



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Variance Swaps Sub- und Super-Hedging von Varianzoptionen

ausgeführt am
Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Dipl.-Ing. Dr. techn. Stefan Gerhold

durch

Stephan Aigner
0625967, 066405
Berghamerstraße 63
4072 Alkoven

17. März 2015

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| 1 | Einleitung | 7 |
| 1.1 | Varianz und Volatilität | 8 |
| 1.2 | Swaps | 9 |
| 1.3 | Quellen und verwandte Arbeiten | 13 |
| 1.4 | Volatility Index | 13 |
| 1.5 | Definitionen und Modellannahmen | 15 |
| 2 | Replizierende Strategie | 19 |
| 2.1 | Verschwinden des $d\langle X \rangle$ -Integrals | 21 |
| 2.2 | Nichtverschwinden des $d\langle X \rangle$ -Integrals | 28 |
| 3 | Variance Call: Untere Grenze | 33 |
| 3.1 | Spot-Starting Variance Call: Subreplikation | 33 |
| 3.2 | Forward-starting Variance Call: Subreplikation | 35 |
| 3.3 | Subreplikation unter einer Randbedingung | 37 |
| 3.4 | Forward-starting Variance Call: Untere Grenzen | 38 |
| 4 | Variance Call: Obere Grenze | 41 |
| 4.1 | Forward-starting Variance Call: Superreplikation | 41 |
| 4.2 | Superreplication unter Randbedingung | 43 |
| 4.3 | Forward-starting Variance-Call: Obere Schranken | 46 |
| 5 | Modellberechnung | 49 |
| 5.1 | CEV-Modell | 49 |
| 5.2 | SABR Volatilitäts-Modell | 53 |
| 5.3 | Merton-Sprung-Diffusions-Modell | 55 |
| 6 | Anhang | 61 |
| 6.1 | Daten | 61 |
| 6.2 | Matlab-Codes | 65 |

Vorwort

Diese Diplomarbeit widme ich meinem Sohn Elias Maximilian, der genau zur Fertigstellung dieser Arbeit das Licht der Welt erblickt hat.

Ich möchte mich bei meiner ganzen Familie für die Unterstützung bedanken. Ein besonderer Dank gilt meiner Freundin Melanie, welche mir besonders zum Abschluss des Studiums den notwendigen Rückhalt und Kraft gab. Weiters gilt ein besonderer Dank meinen Eltern, die mich während meines ganzen Studium in jeder Hinsicht unterstützt haben und mir somit auch das Durchhaltevermögen für die Absolvierung dieses Studiums gegeben haben.

Des Weiteren danke ich auch meinem Betreuer Dr. techn. Stefan Gerhold, der mir neben der Möglichkeit der Verfassung der Diplomarbeit auch bei der Erarbeitung stets mit bester Unterstützung und Betreuung zur Seite stand.

1 Einleitung

In der Finanzwirtschaft hat nicht nur aufgrund der zuletzt aufgetretenen Turbulenzen am Finanzmarkt die Notwendigkeit von exakten Bewertungen von Finanzinstrumenten stark zugenommen. Hierbei werden meist Modelle verwendet, die einerseits den realen Markt möglichst genau beschreiben bzw. nachbilden und andererseits in ihrer Berechnung und numerischen Auswertung einfach strukturiert sind. Vor allem in der Bank- und Versicherungswirtschaft, die große Portfolien an Finanzinstrumenten halten, sind simple Berechnungslogiken, welche auch große Portfolien in kurzer Zeit bewerten können, erforderlich

Für die Bewertung von europäischen Optionen stellt das Black-Scholes-Modell die bekannteste Formel für einen fairen Preis dar. Hierbei wird angenommen, dass der Aktienkurs S_t , auf dem die Option beruht, einer geometrischen Brown'schen Bewegung folgt. Der Preisprozess eines solchen Aktienkurses erfüllt folgende stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

mit Drift μ , Diffusion σ und einer Brown'schen Bewegung W_t

Eine Brown'sche Bewegung (auch Wiener Prozess genannt) wird dabei durch folgende Eigenschaften charakterisiert

- $W_0 = 0$ (\mathbb{P} -fast sicher)
- Zuwächse sind stationär und normalverteilt, d.h. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$ für $s < t$
- Zuwächse sind unabhängig, d.h. $W_t - W_s$ und $W_v - W_u$ sind unabhängig für $s < t \leq u < v$
- W_t hat stetige Pfade (\mathbb{P} -fast sicher)

Im Black-Scholes-Modell haben die Preise von europäischen Optionen eine geschlossene Form, welche zu der häufigen Verwendung in der Praxis führen. Hierbei hat zum Beispiel

1 Einleitung

eine europäische Call-Option mit Auszahlung $C(S, T) = (S_T - K)^+$ zu Laufzeitende T im Black-Scholes-Modell den fairen Preis zur Zeit t

$$C_{BS}(S_t, K, \mu, \sigma, \tau) = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2)$$

mit Aktienkurs S_t , Strike K , Parameter μ , σ , Zinssatz r , Restlaufzeit $\tau = T - t$ sowie

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 &= \frac{\log(S_t/K) + (r - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \\ N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \end{aligned}$$

Analog dazu ergibt sich der faire Preis für eine europäische Put-Option mit Auszahlung $P(S, T) = (K - S_T)^+$ zu Laufzeitende durch

$$P_{BS}(S_t, K, \mu, \sigma, \tau) = K e^{-r\tau} N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

mit den gleichen Parametern wie im Fall der Call-Option.

Die große Schwäche dieses Modells ist jedoch die unzureichende Berücksichtigung von allen Bewegungen eines Aktienkurses. Insbesondere wird durch die Modellierung des Aktienkurses mittels geometrischer Brown'sche Bewegung die Möglichkeit von Sprüngen im Aktienkurs verhindert, da in der Definition der Brown'sche Bewegung \mathbb{P} -fast sichere stetige Pfade vorausgesetzt werden. Um diesen Umstand Rechnung zu tragen, gibt es alternative Modelle, welche Sprünge erlauben. Solche Modelle werden in der Literatur als Sprung-Diffusions-Modelle zusammengefasst. Als Beispiel für eine solche Erweiterung wird im letzten Kapitel dieser Arbeit das Merton-Sprung-Diffusions-Modell betrachtet. Bei diesem Modell wird der Aktienkurs aus zwei Komponenten zusammengesetzt. Der erste Teil wird als stetige Komponenten bezeichnet und stellt das Black-Scholes-Modell dar, jedoch wird zusätzlich als zweiter Teil eine sogenannte Sprungkomponente eingeführt. Im Modell vom Merton wird dabei diese Sprungkomponente als zusammengesetzter Poisson-Prozess angesetzt, dessen Sprungintensitäten log-normalverteilt sind.

Bevor nun die Bewertung von Variance-Swaps betrachtet wird, folgen Definitionen und Begriffe, welche im weiteren Verlauf benötigt werden.

1.1 Varianz und Volatilität

Allgemein versteht man in der Stochastik unter Varianz ein Maß für die Streuung einer Zufallsvariabel X . Die Berechnung erfolgt für eine reelle und integrierbare Zufallsvariable

X mit dem Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \mu$ durch

$$V(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$$

Die Varianz hängt dabei nicht vom Zufall ab, sondern ist durch die Verteilung der Zufallsvariabel festgelegt. Je nach Verteilung ist sie einer der wesentlichen Parameter, welche eine bestimmte Verteilung definiert. Als Beispiel sei hier die Normalverteilung erwähnt, welche durch den Erwartungswert und die Varianz vollständig erklärt ist.

Im Gegensatz dazu bezeichnet die Volatilität die Schwankung von Zeitreihen. Im Zusammenhang mit Finanzinstrumenten werden als Zeitreihen meist Aktienkurse oder Aktienindizes verstanden. Hierbei sind die Begriffe historische Volatilität und implizite Volatilität zu unterscheiden.

- Historische Volatilität kann aus den historischen Zeitreihen ermittelt werden (z.B. die Wertänderungen eines Aktienkurses des letzten Jahres)
- Implizite Volatilität wird aus aktuellen Optionspreisen eines Basiswertes (z.B. Aktienkurs) mittels eines Optionspreismodells berechnet und ist ein Maß für die zu erwartende Schwankung bis zum Ablauf der Option

Im weiteren Verlauf wird auch der Begriff der quadratischen Variation benötigt. Diese ist für einen stochastischen Prozess X definiert durch

$$\langle X \rangle_t = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left(X(t_{k+1}^{(n)}) - X(t_k^{(n)}) \right)^2 \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} \leq t \right\}$$

Wie durch obige Definitionen ersichtlich ist, hängen die Volatilität und Variation vom Zufall ab (bzw. sind nicht durch die Verteilung bereits fixiert). Dieser Umstand wird noch einen wesentlichen Einfluss im weiteren Verlauf darstellen.

1.2 Swaps

Swaps (engl. (Aus-)Tausch) ist ein Sammelbegriff für Finanzinstrumente, bei denen Zahlungsströme zu festgelegten Konditionen und festgelegten Zeitpunkten ausgetauscht werden. Dabei gibt es viele verschiedenen Varianten, wobei die häufigsten Swaps sind

- Zinsswap (Interest Rate Swap)
- Währungsswap (Cross Currency Swap)
- Devisenswap (FX-Swap)

1 Einleitung

Bei einem Zinsswap werden, wie der Name schon verrät, Zahlungsströme in Form von Zinszahlungen ausgetauscht. Hierbei gibt es wiederum vielfältige Formen, wie die Zinsen beider Vertragsseiten aussehen können (fixer Zinssatz/variabler Zinssatz mit und ohne Aufschlag (Spread)). Bei einem Währungsswap werden hingegen verschiedene Währungen inklusive den zugehörigen Zinszahlungen zu einem Wechselkurs getauscht. Ähnlich dazu ist der Devisenswap, wo jedoch lediglich die Währungen akutell getauscht werden (per Spot) und zu einem späteren Zeitpunkt wieder zurückgetauscht werden (per Forward).

Neben den bereits genannten, oft gebräuchlichen Swaps, gibt es auch weniger bekannte Swaps wie den Variance Swap und Volatility Swap. Diese Finanzinstrumente können dazu verwendet werden, um das Volatilitätsrisiko zu managen bzw. einzuschränken. Daher werden solche Instrumente vor allem im Risikomanagement und Hedging von Finanzinstrumenten eingesetzt und so die Risikoposition des Unternehmens zu überschauen bzw. zu reduzieren.

Die Financial Times schreibt dazu Folgendes:

”Volatility is becoming an asset class in its own right. A range of structured derivative products, particularly those known as variance swaps, are now the preferred route for many hedge fund managers and proprietary traders to make bets on market volatility.”

Übersetzt bedeutet das, dass die Volatilität in Zukunft eine eigene Klasse von Finanzinstrumenten darstellen wird und strukturierte Produkte, insbesondere Variance Swaps, werden dazu verwendet um auf die Marktvolatilität zu wetten.

Ein Variance Swap stellt dabei nicht unmittelbar einen Swap dar, ein solches Instrumente könnte man eher als Forward Contract auf die realisierte jährliche Varianz betrachten. Dabei ergibt sich zu Laufzeitende T eine Auszahlung

$$N_{var} (V_{real} - K_{var})$$

mit

- N_{var} Nominalbetrag des Swap
- V_{real} realisierte jährliche Varianz
- K_{var} Strike-Varianz

Dabei wird die realisierte jährliche Varianz basierend auf vorab definierten Datenpunkten berechnet. Dies ergibt z.B. für einen Basiswert mit den Datenpunkten S_0, S_1, \dots, S_N und

dem Annualisierungseffekt A (meist 250 Tage) die realisierte jährliche Varianz ohne Mittelwert-Anpassung

$$V_{real} = A \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\log(S_i/S_{i-1}) \right)^2$$

oder die realisierte jährliche Varianz mit Mittelwert-Anpassung

$$V_{real} = A \cdot \left[\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\log(S_i/S_{i-1}) \right)^2 - \left(\frac{1}{N} \cdot \log(S_N/S_0) \right)^2 \right]$$

Die realisierte Volatilität Σ ist nichts anderes als die Wurzel der realisierten Varianz V , also $\Sigma = \sqrt{V}$. Dabei ist aus der Maßtheorie bekannt, dass für eine Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X]}$, also gilt dies auch für Σ und V . Diese Differenz wird als Convexity Adjustment bezeichnet. Diese Anpassung ist in natürlicher Weise von der Volatilität der realisierten Volatilität abhängig. Das heißt, dass die realisierte Volatilität sich je nach Pfad des Basispreises ändert (wie oben bereits erwähnt ist diese also stochastisch). Dies ist auch der Grund, dass es im Gegensatz zum Variance Swap für einen Volatility Swap kein generelles replizierendes Portfolio gibt und das Convexity Adjustment abhängig vom gewählten Modell ist.

Ein Volatility Swap sieht formal zu einem Variance Swap sehr ähnlich aus. Die Auszahlung hängt nun eben nicht mehr von der realisierten Varianz, sondern von der realisierten Volatilität ab. Die Auszahlungsfunktion eines solchen Swap kann durch folgende Formel erklärt werden

$$N_{vega} (\sigma_{real} - K_{vol})$$

mit

- N_{vega} Nominalbetrag des Swap
- σ_{real} realisierte jährliche Volatilität
- K_{vol} Strike-Volatilität

Ein Vergleich der Auszahlungsfunktionen eines Variance Swap und eines Volatility Swap zeigt die Linearität der Auszahlung des Volatility Swap und die Konvexität der Auszahlung des Variance Swap (siehe Abbildung 1a). In Abbildung 1b wird noch eindeutiger der Fehler aufgrund der Konvexität zwischen beiden Auszahlungsfunktionen dargestellt. Für die Erstellung der Abbildung wurden folgende Parameter verwendet

$$\begin{aligned} N_{var} &= 2 & K_{var} &= 0,0625 \\ N_{vol} &= 1 & K_{vol} &= 0,25 \end{aligned}$$

1 Einleitung

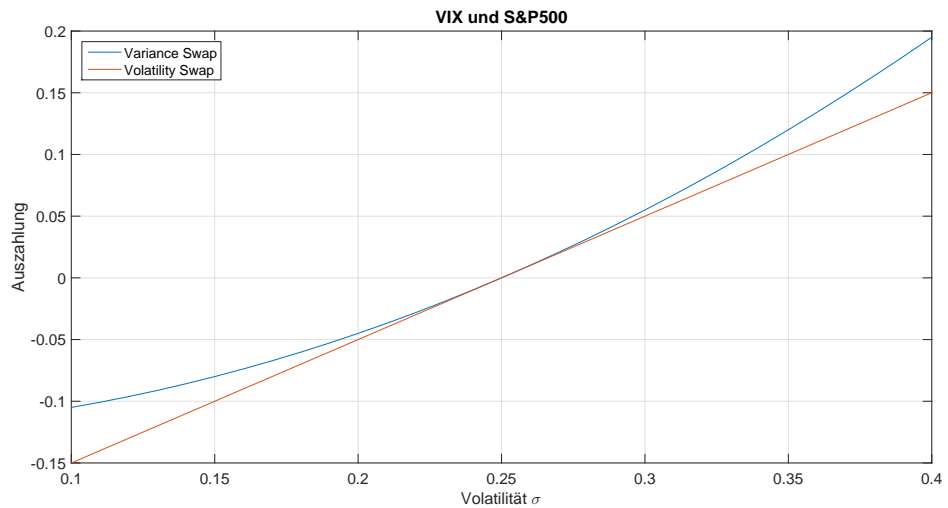


Abbildung 1a: Auszahlungsfunktionen eines Volatility Swap und Variance Swap
(in Abhängigkeit der realisierten Volatilität)

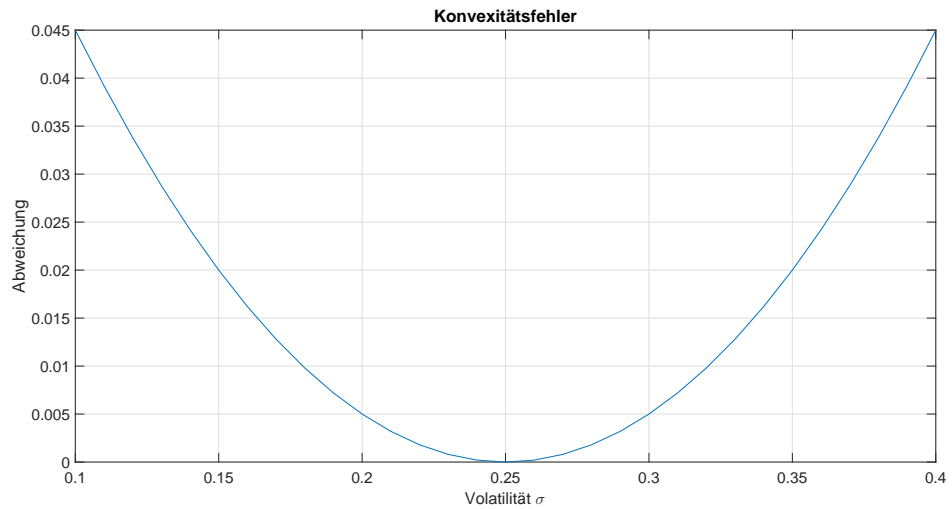


Abbildung 1b: Konvexitätsfehler mittels Divergenz der Auszahlungsfunktionen
(in Abhängigkeit der realisierten Volatilität)

In obiger Grafik haben die beiden Swaps, also Variance Swap und Volatility Swap, den Strike bei 25%. Dabei ist klar ersichtlich, dass die Auszahlung eines Variance Swap immer über der eines Volatility Swap liegt (daher auch ein stets positiver Konvexitätsfehler). Da am Markt keine Arbitrage möglich sein soll, muss $K_{vol} \leq \sqrt{K_{var}}$ gelten.

Im Gegensatz zur Ansicht des Marktes, der die Arbitragefreiheit fordert, nun zu der mathematischen Sichtweise. Da der Strike eines Swap zum Beginn der Laufzeit genau

der Erwartung des zukünftigen Wertes entspricht, gilt für die beiden Strikes

$$\begin{aligned} K_{var} &= \mathbb{E}[V_{real}] = \mathbb{E}[\sigma_{real}^2] \\ K_{vol} &= \mathbb{E}[\sqrt{\sigma_{real}^2}] = \mathbb{E}[\sigma_{real}] \end{aligned}$$

Mit Hilfe von der Jensen-Ungleichung kann dann der obige Zusammenhang zwischen den Strikes hergestellt werden

$$K_{vol} = \mathbb{E}[\sqrt{\sigma_{real}^2}] \leq \sqrt{\mathbb{E}[\sigma_{real}^2]} = \sqrt{K_{var}}$$

Dieser Zusammenhang ist somit einerseits vom Markt wegen der Bedingung der Arbitragefreiheit erwünscht und andererseits auch durch die Jensen-Ungleichung mathematisch begründet.

1.3 Quellen und verwandte Arbeiten

Der Hauptteil der Diplomarbeit beruht auf dem Paper [1], 'Hedging variance options on continuous semimartingales' von Peter Carr und Roger Lee, welches 2009 im Springer Verlag erschienen ist. Weitere wesentliche Quellen stellen die Arbeiten 'The volatility cube' von Andrew Lesniewski sowie 'The volatility surface' von Jim Gatheral dar. Informationen zu nachstehenden Volatility Index (VIX) wurden von der Homepage des CBOE ¹ verwendet. Neben diesen Quellen habe ich auch noch weitere Artikel für die Erstellung dieser Arbeit verarbeitet, welche im Literaturverzeichnis aufgelistet sind.

1.4 Volatility Index

In der Praxis hat sich die Bewertung mittels der log-contract-Methode durchgesetzt, welche Modell-frei ist und die realisierte Varianz repliziert. Die Methode findet auch Anwendung bei der Berechnung des VIX Index durch die CBOE, welcher wohl den bekanntesten Index im Bezug auf Volatilität darstellt. Dieser Index stellt die Markterwartung der kurzfristigen Volatilität, das bedeutet die 30-Tage-implizite Volatilität für die S&P500 Aktien-Index-Options-Preise dar. Der S&P500 (Standard & Poor's 500) Aktienindex ist ein Index, welcher 500 Aktien der größten börsennotierten US-Unternehmen beinhaltet. Ursprünglich wurden für die Berechnung Optionspreismodelle verwendet, also bei Berechnung wurden auch fiktive Optionen berücksichtigt. Die Berechnungslogik wurde jedoch mit dem Jahr 2005 modernisiert und wird nun auf Basis von tatsächlich gehandelten Optionen an der CBOE berechnet. Die wesentliche Änderung aus dieser

¹Chicago Board Options Exchange, <http://www.cboe.com>

1 Einleitung

Umstellung ist die Replizierbarkeit des VIX, da für die Bewertung nur tatsächlich handelbare Optionen berücksichtigt werden. Die Replizierbarkeit als Basiswert führt nun dazu, dass der Index an sich als Derivat für Anleger interessant ist.

Für den europäischen bzw. deutschen Markt sei der VDAX als ähnlicher Volatilitätsindex erwähnt. Dieser Index gibt die implizite Volatilität des deutschen Aktienindex DAX an und wird analog zum VIX auf Basis der tatsächlich gehandelten Optionen auf der Terminbörse EUREX (European Exchange) berechnet.

