

Studienrichtung Vermessungswesen  
Technische Universität Wien

G E O W I S S E N S C H A F T L I C H E  
M I T T E I L U N G E N

Heft 41

**Die Lösung photogrammetrischer Orientierungs- und  
Rekonstruktionsaufgaben mittels allgemeiner kurven-  
förmiger Elemente**

von  
Gerald Forkert

Veröffentlichung des Institutes für Photogrammetrie und Fernerkundung

Studienrichtung Vermessungswesen  
Technische Universität Wien

G E O W I S S E N S C H A F T L I C H E  
M I T T E I L U N G E N

Heft 41

**Die Lösung photogrammetrischer Orientierungs- und  
Rekonstruktionsaufgaben mittels allgemeiner kurven-  
förmiger Elemente**

von  
Gerald Forkert

Veröffentlichung des Institutes für Photogrammetrie und Fernerkundung

Herausgeber und Verleger: O. Prof. Dr.-Ing. Karl Kraus  
Vorstand des Institutes für Photogrammetrie und Fernerkundung  
der Technischen Universität Wien  
A-1040 Wien, Gußhausstr. 27-29

Diese Arbeit wurde an der Technisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Technischen Universität Wien zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der technischen Wissenschaften eingereicht.

Die Kosten für den Druck wurden aus der ordentlichen Dotation und aus eigenen Einnahmen des Institutes für Photogrammetrie und Fernerkundung der Technischen Universität Wien getragen.

Druck: Eurographik Ges. m. b. H.  
1234 Wien

Auflage: 400 Stück

## **Kurzfassung**

Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie ist die Rekonstruktion von dreidimensionalen Objekten anhand ihrer Abbilder in Photos oder in digitalen Bildern. Die Bildorientierung ist die Voraussetzung für solch eine Objektrekonstruktion. In dieser Arbeit wird eine Methode zur Bildorientierung und Objektrekonstruktion mittels allgemeiner kurvenförmiger Merkmale vorgestellt, die die üblichen, auf punktförmiger Objektinformation basierenden Methoden ergänzen soll. Dieses Konzept eignet sich auch für die Bestimmung von Kurven zur Beschreibung der Orientierungselemente von Flugzeugscanneraufnahmen. Dies ermöglicht die Rektifizierung der gescannten Bilder.

Der theoretische Teil dieser Arbeit behandelt die Darstellung von allgemein geformten Kurven durch mehrdimensionale ausgleichende zusammengesetzte kubische Polynome. Der Interpolation sowie der Parametrisierung solch einer ausgleichenden Kurve ist ein eigener Abschnitt gewidmet. Zusätzlich wird eine Methode zur Beschaffung der erforderlichen Näherungswerte vorgestellt. Das folgende Kapitel befaßt sich mit der Realisierung der Theorie im Rahmen des Programmsystems ORIENT. Anschließend wird mit Hilfe von Testbeispielen die Bildorientierung und die Objektrekonstruktion mittels allgemeiner kurvenförmiger Merkmale demonstriert. Den Abschluß bilden Anwendungsbeispiele aus dem Bereich der Ingenieur- und Medizinphotogrammetrie.

## **Abstract**

The main task in photogrammetry is the reconstruction of three-dimensional objects from two-dimensional photographic or scanned images. Images must be orientated as a prerequisite for such a reconstruction. This work presents a method using free-formed curved features for object reconstruction and image orientation, complementing common methods based on distinct points. This method also allows the determination of curves representing the orientation parameters of images acquired by airborne scanner. This enables rectifying the scanned images.

The theoretical part of this work deals with the representation of multi-dimensional free-formed curves by adjusting joined cubic polynomials. The interpolation and the parametrization of the representational curve are examined in detail. Additionally, a method to determine the approximation values required for adjustment is presented. The following chapter is concerned with the application of the theory into the program system ORIENT. After that, worked examples illustrate the process of image orientation and object reconstruction using free-formed curved features. Finally some applications in the fields of engineering and medical photogrammetry are presented.

*Diese Arbeit wurde vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung im Rahmen des Projektes "Objektivierung der Ergebnisse chirurgischer Eingriffe" unterstützt.*

*Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Kraus; die Arbeit an dem von ihm vorbildlich geleiteten Institut hat mir stets große Freude bereitet. Weiters danke ich Herrn Doz. Dr. Überhuber für die Übernahme des Koreferates. Herrn Dr. Kager gebührt großer Dank für seine zahlreichen Anregungen zu dieser Arbeit. Schließlich danke ich all meinen Kollegen für ihre große Hilfsbereitschaft und die angenehme Zusammenarbeit.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b> .....	1
1.1 Aufgabenstellung .....	1
1.2 Zur Schreibweise mathematischer Formeln .....	4
<b>2 Theorie</b> .....	5
2.1 Grundkonzept einer ausgleichenden Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen .....	5
2.1.1 Kurvendarstellung mit Hilfe zusammengesetzter kubischer Polynome .....	7
2.1.2 Aufstellung der Verbesserungsgleichungen .....	8
2.1.3 Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate .....	11
2.2 Parametrisierung einer ausgleichenden Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen .....	16
2.2.1 Ausgleichung einer Funktion mit konstanter Parametrisierung .....	16
2.2.2 Ausgleichung einer Raumkurve mit konstanter Parametrisierung .....	17
2.2.3 Ausgleichung einer Raunkurve mit unbekannter Parametrisierung .....	19
2.2.3.1 Parametrisierung der genäherten Kurve .....	19
2.2.3.2 Parametrisierung eines Stützpunktes auf der genäherten Kurve .....	21
2.2.3.3 Reduktion der Verbesserungsgleichungen .....	23
2.2.3.4 Zusätzliche fiktive Beobachtungen für die Knotenparameter .....	27
2.3 Interpolation einer ausgleichenden Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen .....	29
2.3.1 Kubische Spline-Interpolation .....	30
2.3.1.1 Bestimmung der Interpolationskoeffizi- enten der kubischen Splinekurve .....	30
2.3.1.2 Verbesserungsgleichungen der aus- gleichenden kubischen Splinekurve .....	34
2.3.2 Schmiege-Interpolation .....	35
2.3.2.1 Bestimmung der Interpolationskoeffizi- enten der Schmiegekurve .....	35
2.3.2.2 Verbesserungsgleichungen der aus- gleichenden Schmiegekurve .....	38
2.3.3 Akima-Interpolation .....	41
2.3.3.1 Bestimmung der Interpolationskoeffizi- enten der Akimafunktion .....	41
2.3.3.2 Verbesserungsgleichungen der aus- gleichenden Akima-Funktion .....	43

2.3.4	Vergleich der Interpolationsmethoden	44
2.3.4.1	Interpolationseigenschaften	44
2.3.4.2	Eignung für die Darstellung von Raumkurven	47
2.3.4.3	Eigenschaften bei der Ausgleichung	49
2.4	Ermittlung von Näherungswerten für photogrammetrische Aufgabenstellungen	51
2.4.1	Approximation einer unbekanntes Raumkurve für einen photogrammetrischen Vorwärtsschnitt	51
2.4.2	Approximation der unbekanntes Stützpunkte für einen photogrammetrischen Rückwärtsschnitt	54
<b>3</b>	<b>Implementierung</b>	<b>56</b>
3.1	Erstellung von Prozeduren für eine ausgleichende Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen	56
3.1.1	Unterprogramm zur Aufstellung der Verbesserungsgleichungen	56
3.1.2	Unterprogramme für die Approximation von Raumkurven	60
3.2	Implementierung in das Programmsystem ORIENT	62
3.2.1	Datenbasis von ORIENT	62
3.2.1.1	Datenbasis im Falle einer Ausgleichung mit Raumkurven	63
3.2.1.2	Datenbasis im Falle einer parametrischen Rektifizierung von Flugzeugscanneraufnahmen	65
3.2.2	Benutzeroberfläche von ORIENT	66
<b>4</b>	<b>Anwendung</b>	<b>69</b>
4.1	Bildorientierung mittels Paßkurven	72
4.1.1	Anpassung der Paßkurven an feste Stützpunkte	73
4.1.2	Bildorientierung mit konstanten Paßkurven	78
4.1.3	Geometrische Voraussetzungen für eine Bildorientierung mit Paßkurven	84
4.2	Rekonstruktion einer Objektkurve durch photogrammetrischen Vorwärtsschnitt	87
4.2.1	Kurvenanpassung an die genäherten Stützpunkte	88
4.2.2	Rekonstruktion der Objektkurven	94
4.2.3	Geometrische Voraussetzungen für die Rekonstruktion einer Objektkurve durch photogrammetrischen Vorwärtsschnitt	101
4.3	Bündelblockausgleichung mit verknüpfenden Kurven	107
4.3.1	Bestimmung von Näherungswerten	109
4.3.2	Bildorientierung bei gleichzeitiger Rekonstruktion der Verknüpfungskurven	111
4.3.3	Geometrische Voraussetzungen für die Bündelblockausgleichung mit Verknüpfungskurven	117

4.4 Modellorientierung mit Hilfe von Paßkurven . . . . .	119
4.5 Rektifizierung von Flugzeugscanneraufnahmen . . . . .	121
4.6 Anwendungsbeispiele . . . . .	125
4.6.1 Rekonstruktion eines historischen Sportwagens . . . . .	125
4.6.2 Objektivierung gesichtschirurgischer Eingriffe . . . . .	128
4.6.2.1 Vergleich von Gesichtsoberflächen- modellen . . . . .	129
4.6.2.2 Vergleich von Schädelvolumsmodellen . . . . .	131
<b>5 Zusammenfassung und Ausblick . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>142</b>
<b>Lebenslauf . . . . .</b>	<b>145</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Aufgabenstellung

Die Hauptaufgabe der Photogrammetrie ist die möglichst genaue geometrische Rekonstruktion von räumlichen Objekten anhand ihrer Abbilder in Photos oder in digitalen Bildern. Das Einsatzgebiet erstreckt sich von Nahbereichsanwendungen, zum Beispiel in der medizinischen Photogrammetrie, bis hin zur Fernerkundung der Erdoberfläche. Die Auswertung der Bilder kann auch lange Zeit nach ihrer Aufnahme erfolgen, etwa zur Rekonstruktion von nicht mehr vorhandenen Objekten anhand historischer Photographien. Andererseits ermöglichen die in den letzten Jahren entwickelten digitalen Kameras die geometrische Bestimmung von Objekten bereits unmittelbar nach deren Aufnahme.

Der Zusammenhang zwischen einem Objekt und seinem Abbild wird mathematisch durch die Abbildungsgleichungen der Zentralprojektion beschrieben. Die Parameter der perspektiven Abbildung werden durch die Orientierung des Bildes gegenüber dem Objektkoordinatensystem bestimmt. Die äußere Orientierung wird durch den Aufnahmeort und die Rotation des Bildes definiert; die Lage des Aufnahmeortes in bezug auf die Bildebene legt die innere Orientierung des Bildes fest. Nach der Bildorientierung kann die Objektrekonstruktion durchgeführt werden.

Die traditionellen analytischen Methoden der Bildorientierung beruhen auf punktförmiger Objektinformation, also auf gemessenen ("beobachteten") Bildpunkten, die als Abbilder konkreter Objektpunkte identifiziert werden können. Diese Abbildung wird für jeden Bildpunkt durch die beiden Gleichungen für den Abbildungsstrahl ausgedrückt; jede Gleichung trägt zur Bestimmung eines unbekanntem Orientierungsparameters bei. Durch zusätzliche, redundante Beobachtungen ergibt sich ein überbestimmtes Gleichungssystem, dessen Lösung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate statistische Angaben über die Genauigkeit und die Zuverlässigkeit der Ergebnisse ermöglicht. Die wichtigsten Orientierungsverfahren sind:

- Die Einzelbildorientierung ("photogrammetrischer Rückwärtsschnitt") mit Hilfe von Paßpunkten, das sind Bildpunkte mit bekannten Objektkoordinaten.
- Die relative Orientierung mehrerer Bilder durch Verknüpfungspunkte. Als Verknüpfungspunkt kann jeder Objektpunkt, auch mit unbekanntem Objektkoordinaten, verwendet werden, der in mehreren Bildern abgebildet ist.
- Die absolute Orientierung eines aus mehreren relativ orientierten Bildern gebildeten Modells mit Hilfe von Paßpunkten.
- Die Bündelblockausgleichung, das ist die simultane relative und absolute Orientierung eines Bildverbandes mit Hilfe von Paß- und Verknüpfungspunkten.

Die traditionellen Auswertemethoden zur Objektrekonstruktion können prinzipiell unterschieden werden in:

- Die analoge "menschliche" Bildinterpretation, zum Beispiel optische punkt- und

linienweise Auswertung eines Stereomodells. Diese analogen Verfahren erfordern allerdings einen recht hohen Zeit- und Geräteaufwand.

Die analytische Bestimmung von Objektpunkten, zum Beispiel durch den Schnitt zweier Abbildungsstrahlen ("photogrammetrischer Vorwärtsschnitt"). Viele Objekte können jedoch nur unzureichend durch Punkte beschrieben werden (z.B. Landschaftsformen).

Die traditionellen analytischen Auswertemethoden zur Bildorientierung und Objektrekonstruktion beruhen auf Bildpunkten, die zuvor an einem optischen Auswertegerät von einem Menschen beobachtet wurden.

Aufgrund der zunehmenden Verfügbarkeit von digitalen Bildern und von immer leistungsfähigeren Computern eröffnen sich durch die Methoden der digitalen Bildverarbeitung neue Möglichkeiten zur Automatisierung der photogrammetrischen Auswertung. Im Gegensatz zur Robotik, wo für die Robotersteuerung sehr schnelle "Echtzeit"-Auswertungen digitaler Bilder entwickelt werden, liegt jedoch der Schwerpunkt bei den photogrammetrischen Auswertemethoden nach wie vor in der Genauigkeit und der Kontrollierbarkeit der Ergebnisse. Aus diesem Grund erfolgt die photogrammetrische Auswertung grundsätzlich weiterhin mit den oben beschriebenen analytischen Verfahren; allerdings wird die dafür erforderliche menschliche Bildbeobachtung zunehmend durch Methoden der digitalen Bildverarbeitung ergänzt oder gar völlig ersetzt. Dabei sind im wesentlichen drei Aufgaben zu lösen: die Extraktion der prinzipiell relevanten punkt- oder linienförmigen Bilddetails, das Auffinden von einander räumlich entsprechenden Bilddetails in den verschiedenen Bildern ("Grob-Matching"), und schließlich die exakte Lokalisierung dieser Bilddetails ("Fein-Matching"). Der Informationsgehalt von linienförmigen Bilddetails ist im allgemeinen größer als jener von Bildpunkten, daher eignen sich Objektlinien besser für das Auffinden von homologen Bilddetails.

Außerdem können, wie bereits erwähnt, viele Objekte nur unvollständig durch Punkte beschrieben werden. Ein aktuelles Forschungsziel der Photogrammetrie ist daher die Weiterentwicklung der traditionellen punktbezogenen analytischen Auswertemethoden zu "merkmalbezogenen" Methoden (engl.: "Feature Based Photogrammetry"). Unter "Merkmalen" versteht man ganz allgemein Punkte, Linien und Flächen des abgebildeten Objektes. Für die Verwendung von einfachen Merkmalen - wie etwa Geraden, Kreise oder Ebenen - im Zuge einzelner Auswerteverfahren existieren bereits zahlreiche Vorschläge. Strunz 1993 gibt einen Überblick über diese Methoden und über die entsprechenden Veröffentlichungen. Ein universeller Ansatz zur Berücksichtigung von Polynomkurven - etwa Geraden, Kreise, Parabeln - und von Polynomflächen - zum Beispiel Ebenen, Zylinder oder Hyperboloide - für die analytischen Auswerteverfahren stammt von Kager, Kraus 1976. Hier werden solche Merkmale als "fiktive Beobachtungen" behandelt und gemeinsam mit photogrammetrischen und geodätischen Punktbeobachtungen ausgeglichen. Die Realisierung dieses Konzeptes erfolgte durch das Programmsystem ORIENT (siehe z.B. Kager 1980, od. Kager 1989).

Alle analytischen Bildorientierungsverfahren können nun auch mit Paß- oder Verknüpfungslinien durchgeführt werden; Objektflächen eignen sich für die absolute Orientierung eines Modells und, falls Konturlinien der Fläche abgebildet sind, auch für die Einzelbildorientierung. Eine relative Bildorientierung ist jedoch mit Flächen nicht möglich. Die photogramm-

metrische Objektrekonstruktion kann durch Vorwärtsschnitt von Objektlinien und von Flächenstützpunkten erfolgen. Das Auffinden von Flächenstützpunkten setzt allerdings eine texturierte Oberfläche voraus. Für die analytische photogrammetrische Auswertung haben also Objektlinien an sich einen höheren Informationsgehalt als Objektflächen; aus diesem Grund beschäftigt sich die vorliegende Arbeit in der Folge mit der Weiterentwicklung der linienbezogenen Auswerteverfahren. Viele Objektkonturen lassen sich nämlich durch die oben erwähnten einfachen Linien (Gerade, Kreise, Parabeln, usw.) nur unzureichend beschreiben, zum Beispiel natürliche Kurven wie Wegränder oder Gesichtskonturen. Konzepte für die Einzelbildorientierung mit allgemein geformten ebenen Kurven wurden bereits in Masry 1981 und in Lugnani 1982 vorgestellt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun die Entwicklung und die Realisierung eines universellen Konzeptes zur Berücksichtigung allgemein geformter räumlicher Kurven für die Bildorientierung und die Objektrekonstruktion. Dieses Konzept wurde erstmals in Forkert 1993 vorgestellt.

Das Konzept soll sich jedoch nicht nur auf Raumkurven beschränken, sondern vielmehr zur Berücksichtigung beliebig-dimensionaler Kurven geeignet sein. Dies ermöglicht die Orientierung von Flugzeugscanneraufnahmen: jede Bildzeile der aufgenommenen Bildmatrix stellt im Prinzip eine eigene perspektive Abbildung dar. Aufgrund der stetigen Flugbewegung kann daher die äußere Orientierung der gesamten Scanneraufnahme durch eine mehrdimensionale Funktion beschrieben werden. Die Bestimmung der Funktionsparameter kann zum Beispiel mit Hilfe von terrestrischen Paßmerkmalen erfolgen.

## 1.2 Zur Schreibweise mathematischer Formeln

Für die Schreibweise der im folgenden verwendeten mathematischen Formeln gelten folgende Vereinbarungen:

- Skalare werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet (z.B.  $a_1$ ), Vektoren mit Großbuchstaben (z.B.  $A = a_1, a_2, a_3$ ) und Matrizen mit fetten Großbuchstaben (z.B.  $A$ ).
- Funktionen werden aufrecht geschrieben, z.B.  $f(t)$ .
- Das Skalarprodukt zweier Vektoren, z.B.  $c = A^T \cdot B$  wird vereinfacht als  $c = A \cdot B$  geschrieben;  $A^2$  steht für den Term  $A^T \cdot A$ .
- Für die Definitionen von neu eingeführten Größen (z.B.  $\alpha$ ) gilt die Schreibweise:  $\alpha := f(t)$  oder  $f(t) := \alpha$ .
- Der Exponent 0 wird zur Kennzeichnung von Näherungswerten verwendet (z.B.  $t^0$  als Näherungswert für  $t$ ).

Für Formeln, die sich auf einen Raum mit beliebiger Dimension  $d$  beziehen, gilt:

- $x, y, z$  sind Indizes für beliebige Koordinatenrichtungen im  $d$ -dimensionalen Raum.

Für den dreidimensionalen Objektraum gilt:

- $X, Y, Z$  sind die Einheitsvektoren des Objektkoordinatensystems;
- $x, y, z$  sind variable Punktkoordinaten.

## 2 Theorie

### 2.1 Grundkonzept einer ausgleichenden Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen

Das dieser Arbeit zugrunde liegende Konzept kann anhand folgender Aufgabe veranschaulicht werden: Gegeben seien die Abbilder der unbekanntes Raumkurve  $\Phi$  in mehreren Photos, sowie die Orientierung dieser Photos im Objektkoordinatensystem. Gesucht ist die Rekonstruktion der unbekanntes Raumkurve  $\Phi$ . Die Lösung dieser Aufgabe soll nun durch einen "photogrammetrischen Vorwärtsschnitt", wie in der Abbildung 2.1-1 dargestellt, erfolgen:

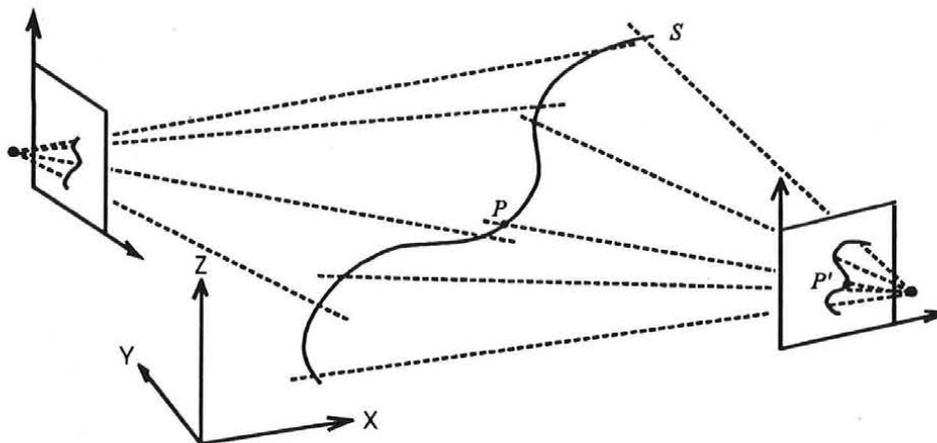


Abb. 2.1-1: Rekonstruktion der unbekanntes Kurve  $\Phi$  durch Vorwärtsschnitt der Kurve  $S$

Für einen photogrammetrischen Vorwärtsschnitt werden auf den Abbildern  $\Phi'$  der Originalkurve  $\Phi$  zweidimensionale Bildpunkte (zum Beispiel  $P'$ ) registriert, wobei es im allgemeinen aber nicht möglich ist, in den verschiedenen Bildern homologe (einander räumlich entsprechende) Bildpunkte zu messen. Der dem Bildpunkt  $P'$  entsprechende unbekanntes dreidimensionale Objektpunkt  $P$  liegt auf dem Bildstrahl, der vom Projektionszentrum durch  $P'$  führt. Sämtliche Bildstrahlen eines Photos bilden ein räumliches Strahlenbündel. Gesucht ist nun die Kurve, in der sich die verschiedenen Strahlenbündel "schneiden"; das ist jene Kurve  $S$ , die möglichst gut durch die Menge aller Bildstrahlen geht. Durch diese zu berechnende Kurve  $S$  können nun sämtliche Objektpunkte sowie die unbekanntes Originalkurve  $\Phi$  rekonstruiert werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist nun die Erstellung eines Konzeptes zur Bestimmung einer solchen flexiblen Kurve  $S$ , die sich zur Rekonstruktion einer beliebig geformten Originalkurve  $\Phi$  eignet. Dieses Konzept soll sowohl für dreidimensionale Raumkurven als auch für die Interpolation der sechs Elemente der äußeren Orientierung einer Flugzeugscanneraufnahme entlang einer sechsdimensionalen Kurve gelten. Die Anzahl der Dimensionen der gesuchten Kurve  $S$  wird daher im folgenden allgemein mit  $d$  bezeichnet. Der im obigen dreidimensionalen Beispiel "Objektpunkt" genannte Punkt  $P$  wird im allgemeinen  $d$ -dimensionalen Fall

als "Stützpunkt" bezeichnet<sup>1</sup>.

Die Realisierung dieses Konzeptes erfolgte im Rahmen des Ausgleichs-Programmsystems ORIENT. Für die Berechnung der Kurve  $S$  wurde daher ein Ausgleichsverfahren gewählt. Die Voraussetzung für eine Ausgleichung ist, daß die Anzahl der Beobachtungen (das sind die gemessenen Werte) größer oder gleich ist wie die Anzahl der Unbekannten (das sind die zu berechnenden Größen).

Für die Ausgleichung einer  $d$ -dimensionalen Kurve werden die (zum Beispiel durch zufällige Meßfehler verursachten) Abweichungen der Stützpunkte  $P_j$  von den Fußpunkten  $S_j$  auf der zu berechnenden Kurve  $S$  durch die Verbesserungsvektoren  $V_j$  beschrieben ( $j=1(1)q$ ,  $q$  ist die Anzahl der Stützpunkte):

$$V_j = \begin{pmatrix} v_{j,1} \\ v_{j,2} \\ \vdots \\ v_{j,d} \end{pmatrix} = S_j - P_j = \begin{pmatrix} s_{j,1} \\ s_{j,2} \\ \vdots \\ s_{j,d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_{j,1} \\ p_{j,2} \\ \vdots \\ p_{j,d} \end{pmatrix}$$

Die gesuchte ausgleichende Kurve  $S$  hat dann ihre optimale Lage erreicht, wenn die von der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bekannte Forderung

$$\sum_{j=1}^q |V_j|^2 \rightarrow \min$$

erfüllt ist (siehe Abb. 2.1-2). Dies kann durch eine vermittelnde Ausgleichung erreicht werden (z.B. Reissmann 1980).

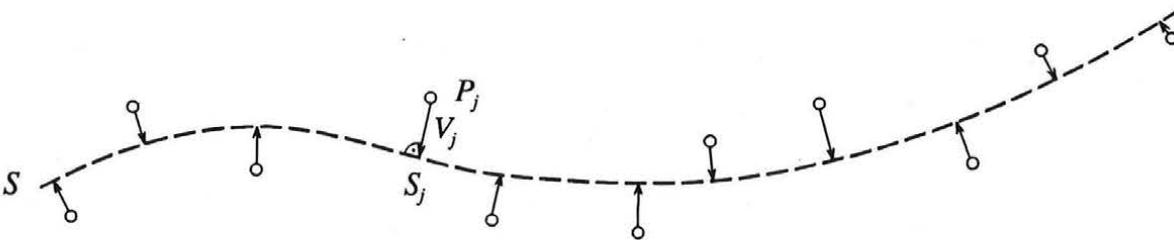


Abb. 2.1-2: ausgleichende Kurve  $S$

Die Kurve  $S$  kann zum Beispiel durch ein ausgleichendes Polynom dargestellt werden, wobei die Polynomkoeffizienten die Unbekannten der Ausgleichung sind. Die Flexibilität (die Anpassungsfähigkeit an die  $q$  Stützpunkte) eines ausgleichenden Polynoms hängt vom Polynomgrad  $g$  ab: ein Polynom  $g$ -ten Grades kann höchstens  $g-1$  Extremstellen haben. Ein hoher Polynomgrad (z.B.  $g=6$ ) kann aber zu unkontrolliertem Ausschlagen in den Randbereichen des Polynoms führen (siehe z.B. Kraus 1984, S. 245).

Eine entscheidende Verbesserung dieses Approximationsverhaltens kann nun durch Aneinanderfügen mehrerer Polynome niedrigen Grades (anstelle eines Polynomes hohen Grades)

<sup>1</sup>An der Stelle des Stützpunktes "stützt" sich die gesuchte Kurve an den gemessenen Werten "ab".

erreicht werden. In der vorliegenden Arbeit wurden daher zusammengesetzte kubische Polynome zur Darstellung der ausgleichenden Kurve  $S$  verwendet.<sup>2</sup>

### 2.1.1 Kurvendarstellung mit Hilfe zusammengesetzter kubischer Polynome

Der Verlauf einer aus zusammengesetzten kubischen Polynomen gebildeten Kurve wird durch "Knotenpunkte" festgelegt. Die  $n$  Knotenpunkte

$$K_i = \begin{pmatrix} k_{i,1} \\ k_{i,2} \\ \vdots \\ k_{i,d} \end{pmatrix} \quad (i = 1(1)n)$$

der Kurve  $S$  definieren  $n-1$  Segmente, die jeweils durch ein kubisches Polynom dargestellt werden. In den Knoten stoßen die Segmente mindestens mit stetiger erster Ableitung aneinander:

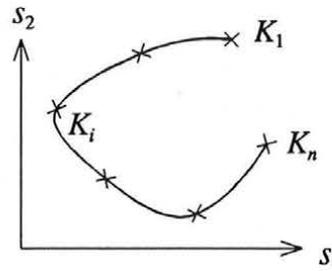


Abb. 2.1-3: Ebene Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen mit Knoten  $K_i$

Für die Interpolation von Kurvenpunkten zwischen den Knoten soll die Kurve  $S$  als  $d$ -dimensionale Funktion  $S(t)$  des Kurvenparameters  $t$  dargestellt werden. Daher werden den Knoten  $K_1, K_2, \dots, K_n$  durch eine Parametrisierung die ansteigenden Parameterwerte  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  zugeordnet (siehe Kap. 2.2). An der Stelle  $t$  des Interpolationsintervalles  $[i]$  zwischen den Knoten  $K_i$  und  $K_{i+1}$  wird nun ein Punkt der Kurve  $S(t)$  mit Hilfe der Interpolationsfunktionen  $s_1(t), s_2(t), \dots, s_d(t)$

$$S(t) = \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_d(t) \end{pmatrix}$$

wie folgt interpoliert (siehe auch Abb. 2.1-4):

<sup>2</sup>Eine weitere häufig verwendete Kurvenart mit guter Approximationseigenschaft ist die Basis-Spline-Kurve ("B-Spline"). Bei dieser Methode wird die Kurve als Linearkombination von bekannten Basisfunktionen dargestellt: Die Koeffizienten dieser "Basis-Splines" werden mit Hilfe der Stützpunkte berechnet und können als ein die Kurve begleitendes "Kontrollpolygon" interpretiert werden. Ein auf B-Splines beruhendes Ausgleichungsverfahren ist in Inkilä 1990 beschrieben.

$$s_x(t)_{[i]} = a_{i,x} + b_{i,x} \tilde{t} + c_{i,x} \tilde{t}^2 + d_{i,x} \tilde{t}^3 \quad (2.1-1)$$

mit  $\tilde{t} = t - t_i$ ,  $(x = 1(1)d)$

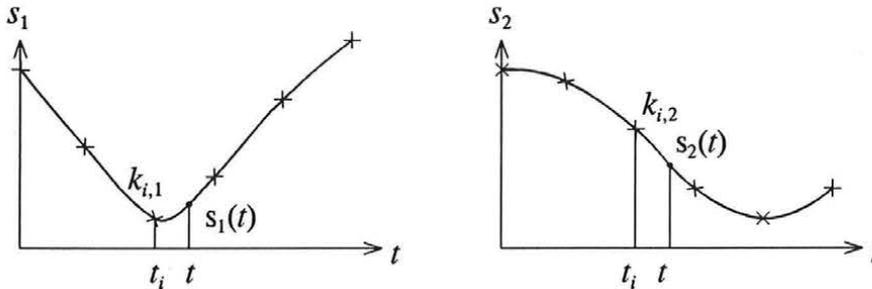


Abb. 2.1-4: Interpolationsfunktionen (Parameterdarstellungen) der Kurve von Abb. 1.1-3; Interpolation von  $S(t)$

Die Koeffizienten  $a_{i,x}$ ,  $b_{i,x}$ ,  $c_{i,x}$  und  $d_{i,x}$ <sup>3</sup> jedes der kubischen Polynomstücke  $s_x(t)_{[i]}$  werden in Abhängigkeit der Kurvenart mit Hilfe der Knotenkoordinaten  $k_{1,x}$ ,  $k_{2,x}$ , ...,  $k_{n,x}$  ( $x=1(1)d$ ) bestimmt (siehe Kap. 2.3).  $\tilde{t}$  ist der Parameter des kubischen Polynoms. Für die Berechnung jenes Polynomparameters  $\tilde{t}$ , der einem Stützpunkt  $P$  entspricht, wird der Kurvenparameter  $t$  dieses Stützpunktes benötigt. Verschiedene Möglichkeiten zur Bestimmung des Kurvenparameters eines Stützpunktes werden in Kapitel 2.2 beschrieben.

## 2.1.2 Aufstellung der Verbesserungsgleichungen

Die Forderung, daß ein Stützpunkt  $P$  auf einer (zu berechnenden) aus zusammengesetzten kubischen Polynomen gebildeten Kurve liegen soll, ist nun als eigene Beobachtung zu formulieren, die gemeinsam mit weiteren Beobachtungen für  $P$ , etwa mit der Bildpunktbeobachtung  $P'$ , ausgeglichen werden kann. Zur Veranschaulichung diene wiederum die bereits einleitend vorgestellte Vorwärtsschnittaufgabe (Abb. 2.1-5):

<sup>3</sup>Diese Polynomkoeffizienten werden im folgenden auch als "Interpolationskoeffizienten" bezeichnet.

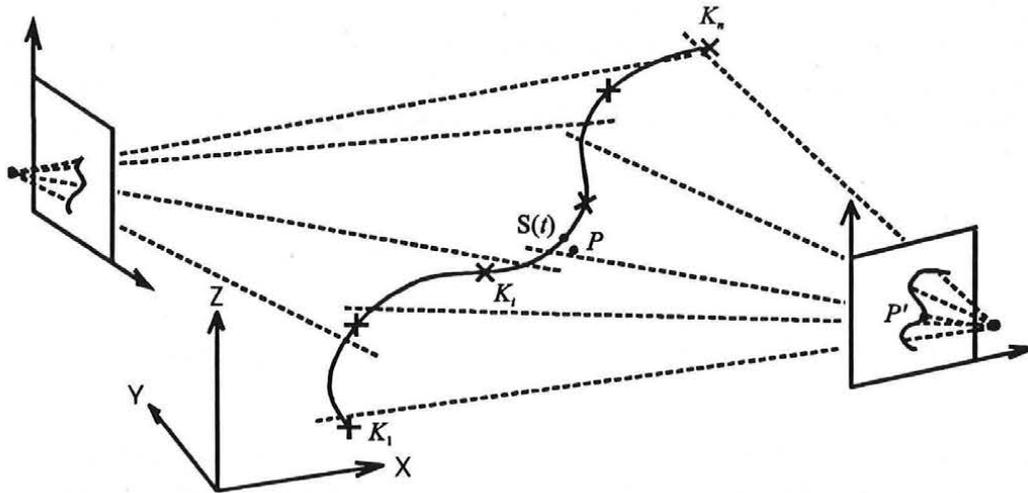


Abb. 2.1-5: Räumlicher Vorwärtsschnitt einer aus zusammengesetzten kubischen Polynomen gebildeten Kurve

Als sogenannte "fiktive Beobachtung"<sup>4</sup>  $\bar{s}$  wird nun die Abweichung  $S-P$  der Kurve  $S$  vom Stützpunkt  $P$  eingeführt.

$$\bar{s} := \begin{pmatrix} \bar{s}_1 \\ \bar{s}_2 \\ \vdots \\ \bar{s}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die verbesserte Beobachtung  $\bar{s} + V_{\bar{s}}$  ist eine Funktion von unbekanntem (zu berechnenden) Größen:

$$\bar{s} + V_{\bar{s}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{\bar{s}_1} \\ v_{\bar{s}_2} \\ \vdots \\ v_{\bar{s}_d} \end{pmatrix} = S(t) - P$$

Die Berücksichtigung der Interpolationsformel (2.1-1) für den Kurvenpunkt  $S(t)$  im Intervall  $[i]$  führt schließlich zu der  $d$ -dimensionalen Beobachtungsgleichung in Vektorform:

$$\bar{s} + V_{\bar{s}} = A_{[i]} + B_{[i]} \tilde{t} + C_{[i]} \tilde{t}^2 + D_{[i]} \tilde{t}^3 - P \quad (2.1-2)$$

Die Interpolationskoeffizienten  $A_{[i]}$ ,  $B_{[i]}$ ,  $C_{[i]}$ ,  $D_{[i]}$  sind, wie bereits erwähnt, Funktionen der Knoten. Die Unbekannten der Beobachtungsgleichung (2.1-2) sind daher die Knotenkoordinaten  $K_1, K_2, \dots, K_n$  sowie die Polynomparameter  $\tilde{t}$  und die Koordinaten  $P$  des Stützpunktes. Da die Berechnung dieser Unbekannten in einem linearen Gleichungssystem (das

<sup>4</sup>Eine fiktive Beobachtung entsteht aus einer Annahme anstelle einer tatsächlichen Messung. Bei unserer Kurvenbeobachtung lautet diese Annahme: Die Abweichung des Stützpunktes  $P$  von der Kurve  $S$  sei Null,  $\bar{s}$  hat daher die fiktiven "beobachteten" Werte  $\bar{s}_1=0, \bar{s}_2=0, \dots, \bar{s}_d=0$ .

Normalgleichungssystem der Ausgleichung) erfolgen soll, muß nun die nichtlineare Beobachtungsgleichung (2.1-2) durch Linearisierung in eine lineare "Verbesserungsgleichung" umgeformt werden. Dies erfolgt mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung der Terme der rechten Seite der Beobachtungsgleichung (2.1-2), wobei die nichtlinearen Glieder vernachlässigt werden:

$$v_{\bar{s}_x} = \frac{\partial[s_x(t)]}{\partial k_{1,1}} \Delta k_{1,1} + \dots + \frac{\partial[s_x(t)]}{\partial k_{n,d}} \Delta k_{n,d} + \frac{\partial[s_x(t)]}{\partial \tilde{t}} \Delta \tilde{t} - \Delta p_x - (p_x^0 - s_x^0(t^0)) \quad (2.1-3)$$

$$\text{mit } k_{i,x} = k_{i,x}^0 + \Delta k_{i,x}, \quad \tilde{t} = \tilde{t}^0 + \Delta \tilde{t}, \quad p_x = p_x^0 + \Delta p_x, \quad (x = 1(1)d)$$

Im Kapitel 2.4 wird gezeigt, wie die für diese Taylorreihenentwicklung benötigten Näherungswerte der Unbekannten  $K_1^0, K_2^0, \dots, K_n^0, \tilde{t}^0, P^0$  bestimmt werden können.

Für die partiellen Ableitungen von  $S(t)$  muß die Interpolationsformel (2.1-1) berücksichtigt werden. Dabei ist zu beachten, daß die "x"-Komponenten der Interpolationskoeffizienten  $a_{i,x}, b_{i,x}, c_{i,x}$  und  $d_{i,x}$  ausschließlich Funktionen der "x"-Koordinaten der Knoten  $k_{i,x}$  sind (siehe Kap. 2.3). Die partiellen Ableitungen von  $s_x(t)$  nach den Unbekannten lauten daher:

$$\frac{\partial[s_x(t)]}{\partial k_{i,x}} = \frac{\partial[a_{i,x} + b_{i,x}\tilde{t} + c_{i,x}\tilde{t}^2 + d_{i,x}\tilde{t}^3]}{\partial k_{i,x}} = \left( \frac{\partial a_{i,x}}{\partial k_{i,x}} + \frac{\partial b_{i,x}}{\partial k_{i,x}}\tilde{t} + \frac{\partial c_{i,x}}{\partial k_{i,x}}\tilde{t}^2 + \frac{\partial d_{i,x}}{\partial k_{i,x}}\tilde{t}^3 \right) =: \frac{\partial s_x(t)}{\partial k_{i,x}}$$

$$\frac{\partial[s_x(t)]}{\partial \tilde{t}} = (b_{i,x} + 2c_{i,x}\tilde{t} + 3d_{i,x}\tilde{t}^2) = \dot{s}_x(t)$$

$\dot{s}_x(t)$  ist die erste Ableitung (die Tangente) der Kurve an der Stelle des Kurvenparameters  $t$ . Die Berücksichtigung der partiellen Ableitungen von  $s_x(t)$  in den Verbesserungsgleichungen (2.1-3) führt zu:

$$v_{\bar{s}_x} = s'_{1,x}(t^0) \Delta k_{1,x} + \dots + s'_{n,x}(t^0) \Delta k_{n,x} + \dot{s}_x^0(t^0) \Delta \tilde{t} - \Delta p_x - l_x \quad (2.1-4)$$

$$\text{mit } s'_{i,x}(t^0) := \frac{\partial s_x(t^0)}{\partial k_{i,x}} \quad \text{und} \quad l_x = p_x^0 - s_x^0(t^0)$$

$\dot{s}_x^0(t^0)$  ist die erste Ableitung der aus den Näherungswerten der Knoten gebildeten Kurve an der Stelle des genäherten Kurvenparameters;  $l_x$  ist das "Residuum" (der Fehler) der Beobachtung  $\bar{s}_x$ .

Zur Veranschaulichung der Verbesserungsgleichungen (2.1-4) wird eingeführt:

$$\Delta s_x(t^0) := \sum_{i=1}^n (s'_{i,x}(t^0) \Delta k_{i,x}) \quad (2.1-5)$$

$\Delta S(t^0)$  ist die Änderung der Kurve an der Stelle des genäherten Kurvenparameters  $t^0$  auf-

grund der Änderung der Interpolationskoeffizienten. Hiermit können nun die Verbesserungsgleichungen (2.1-4) übersichtlicher dargestellt werden:

$$v_{\bar{s}_x} = \Delta s_x(t^0) + \dot{s}_x^0(t^0) \Delta \tilde{t} - \Delta p_x - l_x \quad (x = 1(1)d) \quad (2.1-6)$$

Die durch diese Form der Verbesserungsgleichungen beschriebenen räumlichen Beziehungen sollen durch die Abbildung 2.1-6 veranschaulicht werden:

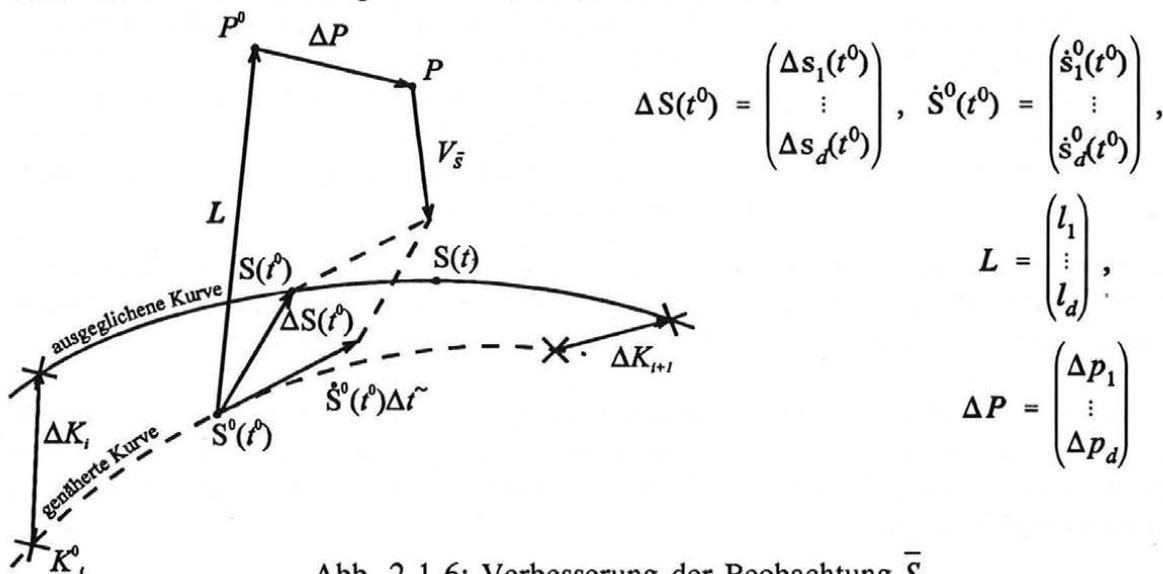


Abb. 2.1-6: Verbesserung der Beobachtung  $\bar{S}$

Man beachte, daß aufgrund der bei der Herleitung der Verbesserungsgleichungen (2.1-6) erfolgten Linearisierungen<sup>5</sup> die Beobachtungsgleichungen (2.1-2) im allgemeinen vorerst nicht erfüllt sind: die um den Vektor  $V_{\bar{S}}$  verbesserte Beobachtung  $\bar{S}$  liegt, wie in der Abbildung 2.1-6 ersichtlich, nicht genau auf der ausgeglichenen Kurve. Zur Erfüllung der Beobachtungsgleichungen werden daher in der Regel, wie im folgenden Kapitel beschrieben, mehrere Iterationen benötigt.

### 2.1.3 Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Ein Ausgleichungsverfahren kann nur dann durchgeführt werden, wenn die Anzahl der Beobachtungen  $o$  größer ist als die Anzahl der Unbekannten  $u$ <sup>6</sup>. Für die  $d$ -dimensionalen fiktiven Kurvenbeobachtungen von  $q$  Stützpunkten ist die Anzahl der Beobachtungen:  $o = q \cdot d$ . Die Unbekannten sind in diesem Fall die  $n \cdot d$  Koordinatenwerte der  $n$  Knotenpunkte, die  $q$  Polynomparameter der Stützpunkte, sowie die  $q \cdot d$  Koordinatenwerte der Stützpunkte. Die Anzahl der Unbekannten lautet somit:  $u = n \cdot d + q \cdot (d+1)$ . Die gefor-

<sup>5</sup>Mit Hilfe der Abbildung 2.1-6 können diese in den Gleichungen 2.1-3 durchgeführten Linearisierungen geometrisch interpretiert werden: das Stück der ausgeglichenen Kurve von der Stelle  $t^0$  bis zur Stelle  $t$  wird durch die Tangente  $\dot{S}^0(t^0) \cdot \Delta \tilde{t}$  an der Stelle  $t^0$  der approximierten Kurve ersetzt.

<sup>6</sup>Das im folgenden beschriebene Verfahren führt auch bei  $o=u$  zur Lösung der Verbesserungsgleichungen. Mangels Überbestimmung können aber in diesem Fall weder grobe Meßfehler erkannt, noch zufällige Meßfehler ausgeglichen werden.

derte Überbestimmung ( $r=o-u$  mit  $r \geq 1$ , im folgenden auch als "Redundanz" bezeichnet) kann nun folgendermaßen erreicht werden:

- 1) Die Koordinaten der Stützpunkte sind bekannt und sollen während der Ausgleichung konstant bleiben. Folglich entfallen in den Verbesserungsgleichungen (2.1-4) die Terme für  $\Delta P$ . Eine Überbestimmung liegt in diesem Falle vor, wenn:  $q \cdot (d-1) > d \cdot n$ .
- 2) Es existieren zusätzliche Beobachtungen für die  $q$  Stützpunkte. Beim räumlichen Vorwärtsschnitt ( $\Rightarrow d=3$ ) zum Beispiel, gibt es eine zusätzliche zweidimensionale Bildpunktbeobachtung pro Stützpunkt. Die Anzahl der Beobachtungen lautet in diesem Fall:  $o = q \cdot 3 + q \cdot 2$ ; die Anzahl der Unbekannten ist:  $u = n \cdot 3 + q \cdot 4$ . Die erforderliche Überbestimmung liegt daher dann vor, wenn  $q > n \cdot 3$ ; also bei mehr als drei Stützpunkten pro Knoten.

An dieser Stelle sei ausdrücklich betont, daß eine Überbestimmung zwar notwendig, aber nicht hinreichend für eine erfolgreiche Ausgleichung ist! Auf weitere für die Kurvenausgleichung notwendige Voraussetzungen wird im Kapitel 4 eingegangen.

Betrachten wir nun eine aus den  $o$  Beobachtungen  $\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_o$  bestehende Ausgleichungsaufgabe: Die  $u$  Unbekannten dieser Aufgabe seien  $x_1, \dots, x_u$ . Jede verbesserte Beobachtung entspricht einer eigenen Funktion  $f$  dieser Unbekannten. Die allgemeinen linearisierten Verbesserungsgleichungen

$$\begin{array}{rcccc} v_1 & = & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_u} & \Delta x_u - l_1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ v_o & = & \frac{\partial f_o}{\partial x_1} & \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_o}{\partial x_u} & \Delta x_u - l_o \end{array}$$

bilden das Verbesserungsgleichungssystem

$$V = A \Delta X - L \quad (2.1-7)$$

mit der Formmatrix  $A$ , dem Residuenvektor  $L$  und den Änderungen der Unbekannten  $\Delta X$ :

$$X = X^0 + \Delta X$$

Zur Bestimmung der Unbekannten wird das Normalgleichungssystem

$$N \Delta X = A^T W L$$

$$\text{mit } N = A^T W A \quad \text{und} \quad W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & w_o \end{pmatrix} \quad (2.1-8)$$

aufgestellt. Die Gewichte  $w_j$  ( $j=1(1)o$ ) wählt man folgendermaßen:

$$w_j = \frac{\sigma_{\text{apriori}}^2}{\sigma_j^2}$$

Die  $\sigma_j^2$  sind die (geschätzten) mittleren Fehler der Beobachtungen  $\bar{l}_j$ . Mit  $\sigma_{\text{apriori}}^2$  werden alle Gewichte  $w_j$  multipliziert; dieser Faktor wird so gewählt, daß alle Gewichte durchschnittlich ungefähr 1 sind.

Die  $u$  Unbekannten des Gleichungssystems ergeben sich aus:

$$\Delta X = Q (A^T W L) \quad \text{mit} \quad Q = N^{-1} \quad (2.1-9)$$

Hiermit ist auch die Forderung

$$\sum_{j=1}^o (w_j v_j^2) \rightarrow \min$$

erfüllt<sup>7</sup> (siehe Reissmann 1980).

Der sich aus der Ausgleichung ergebende mittlere Fehler einer Beobachtung  $\bar{l}_j$  lautet:

$$m_j = \frac{\sigma_o}{\sigma_{\text{apriori}}} \sigma_j, \quad \text{mit} \quad \sigma_o = \pm \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^o (w_j v_j^2)}{o-u}} \quad (2.1-10)$$

Mit Hilfe dieses mittleren Gewichtseinheitsfehlers  $\sigma_o$  und der Kovarianzmatrix  $Q$  können auch die mittleren Fehler der Unbekannten berechnet werden:

$$m_{x_i} = \pm \sigma_o \sqrt{q_{i,i}}, \quad (i = 1(1)u) \quad (2.1-11)$$

---

<sup>7</sup>Da bei einer optimalen Anpassung der ausgeglichenen Kurve an die Stützpunkte die Quadratsumme der Länge der Fehlervektoren  $\sum |v_j^2|$  ( $j=1(1)q$ ) ein Minimum sein soll, müssen alle Gewichte  $w_{j,x}$  der fiktiven Kurvenbeobachtungen  $\bar{s}_{j,x}$  ( $x=1(1)d$ ) gleich groß sein.

Die Abbildung 2.1-7 veranschaulicht den ersten Ausgleichungsschritt (Gleichungen (2.1-7)-(2.1-9)) einer Kurvenausgleichung mit den konstanten Stützpunkten  $P_j$  ( $j=1(1)q$ ). Die Unbekannten der Kurvenausgleichung sind in diesem Fall die Knotenkoordinaten  $K_i$  ( $i=1(1)n$ ) und die Polynomparameter der Stützpunkte  $\bar{t}_j$ . Durch die Ausgleichung wird nun eine Optimierung der Knoten sowohl quer zur Kurve als auch in Richtung der Kurve erreicht<sup>8</sup>.

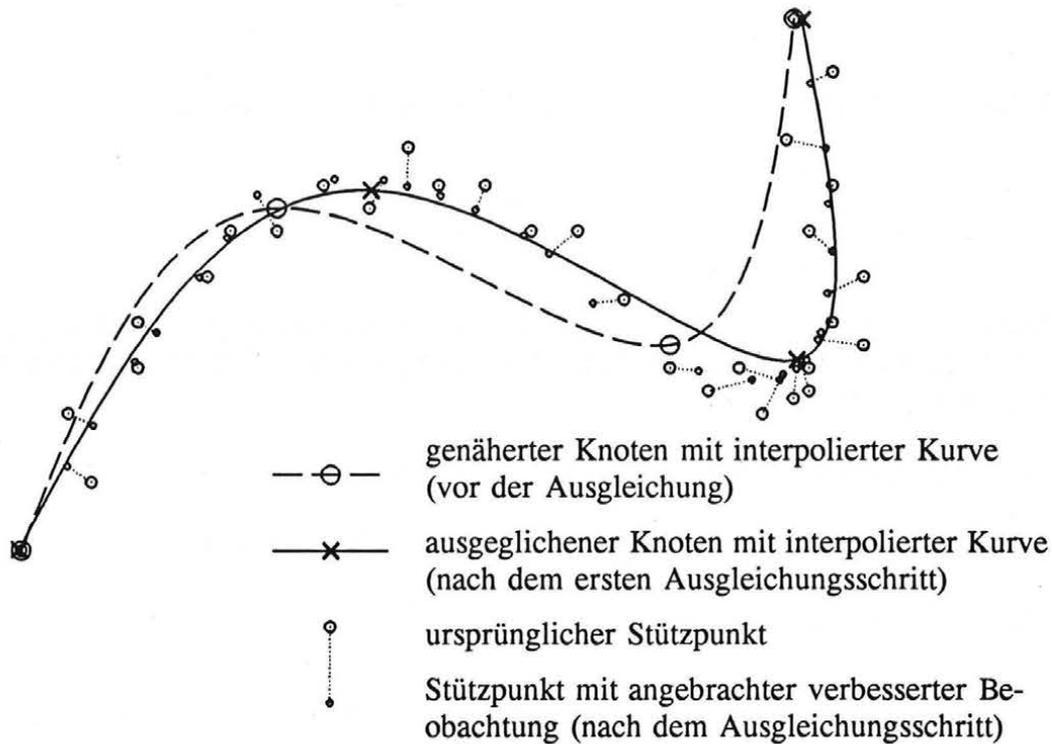


Abb. 2.1-7: Ausgleichende ebene Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen vor und nach dem ersten Ausgleichungsschritt

Wie bereits erwähnt, liegen aufgrund der Vernachlässigung der nichtlinearen Glieder in der Taylorreihenentwicklung (2.1-3) die verbesserten Beobachtungen nach dem ersten Ausgleichungsschritt im allgemeinen nicht auf der ausgeglichenen Kurve. Es müssen also weitere Ausgleichungsschritte (Iterationen) durchgeführt werden, wobei jeweils die errechneten Unbekannten einer Iteration  $it$  die Näherungen für die folgende Iteration  $it+1$  darstellen:

$$X_{it+1}^0 := X_{it} := X_{it}^0 + \Delta X_{it}$$

In jeder Iteration werden die unverbesserten Original-Beobachtungen  $\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_o$  verwendet, da sich die ausgeglichene Kurve diesen ursprünglichen Beobachtungen annähern soll.

Das iterative Ausgleichungsverfahren kann beendet werden, wenn sich die Unbekannten

<sup>8</sup>Für die Knotenoptimierung in Kurvenrichtung sorgt in hohem Maße die Berücksichtigung der unbekanntem Polynomparameter  $\bar{t}_j$  der Stützpunkte: Aufgrund von  $\bar{t}_j = t_j - t_i$  wird bei veränderlichem  $\bar{t}_j$  die Änderung der Kurvenparameter  $t_j$  der Stützpunkte und der Knotenparameter  $t_i$  relativ zueinander ermöglicht. Dies ist die Voraussetzung für die "Beweglichkeit" der Fußpunkte  $S(t_j)$  und der Knoten  $K_i$  entlang der Kurve.

durch die letzte Iteration nicht mehr geändert haben, also wenn  $\Delta X = 0$ . In diesem Fall liegen, wie in der Abbildung 2.1-8 ersichtlich, die verbesserten Beobachtungen auf der ausgeglichenen Kurve. Gemäß (2.1-7) gilt nun:

$$V = -L \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^o (w_j v_j^2) = \sum_{j=1}^o (w_j l_j^2)$$

Für die Entscheidung, ob eine der beiden obenstehenden Ende-Bedingung ( $\Delta X=0$  bzw.  $V=-L$ ) erfüllt ist, empfiehlt sich die Einführung einer numerischen Schranke  $\varepsilon$  (abhängig von der Rechenschärfe des Computers) für den Wert "0". Das Kriterium für den enditerierten Zustand lautet im Falle des vorliegenden Ausgleichsprogrammes:

$$\sum_{j=1}^o (w_j l_j^2) < (1 + \varepsilon) \sum_{j=1}^o (w_j v_j^2) \quad (2.1-12)$$

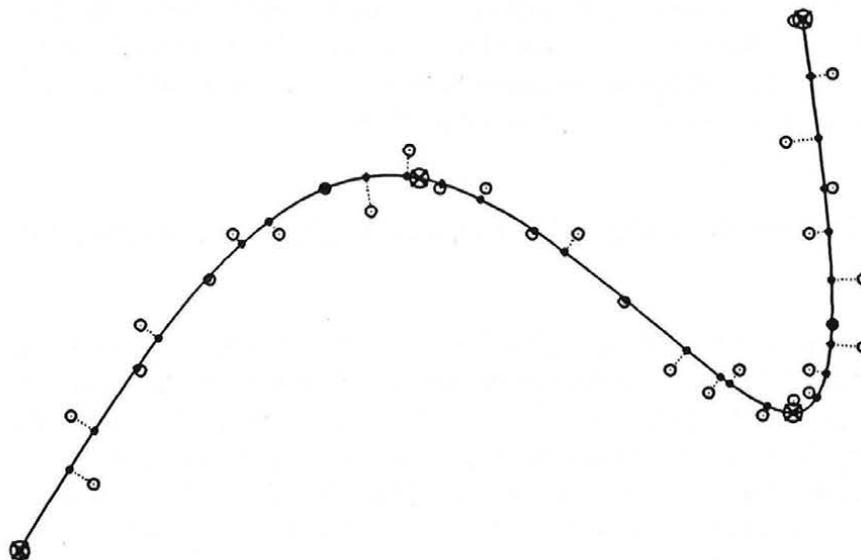


Abb.2.1-8: Ausgleichende ebene Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen im enditerierten Zustand

Voraussetzungen für die Konvergenz des Verfahrens gegen die Lösung  $\Delta X = 0$  sind:

- 1) Die zu berechnenden Unbekannten müssen durch die Beobachtungen geometrisch gut definiert sein, um eine gut konditionierte Normalgleichungsmatrix zu erhalten. Im Falle des räumlichen Vorwärtsschnittes einer unbekanntes Kurve müssen aus den Bildpunktbeobachtungen mehrere (mindestens zwei) Strahlenbündel gebildet werden können, die einander unter möglichst großem Winkel schneiden.
- 2) Möglichst gute Näherungswerte der Unbekannten für die erste Iteration. Wie man solche Näherungswerte für photogrammetrische Aufgabenstellungen erhalten kann, wird in Kapitel 2.4 gezeigt.

Zusätzlich wird eine hinreichend hohe Redundanz  $o-u$  für die Kontrollierbarkeit der Ergebnisse benötigt.

## 2.2 Parametrisierung einer ausgleichenden Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen

Für die Berechnung der Interpolationskoeffizienten der ausgleichenden Kurve (siehe Kap. 2.3) müssen den Knoten  $K_1, \dots, K_n$  in einem frei wählbaren Parameterintervall  $[t_{min}, t_{max}]$  die Knotenparameter  $t_1, \dots, t_n$  zugeordnet werden (mit  $t_1 := t_{min}$  und  $t_n := t_{max}$ )<sup>1</sup>. Anschließend kann an der Stelle des Kurvenparameters  $t_j$  der dem Stützpunkt  $P_j$  entsprechende Kurvenpunkt  $S(t_j)$  interpoliert werden ( $j=1(1)q$ ). Für diese Parametrisierung der ausgleichenden Kurve ergeben sich prinzipiell folgende Möglichkeiten:

Ist die Originalkurve bereits eine Funktion  $\phi(t)$  eines Parameters, so ist dadurch auch die Parametrisierung der ausgleichenden Kurve  $s(t)$  vorgegeben und konstant (siehe Kap. 2.2.1).

Handelt es sich bei der Originalkurve um eine Raumkurve  $\Phi$  (mit  $d=3$ ), so muß die ausgleichende Kurve  $S$  erst in die Parameterdarstellung  $S(t)$  umgeformt werden. Zu diesem Zweck werden die Koordinaten eines Kurvenpunktes  $S$  als Funktionen  $s_1(t), \dots, s_d(t)$  der Bogenlänge  $t$  betrachtet. Je nach Aufgabenstellung kann nun diese Parametrisierung während der Ausgleichung als konstant (siehe Kap. 2.2.2) oder als unbekannt (siehe Kap. 2.2.3) behandelt werden.

### 2.2.1 Ausgleichung einer Funktion mit konstanter Parametrisierung

Die Grundaufgabe einer Kurvenausgleichung ist die Rekonstruktion einer empirischen eindimensionalen Funktion  $\phi(t)$  eines Parameters (zum Beispiel ein Temperaturverlauf in Abhängigkeit von der Zeit). Jeder auf  $\phi(t)$  gemessene Stützpunkt  $p_j$  (zum Beispiel die gemessene Temperatur) kann einem bestimmten Parameter  $t_j$  (zum Beispiel der Zeitpunkt der Messung) zugeordnet werden. Hiermit ist die Parametrisierung der ausgleichenden Funktion  $s(t)$  vorgegeben und konstant, in der Verbesserungsgleichung (2.1-6) ist daher  $\Delta \tilde{t}_j = 0$ . Die Verbesserungsgleichung für die ausgleichende Funktion lautet daher:

$$v_{s_j} = \Delta s(t_j) - \Delta p_j - l_j \quad (2.2-1)$$

Im oben erwähnten Beispiel soll sich die ausgeglichene Kurve an die beobachteten Stützpunkte  $p_j$  annähern. Die Stützpunkte  $p_j$  bleiben in diesem Fall daher konstant und in den Verbesserungsgleichungen (2.2-1) gilt zusätzlich  $\Delta p_j = 0$ <sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Die Wahl von  $t_{min}$  und  $t_{max}$  hat keinen Einfluß auf die Gestalt der interpolierten Kurve: Wiederholt man zum Beispiel die Interpolation der Kurve mit den geänderten Parameterwerten  $t_1^* = \delta + \lambda_1, \dots, t_n^* = \delta + \lambda_n$ , so gilt für die gemäß Kapitel 2.3 Neuberechneten Interpolationskoeffizienten  $A_i^*, B_i^*, C_i^*$  und  $D_i^*$  in der Interpolationsgleichung (2.1-1):  $A_i^* = A_i, B_i^* = B_i/\lambda, C_i^* = C_i/\lambda^2$  und  $D_i^* = D_i/\lambda^3$ . Das Interpolationsergebnis an der Stelle  $t^0 = \lambda^0$  ändert sich daher nicht.

