

DIPLOMARBEIT

Hardy-Raum Infinite Elemente für Resonanzprobleme in zylindrischen Wellenleitern

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

im Rahmen des Studiums

Technische Mathematik

eingereicht von

Sascha Ungar BSc

Matrikelnummer 01326379

ausgeführt am Institut für Analysis und Scientific Computing
der Fakultät für Mathematik und Geoinformation
der Technischen Universität Wien

Betreuung

Betreuer: Associate Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Lothar NANNEN

Mitwirkung: Dipl.-Ing. Markus WESS

Wien, 13. September 2018

(Unterschrift Verfasser)

(Unterschrift Betreuer)

Kurzfassung

Es existieren zwei unterschiedlichen Arten von Problemen, die bei der Untersuchung von zeit-harmonischen Wellen entstehen. Bei Streuprobleme sind eine Quelle und eine Frequenz vorgegeben. Bei Resonanzproblemen werden Frequenzen gesucht, für die das Problem nicht mehr eindeutig lösbar ist. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf letzterem.

Außerdem betrachten wir für diese Arbeit zwei Arten von Wellen, nämlich akustische und elektromagnetische. Erstere werden durch die Helmholtz-Gleichung, zweitere durch die zeitharmonische Maxwell-Gleichung beschrieben.

Das unbeschränkte Gebiet, auf dem sich die Wellen bewegen, ist vom Typus eines Wellenleiters. Diesen unterteilen wir in einen beschränkten Innen- und einen unbeschränkten Außenraum, in den die Welle ausstrahlt oder ausläuft.

Der Innenraum wird mithilfe der Finiten Elemente Methode bearbeitet. Für den unbeschränkt Außenraum benötigen wir spezielle Infinite Elemente, die von einem Parameter und der Anzahl der Freiheitsgrade im Außenraum abhängig sind. Diese speziellen Infinite Elemente sind der Hauptgegenstand dieser Arbeit.

In den numerischen Beispielen am Ende der Arbeit zeigen wir exponentielles Abfallverhalten des Fehlers bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade in Ausstrahlungsrichtung. Außerdem zeigen wir, wie sich die Resonanzen anhand des Parameters verhalten.

Abstract

Wave phenomena can be divided into two categories. Scattering problems, where the right side, i.e. a source and a frequency are given. In the case of resonance problems, we look for frequencies, for which the problem is not uniquely solvable. This work deals with the latter. In addition, we consider two types of waves for this work: acoustic and electromagnetic waves. The former are described by the Helmholtz equation, the second by the time-harmonic Maxwell equation. The unrestricted area on which the waves move is of a waveguide type. We subdivide this into a restricted inner and an unrestricted outer space into which the wave radiates or leaks. The interior is processed using the Finite Element Method. For the unrestricted outer space, special Infinite Elements are required, which depend on a parameter and the number of outer degrees of freedom. These special Infinite Elements are the main subject of this work. In the numerical examples at the end of the work, we show exponential falling behavior of the error in the direction of emission with respect to the number of degrees of freedom. We also show how the resonances behave, depending on the parameter.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich zuerst bei meinem Betreuer Associate Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Lothar Nannen bedanken. Ich hatte das größte Glück, dich als meinen Betreuer zu haben. Mit dir habe ich den Jackpot geknackt. Du hattest immer ein offenes Ohr für mich und ganz egal mit welcher Frage ich gekommen bin, du hast dir immer Zeit genommen, mir die Sachen so lange zu erklären, bis ich sie tatsächlich verstanden habe und warst mit deiner Geduld nie am Ende. Es war ermutigend für mich, zu sehen, mit welcher Hingabe du mich gelehrt hast und du Interesse hattest, dass ich etwas lerne und eine spannende Arbeit herauskommt. Ich freue mich, dass noch viele weitere Studenten mit dir den Jackpot knacken werden.

Außerdem möchte ich mich bei Dipl.-Ing. Markus Wess bedanken, der mit mir viel Zeit in die Fehlersuche des Codes gesteckt hat, immer eine offene Bürotür und viel Geduld mit mir hatte.

Zusätzlich möchte ich mich bei all meinen Studienkollegen bedanken, die mich die letzten fünf Jahre hier begleitet haben. Jeder Tag auf der Universität und mit euch Zeit zu verbringen, war wie ein Heimkommen und Zeit mit den besten Freunden verbringen. An dieser Stelle möchte ich ganz besonders Dipl.-Ing. Michael Neunteufel herausheben, der mich quasi durch das Studium und NGSolve getragen hat. Außerdem danke an Michael Leumüller BSc für den gemeinsamen Spaß und die Zeit, die wir im 3. Grün verbringen durften, und das Korrekturlesen meines „Meisterwerks“. Außerdem möchte ich mich noch bei Karoline Tichy BSc bedanken. Ohne dich wäre diese Arbeit ein echter Kompatient.

Christina Walch BA, meine große Liebe, danke, dass du immer an mich geglaubt hast und mir rechtzeitig Feuer unter dem Hintern gemacht hast.

Zu guter Letzt möchte ich mich noch bei meinen Eltern, Martina, da gehörst du mittlerweile dazu, bedanken. Für all eure Unterstützung und eure Liebe.

