

Unterschrift des Betreuers



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna | Austria

DIPLOMARBEIT

Funktionen und Unschärfe

Ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Em. O.Univ.-Prof. Reinhard Viertl

durch

Raphael Pesl
1150 Wien, Reindorfgasse 39/1

Wien, am 21. März 2017

Raphael Pesl

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei meinem Diplomarbeitsbetreuer Prof. Reinhard Viertl bedanken, der mir die Erlaubnis erteilte, seine Werke verwenden zu dürfen und mir mit seinem Wissen und Korrekturen beim Verfassen der Arbeit stets zur Seite stand. Ich will mich auch bei Herrn Dipl.-Ing. Dr. Dietmar Hareter für seine freundlichen und hilfreichen Auskünfte, sowie bei Herrn Dr. Owat Sunanta für die Bereitstellung von Abbildungen bedanken.

Weiters gebührt mein Dank den zahlreichen StudentInnen, mit denen ich gemeinsam die Übungen und Vorlesungen besuchte, die mir mit Geduld bei Aufgaben geholfen haben und mit denen ich auch gemeinsam eine lehrreiche und schöne Zeit verbrachte.

Ein großes Dankeschön gilt auch meinen Eltern, die mich mit viel emotionaler und finanzieller Unterstützung tatkräftig begleitet haben. Nur durch sie und ihre Geduld wurde mir das Studium ermöglicht. Auch möchte ich meiner Schwester, meinem Schwager und all meinen Freunden danken, mit denen ich auch abseits des Studiums eine lustige und wunderbare Zeit verbringen konnte.

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit behandelt Funktionen, Unschärfe und ihre Anwendungen. Die Problemstellung liegt darin, inwieweit man mathematische Definitionen und Sätze verallgemeinern kann, damit sie in Kombination mit unscharfen Zahlen funktionieren und wie man mit Schwierigkeiten, die dabei auftauchen, umgehen soll.

Im ersten Kapitel wird die Basis für Funktionen und insbesondere die der Dichtefunktion erläutert, die eine besondere Rolle in den späteren Kapiteln spielen.

Im zweiten Kapitel wird die mathematische Grundlage für die Modellierung von Unschärfe erklärt, wie man unscharfe Zahlen, unscharfe Intervalle und unscharfe Vektoren beschreiben kann und welche Sätze wichtig sind.

Im dritten Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Funktionen und Unschärfe erläutert, wie die Verallgemeinerungen sowohl bei unscharfen Funktionswerten als auch bei unscharfen Argumenten aussieht. Darüber hinaus wird auch die Arithmetik und Integration bei Unschärfe dargestellt, letzteres auch im Falle von unscharfen Integrationsbereichen.

Im vierten Kapitel folgen Anwendungen der Unschärfemodellierung. Es wird näher beschrieben, wie das Bayes'sche Theorem bei Unschärfe verallgemeinert werden kann, wie Zeitreihen und ihre Methoden im Falle von Unschärfe modifiziert werden können. Als eine Anwendung der unscharfen Zeitreihen zählt das unscharfe Zeitreihenmodell im Zusammenhang mit der Fourier-Residuenanalyse.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	i
Kurzfassung	ii
Inhaltsverzeichnis	iii
1 Funktionen	1
1.1 Stetige Funktionen	1
1.2 Dichtefunktionen	2
2 Unschärfe	3
2.1 Unscharfe Zahlen	3
2.2 Unscharfe Vektoren	7
3 Kombination von Funktionen und Unschärfe	10
3.1 Unscharfe Funktionen	10
3.2 Erweiterungsprinzip	11
3.3 Arithmetik unscharfer Zahlen	13
3.4 Integration unscharfer Funktionen	16
3.5 Integration mit unscharfen Integrationsbereichen	21
4 Anwendungen	26
4.1 Unscharfe Dichtefunktionen und unsharp Verteilungsfunktionen	26
4.2 Das verallgemeinerte Bayes'sche Theorem bei Unschärfe	27
4.3 Unscharfe Zeitreihen	34
4.3.1 Gleitende Mittelwerte	34
4.3.2 Filterung	36
4.3.3 Exponentielle Glättung	42
4.3.4 Komponentenmodell	44
4.3.5 Differenzenfilter	51
4.3.6 Verallgemeinerte Holt-Winter-Methode	52
4.3.7 Präsentation im Frequenzbereich	54
4.4 Fourier-Residuenanalyse im unscharfen Zeitreihenmodell	56
4.4.1 Einführung	56
4.4.2 Konzept unscharfer Zeitreihen	57
4.4.3 Unscharfe Zeitreihen für Residuenanalyse	59
4.4.4 Prognose der Einschreibungen	61

5 Zusammenfassung	66
Literaturverzeichnis	68
Tabellenverzeichnis	70
Abbildungsverzeichnis	71
Symbolverzeichnis	73

Kapitel 1

Funktionen

In diesem Kapitel folgt eine kurze Erläuterung [8] über gewisse Arten von Funktionen reeller Zahlen, die wir benötigen werden, um definieren zu können, wie sowohl unscharfe Funktionen als auch Funktionen unscharfer Argumente definiert sind. Darüber hinaus wird im nächsten Kapitel definiert, was unscharfe Zahlen sind.

1.1 Stetige Funktionen

Definition 1.1: Seien M und N Mengen. Eine Teilmenge $f \subseteq M \times N$ wird als Funktion von M nach N bezeichnet, wenn

1. für alle $x \in M$ gibt es ein $y \in N$, sodass $(x, y) \in f$ (f ist überall definiert);
2. sind (x, y_1) und $(x, y_2) \in f$, so folgt $y_1 = y_2$ (f ist wohldefiniert).

Definition 1.2: Sei X eine Menge, $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt d Metrik auf X , und $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum, wenn gilt

1. $\forall x, y \in X$ ist $d(x, y) \geq 0$. Dabei gilt $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
2. $\forall x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Sind $x, y, z \in X$, so gilt die Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definition 1.3: Seien $\langle X, d_X \rangle$ und $\langle Y, d_Y \rangle$ metrische Räume und $D \subseteq X$, und sei $f : D \rightarrow Y$ eine Funktion. Weiters sei $x \in D$. Dann heißt f stetig an der Stelle x , wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_Y(f(t), f(x)) < \epsilon \text{ wenn } t \in D \text{ mit } d_X(t, x) < \delta,$$

oder äquivalent

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(U_\delta^X(x) \cap D) \subseteq U_\epsilon^Y(f(x)).$$

$(U_\epsilon^X(x) := \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\})$. Ist f an jeder Stelle x ihres Definitionsbereiches D stetig, so heißt f stetig auf D .

Für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $d_Y(x, y) = |x - y|$ ist die Definition der Stetigkeit an Stelle x äquivalent mit

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(t) - f(x)| < \epsilon \text{ wenn } t \in D \text{ mit } |t - x| < \delta.$$

1.2 Dichtefunktionen

Definition 1.4: Eine σ -Algebra ist ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (Ω ist die Grundmenge), die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$ (C ist hier das Komplement)
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

Definition 1.5: Ein Paar (Ω, \mathcal{A}) heißt Messraum, wenn Ω eine beliebige Grundmenge und \mathcal{A} eine σ -Algebra auf dieser Grundmenge ist.

Ein Maßraum ist ein Messraum (Ω, \mathcal{A}) versehen mit einem Maß $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0; \infty]$. Ein Maß auf \mathcal{A} erfüllt dabei folgende Bedingungen:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. σ -Additivität: Für eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen aus \mathcal{A} gilt
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Maßraum (Ω, \mathcal{A}, P) , dessen Maß $P : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, d.h. $P(\Omega) = 1$.

Definition 1.6: Es sind zwei Messräume (X_1, \mathcal{A}_1) und (X_2, \mathcal{A}_2) gegeben, sowie eine Funktion $f : X_1 \rightarrow X_2$. Die Funktion f heißt messbare Funktion, wenn $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1$ $\forall A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Eine Zufallsgröße X ist eine messbare Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) in einen Messraum (Ω', \mathcal{A}') .

Definition 1.7: P sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß und X eine reellwertige Zufallsgröße (eine reellwertige Zufallsgröße nennt man auch Zufallsvariable). Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty)$ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen X , falls für alle reellen Zahlen $a < b$ folgendes gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Kapitel 2

Unschärfe

Diesem Kapitel liegen zum Großteil G. Klir und B. Yuan [9], R. Viertl [20] und R. Viertl und D. Hareter [21] zugrunde.

2.1 Unscharfe Zahlen

In der klassischen Mengentheorie wird jede Teilmenge $A \subseteq M$ eindeutig durch eine Indikatorfunktion $I_A : M \rightarrow \{0, 1\}$ folgendermaßen beschrieben:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases} \quad \forall x \in M$$

Eine unscharfe Teilmenge A^* einer Menge M wird hingegen durch ihre sogenannte *Zugehörigkeitsfunktion* $\mu_{A^*}(\cdot)$ beschrieben, mit $\mu_{A^*} : M \rightarrow [0; 1]$. Eine unscharfe Teilmenge A^* heißt normiert, falls $\exists x \in M : \mu_{A^*}(x) = 1$.

Definition 2.1: Eine unscharfe Zahl x^* wird durch ihre sogenannte charakterisierende Funktion $\xi(\cdot)$ beschrieben, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\xi : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$
2. $\forall \delta \in (0; 1]$ ist der sogenannte δ -Schnitt $C_\delta[x^*] := \{x \in \mathbb{R} : \xi(x) \geq \delta\}$ eine endliche Vereinigung von nichtleeren kompakten Intervallen $[a_{\delta,j}; b_{\delta,j}] \Rightarrow C_\delta[x^*] = \bigcup_{j=1}^{k_\delta} [a_{\delta,j}; b_{\delta,j}]$
3. Der Träger von $\xi(\cdot)$ $\text{Tr}[\xi(\cdot)] := \{x \in \mathbb{R} : \xi(x) > 0\}$ ist eine beschränkte Menge

Die Menge aller unscharfen Zahlen wird mit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ beschrieben.

Abbildung 2.1 zeigt eine charakterisierende Funktion mit einem eingezeichneten δ -Schnitt. Reelle Zahlen und Intervalle sind Spezialfälle von unscharfen Zahlen. In Abbildung 2.2 wird das Intervall $[a; b]$ durch die charakterisierende Funktion $I_{[a;b]}(\cdot)$ dargestellt.

Abbildung 2.1: δ -Schnitt einer charakterisierenden Funktion

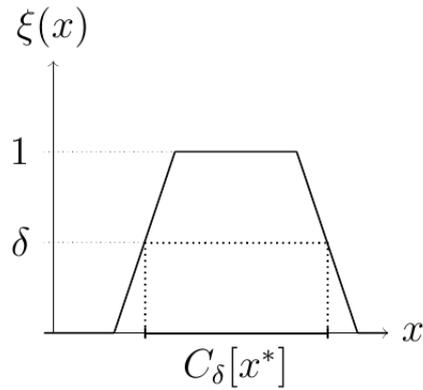
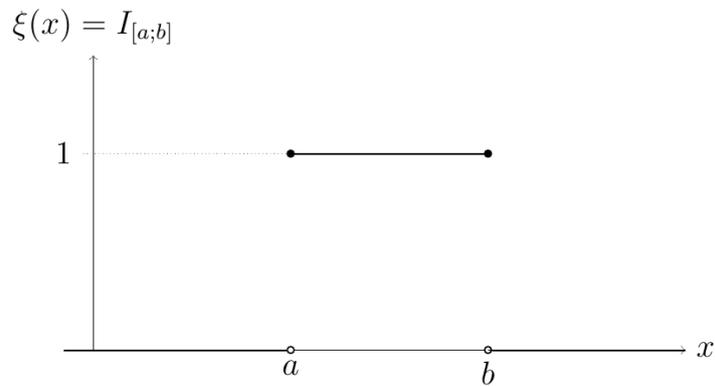


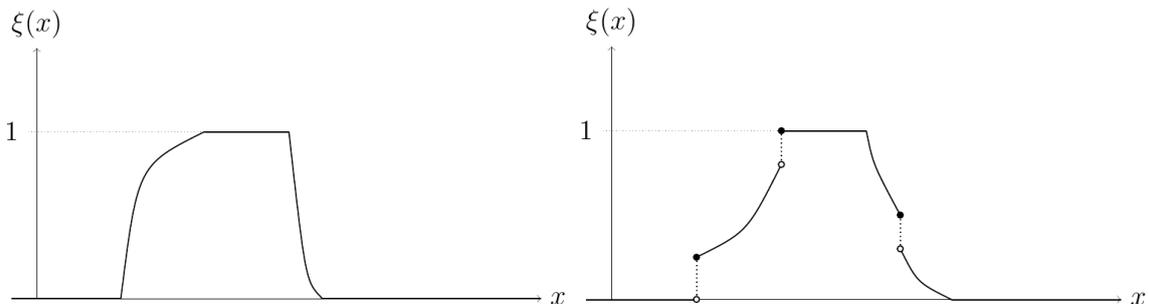
Abbildung 2.2: Indikatorfunktion des Intervalls $[a, b]$



Definition 2.2: Eine unscharfe Zahl x^* wird unscharfes Intervall genannt, wenn alle ihre δ -Schnitte kompakte Intervalle sind. Die Menge aller unscharfen Intervalle wird mit $\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ beschrieben.

In Abbildung 2.3 werden Beispiele von unscharfen Intervallen dargestellt.

Abbildung 2.3: Charakterisierende Funktionen unscharfer Intervalle



Satz 2.3 (Darstellungssatz für unscharfe Zahlen): Für jede charakterisierende Funktion $\xi(\cdot)$ einer unscharfen Zahl x^* gilt folgendes:

$$\xi(x) = \max\{\delta \cdot I_{C_\delta[x^*]}(x) : \delta \in [0; 1]\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis: Für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ haben wir

$$\delta \cdot I_{C_\delta[x^*]}(x_0) = \delta \cdot I_{[x:\xi(x) \geq \delta]}(x_0) = \begin{cases} \delta & \text{für } \xi(x_0) \geq \delta \\ 0 & \text{für } \xi(x_0) < \delta. \end{cases}$$

Daraus folgt für jedes $\delta \in [0; 1]$

$$\delta \cdot I_{C_\delta[x^*]}(x_0) \leq \xi(x_0),$$

und weiters

$$\sup\{\delta \cdot I_{C_\delta[x^*]}(x_0) : \delta \in [0; 1]\} \leq \xi(x_0).$$

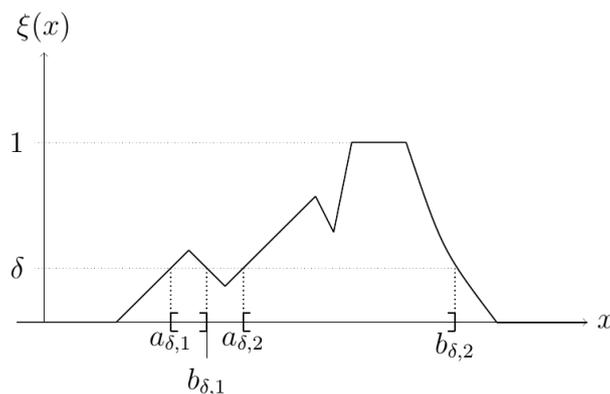
Andererseits gilt für $\delta_0 = \xi(x_0)$ dann $\delta_0 \cdot I_{C_{\delta_0}[x^*]}(x_0) = \delta_0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sup\{\delta \cdot I_{C_\delta[x^*]}(x_0) : \delta \in [0; 1]\} &\geq \delta_0, \text{ dies impliziert} \\ \sup\{\delta \cdot I_{C_\delta[x^*]}(x_0) : \delta \in [0; 1]\} &= \max\{\delta \cdot I_{C_\delta[x^*]}(x_0) : \delta \in [0; 1]\} = \delta_0. \end{aligned}$$

□

In Abbildung 2.4 wird der δ -Schnitt einer charakterisierenden Funktion dargestellt.

Abbildung 2.4: Charakterisierende Funktion und δ -Schnitt



Spezielle Arten von unscharfen Intervallen sind sogenannte *LR-unscharfe Zahlen*. Sie zählen zu der am häufigsten verwendeten Darstellung unscharfer Zahlen, weil man mit ihnen in der Praxis einfach umgehen kann. *LR-unscharfe Zahlen* werden durch zwei Funktionen $L : [0; \infty) \rightarrow [0; 1]$ und $R : [0; \infty) \rightarrow [0; 1]$ definiert, die folgende Eigenschaften aufweisen:

1. $L(\cdot)$ und $R(\cdot)$ sind linksstetig

2. $L(0) = R(0) = 1$
3. $L(\cdot)$ und $R(\cdot)$ sind monoton nicht-wachsend
4. $L(\cdot)$ und $R(\cdot)$ haben kompakte Träger
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} L(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$

Dann ist die charakterisierende Funktion $\xi_{x^*}(\cdot)$ einer LR -unscharfen Zahl x^* definiert durch

$$\xi_{x^*}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} L\left(\frac{m-s-x}{l}\right) & \text{für } x < m-s \\ 1 & \text{für } m-s \leq x \leq m+s \\ R\left(\frac{x-m-s}{r}\right) & \text{für } x > m+s \end{array} \right\},$$

wobei $m, s, l, r \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ und $l, r > 0$ gilt. m wird Mittelpunkt, l bzw. r der linke bzw. rechte Unschärfeparameter und $L(\cdot)$ bzw. $R(\cdot)$ die linke bzw. rechte Begrenzungsfunktion genannt. Diese LR -unscharfen Zahlen werden mit $\langle m, s, l, r \rangle_{LR}$ notiert.

Im Falle von $l = 0$ gilt $L\left(\frac{m-s-x}{l}\right) = 0$ für $x < m-s$ und im Falle von $r = 0$ gilt $R\left(\frac{x-m-s}{r}\right) = 0$ für $x > m+s$.

Ein spezieller Typ von LR -unscharfen Zahlen sind die sogenannten *trapezförmigen unscharfen Zahlen* $t^*(m, s, l, r)$ mit

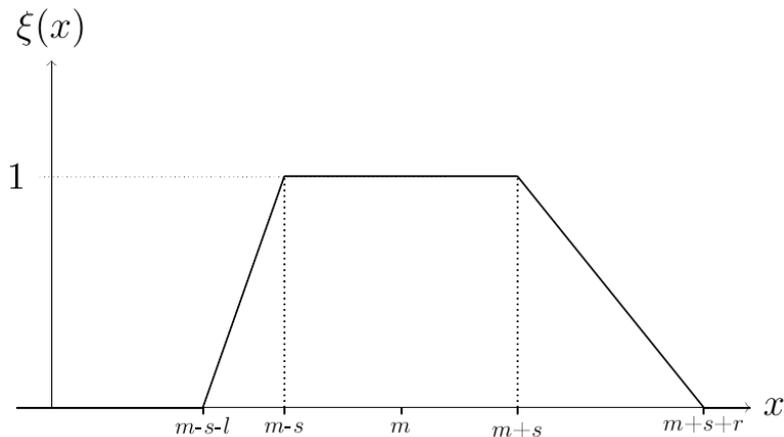
$$L(x) = R(x) = \max\{0, 1 - x\} \quad \forall x \in [0; \infty).$$

Die charakterisierende Funktion $\xi_{x^*}(\cdot)$ von $t^*(m, s, l, r)$ lautet

$$\xi_{x^*}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x-m+s+l}{l} & \text{für } m-s-l \leq x < m-s \\ 1 & \text{für } m-s \leq x \leq m+s \\ \frac{m+s+r-x}{r} & \text{für } m+s < x \leq m+s+r \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Die δ -Schnitte der trapezförmigen unscharfen Zahlen können einfach mithilfe der pseudo-inversen Funktionen $L^{-1}(\cdot)$ und $R^{-1}(\cdot)$ berechnet werden. Sie sind gegeben durch $L^{-1}(\delta) = \max\{x \in \mathbb{R} : L(x) \geq \delta\}$ und $R^{-1}(\delta) = \max\{x \in \mathbb{R} : R(x) \geq \delta\}$. In Abbildung 2.5 wird die charakterisierende Funktion einer trapezförmigen unscharfen Zahl dargestellt.

Abbildung 2.5: Trapezförmige unscharfe Zahl



Lemma 2.4: Die δ -Schnitte $C_\delta[x^*]$ einer LR -unscharfen Zahl x^* sind gegeben durch

$$C_\delta[x^*] = [m - s - l \cdot L^{-1}(\delta); m + s + r \cdot R^{-1}(\delta)] \quad \forall \delta \in (0; 1].$$

Beweis: Der linke Rand von $C_\delta[x^*]$ wird mit $\min\{x : \xi(x) \geq \delta\}$ bestimmt. Mit der Definition von LR -unscharfen Zahlen für $l > 0$ haben wir

$$\begin{aligned} \min\{x : \xi(x) \geq \delta\} &= \min \left\{ x : L \left(\frac{m - s - x}{l} \right) \geq \delta \text{ und } x < m - s \right\} \\ &= \min \left\{ x : \underbrace{\frac{m - s - x}{l} \leq L^{-1}(\delta)}_{L(\cdot) \text{ ist monoton nicht-wachsend}} \text{ und } x < m - s \right\} \\ &= \min \{ x : x \geq m - s - l \cdot L^{-1}(\delta) \text{ und } x < m - s \} \\ &= m - s - l \cdot L^{-1}(\delta). \end{aligned}$$

Der Beweis für den rechten Rand folgt analog. □

2.2 Unscharfe Vektoren

Definition 2.5: Ein unscharfer Vektor \underline{x}^* wird durch seine sogenannte vektorcharakterisierende Funktion $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$ beschrieben, die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; 1]$
2. $\forall \delta \in (0; 1]$ ist der δ -Schnitt $C_\delta[\underline{x}^*] := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \xi(\underline{x}) \geq \delta\}$ eine endliche Vereinigung einfach zusammenhängender kompakter Teilmengen des \mathbb{R}^n
3. Der Träger $\text{Tr}[\xi(\cdot, \dots, \cdot)] := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \xi(\underline{x}) > 0\}$ ist Teilmenge einer kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n

Die Menge aller n -dimensionalen unscharfen Vektoren wird mit $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ beschrieben.

Definition 2.6: Ist $\forall \delta \in (0; 1]$ $C_\delta[\underline{x}^*]$ eine sternförmige Teilmenge des \mathbb{R}^n , so heißt \underline{x}^* ein n -dimensionales unscharfes Intervall. Die Menge aller n -dimensionalen unscharfen Intervalle wird mit $\mathcal{F}_I(\mathbb{R}^n)$ beschrieben.

Satz 2.7 (Darstellungssatz für unscharfe Vektoren): Für jede vektorcharakterisierende Funktion $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$ eines unscharfen Vektors \underline{x}^* gilt folgendes:

$$\xi(\underline{x}) = \max\{\delta \cdot I_{C_\delta[\underline{x}^*]}(\underline{x}) : \delta \in [0; 1]\} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

Beweis: Ähnlich wie der Beweis von Satz 2.3. □

Reelle Zahlen x_1, \dots, x_n können in einfacher Weise zu einem n -dimensionalen Vektor $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ zusammengefasst werden. Aber für unscharfe Elemente $x_1^*, \dots, x_n^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ gilt dies nicht analog: $(x_1^*, \dots, x_n^*) \neq \underline{x}^*$, das heißt (x_1^*, \dots, x_n^*) ist kein unscharfer Vektor, sondern lediglich ein Vektor mit n unscharfen Elementen. Für die statistische Verfahrensweise ist die Kombination von unscharfen Zahlen zu einem unscharfen Vektor notwendig. Dazu gibt es die *Kombinationsregel* $K_n : [0; 1]^n \rightarrow [0; 1]$, mit der man die n zugehörigen charakterisierenden Funktionen $\xi_{x_1^*}(\cdot), \dots, \xi_{x_n^*}(\cdot)$ von x_1^*, \dots, x_n^* zu einer vektorcharakterisierenden Funktion $\xi_{\underline{x}^*}(\cdot, \dots, \cdot)$ eines unscharfen Vektors \underline{x}^* zusammenfassen kann.

Für die Kombinationsregel gelten drei Bedingungen:

1. Für n charakterisierende Funktionen $\xi_{x_1^*}(\cdot), \dots, \xi_{x_n^*}(\cdot)$ ist die durch

$$\xi_{\underline{x}^*}(x_1, \dots, x_n) := K_n(\xi_{x_1^*}(\cdot), \dots, \xi_{x_n^*}(\cdot)) \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

definierte Funktion $\xi_{\underline{x}^*}(\cdot, \dots, \cdot)$ eine vektorcharakterisierende Funktion nach Definition 2.5

2. $K_1(\cdot)$ ist die identische Abbildung auf $[0; 1]$, d.h. $K_1(\xi_{x^*}(\cdot)) = \xi_{x^*}(\cdot)$
3. Für abgeschlossene Intervalle $[a_i; b_i]$, $i = 1, \dots, n$ mit $a_i \leq b_i$ und für alle Vektoren $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ist

$$K_n(I_{[a_1; b_1]}(x_1), \dots, I_{[a_n; b_n]}(x_n)) = I_{[a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]}(x_1, \dots, x_n)$$

Kombinationsregeln basieren auf sogenannten t-Normen.

Definition 2.8: Eine Funktion $T : [0; 1]^2 \rightarrow [0; 1]$ wird *t-Norm* genannt, falls für alle $x, y, z \in [0, 1]$ folgende Bedingungen gelten:

1. $T(x, y) = T(y, x)$ (Kommutativität)
2. $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ (Assoziativität)
3. $T(x, 1) = x$ (Einselement)
4. $x \leq y \Rightarrow T(x, z) \leq T(y, z)$ (Monotonie)

Mittels der Assoziativität der t-Normen ist es möglich, Kombinationsregeln durch eine t-Norm T auf folgende Art und Weise aufzubauen:

$$K_1(\xi_{x^*}(x)) = T(\xi_{x^*}(x), 1)$$

$$K_n(\xi_{x_1^*}(x_1), \dots, \xi_{x_n^*}(x_n)) = T(\xi_{x_1^*}(x_1), T(\dots, T(\xi_{x_{n-1}^*}(x_{n-1}), \xi_{x_n^*}(x_n)) \dots))$$

Die auf diese Weise erzeugte Kombination n unscharfer Zahlen muss nicht für alle t-Normen einen unscharfen Vektor bilden. Eine t-Norm, für die dies doch der Fall ist, ist $T(x, y) = \min\{x, y\}$. Daraus ergibt sich die Minimum-Kombinationsregel $K_n(x_1, \dots, x_n) = \min\{x_1, \dots, x_n\}$. Für den aus n unscharfen Zahlen x_1^*, \dots, x_n^* mit zugehörigen charakterisierenden Funktionen $\xi_{x_1^*}(\cdot), \dots, \xi_{x_n^*}(\cdot)$ kombinierten Vektor \underline{x}_{\min}^* berechnen sich die Funktionswerte der vektorcharakterisierenden Funktion $\xi_{\underline{x}_{\min}^*}(\cdot, \dots, \cdot)$ durch

$$\xi_{\underline{x}^*_{\min}}(x_1, \dots, x_n) = \min\{\xi_{x_i^*}(x_i) : i = 1, \dots, n\} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Satz 2.9: Für n unscharfe Zahlen x_1^*, \dots, x_n^* mit den charakterisierenden Funktionen $\xi_{x_1^*}(\cdot), \dots, \xi_{x_n^*}(\cdot)$ ist der δ -Schnitt $C_\delta[\underline{x}^*]$ des unscharfen Vektors \underline{x}^* (kombiniert durch die Minimum-Kombinationsregel) das kartesische Produkt der δ -Schnitte $C_\delta[x_i^*]$ der n unscharfen Zahlen x_i^* , d.h.

$$C_\delta[\underline{x}^*] = C_\delta[x_1^*] \times C_\delta[x_2^*] \times \dots \times C_\delta[x_n^*] \quad \forall \delta \in (0; 1].$$

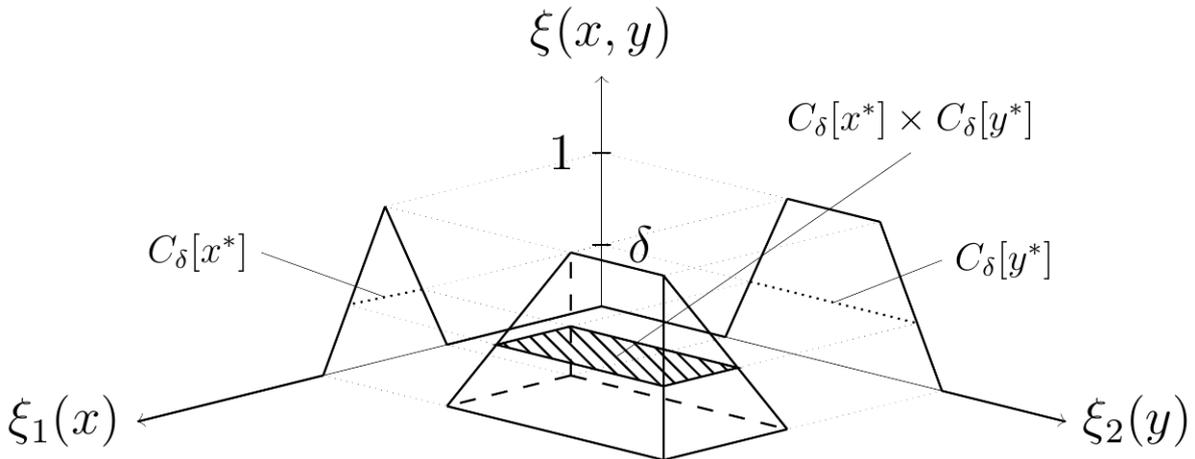
Beweis: Für alle $\delta \in (0; 1]$ ist

$$\begin{aligned} C_\delta[\underline{x}^*] &= \{\underline{x} \in \mathbb{R} : \xi_{\underline{x}^*}(\underline{x}) \geq \delta\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} : \min_{i=1, \dots, n} \xi_{x_i^*}(x_i) \geq \delta\} \\ &= \{\underline{x} \in \mathbb{R} : \xi_{x_i^*}(x_i) \geq \delta \quad \forall i = 1, \dots, n\} \\ &= \bigtimes_{i=1}^n \{x_i \in \mathbb{R} : \xi_{x_i^*}(x_i) \geq \delta\} = \bigtimes_{i=1}^n C_\delta[x_i^*]. \end{aligned}$$

□

In Abbildung 2.6 wird Satz 2.9 graphisch dargestellt.

Abbildung 2.6: Kombination von zwei unscharfen Zahlen



Kapitel 3

Kombination von Funktionen und Unschärfe

Mithilfe des ersten Kapitels, der Erläuterung über Funktionen, und des zweiten Kapitels, der Definition unscharfer Zahlen und Vektoren, kann man sich nun auf den Bereich Funktionen in Kombination mit Unschärfe konzentrieren. Dabei werden sowohl unscharfe Funktionen als auch Funktionen unscharfer Argumente behandelt. Für letzteres spielt das Erweiterungsprinzip eine wichtige Rolle. Die Arithmetik unscharfer Zahlen und die Integration unscharfer Funktionen wird auch näher betrachtet. Diesem Kapitel liegen zum Großteil G. Klir und B. Yuan [9], R. Viertl [20] und R. Viertl und D. Hareter [21] zugrunde. Dem Abschnitt über die Integration mit unscharfen Integrationsbereichen liegen zum Großteil S. Bodjanova und R. Viertl [2] und R. Viertl [22] zugrunde.

