TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

MASTERARBEIT

Prämienkalkulationsprinzipien

Ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer

durch

Martin Sonnleitner, BSc
Lorenz-Reiter-Straße 1/3/17
1110 Wien

Datum

Unterschrift

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Masterarbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die den Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden.

Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Datum	Unterschrift

Danksagung

Zuallererst danke ich meinen Eltern Sylvia und Josef, denn sie haben mir alle Möglichkeiten gegeben, um ein Studium abschließen zu können. Sie hatten zu jeder Zeit Vertrauen in mich. In jeder schwierigen Situation waren sie eine Stütze und gaben mir Rückhalt. Ich bin stolz ihr Sohn zu sein und ich bin auf ewig dankbar, für alles was sie für mich getan haben und noch immer tun!

Ebenso geht ein großer Dank an meine Freundin Lisa, die für mich Antrieb, Motivator, Partner und Gesprächstherapeut, kurzum eine wundervolle Freundin, war. Wir sind im Laufe unseres Studiums durch dick und dünn gegangen und haben schlussendlich noch jede Herausforderung gemeistert. Vielen Dank für alles!

Ein großer Dank geht an meine Schwester Katja und ihren Mann Philip, die immer für mich da waren wenn ich sie gebraucht habe!

Ebenfalls möchte ich mich bei meinen StudienkollegInnen, besonders bei Christina bedanken, die mich nicht nur mit Mitschriften und Beispielen versorgt haben, sondern auch den Studienalltag zu etwas Besonderem gemacht haben.

Es gibt noch viele Menschen denen ich zu Dank verpflichtet bin, aber um den Rahmen nicht zu sprengen sage ich kollektiv danke an euch alle!

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abstract

Diese Arbeit versucht zuerst einen Überblick über Prämienkalkulationsprinzipien und ihre Eigenschaften zu geben. Danach liegt der Fokus einerseits auf dem Esscher Prämienprinzip und andererseits auf dem Wang Prämienprinzip. Für beide erfolgt eine Herleitung, die zum Teil wirtschaftswissenschaftliche Theorien beinhalten, und eine genauere Betrachtung der jeweils erfüllten Eigenschaften. Da für das Wang Prämienprinzip die Verzerrungsfunktionen ein wichtige Rolle spielen, werden diese genauer vorgestellt und betrachtet. Zum Abschluss der Arbeit folgt noch ein praxisnahes Beispiel aus der Lebensversicherung. In diesem Beispiel wird die Prämie, abhängig vom gewählten Parameter, für eine kontinuierliche Erlebensversicherung mit Hilfe aller, in dieser Arbeit betrachteter, Prämienprinzipien berechnet und durch Grafiken veranschaulicht.

At the beginning, this diploma thesis tries to give an overview of premium calculation principles and their properties. Then, on the one hand, the focus is on the Esscher premium principle and on the other hand, on the Wang premium principle. There is a derivation for both of them, also including some ideas of economic theories. Their fulfilled properties are derived as well. Because of the importance of distortion functions for the Wang premium calculation principle, those functions are introduced and looked at more precisely. At the end of the diploma thesis there is an example of a practical application for those premium principles. More accurately, the premium of an endowment insurance is calculated by using all the different premium calculation principles introduced and then plotted in dependence of the parameter used.

Kapitel 1

Einleitung

Eine der wichtigsten, wenn nicht die wichtigste Größe eines Versicherungsvertrags ist unbestritten die Prämie. Sie stellt den monetären Gegenwert dar, den man für die Übernahme des Risikos an den Versicherer zu entrichten hat. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten eine geeignete Prämie zu berechnen. Eine zentrale Frage der Versicherungsmathematik ist es daher, eine angemessene Prämie für die Versicherung eines Risikos zu finden.

Diese Prämie ist der monetäre Wert, für den zwei Parteien Risiko und Sicherheit tauschen. Die übliche Situation in der dieser Tausch stattfindet, ist wenn eine individuelle Partei, die ein Risiko trägt, wie etwa ein Paar das mit einem Kredit das gemeinsame Haus absichern möchte, sich Sicherheit von einer Versicherung kauft, um für einen vergleichsweise geringen, periodischen Aufwand eine finanzielle Absicherung für (eventuell extreme) Schadensfälle zu erhalten. (Wie in diesem Fall etwa den Tod einer der beiden Personen)

Intuitiv findet sich ein einfacher Zugang, nämlich der, der die Prämie gleich dem zu erwartenden Schadenaufwand des Versicherers setzt. Dieser intuitive Zugang führt tatsächlich zum ersten Prämienprinzip, dem sogenannten *Nettoprämienprinzip.* Darauf aufbauend ergeben sich allerdings noch viele weitere, interessante Kalkulationsprinzipien, die jeweils unterschiedliche Eigenschaften besitzen und die den unterschiedlichen, doch vielfältigen Anforderungen am Versicherungs- bzw. Finanzmarkt gerecht werden.

In dieser Arbeit wird der Fokus auf zwei spezielle Prinzipien gerichtet sein. Zum einen auf das Prämienprinzip von Esscher und zum anderen auf das Prämienprinzip von Wang. Diese beiden werden nicht nur vorgestellt, sondern auch von mehreren Seiten hergeleitet.

Dabei spielen vor allem wieder die Eigenschaften der Prämienprinzipien eine Rolle. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit Prämienprinzipien über diese zu charakterisieren. Zuerst spezifiziert man die Eigenschaften, die dieses in weiterer Folge erfüllen soll, um danach das passende Prämienprinzip (oder auch die passenden Prinzipien) zu finden. Oft reicht für die Anwendung allerdings aus, wenn man eine passende Möglichkeit gefunden hat.

Ein weiterer Ansatz der hier vorgestellt wird ist der, aus einer wirtschaftswissenschaftlichen Theorie eine Prämienkalkulationsmethode abzuleiten. Hier steht vor allem die Esscher Prämienkalkulation, als ein Beispiel für ein solches Vorgehen, im Fokus.

Manche Prämienprinzipien können auch durch mehrere Methoden hergeleitet werden. Ein Beispiel dafür ist das Wang Prämienprinzip.

Kapitel 2

Prämienkalkulationsprinzipien im Überblick

Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten Prämienkalkulationsprinzipien vorgestellt. Beginnend beim schon erwähnten Nettoprämienprinzip, soll dies einen Überblick über die möglichen Wege und Mittel geben, um eine Versicherungsprämie zu kalkulieren.

Zuerst werden die mathematischen Grundlagen und Definitionen gegeben, die im weiteren Verlauf für die Berechnungen maßgeblich sind.

2.1 Grundlagen der Prämienkalkulation

Definition 2.1 (Grundlagen).
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein messbarer Raum, wobei Ω die Grundmenge, $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über der Grundmenge und P ein Maß definiert auf Ω ist.
*Ein **Risiko** ist eine Zufallsvariable X definiert auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Es gilt $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist ein Risiko, wenn $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{R}$. X repräsentiert in diesem Fall die Schadenshöhe (oder Verlust) wenn $X > 0$, bzw. den Gewinn wenn $X \leq 0$.*

Definition 2.2 (Prämienkalkulationsprinzip).
*Ein **Prämienkalkulationsprinzip** Π ist eine Abbildung, die einer beliebigen Zufallsvariable aus $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ eine reellwertige Zahl zuordnet. Die Klasse der nichtnegativen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wird mit $\mathcal{X}$ bezeichnet. Somit gilt $\Pi : \mathcal{L}^{\Pi} \to \mathbb{R}$.*

An die Elemente von $\mathcal{X}$ müssen keine speziellen Integrabilitätsbedingungen gestellt werden. Stattdessen werden einige der folgenden Prämienprinzipien gleich unendlich für Teilmengen von $\mathcal{X}$ sein.
Es reicht den Definitionsbereich von Π auf $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ zu erweitern. Im Fall $\Pi(X) = +\infty$ nennt man das Risiko **unversicherbar**.

Definition 2.3 (Nutzenfunktion)**.**
Eine Funktion u auf $\mathbb{R}$ *für die gilt* $u : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty)$*, sowie u streng monoton wachsend und der Einfachheit halber zweimal stetig differenzierbar* $\forall x : u(x) > -\infty$ *nennt man* ***Nutzenfunktion****.*
Gilt auch noch, dass die Funktion u konkav ist, so nennt man sie ***risikoavers****.*

Die Theorie der Nutzenfunktion stammt ursprünglich aus der Volkswirtschaftslehre. Mit ihr misst man den Nutzen von Wirtschaftssubjekten wie beispielsweise Geld, Aktien oder Immobilien. Grundsätzlich gilt, je mehr Kapital man hat, desto größer der Nutzen. Des Weiteren gilt für die risikoaverse Nutzenfunktion, dass ein Zugewinn bei wenig Startkapital höher bewertet wird, als der selbe Zugewinn bei viel Startkapital.

Definition 2.4 (Momenterzeugende Funktion)**.**
Sei $X \in \mathcal{X}$ *eine Zufallsvariable wie oben definiert, dann nennt man*

$$M_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}], \quad t \in \mathbb{R}$$

die ***Momenterzeugende Funktion*** *von X, falls der Erwartungswert existiert.*

Die Bezeichnung momenterzeugend stammt ursprünglich daher, dass man mithilfe der k-ten Ableitung das sogenannte ***k*-te Moment** erhält. Sprich

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} M_X(t)\Big|_{t=0} = \mathbb{E}(X^k) = m_X^k \tag{2.1}$$

Wenn die Momente noch zentralisiert werden, erhält man aus den Ableitungen wichtige, stochastische Werte wie zum Beispiel Erwartungswert, Varianz, Schiefe oder auch die Kurtosis.

2.2 Eigenschaften

Die Prämienprinzipien erfüllen wie schon erwähnt unterschiedliche Eigenschaften, welche unterschiedliche Vorteile, je nach Art der Anwendung, haben können. Hier einige der wichtigsten Eigenschaften, die ein Prämienprinzip erfüllen kann. (Zum größten Teil aus dem Buch von [Schmidt] herausgearbeitet.)

Sei Π ein Prämienprinzip und $\mathcal{X}$ wie oben. Dann ist Π

- *erwartungswertübersteigend*, wenn $\forall X \in \mathcal{X}$ gilt

$$\Pi[X] \geq \mathbb{E}[X]$$

- *positiv homogen*, wenn $\forall X \in \mathcal{X}$, sowie $\forall c \in (0, \infty)$ mit $cX \in \mathcal{X}$ gilt

$$\Pi[cX] = c\Pi[X]$$

- *additiv*, wenn für alle beliebigen, unabhängigen Risiken $X_i, X_j \in \mathcal{X}$ gilt

$$\Pi[X_i + X_j] = \Pi[X_i] + \Pi[X_j]$$

- *subadditiv (bzw. superadditiv)*, wenn für alle beliebigen, unabh. Risiken $X_i, X_j \in \mathcal{X}$ gilt

$$\Pi[X_i + X_j] \leq \Pi[X_i] + \Pi[X_j] \quad \text{(bzw. } \geq)$$

- *translationsinvariant*, wenn $\forall X \in \mathcal{X}$, sowie $\forall c \in (0, \infty)$ gilt

$$\Pi[X + c] = \Pi[X] + c$$

- *maximalschadenbegrenzt*, wenn $\forall X \in \mathcal{X}, \exists\, x_m \in \mathbb{R}_+$ mit $x_m := \max_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ gilt

$$\Pi[X] \leq x_m$$

- *stochastisch monoton*, wenn $\forall X, Y \in \mathcal{X}$ die stochastisch geordnet sind gilt

$$\Pi[X] \leq \Pi[Y]$$

2.3 Prämienprinzipien

Das einfachste und naheliegendste Prämienprinzip ist das Nettoprämienprinzip. Es spiegelt das Bewusstsein mancher Versicherer wider, dass kein Risiko existiert, wenn man nur genug identisch verteilte, unabhängige Polizzen verkauft.

Mit dieser Annahme kommt man direkt zum Nettoprämienprinzip. Dieses verlangt keinen Zuschlag für das Risiko. (engl. *risk loading*)

Definition 2.5 (Nettoprämienprinzip).
Die Abbildung $\Pi[X] := \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ *mit*

$$\Pi[X] := \mathbb{E}[X] \tag{2.2}$$

nennt man Nettoprämienprinzip.

Eine Erweiterung des Nettoprämienprinzips stellen folgende drei Prämienprinzipien dar, die auf die Nettoprämie einen Sicherheitszuschlag verlangen. Konkret werden auf den Erwartungswert, unter Zuhilfenahme eines positiven Parameters, entweder Erwartungswert, Varianz oder Standardabweichung aufgeschlagen.

Definition 2.6 (Erwartungswertprinzip).
Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Dann heißt die Abbildung* $\Pi[X] := \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ *mit*

$$\Pi[X] := \mathbb{E}[X] \cdot (1 + \lambda) \tag{2.3}$$

Erwartungswertprinzip mit Parameter λ.

Definition 2.7 (Varianzprinzip).
Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Dann heißt* $\Pi[X] := \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ *mit*

$$\Pi[X] := \mathbb{E}[X] + \lambda \mathbb{V}[X] \tag{2.4}$$

Varianzprinzip mit Parameter λ.

Definition 2.8 (Standardabweichungsprinzip).
Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Dann heißt* $\Pi[X] := \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ *mit*

$$\Pi[X] := \mathbb{E}[X] + \lambda \sqrt{\mathbb{V}[X]} \tag{2.5}$$

Standardabweichungsprinzip mit Parameter λ.

