

---

Unterschrift des Betreuers



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

---

DIPLOMARBEIT

---

# Credit Valuation Adjustment von Zinsswaps mit Collateral

Ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Associate Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan GERHOLD

durch

Silvia DOKO, BSc

1210 Wien

Jedlersdorfer Straße 294

---

Ort, Datum

---

Unterschrift

## **Danksagung**

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während des Verfassens meiner Diplomarbeit unterstützt haben.

Zuerst gebührt mein Dank an Herr. Prof. Dr. Stefan Gerhold, der meine Diplomarbeit betreut und begutachtet hat. Außerdem geht mein Dank an meine Arbeitskollegen Dr. Alexander Prüll, Dr. Andreas Gerhold und Dr. Winfried Koller, die mich bei meiner Diplomarbeit sehr hilfsbereit zu Seite standen und mit zahlreichen Ratschlägen geholfen haben. Für die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Ebenfalls möchte ich mich bei Dr. Johann Wruss und Dr. Roswitha Wruss bedanken, die mir mit viel Geduld und Interesse zur Seite standen. Und meiner Studienkollegin und Freundin Jessica Aigner, mit ihr ich eine tolle, lustige Studienzeit hatte und mich motiviert hat.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Eltern Atem und Mereme Asani und bei meinen Ehemann Dardan Doko bedanken, die mir mein Studium durch ihre Unterstützung ermöglicht haben und stets ein offenes Ohr für meine Sorgen hatten.

DANKE!

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>7</b>
2.1	Finanzrisiken . . . . .	7
2.2	Counterparty Risk . . . . .	8
2.3	Steuerung von Kontrahentenrisiken . . . . .	10
2.3.1	Collateral Management . . . . .	10
2.3.2	Nettingvereinbarung . . . . .	11
2.3.3	Hedging von Kontrahentenrisiko . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Credit Exposure</b>	<b>14</b>
3.1	Potential Future Exposure (PFE) . . . . .	15
3.2	Expected Exposure (EE) . . . . .	16
3.3	Expected positive Exposure (EPE) . . . . .	17
3.4	Expected negative Exposure (ENE) . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Credit Valuation Adjustment</b>	<b>19</b>
4.1	Formel von CVA . . . . .	21
4.1.1	Modellierung der Ausfallwahrscheinlichkeit . . . . .	23
4.2	Grundgrößen des CVA . . . . .	24
4.3	Debt Valuation Adjustment . . . . .	24
4.3.1	Formel von DVA . . . . .	25
<b>5</b>	<b>CVA mit Collateral</b>	<b>27</b>
5.1	Exposure mit Collateral . . . . .	27
5.2	Beschreibung der Parameter . . . . .	28
5.3	Credit Support Annex . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Zinsstrukturmodell</b>	<b>30</b>
6.1	Short-Rate Modelle . . . . .	31
6.1.1	Hull-White Modell . . . . .	33
6.1.2	Linear-Gauss-Markov Modell . . . . .	35
6.1.3	LGM Modell aus dem Hull-White Modell herleiten . . . . .	37
6.2	Kuponanleihen und Zinsswaps . . . . .	41
6.2.1	Zinsrate . . . . .	41
6.2.2	Bewertung von Kuponanleihen . . . . .	42
6.2.3	Bewertung von Zinsswaps . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Monte-Carlo-Simulation</b>	<b>46</b>
7.1	Monte-Carlo-Fehlerabschätzung . . . . .	49

<b>8</b>	<b>Berechnung des CVA von Zinsswap</b>	<b>51</b>
8.1	Berechnungsschritte für CVA . . . . .	51
8.2	Berechnungsbeispiel mit LGM für einen Zinsswap . . . . .	53
8.2.1	Curve-Simulation . . . . .	53
8.2.2	Bewertung des Zinsswaps . . . . .	54
8.2.3	Bestimmen des Exposures . . . . .	55
8.2.4	Ergebnis Exposure mit Collateralzahlungen . . . . .	59
8.2.5	Ausfallwahrscheinlichkeit . . . . .	64
8.2.6	Berechnung CVA . . . . .	65
8.3	Berechnungsbeispiel mit HW für einen Zinsswap . . . . .	66
8.3.1	Curve-Simulation . . . . .	66
8.3.2	Bewertung des Zinsswaps . . . . .	68
8.3.3	Bestimmen des Exposures . . . . .	69
8.3.4	Ausfallwahrscheinlichkeit . . . . .	71
8.3.5	Berechnung CVA . . . . .	72
<b>9</b>	<b>Resümee</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>74</b>
A.1	Euler-Maruyama-Verfahren . . . . .	74
A.2	Methoden zur Schätzung der Zinsstrukturkurven . . . . .	74
A.3	Zinskurven-Daten . . . . .	76
A.4	Credit Default Spread . . . . .	78

## Abbildungsverzeichnis

1	Art der Kontrahenten . . . . .	9
2	Geschichte des Kontrahentenrisikos . . . . .	10
3	Credit Exposure . . . . .	14
4	Darstellung PFE(t) und EE(t) . . . . .	17
5	Abbildung des EPE auf einen EE-Profil . . . . .	18
6	Kenngrößen CVA . . . . .	20
7	Bewertung des Kontrahentenrisikos: Anleihe VS Swap . . . . .	22
8	Grundgrößen CVA - Ausfallwahrscheinlichkeit, Exposure . . . . .	24
9	Arten von Zinsstrukturmodellen . . . . .	31
10	Zahlungsströme . . . . .	44
11	$D(0,t)=\exp(-0,025t)$ . . . . .	53
12	EE (3M-EURIBOR VS 2,59%) . . . . .	55
13	ENE (3M-EURIBOR VS 2,59%) . . . . .	56
14	EE (6M-EURIBOR VS 2,59%) . . . . .	57
15	ENE (6M-EURIBOR VS 2,59%) . . . . .	58
16	Untersuchung EE und EE mit Schwellenwert von 100.000, Collateral wird am selben Tag übermittelt . . . . .	60
17	EE mit Schwellenwert von 100.000, Collateral wird nach zwei Tagen übermittelt . . . . .	61
18	ENE mit Schwellenwert von 100.000, Collateral wird am selben Tag übermittelt . . . . .	62
19	ENE mit Schwellenwert von 100.000, Collateral wird nach zwei Tagen übermittelt . . . . .	62
20	Untersuchung des EE mit Schwellenwert von 100.000 und mit/ohne Minimum-Transfer-Betrag von 50.000 (2) . . . . .	63
21	Untersuchung des EE mit Schwellenwert von 100.000 und mit/ohne Minimum-Transfer-Betrag von 50.000 (0) . . . . .	64
22	Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeit mit $\lambda = 2\%$ . . . . .	65
23	Zinskurve VS Svensson-Methode . . . . .	66
24	EE, ENE, PFE . . . . .	69
25	EE und EE mit einem Schwellenwert von 500.000 . . . . .	70
26	Ausfallwahrscheinlichkeit der deutschen Lufthansa . . . . .	71
27	Ausfallwahrscheinlichkeit der Commerzbank . . . . .	72

# 1 Einleitung

Vor der Erfindung von Computern und den dahintersteckenden hoch komplexen Systemen gab es einfache Handelsstrukturen, die für alle finanziellen Transaktionen verwendet wurden. Die Einführung von modernen, fortgeschrittenen Computern sowie Datengewinnungssystemen war für Unternehmen bedeutend, da dadurch Instrumente der Risikominimierung verwendet werden konnten. Ein Unternehmen, welches in einem speziellen Geschäftsbereich agiert, ist verschiedenen Risiken ausgesetzt, wie beispielsweise das finanzielle Risiko. Das Finanzrisiko lässt sich in Marktrisiko, Kreditrisiko, Liquiditätsrisiko sowie Betriebsrisiko gliedern.

Alle diese Risiken haben einen Einfluss auf die Verträge zwischen Marktteilnehmern. Auf einen Teilbereich, nämlich die Quantifizierung des Kreditrisikos, fokussiert sich die Forschung speziell. Hierbei analysierte man besonders das Kontrahentenrisiko, welches als Counterparty Credit Risk (CCR) bezeichnet wird, das das Auftreten von Verlusten aufgrund von Vertragsverletzungen in Form von Verzug verdeutlicht. Alle Risikofaktoren werden kombiniert und quantifiziert, da eine einzelne Betrachtung der Faktoren eine hohe Komplexität mit sich bringen würde. Mit der Zeit expandierten einige Institutionen so stark, dass CCR nicht mehr in die Kalkulation des Kreditrisikos eingebunden wurde, da man davon ausging, dass die Sicherheit dieser Institutionen mit Staatsanleihen zu vergleichen ist. Es gab jedoch einige Fälle, die verdeutlichen haben, dass sogar die Institutionen, die „too big to fail“ sind, tatsächlich gescheitert sind. Mehrere Unternehmen wie Long Term Capital Management in 1998, Enron in 2001, WorldCom in 2002 und Lehman Brothers in 2008 verzeichneten einen Zusammenbruch. Die Finanzkrise im Jahr 2008 war ein sogenannter Weckruf, der zeigte, dass es keine Institutionen gibt, die zu groß zum Scheitern sind. Hätte die Regierung nicht mit Notfallförderungen entgegengewirkt, wäre das gesamte Finanzsystem eingestürzt und hätte auf den Weltmärkten Schockwellen ausgelöst. Daher haben Unternehmen angefangen, den Wert des CCR in ihre Kosten miteinzubeziehen, da die meisten Verluste durch Wert- sowie Zeitberichtigungen der OTC Derivate herbeigeführt wurden <sup>1</sup>.

Infolge der Finanzkrise wurden Wertanpassungen von Krediten, den sogenannten Credit Value Adjustments (CVA), in den Preis der CCR integriert. Die CVA wurden buchhalterisch im Jahr 2007/2008 eingeführt und werden heutzutage von den meisten Unternehmen in Jahresabschlüssen mit berücksichtigt. Die CVA bilden den gleichen Betrag wie der Unterschied zwischen risikofreiem und

---

<sup>1</sup><https://www.cmegroup.com/education/files/fincad-hedge-accounting-kpmg-3.pdf>

risikoangepasstem Wert. Somit sind die CVA der Marktwert des CCR. Die Berechnung des CVA ist nicht standardisiert, was bedeutet, dass dieser Wert von Unternehmen zu Unternehmen variiert. Abhängig von den finanziellen Ressourcen der Teilnehmer ist die Berechnung komplex oder einfacher gestaltet. Nähere Erklärungen sowie Berechnungen der CVA befinden sich im Anschluss.

CCR und CVA weisen eine hohe Komplexität auf, da die zugrundeliegenden Anlagen oder Derivate im Freiverkehr gehandelt werden, also „traded over the counter“ (OTC). Was bedeutet, sie werden in der Börse nicht gehandelt. Größere Finanzinstitutionen haben eine höhere Belastung von Derivaten als andere Institutionen mit nur wenigen Derivaten, trotz deren anspruchsvolleren Instrumenten für die Berechnung der CVA. Eine weitere Erschwernis der CVA ist der Erhalt von Marktdaten für die korrekte Berechnung der aufgewendeten Belastung. Ebenso ist es abhängig von Marktzugang sowie Ressourcen der Marktteilnehmer. Da diese Ressourcen nicht umfassend verfügbar sind, werden von Dritten üblicherweise Marktdaten bezüglich Bewertungsannahmen zu Verfügung gestellt.

Die Krise im Jahr 2008 führte zu einer neuen Definition des Risikolevels und der Einführung der CVA jenes Wertes, der nie quantifiziert wurde aufgrund der Annahme „too big to fail“. Anschließend findet man in dieser Arbeit Details über Risikofaktoren der Marktteilnehmer in Absatzmärkten und Derivaten an sich. Ebenso wird in dieser Untersuchung der Fokus auf die Reduktion von CCR und die Berechnung der CVA gerichtet. Außerdem werden spezielle Risiken genauer beschrieben. Darauf folgt eine Analyse bezüglich des Umgangs mit diesen Risiken, Hinweise auf nötige Anpassungen zu den verwendeten finanziellen Instrumenten sowie regelnde Märkte und abschließend ein Zukunftsblick hinsichtlich des Gegenparteerisikos.

Ausgehend von der Annahme, dass jedes Finanzinstrument Risiken in sich birgt, wird in dieser Arbeit untersucht, welcher Art diese Risiken sind und ob es Besicherungsmethoden gibt, welche vor diesen Risiken schützen oder diese zumindest minimieren können.

Ins Zentrum der Erörterungen wird dabei der Credit ValuationAdjustment (CVA) für einen Zinsswap gestellt und dessen Entstehung erläutert. Weiters ergibt sich daraus die Frage nach einem geeigneten Zinsstrukturmodell, das zur Bewertung von Zinsswaps einsetzbar erscheint. Dazu wird im Hauptteil die Besicherungsmethode der Collateralzahlungen herangezogen und untersucht, wie sich der Marktwert (Exposure) mit und ohne Collateral verhält.

## 2 Grundbegriffe

Im Folgenden werden die wichtigsten Begriffe, die grundlegend für das Thema sind, definiert.

### 2.1 Finanzrisiken

Das Finanzrisiko gliedert sich in verschiedene Arten, darunter beispielsweise das Kreditrisiko, das Marktrisiko und das operationale Risiko. Das Kontrahentenrisiko (Counterparty Risk) ist wohl eines der kompliziertesten finanziellen Risiken, mit dem man umgehen muss. Beim Derivat Handel kann man sich sehr schnell verspekulieren und es stellt ein sehr riskantes Vorgehen dar. Doch hat dies nicht nur Nachteile, denn Finanzderivate können sehr nützlich sein und unterstützen das globale Wachstum des Finanzmarktes, allerdings ist es mit Vorsicht zu genießen.

Nun werden einige Arten von Finanzrisiken definiert, wie sie aus [12], [13] und [14] hervorgehen.

**Definition 2.1 (Kreditrisiko)** *Unter Kreditrisiko ist das Risiko einer Wertverschlechterung aufgrund eines kreditbezogenen Ereignisses zu verstehen.*

**Definition 2.2 (Kreditbezogenes Ereignis)** *Unter kreditbezogenem Ereignis versteht man eine Veränderung der Bonität des Kreditnehmers (Wanderung), einen Kreditausfall oder auch eine Veränderung der Credit Spreads am Markt.*

Daraus ergeben sich **zwei Aspekte des Kreditrisikos:**

- **Ausfallsrisiko:**

Das Ausfallsrisiko ist das Risiko eines effektiven Wertverlustes aufgrund des Ausfalls eines Kreditnehmers.

- **Credit Spread Risiko:**

Der Credit Spread ist der Aufschlag auf einen risikolosen Zins, um den Risikogehalt von Kreditverhältnissen zu berücksichtigen [14]. Das Credit Spread Risiko bemisst das Risiko aufgrund der Schwankungen der Credit Spreads am Markt, bei gleichbleibender Bonität des Kreditnehmers.

**Definition 2.3 (Marktrisiko)** *Unter Marktrisiko versteht man das Risiko, dass die Bank durch Marktbewegungen Verluste auf die offenen Positionen erleidet.*

**Definition 2.4 (operationales Risiko)** *Unter operationalen Risiken sind üblicherweise alle Risiken zu verstehen, die durch nicht funktionierende Systeme bei den Banken verursacht werden. Dies können Computerausfälle oder auch ungenügende organisatorische Voraussetzungen in den Banken sein.*

## 2.2 Counterparty Risk

**Definition 2.5 (Counterparty Risk)** *Unter einem Kontrahentenrisiko (engl. counterparty risk) versteht man das Risiko des Ausfalls eines Marktteilnehmers.*

Das Kreditrisiko entspricht dem Risiko, dass ein Kreditnehmer, dem Kreditgeber den gewährten Kredit nicht oder zum Teil nicht zurückzahlen kann. Das Kontrahentenrisiko ist ein Teil vom Kreditrisiko. Das Risiko besteht darin, dass der Vertragspartner seine vertragliche Verpflichtung (für Swaps, Futures, ect.) nicht erfüllen kann. Zwei wesentliche Unterschiede zwischen Kreditrisiko und Kontrahentenrisiko sind:

- Der zukünftige Wert des Vertrages ist noch ungewiss.
- Beide Vertragsparteien tragen das Risiko in der vertraglichen Verpflichtung, falls einer der Partner nicht in der Lage sein sollte, seinen vertraglichen Zahlungen nachzugehen. Ein Grund für eine Zahlungsunfähigkeit ist Insolvenz.

Bei allen Finanztransaktionen bestehen unterschiedliche Kontrahentenrisiken. Falls eine der Vertragsparteien ein höheres Ausfallrisiko hat, wird als Sicherheit eine Prämie für die Gegenpartei angelegt.

Das Kontrahentenrisiko (Counterparty Risk) über eine Börse ist im Gegensatz zu außerbörslichem Handel (Over-the-Counter (OTC)) viel geringer gehalten. Bei über die Börse gehandelten Finanzderivaten oder Aktiengeschäften hat das Ausfallrisiko eine nebensächliche Bedeutung, weil der Margin Account das Verlustrisiko reduziert. Hingegen bei gehandelten OTC-Geschäften ist das Ausfallrisiko des Kontrahenten sehr hoch, da die Verträge zwischen zwei Vertragspartnern ohne vermittelnde Börse zustande kommen. Im OTC-Markt erspart man sich die Börsengebühr, die fällig ist wenn man über die Börse handelt. Außerdem kann man auf zum Beispiel sinkende bzw. steigende Kurse schneller reagieren, indem man den direkten Handel nutzt und nicht erst über die Börse den Auftrag erteilt.

In der folgende Abbildung werden die Arten von Kontrahenten gegliedert.

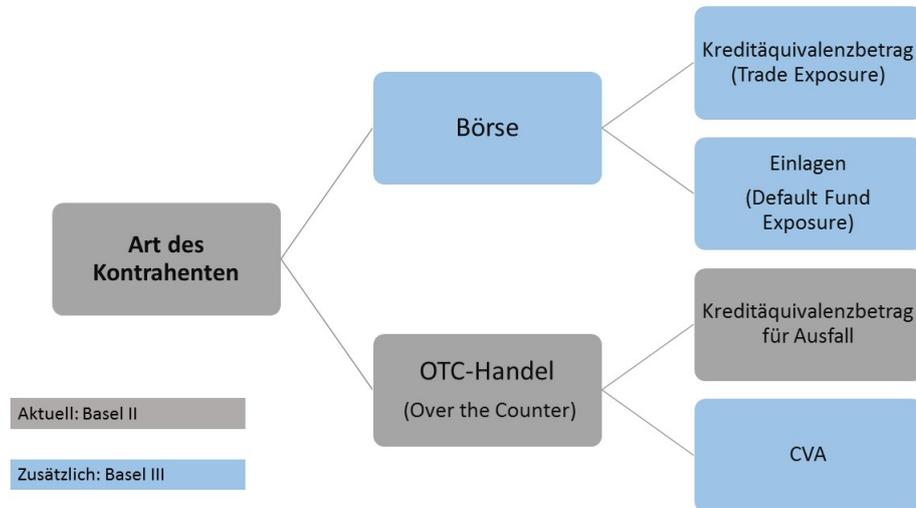


Abbildung 1: Art der Kontrahenten *Quelle: [10]*

*Unter dem Begriff Credit Valuation Adjustment versteht man den Marktpreis für das Kreditrisiko der Gegenpartei bei OTC-Geschäften [11]. Vor der Finanzkrise 2007 hat man genau dieses Risiko bei der Bewertung von OTC-Geschäften vernachlässigt.*

Die folgenden Abbildung bietet einen kurzen Überblick über den historischen Werdegang des Kontrahentenrisikos und macht deutlich, ab wann CVA große Bedeutung erlangt hat:

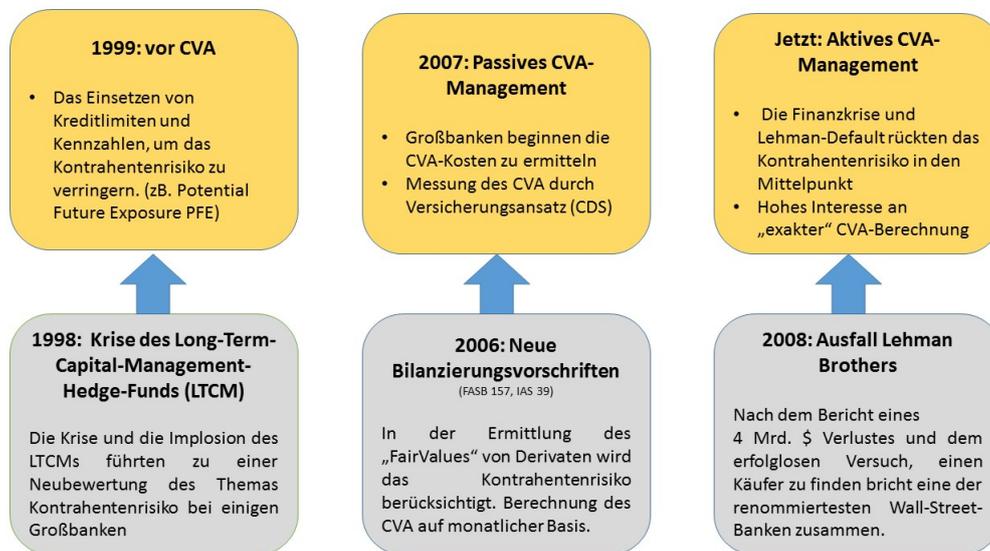


Abbildung 2: Geschichte des Kontrahentenrisikos *Quelle: [10]*

## 2.3 Steuerung von Kontrahentenrisiken

Es gibt viele Möglichkeiten das Ausfallrisiko des Kontrahenten zu reduzieren. Hier werden einige Methoden zur Vermeidung des Ausfallrisikos vorgestellt bzw. erklärt. Einige dieser Methoden sind einfach, während andere kostspielig und sehr komplex zu implementieren sind.