3.1 Unscharfe Funktionen

Definition 3.1: *Unscharfe Funktionen $f^*(\cdot)$ sind Funktionen, deren Wertebereich die Menge aller unscharfen Intervalle ist, also*

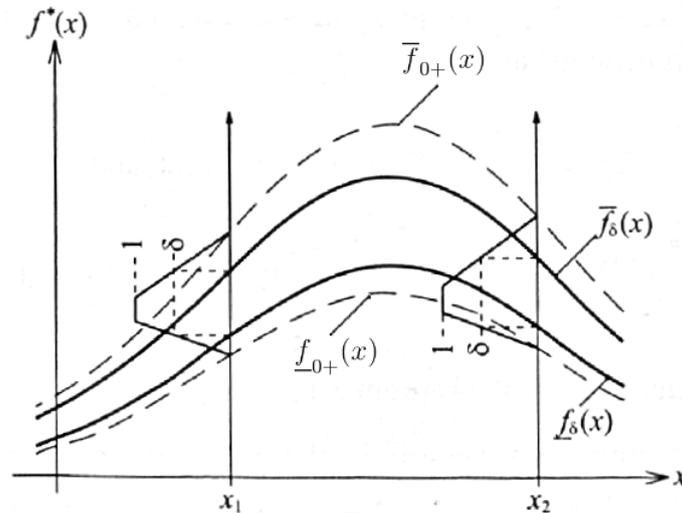
$$f^* : M \rightarrow \mathcal{F}_I(\mathbb{R}).$$

Definition 3.2: *$f^*(\cdot)$ ist eine unscharfe Funktion mit Definitionsbereich M , und $x \in M$. Die δ -Schnitte von $f^*(\cdot)$ werden folgendermaßen definiert:*

$$C_\delta[f^*(x)] = [\underline{f}_\delta(x); \bar{f}_\delta(x)] \quad \forall \delta \in (0; 1]$$

In Abbildung 3.1 werden δ -Niveaufunktionen einer unscharfen Funktion dargestellt.

Abbildung 3.1: δ -Niveaufunktionen einer unscharfen Funktion



3.2 Erweiterungsprinzip

Definition 3.3 (Erweiterungsprinzip): Für eine Funktion $f : M \rightarrow N$ und ein unscharfes Element x^* in M (mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu : M \rightarrow [0; 1]$) ist der im Allgemeinen unscharfe Wert $y^* = f(x^*)$ jenes unscharfe Element y^* in N , dessen Zugehörigkeitsfunktion $\psi(\cdot)$ folgendermaßen definiert ist:

$$\psi(y) := \begin{cases} \sup\{\mu(x) : x \in M, f(x) = y\} & \text{falls } \exists x : f(x) = y \\ 0 & \text{falls } \nexists x : f(x) = y \end{cases} \quad \forall y \in N$$

Proposition 3.4: Sei $f : M \rightarrow N$ eine Funktion und x^* ein unscharfes Element in M mit Zugehörigkeitsfunktion $\mu(\cdot)$. Dann gilt für das unscharfe Element $y^* = f(x^*)$ (definiert durch das Erweiterungsprinzip 3.3) folgendes:

$$f(C_\delta[x^*]) \subseteq C_\delta[y^*] \quad \forall \delta \in (0; 1]$$

Beweis: Wir haben $C_\delta[y^*] = \{y \in N : \psi(y) \geq \delta\}$, wobei $\psi(\cdot)$ wie in Definition 3.3 beschrieben ist. Da auch $f(C_\delta[x^*]) = \{f(x) : x \in C_\delta[x^*]\}$ gilt, gibt es für ein $y \in f(C_\delta[x^*])$ mindestens ein $x \in C_\delta[x^*]$ mit $f(x) = y$. Daraus folgt $\mu(x) \geq \delta$ und somit $\sup\{\mu(x) : f(x) = y\} \geq \delta$. Nach der Definition von $\psi(\cdot)$ haben wir letztendlich $y \in C_\delta[y^*]$. \square

Satz 3.5: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und \underline{x}^* ein unscharfes n -dimensionales Intervall. Dann gelten folgende Aussagen:

1. $f(\underline{x}^*)$ gebildet nach dem Erweiterungsprinzip 3.3 ist ein unscharfes Intervall

$$2. C_\delta[f(\underline{x}^*)] = \left[\min_{\underline{x} \in C_\delta[\underline{x}^*]} f(\underline{x}); \max_{\underline{x} \in C_\delta[\underline{x}^*]} f(\underline{x}) \right]$$

Beweis: Sei $\xi(\cdot, \dots)$ die vektorcharakterisierende Funktion von \underline{x}^* . Durch die Stetigkeit von $f(\cdot)$ ist $f^{-1}(\{y\}) \forall y \in \mathbb{R}$ abgeschlossen. Wir müssen als nächstes $\forall \delta \in (0; 1]$ zeigen, dass $C_\delta[f(\underline{x}^*)] = f(C_\delta[\underline{x}^*])$. Nach Proposition 3.4 gilt bereits $f(C_\delta[\underline{x}^*]) \subseteq C_\delta[f(\underline{x}^*)]$.

Nun muss die andere Richtung gezeigt werden. Da \underline{x}^* ein unscharfes n -dimensionales Intervall ist, sind alle δ -Schnitte $C_\delta[\underline{x}^*]$ kompakt und einfach zusammenhängend. Aus der Stetigkeit von $f(\cdot)$ folgt, dass auch $f(C_\delta[\underline{x}^*])$ kompakt und einfach zusammenhängend ist, und somit ein Intervall darstellt. Nun nimmt man $y \in C_\delta[f(\underline{x}^*)]$ an. Aus dem Erweiterungsprinzip folgt $\sup\{\xi(\underline{x}) : \underline{x} \in f^{-1}(\{y\})\} \geq \delta$. Aus der Halbstetigkeit von oben von $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$ folgt, dass $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$ ihr Maximum auf $f^{-1}(\{y\}) \cap C_\delta[\underline{x}^*]$ annimmt, und damit gilt $\sup\{\xi(\underline{x}) : \underline{x} \in f^{-1}(\{y\})\} = \max\{\xi(\underline{x}) : \underline{x} \in f^{-1}(\{y\})\}$. Dann gibt es ein $\underline{x}_0 \in f^{-1}(\{y\})$ mit $\xi(\underline{x}_0) \geq \delta$ und $f(\underline{x}_0) = y$. Damit gilt auch $\underline{x}_0 \in C_\delta[\underline{x}^*]$, woraus $y \in f(C_\delta[\underline{x}^*])$ folgt. Nun wurde die andere Richtung der Inklusion gezeigt.

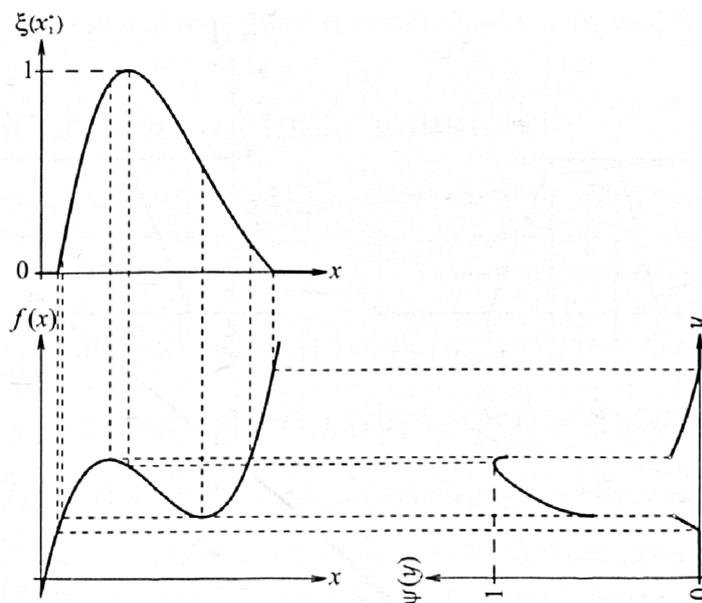
Aus der Kompaktheit von $C_\delta[\underline{x}^*]$ und der Stetigkeit von $f(\cdot)$ folgt, dass $f(\cdot)$ das Maximum und Minimum auf einer kompakten Menge annimmt. Somit gilt

$$C_\delta[f(\underline{x}^*)] = \left[\min_{\underline{x} \in C_\delta[\underline{x}^*]} f(\underline{x}); \max_{\underline{x} \in C_\delta[\underline{x}^*]} f(\underline{x}) \right].$$

□

Bemerkung 3.6: Die resultierende charakterisierende Funktion in Abbildung 3.2 ist nicht stetig, obwohl $\xi(x_1^*)$ und $f(\cdot)$ stetig sind.

Abbildung 3.2: Stetige Funktion eines unscharfen Intervalls



3.3 Arithmetik unscharfer Zahlen

In diesem Abschnitt wird die Arithmetik unscharfer Zahlen definiert (alle Operationen können ohne Schwierigkeiten auf unscharfe Vektoren erweitert werden). Für die gängigen Rechenarten $+$, $-$, \cdot und $/$ werden die verallgemeinerten Operationen \oplus , \ominus , \odot und \oslash betrachtet. Die Kombination der unscharfen Zahlen erfolgt dabei mit der Minimum-t-Norm T_{\min} .

Sei $f(x, y) = x + y = z$ die Funktion, auf der die Addition $x^* \oplus y^*$ zweier unscharfer Zahlen x^* und y^* basiert. Im Erweiterungsprinzip 3.3 haben wir bereits die Funktion f , die Zugehörigkeitsfunktion $\mu(\cdot)$ von $(x, y)^*$ ist dabei $\mu(x, y) = \min\{\xi_{x^*}(x), \xi_{y^*}(y)\}$. Die Zugehörigkeitsfunktion $\psi(\cdot) = \xi_{z^*}(\cdot)$ von $x^* \oplus y^* = z^*$ hat folgende Funktionswerte:

$$\begin{aligned}\xi_{z^*}(z) &= \xi_{x^* \oplus y^*}(z) = \sup\{\mu(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = z\} \\ &= \sup\{\min\{\xi_{x^*}(x), \xi_{y^*}(y)\} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = z\} \\ &= \sup\{\min\{\xi_{x^*}(x), \xi_{y^*}(z - x)\} \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \forall z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Letztere Gleichung gilt, da $x + y = z$ äquivalent zu $y = z - x$ ist. Dann kann man in der letzten Gleichung $\xi_{y^*}(y) = \xi_{y^*}(z - x)$ schreiben und anstatt von x und y hängt das Supremum nur von x ab.

Satz 3.7: *Wir haben die unscharfen Zahlen (nach Definition 2.1) x^* und y^* angegeben, mit deren charakterisierenden Funktionen $\xi(\cdot)$ und $\eta(\cdot)$. Für deren δ -Schnitte gelten $\forall \delta \in (0; 1]$ $C_\delta[x^*] = \bigcup_{j=1}^{k_\delta} [a_{\delta,j}; b_{\delta,j}]$ und $C_\delta[y^*] = \bigcup_{l=1}^{m_\delta} [c_{\delta,l}; d_{\delta,l}]$. Beide sind endliche Vereinigungen von nichtleeren kompakten Intervallen. Für die δ -Schnitte der Addition unscharfer Zahlen (nach Definition 2.1) gilt dann:*

$$C_\delta[x^* \oplus y^*] = \bigcup_{j=1}^{k_\delta} \bigcup_{l=1}^{m_\delta} [a_{\delta,j} + c_{\delta,l}; b_{\delta,j} + d_{\delta,l}] \quad \forall \delta \in (0; 1]$$

Beweis: Sei $f(x, y) = x + y$. Mithilfe von Satz 2.9 und der Intervallarithmetik erhalten wir

$$\begin{aligned}f(C_\delta[(x, y)^*]) &= f(C_\delta[x^*] \times C_\delta[y^*]) = \underbrace{\{f(x, y) : (x, y) \in C_\delta[x^*] \times C_\delta[y^*]\}}_{x+y} = \\ &= \bigcup_{j=1}^{k_\delta} \bigcup_{l=1}^{m_\delta} [a_{\delta,j} + c_{\delta,l}; b_{\delta,j} + d_{\delta,l}] \quad \forall \delta \in (0; 1].\end{aligned}$$

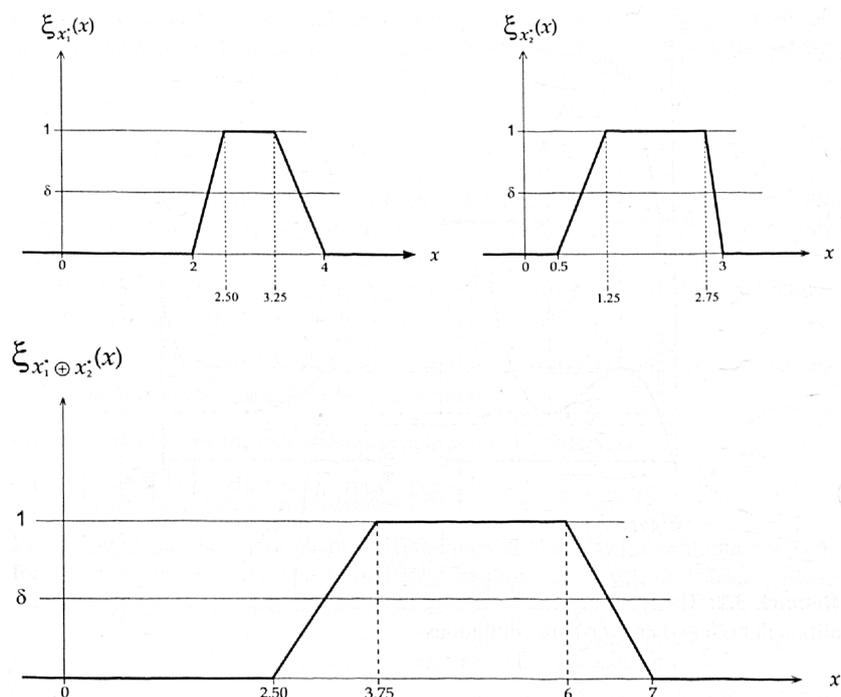
Für den Beweis ist somit zu zeigen, dass $f(C_\delta[(x, y)^*]) = C_\delta[z^*]$ (für $x^* \oplus y^* = z^*$) $\forall \delta \in (0; 1]$ ist. Nach Proposition 3.4 gilt bereits $f(C_\delta[(x, y)^*]) \subseteq C_\delta[z^*]$.

Nun muss die andere Richtung der Inklusion gezeigt werden. Dies erfolgt ähnlich wie im Beweis vom Satz 3.5. Man nimmt $z \in C_\delta[z^*]$ an. x^* und y^* werden jeweils von den charakterisierenden Funktionen $\xi(\cdot)$ beziehungsweise $\eta(\cdot)$ beschrieben. Aus dem Erweiterungsprinzip folgt $\sup\{\underbrace{\mu(x, y)}_{\min\{\xi(x), \eta(y)\}} : (x, y) \in f^{-1}(\{z\})\} \geq \delta$. \min ist stetig, $\xi(\cdot)$ und $\eta(\cdot)$ sind als

charakterisierende Funktionen halbstetig von oben. Somit ist $\mu(x, y) = \min\{\xi(x), \eta(y)\}$ halbstetig von oben und $\mu(\cdot, \cdot)$ nimmt ihr Maximum auf $f^{-1}(\{z\}) \cap (C_\delta[x^*] \times C_\delta[y^*])$ an. Damit gilt $\sup\{\min\{\xi(x), \eta(y)\} : (x, y) \in f^{-1}(\{z\})\} = \max\{\min\{\xi(x), \eta(y)\} : (x, y) \in f^{-1}(\{z\})\}$. Dann gibt es $(x_0, y_0) \in f^{-1}(\{z\})$ mit $\min\{\xi(x_0), \eta(y_0)\} \geq \delta$ und $x_0 + y_0 = z$. Damit gilt auch $(x_0, y_0) \in C_\delta[x^*] \times C_\delta[y^*]$, woraus $z \in f(C_\delta[(x, y)^*])$ folgt. Nun wurde die andere Richtung der Inklusion gezeigt. \square

Ein Beispiel für die Addition zweier unscharfer Zahlen wird in Abbildung 3.3 dargestellt.

Abbildung 3.3: Addition zweier unscharfer Intervalle



Eine spezielle verallgemeinerte Addition ist die *Translation einer unscharfen Zahl*, also $x^* \oplus c$ mit der unscharfen Zahl x^* (mit charakterisierender Funktion $\xi(\cdot)$) und $c \in \mathbb{R}$. Für $\eta(\cdot)$ von $y^* = x^* \oplus c$ gilt:

$$\eta(y) = \sup\{\xi(x) : x \in \mathbb{R}, x + c = y\} = \xi(y - c)$$

Die Definition der *verallgemeinerten Subtraktion* \ominus erfolgt mit denselben Voraussetzungen wie bei der verallgemeinerten Addition, bloß mit $f(x, y) = x - y = z$. Mit den charakterisierenden Funktionen $\xi_{x^*}(\cdot)$, $\xi_{y^*}(\cdot)$ und $\xi_{z^*}(\cdot)$ von x^* , y^* und $z^* = x^* \ominus y^*$ gilt nun

$$\begin{aligned} \xi_{z^*}(z) &= \xi_{x^* \ominus y^*}(z) = \sup\{\mu(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = z\} \\ &= \sup\{\min\{\xi_{x^*}(x), \xi_{y^*}(y)\} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = z\} \\ &= \sup\{\min\{\xi_{x^*}(x), \xi_{y^*}(x - z)\} \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \forall z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Definition der *verallgemeinerten Multiplikation* \odot erfolgt mit denselben Voraussetzungen wie bei der verallgemeinerten Addition, bloß mit $f(x, y) = x \cdot y = z$. Mit den

charakterisierenden Funktionen $\xi_{x^*}(\cdot), \xi_{y^*}(\cdot)$ und $\xi_{z^*}(\cdot)$ von x^*, y^* und dem unscharfen Produkt $z^* = x^* \odot y^*$ gilt nun

$$\begin{aligned}\xi_{z^*}(z) &= \xi_{x^* \odot y^*}(z) = \sup\{\mu(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \cdot y = z\} \\ &= \sup\{\min\{\xi_{x^*}(x), \xi_{y^*}(y)\} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \cdot y = z\} \quad \forall z \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

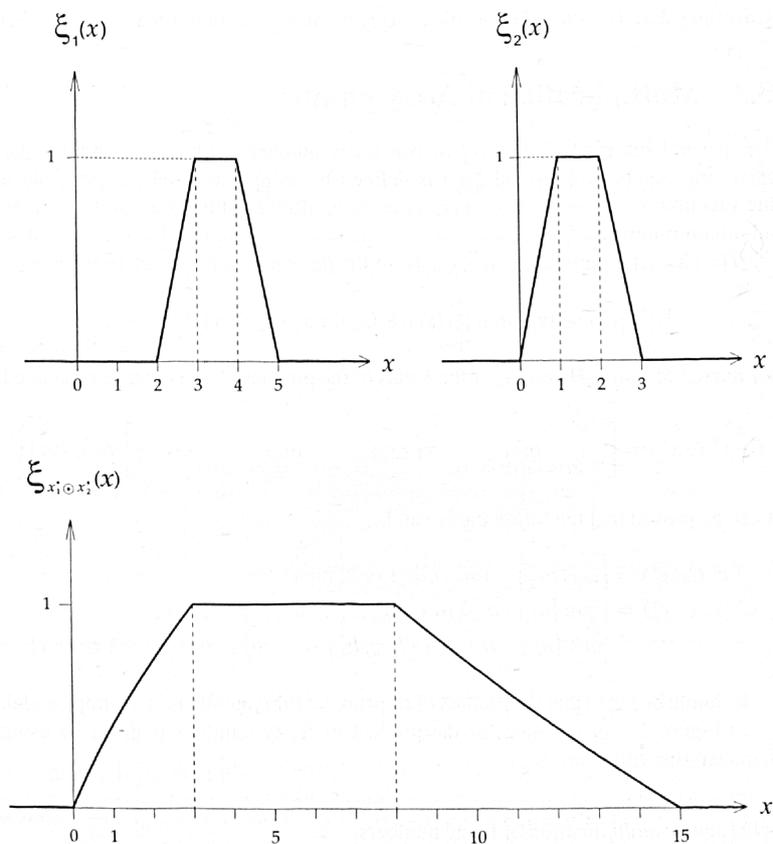
Auch hier erhält man die δ -Schnitte $C_\delta[x^* \odot y^*]$ analog wie im Satz 3.7. Für $C_\delta[x^*] = [a_\delta; b_\delta]$ und $C_\delta[y^*] = [c_\delta; d_\delta]$ gilt mit Satz 3.5 und der Intervallarithmetik

$$\begin{aligned}C_\delta[x^* \odot y^*] &= C_\delta\left[\min_{(x,y) \in C_\delta[x^*] \times C_\delta[y^*]} x \cdot y; \max_{(x,y) \in C_\delta[x^*] \times C_\delta[y^*]} x \cdot y\right] = \\ &= [\min\{a_\delta \cdot c_\delta, a_\delta \cdot d_\delta, b_\delta \cdot c_\delta, b_\delta \cdot d_\delta\}; \max\{a_\delta \cdot c_\delta, a_\delta \cdot d_\delta, b_\delta \cdot c_\delta, b_\delta \cdot d_\delta\}] \quad \forall \delta \in (0; 1].\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall sind x^* und y^* unscharfe Zahlen. Für $C_\delta[x^*] = \bigcup_{j=1}^{k_\delta} [a_{\delta,j}; b_{\delta,j}]$ und $C_\delta[y^*] = \bigcup_{l=1}^{m_\delta} [c_{\delta,l}; d_{\delta,l}]$ wenden wir (ähnlich wie im Beweis von Satz 3.5) die Multiplikation von Intervallen von oben auf die einzelnen Intervalle an, sodass $C_\delta[x^* \odot y^*] = \bigcup_{j=1}^{k_\delta} \bigcup_{l=1}^{m_\delta} [\min\{a_{\delta,j} \cdot c_{\delta,l}, a_{\delta,j} \cdot d_{\delta,l}, b_{\delta,j} \cdot c_{\delta,l}, b_{\delta,j} \cdot d_{\delta,l}\}; \max\{a_{\delta,j} \cdot c_{\delta,l}, a_{\delta,j} \cdot d_{\delta,l}, b_{\delta,j} \cdot c_{\delta,l}, b_{\delta,j} \cdot d_{\delta,l}\}] \forall \delta \in (0; 1]$ gilt.

Ein Beispiel für die Multiplikation zweier unscharfer Zahlen wird in Abbildung 3.4 dargestellt.

Abbildung 3.4: Multiplikation zweier unscharfer Intervalle



Eine spezielle verallgemeinerte Multiplikation ist die *verallgemeinerte Skalarmultiplikation*, also $x^* \odot \lambda$ mit der unscharfen Zahl x^* (mit charakterisierender Funktion $\xi(\cdot)$) und $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $\eta(\cdot)$ von $y^* = x^* \odot \lambda$ gilt:

$$\eta(y) = \sup\{\xi(x) : x \in \mathbb{R}, x \cdot \lambda = y\} = \begin{cases} \xi(\frac{y}{\lambda}) & \text{für } \lambda \neq 0 \\ I_{\{0\}}(y) & \text{für } \lambda = 0 \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Für die Definition des unscharfen Quotienten braucht man zunächst die Definition des unscharfen Kehrwerts: Für eine unscharfe Zahl x^* (mit $\xi(\cdot)$) und $0 \notin \text{Tr}[\xi(\cdot)]$ ist der Kehrwert $(x^*)^{-1} = y^*$ von x^* jene unscharfe Zahl, die folgende charakterisierende Funktion hat:

$$\eta(y) = \sup\{\xi(x) : x \in \mathbb{R}, x^{-1} = y\} = \begin{cases} \xi(\frac{1}{x}) & \text{für } \frac{1}{x} \in \text{Tr}[\xi(\cdot)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Für $0 \notin \text{Tr}[\eta(\cdot)]$ ist der unscharfe Quotient definiert durch $x^* \oslash y^* = x^* \odot [(y^*)^{-1}] = a^*$. Es gibt drei charakterisierende Funktionen $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$ und $\psi(\cdot)$ von x^* , y^* und a^* , wobei für $\psi(\cdot)$ gilt:

$$\psi(a) = \sup\{\min\{\xi(x), \eta(y)\} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x}{y} = a\} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

3.4 Integration unscharfer Funktionen

Die reellwertigen Funktionen $\underline{f}_\delta(\cdot)$ und $\overline{f}_\delta(\cdot)$ sind die jeweils untere bzw. obere δ -Niveaufunktion. Die Darstellung der unscharfen Funktion $f^*(\cdot)$ erfolgt über diese oberen und unteren δ -Niveaufunktionen. Im Fall $M = \mathbb{R}$ nennt man sie auch δ -Niveaukurven.

Definition 3.8: Sei $f^*(\cdot)$ eine unscharfe Funktion auf dem Maßraum (M, \mathcal{A}, μ) . Wenn die δ -Niveaufunktionen $\underline{f}_\delta(\cdot)$ und $\overline{f}_\delta(\cdot) \forall \delta \in (0; 1]$ integrierbar sind mit endlichen Integralen $\int \underline{f}_\delta(x) d\mu(x)$ und $\int \overline{f}_\delta(x) d\mu(x)$, $\forall \delta \in (0; 1]$, dann ist das verallgemeinerte Integral $\int f^*(x) d\mu(x)$ diejenige unscharfe Zahl J^* , die von der Familie $(A_\delta, \delta \in (0; 1])$ geschachtelter Intervalle (geschachtelt bedeutet $\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow A_{\delta_1} \supseteq A_{\delta_2}$) erzeugt wird und diese Intervalle folgendermaßen definiert sind:

$$A_\delta = \left[\int_M \underline{f}_\delta(x) d\mu(x); \int_M \overline{f}_\delta(x) d\mu(x) \right] \quad \forall \delta \in (0; 1]$$

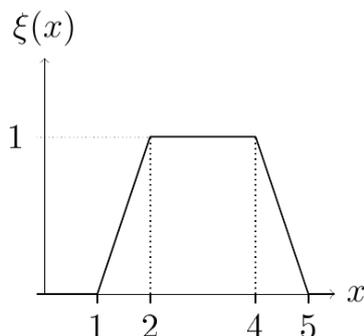
Die charakterisierende Funktion des unscharfen Integrals J^* ist gegeben durch

$$\xi_{J^*}(x) = \sup\{\delta \cdot I_{[\underline{J}_\delta; \overline{J}_\delta]}(x) : \delta \in [0; 1]\} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

wobei $\underline{J}_\delta := \int_M \underline{f}_\delta(x) d\mu(x)$ und $\overline{J}_\delta := \int_M \overline{f}_\delta(x) d\mu(x)$. Der resultierende unscharfe Wert J^* hat folgende Bezeichnung: $\int f^*(x) d\mu(x)$

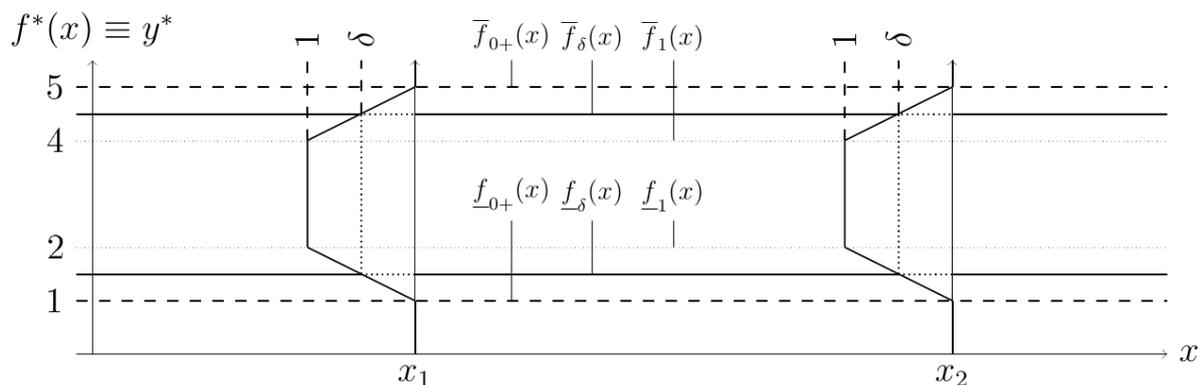
Beispiel 3.9: In diesem Beispiel wird das unscharfe Integral einer unscharfen konstanten Funktion $f^*(x) \equiv y^*$ berechnet. Hier nehmen wir $y^* = t^*(3, 1, 1, 1)$, deren charakterisierende Funktion in Abbildung 3.5 dargestellt wird.

Abbildung 3.5: Charakterisierende Funktion der trapezförmigen unscharfen Zahl $t^*(3, 1, 1, 1)$



In Abbildung 3.6 werden zur Veranschaulichung zwei δ -Schnitte dieser unscharfen konstanten Funktion $f^*(x) \equiv y^*$ dargestellt.

Abbildung 3.6: δ -Schnitte der unscharfen konstanten Funktion $f^*(x) \equiv y^*$



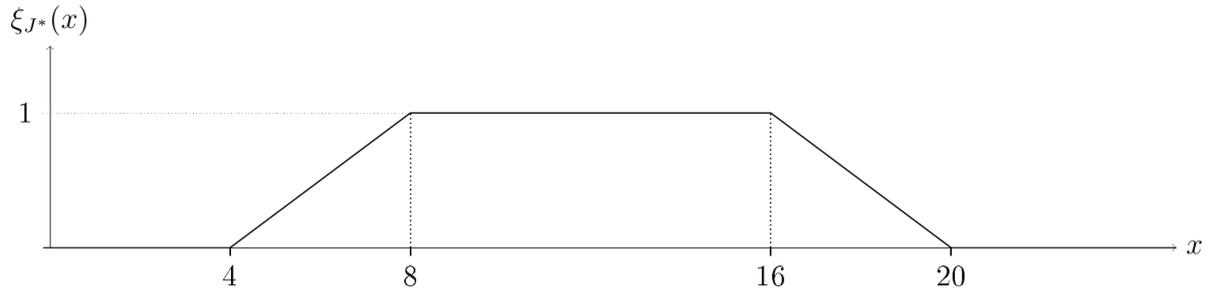
$\forall \delta \in (0; 1]$ gilt $C_\delta[f^*(x)] \equiv C_\delta[y^*] = [m-s-l L^{-1}(\delta); m+s+r R^{-1}(\delta)] = [1+\delta; 5-\delta]$, denn es gilt ja für trapezförmige unscharfe Zahlen $L(x) = R(x) = \max\{0, 1-x\}$. Wenn man die Funktion $f^*(x)$ auf dem Intervall $[a; b] = [0; 4]$ betrachtet, dann kann man die δ -Schnitte des unscharfen Integrals berechnen, denn die untere und obere δ -Niveaufunktionen in $[\underline{f}_\delta(x); \bar{f}_\delta(x)] = [1+\delta; 5-\delta]$ sind endlich integrierbar. Insbesondere sind diese beiden δ -Niveaufunktionen konstant in x .

Somit kann man die erzeugenden Mengen des unscharfen Integrals J^* von $f^*(x) \equiv y^*$ berechnen:

$$\begin{aligned}
C_{\delta[J^*]} &= \left[\int_a^b \underline{f}_\delta(x) dx; \int_a^b \overline{f}_\delta(x) dx \right] = \left[\int_0^4 (1 + \delta) dx; \int_0^4 (5 - \delta) dx \right] \\
&= [(4 - 0) \cdot (1 + \delta); (4 - 0) \cdot (5 - \delta)] = [4 + 4\delta; 20 - 4\delta]
\end{aligned}$$

In Abbildung 3.7 wird die charakterisierende Funktion des unscharfen Integrals $J^* = \int_2^4 f^*(x) d\mu(x)$ von $f^*(x) \equiv y^*$ dargestellt.