Ein weiteres Prämienkalkulationsprinzip ist das Nullnutzenprinzip. Dieses besagt, dass der Nutzen des Kapitals ident mit dem erwarteten Nutzen des Kapitals inklusive den erwarteten Prämien und abzüglich den zu erbringenden Leistungen sein soll.

Definition 2.9 (Nullnutzen- und Exponentialprinzip).
Sei u eine Nutzenfunktion. Genauer

$$u(x) := \mathbb{E}[u(x + P - S)], \tag{2.6}$$

wobei P *und* S *Prämie und Risiko darstellen. Die Prämie, die vom Anfangsvermögen abhängt, ist auf diese Weise eindeutig bestimmt, allerdings ist die Gleichung oft nicht eindeutig lösbar.*

Ein Beispiel für eine risikoaverse Nutzenfunktion wäre die ***Exponentielle Nutzenfunktion***

$$u(x) := \frac{1}{a}(1 - e^{-ax}), \qquad -\infty < x < \infty \quad (a > 0) \tag{2.7}$$

Der Parameter a legt die Risikoaversion fest.

Sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine Nutzenfunktion wie oben angegeben und sowohl* $\mathbb{E}[X] > 0$, *als auch* $\sup_{a \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[u(a - X)] > u(0)$. *Es bezeichne* $\pi[X]$ *die Lösung der Gleichung* $\mathbb{E}[u(a - X)] = u(0)$. *Dann heißt* $\Pi[X] := \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ *mit*

$$\Pi[x] := \pi[X]$$

Nullnutzenprinzip *bezüglich einer Nutzenfunktion u.*

Wie zuvor erwähnt sind nicht alle Gleichungen auflösbar. Das oben gewählte Beispiel (2.7) *führt allerdings direkt zum so genannten Exponentialprinzip. Wählt man die Nutzenfunktion wie im Beispiel, so kann man die Prämie errechnen und kann dabei feststellen, dass sie nicht vom Anfangskapital abhängt. Explizit gilt:*

$$P = \frac{1}{a} \, log \, \mathbb{E}[e^{aS}]$$

Für steigenden Parameter a steigt auch die Prämie. Wenn man die Grenzwerte $a \to 0$, sowie $a \to \infty$ betrachtet kann man festellen, dass diese einerseits das Nettoprämienprinzip, sowie andererseits das Prinzip des maximalen Verlusts ergeben. Das Prinzip des maximalen Verlusts setzt die Prämie gleich dem maximal zu erwartenden Schaden und ist daher nur als theoretischer Grenzfall interessant.

Definition 2.10 (Esscher Prinzip)**.**
Es existiere eine monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Dann heißt die Abbildung $\Pi : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$\Pi[X] := \frac{\mathbb{E}[Xg(X)]}{\mathbb{E}[g(X)]} \tag{2.8}$$

Esscher Prinzip *bezüglich g.*

Das Nettoprämienprinzip (2.2) ist ein Spezialfall des Esscher Prinzips für die für den Fall $g(x) = 1$.

Für den Fall $g(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ wird das Esscher Prinzip bezüglich g als *Karlsruhe Prinzip* zum Parameter k bezeichnet.

Des Weiteren existiert das sogenannte *spezielle Esscher Prinzip* zum Parameter α für den Fall $g(x) = e^{\alpha x}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Dieses spezielle Esscher Prinzip wird nun genauer behandelt und im Weiteren nur mehr kurz *Esscher Prinzip* genannt.

Aus Vollständigkeitsgründen hier auch noch ein Ausblick auf das Wang Prämienprinzip. Die dafür wichtigen Erkenntnisse folgen in Kapitel 4 auf Seite 31.

Definition 2.11 (Wang Prinzip).
Für eine beliebige konkave, nichtfallende Verzerrungsfunktion g, mit $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ existiert ein zugehöriges Prämienprinzip $\Pi^W(X)$, nämlich

$$\Pi^W[X] = \int_0^\infty g(S_X(t))\,dt \tag{2.9}$$

wobei $S_X(t)$ die dekumulierte Verteilungsfunktion darstellt (Definition auf Seite 31).

2.4 Übersicht über die erfüllten Eigenschaften der Prämienprinzipien

Man sieht schon, dass es doch eine große Menge an verschiedenen Prämienprinzipien gibt. Sie alle erfüllen unterschiedliche Eigenschaften. Nun eine Tabelle um einen Überblick zu erhalten.

Prämienprinzip	**EWÜ**	**PHO**	**ADD**	**SUB**	**SUP**	**TIN**	**MAX**	**STM**
Nettoprämienprinzip	X	X	X	X	X	X	X	X
Erwartungswertprinzip	X	X	X	X	X			X
Varianzprinzip	X					X		
Standardabweichungsprinzip	X	X				X		
Nullnutzenprinzip	X					X	X	X
Exponentialprinzip	X					X	X	X
Esscher Prinzip						X	X	
Wang Prinzip	X	X		X		X	X	X

Tabelle 2.1: Eigenschaften der Prämienprinzipien in einer Übersicht

Diese Eigenschaften werden im Lauf dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen. Sie verleihen manchen Prinzipien Vorteile gegenüber anderen und sind für einige weiterführende Sätze wichtig.

An den beiden in dieser Arbeit hervorgehobenen Prinzipien, nämlich dem Esscher Prinzip und dem Wang Prinzip, werden wir genauer auf diese Eigenschaften eingehen.

Kapitel 3

Esscher Prinzip - Esscher Transformation

3.1 Wirtschaftsprämienprinzip - Das Modell von Bühlmann

Folgendes Kapitel zum Großteil aus [Buehlmann] herausgearbeitet:

Auf Seite 15 sieht man die Standardvariante, um ein Prämienprinzip zu definieren und zu notieren. Die Interpretation ist für einen Versicherungsmathematiker klar. Man weist der Zufallsvariable X, dem Risiko, eine reelle Zahl zu, nämlich die Prämie. In dieser Definition hängt die Prämie vom Risiko ab und nur vom Risiko.

In einer wirtschaftswissenschaftlichen Prämienkalkulation hängt die Prämie allerdings auch immer von den Bedingungen des Marktes ab.

Definition 3.1 (Marktteilnehmer)**.**
In einem Markt gibt es sogenannte ***Marktteilnehmer*** $i = 1, 2, \dots, n$. *Diese verkörpern zum Beispiel Käufer von Versicherungen, Versicherungsunternehmen oder Rückversicherungsunternehmen. Jeder Teilnehmer hat eine eigene Nutzenfunktion* u_i *(siehe Seite 16) und ein Startkapital* K_i.

In diesem Kapitel wird das Risiko der Einfachheit halber in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum, mit Zuständen $s = 1, 2, \dots, S$ *und Eintrittswahrscheinlichkeit* π_s*, betrachtet.*

*Jeder Marktteilnehmer hat eine **Risikofunktion** $X_i(s)$ und kauft eine **Risikoausgleichsfunktion** $Y_i(s)$ im Falle von s. Der Preis dafür beträgt $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_s)$, womit der Gesamtpreis dafür*

$$\mathrm{GPr}[Y_i] = \sum_{s=1}^{S} \rho_s Y_i(s) \tag{3.1}$$

beträgt.

Definition 3.2 (Risikoausgleich - Risk Exchange REX).
$Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ nennt man Risikoausgleich wenn

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i(s) = 0, \quad \forall s = 1, 2, \ldots, S \tag{3.2}$$

Diese Bedingung spiegelt das Marktgleichgewicht wider, das in jedem geschlossenem System erfüllt sein muss.

3.2 Marktäquilibrium und Äquilibriumspreis

Definition 3.3 (Marktäquilibrium).
Man nennt $(\rho, \mathbf{Y})$ ein Marktäquilibrium, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Für alle i wird der Ausdruck $\sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i[K_i - X_i(s) + \mathbf{Y}_i(s) - \sum \rho_s \mathbf{Y}_i(s)]$ maximal, für beliebige Risikoausgleichsfunktion Y_i

b) $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i(s) = 0, \quad \forall s = 1, 2, \ldots, S$

Wenn die Bedingungen a) und b) erfüllt sind so nennt man

ρ *einen Äquilibriumspreis, und*

$\mathbf{Y}$ *eine Äquilibriumsrisikoausgleichsfunktion.*

Satz 3.4.
Die Bedingung a) in der Definition des Marktäquilibriums gilt dann und nur dann, wenn

$$\begin{aligned} &\frac{\pi_t}{\rho_t} u_i'[K_i - X_i(t) + \mathbf{Y}_i(t) - \sum_{j=1}^{S} \rho_j \mathbf{Y}_i(j)] = \\ &\sum_{s=1}^{S} \pi_s u_i'[K_i - X_i(s) + \mathbf{Y}_i(s) - \sum \rho_j \mathbf{Y}_i(j)] \end{aligned} \tag{3.3}$$

für alle t gilt.

Beweisidee.
Der Beweis dieses Satzes funktioniert in Richtung $\Rightarrow$ mittels partieller Ableitung. Die Rückrichtung $\Leftarrow$ folgt daraus, dass $u_i(x)$ konkav ist. $\square$

Der Fall, dass die erwähnten Risiko- und Risikoausgleichsfunktionen $X_i(s)$ und $Y_i(s)$ Zufallsvariablen auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum sind, ist in der Realität eher nicht der Fall. Viel eher sollte man sie als Zufallsvariablen $X_i(\omega)$ und $Y_i(\omega)$ eines arbiträren Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ sehen.

In diesem Fall würde der Preis durch eine Funktion

$$\mathrm{GPr}[Y_i] = \int\limits_{\Omega} \varphi(\omega) Y_i(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) \tag{3.4}$$

gegeben sein, wobei $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$.

Das Äquilibrium wird als das Paar $(\varphi, \mathbf{Y})$ definiert, sodass

a') Für alle i wird der Ausdruck $\int u_i[K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')]\, d\mathbf{P}(\omega)$ maximal, für beliebige Risikoausgleichsfunktion $Y_i(\omega)$

b') $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i(\omega) = 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$

Die Existenz dieses Äquilibriums kann nicht so einfach bewiesen werden wie zuvor im endlichen Wahrscheinlichkeitsraum.

Analog zum Satz auf Seite 22 gilt in stetiger Zeit

Satz 3.5.
Die Bedingung a') in gilt dann und nur dann, wenn

$$\begin{aligned} &u_i'[K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')] = \\ &\varphi(\omega) \int u_i'[K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')]\, d\mathbf{P}(\omega) = \\ &C_i \varphi(\omega) \end{aligned} \tag{3.5}$$

für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Beweis.

$\Leftarrow$) Es gilt in der Rückrichtung, dass $\int \varphi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} & u_i[K_i - X_i(\omega) + Y_i(\omega) - \int \varphi(\omega')Y_i(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')] \\ \leq\ & u_i[K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')] \\ +\ & u_i'[K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')] \\ \times\ & [Y_i(\omega) - \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')(Y_i(\omega') - \mathbf{Y}_i(\omega'))\, d\mathbf{P}(\omega')] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Der letzte Summand kann auch als

$$C_i\varphi(\omega)[Y_i(\omega) - \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')(Y_i(\omega') - \mathbf{Y}_i(\omega'))\, d\mathbf{P}(\omega')]$$

geschrieben werden. Wenn man diesen Term mit $d\mathbf{P}(\omega)$ integriert und ausnützt, dass hier $\int \varphi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = 1$ gilt, dann erhält man Null und damit ist die Rückrichtung gezeigt.

