quad \hat{S} := U^{-1}SU$$

ein Modell für $(\mathcal{H}, S, A)$ dar. Dabei ist $\hat{\chi}(\lambda) = U^{-1}\gamma(\lambda)$ eine Defektabbildung von $(\hat{S}, \hat{A})$ und das Spektralmaß von $\hat{A}$ ist durch $\hat{E}(.) := U^{-1}E(.)U$ gegeben. Um zu zeigen, dass $\hat{A}$ mit der Relation aus Beispiel 3.4.8 übereinstimmt, reicht es wegen der Eindeutigkeit des Spektralmaßes zu zeigen, dass die Spektralmaße der beiden Relationen übereinstimmen. Bezeichne also G das in (3.40) definierte Spektralmaß. Dann gilt

$$U\hat{E}(\{\infty\})\hat{\chi}(\lambda) = E(\{\infty\})\gamma(\lambda) = (I-P)\gamma(\lambda) = U\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = UG(\{\infty\})\hat{\chi}(\lambda). \tag{3.47}$$

Für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ erhält man

$$\begin{aligned} U\hat{E}(\Delta)\hat{\chi}(\lambda) &= E(\Delta)U\gamma(\lambda) = E(\Delta)\left(\left[\int_{\mathbb{R}} 1 + \frac{\lambda - i}{t-\lambda}\, dE(t)\right]\gamma(i) + (I-P)\gamma(i)\right) \\ &= \left[\int_{\Delta} 1 + \frac{\lambda - i}{t-\lambda}\, dE(t)\right]\gamma(i) = U\begin{pmatrix}\frac{1}{.-\lambda}\mathbb{1}_{\Delta}(.)\\ 0\end{pmatrix} = UG(\Delta)\hat{\chi}(\lambda). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Da U unitär ist und $\operatorname{span}\{\hat{\chi}(\lambda) :\ \lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}$ dicht in $L^2(d\mu)\oplus\mathbb{C}_b$ liegt (vgl. Beispiel 3.4.8), schließen wir $\hat{E} = G$.

Da $\hat{\gamma}$ eine Defektabbildung von $(\hat{S}, \hat{A})$, aber auch von dem Paar aus Beispiel 3.4.8 ist, ist $\hat{S}$ genau die Symmetrie aus Gleichung (3.39).

□

Unser nächstes Ziel ist es, den Zusammenhang zwischen Q-Funktionen von verschiedenen selbstadjungierten Erweiterungen ein und derselben symmetrischen Relation zu verstehen. Dazu stellen wir zunächst die Differenz der Resolventen zweier verschiedener selbstadjungierter Erweiterungen von S mithilfe der Defektabbildung γ dar.

Proposition 3.4.15. *Sei S eine symmetrische und abgeschlossene Relation auf $\mathcal{H}$ mit Defektindizes $(1,1)$ und $A \in \mathfrak{E}(S)$. Sei $u_+ \in \mathcal{N}_i$ mit $\|u_+\| = 1$ und q die normierte Q-Funktion von (S, A). Weiters seien die Defektabbilung γ und $u_- \in \mathcal{N}_{-i}$ definiert durch*

$$\gamma(\lambda) := \left(I + (\lambda - i)[A-\lambda]^{-1}\right)u_+ \quad \textit{und} \quad u_- := \gamma(-i).$$

Für $\theta \in [0, 2\pi)$ seien die Relationen Z_θ und A_θ definiert durch

$$\begin{aligned} Z_\theta &:= \mathit{span}\left\{(u_+ - e^{i\theta}u_-; iu_+ + ie^{i\theta}u_-)\right\}, \\ A_\theta &:= S\hat{+}Z_\theta. \end{aligned}$$

Dann gilt

(i) $A_\theta \in \mathfrak{E}(A)$ *für jedes* $\theta \in [0, 2\pi)$,

(ii) $A_0 = A$,

(iii) für $\theta \in (0, 2\pi)$ und für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$[A_\theta - \lambda]^{-1} - [A - \lambda]^{-1} = (\phi - q(\lambda))^{-1} \left(., \gamma(\bar{\lambda})\right) \gamma(\lambda) \tag{3.49}$$

wobei $\phi = \phi(\theta) = i \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es bezeichne R die Resolvente von A und es sei für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ der Operator Γ_λ^μ wie in (3.10) definiert. Wir werden außerdem die Tatsache verwenden, dass $u_\pm = \gamma(\pm i)$.

ad (i) Nach Satz 3.1.7 reicht es zu zeigen, dass $\|u_-\| = 1$. Wegen $\overline{q(\lambda)} = q(\bar{\lambda})$ erhalten wir

$$\|u_-\|^2 = (\gamma(-i), \gamma(-i)) = \frac{q(-i) - \overline{q(-i)}}{-2i} = -\Im q(-i) = \Im q(i) = 1.$$

ad (ii) Nach Definition von u_- haben wir $(u_+; u_-) \in \Gamma_i^{-i}$; dies ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} (u_+; u_-) \in [I - 2iR(-i)] &\iff (u_+; u_- - u_+) \in -2iR(-i) \iff \\ &\iff (2iu_+; u_+ - u_-) \in R(-i) \iff \\ &\iff (u_+ - u_-; 2iu_+) \in [A + i] \iff (u_+ - u_-; iu_+ + iu_-) \in A; \end{aligned}$$

und damit ist $Z_0 \subseteq A$. Aus

$$A_0 = S \hat{+} Z_0 \subseteq A = A^* \subseteq A_0^* = A_0$$

folgt schließlich $A_0 = A$.

ad (iii) Ein jedes Element in A_θ ist von der Bauart

$$\left(f + c(\gamma(i) - e^{i\theta}\gamma(-i)); g + ic(\gamma(i) + e^{i\theta}\gamma(-i))\right),$$

mit $(f; g) \in S$ und $c \in \mathbb{C}$. Damit sind die Elemente von $[A_\theta - \lambda]^{-1}$ von der Gestalt

$$\left(\psi; f + c(\gamma(i) - e^{i\theta}\gamma(-i))\right),$$

wobei ψ definiert ist durch

$$\begin{aligned} \psi :&= g + ic(\gamma(i) + e^{i\theta}\gamma(-i)) - \lambda f - c\lambda(\gamma(i) - e^{i\theta}\gamma(-i)) \\ &= g - \lambda f - c(\lambda - i)\gamma(i) + ce^{i\theta}(\lambda + i)\gamma(-i). \end{aligned}$$

Wegen $A \supseteq S$ folgt aus $(f; g) \in S$, dass $R(\lambda)(g - \lambda f) = f$. Wir wenden nun $R(\lambda)$ auf ψ an:

$$\begin{aligned} R(\lambda)\psi &= R(\lambda)(g - \lambda f) - c(\lambda - i)R(\lambda)\gamma(i) + ce^{i\theta}(\lambda + i)R(\lambda)\gamma(-i) \\ &= f - c\left[\Gamma_i^\lambda - I\right]\gamma(i) + ce^{i\theta}\left[\Gamma_{-i}^\lambda - I\right]\gamma(-i) \\ &= f - c(1 - e^{i\theta})\gamma(\lambda) + c\gamma(i) - ce^{i\theta}\gamma(-i) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &[A_\theta - \lambda]^{-1}\psi - [A - \lambda]^{-1}\psi \\ &\quad = \left(f + c(\gamma(i) - e^{i\theta}\gamma(-i))\right) - \left(f - c(1 - e^{i\theta})\gamma(\lambda) + c\gamma(i) - ce^{i\theta}\gamma(-i)\right) \\ &\quad = c(1 - e^{i\theta})\gamma(\lambda). \end{aligned}$$

Wegen $\gamma(\bar\lambda) \in \mathcal{N}_{\bar\lambda} = (\operatorname{ran}\,[S-\lambda])^\perp$ gilt

$$\left(\psi, \gamma(\bar\lambda)\right) = \underbrace{(g - \lambda f, \gamma(\bar\lambda))}_{=0} - c(\lambda - i)\left(\gamma(i), \gamma(\bar\lambda)\right) + ce^{i\theta}(\lambda + i)\left(\gamma(-i), \gamma(\bar\lambda)\right). \tag{3.50}$$

Da q normiert ist, gilt für $\lambda \neq \pm i$

$$\begin{aligned}(\psi, \gamma(\bar\lambda)) &= -c(\lambda - i)\frac{q(i) - q(\lambda)}{i - \lambda} + ce^{i\theta}(\lambda + i)\frac{q(-i) - q(\lambda)}{-i - \lambda}\\ &= c\,(i - q(\lambda)) + ce^{i\theta}\,(i + q(\lambda)) = c\left[i(e^{i\theta} + 1) + (e^{i\theta} - 1)q(\lambda)\right].\end{aligned}$$

Für $\lambda = \pm i$ erhalten wir durch Einsetzen in Gleichung (3.50)

$$\begin{aligned}\left(\psi, \gamma(\bar i)\right) &= 2ice^{i\theta}\,\|\gamma(-i)\|^2 = 2ice^{i\theta},\\ \left(\psi, \gamma(\overline{-i})\right) &= 2ic\,\|\gamma(i)\|^2 = 2ic,\end{aligned}$$

und schließen, dass die Gleichung

$$\left(\psi, \gamma(\bar\lambda)\right) = c\left[i(e^{i\theta} + 1) + (e^{i\theta} - 1)q(\lambda)\right]$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ erfüllt ist.
Wir zeigen noch, dass $\lambda \mapsto i(e^{i\theta} + 1) + (e^{i\theta} - 1)q(\lambda)$ keine Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat: Angenommen es gäbe ein λ, sodass

$$i(e^{i\theta} + 1) + (e^{i\theta} - 1)q(\lambda) = 0. \tag{3.51}$$

Zunächst gilt $\theta \neq \pi$, da wegen $\Im q(\lambda) \neq 0$

$$i(e^{i\pi} + 1) + (e^{i\pi} - 1)q(\lambda) = -2q(\lambda) \neq 0.$$

Damit ist für $\theta \in [0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ Gleichung (3.51) äquivalent zu

$$q(\lambda) = i\frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Da die rechte Seite reell ist und q stets nicht verschwindenden Imaginärteil hat, ergibt sich ein Widerspruch. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}[A_\theta - \lambda]^{-1}\psi - [A - \lambda]^{-1}\psi &= (1 - e^{i\theta})\left(i(e^{i\theta} + 1) + (e^{i\theta} - 1)q(\lambda)\right)^{-1}\left(\psi, \gamma(\bar\lambda)\right)\gamma(\lambda)\\ &= (\phi - q(\lambda))^{-1}\left(\psi, \gamma(\bar\lambda)\right)\gamma(\lambda).\end{aligned}$$

□

Satz 3.4.16. *Es seien die Voraussetzungen wie in Proposition 3.4.15. Dann ist die Funktion*

$$q_\theta(\lambda) := \frac{\phi\ q(\lambda) + 1}{\phi - q(\lambda)}$$

die normierte Q-Funktion für (S, A_θ).

Beweis. Wir wissen, dass die normierte Q-Funktion von (S, A) bzw. (S, A_θ) durch

$$\lambda \mapsto \lambda + (\lambda^2 + 1)\left([A - \lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\right) \quad \text{bzw.} \quad \lambda \mapsto \lambda + (\lambda^2 + 1)\left([A_\theta - \lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\right)$$

gegeben ist. Mit Gleichung (3.49) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\big([A_\theta - \lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\big) &= \big([A - \lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\big) + (\phi - q(\lambda))^{-1} \left(\gamma(i), \gamma(\bar{\lambda})\right) (\gamma(\lambda), \gamma(i)) \\
&= \big([A - \lambda]^{-1}\gamma(i), \gamma(i)\big) + (\phi - q(\lambda))^{-1} \underbrace{\frac{q(i) - q(\lambda)}{i - \lambda} \frac{q(\lambda) - \overline{q(i)}}{\lambda + i}}_{= \frac{q(\lambda)^2+1}{\lambda^2+1}}
\end{aligned}
$$

Multiplikation mit $\lambda^2 + 1$ und Addition von λ auf beiden Seiten der Gleichung liefert

$$
q_\theta(\lambda) = q(\lambda) + \frac{q(\lambda)^2 + 1}{\phi - q(\lambda)} = \frac{\phi q(\lambda) + 1}{\phi - q(\lambda)}.
$$

□

4 Spektralanalyse

Wir haben gesehen, dass eine symmetrische Relation S auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ entweder gar keine oder "sehr viele" selbstadjungierte Erweiterungen hat. Das Ziel dieses Kapitels ist es, Aussagen über den Zusammenhang zwischen $\sigma(A)$ und $\sigma(A')$ für $A, A' \in \mathfrak{E}(S)$ zu treffen.

4.1 Lebesgue-Zerlegung von Maßen und selbstadjungierten Relationen

Wir werden in diesem Abschnitt an den Zerlegungssatz von Lebesgue für Borelmaße auf $\mathbb{R}$ erinnern und mithilfe des Spektralmaßes einer selbstadjungierten Relation A eine entsprechende Zerlegung von A herleiten. Für die Resultate aus der Maßtheorie sei auf [Kus14] verwiesen.

Definition 4.1.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und seien μ, ν nichtnegative Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$.

- Eine Menge $S \subseteq \Omega$ heißt *Träger* von μ, falls

$$\mu(A) = 0, \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A}, \text{ mit } A \subseteq \Omega \setminus S.$$

- μ heißt *absolut stetig* bzgl. ν (i.Z. $\mu \ll \nu$), falls für $A \in \mathcal{A}$

$$\nu(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0.$$

- μ und ν heißen *singulär zueinander* (i.Z. $\mu \perp \nu$), falls $A \in \mathcal{A}$ existiert, sodass

$$\mu(A) = 0 \quad \text{und} \quad \nu(\Omega \setminus A) = 0.$$

Wenn zusätzlich alle einpunktigen Mengen messbar sind, d.h. $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ für alle $\omega \in \Omega$, so sagen wir

- μ ist *reines Punktmaß* oder *diskret*, falls $\{\omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) > 0\}$ Träger von μ ist und
- μ ist *stetig*, falls $\mu(\{\omega\}) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

Ein Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, das absolut stetig bezüglich dem Lebesgue-Maß λ ist, werden wir gelegentlich absolut stetig nennen, ohne explizit auf den Bezug auf λ hinzuweisen. Ebenso sagen wir μ ist singulär, falls $\mu \perp \lambda$.

Satz 4.1.2 (Zerlegungssatz von Lebesgue)**.** *Seien μ, ν zwei σ-endliche Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gibt es eindeutige Maße μ_{ac}, μ_s auf $(\Omega, \mathcal{A})$, sodass*

$$\mu_{ac} \ll \nu, \quad \mu_s \perp \nu \quad \textit{und} \quad \mu = \mu_{ac} + \mu_s.$$

Beweis. Siehe [Kus14, Satz 11.17]. □

Bemerkung 4.1.3. Im Beweis des vorangehenden Satzes wird eine Menge $P \in \mathcal{A}$ konstruiert und dann nachgewiesen, dass

$$\mu_{ac} := \mu\,(A \cap P^c) \quad \text{und} \quad \mu_s := \mu\,(A \cap P)$$

Gewünschtes leisten. Insbesondere sind μ_{ac} und μ_s singulär zueinander.

Ist μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$, dann ist μ insbesondere σ-endlich. Anwendung von Satz 4.1.2 mit $\nu = \lambda$ liefert, gemeinsam mit Bemerkung 4.1.3, dass es ein eindeutiges, absolut stetiges Maß μ_{ac} sowie ein eindeutiges, singuläres Maß μ_s gibt, sodass

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s \quad \text{und} \quad \mu_{ac} \perp \mu_s.$$

Wegen $\mu_{ac}, \mu_s \leq \mu$ sind μ_{ac} und μ_s Borelmaße.

Die Menge

$$D := \{x \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x\}) > 0\} \tag{4.1}$$

ist nach Lemma 3.4.5 höchstens abzählbar und damit eine Borelmenge. Elementares Nachrechnen zeigt, dass durch

$$\mu_{pp}(\Delta) := \mu_s(\Delta \cap M) \quad \text{und} \quad \mu_{sc}(\Delta) := \mu_s(\Delta \setminus M), \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \tag{4.2}$$

zwei Borelmaße auf $\mathbb{R}$ festgelegt werden. Für jedes $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\mu(\Delta) = \mu_{ac}(\Delta) + \mu_s(\Delta) = \mu_{ac}(\Delta) + \mu_s\left((\Delta \cap M) \mathbin{\dot\cup} (\Delta \setminus M)\right) = \mu_{ac}(\Delta) + \mu_{pp}(\Delta) + \mu_{sc}(\Delta).$$

Offenbar ist μ_{pp} ein reines Punktmaß. Wegen $\mu_{sc}(\{x\}) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ und wegen $\mu_{sc} \ll \mu_s \perp \lambda$ ist μ_{sc} singulär und stetig. Aus der Kunstruktion der Maße ist klar, dass $\mu_{pp} \perp \mu_{sc}$. Wegen $\mu_{ac} \perp \mu_s = \mu_{pp} + \mu_{sc}$ folgt, dass μ_{ac}, μ_{pp} und μ_{sc} jeweils paarweise singulär zueinander sind.

Wir erhalten somit eine weitere Version des Zerlegungssatzes von Lebesgue:

Korollar 4.1.4 (Lebesgue-Zerlegung für Borelmaße auf $\mathbb{R}$)**.** *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$, dann existieren ein absolut stetiges Borelmaß μ_{ac}, ein singuläres und stetiges Borelmaß μ_{sc} sowie ein Borelmaß μ_{pp}, welches ein reines Punktmaß ist, sodass*

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{pp} + \mu_{sc}. \tag{4.3}$$

Die Maße μ_{ac}, μ_{pp} und μ_{sc} sind durch die geforderten Eigenschaften und Gleichung (4.3) *eindeutig bestimmt und es gilt*

$$\mu_{ac} \perp \mu_{pp} \perp \mu_{sc} \perp \mu_{ac}.$$

Beweis. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu zeigen: Ist

$$\mu = \nu_{ac} + \nu_{pp} + \nu_{sc}$$

eine weitere Zerlegung mit den gewünschten Eigenschaften, dann hat ν_{pp} einen abzählbaren Träger. Als Summe zweier singulärer Maße ist $\nu_s := \nu_{pp} + \nu_{sc}$ singulär. Die Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.1.2 liefert $\mu_{ac} = \nu_{ac}$ und $\mu_s = \nu_s$.