Abbildung 3.7: Charakterisierende Funktion des unscharfen Integrals J^*



Satz 3.10: Für jedes fixe Argument t sei der Wert der unscharfen Funktion $f^*(t)$ gleich einer unscharfen Zahl y_t^* , welche durch die charakterisierende Funktion

$$\eta_{y_t^*}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} L \left(\frac{m(t) - s(t) - x}{l(t)} \right) & \text{für } x < m(t) - s(t) \\ 1 & \text{für } m(t) - s(t) \leq x \leq m(t) + s(t) \\ R \left(\frac{x - m(t) - s(t)}{r(t)} \right) & \text{für } x > m(t) + s(t) \end{array} \right\}$$

beschrieben wird, wobei $m(t)$, $s(t)$, $l(t)$ und $r(t)$ positive und integrierbare Funktionen auf $[t_0; t_1]$ sind. Dann ist das unscharfe Integral $J^* = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t) dt$ eine unscharfe Zahl, beschrieben durch die charakterisierende Funktion

$$\mu_{J^*}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} L \left(\frac{\left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) - s(t) dt \right) - x}{\int_{t_0}^{t_1} l(t) dt} \right) & \text{für } x < \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) - s(t) dt \right) \\ 1 & \text{für } \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) - s(t) dt \right) \leq x \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) + s(t) dt \right) \\ R \left(\frac{x - \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) + s(t) dt \right)}{\int_{t_0}^{t_1} r(t) dt} \right) & \text{für } x > \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) + s(t) dt \right) \end{array} \right\}.$$

Beweis: Man benötigt den α -Schnitt von y_t^* . Dieser ist nach Definition 3.2 $C_\alpha[f^*(t)] = [f_{\underline{\alpha}}(t); \bar{f}_\alpha(t)] \forall \alpha \in (0; 1]$. $f_{\underline{\alpha}}(t)$ ist dabei gleich jenem Wert $x \in \mathbb{R}$, sodass $L\left(\frac{m(t)-s(t)-x}{l(t)}\right) = \alpha$. Ähnlich wie in Lemma 2.4 erhalten wir $x = m(t) - s(t) - l(t) \cdot L^{-1}(\alpha) = f_{\underline{\alpha}}(t)$. Analog ist $\bar{f}_\alpha(t)$ die Lösung für die Gleichung $R\left(\frac{x-m(t)-s(t)}{r(t)}\right) = \alpha$, was $x = m(t) + s(t) + r(t) \cdot R^{-1}(\alpha) = \bar{f}_\alpha(t)$ entspricht. Nach Definition 3.8 des unscharfen Integrals erhalten wir $\underline{J}_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} f_{\underline{\alpha}}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (m(t) - s(t) - l(t) \cdot L^{-1}(\alpha)) dt$ und $\bar{J}_\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \bar{f}_\alpha(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (m(t) + s(t) + r(t) \cdot R^{-1}(\alpha)) dt$.

Um den Beweis zu vervollständigen müssen wir zeigen, dass für die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{J^*}(x)$ von J^* $\mu_{J^*}(x) = \alpha$ nur dann gilt, wenn $x = \underline{J}_\alpha$ oder $x = \bar{J}_\alpha$ ist.

Es ist leicht zu sehen, dass die Lösung der Gleichung

$$L\left(\frac{\left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) - s(t) dt\right) - x}{\int_{t_0}^{t_1} l(t) dt}\right) = \alpha$$

gleich $x = \int_{t_0}^{t_1} (m(t) - s(t) - l(t) \cdot L^{-1}(\alpha)) dt = \underline{J}_\alpha$ ist, und die Lösung der Gleichung

$$R\left(\frac{x - \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) + s(t) dt\right)}{\int_{t_0}^{t_1} r(t) dt}\right) = \alpha$$

gleich $x = \int_{t_0}^{t_1} (m(t) + s(t) + r(t) \cdot R^{-1}(\alpha)) dt = \bar{J}_\alpha$ ist.

Man sieht auch, dass $\mu_{J^*}(x) = 1$ genau dann gilt, wenn $\left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) - s(t) dt\right) \leq x \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) + s(t) dt\right)$ gilt und $\mu_{J^*}(x) = 0$, wenn $x \leq \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) - s(t) - l(t) dt\right)$ und wenn $x \geq \left(\int_{t_0}^{t_1} m(t) + s(t) + r(t) dt\right)$ gilt. \square

Beispiel 3.11: Sei $f^*(t)$ eine Funktion, die jedem fixen Argument $t \in [1; \infty)$ eine unscharfe Zahl y_t^* zuweist, welche für jedes t durch $\eta_{y_t^*}(x)$ (nach deren Definition im Satz 3.10) beschrieben wird. Wir haben hier $m(t) = 2t + 1$, $s(t) = 0$ und $l(t) = r(t) = 1 - \frac{1}{4t^2}$. Es ist leicht einzusehen, dass $m(t)$, $l(t)$ und $r(t)$ positive und auf $[1; \infty)$ integrierbare Funktionen sind. Nach Satz 3.10 ist dann für jedes Intervall $[t_0; t_1] \subset [1; \infty)$ das Integral

$J^* = \int_{t_0}^{t_1} f^*(t)dt$ eine unscharfe Zahl, die durch die charakterisierende Funktion $\mu_{J^*}(x)$ (nach deren Definition im Satz 3.10) beschrieben wird.

In unserem Fall haben wir $M = \int_{t_0}^{t_1} m(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} (2t + 1)dt = (t_1^2 + t_1) - (t_0^2 + t_0)$ und

$D = \int_{t_0}^{t_1} l(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} r(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} (1 - \frac{1}{4t^2})dt = (t_1 + \frac{1}{4t_1}) - (t_0 + \frac{1}{4t_0})$. Somit gilt

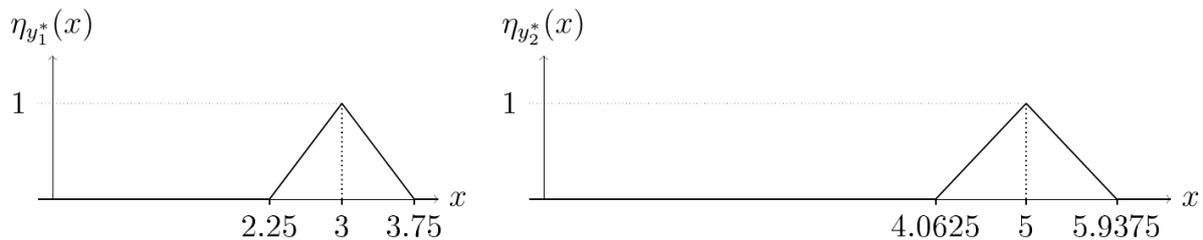
$$\mu_{J^*}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{M-x}{D} & \text{für } M - D \leq x \leq M \\ 1 - \frac{x-M}{D} & \text{für } M \leq x \leq M + D \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Zum Beispiel ist für $t_0 = 2$ und $t_1 = 4$ das Integral $J^* = \int_2^4 f^*(t)dt$ eine LR-unscharfe Zahl mit dem Mittelwert $M = 14$ und der Spanne $D = 1,9375$. Dessen charakterisierende Funktion ist

$$\mu_{J^*}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{14-x}{1,9375} & \text{für } 12,0625 \leq x \leq 14 \\ 1 - \frac{x-14}{1,9375} & \text{für } 14 \leq x \leq 15,9375 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

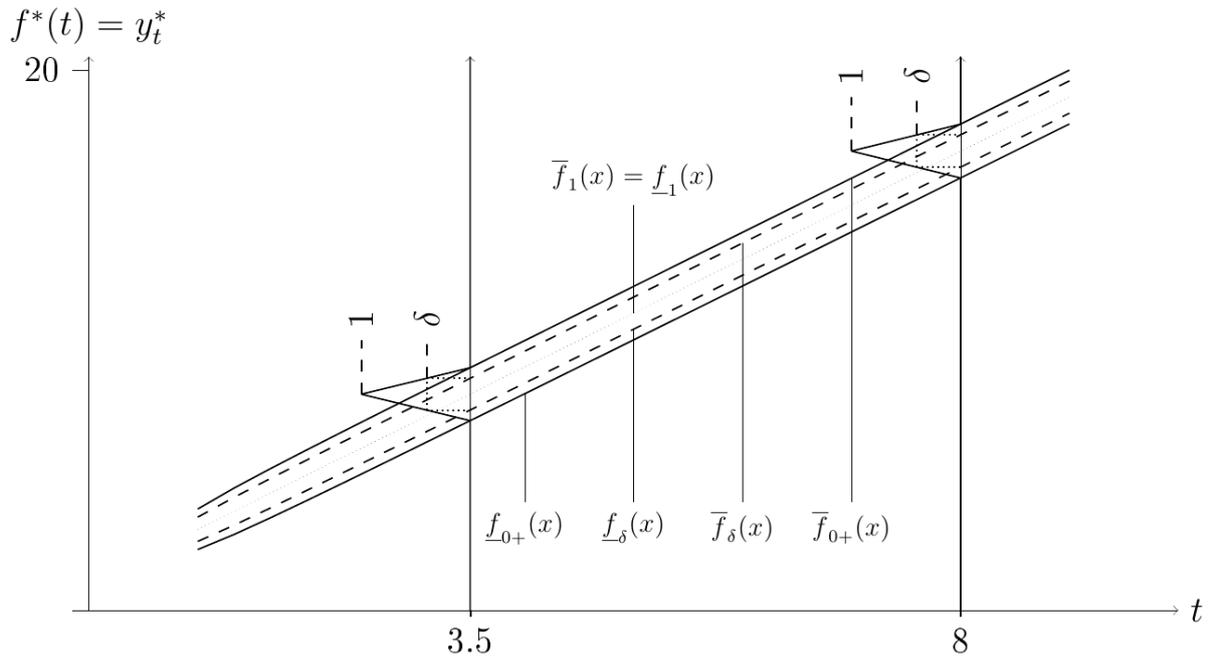
Die unscharfe Zahl $\eta_{y_t^*}(x)$ hängt von t ab. In Abbildung 3.8 werden zur Veranschaulichung zwei charakterisierende Funktionen von y_t^* für $t = 1$ und $t = 2$ dargestellt.

Abbildung 3.8: Charakterisierende Funktionen $\eta_{y_1^*}(x)$ und $\eta_{y_2^*}(x)$



In Abbildung 3.9 werden zwei δ -Schnitte der unscharfen Funktion $f^*(t) = y_t^*$ dargestellt, die mit t variiert.

Abbildung 3.9: δ -Schnitte der unscharfen Funktion $f^*(t) \equiv y_t^*$



Wir haben bereits die charakterisierende Funktion des unscharfen Integrals $J^* = \int_2^4 f^*(t)dt$ berechnet. In Abbildung 3.10 wird die charakterisierende Funktion dieses unscharfen Integrals J^* von $f^*(t) = y_t^*$ dargestellt.

Abbildung 3.10: Charakterisierende Funktion des unscharfen Integrals J^*



3.5 Integration mit unscharfen Integrationsbereichen

Oft sind die Endpunkte des Intervalls $[t_0; t_1]$ für die Integration in Anwendungen nicht präzise gegeben. Aus diesem Grund muss man sich um die Integration mit unscharfen

Rändern t_0^* und t_1^* (mit charakterisierenden Funktionen $\tau_0(\cdot)$ bzw. $\tau_1(\cdot)$) kümmern. Das noch einmal verallgemeinerte Integral

$$J^{**} = \int_{t_0^*}^{t_1^*} f^*(t) dt$$

wird auf jene Art und Weise definiert, dass der Integrator $f^*(t)$ auf Basis der charakterisierenden Funktionen $\tau_0(\cdot)$ und $\tau_1(\cdot)$ von t_0^* bzw. t_1^* transformiert wird. Die charakterisierende Funktion $\tau(\cdot)$ auf dem unscharfen Intervall $[t_0^*; t_1^*]$ wird durch die δ -Schnitte definiert, welche die δ -Schnitte von $\tau_0(\cdot)$ und $\tau_1(\cdot)$ verwendet. Die δ -Schnitte von $\tau_0(\cdot) \forall \delta \in (0; 1]$ sind

$$C_\delta[\tau_0(\cdot)] = [\underline{\tau}_{0,\delta}; \bar{\tau}_{0,\delta}]$$

und die von $\tau_1(\cdot) \forall \delta \in (0; 1]$ sind

$$C_\delta[\tau_1(\cdot)] = [\underline{\tau}_{1,\delta}; \bar{\tau}_{1,\delta}].$$

Somit sind die δ -Schnitte von $\tau(\cdot)$ gegeben durch

$$C_\delta[\tau(\cdot)] = [\underline{\tau}_{0,\delta}; \bar{\tau}_{1,\delta}] \quad \forall \delta \in (0; 1].$$

Mithilfe dieser δ -Schnitte und des Darstellungssatzes 2.3 für unscharfe Zahlen kann man die charakterisierende Funktion $\tau(\cdot)$ erhalten. Diese Funktion ist für angemessene Integrationsintervalle eine charakterisierende Funktion eines unscharfen Intervalles nach Definition 2.1.

Die unscharfe Zahl J^{**} wird mithilfe der Definition 3.8 des unscharfen Integrals definiert durch

$$\int_{t_0^*}^{t_1^*} f^*(t) dt := \int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} f^*(t) \cdot \tau(t) dt,$$

wobei $[\underline{\tau}_0; \bar{\tau}_0]$ und $[\underline{\tau}_1; \bar{\tau}_1]$ die Abschlüsse von den Trägern der unscharfen Zahlen t_0^* bzw. t_1^* sind, also

$$[\underline{\tau}_i; \bar{\tau}_i] = \overline{\text{Tr}[t_i^*]} := \overline{\{x \in \mathbb{R} : \tau_i(x) > 0\}} \quad \text{für } i = 0, 1.$$

Die Multiplikation einer unscharfen Zahl $y^* = f^*(t)$ mit einer reellen Zahl $c = \tau(t)$ für ein fixes t wird mit der charakterisierenden Funktion $\eta(\cdot)$ von y^* definiert. Für $c > 0$ haben wir die charakterisierende Funktion $\psi(\cdot)$ des unscharfen Produkts $c \odot y^*$, welche näher im Abschnitt über die Arithmetik unscharfer Zahlen beschrieben wurde. $\psi(\cdot)$ wird definiert durch

$$\psi(x) = \eta\left(\frac{x}{c}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Damit ist das Integral J^{**} wohldefiniert und es ergibt sich eine unscharfe Zahl. Dies entspricht vollkommen einer realistischen Beschreibung natürlicher Phänomene.

Im Falle, dass die Werte der unscharfen Funktion $f^*(t)$ und die unscharfen Ränder t_0^* und t_1^* LR-unscharfe Zahlen sind, kann man die charakterisierenden Funktionen $\tau(\cdot)$ und $\mu_{J^{**}}(\cdot)$ mithilfe der folgenden zwei Sätze beschreiben.

Satz 3.12: Sei t_0^* eine unscharfe Zahl mit zugehöriger charakterisierender Funktion

$$\tau_0(x) = \begin{cases} L\left(\frac{t_0-x}{l}\right) & \text{für } x \leq t_0 \\ R\left(\frac{x-t_0}{r}\right) & \text{für } x \geq t_0 \end{cases}$$

und t_1^* eine unscharfe Zahl mit zugehöriger charakterisierender Funktion

$$\tau_1(x) = \begin{cases} L\left(\frac{t_1-x}{l}\right) & \text{für } x \leq t_1 \\ R\left(\frac{x-t_1}{r}\right) & \text{für } x \geq t_1 \end{cases}.$$

Seien $C_\delta[\tau_0(\cdot)] = [\underline{\tau}_{0,\delta}; \bar{\tau}_{0,\delta}]$ und $C_\delta[\tau_1(\cdot)] = [\underline{\tau}_{1,\delta}; \bar{\tau}_{1,\delta}]$ die δ -Schnitte von $\tau_0(\cdot)$ bzw. $\tau_1(\cdot)$. Dann hat die Funktion $\tau(\cdot)$ mit δ -Schnitten ($C_\delta[\tau(\cdot)] = [\underline{\tau}_{0,\delta}; \bar{\tau}_{1,\delta}] \forall \delta \in (0; 1]$) folgende Form:

$$\tau(x) = \begin{cases} L\left(\frac{t_0-x}{l}\right) & \text{für } x \leq t_0 \\ 1 & \text{für } t_0 \leq x \leq t_1 \\ R\left(\frac{x-t_1}{r}\right) & \text{für } x \geq t_1 \end{cases}$$

Beweis: $\underline{\tau}_{0,\delta}$ ist die Lösung der Gleichung $L\left(\frac{t_0-x}{l}\right) = \delta$, damit gilt $\underline{\tau}_{0,\delta} = t_0 - l \cdot L^{-1}(\delta)$. $\bar{\tau}_{1,\delta}$ ist die Lösung der Gleichung $R\left(\frac{x-t_1}{r}\right) = \delta$, damit gilt $\bar{\tau}_{1,\delta} = t_1 + r \cdot R^{-1}(\delta)$. Es genügt zu zeigen, dass $\tau(x) = \delta$ nur für $x = \underline{\tau}_{0,\delta}$ und $x = \bar{\tau}_{1,\delta}$ gilt. Mit den oben berechneten $\underline{\tau}_{0,\delta}$ und $\bar{\tau}_{1,\delta}$ ist das offensichtlich. Zudem haben wir für $\delta = 1$ den δ -Schnitt $C_1[\tau(\cdot)] = [t_0; t_1]$ ($L^{-1}(1) = R^{-1}(1) = 0$), damit gilt $\tau(x) = 1$ genau dann, wenn $t_0 \leq x \leq t_1$. \square

Satz 3.13: Seien t_0^* , t_1^* unscharfe Zahlen und $\tau(\cdot)$ eine charakterisierende Funktion wie in Satz 3.12 beschrieben. Für jedes fixe Argument t sei der Wert der unscharfen Funktion $f^*(t)$ gleich einer unscharfen Zahl y_t^* , wie in Satz 3.10 beschrieben. Dann ist das unscharfe

Integral $J^{**} = \int_{t_0^*}^{t_1^*} f^*(t)dt$ eine unscharfe Zahl, beschrieben durch die charakterisierende Funktion

$$\mu_{J^{**}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{\left(\int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} \tau(t)m(t) - \tau(t)s(t)dt\right) - x}{\int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} \tau(t)l(t)dt}\right) & \text{für } x < \left(\int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} \tau(t)m(t) - \tau(t)s(t)dt\right) \\ 1 & \text{für } \left(\int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} \tau(t)m(t) - \tau(t)s(t)dt\right) \leq x \\ & \leq \left(\int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} \tau(t)m(t) + \tau(t)s(t)dt\right) \\ R\left(\frac{x - \left(\int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} \tau(t)m(t) + \tau(t)s(t)dt\right)}{\int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} \tau(t)r(t)dt}\right) & \text{für } x > \left(\int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} \tau(t)m(t) + \tau(t)s(t)dt\right) \end{cases}.$$

Beweis: Es gilt ja $J^{**} = \int_{\underline{t}_0}^{\bar{t}_1} f^*(t)\tau(t)dt$, wobei $\psi_t(\cdot)$ die charakterisierende Funktion des unscharfen Produkts von $y_t^* = f^*(t)$ und der Konstanten $\tau(t)$ (für ein festes Argument t) ist, also $\psi_t(x) = \eta_{y_t^*}\left(\frac{x}{\tau(t)}\right)$. Nach der Definition $\eta_{y_t^*}\left(\frac{x}{\tau(t)}\right)$ von Satz 3.10 haben wir

$$\psi_t(x) = \eta_{y_t^*}\left(\frac{x}{\tau(t)}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} L\left(\frac{m(t)-s(t)-\frac{x}{\tau(t)}}{l(t)}\right) & \text{für } \frac{x}{\tau(t)} < m(t) - s(t) \\ 1 & \text{für } m(t) - s(t) \leq \frac{x}{\tau(t)} \leq m(t) + s(t) \\ R\left(\frac{\frac{x}{\tau(t)} - m(t) - s(t)}{r(t)}\right) & \text{für } \frac{x}{\tau(t)} > m(t) + s(t) \end{array} \right\}.$$

Dies bedeutet dasselbe wie

$$\psi_t(x) = \left\{ \begin{array}{ll} L\left(\frac{\tau(t)(m(t)-s(t))-x}{\tau(t)l(t)}\right) & \text{für } x < \tau(t)(m(t) - s(t)) \\ 1 & \text{für } \tau(t)(m(t) - s(t)) \leq x \leq \tau(t)(m(t) + s(t)) \\ R\left(\frac{x - \tau(t)(m(t)+s(t))}{\tau(t)r(t)}\right) & \text{für } x > \tau(t)(m(t) + s(t)) \end{array} \right\}.$$

Mithilfe von Satz 3.10 ist das Integral auf dem Bereich $[\underline{t}_0; \bar{t}_1]$ der unscharfen Funktion, welche die unscharfen Zahlen, charakterisiert durch $\psi_t(x)$, produziert, gegeben durch die charakterisierende Funktion $\mu_{J^{**}}(\cdot)$. Damit wurde der Satz bewiesen. \square

Beispiel 3.14: Wir wollen die unscharfe Funktion $f^*(t)$ aus Beispiel 3.11 über den unscharfen Bereich $[2^*; 4^*]$ integrieren. Die unscharfe Zahl 2^* ist gegeben durch die charakterisierende Funktion

$$\mu_{2^*}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{2-x}{1} & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{x-2}{1} & \text{für } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}$$

und die unscharfe Zahl 4^* ist gegeben durch die charakterisierende Funktion

$$\mu_{4^*}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{4-x}{1} & \text{für } 3 \leq x \leq 4 \\ 1 - \frac{x-4}{1} & \text{für } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Dann gilt $[\underline{t}_0; \bar{t}_1] = [1; 5]$ und

$$\tau(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x - 1 & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 5 - x & \text{für } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Mit der Berechnung des Mittelwertes und der Spanne ($m(t)$ und $l(t) = r(t)$ entnimmt man aus Beispiel 3.11) haben wir nach Satz 3.13 folgendes Resultat:

$$M = \int_1^5 \tau(t)m(t)dt = \int_1^2 (t-1)(2t+1)dt + \int_2^4 1(2t+1)dt + \int_4^5 (5-t)(2t+1)dt = \frac{13}{6} + 14 + \frac{29}{6} = 21,$$

$$\text{und } D_L = \int_1^5 \tau(t)l(t)dt = \int_1^2 (t-1)\left(1 - \frac{1}{4t^2}\right)dt + \int_2^4 1\left(1 - \frac{1}{4t^2}\right)dt + \int_4^5 (5-t)\left(1 - \frac{1}{4t^2}\right)dt \approx 0.4517 + 1.9375 + 0.4933 = 2.8825.$$

In unserem Fall haben wir $l(t) = r(t)$, darum gilt $D_R \approx 2.8825$. Die charakterisierende Funktion der unscharfen Zahl J^{**} ist nun

$$\mu_{J^{**}}(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{21-x}{2.8825} & \text{für } 18.1175 \leq x \leq 21 \\ 1 - \frac{x-21}{2.8825} & \text{für } 21 \leq x \leq 23.8825 \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Kapitel 4

Anwendungen

In diesem Kapitel werden nun mögliche Anwendungen der mathematischen Beschreibung von Unschärfe aufgezeigt. Diese Beschreibungen sind notwendig, da in der Stochastik nur die Unsicherheit auf Grund von Variabilität beschrieben wird. Auf diesem Gebiet treten häufig unscharfe Zahlen auf, mit denen gewisse Anwendungen, die mit reellen Zahlen funktionieren, neu definiert werden müssen. Diesem Kapitel liegen zum Großteil G. Klir und B. Yuan [9], D. Hareter [6], R. Viertl [20] und R. Viertl und D. Hareter [21] zugrunde. Dem Abschnitt über die Fourier-Residuenanalyse im unscharfene Zeitreihenmodell liegt zum Großteil Ruey-Chyn Tsaur [18] zugrunde.

4.1 Unscharfe Dichtefunktionen und unscharfe Verteilungsfunktionen

Definition 4.1: Eine unscharfe Funktion $f^* : M \rightarrow \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$, definiert auf (M, \mathcal{A}, μ) ist eine unscharfe Dichtefunktion, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. Das Integral $y^* = \int_M f^*(x) d\mu(x)$ existiert
2. $1 \in C_1[y^*]$ und $\text{Tr}[y^*] \subseteq [0, \infty)$
3. Es gibt eine klassische Wahrscheinlichkeitsdichte $f : M \rightarrow [0; \infty)$ mit

$$\underline{f}_1(x) \leq f(x) \leq \bar{f}_1(x) \quad \forall x \in M$$

Für die Definition der unscharfen Verteilungsfunktion braucht man Definition 3.8 des unscharfen Integrals:

Definition 4.2: Sei $f^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ eine unscharfe Dichtefunktion und deren δ -Niveaufunktionen \underline{f}_δ und \bar{f}_δ endlich integrierbar, $\forall \delta \in (0; 1]$. Eine unscharfe Funktion $F^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}_I(\mathbb{R})$ mit $F^*(a) := \int_{-\infty}^a f^*(x) dx$ heißt zugehörige unscharfe Verteilungsfunktion. Deren δ -Schnitte sind folgendermaßen definiert:

$$C_\delta[F^*(a)] = \left[\int_{-\infty}^a \underline{f}_\delta(x) dx; \int_{-\infty}^a \bar{f}_\delta(x) dx \right] \quad \forall \delta \in (0; 1], \forall a \in \mathbb{R}$$

4.2 Das verallgemeinerte Bayes'sche Theorem bei Unschärfe

Wir haben ein stetiges, parametrisches stochastisches Modell $X \sim f(\cdot | \theta)$, $\forall \theta \in \Theta$ (f ist eine parametrische Wahrscheinlichkeitsdichte). Θ ist ein stetiger Wahrscheinlichkeitsraum (beinhaltet alle in Frage kommenden Werte für den Parameter θ). Das Wissen über den Parameter θ im Vorhinein wird durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\pi(\cdot)$ ausgedrückt, die auch A-priori-Dichte genannt wird.

Für dieses Modell $X \sim f(\cdot | \theta)$, $\forall \theta \in \Theta$, mit stetigem Wahrscheinlichkeitsraum Θ , der A-priori-Dichte $\pi(\cdot)$, einer reellen Stichprobe x_1, \dots, x_n und der sogenannten Likelihood- oder Plausibilitätsfunktion

$$l(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \quad \forall \theta \in \Theta$$

lautet die Kurzform des Bayes'schen Theorems:

$$\begin{aligned} \pi(\theta | x_1, \dots, x_n) &\propto \pi(\theta) l(\theta; x_1, \dots, x_n), && \text{oder ausführlich} \\ \pi(\theta | x_1, \dots, x_n) &= \frac{\pi(\theta) l(\theta; x_1, \dots, x_n)}{\int_{\Theta} \pi(\theta) l(\theta; x_1, \dots, x_n) d\theta}, \end{aligned}$$

$\int_{\Theta} \pi(\theta) l(\theta; x_1, \dots, x_n) d\theta$ ist die Normierungskonstante.

Aus diesem Bayes'schen Theorem erhält man die sogenannte A-posteriori-Dichte $\pi(\cdot | x_1, \dots, x_n)$. Zudem wird diese Kurzform für ein beliebiges $\theta \in \Theta$ begründet:

$$\begin{aligned} \pi(\theta | x_1, \dots, x_n) &= \frac{g(x_1, \dots, x_n, \theta)}{h(x_1, \dots, x_n)} \\ &= \frac{\left[\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \right] \pi(\theta)}{\int_{\Theta} \left[\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) \right] \pi(\theta) d\theta} \quad \text{für } \theta \in \Theta \end{aligned}$$

Die erste Gleichung gilt wegen der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte. $g(x_1, \dots, x_n, \theta)$ ist die multivariate Wahrscheinlichkeitsdichte des stochastischen Vektors $(X_1, \dots, X_n, \theta)$. $h(x_1, \dots, x_n)$ ist die Randdichte von (X_1, \dots, X_n) . Zudem braucht man die Voraussetzungen, dass $\pi(\cdot)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, dass $f(x_1, \dots, x_n | \theta)$ in θ nichtnegativ stetig ist und dass x_1, \dots, x_n unabhängige Beobachtungen sind. Mit der Definition der Plausibilitätsfunktion erhält man so die Kurzform des Bayes'schen Theorems.

Man braucht eine Basis für die Verallgemeinerung der statistischen Verfahrensweise für unscharfe Daten. Für eine Zufallsgröße X haben wir den Beobachtungsraum $M_X =$

$\{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$. Seien x_1^*, \dots, x_n^* n unscharfe Elemente von M_X und $\xi_1(\cdot), \dots, \xi_n(\cdot)$ die zugehörigen charakterisierenden Funktionen.

Definition 4.3: Die vektorcharakterisierende Funktion $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$ vom unscharfen Element \underline{x}^* aus dem Stichprobenraum M_X^n (Raum aller möglichen Stichproben der stochastischen Größe X) ist definiert durch

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = \min\{\xi_1(x_1), \dots, \xi_n(x_n)\} \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in M_X^n$$

und der zugehörige unscharfe Vektor \underline{x}^* wird die kombinierte unscharfe Stichprobe genannt.

Definition 4.4: Auf einem stetigen Parameterraum Θ ist die unscharfe A-priori-Verteilung $P^*(\cdot)$ auf Θ gegeben durch eine unscharfe Dichtefunktion $\pi^*(\cdot)$ auf Θ .

Im Allgemeinen sind in einem stetigen stochastischen Modell $X \sim f(\cdot | \theta)$, $\theta \in \Theta$, mit stetigem Wahrscheinlichkeitsraum Θ , die A-priori-Verteilungen und die Beobachtungen unscharf. Für solche unscharfen Informationen benötigt man eine Verallgemeinerung des Bayes'schen Theorems.

Bei unscharfen Daten x_1^*, \dots, x_n^* muss die Plausibilitätsfunktion $l(\theta; x_1, \dots, x_n)$ verallgemeinert werden. Wir verwenden hierbei das kombinierte unscharfe Stichprobenelement \underline{x}^* (Def 4.3). Damit wird die verallgemeinerte Plausibilitätsfunktion $l^*(\theta; \underline{x}^*)$, die durch das Erweiterungsprinzip definiert ist, repräsentiert durch deren unscharfen δ -Niveaufunktionen $\underline{l}_\delta(\cdot; \underline{x}^*)$ und $\bar{l}_\delta(\cdot; \underline{x}^*) \quad \forall \delta \in (0; 1]$.

Für die δ -Schnitte des unscharfen Wertes $l^*(\theta; \underline{x}^*)$ schreiben wir

$$C_\delta[l^*(\theta; \underline{x}^*)] = [\underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*), \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)].$$

Zudem ist $l^*(\cdot; \underline{x}^*)$ eine unscharfe Funktion $l^* : \theta \rightarrow \mathcal{F}_I([0; \infty])$.