$\Rightarrow$) Wähle eine beliebige, messbare Menge A und ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dann ersetze $\mathbf{Y}_i(\omega)$ durch $\mathbf{Y}_i(\omega) + \varepsilon I_A(\omega)$. Betrachte

$$g(\varepsilon) = \int u_i[K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}_i(\omega) + \varepsilon I_A(\omega) - \int \varphi(\omega')(\mathbf{Y}_i(\omega') + \varepsilon I_A(\omega'))\, d\mathbf{P}(\omega')]\, d\mathbf{P}(\omega)$$

Dieses $g(\varepsilon)$ ist eine differenzierbare reelle Funktion mit Maximum bei $\varepsilon = 0$. Daher muss gelten, dass

$$\begin{aligned} 0 = g'(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \int u_i' & \left[K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')\right] \\ & \cdot \left[I_A(\omega) - \int \varphi(\omega')I_A(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')\right]\, d\mathbf{P}(\omega) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Wenn man nun $\mathbf{Z}(\omega)$ wie folgt definiert,

$$\mathbf{Z}(\omega) := u_i'\left[K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}_i(\omega) - \int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\, d\mathbf{P}(\omega')\right]$$

dann sieht die Gleichung 3.7 wie folgendermaßen aus:

$$0 = g'(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \int \mathbf{Z}(\omega)\left[I_A(\omega) - \int \varphi(\omega')I_A(\omega')\,d\mathbf{P}(\omega')\right]\,d\mathbf{P}(\omega) \tag{3.8}$$

Daher gilt, dass

$$\int_A \mathbf{Z}(\omega)\,d\mathbf{P}(\omega) = \int_A \varphi(\omega)\,d\mathbf{P}(\omega) \cdot \int \mathbf{Z}(\omega)\,\mathbf{P}(\omega)$$

Diese Relation gilt für jede messbare Menge A, daher folgt,

$$\mathbf{Z}(\omega) = \varphi(\omega)\int \mathbf{Z}(\omega)\,d\mathbf{P}(\omega) \qquad \text{für fast alle } \omega. \tag{3.9}$$

Das entspricht genau der Behauptung. □

3.3 Exponentielle Nutzenfunktion

Unter Betrachtung einer Exponentiellen Nutzenfunktion

$$u_i(x) = \frac{1}{\alpha_i}(1 - e^{-\alpha_i x}) \tag{3.10}$$

wobei

$$u_i'(x) = e^{-\alpha_i x} \tag{3.11}$$

(siehe Seite 18) vereinfacht sich die Gleichung (3.5) zu

$$\exp[-\alpha_i(K_i - X_i(\omega) + \mathbf{Y}(\omega) - \int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\,d\mathbf{P}(\omega'))] = C_i\varphi(\omega)\ \ f.s. \tag{3.12}$$

Da jede optimale Funktion $\mathbf{Y}_i(\omega)$ fix ist bis auf eine additive Konstante, kann man o.B.d.A. annehmen, dass

$$\int \varphi(\omega')\mathbf{Y}_i(\omega')\,d\mathbf{P}(\omega') = 0 \tag{3.13}$$

Wenn man den Term $e^{-\alpha_i K_i}$ in die Konstante C_i zieht, welche wir dann als $\mathbf{C}_i$ bezeichnen gilt

$$\exp[\alpha_i X_i(\omega) - \alpha_i \mathbf{Y}_i(\omega)] = \mathbf{C}_i\varphi(\omega) \qquad f.s. \tag{3.14}$$

oder

$$X_i(\omega) - \mathbf{Y}_i(\omega) = \frac{1}{\alpha_i}[\ln \mathbf{C}_i + \ln \varphi(\omega)] \qquad f.s. \tag{3.15}$$

Unter Verwendung der Eigenschaft b') auf Seite 23 und der Abkürzung

$$Z(\omega) := \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega) \tag{3.16}$$

kann man die Gleichung (3.15) über i aufsummieren und erhält

$$Z(\omega) = \frac{1}{\alpha} \ln \varphi(\omega) + c, \tag{3.17}$$

wobei

$$\frac{1}{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha\, i}$$

und

$$c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha\, i} \ln \mathbf{C}_i$$

c ist somit unabhängig von ω und i.
Daraus folgt nach oben, dass

$$e^{\alpha Z(\omega)} = e^{\alpha c} \varphi(\omega) \tag{3.18}$$

und weiter folgt unter Berücksichtigung der Bedingung $\int \varphi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = 1$, dass

$$\varphi(\omega) = \frac{e^{\alpha Z(\omega)}}{\mathbb{E}(e^{\alpha Z})} \tag{3.19}$$

Wenn man diese Lösung nun in Gleichung (3.15) einsetzt, bekommt man folgendes:

$$X_i(\omega) - \mathbf{Y}_i(\omega) = \frac{\frac{1}{\alpha_i}}{\frac{1}{\alpha}} Z + c_i =: \gamma_i Z + c_i \tag{3.20}$$

wobei $\sum c_i = 0$.
Schlussendlich kann man durch den Ausdruck $\int \mathbf{Y}_i(\omega)\varphi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = 0$ die Konstanten c_i bestimmen.
Daraus ergibt sich:

$$\int X_i(\omega)\varphi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) = \gamma_i \int Z(\omega)\varphi(\omega)\, d\mathbf{P}(\omega) + c_i$$

oder

$$\frac{\mathbb{E}[X_i e^{\alpha Z}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha Z}]} = \gamma_i \frac{\mathbb{E}[Z e^{\alpha Z}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha Z}]} + c_i\,, \qquad \forall i \tag{3.21}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{Y}_i(\omega) = X_i(\omega) - \gamma_i Z(\omega) - \frac{\mathbb{E}[(X_i - \gamma_i Z)e^{\alpha Z}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha Z}]} \tag{3.22}$$

Das Äquilibrium $(\varphi, \mathbf{Y})$ existiert damit durch die explizite Darstellung, nachdem zuvor nur nicht sicher war, ob es überhaupt existiert.

3.4 Wirtschaftstheoretisches Prämienprinzip

Die Gleichung (3.19) definiert ein wirtschaftstheoretisches Prämienprinzip für alle Zufallsvariablen $X : \omega \to \mathbb{R}$. Genauer gilt

$$\Pi^{Ec}[X, Z] = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha Z}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha Z}]},$$

wobei $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ die Summe der ursprünglichen Risikofunktionen des Markts sind. Für den Fall, dass X und $Z - X$ unabhängig sind gilt:

$$\Pi^{Ec}[X, Z] = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha Z}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha Z}]} = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha X}]\mathbb{E}[e^{\alpha(Z-X)}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]\mathbb{E}[e^{\alpha(Z-X)}]} = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]} = \Pi[X]$$

Man sieht, dass aufgrund der Unabhängigkeit das Z komplett eliminiert werden kann und ein Standardprämienprinzip übrig bleibt. Dieses Prinzip wurde schon auf Seite 19 vorgestellt und *spezielles Esscher Prinzip* genannt. Der Parameter $\frac{1}{\alpha}$ hat damit die intuitive Bedeutung der Risikobereitschaft des gesamten Markts.

3.5 Esscher Transformation und Eigenschaften des Esscher Prinzips

Folgendes Kapitel zum Großteil aus [Van Heerwaarden] herausgearbeitet:

Um einige Eigenschaften des Esscher Prinzips direkt zeigen zu können, ist es von Vorteil die Esscher Transformation kennenzulernen.

Esscher Transformation

Die Prämie nach dem Esscher Prinzip

$$\Pi[X] := \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]} \qquad \alpha > 0 \tag{3.23}$$

kann man als Nettoprämie für ein Risiko Y sehen, das mit X in folgendem Zusammenhang steht:

Definition 3.6.
Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion f, dann ist die folgende Transformation g die Dichtefunktion von Y.

$$g(x) = \frac{e^{\alpha x} f(x)}{\int\limits_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} f(x)\, dx} \tag{3.24}$$

*Diese Transformation wird **Esscher Transformation** genannt.*

Auf Transformationen von Verteilungsfunktionen wird im nächsten Kapitel noch genauer eingegangen. Sie stellen ein zentrales Element des Prämienprinzips von Wang dar.

Für das Risiko Y kann man die momenterzeugende Funktion berechnen, nämlich:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \int_0^\infty e^{tx} g(x)\, dx = \frac{\int\limits_0^\infty e^{tx} e^{\alpha x} f(x)\, dx}{\int\limits_0^\infty e^{\alpha x} f(x)\, dx} = \frac{M_X(t+\alpha)}{M_X(\alpha)}$$

Daraus folgt nun, dass

$$\mathbb{E}[Y] = M_Y'(t)\Big|_{t=0} = \frac{M_X'(t+\alpha)}{M_X(\alpha)}\Big|_{t=0} = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]} = \Pi[X]$$

Die Esscher Prämie ist also der Erwartungswert der Esscher Transformierten.

Eigenschaften des Esscher Prinzips

Das Esscher Prämienprinzip erfüllt folgende Eigenschaften:

- *erwartungswertübersteigend*
  Der Fall $\alpha = 0$ führt zu $\Pi[X] = \mathbb{E}[X]$ und passt somit. Für den Fall $\alpha > 0$ gilt, wenn man die zweiparametrige Funktion $\Pi[X, \alpha]$ betrachtet, dass nach Quotientenregel

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\Pi[X, \alpha] = \frac{\mathbb{E}[X^2 e^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]} - \left(\frac{\mathbb{E}[X e^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]}\right)^2 = \mathbb{V}[Y] \geq 0$$

- *additiv*
  Für die Additivität ist zu zeigen, dass

$$\Pi[X_1 + X_2] = \Pi[X_1] + \Pi[X_2]$$

  Das gilt, weil

$$\begin{aligned}\Pi[X_1 + X_2] &= \frac{\mathbb{E}[(X_1 + X_2)e^{\alpha(X_1+X_2)}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha(X_1+X_2)}]} = \\ &= \frac{\mathbb{E}[(X_1 e^{\alpha X_1} e^{\alpha X_2} + X_2 e^{\alpha X_1} e^{\alpha X_2}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha(X_1+X_2)}]} = \\ &= \frac{\mathbb{E}[X_1 e^{\alpha X_1}]\mathbb{E}[e^{\alpha X_2}] + \mathbb{E}[X_2 e^{\alpha X_2}]\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X_1}]\mathbb{E}[e^{\alpha X_2}]} = \\ &= \Pi[X_1] + \Pi[X_2]\end{aligned}$$

- *translationsinvariant*
  Zu zeigen: $\Pi[X + c] = \Pi[X] + c, \qquad c \geq 0$
  Es gilt,

$$\begin{aligned}\Pi[X + c] &= \frac{\mathbb{E}[(X + c)e^{\alpha(X+c)}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha(X+c)}]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[X e^{\alpha X}]e^{\alpha c} + c\,\mathbb{E}[e^{\alpha X}]e^{\alpha c}}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]e^{\alpha c}} \\ &= \Pi[X] + c\end{aligned}$$

- *maximalschadenbegrenzt*
  Sei x_{max} der Maximalschaden, also $P(X \leq x_{max}) = 1$ dann folgt

$$\Pi[X] = \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]} \leq \frac{\mathbb{E}[x_{max} e^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]} = x_{max}$$

Eine Eigenschaft, die das Esscher Prinzip nicht erfüllt ist die (positive) Homogenität.

Dies folgt, da

$$\Pi[cX] = \frac{\mathbb{E}[cXe^{\alpha cX}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha cX}]} = \frac{c\,\mathbb{E}[Xe^{\alpha cX}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha cX}]} \neq c\,\Pi[X]$$

Kapitel 4

Wang Prinzip - Wang Transformation

Folgendes Kapitel zum Großteil aus [Wang(1996)], sowie [Wang(2000)] herausgearbeitet:

Nachdem im vorigen Kapitel auch die Transformation von Verteilungsfunktionen Thema war, wird in diesem Kapitel genauer auf solche Transformationen eingegangen. Im Besonderen natürlich auf das Prämienprinzip von Wang, da dieses genau darauf beruht.

Dafür werden sogenannte Verzerrungsfunktionen benötigt, um, unter Anwendung dieser auf die dekumulierte Verteilungsfunktion, eine neue, verzerrte Verteilungsfunktion zu generieren.

Den Grundstein dafür hat der Mathematiker Shaun Wang gelegt, der dadurch eine neue Klasse an Prämienprinzipien geschaffen hat. Zuerst jedoch die Grundlagen die hierfür notwendig sind.

4.1 Dekumulierte Verteilungsfunktion

Sei $X \in \mathcal{X}$ mit kumulierter Verteilungsfunktion $F_X(x) = P[X \leq x]$ ein sogenanntes **Risiko**. *(Siehe Seite 15)* Die **dekumulierte Verteilungsfunktion *(kurz DDF)*** $S_X(x) = 1 - F_X(x)$, spielt eine zentrale Rolle bei der Bestimmung von Versicherungsprämien, da

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty S_X(y)dy$$

S_X ist eine nichtwachsende Funktion mit $S_X : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$. Die **inverse dekumulierte Verteilungsfunktion *(kurz iDDF)*** ist eine nichtwachsende Funktion von $[0, 1] \to \mathbb{R}_+$ die definiert ist durch

$$S_X^{-1}(q) := \inf\{t \geq 0 : S_X(t) \leq q\}, \qquad q \in [0,1]$$

wobei $S_X^{-1}(0) = \infty$ wenn gilt, dass $S_X(t) > 0$, $\forall t \geq 0$.

Viele Versicherungsverträge beinhalten Klauseln wie zum Beispiel einen Selbstbehalt oder ein maximales Limit. Daher ist es üblich sogenannte (Schadenexzedenten)-Schichten, beziehungsweise den üblicheren, englischen Begriff **(Excess-of-Loss) Layers**, zu benutzen.

4.2 Layer

Definition 4.1 (Layer)**.**
Ein ***Layer*** *auf dem Intervall* $(a, a+h]$ *eines Risikos* X *ist definiert als der Verlust einer Schadenexzedentendeckung. Daher gilt*

$$L_{(a,a+h]}(X) := \begin{cases} 0, & 0 \leq X < a, \\ (X-a), & a \leq X < a+h, \\ h, & a+h \leq X, \end{cases}$$

wobei a *Priorität genannt wird und* h *das Limit.*

Für die zuvor definierte DDF eines Layers $L_{(a,a+h]}$ gilt

$$S_{L_{(a,a+h]}}(t) = \begin{cases} S_X(a+t) & t < h, \\ 0, & t \geq h, \end{cases}$$

und für den zu erwartenden Verlust

$$\mathbb{E}[L_{(a,a+h]}] = \int_a^{a+h} S_X(t)\, dt$$

Der Ausdruck $S_X(t)\, dt$ steht für die Nettoprämie eines infinitesimal kleinen Layers $(t, t+dt]$. Die Funktion $S_X(t)$ nennt man daher auch **Layer Nettoprämien-Dichte**.

Risikoordnung für Layer

Definition 4.2 (Gewöhnliche Stochastische Ordnung).
Für zwei Risiken X und Y gilt $X \prec_{st} Y$, also X kleiner gleich Y bezüglich der gewöhnlichen, stochastischen Ordnung, genau dann, wenn $S_X(t) \leq S_Y(t)$ für alle $t \geq 0$.