Da ν_{pp} ein reines Punktmaß ist, stellt die abzählbare Menge $M' := \{x \in \mathbb{R} : \ \nu_{pp}(\{x\}) > 0\}$ einen Träger von ν_{pp} dar. Insbesondere gilt $\nu_{pp}(\Delta) = \nu_{pp}(\Delta \cap M')$ für jede Borelmenge Δ. Wegen der Stetigkeit von ν_{ac} und ν_{sc} folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\nu_{pp}(\{x\}) = \nu_{pp}(\{x\}) + \nu_{ac}(\{x\}) + \nu_{sc}(\{x\}) = \mu(\{x\}).$$

Insbesondere gilt $M' = M$, wobei M wie in (4.1) definiert ist.
Da die stetigen Maße ν_{ac} und ν_{sc} auf der abzählbaren Menge $M' = M$ verschwinden, erhalten wir für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_{pp}(\Delta) = \mu(\Delta \cap M) = \nu_{ac}(\Delta \cap M) + \nu_{pp}(\Delta \cap M) + \nu_{sc}(\Delta \cap M) = \nu_{pp}(\Delta \cap M) = \nu_{pp}(\Delta).$$

Für beschränktes $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\nu_{sc}(\Delta) = \nu_s(\Delta) - \nu_{pp}(\Delta) = \mu_s(\Delta) - \mu_{pp}(\Delta) = \mu_{sc}(\Delta).$$

Da jede Borelmenge als abzählbare Vereinigung disjunkter, beschränkter Borelmengen dargestellt werden kann, schließen wir mit der σ-Additivität von ν_{sc} und μ_{sc}, dass ν_{sc} und ν_{sc} auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ übereinstimmen. □

Bemerkung 4.1.5.

(i) Für Borelmaße μ_1, μ_2, μ_3 auf $\mathbb{R}$, wobei μ_1 absolut stetig, μ_2 reines Punktmaß und μ_3 singulär und stetig ist, folgt aus der Eindeutigkeit der Lebesgue-Zerlegung von $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, dass die drei Maße paarweise singulär zueinander sind.

(ii) Für ein Borelmaß μ ist auch $\nu := \mu + \lambda$ ein Borelmaß. Demnach können beide Maße Lebesgue-zerlegt werden und es gilt

$$\nu_{ac} = \mu_{ac} + \lambda, \quad \nu_{pp} = \mu_{pp} \quad \text{und} \quad \nu_{sc} = \mu_{sc}.$$

Nach Korollar 4.1.4 existieren paarweise disjunkte Träger S_τ von ν_τ für $\tau \in \{ac, pp, sc\}$. Da ν_{pp} reines Punktmaß ist, kann S_{pp} als abzählbar angenommen werden. Wegen $\lambda(S_{ac}^c) \leq \nu_{ac}(S_{ac}^c) = 0$ ist $S_{sc} \subseteq S_{ac}^c$ eine Lebesguenullmenge. Die Mengen S_τ sind offenbar auch Träger der Maße μ_τ.
Es gibt also stets paarweise disjunkte Träger S_τ der Komponenten μ_τ, sodass

$$\lambda(S_{ac}^c) = 0, \quad |S_{pp}| \leq \aleph_0 \quad \text{und} \quad \lambda(S_{sc}) = 0.$$

Lemma 4.1.6. *Es seien μ und ν zwei Borelmaße auf $\mathbb{R}$ mit $\mu \leq \nu$. Ist ν absolut stetig, singulär, reines Punktspektrum bzw. singulär und stetig, dann hat auch μ die entsprechende Eigenschaft.*

Beweis. Falls ν absolut stetig ist, dann gilt für jede λ-Nullmenge Δ

$$\mu(\Delta) \leq \nu(\Delta) = 0,$$

d.h. μ ist absolut stetig.

Ist ν singulär, dann gibt es eine $\lambda-$Nullmenge N mit $\mu(N^c) \leq \nu(N^c) = 0$. Damit ist auch μ singulär. Ist ν zusätzlich stetig, dann gilt, weil für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\mu(\{x\}) \leq \nu(\{x\}) = 0,$$

dass auch μ stetig ist.

Ist ν ein reines Punktmaß, dann gilt für die Menge $D := \{x \in \mathbb{R} : \nu(\{x\}) > 0\}$, dass $\mu(D^c) \leq \nu(D^c) = 0$. Somit lebt μ nur auf der höchstens abzählbaren Menge D. Infolge ist μ ein reines Punktmaß. □

Bemerkung 4.1.7. Ist A ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit Spektralmaß E, dann folgt mit Fakta 2.4.4, dass $E_{\phi,\phi}$ für jedes $\phi \in \mathcal{H}$ ein endliches Borelmaß ist. Man kann $E_{\phi,\phi}$ demnach Lebesgue-zerlegen.

Satz 4.1.8. *Sei A ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}$ mit Spektralmaß E, dann sind*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{ac} &:= \{\phi \in \mathcal{H} : E_{\phi,\phi} \ll \lambda\}\,,\\ \mathcal{H}_{s} &:= \{\phi \in \mathcal{H} : E_{\phi,\phi} \perp \lambda\}\,,\\ \mathcal{H}_{pp} &:= \{\phi \in \mathcal{H} : E_{\phi,\phi} \text{ ist reines Punktmaß}\}\,,\\ \mathcal{H}_{sc} &:= \{\phi \in \mathcal{H} : E_{\phi,\phi} \text{ ist singulär und stetig}\}\,,\end{aligned}$$

abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}$ und es gilt

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{s} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc}.$$

Ist $\phi \in \mathcal{H}$ dementsprechend zerlegt in $\phi = \phi_{ac} + \phi_{pp} + \phi_{sc}$, dann ist die Lebesgue-Zerlegung von $E_{\phi,\phi}$ gegeben durch

$$E_{\phi,\phi} = E_{\phi_{ac},\phi_{ac}} + E_{\phi_{pp},\phi_{pp}} + E_{\phi_{sc},\phi_{sc}}.$$

Beweis. Wir verwenden die Notation $\mu_\phi := E_{\phi,\phi}$. Ist $\phi \in \mathcal{H}$ und $c \in \mathbb{C}$, dann gilt für jedes $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu_{c\phi}(\Delta) = (E(\Delta)c\phi, c\phi) = |c|^2 \mu_\phi(\Delta).$$

Es folgt, dass mit $\phi \in \mathcal{H}_\tau$ auch $c\phi \in \mathcal{H}_\tau$ für $\tau \in \{ac, s, pp, sc\}$.
Für $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}$ folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\mu_{\phi_1+\phi_2}(\Delta) &= (E(\Delta)(\phi_1+\phi_2), \phi_1+\phi_2) \le \mu_{\phi_1}(\Delta) + \mu_{\phi_2}(\Delta) + 2\,|(E(\Delta)\phi_1, \phi_2)|\\ &\le \mu_{\phi_1}(\Delta) + \mu_{\phi_2}(\Delta) + 2\sqrt{\mu_{\phi_1}(\Delta)\mu_{\phi_2}(\Delta)} \le 2\,(\mu_{\phi_1}(\Delta) + \mu_{\phi_2}(\Delta))\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.1.6 folgt, dass $\mathcal{H}_\tau$ für $\tau \in \{ac, s, pp, sc\}$ ein linearer Teilraum ist.

Wir zeigen die Gleichungen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s, \tag{4.4}$$
$$\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc}. \tag{4.5}$$

Sei dazu $\phi \in \mathcal{H}_{ac}$ und $\psi \in \mathcal{H}_s$. Dann gibt es eine $\lambda-$Nullmenge N, sodass $\mu_\psi(N^c) = 0$. Wegen

$$\|\psi\|^2 = \mu_\psi(\mathbb{R}) = (E(N)\psi, \psi) = \|E(N)\psi\|^2$$

schließen wir $\psi \in \operatorname{ran} E(N)$ und damit $\psi = E(N)\psi$.
Da μ_ϕ absolut stetig ist, erhalten wir

$$|(\psi, \phi)| = |(E(N)\psi, \phi)| = |(\psi, E(N)\phi)| \le \|\psi\| \sqrt{\mu_\phi(N)} = 0,$$

d.h. $\mathcal{H}_{ac} \perp \mathcal{H}_s$.
Die Inklusion $\supseteq$ in (4.4) ist trivial. Für $\phi \in \mathcal{H}$ besitzt $\mu = \mu_\phi$ eine Lebesgue-Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$. Da μ_s singulär ist, gibt es eine $\lambda-$Nullmenge N mit $\mu_s(N^c) = 0$. Wir zerlegen ϕ gemäß

$$\phi = E(\mathbb{R})\phi = E(N^c)\phi + E(N)\phi =: \phi_{ac} + \phi_s.$$

Wegen $\mu_{\phi_s}(\Delta) = \mu_\phi(\Delta \cap N)$ gilt $\phi_s \in \mathcal{H}_s$. Für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ mit $\lambda(\Delta) = 0$ gilt

$$\mu_{\phi_{ac}}(\Delta) = (E(\Delta \cap N^c)\phi, \phi) = \mu(\Delta \cap N^c) \le \mu_{ac}(\Delta) + \mu_s(N^c) = 0,$$

d.h. $\phi_{ac} \in \mathcal{H}_{ac}$.

Im Falle $\phi \in \mathcal{H}_{pp}$ und $\psi \in \mathcal{H}_{sc}$ gibt es eine höchstens abzählbare Menge D, sodass $\mu_\phi(D^c) = 0$.

Wegen der Stetigkeit von μ_ψ gilt $\mu_\psi(D) = 0$. Man argumentiert wie oben, um $E(D)\phi = \phi$ zu erhalten. Wegen

$$|(\psi, \phi)| = |(E(D)\psi, \phi)| \leq \|\phi\| \sqrt{\mu_\psi(D)} = 0$$

gilt $\mathcal{H}_{pp} \perp \mathcal{H}_{sc}$.
Da $\mathcal{H}_s$ ein linearer Teilraum ist, der $\mathcal{H}_{pp}$ und $\mathcal{H}_{sc}$ enthält, gilt die Inklusion $\supseteq$ in (4.5). Für $\phi \in \mathcal{H}_s$ sei die Lebesgue-Zerlegung von $\mu = \mu_\phi$ durch [1] $\mu = \mu_{pp} + \mu_{sc}$ gegeben. Es existiert eine höchstens abzählbare Teilmenge D mit $\mu_{pp}(D^c) = 0$. Wir zerlegen ϕ gemäß

$$\phi = E(\mathbb{R})\phi = E(D)\phi + E(D^c)\phi =: \phi_{pp} + \phi_{sc}.$$

Das Borelmaß $\mu_{\phi_{pp}}$ lebt dann nur auf der Menge D, ist also ein reines Punktmaß. Das bedeutet $\phi_{pp} \in \mathcal{H}_{pp}$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$\mu_{\phi_{sc}}(\{x\}) = \mu\left(\{x\} \cap D^c\right) \leq \mu_{sc}(\{x\}) + \mu_{pp}(D^c) = 0,$$

d.h. $\phi_{sc} \in \mathcal{H}_{sc}$.

Aus der Gleichung $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s$ folgt $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{ac}^\perp$, was die Abgeschlossenheit von $\mathcal{H}_s$ impliziert. Für $\mathcal{H}_{ac}, \mathcal{H}_{pp}$ und $\mathcal{H}_{sc}$ argumentiert man analog. $\square$

Lemma 4.1.9. *Sei $A \leq \mathcal{H}^2$ selbstadjungiert und $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ eine orthogonale Zerlegung von $\mathcal{H}$.*

(i) Sind $A_i \leq \mathcal{H}_i^2$, $i = 1,2$ selbstadjungiert, sodass $A = A_1 \oplus A_2$, dann gilt

$$R(\lambda) = R_1(\lambda) \oplus R_2(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad \sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2), \tag{4.6}$$

wobei R die Resolvente von A und R_i die Resolventen von A_i bezeichnet. Ist E das Spektralmaß von A, dann ist das Spektralmaß von A_i durch $E_i(.) = E(.)\restriction_{\mathcal{H}_i}$ gegeben.

(ii) Gelten für ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Inklusion $R(\lambda)\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{H}_i$ für $i = 1,2$, dann folgt

$$A = A_1 \oplus A_2, \tag{4.7}$$

wobei $A_i := A \cap \mathcal{H}_i^2$.

Beweis.

ad (i) Aus $A_i \subseteq A$ folgt $R_i(\lambda) \subseteq R(\lambda)$ und damit die Inklusion $\supseteq$ in (4.6). Da die A_i selbstadjungiert sind, stellen $R_i(\lambda)$ auf ganz $\mathcal{H}_i$ definierte Operatoren dar. Der Operator $R(\lambda)$ umfasst also den auf ganz $\mathcal{H}$ definierten Operator $R_1(\lambda) \oplus R_2(\lambda)$. Damit stimmen die beiden Operatoren überein.

Wegen $R(\lambda) = R_1(\lambda) \oplus R_2(\lambda)$ gilt $R(\lambda) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ genau dann, wenn $R_i(\lambda) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ für $i = 1,2$, d.h. $\rho(A) = \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$. Komplementbildung gibt $\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$.

Es bezeichne $P_i \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{H}_i$. Wir definieren die Abbildung $F(\Delta) := (E_1 \times E_2)(\Delta) = E_1(\Delta)P_1 + E_2(\Delta)P_2$ für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty)$. Offenbar gilt $F(\Delta) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ für jedes solche Δ und $F(\emptyset) = 0$. Wegen $E_i(\mathbb{R}_\infty) = I_{\mathcal{H}_i}$ stimmt $F(\mathbb{R}_\infty)$ mit dem Identitätsoperator überein.

[1] Da μ singulär ist, ist der absolut stetige Anteil trivial.

Für $f, g \in \mathcal{H}$ gilt mit $f_i = P_i f$ und $g_i = P_i f$ wegen ran $E_i(\Delta) \subseteq \mathcal{H}_i$

$$\begin{aligned}(F(\Delta)^* f, g) &= (f, F(\Delta)g) = (f, E_1(\Delta)g_1) + (f, E_2(\Delta)g_2)\\ &= (E_1(\Delta)f_1, g_1) + (E_2(\Delta)f_2, g2) = (E_1(\Delta)f_1, g) + (E_2(\Delta)f_2, g) = (F(\Delta)f, g)\end{aligned}$$

und wegen $E_i(\Delta)\mathcal{H}_i \subseteq \mathcal{H}_i$

$$F(\Delta)^2 f = E_1(\Delta)^2 f_1 + E_2(\Delta)^2 f_2 = E_1(\Delta)f_1 + E_2(\Delta)f_2 = F(\Delta)f,$$

d.h. die Operatoren $F(\Delta)$ sind orthogonale Projektionen.

Für $\Delta, \Upsilon \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty)$ gilt

$$\begin{aligned}F(\Delta)F(\Upsilon)f &= E_1(\Delta)E_1(\Upsilon)f_1 + E_2(\Delta)E_2(\Upsilon)f_2\\ &= E_1(\Delta \cap \Upsilon)f_1 + E_2(\Delta \cap \Upsilon)f_2 = F(\Delta \cap \Upsilon)f.\end{aligned}$$

Ist $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty)$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}F\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\right) f &= E_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\right) f_1 + E_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n\right) f_2\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} E_1(\Delta_n)f_1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} E_2(\Delta_n)f_2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} F(\Delta_n)f.\end{aligned}$$

F ist damit ein Spektralmaß für $\langle \mathbb{R}_\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty), \mathcal{H}\rangle$ und leiset für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ wegen $F_{f,g}(\Delta) = (E_1(\Delta)f_1, g_1) + (E_2(\Delta)f_2, g_2)$ und wegen $R_i(\lambda)f_i \in \mathcal{H}_i$

$$\begin{aligned}\left(\left[\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda}\, dF(t)\right] f, g\right) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda}\, dF_{f,g}(t) = (R_1(\lambda)f_1, g_1) + (R_2(\lambda)f_2, g_2)\\ &= (R_1(\lambda)f_1, g) + (R_2(\lambda)f_2, g) = (R(\lambda)f, g)\,.\end{aligned}$$

Mit Satz 2.4.17 erhält man $F = E$. Aus $E_i(.) = F(.)\restriction_{\mathcal{H}_i} = E(.)\restriction_{\mathcal{H}_i}$ ergibt sich die letzte Behauptung in (i).

ad (ii) Die Inklusion $\supseteq$ in (4.7) ist trivial. Sei also $(f; g) \in A$. Dann ist $(g - \lambda f; f) \in R(\lambda)$. Voraussetzungsgemäß gilt $h_i := R(\lambda)(g_i - \lambda f_i) \in \mathcal{H}_i$. Wegen $h_1 + h_2 = R(\lambda)(g - \lambda f) = f$ können wir auf $h_i = f_i$ schließen, d.h. $(g_i - \lambda f_i; f_i) \in R(\lambda)$. Dies ist äquivalent zu $(f_i, g_i) \in A$. Damit erhalten wir $(f_i, g_i) \in A_i = A \cap \mathcal{H}_i^2$ und infolge gilt $A \subseteq A_1 \oplus A_2$.