Basierend auf der unscharfen A-priori-Dichte $\pi^*(\cdot)$ auf Θ mit den δ -Niveaufunktionen $\underline{\pi}_\delta(\cdot)$ und $\bar{\pi}_\delta(\cdot)$ und der unscharfen Stichprobe x_1^*, \dots, x_n^* zusammen mit der kombinierten unscharfen Stichprobe \underline{x}^* (mit der vektorcharakterisierenden Funktion $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$) erhält man die charakterisierende Funktion $\psi_{l^*(\theta; \underline{x}^*)}(\cdot)$ von $l^*(\theta; \underline{x}^*)$ mithilfe des Erweiterungsprinzips (Definition 3.3):

$$\psi_{l^*(\theta; \underline{x}^*)}(y) := \begin{cases} \sup\{\xi(\underline{x}) : l(\theta; \underline{x}) = y\} & \text{falls } \exists x : l(\theta; \underline{x}) = y \\ 0 & \text{falls } \nexists x : l(\theta; \underline{x}) = y \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Mit der unscharfen Multiplikation \odot und der unscharfen Division \oslash erhält man die natürliche Erweiterung des Bayes'schen Theorems,

$$\pi^*(\theta | \underline{x}^*) = \frac{\pi^*(\theta) \odot l^*(\theta; \underline{x}^*)}{\int_{\Theta} \pi^*(\theta) \odot l^*(\theta; \underline{x}^*) d\theta}$$

wobei der Träger der unscharfen Zahl im Nenner nicht die 0 enthält, damit der Quotient existiert.

Für die Berechnung des δ -Schnittes $C_\delta[\pi^*(\theta | \underline{x}^*)]$ betrachten wir die δ -Schnitte $C_\delta[y^*]$ und $C_\delta[z^*]$ für die Multiplikation $y^* = x_1^* \odot x_2^*$ und $z^* = w_1^* \oslash w_2^*$. Zudem soll gelten, dass die Träger $\text{Tr}[x_1^*]$, $\text{Tr}[x_2^*]$, $\text{Tr}[w_1^*]$ und $\text{Tr}[w_2^*]$ vollständig im positiven Bereich von \mathbb{R} liegen (sonst kommt es zu Komplikationen mit den Grenzen der δ -Schnitte). Mit Satz 3.5 können $C_\delta[y^*]$ und $C_\delta[z^*]$ mit jeweils $C_\delta[x_i^*] = [\underline{x}_{i,\delta}; \bar{x}_{i,\delta}]$ und $C_\delta[w_i^*] = [\underline{w}_{i,\delta}; \bar{w}_{i,\delta}]$ ($i = 1, 2$) durch

$$C_\delta[y^*] = [\underline{x}_{1,\delta} \cdot \underline{x}_{2,\delta}; \bar{x}_{1,\delta} \cdot \bar{x}_{2,\delta}] \quad \text{und} \quad C_\delta[z^*] = \left[\frac{\underline{w}_{1,\delta}}{\bar{w}_{2,\delta}}; \frac{\bar{w}_{1,\delta}}{\underline{w}_{2,\delta}} \right]$$

berechnet werden. Die Funktion f ist hier jeweils die Multiplikation und Division und die beiden Intervallenden der beiden δ -Schnitte sind das min und das max von f . Damit und mit der Definition 3.8 der Integration unscharfer Funktionen und den δ -Schnitten $C_\delta[\pi^*(\theta)] = [\underline{\pi}_\delta(\theta); \bar{\pi}_\delta(\theta)]$, $C_\delta[l^*(\theta; \underline{x}^*)] = [\underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*), \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)]$ sind die δ -Niveaufunktionen von $C_\delta[\pi^*(\theta | \underline{x}^*)]$ gegeben durch

$$\underline{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) := \frac{\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)}{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta}$$

und

$$\bar{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) := \frac{\bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)}{\int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta}$$

$\forall \delta \in (0; 1]$.

Handelt es sich bei $\pi^*(\theta | \underline{x}^*)$ aber um eine unscharfe Dichte nach Definition 4.1? Die drei Punkte müssen überprüft werden:

1. Das Integral $\int_{\Theta} \pi^*(\theta | \underline{x}^*) d\theta = \frac{\int_{\Theta} \pi^*(\theta) \odot l^*(\theta; \underline{x}^*) d\theta}{\int_{\Theta} \pi^*(\theta) \odot l^*(\theta; \underline{x}^*) d\theta}$ existiert, denn die δ -Niveaufunktionen $\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)$ und $\bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)$ von

$$\begin{aligned} C_\delta \left[\int_{\Theta} \pi^*(\theta | \underline{x}^*) d\theta \right] &= \left[\int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) d\theta; \int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) d\theta \right] \\ &= \left[\frac{\int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta}{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta}; \frac{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta}{\int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta} \right] \end{aligned}$$

sind endlich integrierbar $\forall \delta \in (0; 1]$.

2. Aus den Ungleichungen $0 \leq \underline{\pi}_\delta(\theta) \leq \bar{\pi}_\delta(\theta)$ und $0 \leq \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) \leq \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)$, die für alle $\delta \in (0; 1]$ und $\theta \in \Theta$ gelten, folgt $\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) \leq \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)$ und somit

$$0 \leq \int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta \leq \int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta.$$

Daraus erhält man

$$0 \leq \frac{\int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta}{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta} \left(= \int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) d\theta \right) \leq 1$$

und mit ähnlichen Überlegungen

$$1 \leq \frac{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta}{\int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta} \left(= \int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) d\theta \right).$$

Somit ist $1 \in C_\delta \left[\int_{\Theta} \pi^*(\theta | \underline{x}^*) d\theta \right] = \left[\int_{\Theta} \underline{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) d\theta; \int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) d\theta \right]$.

Die Trägermengen $\text{Tr}[x_1^*]$ und $\text{Tr}[x_2^*]$ in $y^* = x_1^* \otimes x_2^*$ sollen ja vollständig im positiven Bereich von \mathbb{R} liegen, das gilt dann aber auch für $\text{Tr}[y^*]$. Liegt für eine unscharfe Funktion f^* die Trägermenge $\text{Tr}[f^*(x)] \forall x \in \mathbb{R}$ im positiven Bereich von \mathbb{R} , dann gilt dies auch für die Integration dieser Funktion. Der Träger von $\int_{\Theta} \pi^*(\theta) \odot l^*(\theta; \underline{x}^*) d\theta$ liegt vollständig im positiven Bereich. Damit gilt

$$\text{Tr} \left(\int_{\Theta} \pi^*(\theta | \underline{x}^*) d\theta \right) = \text{Tr} \left(\frac{\int_{\Theta} \pi^*(\theta) \odot l^*(\theta; \underline{x}^*) d\theta}{\int_{\Theta} \pi^*(\theta) \odot l^*(\theta; \underline{x}^*) d\theta} \right) \subseteq (0; \infty).$$

3. Eine klassische Wahrscheinlichkeitsdichte, die zwischen $\underline{\pi}_1(\theta | \underline{x}^*)$ und $\bar{\pi}_1(\theta | \underline{x}^*) \forall \theta \in \Theta$ liegt ist $\pi(\theta | \underline{x})$. Es handelt sich auch wirklich um eine Dichtefunktion, da

$$\int_{\Theta} \pi(\theta | \underline{x}) d\theta = \frac{\int_{\Theta} \pi(\theta) l(\theta; \underline{x}) d\theta}{\int_{\Theta} \pi(\theta) l(\theta; \underline{x}) d\theta} = 1$$

gilt. $\pi(\theta)$ ist dabei eine klassische Dichte, die zwischen $\underline{\pi}_1(\theta)$ und $\bar{\pi}_1(\theta)$ liegt, da $\pi^*(\theta)$ eine unscharfe Dichte ist.

Im klassischen Bayes'schen Theorem, für welches die A-priori-Wahrscheinlichkeit reell ist, gilt der Bayes'sche Aktualisierungsprozess: Indem man die Daten x_1, \dots, x_n in zwei Teile $\underline{x}_1 = (x_1, \dots, x_m)$ und $\underline{x}_2 = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ teilt, $\pi(\cdot | \underline{x}_1)$ berechnet, diese dann als eine A-priori-Verteilung für die nächste Stichprobe \underline{x}_2 verwendet, sollte dasselbe herauskommen, wie wenn man die gesamte Stichprobe x_1, \dots, x_n in einem Schritt nimmt, um die A-posteriori-Verteilung zu berechnen.

Diese Eigenschaft gilt aber nicht so ohne Weiteres im verallgemeinerten Bayes'schen Theorem wie oben beschrieben. Hier wird die aus den unscharfen Beobachtungen x_1^*, \dots, x_n^* kombinierte unscharfe Stichprobe \underline{x}^* (nach Definition 4.3) in die beiden Teilstichproben \underline{x}_1^* und \underline{x}_2^* aufgeteilt, wobei \underline{x}_1^* die Beobachtungen x_1^*, \dots, x_m^* und \underline{x}_2^* die Beobachtungen x_{m+1}^*, \dots, x_n^* enthält. Die A-posteriori-Dichte $\pi^*(\cdot | \underline{x}_1^*)$ wird als A-priori-Dichte für \underline{x}_2^* verwendet. Auf diese Weise erhält man für die untere δ -Niveaufunktion

$$\begin{aligned} \pi_\delta(\theta | \underline{x}_1^*, \underline{x}_2^*) &= \frac{\pi_\delta(\theta | \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)}{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}_1^*) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) d\theta} \\ &= \frac{\frac{\pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*)}{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) d\theta} \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)}{\int_{\Theta} \frac{\bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*)}{\int_{\Theta} \pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) d\theta} \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) d\theta} \\ &= \frac{\int_{\Theta} \pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) d\theta}{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) d\theta} \cdot \frac{\pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)}{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) d\theta}. \end{aligned}$$

Wegen der verwendeten Minimum-Kombinationsregel und Satz 2.9 gelten die beiden Gleichungen

$$\underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) = \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) \quad \text{und} \quad \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) = \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*).$$

Für die obere δ -Niveaufunktion gilt die Berechnung analog. Damit und weil üblicherweise $\frac{\int_{\Theta} \pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) d\theta}{\int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) d\theta} = C \leq 1$ gilt, erhält man letztendlich $\pi_\delta(\theta | \underline{x}_1^*, \underline{x}_2^*) = C \cdot \pi_\delta(\theta | \underline{x}^*)$. Somit unterscheiden sich die Resultate um die Konstante C .

Um die sequentielle Eigenschaft des Aktualisierungsprozesses im Bayes'schen Theorem aufrecht zu erhalten, ist ein gleicher Nenner für $\pi_\delta(\cdot | \underline{x}^*)$ und $\bar{\pi}_\delta(\cdot | \underline{x}^*)$ notwendig. Dazu kann man den Mittelwert der beiden vorhandenen Nenner verwenden:

$$\begin{aligned} N(\underline{x}^*) &= \frac{1}{2} \left[\int_{\Theta} \pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta + \int_{\Theta} \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) d\theta \right] \\ &= \int_{\Theta} \frac{1}{2} [\pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) + \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)] d\theta \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhält man die folgende Form des Bayes'schen Aktualisierungsprozesses:

$$\pi_\delta(\theta | \underline{x}^*) = \frac{\pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)}{\int_{\Theta} \frac{1}{2} [\pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) + \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)] d\theta} = \frac{\pi_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)}{N(\underline{x}^*)}$$

und

$$\bar{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) = \frac{\bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)}{\int_{\Theta} \frac{1}{2} [\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) + \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)] d\theta} = \frac{\bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)}{N(\underline{x}^*)}$$

Nun wollen wir beweisen, dass mit dieser Verallgemeinerung des Bayes'schen Theorems die sequentiell berechnete unscharfe A-posteriori-Dichte $\pi^*(\cdot | \underline{x}_1^*, \underline{x}_2^*)$ mit der in einem Schritt berechneten A-posteriori-Dichte $\pi^*(\cdot | \underline{x}^*)$ übereinstimmt. Dann gilt für die untere δ -Niveaufunktion von $\pi^*(\cdot | \underline{x}_1^*, \underline{x}_2^*)$ (für die obere δ -Niveaufunktion analog) mit der A-priori-Dichte $\pi^*(\cdot | \underline{x}_1^*)$ folgende Berechnung:

$$\begin{aligned} \underline{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}_1^*, \underline{x}_2^*) &= \frac{\underline{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)}{\int_{\Theta} \frac{1}{2} [\underline{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) + \bar{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}_1^*) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)] d\theta} \\ &= \frac{\frac{\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*)}{N(\underline{x}_1^*)} \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)}{\int_{\Theta} \frac{1}{2} \left[\frac{\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*)}{N(\underline{x}_1^*)} \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) + \frac{\bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*)}{N(\underline{x}_1^*)} \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) \right] d\theta} \\ &= \frac{N(\underline{x}_1^*)^{-1} \cdot \underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)}{\int_{\Theta} \frac{1}{2} N(\underline{x}_1^*)^{-1} [\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) + \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)] d\theta} \\ &= \frac{\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)}{\int_{\Theta} \frac{1}{2} [\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*) + \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_1^*) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}_2^*)] d\theta} \\ &= \frac{\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)}{\int_{\Theta} \frac{1}{2} [\underline{\pi}_\delta(\theta) \cdot \underline{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*) + \bar{\pi}_\delta(\theta) \cdot \bar{l}_\delta(\theta; \underline{x}^*)] d\theta} = \underline{\pi}_\delta(\theta | \underline{x}^*) \end{aligned}$$

Beispiel 4.5: Für $X \sim E_{X_\theta}$; $\theta \in \Theta = (0; \infty)$, also für die Exponentialverteilung mit Dichte

$$f(x | \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} I_{(0; \infty)}(x)$$

ist eine unscharfe A-priori-Dichte $\pi^*(\cdot)$ auf Θ gegeben, für welche ein paar δ -Niveaufunktionen in Abbildung 4.1 dargestellt sind. In dieser Abbildung sind $\underline{\pi}_{0+}$ und $\bar{\pi}_{0+}$ die Randpunkte von $\{x \in \mathbb{R} : \xi_{\pi^*(\theta)} > 0\}$. $\xi_{\pi^*(\theta)}$ ist die charakterisierende Funktion des unscharfen Intervalls $\pi^*(\theta)$.

Abbildung 4.1: Ein paar δ -Niveaufunktionen von $\pi^*(\cdot)$

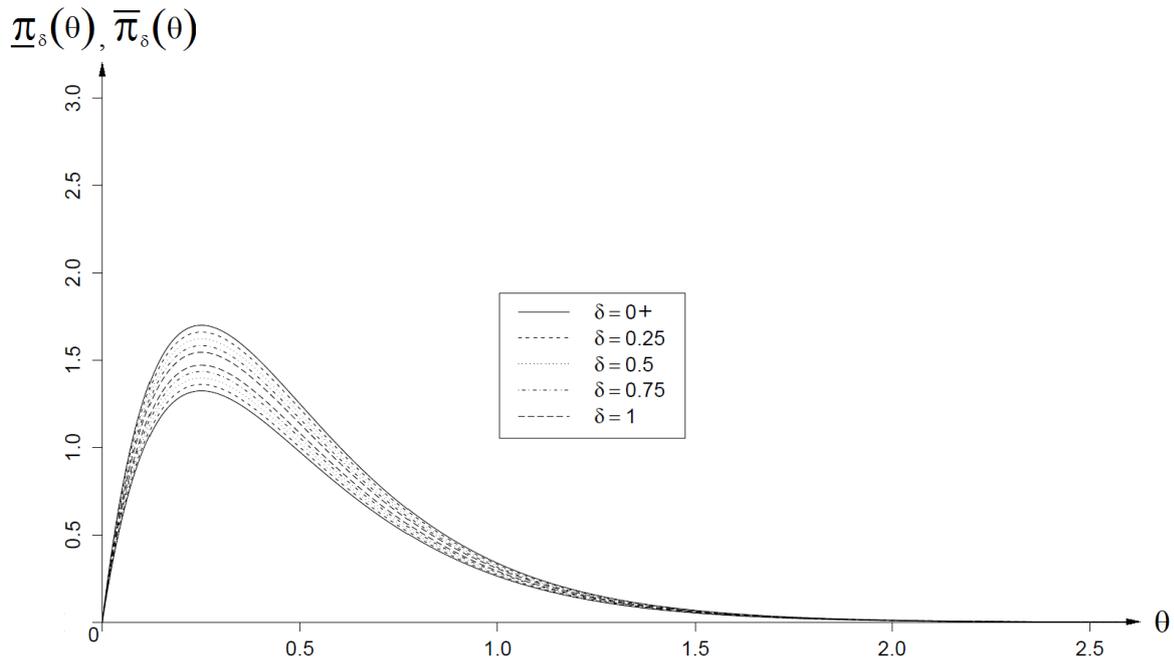
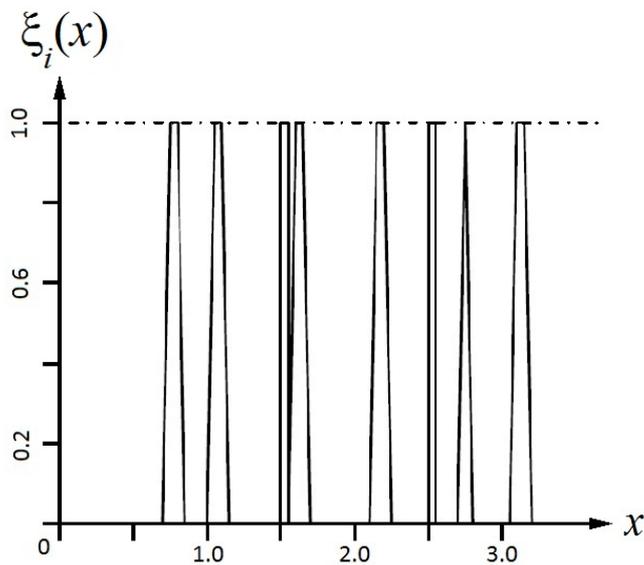


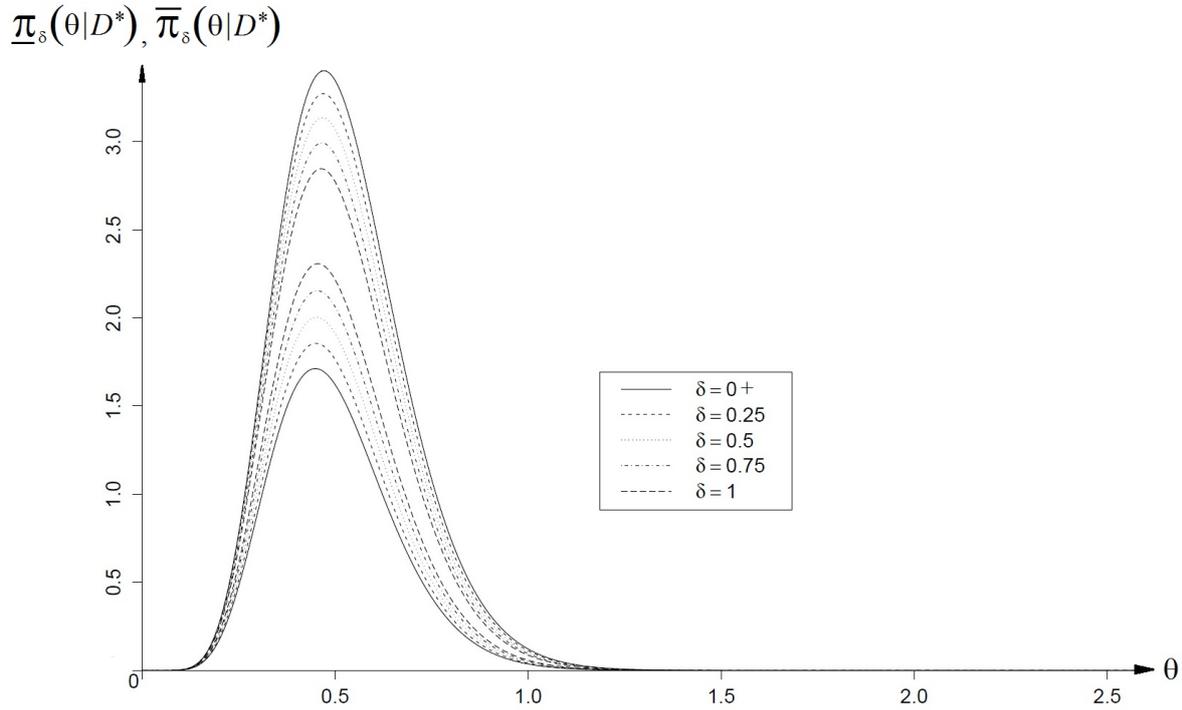
Abbildung 4.2: Unschärfe Stichprobe



In Abbildung 4.2 sind die charakterisierenden Funktionen von acht unscharfen Beobachtungen x_1^*, \dots, x_8^* von X gegeben.

Wendet man das verallgemeinerte Bayes'sche Theorem an, erhält man die δ -Niveaufunktionen der A-posteriori-Dichte $\pi^*(\cdot | x_1^*, \dots, x_8^*)$. Für dieses Beispiel sind ein paar δ -Niveaufunktionen $\underline{\pi}_\delta(\cdot | x_1^*, \dots, x_8^*)$ und $\overline{\pi}_\delta(\cdot | x_1^*, \dots, x_8^*)$ in Abbildung 4.3 dargestellt.

Abbildung 4.3: Unscharfe A-posteriori-Dichte



4.3 Unscharfe Zeitreihen

Zeitreihen sind zeitabhängige Daten. Hier beschäftigen wir uns mit der deskriptiven Methode der Zeitreihenanalyse, die ohne stochastische Modelle funktioniert. Ziel dieser Methoden ist, sowohl die Trendkomponente als auch die Saisonalkomponente einer Zeitreihe ausfindig zu machen.

Eine unscharfe Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ ist eine geordnete Folge von unscharfen Zahlen, wobei $T = \{1, 2, \dots, n\}$ gilt. Formal gesehen handelt es sich bei einer eindimensionalen unscharfen Zeitreihe um eine Zuordnung $T \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, die zu einem beliebigen Zeitpunkt eine unscharfe Zahl ausgibt. Die klassischen Zeitreihen sind spezielle Formen der unscharfen Zeitreihen.

4.3.1 Gleitende Mittelwerte

Zunächst möchte man zufällige Schwankungen einer unscharfen Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ eliminieren, um deren Langzeitverhalten analysieren zu können. Eine der Möglichkeiten ist die lokale Approximation, wie zum Beispiel die Glättung der Elemente einer Zeitreihe durch deren lokalen Mittelwert.

Man entnimmt diese Glättung aus der Definition der gleitenden Mittelwerte einer klassischen Zeitreihe $(x_t)_{t \in T}$

$$y_t = \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q x_{t+i}, \quad t = q+1, \dots, N-q,$$

und indem man im Falle von unscharfen Werten x_t^* das Erweiterungsprinzip 3.3 anwendet. Als erstes kombiniert man die unscharfen Zahlen $x_{t-q}^*, \dots, x_{t+q}^*$ zu einem unscharfen Vektor $\underline{x}^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2q+1})$ mit der vektorcharakterisierenden Funktion $\xi_{\underline{x}^*}(\cdot, \dots, \cdot)$. Von diesen Ergebnissen kann man die unscharfe Zahl y_t^* und deren charakterisierende Funktion $\xi_{y_t^*}(\cdot)$ beschreiben, bei der für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\xi_{y_t^*}(y) = \sup \left\{ \xi_{\underline{x}^*}(x_{-q}, \dots, x_q) : (x_{-q}, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{2q+1} : \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q x_i = y \right\} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Mit Satz 3.5 sind die δ -Schnitte $C_\delta[y_t^*]$ gegeben durch

$$C_\delta[y_t^*] = \left[\min_{(x_{-q}, \dots, x_q) \in C_\delta[\underline{x}^*]} \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q x_i; \max_{(x_{-q}, \dots, x_q) \in C_\delta[\underline{x}^*]} \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q x_i \right].$$

Somit kann das Resultat folgendermaßen gekürzt werden:

$$y_t^* = \frac{1}{2q+1} \cdot \bigoplus_{i=-q}^q x_{t+i}^*, \quad t = q+1, \dots, N-q$$

Wenn die unscharfen Beobachtungen $(x_t^*)_{t \in T}$ annäherungsweise lineares Verhalten aufweisen ($x_t^* \approx a^* \oplus t \cdot b^*$ mit den δ -Schnitten $C_\delta[a^*] = [\underline{a}_\delta; \bar{a}_\delta]$ und $C_\delta[b^*] = [\underline{b}_\delta; \bar{b}_\delta]$), können die δ -Schnitte $C_\delta[x_t^*]$ (mit zufälligen Variablen $\underline{\varepsilon}_{t,\delta}$ und $\bar{\varepsilon}_{t,\delta}$) folgendermaßen beschrieben werden:

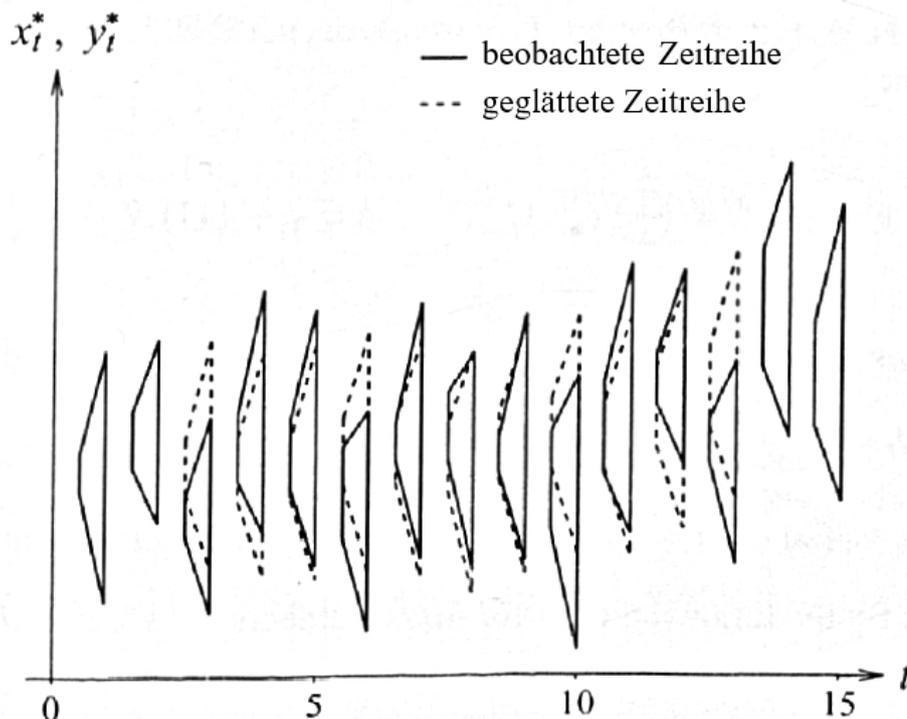
$$x_t^* = [\underline{a}_\delta + \underline{b}_\delta t + \underline{\varepsilon}_{t,\delta}; \bar{a}_\delta + \bar{b}_\delta t + \bar{\varepsilon}_{t,\delta}]$$

Die zufälligen Variablen $(\underline{\varepsilon}_{t,\delta})_{t \in T}$ und $(\bar{\varepsilon}_{t,\delta})_{t \in T}$ werden als unabhängig von der Zeit angenommen, die $\mathbb{E} \underline{\varepsilon}_{t,\delta} = 0$ und $\mathbb{E} \bar{\varepsilon}_{t,\delta} = 0$ erfüllen und deren Varianzen $\text{Var} \underline{\varepsilon}_{t,\delta}$ und $\text{Var} \bar{\varepsilon}_{t,\delta}$ endlich sind. Für ein bestimmtes $t \in T$ sind die zufälligen Variablen $\underline{\varepsilon}_{t,\delta}$ und $\bar{\varepsilon}_{t,\delta}$ abhängig. Wir erhalten für den δ -Schnitt $C_\delta[y_t^*]$ des unscharfen Mittelwertes y_t^*

$$\begin{aligned} C_\delta[y_t^*] &= \left[\min_{(x_{-q}, \dots, x_q) \in C_\delta[\underline{x}^*]} \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q x_i; \max_{(x_{-q}, \dots, x_q) \in C_\delta[\underline{x}^*]} \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q x_i \right] \\ &= \left[\frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q (\underline{a}_\delta + \underline{b}_\delta(t+i) + \underline{\varepsilon}_{t+i,\delta}); \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q (\bar{a}_\delta + \bar{b}_\delta(t+i) + \bar{\varepsilon}_{t+i,\delta}) \right] \\ &= \left[\underline{a}_\delta + \underline{b}_\delta t + \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q \underline{\varepsilon}_{t+i,\delta}; \bar{a}_\delta + \bar{b}_\delta t + \frac{1}{2q+1} \sum_{i=-q}^q \bar{\varepsilon}_{t+i,\delta} \right] \\ &\approx [\underline{a}_\delta + \underline{b}_\delta t + \mathbb{E} \underline{\varepsilon}_{t,\delta}; \bar{a}_\delta + \bar{b}_\delta t + \mathbb{E} \bar{\varepsilon}_{t,\delta}] = [\underline{a}_\delta + \underline{b}_\delta t; \bar{a}_\delta + \bar{b}_\delta t]. \end{aligned}$$

Beispiel 4.6: Die Abbildung 4.4 zeigt eine unscharfe Zeitreihe mit gleitenden Mittelwerten der Länge 2. Hier ist $T = \{1, 2, \dots, 15\}$. Die durchgehend linierten Trapeze sind die Daten $(x_t^*)_{t=1, \dots, 15} = (t^*(m_t, s_t, l_t, r_t))_{t=1, \dots, 15}$. Der Träger der einzelnen Messungen ist an der Basis der Trapeze erkennbar. Die Werte der geglätteten Zeitreihe $(y_t^*)_{t=3, \dots, 13}$ sind durch strichlierte Linien dargestellt.

Abbildung 4.4: Gleitende Mittelwerte der Länge 2



4.3.2 Filterung

Wenn man die Werte einer Zeitreihe transformieren möchte, wendet man Filterung (oder auch genannt Filtern) von Zeitreihen an. Es wird zwischen der linearen und der nichtlinearen Filterung unterschieden. Der gleitende Durchschnitt ist ein Beispiel von linearen Transformationen von einer unscharfen Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ zu einer glatten Zeitreihe $(y_t^*)_{t \in \tilde{T}}$ ($\tilde{T} = q+1, \dots, N-s$, wie man in der nächsten Definition sieht). Eine übliche Methode in der klassischen Zeitreihenanalyse wird für unscharfe Zeitreihen adaptiert. Diese ist durch folgende Definition gegeben,

Definition 4.7: Eine Transformation $L = (a_{-q}, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^{s+q+1}$ einer unscharfen Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ zu einer Zeitreihe $(y_t^*)_{t=q+1, \dots, N-s}$ durch

$$y_t^* = Lx_t^* = \bigoplus_{i=-q}^s a_i \cdot x_{t+i}^*, \quad t = q+1, \dots, N-s,$$

wird linearer Filter genannt.

- Ein linearer Filter mit $\sum_{i=-q}^s a_i = 1$ wird auch *gleitender Durchschnitt* genannt.
- Bei $s = q$ und $a_i = \frac{1}{2q+1}$, $i = -q, \dots, q$ handelt es sich um einen *einfachen gleitenden Durchschnitt*.