### 2.3.1 Collateral Management

In der Definition 2.5 haben wir bereits erklärt, dass als Kontrahentenrisiko jenes Risiko verstanden wird das entsteht, falls der Vertragspartner seine vertraglichen Pflichten in Zukunft nicht erfüllen kann. Durch das Hinterlegen von Sicherheiten kann man das Kontrahentenrisiko aus Transaktionen wie Wertpapierleihen, Repurchase Agreements, Asset Backed Liabilities und OTC-Derivaten reduzieren. Diesen Prozess zur Verringerung des Kontrahentenrisikos beschreibt das Collateral Management [19].

**Definition 2.6 (Collateral)** *Unter Collateral versteht man Sicherheitszahlungen, die der Vertragspartner (in regelmäßigen Abständen) stellen muss.*

Wir betrachten zwei Kontrahenten, und zwar den Kontrahenten A und Kontrahenten B. Aus der Sicht des Kontrahenten A sind die Sicherheitszahlungen fällig, falls der Marktwert des Derivates zu diesem Zeitpunkt positiv ist und einen definierten Schwellenwert (threshold) überschreitet. Beim Kontrahenten

B betrachten wir den negativen Marktwert des Derivates zu diesem Zeitpunkt und folglich darunter liegendem definierten Schwellenwert, also das Gegenstück zum Kontrahenten A.

Ein Schwellenwert (threshold) wird definiert, falls der Vertragspartner sehr solide ist und je nach Rating wird ein fixer Betrag festgelegt, welcher im Vertrag vereinbart wird. Ist der Marktwert unter dem definierten Wert (aus der Sicht des Kontrahenten A), wird kein Collateral aufgetauscht. Sobald der Schwellenwert überschritten wird, kann der Kontrahent A die Differenz von Kontrahent B fordern. Sollte einer der Vertragspartner während der Laufzeit eine schlechtere Bewertung (Herabstufung der Bonität) erhalten, wird der Schwellenwert angepasst oder gegebenenfalls auf Null gesetzt. Diese Anpassung des Schwellenwerts wird im Vertrag vorher vereinbart und die Höhe (je nach Rating) wird von Credit Support Annex (CSA) geregelt. Je nach Marktentwicklung kann das Risiko zwischen den Vertragspartnern mehrmals von einem Vertragspartner auf den anderen übertragen werden.

Collateral kann man in Form von Bargeld oder in Form von Wertpapieren hinterlegen. Meist fällt die Entscheidung über die Art der Sicherheit auf die Form in bar (Cash), weil die Abwicklung und die Risikoüberwachung von Collateral einfacher ist. Besonders OTC-Derivateexposures werden in Cash und in EUR (in der EU) abgewickelt, wodurch man sich das Währungsrisiko erspart.

Der Credit Support Annex (CSA) regelt im Collateral Prozess beispielsweise: [3]

- Erlaubnis eines bestimmten Collaterals (Cash, Wertpapiere)
- Modalität der Zahlung des Collaterals (i.a. täglich)
- Frequenz der Derivatebewertung
- Verzinsung des Collaterals
- Angaben des Schwellenwerts (Threshold)
- Werte für den Minimum-Transfer-Betrag

### **2.3.2 Nettingvereinbarung**

Eine zusätzliche Methode, um das Ausfallrisiko (oder Kreditrisiko) zu verringern bietet die sogenannte Nettingvereinbarung.

Unter einem Netting versteht man die gegenseitige Verrechnung von Forderungen und Verbindlichkeiten innerhalb eines Unternehmens.<sup>2</sup> In der Bankenwelt gestattet die Nettingvereinbarung bei mehreren Transaktionen zwischen zwei Vertragspartnern, die positiven und negativen Marktwerte aller einbezogenen Geschäfte gegeneinander zu verrechnen, falls einer dieser Vertragspartner zahlungsunfähig ist. Es wird nur der positive Nettobetrag in das Kreditrisiko gegenüber dem Kontrahenten beauftragt. Ohne ein Netting wären die Kreditrahmen schnell aufgebraucht [3] S. 4.

Man unterscheidet folgende **Arten von Netting**:

- **Close-out Netting:** In dieser Form von Netting handelt es sich um eine Kündigung aller Geschäfte (Verträge) zwischen den Vertragspartnern aufgrund von Insolvenz eines Vertragspartners. Bei Ausfall eines Kontrahenten verwendet man das Close-out-Netting mit dem Ziel, eine zeitgemäße Kündigung und Abwicklung des Netto-Marktwertes (net value) aller Geschäfte mit dem Kontrahenten zu ermöglichen.

Im Wesentlichen besteht dieses aus zwei Komponenten:

- **Close-out:** Man hat das Recht alle Transaktionen mit der Gegenpartei, die ausfällt, zu beenden und vertragliche Zahlungen abzubreaken.
- **Netting:** Man hat einen Ausgleichanspruch in der Höhe des Netto-Marktwertes (Net Present Value NPV) aller Geschäfte. Dieser entspricht der Summe aller positiven und negativen Transaktionswerte für beide Vertragspartner, die ermittelten Beträge werden miteinander saldiert [1].

- **Payment Netting:** Das Payment Netting bildet die Zahlungsverrechnung zwischen den Kontrahenten, indem die Kontrahenten den Austausch von mehreren Zahlungsströmen an einem bestimmten Zahltag (Payment Date) durchführen und diese Zahlungen pro Währung saldieren.

Sowohl das Close-out Netting als auch das Payment Netting sind Abrechnungsmethoden zwischen zwei oder mehreren Vertragspartnern, die zur Risikoverminderung verwendet werden. Der Unterschied zwischen den beiden ist, dass sich das Payment Netting mit der Reduzierung des Abwicklungsrisikos beschäftigt, während das Close-out Netting das Vorleistungsrisiko verringert.

Bei einem Abwicklungsrisiko besteht die Gefahr, dass eine durchgeführte Transaktion nicht abgewickelt wird und der Käufer nicht bezahlt oder der Verkäufer

---

<sup>2</sup>Vgl. <http://www.onpulson.de/lexikon/netting/>

fer das Transaktionsobjekt nicht liefert. Bei einem Vorleistungsrisiko hingegen kann einer der Vertragspartner seiner Leistungspflicht nicht nachkommen [18].

### **2.3.3 Hedging von Kontrahentenrisiko**

Unter einem Hedging versteht man ein Absicherungsgeschäft gegen Finanzrisiken. Um eine Finanztransaktion zu hedgen, schließt man eine andere Transaktion ab und koppelt diese mit ausgehender Transaktion. Hedginggeschäfte haben den Vorteil, dass man sich beispielsweise vor Wechselkursschwankungen absichern kann, sie sind jedoch auch kostspielig, da fürs Hedging zusätzliche Gebühren anfallen. Daher ist es nicht immer sinnvoll ein Finanzgeschäft abzusichern, denn manchmal könnten die Kosten für ein Hedginggeschäft höher liegen als das abgesicherte Finanzgeschäft. [18]

### 3 Credit Exposure

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Definition und den wichtigsten Eigenschaften des Credit Exposure. Weiters wird darauf eingegangen, welche Rolle das Exposure u.a. bei Bewertung des Kontrahentenrisikos spielt [1].

Der Wert des Portfolios kann im Zeitverlauf erheblich schwanken, daher ist es sinnvoll, das zukünftige Credit Exposure zu berücksichtigen. Wir betrachten wieder zwei Kontrahenten A und B, um die jeweiligen Risikosichtweisen zu veranschaulichen. Das Exposure zeichnet sich dadurch aus, dass im Falle eines positiven Marktwertes eines Finanzderivates bei Ausfall des Kontrahenten B ein Verlust für den Kontrahenten A entsteht. Diese Gefahr, falls Kontrahent A ausfällt, ist relevant für die Bestimmung des Credit Valuation Adjustment. Während bei einem negativen Wert kein Risiko für den Kontrahenten A; entsteht ist er trotzdem weiterhin verpflichtet die vertraglichen Zahlungen einzuhalten. Das Credit Exposure definiert genau den Verlust bei Ausfall eines Kontrahenten.

In der folgenden Abbildung werden die Auswirkungen eines positiven oder negativen Marktwertes bei Ausfall eines Kontrahenten dargestellt.

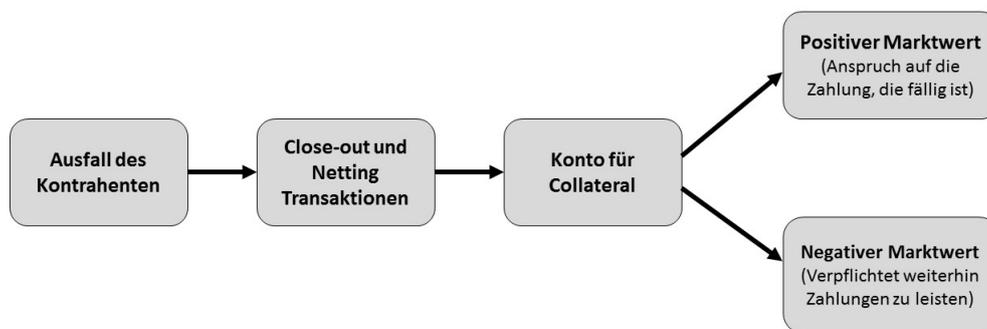


Abbildung 3: Quelle: [1] S. 122

Betrachtet man die Abbildung 3 sieht man im Falle eines Ausfalls eines Kontrahenten die darauf folgenden zwei Schritte, die das Kontrahentenausfallrisiko zu prüfen und zu minimieren helfen. Bereits im Unterkapitel 2.3 hat man dies-

bezüglich Methoden kennengelernt, welche hier angewendet werden. Bei Ausfall eines Kontrahenten geht man über auf die Nettingvereinbarungen, indem man alle Verträge unter dem gleichen Kontrahenten betrachtet und diese Verträge unter einem Netting-Set (Netto-Betrag) bündelt. Danach überprüft man die Höhe des Collaterals auf dem Konto. Um die Auswirkungen eines positiven oder negativen Marktwertes zum Zeitpunkt des Ausfalls besser abschätzen zu können, geht man davon aus, dass Kontrahent B ausfällt. Nun unterscheidet man zwischen zwei Szenarien:

**Positiver Marktwert:** Falls der Marktwert eines Finanzderivates positiv ist, dann erleidet Kontrahent A einen Verlust. Die Höhe des Verlustes ergibt sich aus dem positiven Marktwert bei Ausfall abzüglich der Sicherheitszahlungen (Collateral).

**Negativer Marktwert:** Falls der Marktwert negativ ist, dann entsteht zwar kein Verlust (Risiko) für den Kontrahenten A, aber er ist verpflichtet die im Vertrag vereinbarten Sicherheitszahlungen (Collateral) sind zu begleichen.

**Definition 3.1 (positives Exposure)** *Das positive Exposure zum Zeitpunkt  $t$   $E(t)$  ist definiert als*

$$E(t) = \max(\text{Marktwert}, 0). \quad (1)$$

**Definition 3.2 (negatives Exposure)** *Das negative Exposure zum Zeitpunkt  $t$   $NE(t)$  ist definiert als*

$$NE(t) = \min(\text{Marktwert}, 0). \quad (2)$$

### 3.1 Potential Future Exposure (PFE)

Der Potential Future Exposure ist ein Risikomaß, das in erster Linie für das Messen des Kreditrisikos verwendet wird, um den erwarteten Exposure gegenüber dem Kontrahenten (der Gegenpartei) zu bewerten. Man könnte sagen, es ist der potenzielle Maximalwert eines Portfolios über die gesamte Laufzeit. Für die Berechnung des PFEs gibt es verschiedene Methoden; eine davon wäre das Risikomaß **Value-at-Risk**.

Der Value-at-Risk ist ein Risikomaß, das aus der Verlustverteilung eines Portfolios hergeleitet wird (es zeigt das Risiko eines Portfolios). Es beschreibt die Höhe des Verlustes unter Berücksichtigung eines vorgegebenen Konfidenzniveaus innerhalb einer vorgegebenen Zeitperiode.

**Definition 3.3 (Value at Risk)** Sei  $\alpha \in (0, 1)$  ein Konfidenzintervall und sei  $X$  eine Zufallsvariable. Dann ist der Value at Risk  $VaR_\alpha(X)$  zu einem gegebenen Konfidenzniveau  $(1 - \alpha)$  über die inverse Verteilungsfunktion  $F_X^{-1}(\alpha)$  wie folgt definiert [18]

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x | F_X(x) \geq \alpha\} \quad (3)$$

Es existieren verschiedene Risikomaße und abhängig von der jeweiligen Risikoart unterscheidet man beispielweise CVaR (Kreditrisiko), MVAR (Marktrisiko) oder OpVaR (operational Risiko). Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Risikomaß für das Ausfallrisiko des Kontrahenten. Es handelt sich um das **Potential Future Exposure (PFE)**, welches zu einem gegebenen zukünftigen Zeitpunkt mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  nicht überschritten wird. Der PFE wird auch verstanden als der Value at Risk (VaR) der Marktwerte pro Zeitpunkt in der Zukunft, formell handelt es sich um ein  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Verteilung zukünftiger Marktwerte [3].

**Definition 3.4 (Potential Future Exposure)** Sei  $V(t)$  der Wert des Portfolios vom Zeitpunkt der Bewertung  $t$  und  $E(t) = \max(V(t), 0)$  das positive Exposure zum Zeitpunkt  $t$ . Dann ist der PFE( $t$ ) zum Zeitpunkt  $t$  wie folgt definiert:

$$PFE(t) = F_{E(t)}^{-1}(\alpha) \quad (4)$$

## 3.2 Expected Exposure (EE)

Das Expected Exposure ist ähnlich wie der PFE definiert, nur mit dem Unterschied, dass wir hier den Mittelwert (Durchschnitt) anstelle eines bestimmten Quantil verwenden.

**Definition 3.5 (Expected Exposure)** Unter dem Expected Exposure  $EE(t)$  versteht man den Mittelwert der Verteilung des Exposure zum zukünftigen Zeitpunkt  $t$  und dieser ist definiert als

$$EE(t) = \mathbb{E}[E(t)] = \mathbb{E}[\max(V(t), 0)] \quad (5)$$

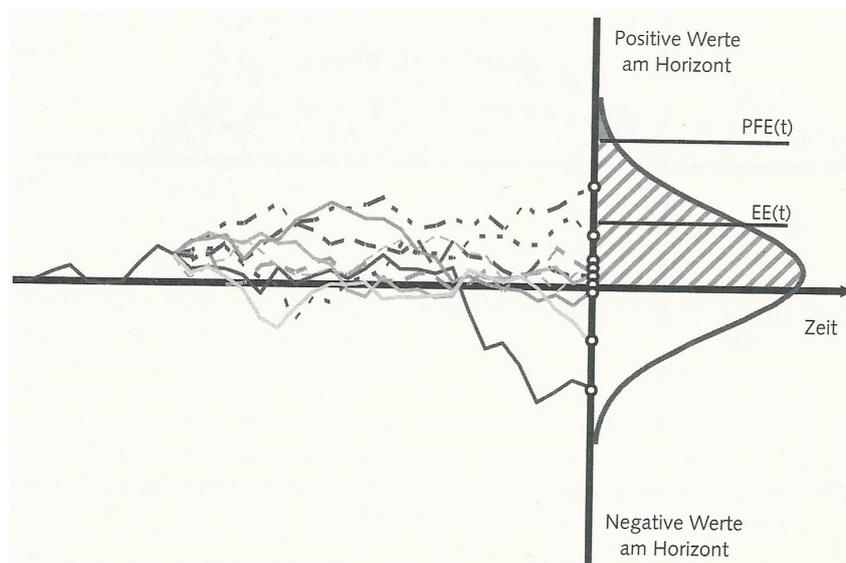


Abbildung 4: Bei Betrachtung der Dichtefunktion am Bewertungshorizont lassen sich die Begriffe PFE(t) und EE(t) grafisch erläutern. *Quelle: [3] S. 9, Abb.2*

### 3.3 Expected positive Exposure (EPE)

Das erwartete positive Exposure (EPE) ist der durchschnittliche Exposure über den jeweils zugrunde liegenden Zeitverlauf. Der EPE wird als der gewichtete Durchschnitt des erwarteten Exposure (EE) über die Zeit dargestellt.

**Definition 3.6 (Expected Positive Exposure)** *Der erwartete positive Exposure zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich*

$$EPE_T = \frac{1}{T} \int_t^T EE(x) dx \quad (6)$$

Beim Expected Exposure (EE) betrachten wir ja bereits den positiven Marktwert, nur mit dem Unterschied, dass das Integral über das gesamte positive Zeitintervall von  $t$  bis zum Endzeitpunkt  $T$  durchgeführt wird. Der EPE wird nur auf den jeweiligen Zeitraum ermittelt und nicht auf die gesamte Geschäftslaufzeit wie der EE. Der Wert von EPE dient in der Berechnungsformel des CVA als Stellvertreter der stochastischen Risikoposition im Zeitablauf, sprich das Expected Exposure wird modelliert [3].

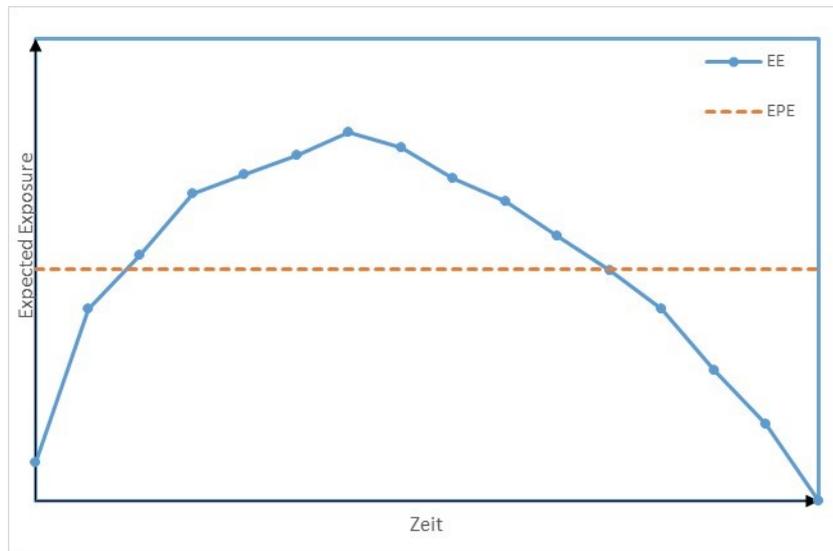


Abbildung 5: Abbildung des EPE auf einen EE-Profil

### 3.4 Expected negative Exposure (ENE)

Das Exposure wird mit zukünftigen positiven Marktwerten ermittelt. Betrachten wir den negativen Exposure, dann wird dieser durch negative Marktwerte definiert und ist für die Gegenpartei interessant. Die Entscheidung, welchen Exposure man berechnet, hängt von der Sichtweise der jeweiligen Vertragspartner ab. Das Expected Negative Exposure ist genau das Gegenteil vom EPE und ist relevant für die Berechnung des Debt Valuation Adjustment (DVA), d.h. es ist möglich mit DVA sein eigenes Ausfallrisiko zu berücksichtigen.