Für zwei Layer $(a, a+h]$ und $(b, b+h]$ des Risikos X, wobei $a < b$, gilt, dass

$$S_X(a+t) \geq S_X(b+t),\ t \geq 0 \Rightarrow S_{L_{(a,a+h]}}(t) \geq S_{L_{(b,b+h]}}(t),\ t \geq 0$$

Für ein Prämienprinzip Π, das der gewöhnlichen stochastischen Ordnung folgt und $a < b$ gilt, dass

$$L_{(b,b+h]} \prec_{st} L_{(a,a+h]} \Rightarrow \Pi(L_{(b,b+h]}) \leq \Pi(L_{(a,a+h]})$$

Als Conclusio folgt daraus, dass die Prämie für Layer mit einem fixen Limit abnimmt, je höher der Layer liegt.

Definition 4.3 (Zweite Stochastische Ordnung).
Für zwei Risiken X und Y gilt $X \prec_{2nd} Y$, also X kleiner gleich Y bezüglich der zweiten, stochastischen Ordnung, genau dann, wenn

$$\int_t^\infty S_X(u)\,du \leq \int_t^\infty S_Y(u)\,du, \qquad \forall t \geq 0$$

Für ein Risiko X betrachtet man zwei Layer $(a, a+h_1]$ und $(b, b+h_2]$ die den selben zu erwarteten Verlust haben, also $\mathbb{E}[L_{(a,a+h_1]}] = \mathbb{E}[L_{(b,b+h_2]}]$. Da die Flächen unterhalb der Layer Nettoprämien-Dichte für die beiden Layer gleich ist, muss wenn $a < b$ ist gelten, dass $h_1 \leq h_2$. Anders ausgedrückt heißt das, dass die Kurve $S_{L_{(b,b+h_2]}}(t)$ generell länger und dünner verläuft, als die Kurve $S_{L_{(a,a+h_1]}}(t)$ (Siehe Abbildung). Die beiden Kurven schneiden sich im Punkt h_1, womit gilt, dass der Layer $(b, b+h_2]$ ein höheres Risiko hat. Daraus folgt, dass ein Layer mit höherem Limit einen höheren Risikozuschlag haben sollte.

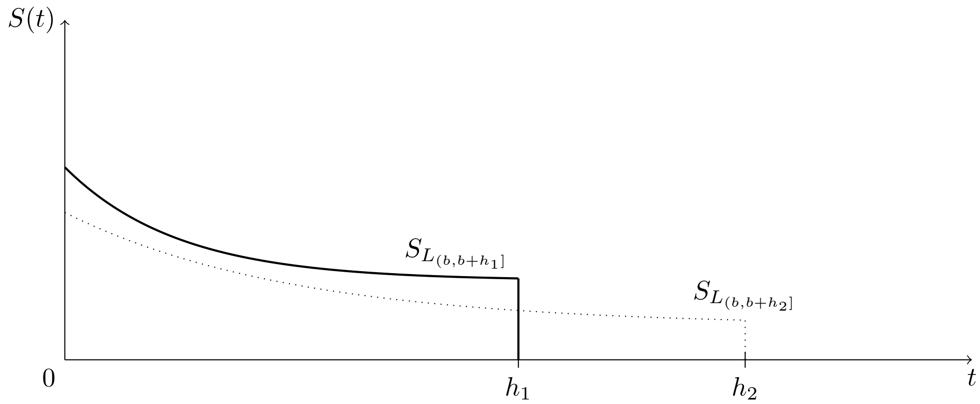

Abbildung 4.1: Layer mit verschiedenen Limits

Definition 4.4 (Komonotonie).
Zwei Risiken X und Y heißen ***komonoton****, wenn ein Risiko Z und zwei monoton wachsende Funktionen f und g existieren sodass gilt $X = f(Z)$ und $Y = g(Z)$.*

Da Layer immer wachsende Funktionen des ursprünglichen Risikos sind, sind sie immer komonoton. Sie sind Wetten auf das selbe Ereignis und auch kein gegenseitiger Hedge. Wenn man zwei Risiken X und Y nimmt, die komonoton sind, dann gilt, da sie sich gegenseitig nicht hedgen, dass die Prämie für die Summe nur größer als die Summe der Einzelprämien sein kann, also $\Pi(X+Y) \geq \Pi(X) + \Pi(Y)$.
Da die Versicherung für die Summe der beiden Risiken allerdings nicht mehr Prämie verlangen kann als die Summe der einzelnen Prämien (da sonst der Kunde jedes Risiko einzeln versichern würde) gilt hier sogar Gleichheit.

Daraus folgt also für komonotone Risiken, dass die Layer Prämien für eine beliebige Aufteilung in Teilintervalle additiv sind.

4.3 Transformation der Verteilungsfunktion

Folgendes Kapitel zum Großteil aus [Wang(1996)], sowie [GoovaertsDhaene] herausgearbeitet:

$S_X(t)$, also die dekumulierte Verteilungsfunktion (DDF) stellt wie oben beschrieben auch die Layer Nettoprämien-Dichte dar. Eine Idee, um daraus eine risikoangepasste Dichte zu machen, wäre die Modifikation, bzw. Transformation. Kurz:

$$S_Y(t) = g(S_X(t))$$

Definition 4.5 (Verzerrungsfunktion).
Eine Verzerrungsfunktion (engl. 'distortion function') ist eine nichtfallende, konkave Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$ *für die gilt,* $g(0) = 0$ *und* $g(1) = 1$.
Hat man einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *gegeben und eine beliebige Verzerrungsfunktion* g *so kann man damit ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß* Q *definieren, sodass gilt* $Q(A) = g(P(X \in A))$ *für beliebiges* $A \in \mathcal{F}$.

Aus der weiterhin geltenden Tatsache, dass die Prämie für kein Risiko null ist, erklärt sich das $g(0) = 0$. Die absolute Prämie für Layer des selben Limits ist nur dann fallend, wenn $S_Y(t)$ monoton fallend ist. Das gilt dann und nur dann, wenn g eine wachsende Funktion ist.

Wenn man die Bernoulli Verteilung betrachtet, kann man für ein Prämienprinzip folgendes zeigen:

Definition 4.6 (Bernoulli Verteilung).
Eine diskrete Zufallsvariable X *mit Werten in* $\{0,1\}$ *ist* ***Bernoulli*** *verteilt mit Parameter* $q \in [0,1]$ *wenn sie folgende Einzelwahrscheinlichkeiten besitzt:*

$$\mathbf{P}(X = 1) = q$$
$$\mathbf{P}(X = 0) = p = 1 - q$$

Man schreibt $X \sim \mathrm{Ber}_q$

Die Verteilung wird für den nächsten Satz benötigt. In diesem wird gezeigt, dass man aus Prämienprinzipien eine Verzerrungsfunktion gewinnen kann.

Satz 4.7.
Wenn ein Prämienprinzip Π *der gewöhnlichen, stochastischen Ordnung folgt, komonoton, positiv homogen und erwartungswertübersteigend ist, dann gilt, dass die Funktion* g *gegeben durch*

$$g(q) := \Pi[\mathrm{Ber}_q], \qquad 0 \leq q \leq 1$$

eine Verzerrungsfunktion ist. Des Weiteren gilt, dass $g(q) \geq q \quad \forall q \in [0,1]$.

Beweis.
Man kann sofort sehen, dass $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$. Für $0 \leq q \leq p \leq 1$ gilt, dass $S_{\mathrm{Ber}_q}(x) \leq S_{\mathrm{Ber}_p}(x) \quad \forall x \geq 0$. Daher folgt $g(q) \leq g(p)$ und g ist also nichtfallend.
Für ein beliebiges $q \in [0,1]$ gilt schlussendlich noch $g(q) = \Pi[\mathrm{Ber}_q] \geq \mathbb{E}[\mathrm{Ber}_q] = q$ □

Man kann allerdings noch weitergehen, wenn man den nächsten Satz betrachtet.

Satz 4.8.
Gegeben sei ein Prämienprinzip, definiert wie in Satz 4.7. Dann existiert eine eindeutige Verzerrungsfunktion g, sodass für alle diskreten Risiken X mit nur endlich vielen Punkten gilt.

$$\Pi[X] = \int_0^\infty g(S_X(u))\,du$$

Des Weiteren gilt noch, $g(q) \geq q, \quad \forall q \in [0,1]$.

Beweis.
Betrachte ein diskretes Risiko, das aus endlich vielen Punkten besteht. Dann existiert eine positive Zahl n und zwei Folgen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und $1 \geq p_0 > p_1 > \ldots > p_{n-1} > 0$, sodass

$$S_X(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i I_{(x_i,x_{i+1}]}(x), \quad x \geq 0$$

Man kann X als Summe der einzelnen Layer schreiben:

$$X = \sum_{i=0}^{n-1} L_{(x_i,x_{i+1}]}$$

Es ist ersichtlich, dass die Funktion S_L wie folgt gegeben ist:

$$S_{L_{(x_i,x_{i+1}]}}(x) = \begin{cases} p_i, & 0 \leq x < x_{i+1} - x_i \\ 0, & x \geq x_{i+1} - x_i \end{cases}$$

Damit ist $L_{(x_i,x_{i+1}]}$ eine Zwei-Punkt verteilte Zufallsvariable mit

$$\mathbf{P}(L_{(x_i,x_{i+1}]} = x_{i+1} - x_i) = 1 - \mathbf{P}(L_{(x_i,x_{i+1}]} = 0) = p_i$$

Jetzt zur Darstellung von $\Pi[X]$. Aufgrund der Additivität für komonotone Risiken gilt

$$\Pi[X] = \sum_{i=0}^{n-1} \Pi[L_{(x_i,x_{i+1}]}]$$

Da außerdem gilt, dass $L_{(x_i,x_{i+1}]} \sim (x_{i+1} - x_i)\mathrm{Ber}_{p_i}$ kann man weiter aus der Homogenität schließen,

$$\Pi[L_{(x_i,x_{i+1}]}] = (x_{i+1} - x_i)\,\Pi[\mathrm{Ber}_{p_i}] = (x_{i+1} - x_i)\,g(p_i)$$

Daher gilt schließlich aufaddiert

$$\Pi[X] = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, g(p_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} g(S_X(u))\, du = \int\limits_0^b g(S_X(u))\, du$$

Damit ist die gesuchte Darstellung gefunden. Man sieht des Weiteren, dass für eine beliebige solche Verzerrungsfunktion gelten muss $\Pi[\mathrm{Ber}_{p_i}] = g(q),\ \forall q \in [0,1]$, womit g eindeutig bestimmt ist. □

Satz 4.9.
*Gegeben sei ein Prämienprinzip, definiert wie in Satz 4.7 und zwei Risiken X, Y. Sei S_X^{-1} die **iDDF** wie auf Seite 32 vorgestellt. Wenn eine Konstante $c \geq 0$ existiert, sodass*

$$\left| S_X^{-1}(q) - S_Y^{-1}(q) \right| \leq c, \quad \forall q \in [0,1]$$

dann gilt, dass

$$\left| \Pi[X] - \Pi[X] \right| \leq c$$

Beweis.
Die Ungleichung

$$\left| S_X^{-1}(q) - S_Y^{-1}(q) \right| \leq c$$

kann man wie folgt schreiben:

$$S_Y^{-1}(q) - c \leq S_X^{-1}(q) \leq S_Y^{-1}(q) + c$$

Es gilt dann zu zeigen, dass $\Pi[X] \leq \Pi[Y] + c$. Die andere Seite der Ungleichung funktioniert analog dazu.

Aus der rechten Seite der Ungleichung folgt $S_X^{-1}(q) \leq S_{Y+c}^{-1}(q),\ \forall q \in [0,1]$. Diese Bedingung ist äquivalent zu $S_X(u) \leq S_{Y+c}(u),\ \forall u \geq 0$ wie nach [DWYG] folgt. Die Behauptung folgt dann aus der gewöhnlichen, stochastischen Ordnung und der Translationsinvarianz. □

Das wichtigste an diesem Satz ist die Tatsache, dass X von $Y + c$ stochastisch dominiert wird. Denn damit und mit folgender zu erfüllender Eigenschaft kann man Satz 4.8 verallgemeinern.

Definition 4.10 (Approximationseigenschaft).
*Ein Prämienprinzip $\Pi[X]$ erfüllt die sogenannte **Approximationseigenschaft**, wenn für ein beliebiges Risiko X und $d \geq 0$ gilt, dass*

$$\lim_{d \to \infty} \Pi[\min(X, d)] = \Pi[X]$$

Satz 4.11.
Gegeben sei ein Prämienprinzip, definiert wie in Satz 4.7, das zusätzlich noch die Approximationseigenschaft erfüllt und ein beliebiges Risiko X. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Verzerrungsfunktion g, sodass gilt

$$\Pi[X] = \int_0^\infty g(S_X(u))\,du$$

Beweis.
Angenommen X hat einen beschränkten Träger $[0, b]$. Man kann $S_X(u)$ durch die stückweise konstante

$$S_{X_n}(u) := \sum_{i=0}^{2^n-1} S_X\left(\frac{i+1}{2^n}\,b\right) I_{(\frac{i}{2^n}b, \frac{i+1}{2n}b]}(u), \quad u \geq 0$$

approximieren. Man sieht, dass

$$\left|S_X^{-1}(q) - S_{X_n}^{-1}(q)\right| \leq \frac{b}{2^n}, \quad \forall q \in [0,1]$$

Unter Verwendung von Satz 4.9 folgt

$$\left|\Pi[X] - \Pi[X_n]\right| \leq \frac{b}{2^n}$$

Daher folgt, dass

$$\Pi[X] = \lim_{n\to\infty} \Pi[X_n]$$

Aus dem Satz der dominierten Konvergenz und dem Satz 4.8 folgt

$$\Pi[X] = \int_0^b g(S_X(u))\,du$$

Nun zu dem Fall, in dem X einen unbeschränkten Träger hat. In diesem Situation kann man sehen, dass für beliebiges $d \geq 0$ das Risiko $\min(X, d)$ beschränkt ist, mit einer DDF gegeben durch

$$S_{\min(X,d)}(x) := \begin{cases} S_X(x), & 0 \leq x < d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\Pi[\min(X,d)] \int_0^d g(S_X(u))\,du$$

Womit mit der vorausgesetzten Approximationseigenschaft alles gezeigt ist. □

Nachdem man also Verzerrungsfunktionen aus Prämienprinzipien erhält, ist die interessante Frage natürlich ob die andere Richtung ebenso funktioniert. Das führt direkt zur Klasse der Wang Prämienprinzipien, die mit Hilfe der Verzerrungsfunktionen eingeführt werden.

