

DIPLOMARBEIT

Über die Aggregation von Value-at-Risk und Expected Shortfall - Schranken und klassische Verteilungsfamilien

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieurin

im Rahmen des Studiums

Finanz- und Versicherungsmathematik

eingereicht von

Agnes Karlinger, B.Sc.

Matrikelnummer 01325146

ausgeführt am Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation der Technischen Universität Wien

Betreuer: Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

Wien, 03.09.2018

(Unterschrift Verfasserin)

(Unterschrift Betreuer)

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig erstellt wurde. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen, sind als solche kenntlich gemacht.

Das Thema dieser Arbeit wurde von mir bisher weder im In- noch Ausland einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt. Diese Arbeit stimmt mit der von den Begutachterinnen/Begutachtern beurteilten Arbeit überein.

Ort, Datum und Unterschrift

Zusammenfassung

Wie kann man voneinander abhängige Risiken aggregieren und messen? Mit dieser Frage beschäftigen wir uns in dieser Diplomarbeit. Dazu werden wir multivariate Verteilungen und die beiden Risikomaße Value-at-Risk und Expected-Shortfall verwenden. Multivariate Verteilungen bestehen aus den einzelnen Randerteilungen und einer Copula, welche die gegenseitigen Abhängigkeiten der Risiken repräsentiert. Einerseits wollen wir den Fall betrachten, dass die Randverteilungen der einzelnen Risiken gegeben sind und wir obere und untere Grenzen für den Value-at-Risk und den Expected Shortfall suchen, sodass diese für alle Copulae gültig sind. Andererseits wollen wir ein konkretes bivariates Beispiel betrachten und zwei verschiedene numerische Methoden durchführen, um die Verteilung zu berechnen: die numerische Integration und den Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus.

Abstract

How is it possible to aggregate and measure dependent risks? This thesis deals with this question. Therefore, we will use joint probability distribution and two risk measures, Value-at-Risk and Expected Shortfall. Joint probability distributions consist of separate marginal distributions and a copula, which represents the dependence structure. On the one hand we want to consider the case, that the separate marginal distributions are given and we look for upper and lower bounds of the Value-at-Risk and Expected Shortfall. These bounds should be valid for all copulas. On the other hand, we want to consider a bivariate example and conduct two different numerical approaches to calculate the distribution: numerical integration and the Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithm.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Motivation	3
2.1	Anwendung in der Praxis	3
2.2	Mögliche Lösungswege	3
3	Mathematische Grundlagen	5
3.1	Wichtige univariate Verteilungen und ihre Risikomaße	7
3.2	Bivariate Verteilungen	27
3.3	Konzept der Mischbarkeit	29
4	Randverteilung + Copula Ansatz	31
4.1	Obere und Untere Grenzen	31
4.1.1	Value-at-Risk	31
4.1.2	Expected Shortfall	42
4.2	Zusammenhang Value-at-Risk und Expected Shortfall	44
4.3	Rearrangement-Algorithmus	47
4.4	Komonotonie- und Kontramotoniecopula	52
4.4.1	Komonotonie	52
4.4.2	Kontramotonie	52
5	Bivariate Verteilungsfunktionen	53
5.1	Hyperwürfel und Simplex	53
5.2	Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus	54
5.3	Numerische Integration	57
5.4	Kontrolle der Ergebnisse	58
A	R-Codes	I

Abbildungsverzeichnis

3.1	Die Dichte einer Pareto-Verteilung mit unterschiedlichem θ	8
3.2	Die Dichte einer Pareto-Verteilung mit unterschiedlichem β	8
3.3	Die Verteilungsfunktion einer Pareto-Verteilung mit unterschiedlichem θ	9
3.4	Die Verteilungsfunktion einer Pareto-Verteilung mit unterschiedlichem β	9
3.5	Die Dichte einer Normalverteilung mit unterschiedlichem σ	11
3.6	Die Dichte einer Normalverteilung mit unterschiedlichem μ	12
3.7	Die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit unterschiedlichem σ	13
3.8	Die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit unterschiedlichem μ	13
3.9	Die Dichte einer stetigen Gleichverteilung mit unterschiedlichem a und b	15
3.10	Die Verteilungsfunktion einer stetigen Gleichverteilung mit unterschiedlichem a und b	16
3.11	Die Dichte einer Gammaverteilung mit unterschiedlichem γ	18
3.12	Die Dichte einer Gammaverteilung mit unterschiedlichem β	19
3.13	Die Verteilungsfunktion einer Gammaverteilung mit unterschiedlichem γ	20
3.14	Die Verteilungsfunktion einer Gammaverteilung mit unterschiedlichem β	20
3.15	Die Dichte einer Exponentialverteilung mit unterschiedlichem β	22
3.16	Die Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung mit unterschiedlichem β	23
3.17	Die Dichte einer Chi-Quadrat-Verteilung mit unterschiedlichem γ	26
3.18	Die Verteilungsfunktion einer Chi-Quadrat-Verteilung mit unterschiedlichem γ	26
3.19	Die Dichtefunktion der bivariaten Exponentialverteilung von Gumbel mit un- terschiedlichem θ	28
3.20	Die Verteilungsfunktion der bivariaten Exponentialverteilung von Gumbel mit unterschiedlichem θ	28
4.1	Obere und untere Grenzen des Value-at-Risk bei zwei Chi-Quadrat-Verteilungen mit drei Freiheitsgraden mittels Satz 4.1	32
4.2	Obere und untere Grenzen des Value-at-Risk bei zwei Chi-Quadrat-Verteilungen mit drei Freiheitsgraden mittels Satz 4.3	33
4.3	Obere und untere Grenzen des Value-at-Risk bei einer Exponentialverteilung mit $\beta = 1.5$ und einer Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ mittels Satz 4.3	33
4.4	Obere und untere Grenzen des Value-at-Risk bei drei Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$	41

4.5	Obere und untere Grenzen des Expected Shortfall bei drei Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$	44
4.6	Asymptotische Äquivalenz zwischen der oberen Grenze des Expected Shortfall und der oberen Grenze des Value-at-Risk für Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$ bei einem Konfidenzniveau von $\alpha = 0.95$	45
4.7	Analyse der Abhängigkeitsunsicherheit anhand Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$ bei einem Konfidenzniveau von $\alpha = 0.95$	47
5.1	Zerlegung des Simplexes $\mathcal{S}(\mathbf{0}, s)$	54
5.2	Die ersten drei Iterationsschritte des AEP-Algorithmus	56
5.3	Value-at-Risk für Gumbel's Bivariate Exponentialverteilung für unterschiedliche θ mittels AEP-Algorithmus und die theoretischen Grenzen des Value-at-Risk für zwei exponentialverteilte Risiken mit $\beta = 1$	57
5.4	Value-at-Risk für Gumbel's Bivariate Exponentialverteilung für unterschiedliche θ mittels Integration der Dichte und die theoretischen Grenzen des Value-at-Risk für zwei exponentialverteilte Risiken mit $\beta = 1$	58

Kapitel 1

Einleitung

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist die Messung von voneinander abhängigen aggregierten Risiken. Zuerst wollen wir für gegebene Randverteilungen Formeln für die obere und untere Grenze des Value-at-Risk und des Expected Shortfall finden, sodass diese für alle Copulae gültig sind. Danach betrachten wir ein konkretes bivariates Beispiel, bei dem wir die Verteilungsfunktion auf zwei unterschiedliche Arten berechnen werden: mithilfe der numerischen Integration und mithilfe des Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus.

Nach dieser Einleitung werden wir im zweiten Kapitel die möglichen Anwendungsbereiche von Risikoaggregationen in der Praxis diskutieren. Danach werden wir uns einen Überblick über die verschiedenen Aggregationsmöglichkeiten und Aggregationsansätze verschaffen.

Im dritten Kapitel werden wir die mathematischen Grundlagen vorbereiten. Außerdem werden wir für einige univariate Verteilungen die beiden Risikomaße Value-at-Risk und Expected Shortfall berechnen. Danach werden wir eine bivariate Verteilung genau betrachten, indem wir sie in ihre Randverteilungen und ihre Copula aufspalten. Am Ende des Kapitels werden wir noch das Konzept der Mischbarkeit einführen.

Kapitel 4 ist der erste Hauptteil: wir werden uns mit dem Fall beschäftigen, dass wir Portfolios gegeben haben, bei denen die Ränder bekannt sind, aber die gegenseitigen Abhängigkeiten unbekannt sind. Dieses Problem nennen wir Abhängigkeitsunsicherheit. Zuerst werden wir obere und untere Grenzen für den Value-at-Risk erhalten. Dazu betrachten wir verschiedene Fälle: den zweidimensionalen homogenen Fall, den zweidimensionalen heterogenen Fall und den mehrdimensionalen homogenen Fall. Wir werden für alle drei Fälle Beispiele untersuchen und für den mehrdimensionalen homogenen Fall werden wir auch näher auf den Beweis der Formel für die obere Grenze eingehen. Für den Expected Shortfall ist die obere Grenze, wegen der komonotonen Additivität, trivial. Für die untere Grenze gibt es im homogenen Fall eine Formel. Wieder werden wir ein Beispiel betrachten. Danach werden wir zwei Sätze diskutieren, die einen Zusammenhang zwischen dem Value-at-Risk und dem Expected Shortfall herstellen: für große Portfolios kann man die obere Grenze der Value-at-Risk mit der oberen Grenze des Expected Shortfall approximieren und die Spanne der Abhängigkeitsunsicherheit ist beim Value-at-Risk größer als beim Expected Shortfall. Die Spanne der Abhängigkeitsunsicherheit ist die Differenz zwischen der oberen und unteren Grenze. Für beide Sätze werden wir wieder

Beispiele betrachten. Danach lernen wir ein numerisches Verfahren kennen, mit dem man auch im mehrdimensionalen heterogenen Fall die Grenzen berechnen kann: den Rearrangement-Algorithmus. Wie werden die Ergebnisse der bisherigen Beispiele mit dem Rearrangement-Algorithmus kontrollieren. Am Ende des Kapitels werden wir testen, ob die untere und obere Grenze mit der Ko- und Kontramonotoniecopula übereinstimmen.

Im zweiten Hauptteil, Kapitel 5, werden wir ein konkretes bivariates Beispiel betrachten. Für die Berechnung der Verteilung werden zwei verschiedene numerische Methoden verwendet: der Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus und die numerische Integration. Damit können wir den Value-at-Risk der Verteilung inklusive der theoretischen Schranken zeichnen. Im Anschluss kontrollieren wir die Ergebnisse, indem wir annehmen, dass die beiden Risiken unabhängig sind.

Im Anhang befindet sich eine Auswahl an benützter R-Codes.

Kapitel 2

Motivation

2.1 Anwendung in der Praxis

Sowohl in Banken als auch in Versicherungen spielen Vorschriften zur Regulierung eine wichtige Rolle. Versicherungen müssen sich an die Richtlinien von Solvency II und Banken an die von Basel III halten. In beiden Richtlinien gibt es den Begriff des regulatorischen Kapitals (engl. Regulatory Capital). Das ist die Menge an Kapital, das ein Unternehmen laut den Vorschriften benötigt, damit es sein Geschäft fortführen darf. Dieses regulatorische Kapital dient als Buffer bei Verlusten.

Hat man die Kapitalmenge von den einzelnen Niederlassungen oder Geschäftsbereichen berechnet, stellt sich die Frage wie man diese einzelnen Risiken aggregieren kann, damit man die gesamte Kapitalmenge erhält. Ein ähnliches Problem hat man, wenn man die Kapitalmengen für die verschiedenen Assetklassen berechnet hat und man die Höhe der aggregierten Kapitalmenge wissen will, damit alle Assets abgedeckt sind.

Um Risiken zu messen, benötigt man Risikomaße. Die geläufigsten und bekanntesten sind der Value-at-Risk und der Expected Shortfall.

2.2 Mögliche Lösungswege

In [2, S.299-300] wird zwischen zwei Aggregationsmöglichkeiten unterschieden: Bei der **vorschriftsbasierten Aggregation** wendet man Regeln an, ohne ein multivariates Modell oder ein Risikomaß zu verwenden. Die einfache Summation

$$EC = EC_1 + \dots + EC_d$$

oder die korrelationsangepasste Summation

$$EC = \sqrt{\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij} EC_i EC_j}$$

mit $0 \leq \rho_{ij} \leq 1$ sind Beispiele für die vorschrittsbasierte Aggregation. Bei der **prinzipienbasierten Aggregation** kommt es zur Anwendung von Risikomaßen und multivariaten Modellen. Im Hauptteil werden wir diese Aggregation betrachten, da sie theoretisch begründbar ist.

Weiters werden in [2, S.303-304] drei verschiedene Ansätze präsentiert: Beim **modularen Ansatz** wird das Risiko in den einzelnen Modulen berechnet und anschließend aggregiert. Die Abhängigkeitsstrukturen werden hier mit Korrelationen beschrieben. Von diesem Ansatz wird eher abgeraten, da die Modellierung von multivariaten Abhängigkeiten mit Copulae besser ist als die mit Korrelationen. Beim **Randverteilung + Copula Ansatz** baut man eine multivariate Verlustverteilung

$$F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

mithilfe der Umkehrung des Satzes von Sklar. Beim **voll-integrierten Ansatz** baut man ein multivariates Modell für die Änderung der zugrundeliegenden Risikofaktoren $X = (X_1, \dots, X_k)$. Die Verluste ergeben sich aus den Risikofaktoren mit den Funktionen

$$g_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $g_i(X) = L_i$. Danach wird ein Risikomaß auf die Verteilung von

$$L = g_1(X) + \dots + g_d(X)$$

angewendet.

Im weiteren Verlauf werden wir uns mit dem Randverteilung + Copula Ansatz beschäftigen. Dazu nehmen wir die Ränder F_1, \dots, F_d als bekannt an. Für diese Ränder gibt es nun unzählige verschiedene Möglichkeiten, wie die gemeinsame Verteilung von (L_1, \dots, L_d) aussehen kann. Wählt man eine passende Copula, erhält man eine gemeinsame Verteilung $C(F_1, \dots, F_d)$. Mit dieser Methode kann jedes verteilungsinvariante Risikomaß berechnet werden, also auch der Value-at-Risk und der Expected Shortfall, wie wir später sehen werden.

Durch die Wahl der passenden Copula entsteht eine Modellunsicherheit. Um diese zu vermeiden, suchen wir obere und untere Grenzen für den Value-at-Risk und den Expected Shortfall, damit wir eine Abschätzung erhalten, die für jede Copula gilt. Solche Probleme werden „Fréchet-Probleme“ genannt.

Kapitel 3

Mathematische Grundlagen

Die **Inverse Funktion** einer steigenden Funktion T ist definiert als $T^{-1}(y) := \inf\{x : T(x) \geq y\}$, wobei $\inf \emptyset = \infty$. In [2, S.641-642] findet man folgende Eigenschaften:

Satz 3.1. Sei T eine steigende Funktion. Dann gilt:

1. T ist strikt wachsend. $\Leftrightarrow T^{-1}$ ist stetig.

Falls sie zusätzlich $-\infty < T^{-1}(y) < \infty$ erfüllt, dann gilt:

2. Ist T stetig, dann gilt $T(T^{-1}(a)) = a$.

3. Ist T rechtsstetig, dann gilt

$$T^{-1}(a) \leq x \Leftrightarrow T(x) \geq a.$$

Im vorigen Kapitel wurden bereits Copulae erwähnt. In [2, S.221] findet man folgende Definition und Eigenschaften: Eine **d-dimensionale Copula** ist eine Verteilungsfunktion auf $[0, 1]^d$ mit gleichverteilten Rändern. Sie erfüllt folgende Eigenschaften:

- $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ falls $u_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, d\}$.
- $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$, $u_i \in [0, 1]$.
- Für alle $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ mit $a_i \leq b_i$ gilt:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

mit $u_{j1} = a_j$ und $u_{j2} = b_j$ für alle $j \in \{1, \dots, d\}$.

Ein wichtiger Satz bezüglich Copulae ist der Satz von Sklar, siehe [2, S.222]:

Satz 3.2. Satz von Sklar: Sei F eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Rändern F_1, \dots, F_d . Dann existiert eine Copula $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, sodass für alle $x_1, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

Für stetige Ränder ist die Copula eindeutig.

Einen weiteren wichtigen Satz findet man in [4, S.3]:

Satz 3.3. Seien eine Copula C und d -univariate Ränder F_1, \dots, F_d bekannt. Dann kann immer eine Verteilungsfunktion F auf \mathbb{R}^d gefunden werden, sodass

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}.$$

Für jede Copula $C(u_1, \dots, u_d)$ gelten folgende Grenzen, auch **Fréchet-Grenzen** genannt:

$$\max\left(\sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0\right) \leq C(u) \leq \min(u_1, \dots, u_d).$$

Die **Komonotonie-Copula** ist die obere Fréchet-Grenze:

$$M(u_1, \dots, u_d) = \min(u_1, \dots, u_d).$$

Die **Kontramotonie-Copula** ist die zweidimensionale untere Fréchet-Grenze:

$$W(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1, 0).$$

Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_d werden **komonoton** genannt, wenn ihre gemeinsame Verteilungsfunktion im Satz von Sklar mit der Komonotonie-Copula dargestellt werden kann. Komonotonie entspricht perfekter positiver Abhängigkeit.

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 werden **kontramoton** genannt, wenn ihre gemeinsame Verteilungsfunktion im Satz von Sklar mit der Kontramotonie-Copula dargestellt werden kann. Kontramotonie entspricht perfekter negativer Abhängigkeit.

Sei \mathcal{M} ein linearer Raum von Zufallsvariablen. Ein **Risikomaß** ρ ist eine reellwertige Funktion, definiert auf \mathcal{M} . Sie ordnet Finanzposten einen quantitativen Wert zu, der den Verlust repräsentiert. Wir werden die beiden Risikomaße Value-at-Risk und Expected Shortfall betrachten. Folgende Eigenschaften können Risikomaße besitzen:

Monotonie: Für $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ mit $L_1 \leq L_2$ ist $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.

Translationsinvarianz: Für alle $L \in \mathcal{M}$ und alle $l \in \mathbb{R}$ ist $\rho(L + l) = \rho(L) + l$.

Subadditivität: Für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ ist $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$.

Positive Homogenität: Für alle $L \in \mathcal{M}$ und alle $\lambda > 0$ ist $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$.

Kohärenz: ρ ist monoton, translationsinvariant, subadditiv und positiv homogen.

Konvex: Für $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ ist $\rho(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \leq \lambda \rho(L_1) + (1 - \lambda)\rho(L_2)$.

Komonotone Additivität: Für einen Vektor mit komonotonen Risiken (L_1, \dots, L_d) ist $\rho(L_1 + \dots + L_d) = \rho(L_1) + \dots + \rho(L_d)$.

Verteilungsinvarianz: Falls L_1 und L_2 dieselbe Verteilung haben ist $\varrho(L_1) = \varrho(L_2)$.

Für ein Konfidenzlevel $\alpha \in (0, 1)$, ist der **Value at Risk (VaR)** eines Portfolios mit Verlust L zum Konfidenzniveau α gegeben durch

$$\text{VaR}_\alpha = \text{VaR}_\alpha(L) = \inf\{l \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \geq \alpha\}.$$

Der Value-at-Risk ist monoton, translationsinvariant, positiv homogen und verteilungsinvariant [3, S.5-6]. Im Allgemeinen ist er aber nicht subadditiv. Mögliche Ursachen dafür können heavy-tailed oder schiefe Verluste oder besondere Abhängigkeiten der Verluste sein, siehe dazu [4, S.2].

Für einen Verlust L mit $\mathbb{E}(|L|) < \infty$ ist der **Expected Shortfall (ES)** zum Konfidenzniveau $\alpha \in (0, 1)$ definiert als

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(L) du. \quad (3.1)$$

Der Expected Shortfall ist kohärent [2, S.76], komonoton additiv [2, S.306] und verteilungsinvariant [3, S.6].

Seien L_i die einzelnen Risiken. Dann sind alle Möglichkeiten sie mit einer Copula zu aggregieren definiert als

$$S_d = S_d(F_1, \dots, F_d) = \{L = \sum_{i=1}^d L_i : L_1, \dots, L_d \text{ Zufallsvariablen mit } L_i \sim F_i, i = 1, \dots, d\}.$$

Die untere Grenze eines Risikomaßes definieren wir als

$$\underline{\varrho}(S_d) = \inf\{\varrho(L) : L \in S_d(F_1, \dots, F_d)\}.$$

Die untere Grenze wird bestes ϱ genannt. Die obere Grenze definieren wir als

$$\bar{\varrho}(S_d) = \sup\{\varrho(L) : L \in S_d(F_1, \dots, F_d)\}.$$

Die obere Grenze wird schlechtestes ϱ genannt. Es gilt daher

$$\underline{\varrho}(S_d) \leq \varrho(S_d) \leq \bar{\varrho}(S_d).$$

3.1 Wichtige univariate Verteilungen und ihre Risikomaße

Pareto-Verteilung $\text{Pa}(\beta, \theta)$

Die Pareto-Verteilung hat zwei Parameter. Üblicherweise schreibt man $\text{Pa}(\alpha, \theta)$, da wir aber den Parameter α für das Konfidenzniveau benutzen wollen, werden wir $\text{Pa}(\beta, \theta)$ schreiben. Der Parameter β ist ein Skalenparameter, da er das Größenverhältnis der Zufallsvariable in Abhängigkeit von ihrer Häufigkeit beschreibt. Es soll gelten, dass $\beta > 0$ ist. Der Parameter θ

ist ein Lageparameter, da er den Mindestwert der Verteilung angibt. Das bedeutet, dass die Verteilung am Punkt θ startet. θ soll ebenfalls > 0 sein.

Die Dichte ist gegeben durch $f(x) = \beta\theta^\beta x^{-\beta-1}$ mit $x > \theta$. Sie ist strikt fallend und strikt positiv auf (θ, ∞) .