<sup>2</sup>Ein Beispiel für eine ausgleichende Funktion mit konstanter Parametrisierung und unbekanntem Stützpunkten ist die im Kapitel 4.5 behandelte Interpolation der äußeren Orientierung einer Flugzeugscanneraufnahme.

Die Knotenparameter der ausgleichenden Funktion können im Prinzip willkürlich gewählt werden. Einfache Wahlkriterien sind zum Beispiel: die Anordnung der Knoten in regelmäßigen Parameterabständen oder bei jedem  $i$ -tem Stützpunktparameter. Bei dem in der Abbildung 2.2-1 gezeigten Beispiel ist an jedem fünften Stützpunktparameter ein Knoten plaziert.

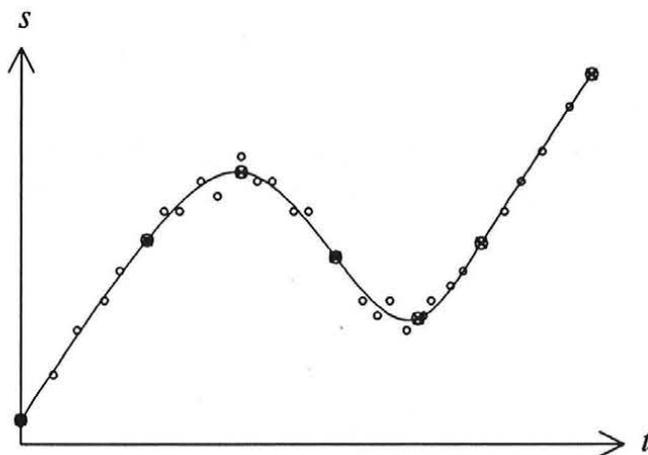


Abb. 2.2-1: Ausgleichende eindimensionale Funktion mit konstanten Stützpunkten

Bei der Ausgleichung einer kubischen Splinefunktion (siehe Kap. 2.3.1) oder einer Schmiegefunktion (siehe Kap. 2.3.2) mit konstanter Parametrisierung sind keine Linearisierungen für die  $\Delta s(t_j)$  im Verbesserungsgleichungssystem (2.2-1) erforderlich, der enditerierte Zustand ist daher bereits nach dem ersten Ausgleichungsschritt erreicht.

Die gewählten Knotenparameter sind wegen  $\Delta \tilde{t} = 0$  für die Ausgleichung konstant, eine Optimierung der Knotenlagen in Kurvenrichtung durch die Ausgleichung ist deshalb nicht möglich. Nach der Ausgleichung muß daher unter Umständen die Lage der Knoten "händisch" optimiert werden: in Intervallen mit überdurchschnittlich großen Restfehlern werden zusätzliche Knoten gewählt; anschließend erfolgt eine Wiederholung der Ausgleichung.

## 2.2.2 Ausgleichung einer Raumkurve mit konstanter Parametrisierung

Sind die räumlichen Stützpunkte  $P_j$  ( $j=1(1)q$ ) bekannt (und daher konstant), und entspricht die Reihenfolge dieser Stützpunkte hinreichend genau dem Verlauf der Originalkurve  $\Phi$ , so kann anstelle der unbekanntes Kurvenlänge auch das Stützpunktpolygon parametrisiert werden. Dabei empfiehlt sich die Verwendung einer Parametrisierung proportional zur Sehnenlänge des Stützpunktpolygons ("chordale" Parametrisierung). Der dem Stützpunkt  $P_j$  zugeordnete Kurvenparameter  $t_j$  kann nun wie folgt berechnet werden:

$$t_j = t_{\min} + \frac{t_{\max} - t_{\min}}{t_q^*} \sum_{h=1}^{j-1} |P_{h+1} - P_h|, \quad \text{mit} \quad t_q^* := \sum_{h=1}^{q-1} |P_{h+1} - P_h|$$

Mit dieser konstanten Parametrisierung kann die ausgleichende  $d$ -dimensionale Kurve aus  $d$

von einander unabhängigen ausgleichenden Funktionen (gemäß Kap. 2.2.1) des gemeinsamen Kurvenparameters  $t$  gebildet werden:

$$\begin{aligned} v_{\bar{s}_{j,1}} &= \Delta s_1(t_j) && - l_{j,1} \\ \vdots & \ddots && \vdots \\ v_{\bar{s}_{j,d}} &= \Delta s_d(t_j) && - l_{j,d} \end{aligned} \quad (2.2-2)$$

Die Knotenparameter können gemäß den in Kapitel 2.2.1 beschriebenen Kriterien gewählt werden; bei dem in Abbildung 2.2-2 gezeigten Beispiel sind sie in regelmäßigen Parameterabständen angeordnet.

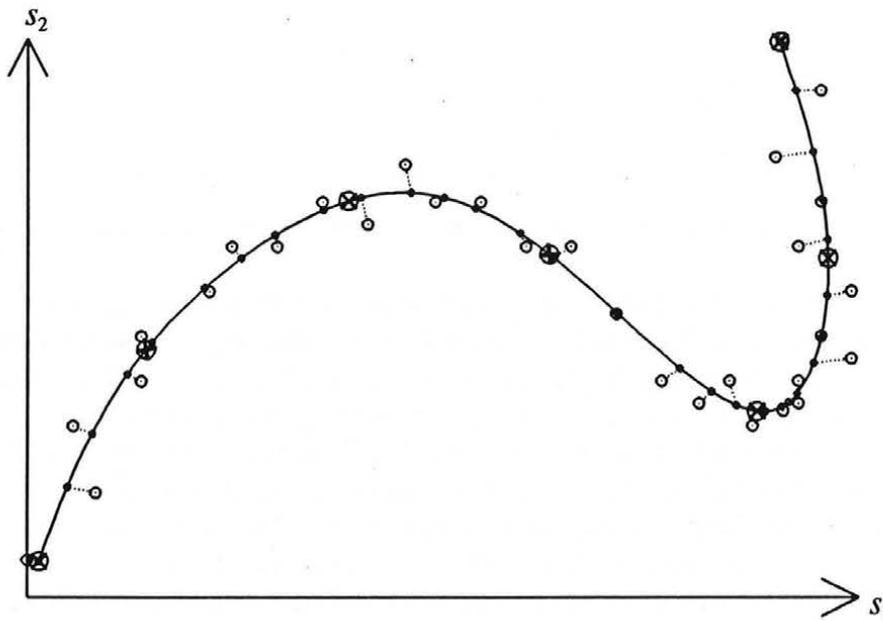


Abb. 2.2-2: Ausgleichende ebene Kurve mit konstanter Parametrisierung und konstanten Stützpunkten

Unter der in Kapitel 2.2.1 erwähnten Voraussetzung (die Verwendung der kubischen Splinekurve oder der Schmiegekurve mit konstanter Parametrisierung und konstanten Stützpunkten) ist der enditerierte Zustand wiederum nach dem ersten Ausgleichungsschritt erreicht (siehe Abb. 2.2-2). Aus diesem Grund eignet sich diese Ausgleichungsmethode zur Glättung von großen kurvenförmigen Punktmengen.

Bei der ausgleichenden Kurve mit konstanter Parametrisierung erfolgt jedoch, wie bei der ausgleichenden Funktion mit konstanter Parametrisierung, keine automatische Optimierung der Knotenparameter. Der Vergleich der Abbildung 2.2-2 mit der Abbildung 2.1-8 zeigt, daß durch diese Ausgleichung nicht die Normalabstände der Stützpunkte von der Kurve minimiert werden, sondern lediglich die Abstände  $P_j-S(t_j)$  (der an der vorgegebenen Parameterstelle  $t_j$  interpolierte Kurvenpunkt  $S(t_j)$  ist im allgemeinen nicht der Fußpunkt des Stützpunktes  $P_j$ ).

### 2.2.3 Ausgleichung einer Raumkurve mit unbekannter Parametrisierung

In den folgenden Fällen müssen nun die Polynomparameter  $\tilde{t}_j$  der Stützpunkte  $P_j$  als Unbekannte der Ausgleichung berücksichtigt werden:

Die ausgeglichene Kurve soll die bestmögliche Approximation an die Stützpunkte darstellen. Solch eine "Kurvenanpassung" erfolgt durch Minimierung der Normalabstände der Stützpunkte  $P_j$  von der ausgleichenden Kurve. Daher müssen die Polynomparameter  $\tilde{t}_j$  der diesen Stützpunkten entsprechenden Fußpunkte  $S(t_j)$  als unbekannte Größen in der Ausgleichung berücksichtigt werden.

Mit Hilfe der ausgleichenden Kurve soll eine "Kurvenpunktbestimmung" der Stützpunktkoordinaten durchgeführt werden. So kann zum Beispiel der photogrammetrische Vorwärtsschnitt auch als Bestimmung von Stützpunkten durch "Schnitt" der Abbildungsstrahlen mit der Kurve aufgefaßt werden<sup>3</sup>. Bei solch einer Kurvenpunktbestimmung können die Positionen der Stützpunkte entlang der Kurve, also die unbekanntes Stützpunktparameter, erst durch die Ausgleichung bestimmt werden.

Die für die Berücksichtigung der unbekanntes Stützpunktparameter erforderlichen Linearisierungen in den Verbesserungsgleichungen (2.1-6) erfolgen nun mit Hilfe einer Näherung der Kurve.

#### 2.2.3.1 Parametrisierung der genäherten Kurve

Für die Interpolation der Näherungskurve wird das aus den Näherungswerten der Knoten  $K_1^0, \dots, K_n^0$  gebildete Polygon parametrisiert. Dies kann zum Beispiel auf folgende Arten erfolgen (siehe Hoschek, Lasser 1989, S. 71 ff):

- a) Äquidistant; alle Parameterabstände sind gleich:

$$t_i^0 = t_{\min} + (i - 1) \frac{t_{\max} - t_{\min}}{n-1}$$

- b) Chordal; die Parameterabstände sind proportional den Sehnenlängen zwischen den Knoten:

$$t_i^0 = t_{\min} + \frac{t_{\max} - t_{\min}}{t_n^*} \sum_{j=1}^{i-1} |K_{j+1}^0 - K_j^0|, \quad \text{mit } t_n^* := \sum_{j=1}^{n-1} |K_{j+1}^0 - K_j^0|$$

- c) Zentripedal; die Parameterabstände sind proportional den Wurzeln der Sehnenlängen zwischen den Knoten:

---

<sup>3</sup>Im allgemeinen wird der Abbildungsstrahl, unter anderem wegen zufälliger Meßfehler, die Kurve nicht schneiden, sondern an ihr vorbeiführen. Die wahrscheinlichste Lage des Stützpunktes auf dem Gemeinlot zwischen Kurve und Strahl ergibt sich durch die Ausgleichung.

$$t_i^0 = t_{\min} + \frac{t_{\max} - t_{\min}}{t_n^*} \sum_{j=1}^{i-1} \sqrt{|K_{j+1}^0 - K_j^0|}, \quad \text{mit } t_n^* := \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{|K_{j+1}^0 - K_j^0|}$$

Die Parametrisierungsart, die das Verhältnis der Parameterabstände  $t_{i+1}^0 - t_i^0$  einer Kurve bestimmt, beeinflusst den Verlauf der zwischen den Knoten interpolierten Kurve (siehe Abb. 2.2-3):

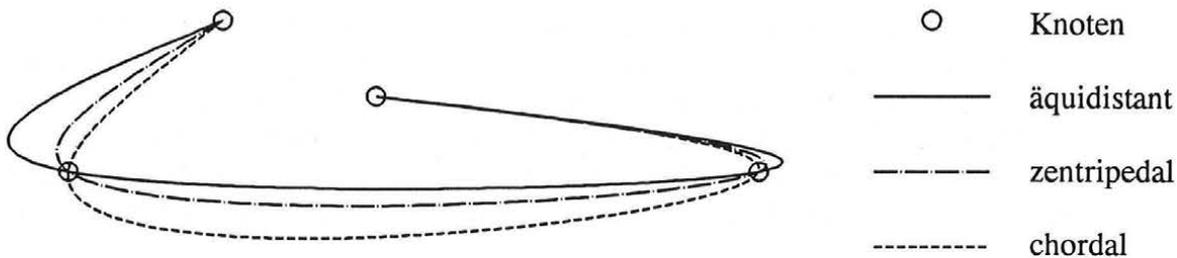


Abb. 2.2-3: Auswirkung der Parametrisierungsart auf die interpolierte Kurve

Bei der äquidistanten Parametrisierung werden die mit gleich langen Parameterabständen  $t_{i+1}^0 - t_i^0$  interpolierten Kurvenstücke für die räumliche Darstellung bei kurzen Sehnen  $|K_{i+1}^0 - K_i^0|$  "gestaucht" und bei langen Sehnen "gedehnt". Beim Übergang von einer langen Sehne auf eine kürzere kommt es daher aufgrund der Stetigkeitsbedingungen zu einem "Aufwölben" der Kurve bei der kürzeren Sehne. Dieser unnatürliche Effekt bei der interpolierten Kurve tritt bei Verwendung der chordalen Parametrisierung nicht auf, da bei dieser die Parameterabstände den Sehnenlängen entsprechen und daher für die räumliche Darstellung weder "gestaucht" noch "gedehnt" werden.

Welchen Einfluß hat nun die Wahl einer bestimmten Parametrisierungsart auf die Ausgleichung?

Eine Änderung der Knoten wirkt sich aufgrund der oben erwähnten Interpolationseigenschaften bei der chordalen Parametrisierung nicht so stark auf die Kurvenform aus wie bei der äquidistanten Parametrisierung. Für die Ausgleichung läßt dies allerdings vermuten, daß mit der formempfindlicheren äquidistant parametrisierten Kurve schneller die enditerierte Lage der Knoten erreicht wird. Der Einfluß der Parametrisierungsart auf das Ausgleichungsergebnis ist in der Abbildung 2.2-4 ersichtlich: Es wird in erster Linie die Lage der Knoten beeinflusst, kaum jedoch die Form der Kurve.

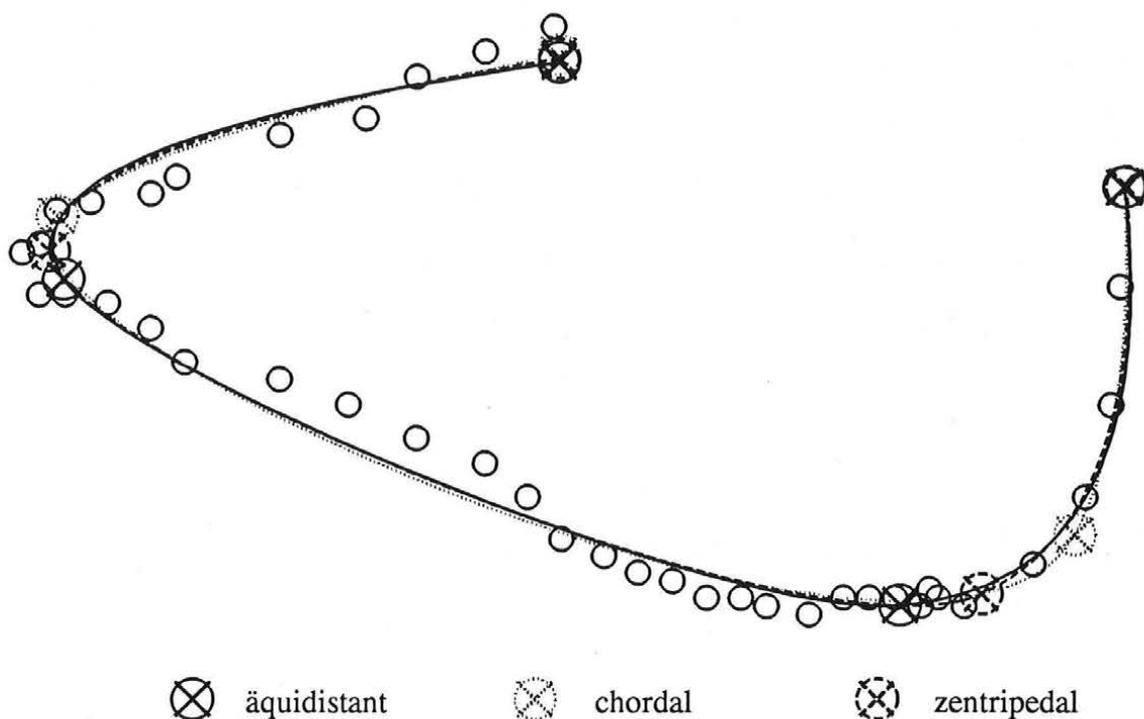


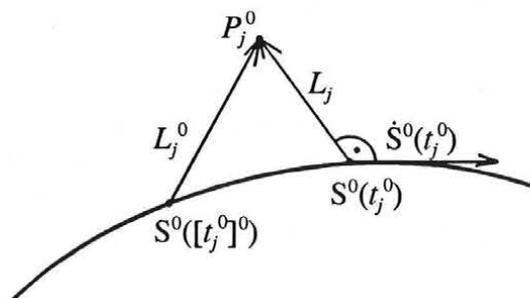
Abb. 2.2-4: Ausgleichende ebene Kurve mit konstanten Stützpunkten und unbekannter Parametrisierung, Vergleich der Parametrisierungsarten

### 2.2.3.2 Parametrisierung eines Stützpunktes auf der genäherten Kurve

Zur Vereinfachung der im folgenden aufgestellten Formeln soll vor dem Ausgleichsschritt der Vektor  $L_j = P_j^0 - S^0(t_j^0)$  senkrecht zu  $\dot{S}^0(t_j^0)$ , der Kurventangente an der Stelle  $t_j^0$ , sein. Diese Orthogonalitätsbedingung lautet:

$$(S^0(t_j^0) - P_j^0) \cdot \dot{S}^0(t_j^0) = L_j \cdot \dot{S}^0(t_j^0) = 0 \quad (2.2-3)$$

Vorerst ist nur ein "Startwert"  $[t_j^0]^0$  der benötigten Näherung  $t_j^0$  des unbekanntes Stützpunktparameters  $t_j$  bekannt (siehe Abb. 2.2-5):



$$t_j^0 := [t_j^0]^0 + \Delta \tilde{t}_j^0$$

Abb. 2.2-5: genäherter Stützpunktparameter  $t_j^0$  mit Näherungswert  $[t_j^0]^0$

Die Größen  $S^0(t_j^0)$  und  $\dot{S}^0(t_j^0)$  können nun mit Hilfe von  $[t_j^0]$  und  $\Delta\tilde{t}_j^0$  näherungsweise geschätzt werden, wobei alle Produkte  $\Delta\tilde{t}_j^0 \cdot \Delta\tilde{t}_j^0 \approx 0$  und vernachlässigbar sind, da  $\Delta\tilde{t}_j^0$  eine differenziell kleine Größe ist.

$$\begin{aligned} S^0(t_j^0)_{[i]} &= S^0([t_j^0] + \Delta\tilde{t}_j^0) = \\ &= A_i^0 + (\tilde{t}_j^0 + \Delta\tilde{t}_j^0) B_i^0 + (\tilde{t}_j^0)^2 + 2\tilde{t}_j^0 \Delta\tilde{t}_j^0 + (\Delta\tilde{t}_j^0)^2 C_i^0 + (\tilde{t}_j^0)^3 + 3(\tilde{t}_j^0)^2 \Delta\tilde{t}_j^0 + 3\tilde{t}_j^0 (\Delta\tilde{t}_j^0)^2 + (\Delta\tilde{t}_j^0)^3 D_i^0 \approx \\ &\approx (A_i^0 + \tilde{t}_j^0 B_i^0 + (\tilde{t}_j^0)^2 C_i^0 + (\tilde{t}_j^0)^3 D_i^0) + (B_i^0 + 2\tilde{t}_j^0 C_i^0 + 3(\tilde{t}_j^0)^2 D_i^0) \Delta\tilde{t}_j^0 = \\ &= S^0([t_j^0]) + \dot{S}^0([t_j^0]) \Delta\tilde{t}_j^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}^0(t_j^0)_{[i]} &= \dot{S}^0([t_j^0] + \Delta\tilde{t}_j^0) = \\ &= B_i^0 + 2(\tilde{t}_j^0 + \Delta\tilde{t}_j^0) C_i^0 + 3(\tilde{t}_j^0)^2 + 2\tilde{t}_j^0 \Delta\tilde{t}_j^0 + (\Delta\tilde{t}_j^0)^2 D_i^0 \approx \\ &\approx (B_i^0 + 2\tilde{t}_j^0 C_i^0 + 3(\tilde{t}_j^0)^2 D_i^0) + (2C_i^0 + 6\tilde{t}_j^0 D_i^0) \Delta\tilde{t}_j^0 = \\ &= \dot{S}^0([t_j^0]) + \ddot{S}^0([t_j^0]) \Delta\tilde{t}_j^0 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \tilde{t}_j^0 = [t_j^0] - t_i^0$$

(2.2-4)

Die Approximationen (2.2-4), eingesetzt in die Orthogonalitätsbedingung (2.2-3), ergeben:

$$\begin{aligned} 0 &\approx (S^0([t_j^0]) + \dot{S}^0([t_j^0]) \Delta\tilde{t}_j^0 - P_j^0) \cdot (S^0([t_j^0]) + \ddot{S}^0([t_j^0]) \Delta\tilde{t}_j^0) \approx \\ &\approx (\dot{S}^0([t_j^0]) \Delta\tilde{t}_j^0 - L_j^0) \cdot (S^0([t_j^0]) + \ddot{S}^0([t_j^0]) \Delta\tilde{t}_j^0) \approx \\ &\approx (\dot{S}^0([t_j^0])^2 \Delta\tilde{t}_j^0 + \dot{S}^0([t_j^0]) \cdot \ddot{S}^0([t_j^0]) (\Delta\tilde{t}_j^0)^2 - L_j^0 \cdot \dot{S}^0([t_j^0]) - L_j^0 \cdot \ddot{S}^0([t_j^0]) \Delta\tilde{t}_j^0 \end{aligned}$$

Nach der Linearisierung der obigen Gleichung durch Vernachlässigung des Terms für  $(\Delta\tilde{t}_j^0)^2$  erhält man schließlich:

$$\Delta\tilde{t}_j^0 \approx \frac{L_j^0 \cdot \dot{S}^0([t_j^0])}{(\dot{S}^0([t_j^0]))^2 - L_j^0 \cdot \ddot{S}^0([t_j^0])} \quad (2.2-5)$$

Aufgrund der Vernachlässigungen in den Gleichungen (2.2-4) und (2.2-5) wird die Orthogonalitätsbedingung (2.2-3) im allgemeinen nicht sofort erfüllt sein, und es müssen weitere Iterationen mit der Formel (2.2-5), wobei  $[t_j^0]_{u+1} := [t_j^0]_u + \Delta\tilde{t}_j^0$  gilt, durchgeführt werden. Die Orthogonalitätsbedingung ist dann (hinreichend) erfüllt, wenn  $\Delta\tilde{t}_j^0$  (nahezu) Null ist; dies ist in der Regel nach drei bis vier Iterationen der Fall.

Eine andere Herleitung der Gleichung (2.2-5) erfolgt über die Minimierung des Quadrates des Fehlervektors  $L_j$  (siehe Hoschek, Schneider, Wassum 1989).

In den folgenden Formeln dieses Kapitels wird davon ausgegangen, daß das hier beschriebe-

ne Verfahren zur Bestimmung der Stützpunktparameter  $t_j$  vor jedem Ausgleichungsschritt angewandt wird (also auch dann, wenn der aktuelle Stützpunktparameter mit dem im vorhergehenden Ausgleichungsschritt bestimmten  $\Delta\tilde{t}_j$  berechnet werden könnte). So wird gewährleistet, daß in den folgenden Formeln alle Terme  $L_j \cdot \dot{S}^0(t_j^0)$  gemäß der Orthogonalitätsbedingung (2.2-3) Null sind und daher entfallen.

### 2.2.3.3 Reduktion der Verbesserungsgleichungen

Nach der Interpolation der genäherten Kurve und der Parametrisierung der genäherten Stützpunkte  $P_j^0$  ( $j=1(1)q$ ) auf dieser Näherungskurve kann man nun für jede fiktive Kurvenbeobachtung  $\tilde{S}_j$  die Verbesserungsgleichungen (2.1-6) aufstellen. Gemeinsam mit den Verbesserungsgleichungen von anderen Beobachtungen ergibt sich das Verbesserungsgleichungssystem (2.1-7). In diesem System der gesamten Verbesserungsgleichungen ist der unbekannte Polynomparameter  $\tilde{t}_j$ , im Gegensatz zu den unbekanntem Knotenkoordinaten  $K_i$  ( $i=1(1)n$ ) und den unbekanntem Stützpunktkoordinaten  $P_j$ , nur von einer einzigen  $d$ -dimensionalen Beobachtung (eben von  $\tilde{S}_j$ ) betroffen.

Es ist daher leicht möglich, den unbekanntem Polynomparameter  $\tilde{t}_j$  bereits zum Zeitpunkt der Aufstellung der Verbesserungsgleichungen für die Beobachtung  $\tilde{S}_j$ , also noch vor der Aufstellung des Normalgleichungssystems, zu berechnen und damit aus dem Gesamtsystem zu eliminieren. Das Ergebnis der Ausgleichung (also die berechneten Werte für die Unbekannten) ändert sich dadurch nicht!

Diese Vorgangsweise ist empfehlenswert, da sie das Normalgleichungssystem um die  $q$  Unbekannten  $\tilde{t}_j$  verringert. In der Folge wird sowohl Speicherplatz als auch Rechenzeit des Computers eingespart.

Man kann dazu ähnlich wie bei der in der Geodäsie üblichen Reduktion der Orientierungsunbekannten von Richtungsbeobachtungen nach der Schreiberschen Regel vorgehen:

In der  $A$ -Matrix des gesamten Verbesserungsgleichungssystems mit  $o$  Beobachtungen und  $u$  Unbekannten bilden die  $d$  Zeilen der Beobachtung  $\tilde{S}_j$  die Submatrix  $A_j$  ( $d$  Zeilen,  $u$  Spalten). Da alle Gewichte  $w_{j,1} = \dots = w_{j,d} =: w_j$  der Kurvenbeobachtungen  $\tilde{S}_{j,1}, \dots, \tilde{S}_{j,d}$  gleich sind (siehe Kap. 2.1.3), ergibt sich die Gewichts-Submatrix ( $d$  Zeilen,  $d$  Spalten) zu  $W_j = w_j \cdot I$ . Nun wird die Teilsummen-Normalgleichungsmatrix  $N_j = w_j \cdot A_j^T \cdot A_j$  ( $u$  Zeilen,  $u$  Spalten) und die Teilsumme des Normalgleichungssystem  $N_j \cdot \Delta X = w_j \cdot A_j^T \cdot L_j$  gebildet. Von diesen  $u$  Normalgleichungen ist die Normalgleichung für die Unbekannte  $\Delta\tilde{t}_j$  bereits endgültig (also gleich wie im Gesamt-Normalgleichungssystem  $N \cdot \Delta X = A^T \cdot W \cdot L$ ):

$$w_j (\dot{S}^0(t_j^0)) \cdot \Delta S(t_j^0) + w_j (\dot{S}^0(t_j^0)) \cdot \dot{S}^0(t_j^0) \cdot \Delta\tilde{t}_j - w_j (\dot{S}^0(t_j^0)) \cdot \Delta P_j = w_j (\dot{S}^0(t_j^0)) \cdot L_j$$

Unter Berücksichtigung von  $\dot{S}^0(t_j^0) \cdot L_j = 0$  ergibt folgende Gleichung für  $\Delta\tilde{t}_j$ :

$$\Delta\tilde{t}_j = \frac{-\dot{S}^0(t_j^0) \cdot \Delta S(t_j^0) + \dot{S}^0(t_j^0) \cdot \Delta P_j}{(\dot{S}^0(t_j^0))^2} \quad (2.2-6)$$

Mit dieser Beziehung wird nun  $\Delta\tilde{t}_j$  in den Verbesserungsgleichungen (2.1-4) durch die übrigen Unbekannten  $\Delta k_{1,1}, \dots, \Delta k_{n,d}, \Delta p_1, \dots, \Delta p_d$  ersetzt, und man erhält die reduzierten

Verbesserungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 v_{\bar{s}_j, x}^{\text{red}} = & \sum_{i=1}^n \left( \sum_{y=1}^d \left( \frac{\dot{s}_x^0(t_j^0)}{\sum_{z=1}^d (\dot{s}_z^0(t_j^0))^2} (-\dot{s}_y^0(t_j^0) s'_{i,y}(t_j^0)) \Delta k_{i,y} \right) + s'_{i,x}(t_j^0) \Delta k_{i,x} \right) + \\
 & + \left( \sum_{y=1}^d \frac{\dot{s}_x^0(t_j^0)}{\sum_{z=1}^d (\dot{s}_z^0(t_j^0))^2} \dot{s}_y^0(t_j^0) \Delta p_{j,y} \right) - \Delta p_{j,x} - l_{j,x}
 \end{aligned} \tag{2.2-7}$$

$(x = 1(1)d)$

Mit Hilfe dieser reduzierten Verbesserungsgleichungen verringert sich zum Beispiel die Größe der Normalgleichungsmatrix des in der Abbildung 2.1-7 gezeigten Beispiels (31 konstante ebene Stützpunkte, 4 unbekannte Knoten, 31 unbekannte Polynomparameter) von  $39 \times 39$  auf  $8 \times 8$ . Für die Berechnung der Redundanz müssen die unbekannten Polynomparameter jedoch nach wie vor berücksichtigt werden!

Grundsätzlich kann jede Beziehung zwischen den unbekannten Stützpunktparametern und den anderen Unbekannten der Kurvenausgleichung, falls sie nicht schon in den Verbesserungsgleichungen (2.1-4) berücksichtigt ist, zur Reduktion der Verbesserungsgleichungen verwendet werden. Solch eine Beziehung ergibt sich zum Beispiel aus der Forderung, daß der durch die Ausgleichung minimierte Verbesserungsvektor  $V_{\bar{s}_j}$  senkrecht auf die ausgeglichenen Kurve stehen soll<sup>4</sup> (siehe Abb. 2.2-6).

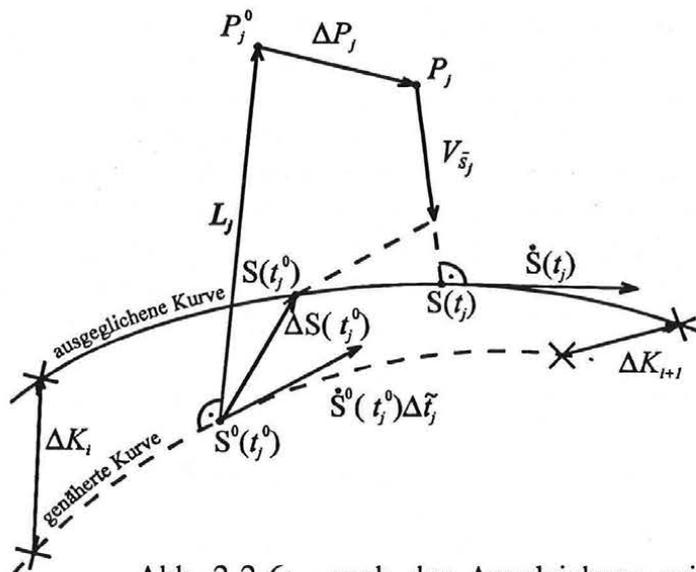


Abb. 2.2-6: nach der Ausgleichung minimierter Verbesserungsvektor  $V_{\bar{s}_j}$

<sup>4</sup>Der Vergleich der Abbildung 2.1-7 mit der Abbildung 2.1-8 zeigt, daß diese Forderung in der Regel erst im enditerierten Zustand erfüllt ist.

Formal lautet diese Orthogonalitätsforderung:

$$V_{\tilde{s}_j} \cdot \dot{S}(t_j) = 0 \quad (2.2-8)$$

Die Tangente  $\dot{S}(t_j)$  der ausgeglichenen Kurve ist unbekannt. Es kann jedoch, nach dem Prinzip der Annäherung (2.2-4), eine Schätzung von  $\dot{S}(t_j)$  erfolgen. Dabei sind neben der Änderung des Polynomparameters  $\Delta \tilde{t}_j$  auch die Änderungen der Interpolationskoeffizienten  $\Delta B_i$ ,  $\Delta C_i$  und  $\Delta D_i$  zu berücksichtigen. Zur Linearisierung werden wiederum alle Produkte zweier (oder mehrerer) differentiell kleiner Größen, also alle  $\Delta \cdot \Delta \dots$ , vernachlässigt.

$$\begin{aligned} \dot{S}(t_j)_{[i]} &= (B_i^0 + \Delta B_i) + 2(\tilde{t}_j^0 + \Delta \tilde{t}_j)(C_i^0 + \Delta C_i) + 3((\tilde{t}_j^0)^2 + 2\tilde{t}_j^0 \Delta \tilde{t}_j + \Delta \tilde{t}_j^2)(D_i^0 + \Delta D_i) \approx \\ &\approx (B_i^0 + 2\tilde{t}_j^0 C_i^0 + 3(\tilde{t}_j^0)^2 D_i^0) + (\Delta B_i + 2\tilde{t}_j^0 \Delta C_i + 3(\tilde{t}_j^0)^2 \Delta D_i) + (2C_i^0 + 6\tilde{t}_j^0 D_i^0) \Delta \tilde{t}_j \approx \\ &\approx \dot{S}^0(t_j^0) + \Delta \dot{S}(t_j^0) + \ddot{S}^0(t_j^0) \Delta \tilde{t}_j \end{aligned} \quad (2.2-9)$$

$$\text{mit } \tilde{t}_j^0 = t_j^0 - t_i^0, \quad \Delta \dot{s}_x(t_j^0) := \sum_{i=1}^n (s'_{i,x}(t_j^0) \Delta k_{i,x})$$

$$\text{und } s'_{i,x}(t_j^0) := \frac{\partial \dot{s}_x(t_j^0)}{\partial k_{i,x}} = \left( \frac{\partial b_{i,x}}{\partial k_{i,x}} + 2\tilde{t}_j^0 \frac{\partial c_{i,x}}{\partial k_{i,x}} + 3(\tilde{t}_j^0)^2 \frac{\partial d_{i,x}}{\partial k_{i,x}} \right)$$

Setzt man diese Approximation für  $\dot{S}(t_j)$  und die Verbesserungsgleichung (2.1-6) in die Orthogonalitätsforderung (2.2-8) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} &(\Delta S(t_j^0) + \dot{S}^0(t_j^0) \Delta \tilde{t}_j - \Delta P_j - L_j) \cdot (\dot{S}^0(t_j^0) + \Delta \dot{S}(t_j^0) + \ddot{S}^0(t_j^0) \Delta \tilde{t}_j) \approx \\ &\approx \dot{S}^0(t_j^0) \cdot \Delta S(t_j^0) + (\dot{S}^0(t_j^0))^2 \Delta \tilde{t}_j - \dot{S}^0(t_j^0) \cdot \Delta P_j - L_j \cdot \Delta \dot{S}(t_j^0) - (L_j \cdot \ddot{S}^0(t_j^0)) \Delta \tilde{t}_j \approx 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \Delta \dot{s}_x(t_j^0) = \sum_{i=1}^n (s'_{i,x}(t_j^0) \Delta k_{i,x})$$

Durch Umformung dieser Beziehung erhält man eine neue Approximation für  $\Delta \tilde{t}_j$ :

$$\Delta \tilde{t}_j \approx \frac{L_j \cdot \Delta \dot{S}(t_j^0) - \dot{S}^0(t_j^0) \cdot \Delta S(t_j^0) + \dot{S}^0(t_j^0) \cdot \Delta P_j}{(\dot{S}^0(t_j^0))^2 - L_j \cdot \ddot{S}^0(t_j^0)} \quad (2.2-10)$$

Mit Hilfe dieser Approximation kann nun wiederum  $\Delta \tilde{t}_j$  in den Verbesserungsgleichungen (2.1-4) substituiert werden:

$$\begin{aligned}
v_{s_{j,x}}^{\text{red}} = & \sum_{i=1}^n \left( \sum_{y=1}^d \left( \frac{\dot{s}_x^0(t_j^0)}{\sum_{z=1}^d \left( (\dot{s}_z^0(t_j^0))^2 - l_{j,z} \ddot{s}_z^0(t_j^0) \right)} \left( l_{j,y} \dot{s}'_{i,y}(t_j^0) - \dot{s}_y^0(t_j^0) s'_{i,y}(t_j^0) \right) \Delta k_{i,y} + s'_{i,x}(t_j^0) \Delta k_{i,x} \right) + \right. \\
& \left. + \left( \sum_{y=1}^d \frac{\dot{s}_x^0(t_j^0)}{\sum_{z=1}^d \left( (\dot{s}_z^0(t_j^0))^2 - l_{j,z} \ddot{s}_z^0(t_j^0) \right)} \dot{s}_y^0(t_j^0) \Delta p_{j,y} \right) - \Delta p_{j,x} - l_{j,x} \right) \\
& (x = 1(1)d)
\end{aligned} \tag{2.2-11}$$

Der geringfügige Unterschied zwischen den reduzierten Verbesserungsgleichungen (2.2-7) und (2.2-11) äußert sich auch in einem unterschiedlichen Iterationsverhalten während der Ausgleichung (siehe Tabelle 2.2-1, als Abbruchkriterium gemäß (2.1-12) wurde  $\varepsilon=0.01$  verwendet):

Beispiel	It.	Gleichungen (2.1-4) bzw. (2.2-7)			Gleichungen (2.2-11)		
		$\Sigma w l^2$	$\Sigma w v^2$	$\Sigma w l^2 / \Sigma w v^2$	$\Sigma w l^2$	$\Sigma w v^2$	$\Sigma w l^2 / \Sigma w v^2$
Abbildung 2.1-8	1	2401.96	225.76	10.64	2401.96	433.56	5.54
	2	591.52	219.13	2.70	384.99	208.92	1.84
	3	207.04	194.28	1.07	202.53	194.34	1.04
	4	192.88	192.02	1.00	192.91	192.08	1.00
Abbildung 2.2-7 (mit den in 2.2.3.4 beschriebenen zusätzlichen Be- obachtungen)	1	127.60	20.12	6.34	127.60	42.42	3.00
	2	74.97	25.43	2.95	30.14	16.94	1.78
	3	24.82	16.88	1.47	16.60	15.98	1.04
	4	16.35	15.84	1.03	16.11	15.94	1.01
	5	16.50	15.85	1.04	16.17	15.99	1.01
	6	16.32	15.93	1.02	16.13	16.04	1.00
	7	16.16	16.01	1.00			

Tab. 2.2-1: Auswirkung verschiedener Methoden zur Reduktion der Verbesserungsgleichungen auf das Iterationsverhalten während der Ausgleichung

Die deutlichsten Unterschiede sind in der Tabelle 2.2-1 zu Beginn einer Ausgleichung erkennbar, wo die verwendeten Näherungswerte noch recht grob sind. Bei Verwendung der Verbesserungsgleichungen (2.2-11) stimmt etwa die Summe  $\Sigma w v^2$  der ersten Iteration besser mit der Summe  $\Sigma w l^2$  der zweiten Iteration überein als bei Verwendung der Verbesserungs-

gleichungen (2.2-7)<sup>5</sup>. Dieses unterschiedliche Verhalten kann folgendermaßen erklärt werden:

Bei der Vor-Berechnung von  $\Delta \bar{t}_j$  mit der Gleichung (2.2-6) erfolgte die Linearisierung bereits vor der Aufstellung der Normalgleichung für  $\Delta \bar{t}_j$  (also noch vor der Multiplikation  $A_j^T \cdot A_j$ ). Bei der Approximation von  $\Delta \bar{t}_j$  mit der Formel (2.2-10) hingegen wird erst nach der Multiplikation  $V_{s_j} \cdot \dot{S}(t_j^0)$  linearisiert. Die mit Hilfe der Beziehung (2.2-10) reduzierten Verbesserungsgleichungen (2.2-11) stellen daher eine "feinere" Linearisierung (mit weniger Vernachlässigungen) der Beobachtungsgleichungen (2.1-2) dar als die reduzierten Verbesserungsgleichungen (2.2-7).

Die Verwendung der reduzierten Verbesserungsgleichungen (2.2-11) kann unter Umständen etwas "schneller", also nach einer etwas geringeren Anzahl von Iterationen, zum enditerierten Ergebnis führen.

#### 2.2.3.4 Zusätzliche fiktive Beobachtungen für die Knotenparameter

Die ausgleichende Kurve ist nur im Bereich von  $t_{min}$  bis  $t_{max}$ , vom kleinsten bis zum größten Stützpunktparameter, definiert. Der erste und der letzte ausgeglichene Knoten,  $K_1$  und  $K_n$ , sollen daher an den Stellen  $\bar{t}_1 = t_{min}$  und  $\bar{t}_n = t_{max}$  liegen. Zur Verhinderung von "Kollisionen" zwischen den übrigen ausgeglichenen Knoten  $K_i$  ( $i=2(1)n-1$ ) kann es erwünscht sein, daß diese an bestimmten Parameterstellen  $\bar{t}_i$  liegen, aber nur mit einer gewissen Genauigkeit.

Die fiktive Beobachtung eines Knotens  $K_i$  an der Stelle  $\bar{t}_i$  ( $i=1(1)n$ ) lautet nun: Der Knoten  $K_i$  befinde sich in der Normalebene  $\tau_i$  der Kurve an der Stelle  $\bar{t}_i$  (siehe Abb. 2.2-7). Auf die genäherte Kurve bezogen, ergibt sich die Verbesserungsgleichung:

$$v_{\tau_i} = \frac{1}{|\dot{S}^0(\bar{t}_i)|} \sum_{y=1}^d (\dot{s}_{y^0}(\bar{t}_i) \Delta k_{i,y}) - \left( \frac{\dot{S}^0(\bar{t}_i)}{|\dot{S}^0(\bar{t}_i)|} \cdot (S^0(\bar{t}_i) - K_i^0) \right) \quad (2.2-12)$$

---

<sup>5</sup>Die Summe  $\Sigma w^2$  stellt nur eine Schätzung auf der Basis des linearisierten Ausgleichungssystems dar. Die eigentliche Konvergenzrate des vorliegenden nichtlinearen Beobachtungsgleichungssystems wird durch die Änderung der Summe  $\Sigma w^2$  ausgedrückt.

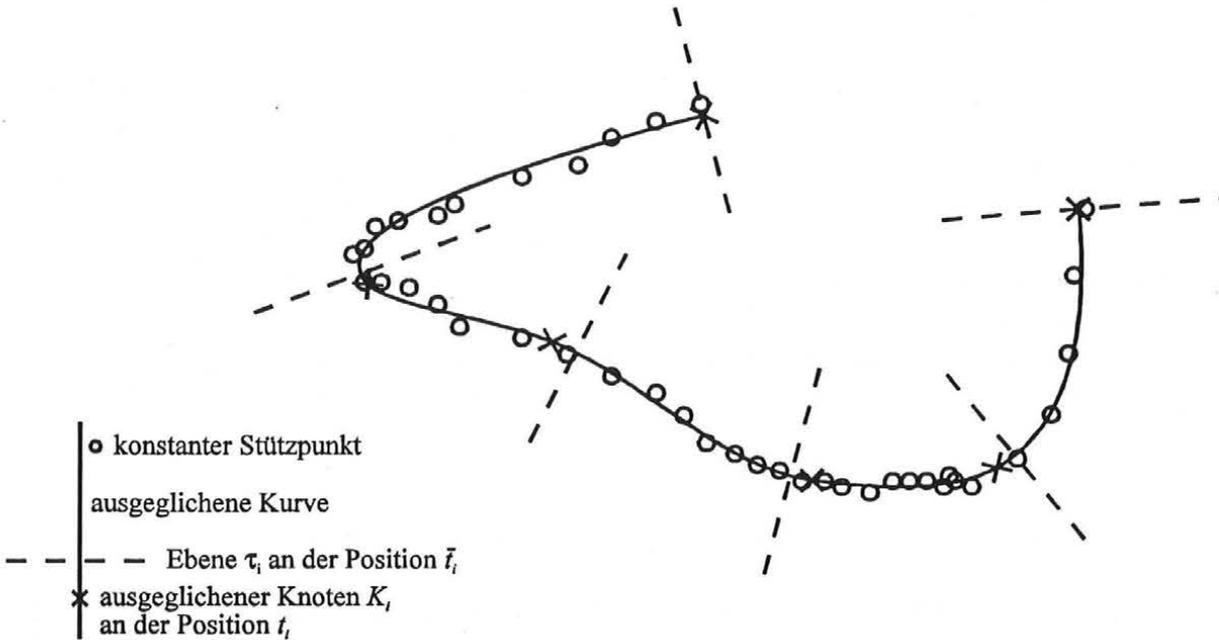


Abb. 2.2-7: Fiktive Beobachtungen der Knotenparameter

Bei offener Kurve ist an jedem Ende eine fiktive Knotenparameterbeobachtung vorzusehen; diese beiden Beobachtungen,  $\bar{t}_1$  und  $\bar{t}_n$ , dienen zur Festlegung der beiden unbekanntten Verschiebungen der Endknoten entlang der Kurve.

Die räumliche "Stabilisierung" der inneren Knoten  $K_2, \dots, K_{n-1}$  kann bei Bedarf durch die Beobachtungen  $\bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{n-1}$  erfolgen. Diese Knotenstabilisierung funktioniert am besten bei chordaler, hingegen überhaupt nicht bei äquidistanter Parametrisierung. Bei der letzteren Parametrisierungsart haben nämlich die tatsächlichen und die zusätzlich beobachteten Knotenparameter,  $t_i$  und  $\bar{t}_i$ , per Definition unveränderliche Werte, unabhängig von den Knotenpositionen entlang der Kurve (siehe 2.2.3.1). Für räumliche Anwendungen sollte daher mit Bedacht auf eine im Zuge der Kurvenausgleichung eventuell erforderliche Knotenstabilisierung stets die chordale Parametrisierung verwendet werden.

## 2.3 Interpolation einer ausgleichenden Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen

Die  $n$  parametrisierten Knoten  $k_{1,x}, \dots, k_{n,x}$  der Kurve  $s_x(t)$  definieren  $n-1$  Intervalle. Für die Interpolation von Kurvenpunkten müssen nun in jedem Intervall die Interpolationskoeffizienten der Formel (2.1-1) berechnet werden. Zur Bestimmung der vier Koeffizienten  $a_{i,x}$ ,  $b_{i,x}$ ,  $c_{i,x}$  und  $d_{i,x}$  des Intervalles  $[i]$  zwischen den Knoten  $k_{i,x}$  und  $k_{i+1,x}$  ( $x=1(1)d$ ) werden vier Gleichungen benötigt:

Die ersten beiden Gleichungen ergeben sich aus der Bedingung, daß die interpolierte Kurve durch die Knoten führen soll:

$$s_x(t)_{[i]} = a_{i,x} = k_{i,x} \quad (2.3-1)$$

$$s_x(t_{i+1})_{[i]} = k_{i,x} + (t_{i+1}-t_i)b_{i,x} + (t_{i+1}-t_i)^2c_{i,x} + (t_{i+1}-t_i)^3d_{i,x} = k_{i+1,x} \quad (2.3-2)$$

Die dritte Gleichung beschreibt den "glatten" Übergang der Kurve von einem Intervall zum nächsten mittels stetiger erster Ableitung:

$$\begin{aligned} \dot{s}_x(t_{i+1})_{[i]} &= \dot{s}_x(t_{i+1})_{[i+1]} \\ \Rightarrow b_{i,x} + 2(t_{i+1}-t_i)c_{i,x} + 3(t_{i+1}-t_i)^2d_{i,x} - b_{i+1,x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3-3)$$

Die vierte Gleichung hängt von der Interpolationsart ab. In diesem Kapitel werden die kubische Spline-, die Schmiege- und die Akima-Interpolation<sup>1</sup> behandelt.

Bei geschlossenen Kurven ist  $k_{n,x}=k_{1,x}$ ; für die Ausgleichung reduziert sich daher die Anzahl  $m$  der zu berechnenden unbekanntenen Knoten auf  $m=n-1$ . Geschlossene Kurven werden durch periodische Interpolations-Funktionen und offene Kurven durch nichtperiodische Interpolations-Funktionen dargestellt.

Nach der Bestimmung der Interpolationskoeffizienten lassen sich an der Stelle  $t$  des Stützpunktes  $P$  für jede Interpolationsart die Änderungen  $\Delta s_x(t)$  der Kurve und  $\Delta \dot{s}_x(t)$  der Tangente aufgrund der Änderung der Interpolationskoeffizienten, angeben:

$$\Delta s_x(t)_{[i]} = \Delta k_{i,x} + (t-t_i)\Delta b_{i,x} + (t-t_i)^2\Delta c_{i,x} + (t-t_i)^3\Delta d_{i,x} \quad (2.3-4)$$

$$\Delta \dot{s}_x(t)_{[i]} = \Delta b_{i,x} + 2(t-t_i)\Delta c_{i,x} + 3(t-t_i)^2\Delta d_{i,x}$$

Für die Verbesserungsgleichungen der fiktiven Kurvenbeobachtung ist  $\Delta s_x(t)_{[l]}$  und  $\Delta \dot{s}_x(t)_{[l]}$  in Abhängigkeit von  $\Delta k_{l,x}$  ( $l=1(1)m$ ) darzustellen:

<sup>1</sup>Die mit kubischen Spline-Interpolationen beziehungsweise mit Schmiege-Interpolationen erzeugte Raumkurve wird im folgenden als "kubische Splinekurve" beziehungsweise als "Schmiegekurve" bezeichnet.

$$\Delta s_x(t)_{[i]} = \sum_{l=1}^m (s'_{l,x}(t) \Delta k_{l,x}) , \quad \Delta \dot{s}_x(t)_{[i]} = \sum_{l=1}^m (\dot{s}'_{l,x}(t) \Delta k_{l,x})$$

Die Ableitungen  $s'_{l,x}(t)$  (siehe (2.1-4)) und  $\dot{s}'_{l,x}(t)$  (siehe (2.2-9)) werden schließlich in die Verbesserungsgleichungen (2.1-4) beziehungsweise in die reduzierten Verbesserungsgleichungen (2.2-7) oder (2.2-11) eingesetzt.

## 2.3.1 Kubische Spline-Interpolation

### 2.3.1.1 Bestimmung der Interpolationskoeffizienten der kubischen Splinekurve

Die kubische Spline-Interpolation<sup>2</sup> simuliert einen biegsamen Stab, der in den Knotenpunkten fixiert ist. Der Stab beschreibt nun eine Kurve, bei der die Biegeenergie minimiert wird (siehe z.B. Blöser, Überhuber 1976; bzw. Hoschek, Lasser 1989, S. 83).

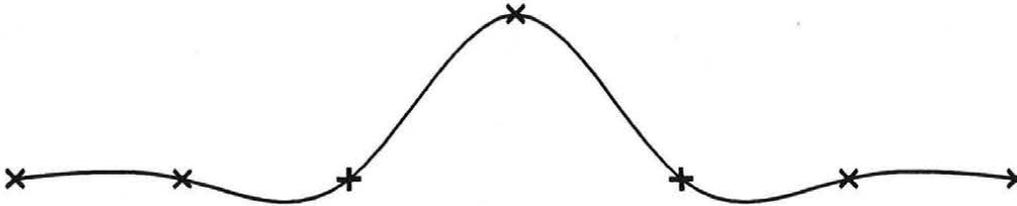


Abb. 2.3-1: Biegelinie eines in den Knoten fixierten biegsamen Stabes

Da sich die zur Biegeenergie proportionale Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{S}(t) \times \ddot{S}(t)|}{|\dot{S}(t)|^3}$$

eines solchen Stabes nur stetig ändern kann, wird zusätzlich zu den Bedingungen (2.3-1) bis (2.3-3) gefordert, daß auch die zweite Ableitung des kubischen Splines beim Übergang von einem Intervall zum nächsten stetig ist:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_x(t_{i+1})_{[i]} &= \ddot{s}_x(t_{i+1})_{[i+1]} \\ \rightarrow 2c_{i,x} + 6(t_{i+1} - t_i)d_{i,x} - 2c_{i+1,x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3-5)$$

Bei  $n$  Knoten liegen somit zur Bestimmung der  $4 \cdot (n-1)$  Interpolationskoeffizienten in  $x$

---

<sup>2</sup>Der Name "Spline" stammt aus der englischen Sprache und bezeichnet einen dünnen Stab, der im Schiffsbau als Konstruktionselement für die Form der Außenwand des Schiffsrumpfes verwendet wird. In der Mathematik wird eine Funktion als "Splinefunktion" bezeichnet, wenn sie aus zusammengesetzten Polynomen vom Grade  $g$  gebildet wird und  $(g-1)$  mal stetig differenzierbar ist.

folgende Gleichungen vor:

$$\begin{array}{lll}
 n-1 & \text{Gleichungen vom Typ} & (2.3-1), \\
 n-1 & - " - & (2.3-2), \\
 n-2 & - " - & (2.3-3), \\
 n-2 & - " - & (2.3-4).
 \end{array}$$

Das ergibt insgesamt  $4 \cdot (n-1) - 2$  Gleichungen. Die fehlenden beiden Gleichungen ergeben sich aus folgenden Randbedingungen:

Bei offener Kurve sei die Krümmung in  $K_1$  und  $K_n$  gleich Null:

$$\ddot{s}_x(t_1)_{[1]} = 0, \quad \ddot{s}_x(t_n)_{[n]} = \ddot{s}_x(t_n)_{[n-1]} = 0 \quad (2.3-7)$$

Dies ist die Randbedingung eines "natürlichen Splines", da sich ein biegsamer Stab außerhalb des Intervalls  $[t_1, t_n]$  als Gerade fortsetzt.