□

Ist $A \leq \mathcal{H}^2$ eine selbstadjungierte Relation, so kann man zunächst A_∞ abspalten (vgl. Satz 2.4.11):

$$A = A_{op} \oplus A_\infty$$

Dabei ist A_{op} ein selbstadjungierter Operator auf $\mathcal{H}_{op} := (\text{mul } A)^\perp$. Die Konstruktion aus Satz 4.1.8 ist somit innerhalb von $\mathcal{H}_{op}$ anwendbar. Insgesamt erhält man dann die Zerlegung

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{op} \oplus \mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_s \oplus \mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{pp} \oplus \mathcal{H}_{sc} \oplus \mathcal{H}_\infty,$$

Definition 4.1.10. Wir nennen $\mathcal{H}_{ac}, \mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{pp}$ und $\mathcal{H}_{sc}$ den *absolut stetigen*, *singulären*, *diskreten* und *singulär stetigen* Teilraum von $\mathcal{H}$ bezüglich A.

Satz 4.1.11. *Sei $A \leq \mathcal{H}^2$ selbstadjungiert. Es bezeichne $\mathcal{H}_\tau$ für $\tau \in \{ac, s, pp, sc\}$ die entsprechenden Teilräume von $\mathcal{H}$ bzgl. A. Weiters seien vier Relationen durch $A_\tau := A \cap \mathcal{H}_\tau^2$ definiert.*

Dann gilt:

(i) $A = A_{ac} \oplus A_s \oplus A_\infty = A_{ac} \oplus A_{pp} \oplus A_{sc} \oplus A_\infty$.

(ii) A_τ *ist selbstadjungierter Operator auf* $\mathcal{H}_\tau$ *für* $\tau \in \{ac, s, pp, sc\}$.

(iii) Für $\tau \in \{ac, s, pp, sc\}$ *erfüllen die Spektralmaße* F_τ *von* A_τ

$$F_\tau = E\restriction_{\mathcal{H}_\tau}.$$

Insbesondere ist $\Delta \mapsto (F_\tau(\Delta)\phi, \phi)$ *für jedes* $\phi \in \mathcal{H}_\tau$ *absolut stetig, wenn* $\tau = ac$*, singulär, wenn* $\tau = s$*, reines Punktmaß, wenn* $\tau = pp$ *bzw. singulär und stetig, wenn* $\tau = sc$.

Beweis.

ad (i),(ii) Wegen $A = A_{op} \oplus A_\infty$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass A ein Operator ist. Für die erste Gleichung reicht es nach Lemma 4.1.9 (ii) zu zeigen, dass für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und $\tau \in \{ac, s\}$ die Inklusion

$$R(\lambda)\mathcal{H}_\tau \subseteq \mathcal{H}_\tau$$

gilt, wobei R die Resolvente von A bezeichnet. Für $\phi \in \mathcal{H}_\tau$ definieren wir $\psi := R(\lambda)\phi$. Weil $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$ beschränkt ist, erhalten wir für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$E_{\psi,\psi}(\Delta) = \left(E(\Delta) \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda} \, dE(t) \right] \phi, \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-\lambda} \, dE(t) \right] \phi \right) = \int_{\Delta} \frac{1}{|t-\lambda|^2} \, dE_{\phi,\phi}(t).$$

Die Beschränktheit des Integranden lässt uns auf $E_{\psi,\psi} \ll E_{\phi,\phi}$ schließen. Für $\tau = ac$ folgt aus $E_{\psi,\psi} \ll E_{\phi,\phi} \ll \lambda$ sofort $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$.

Für $\tau = s$ gibt es eine Menge $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sodass $\lambda(S) = E_{\phi,\phi}(S^c) = 0$. Wegen $E_{\psi,\psi} \ll E_{\phi,\phi}$ schließen wir $E_{\psi,\psi} = 0$. Damit ist $E_{\psi,\psi}$ singulär und infolge $\psi \in \mathcal{H}_s$.

Dass A_{ac} und A_s selbstadjungierte Operatoren sind folgt aus Lemma 2.4.12. Für die zweite Gleichung argumentiert man ganz ähnlich innerhalb von $\mathcal{H}_s$.

ad (iii) Nach Lemma 4.1.9 ist das Spektralmaß E^τ von A_τ durch $E(.)\restriction_{\mathcal{H}_\tau}$ gegeben. Offenbar hat für $\phi \in \mathcal{H}_\tau$ das Borelmaß $\Delta \mapsto E^\tau_{\phi,\phi}(\Delta) = E_{\phi,\phi}(\Delta)$ die entsprechende Eigenschaft.

□

Definition 4.1.12. Ist $A \leq \mathcal{H}^2$ selbstadjungiert, dann heißen die in Satz 4.1.11 definierten Operatoren A_τ, $\tau \in \{ac, s, pp, sc\}$ der *absolut stetige*, der *singuläre*, der *diskrete* und der *singulär stetige* Anteil von A.

Definition 4.1.13. Sind A_{ac}, A_s, A_{pp} und A_{sc} der absolut stetige, singuläre, diskrete und singulär stetige Anteil einer selbstadjungierten Relation A, dann definieren wir durch

$$\begin{aligned}
\sigma_{ac}(A) &:= \sigma(A_{ac}), \\
\sigma_s(A) &:= \begin{cases} \sigma(A_s), & \text{falls } A \text{ Operator ist,} \\ \sigma(A_s) \cup \{\infty\}, & \text{sonst,} \end{cases} \\
\sigma_{pp}(A) &:= \begin{cases} \sigma(A_{pp}), & \text{falls } A \text{ Operator ist,} \\ \sigma(A_{pp}) \cup \{\infty\}, & \text{sonst,} \end{cases} \\
\sigma_{sc}(A) &:= \sigma(A_{sc})
\end{aligned}$$

das *absolut stetige*, das *singuläre*, das *diskrete* und das *singulär stetige Spektrum* von A.

Korollar 4.1.14. *Für eine selbstadjungierte Relation A gilt*

$$\sigma(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_s(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{pp}(A) \cup \sigma_{sc}(A) \tag{4.8}$$

Beweis. Mehrfache Anwendung von Lemma 4.1.9 (i) auf $A = A_{ac} \oplus A_{pp} \oplus A_{sc} \oplus A_\infty$ liefert

$$R(\lambda) = R_{ac}(\lambda) \oplus R_{pp}(\lambda) \oplus R_{sc}(\lambda) \oplus R_\infty(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_\infty,$$

wobei R die Resolvente von A und R_τ die Resolventen von A_τ in $\mathcal{H}_\tau$ für $\tau \in \{ac, pp, sc, \infty\}$ bezeichnen.
Da $R_\infty(\lambda)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit der Nullabbildung in $\mathcal{H}_\infty$ übereinstimmt, folgt

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(A) \quad &\Leftrightarrow \quad R(\lambda) = R_{ac}(\lambda) \oplus R_{pp}(\lambda) \oplus R_{sc} \oplus R_\infty \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow \quad R_\tau(\lambda) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\tau),\ \tau \in \{ac, pp, sc\} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \rho(A_\tau),\ \tau \in \{ac, pp, sc\}. \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\begin{aligned} \infty \in \rho(A) \quad &\Leftrightarrow \quad A = A_{ac} \oplus A_{pp} \oplus A_{sc} \oplus A_\infty \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow \quad A_\tau \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\tau),\ \tau \in \{ac, pp, sc\} \text{ und } \operatorname{mul} A = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \infty \in \rho(A_\tau),\ \tau \in \{ac, pp, sc\} \text{ und } \operatorname{mul} A = \{0\}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\infty \notin \sigma_{pp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad \infty \in \rho(A_{pp}) \text{ und } \operatorname{mul} A = \{0\}$$

liefert Komplementbildung Gleichung $\sigma(A) = \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{pp}(A) \cup \sigma_{sc}(A)$.

Wegen $A_s = A_{pp} \oplus A_{sc}$ gilt nach Lemma 4.1.9

$$\sigma(A_s) = \sigma(A_{pp}) \cup \sigma(A_s c).$$

Damit folgt die Gleichung $\sigma_s(A) = \sigma_{pp}(A) \cup \sigma_{sc}(A)$ sowohl falls A Operator ist, als auch falls $\operatorname{mul} A$ nicht trivial ist. $\square$

Die Mengen σ_τ sind invariant unter unitärer Transformation:

Satz 4.1.15. *Seien $T \leq \mathcal{H}^2$ und $\hat{T} \leq \hat{\mathcal{H}}^2$ zwei lineare Relationen, sodass eine unitäre Abbildung $U : \hat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ existiert mit $TU = U^{-1}\hat{T}$. Dann gilt $\sigma(T) = \sigma(\hat{T})$.*

Beweis. Wegen

$$\infty \in \rho(T) \quad \Leftrightarrow \quad T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{T} = U^{-1}TU \in \mathfrak{B}(\hat{\mathcal{H}}) \quad \Leftrightarrow \infty \in \rho(\hat{T})$$

gilt $\infty \in \sigma(T)$ genau dann, wenn $\infty \in \sigma(\hat{T})$.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} (f; g) \in \hat{R}(\lambda) = \left[\hat{A} - \lambda\right]^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (g; f) \in \left[\hat{A} - \lambda\right] \quad \Leftrightarrow \quad (g; f + \lambda g) \in \hat{A} = U^{-1}AU \\ &\Leftrightarrow \quad (Ug; f + \lambda g) \in U^{-1}A \quad \Leftrightarrow (Ug; Uf + \lambda Ug) \in A \\ &\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad (Uf; Ug) \in R(\lambda) = [A - \lambda]^{-1} \end{aligned}$$

Das bedeutet $\hat{R}(\lambda) = U^{-1}R(\lambda)U$. Da U unitär ist, gilt $\hat{R}(\lambda) \in \mathfrak{B}(\hat{\mathcal{H}})$ genau dann, wenn $R(\lambda) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. $\square$

Proposition 4.1.16. *Seien $A \leq \mathcal{H}^2$ und $\hat{A} \leq \hat{\mathcal{H}}^2$ selbstadungierte Relationen, sodass eine unitäre Abbildung $U : \hat{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ existiert mit $AU = U\hat{A}$. Dann gilt*

$$\sigma_\tau(A) = \sigma_\tau(\hat{A}), \quad \text{für } \tau \in \{ac, s, pp, sc\}.$$

Beweis. Es bezeichne E bzw. $\hat{E}$ das Spektralmaß von A bzw. $\hat{A}$. Für $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ seien $\mathcal{H}_\tau \leq \mathcal{H}$ und $\hat{\mathcal{H}}_\tau \leq \hat{\mathcal{H}}$ die entsprechenden Teilräume bezüglich A und $\hat{A}$. Nach Lemma 3.4.11 gilt dann $EU = U\hat{E}$. Weil für $\phi \in \hat{\mathcal{H}}$ und $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\hat{E}_{\phi,\phi}(\Delta) = \left(\hat{E}(\Delta)\phi, \phi\right) = \left(U^{-1}E(\Delta)U\phi, \phi\right) = \left(E(\Delta)U\phi, U\phi\right) = E_{U\phi,U\phi}(\Delta),$$

gilt $\phi \in \hat{\mathcal{H}}_\tau$ genau dann, wenn $U\phi \in \mathcal{H}_\tau$. Demnach ist $W := U\restriction_{\hat{\mathcal{H}}_\tau}$ eine unitäre Abbildung zwischen $\hat{\mathcal{H}}_\tau$ und $\mathcal{H}_\tau$.

Nach Satz 4.1.15 reicht es nun zu zeigen, dass $A_\tau W = W\hat{A}_\tau$. Diese Gleichheit folgt direkt aus den Identitäten

$$U^{-1}AU = \hat{A}, \quad A_\tau = A \cap \mathcal{H}_\tau^2 \quad \text{und} \quad \hat{A}_\tau = \hat{A} \cap \hat{\mathcal{H}}_\tau^2$$

sowie der Definition von W. □

Im vorangehenden Kapitel haben wir gezeigt, dass für symmetrisches, minimales S mit Defektindizes $(1, 1)$ jedes $A \in \mathfrak{E}(S)$ unitär ähnlich zu dem Multiplikationsoperator M_t auf $L^2(d\mu)$ (bzw. einer Relation mit eindimensionalem Multi-Valued-Part, die M_t enthält) ist, wobei μ ein gewisses Borelmaß auf $\mathbb{R}$ darstellt. Gemeinsam mit Proposition 4.1.16 legt diese Tatsache nahe, solche Multiplikationsoperatoren im Hinblick auf die spektralen Komponenten näher zu untersuchen.

Dazu definieren wir zunächst einen Begriff, der in gewissem Sinn die Minimalität eines Trägers adressiert.

Definition 4.1.17. Für ein Borel-Maß μ auf $\mathbb{R}$ heißt die Menge

$$S^{top}(\mu) := \{x \in \mathbb{R} : \ \mu(O) > 0 \quad \text{für jede offene Umgebung } O \text{ von } x\}$$

topologischer Träger von μ.

Satz 4.1.18. *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und $S^{top} := S^{top}(\mu)$ der topologische Träger von μ. Dann ist S^{top} der kleinste abgeschlossene Träger von μ.*

Beweis. Wir zeigen

$$S^{top} = \bigcap_{S \in \mathfrak{S}} S, \tag{4.9}$$

wobei $\mathfrak{S}$ die Menge aller abgeschlossenen Träger von μ ist. Bezeichne dazu Σ die rechte Seite von (4.9). Für $x \notin S^{top}$ gibt es eine offene Umgebung O von x mit $\mu(O) = 0$. Damit ist die abgeschlossene Menge O^c Träger von μ; also $x \notin O^c \supseteq \Sigma$.

Ist umgekehrt $x \notin \Sigma$, dann existiert ein abgeschlossenen Träger S von μ mit $x \notin S$. Weil die Menge S^c eine offene Umgebung von x mit $\mu(S^c) = 0$ darstellt, gilt $x \in S^{top}$. Damit ist (4.9) gezeigt.

Um zu zeigen, dass S^{top} Träger von μ ist, bleibt $\mu\left((S^{top})^c\right) = 0$ nachzuweisen. Wir erinnern uns, dass die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$ besitzt. Für jedes $x \in (S^{top})^c$ kann eine offene Umgebung O_x mit $O_x \cap S^{top} = \emptyset$ und $\mu(O_x) = 0$ gewählt werden. Wir definieren nun das Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$ gemäß

$$\mathcal{M} := \left\{B \in \mathcal{B} : \ \text{es gibt ein } x \in (S^{top})^c, \ \text{sodass } x \in B \subseteq O_x\right\}.$$

Da jedes $B \in \mathcal{M}$ in einer passenden μ-Nullmenge enthalten ist, gilt $\mu(B) = 0$.
Weil $(S^{top})^c$ offen und $\mathcal{B}$ Basis ist, gilt

$$(S^{top})^c = \bigcup_{B \in \mathcal{M}} B;$$

also ist $(S^{top})^c$ als abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen selbst eine μ-Nullmenge. □

Ist μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit Lebesgue-Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_{pp} + \mu_{sc}$, dann gibt es

$$\text{paarweise disjunkte } S_\tau \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \tau \in \{ac, pp, sc\},\ \text{sodass } S_\tau \text{ Träger von } \mu_\tau \tag{4.10}$$

ist.
Wir definieren drei Teilräume von $L^2(d\mu)$ durch

$$L^2_\tau(d\mu) := \left\{\phi \in L^2(d\mu) :\ \left\|\phi \mathbb{1}_{S^c_\tau}\right\|_{L^2(d\mu)} = 0\right\}, \quad \tau \in \{ac, pp, sc\}. \tag{4.11}$$

Lemma 4.1.19. *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$, dann hängen die in* (4.11) *definierten Räume $L^2_\tau(d\mu)$, $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ nicht von der Wahl der Mengen S_τ mit* (4.10) *ab. Es gilt*

$$L^2(d\mu) = L^2_{ac}(d\mu) \oplus L^2_{pp}(d\mu) \oplus L^2_{sc}(d\mu). \tag{4.12}$$

Beweis. Seien Σ_τ, $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ drei weitere Mengen, die den Bedingungen (4.10) genügen. Für $\phi \in L^2_\tau(d\mu)$ gilt

$$\left\|\phi \mathbb{1}_{(\Sigma_\tau)^c}\right\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi \text{ verschwindet } \mu_{\tau'} - \text{f.ü., } \tau' \neq \tau \quad \Leftrightarrow \quad \left\|\phi \mathbb{1}_{(S_\tau)^c}\right\| = 0.$$

Für $\tau \neq \tau' \in \{ac, pp, sc\}$, $\phi \in L^2_\tau(d\mu)$ und $\psi \in L^2_{\tau'}(d\mu)$ folgt aus der Definition der beiden Teilräume

$$\int_{\mathbb{R}} \phi \bar{\psi}\ d\mu = \int_{S_\tau \cap S_{\tau'}} \phi \bar{\psi}\ d\mu = 0.$$

Somit sind die Teilräume $L^2_\tau(d\mu)$ paarweise orthogonal.

Die Inklusion $\supseteq$ in (4.12) ist klar. Umgekehrt gilt für $\phi \in L^2(d\mu)$

$$\phi = \phi \mathbb{1}_{S_{ac}} + \phi \mathbb{1}_{S_{pp}} + \phi \mathbb{1}_{S_{sc}} \quad \mu - \text{f.ü.}$$

Wegen $\phi \mathbb{1}_{S_\tau} \in L^2_\tau(d\mu)$ für $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ folgt auch die Inklusion $\supseteq$ in (4.12). □

Wir werden im weiteren Verlauf den Abschließungsoperator in $\mathbb{R}_\infty$ bzgl. der in Bemerkung 2.3.2 beschriebenen Topologie mit $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}_\infty}$ bezeichnen. Man beachte, dass für $M \subseteq \mathbb{R}_\infty$

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}_\infty}(M) = \begin{cases} \mathrm{cl}(M), & \text{falls } M \subseteq \mathbb{R} \text{ beschränkt,} \\ \mathrm{cl}(M \setminus \{\infty\}) \cup \{\infty\}, & \text{falls } \infty \in M \text{ oder } M \text{ unbeschränkt,} \end{cases}$$

gilt, wobei mit cl der Abschließungsoperator in $\mathbb{R}$ gemeint ist.