**Definition 3.7 (Expected Negative Exposure)** *Der erwartete negative Marktwert  $ENE(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich*

$$ENE(t) = \mathbb{E}[NE(t)] = \mathbb{E}[\min(V(t), 0)]. \quad (7)$$

## 4 Credit Valuation Adjustment

Dieses Kapitel liefert eine Definition des Credit Valuation Adjustments (CVA) und geht weiters den Fragen nach, warum wir CVA benötigen, vor welchem Risiko uns CVA bewahrt und warum es nicht einfach ist CVA zu kalkulieren.

**Definition 4.1 (Credit Valuation Adjustment)** *Das Credit Valuation Adjustment (CVA) ist die finanzielle Entschädigung für das übernommene Risiko, dass ein OTC-Kontrahent ausfällt und einen möglichen aus seiner Sicht positiven Marktwert nicht bezahlt. [11]*

Mithilfe von risikoneutralen Bewertungstechniken kann man den Preis eines Finanzderivats berechnen. Man berechnet sich den erwarteten abdiskontierten Wert der Auszahlung unter einem geeigneten Martingalmaß.

Der CVA ist eine Preisanpassung eines Finanzderivates, welches verantwortlich ist für die Kreditwürdigkeit des Kontrahenten. Je solider der Kontrahent ist, desto geringer ist die Preisanpassung und der CVA nähert sich Null. Ist der Kontrahent jedoch stark verschuldet bzw. gefährdet auszufallen, so wird der Preis dementsprechend angepasst.

Also hängt der CVA vom erwarteten Exposure des Derivats und von der Zahlungsfähigkeit des Kontrahenten ab. Nach International Financial Reporting Standards (IFRS) sind Fair Value-Korrekturen auch für die eigene Zahlungsfähigkeit zu bilden. Die Bilanzeffekte aus CVA können positiv oder negativ für die jeweilige Sichtweise ausfallen. In der folgenden Tabelle wird der Bilanzeffekt dargestellt:

<b>Exposure</b>	<b>Bonitätsverschlechterung (Kontrahent)</b>	<b>Eigene Bonitätsverschlechterung</b>
> 0	Bilanzverlust	Kein Effekt
< 0	Kein Effekt	Bilanzgewinn

Der CVA beschäftigt sich mit folgenden Zielen [17]

- Verringern des Exposures von Kontrahenten
- Verringern der Sensitivität des CVA bzgl. Veränderungen von Markt- und Kreditrisikofaktoren
- Vermeiden einer hohen Volatilität des CVA
- Steigerung der Flexibilität bei Transaktionshandel
- Kontrolle von Kreditlimits - Vermeiden von Überschreitungen

- Wettbewerbsfähigeres Bewerten

In der folgenden Abbildung werden die wichtigsten Parameter für die Ermittlung des CVA veranschaulicht.

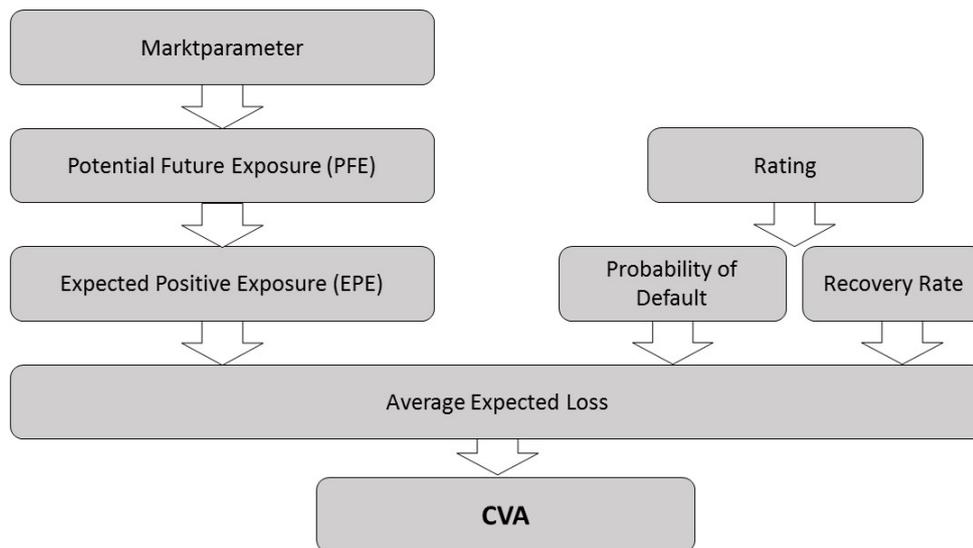


Abbildung 6: wesentliche Einflussgrößen auf den CVA

In der Abbildung 6 geht man zuerst auf die Marktparameter ein, indem man die Korrelationseffekte zwischen diversen Marktparametern wie zum Beispiel Aktien, Währungen, Zinsen ect. bewertet. Durch die Anwendung von Monte-Carlo-Simulation kann man den zukünftigen Marktwert des Portfolios kalkulieren. Ausgehend von den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation kann man den Expected (Positive) Exposures (EE) ermitteln. Im Falle eines Kontrahentenrisikos kommt nur der positive Marktwert in Frage, daher ist der EE für die Ermittlung des CVA relevant. Möchte man sein eigenes Ausfallrisiko betrachten, dann berechnet man den Debt Valuation Adjustment (DVA).

Um nun den Credit Value Adjustment zu berechnen, benötigt man

- den aktuellen Marktwert des Portfolios (Exposure heute)
- den erwarteten zukünftigen Marktwert des Portfolios (Potential Future Exposure)
- den positiven Marktwert des Portfolios (EE)

- Anrechnung von Besicherungsvereinbarungen
- Berücksichtigung der Nettingvereinbarungen
- Parameter zum Kontrahentenrisiko
  - Ausfallwahrscheinlichkeit (Probability of Default)
  - Recovery Rate

Die Parameter für das Kontrahentenrisiko sind die Ausfallwahrscheinlichkeit und Recovery Rate. Die Ratingagenturen ermitteln die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Institute und diese wird in Ratingstufen eingeteilt. Die Ratingstufe AAA (Triple A) steht für die höchste Bonität des Instituts, während C oder D sehr schlechte symbolisieren. Je nach Rating des Instituts werden die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten angegeben. Die Recovery Rate ist die Insolvenzquote bei Forderungsausfällen und wird durch die zu hinterlegenden Kreditsicherheiten festgelegt. Die Recovery Rate ist das Komplement von Loss Given Default (LGD), der Verlustquote bei Kreditausfall und ergibt sich  $LGD = (1 - Rec)$ .

Der Expected Loss (EL) ist der zu erwartende Verlust einer Kreditverbindlichkeit und ergibt sich

$$EL = EaD * PD * LGD \quad (8)$$

Mit EaD wird der Exposure at Default bezeichnet und ist die zu erwartende Höhe zum Zeitpunkt des Ausfalls. Hier ist die allgemeine Formel definiert. Wenn man nun den EL vom CVA benötigt, dann ersetzt man EaD durch EPE, da der EPE bei CVA der "Exposure at Default" ist. [18]

#### 4.1 Formel von CVA

Das Berechnen von CVA ist nicht einfach, da die Preisfeststellung eines Risikos sehr komplex ist. Natürlich hängt diese von der Art des Finanzinstruments ab. Die Abbildung und der Vergleich zwischen zwei Finanzderivaten sollen helfen, sich diese Zusammenhänge besser vorstellen zu können.

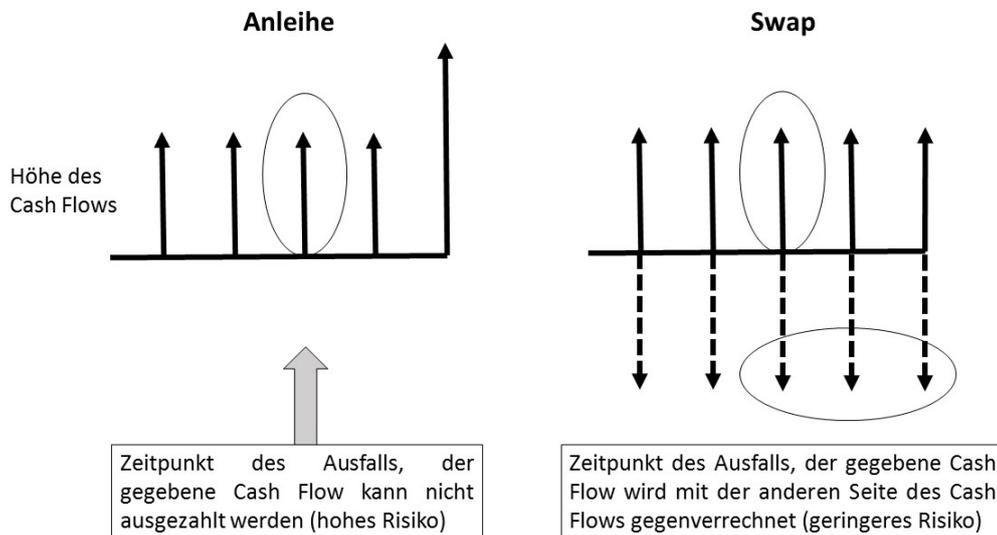


Abbildung 7: Bewertung des Kontrahentenrisikos (Kreditrisikos) auf ein Finanzderivat wie eine Anleihe im Vergleich zu einem Swap *Quelle: [1]*

Das Bestimmen eines Kreditrisikos für ein Finanzderivat mit Ein-Weg Zahlung (One Way Payment) wie zum Beispiel einer Anleihe ist einfacher, da man bei einem Ausfall des Emittenten den diskontierten Zahlungsstrom zu berücksichtigen hat und eine Ausfallzahlung hinzufügt. Viele Finanzderivate haben jedoch entweder fixe oder variable Zahlungsströme, bei denen die Zahlungen in beiden Richtungen erfolgen. Dadurch wird das Bemessen des Kontrahentenrisikos deutlich schwieriger.

In der Abbildung 7 betrachtet man einen Vergleich zwischen einer Anleihe und einem Swap mit der jeweiligen Höhe der Zahlungsströme (Cash Flows). Im Falle eines Ausfalls des Emittenten ist das Risiko des gegebenen (eingekreisten) Cash Flow sehr hoch, denn sein Wert kann zu Gänze verloren gehen. Bei einem Swap hingegen ist das Risiko geringer gehalten, weil ein Teil des eingekreisten Cash Flow mit den drei anderen gepunkteten Cash Flows gegenverrechnet wird (Netting). Das Risiko bei einem Swap ist durch die Gegenverrechnung (Nettingvereinbarung) zwar geringer, aber das Bestimmen dieses Risikos ist sehr aufwändig, da dieser von vielen Faktoren abhängt. [1]

Sei  $V(t)$  der Wert des betrachteten Portfolios in einer kreditrisikofreien Welt zum Zeitpunkt  $t$ . Dann ist  $V^*(t)$  der kreditrisikoadjustierte Wert des zugrundeliegenden Portfolios zum Zeitpunkt  $t$  und dieser ergibt sich wie folgt: [3]

$$V^*(t) = V(t) - CVA(t)$$

Unter den Marktteilnehmern kann die Berechnungsmethode für den CVA stark variieren, da er nicht standardisiert ist. Daher lautet die allgemeine CVA-Formel wie folgt [1]

$$CVA(t) \approx (1 - Rec) \sum_{i=1}^m DF(t_i) EE(t_i) PD(t_{i-1}, t_i). \quad (9)$$

Die CVA-Formel hängt von folgenden Komponenten ab:

- *Rec*: die Recovery Rate
- *Loss Given Default*: Ist der prozentuale Anteil des Exposures, bei dem davon auszugehen ist, dass er als Verlust verbucht werden muss, wenn der Kontrahent ausfällt.
- *DF*: Der risikolose Diskontfaktor zum Zeitpunkt  $t$ .
- *EE*: Das expected positive Exposure zum Zeitpunkt  $t_i$  für  $i=0, \dots, n$ .
- *PD*: Die Ausfallwahrscheinlichkeit (Probability of Default) zwischen den Zeitpunkten  $t_{i-1}$  und  $t_i$ .

#### 4.1.1 Modellierung der Ausfallwahrscheinlichkeit

Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD(t)$  wird meistens aus gegebenen Credit Spreads berechnet. Falls keine CDS-Spreads vorhanden sind, muss ein in Bezug auf Sektor, Rating und Region der Kontrahenten angemessener Proxy ausgewählt werden. Mit  $t_i$  bezeichnen wir den  $i$ -ten Zeitpunkt und  $s_i$  den Credit Spread bei einer Laufzeit von  $t_i$ .

Unter der Annahme ist eine (konstante) Hazard-Rate  $\lambda = \frac{s_i}{1 - REC}$  gegeben und die Überlebenswahrscheinlichkeit zwischen dem Zeitpunkt 0 und  $t_i$  ist gegeben durch: [3]

$$P_{sur}(t_i) = \exp\left(-\frac{s_i t_i}{1 - REC}\right) = \exp(-\lambda t_i)$$

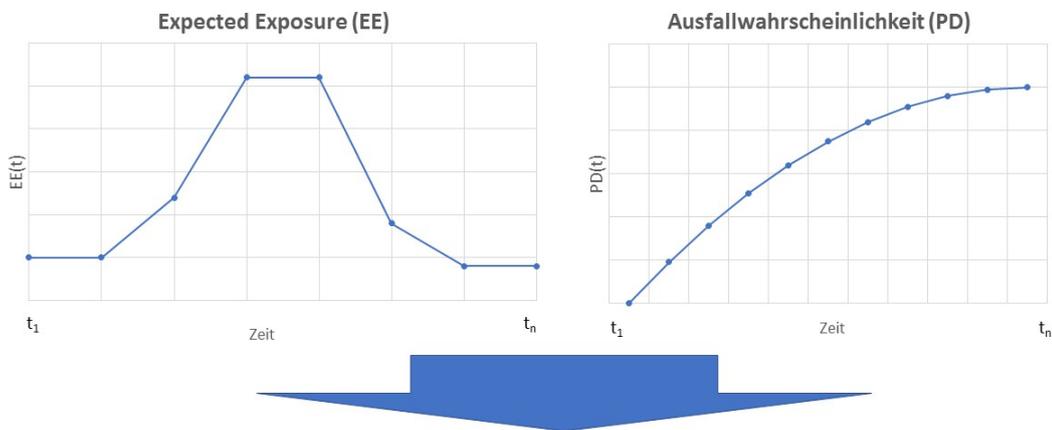
das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall  $[i-1, i]$  ein Ausfall stattfindet, ist

$$PD(t_{i-1}, t_i) = \exp\left(-\frac{s_{i-1}t_{i-1}}{1-REC}\right) - \exp\left(-\frac{s_i t_i}{1-REC}\right)$$

$$PD(t_{i-1}, t_i) = \exp(-\lambda t_{i-1}) - \exp(-\lambda t_i)$$

## 4.2 Grundgrößen des CVA

Man erkennt, dass bei der Berechnung des Credit Valuation Adjustment zwei wichtige Kenngrößen eine große Rolle spielen und zwar das Modellieren des Exposures und die Ausfallwahrscheinlichkeit.



$$CVA(t_0, t_n) = (1 - REC) \sum_{i=1}^n DF(t_0, t_i) EE(t_i) (PD(t_i) - PD(t_{i-1}))$$

Abbildung 8: Grundgrößen des CVA sind die Ausfallwahrscheinlichkeit und die Berechnung des Exposures (Quelle: [3])

## 4.3 Debt Valuation Adjustment

Wenn man sich sein eigenes Kontrahentenausfallrisiko berechnen will, dann braucht man, wie im Kapitel 4 bereits erwähnt, den Debt Value Adjustment (DVA). Dies ist der Gegenpart des CVA, denn was für den Vertragspartner A der CVA ist, ist für den Vertragspartner B der DVA.

**Definition 4.2** Das Debt Valuation Adjustment (DVA) berücksichtigt das Risiko, dass das Bankinstitut selbst ausfallen könnte und einen möglichen aus seiner Sicht negativen Marktwert nicht bezahlt.

Bei der Herleitung der CVA-Formel wird angenommen, dass der Kontrahent selbst risikofrei ist und nicht in Verzug geraten könnte. Jedoch sind Institutionen nach den internationalen Rechnungslegungsstandards (engl. international accountancy standards IAS) verpflichtet, ihren eigenen Ausfall bei der Bewertung von Verbindlichkeiten zu berücksichtigen. Dabei wird beim Credit Exposure der negative Exposure behandelt und kann in die Bewertung des Kontrahentenrisikos einbezogen werden. Dadurch entsteht der sogenannte Debt Value Adjustment (DVA). Der DVA kann einige theoretische Probleme mit CVA lösen und bewirkt, dass man mit riskanten Vertragspartnern (Gegenparteien) besser umgehen kann. [1]

#### 4.3.1 Formel von DVA

Für das Debt Valuation Adjustment (DVA) sieht die Formel komplizierter aus und ist definiert als [1]

$$\begin{aligned}
 DVA(t) = & (1 - Rec_K) \sum_{j=1}^n \underbrace{EPE(t_j)}_{\text{diskontierter EPE}} \underbrace{[1 - PD_I(0, t_{j-1})]}_{\substack{\text{Überlebens-} \\ \text{wahrscheinlichkeit} \\ \text{des} \\ \text{Instituts}}} \underbrace{PD_K(t_{j-1}, t_j)}_{\substack{\text{Ausfall-} \\ \text{wahrscheinlichkeit} \\ \text{des} \\ \text{Kontrahenten}}} \\
 & + (1 - Rec_I) \sum_{j=1}^n \underbrace{ENE(t_j)}_{\text{diskontierter ENE}} \underbrace{[1 - PD_K(0, t_{j-1})]}_{\substack{\text{Überlebens-} \\ \text{wahrscheinlichkeit} \\ \text{des} \\ \text{Kontrahenten}}} \underbrace{PD_I(t_{j-1}, t_j)}_{\substack{\text{Ausfall-} \\ \text{wahrscheinlichkeit} \\ \text{des} \\ \text{Instituts}}}
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet man mit I die Sicht des Instituts und mit K die Kontrahentensicht.

Der erste Term ist ähnlich wie beim CVA, nur mit dem Unterschied, dass in der DVA-Formel noch die eigene Überlebenswahrscheinlichkeit des Institutes multipliziert wird und, wie auch in CVA, betrachtet man immer den positiven Exposure.

Der DVA berücksichtigt das eigene Ausfallrisiko, also die negativen Marktwerte. Daher betrachten wir beim 2. Term den zu erwartenden negativen Exposure (ENE) multipliziert diesen mit der eigenen Überlebenswahrscheinlichkeit des Kontrahenten (aus der Kontrahentensicht) und mit der Ausfallwahrscheinlichkeit des Institutes zwischen dem gegebenen Zeitintervall.

## **Vor- und Nachteile von CVA/DVA**

CVA/DVA als Berechnungsmethode berücksichtigt sowohl aktuelle als auch potenzielle zukünftige Exposure und wird als theoretisch reiner Ansatz eingeschätzt. Weiters kann sie bei mehreren Derivaten mit der selben Gegenpartei auf Transaktions- und Kontrahentenebene verwendet werden.

Allerdings sind als Nachteile die höheren Anforderungen an fortgeschrittene technische Fähigkeiten zu nennen, weil CVA/DVA über komplexe Modellierung verfügt. Daher ist auch mit erhöhten Anforderungen an die IT-Infrastruktur zu rechnen, was höhere Kosten verursachen kann.

## 5 CVA mit Collateral

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Auswirkungen des Exposures auf das Collateral und auch welche Auswirkungen hat das Collateral auf den CVA.

Der CVA bestimmt einen fairen Preis eines Derivats, kann aber durch Veränderungen der Kreditwürdigkeit des Kontrahenten oder auch durch Veränderung des Basiswerts des Derivats stark schwanken, was zu einem CVA-Risiko führen kann. Der CVA ist kein Schutz gegen starke Marktschwankungen oder gegen schwere finanzielle Verluste.