Bemerkung 3.4. Möchte man die Pareto-Verteilung in R plotten, muss man beachten, dass die Pareto-Verteilung aus dem Package `rmutil` nicht mit unserer Definition übereinstimmt. Das bedeutet, dass man in R zuerst eine Dichte-, Verteilungs- und Quantilfunktion laut unserer Definition erstellen muss. Für mehr Details siehe [15, S.51-52]

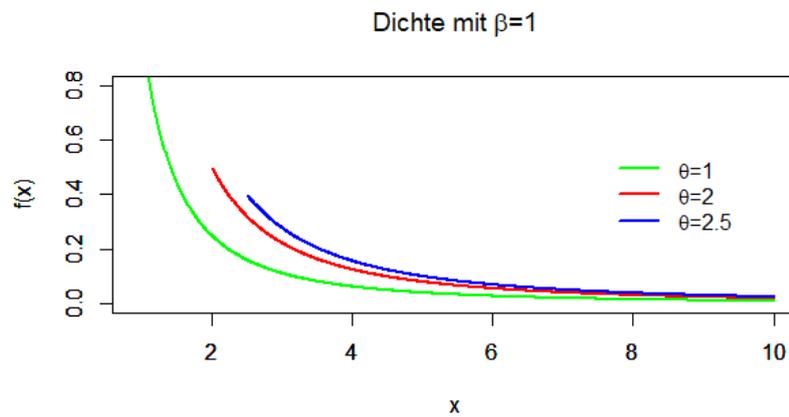


Abbildung 3.1: Die Dichte einer Pareto-Verteilung mit unterschiedlichem θ

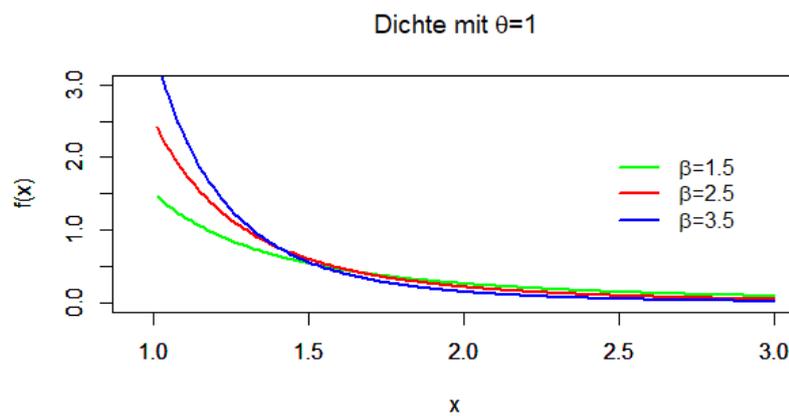


Abbildung 3.2: Die Dichte einer Pareto-Verteilung mit unterschiedlichem β

Wir berechnen uns nun die Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{\theta}^x f(y)dy = \int_{\theta}^x \beta\theta^{\beta}y^{-\beta-1}dy = \beta\theta^{\beta} \int_{\theta}^x y^{-\beta-1}dy = \beta\theta^{\beta} \left(\frac{y^{-\beta}}{-\beta} \right) \Big|_{\theta}^x = \beta\theta^{\beta} \left(\frac{x^{-\beta}}{-\beta} - \frac{\theta^{-\beta}}{-\beta} \right) \\
 &= \beta\theta^{\beta} \left(\frac{\theta^{-\beta}}{\beta} - \frac{x^{-\beta}}{\beta} \right) = \frac{\beta\theta^{\beta}\theta^{-\beta}}{\beta} - \frac{\beta\theta^{\beta}x^{-\beta}}{\beta} = 1 - \theta^{\beta}x^{-\beta}.
 \end{aligned}$$

Somit ist die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \theta^{\beta}x^{-\beta}$ mit $x > \theta$. Um nun die Quantilfunktion zu erhalten, müssen wir die Verteilungsfunktion invertieren:

$$1 - \theta^{\beta}x^{-\beta} = u \Leftrightarrow 1 - u = \theta^{\beta}x^{-\beta} \Leftrightarrow \frac{1-u}{\theta^{\beta}} = x^{-\beta} \Leftrightarrow x = \theta(1-u)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Damit erhalten wir für die Quantilfunktion $F^{-1}(u) = \theta(1-u)^{-\frac{1}{\beta}}$ mit $u \in (0, 1)$.

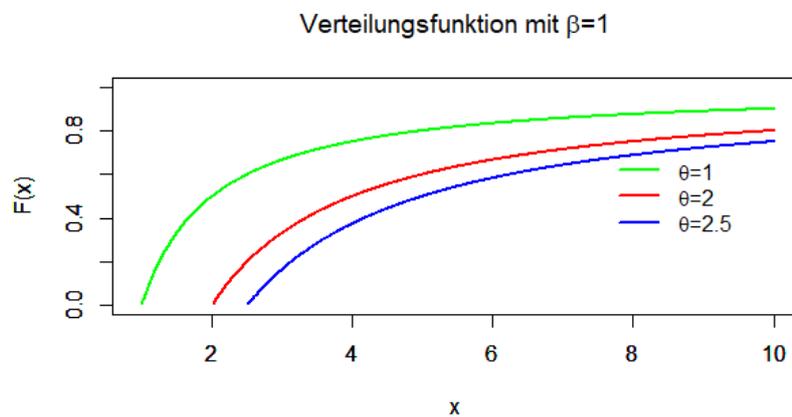


Abbildung 3.3: Die Verteilungsfunktion einer Pareto-Verteilung mit unterschiedlichem θ

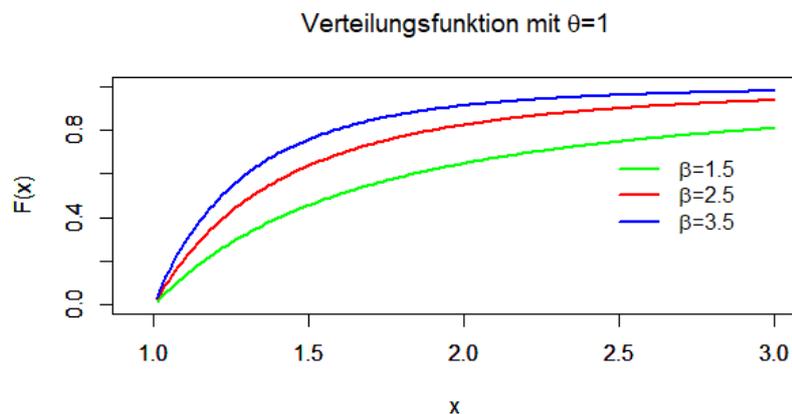


Abbildung 3.4: Die Verteilungsfunktion einer Pareto-Verteilung mit unterschiedlichem β

Als nächstes berechnen wir die Momente:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{\theta}^{\infty} x^n f(x) dx = \int_{\theta}^{\infty} x^n \beta \theta^{\beta} x^{-\beta-1} dx = \beta \theta^{\beta} \int_{\theta}^{\infty} x^{n-\beta-1} dx = \beta \theta^{\beta} \left(\frac{x^{n-\beta}}{n-\beta} \right) \Big|_{\theta}^{\infty}.$$

Dieses Integral ist nur für $\beta > n$ wohldefiniert. Wir erhalten dann:

$$\beta \theta^{\beta} \left(\frac{x^{n-\beta}}{n-\beta} \right) \Big|_{\theta}^{\infty} = -\frac{\beta \theta^{\beta} \theta^{n-\beta}}{n-\beta} = \frac{\beta \theta^n}{\beta-n}$$

für $\beta > n$. Für den Erwartungswert setzen wir $n=1$ und erhalten:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\beta \theta}{\beta-1}$$

mit $\beta > 1$. Für die Varianz benutzen wir den Verschiebungssatz und setzen dann in die 1. und 2. Momente ein:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{\beta \theta^2}{\beta-2} - \left(\frac{\beta \theta}{\beta-1} \right)^2 = \frac{\beta \theta^2}{\beta-2} - \frac{\beta^2 \theta^2}{(\beta-1)^2} = \frac{(\beta-1)^2 \beta \theta^2 - (\beta-2) \beta^2 \theta^2}{(\beta-2)(\beta-1)^2} \\ &= \frac{(\beta^2 - 2\beta + 1) \beta \theta^2 - \beta^3 \theta^2 + 2\beta^2 \theta^2}{(\beta-2)(\beta-1)^2} = \frac{\beta^3 \theta^2 - 2\beta^2 \theta^2 + \beta \theta^2 - \beta^3 \theta^2 + 2\beta^2 \theta^2}{(\beta-2)(\beta-1)^2} \\ &= \frac{\beta \theta^2}{(\beta-1)^2 (\beta-2)}. \end{aligned}$$

mit $\beta > 2$.

Den Value-at-Risk erhalten wir sofort aus der Quantilfunktion:

$$\text{VaR}_{\alpha}[X] = \theta(1-\alpha)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Für der Expected Shortfall müssen wir den Value-at-Risk in die Formel (3.1) einsetzen:

$$\text{ES}_{\alpha}[X] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(X) du = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \theta(1-u)^{-\frac{1}{\beta}} du = \frac{\theta}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 (1-u)^{-\frac{1}{\beta}} du.$$

Als nächstes führen wir die Substitution $t = 1 - u$ durch:

$t(u) = 1 - u$
$\frac{dt}{du} = -1$
$du = -dt$

$$\int (1-u)^{-\frac{1}{\beta}} du = - \int t^{-\frac{1}{\beta}} = -\frac{t^{1-\frac{1}{\beta}}}{1-\frac{1}{\beta}} + c.$$

Insgesamt haben wir nun:

$$\frac{\theta}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 (1-u)^{-\frac{1}{\beta}} du = \frac{\theta}{1-\alpha} \left(-\frac{(1-u)^{1-\frac{1}{\beta}}}{1-\frac{1}{\beta}} \right) \Big|_{\alpha}^1 = \frac{\theta}{1-\alpha} \left(-0 + \frac{(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}}}{1-\frac{1}{\beta}} \right) = \frac{\theta(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}}}{(1-\alpha)(1-\frac{1}{\beta})}.$$

Erweitert man Zähler und Nenner um β erhält man:

$$\frac{\theta(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}}}{(1-\alpha)(1-\frac{1}{\beta})} = \frac{\beta\theta(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}}}{(1-\alpha)(\beta-1)} = \frac{\beta\theta}{\beta-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Wir erhalten also insgesamt für $\beta > 1$:

$$ES_{\alpha}[X] = \frac{\beta\theta}{\beta-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{\beta}}. \quad (3.2)$$

Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

Die Normalverteilung hat zwei Parameter: $\mu \in \mathbb{R}$ ist ein Lageparameter und gibt die Lage des Erwartungswertes an, $\sigma^2 > 0$ ist ein Skalenparameter und gibt die Varianz an.

Die Dichte ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

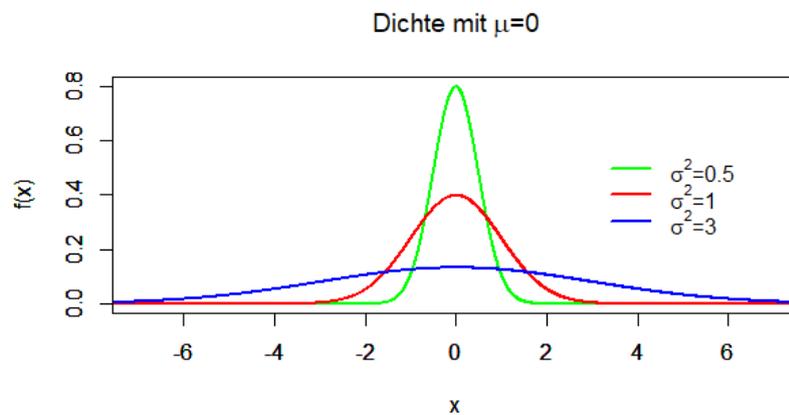


Abbildung 3.5: Die Dichte einer Normalverteilung mit unterschiedlichem σ

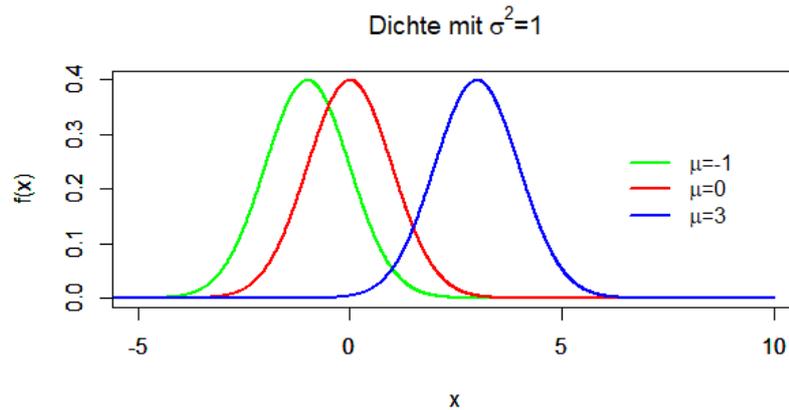


Abbildung 3.6: Die Dichte einer Normalverteilung mit unterschiedlichem μ

Die Dichte ist symmetrisch um μ und unimodal. Um den Modalwert zu berechnen, benötigen wir die Ableitung der Dichte:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{-2(x-\mu)}{2\sigma^2} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}.$$

Also erhalten wir für den Modalwert:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow -\frac{x-\mu}{\sigma^2} = 0 \Leftrightarrow x-\mu = 0 \Leftrightarrow x = \mu.$$

Somit ist die Dichtefunktion für $x < \mu$ steigend und für $x > \mu$ fallend.

Als nächstes berechnen wir die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt.$$

Wir können nun eine Substitution durchführen.

$z(t) = \frac{t-\mu}{\sigma}$
$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sigma}$
$dt = \sigma dz$
$z(-\infty) = -\infty$
$z(x) = \frac{x-\mu}{\sigma}$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right) dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma z + \mu) - \mu}{\sigma}\right)^2\right) \sigma dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

wobei $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

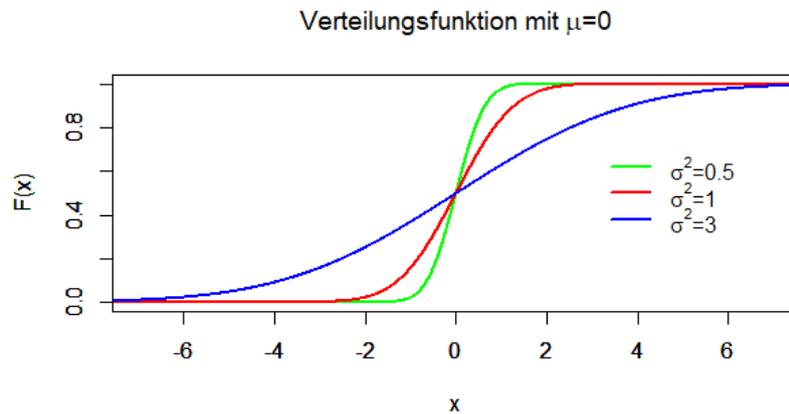


Abbildung 3.7: Die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit unterschiedlichem σ

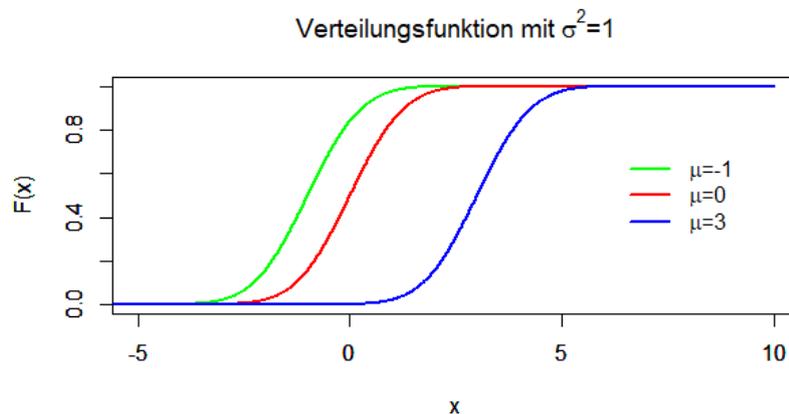


Abbildung 3.8: Die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit unterschiedlichem μ

Für die Quantilfunktion erhalten wir:

$$\alpha = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Leftrightarrow \Phi^{-1}(\alpha) = \frac{x-\mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

Also erhalten wir für den Value-at-Risk

$$VaR_\alpha[X] = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha).$$

Als nächstes berechnen wir uns den Expected-Shortfall:

$$ES_\alpha[X] = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u) du.$$

Wir führen eine Substitution durch:

$z(u) = \Phi^{-1}(u) \Leftrightarrow \Phi(z) = u$ $\frac{du}{dz} = \phi(z)$ $du = \phi(z) dz$ $z(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$ $z(1) = \infty$

Wir erhalten also:

$$\mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \Phi^{-1}(u) du = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty z\phi(z) dz.$$

Es gilt folgende Umformung:

$$\phi'(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \left(-\frac{2z}{2} \right) = -z\phi(z).$$

Damit können wir die Formel des Expected Shortfall weiter umformen:

$$\begin{aligned} \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty z\phi(z) dz &= \mu - \frac{\sigma}{1-\alpha} \int_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty \phi'(z) dz = \mu - \frac{\sigma}{1-\alpha} \phi(z) \Big|_{\Phi^{-1}(\alpha)}^\infty \\ &= \mu - \frac{\sigma}{1-\alpha} (\phi(\infty) - \phi(\Phi^{-1}(\alpha))) = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir für den Expected Shortfall also

$$ES_\alpha[X] = \mu + \frac{\sigma}{1-\alpha} \phi(\Phi^{-1}(\alpha)).$$

Bevor wir den Erwartungswert einer Normalverteilung betrachten, berechnen wir den Erwartungswert einer Standardnormalverteilung:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx.$$

Wegen der Integrierbarkeit und Punktesymmetrie erhalten wir:

$$\mathbb{E}[X] = 0.$$

Nun betrachten wir eine normalverteilte Zufallsvariable $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Es gilt also: $X = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Damit erhalten wir:

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\sigma X + \mu] = \sigma \mathbb{E}[X] + \mu = \mu.$$

Die Stetige Gleichverteilung U(a,b)

Die Dichte der stetigen Gleichverteilung ist für $a < b$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

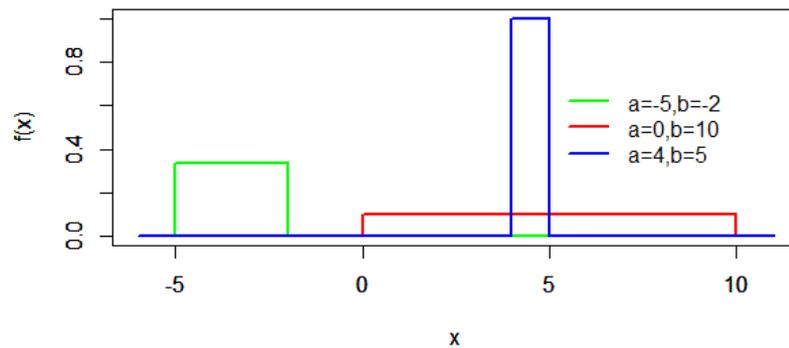


Abbildung 3.9: Die Dichte einer stetigen Gleichverteilung mit unterschiedlichem a und b

Um die Verteilungsfunktion zu erhalten müssen wir 3 Fälle betrachten: Für $x \leq a$ erhalten wir:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = 0.$$

Als nächstes betrachten wir den Fall $a < x < b$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{1}{b-a} \int_a^x 1 dy = \frac{1}{b-a} (y) \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Nun betrachten wir den letzten Fall $x \geq b$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_a^b f(y) dy + \int_b^x f(y) dy = \frac{b-a}{b-a} + 0 = 1.$$

Insgesamt erhalten wir damit:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

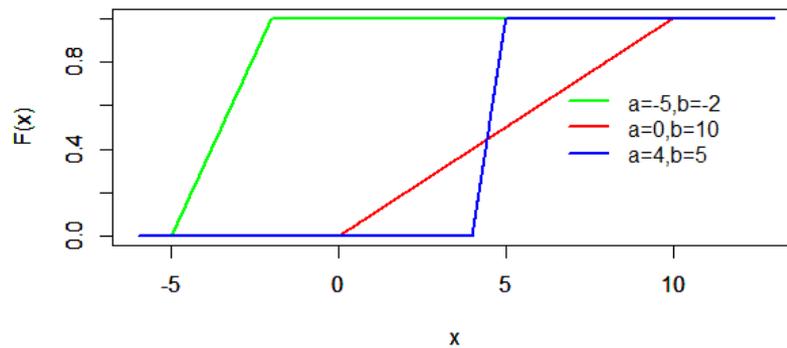


Abbildung 3.10: Die Verteilungsfunktion einer stetigen Gleichverteilung mit unterschiedlichem a und b

Als nächstes berechnen wir die Quantilfunktion für $u \in (0, 1)$:

$$\frac{x - a}{b - a} = u \Leftrightarrow u(b - a) = x - a \Leftrightarrow x = u(b - a) + a.$$

Wir erhalten für die Quantilfunktion also

$$F^{-1}(u) = u(b - a) + a.$$

Nun berechnen wir die Momente:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx = \int_a^b x^n \frac{1}{b - a} dx = \frac{1}{b - a} \int_a^b x^n dx = \frac{1}{b - a} \left(\frac{x^{n+1}}{n + 1} \right) \Big|_a^b = \frac{1}{b - a} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n + 1}.$$

Damit erhalten wir für den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{b - a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(a + b)(b^2 - a^2)}{(b - a)(a + b)2} = \frac{(a + b)(b^2 - a^2)}{2(ab + b^2 - a^2 - ab)} = \frac{(a + b)(b^2 - a^2)}{2(b^2 - a^2)} = \frac{a + b}{2}.$$

Für die Varianz erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{b^3 - a^3}{(b - a)3} - \frac{(a + b)^2}{4} = \frac{4(b^3 - a^3) - 3(a + b)^2(b - a)}{12(b - a)} \\ &= \frac{4(b^3 - a^3) - 3(a^2 + 2ab + b^2)(b - a)}{12(b - a)} = \frac{4b^3 - 4a^3 - 3a^2b - 6ab^2 - 3b^3 + 3a^3 + 6a^2b + 3ab^2}{12(b - a)} \\ &= \frac{b^3 - a^3 - 3ab^2 + 3a^2b}{12(b - a)} = \frac{(b - a)^3}{12(b - a)} = \frac{(b - a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Den Value-at-Risk erhält man wieder sofort aus der Quantilfunktion:

$$\text{VaR}_\alpha[X] = \alpha(b - a) + a.$$

Nun berechnen wir den Expected Shortfall:

$$\begin{aligned} ES_\alpha[X] &= \frac{1}{a-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u(X) du = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 a + u(b-a) du = \frac{a}{1-\alpha} (u) \Big|_\alpha^1 + \frac{b-a}{1-\alpha} \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_\alpha^1 \\ &= \frac{a(1-\alpha)}{1-\alpha} + \frac{b-a}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha^2}{2} \right) = a + \frac{(b-a)(1-\alpha^2)}{2(1-\alpha)} = a + \frac{(b-a)(1-\alpha)(1+\alpha)}{2(1-\alpha)} \\ &= a + \frac{(b-a)(1+\alpha)}{2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten für den Expected Shortfall also die folgende Formel:

$$ES_\alpha[X] = a + \frac{(b-a)(1+\alpha)}{2}.$$

Die Gammaverteilung $\Gamma(\gamma, \beta)$

Bevor wir die Gammaverteilung betrachten, werden wir die Gammafunktion und verwandte Funktionen definieren:

- **Gammafunktion** für $a > 0$:

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

- **Untere unvollständige Gammafunktion** für $a > 0$ und $x > 0$:

$$\gamma(a, x) = \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$$

- **Obere unvollständige Gammafunktion** für $a \in \mathbb{R}$ und $x > 0$:

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

- **Untere regularisierte unvollständige Gammafunktion** für $a > 0$:

$$P(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x t^{a-1} e^{-t} dt$$

- **Obere regularisierte unvollständige Gammafunktion** für $a \in \mathbb{R}$:

$$Q(a, x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$$

Die Gammaverteilung hat die beiden Parameter $\gamma > 0$ und $\beta > 0$.