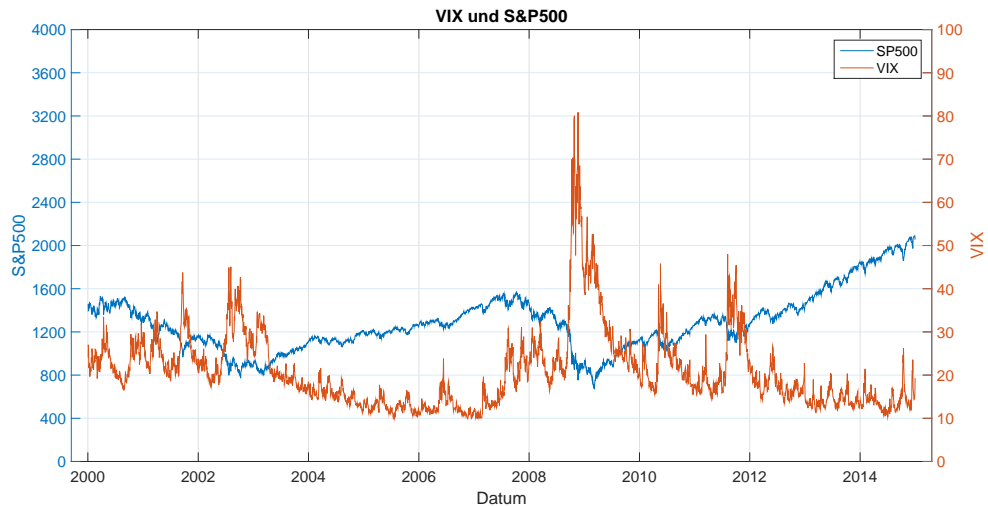


Abbildung 2a: Historische Daten des VIX und S&P500 Aktienindex

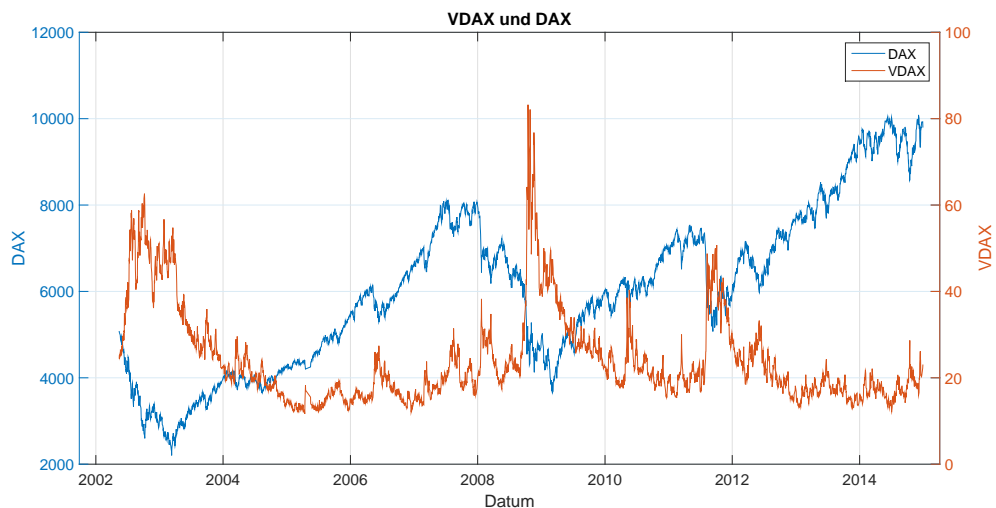


Abbildung 2b: Historische Daten des VDAX und DAX Aktienindex

Für derartige Volatilitäts-Indizes gilt generell: Die implizite Volatilität steigt wenn die

relativen Preise von Optionen steigen. Eine Ursache für steigende implizite Volatilität ist meist ein Überangebot von Options-Käufern gegenüber einem geringen Angebot von Options-Verkäufern. Im Gegenzug sinkt die implizite Volatilität wenn die relativen Preise von Optionen zurück gehen. Das Sinken ist wiederum ein Indiz dafür, dass weniger Angebote von Optionen nachgefragt als angeboten werden.

Die tägliche Änderung des Volatilitätsindex ist auch ein Indiz dafür wie sich der Markt von Optionskontrakten der zugrundeliegenden Börse verhält und wie aggressiv gehandelt wird. Oben stehende Abbildung zeigt jeweils die Volatilitätsindizes VIX und VDAX mit den jeweiligen Basisindizes S&P500 und DAX. Als Quelle diene dabei für den VIX <http://www.cboe.com/> und für den VDAX <http://www.boerse-frankfurt.de/>.

Durch eine Weiterentwicklung des Modells kann man eine zukünftig startende gewichtete Varianz einer allgemeinen Funktion von stetigen Semimartingalen replizieren. Dabei beschränkt sich dieses Arbeit auf die zugehörigen Optionen, da diese in der Praxis eine bessere Steuerung des Volatilitäts-Risikos ermöglichen. Hauptgrund dafür ist, dass Optionen generell die Möglichkeit bieten long oder short zu gehen und somit das Risiko bzw der Verlust in Höhe der Prämie limitiert ist.

1.5 Definitionen und Modellannahmen

Definition

Sei Y ein positives Semimartingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$, welcher die üblichen Bedingungen erfüllt. Unter übliche Bedingungen versteht man, dass die Filtrierung $\{\mathcal{F}_t\}$ rechtsstetig und vollständig ist. Hierbei ist es nicht notwendig, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} risikoneutral ist. Das bedeutet, dass mit diesem Maß Y nicht unbedingt ein lokales \mathbb{P} -Martingal sein muss. Dieses Semimartingal stellt im weiteren Verlauf den *Preisprozess des zugrundeliegenden Assets* dar, unter der Annahme, dass Dividenden wieder reinvestiert werden.

Definition

Für ein festes $T > 0$ definiere die \mathcal{F}_T -messbare Auszahlung A als *handelbar*, wenn die Auszahlung zum Zeitpunkt $t < T$ zu einem endlichen Preis $\mathcal{V}_t A$ entweder gekauft oder verkauft werden kann.

Voraussetzungen

Es existieren folgende *handelbare Auszahlungen*

1 Einleitung

- Zugrundeliegendes Asset mit Auszahlung Y_T zum Zeitpunkt T und Preis $\mathbb{V}_t Y_T = Y_t$ zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$
- Bond mit Auszahlung $Z_T = 1$ zum Zeitpunkt T und Preis $\mathbb{V}_t Z_T = 1$ zum Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$

Die obige Verwendung von \mathbb{V}_t in diesen Zusammenhang ist als beliebiger Prozess aus der Menge der arbitragefreien Preisprozesse zu verstehen.

Weitere handelbare Auszahlungen werden bei Bedarf im weiteren Verlauf direkt an passender Stelle definiert.

Definition

Eine *Handelsstrategie* ist ein vorhersehbarer stochastischer Prozess der den Bestand an den definierten handelbaren Auszahlungen zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in [0, T]$ angibt.

Eine solche Strategie nennt man selbstfinanzierend, wenn nur zu Beginn Geld investiert wird und im Zeitablauf die Wertänderungen des Portfolios ausschließlich aufgrund von Wertänderungen der zugrundeliegenden Assets entstehen und nicht durch Zu- oder Abflüsse von Geld.

Neben dieser allgemeinen Definition folgt im weiteren Verlauf noch eine weitere Definition für eine Handelsstrategie und die Selbstfinanzierung im mathematischen Sinne.

Definition

Arbitrage definiert die Möglichkeit eines risikolosen Gewinn mit vorhersehbaren, selbstfinanzierenden, semi-statischen Handelstrategien bei handelbaren Auszahlungen. Dabei bedeutet semi-statisch, dass die Strategie endlich oft in dem Zeitraum $(0, T)$ handelt (zumindest ein Mal muss dabei gehandelt werden). Arbitrage sei im weiteren Verlauf nicht möglich.

Definition

Sei $X_t = \varphi(Y_t)$ mit einer konvexen Funktion φ (z.B. $\varphi(y) = \log(y)$)

Definition

Sei $\langle X \rangle$ bzw. $\langle Y \rangle$ die *quadratische Variation von X bzw. Y* mit der Konvention, dass die quadratische Variation zum Zeitpunkt 0 Null ist.

Definition

Als *Replizierung* bezeichnet man die Nachbildung eines Preisprozesses durch eine Handelsstrategie, welche die gleiche Auszahlung zu einem Endzeitpunkt $T > 0$ liefert.

Super-Replizierung bedeutet, dass eine obere Grenze für den Preisprozess festgelegt wird. Dies folgt der Standard-Methode, dass bei einem Preis über dieser Grenze durch den Verkauf der Option und dem Kauf der Strategie Arbitrage möglich ist. Dabei ist zu beachten, dass die superreplizierende Strategie nicht jede Definition von 'zulässig' erfüllt. In analoger Weise bedeutet *Sub-Replizierung*, dass eine untere Grenze für den Preisprozess definiert wird. Dabei kann wiederum Arbitrage erzielt werden, wenn der Preis der Option unter diesem Wert liegt, da dann bei Kauf der Option und Verkauf der Strategie ein risikoloser Gewinn möglich ist.

Ziel ist die Modell-freie Replizierung (bzw. auch Super- bzw. Subreplizierung) der Zahlungsansprüche basierend auf $\langle X \rangle$. Als solche Zahlungsansprüche gelten beispielsweise Optionen auf die zukünftige Varianz $\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta$ für eine Konstante $\theta \in [0, T)$. Dabei soll eine vorhersehbare selbstfinanzierende Strategie verwendet werden, die Y handelt und europäische Optionen auf Y_T und Y_θ hält.

Um Konsistenz zwischen den Basisassets (zugrundeliegendes Asset und Bond) zu schaffen, wird vorausgesetzt, dass es keine semi-statische Arbitrage zwischen diesen Elementen gibt. Bei den Optionen bzgl. Varianzen zu den super/sub-replizierenden Portfolien (Y wird dabei dynamisch gehandelt) wird diese Konsistenz durch die Annahme erreicht, dass es keine dynamische Arbitragemöglichkeit gibt welche die natürlichen Randbedingungen erfüllt.

Bemerkung

Der konstante Bond in dem Modell verhindert nicht die Möglichkeit zur Berücksichtigung von Zinsen, da alle Preise in der Währung des Bonds notieren. Sollte sich in der Anwendung die Notwendigkeit ergeben, in eine andere Währung umrechnen zu müssen, so kann man folgende Umrechnung durchführen:

Sei Y' ein Aktienpreis in Dollar und Z' ein Bond in Dollar. Dann gilt für $Y_t = Y'_t/Z'_t$ und für $Z_t = Z'_t/Z'_t = 1$.

Am Markt werden Geschäfte zur Varianz meist auf logarithmische Varianzen in Bezug auf Dollar abgeschlossen und nicht auf Basis des Bonds. Unter der Annahme von beliebigen deterministischen Zinsen $r(t)$ sind diese Definitionen der Varianzen jedoch ident. Dies wird durch die Tatsache bewiesen, dass das ds -Integral von $Z'_t = \exp\left(\int_t^T r(s) ds\right)$ von endlicher Variation ist

$$\langle \log Y \rangle = \langle \log(Y'/Z') \rangle = \left\langle \log Y' + \int_t^T r(s) ds \right\rangle = \langle \log Y' \rangle \quad (1.5.1)$$

und somit folgt auch die Gleichheit einer Option mit Laufzeit bis T auf die Funktion $\langle \log Y' \rangle_T$ und einer Option mit Laufzeit bis T auf die Funktion $\langle \log Y \rangle_T$. Dies bedeutet

1 Einleitung

zusammenfassend, dass die Annahme eines konstanten Bond-Preises die Möglichkeit der Betrachtung von beliebigen deterministischen Zinsen nicht einschränkt. Lediglich bei exotischen Optionen wie Lookback Optionen oder Barrier Optionen kann dies nicht verwendet werden bzw. muss man andere Argumentationen finden. In diesen Fällen gilt natürlicher Weise $\max_t(Y'_t/Z'_t) \neq \max_t(Y'_t)$, wodurch die Optionen für Y'_t und Y'_t/Z'_t zu unterschiedliche Auszahlungen führen.

2 Replizierende Strategie

Definition

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden immer wieder die Begriffe 'forward-starting' und 'spot-starting' verwendet. Diese Fachbegriffe aus der Finanzwelt werden dazu verwendet um Verträge zu bezeichnen, deren Laufzeit in Zukunft startet ('forward-starting') bzw. deren Laufzeit sofort beginnt (spot-starting). Im Zusammenhang mit dieser Arbeit wird daher als 'forward-starting Varianz' die Tatsache bezeichnet, dass die Varianz erst ab einem gewissen Zeitpunkt in der Zukunft betrachtet wird.

Definition

Sei φ_y die linksseitige Ableitung von φ sowie φ_{yy} die 2. Ableitung von φ im Sinne von den Verteilungen.

Definition

Sei $L_t^a = \int_0^t \delta_{(a-X_s)} ds$ die Lokalzeit von X zu a . Dies ist ein Maß für die Zeit des Prozesses X an a bis zur Zeit t . Mit Tanaka's Formel erhält man die Darstellung der Lokalzeit für ein stetiges Semimartingal X_s auf \mathbb{R}

$$L_t^a = |X_t - a| - |X_0 - a| - \int_0^t \left(1_{(0,\infty)}(X_s - a) - 1_{(-\infty,0]}(X_s - a) \right) dX_s$$

Durch Meyer-Itô erhält man für den Prozess $X = \varphi(Y)$

$$dX_t = \varphi_y(Y_t) dY_t + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} L_t^a \varphi_{yy}(da)$$

Da φ_{yy} die Differenz von zwei positiven Maßen ist und L^a wachsend, hat der Term der Lokalzeit endliche Variation. Daher gilt für die Variation von X

$$d\langle X \rangle_t = \varphi_y^2(Y_t) d\langle Y \rangle_t. \tag{2.0.1}$$

Verwendet man nun die Itô-Regel für eine Funktion $h(y, q) \in C^{2,1}$, dann gilt für alle t

$$h(Y_t, \langle X \rangle_t) = h(Y_0, 0) + \int_0^t h_y dY_s + \int_0^t \frac{1}{2} h_{yy} d\langle Y \rangle_s + \int_0^t h_q d\langle X \rangle_s =$$

2 Replizierende Strategie

$$= h(Y_0, 0) + \int_0^t h_y dY_s + \int_0^t \left(\frac{1}{2} h_{yy} + \varphi_y^2 h_q \right) d\langle Y \rangle_s$$

Eine Erweiterung bzw. Verallgemeinerung erhält man durch folgende Propositionen. Dafür wird jedoch noch die Definition für eine Stoppzeit benötigt.

Definition

Eine nichtnegative Zufallsvariable $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ nennt man Stoppzeit, wenn gilt:
 $\forall t \geq 0 : \{w \in \Omega : \tau(w) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

Proposition 2.1

Sei U eine offene Menge mit $(Y_0, 0) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$. Sei $h \in C^{2,1}$ auf U und stetig auf \bar{U} . Dann gilt für alle T und Stoppzeiten $\tau \leq \inf\{t : (Y_t, \langle X \rangle_t) \notin U\}$

$$h(Y_{T \wedge \tau}, \langle X \rangle_{T \wedge \tau}) = h(Y_0, 0) + \int_0^{T \wedge \tau} h_y dY_s + \int_0^{T \wedge \tau} \left(\frac{1}{2} h_{yy} + \varphi_y^2 h_q \right) d\langle Y \rangle_s \quad (2.0.2)$$

Im Falle von $\varphi_y(y) > 0$ für alle y gilt

$$h(Y_{T \wedge \tau}, \langle X \rangle_{T \wedge \tau}) = h(Y_0, 0) + \int_0^{T \wedge \tau} h_y dY_s + \int_0^{T \wedge \tau} \left(\frac{1}{2} \frac{h_{yy}}{\varphi_y^2} + h_q \right) d\langle X \rangle_s \quad (2.0.3)$$

In den Integranden werden die Funktionen h_y , h_{yy} und h_q am Punkt $(Y_s, \langle X \rangle_s)$ und die Funktion φ_y am Punkt Y_s ausgewertet.

Beweis

Sei $\tau_n := \inf\{t : \exists (y, q) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \setminus U \text{ mit } |Y_t - y| + |\langle X \rangle_t - q| < \frac{1}{n}\}$. Die Itô-Regel gilt für alle gestoppten Prozesse $(Y_{t \wedge \tau_n}, X_{t \wedge \tau_n})$, daher gilt für alle T

$$h(Y_{T \wedge \tau_n}, X_{T \wedge \tau_n}) = h(Y_0, 0) + \int_0^{T \wedge \tau_n} h_y dY_s + \int_0^{T \wedge \tau_n} \left(\frac{1}{2} h_{yy} + \varphi_y^2 h_q \right) d\langle Y \rangle_s$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhält man durch die Stetigkeit von Y und h die Formel (2.0.2) der Proposition. Gemeinsam mit (2.0.1) erhält man den Ausdruck von (2.0.3). \square

In den nächsten beiden Unterkapiteln erfolgt die Unterscheidung in zwei Fälle. Einerseits kann h derart gewählt werden, dass in (2.0.3) das $d\langle X \rangle$ -Integral wegfällt und andererseits kann die quadratische Variation auch in Abhängigkeit des $d\langle X \rangle$ -Integrals entwickelt werden.

2.1 Verschwinden des $d\langle X \rangle$ -Integrals

Für die weitere Vorgehensweise kann nun h so gewählt werden, dass das Integral von $d\langle X \rangle$ verschwindet. Dann kann die linke Seite der Gleichung, welche von $\langle X \rangle$ abhängt, durch eine Handelsstrategie erzeugt werden, die in den Bond und die Aktie investiert. Diese Strategie ist dabei durch zwei übrig gebliebenen Terme der rechten Seite der Gleichung vorgegeben.

Nachfolgend die mathematische Definition für eine Handelsstrategie und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, wie sie in dem angenommenen Markt mit den handelbaren Auszahlungen in Form einer Aktie und eines Bonds zu verstehen ist.

Definition

In unseren Fall besteht eine Handelsstrategie aus zwei nichtvorausgreifenden Prozessen A_t und B_t bzgl. der Filtrierung \mathcal{F}_t . Der Prozess A_t stellt die Geldmenge zur Zeit t dar, welche in der Aktie investiert wird und der Prozess B_t die Geldmenge, die in dem Bond zur Zeit t investiert wird. Dabei ergibt sich der Gesamtwert des Portfolios durch $V_t := B_t dZ_t + A_t dY_t$ zur Zeit t . Dieser Prozess wird in der Literatur auch Wertprozess für eine Handelsstrategie genannt. In diesem Zusammenhang wird auch häufig der Gewinnprozess $G_t = \int_0^t A_s dY_s$ definiert.

Eine solche Handelsstrategie nennt man selbstfinanzierend, wenn

- $\int_0^T |B_t| dt + \int_0^T A_t^2 dt < \infty \quad \mathbb{P} - fs$
- $V_t = V_0 + \int_0^t B_u dZ_u + \int_0^t A_u dY_u \quad \mathbb{P} - fs$ für $0 \leq t \leq T$

Hierbei bedeutet die zweite Bedingung, dass die Wertänderung im Portfolio nur aus Wertänderungen der Preisprozesse oder aus Umschichtungen innerhalb des Portfolios entstehen. Somit wird nur anfangs Geld investiert und zu späteren Zeitpunkten weder Geld zugefügt noch abgezogen.

Proposition 2.2

Seien die gleichen Voraussetzungen wie bei Proposition 2.1 angenommen und es gelte zusätzlich

$$\frac{1}{2} \frac{h_{yy}}{\varphi_y^2} + h_q = 0 \quad \text{für } (y, q) \in U \quad (2.1.1)$$

2 Replizierende Strategie

Dann gilt für alle T , dass die Auszahlung $h(Y_{T \wedge \tau}, \langle X \rangle_{T \wedge \tau})$ repliziert werden kann. Die replizierende Strategie hält dabei zu jedem Zeitpunkt $t \leq T \wedge \tau$ folgende Mengen

$$h_y(Y_t, \langle X \rangle_t) \text{ Aktien} \quad \text{und} \quad h(Y_t, \langle X \rangle_t) - Y_t h_y(Y_t, \langle X \rangle_t) \text{ Bonds}$$

Zur Zeit $t = 0$ hat das replizierende Portfolio den Wert $h(Y_0, 0)$.

Beweis

Sei der Bond-Preis definiert durch $Z_t := 1$. Dann ist der Wert des Portfolios zu einer beliebigen Zeit $t \leq T \wedge \tau$ gegeben durch

$$\begin{aligned} V_t &:= \left(h(Y_t, \langle X \rangle_t) - Y_t h_y(Y_t, \langle X \rangle_t) \right) Z_t + h_y(Y_t, \langle X \rangle_t) Y_t = h(Y_t, \langle X \rangle_t) \\ &= h(Y_0, 0) + \int_0^t h_y(Y_s, \langle X \rangle_s) dY_s + 0 \end{aligned}$$

(Einsetzen der Gleichungen (2.0.3) und (2.1.1)). Dadurch erhält man die Differentialgleichung

$$dV_t = \left(h(Y_t, \langle X \rangle_t) - Y_t h_y(Y_t, \langle X \rangle_t) \right) dZ_t + h_y(Y_t, \langle X \rangle_t) dY_t$$

Diese Handelsstrategie ist nach Definition selbstfinanzierend. \square

Proposition 2.3 (Replizierung bei Schranke für die Varianz)

Sei $X_t = \log(Y_t/Y_0)$ und τ die erste Überquerung von $\langle X \rangle$ zur Schranke Q . Für jedes $y > 0$, jedes $v \geq 0$ und jedes stetige $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sodass $|f(e^z)| \leq F(e^{|z|})$ für ein Polynom F und alle $z \in \mathbb{R}$, definiere

$$BS(y, v; f) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(y e^z) \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} \exp \left[-\frac{(z+v/2)^2}{2v} \right] dz & \text{wenn } v > 0 \\ f(y) & \text{wenn } v = 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

und sei BS_y die Ableitung nach y . Weiters definiere für $t \in [0, T \wedge \tau]$ die Strategie

$$\begin{aligned} BS_y(Y_t, Q - \langle X \rangle_t; f) \text{ Aktien und} \\ BS(Y_t, Q - \langle X \rangle_t; f) - Y_t BS_y(Y_t, Q - \langle X \rangle_t; f) \text{ Bonds} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Diese Strategie repliziert den Payoff zur Zeit $(T \wedge \tau)$

$$f(Y_\tau) 1_{\{\tau \leq T\}} + BS(Y_t, Q - \langle X \rangle_T; f) 1_{\{\tau > T\}} \quad (2.1.4)$$

Zur Zeit $t = 0$ hat das replizierende Portfolio den Wert $BS(Y_0, Y; f)$.

Beweis

Sei $h(y, q) := BS(y, Q - q; f)$. Durch direktes Einsetzen in die Definition von BS folgt

$$\frac{1}{2} y^2 h_{yy} + h_q = 0 \quad \text{auf } U = \mathbb{R}^+ \times (-\infty, Q)$$

Weiters ist h stetig auf \bar{U} . Daher lässt sich die Proposition 2.2 anwenden und direkt das Ergebnis ableiten. \square

Die Funktion $BS(y, v; f)$ steht intuitiv für den Wert der Auszahlung $f(Y_\tau)$, welche durch die Black-Scholes Formel mit der Volatilität $Q - q$ berechnet wird. Daher auch die Bezeichnung mit BS für Black-Scholes. Dabei ist anzumerken, dass dieser Parameter die gesamte Varianz bis zum Auslauf der Option darstellt und nicht etwa skaliert wird (z.B. jährliche Varianz).

Die obige Proposition zeigt, dass bei einem anfänglichen Wert von $BS(Y_0, 0)$ des Portfolios (Halten von Aktien und Bonds) die Auszahlung $f(Y_\tau)$ durch sogenanntes 'Delta-Hedging zur Black-Scholes Volatilität $Q - \langle X \rangle_t$ ' erzeugt wird, falls $\langle X \rangle$ die Grenze Q erreicht.

Im Falle einer Abweichung der tatsächlich realisierten Volatilität ergibt sich ein Gewinn bzw. Verlust, da die Berechnungen auf der implizierten Black-Scholes Volatilität beruhen.