Bei geschlossener Kurve sind die Tangenten und die Krümmungen in  $K_1$  und  $K_n$  gleich. Gemäß (2.3-3) und (2.3-5) gilt daher:

$$\begin{aligned}
 b_{n-1,x} + 2(t_n - t_{n-1})c_{n-1,x} + 3(t_n - t_{n-1})^2 d_{n-1,x} - b_{1,x} &= 0 \\
 2c_{n-1,x} + 6(t_n - t_{n-1})d_{n-1,x} - 2c_1 &= 0
 \end{aligned} \quad (2.3-7)$$

Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie die Interpolationskoeffizienten eines kubischen Splines berechnet werden können:

Bei einem kubischen Polynom verändert sich die zweite Ableitung  $\ddot{s}_x(t)$  linear, und kann daher im Intervall  $[i]$  zwischen den beiden Werten  $\ddot{s}_x(t_i)_{[i]}$  und  $\ddot{s}_x(t_{i+1})_{[i+1]}$  linear interpoliert werden:

$$\ddot{s}_x(t)_{[i]} = \frac{2(t_{i+1} - t)c_{i,x} + 2(t - t_i)c_{i+1,x}}{t_{i+1} - t_i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$\text{mit } 2c_{i,x} = \ddot{s}_x(t_i)_{[i]} \quad \text{und } 2c_{i+1,x} = \ddot{s}_x(t_{i+1})_{[i+1]}$$

Durch Integration dieser Beziehung kann man den Anstieg  $\dot{s}_x(t)_{[i]}$  in Abhängigkeit der Interpolationskoeffizienten  $c_{i,x}$  und  $c_{i+1,x}$  darstellen:

$$\dot{s}_x(t)_{[i]} = \frac{-(t_{i+1} - t)^2 c_{i,x} + (t - t_i)^2 c_{i+1,x}}{t_{i+1} - t_i} + \beta_{i,x} \quad (2.3-8)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten  $\beta_{i,x}$  mit Hilfe der Splinefunktion  $s_x(t)$  wird noch einmal integriert:

$$s_x(t)_{[i]} = \frac{(t_{i+1} - t)^3 c_{i,x} + (t - t_i)^3 c_{i+1,x}}{3(t_{i+1} - t_i)} + t \beta_{i,x} + \alpha_{i,x}$$

An der Stelle  $t_i$  beziehungsweise  $t_{i+1}$  nimmt  $s_x(t)_{[i]}$  den Wert  $k_{i,x}$  beziehungsweise  $k_{i+1,x}$  an:

$$k_{i,x} = \frac{(t_{i+1} - t_i)^2 c_{i,x}}{3} + t_i \beta_{i,x} + \alpha_{i,x}$$

$$k_{i+1,x} = \frac{(t_{i+1} - t_i)^2 c_{i+1,x}}{3} + t_{i+1} \beta_{i,x} + \alpha_{i,x}$$

Aus der Differenz dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\beta_{i,x} = \frac{(t_{i+1} - t_i)(c_{i,x} - c_{i+1,x})}{3} + \frac{k_{i+1,x} - k_{i,x}}{t_{i+1} - t_i} \quad (2.3-9)$$

Mit (2.3-9) eingesetzt in (2.3-8) kann man die Tangente an der Stelle  $t_i$  aus den Intervallen  $[i-1]$  und  $[i]$  berechnen:

$$\dot{s}_x(t)_{[i-1]} = \frac{2}{3}(t_i - t_{i-1})c_{i,x} + \frac{1}{3}(t_i - t_{i-1})c_{i-1,x} + \frac{k_{i,x} - k_{i-1,x}}{t_i - t_{i-1}} \quad (2.3-10)$$

$$\dot{s}_x(t)_{[i]} = \frac{2}{3}(t_{i+1} - t_i)c_{i+1,x} + \frac{1}{3}(t_{i+1} - t_i)c_{i,x} + \frac{k_{i+1,x} - k_{i,x}}{t_{i+1} - t_i}$$

Durch Gleichsetzung von  $\dot{s}_x(t)_{[i-1]}$  mit  $\dot{s}_x(t)_{[i]}$  gemäß (2.3-3) erhält man nach Umsortierung eine Formel, die die Interpolationskoeffizienten  $c_{i,x}$  ( $i=1(1)n-1$ ) in Abhängigkeit der Knoten  $k_{1,x}, \dots, k_{m,x}$  ausdrückt:

$$\frac{1}{3}(t_i - t_{i-1})c_{i-1,x} + \frac{2}{3}(t_{i+1} - t_{i-1})c_{i,x} + \frac{1}{3}(t_{i+1} - t_i)c_{i+1,x} = \frac{k_{i+1,x} - k_{i,x}}{t_{i+1} - t_i} - \frac{k_{i,x} - k_{i-1,x}}{t_i - t_{i-1}} \quad (2.3-11)$$

Die Gleichungen (2.3-11) bilden ein Gleichungssystem für die Interpolationskoeffizienten  $c_{i,x}$  bei offener Kurve:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}(t_3-t_1) & \frac{1}{3}(t_3-t_2) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{3}(t_3-t_2) & \frac{2}{3}(t_4-t_2) & \frac{1}{3}(t_4-t_3) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \dots & 0 & \frac{1}{3}(t_i-t_{i-1}) & \frac{2}{3}(t_{i+1}-t_{i-1}) & \frac{1}{3}(t_{i+1}-t_i) & 0 & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3}(t_{n-2}-t_{n-3}) & \frac{2}{3}(t_{n-1}-t_{n-3}) & \frac{1}{3}(t_{n-1}-t_{n-2}) \\ 0 & & \dots & 0 & \frac{1}{3}(t_{n-1}-t_{n-2}) & \frac{2}{3}(t_n-t_{n-2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{2,x} \\ c_{3,x} \\ \vdots \\ c_{i,x} \\ \vdots \\ c_{n-2,x} \\ c_{n-1,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_{3,x}-k_{2,x}}{t_3-t_2} - \frac{k_{2,x}-k_{1,x}}{t_2-t_1} \\ \frac{k_{4,x}-k_{3,x}}{t_4-t_3} - \frac{k_{3,x}-k_{2,x}}{t_3-t_2} \\ \vdots \\ \frac{k_{i+1,x}-k_{i,x}}{t_{i+1}-t_i} - \frac{k_{i,x}-k_{i-1,x}}{t_i-t_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{k_{n-1,x}-k_{n-2,x}}{t_{n-1}-t_{n-2}} - \frac{k_{n-2,x}-k_{n-3,x}}{t_{n-2}-t_{n-3}} \\ \frac{k_{n,x}-k_{n-1,x}}{t_n-t_{n-1}} - \frac{k_{n-1,x}-k_{n-2,x}}{t_{n-1}-t_{n-2}} \end{pmatrix}$$

$$N_c \cdot C_x = Y_x$$

und bei geschlossener Kurve:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}(t_{n+1}-t_{n-1}) & \frac{1}{3}(t_2-t_1) & 0 & \dots & \frac{1}{3}(t_n-t_{n-1}) \\ \frac{1}{3}(t_2-t_1) & \frac{2}{3}(t_3-t_1) & \frac{1}{3}(t_3-t_2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \dots & 0 & \frac{1}{3}(t_i-t_{i-1}) & \frac{2}{3}(t_{i+1}-t_{i-1}) & \frac{1}{3}(t_{i+1}-t_i) & 0 & \dots \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3}(t_{n-2}-t_{n-3}) & \frac{2}{3}(t_{n-1}-t_{n-3}) & \frac{1}{3}(t_{n-1}-t_{n-2}) \\ \frac{1}{3}(t_n-t_{n-1}) & & \dots & 0 & \frac{1}{3}(t_{n-1}-t_{n-2}) & \frac{2}{3}(t_n-t_{n-2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,x} \\ c_{2,x} \\ \vdots \\ c_{i,x} \\ \vdots \\ c_{n-2,x} \\ c_{n-1,x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_{2,x}-k_{1,x}}{t_2-t_1} - \frac{k_{1,x}-k_{n-1,x}}{t_n-t_{n-1}} \\ \frac{k_{3,x}-k_{2,x}}{t_3-t_2} - \frac{k_{2,x}-k_{1,x}}{t_2-t_1} \\ \vdots \\ \frac{k_{i+1,x}-k_{i,x}}{t_{i+1}-t_i} - \frac{k_{i,x}-k_{i-1,x}}{t_i-t_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{k_{n-1,x}-k_{n-2,x}}{t_{n-1}-t_{n-2}} - \frac{k_{n-2,x}-k_{n-3,x}}{t_{n-2}-t_{n-3}} \\ \frac{k_{1,x}-k_{n-1,x}}{t_n-t_{n-1}} - \frac{k_{n-1,x}-k_{n-2,x}}{t_{n-1}-t_{n-2}} \end{pmatrix}$$

$$N_c \cdot C_x = Y_x$$

$$\text{mit } t_{n+1} := t_n + (t_2 - t_1)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems führt zu:

$$C_x = Q \cdot Y_x, \quad \text{mit } Q = N_c^{-1} \quad (2.3-12)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (2.3-10) und (2.3-5) können nun die Interpolationskoeffizienten  $b_{i,x}$  und  $d_{i,x}$  berechnet werden:

$$b_{i,x} = -\frac{2}{3}(t_{i+1}-t_i)c_{i,x} - \frac{1}{3}(t_{i+1}-t_i)c_{i+1,x} + \frac{k_{i+1,x}-k_{i,x}}{t_{i+1}-t_i} \quad (2.3-13)$$

$$d_{i,x} = \frac{c_{i+1,x}-c_{i,x}}{3(t_{i+1}-t_i)}$$

### 2.3.1.2 Verbesserungsgleichungen der ausgleichenden kubischen Splinekurve

Gemäß (2.3-12) kann  $c_{i,x}$  ( $i=1(1)n-1$ ) wie folgt berechnet werden:

$$c_{i,x} = \sum_{l=l^*}^{n-1} q_{i,l} \left( \frac{k_{l+1,x}-k_{l,x}}{t_{l+1}-t_l} - \frac{k_{l,x}-k_{l-1,x}}{t_l-t_{l-1}} \right), \quad l^* := \begin{cases} 2 & \dots \text{ offen} \\ 1 & \dots \text{ geschlossen} \end{cases}$$

Eine Umsortierung nach der Reihenfolge der Knoten ergibt:

$$c_{i,x} = \sum_{l=1}^m (\lambda_{i,l} k_{l,x}) \quad \text{mit} \quad \lambda_{i,l} = \frac{q_{i,l+1}-q_{i,l}}{t_{l+1}-t_l} - \frac{q_{i,l}-q_{i,l-1}}{t_l-t_{l-1}} \quad (2.3-14)$$

offen  $\Rightarrow m = n, \quad q_{i,1} = q_{i,n} = \lambda_{1,l} = \lambda_{n,l} = 0$

geschlossen  $\Rightarrow m = n-1, \quad q_{i,n} = q_{i,1}, \quad \lambda_{n,l} = \lambda_{n,l}$

Mit (2.3-14) kann nun  $\Delta c_{i,x}$  in Abhängigkeit von  $\Delta k_{l,x}$  ( $l=1(1)m$ ) angegeben werden:

$$\Delta c_{i,x} = \sum_{l=1}^m (\lambda_{i,l} \Delta k_{l,x}) \quad (2.3-15)$$

Die Gleichungen (2.3-4) für  $\Delta s_x(t)$  und  $\Delta \dot{s}_x(t)$  im Intervall  $[i]$  lassen sich unter Berücksichtigung der Beziehung (2.3-13) folgendermaßen umformen:

$$\Delta s_x(t)_{[i]} = \Delta k_{i,x} + (t-t_i) \left( -\frac{2}{3}(t_{i+1}-t_i)\Delta c_{i,x} - \frac{1}{3}(t_{i+1}-t_i)\Delta c_{i+1,x} - \frac{\Delta k_{i+1,x}-\Delta k_{i,x}}{t_{i+1}-t_i} \right) + (t-t_i)^2 \Delta c_{i,x} + (t-t_i)^3 \frac{\Delta c_{i+1,x}-\Delta c_{i,x}}{3(t_{i+1}-t_i)}$$

$$\Delta \dot{s}_x(t)_{[i]} = \left( -\frac{2}{3}(t_{i+1}-t_i)\Delta c_{i,x} - \frac{1}{3}(t_{i+1}-t_i)\Delta c_{i+1,x} - \frac{\Delta k_{i+1,x}-\Delta k_{i,x}}{t_{i+1}-t_i} \right) + 2(t-t_i)\Delta c_{i,x} + 3(t-t_i)^2 \frac{\Delta c_{i+1,x}-\Delta c_{i,x}}{3(t_{i+1}-t_i)}$$

Eine Umsortierung nach  $\Delta k$  und  $\Delta c$  führt zu:

$$\begin{aligned}\Delta s_x(t)_{[i]} &= (1 - \alpha(t)) \Delta k_{i,x} + \alpha(t) \Delta k_{i+1,x} + \beta(t) \Delta c_{i,x} + \gamma(t) \Delta c_{i+1,x} \\ \alpha(t) &:= \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \\ \beta(t) &:= -\frac{(t - t_i)^3}{3(t_{i+1} - t_i)} - \frac{2}{3}(t - t_i)(t_{i+1} - t_i) + (t - t_i)^2 \\ \gamma(t) &:= \frac{(t - t_i)^3}{3(t_{i+1} - t_i)} - \frac{1}{3}(t - t_i)(t_{i+1} - t_i)\end{aligned}\tag{2.3-16}$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{s}_x(t)_{[i]} &= -\dot{\alpha}(t) \Delta k_{i,x} + \dot{\alpha}(t) \Delta k_{i+1,x} + \dot{\beta}(t) \Delta c_{i,x} + \dot{\gamma}(t) \Delta c_{i+1,x} \\ \dot{\alpha}(t) &:= \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \\ \dot{\beta}(t) &:= -\frac{(t - t_i)^2}{t_{i+1} - t_i} - \frac{2}{3}(t_{i+1} - t_i) + 2(t - t_i) \\ \dot{\gamma}(t) &:= \frac{(t - t_i)^2}{t_{i+1} - t_i} - \frac{1}{3}(t_{i+1} - t_i)\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichung (2.3-15) wird nun in (2.3-16)  $\Delta c_{i,x}$  durch  $\Delta k_{i,x}$  ( $l=1(1)m$ ) ersetzt. Hiermit erhält man die endgültigen Formeln für  $\Delta s_x(t)$  und  $\Delta \dot{s}_x(t)$  des kubischen Splines:

$$\begin{aligned}\Delta s_x(t)_{[i]} &= \sum_{l=1}^m \left( (\beta(t) \lambda_{i,l} + \gamma(t) \lambda_{i+1,l}) \Delta k_{l,x} \right) + (1 - \alpha(t)) \Delta k_{i,x} + \alpha(t) \Delta k_{i+1,x} \\ \Delta \dot{s}_x(t)_{[i]} &= \sum_{l=1}^m \left( (\dot{\beta}(t) \lambda_{i,l} + \dot{\gamma}(t) \lambda_{i+1,l}) \Delta k_{l,x} \right) - \dot{\alpha}(t) \Delta k_{i,x} + \dot{\alpha}(t) \Delta k_{i+1,x}\end{aligned}\tag{2.3-17}$$

## 2.3.2 Schmiege-Interpolation

### 2.3.2.1 Bestimmung Interpolationskoeffizienten der Schmiegekurve

Im Gegensatz zur kubischen Spline-Interpolation werden bei der Schmiege-Interpolation (engl. "osculatory interpolation", siehe Akima 1970) nur die Knoten der näheren Umgebung des Intervalls  $[i]$  zur Bestimmung der Interpolationskoeffizienten herangezogen: An der Stelle  $t_i$  soll die interpolierte Schmiegekurve den gleichen Anstieg wie die durch  $K_{i-1}$ ,  $K_i$  und  $K_{i+1}$  führende quadratische Parabel haben.

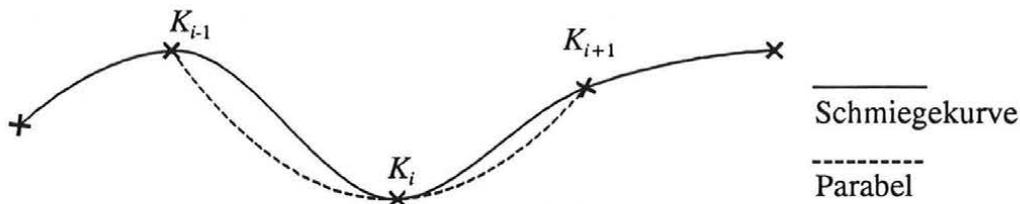


Abb. 2.3-2: Schmiegekurve mit Parabel

Zählt man den Parameter  $\hat{t}$  der Parabel  $p(\hat{t})_{[i]}$  von  $t_i$  aus, so lauten die Gleichungen für die Parabel und deren Tangente:

$$p_x(\hat{t})_{[i]} = k_{i,x} + \hat{t}f_{i,x} + \hat{t}^2 g_{i,x}$$

$$\dot{p}_x(\hat{t})_{[i]} = f_{i,x} + 2\hat{t} g_{i,x}$$

Der Parabelkoeffizient  $f_{i,x}$  ist der gesuchte Anstieg der Schmiegekurve an der Stelle  $t_i$ :

$$\dot{p}_x(\hat{t}=0)_{[i]} = f_{i,x} = \dot{s}_x(t_i) = b_{i,x}$$

In den Knoten  $k_{i-1,x}$  und  $k_{i+1,x}$  lautet die Parabelgleichung:

$$k_{i-1,x} = p_x(t_{i-1}-t_i) = k_{i,x} + (t_{i-1}-t_i)b_{i,x} + (t_{i-1}-t_i)^2 g_{i,x}$$

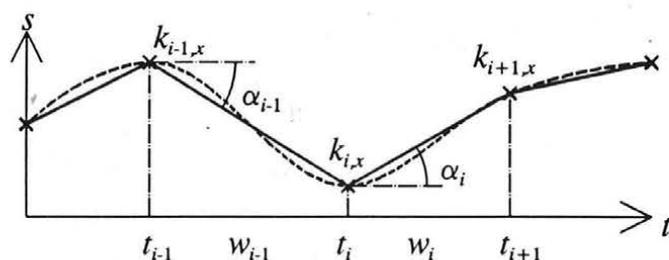
$$k_{i+1,x} = p_x(t_{i+1}-t_i) = k_{i,x} + (t_{i+1}-t_i)b_{i,x} + (t_{i+1}-t_i)^2 g_{i,x}$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach  $b_{i,x}$  ergibt:

$$b_{i,x} = \frac{(t_{i+1}-t_i) \frac{k_{i,x} - k_{i-1,x}}{t_i - t_{i-1}} + (t_i - t_{i-1}) \frac{k_{i+1,x} - k_{i,x}}{t_{i+1} - t_i}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (2.3-18)$$

Diese Formel wird üblicherweise in folgender Form angegeben (siehe Abb. 2.3-3):

$$\dot{s}_x(t_i) = \frac{w_i \tan \alpha_{i-1,x} + w_{i-1} \tan \alpha_{i,x}}{w_{i-1} + w_i} \quad (2.3-19)$$

Abb. 2.3-3: Definition von  $\alpha_{i,x}$  und  $w_i$

Zur Berechnung von  $b_{1,x}$  und  $b_{n,x}$  werden Randbedingungen benötigt:

Die offene Kurve soll im Randintervall  $[n-1]$  der Parabel durch die letzten drei Knoten entsprechen ( $\Rightarrow d_{n-1,x}=0$ ). Für die Tangentenformel (2.3-18) in  $K_n$  wird daher nun auf dieser Parabel ein fiktiver zusätzlicher Knoten außerhalb der Kurve extrapoliert:

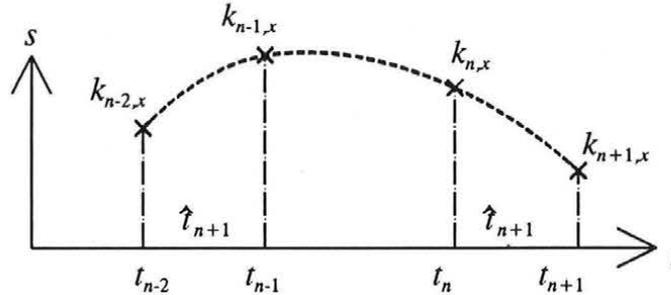


Abb. 2.3-4: Schätzung eines zusätzlichen Knotens am Kurvenende

Zählt man den Parabelparameter  $\hat{t}$  von  $t_n$  aus, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} k_{n-1,x} &= k_{n,x} - (t_n - t_{n-1})f_{n,x} + (t_n - t_{n-1})^2 g_{n,x} \\ k_{n-2,x} &= k_{n,x} - (t_n - t_{n-2})f_{n,x} + (t_n - t_{n-2})^2 g_{n,x} \end{aligned}$$

Der fiktive Knoten  $k_{n+1,x}$  wird willkürlich an der Stelle  $\hat{t}_{n+1} := t_{n-1} - t_{n-2}$  interpoliert:

$$k_{n+1,x} = k_{n,x} + (t_{n-1} - t_{n-2})f_{n,x} + (t_{n-1} - t_{n-2})^2 g_{n,x}$$

Nach Umformung dieser Gleichungen erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \tan \alpha_{n-2,x} &= f_{n,x} - (2(t_n - t_{n-1}) + (t_{n-1} - t_{n-2}))g_{n,x} \\ \tan \alpha_{n-1,x} &= f_{n,x} - (t_n - t_{n-1})g_{n,x} \\ \tan \alpha_{n,x} &= f_{n,x} + (t_{n-1} - t_{n-2})g_{n,x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha_{n,x} = 2 \tan \alpha_{n-1,x} - \tan \alpha_{n-2,x} \quad (2.3-20)$$

Die entsprechende Randbedingung für den Kurvenanfang lautet nun:

$$\tan \alpha_{0,x} = 2 \tan \alpha_{1,x} - \tan \alpha_{2,x} \quad (2.3-21)$$

Bei geschlossener Kurve wird nach dem Kurvenende wieder mit den ersten Knoten fortgesetzt:

$$k_{0,x} = k_{n-1,x}, \dots, \quad k_{n,x} = k_{1,x}, \quad k_{n+1,x} = k_{2,x} \quad (2.3-22)$$

Hiermit sind in jedem Intervall  $[i]$  die Interpolationskoeffizienten  $a_{i,x} = k_{i,x}$  und  $b_{i,x}$  bekannt.

Die Koeffizienten  $c_{i,x}$  und  $d_{i,x}$  können mit Hilfe der bekannten Größen  $b_{i+1,x}$  und  $k_{i+1,x}$  aus den Gleichungen (2.3-2) und (2.3-3) bestimmt werden:

$$c_{i,x} = - \frac{b_{i+1,x} + 2b_{i,x}}{t_{i+1} - t_i} + 3 \frac{k_{i+1,x} - k_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^2} \quad (2.3-23)$$

$$d_{i,x} = \frac{b_{i+1,x} + b_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^2} - 2 \frac{k_{i+1,x} - k_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^3}$$

### 2.3.2.2 Verbesserungsgleichungen der ausgleichenden Schmiegekurve

Durch Einsetzen der Gleichungen (2.3-23) für  $c_{i,x}$  und  $d_{i,x}$  in die Gleichungen (2.3-4) erhält man  $\Delta s_x(t)$  und  $\Delta \dot{s}_x(t)$  für die Schmiegekurve:

$$\Delta s_{x(t)} = \Delta k_{i,x} + (t - t_i) \Delta b_{i,x} + (t - t_i)^2 \left( - \frac{\Delta b_{i+1,x} + 2\Delta b_{i,x}}{t_{i+1} - t_i} + 3 \frac{\Delta k_{i+1,x} - \Delta k_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^2} \right) + (t - t_i)^3 \left( \frac{\Delta b_{i+1,x} + \Delta b_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^2} - 2 \frac{\Delta k_{i+1,x} - \Delta k_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^3} \right)$$

$$\Delta \dot{s}_{x(t)} = \Delta b_{i,x} + 2(t - t_i) \left( - \frac{\Delta b_{i+1,x} + 2\Delta b_{i,x}}{t_{i+1} - t_i} + 3 \frac{\Delta k_{i+1,x} - \Delta k_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^2} \right) + 3(t - t_i)^2 \left( \frac{\Delta b_{i+1,x} + \Delta b_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^2} - 2 \frac{\Delta k_{i+1,x} - \Delta k_{i,x}}{(t_{i+1} - t_i)^3} \right)$$

Eine Umsortierung nach  $\Delta k$  und  $\Delta b$  ergibt:

$$\begin{aligned}\Delta s_x(t)_{[i]} &= (1 - \alpha(t)) \Delta k_{i,x} + \alpha(t) \Delta k_{i+1,x} + \beta(t) \Delta b_{i,x} + \gamma(t) \Delta b_{i+1,x} \\ \alpha(t) &:= 3 \frac{(t-t_i)^2}{(t_{i+1}-t_i)^2} - 2 \frac{(t-t_i)^3}{(t_{i+1}-t_i)^3} \\ \beta(t) &:= (t-t_i) - 2 \frac{(t-t_i)^2}{t_{i+1}-t_i} + \frac{(t-t_i)^3}{(t_{i+1}-t_i)^2} \\ \gamma(t) &:= - \frac{(t-t_i)^2}{t_{i+1}-t_i} + \frac{(t-t_i)^3}{(t_{i+1}-t_i)^2}\end{aligned}\tag{2.3-24}$$

$$\begin{aligned}\Delta \dot{s}_x(t)_{[i]} &= -\dot{\alpha}(t) \Delta k_{i,x} + \dot{\alpha}(t) \Delta k_{i+1,x} + \dot{\beta}(t) \Delta b_{i,x} + \dot{\gamma}(t) \Delta b_{i+1,x} \\ \dot{\alpha}(t) &:= 6 \frac{t-t_i}{(t_{i+1}-t_i)^2} - 6 \frac{(t-t_i)^2}{(t_{i+1}-t_i)^3} \\ \dot{\beta}(t) &:= 1 - 4 \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} + 3 \frac{(t-t_i)^2}{(t-t_i)^2} \\ \dot{\gamma}(t) &:= -2 \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} + 3 \frac{(t-t_i)^2}{(t_{i+1}-t_i)^2}\end{aligned}$$

Die Änderung  $\Delta b_{i,x}$  ( $i=1(1)n$ ) wegen  $\Delta k_{l,x}$  ( $l=i-1(1)i+1$ ) kann aus der Formel (2.3-18) abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}\Delta b_{i,x} &= \lambda_i \Delta k_{i-1,x} + \mu_i \Delta k_{i,x} + \nu_i \Delta k_{i+1,x} \\ \text{mit } \lambda_i &:= - \frac{t_{i+1}-t_i}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_i-t_{i-1})}, \quad \nu_i := \frac{t_i-t_{i-1}}{(t_{i+1}-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)} \\ \text{und } \mu_i &:= - \lambda_i - \nu_i\end{aligned}\tag{2.3-25}$$

Bei offener Kurve müssen in den Gleichungen (2.3-25) für  $\Delta b_{1,x}$  und  $\Delta b_{n,x}$  die Randbedingungen (2.3-20) und (2.3-21) berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}
\Delta k_{n+1,x} &= \psi \Delta k_{n,x} - \psi \Delta k_{n-1,x} + \Delta k_{n-2,x} \\
\psi &:= 2 \frac{t_{n-1} - t_{n-2}}{t_n - t_{n-1}} + 1 \\
\Delta k_{0,x} &= \varphi \Delta k_{1,x} - \varphi \Delta k_{2,x} + \Delta k_{3,x} \\
\varphi &:= 2 \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} + 1
\end{aligned} \tag{2.3-26}$$

Bei geschlossener Kurve gilt gemäß der Randbedingung (2.3-22):

$$\Delta k_{0,x} = \Delta k_{n-1,x}, \dots, \Delta k_{n,x} = \Delta k_{1,x}, \Delta k_{n+1,x} = \Delta k_{2,x}$$

Die Ableitungen (2.3-25) eingesetzt in die Gleichungen (2.3-24) ergeben die Endformeln für  $\Delta s_x(t)$  und  $\Delta \dot{s}_x(t)$  der Schmiegekurve:

$$\begin{aligned}
\Delta s_x(t)_{[i]} &= (\beta(t) \lambda_i) \Delta k_{i-1,x} + (1 - \alpha(t) + \beta(t) \mu_i + \gamma(t) \lambda_{i+1}) \Delta k_{i,x} + \\
&\quad + (\alpha(t) + \beta(t) \nu_i + \gamma(t) \mu_{i+1}) \Delta k_{i+1,x} + (\gamma(t) \nu_{i+1}) \Delta k_{i+2,x} \\
\Delta \dot{s}_x(t)_{[i]} &= (\dot{\beta}(t) \lambda_i) \Delta k_{i-1,x} + (-\dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) \mu_i + \dot{\gamma}(t) \lambda_{i+1}) \Delta k_{i,x} + \\
&\quad + (\dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) \nu_i + \dot{\gamma}(t) \mu_{i+1}) \Delta k_{i+1,x} + (\dot{\gamma}(t) \nu_{i+1}) \Delta k_{i+2,x}
\end{aligned} \tag{2.3-27}$$

offen  $\Rightarrow (i = 2(1)n-2)$   
geschlossen  $\Rightarrow (i = 1(1)n-1)$

Bei offener Kurve müssen in den Intervallen [1] und [n-1] die Beziehungen (2.3-26) berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}
\Delta s_x(t)_{[1]} &= (1 - \alpha(t) + \beta(t) \mu_1 + \gamma(t) \lambda_2 + \beta(t) \lambda_1 \varphi) \Delta k_{1,x} + \\
&\quad + (\alpha(t) + \beta(t) \nu_1 + \gamma(t) \mu_2 - \beta(t) \lambda_1 \varphi) \Delta k_{2,x} + (\gamma(t) \nu_2 + \beta(t) \lambda_1) \Delta k_{3,x} \\
\Delta \dot{s}_x(t)_{[1]} &= (-\dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) \mu_1 + \dot{\gamma}(t) \lambda_2 + \dot{\beta}(t) \lambda_1 \varphi) \Delta k_{1,x} + \\
&\quad + (\dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) \nu_1 + \dot{\gamma}(t) \mu_2 - \dot{\beta}(t) \lambda_1 \varphi) \Delta k_{2,x} + (\dot{\gamma}(t) \nu_2 + \dot{\beta}(t) \lambda_1) \Delta k_{3,x}
\end{aligned}$$

$$\Delta s_x(t)_{[n-1]} = (\beta(t) \lambda_{n-1} + \gamma(t) v_n) \Delta k_{n-2,x} + (1 - \alpha(t) + \beta(t) \mu_{n-1} + \gamma(t) \lambda_n - \gamma(t) v_n \psi) \Delta k_{n-1,x} \\ + (\alpha(t) + \beta(t) v_{n-1} + \gamma(t) \mu_n + \gamma(t) v_n \psi) \Delta k_{n,x}$$

$$\Delta \dot{s}_x(t)_{[n-1]} = (\dot{\beta}(t) \lambda_{n-1} + \dot{\gamma}(t) v_n) \Delta k_{n-2,x} + (-\dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) \mu_{n-1} + \dot{\gamma}(t) \lambda_n - \dot{\gamma}(t) v_n \psi) \Delta k_{n-1,x} \\ + (\dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) v_{n-1} + \dot{\gamma}(t) \mu_n + \dot{\gamma}(t) v_n \psi) \Delta k_{n,x}$$

### 2.3.3 Akima-Interpolation

#### 2.3.3.1 Bestimmung der Interpolationskoeffizienten der Akima-Funktion

Die in Akima 1970 vorgestellte Methode (siehe auch Blöser, Überhuber 1976) simuliert jene ebene Kurve, mit der ein erfahrener Zeichner vorgegebene Knotenpunkte verbinden würde. Ähnlich wie bei der Schmiegekurve werden zur Bestimmung der Interpolationskoeffizienten eines Intervalls nur benachbarte Knoten herangezogen: Mit Hilfe der Anstiege der beiden vorhergehenden Sehnen  $K_{i-1}-K_{i-2}$  und  $K_i-K_{i-1}$  sowie der beiden nachfolgenden Sehnen  $K_{i+1}-K_i$  und  $K_{i+2}-K_{i+1}$  wird der Anstieg der Kurventangente in  $K_i$  gemäß Abbildung 1.3-5 definiert.

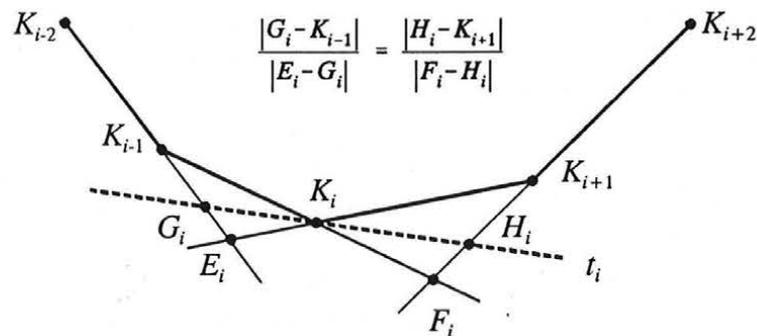


Abb. 2.3-5: Grundprinzip der Tangentendefinition bei der Akimakurve

Die in der Abbildung 2.3-5 dargestellte Methode hat allerdings einen Nachteil: Ist zum Beispiel die Sehne  $K_i-K_{i-1}$  parallel zur Sehne  $K_{i+2}-K_{i+1}$ , so liegen die Hilfspunkte  $F_i$  und damit auch  $H_i$  im Unendlichen und die Tangente in  $K_i$  fällt mit der Sehne  $K_i-K_{i-1}$  zusammen. Um diesen Nachteil zu vermeiden, hat Akima die in der Abbildung 2.3-5 gezeigten Verhältnisse modifiziert und folgende Formel für die Interpolation einer Funktion<sup>3</sup>  $s(t)$  angegeben:

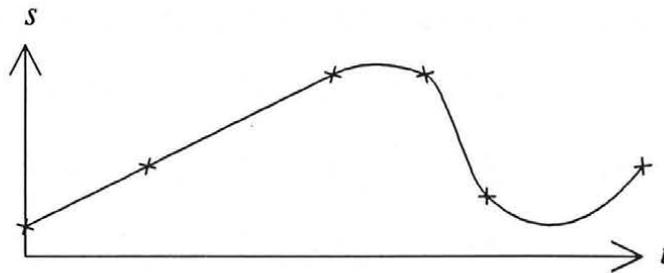
<sup>3</sup> Diese Methode wird im folgenden auch "Akima-Funktion" bezeichnet.

$$\dot{s}(t_i) = \frac{w_{i+1} \tan \alpha_{i-1} + w_{i-1} \tan \alpha_i}{w_{i-1} + w_{i+1}}$$

$$\text{mit } w_i = |\tan \alpha_i - \tan \alpha_{i-1}|$$

$$\text{und } \tan \alpha_i = \frac{k_{i+1} - k_i}{t_{i+1} - t_i}$$

(2.3-28)

Abb. 2.3-6: Akima-Interpolation einer Funktion  $s(t)$ 

Eine besonders interessante Eigenschaft hat diese Akima-Funktion, wenn aufeinanderfolgende Knoten auf einer Geraden liegen: Befinden sich etwa die Knoten  $k_{i-2}$ ,  $k_{i-1}$  und  $k_i$  auf einer Geraden, so ist in der Formel (2.3-28)  $w_{i-1} = 0$  und  $\dot{s}(t_i) = \tan \alpha_{i-1}$ . Daraus folgt: Drei oder mehr aufeinanderfolgende und auf einer Geraden liegende Knoten verbindet die Akima-Interpolation mit einer Geraden.

Schneiden sich allerdings zwei Geraden im Knoten  $k_i$  ( $\Rightarrow w_{i-1} = w_{i+1} = 0$ ), muß anstelle von (2.3-28) folgende Formel verwendet werden (mit  $w_{i-1} := w_{i+1} := 1$ ):

$$\dot{s}(t_i) = \frac{\tan \alpha_{i-1} + \tan \alpha_i}{2} \quad (2.3-29)$$

Ein weiterer Vorteil der Akima-Funktion ist die "Unempfindlichkeit" gegenüber unterschiedlich großen Parameterabständen der Knoten, da die Formel (2.3-28) nur Anstiege der Sehnen zwischen den Knoten enthält.

Die Akima-Funktion  $s(t)$  ist invariant gegenüber verschiedenen Skalierungen der  $s(t)$ -Achse und der  $t$ -Achse. Eine  $d$ -dimensionale Kurvendarstellung mit  $d$  Akima-Funktionen  $s_1(t)$ , ...,  $s_d(t)$  und der Formel (2.3-28) für die Kurvenanstiege  $\dot{s}_1(t)$ , ...,  $\dot{s}_d(t)$  ist aber nicht invariant gegenüber einer Rotation des  $d$ -dimensionalen Koordinatensystems (siehe Kapitel 2.3.4)! Für die Interpolation ebener Kurven hat Akima daher aus den in Abbildung 2.3-5 dargestellten Verhältnissen eine eigene Tangentenformel hergeleitet (siehe Akima 1970, S. 601 ff).

Die Anstiege an den Enden einer periodischen Funktion werden mit Hilfe der Beziehungen (2.3-22) bestimmt. Bei einer nichtperiodischen Funktion müssen für die Gleichung (2.3-28) die Randbedingungen (2.3-20) und (2.3-21) erweitert werden:

$$\begin{aligned} t_{-1} &= t_0 + t_1 - t_2 & \Rightarrow \tan \alpha_{-1} &= 2 \tan \alpha_0 - \tan \alpha_1 \\ t_{n+2} &= t_{n+1} + t_n - t_{n-1} & \Rightarrow \tan \alpha_{n+1} &= 2 \tan \alpha_n - \tan \alpha_{n-1} \end{aligned}$$

Nach der Bestimmung aller  $b_i$  ( $i=1(1)n-1$ ) werden schließlich die Koeffizienten  $c_i$  und  $d_i$  mit Hilfe der Gleichungen (2.3-23) berechnet.

### 2.3.3.2 Verbesserungsgleichungen der ausgleichenden Akima-Funktion

Die Akima-Funktion  $s(t)$  unterscheidet sich von der Schmiegekurve lediglich in der Berechnung der Interpolationskoeffizienten  $b_i$ . Die Bestimmung der  $\Delta b_i$  der Akima-Funktion erfolgt durch Ableitung der Formel (2.3-28) (anstelle von (2.3-25), der Ableitung von (2.3-18) für die Schmiegekurve), wobei wegen des Absolutbetrages im Nenner gewisse Vorkehrungen notwendig sind:

$$\Delta b_i = \frac{(\Delta w_{i+1}(\tan \alpha_{i-1})^0 + w_{i+1}^0 \Delta(\tan \alpha_{i-1}) + \Delta w_{i-1}(\tan \alpha_i)^0 + w_{i-1}^0 \Delta(\tan \alpha_i))}{w_{i-1}^0 + w_{i+1}^0} - \frac{(w_{i+1}^0(\tan \alpha_{i-1})^0 + w_{i-1}^0(\tan \alpha_i)^0) (\Delta w_{i-1} + \Delta w_{i+1})}{(w_{i-1}^0 + w_{i+1}^0)^2} \quad (2.3-30)$$

$$\text{mit } \Delta(\tan \alpha_i) = \frac{\Delta k_{i+1} - \Delta k_i}{t_{i+1} - t_i}$$

Die Größen  $w_i^0$  und  $\tan \alpha_i^0$  müssen gemäß den Formeln (2.3-28) mit genäherten Knotenwerten  $k_1^0, \dots, k_m^0$  berechnet werden.

Nach der Ausgleichung gilt für das Gewicht  $w_i$  die Forderung:

$$0 < w_i = w_i^0 + \Delta w_i = \left| \left( \frac{k_{i+1}^0 - k_i^0}{t_{i+1} - t_i} - \frac{k_i^0 - k_{i-1}^0}{t_i - t_{i-1}} \right) + \left\{ \frac{\Delta k_{i+1} - \Delta k_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{\Delta k_i - \Delta k_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right\} \right| =: |(\sim) + \{\sim\}|$$

Zur Bestimmung von  $\Delta w_i$  sind daher folgende Fälle zu unterscheiden:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $(\sim) \geq 0$ und $\{\sim\} \geq 0$                       | $\Rightarrow \Delta w_i = +\{\sim\}$           |
| 2) $(\sim) < 0$ und $\{\sim\} < 0$                             | $\Rightarrow \Delta w_i = -\{\sim\}$           |
| 3) $(\sim) \geq 0$ , $\{\sim\} < 0$ und $(\sim) \geq \{\sim\}$ | $\Rightarrow \Delta w_i = +\{\sim\}$           |
| 4) $(\sim) \geq 0$ , $\{\sim\} < 0$ und $(\sim) < \{\sim\}$    | $\Rightarrow \Delta w_i = -2(\sim) - \{\sim\}$ |
| 5) $(\sim) < 0$ , $\{\sim\} \geq 0$ und $(\sim) \geq \{\sim\}$ | $\Rightarrow \Delta w_i = -\{\sim\}$           |
| 6) $(\sim) < 0$ , $\{\sim\} \geq 0$ und $(\sim) < \{\sim\}$    | $\Rightarrow \Delta w_i = +2(\sim) + \{\sim\}$ |

Da jedoch die für diese Fallunterscheidung erforderlichen  $\Delta k$  erst nach der Ausgleichung bekannt sind, müssen die  $\Delta w$  in der Gleichung (2.3-30) vernachlässigt werden. Dies führt zu folgender Schätzung von  $\Delta b$ :

$$\Delta b_i = \lambda_i \Delta k_{i-1} + \mu_i \Delta k_i + \nu_i \Delta k_{i+1}$$

$$\text{mit } \lambda_i = - \frac{w_{i+1}^0}{(w_{i-1}^0 + w_{i+1}^0)(t_i - t_{i-1})}, \quad \nu_i = \frac{w_{i-1}^0}{(w_{i-1}^0 + w_{i+1}^0)(t_{i+1} - t_i)} \quad (2.3-31)$$

$$\text{und } \mu_i = - \lambda_i - \nu_i$$

Nun können  $\Delta s(t)$  und  $\Delta \dot{s}(t)$  für die Akima-Funktion ebenfalls mit den Gleichungen (2.3-27) berechnet werden, wobei für  $\lambda$ ,  $\mu$  und  $\nu$  die Gleichungen (2.3-31), für  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  und  $\gamma(t)$  die Gleichungen (2.3-24) und, bei nichtperiodischer Funktion, für  $\varphi$  und  $\psi$  die Gleichungen (2.3-26) gelten.

## 2.3.4 Vergleich der Interpolationsmethoden

### 2.3.4.1 Interpolationseigenschaften

Das unterschiedliche Verhalten der kubischen Spline-, der Schmiege- und der Akima-Interpolation soll mit den Abbildungen 2.3-7 und 2.3-8 gezeigt werden:

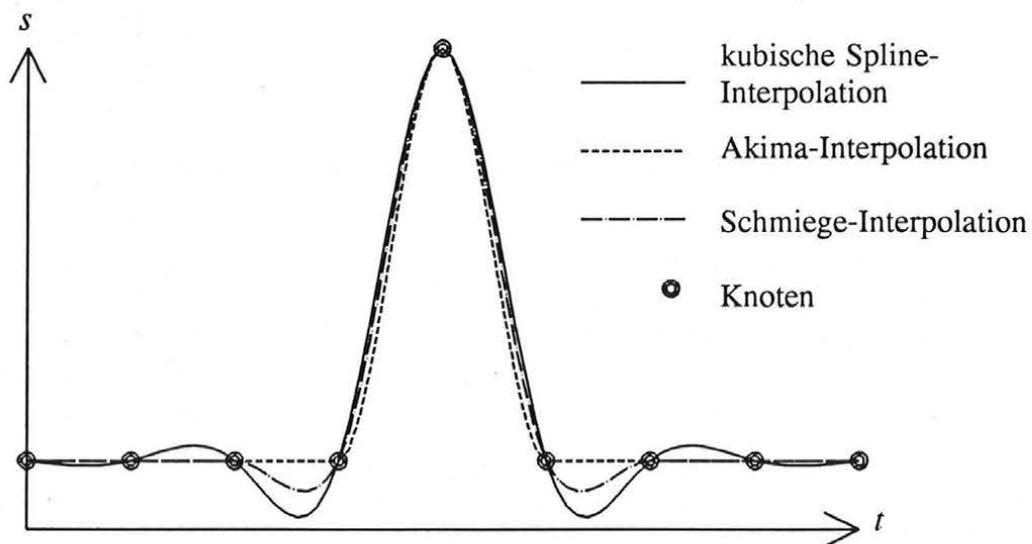


Abb. 2.3-7: Ausschwingverhalten der kubischen Spline-, Akima- und Schmiege-Interpolation

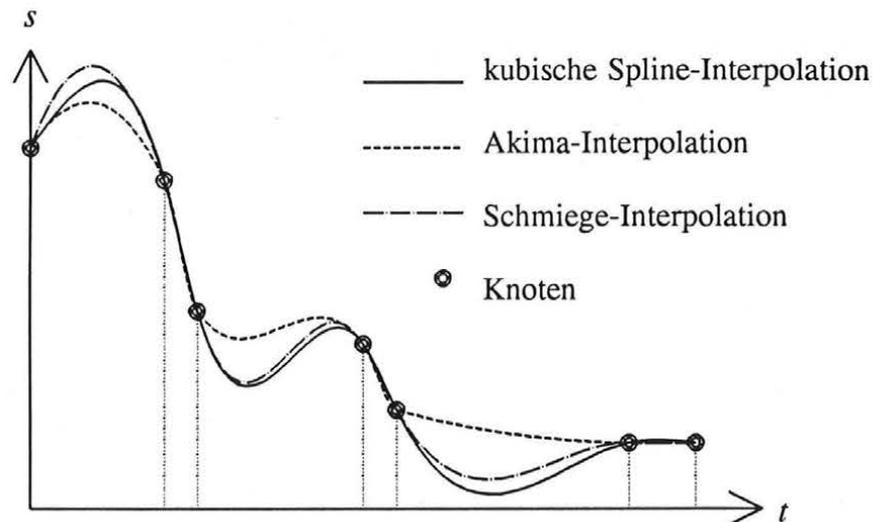


Abb. 2.3-8: Verhalten der kubischen Spline-, der Akima- und der Schmiege-Interpolation bei unterschiedlichen Parameterabständen der Knoten

Die Beurteilung der verschiedenen interpolierten Funktionsdarstellungen hängt von der Art der nachzubildenden Originalfunktion ab:

Für "mechanische" Funktionen, wie etwa die Biegelinie eines Stabes oder die Bewegungslinie eines Fahrzeuges, liefert die kubische Spline-Interpolation mit ihrem Ausschwingverhalten das plausibelste Ergebnis.

Bei "natürlichen" Funktionen, zum Beispiel bei einem Geländeprofil, bietet die Akima-Interpolation das günstigste Verhalten. Sie schwingt bei ungleich langen Abständen zwischen den Knoten nicht übermäßig aus und bildet durch Knoten vorgegebene Geradenstücke wieder als solche nach.

Die Schmiege-Interpolation liegt mit ihrem Erscheinungsbild zwischen dem kubischen Spline und der Akima-Interpolation. Beim Übergang von einem gekrümmten Kurvenabschnitt in eine Gerade benötigt sie ein Intervall zum Ausschwingen. Daher werden von vier auf einer Geraden liegenden Knoten die beiden mittleren wieder durch eine Gerade verbunden.

Die sehr unterschiedlichen Kurvendarstellungen im linken Randintervall der Abbildung 2.3-8 werden auch durch die unterschiedlichen Randbedingungen bei nichtperiodischen Funktionen verursacht:

Der kubische Spline geht außerhalb des Interpolationsbereiches in eine Gerade über.

Für die Akima-Funktion werden auf einer Parabel durch die letzten drei Knoten zwei zusätzliche Knoten geschätzt.

Die Schmiegekurve interpoliert im Randintervall entlang der Parabel durch die letzten drei Knoten.

Der Beitrag eines einzelnen Knotens zur Kurvengestalt kann durch die Änderung der Kurve aufgrund der Änderung dieses Knotens dargestellt werden (siehe Abbildungen 2.3-9a bis

2.3-9c). Jeder Knoten  $k_i$  ( $i=1(1)n$ ) beeinflusst bei der kubischen Spline-Interpolation alle Intervalle [1] bis [n-1], und bei der Akima-Interpolation die sechs Nachbarintervalle  $[i-3]$  bis  $[i+2]$  und bei der Schmiege-Interpolation die vier Nachbarintervalle  $[i-2]$  bis  $[i+1]$ .

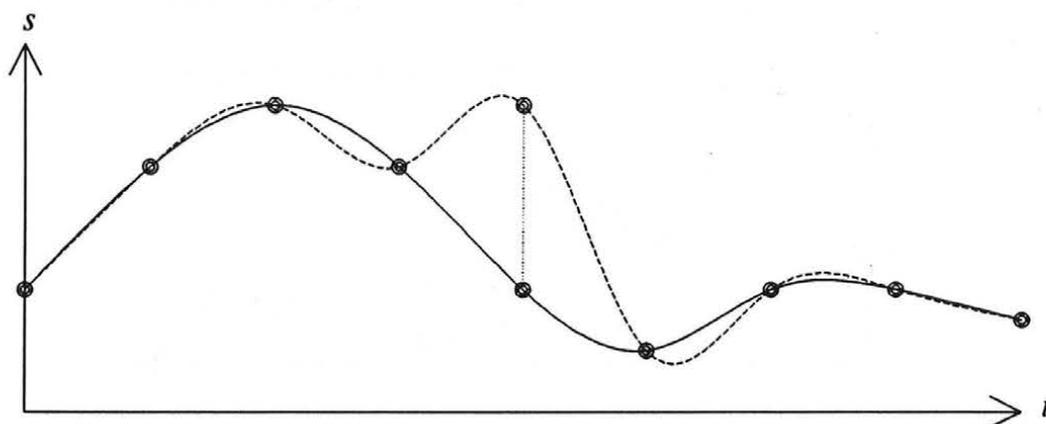


Abb. 2.3-9a: Änderung eines Knotens bei der kubischen Spline-Interpolation

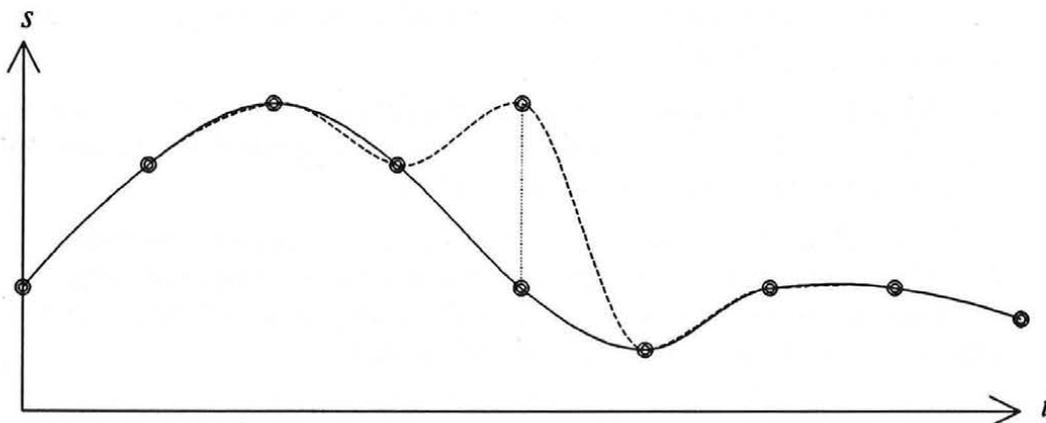


Abb. 2.3-9b: Änderung eines Knotens bei der Akima-Interpolation

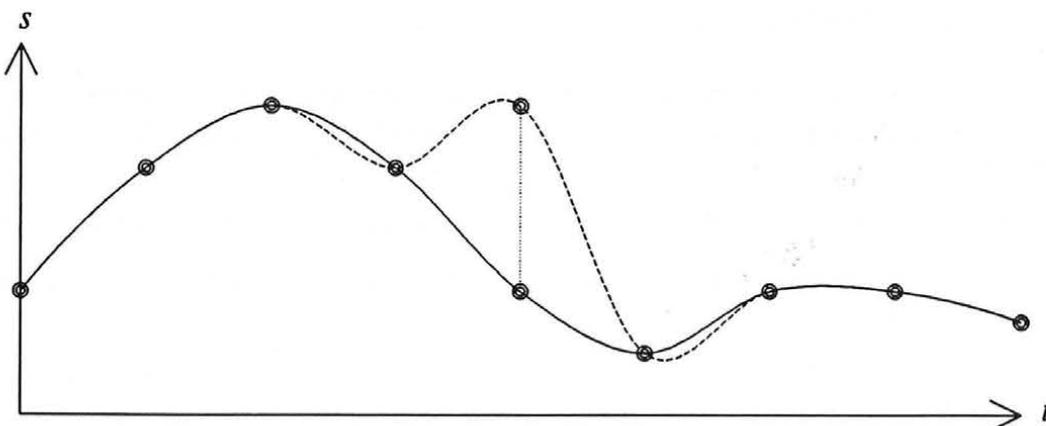


Abb. 2.3-9c: Änderung eines Knotens bei der Schmiege-Interpolation

### 2.3.4.2 Eignung für die Darstellung von Raumkurven

Für die Interpolation entlang einer Kurve in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem werden die drei Koordinaten des Kurvenpunktes  $S(t)$  in den Parameterdarstellungen  $s_1(t)$ ,  $s_2(t)$  und  $s_3(t)$  berechnet. Der Maßstab und die Lage des Koordinatensystems sind dabei oft willkürlich gewählt; sie sollten aber keinen Einfluß auf die Kurvengestalt haben! Eine wünschenswerte Voraussetzung für die räumliche Anwendung einer Interpolationsmethode ist deshalb die Invarianz gegenüber einer räumlichen Ähnlichkeitstransformation, die aus der Verschiebung  $O$ , den Maßstabsfaktor  $\lambda$  und der Rotation  $R$  besteht:

$$\begin{pmatrix} p_1^{\text{tr}} \\ p_2^{\text{tr}} \\ p_3^{\text{tr}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ r_{3,1} & r_{3,2} & r_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$P^{\text{tr}} = O + \lambda R \cdot P$$

Da bei den vorliegenden Kurvenarten in den Berechnungsformeln für die Interpolationskoeffizienten ( $A_i=K_i$ )  $B_i$ ,  $C_i$  und  $D_i$  nur die Differenzen von Knotenkoordinaten und von Knotenparametern verwendet werden, hat die Verschiebung  $O$  keinen Einfluß auf diese Koeffizienten und damit auch keinen Einfluß auf die Form der interpolierten Kurve.

Gemäß Kapitel 2.2 hat der Maßstab der Parametrisierung keinen Einfluß auf die Kurvengestalt. Es ist daher zulässig, bei einer Maßstabsänderung des Koordinatensystems um den Faktor  $\lambda$  nur die Knotenkoordinaten zu ändern, die Parametrisierung der Kurve aber gleichzulassen. Hiermit lautet die Interpolationsformel für den Kurvenpunkt  $S^*(t)$  nach der Maßstabsänderung:

$$S^*(t)_{[i]} = \lambda K_i + (t-t_i)\lambda B_i + (t-t_i)^2\lambda C_i + (t-t_i)^3\lambda D_i = \lambda S(t)_{[i]}$$

Es ändert sich also nur der Maßstab der Kurve um den Faktor  $\lambda$ , die Kurvenform bleibt aber unverändert.

Bei einer rotationsinvarianten Interpolationsmethode muß der mit Hilfe der rotierten Knoten  $K_i^{\text{tr}} = R \cdot K_i$  berechnete Kurvenpunkt  $S^{\text{k}}(t)$  mit dem direkt transformierten Punkt  $S^{\text{r}}(t) = R \cdot S(t)$  identisch sein. Entsprechend den Gleichungen (2.3-17) für die kubische Splinekurve beziehungsweise (2.3-27) für die Schmiegekurve kann für diese beiden Kurvenarten eine Interpolationsformel folgender Art angegeben werden:

$$S(t)_{[i]} = \begin{pmatrix} s_1(t)_{[i]} \\ s_2(t)_{[i]} \\ s_3(t)_{[i]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1,1}\phi_1(t)_{[i]} + \dots + k_{m,1}\phi_m(t)_{[i]} \\ k_{1,2}\phi_1(t)_{[i]} + \dots + k_{m,2}\phi_m(t)_{[i]} \\ k_{1,3}\phi_1(t)_{[i]} + \dots + k_{m,3}\phi_m(t)_{[i]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{1,1} & \dots & k_{m,1} \\ k_{1,2} & \dots & k_{m,2} \\ k_{1,3} & \dots & k_{m,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1(t)_{[i]} \\ \vdots \\ \phi_m(t)_{[i]} \end{pmatrix} \quad (2.3-32)$$

Die Skalare  $\phi_l(t)_{[i]}$  ( $l=1(1)m$ ) lauten für die kubische Splinekurve gemäß (2.3-17):

$$\phi_l(t)_{[i]} := \begin{cases} \beta(t)\lambda_{i,l} + \gamma(t)\lambda_{i+1,l} & \dots & (l=1(1)i-1) \text{ und } (l=i+2(1)m) \\ 1 - \alpha(t) + \beta(t)\lambda_{i,l} + \gamma(t)\lambda_{i+1,l} & \dots & l=i \\ \alpha(t) + \beta(t)\lambda_{i,l} + \gamma(t)\lambda_{i+1,l} & \dots & l=i+1 \end{cases}$$

und für die Schmiegekurve gemäß (2.3-27):

$$\phi_l(t)_{[i]} := \begin{cases} 0 & \dots & (l=1(1)i-2) \text{ und } (l=i+3(1)m) \\ \beta(t)\lambda_i & \dots & l=i-1 \\ 1 - \alpha(t) + \beta(t)\mu_i + \gamma(t)\lambda_{i+1} & \dots & l=i \\ \alpha(t) + \beta(t)v_i + \gamma(t)\mu_{i+1} & \dots & l=i+1 \\ \gamma(t)v_{i+1} & \dots & l=i+2 \end{cases}$$

offen  $\Rightarrow (i=2(1)n-2)$

geschlossen  $\Rightarrow (i=1(1)n-1)$

Bei offener Schmiegekurve sind für die  $\phi_l(t)_{[1]}$  und  $\phi_l(t)_{[n-1]}$  die Gleichungen für die Randintervalle in (2.3-27) zu berücksichtigen.

Die  $\phi_l(t)_{[i]}$  sind beim kubischen Spline und bei der Schmiegekurve also ausschließlich Funktionen der Parameter. Da sich bei einer Rotation des Koordinatensystems die Sehnen zwischen den Knoten nicht ändern, sind die Parameter und damit auch die  $\phi_l(t)_{[i]}$  rotationsinvariant. Bei einer Rotation  $R$  gilt daher:

$$\begin{aligned} S^k(t)_{[i]} &= (R \cdot K) \cdot \Phi(t)_{[i]} = \begin{pmatrix} \sum_{x=1}^3 r_{1,x} k_{1,x} & \dots & \sum_{x=1}^3 r_{1,x} k_{m,x} \\ \sum_{x=1}^3 r_{2,x} k_{1,x} & \dots & \sum_{x=1}^3 r_{2,x} k_{m,x} \\ \sum_{x=1}^3 r_{3,x} k_{1,x} & \dots & \sum_{x=1}^3 r_{3,x} k_{m,x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1(t)_{[i]} \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_m(t)_{[i]} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{x=1}^3 r_{1,x} s_x(t)_{[i]} \\ \sum_{x=1}^3 r_{2,x} s_x(t)_{[i]} \\ \sum_{x=1}^3 r_{3,x} s_x(t)_{[i]} \end{pmatrix} = R \cdot S(t)_{[i]} = S^r(t)_{[i]} \end{aligned}$$

Die kubische Splinekurve und die Schmiegekurve sind also rotationsinvariant, da deren Interpolationsformeln, wie in (2.3-32) gezeigt, Linearkombinationen der Knoten mit rota-

tionsinvarianten Größen sind. Dies gilt allerdings nicht für die Akima-Darstellung einer Raumkurve mit der Formel (2.3-28) für die räumliche Tangente  $(\dot{s}_1(t) \dot{s}_2(t) \dot{s}_3(t))$ ! Der Vergleich der aus den um  $R$  rotierten Knoten  $K_i^r$  berechneten Tangente  $\dot{S}^k(t)$  mit der direkt rotierten Tangente  $\dot{S}^r(t)$  ergibt:

$$\begin{aligned} \dot{S}^k(t_i) &= \begin{pmatrix} \dot{s}_1^k(t_i) \\ \dot{s}_2^k(t_i) \\ \dot{s}_3^k(t_i) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\left| \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i+1,x} - \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i,x} \right| \cdot \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i-1,x} + \left| \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i-1,x} - \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i-2,x} \right| \cdot \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i,x}}{\left| \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i-1,x} - \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i-2,x} \right| - \left| \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i+1,x} - \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \tan \alpha_{i,x} \right|}} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \dot{S}^r(t_i) &= \begin{pmatrix} \dot{s}_1^r(t_i) \\ \dot{s}_2^r(t_i) \\ \dot{s}_3^r(t_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{x=1}^3 r_{1,x} \frac{|\tan \alpha_{i+1,x} - \tan \alpha_{i,x}| |\tan \alpha_{i-1,x}| + |\tan \alpha_{i-1,x} - \tan \alpha_{i-2,x}| |\tan \alpha_{i,x}|}{|\tan \alpha_{i-1,x} - \tan \alpha_{i-2,x}| - |\tan \alpha_{i+1,x} - \tan \alpha_{i,x}|} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \dot{S}^k(t_i) \neq \dot{S}^r(t_i) \end{aligned}$$

Die Akima-Funktion ist also nicht invariant gegenüber einer Rotation des Koordinatensystems und kann daher, im Gegensatz zur kubischen Splinekurve und zur Schmiegekurve, nicht für räumliche Kurvendarstellungen empfohlen werden.

### 2.3.4.3 Eigenschaften bei der Ausgleichung

In der Tabelle 2.3-1 sind die für die Ausgleichung wichtigen Eigenschaften der einzelnen Interpolationsmethoden zusammengefaßt:

	kubische Spline-Interpolation	Schmiegeinterpolation	Akimainterspolation einer Funktion
Linearisierungen für $\Delta s(t)$ und $\Delta \dot{s}(t)$ erforderlich	nein	nein	ja
unbekannte Knoten pro Stützpunkt	alle	vier	vier
Eignung als ausgleichende Raumkurve	ja	ja	nein

Tab. 2.3-1: Eigenschaften der Interpolationsmethoden bei der Ausgleichung

Für die Ausgleichung einer Funktion eignen sich alle drei Interpolationsmethoden. Bei der ausgleichenden Akima-Funktion werden allerdings die Änderungen  $\Delta w_i$  der Gewichte in der Gleichung (2.3-31) vernachlässigt. Im Gegensatz zur ausgleichenden kubischen Spline-Funktion und zur ausgleichenden Schmiege-Funktion werden daher Näherungswerte der Knoten benötigt; außerdem wird bei der Akima-Funktion in der Regel das endgültige Ergebnis erst nach mehreren Iterationen erreicht. Bei einer Funktion mit einer großen Anzahl von Stützpunkten haben die Schmiege- und die Akimainterspolation den Vorteil, daß in der Verbesserungsgleichung eines Stützpunktes nur vier unbekannte Knoten vorkommen. Die Normalgleichungsmatrix  $N$  hat daher folgende Gestalt:

$$N = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} & n_{1,4} & 0 & \dots & 0 \\ & n_{2,2} & n_{2,3} & n_{2,4} & n_{2,5} & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \text{symm.} & & & & & & & n_{m,m} \end{pmatrix}$$

In der oberen Dreiecksmatrix ist nur ein diagonales "Band" mit vier Elementen besetzt. Diese bandförmige Struktur der Normalgleichungsmatrix erfordert einen verhältnismäßig geringen Rechenaufwand für die Gleichungslösung (siehe z.B. Kraus 1984, S. 43 ff).

Für die Ausgleichung von Raumkurven sollten nur die kubische Splinekurve und die Schmiegekurve verwendet werden, da diese rotationsinvariant sind. Bei der Ausgleichung von konstant parametrisierten Kurven ( $\Delta t=0$ ) mit festen Stützpunkten liefern diese Kurvenarten bereits nach der ersten Iteration das endgültige Ergebnis. Die Ausgleichung kann in diesem Fall unabhängig für jede Koordinatenrichtung ( $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_3$ ) durchgeführt werden, wobei die bandförmige Struktur der Normalgleichungsmatrizen  $N_1$ ,  $N_2$  und  $N_3$  der Schmiegekurve bei einer großen Stützpunktmenge von Vorteil ist.

## 2.4 Ermittlung von Näherungswerten für photogrammetrische Aufgabenstellungen

Für ausgleichende skalare Funktionen (siehe Kap. 2.2.1) sowie für ausgleichende Raumkurven mit konstanter Parametrisierung (siehe Kap. 2.2.2) sind keine Näherungswerte erforderlich, sofern die kubische Spline- oder die Schmiegeinterpolation zur Kurvendarstellung verwendet wird. Lediglich die Parameterwerte der Knoten müssen vor der Ausgleichung festgelegt werden (siehe Kap. 2.2.1 bzw. Kap. 2.2.2).

Hingegen werden für die Ausgleichung von Raumkurven mit unbekannter Parametrisierung (siehe Kap. 2.2.3) sehr wohl Näherungswerte  $K_1^0, \dots, K_m^0$  für die unbekanntenen Knoten und  $P_1^0, \dots, P_q^0$  für die unbekanntenen Stützpunkte benötigt. Mit Hilfe dieser Näherungswerte können, gemäß den im Kapitel 2.2.3.2 beschriebenen Verfahren, die Näherungen  $\tilde{t}_1^0, \dots, \tilde{t}_q^0$  für die unbekanntenen Stützpunktparameter ermittelt werden.

Für folgende photogrammetrische Aufgabenstellungen werden nun geeignete Approximationsverfahren zur Ermittlung der benötigten Näherungswerte vorgestellt:

Für den photogrammetrischen Vorwärtsschnitt einer Raumkurve werden durch "Verschnitt" mehrerer orientierter Strahlenbündel Näherungen für die Stützpunkte bestimmt (siehe Kap. 2.4.1).

Ist eine Sequenz solcher Stützpunkte gegeben (entweder als Ergebnis des obigen Verfahrens oder durch direkte 3D-Stützpunktbeobachtungen), so können die Näherungswerte für die Knoten, ähnlich wie im Kapitel 2.2.2 beschrieben, entlang des Stützpunktpolygons angeordnet werden.

Bei einem "photogrammetrischen Rückwärtsschnitt" sind mehrere dreidimensionale Paßkurven in einem Photo abgebildet. Durch die auf diesen Abbildern gemessenen Bildpunkte wird ein Strahlenbündel definiert, das im Zuge des Rückwärtsschnittes auf die Paßkurven orientiert ("eingepaßt") wird. Zu Beginn des Rückwärtsschnittes werden Näherungswerte für die Orientierung des Strahlenbündels und für die den Bildpunkten entsprechenden Stützpunkte benötigt (siehe Kap. 2.4.2).

### 2.4.1 Approximation einer unbekanntenen Raumkurve für einen photogrammetrischen Vorwärtsschnitt

Gegeben seien  $nph$  (mit  $nph \geq 2$ ) orientierte Photos. Die  $q$  beobachteten Bildpunkte seien:  $P_{1,1}', \dots, P_{1,q}'$  im Photo<sub>1</sub>, ...,  $P_{jph,1}', \dots, P_{jph,q}'$  im Photo<sub>jph</sub>, ...,  $P_{nph,1}', \dots, P_{nph,q}'$  im Photo<sub>nph</sub>. Gesucht sind Näherungen für die den Bildpunkten entsprechenden dreidimensionalen Stützpunkte<sup>1</sup>. Die Näherung  $P_{jph,j}^0$  eines Stützpunktes  $P_{jph,j}$  erhält man nun durch Schnitt seines Bildstrahles (durch den Bildpunkt  $P_{jph,j}'$  von Photo<sub>jph</sub>) mit einem "Zwickel" eines anderen Strahlenbündels (Photo<sub>lph</sub>). Diese Zwickelenebene wird von den zwei benachbarten Bildstrahlen durch die Bildpunkte  $P_{lph,h}'$  und  $P_{lph,h+1}'$  aufgespannt (siehe Abb. 2.4-1).

<sup>1</sup>Hier wird davon ausgegangen, daß in den verschiedenen Bildern keine homologen Bildpunkte beobachtet wurden.