Auch wenn er in der Wissenschaft oft keinen Platz hat, so möchte ich mich bei Gott bedanken, der Anfang und das Ende unseres ganzen Seins.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Hardy-Raum Methode in einem akustischen Wellenleiter	4
2.1	Hardy-Raum Infinite Elemente	4
2.2	Generelle Formulierung	5
2.3	Rand- und Ausstrahlungsbedingungen	6
2.4	Variationsformulierung der Helmholtz-Gleichung in der Hardy-Raum Formulierung	10
2.4.1	Basiswechsel	10
3	Diskretisierung der Hardy-Raum Methode im akustischen Wellenleiter	16
3.1	Basis von $H^+(S^1)$	16
3.2	Die linearen Operatoren $\mathcal{T}_-, \mathcal{T}_+$	16
3.3	Lösungsraum	17
3.4	Herleitung der Diskretisierung im Außenraum Ω_{ext}	17
3.4.1	Berechnung von B^{ext}	18
3.4.2	Berechnung von A^{ext}	18
3.5	Hardy-Raum Methode in NGS-Py	19
3.5.1	Aufstellen des Lösungsraums	20
3.6	Alternative Basis	20
4	Die Hardy-Raum Methode im elektromagnetischen Wellenleiter	22
4.1	Benötigte Operatoren	22
4.2	Generelle Formulierung und Rand- und Ausstrahlungsbedingungen	23
4.2.1	Überblick über die generell Formulierung	23
4.2.2	Erweiterung der Polbedingung	23
4.3	Variationsformulierung der Maxwell-Gleichung in der Hardy-Raum Formulierung	24
5	Diskretisierung der Hardy-Raum Methode im elektromagnetischen Wellenleiter	26
5.1	Lösungsraum	26
5.2	Herleitung der Diskretisierung im Außenraum Ω_{ext}	27
5.2.1	Berechnung von $B^{\text{ext,Max}}$	27
5.2.2	Vorbereitungen - $\text{curl } u_1, \text{curl } u_2$	29
5.2.3	Berechnung von $A^{\text{ext,Max}}$	29
5.3	Hardy-Raum Methode in NGS-Py	32
5.3.1	Aufstellen des Lösungsraumes	33
5.3.2	Bilinearformen	33
5.3.3	Assemblieren der Matrizen	33
5.3.4	Lösen des Eigenwertproblems	33
6	Numerische Beispiele	34

Inhaltsverzeichnis

6.1	Helmholtz-Gleichung	34
6.2	Maxwell-Gleichung	36
6.2.1	Spektrum und der Parameter κ_0	38
6.2.2	Vergleiche zur PML	40
6.2.3	Konvergenz der Hardy-Raum Infiniten Elemente	41
7	Conclusio	44
	Abbildungsverzeichnis	45
	Verzeichnis der Codeausschnitte	46
	Literatur	47

1 Einleitung

In der heutigen Zeit begegnen uns im Alltag nahezu überall, und oft unbewusst bzw. unentdeckt, Anwendungen aus der Mathematik. Zwei Gleichungen, die ebenfalls in diese Kategorie fallen, bilden die Grundlage dieser Arbeit.

Wie der Titel bereits erahnen lässt, betrachten wir unterschiedliche Wellenphänomene. Wellen tauchen in vielen Bereichen des täglichen Lebens auf. Das Schwingen einer eingespannten Gitarrenseite, der Klang eines Lautsprechers, die Wasserkreise, die entstehen, wenn man einen Stein in einen See wirft, beim Surfen im Internet bewegt man sich ebenfalls auf Wellen oder zur Herstellung von integrierten Schaltungen in der Halbleitertechnik (Fotolithografie), all dies umfasst Wellen. Genauer gesagt akustische und elektromagnetische Wellen.

Diese Arbeit befasst sich mit zwei unterschiedlichen Arten von Wellenproblemen. Die erste Art sind Streuprobleme, bei denen eine Quelle (rechte Seite) existiert. Die zweite Art sind Resonanzprobleme. Wir bearbeiten hier hauptsächlich Resonanzprobleme im mathematischen Sinne, auch Eigenwertprobleme genannt. Ein sehr berühmter Fall, bei dem sichtbar wurde, wie wichtig das Wissen um die Resonanzen eines Objekts sind, ist der Einsturz der Tacoma-Narrows-Brücke am 7.11.1940. Die Hängebrücke im US-Staat Washington hatte zuvor schon immer wieder bei konstanten Seitenwinden begonnen sich aufzuschaukeln. Am besagten Tag, nur vier Monate nach der Einweihung, haben sich Wirbel gebildet, die eine zeitharmonische Anregung verursachten, genau in der Resonanzfrequenz der Brücke (siehe [Nan08], [BS91], [Lar00]). Das Unglück, bei dem glücklicherweise bloß ein Hund sein Leben verlor, veranlasste, dass neue Brücken im Windkanal getestet werden.

Helmholtz-Gleichung

Im ersten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns, aufbauend auf [HN17], mit einem akustischen Wellenleiter, der durch die Helmholtz-Gleichung,

$$-\Delta u(x) - \omega^2 u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3,$$

auf einem unbeschränkten Gebiet Ω , beschrieben wird. Ω benötigt spezielle Rand- und Ausstrahlungsbedingungen, um eindeutige Lösbarkeit im Unendlichen sicherzustellen. Auf die Eigenschaften von Ω kommen wir in Kürze zu sprechen. u bezeichnet die ortsabhängige Auslenkung der Welle und $\omega \in \mathbb{C}$ die Frequenz. Die rechte Seite f beschreibt eine Quelle. Bei Eigenwertproblemen suchen wir Eigenpaare (u, ω) , wobei $u \neq 0$, die Gleichung $-\Delta u(x) = \omega^2 u(x)$ lösen.

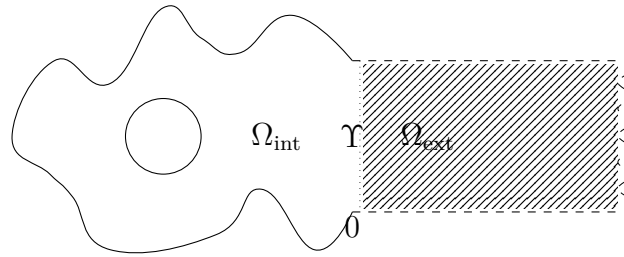


Abb. 1.1: Diese Skizze zeigt eine mögliche Wahl für das Gebiet Ω . Der Rand von Ω_{int} wird durch die dicken schwarzen Linien skizziert. An der gepunkteten Linie Υ , dem Übergang zwischen Innen- und Außenraum, koppeln Ω_{int} und Ω_{ext} . Für die strichlierten Ränder von Ω_{ext} wählen wir homogene Neumann-Daten. Der rechte gezackte Rand von Ω_{ext} deutet an, dass Ω_{ext} unbeschränkt, nach rechts, weitergeht. Der Kreis in Ω_{int} stellt einen Streukörper (z. B. einen Stein) dar. Der Streukörper ist nicht Teil von Ω_{int} .