Um nun das Risiko des CVA zu verringern, kann man Sicherheiten hinterlegen, also Collateral zahlen. Je länger der Risikozeitraum, desto enger liegen der besicherte und unbesicherte CVA beieinander. Das Collateral ändert nur den erwarteten Exposure, aber nicht das tatsächliche Kontrahentenrisiko. Daher kann die gleiche CVA-Formel verwendet werden, da man nur den besicherten EE, sprich Exposure mit Collateralzahlungen, berücksichtigt, bei der Berechnung des besicherten CVAs.

### 5.1 Exposure mit Collateral

Sei  $C(t)$  das Collateral zum Zeitpunkt  $t$  und  $V(t)$  der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $t$ , dann ist das Collateral definiert als

$$C(t) = [V(t) - Threshold_1]^+ - [-V(t) - Threshold_2]^+ \quad (10)$$

Überschreitet der Wert des Portfolios den Schwellenwert (Threshold), dann ist der Kontrahent verpflichtet Sicherheitszahlungen zu leisten. Dabei bestimmt in der gegebenen Formel der  $Threshold_1$  den vereinbarten Mindestbetrag, ab wann der Kontrahent die Sicherheitszahlungen durchzuführen hat und der  $Threshold_2$  genau umgekehrt, ab wann das Institut bei seinem Kontrahenten die Sicherheitszahlungen hinterlegen muss.

Wir nehmen an, dass der Kontrahent zum Zeitpunkt  $t - s$  ausfällt und betrachten das Collateral  $C(t - s)$  zum Zeitpunkt  $t - s$ , d.h. bis zu diesem Zeitpunkt haben wir die Sicherheitszahlungen erhalten. Der Exposure zum Zeitpunkt  $t$  ist definiert als die Differenz vom Wert des Portfolios zum Zeitpunkt  $t$  und dem erhaltenen Collateral zum Ausfallzeitpunkt  $t - s$ , wobei  $s$  die Länge der Close-out Periode angibt [3].<sup>3</sup>

$$E(t) = V(t) - C(t - s) \quad (11)$$

---

<sup>3</sup>Die Länge der Close-out Periode ist geregelt im neuen regulatorischen Rahmenwerk von "Basel III"

**Definition 5.1** *Der Expected (Positive) Exposure unter der Berücksichtigung von Collateralzahlung ergibt sich als*

$$EE(t) = \mathbb{E}[\max(V(t) - C(t - s), 0)] \quad (12)$$

## 5.2 Beschreibung der Parameter

Im Unterkapitel 2.3.1 haben wir einen Einblick erhalten, was das Collateral Management ist und womit es sich beschäftigt. Im folgenden Abschnitt werden die Einflussgrößen (Parameter) von Collateral auf das Credit Exposure beschrieben: [2]

- **Remargin-Periode:**

Zuerst betrachtet man die Remargin-Periode, das ist jene Zeitperiode, die zwischen einem Collateral Call und dem Erhalten der entsprechenden Collateralzahlung angenommen wird. Die Intervalle zwischen Simulationszeitpunkten sind oft deutlich größer als die Zeitperiode der Remargin. In solchen Fällen können zusätzliche ("look-back") Simulationszeitpunkte nur für besicherte Trades eingeführt werden.

- **Threshold (Schwellenwert):**

Der Schwellenwert gibt an, ab welchem Betrag eine Besicherung stattfindet. Liegt der Betrag über den Schwellenwert, dann wird aus der Differenz aus Schwellenwert und Exposures Sicherheitszahlung geleistet.

- **Minimum-Transfer-Betrag:**

Das ist jener Betrag, der angibt, ab welchem Betrag die Sicherheitszahlungen übergeben werden.

- **Independent amount:**

Von der Höhe des Ausfallsrisikos unabhängige Besicherung. Diese Grundbesicherung fließt in keine Berechnung des Ausfallsrisikos ein und kann somit zu einer Überbesicherung führen.

- **Rounding:**

Hiermit wird festgelegt, ab der wievielten Stelle der Delivery Amount und der Return Amount gerundet werden müssen.

## 5.3 Credit Support Annex

Der Credit Support Annex (CSA) ist ein Rechtsdokument welches Sicherheiten für Transaktionen bei Derivaten (Swaps, Optionen, etc.) reguliert. Somit ist

CSA einerseits vorteilhaft für die Gegenpartei, jedoch erhöht sich der CVA im Vergleich zu unbesichertem CVA. Im Unterkapitel 2.3.1 wurde bereits erwähnt, dass der CSA fixe Angaben macht, wie man die Parameter von Collateral zu bestimmen hat. Der Inhalt eines Credit Support Annex ist in 11 Paragrafen gegliedert. Die ersten 10 Paragrafen sind von der International Swaps and Derivatives Association (ISDA) standardisiert. Beim letzten Paragrafen haben die Vertragspartner die Möglichkeit durch gegenseitiges Einverständnis den Inhalt zu ergänzen.

Unter dem Link

*[http://www.isda.org/download/general/standard\\_csa.pdf.aspx](http://www.isda.org/download/general/standard_csa.pdf.aspx)*

gibt es einen Mustervertrag eines Credit Support Annex.

## 6 Zinsstrukturmodell

Dieses Kapitel untersucht die Entwicklung von verschiedenen Zinssätze untereinander, man nennt so eine Entwicklung Zinsstruktur. Will man beispielsweise Aktienderivate bewerten, dann lassen sich diese einfach durch das Verhalten des Aktienkurses beschreiben. Bei der Bewertung von Derivaten, deren Wert von bestimmten Zinssätzen abhängt, wie zum Beispiel Zinsderivate (Zinsswaps oder Swaption) ist dieses nicht mehr so „einfach“ wie bei Aktien. Die Auswahl der Zinsstrukturmodelles ist entscheidet.

In einem Zinsstrukturmodell gibt es mehrere Möglichkeiten bei der Auswahl des Basiswertes, denn die Zinsstruktur besteht aus einer Menge von Zinssätzen, die alle gleichzeitig modelliert werden. Theoretisch besitzen Aktien eine unbeschränkte Laufzeit, während Anleihen regelmäßig eine beschränkte Laufzeit besitzen.

Mit Hilfe von Zinsstrukturmodellen kann man die zeitliche Entwicklung der gesamten Zinsstruktur auf einmal modellieren. Eine grafische Darstellung bietet uns die sogenannte Zinsstrukturkurve. Während wir beim Aktienkurs eine Zahl betrachten, sehen wir bei Zinsen eine Menge von Punkten und diese Menge kann man grafisch darstellen mithilfe sogenannter Zinsstrukturkurven. Man erkennt, dass Zinsstrukturmodelle komplexer sind als die Bewertung von Aktien. Daher unterscheidet man ja nach bekannten Faktoren verschiedene Modelle. [18]

In der folgenden Abbildung werden die wichtigsten Arten von Zinsstrukturmodellen übersichtlich veranschaulicht.

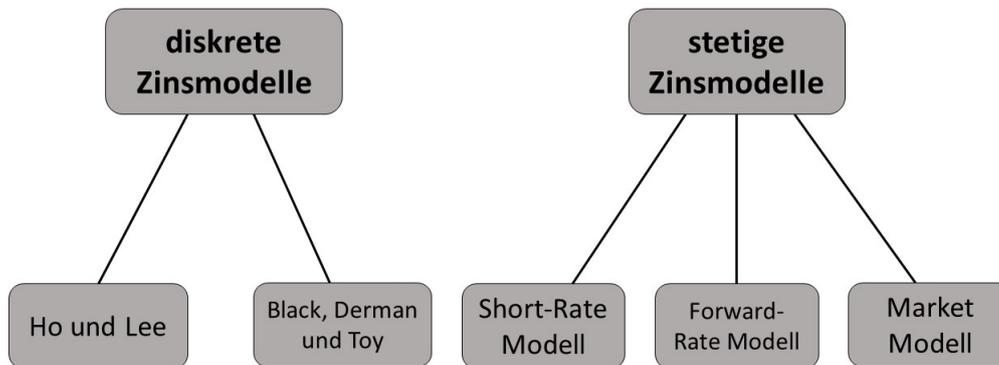


Abbildung 9: Arten von Zinsstrukturmodellen

Es stellt sich nun die Frage, welche dieser unterschiedlichen Zinsstrukturmodellen beispielweise zur Bewertung von Zinsswaps relevant ist. Das verwendete Zinsmodelle, soll die gesamte Zinsstrukturkurve modellieren können, das Modell soll zeitstetig sein. Es soll eine numerische Implementierung und die Umsetzung von Monte-Carlo-Simulation gegeben sein. Für diese Arbeit bietet sich also das sogenannte Short-Rate Modell an.

## 6.1 Short-Rate Modelle

Mit Hilfe eines Short-Rate Modells versucht man aus sogenannten Short-Rate die gesamten Zinsstrukturkurve abzuleiten.

**Definition 6.1 (Short-Rate)** *Unter einem Short-Rate (Momentanzins) versteht man den Zinssatz, den man für eine risikolose Anlage in einem unendlich kleinen Zeitintervall festlegt.*

Die Short-Rate modelliert den Zinssatz eines Bankkontos mit stetigen veränderbarer Verzinsung. [6]

**Definition 6.2 (Bankkonto)** *Sei  $B(t)$  der Wert des Bankkontos zum Zeitpunkt  $t \geq 0$ . Es wird angenommen, dass  $B(0) = 1$  und das Bankkonto wird durch folgende Differentialgleichung definiert*

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) = 1, \quad (13)$$

wobei  $r(t)$  ein positiver Prozess ist.

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) \quad (14)$$

**Definition 6.3 (T-maturity Zero-Bond)** Eine Nullkuponanleihe mit Fälligkeit  $T$  ist ein Vertrag, der dem Halter die Zahlung einer Geldeinheit zum Zeitpunkt  $T$  garantiert, ohne zwischenzeitliche Zahlungen. Das heißt, es handelt sich dabei um Schuldverschreibungen, die zum Zeitpunkt der Fälligkeit  $T$  die Nominale zurückzahlen.

Offensichtlich gilt  $P(T, T) = 1$ . Den Wert der Nullkuponanleihe  $P(t, T)$  für  $t < T$  zu bestimmen, benötigen wir noch folgende Definition:

**Definition 6.4 (stochastischer Diskontfaktor)** Der (stochastische) Diskontierungsfaktor  $D(t, T)$  zwischen zwei Zeitpunkten  $t$  und  $T$  ist derjenige Betrag zur Zeit  $t$ , der "äquivalent" zu einer Geldeinheit zahlbar zum Zeitpunkt  $T$  ist. Er ist gegeben durch

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right) \quad (15)$$

**Definition 6.5 (Preis einer Nullkuponanleihe)** Der Preis einer Nullkuponanleihe mit Maturität  $T$  zur Zeit  $t$  ist gegeben durch

$$P(t, T) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad (16)$$

wobei  $\mathcal{F}_t$  die natürliche Filtration zum Zeitpunkt  $t$  des stochastischen Prozesses  $r(t)$  ist. Das Modell kann die Preise aller Anleihen durch die Entwicklung des zukünftigen Short-Rates bestimmen.

Nun stellt sich die Frage, welchen Zusammenhang  $P(t, T)$  und  $D(t, T)$  haben.

1. Ist  $r(t)$  deterministisch, dann ist auch  $D(t, T)$  deterministisch und es gilt  $\forall(t, T), P(t, T) = D(t, T)$ .
2. Ist  $r(t)$  stochastisch, dann ist auch  $D(t, T)$  stochastisch und wird durch die zukünftige Entwicklung von  $r$  zwischen  $t$  und  $T$  bestimmt. Der Preis der Nullkuponanleihe  $P(t, T)$  ergibt sich aus allen abdiskontierten erwarteten Auszahlungen unter einem geeigneten Martingalmaß  $\mathbb{Q}$ .

Durch das Modellieren von  $r(t)$  kann man die Werte von Nullkuponanleihen  $P(t, T)$  für beliebige Zeitpunkte  $t < T$  bekommen.

Die Martingalbedingung für  $0 \leq s \leq t \leq T$  ist

$$\mathbb{E} \left[ \frac{P(t, T)}{B(t)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{P(s, T)}{B(s)}$$

Setzen wir nun für  $t = T$  und berücksichtigen, dass  $P(T, T) = 1$  ist, dann gilt

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{P(s, T)}{B(s)}$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit  $B(s)$ , da  $B(s)$   $\mathcal{F}_s$ -messbar ist, erhalten wir

$$\mathbb{E} \left[ \frac{B(s)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_s \right] = P(s, T)$$

Setzen wir nun für  $s = t$ , erhalten wir (wie bereits in der Definition (16) definiert)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{B(t)}{B(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] &= P(t, T) \\ \mathbb{E} \left[ D(t, T) \middle| \mathcal{F}_t \right] &= P(t, T) \end{aligned}$$

Somit ist der Zusammenhang zwischen  $D(t, T)$  und  $P(t, T)$  gezeigt.

### 6.1.1 Hull-White Modell

Ein Beispiel für ein Short-Rate Modell ist das one-factor Hull-White Modell. Mit Hilfe von Hull-White ist es möglich den Short-Rate  $r(t)$  zu modellieren. Das Modell wird folgendermaßen definiert [5], S.403:

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma(t)dW(t) \quad (17)$$

wobei  $\sigma(t)$  die zeitabhängige Volatilität,  $\theta(t)$  die zeitabhängige Mean Reversion,  $a$  der konstante Mean Reversion Speed und  $W = (W(t))_{t \geq 0}$  ein Wiener-Prozess ist. Außerdem sind  $\sigma$  und  $\theta$  deterministisch. Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung ist

$$r(t) = \mu(t) + x(t)$$

$$\mu(t) = r_0 e^{-at} + a \int_0^t e^{-a(t-s)} \theta(s) ds$$

$$x(t) = \int_0^t e^{-a(t-s)} \sigma(s) dW(s)$$

Die Short-Rate  $r(t)$  hat eine Normalverteilung und der Erwartungswert und die Varianz sind gegeben durch

$$\mathbb{E}[r(t)] = \mu(t)$$

$$\mathbb{V}[r(t)] = \mathbb{V}[x(t)] = \int_0^t e^{-2a(t-s)} \sigma^2(s) ds$$

Sei  $\sigma$  konstant, dann ist das Hull-White Modell gegeben durch

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t) \quad (18)$$

Dann ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$r(t) = \mu(t) + x(t)$$

$$\mu(t) = r_0 e^{-at} + a \int_0^t e^{-a(t-s)} \theta(s) ds$$

$$x(t) = \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW(s)$$

Der Erwartungswert und die Varianz von  $r(t)$  sind dann gegeben durch

$$\mathbb{E}[r(t)] = \mu(t)$$

$$\mathbb{V}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2a} e^{-2at} (e^{2at} - 1)$$

## Nullkuponanleihen

Der zukünftige Wert (Preis) zum Zeitpunkt  $t$  von einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit  $T$  ist gegeben durch [5], S.404

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} \right] = A(t, T) e^{-H(T-t)x(t)} \quad (19)$$

wobei

$$A(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t [H^2(T-s) - H^2(t-s)] \sigma^2(s) ds \right\} \quad (20)$$

$$H(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \quad (21)$$

### 6.1.2 Linear-Gauss-Markov Modell

Das Linear Gauss Markov Modell (LGM) ist ein Short-Rate Modell und ist eng verbunden mit dem Hull-White Modell mit zeitabhängigen Parametern.

Ein modernes Zinsmodell besteht laut [5] S.107, [8] aus drei Teilen. Aus einem Numeraire, stochastischen Differenzialgleichung in der risikoneutralen Welt und aus einem (äquivalenten) Martingalmaß. Wenden wir das nun an bei einem LGM-Modell, dann bedeutet das:

1. Das LGM-Numeraire ist gegeben durch

$$N(t) = \frac{1}{P(0, t)} \exp \left\{ H_t z_t + \frac{1}{2} H_t^2 \zeta_t \right\} \quad (22)$$

wobei  $P(0, t)$  der heutige Preis der Nullkuponanleihe mit Laufzeit  $t$  (wobei  $r$  deterministisch ist) und  $H_t$  ist der zeitabhängige Parameter bezogen auf das Hull-White konstante Mean Reversion Speed  $a$  (21).

2.  $z_t$  ist normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz  $\zeta_t$

$$dz_t = \alpha_t dW_t, \quad z_0 = 0, \quad \zeta_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds.$$

wobei  $\alpha_s = \exp(as)\sigma$  bezogen auf das Hull-White Konstante  $\sigma$ .

3. Martingalmaß bezüglich des Numeraire  $N$

$$\frac{V(t)}{N(t)} = \mathbb{E}_t^N \left[ \frac{V(T)}{N(T)} \right]. \quad (23)$$

wobei  $V(t)$  der Wert des Portfolios vom Zeitpunkt der Bewertung  $t$ .

Der Gauß-Prozess  $z_t$  erzeugt die Filtration  $\mathcal{F}_t$ .  $\frac{P(t,T)}{N(t)}$  ist ein  $\mathbb{P}^N$ -Martingal, also:

$$\frac{P(t, T)}{N(t)} = \mathbb{E}^N \left[ \frac{P(T, T)}{N(T)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \stackrel{(1)}{=} \mathbb{E}^N \left[ \frac{1}{N(T)} \middle| z_t \right],$$

(1):  $z_t$  ist ein Markov-Prozess.

Also ist  $\frac{P(t,T)}{N(t)}$  eine messbare Funktion von  $z_t$  und wir definieren

$$\frac{P(t, T)}{N(t)} = \tilde{V}(t, z_t)$$

wobei  $z_t = \int_0^t \alpha_s dW_s$  ein zentrierter Gauß-Prozess ist.