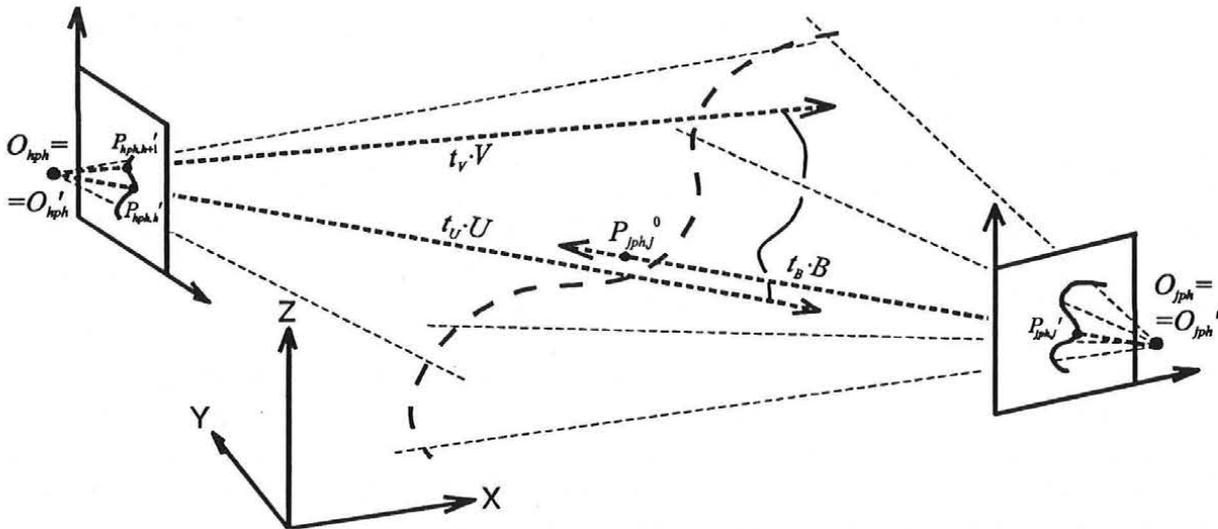


Abb. 2.4-1: Näherungsweise Bestimmung eines Stützpunktes durch Schnitt seines Bildstrahles mit einem Zwickel eines anderen Strahlenbündels

Die an dieser Schnittaufgabe beteiligten Strahlenbündel werden von zwei Photos<sup>2</sup> gebildet: Photo<sub>jph</sub> ist der "Bildstrahlenlieferant" mit dem Projektionszentrum  $O_{jph}$  im Objektkoordinatensystem beziehungsweise  $O'_{jph}$  im Bildkoordinatensystem. Die Rotation des Bildkoordinatensystems dieses Photos gegenüber dem Objektkoordinatensystem wird durch die Rotationsmatrix  $R_{jph}$  beschrieben<sup>3</sup>. Der Bildstrahlvektor  $B$  im Objektkoordinatensystem ergibt sich daher zu:

$$B = R_{jph} \cdot (P'_j - O'_{jph})$$

Photo<sub>hph</sub> ist der "Zwickellieferant" mit dem Projektionszentrum  $O_{hph}$  (beziehungsweise  $O'_{hph}$ ) und der Rotationsmatrix  $R_{hph}$ . Jene beiden Bildstrahlen, die die Zwickelebene aufspannen, haben die räumlichen Richtungsvektoren:

$$U = R_{hph} \cdot (P'_h - O'_{hph})$$

$$V = R_{hph} \cdot (P'_{h+1} - O'_{hph})$$

Die gesuchte Näherung  $P_j^0$  des Stützpunktes liegt nun im Schnittpunkt seines Bildstrahles mit der Zwickelebene. Für die Koordinaten  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$  dieses Schnittpunktes gelten daher die Geradengleichungen

<sup>2</sup>Die Formeln in diesem Kapitel beziehen sich auf geometrische Positive mit  $t_B > 0$ ,  $t_U > 0$  und  $t_V > 0$ .

<sup>3</sup>Die Bildkoordinaten  $O'$  des Projektionszentrums legen die Perspektive eines Photos fest und werden in der Photogrammetrie als "innere Orientierung" des Photos bezeichnet. Durch die Objektkoordinaten  $O$  des Projektionszentrums sowie durch drei räumliche Drehwinkel wird die "äußere Orientierung" eines Strahlenbündels im Objektkoordinatensystem festgelegt. Aus den drei Drehwinkeln wird die Rotationsmatrix  $R$  gebildet. Die drei Spalten dieser Matrix enthalten die Objektkoordinaten der drei Einheitsvektoren des Bildkoordinatensystems (siehe Kraus 1984).

$$\bar{P} = O_{jph} + t_B \cdot B \quad (2.4-1)$$

und die Ebenengleichungen

$$\bar{P} = O_{hph} + t_U \cdot U + t_V \cdot V \quad (2.4-2)$$

Das aus den Geradengleichungen (2.4-1) und den Ebenengleichungen (2.4-2) gebildete System lautet:

$$t_U \cdot U + t_V \cdot V - t_B \cdot B = O_{jph} - O_{hph} \quad (2.4-3)$$

Die Bestimmung des unbekanntes Strahlparameters  $t_B$  erfolgt nun durch Multiplikation dieses Gleichungssystems mit dem Normalvektor  $N_{U,V}$ :

$$\begin{aligned} N_{U,V} \cdot (t_U \cdot U + t_V \cdot V - t_B \cdot B) &= N_{U,V} \cdot (O_{jph} - O_{hph}) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 - t_B \cdot N_{U,V} \cdot B &= N_{U,V} \cdot (O_{jph} - O_{hph}) \Rightarrow \\ \Rightarrow t_B &= \frac{N_{U,V} \cdot (O_{hph} - O_{jph})}{N_{U,V} \cdot B}, \quad \text{mit } N_{U,V} = U \times V \end{aligned}$$

Ist der Nenner auf der rechten Seite der Gleichung für  $t_B$  Null, so ist der Bildstrahl parallel zur Zwickelenebene. Ist gleichzeitig auch der Zähler Null, so liegt der Bildstrahl in der Zwickelenebene. Im allgemeinen Fall (mit dem Nenner ungleich Null) erhält man nun die Koordinaten  $\bar{P}$  durch Einsetzen des Bildstrahlparameters  $t_B$  in die Geradengleichung (2.4-1).

Für die Entscheidung, ob dieser Schnittpunkt  $\bar{P}$  innerhalb des von den beiden Strahlen  $O_{hph} + t_U \cdot U$  und  $O_{hph} + t_V \cdot V$  gebildeten Zwickels liegt, werden nun die beiden Ebenenparameter  $t_U$  und  $t_V$  benötigt. Ähnlich wie  $t_B$ , erhält man  $t_U$  durch Multiplikation des Gleichungssystems (2.4-3) mit dem Normalvektor  $N_{B,V}$ , sowie  $t_V$  durch Multiplikation mit  $N_{B,U}$ :

$$\begin{aligned} t_U &= \frac{N_{B,V} \cdot (O_{jph} - O_{hph})}{N_{B,V} \cdot U}, \quad \text{mit } N_{B,V} = B \times V \\ t_V &= \frac{N_{B,U} \cdot (O_{jph} - O_{hph})}{N_{B,U} \cdot V}, \quad \text{mit } N_{B,U} = B \times U \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt  $\bar{P}$  kann nun in den folgenden vier Bereichen der Zwickelenebene liegen (siehe Abb. 2.4-2):

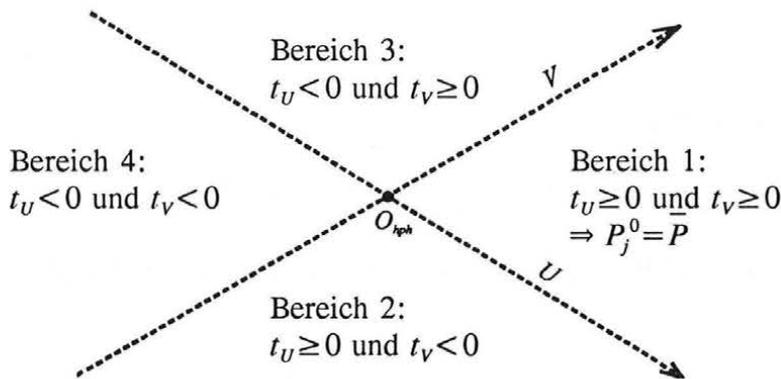


Abb. 2.4-2: Mögliche Lagen des Schnittpunktes  $\bar{P}$  in verschiedenen Bereichen der Zwickelebene

Nur im Bereich 1, innerhalb des Zwickels, stellt der Schnittpunkt  $\bar{P}$  eine gültige Näherung  $P_j^0$  des Stützpunktes  $P_j$  dar. Falls der Schnittpunkt in einem der anderen Bereiche liegt, muß mit einer anderen Zwickelebene oder mit einem anderen Bildstrahl geschnitten werden (siehe Programmbeschreibung in Kap. 3.1.2).

Der Bildstrahl schneidet die Zwickelebene unter dem Winkel (im Bogenmaß):

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos \left( \frac{N_{UV} \cdot (\bar{P} - O_{jph})}{|N_{UV}| \cdot |(\bar{P} - O_{jph})|} \right) \quad (2.4-4)$$

Bei dem im Rahmen dieser Arbeit programmierten Verfahren (siehe Kap. 3.1.2) wird jeder Bildstrahl (durch den Bildpunkt  $P_{jph,j}$  ( $j=1(1)jq$ )) des Photo $_{jph}$  ( $jph=1(1)nph$ ) mit allen anderen Strahlenbündeln Photo $_{hph}$  ( $hph=1(1)jph-1, jph+1(1)nph$ ) geschnitten. Der Näherungswert  $P_{jph,j}^0$  des Stützpunktes ergibt sich somit aus dem gewichteten Mittel der  $nph-1$  Schnittpunkte seines Bildstrahles. Als Gewichte werden die nach der Formel (2.4-4) berechneten Schnittwinkel verwendet.

## 2.4.2 Approximation der unbekannt Stützpunkte für einen photogrammetrischen Rückwärtsschnitt

Gegeben seien die Knotenpunkte mehrerer Paßkurven<sup>4</sup> und Bildpunktbeobachtungen auf den Abbildern dieser Paßkurven in einem Photo. Die innere Orientierung dieses Photos sei ebenfalls bekannt. Gesucht sind nun zunächst Näherungen für die den Bildpunkten entsprechenden Stützpunkte.

<sup>4</sup>Diese Paßkurven werden vor dem Rückwärtsschnitt mit Hilfe dreidimensionaler Stützpunktbeobachtungen ausgeglichen; die Unbekannten dieser Ausgleichung sind die Stützpunktparameter und die Knoten. Die durch die Ausgleichung bestimmten Knoten bleiben während des anschließenden Rückwärtsschnittes konstant.

Eine Methode zur Bestimmung genäherter Stützpunkte besteht darin, die Kurvenparameter der Stützpunkte zu schätzen. Dies ist dann möglich, wenn ungefähr erkennbar ist, welcher Bereich einer räumlichen Paßkurve im Photo abgebildet ist und durch Bildpunkte beobachtet wurde.

Ist eine Paßkurve zum Beispiel vollständig (von  $t_{min}$  bis  $t_{max}$ ) abgebildet und außerdem dieses gesamte Abbild mit den Bildpunkten  $P_1'$ , ...,  $P_q'$  abgedeckt, so können die Stützpunktparameter  $t_1^0$ , ...,  $t_q^0$  näherungsweise (unter Vernachlässigung der perspektiven Verzerrung) gleichmäßig im Intervall  $[t_{min}, t_{max}]$  aufgeteilt werden. Nun können mit den Interpolationsformeln (2.1-1) die Näherungen  $P_1^0$ , ...,  $P_q^0$  der Stützpunkte interpoliert werden.

Falls die Näherungen für die äußere Orientierung des Strahlenbündels noch recht unzureichend sind, können sie nun verbessert werden, indem mit Hilfe der konstant gehaltenen Näherungswerte der Stützpunktparameter ein photogrammetrischer Rückwärtsschnitt durchgeführt wird (siehe Kap 4.1.2).

## 3 Implementierung

Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Theorie einer ausgleichenden Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen wurde im Rahmen des photogrammetrischen Programmsystems ORIENT realisiert. Hiermit ist nun die gemeinsame Ausgleichung von fiktiven Kurvenbeobachtungen mit anderen Beobachtungsarten, wie zum Beispiel Bildpunktbeobachtungen oder dreidimensionalen Paßpunktbeobachtungen, möglich. Dies ist die Voraussetzung für die Lösung photogrammetrischer Aufgabenstellungen mit Hilfe kurvenförmiger Elemente.

Im Kapitel 3.1 werden zunächst jene Prozeduren beschrieben, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind. Diese Prozeduren wurden in das Programmsystem ORIENT integriert. Die Datenstruktur und die Benutzeroberfläche von ORIENT werden im Kapitel 3.2 erläutert.

### 3.1 Erstellung von Prozeduren für eine ausgleichende Kurve aus zusammengesetzten kubischen Polynomen

Die in diesem Kapitel vorgestellten Prozeduren werden mit Hilfe von Flußdiagrammen veranschaulicht; die dabei verwendeten Symbole sollen mit Hilfe der Abbildung 3.1-1 erklärt werden.

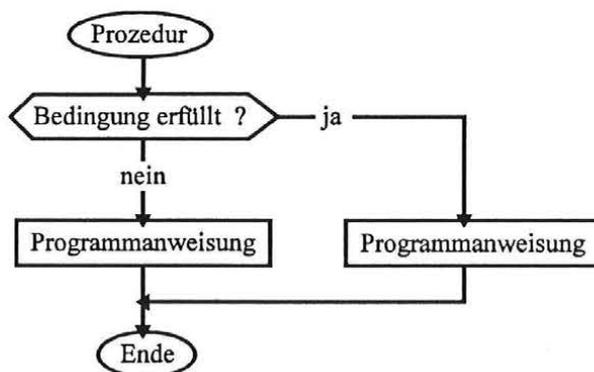


Abb. 3.1-1: Symbole für ein Ablaufdiagramm

#### 3.1.1 Unterprogramm zur Aufstellung der Verbesserungsgleichungen

Mit Hilfe des Unterprogrammes "Kurvenausgleich" können die Verbesserungsgleichungen der fiktiven  $d$ -dimensionalen Kurvenbeobachtung  $\bar{S}$  für einen Stützpunkt  $P$  aufgestellt werden. Zur Programmsteuerung dienen Codes für:

den Berechnungsmodus; wahlweise:

- Bestimmung der Interpolationskoeffizienten (erster Aufruf für die Kurve)
- Berechnung der Koeffizienten der Unbekannten in den  $d$  Verbesserungsgleichungen einer fiktiven Kurvenbeobachtung (Aufruf für den aktuellen Stütz-

punkt)

- Bestimmung der Koeffizienten für die Verbesserungsgleichungen der fiktiven Knotenbeobachtungen (letzter Aufruf für die Kurve)

die Parametrisierungsart; wahlweise:

- konstant
- äquidistant
- chordal
- zentripedal

die Interpolationsmethode; wahlweise:

- kubische Spline-interpolation
- Schmiege-interpolation
- Akima-interpolation

Der Datenaustausch mit dem aufrufenden Programm erfolgt über ein Eingabe- und ein Ausgabefeld.

Die Funktionsweise des Unterprogrammes "Kurvenausgleich" wird, vereinfacht, mit dem in der Abbildung 3.1-2 dargestellten Flußdiagramm veranschaulicht.

Zur Erprobung der in Kapitel 2 vorgestellten Theorie wurde auch zunächst ein Testprogramm erstellt, das mit Hilfe des Unterprogrammes "Kurvenausgleich" eine dreidimensionale Kurvenausgleichung an feste Stützpunkte durchführt (siehe vereinfachtes Flußdiagramm in der Abb. 3.1-3). Die Parametrisierungsart und die Interpolationsmethode können vom Benutzer gewählt werden. Die Abbildungen 2.1-7, 2.1-8, 2.2-1, 2.2-2, 2.2-4 und 2.2-7 wurden mit Hilfe dieses Testprogrammes erzeugt.

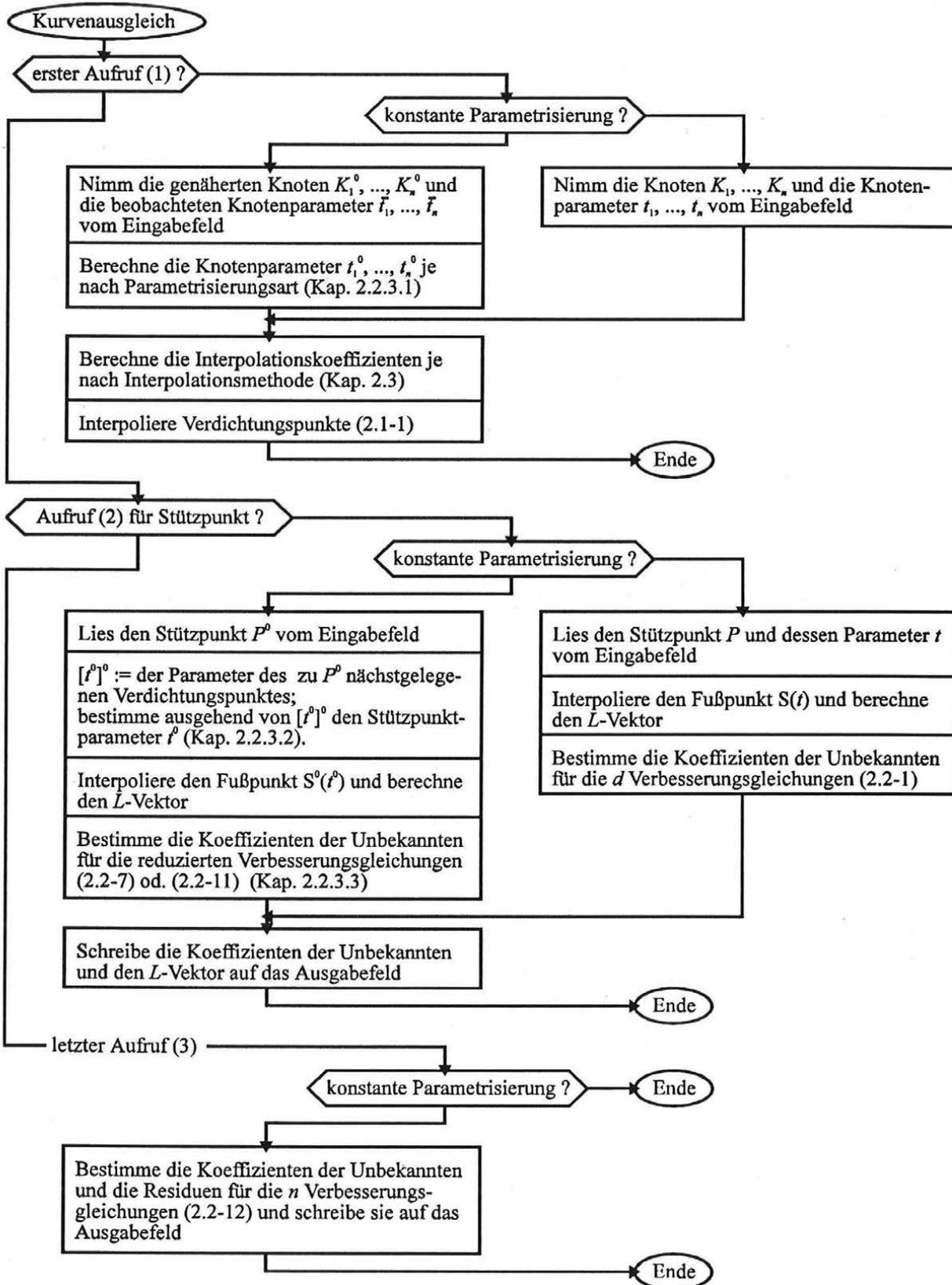


Abb. 3.1-2: Ablaufdiagramm für das Unterprogramm "Kurvenausgleich"

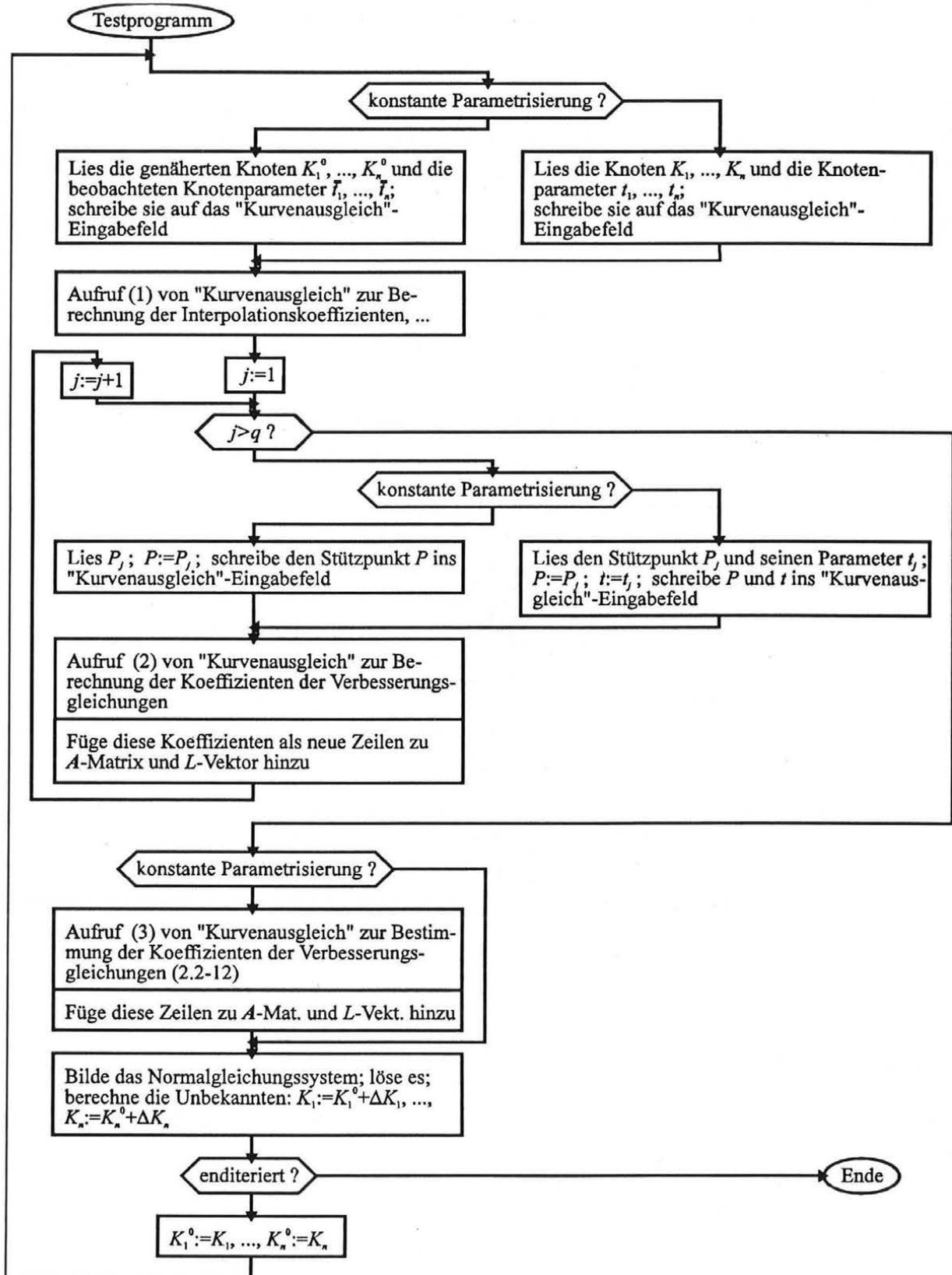


Abb. 3.1-3: Ablaufdiagramm für ein Testprogramm zur räumlichen Kurvenausgleichung mit festen Stützpunkten

### 3.1.2 Unterprogramme für die Approximation von Raumkurven

Ausgehend von der in Kapitel 2.4.1 vorgestellten Theorie wurde die Prozedur "Genäherter Vorwärtsschnitt einer Kurve" programmiert, die die räumlichen Näherungen einer Kurve aus den in  $nph$  orientierten Photos beobachteten Bildpunkte bestimmt. Die  $q=1q+2q+\dots+nq$  beobachteten Bildpunkte seien:  $P_{1,1}'$ , ...,  $P_{1,lq}'$  im Photo<sub>1</sub>, ...,  $P_{jph,1}'$ , ...,  $P_{jph,jq}'$  im Photo <sub>$jph$</sub> , ...,  $P_{nph,1}'$ , ...,  $P_{nph,nq}'$  im Photo <sub>$nph$</sub> .

Die Abbildung 3.1-3 zeigt den prinzipiellen Aufbau dieses Unterprogrammes:

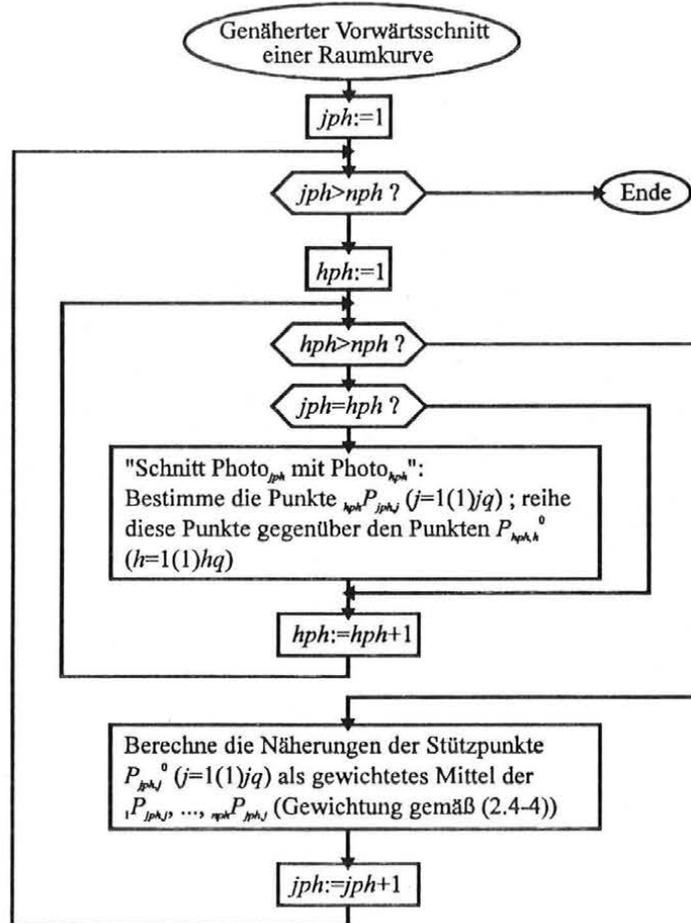


Abb. 3.1-4: Ablaufdiagramm des Unterprogrammes "Genäherter Vorwärtsschnitt einer Raumkurve"

Der Schnitt des Bildstrahles von  $P_{jph,j}'$  mit dem Zwickel durch die Bildpunkte  $P_{hph,h}'$  und  $P_{hph,h+1}'$  erfolgt mit Hilfe der Formeln (2.4-1) bis (2.4-3). Ist der Schnitt "gültig" (siehe Abb. 2.4-4), so wird der Zwickel mit dem nächsten Bildstrahl ( $\Rightarrow j:=j+1$ ) geschnitten. Nach jedem ungültigen Schnitt wird versucht, den nächsten Zwickel ( $\Rightarrow h:=h+1$ ) zu verwenden.

Für die Ermittlung der räumlichen Reihenfolge der Stützpunkte wird vom Programm eine "Reihungsliste" mit den "Identifiern" (das sind eindeutige Bezeichner) der Punkte angelegt. Zum Zeitpunkt des Unterprogrammaufrufes wird die Reihungsliste von "links" nach "rechts" (das ist die Richtung der ansteigenden Parameterwerte) wie folgt initialisiert:  $P_{1,1}^0, \dots, P_{1,lq}^0$ ,

$\dots, P_{jph,1}^0, \dots, P_{jph,jq}^0, \dots, P_{hph,1}^0, \dots, P_{hph,nq}^0$ .

Nach jedem gültigen Schnitt eines Bildstrahles von  $P_{jph,j}^0$  mit einem Zwickel von  $P_{hph,h}^0$  und  $P_{hph,h+1}^0$  wird  $P_{jph,j}^0$  in der Reihungsliste genau eine Position links von  $P_{hph,h+1}^0$  neu gereiht. Auf diese Art enthält die Reihungsliste am Ende des Unterprogrammaufrufes die korrekte räumliche Reihenfolge der aus verschiedenen Photos stammenden genäherten Stützpunkte.<sup>1</sup>

Zu Beginn des Zwickelschnittes von  $\text{Photo}_{jph}$  mit  $\text{Photo}_{hph}$  wird ein Paar näherungsweise homologer Punkte,  $P_{jph,j0}^0$  und  $P_{hph,h0}^0$ , benötigt. Falls dieses Punktpaar nicht vom Benutzer vorgegeben wurde, nimmt das Unterprogramm automatisch an, daß  $P_{jph,j0}^0 = P_{jph,1}^0$  und  $P_{hph,h0}^0 = P_{hph,1}^0$ . Ausgehend von  $P_{jph,j0}^0$  und  $P_{hph,h0}^0$  wird nun der erste gültige Schnitt gesucht. Zur Kontrolle dieser Suchprozedur kann der Benutzer einen maximalen "Suchbereich"  $smax$  vorgeben: innerhalb des Punktbereiches  $P_{jph,j0}^0$  bis  $P_{jph,j0+smax}^0$  beziehungsweise  $P_{hph,h0}^0$  bis  $P_{hph,h0+smax}^0$  muß sich ein gültiger Schnitt ergeben, andernfalls könnte eine mehrdeutige Lösung auftreten (siehe Abb. 3.1-5).

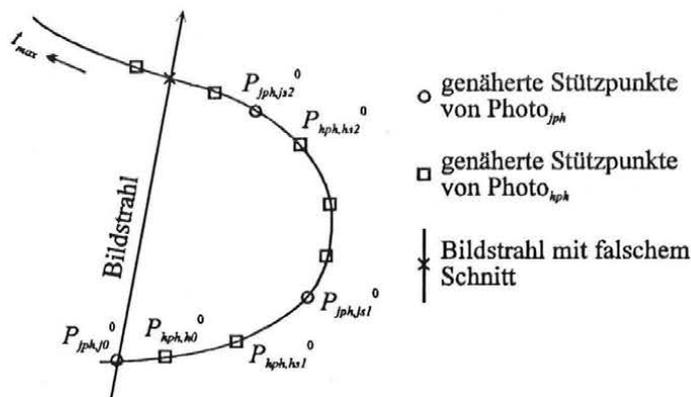


Abb. 3.1-5: Suche des ersten gültigen Schnittes eines Bildstrahles des  $\text{Photo}_{jph}$  mit einem Zwickel des  $\text{Photo}_{hph}$

Im Beispiel von Abbildung 3.1-5 darf der Suchbereich  $smax$  höchstens fünf sein:

Nach frühestens sechs Zwickeln (gezählt z.B. ab  $P_{hph,h0}^0$ ) kann ein Bildstrahl (z.B. von  $P_{jph,j0}^0$ ) einen gültigen Schnitt am falschen "Ast" der Kurve haben.  $smax$  muß also kleiner sein als jene Anzahl von Stützpunkten des  $\text{Photo}_{hph}$ , die sich innerhalb der kleinsten "halben Wellenlänge" der Kurve befinden.

Der Minimalwert für  $smax$  ist in diesem Beispiel drei:

Ausgehend von einem gültigen Schnitt (z.B. Bildstrahl durch  $P_{jph,js1}^0$  mit dem Zwickel von  $P_{hph,hs1}^0$  und  $P_{hph,hs1+1}^0$ ) ergibt sich nach spätestens drei Zwickeln wieder ein gültiger Schnitt (z.B. Bildstrahl von  $P_{jph,js2}^0$  mit dem Zwickel von  $P_{hph,hs2}^0$  und  $P_{hph,hs2+1}^0$ ).  $smax$  muß also größer oder gleich sein der maximalen Anzahl der Stützpunkte von  $\text{Photo}_{hph}$ , die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützpunkten des  $\text{Photo}_{jph}$  liegen.

Im Anschluß an das Unterprogramm "genäherter Vorwärtsschnitt einer Kurve" werden mit einem weiteren Unterprogramm die genäherten Knoten entlang des aus den genäherten Stützpunkten gebildeten Polygons bestimmt.

<sup>1</sup>Die Voraussetzung für dieses Verfahren ist, daß in jedem  $\text{Photo}_{jph}$  die Bildpunkte  $P_{jph,j}^0$  ( $j=1(1)jq$ ) in Richtung ansteigender Kurvenparameter registriert wurden.

## 3.2 Implementierung in das Programmsystem ORIENT

ORIENT ist ein universelles Programmsystem für strenge Ausgleichungen auf dem Gebiet der photogrammetrischen Punktbestimmung, wobei viele verschiedene Arten von Beobachtungen gleichzeitig verarbeitet werden können (siehe Kager 1989). Die in dieser Arbeit beschriebenen fiktiven Kurvenbeobachtungen wurden in Form einer neuen Beobachtungsart in ORIENT implementiert.

Die Beobachtungen, Unbekannten und Konstanten einer Ausgleichungsaufgabe bilden die Datenbasis von ORIENT, die im Kapitel 3.2.1 näher beschrieben wird. Das Kapitel 3.2.2 befaßt sich mit der Benutzeroberfläche von ORIENT.

### 3.2.1 Datenbasis von ORIENT

In ORIENT wird jede Beobachtung als Funktion von "Parametern"<sup>1</sup> aufgefaßt. Jede Parameterart kann an der Ausgleichung wahlweise als Unbekannte oder als Konstante teilnehmen. Die Tabelle 3.2-1 listet die wichtigsten in ORIENT implementierten Beobachtungsarten samt den jeweils relevanten Parameterarten auf. In dieser Tabelle werden die in ORIENT üblichen englischen Bezeichnungen verwendet. Die aus den Großbuchstaben gebildeten Abkürzungen entsprechen im wesentlichen den ORIENT-Schlüsselwörtern für die Programmsteuerung (siehe Kap. 3.2.2).

---

<sup>1</sup>Der Begriff "Parameter" ist hier allgemein zu verstehen; in diesem Sinne ist die Kurvenbeobachtung eine Funktion der Parameter: Knotenpunkte, Stützpunkt und Stützpunktparameter.

Beobach- tungsart	Parameter				Objektpunkt
	äußerer Refe- renzpunkt	Drehung	innerer Refe- renzpunkt	zusätzliche Parameter - Maßstab	
PHOTO	PRoJection CenTeR	ROtation PARAmeter	INNeR ORieNtation	DIStortion PARAmeter	OBJECT point
GESTALT	ORIGIN	ROtation PARAmeter		POLynomial PARAmeter	OBJECT point
SPLINE	KNOT point			T-PARAmeter	OBJECT point
PIXEL- PHOTO	PRoJection CenTeR	ROtation PARAmeter	INNeR ORieNtation	ORBit polynomi- al PARAmeter	OBJECT point
	KNOT pro- jection center	knot-ROtation PARAm.	INNeR ORieNtation		OBJECT point
CONtrol POInt (3d-Paßpunkt)					OBJECT point
MODEL	ORIGIN	ROtation PARAmeter		SCALE	OBJECT point
POLAR POInt	ORIGIN	ROtation PARAmeter		SCALE	OBJECT point

Tab. 3.2-1: Die ORIENT-Beobachtungsarten und deren Parameter

Mit der Beobachtungsart GESTALT können fiktive Beobachtungen von Punkten auf Polynomflächen (das sind Flächen, die durch ein Polynom beschrieben werden, wie z.B. Ebenen, Zylinder, usw.) in der Ausgleichung berücksichtigt werden. Durch Schnitt zweier Polynomflächen können auch "einfache" Linien, wie zum Beispiel Geraden, Parabeln oder Kreise, definiert werden.

Die fiktive Beobachtung, daß ein Punkt auf einer aus zusammengesetzten kubischen Polynomen gebildeten Kurve liegt, wurde den bereits bestehenden Beobachtungsarten als neue Beobachtungsart SPLINE hinzugefügt.

Jeder Beobachtungsdatensatz wird in ORIENT als eigener "Beobachtungs-Datenraum" organisiert. Die einem Beobachtungsraum einer bestimmten Beobachtungsart zugeordneten Parameter (siehe Tab. 3.2-1) befinden sich in "Parameter-Datenräumen". Alle Objektpunkte der Ausgleichungsaufgabe befinden sich in einem speziellen Parameterraum, dem "Referenzsystem-Datenraum" (REFerence SYStem). Innerhalb der "Räume" sind die Daten als "Punkte" organisiert; jeder Punkt  $P_j$  besteht aus einem Identifier  $n_j$ , aus Koordinaten (z.B.  $x_j, y_j, z_j$ ) und gegebenenfalls aus einer Genauigkeitsangabe pro Koordinate.

### 3.2.1.1 Datenbasis im Falle einer Ausgleichung mit Raumkurven

Die Abbildung 3.2-1 soll die oben beschriebene Datenstruktur am Beispiel der in den

Kapiteln 4.1, 4.2 und 4.3 verwendeten SPLINE-, PHOTO- und CONPOI-Beobachtungen veranschaulichen:

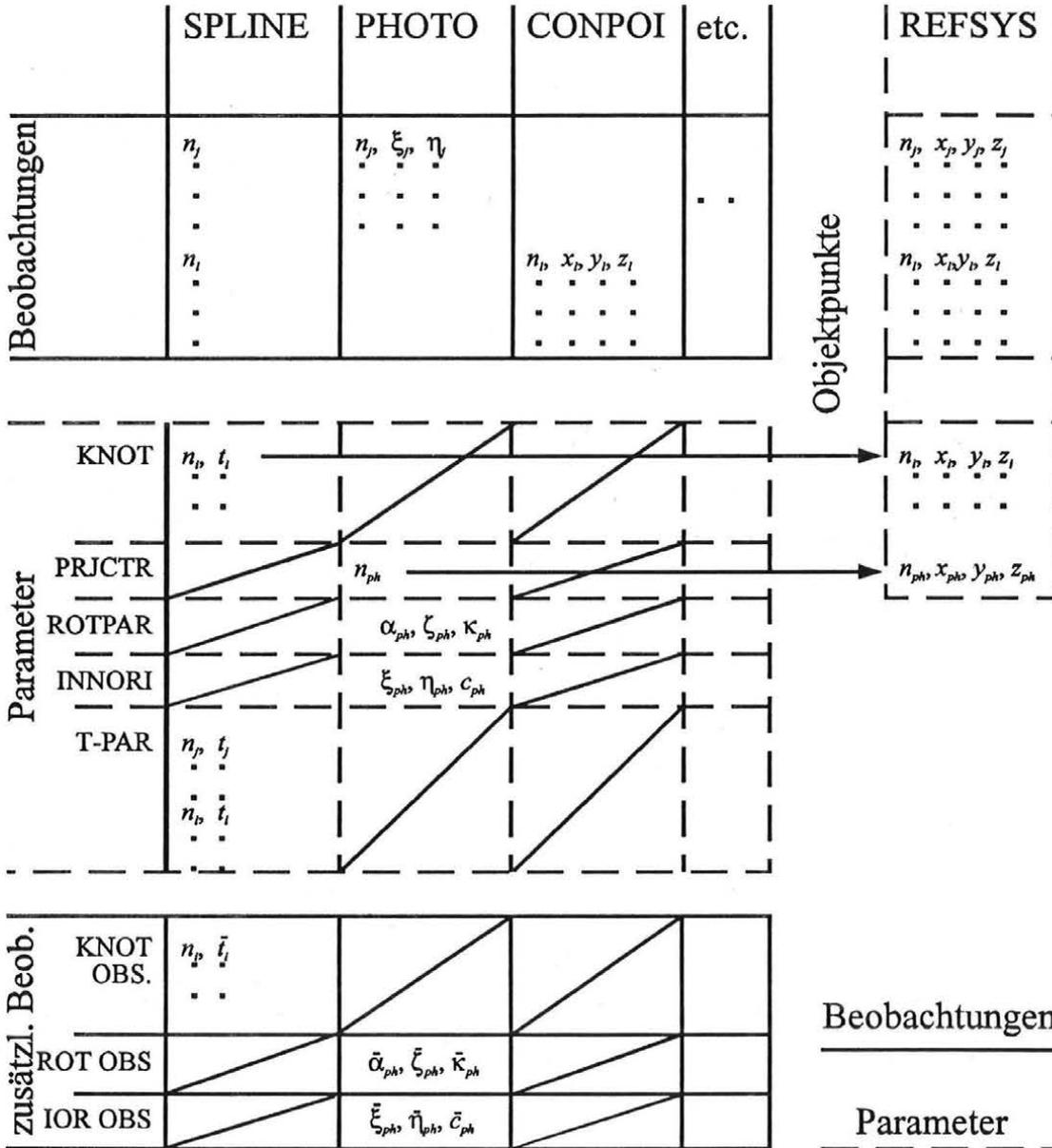


Abb. 3.2-1: Die ORIENT-Datenstruktur im Falle einer Ausgleichung mit räumlichen SPLINE-Kurven

Ein Beobachtungsraum vom Typ SPLINE enthält die Identifier  $n_j, n_l$  jener Punkte, die auf der Kurve liegen sollen (die zusätzliche Angabe von beobachteten Werten ist überflüssig, da diese per Definition durchwegs den Wert 0 haben).

Der zugeordnete Parameterraum vom Typ KNOT enthält die Identifier  $n_i$  der Knotenpunkte sowie deren Parameterwerte  $t_i$ . Da die Knoten Punkte des Objektraumes sind, befinden sich ihre Objektkoordinaten  $x_i, y_i, z_i$  im Raum REFSYS. Das bedeutet, daß mit Hilfe der Identifier im KNOT-Raum festgelegt wird, welche Objektpunkte als Knotenpunkte der SPLINE-Kurve verwendet werden.

Der Parameterraum T-PAR enthält die Kurvenparameter  $t$  der SPLINE-Punkte.

Am unteren Ende der Abbildung 3.2-1 befinden sich Räume mit zusätzlichen Beobachtungen (optional). Für die Beobachtungsart SPLINE kann es einen zusätzlichen Beobachtungsraum KNOT=OBSERVED geben, der die zusätzlichen Beobachtungen  $\bar{t}_i$  für die t-Parameter der Knoten  $K_i$  enthält<sup>2</sup> (siehe Kap 2.2.3.4).

Der Beobachtungsraum vom Typ PHOTO enthält die Identifier  $n_j$  und die Bildkoordinaten  $\xi_j, \eta_j$  der Bildpunkte  $P_j'$ . Anstelle eines eigenen Parameterraumes für das Projektionszentrum (PRJCTR) existiert eine Referenz zu jenem Objektpunkt  $n_{ph}$ , der als Projektionszentrum für das Photo verwendet wird. Dem Photo zugeordnete Parameterräume enthalten die räumlichen Drehwinkel (Parameterraum ROTPAR) und die innere Orientierung (Parameterraum INNORI) des Photos.

Eventuelle direkte Beobachtungen für die Drehwinkel beziehungsweise für die innere Orientierung können durch zusätzliche Beobachtungsräume, ROTPAR=OBSERVED beziehungsweise INNORI=OBSERVED berücksichtigt werden.

Direkte dreidimensionale Paßpunktbeobachtungen befinden sich in einem Beobachtungsraum vom Typ CONPOI.

Im Raum REFSYS befinden sich alle an der Ausgleichung beteiligten Objektpunkte (einschließlich aller beteiligten Knoten und Projektionszentren). Bei dem in der Abbildung 3.2-1 gezeigten Beispiel enthält das REFSYS die auf der SPLINE-Kurve und im Photo beobachteten Punkte mit den Identifier  $n_j$ , die direkt beobachteten Kurvenstützpunkte (Identifier  $n_i$ ), die Knotenpunkte der Kurve ( $n_i$ ) und das Projektionszentrum ( $n_{ph}$ ) des Photos.

### 3.2.1.2 Datenbasis im Falle einer parametrischen Rektifizierung von Flugzeugscanneraufnahmen

Für die Behandlung von Flugzeugscanneraufnahmen (siehe Kap. 4.5) existiert die Beobachtungsart PIXELPHOTO<sup>3</sup>. Wie aus der Abbildung 4.5-1 ersichtlich, stellt bei einem PIXELPHOTO jede Zeile ("Scan") der Bildmatrix eine eigene perspektive Abbildung auf die Sensorzeile des Scanners dar (siehe z.B. Kraus 1990, S. 428ff). Durch die Fortbewegung des Scanners mit dem Flugzeug hat jeder Scan eine eigene äußere Orientierung. Aufgrund der gleichmäßigen Flugbewegung ändert sich diese äußere Orientierung von Scan zu Scan stetig und kann daher entlang einer sechsdimensionalen Funktion, zum Beispiel aus zusammengesetzten kubischen Polynomen interpoliert werden.

Ein Bildpunkt  $P_i'$  eines PIXELPHOTOs hat die Koordinaten  $\xi_i=t_i$ , das ist die Scannummer,

<sup>2</sup>Durch die Angabe von  $\bar{t}_1$  und  $\bar{t}_n$  kann bei offener Kurve und unbekannter Parametrisierung die unbekannte Verschiebung der beiden Endknoten  $K_1$  und  $K_n$  entlang der Kurve festgelegt werden (zwei Beobachtungen für zwei Unbekannte): In diesem Fall soll  $K_1$ , beziehungsweise  $K_n$ , an der Stelle des kleinsten, beziehungsweise des größten, Stützpunktparameters liegen. Außerdem ergibt sich das Parameterintervall der Kurve zu:  $t_{min}=\bar{t}_1$  und  $t_{max}=\bar{t}_n$ .

<sup>3</sup>Die Bezeichnung "Pixel" stammt von PICTURE (X) ELEMENT und steht für ein Element einer Bildmatrix.

und  $\eta_i$ , die Pixelnummer innerhalb des Scans. Falls der Punkt  $P_i'$  durch eine Matching-Prozedur mit Sub-Pixelgenauigkeit lokalisiert wurde (siehe z.B. Kalliany 1991), sind die Koordinaten  $t_i$  und  $\eta_i$  Dezimalzahlen.

Die Abbildung 3.2-2 zeigt, wie die Datenbasis für eine parametrische Rektifizierung einer Flugzeugscanneraufnahme aussehen kann:

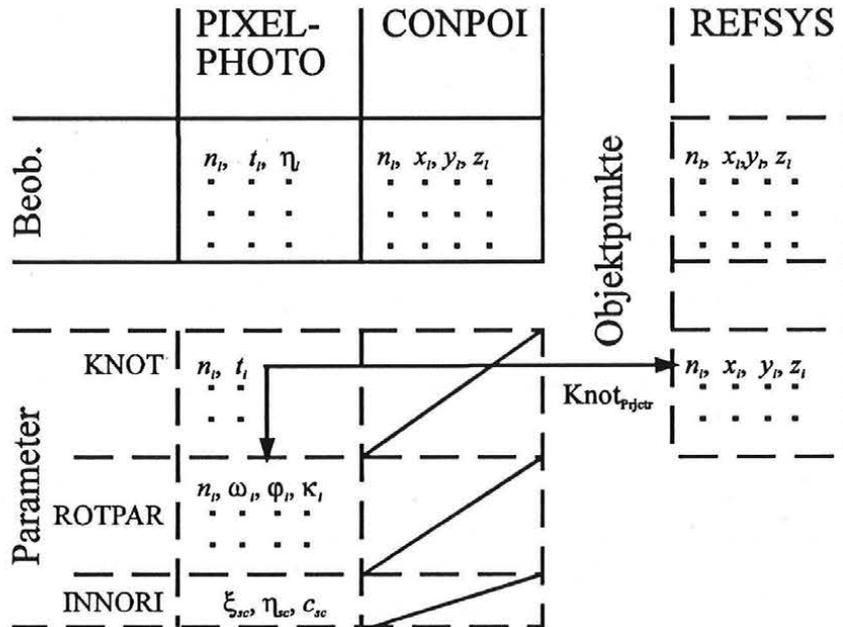


Abb. 3.2-2: Die Datenstruktur einer Ausgleichung von PIXELPHOTO-Beobachtungen

Der Parameterraum KNOT enthält die Knoten  $K_i$  und die Knotenparameter  $t_i$  jener sechsdimensionalen SPLINE-Funktion der Scannummer  $t$ , die den Verlauf der äußeren Orientierung entlang der Flugbahn beschreibt. Durch die Koordinaten  $t_i$  der Bildpunkte  $P_i'$  ist die Parametrisierung der Funktion vorgegeben und daher konstant. Jeder Knotenpunkt  $K_i$  hat sechs Werte: die drei Objektkoordinaten  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  befinden sich im REFSYS, die drei Drehwinkel  $\omega_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $\kappa_i$  befinden sich im Parameterraum ROTPAR.

Der Parameterraum INNORI enthält die Werte  $\xi_{sc}$ ,  $\eta_{sc}$ ,  $c_{sc}$ , die die innere Orientierung eines Scans beschreiben.

Mit Hilfe der Stützpunkte  $P_i$ , für die sowohl PIXELPHOTO- als auch CONPOI-Beobachtungen vorliegen, können die sechsdimensionalen Knoten  $K_i$  bestimmt werden (siehe Kap. 4.5).

### 3.2.2 Benutzeroberfläche von ORIENT

Für die Bearbeitung der Datenbasis stehen dem ORIENT-Benutzer folgende Programmmodule zur Verfügung:

- EDIT für die Dateneingabe (z.B. Beobachtungen);
- UPDATE für die Betrachtung oder Änderung bereits verfügbarer Daten;
- CREATE für die Definition fiktiver GESTALT- oder SPLINE-Beobachtungen;

APPROX	für die Ermittlung von Näherungswerten für die Ausgleichung;
ADJUST	für die Ausgleichung von Beobachtungen, für die Bestimmung der Unbekannten, für das automatische Aufsuchen und Beseitigen grober Fehler;
PLOT	für die graphische Ausgabe von Datenräumen;
etc.	

Die Programmsteuerung erfolgt nun interaktiv mit Hilfe einer Kommandosprache, die aus einer "Sprachregel" und aus einem "Wortschatz" besteht. Nach den Regeln der Kommandosprache werden Befehle an ORIENT in Form von "Direktiven" eingegeben; so eine Direktive kann zum Beispiel folgendermaßen lauten:

"UPDATE PHOTO(901) SHOW(10-99) ."

Jede Direktive beginnt mit dem Namen des auszuführenden Programmmoduls (z.B. UPDATE); mit Hilfe weiterer "Direktivenparameter" (z.B. PHOTO(901)) kann die gewünschte Aktion näher spezifiziert werden. Mit einem "." wird die Direktive beendet und zur Ausführung freigegeben. Die Eingabe der Direktive wird von dem Kommandointerpreter DIRAN (DIRective ANalyser) hinsichtlich der Einhaltung der Kommandosprach-Regeln überprüft und danach interpretiert. So bewirkt zum Beispiel die oben angeführte Direktive, daß alle existierenden Bildpunkte des Photo<sub>901</sub> mit einem Identifier größer-gleich 10 und kleiner-gleich 99 am Bildschirm aufgelistet werden.

Zur Erleichterung für einen noch "sprachunkundigen" ORIENT-Benutzer wurde das Programm PROMPTER<sup>4</sup> entwickelt. Ist die Eingabe des Benutzers keine mit "." abgeschlossene Direktive, erkennt der PROMPTER die bereits eingegebenen Direktivenparameter und bietet daraufhin dem Benutzer nähere Erläuterungen zu den übrigen möglichen Parametern der Direktive an (siehe Gsandtner 1985).

Im folgenden soll nun die Steuerung einer Ausgleichung näher erläutert werden. Nach der Eingabe des Modul-Namens ADJUST werden die an der Ausgleichung teilnehmenden Beobachtungsarten angegeben. Zusätzlich können zu jeder Beobachtungsart jene Parameterarten angeführt werden, die in der Ausgleichung als Unbekannte berechnet werden sollen. Die übrigen, nicht angeführten Parameterarten einer Beobachtungsart nehmen an der Ausgleichung als konstante Größen teil.

Als Beispiel sei die Direktive für die Ausgleichung der SPLINE-Kurve<sub>1000</sub> durch Vorwärtschnitt von Photo<sub>901</sub> und Photo<sub>902</sub> angeführt:

"ADJUST PHOTO=OBJECT(901 902) SPLINE=KNOT=T-PAR=OBJECT(1000) ."

In diesem Beispiel sind die Unbekannten der Bildpunktbeobachtungen die Objektkoordinaten (=OBJECT) der Stützpunkte. Die Projektionszentren (PRJCTR), die Drehwinkel (ROTPAR) und die inneren Orientierungen (INNORI) der Photos seien konstant.

Die Unbekannten der fiktiven Kurvenbeobachtung sind die Knotenpunkte (=KNOT), die Kurvenparameter der Stützpunkte (=T-PAR) und die Objektkoordinaten (=OBJECT) der Stützpunkte. Die Spezifikation der Parameterart KNOT als Unbekannte der Ausgleichung hat in ORIENT automatisch die Teilnahme der zusätzlichen Beobachtungsart KNOT=OBSER-

---

<sup>4</sup>Ein "prompt" ist die Meldung, mit der ORIENT die nächste Eingabe des Benutzers anfordert.

VED zur Folge (unter der Voraussetzung, daß dem SPLINE(1000) ein Raum vom Typ KNOT=OBSERVED zugeordnet wurde).

Durch "Deaktivieren" mit dem Modul UPDATE können einzelne, zum Beispiel fehlerhafte, Beobachtungen von der Ausgleichung ausgeschlossen werden. Zur Aufdeckung und Beseitigung einer größeren Anzahl von groben Beobachtungsfehlern bietet ORIENT eine robuste Schätzung (siehe z.B Kraus 1984) an: Dabei werden für die nächsten Iteration die Gewichte der Beobachtungen in Abhängigkeit ihrer Residuen der vorhergehenden Iteration bestimmt - je größer das Residuum, desto geringer das Gewicht. Die Direktive für eine robuste Schätzung kann zum Beispiel folgendermaßen aussehen:

```
"ADJUST PHOTO=ROBUST WEIGHT(3) MARK ."
```

Mit WEIGHT(3) wird die Funktion zur Gewichtsabminderung festgelegt; so erhalten etwa alle Photo-Beobachtungen, deren Residuum gleich dem 3-fachen der apriori geschätzten Beobachtungsgenauigkeit ist, für die nächste Iteration nur noch das halbe Gewicht. Außerdem werden alle Photo-Beobachtungen mit einem größeren Residuum für eine spätere Deaktivierung markiert (MARK). Die Voraussetzung für eine robuste Schätzung ist allerdings eine ausreichende Überbestimmung.

Die Bestimmung einer genäherten SPLINE-Kurve kann mit Hilfe des Moduls APPROX erfolgen. Mit

```
"APPROX SPLINE(1000) RAYS MERGE(901-903) ."
```

werden zum Beispiel die Stützpunkte der SPLINE-Kurve<sub>1000</sub> durch genäherten Vorwärtsschnitt von Photo<sub>901</sub>, Photo<sub>902</sub> und Photo<sub>903</sub> approximiert. Anschließend werden die im KNOT-Raum angegebenen Knotenpunkte entlang des genäherten Stützpunktpolygons bestimmt.

Existiert bereits eine Reihenfolge von Stützpunkten (mit Identifiern geordnet nach ansteigenden aber noch nicht festgelegten Parameterwerten) im REFSYS-Raum, so können die Knoten mit

```
"APPROX SPLINE SEQUENCE ."
```

approximiert werden.

Für die Festlegung der Parametrisierungs- und der Kurvenart ist jeder SPLINE-Kurve ein eigener Code zugeordnet, der mit dem Modul UPDATE vom Benutzer geändert werden kann. Abschließend sei noch erwähnt, daß alle in den Kapiteln 4.1 bis 4.4 dargestellten Abbildungen mit Hilfe des Moduls PLOT erzeugt wurden.

## 4 Anwendung

In diesem Kapitel soll anhand von Anwendungsbeispielen gezeigt werden, wie die in der Einleitung vorgestellten photogrammetrischen Aufgabenstellungen mit Hilfe ausgleichender Kurven aus zusammengesetzten kubischen Polynomen gelöst werden können.

In den Kapiteln 4.1 bis 4.3 wird anhand eines Testdatensatzes die Ausgleichung von Strahlenbündeln im Zusammenhang mit Raumkurven demonstriert. Das Kapitel 4.1 befaßt sich mit der Einzelbildorientierung ("photogrammetrischer Rückwärtsschnitt") mittels Paßkurven, das Kapitel 4.2 mit der Rekonstruktion von Objektkurven durch photogrammetrischen Vorwärtsschnitt. Das Kapitel 4.3 behandelt die Bündelblockausgleichung, bei der Bildorientierung und Objektrekonstruktion simultan mittels Verknüpfungskurven erfolgen. Die Lösung dieser Aufgaben erfolgt durch eine Kombination der beiden elementaren Operationen:

- Anpassung einer Kurve an konstante Stützpunkte ("Kurvenanpassung"),
- Bestimmung von Stützpunkten mit Hilfe konstanter Kurven ("Kurvenpunktbestimmung").

Das Kapitel 4.4 behandelt die Strategie zur absoluten Orientierung eines Modells mittels Paßkurven; anschließend wird in Kapitel 4.5 das Konzept zur Rektifizierung von Flugzeugscanneraufnahmen mittels einer sechsdimensionalen Funktion aus zusammengesetzten kubischen Polynomen vorgestellt. Den Abschluß bilden praktische Anwendungsbeispiele aus dem Bereich der Ingenieur- und der Medizinphotogrammetrie (siehe Kap. 4.6).

Bei dem in den Kapiteln 4.1, 4.2 und 4.3 verwendeten Testdatensatz wurden die Beobachtungen mit ORIENT rechnerisch simuliert:

Zwischen vorgegebenen Knotenpunkten (siehe Tab. 4-1) wurden Objektpunkte interpoliert. Anschließend erfolgte die Berechnung der diesen Objektpunkten entsprechenden Bildpunkte in Photos mit vorgegebener Orientierung (siehe Tab. 4-2). Die Abbildungen 4-1a und 4-1b zeigen die aus den Objektpunkten gebildeten Raumkurven und die aus den Bildpunkten gebildeten Abbilder der Raumkurven. Sämtliche räumliche Darstellungen des Testdatensatzes sind axonometrische Abbildungen; die Länge der mitabgebildeten Koordinatenachsen ist 20.