Die Dichte ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\beta x}$$

für $x > 0$. Für die Eigenschaften der Dichte benötigen wir den Modus. Diesen erhalten wir durch Nullsetzen der Ableitung: $f'(x) = 0$. Dazu berechnen wir zuerst die Ableitung:

$$f'(x) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \left((\gamma - 1)x^{\gamma-2}e^{-\beta x} + x^{\gamma-1}(-\beta)e^{-\beta x} \right).$$

Deshalb gilt:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\gamma - 1}{x} - \beta.$$

Wir berechnen nun den Modus:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma - 1}{x} - \beta = 0 \Leftrightarrow \frac{\gamma - 1}{x} = \beta \Leftrightarrow x = \frac{\gamma - 1}{\beta}$$

Das bedeutet, wie man auch in Abbildung 3.11 sehen kann:

- Ist $0 < \gamma < 1$, dann geht $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ gegen $+\infty$. Außerdem ist $f(x)$ fallend.
- Ist $\gamma = 1$ erhält man die Exponentialverteilung $\text{Exp}(\beta)$ und $f(0) = \beta$. Auch hier ist $f(x)$ fallend.
- Ist $\gamma > 1$, dann ist $f(0) = 0$ und $f(x)$ ist wachsend auf $\left[0, \frac{\gamma-1}{\beta}\right]$ und fallend auf $\left[\frac{\gamma-1}{\beta}, \infty\right)$.

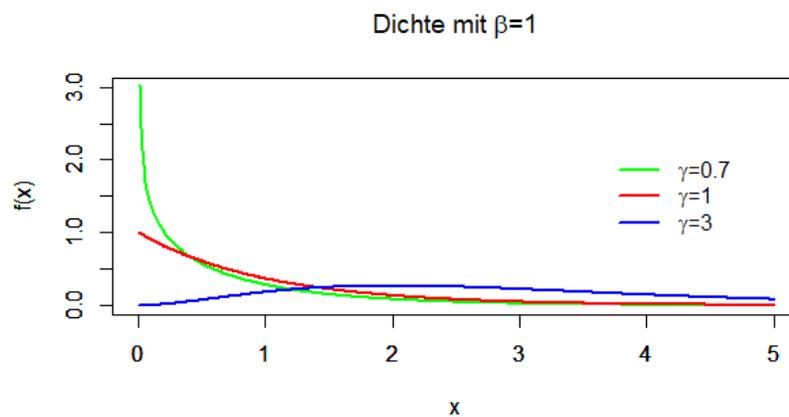


Abbildung 3.11: Die Dichte einer Gammaverteilung mit unterschiedlichem γ

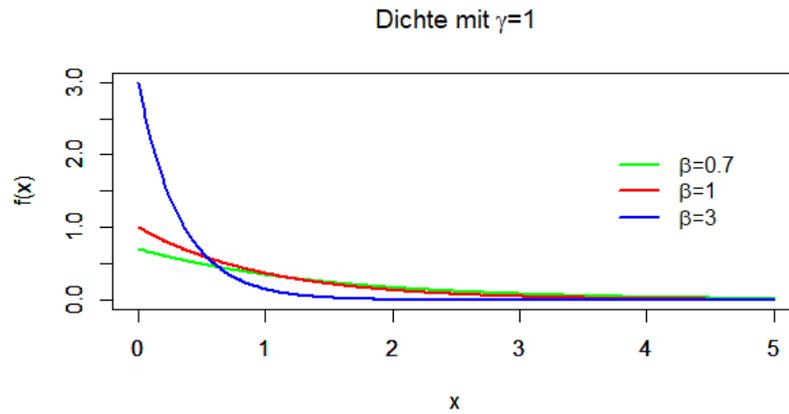


Abbildung 3.12: Die Dichte einer Gammaverteilung mit unterschiedlichem β

Die Gammaverteilung ist die untere regularisierte unvollständige Gammafunktion:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y^{\gamma-1} e^{-\beta y} dy.$$

Wir führen nun eine Substitution durch:

$z(y) = \beta y$
$\frac{dz}{dy} = \beta$
$dy = \frac{dz}{\beta}$
$z(0) = \beta \cdot 0 = 0$
$z(x) = \beta x$

$$\int_0^x \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} y^{\gamma-1} e^{-\beta y} dy = \int_0^{\beta x} \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{-z} \frac{dz}{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\beta x} z^{\gamma-1} e^{-z} dz = P(\gamma, \beta x).$$

Also erhalten wir für die Verteilung der Gammafunktion insgesamt folgende Formel:

$$F(x) = P(\gamma, \beta x).$$

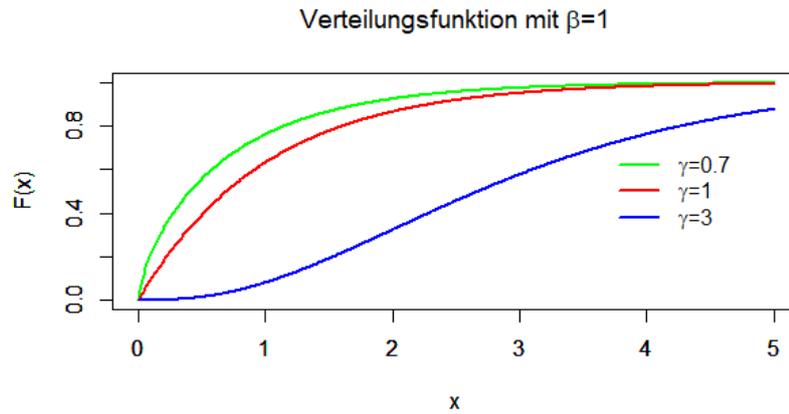


Abbildung 3.13: Die Verteilungsfunktion einer Gammaverteilung mit unterschiedlichem γ

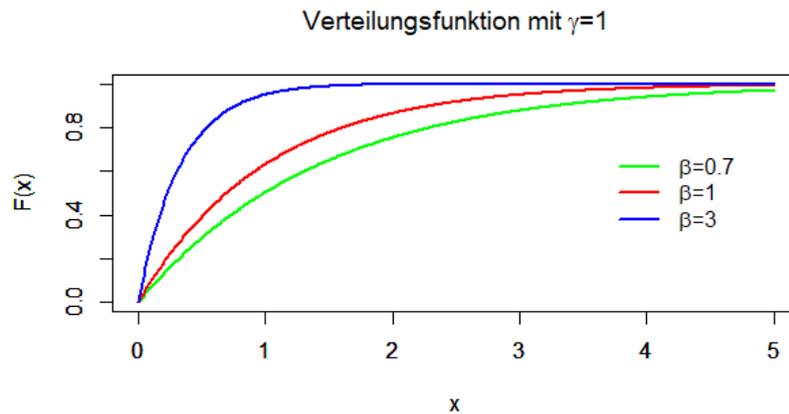


Abbildung 3.14: Die Verteilungsfunktion einer Gammaverteilung mit unterschiedlichem β

Die Quantilfunktion, und somit auch den Value-at-Risk, kann man im Allgemeinen nicht elementar darstellen. Für den Expected Shortfall können wir eine Formel finden:

$$ES_{\alpha}[X] = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 F^{-1}(u) du.$$

Als erstes führen wir eine Substitution durch:

$v(u) = F^{-1}(u) \Leftrightarrow u = F(v)$
$\frac{du}{dv} = F'(v) = f(v)$
$du = f(v)dv$
$v(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$
$v(1) = F^{-1}(1) = \infty$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 F^{-1}(u) du &= \frac{1}{1-\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty} v f(v) dv = \frac{1}{1-\alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty} v \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} v^{\gamma-1} e^{-\beta v} dv \\
&= \frac{\beta^{\gamma}}{(1-\alpha)\Gamma(\gamma)} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty} v^{\gamma} e^{-\beta v} dv = \frac{\beta^{\gamma}}{(1-\alpha)\Gamma(\gamma)} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\beta^{\gamma+1}} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty} \frac{\beta^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} v^{\gamma} e^{-\beta v} dv \\
&= \frac{\gamma}{\beta(1-\alpha)} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty} \frac{\beta^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} v^{\gamma} e^{-\beta v} dv.
\end{aligned}$$

Wir führen noch eine Substitution durch:

$u(v) = \beta v$
$\frac{du}{dv} = \beta$
$dv = \frac{du}{\beta}$
$u(F^{-1}(\alpha)) = \beta F^{-1}(\alpha)$
$u(\infty) = \infty$

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\beta(1-\alpha)} \int_{F^{-1}(\alpha)}^{\infty} \frac{\beta^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} v^{\gamma} e^{-\beta v} dv &= \frac{\gamma}{\beta(1-\alpha)} \int_{\beta F^{-1}(\alpha)}^{\infty} \frac{\beta^{\gamma+1}}{\Gamma(\gamma+1)} \left(\frac{u}{\beta}\right)^{\gamma} e^{-u} \frac{du}{\beta} \\
&= \frac{\gamma}{\beta(1-\alpha)} \int_{\beta F^{-1}(\alpha)}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} u^{\gamma} e^{-u} du \\
&= \frac{\gamma}{\beta(1-\alpha)} Q(\gamma+1, \beta F^{-1}(\alpha)).
\end{aligned}$$

Also erhalten wir für den Expected Shortfall folgende Formel:

$$ES_{\alpha}[X] = \frac{\gamma}{\beta(1-\alpha)} Q(\gamma+1, \beta F^{-1}(\alpha)).$$

Als nächstes berechnen wir die Momente der Gammaverteilung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^n] &= \int_0^{\infty} x^n f(x) dx = \int_0^{\infty} x^n \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} x^{n+\gamma-1} e^{-\beta x} dx \\
&= \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \left(\frac{e^{-\beta x} x^{n+\gamma-1}}{(-\beta)} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (n+\gamma-1) \frac{e^{-\beta x} x^{n+\gamma-2}}{(-\beta)} dx \right) = \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \frac{n+\gamma-1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^{n+\gamma-2} dx \\
&= \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(n+\gamma-1)(n+\gamma-2)}{\beta^2} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} x^{n+\gamma-3} dx = \dots = \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \frac{(n+\gamma-1)!}{\beta^{n+\gamma-1}} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx \\
&= \frac{(n+\gamma-1)!}{\beta^{n-1}\Gamma(\gamma)} \left(\frac{e^{-\beta x}}{-\beta} \Big|_0^{\infty} \right) = \frac{(n+\gamma-1)!}{\beta^{n-1}\Gamma(\gamma)} \left(\frac{0-1}{-\beta} \right) = \frac{(n+\gamma-1)!}{\beta^n \Gamma(\gamma)}.
\end{aligned}$$

Damit können wir uns wieder den Erwartungswert und die Varianz berechnen:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\gamma!}{\Gamma(\gamma)\beta} = \frac{\gamma!}{(\gamma-1)!\beta} = \frac{\gamma}{\beta}.$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{(\gamma + 1)!}{\Gamma(\gamma)\beta^2} - \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 = \frac{(\gamma + 1)\gamma}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{\gamma^2 + \gamma - \gamma^2}{\beta^2} = \frac{\gamma}{\beta^2}.$$

Wir werden noch zwei Spezialfälle der Gammaverteilung betrachten: die Exponentialverteilung und die Chi-Quadrat-Verteilung.

Exponentialverteilung $\text{Exp}(\beta)$

Die Exponentialverteilung ist ein Spezialfall der Gammaverteilung, denn es gilt: $\Gamma(1, \beta) = \text{Exp}(\beta)$. Die Summe von n unabhängigen $\text{Exp}(\beta)$ -verteilten Zufallsvariablen ist $\Gamma(n, \beta)$ -verteilt.

Die Exponentialverteilung hat einen Parameter β , der größer als 0 ist. Er ist ein Skalenparameter und gibt die Zahl der erwarteten Ereignisse pro Einheitsintervall wieder.

Die Dichte ist für $x > 0$ gegeben durch $f(x) = \beta e^{-\beta x}$. Sie ist strikt fallend und strikt positiv auf $(0, \infty)$.

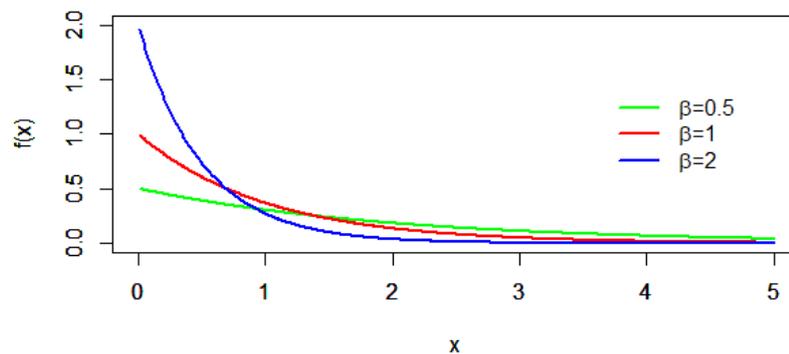


Abbildung 3.15: Die Dichte einer Exponentialverteilung mit unterschiedlichem β

Als erstes berechnen wir die Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy = \int_0^x \beta e^{-\beta y} dy = \beta \int_0^x e^{-\beta y} dy.$$

Wir substituieren nun:

$u(y) = -\beta y$
$\frac{du}{dy} = -\beta$
$dy = -\frac{du}{\beta}$

$$\int e^{-\beta y} dy = -\frac{1}{\beta} \int e^u du = -\frac{1}{\beta} e^u + c.$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\beta \int_0^x e^{-\beta y} dy = -\frac{\beta}{\beta} e^{-\beta y} \Big|_0^x = -e^{-\beta x} + e^0 = 1 - e^{-\beta x}.$$

Wir haben als $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$.

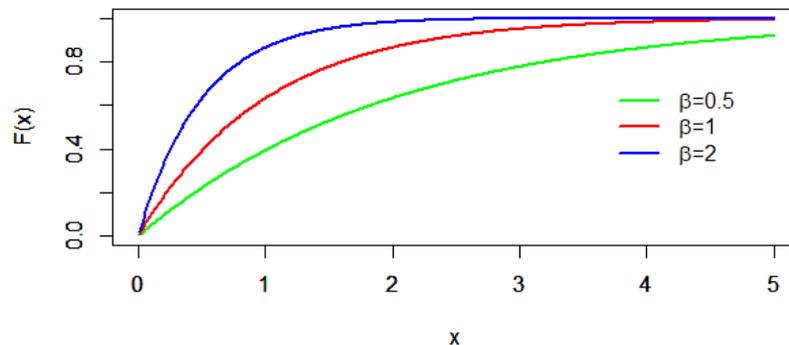


Abbildung 3.16: Die Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung mit unterschiedlichem β

Als nächstes berechnen wir uns wieder die Quantilfunktion:

$$u = 1 - e^{-\beta x} \Leftrightarrow e^{-\beta x} = 1 - u \Leftrightarrow -\beta x = \ln(1 - u) \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(1 - u)}{\beta}.$$

Es ist also

$$F^{-1}(u) = -\frac{\ln(1 - u)}{\beta}$$

für $u \in (0, 1)$.

Nun berechnen wir mittels partieller Integration die Momente:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^n] &= \int_0^\infty x^n f(x) dx = \int_0^\infty x^n \beta e^{-\beta x} dx = \beta \int_0^\infty x^n e^{-\beta x} dx = \beta \left[-\frac{e^{-\beta x} x^n}{\beta} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{n}{\beta} e^{-\beta x} x^{n-1} dx \right] \\ &= \beta \int_0^\infty \frac{n}{\beta} e^{-\beta x} x^{n-1} dx = n \int_0^\infty e^{-\beta x} x^{n-1} dx = n \left[\frac{n-1}{\beta} \int_0^\infty e^{-\beta x} x^{n-2} dx \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{\beta} \int_0^\infty e^{-\beta x} x^{n-2} dx = \dots = \frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{\beta^{n-1}} \int_0^\infty e^{-\beta x} x^{n-n} dx \\ &= \frac{n!}{\beta^{n-1}} \int_0^\infty e^{-\beta x} dx = \frac{n!}{\beta^{n-1}} \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \Big|_0^\infty \right] = -\frac{n!}{\beta^n} 0 + \frac{n!}{\beta^n} e^0 = \frac{n!}{\beta^n}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wieder sofort den Erwartungswert und die Varianz:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\beta},$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\beta^2} - \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{2}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}.$$

Den Value-at-Risk erhalten wir wieder sofort aus der Quantilfunktion:

$$VaR_\alpha[X] = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\beta}.$$

Nun berechnen wir den Expected Shortfall:

$$ES_\alpha[X] = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 VaR_u du = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 -\frac{\ln(1-u)}{\beta} du = -\frac{1}{(1-\alpha)\beta} \int_\alpha^1 \ln(1-u) du.$$

Als nächstes führen wir die Substitution $s = 1 - u$ durch:

$s(u) = 1 - u$
$\frac{ds}{du} = -1$
$du = -ds$

$$\int \ln(1-u) du = -\int \ln(s) ds.$$

Um diesen Ausdruck integrieren zu können, wenden wir partielle Integration an und substituieren danach zurück:

$$\begin{aligned} -\int \ln(s) \cdot 1 ds &= -\left(s \cdot \ln(s) - \int s \frac{1}{s} ds\right) = -(s \cdot \ln(s) - s) + c = -((1-u) \ln(1-u) - (1-u)) + c \\ &= (u-1)(\ln(1-u) - 1) + c. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(1-\alpha)\beta} \int_\alpha^1 \ln(1-u) du &= -\frac{1}{(1-\alpha)\beta} \left((u-1)(\ln(1-u) - 1) \Big|_\alpha^1 \right) = \\ &= -\frac{1}{(1-\alpha)\beta} ((1-1)(\ln(1-1) - 1) - (\alpha-1)(\ln(1-\alpha) - 1)) \\ &= \frac{(\alpha-1)(\ln(1-\alpha) - 1)}{(1-\alpha)\beta} = -\frac{\ln(1-\alpha) - 1}{\beta}. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle können wir die Formel der Gammaverteilung benutzen:

$$ES_\alpha[X] = \frac{Q(2, \beta F^{-1}(\alpha))}{\beta(1-\alpha)}.$$

Wir wissen, dass $F^{-1}(\alpha) = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\beta}$ ist. Also haben wir:

$$\frac{Q(2, -\beta \frac{\ln(1-\alpha)}{\beta})}{\beta(1-\alpha)} = \frac{Q(2, -\ln(1-\alpha))}{\beta(1-\alpha)}.$$

Wir berechnen als erstes den Ausdruck mit der oberen regularisierten Gammafunktion:

$$\begin{aligned} Q(2, -\ln(1-\alpha)) &= \frac{1}{\Gamma(2)} \int_{-\ln(1-\alpha)}^{\infty} t^{2-1} e^{-t} dt = \frac{1}{1!} \int_{-\ln(1-\alpha)}^{\infty} t e^{-t} dt = (-t e^{-t}) \Big|_{-\ln(1-\alpha)}^{\infty} + \int_{-\ln(1-\alpha)}^{\infty} e^{-t} dt \\ &= (-\ln(1-\alpha)) e^{\ln(1-\alpha)} - e^{-t} \Big|_{-\ln(1-\alpha)}^{\infty} = (-\ln(1-\alpha))(1-\alpha) + e^{\ln(1-\alpha)} \\ &= (1-\alpha)(-\ln(1-\alpha) + 1). \end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt:

$$ES_{\alpha}[X] = \frac{(1-\alpha)(-\ln(1-\alpha) + 1)}{\beta(1-\alpha)} = -\frac{\ln(1-\alpha) - 1}{\beta}.$$

Somit erhalten wir dieselbe Formel für den Expected Shortfall wie zuvor.

Die Chi-Quadrat-Verteilung $\chi^2(\gamma)$

Die Chi-Quadrat-Verteilung ist ebenfalls ein Spezialfall der Gammaverteilung: $\chi^2(\gamma) = \Gamma(\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2})$, wobei $\gamma \in \mathbb{N}$ gelten soll. Die Dichte ist deshalb für $x > 0$ gegeben durch:

$$f(x) = \frac{x^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{\gamma}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})}.$$

Wir berechnen nun wieder den Modus, also berechnen wir zuerst die Ableitung:

$$f'(x) = \frac{(\frac{\gamma}{2} - 1) x^{\frac{\gamma}{2}-2} e^{-\frac{x}{2}} + x^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} (-\frac{1}{2})}{2^{\frac{\gamma}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})}.$$

Deshalb gilt:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\gamma}{2} - 1}{x} - \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen nun den Modus:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\gamma}{2} - 1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\gamma}{2} - 1}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} - 1 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = \gamma - 2$$

Das bedeutet, wie man auch in Abbildung 3.17 sehen kann:

- Ist $0 < \gamma < 2$, dann geht $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ gegen $+\infty$. Außerdem ist $f(x)$ fallend.
- Ist $\gamma = 2$ erhält man die Exponentialverteilung $\text{Exp}(\frac{1}{2})$ und $f(0) = \frac{1}{2}$. Auch hier ist $f(x)$ fallend.
- Ist $\gamma > 2$, dann ist $f(0) = 0$ und $f(x)$ ist wachsend auf $[0, \gamma - 2]$ und fallend auf $[\gamma - 2, \infty]$.