Ito-Isometrie:

$$\text{Var}[z_T - z_t] = \int_t^T \alpha_s^2 ds = \zeta(T) - \zeta(t) = \Delta\zeta$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^N [\tilde{V}(T, z_T) | \mathcal{F}_t] &\stackrel{(1)}{=} \mathbb{E}^N [\tilde{V}(T, z_T - z_t + z_t) | z_t] \stackrel{(2)}{=} \mathbb{E}^N [\tilde{V}(T, z_T - z_t + x) | x=z_t] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2\Delta\zeta} \tilde{V}(T, y+x) dy |_{x=z_t} \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-x)^2/2\Delta\zeta} \tilde{V}(T, u) du |_{x=z_t} \end{aligned} \quad (24)$$

(1):  $z_t$  ist Markov-Prozess

(2):  $z_t$  hat unabhängige Inkremente und Satz über bedingten Erwartung [7] S.613v

(3): Substitution:  $u = y + x$

Wenden wir nun (24) auf die Nullkuponanleiheauszahlung  $V(T) = 1$ , bekommen wir den relativen Preis einer Nullkuponanleihe

$$\tilde{P}(t, T, z_t) = \frac{P(t, T, z_t)}{N(t)} = P(0, T) \exp \left\{ -H_T z_t - \frac{1}{2} H_T^2 \zeta_t \right\} \quad (25)$$

und multipliziert man diesen mit (22), erhalten wir den Preis einer Nullkuponanleihe durch

$$P(t, T, z_t) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ -(H_T - H_t)z_t - \frac{1}{2}(H_T^2 - H_t^2)\zeta_t \right\} \quad (26)$$

Der instantaneus Forward-Rate  $f(t, T)$  und die Short-Rate  $r(t)$  sind somit gegeben durch

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} = f(0, T) + z(t)H'(T) + \zeta(t)H'(T)H(T) \quad (27)$$

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + z(t)H'(t) + \zeta(t)H'(t)H(t) \quad (28)$$

### 6.1.3 LGM Modell aus dem Hull-White Modell herleiten

Im folgenden Unterkapitel zeigen wir Schritt für Schritt, wie man aus dem Hull-White Modell das Linear-Gauss-Markov Modell herleiten kann. Hiermit verweise ich auf die Literatur [5]S.423. Betrachten wir nun das Hull-White Modell, wie wir es bereits im Unterkapitel 6.1.1 kennengelernt haben, nur mit dem Unterschied das wir hier die Mean Reversion Speed  $a_t$  zeitabhängig betrachten. Das Hull-White Modell mit zeitabhängigen Parameter ist gegeben durch:

$$dr_t = (\theta_t - a_t r_t)dt + \sigma_t dW_t$$

Dieses kann man schreiben als

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + x_t \\ d\mu_t &= (\theta_t - a_t \mu_t)dt \\ dx_t &= -a_t x_t dt + \sigma_t dW_t \end{aligned}$$

mit Lösung

$$\mu_t = r_0 e^{-\beta_t} + e^{-\beta_t} \int_0^t e^{+\beta_s} \theta_s ds$$

$$x_t = e^{-\beta_t} \int_0^t e^{\beta_s} \sigma_s dW_s$$

$$\beta_t = \int_0^t a_s ds$$

und Short-Rate Varianz

$$\mathbb{V}[r(t)] = \mathbb{V}[x(t)] = e^{-2\beta_t} \underbrace{\int_0^t \alpha_s^2 ds}_{\zeta_t}, \quad \alpha_t = e^{\beta_t} \sigma_t$$

Es kann gezeigt werden, dass der Drift-Term durch die initialen Term-Struktur wie folgt angegeben werden kann

$$\int_0^t \mu(s) ds = -\ln P(0, t) + \frac{1}{2} \int_0^t (H_t - H_s)^2 \alpha_s^2 ds$$

$$H(t) = \int_0^t e^{-\beta(s)} ds$$

Der Preis einer Nullkuponanleihe ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \mathbb{E}^N \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ -(H_T - H_t) e^{\beta t} x_t - \frac{1}{2} \int_0^t [(H_T - H_s)^2 - (H_t - H_s)^2] \alpha_s^2 ds \right\} \\ &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ -(H_T - H_t)(y_t - \Psi_t) - \frac{1}{2} (H_T^2 - H_t^2) \zeta_t \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

mit

$$y_t = e^{\beta t} x_t = \int_0^t \alpha_s dW_s$$

$$\zeta_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds$$

$$\Psi_t = \int_0^t H_s \alpha_s^2 ds$$

Bevor wir mit dem Übergang zur LGM-Formulierung fortfahren, kann man das Bankkonto wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} B(t) &= e^{\int_0^t r(s) ds} \\ &= \frac{1}{P(0, t)} \exp \left( \int_0^t (H_t - H_s) \alpha_s dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t (H_t - H_s)^2 \alpha_s^2 ds \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Dividiere den Preis der Nullkuponanleihe (29) mit dem Bankkonto (30) so erhalten wir

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = P(0, T) \exp \left( - \int_0^t (H_T - H_s) \alpha_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (H_T - H_s)^2 \alpha_s^2 ds \right) \quad (31)$$

Vergleichen wir (30) mit (31), erkennt man, dass sie durch verschiedene Zufallsvariablen bestimmt werden, und zwar

$$\int_0^t (H_t - H_s) \alpha_s dW_s \quad \text{bzw.} \quad \int_0^t (H_t - H_s)^2 \alpha_s^2 dW_s.$$

In der Formel (29) vom Preis der Nullkuponanleihe definieren wir eine weitere Variable:

$$z(t) = y(t) - \Psi(t)$$

Der Prozess hat folgenden Drift-Term:

$$dz(t) = dy(t) - d\Psi(t) = a(t)dW(t) - H(t)\alpha^2(t)dt$$

Diesen kann man driftfrei mit folgendem Maßwechsel machen,

$$\begin{aligned} dz(t) &= \alpha(t)d\tilde{W}(t) \\ \tilde{W}(t) &= W(t) - \int_0^t H(s)\alpha(s)ds \end{aligned}$$

sodass  $z_t$  ein Gauß-Prozess unter dem neuen Maß ist.

Die Radon-Nikodym-Dichte für den Maßwechsel ist

$$Z(t) = \exp \left\{ \int_0^t H_s \alpha_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 \alpha_s^2 ds \right\}$$

sodass der neue Numeraire  $N(t) = B(t)Z(t)$  gegeben ist durch ( $N(0) = 1$ )

$$\begin{aligned} N(t) &= B(t) \exp \left\{ \int_0^t H_s \alpha_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 \alpha_s^2 ds \right\} \\ &= \frac{1}{P(0, t)} \exp \left\{ \int_0^t H_s \alpha_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t H_s^2 \alpha_s^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t (H_t - H_s)^2 \alpha_s^2 ds + \int_0^t (H_t - H_s) \alpha_s dW_s \right\} \\ &= \frac{1}{P(0, t)} \exp \left\{ H_t \int_0^t \alpha_s dW_s + \frac{1}{2} H_t^2 \int_0^t \alpha_s^2 ds - H_t \int_0^t H_s \alpha_s^2 ds \right\} \\ &= \frac{1}{P(0, t)} \exp \left\{ H_t z_t + \frac{1}{2} H_t^2 \zeta_t \right\} \end{aligned}$$

Der Preis einer Nullkuponanleihe (29) mit dem LGM Numeraire  $N(t)$  ist zum Zeitpunkt  $t$  eine Funktion von  $z_t$  und gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{P(t, T)}{N(t)} &= \frac{\frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left\{- (H_T - H_t)z_t - \frac{1}{2}(H_T^2 - H_t^2)\zeta_t\right\}}{\frac{1}{P(0, t)} \exp\left\{H_t z_t + \frac{1}{2}H_t^2 \zeta_t\right\}} \\ &= P(0, T) \exp\left\{-H_T z_t - \frac{1}{2}H_T^2 \zeta_t\right\} \end{aligned} \quad (32)$$

Somit erkennen wir, dass das vorherige Ergebnis dasselbe wie (25) ist und multiplizieren wir dieses (32) mit (22), dann ist der Preis der Nullkuponanleihe (29) gegeben durch

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left\{- (H(T) - H(t))z(t) - \frac{1}{2}(H^2(T) - H^2(t))\zeta(t)\right\}.$$

Dadurch ergibt sich folgende Formel für die instantaneous Forward-Rate und Short-Rate, die äquivalent zu (27) und (28) sind:

$$f(t, T) = f(0, T) + z(t)H'(T) + \zeta(t)H'(T)H(T)$$

$$r(t) = f(t, t) = f(0, t) + z(t)H'(t) + \zeta(t)H'(t)H(t)$$

Für das Linear-Gauss-Markov Modell müssen also folgende Parameter bestimmt werden:

$$dz_t = \alpha_t dW_t, \quad z_0 = 0, \quad \zeta_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds.$$

wobei  $W = (W(t))_{t \geq 0}$  ein Wiener-Prozess unter dem Maß  $\mathbb{P}^N$  ist.

Und das LGM-Numeraire

$$N(t) = \frac{1}{P(0, t)} \exp\left\{H_t z_t + \frac{1}{2}H_t^2 \zeta_t\right\}$$

wobei  $P(0, t)$  der heutige Preis der Nullkuponanleihe mit Laufzeit  $t$  und  $H_t$  ist der zeitabhängige Parameter bezogen auf das Hull-White konstante Mean Reversion Speed  $a$ .

## 6.2 Kuponanleihen und Zinsswaps

### 6.2.1 Zinsrate

Es werden für die Darstellung des Zinsmarktes sogenannte Spot-Rate angewendet [4].

**Definition 6.6 (einfache Spot-Rate)** Die einfache Spot-Rate  $F(t, T)$  zur Zeit  $t$  mit Fälligkeit  $T$  ist gegeben durch

$$F(t, T) = F(t; t, T) = \frac{1}{\underbrace{(T-t)}_{\delta}} \left( \frac{1}{P(t, T)} - 1 \right)$$

wobei  $\delta = T - t$  der Abstand zwischen den Zahlungen (year fraction) ist.

Es ist äquivalent zu

$$P(t, T)(1 + (T - t)F(t, T)) = 1$$

**Definition 6.7 (stetige Spot-Rate)** Die stetige Spot-Rate  $R(t, T)$  der zur Zeit  $t$  mit Fälligkeit  $T$  ist gegeben durch

$$R(t, T) = -\frac{\log(P(t, T))}{T - t}$$

wobei  $\delta = T - t$  die year fraction ist.

**Definition 6.8 (Forward-Rate)** Der zur Zeit  $t$  geltende Forward-Rate  $F(t; T, S)$  für den Zeitraum  $[T, S]$  ist gegeben durch

$$F(t; T, S) = \frac{1}{S - T} \left( \frac{P(t, T)}{P(t, S)} - 1 \right) \quad (33)$$

welches äquivalent zu

$$1 + (S - T)F(t; T, S) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)}$$

ist.

**Definition 6.9 (instantaneous Forward-Rate)** Der instantaneous Forward-Rate zur Zeit  $t$  mit Fälligkeit  $T$  ist gegeben durch

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T} \quad (34)$$

**Definition 6.10 (Short-Rate)** Die Short-Rate (Kassazins) zur Zeit  $t$  ist gegeben durch

$$r(t) = f(t, t)$$

## 6.2.2 Bewertung von Kuponanleihen

### fix verzinsliche Anleihen

Eine fix verzinsliche Anleihe wird definiert mit

- Kuponzeitpunkte  $T_1 < \dots < T_n$  wobei  $T_n$  das Fälligkeitsdatum ist,
- Nominalwert  $N$ ,
- fixe Kuponzahlungen  $c_1, \dots, c_n$ ,

sodass der Besitzer zur Zeit  $T_i$ , für  $i = 1, \dots, n$ ,  $c_i$  erhält und  $N$  zum Fälligkeitsdatum  $T_n$ .

Der Preis  $p(t)$  bei  $t \leq T_1$  ist gegeben durch die Summe von diskontierten Cashflows

$$p(t) = \sum_{i=1}^n P(t, T_i) c_i + P(t, T_n) N$$

### variabel verzinsliche Anleihe

Ein variabel verzinsliche Anleihe wird definiert mit

- $T_0 < \dots < T_n$  wobei  $T_n$  das Fälligkeitsdatum (Maturity) ist,
- Nominalwert  $N$ ,
- variable Kuponzahlungen zu den Zeitpunkten  $T_1, \dots, T_n$

$$c_i = \underbrace{(T_i - T_{i-1})}_{\delta} F(T_{i-1}, T_i) N$$

Der Preis bei  $t \leq T_0$  ist gegeben durch

$$p(t) = N \left( P(t, T_n) + \sum_{i=1}^n \underbrace{P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)}_{*} \right) = P(t, T_0)$$

### **Bemerkung zu (\*)**

Für die Forward-Rate  $F(T_{i-1}, T_i)$ , die bei  $T_{i-1}$  fixiert und bei  $T_i$  zahlt, muss gelten:

$$F(T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1} := \delta_i} \left( \frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right)$$

Setzen wir  $F(T_{i-1}, T_i)$  in den Barwert einer Forwardzinszahlung ein, erhält man genau den Ausdruck (\*)

$$PV_{float}(t) = \delta * F(T_{i-1}, T_i) * P(t, T_i) = P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i). \quad (35)$$

### **6.2.3 Bewertung von Zinsswaps**

Die Grundidee von Swaps ist ein vereinbartes Tauschgeschäft von zukünftigen Zahlungsströmen (Cashflows) zwischen zwei Vertragspartnern. Swaps gehören zu den OTC-Geschäften.

**Definition 6.11 (Zinsswap)** *Unter einem Zinsswap (Interest Rate Swap) versteht man eine vertragliche Vereinbarung zum Austausch von Zinszahlungen gleicher Währung über einen bestimmten Zeitraum. Die Zinszahlungen werden auf Basis eines fiktiven Nominalvolumens, welches nicht ausgetauscht wird, berechnet.*  
[9]

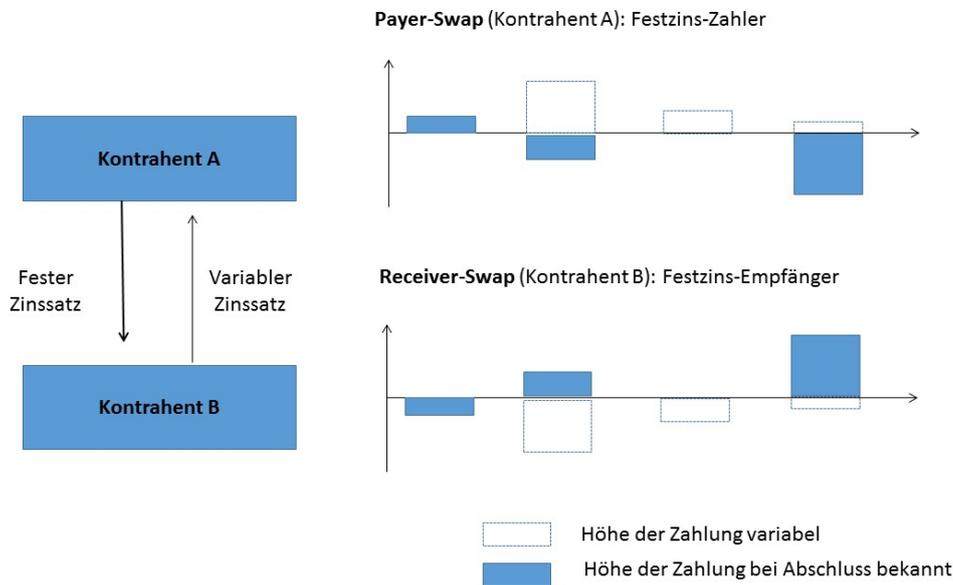


Abbildung 10: Zahlungsströme *Quelle: [9] Folie 8*

Der Grundgedanke zur Bewertung von Zinsswaps wäre: [9]

- Zum Abschlusszeitpunkt hat ein Zinsswap einen Wert (Net Present Value NPV) von null. Ist der NPV zum Abschlusszeitpunkt nicht auf Null, wären dann sogenannte Upfront-Payments zum Ausgleich von Differenzen fällig. Daher sollte man die Kondition so auswählen, dass der Austausch gleichwertiger Zahlungsströme (Cash Flows) gegeben ist. Der Wert von fixen Cash Flows entspricht dem Wert von variablen Cash Flows.
- Der Wert des Swaps kann während der gesamten Laufzeit positiv oder negativ werden, jeweils aus der Sichtweise eines Swapspartners.
- Die Zinsstrukturkurve (Swapkurve) ist festgelegt.

Wie in jedem Finanzderivat können Risiken entstehen. Hier beschäftigen wir uns mit den Risiken von Zinsswaps und wie man damit umgehen kann. Welches Risiko könnte eintreten? Der Marktwert eines Zinsswaps unterliegt Preisschwankungen, die durch Bewegungen im Swapmarkt oder durch Restlaufzeitverkürzungen des Swaps verursacht werden.

Bei positivem Marktwert des Zinsswaps könnte es zu einem Ausfallrisiko des Kontrahenten kommen. Wie bereits im Unterkapitel 2.3.1 beschrieben, kann

man das Risiko durch Besicherungsvereinbarungen (Collateral Management) und durch Nettingvereinbarungen reduzieren [9].

### Berechnung des Swap-Wertes

Nun stellt sich die Frage, wie sich der Barwert (Present Value) für den fixen und variablen Zinssatz berechnen lässt [4].

Ein Payer-Swap (Kontrahent A) ist gegeben durch:

- $T_0 < T_1 < \dots < T_n$  zukünftiger Zeitpunkt mit  $\delta = T_i - T_{i-1}$  und  $T_n$  ist die Fälligkeit (Maturity)
- fixer Zinssatz  $K$
- Nominale  $N$

Beim Zeitpunkt  $T_i, i \geq 1$  verpflichtet sich der Kontrahent A

- $K\delta N$  fix zu zahlen und
- erhält variabel  $F(T_{i-1}, T_i)\delta N$ .

Der genettete Cashflow zum Zeitpunkt  $T_i$  ist gegeben durch:

$$(F(T_{i-1}, T_i) - K)\delta N$$

und verwenden wir die Tatsache (35), erhalten wir den Wert des Cashflows zum Zeitpunkt  $t \leq T_0$  wie folgt

$$N(P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) - K\delta P(t, T_i)).$$

Der (Payer) Swap-Wert bei  $t \leq T_0$ :

$$NPV_P(t) = N\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i)(F(t; T_{i-1}, T_i) - K) \quad (36)$$

$$= N \left( P(t, T_0) - P(t, T_n) - K\delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i) \right) \quad (37)$$

Der (Receiver) Swap-Wert bei  $t \leq T_0$ :

$$NPV_R(t) = -NPV_P(t) \quad (38)$$

## 7 Monte-Carlo-Simulation

Das Kapitel Credit Exposure 3 beschäftigte sich mit der Berechnung von erwarteten Marktwerten, sprich mit dem Expected Exposure. Nun stellt sich die Frage, welche Methode sich am Besten für die Berechnung eignet.

Zur Ermittlung von zukünftigen erwarteten positiven Marktwerten bietet sich beispielsweise die **Monte-Carlo-Simulation** an. Diese Methode ist hilfreich zur Bestimmung von Erwartungswerten und man kann mit stochastischen Daten schnelle und ungefähre Ergebnisse erzielen.

Man könnte den erwarteten Exposure auch mit Hilfe von analytischen Ansätzen berechnen, jedoch ist diese Methode für einige Finanzinstrumente begrenzt sowie abhängig vom jeweiligen Modell und außerdem sogar für manche Derivate gar nicht verfügbar.

Die Simulationsmethode stellt die beste Vorgehensweise in Bezug auf die Bestimmung des erwarteten Exposure dar.

Die Monte-Carlo-Simulation ist ein Methode um Verteilungseigenschaften von Zufallsvariablen von nicht explizit bekannten Verteilungsarten zu ermitteln.

Die Vorteile dieser Simulationsverfahren sind

- Modellierung von Netting- und Besicherungsvereinbarung
- Berücksichtigung von Volatilitäts- und Korrelationseffekten

Die Nachteile sind

- Hoher Anspruch an die IT-Entwickler durch Berechnung des CVA über die Monte-Carlo-Methode
- Kostensteigerungen als Folgen durch Zeitaufwand in Verbindung mit den Berechnungen

### Mathematische Grundlage

Man betrachtet ein Zufallsexperiment, das beispielweise ein simulierter Pfad eines Zinskurvenszenarios sein kann und dieses Zufallsexperiment wird n-mal wiederholt und ausgewertet. Wir definieren folgende mathematischen Grundlagen: [16],S.6

**Definition 7.1 (Gesetz der großen Zahlen)** Gegeben sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen  $V_1, V_2, \dots, V_n$  mit  $\mathbb{E}[V_i] < \infty$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Sei nun

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n V_i(\omega)$$

dann besagen die Gesetze der großen Zahlen, dass für große  $n$

$$\frac{S_n(\omega)}{n} \approx \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] \quad \mathbb{E}[V_i] = \mu \quad \forall i, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \approx \mu$$

gelten soll. Das arithmetische Mittel der ersten  $n$  Beobachtungen  $V_1(\omega), V_2(\omega), \dots, V_n(\omega)$  soll nach dem Gesetz der großen Zahlen gegen den Erwartungswert  $\mu$  konvergiert.