KNOT 1000 chordale Parametr. kubischer Spline				KNOT 2000 chordale Parametr. kubischer Spline				KNOT 3000 chordale Parametr. Schmiegekurve				KNOT 4000 chordale Parametr. Schmiegekurve			
$x_i$	$y_i$	$z_i$	$t_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$t_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$t_i$	$x_i$	$y_i$	$z_i$	$t_i$
60	10	10	0.000	70	10	0	0.000	20	55	0	0.000	20	40	15	0.000
75	30	4	11.364	60	10	10	17.446	30	45	13	18.093	30	20	25	16.158
80	55	0	22.771	55	0	15	32.554	25	30	20	34.380	45	10	20	28.499
55	55	2	33.856	55	10	25	50.000	20	45	25	50.000	60	20	18	40.464
20	45	5	50.000									50	30	15	50.000

Tab. 4-1: vorgegebene Knotenkoordinaten des Testdatensatzes

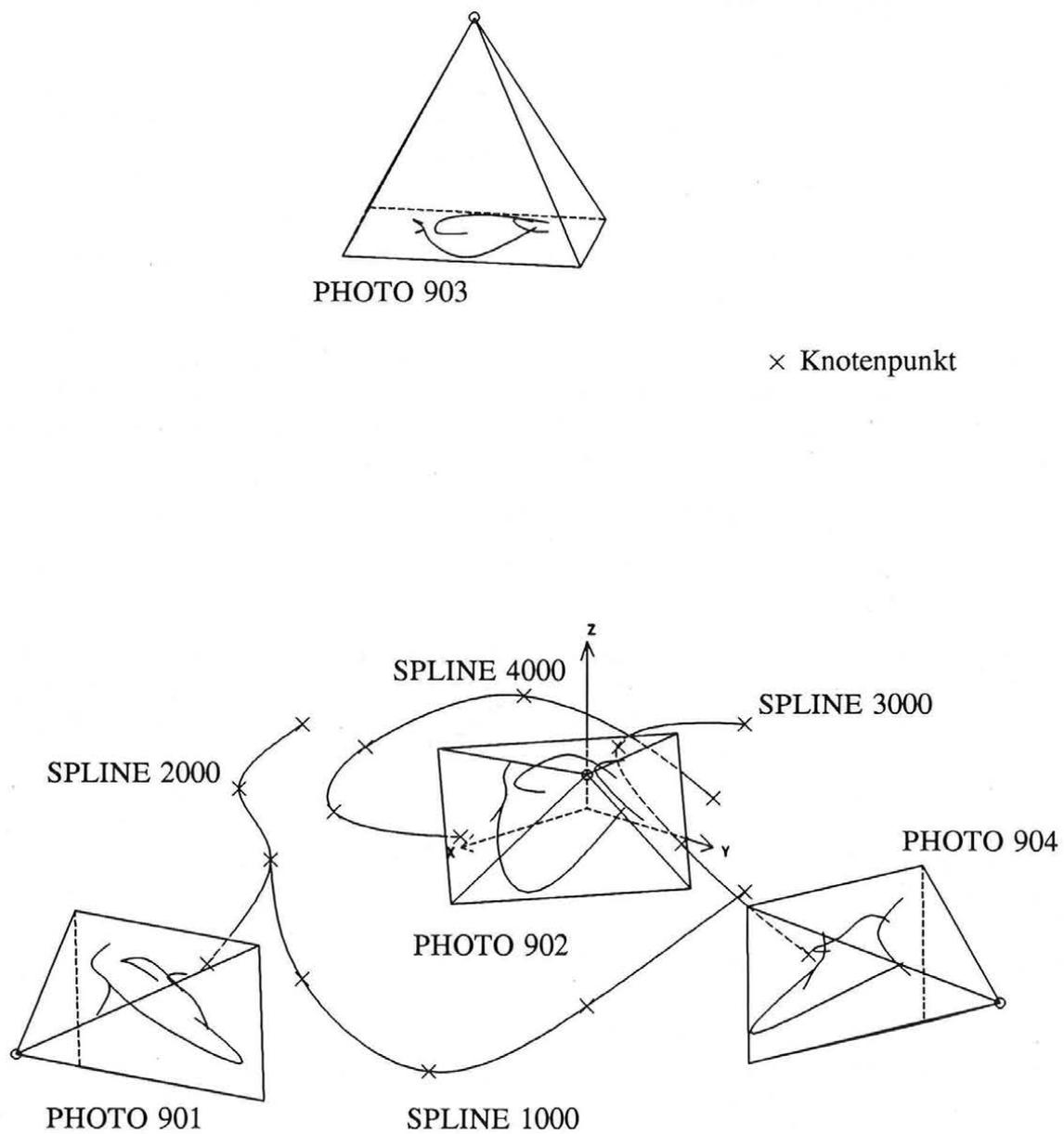


Abb. 4-1a: Darstellung des Testdatensatzes mit den Bezeichnungen der ORIENT-Datenräume

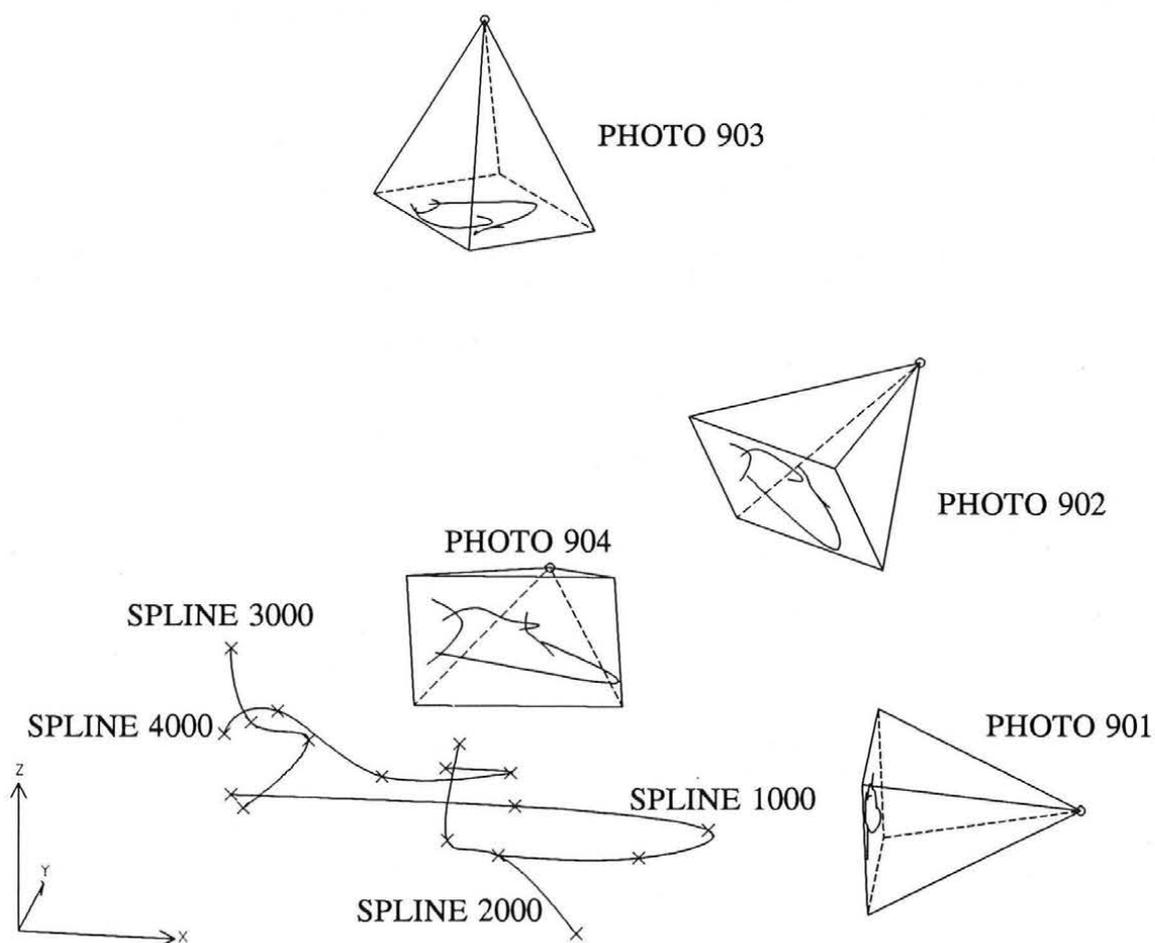


Abb. 4-1b: Darstellung des Testdatensatzes

PHOTO 901 Bildformat 36x24	PHOTO 902 Bildformat 36x24	PHOTO 903 Bildformat 36x24	PHOTO 904 Bildformat 36x24
INNORI 901 $\xi_{901}$ $\eta_{901}$ $c_{901}$ 0   0   35	INNORI 902 $\xi_{902}$ $\eta_{902}$ $c_{902}$ 0   0   35	INNORI 903 $\xi_{903}$ $\eta_{903}$ $c_{903}$ 0   0   35	INNORI 904 $\xi_{904}$ $\eta_{904}$ $c_{904}$ 0   0   35
PRJCTR $x_{901}$ $y_{901}$ $z_{901}$ 130   40   10	PRJCTR $x_{902}$ $y_{902}$ $z_{902}$ 100   100   50	PRJCTR $x_{903}$ $y_{903}$ $z_{903}$ 54   36   115	PRJCTR $x_{904}$ $y_{904}$ $z_{904}$ 50   115   15
ROTPAR 901 $\alpha_{901}$ $\zeta_{901}$ $\kappa_{901}$ 5   98   104	ROTPAR 902 $\alpha_{902}$ $\zeta_{902}$ $\kappa_{902}$ 57   68   102	ROTPAR 903 $\omega_{903}$ $\varphi_{903}$ $\kappa_{903}$ 0   0   340	ROTPAR 904 $\alpha_{904}$ $\zeta_{904}$ $\kappa_{904}$ 99   96   97

Tab. 4-2: Photos des Testdatensatzes mit vorgegebenen Orientierungswerten

## 4.1 Bildorientierung mit Hilfe von Paßkurven

Gegeben seien Raumkurven, die in einem Photo abgebildet sind. Gesucht sei die äußere Orientierung (das Projektionszentrum und die Drehwinkel) dieses Photos gegenüber dem Objektkoordinatensystem.

Die für eine Bildorientierung erforderlichen Beobachtungen sind:

- dreidimensionale Paßpunkte entlang der Raumkurven im Objektkoordinatensystem (z.B: ORIENT-Datenraum CONPOI 8888, siehe Abb. 4.1-1a),
- Bildpunkte, die im allgemeinen nicht den Paßpunkten entsprechen, entlang der Abbilder der Raumkurven im Photo (z.B: PHOTO 904, siehe Abb.4.1-1b).

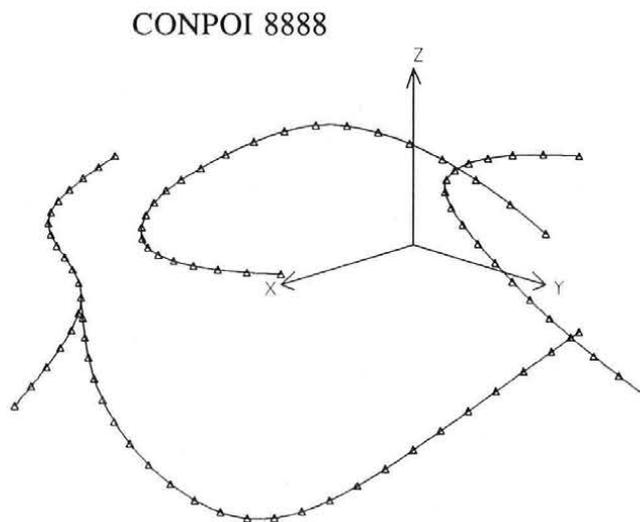


Abb. 4.1-1a: die auf den Raumkurven beobachteten Paßpunkte

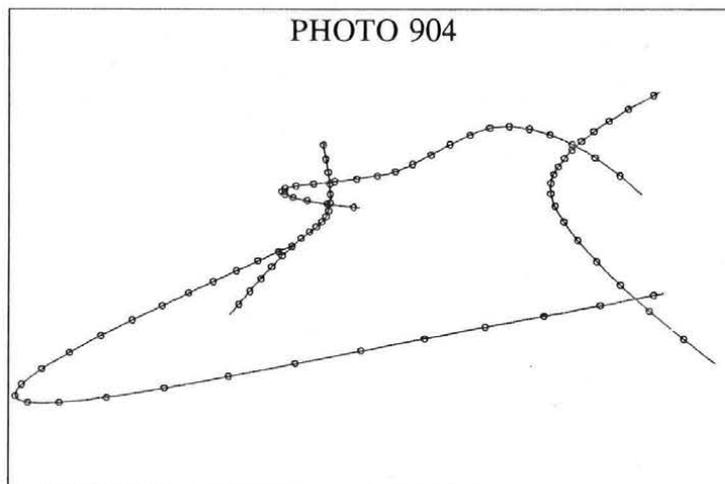


Abb. 4.1-1b: die auf den Abbildern der Raumkurven beobachteten Bildpunkte

Die verfügbare Paßinformation bestehe in der vorliegenden Aufgabe ausschließlich aus

Kurven. Für die Bildorientierung sind nun im wesentlichen zwei Arbeitsschritte nötig:

- 1) Berechnung der Paßkurven durch eine Kurvenanpassung an die festen Paßpunkte,
- 2) Orientierung des Photos durch Bestimmung der den Bildpunkten entsprechenden Kurvenpunkte auf den konstanten Paßkurven.

#### 4.1.1 Anpassung der Paßkurven an feste Stützpunkte

Jede Paßkurve soll nun durch eine Kurvenanpassung, also durch eine Kurvenausgleichung mit festen Stützpunkten, bestimmt werden. Vor solch einer Ausgleichung muß der Benutzer die Parametrisierungsart, die Kurvenart sowie die Anzahl der Knoten festlegen.

Sämtliche Kurvenausgleichungen in diesem Kapitel erfolgen mit chordaler Parametrisierung, da bei dieser durch zusätzliche Beobachtungen der Knotenparameter die Kollision von Knoten verhindert werden kann (siehe Kap. 2.3.4.3).

Für die Ausgleichung von Raumkurven sollten aufgrund der in Kapitel 2.3.4 untersuchten Eigenschaften (Iterationsverhalten, Rotationsinvarianz) nur die kubische Splinekurve oder die Schmiegekurve verwendet werden. Alle Ausgleichungen in diesem Kapitel werden sowohl mit kubischen Splines und als auch mit Schmiegekurven durchgeführt.

Die Anpassungsfähigkeit der ausgeglichenen Kurve an die festen Stützpunkte hängt in erster Linie von der Anzahl der Knotenpunkte ab: je mehr Knoten gewählt werden, desto flexibler ist die ausgleichende Kurve.

Theoretisch kann die Anzahl  $n$  der Knoten so groß sein, daß die Kurvenausgleichung gerade noch eindeutig bestimmt ist. Für die Ausgleichung von offenen Raumkurven mit  $q$  konstanten Stützpunkten und zwei zusätzlichen Beobachtungen ( $\bar{t}_1$  und  $\bar{t}_n$ ) für die Endknoten ( $\Rightarrow 3q+2$  Beobachtungen) sowie  $n$  unbekanntem Knoten,  $q$  unbekanntem Stützpunktparametern und zwei unbekanntem Verschiebungen der Endknoten ( $\Rightarrow 3n+q+2$  Unbekannte) gilt daher:

$$3n + q + 2 \leq 3q + 2 \Rightarrow n \leq \frac{2}{3}q$$

Es können theoretisch maximal zwei Knoten pro drei festen Stützpunkten gewählt werden. Günstiger für die Kontrolle und die Beurteilung des Ausgleichungsergebnisses ist es jedoch, von vornherein eine gewisse Überbestimmung anzustreben. So ergibt sich zum Beispiel eine Redundanz im Ausmaß von mindestens 50% der Unbekannten, wenn

$$1.5(3n + q + 2) \leq 3q + 2 \Rightarrow n \leq \frac{1}{3}q - \frac{1}{4.5},$$

also bei ungefähr einem Knoten pro drei Stützpunkten. Berücksichtigt man die zusätzlichen Beobachtungen  $\bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{n-1}$  für die Parameter der inneren Knoten  $K_2, \dots, K_{n-1}$ , so ergibt sich eine Redundanz von 50% bei:

$$1.5(3n + q + 2) \leq 3q + n \Rightarrow n \leq \frac{1.5q - 3}{3.5}$$

Die vom Benutzer gewählte Maximalanzahl von Knoten kann nun für jede Kurve näherungsweise mit gleichen Parameterabständen entlang des mit der ORIENT-Direktive

"ADJUST CONPOI=OBJECT ."

bestimmten Stützpunktpolygons angeordnet werden (siehe Abb. 4.1-2). Dies geschieht mit der Direktive

"APPROX SPLINE SEQUENCE .".

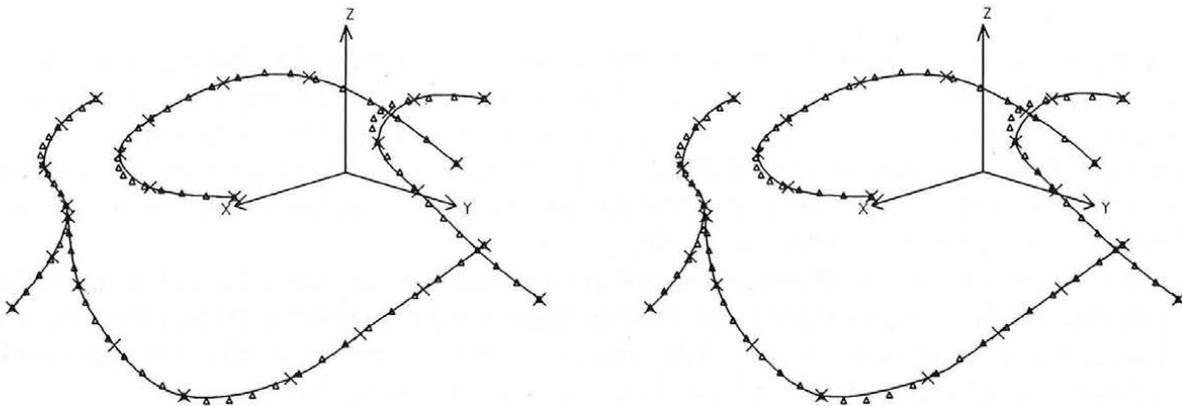


Abb. 4.1-2: genäherte Splinekurven (links) bzw. Schmiegekurven (rechts) für die Ausgleichung [4.1-1]

Bei der nun folgenden Kurvenanpassung ist zu berücksichtigen, daß im allgemeinen jeder ausgeglichene Knoten an eine Kurvenstelle mit maximaler Krümmung zu liegen kommt. Im Verlauf der schrittweisen Ausgleichung kann die "Attraktion" ausgeprägter Krümmungmaxima allerdings eine Kollision mehrerer Knoten an solchen Stellen zur Folge haben. Diese Knoten fehlen dann unter Umständen für die Anpassung der benachbarten weniger gekrümmten Kurventeile. Die näherungsweise Anordnung der Knoten in gleichen Parameterabständen sollte daher durch zusätzliche Beobachtungen der Parameter der inneren Knoten stabilisiert werden. Zu diesem Zweck müssen in dem der SPLINE-Kurve zugeordneten Datenraum  $\text{KNOT}=\text{OSERVED}$  alle Beobachtungen  $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n$  aktiv sein. Das folgende Verfahren kann also als "Kurvenanpassung mit stabilisierten gleichmäßig angeordneten Knoten" bezeichnet werden.

Die Ausgleichung zur Kurvenanpassung erfolgt mit

[4.1-1]: "ADJUST SPLINE=KNOT=T-PAR .",

wobei die aktiven zusätzlich beobachteten Knotenparameter automatisch berücksichtigt werden. Die Genauigkeit dieser fiktiven Beobachtungen wurde so gewählt, daß eine Kollision zweier Knoten verhindert wird. Das Ergebnis dieser Ausgleichung ist in der Abbildung 4.1-3 dargestellt.

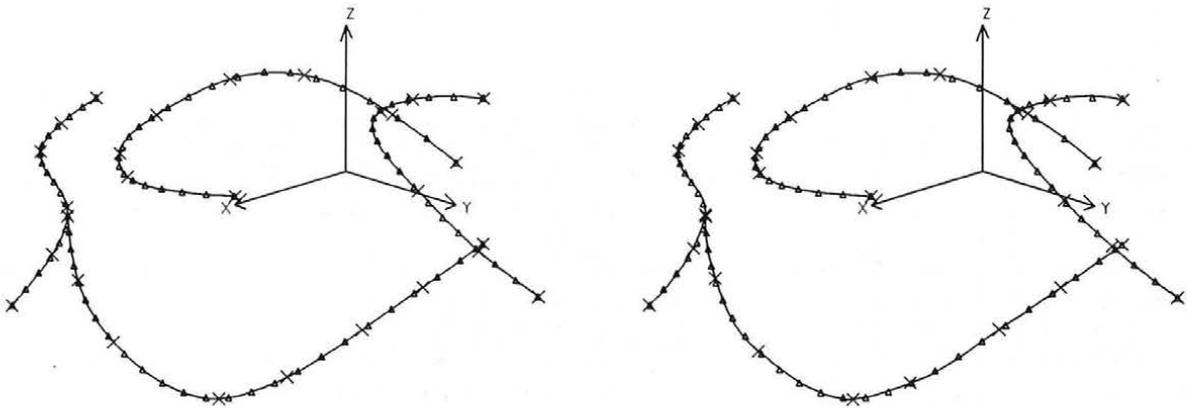


Abb. 4.1-3: mit [4.1-1] ausgeglichene Splinekurven (links) bzw. Schmiegekurven (rechts)

Die numerischen Ausgleichsergebnisse sind in den Tabellen 4.1-1a und 4.1-1b zusammengefaßt. Die erste Spalte dieser Tabellen enthält für jeden Beobachtungsraum die Raumbezeichnung (SPLine bzw. PHoto), die vor der Ausgleichung angenommenen mittleren Fehler der Beobachtungen ( $\sigma_{Beob}$ ) und bei SPLINE-Räumen die gewählte Kurvenart.

Die zweite Spalte gibt für jede Koordinatenrichtung des Beobachtungssystems die Anzahl der Beobachtungen an.

In der dritten Spalte sind für jede Koordinatenrichtung das durchschnittliche und das maximale Residuum angegeben.

Die vierte Spalte enthält ausgewählte Ergebnisse der Ausgleichung: Im Falle einer Kurvenanpassung werden pro SPLINE in der ersten Zeile die berechneten Knotenparameter  $t_i$ , in der zweiten Zeile die entsprechenden beobachteten Knotenparameter  $\bar{t}_i$  und in der dritten Zeile die vor der Ausgleichung geschätzten Genauigkeiten  $\sigma_{\bar{t}_i}$  angegeben; im Falle einer Bildorientierung werden für jedes PHOTO die berechneten Koordinaten des Projektionszentrums und die berechneten Drehwinkel angegeben.

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$ $l_{max}$	$t_i$ $\bar{t}_i$ $\sigma_{\bar{t}_i}$																	
SPL 1000 .010 kub.Spl.	25	.023 .047	0.000	6.922	14.292	23.242	28.092	35.849	42.802	50.000										
	25	.040 .099	0.000	7.143	14.286	21.429	28.571	35.714	42.857	50.000										
	25	.007 .013	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010
SPL 2000 .010 kub.Spl.	19	.021 .047	0.000	10.311	19.509	32.792	39.738	50.000												
	19	.047 .108	0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000												
	19	.032 .064	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010
SPL 3000 .010 kub.Spl.	19	.063 .142	0.000	9.784	20.372	34.949	39.627	50.000												
	19	.069 .159	0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000												
	19	.073 .140	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010
SPL 4000 .010 kub.Spl.	25	.041 .102	0.000	6.845	14.926	21.109	27.934	36.346	40.857	50.000										
	25	.042 .089	0.000	7.143	14.286	21.429	28.571	35.714	42.857	50.000										
	25	.050 .112	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010

Anz.It.=9, Beob.=292, Unbek.=180,  $\Sigma wll=2.586$ ,  $\Sigma wvv=2.584$ ,  $\sigma_0=0.152$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )

Tab. 4.1-1a: numerische Ergebnisse der Ausgleichung [4.1-1] mit kubischen Splines

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma I)/o$ $l_{max}$	$t_i$ $\bar{t}_i$ $\sigma_{\bar{t}_i}$																	
SPL 1000	25	.097 .240	0.000	6.677	15.382	23.182	27.135	35.903	42.815	50.000										
.010	25	.103 .324	0.000	7.143	14.286	21.429	28.571	35.714	42.857	50.000										
Schmiege.	25	.016 .041	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010							
SPL 2000	19	.040 .076	0.000	11.500	18.031	32.974	39.707	50.000												
.010	19	.128 .287	0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000												
Schmiege.	19	.076 .136	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010											
SPL 3000	19	.059 .105	0.000	10.724	18.844	34.937	39.590	50.000												
.010	19	.058 .128	0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000												
Schmiege.	19	.081 .193	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010												
SPL 4000	25	.027 .064	0.000	7.055	15.010	20.776	28.347	36.335	40.437	50.000										
.010	25	.020 .045	0.000	7.143	14.286	21.429	28.571	35.714	42.857	50.000										
Schmiege.	25	.071 .198	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010								

Anz.It.=11, Beob.=292, Unbek.=180,  $\Sigma wll=4.521$ ,  $\Sigma wvv=4.517$ ,  $\sigma_0=0.201$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )

Tab. 4.1-1b: numerische Ergebnisse der Ausgleichung [4.1-1] mit Schmiegekurven

Betrachten wir nun in den Tabellen 4.1-1a und 4.1-1b die Residuen  $\bar{t}_i - t_i$  der fiktiven zusätzlichen Beobachtungen der Knotenparameter<sup>1</sup>:

Eine fiktive Beobachtung mit großem Residuum steht offenbar im Widerspruch zur starken Attraktion des lokalen Krümmungsmaximums. Eine Beobachtung mit kleinem Residuum trifft hingegen auf nur geringen Widerspruch, dies ist zum Beispiel bei den oft unverzichtbaren Beobachtungen zur Stabilisierung von Knoten in wenig gekrümmten Kurventeilen der Fall.

Zur Verbesserung des obigen Ausgleichungsergebnisses wird daher jetzt die Ausgleichung [4.1-2] mit robuster Schätzung der beobachteten Knotenparameter durchgeführt: Je grösser das Residuum, desto geringer ist das Gewicht der Beobachtung in der Ausgleichung. Die Direktive für diese Ausgleichung lautet:

[4.1-2]: "ADJUST SPLINE=KNOT=T-PAR PARAMETER=ROBUST .".

Die Ergebnisse dieser Ausgleichung sind in der Abbildung 4.1-4 sowie in den Tabellen 4.1-2a und 4.1-2b dargestellt.

<sup>1</sup>Die mittleren Fehler  $m_i$  der zusätzlichen Knotenbeobachtungen ergeben sich aus der Ausgleichung zu  $m_i = \mp \sigma_i \cdot \sigma_0 / \sigma_{apriori}$ .

Die in der Ausgleichung verwendeten Residuen  $l_i$  der zusätzlichen Beobachtungen der Knotenparameter werden von Parametereinheiten in Objektkoordinateneinheiten umgerechnet.

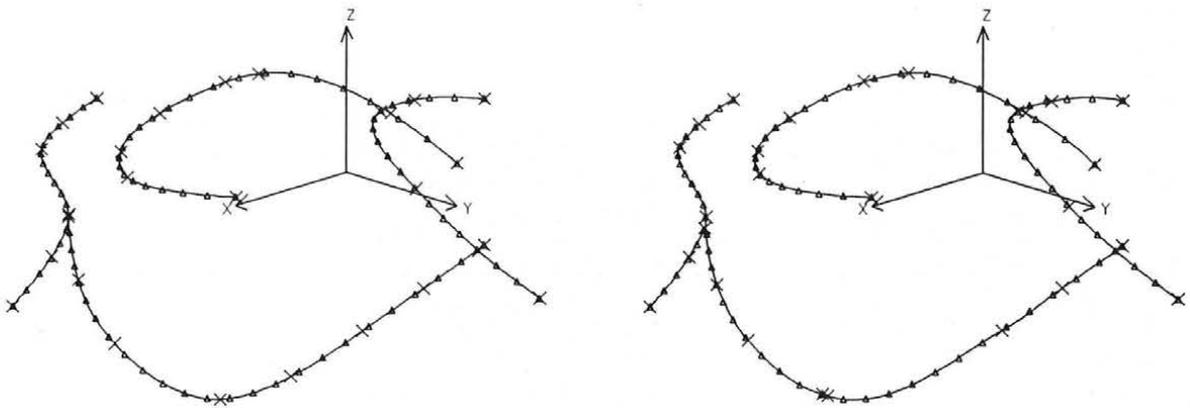


Abb. 4.1-4: Ergebnis der Ausgleichung [4.1-2] (links: Splinekurven, rechts: Schmiegekurven)

Raum	$\sigma_{Beob}$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$	$l_{max}$	$t_i$	$\bar{t}_i$	$\sigma_{\bar{t}_i}$			
SPL 1000	25	.026	.059		0.000	6.822	14.431	23.243	28.315	35.814	42.815	50.000
.010	25	.034	.081		0.000	7.143	14.286	21.429	28.571	35.714	42.857	50.000
kub.Spl.	25	.007	.014		robuste Schätzung							
SPL 2000	19	.005	.009		0.000	10.014	18.077	33.082	39.993	50.000		
.010	19	.011	.018		0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000		
kub.Spl.	19	.008	.020		robuste Schätzung							
SPL 3000	19	.067	.134		0.000	10.073	20.803	34.953	39.770	50.000		
.010	19	.049	.089		0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000		
kub.Spl.	19	.059	.114		robuste Schätzung							
SPL 4000	25	.036	.098		0.000	7.109	18.663	21.521	27.638	35.788	40.820	50.000
.010	25	.037	.089		0.000	7.143	14.286	21.429	28.571	35.714	42.857	50.000
kub.Spl.	25	.032	.060		robuste Schätzung							
Anz.It.=32, Beob.=292, Unbek.=180, $\Sigma wll=0.342$ , $\Sigma wvv=0.342$ , $\sigma_0=0.055$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )												

Tab. 4.1-2a: numerische Ergebnisse der Ausgleichung [4.1-2] mit kubischen Splines

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$ $l_{max}$	$t_i$ $\bar{t}_i$ $\sigma_{\bar{t}}$							
SPL 1000 .010 Schmiege.	25	.034 .075	0.000	7.382	14.054	21.894	22.243	35.783	42.864	50.000
	25	.064 .162	0.000	7.143	14.286	21.429	28.571	35.714	42.857	50.000
	25	.013 .019	robuste Schätzung							
SPL 2000 .010 Schmiege.	19	.040 .087	0.000	10.109	15.654	33.443	39.938	50.000		
	19	.057 .112	0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000		
	19	.038 .089	robuste Schätzung							
SPL 3000 .010 Schmiege.	19	.048 .118	0.000	10.275	17.991	35.043	39.727	50.000		
	19	.042 .075	0.000	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000		
	19	.062 .154	robuste Schätzung							
SPL 4000 .010 Schmiege.	25	.029 .079	0.000	7.320	17.595	21.381	28.411	35.764	40.442	50.000
	25	.015 .030	0.000	7.143	14.286	21.429	28.571	35.714	42.857	50.000
	25	.044 .068	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.010

Anz.It.=20, Beob.=292, Unbek.=180,  $\Sigma wll=0.493$ ,  $\Sigma wvv=0.491$ ,  $\sigma_0=0.066$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )

Tab. 4.1-2b: numerische Ergebnisse der Ausgleichung [4.1-2] mit Schmiegekurven

Durch die robuste Schätzung der Gewichte der fiktiven Knotenparameterbeobachtungen konnte der mittlere Fehler  $\sigma_0$  im Vergleich zur Ausgleichung [4.1-1] auf ungefähr ein Drittel reduziert werden. Wichtiger für die vorliegende Aufgabenstellung ist jedoch, daß durch die günstigere Knotenverteilung eine deutlich bessere Kurvenanpassung erreicht wurde (erkennbar an den geringeren Residuen  $l_s$  in der dritten Spalte der Tabellen).

Der Einfluß der verwendeten Kurvenart hat nur geringe Auswirkungen: die Ausgleichungsvarianten mit kubischen Splinekurven führen, zumindest bei dem vorliegenden Testbeispiel, zu einem etwas günstigeren Ergebnis als die Varianten mit Schmiegekurven.

Bei der Ausgleichung [4.1-2] mit Schmiegekurven kommt es im Falle der SPLINE-Kurve 1000 beinahe zu einer Kollision zweier Knoten. Bei einer völligen Kollision zweier Knoten entsteht ein Doppelknoten, bei dem die ausgeglichene Schmiegekurve nicht mehr tangentialstetig ist. Diese Situation sollte, insbesondere bei einer Kurvenanpassung mit beweglichen Stützpunkten (siehe Kap. 4.2), durch Entfernen von einem der beiden Knoten entschärft werden.

Da die festen Stützpunkte dieses Testbeispiels genau auf den Originalkurven liegen, sind die nach der Ausgleichung verbleibenden Residuen  $l_s$  zur Gänze eine Folge der unzureichenden Anpassung der ausgeglichenen SPLINE-Kurven an die Originalkurven. Für eine absolut fehlerfreie Anpassung müßte die Kurvenausgleichung mit demselben Kurventyp und genau derselben Knotenverteilung wie die Originalkurve durchgeführt werden, was jedoch im allgemeinen Fall bei unbekanntem Originalkurven unmöglich ist. Im praktischen Einsatz genügt es allerdings, wenn der Anpassungsfehler größenordnungsmäßig im Bereich des zufälligen Beobachtungsfehlers der Stützpunkte liegt.

#### 4.1.2 Bildorientierung mit konstanten Paßkurven

Die im vorhergehenden Kapitel ausgeglichenen Paßkurven bleiben nun konstant. Die den Paßpunkten entsprechenden Objektpunkte im REFSYS-Raum sind daher nicht mehr notwendig und werden deaktiviert.

Die Unbekannten einer Bildorientierung sind - bei bekannter innerer Orientierung - die sechs Elemente der äußeren Orientierung. Für jeden Bildstrahl existieren zwei Bildkoordinatenbeobachtungen und drei fiktive Kurvenbeobachtungen sowie drei unbekannte Objektpunktkoordinaten und ein unbekannter Kurvenparameter. Das ergibt eine Redundanz von eins pro Bildstrahl; für eine Bildorientierung wären daher theoretisch mindestens sechs Bildstrahlen erforderlich.

Diese Überbestimmung allein reicht aber für eine erfolgreiche Bildorientierung noch nicht aus, entscheidend ist vielmehr die geometrische Formenvielfalt der Paßkurven (siehe Kap. 4.1.3).

Zu Beginn der Bildorientierung müssen Näherungswerte für das Projektionszentrum und die Drehwinkel des Photos sowie für die Koordinaten der den Bildpunkten entsprechenden Objektpunkte ermittelt werden:

Die in Kapitel 2.4 vorgeschlagene näherungsweise Interpolation der Objektpunkte auf den Paßkurven in gleichmäßigen Parameterabständen würde im vorliegenden Testbeispiel zu unrealistisch guten Näherungswerten führen<sup>2</sup>. Im folgenden werden daher alle Objektpunkte näherungsweise in den Kurvenmitten (an den Parameterstellen  $t=25$ ) interpoliert. Anschließend erfolgt eine näherungsweise Orientierung des Photos mit gleichzeitiger Verbesserung der interpolierten Objektpunktkoordinaten.

Die ORIENT-Direktive für diese Ausgleichung lautet:

```
[4.1-3]: "ADJUST      SPLINE=OBJECT
                PHOTO=PRJCTR=ROTPAR=OBJECT(904) ."
```

Ausgehend von den durch die Ausgleichung [4.1-2] bestimmten kubischen Splines erhält man so die in der Abbildung 4.1-5 und in der Tabelle 4.1-3 dargestellten Ergebnisse.

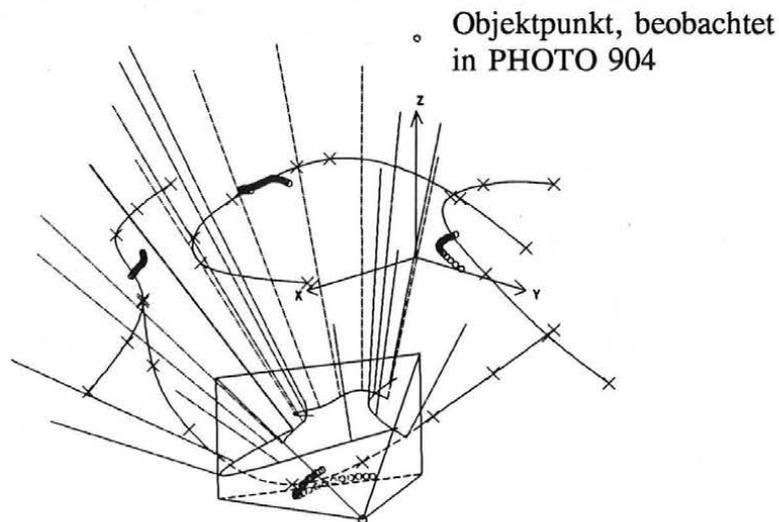


Abb. 4.1-5: Bestimmung von Näherungswerten für die Bildorientierung durch die Ausgleichung [4.1-3] (nur jeder vierte Bildstrahl ist dargestellt).

<sup>2</sup>Für die rechnerische Simulation der Bildpunkte wurden die entsprechenden Objektpunkte in regelmäßigen Parameterabständen auf den Originalkurven interpoliert.

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$ $l_{max}$	PRJCTR, ROTPAR		
PHO 904 .010	84 84	3.36 8.95 1.56 5.61	81.331	71.485	-0.789, 64.007 111.382 103.809
SPL 1000 .010 kub.Spl.	24 24 24	2.56 4.60 1.82 5.52 0.92 1.50			
SPL 2000 .010 kub.Spl.	18 18 18	1.49 1.84 0.72 1.03 0.94 1.91			
SPL 3000 .010 kub.Spl.	18 18 18	1.38 1.79 1.80 2.40 1.44 3.20			
SPL 4000 .010 kub.Spl.	24 24 24	1.56 3.30 1.26 2.50 0.54 0.82			
Beob.=420, Unbek.=342, $\Sigma wll=1706.$ , $\Sigma wvv=1706.$ , $\sigma_0=4.677$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )					

Tab. 4.1-3: Näherungswerte, bestimmt durch die Ausgleichung [4.1-3]

Als nächster Schritt wird jetzt durch die Berücksichtigung der unbekannt Parametrisierung die Bewegung der Objektpunkte entlang der Paßkurven ermöglicht. Die entsprechende Ausgleichung lautet:

[4.1-4]: "ADJUST            SPLINE=T-PAR=OBJECT  
                              PHOTO=PRJCTR=ROTPAR=OBJECT(904) .",

und führt eine Bildorientierung mit gleichzeitiger Kurvenpunktbestimmung durch. Die Abbildung 4.1-6 und die Tabelle 4.1-4 zeigen die Resultate dieser Ausgleichung.

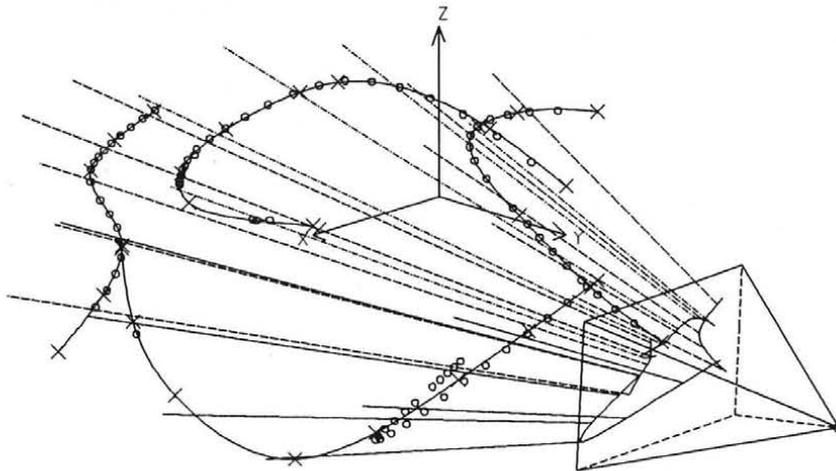


Abb. 4.1-6: Bildorientierung nach der Ausgleichung [4.1-4]

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma I)/o$ $l_{max}$	PRJCTR, ROTPAR
PHO 904 .010	84 84	.160 .459 .736 2.81	40.212 103.020 5.538, 104.773 103.665 99.893
SPL 1000 .010 kub.Spl.	24 24 24	.095 .186 .037 .074 .922 1.95	
SPL 2000 .010 kub.Spl.	18 18 18	.077 .135 .013 .022 .055 .122	
SPL 3000 .010 kub.Spl.	18 18 18	.091 .251 .014 .025 .094 .290	
SPL 4000 .010 kub.Spl.	24 24 24	.057 .188 .034 .096 .155 .309	
Anz.It.=15, Beob.=420, Unbek.=342, $\Sigma wll=69.44$ , $\Sigma wvv=69.43$ , $\sigma_0=0.943$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )			

Tab. 4.1-4: numerische Ergebnisse der Ausgleichung [4.1-4]

Die Residuen sind nach der Ausgleichung [4.1-4] zum Teil noch recht groß; die Ursache dafür ist in der Abbildung 4.1-6 ersichtlich:

Bei stark gekrümmten, zum Beispiel S- oder U-förmigen, Paßkurven kann ein Bildstrahl zusätzlich zum richtigen "Schnitt"<sup>3</sup> noch weitere falsche "Schnitte" mit der Kurve haben. Aufgrund der unzureichenden Näherungen für die Objektpunktparameter befinden sich nach der Ausgleichung [4.1-4] einige Objektpunkte in einem falschen "Schnitt".

Vermutlich sind das jene Objektpunkte, deren SPLINE- und PHOTO-Beobachtungen die größten Residuen aufweisen. Die nächste Ausgleichung erfolgt daher mit einer robusten Schätzung sämtlicher Beobachtungen (siehe Abb. 4.1-7):

```
[4.1-5]:  ADJUST=ROBUST MARK
           SPLINE=T-PAR=OBJECT
           PHOTO=PRJCTR=ROTPAR=OBJECT(904) .".
```

<sup>3</sup>Mit "Schnitt" wird hier eine Stelle mit lokal minimalem Abstand des Bildstrahles von der Kurve bezeichnet.

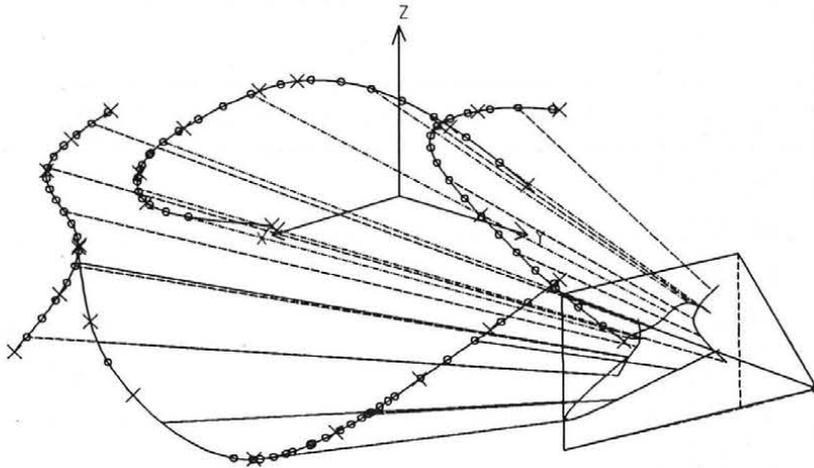


Abb. 4.1-7: Bildorientierung nach Ausgleichung [4.1-5] mit robuster Schätzung

Die Abbildung 4.1-7 zeigt die von den "falschen" (im falschen "Schnitt" liegenden) Objektpunkten bereinigte Bildorientierung. Mit Hilfe der verbleibenden Objektpunkte wurde ein plausibles Ergebnis erzielt.

Nun werden die "falschen" Objektpunkte rehabilitiert: Zu jedem "falschen" Objektpunkt wird der in der Reihenfolge der Bildpunktmessung<sup>4</sup> nächste "richtige", durch die robuste Schätzung nicht deaktivierte, Objektpunkt gesucht. Als Näherung erhält jetzt jeder "falsche" Objektpunkt den Parameter seines nächsten "richtigen" Objektpunktes und wird mit "ADJUST SPLINE=OBJECT ." auf der Kurve interpoliert. Abschließend erfolgt die Ausgleichung (siehe Abb. 4.1-8 und Tab. 4.1-5):

[4.1-6]: "ADJUST SPLINE=T-PAR=OBJECT  
PHOTO=PRJCTR=ROTPAR=OBJECT(904) .".

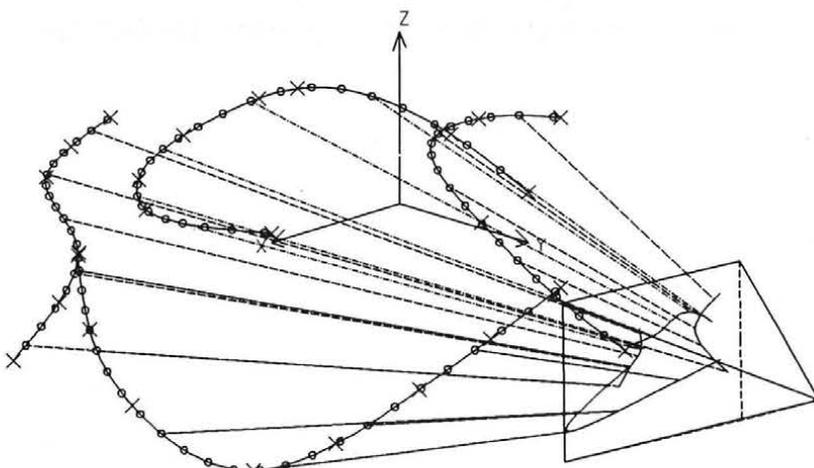


Abb. 4.1-8: endgültige Bildorientierung mit konstanten Paßkurven nach Ausgleichung [4.1-6]

<sup>4</sup>Hier wird vorausgesetzt, daß die Bildpunkte in einer Reihenfolge geordnet nach ansteigenden Kurvenparametern registriert wurden.

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$ $l_{max}$	PRJCTR, ROTPAR
PHO 904 .010	84 84	.010 .040 .011 .039	50.037 115.028 15.020, 98.981 95.985 97.011
SPL 1000 .010 kub.Spl.	24 24 24	.001 .003 .001 .002 .002 .005	
SPL 2000 .010 kub.Spl.	18 18 18	.001 .002 .000 .000 .000 .001	
SPL 3000 .010 kub.Spl.	18 18 18	.009 .017 .002 .004 .008 .017	
SPL 4000 .010 kub.Spl.	24 24 24	.002 .006 .001 .002 .004 .010	
Anz.It.=5, Beob.=420, Unbek.=342, $\Sigma wll=0.022$ , $\Sigma wvv=0.022$ , $\sigma_0=0.017$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )			

Tab. 4.1-5: numerische Ergebnisse der Bildorientierung nach der Ausgleichung [4.1-6]

Der Vergleich der berechneten Orientierungswerte in der Tabelle 4.1-5 mit den Sollwerten (siehe Tab. 4-2) ergibt bei den Koordinaten des Projektionszentrums eine Abweichung von 0.02 bis 0.04 und bei den Drehwinkeln von 0.01 bis 0.02. Diese Restfehler in den Orientierungswerten können bei dem vorliegenden Testdatensatz zur Gänze als Folge der Anpassungsfehler der Paßkurven (siehe Kap. 4.1.1) erklärt werden.

Der Einfluß der (zwangsläufig) unzureichenden Kurvenanpassung auf die Orientierungswerte soll mit der Tabelle 4.1-6 veranschaulicht werden:

Mit jeder der im Kapitel 4.1.1 bestimmten Varianten von Paßkurven erfolgte die Orientierung aller vier Photos. Die Tabelle zeigt für jede Variante von Paßkurven neben den berechneten Orientierungswerten auch den mittleren räumlichen Punktlagefehler der Kurvenanpassungen  $m_{SPLINE}$  und den mittleren räumlichen Punktlagefehler der Projektionszentren  $m_{PRJCTR}$  (ermittelt mit Hilfe der Abweichungen der berechneten Projektionszentren von ihren Sollwerten).

Die Betrachtung der mittleren Fehler zeigt von der günstigsten zur ungünstigsten Variante der Kurvenanpassung ein nahezu proportionales Ansteigen von  $m_{SPLINE}$  und  $m_{PRJCTR}$ .

Die genaue Kurvenanpassung ist also eine Voraussetzung für eine genaue Bildorientierung. Weitere Voraussetzungen werden im folgenden Kapitel behandelt.

PHOTO 901 PRJCTR ROTPAR			PHOTO 902 PRJCTR ROTPAR			PHOTO 903 PRJCTR ROTPAR			PHOTO 904 PRJCTR ROTPAR		
Paßkurven von Ausgleichung [4.1-2] mit kubischen Splines											
130.002	39.981	9.995	99.967	100.013	50.050	53.979	35.924	114.970	50.037	115.028	15.020
4.983	98.004	103.990	57.023	67.967	101.980	0.040	-0.012	340.014	98.981	95.985	97.011
$m_{SPLINE} = \mp 0.062, m_{PRJCTR} = \mp 0.034$											
Paßkurven von Ausgleichung [4.1-2] mit Schmiegekurven											
130.025	40.057	9.995	99.990	100.013	50.057	53.963	35.883	115.006	50.008	114.984	14.970
5.029	98.002	103.999	57.009	67.968	102.014	0.072	-0.023	340.026	98.989	96.024	97.012
$m_{SPLINE} = \mp 0.074, m_{PRJCTR} = \mp 0.044$											
Paßkurven von Ausgleichung [4.1-1] mit kubischen Splines											
130.000	39.887	10.020	99.963	100.002	50.085	53.892	36.059	114.949	50.022	115.021	15.031
4.911	97.982	103.990	57.019	67.940	101.959	-0.033	-0.064	340.024	98.993	95.976	97.005
$m_{SPLINE} = \mp 0.078, m_{PRJCTR} = \mp 0.049$											
Paßkurven von Ausgleichung [4.1-1] mit Schmiegekurven											
129.935	39.782	9.980	99.935	100.016	50.126	53.933	35.973	114.980	50.149	115.117	15.057
4.863	98.025	103.996	57.038	67.919	101.968	0.022	-0.042	340.030	98.916	95.956	97.009
$m_{SPLINE} = \mp 0.125, m_{PRJCTR} = \mp 0.099$											

Tab. 4.1-6: Bildorientierungen mit verschiedenen Varianten von Paßkurven

### 4.1.3 Geometrische Voraussetzungen für eine Bildorientierung mit Paßkurven

Welche Form und Anordnung von Paßkurven ist nun für eine Bildorientierung unbedingt erforderlich?

Zur Beantwortung dieser Frage soll zunächst eine differentiell kleine Veränderung der Bildorientierung betrachtet werden:

In diesem Fall "zwingt" die Paßkurve einen Objektpunkt auf der Kurve näherungsweise zu einer Verschiebung entlang der Kurventangente. Somit kann die Paßinformation der gesamten Kurve näherungsweise durch die Menge der Tangenten in den Objektpunkten ersetzt werden. Die Paßinformation von mehreren lokal benachbarten Tangenten mit ähnlicher Richtung läßt sich durch eine einzige signifikante Tangente beschreiben.

Die Herleitung einer strengen Regel zur Ermittlung der signifikanten Tangenten einer Paßkurve würde allerdings den Rahmen dieser Arbeit überschreiten, daher wird hier vorerst folgendes Prinzip angewendet:

Jedes Krümmungsmaximum einer Kurve liege zwischen zwei signifikanten Tangenten.

Die Abbildung 4.1-9 zeigt nun die nach diesem Prinzip ermittelten signifikanten Tangenten der Paßkurven des vorliegenden Testbeispiels:

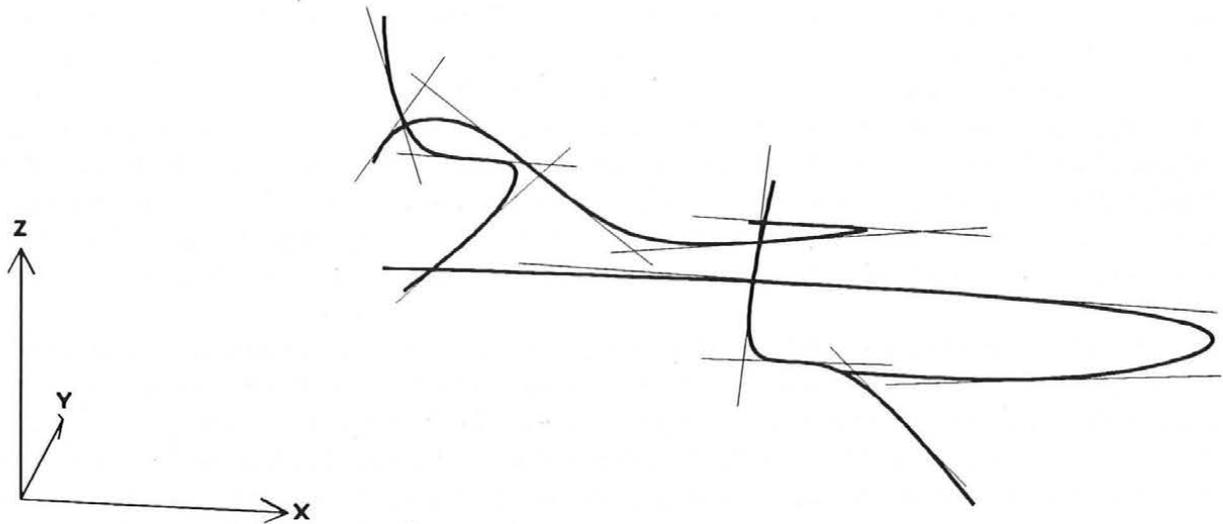


Abb. 4.1-9: signifikante Tangenten der Paßkurven

Die eingangs formulierte Frage läßt sich jetzt durch folgende Fragen ersetzen:

- 1) Wieviele signifikante Tangenten werden für eine Bildorientierung mindestens benötigt?
- 2) Welche räumliche Anordnung der Paßmerkmale ist günstig?

Zur ersten Frage:

Die perspektive Abbildung einer Tangente ist im allgemeinen eine Gerade; eine Ausnahme stellt eine projizierende Tangente dar, die sich als Punkt abbildet. Eine Gerade wird im Bild durch zwei Parameter beschrieben, und zwar durch den Richtungswinkel und die Länge ihres Normalvektors zum Bildkoordinatenursprung. Betrachtet man nun Abbildungsgleichungen, die auf Geraden anstelle von Punkten beruhen, so könnten daher nach der Beobachtung dieser beiden Geradenparameter im Bild zwei Gleichungen für die Unbekannten aufgestellt werden. Daraus ergibt sich, daß für die Bestimmung der sechs Elemente der äußeren Orientierung mindestens drei im Objektraum bekannte Geraden abgebildet sein müssen. Die für eine Bildorientierung benötigten Paßkurven müssen also mindestens drei signifikante Tangenten aufweisen<sup>5</sup>.

Bei der Anordnung der Paßkurven im Objektraum sind geometrisch unterbestimmte Situationen zu vermeiden. Solch eine Situation tritt zum Beispiel dann auf, wenn die Paßkurven der Wirkungsfigur einer Änderung eines Elementes der Bildorientierung entsprechen:

So ist etwa bei einer parallelen oder einer sternförmigen<sup>6</sup> Anordnung der signifikanten Tangenten die Lage des Projektionszentrums nicht bestimmbar. Die Rotation des Bildes ist

<sup>5</sup>Für die vorliegenden, auf Punkten basierenden, Abbildungsgleichungen kann mit Hilfe der signifikanten Tangenten auch die zur Erfassung der Formenvielfalt der Paßkurven erforderliche Mindestanzahl von Bildpunkten abgeschätzt werden: Eine Bildgerade wird durch zwei Bildpunkte festgelegt, pro signifikanter Tangente sind demnach mindestens zwei Punkte zu beobachten. Für einen projizierenden Kurvenabschnitt reicht ein Bildpunkt.

<sup>6</sup>alle Tangenten schneiden sich in einem einzigen Schnittpunkt

zum Beispiel bei einer Anordnung der Paßkurven auf konzentrischen Kreis Kegeln mit den Spitzen im Projektionszentrum unterbestimmt. Die Paßkurven sind günstigerweise so anzuordnen, daß die Nähe jeder dieser unterbestimmten Situationen vermieden wird.

Außerdem sollte das auszuwertende Interessensgebiet innerhalb des von den Paßmerkmalen abgedeckten Bereiches liegen (je weiter die Auswertung außerhalb des Bereiches der Paßinformation liegt, desto größer ist - aufgrund der Extrapolation der Orientierungsparameter - die Auswirkung der Orientierungsungenauigkeit). Ist zum Beispiel der ganze Bildinhalt auszuwerten, so sollten die Abbilder der Paßkurven gut über das gesamte Bild verteilt sein.

Den Abschluß der oben angestellten Überlegungen soll eine Zusammenstellung der Orientierungsergebnisse von PHOTO 904 in Abhängigkeit von verschiedenen Paßkurvenanordnungen bilden. Die Paßkurven stammen von der Ausgleichung [4.2-2] mit kubischen Splines. In der Tabelle 4.1-7 wird für jede mögliche Anordnung von bis zu zwei Paßkurven der räumliche Punktlagefehler der Kurvenanpassung  $m_{SPLINE}$ , der räumliche Punktlagefehler des Projektionszentrums  $m_{PRJCTR}$  (wie in Tabelle 4.1-6 berechnet), die Anzahl der signifikanten Tangenten und schließlich der Anteil der von den Abbildern der Paßkurven abgedeckten Fläche<sup>7</sup> an der gesamten Bildfläche angeführt. Zum Vergleich werden in der Tabelle noch einmal die entsprechenden Daten für die Bildorientierung mit allen Paßkurven angegeben.

SPLINE	$m_{SPLINE}$	$m_{PRJCTR}$	signifikante Tangenten	abgedeckte Fläche im Bild
1000	±0.044	±1.133	2	11%
2000	±0.015	±0.516	3	1%
3000	±0.104	±30.193	3	5%
4000	±0.062	±0.505	4	4%
1000+2000	±0.035	±0.080	5	19%
1000+3000	±0.075	±0.073	5	27%
1000+4000	±0.053	±0.208	6	25%
2000+3000	±0.073	±0.250	6	22%
2000+4000	±0.047	±0.137	7	9%
3000+4000	±0.082	±0.142	7	14%
1000+2000+ +3000+4000	±0.062	±0.034	12	34%

Tab. 4.1-7: Orientierungsergebnisse bei verschiedenen Paßkurvenanordnungen

Die Tabelle 4.1-7 zeigt im Falle der Orientierung ausschließlich mit der SPLINE-Kurve 3000 sehr deutlich die erheblichen Auswirkungen einer relativ ungenauen Kurvenanpassung bei gleichzeitig ungünstiger Paßkurvenanordnung (wenig signifikante Tangenten, geringe abgedeckte Fläche im Bild). Durch die Verbesserung der Anordnung bei Verwendung einer zweiten Paßkurve kann eine weit genauere Bildorientierung erzielt werden (siehe Anordnungen 1000+3000, 2000+3000 oder 3000+4000).

<sup>7</sup>Diese Fläche wurde hier näherungsweise durch jenes Viereck bestimmt, das die Abbilder der Paßkurven umhüllt.

## 4.2 Rekonstruktion einer Objektkurve durch photogrammetrischen Vorwärtsschnitt

Gegeben seien die Abbilder von unbekanntnen Raumkurven in mindestens zwei Photos (z.B. PHOTO 902 und PHOTO 904, siehe Abb. 4.2-1) sowie die Orientierungswerte dieser Photos (siehe Abb. 4.2-2). Mit Hilfe der entlang den Abbildern der Raumkurven registrierten Bildpunkte<sup>1</sup> sollen nun die Raumkurven im Objektkoordinatensystem rekonstruiert werden.

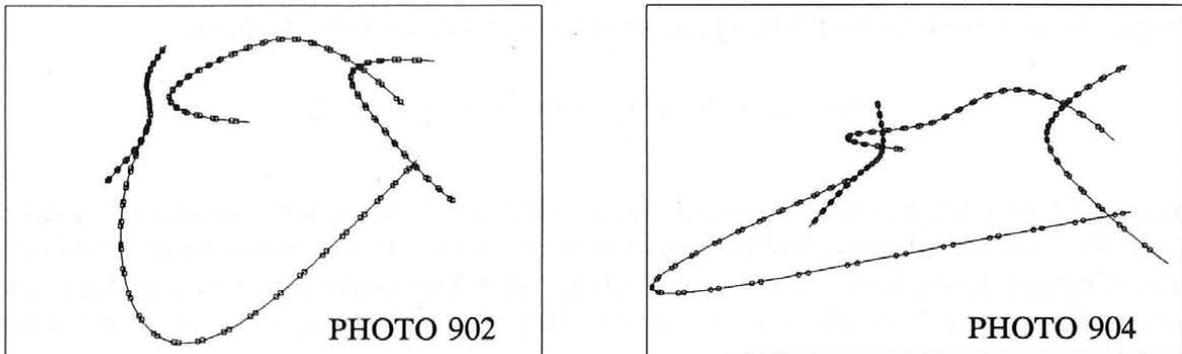


Abb. 4.2-1: Photos mit Bildpunktbeobachtungen für die Kurvenrekonstruktion

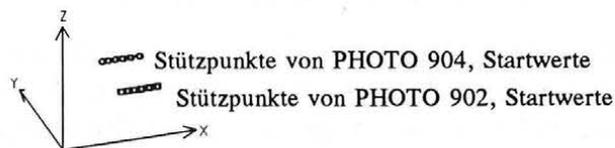
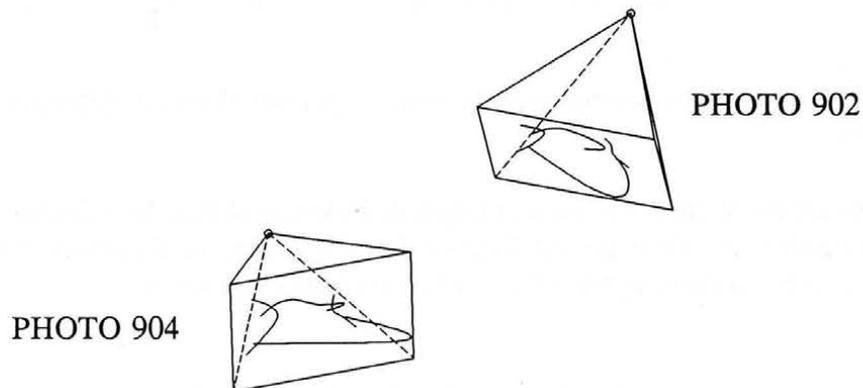


Abb. 4.2-2: Vorgegebene Orientierung der Photos von Abb. 4.2-1, Startwerte der Stützpunkte

<sup>1</sup>In diesem Testbeispiel wird davon ausgegangen, daß in den beiden Photos keine homologen Bildpunkte beobachtet werden konnten.

Die Rekonstruktion der Objektkurven durch photogrammetrischen Vorwärtsschnitt entspricht einer Kurvenanpassung an fixierte Stützstrahlen. Im Sinne der Kurvenausgleichung bedeutet dies den simultanen Einsatz der beiden elementaren Operationen "Kurvenanpassung" und "Stützpunktbestimmung".

Die Unbekannten dieser Ausgleichung sind daher die  $3n$  Knotenkoordinaten, die beiden Verschiebungen der Endknoten, die  $q$  Stützpunktparameter sowie die  $3q$  Stützpunktkoordinaten. Dem stehen die beiden beobachteten Parameter der Endknoten, die  $3q$  fiktiven Kurvenkoordinaten- und die  $2q$  Bildkoordinatenbeobachtungen gegenüber. Berücksichtigt man zusätzlich die  $n-2$  beobachteten Parameter der inneren Knoten, so erhält man die für die Ausgleichung erforderliche Bestimmung ab folgender Anzahl  $n$  der Knoten:

$$3n - 2 + 4q < 5q + n \Rightarrow n < \frac{q}{2} - 2$$

Man erhält dieselbe Redundanz  $r=0-u$ , wenn nicht die beweglichen Stützpunkte sondern direkt die fixierten Stützstrahlen<sup>2</sup> betrachtet werden. In diesem Fall liefert jeder Strahl netto zwei Bildpunktbeobachtung sowie einen unbekanntes Kurvenparameter und es kann eine Nettoredundanz im Ausmaß von mindestens 50% der Unbekannten ( $r \geq u/2$ ) erreichen, wenn:

$$1.5(3n + q + 2) < 2q + n \Rightarrow n < \frac{q - 6}{7} ; \quad (4.2-1)$$

also wenn die Anzahl der Knoten nicht größer ist als ungefähr ein Siebtel der Anzahl der Stützstrahlen.