Delta-Hedging bezeichnet dabei eine Strategie zur Absicherung einer Option gegen die Preisänderung des zugrundeliegenden Basiswertes. In diesem Zusammenhang steht Delta für die Kopplung der Option zum Basiswert. Das bedeutet, dass dieser Koeffizient die Relation angibt, wie stark sich der Preis der Option ändert, wenn sich der Preis des Basiswertes um 1 Einheit ändert. Als Beispiel sei angenommen, dass ein Investor 100 Call-Optionen auf eine Aktie mit einem Delta von 0,8 gekauft hat. Das bedeutet, dass seine Optionen EUR 80 im Wert steigen, wenn das Underlying EUR 1 an Wert gewinnt. Für einen Delta-Hedge müsste der Investor nun einen Leerverkauf von 80 Aktien tätigen um delta-neutral zu sein.

Korollar 2.4 (Gewinn/Verlust bei abweichender realisierter Volatilität)

Seien die Voraussetzungen von Proposition 2.3 erfüllt und zusätzlich die Annahme, dass die Funktion f konvex ist. Das bedeutet, dass diese Funktion eine linksseitige Ableitung f' besitzt. Dann erweitere die Strategie aus (2.1.3) für die Zeitpunkte $t > \tau$ durch das statische Portfolio

$$\begin{aligned} f'(Y_\tau) & \text{ Aktien und} \\ f(Y_\tau) - f'(Y_\tau) Y_\tau & \text{ Bonds} \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

2 Replizierende Strategie

welches zu $t \in (T \wedge \tau, T]$ gehalten wird. Durch diese erweiterte Strategie wird $f(Y_T)$ für $\tau \leq T$ subrepliziert und für $\tau \geq T$ superrepliziert.

Beweis

Im Fall von $\tau > T$ hat das Portfolio zum Zeitpunkt T aufgrund der Formel (2.1.4) und der Konvexität von f den Wert

$$BS(Y_T, Q - \langle X \rangle_T; f) \geq f(Y_T)$$

Im Fall von $\tau \leq T$ hat das Portfolio zum Zeitpunkt T den Wert

$$f(Y_\tau) + f'(Y_\tau)(Y_T - Y_\tau) \leq f(Y_T)$$

Dadurch erhält man insgesamt die Subreplizierung von $f(Y_T)$ für $\tau \leq T$ und Superreplizierung von $f(Y_T)$ für $\tau \geq T$. \square

In der Praxis kann der oben gezeigte Sachverhalt in folgender Weise verwendet werden: Sei ein Vertrag mit einer Auszahlung von $f(Y_T)$ und mit einem Wert von $BS(Y_0, Q; f)$ zur Zeit 0 gegeben. Ein Beispiel dafür wäre die Call-Option f mit der Black-Scholes implizierte Volatilität Q . In diesem Fall zeigt obiges Korollar, dass man durch den Verkauf von $f(Y_T)$ und Kauf des Portfolios aus (2.1.3) mit der Erweiterung aus (2.1.5) zur Zeit 0 eine Strategie mit Anschaffungskosten von 0 erhält. Der Wert dieser Strategie zum Zeitpunkt T ist für $\tau \leq T$ nicht-negativ und für $\tau \geq T$ nicht-positiv.

In obigen Ausführungen wird die Auszahlung grundsätzlich durch die Variation von X bestimmt (siehe hierzu die Abhängigkeit der Auszahlung von der Überquerung von $\langle X \rangle$ über die Schranke Q). Weiters sollen im Folgenden auch Geschäfte repliziert werden, welche eine untere Preisgrenze unterschreiten bzw. eine obere Preisgrenze überschreiten.

Proposition 2.5 (Replizierung bei unterer Preisgrenze)

Sei $X_t = \log(Y_t/Y_0)$ und τ der Zeitpunkt für das erste Überqueren von Y der unteren Grenze $b \in (0, Y_0)$. Für eine beliebige stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|g| \leq G$ für ein Polynom G definiere

$$BP(y, g; b, g) := \begin{cases} \int_0^\infty g(q+z) \frac{|\log(b/y)|}{\sqrt{2\pi z^3}} \exp\left[-\frac{(\log(b/y)+z/2)^2}{2z}\right] dz & \text{wenn } y \neq b \\ g(q) & \text{wenn } y = b \end{cases} \quad (2.1.6)$$

und sei BP_y die Ableitung nach y . Weiters definiere für $t \in [0, T \wedge \tau]$ die Strategie

$$\begin{aligned} BP_y(Y_t, \langle X \rangle_t; b, g) & \text{ Aktien und} \\ BP(Y_t, \langle X \rangle_t; b, g) - Y_t BP_y(Y_t, \langle X \rangle_t; b, g) & \text{ Bonds} \end{aligned}$$

Obige Strategie repliziert nun die Auszahlung

$$g(\langle X \rangle_\tau) 1_{\{\tau \leq T\}} + BP(Y_T, \langle X \rangle_T; b, g) 1_{\{\tau > T\}} \quad (2.1.7)$$

zum Zeitpunkt $(T \wedge \tau)$.

Das replizierende Portfolio hat einen Anfangswert von $BP(Y_0, 0; b, g)$.

Die Strategie superrepliziert $g(\langle X \rangle_{\tau \wedge T})$ falls die Funktion g monoton steigend ist.

Beweis

Sei $h(y, q) := BP(y, q; b, g)$. Durch direktes Einsetzen in die Definition von BP folgt

$$\frac{1}{2} y^2 h_{yy} + h_q = 0 \quad \text{auf } U = (b, \infty) \times \mathbb{R}$$

Weiters ist h stetig auf \bar{U} . Analog zu Proposition 2.3 folgt auch in diesem Fall die replizierende Strategie von (2.1.7) durch die Proposition 2.2.

Für monoton steigendes g gilt $BP(y, q; b, g) \geq g(q)$. Somit folgt die Superreplikation von $g(\langle X \rangle_{\tau \wedge T})$. \square

Für eine obere Preisgrenze ergibt sich mit der Hilfe einer analogen Rechnung eine ähnliche Darstellung für das replizierende Portfolio. Im Folgenden wird nun der Fall von einer unteren und oberen Preisgrenze betrachtet. Das bedeutet, dass der Preisprozess in einem Intervall betrachtet wird. Genauer gesagt wird dabei die Varianz vom Anfangszeitpunkt 0 bis zum Endzeitpunkt (exit time) beobachtet. Als exit time wird dabei der Zeitpunkt gesehen, bei dem der Preis erstmals das vorgegebene Intervall zwischen der oberen und unteren Grenze verlässt.

Proposition 2.6 (Replizierung bei unterer und oberer Preisgrenze)

Sei $X_t = \log(Y_t/Y_0)$, $0 < b_d < Y_0 < b_u$ und sei τ der Zeitpunkt an dem der Prozess Y das Intervall (b_d, b_u) erstmals verlässt. Für eine beliebige stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|g| \leq G$ für ein Polynom G definiere

$$BP(y, q; b_d, b_u, g) := \begin{cases} \int_0^\infty g(q+z) p(\log(y/b_d), \log(y/b_u), z) dz & \text{wenn } b_d < y < b_u \\ g(q) & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.1.8)$$

$$\text{mit } p(\beta_d, \beta_u, z) := e^{-z/8} \left[e^{-\beta_d/2} \psi(\beta_u, \beta_u - \beta_d, z) + e^{-\beta_u/2} \psi(-\beta_d, \beta_u - \beta_d, z) \right] \quad (2.1.9)$$

$$\text{und } \psi(r, R, z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{R-r+2kR}{\sqrt{2\pi} z^{3/2}} e^{-(R-r+2kR)^2/(2z)} \quad (2.1.10)$$

2 Replizierende Strategie

Mit diesen Funktionen definiere nun die Handelsstrategie für $t \in [0, T \wedge \tau]$

$BP_y(Y_t, \langle X \rangle_t; b_d, b_u, g)$ Aktien und

$BP(Y_t, \langle X \rangle_t; b_d, b_u, g) - Y_t BP_y(Y_t, \langle X \rangle_t; b_d, b_u, g)$ Bonds

Durch diese Handelsstrategie wird die Auszahlung

$$g(\langle X \rangle_\tau) 1_{\tau \leq T} + BP(Y_T, \langle X \rangle_T; b_d, b_u, g) 1_{\tau > T} \quad (2.1.11)$$

zum Zeitpunkt $(T \wedge \tau)$ repliziert.

Das replizierende Portfolio hat einen Anfangswert von $BP(Y_0, 0; b_d, b_u, g)$.

Die Strategie superrepliziert $g(\langle X \rangle_{\tau \wedge T})$ falls die Funktion g monoton steigend ist.

Beweis

Sei $h(y, q) := BP(y, q; b_u, b_d, g)$. Durch direktes Einsetzen in die Definition von BP folgt

$$\frac{1}{2} y^2 h_{yy} + h_q = 0 \quad \text{auf } U = (b_d, b_u) \times \mathbb{R}$$

Weiters ist h stetig auf \bar{U} . Analog zu Proposition 2.3 folgt auch in diesem Fall die replizierende Strategie von (2.1.11) durch die Proposition 2.2.

Für monoton steigendes g gilt $BP(y, q; b_d, b_u, g) \geq g(q)$. Somit folgt die Superreplikation von $g(\langle X \rangle_{\tau \wedge T})$. \square

Bemerkung

Laut dem 'Handbook of Brownian Motion' von Borodin/Salminen (siehe [3]) stellt die Funktion p die Dichte des Endzeitpunktes (exit time) des Drift $-1/2$ Brown'sche Bewegung von dem Intervall (b_d, b_u) dar. Daher kann die Funktion BP als der erwartete Wert von g bei dieser Übertrittszeit der Brown'schen Bewegung ('Brownian passage time') gesehen werden. Dies erklärt auch den verwendeten Namen mit BP , welcher für die Brownian Passage steht.

Bemerkung

Die Formeln (2.1.2), (2.1.6) und (2.1.8) können auch mithilfe einer Zeitverschiebung betrachtet werden. Dabei verwendet man den Zusammenhang zwischen X und Y

$$dX_t = \frac{1}{Y_t} dY_t - \frac{1}{2Y_t^2} d\langle Y \rangle_t = \frac{1}{Y_t} dY_t - \frac{1}{2} d\langle X \rangle_t$$

Unter dem risikolosen Maß ist der Prozess Y ein stetiges lokales Martingal, folglich ist auch der Prozess M mit

$$M_t = \int_0^t \frac{1}{Y_s} dY_s = X_t + \frac{1}{2} \langle X \rangle_t$$

ein stetiges lokales Martingal.

Nach den Quellen [4] und [5] existiert eine Brown'sche Bewegung W mit $W_{\langle X \rangle_t} = M_t$ für alle $t \leq T$ (auf einem geeignet vergrößerten Wahrscheinlichkeitsraum falls notwendig).

Dann gilt

$$X_t = W_{\langle X \rangle_t} - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \quad \text{und} \quad Y_t = G_{\langle X \rangle_t} \quad \text{mit} \quad G_u = Y_0 \exp\left(W_u - \frac{u}{2}\right)$$

Daher kann Y als geometrische Brown'sche Bewegung ohne Drift angesehen werden. Somit findet das Black-Scholes-Modell sogar in dieser allgemeinen Umgebung (mit einem stetigen Semimartingal) Anwendung, welches Zeit als quadratische Variation wahrnimmt.

Um die Proposition 2.6 nicht nur als theoretisches Ergebnis zu sehen, folgt nun die Anwendung dieser Proposition für eine Call-Option.

Proposition 2.7 (Fourier-Darstellung für Call-Option bis zum Endzeitpunkt)

Für eine Call-Option mit Auszahlung $g(q) = (q - Q)^+$ hat die Funktion BP aus der Proposition 2.6 folgende Darstellung für $y \in (b_d, b_u)$

$$BP = \int_{-\infty - \alpha i}^{\infty - \alpha i} \frac{\sqrt{y/b_u} \sinh(\log(b_d/y) \sqrt{1/4 - 2iz}) - \sqrt{y/b_d} \sinh(\log(b_u/y) \sqrt{1/4 - 2iz})}{2\pi z^2 e^{i(Q-q)z} \sinh(\log(b_u/b_d) \sqrt{1/4 - 2iz})} dz$$

mit $\alpha > 0$.

Beweis

Die Laplace-Transformierte von $p(b_d, b_u, z)$ ergibt sich mit der Formel 2.3.0.1 in [3]

$$\mathbb{E}_X e^{-\alpha H} = \frac{\sinh((b-x) \sqrt{2\alpha + \mu^2}) + \sinh((x-a) \sqrt{2\alpha + \mu^2})}{\sinh((b-a) \sqrt{2\alpha + \mu^2})}$$

mit der Austrittszeit $H = \min\{t : W_t \notin (a, b)\}$

Das Theorem 5.1 (gemeinsam mit Theorem 4.3) in [7] besagt, dass für den Optionspreis gilt (für $\alpha > 0$)

$$C_{G_2} = \frac{1}{\pi} \int_{0 - \alpha i}^{\infty - \alpha i} \operatorname{Re} \left[-\frac{f(z)}{z^2} e^{-i(k)z} \right] dz \quad \text{mit} \quad f(z) = \mathbb{E}_X e^{-izX}$$

Um die Formeln an die Gegebenheiten in dieser Arbeit anzupassen sind die Variablen $k = Q - q$, $\mu = \frac{1}{2}$, $b = b_d$, $a = b_u$ und $\alpha = -iz$ in die obigen Formeln einzusetzen. Daraus folgt nun die Darstellung des Optionspreises. \square

Proposition 2.8 (Eigenschaften der Funktion BP)

Für beliebiges $q \geq 0$, $Q \geq 0$ und $y > 0$ gilt

$$BP(y, q; b_d, b_u, Q) - BP(y, 0; b_d, b_u, Q) \geq (q - Q)^+ \quad (2.1.12)$$

Für $q = Q = 0$ und $b_d < y < b_u$ gilt

$$BP(y, 0; b_d, b_u, 0) = 2 \log(y/b_u) - 2 \frac{\log(b_u/b_d)}{b_u - b_d} (y - b_u) \quad (2.1.13)$$

Beweis

Im Fall von $y \notin (b_d, b_u)$ gilt klarerweise die Ungleichung (2.1.12)

Im Fall von $y \in (b_d, b_u)$ gilt

$$\begin{aligned} BP(y, q; b_d, b_u, Q) &= \int_0^\infty (q + z - Q)^+ p\left(\log(y/b_d), \log(y/b_u), z\right) dz \\ &\geq \int_0^\infty \left[(q - Q)^+ + (z - Q)^+\right] p\left(\log(y/b_d), \log(y/b_u), z\right) dz \\ &= (q - Q)^+ + BP(y, 0; b_d, b_u, Q) \end{aligned}$$

somit gilt auch in diesem Fall die Ungleichung (2.1.12).

Die Gleichung (2.1.13) folgt aus der Gleichheit des Erwartungswertes des Endzeitpunktes des Drifts $-1/2$ Brown'sche Bewegung vom Intervall $(\log(b_d/y), \log(b_u/y))$:

Die linke Seite der Gleichung erhält man aufgrund der Definition von BP und die rechte Seite der Gleichung aufgrund der Standardmethode für die Entwicklung des Erwartungswertes aus einer bekannten Laplace-Transformation der Dichte des Endzeitpunktes. \square

2.2 Nichtverschwinden des $d\langle X \rangle$ -Integrals

Im Abschnitt 2.1 wurden die Voraussetzungen so gewählt, dass das $d\langle X \rangle$ -Integral verschwindet. Im Gegensatz dazu kann mit der Formel (2.0.3) auch durch Entwicklung der quadratischen Variation in Abhängigkeit des $d\langle X \rangle$ -Integrals fortgefahren werden. Dabei ist durch die Abhängigkeit von $h(x, q)$ von x nur mehr das $\langle X \rangle$ -Integral von der quadratischen Variation abhängig. Dies kann dann auf folgende Weise berechnet werden

$$\int_0^{T \wedge \tau} \left(\frac{1}{2} \frac{h_{yy}}{\varphi_y^2} + h_q \right) d\langle X \rangle_s = h(Y_{T \wedge \tau}, \langle X \rangle_{T \wedge \tau}) - \left(h(Y_0, 0) + \int_0^{T \wedge \tau} h_y dY_s \right)$$

Proposition 2.9 (Subreplizierung von gewichteter forward-starting Varianz von $\varphi(Y)$)

Sei die Gewichtung $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty)$ eine Borel-Funktion und τ eine Stoppzeit. Sei $\lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Differenz von konvexen Funktionen, sowie λ_y die dazugehörige linksseitige Ableitung. Weiters sei angenommen, dass die zweite Ableitung λ_{yy} eine (signierte) Dichte ist, die für alle $y \in \mathbb{R}^+$ folgende Bedingung erfüllt

$$\lambda_{yy}(y) \leq 2\varphi_y^2(y)w(y) \quad (2.2.1)$$

Falls Forderungen auf $\lambda(Y_T)$ und $\lambda(Y_{\tau \wedge T})$ handelbar sind, definiere folgende Strategie

$$\begin{aligned} \text{für } t \in (0, \tau \wedge T] & \begin{cases} 1 \text{ Forderung auf } \lambda(Y_T) \\ 1 \text{ Forderung auf } -\lambda(Y_{\tau \wedge T}) \end{cases} \\ \text{für } t \in (\tau \wedge T, T] & \begin{cases} 1 \text{ Forderung auf } \lambda(Y_T) \\ -\lambda_y(Y_t) \text{ Aktien} \\ -\lambda(Y_{\tau \wedge T}) - \int_{\tau \wedge T}^t \lambda_y(Y_s) dY_s + Y_t \lambda_y(Y_t) \text{ Bonds} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Die soeben definierte Strategie subrepliziert die forward-starting Varianz von $X = \varphi(Y)$ mit der Gewichtung w . Diese Variation kann durch folgenden Ausdruck charakterisiert werden

$$\langle X \rangle_{\tau, T}^w := \int_{\tau \wedge T}^T w(Y_s) d\langle X \rangle_s$$

Das subreplizierende Portfolio hat den Wert $\mathbb{V}_0 \lambda(Y_T) - \mathbb{V}_0 \lambda(Y_{\tau \wedge T})$.

Für den Fall der Gleichheit in (2.2.1) gilt sogar, dass die definierte Strategie den Prozess $\langle X \rangle_{\tau, T}^w$ exakt repliziert.

Beweis

Die Strategie aus (2.2.2) ist nach Definition klarerweise selbstfinanzierend und hat den angegebenen Wert zum Zeitpunkt 0. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass die Handelsstrategie subreplizierend (bzw. replizierend) ist. Dazu benutze Meyer-Itô, welcher für den Prozess $\lambda(Y_T)$ folgendes Ergebnis liefert

$$\lambda(Y_T) = \lambda(Y_0) + \int_0^T \lambda_y(Y_s) dY_s + \int_0^T \frac{1}{2} \lambda_{yy}(Y_s) d\langle Y \rangle_s$$

Bei Anwendung dieser Formel bzw. Meyer-Itô auf den gestoppten Prozess $Y_{\tau \wedge T}$ gilt das folgende ähnliche Resultat

$$\lambda(Y_{\tau \wedge T}) = \lambda(Y_0) + \int_0^{\tau \wedge T} \lambda_y(Y_s) dY_s + \int_0^{\tau \wedge T} \frac{1}{2} \lambda_{yy}(Y_s) d\langle Y \rangle_s$$

2 Replizierende Strategie

Für die Differenz gilt dann

$$\begin{aligned}\lambda(Y_T) &= \lambda(Y_{\tau \wedge T}) + \int_{\tau \wedge T}^T \lambda_y(Y_s) dY_s + \int_{\tau \wedge T}^T \frac{1}{2} \lambda_{yy}(Y_s) d\langle Y \rangle_s \\ &\leq \lambda(Y_{\tau \wedge T}) + \int_{\tau \wedge T}^T \lambda_y(Y_s) dY_s + \int_{\tau \wedge T}^T \varphi_y^2(Y_s) w(Y_s) d\langle Y \rangle_s \\ &= \lambda(Y_{\tau \wedge T}) + \int_{\tau \wedge T}^T \lambda_y(Y_s) dY_s + \int_{\tau \wedge T}^T w(Y_s) d\langle X \rangle_s.\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\lambda(Y_T) - \lambda(Y_{\tau \wedge T}) - \int_{\tau \wedge T}^T \lambda_y(Y_s) dY_s \leq \langle X \rangle_{\tau, T}^w,$$

wodurch die subreplizierende Eigenschaft bewiesen ist. Die analoge Vorgehensweise liefert im Fall der Gleichheit in (2.2.1) auch die Gleichheit in der obigen Ungleichungen. Damit ist neben der Subreplizierung auch die exakte Replizierung gezeigt. \square

Die Strategie laut (2.2.2) kann als Delta-Hedging von λ -Ansprüchen 'at zero vol' bezeichnet werden, da das Halten von $-\lambda_y(Y_t)$ Aktien zu $-BS_Y(Y_t, v; \lambda)|_{v=0}$ ident ist. Das bedeutet, dass diese Strategie analog zu der replizierten Strategie in Kapitel 2.1 ist falls die Volatilität anfangs 0 beträgt.

Durch obige Proposition können verschiedene Varianten von Variance Swaps abgedeckt bzw. (sub-)repliziert werden. Nachfolgend sollen anhand von drei Beispielen die vielfältigen Varianten dargestellt werden.

Beispiel 2.10 (Replizierung der Forward-starting Varianz von $\log Y$)

Seien die Gewichte $w(y) := 1$ und es gelte

$$\lambda(y) = ay + b + 2 \log y$$

mit a, b beliebige Konstanten. Weiters seien die Forderungen $\lambda(Y_T)$ und $\lambda(Y_{\tau \wedge T})$ handelbar. Zunächst sei festgehalten, dass mit $\varphi(Y_T) = \log(Y_T)$ die Voraussetzung einer konvexen Funktion erfüllt wird, wie bereits bei den Modellannahmen erwähnt wurde. Dann gilt in (2.2.1) die Gleichheit und in Folge dessen wird durch die Strategie (2.2.2) die Auszahlung $\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{\tau \wedge T}$ mit $X = \log Y$ repliziert.

Dieses Ergebnis steht auch im Einklang mit den bekannten Strategien, die für das Replizieren von logarithmischer quadratischer Variation, sogenannte log-Geschäfte, in der Praxis verwendet werden.

Beispiel 2.11 (Replikation der Forward-starting Korridor-Varianz von $\varphi(Y)$)

Sei der Korridor C eine Borelmenge und sei die Gewichtung durch den Indikator $w(y) := 1_{\{y \in C\}}$ gegeben. Im Fall von λ konvex und $\lambda_{yy} = 2\varphi_y^2$ in C bzw. $\lambda_{yy} = 0$ außerhalb von C , repliziert die Strategie aus (2.2.2) die sogenannte Korridor-Varianz, welche durch folgende Formel definiert wird

$$\int_{\tau \wedge T}^T 1_{\{Y_s \in C\}} d\langle X \rangle_s.$$

Weiters hat das replizierende Portfolio den Wert $\mathbb{V}_0 \lambda(Y_T) - \mathbb{V}_0 \lambda(Y_{\tau \wedge T})$ zum Zeitpunkt 0.