Bemerkung 4.8: Für unscharfe Zahlen $x^*, y^*, z^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ und reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gilt nach den Regeln

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x^* \oplus \gamma \cdot y^*) = (\alpha\beta) \cdot x^* \oplus (\alpha\gamma) \cdot y^*$$

und

$$(\alpha \cdot x^* \oplus \beta \cdot y^*) \oplus \gamma \cdot z^* = \alpha \cdot x^* \oplus (\beta \cdot y^* \oplus \gamma \cdot z^*)$$

für zwei unscharfe Zeitreihen $(x_t^*)_{t \in T}$ und $(y_t^*)_{t \in T}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ folgendes:

$$\begin{aligned} L(\alpha \cdot x_t^* \oplus \beta \cdot y_t^*) &= \bigoplus_{i=-q}^s a_i \cdot (\alpha \cdot x_{t+i}^* \oplus \beta \cdot y_{t+i}^*) = \bigoplus_{i=-q}^s ((a_i\alpha) \cdot x_{t+i}^* \oplus (a_i\beta) \cdot y_{t+i}^*) \\ &= \left(\bigoplus_{i=-q}^s (a_i\alpha) \cdot x_{t+i}^* \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=-q}^s (a_i\beta) \cdot y_{t+i}^* \right) = \alpha \cdot Lx_t^* \oplus \beta \cdot Ly_t^* \end{aligned}$$

Proposition 4.9: Die δ -Schnitte $C_\delta[y_t^*]$ der geglätteten Zeitreihe $y_t^* = Lx_t^*$ können mit den δ -Schnitten $C_\delta[x_t^*] = [\underline{x}_{t,\delta}; \bar{x}_{t,\delta}]$ der beobachteten Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ beschrieben werden durch

$$C_\delta[y_t^*] = C_\delta \left(\bigoplus_{i=-q}^s a_i \cdot x_{t+i}^* \right) = \left[\sum_{i=-1}^s a_i \underline{c}_{t+i}; \sum_{i=-1}^s a_i \bar{c}_{t+i} \right]$$

mit

$$\underline{c}_{t+i} = \left\{ \begin{array}{ll} \underline{x}_{t+i,\delta} & \text{für } a_i \geq 0 \\ \bar{x}_{t+i,\delta} & \text{für } a_i < 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{x}_{t+i,\delta} & \text{für } a_i \geq 0 \\ \underline{x}_{t+i,\delta} & \text{für } a_i < 0 \end{array} \right\}.$$

Beweis: Wendet man Satz 3.5 auf die Funktion $f(x_{-q}, \dots, x_s) = \sum_{i=-q}^s a_i x_i$ an, dann erhält man mit

$$\min_{x \in C_\delta[x^*]} a x = \left\{ \begin{array}{ll} a \underline{x}_\delta & \text{für } a_i \geq 0 \\ a \bar{x}_\delta & \text{für } a_i < 0 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \max_{x \in C_\delta[x^*]} a x = \left\{ \begin{array}{ll} a \bar{x}_\delta & \text{für } a_i \geq 0 \\ a \underline{x}_\delta & \text{für } a_i < 0 \end{array} \right\}$$

das Resultat. □

Bemerkung 4.10: Wenn im gleitenden Mittelwert negative Koeffizienten verwendet werden, wird die Unschärfe der geglätteten Zeitreihe $(y_t^*)_{t=q+1, \dots, N-s}$ größer als die Unschärfe der beobachteten Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$. Zum Beispiel erhält man für die konstante Beobachtung $x_t^* = x^*$, $t = 1, \dots, N$, als geglätteten Zeitreihenwert y_t^* für $t = q-1, \dots, N-s$ nicht die originale konstante Zeitreihe. Für

$$y_t^* = \bigoplus_{i=-q}^s a_i \cdot x_{t+i}^* = \bigoplus_{i=-q}^s a_i \cdot x^* \quad \text{mit} \quad \sum_{i=-q}^s a_i = 1,$$

wobei $a_i > 0$ (für $i = -q, \dots, s-1$), $a_s < 0$ und $C_\delta[x_t^*] = [\underline{x}_{t,\delta}; \bar{x}_{t,\delta}] = [\underline{x}_\delta; \bar{x}_\delta]$ ($t = 1, \dots, N$) gilt, folgt aus Satz 4.9 für die obere Grenze $\bar{y}_{t,\delta}$ des δ -Schnittes $C_\delta[y_t^*] = [\underline{y}_{t,\delta}; \bar{y}_{t,\delta}]$

$$\bar{y}_{t,\delta} = \sum_{i=-q}^{s-1} a_i \bar{x}_\delta + a_s \underline{x}_\delta \geq \left(\sum_{i=-q}^{s-1} a_i \right) \bar{x}_\delta + a_s \bar{x}_\delta = \bar{x}_\delta.$$

Die Unschärfe der Werte $(y_t^*)_{t=q+1, \dots, N-s}$ ist für $\underline{x}_\delta < \bar{x}_\delta$ größer als die der ursprünglichen Werte $(x_t^*)_{t \in T}$. Aus demselben Grund sind Filter mit unscharfen Koeffizienten a_i^* nicht sinnvoll.

Bei der Konstruktion von Filtern tritt folgende interessante Frage auf: Gibt es einen nichttrivialen linearen Filter $L = (a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 1, 0, 0)$, der für alle Beobachtungen x_t^* von quadratischer Form $x_t^* = b_1^* \oplus b_2^* \cdot t \oplus b_3^* \cdot t^2$ ($t \in T$), mit b_1^*, b_2^* und $b_3^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, als geglättete Zeitreihe $y_t^* = Lx_t^*$ die originale Zeitreihe liefert?

Für reelle Beobachtungen $(x_t)_{t \in T}$ erfüllt dies der Filter $L = (a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) = 35^{-1}(-3, 12, 37, 12, -3)$, siehe Schlittgen und Streitberg (Seite 36) [14] oder Janacek (Seite 13) [7]. Für unscharfe Daten kann ein Filter mit den gewünschten Eigenschaften nur positive Koeffizienten haben. In diesem Fall ist die Konstruktion eines solchen Filters allerdings nicht möglich. Am besten sieht man das ein für den Spezialfall einer reellen Zeitreihe $x_t = b_1 + b_2 \cdot t + b_3 \cdot t^2$. Die Bedingung lautet dann

$$\sum_{i=-2}^2 a_i (b_1 + b_2 \cdot (t+i) + b_3 \cdot (t+i)^2) = b_1 + b_2 \cdot t + b_3 \cdot t^2 \quad \text{für } t = 2, \dots, N-2.$$

Wenn man aus dieser Bedingung die Koeffizienten a_i auf beiden Seiten für $t = 2$ mit den b_j ($j = 1, 2, 3$) vergleicht, erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{-2} + a_{-1} + a_0 + a_1 + a_2 &= 1 \\ a_{-1} + 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 &= 2 \\ a_{-1} + 4a_0 + 9a_1 + 16a_2 &= 4 \end{aligned}$$

Wenn man nun die erste Gleichung verdoppelt, diese von der zweiten Gleichung dreimal abzieht und diese dann mit der dritten Gleichung addiert, dann erhält man

$2a_{-2} + 2a_1 + 6a_2 = 0$. Mit $a_i \geq 0$ ($i = -2, \dots, 2$) folgt daraus $a_{-2} = a_1 = a_2 = 0$. Zieht man nun mit diesen Werten die erste Gleichung von der zweiten ab, dann haben wir $a_{-1} = 0$ und $a_0 = 1$, d.h. die Gleichungen können nur für den trivialen Filter erfüllt

werden. Mit ähnlichen Überlegungen gilt, dass für polynomiale Zeitreihen $(x_t^*)_{t \in T}$ mit $x_t^* = b_1^* \oplus b_2^* \cdot t \oplus \dots \oplus b_n^* \cdot t^n$ ($n \geq 2$) und $b_i^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, ($i = 1, \dots, n$) im Allgemeinen kein nichttrivialer linearer Filter mit positiven Koeffizienten existiert, sodass die geglättete Zeitreihe mit der ursprünglichen übereinstimmt.

Bemerkung 4.11: Im Gegensatz zu reellen Zeitreihen gibt es für unscharfe Regressionsmodelle

$$\min_{b_1^*, b_2^*, b_3^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})} \sum_{t=1}^5 \rho_2^2(x_t^*, b_1^* \oplus b_2^* \cdot t \oplus b_3^* \cdot t^2)$$

mit der Metrik $\rho_2^2(\cdot, \cdot)$ nach Definition 4.15, mit Koeffizienten b_1^* , b_2^* und b_3^* für die Anpassung eines polynomialen Trends an die ersten 5 Beobachtungen keine lineare Berechnung aus den Werten $(x_t^*)_{t=1, \dots, 5}$, d.h. es gibt keine Koeffizienten $\lambda_{i,t} \in \mathbb{R}$ mit

$$b_i^* = \bigoplus_{t=1}^5 \lambda_{i,t} \cdot x_t^*, \quad i = 1, 2, 3.$$

Im reellen Fall liefert der quadratische Ansatz den oben erwähnten Filter

$$L = (a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) = 35^{-1}(-3, 12, 17, 12, -3).$$

Die Nichtexistenz linearer Schätzer in unscharfen Regressionsmodellen wird in Körner [10] (Seite 69) erklärt.

Wenn man gewöhnliche Zeitreihen verallgemeinern möchte, ohne dass dabei die Unschärfe durch das Glätten erhöht wird, benötigt man einen speziellen Filter, der die Lage und die Unschärfe separat filtert. Dazu benötigt man aber zuerst folgende Definitionen:

Definition 4.12: Sei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm, $S^{n-1} = \{\underline{u} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{u}\| = 1\}$ die Einheitskugel und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das innere Produkt in \mathbb{R}^n . Dann ist jede nichtleere kompakte und konvexe Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ charakterisiert durch deren Trägerfunktion

$$s_A(\underline{u}) := \sup\{\langle \underline{u}, a \rangle : a \in A\} \quad \forall \underline{u} \in S^{n-1}.$$

Die δ -Schnitte eines unscharfen Vektors $\underline{x}^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ sind kompakte und konvexe Teilmengen des \mathbb{R}^n . Damit ist \underline{x}^* charakterisiert durch

$$s_{\underline{x}^*}(\underline{u}, \delta) := \sup\{\langle \underline{u}, a \rangle : a \in C_\delta[\underline{x}^*]\} \quad \forall \underline{u} \in S^{n-1}, \forall \delta \in (0; 1].$$

$s_{\underline{x}^*}(\cdot, \cdot)$ nennt man die Trägerfunktion des unscharfen Vektors \underline{x}^* . Die Menge aller Trägerfunktionen von n -dimensionalen unscharfen Vektoren ist

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) := \{s_{\underline{x}^*} : \underline{x}^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)\}.$$

und

Definition 4.13: Der Steinerpunkt $\sigma_{\underline{x}^*} \in \mathbb{R}^n$ eines unscharfen Vektors \underline{x}^* ist folgendermaßen definiert:

$$\sigma_{\underline{x}^*} := n \int_0^1 \int_{S^{n-1}} \underline{u} s_{\underline{x}^*}(\underline{u}, \delta) \mu(d\underline{u}) d\delta$$

Der Steinerpunkt einer unscharfen Zahl kann als eine Art Mittelwert angesehen werden, der Auskunft über die Lage gibt. Die Beobachtung x_t^* kann beschrieben werden durch $x_{t,0}^* = x_t^* \ominus \sigma_{x_t^*}$, wobei $\sigma_{x_t^*}$ die Lage und $x_{t,0}^*$ die Unschärfe beschreibt.

Definition 4.14: Ein erweiterter linearer Filter $L_e = ((a_{-q}, b_{-q}), \dots, (a_s, b_s))$, mit $(a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$, $i = -q, \dots, s$, ist eine Transformation der unscharfen Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ zu einer unscharfen Reihe $(y_t^*)_{t=q+1, \dots, N-s}$ durch

$$y_t^* = L_e x_t^* = \left(\sum_{i=-q}^s a_i \sigma_{x_{t+i}^*} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=-q}^s b_i x_{t+i,0}^* \right), \quad t = q+1, \dots, N-s,$$

wobei $x_{t,0}^* = x_t^* \ominus \sigma_{x_t^*}$ die zentrierte unscharfe Beobachtung ist.

Es kann zudem eine andere Art von Filter beschrieben werden, wenn negative Zahlen als Subtraktionen der entsprechenden Beobachtungen angesehen werden. Die Basis hierfür ist die sogenannte *Hukuhara-Addition*. Dazu benötigt man zunächst gewisse Definitionen:

Definition 4.15: Eine nützliche Metrik kann auf $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ definiert werden auf Basis der Trägerfunktion Definition 4.12 und der Metriken auf den Funktionenräumen $L^p(S^{n-1} \times (0; 1])$, $p \in [1; \infty]$ (das ist der Raum aller p -fach integrierbaren Funktionen auf $S^{n-1} \times (0; 1]$.) Für $\underline{x}^*, \underline{y}^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ und $1 \leq p < \infty$ ist die Metrik $\rho_p(\cdot, \cdot)$ definiert durch

$$\rho_p(\underline{x}^*, \underline{y}^*) := \|\underline{s}_{\underline{x}^*} - \underline{s}_{\underline{y}^*}\|_p = \left(n \int_0^1 \int_{S^{n-1}} |s_{\underline{x}^*}(\underline{u}, \delta) - s_{\underline{y}^*}(\underline{u}, \delta)|^p \mu(d\underline{u}) d\delta \right)^{1/p},$$

wobei μ das Lebesgue-Maß auf S^{n-1} mit $\mu(S^{n-1}) = 1$ bezeichnet.

Definition 4.16: Für $\underline{x}^*, \underline{y}^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R}^n) := \{\underline{x}^* \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : \|\underline{x}^*\|_2 < \infty\}$ ist die sogenannte *Hukuhara-Differenz* $\underline{y}^* \ominus_H \underline{x}^*$, falls sie existiert, die Lösung $\underline{h}^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung $\underline{x}^* \oplus \underline{h}^* = \underline{y}^*$.

Für $\underline{x}^*, \underline{y}^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R}^n)$ ist die verallgemeinerte Hukuhara-Differenz \sim_H die l^2 -Approximation der Hukuhara-Differenz, also

$$\underline{y}^* \sim_H \underline{x}^* := \underline{h}^* \Leftrightarrow \rho_2(\underline{x}^* \oplus \underline{h}^*, \underline{y}^*) = \min_{\underline{z}^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R}^n)} \rho_2(\underline{x}^* \oplus \underline{z}^*, \underline{y}^*).$$

Die verallgemeinerte Hukuhara-Differenz \sim_H ist eine Erweiterung der Hukuhara-Differenz \ominus_H auf dem gesamten Raum $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, das heißt $\underline{y}^* \ominus_H \underline{x}^*$ existiert, wenn diese identisch zu $\underline{y}^* \sim_H \underline{x}^*$ ist.

Somit kann man nun die Hukuhara-Addition beschreiben:

Definition 4.17: Diese spezielle Addition der unscharfen Zahlen $x^*, y^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$x^* \oplus_H \alpha \cdot y^* = \begin{cases} x^* \oplus \alpha \cdot y^* & \text{für } \alpha \geq 0 \\ y^* \sim_H |\alpha| \cdot y^* & \text{für } \alpha < 0 \end{cases}.$$

Im Allgemeinen ist diese Addition nicht assoziativ, das heißt für $x^*, y^*, z^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ und reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt im Allgemeinen $(x^* \oplus_H \alpha \cdot y^*) \oplus_H \beta \cdot z^* \neq x^* \oplus_H (\alpha \cdot y^* \oplus_H \beta \cdot z^*)$.

Dies kann man an einem einfachen Beispiel unscharfer Intervalle x^*, y^* mit zugehörigen charakterisierenden Funktionen $\xi_{x^*}(x) = I_{[-3,3]}(x)$ und $\xi_{y^*}(x) = I_{[-1,1]}(x)$ sehen:

$$\underbrace{(x^* \oplus_H (-1) \cdot y^*)}_{=2 \cdot y^*} \oplus_H (-1) \cdot y^* = y^* \neq x^* \oplus_H \underbrace{((-1) \cdot y^* \oplus_H (-1) \cdot y^*)}_{=0} = x^*$$

Wie wird nun $\alpha \cdot x^* \oplus_H \beta \cdot y^*$ definiert? Die Hukuhara-Summenoperation \oplus_H wird folgendermaßen beschrieben: Für unscharfe Zahlen $x_i^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, N$, und reelle Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$, $a_i^+ = \max\{0, a_i\}$ und $a_i^- = \max\{0, -a_i\}$ ist

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^N a_i \cdot x_i^* &= a_1 \cdot x_1^* \oplus_H \dots \oplus_H a_N \cdot x_N^* \\ &:= \left\{ \begin{array}{ll} \left(\bigoplus_{i=1}^N a_i^+ \cdot x_i^* \right) \sim_H \left(\bigoplus_{i=1}^N a_i^- \cdot x_i^* \right) & \text{für } \sum_{i=1}^N a_i^+ \geq \sum_{i=1}^N a_i^- \\ (-1) \cdot \left[\left(\bigoplus_{i=1}^N a_i^- \cdot x_i^* \right) \sim_H \left(\bigoplus_{i=1}^N a_i^+ \cdot x_i^* \right) \right] & \text{für } \sum_{i=1}^N a_i^+ < \sum_{i=1}^N a_i^- \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Zuerst werden die Summen aller unscharfen Zahlen mit positiven und entsprechend mit negativen Koeffizienten separat berechnet. Anschließend wird die Hukuhara-Differenz beider Summen berechnet, wobei die Differenz von der Summe der positiven und negativen Koeffizienten abhängt.

Definition 4.18: Eine Transformation $L_H = (a_{-q}, \dots, a_s) \in \mathbb{R}^{s+q+1}$ von einer Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ zu einer Zeitreihe $(y_t^*)_{t=q+1, \dots, N-s}$ durch

$$y_t^* = L_H x_t^* = \bigoplus_{i=-q}^s a_i \cdot x_{t+i}^*, \quad t = q+1, \dots, N-s,$$

wird ein allgemeiner Filter genannt.

Lemma 4.19: Ein allgemeiner Filter ist nicht linear, also gilt

$$L_H(\alpha \cdot x_t^* \oplus \beta \cdot y_t^*) \neq \alpha \cdot L_H x_t^* \oplus \beta \cdot L_H y_t^*.$$

Beweis: Für unscharfe Zahlen $x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ und positive, reelle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ haben wir im Allgemeinen

$$(\alpha \cdot x_1^* \oplus \alpha \cdot y_1^*) \sim_H (\beta \cdot x_2^* \oplus \beta \cdot y_2^*) \neq (\alpha \cdot x_1^* \sim_H \beta \cdot x_2^*) \oplus (\alpha \cdot y_1^* \sim_H \beta \cdot y_2^*).$$

Dies kann man an einem einfachen Gegenbeispiel mit unscharfen Intervallen sehen, mit charakterisierenden Funktionen $\xi_{x_1^*}(x) = I_{[0;1]}(x)$, $\xi_{x_2^*}(x) = I_{[0;3]}(x)$, $\xi_{y_1^*}(x) = I_{[0;2]}(x)$ und $\xi_{y_2^*}(x) = I_{[0;3]}(x)$. Für diese Zahlen haben wir $(2 \cdot x_1^* \oplus 2 \cdot y_1^*) \sim_H (x_2^* \oplus y_2^*) = 0 \neq (2 \cdot x_1^* \sim_H x_2^*) \oplus (2 \cdot y_1^* \sim_H y_2^*) \hat{=} I_{[-0.5;0.5]}(\cdot)$. Diese Berechnung korrespondiert zum allgemeinen Filter $L_H = (a_0, a_1) = (2, -1)$, den man auf $(x_t^* \oplus y_t^*)$ mit $\alpha = \beta = 1$ anwendet. Daraus erhält man dann das Ergebnis. \square

Für allgemeine Filter ist es möglich, polynomiale Verläufe bei der Filterung zu erhalten. Die Koeffizienten dieser allgemeinen Filter stimmen mit den entsprechenden Koeffizienten

der in reeller Zeitreihenanalyse berechneten Filter überein. Für den quadratischen Verlauf wird diese Eigenschaft im nachfolgenden Beispiel gezeigt, der Beweis für allgemeine polynomiale Verläufe ist analog. Davor benötigen wir aber noch einen Satz:

Satz 4.20: Sei $(H, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum, $x \in H$ und $K \neq \emptyset$ eine geschlossene, konvexe Teilmenge von H . Dann gibt es genau ein Element $y \in K$, welches folgendes erfüllt:

$$\|x - y\| = \inf_{z \in K} \|x - z\|$$

Beweis: Gegeben in Büchern der Funktionalanalysis, siehe z.B. H. Woracek, M. Kaltenbäck und M. Blümlinger [26], S. 48. \square

Beispiel 4.21: Wie bereits in Bemerkung 4.10 erwähnt, bleibt im Falle einer rellen Zeitreihe für den Filter $L = (a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) = 35^{-1}(-3, 12, 17, 12, -3)$ ein quadratischer Verlauf unverändert. Ein allgemeiner Filter L_H mit Koeffizienten, die in klassischer Weise berechnet wurden, d.h. $L_H = L$, lässt unscharfe Beobachtungen mit quadratischem Verlauf unverändert. Dies sieht man für eine Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ mit $x_t^* = b_1^* \oplus b_2^* \cdot t \oplus b_3^* \cdot t^2$ ($t \in T$) und $b_1^*, b_2^*, b_3^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} y_t^* &= L_H x_t^* = \bigoplus_{i=-2}^2 a_i \cdot x_{t+i}^* \\ &= \left(\frac{12}{35} \cdot x_{t-1}^* \oplus \frac{17}{35} \cdot x_t^* \oplus \frac{12}{35} \cdot x_{t+1}^* \right) \sim_H \left(\frac{3}{35} \cdot x_{t-2}^* \oplus \frac{3}{35} \cdot x_{t+2}^* \right) \\ &= \left(\frac{41}{35} \cdot b_1^* \oplus \frac{41 \cdot t}{35} \cdot b_2^* \oplus \frac{41 \cdot t^2 + 24}{35} \cdot b_3^* \right) \sim_H \left(\frac{6}{35} \cdot b_1^* \oplus \frac{6 \cdot t}{35} \cdot b_2^* \oplus \frac{6 \cdot t^2 + 24}{35} \cdot b_3^* \right) \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} &\left(\frac{6}{35} \cdot b_1^* \oplus \frac{6 \cdot t}{35} \cdot b_2^* \oplus \frac{6 \cdot t^2 + 24}{35} \cdot b_3^* \right) \oplus (b_1^* \oplus b_2^* \cdot t \oplus b_3^* \cdot t^2) \\ &= \frac{41}{35} \cdot b_1^* \oplus \frac{41 \cdot t}{35} \cdot b_2^* \oplus \frac{41 \cdot t^2 + 24}{35} \cdot b_3^* \end{aligned}$$

haben wir $y_t^* = b_1^* \oplus b_2^* \cdot t \oplus b_3^* \cdot t^2$, und nach Satz 4.20 ist diese Gleichung eindeutig bestimmt. Die geglättete Zeitreihe hat somit wieder einen quadratischen Verlauf.

4.3.3 Exponentielle Glättung

Wenn man die Möglichkeit erwägen möchte, zu einer Zeitreihe zusätzliche Beobachtungen hinzuzufügen, eignen sich dafür die rekursiv definierten Filter der exponentiellen Glättung. Mit der Minimum-t-Norm T_{\min} ist es möglich, den Mittelwert \bar{x}_N^* der Beobachtungen $(x_t^*)_{t \in T}$ rekursiv zu bestimmen. Ist der Mittelwert \bar{x}_N^* gegeben und eine weitere

Beobachtung x_{N+1}^* wird aufgezeichnet, dann kann man den Mittelwert \bar{x}_{N+1}^* bestimmen durch

$$\bar{x}_{N+1}^* = \frac{1}{N+1} \cdot \bigoplus_{t=1}^{N+1} x_t^* = \frac{N}{N+1} \cdot \bar{x}_N^* \oplus \left(1 - \frac{N}{N+1}\right) \cdot x_{N+1}^*.$$

Wenn $\frac{N}{N+1}$ durch ein verallgemeinertes Gewicht β mit $0 < \beta < 1$ ersetzt wird, erhält man so einen *Filter der einfachen exponentiellen Glättung*. In der exponentiellen Glättung berechnet man die Werte y_t^* , $t = 2, \dots, N$ der transformierten Reihe $(y_t^*)_{t \in T}$ der unscharfen Daten $(x_t^*)_{t \in T}$ wie oben rekursiv von x_t^* und des geglätteten Wertes y_{t-1}^* durch

$$y_t^* = \beta \cdot y_{t-1}^* \oplus (1 - \beta) \cdot x_t^* = (1 - \beta) \cdot \bigoplus_{i=0}^{t-2} \beta^i \cdot x_{t-i}^* \oplus \beta^{t-1} \cdot x_1^*, \quad t = 2, \dots, N,$$

wobei $y_1^* = x_1^*$. Der Glättungsparameter β kontrolliert das Glättungsverhalten. Ein kleineres β hat einen größeren Einfluss, während β nahe 1 eine glattere transformierte Reihe $(y_t^*)_{t \in T}$ ergibt.

Ähnlich wie in klassischen Zeitreihen kann ein idealer Glättungsparameter mit einer Ein-Schritt-Prognose $\hat{x}_{N,1}^*(\beta)$ bestimmt werden. Diese Ein-Schritt-Prognose für x_{N+1}^* (basierend auf den beobachteten Werten x_1^*, \dots, x_N^* und dem Parameter β) erhält man (analog wie im klassischen Fall) von der vorhergehenden Schätzung $\hat{x}_{N-1,1}^*$ und der letzten Beobachtung x_N^* durch

$$\hat{x}_{N,1}^*(\beta) = \beta \cdot \hat{x}_{N-1,1}^*(\beta) \oplus (1 - \beta) \cdot x_N^* = (1 - \beta) \cdot \bigoplus_{i=0}^{N-2} \beta^i \cdot x_{N-i}^* \oplus \beta^{N-1} \cdot \hat{x}_{1,1}^*(\beta),$$

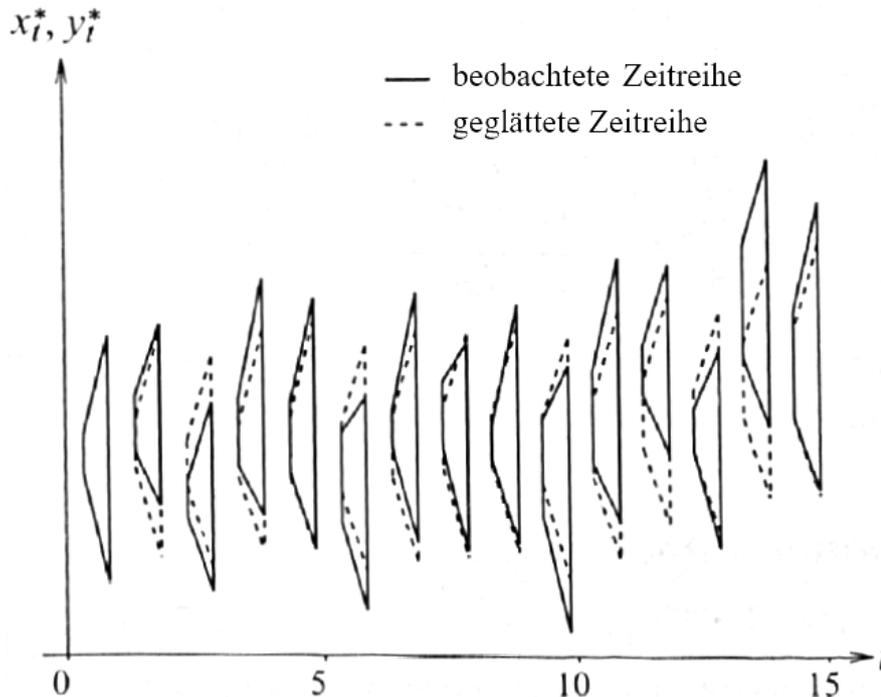
wobei man in praktischen Anwendungen folgendes annimmt: $\hat{x}_{1,1}^*(\beta) = x_1^*$

Derjenige Wert $\hat{\beta}$ von den geeigneten Glättungsparametern β wird genommen, der den mittleren quadratischen Fehler zwischen den Prognosen und den Beobachtungen minimiert:

$$\sum_{t=1}^{N-1} \rho_2^2(\hat{x}_{t,1}^*(\hat{\beta}), x_{t+1}^*) = \min_{\beta} \sum_{t=1}^{N-1} \rho_2^2(\hat{x}_{t,1}^*(\beta), x_{t+1}^*)$$

Beispiel 4.22: In Abbildung 4.5 wird die exponentielle Glättung auf die Daten vom Beispiel 4.6 dargestellt, wobei die Methode wie oben beschrieben mit $\hat{\beta}$ verwendet wurde.

Abbildung 4.5: Exponentielle Glättung mit optimalem Glättungsparameter



4.3.4 Komponentenmodell

Für die Definition des Komponentenmodells nimmt man an, dass alle Werte der Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ charakterisierende Funktionen haben mit kompakten Trägern. Da dies in praktischen Anwendungen gewöhnlich gilt, ist dies keine Einschränkung.

In der klassischen beschreibenden Zeitreihenanalyse nimmt man an, dass die beobachteten Daten durch folgendes Modell erzeugt werden:

$$x_t = m_t + s_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, N$$

- Die Komponente m_t ist die *Trendkomponente*, welche das Langzeitverhalten der Zeitreihe beschreibt.
- Die Komponente s_t ist die *Saisonkomponente*, welche das zyklische Verhalten mit mehr oder weniger konstanter Zeitperiode beschreibt.
- Die Komponente ε_t , der sogenannte *Fehlerterm*, modelliert stochastische Einflüsse.

Die Zeitperiode der Saisonkomponente wird mit p bezeichnet. Für ein *stabiles Saisonverhalten* nimmt man an, dass $s_t = s_{t+kp}$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Im Falle von unscharfen Zahlen $(x_t^*)_{t \in T}$ sind die Komponenten im Komponentenmodell auch unscharf. Es gilt folgende Form:

$$x_t^* \approx m_t^* \oplus s_t^*, \quad t = 1, \dots, N$$

Hier nimmt man für die Saisonkomponente auch an, dass $s_t^* = s_{t+kp}^*$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Im Gegensatz zur klassischen Zeitreihenanalyse kann man die unscharfe Zahl x_t^* nicht exakt

in Trendkomponente, Saisonkomponente und Fehlerterm aufteilen. Der Grund dafür ist die Semilinearität in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Aus diesem Grund kann man für gewisse Zeiten t keine unscharfe Zahl ε_t^* finden, sodass $x_t^* = m_t^* \oplus s_t^* \oplus \varepsilon_t^*$ für gegebene unscharfe Zahlen m_t^* und s_t^* gilt. Dies folgt für t mit $\text{Tr}[x_t^*] \subseteq \text{Tr}[m_t^* \oplus s_t^*]$. Deswegen ist das obrige Modell auch approximativ.

Es ist nicht geeignet, für die Bestimmung der Trendkomponente und Saisonkomponente das Erweiterungsprinzip anzuwenden, denn keine wirkliche Aufteilung kann, wie man oben gesehen hat, gemacht werden. Außerdem hat die Summe $m_t^* \oplus s_t^*$ eine zu große Unschärfe, demnach sind alternative Lösungen notwendig.

In einem **Modell ohne Saisonkomponente** (also $s_t^* \equiv 0, t \in T$) ist die Bestimmung von m_t^* (ähnlich wie in der klassischen Situation) ein unscharfes Regressionsproblem für die Werte $(x_t^*)_{t \in T}$. Die Bestimmung $\hat{x}_{N_f}^*$ für $x_{N_f}^*$ zur Zeit $N_f > N$ ist gegeben durch $\hat{x}_{N_f}^* = \hat{m}_{N_f}^*$, also der Wert des Regressionstrends.