Zur Demonstration werden für die nun folgende Rekonstruktion der Objektkurven Schmiegekurven verwendet, da diese gemäß Kapitel 4.1.1 bei dem vorliegenden Testdatensatz eine etwas schlechtere Anpassungsfähigkeit haben als kubische Splines.

#### 4.2.1 Kurvenanpassung an die genäherten Stützpunkte

Wie in der Abbildung 4.2-2 ersichtlich, haben die den Bildpunkten entsprechenden Stützpunkte vorerst beliebige Objektkoordinaten. Mit der Direktive

"APPROX SPLINE=RAYS MERGE(902 904) ."

werden, wie in den Kapiteln 2.4 und 3.1.2 beschrieben, genäherte Objektkoordinaten für die Stützpunkte bestimmt, die räumliche Reihenfolge dieser genäherten Stützpunkte ermittelt und schließlich die Knoten näherungsweise entlang des Stützpunktpolygons angeordnet. Die

---

<sup>2</sup>Man könnte die Verbesserungsgleichungen für eine Kurvenanpassung an fixierte Stützstrahlen auch direkt, ohne Berücksichtigung der Stützpunkte, aufstellen: In diesem Fall sind die beiden Koordinaten eines Bildpunktes als Funktion der konstanten Orientierungsparameter sowie der unbekanntes Knoten und des unbekanntes Kurvenparameters anzusehen.

Ohne die Berücksichtigung der Stützpunkte kann nun ein Verhältnis von "Beobachtungen zu Unbekannten" im Ausmaß von 150% erzielt werden - die Differenz "Beobachtungen minus Unbekannte" bleibt natürlich unverändert.

genäherten SPLINE-Kurven 1000 und 4000 sind in der Abbildung 4.2-3a, die Kurven 2000 und 3000 in der Abbildung 4.2-3b dargestellt.

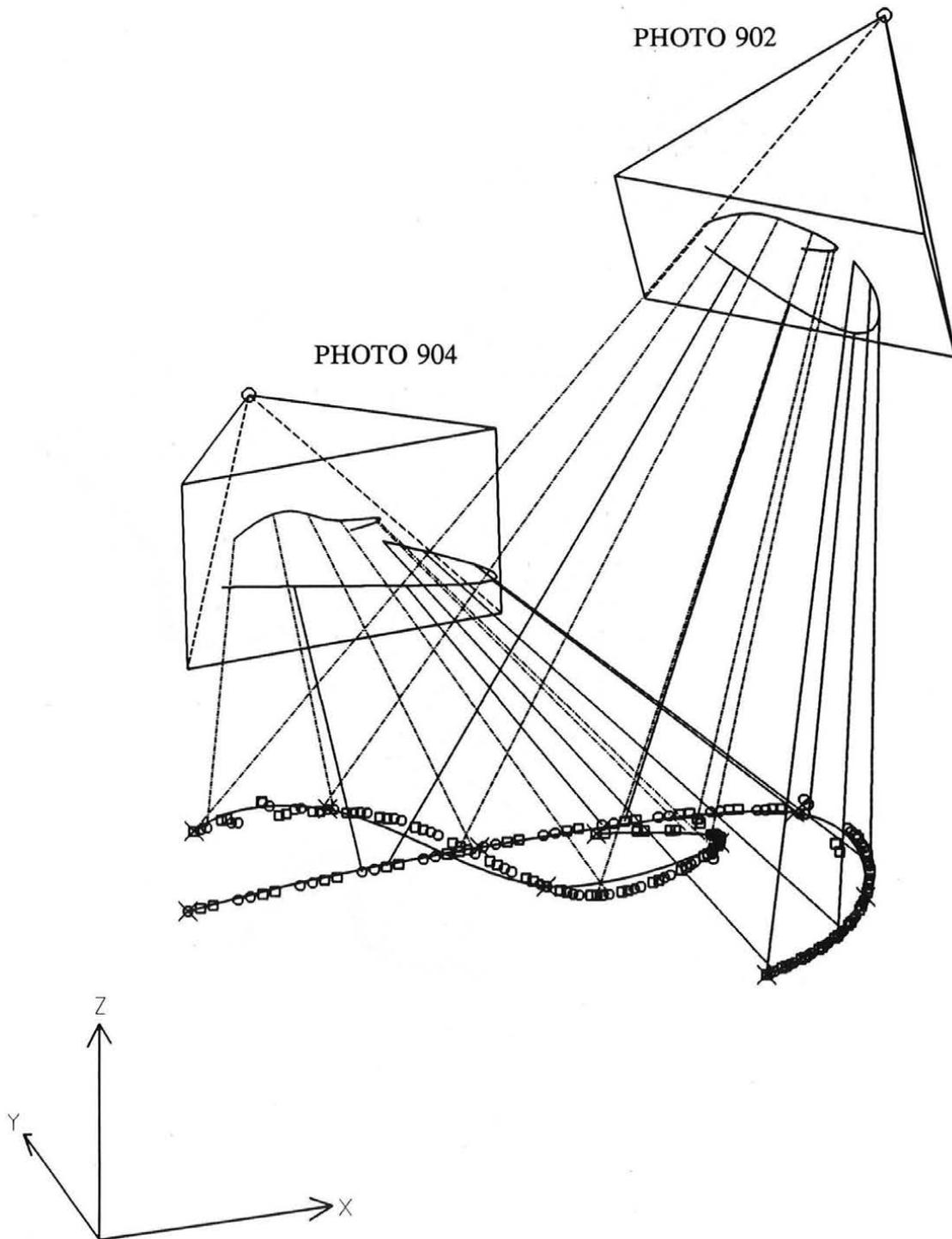


Abb. 4.2-3a: Die Bestimmung von Näherungswerten für die Rekonstruktion der Objektkurven (SPLINE 1000 und SPLINE 4000). Nur jeder vierte Bildstrahl ist dargestellt.



Vor dem eigentlichen Vorwärtsschnitt empfiehlt es sich, durch eine Kurvenanpassung an die vorläufig fixierten genäherten Stützpunkte die Näherungswerte der Knoten zu verbessern. Dies entspricht der bei der Bearbeitung von Bündelblockausgleichungen gewonnenen Erfahrung, daß für eine erfolgreiche Ausgleichung mit allen Unbekannten zunächst möglichst gute Näherungswerte für die besonders "heiklen" (am schwierigsten zu berechnenden) Unbekannten ermittelt werden sollten.

Diese Kurvenanpassung kann nun, wie in Kapitel 4.1.1 beschrieben, durchgeführt werden, wobei sich die Maximalanzahl von Knoten zum Beispiel aus der Formel (4.2-1) ergibt. Diese Vorgangsweise führt aber bei geringeren Schnittwinkeln des anschließenden Vorwärtsschnittes unter Umständen wegen überflexibler Kurven zu keinem stabilen Ergebnis.

Für den Vorwärtsschnitt einer SPLINE-Kurve ist es jedenfalls günstiger, möglichst wenige, aber "gut" verteilte stabilisierte Knoten zu verwenden. Daher sollte vor dem Vorwärtsschnitt mit Hilfe der genäherten Stützpunkte eine der Kurvenform entsprechende Anzahl und Verteilung von Knoten ermittelt werden.

In Halmer 1994 wird ein detailliertes Ablaufschema zur Lösung dieser Aufgabe angegeben. Eine vereinfachte Variante davon ist die hier eingesetzte zweistufige Strategie:

- 1) "Ermittlung der signifikanten Knoten": Kurvenausgleichung mit einer größtmöglichen Anzahl (z.B. nach Formel (4.2-1)) von frei beweglichen inneren Knoten ( $K_2, \dots, K_{n-1}$ ) ohne beobachtete Knotenparameter.  
Dies kann zum Beispiel folgendermaßen geschehen:  
Man wählt eine eher zu große Anzahl von freien Innenknoten und führt solange einen Ausgleichungsschritt nach dem anderen durch, bis einer der folgenden Fälle eintritt:
  - a) Ein enditerierter Zustand ist erreicht. Nun ist der Punkt 1) des Verfahrens beendet und es wird mit Punkt 2) fortgesetzt.
  - b) Zwei Knoten "kollidieren" (ihr Parameterabstand unterschreitet eine gewisse Schranke). In diesem Fall wird einer der beiden betroffenen Knoten gelöscht und anschließend die Ausgleichung wie oben beschrieben fortgesetzt.
  - c) Der Faktor  $\Sigma w_{ll} / \Sigma w_{vv}$  vergrößert sich von Iteration zu Iteration ("Divergenz"). Hier wird die Anzahl von Knoten um eins verringert und die verbleibenden Knoten näherungsweise gleichmäßig entlang des Stützpunktpolygons aufgeteilt. Anschließend wird mit der Ausgleichung neu begonnen.
- 2) "Verdichten mit stabilisierten Knoten": Einfügen zusätzlicher Knoten in den Intervallen mit den größten Residuen; Stabilisierung aller Knoten durch zusätzliche Beobachtungen der Knotenparameter.  
Hiezu geht man im Detail wie folgt vor:  
Es werden weitere Ausgleichungsschritte ausgeführt, bis ein enditerierter Zustand erreicht ist. Nun kann einer der folgenden Fälle auftreten:
  - d) Weder die Maximalanzahl von Knoten gemäß (4.2-1) noch die geforderte Anpassungsgenauigkeit ist erreicht. In diesem Fall werden in den Intervallen mit signifikant zu großen Residuen zusätzliche Knoten eingefügt. Alle Knoten werden durch zusätzliche Beobachtungen der Knotenparameter stabilisiert. Anschließend wird die Ausgleichung wie oben beschrieben fortgesetzt.

- e) Das Approximationsergebnis hat sich nach den letzten Einfügen zusätzlicher Knoten verschlechtert ( $\Sigma wll$  hat sich vergrößert). Daher wird der Zustand vor dem Einfügen der Knoten wiederhergestellt und das Verfahren beendet.
- f) Die maximale Anzahl von Knoten oder die geforderte Anpassungsgenauigkeit ist erreicht und das Verfahren wird beendet.

Gemäß 1) wird nun die Kurvenausgleichung mit fünf Knoten pro SPLINE-Kurve begonnen (siehe Abb. 4.2-3). Die Direktive für die Kurvenanpassung lautet:

[4.2-1]: "ADJUST SPLINE=KNOT=T-PAR ."

Für das Einfügen eines neuen Knotens während der Stufe 2), zum Beispiel von  $K_{neu}$  zwischen  $K_{alt}$  und  $K_{alt+1}$ , muß zunächst ein Parameter für diesen Knoten festgelegt werden, zum Beispiel genau in der Mitte des Parameterintervalls  $[t_{alt}, t_{alt+1}]$ :

$$t_{neu} = \frac{t_{alt} + t_{alt+1}}{2}$$

Näherungswerte für die Koordinaten des neuen Knotens (z.B.  $K_{neu}$  an der Stelle  $t_{neu}$ ) erhält man durch eine Ausgleichung mit vorläufig konstanter Parametrisierung (gemäß Kap. 2.2.2):

"ADJUST SPLINE=KNOT ."

Anschließend erfolgt eine Kurvenanpassung mit stabilisierten Knoten. Die geforderte Anpassungsgenauigkeit wird für jede Kurve entsprechend der Streuung der genäherten Stützpunkte gewählt.

Die Ausgleichung [4.2-1] mit Anwendung der oben beschriebenen Strategie führt bei den einzelnen Kurven zu folgendem Verlauf der Berechnung:

- SPLINE 1000: 1) 9 Iterationen  $\Rightarrow$  b) -1 Knoten  $\Rightarrow$  18 Iterationen  $\Rightarrow$  a)  
 2) 1 Iteration  $\Rightarrow$  d) +3 Knoten  $\Rightarrow$  10 Iterationen  $\Rightarrow$  d) +2 Knoten  
 $\Rightarrow$  3 Iterationen  $\Rightarrow$  f)
- SPLINE 2000: 1) 15 Iterationen  $\Rightarrow$  b) -1 Knoten  $\Rightarrow$  8 Iterationen  $\Rightarrow$  a)  
 2) 1 Iteration  $\Rightarrow$  d) +3 Knoten  $\Rightarrow$  6 Iterationen  $\Rightarrow$  f)
- SPLINE 3000: 1) 17 Iterationen  $\Rightarrow$  b) -1 Knoten  $\Rightarrow$  9 Iterationen  $\Rightarrow$  a)  
 2) 1 Iteration  $\Rightarrow$  d) +3 Knoten  $\Rightarrow$  7 Iterationen  $\Rightarrow$  e)
- SPLINE 4000: 1) 18 Iterationen  $\Rightarrow$  a)  
 2) 1 Iteration  $\Rightarrow$  d) +3 Knoten  $\Rightarrow$  10 Iterationen  $\Rightarrow$  f)

Die durch die Ausgleichung [4.2-1] erzielten Knotenverteilungen sind getrennt nach den Stufen 1) und 2) in den Abbildungen 4.2-4 und 4.2-5 dargestellt. Das numerische Endergebnis nach der Stufe 2) ist in der Tabelle 4.2-1 zusammengefaßt.

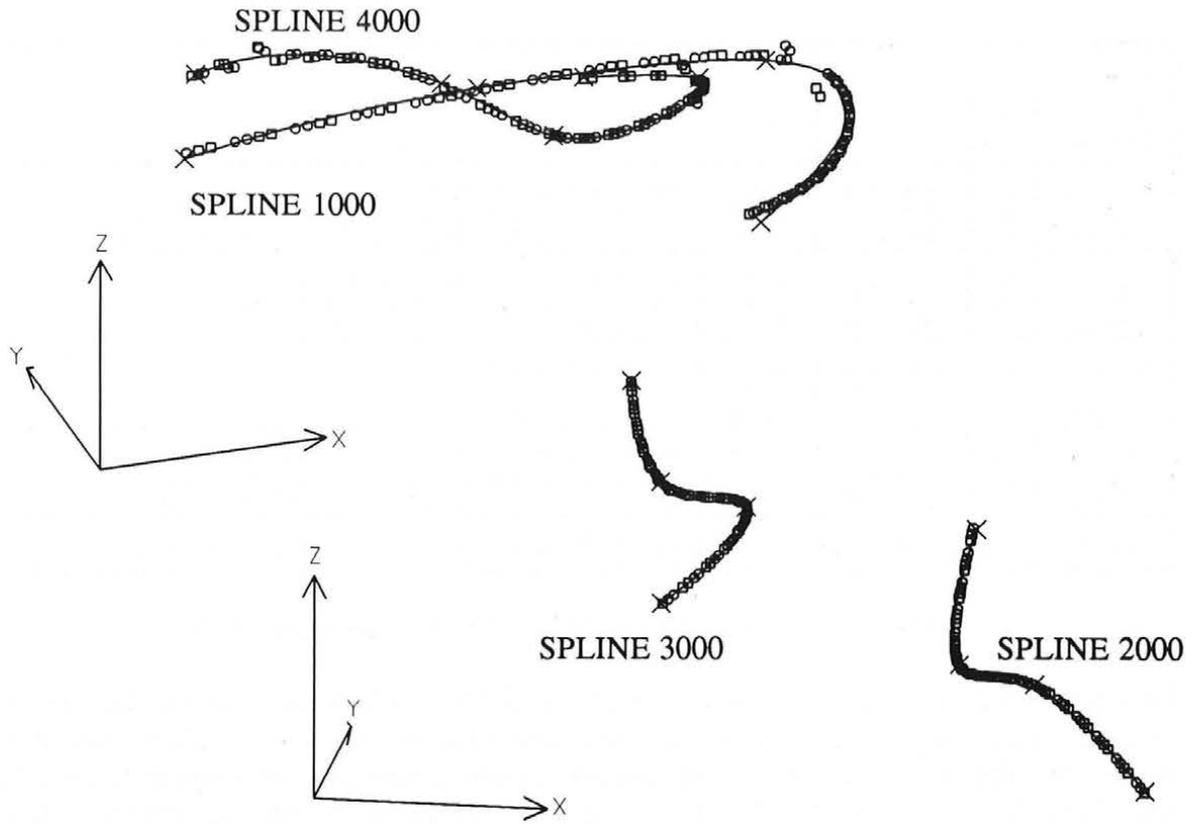


Abb. 4.2-4: Knotenverteilung nach der Stufe 1) der Ausgleichung [4.2-1]

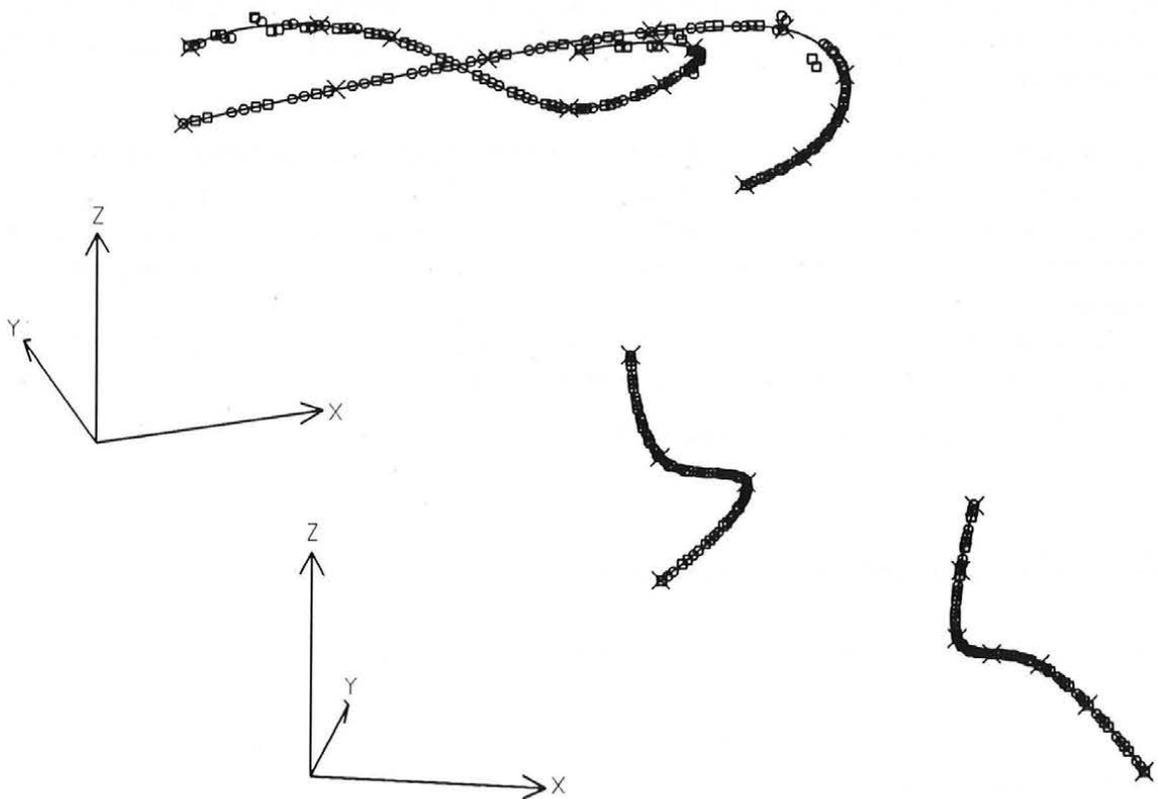


Abb. 4.2-5: Knotenverteilung nach der Stufe 2) der Ausgleichung [4.2-1]

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$ $l_{max}$	$t_i$ $\bar{t}_i$ $\sigma_{\bar{t}_i}$																			
SPL 1000	92	.123 .519	0.000	5.909	12.647	17.858	23.487	28.679	35.979	42.914	50.000											
.010	92	.097 .389	0.000	5.813	12.821	17.440	23.558	28.892	35.942	42.924	50.000											
Schmiegl.	92	.265 1.74	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010	0.010
SPL 2000	70	.020 .047	0.000	9.477	16.587	25.197	33.316	41.214	50.000													
.010	70	.063 .139	0.000	8.670	17.341	25.193	33.045	41.522	50.000													
Schmiegl.	70	.056 .136	0.010	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030	0.030
SPL 3000	70	.036 .091	0.000	18.816	35.278	50.000																
.010	70	.040 .116	0.000			50.000																
Schmiegl.	70	.038 .076	0.010			0.010																
SPL 4000	86	.221 1.17	0.000	12.181	17.415	28.482	35.564	42.619	45.134	50.000												
.010	86	.169 .408	0.000	10.036	20.072	27.596	35.003	42.410	46.205	50.000												
Schmiegl.	86	1.31 2.67	0.010	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.010

Anz.It.=41, Beob.=980, Unbek.=407,  $\Sigma wll=28.43$ ,  $\Sigma wvv=28.37$ ,  $\sigma_0=0.222$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )

Tab. 4.2-1: numerische Ergebnisse der Ausgleichung [4.2-1]

Im Vergleich zu den SPLINE-Kurven 2000 und 3000 ist die Anpassung der Kurven 1000 und 4000 recht ungenau; die Ursache dafür sind einzelne schlecht genäherte Stützpunkte (siehe z.B. Abb. 4.2-5). Falls daher die soeben ermittelte Knotenanordnung der Kurven 1000 und 4000 für den folgenden Vorwärtsschnitt unzureichend ist und zu einem instabilen Ergebnis führt, müßte die Kurvenanpassung an die genäherten Stützpunkte verbessert werden:

Dazu empfiehlt es sich, den genäherten Zustand der Stützpunkte wiederherzustellen<sup>3</sup>, anschließend können die signifikant schlechten Stützpunkte durch eine robuste Schätzung eliminiert werden.

Bei der zu Beginn durchgeführten Näherung der Stützpunkte mit dem Modul APPROX kann es vorkommen, daß für einzelne Stützstrahlen kein gültiger Schnitt mit einer Zwickelenebene gefunden wird - dies ist umso wahrscheinlicher, je weniger Photos an diesem Verfahren teilnehmen. Näherungskordinaten für solch einen Stützpunkt kann man nun folgendermaßen erhalten:

Man wählt näherungsweise einen Stützpunktparameter entsprechend dem nächsten erfolgreich genäherten Bildpunkt und interpoliert anschließend den Stützpunkt mit:

"ADJUST SPLINE=OBJECT ."

## 4.2.2 Rekonstruktion der Objektkurven

Die Kurvenanpassung an die fixierten Stützstrahlen erfolgt jetzt mit der Ausgleichung:

<sup>3</sup>Mit der ORIENT-Direktive CORMAN kann jederzeit der aktuelle Zustand der Datenbasis auf einer Datei abgespeichert, beziehungsweise ein alter abgespeicherter Zustand wieder geladen werden.

[4.2-2]: "ADJUST SPLINE=KNOT=T-PAR=OBJECT  
PHOTO=OBJECT(902 904) ."

Es findet also eine Kurvenanpassung mit gleichzeitiger Bestimmung der Stützpunkte statt.

Falls nach dem enditerierten Zustand die geforderte Genauigkeit (hier z.B. ein  $l_{max} \leq 0.03$  bei den SPLINE-Beobachtungen) noch nicht erreicht ist, müssen in den Intervallen mit den größten Residuen weitere Knoten eingefügt werden. Im vorliegenden Beispiel war dies bei den SPLINE-Kurven 1000 (zwei zusätzliche Knoten) und 4000 (ein zusätzlicher Knoten) der Fall, was fünf weitere Iterationen erforderte. Die endgültigen Ergebnisse der Ausgleichung [4.2-2] sind in den Abbildungen 4.2-6 und 4.2-7 sowie in der Tabelle 4.2-2 dargestellt.

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$ $l_{max}$	$t_i$ $\bar{t}_i$ $\sigma_{\bar{t}_i}$
PHO 902 .010	167 167	.013 .040 .018 .068	
PHO 904 .010	164 164	.007 .023 .010 .039	
SPL 1000 .010 Schmiegl.	95 95 95	.005 .024 .007 .029 .008 .027	0.000 5.823 12.795 15.134 17.511 20.531 23.361 28.886 35.943 42.922 50.000 0.000 5.820 12.796 15.130 17.516 20.499 23.399 28.898 35.944 42.923 50.000 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010
SPL 2000 .010 Schmiegl.	71 71 71	.003 .006 .002 .004 .002 .005	0.000 9.685 17.317 25.192 33.142 41.506 50.000 0.000 8.670 17.341 25.193 33.045 41.522 50.000 0.010 0.030 0.030 0.030 0.030 0.030 0.010
SPL 3000 .010 Schmiegl.	71 71 71	.004 .008 .002 .004 .004 .012	0.000 19.318 35.411 50.000 0.000 18.809 35.279 50.000 0.010 0.100 0.100 0.010
SPL 4000 .010 Schmiegl.	94 94 94	.003 .013 .002 .007 .006 .020	0.000 12.254 17.331 28.492 35.602 39.117 42.527 45.166 50.000 0.000 12.212 17.373 28.475 35.595 39.091 42.529 45.160 50.000 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010 0.010
Anz.It. = 14, Beob. = 1686, Unbek. = 1425, $\Sigma wll = 0.138$ , $\Sigma wvv = 0.137$ , $\sigma_0 = 0.023$ , ( $\sigma_{apriori} = 0.010$ )			

Tab. 4.2-2: numerische Ergebnisse der Ausgleichung [4.2-2]

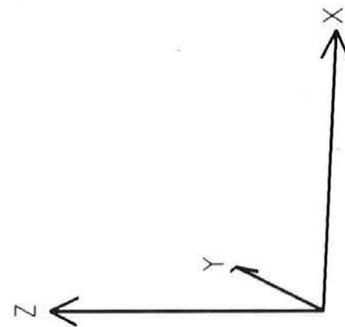
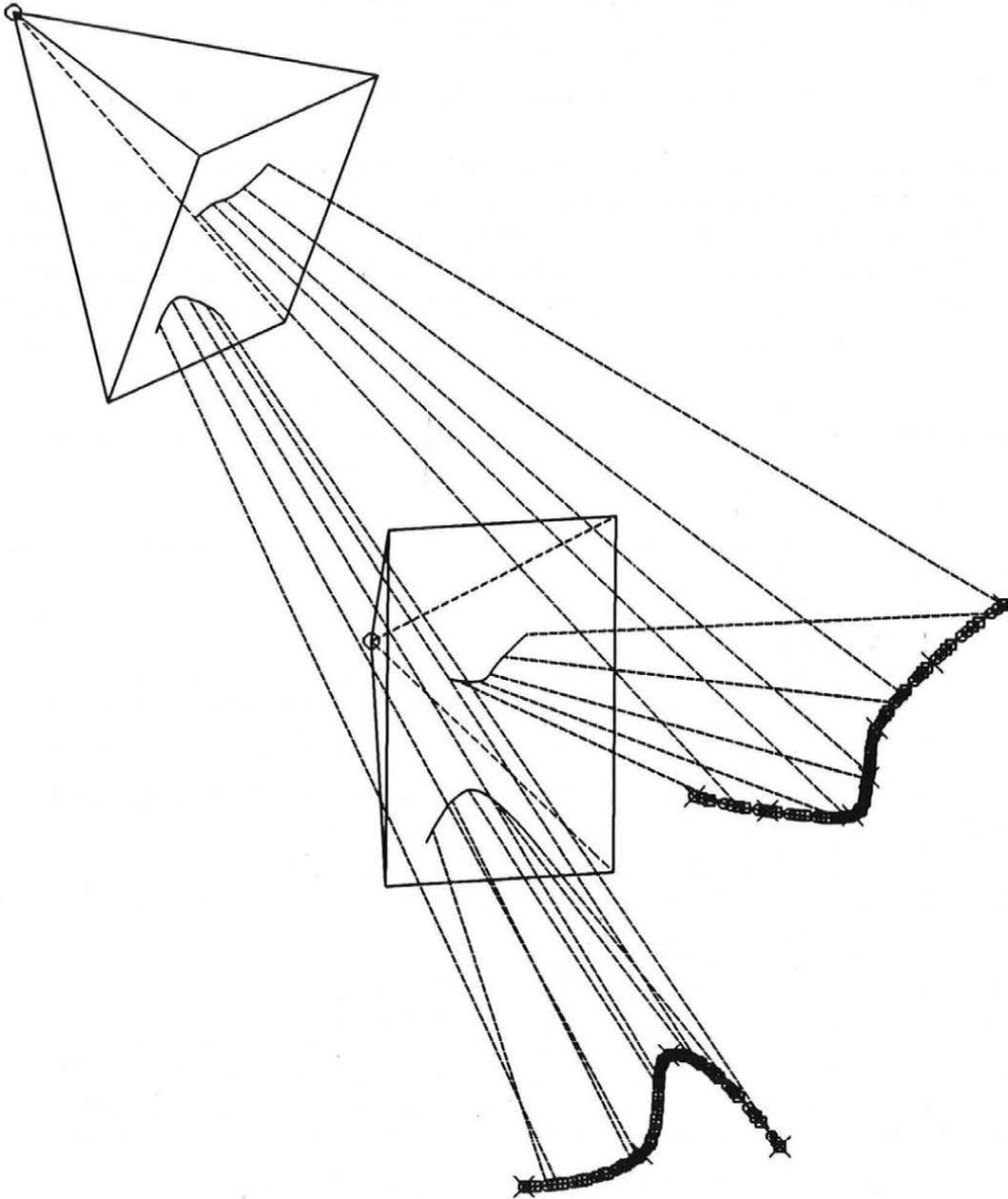


Abb. 4.2-6: Vorwärtsschnitt der SPLINE-Kurven 2000 und 3000 (Ausgleichung [4.2-2])

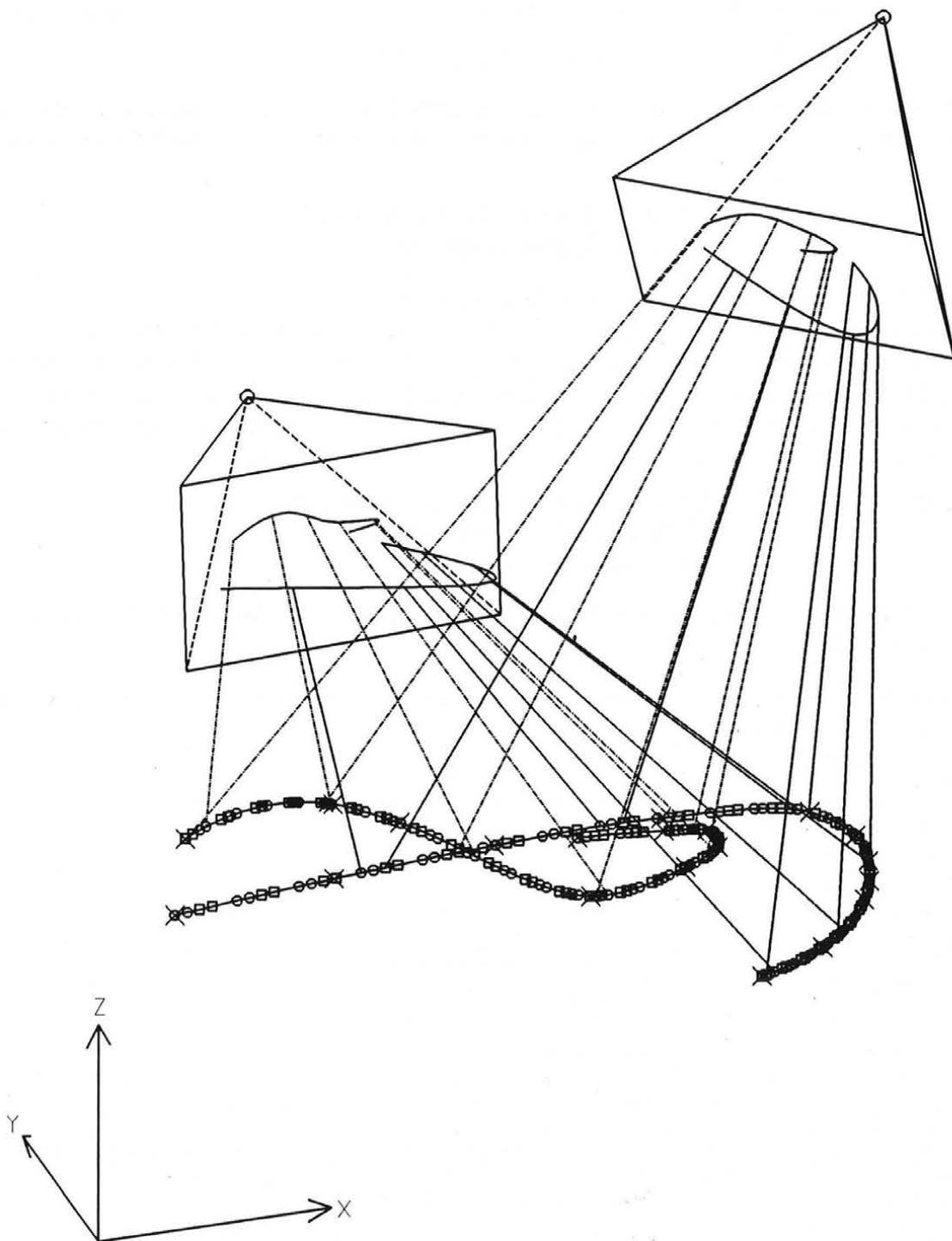


Abb. 4.2-7: Vorwärtsschnitt der SPLINE-Kurven 1000 und 4000 mit zusätzlich eingefügten Knoten (Ausgleichung [4.2-2])

Zum Vergleich soll hier auch die Kurvenrekonstruktion mit Hilfe des Photopaars 903 und 904 und stabilisierten gleichmäßig angeordneten Knoten gezeigt werden. Die Photos 903 und 904 weisen einen Winkel zwischen den Aufnahmerichtungen von  $96^{\text{gon}}$  auf (gegenüber  $49^{\text{gon}}$  zwischen den Photos 902 und 904). Bei dieser Anordnung wird nun mit der Ausgleichung

[4.2-3] eine Kurvenanpassung ähnlich wie in Kapitel 4.1.1 durchgeführt:  
 Entsprechend der Formel (4.2-2) wird eine maximale Anzahl von Knoten gewählt und mit

```
"APPROX SPLINE=RAYS MERGE(903 904) ."
```

in gleichen Parameterabständen entlang des genäherten Stützpunktpolygons angeordnet.  
 Anschließend erfolgt eine Kurvenanpassung mit stabilisierten Knoten an fixierte Stützstrahlen:

```
"ADJUST SPLINE=KNOT=T-PAR=OBJECT  

    PHOTO=OBJECT(903 904) ."
```

Der enditerierte Zustand wird nach elf Iterationen erreicht.  
 Im Gegensatz zur Ausgleichung [4.2-2] mit den Photos 902 und 904 kann jetzt dank der günstigeren Anordnung (siehe Kap. 4.2.3) der beiden Photos 903 und 904 gleichzeitig die Kurvenanpassung an die Stützstrahlen und die Knotenverteilung optimiert werden. Dies geschieht durch eine robuste Schätzung der Gewichte der zusätzlichen Beobachtungen für die Knotenparameter:

```
[4.2-3] "ADJUST SPLINE=KNOT=T-PAR=OBJECT  

    PHOTO=OBJECT(903 904)  

    PARAMETER=ROBUST ."
```

Die Abbildungen 4.2-8a, 4.2-8b und die Tabelle 4.2-3 zeigen die Endergebnisse der Ausgleichung [4.2-3].

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$ $l_{max}$	$t_i$ $\hat{t}_i$ $\sigma_{\hat{t}_i}$
PHO 903 .010	166 166	.016 .080 .015 .087	
PHO 904 .010	166 166	.009 .043 .008 .035	
SPL 1000 .010 Schmiegl.	95 95 95	.006 .030 .005 .019 .004 .019	0.000 4.171 8.328 12.515 16.610 21.782 24.132 29.234 33.325 37.500 41.666 45.833 50.000 0.000 4.167 8.333 12.500 16.667 20.833 25.000 29.167 33.333 37.500 41.667 45.833 50.000 robuste Schätzung
SPL 2000 .010 Schmiegl.	71 71 71	.004 .013 .002 .008 .002 .007	0.000 6.247 12.518 18.730 24.994 31.364 37.458 43.752 50.000 0.000 6.250 12.500 18.750 25.000 31.250 37.500 43.750 50.000 robuste Schätzung
SPL 3000 .010 Schmiegl.	71 71 71	.005 .019 .005 .026 .003 .007	0.000 6.251 12.503 18.756 24.986 31.364 34.863 43.741 50.000 0.000 6.250 12.500 18.750 25.000 31.250 37.500 43.750 50.000 robuste Schätzung
SPL 4000 .010 Schmiegl.	95 95 95	.003 .015 .003 .012 .003 .008	0.000 4.167 8.333 12.499 16.675 21.818 25.053 29.096 33.320 37.611 41.447 45.828 50.000 0.000 4.167 8.333 12.500 16.667 20.833 25.000 29.167 33.333 37.500 41.667 45.833 50.000 robuste Schätzung
Anz.It.=18, Beob.=1704, Unbek.=1468, $\Sigma wll=0.351$ , $\Sigma wvv=0.350$ , $\sigma_0=0.039$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )			

Tab. 4.2-3: numerische Ergebnisse der Ausgleichung [4.2-3]

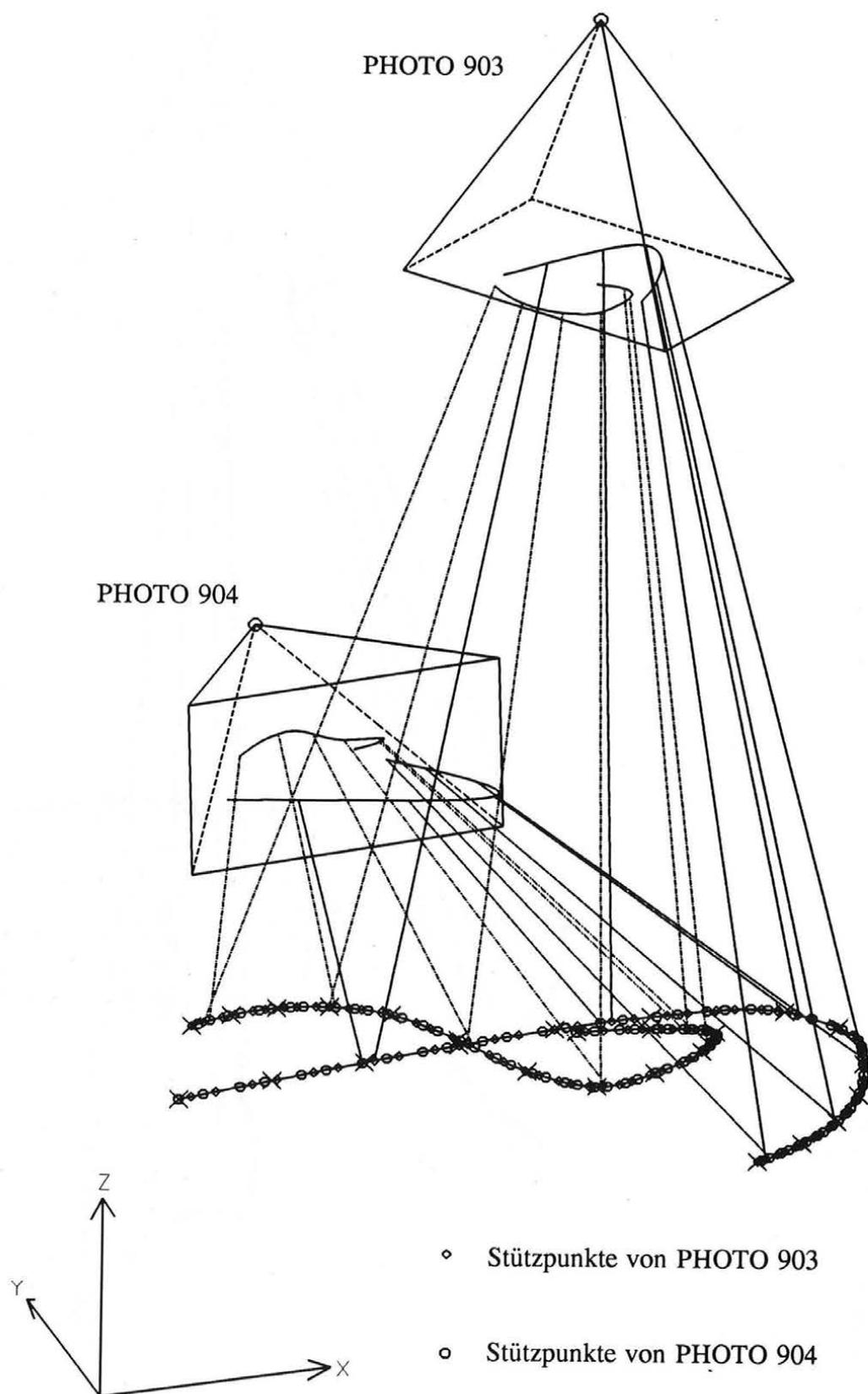


Abb. 4.2-8a: SPLINE-Kurven 1000 und 4000 bestimmt durch die Ausgleichung [4.2-3]

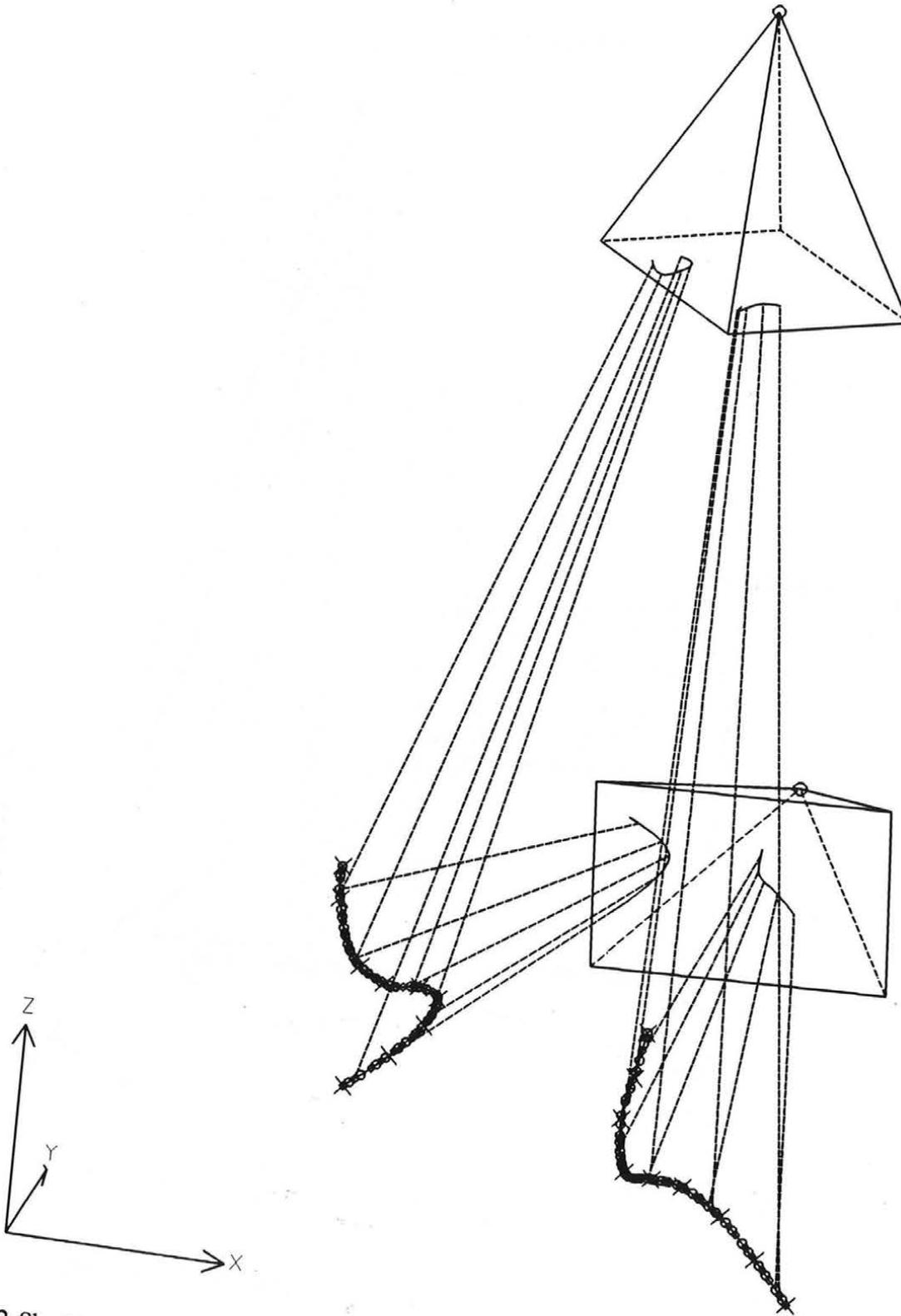


Abb. 4.2-8b: SPLINE-Kurven 2000 und 3000 bestimmt durch die Ausgleichung [4.2-3]

Durch die Ausgleichung [4.2-2] mit den Photos 902 und 904 wurde eine mittlere räumliche Normalabweichung  $m_{SPLINE} = \pm 0.008$  der SPLINE-Kurven von den Stützstrahlen erzielt. Bei der Ausgleichung [4.2-3] mit den Photos 903 und 904 ergibt sich eine etwa gleich große mittlere räumliche Normalabweichung von  $m_{SPLINE} = \pm 0.007$ . Dieses Ergebnis wurde zwar mit weniger Iterationen, dafür aber mit einer größeren Anzahl von Knoten erreicht.

### 4.2.3 Geometrische Voraussetzungen für die Rekonstruktion einer Objektkurve durch photogrammetrischen Vorwärtsschnitt

Die numerischen Ergebnisse der Ausgleichungen [4.2-2] und [4.2-3] liegen laut den Tabellen 4.2-2 und 4.2-3 durchaus im Bereich der geforderten Genauigkeit von  $l_{max} \leq 0.03$ . Aber wie gut wurden die Originalkurven tatsächlich rekonstruiert?

Mit Hilfe der dreidimensionalen Paßpunktbeobachtungen des Raumes CONPOI 8888 kann diese Frage beantwortet werden, da diese Paßpunkte exakt auf den Originalkurven liegen. Zuerst werden mit

"ADJUST CONPOI=OBJECT(8888) ."

die Paßpunkte im Objektraum REFSYS bestimmt. Anschließend erfolgt die Ausgleichung mit

"ADJUST SPLINE=T-PAR ."

Durch die Parametrisierung der fixierten Paßpunkte auf den gleichfalls fixierten Kurven ergeben sich die Normalabweichungen der Kurven von diesen Kontrollpunkten. Diese Kontrollausgleichung ergibt die größten Abweichungen von der Originalkurve bei SPLINE 4000 von der Ausgleichung [4.2-2]. Die Abbildung 4.2-9 zeigt diese Kurve samt Kontrollpunkten und zusätzlich den Schnitt der beiden Strahlenbündel im Kurvenbereich mit der größten Abweichung von den Paßpunkten (in den Abb. 4.2-9 bis 4.2-11 wurden zur besseren Übersichtlichkeit die den Bildpunkten entsprechenden Stützpunkte weggelassen).

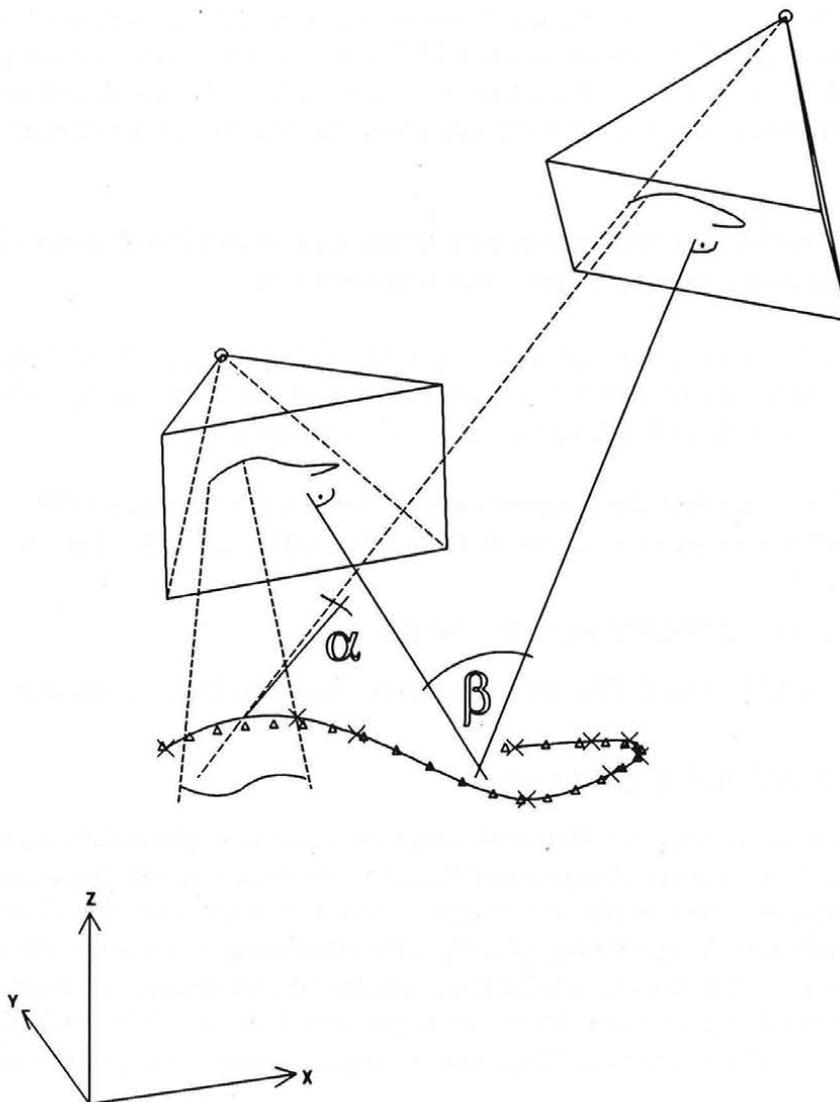


Abb. 4.2-9: Durch Vorwärtsschnitt schlecht bestimmbarer Kurventeil

Aus der Abbildung 4.2-9 ist erkennbar, daß in dem schlecht bestimmten Bereich der Kurve 4000 der Winkel  $\alpha$  (gemäß Formel (2.4-4)) zwischen dem Bildstrahl und der Zwickelenebene sehr klein ist. An dieser Stelle kann ein großer Lagefehler der ausgeglichenen Kurve nicht erkannt werden, da er sich nur in einer sehr kleinen Normalabweichung der Kurve von den Bildstrahlen äußert. Umgekehrt kann an dieser Stelle bereits ein kleiner Fehler in der Bildpunktbeobachtung einen großen Lagefehler bewirken.

Diese Situation kann unabhängig vom Schnittwinkel  $\beta$  der Aufnahmerichtungen eintreten, wenn ein längerer Kurventeil (annähernd) in einer Ebene liegt, die auch die Basis der beiden Photos enthält. An der Stelle dieses Kurventeiles gehen die beiden Strahlenbündel (fast) ineinander über.

Die folgenden Tabelle 4.2-2 enthält für jede SPLINE-Kurve den minimalen und den maximalen Winkel in [gon],  $\alpha_{min}$  und  $\alpha_{max}$ , sowie den mittleren räumlichen Punktlagefehler  $m_{SPLINE}$  in bezug auf die Kontrollpunkte.

SPLINE 1000 $\alpha_{min} - \alpha_{max}$ Anz.Knoten $m_{SPLINE}$	SPLINE 2000 $\alpha_{min} - \alpha_{max}$ Anz.Knoten $m_{SPLINE}$	SPLINE 3000 $\alpha_{min} - \alpha_{max}$ Anz.Knoten $m_{SPLINE}$	SPLINE 4000 $\alpha_{min} - \alpha_{max}$ Anz.Knoten $m_{SPLINE}$
Ausgleichung [4.2-2] mit Photos 902 und 904:			
15 - 55 11 $\pm 0.101$	27 - 39 7 $\pm 0.098$	5 - 41 4 $\pm 0.120$	1 - 42 9 $\pm 0.544$
Ausgleichung [4.2-3] mit Photos 903 und 904:			
10 - 96 13 $\pm 0.152$	3 - 79 9 $\pm 0.237$	3 - 94 9 $\pm 0.105$	11 - 91 13 $\pm 0.065$

Tab. 4.2-4: tatsächliche Lagefehler der SPLINE-Kurven aus den Ausgleichungen [4.2-2] und [4.2-3]

Bis auf die SPLINE-Kurve 3000 aus der Ausgleichung [4.2-3] treten in den vorliegenden Beispielen die größten Abweichungen von den Originalkurven durchwegs bei den jeweiligen Kurventeilen mit dem kleinsten Winkel  $\alpha_{min}$  auf.

Wie kann nun die Rekonstruktion der Originalkurve in Bereichen mit sehr kleinen Winkel  $\alpha$  verbessert werden?

- 1) Durch eine genauere Kurvenanpassung in diesem Bereich, also durch Einfügen zusätzlicher Knoten. So verbessert sich zum Beispiel im Falle der SPLINE-Kurve 4000 aus der Ausgleichung [4.2-2] durch Einfügen von weiteren drei Knoten in den Intervallen mit den größten Abweichungen von den Stützstrahlen die mittlere Abweichung von der Originalkurve auf  $m_{SPLINE} = \pm 0.187$  (siehe auch Abb. 4.2-10).

Im Gegensatz zum vorliegenden Testbeispiel sind im allgemeinen jedoch die Bildpunktbeobachtungen mit zufälligen Meßfehlern behaftet, was eine Streuung der Stützstrahlen zur Folge hat. Der durch diese Streuung verursachte Lagefehler der ausgleichenden Kurve kann auch mit einer genaueren Kurvenanpassung an die Stützstrahlen nicht beseitigt werden! Daher ist die folgende Vorgangsweise vorzuziehen:

- 2) Mehrere Photos werden so angeordnet, daß mindestens eine Basis möglichst senkrecht zum Kurvenverlauf steht. Bestimmt man etwa die SPLINE-Kurve 4000 aus den Photos 903 und 904, so verringert sich der mittlere räumliche Lagefehler in bezug auf die Originalkurve auf  $m_{SPLINE} = \pm 0.059$  (siehe Abb. 4.2-11 und Tab. 4.2-5).

Ideal wäre eine räumliche Anordnung von vier Photos mit den Aufnahmeorten in den Eckpunkten einer gleichseitigen Pyramide und dem fotografierten Objekt im Mittelpunkt dieser Pyramide. Bei solch einer Anordnung ergäbe sich für jede mögliche Kurvenrichtung zumindest ein Paar von Strahlenbündeln mit einem günstigen Schnittwinkel.

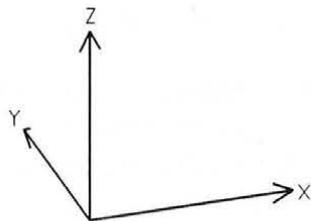
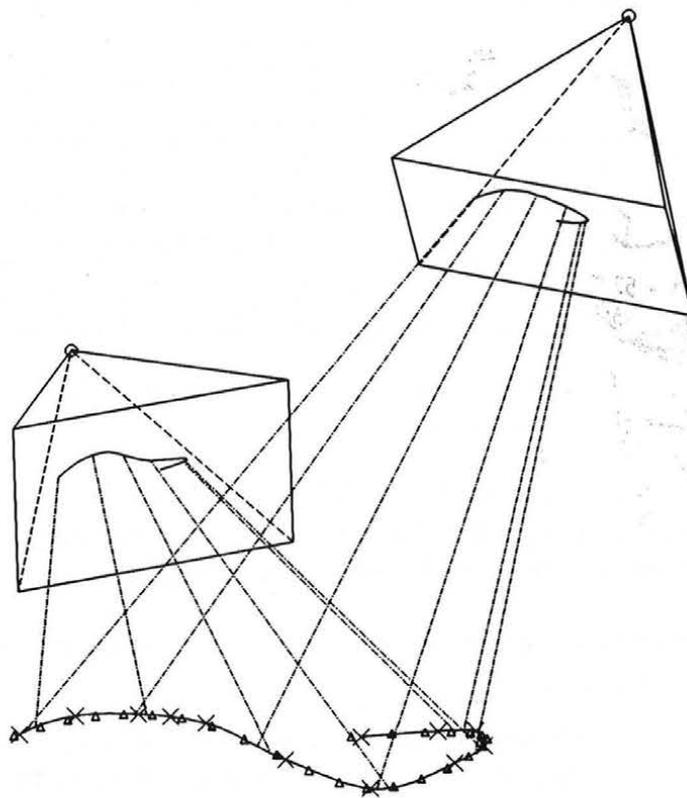


Abb. 4.2-10: Verbesserung der Rekonstruktion der Originalkurve durch zusätzliche Knoten

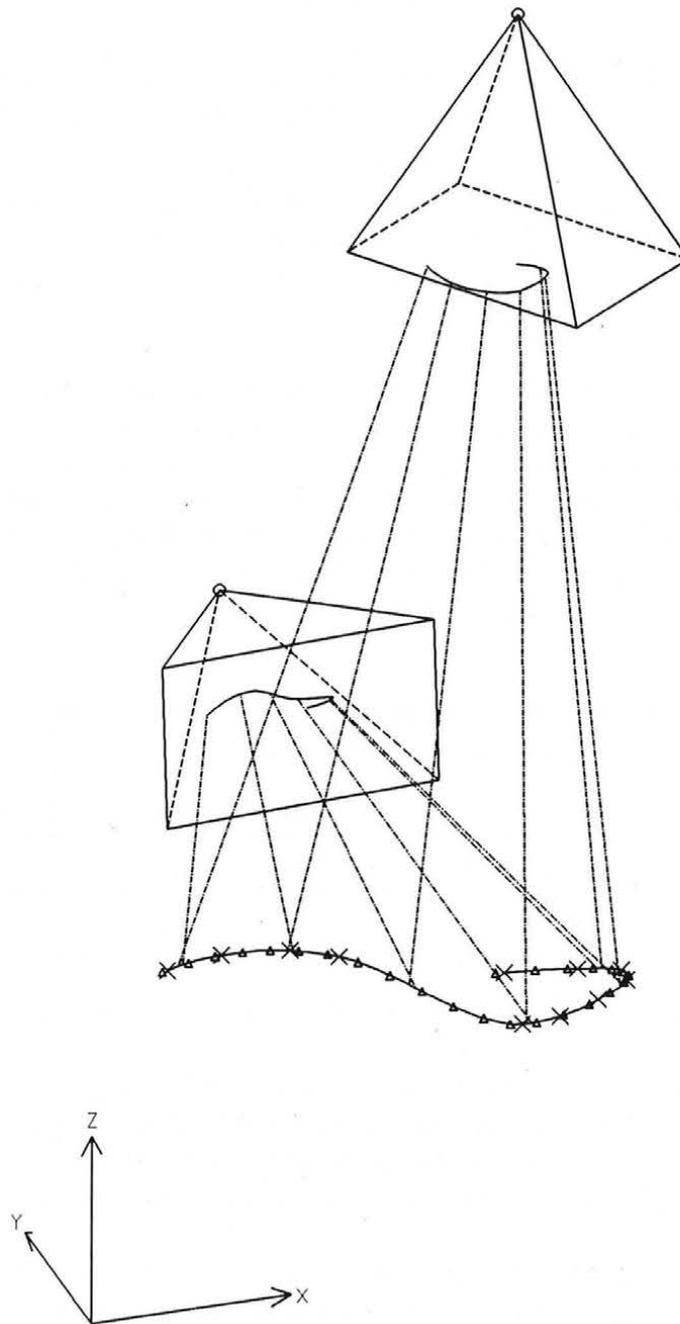


Abb. 4.2-11: Verbesserung der Rekonstruktion der Originalkurve durch eine Aufnahmeanordnung mit günstigeren Schnittwinkeln (Ausgleichung [4.2-4])

Neben der Schnittgeometrie hat auch die Anordnung der Knoten einen wesentlichen Einfluß auf die Rekonstruktionsgenauigkeit. Im Kapitel 4.2-2 wurden zwei Methoden der Knotenanordnung angewandt:

- 1) Die gleichmäßige, stabilisierte Anordnung einer im voraus festgelegten Anzahl von Knoten.  
Die Optimierung der Knotenverteilung durch eine robuste Schätzung der zusätzli-

chen Knotenparameterbeobachtungen funktioniert allerdings bei ungünstigen Schnittwinkeln zwischen den Strahlenbündeln unter Umständen nicht. So divergiert zum Beispiel das Ausgleichungsverfahren mit den Photos 902 und 904 (Ohne robuste Schätzung stellt sich zwar ein enditeriertes Ergebnis ein, die geforderte Anpassungsgenauigkeit an die Stützstrahlen wird aber nicht erreicht).

- 2) Die zweistufige Strategie mit Grobanpassung durch wenige freibewegliche Knoten und anschließendem Einfügen von zusätzlichen stabilisierten Knoten in den Intervallen mit den größten Anpassungsfehlern.  
Diese Methode führte in sämtlichen untersuchten Vorwärtsschnittbeispielen zu einem enditerierten Ergebnis.

In der Ausgleichung [4.2-3] wurde die erste Methode mit den Photos 903 und 904 angewandt, in der Ausgleichung [4.2-2] die zweite Methode mit den Photos 902 und 904. Zum Vergleich soll nun die Ausgleichung [4.2-4] dienen: bei dieser Ausgleichung wurde die zweite Methode mit den Photos 903 und 904 angewandt; die erzielte Anpassungsgenauigkeit an die Stützstrahlen ist  $l_{max} \leq 0.03$ . Die durch diese Ausgleichung bestimmte SPLINE-Kurve 4000 ist in der Abbildung 4.2-11 dargestellt. Zum Vergleich mit der Tabelle 4.2-2 sind in der Tabelle 4.2-5 die mit dieser Ausgleichung erzielten Rekonstruktionsgenauigkeiten aufgelistet.