In diesem Beispiel können für die Borelmengen verschiedenste Mengen verwendet werden. Als Spezialfall kann der Korridor $C = \mathbb{R}^+$ gesetzt werden. Dann erhält man die gesamte forward-starting Varianz von $\varphi(Y)$.

Beispiel 2.12 (Replikation des Forward-starting Gamma-Swap von $\varphi(Y)$)

Sei die Gewichtsfunktion definiert durch $w(y) = ay$ mit der Konstanten a (in der Praxis wird meist $a = 1/Y_0$ gewählt). Falls λ konvex ist und $\lambda_{yy} = 2a\varphi_y^2(y)y$, dann wird durch (2.2.2) die Auszahlung des sogenannten Gamma-Swap repliziert. Diese Auszahlung hat durch obige Voraussetzung folgende Darstellung

$$\int_{\tau \wedge T}^T a Y_s d\langle X \rangle_s$$

Eine häufige Verwendung findet man bei der logarithmischen Funktion $\varphi(y) = \log(y)$, welchen wir als Spezialfall in diesem Beispiel betrachten wollen. Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\lambda_{yy}(y) = 2a/y$ ist gegeben durch

$$\lambda(y) = ay \log(y) + A_1 y + A_0,$$

wobei A_0 und A_1 beliebige Konstanten sind. Dies zeigt wiederum, dass dieses Beispiel zum Beispiel 2.10 konsistent ist und somit die gleiche Lösung liefert.

Zum Zeitpunkt 0 hat das replizierende Portfolio einen Wert von $\mathbb{V}_0 \lambda(Y_T) - \mathbb{V}_0 \lambda(Y_{\tau \wedge T})$.

Korollar 2.13 (Subreplikation der Forward-starting Varianz von $\log Y$)

Sei $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine Differenz von konvexen Funktionen und sei λ_y die dazugehörige linksseitige Ableitung. Weiters gelte die Annahme, dass die zweite Ableitung mit der Bezeichnung λ_{yy} im Sinne der Verteilung eine Dichte hat und für alle $y \in \mathbb{R}_+$ folgende Voraussetzung erfüllt

$$\lambda_{yy}(y) \leq 2/y^2$$

2 Replizierende Strategie

Weiters sei τ eine Stoppzeit und die Forderungen auf $\lambda(Y_{\tau \wedge T})$ und $\lambda(Y_T)$ sollen handelbar sein.

Dann gilt

$$\lambda(Y_T) - \lambda(Y_{\tau \wedge T}) - \int_{\tau \wedge T}^T \lambda_y(Y_s) dY_s \leq \langle X \rangle_{\tau, T} = \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{\tau \wedge T}$$

und somit wird $\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{\tau \wedge T}$ mit $X = \log Y$ durch die Strategie (2.2.2) subrepliziert.

Beweis

Der Beweis kann analog zum Beweis in der Proposition (2.9) geführt werden. Dazu setze im Beweis die Funktionen $w = 1$ und $\varphi(y) = \log y$ ein und führe die Berechnung durch. Dadurch ergibt sich ebenfalls die Ungleichung

$$\lambda(Y_T) - \lambda(Y_{\tau \wedge T}) - \int_{\tau \wedge T}^T \lambda_y(Y_s) dY_s \leq \langle X \rangle_{\tau, T},$$

Im Falle von $w = 1$ kann die rechte Seite der Ungleichung weiter zu folgendem Ausdruck vereinfacht werden zu

$$\langle X \rangle_{\tau, T} = \int_{\tau \wedge T}^T 1 d\langle X \rangle_s = \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{\tau \wedge T}$$

□

3 Variance Call: Untere Grenze

Für dieses Kapitel sei angenommen, dass $\varphi(Y_t) := \log(Y_t/Y_0)$, also $X_t = \log(Y_t/Y_0)$ und definiere $Q \geq 0, T > 0$.

3.1 Spot-Starting Variance Call: Subreplikation

Man betrachte einen Variance Call mit Ausübungskurs (Strike) Q und Fälligkeit (Expiry) T . Für eine Subreplikation seien folgende Voraussetzungen gegeben. Sei λ konvex und erfülle die Voraussetzungen aus Korollar (2.13).

Sofern $\langle X \rangle$ vor Ablauf der Zeit T die Grenze Q erreicht, ist eine Subreplikation für einen Variance Swap notwendig. Daher sollte eine Forderung auf $\lambda(Y_T)$ plus eine Forderung auf $-\lambda(Y_{\tau_Q})$ vorhanden sein. Die Erste ist eine europäische Option und die Zweite wird durch eine 'Bond-und-Aktien-Strategie' beschrieben, analog zu Proposition (2.3).

Im Falle dass $\langle X \rangle$ die Grenze Q nicht vor T erreicht, dann ist das Portfolio zur Zeit T gegeben durch $\lambda(Y_T)$ minus einer Forderung auf $\lambda(Y_{\tau_Q})$. Durch die geforderte Konvexität von λ ist letzterer Wert größer als der vorherige Wert, was wiederum zu einem negativen Portfolio-Wert führt. Dies wird hier konkret sogar gefordert, also sind Annahmen und Resultate konsistent.

Proposition 3.1 (Dupire's Subreplikation)

Man betrachte einen Variance Call mit der Auszahlung

$$(\langle X \rangle_T - Q)^+$$

Weiters sei angenommen, dass λ konvex ist und die Voraussetzungen aus Korollar (2.13) erfüllt. Definiere

$$N_t := \begin{cases} -BS_y(Y_t, Q - \langle X \rangle_t; \lambda) & \text{falls } t \leq \tau_Q \\ -\lambda_y(Y_t) & \text{falls } t > \tau_Q \end{cases}$$

mit der Definition von BS wie in Kapitel 2 sowie λ_y die erste Ableitung von λ nach y . Dann wird durch folgende Strategie der angegebene Variance Call zur Zeit $t < T$ für

3 Variance Call: Untere Grenze

beliebiges T subrepliziert

$$\begin{aligned}
 & 1 \text{ Forderung auf } \lambda(Y_T) \\
 & N_t \text{ Aktien} \\
 & -BS(Y_0, Q; \lambda) + \int_0^t N_s dY_s - N_t Y_t \text{ Bonds}
 \end{aligned}$$

Das subreplizierende Portfolio hat einen Wert von $-BS(Y_0, Q; \lambda) + \mathbb{V}_0 \lambda(Y_T)$ zum Zeitpunkt 0.

Beweis

Die Strategie ist klarerweise selbstfinanzierend und hat den angegebenen Wert zum Zeitpunkt 0 (durch Einsetzen in die Strategie).

Im Falle von $\tau_Q \leq T$ hat das Portfolio zur Zeit T den Wert (ausgehend von Proposition (2.3) und Korollar (2.13))

$$\begin{aligned}
 -BS(Y_0, Q; \lambda) + \int_0^{\tau_Q} N_s dY_s + \int_{\tau_Q}^T N_s dY_s + \lambda(Y_T) &= \\
 &= -\lambda(Y_{\tau_Q}) + \int_{\tau_Q}^T N_s dY_s + \lambda(Y_T) \leq \\
 &\leq \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{\tau_Q} = (\langle X \rangle_T - Q)^+
 \end{aligned}$$

Im Falle von $\tau_Q > T$ hat das Portfolio zur Zeit T den Wert

$$\begin{aligned}
 -BS(Y_0, Q; \lambda) + \int_0^T N_s dY_s + \lambda(Y_T) &= -BS(Y_T, Q - \langle X \rangle_T; \lambda) + BS(Y_T, 0; \lambda) \leq \\
 &\leq 0 = (\langle X \rangle_T - Q)^+
 \end{aligned}$$

Die erste Gleichheit kommt aus Proposition (2.3) und die Ungleichheit kommt aus der Konvexität von λ , was zu einem Anstieg von BS im zweiten Argument führt. \square

Bemerkung

Dupire hat λ derart gewählt, sodass das subreplizierende Portfolio maximiert wird. Dabei sei

$$\text{van}_K(y) = \begin{cases} (y - K)^+ & \text{falls } K \geq Y_0 \\ (K - y)^+ & \text{falls } K < Y_0 \end{cases} \quad (3.1.1)$$

die Auszahlungsfunktion einer Option zum Strike K , die aus dem Geld ist (OTM - Out-of-the-money). Im Falle einer Call-Option ist bei einer solchen Option zum Beispiel der Strike höher als der aktuelle Kurs des Basiswertes. Dabei sei erwähnt, dass solche

3.2 Forward-starting Variance Call: Subreplikation

Optionen in der Praxis gehandelt werden und sehr risikoreich sind aber auch einen hohen Gewinn erwirtschaften können. Optionen können neben diesem Zustand auch am Geld (at-the-money) sein - Marktwert des Basiswert und Strike sind in etwa gleich - sowie im Geld (in-the-money) - Marktwert des Basiswert ist bei einer Call-Option größer als der Strike. Nun setze weiters die Handelbarkeit von $van_K(Y_T)$ für alle K voraus.

Sei $I_0(K, T)$ die dimensionslose Black-Scholes implizite Volatilität für das Underlying Y zum Zeitpunkt 0. Diese Volatilität sei gemeinsam mit dem Strike K und der Fälligkeit T derart gewählt, dass folgende Bedingung erfüllt wird

$$BS(Y_0, I_0(K, T); van_K) = \mathbb{V}_0 van_K(Y_T)$$

Dann kann die untere Grenze umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0 \lambda(Y_T) - BS(Y_0, Q; \lambda) &= \int_0^\infty \lambda_{yy}(K) [\mathbb{V}_0 van_K - BS(Y_0, Q; van_K)] dK = \\ &= \int_0^\infty \lambda_{yy}(K) [BS(Y_0, I_0(K, T); van_K) - BS(Y_0, Q; van_K)] dK \end{aligned}$$

Unter der Einschränkung $0 \leq y^2 \lambda_{yy}(y) \leq 2$ liegt das optimale λ bei $2/K^2 dK$ OTM Vanilla Auszahlungen für alle K , bei denen die dimensionslose Black-Scholes implizite Volatilität $I_0(K, T)$ den Wert von Q übersteigt. Formal wird eine solche Funktion λ dann definiert durch

$$\lambda(y) = \int_{\{K: I_0(K, T) > Q\}} \frac{2}{K^2} van_K(y) dK$$

Falls der Preis des Variance Call unter der unteren Grenze gehandelt wird, so ist eine Arbitrage durch folgende Handelsstrategie möglich: Man verkauft die $\lambda(Y_T)$ Forderung und borgt sich $BS(Y_0, Q; \lambda)$, also die Black Scholes Berechnung der Forderung auf λ unter der Verwendung der Volatilität Q . Den Erlös aus dieser Strategie kann dann dazu verwendet werden einen Variance Call zu kaufen. Dann kann durch dynamisches Handeln von Aktien, wie in der Strategie vorgegeben, ein risikoloser Gewinn erwirtschaftet werden.

3.2 Forward-starting Variance Call: Subreplikation

Sei zunächst das Forward-starting Datum durch die Konstante $\theta \in [0, T]$ festgelegt., also dass der Variance Call ab diesem Zeitpunkt zu zählen beginnt.

Proposition 3.2 (Subreplikation eines Forward-starting Variance Call)

Man betrachte einen forward-starting Variance Call mit der Auszahlungsfunktion

$$(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta - Q)^+ .$$

3 Variance Call: Untere Grenze

Sei λ wiederum konvex und erfülle die Voraussetzungen des Korollar (2.13).

Sei weiters $\tau_Q := \inf\{t : \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_\theta \geq Q\}$ und

$$N_t := \begin{cases} -BS_y(Y_t, Q - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_\theta); \lambda) & \text{falls } \theta \leq t \leq \tau_Q \\ -\lambda_y(Y_t) & \text{falls } t > \tau_Q \end{cases}$$

Falls die Forderungen auf $BS(Y_\theta, Q; \lambda)$ und auf $\lambda(Y_T)$ handelbar sind, so kann der forward-starting Variance Call durch folgende Strategie subrepliziert werden. Für $t \in [0, \theta]$ sei das Portfolio gegeben durch

- 1 Forderung auf $\lambda(Y_T)$
- 1 Forderung auf $-BS(Y_\theta, Q; \lambda)$

Im Fall von $t \in (\theta, T)$ setzt sich das Portfolio zusammen aus

$$\begin{aligned} & 1 \text{ Forderung auf } \lambda(Y_T) \\ & N_t \text{ Aktien} \\ & -BS(Y_\theta, Q; \lambda) + \int_\theta^t N_s dY_s - N_t Y_t \text{ Bonds} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Diese Strategie besteht im Zeitablauf aus zwei Teilen, wobei der erste Teil ein statisches Portfolio mittels Halten von zwei Forderungen darstellt und der zweite Teil, der ab dem forward-starting Datum θ beginnt, dynamisch handelt. Diese Vorgehensweise steht auch im Einklang mit der natürlichen Intuition, dass für eine subreplizierende Strategie ein dynamisches Handeln erst ab dem forward-starting Datum notwendig ist.

Dieses subreplizierende Portfolio hat einen Wert von $\mathbb{V}_0 \lambda(Y_T) - \mathbb{V}_0 BS(Y_\theta, Q; \lambda)$ zum Zeitpunkt 0.

Beweis

Die oben angegebene Strategie ist klarerweise selbstfinanzierend und hat den angegebenen Wert zum Zeitpunkt 0 (durch Einsetzen der Formeln in die Strategie leicht erkennbar). Im Falle von $\tau_Q \leq T$ ergibt sich der Portfoliowert der Strategie zur Zeit T durch Proposition (2.3) und Korollar (2.13) auf folgende Weise

$$\begin{aligned} & -BS(Y_\theta, Q; \lambda) + \int_\theta^{\tau_Q} N_s dY_s + \int_{\tau_Q}^T N_s dY_s + \lambda(Y_T) = \\ & = -\lambda(Y_{\tau_Q}) + \int_{\tau_Q}^T N_s dY_s + \lambda(Y_T) \leq \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{\tau_Q} = (\langle X \rangle_T - Q)^+ \end{aligned}$$

Im Falle von $\tau_Q > T$ kann der Portfoliowert zur Zeit T einerseits ebenfalls durch Proposition (2.3) und andererseits durch die geforderte Konvexität von λ , was zu einem

Anstieg von BS im zweiten Argument führt, vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
 & -BS(Y_\theta, Q; \lambda) + \int_\theta^T N_s dY_s + \lambda(Y_T) = \\
 & = -BS\left(Y_T, Q - (\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta); \lambda\right) + BS(Y_T, 0; \lambda) \leq \\
 & \leq 0 = (\langle X \rangle_T - Q)^+
 \end{aligned}$$

□

3.3 Subreplikation unter einer Randbedingung

Der Portfoliowert V^{sub} des subreplizierenden Portfolios stellt eine untere Grenze des Preises des Variance Call dar. Das heißt, dass bei einem niedrigeren Preis des Variance Call als V^{sub} , eine Arbitrage möglich ist. Dies wird durch Kaufen des Variance Call und Verkaufen des Portfolios ermöglicht.

Zunächst zeigt man, dass das subreplizierende Portfolio (siehe (3.2.1)) die natürlichen Randbedingungen auf $[0, T]$ erfüllt. Genauer gesagt erfolgt der Nachweis, dass V_t^{sub} für alle $t < T$ durch die 'Markterwartung' von $\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{(t \vee \theta) \wedge \tau_Q}$ zur Zeit t dominiert wird. Als 'Markterwartung' wird hierbei die rechte Seite der Formel (3.3.1) verstanden. Diese Einschränkung verhindert, dass der Wert des in Short-Position gehaltene subreplizierende Portfolios zu groß wird, in Relation zu der gehaltenen Sicherheit in Form des in Long-Position gehaltenen Variance Swaps.

Definition 3.3 (Call Buyer's Randbedingung)

Seien die Forderungen auf $\log(Y_T)$ und $\log(Y_\theta)$ handelbar. Dann erfüllt eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Wert V_t zur Zeit t die Call Buyer's Randbedingung, falls für alle $t \in [0, T]$ gilt

$$V_t \leq \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{t \wedge \tau_Q} - 2 \mathbb{V}_t \log(Y_T / Y_{t \vee \theta}) \quad (3.3.1)$$

Proposition 3.4 (Subreplizierende Strategie erfüllt die Randbedingung)

Seien die Forderungen auf $\log(Y_T)$ und $\log(Y_\theta)$ handelbar. Unter den Voraussetzungen von Proposition (3.2) erfüllt dann die subreplizierende Strategie aus (3.2.1) die Call Buyer's Randbedingung.

Daher ist der Wert V_t^{sub} der Strategie (3.2.1) eine untere Grenze des Käuferpreises des Variance Call, der das Supremum über alle Preise von subreplizierenden Strategien darstellt, welche die Call Buyer's Randbedingung erfüllen.

3 Variance Call: Untere Grenze

Beweis

Für alle $t \geq \tau_Q$ folgt aus Korollar (2.13)

$$\begin{aligned} V_t^{sub} &= -\lambda(Y_{\tau_Q}) + \int_{\tau_Q}^t N_s dY_s + \mathbb{V}_t \lambda(Y_T) = \\ &= -\lambda(Y_{\tau_Q}) + \int_{\tau_Q}^t N_s dY_s + \lambda(Y_t) - \lambda(Y_t) + \mathbb{V}_t \lambda(Y_T) \leq \\ &\leq \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{\tau_Q} + 2 \log(Y_t) - 2 \mathbb{V}_t \log(Y_T). \end{aligned}$$

Für alle $t \in (\theta, \tau_Q)$ ergibt sich durch Proposition (2.3) und der Konvexität von λ

$$\begin{aligned} V_t^{sub} &= -BS\left(Y_t, Q - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_\theta); \lambda\right) + \mathbb{V}_t \lambda(Y_T) \leq \\ &\leq -BS(Y_t, 0; \lambda) + \mathbb{V}_t \lambda(Y_T) = \\ &= -\lambda(Y_t) + \mathbb{V}_t \lambda(Y_T) \leq 2 \log(Y_t) - 2 \mathbb{V}_t \log(Y_T) \end{aligned}$$

Für alle $t \leq \theta$ folgt aus der Konvexität von λ

$$\begin{aligned} V_t^{sub} &= -\mathbb{V}_t BS(Y_\theta, Q; \lambda) + \mathbb{V}_t \lambda(Y_T) \leq -\mathbb{V}_t \lambda(Y_\theta) + \mathbb{V}_t \lambda(Y_T) \leq \\ &\leq \mathbb{V}_t \left(2 \log(Y_\theta) - 2 \log(Y_T)\right). \end{aligned}$$

□

3.4 Forward-starting Variance Call: Untere Grenzen

Für beliebiges λ , das die Voraussetzungen aus Korollar (2.13) erfüllt, wurde bereits die untere Grenze

$$\mathbb{V}_0 \lambda(Y_T) - \mathbb{V}_0 BS(Y_\theta, Q; \lambda)$$

zum Zeitpunkt 0 des Variance Call gezeigt.

Bei der Erweiterung von Dupire's Berechnungen im Abschnitt 3.1 auf forward-starting Variance Calls kann man λ wie folgt derart wählen, dass die untere Grenze maximiert wird. Dazu sei van_K definiert wie in Formel (3.1.1) und seien $van_K(Y_\theta)$ und $van_K(Y_T)$ für alle K handelbar. Weiters definiere zur Zeit 0 eine dimensionslose Black-Scholes vorwärts-implizierte Volatilität für ein Underlying Y , einen Strike K und einem Zeitintervall $[\theta, T]$ als einzigartige implizite Volatilität $I_0(K, [\theta; T])$ sodass

$$\mathbb{V}_0 BS(Y_\theta, I_0(K, [\theta, T]); van_K) = \mathbb{V}_0 van_K(Y_T) \quad (3.4.1)$$

Mit Hilfe dieser Definition kann die untere Grenze ungeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} & \mathbb{V}_0 \lambda(Y_T) - \mathbb{V}_0 BS(Y_\theta, Q; \lambda) = \\ &= \int_0^\infty \lambda_{yy}(K) \left[\mathbb{V}_0 \text{van}_K(Y_T) - \mathbb{V}_0 BS(Y_\theta, Q; \text{van}_K) \right] dK = \\ &= \int_0^\infty \lambda_{yy}(K) \left[\mathbb{V}_0 BS(Y_\theta, I_0(K, [\theta, T]); \text{van}_K) - \mathbb{V}_0 BS(Y_\theta, Q; \text{van}_K) \right] dK \end{aligned}$$

Unter der Bedingung $0 \leq y^2 \lambda_{yy}(y) \leq 2$ besteht das optimale λ (im weiteren Verlauf mit λ^* bezeichnet) aus $2/K^2 dK$ OTM Vanilla Auszahlungen für alle K , für die die dimensionslose Black-Scholes vorwärts-implizierte Volatilität den Wert von Q übersteigt. Formal führt das wiederum zu einer ähnlichen Definition

$$\lambda^*(y) = \int_{\{K: I_0(K, [\theta, T]) > Q\}} \frac{2}{K^2} \text{van}_K(y) dK$$

wobei die vorwärts-implizierte Volatilität auf $[\theta, T]$ wie in Formel (3.4.1) definiert ist.

Nun zeigt sich, dass durch die geeignete Wahl bzw. Definition der vorwärts-implizierten Volatilität $I_0(K, [\theta, T])$ die gesamte Markt-implizierte Verteilung von Y_θ betroffen ist. Ausgehend von dieser Verteilung (nicht notwendigerweise lognormal-verteilt) zur Zeit θ , führt man eine geometrische Brown'sche Bewegung mit dimensionsloser Volatilität Q auf $[\theta, T]$ aus. Dieses einzigartige Q , welche den Preis der Option (mit Strike K und Endzeit T) zur Zeit 0 bestimmt, wird in diesem Zusammenhang als die vorwärts-implizierte Volatilität verstanden.

Die optimierte untere Grenze ist dann gegeben durch

$$V^{sub} = \mathbb{V}_0 \lambda^*(Y_T) - \mathbb{V}_0 BS(Y_\theta, Q; \lambda^*) \quad (3.4.2)$$

Falls der Variance Call unter dieser unteren Grenze gehandelt wird, so ist wiederum Arbitrage möglich, wenn man das Portfolio verkauft und einen Variance Call kauft. Das bedeutet also, dass man bei der Forderung auf $\lambda^*(Y_T)$ short und bei der Forderung auf $BS(Y_\theta, Q; \lambda^*)$ long geht. Die letztere Forderung ist genau die λ^* Forderung der Black-Scholes Berechnung zur Zeit θ unter Verwendung der Volatilität Q . Der zukünftige Wert von beiden Forderungen wird vollständig durch Y_θ bestimmt, sodass es durch die zur Zeit 0 verwendete θ -Erwartung im europäischen Sinn ersetzt werden kann. Mit dem Gewinn ist es dann möglich, den Variance Call zu kaufen. Beginnend zur Zeit θ werden dann Aktien dynamisch gehandelt wie in der Strategie gefordert. In Summe erhält man durch diese Vorgehensweise einen risikolosen Gewinn.