Man unterscheidet zwischen dem **Schwachen** und **Starken** Gesetze der großen Zahlen:

- **Schwaches Gesetz der großen Zahlen**

Sei  $V = V_1, V_2, \dots, V_n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge unabhängiger identisch verteilten Zufallsvariablen und sei  $S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n V_i(\omega)$  dann gilt  $\forall \epsilon > 0$ :

$$P\left[\left|\frac{S_n}{n} - \frac{\mathbb{E}[S_n]}{n}\right| > \epsilon\right] \rightarrow 0 \quad \text{wenn } n \rightarrow \infty \quad (39)$$

- **Starkes Gesetz der großen Zahlen**

Wenn zusätzlich  $E[V_i] = \mu$ , dann gilt:

$$P\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \mu\right] = 1 \quad (40)$$

Für die Monte-Carlo-Simulation benötigen wir den Ansatz vom Starken Gesetz der großen Zahlen. Es wird eine Folge von Szenarien  $V_i := (V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  simuliert und mit  $V_i$  wird das  $i$ -te Szenario ausgedrückt. Dabei wird jedes Szenario mittels einer Kostenfunktion ausgewertet und das Auszahlungsprofil kann zum Beispiel eine Option sein. Wie bereits in der Definition beschrieben, ist die Auswertung der Kostenfunktion für die Szenarien  $V_i$  unabhängig identisch verteilt mit  $\mathbb{E}[V_i] = \mu$ . Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen ergibt sich, dass der Schätzer, das arithmetische Mittel der Auswertungen, gegen den wahren Wert der Kennzahl konvergiert (40). Der Schätzer ist gegeben durch [[3]]

$$\hat{V}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V(S_i)$$

## Monte-Carlo-Schätzer

Im Allgemeinen ist der Monte-Carlo Schätzer wie folgt definiert:

Sei  $p$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer abzählbaren Menge  $\mathcal{A}$ , und  $f : S \rightarrow R$  eine reellwertige Zufallsvariable. Angenommen, wir wollen den Erwartungswert [16]

$$m = \mathbb{E}_p[f] = \sum_{x \in \mathcal{A}} f(x)p(x)$$

man berechnet man mittels Monte-Carlo Simulation, indem man eine große Anzahl  $n$  unabhängiger Stichproben  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$  von  $p$  simuliert und approximieren den Erwartungswert  $m$  durch den Monte Carlo-Schätzer

$$\hat{m}_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i(\omega))$$

## Eigenschaften des Monte Carlo-Schätzers

1.  $\hat{m}_n$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für  $m$ ,

$$\mathbb{E}[\hat{m}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f(X_i)] = \mathbb{E}_p[f] = m$$

2.  $\hat{m}_n \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{1}{n} \text{Var}_p[f]\right)$

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{m}_n] &= \text{Var} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i(\omega)) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Var} \left[ \sum_{i=1}^n f(X_i(\omega)) \right] \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}_p[f] \end{aligned}$$

3.  $\hat{m}_n$  ist eine konsistente Schätzfolge für  $m$ , falls  $f^2(X)$  integrierbar ist.

$$P[|\hat{m}_n - m| \geq \epsilon] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

## Simulationsverfahren

Eine Möglichkeit der Monte-Carlo-Simulation ist die Erzeugung von Pfaden. Es handelt sich dabei um eine Diskretisierung eines meist stetigen Modells. Um den CVA zu berechnen, wird nicht nur der Wert unter gegebenen Marktbedingungen ermittelt. Es muss in der Berechnung des CVAs auch das Kreditrisiko des Kontrahenten und der Marktwert des Derivats in zukünftigen Marktsituationen beachtet werden. Zunächst bestimmen wir ein Zeitintervall von heute bis T und dieses wird in kleine Zeitintervalle zerlegt. Für die Betrachtung von Kreditrisiken wird die Zeit, zu der ein Kreditvorfall auftritt, simuliert. Indem wir zunächst gleichverteilte Zufallsvariablen erzeugen und diese werden in Zufallszahlen konvertiert, die zur Diskretisierung der Modelle verwendet werden können.

Für jedes kleine Zeitintervall liefert dies eine neue Realisierung und alle diese Realisierungen bilden dann einen Pfad. So eine Methode wird auch die pfadabhängige Simulation (Path Dependent Simulation – PDS) genannt. Für PDS werden die Pfade bis zum letzten Zeitpunkt simuliert. Zum Beispiel für die Berechnung des CVA wird die PDS-Methode verwendet[3].

### 7.1 Monte-Carlo-Fehlerabschätzung

Ein Vorteil der Monte-Carlo-Simulation ist, dass der statistische Fehler gut abgeschätzt werden kann. Dieser wird aus der empirischen Varianz (Varianz der simulierten Szenarien) und der Wurzel aus der Anzahl der Auswertungen ermittelt. Es wird folgende Formel für die Berechnung entsprechender Werte für jeden Versuch verwendet [3]S.193

$$\hat{V}_i = \hat{V}_{i-1} + \frac{\hat{V}_i + \hat{V}_{i-1}}{i}$$
$$\hat{\sigma}_i^2 = \left( \frac{i-2}{i-1} \right) \hat{\sigma}_{i-1}^2 + i(\hat{V}_i - \hat{V}_{i-1})^2$$

Man erhält nach n Versuchen den Schätzer und die empirische Varianz.

Bei der Monte-Carlo-Simulation unterscheidet man zwischen Diskretisierungsfehler und statistischem Fehler. Der Diskretisierungsfehler wird durch die Wahl einer Diskretisierung des gegebenen stetigen Problems bestimmt und dieser löst mit numerischen Methoden das Simulationsproblem.

Diskretisierungsfehler entstehen, wenn die stochastische Differentialgleichung nicht exakt simuliert werden kann und dadurch muss man diskretisieren.

### Vorteile von LGM gegenüber vom HW

Der Vorteil von einem Linear-Gauss-Markov Modell gegenüber dem Hull-White Modell ist, dass sowohl das Numeraire (22) als auch die relative Nullkuponanleihe (25) durch den selben Faktor  $z(t)$  bestimmt wird. Dadurch wird die analytische Bewertung einfacher bestimmt (zum Bsp bei Zinsanleihen), aber auch numerische Implementierungen und die Umsetzung von Monte-Carlo-Simulationen.

Ein anderer Vorteil gegenüber dem Hull-White Modell ist, dass die stochastische Differentialgleichung analytisch berechenbar ist:

$$dz_t = \alpha_t dW_t$$
$$\Delta z_{t_i} \sim \mathcal{N}\left(0, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \alpha_s^2 ds\right)$$

Dadurch kann man für die Simulationszeitpunkte  $t_1, t_2, \dots$  den Faktor  $z_t$  exakt simulieren (d.h. es gibt keine zeitlichen Diskretisierungsfehler).

Beim Hull-White Modell kann man die stochastische Differentialgleichung nicht exakt simulieren, daher kann man beispielsweise durch Euler-Maruyama-Verfahren (A.1) eine approximative Lösung der stochastischen Differentialgleichungen erhalten (d.h. es gibt zeitliche Diskretisierungsfehler).

## 8 Berechnung des CVA von Zinsswap

In diesem Kapitel berechnen wir Credit Valuation Adjustment (CVA) anhand eines Zinsswaps in der Währung EUR. Wir berechnen zwei unterschiedliche Beispiele und verwenden dabei das Linear-Gauß-Markov Modell und das Hull-White Modell.

### 8.1 Berechnungsschritte für CVA

Zusammengefasst berechnet man den CVA in folgenden Schritten:

#### 1. Schritt: Curve-Simulation

- Yield-Curve zu zukünftigen Zeitpunkten simulieren
- Bestimmung der Simulationszeitpunkte
- Untersuchen von mehreren Simulationspfaden
- Simulationsmethode: Auswertung für jeden Simulationspfad für jedes Szenario

#### 2. Schritt: Swap-Valuation

- Berechnen des Net Present Value (NPV) eines Portfolios zu jedem Zeitpunkt für jedes Szenario

#### 3. Schritt: Berücksichtigung von Besicherungsvereinbarungen

- Austausch von Collateral durchführen
- Berücksichtigung der Collateralzahlung (im Konto)

#### 4. Schritt: Bestimmen des Exposures

- Berechnung des Expected (Positive) Exposures (EE) (oder Expected Negative Exposure (ENE) bei DVA) für jeden Zeitpunkt auf Basis der Ergebnisse der Simulationen (Monte-Carlo-Simulation)
- gestellte Sicherheiten sind bei der Bestimmung des Exposures zu berücksichtigen

#### 5. Schritt: Ausfallwahrscheinlichkeit

- Verwendung von gegebenen Daten zur Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeit (z.B. CDS-Spreads)
- Alternativ historische Ausfallrate (Hazard-Rate)

## 6. Schritt: CVA ermitteln

- Berechnung des CVA als Summe der erwarteten Exposure multipliziert mit der Ausfallwahrscheinlichkeit in diesem Intervall

## 8.2 Berechnungsbeispiel mit LGM für einen Zinsswap

### 8.2.1 Curve-Simulation

Wir verwenden eine Diskontkurve, also der Diskontfaktor  $D(0, t) = \exp(-rt)$  für  $r = 0,025$  mit  $\Delta t = \frac{1}{365}$  Zeitschritten ist gegeben durch:

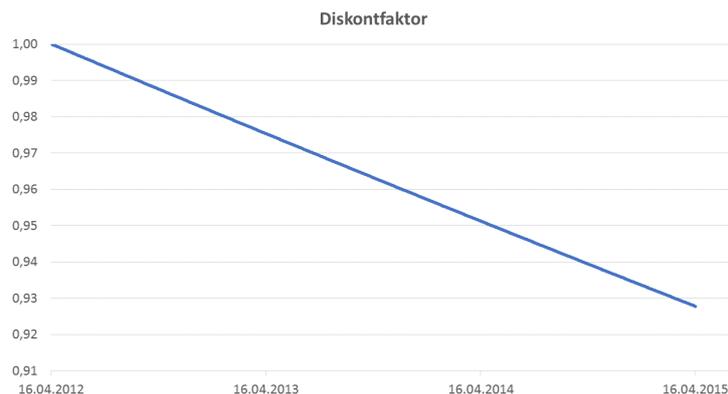


Abbildung 11: Diskontkurve

In diesem Beispiel werden wir das **Linear-Gauss-Markov Modell** verwenden. Für das LGM-Modell sei  $a = 0,02$  und  $\sigma = 0,008$  und dabei werden folgende Kenngrößen bestimmt:

Das Numeraire (22)

$$N(t) = \frac{1}{D(0, t)} \exp \left\{ H_t z_t + \frac{1}{2} H_t^2 \zeta_t \right\}$$

wobei

$$H(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$$

und

$$\zeta(t) = \frac{\sigma^2}{2a} (e^{2at} - 1)$$

sind.

In diesem Beispiel generieren wir die Szenarien unter dem Maß  $\mathbb{P}^N$ . Nun wenden wir eine Monte-Carlo Simulation mit 5000 Szenarios an, dadurch kann man den Faktor  $z_t$  exakt simulieren.

### 8.2.2 Bewertung des Zinsswaps

Wir betrachten einen Zinsswap, der folgende Parameter hat:

Währung:	EUR
Laufzeit:	3 Jahre
Nominale:	N=10.000.000 €
fixer Leg 1:	K = 2,59%
variabler Leg 2:	3-Monats-EURIBOR
Maturity Date:	16.04.2015

Kontrahent A (Payer) verpflichtet sich einen fixen Zinssatz von 2,59% jährlich zu zahlen und erhält von Kontrahent B den 3-Monats-EURIBOR.

Der (Receiver) Swap-Wert (6.2.3) wird berechnet

$$NPV(t) = N \left( K \delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i, z_t) - P(t, U_0, z_t) - P(t, U_m, z_t) \right)$$

wobei  $(U_0, \dots, U_m)$  sind die zukünftigen Zeitpunkte für die Forwardzahlungen und  $(T_1, \dots, T_n)$  für die Fixzahlungen. Mit  $\delta = T_i - T_{i-1}$  wird die year fraction bezeichnet. Der relative Preis der Nullkuponanleihe (25) mit Maturität T zur Zeit t ist

$$P(t, T, z_t) = \left( P(0, T) \exp \left\{ -H_T z_t - \frac{1}{2} H_t^2 \zeta_t \right\} \right) N(t)$$

und es gilt  $P(T, T) = 1$ .

#### Ergebnis des Swap-Wertes

Der  $NPV(0) = € 16.694,00$ .

### 8.2.3 Bestimmen des Exposures

Das Exposure bestimmt man auf Basis der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation. Wir berechnen den EE für einen gegebenen Pfad und überprüfen für diesen Pfad den NPV der Reststruktur (Restswap), wenn dieser kleiner als 0 ist (ansonsten den ENE).

Die Formel der Exposures mit Startwert  $N(0) = 1$  lauten:

$$\frac{EE(t)}{N(0)} = \mathbb{E}^N \left[ \frac{\max(NPV(t), 0)}{N(t)} \right].$$

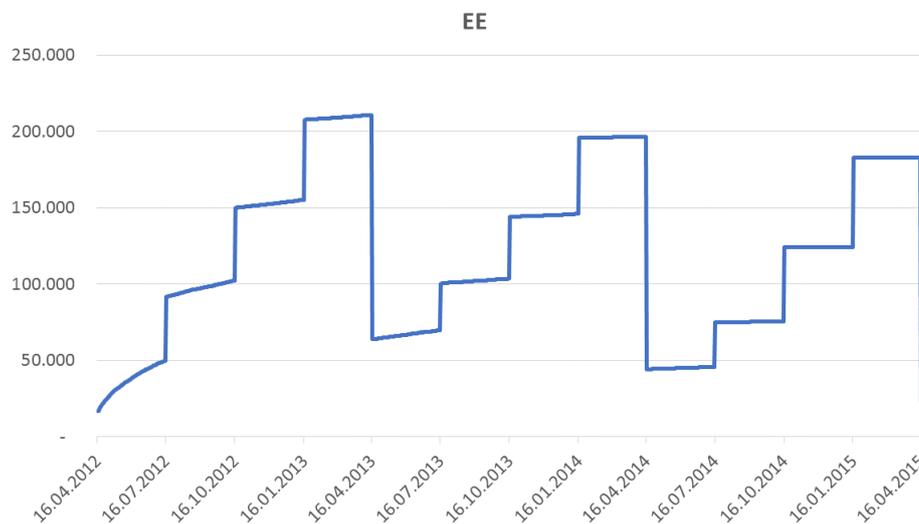


Abbildung 12: EE (3M-EURIBOR VS 2,59%)

Man erkennt anhand der Abbildung, dass im Zeitpunkt 16.07.12 zukünftige Marktwerte des Zinsswaps sich erhöhen, da der Kontrahent B seine erste variable Zinszahlung durchgeführt hat. Am 16.10.2012, 16.01.2013 folgen die nächsten Zahlungen. Am 16.04.2013 zahlt der Kontrahent A den fixen Zinsbetrag an Kontrahent B zurück, darum verliert der zukünftige Marktwert des Zinsswaps an Wert.

Das selbe beim ENE, nur betrachten wir es aus der Sichtweise der Gegenpartei.

$$\frac{ENE(t)}{N(0)} = \mathbb{E}^N \left[ \frac{\min(NPV(t), 0)}{N(t)} \right].$$

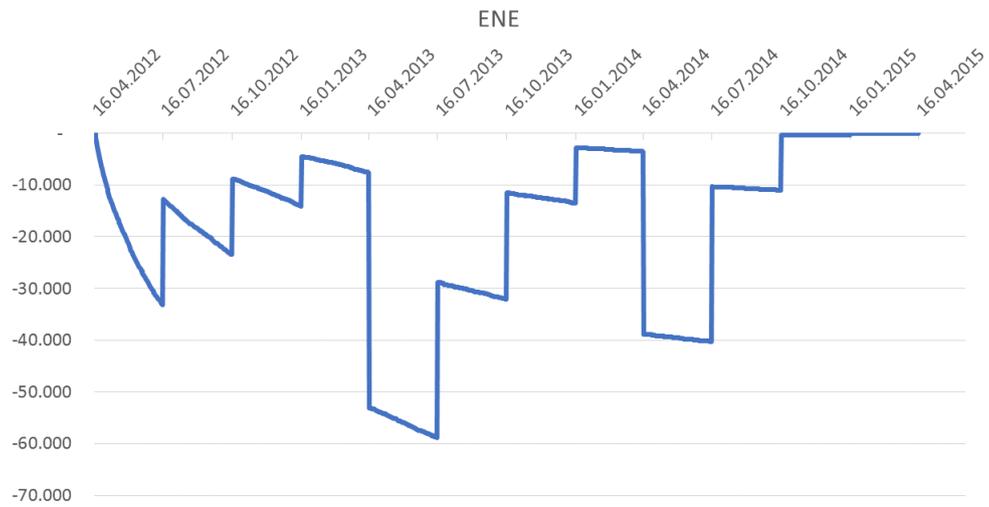


Abbildung 13: ENE (3M-EURIBOR VS 2,59%)

Betrachten wir einen weiteren Zinsswap mit den selben Parameter wie beim vorherigen Beispiel, nur mit dem Unterschied, dass der variable Leg 2 der 6-Monats-EURIBOR ist. Dann ist der EE wie folgt:

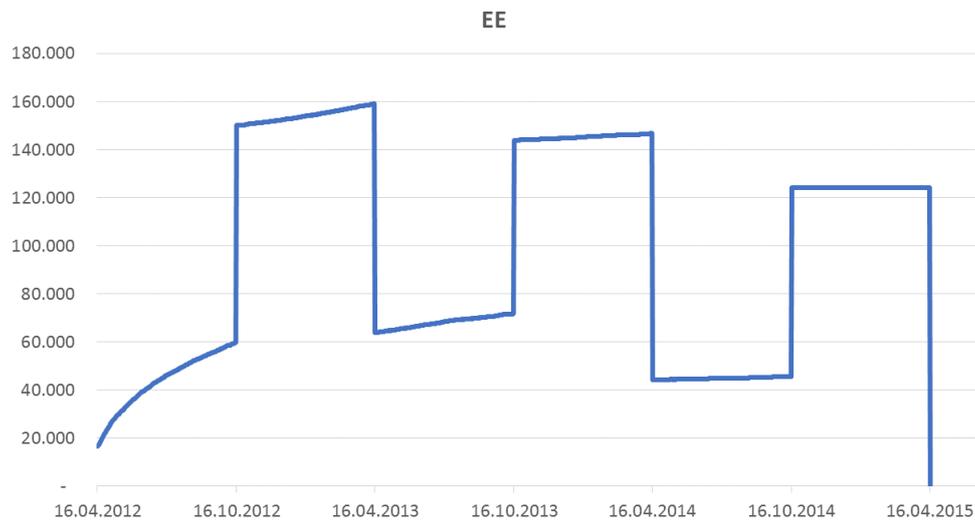


Abbildung 14: EE (6M-EURIBOR VS 2,59%)

Hier findet die erste variable Zinszahlung am 16.10.2012 statt, daher die Erhöhung des positiven Exposures. Am 16.04.2013 erfolgt eine Verminderung des EE, da die erste fixe Zinszahlung zurückgezahlt wird.

Der dazugehörige ENE ergibt sich:

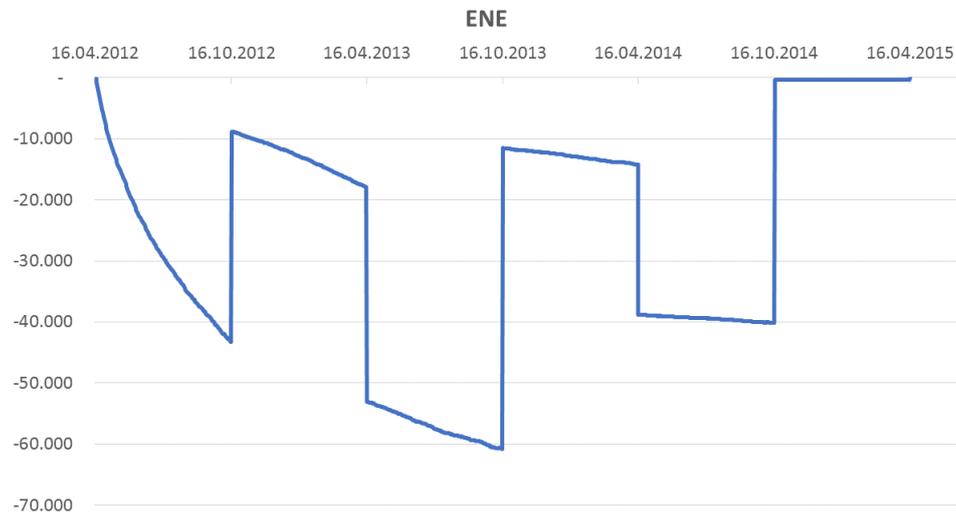


Abbildung 15: ENE (6M-EURIBOR VS 2,59%)

### Exposure mit Collateral

Noch müssen die Collateralzahlungen mit einem Minimum-Transfer-Betrag (MTB) berücksichtigt werden.

Das Collateral  $C(t)$  beschreibt die Entwicklung des Collaterals in Abhängigkeit der NPV-Entwicklung  $NPV(t)$ . Ist das Collateral zum Zeitpunkt  $t - 1$  bekannt, kann man daraus das Collateral zum Zeitpunkt  $t$  errechnen. Dazu bestimmt man als ersten Schritt die mögliche Collateral-Änderung:

$$delColl = \max(NPV(t) - Threshold_R, 0) - \max(-NPV(t) - Threshold_P, 0) - C(t - 1)$$

wobei  $C(t - 1)$  bezieht sich auf das vom vorherigen Zeitpunkt  $t - 1$  vorhandene Collateral.