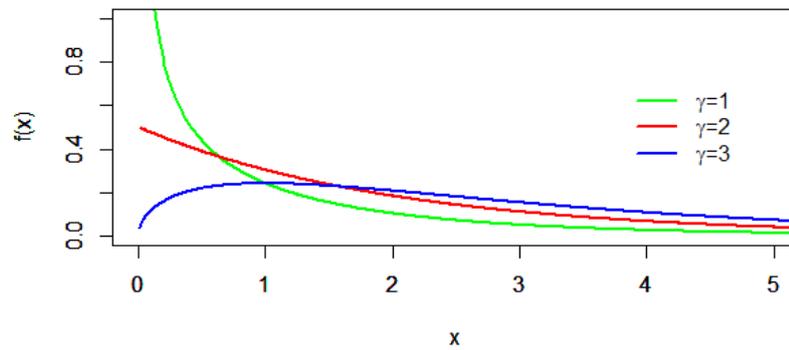


Abbildung 3.17: Die Dichte einer Chi-Quadrat-Verteilung mit unterschiedlichem γ

Für die Verteilungsfunktion werden wir eine Substitution durchführen:

$z(y) = \frac{y}{2}$
$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2}$
$dy = 2dz$
$z(0) = 0$
$z(x) = \frac{x}{2}$

$$F(x) = \int_0^x \frac{y^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{\gamma}{2}} \Gamma(\frac{\gamma}{2})} dy = \frac{1}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{(2z)^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-z}}{2^{\frac{\gamma}{2}}} 2dz = \frac{1}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})} \int_0^{\frac{x}{2}} z^{\frac{\gamma}{2}-1} e^{-z} dz = P\left(\frac{\gamma}{2}, \frac{x}{2}\right).$$

Man kann die Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Verteilung also wieder mithilfe der unteren regularisierten Gammafunktion darstellen.

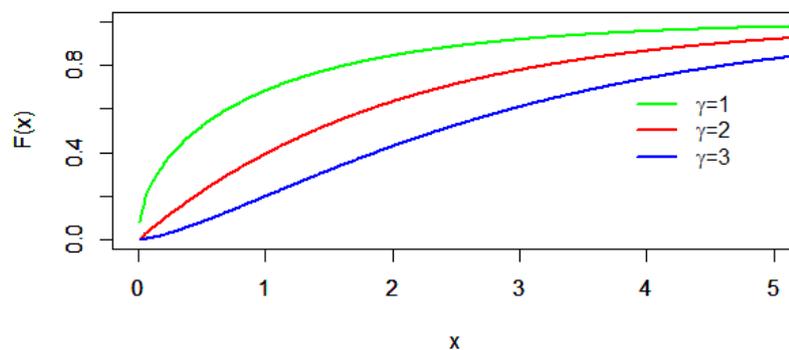


Abbildung 3.18: Die Verteilungsfunktion einer Chi-Quadrat-Verteilung mit unterschiedlichem γ

Wieder kann man die Quantilfunktion im Allgemeinen nicht elementar darstellen und somit gibt es auch keine Darstellung für den Value-at-Risk. Für den Expected Shortfall erhält man analog wie bei der Gammaverteilung folgende Formel:

$$ES_\alpha[X] = \frac{\frac{\gamma}{2}}{\frac{1}{2}(1-\alpha)} Q\left(\frac{\gamma}{2} + 1, \frac{1}{2}F^{-1}(\alpha)\right) = \frac{\gamma}{(1-\alpha)} Q\left(\frac{\gamma}{2} + 1, \frac{1}{2}F^{-1}(\alpha)\right).$$

Die Momente der Chi-Quadrat-Verteilung erhalten wir direkt aus den Momenten der Gammaverteilung:

$$\mathbb{E}[X^n] = \frac{2^n \left(n + \frac{\gamma}{2} - 1\right)!}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Für den Erwartungswert und die Varianz erhalten wir dadurch:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2\left(\frac{\gamma}{2}\right)!}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = 2\frac{\gamma}{2} = \gamma.$$

$$Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2^2\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)!}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} - \gamma^2 = 4\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)\frac{\gamma}{2} - \gamma^2 = \gamma^2 + 2\gamma - \gamma^2 = 2\gamma.$$

3.2 Bivariate Verteilungen

Gumbel's Bivariate Exponentialverteilung

In [8, S.350-351] werden verschiedene bivariate Exponentialverteilungen von Gumbel vorgestellt. Eine davon werden wir nun genauer betrachten. Die gemeinsame Dichtefunktion ist gegeben durch:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = e^{-(x_1 + x_2 + \theta x_1 x_2)}((1 + \theta x_1)(1 + \theta x_2) - \theta), \quad x_1, x_2 > 0, 0 \leq \theta \leq 1.$$

Bemerkung 3.5. Für die Abbildungen 3.19 und 3.20 wurde in \mathbb{R} die Funktion *persp* benutzt.

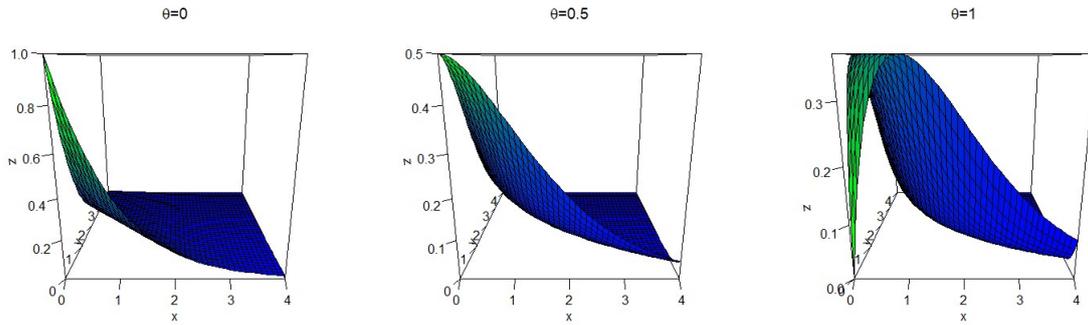


Abbildung 3.19: Die Dichtefunktion der bivariaten Exponentialverteilung von Gumbel mit unterschiedlichem θ

Die gemeinsame Verteilungsfunktion ist gegeben durch:

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-(x_1+x_2+\theta x_1 x_2)}, \quad x_1, x_2 > 0, 0 \leq \theta \leq 1.$$

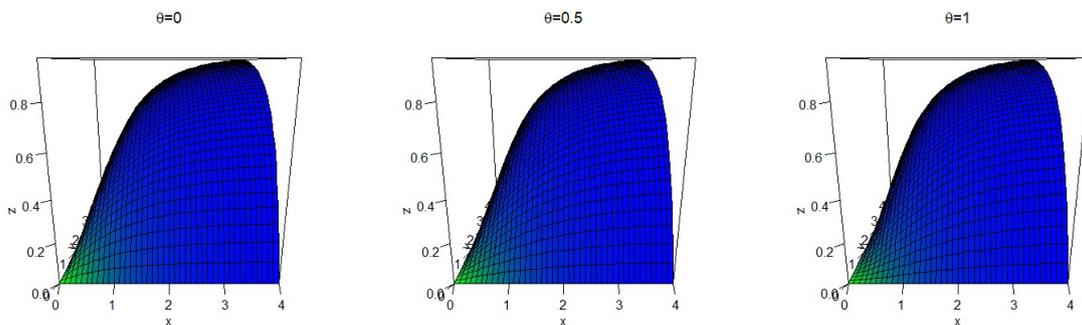


Abbildung 3.20: Die Verteilungsfunktion der bivariaten Exponentialverteilung von Gumbel mit unterschiedlichem θ

Man sieht anhand der Verteilungsfunktion sofort, dass X_1 und X_2 genau dann voneinander unabhängig sind, wenn $\theta = 0$ ist.

Wir wollen nun die gemeinsame Verteilung in die einzelnen Randverteilungen und in die Copula aufteilen. Zuerst berechnen wir uns dazu die Randverteilungen:

$$F_1(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} F(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-(x_1+x_2+\theta x_1 x_2)} = 1 - e^{-x_1}.$$

Analog erhält man $F_2(x_2) = 1 - e^{-x_2}$. Die Ränder sind also exponentialverteilt mit Parameter 1. Mithilfe von Satz 3.2 (Satz von Sklar) können wir nun die Copula berechnen:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \Leftrightarrow F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) = C(u_1, u_2).$$

Aus Kapitel 3.1 wissen wir, dass die Inverse der Exponentialverteilung mit Parameter 1 folgendermaßen aussieht:

$$F^{-1}(u) = -\ln(1 - u).$$

Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= 1 - e^{\ln(1-u_1)} - e^{\ln(1-u_2)} + e^{\ln(1-u_1)+\ln(1-u_2)-\theta \ln(1-u_1) \ln(1-u_2)} \\ &= 1 - (1 - u_1) - (1 - u_2) + (1 - u_1)(1 - u_2)e^{-\theta \ln(1-u_1) \ln(1-u_2)} \\ &= u_1 + u_2 - 1 + (1 - u_1)(1 - u_2)e^{-\theta \ln(1-u_1) \ln(1-u_2)}. \end{aligned}$$

3.3 Konzept der Mischbarkeit

Als nächstes definieren wir ein Konzept von multivariater negativer Abhängigkeit: Eine Verteilungsfunktion F auf \mathbb{R} wird **d-vollständig mischbar (d-CM)** (engl. d-completely-mixable) genannt, falls d Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_d \sim F$ existieren, sodass ein $k \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_d = dk) = 1.$$

Wenn der Mittelwert von F endlich ist, dann gilt $k = \mu$. F heißt **vollständig-mischbar** (engl. completely mixable), falls F d-vollständig mischbar ist für alle $d \geq 2$. Die Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_d auf \mathbb{R} werden **gemeinsam-mischbar** (engl. jointly mixable) genannt, falls d Zufallsvariablen $X_i \sim F_i, i = 1, \dots, d$ existieren, sodass ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_d = c) = 1.$$

Falls alle Verteilungsfunktionen endliche erste Momente haben, dann gilt $c = \sum_{i=1}^d \mu_i$. Jeder Vektor (X_1, \dots, X_d) der

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_d = c) = 1$$

mit $c \in \mathbb{R}$ erfüllt, wird **d-vollständige Mischung** (engl. d-complete mix) genannt.

Bemerkung 3.6. Jede stetige Verteilung mit symmetrischer und unimodaler Dichte ist vollständig-mischbar. Den Beweis dafür findet man in [14, Theorem 2.1, S.4]. Die Normalverteilung, die Student-t-Verteilung und die Cauchy-Verteilung haben eine symmetrische und unimodale Dichte und sind somit vollständig mischbar. Die Pareto-Verteilung ist unimodal, aber nicht symmetrisch. Wir werden später zeigen, dass die Pareto-Verteilung nicht vollständig-mischbar ist.

Beispiel 3.7. Wir wollen nun ein Beispiel für eine drei-vollständige Mischung betrachten. Dazu nehmen wir an, dass F_i die diskrete Gleichverteilung auf $\{1, \dots, 5\}$ ist. Es ist also $\mathbb{P}[X_i = k] = \frac{1}{5}$ mit $i = 1, \dots, 3$ und $k = 1, \dots, 5$. Wir erhalten also folgende Tabelle:

ω	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$	$X_3(\omega)$	$\mathbb{P}(\omega)$
ω_1	1	5	3	$\frac{1}{5}$
ω_2	2	3	4	$\frac{1}{5}$
ω_3	3	1	5	$\frac{1}{5}$
ω_4	4	4	1	$\frac{1}{5}$
ω_5	5	2	2	$\frac{1}{5}$

Die Zeilensumme ist jeweils

$$d \cdot \mu = 3 \cdot 3 = 9 = c.$$

Für mehr Details über das Konzept der Mischbarkeit siehe [2, S.307-308] oder [4, S.4-5].

Kapitel 4

Randverteilung + Copula Ansatz

4.1 Obere und Untere Grenzen

Wir werden nun nach oberen und unteren Grenze für den Value-at-Risk und den Expected Shortfall suchen. Man unterscheidet dabei zwischen den Dimensionen $d = 2$ und $d > 2$ und ob man ein homogenes oder heterogenes Portfolio hat. Die Dimension gibt an, wie viele Zufallsvariablen aggregiert werden sollen. Bei einem homogenen Portfolio haben alle Zufallsvariablen dieselbe Verteilung mit denselben Parametern, während bei einem heterogenen Portfolio verschiedene Verteilungen möglich sind.

4.1.1 Value-at-Risk

Zweidimensionaler homogener Fall

Aus [4, Proposition 2, S.5] wissen wir:

Satz 4.1. Sei $F = F_1 = F_2$. Ist F eine stetige Verteilung auf $[0, \infty)$, wobei die Dichtefunktion für ein $\bar{x}_F \geq 0$ auf (\bar{x}_F, ∞) fallend ist, dann gilt

$$\begin{aligned}\underline{\text{VaR}}_\alpha(S_2) &= F^{-1}(\alpha) \\ \overline{\text{VaR}}_\alpha(S_2) &= 2F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\end{aligned}$$

für alle $\alpha \in [F(\bar{x}_F), 1)$.

Beispiel 4.2. Wir wollen diesen Satz nun an einem Beispiel anwenden. Dazu benötigen wir eine Verteilung, die alle Voraussetzungen erfüllt. Die Chi-Quadrat-Verteilung ist eine stetige Verteilung auf $[0, \infty)$. Wählt man 3 Freiheitsgrade, so ist die Dichtefunktion ab dem Funktionsargument 1 fallend. Somit erfüllt sie alle Voraussetzungen und es gilt $\bar{x}_F = 1$. Laut R ist $F(x_F) = 0.198748$. Der Satz kann daher dafür für alle $\alpha \in [0.198748, 1)$ angewendet werden. Wir interessieren uns für den Bereich $\alpha \in [0.9, 0.99]$. Mittels R kann man nun die Grenzen berechnen und plotten.

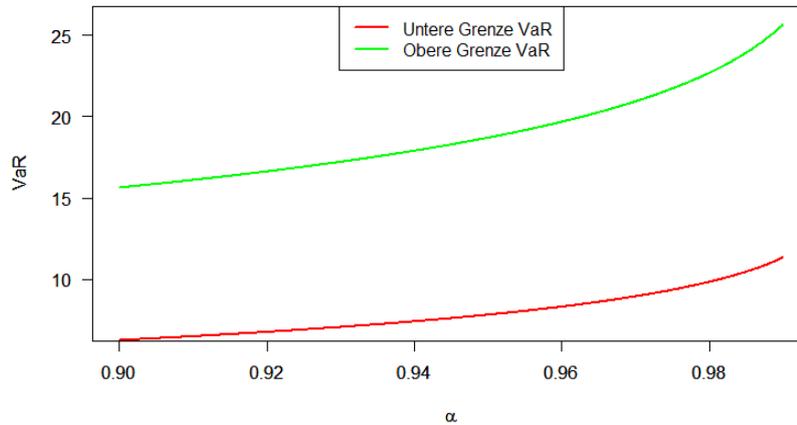


Abbildung 4.1: Obere und untere Grenzen des Value-at-Risk bei zwei Chi-Quadrat-Verteilungen mit drei Freiheitsgraden mittels Satz 4.1

Zweidimensionaler heterogener Fall

Auch für den heterogenen Fall kann man im Zweidimensionalen eine Formel finden.

Satz 4.3. Sei $d=2$. Dann gilt für alle $\alpha \in (0, 1)$:

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha}(S_2) = \sup_{x \in [0, \alpha]} \{F_1^{-1}(x) + F_2^{-1}(\alpha - x)\}$$

$$\overline{\text{VaR}}_{\alpha}(S_2) = \inf_{x \in [0, 1-\alpha]} \{F_1^{-1}(\alpha + x) + F_2^{-1}(1 - x)\}$$

Beweis. Siehe [10] und [13]. □

Bemerkung 4.4. Diesen Satz findet man in [2, Proposition 8.31, S.306] mit einem Fehler: für die untere Grenze des Value-at-Risk wurde fälschlicherweise \inf statt \sup geschrieben.

Lässt man Beispiel 4.2 in R mittels Satz 4.3 plotten, sieht man sofort, dass für die untere Grenze \sup richtig ist. Siehe dazu Beispiel 4.5. Auch in Quelle [10, S.1] steht die Formel mit einem Supremum.

In diesem Satz wurde schon das Prinzip der Mischbarkeit angewandt: Große Ergebnisse des einen Risikos wurden mit kleinen des anderen kombiniert.

Beispiel 4.5. Wir wollen diesen Satz nun ebenfalls auf eine Chi-Quadrat-Verteilung mit 3 Freiheitsgraden anwenden um die Ergebnisse vergleichen zu können.

Mittels R können wir die Grenzen berechnen und plotten. Für die Berechnung des Infimums und Supremums wurde die Funktion `optimize` verwendet: möchte man das Infimum berechnen setzt man den Parameter `maximum` auf `FALSE`. Für das Supremum setzt man ihn auf `TRUE`.

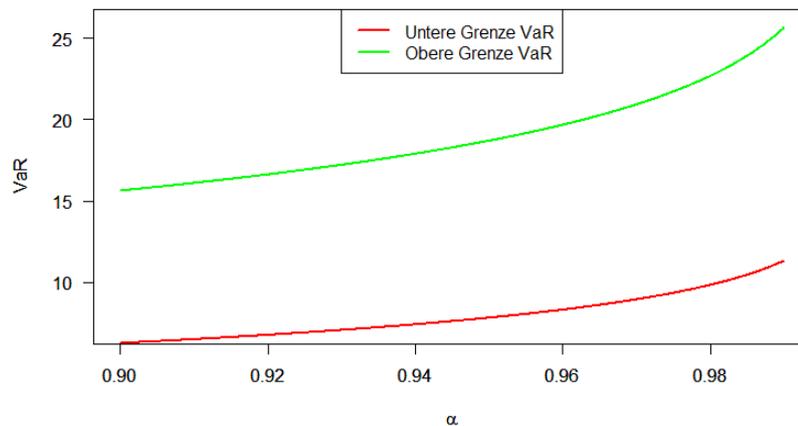


Abbildung 4.2: Obere und untere Grenzen des Value-at-Risk bei zwei Chi-Quadrat-Verteilungen mit drei Freiheitsgraden mittels Satz 4.3

Wie erwartet erhält man für Satz 4.1 und Satz 4.3 dieselben Ergebnisse.

Beispiel 4.6. In diesem Beispiel wenden wir den Satz 4.3 auf eine Exponential(1.5)-Verteilung und eine Normalverteilung(0,1) an. Im Appendix findet man den dazugehörigen kommentierten R-Code.

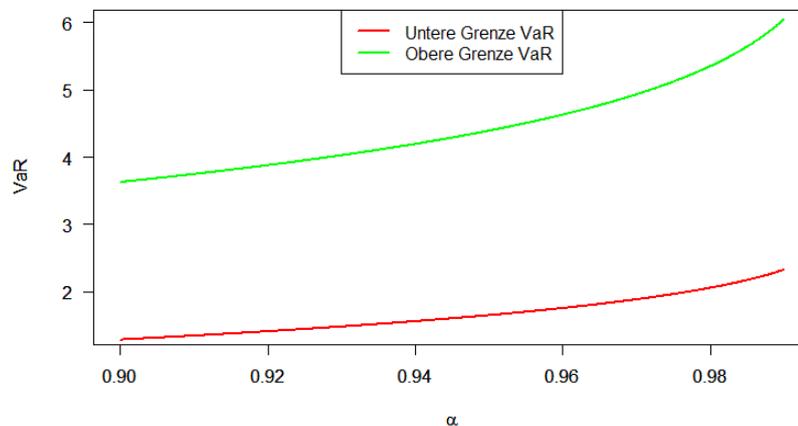


Abbildung 4.3: Obere und untere Grenzen des Value-at-Risk bei einer Exponential(1.5)-Verteilung und einer Normalverteilung(0,1) mittels Satz 4.3

Mehrdimensionaler homogener Fall

Der **Träger** eines Zufallsvektors X ist die kleinste, abgeschlossene Menge A , sodass $\mathbb{P}(X \notin A) = 0$.

In [2, Proposition 8.32, S.306] wird folgender Satz formuliert:

Satz 4.7. Seien $F = F_1 = \dots = F_d$. Die Verteilungsfunktion besitze eine Dichte. Falls die Dichte fallend auf dem Träger ist, dann gilt für $\alpha \in (0, 1)$ und $X \sim F$

$$\underline{\text{VaR}}_\alpha(S_d) = \max\{(d-1)F^{-1}(0) + F^{-1}(\alpha), d\mathbb{E}(X|X \leq F^{-1}(\alpha))\} \quad (4.1)$$

Falls ein $b \in \mathbb{R}$ existiert, sodass die Dichte auf $[b, \infty)$ fallend ist, dann ist für $\alpha \in [F(b), 1)$ und $X \sim F$:

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d) = d\mathbb{E}[X|X \in [F^{-1}(\alpha + (d-1)c_1(\alpha)), F^{-1}(1 - c_1(\alpha))]], \text{ mit} \quad (4.2)$$

$$c_1(\alpha) := \min \left\{ c \in \left[0, \frac{1-\alpha}{d}\right] : \int_{\alpha+(d-1)c}^{1-c} F^{-1}(t)dt \geq \frac{1-\alpha-cd}{d} ((d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)c) + F^{-1}(1-c)) \right\}.$$

Bemerkung 4.8. Sei \tilde{F}_α die **bedingte Verteilung** von F auf $[F^{-1}(\alpha), \infty)$ mit $\alpha \in (0, 1)$. Wir wollen dafür nun nach einer Formel suchen. Intuitiv und mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\tilde{F}_\alpha(x) = \mathbb{P}(X \leq x | X \geq F^{-1}(\alpha)) = \frac{\mathbb{P}(F^{-1}(\alpha) \leq X \leq x)}{\mathbb{P}(X \geq F^{-1}(\alpha))}.$$

Mit Satz 3.1 Punkt 2 können wir den unteren Teil vereinfachen:

$$\mathbb{P}(X \geq F^{-1}(\alpha)) = 1 - \mathbb{P}(X < F^{-1}(\alpha)) = 1 - F(F^{-1}(\alpha)-) = 1 - \alpha.$$

Für den oberen Teil benötigen wir Satz 3.1 Punkt 2 und Punkt 3:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F^{-1}(\alpha) \leq X \leq x) &= \mathbb{P}(X \leq x - F^{-1}(\alpha)) = \begin{cases} F(x - F^{-1}(\alpha)) & \text{falls } F^{-1}(\alpha) \leq x, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(x) - \alpha & \text{falls } F^{-1}(\alpha) \leq x, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zusammen ergibt das also:

$$\tilde{F}_\alpha(x) = \max\left(\frac{F(x) - \alpha}{1 - \alpha}, 0\right).$$

Für den Beweis von 4.2, benötigen wir noch ein paar Definitionen und Lemmata aus [12]:

- $m_+(s) := \inf\{\mathbb{P}(S < s) : X_i \sim F_i, i = 1, \dots, d\}$.
- Ein Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_d)$ mit Randverteilungen F_1, \dots, F_d wird **optimale Verknüpfung** für $m_+(s)$ genannt, falls $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_d < s) = m_+(s)$.
- $\psi(t) := \mathbb{E}(X|X \geq F^{-1}(t))$ für $t \in (0, 1)$.
- $H_\alpha(x) := (d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)x) + F^{-1}(1-x)$, wobei $\alpha \in [0, 1]$ und $x \in [0, \frac{1-\alpha}{d}]$.

$$\bullet \phi(\alpha) = \begin{cases} H_\alpha(c_2(\alpha)) & \text{falls } c_2(\alpha) > 0, \\ d\psi(\alpha) & \text{falls } c_2(\alpha) = 0 \end{cases} \text{ mit}$$

$$c_2(\alpha) := \min \left\{ c \in \left[0, \frac{1-\alpha}{d}\right] : \int_c^{\frac{1-\alpha}{d}} H_\alpha(t) dt \geq \left(\frac{1-\alpha-cd}{d}\right) H_\alpha(c) \right\}.$$

Weiters benötigen wir eine spezielle Copula. Hat man eine fallende Dichte, dann ist $(U_1, \dots, U_d) \sim Q_d^F(c)$ für $0 \leq c \leq \frac{1}{d}$, wenn folgendes erfüllt ist:

1. liegt ein U_i für $i = 1, \dots, d$ im Intervall $[1-c, 1]$, dann sollen alle anderen U_j mit $j \neq i$ kontramoton zu U_i sein. Somit muss $U_j = (d-1)(1-U_i)$ gelten.
2. liegt ein U_i für $i = 1, \dots, d$ im Intervall $((d-1)c, 1-c)$, sollen auch alle anderen U_j mit $j \neq i$ in diesem Intervall liegen und die Summe $F^{-1}(U_1) + \dots + F^{-1}(U_d)$ soll eine Konstante sein.