Bemerkung

Diese untere Grenze zeigt somit auf, dass ein Variance Call einen zu τ_Q startenden Korridor Variance Swap dominiert, wobei der Korridor willkürlich gewählt werden kann (hierbei muss es sich auch nicht um ein Intervall handeln).

Andererseits dominiert der zu τ_Q startende Korridor Variance Swap die Summe aller $(2/K^2) dK$ OTM Vanilla Optionen (mit K im Korridor und Endzeit T) ohne diejenigen Optionen zur Zeit 0 mit Black-Scholes Berechnung unter Verwendung der Volatilität Q auf $[\theta, T]$. Diese Aussage stimmt für einen beliebigen Korridor und enthält auch den optimalen Korridor, welcher genau diese K enthält die einen positiven Beitrag zur Summe leisten.

4 Variance Call: Obere Grenze

In diesem Abschnitt sei $X_t := \log(Y_t/Y_0)$ und betrachte einen Variance Call mit Strike $Q \geq 0$ und Endzeitpunkt $T > 0$.

Die Strategie zur Superreplizierung von $(\langle X \rangle_T - Q)^+$ kann aus folgender Intuition abgeleitet werden: Dazu sei die Stoppzeit τ_b definiert als die Austrittszeit von Y aus einem bestimmten Intervall (b_d, b_u) . Obwohl $(\langle X \rangle_T - Q)^+$ nicht perfekt repliziert werden kann, so kann $(\langle X \rangle_{\tau_b} - Q)^+$ durch Portfoliohandel mit Anfangswert $BP(Y_0, 0; Q)$ perfekt repliziert werden, wie in Proposition (2.7) bereits gezeigt wurde.

Im Falle von $\tau_b \leq T$ wird das entstehende Defizit der Strategie durch die verbleibende Varianz $\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{\tau_b}$ abgedeckt. Dazu wird eine Forderung an $L(Y_T) - L(Y_{\tau_b})$ gehalten, wobei $L(y) = -2 \log(y) + A_1 y + A_0$. Die Konstanten A_1 und A_0 werden dabei derart gewählt, dass $L(b_d) = L(b_u) = 0$. Dadurch verschwindet der Term $L(Y_{\tau_b})$, sodass sich die Auszahlung zu $L(Y_T)$ vereinfacht.

Im Falle von $\tau_b > T$ besteht zur Zeit T eine long-Position zur Forderung auf $(\langle X \rangle_{\tau_b} - Q)^+$, aber es wird auch die Schuld $L(Y_T) < 0$ gehalten, welche nicht immer zahlbar ist. Jedoch ist es möglich eine geringere Schuld $-BP(Y_T, 0; Q) \geq L(Y_T)$ zu akzeptieren. Diese Schuld ist ebenfalls noch superreplizierend, da $-\left(\langle X \rangle_{\tau_b} - \langle X \rangle_T - Q\right)^+ + \left(\langle X \rangle_{\tau_b} - Q\right)^+ \geq \left(\langle X \rangle_T - Q\right)^+$. Daher ersetzt man im Intervall mit $b_d < Y_T < b_u$ die Auszahlung $L(Y_T)$ durch $-BP(Y_T, 0; Q)$. Durch das Ersetzen dieses Terms in der Auszahlung bleibt die Superreplikation im Fall von $\tau_b \leq T$ weiterhin erhalten.

4.1 Forward-starting Variance Call: Superreplikation

Sei das Forward-starting Datum wiederum durch die Konstante $\theta \in [0, T)$ gegeben (analog zum vorherigen Kapitel).

Proposition 4.1 (Forward-starting Variance Call - Superreplikation)

Man betrachte einen forward-starting Variance Call mit der Auszahlung

$$\left(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta - Q\right)^+$$

4 Variance Call: Obere Grenze

Dann sei $b_d \in (0, Y_0]$ und $b_u \in [Y_0, \infty)$ beliebig gewählt. Sei $BP(y, q; Q) = BP(y, q; b_d, b_u, Q)$, wie im Kapitel 2 definiert. $BP(y, q, Q)$ hat dann die Fourier Darstellung wie in Proposition (2.7). Definiere weiters

$$L(y) := L(y; b_d, b_u) := \begin{cases} -2 \log(y/b_u) + 2 \frac{\log(b_u/b_d)}{b_u - b_d} (y - b_u) & \text{falls } b_d \neq b_u \\ -2 \log(y/Y_0) + 2 y/Y_0 - 2 & \text{falls } b_d = b_u = Y_0 \end{cases}$$

und

$$L^*(y) := L^*(y; b_d, b_u) := \begin{cases} L(y) & \text{falls } y \notin (b_d, b_u) \\ -BP(y, 0; Q) & \text{falls } y \in (b_d, b_u) \end{cases}$$

Sei $\tau_b := \inf\{t \geq \theta : Y_t \notin (b_d, b_u)\}$ und sei

$$N_t := \begin{cases} BP_y(Y_t, \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_\theta; Q) & \text{falls } \theta \leq t \leq \tau_b \\ -L_y(Y_t) & \text{falls } t > \tau_b \end{cases}$$

Seien die Forderungen auf $-L^*(Y_\theta)$ und $L^*(Y_T)$ handelbar. Dann wird durch die folgende Strategie der forward-starting Variance Call superrepliziert:

Für $t \in [0, \theta]$ besteht das Portfolio aus

- 1 Forderung auf $L^*(Y_T)$
- 1 Forderung auf $-L^*(Y_\theta)$

Für $t \in (\theta, T]$ handelt die Strategie folgendermaßen

$$\begin{aligned} & 1 \text{ Forderung auf } L^*(Y_T) \\ & N_t \text{ Aktien} \\ & -L^*(Y_\theta) + \int_\theta^t N_s dY_s + N_t Y_t \text{ Bonds} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Wiederrum wird das Portfolio aus zwei Teilen zusammengesetzt, welche zum Zeitpunkt θ wechseln. Wie auch im Fall der unteren Grenze ist diese Vorgehensweise auch intuitiv erklärbar, da bis zum Zeitpunkt θ ein statisches Portfolio gehalten wird und erst ab diesem Zeitpunkt der dynamische Handel mittels Aktien und Bonds beginnt.

Das superreplizierende Portfolio hat den Wert $\mathbb{V}_0 [L^*(Y_T) - L^*(Y_\theta)]$ zum Zeitpunkt 0.

Beweis

Die Strategie ist klarerweise selbstfinanzierend und hat den angegebenen Wert zur Zeit 0

(durch Einsetzen der Formeln in die Strategie erkennbar).

Im Falle von $\tau_b \geq T$ hat das Portfolio zur Zeit T einen Wert von

$$\begin{aligned} L^*(Y_T) + BP(Y_T, \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta; Q) &= -BP(Y_T, 0; Q) + BP(Y_T, \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta; Q) \geq \\ &\geq \left(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta - Q \right)^+ \end{aligned}$$

Im Falle von $\tau_b < T$ ergibt sich zur Zeit T der Portfoliowert durch

$$\begin{aligned} &\int_\theta^{\tau_b} BP_y(Y_s, \langle X \rangle_s - \langle X \rangle_\theta; Q) dY_s - L^*(Y_\theta) - \int_{\tau_b}^T L_y(Y_s) dY_s + L^*(Y_T) = \\ &= \left(\langle X \rangle_{\tau_b} - \langle X \rangle_\theta - Q \right)^+ - L^*(Y_\theta)^+ - \int_{\tau_b}^T L_y(Y_s) dY_s + L^*(Y_T) \geq \\ &\geq \left(\langle X \rangle_{\tau_b} - \langle X \rangle_\theta - Q \right)^+ - L^*(Y_{\tau_b}) - \int_{\tau_b}^T L_y(Y_s) dY_s + L^*(Y_T) = \\ &= \left(\langle X \rangle_{\tau_b} - \langle X \rangle_\theta - Q \right)^+ + \langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{\tau_b} \geq \left(\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta - Q \right)^+ \end{aligned}$$

Für $\tau_b = \theta$ wird sowohl bei der ersten Gleichung und als auch bei der ersten Ungleichung $L^*(Y_\theta) = L(Y_{\tau_b}) \geq 0$ verwendet.

Für $\tau_b > \theta$ wird bei der ersten Gleichung $L^*(Y_\theta) = -BP(Y_\theta, 0; Q)$ mit Proposition 2.6 verwendet, wobei die Proposition auf das Semimartingal $Y_{t+\theta}$ mit der Filtration $\{\mathcal{F}_{t+\theta}\}$ angewendet wird. Bei der ersten Ungleichung in diesem Fall wird der Zusammenhang $L^*(Y_\theta)^+ = L(Y_{\tau_b}) = 0$ verwendet. In beiden Fällen wird für diese Ungleichung auch $L^*(Y_T) = -BP(Y_T, 0; Q) \geq -BP(Y_T, 0; 0) = L(Y_T)$ herangezogen. \square

4.2 Superreplication unter Randbedingung

Der Wert V^{super} des superreplizierenden Portfolios ist eine obere Grenze des Preises eines Variance Call. Daher gibt es bei einem Preis des Variance Call über dieser Grenze eine Möglichkeit für Arbitrage durch Verkauf des Variance Call und Kauf des Portfolios. Zunächst kann festgestellt werden, dass die angegebene Strategie in (4.1.1) eine natürliche Randbedingung auf $[0, T]$ erfüllt. Insbesondere übersteigt der Wert V_t^{super} für alle $t \leq T$ den 'inneren Wert' des Variance Call, wie er auf der rechten Seite der Formel (4.2.1) definiert ist.

Es gibt generell zwei Möglichkeiten um den inneren Wert einer Option zu bestimmen. Zunächst sei klargestellt, dass der Portfoliowert für alle t nicht nur den Wert $(q-Q)^+$ mit $q = \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{t \wedge \theta}$ übersteigt, sondern auch den Wert $(q-Q)^+$ ausgewertet an der Summe von $\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{t \wedge \theta}$ und der Markterwartung der verbleibenden Varianz $\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_{t \vee \theta}$. Diese Einschränkung sorgt dafür, dass der innere Wert der Option, die short gehalten

wird, nicht zu groß wird in Relation zu der gehaltenen Sicherheit in Form des superreplizierenden Portfolios, das long gehalten wird.

Definition (Call Seller's Randbedingung)

Seien die Forderungen auf $\log(Y_T)$ und $\log(Y_\theta)$ handelbar. Dann erfüllt die selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Wert V_t zur Zeit t die Call Seller's Randbedingung falls für alle $t \in [0, T]$ gilt

$$V_t \geq \left(\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{t \wedge \theta} - 2 \mathbb{V}_t \log(Y_T/Y_{t \vee \theta}) - Q \right)^+ \quad (4.2.1)$$

Bemerkung

Die obige Randbedingung in Form von (4.2.1) ist das natürliche Analogon zu der Notation wie in [8] dargelegt. Dort wird der faire Verkäufer-Preis einer Option mit Auszahlung $H(S_T)$ und mit der Sicherheitsanforderungs-Funktion G als das kleinste Anfangsvermögen gesehen, sodass ein selbstfinanzierender Vermögensprozess W die superreplizierende Bedingung $W_T \geq H(S_T)$ und die Sicherheitsbedingung $W_t \geq G(S_t)$ für alle $t < T$ erfüllt.

Für die Auszahlung einer Europäischen Call Option $H(s) = (s-K)^+$ ist es in natürlicherweise notwendig eine Sicherheitseinschränkung an die Auszahlungsfunktion zu knüpfen, z.B. $G(s) = H(s)$. Das bedeutet nichts anderes als dass der Verkäufer der Option mit seinem Vermögen jederzeit den inneren Wert der Option $(S_t - K)^+$ decken können muss. Hierzu wurde von Cox/Hobson ein Präzedenzfall zitiert, der diese Bedingung nicht nur für amerikanische, sondern auch für europäische Optionen rechtfertigte:

Europäische Call Optionen auf Aktien können nicht vor dem Laufzeitende ausgeübt werden, aber in den Bestimmungen zu den Optionen ist oft die Klausel enthalten, dass im Fall einer Übernahme der Firma zur Zeit $t < T$ der Wert $(S_t - K)^+$ ausgezahlt wird. Daher ist es bei der Superreplikation der Option notwendig, dass der Vermögensprozess neben der Bedingung zu Laufzeitende auch die Bedingung in der Zwischenzeit erfüllt, da es durch solche Klauseln auch im Falle von europäischen Optionen zur vorzeitigen Auszahlung kommen kann.

In dem Fall einer Call-Option auf die Varianz anstatt auf den Preis ist es angemessen den inneren Wert $(S_t - K)^+$ der Europäischen Call-Option mit dem inneren Wert des Variance-Call zu ersetzen. Dieser Wert ist in ähnlicher Weise definiert durch $(\langle X \rangle_t - Q)^+$, aber es sollte dennoch gezeigt werden, dass die Strategie tatsächlich die stärkere Randbedingung von (4.2.1) erfüllt. Diese Bedingung führt dazu, dass die Sicherheitsanforderung ein 'vorhersehbarer' innerer Wert ist, welcher $\langle X \rangle_t$ durch $\langle X \rangle_t - 2 \mathbb{V}_t \log(Y_T/Y_t)$ ersetzt.

Eine ähnliche Beweisführung erklärt auch die Definition der Call Buyer's Sicherheitsbedingung für die Subreplizierung in Form von (3.3.1).

Proposition 4.4 (Superreplizierende Strategie erfüllt die Randbedingung)

Seien die Forderungen auf $\log(Y_T)$ und $\log(Y_\theta)$ handelbar. Dann erfüllt die superreplizierende Strategie (4.1.1) unter den Voraussetzungen der Proposition 4.1 die Call Seller's Randbedingung. Daher ist der Wert V_t^{super} der Strategie (4.1.1) für alle $t \in [0, T]$ eine obere Schranke des Verkaufspreises eines Variance-Call. Der Verkaufspreis ist definiert als das Infimum der Preise aller superreplizierenden Strategien, welche die Call Seller's Randbedingung erfüllen.

Beweis

Für den Beweis erfolgt die Aufteilung des Zeitablaufs in 3 Abschnitte, für den Fall $t \leq \theta$, den Fall $\theta < t \leq \tau_b$ sowie den Fall $t > \tau_b$.

Im ersten Fall, also für $t \leq \theta$, gilt aufgrund der Konvexität von L^* der Zusammenhang $V_t^{super} = \mathbb{V}_t[L^*(Y_T) - L^*(Y_\theta)] \geq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} V_t^{super} &= \mathbb{V}_t \left[L^*(Y_T) - L^*(Y_\theta) \right] \\ &\geq \mathbb{V}_t \left[L(Y_T) - L(Y_\theta) + L(Y_\theta) - L^*(Y_\theta) \right] \\ &= \mathbb{V}_t \left[L(Y_T) - L(Y_\theta) + 1^{(b_d, b_u)}(Y_\theta) (-BP(Y_\theta, 0; 0) + BP(Y_\theta, 0; Q)) \right] \\ &\geq \mathbb{V}_t \left[L(Y_T) - L(Y_\theta) - Q \right] \end{aligned}$$

Im zweiten Fall für $\theta < t \leq \tau_b$ gilt aufgrund des Beweises von Proposition 4.1

$$\begin{aligned} V_t^{super} &= \mathbb{V}_t L^*(Y_T) - L^*(Y_\theta) + \int_\theta^t BP_y \left(Y_s, \langle X \rangle_s - \langle X \rangle_\theta; Q \right) dY_s \\ &= \mathbb{V}_t L^*(Y_T) + BP \left(Y_t, \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_\theta; Q \right) \\ &\geq \mathbb{V}_t L(Y_T) - L(Y_t) + L(Y_t) + BP \left(Y_t, \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_\theta; Q \right) \\ &= \mathbb{V}_t L(Y_T) - L(Y_t) - BP(Y_t, 0; 0) + BP \left(Y_t, 0; Q - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_\theta) \right) \\ &\geq \mathbb{V}_t L(Y_T) - L(Y_t) + \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_\theta - Q \end{aligned}$$

4 Variance Call: Obere Grenze

Im dritten Fall, also $t > \tau_b$, gilt

$$\begin{aligned}
V_t^{super} &= \int_{\theta}^{\tau_b} BP_y(Y_t, \langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{\theta}; Q) dY_t - \int_{\tau_b}^t L_y(Y_s) dY_s + \mathbb{V}_t L^*(Y_T) - L^*(Y_{\theta}) \\
&= (\langle X \rangle_{\tau_b} - \langle X \rangle_{\theta} - Q)^+ - \int_{\tau_b}^t L_y(Y_s) dY_s + \mathbb{V}_t L^*(Y_T) - L(Y_{\theta})^+ \\
&\geq (\langle X \rangle_{\tau_b} - \langle X \rangle_{\theta} - Q)^+ - \int_{\tau_b}^t L_y(Y_s) dY_s + \mathbb{V}_t L(Y_T) - L(Y_{\tau_b}) + L(Y_t) - L(Y_t) \\
&\geq (\langle X \rangle_{\tau_b} - \langle X \rangle_{\theta} - Q)^+ + \langle X \rangle_t + \langle X \rangle_{\tau_b} + \mathbb{V}_t L(Y_T) - L(Y_t) \\
&\geq (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{\theta} - Q + \mathbb{V}_t L(Y_T) - L(Y_t))^+
\end{aligned}$$

□

4.3 Forward-starting Variance-Call: Obere Schranken

Jede Wahl von (b_d, b_u) ergibt die obere Schranke $\mathbb{V}_0[L^*(Y_T; b_d, b_u, Q) - L^*(Y_{\theta}; b_d, b_u, Q)]$ für den Preis des Variance-Call zur Zeit 0. Folglich ergibt sich die optimierte obere Schranke durch

$$V^{super} = \inf_{(b_d, b_u)} \mathbb{V}_0[L^*(Y_T; b_d, b_u, Q) - L^*(Y_{\theta}; b_d, b_u, Q)] \quad (4.3.1)$$

Bemerkung

Es gilt $(\langle X \rangle_T - Q)^+ \leq \langle X \rangle_T$. Daher hat der Spot-Starting Variance-Call eine triviale obere Schranke im Form von $\mathbb{V}_0[-2 \log(Y_T/Y_0)]$ des $\langle X \rangle_T$ -replizierenden Portfolios.

Die triviale Schranke wird durch Einsetzen von $b_d = b_u = Y_0$ in der obigen Formel für die obere Schranke bestätigt, da $\mathbb{V}_0 L^*(Y_T; Y_0, Y_0, Q) = \mathbb{V}_0[-2 \log(Y_T/Y_0)]$.

Da die obige Formel den Wert für die obere Schranke für alle Paare (b_d, b_u) optimiert, ist die triviale Schranke nie eine bessere Abschätzung des Preises nach oben. Dies ist leicht einzusehen, da bei der optimierten Schranke auch der Trivialfall von $b_d = b_u = Y_0$ enthalten ist. Andererseits kann auf diese Weise auch festgestellt werden, dass die obere Schranke für einen Forward-Starting Variance-Call nie über der trivialen oberen Schranke liegen kann.

Bemerkung

Die obere Schranke kann verbessert werden, falls Barriere-Optionen vorhanden sind. Solche exotische Optionen werden erst bei einem bestimmten Ereignis aktiviert oder

deaktiviert. Im wesentlichen werden hierbei zwei Arten von Optionen unterschieden: Einerseits die knock-in-Optionen bei denen eine gewöhnliche Option nur ausgezahlt wird, wenn eine gewisse Schranke (auch Knock-in-Level genannt) überschritten wird und andererseits die knock-out-Optionen bei denen eine gewöhnlich Option nur ausgezahlt wird, wenn eine gewisse Schranke (auch Knock-out-Level genannt) nicht überschritten wird. Mit Hilfe von solchen Optionen kann in (4.1.1) die Forderung auf $L^*(Y_T; b_d, b_u, Q)$ durch eine 'double knock-in'-Forderung auf $L(Y_T; b_d, b_u)$ plus einer 'double knock-out'-Forderung auf $-BP(Y_T, 0, Q)$ ersetzt werden. Jede diese Forderungen hat die Grenzen bei b_d und b_u , welche im Zeitintervall $[\theta, T]$ beobachtet werden.

Bemerkung

Der Unterschied zwischen eines Variance-Put mit Auszahlung $(Q - \langle X \rangle_T)^+$ und eines Variance-Call mit Auszahlung $(\langle X \rangle_T - Q)^+$ ist eine Forderung auf $\langle X \rangle_T - Q$, welche durch Beispiel 2.10 perfekt repliziert werden kann. Daher ergeben sich die supereplizierenden bzw auch superreplizierenden Strategien für den Variance-Put direkt aus dem zugehörigen Variance-Call. Damit erhält man mit der Formel $\langle X \rangle_T - Q = (\langle X \rangle_T - Q)^+ - (Q - \langle X \rangle_T)^+$ ein entsprechendes Ergebnis wie es aus der bekannten Call-Put-Parität für europäische Optionen auf den Aktienpreis bereits bekannt ist.

Bemerkung

Bisher wurde nur die Information der Europäischen Option zu Beginn, also zum Zeitpunkt 0, verwendet. Die Analyse der Europäischen Option zum Zeitpunkt $t > 0$ folgt jedoch umgehend. Dazu sei ein Variance-Call im Zeitintervall $[\theta, T]$ mit Strike $Q \geq 0$ gegeben.

Im Fall, dass zur Zeit $t \leq T$ die aktuelle Varianz $\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{\theta \wedge t}$ den Strike Q übersteigt, so beendet die Option sicher im Geld. Daher wird die Call-Option in einen Variance-Swap mit der Auszahlung $\langle X \rangle_T - \langle X \rangle_\theta - Q$ umgewandelt, welcher exakt repliziert werden kann.

Im Fall, dass zur Zeit $t \leq T$ die aktuelle Varianz den Strike (noch) nicht übersteigt, also $\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{\theta \wedge t} \leq Q$, kann die bestehende Call-Option durch eine neue Call-Option mit Startzeitpunkt t und 'effektiven' Strike $Q - (\langle X \rangle_t - \langle X \rangle_{\theta \wedge t})$ ersetzt werden. Für diese neue Option können dann die bereits gezeigten Resultate wieder neu angewendet werden.

Zusammengefasst ist es also mit obiger Vorgehensweise möglich auch eine bereits laufende europäische Option zu betrachten.