Satz 4.1.20. *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit Lebesgue-Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_{pp} + \mu_{sc}$. Es bezeichne A den Multiplikationsoperator auf $L^2(d\mu)$, d.h.:*

$$A : \left\{ \begin{array}{lcl} dom\ A \subseteq L^2(d\mu) & \to & L^2(d\mu), \\ \phi & \mapsto & A\phi, \end{array} \right.$$

wobei $\operatorname{dom} A := \left\{\phi \in L^2(d\mu) : A\phi \in L^2(d\mu)\right\}$ *und* $(A\phi)(t) = t\phi(t)$*. Dann gilt:*

(i) $\sigma(A) = \operatorname{cl}_{\mathbb{R}_\infty}\left(S^{top}(\mu)\right)$

(ii) $\mathcal{H}_\tau = L^2_\tau(d\mu)$ *und* $\sigma_\tau(A) = \operatorname{cl}_{\mathbb{R}_\infty}\left(S^{top}(\mu_\tau)\right)$ *für* $\tau \in \{ac, pp, sc\}$*, wobei* $\mathcal{H}_\tau$ *den entsprechenden Teilraum von* $\mathcal{H}$ *bezüglich* A *bezeichnet.*

Beweis.

ad (i) Wir zeigen zunächst $\sigma(A) \setminus \{\infty\} = S^{top}(\mu)$. Dies ist äquivalent zu

$$\mathbb{C}_\infty \setminus S^{top}(\mu) = \mathbb{C}_\infty \setminus (\sigma(A) \setminus \{\infty\}). \tag{4.13}$$

Wir weisen zuerst $\subseteq$ in (4.13) nach:
Offenbar gilt $\mathbb{C}_\infty \setminus S^{top}(\mu) = \{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \setminus S^{top}(\mu))$. Klarerweise ist ∞ in der rechten Seite von (4.13) enthalten. Da A ein selbstadjungierter Operator ist, gilt auch $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq \rho(A)$.

Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus S^{top}(\mu)$ gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass $\mu\left((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)\right) = 0$. Wir stellen fest, dass für $\phi, \psi \in L^2(d\mu)$

$$\begin{aligned}(\phi; \psi) \in [A - \lambda]^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad (\psi; \phi) \in [A - \lambda] \\ &\Leftrightarrow \quad \phi(.) = (. - \lambda)\psi(.) \ \mu - \text{f.ü.} \quad \Leftrightarrow \quad \psi(.) = \frac{\phi(.)}{. - \lambda} \ \mu - \text{f.ü.}\end{aligned}$$

Für $\phi \in L^2(d\mu)$ definieren wir die messbare Funktion $\psi(.) := \frac{\phi(.)}{.-\lambda}$. Dann gilt

$$\|\psi\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{\phi(t)}{t - \lambda}\right|^2 \, d\mu(t) = \int\limits_{\mathbb{R} \setminus (\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)} \left|\frac{\phi(t)}{t - \lambda}\right|^2 \, d\mu(t) \le \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\mathbb{R}} |\phi(t)|^2 \, d\mu(t) = \frac{1}{\epsilon^2} \|\phi\|^2,$$

d.h. $\lambda \in \rho(A)$.

Wir zeigen nun, dass auch $\supseteq$ in (4.13) erfüllt ist:
Offenbar gilt $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus S^{top}(\mu)$. Wegen $\mathbb{C}_\infty \setminus (\sigma(A) \setminus \{\infty\}) = (\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \setminus \sigma(A))$ reicht es also

$$\mathbb{R} \setminus \sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus S^{top}$$

zu zeigen. Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(A) = \mathbb{R} \cap \rho(A)$. Angenommen $\lambda \in S^{top}$, dann gilt für jedes $\epsilon > 0$, dass $\mu\left((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)\right) > 0$. Wegen $\lambda \in \rho(A)$ gibt es ein $C > 0$, sodass

$$\left\|[A - \lambda]^{-1}\phi\right\|^2 \le C \|\phi\|^2 \quad \phi \in L^2(d\mu).$$

Insbesondere gilt dies also für die Funktion $\phi_\epsilon := \mathbb{1}_{(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)}$. Wir schließen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon^2}\mu\left((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)\right) &\le \int\limits_{(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)} \frac{1}{|t - \lambda|^2} \, d\mu(t) = \left\|[A - \lambda]^{-1}\phi_\epsilon\right\|^2 \\ &\le C \|\phi_\epsilon\|^2 = C\mu\left((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)\right).\end{aligned}$$

Division durch $\mu\left((\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon)\right) > 0$ liefert nun den Widerspruch

$$\frac{1}{\epsilon^2} \le C \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Nach Satz 3.4.7 ist das Spektralmaß von A durch

$$E : \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & \mathfrak{B}(L^2(d\mu)), \\ \Delta & \mapsto & [\phi \mapsto \mathbb{1}_\Delta \phi], \end{cases}$$

gegeben. Also gilt $E_{\phi,\phi}(\Delta) = \int_\Delta |\phi|^2 \ d\mu$ für $\phi \in L^2(d\mu)$ und $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Damit erhalten wir für $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$S \text{ ist Träger von } \mu \quad \Leftrightarrow \quad \|E(S^c)\phi\|^2 = E_{\phi,\phi}(S^c) = 0 \quad \forall \phi \in L^2(d\mu) \quad \Leftrightarrow \quad E(S^c) = 0.$$

Damit ist $S^{top}(\mu)$ als kleinster, abgeschlossener Träger von μ genau dann beschränkt, wenn E auf $S^{top}(\mu)$ lebt. Da ein selbstadjungierter Operator genau dann beschränkt ist, wenn sein Spektralmaß auf einer beschränkten Menge lebt, erhalten wir

$$A \text{ ist beschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad S^{top}(\mu) \text{ ist beschränkt.}$$

Da $S^{top}(\mu) \subseteq \mathbb{R}$ und da A Operator ist, beschließt

$$\begin{aligned} \infty \in \mathrm{cl}_{\mathbb{R}_\infty}\left(S^{top}(\mu)\right) \quad &\Leftrightarrow \quad S^{top}(\mu) \text{ ist unbeschränkt} \\ &\Leftrightarrow \quad A \text{ ist unbeschränkt} \quad \Leftrightarrow \quad \infty \in \sigma(A) \end{aligned}$$

den Beweis.

ad (ii) Es seien die Mengen $S_\tau,\ \tau \in \{ac, pp, sc\}$ wie in (4.10) gewählt. Nach Bemerkung 4.1.5 (ii) können wir zudem annehmen, dass

$$\lambda(S_{ac}^c) = 0, \quad \lambda(S_{sc}) = 0 \quad \text{und} \quad |S_{pp}| \leq \aleph_0.$$

Für $\phi \in \mathcal{H}_{ac}$ ist $\Delta \mapsto E_{\phi,\phi}(\Delta) = \int_\Delta |\phi|^2 \ d\mu$ absolut stetig. Wegen $\lambda(S_{ac}^c) = 0$ gilt $\int_{S_{ac}^c} |\phi|^2 \ d\mu = 0$. Also verschwindet ϕ außerhalb von S_{ac} μ-f.ü., d.h. $\phi \in L^2_{ac}(d\mu)$.
Für $\phi \in L^2_{ac}(d\mu)$ verschwindet ϕ außerhalb von S_{ac} μ-f.ü. Damit gilt mit $\mu_s := \mu_{pp} + \mu_{sc}$ und $S_s := S_{pp} \cup S_{sc}$ für jede Lebesgue-Nullmenge $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$E_{\phi,\phi}(\Delta) = \int\limits_\Delta |\phi|^2 \ d\mu = \underbrace{\int\limits_\Delta |\phi|^2 \ d\mu_{ac}}_{=0} + \int\limits_{\Delta \cap S_s} |\phi|^2 \ d\mu_s \leq \int\limits_{\Delta \setminus S_{ac}} |\phi|^2 \ d\mu = 0; \tag{4.14}$$

d.h. $E_{\phi,\phi} \ll \lambda$, und damit erhalten wir $\phi \in \mathcal{H}_{ac}$.

Für $\phi \in \mathcal{H}_{pp}$ gibt es eine abzählbare Menge D, sodass $E_{\phi,\phi}(D^c) = \int_{D^c} |\phi|^2 \ d\mu = 0$. Mit $\mu_c := \mu_{ac} + \mu_{sc}$ folgt nun

$$\int\limits_{S_{pp}^c} |\phi|^2 \ d\mu = \int\limits_{S_{pp}^c \cap D} |\phi|^2 \ d\mu \leq \int\limits_D |\phi|^2 \ d\mu_c + \int_{S_{pp}^c \cap S_{pp}} |\phi|^2 \ d\mu_{pp} = 0,$$

d.h. $\phi \in L^2_{pp}(d\mu)$.
Umgekehrt gilt für $\phi \in L^2_{pp}(d\mu)$

$$E_{\phi,\phi}(\Delta) = \int\limits_\Delta |\phi|^2 \ d\mu = \int\limits_{\Delta \cap S_{pp}} |\phi|^2 \ d\mu, \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

und wir erkennen, dass die abzählbare Menge S_{pp} Träger von $E_{\phi,\phi}$ ist, d.h. $E_{\phi,\phi}$ ist reines Punktmaß.

Für $\phi \in \mathcal{H}_{sc}$ ist $E_{\phi,\phi}$ singulär und stetig. Insbesondere gibt es eine Lebesgue-Nullmenge $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, sodass $E_{\phi,\phi}(N^c) = 0$. Wegen der Abzählbarkeit von S_{pp} und der Stetigkeit von $E_{\phi,\phi}$ erhalten wir

$$\int_{S_{sc}^c} |\phi|^2 \; d\mu = \int_{S_{sc}^c \cap N} |\phi|^2 \; d\mu \leq \underbrace{\int_N |\phi|^2 \; d\mu_{ac}}_{=0} + \underbrace{\int_{S_{pp}} |\phi|^2 \; d\mu_{pp}}_{\leq E_{\phi,\phi}(S_{pp})=0} + \underbrace{\int_{S_{sc}^c \cap S_{sc}} |\phi|^2 \; d\mu_{sc}}_{=0} = 0.$$

Wir schließen $\phi \in L^2_{sc}(d\mu)$.
Jedes $\phi \in L^2_{sc}(d\mu)$ verschwindet außerhalb der Lebesgue-Nullmenge S_{sc} μ-f.ü. Da dann für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$E_{\phi,\phi}(\{x\}) = \int_{\{x\}} |\phi|^2 \; d\mu = 0$$

gilt, ist $E_{\phi,\phi}$ stetig. Dass $E_{\phi,\phi}$ singulär ist, folgt aus $\lambda(S_{ac}^c) = 0$ gemeinsam mit

$$\int_{S_{ac}} |\phi|^2 \; d\mu \leq \int_{S_{sc}^c} |\phi|^2 \; d\mu = 0.$$

Für $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ ist die Abbildung U, definiert durch

$$U : \begin{cases} L^2_\tau(d\mu) & \to & L^2(d\mu_\tau), \\ \phi & \mapsto & \phi, \end{cases}$$

wohldefinert, da zwei Funktionen ϕ_1, ϕ_2 die μ-f.ü. übereinstimmen auch μ_τ-f.ü. übereinstimmen. Man überlegt sich leicht, dass

$$\begin{cases} L^2(d\mu_\tau) & \to & L^2_\tau(d\mu), \\ \phi & \mapsto & \phi \mathbb{1}_{S_\tau}, \end{cases}$$

invers zu U ist. Damit ist U bijektiv. Weil für $\phi, \psi \in L^2_\tau(d\mu)$

$$(\phi, \psi)_{L^2_\tau(d\mu)} = \int \phi\overline{\psi} \; d\mu = \int_{S_\tau} \phi\overline{\psi} \; d\mu = \int \phi\overline{\psi} \; d\mu_\tau = (U\phi, U\psi)_{L^2(d\mu_\tau)}$$

gilt, ist U unitär.
Es bezeichne $\hat{A}$ den Multiplikationsoperator auf $L^2(d\mu_\tau)$ (siehe (3.29)). Aus Satz 3.4.7 folgt, dass das Spektralmaß $\hat{E}$ von $\hat{A}$

$$\hat{E}_{\phi,\phi}(\Delta) = \int_\Delta |\phi|^2 \; d\mu_\tau, \quad \phi \in L^2(d\mu_\tau), \; \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

erfüllt. Nach Satz 4.1.11 ist das Spektralmaß von $A_\tau = A\restriction_{\mathcal{H}_\tau}$ durch $F := E\restriction_{L^2_\tau(d\mu)}$ gegeben. Damit gilt für jedes $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und für jedes $\phi \in L^2_\tau(d\mu)$

$$\begin{aligned} (F(\Delta)\phi, \phi) = (E(\Delta)\phi, \phi) = E_{\phi,\phi}(\Delta) &= \int_\Delta |\phi|^2 \; d\mu \\ &= \int_{\Delta \cap S_\tau} |\phi|^2 \; d\mu = \int_\Delta |\phi|^2 \; d\mu_\tau \\ &= \hat{E}_{U\phi,U\phi}(\Delta) = \left(U^{-1}\hat{E}U\phi, \phi\right). \end{aligned}$$

Anwendung der Polarformel gibt $UE(.) = \hat{E}(.)U$, was nach Lemma 3.4.11 zu $UA_\tau = \hat{A}U$ äquivalent ist. Mit Satz 4.1.15 und Teil (i) erhält man

$$\sigma_\tau(A) = \sigma(A_\tau) = \sigma(\hat{A}) = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}_\infty}\left(S^{top}(\mu_\tau)\right).$$

□

Bemerkung 4.1.21. Man kann die Konstruktion des letzten Satzes genauso auf die Lebesgue-Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ anwenden und erhält für den Multiplikationsoperator A auf $L^2(d\mu)$

$$\sigma_s(A) = S^{top}(\mu_s).$$

4.2 Der Satz von De la Vallée Poussin

Das auf De la Vallée Poussin zurückgehende Resultat, das in diesem Abschnitt bewiesen wird, zeigt, dass man aus der Ableitung der Verteilungsfunktion eines Borelmaßes μ paarweise disjunkte Träger der Komponenten μ_τ, $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ gewinnen kann.
Wir erinnern zunächst an einige Ergebnisse aus der Maßtheorie über Lebesgue-Stieltjes-Maße. Für Details dazu sei auf [Kus14, Kapitel 6 und 12] verwiesen.

Definition 4.2.1. Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$, dann heißt eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Verteilungsfunktion* von μ, falls

$$\mu\left((a, b]\right) = F(b) - F(a) \quad \text{für alle } a < b$$

gilt.

Fakta 4.2.2. Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und F eine Verteilungsfunktion von μ.

(i) Die Funktion

$$F_\mu(x) := \begin{cases} \mu\left((0, x]\right), & x \geq 0, \\ \mu\left((x, 0]\right), & x < 0, \end{cases}$$

ist eine Verteilungsfunktion von μ. Ist G eine weitere Verteilungsfunktion von μ, dann unterscheiden sich F und G nur um eine additive Konstante, d.h. $F - G \equiv const.$

(ii) F ist monoton wachsend und rechtsstetig. Umgekehrt induziert jede monoton wachsende, rechtsstetige Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nach dem Fortsetzungs- und Eindeutigkeitssatz für Maße ein eindeutiges Borelmaß σ auf $\mathbb{R}$, welches

$$\sigma\left((a, b]\right) = G(b) - G(a) \quad \text{für alle } a < b$$

leistet. Man nennt σ das von G induzierte *Lebesgue-Stieltjes-Maß*.

(iii) Ist μ reines Punktmaß, dann ist F lokal konstant außerhalb einer abzählbaren Menge D. Dabei kann $D := \{x \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x\}) > 0\}$ gewählt werden.
Das Maß μ ist genau dann stetig, wenn die Verteilungsfunktion F stetig ist.

(iv) F ist λ-f.ü. differenzierbar und es gilt

$$F' = \frac{d\mu_{ac}}{d\lambda} \quad \lambda-\text{f.ü.},$$

wobei mit $\frac{d\mu_{ac}}{d\lambda}$ die Radon-Nikodym-Dichte von μ_{ac} bzgl. λ gemeint ist. Insbesondere ist μ genau dann singulär, wenn $F' = 0$ $\lambda-$f.ü.

Satz 4.2.3 (Partielle Integration für Lebesgue-Stieltjes-Integrale)**.** *Seien F und G Verteilungsfunktionen von Borelmaßen μ und σ, dann gilt für alle $a < b$*

$$\int_{(a,b]} F(t)\, d\sigma(t) = FG\Big|_a^b - \int_{(a,b]} G(t^-)\, d\mu(t).$$

Beweis. Siehe [Kal11, Lemma 16.5.9]. □

Definition 4.2.4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $x \in (a,b)$, dann heißt x *unsichtbar von links (bzw. rechts)* bzgl. f, wenn es ein $y \in [a,x)$ (bzw. $(x,b]$) gibt, sodass $f(y) > f(x)$.

Satz 4.2.5 (Riesz's Satz von der aufgehenden Sonne)**.** *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und es bezeichne U_f^- bzw. U_f^+ die Menge der von links bzw. von rechts unsichtbaren Punkte bzgl. f. Dann ist U_f^- bzw. U_f^+ darstellbar als abzählbare, disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen (a_n, b_n) und es gilt*

$$f(a_n) \geq f(b_n) \quad \textit{bzw.} \quad f(a_n) \leq f(b_n) \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Siehe [Kus14, Satz 12.22]. □

Bemerkung 4.2.6. Eine monotone Funktion auf einem Intervall I hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. An den Unstetigkeitsstellen existieren stets sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert der Funktion (siehe [Kus14, Lemma 12.5]).

Um den bereits angekündigten Satz von De la Vallée Poussin beweisen können, benötigen wir noch einige Hilfsresultate. Wir gehen dazu ähnlich vor wie in [Fau03].

Lemma 4.2.7. *Sei $O \subseteq \mathbb{R}$ offen und $\epsilon > 0$. Dann gilt:*

(i) O lässt sich darstellen als abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten, offenen Intervallen.