Maxwell-Gleichung

Im zweiten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns, aufbauend auf [Nan+13], mit einem elektromagnetischen Wellenleiter und der Implementierung der in [Nan+13] beschriebenen Hardy-Raum Infiniten Elemente. Resonanzprobleme für elektromagnetische Wellen werden durch die zeitharmonische Maxwell-Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} &= \omega^2 \epsilon \mathbf{u} && \text{auf } \Omega, \\ \mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ \mathbf{u} &\text{ ist „auslaufend“,} \end{aligned}$$

beschrieben, wobei \mathbf{u} ein elektrisches Feld, \mathbf{n} den Einheitsnormalvektor und ϵ die elektrische Permittivität bezeichnen. Der Begriff „auslaufend“ wird in Kapitel 2 genauer besprochen.

Die Bearbeitung des Gebietes Ω

Wir betrachten beide Gleichungen auf dem Wellenleiter Ω , einem zusammenhängenden, unbeschränkten Gebiet mit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Das Gebiet wird in einen beschränkten Innenraum, Ω_{int} , der mit Standard Finiten Elementen aus [NGS-Py] diskretisiert wird, und einen unbeschränkten Außenraum, Ω_{ext} , unterteilt. Einen Wellenleiter kann man sich z. B. als unendlich langes Stromkabel vorstellen. In Abbildung 1.1 wird Ω skizziert. Dabei sieht man, wie Ω in Ω_{int} und Ω_{ext} unterteilt ist.

Im Außenraum kommt die Hardy-Raum Methode (kurz HRM) zum Einsatz. Diese verfolgt einen Tensorproduktansatz und geschickte Transformationen von Integralen über unbeschränkten Gebieten auf endliche Integrale.

Aufbau

Im Anschluss an diese Einleitung wird in Kapitel 2 die Hardy-Raum Methode für akustische Wellenleiter genauer behandelt. Im darauffolgenden Kapitel sprechen wir über die Implementierung der Hardy-Raum Methode. In den Kapiteln 4 und 5 beschäftigen wir uns mit elektromagnetischen Wellenleitern und der Implementierung der Hardy-Raum Infiniten Elementen. In Kapitel 6 werden numerische Tests und Ergebnisse zu den beschriebenen Methoden vorgestellt. Im letzten und abschließenden Kapitel gibt es einen kurzen Ausblick auf das weitere Vorgehen.

Implementierung

Für die numerischen Tests und Beispiele werden die Python Open-Source Pakete Netgen und NGSolve, siehe [Sch97], [Sch14] und [NGS-Py], verwendet.

2 Die Hardy-Raum Methode in einem akustischen Wellenleiter

Im ersten Schritt der Arbeit beobachten wir das Verhalten von Eigenwerten in einem akustischen Wellenleiter. Hierfür betrachten wir die Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta u(x) - \omega u(x) = f(x) \quad x \in \Omega$$

auf dem Gebiet Ω , welches im Inneren einen Streukörper aufweist und am rechten Rand „offen“, also unbeschränkt, ist. Ω ist vergleichbar mit einem, nach einer Seite hin unendlich langen Rohr. Der Anfangsabschnitt, im späteren Verlauf Ω_{int} genannt, wird durch Finite Elemente diskretisiert, der unendlich lange Außenraum Ω_{ext} mit Hardy-Raum Infiniten Elementen. In diesem Kapitel stellen wir zuerst die generelle Formulierung des Problems vor, danach befassen wir uns mit den passenden Rand- bzw. Ausstrahlungsbedingungen, um danach zur Problemstellung und dem variationellen Rahmen überzugehen. Dabei orientieren wir uns vor allem an [Nan16] und [HN17].

2.1 Hardy-Raum Infinite Elemente

Dieser Abschnitt soll eine kurze Einleitung zu den Hardy-Raum Infiniten Elementen geben. Dabei orientieren wir uns nahezu vollständig an [Nan16, Abschnitt 7].

Für Integrale über unbeschränkte Gebiete kommen neben der Perfectly-Matched-Layer Methode (kurz PML, siehe z. B. [Nan16, Abschnitt 6]) auch oft Infinite Elemente zum Einsatz. Klassische Infinite Elemente Methoden verfolgen einen Tensor-Produktansatz der Form

$$u_{\text{ext}}(\xi, \eta) \approx \sum_{j=1}^{N_r} \sum_{k=1}^{N_\Upsilon} c_{jk} \psi_j^{(r)}(\xi) \phi_k^\Upsilon(\eta), \quad r > R, \eta \in \Upsilon. \quad (2.1)$$

Die Funktionen $\phi_k^\Upsilon(\eta)$ sind die nicht-verschwindenden Spuren der Finite Elemente Basisfunktion der Diskretisierung des Innenraums Ω_{int} auf Υ . Die zweite Klasse der hier auftauchenden Funktionen, $\psi_j^{(r)}(\xi)$, sind spezielle radiale Basisfunktionen. Diese sind bei traditionellen Infiniten Elemente Methoden z. B. sphärische Hankel-Funktion 1. Art oder, bei Wellenleitern üblicher frequenzabhängige, Modenfunktionen der Form

$$\psi_j^{(r)} : \xi \mapsto \exp(i\kappa_j(\omega)\xi),$$

wobei $\kappa(\omega)$ die frequenzabhängige Wellenzahl bezeichnet. Diese Funktionen können aber unglücklicherweise nicht als Testfunktionen gewählt werden, da die $L^2((R, \infty))$ -Norm unbeschränkt ist. Deshalb muss man bei klassischen Infiniten Elementen zu modifizierten Basisfunktionen, bzw. unterschiedlichen Ansatz- und Testfunktionen greifen. Dies führt jedoch zu schlecht konditionierten linearen Gleichungssystemen.