Bemerkung

Da die quadratische Variation während der Optionsdauer anwächst, sinkt der effektive

4 Variance Call: Obere Grenze

Strike des Calls im Laufe der Optionsdauer. Dabei kann die Option entweder 'out-of-the-money' beendet werden und somit ohne Auszahlung oder die Option endet 'in-the-money', wodurch der 'effektive' Strike schon vorher auf 0 sinken kann. Im letzteren Fall konvergieren die bereits gezeigten oberen und unteren Schranken gegen den Preis eines Variance Swap so wie der 'effektive' Strike gegen 0 strebt (bzw. äquivalent dazu wie die laufende Varianz gegen den Strike strebt).

Obwohl durch die beobachteten europäischen Daten bei einzelnen Varianz-Verträgen eine größere Differenz der gezeigten oberen und unteren Schranke entstehen kann, so sind die erhaltenen Ergebnisse für Hedging und Risikomanagement zumindest für spätere Vertragszeiten sinnvoll, da im Zeitablauf die Differenz gegen 0 strebt (bzw. die laufende Varianz gegen den Strike strebt).

Des Weiteren enthalten die obere und untere Schranke auch bei einer ursprünglich großen Differenz brauchbare Informationen zu Beginn der Laufzeit: Die Größe des Intervalls gibt eine obere Schranke für das Modellrisiko an, welches durch den Versuch den Preis des Variance Call durch Festlegung und Kalibrierung eines Modells dargestellt wird.

5 Modellberechnung

In diesem Kapitel geht um die explizite Anwendung von den gezeigten Ergebnissen bzw. um die Berechnung anhand des Beispiels eines Variance Calls mittels Modellen. Hierbei gibt es eine Vielzahl von Möglichkeiten, wie zum Beispiel das Heston Modell, Root Modell oder Rost-Modell, welche im Paper von Carr und Lee behandelt werden (siehe [1]). In diesem Kapitel wird für die Modellierung von Prozessen ohne Sprünge das CEV-Modell und SABR-Modell verwendet. Um zusätzlich auch eine Modellierung eines Prozesses mit Sprüngen abzudecken, wird zuletzt das Merton-Sprung-Diffusions-Modell als ein Beispiel näher betrachtet.

Für die Berechnung der modellfreien unteren und oberen Schranke aus den vorherigen Kapiteln für ein explizites Beispiel wäre es notwendig die Preise für europäische Optionen zu kennen, da sich daraus diese Schranken berechnen lassen. Im Falle, dass solche Preise also bekannt wären, so könnte einerseits durch die Formel (3.4.2) die untere Schranke und andererseits durch die Formel (4.3.1) die obere Schranke berechnet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Berechnung der unteren und oberen Schranke für das CEV-Modell durchgeführt, da die hierfür benötigten Optionspreise aus dem Modell mit Hilfe der Dichte berechnet wurden.

5.1 CEV-Modell

Das CEV-Modell, wobei die Abkürzung für Constant Elasticity of Variance steht, ist ein sehr einfaches Modell, welches auch in der Praxis der Finanzindustrie Anwendung findet. Das Modell wurde 1975 von John Cox entwickelt.

In diesem Modell wird der Preisprozess durch folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben

$$dS_t = \sigma S_t^\gamma dW_t$$

mit der Brown'schen Bewegung W_t und den Konstanten σ und γ sowie den Bedingungen $\sigma > 0$ und $0 < \gamma < 1$.

5 Modellberechnung

Für einen Variance Call ergibt sich aus der gegebenen Differentialgleichung folgende Lösung

$$Call_{CEV}(S_0, t, T, K, \sigma, \gamma) = S_0 \left(1 - V(a, b + 2, c) \right) - K V(c, b, a)$$

mit

$$a = \frac{K^{2(1-\gamma)}}{(1-\gamma)^2 \sigma^2 (T-t)}$$
$$b = \frac{1}{|\gamma-1|}$$
$$c = \frac{S^{2(1-\gamma)}}{(1-\gamma)^2 \sigma^2 (T-t)}$$
$$V(x, y, z) = \mathbb{P}[\chi_b^2(c) \leq a] \quad (\text{nicht zentrierte Chi-Quadrat-Verteilung})$$

Mit Hilfe dieser geschlossenen Formel als Lösung konnte durch Programmierung in Matlab der Preis für ein explizites Beispiel berechnet werden.

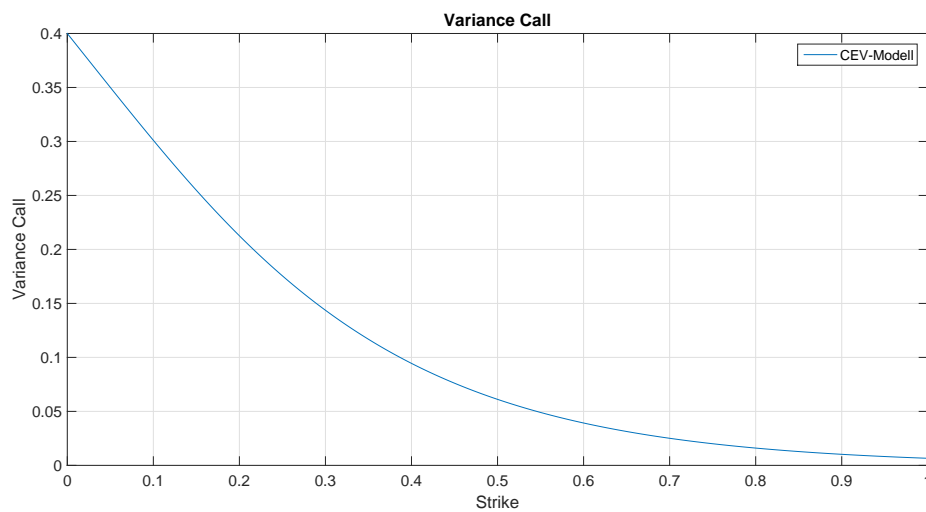


Abbildung 3: Preis eines Variance Call im CEV-Modell

Für die Erstellung der obigen Abbildung wurden folgende Parameter im CEV-Modell angenommen:

| | |
|-------------|----------------|
| Zeitpunkt | $t = 0$ |
| Laufzeit | $T = 1$ |
| Anfangswert | $S = 0.4$ |
| Volatilität | $\sigma = 0.5$ |
| Konstante | $\gamma = 0.8$ |

Im weiteren Verlauf wurde nun das Verhalten dieses CEV-Modells mit der oberen und unteren Schranke untersucht. Für die im allgemeinen Modell-freien Schranken werden die Preise für Optionen benötigt. Da diese jedoch nicht zur Verfügung stehen bzw. am

Markt wenige bis keine solcher Optionen gehandelt werden, wurden diese Optionspreise ebenfalls mit dem CEV-Modell berechnet.

Für eine einfachere Notion wird im folgenden das Modell mit dem Parameter $\beta = 2\gamma$ betrachtet, also

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t^{\beta/2} dW_t$$

Um einen risikoneutralen Preis von Optionen zu berechnen, ist es notwendig die Dichte des Modells zu bestimmen. In diesem Zusammenhang können die Kolmogorov-Gleichungen verwendet werden. Diese bestehen aus zwei partiellen Differentialgleichungen, die die 'Übergangswahrscheinlichkeiten' von Markov-Diffusionsprozessen wiedergeben.

Im allgemeinen gilt das folgende Resultat:

Sei $X(t)$ ein stetiger Prozess als Lösung folgender stochastischer Differentialgleichung

$$dX(t) = \beta(x, t) dt + \sqrt{\alpha(x, t)} dW_t$$

mit Anfangswert $X(t_0) = x_0$.

Dann hat $X(t)$ den Mittelwert $\beta(x, t)$ und Varianz $\alpha(x, t)$. Zusätzlich hat der Prozess $X(t)$ eine Übergangswahrscheinlichkeit in Form der Dichte $p(x, t; x_0, t_0)$, also gilt

$$\mathbb{P}[a < X(t) < b \mid X(t_0) = x_0] = \int_a^b p(x, t; x_0, t_0) dx$$

Diese Dichte erfüllt die Kolmogorov-Gleichungen, also einerseits die Vorwärts-Kolmogorov-Gleichung

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\alpha(x, t) p] - \frac{\partial}{\partial x} [\beta(x, t) p] = \frac{\partial p}{\partial t}$$

mit den Rückwärts-Parametern x_0 und t_0 und andererseits die Rückwärts-Kolmogorov-Gleichung

$$\frac{1}{2} \alpha(x_0, t_0) \frac{\partial^2 p}{\partial x_0^2} + \beta(x_0, t_0) \frac{\partial p}{\partial x_0} = - \frac{\partial p}{\partial t_0}$$

mit den Vorwärts-Parametern x und t .

Im Falle des CEV-Modells ist die Dichte $f_{S_T | S_t}(s, \tau)$ von Interesse, welche das zukünftige Verhalten von S_T , gegeben S_t , beschreibt. Für den Prozess kann im konkreten Fall des Modells für $X(t)$ der Prozess $S(t)$ mit dem Mittelwert $\mathbb{E}[dS_t | S_t] = \mu S_t$ und der Varianz $Var[dS_t | S_t] = \sigma^2 S_t^\beta$ eingesetzt werden. Dann gilt für die Dichte

$$f_{S_T | S_t}(s, \tau) = p(s, T; s_t, t)$$

5 Modellberechnung

mit dem Anfangswert $S_t = s_t$.

In diesem Zusammenhang betrachtet man auch den absorbierenden Zustand von 0, da der Preis nicht negativ werden soll bzw. kann. Das führt zu der zusätzlichen Randbedingung $f_{S_T|S_t}(s, \tau) = 0$ für $s < 0$ in der Vorwärts-Kolmogorov-Gleichung. Des weiteren gilt dann für $x \leq 0$

$$\mathbb{P}[X(t) < x | X(t_0) = x_0] = \int_{-\infty}^x p(u, t; x_0, t_0) du = 0$$

Für die Lösung im CEV-Modell sind daher die folgenden Kolmogorov-Gleichungen zu lösen

$$\begin{aligned} \text{Vorwärts-Kolmogorov-Gleichung} & \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [\sigma^2 s_t^\beta f] - \frac{\partial}{\partial s} [\mu s_t f] - \frac{\partial f}{\partial T} = 0 \\ \text{Rückwärts-Kolmogorov-Gleichung} & \quad \frac{1}{2} \sigma^2 s_t^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial s_t^2} + \mu s_t \frac{\partial f}{\partial s_t} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$f_{S_T|S_t}(s, \tau) = 0 \quad \text{für } s < 0 \quad \text{und} \quad f_{S_T|S_t}(s, 0 | S_t = s_t) = \delta(s - s_t)$$

(mit der bekannten Dirac-Delta-Funktion $\delta(x)$)

Man erhält dann aus den angegebenen Gleichungen die Lösung für die Dichte

$$f_{S_T|S_t}(s, \tau) = (2 - \beta) k^{\frac{1}{2-\beta}} (x z^{1-2\beta})^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2-\beta} e^{-x-z} I_{\frac{1}{2-\beta}}(2(xz)^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{mit} \quad k = \frac{2\mu}{\sigma^2 (2-\beta) (e^{\mu(2-\beta)\tau} - 1)}$$

$$x = k S_t^{2-\beta} e^{\mu(2-\beta)\tau}$$

$$z = k s^{2-\beta}$$

$I_\nu(z)$ modifizierte Besselfunktion erster Gattung

sowie $s > 0$ und $\tau = T - t$

Die Lösung gilt für die Parameter $\sigma > 0$ und $\beta < 2$.

Mit dieser Dichte ist es nun möglich die notwendigen Optionspreise zu berechnen. Sei hierfür im allgemeinen eine Option mit der Auszahlungsfunktion $g(S_T)$ gegeben. Dann gilt für den Optionspreis zum Zeitpunkt 0

$$P(0) = \int_0^\infty g(u) f_{S_t|S_t}(u, T) du$$

Nun ist mit Hilfe der Programmierung in Matlab eine grafische Auswertung der oberen und unteren Schranke möglich. In unten stehender Abbildung sind nun neben dem Preis

im CEV-Modell auch die obere und untere Schranke ersichtlich.

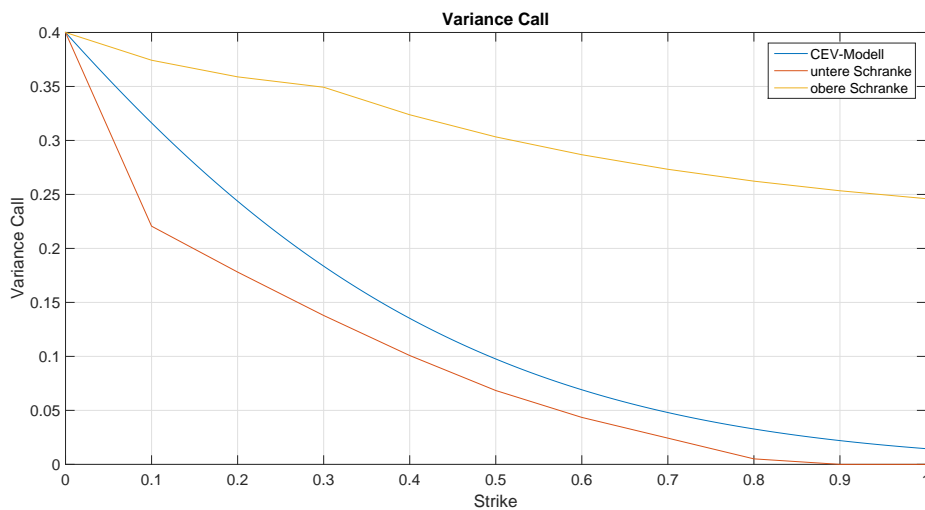


Abbildung 4: Preis eines Variance Call im CEV-Modell mit unterer und oberer Schranke

5.2 SABR Volatilitäts-Modell

Die Bezeichnung SABR leitet sich von den Bezeichnungen 'stochastisch, α, β, ρ ' ab, welche die zum Modell gehörigen und definierenden Parameter darstellen. Dieses Modell versucht den sogenannten Volatilitäts-Smile besser zu erfassen. Unter diesem Begriff versteht man den Effekt, dass die implizite Volatilität umso niedriger ist, je mehr Optionen 'am Geld' sind (d.h. der Marktwert des Basiswertes ist nahezu gleich dem Ausübungspreis).

Der Preisprozess des SABR-Modells ist durch die folgenden stochastische Differentialgleichungen gegeben

$$dS_t = \sigma_t S_t^\beta dW_t \quad \text{und} \quad d\sigma_t = \alpha \sigma_t dZ_t$$

mit den Brown'schen Bewegungen W_t, Z_t mit dem Korrelationskoeffizienten ρ und den Konstanten α und β sowie den Bedingungen $\alpha \geq 0$ und $0 \leq \beta \leq 1$.

Für den Fall $\alpha = 0$ vereinfacht sich der Preisprozess zum CEV-Modell, womit dieses Modell eine Erweiterung darstellt. Der Parameter α steht somit für die Volatilität der Volatilität.

Im Allgemeinen gibt es für die Verteilung von S_t keine geschlossene Formel, sodass eine Approximation notwendig ist. Diese Approximation ist jedoch in der Praxis ausreichend, da im Umfeld eines klassischen Marktes der Fehler dabei gering ausfällt. Ein weiterer

5 Modellberechnung

Vorteil der folgenden Approximation liegt in der einfachen Ausführung bzw. Berechnungslogik, welche dadurch auch auf große Portfolien eine gute Anwendung ermöglicht.

In der Praxis wird die Lösung häufig als implizite Volatilität der Option dargestellt und in Folge dann in das Black-Scholes-Modell eingesetzt. Die implizite Volatilität lässt sich in der Approximation darstellen als

$$\sigma_{imp} = \alpha \frac{\log(S_0/K)}{D(\zeta)} \left[1 + \left[\frac{2\gamma_2 - \gamma_1^2 + 1/S_m^2}{24} \left(\frac{\sigma_0 S_m^\beta}{\alpha} \right)^2 + \frac{\rho\gamma_1}{4} \frac{\sigma_0 S_m^\beta}{\alpha} + \frac{2 - 3\rho^2}{24} \right] \epsilon \right]$$

mit $\epsilon = T \alpha^2$

$$S_m = \frac{S_0 + K}{2}$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sigma_0(1-\beta)} \left(S_0^{1-\beta} - K^{1-\beta} \right)$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta}{S_m}$$

$$\gamma_2 = -\frac{\beta(1-\beta)}{S_m^2}$$

$$D(\zeta) = \log \left(\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2} + \zeta - \rho}{1-\rho} \right)$$

In die Formel des Black-Scholes Modells kann nun diese implizite Volatilität eingesetzt werden. Somit ergibt sich für den Variance-Call im Black-Scholes-Modell die bekannte Lösungsformel

$$C_{BS}(S_t, K, \sigma_{imp}, \tau, r) = S_t N(d_1) - K e^{-r\tau} N(d_2)$$

mit Kurs S_t , Strike K , Volatilität σ_{imp} , Restlaufzeit $\tau = T - t$ und Zins r sowie den Parametern

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma_{imp}^2/2) \tau}{\sigma_{imp} \sqrt{\tau}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S_t/K) + (r - \sigma_{imp}^2/2) \tau}{\sigma_{imp} \sqrt{\tau}} = d_1 - \sigma_{imp} \sqrt{\tau}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Vor allem bei kurzen Laufzeiten ergibt sich bei dieser Approximation eine geringe Abweichung. In der Praxis reicht diese Berechnung aus, da für solche Finanzinstrumente meist kurze Laufzeiten vereinbart werden. Dies lässt sich auch aus dem Umstand erkennen, dass auch die bekannten Indizes wie der VIX oder VDAX auf die kurze Laufzeit von 30 Tagen berechnet werden.

Für die Berechnung erfolgte wiederum die Programmierung der Lösung in Matlab. Daraus ergibt sich die grafische Darstellung wie in Abbildung 5 gezeigt. In dieser Abbildung wurde auch das Ergebnis aus dem CEV-Modell dargestellt und somit können die Ergebnisse der Modelle verglichen werden. Es gibt hierbei jedoch nur geringe Abweichungen zwischen den Modellen, was auch auf die ähnliche Art der Modelle zurückzuführen ist.

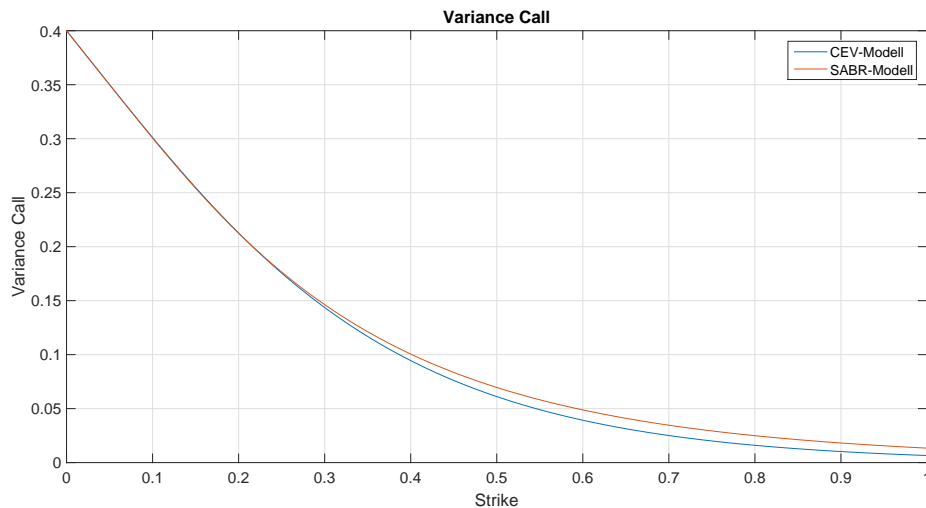


Abbildung 5: Preis eines Variance Call im SABR-Modell

Für die Erstellung der obigen Abbildung wurden in Anlehnung an das zuvor diskutierte CEV-Modell folgende Parameter im SABR-Modell angenommen:

| | |
|-------------------------|----------------|
| Zeitpunkt | $t = 0$ |
| Laufzeit | $T = 1$ |
| Anfangswert | $S = 0.4$ |
| Volatilität zu Beginn | $\sigma = 0.5$ |
| Konstante | $\beta = 0.8$ |
| Vola der Volatilität | $\alpha = 0.7$ |
| Korrelationskoeffizient | $\rho = 0.45$ |

5.3 Merton-Sprung-Diffusions-Modell

Zuletzt ein Modell, das nun auch die Möglichkeit von Sprüngen in die Modellierung mit einfließen lässt. In solchen Modellen werden vereinfacht gesagt Sprünge addiert. Somit besteht der neue stochastische Prozess allgemein aus 2 Teilen, einer stetigen Komponente und einer Sprungkomponente.

Die stetige Komponente besteht dabei aus einer Brown'schen Bewegung, womit für

diesen Teil die Ergebnisse bzw. Betrachtungsweise der bereits bekannten Modelle ohne Sprünge vorhanden sind. Dieser Teil des Preisprozesses wird auf die täglichen normalen Veränderungen zurückgeführt, also jene geringeren Schwankungen des Preises aufgrund von Unterschieden in Angebot und Nachfrage, Änderungen von relevanten Zinssätzen oder Änderung von wirtschaftlichen Aussichten.

Für die Modellierung von abnormalen Veränderungen, die nicht täglich zu erwarten sind, wird eine Sprungkomponenten hinzugefügt. Diese Schwankungen des Preises entstehen durch wesentliche neue Informationen zum Underlying oder zu einer dem Underlying zugeordneten Industrie. Dabei kann des Preisprozess für diese Komponente in eine ruhige Zeit eingeteilt werden, in der keine solchen Informationen auftreten, und eine aktive Zeit, in der neue den Kurs stark beeinflussende Informationen auftauchen. Hierbei ist klar, dass solche Informationen immer zu diskreten Zeitpunkten bekannt werden. Daher erfolgt die Modellierung durch einen Sprungprozess. In der Praxis wird in diesem Zusammenhang meist ein 'Poisson-gesteuerter' Prozess verwendet. Dabei ist ein Poisson-verteiltes Ereignis das Eintreffen von solch einer neuen wesentlichen Information zum Underlying. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Eintreffen von Informationen unabhängig und identisch verteilt ist, also gilt für die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen in Zeitintervall der Länge h

$$\mathbb{P}[\text{kein Ereignis im Intervall } (t, t + h)] = 1 - \lambda h + O(h)$$

$$\mathbb{P}[\text{ein Ereignis im Intervall } (t, t + h)] = \lambda h + O(h)$$

$$\mathbb{P}[\text{mehrere Ereignisse im Intervall } (t, t + h)] = O(h)$$

mit Intensität λ (durchschnittliche Anzahl der Ereignisse pro Zeiteinheit) und $O(h)$ definiert durch $\psi(h) = O(h)$ falls $\lim_{h \rightarrow 0} \psi(h)/h = 0$.