(ii) O lässt sich darstellen als abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Intervallen, deren Länge kleiner ϵ ist.

Es sei an dieser Stelle an die Definition des äußeren Maßes erinnert: Ist μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$, dann heißt die Abbildung

$$\mu^* \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to \quad [0, +\infty], \\ A & \mapsto \quad \inf \left\{ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) : A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \right\}, \end{cases}$$

das von μ induzierte *äußere Maß*. Man nennt eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, die nicht notwendigerweise messbar ist, eine μ-Nullmenge, wenn $\mu^*(A) = 0$.

Fakta 4.2.8. Das äußere Maß μ^* eines Borelmaßes μ erfüllt

(i) $\mu^*(A) = \mu(A)$, falls $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

(ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(iii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, falls $A \subseteq B$ und

(iv) $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ für jede Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Für $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ werden wir im Weiteren folgende Schreibweise verwenden:

$$\partial_l F(x) := \liminf_{y \nearrow x} \frac{F(x) - F(y)}{x - y}, \qquad \partial^l F(x) := \limsup_{y \nearrow x} \frac{F(x) - F(y)}{x - y},$$
$$\partial_r F(x) := \liminf_{y \searrow x} \frac{F(x) - F(y)}{x - y}, \qquad \partial^r F(x) := \limsup_{y \searrow x} \frac{F(x) - F(y)}{x - y}.$$

Ist F monoton, dann sind die Funktionen $\partial_l F, \partial^l F, \partial_r F$ und $\partial^r F$ messbar (vgl. [Kus14, Lemma 12.20]).

Proposition 4.2.9. *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion F und $E \subseteq \mathbb{R}$ eine $\lambda-$Nullmenge mit*

$$F'(x) < +\infty \text{ für alle } x \in E.$$

Dann ist E eine $\mu-$Nullmenge.

Beweis. Da die Menge E darstellbar ist als

$$E = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \{x \in E \cap [-N, N] : F'(x) < N\},$$

können wir o.B.d.A. annehmen, dass E beschränkt ist und $u'(x) < C$ für ein $C > 0$ erfüllt.

Sei $\epsilon > 0$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$E_n := \left\{ x \in E : \ \mu(I) \leq (C+1)\lambda(I) \quad \text{für alle Intervalle } I = (\alpha, \beta] \text{ mit } x \in I \text{ und } \lambda(I) < \frac{1}{n} \right\}$$

Für $x \in E$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y} < C + 1 \quad \text{für alle } y \in (x - \delta, x + \delta).$$

Damit gilt für $n > \frac{1}{\delta}$ und ein Intervall $I = (\alpha, \beta]$ mit $x \in I$ und $\lambda(I) < \frac{1}{n}$

$$\mu(I) = \mu((\alpha, x]) + \mu((x, \beta]) = F(x) - F(\alpha) + F(\beta) - F(x) \leq (C+1)\lambda(I).$$

Also erhalten wir $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

Wir halten $n \in \mathbb{N}$ fest. Da $E_n \subseteq E$ eine Nullmenge ist und da λ regulär ist, gibt es eine offene Menge G mit $E_n \subseteq G$ und $\lambda(G) < \epsilon 2^{-n}$. Nach Lemma 4.2.7 lässt sich G darstellen als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler, offener Intervalle $(\alpha_j, \beta_j),\ j \in \mathbb{N}$. Da das Intervall $(\alpha_j, \beta_j]$ für jedes j als disjunkte Vereinigung von höchstens abzählbar vielen, halboffenen [2] Intervallen darstellbar ist, deren Länge kleiner $\frac{1}{n}$ ist, schließen wir, dass es eine Folge von paarweise disjunkten, halboffenen Intervallen $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gibt, sodass

$$E_n \subseteq G_n \subseteq \dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} I_k = G_n \cup D \quad \text{und} \quad \lambda(I_k) < \frac{1}{n} \ \forall k \in \mathbb{N},$$

wobei $D := \{\beta_j : \ j \in \mathbb{N}\}$ abzählbar ist. Mit $\mathcal{J} := \{k \in \mathbb{N} : \ I_k \cap E_n \neq \emptyset\}$ gilt dann $E_n \subseteq$

[2] Mit halboffen sind hier Intervalle der Form $(a, b]$ gemeint.

$\bigcup_{k\in\mathcal{J}} I_k \subseteq G_n \cup D$. Wir erhalten

$$\mu^*(E_n) \le \sum_{k\in\mathcal{J}} \mu\left(I_k\right) \le (C+1) \sum_{k\in\mathcal{J}} \lambda\left(I_k\right)$$
$$= (C+1)\lambda\left(\bigcup_{k\in\mathcal{J}} I_j^{(n)}\right) \le (C+1)\left(\lambda(G_n)+\lambda(D)\right) \le (C+1)2^{-n}\epsilon.$$

Aufsummieren über n gibt

$$\mu^*(E) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) \le (C+1)\epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Lemma 4.2.10. *Sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und rechtsstetig. Dann ist die Funktion*

$$G : \begin{cases} [F(a), F(b)] & \to \quad \mathbb{R}, \\ y & \mapsto \quad \inf\left\{z \in [a,b] : F(z) \ge y\right\}, \end{cases} \tag{4.15}$$

monoton wachsend, stetig und es gilt $G(F(x)) = x$ für $x \in [a,b]$.

Beweis. Wegen der Rechtsstetigkeit von F gilt $G(y) = \min\left\{z \in [a,b] : F(z) \ge y\right\}$. Es folgt unmittelbar $G(F(x)) = x$ für $x \in [a,b]$.

Für $y < y' \in [F(a), F(b)]$ und $z \in [a,b]$ impliziert $F(z) \ge y' > y$ die Ungleichung $G(y') \ge G(y)$.

Für $y \in [F(a), F(b)]$ und $\epsilon > 0$ gibt es zwei Möglichkeiten (vgl. Bemerkung 4.2.6):

1. $\exists\, x \in [a,b] :\ F(x) = y$ oder

2. $F(x-) < y < F(x) = F(x+)$.

Im zweiten Fall ist das Intervall $I := (F(x-), F(x))$ eine Umgebung von y. Wegen der Monotonie von F und G gilt

$$x = \lim_{\xi\nearrow x} \xi = \lim_{\xi\nearrow x} G(F(\xi)) \le G(F(x-)) \le G(F(x)) = x,$$

d.h. G ist konstant auf I, damit insbesondere stetig bei y.
Im zweiten Fall ist $(F(x-\epsilon), F(x+\epsilon))$ ist eine Umgebung von y, denn wegen der strikten Monotonie von F gilt

$$F(x-\epsilon) < y = F(x) < F(x+\epsilon).$$

Anwendung von G ergibt für $y' \in (F(x-\epsilon), F(x+\epsilon))$

$$G(y) - \epsilon = x - \epsilon = G\left(F(x-\epsilon)\right) \le G(y') \le G\left(F(x+\epsilon)\right) = G(y) + \epsilon.$$

□

Lemma 4.2.11. *Sei $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig. Für eine Menge $E \subseteq (a,b)$, sodass für ein $C > 0$*

$$\partial^l G(x) > C \quad \textit{für alle } x \in E$$

gilt, ist die Ungleichung $C\lambda^*(E) \le \lambda^*(G(E))$ erfüllt.

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ gibt es nach Definition des äußeren Maßes eine Überdeckung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \supseteq G(E)$ mit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) \le \lambda^*(G(E)) + \frac{\epsilon}{2}$. Wegen der Regularität des Lebesguemaßes gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $O_n \supseteq A_n$ mit $\lambda(O_n) \leq \lambda(A_n) + \epsilon 2^{-n-1}$. Damit erfüllt die offene Menge $O := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n \supseteq G(E)$

$$\lambda(O) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(O_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(A_n) + \frac{\epsilon}{2} \leq \lambda^*(G(E)) + \epsilon.$$

Nach Lemma 4.2.7 kann die offene Menge $U := G^{-1}(O) \cap (a,b)$ als disjunkte Vereinigung offener Intervalle dargestellt werden, d.h. $U = \dot{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}} (a_j, b_j)$.

Mit $g(x) := Cx - G(x)$ definieren wir die Mengen

$$U_n^- := \{x \in (a_n, b_n) : \ \exists y \in (a_n, x) : \ g(y) > g(x)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 4.2.5 besitzt U_n^- eine Darstellung $U_n^- = \dot{\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}} \left(a_j^{(n)}, b_j^{(n)}\right)$ mit $g(a_j^{(n)}) \geq g(b_j^{(n)})\ \forall j \in \mathbb{N}$.

Die Ungleichung bedeutet

$$C\left(b_j^{(n)} - a_j^{(n)}\right) \leq G\left(b_j^{(n)}\right) - G\left(a_j^{(n)}\right). \tag{4.16}$$

Da für $x \in E$

$$\partial^l G(x) = \limsup_{y \nearrow x} \frac{G(x) - G(y)}{x - y} < C,$$

gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $y \in (x - \delta, x)$, sodass $\frac{G(x)-G(y)}{x-y} > C$ und damit

$$g(y) = Cy - G(y) > Cx - G(x) = g(x).$$

Damit gilt $E \subseteq \bigcup\limits_{j,n\in\mathbb{N}} \left(a_j^{(n)}, b_j^{(n)}\right)$.

Da G stetig und monoton ist, gilt $\left(G(a_j^{(n)}), G(b_j^{(n)}\right) \subseteq G\left((a_j^{(n)}, b_j^{(n)})\right)$. Da die Intervalle $\left(a_j^{(n)}, b_j^{(n)}\right)$ für $j, n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind, impliziert die Monotonie von G, dass auch die Intervalle $\left(G(a_j^{(n)}), G(b_j^{(n)})\right)$ paarweise disjunkt sind. Wegen $\left(a_j^{(n)}, b_j^{(n)}\right) \subseteq U \subseteq G^{-1}(O)$ folgt damit

$$\dot{\bigcup_{j,n\in\mathbb{N}}} \left(G(a_j^{(n)}), G(b_j^{(n)})\right) \subseteq O. \tag{4.17}$$

Insgesamt ergibt sich mit (4.16) und (4.17)

$$C\lambda^*(E) \leq C \sum_{j,n\in\mathbb{N}} \lambda\left(a_j^{(n)}, b_j^{(n)}\right) \leq \sum_{j,n\in\mathbb{N}} \lambda\left(G(a_j^{(n)}), G(b_j^{(n)})\right) \leq \lambda(O) \leq \lambda^*(G(E)) + \epsilon.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Lemma 4.2.12. *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit streng monoton wachsender Verteilungsfunktion F. Jede Menge $E \subseteq \mathbb{R}$, die nur Stetigkeitspunkte von F enthält und $\lambda^*(F(E)) = 0$ erfüllt, ist eine $\mu-$Nullmenge.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Man argumentiert genauso wie am Beginn des Beweises von Lemma 4.2.11, um zu zeigen, dass es eine Folge paarweiser disjunkter Intervalle (a_n, b_n) gibt, sodass

$$F(E) \subseteq \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} (a_n, b_n) \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\left((a_n, b_n)\right) < \epsilon.$$

Wegen der Monotonie von F sind die Urbilder $F^{-1}\big((a_n, b_n)\big)$ Intervalle oder leer. Für

$$\mathcal{J} := \big\{n \in \mathbb{N} : \ F^{-1}\big((a_n, b_n)\big) \neq \emptyset\big\}$$

bezeichne α_n den linken Endpunkt von $F^{-1}\big((a_n, b_n)\big)$ für $n \in \mathcal{J}$. Für $n \in \mathcal{J}$ definieren wir die Intervalle

$$I_n := \begin{cases} F^{-1}\big((a_n, b_n)\big) \setminus \{\alpha_n\}, & F \text{ ist unstetig bei } \alpha_n, \\ F^{-1}\big((a_n, b_n)\big) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen $E \subseteq F^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n)\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{-1}\big((a_n, b_n)\big)$ und da E keine Unstetigkeiststellen von F enthält, erhalten wir, dass $\{I_n \ : \ n \in \mathcal{J}\}$ eine Überdeckung von E bildet.
Wir zeigen, dass I_n für jedes $n \in \mathcal{J}$ offen ist. Dazu bezeichne $\alpha < \beta$ den linken und rechten Endpunkt von I_n. Ist F in α unstetig, dann gilt $\alpha \notin I_n$. Ist F stetig in α, dann gilt wegen $\alpha = \inf\{\xi \in \mathbb{R} : \ F(\xi) > a_n\}$ die Gleichung $F(\alpha) = a_n$ und damit folgt $\alpha \notin I_n$.
Wegen der Monotonie von F gilt $\beta = \inf\{\xi \in \mathbb{R} : \ F(\xi) > b_n\}$. Aus der Rechtsstetigkeit von F folgt damit $F(\beta) \geq b_n$, d.h. $\beta \notin I_n$.

Für $\xi < \eta \in I_n$ gilt $a_n < F(\xi) < F(\eta) < b_n$ und damit $\mu\left((\xi, \eta]\right) < b_n - a_n$. Da I_n offen ist gibt es für jedes kompakte $K \subseteq I_n$ ein halboffenes Intervall $J = (\xi, \eta]$, sodass $K \subseteq J \subseteq I_n$. Gemeinsam mit der Tatsache, dass μ regulär von innen ist, folgt

$$\mu(I_n) \leq \sup\{\mu(K) : \ K \subseteq I_n \text{ kompakt}\} \leq \sup\{\mu(J) : \ J = (\xi, \eta] \subseteq I_n\} \leq b_n - a_n.$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathcal{J}} \mu(I_n) \leq \sum_{n\in\mathcal{J}} (b_n - a_n) \leq \epsilon.$$

□

Proposition 4.2.13. *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion F und sei $E \subseteq \mathbb{R}$, sodass*

$$F \text{ ist stetig bei } x \quad \text{und} \quad F'(x) \text{ existiert nicht in } [0, +\infty] \quad \text{für alle } x \in E.$$

Dann ist E eine $\mu-$Nullmenge.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass F streng monoton wachsend ist. Nach Fakta 4.2.2 (iv) ist E eine $\lambda-$Nullmenge. Für $C > 0$ definieren wir zwei Mengen durch

$$E_C^l := \{x \in E : \partial_l F(x) < C\} \quad \text{und} \quad E_C^r := \{x \in E : \partial_r F(x) < C\}.$$

Wegen $0 \leq \partial_l F(x) \leq \partial^l F(x) \leq +\infty$ und $0 \leq \partial_r F(x) \leq \partial^r F(x) \leq +\infty$ nimmt für $x \in E$ zumindest eine der beiden Funktionen $\partial_l F$ und $\partial_r F$ bei x einen endlichen Wert an. Damit gilt die Inklusion

$$E = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} E_N^l \cup \bigcup_{N\in\mathbb{N}} E_N^r;$$

es reicht somit zu zeigen, dass es sich bei E_C^l und E_C^r für $C > 0$ um $\mu-$Nullmengen handelt. Wir beweisen nur $\mu^*(E_C^l) = 0$.

Sei G definiert wie in (4.15). Für $x \in E_C^l$ gilt definitionsgemäß $\liminf_{y \nearrow x} \frac{F(x)-F(y)}{x-y} < C$, d.h. für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $y \in (x-\epsilon, x)$ mit

$$C > \frac{F(x)-F(y)}{x-y} = \frac{F(x)-F(y)}{G(F(x))-G(F(y))}.$$

Da F strikt monoton ist, können wir auf

$$\frac{G(F(x))-G(F(y))}{F(x)-F(y)} < \frac{1}{C}$$

schließen. Mit anderen Worten $\partial^l G(F(x)) \geq \frac{1}{C} > \frac{1}{2C}$. Nach Lemma 4.2.10 erfüllt die Funktion G gemeinsam mit der Menge $F(E_C^l)$ und der Konstante $\frac{1}{2C}$ die Voraussetzungen von Lemma 4.2.11 und wir erhalten

$$\frac{1}{2C}\lambda^*\left(F(E_C^l)\right) \leq \lambda^*\left(F^{-1}\left(F(E_C^l)\right)\right) = \lambda^*\left(E_C^l\right) \leq \lambda^*(E) = 0.$$

Mit Lemma 4.2.12 können wir nun auf $\mu^*(E_C^l) = 0$ schließen.

Für allgemeines μ und F betrachten wir $\tilde{F}(x) := F(x) + x$ und das von $\tilde{F}$ induzierte Lebesgue-Stieltjes-Maß $\tilde{\mu}$. Dann erfüllen $\tilde{\mu}$ und $\tilde{F}$ die zu Beginn des Beweises getroffenen Voraussetzungen. Wegen

$$\frac{\tilde{F}(x)-\tilde{F}(y)}{x-y} = \frac{F(x)-F(y)}{x-y} + 1, \quad x \neq y$$

existiert $\tilde{F}'(x)$ genau dann nicht in $[0,+\infty]$, wenn $F'(x)$ nicht in $[0,+\infty]$ existiert. Nach dem ersten Beweisteil gilt demnach $\tilde{\mu}^*(E) = 0$.
Für $\epsilon > 0$ gibt es [3] eine Folge von offenen Intervallen (a_n, b_n), sodass

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n, b_n) \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}\left((a_n, b_n)\right) < \epsilon.$$

Da für jedes Intervall (α, β)

$$\mu\left((\alpha,\beta)\right) = F(\beta) - F(\alpha) < F(\beta) - F(\alpha) + \beta - \alpha = \tilde{F}(\beta) - \tilde{F}(\alpha) = \tilde{\mu}\left((\alpha,\beta)\right)$$

gilt, folgt $\mu^*(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left((a_n,b_n)\right) < \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}\left((a_n,b_n)\right) < \epsilon$. Damit ist E auch in diesem Fall eine $\mu-$Nullmenge. □

Satz 4.2.14 (Satz von De la Vallée Poussin)**.** *Sei μ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ mit Verteilungsfunktion F und Lebesgue-Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_{pp} + \mu_{sc}$, dann sind die Mengen*

$$\begin{aligned} S_{ac}^{VP} &:= \{x \in \mathbb{R} : \ 0 < F'(x) < +\infty\}, \\ S_{pp}^{VP} &:= \{x \in \mathbb{R} : \ F \textit{ ist unstetig bei } x\}, \\ S_{sc}^{VP} &:= \{x \in \mathbb{R} : \ F \textit{ ist stetig bei } x \textit{ und } F'(x) = +\infty\}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

Borelmengen und Träger von μ_{ac}, μ_{pp} bzw. μ_{sc}.