Obwohl die Ansätze ähnlich sind, ist der theoretische Hintergrund der Hardy-Raum Infinite Elemente vollkommen anders. Die großen Stärken der Hardy-Raum Methode sind sehr gut konditionierte Diskretisierungsmatrizen, eine klassische Galerkin Konvergenztheorie mit exponentiell abfallendem Projektionsfehler und Basisfunktionen, die, im Gegensatz zur klassischen Infinite Elemente Methode, unabhängig von der Frequenz ω sind. Die Unabhängigkeit gegenüber ω ist im speziellen bei Resonanzproblemen, wie wir sie im Zuge dieser Arbeit betrachten, von erheblichem Vorteil. Liefert die Praxis viele Vorteile, so ist die komplexe Theorie hinter der Hardy-Raum Methode weitaus weniger intuitiv als traditionelle Infinite Elemente oder der PML, und erschwert den theoretischen Zugang und das Verständnis.

Um den theoretischen Zugang zur Hardy-Raum Methode ansprechender zu gestalten, wird der restliche Teil von Kapitel 2 als fiktive und mit einer gesunden Portion Humor zu betrachtende Geschichte verfasst. Falls dies jemanden zu Nahe tritt, bittet der Autor vielmals um Verzeihung.

Zur Notation: Wir bezeichnen hier $\Psi(\xi)$ als Hardy-Raum Basisfunktionen des Raumes \mathcal{W}_ξ und $\psi(\xi)$ des Raumes \mathcal{W}'_ξ . Die Funktionen $\Phi(\eta)$ sind die Finite Elemente Basisfunktionen des später benötigten $H(\mathbf{curl})$ und $\phi(\eta)$ die Basisfunktionen des H^1 . Mehr dazu in den folgenden Kapiteln, siehe v.a. Kapitel 3 und 5.

2.2 Generelle Formulierung

„Es war einmal vor langer Zeit in einer weit, weit entfernten Galaxis...“ - [SW1].

Meister Pobi Dwan Eknobi, von allen nur Meister PDE genannt, hatte viele Fragen. Er war schon immer ein außergewöhnlicher Phedi, denn er wollte nicht nur die Galaxie, sondern auch die kosmischen Gleichungen im kosmischen Gleichgewicht halten. So passierte es, als er wieder einmal in der alten Bibliothek des Wissens, im Phedi-Tempel, nach einem neuen Lehrbuch für Schwerttechniken für seine Phedi-Schüler suchte, dass er auf die Schriftrolle [HN17] stieß. Die daran beschriebenen Streu- und Resonanzprobleme eines akustischen Wellenleiters Ω ließen ihn nicht mehr los. Er spürte, nein, er wusste, es war sein Ruf, seine Bestimmung, diesen Problemen auf den Grund zu gehen und damit eine weitere kosmische Gleichung, die Helmholtz-Gleichung

$$-\Delta u - \omega^2 u = 0 \quad \text{auf } \Omega := \Omega_{\text{int}} \cup \tilde{\Upsilon} \cup \Omega_{\text{ext}}. \quad (2.2)$$

für eine gegebene Frequenz $\omega \in \mathbb{C}$ ins Gleichgewicht zu bringen.

Als sich Meister PDE weiter mit [HN17] befasste und zu verstehen versuchte, was es mit dem ominösen Gebiet Ω auf sich hatte, begann seine erste Begeisterung Ernüchterung zu weichen. Denn Ω war nicht nur ein einzelnes Gebiet, nein, es war eine Vereinigung, von drei unterschiedlichen Gebieten. Der Innenraum $\Omega_{\text{int}} \subset \mathbb{R}^d$ sowie $\Upsilon \subset \mathbb{R}^{d-1}$, mit $d = 2, 3$, sollten beschränkte Lipschitzgebiete sein. Zusätzlich definierte Meister PDE das kartesische Produkt $\tilde{\Upsilon} := \{0\} \times \Upsilon \subset \partial\Omega_{\text{int}}$, welches das Interface, die Schnittstelle zwischen

Innen- und Außenraum, sein sollte. Als Meister PDE das dritte Gebiet Ω_{ext} betrachtete, machte er eine bemerkenswerte Entdeckung: Ω_{ext} war unbeschränkt. Es setzte sich als kartesisches Produkt der positiven reellen Achse $\mathbb{R}_{>0}$ und Υ zu einem unendlich langem zylindrischen Gebiet, von den alten Meistern bloß Wellenleiter genannt, zusammen. Bemerkenswert. Meister PDE staunte über die Brillanz der Natur, als er noch entdeckte, dass $\bar{\Omega}_{\text{int}} \cap \bar{\Omega}_{\text{ext}} = \tilde{\Upsilon}$.

Der Phedi wusste, als er sah, dass Ω unendlich lang war, und aus drei Teilen bestand, dass Gleichung (2.2), so wie sein Schwert, spezielle Rand- und Ausstrahlungsbedingungen benötigte. Mithilfe seiner großen Weisheit und unter Anleitung von [HN17] hatte er auch schnell mögliche Bedingungen, für den nichtkoppelnden, beschränkten Rand von Ω_{int} parat

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Upsilon, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{auf } \tilde{\Upsilon}_N, \quad (2.3b)$$

$$u = g \quad \text{auf } \tilde{\Upsilon}_D, \quad (2.3c)$$

$$u, \text{„auslaufend“}. \quad (2.3d)$$

Die Bedeutung des Wortes „auslaufend“ wollte er im nächsten Abschnitt erklären. Die Funktion $g \in H^{1/2}(\tilde{\Upsilon}_D)$ musste gegeben sein und v beschrieb die Normalenrichtung. Der Rand von Ω war eine disjunkte Vereinigung von $\partial\Omega_{\text{ext}} \setminus \tilde{\Upsilon}$, mit $\tilde{\Upsilon}_N$ und $\tilde{\Upsilon}_D$, die Teilmengen von $\partial\Omega_{\text{int}} \setminus \tilde{\Upsilon}$ waren.

Meister PDE verwendete für seine Betrachtung lediglich homogene Neumanndaten für den Innenraum.