Lemma 4.9. Seien $F = F_1 = \dots = F_d$. Falls F eine fallende Dichte auf ihrem Träger hat, dann gilt $m_+(s) = \phi^{-1}(s)$.

Beweis. $m_+(s) \leq \phi^{-1}(s)$: Es sei $\alpha := \phi^{-1}(s)$. Für $i = 1, \dots, d$ seien $Y_1, \dots, Y_d \sim \tilde{F}_\alpha$ mit der Copula $Q_d^{\tilde{F}_\alpha}$ verknüpft. Für $V \sim U[0, 1]$ ist $X_i = F^{-1}(V)\mathbb{I}_{\{V \leq \alpha\}} + Y_i\mathbb{I}_{\{V > \alpha\}}$, wobei V unabhängig von Y_1, \dots, Y_d ist. Man kann erkennen, dass $X_i \sim F_i$ gilt. Da F eine monotone Dichte hat, gilt $\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_d \geq \phi(\alpha)) = 1$ ¹. Daher gilt

$$\begin{aligned} m_+(s) &= \inf \mathbb{P}(S < s) = \inf \mathbb{P}(S < \phi(\alpha)) \\ &\leq \mathbb{P}(S < \phi(\alpha)) = 1 - \mathbb{P}(S \geq \phi(\alpha)) \\ &= 1 - \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_d \geq \phi(\alpha))\mathbb{P}(V > \alpha) - \mathbb{P}(F^{-1}(V) \geq \phi(\alpha))\mathbb{P}(V \leq \alpha) \\ &\leq 1 - \mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_d \geq \phi(\alpha))\mathbb{P}(V > \alpha) = \mathbb{P}(V < \alpha) = \alpha = \phi^{-1}(s). \end{aligned}$$

Somit ist die erste Richtung gezeigt.

$m_+(s) \geq \phi^{-1}(s)$: Die zweite Richtung wollen wir mithilfe eines Widerspruchsbeweises zeigen. Dafür nehmen wir an, dass $\beta = m_+(s) < \phi^{-1}(s) = \alpha$ und $X = (X_1, \dots, X_d)$ eine optimale Verknüpfung für $m_+(s)$ ist², sodass $\{S \geq s\} = \{X_i \geq F^{-1}(\beta)\}$ für $i = 1, \dots, d$. Also existieren $U_{\beta,1}, \dots, U_{\beta,d} \sim U[\beta, 1]$, sodass $\mathbb{P}(F^{-1}(U_{\beta,1}) + \dots + F^{-1}(U_{\beta,d}) \geq s) = 1$. Da F eine monoton fallende Dichte hat, gilt $\phi(\alpha) = d\mathbb{E}[F^{-1}(V_\alpha)]$ mit $V_\alpha \sim U[\alpha + (d-1)c(\alpha), 1 - c(\alpha)]$ und $\mathbb{E}(F^{-1}(U_{\beta,i})|A) < \mathbb{E}(F^{-1}(V_\alpha))$ für $i = 1, \dots, d$, wobei

$$A = \bigcap_{i=1}^d \{U_{\beta,i} \in [\beta, 1 - c(\alpha)]\}.$$
³

¹Für den Beweis siehe [12, Lemma 3.3 (v), S.404].

²So eine Verknüpfung existiert laut [12, Lemma 2.2., S.397].

³Für den Beweis siehe [12, Lemma 3.3 (iii) und (iv), Seite 404].

Daraus folgt, dass

$$s \leq \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^d F^{-1}(U_{\beta,i}) | A \right) = d \mathbb{E}(F^{-1}(U_{\beta,i}) | A) < d \mathbb{E}(F^{-1}(V_\alpha)) = \phi(\alpha) = s.$$

Das ist ein Widerspruch und somit gilt $m_+(s) = \phi^{-1}(s)$

□

Lemma 4.10. Seien $F = F_1 = \dots = F_d$. Falls die Dichtefunktion von F fallend auf $[b, \infty)$ ist, dann gilt für $s \geq \phi(F(b))$: $m_+(s) = \phi^{-1}(s)$.

Beweis. Da die Dichtefunktion auf $[b, \infty)$ fallend ist, hat auch die bedingte Verteilung $\tilde{F}_{F(b)}$ eine fallende Dichte. $H_\alpha(x)$, $c_2(\alpha)$ und $\phi(\alpha)$ hängen nur von der bedingten Verteilung \tilde{F}_α ab und sind somit wohldefiniert für $F(b) \leq \alpha \leq 1$. Da $s \geq \phi(F(b))$ gilt $\phi^{-1}(s) \geq F(b)$ und die bedingte Verteilung $\tilde{F}_{\phi^{-1}(s)}$ hat eine fallende Dichte. Nun kann man Lemma 4.9 anwenden und erhält die Aussage. □

Lemma 4.11. Seien $F = F_1 = \dots = F_d$. Falls die Dichtefunktion der Randverteilung F fallend auf $[b, \infty)$ ist, dann gilt für $\alpha \geq F(b)$, der schlechteste Value-at-Risk von $S = X_1, \dots, X_d$ ist

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d) = m_+^{-1}(\alpha) = \phi(\alpha).$$

Beweis. Die Ermittlung der Value-at-Risk Grenzen ist äquivalent zu der Ermittlung der Inverse von $m_+(s)$. Ist $m_+(s)$ stetig und strikt steigend, dann gilt

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d) = m_+^{-1}(\alpha).$$

Aus Lemma 4.10 folgt somit die Behauptung. □

Bemerkung 4.12 (Zusammenfassung von [12]). Somit wurde eine alternative Darstellung der Formel für die obere Grenze des Value-at-Risk für mehrdimensionale homogene Risiken bewiesen. Insgesamt erhalten wir:

$$\overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d) = \begin{cases} (d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)c_2(\alpha)) + F^{-1}(1 - c_2(\alpha)) & \text{falls } c_2(\alpha) > 0, \\ d\mathbb{E}[X | X \geq F^{-1}(\alpha)] & \text{falls } c_2(\alpha) = 0 \end{cases}$$

mit

$$c_2(\alpha) := \min \left\{ c \in \left[0, \frac{1-\alpha}{d} \right] : \int_c^{\frac{1-\alpha}{d}} (d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)t) + F^{-1}(1-t) dt \geq \frac{1-\alpha - cd}{d} \left((d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)c) + F^{-1}(1-c) \right) \right\}.$$

Beweis (von Satz 4.7). Für den Beweis von (4.1) sei auf [1] verwiesen. Den Beweis für (4.2) wollen wir genauer betrachten. Wenn wir zeigen, dass (4.2) äquivalent zu der Formel aus Bemerkung

4.12 ist, die wir bereits bewiesen haben, so ist auch (4.2) bewiesen.

Als erstes möchten wir zeigen, dass $c_1(\alpha) = c_2(\alpha)$ gilt. Man sieht sofort, dass die rechten Seiten der Ungleichungen gleich sind. Was noch zu zeigen ist, ist die Gleichheit der linken Seiten, also:

$$\int_c^{\frac{1-\alpha}{d}} (d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)t) + F^{-1}(1-t)dt = \int_{\alpha+(d-1)c}^{1-c} F^{-1}(t)dt.$$

Wir nehmen uns die Linearität des Integrals bei der Umwandlung der linken Seite zunutze.

$$\int_c^{\frac{1-\alpha}{d}} (d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)t) + F^{-1}(1-t)dt = \int_c^{\frac{1-\alpha}{d}} (d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)t)dt + \int_c^{\frac{1-\alpha}{d}} F^{-1}(1-t)dt.$$

Als nächstes führen wir zwei Substitutionen durch. Für das erste Integral benutzen wir die Substitution $u = \alpha + (d-1)t$ und für das zweite $v = 1-t$.

$u(t) = \alpha + (d-1)t$	$v(t) = 1-t$
$\frac{du}{dt} = d-1$	$\frac{dv}{dt} = -1$
$dt = \frac{du}{d-1}$	$dt = -dv$
$u(c) = \alpha + (d-1)c$	$v(c) = 1-c$
$u(\frac{1-\alpha}{d}) = \alpha + (d-1)\frac{1-\alpha}{d} = \frac{\alpha d + d - 1 - \alpha d + \alpha}{d} = \frac{d-1+\alpha}{d}$	$v(\frac{1-\alpha}{d}) = 1 - \frac{1-\alpha}{d} = \frac{d-1+\alpha}{d}$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha+(d-1)c}^{\frac{d-1+\alpha}{d}} (d-1)F^{-1}(u)\frac{du}{d-1} + \int_{1-c}^{\frac{d-1+\alpha}{d}} F^{-1}(v)(-dv) &= \int_{\alpha+(d-1)c}^{\frac{d-1+\alpha}{d}} F^{-1}(u)du + \int_{\frac{d-1+\alpha}{d}}^{1-c} F^{-1}(v)dv \\ &= \int_{\alpha+(d-1)c}^{1-c} F^{-1}(t)dt. \end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass $c_1(\alpha) = c_2(\alpha)$ ist. Wir werden deshalb ab jetzt immer $c(\alpha)$ anstelle von $c_1(\alpha)$ oder $c_2(\alpha)$ schreiben. Als nächstes wollen wir zeigen, dass im Falle $c(\alpha) = 0$ die Formel (4.2) mit dem Ergebnis von Bemerkung 4.12 übereinstimmt. Dazu müssen wir in (4.2) nur $c(\alpha) = 0$ setzen und erhalten: $dE(X|X \in [F^{-1}(\alpha), F^{-1}(1)])$, was aber genau dasselbe wie in Bemerkung 4.12 ist.

Zu zeigen ist noch, dass (4.2) und Bemerkung 4.12 auch im Falle $c(\alpha) > 0$ übereinstimmen.

Dazu betrachten wir zuerst den Ausdruck aus (4.2) und formen ihn um:

$$\begin{aligned}
d\mathbb{E}[X|X \in [F^{-1}(\alpha + (d-1)c(\alpha)), F^{-1}(1-c(\alpha))]] &= \frac{d\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{\{F^{-1}(\alpha+(d-1)c(\alpha)) \leq X \leq F^{-1}(1-c(\alpha))\}}]}{\mathbb{P}[F^{-1}(\alpha + (d-1)c(\alpha)) \leq X \leq F^{-1}(1-c(\alpha))]} \\
&= \frac{d \int_{F^{-1}(\alpha+(d-1)c(\alpha))}^{F^{-1}(1-c(\alpha))} xf(x)dx}{F(F^{-1}(1-c(\alpha))) - F(F^{-1}(\alpha + (d-1)c(\alpha)))} \\
&= \frac{d \int_{F^{-1}(\alpha+(d-1)c(\alpha))}^{F^{-1}(1-c(\alpha))} xf(x)dx}{(1-c(\alpha)) - (\alpha + (d-1)c(\alpha))} \\
&= \frac{d \int_{F^{-1}(\alpha+(d-1)c(\alpha))}^{F^{-1}(1-c(\alpha))} xf(x)dx}{1 - dc(\alpha) - \alpha}.
\end{aligned}$$

Als nächstes substituieren wir im Dividend:

$F^{-1}(u) = x \Leftrightarrow u = F(x)$
$\frac{du}{dx} = F'(x) = f(x)$
$du = f(x)dx$
$F(F^{-1}(\alpha + (d-1)c(\alpha))) = \alpha + (d-1)c(\alpha)$
$F(F^{-1}(1-c(\alpha))) = 1-c(\alpha)$

Damit erhalten wir:

$$= \frac{d \int_{F^{-1}(\alpha+(d-1)c(\alpha))}^{F^{-1}(1-c(\alpha))} xf(x)dx}{1 - dc(\alpha) - \alpha} = \frac{d}{1 - dc(\alpha) - \alpha} \int_{\alpha+(d-1)c(\alpha)}^{1-c(\alpha)} F^{-1}(u)du.$$

Insgesamt haben wir also:

$$d\mathbb{E}[X|X \in [F^{-1}(\alpha + (d-1)c(\alpha)), F^{-1}(1-c(\alpha))]] = \frac{d}{1 - dc(\alpha) - \alpha} \int_{\alpha+(d-1)c(\alpha)}^{1-c(\alpha)} F^{-1}(u)du. \quad (4.3)$$

Wir bezeichnen den Ausdruck $\frac{d}{1-dc(\alpha)-\alpha} \int_{\alpha+(d-1)c(\alpha)}^{1-c(\alpha)} F^{-1}(u)du$ nun als $LHS(c)$ und den Ausdruck $(d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)c(\alpha)) + F^{-1}(1-c(\alpha))$ als $RHS(c)$. Sind diese beiden Ausdrücke an der Stelle $c(\alpha)$ gleich, so ist unser Beweis vollständig. Weil $f(x)$ fallend und strikt positiv auf dem Träger ist, wissen wir, dass $F(x)$ strikt wachsend auf dem Träger sein muss. Wegen Satz 3.1 Punkt 1 muss daher F^{-1} stetig sein, womit auch $LHS(c)$ und $RHS(c)$ als Zusammensetzung stetiger Funktionen stetig sein müssen. Außerdem wissen wir wegen der Definition von $c_1(\alpha)$, dass für alle $c < c(\alpha)$ folgende Ungleichung gilt:

$$LHS(c) < RHS(c).$$

Zusätzlich gilt:

$$LHS(c(\alpha)) \geq RHS(c(\alpha)).$$

Wählen wir nun eine Folge c_n mit $c_n \rightarrow c(\alpha)$, $c_n < c(\alpha)$ und $\lim c_n = c(\alpha)$. Wegen der Stetigkeit

von $LHS(c)$ und $RHS(c)$ gilt nun:

$$LHS(c_n) < RHS(c_n) \Rightarrow LHS(c(\alpha)) = \lim_n LHS(c_n) \leq \lim_n RHS(c_n) = RHS(c(\alpha)).$$

Also haben wir folgende Gleichung gezeigt:

$$\frac{d}{1 - dc(\alpha) - \alpha} \int_{\alpha+(d-1)c(\alpha)}^{1-c(\alpha)} F^{-1}(u) du = LHS(c(\alpha)) = RHS(c(\alpha)) = (d-1)F^{-1}(\alpha + (d-1)c(\alpha)) + F^{-1}(1-c(\alpha)).$$

Gemeinsam mit (4.3) wurde also gezeigt, dass (4.2) mit Bemerkung 4.12 übereinstimmt und damit ist (4.2) bewiesen. \square

Bemerkung 4.13. Formt man den Ausdruck für den Fall $c(\alpha) = 0$ um, erhält man:

$$\begin{aligned} d\mathbb{E}[X|X \geq F^{-1}(\alpha)] &= d \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \geq F^{-1}(\alpha)\}}]}{\mathbb{P}[X \geq F^{-1}(\alpha)]} = d \frac{\int_{F^{-1}(\alpha)}^1 x f(x) dx}{1 - \mathbb{P}[X \leq F^{-1}(\alpha)]} = d \frac{\int_{F^{-1}(\alpha)}^1 x f(x) dx}{1 - F(F^{-1}(\alpha))} \\ &= \frac{d}{1 - \alpha} \int_{F^{-1}(\alpha)}^1 x f(x) dx. \end{aligned}$$

Analog kann man für die untere Grenze des Value-at-Risk eine Umformung für den zweiten Teil der Maximumsfunktion berechnen:

$$d\mathbb{E}[X|X \leq F^{-1}(\alpha)] = d \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X \leq F^{-1}(\alpha)\}}]}{\mathbb{P}[X \leq F^{-1}(\alpha)]} = d \frac{\int_{-\infty}^{F^{-1}(\alpha)} x f(x) dx}{F(F^{-1}(\alpha))} = \frac{d}{\alpha} \int_{-\infty}^{F^{-1}(\alpha)} x f(x) dx.$$

Bemerkung 4.14. In [12, S.401] finden wir die Aussage, dass $c(\alpha)$ genau dann 0 ist, wenn F vollständig mischbar ist. Wir wollen damit nun zeigen, dass eine Pareto-Verteilung nicht vollständig mischbar sein kann. Setze dafür die Quantilfunktion der Pareto-Verteilung in $c_1(\alpha)$ ein:

$$\min \left\{ c \in \left[0, \frac{1-\alpha}{d} \right] : \int_{\alpha+(d-1)c}^{1-c} \frac{\theta}{\sqrt[\beta]{1-t}} dt \geq \frac{1-\alpha-cd}{d} \left((d-1) \frac{\theta}{\sqrt[\beta]{1-(\alpha+(d-1)c)}} + \frac{\theta}{\sqrt[\beta]{1-(1-c)}} \right) \right\}.$$

Man sieht sofort, dass im Falle $c = 0$ eine Division durch 0 entsteht. Somit kann $c(\alpha)$ bei einer Pareto-Verteilung nie 0 sein und somit ist diese Verteilung nie vollständig mischbar.

Beispiel 4.15. Betrachte drei Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$. Zuerst kontrollieren wir, ob die Voraussetzungen des Satzes 4.7 erfüllt sind. Folgendes muss erfüllt sein:

1. Die Dichte ist fallend auf dem Träger.
2. Es existiert ein $b \in \mathbb{R}$, sodass die Dichte auf $[b, \infty)$ fallend ist.

Zuerst wollen wir die zweite Voraussetzung überprüfen. Dazu setzen wir die Parameter in die Dichtefunktion ein und erhalten: $p(x) = \frac{2}{x^3}$. Diese Funktion ist fallend auf $[1, \infty)$. Daher setzt man $b = 1$.

Somit ist die zweite Voraussetzung erfüllt. Um nun die erste Voraussetzung zu überprüfen, müssen wir den Träger betrachten. Die Pareto-Verteilung ist nur für $x \geq \theta = 1$ definiert. Somit ist die Dichte, wie bei der Überprüfung von Voraussetzung 2 gezeigt wurde, fallend auf dem Träger. Damit wurden die Voraussetzungen überprüft und wir können Satz 4.7 anwenden.

Wir wollen nun c_1 berechnen. Dazu suchen wir das kleinste c aus dem Intervall $[0, \frac{1-\alpha}{3}]$ das folgende Ungleichung erfüllt:

$$\int_{\alpha+2c}^{1-c} F^{-1}(t)dt \geq \frac{1-\alpha-3c}{3}(2F^{-1}(\alpha+2c) + F^{-1}(1-c)).$$

Die Inverse einer Pareto-Verteilung mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$ ist $F^{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. Durch Einsetzen der Inversen erhalten wir:

$$\int_{\alpha+2c}^{1-c} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt \geq \frac{1-\alpha-3c}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{1-(\alpha+2c)}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-c)}} \right).$$

Wendet man nun auf der linken Seite die Substitution $u = 1 - t$ an, erhält man:

$u(t) = 1 - t$
$\frac{du}{dt} = -1$
$dt = -du$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = - \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -2\sqrt{u} + const = -2\sqrt{1-t} + const.$$

Setzt man nun die Grenzen ein, erhält man: $-2\sqrt{1-(1-c)} + 2\sqrt{1-(\alpha+2c)}$. Also erhalten wir insgesamt folgende Ungleichung:

$$2(\sqrt{1-\alpha-2c} - \sqrt{c}) \geq \frac{1-\alpha-3c}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{1-\alpha-2c}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right).$$

Nun können wir mithilfe von dem Programm R_{c_1} in Abhängigkeit von α berechnen, indem wir eine **while**-Schleife anwenden. Als nächstes setzen wir das berechnete c in die Formel aus Bemerkung 4.12 ein und erhalten damit sofort die obere Grenze des Value-at-Risk.

Als nächstes betrachten wir die Berechnung der unteren Value-at-Risk Grenze. Aus Kapitel 3.1 kennen wir die Dichte und Inverse einer Pareto(2,1)-Verteilung: $f(x) = 2x^{-3}$ und $F^{-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$.

Damit erhalten wir mit der Formel (4.1) und Bemerkung 4.13:

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{VaR}}_\alpha(S_d) &= \max\{(d-1)F^{-1}(0) + F^{-1}(\alpha), d\mathbb{E}(X|X \leq F^{-1}(\alpha))\} \\
 &= \max\left\{(d-1)F^{-1}(0) + F^{-1}(\alpha), \frac{d}{\alpha} \int_\theta^{F^{-1}(\alpha)} xf(x)dx\right\} \\
 &= \max\left\{2 + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}, \frac{6}{\alpha} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} x2x^{-3}dx\right\} = \max\left\{2 + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}, \frac{6}{\alpha} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} x^{-2}dx\right\} \\
 &= \max\left\{2 + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}, \frac{6}{\alpha} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}}\right\} = \max\left\{2 + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}, \frac{6}{\alpha} \left[-\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}} + 1\right]\right\} \\
 &= \max\left\{2 + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}, \frac{6}{\alpha} [1 - \sqrt{1-\alpha}]\right\}.
 \end{aligned}$$

Wählen wir nun zum Beispiel $\alpha = 0.95$, erhalten wir:

$$\max\{6.47, 4.90\} = 6.47.$$

Um in R das Maximum von diesen beiden Werten zu berechnen, wird die Funktion **pmax** verwendet. Plottet man die beiden Grenzen erhält man Abbildung 4.4.