Wenn  $|delColl| > MTB$ , dann

$$C(t) = C(t - 1) + delColl$$

sonst

$$C(t) = C(t - 1).$$

Danach wird in das Martingalmaß (23) eingesetzt, mit Startwert  $N(0) = 1$ :

$$\frac{EE(t)}{N(0)} = \mathbb{E}^N \left[ \frac{\max(NPV(t) - C(t), 0)}{N(t)} \right].$$
$$\frac{ENE(t)}{N(0)} = \mathbb{E}^N \left[ \frac{\min(NPV(t) - C(t), 0)}{N(t)} \right].$$

#### 8.2.4 Ergebnis Exposure mit Collateralzahlungen

Wir hinterlegen das Collateral als Cash in EUR. Wir untersuchen zwei Austauschzeitpunkte:

1. Collateral wird am selben Tag ausgetauscht, es kommt zu keinem Transferverzug. Der Exposure ist im positiven Bereich. Kontrahent A (der das Risiko trägt) verlangt seine Collateralzahlungen, Kontrahent B übermittelt dieses sofort. Dann ist der EE gleich das Collateral. Falls nach dem Erhalt vom Collateral der Kontrahent B am selben Tag noch ausfallen sollte, ist das Risiko für Kontrahent A gleich Null.
2. Collateral wird zwar am selben Tag ausgetauscht, aber der Transfer dauert zwei Tage. D.h. nach zwei Tagen bekommt Kontrahent A (bei positivem Marktwert) die Collateralzahlungen.

In der Abbildung 16 wird der festgelegte Schwellenwert von 100.000 vom EE abgezogen, dh. der Kontrahent A, der das Risiko trägt, falls Kontrahent B ausfällt, verliert nur den Wert, der unter dem Schwellenwert liegt. Was dem Kontrahent A keine Überraschung ist, da beim Vertragsabschluss der festgelegt Schwellenwert vereinbart ist und A ist das Risiko unter dem Schwellenwert bekannt.

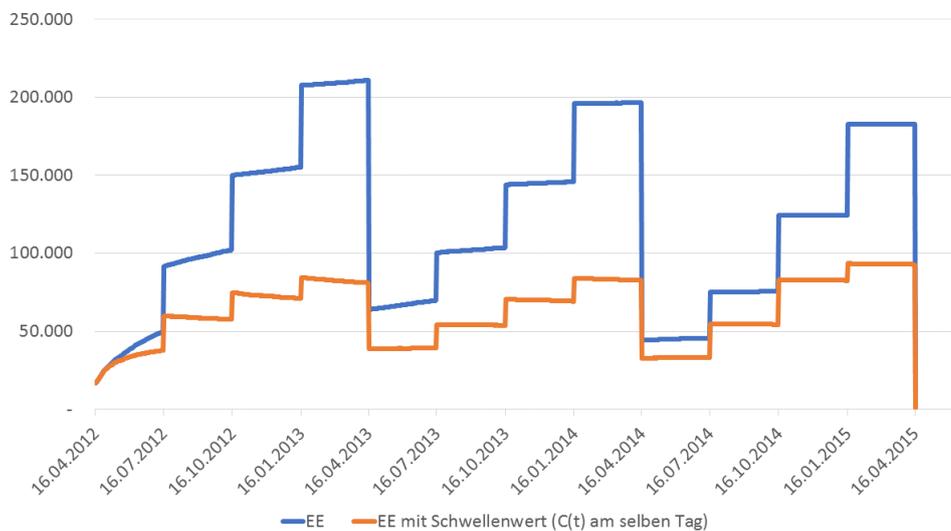


Abbildung 16: Untersuchung EE und EE mit Schwellenwert von 100.000, Collateral wird am selben Tag übermittelt

In der Abbildung 17 finden die Collateralzahlungen nach zwei Tagen statt, das sind die Peaks (Spitzen) in der Grafik. Nach zwei Tagen verliert der EE an Wert, was für den Kontrahenten A heißt sein Risiko wird nach den zwei Tagen minimiert.

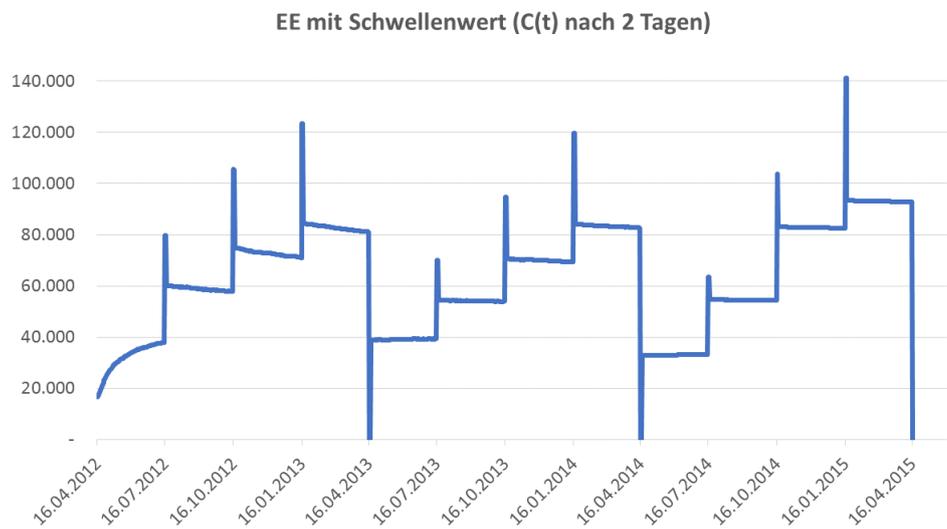


Abbildung 17: EE mit Schwellenwert von 100.000, Collateral wird nach zwei Tagen übermittelt

Das selbe mit dem ENE und wir erhalten folgende Ergebnisse:

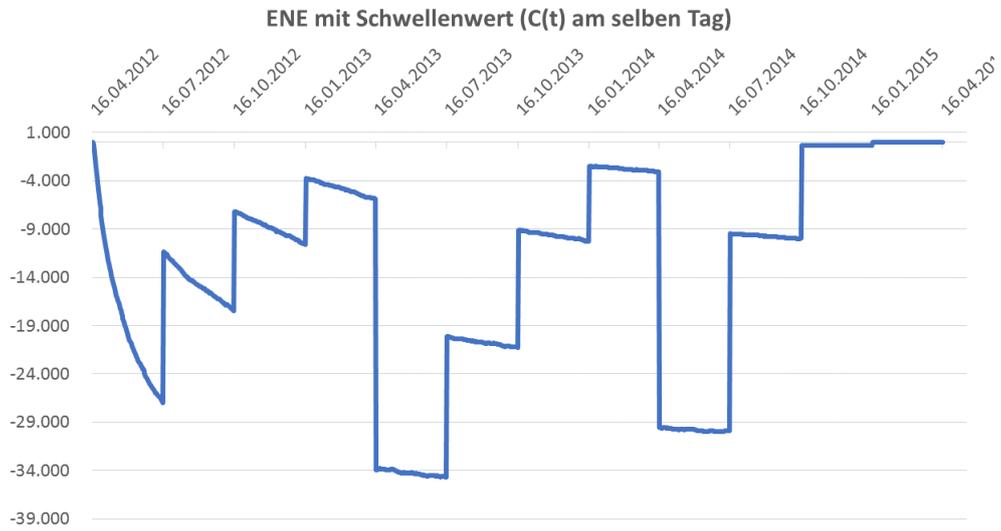


Abbildung 18: ENE mit Schwellenwert von 100.000, Collateral wird am selben Tag (0) übermittelt

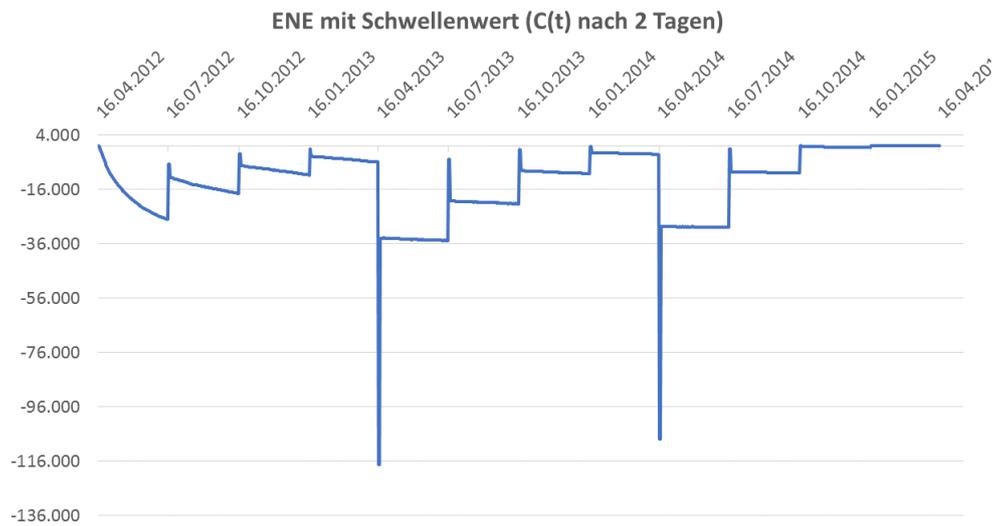


Abbildung 19: ENE mit Schwellenwert von 100.000, Collateral wird nach zwei Tagen (2) übermittelt

Nun untersuchen wir einen Collateral mit Minimum-Transfer-Betrag, dieser beträgt bei diesem Beispiel 50.000. Der Minimum-Transfer-Betrag ist der kleinste mögliche Betrag an Sicherheiten, der transferiert werden kann. In der Praxis wird der Minimum-Transfer-Betrag bei Großbanken (Großunternehmen) festgelegt; da es keinen Sinn hat täglich minimale Beträge auszutauschen, findet erst dann eine Übertragung von Sicherheiten statt. In der folgenden Abbildung sieht man die Resultate:

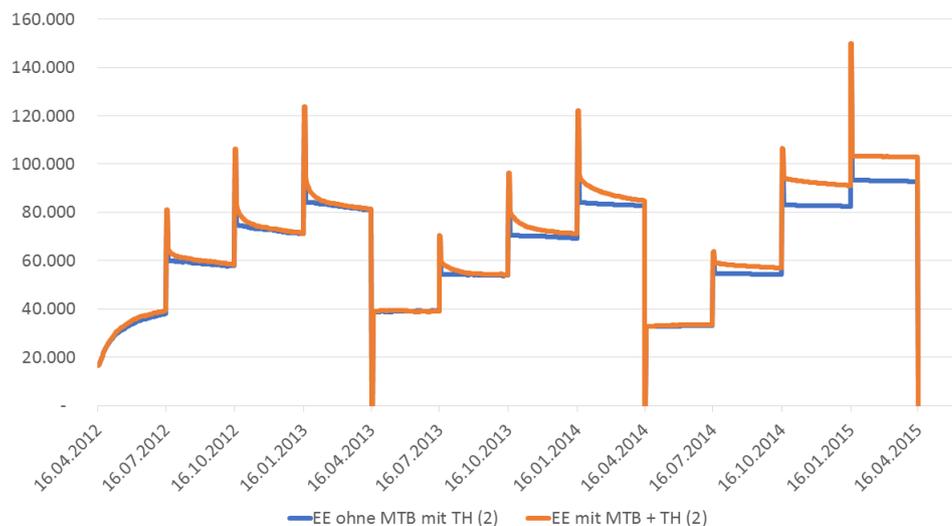


Abbildung 20: Untersuchung des EE mit Schwellenwert von 100.000 und mit/ohne Minimum-Transfer-Betrag von 50.000 (Collateral wird nach zwei Tagen (2) übermittelt)

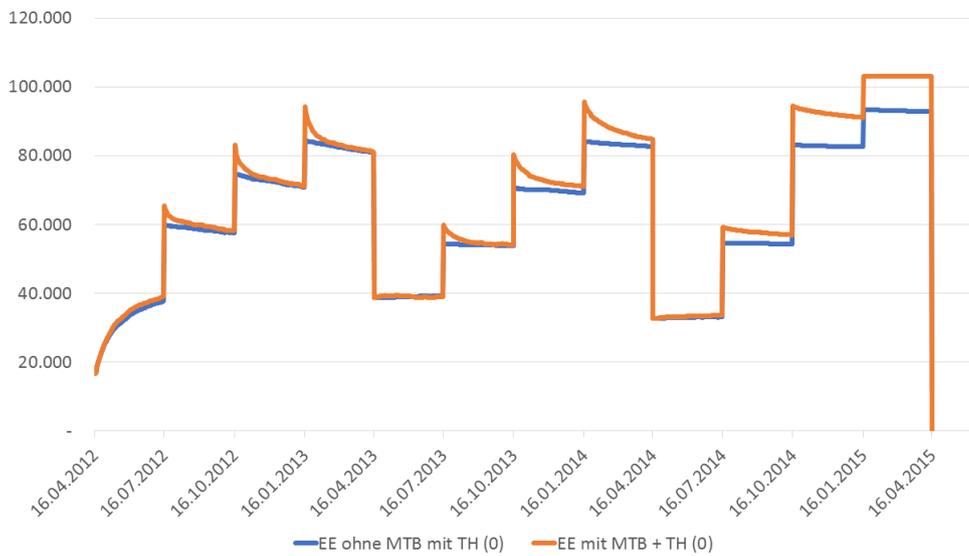


Abbildung 21: Untersuchung des EE mit Schwellenwert von 100.000 und mit/ohne Minimum-Transfer-Betrag von 50.000 (Collateral wird am selben Tag (0) übermittelt)

### 8.2.5 Ausfallwahrscheinlichkeit

Bei diesem Beispiel sei  $\lambda = 0,02$  und entspricht einer Exponentialverteilung, dann lautet die Ausfallwahrscheinlichkeit wie folgt

$$PD(t_{i-1}, t_i) = \exp(-\lambda t_{i-1}) - \exp(-\lambda t_i)$$

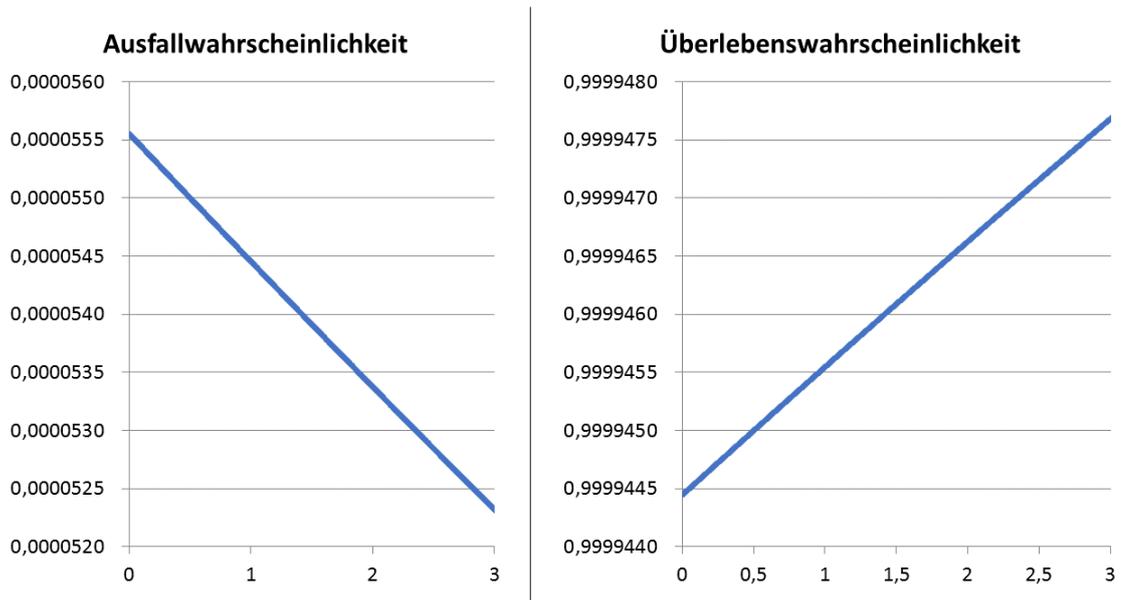


Abbildung 22: Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeit mit  $\lambda = 2\%$

### 8.2.6 Berechnung CVA

Die Formel von CVA haben wir bereits in (9) besprochen.

Der CVA beträgt mit dem unbesicherten EE **€ 11,39**.

Der CVA mit dem besicherten EE mit einem Schwellenwert von 100.000 beträgt **€ 6,01**.

Anhand der zwei Ergebnisse sieht man, je solider der Kontrahent, desto geringer der CVA.

## 8.3 Berechnungsbeispiel mit HW für einen Zinsswap

### 8.3.1 Curve-Simulation

In diesem Beispiel verwenden wir die Svensson-Methode, um die zukünftigen Zinskurven (instantaneous Forward-Rate) zu generieren.<sup>4</sup>

Mit Hilfe der Svensson-Methode erhält man eine gute Approximation der gegebenen Zinskurve für die Laufzeiten bis zu 30 Jahren, wie man es in der Abbildung (23) durch die grüne Funktion erkennt. Die blaue Funktion ist die gegebene Zinskurve und die Werte sind in der Tabelle (A.3) zu entnehmen.

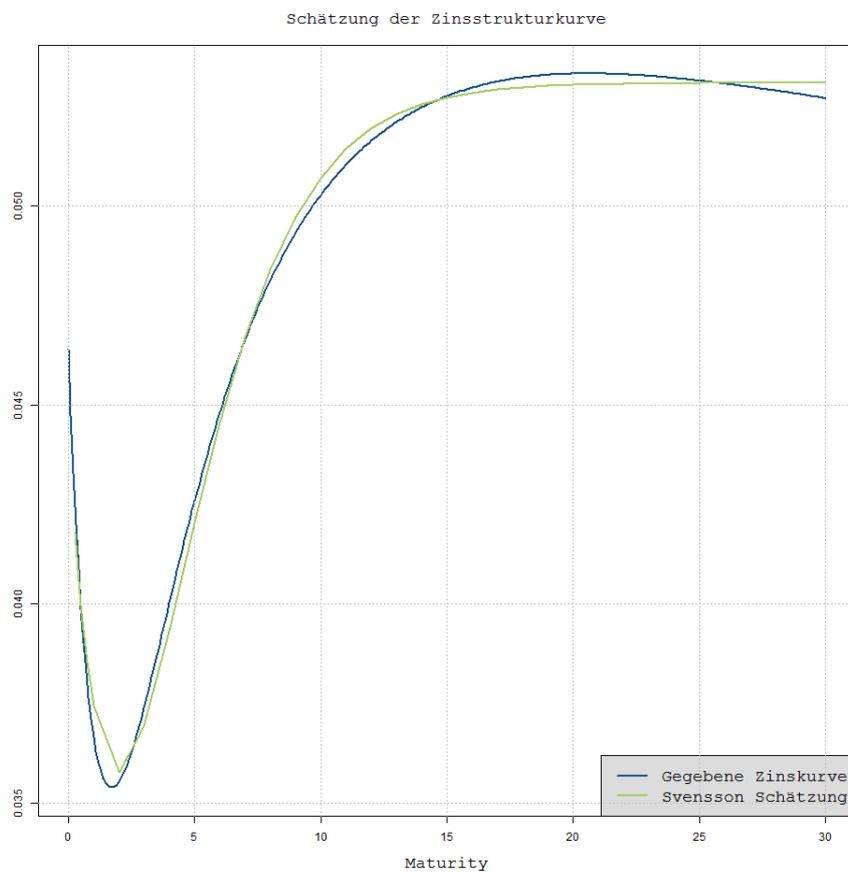


Abbildung 23: gegebene Zinsskurve und Approximation der Zinsskurve mit Svensson-Methode

<sup>4</sup>Verwendung R-Package *YieldCurve*

Durch die Svensson-Methode (A.2) ergibt sich also die Forward-Rate Funktion als

$$f(m; b) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \quad (41)$$

wobei

$$b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2) \quad (42)$$

Die Short-Rate  $r(t)$  wird modelliert mit dem **Hull-White Modell**:

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t)$$

Wir nehmen an, dass  $a = 0,9$  und  $\sigma = 0,05$  ist. Die Funktion  $\theta(t)$  ist gegeben durch

$$\theta(t) = -\frac{\partial \ln(f(0, t))}{\partial t} + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

wobei  $f(0, t)$  die Forward-Rate zum Zeitpunkt  $t$  ist.

Den Preis der Nullkuponanleihe in diesem Modell haben wir bereits in (16) kennengelernt; nun verwenden wir die genannte Formel bei dem vorliegenden Beispiel, gegeben durch:

$$r(t) = r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)}dW(u)$$

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-H(t, T)r(t)} \quad (43)$$

Um CVA zu berechnen, wenden wir eine Monte-Carlo Simulation mit 10000 Szenarios an. Wir verwenden das Euler-Maruyama-Verfahren (Näheres zu diesem Verfahren im Anhang (A.1)) mit Zeitschritten von  $\Delta t = \frac{1}{360}$  um  $r(t)$  zu erhalten.