2.1 Bemerkung. *Um die Diskretisierung des Innenraums möglichst einfach zu halten, verwenden wir in unserer Arbeit nur homogene Neumanndaten. Inhomogene Neumanndaten am Wellenleiterrand wären sehr problematisch. Im Innenraum sind viele Kombination von Dirichlet- und Neumanndaten zulässig. Diese haben auch keine Auswirkungen auf die Diskretisierung des Außenraums. Änderungen der Randdaten im Außenraum sind wesentlich anspruchsvoller.*

2.3 Rand- und Ausstrahlungsbedingungen

Durch seine langjährige Erfahrung mit Wellenproblemen wusste Meister PDE um die Problematik, unter den Lösungen auch die physikalisch sinnvolle auszuwählen. Als er in [HN17] endlich den verschlüsselten [Abschnitt 2.1] durch die neueste Hologrammtechnik zugänglich machen konnte, begann sich seine Stimmung wieder zu bessern. Denn hier stand bereits, wie man die Macht durch die passenden Rand- und Ausstrahlungsbedingungen in die rechte Bahn lenken konnte. Damit, falls dieses Manuskript in die falschen Hände gerät, die Ordnung des Universum sichergestellt bleibt, werden hier nur die wich-

tigsten Details aus [HN17] von Meister PDE unverschlüsselt wiedergegeben.

Meister PDE betrachtete vorerst Lösungen u von Gleichung (2.2) im Außenraum Ω_{ext} , wobei er für die unendlich langen Strahlen $\mathbb{R}_{>0} \times \partial\Upsilon$ homogene Neumanndaten wählte. Da Meister PDE nicht nur gerne Droiden, sondern auch den Laplaceoperator $\Delta = \partial_\xi^2 + \Delta_\eta$ entzwei teilte, nämlich in den Longitudinalanteil ∂_ξ^2 und den Oberflächenanteil Δ_η , berechnet er u mithilfe eines Separationsansatzes. Durch seine jahrelange Erfahrung als Meister des Separationansatzes wählte er die Eigenpaare $(\lambda_n, \phi_n) \in \mathbb{R}_{>0} \times H^1(\Upsilon) \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ die Lösungen des Eigenwertproblems $-\Delta_\eta \phi_n = \lambda_n \phi_n$ waren. Damit war u gegeben durch

$$u(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\xi) \phi_n(\eta), \quad \xi > 0, \eta \in \Upsilon, \quad (2.4)$$

und Ψ_n waren die Lösungen des eindimensionalen Problems in radialer Richtung

$$-\Psi_n''(\xi) - (\omega^2 - \lambda_n) \Psi_n(\xi) = 0, \quad \xi > 0.$$

Die Lösungen Ψ_n ließen sich als

$$\Psi_n(\xi) = \begin{cases} c_n \exp(i\kappa_n(\omega)\xi) + d_n \exp(-i\kappa_n(\omega)\xi), & \omega^2 \neq \lambda_n \\ c_n + d_n \xi, & \omega^2 = \lambda_n \end{cases} \quad \xi > 0, \quad (2.5)$$

mit den frequenzabhängigen Wellenzahlen $k_n(\omega) = \sqrt{\omega^2 - \lambda_n}$ und den Konstanten $c_n, d_n \in \mathbb{C}$ darstellen.

Für reelle Frequenzen $\omega \geq 0$ verwendete Meister PDE die in [HN17] gefundene Definition

$$\kappa_n(\omega) := \begin{cases} i\sqrt{\lambda_n - \omega^2}, & \omega \in [0, \lambda_n] \\ \sqrt{\omega^2 - \lambda_n}, & \omega > \lambda_n \end{cases}. \quad (2.6)$$

Als Meister PDE die Darstellung (2.5) von Ψ_n betrachtete, fiel ihm auf, dass Ψ_n nur dann eine ausgehende Lösung, d.h. physikalisch „sinnvolle“ Lösung war, falls $d_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dieses Wissen hatte er sich Jahre zuvor mithilfe von [Nan16, Abschnitt 5] angeeignet. Auffallend für Meister PDE war, dass die obige Definition der ausgehenden Lösung die Wellenleitermoden mit einschloss und sie daher auch modal ausstrahlende Bedingung genannt werden konnten.

In seinen Untersuchungen stieß Meister PDE auch immer wieder auf komplexe Frequenzen ω in Gleichung (2.2). Hierfür musste er die vorherige Ausstrahlungsbedingung $d_n = 0$, für $\omega \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \cup_{n \in \mathbb{N}} \{\sqrt{\lambda_n}\}$ holomorph fortsetzen, um sinnvoll zu sein. Eine Schwierigkeit, der Meister PDE in seinem Kampf für das Gleichgewicht der Helmholtz-Gleichung gegenüberstand, war, dass für $\omega^2 = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, (2.6) nicht holomorph wäre.

Doch mithilfe seiner feinen Schwerttechnik schnitt er, startend bei $\lambda_n, n \in \mathbb{N}$, aus dem Definitionsbereich feine Zweige („branch-cuts“) heraus, so dass er für ein fixes $\theta \in [0, 2\pi)$ folgende Definition für die Wellenzahlen verwenden konnte:

$$\kappa_n^\theta(\omega) := \sqrt{|\omega^2 - \lambda_n|} \exp(i \arg(\omega^2 - \lambda_n)/2), \quad \arg(\omega^2 - \lambda_n) \in (\theta - 2\pi, \theta), \quad (2.7a)$$

mit „branch-cuts“ für alle $\omega \in \mathbb{C}$, so dass

$$\omega^2 - \lambda_n \in \exp(i\theta)\mathbb{R}_{>0} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(\omega^2 - \lambda_n) = \theta. \quad (2.7b)$$

Da nur im Fall $\{0, \pi\} \in (\theta - 2\pi, \theta)$ diese Definition mit (2.6) zusammenfällt, ergibt sich eine holomorphe Fortsetzung für alle $\theta \in (\pi, 2\pi)$.

Mit der neuen Definition der Wellenzahl stellte sich nun für Meister PDE die Frage, wie denn die eben erwähnten $\theta \in [0, 2\pi)$ zu wählen seien. Für die Antwort auf diese Frage konnte er sich wieder auf [HN17] verlassen. Die Schriftrolle schlug ihm die Polbedingung, bei der θ implizit gewählt wird, vor. Die Polbedingung spezifizierte Gebiete in \mathbb{C} , in der, anders als in den weiten Galaxien mit ihren schwarzen Löchern, die Laplace Transformierte der Lösung keine Singularitäten aufweisen sollte.