Beweis. Die Unstetigkeitsstellen monotoner Funktionen sind stets Sprungstellen und die rechts- bzw. linksseitigen Grenzwerte $F(x+)$ bzw. $F(x-)$ existieren für jedes $x \in \mathbb{R}$; vgl. Bemerkung

[3] Man argumentiert wie im Beweis von Lemma 4.2.11 und verwendet Lemma 4.2.7.

4.2.6. Wegen der Regularität von μ gilt

$$\mu(\{x\}) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mu\left((x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]\right) \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F\left(x - \frac{1}{n}\right) = F(x+) - F(x-).$$

Damit liegt x genau dann in S_{pp}^{VP}, wenn $\mu(\{x\}) > 0$. S_{pp}^{VP} ist demnach der kleinstmögliche Träger von μ_{pp}. Als abzählbare Menge ist S_{pp}^{VP} messbar. Wegen der Messbarkeit von $\partial_l F, \partial^l F, \partial_r F$ und $\partial^r F$ sind auch

$$\begin{aligned} S_{ac}^{VP} &= \left\{x \in \mathbb{R} : \; 0 < \partial_l F(x) = \partial^l F(x) = \partial_r F(x) = \partial^r F(x) < +\infty\right\}, \\ S_{sc}^{VP} &= \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : \min\{\partial_l F(x), \partial_r F(x)\} > N\} \end{aligned}$$

Borelmengen.

Nach Bemerkung 4.1.5 (ii) gibt es eine Borelmenge N, mit $\lambda(N) = \mu_{sc}(N^c) = 0$. Da S_{pp}^{VP} abzählbar und μ_{sc} stetig ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $S_{pp}^{VP} \cap N = \emptyset$. Gemeinsam mit Fakta 4.2.2 (iv) folgt

$$\mu_{ac}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} F' \; d\lambda \quad \text{und} \quad \mu_{sc}(\Delta) = \mu\left(\Delta \cap N\right)$$

für jedes $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Es bezeichne $E_\times$ die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}$, für die F bei x stetig ist und $F'(x)$ nicht existiert in $[0, +\infty]$. Mit $E_0 := \{x \in \mathbb{R} : \; F'(x) = 0\}$ gilt nun

$$\mathbb{R} = E_0 \,\dot\cup\, S_{ac}^{VP} \,\dot\cup\, S_{sc}^{VP} \,\dot\cup\, E_\times \,\dot\cup\, S_{pp}^{VP}.$$

Da F $\lambda-$f.ü. differenzierbar ist, sind $S_{sc}^{VP}, E_\times$ und S_{pp}^{VP} Lebesgue-Nullmengen. Also gilt

$$\mu_{ac}\left((S_{ac}^{VP})^c\right) = \mu_{ac}\left(E_0\right) = \int\limits_{E_0} F' \; d\lambda = 0,$$

d.h. S_{ac}^{VP} ist Träger von μ_{ac}. Da N Träger von μ_{sc} ist, gilt

$$\mu_{sc}^{VP}\left((S_{sc}^{VP})^c\right) = \mu_{sc}\left(S_{pp}^{VP}\right) + \mu\left((E_0 \cup S_{ac}^{VP}) \cap N\right) + \mu\left(E_\times\right).$$

Dabei verschwindet der erste Summand der rechten Seite, da μ_{sc} stetig und da S_{pp}^{VP} abzählbar ist. Nach Proposition 4.2.9 bzw. Proposition 4.2.13 ist $(E_0 \cup S_{ac}^{VP}) \cap N$ bzw. $E_\times$ eine $\mu-$Nullmenge. Demnach ist S_{sc}^{VP} Träger von μ_{sc}. □

4.3 Charakterisierung von Trägern durch Randverhalten der Nevanlinna-Funktion

Ist μ ein Borelmaß, das der Regularitätsbedingung $\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty$ genügt, dann wird durch

$$q(z) := a + bz + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right) \; d\mu(t), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \tag{4.19}$$

für $a \in \mathbb{R}$ und $b \geq 0$ eine Nevanlinna-Funktion definiert; siehe Satz 3.3.14. Das Resultat von de la Vallèe Poussin, Satz 4.2.14, zeigt auf, wie man, ausgehend von Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften der Verteilungsfunktion von μ, Träger der einzelnen Komponenten μ_{ac}, μ_{pp} und μ_{sc} bestimmen kann.
Mit etwas Aufwand werden wir aus dieser Tatsache disjunkte Träger von μ_{ac}, μ_{pp} und μ_{sc} gewinnen, die durch das Verhalten von q in der Nähe der reellen Achse charakterisiert sind.
Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind in der Literatur auch als *Fatou-Theoreme* bekannt. Wir orientieren uns an den Ausführungen in [Don74, Kapitel 4].

Satz 4.3.1. *Sei μ ein Borelmaß mit $\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} < +\infty$ und sei F eine Verteilungsfunktion von μ. Die Mengen S_τ^{VP}, $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ seien definiert wie in* (4.18). *Für festes $a \in \mathbb{R}$ und $b \geq 0$ ist q die in* (4.19) *definierte Nevanlinna-Funktion. Für die Mengen*

$$S_{ac}^L := \left\{ x \in \mathbb{R} : \; 0 < \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) < \infty \right\}, \tag{4.20}$$

$$S_{pp}^L := \left\{ x \in \mathbb{R} : \; \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \Im q(x + i\epsilon) > 0 \right\}, \tag{4.21}$$

$$S_{sc}^L := \left\{ x \in \mathbb{R} : \; \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) = +\infty \right\} \setminus S_{pp}^L. \tag{4.22}$$

gelten die folgenden Aussagen:

(i) Die Definition der Mengen S_τ^L ist unabhängig von der Wahl von a und b.

(ii) Es gelten die Inklusionen

$$S_{pp}^{VP} = S_{pp}^L, \quad S_{ac}^{VP} \subseteq S_{ac}^L \quad \text{und} \quad S_{sc}^{VP} \subseteq S_{sc}^L;$$

insbesondere sind die Mengen S_τ^L Träger von μ_τ. Die Mengen S_τ^L sind paarweise disjunkt.

(iii) Die Menge $S_{ac}^L \setminus S_{ac}^{VP}$ ist eine Lebesgue-Nullmenge.

Beweis.

ad (i) Für festes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Im q(x + i\epsilon) = b\epsilon + \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon}{(t-x)^2 + \epsilon^2} \, d\mu(t).$$

Also hängen $\lim_{\epsilon \searrow 0} q(x + i\epsilon)$ und $\lim_{\epsilon \searrow 0} q(x + i\epsilon)$ nicht von a und b ab.

ad (ii) Dass die Mengen S_τ^L paarweise disjunkt sind, folgt direkt aus deren Definition. Nach Punkt (i) können wir in weiterer Folge die Nevanlinna-Funktion

$$q(z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1} \right) \, d\mu(t)$$

betrachten. Da $\mu(\{x\})$ genau dann größer 0 ist, wenn F unstetig in x ist, zeigt die Rechnung

$$\Im \epsilon q(x + i\epsilon) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\epsilon^2}{(t-x)^2 + \epsilon^2} \, d\mu(t) \xrightarrow{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\}}(t) \, d\mu(t) = \mu(\{x\}),$$

wobei die Vertauschung von Integrations und Grenzwertbildung nach dem Satz von Lebesgue mit der bzgl. μ integrierbaren Majorante $t \mapsto \frac{1}{(t-x)^2+1}$ gerechtfertigt ist, dass S_{pp}^L mit

S_{pp}^{VP} zusammenfällt. Demnach sind noch zwei Implikationen zu zeigen:

$$0 < F'(x) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) < +\infty, \tag{4.23}$$

$$F \text{ ist stetig in } x \text{ und } F'(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) = +\infty. \tag{4.24}$$

Wir definieren für festes $x \in \mathbb{R}$ das Maß $\tilde{\mu}$ als Translation um x von μ, d.h.

$$\tilde{\mu}(\Delta) := \mu(\Delta - x) \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

wobei $\Delta - x = \{y - x : \ y \in \Delta\}$, und die Nevanlinna Funktion $\tilde{q}$ durch

$$\tilde{q}(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t - z} - \frac{t}{t^2 + 1} \, d\tilde{\mu}(t) = q(x + z).$$

Da eine Verteilungsfunktion $\tilde{F}$ von $\tilde{\mu}$

$$\tilde{F}(\xi) = F(\xi + x) + d, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

für geeignetes $d \in \mathbb{R}$ erfüllt, erhalten wir, dass F in x genau dann differenzierbar ist, wenn $\tilde{F}$ in 0 diffenzierbar ist. Dabei gilt $F'(x) = \tilde{F}(0)$. Wegen

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} q(x + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{q}(i\epsilon) \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon q(x + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \tilde{q}(i\epsilon)$$

können wir also o.B.d.A. $x = 0$ annehmen.

Mit $v(\epsilon) := \int_{(-1,1]} \frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2} \, d\mu(t)$, $\epsilon > 0$ gilt dann

$$\Im q(i\epsilon) = v(\epsilon) + \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1]} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \, d\mu(t).$$

Da die Familie von Funktionen $\frac{\epsilon}{.^2+\epsilon^2}$ auf $\mathbb{R} \setminus (-1, 1]$ für $\epsilon \searrow 0$ punktweise monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert, folgt mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1]} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \, d\mu(t) = 0.$$

Da F die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften in (4.23) und (4.24) an der Stelle $x = 0$ genau dann erfüllt, wenn eine Verteilungsfunktion des Maßes $\Delta \mapsto \mu(\Delta \cap (-1, 1])$ die entsprechende Eigenschaft hat, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $(-1, 1]$ Träger von μ ist.
Für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$v(\epsilon) = \int \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \, d\mu(t) \geq \int_{(-\epsilon,\epsilon]} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \, d\mu(t) \geq \int_{(-\epsilon,\epsilon]} \frac{1}{2\epsilon} \, d\mu(t) = \frac{F(\epsilon) - F(-\epsilon)}{2\epsilon} =: \theta(\epsilon). \tag{4.25}$$

Die stetige Funktion $t \mapsto \frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}$ ist monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$ und monoton fallend auf $[0, +\infty)$. Für $\epsilon > 0$ seien σ_ϵ^l und σ_ϵ^r die Lebesgue-Stieltjes-Maße mit Verteilungsfunktionen

$$G_\epsilon^l(t) := \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(t) \quad \text{und} \quad G_\epsilon^r(t) := \left(\frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon} \right) \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(t).$$

Wegen $\frac{d}{dt}\left(\frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\right) = -\frac{2\epsilon t}{(t^2+\epsilon^2)^2}$ gilt für $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\sigma_\epsilon^l(\Delta) = -\int\limits_{\Delta\cap(-\infty,0)} \frac{2\epsilon t}{(t^2+\epsilon^2)^2}\, d\lambda(t) \quad \text{und} \quad \sigma_\epsilon^r(\Delta) = \int\limits_{\Delta\cap[0,+\infty)} \frac{2\epsilon t}{(t^2+\epsilon^2)^2}\, d\lambda(t).$$

Partielle Integration (vgl. Satz 4.2.3) liefert

$$\begin{aligned} v(\epsilon) &= \int\limits_{(-1,1]} \frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\, d\mu(t) = \int\limits_{(-1,0]} \frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\, d\mu(t) - \int\limits_{(0,1]} -\frac{\epsilon}{t^2+\epsilon^2}\, d\mu(t) \\ &= FG_\epsilon^l\Big|_{-1}^{0} - \int\limits_{(-1,0]} F(t-)\, d\sigma_\epsilon^l(t) - FG_\epsilon^r\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{(0,1]} F(t-)\, d\sigma_\epsilon^r(t). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Da σ_ϵ^l und σ_ϵ^r absolut stetig sind und da sich die Funktionen $t \mapsto F(t)$ und $t \mapsto F(t-)$ höchstens auf einer abzählbaren Lebesgue-Nullmenge unterscheiden, folgt weiter

$$\begin{aligned} v(\epsilon) &= \left[\frac{1}{\epsilon}F(0) - \frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}F(-1) + \frac{\epsilon}{1+\epsilon^2}F(1) - \frac{1}{\epsilon}F(0)\right] \\ &\quad + \int\limits_{(-1,0]} F(t)\frac{2\epsilon t}{(t^2+\epsilon^2)^2}\, d\lambda(t) + \int\limits_{(0,1]} F(t)\frac{2\epsilon t}{(t^2+\epsilon^2)^2}\, d\lambda(t) \\ &= \mu\left((-1,1]\right)\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} + \int\limits_{(-1,1]} F(t)\frac{2\epsilon t}{(t^2+\epsilon^2)^2}\, d\lambda(t). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Die Substitution $\tau = \frac{t}{\epsilon}$ liefert

$$\begin{aligned} \int\limits_{(-1,1]} F(t)\frac{2\epsilon t}{(t^2+\epsilon^2)^2}\, dt &= \int\limits_{\left(-\frac{1}{\epsilon},\frac{1}{\epsilon}\right]} F(\epsilon\tau)\frac{2\epsilon^2\tau}{\epsilon^4(\tau^2+1)}\epsilon\, d\tau \\ &= \int\limits_{\left(-\frac{1}{\epsilon},0\right]} F(\epsilon\tau)\frac{2\tau}{\epsilon(\tau^2+1)}\, d\tau + \int\limits_{\left(0,\frac{1}{\epsilon}\right]} F(\epsilon\tau)\frac{2\tau}{\epsilon(\tau^2+1)}\, d\tau \\ &= \int\limits_{\left[0,\frac{1}{\epsilon}\right)} F(-\epsilon\tau)\frac{2\tau}{\epsilon(\tau^2+1)}\, d\tau + \int\limits_{\left(0,\frac{1}{\epsilon}\right]} F(\epsilon\tau)\frac{2\tau}{\epsilon(\tau^2+1)}\, d\tau \\ &= \int\limits_{\left(0,\frac{1}{\epsilon}\right)} \theta(\epsilon\tau)\frac{4\tau}{\tau^2+1}\, d\tau, \end{aligned}$$

wobei in die letzte Gleichung die Stetigkeit des Lebesguemaßes eingeht.
Mit $\psi_\epsilon(\tau) := \theta(\epsilon\tau)\mathbb{1}_{\left(1,\frac{1}{\epsilon}\right)}(\tau)$ folgt

$$v(\epsilon) = \mu((-1,1])\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} + \int\limits_{(0,\infty)} \psi_\epsilon(\tau)\frac{4\tau^2}{(\tau^2+1)^2}\, d\tau. \tag{4.28}$$

Falls $0 \in S_{sc}^{VP}$ gilt wegen (4.25)

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} \Im q(i\epsilon) = \lim_{\epsilon\searrow 0} v(\epsilon) \geq \lim_{\epsilon\searrow 0} \theta(\epsilon) = +\infty,$$

d.h. $0 \in S_{sc}^L$.

Falls F bei 0 differenzierbar ist, gilt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \theta(\epsilon) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{F(\epsilon) - F(-\epsilon)}{2\epsilon} = F'(0).$$

Insbesondere ist dann θ auf $(0, \epsilon_0)$ für ein hinreichend kleines $\epsilon_0 > 0$ beschränkt. Da für $\epsilon \geq \epsilon_0$ die Abschätzung

$$\theta(\epsilon) = \frac{\mu\left((-\epsilon, \epsilon]\right)}{2\epsilon} \leq \frac{\mu\left((-1, 1]\right)}{2\epsilon_0}$$

gültig ist, ist θ durch eine Konstante C beschränkt. Damit wird auch die Familie $\{\psi_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ gleichmäßig durch C beschränkt.
Geschickte Substitution zeigt $\int\limits_{(0,+\infty)} \frac{4\tau^2}{(\tau^2+1)^2}\, d\tau = \pi$. Da ψ_ϵ für $\epsilon \searrow 0$ punktweise gegen die konstante Funktion $F'(0)$ konvergiert, erhält man unter Verwendung von Gleichung (4.28) und dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(i\epsilon) = \lim_{\epsilon \searrow 0} v(\epsilon) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \left[\mu((-h, h]) \frac{\epsilon}{h^2 + \epsilon^2} + \int\limits_{(0,\infty)} \psi_\epsilon(\tau) \frac{4\tau^2}{(\tau^2+1)^2}\, d\tau \right] \\ &= \int\limits_{(0,\infty)} \left(\lim_{\epsilon \searrow 0} \psi_\epsilon(\tau) \right) \frac{4\tau^2}{(\tau^2+1)^2}\, d\tau = \pi F'(0). \end{aligned} \tag{4.29}$$

ad (iii) Für $x \in \left(S_{ac}^{VP}\right)^c$ gilt entweder $F'(x) = 0$ oder F ist bei x nicht differenzierbar. Gleichung (4.29) angewandt auf $\tilde{q}$ und $\tilde{F}$ ergibt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im \tilde{q}(i\epsilon) = \pi \tilde{F}'(0) = \pi F'(x).$$

Damit besteht $S_{ac}^L \setminus S_{ac}^{VP}$ ausschließlich aus Punkten, an denen F nicht differenzierbar ist. Laut Fakta 4.2.2 (iv) stellt $S_{ac}^L \setminus S_{ac}^{VP}$ eine Lebesguenullmenge dar.

□

Als Nebenprodukt des Beweises des letzten Satzes erhalten wir zwei nützliche Eigenschaften von Nevanlinna-Funktionen. Das im Beweis von Teil (i) verwendete Argument stammt aus [Tes14, Kapitel 3.4].