4.4 Wang Prinzip

Definition 4.12 (Wang Prämienprinzip).
Für eine beliebige konkave, nichtfallende Verzerrungsfunktion g, mit $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ existiert ein zugehöriges Prämienprinzip $\Pi^W(X)$, nämlich

$$\Pi^W[X] = \int_0^\infty g(S_X(t))\,dt \tag{4.1}$$

wobei $S_X(t)$ wie oben definiert.

Das Wang Prämienprinzip erfüllt folgende Eigenschaften:

- *erwartungswertübersteigend*
  Die konkave Funktion g, mit $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$, erfüllt $g(s) \geq s$ auf $[0, 1]$. Daher gilt die Abschätzung $\Pi^W[X] \geq \mathbb{E}[X]$.

- *positiv homogen / translationsinvariant*
  Zu zeigen: $\Pi^W[aX + b] = a\Pi^W[X] + b, \qquad a \geq 0, b \geq 0$
  Da gilt, dass
  $$S_{aX+b}(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leq u < b, \\ S_X\left(\frac{u-b}{a}\right), & u \geq b, \end{cases}$$
  kann man mittels herausheben und Substitution folgern, dass
  $$\begin{aligned} \Pi^W[aX + b] &= \int_0^b 1\,du + \int_b^\infty g\left(S_X\left(\frac{u-b}{a}\right)\right)\,du \\ &= b + a\int_0^\infty g(S_X(t))\,dt \\ &= a\,\Pi^W[X] + b \end{aligned}$$

- *additiv (Layer)*
  Wenn man das Risiko X in mehrere Layer $\{(x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \ldots\}$ aufteilt, also $X = L_{(0,x_1]} + L_{(x_1,x_2]} + \ldots$, für $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ dann gilt für einen Layer $(x_i, x_{i+1}]$, dass

$$\Pi^W[L_{(x_i,x_{i+1}]}] = \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(S_X(t))\, dt$$

  Durch aufsummieren der Layer erhält man

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Pi^W[L_{(x_i,x_{i+1}]}] = \int_0^{\infty} g(S_X(t))\, dt = \Pi^W[X]$$

- *gewöhnlich stochastisch geordnet*
  Zu zeigen: Für zwei Risiken X und Y gilt $X \prec_{st} Y \iff S_X(t) \leq S_Y(t),\ \forall t \geq 0$. Dazu folgender Satz

  Satz 4.13.
  Es gilt, dass folgende Behauptungen äquivalent sind:

  (1) $X \prec_{st} Y$

  (2) Für alle Verzerrungsfunktionen g gilt $\Pi^W[X] \leq \Pi^W[Y]$

  (3) $S_X^{-1}(p) \leq S_Y^{-1}(p),\ \forall p \in [0, 1]$

  Beweis.
  (1) $\Rightarrow$ (2) ist klar.

  (2) $\Rightarrow$ (3) folgt für $p = 1$ sofort, da $S_X^{-1}(1) = S_Y^{-1}(1) = 0$. Wenn $p \in [0, 1)$, kann man die Verzerrungsfunktion $g(x) = I(x > p), x \in [0, 1]$ definieren. Nach Lemma 1 auf Seite 3 in [DWYG] folgt dann die gewünschte Aussage.

  (3) $\Rightarrow$ (1) Für ein beliebig festes $x \geq 0$, sei $p = S_Y(x)$. Nach (3) und $S_Y^{-1}(p) = S_Y^{-1}(S_Y(x)) \leq x$, sowie der Tatsache, dass die DDF nichtfallend ist, gilt $S_X(x) \leq S_X(S_Y^{-1}(p)) \leq S_X(S_X^{-1}(p)) \leq p = S_Y(x)$. Da die Ungleichung für jedes beliebige $x \geq 0$ gilt, folgt die Behauptung und damit die stochastische Ordnung. □

- *maximalschadenbegrenzt*
  Diese Eigenschaft folgt direkt aus der Eigenschaft der stochastischen Ordnung, wenn man das Risiko Y folgendermaßen wählt: $Y = \sup X$.

- *subadditiv* Die Subadditivität von Wang folgt aus der Tatsache, dass das Prämienprinzip der Stop-Loss Ordnung folgt, also $X \leq_{sl} Y \Rightarrow \Pi^W[X] \leq \Pi^W[Y]$ und dass es für komonotone Risiken sogar additiv ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Korollar 8 aus [WangDhaene], welches besagt, dass ein Prämienprinzip das der Stop-Loss Ordnung folgt und additiv für komonotone Risiken ist, subadditiv ist.

Mit Hilfe der neu gewonnenen Verzerrungsfunktion g, kann man den relativen Risikozuschlag für höhere Layer betrachten. Die Verzerrungsfunktion g sei wie oben bestimmt. Sei $u = S_X(t)$, dann ist der relative Zuschlag für einen infinitesimal kleinen Layer $(t, t + dt]$ gleich

$$\phi(t) = \frac{\Pi[L_{(t,t+dt]}]}{\mathbb{E}[L_{(t,t+dt]}]} = \frac{g(S_X(t))}{S_X(t)} = \frac{g(u) - g(0)}{u - 0}$$

Wenn t steigt, dann fällt klarerweise $S_X(t)$. Da g eine wachsende, konkave Funktion ist folgt, dass $\phi(t)$ eine wachsende Funktion ist. Das heißt also, dass der Risikozuschlag bei höheren Layern wächst. Wenn man die Funktion betrachtet und sie gegen unendlich gehen lässt sieht man sofort,

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \lim_{u\to 0} \frac{g(u) - g(0)}{u - 0} = g'(t)$$

Das heißt also, dass der relative Risikozuschlag in höheren Layern die Ableitung an der Stelle null nicht übersteigt. Dieser Zuschlag ist aber gerade für Schäden nahe am rechten Ende der Verteilung wichtig. Die Abschätzung

$$\Pi[L_{(t,t+h]}] \leq g'(0)\,\mathbb{E}[L_{(t,t+h]}]$$

konvertiert gegen null, wenn t gegen unendlich geht. Daher wäre also eine wünschenswerte Eigenschaft, dass die Ableitung von g an der Stelle null gleich unendlich ist, also

$g'(0) = \infty$.

4.5 Elementare Transformationen

Wie zuvor sei g eine konkave, wachsende Funktion mit $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$. Nach der theoretischen Betrachtung folgen einige Beispiele für diese Klasse an Verzerrungsfunktionen.

Definition 4.14 (PH-Transformation)**.**
Die Proportional Hazard Transformation oder kurz PH-Transformation stellt eine sehr einfache, aber dennoch starke Transformation dar. Diese wird wie folgt definiert:

$$g(x) = x^{\frac{1}{p}}, \qquad p \geq 1 \tag{4.2}$$

Man sieht recht leicht, dass diese Funktion die wünschenswerte Eigenschaft $g'(0) = 0$ für $p > 1$ erfüllt.

Weitere Elementare Transformationen sind:

Definition 4.15 (Duale Potenztransformation).
Die duale Potenztransformation wird über die kumulative Verteilungsfunktion eingeführt. Es gilt,

$$F_Y(t) = (F_X(t))^\alpha, \qquad \alpha \geq 1$$

Daraus folgt schließlich

$$S_Y(t) = g(S_X(t)), \qquad g(x) = 1 - (1-x)^\alpha, \quad \alpha \geq 1 \tag{4.3}$$

Da $g'(0) = \alpha$, ist der relative Risikozuschlag in höheren Layern beschränkt mit $(\alpha - 1)$.

Eine weitere elementare Transformation ist das sogenannte

Definition 4.16 (Dennebergsches Absolut-Abweichungsprinzip).

Ausgearbeitet aus: [Denneberg]

Das Absolut-Abweichungsprinzip von Denneberg ist äquivalent zu einer stückweise linearen Transformation $0 \leq r \leq 1$

$$g(x) = \begin{cases} (1+r)x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ r + (1-r)x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \tag{4.4}$$

Hier sieht man, dass für den Fall dass die DDF $S_X(0) < \frac{1}{2}$ gilt, dass das transformierte Prämienprinzip ident mit dem Erwartungswertprinzip ist. Da in diesem Fall die Ableitung $g'(0) = 1 + r$ ist, kann hier der relative Risikozuschlag nicht höher als 100% sein.

Die nächste Transformation ist die

Definition 4.17 (Quadratische Transformation).

$$g(x) = (1+r)x - rx^2, \qquad 0 \leq r \leq 1 \tag{4.5}$$

Auch hier sieht man, dass $g'(0) = 1 + r$. Daher kann hier ebenfalls der relative Risikozuschlag nicht höher als 100% sein.

Dazu passend folgt als nächstes die

Definition 4.18 (Quadratwurzel Transformation).

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+rx}-1}{\sqrt{1+r}-1}, & r > 0, \\ x, & r = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

Auch hier sieht man, nach kurzer Rechnung, dass

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1+r}+1}{2\sqrt{1+rx}}$$

Daher ist der relative Risikozuschlag auch für diese elementare Transformation beschränkt.

Es folgen noch die

Definition 4.19 (Exponentielle Transformation)**.**

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha}}, & \alpha > 0 \\ x, & \alpha = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

In diesem Fall ist die Ableitung an der Stelle null ebenfalls kleiner als unendlich. Genauer gilt, dass

$$g'(0) = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}} < \infty$$

und die

Definition 4.20 (Logarithmische Transformation)**.**

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+rx)}{\ln(1+r)}, & r > 0 \\ x, & r = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

In diesem Fall ist wiederum die Ableitung an der Stelle null kleiner als unendlich.

$$g'(0) = \frac{r}{\ln(1+r)} < \infty$$

Anhand dieser elementaren Transformationen, kann man unzählige weitere Kombinationen von Transformationen durchführen. Die einzige von diesen elementaren Transformationen, die allerdings die Eigenschaft $g'(0) = \infty$ erfüllt, ist die PH-Transformation.

Man kann mit der PH-Transformation natürlich auch ein Prämienprinzip definieren.

Definition 4.21 (Proportional Hazards Prämienprinzip)**.**

$$\Pi^{PH}[X] = \int_0^\infty S_X(t)^{\frac{1}{p}}\, dt, \qquad p \geq 1 \tag{4.9}$$

Dieses sogenannte PH-Prinzip ist ein Spezialfall des allgemeinen Wang Prämienprinzips. Das folgende Kapitel zeigt, warum dieses unter den elementaren Transformationen besonders interessant ist.

Leistungsvergleich der Transformationen

Nachdem nun die elementaren Transformationen vorgestellt worden sind, ist fraglich, wie diese Transformationen in der Praxis funktionieren.

Da alle elementaren Transformationen sowohl der gewöhnlichen, als auch der zweiten stochastischen Ordnung folgen, fallen diese Hauptunterscheidungsmerkmale weg. Mit Hilfe der Mittelwert-Varianz Analyse, einem in der Finanz- und Versicherungswirtschaft weit verbreitetem Werkzeug, kann man allerdings sehr wohl Unterschiede ausmachen. Dazu mehr in folgendem, aus [Wang(1996)] entnommenen Beispiel.

Beispiel 4.22.
Man betrachte folgende zwei Risiken:

$$S_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq t < 4 \\ 0, & 4 < t \end{cases} \qquad \text{(Zwei-Punkt Risiko)}$$

$$S_P(t) = \left(\frac{1}{1+t}\right)^2 \qquad \text{(Pareto Risiko)}$$

Wie man hier sieht haben beide Risiken einen Erwartungswert von 1*. Die Varianz ist allerdings extrem verschieden, da das Zwei-Punkt Risiko eine Varianz in der Höhe von* 3 *hat, die Varianz des Pareto Riskos ist allerdings unendlich.*

Alleine aufgrund dieser Tatsache ist es eigentlich logisch, dass das Pareto-Risiko viel riskanter ist, als das Zwei-Punkt Risiko. Das Paper [Kaas et al] zeigt, dass jeder reguläre Entscheidungsfinder, der eine zweifach differenzierbare, konkave Nutzenfunktion hat, das Pareto Risiko riskanter einstuft.