Die Laplace Transformierte $\hat{\Psi}_n(s) = (\mathcal{L}\Psi_n)(s) := \int_0^\infty \Psi_n(\xi) \exp(-s\xi) d\xi$ von Ψ_n ist gegeben durch

$$\hat{\Psi}_n(s) = \begin{cases} \frac{c_n}{s - i\kappa_n(\omega)} + \frac{d_n}{s + i\kappa_n(\omega)}, & \kappa_n(\omega) \neq 0 \\ \frac{c_n}{s} + \frac{d_n}{s^2}, & \kappa_n(\omega) = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{C}. \quad (2.8)$$

Das bedeutet, die $\hat{\Psi}_n$ sind meromorphe Funktionen, mit für $\kappa_n(\omega) \neq 0$ zwei Polen der Ordnung eins bei $\pm i\kappa_n$. Im Fall $\kappa_n(\omega) = 0$ fallen diese Pole zu einem Pol der Ordnung zwei zusammen. Abbildung (2.1) zeigt eine Skizze Meister PDEs, in der er die Position der Pole in der komplexen Ebene für ein ω mit $\lambda_2 < \omega^2 < \lambda_3$ eingezeichnet hatte.

Dem aufmerksamen Leser ist sicher nicht entgangen, dass Meister PDE gerne Dinge zerteilte. Und so ging es munter weiter, um die Polbedingung auch in der fernsten Galaxie greifbar zu machen.

Sei nun $s_0 \in \mathbb{C}$ ein komplexer Parameter mit positivem Real- und Imaginärteil. Mithilfe seines Schwertes und s_0 zerteilte Meister PDE nun die komplexe Ebene in die Gerade $\Gamma := s_0\mathbb{R}$ und die Halbräume Γ^- und Γ^+ unterhalb bzw. oberhalb davon (siehe Abbildung 2.1). Die Polbedingung besagte nun, dass für alle $\eta \in \Upsilon$ die Funktion $\hat{u}(s, \eta) := \sum_{n=0}^\infty c_n \hat{\Psi}_n(s) \phi_n(\eta)$ wohldefiniert sein soll und keine Pole $p_n := i\kappa_n$ in $\Gamma^- \cup \Gamma$ haben soll.

Durch die Polbedingung als Ausstrahlungsbedingung konnte nun Meister PDE endlich die gesuchte eindeutige holomorphe Fortsetzung festlegen. Er musste nämlich nur noch für die Definition der κ_n fordern, dass alle Pole $i\kappa_n(\omega)$ in Γ^+ liegen sollten. Da im

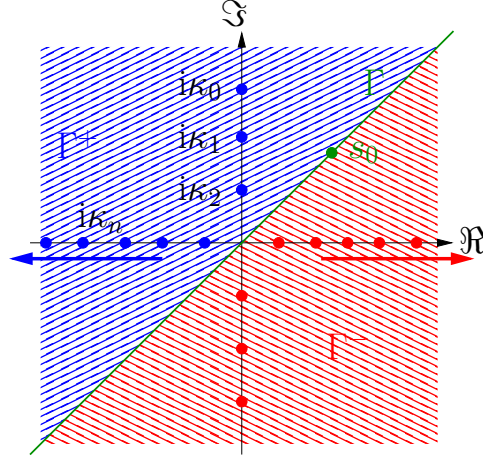


Abb. 2.1: Meister PDEs Skizze der Pole für ein ω mit $\lambda_2 < \omega^2 < \lambda_3$

Universum keine Zufälle existieren, sondern die Macht alles ins Gleichgewicht bringt, fällt die obige Definition von κ_n mit der Wahl $\theta = 2 \arg(s_0)$ in (2.7a) zusammen.

2.2 Bemerkung. Damit die Reihe \hat{u} im $L^2(\Upsilon \times \partial\Omega_{\text{ext}})$ Sinne konvergiert,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \hat{u}(\cdot, \cdot) - \sum_{n=0}^N c_n \hat{\Psi}_n(\cdot) \phi_n(\cdot) \right\|_{L^2(\Upsilon \times \partial\Omega_{\text{ext}})} = 0, \quad (2.9)$$

müssen wir fordern, dass die Beträge $|c_n|$ schnell genug abfallen.

Nun stand nahezu alles bereit, um die oben beschriebene Polbedingung in einer Variationsformulierung zu verwenden: Einzig und allein der passende Raum fehlte. Denn Meister PDE wusste, dass jedes Objekt, egal ob es nun ein Raumschiff, Todesstern oder eine Gleichung ist, einen Raum, in dem es sich bewegen konnte, benötigte. Bei einer seiner Streifzüge durch die alte Phedi-Bibliothek, war ihm das alte Pergament [Hal+16] in die Hände gefallen. Damals fand er darin eine sehr detaillierte und ausführliche Definition und Beschreibung der Hardy-Räume. Für seine Zwecke, so konnte sich Meister PDE erinnern, war der Hardy-Raum $H^-(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$, der aus der Menge aller $L^2(\Gamma)$ Randwerte von holomorphen Funktionen in Γ^- besteht, ein erster Anfang.

Stolz über seine Entdeckungen verkündete er im Phedi-Rat, dass eine Lösung u der Helmholtz-Gleichung (2.2) im Wellenleiter Ω_{ext} ausgehend genannt wird, falls

$$\mathcal{L}_\xi u \in H^-(\Gamma) \times L^2(\Upsilon). \quad (2.10)$$

2.3 Bemerkung. Die Frequenzen $\omega \in \mathbb{C}$, die Teil der in (2.7b) definierten Menge sind, führen zu Polen $i\kappa_n \in \Gamma$. Dies wird bei einem fixen $n \in N$ mit $\omega = \sqrt{\lambda_n}$ zum Problem. [HN17] nimmt sich diesem an.