In einem **Modell mit Saisonkomponente** ist die Berechnung für m_t^* und s_t^* wegen der Semilinearität in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ viel komplizierter als im klassischen Fall. Normalerweise verwendet man gleitende Mittelwerte über eine Periode, um saisonale Effekte zu entfernen. Anschließend bestimmt man die Saisonkomponente zu einer Zeit t mithilfe der Differenz zwischen dem beobachteten Wert x_t und dem gleitenden Mittelwert.

Diese Methode ist im unscharfen Fall nicht geeignet. Erstens steigt die Unschärfe der einzelnen Zahlen mit der Summe. Zweitens ist die Bestimmung der Hukuhara-Differenz zwischen dem beobachteten Wert x_t^* und dem gleitenden Mittelwert problematisch, weil zu manchen Zeitpunkten die Unschärfe der Beobachtung kleiner als die Unschärfe des Mittelwertes ist. Mit der Hukuhara-Differenz würde eine präzise Zahl als Schätzung herauskommen.

Es gibt eine Methode [6], um die Bestimmung der unscharfen Komponenten auf die Methoden der klassischen Zeitreihen zu reduzieren: Man kann den saisonalen Einfluss auf die Unschärfe der Beobachtungen $(x_t^*)_{t \in T}$ an der Länge der δ -Schnitte $C_\delta[x_t^*] = [\underline{x}_{t,\delta}, \bar{x}_{t,\delta}]$ erkennen. Die Länge der δ -Schnitte

$$l_{t,\delta} = l_{C_\delta[x_t^*]} = \bar{x}_{t,\delta} - \underline{x}_{t,\delta} = \tilde{m}_{t,\delta} + \tilde{s}_{t,\delta} + \tilde{\varepsilon}_{t,\delta} \in \mathbb{R}_0^+$$

der Elemente $(x_t^*)_{t \in T}$ für jedes $\delta \in (0; 1]$ kann man als eine gewöhnliche Zeitreihe $(l_{t,\delta})_{t \in T}$ mit Saisonkomponente betrachten. Die Bedingungen zur Trendkomponente $\tilde{m}_{t,\delta}$ und zur Saisonkomponente $\tilde{s}_{t,\delta}$ sind $\tilde{m}_{t,\delta} \geq 0$ und $\tilde{s}_{t,\delta} \geq 0$. Diese sind erfüllt, da ja $(l_{t,\delta})_{t \in T} \geq 0$ gilt. Um zudem die Eindeutigkeit der Komponenten $\tilde{m}_{t,\delta}$ und $\tilde{s}_{t,\delta}$ zu zeigen, können verschiedene Bedingungen verwendet werden. Im Folgenden wird die Bedingung

$$\min_{t=1,\dots,N} \tilde{m}_{t,\delta} = 0$$

verwendet. Damit wird die Unschärfe der Beobachtungen der Saisonkomponente zugeschrieben. Andere Möglichkeiten sind $\min_{t=1,\dots,N} \tilde{s}_{t,\delta} = 0$ oder eine Mischung von ähnlichen Bedingungen.

Die Quantitäten $\tilde{m}_{t,\delta}$ und $\tilde{s}_{t,\delta}$ werden durch die Unschärfe der individuellen Beobachtungen beeinflusst, nicht durch ihre Lage. Damit können diese herangezogen werden zur Schätzung der Unschärfe der Trendkomponente und Saisonkomponente. Wie im erweiterten linearen Filter (Def. 4.14) nimmt man den Steinerpunkt σ_{x^*} für die Information der Lage. $x_0^* = x^* \ominus \sigma_{x^*}$ kann man für die Information der Unschärfe von x^* nehmen.

Zur Bestimmung der Trendkomponente und Saisonkomponente müssen zuerst für alle Werte der unscharfen Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ die Steinerpunkte $\sigma_{x_t^*}$ berechnet werden, bei denen es sich um reelle Zahlen handelt. Damit kann man von der klassischen Zeitreihe $(\sigma_{x_t^*})_{t \in T}$ mit den Methoden der reellen Zeitreihen m_t und s_t der Trendkomponente und Saisonkomponente berechnen. Die Ermittlung der Unschärfe $m_{t,0}^*$ und $s_{t,0}^*$ der Komponenten folgt aus der Zeitreihe $(x_{t,0}^*)_{t \in T} = (x_t^* \ominus \sigma_{x_t^*})_{t \in T}$. Mit dieser Zerlegung lautet nun das ganze Komponentenmodell

$$x_t^* \approx (m_t + s_t + \varepsilon_t) \oplus (m_{t,0}^* \oplus s_{t,0}^*), \quad t = 1, \dots, N.$$

Die Zerlegung in Lage und Unschärfe ändert dabei nicht die Länge der δ -Schnitte ($l_{C_\delta[x_t^*]} = l_{C_\delta[x_{t,0}^*]} = l_{t,0}$). Die Komponenten $\tilde{m}_{t,\delta}$, $\tilde{s}_{t,\delta}$ und $\tilde{\varepsilon}_{t,\delta}$ der klassischen Zeitreihe $(l_{t,\delta})_{t \in T}$ und die δ -Schnitte $C_\delta[\widehat{m}_{t,0}^*]$ und $C_\delta[\widehat{s}_{t,0}^*]$ werden zur Berechnung von $m_{t,0}^*$ und $s_{t,0}^*$ auf folgende Art und Weise verwendet:

$$\begin{aligned} C_\delta[\widehat{m}_{t,0}^*] &= \frac{\tilde{m}_{t,\delta}}{l_{t,\delta}} C_\delta[x_{t,0}^*] \quad \text{und} \quad C_\delta[\widehat{s}_{t,0}^*] = \frac{\tilde{s}_{t,\delta}}{l_{t,\delta}} C_\delta[x_{t,0}^*] && \text{wenn } l_{t,\delta} \neq 0 \\ \text{mit } C_\delta[\widehat{m}_{t,0}^*] &= C_\delta[\widehat{s}_{t,0}^*] = [0; 0] = 0 && \text{wenn } l_{t,\delta} = 0 \end{aligned}$$

Diese Aufteilung der δ -Schnitte folgt der Berücksichtigung, bei der $\tilde{m}_{t,\delta}$ den Einfluss der Trendkomponente und $\tilde{s}_{t,\delta}$ den Einfluss der Saisonkomponente auf die Länge des δ -Schnittes $C_\delta[x_t^*]$ beschreibt.

Diese Methode hat folgende Probleme: Ohne zusätzliche Bedingungen bezüglich $\tilde{m}_{t,\delta}$ und $\tilde{s}_{t,\delta}$ kann für die δ -Schnitte der Schätzungen der Komponenten $C_{\delta_2}(\widehat{m}_{t,0}^*) \not\subseteq C_{\delta_1}(\widehat{m}_{t,0}^*)$ und $C_{\delta_2}(\widehat{s}_{t,0}^*) \not\subseteq C_{\delta_1}(\widehat{s}_{t,0}^*)$ ($0 < \delta_1 < \delta_2 \leq 1$) geschehen. Zusätzliche Bedingungen, um diesen Zustand zu vermeiden, sind aber in der Regel kompliziert und erhöhen die Rechenarbeit zur Bestimmung der Komponenten.

Es gibt eine ähnliche, aber einfachere Methode [6]: Man zieht für die Bestimmung der Unschärfe der Trendkomponente und Saisonkomponente nicht alle δ -Schnitte in Betracht, sondern nur die "durchschnittliche" Länge der Unschärfe. Statt der Zeitreihe $(l_{t,\delta})_{t \in T}$, $\delta \in (0; 1]$, wird die Zeitreihe

$$(l_t)_{t \in T} = \left(\int_0^1 l_{t,\delta} d\delta \right)$$

genommen. $(l_t)_{t \in T}$ ist eine Zeitreihe mit saisonalem Einfluss, also $l_t = \tilde{m}_t + \tilde{s}_t + \tilde{\varepsilon}_t \in \mathbb{R}_0^+$, $t = 1, \dots, N$, mit $\tilde{m}_t \geq 0$ und $\tilde{s}_t \geq 0$. Von diesen zwei Werten bestimmt man die Schätzung der Unschärfe der Trendkomponente und Saisonkomponente durch

$$\widehat{m}_{t,0}^* = \frac{\tilde{m}_t}{l_t} \cdot x_{t,0}^* \quad \text{und} \quad \widehat{s}_{t,0}^* = \frac{\tilde{s}_t}{l_t} \cdot x_{t,0}^* \quad \text{wenn } l_t \neq 0$$

für $t \in T$. Für $l_t = 0$ sind die Schätzungen $\widehat{m}_{t,0}^* = \widehat{s}_{t,0}^* = 0$. Leider ist dann für diese Schätzungen die Bedingung $\widehat{s}_{t,0}^* = \widehat{s}_{t+kp,0}^*$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht notwendigerweise erfüllt. Die letzte Schätzung der Saisonkomponente $s_{t,0}^*$ ist der Durchschnitt aller Elemente $\widehat{s}_{t+kp,0}^*$, $k \in \mathbb{Z}$. Die unscharfe Trendkomponente $m_{t,0}^*$ wird durch Regression der Zahlen $\widehat{m}_{t,0}^*$ berechnet. Die Schätzung $\widehat{x}_{N_f}^*$ von $x_{N_f}^*$ für die Zeit $N_f > N$ ist

$$\widehat{x}_{N_f}^* = (\widehat{m}_{N_f} + \widehat{s}_{N_f}) \oplus \widehat{m}_{N_f}^* \oplus \widehat{s}_{N_f}^* = (\widehat{m}_{N_f} \oplus \widehat{m}_{N_f}^*) \oplus (\widehat{s}_{N_f} \oplus \widehat{s}_{N_f}^*),$$

wobei \widehat{m}_{N_f} und \widehat{s}_{N_f} Schätzungen der reellwertigen Zeitreihe $(\sigma_{x_t^*})_{t \in T}$ sind, und $\widehat{m}_{N_f}^*$ und $\widehat{s}_{N_f}^*$ Schätzungen der Unschärfe sind. $(\widehat{m}_{N_f} \oplus \widehat{m}_{N_f}^*)$ ist die unscharfe Trendkomponente und $(\widehat{s}_{N_f} \oplus \widehat{s}_{N_f}^*)$ die unscharfe Saisonkomponente.

Beispiel 4.23: Tabelle 4.1 enthält die 48 trapezförmigen unscharfen Beobachtungen mit Saisonkomponente, deren Werte in Abbildung 4.6 dargestellt werden. Für diese Beobachtungen sollen die unscharfen Trendkomponenten m_t^* und die unscharfen Saisonkomponenten s_t^* berechnet werden.

Zunächst wird zu jedem Zeitpunkt der Steinerpunkt $\sigma_{x_t^*}$ und die durchschnittliche Länge l_t der δ -Schnitte von den Beobachtungen berechnet. In Abbildung 4.7 wird die Zeitreihe $(\sigma_{x_t^*})_{t \in T}$ der Steinerpunkte als durchgezogene Linie und die Zeitreihe $(l_t)_{t \in T}$ der durchschnittlichen Längen der δ -Schnitte als gepunktete Linie dargestellt.

Man kann in Abbildung 4.7 sehen, dass die Periode beider Zeitreihen jeweils 12 beträgt. Für die beiden Zeitreihen wurde mithilfe klassischer Methoden die Trend- und Saisonkomponente berechnet. Nach Eliminierung der Saisonkomponente zeigen sowohl $(\sigma_{x_t^*})_{t=1,\dots,48}$ als auch $(l_t)_{t=1,\dots,48}$ approximatives lineares Verhalten. An diese Werte wird mithilfe der Regressionsrechnung eine Gerade angepasst.

Tabelle 4.1: Werte von 48 trapezförmigen saisonabhängigen unscharfen Beobachtungen

$x_1^* = t^*(1.35, 0.20, 0.44, 0.56)$	$x_2^* = t^*(4.84, 0.16, 0.62, 0.74)$
$x_3^* = t^*(7.94, 0.26, 0.67, 1.25)$	$x_4^* = t^*(9.57, 0.24, 0.62, 1.24)$
$x_5^* = t^*(7.41, 0.28, 0.74, 0.85)$	$x_6^* = t^*(4.37, 0.25, 0.84, 0.84)$
$x_7^* = t^*(0.62, 0.16, 0.59, 0.66)$	$x_8^* = t^*(-1.49, 0.16, 0.70, 0.48)$
$x_9^* = t^*(-1.47, 0.10, 0.56, 0.44)$	$x_{10}^* = t^*(-1.41, 0.11, 0.29, 0.43)$
$x_{11}^* = t^*(-1.42, 0.12, 0.34, 0.57)$	$x_{12}^* = t^*(-0.67, 0.13, 0.46, 0.58)$
$x_{13}^* = t^*(1.72, 0.19, 0.97, 0.63)$	$x_{14}^* = t^*(5.45, 0.18, 0.55, 1.20)$
$x_{15}^* = t^*(9.74, 0.27, 1.28, 0.98)$	$x_{16}^* = t^*(11.88, 0.26, 0.72, 0.77)$
$x_{17}^* = t^*(9.82, 0.27, 0.66, 1.14)$	$x_{18}^* = t^*(6.46, 0.26, 0.85, 1.29)$
$x_{19}^* = t^*(2.65, 0.20, 0.81, 0.74)$	$x_{20}^* = t^*(0.68, 0.18, 0.79, 0.49)$
$x_{21}^* = t^*(0.08, 0.12, 0.46, 0.46)$	$x_{22}^* = t^*(0.49, 0.10, 0.49, 0.35)$
$x_{23}^* = t^*(0.33, 0.15, 0.58, 0.61)$	$x_{24}^* = t^*(1.21, 0.14, 0.38, 0.74)$
$x_{25}^* = t^*(3.64, 0.22, 0.98, 0.52)$	$x_{26}^* = t^*(7.24, 0.28, 1.17, 1.20)$
$x_{27}^* = t^*(10.67, 0.34, 0.80, 0.81)$	$x_{28}^* = t^*(11.88, 0.28, 0.92, 0.98)$
$x_{29}^* = t^*(10.99, 0.30, 1.21, 1.36)$	$x_{30}^* = t^*(8.20, 0.24, 0.72, 0.74)$
$x_{31}^* = t^*(4.66, 0.23, 0.67, 0.86)$	$x_{32}^* = t^*(2.23, 0.19, 0.82, 0.84)$
$x_{33}^* = t^*(1.81, 0.16, 0.64, 0.51)$	$x_{34}^* = t^*(2.46, 0.16, 0.53, 0.35)$
$x_{35}^* = t^*(2.32, 0.18, 0.60, 0.40)$	$x_{36}^* = t^*(2.51, 0.19, 0.62, 0.56)$
$x_{37}^* = t^*(6.04, 0.22, 0.74, 0.73)$	$x_{38}^* = t^*(10.34, 0.26, 1.15, 0.96)$
$x_{39}^* = t^*(12.45, 0.35, 0.93, 1.43)$	$x_{40}^* = t^*(14.80, 0.27, 0.75, 1.36)$
$x_{41}^* = t^*(13.17, 0.33, 1.38, 1.34)$	$x_{42}^* = t^*(8.86, 0.26, 0.96, 1.16)$
$x_{43}^* = t^*(6.02, 0.26, 1.10, 0.86)$	$x_{44}^* = t^*(4.22, 0.18, 0.69, 0.74)$
$x_{45}^* = t^*(3.46, 0.19, 0.53, 0.47)$	$x_{46}^* = t^*(3.58, 0.19, 0.55, 0.47)$
$x_{47}^* = t^*(3.92, 0.16, 0.67, 0.46)$	$x_{48}^* = t^*(4.76, 0.21, 0.50, 0.77)$

Abbildung 4.6: Unscharfe Beobachtungen mit saisonalem Einfluss

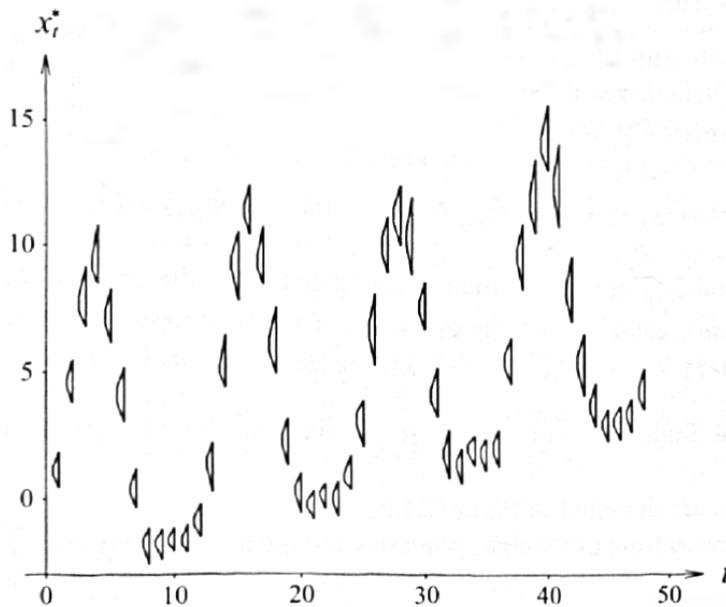
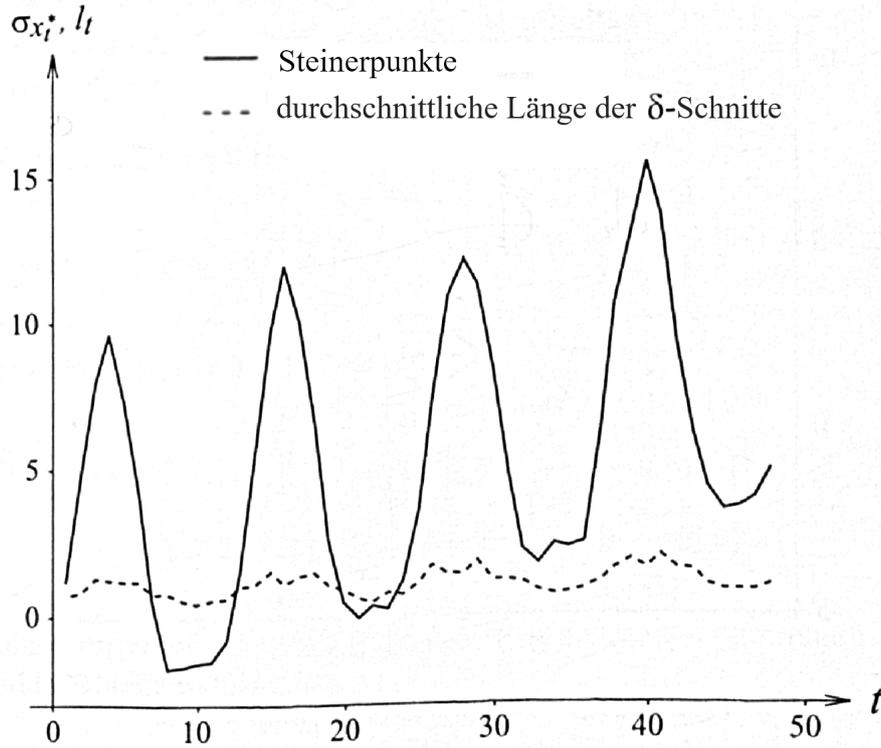


Abbildung 4.7: Zeitreihen der Steinerpunkte und der durchschnittlichen Länge der δ -Schnitte



Auf diese Weise ergeben sich die unscharfen Saisonkomponenten s_t^* , $t = 1, \dots, 48$, mit $s_t^* = s_{t+12k}^*$, $k \in \mathbb{Z}$. Diese sind in Tabelle 4.2 angegeben und in Abbildung 4.8 dargestellt. Die unscharfen Trendkomponenten sind

$$m_t^* = t^*(1.59, 0.043, 0.16, 0.19) + t^*(0.14, 0.0018, 0.0061, 0.0095) \cdot t.$$

In Abbildung 4.9 werden zum Vergleich die beobachteten Daten x_t^* , $t = 1, \dots, 48$ und die prognostizierten Daten $\hat{x}_t^* = m_t^* \oplus s_t^*$, $t = 1, \dots, 48$ dargestellt.

Tabelle 4.2: Werte der unscharfen Saisonkomponenten

$s_1^* = t^*(-1.30, 0.13, 0.46, 0.37)$	$s_7^* = t^*(-1.55, 0.12, 0.44, 0.44)$
$s_2^* = t^*(2.47, 0.16, 0.61, 0.75)$	$s_8^* = t^*(-3.90, 0.10, 0.42, 0.35)$
$s_3^* = t^*(5.58, 0.22, 0.65, 0.78)$	$s_9^* = t^*(-4.36, 0.05, 0.20, 0.18)$
$s_4^* = t^*(7.36, 0.17, 0.48, 0.69)$	$s_{10}^* = t^*(-4.12, 0.03, 0.11, 0.10)$
$s_5^* = t^*(5.70, 0.22, 0.72, 0.87)$	$s_{11}^* = t^*(-4.36, 0.06, 0.21, 0.20)$
$s_6^* = t^*(2.09, 0.16, 0.54, 0.63)$	$s_{12}^* = t^*(-3.88, 0.07, 0.19, 0.26)$

Abbildung 4.8: Unscharfe Saisonkomponenten

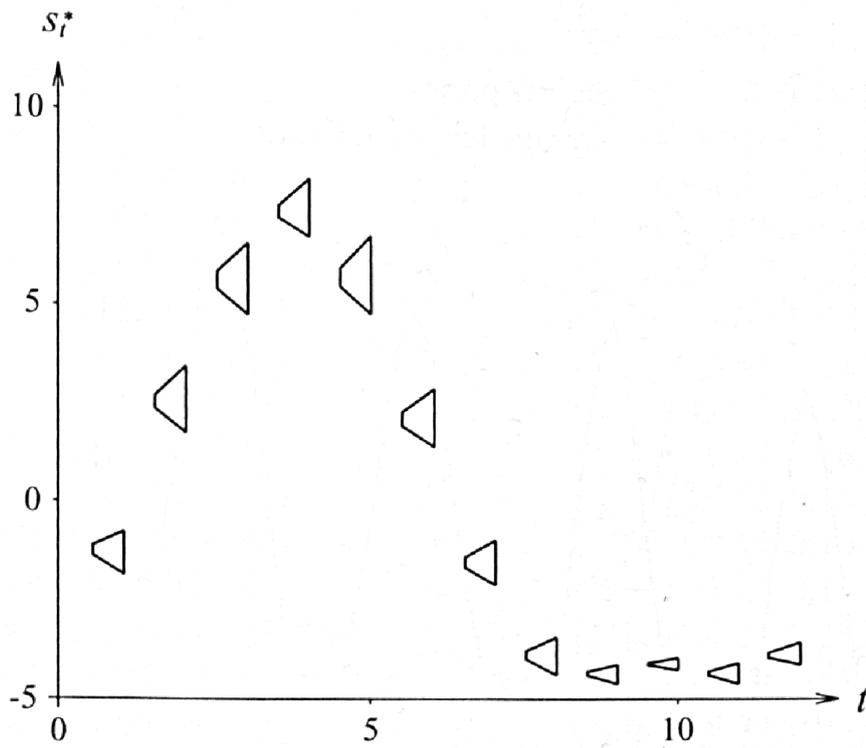
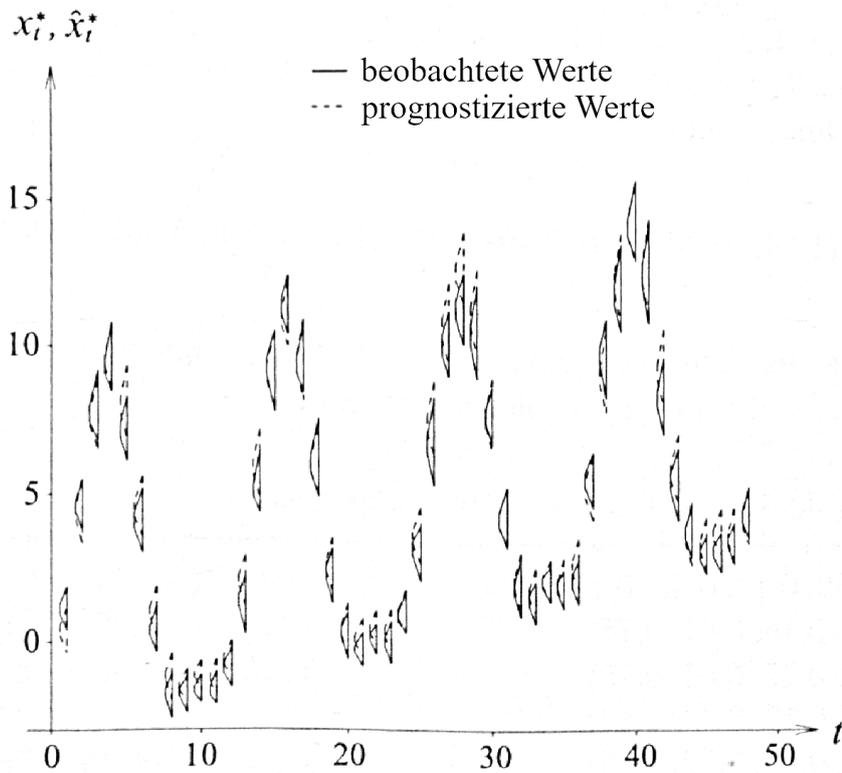


Abbildung 4.9: Exponentielle Glättung mit optimalem Glättungsparameter



4.3.5 Differenzenfilter

Es gibt eine weitere spezielle Art von Filtern: Beim Abgleichen von Polynomen mit Zeitreihen $(x_t^*)_{t \in T}$ besteht das Problem beim Grad des Polynoms. Ähnlich wie in klassischen Zeitreihen ist es ebenso möglich für unscharfe Zeitreihen diese sogenannten *Differenzenfilter* zu verwenden.

Bemerkung 4.24: Für ein Polynom $f(t) = a_0^* \oplus a_1^* \cdot t \oplus a_2^* \cdot t^2 \oplus \dots \oplus a_m^* \cdot t^m$ von Grad $m > 0$ und $a_0^*, a_1^*, \dots, a_m^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ ist die Differenz $g(t) = f(t) \sim_H f(t-1)$ ein Polynom vom maximalen Grad $m-1$.

Beweis: Für die verallgemeinerte Hukuhara-Differenz gilt im Allgemeinen nicht $(\underline{x}^* \sim_H \underline{y}^*) \oplus \underline{y}^* = \underline{x}^*$. Aber für eine bekannte Summe $\underline{x}^* \oplus \underline{y}^*$ und ein gegebenes \underline{x}^* ist die verallgemeinerte Hukuhara-Differenz $(\underline{x}^* \oplus \underline{y}^*) \sim_H \underline{x}^*$ der bestmögliche Wert für das unbekannte \underline{y}^* .

Demnach ist $(g(t) \oplus f(t-1)) \sim_H f(t-1)$ der bestmögliche Wert für $g(t)$. Setzt man

$$g(t) = a_1^* \oplus a_2^* \cdot (t^2 - (t-1)^2) \oplus \dots \oplus a_m^* \cdot (t^m - (t-1)^m)$$

und beachtet man, dass $t^i - (t-1)^i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, erhalten wir

$$\begin{aligned} g(t) \oplus f(t-1) &= a_1^* \oplus a_2^* \cdot (t^2 - (t-1)^2) \oplus \dots \oplus a_m^* \cdot (t^m - (t-1)^m) \oplus \\ & a_0^* \oplus a_1^* \cdot (t-1) \oplus a_2^* \cdot (t-1)^2 \oplus \dots \oplus a_m^* \cdot (t-1)^m = f(t). \end{aligned}$$

Somit ist die Hukuhara-Differenz $g(t)$ ein Polynom vom Grad $(m-1)$, der durch Satz 4.20 eindeutig bestimmt werden kann. \square

Definition 4.25: Sei $(x_t^*)_{t \in T}$ eine unscharfe Zeitreihe. Eine Zuordnung Δ , definiert durch

$$\Delta x_t^* = x_t^* \sim_H x_{t-1}^*, \quad t = 2, \dots, N,$$

wird auch *Differenzenfilter der Ordnung 1* genannt. *Differenzenfilter der Ordnung m mit $m > 1$ sind rekursiv definiert durch*

$$\Delta^m x_t^* = (\Delta^{m-1} x_t^*) \sim_H (\Delta^{m-1} x_{t-1}^*), \quad t = m+1, \dots, N,$$

Die Differenzenoperation reduziert den Grad des Polynoms um einen Grad. Anwendung der Differenzenoperation $(m-1)$ -mal auf ein Polynom vom Grad m resultiert in konstante Werte.

Bemerkung 4.26: Ein Differenzenfilter im Kontext von Definition 4.18 ist ein allgemeiner Filter $L_H(a_{-1}, a_0) = (-1, 1)$.

Ähnlich wie in klassischen Zeitreihen können Differenzenfilter benützt werden, um saisonale Effekte zu eliminieren. Dazu werden sogenannte saisonale Differenzen der Länge p verwendet. Sie sind definiert durch

$$\Delta_p x_t^* = x_t^* \sim_H x_{t-p}^*, \quad t = p+1, \dots, N.$$

Man kann Differenzenoperationen mit saisonalen Differenzen kombinieren. Hat eine unscharfe Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ saisonale Oszillationen mit Periode p und einer linearen Trendkomponente, dann ist die gefilterte Reihe $y_t^* = \Delta(\Delta_p x_t^*)$ (worauf zunächst ein saisonaler Filter der Länge p , dann ein Differenzenfilter angewendet wird) approximativ konstant.

Für numerische Berechnungen der Länge der Periode und der Trendkomponente, kann für verschiedene natürliche Zahlen p und m die Hypothese

$$\Delta^m(\Delta_p x_t^*) \equiv \text{const.}$$

getestet werden.

Einige Referenzen über Hypothesentests auf Grundlage unscharfer Tests sind z.B. Arnold [1], Grzegorzewski [5], Körner [11] oder Römer und Kandel [13].

4.3.6 Verallgemeinerte Holt-Winter-Methode

Auf Komponentenmodelle kann man die verallgemeinerte Holt-Winter-Methode anwenden (für den klassischen Fall siehe Schlittgen und Streitberg [14] bzw. Janacek [7]). Für eine klassische Zeitreihe $(x_t)_{t \in T}$ lautet das Komponentenmodell

$$x_t = m_t + s_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, N,$$

mit der lokalen linearen Trendkomponente $m_t = a + b \cdot t$ und der Saisonkomponente s_t mit Periodenlänge p . Sind zum Zeitpunkt $N - 1$ die Schätzungen \hat{m}_{N-1} , \hat{b}_{N-1} und \hat{s}_{N-p} gegeben, kann man die Schätzungen zum Zeitpunkt N rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{b}_N &= (1 - \alpha) \cdot (\hat{m}_{N-1} - \hat{m}_{N-2}) + \alpha \cdot \hat{b}_{N-1} \\ \hat{m}_N &= (1 - \beta) \cdot (x_N - \hat{s}_{N-p}) + \beta \cdot (\hat{m}_{N-1} + \hat{b}_N) \\ \hat{s}_N &= (1 - \gamma) \cdot (x_N - \hat{m}_N) + \gamma \cdot \hat{s}_{N-p} \end{aligned}$$

Die Startwerte der Rekursion werden aus den ersten p Werten der Zeitreihe wie folgt berechnet:

$$\hat{m}_p = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^p x_t, \quad \hat{b}_p = 0 \text{ und } \hat{s}_t = x_t - \hat{m}_p, \quad t = 1, \dots, p$$

Der Wert $\hat{b}_p = 0$ folgt der Annahme, dass am Anfang kein Trend präsent war. Eine h -Schritt-Prognose zum Zeitpunkt N ($h > 0$) ist gegeben durch

$$\hat{x}_{N,h}(\alpha, \beta, \gamma) = \left\{ \begin{array}{ll} \hat{m}_N + h \cdot \hat{b}_N + \hat{s}_{N+h-p} & h = 1, \dots, p \\ \hat{m}_N + h \cdot \hat{b}_N + \hat{s}_{N+h-2p} & h = p + 1, \dots, 2p \\ \vdots & \vdots \end{array} \right\}.$$

Es gibt verschiedene Herangehensweisen für die Auswahl der Glättungsparameter α , β und γ . Beispielsweise kann man die Ein-Schritt-Prognose $\hat{x}_{t,1}(\alpha, \beta, \gamma)$ mit den Werten $(x_t)_{t \in T}$ vergleichen und diejenigen Werte $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}$ benützen, die

$$\sum_{t=p}^{N-1} \left(x_{t+1} - \hat{x}_{t,1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) \right)^2 = \min_{\alpha, \beta, \gamma} \sum_{t=p}^{N-1} \left(x_{t+1} - \hat{x}_{t,1}(\alpha, \beta, \gamma) \right)^2$$

erfüllen.