Wenn man nun die Parameter in allen elementaren Transformationen so wählt, dass für das Zwei-Punkt Risiko die Prämie ident ist, dann ergibt sich folgendes Bild

Elementare Transformation	**Parameter**	$\Pi[Z]$	$\Pi[P]$
PH-Transformation	$p = 1.233$	1.3	1.6080
Duale Potenztransformation	$\alpha = 1.366$	1.3	1.2662
Dennebergsches Absolut-Abweichungsprinzip	$r = 0.3$	1.3	1.2485
Quadratische Transformation	$r = 0.4$	1.3	1.2667
Quadratwurzel Transformation	$r = 3.157$	1.3	1.2903
Exponentielle Transformation	$\alpha = 0.7594$	1.3	1.2708
Logarithmische Transformation	$r = 1.055$	1.3	1.2782

Tabelle 4.1: Prämienbeispiel für elementare Transformationen

An diesem Beispiel sieht man nun eindeutig warum es wichtig ist, dass ein Prämienprinzip die Eigenschaft $g'(0) = \infty$ erfüllt. Nur die PH-Transformation ist in der Lage das Risiko korrekt einzustufen, da es auch in höheren Layern noch funktioniert. Wenn man die Prämie für das PH-Prinzip noch genauer betrachtet, sieht man

$$\Pi^{PH}[Z] = 4^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\Pi^{PH}[P] = \begin{cases} \frac{p}{2-p}, & p < 2 \\ \infty, & p \geq 2 \end{cases}$$

Daher folgt, dass für die PH-Transformation, für beliebiges $p > 1$, die risikoangepasste Prämie des Pareto Risikos höher ist, als für das Zwei-Punkt Risiko. Veranschaulicht bedeutet das:

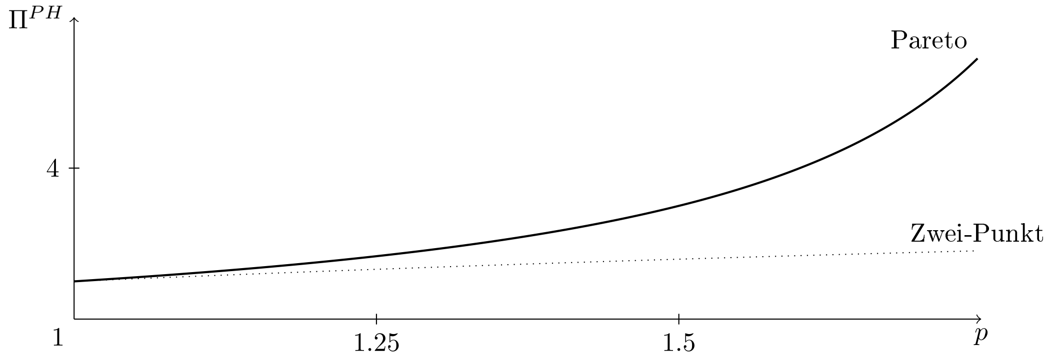

Abbildung 4.2: PH-Prämie für Pareto und Zwei-Punkt Risiko

Allerdings ist die PH-Transformation von einfacher Form. Dieser Vorteil bei der Berechnung, kommt allerdings auch mit kleineren Nachteilen. So erhöht die PH-Transformation den Risikozuschlag bei höheren Layern oft viel zu schnell und ist damit für den Versicherungsmarkt in der Praxis manchmal nicht geeignet.

4.6 Wang Transformation

Wang hat in seinem Paper [Wang(2000)] einen neuen Verzerrungsoperator untersucht, diesmal unter Einbeziehung der Normalverteilung.

Definition 4.23 (Wang Transformation).
Sei $\Phi(X)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, also

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

mit zugehöriger Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Dann kann man mithilfe der Inversen $\Phi^{-1}(u)$ *folgende Verzerrungsfunktion definieren.*

$$g_\alpha(u) = \Phi[\Phi^{-1}(u) + \alpha], \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

Diese Transformation wird ***Wang Transformation*** *genannt.*

Es gilt zu überprüfen, ob dieser Ansatz tatsächlich zu einer gültigen Verzerrungsfunktion führt. Zuerst betrachtet man die Grenzwerte bei 0 und 1. Diese stellen kein Problem dar, da

$$g_\alpha(0) = \lim_{u \searrow 0} g_\alpha(u) = 0$$

und

$$g_\alpha(1) = \lim_{u \nearrow 1} g_\alpha(u) = 1$$

Danach gilt es herauszufinden, ob die Funktion auch konkav ist. Dazu betrachtet man die ersten beiden Ableitung, also

$$g'_\alpha(u) = \frac{\varphi(x+\alpha)}{\varphi(x)} = e^{-\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} > 0$$

und

$$g''_\alpha(u) = \frac{-\alpha\, \varphi(x+\alpha)}{\varphi(x)^2}$$

Da $g''_\alpha < 0$ für $\alpha > 0$ gilt, ist die Funktion in diesem Fall konkav. Daher erfüllt g_α alle Kriterien einer Verzerrungsfunktion. Die oben schon erwähnte wünschenswerte Eigenschaft $g'_\alpha(0) = \infty$ erfüllt die Funktion ebenso, da

$$g'_\alpha(0) = \lim_{u \searrow 0} g'_\alpha(u) = \lim_{x \to -\infty} e^{-\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} = \infty$$

Anwendung der Wang Transformation

Die Wang Transformation kann auf vielfältige Weise verwendet werden. Eine vielgenutzte Verwendung ist die Transformation eines lognormalverteilten Risikos, da dieses nach der Transformation ebenfalls wieder lognormalverteilt ist.

Folgende Beispiele aus [Hardy] entnommen:

Beispiel 4.24. *Angenommen X ist lognormalverteilt mit Parametern (μ, σ). Dann gilt*

$$
\begin{aligned}
S_X(x) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log(x) - \mu}{\sigma}\right) \\
g(S_X(x)) &= \Phi\left(\Phi^{-1}\left(1 - \Phi\left(\frac{\log(x) - \mu}{\sigma}\right)\right) + \alpha\right) \\
&= \Phi\left(\Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{-\log(x) + \mu}{\sigma}\right)\right) + \alpha\right) \\
&= \Phi\left(\frac{-\log(x) + \mu}{\sigma} + \alpha\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{\log(x) - \mu - \alpha\sigma}{\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Das entspricht genau der Lognormalverteilung mit Parameter $(\mu + \alpha\sigma, \sigma)$

Das kann man natürlich auch für folgenden Fall exakt berechnen:

Beispiel 4.25. *Angenommen X ist lognormalverteilt mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Dann ist $\mathbb{E}[X] = 1.65$ und die Standardabweichung $\sqrt{\mathbb{V}[X]} = 2.16$. Wenn man nun eine Verlustwahrscheinlichkeit am eher rechten Rand betrachtet, zum Beispiel $\mathbf{P}(\text{Loss} > 12)$, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür $1 - \Phi((\log(12) - 0)/1) = 1 - \Phi(2.4849) = 0.0065$, oder umgerechnet einfach 0.65%.*

Wenn man jetzt die Wang Transformation für $\alpha = 1$ darauf anwendet, so ergibt sich nach kurzer Rechnung $g(S_X(12)) = \Phi(-1.4849) = 0.06879$, oder eben 6.87%.

Die verzerrte Wahrscheinlichkeit ist also mehr als 10 Mal so hoch wie noch davor und legt daher viel mehr Wert auf das sogenannte "Tail".

4.7 Risikoordnung - Expected Utility Theory

Jedes Prämienprinzip steht implizit für eine Ordnung der zugrundeliegenden Risiken. Das gilt ganz einfach nach folgendem, verständlichen Prinzip, dass ein höheres Risiko auch eine höhere Prämie erfordert. Für die Risikoordnung haben schon Von Neumann und Morgenstern 1947 Axiome aufgestellt.
Diese Axiome bilden die Grundlage für die Risikoordnung im Rahmen der Expected Utility Theory. In der Versicherungsbranche wurde diese Theorie durch [Borch] eingeführt und durch [Goovaerts et al] erweitert. Sie spielt seither eine dominante Rolle. Ein Beispiel dafür ist, unter anderem, das Nullnutzenprinzip auf Seite 18.

Das Symbol $\prec$ steht für eine (nicht notwendigerweise strenge) Risikoordnung. $X \prec Y$ bedeutet also, dass X weniger riskant als Y ist. Hier nun die folgenden fünf Axiome von Von Neumann und Morgenstern:

EU1) Wenn zwei Risiken X und Y die selbe DDF haben, dann sind beide gleich riskant. Das heißt, wenn $S_X = S_Y$ dann gilt sowohl $X \prec Y$, als auch $Y \prec X$.

EU2) Die Relation $\prec$ ist reflexiv, transitiv und zusammenhängend.

EU3) Die Relation $\prec$ ist stetig (im Bezug auf L_1-Konvergenz).

EU4) Wenn $S_X \leq S_Y$ dann gilt, dass $X \prec Y$.

EU5) Wenn X, Y und Z beliebige Risiken sind, dann gilt

$$pS_X(t) + (1-p)S_Z(t) \prec pS_Y(t) + (1-p)S_Z(t), \qquad \forall p \in [0,1], t \geq 0$$

Das Axiom 5 und warum es im Kontext des Risikoordnens seine Berechtigung hat verlangt nach einer Erklärung. Das Axiom ist eine Art Entscheidungsträger, beispielsweise ein Versicherer, der sich zufällig einen Versicherungsnehmer, entweder aus Markt 1, oder aus Markt 2, aussuchen muss.
In Markt 1 macht das Risiko X den Anteil p des Marktes aus und das Risiko Z den Rest, also $(1-p)$. In Markt 2 gilt das Gleiche, wobei Risiko Y den p Teil des Marktes ausmacht und Risiko Z auch hier den $(1-p)$ Teil.

Wenn nun dieser Versicherer weiß, dass das Risiko X kleiner als das Risiko Y ist, also $X \prec Y$, dann wird er sich den Markt 1 aussuchen um einen zufälligen Versicherungsnehmer zu akzeptieren, da das mögliche Risiko geringer ist, als in Markt 2.

Schon 1947 haben also wie erwähnt Van Neumann und Morgenstern, mit Hilfe dieser fünf Axiome, gezeigt, dass eine Nutzenfunktion u existiert, sodass $X \prec Y$ genau dann, wenn der erwartete Nutzen die Gleichung $\mathbb{E}[u(X)] = \mathbb{E}[u(-X)]$ erfüllt.
u ist eine Nutzenfunktion wie auf Seite 16 definiert.

Die beiden Erwartungswerte gelten wie folgt:

$$\mathbb{E}[u(X)] = \int_0^\infty S_X(t)\, du(t) = \int_0^1 u[S_X^{-1}(q)]\, dq$$

und

$$\mathbb{E}[u(-X)] = -\mathbb{E}[\tilde{u}(X)], \qquad \tilde{u}(\omega) := -u(-\omega)$$

Dem obenstehendem fünften Axiom haben sich im Lauf der Zeit einige Mathematiker gewidmet. Sie versuchten durch Abänderungen eine etwas andere Theorie aufzustellen, um den erwarteten Nutzen besser zu antizipieren.

In einem gänzlich unabhängigem Versuch jedoch hat der israelische Wissenschafter Menahem Yaari im Jahr 1987 einen neuen, alternativen Ansatz verwendet. Er hat mittels der Dualtheorie in seinem Paper [Yaari] den Glauben gebrochen, dass die Expected Utility Theory das einzig legitime Mittel zur Entscheidungsfindung bei einem Risikoprozess ist.
Der Ansatz war, dass er Zufallsvariablen mit beschränktem Träger auf [0,1] betrachtet hat und in allen Axiomen die DDF S_X durch ihre Inverse S_X^{-1} ersetzt hat. Dabei fällt auf, dass die ersten vier Axiome davon unverändert bleiben, das fünfte Axiom ändert sich dadurch allerdings auf:

DU5) Wenn $X \prec Y$ und Z ein beliebiges Risiko, sowie $p \in [0,1]$, dann gilt, dass

$$pS_X^{-1} + (1-p)S_Z^{-1} \prec pS_Y^{-1} + (1-p)S_Z^{-1} \tag{4.11}$$

Dadurch konnte er zeigen, dass eine duale Nutzenfunktion $h : [0,1] \to [0,1]$ existiert, sodass ein gewisser zukünftiger Zahlungsstrom V auf $[0,1]$ unter folgender Transformation äquivalent bleibt.

$$\int_0^1 h(S_V(t))\, dt \tag{4.12}$$

h ist im Falle von Risikoaversion konvex.

Wenn man nun ein Anfangskapital in der Höhe von 1 betrachtet und zufälligen Verlust von X auf dem Intervall $[0,1]$, dann ist der zukünftige Zahlungsstrom $V = 1 - X$. Wenn P die Prämie für das Risiko lautet kann man analog zur Expected Utility Theory folgende Gleichung aufstellen:

$$1 - P = \int_0^1 h(S_{1-X}(t))\, dt$$

Da wiederum $S_{1-X}(t) = p(X < 1 - t)$, wobei p die Wahrscheinlichkeit darstellt, folgt hier

$$1 - P = \int_0^1 h(1 - S_X(1 - t))\, dt = \int_0^1 h(1 - S_X(z))\, dz$$

und weiter

$$P = \int_0^1 g(S_X(z))\, dz$$

wobei hier $g(x) = 1 - h(1 - x)$ ist. Daran sieht man, dass g genau dann konkav ist, wenn h konvex ist.