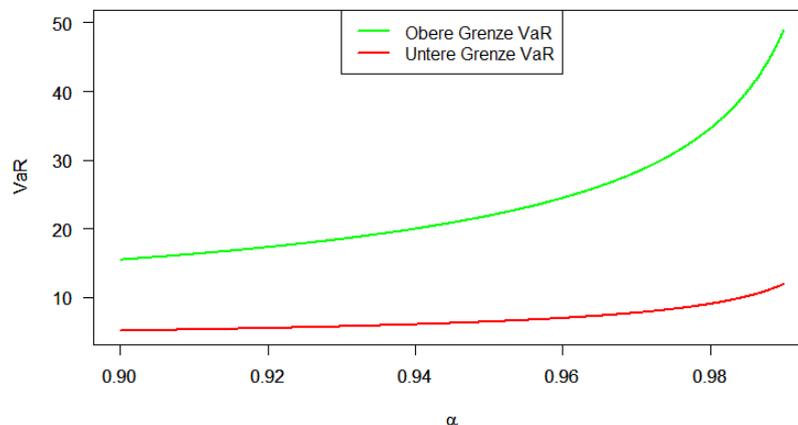


Abbildung 4.4: Obere und untere Grenzen des Value-at-Risk bei drei Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$

Mehrdimensionaler heterogener Fall

Für den mehrdimensionalen heterogenen Fall gibt es keine Formel. Um trotzdem die Grenzen des Value-at-Risk berechnen zu können, kann man den Rearrangement-Algorithmus verwenden, auf den wir im Kapitel 4.3 näher eingehen werden.

4.1.2 Expected Shortfall

Da der Expected Shortfall komonoton additiv ist, erhält man sofort seine obere Grenze:

$$\overline{\text{ES}}_\alpha(L) = \sum_{i=1}^d \text{ES}_\alpha(L_i).$$

Für den homogenen Fall gibt es für die untere Grenze in [2, Proposition 8.34, S.307] folgende Formel:

Satz 4.16. Sei $F = F_1 = \dots = F_d$, die ersten Momente seien endlich und die Dichte sei fallend auf dem Träger. Dann gilt für $\alpha \in [1 - dc, 1)$, $\lambda = \frac{1-\alpha}{d}$ und $X \sim F$:

$$\underline{\text{ES}}_\alpha(S_d) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda ((d-1)F^{-1}((d-1)t) + F^{-1}(1-t))dt,$$

wobei c die kleinste Zahl in $[0, \frac{1}{d}]$ sei, sodass

$$\int_{(d-1)c}^{1-c} F^{-1}(t)dt \geq \frac{1-dc}{d} ((d-1)F^{-1}((d-1)c) + F^{-1}(1-c)).$$

Beweis. Siehe [1]. □

Beispiel 4.17. Wir wollen nun Satz 4.16 auf eine Pareto-Verteilung anwenden. Das können wir machen, wenn wir $\beta > 1$ wählen, da der Erwartungswert der Pareto-Verteilung dann endlich ist und die Dichte auf dem Träger fallend ist. Wir wählen wieder die Parameter $\beta = 2$ und $\theta = 1$ und betrachten drei Risiken, somit ist $d = 3$.

Im ersten Schritt müssen wir c berechnen. c ist der kleinste Wert aus $[0, \frac{1}{3}]$, sodass

$$\int_{2c}^{1-c} \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt \geq \frac{1-3c}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{1-2c}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right).$$

Durch analoge Rechnungen wie in Beispiel 4.15 kommt man auf folgende Ungleichung:

$$2(\sqrt{1-2c} - \sqrt{c}) \geq \frac{1-3c}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{1-2c}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right).$$

Durch weiteres Umformen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
2(\sqrt{1-2c} - \sqrt{c}) &\geq \frac{1-3c}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{1-2c}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) \\
2\sqrt{1-2c} - 2\sqrt{c} &\geq \frac{2-6c}{3\sqrt{1-2c}} + \frac{1-3c}{3\sqrt{c}} \\
6(1-2c)\sqrt{c} - 6c\sqrt{1-2c} &\geq 2\sqrt{c} - 6c\sqrt{c} + \sqrt{1-2c} - 3c\sqrt{1-2c} \\
6\sqrt{c} - 12c\sqrt{c} - 6c\sqrt{1-2c} &\geq 2\sqrt{c} - 6c\sqrt{c} + \sqrt{1-2c} - 3c\sqrt{1-2c} \\
4\sqrt{c} - 6c\sqrt{c} - 3c\sqrt{1-2c} &\geq \sqrt{1-2c} \\
\sqrt{c}(4-6c) &\geq (3c+1)\sqrt{1-2c} \\
c(4-6c)^2 &\geq (1-2c)(3c+1)^2 = (1-2c)(9c^2+6c+1) \\
16c - 48c^2 + 36c &\geq 9c^2 - 18c^3 + 6c - 12c^2 + 1 - 2c = -18c^3 - 3c^2 + 4c + 1 \\
54c^3 - 45c^2 + 12c - 1 &\geq 0 \\
(3c-1)^2(6c-1) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir die Nullstellen:

$$\begin{array}{ll}
3c - 1 = 0 & 6c - 1 = 0 \\
3c = 1 & 6c = 1 \\
c = \frac{1}{3} & c = \frac{1}{6}.
\end{array}$$

Da $\frac{1}{6}$ kleiner ist als $\frac{1}{3}$, ist $c = \frac{1}{6}$.

Somit können wir den Satz 4.16 für $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ anwenden. Wir lassen uns nun von R die untere Grenze mit der Formel 4.16 für $\alpha \in [0.9, 0.99]$ berechnen.

Die obere Grenze erhalten wir mit der komonotonen Additivität des Expected Shortfall und mit der Formel (3.2):

$$\overline{ES}_\alpha = \sum_{i=1}^3 ES_\alpha = 3 \cdot ES_\alpha = 3 \frac{\beta\theta}{\beta-1} (1-\alpha)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Plottet man nun die beiden Grenzen erhält man Abbildung 4.5.

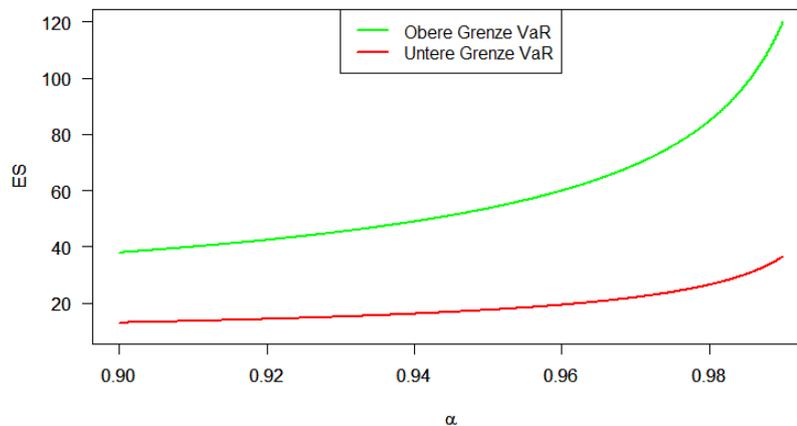


Abbildung 4.5: Obere und untere Grenzen des Expected Shortfall bei drei Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$

4.2 Zusammenhang Value-at-Risk und Expected Shortfall

Ist in Satz 4.7 $c_1 = 0$, dann gilt $\overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d) = \overline{\text{ES}}_\alpha(S_d)$. Das kann vorteilhaft sein, weil die obere Grenze des Expected Shortfall leichter zu berechnen ist als die obere Grenze des Value-at-Risk.

Laut [2, Proposition 8.36, S. 309] besteht folgende asymptotische Äquivalenz zwischen der oberen Grenze des Expected Shortfall und der oberen Grenze des Value-at-Risk:

Satz 4.18. Seien $L_i \sim F_i, i \geq 1$, für ein $k > 1$ sei

$$\mathbb{E}(|L_i - \mathbb{E}(L_i)|^k) \text{ gleichmäßig beschränkt} \quad (4.4)$$

und für $\alpha \in (0, 1)$ gelte

$$\liminf_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \text{ES}_\alpha(L_i) > 0.$$

Dann gilt

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\overline{\text{ES}}_\alpha(S_d)}{\overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d)} = 1 + \mathcal{O}(d^{\frac{1}{k}-1}).$$

Beweis. Siehe [5]. □

Das bedeutet für große d gilt: $\overline{\text{VaR}}_\alpha(L) \approx \overline{\text{ES}}_\alpha(L)$.

Beispiel 4.19. Wir wollen nun Satz 4.18 auf eine Pareto-Verteilung anwenden. Dazu müssen wir zuerst überprüfen, welche Bedingungen die Parameter der Pareto-Verteilung erfüllen müssen, sodass sie die Bedingungen des Satzes 4.18 erfüllen. Wir wählen $k = 2$. Somit kann der Fehlerterm dann mit $\mathcal{O}(d^{-\frac{1}{2}})$ abgeschätzt werden.

Die erste Bedingung die wir überprüfen müssen ist:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|L_i - \mathbb{E}(L_i)|^2) < \infty &\Leftrightarrow \int_0^\infty (x^2 - 2x\mathbb{E}(L_i) + \mathbb{E}^2(L_i))\beta\theta^\beta x^{-\beta-1} dx < \infty \\ &\Leftrightarrow \int_0^\infty \left(x^2 - \frac{2x\beta\theta}{\beta-1} + \frac{\beta^2\theta^2}{(\beta-1)^2}\right)\beta\theta^\beta x^{-\beta-1} dx < \infty \\ &\Leftrightarrow \int_0^\infty \beta\theta^\beta x^{1-\beta} - \frac{2x^{-\beta}\beta^2\theta^{\beta+1}}{\beta-1} + \frac{\beta^3\theta^{\beta+2}x^{-\beta-1}}{(\beta-1)^2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Damit das erfüllt ist, muss $\beta \geq 1$ sein.

Für die zweite Bedingung muss für $\alpha \in (0, 1)$ folgendes gelten:

$$\liminf_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d ES_\alpha(L_i) > 0.$$

Damit das erfüllt ist muss gelten:

$$ES_\alpha(L_i) > 0 \Leftrightarrow \frac{\beta\theta}{\beta-1}(1-\alpha)^{-\frac{1}{\beta}} > 0.$$

Das bedeutet $\beta > 1$ ist erforderlich.

Wir können Satz 4.18 also für eine $Pa(2,1)$ -Verteilung anwenden. Wir wählen $\alpha = 0.95$ und betrachten $d = 2, \dots, 10$ homogene Risiken. Je größer d wird, desto kleiner wird die Fehlerabschätzung.

Mit R kann man nun die obere Grenze des Expected Shortfall mit der Formel aus Kapitel 3.1 und der komonotonen Additivität und die obere Grenze des Value-at-Risk analog zu Beispiel 4.15 berechnen. Plottet man den Quotienten mit der Fehlerabschätzung erhält man Abbildung 4.6.

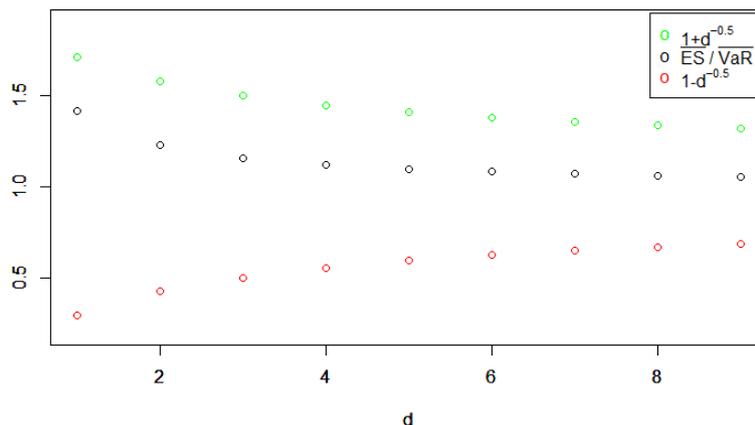


Abbildung 4.6: Asymptotische Äquivalenz zwischen der oberen Grenze des Expected Shortfall und der oberen Grenze des Value-at-Risk für Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$ bei einem Konfidenzniveau von $\alpha = 0.95$

Man sieht, dass je größer d wird, desto mehr nähert sich der Quotient dem Wert 1. Außerdem befindet sich der Quotient immer innerhalb des Intervalls $[1 - d^{-\frac{1}{2}}, 1 + d^{-\frac{1}{2}}]$.

Aus [2, Proposition 8.37, S.309] stammt auch folgender Satz, der die Spanne der Abhängigkeitsunsicherheit des Value-at-Risk mit der des Expected Shortfall vergleicht.

Satz 4.20. Sei $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$. Falls die Dichtefunktionen $F_i, i \geq 1$, (4.4),

$$\liminf_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d -ES_{1-\alpha_1}(-X_i) > 0 \text{ und}$$

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^d \mathbb{E}(X_i)}{\sum_{i=1}^d ES_{\alpha_1}(X_i)} < 1$$

erfüllen, dann gilt

$$\liminf_{d \rightarrow \infty} \frac{\overline{VaR}_{\alpha_2}(S_d) - \underline{VaR}_{\alpha_2}(S_d)}{\overline{ES}_{\alpha_1}(S_d) - \underline{ES}_{\alpha_1}(S_d)} \geq 1.$$

Beweis. Siehe [5]. □

Das bedeutet, dass im Allgemeinen die Spanne der Abhängigkeitsunsicherheit beim Value-at-Risk größer ist als beim Expected Shortfall.

Beispiel 4.21. Wir möchten Satz 4.20 auf eine Pareto-Verteilung anwenden. Dazu müssen wir wieder zuerst die Voraussetzungen überprüfen. Dass (4.4) für $\beta \geq 1$ erfüllt ist, wissen wir bereits aus Beispiel 4.19. Als nächstes betrachten wir die zweite Voraussetzung. Aus [2, S.307] wissen wir:

$$-ES_{1-\alpha}(-X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X) du.$$

Deshalb betrachten wir nun:

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_u(X) du = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \theta(1-u)^{-\frac{1}{\beta}} du.$$

Wendet man nun die selbe Substitution an, wie bei der Berechnung des Expected Shortfall der Pareto Verteilung erhält man:

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \theta(1-u)^{-\frac{1}{\beta}} du = \frac{\theta}{\alpha} \left(-\frac{(1-u)^{1-\frac{1}{\beta}}}{1-\frac{1}{\beta}} \right) \Big|_0^\alpha = \frac{\theta}{\alpha} \left(-\frac{(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}}}{1-\frac{1}{\beta}} + \frac{1}{1-\frac{1}{\beta}} \right).$$

Wir wissen, dass $\theta > 0$ und $\alpha > 0$. Damit der gesamte Ausdruck größer 0 ist, muss folgendes gelten:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\beta}} > \frac{(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}}}{1-\frac{1}{\beta}} \Leftrightarrow 1 > (1-\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}}.$$

Da $1 - \frac{1}{\beta} \in (0, 1)$ ist die Ungleichung erfüllt und die zweite Voraussetzung für $\beta > 1$ überprüft. Nun

muss noch die dritte Voraussetzung überprüft werden. Dazu betrachten wir:

$$\frac{\mathbb{E}[X]}{\underline{ES}_\alpha(X_i)} = \frac{\frac{\beta\theta}{\beta-1}}{\frac{\beta\theta(1-\alpha)^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta-1}} = \frac{1}{(1-\alpha)^{-\frac{1}{\beta}}} = (1-\alpha)^{\frac{1}{\beta}} < 1.$$

Somit ist auch die dritte Bedingung erfüllt und wir können Satz 4.20 auf eine Pareto-Verteilung mit $\beta > 1$ anwenden.

Wir betrachten wieder Pareto-Verteilungen mit den Parametern $\beta = 2$ und $\theta = 1$. Wieder wählen wir $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.95$. Mithilfe von Satz 4.7, Satz 4.16 und der komonotonen Additivität des Expected Shortfall kann man alle Werte berechnen. Plottet man den Quotienten in R erhält man Abbildung 4.7.

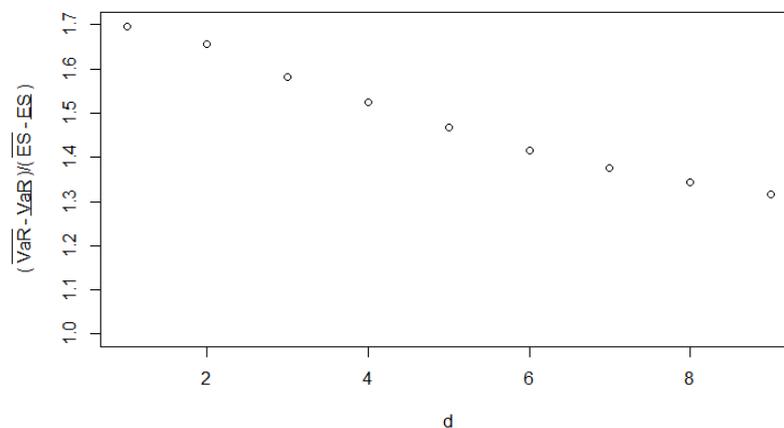


Abbildung 4.7: Analyse der Abhängigkeitsunsicherheit anhand Pareto-Verteilungen mit $\beta = 2$ und $\theta = 1$ bei einem Konfidenzniveau von $\alpha = 0.95$

Wie behauptet gilt

$$\liminf_{d \rightarrow \infty} \frac{\overline{VaR}_{\alpha_2}(S_d) - \underline{VaR}_{\alpha_2}(S_d)}{\overline{ES}_{\alpha_1}(S_d) - \underline{ES}_{\alpha_1}(S_d)} \geq 1.$$

4.3 Rearrangement-Algorithmus

Der **Rearrangement-Algorithmus (RA)** ist ein schnelles und effizientes numerisches Verfahren um die oberen und unteren Grenzen des Value-at-Risk und des Expected Shortfall zu berechnen. Er basiert auf der Idee der Mischbarkeit. Der Vorteil des Rearrangement-Algorithmus gegenüber den expliziten Formeln aus dem Kapitel 4.1 ist, dass man die Grenzen für ein heterogenes Portfolio auch für eine Dimension größer als 2 berechnen kann. Der Rearrangement-Algorithmus aus [4] kann sogar für Portfolios mit einer Dimension $d \geq 1000$ eingesetzt werden.

Bevor wir die einzelnen Schritte des Rearrangement-Algorithmus betrachten, benötigen wir einige Definitionen. Zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^N$ werden **entgegengesetzt angeordnet** genannt,

falls $(a_j - a_k)(b_j - b_k) \leq 0$ für alle $1 \leq j, k \leq N$ gilt. Für eine $(N \times d)$ -Matrix X seien die Operatoren $s(X)$ und $t(X)$ die minimale, bzw. maximale Reihensumme von X :

$$s(X) := \min_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq d} x_{i,j} \quad t(X) := \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq d} x_{i,j}.$$

In [4, S.10] werden die einzelnen Schritte des Rearrangement-Algorithmus beschrieben:

Rearrangement-Algorithmus für die Berechnung von $\overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d)$:

1. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ als Diskretisierungsparameter.
2. Definiere Matrizen $\underline{X}^\alpha = (\underline{x}_{i,j}^\alpha)$ und $\overline{X}^\alpha = (\overline{x}_{i,j}^\alpha)$ als

$$\underline{x}_{i,j}^\alpha = F_j^{-1} \left(\alpha + \frac{(1-\alpha)(i-1)}{N} \right)$$

und

$$\overline{x}_{i,j}^\alpha = F_j^{-1} \left(\alpha + \frac{(1-\alpha)i}{N} \right),$$

für $1 \leq i \leq N$ und $1 \leq j \leq d$. Ist $F_j^{-1}(1) = \infty$, dann setze $\overline{x}_{N,j}^\alpha = F_j^{-1} \left(\alpha + \frac{(1-\alpha)(N-\frac{1}{2})}{N} \right)$. Es erfolgt also eine Diskretisierung des rechten Endes.

3. Vertausche zufällig die Elemente in jeder Spalte von \underline{X}^α und \overline{X}^α .
4. Ordne für $1 \leq j \leq d$ die j -te Spalte der Matrix \underline{X}^α neu an, sodass sie entgegengesetzt angeordnet zu der Summe der anderen Spalten ist. Dadurch erhalten wir eine Matrix \underline{X}^* , bei der die Varianz zwischen den Reihensummen minimiert wurde.
5. Wende Schritt 4. auf die Matrix \overline{X}^α an, sodass man eine Matrix \overline{X}^* erhält.
6. Definiere $\underline{s}_N = s(\underline{X}^*)$ und $\overline{s}_N = s(\overline{X}^*)$. Es gilt $\underline{s}_N \leq \overline{s}_N$ und

$$\overline{s}_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\simeq} \underline{s}_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\simeq} \overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d).$$

Das Intervall $(\underline{s}_N, \overline{s}_N)$ wird für $\overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d)$ Rearrangement-Bereich genannt. Die Länge $(\overline{s}_N - \underline{s}_N)$ des Intervalls hängt von der Dimension d des untersuchten Risikoportfolios und von dem Diskretisierungsparameter N ab. Falls N groß genug ist, gilt $\underline{s}_N \leq \overline{\text{VaR}}_\alpha(S_d)$.

Rearrangement-Algorithmus für die Berechnung von $\underline{\text{VaR}}_\alpha(S_d)$:

1. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ als Diskretisierungsparameter.
2. Definiere Matrizen $\underline{Z}^\alpha = (\underline{z}_{i,j}^\alpha)$ und $\overline{Z}^\alpha = (\overline{z}_{i,j}^\alpha)$ als

$$\underline{z}_{i,j}^\alpha = F_j^{-1} \left(\frac{\alpha(i-1)}{N} \right)$$

und

$$\bar{z}_{i,j}^\alpha = F_j^{-1}\left(\frac{\alpha i}{N}\right),$$

für $1 \leq i \leq N$ und $1 \leq j \leq d$. Es erfolgt also eine Diskretisierung des linken Endes.