Im Falle von unscharfen Daten $(x_t^*)_{t \in T}$ wird ein Modell der Form

$$x_t^* \approx m_t^* \oplus s_t^*, \quad t = 1, \dots, N,$$

mit linearer Trendkomponente $m_t^* = a^* \oplus b^* \cdot t$ angenommen. Für gegebene Schätzungen \widehat{m}_{N-1}^* , \widehat{b}_{N-1}^* und \widehat{s}_{N-p}^* zum Zeitpunkt $N-1$ kann man die Schätzungen \widehat{m}_N^* , \widehat{b}_N^* und \widehat{s}_N^* , ähnlich wie bei \widehat{m}_N , \widehat{b}_N und \widehat{s}_N , folgendermaßen erhalten:

$$\begin{aligned} \widehat{b}_N^* &= (1 - \alpha) \cdot (\widehat{m}_{N-1}^* \sim_H \widehat{m}_{N-2}^*) \oplus \alpha \cdot \widehat{b}_{N-1}^* \\ \widehat{m}_N^* &= (1 - \beta) \cdot (x_N^* \sim_H \widehat{s}_{N-p}^*) \oplus \beta \cdot (\widehat{m}_{N-1}^* + \widehat{b}_N^*) \\ \widehat{s}_N^* &= (1 - \gamma) \cdot (x_N^* \sim_H \widehat{m}_N^*) \oplus \gamma \cdot \widehat{s}_{N-p}^* \end{aligned}$$

Die Startwerte kann man, wie beim Komponentenmodell beschrieben, durch Zerlegung der ersten p Werte in Lage und Unschärfe erhalten. Aus der Forderung $\min_{t=1, \dots, N} \widetilde{m}_{t, \delta} = 0$, welche die Eindeutigkeit der Zerlegung bereitstellt, folgt, dass die Schätzung für \widehat{m}_p^* gleich der Durchschnitt der Steinerpunkte $(\sigma_{x_t^*})_{t=1, \dots, p}$ und somit eine reelle Zahl ist. Die Saisonkomponente kann man bestimmen durch

$$\widehat{s}_t^* = x_t^* \ominus \widehat{m}_p^*, \quad t = 1, \dots, p.$$

Analog zum klassischen Fall verwendet man $\widehat{b}_p^* = 0$. Die Prognose \widehat{x}_{N+h}^* für x_{N+h}^* , $h > 0$, zum Zeitpunkt N lässt sich berechnen durch

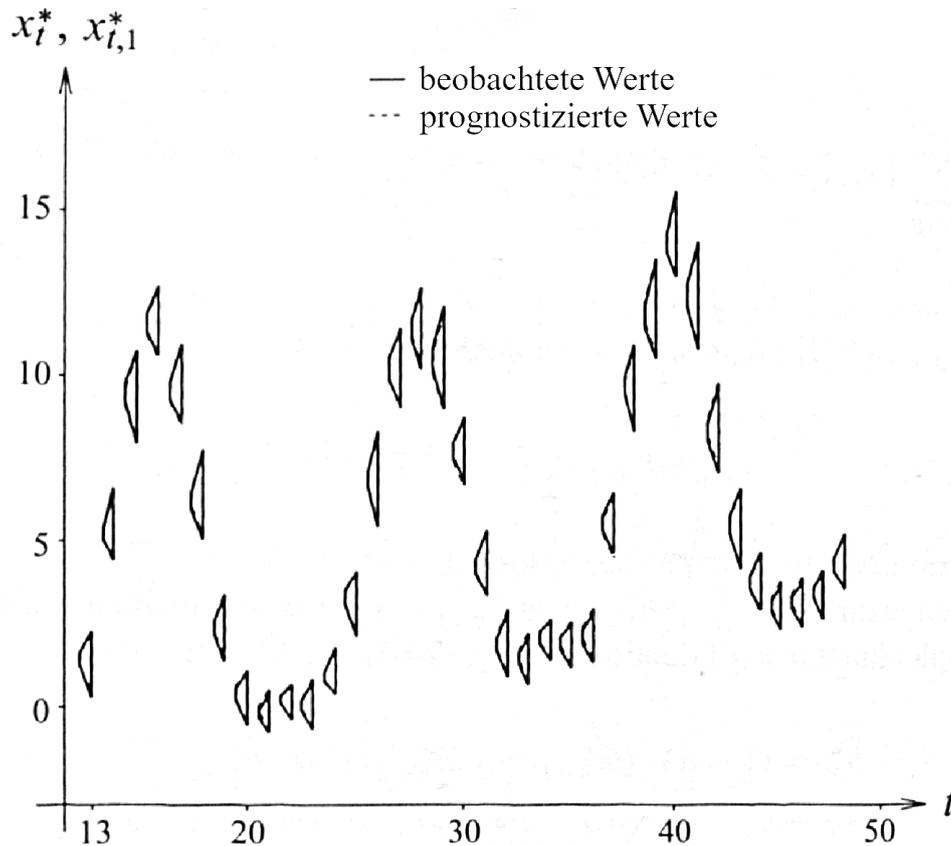
$$\widehat{x}_{N,h}^*(\alpha, \beta, \gamma) = \left\{ \begin{array}{ll} \widehat{m}_N^* \oplus h \cdot \widehat{b}_N^* \oplus \widehat{s}_{N+h-p}^* & h = 1, \dots, p \\ \widehat{m}_N^* \oplus h \cdot \widehat{b}_N^* \oplus \widehat{s}_{N+h-2p}^* & h = p + 1, \dots, 2p \\ \vdots & \vdots \end{array} \right\}.$$

Die Bestimmung geeigneter Glättungsparameter $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ und $\widetilde{\gamma}$ ist wie im klassischen Fall möglich durch

$$\bigoplus_{t=p}^{N-1} \rho_2^2 \left(x_{t+1}^*, \widehat{x}_{t,1}^*(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \right) = \min_{\alpha, \beta, \gamma} \bigoplus_{t=p}^{N-1} \rho_2^2 \left(x_{t+1}^*, \widehat{x}_{t,1}^*(\alpha, \beta, \gamma) \right).$$

Beispiel 4.27: Die verallgemeinerte Holt-Winter-Methode wird auf die 48 Beobachtungen aus Beispiel 4.22 angewendet. Die Glättungsparameter in $\bigoplus_{t=p}^{N-1} \rho_2^2 \left(x_{t+1}^*, \widehat{x}_{t,1}^*(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \right)$ sind $\alpha = 0.95$, $\beta = 0.31$ und $\gamma = 0.38$. In Abbildung 4.10 werden sowohl die beobachteten Daten (liniert) als auch die Ein-Schritt-Prognosen (strichliert) bei Verwendung optionaler Glättungsparameter dargestellt.

Abbildung 4.10: Beobachtete und prognostizierte Daten



4.3.7 Präsentation im Frequenzbereich

Für absolut summierbare Reihen $(x_t)_{t \in T}$ reeller Zahlen und die Funktionen

$$C(\lambda) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x_t \cos(2\pi\lambda t) \quad \text{und} \quad S(\lambda) = \sum_{t \in \mathbb{Z}} x_t \sin(2\pi\lambda t)$$

existiert die Inverse der Fouriertransformation. Dann gilt folgende Darstellung:

$$x_t = 2 \int_0^{0.5} C(\lambda) \cos(2\pi\lambda t) d\lambda + 2 \int_0^{0.5} S(\lambda) \sin(2\pi\lambda t) d\lambda.$$

Somit ist die Berücksichtigung von Reihen im Zeitbereich äquivalent der im Frequenzbereich. Im Falle von endlichen Zeitreihen $(x_t)_{t \in T}$ genügt es, die Fouriertransformierte für endlich viele Frequenzwerte zu wissen. Eine Zeitreihe mit einer ungeraden Anzahl von Beobachtungen $N = 2M + 1$ kann eindeutig mit den sogenannten *Fourierfrequenzen* $\lambda_k = \frac{k}{n}$ ($k = 0, \dots, M$) dargestellt werden, also

$$C(\lambda_k) = \sum_{t=1}^N x_t \cos(2\pi\lambda_k t), \quad k = 0, \dots, M,$$

und

$$S(\lambda_k) = \sum_{t=1}^N x_t \sin(2\pi \lambda_k t), \quad k = 1, \dots, M,$$

diese implizieren

$$x_t = C(\lambda_0) + 2 \sum_{k=1}^M (C(\lambda_k) \cos(2\pi \lambda_k t) + S(\lambda_k) \sin(2\pi \lambda_k t)).$$

Für eine unscharfe Zeitreihe $(x_t^*)_{t \in T}$ existiert solch eine Präsentation nicht allgemein. Der Grund dafür ist die Semilinearität von $(\mathcal{F}(\mathbb{R}), \oplus, \cdot)$. Eine andere Möglichkeit wäre die Hukuhara-Addition zu benutzen. Das untere Beispiel zeigt, dass Eindeutigkeit für unscharfe Zeitreihen nicht erreicht werden kann.

Beispiel 4.28: Für drei Beobachtungen $x_1^*, x_2^*, x_3^* \in \mathcal{F}_2(\mathbb{R})$ mit den entsprechenden charakterisierenden Funktionen $\xi_{x_1^*}(x) = I_{[-1;1]}(x)$, $\xi_{x_2^*}(x) = I_{[-1;1]}(x)$ und $\xi_{x_3^*}(x) = I_{\{0\}}(x)$ und Frequenzen $\lambda_k = \frac{k}{3}$ ($k = -1, 0, 1$) existieren keine unscharfen Koeffizienten $C^*(\lambda_k)$ und $S^*(\lambda_k)$ ($k = -1, 0, 1$), welche folgendes erfüllen würden:

$$x_t^* = \bigoplus_{k=-1}^1 C^*(\lambda_k) \cdot \cos(2\pi \lambda_k t) \oplus_H \bigoplus_{k=-1}^1 S^*(\lambda_k) \cdot \sin(2\pi \lambda_k t), \quad t = 1, \dots, 3$$

Beweis: Für die Zeitpunkte $t = 1, 2, 3$ gelten folgende Gleichungen:
 $t = 1$:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot C^*(\lambda_{-1}) \oplus_H C^*(\lambda_0) \oplus_H \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot C^*(\lambda_1) \oplus_H \\ &\quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot S^*(\lambda_{-1}) \oplus_H \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_1) \\ &= \left(C^*(\lambda_0) \oplus \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_1)\right) \sim_H \left(\frac{1}{2} \cdot C^*(\lambda_{-1}) \oplus \frac{1}{2} \cdot C^*(\lambda_1) \oplus \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_{-1})\right) \end{aligned}$$

$t = 2$:

$$\begin{aligned} x_2^* &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot C^*(\lambda_{-1}) \oplus_H C^*(\lambda_0) \oplus_H \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot C^*(\lambda_1) \oplus_H \\ &\quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_{-1}) \oplus_H \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot S^*(\lambda_1) \\ &= \left(C^*(\lambda_0) \oplus \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_{-1})\right) \sim_H \left(\frac{1}{2} \cdot C^*(\lambda_{-1}) \oplus \frac{1}{2} \cdot C^*(\lambda_1) \oplus \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_1)\right) \end{aligned}$$

$t = 3$:

$$x_3^* = C^*(\lambda_{-1}) \oplus_H C^*(\lambda_0) \oplus_H C^*(\lambda_1)$$

Die Gleichung für $t = 3$ impliziert, dass alle Koeffizienten $C^*(\lambda_k)$ ($k = -1, 0, 1$) reelle Zahlen sind. Damit verbleiben die folgenden Gleichungen für die ersten zwei Zeitpunkte:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_1) \sim_H \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_{-1}) \\ x_2^* &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_{-1}) \sim_H \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_1) \end{aligned}$$

Für $x_1^* = x_2^*$ erhalten wir

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_1) \sim_H \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_{-1}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_{-1}) \sim_H \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot S^*(\lambda_1).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn $S^*(\lambda_1)$ und $S^*(\lambda_{-1})$ reelle Zahlen sind. In diesem Fall können aber die Gleichungen der ersten zwei Zeitpunkte x_1^* und x_2^* (oben) nicht erfüllt werden. \square

Somit kann der Ansatz im Frequenzbereich bei unscharfen Zeitreihen nicht angewendet werden.

4.4 Fourier-Residuenanalyse im unscharfen Zeitreihenmodell

Als Anwendung des unscharfen Zeitreihenmodells wird diese mit einer neuen Methode der Residuenanalyse kombiniert, die in diesem Abschnitt eingeführt wird. Dieses Hybrid-Modell [18] nutzt sowohl die hohe prognostizierte Leistung des unscharfen Zeitreihenmodells, als auch das Fourierreihenmodell aus, indem man die Residuen in Frequenzspektren transformiert, niedrigfrequente Terme auswählt und hochfrequente Terme aussortiert, um eine gute Prognoseleistung zu erhalten. Ein numerisches Beispiel für eine Prognose der Einschreibungen wird dargestellt, um die verschiedenen Modelle für die Prognoseleistung zu vergleichen.

4.4.1 Einführung

Das unscharfe Zeitreihenmodell, welches von Song und Chissom [15] [16] [17] vorgeschlagen wurde, wurde weiterentwickelt und findet Anwendung in Geschäftsprognosen [23] [25], wobei die gegebenen Messwerte linguistisch sind oder aus weniger als 50 Daten bestehen. Danach erhielt das unscharfe Zeitreihenmodell viel Aufmerksamkeit von Forschern. Für Modelländerungen hat Chen [3] sich auf den Operator fokussiert, welcher im Modell verwendet wird, und die arithmetischen Berechnungen vereinfacht zur Verbesserung der Zusammensetzungen und der unscharfen logischen Gruppen, um die Prognose zu verbessern; Tsaur, Wang und Yang [19] nutzten die Entropie des Systems zur Bestimmung des kleinsten Wertes zum invarianten Zeitindex t , um die Fehler in den prognostizierten

Werte der Einschreibungen zu minimieren; Cheng, Chen, Teoh und Chiang [4] stellten unscharfe Zeitreihen von hoher Ordnung vor, die auf Mehrperiodenanpassungsmodelle basieren, um Aktienmärkte zu prognostizieren.

In Theorie ist jeder Wert gleichermaßen wichtig für die Prognose, wenn die gesammelten Zeitreihenwerte begrenzt sind. In traditionellen Ansätzen beruht ein passendes Prognosemodell auf der Annahme der Realisierung der Struktur des Systems, jedoch konnte aufgrund begrenzter Informationen nur ein Teil der Systemstruktur vollständig erfasst werden. Um mit diesem Problem zurechtzukommen, kommt die Residuenanalyse ins Spiel, damit man einige mögliche wichtige Informationen wiederverwerten kann [12]. Die Idee hinter Fourierreihen besteht darin, dass die Residuen in Frequenzspektren transformiert werden, und dann niedrigfrequente Terme ausgewählt werden. Auf der anderen Seite können Fourier-Ansätze hochfrequente Terme ausfiltern, welche als Rauschen angesehen werden, und somit kann die Prognoseleistung verbessert werden.

4.4.2 Konzept unscharfer Zeitreihen

Sei $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ eine Universalmenge, in welche die unscharfen Mengen \widetilde{A}_i ($i = 1, \dots, n$) durch

$$\widetilde{A}_i = f_{\widetilde{A}_i}(u_1)/u_1 + f_{\widetilde{A}_i}(u_2)/u_2 + \dots + f_{\widetilde{A}_i}(u_n)/u_n$$

definiert werden, wobei $f_{\widetilde{A}_i}$ die Zugehörigkeitsfunktion zur unscharfen Menge \widetilde{A}_i , u_k Element der unscharfen Menge \widetilde{A}_i und $f_{\widetilde{A}_i}(u_k)$ der Zugehörigkeitsgrad von u_k ist, das zu \widetilde{A}_i gehört, $\forall k = 1, 2, \dots, n$.

Definition 4.29: Sei die Universalmenge Y_t ($t = 1, 2, \dots, n$) eine Teilmenge von \mathbb{R} definiert durch die unscharfe Menge \widetilde{A}_i . Wenn F_t aus \widetilde{A}_i besteht ($i = 1, 2, \dots, n$), wird F_t definiert als eine unscharfe Zeitreihe auf Y_t ($t = 1, 2, \dots, n$).

Definition 4.30: Angenommen F_t wird durch F_{t-1} ausgelöst, dann kann die Beziehung des Modells erster Stufe von F_t ausgedrückt werden als $F_t = F_{t-1} \circ R(t, t-1)$, wobei $R(t, t-1)$ die Beziehungsmatrix ist, die die unscharfe Beziehung zwischen F_{t-1} und F_t beschreibt, und \circ ist der max-min Operator.

Wenn die Beziehung zwischen F_t und F_{t-1} durch $F_{t-1} \rightarrow F_t$, ($t = 2, \dots, n$) bezeichnet wird, dann kann die unscharfe logische Beziehung zwischen F_t und F_{t-1} folgendermaßen definiert werden:

Definition 4.31: Angenommen $F_t = \widetilde{A}_j$ wird durch $F_{t-1} = \widetilde{A}_i$ ausgelöst, dann kann die unscharfe logische Beziehung definiert werden als $\widetilde{A}_i \rightarrow \widetilde{A}_j$.

Wenn zum Beispiel unscharfe logische Beziehungen vom Zustand \widetilde{A}_2 erhalten werden und einen Wechsel zu anderen Zuständen \widetilde{A}_j ($\forall j = 1, 2, \dots, n$) machen, wie unten:

$$\widetilde{A}_2 \rightarrow \widetilde{A}_1, \quad \widetilde{A}_2 \rightarrow \widetilde{A}_2, \quad \widetilde{A}_2 \rightarrow \widetilde{A}_3, \quad \dots,$$

dann können die unscharfen logischen Beziehungen folgendermaßen gruppiert werden:

$$\widetilde{A}_2 \rightarrow \widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \dots$$

Von den Modellen zur Festlegung von unscharfen Beziehungen, die es gibt, kann man den Ansatz von Chen's unscharfer logischer Beziehungsgruppe [3] einfach im Modell von Ruey-Chyn Tsaur verwenden. Dieses unscharfe Zeitreihenmodell, eingeführt durch Chen's Methode [3], wird in folgenden Schritten beschrieben:

1. Definiere die Universalmenge für die historischen Daten:

Für die Universalmenge wird zunächst der Mindestwert D_{\min} und der Maximalwert D_{\max} der gegebenen historischen Daten definiert. Basierend auf D_{\min} und D_{\max} definieren wir die Universalmenge U als $[D_{\min} - D_1; D_{\max} + D_2]$, wobei D_1 und D_2 zwei geeignete positive Zahlen sind.

2. Teile die Universalmenge U in mehrere gleich große Intervalle:

Wenn die Universalmenge U in n gleich große Intervalle aufgeteilt wird, wobei deren gemeinsame Länge l den Wert

$$l = \frac{(D_{\max} + D_2) - (D_{\min} - D_1)}{n}$$

beträgt, dann kann jedes Intervall durch $u_1 = [D_{\min} - D_1; D_{\min} - D_1 + l]$, $u_2 = [D_{\min} - D_1 + l; D_{\min} - D_1 + 2l]$, \dots , $u_n = [D_{\min} - D_1 + (n-1)l; D_{\max} + D_2]$ erhalten werden.

3. Definiere unscharfe Teilmengen der Universalmenge U :

Im Song und Chissom Modell gibt es keine Einschränkung dafür, wie viele linguistische Variablen unscharfe Mengen sind. Zum Beispiel kann „Einschreibung“ durch folgende unscharfe Mengen beschrieben werden: $\widetilde{A}_1 =$ (nicht viele), $\widetilde{A}_2 =$ (nicht zu viele), $\widetilde{A}_3 =$ (viele), $\widetilde{A}_4 =$ (ziemlich viele), $\widetilde{A}_5 =$ (sehr viele), $\widetilde{A}_6 =$ (zu viele), $\widetilde{A}_7 =$ (viel zu viele). In diesem Beispiel wird jede unscharfe Menge \widetilde{A}_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) definiert durch $\widetilde{A}_i = \{(\mu_{\widetilde{A}_i}(u_j)/u_j \mid \mu_{\widetilde{A}_i}(u_j) \in [0; 1], u_j \in R, j = 1, \dots, 7\}$ mit Zugehörigkeitsgrad $\mu_{\widetilde{A}_i}(u_j)$ von u_j . Somit haben wir

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_1 &= 1/u_1 + 0.5/u_2 + 0/u_3 + 0/u_4 + 0/u_5 + 0/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_2 &= 0.5/u_1 + 1/u_2 + 0.5/u_3 + 0/u_4 + 0/u_5 + 0/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_3 &= 0/u_1 + 0.5/u_2 + 1/u_3 + 0.5/u_4 + 0/u_5 + 0/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_4 &= 0/u_1 + 0/u_2 + 0.5/u_3 + 1/u_4 + 0.5/u_5 + 0/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_5 &= 0/u_1 + 0/u_2 + 0/u_3 + 0.5/u_4 + 1/u_5 + 0.5/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_6 &= 0/u_1 + 0/u_2 + 0/u_3 + 0/u_4 + 0.5/u_5 + 1/u_6 + 0.5/u_7, \\ \widetilde{A}_7 &= 0/u_1 + 0/u_2 + 0/u_3 + 0/u_4 + 0/u_5 + 0.5/u_6 + 1/u_7. \end{aligned}$$

4. Fuzzifiziere die historischen Daten:

Mit Definition 4.31 kann man die unscharfen logischen Beziehungsgruppen leicht bekommen.

5. Berechne die prognostizierten Ausgaben:

Für $F_{t-1} = \tilde{A}_j$ kann die Prognose von F_t nach folgenden Regeln durchgeführt werden.

Regel 1: Ist die unscharfe logische Beziehungsgruppe von \tilde{A}_j eine Beziehung von einer zu einer anderen unscharfen Menge (zum Beispiel $\tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_k, \forall j, k = 1, 2, \dots, 7$), dann ist die Prognose von F_t gleich m_k , dem Mittelpunkt von u_k : $F_t = m_k$.

Regel 2: Ist die unscharfe logische Beziehungsgruppe von \tilde{A}_j eine Beziehung von einer zu vielen unscharfen Mengen (zum Beispiel $\tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_1, \tilde{A}_3, \tilde{A}_5, \forall j = 1, 2, \dots, 7$), dann ist die Prognose von F_t gleich dem arithmetischen Mittelwert von m_1, m_3 und m_5 , den Mittelpunkten von u_1, u_3 und u_5 : $F_t = \frac{m_1+m_3+m_5}{3}$.

Obwohl unscharfe Zeitreihenmodelle angewandt und konstruiert wurden, um linguistische Messwerte oder Messwerte mit weniger als 50 Daten zu prognostizieren, besteht immer noch viel Entwicklungsbedarf, bei der irgendwelche Einführungen von Neuerungen zur Verbesserung von Prognoseleistungen wichtig sind. Je mehr Informationen, die mit der Systemdynamik in Beziehung stehen, in Betracht gezogen werden, desto besser wird die Prognose sein. Somit ist die Residuenanalyse ins unscharfe Zeitreihenmodell eingebunden, um die Prognosegenauigkeit weiter zu verbessern.

4.4.3 Unscharfe Zeitreihen für Residuenanalyse

Residuenanalyse ist in der Regressionsanalyse wichtig, wo ein wohldefiniertes Modell immer einen zufälligen verteilten geschätzten Fehler ableitet. In der Praxis verwendet das unscharfe Zeitreihenmodell die unscharfen logischen Methoden für die Prognose, ohne den Datentyp in Betracht zu ziehen. Somit können für gewöhnlich große prognostizierte Fehlerterme die Prognoseleistung beeinträchtigen. Deswegen kommen jegliche Anpassungen für diese großen Fehlerterme zu kleineren Fehlertermen infrage, welche die Prognoseleistung steigern. Um mit solch einem Problem zurechtzukommen, wird die Idee der Fourierreihe ausgewählt, um die Residuen in Frequenzspektren zu transformieren, niedrigfrequente Terme auszuwählen, hochfrequente Terme auszusortieren, die Rauschen sein sollen, um dann gute Prognoseleistung zu bekommen. Die Analyseschritte werden in den folgenden Schritten beschrieben:

1. Definiere die Universalmenge U für die historischen Daten:

Zuerst finden wir D_{\min} und der Maximalwert D_{\max} der historischen Zeitreihendaten. Dann kann U als $[D_{\min} - D_1; D_{\max} + D_2]$ definiert werden, wobei D_1 und D_2 zwei geeignete positive Zahlen sind.

2. Definiere unscharfe Mengen \tilde{A}_i der Universalmenge U :

Teile die gesammelten Daten in Intervalle u_1, u_2, \dots, u_n gleicher Länge. Diese Intervalle werden verwendet, um die unscharfen Mengen $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ zu definieren:

$$\tilde{A}_i = \mu_{\tilde{A}_i}(u_1)/u_1 + \mu_{\tilde{A}_i}(u_2)/u_2 + \dots + \mu_{\tilde{A}_i}(u_n)/u_n, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

3. Führe unscharfe logische Beziehungsgruppen ein:

Fuzzifiziere die historischen Daten und passe sie zu den unscharfen Mengen \tilde{A}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) an. Dann verwenden wir die unscharfe Beziehung zweiter Ordnung

(beschrieben als $\tilde{A}_i, \tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_k$). Das heißt, dass die Zeitpunkte $t - 2$ und $t - 1$ jeweils zu den Zuständen \tilde{A}_i und \tilde{A}_j gehören und der Zeitpunkt t zum nächsten Zustand \tilde{A}_k gehört. Am Ende können wir für alle unscharfen Beziehungen unscharfe Beziehungsgruppen einführen und sie gruppieren.

4. Berechne die prognostizierten Ausgaben:

Basierend auf den unscharfen logischen Beziehungen zweiter Ordnung erhält man die Prognose F_t , wenn $F_{t-2} = \tilde{A}_i$ und $F_{t-1} = \tilde{A}_j$ ist, nach folgenden Regeln:

Regel 1: Ist die unscharfe logische Beziehungsgruppe $\tilde{A}_i, \tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_k$, dann ist die Prognose von F_t gleich m_y , dem Mittelpunkt von u_y , $\forall y = 1, 2, \dots, n$, also $F_t = m_k$.

Regel 2: Sind die unscharfen logischen Beziehungsgruppen $\tilde{A}_i, \tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_1, \tilde{A}_i, \tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_i, \tilde{A}_j \rightarrow \tilde{A}_p$, dann ist die Prognose von F_t gleich

$$F_t = \frac{m_1 + m_2 + \dots + m_p}{p}, \quad p \leq n.$$

5. Bereinige Prognoseergebnisse:

Das Ziel der Residuenanalyse ist es, die Residuen in Frequenzspektren zu transformieren, niedrigfrequente Terme auszuwählen, hochfrequente Terme auszusortieren und dann gute Prognoseleistung zu bekommen. Der Analyseprozess wird wie folgt beschrieben:

Zunächst erhält man die Residuenreihe durch

$$\varepsilon(k) = Y_k - F_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n,$$

wobei Y_k die tatsächlichen Werte und F_k die prognostizierten Werte zum Zeitpunkt k sind. Die Matrix der geschätzten Residuenreihe ist dann

$$\underline{\varepsilon}(k) = [\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(n-1), \varepsilon(n)]^T.$$

Als nächstes werden Fourierreihen verwendet, um die implizierten periodischen Phänomene in der Residuenreihe zu erhalten. Dann können wir mittels der Fourier-Korrekturtechnik von der Residuenanalyse die Prognosefähigkeit aus dem betrachteten Eingabedatensatz erhöhen. Die geschätzte Residuenreihe kann mittels Fourierreihen durch

$$\hat{\varepsilon}(k) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^z \left[a_i \cos\left(\frac{2\pi i}{T}k\right) + b_i \sin\left(\frac{2\pi i}{T}k\right) \right], \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, n$$

modelliert werden, wobei T die Länge der Residuenreihe und z die minimale Einsatzhäufigkeit der Fourierreihen ist. Für letzteres wird vorgeschlagen [18], dass z der ganzzahlige Anteil von $\frac{n-1}{2}$ ist. Die Parameter a_0, a_i und b_i ($i = 1, 2, \dots, z$) werden mit der Methode der kleinsten Quadratsumme geschätzt und durch $C = (P^T P)^{-1} P^T \underline{\varepsilon}(k)$ erhalten, wobei $C = [a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_z, b_z]^T$ gilt. Für die Matrix P haben wir

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{2\pi}{T}\right) & \sin\left(\frac{2\pi}{T}\right) & \cos\left(\frac{2\pi 2}{T}\right) & \sin\left(\frac{2\pi 2}{T}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{2\pi z}{T}\right) & \sin\left(\frac{2\pi z}{T}\right) \\ \frac{1}{2} & \cos\left(2\frac{2\pi}{T}\right) & \sin\left(2\frac{2\pi}{T}\right) & \cos\left(2\frac{2\pi 2}{T}\right) & \sin\left(2\frac{2\pi 2}{T}\right) & \cdots & \cos\left(2\frac{2\pi z}{T}\right) & \sin\left(2\frac{2\pi z}{T}\right) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \cos\left(N\frac{2\pi}{T}\right) & \sin\left(N\frac{2\pi}{T}\right) & \cos\left(N\frac{2\pi 2}{T}\right) & \sin\left(N\frac{2\pi 2}{T}\right) & \cdots & \cos\left(N\frac{2\pi z}{T}\right) & \sin\left(N\frac{2\pi z}{T}\right) \end{bmatrix}.$$

Indem man die geschätzten Parameter aus $C = [a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_z, b_z]^T$ berechnet und diese in die Gleichung $\widehat{\varepsilon}(k)$ oben einsetzt, erhält man die geschätzte Residuenreihe

$$\widehat{\varepsilon}(k) = [\widehat{\varepsilon}(1), \widehat{\varepsilon}(2), \dots, \widehat{\varepsilon}(n), \widehat{\varepsilon}(n+1)]^T.$$

Damit kann der revidierte Prognosewert in diesem Schritt durch

$$\widehat{Y}_{t+1} = F_{t+1} + \widehat{\varepsilon}(t+1)$$

erhalten werden, wobei F_{t+1} und $\widehat{\varepsilon}(t+1)$ jeweils der Prognosewert und der geschätzte Residuenwert zum Zeitpunkt $t+1$ sind.