2.4 Variationsformulierung der Helmholtz-Gleichung in der Hardy-Raum Formulierung

Meister PDE schwelgte gerade in Erinnerungen. Im Speziellen die Darstellung von \hat{u} als

$$\hat{u}(s, \eta) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{\Psi}_n(s) \phi_n(\eta) \quad (2.11)$$

behielt er im Kopf.

Da machte sich plötzlich sein Magen mit einem lauten Grummeln bemerkbar. Auf seinem langem Weg bis hierhin wurde Meister PDE hungrig. Da er nicht nur ein legendärer Phedi-Meister, sondern auch ein begnadeter Koch war, wollte er sein Lieblingsgericht kochen, eine Variationsformulierung. Passend zu seinem Abenteuer sollte es natürlich eine Variationsformulierung der Helmholtz-Gleichung sein. Für das Grundrezept orientierte er sich an [HN17] und [Nan+13].

Er wusste, dass eine der Hauptzutaten ein solider Lösungsraum war. Da der Wellenleiter Ω_{ext} ein Tensorprodukt des $\mathbb{R}_{>0}$ und Υ war, basierte auch der Lösungsraum von Meister PDE für die variationelle Formulierung auf einem Tensorprodukt. Um genau zu sein, so erinnerte sich Meister PDE an das Rezept aus [HN17, Abschnitt 2.2], bestand der Teig für den Lösungsraum aus den transversalen Hilberträumen $L^2(\Upsilon)$, $H^1(\Upsilon)$, und longitudinalen Hilberträumen \mathcal{X}_1 , \mathcal{X}_2 , die zu \mathcal{V}^{ext}

$$\mathcal{V}^{\text{ext}} := \mathcal{X}_2 \otimes L^2(\Upsilon) \cap \mathcal{X}_1 \otimes H^1(\Upsilon) \quad (2.12a)$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{V}^{\text{ext}}} := \langle f, g \rangle_{\mathcal{X}_2 \otimes L^2(\Upsilon)} + \langle f, g \rangle_{\mathcal{X}_1 \otimes H^1(\Upsilon)}, \quad f, g \in \mathcal{V}^{\text{ext}} \quad (2.12b)$$

kombiniert wurden.

Auf diese Art und Weise ließ sich die longitudinale Richtung $\mathbb{R}_{>0}$ des Wellenleiters unabhängig von der Oberfläche Υ behandeln.

2.4 Bemerkung. *Dass der Lösungsraum \mathcal{V}^{ext} von \hat{u} in seiner Darstellung nicht trivial ist, lässt sich anhand des folgenden Beispiels erahnen: Für ein Rechteck $I_1 \times I_2 := ([0, a] \times [0, b]) \subset \mathbb{R}^2$ ist der Hilbertraum $H^1(I_1 \times I_2)$, gegeben durch:*

$$H^1(I_1 \times I_2) \cong H^1(I_1) \otimes L^2(I_2) \cap L^2(I_1) \otimes H^1(I_2).$$

2.4.1 Basiswechsel

Als Meister PDE mal wieder in einem seiner Lieblingskochbücher, [Nan+13], blätterte, entdeckte er, dass für den Hardy-Raum $H^+(S^1)$, $S^1 := \{s \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die wunderschöne Hilbert-Orthogonalbasis $\{z^j : j \in \mathbb{N}_0\}$ existierte. Diese wollte er sich für

2.4 Variationsformulierung der Helmholtz-Gleichung in der Hardy-Raum Formulierung

seine Diskretisierung zu Nutze machen. [Nan+13] gab den Hinweis, dass man $H^-(\Gamma)$ durch $H^+(S^1)$ ersetzen konnte. Denn der Hardy-Raum $H^-(\Gamma)$ ließ sich über den Isomorphismus $\mathcal{M}_{\kappa_0} : H^-(\Gamma) \rightarrow H^+(S^1)$,

$$(\mathcal{M}_{\kappa_0}\mathcal{L}u)(z) := (\mathcal{L}u)(s(z))\frac{1}{z-1}, \quad (2.13a)$$

unitär (bis auf Konstanten) auf $H^+(S^1)$ abbilden, wobei $s(z)$ die parameter-abhängige (von κ_0) Möbiustransformation

$$z \mapsto s(z) = i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1}, \quad \kappa_0 \in \mathbb{C}, \quad \Re(\kappa_0) > 0 \quad (2.13b)$$

bezeichnet.

Damit änderte sich auch die Polbedingung (2.10) zu

$$\mathcal{M}_{\kappa_0}\mathcal{L}u \in H^+(S^1). \quad (2.14)$$

Damit Meister PDE später den Innen- mit dem Außenraum koppeln konnte, brauchte er dringend einen Spuroperator. Da jedoch für ein $\tilde{U} := \mathcal{M}_{\kappa_0}\mathcal{L}u \in H^+(S^1)$ die Punktauswertung nicht wohldefiniert war, da $H^+(S^1) \subset L^2(S^1)$, verwendete er einen geschickten Ansatz.

Er wusste, dass

$$u_0 = u(0) = \lim_{x \rightarrow 0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s(\mathcal{L}u)(s) \quad (2.15a)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} (\mathcal{L}u) \left(i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} \right) \quad (2.15b)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} i\kappa_0 \tilde{U}(z). \quad (2.15c)$$

Daher war es wichtig, einen Teilraum von $H^+(S^1)$ zu finden, so dass die Auswertung am Rand stetig war.