Satz 4.3.2. *Ist q eine Nevanlinna-Funktion, dann gilt:*

(i) $\lim_{\epsilon \searrow 0} q(x + i\epsilon)$ *existiert und ist endlich für fast alle* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Wenn eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lambda^*(M) > 0$ und ein $\phi \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} q(x + i\epsilon) = \phi \qquad \text{für alle } x \in M,$$

dann ist q trivial, d.h. $q \equiv \phi$.

Beweis. Im Beweis des letzten Satzes haben wir gesehen, dass $\lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) = \pi F'(x)$, falls F bei x differnezierbar ist. Nach Fakta 4.2.2 (iv) exisiert $\lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon)$ fast überall.

Seien a, b und μ die Parameter der Integraldarstellung von q. Weil für $\epsilon > 0$

$$\Im q(x + i\epsilon) = b\epsilon + \int \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2}\, d\mu(t)$$

gilt, schließen wir, da der Integrand strikt positiv ist, dass entweder $q \equiv a$ oder $\Im q(z) > 0$ für alle $z \in \mathbb{C}_+$.
Aussage (i) ist für konstantes q trivial. Im zweiten Fall sind die Abbildungen

$$z \mapsto \sqrt{q(z)} \quad \text{und} \quad z \mapsto i\sqrt{q(z)}$$

Nevanlinna-Funktionen. Dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \Im\sqrt{q(x + i\epsilon)} \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im i\sqrt{q(x + i\epsilon)} = \lim_{\epsilon \searrow 0} \Re\sqrt{q(x + i\epsilon)}$$

und damit auch $\lim\limits_{\epsilon \searrow 0} \sqrt{q(x + i\epsilon)}$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. Quadrieren gibt Behauptung (i).

Für nicht triviales q und $\phi \in \mathbb{R}$ ist auch $\tilde{q} : z \mapsto -\frac{1}{q(z)-\phi}$ eine Nevanlinna-Funktion. Da für $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} q(x + i\epsilon) = \phi \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\epsilon \searrow 0} \tilde{q}(x + i\epsilon) = \infty,$$

ist auch Behauptung (ii) bewiesen. □

4.4 Aronszajn-Donoghue Theorie

Für eine einfache, symmetrische Relation S mit Defektindizes$(1, 1)$ und $\tau \in \{ac, pp, sc\}$ untersuchen wir nun die Abbildung

$$\mathfrak{E}(S) \ni A \mapsto \sigma_\tau(A);$$

sprich wir wollen die spektralen Komponenten (absolut stetiges, diskretes und singulär stetiges Spektrum) verschiedener selbstadjungierter Erweiterungen von S vergleichen.
Die in diesem Abschnitt verwendeten Techniken gehen ursprünglich auf N. Aronszajn und W.F. Donoghue (siehe [Aro57] und [Don74]). Ähnlich wird etwa auch in [GT00] argumentiert.

Lemma 4.4.1. *Für zwei Borelmaße μ und ν seien die Mengen $S^L_{ac}(\mu)$ und $S^L_{ac}(\nu)$ wie in* (4.20) *definiert. Ist die symmetrische Differenz $S^L_{ac}(\mu) \triangle S^L_{ac}(\nu)$ eine Lebesgue-Nullmenge, dann gilt*

$$S^{top}(\mu_{ac}) = S^{top}(\nu_{ac}).$$

Beweis. Durch $S^{VP}_{ac}(\mu) := \{x \in \mathbb{R} :\ 0 < F'(x) < \infty\}$ ist nach Satz 4.2.14 ein Träger von μ_{ac} gegeben.
Sei $x \notin S^{top}(\mu_{ac})$. Dann gilt wegen $\frac{d\mu_{ac}}{d\lambda} = F'$ λ−f.ü.

$$\int\limits_{(x-\epsilon, x+\epsilon)} F'(t)\, d\lambda(t) = \mu_{ac}\left((x - \epsilon, x + \epsilon)\right) = 0;$$

für hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Insbesondere ist $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap S^{VP}_{ac}(\mu)$ eine Lebesgue-Nullmenge.
Wir zerlegen $S^L_{ac}(\nu)$ gemäß

$$S^L_{ac}(\nu) = \left[S^L_{ac}(\nu) \cap S^L_{ac}(\mu)\right] \cup \left[S^L_{ac}(\nu) \setminus S^L_{ac}(\mu)\right] \subseteq S^{VP}_{ac}(\mu) \cup \left[S^L_{ac}(\mu) \setminus S^{VP}_{ac}(\mu)\right] \cup \left[S^L_{ac}(\nu) \setminus S^L_{ac}(\mu)\right].$$

Nach Satz 4.3.1 (iii) ist $S_{ac}^L(\mu) \setminus S_{ac}^{VP}(\mu)$ eine Lebesguenullmenge. Wegen $S_{ac}^L(\nu) \setminus S_{ac}^L(\mu) \subseteq S_{ac}^L(\mu) \triangle S_{ac}^L(\nu)$ ist auch $S_{ac}^L(\nu) \setminus S_{ac}^L(\mu)$ eine Lebesguenullmenge.

Wir schließen, dass auch $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap S_{ac}^L(\nu)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, und weiter, da $S_{ac}^L(\nu)$ Träger von $\nu_{ac} \ll \lambda$ ist, dass $\nu_{ac}\left((x-\epsilon, x+\epsilon)\right) = 0$. Damit gilt $x \notin S^{top}(\nu_{ac})$. Da die Behauptung symmetrisch formuliert ist, muss nicht mehr gezeigt werden. □

Proposition 4.4.2. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch und einfach mit Defektindizes$(1,1)$ und $A \in \mathfrak{E}(S)$. Sei q eine Q-Funktion von (S, A) mit Integraldarstellung*

$$q(z) = a + bz + \int \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} \right) \, d\mu(t),$$

dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\sigma(A) \setminus \{\infty\}$ *ist diskret.*

(ii) μ *ist reines Punktmaß und* $\{x \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x\}) > 0\}$ *ist diskret.*

(iii) q *ist meromorph.*

Beweis.

(i)⇒(ii) Es bezeichne E das Spektralmaß des Operatoranteils von A. Proposition 3.3.16 (iii) garantiert die Existenz eines $h \in \mathcal{H}$, sodass

$$\mu(\Delta) = \int_{\Delta} (1+t^2) \, d\left(E(t)h, h\right) \quad \text{für alle } \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Da E auf der diskreten Menge $\sigma(A) \setminus \{\infty\}$ lebt, ist μ reines Punktmaß mit

$$\{x \in \mathbb{R} : \ \mu(\{x\}) > 0\} \subseteq \sigma(A) \setminus \{\infty\}.$$

(ii)⇒(iii) Ist μ reines Punktmaß mit diskretem Träger $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, so erhalten wir

$$q(z) = a + bz + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{x_n\}) \left[\frac{1}{x_n - z} - \frac{x_n}{x_n^2+1} \right];$$

damit ist q meromorph.

(iii)⇒(i) Wenn q meromorph ist, dann ist die Polstellenmenge D von q diskret. Aus der Integraldarstellung von q schließt man, dass $q\restriction_{\mathbb{R}\setminus D}$ reell ist. Für S_{ac}^L, S_{pp}^L und S_{sc}^L, definiert wie in Satz 4.3.1, gilt dann also

$$S_{ac}^L \cup S_{pp}^L \cup S_{sc}^L \subseteq D;$$

damit hat μ die diskrete Menge D als Träger und ist somit ein reines Punktmaß. Da der Operatoranteil A_{op} von A unitär ähnlich zum Multiplikationsoperator auf $L^2(d\mu)$ ist (siehe Satz 3.4.14), ergibt sich

$$\sigma(A) \setminus \{\infty\} = \sigma(A_{op}) = S^{top}(\mu) \subseteq D.$$

□

Im Bezug auf das absolut stetige und das reine Punktspektrum lassen sich folgende Aussagen treffen.

Satz 4.4.3. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ symmetrisch und einfach mit Defektindizes$(1,1)$. Für $A \neq A' \in \mathfrak{E}(S)$ gilt dann:*

(i) $\sigma_{ac}(A) = \sigma_{ac}(A')$.

(ii) Wenn $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ diskret ist, dann ist auch $\sigma(A')$ diskret und in diesem Fall gilt

$$\sigma(A) \cap \sigma(A') \subseteq \{\infty\}.$$

Beweis.

ad (i) Es bezeichne q die normierte Q-Funktion von (S, A). Für passendes $\phi \in \mathbb{R}$ ist nach Satz 3.4.16

$$r(z) := \frac{\phi q(z) + 1}{\phi - q(z)} \tag{4.30}$$

die normierte Q-Funktion von (S, A'). Man erhält also

$$\Im r(z) = (\phi^2 + 1) \frac{\Im q(z)}{|\phi - q(z)|^2}. \tag{4.31}$$

Nach Satz 4.3.2 werden durch

$$N_1 := \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \searrow 0} q(x + i\epsilon) \text{ existiert nicht in } \mathbb{C} \right\} \quad \text{und} \quad N_2 := \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \searrow 0} q(x + i\epsilon) = \phi \right\}$$

zwei Lebesgue-Nullmengen definiert.

Es bezeichne μ bzw. ν das eindeutig definierte Maß aus der Integraldarstellung der Nevanlinna-Funktion q bzw. r.

Wir zeigen $S^L_{ac}(\nu) \triangle S^L_{ac}(\mu) \subseteq N_1 \cup N_2$ mit

$$S^L_{ac}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ 0 < \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) < +\infty \right\},$$
$$S^L_{ac}(\nu) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ 0 < \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im r(x + i\epsilon) < +\infty \right\}.$$

Für $x \in S^L_{ac}(\mu) \setminus S^L_{ac}(\nu)$ folgt mit (4.31), dass $x \in N_1 \cup N_2$. Wegen

$$\Im q(z) = |q(z) - \phi|^2 \frac{\Im r(z)}{\phi^2 + 1}$$

gilt auch für $x \in S^L_{ac}(\nu) \setminus S^L_{ac}(\mu)$, dass $x \in N_1 \cup N_2$ liegt. Mithilfe von Lemma 4.4.1 erhalten wir $S^{top}(\mu_{ac}) = S^{top}(\nu_{ac})$. Da die Operatoren A_{ac} bzw. A'_{ac} nach Satz 3.4.14 unitär ähnlich zum Multiplikationsoperator auf $L^2(d\mu_{ac})$ bzw. $L^2(d\nu_{ac})$ sind, folgt mit Satz 4.1.20

$$\sigma_{ac}(A) = \sigma(A_{ac}) = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}_\infty}\left(S^{top}(\mu_{ac})\right) = \mathrm{cl}_{\mathbb{R}_\infty}\left(S^{top}(\nu_{ac})\right) = \sigma(A'_{ac}) = \sigma_{ac}(A').$$

ad (ii) Die erste Behauptung folgt aus Propostition 4.4.2 und (4.30):

$\sigma(A)$ ist diskret $\Leftrightarrow$ q ist meromorph $\Leftrightarrow$ r ist meromorph $\Leftrightarrow$ $\sigma(A')$ ist diskret

Für $x \in \sigma(A) = S^L_{pp}$ gilt, wegen $\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon \Im q(x + i\epsilon) = \mu(\{x\}) > 0$, dass

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} |q(x + i\epsilon)| \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) = \infty.$$

Verwendung von Gleichung (4.31) liefert

$$\lim_{\epsilon\searrow 0}\epsilon\Im r(x+i\epsilon)=\lim_{\epsilon\searrow 0}(\phi^2+1)\frac{\epsilon\Im q(x+i\epsilon)}{|\phi-q(x+i\epsilon)|^2}=0,$$

d.h. $S^L_{pp}(\nu)\cap S^L_{pp}(\mu)=\emptyset$. Wegen $S^L_{pp}(\nu)=\sigma(A')$ und $S^L_{pp}(\mu)=\sigma(A)$, folgt die Behauptung.

□

Auf die Voraussetzung der ersten Aussage des letzten Satzes, dass S einfach ist, kann verzichtet werden.

Lemma 4.4.4. *Für $i=1,2$ seien $A_i\le(\mathcal{H}_i)^2$ selbstadjungierte Relationen. Dann gilt mit $A:=A_1\oplus A_2\le\mathcal{H}:=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ für $\tau\in\{ac,pp,sc\}$*

$$\sigma_\tau(A)=\sigma_\tau(A_1)\cup\sigma_\tau(A_2).$$

Beweis. Für $i=1,2$ bezeichne E^i das Spektralmaß von A_i. Für $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty)$ und $f\in\mathcal{H}$ definieren wir eine Abbildung E durch

$$E(\Delta)f:=E^1(\Delta)Pf+E^2(\Delta)(I-P)f,$$

wobei $P\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ die orthogonale Projektion mit ran $P=\mathcal{H}_1$ ist. Als Summe bzw. Hintereinanderausführung von beschränkten Operatoren ist $E(\Delta)$ für festes Δ beschränkt. Für $f,g\in\mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}(E(\Delta)f,g)&=\big(E^1(\Delta)Pf,Pg\big)+\big(E^2(\Delta)(I-P)f,(I-P)g\big)\\&=\big(Pf,E^1(\Delta)Pg\big)+\big((I-P)f,E^2(\Delta)(I-P)g\big)=(f,E(\Delta)g)\,,\end{aligned}$$

d.h. $E(\Delta)^*=E(\Delta)$. Wegen

$$\begin{aligned}(E(\Delta)E(\Delta)f,g)=(E(\Delta)f,E(\Delta)g)&=\big(E^1(\Delta)Pf,E^1(\Delta)Pg\big)+\big(E^2(\Delta)(I-P)f,E^2(\Delta)(I-P)g\big)\\&=\big(E^1(\Delta)Pf,g\big)+\big(E^2(\Delta)(I-P)f,g\big)=(E(\Delta)f,g)\end{aligned}$$

ist $E(\Delta)$ idempotent. Die Operatoren $E(\Delta)$ sind somit orthogonale Projektionen. Klarerweise gilt $E(\emptyset)=0$. Für $\Delta_1,\Delta_2\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}E(\Delta_1)E(\Delta_2)f&=E(\Delta_1)E^1(\Delta_2)Pf+E(\Delta_1)E^2(\Delta_2)(I-P)f\\&=E^1(\Delta_1)E^1(\Delta_2)Pf+E^2(\Delta_1)E^2(\Delta_2)(I-P)f\\&=E^1(\Delta_1\cap\Delta_2)Pf+E(\Delta_1\cap\Delta_2)(I-P)f=E(\Delta_1\cap\Delta_2)f.\end{aligned}$$

Für eine Folge $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty)$ paarweiser disjunkter Mengen gilt

$$\begin{aligned}E\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}\Delta_n\right)f&=E^1\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}\Delta_n\right)Pf+E^2\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}\Delta_n\right)(I-P)f\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}E^1(\Delta_n)Pf+\sum_{n\in\mathbb{N}}E^2(\Delta_n)(I-P)f=\sum_{n\in\mathbb{N}}E(\Delta_n)f.\end{aligned}$$

E ist demnach ein Spektralmaß für $\langle\mathbb{R}_\infty,\mathcal{B}(\mathbb{R}_\infty),\mathcal{H}\rangle$.

Sei $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ dann ist nach Lemma 4.1.9 die Resolvente R von A durch

$$R(z)=[A_1-z]^{-1}\oplus[A_2-z]^{-1}\tag{4.32}$$

gegeben. Damit gilt für $f, g \in \mathcal{H}$

$$\left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\, dE(t)\right] f, g\right) = \left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\, dE^1(t)\right] Pf, g\right) + \left(\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\, dE^2(t)\right] (I-P)f, g\right)$$
$$= \big([A_1 - z]^{-1} Pf, g\big) + \big([A_2 - z]^{-1}(I-P)f, g\big) = (R(z)f, g)\,.$$

Nach Satz 2.4.17 ist E das Spektralmaß von A.

Für $f \in \mathcal{H}$ und $f_1 = Pf$ und $f_2 = (I-P)f$ gilt also

$$E_{f,f}(.) = E^1_{f_1,f_1}(.) + E^2_{f_2,f_2}(.).$$

Mithilfe von Lemma 4.1.6 schließen wir

$$f \in \mathcal{H}_\tau \quad \Leftrightarrow \quad f_1 \in \mathcal{H}_{1,\tau} \text{ und } f_2 \in \mathcal{H}_2\tau,$$

wobei $\mathcal{H}_{i,\tau}$ den entsprechenden von A_i induzierten Teilraum von $\mathcal{H}_i$ bezeichnet; vgl. Satz 4.1.8. Also gilt $\mathcal{H}_\tau = \mathcal{H}_{1,\tau} \oplus \mathcal{H}_{2,\tau}$ und damit weiter

$$A_\tau = A \cap \mathcal{H}_\tau^2 = A \cap (\mathcal{H}_{1,\tau} \oplus \mathcal{H}_{2,\tau})^2 = \left[A \cap \mathcal{H}^2_{1,\tau}\right] \oplus \left[A \cap \mathcal{H}^2_{2,\tau}\right] = A_{1,\tau} \oplus A_{2,\tau}$$

Wieder mit Lemma 4.1.9 folgt für $\tau \in \{ac, sc\}$ sofort

$$\sigma(A_\tau) = \sigma(A_{1,\tau}) \cup \sigma(A_{2,\tau}). \tag{4.33}$$

Da aus $A_\tau = A_{1,\tau} \oplus A_{2,\tau}$ folgt, dass mul $A_\tau \neq \{0\}$ genau dann wenn mul $A_{1,\tau} \neq \{0\}$ oder mul $A_{2,\tau} \neq \{0\}$ gilt auch $\sigma(A_{pp}) = \sigma(A_{1,pp}) \cup \sigma(A_{2,pp})$. Wir erhalten somit

$$\sigma_\tau(A) = \sigma(A_\tau) = \sigma(A_{1,\tau}) \cup \sigma(A_{2,\tau}) = \sigma_\tau(A_1) \cup \sigma_\tau(A_2).$$

□

Korollar 4.4.5. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ abgeschlossen und symmetrisch mit Defekt $(1,1)$ und seien $A, A' \in \mathfrak{E}(S)$. Dann gilt $\sigma_{ac}(A) = \sigma_{ac}(A')$.*

Beweis. Nach Satz 3.2.6 lässt sich $\mathcal{H}$ eindeutig in $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ zerlegen, sodass $S_\mathcal{M} := S \cap \mathcal{M}^2 \leq \mathcal{M}^2$ selbstadjungiert und $S_\mathcal{N} := S \cap \mathcal{N}^2 \leq \mathcal{N}^2$ einfach ist.