Man sieht also, dass man mit Hilfe dieser Dualtheorie auch zum Wang Prämienprinzip kommt. Ein Spezialfall von der Yaari-Gleichung ist $h(x) = 1 - (1 - x)^{\frac{1}{p}}$. Dieser führt nämlich zu $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$ und damit zur bekannten PH-Transformation, die ihrerseits ein Spezialfall des Wang Prämienprinzips ist.

Damit sei gezeigt, dass man auch hier, ähnlich zum Esscher Prinzip, mit dem wirtschaftstheoretischen Ansatz auf das Wang Prinzip kommt.

Kapitel 5

Anwendung in der Lebensversicherung

Eine mögliche Anwendung der Prämienprinzipien liegt in der Kalkulation von Lebensversicherungsprämien. Die Kalkulation der Prämien erfolgt mit Hilfe der Bernoulli Verteilung (siehe Seite 35), deren Wahrscheinlichkeit die möglichen, künftigen Zustände einer Lebensversicherung abbilden. Einerseits die Überlebenswahrscheinlichkeit, andererseits die Sterbewahrscheinlichkeit.

Die Verteilung der Sterblichkeit wird wiederum durch eine parametrisierte Verteilungsfunktion berechnet, welche die reale Sterblichkeit des versicherten Kollektivs bestmöglich abbildet. In den folgenden Beispielen wird dafür die Gompertz Verteilung verwendet.

Als Grundlage für die Beispiele, wird eine kontinuierliche Erlebensversicherung gegen Einmalerlag hergenommen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden keine, wie auch immer gearteten, Kosten oder Steuern berücksichtigt. Daraus ergibt sich folgender Barwert in aktuarieller Notation:

$$ {}_t\overline{E}_x = v(t)\, {}_tp_x \tag{5.1}$$

Der Term $v(t)$ stellt hier die stetige Verzinsung dar. In Anbetracht der derzeitigen Zinslage in Europa (Stand 2017) und der österreichischen Höchstzinssatzverordnung in der derzeit geltenden Form (BGBl. II Nr. 299/2015, §2(1)) wird für die folgenden Beispiele ein garantierter Zins i von 0.5% pro Jahr angenommen. Daraus ergibt sich für die stetige Verzinsung:

$$ v(t) = e^{-it} = e^{-0.005t} \tag{5.2}$$

Wobei hier ${}_tp_x$ die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person darstellt und ${}_tq_x$ die Gegenwahrscheinlichkeit, also die t-jährige Sterbewahrscheinlichkeit einer x-jährigen Person.

Damit zuerst zur Bernoulliverteilung der Zufallsvariable X. Diese sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= v(t)\,{}_tp_x \\ P(X=0) &= (1-v(t)\,{}_tp_x) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Die Verteilungsfunktion der Bernoulliverteilung ist

$$F_X^{Ber}(s) = \begin{cases} 0, & s<0 \\ (1-v(t){}_tp_x), & 0 \le s < 1 \\ 1, & 1 \le s \end{cases} \tag{5.4}$$

Daraus folgt für die dekumulierte Verteilungsfunktion

$$S_X^{Ber}(s) = (1-F_X^{Ber}(s)) = \begin{cases} 1, & s<0 \\ v(t){}_tp_x, & 0 \le s < 1 \\ 0, & 1 \le s \end{cases} \tag{5.5}$$

Um nun ${}_tp_x$ und zu berechnen, betrachtet man das Sterblichkeitsmodell von Gompertz. Dieses wird über die Sterblichkeitsintensität hergeleitet. Diese ist

$$\mu_x = ae^{bx}, \qquad a,b \ge 0 \tag{5.6}$$

Die Verteilungsfunktion $F_G(t)$ bezeichnet in der Lebensversicherung auch noch die Ablebenswahrscheinlichkeit und wird mit ${}_tq_x$ bezeichnet. Für die Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_tp_x = 1 - {}_tq_x$ gilt daher, dass sie ident mit der DDF $S_G(t) = 1 - F_G(t)$ ist.

Folgende Berechnungen wurden aus dem Paper von [Lenart] herausgearbeitet und erweitert.

Damit folgt für die Überlebenswahrscheinlichkeit der Gompertz Verteilung, dass

$$\begin{aligned} S_G(t) = {}_tp_x &= \exp\left(-\int\limits_x^{x+t} \mu_u \, du\right) \\ &= \exp\left(-\int\limits_x^{x+t} ae^{bu} \, du\right) \\ &= \exp\left(-\frac{a}{b}\int\limits_{bx}^{b(x+t)} e^s \, ds\right) \\ &= \exp\left(-\frac{a}{b}\left(e^{b(x+t)} - e^{bx}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{a}{b}\, e^{bx}\left(1 - e^{bt}\right)\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Das heißt also für die Verteilungsfunktion:

$$F_G(t) = 1 - e^{\frac{a}{b}e^{bx}(1-e^{bt})} \tag{5.8}$$

Die Dichtefunktion für die Gompertz Verteilung lautet daraus folgend,

$$f_G(t) = ae^{b(x+t)+\frac{a}{b}e^{bx}(1-e^{bt})} \tag{5.9}$$

Aus der Dichtefunktion kann man die momenterzeugende Funktion (siehe Seite 16) über die Laplacetransformation bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(s) &= \int_0^\infty f(u) \cdot e^{-su}\, du \\
&= \int_0^\infty a e^{b(x+u)+\frac{a}{b}e^{bx}(1-e^{bu})} \cdot e^{-su}\, du \\
&= a e^{\frac{a}{b}e^{bx}} \int_0^\infty e^{b(x+u)} \cdot e^{-\frac{a}{b}e^{b(x+u)}} \cdot e^{-su}\, du \\
&\left[\text{Subst: } q = e^{b(x+u)}\right] \\
&= a e^{\frac{a}{b}e^{bx}} \int_{u=0}^\infty q \cdot e^{-\frac{a}{b}q} \cdot e^{-su} \cdot \frac{1}{bq}\, dq \\
&= \frac{a}{b} e^{\frac{a}{b}e^{bx}} \int_{q=e^{bx}}^\infty e^{-\frac{a}{b}q} \cdot q^{-\frac{s}{b}} e^{sx}\, dq \\
&= \frac{a}{b} e^{\frac{a}{b}e^{bx}+sx} \int_{q=e^{bx}}^\infty e^{-\frac{a}{b}q} \cdot q^{-\frac{s}{b}}\, dq \\
&\left[\text{Subst: } r = \frac{q}{e^{bx}}\right] \\
&= \frac{a}{b} e^{\frac{a}{b}e^{bx}+bx} \int_{r=1}^\infty e^{-\frac{ae^{bx}}{b}r} \cdot r^{-\frac{s}{b}}\, dr \\
&= \frac{a}{b} e^{\frac{a}{b}e^{bx}+bx} \cdot E_{\frac{s}{b}}\left(\frac{ae^{bx}}{b}\right)
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

wobei $E_n(z)$ das exponentielle Integral ist, das wie folgt definiert ist:

$$E_n(z) = \int_1^\infty e^{-zt} \cdot t^{-n}\, dt \qquad n > 0, Re(z) > 0 \tag{5.11}$$

Damit kann man schlussendlich die Momente der gompertzverteilten Zufallsvariable bestimmen. Die Formel dafür lautet:

$$\mathbb{E}[X^n] = (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n} \mathcal{L}(s)\Big|_{s=0} = \frac{a}{b} e^{\frac{a}{b} e^{bx} + bx} \int_1^{\infty} \frac{(\ln r)^n}{b^n} e^{-\frac{ae^{bx}}{b} r} \, dr \tag{5.12}$$

Damit gilt für die ersten Momente:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \mathcal{L}(s)\Big|_{s=0} = \frac{a}{b} e^{\frac{a}{b} e^{bx} + bx} \int_1^{\infty} \frac{\ln r}{b} e^{-\frac{ae^{bx}}{b} r} \, dr \\
\mathbb{E}[X^2] &= (-1) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \mathcal{L}(s)\Big|_{s=0} = \frac{a}{b} e^{\frac{a}{b} e^{bx} + bx} \int_1^{\infty} \frac{(\ln r)^2}{b^2} e^{-\frac{ae^{bx}}{b} r} \, dr
\end{aligned}$$

In weiterer Folge werden für die einzelnen Prämienprinzipien Erwartungswert und Varianz der Bernoulliverteilung gebraucht. Diese sind für die kontinuierliche Erlebensversicherung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 1 \cdot v(t)\, {}_tp_x + 0 \cdot (1 - v(t)\, {}_tp_x) = v(t)\, {}_tp_x \\
\mathbb{E}[X^2] &= 1^2 \cdot v(t)\, {}_tp_x + 0^2 \cdot (1 - v(t)\, {}_tp_x) = v(t)\, {}_tp_x \\
\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = v(t)\, {}_tp_x - (v(t)\, {}_tp_x)^2 = v(t)\, {}_tp_x \cdot (1 - v(t)\, {}_tp_x)
\end{aligned}$$

Für die oben genannte Erlebensversicherung werden nun Prämien nach einigen Prämienprinzipien berechnet. Als Parameter dafür dienen:

Name	**Buchstabe**	**Wert**
Alter	x	40
Versicherungsdauer	n	25
Zins	i	0.5%
Gompertz-Parameter 1	a	$2.7 \cdot 10^{-6}$
Gompertz-Parameter 2	b	0.11689375

Tabelle 5.1: Parameter für die Erlebensversicherung nach Gompertz

Zuerst wird die Prämie für das Nettoprämienprinzip berechnet und dient damit danach als Vergleichswert für die anderen Prinzipien.

Beispiel 5.1 (Nettoprämienprinzip).
Für das Nettoprämienprinzip gilt

$$\begin{aligned}\Pi[X] &= \mathbb{E}[X] \\ &= v(n)\,{}_np_x \\ &= e^{-in} \cdot e^{\frac{a}{b}e^{bx}(1-e^{bn})} \\ &= e^{\frac{a}{b}e^{bx}(1-e^{bn})-in} \\ &= 0.844857\end{aligned} \tag{5.13}$$

Das heißt also, dass für eine Versicherungssumme von €100 000 eine Einmalprämie in der Höhe von €84 485.70 fällig wäre um dieses Risiko nach dem Nettoprämienprinzip zu versichern.

Das einfachste Vergleichsbeispiel ist das Erwartungswertprinzip. Hier wird auf den Erwartungswert ein Risikozuschlag von λ gegeben.

Beispiel 5.2 (Erwartungswertprinzip).
Für das Erwartungswertprinzip mit Parameter $\lambda = 5\%$ gilt

$$\begin{aligned}\Pi[X] &= \mathbb{E}[X] \cdot (1+\lambda) \\ &= v(n)\,{}_np_x \cdot (1+\lambda) \\ &= e^{-in} \cdot e^{\frac{a}{b}e^{bx}(1-e^{bn})} \cdot (1+\lambda) \\ &= e^{\frac{a}{b}e^{bx}(1-e^{bn})-in} \cdot (1+\lambda) \\ &= 0.887099\end{aligned} \tag{5.14}$$

Für das Erwartungswertprinzip mit $\lambda = 5\%$ gilt also, dass sich die Prämie, für die gleiche Versicherungssumme, in eben dem Ausmaß, auf €88 709.90 erhöht. Im Vergleich zum Nettoprämienprinzip gilt für variablen Parameter λ also:

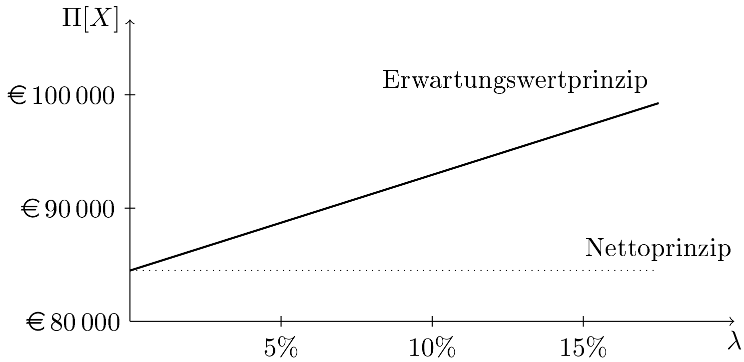

Abbildung 5.1: Erwartungswertprinzip mit Parameter λ

Als nächstes Prämienprinzip folgt das

Beispiel 5.3 (Varianzprinzip).
Für das Varianzprinzip mit Parameter $\lambda = 5\%$ *gilt*

$$\begin{aligned}\Pi[X] &= \mathbb{E}[X] + \lambda\mathbb{V}[X] \\ &= v(n)\,{}_np_x + \lambda v(n)\,{}_np_x(1 - v(n)\,{}_np_x) \\ &= 0.851410\end{aligned} \tag{5.15}$$

Für das Varianzprinzip mit $\lambda = 5\%$ *gilt, dass sich die Prämie auf € 85 141.00 erhöht. Durch die geringe Varianz ergibt sich in diesem Fall nur eine geringe Erhöhung der Prämie. Der Vergleich zum Nettoprämienprinzip zeigt hier für variablen Parameter* λ*:*