Für den Preisprozess ergibt sich bei der Zusammensetzung beider Komponenten dann die folgende allgemeine Darstellung als stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = (\alpha - \lambda k) dt + \sigma dW_t + dN_t$$

mit den folgenden Parametern

| | |
|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| α | erwartete Erträge des Underlyings |
| σ^2 | Varianz (im Fall von keinen Ereignissen im Sinne des Poisson-Prozess) |
| W_t | Brown'sche Bewegung (unabhängig von N_t) |
| N_t | Poissonprozess (unabhängig von W_t) |
| λ | durchschnittliche Anzahl der Ereignisse des Poisson-Prozess |
| $k = \mathbb{E}[Z - 1]$ | mit $(Z - 1)$ Veränderung des Underlyings bei Ereignis des Poisson-Prozess und \mathbb{E} Erwartungswertoperator der Zufallsvariable Z |

In diesem mathematischen Modell beschreibt nun der Term σdW_t die normalen Veränderungen bzw. den stetigen Verlauf und der Term dN_t die aussergewöhnlichen Ereignisse bzw. den Sprungverlauf des Prozesses. Im Fall von $\lambda = 0$, wodurch auch $dN_t = 0$, erhält man aus diesem allgemeinen Modell das Black-Scholes Modell als Spezialfall.

Die obige allgemein gültige Form der stochastischen Differentialgleichung kann nun auch auf die folgende Weise definiert werden

$$dS_t = \begin{cases} (\alpha - \lambda k) dt + \sigma dW_t & \text{falls kein Poisson-Ereignis} \\ (\alpha - \lambda k) dt + \sigma dW_t + (Z - 1) & \text{falls ein Poisson-Ereignis} \end{cases}$$

Damit erhält man Pfade für einen Preisprozess S_t , der meist stetig verläuft und nur zu einzelnen diskreten Zeitpunkten Sprünge enthält. Solche Sprünge, welche im Zeitablauf zufällig auftreten, sind im Vorzeichen und der Höhe zufällig, jedoch immer endlich.

Im Allgemeinen lässt sich diese Form der Modellierung nicht ohne weitere Annahmen lösen. Deshalb wird als weitere Voraussetzung angenommen, dass die Informationen, aufgrund derer ein Poisson-Ereignis eintritt, unabhängig vom Markt sind. Dadurch erhält man zunächst schon die Lösung

$$Call_{MJD}(S_t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda \tau} (\lambda \tau)^n}{n!} \left(\mathbb{E}_n[C_{BS}(S_t Z_n e^{-\lambda k \tau}, K, \sigma, \tau, r) \right] \quad (5.3.1)$$

mit Restlaufzeit $\tau = T - t$, \mathbb{E}_n Erwartungswertoperator der Verteilung von Z_n (Z_n hat die gleiche Verteilung wie das Produkt von n unabhängig identisch verteilten Zufallsvariablen, die jeweils identisch wie Z verteilt sind) sowie der bereits definierte Black-Scholes-Preis C_{BS} für eine Call-Option.

Die obige Lösung stellt jedoch wiederum keine geschlossene Form der Lösung dar, jedoch gibt es zwei Spezialfälle in denen diese Lösung noch wesentlich vereinfacht werden kann. Der erste Spezialfall ist die Möglichkeit bzw. die positive Wahrscheinlichkeit von Ruin. Für die Lösung in diesem Fall sei auf die weiterführende Literatur verwiesen (siehe zum Beispiel [10]). Der zweite Spezialfall, der auch hier weiter behandelt wird, ist die Annahme der Log-Normal-Verteilung von Z .

Für diesen Fall sei nun δ^2 die Varianz von $\log(Z)$ und sei $\gamma = \log(1 + k)$. Daraus erhält man, dass alle Z_n ebenfalls Log-Normal-verteilt sind mit $\delta^2 n$ als Varianz von $\log(Z_n)$ sowie $\mathbb{E}[Z_n] = \exp(n \gamma)$ als Erwartungswert von Z_n . Weiters definiere die Funktion

$$C_n(S_t, \tau) := C_{BS}(S_t, K, \sigma_n^2, \tau, r_n)$$

5 Modellberechnung

mit $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2 + n\delta^2}{\tau}$ und $r_n = r - \lambda k + n\gamma / \tau$.

Mit diesen Definitionen kann nun die Formel (5.3.1) vereinfacht werden zu

$$Call_{MJD}(S_t, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_1 \tau} (\lambda_1 \tau)^n}{n!} C_n(S_t, \tau) \quad (5.3.2)$$

mit der adaptierten Intensität $\lambda_1 = \lambda(1+k)$. Dabei stellt $C_n(S_t, \tau)$ den Preis der Option für den Fall dar, dass genau n Poisson-Ereignisse während der Laufzeit der Option eintreten. Der Preis der Option ist dann die gewichtete Summe aller dieser Optionspreise mit der Poisson-Intensität $\lambda \tau$.

Für die Berechnung wurde wiederum die Programmierung in Matlab umgesetzt. Dadurch erhält man die Darstellung als Grafik wie in Abbildung 6 zu sehen. In diesem Fall wurden wiederum die Ergebnisse des CEV-Modells und des SABR-Modells als Vergleich in der Abbildung belassen. Hier zeigt sich schon eine größere Abweichung zu den beiden vorherigen Modellen. Diese Abweichung ist jedoch stark von den gewählten Modellparametern abhängig - je nachdem ob die Sprungkomponente in Form des Poissonprozesses weniger oder mehr in den Prozess eingreift.

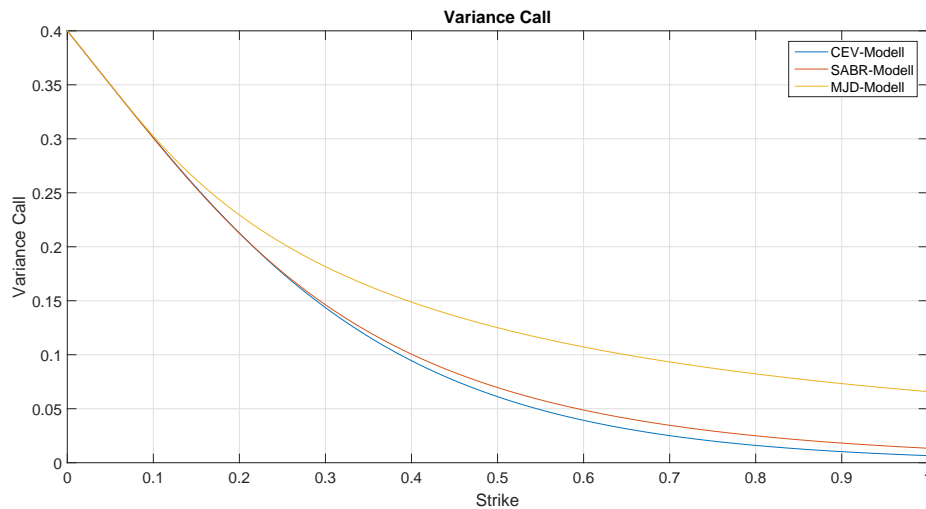


Abbildung 6: Preis eines Variance Call im Merton-Sprung-Diffusions-Modell

Für die Erstellung der obigen Abbildung wurden wiederum in Anlehnung an die vorherige Modellierung des CEV-Modell und SABR-Modell (bzw. im Hinblick auf die Vergleichbarkeit mit diesen stetigen Modellen) folgende Parameter im Merton-Sprung-Diffusions-Modell angenommen:

| | |
|--------------------------------|-------------------------|
| Zeitpunkt | $t = 0$ |
| Laufzeit | $T = 1$ |
| Anfangswert | $S = 0.4$ |
| Volatilität | $\sigma = 0.5$ |
| Intensität des Poisson-Prozess | $\lambda = 0.7$ |
| Erwartungswert der Sprunghöhe | $\mathbb{E}[Z_n] = 0.8$ |
| Varianz der Sprunghöhe | $\delta^2 = 0.1$ |
| Zählvariable | $n = 100$ |

Je nach Wahl des Parameters ändert sich natürlich der Verlauf der Kurve in der Abbildung. Vor allem die Sprungkomponente, im Modell in Form der Parameter der Intensität des Poissonprozesses (entspricht der Häufigkeit) und des Erwartungswertes der Sprunghöhe, hat einen wesentlichen Einfluss auf die Preiskurve des Variance Call.

6 Anhang

6.1 Daten

Für die Abbildung des VIX mit dem zugrundeliegenden Basiswert S&P500 in Kapitel 1 wurden die Daten, welche von der CBOE auf ihrer Homepage zur Verfügung stellt, verwendet. In gleicher Weise wurde auch die Abbildung für den VDAX mit dem Basiswert DAX, welche ebenfalls in Kapitel 1 zu finden ist, mit der Datenreihe von der Homepage der Frankfurter Börse erstellt.

Nachfolgend nun ein Auszug der Daten (Daten des S&P500 und VIX sowie DAX und VDAX für das Jahr 2014)

| Datum | SP500 | VIX | Datum | DAX | VDAX |
|------------|---------|-------|------------|---------|-------|
| 02/01/2014 | 1831.98 | 14.23 | 02/01/2014 | 9400.04 | 16.32 |
| 03/01/2014 | 1831.37 | 13.76 | 03/01/2014 | 9435.15 | 15.56 |
| 06/01/2014 | 1826.77 | 13.55 | 06/01/2014 | 9428.00 | 15.73 |
| 07/01/2014 | 1837.88 | 12.92 | 07/01/2014 | 9506.20 | 15.34 |
| 08/01/2014 | 1837.49 | 12.87 | 08/01/2014 | 9497.84 | 15.66 |
| 09/01/2014 | 1838.13 | 12.89 | 09/01/2014 | 9421.61 | 15.59 |
| 10/01/2014 | 1842.37 | 12.14 | 10/01/2014 | 9473.24 | 14.74 |
| 13/01/2014 | 1819.2 | 13.28 | 13/01/2014 | 9510.17 | 15.01 |
| 14/01/2014 | 1838.88 | 12.28 | 14/01/2014 | 9540.51 | 14.98 |
| 15/01/2014 | 1848.38 | 12.28 | 15/01/2014 | 9733.81 | 14.75 |
| 16/01/2014 | 1845.89 | 12.53 | 16/01/2014 | 9717.71 | 14.57 |
| 17/01/2014 | 1838.7 | 12.44 | 17/01/2014 | 9742.96 | 13.92 |
| 21/01/2014 | 1843.8 | 12.87 | 20/01/2014 | 9715.90 | 14.41 |
| 22/01/2014 | 1844.86 | 12.84 | 21/01/2014 | 9730.12 | 14.76 |
| 23/01/2014 | 1828.46 | 13.77 | 22/01/2014 | 9720.11 | 15.14 |
| 24/01/2014 | 1790.29 | 18.14 | 23/01/2014 | 9631.04 | 15.90 |
| 27/01/2014 | 1781.56 | 17.42 | 24/01/2014 | 9392.02 | 18.45 |
| 28/01/2014 | 1792.5 | 15.8 | 27/01/2014 | 9349.22 | 18.51 |
| 29/01/2014 | 1774.2 | 17.35 | 28/01/2014 | 9406.91 | 18.23 |
| 30/01/2014 | 1794.19 | 17.29 | 29/01/2014 | 9336.73 | 20.01 |
| 31/01/2014 | 1782.59 | 18.41 | 30/01/2014 | 9373.48 | 19.43 |
| 03/02/2014 | 1741.89 | 21.44 | 31/01/2014 | 9306.48 | 20.19 |
| 04/02/2014 | 1755.2 | 19.11 | 03/02/2014 | 9186.52 | 21.68 |
| 05/02/2014 | 1751.64 | 19.95 | 04/02/2014 | 9127.91 | 21.50 |
| 06/02/2014 | 1773.43 | 17.23 | 05/02/2014 | 9116.32 | 21.01 |
| 07/02/2014 | 1797.02 | 15.29 | 06/02/2014 | 9256.58 | 19.28 |
| 10/02/2014 | 1799.84 | 15.26 | 07/02/2014 | 9301.92 | 17.65 |
| 11/02/2014 | 1819.75 | 14.51 | 10/02/2014 | 9289.86 | 17.53 |
| 12/02/2014 | 1819.26 | 14.3 | 11/02/2014 | 9478.77 | 16.25 |
| 13/02/2014 | 1829.83 | 14.14 | 12/02/2014 | 9540.00 | 16.42 |
| 14/02/2014 | 1838.63 | 13.57 | 13/02/2014 | 9596.77 | 16.13 |
| 18/02/2014 | 1840.76 | 13.87 | 14/02/2014 | 9662.40 | 15.46 |
| 19/02/2014 | 1828.75 | 15.5 | 17/02/2014 | 9656.76 | 15.93 |
| 20/02/2014 | 1839.78 | 14.79 | 18/02/2014 | 9659.78 | 15.99 |
| 21/02/2014 | 1836.25 | 14.68 | 19/02/2014 | 9660.05 | 16.09 |
| 24/02/2014 | 1847.61 | 14.23 | 20/02/2014 | 9618.85 | 16.44 |
| 25/02/2014 | 1845.12 | 13.67 | 21/02/2014 | 9656.95 | 16.23 |
| 26/02/2014 | 1845.16 | 14.35 | 24/02/2014 | 9708.94 | 15.92 |
| 27/02/2014 | 1854.29 | 14.04 | 25/02/2014 | 9699.35 | 15.66 |
| 28/02/2014 | 1859.45 | 14 | 26/02/2014 | 9661.73 | 15.72 |
| 03/03/2014 | 1845.73 | 16 | 27/02/2014 | 9588.33 | 16.58 |
| 04/03/2014 | 1873.91 | 14.1 | 28/02/2014 | 9692.08 | 16.41 |

6 Anhang

| | | | | | |
|------------|---------|-------|------------|----------|-------|
| 05/03/2014 | 1873.81 | 13.89 | 03/03/2014 | 9358.89 | 21.22 |
| 06/03/2014 | 1877.03 | 14.21 | 04/03/2014 | 9589.15 | 17.99 |
| 07/03/2014 | 1878.04 | 14.11 | 05/03/2014 | 9542.02 | 18.18 |
| 10/03/2014 | 1877.17 | 14.2 | 06/03/2014 | 9542.87 | 17.61 |
| 11/03/2014 | 1867.63 | 14.8 | 07/03/2014 | 9350.75 | 19.57 |
| 12/03/2014 | 1868.2 | 14.47 | 10/03/2014 | 9265.50 | 19.99 |
| 13/03/2014 | 1846.34 | 16.22 | 11/03/2014 | 9307.79 | 19.40 |
| 14/03/2014 | 1841.13 | 17.82 | 12/03/2014 | 9188.69 | 19.89 |
| 17/03/2014 | 1858.83 | 15.64 | 13/03/2014 | 9017.79 | 21.19 |
| 18/03/2014 | 1872.25 | 14.52 | 14/03/2014 | 9056.41 | 22.11 |
| 19/03/2014 | 1860.77 | 15.12 | 17/03/2014 | 9180.89 | 20.43 |
| 20/03/2014 | 1872.01 | 14.52 | 18/03/2014 | 9242.55 | 19.38 |
| 21/03/2014 | 1866.52 | 15 | 19/03/2014 | 9277.05 | 19.26 |
| 24/03/2014 | 1857.44 | 15.09 | 20/03/2014 | 9296.12 | 18.20 |
| 25/03/2014 | 1865.62 | 14.02 | 21/03/2014 | 9342.94 | 17.09 |
| 26/03/2014 | 1852.56 | 14.93 | 24/03/2014 | 9188.77 | 19.15 |
| 27/03/2014 | 1849.04 | 14.62 | 25/03/2014 | 9338.40 | 18.07 |
| 28/03/2014 | 1857.62 | 14.41 | 26/03/2014 | 9448.58 | 17.24 |
| 31/03/2014 | 1872.34 | 13.88 | 27/03/2014 | 9451.21 | 17.57 |
| 01/04/2014 | 1885.52 | 13.1 | 28/03/2014 | 9587.19 | 16.81 |
| 02/04/2014 | 1890.9 | 13.09 | 31/03/2014 | 9555.91 | 17.36 |
| 03/04/2014 | 1888.77 | 13.37 | 01/04/2014 | 9603.71 | 16.66 |
| 04/04/2014 | 1865.09 | 13.96 | 02/04/2014 | 9623.36 | 16.32 |
| 07/04/2014 | 1845.04 | 15.57 | 03/04/2014 | 9628.82 | 15.71 |
| 08/04/2014 | 1851.96 | 14.89 | 04/04/2014 | 9695.77 | 15.15 |
| 09/04/2014 | 1872.18 | 13.82 | 07/04/2014 | 9510.85 | 17.69 |
| 10/04/2014 | 1833.08 | 15.89 | 08/04/2014 | 9490.79 | 17.35 |
| 11/04/2014 | 1815.69 | 17.03 | 09/04/2014 | 9506.35 | 16.67 |
| 14/04/2014 | 1830.61 | 16.11 | 10/04/2014 | 9454.54 | 17.15 |
| 15/04/2014 | 1842.98 | 15.61 | 11/04/2014 | 9315.29 | 18.40 |
| 16/04/2014 | 1862.31 | 14.18 | 14/04/2014 | 9339.17 | 18.56 |
| 17/04/2014 | 1864.85 | 13.36 | 15/04/2014 | 9173.71 | 19.71 |
| 21/04/2014 | 1871.89 | 13.25 | 16/04/2014 | 9317.82 | 17.95 |
| 22/04/2014 | 1879.55 | 13.19 | 17/04/2014 | 9409.71 | 17.37 |
| 23/04/2014 | 1875.39 | 13.27 | 22/04/2014 | 9600.09 | 17.01 |
| 24/04/2014 | 1878.61 | 13.32 | 23/04/2014 | 9544.19 | 17.26 |
| 25/04/2014 | 1863.4 | 14.06 | 24/04/2014 | 9548.68 | 17.41 |
| 28/04/2014 | 1869.43 | 13.97 | 25/04/2014 | 9401.55 | 18.77 |
| 29/04/2014 | 1878.33 | 13.71 | 28/04/2014 | 9446.36 | 18.54 |
| 30/04/2014 | 1883.95 | 13.41 | 29/04/2014 | 9584.12 | 17.27 |
| 01/05/2014 | 1883.68 | 13.25 | 30/04/2014 | 9603.23 | 17.04 |
| 02/05/2014 | 1881.14 | 12.91 | 02/05/2014 | 9556.02 | 18.10 |
| 05/05/2014 | 1884.66 | 13.29 | 05/05/2014 | 9529.50 | 18.54 |
| 06/05/2014 | 1867.72 | 13.8 | 06/05/2014 | 9467.53 | 19.15 |
| 07/05/2014 | 1878.21 | 13.4 | 07/05/2014 | 9521.30 | 18.54 |
| 08/05/2014 | 1875.63 | 13.43 | 08/05/2014 | 9607.40 | 17.94 |
| 09/05/2014 | 1878.48 | 12.92 | 09/05/2014 | 9581.45 | 17.27 |
| 12/05/2014 | 1896.65 | 12.23 | 12/05/2014 | 9702.46 | 16.38 |
| 13/05/2014 | 1897.45 | 12.13 | 13/05/2014 | 9754.43 | 15.99 |
| 14/05/2014 | 1888.53 | 12.17 | 14/05/2014 | 9754.39 | 16.12 |
| 15/05/2014 | 1870.85 | 13.17 | 15/05/2014 | 9656.05 | 17.90 |
| 16/05/2014 | 1877.86 | 12.44 | 16/05/2014 | 9629.10 | 17.50 |
| 19/05/2014 | 1885.08 | 12.42 | 19/05/2014 | 9659.39 | 17.02 |
| 20/05/2014 | 1872.83 | 12.96 | 20/05/2014 | 9639.08 | 16.89 |
| 21/05/2014 | 1888.03 | 11.91 | 21/05/2014 | 9697.87 | 16.06 |
| 22/05/2014 | 1892.49 | 12.03 | 22/05/2014 | 9720.91 | 15.65 |
| 23/05/2014 | 1900.53 | 11.36 | 23/05/2014 | 9768.01 | 15.52 |
| 27/05/2014 | 1911.91 | 11.51 | 26/05/2014 | 9892.82 | 15.25 |
| 28/05/2014 | 1909.78 | 11.68 | 27/05/2014 | 9940.82 | 15.36 |
| 29/05/2014 | 1920.03 | 11.57 | 28/05/2014 | 9939.17 | 15.42 |
| 30/05/2014 | 1923.57 | 11.4 | 29/05/2014 | 9938.90 | 15.57 |
| 02/06/2014 | 1924.97 | 11.58 | 30/05/2014 | 9943.27 | 15.54 |
| 03/06/2014 | 1924.24 | 11.87 | 02/06/2014 | 9950.12 | 15.77 |
| 04/06/2014 | 1927.88 | 12.08 | 03/06/2014 | 9919.74 | 16.33 |
| 05/06/2014 | 1940.46 | 11.68 | 04/06/2014 | 9926.67 | 16.26 |
| 06/06/2014 | 1949.44 | 10.73 | 05/06/2014 | 9947.83 | 15.11 |
| 09/06/2014 | 1951.27 | 11.15 | 06/06/2014 | 9987.19 | 14.14 |
| 10/06/2014 | 1950.79 | 10.99 | 09/06/2014 | 10008.63 | 13.86 |
| 11/06/2014 | 1943.89 | 11.6 | 10/06/2014 | 10028.80 | 13.56 |
| 12/06/2014 | 1930.11 | 12.56 | 11/06/2014 | 9949.81 | 14.14 |