3. Vertausche zufällig die Elemente in jeder Spalte von \underline{Z}^α und \bar{Z}^α .
4. Ordne für $1 \leq j \leq d$ die j -te Spalte der Matrix \underline{Z}^α neu an, sodass sie entgegengesetzt angeordnet zu der Summe der anderen Spalten ist. Dadurch erhalten wir eine Matrix \underline{Z}^* , bei der die Varianz zwischen den Reihensummen minimiert wurde.
5. Wende Schritt 4. auf die Matrix \bar{Z}^α an, sodass man eine Matrix \bar{Z}^* erhält.
6. Definiere $\underline{t}_N = t(\underline{Z}^*)$ und $\bar{t}_N = t(\bar{Z}^*)$. Es gilt $\underline{t}_N \leq \bar{t}_N$ und

$$\bar{t}_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\simeq} \underline{t}_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\simeq} \underline{\text{VaR}}_\alpha(S_d).$$

Analog wie oben, bezeichnet man das Intervall $(\underline{t}_N, \bar{t}_N)$ als Rearrangement-Bereich für $\underline{\text{VaR}}_\alpha(S_d)$. Falls N groß genug ist, gilt $\bar{t}_N \geq \underline{\text{VaR}}_\alpha(S_d)$.

Rearrangement-Algorithmus für die Berechnung von $\underline{\text{ES}}_\alpha(S_d)$:

1. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ als Diskretisierungsparameter.
2. Definiere Matrizen $\underline{V}^\alpha = (\underline{v}_{i,j}^\alpha)$ und $\bar{V}^\alpha = (\bar{v}_{i,j}^\alpha)$ als

$$\underline{v}_{i,j}^\alpha = F_j^{-1}\left(\frac{i-1}{N}\right)$$

und

$$\bar{v}_{i,j}^\alpha = F_j^{-1}\left(\frac{i}{N}\right),$$

für $1 \leq i \leq N$ und $1 \leq j \leq d$. Ist $F_j^{-1}(1) = \infty$, dann setze $\bar{x}_{N,j}^\alpha = F_j^{-1}\left(\alpha + \frac{(1-\alpha)(N-\frac{1}{2})}{N}\right)$. Es erfolgt also eine Diskretisierung des gesamten Trägers.

3. Vertausche zufällig die Elemente in jeder Spalte von \underline{V}^α und \bar{V}^α .
4. Ordne für $1 \leq j \leq d$ die j -te Spalte der Matrix \underline{V}^α neu an, sodass sie entgegengesetzt angeordnet zu der Summe der anderen Spalten ist. Dadurch erhalten wir eine Matrix \underline{V}^* , bei der die Varianz zwischen den Reihensummen minimiert wurde.
5. Wende Schritt 4. auf die Matrix \bar{V}^α an, sodass man eine Matrix \bar{V}^* erhält.
6. Definiere $\underline{t}_N = t(\underline{V}^*)$ und $\bar{t}_N = t(\bar{V}^*)$. Es gilt $\underline{t}_N \leq \bar{t}_N$ und

$$\bar{t}_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\simeq} \underline{t}_N \stackrel{N \rightarrow \infty}{\simeq} \underline{\text{ES}}_\alpha(S_d).$$

Anwendung des Rearrangement-Algorithmus in R

Beispiel 4.22. Wir wollen nun den Rearrangement-Algorithmus verwenden um die obere und untere Grenze des Value-at-Risk zu berechnen. Dazu werden wir eine Exponential(1.5)-Verteilung und eine Normalverteilung (0,1) betrachten, damit wir die Ergebnisse mit Beispiel 4.6 vergleichen können.

Der Rearrangement-Algorithmus ist in R im Paket **qrntools** implementiert. Die Funktion, die wir verwenden werden, heißt **RA** und man muss ihr drei Parameter übergeben: das Konfidenzniveau, eine Liste mit den Quantilfunktionen der Ränder und einen Diskretisierungsparameter. Je größer der Diskretisierungsparameter gewählt wird, desto genauer ist das Ergebnis. Als optimalen Parameter kann man angeben, ob man die obere oder untere Value-at-Risk Grenze oder die untere Expected Shortfall Grenze berechnen möchte. Gibt man diesen Parameter nicht ein, erhält man die obere Value-at-Risk Grenze. Für weitere Details siehe [6, S.37-45].

Wir wählen für unser Beispiel das Konfidenzniveau 0.95 und den Diskretisierungsparameter 10. In der Praxis ist es üblich einen Diskretisierungsparameter zwischen 1.000 und 100.000 zu wählen. Damit es aber übersichtlich bleibt nehmen wir einen niedrigeren.

Für die obere Value-at-Risk Grenze werden wir die genaue Berechnung betrachten und bei der unteren Value-at-Risk Grenze nur die Ergebnisse.

Als erstes werden wir die beiden Matrizen \underline{X}^α und \overline{X}^α berechnen:

$\underline{x}_{1,1}^\alpha$	$\underline{x}_{1,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(1-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(1-1)}{10}\right)$	1.9972	1.6449
$\underline{x}_{2,1}^\alpha$	$\underline{x}_{2,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(2-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(2-1)}{10}\right)$	2.0674	1.6954
$\underline{x}_{3,1}^\alpha$	$\underline{x}_{3,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(3-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(3-1)}{10}\right)$	2.1459	1.7507
$\underline{x}_{4,1}^\alpha$	$\underline{x}_{4,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(4-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(4-1)}{10}\right)$	2.2350	1.8119
$\underline{x}_{5,1}^\alpha$	$\underline{x}_{5,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(5-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(5-1)}{10}\right)$	2.3377	1.8808
$\underline{x}_{6,1}^\alpha$	$\underline{x}_{6,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(6-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(6-1)}{10}\right)$	2.4593	1.9600
$\underline{x}_{7,1}^\alpha$	$\underline{x}_{7,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(7-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(7-1)}{10}\right)$	2.6080	2.0538
$\underline{x}_{8,1}^\alpha$	$\underline{x}_{8,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(8-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(8-1)}{10}\right)$	2.7998	2.1701
$\underline{x}_{9,1}^\alpha$	$\underline{x}_{9,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(9-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(9-1)}{10}\right)$	3.0701	2.3264
$\underline{x}_{10,1}^\alpha$	$\underline{x}_{10,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(10-1)}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)(10-1)}{10}\right)$	3.5322	2.5758

$\overline{x}_{1,1}^\alpha$	$\overline{x}_{1,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)1}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)1}{10}\right)$	2.0674	1.6954
$\overline{x}_{2,1}^\alpha$	$\overline{x}_{2,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)2}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)2}{10}\right)$	2.1459	1.7507
$\overline{x}_{3,1}^\alpha$	$\overline{x}_{3,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)3}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)3}{10}\right)$	2.2349	1.8119
$\overline{x}_{4,1}^\alpha$	$\overline{x}_{4,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)4}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)4}{10}\right)$	2.3377	1.8808
$\overline{x}_{5,1}^\alpha$	$\overline{x}_{5,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)5}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)5}{10}\right)$	2.4593	1.9570
$\overline{x}_{6,1}^\alpha$	$\overline{x}_{6,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)6}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)6}{10}\right)$	2.6080	2.0538
$\overline{x}_{7,1}^\alpha$	$\overline{x}_{7,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)7}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)7}{10}\right)$	2.7998	2.1701
$\overline{x}_{8,1}^\alpha$	$\overline{x}_{8,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)8}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)8}{10}\right)$	3.0701	2.3264
$\overline{x}_{9,1}^\alpha$	$\overline{x}_{9,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)9}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)9}{10}\right)$	3.5322	2.5758
$\overline{x}_{10,1}^\alpha$	$\overline{x}_{10,2}^\alpha$	$F_1^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)9.5}{10}\right)$	$F_2^{-1}\left(0.95 + \frac{(1-0.95)9.5}{10}\right)$	3.9943	2.8070

Da bei der Exponential- und Normalverteilung $F^{-1}(1) = \infty$ ist, musste die Formel für $\bar{x}_{10,j}^\alpha$ adaptiert werden.

Als nächstes werden die Elemente in jeder Spalte der Matrizen zufällig geordnet. Jede Spalte wird nun neu geordnet, sodass sie entgegengesetzt angeordnet zu der Summe der anderen Spalten ist. Wir erhalten nun die Matrizen \underline{X}^* und \bar{X}^* und berechnen die Zeilensummen:

$\underline{x}_{1,1}^*$	$\underline{x}_{1,2}^*$	2.7998	1.7507	4.5505	$\bar{x}_{1,1}^*$	$\bar{x}_{1,2}^*$	3.9943	1.6954	5.6897
$\underline{x}_{2,1}^*$	$\underline{x}_{2,2}^*$	3.0701	1.6954	4.7655	$\bar{x}_{2,1}^*$	$\bar{x}_{2,2}^*$	2.0674	2.8070	4.8744
$\underline{x}_{3,1}^*$	$\underline{x}_{3,2}^*$	3.5322	1.6449	5.1771	$\bar{x}_{3,1}^*$	$\bar{x}_{3,2}^*$	2.2349	2.3264	4.5613
$\underline{x}_{4,1}^*$	$\underline{x}_{4,2}^*$	2.0674	2.3263	4.3937	$\bar{x}_{4,1}^*$	$\bar{x}_{4,2}^*$	2.7998	1.8808	4.6806
$\underline{x}_{5,1}^*$	$\underline{x}_{5,2}^*$	2.3377	1.9600	4.2977	$\bar{x}_{5,1}^*$	$\bar{x}_{5,2}^*$	3.0701	1.8119	4.8820
$\underline{x}_{6,1}^*$	$\underline{x}_{6,2}^*$	= 1.9972	2.5758	4.5730	$\bar{x}_{6,1}^*$	$\bar{x}_{6,2}^*$	= 2.6080	1.9600	4.5680
$\underline{x}_{7,1}^*$	$\underline{x}_{7,2}^*$	2.6080	1.8119	4.4199	$\bar{x}_{7,1}^*$	$\bar{x}_{7,2}^*$	2.1459	2.5758	4.7217
$\underline{x}_{8,1}^*$	$\underline{x}_{8,2}^*$	2.1459	2.1701	4.3160	$\bar{x}_{8,1}^*$	$\bar{x}_{8,2}^*$	2.3377	2.1701	4.5078
$\underline{x}_{9,1}^*$	$\underline{x}_{9,2}^*$	2.2349	2.0538	4.2887	$\bar{x}_{9,1}^*$	$\bar{x}_{9,2}^*$	3.5322	1.7507	5.2829
$\underline{x}_{10,1}^*$	$\underline{x}_{10,2}^*$	2.4593	1.8808	4.3401	$\bar{x}_{10,1}^*$	$\bar{x}_{10,2}^*$	2.4593	2.0538	4.5131

Die minimale Reihensumme der Matrix \underline{X}^* ist $\underline{s}_N = 4.2887$ und die minimale Reihensumme der Matrix \bar{X}^* ist $\bar{s}_N = 4.5078$. Da wir N sehr niedrig gewählt haben, ist der Rearrangement-Bereich in dem der wahre Wert für die obere Value-at-Risk Grenze liegt noch sehr groß. Wählen wir $N = 10.000$ erhalten wir einen deutlich kleineren Rearrangement-Bereich:

	\underline{s}_N bzw. \underline{t}_N	\bar{s}_N bzw. \bar{t}_N	Vergleich mit Beispiel 4.6
$\overline{\text{VaR}}_{0.95}$	4.390591	4.390806	4.390699
$\underline{\text{VaR}}_{0.95}$	1.643933	1.644917	1.644304

Wir sehen, dass die wahren Werte, die wir aus Satz 4.3 erhalten haben, in dem Rearrangement-Bereich liegen.

Beispiel 4.23. Nun wollen wir den Rearrangement-Algorithmus anwenden, um die Ergebnisse von Beispiel 4.17 zu überprüfen. Wir betrachten also zwei Pareto-Verteilungen mit den Parametern $\beta = 2$ und $\theta = 1$ und wählen wieder $N = 100.000$ und $\alpha = 0.95$. Wir erhalten für die untere Grenze des Expected Shortfalls folgende Ergebnisse.

	\underline{t}_N	\bar{t}_N	Vergleich mit Beispiel 4.17
$\underline{\text{ES}}_{0.95}$	17.23412	18.42948	17.50888

Der wahre Wert aus Beispiel 4.17 liegt also in dem Rearrangement-Bereich.

Bemerkung 4.24. Alle Ergebnisse aus Kapitel 4.1 und 4.2 wurden mit dem Rearrangement-Algorithmus überprüft. Im Appendix befindet sich der R-Code für die Beispiele 4.22 und 4.23.

4.4 Komonotonie- und Kontramonotoniecopula

Die Komonotonie- und Kontramonotoniecopula sind die Fréchet-Grenzen einer Copula. Daher stellt sich die Frage, ob man die oberen und unteren Grenzen des Value-at-Risk erhält, wenn diese Copulae benützt werden. Diese Hypothese wollen wir in diesem Kapitel überprüfen.

Als Beispiel betrachten wir zwei exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\beta = 1$. Da wir dadurch den homogenen zweidimensionalen Fall haben, können wir die Formeln aus Satz 4.1 verwenden.

4.4.1 Komonotonie

Wir haben zwei komonotone Zufallsvariablen, wenn $X = X_1 = X_2$ gilt. Wir erhalten damit $X_1 + X_2 = 2X_1 = 2X_2 = 2X$ und insgesamt:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X_1 + X_2 \leq x] &= \mathbb{P}[2X \leq x] = \mathbb{P}[X \leq \frac{x}{2}] = F\left(\frac{x}{2}\right) \\ \Rightarrow F\left(\frac{x}{2}\right) &= \alpha \Leftrightarrow x = 2F^{-1}(\alpha).\end{aligned}$$

Aber die obere Grenze des Value-at-Risk ist $2F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$. Die beiden Ausdrücke sind nur gleich, wenn folgendes erfüllt ist:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1 + \alpha}{2} \\ 2\alpha &= 1 + \alpha \\ \alpha &= 1.\end{aligned}$$

4.4.2 Kontramonotonie

Um kontramonotone Zufallsvariablen zu erhalten wählen wir $X_1 = F_1^{-1}(U)$ und $X_2 = F_2^{-1}(1-U)$, also haben wir $X_1 = -\ln(1-U)$ und $X_2 = -\ln(1-(1-U)) = -\ln(U)$. Wir können zwischen der ersten und zweiten Zufallsvariable folgenden Zusammenhang mithilfe von U entdecken:

$$\begin{aligned}e^{-X_1} &= 1 - U \Leftrightarrow U = 1 - e^{-X_1} \\ \Rightarrow X_2 &= -\ln(U) = -\ln(1 - e^{-X_1})\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $X_1 + X_2 = X_1 - \ln(1 - e^{-X_1})$. Insgesamt ergibt das:

$$\mathbb{P}[X_1 + X_2 \leq x] = \mathbb{P}[X_1 - \ln(1 - e^{-X_1}) \leq x].$$

Die untere Grenze des Value-at-Risk ist aber $F^{-1}(\alpha)$. Somit sehen wir, dass diese beiden Ausdrücke nicht übereinstimmen.

Kapitel 5

Bivariate Verteilungsfunktionen

Das Ziel dieses Kapitels ist die Berechnung von $\mathbb{P}[X_1 + X_2 \leq s]$, weil man damit den Value-at-Risk einer bivariaten Verteilung berechnen kann. Zuerst betrachten wir eine numerische Berechnungsmethode der Verteilungsfunktion mithilfe des AEP-Algorithmus, danach eine numerische Berechnungsmethode mittels Integration der Dichte.

5.1 Hyperwürfel und Simplex

Da wir nur bivariate Verteilungen betrachten, werden wir auch nur zweidimensionale Simplex und Hyperwürfel betrachten. Ein zweidimensionales Simplex ist ein Dreieck und ein zweidimensionaler Hyperwürfel ist ein Quadrat.

Ein zweidimensionaler Hyperwürfel $Q\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, h\right) \subset \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $h \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$Q\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, h\right) = \begin{cases} (b_1, b_1 + h] \times (b_2, b_2 + h] & \text{falls } h > 0, \\ (b_1 + h, b_1] \times (b_2 + h, b_2] & \text{falls } h < 0. \end{cases}$$

Ein zweidimensionaler Simplex $S\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, h\right) \subset \mathbb{R}^2$ ist definiert durch:

$$S\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, h\right) = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_k - b_k > 0, k \in \{1, 2\} \wedge (x_1 - b_1) + (x_2 - b_2) \leq h \right\} & \text{falls } h > 0, \\ \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_k - b_k \leq 0, k \in \{1, 2\} \wedge (x_1 - b_1) + (x_2 - b_2) > h \right\} & \text{falls } h < 0. \end{cases}$$

Betrachten wir eine zweidimensionale bivariate Verteilung H , dann induziert sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß V_H auf \mathbb{R}^d durch

$$H\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = V_H [(-\infty, x_1] \times (-\infty, x_2]].$$

Es gilt $\mathbb{P}[X_1 + X_2 \leq s] = V_H \left[\mathcal{S} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s \right) \right] =: V_H[\mathcal{S}(\mathbf{0}, s)]$. Daher suchen wir nun nach einer Formel bzw. nach einer Approximation für $V_H[\mathcal{S}(\mathbf{0}, s)]$

5.2 Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus

Mithilfe des Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus kann man die Verteilungsfunktion von zwei abhängigen, nicht-negativen Zufallsvariablen berechnen, wenn eine absolut stetige bivariate Verteilungsfunktion gegeben ist. Den Algorithmus kann man auch für eine multivariate Verteilungsfunktion und mehreren Zufallsvariablen anwenden. Wir werden aber nur den bivariaten Fall mit zwei Zufallsvariablen betrachten, für den allgemeinen Fall siehe [9].

Für das V_H -Maß eines Hyperwürfels $\mathcal{Q} \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, h \right)$ mit $h > 0$ gilt:

$$V_H \left[\mathcal{Q} \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, h \right) \right] = H \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right) - H \left(\begin{pmatrix} b_1 + h \\ b_2 \end{pmatrix} \right) - H \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 + h \end{pmatrix} \right) + H \left(\begin{pmatrix} b_1 + h \\ b_2 + h \end{pmatrix} \right). \quad (5.1)$$

Da es für das H-Maß eines Simplexes keine explizite Formel gibt, wollen wir dieses Maß durch eine endliche Summe von H-Maßen von Hyperwürfeln approximieren.

Ein Simplex kann man auf folgende Weise in einen Hyperwürfel \mathcal{Q}_1^1 und drei Simplicia $\mathcal{S}_2^1, \mathcal{S}_2^2, \mathcal{S}_2^3$ aufteilen, wobei die Aufteilung von einem Teilungsparameter $\xi \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$ abhängt, siehe dazu Abbildung 5.1:

$$\mathcal{S}(\mathbf{0}, s) = (\mathcal{Q}_1^1 \cup \mathcal{S}_2^1 \cup \mathcal{S}_2^3) \setminus \mathcal{S}_2^2. \quad (5.2)$$

Das H-Maß eines Simplexes kann man also folgendermaßen umschreiben:

$$V_H(\mathcal{S}(\mathbf{0}, s)) = V_H(\mathcal{Q}_1^1) + V_H(\mathcal{S}_2^1) + V_H(\mathcal{S}_2^3) - V_H(\mathcal{S}_2^2).$$

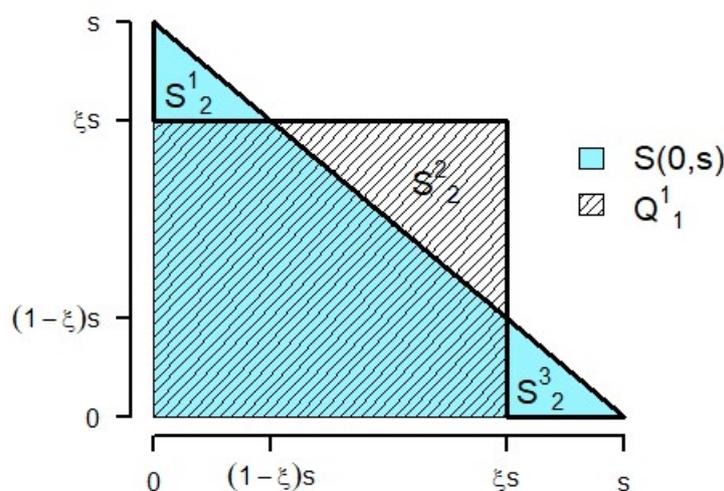


Abbildung 5.1: Zerlegung des Simplexes $\mathcal{S}(\mathbf{0}, s)$

Bemerkung 5.1. Für die Abbildung 5.1 wurden in R die Funktionen *polygon* für das Simplex und *rect* für den Hyperwürfel verwendet.

Für den ersten Iterationsschritt approximiert man den Simplex $\mathcal{S}(\mathbf{0}, s)$ durch den Hyperwürfel \mathcal{Q}_1^1 und setzt dann in Formel (5.1) ein:

$$\begin{aligned} V_H(\mathcal{S}(\mathbf{0}, s)) &\approx V_H(\mathcal{Q}_1^1) = V_H \left[\mathcal{Q} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi s \right) \right] = \\ &= H \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \xi s \\ 0 \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} 0 \\ \xi s \end{pmatrix} + H \begin{pmatrix} \xi s \\ \xi s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im zweiten Iterationsschritt werden die drei Simplizia, die in (5.2) entstehen, approximiert:

$$\begin{aligned} V_H(\mathcal{S}_2^1) &\approx V_H(\mathcal{Q}_2^1) \\ V_H \left(\mathcal{S} \left(\begin{pmatrix} \xi s \\ 0 \end{pmatrix}, (1 - \xi)s \right) \right) &\approx V_H \left[\mathcal{Q} \left(\begin{pmatrix} \xi s \\ 0 \end{pmatrix}, (1 - \xi)\xi s \right) \right] \\ &\approx H \begin{pmatrix} \xi s \\ 0 \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} (2 - \xi)\xi s \\ 0 \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \xi s \\ (1 - \xi)\xi s \end{pmatrix} + H \begin{pmatrix} (2 - \xi)\xi s \\ (1 - \xi)\xi s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_H(\mathcal{S}_2^2) &\approx V_H(\mathcal{Q}_2^2) \\ V_H \left(\mathcal{S} \left(\begin{pmatrix} \xi s \\ \xi s \end{pmatrix}, (1 - 2\xi)s \right) \right) &\approx V_H \left[\mathcal{Q} \left(\begin{pmatrix} \xi s \\ \xi s \end{pmatrix}, (1 - 2\xi)\xi s \right) \right] \\ &\approx H \begin{pmatrix} \xi s \\ \xi s \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} (2 - 2\xi)\xi s \\ \xi s \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \xi s \\ (2 - 2\xi)\xi s \end{pmatrix} + H \begin{pmatrix} (2 - 2\xi)\xi s \\ (2 - 2\xi)\xi s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_H(\mathcal{S}_2^3) &\approx V_H(\mathcal{Q}_2^3) \\ V_H \left(\mathcal{S} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \xi s \end{pmatrix}, (1 - \xi)s \right) \right) &\approx V_H \left[\mathcal{Q} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \xi s \end{pmatrix}, (1 - \xi)\xi s \right) \right] \\ &\approx H \begin{pmatrix} 0 \\ \xi s \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} (1 - \xi)\xi s \\ \xi s \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} 0 \\ (2 - \xi)\xi s \end{pmatrix} + H \begin{pmatrix} (1 - \xi)\xi s \\ (2 - \xi)\xi s \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im dritten Iterationsschritt werden auf ähnliche Weise die neun Simplizia, die im zweiten Iterationsschritt entstanden sind, durch Hyperwürfel approximiert. Nach jedem Iterationsschritt verdreifachen sich also die Simplizia. Die ersten drei Iterationsschritte sieht man in Abbildung 5.2.