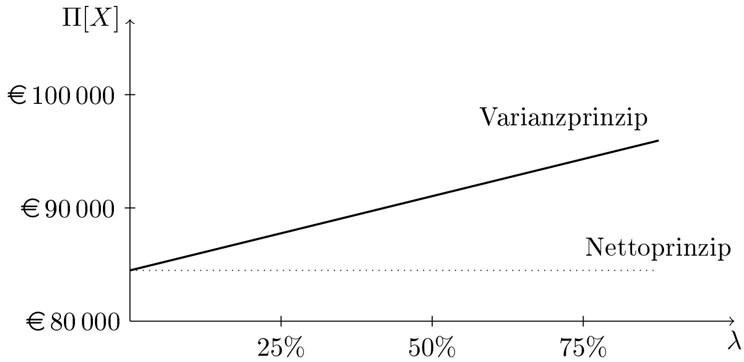

Abbildung 5.2: Varianzprinzip mit Parameter λ

Danach folgt das direkt verbundene

Beispiel 5.4 (Standardabweichungsprinzip).
Für das Standardabweichungsprinzip mit Parameter $\lambda = 5\%$ *gilt*

$$\begin{aligned}\Pi[X] &= \mathbb{E}[X] + \lambda\sqrt{\mathbb{V}[X]} \\ &= v(n)\,{}_np_x + \lambda\sqrt{v(n)\,{}_np_x(1 - v(n)\,{}_np_x)} \\ &= 0.862959\end{aligned} \tag{5.16}$$

Für das Standardabweichungsprinzip mit $\lambda = 5\%$ *gilt, dass sich die Prämie auf € 86 295.90 erhöht. Weil die Varianz kleiner als* 1 *ist, ergibt sich hier eine etwas höhere Prämie als noch zuvor beim Varianzprinzip. Der Vergleich zum Nettoprämienprinzip zeigt hier für variablen Parameter* λ*:*

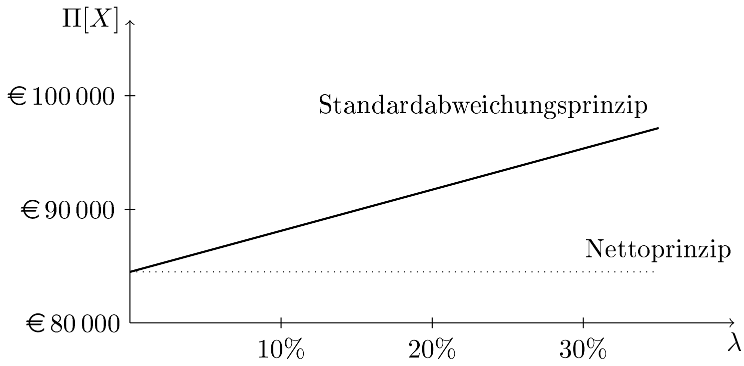

Abbildung 5.3: Standardabweichungsprinzip mit Parameter λ

Als Spezialfall des Nullnutzenprinzips wird nun das Exponentialprinzip betrachtet. Die Nutzenfunktion ist damit folgendermaßen gegeben:

$$u(x) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x}), \qquad x \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \tag{5.17}$$

Die Prämie für das Exponentialprinzip lässt sich direkt berechnen. Diese ist

$$\Pi[X] = \frac{1}{\alpha} \ln \mathbb{E}[e^{\alpha X}]$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{\alpha X}] &= e^{\alpha \cdot 1} v(t)\, {}_t p_x + e^{\alpha \cdot 0}(1 - v(t)\, {}_t p_x) \\ &= e^{\alpha} v(t)\, {}_t p_x + (1 - v(t)\, {}_t p_x) \\ &= 1 + v(t)\, {}_t p_x (e^{\alpha} - 1)\end{aligned}$$

folgt für die Prämie der Erlebensversicherung

$$\Pi[X] = \frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + v(t)\, {}_t p_x (e^{\alpha} - 1)\right)$$

Beispiel 5.5 (Exponentialprinzip).
Für das Exponentialprinzip mit Parameter $\alpha = 1$ gilt

$$\begin{aligned}\Pi[X] &= \ln\left(1 + v(t)\, {}_t p_x (e - 1)\right) \\ &= 0.896782\end{aligned} \tag{5.18}$$

Für das Exponentialprinzip mit $\alpha = 1$ beträgt die Prämie € 89 678.20. Der Vergleich zum Nettoprämienprinzip zeigt hier für variable Risikoaversion α:

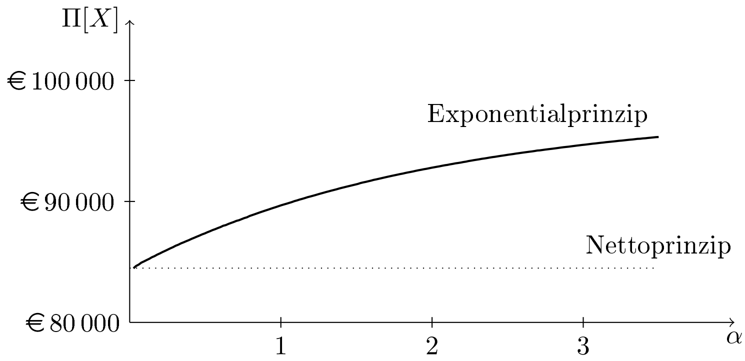

Abbildung 5.4: Exponentialprinzip mit Parameter α

Als weiteres Beispiel folgt das

Beispiel 5.6 (Esscher Prämienprinzip).
Für das Esscher Prinzip mit Parameter $\alpha = 0.5$ *gilt*

$$\begin{aligned}\Pi[X] &= \frac{\mathbb{E}[Xe^{\alpha X}]}{\mathbb{E}[e^{\alpha X}]} \\ &= \frac{e^{\alpha} v(t)\,{}_tp_x}{1 + v(t)\,{}_tp_x(e^{\alpha} - 1))} \\ &= 0.899783\end{aligned} \tag{5.19}$$

Das Esscher Prinzip mit $\alpha = 0.5$ *verlangt für die Erlebensversicherung eine Prämie von € 89 978.30. Der Vergleich zum Nettoprämienprinzip zeigt für Parameter* α*:*

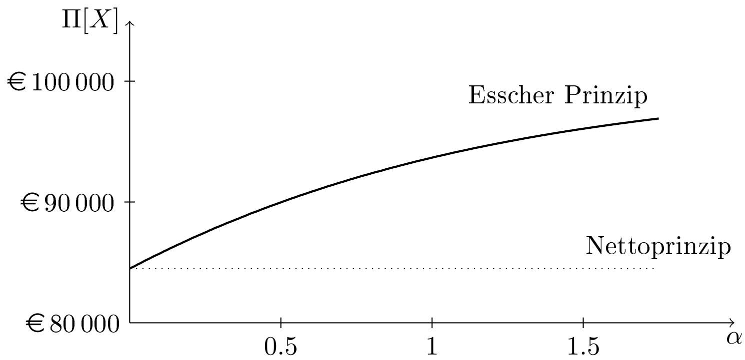

Abbildung 5.5: Esscher Prinzip mit Parameter α

Schlussendlich folgt noch ein Beispiel zum Wang Prämienprinzip. Für die bernoulliverteilte Erlebensversicherung gilt

$$S_X(u) = (1 - F_X(u)) = \begin{cases} 1, & u < 0 \\ v(t)\,{}_tp_x, & 0 \leq u < 1 \\ 0, & 1 \leq u \end{cases}$$

Daher folgt für das Wang Prämienprinzip unter Benutzung der PH-Transformation

Beispiel 5.7 (Wang Prämienprinzip)**.**
Für das Wang Prinzip, mit der PH-Transformation zum Parameter $\alpha = 1.5$ gilt

$$\begin{aligned} \Pi[X] &= \int_0^1 (v(t)\,{}_tp_x)^{\frac{1}{\alpha}}\,ds \\ &= (v(t)\,{}_tp_x)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= 0.893693 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Das Wang Prinzip mit $\alpha = 1.5$ erhöht die Prämie für die Erlebensversicherung auf €89 369.30. Der Vergleich zum Nettoprämienprinzip zeigt für hier Parameter α:

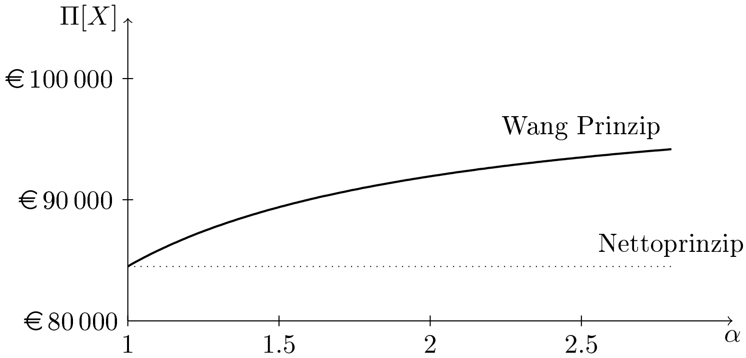

Abbildung 5.6: Wang Prinzip mit Parameter α

Kapitel 6

Conclusio

Das Ziel dieser Diplomarbeit war es möglichst viele verschiedene Prämienkalkulationsprinzipien vorzustellen und genauer zu betrachten. Genauer noch war das Ziel, durch die Herleitung der diversen Prinzipien, allen voran des Esscher Prinzips und des Wang Prinzips, einen direkten Einblick in aktuarielle und wirtschaftswissenschaftliche Theorien und Fragestellungen zu bekommen. Durch genauere Betrachtung des Esscher und des Wang Prinzips, konnte man herausfinden, dass diese Prinzipien auf mehrere Arten und Weisen hergeleitet werden können. Von Interesse war auch das Kennenlernen der Verzerrungsfunktionen und deren Anwendung zum Transformieren der DDF im Zuge des Wang Prinzips. Gerade das Wang Prinzip hat durch diese Flexibilität enorme Reichweite in der Anwendung.

Es drängt sich dabei, a priori, primär die Frage nach einer Wertung der Prinzipien auf. Welches Prämienprinzip ist DAS Prämienprinzip? Welches sollte immer verwendet werden und ist den anderen überlegen? Genau diese, zuerst wichtigste Frage rückt dann, a posteriori, eigentlich in den Hintergrund. Ein direkter Vergleich der Eigenschaften ist zwar zulässig, allerdings lässt der verschiedene Grad an Komplexität und vor allem die unterschiedlichen Anforderungen an das zu wählende Prämienprinzip, keinen direkten Vergleich zu.

Gerade daher, kann und will sich diese Diplomarbeit, nicht als Wertungskriterium für Prämienprinzipien verstehen, sondern vielmehr das Interesse des Lesers für dieses aktuelle und spannende Gebiet wecken. Die Risikobewertung und als Teil davon die Prämienkalkulation, ist in der heutigen Zeit, nach diversen Finanzkrisen, wichtiger denn je.

Literaturverzeichnis

[Schmidt] Klaus D. Schmidt. *Versicherungsmathematik.* Springer, 2001. 3. Auflage.

[Buehlmann] Hans Bühlmann. *An economic premium principle.* ASTIN Bulletin 11, 1980. p.52-60

[Van Heerwaarden] Angela E. van Heerwaarden. *Properties of the Esscher premium calculation principle.* Insurance: Mathematics and Economics 8, 1989. p.261-267

[Wang(1996)] Shaun S. Wang. *Premium calculation by transforming the layer premium density.* ASTIN Bulletin 26, 1996. p.71-92

[Wang(2000)] Shaun S. Wang. *A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks.* The Journal of Risk and Insurance 67, 2000. p.15-36

[WangDhaene] Shaun S. Wang, Jan Dhaene. *Comonotonicity, correlation order and premium principles* Insurance: Mathematics and Economics 22, 1998. p.235-242

[GoovaertsDhaene] Marc J. Goovaerts, Jan Dhaene. *On the charactarization of Wang's class of premium principles.* 26th International Congress of Actuaries vol.4, 1998. p.121-134

[DWYG] Jan Dhaene, Shaun S. Wang, Virginia R. Young, Marc J. Goovaerts. *Comonotonicity and maximal stop-loss premiums.* Bulletin of the Swiss Association of Actuaries, 2000. p.99-113

[Denneberg] Dieter Denneberg. *Premium calculation: Why standard deviation should be replaced by absolute deviation.* ASTIN Bulletin 20, 1990. p.181-190

[Kaas et al] R. Kaas, Angela E. van Heerwaarden, Marc J. Goovaerts. *Ordering of actuarial risks.* 1994

[Hardy] Mary R. Hardy. *An introduction to risk measures for actuarial applications.* 2006

[Borch] Karl Borch. *The utility concept applied to the theory of insurance.* ASTIN Bulletin 1, 1961. p.170-191

[Goovaerts et al] Marc J. Goovaerts, Florent E. de Vylder, Jean Haezendonck. *Insurance premiums: Theroy and applications.* North Holland, 1984

[Yaari] Menahem E. Yaari. *The dual theory of choice under risk.* Econometrica 55, 1987. p.95-115

[Young] Virginia R. Young. *Optimal insurance under Wang's premium principle.* Insurance: Mathematics and Economics 25, 1999. p.109-122

[Laeven et al] Roger J.A. Laeven. *Premium calculation and insurance pricing.* 2007

[Dickson et al] David C.M. Dickson, Mary R. Hardy, Howard R. Waters. *Actuarial mathematics for life contingent risks.* Cambridge, 2009

[Wang, Young] Shaun S. Wang, Virginia R. Young. *Ordering risks: Expected utility theory versus Yaari's dual theory of risk* Insurance: Mathematics and Economics 22, 1998. p.145-161

[Lenart] Adam Lenart. *The Gompertz distribution and Maximum Likelihood estimation of its parameters - a revision.* Max-Planck-Institut, 2012