6.1 Daten

| | | | | | |
|------------|---------|-------|------------|----------|-------|
| 13/06/2014 | 1936.16 | 12.18 | 12/06/2014 | 9938.70 | 13.90 |
| 16/06/2014 | 1937.78 | 12.65 | 13/06/2014 | 9912.87 | 14.48 |
| 17/06/2014 | 1941.99 | 12.06 | 16/06/2014 | 9883.98 | 15.21 |
| 18/06/2014 | 1956.98 | 10.61 | 17/06/2014 | 9920.32 | 14.47 |
| 19/06/2014 | 1959.48 | 10.62 | 18/06/2014 | 9930.33 | 14.48 |
| 20/06/2014 | 1962.87 | 10.85 | 19/06/2014 | 10004.00 | 13.26 |
| 23/06/2014 | 1962.61 | 10.98 | 20/06/2014 | 9987.24 | 12.98 |
| 24/06/2014 | 1949.98 | 12.13 | 23/06/2014 | 9920.92 | 14.15 |
| 25/06/2014 | 1959.53 | 11.59 | 24/06/2014 | 9938.08 | 13.43 |
| 26/06/2014 | 1957.22 | 11.63 | 25/06/2014 | 9867.75 | 14.23 |
| 27/06/2014 | 1960.96 | 11.26 | 26/06/2014 | 9804.90 | 14.54 |
| 30/06/2014 | 1960.23 | 11.57 | 27/06/2014 | 9815.17 | 14.69 |
| 01/07/2014 | 1973.32 | 11.15 | 30/06/2014 | 9833.07 | 14.75 |
| 02/07/2014 | 1974.62 | 10.82 | 01/07/2014 | 9902.41 | 14.01 |
| 03/07/2014 | 1985.44 | 10.32 | 02/07/2014 | 9911.27 | 13.65 |
| 07/07/2014 | 1977.65 | 11.33 | 03/07/2014 | 10029.43 | 12.41 |
| 08/07/2014 | 1963.71 | 11.98 | 04/07/2014 | 10009.08 | 12.17 |
| 09/07/2014 | 1972.83 | 11.65 | 07/07/2014 | 9906.07 | 13.25 |
| 10/07/2014 | 1964.68 | 12.59 | 08/07/2014 | 9772.67 | 14.82 |
| 11/07/2014 | 1967.57 | 12.08 | 09/07/2014 | 9808.20 | 14.41 |
| 14/07/2014 | 1977.1 | 11.82 | 10/07/2014 | 9659.13 | 15.64 |
| 15/07/2014 | 1973.28 | 11.96 | 11/07/2014 | 9666.34 | 15.67 |
| 16/07/2014 | 1981.57 | 11 | 14/07/2014 | 9783.01 | 14.35 |
| 17/07/2014 | 1958.12 | 14.54 | 15/07/2014 | 9719.41 | 15.09 |
| 18/07/2014 | 1978.22 | 12.06 | 16/07/2014 | 9859.27 | 13.83 |
| 21/07/2014 | 1973.63 | 12.81 | 17/07/2014 | 9753.88 | 15.77 |
| 22/07/2014 | 1983.53 | 12.24 | 18/07/2014 | 9720.02 | 15.98 |
| 23/07/2014 | 1987.01 | 11.52 | 21/07/2014 | 9612.05 | 16.97 |
| 24/07/2014 | 1987.98 | 11.84 | 22/07/2014 | 9734.33 | 15.35 |
| 25/07/2014 | 1978.34 | 12.69 | 23/07/2014 | 9753.56 | 14.93 |
| 28/07/2014 | 1978.91 | 12.56 | 24/07/2014 | 9794.06 | 14.29 |
| 29/07/2014 | 1969.95 | 13.28 | 25/07/2014 | 9644.01 | 15.78 |
| 30/07/2014 | 1970.07 | 13.33 | 28/07/2014 | 9598.17 | 16.25 |
| 31/07/2014 | 1930.67 | 16.95 | 29/07/2014 | 9653.63 | 15.78 |
| 01/08/2014 | 1925.15 | 17.03 | 30/07/2014 | 9593.68 | 16.40 |
| 04/08/2014 | 1938.99 | 15.12 | 31/07/2014 | 9407.48 | 18.24 |
| 05/08/2014 | 1920.21 | 16.87 | 01/08/2014 | 9210.08 | 19.21 |
| 06/08/2014 | 1920.24 | 16.37 | 04/08/2014 | 9154.14 | 19.07 |
| 07/08/2014 | 1909.57 | 16.66 | 05/08/2014 | 9189.74 | 18.37 |
| 08/08/2014 | 1931.59 | 15.77 | 06/08/2014 | 9130.04 | 19.12 |
| 11/08/2014 | 1936.92 | 14.23 | 07/08/2014 | 9038.97 | 20.12 |
| 12/08/2014 | 1933.75 | 14.13 | 08/08/2014 | 9009.32 | 20.68 |
| 13/08/2014 | 1946.72 | 12.9 | 11/08/2014 | 9180.74 | 18.96 |
| 14/08/2014 | 1955.18 | 12.42 | 12/08/2014 | 9069.47 | 19.24 |
| 15/08/2014 | 1955.06 | 13.15 | 13/08/2014 | 9198.88 | 18.07 |
| 18/08/2014 | 1971.74 | 12.32 | 14/08/2014 | 9225.10 | 17.20 |
| 19/08/2014 | 1981.6 | 12.21 | 15/08/2014 | 9092.60 | 20.26 |
| 20/08/2014 | 1986.51 | 11.78 | 18/08/2014 | 9245.33 | 17.90 |
| 21/08/2014 | 1992.37 | 11.76 | 19/08/2014 | 9334.28 | 17.07 |
| 22/08/2014 | 1988.4 | 11.47 | 20/08/2014 | 9314.57 | 17.13 |
| 25/08/2014 | 1997.92 | 11.7 | 21/08/2014 | 9401.53 | 16.21 |
| 26/08/2014 | 2000.02 | 11.63 | 22/08/2014 | 9339.17 | 17.28 |
| 27/08/2014 | 2000.12 | 11.78 | 25/08/2014 | 9510.14 | 16.50 |
| 28/08/2014 | 1996.74 | 12.05 | 26/08/2014 | 9588.15 | 15.88 |
| 29/08/2014 | 2003.37 | 11.98 | 27/08/2014 | 9569.71 | 16.33 |
| 02/09/2014 | 2002.28 | 12.25 | 28/08/2014 | 9462.56 | 17.66 |
| 03/09/2014 | 2000.72 | 12.36 | 29/08/2014 | 9470.17 | 17.76 |
| 04/09/2014 | 1997.65 | 12.64 | 01/09/2014 | 9479.03 | 18.04 |
| 05/09/2014 | 2007.71 | 12.09 | 02/09/2014 | 9507.02 | 17.94 |
| 08/09/2014 | 2001.54 | 12.66 | 03/09/2014 | 9626.49 | 17.26 |
| 09/09/2014 | 1988.44 | 13.5 | 04/09/2014 | 9724.26 | 16.69 |
| 10/09/2014 | 1995.69 | 12.88 | 05/09/2014 | 9747.02 | 16.51 |
| 11/09/2014 | 1997.45 | 12.8 | 08/09/2014 | 9758.03 | 16.62 |
| 12/09/2014 | 1985.54 | 13.31 | 09/09/2014 | 9710.70 | 16.24 |
| 15/09/2014 | 1984.13 | 14.12 | 10/09/2014 | 9700.17 | 16.30 |
| 16/09/2014 | 1998.98 | 12.73 | 11/09/2014 | 9691.28 | 16.18 |
| 17/09/2014 | 2001.57 | 12.65 | 12/09/2014 | 9651.13 | 15.57 |
| 18/09/2014 | 2011.36 | 12.03 | 15/09/2014 | 9659.63 | 15.96 |
| 19/09/2014 | 2010.4 | 12.11 | 16/09/2014 | 9632.93 | 16.27 |
| 22/09/2014 | 1994.29 | 13.69 | 17/09/2014 | 9661.50 | 15.87 |

6 Anhang

| | | | | | |
|------------|---------|-------|------------|----------|-------|
| 23/09/2014 | 1982.77 | 14.93 | 18/09/2014 | 9798.13 | 15.67 |
| 24/09/2014 | 1998.3 | 13.27 | 19/09/2014 | 9799.26 | 14.23 |
| 25/09/2014 | 1965.99 | 15.64 | 22/09/2014 | 9749.54 | 15.08 |
| 26/09/2014 | 1982.85 | 14.85 | 23/09/2014 | 9595.03 | 16.54 |
| 29/09/2014 | 1977.8 | 15.98 | 24/09/2014 | 9661.97 | 15.47 |
| 30/09/2014 | 1972.29 | 16.31 | 25/09/2014 | 9510.01 | 16.96 |
| 01/10/2014 | 1946.16 | 16.71 | 26/09/2014 | 9490.55 | 17.22 |
| 02/10/2014 | 1946.17 | 16.16 | 29/09/2014 | 9422.91 | 18.36 |
| 03/10/2014 | 1967.9 | 14.55 | 30/09/2014 | 9474.30 | 17.34 |
| 06/10/2014 | 1964.82 | 15.46 | 01/10/2014 | 9382.03 | 18.16 |
| 07/10/2014 | 1935.1 | 17.2 | 02/10/2014 | 9195.68 | 19.47 |
| 08/10/2014 | 1968.89 | 15.11 | 06/10/2014 | 9209.51 | 19.12 |
| 09/10/2014 | 1928.21 | 18.76 | 07/10/2014 | 9086.21 | 19.49 |
| 10/10/2014 | 1906.13 | 21.24 | 08/10/2014 | 8995.33 | 19.38 |
| 13/10/2014 | 1874.74 | 24.64 | 09/10/2014 | 9005.02 | 19.23 |
| 14/10/2014 | 1877.7 | 22.79 | 10/10/2014 | 8788.81 | 21.92 |
| 15/10/2014 | 1862.49 | 26.25 | 13/10/2014 | 8812.43 | 22.29 |
| 16/10/2014 | 1862.76 | 25.2 | 14/10/2014 | 8825.21 | 22.54 |
| 17/10/2014 | 1886.76 | 21.99 | 15/10/2014 | 8571.95 | 26.47 |
| 20/10/2014 | 1904.01 | 18.57 | 16/10/2014 | 8582.90 | 28.66 |
| 21/10/2014 | 1941.28 | 16.08 | 17/10/2014 | 8850.27 | 22.19 |
| 22/10/2014 | 1927.11 | 17.87 | 20/10/2014 | 8717.76 | 23.14 |
| 23/10/2014 | 1950.82 | 16.53 | 21/10/2014 | 8886.96 | 20.38 |
| 24/10/2014 | 1964.58 | 16.11 | 22/10/2014 | 8940.14 | 19.92 |
| 27/10/2014 | 1961.63 | 16.04 | 23/10/2014 | 9047.31 | 20.38 |
| 28/10/2014 | 1985.05 | 14.39 | 24/10/2014 | 8987.80 | 21.21 |
| 29/10/2014 | 1982.3 | 15.15 | 27/10/2014 | 8902.61 | 22.60 |
| 30/10/2014 | 1994.65 | 14.52 | 28/10/2014 | 9068.19 | 19.93 |
| 31/10/2014 | 2018.05 | 14.03 | 29/10/2014 | 9082.81 | 20.14 |
| 03/11/2014 | 2017.81 | 14.73 | 30/10/2014 | 9114.84 | 19.91 |
| 04/11/2014 | 2012.1 | 14.89 | 31/10/2014 | 9326.87 | 19.76 |
| 05/11/2014 | 2023.57 | 14.17 | 03/11/2014 | 9251.70 | 21.06 |
| 06/11/2014 | 2031.21 | 13.67 | 04/11/2014 | 9166.47 | 21.84 |
| 07/11/2014 | 2031.92 | 13.12 | 05/11/2014 | 9315.48 | 21.69 |
| 10/11/2014 | 2038.26 | 12.67 | 06/11/2014 | 9377.41 | 20.02 |
| 11/11/2014 | 2039.68 | 12.92 | 07/11/2014 | 9291.83 | 20.21 |
| 12/11/2014 | 2038.25 | 13.02 | 10/11/2014 | 9351.87 | 18.90 |
| 13/11/2014 | 2039.33 | 13.79 | 11/11/2014 | 9369.03 | 17.98 |
| 14/11/2014 | 2039.82 | 13.31 | 12/11/2014 | 9210.96 | 20.26 |
| 17/11/2014 | 2041.32 | 13.99 | 13/11/2014 | 9248.51 | 19.32 |
| 18/11/2014 | 2051.8 | 13.86 | 14/11/2014 | 9252.94 | 18.93 |
| 19/11/2014 | 2048.72 | 13.96 | 17/11/2014 | 9306.35 | 19.15 |
| 20/11/2014 | 2052.75 | 13.58 | 18/11/2014 | 9456.53 | 18.13 |
| 21/11/2014 | 2063.5 | 12.9 | 19/11/2014 | 9472.80 | 18.58 |
| 24/11/2014 | 2069.41 | 12.62 | 20/11/2014 | 9483.97 | 18.57 |
| 25/11/2014 | 2067.03 | 12.25 | 21/11/2014 | 9732.55 | 18.17 |
| 26/11/2014 | 2072.83 | 12.07 | 24/11/2014 | 9785.54 | 18.58 |
| 28/11/2014 | 2067.56 | 13.33 | 25/11/2014 | 9861.21 | 18.25 |
| 01/12/2014 | 2053.44 | 14.29 | 26/11/2014 | 9915.56 | 17.61 |
| 02/12/2014 | 2066.55 | 12.85 | 27/11/2014 | 9974.87 | 17.66 |
| 03/12/2014 | 2074.33 | 12.47 | 28/11/2014 | 9980.85 | 17.59 |
| 04/12/2014 | 2071.92 | 12.38 | 01/12/2014 | 9963.51 | 18.69 |
| 05/12/2014 | 2075.37 | 11.82 | 02/12/2014 | 9934.08 | 18.70 |
| 08/12/2014 | 2060.31 | 14.21 | 03/12/2014 | 9971.79 | 18.10 |
| 09/12/2014 | 2059.82 | 14.89 | 04/12/2014 | 9851.35 | 17.45 |
| 10/12/2014 | 2026.14 | 18.53 | 05/12/2014 | 10087.12 | 15.95 |
| 11/12/2014 | 2035.33 | 20.08 | 08/12/2014 | 10014.99 | 16.57 |
| 12/12/2014 | 2002.33 | 21.08 | 09/12/2014 | 9793.71 | 19.90 |
| 15/12/2014 | 1989.63 | 20.42 | 10/12/2014 | 9799.73 | 19.98 |
| 16/12/2014 | 1972.74 | 23.57 | 11/12/2014 | 9862.53 | 19.58 |
| 17/12/2014 | 2012.89 | 19.44 | 12/12/2014 | 9594.73 | 23.25 |
| 18/12/2014 | 2061.23 | 16.81 | 15/12/2014 | 9334.01 | 26.13 |
| 19/12/2014 | 2070.65 | 16.49 | 16/12/2014 | 9563.89 | 24.42 |
| 22/12/2014 | 2078.54 | 15.25 | 17/12/2014 | 9544.43 | 24.04 |
| 23/12/2014 | 2082.17 | 14.8 | 18/12/2014 | 9811.06 | 20.58 |
| 24/12/2014 | 2081.88 | 14.37 | 19/12/2014 | 9786.96 | 20.58 |
| 26/12/2014 | 2088.77 | 14.5 | 22/12/2014 | 9865.76 | 20.25 |
| 29/12/2014 | 2090.57 | 15.06 | 23/12/2014 | 9922.11 | 20.39 |
| 30/12/2014 | 2080.35 | 15.92 | 29/12/2014 | 9927.13 | 22.22 |
| 31/12/2014 | 2058.9 | 19.2 | 30/12/2014 | 9805.55 | 22.96 |

6.2 Matlab-Codes

Die Berechnung im letzten Kapitel erfolgte mittels Matlab. Hierbei wurden folgende Programme verwendet.

```

1 function VarVos(N_var ,K_var ,N_vos ,K_vos)
2
3 % Auszahlungsfunktionen für Variance Swap und Volatility Swap
4 % Autor: Stephan Aigner
5 % input: Nominale des Variance Swap N_var, Strike des Variance Swap
   K_var ,
6 % Nominale des Volatility Swap N_vos, Strike des Volatility Swap
   K_vos
7 % output: Auszahlungsfunktionen für Variance Call und Volatility Swap
8 % inklusive Darstellung des Konvexitätsfehlers
9
10 x = 0.1:0.01:0.4;
11 var =@(x) (x.^2 - K_var).*N_var;
12 vos =@(x) (x - K_vos).*N_vos;
13 err =@(x) var(x)-vos(x);
14
15 figure(1);
16 plot(x, var(x),x, vos(x));
17 title('VIX und S&P500');
18 xlabel('Volatilität \sigma');
19 ylabel('Auszahlung');
20 legend('Variance Swap', 'Volatility Swap', 'Location', 'Northwest');
21 xticks = 0.1:0.05:0.4;
22 set(gca, 'XTickMode', 'manual', 'XTick', xticks, 'xlim', [0.1,0.4]);
23 set(gca, 'FontSize',14);
24 grid on;
25
26 figure(2);
27 plot(x, err(x));
28 title('Konvexitätsfehler');
29 xlabel('Volatilität \sigma');
30 ylabel('Abweichung');
31 xticks = 0.1:0.05:0.4;
32 set(gca, 'XTickMode', 'manual', 'XTick', xticks, 'xlim', [0.1,0.4]);
33 set(gca, 'FontSize',14);

```

6 Anhang

```
34 grid on;  
35  
36 end
```

Code 6.1: Vergleich der Auszahlungsfunktionen eines Variance Swap und Volatility Swap

```
1 function [CallCEV] = CEVModel(S,K,t,T,sigma,gamma_0)  
2  
3 % Berechnung Variance Call im CEV Modell  
4 % Autor: Stephan Aigner  
5 % input: Anfangswert S, Strike K, Zeitpunkt t, Laufzeit T,  
6 % Volatilität  
7 % sigma, Konstante gam  
8 % output: Preis für einen Variance Call  
9  
10 a = (K.^2*(1-gamma_0))/((1-gamma_0)^2*sigma^2*(T-t));  
11 b = 1/(abs(gamma_0-1));  
12 c = S^(2*(1-gamma_0))/((1-gamma_0)^2*sigma^2*(T-t));  
13 CallCEV = S*(1-ncx2cdf(a,b+2,c))-K.*ncx2cdf(c,b,a);  
14  
15 end
```

Code 6.2: Berechnung des Preises eines Variance Call für das CEV-Modell

```
1 function [CallSABR] = SABRModel(S,K,t,T,sigma_0,alpha_0,beta_0,rho)  
2  
3 % Berechnung Variance Call im SABR-Modell  
4 % Autor: Stephan Aigner  
5 % input: Anfangswert S, Strike K, Zeitpunkt t, Laufzeit T,  
6 % Volatilität der  
7 % Vola alpha, Konstante beta, Korrelation rho  
8 % output: Preis für einen Variance Call  
9  
10 eps_0 = T.*alpha_0.^2;  
11 S_m = (S+K)./2;  
12 zeta = alpha_0./(sigma_0.*(1-beta_0)).*(S^(1-beta_0)-K^(1-beta_0));  
13 D =@(zeta) log((sqrt(1-2.*rho.*zeta+zeta.^2)+zeta-rho)./(1-rho));  
14 gamma_1 = beta_0./S_m;  
15 gamma_2 = -(beta_0.*(1-beta_0))./(S_m.^2);
```

```

16 if S~=K
17     sigma_imp = alpha_0.*(log(S./K))./(D(zeta)).*(1 + ((2.*gamma_2-
gamma_1.^2+1./S_m.^2) ./24.*((sigma_0.*S_m.^beta_0)./(alpha_0)).^2
+ ((rho.*gamma_1) ./4) .*((sigma_0.*S_m.^beta_0)./(alpha_0)) +
((2-3.*rho.^2) ./24)).*eps_0);
18 else
19     sigma_imp = sigma_0./S.^(1-beta_0).*(1+(((1-beta_0).^2./24) .*
sigma_0.^2./S.^(2-2.*beta_0))+1/4.*((rho.*beta_0.*alpha_0.*sigma_0
)./(S.^(1-beta_0)))+(2-3.*rho.^2) ./24) .* alpha_0.^2) .*T);
20 end
21
22 d_1 = (log(S./K) + (sigma_imp.^2./2) .* (T-t))./(sigma_imp.*sqrt(T-t));
23 d_2 = d_1 - sigma_imp.*sqrt(T-t);
24
25 CallSABR = S.*normcdf(d_1) - K.*normcdf(d_2);
26
27 end

```

Code 6.3: Berechnung des Preises eines Variance Call für das SABR-Modell

```

1 function [CallJump] = JumpModel(S,K,T,sigma,lambda,mu,var,n)
2
3 % Berechnung Variance Call im Merton-Sprung-Modell
4 % Autor: Stephan Aigner
5 % input: Anfangswert S, Strike K, Laufzeit T, Volatilität
6 % sigma, Zinsrate r, Dividenden q, Poisson-Rate lambda,
7 % Sprung-Mittelwert mu, Sprung-Std-Abweichung var, Zählvariable n
  (<170)
8 % output: Preis für einen Variance Call
9
10 [K,T] = meshgrid(K,T);
11 [u,v] = size(K);
12 K = K(:, :, ones(1,1,n)); T = T(:, :, ones(1,1,n));
13 n = ones(1,1,n); n(:)=0:size(n,3)-1; factn = factorial(n);
14 n = n(ones(u,1),ones(1,v),:); factn = factn(ones(u,1),ones(1,v),:);
15
16 m = mu+0.5*var.^2;
17 lambda_1 = lambda.*exp(m);
18 r_n = - lambda*(exp(m)-1) + n.*(m)./T;
19 sigma_n = sqrt(sigma.^2 + (n*var.^2)./T);
20

```

6 Anhang

```
21 N_Verteilung =@(x) 0.5*(1.+ erf(x./sqrt(2)));
22
23 d_1 = @(sigma,r) ((1./(sigma.*(T.^(0.5)))).*(log(S./K) + (r+0.5*(
    sigma.^2)).*T));
24 d_2 = @(sigma,r) ((1./(sigma.*(T.^(0.5)))).*(log(S./K) + (r-0.5*(
    sigma.^2)).*T));
25 CallBS = @(sigma,r) (((1./factn).*exp(-lambda_1.*T)).*(lambda_1.*T).^n
    ).*(S.*N_Verteilung(d_1(sigma,r)) - K.*exp(-r.*T).*N_Verteilung(
    d_2(sigma,r)));
26
27 CallJump = sum(CallBS(sigma_n,r_n),3);
28
29 end
```

Code 6.4: Berechnung des Preises eines Variance Call für das Merton-Sprung-Modell

Literaturverzeichnis

- [1] P. Carr, R. Lee: *Hedging variance options on continuous semimartingales*, Springer Verlag, 2009.
- [2] A.N. Kolmogoroff: *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Mathematische Annalen 104: 149-160, 1931.
- [3] A. Borodin, P. Salminen: *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae*, 2nd Edition, Birkhäuser, 2002
- [4] K.E. Dambis: *On the decomposition of continous submartingales*, Theory of Probability and its Applications 10(3): 401-410, 1965
- [5] L.E. Dubins, G. Schwarz: *On continous martingales*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 53(5):913-916, 1965
- [6] B. Dupire: *Volatility derivatives modeling*, New York University - www.math.nyu.edu/~carrp/mfseminar/bruno.ppt, 2005
- [7] R. Lee: *Option pricing by transform methods: Extensions, unification, and error control*, Journal of Computational Finance 7(3): 51-86, 2004
- [8] A. Cox, D. Hobson: *Local Martingales, bubbles and option prices*, Finance Stoch. 9: 477-492, 2005
- [9] J. Gatheral: *The Volatility Surface*, John Wiley & Sons Inc., 2006
- [10] R. Merton: *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Financial Economics 3: 125-144, 1976
- [11] D. Cox, H. Miller: *The Theory of Stochastic Processes*, Methuen and Co. Ltd., 1965
- [12] J. Cox, S. Ross: *The valuation of options for alternative stochastic processes*, Journal of Financial Economics 3: 145-166, 1976
- [13] W. Feller: *Two singular diffusion problems*, Annals of Mathematics 54(1), 173-182, 1951