### 8.3.2 Bewertung des Zinsswaps

Wir betrachten einen Zinsswap anhand eines fiktiven Beispiels und dieser hat folgende Parameter:

Währung:	EUR
Laufzeit:	6,25 Jahre
Nominale:	25.000.000 €
fixer Leg 1:	K = 3,75%
floater Leg 2:	6-Monats-EURIBOR
Maturity Date:	02.01.2015

Die Deutsche Lufthansa (Payer) verpflichtet sich zu einem fixen Zinssatz von 3,75% jährlich, während Commerzbank (Receiver) sich verpflichtet den 6-Monats-EURIBOR zu zahlen.

Der (Payer) Swap-Wert (NPV) (6.2.3) wird berechnet

$$NPV(t) = N \left( P(t, U_0) - P(t, U_m) - K \delta \sum_{i=1}^n P(t, T_i) \right)$$

wobei  $(U_0, \dots, U_m)$  sind die zukünftigen Zeitpunkte für die Forwardzahlungen und  $(T_1, \dots, T_n)$  für die Fixzahlungen. Mit  $\delta = T_i - T_{i-1}$  wird der jährliche Abstand bezeichnet.  $P(t, T)$  ist der Preis der Nullkuponanleihe mit Maturität T zur Zeit t und es gilt  $P(T, T) = 1$ .

#### Ergebnis des Swap-Wertes

Der  $NPV(0) = € 1.447.755,03$ .

### 8.3.3 Bestimmen des Exposures

Die Exposures werden folgendermaßen berechnet:

$$EE(t) = \mathbb{E}[E(t)] = \mathbb{E}^N[\max(NPV(t), 0)]$$

$$ENE_t = \mathbb{E}[NE(t)] = \mathbb{E}^N[\min(NPV(t), 0)].$$

$$PFE(t) = F_{E(t)}^{-1}(\alpha)$$

Das Ergebnis der Exposures wird in der folgenden Abbildung gezeigt:

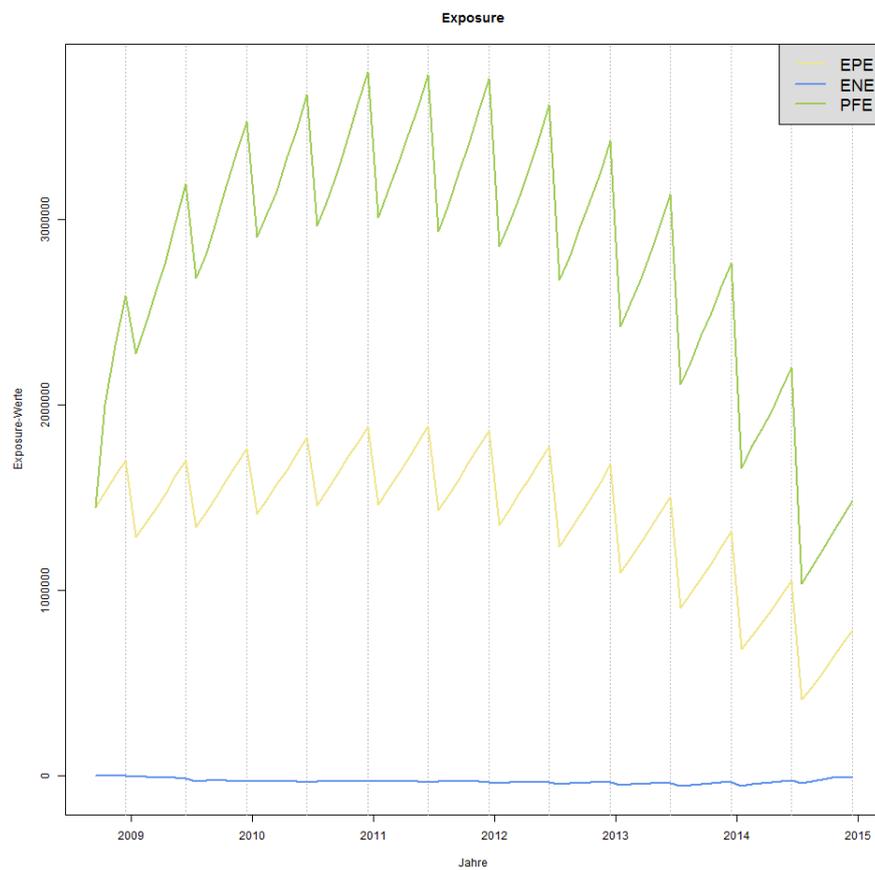


Abbildung 24: EE, ENE, PFE

## Ergebnis Exposure mit Collateralzahlungen

Wir hinterlegen das Collateral als Cash in EUR. Bei Collateralzahlungen mit einem Schwellenwert von 500.000 erhält man folgendes Ergebnis:

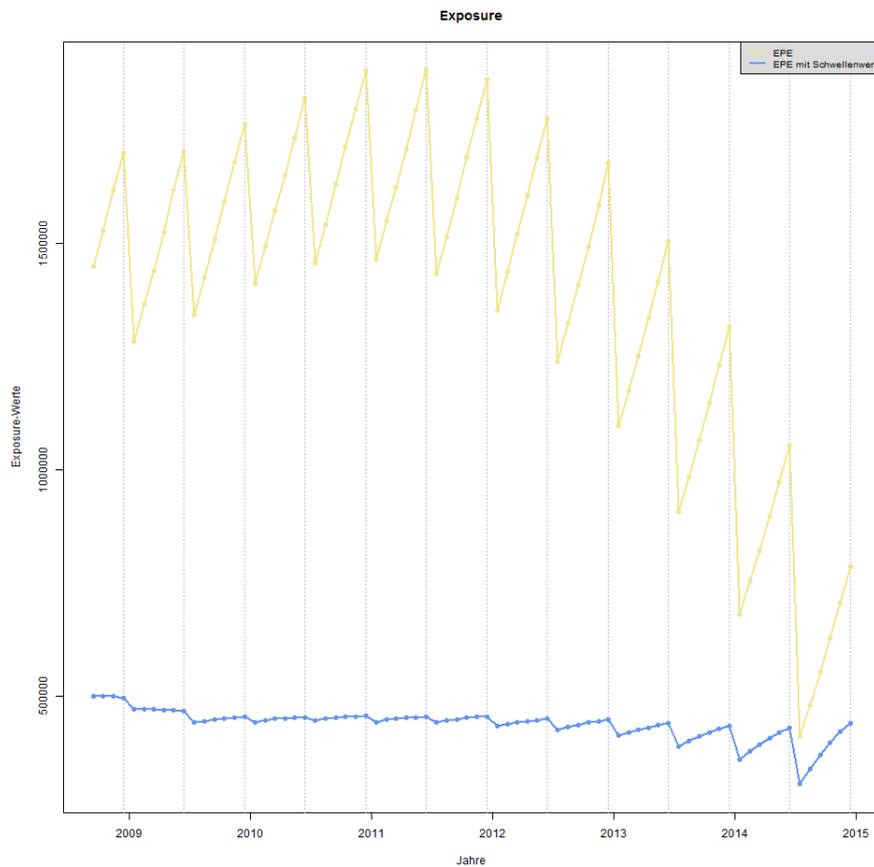


Abbildung 25: EE und EE mit einem Schwellenwert von 500.000

In der Abbildung erkennt man, dass der besicherter EE sich unter dem Schwellenwert 500.000 bewegt. Die Collateralzahlungen fanden statt, sobald der Exposure den Schwellenwert überstritten hat. Die Differenz vom unbesichertem EE und dem Schwellenwert ergibt den besicherten EE.

### 8.3.4 Ausfallwahrscheinlichkeit

Wir berechnen die Ausfallwahrscheinlichkeit  $PD$  durch historisch gegebene CDS-Spreads. Mit  $CDS_n(t)$  bezeichnen wir die  $n$ -jährige CDS-Spreads zum Zeitpunkt  $t$ . Die gegebenen CDS-Spreads der deutschen Lufthansa und der Commerzbank sind von Bloomberg entnommen und im Anhang eingefügt (A.4, A.2). Im Unterkapitel 4.1.1 haben wir die Ausfallwahrscheinlichkeit definiert und verwenden eine lineare Interpolation um die Ausfallwahrscheinlichkeit für alle  $n \in [0, 30]$  zu erhalten.

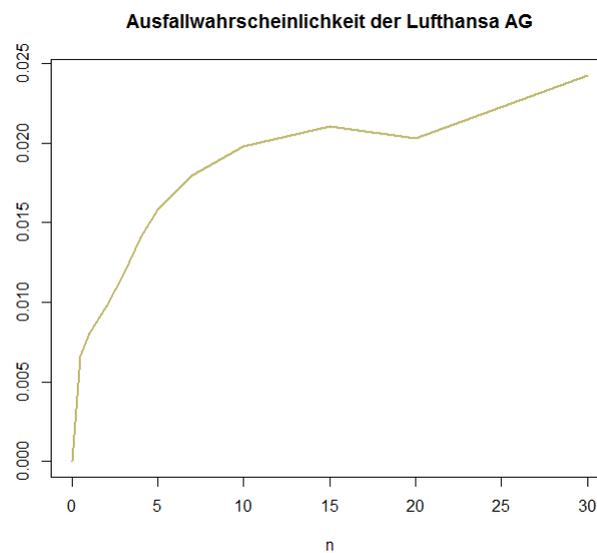


Abbildung 26: Ausfallwahrscheinlichkeit der deutschen Lufthansa

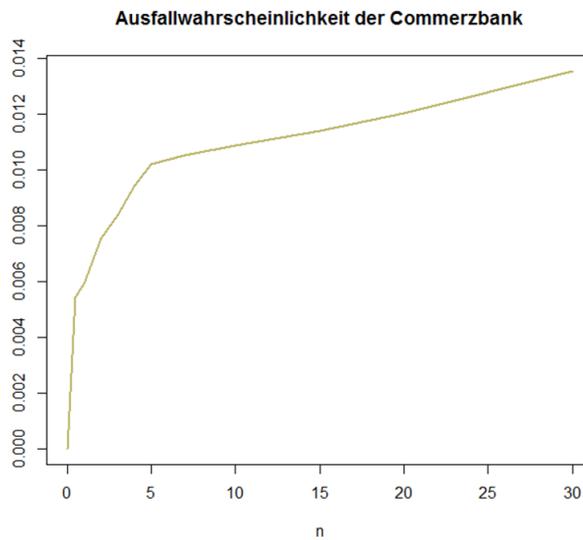


Abbildung 27: Ausfallwahrscheinlichkeit der Commerzbank

### 8.3.5 Berechnung CVA

Der CVA beträgt € 27.258,75.

Man erkennt das der CVA verglichen mit dem vorigen Beispiel 8.2 viel höher ist. Gründe dafür sind, dass wir hier eine längere Laufzeit betrachten. Je länger die Vertragslaufzeit, desto höher ist der Risikozeitraum. Ausserdem spielen die Ausfallwahrscheinlichkeiten eine Rolle, je höher die Ausfallwahrscheinlichkeit desto größer der CVA.

## 9 Resümee

Es wurde deutlich, dass beim Handeln von Finanzderivaten keine risikofreie Welt herrscht. Jedoch habe ich mit dieser Arbeit gezeigt, wie man das Ausfallrisiko eines Kontrahenten vermindern kann. Der Einsatz von Collateral Management verhindert zumindest einen unabsehbar großen finanziellen Verlust. Der tägliche Austausch von Collateral verringert das Kontrahentenrisiko und andere finanzielle Risiken und stellt daher eine sehr wirksame Methode beim Handel mit relativ riskanten Kontrahenten dar.

In dieser Arbeit habe ich zwei Zinsstrukturmodelle verwendet um einen Zinsswap zu bewerten, und zwar das Hull-White Modell und das Linear-Gauß-Markov Modell. Meine Untersuchungen brachten mich zur persönlichen Meinung, dass das Linear-Gauß-Markov Modell zur Bewertung von Zinsswaps besser ist, da in diesem Modell keine Diskretisierungsfehler entstehen.

Fazit ist, dass es keinen hundertprozentigen Schutz vor einem finanziellen Verlust gibt, dieser jedoch mit richtigen Methoden verringert werden kann.

## A Anhang

### A.1 Euler-Maruyama-Verfahren

Mit Hilfe des Euler-Maruyama-Verfahrens erhält man numerische (approximative) Lösung von stochastischen Differentialgleichungen. Sei  $(W_t, t \geq 0)$  eine Brownsche Bewegung und folgende stochastische Differentialgleichung mit Anfangswertproblem ist gegeben: [18]

$$dS_t = a(t, S_t)dt + b(t, S_t)dW_t, \quad S_0 = A$$

Um nun eine numerische Näherungslösung auf dem Intervall  $[0, T]$  mit  $T > 0$  zu ermitteln, betrachtet man diskrete Zeitpunkte

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

mit  $t_k = kh$  und Schrittweite  $h = \frac{T}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gewählt. Das stochastische Differential  $dW_t$  wird durch die Zuwächse

$$\Delta W_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

ersetzt und die Zuwächse sind unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz  $h$  (Eigenschaften einer Brownschen Bewegung).

Die Idee des Euler-Maruyama-Verfahrens ist, eine Approximation  $\tilde{S}$  von  $S$  zu berechnen:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 &= A \\ \tilde{S}_{k+1} &= \tilde{S}_k + a(t_k, \tilde{S}_k)h + b(t_k, \tilde{S}_k)\Delta W_k \end{aligned}$$

für  $k = 0, \dots, n-1$ . Dann ist  $\tilde{S}_k$  eine approximative Lösung von  $S_{t_k}$ .

### A.2 Methoden zur Schätzung der Zinsstrukturkurven

Gegeben ist eine instantaneous Forward-Rate  $f(t, t+m)$  (von Svensson in seinem Paper von 1994) mit Abrechnungsdatum  $m$  und Handelstag  $t$ . Die Forward-Rate Funktion ist gegeben durch: [23]

$$f(m; b) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_2 \frac{m}{\tau_1} \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) + \beta_3 \frac{m}{\tau_2} \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \quad (44)$$

wobei

$$b = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2) \quad (45)$$

Die Spot-Rate wird bestimmt durch Integration die Forward-Rate nach:

$$i(t, T) = \frac{\int_{\tau=t}^T f(t, T) d\tau}{T - t}$$

Sei  $i(m)$  die Spot-Rate  $i(t, t + m)$  mit Maturity  $m$  für gegeben Handelstag  $t$ .  
Dann ist es gegeben durch

$$\begin{aligned} i(m, b) = & \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 \left( \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \right) \\ & + \beta_3 \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)}{\frac{m}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \end{aligned}$$

Die Diskontfunktion ist gegeben durch

$$d(m, b) = \exp\left(-\frac{i(m, b)}{100} m\right)$$

### A.3 Zinskurven-Daten

<b>Maturity</b>	<b>3 months</b>	<b>6 months</b>	<b>9 months</b>	<b>1 year</b>	<b>2 years</b>	<b>3 years</b>	<b>4 years</b>	<b>5 years</b>	<b>6 years</b>
<b>15.09.2008</b>	0,0417900	0,0399640	0,0385238	0,0374306	0,0357786	0,0369211	0,0393142	0,0420219	0,0445541

<b>Maturity</b>	<b>7 years</b>	<b>8 years</b>	<b>9 years</b>	<b>10 years</b>	<b>11 years</b>	<b>12 years</b>	<b>13 years</b>	<b>14 years</b>	<b>15 years</b>
<b>15.09.2008</b>	0,0467033	0,0484214	0,0497400	0,0507222	0,0514375	0,0519492	0,0523100	0,0525613	0,0527348

<b>Maturity</b>	<b>16 years</b>	<b>17 years</b>	<b>18 years</b>	<b>19 years</b>	<b>20 years</b>	<b>21 years</b>	<b>22 years</b>	<b>23 years</b>	<b>24 years</b>
<b>15.09.2008</b>	0,0528535	0,0529341	0,0529885	0,0530251	0,0530495	0,0530658	0,0530766	0,0530837	0,0530884

<b>Maturity</b>	<b>25 years</b>	<b>26 years</b>	<b>27 years</b>	<b>28 years</b>	<b>29 years</b>	<b>30 years</b>
<b>15.09.2008</b>	0,0530915	0,0530935	0,0530948	0,0530957	0,0530962	0,0530966

## A.4 Credit Default Spread

Tabelle 1: Credit Default Spread von der Commerzbank (Quelle: Bloomberg)

	Spread6m	Spread1y	Spread2y	Spread3y	Spread4y	Spread5y
<b>15.09.2008</b>	48,3595	52,6609	70,2701	85,0333	96,3901	107,5000

	Spread7y	Spread10y	Spread15y	Spread20y	Spread30y
<b>15.09.2008</b>	108,8553	111,3462	114,1230	119,1794	127,6177

Tabelle 2: Credit Default Spread von der deutschen Lufthansa (Quelle: Bloomberg)

	<b>Spread6m</b>	<b>Spread1y</b>	<b>Spread2y</b>	<b>Spread3y</b>	<b>Spread4y</b>	<b>Spread5y</b>
<b>15.09.2008</b>	67,6368	91,8646	118,8107	143,8621	166,7980	189,0000

	<b>Spread7y</b>	<b>Spread10y</b>	<b>Spread15y</b>	<b>Spread20y</b>	<b>Spread30y</b>
<b>15.09.2008</b>	195,2767	201,9121	209,3693	209,1478	211,3069

## Literatur

- [1] Jon Gregory, *Counterparty Credit Risk and Credit Value Adjustment: A Continuing Challenge for Global Financial Markets*, John Wiley Sons; 2012.
- [2] Jon Gregory, *Counterparty Credit Risk The new challenge for global financial markets*, Wiley Finance; 2010.
- [3] Sven Ludwig/Marcus R. W. Martin Carsten S. Wehn, *Kontrahentenrisiko: Bewertung, Steuerung, Unterlegung nach Basel III und IFRS*, Schäffer Poeschel; 2012.
- [4] Damir Filipovic, *Term-Structure Models A Graduate Course*, Springer; 2012.
- [5] Roland Lichters, Roland Stamm, Donal Gallagher *Modern Derivatives Pricing and Credit Exposure Analysis*, Palgrave Macmillan; 2015.
- [6] Brigo, Damiano, Mercurio, Fabio *Interest Rate Models - Theory and Practice With Smile, Inflation and Credit*, Springer; 2006.
- [7] Musiela Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer; 2005.
- [8] Patrick S. Hagan, Diana E. Woodward *Markov interest rate models*, Applied Mathematical Finance 6, 233–260, 1999.
- [9] Dr. Ingo Hansen, *Präsentation: DAA-Workshop für junge Mathematiker im Bachelorstudium - Bewertung von Zinsswaps*, 2014
- [10] Carsten Bergmann (much-net AG), *CVA Das Kontrahentenrisiko unter Basel III*, 2012.
- [11] Frank Thole, Torsten Weigel (WEPEX Unternehmensberatung) *Information zum Thema CVA Credit Valuation Adjustment*, 2015.
- [12] <https://www.sparkasse.at/erstebank>
- [13] Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht *Internationale Konvergenz der Eigenkapitalmessung und der Eigenkapitalanforderungen*, 2006.
- [14] Axel Becker/MarkusGaulke/Martin Wolf (Hrsg), *Praktiker-Handbuch Basel II: Kreditrisiko, operationelles Risiko, Überwachung, Offenlegung*, Schäffer-Poschel; 2005.

- [15] Matthias Scherer, Sebastian Walter, *Präsentation: CVA für Kontrahenten-Ausfallrisiken*, 2015.
- [16] Hakwa Brice, *Präsentation: Zufallsprozesse und stochastische Integration, Chap 6: Monte-Carlo-Simulation*, 2012.
- [17] Raffaella Handwerk, *Präsentation: Strategien zum Hedging des Credit Valuation Adjustment*, 2013.
- [18] <http://de.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Hauptseite>
- [19] <http://www.pwc.de/de/finanzdienstleistungen/collateral-management-fuer-otc-derivate-im-asset-management.html>
- [20] <http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/recovery-rate.html>
- [21] <https://bankinghub.de/banking/steuerung/regulatorische-aenderungen-der-bewertung-von-finanzinstrumenten-eine-herausforderung-der-banksteuerung>
- [22] <https://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html>
- [23] <http://www.basiszinskurve.de/theoretischer-hintergrund.html>