Nach Satz 3.2.10 gibt es $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \mathfrak{E}(S_\mathcal{N})$ mit $A = \mathcal{A} \oplus S_\mathcal{M}$ und $A' = \mathcal{A}' \oplus S_\mathcal{M}$. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt wegen $S = S_\mathcal{M} \oplus S_\mathcal{N}$

$$(\text{ran }[S-z])^\perp = \big(\text{dom }[S-z]^{-1}\big)^\perp = \big(\underbrace{\text{dom }[S_\mathcal{M}-z]^{-1}}_{=\mathcal{M}} \oplus \underbrace{\text{dom }[S_\mathcal{N}-z]^{-1}}_{\subseteq\mathcal{N}}\big)^\perp = (\text{ran }[S_\mathcal{N}-z])^\perp\,.$$

Wir schließen, dass $S_\mathcal{N}$ Defekt $(1,1)$ hat. Damit können wir Satz 4.4.3 (i) innerhalb von $\mathcal{N}$ anwenden und erhalten mit Lemma 4.4.4

$$\sigma_{ac}(A) = \sigma_{ac}(\mathcal{A}) \cup \sigma_{ac}(S_\mathcal{M}) = \sigma_{ac}(\mathcal{A}') \cup \sigma_{ac}(S_\mathcal{M}) = \sigma_{ac}(A').$$

□

Satz 4.4.6. *Sei $S \leq \mathcal{H}^2$ abgeschlossen und symmetrisch mit Defektindizes(n,n), wobei $n < +\infty$ und seien $A, A' \in \mathfrak{E}(S)$. Dann gilt*

$$\sigma_{ac}(A) = \sigma_{ac}(A').$$

Beweis. Wir werden selbstadjungierte Relationen $A' = A_0, A_1, \dots, A_n = A$ und abgeschlossene und symmetrische Relationen $S_1, \dots, S_n$ mit Defekt $(1,1)$ konstruieren, sodass

$$A_{k-1}, A_k \in \mathfrak{E}(S_k) \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n. \tag{4.34}$$

Mithilfe von Korollar 4.4.5 folgt dann

$$\sigma(A) = \sigma(A_0) = \sigma(A_1) = \ldots = \sigma(A_n) = \sigma(A').$$

Wir definieren zunächst durch Cayley-Transformation die Isometrie $V := \mathcal{C}(S)$ und die unitären Abbildungen $U := \mathcal{C}(A)$ und $U' := \mathcal{C}(A')$. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir $\mathcal{D} := (\text{dom } V)^\perp$ und $\mathcal{R} := (\text{ran } V)^\perp$. Da $\mathcal{D}$ und $\mathcal{R}$ mit passenden Defekträumen von S übereinstimmen (vgl. Fakta 2.3.7), sind die Teilräume $\mathcal{D}$ und $\mathcal{R}$ n-dimensional.
Wegen $V \subseteq U, U'$ gibt es unitäre Abbildungen $W, W' : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$, sodass

$$U = V \oplus W \quad \text{und} \quad U' = V \oplus W'.$$

Sei $\{d_1, \dots, d_n\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{D}$, dann wird, da W unitär ist, durch

$$r_i := W d_i, \quad i = 1, \dots, n$$

eine Orthonormalbasis von $\mathcal{R}$ festgelegt. Es sei der i-te Einheitsvektor in $\mathbb{C}^n$ mit e_i bezeichnet, dann werden durch die Forderung

$$T_{\mathcal{D}} : e_i \mapsto d_i \quad \text{bzw.} \quad T_{\mathcal{R}} : e_i \mapsto r_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

eindeutige, lineare Abbildungen von $\mathbb{C}$ nach $\mathcal{D}$ bzw. nach $\mathcal{R}$ definiert. Da $\{d_1, \dots, d_n\}$ bzw. $\{r_1, \dots, r_n\}$ Orthonormalbasen sind, handelt es sich bei $T_{\mathcal{D}}$ bzw. $T_{\mathcal{R}}$ um unitäre Abbildungen.

Wegen der Definition der Vektoren r_i gilt

$$T_{\mathcal{R}}^{-1} W T_{\mathcal{D}} = I \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}^n) \simeq \mathbb{C}^{n \times n}. \tag{4.35}$$

Als Produkt von unitären Abbildungen ist auch $T_{\mathcal{R}}^{-1} W' T_{\mathcal{D}}$ unitär. Demnach gibt es ein unitäres $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ und eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ mit

$$G^{-1} T_{\mathcal{R}}^{-1} W' T_{\mathcal{D}} G = D. \tag{4.36}$$

Da D als Produkt von unitären Operatoren unitär ist, gilt $|\gamma_i| = 1$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Für $k = 0, \dots, n$ definieren wir die unitären Matrizen $J_k := \text{diag}\left(\frac{1}{\gamma_1}, \dots, \frac{1}{\gamma_k}, 1, \dots, 1\right)$. Damit wird für jedes k durch

$$W_k := T_{\mathcal{R}} G D J_k G^{-1} T_{\mathcal{D}}^{-1} : \mathcal{D} \to \mathcal{R} \tag{4.37}$$

eine unitäre Abbildung festgelegt. Für $k = 0, \dots, n$ gilt

$$D J_k = \text{diag}(1, \dots, 1, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n). \tag{4.38}$$

Insbesondere bedeutet dies $DJ_0 = D$ und $DJ_n = I$. Die Gleichungen (4.35) und (4.36) zeigen $W' = W_0$ und $W = W_n$.

Wegen (4.38) unterscheiden sich die beiden Matrizen DJ_{k-1} und DJ_k höchstens im Element (k, k). Fasst man die beiden Matrizen als Abbildungen auf, so folgt

$$(DJ_{k-1}) \restriction_{\{e_k\}^\perp} = (DJ_k) \restriction_{\{e_k\}^\perp}.$$

Für $f \in \mathcal{D}$ gilt

$$G^{-1}T_{\mathcal{D}}^{-1}f \in \{e_k\}^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad (G^{-1}T_{\mathcal{D}}^{-1}f, e_k) = (f, T_{\mathcal{D}}Ge_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in \{GT_{\mathcal{D}}e_k\}^{\perp}.$$

Wir schließen damit

$$W_{k-1}\restriction_{\{GT_{\mathcal{D}}e_k\}^{\perp}} = W_k\restriction_{\{GT_{\mathcal{D}}e_k\}^{\perp}} =: V_k.$$

Die Relation $V_k \leq \mathcal{D} \oplus \mathcal{R}$ ist isometrisch und hat Defekt $(1,1)$, da sowohl dom V_k als auch ran V_k Kodimension 1 haben. Damit hat auch die Isometrie $V \oplus V_k$ Defekt $(1,1)$. Da $W_k : \mathcal{D} \to \mathcal{R}$ unitär ist, ist $V \oplus W_k \leq \mathcal{H}^2$ unitär. Wegen $V_k \subseteq W_{k-1}, W_k$ gilt auch

$$V \oplus V_k \subseteq V \oplus W_{k-1} \quad \text{und} \quad V \oplus V_k \subseteq V \oplus W_k. \tag{4.39}$$

Durch

$$\begin{aligned} A_k &:= \mathcal{F}(V \oplus W_k) \quad \text{für } k = 0, \ldots, n \\ S_k &:= \mathcal{F}(V \oplus V_k) \quad \text{für } k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

werden also nach dem Kalkül der Cayley-Transformation selbstadjungierte bzw. symmetrische Relationen in $\mathcal{H}$ definiert. Aus (4.39) folgt $A_{k-1}, A_k \in \mathfrak{E}(S_k)$. Wegen $W_0 = W'$ und $W_n = W$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} A_0 &= \mathcal{F}(V \oplus W_0) = \mathcal{F}(V \oplus W') = \mathcal{F}(\mathcal{C}(A')) = A', \\ A_n &= \mathcal{F}(V \oplus W_n) = \mathcal{F}(V \oplus W) = \mathcal{F}(\mathcal{C}(A)) = A. \end{aligned}$$

□

Mit Ausnahme von Satz 4.4.3 (ii), welcher sehr strikte Voraussetzungen verlangt, haben wir bislang nur Aussagen über das absolut stetige Spektrum getroffen.
Wir wenden uns zum Schluss dem singulären Spektrum zu. Sei dazu S abgeschlossen, einfach und symmetrisch mit Defekt $(1,1)$. Für $A, A' \in \mathfrak{E}(S)$ erfüllen die normierten Q-Funktionen q und q' nach Satz 3.4.16

$$\Im q'(z) = (\phi^2 + 1)\frac{\Im q(z)}{|q(z) - \phi|^2}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

für passendes $\phi \in \mathbb{R}$. Sind μ und μ' die Borelmaße aus der Integraldarstellung von q und q', dann sind nach Satz 4.2.14 durch

$$\begin{aligned} S_s^L(\mu) &:= \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q(x + i\epsilon) = +\infty \right\}, \\ S_s^L(\mu') &:= \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q'(x + i\epsilon) = +\infty \right\} \end{aligned}$$

Träger der singäleren Maße μ_s und μ_s' gegeben. Da für $x \in S_s^L(\mu)$

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \Im q'(x + i\epsilon) \leq (\phi^2 + 1)\frac{\Im q(x + i\epsilon)}{(\Im q(x + i\epsilon))^2} = 0$$

gilt, sind $S_s^L(\mu)$ und $S_s^L(\mu')$ disjunkt. Insbesondere sind die Maße μ_s und μ_s' singulär.

Man könnte nun vermuten, dass dies

$$\sigma_s(A) \cap \sigma_s(A') = \emptyset \tag{4.40}$$

zur Folge hat. Ein einfaches Beispiel zeigt, dass das im Allgemeinen nicht der Fall ist:

Beispiel 4.4.7. Wir konstruieren zunächst ein Borelmaß μ mit $\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} = 1$. Dann ist $q(z) := \int \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1}\right) d\mu(t)$ wegen

$$q(i) = \int \left(\frac{1}{t-i} - \frac{t}{t^2+1}\right) d\mu(t) = i \int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} = i$$

die normierte Q-Funktion von (S, A), wobei A den Multiplikationsoperator auf $L^2(d\mu)$ und S die Symmetrie aus Satz 3.4.7 bezeichnet.

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichne δ_x das *Diracmaß* mit Träger $\{x\}$. Sei $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$. Das Maß $\mu := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}(q_n^2+1)\delta_{q_n}$ erfüllt wegen

$$\int \frac{d\mu(t)}{t^2+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{-n}(q_n^2+1)}{q_n^2+1} = 1.$$

die gewünschte Normierungsbedingung. Da μ reines Punktmaß ist und da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}_\infty$ liegt, gilt

$$\sigma(A) = \sigma_s(A) = \mathbb{R}_\infty \quad \text{und} \quad \sigma_{ac}(A) = \emptyset.$$

Nach Satz 4.4.3 (i) gilt für $A' \in \mathfrak{E}(S)$, dass $\sigma_{ac}(A') = \emptyset$. Sei q' die normierte Q-Funktion von (S, A'). Wir zeigen, dass das Maß μ' aus der Integraldarstellung von q' nichttrivial ist, d.h. $\mu' \neq 0$.

Angenommen $\mu' = 0$. Wegen der Normiertheit von q' gilt dann $q'(z) = a' + b'z = z$. Nach Beispiel 3.4.8 ist A' dann unitär ähnlich zu $\{0\} \times \mathbb{C} \leq \mathbb{C}^2$ und damit eindimensional. Wegen $S \subseteq A'$ folgt, dass S höchstens eindimensional ist. Da S durch

$$S = A\restriction_{\mathrm{dom}\, S} \quad \text{mit} \quad \mathrm{dom}\, S = \left\{\phi \in \mathrm{dom}\, A : \int \phi \, d\mu = 0\right\}$$

gegeben ist, enthält dom S die Menge

$$M := \{\mathbb{1}_{q_n} + \gamma_{n,m}\mathbb{1}_{q_m} : n \neq m\},$$

wobei $\gamma_{n,m} := -2^{m-n}\frac{q_n^2+1}{q_m^2+1}$. Offenbar ist span M unendlichdimensional und wir erhalten einen Widerspruch. Wegen $\sigma_{ac}(A') = \emptyset$ ist μ' singulär. Wir erhalten also

$$\sigma_s(A') \cap \sigma_s(A) \supseteq S^{top}(\mu') \neq \emptyset.$$

Notation

$\Re z, \Im z$	Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl z
$\mathbb{C}_+, \mathbb{C}_-$	Halbebene der komplexen Zahlen mit positiven bzw. negativen Imaginärteil
$\mathbb{D}$	offene Einheitskreisscheibe der komplexen Zahlenebene
$\mathbb{T}$	Menge aller komplexen Zahlen von Betrag 1
$\aleph_0$	Mächtigkeit einer abzählbar unendlichen Menge
$\mathrm{cl}(M)$	Abschluss einer Teilmenge M eines topologischen Raumes
$\mathrm{span}(M)$	lineare Hülle einer Teilmenge M eines Vektorraums
$\mathrm{clspan}(M)$	abgeschlossene lineare Hülle einer Teilmenge M eines topologischen Vektorraums
$M^\perp$	orthogonale Komplement einer Teilmenge M eines Hilbertraums
$\mathcal{B}(X)$	σ-Algebra der Borelmengen eines topologischen Raums X
$\mathbb{1}_M$	Indikatorfunktion auf der Menge M
$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$	Algebra aller komplexwertigen Funktionen auf Ω, die bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{A}$ messbar sind
$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$	Algebra aller beschränkten Funktionen in $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$
$C(X, \mathcal{T})$	Menge aller komplexwertigen, stetigen Funktionen auf dem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$
$C_{00}(X, \mathcal{T})$	Menge aller komplexwertigen, stetigen Funktionen auf dem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit kompaktem Träger
$\mathfrak{B}(X, Y)$	Raum der linearen, beschränkten Abbildungen zwischen den normierten Räumen X und Y
$\mathfrak{B}(X)$	Kurzschreibweise für $\mathfrak{B}(X, X)$
$f\upharpoonright_M$	Einschränkung einer Abbildung f auf die Menge M
$L^1(d\mu)$	Banachraum der bzgl. μ integrierbaren Funktionen
$L^2(d\mu)$	Hilbertraum der bzgl. μ quadratisch integrierbaren Funktionen

Literatur

[Aro57] N. Aronszajn. „On a Problem of Weyl in the Theory of Singular Sturm-Liouville Equations". English. In: *American Journal of Mathematics* 79.3 (1957), pages. URL: http://www.jstor.org/stable/2372564.

[BEH08] J. Blank, P. Exner und M. Havlíček. *Hilbert Space Operators in Quantum Physics*. 2. Aufl. New York: Springer, 2008.

[BS07] Jussi Behrndt und Henk de Snoo. *Extension Theory of Symmetric Operators in Hilbert Spaces*. 2007.

[Don74] William F. Donoghue. *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*. Springer-Verlag, 1974. ISBN: 3-540-06543-1.

[Eng89] Ryszard Engelking. *General topology*. Berlin: Heldermann Verlag, 1989. ISBN: 3-885-38006-4.

[Fau03] Claude-Alain Faure. „The Lebesgue differentiation theorem via the rising sun lemma." In: *Real Analysis Exchange* 29.2 (2003), S. 947–951. URL: http://projecteuclid.org/euclid.rae/1149698560.

[GT00] Fritz Gesztesy und Eduard Tsekanovskii. „On Matrix–Valued Herglotz Functions". In: *Mathematische Nachrichten* 218.1 (2000), S. 61–138.

[HLS95] Seppo Hassi, Heinz Langer und Henk de Snoo. „Selfadjoint Extensions for a Class of Symmetric Operators with Defect Numbers (1,1)". In: *15th OT Conference Proceedings*. 1995.

[Kal10] Michael Kaltenbäck. *Funktionalanalysis 2*. 2010.

[Kal11] Michael Kaltenbäck. *Analysis 3 für Technische Mathematik*. August 2011. URL: http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_III_alt.pdf.

[Kal13] Michael Kaltenbäck. *Analysis und Maßtheorie auf topologischen Räumen*. 2013. URL: http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_Top_Raeumen.pdf.

[Kus14] Norbert Kusolitsch. *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie - Eine Einführung*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2014. ISBN: 978-3-642-45387-8.

[KW13] Michael Kaltenbäck und Harald Woracek. *Komplexe Analysis*. SS 2013. URL: http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/mykana.pdf.

[Las96] Yoram Last. „Quantum Dynamics and Decompositions of Singular Continuous Spectra". In: *Journal of Functional Analysis* 142.2 (1996), S. 406–445. URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002212369690155X.

[LT77] Heinz Langer und Björn Textorius. „On Generalized Resolvents and Q-Functions of Symmetric Linear Relations (Subspaces) in Hilbert Spaces". In: *Pacific Journal of Mathematics* 72.1 (1977), S. 135–165.

[Oli09] César R. de Oliveira. *Intermediate spectral theory and quantum dynamics*. Birkhäuser, 2009.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. Third. Tata McGraw-Hill, 1987. ISBN: 0-07-054234-1.

[Tes14] Gerald Teschl. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics* -. 2. Aufl. Heidelberg: American Mathematical Soc., 2014. ISBN: 978-1-470-41704-8.

[WKB12] Harald Woracek, Michael Kaltenbäck und Martin Blümlinger. *Funktionalanalysis 1*. WS 2011-2012.