4.4.4 Prognose der Einschreibungen

Es wird in diesem Abschnitt für ein Experiment eine Prognose der Einschreibungen illustriert, adaptiert von Song und Chissom [16]. In diesem Experiment werden Daten von Studenteneinschreibungen an der University of Alabama von 1971-1992 verwendet, um zu zeigen, dass das vorgeschlagene Modell von Ruey-Chyn Tsaur [18] besser ist als die anderen Modelle.

1. Definiere die Universalmenge U für die historischen Daten:

Aus Tabelle 4.3 entnimmt man den Minimalwert $D_{\min} = 13055$ und den Maximalwert $D_{\max} = 19337$ der Einschreibungen, mit $D_1 = 55$ und $D_2 = 663$. Damit beträgt die Universalmenge $U = [13000; 20000]$.

2. Definiere unscharfe Mengen \widetilde{A}_i der Universalmenge U :

U wird in sieben Intervalle eingeteilt als $u_1 = [13000; 14000]$, $u_2 = [14000; 15000]$, $u_3 = [15000; 16000]$, $u_4 = [16000; 17000]$, $u_5 = [17000; 18000]$, $u_6 = [18000; 19000]$ und $u_7 = [19000; 20000]$. Die linguistischen Variablen sind die unscharfen Mengen $\widetilde{A}_1 = (\text{nicht viele})$, $\widetilde{A}_2 = (\text{nicht zu viele})$, $\widetilde{A}_3 = (\text{viele})$, $\widetilde{A}_4 = (\text{ziemlich viele})$, $\widetilde{A}_5 = (\text{sehr viele})$, $\widetilde{A}_6 = (\text{zu viele})$, $\widetilde{A}_7 = (\text{viel zu viele})$. Somit haben wir

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_1 &= 1/u_1 + 0.5/u_2 + 0/u_3 + 0/u_4 + 0/u_5 + 0/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_2 &= 0.5/u_1 + 1/u_2 + 0.5/u_3 + 0/u_4 + 0/u_5 + 0/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_3 &= 0/u_1 + 0.5/u_2 + 1/u_3 + 0.5/u_4 + 0/u_5 + 0/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_4 &= 0/u_1 + 0/u_2 + 0.5/u_3 + 1/u_4 + 0.5/u_5 + 0/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_5 &= 0/u_1 + 0/u_2 + 0/u_3 + 0.5/u_4 + 1/u_5 + 0.5/u_6 + 0/u_7, \\ \widetilde{A}_6 &= 0/u_1 + 0/u_2 + 0/u_3 + 0/u_4 + 0.5/u_5 + 1/u_6 + 0.5/u_7, \\ \widetilde{A}_7 &= 0/u_1 + 0/u_2 + 0/u_3 + 0/u_4 + 0/u_5 + 0.5/u_6 + 1/u_7.\end{aligned}$$

3. Führe unscharfe logische Beziehungsgruppen ein:

Die unscharfen Mengen für jede Einschreibung sind in Tabelle 4.4 gelistet, deren

unscharfe logische Beziehungen zweiter Ordnung folgendermaßen abgeleitet werden:

$$\begin{array}{cccccccc}
\tilde{A}_1, \tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{A}_1 & \tilde{A}_1, \tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{A}_2 & \tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \rightarrow \tilde{A}_3 & \tilde{A}_2, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_3 & \tilde{A}_3, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_3 \\
\tilde{A}_3, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_3 & \tilde{A}_3, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_4 & \tilde{A}_3, \tilde{A}_4 \rightarrow \tilde{A}_4 & \tilde{A}_4, \tilde{A}_4 \rightarrow \tilde{A}_4 & \tilde{A}_4, \tilde{A}_4 \rightarrow \tilde{A}_3 \\
\tilde{A}_4, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_3 & \tilde{A}_3, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_4 \\
\tilde{A}_3, \tilde{A}_4 \rightarrow \tilde{A}_6 & \tilde{A}_4, \tilde{A}_6 \rightarrow \tilde{A}_6 & \tilde{A}_6, \tilde{A}_6 \rightarrow \tilde{A}_7 & \tilde{A}_6, \tilde{A}_7 \rightarrow \tilde{A}_7 & \tilde{A}_7, \tilde{A}_7 \rightarrow \tilde{A}_6
\end{array}$$

Als nächstes können wir die oben genannten Beziehungen verwenden, um unscharfe logische Beziehungsgruppen festzulegen. Sie werden in Tabelle 4.4 dargestellt, wobei die ersten elf unscharfen Beziehungsgruppen Trainingsmuster sind, und die letzte Gruppe ist ein untrainiertes Muster.

4. Berechne die prognostizierten Ausgaben:

Erinnern wir uns zurück, wie man nach zwei Regeln die Prognose F_t berechnet, wenn $F_{t-2} = \tilde{A}_i$ und $F_{t-1} = \tilde{A}_j$ ist. Diese Prognosewerte sind in der dritten Spalte von Tabelle 4.4 aufgelistet.

5. Bereinige Prognoseergebnisse:

Mit $\varepsilon(k) = Y_k - F_k$ ($\forall k = 1, 2, \dots, n$) können die Residuentermine zwischen den tatsächlichen Werten und den Prognosewerten abgeleitet werden, welche in Spalte 4 von Tabelle 4.5 aufgelistet sind. Um als nächstes genauere Prognosewerte zu ermitteln, lösen wir mithilfe der gesammelten Daten die Parameter der Fourierreihe nach $C = (P^T P)^{-1} P^T \underline{\varepsilon}(k)$. Damit können die geschätzten Residuenwerte $\hat{\underline{\varepsilon}}(k) = [\hat{\varepsilon}(1), \hat{\varepsilon}(2), \dots, \hat{\varepsilon}(n)]^T$ berechnet werden, die Rauschtermine aussortiert werden und die bereinigten Residuentermine erhalten werden, die in der fünften Spalte von Tabelle 4.5 aufgelistet sind.

Nach dem Vorgehen der oben genannten Schritte werden die Prognoseleistungen mithilfe des Prozentsatzes des absoluten Fehlers des Erwartungswertes (*MAPE*) und der Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers (*RMSE*) gemessen. Damit man die Prognosegenauigkeit dieses Modells mit den anderen Modellen vergleichen kann, wurden MAPE und RMSE für alle Methoden berechnet, die in Tabelle 4.6 aufgelistet sind und der Vergleich der Prognosewerte wird in Abbildung 4.11 illustriert. Somit ist ersichtlich, dass das Modell von Ruey-Chyn Tsaur kleinere MAPE und RMSE hat als die anderen Modelle und auch, dass die vorgeschlagene Methode besser ist als die anderen.

Tabelle 4.3: Historische tatsächliche Einschreibungen und unscharfe Einschreibungen

Jahr	Tatsächliche Einschreibung	Fuzzifizierte Einschreibung	Jahr	Tatsächliche Einschreibung	Fuzzifizierte Einschreibung
1971	13055	\tilde{A}_1	1982	15433	\tilde{A}_3
1972	13563	\tilde{A}_1	1983	15497	\tilde{A}_3
1973	13867	\tilde{A}_1	1984	15145	\tilde{A}_3
1974	14696	\tilde{A}_2	1985	15163	\tilde{A}_3
1975	15460	\tilde{A}_3	1986	15984	\tilde{A}_3
1976	15311	\tilde{A}_3	1987	16859	\tilde{A}_4
1977	15603	\tilde{A}_3	1988	18150	\tilde{A}_6
1978	15861	\tilde{A}_3	1989	18970	\tilde{A}_6
1979	16807	\tilde{A}_4	1990	19328	\tilde{A}_7
1980	16919	\tilde{A}_4	1991	19337	\tilde{A}_7
1981	16388	\tilde{A}_4	1992	18876	\tilde{A}_6

Tabelle 4.4: Unscharfe Beziehungsgruppen zweiter Ordnung und Prognosewerte

Unscharfe Beziehungsgruppen		Prognosewerte
Gruppe 1	$\tilde{A}_1, \tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{A}_1$ $\tilde{A}_1, \tilde{A}_1 \rightarrow \tilde{A}_2$	14000 (= $(m_1 + m_2)/2$)
Gruppe 2	$\tilde{A}_1, \tilde{A}_2 \rightarrow \tilde{A}_3$	15500 (= m_3)
Gruppe 3	$\tilde{A}_2, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_3$	15500 (= m_3)
Gruppe 4	$\tilde{A}_3, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_3$ $\tilde{A}_3, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_4$	16000 (= $(m_3 + m_4)/2$)
Gruppe 5	$\tilde{A}_3, \tilde{A}_4 \rightarrow \tilde{A}_4$ $\tilde{A}_3, \tilde{A}_4 \rightarrow \tilde{A}_6$	17500 (= $(m_4 + m_6)/2$)
Gruppe 6	$\tilde{A}_4, \tilde{A}_4 \rightarrow \tilde{A}_4$ $\tilde{A}_4, \tilde{A}_4 \rightarrow \tilde{A}_3$	16000 (= $(m_4 + m_3)/2$)
Gruppe 7	$\tilde{A}_4, \tilde{A}_3 \rightarrow \tilde{A}_3$	15500 (= m_3)
Gruppe 8	$\tilde{A}_4, \tilde{A}_6 \rightarrow \tilde{A}_6$	18500 (= m_6)
Gruppe 9	$\tilde{A}_6, \tilde{A}_6 \rightarrow \tilde{A}_7$	19500 (= m_7)
Gruppe 10	$\tilde{A}_6, \tilde{A}_7 \rightarrow \tilde{A}_7$	19500 (= m_7)
Gruppe 11	$\tilde{A}_7, \tilde{A}_7 \rightarrow \tilde{A}_6$	18500 (= m_6)

Tabelle 4.5: Prognose der Einschreibungen

Jahr	Tatsächliche Einschreibung	Prognosewerte	Residuen	Bereinigte Residuen	Bereinigte Prognosen
1971	13055				
1972	13563				
1973	13867	14000	-133	-133	13867
1974	14696	14000	696	882.388	14882.39
1975	15460	15500	-40	-171.57	15328.43
1976	15311	15500	-189	-301.895	15198.11
1977	15603	16000	-397	-310.17	15689.83
1978	15861	16000	-139	-163.561	15836.44
1979	16807	16000	807	896.049	16896.05
1980	16919	17500	-581	-527.066	16972.93
1981	16388	16000	388	265.29	16265.29
1982	15433	16000	-567	-546.807	15453.19
1983	15497	15500	-3	-14.455	15485.55
1984	15145	16000	-855	-853.119	15146.88
1985	15163	16000	-837	-724.818	15275.18
1986	15984	16000	-16	-75.28	15924.72
1987	16859	16000	859	772.452	16772.45
1988	18150	17500	650	682.677	18182.68
1989	18970	18500	470	363.633	18863.63
1990	19328	19500	-172	-18.616	19481.38
1991	19337	19500	-163	-74.004	19426
1992	18876	18500	376	205.869	18705.87

Tabelle 4.6: Vergleich der Prognoseresultate der Einschreibungen mit anderen Modellen

Jahr	Einschreibung	Ruey-Chyn & Tsaur [18]	Song & Chissom [16]	Tsaur <i>et al.</i> [19]	S.R. Singh [17]	Cheng <i>et al.</i> [4]	Chen [3]
1971	13055						
1972	13563		14000	14000		13680.5	14000
1973	13867	13867	14000	14000		13731.3	14000
1974	14696	14882.39	14000	14000	14500	13761.7	14000
1975	15460	15328.43	15500	15500	15358	15194.6	15500
1976	15311	15198.11	16000	15500	15500	15374.8	16000
1977	15603	15689.83	16000	16000	15500	15359.9	16000
1978	15861	15836.44	16000	16000	15500	16410.3	16000
1979	16807	16896.05	16000	16000	16500	16436.1	16000
1980	16919	16972.93	16813	16500	16500	17130.7	16833
1981	16388	16265.29	16813	16500	16500	17141.9	16833
1982	15433	15453.19	16789	15500	15581	15363.8	16833
1983	15497	15485.55	16000	15500	15500	15372.1	16000
1984	15145	15146.88	16000	15500	15500	15378.5	16000
1985	15163	15275.18	16000	15500	15500	15343.3	16000
1986	15984	15924.72	16000	15500	15500	15345.1	16000
1987	16859	16772.45	16000	16500	16402	16448.4	16000
1988	18150	18182.68	16813	18500	18500	17135.9	16833
1989	18970	18863.63	19000	19000	18500	18915	19000
1990	19328	19481.38	19000	19000	19471	18997	19000
1991	19337	19426	19000	19000	19500	19032.8	19000
1992	18876	18705.87			19651	19033.7	19000
MAPE(%)		0.49512	3.22376	1.87481	1.71204	2.08722	3.11005
RMSE		98.92944	650.405	367.3187	340.5475	438.2768	638.363

Abbildung 4.11: Vergleich zwischen den unscharfen Zeitreihenmethoden



Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit sieht man, dass für die Definition einer unscharfen Zahl ihre charakterisierende Funktion notwendig ist, und wie man diese Funktion mithilfe sogenannter δ -Schnitte und des Darstellungssatzes einfach beschreiben kann. Es wurden zudem unscharfe Intervalle, n -dimensionale unscharfe Intervalle und unscharfe Vektoren betrachtet, wobei letztere durch die Kombination von mehreren unscharfen Zahlen durch die Minimum-Kombinationsregel entstehen.

Auf dieser Grundlage ist die Verallgemeinerung von Funktionen bei Unschärfe möglich. Dabei werden sowohl unscharfe Funktionen als auch Funktionen unscharfer Argumente betrachtet. Letzteres behandelt man mit dem Erweiterungsprinzip, wobei der Funktionswert bei einer stetigen Funktion und unscharfem n -dimensionalem Intervall als Argument ein unscharfes Intervall ist. Letzteres benötigt man, um die Arithmetik für unscharfe Zahlen erweitern zu können. Die Verallgemeinerung der Integration ist sowohl bei unscharfen Funktionen als auch bei unscharfen Integrationsbereichen erfolgreich, wobei man für letzteres eine charakterisierende Funktion für den unscharfen Integrationsbereich benötigt. Beispiele von diesen aufgelisteten Verallgemeinerungen sind dabei mithilfe trapezförmiger unscharfer Zahlen $t^*(m, s, l, r)$ leicht darstellbar.

Für die Verallgemeinerung des Bayes'schen Theorems, für welches die Definition der unscharfen Dichte benötigt wird, bedarf es einer gewissen Modifikation, damit die sequentielle Eigenschaft des Aktualisierungsprozesses erhalten bleibt.

Bei unscharfen Zeitreihen werden Filter (darunter auch gleitende Mittelwerte) betrachtet, um die Werte einer Zeitreihe zu transformieren. Bei negativen Koeffizienten wird zusätzlich die Hukuhara-Addition verwendet, damit die Unschärfe der transformierten unscharfen Zeitreihe nicht größer als die der originalen unscharfen Zeitreihe wird und die Transformation somit einen Sinn ergibt. Solch ein allgemeiner Filter ist aber nicht linear. Um zu einer Zeitreihe zusätzliche Beobachtungen hinzuzufügen, wird die exponentielle Glättung benötigt. Dazu wird auch beschrieben, wie die zugehörigen Glättungsparameter optimiert werden. Bei der Aufteilung der Zeitreihe in Komponenten werden im Falle von unscharfen Daten verschiedene Methoden aufgelistet, die jedoch entweder nicht geeignet sind, zusätzliche Bedingungen benötigen oder zusätzliche Probleme aufweisen. Für den Differenzenfilter und die Holt-Winter-Methode gibt es eine Verallgemeinerung bei unscharfen Zeitreihen, für die Präsentation im Frequenzbereich jedoch nicht.

Der Autor des Hybrid-Modells kombiniert das Fourierreihenmodell mit dem unscharfen Zeitreihenmodell, um große prognostizierte Fehlerterme behandeln zu können. Das illustrierte Beispiel konnte kleinere MAPE und RMSE im Vergleich zu anderen unscharfen Zeitreihenmethoden aufweisen. Diese Vorgehensweise könnte bei Vorliegen begrenzter Daten für Prognosen eine wichtige Rolle spielen.

Literaturverzeichnis

- [1] B.F. ARNOLD: An approach to fuzzy hypothesis testing,
Metrika, Vol. 44 (1996), 119-126
- [2] S. BODJANOVA, R. VIERTL: *Calculation of Integrals of Fuzzy Functions*,
Res. Report RIS-1998-2, Institut für Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie,
TU Wien, 1998
- [3] S.M. CHEN, Forecasting enrollments based on fuzzy time series,
Fuzzy Sets and Systems 81 (1996), 311-319
- [4] C.H. CHENG, T.L. CHEN, H.J. TEOH AND C.H. CHIANG, Fuzzy time-series based
on adaptive expectation model for TAIEX forecasting,
Expert Systems with Applications 34 (2008), 1126-1132
- [5] P. GRZEGORZEWSKI: Fuzzy tests - defuzzification and randomization,
Fuzzy Sets and Systems, Vol 180 (2001), 437-446
- [6] D. HARETER: *Zeitreihenanalyse mit unscharfen Daten*,
Dissertation, Fakultät für technische Naturwissenschaften und Informatik,
TU Wien, 2003
- [7] G. JANACEK: *Practical Time Series*, Oxford University Press, New York, 2001
- [8] MICHAEL KALTENBÄCK: *Fundament Analysis*, Berliner Studienreihe zur
Mathematik, Band 26, Heldermann Verlag, 2015
- [9] G. KLIR, B. YUAN: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic - Theory and Applications*,
Prentice Hall, Upper Saddle River, 1995
- [10] R. KÖRNER: *Linear Models with Random Fuzzy Variables*,
Dissertation, Fakultät für Mathematik und Informatik,
Technische Universität Bergakademie Freiberg, 1997
- [11] R. KÖRNER: An asymptotic α -test for the expectation of random fuzzy variables,
J. Statist. Plann. Inference, Vol. 83 (2000), 331-346
- [12] Y.H. LIN, P.C. LEE, Novel high-precision grey forecasting model,
Automation in Construction 16 (2007), 771-777
- [13] C. RÖMER, A. KANDEL: Statistical tests for fuzzy data,
Fuzzy Sets and Systems, Vol. 72 (1995), 1-26

- [14] R. SCHLITGEN, H.J. STREITBERG: *Zeitreihenanalyse*, 8. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, 1984
- [15] Q. SONG, B.S. CHISSOM, Forecasting enrollments with fuzzy time series - part I, *Fuzzy Sets and Systems* 54 (1993), 1-9
- [16] Q. SONG, B.S. CHISSOM, Forecasting enrollments with fuzzy time series - part II, *Fuzzy Sets and Systems* 62 (1994), 1-8
- [17] Q. SONG, B.S. CHISSOM, Fuzzy time series and its models, *Fuzzy Sets and Systems* 54 (1993), 269-277
- [18] RUEY-CHYN TSAUR, *Fourier residual analysis in Fuzzy time series model*, Department of Management Sciences, Tamkang University, 2014
- [19] R.C. TSAUR, J.C. O YANG AND H.F. WANG, Fuzzy Relation Analysis in Fuzzy Time Series Model, *Computers and Mathematics with Application* 49 (2005), 539-548
- [20] R. VIERTL: *Statistical Methods for Fuzzy Data*, Wiley, Chichester, 2011
- [21] R. VIERTL, D. HARETER: *Beschreibung und Analyse unscharfer Information*, Springer, Wien, 2006
- [22] R. VIERTL: STATISTICS AND INTEGRATION OF FUZZY FUNCTIONS, *Environmetrics*, Vol. 10 (1999), 487-491
- [23] C.H. WANG, Predicting tourism demand using fuzzy time series and hybrid grey theory, *Tourism Management* 25 (2004), 367-374
- [24] N.Y. WANG, CHEN, S.-M., Temperature prediction and TAIFEX forecasting based on automatic clustering techniques and two-factor high-order fuzzy time series, *Expert Systems with Applications*, 36 (2007), 2143-2154
- [25] H.L. WONG, Y.H. TU AND C.C. WANG, Application of fuzzy time series models for forecasting the amount of Taiwan export, *Expert Systems with Applications* 37 (2010), 1465-1470
- [26] H. WORACEK, M. KALTENBÄCK, M. BLÜMLINGER: *Funktionalanalysis*, Skriptum, TU Wien, 2015

Tabellenverzeichnis

4.1	Werte von 48 trapezförmigen saisonabhängigen unscharfen Beobachtungen Quelle: [20], S.180	48
4.2	Werte der unscharfen Saisonkomponenten Quelle: [20], S.181	49
4.3	Historische tatsächliche Einschreibungen und unscharfe Einschreibungen Quelle: [18], S.13	63
4.4	Unscharfe Beziehungsgruppen zweiter Ordnung und Prognosewerte Quelle: [18], S.13	63
4.5	Prognose der Einschreibungen Quelle: [18], S.15	64
4.6	Vergleich der Prognoseresultate der Einschreibungen mit anderen Modellen Quelle: [18], S.16	65

Abbildungsverzeichnis

2.1	δ -Schnitt einer charakterisierenden Funktion	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	4
2.2	Indikatorfunktion des Intervalls $[a, b]$	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	4
2.3	Charakterisierende Funktionen unscharfer Intervalle	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	4
2.4	Charakterisierende Funktion und δ -Schnitt	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	5
2.5	Trapezförmige unscharfe Zahl	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	6
2.6	Kombination von zwei unscharfen Zahlen	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	9
3.1	δ -Niveaufunktionen einer unscharfen Funktion	
	Quelle: [20], S.28, dazu noch paar Bezeichnungen selber hinzugefügt . . .	11
3.2	Stetige Funktion eines unscharfen Intervalls	
	Quelle: [20], S.23	12
3.3	Addition zweier unscharfer Intervalle	
	Quelle: [20], S.24	14
3.4	Multiplikation zweier unscharfer Intervalle	
	Quelle: [20], S.26	15
3.5	Charakterisierende Funktion der trapezförmigen unscharfen Zahl $t^*(3, 1, 1, 1)$	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	17
3.6	δ -Schnitte der unscharfen konstanten Funktion $f^*(x) \equiv y^*$	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	17
3.7	Charakterisierende Funktion des unscharfen Integrals J^*	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	18
3.8	Charakterisierende Funktionen $\eta_{y_1^*}(x)$ und $\eta_{y_2^*}(x)$	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	20
3.9	δ -Schnitte der unscharfen Funktion $f^*(t) \equiv y_t^*$	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	21
3.10	Charakterisierende Funktion des unscharfen Integrals J^*	
	Quelle: selbst mit LaTeX gemacht	21
4.1	Ein paar δ -Niveaufunktionen von $\pi^*(\cdot)$	
	Quelle: von Dr. Owat Sunanta mit R bereitgestellt	33

4.2	Unscharfe Stichprobe	
	Quelle: von Dr. Owat Sunanta mit R bereitgestellt	33
4.3	Unscharfe A-posteriori-Dichte	
	Quelle: von Dr. Owat Sunanta mit R bereitgestellt	34
4.4	Gleitende Mittelwerte der Länge 2	
	Quelle: [20], S.169, dazu noch Legende selber verändert	36
4.5	Exponentielle Glättung mit optimalem Glättungsparameter	
	Quelle: [20], S.176, dazu noch Legende selber verändert	44
4.6	Unscharfe Beobachtungen mit saisonalem Einfluss	
	Quelle: [20], S.180	48
4.7	Zeitreihen der Steinerpunkte und der durchschnittlichen Länge der δ -Schnitte	
	Quelle: [20], S.181, dazu noch Legende selber verändert	49
4.8	Unscharfe Saisonkomponenten	
	Quelle: [20], S.182	50
4.9	Exponentielle Glättung mit optimalem Glättungsparameter	
	Quelle: [20], S.182, dazu noch Legende selber verändert	50
4.10	Beobachtete und prognostizierte Daten	
	Quelle: [20], S.186, dazu noch Legende selber verändert	54
4.11	Vergleich zwischen den unscharfen Zeitreihenmethoden	
	Quelle: [18], S.17, selbst mit LaTeX nochmals gemacht	65

Symbolverzeichnis

$[a; b)$	links abgeschlossenes, rechts offenes Intervall	<i>S. 2</i>
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall	<i>S. 2</i>
$C_\delta[f^*(\cdot)]$	δ -Schnitt einer unscharfen Funktion	<i>S. 10</i>
$C_\delta[x^*]$	δ -Schnitt der unscharfen Zahl x^*	<i>S. 3</i>
$C_\delta[\underline{x}^*]$	δ -Schnitt des unscharfen Vektors \underline{x}^*	<i>S. 7</i>
$C_\delta[\xi(\cdot)]$	δ -Schnitt der charakterisierenden Funktion $\xi(\cdot)$	<i>S. 22</i>
$f(\cdot \mid \theta), \forall \theta \in \Theta$	stetiges, parametrisches stochastisches Modell mit parametrischer Wahrscheinlichkeitsdichte f	<i>S. 27</i>
$f(x^*)$	Funktion mit unscharfem Argument x^*	<i>S. 11</i>
$f^*(\cdot)$	unscharfe Funktion	<i>S. 10</i>
$\bar{f}_\delta(\cdot)$	obere δ -Niveaufunktion der unscharfen Funktion f^*	<i>S. 10</i>
$\underline{f}_\delta(\cdot)$	untere δ -Niveaufunktion der unscharfen Funktion f^*	<i>S. 10</i>
$\bar{f}_{0+}(\cdot)$	oberer Rand des Trägers von $f^*(\cdot)$	<i>S. 17</i>
$\underline{f}_{0+}(\cdot)$	unterer Rand des Trägers von $f^*(\cdot)$	<i>S. 17</i>
$\mathcal{F}(\mathbb{R})$	Menge aller unscharfen Zahlen	<i>S. 3</i>
$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$	Menge aller n -dimensionalen unscharfen Vektoren	<i>S. 7</i>
$\mathcal{F}_2(\mathbb{R}^n)$	Menge aller n -dimensionalen unscharfen Vektoren mit Euklidischer Norm $< \infty$	<i>S. 40</i>
$\mathcal{F}_I(\mathbb{R})$	Menge aller unscharfen Intervalle	<i>S. 4</i>
$\mathcal{F}_I(\mathbb{R}^n)$	Menge aller n -dimensionalen unscharfen Intervalle	<i>S. 7</i>
$\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$	Menge aller Trägerfunktionen von n -dimensionalen unscharfen Vektoren	<i>S. 39</i>
$I_A(\cdot)$	Indikatorfunktion der Menge A	<i>S. 3</i>

\inf	Infimum	<i>S. 42</i>
J^*	unscharfes Integral	<i>S. 16</i>
$l(\theta; x_1, \dots, x_n)$	Likelihood-/Plausibilitätsfunktion	<i>S. 27</i>
$l^*(\theta; \underline{x}^*)$	verallgemeinerte Plausibilitätsfunktion	<i>S. 28</i>
$\bar{l}_\delta(\cdot; \underline{x}^*)$	obere δ -Niveaufunktion der unscharfen Likelihood-Funktion	<i>S. 28</i>
$l_\delta(\cdot; \underline{x}^*)$	untere δ -Niveaufunktion der unscharfen Likelihood-Funktion	<i>S. 28</i>
\max	Maximum	<i>S. 6</i>
\min	Minimum	<i>S. 7</i>
M^C	Komplement der Menge M	<i>S. 2</i>
M_X	Beobachtungsraum von X	<i>S. 27</i>
M_X^n	Stichprobenraum von X	<i>S. 28</i>
P	Wahrscheinlichkeitsmaß	<i>S. 2</i>
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen	<i>S. 1</i>
\mathbb{R}^+	Menge der positiven, reellen Zahlen	<i>S. 41</i>
\mathbb{R}_0^+	Menge der positiven, reellen Zahlen mit 0	<i>S. 40</i>
\mathbb{R}^n	Menge aller n -dimensionalen reellen Vektoren	<i>S. 7</i>
$s_A(\cdot)$	Trägerfunktion	<i>S. 39</i>
S^{n-1}	n -dimensionale Einheitskugel	<i>S. 39</i>
$s_{\underline{x}^*}(\cdot, \cdot)$	Trägerfunktion des unscharfen Vektors \underline{x}^*	<i>S. 39</i>
\sup	Supremum	<i>S. 5</i>
$T(\cdot, \cdot)$	t-Norm	<i>S. 8</i>
T_{\min}	Minimum-t-Norm	<i>S. 13</i>
$t^*(m, s, l, r)$	trapezförmige unscharfe Zahl	<i>S. 6</i>
$\text{Tr}[x^*]$	Träger der unscharfen Zahl x^*	<i>S. 22</i>
$\text{Tr}[\xi(\cdot)]$	Träger der charakterisierenden Funktion $\xi(\cdot)$	<i>S. 3</i>
$\text{Tr}[\xi(\cdot, \dots, \cdot)]$	Träger der vektorcharakterisierenden Funktion $\xi(\cdot, \dots, \cdot)$	<i>S. 7</i>
x^*	unscharfe Zahl	<i>S. 3</i>
$\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$	reeller Vektor	<i>S. 8</i>

\underline{x}^*	unscharfer Vektor	<i>S. 7</i>
(x_1^*, \dots, x_n^*)	Vektor mit n unscharfen Zahlen	<i>S. 8</i>
$(x_t^*)_{t \in T}$	unscharfe Zeitreihe	<i>S. 34</i>
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen	<i>S. 44</i>
(Ω, \mathcal{A})	Messraum	<i>S. 2</i>
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$	Maßraum	<i>S. 2</i>
(Ω, \mathcal{A}, P)	Wahrscheinlichkeitsraum	<i>S. 2</i>
\oplus	verallgemeinerte Addition	<i>S. 13</i>
\oplus_H	Hukuhara-Addition	<i>S. 40</i>
\ominus	verallgemeinerte Subtraktion	<i>S. 14</i>
\ominus_H	Hukuhara-Differenz	<i>S. 40</i>
\odot	verallgemeinerte Multiplikation	<i>S. 14</i>
\oslash	verallgemeinerte Division	<i>S. 16</i>
$\pi(\cdot)$	A-priori-Dichte	<i>S. 27</i>
$\pi^*(\cdot)$	unscharfe A-priori-Dichte	<i>S. 28</i>
$\bar{\pi}_\delta(\cdot)$	obere δ -Niveaufunktion einer unscharfen A-priori-Dichte	<i>S. 28</i>
$\underline{\pi}_\delta(\cdot)$	untere δ -Niveaufunktion einer unscharfen A-priori-Dichte	<i>S. 28</i>
$\pi(\cdot \mid x_1, \dots, x_n)$	A-posteriori-Dichte	<i>S. 27</i>
$\pi^*(\cdot \mid \underline{x}^*)$	unscharfe A-posteriori-Dichte	<i>S. 28</i>
$\bar{\pi}_\delta(\cdot \mid \underline{x}^*)$	obere δ -Niveaufunktion einer unscharfen A-posteriori-Dichte	<i>S. 29</i>
$\underline{\pi}_\delta(\cdot \mid \underline{x}^*)$	untere δ -Niveaufunktion einer unscharfen A-posteriori-Dichte	<i>S. 29</i>
$\sigma_{\underline{x}^*}$	Steinerpunkt eines unscharfen Vektors \underline{x}^*	<i>S. 39</i>
\sim_H	verallgemeinerte Hukuhara-Differenz	<i>S. 40</i>
Θ	Parameterraum/Wahrscheinlichkeitsraum	<i>S. 27</i>
θ	Parameter	<i>S. 27</i>
$\tilde{\theta}$	stochastische Größe, die den Parameter im Bayes'schen Kontext beschreibt	<i>S. 27</i>
$\xi(\cdot, \dots, \cdot)$	vektorcharakterisierende Funktion	<i>S. 7</i>