SPLINE 1000 $\alpha_{min} - \alpha_{max}$ Anz.Knoten $m_{SPLINE}$	SPLINE 2000 $\alpha_{min} - \alpha_{max}$ Anz.Knoten $m_{SPLINE}$	SPLINE 3000 $\alpha_{min} - \alpha_{max}$ Anz.Knoten $m_{SPLINE}$	SPLINE 4000 $\alpha_{min} - \alpha_{max}$ Anz.Knoten $m_{SPLINE}$
Ausgleichung [4.2-4] mit Photos 903 und 904:			
10 - 96 10 ±0.125	3 - 79 7 ±0.106	3 - 94 4 ±0.097	11 - 91 11 ±0.059

Tab. 4.2-5: tatsächliche Lagefehler der SPLINE-Kurven aus der Ausgleichung [4.2-4]

Der Vergleich der Tabelle 4.2-4-unten mit der Tabelle 4.2-5 zeigt die Vorteile der zweiten Methode zur Knotenverteilung gegenüber der ersten Methode bei gleicher Anordnung der Strahlenbündel (und gleich genauer Kurvenanpassung an die Stützstrahlen):

Mit wenigen, jedoch günstig angeordneten Knoten wird eine bessere Rekonstruktion der Originalkurve erzielt.

Die zweistufige Strategie zur Knotenverteilung ist gegenüber einer gleichmäßigen Knotenverteilung vermutlich umso vorteilhafter, je "ungleichmäßiger" die Kurve gekrümmt ist.

### 4.3 Bündelblockausgleichung mit verknüpfenden Kurven

Gegeben seien mindestens drei Photos von einem kurvenförmigen Objekt. Die innere Orientierung dieser Photos sei bekannt. Gesucht sind die Elemente der äußeren Orientierung dieser Photos sowie die Rekonstruktion der Objektkurven.

Im vorliegenden Fall seien keine homologen Punkte zur gegenseitigen Orientierung ("Verknüpfung") der Photos vorhanden, - die Verknüpfung der Photos muß daher ausschließlich mit homologen Kurven erfolgen. Für die absolute Orientierung des aus den verknüpften Photos gebildeten Blockes seien vier jeweils in einem einzigen Bild abgebildete Paßpunkte vorhanden<sup>1</sup>.

Zur Lösung dieser Aufgabe erfolgt eine Bündelblockausgleichung, bei der gleichzeitig eine Bildorientierung und eine Kurvenanpassung an die Bildstrahlen durchgeführt wird.

Bei insgesamt  $q$  Kurvenpunkten (beobachtet in  $nph$  Photos),  $nspl$  SPLINE-Kurven mit insgesamt  $n$  Knoten und  $npp$  Paßpunkten ergibt sich die Anzahl der Beobachtungen zu:

- $2nspl$  zusätzlich beobachtete Parameter der Endknoten,
- $2q$  Bildkoordinatenbeobachtungen der Kurvenpunkte,
- $3q$  fiktive Kurvenbeobachtungen der Kurvenpunkte,
- $2npp$  Bildkoordinatenbeobachtungen der Paßpunkte,
- $3npp$  Beobachtungen der Paßpunkte.

Die Unbekannten sind:

- $3n$  Knotenkoordinaten,
- $2nspl$  Verschiebungen der Endknoten,
- $q$  Kurvenpunktparameter,
- $3q$  Objektkoordinaten der Kurvenpunkte,
- $3nph$  Koordinaten der Projektionszentren,
- $3nph$  Drehwinkel,
- $3npp$  Objektkoordinaten der Paßpunkte.

Für die folgende Überlegung wird die Nettoredundanz ohne Berücksichtigung der Objektpunkte herangezogen:

Jeder Bildstrahl zu einem Paßpunkt liefert netto zwei Bildkoordinatenbeobachtungen; jeder Bildstrahl zu einem Kurvenpunkt liefert netto zwei Bildkoordinatenbeobachtungen und einen unbekanntem Kurvenparameter.

Somit erhält man eine Nettoredundanz im Ausmaß von mindestens 50% der Unbekannten bei:

---

<sup>1</sup>Die absolute Orientierung eines aus relativ zueinander orientierten Photos gebildeten Modelles wird durch sieben, hier unbekannte, Parameter beschrieben: die drei Objektkoordinaten des Modellursprunges, die drei Drehwinkel des Modellkoordinatensystems gegenüber dem Objektkoordinatensystem und der Modellmaßstab. Jeder Paßpunkt der in einem einzigen Bild beobachtet ist, liefert zwei redundante Gleichungen für diese Modellorientierung; eine Überbestimmung ist daher ab vier Paßpunkten vorhanden.

$$1.5 (3n + 2nspl + q + 3nph + 3nph) \leq 2nspl + 2q + 2npp$$

Im praktischen Falle wird meistens die Anzahl  $q$  der Stützpunkte in Abhängigkeit von den anderen, bereits vorgegebenen, Variablen dieser Beziehung zu wählen sein<sup>2</sup>. Die Umformung der obenstehenden Beziehung ergibt daher die erforderliche Anzahl von Bildpunkten die auf den Abbildern der Kurven zu registrieren sind, um eine Nettoerundanz von mindestens 50% zu erreichen:

$$q \geq 9n + 2nspl + 18nph - 4npp$$

Wie kann man nun die Anzahl der Knoten für eine bestimmte Verknüpfungskurve ermitteln?

Für die Kurvenrekonstruktion anhand orientierter Photos (Kap. 4.2) wurden verschiedene Methoden zur Bestimmung der Anzahl (und Verteilung) der Knoten angewandt. Bei diesen Methoden wird versucht, die Kurve möglichst gut an die vorgegebenen Bildstrahlen anzupassen.

Im vorliegenden Fall sind jedoch die Strahlenbündel bestenfalls näherungsweise orientiert. Eine optimale Kurvenanpassung an diese Strahlenbündel würde zum Teil auch die Einflüsse der unzureichenden Orientierungswerte kompensieren. Dies ist allerdings nicht zielführend; durch die Verknüpfungskurven soll vielmehr ein Widerspruch entstehen, der nur durch die richtige, originalgetreue, Orientierung der Strahlenbündel beseitigt werden kann.

Die prinzipielle Form und somit die Anzahl der Knoten der Verknüpfungskurven muß daher vor dem Bündelblockausgleich festgelegt werden.

Diese Festlegung kann wie folgt geschehen:

Man suche für jede Kurve anhand ihrer Abbilder in den Photos die markanten räumlichen Krümmungsmaxima. Für jedes ausgeprägte Krümmungsmaximum wird ein innerer Knoten gewählt. Gemeinsam mit den beiden Randknoten erhält man so für jede Kurve die Anzahl der Knoten, mit der die originale Kurvenform im wesentlichen nachgebildet werden kann.

Im vorliegenden Beispiel seien die Photos 902, 903 und 904 vorgegeben. Die Abbildung 4.3-1 zeigt für jedes Photo die abgebildeten Paßpunkte sowie die Abbilder der vier Raumkurven mit den darauf registrierten Bildpunkten. Zusätzlich sind für jede Raumkurve in genau einem Abbild die markanten inneren Knoten gekennzeichnet.

---

<sup>2</sup>Der Fall einer Bündelblockausgleichung mit Verknüpfungskurven wird am ehesten bei bereits vorhandenen  $nph$  Aufnahmen mit zuwenig Verknüpfungspunkten auftreten; bei einer geplanten Aufnahme (mit einer vom Auswerter wählbaren Anzahl  $nph$  von Photos) kann meistens für eine ausreichende Anzahl von Verknüpfungspunkten gesorgt werden.

Anhand dieser vorgegebenen Photos werden die  $npp$  Paßpunkte ausgewählt.

Die Anzahl  $n$  der Knoten sollte, wie im folgenden erläutert, vor der Ausgleichung anhand der Abbilder der Verknüpfungskurven festgelegt werden.

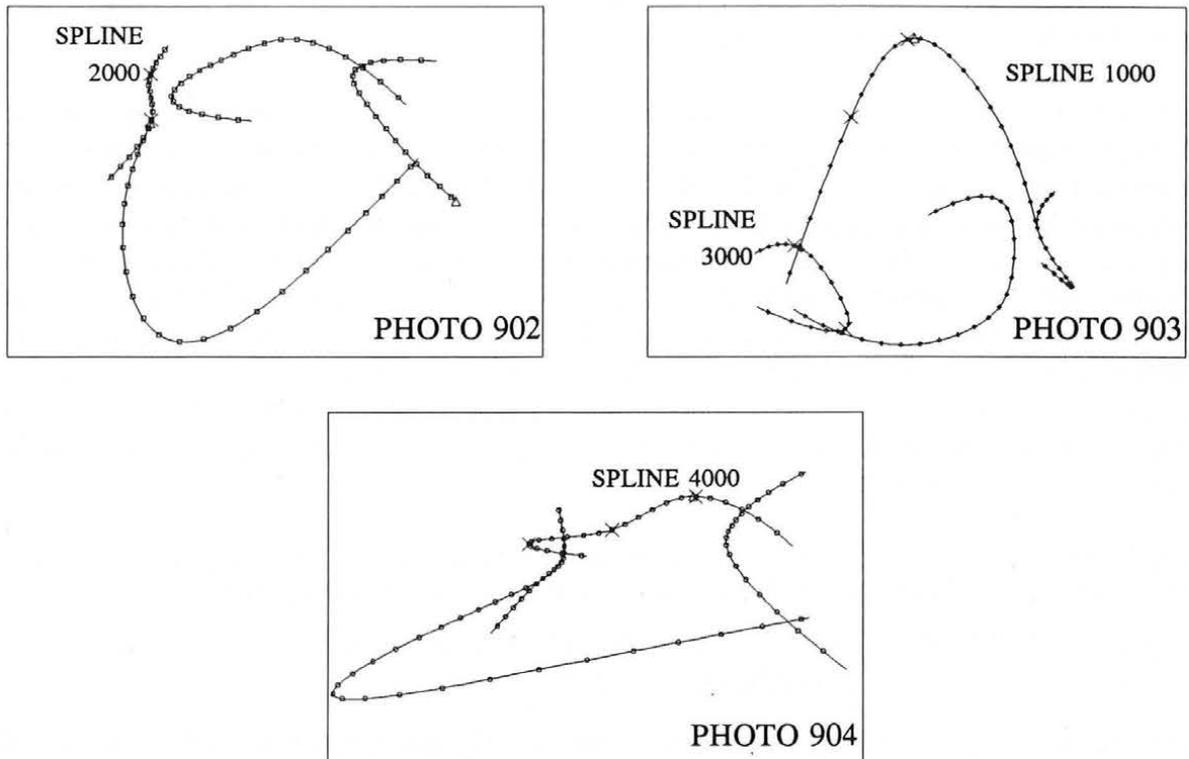


Abb. 4.3-1: Photos mit Bildpunktbeobachtungen und markanten inneren Knotenpunkten

In PHOTO 903 ist auf der SPLINE-Kurve 1000 ein zweiter innerer Knoten auf einem offensichtlich geraden Kurventeil eingetragen. Dieser zusätzliche Knoten soll den Übergang der Schmiegekurve<sup>3</sup> vom stark gekrümmten Kurventeil in das gerade verlaufende Ende der Kurve gewährleisten. Sollte dieser Knoten bei der nun folgenden Berechnung eine andere als diese beabsichtigte Kurvenform bewirken, so müßte dieser Knoten wieder entfernt werden. Die Kurve 1000 wäre gleichzeitig auf ein Teilstück zu reduzieren, das durch eine Schmiegekurve mit drei Knoten vermutlich gut darstellbar ist.

Wie in der Abbildung 4.3-1 ersichtlich, liegen im vorliegenden Testbeispiel die Abbilder der Paßpunkte auf den Abbildern der Kurven. Dies sei jedoch nur "Zufall"; für diese vier Orientierungs-Paßpunkte werden daher keine fiktiven Kurvenbeobachtungen eingeführt<sup>4</sup>.

### 4.3.1 Bestimmung von Näherungswerten

Zunächst werden Näherungswerte für die Bildorientierungen bestimmt:

Zu diesem Zweck werden in den Photos näherungsweise homologe Bildpunkte ausgesucht,

<sup>3</sup>Hier sollen zur Demonstration ausschließlich Schmiegekurven verwendet werden, da mit diesen die vorliegenden Originalkurven etwas schlechter nachgebildet werden können als mit kubischen Splines (siehe Kap. 4.1).

<sup>4</sup>im Gegensatz zu den Kontroll-Paßpunkten, die zur abschließenden Kontrolle dieses Testbeispiels dienen

zum Beispiel Bildpunkte an den Enden der Kurvenabbilder<sup>5</sup> oder bei den abgebildeten Kurvenstellen mit maximaler Krümmung.

Zur Abschätzung der erforderlichen Anzahl dieser provisorischen Verknüpfungspunkte wird die einstufige Bündelblockausgleichung fiktiv in die beiden Stufen "relative Orientierung mit Verknüpfungspunkten" und "absolute Orientierung mit Orientierungs-Paßpunkten" getrennt: Für jeden Verknüpfungspunkt ergeben sich nun zwei beobachtete Bildkoordinaten pro Photo bei insgesamt drei unbekanntem Objektkoordinaten. Für die relative Orientierung von zwei Photos sind fünf unbekannte Parameter zu bestimmen<sup>6</sup>, für jedes weitere Photo kommen noch sechs unbekannte Parameter hinzu<sup>7</sup>. Bei den vorliegenden drei Photos ergibt das insgesamt elf unbekannte Parameter, zu deren Bestimmung jeder Verknüpfungspunkt drei redundante Gleichungen liefert<sup>8</sup> (vorausgesetzt, jeder Verknüpfungspunkt ist in allen Photos abgebildet). Es werden daher mindestens vier Verknüpfungspunkte zur gegenseitigen Orientierung der drei Photos benötigt.

Die Bündelblockausgleichung [4.3-1] zur näherungsweise Bildorientierung erfolgt mit sechs provisorischen Verknüpfungspunkten und mit vier Orientierungs-Paßpunkten:

[4.3-1]: "ADJUST PHOTO=PRJCTR=ROTPAR=OBJECT(902-904)  
CONPOI=OBJECT ."

Die mit dieser Ausgleichung ermittelten genäherten Orientierungswerte sind in der Tabelle 4.3-1 aufgelistet:

PHOTO 902 PRJCTR ROTPAR	PHOTO 903 PRJCTR ROTPAR	PHOTO 904 PRJCTR ROTPAR
107.125 97.999 42.128 52.540 73.379 104.137	54.524 36.324 116.692 -0.046 0.637 338.879	50.226 116.482 14.501 98.638 95.784 99.385

Tab. 4.3-1: genäherte Bildorientierungswerte aus der Ausgleichung [4.3-1]

Mit diesen genäherten Bildorientierungen können Näherungswerte für die Kurvenpunkte und für die Knoten bestimmt werden:

"APPROX SPLINE RAYS MERGE(902-904) ."

<sup>5</sup>Beim vorliegenden Testbeispiel wird davon ausgegangen, daß sich die Enden der Raumkurven nur unscharf in den Photos abbilden und daher die Endpunkte der Kurvenabbilder nicht exakt homolog sind.

<sup>6</sup>Für die Modellbildung können die sechs äußeren Orientierungselemente (drei Verschiebungen und drei Drehwinkel) des ersten Photos beliebig gewählt werden, von den sechs Orientierungselementen des zweiten Photos hat die Verschiebung in Basisrichtung keinen Einfluß auf die Schnittbedingung homologer Strahlen. Die relative Orientierung zweier Photos wird daher durch fünf Parameter beschrieben (siehe z.B. Kraus 1990a).

<sup>7</sup>Durch die ersten beiden Photos ist das Modellkoordinatensystem der relativen Orientierung vorgegeben, die Orientierung jedes weiteren Photos relativ zu diesem Modellsystem wird durch drei Verschiebungen und drei Drehwinkel beschrieben.

<sup>8</sup>sechs Bildkoordinatenbeobachtungen von drei Bildpunkten - drei unbekannte Objektpunktkoordinaten

Die genäherten Photos und die genäherten Verknüpfungskurven sind in der Abbildung 4.3-2 dargestellt.

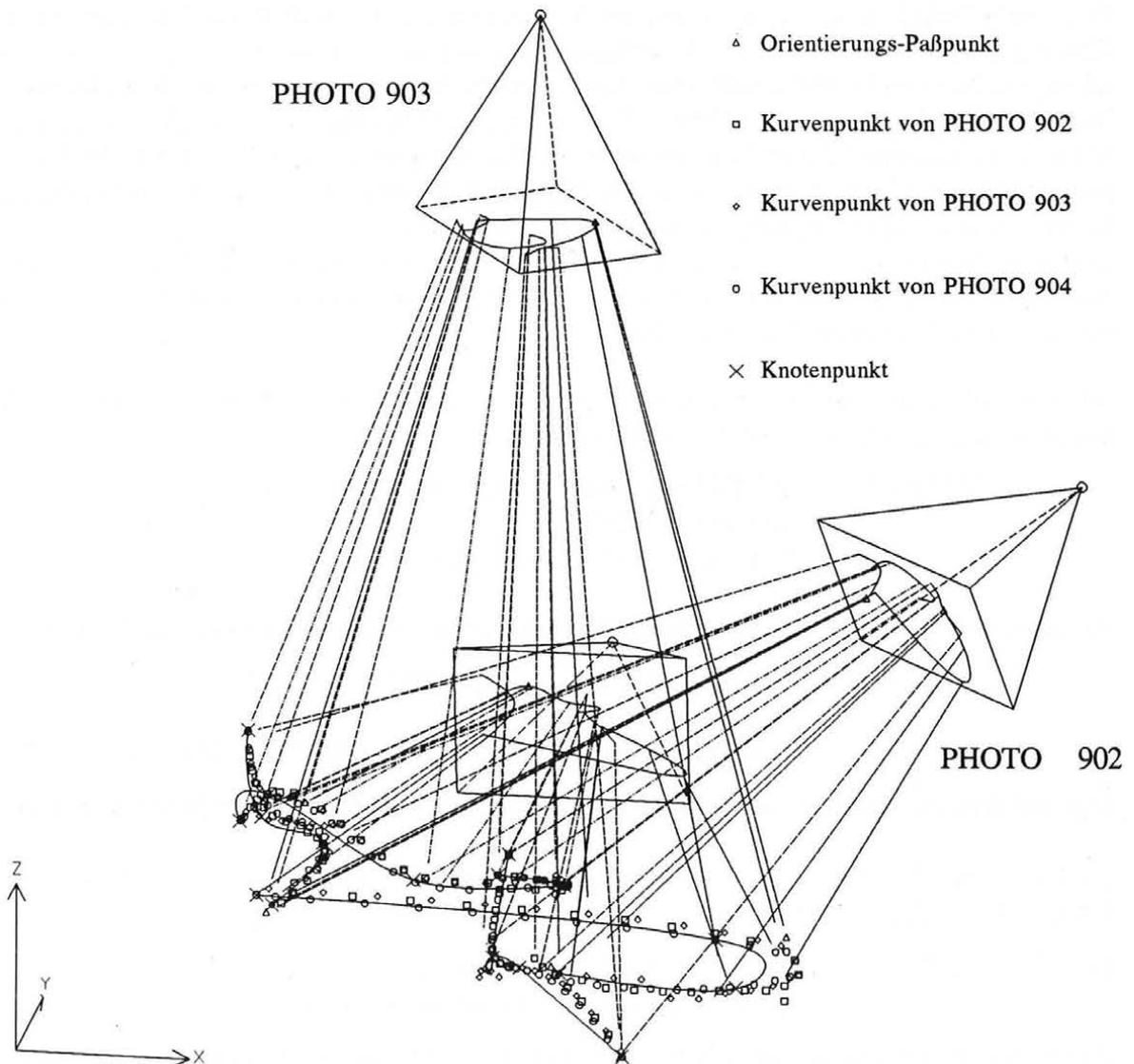


Abb. 4.3-2: Näherungswerte für die Bündelblockausgleichung mit Verknüpfungskurven

Die provisorischen Verknüpfungspunkte werden nun nicht mehr benötigt, da im folgenden die Verknüpfung der Photos ausschließlich mit den abgebildeten Kurven erfolgen soll.

#### 4.3.2 Bildorientierung bei gleichzeitiger Rekonstruktion der Verknüpfungskurven

Zu Beginn der Bündelblockausgleichung sind die Näherungswerte zu verbessern. In dieser Anfangsphase empfiehlt sich die folgende Methode zur vorläufigen Stabilisierung der inneren Knoten:

In der Abbildung 4.3-1 wurden für jede Kurve anhand eines Photos jene Bildpunkte geschätzt, die wahrscheinlich ungefähr den inneren Knoten der Kurve entsprechen (diese Punkte sind durch ein X gekennzeichnet). Die inneren Knoten sollen nun vorläufig in der Nähe jener Kurvenpunkte bleiben, die diesen Bildpunkten entsprechen.

Zu diesem Zweck wird für jeden inneren Knoten eine Modellbeobachtung<sup>9</sup> des betreffenden Kurvenpunktes eingeführt: Der Koordinatenursprung solch eines Modells ist der Knoten selbst; die fiktiven Modellkoordinaten des Kurvenpunktes entsprechen dem Modellursprung. Die Drehwinkel (z.B. mit den Werten 0, 0, 0) und der Maßstab (= 1) bleiben konstant. Mit Hilfe der Genauigkeit dieser fiktiven Modellbeobachtung wird während der Ausgleichung die Entfernung des Knotens von seinem zugehörigen Kurvenpunkt beeinflusst; im vorliegenden Beispiel wurde diese Genauigkeit mit 0.01 angenommen.

Durch die Spezifikation von "MODEL=ORIGIN" während der Ausgleichung wird nun der Modellursprung, also der Knoten, bei den Objektkoordinaten des Modellpunktes, also beim ausgewählten Kurvenpunkt, beobachtet.

Mit den solcherart stabilisierten Knoten erfolgt jetzt die Verbesserung der Form der Verknüpfungskurven durch einen Vorwärtsschnitt:

```
"ADJUST  SPLINE=KNOT=T-PAR=OBJECT
          MODEL=ORIGIN
          PHOTO=OBJECT(902-904) ."
```

Anschließend erfolgt der Bündelblockausgleich mit den stabilisierten inneren Knoten:

```
"ADJUST  SPLINE=KNOT=T-PAR=OBJECT
          MODEL=ORIGIN
          PHOTO=ORIGIN=ROTPAR=OBJECT(902-904) ."
```

Das enditerierte Ergebnis stellte sich im vorliegenden Fall nach sieben Iterationen ein.

Jetzt sind die Näherungen bereits so gut, daß im folgenden auf die Stabilisierung der inneren Knoten verzichtet werden kann:

```
[4.3-2]: "ADJUST  SPLINE=KNOT=T-PAR=OBJECT
          PHOTO=ORIGIN=ROTPAR=OBJECT(902-904) ."
```

Aufgrund der für eine Verknüpfungskurve relativ vielen und daher schwierig zu optimieren Knoten der SPLINE-Kurve 4000 sind bei dem vorliegenden Testbeispiel 35 Iterationen bis zum enditerierten Zustand erforderlich (ohne die Kurve 4000, nur mit den Kurven 1000, 2000 und 3000, werden 11 Iterationen benötigt). Die Ergebnisse der Ausgleichung [4.3-2] sind in der Tabelle 4.3-2 und in der Abbildung 4.3-3 dargestellt.

---

<sup>9</sup>In Zukunft soll diese Form der Knotenstabilisierung durch folgende Erweiterung der Knotenparameterbeobachtungen einfacher realisiert werden:

Der Benutzer wählt einen Kurvenpunkt  $P$ , in dessen Nähe sich der innere Knoten  $K$  befinden soll.  $t$  sei der aktuelle Kurvenparameter von  $P$ ,  $\bar{t}$  sei die Knotenparameterbeobachtung für  $K$ . Vor jedem Ausgleichungsschritt erfolgt nun automatisch die Zuweisung  $\bar{t} = t$ .

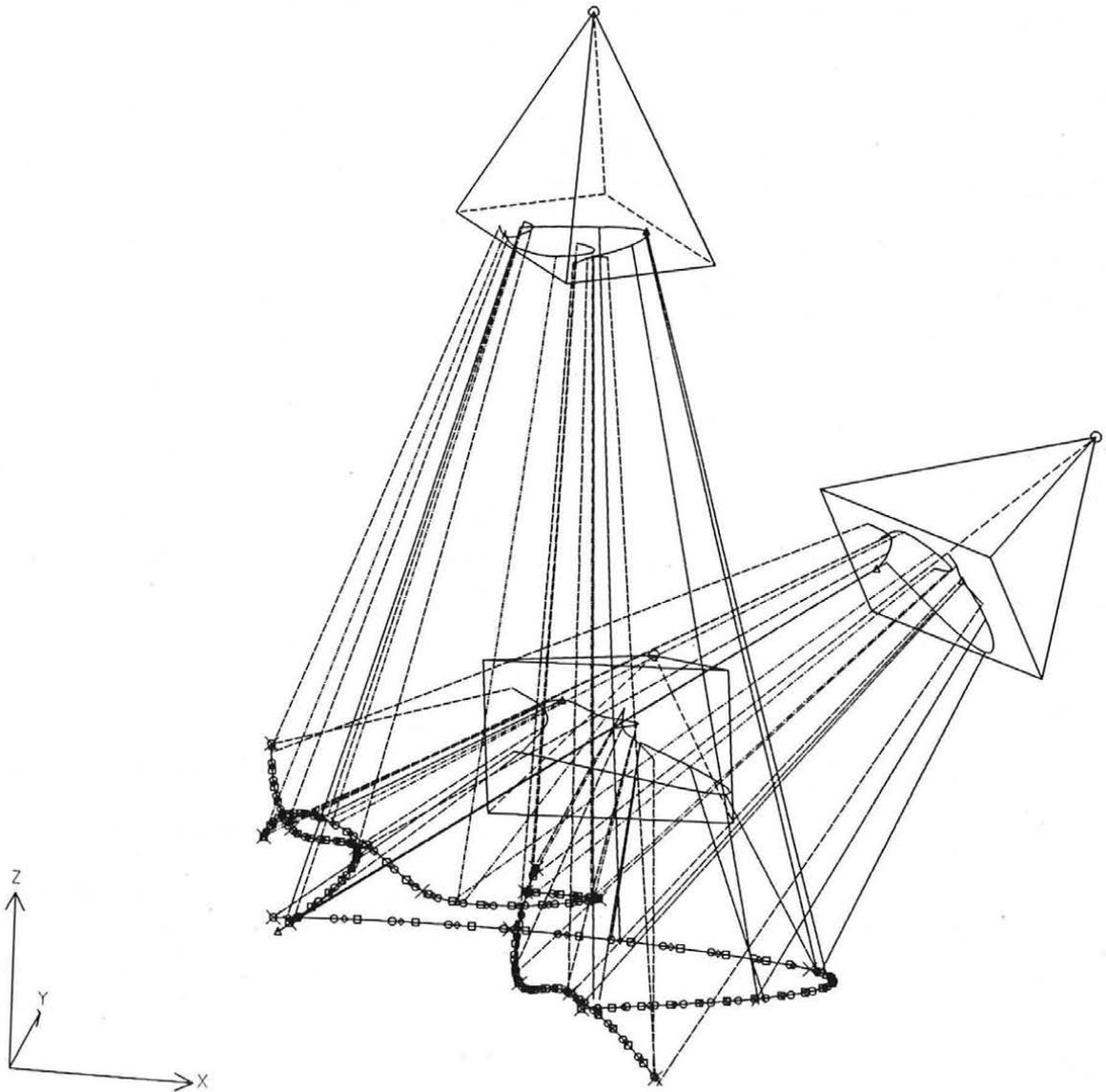


Abb. 4.3-3: Das Ergebnis der Bündelblockausgleichung [4.3-2]

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma I)/o$ $l_{max}$	PRJCTR, ROTPAR - $t_i$ $\bar{t}_i$ $\sigma_{\bar{t}_i}$
PHO 902 .010	81 81	.041 .187 .020 .058	100.306 99.857 49.479, 56.759 68.316 102.144
PHO 903 .010	85 85	.041 .196 .023 .073	54.244 35.876 114.965, 0.098 0.118 339.872
PHO 904 .010	85 85	.022 .103 .037 .136	50.621 115.223 15.343, 98.641 95.755 97.015
SPL 1000 .010 Schmiegl.	71 71 71	.021 .060 .014 .038 .018 .060	0.000 23.377 38.195 50.000 0.000 50.000 0.010 0.010
SPL 2000 .010 Schmiegl.	52 52 52	.008 .021 .004 .015 .003 .012	0.000 17.466 31.765 50.000 0.000 50.000 0.010 0.010
SPL 3000 .010 Schmiegl.	53 53 53	.003 .007 .001 .004 .003 .008	0.000 19.027 34.482 50.000 0.000 50.000 0.010 0.010
SPL 4000 .010 Schmiegl.	71 71 71	.007 .017 .005 .024 .009 .026	0.000 20.655 26.531 41.185 50.000 0.000 50.000 0.010 0.010
CON 8888 .010	4 4 4	.004 .005 .002 .003 .002 .003	
Anz.It.=35, Beob.=1263, Unbek.=1077, $\Sigma wll=0.594$ , $\Sigma wvv=0.592$ , $\sigma_0=0.037$ , ( $\sigma_{apriori}=0.010$ )			

Tab. 4.3-2: numerische Ergebnisse der Bündelblockausgleichung [4.3-2]

Aus der Tabelle 4.3-2 geht hervor, daß die Anpassung der Kurve 1000 an die Bildstrahlen signifikant schlecht ist. Da ein Einfügen zusätzlicher Knoten aus den eingangs erwähnten Gründen nicht zielführend ist, wird zur Verbesserung des Ergebnisses der schlecht angepaßte Kurventeil weggelassen und die Bündelblockausgleichung fortgesetzt (siehe Abb. 4.3-4 und Tab. 4.3-3):

[4.3-3]: "ADJUST SPLINE=KNOT=T-PAR=OBJECT  
PHOTO=ORIGIN=ROTPAR=OBJECT(902-904) ."

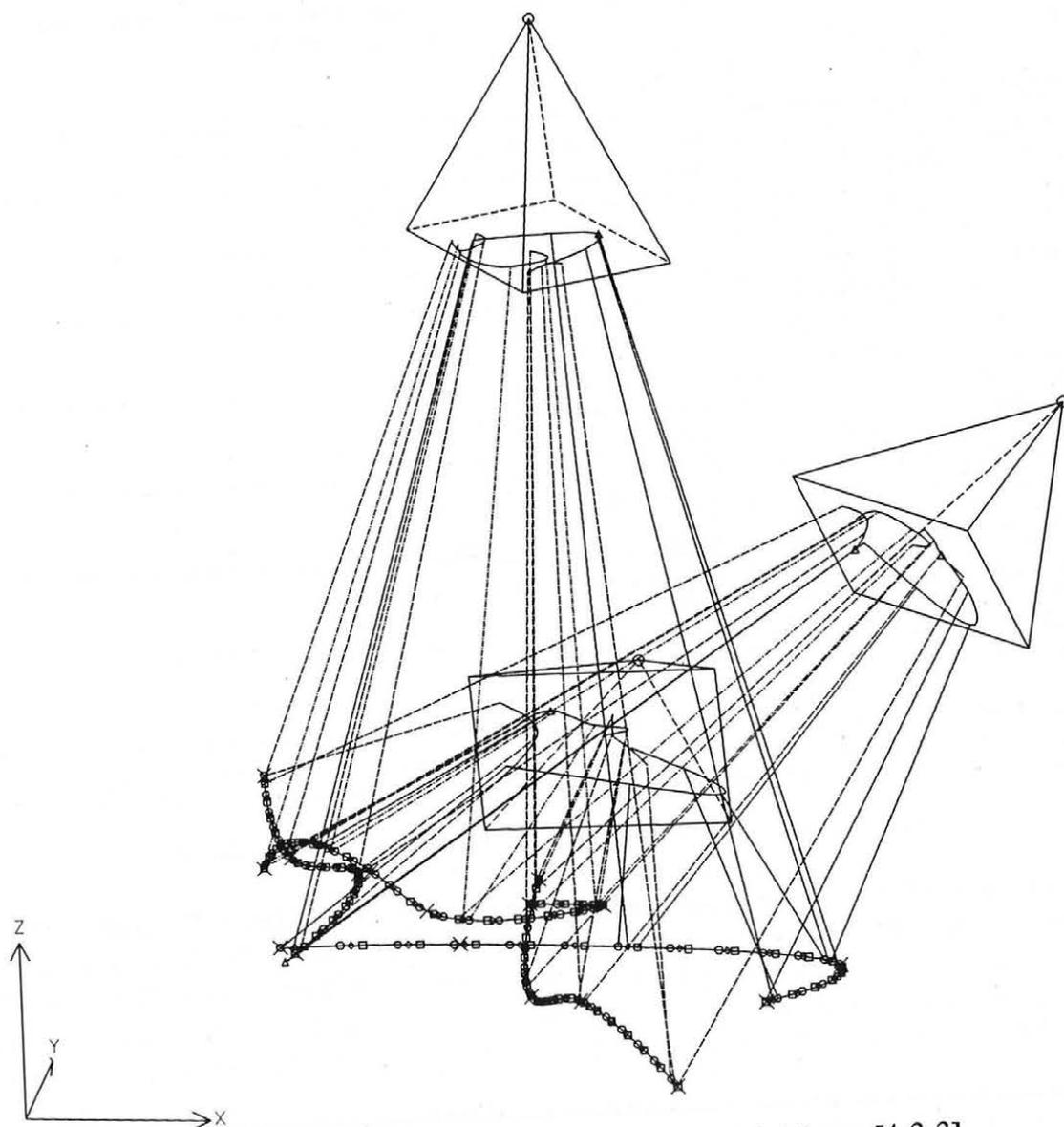


Abb. 4.3-4: Das Ergebnis der Bündelblockausgleichung [4.3-3]

Raum $\sigma_{Beob}$ Subtyp	$\sigma_x$ $\sigma_y$ $\sigma_z$	$(\Sigma l)/o$		PRJCTR, ROTPAR - $t_i$					
		$l_{max}$		$\bar{t}_i$ $\sigma_{\bar{t}_i}$					
PHO 902 .010	80 80	.017 .019	.061 .067	99.908	99.853	50.116,	56.978	67.885	102.018
PHO 903 .010	79 79	.019 .016	.062 .052	53.758	36.027	114.850,	0.001	0.159	339.944
PHO 904 .010	79 79	.013 .020	.044 .072	50.360	114.978	15.132,	98.772	95.915	97.013
SPL 1000 .010 Schmiegl.	54 54 54	.004 .007 .006	.014 .020 .017	0.000	14.029	38.330	50.000	50.000	0.010
SPL 2000 .010 Schmiegl.	54 54 54	.007 .004 .003	.019 .013 .012	0.000	18.271	31.959	50.000	50.000	0.010
SPL 3000 .010 Schmiegl.	54 54 54	.003 .001 .003	.007 .004 .008	0.000	18.920	34.542	50.000	50.000	0.010
SPL 4000 .010 Schmiegl.	72 72 72	.005 .005 .009	.017 .023 .025	0.000	20.766	26.461	41.120	50.000	50.000 0.010
CON 8888 .010	4 4 4	.003 .002 .001	.004 .002 .002						

Anz.It. = 10, Beob. = 1198, Unbek. = 1025,  $\Sigma wll = 0.162$ ,  $\Sigma wvv = 0.162$ ,  $\sigma_0 = 0.020$ , ( $\sigma_{aprior} = 0.010$ )

Tab. 4.3-3: numerische Ergebnisse der Bündelblockausgleichung [4.3-3]

Abschließend sollen die ausgeglichenen Ergebnisse des vorliegenden Beispielles mit den Sollwerten verglichen werden, wobei in erster Linie die am Objekt erzielten Genauigkeiten interessant sind. In der Tabelle [4.3-4] ist für jede SPLINE-Kurve die mittlere räumliche Abweichung  $m_{SPLINE}$  von den auf der Originalkurve liegenden Kontroll-Paßpunkten angegeben. Die Abbildung 4.3-5 zeigt die SPLINE-Kurven gemeinsam mit den Kontrollpunkten.

SPLINE 1000 $m_{SPLINE}$	SPLINE 2000 $m_{SPLINE}$	SPLINE 3000 $m_{SPLINE}$	SPLINE 4000 $m_{SPLINE}$
±0.137	±0.178	±0.109	±0.143

Tab. 4.3-4: tatsächliche Lagefehler der SPLINE-Kurven aus der Bündelblockausgleichung [4.3-3]

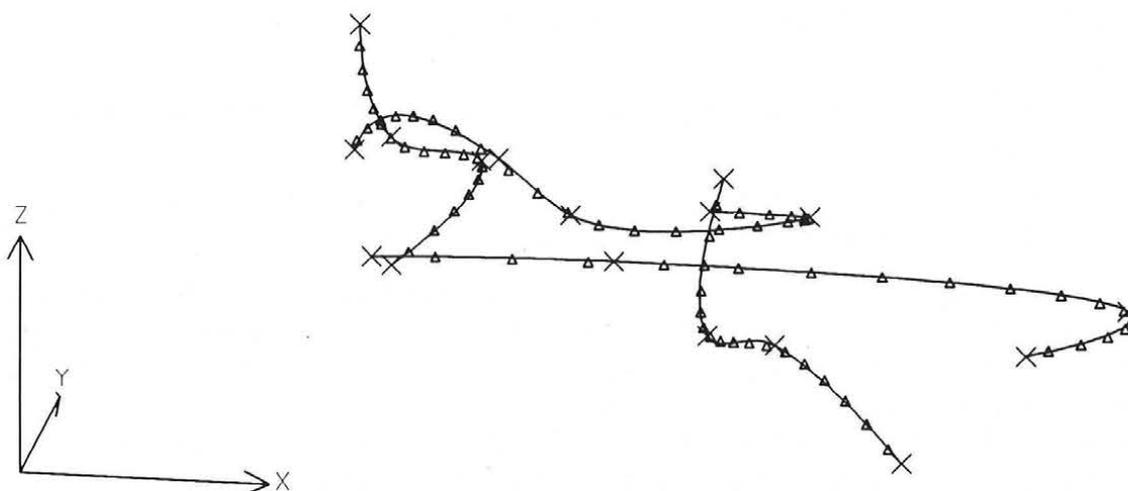


Abb. 4.3-5: SPLINE-Kurven aus der Bündelblockausgleichung [4.3-3] mit Kontrollpunkten

### 4.3.3 Geometrische Voraussetzungen für eine Bündelblockausgleichung mit Verknüpfungskurven

Für eine Bündelblockausgleichung mit Verknüpfungskurven sind mindestens drei Photos notwendig:

Durch die Abbildungen einer Kurve in zwei Photos werden zwei Strahlenbündel definiert, die sich immer, bei jeder beliebigen Orientierung der Photos, in Form einer Raumkurve schneiden<sup>10</sup>. Erst durch die Hinzunahme eines dritten Strahlenbündels können an der Verknüpfungskurve Widersprüche entstehen, da sich drei Strahlenbündel im allgemeinen (bei unzureichender Orientierung) in drei verschiedenen Schnittkurven schneiden.

Die Schnittwinkel zwischen den Strahlenbündeln sollten gemäß 4.2.3 möglichst orthogonal sein.

Zur Abschätzung der erforderlichen Anzahl der Verknüpfungskurven können, ähnlich wie in Kapitel 4.1.3, die signifikanten Tangenten dieser Kurven betrachtet werden:

Jede dieser Tangenten wird im Objektraum durch vier unbekannte Parameter beschrieben<sup>11</sup>. Jede Abbildung einer Tangente kann durch zwei beobachtete Parameter definiert werden. Bei drei Photos ergeben sich daher zwei redundante Gleichungen pro Tangente.

Für die relative Orientierung der drei Photos sind 11 unbekannte Parameter zu bestimmen, dafür sind folglich mindestens sechs signifikante Tangenten erforderlich.

<sup>10</sup>Nur bei der richtigen originalgetreuen Orientierung der beiden Photos entspricht diese Schnittkurve der Originalkurve.

<sup>11</sup>z.B. durch die beiden Koordinaten des Durchstoßpunktes der Tangente mit einer Koordinatenhauptebene und die beiden räumlichen Richtungswinkel der Tangente.

Als Verknüpfungskurven eignen sich in erster Linie "einfache" Kurvenstücke die durch wenige freie (nicht stabilisierte) innere Knoten nachgebildet werden können, wie zum Beispiel:

- U-förmige Kurven mit insgesamt drei Knoten und zwei signifikanten Tangenten, oder
- S-förmige Kurven mit vier Knoten und drei signifikanten Tangenten (z.B. die Kurven 2000 und 3000 des vorliegenden Beispiels).

Bei Kurven mit mehr als vier Knoten (z.B. die Kurve 4000) kann der Rechenaufwand (die erforderliche Anzahl der Iterationen) aufgrund der langwierigen Optimierung solcher Kurven erheblich ansteigen. Es empfiehlt sich daher, zur Verknüpfung solche "komplizierten" Kurven in S- und U-förmige Teile zu zerlegen.

Die genaue Rekonstruktion von "komplizierten" Kurven kann nach vollendeter Bündelblockausgleichung durch eine Kurvenanpassung an die fixierten Strahlenbündel erfolgen.

## 4.4 Modellorientierung mit Hilfe von Paßkurven

Gegeben seien die Modelle von Raumkurven in einem Modellkoordinatensystem (z.B. ein Stereomodell aus zwei Photos mit Abbildern von Raumkurven). Gesucht ist die Modellorientierung gegenüber dem Objektkoordinatensystem. Diese Orientierung besteht aus den Objektkoordinaten des Modellursprunges, der Verdrehung des Modelles und dem Modellmaßstab. Die Beobachtungen bestehen aus dreidimensionalen Modellpunkten, die entlang der Modellkurven registriert wurden (siehe Abb. 4.4-1), sowie aus den dreidimensionalen Paßpunkten, gemessen entlang der Raumkurven im Objektkoordinatensystem (siehe Abb. 4.4-2). Im allgemeinen ist es unmöglich, homologe Modell- und Paßpunkte zu messen.

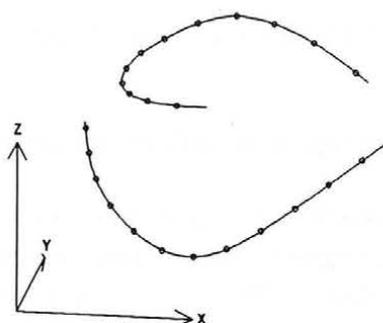


Abb. 4.4-1: Modellkurven mit beobachteten Modellpunkten

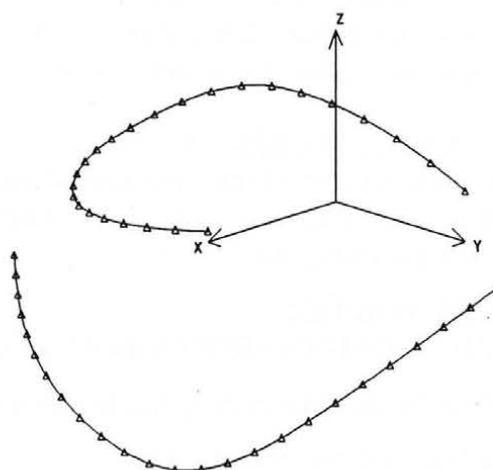


Abb. 4.4-2: Raumkurven im Objektkoordinatensystem mit beobachteten Paßpunkten

Die Modellorientierung erfolgt nun ähnlich wie die in Kapitel 4.1 behandelte Bildorientierung: zunächst erfolgt die Kurvenanpassung an die Paßpunkte, genauso wie in Kapitel 4.1.1 beschrieben; anschließend wird die Modellorientierung mit konstanten Paßkurven durchgeführt.

Für diese Modellorientierung mit konstanten Paßkurven ergeben sich bei  $q$  Modellpunkten folgende Beobachtungen:

- $3q$  fiktive Kurvenpunktkoordinaten,
- $3q$  Modellpunktkoordinaten,

und folgende Unbekannten:

- 3q Objektpunktkoordinaten,
- q Kurvenparameter,
- 3 Objektkoordinaten des Modellursprunges,
- 3 Drehwinkel des Modellkoordinatensystems gegenüber dem Objektkoordinatensystem,
- 1 Modellmaßstab gegenüber dem Objektkoordinatensystem.

Die Forderung für eine zumindest eindeutig bestimmte Ausgleichung lautet daher:

$$4q + 7 \leq 6q \rightarrow q \geq 3.5$$

Die Ausgleichung ist also bereits ab vier im Modell beobachteten Kurvenpunkten überbestimmt.

Für die geometrisch sichere Orientierung ist jedoch wiederum die Anzahl der signifikanten Tangenten entscheidend:

Eine Tangente kann im Modellkoordinatensystem durch vier beobachtete Parameter festgelegt werden. Zur Bestimmung der sieben unbekanntem Orientierungsparameter wären daher demnach zwei signifikante Tangenten, etwa eine U-förmige Kurve, ausreichend. Liegen diese beiden signifikanten Tangenten allerdings (nahezu) in einer Ebene, was bei U-förmigen Kurven im allgemeinen der Fall ist, so kann der Modellmaßstab (fast) nicht bestimmt werden. Für eine Modellorientierung sind daher mindestens eine Paßkurve mit drei signifikanten Tangenten (z.B. eine S-förmige Kurve) oder zwei Paßkurven mit jeweils zwei signifikanten Tangenten (z.B. zwei U-förmige Kurven) erforderlich. Diese Paßkurven sollten jedenfalls so verteilt sein, daß sie den gesamten auszuwertenden Modellbereich abdecken.

Zur Modellorientierung kann man nun wie folgt vorgehen:

Für die Näherung der Orientierungswerte können die den Modellpunkten entsprechenden Objektpunkte zum Beispiel in gleichen Parameterabständen auf den Raumkurven interpoliert werden. Danach erfolgt eine Ausgleichung mit:

```
"ADJUST  SPLINE=OBJECT
          MODEL=ORIGIN=ROTPAR=SCALE=OBJECT ."
```

Die Direktive für die endgültige Modellorientierung lautet schließlich:

```
"ADJUST  SPLINE=T-PAR=OBJECT
          MODEL=ORIGIN=ROTPAR=SCALE=OBJECT ."
```

## 4.5 Rektifizierung von Flugzeugscanneraufnahmen

Mit Hilfe von flugzeug- oder satellitengestützten Abtastern (engl. "Scanner") erhält man ein digitales Bild der Erdoberfläche. Dieses Bild enthält die Intensität der Strahlung in mehreren Spektralbereichen (sichtbares Licht, nahes Infrarot, im Falle von Rotationsabtastern auch Thermalstrahlung). Durch Klassifizierung solcher Scanneraufnahmen können auch komplexe Aufgabenstellungen, wie zum Beispiel die Einteilung des aufgenommenen Gebietes in verschiedene Landnutzungsklassen, gelöst werden. Eine Voraussetzung dafür ist die geometrische Rektifizierung der Scanneraufnahme; darunter versteht man die Entzerrung der Bildmatrix in bezug auf das Landeskoordinatensystem (siehe Kraus 1990). Das hier vorgestellte Konzept ist für die, verglichen mit Satellitenaufnahmen kompliziertere, Entzerrung von Flugzeugscanneraufnahmen gedacht.

Die Ursache für die Verzerrung der gescannten Bildmatrix liegt in der Geometrie der Aufnahme (siehe Abb. 4.5-1):

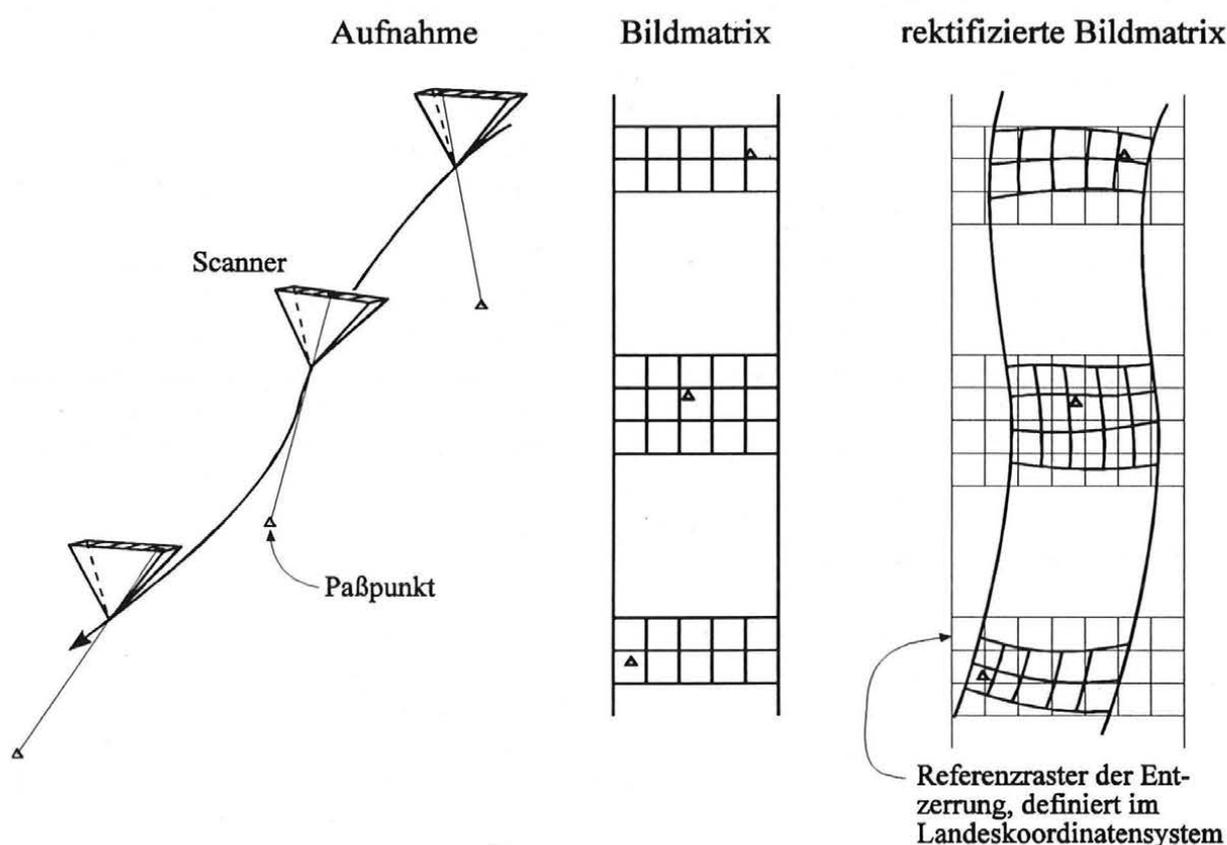


Abb. 4.5-1: Die Entzerrung der Bildmatrix einer Scanneraufnahme

Bei Rotationsabtastern wird mit Hilfe eines rotierenden Prismas die von der Erdoberfläche ausgesendete Strahlung auf einen Detektor abgebildet. Die während einer Umdrehung des Prismas gescannten Strahlungsintensitätswerte<sup>12</sup> bilden eine Zeile (einen Scan) der Bild-

<sup>12</sup>im Sinne der Bildverarbeitung auch als "Grauwerte" bezeichnet

matrix. Nach der sogenannten Panoramakorrektur entspricht diese Bildzeile einer Zentralprojektion (siehe Kraus 1990, S. 439).

Der zweite gebräuchliche Scannertyp ist die digitale Zeilenkamera, sie besteht im Prinzip aus einem Objektiv (und kann daher keine Thermalstrahlung aufnehmen) und aus einer in der Brennebene angeordneten Zeile von mehreren tausend Detektoren. Ein Scan einer Zeilenkamera stellt daher eine exakte Zentralprojektion dar (siehe Kraus 1988, S. 165).

Bei beiden Scannersystemen steht die Bildzeile annähernd senkrecht zur Flugbahn. Durch mehrere aufeinanderfolgende Scans entsteht daher Zeile für Zeile eine Bildmatrix, wobei jede Zeile eine Zentralprojektion darstellt. Aufgrund der Flugbewegung ändert sich aber die äußere Orientierung stetig von Zeile zu Zeile. Es ist daher naheliegend, die sechs Elemente der äußeren Orientierung eines Scans entlang einer stetigen Funktion der Scannummer, im folgenden auch als "Orientierungsfunktion" bezeichnet, zu interpolieren. Die Koeffizienten der Orientierungsfunktion können mit Hilfe von Paßpunkten durch eine Ausgleichung bestimmt werden.

Erfahrungsgemäß können Satellitenbahnen auch über große Distanzen hinweg durch ein einziges sechsdimensionales Polynom niedrigen Grades (meist sogar nur linear oder quadratisch) beschrieben werden. Die Flugbahn eines Flugzeuges ist jedoch für die Darstellung durch ein einziges Polynom oft zu unregelmäßig, hier bietet sich eine sechsdimensionale Orientierungsfunktion aus zusammengesetzten kubischen Polynomen an. Die Parametrisierung dieser Funktion ist, wie oben bereits erwähnt, durch die Scannummer vorgegeben und daher konstant; die Knotenparameter müssen folglich ebenfalls vorgegeben werden.

Die geometrische Rektifizierung der Scanneraufnahme kann nun nach dem Prinzip der digitalen Orthophotoherstellung erfolgen (siehe Ecker, Gsandtner, Jansa 1991):

Im Grundriß jenes Koordinatensystems, das der Entzerrung zugrunde liegt, wird ein regelmäßiges Referenzraster definiert. Mit Hilfe des bekannten Geländemodells erhält man den Höhenwert jedes Rasterpunktes. Mittels der bekannten Orientierung einer Bildzeile können die den Landeskoordinaten eines Rasterpunktes entsprechenden Bildkoordinaten bestimmt werden. Der Grauwert an dieser Stelle der Bildmatrix wird nun dem Rasterpunkt zugeordnet. Hiermit ergibt sich ein auf das regelmäßige Raster bezogenes Grauwertbild, das die rektifizierte Bildmatrix darstellt.

Wieviele Knoten kann nun die sechsdimensionale Orientierungsfunktion bei vorgegebener Anzahl von Paßpunkten haben?

Jeder im Landeskoordinatensystem sowie in der Bildmatrix gegebene Paßpunkt liefert zwei Abbildungsgleichungen; bei  $qpp$  Paßpunkten ist daher die Anzahl der Beobachtungen  $o=2qpp$ <sup>13</sup>. Die sechsdimensionale Funktion wird ausschließlich durch ihre unbekanntenen Knoten definiert.; bei  $n$  Knoten lautet daher die Anzahl der Unbekannten:  $u=6n$ . Eine zumindest eindeutig bestimmte Ausgleichung ergibt sich daher bei:

$$6n \leq 2qpp \Rightarrow n \leq \frac{1}{3}qpp$$

Eine Überbestimmung von zumindest 50% der Unbekannten erhält man bei

---

<sup>13</sup>Die  $3qpp$  Paßpunktbeobachtungen sowie die entsprechenden  $3qpp$  unbekanntenen Raumkoordinaten seien hier vorerst nicht berücksichtigt.

$$n \leq \frac{1}{4.5} qpp \quad ,$$

also ab vier bis fünf Paßpunkten pro Knoten.

Für die simultane Rektifizierung von mehreren nebeneinanderliegenden Scanneraufnahmen können auch Verknüpfungspunkte im seitlichen Überlappungsbereich verwendet werden. Bei  $qvp$  Verknüpfungspunkten, jeweils in zwei Aufnahmen sichtbar, ergeben sich daher zusätzlich  $4qvp$  beobachtete Bildkoordinaten und  $3qvp$  unbekannte Raumkoordinaten. Eine Ausgleichung kann daher durchgeführt werden ab:

$$6n + 3qvp \leq 2qpp + 4qvp \Rightarrow n \leq \frac{1}{3} qpp + \frac{1}{6} qvp$$

Die so ermittelte Knotenanzahl kann zum Beispiel in gleichen Parameterabständen angeordnet werden.

Die Direktive für die Ausgleichung der Orientierungsfunktion lautet nun:

"ADJUST PIXELPHOTO=KNOT=ROTPAR=OBJECT  
CONPOI=OBJECT ."

Als terrestrische Paßinformation bieten sich auch kurvenförmige Landschaftsmerkmale, etwa Wegränder oder Flußläufe, an, die durch SPLINE-Kurven darstellbar sind. Die Kurvenanpassung (siehe Kap. 4.1.1) kann zum Beispiel mittels Stützpunkten erfolgen, die zuvor entlang der Kartierungen der Paßmerkmale in einer topographischen Karte digitalisiert wurden. Anschließend kann mit Hilfe der Paßkurven die Orientierungsfunktion wie folgt bestimmt werden:

"ADJUST PIXELPHOTO=KNOT=ROTPAR=OBJECT  
SPLINE=T-PAR=OBJECT ."

Da bei konstanter Parametrisierung im Falle der kubischen Spline- sowie der Schmiegeinterpolation keine Linearisierungen für die Verbesserungsgleichungen der Orientierungsfunktion erforderlich sind (siehe Kap. 3.1 und 3.2), sollte sich bei Verwendung einer dieser Interpolationsarten bereits nach wenigen Iterationen das endgültige Ergebnis einstellen. Treten dann in einzelnen Intervallen der Orientierungsfunktion noch signifikant große Residuen auf, so sollten zusätzliche Knoten in diesen Intervallen eingefügt werden.

Hier wurde vorerst angenommen, daß die drei Rotationsparameter einer Bildzeile völlig unabhängig von der Flugbahn sind. Im Falle eines horizontalen Geländes ist jedoch die Längsneigung total von der Verschiebung des Aufnahmeortes in Flugrichtung abhängig (siehe Kraus 1990b, S. 453); es verbleiben demnach nur noch fünf unabhängige Orientierungsparameter. Abhilfe kann in diesem Fall die Fixierung (z.B. auf den Wert 0) des die Längsneigung beschreibenden Winkels schaffen; diese Fixierung erreicht man durch eine fiktive direkte Beobachtung des Längsneigungswinkels. Solch eine direkte Beobachtung eines Drehwinkels kann mit Hilfe eines zusätzlichen Datensatzes vom Typ ROTPAR=OBSERVED berücksichtigt werden.

Stellt sich im Rahmen von noch durchzuführenden Tests mit praktischen Daten heraus, daß die Bildzeile immer im konstanten Winkel (z.B. senkrecht) zur Flugbahn steht, dann müßte dies als Bedingung eingeführt werden. Die für diese Bedingung erforderliche Tangente der Flugbahn erhält man durch die erste Ableitung der dreidimensionalen Funktion für den Aufnahmeort. Mit Hilfe dieser Bedingung ließen sich zwei der drei Rotationsparameter in Abhängigkeit von den Knotenwerten für den Aufnahmeort angeben. Somit könnte die äußere Orientierung einer Bildzeile entlang einer reduzierten vierdimensionalen Funktion interpoliert werden.

## 4.6 Anwendungsbeispiele

### 4.6.1 Rekonstruktion eines historischen Sportwagens

Das Ziel dieses Projektes ist die Ermittlung des Siegerfahrzeuges eines Tausendmeilen-Rennens ("Mille Miglia") der dreißiger Jahre in Italien. Eine recht unscharfe zeitgenössische Amateuraufnahme (Photo 99, siehe Abb. 4.6-1) zeigt das Siegerauto. Von diesem Fahrzeug der Marke BMW, Baureihe 328, wurden insgesamt nur drei Exemplare in Handfertigung hergestellt (siehe Photo 5, Abb. 4.6-2). Diese drei Fahrzeuge befinden sich heute in verschiedenen Museen, die Karosserieformen haben sich aufgrund von Restaurierungsarbeiten teilweise erheblich verändert.