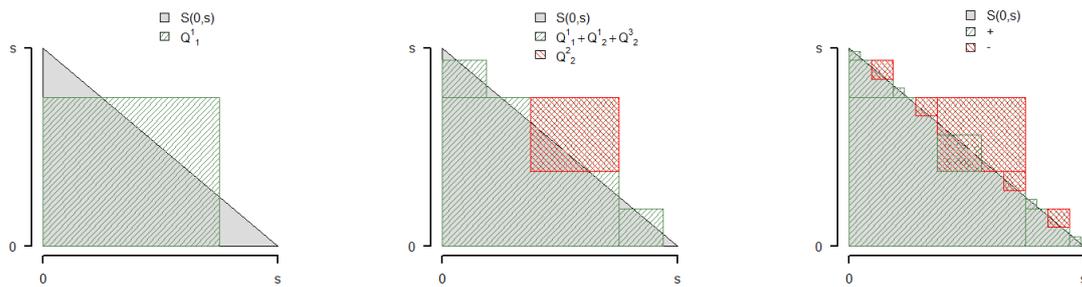


Abbildung 5.2: Die ersten drei Iterationsschritte des AEP-Algorithmus

Beispiel 5.2. Nun wollen wir den Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus benutzen um den Value-at-Risk zu berechnen. Dazu betrachten wir Gumbel's Bivariate Exponentialverteilung aus Kapitel 3.2 in einem Konfidenzniveau von $\alpha = [0.9, 0.99]$ für $\theta = 0.1$, $\theta = 0.5$ und $\theta = 0.95$.

Wir wollen auch überprüfen, ob der Value-at-Risk innerhalb der theoretischen Grenzen aus Kapitel 4.1 liegt. Da wir zwei homogene Risiken betrachten und die Dichtefunktion einer Exponentialverteilung fallend ist, können wir Satz 4.1 verwenden:

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha}(S_2) = F^{-1}(\alpha)$$

$$\overline{\text{VaR}}_{\alpha}(S_2) = 2F^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right).$$

Die Inverse einer Exponentialverteilung haben wir in Kapitel 3.1 berechnet: $F^{-1}(u) = -\frac{\ln(1-u)}{\beta}$. Zusammen ergibt das für $\beta = 1$:

$$\underline{\text{VaR}}_{\alpha}(S_2) = -\ln(1-\alpha)$$

$$\overline{\text{VaR}}_{\alpha}(S_2) = -2\ln\left(1 - \frac{1+\alpha}{2}\right) = -2\ln\left(\frac{2-1-\alpha}{2}\right) = -2\ln\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

Mittels R können wir den Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus aus [9, S.53-56] durchführen und gemeinsam mit den theoretischen Grenzen plotten. Wir wählen einen Teilungsparameter von $\xi = \frac{2}{3}$. Man erhält Abbildung 5.3 und sieht, dass der Value-at-Risk für Gumbel's Bivariate Exponentialverteilung innerhalb der theoretischen Grenzen liegt.

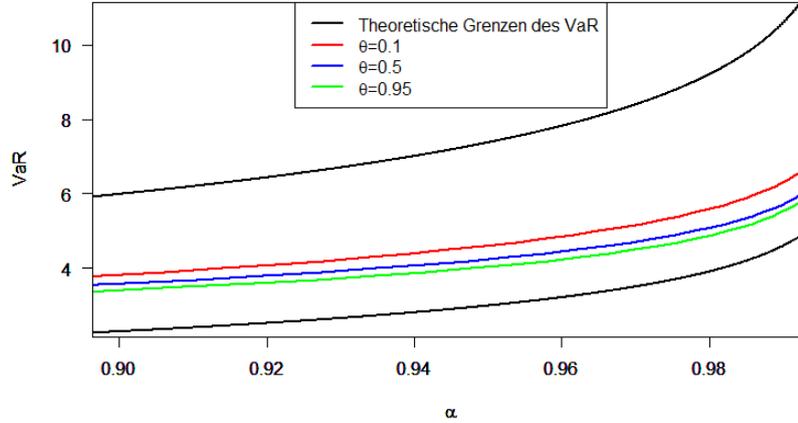


Abbildung 5.3: Value-at-Risk für Gumbels Bivariate Exponentialverteilung für unterschiedliche θ mittels AEP-Algorithmus und die theoretischen Grenzen des Value-at-Risk für zwei exponentialverteilte Risiken mit $\beta = 1$

5.3 Numerische Integration

Eine Alternative zum AEP-Algorithmus ist die numerische Integration der Dichte. Dazu werden wir eine adaptive Methode verwenden. Bei adaptiven Methoden muss man aufpassen, dass durch das Abschneiden von $(x_2 \leq s - x_1)$ keine Unstetigkeit auf der Diagonale entsteht. Um das zu verhindern, müssen wir das Simplex in ein Quadrat substituieren. Die allgemeine Formel für das H-Maß eines Simplexes ist:

$$V_H[\mathcal{S}(0, s)] = \int_0^s \int_0^{s-x_1} h(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

In [7, S.2] findet man eine hilfreiche Formel, um so eine Substitution durchführen zu können:

$$\int \int_{R_x} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int \int_{R_y} f(x_1(y_1, y_2), x_2(y_1, y_2)) \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} dy_1 dy_2.$$

Daher führen wir folgende Substitution durch:

$\begin{aligned} x_1(y_1, y_2) &= y_1 \\ x_2(y_1, y_2) &= \left(1 - \frac{y_1}{s}\right) y_2 \end{aligned}$
$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \leq s \\ \left(1 - \frac{y_1}{s}\right) y_2 &= x_2 \leq s - x_1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x_1}{s}\right) y_2 \leq s - x_1 \Leftrightarrow y_2 \leq \frac{s-x_1}{1-\frac{x_1}{s}} = \frac{s-x_1}{s-x_1} = s \end{aligned}$

Für die Berechnung der Jakobi-Matrix erhalten wir:

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y_2}{s} & 1 - \frac{y_1}{s} \end{vmatrix} = 1 - \frac{y_1}{s}.$$

Insgesamt ergibt das also:

$$\int_0^s \int_0^{s-x_1} h(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^s \int_0^s h\left(y_1, \left(1 - \frac{y_1}{s}\right) y_2\right) \left(1 - \frac{y_1}{s}\right) dy_1 dy_2.$$

Beispiel 5.3. Wir wollen nun mithilfe des R-Package *cubature* die Dichte numerisch integrieren und damit den Value-at-Risk im Bereich von $\alpha = 0.9$ bis $\alpha = 0.99$ mit R zeichnen. Aus dem Package *cubature* werden wir die Funktion *hcubature* verwenden. Diese Funktion führt eine adaptive multidimensionale Integration über Hyperwürfel aus. Für mehr Details siehe [11, S.2].

Dazu betrachten wir wieder Gumbel's Bivariate Exponentialverteilung für $\theta = 0.1$, $\theta = 0.5$ und $\theta = 0.95$. Auch die theoretischen Grenzen zeichnen wir wieder ein. Wir erhalten Abbildung 5.4.

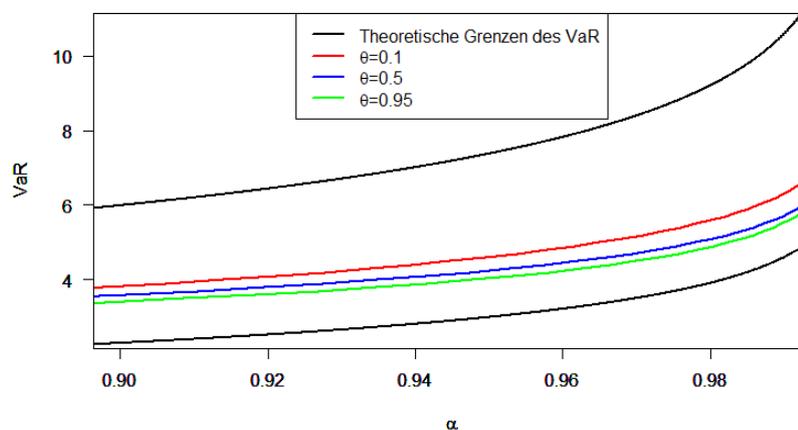


Abbildung 5.4: Value-at-Risk für Gumbel's Bivariate Exponentialverteilung für unterschiedliche θ mittels Integration der Dichte und die theoretischen Grenzen des Value-at-Risk für zwei exponentialverteilte Risiken mit $\beta = 1$

5.4 Kontrolle der Ergebnisse

Beispiel 5.4. Wir wollen nun überprüfen, ob die R-Codes die wir in Kapitel 5.2 und 5.3 verwendet haben auch die korrekten Ergebnisse liefern. Aus Kapitel 3.1 wissen wir, dass die Summe von n unabhängiger $\text{Exp}(\beta)$ -verteilten Zufallsvariablen $\Gamma(n, \beta)$ -verteilt ist. In Kapitel 3.2 haben wir herausgefunden, dass die Randverteilungen der Gumbel's Bivariaten Exponentialverteilung exponentialverteilt mit dem Parameter $\beta = 1$ sind. Da wir unabhängige Zufallsvariablen benötigen setzen wir $\theta = 0$. Für $s = 5$ erhalten wir:

Methode	Ergebnis
AEP-Algorithmus	0.9595723
Integration mittels Dichte	0.9595723
Gamma(2,1)-Verteilung	0.9595723

Anhang A

R-Codes

Beispiel 4.6

```
###Exponential-Normalverteilung Beispiel
rm(list=ls())

#Parameter der Exponentialverteilung
l <- -1.5

#Parameter der Normalverteilung
u <- 0
s <- 1

#Konfidenzniveau
alpha <- seq(0.9, 0.99, by=0.0001)

#Funktion definieren, die Quantilfunktion zurückgibt
Q1 <- function(alpha) qexp(alpha, l)
Q2 <- function(alpha) qnorm(alpha, u, s)

#Anwendung der Formel für die untere Grenze
uG <- Vectorize (function(alpha) optimize(function(x) Q1(x)+Q2(alpha-x),
                                          c(0, alpha), maximum=TRUE)$objective)
uG1 <- uG(alpha)

#Anwendung der Formel für die obere Grenze
oG <- Vectorize (function(alpha) optimize(function(x) Q1(alpha+x)+Q2(1-x),
                                          c(0, 1-alpha), maximum=FALSE)$objective)
oG1 <- oG(alpha)
```

```

#Nun können wir die Grenzen plotten. Die Abbildung befindet sich im Beispiel.
plot(x=alpha,y=uG1,type="l",xlim=c(0.9,0.99),ylim=c(1.4,6),
      xlab = expression(alpha),ylab = "VaR",lwd=2,col="red",las=1)
par(new=TRUE)
plot(x=alpha,y=oG1,type="l",xlim=c(0.9,0.99),ylim=c(1.4,6),
      xlab = expression(alpha),ylab = "VaR",lwd=2,col="green",las=1)
legend("top",legend = c("Untere Grenze VaR","Obere Grenze VaR"),
      col = c("red","green"),lwd=2)

#Als nächstes wollen wir stichprobenartig überprüfen, ob wir dieselben
#Ergebnisse mit dem Rearrangement-Algorithmus erhalten.
#Für die Funktion "RA" benötigen wir das Paket "qrmtools".
library(qrmtools)

#Für den Rearrangement-Algorithmus benötigen wir eine Liste mit
#den Randverteilungen.
qF <- c(list(function(p) qexp(p,l)),list(function(p) qnorm(p,u,s)))

#Wir wollen die Ergebnisse für drei verschiedene Konfidenzniveaus überprüfen
alpha1 <-0.9
alpha2 <-0.95
alpha3 <-0.99

#Wir wählen einen Diskretisierungsparameter von 1000
dp <- 1000

#Berechnung der Rearrangement-Bereiche
oG2.1 <-RA(alpha1, qF , dp, method = c("worst.VaR") )$bounds
uG2.1 <-RA(alpha1, qF , dp, method = c("best.VaR") ) $bounds

oG2.2 <-RA(alpha2, qF , dp, method = c("worst.VaR") ) $bounds
uG2.2 <-RA(alpha2, qF , dp, method = c("best.VaR") ) $bounds

oG2.3 <-RA(alpha3, qF , dp, method = c("worst.VaR") ) $bounds
uG2.3 <-RA(alpha3, qF , dp, method = c("best.VaR") ) $bounds

#Überprüfung ob sich der Wert aus der Formel innerhalb des
#Rearrangement-Bereiches befindet
oG2.1[1] < oG1[1] & oG1[1] < oG2.1[2]          #TRUE
oG2.2[1] < oG1[501]& oG1[501] < oG2.2[2]       #TRUE

```

```
oG2.3[1] < oG1[901] & oG1[901] < oG2.3[2]      #TRUE
```

```
uG2.1[1] < uG1[1] & uG1[1] < uG2.1[2]         #TRUE
```

```
uG2.2[1] < uG1[501] & uG1[501] < uG2.2[2]     #TRUE
```

```
uG2.3[1] < uG1[901] & uG1[901] < uG2.3[2]     #TRUE
```

Beispiel 4.22

```
#Exponential-Normalverteilung Beispiel
```

```
rm(list=ls())
```

```
#Für die Funktion "RA" benötigen wir das Paket "qrmtools".
```

```
library(qrmtools)
```

```
#Konfidenzniveau
```

```
alpha <- 0.95
```

```
#Liste der Randverteilungen
```

```
qF <- c(list(function(p) qexp(p,1.5)),list(function(p) qnorm(p,0,1)))
```

```
#liefert unter anderem die Werte aus den Tabellen und den
```

```
#Rearrangement-Bereich
```

```
RA(alpha, qF , 10, method = c("worst.VaR") )
```

```
test1 <- RA(alpha, qF , 10000, method = c("worst.VaR") )
```

```
test2 <- RA(alpha, qF , 10000, method = c("best.VaR") )
```

```
#Ausgabe des Rearrangement-Bereiches
```

```
test1$bounds
```

```
test2$bounds
```

Beispiel 4.23

```
###Pareto Beispiel
```

```
rm(list=ls())
```

```
#Für die Funktion "RA" benötigen wir das Paket "qrmtools".
```

```
library(qrmtools)
```

```
#Konfidenzniveau
```

```
alpha <- 0.95
```

```

#Quantilfunktion der Pareto-Verteilung definieren
qpare <-function(t,beta,theta){
  p <- theta*(1-t)^(-1/beta)
  return(p)}

#Liste der Randverteilungen
qF <- rep(list(function(p) qpare(p,2,1)),3)

#Anwendung des Rearrangement-Algorithmus und Ausgabe des
#Rearrangement-Bereiches
test3 <-RA(alpha, qF, 100000,method = c("best.ES") )
test3$bounds

```

Beispiel 5.4

```

###Kontrolle der Ergebnisse
rm(list=ls(all=TRUE))

x <-5
d <-2      #Anzahl der Risiken
theta <-0   #Parameter für Gumbels Bivariate Exponentialverteilung
beta <-1    #Parameter der Randverteilungen
absErr=1e-5 #Genauigkeit

#AEP-Algorithmus
N=2^d-1
iter=25    #Anzahl der Iterationen
xi=2/3     #Teilungsparameter

b=list()
b[[1]] =matrix(rep(0,d),ncol=1)
h=list()
h[[1]]=x
s=list()
s[[1]]=1
VH=list()
LB=list()
UB=list()

```

```

AE=list()

y=t(as.matrix(expand.grid(rep(list(0:1),d))))
colnames(y)=NULL

#Gumbels Bivariate Exponentialverteilung
H=function( x ) 1- exp(-x[1])-exp(-x[2])+exp(-x[1]-x[2]-theta*x[1]*x[2])

m=seq(0,0,length.out = N)
for (j in 2:(N+1)){
  if(sum(y[,j])<(1/xi)) {
    m[j-1]=(-1)^(1+sum(y[,j]))}
  else if(sum(y[,j])>(1/xi)) {
    m[j-1]=(-1)^(d+1-sum(y[,j]))}
  else {m[j-1]=0}}

#H-Maß eines Hyperwürfels
Q =function(b,h){
  b1=b[1]
  b2=b[2]
  H(c(b1+h,b2+h)) - H(c(b1+h,b2)) - H(c(b1,b2+h)) + H(c(b1,b2))}

P=0
for(n in 1:iter){
  VH[[n]]=rep(0,times=N^(n-1))
  LB[[n]]=rep(0,times=N^(n-1))
  UB[[n]]=rep(0,times=N^(n-1))
  AE[[n]]=rep(0,times=N^(n-1))
  for(k in 1:N^(n-1)) {
    for(j in 1:(N+1)) {
      VH[[n]][k]=VH[[n]][k]
        +(-1)^(d-sum(y[,j]))*H(b[[n]][,k]+xi*h[[n]][k]*y[,j])}}
  G=0
  Pstern=0
  for(k in 1:N^(n-1)){
    G=G+s[[n]][k]*VH[[n]][k]
    Pstern= P +(d-1)^d/(2^d*factorial(d))*G}
  for(k in 1:N^(n-1)) {
    P=P+s[[n]][k]*VH[[n]][k]}
  Error=0

```

```

for(k in 1:N^(n-1)) {
  LB[[n]][k] = Q(b[[n]][,k],xi*h[[n]][k])
               -Q(b[[n]][,k]+xi*h[[n]][k]*y[,4],(1-2*xi)*h[[n]][k])
  UB[[n]][k] = Q(b[[n]][,k],xi*h[[n]][k])
               +Q(b[[n]][,k]+xi*h[[n]][k]*y[,2],(1-xi)*h[[n]][k])
               +Q(b[[n]][,k]+xi*h[[n]][k]*y[,3],(1-xi)*h[[n]][k])
  AE[[n]][k] = UB[[n]][k]-LB[[n]][k]
  Error=Error + AE[[n]][k]}
if(Error<=absErr)break
if(n==iter)break
b[[n+1]]=matrix(ncol=N^n,nrow=d)
h[[n+1]]=rep(NA,times=N^n)
s[[n+1]]=rep(NA,times=N^n)
for(k in 1:N^(n-1)){
  for(j in 1:N) {
    b[[n+1]][,N*k-N+j]=b[[n]][,k]+xi*h[[n]][k]*y[,j+1]
    h[[n+1]][N*k-N+j]=(1-sum(y[,j+1])*xi)*h[[n]][k]
    s[[n+1]][N*k-N+j]=s[[n]][k]*m[j]}}}
P

#Integration mittels Dichte
library(cubature) #benötigen wir für die Funktion 'hcubature'

#Dichte von Gumbels Bivariater Exponentialverteilung
h=function(t) {
  f= exp(-t[1]-t[2]-theta*t[1]*t[2]) *((1+theta*t[1])*(1+theta*t[2])-theta)
  return(ifelse(t[1]>0 && t[2]>0,f,0))}

#Substitution
hh =function(t) h(c(t[1],(1-t[1]/x)*t[2]))*(1-t[1]/x)

Int = hcubature(hh,rep(0,d),rep(x,d),tol=absErr)
Int$integral

#Gamma(2,1)-Verteilung
pgamma(x,d,beta)

```

Literaturverzeichnis

- [1] Carole Bernard, Xiao Jiang, and Ruodu Wang. Risk aggregation with dependence uncertainty. *Insurance: Mathematics & Economics*, 54:93–108, 2014.
- [2] Paul Embrechts, Rüdiger Frey, and Alexander J. McNeil. *Quantitative risk management*. Princeton University Press, Princeton, NJ, revised edition, 2015.
- [3] Paul Embrechts, Haiyan Liu, and Ruodu Wang. Quantile-based risk sharing. Technical report, October 2017.
- [4] Paul Embrechts, Giovanni Puccetti, and Ludger Rüschendorf. Model uncertainty and VaR aggregation. *Journal of Banking and Finance*, 37(8):2750–2764, 2013.
- [5] Paul Embrechts, Bin Wang, and Ruodu Wang. Aggregation-robustness and model uncertainty of regulatory risk measures. *Finance and Stochastics*, 19(4):763–790, 2015.
- [6] Marius Hofert, Kurt Hornik, and Alexander J. McNeil. Package qrmtools. <https://cran.r-project.org/web/packages/qrmtools/qrmtools.pdf> - Abgerufen am 26.07.2018.
- [7] Frank King. Transforming Bivariate Density Functions. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/0708/Probability/prob12.pdf> - Abgerufen am 03.07.2018.
- [8] Samuel Kotz, Narayanaswamy Balakrishnan, and Norman L Johnson. *Continuous multivariate distributions, Volume 1: Models and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [9] Christina Kyriakopoulos. Über den Arbenz-Embrechts-Puccetti-Algorithmus und eine adaptive Variante zur Anwendung im Operational Risk. Master’s thesis, Wien, Technische Universität, 2015.
- [10] G. D. Makarov. Estimates for the distribution function of the sum of two random variables with given marginal distributions. *Akademiya Nauk SSSR. Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, 26(4):815–817, 1981.
- [11] Balasubramanian Narasimhan, Manuel Koller, and Steven G. Johnson. Package cubature. <https://cran.r-project.org/web/packages/cubature/cubature.pdf> - Abgerufen am 03.07.2018.

- [12] Liang Peng, Ruodu Wang, and Jingping Yang. Bounds for the sum of dependent risks and worst value-at-risk with monotone marginal densities. *Finance and Stochastics*, 17(2):395–417, 2013.
- [13] Ludger Rüschemdorf. Random variables with maximum sums. *Advances in Applied Probability*, 14(3):623–632, 1982.
- [14] Ludger Rüschemdorf and Ludger Uckelmann. Variance minimization and random variables with constant sum. In *Distributions with given marginals and statistical modelling*, pages 211–222. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [15] Bruce Swihart and Jim Lindsey. Package rmutil. <https://cran.r-project.org/web/packages/rmutil/rmutil.pdf> - Abgerufen am 11.08.2018.