Abb. 4.6-1: Historische Aufnahme des Siegerfahrzeuges des Tausendmeilen-Rennens (Photo 99)

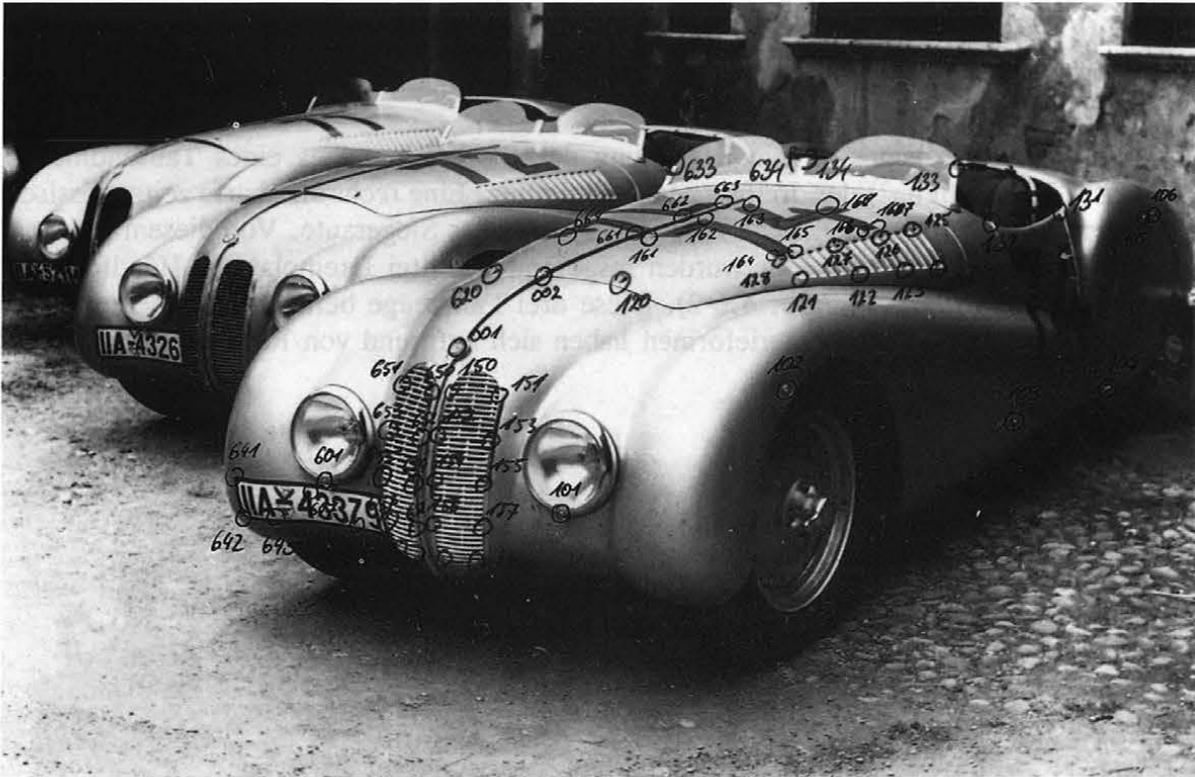


Abb. 4.6-2: Die drei Fahrzeuge der Type BMW 328 (Photo 5)

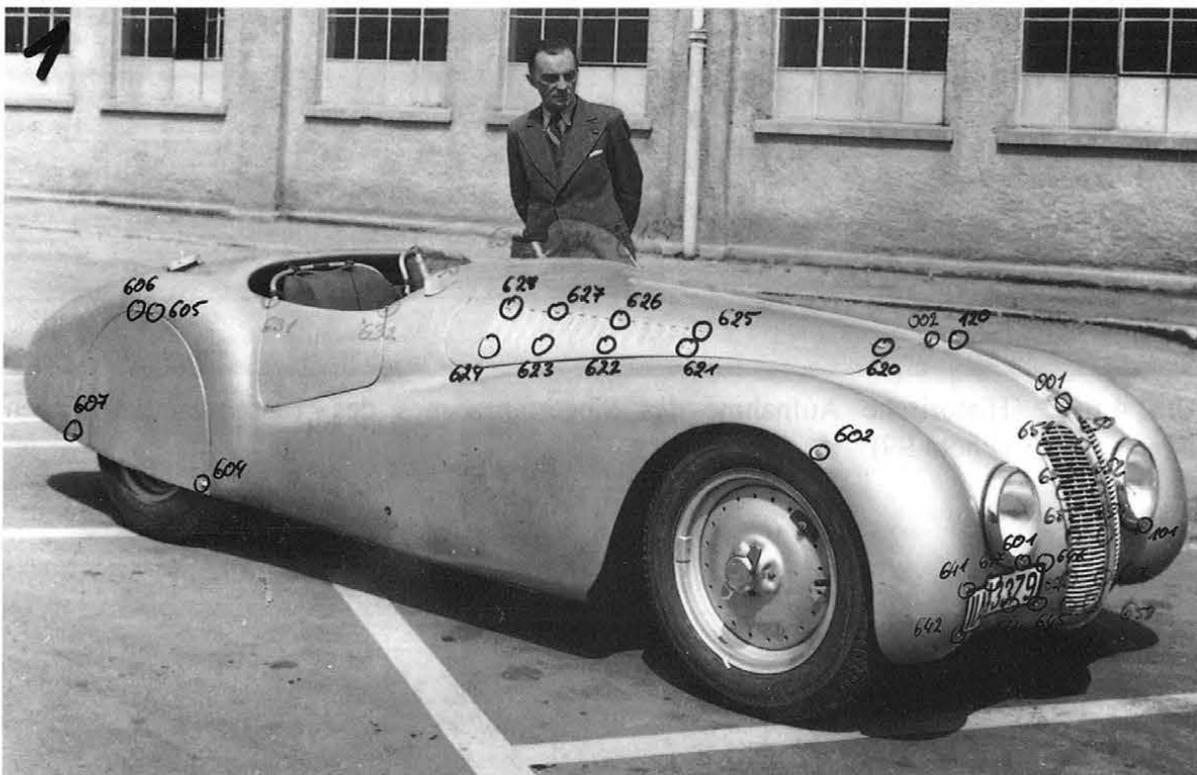


Abb. 4.6-3: Historische Aufnahme eines BMW 328 (Photo 1)

Zum heutigen Zeitpunkt sind keine Aufzeichnungen mehr vorhanden, welches der drei Fahrzeuge dieser Baureihe das Rennen gewonnen hat - die in Photo 5 ersichtlichen Kennzeichen und Rennnummern wurden bei dem Bewerb nicht verwendet. Das Siegerauto soll daher nun über die Karosserieform ermittelt werden:

In Photo 5 erkennt man die als Folge der Handfertigung unterschiedlichen Frontpartien der drei Sportwägen. Durch photogrammetrischen Rückwärtsschnitt kann nun untersucht werden, ob das in Photo 99 abgebildete Siegerauto signifikant gut zu einer bestimmten Karosserieform paßt. Diese Fahrzeugformen müssen zuvor mit Hilfe weiterer zeitgenössischer Aufnahmen (siehe z.B. Photo 1 in Abb. 4.6-3) durch photogrammetrischen Vorwärtsschnitt rekonstruiert werden. Da im Photo 99 nicht genügend punktförmige Information erkennbar ist, müssen zusätzlich Fahrzeuglinien für diesen Vergleich herangezogen werden.

In Halmer 1994 wurden vorerst die benötigten Fahrzeuglinien (Ränder der Kühleröffnungen, Motorhaubenrand, Mittelleiste der Motorhaube) rekonstruiert. Die Orientierung der Photos erfolgte durch eine Bündelblockausgleichung mit Verknüpfungspunkten; für den Wagen mit der Rennnummer 74 sind diese Punkte in den Photos 1 und 5 gekennzeichnet. Die erzielten mittleren räumlichen Punktlagefehler am Fahrzeug liegen zwischen  $\pm 3\text{mm}$  und  $\pm 13\text{mm}$ . Nach der Bildorientierung wurden die gesuchten Objektlinien durch Vorwärtsschnitt bestimmt (siehe Abb. 4.6-4).

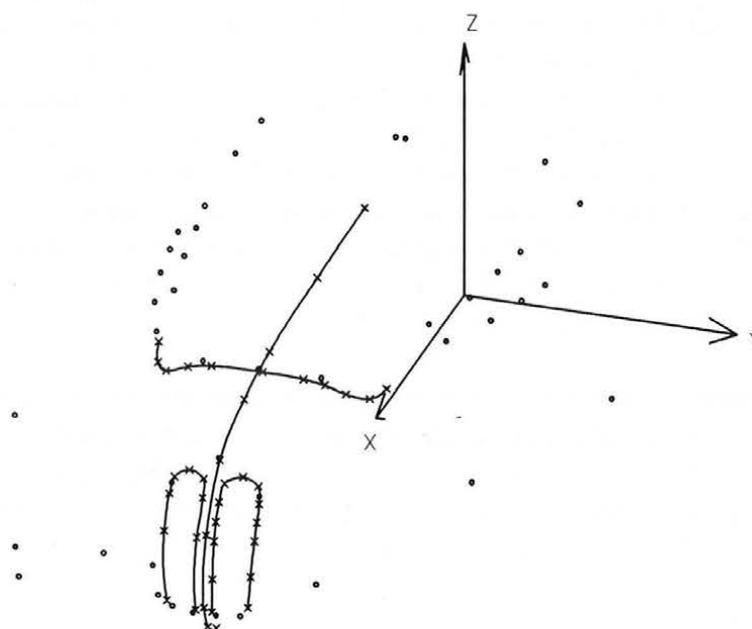


Abb. 4.6-4: Verknüpfungspunkte und rekonstruierte Karosserielinien von Wagen 74 (entnommen aus Halmer 1994).

Besondere Probleme bei den Vorwärtsschnitten ergaben sich durch die annähernd gleich hohen Aufnahmeorte der verwendeten Amateurphotos; dies führte bei einigen horizontalen Fahrzeuglinien zu schleifenden Schnitten zwischen den Strahlenbündeln. So ließen sich etwa die seitlichen Ränder der Motorhaube nicht hinreichend sicher bestimmen. Die für den späteren Rückwärtsschnitt des Photo 99 relevanten Kurventeile - also jene Linienabschnitte des Wagens 74, die auch auf dem in Photo 99 abgebildeten Siegerauto erkennbar sind -

konnten hingegen gut bestimmt werden. Die mittlere räumliche Lageabweichung der Bildstrahlen von diesen in der Abbildung 4.6-4 dargestellten Kurven beträgt  $\pm 4\text{mm}$ .

In der Fortsetzung dieses Projektes soll zunächst ein Verfahren entwickelt werden, das die spiegelsymmetrische Anordnung der ausgeglichenen SPLINE-Kurven gewährleistet. Voraussetzung dafür ist die symmetrische Lage der ausgeglichenen Knoten. Es ist daher naheliegend, auch für eine symmetrische Stützpunktanordnung zu sorgen. In Halmer 1994 wird ein Konzept vorgestellt, wie diese Symmetrie mittels zusätzlich generierter Spiegelphotos erreicht werden kann. Diese Vorgangsweise hat den zusätzlichen Vorteil, daß durch die Verdopplung der Stützpunktanzahl die Redundanz der Ausgleichung erhöht wird.

In weiterer Folge sind auch noch die kreisförmigen Scheinwerfer mit Hilfe der fiktiven Beobachtungsart GESTALT zu rekonstruieren. Abschließend erfolgt, wie eingangs beschrieben, durch Rückwärtsschnitt der Vergleich des in Photo 99 abgebildeten Siegerautos mit den rekonstruierten Karosseriemodellen.

#### 4.6.2 Objektivierung gesichtschirurgischer Eingriffe

Bei einem "gesunden" menschlichen Gesicht müssen gewisse geometrische Proportionen erfüllt sein: so ist zum Beispiel eine horizontale<sup>1</sup> Augbasis Voraussetzung für unser räumliches Sehvermögen; das Unterkiefer etwa muß zum Oberkiefer passen, um ein klagloses Kauen zu ermöglichen; nicht zuletzt ist aus ästhetischen Gründen eine mehr oder weniger symmetrische Gesichtsform wünschenswert. Sind einige dieser Proportionen nicht erfüllt, etwa als Folge eines Geburtsfehlers oder eines Unfalles, muß der Gesichtschirurg für seine Diagnose das Ausmaß dieses Defektes feststellen. Nach dem operativen Eingriff benötigt der Chirurg zur Operationskontrolle eine Darstellung der durch diesen Eingriff bewirkten Veränderung der Gesichtsform. Durch Untersuchung einer Reihe solcher Darstellungen kann der Arzt schließlich wertvolle Erkenntnisse über die zu erwartenden geometrischen Auswirkungen zukünftiger Operationen gewinnen.

Das Ziel des vorliegenden Projektes<sup>2</sup> ist nun die Visualisierung der durch einen operativen Eingriff bewirkten Veränderung der Gesichtsform. Zu diesem Zweck sind zunächst zwei dreidimensionale Gesichtsmodelle zu generieren - ein "präoperatives" Modell vor der Operation und ein "postoperatives" Modell nach der Operation. Anschließend werden diese beiden Modelle mit Hilfe von Paßmerkmalen in den unveränderten Gesichtsbereichen

---

<sup>1</sup>Die Begriffe "horizontal" beziehungsweise "symmetrisch" beziehen sich auf das folgende, in der Medizin übliche, Kopfkoordinatensystem:

Bei einer gemäß dem menschlichen Gleichgewichtsempfinden aufrechten Kopfhaltung ist die Z-Achse dieses Systems parallel zur Lotrichtung; die Y, Z-Ebene geht durch die Mitte der Augbasis und sollte gleichzeitig die Symmetrieebene des Gesichtes repräsentieren; der Koordinatenursprung liegt in der Kopfmittle. Die Angaben "links" und "rechts" sind im medizinischen Zusammenhang stets aus der Sicht des Patienten zu verstehen.

<sup>2</sup>Dieses Projekt wird vom Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der Technischen Universität Wien gemeinsam mit der Klinik für Kiefer- und Gesichtschirurgie der Universität Wien durchgeführt und vom Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung (FWF) finanziell unterstützt.

aufeinander "eingepaßt".

#### 4.6.2.1 Vergleich von Gesichtsoberflächenmodellen

Dreidimensionale Modelle der Gesichtsoberfläche können durch stereophotogrammetrische Auswertung gewonnen werden (siehe Rasse, Forkert, Waldhäusl 1991):

Im vorliegenden Projekt kommen handelsübliche Kleinbildkameras mit 135mm-Objektiven zum Einsatz, die mit konvergenter Aufnahmeichtung (Konvergenzwinkel:  $6^{\text{gon}}$ ) in einer Basis von 20cm (Objektstand ca. 2m) angeordnet sind<sup>3</sup> und synchron ausgelöst werden können. Ein mitphotographierter Rahmen mit kalibrierten Anordnung von Punkten (siehe Abb. 4.6-5) ermöglicht zusammen mit der bekannten Basis die äußere Orientierung sowie die Kontrolle der inneren Orientierung der beiden Aufnahmen. Die Auswertung solch eines Stereomodelles erfolgt an einem analytischen Auswertegerät durch punktweise stereoskopische Erfassung der Gesichtsoberfläche.

Die Transformation des postoperativen Modelles auf das präoperative Modell erfolgte bisher mit Hilfe von punktförmigen Paßmerkmalen, wobei für eine gut kontrollierbare Einpassung etwa sechs bis zehn, über das gesamte Gesicht verteilte, Paßpunkte erforderlich wären. Solch eine Menge von unveränderlichen, gut meßbaren, Punkten ist jedoch kaum von Natur aus in einem menschlichen Gesicht vorhanden. Es mußten daher in der Regel zusätzliche Paßpunkte tätowiert werden; aus ästhetischen Gründen können diese Tätowierungen allerdings selten in den für eine sichere Einpassung optimalen Gesichtsbereichen erfolgen.

In Zukunft sollen daher zusätzlich Paßkurven für die Einpassung des postoperativen Modelles auf das präoperative Modell verwendet werden; ein entsprechendes Pilotprojekt wurde in Halmer 1994 bearbeitet. Die Abbildung 4.6-5 zeigt Aufnahmen des Patienten vor der Operation sowie die verwendete kurvenförmige Paßinformation. Mit Hilfe von im präoperativen Modell gemessenen Stützpunkten erfolgte zunächst eine Kurvenanpassung. Die mittlere räumliche Abweichung der ausgeglichenen Kurven von den Stützpunkten beträgt  $\pm 1.5\text{mm}$ . Die ausgeglichenen Paßkurven sind in der Abbildung 4.6-6 dargestellt.

---

<sup>3</sup>Die im Vergleich zum Objektstand recht geringe Basis ergibt sich aus der Forderung, daß beide Ohren des Patienten in beiden Stereobildern sichtbar sein sollen. Der Bereich der Ohren wird durch Gesichtsoperationen selten verändert und bietet sich daher sowohl für die Anbringung künstlicher Paßpunkte als auch für die Verwendung natürlicher Paßmerkmale an.

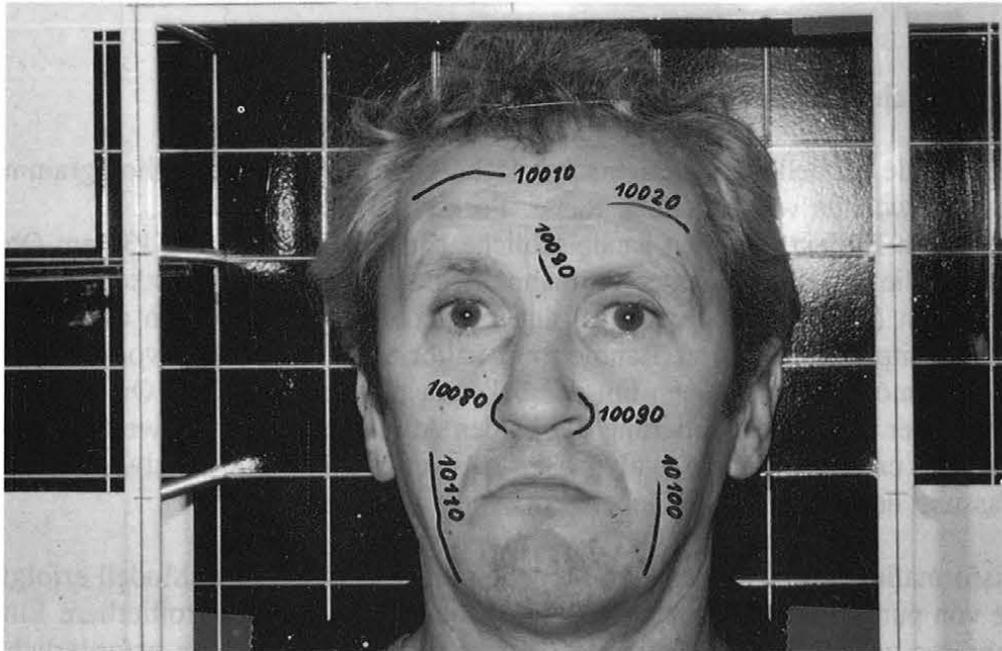


Abb. 4.6-5a: Präoperative frontale Aufnahme des Patienten mit eingezeichneten Paßkurven

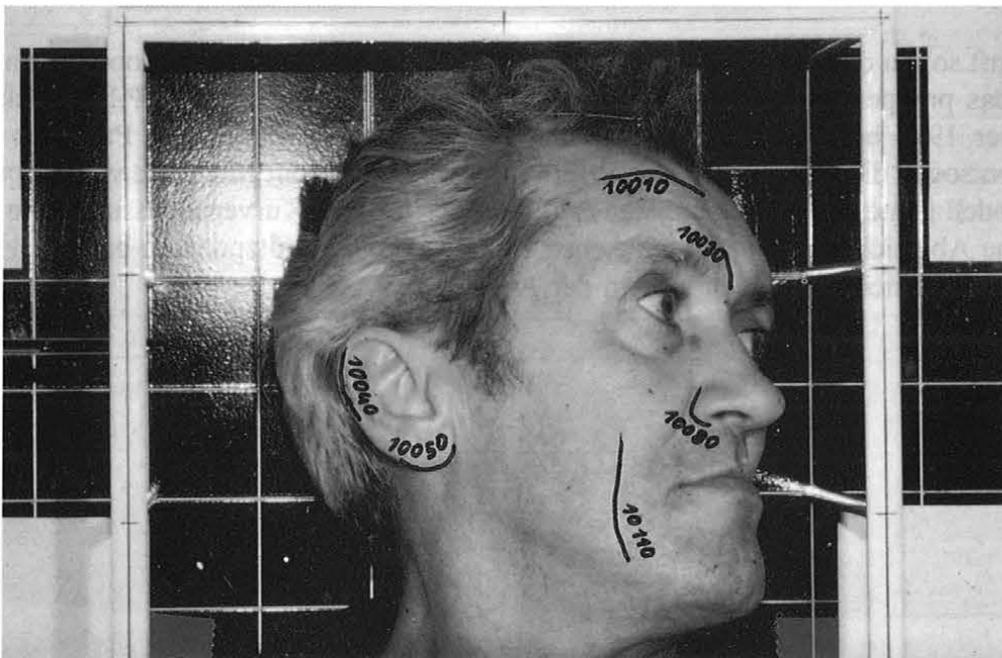


Abb. 4.6-5b: Zusätzliche seitliche präoperative Aufnahme des Patienten mit eingezeichneten Paßkurven

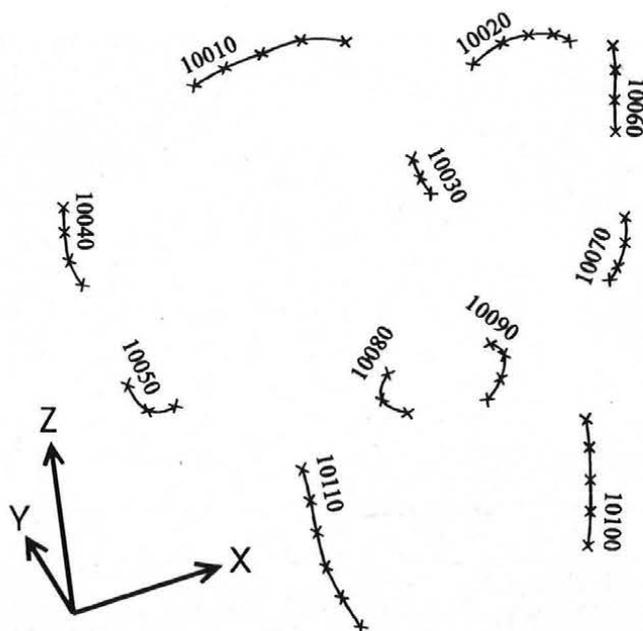


Abb. 4.6-6: Paßkurven, ausgeglichen mit Hilfe von Kurvenstützpunkten des präoperativen Gesichtsmodelles (entnommen aus Halmer 1994).

Mangels postoperativer Auswertungen wurden für dieses Pilotprojekt aus weiteren, seitlichen, präoperativen Stereoaufnahmen zwei zusätzliche Gesichtsmodelle generiert und anschließend mit Hilfe der Paßkurven transformiert. Die dafür verwendeten Kurvenpunkte der beiden zusätzlichen Gesichtsmodelle weisen nach der Einpassung eine mittlere räumliche Lageabweichung von den Paßkurven im Ausmaß von  $\pm 1.5\text{mm}$  auf. Dieses Ergebnis ist somit geringfügig genauer als eine mit zehn Paßpunkten berechnete Vergleichsversion.

Nach der Einpassung eines postoperativen Gesichtsmodelles auf das zugehörige präoperative Modell kann die durch den operativen Eingriff bewirkte Veränderung der Gesichtsform visualisiert werden. Zu diesem Zweck wurden in Klimpfinger 1993 und in Rusch 1993 verschiedene interaktive Visualisierungstechniken entwickelt; als Beispiel sei hier eine gemeinsame Darstellung der prä- und postoperativen Gesichtsoberfläche gezeigt (siehe Abb. 4.6-7, Tafel I). Dieses dargestellte Beispiel veranschaulicht die Auswirkungen einer Kieferoperation; die Einpassung erfolgte in diesem Fall mit Hilfe von Paßpunkten.

#### 4.6.2.2 Vergleich von Schädelvolumensmodellen

Korrekturen der Gesichtsoberfläche erfolgen in der Gesichtschirurgie meist durch operative Veränderung des Schädel skelettes. Für den Chirurgen ist daher auch eine Darstellung der operationsbedingten skelettalen Veränderungen wünschenswert. Ein dreidimensionales Modell des Schädel skelettes kann aus einer Computertomographie-Aufnahme des Patienten gewonnen werden (siehe Dorffner 1994). Diese Methode beruht auf Röntgenstrahlung und liefert eine Folge paralleler Schnittbilder durch den Kopf des Patienten. Jedes Schnittbild ist eine zweidimensionale Matrix von Grauwerten entsprechend der Dichteverteilung entlang der Schnittebene durch den Schädel. Weichteile werden durch Pixel mit niedrigen, Knochen durch Pixel mit sehr hohen Grauwerten repräsentiert (siehe Abb. 4.6-8).

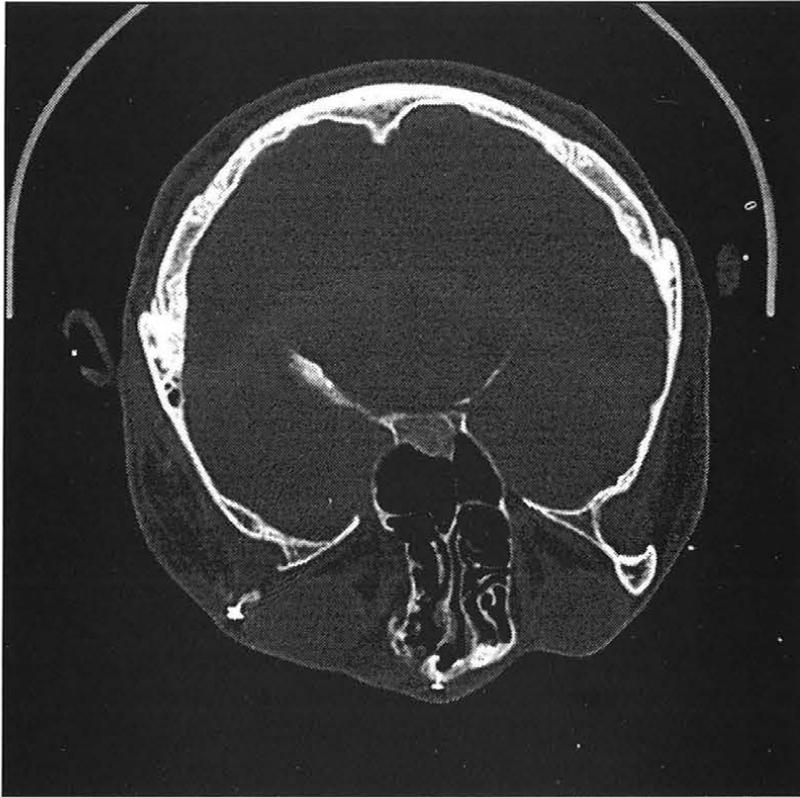


Abb. 4.6-8: Schnittbild durch einen Schädel in der Höhe der Schläfen; erzeugt im Zuge einer Computertomographie-Aufnahme (niedrige Grauwerte sind dunkel, hohe Grauwerte hell dargestellt).

Der konstante Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Schnittebenen ist bekannt, ebenso die Größe der Pixel. Somit kann durch "Aufeinanderschichten" der einzelnen zweidimensionalen Schnittbilder ein dreidimensionales "Voxelmodell"<sup>4</sup> gebildet werden. Durch die Vorgabe eines Schwellwertes (engl. "threshold") kann man alle Voxel mit größerem oder gleichem Grauwert extrahieren. Anschließend kann eine, alle diese "überlebenden" Voxel einhüllende, glättende Schwellwertfläche berechnet und dargestellt werden. Mit Hilfe eines geeigneten Schwellwertes läßt sich somit, wie in Abbildung 4.6-9 gezeigt, das computertomographisch erfaßte Schädel skelett darstellen. Dem dargestellten Beispiel liegt eine Aufnahme mit 118 Schnittbildern à 512·512 Pixel (Original-Voxelgröße:  $0.4 \cdot 0.4 \cdot 2.0 \text{mm}^3$ ) zugrunde; zur schnelleren Bearbeitung im Visualisierungsprogramm erfolgte die Darstellung selbst mit einem reduzierten Datensatz von  $128^3$  Voxel (Voxelgröße des reduzierten Datensatzes:  $(2 \text{mm})^3$ ).

---

<sup>4</sup>Die Bezeichnung "Voxel" stammt von VOLUME (X) ELEMENT und steht für ein Volumenelement einer dreidimensionalen Matrix.

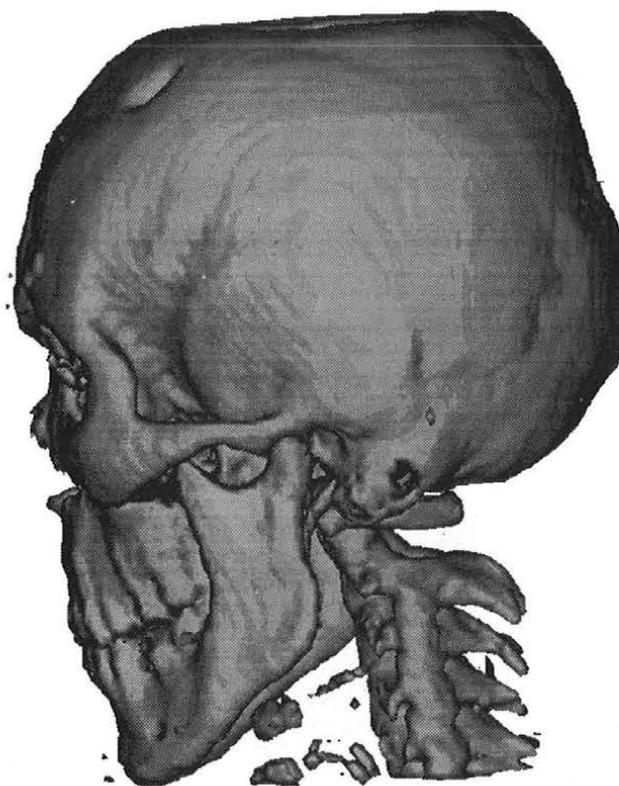


Abb. 4.6-9: Darstellung eines Schädel skelettes (präoperativ) mit einer Auflösung von  $128^3$  Voxel

Da auf dem Schädel skelett von Natur aus nur wenige definierte Punkte vorhanden sind, mußten für den prä-postoperativen Vergleich bisher künstliche röntgendichte Punkte, meist kleine Kugeln aus Edelmetall, implantiert werden. Durch Verwendung natürlicher kurvenförmiger Paßmerkmale des Schädel skelettes kann man nun dem Patienten diesen zusätzlichen operativen Eingriff ersparen. Eine geeignete Paßkurve findet man etwa entlang des Schläfenknochens; die Abbildung 4.6-10 zeigt dieses Knochenstück des Schädel s von Abbildung 4.6-8, generiert sowohl aus der präoperativen (hell) als auch aus der postoperativen (dunkel) Aufnahme (Voxelgröße:  $(1\text{mm})^3$ ). Beide Knochenstücke sind vorerst im Koordinatensystem der jeweiligen Computertomographie-Aufnahme dargestellt und daher relativ zueinander verdreht und verschoben.

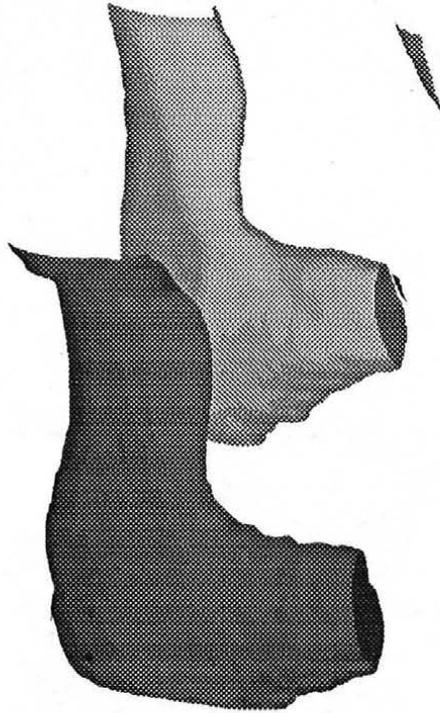
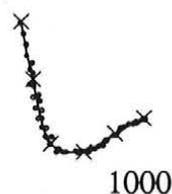
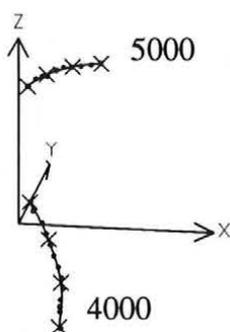
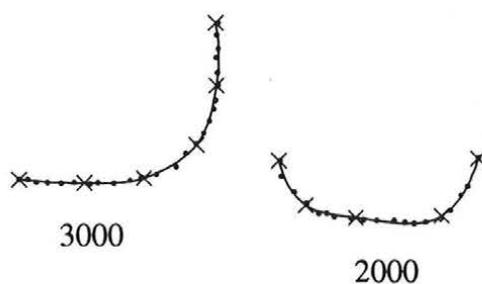


Abb. 4.6-10: Ausschnitt im Bereich der linken Schläfe des präoperativen Skelettmodelles von Abb. 4.6-9 (hell), gemeinsam dargestellt mit dem entsprechenden Ausschnitt des postoperativen Modells (dunkel). Die Voxelgröße ist in beiden Modellen  $(1\text{mm})^3$ .

Für die Transformation des postoperativen Schädelmodelles in das Koordinatensystem des präoperativen Modelles müssen zunächst in jedem Modell Kurvenpunkte extrahiert werden; vorerst erfolgt dies noch interaktiv durch manuelle Messung am Bildschirm: mit Hilfe eines Fadekreuzes wird das Abbild des auf der Knochenoberfläche liegenden Kurvenstützpunktes eingestellt, anschließend werden vom Visualisierungsprogramm die dreidimensionalen Modellkoordinaten des entsprechenden Oberflächenpunktes berechnet und abgespeichert. Die Abbildung 4.6-11 zeigt nun die mit Hilfe der Stützpunkte des präoperativen Modelles ausgeglichenen Paßkurven. Die mittlere räumliche Lageabweichung dieser Kurvenanpassung beträgt  $\pm 0.2\text{mm}$ <sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Die Stützpunktmessung erfolgte auf Knochenflächen, die aus Datensätzen mit  $(1\text{mm})^3$  Voxelgröße generiert wurden.



- 1000: linke Schläfe, Oberkante
- 2000: Hinterkopf - linker Blutkanal, Mittellinie
- 3000: Hinterkopf - rechter Blutkanal, Mittellinie
- 4000: Knochen im unteren Nasenbereich, Vorderkante
- 5000: Eintrittsloch des Halswirbels, Innenkante
- 6000: rechter oberer Backenzahn, Vorderkante

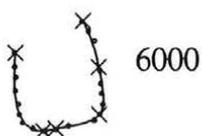


Abb. 4.6-11: Anpassung der Paßkurven an die fixierten Stützpunkte des präoperativen Skelettmodelles

Mit Hilfe der im postoperativen Modell registrierten Kurvenpunkte erfolgt nun die Modell-einpassung auf die konstanten Paßkurven. Nach der Beseitigung der groben Fehler durch robuste Schätzung ergibt sich eine mittlere räumliche Lageabweichung der transformierten Kurvenpunkte von den Paßkurven von  $\pm 0.3\text{mm}$ .

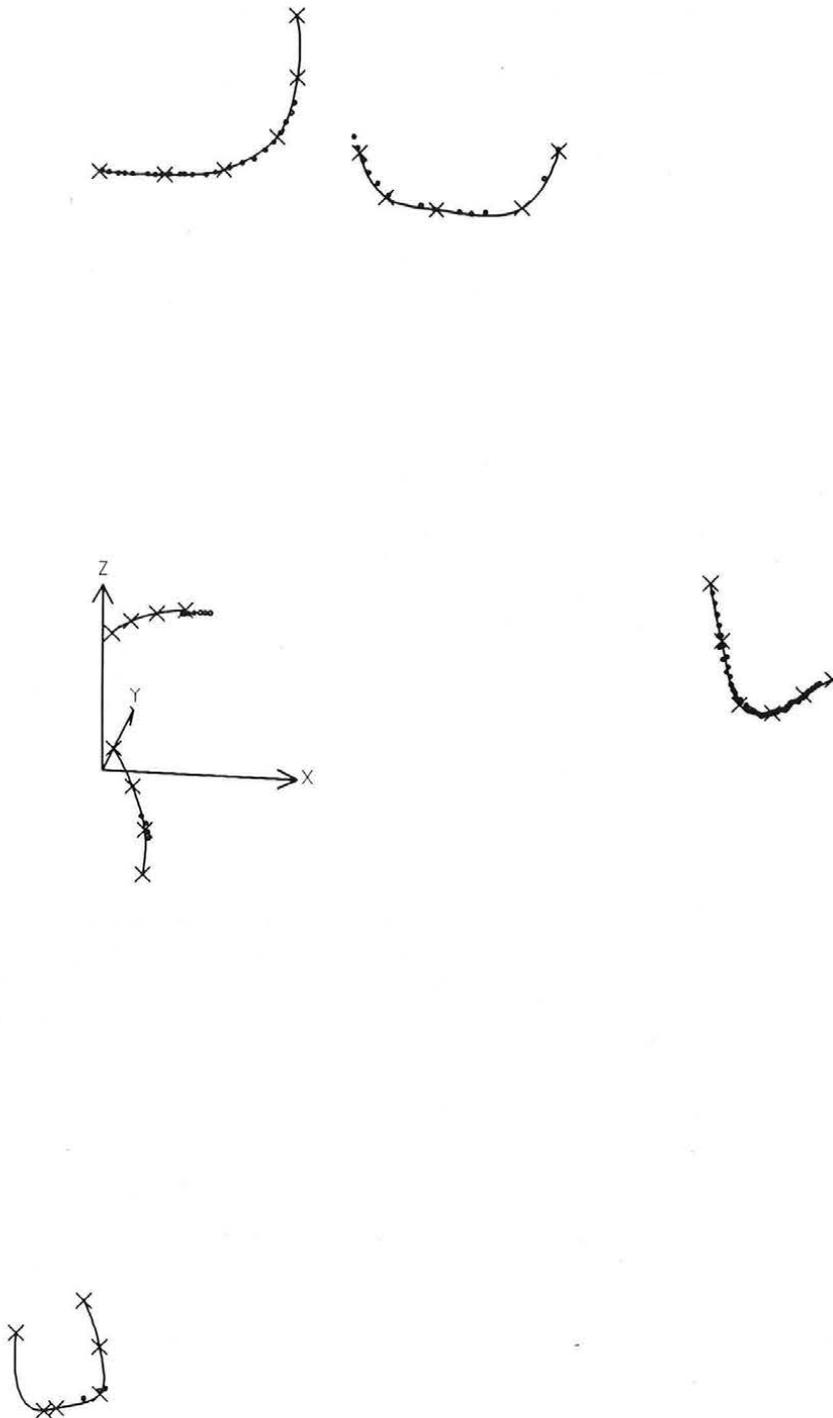


Abb. 4.6-12: Transformation der Stützpunkte des postoperativen Skelettmodelles auf die konstanten Paßkurven aus Abb. 4.6-11

Die Abbildung 4.6-12 zeigt die konstanten Paßkurven und die nach der robusten Schätzung verbleibenden transformierten Kurvenpunkte des postoperativen Modelles. Dabei fällt auf, daß insbesondere im Bereich des Zahnes fast alle Punkte eliminiert wurden. Dies hat vermutlich folgende Ursache: die präoperative Aufnahme entstand an einem Computertomo-

graphen älterer Bauart mit einer Gesamtaufnahmezeit zwischen zehn Minuten und einer halben Stunde - die komplette postoperative Aufnahme erfolgte hingegen an einem Gerät der neuesten Generation innerhalb einer halben Minute<sup>6</sup>. Das aus den Schnittbildern der präoperativen Aufnahme generierte Schädelmodell ist daher, aufgrund der während der langen Aufnahmezeit unvermeidbaren Bewegung des Patienten<sup>7</sup>, vermutlich deformiert. Bei einem solcherart deformierten Voxelmmodell sind die einzelnen, an sich unverzerrten, Schnittbilder nicht korrekt übereinander aufgeschichtet. Wie aus der Abbildung 4.6-12 ersichtlich, erfolgte die Einpassung, nach Beseitigung der deformationsbedingten Widersprüche durch die robuste Schätzung, hauptsächlich mit den Kurven 1000, 2000 und 3000. Die im Bereich dieser Kurven liegenden Schnittbilder beinhalten auch den zu untersuchenden operierten Bereich (siehe unten) - die mittels dieser Kurven durchgeführte Einpassung ist daher für die vorliegende Aufgabenstellung hinreichend sicher.

Mit Hilfe der im Zuge der Einpassung bestimmten Transformationsparameter kann jetzt das postoperative Voxelmmodell in Bezug auf das Koordinatensystem des präoperativen Modelles rektifiziert werden (siehe Dorffner 1994). Die Abbildung 4.6-13 (siehe Tafel I) zeigt die solcherart aufeinander eingepaßten Skelettmodelle im Bereich der Kurve 1000 an der linken Schläfe (Vgl. mit Abb. 4.6-10).

Nun kann die durch die Operation bewirkte Veränderung des Schädelskeletts veranschaulicht werden:

Bei dem Patienten handelt es sich um ein Unfallopfer mit schweren Trümmerfrakturen im Bereich der rechten Gesichtshälfte; dieser Zustand wurde im Rahmen der präoperativen Computertomographieaufnahme erfaßt. Durch den operativen Eingriff wurde die rechte Augenhöhle des Patienten entsprechend dem unverletzten Zustand vergrößert; zusätzlich erfolgte eine Verschiebung des rechten Jochbeines nach vorne. Nach der Verheilung der operierten Skelettbereiche wurde schließlich die postoperative Aufnahme durchgeführt. In der Abbildung 4.6-15 (siehe Tafel II) ist ein Ausschnitt im Bereich der operativ veränderten Augenhöhle dargestellt, die Begrenzung dieses Ausschnittes innerhalb des gesamten Schädels ist in der Abbildung 4.6-14 gekennzeichnet. Das Ausmaß der operativen Veränderungen kann durch die transparente Darstellung der postoperativen Knochenfläche verdeutlicht werden (siehe Abb. 4.6-16, Tafel II). Mit Hilfe solcher Darstellungen kann nun der Chirurg kontrollieren, ob die von ihm beabsichtigten Korrekturen zum Zeitpunkt der postoperativen Aufnahme tatsächlich eingetreten sind.

---

<sup>6</sup>Bei den alten Computertomographen wird ein Schnittbild nach dem anderen, jeweils mit einer Aufnahmezeit von etwa 15 Sekunden, aufgenommen. Die moderneren Geräte nehmen sämtliche Schnittbilder simultan auf.

<sup>7</sup>Zur Vermeidung zu großer Bewegungsunschärfen wird während der Aufnahme der Kopf des liegenden Patienten durch mehrere fixierte Pölster stabilisiert. Geringe Bewegungen des Patienten können jedoch damit nicht verhindert werden.

$$x = 95.940 \quad y = 51.821 \quad z = 146.481$$

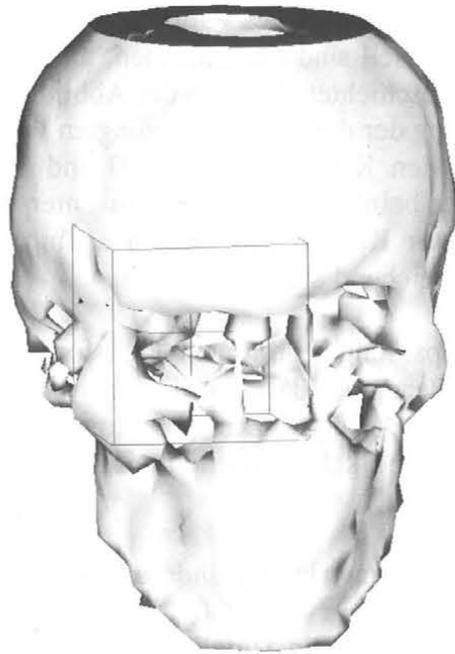


Abb. 4.6-14: Frontalansicht des präoperativen Skelettmodelles ( $32^3$  Voxel mit einer Größe von  $(8\text{mm})^3$ ) mit Kennzeichnung des in Abb. 4.6-15 und Abb.4.6-16 dargestellten Ausschnittes

Ein Schwerpunkt zukünftiger Forschungsarbeiten im Rahmen dieses medizinischen Projektes liegt in der Automatisierung der Post-Präeinpassung. Zu diesem Zweck sollen Methoden zur automatischen Extraktion der Kanten eines Skelettmodelles entwickelt werden. Andererseits erscheint aber auch eine Einpassung der Skelettmodelle mit Hilfe von Paßflächen erfolgversprechend. Hierzu bietet sich die Erweiterung des in dieser Arbeit vorgestellten Konzeptes für allgemein geformte flächenförmige Merkmale an.

$x = -148.504$     $y = -23.785$     $z = 209.103$



Patient XY

Abb. 4.6-7: Beispiel für eine Visualisierung der präoperativen (gelb) gemeinsam mit der darauf eingepaßten postoperativen (rot) Gesichtsoberfläche



Abb. 4.6-13: Ergebnis der Post-Präeinpassung im Bereich der linken Schläfe (gelb - präoperative, rot - postoperative Aufnahme, Größe der dargestellten Voxel:  $(1\text{mm})^3$ )

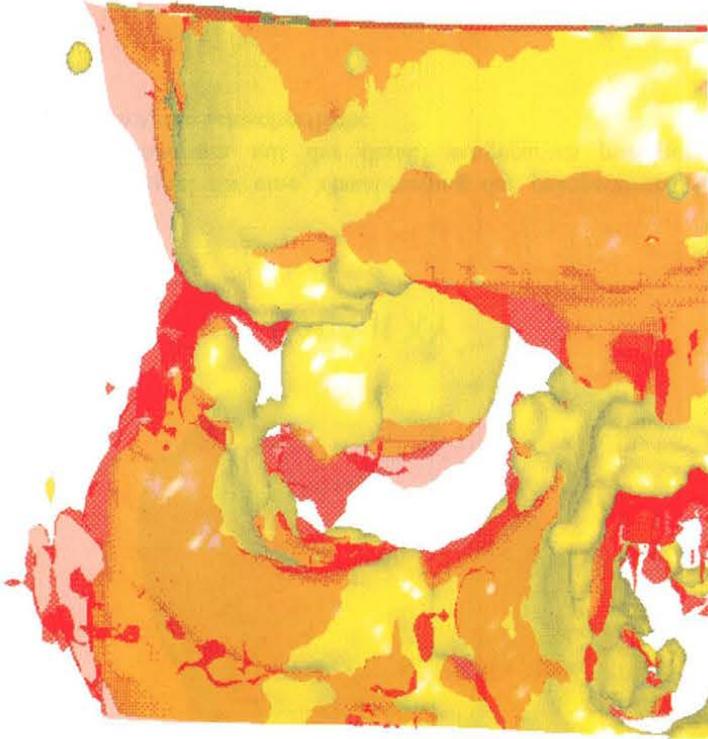


Abb. 4.6-15: Ausschnitt des Skelettmodelles im Bereich der operierten rechten Augenhöhle (gelb - präoperativ, rot - postoperativ, Voxelgröße  $(1\text{mm})^3$ )

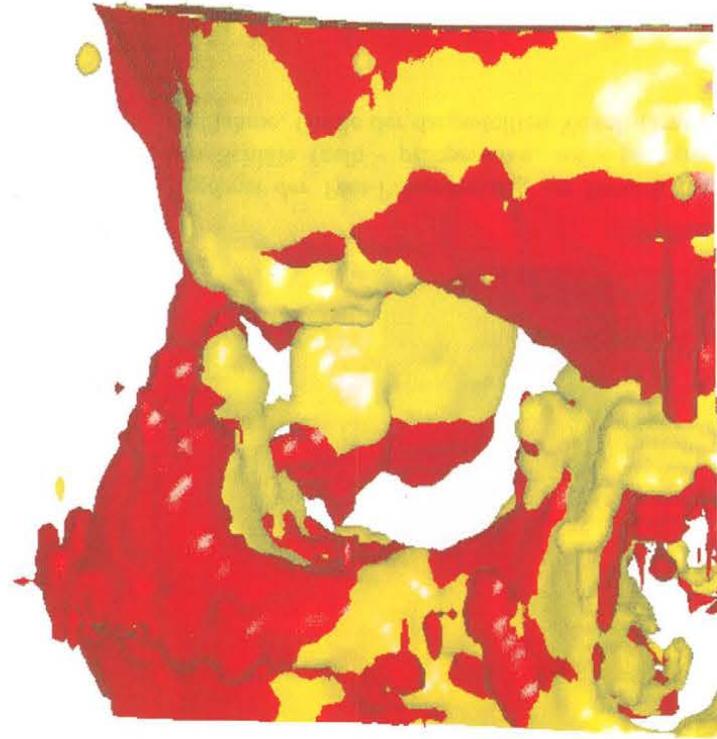


Abb. 4.6-16: gleicher Ausschnitt wie Abb. 4.6-15, diesmal mit transparenter Darstellung der postoperativen (roten) Knochenfläche

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das Konzept der Bündelblockausgleichung für allgemeine kurvenförmige Objektmerkmale erweitert. Hiermit können analytische Orientierungs- und Rekonstruktionsaufgaben mit Hilfe beliebig geformter Objektkurven gelöst werden; demonstriert wurde dies anhand von Testbeispielen für die Einzelbildorientierung mittels Paßkurven, für die Bündelblockausgleichung mittels Verknüpfungskurven sowie für den photogrammetrischen Vorwärtsschnitt von Objektkurven.

Die Lösung dieser Aufgaben erfolgt durch eine gemeinsame Ausgleichung der photogrammetrischen und geodätischen Punktbeobachtungen mit den in dieser Arbeit hergeleiteten fiktiven Kurvenbeobachtungen. Die beiden Grundaufgaben solch einer Kurvenausgleichung sind die Kurvenanpassung und die Kurvenpunktbestimmung. Die Kurvenanpassung stellt dabei die schwierigere Aufgabe dar, sie soll daher in Zukunft durch die automatisierte Ermittlung einer optimalen Knotenanzahl und -verteilung für den Benutzer vereinfacht werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde anhand von Testbeispielen demonstriert, daß die Lösung photogrammetrischer Orientierungs- und Rekonstruktionsaufgaben mit kurvenförmiger anstelle punktförmiger Objektinformation grundsätzlich möglich ist. In der Praxis wird jedoch meist eine gemeinsame Auswertung von punkt- und kurvenförmigen Merkmalen erfolgen, wobei durch die Objektkurven Bereiche mit fehlender Punktinformation abgedeckt werden können. Dies ist vor allem für die Auswertung von natürlichen Objekten interessant, so können etwa Flußufer oder Wegränder als zusätzliche Paß- oder Verknüpfungsinformation zur Orientierung von Luftbildern dienen. Darüber hinaus eignet sich die hier vorgestellte Methode auch zur Bestimmung der für die Rektifizierung einer Flugzeugscanneraufnahme benötigten Orientierungsfunktion.

In dieser Arbeit wurden Anwendungsbeispiele aus den Bereichen der Ingenieur- und der Medizinphotogrammetrie vorgestellt, wobei die Messung der Kurvenstützpunkte vorerst noch manuell erfolgte. Die analytische Auswertung der durch einen digitalen Bildverarbeitungsprozess automatisch extrahierten Objektkurven stellt einen weiteren wichtigen zukünftigen Anwendungsbereich dar. In diesem Sinne kann die vorliegende Arbeit zur Entwicklung automatischer digitaler Auswertemethoden in der Photogrammetrie beitragen.

**Literaturverzeichnis**

Akima H. 1970:

A New Method of Interpolation and Smooth Curve Fitting Based on Local Procedures. *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 17, Nr. 4, October 1970, pp. 589-602.

Blöser F., Überhuber C. 1976:

Das Interpolations- und Plotterpaket IPP1. Bericht 22/76 der Projektgruppe Mathematische Software des Institutes für Numerische Mathematik der Technischen Universität Wien, 1976.

Dorffner L. 1994:

Generierung und Überlagerung von Schädelmodellen aus Computertomographie-Aufnahmen. Diplomarbeit, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, 1994.

Forkert G. 1993:

Photogrammetric Object Reconstruction using Free-formed Spatial Curves. *Optical 3-D Measurement Techniques II*, Wichmann Verlag, Karlsruhe 1993, pp. 221-228.

Ecker R., Gsandtner M., Jansa J. 1991:

Geocoding using hybrid bundle adjustment and a sophisticated DTM. Proc. 11th EARSeL symp., Graz 1991, pp. 445-455.

Gsandtner M. 1985:

Benutzerführung für ORIENT. Diplomarbeit, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, 1985.

Halmer A. 1994:

Strategien und Anwendungsbeispiele für photogrammetrische Orientierungs- und Rekonstruktionsaufgaben mittels allgemeiner kurvenförmiger Merkmale. Diplomarbeit, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, 1994.

Hoschek J., Lasser D. 1989:

Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung. Teubner Verlag, Stuttgart 1989.

Inkilä K. 1990:

Approximation by Parametric Spline Curves. *The Photogrammetric Journal of Finland*, Vol. 12, Nr. 1 1990, S. 69-81.

Kager H., Kraus K. 1976:

Gemeinsame Ausgleichung photogrammetrischer, geodätischer und fiktiver Beobachtungen. *Geowissenschaftliche Mitteilungen der Technischen Universität Wien*, Heft 8, S. 113-133.

- Kager H. 1980:  
Das interaktive Programmsystem ORIENT im Einsatz. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing XXIII/B5, Hamburg 1980, S. 390-401.
- Kager H. 1989:  
Orient: A Universal Photogrammetric Adjustment System. Optical 3-D Measurement Techniques, Wichmann Verlag, Karlsruhe 1989, pp. 447-455.
- Kalliany R. 1991:  
Locating Ground Control Features with Subpixel-Accuracy. Proceedings of the 11th EARSeL Symposium, Graz 1991, S. 418ff.
- Klimpfinger H. 1993:  
Visualisierung von Oberflächen und Oberflächenveränderungen mit dem Softwarepaket IDL (Interactive Data Language). Diplomarbeit, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, 1993.
- Kraus K. 1984:  
Photogrammetrie, Band 2. Verlag Dümmler, Bonn 1984.
- Kraus K. 1988:  
Fernerkundung, Band 1. Verlag Dümmler, Bonn 1988
- Kraus K. 1990a:  
Photogrammetrie, Band 1. 3.Auflage, Verlag Dümmler, Bonn 1990.
- Kraus K. 1990b:  
Fernerkundung, Band 2. Verlag Dümmler, Bonn 1990.
- Masry, S.E. 1981:  
Digital mapping using entities: a new concept. Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, Vol. 48, No. 11, 1981, pp. 1561-1565.
- Lugnani, J. 1982:  
The digitized feature - a new source of control. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Vol. 24-III/2, 1982, pp. 188-202.
- Rasse M., Forkert G., Waldhäusl P. 1991:  
Stereophotogrammetry of facial soft tissue. International Journal of Oral and Maxillofacial Surgery, No. 20, 1991, pp 163-166.
- Reissmann G. 1980:  
Die Ausgleichsrechnung. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1980.
- Rusch W. 1993:  
Darstellung von digitalen Oberflächenmodellen mit dem Visualisierungssystem AVS. Diplomarbeit, Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung, Technische Universität Wien, 1993.

Strunz G. 1993:

Bildorientierung und Objektrekonstruktion mit Punkten Linien und Flächen. Verlag der Bayrischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C - Dissertationen, Heft Nr. 408, München 1993.

Einen Überblick über weiterführende Literatur zu dem Thema der vorliegenden Arbeit vermittelt Strunz 1993.

**Lebenslauf**

6.4.1964	Geboren in Klosterneuburg, als fünftes Kind von Lotte und Leopold Forkert
1970-1974	Besuch der Volksschule in Klosterneuburg
1974-1982	Besuch des Bundesrealgymnasiums in Wien IX, Glasergasse 25
4.6.1982	Reifeprüfung
WS1982/83	Inskription an der Technischen Universität Wien, Studienrichtung Vermessungswesen, Wahlfachgruppe Photogrammetrie und Kartographie
29.6.1989	Studienabschluß durch Sponson
2.10.1989-31.5.1990	Präsenzdienst beim Österreichischen Bundesheer
1.7.1989-28.2.1994	Vertragsassistent am Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der TU Wien
ab 1.3.1994	Universitätsassistent am Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung der TU Wien

Bisher erschienen:

- Heft 1 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1970 - 1973, Dezember 1973.
- Heft 2 EGGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Taschenrechner HP 45 und HP 65, Programme und Anwendungen im Vermessungswesen, 1. Auflage, März 1974, Special Edition in English, Juli 1974, 2. verbesserte Auflage, November 1974.
- Heft 3 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1973 - 1974, September 1974.
- Heft 4 EGGER-PALFINGER-PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Elektronix-Tischrechner TEK 31, Programmbibliothek für den Einsatz im Vermessungswesen, November 1974.
- Heft 5 K. LEDERSTEGGER, Die horizontale Isostasie und das isostatische Geoid, Februar 1975.
- Heft 6 F. REINHART, Katalog von FK4 Horrebow-Paaren für Breiten von +30 bis +60, Oktober 1975.
- Heft 7 Arbeiten aus dem Institut für Höhere Geodäsie, Wien, Dezember 1975.
- Heft 8 Veröffentlichungen des Instituts für Photogrammetrie zum XIII. Internationalen Kongreß für Photogrammetrie in Helsinki 1976, Wien, Juli 1976.
- Heft 9 W. PILLEWIZER, Felsdarstellung aus Orthophotos, Wien, Juni 1976.
- Heft 10 PERDICH-PLACH-WAGENSOMMERER, Der Einsatz des programmierbaren Taschenrechners Texas Instruments SR-52 mit Drucker PC100 in der ingenieurgeodätischen Rechentechnik, Wien, Mai 1976.
- Heft 11 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1974 - 1976, November 1976.
- Heft 12 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1976, Wien, Mai 1977.
- Heft 13 Veröffentlichung des Instituts für Photogrammetrie anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr.h.c. K. Neumaier, Wien, Januar 1978.
- Heft 14 L. MOLNAR, Self Checking Analytical Relative Orientation and Strip Formation, Wien, Dezember 1978.
- Heft 15 Veröffentlichung des Instituts für Landesvermessung anlässlich des 80. Geburtstages von Prof. Dr. Alois Bavir, Wien, Januar 1979.
- Heft 16 Kolloquium der Assistenten der Studienrichtung Vermessungswesen 1976 - 1979, Wien, November 1979.
- Heft 17 E. VOZIKIS, Die photographische Differentialumbildung gekrümmter Flächen mit Beispielen aus der Architekturbildmessung, Wien, Dezember 1979.
- Heft 18 Veröffentlichung des Instituts für Allgemeine Geodäsie anlässlich des 75. Geburtstages von Prof. Dipl. Ing. Dr. F. Hauer, Die Höhe des Großglockners, Wien, 1981.
- Heft 19 H. KAGER, Bündeltriangulation mit indirekt beobachteten Kreiszentren, Wien, April 1981.
- Heft 20 Kartographische Vorträge der Geodätischen Informationstage 1980, Wien, Mai 1982.
- Heft 21 Veröffentlichung des Instituts für Kartographie anlässlich des 70. Geburtstages von Prof. Dr. Wolfgang Pillewizer: Glaziologie und Kartographie, Wien, Dezember 1982.

- Heft 22 K. TEMPFLI, Genauigkeitsschätzung digitaler Höhenmodelle mittels Spektralanalyse, Wien, Mai 1982.
- Heft 23 E. CSAPLOVICS, Interpretation von Farbinfrarotbildern, Wien, November 1982.
- Heft 24 J. JANSKA, Rektifizierung von Multispektral-Scanneraufnahmen - Entwicklung und Erprobung eines EDV-Programms, Wien, Mai 1983.
- Heft 25 Zusammenfassungen der Diplomarbeiten, Dissertationen und Habilitationen an den geodätischen Instituten der TU Wien, Wien, November 1984.
- Heft 26 T. WUNDERLICH, Die voraussetzungsfreie Bestimmung von Refraktionswinkeln, Wien, August 1985.
- Heft 27 G. GERSTBACH (Hrsg.), Geowissenschaftliche/geotechnische Daten in Landinformationssystemen - Bedarf und Möglichkeiten in Österreich, Wien, Juni 1986.
- Heft 28 K. NOVAK, Orientierung von Amateuraufnahmen ohne Paßpunkte, Wien, August 1986.
- Heft 29 Veröffentlichung des Instituts für Landesvermessung und Ingenieurgeodäsie, Abteilung Ingenieurgeodäsie anlässlich des 80. Geburtstag von Prof. Dipl. Ing. Dr. F. Hauer, Wien, Oktober 1986.
- Heft 30 K.-H. ROCH, Über die Bedeutung dynamisch ermittelter Parameter für die Bestimmung von Gesteins- und Gebirgseigenschaften, Wien, Februar 1987.
- Heft 31 G. HE, Bildverbesserung mittels digitaler Filterung, Wien, April 1989.
- Heft 32 F. SCHLÖGELHOFER, Qualitäts- und Wirtschaftlichkeitsmodelle für die Ingenieurphotogrammetrie, Wien, April 1989.
- Heft 33 G. GERSTBACH (Hrsg.), Geowissenschaftliche/geotechnische Daten in Landinformationssystemen - Datenbestände und Datenaustausch in Österreich, Wien, Juni 1989.
- Heft 34 F. HOCHSTÖGER, Ein Beitrag zur Anwendung und Visualisierung digitaler Geländemodelle, Wien, Dezember 1989.
- Heft 35 R. WEBER, Lokale Schwerefeldmodellierung unter Berücksichtigung spektraler Methoden zur Geländereduktion, Wien, April 1990.
- Heft 36 o.Prof. Dr. Hans Schmid zum 70. Geburtstag. Veröffentlichung der Abteilung für Landesvermessung, Wien, Oktober 1990.
- Heft 37 G. GERSTBACH, H.P. HÖLLRIEGL und R. WEBER, Geowissenschaftliche Informationsbörse - Eine Nachlese zu GeoLIS II, Wien, Oktober 1990.
- Heft 38 R. ECKER, Rastergraphische Visualisierungen mittels digitaler Geländemodelle, Wien, August 1991.
- Heft 39 Kartographische Forschungen und Anwendungsorientierte Entwicklungen, herausgegeben von W. Stams und F. Kelnhofer zum 80. Geburtstag von Prof. Dr. W. Pillewizer, Wien, Juli 1991.
- Heft 39a W. RIEGER, Hydrologische Anwendungen des digitalen Geländemodell, Wien, Juli 1992.
- Heft 40 K. STEINNOCHER, Methodische Erweiterungen der Landnutzungsklassifikation und Implementierung auf einem Transputernetzwerk, Wien, Juli 1994.
- Heft 41 G. FORKERT, die Lösung photogrammetrischer Orientierungs- und Rekonstruktionsaufgaben mittels allgemeiner kurvenförmiger Elemente, Wien, Juli 1994.