2.5 Bemerkung. *Vergleichen lässt sich die Suche nach einem passenden Teilraum von $H^+(S^1)$ mit dem Einführen des H^1 als Teilraum des L^2 für die variationelle Formulierung des Laplace-Operators.*

Wegen (2.15) hatte Meister PDE die Idee, $U(z)$ als

$$\tilde{U}(z) = \frac{1}{2i\kappa_0} (u_0 + (z-1)U(z)), \quad \tilde{U} \in \mathcal{T}_-(\mathbb{C} \oplus H^+(S^1)), \quad (2.16)$$

mit $u_0 \in \mathbb{C}$, $U(z) := \frac{2i\kappa_0\tilde{U}(z)-u_0}{z-1}$, $U \in H^+(S^1)$, anzuschreiben und die Operatoren $\mathcal{T}_{\pm} : (\mathbb{C} \oplus H^+(S^1)) \rightarrow H^+(S^1)$ einzuführen

$$\mathcal{T}_{\pm} \begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix} (z) := \frac{1}{2} (u_0 + (z \pm 1)U(z)), \quad z \in S^1. \quad (2.17)$$

Damit war es nun möglich, einen stetigen Spuroperator einzuführen

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{ext}} : \mathcal{T}_-(\mathbb{C} \oplus H^+(S^1)) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u_0, U(z)) &\mapsto u_0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

und zu zeigen, dass $\tilde{U} = (\mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L}u) = \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_-((u_0, U))$.

Obwohl $\mathcal{T}_-(\mathbb{C} \oplus H^+(S^1)) \subset H^+(S^1)$, verwendete Meister PDE für seine Formulierung $\mathbb{C} \oplus H^+(S^1)$, da $\mathcal{T}_-(\mathbb{C} \oplus H^+(S^1))$ analytisch kompliziert zu bearbeiten war.

Da $(\mathcal{L}u')(s) = s(\mathcal{L}u)(s) - u(0)$, konnte Meister PDE weiters, mithilfe des Kochbuchs [Nan08, Abschnitt 5] berechnen

$$(\mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L}u')(z) = i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} (\mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L}u)(z) - \frac{u_0}{z-1} \quad (2.19a)$$

$$= i\kappa_0 \frac{z+1}{z-1} \left(\frac{u_0 + (z-1)U(z)}{2i\kappa_0} \right) - \frac{u_0}{z-1}, \quad \text{mit } U(z) := \frac{2i\kappa_0 \tilde{U}(z) - u_0}{z-1} \quad (2.19b)$$

$$= \frac{1}{2} (u_0 + (z+1)U(z)) = \left(\mathcal{T}_+ \begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix} \right) (z). \quad (2.19c)$$

Jetzt war es für Meister PDE an der Zeit, den in (2.12a) erwähnten Hilbertraum

$$\mathcal{X}_2 := \mathbb{C} \oplus H^+(S^1) \quad (2.20a)$$

mit dem passenden Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}_2} := f_0 \bar{g}_0 + \langle F, G \rangle_{L^2(\Upsilon)}, \quad \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_2 \quad (2.20b)$$

zu definieren.

2.6 Bemerkung. Der Raum $H^+(S^1)$ wird zu \mathcal{X}_2 erweitert, um einen stetigen Übergang zwischen dem Innenraum Ω_{int} und dem Außenraum Ω_{ext} sicherzustellen. In \mathbb{C} werden die konkreten Randwerte des Innenraums am Interface $\tilde{\Upsilon}$ beschrieben.

Eine weitere wichtige Zutat für die Variationsformulierung in $H^+(S^1)$ war laut [Nan+13, Abschnitt 2.1] die folgende Integraltransformation, für passende skalare Funktionen f und g ¹

¹Mit T wird im weiteren Verlauf der Arbeit immer die Transponierte, nicht die Adjungierte bezeichnet.

$$\int_0^\infty f(\xi)g(\xi) d\xi = -\frac{2i\kappa_0}{2\pi} \int_{S^1} (\mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L}f)(z)(\mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L}g)(\bar{z}) |dz|. \quad (2.21)$$

Als nun Meister PDE alles Bisherige zusammenmischte, bekam er für den zylindrischen Wellenleiter Ω_{ext} die schmackhafte Bilinearform

$$A_\Upsilon(F, G) := -\frac{2i\kappa_0}{2\pi} \int_\Upsilon \int_{S^1} F(z, \eta)^T G(\bar{z}, \eta) |dz| d\eta, \quad F, G \in \left(H^+(S^1) \otimes L^2(\Upsilon)\right)^d, \quad (2.22)$$

für $d = 1, 2, 3$.

Für die schwache Formulierung der Helmholtz-Gleichung $\int_{\Omega_{\text{ext}}} (\nabla u)^T \nabla v dx = \omega^2 \int_{\Omega_{\text{ext}}} uv dx$ auf Ω_{ext} , für passende Testfunktionen v und ausgehenden Lösungen u , gelten laut Gleichung (2.21) und Berechnung (2.19) die Transformationen

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} (\nabla u)^T \nabla v d\eta d\xi = a_{\text{ext}}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ V \end{pmatrix}\right), \quad \int_{\Omega_{\text{ext}}} uv d\eta d\xi = b_{\text{ext}}\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ V \end{pmatrix}\right), \quad (2.23)$$

mit $\left(\begin{pmatrix} u_0(\eta) \\ U(\bullet, \eta) \end{pmatrix}\right) := i\kappa_0 \mathcal{T}_-^{-1} \mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L}u(\bullet, \eta)$ für $\eta \in \Upsilon$ und den Bilinearformen

$$a_{\text{ext}}\left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right) := A_\Upsilon(\mathcal{T}_+ \otimes \text{Id}_\eta \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}\right), \mathcal{T}_+ \otimes \text{Id}_\eta \left(\begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right) + A_\Upsilon\left(\frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_- \otimes \nabla_\eta \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}\right), \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_- \otimes \nabla_\eta \left(\begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right)\right) \quad (2.24a)$$

$$b_{\text{ext}}\left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right) := A_\Upsilon\left(\frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_- \otimes \text{Id}_\eta \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}\right), \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_- \otimes \text{Id}_\eta \left(\begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right)\right). \quad (2.24b)$$

Meister PDE, auch noch bekannt als echter Feinschmecker, verwendete nun für seine Randwerte $u_0 := u|_\Upsilon$ sowie v_0, f_0, g_0 , keine Konstanten in \mathbb{C} , sondern oberflächenabhängige Funktionen.

Als nächsten Schritt benötigte Meister PDE für seinen Teig einen kanonischen Raum, auf dem die Bilinearformen a_{ext} und b_{ext} beschränkt waren. Hierfür konstruierte er den kanonischen Raum \mathcal{X}_1 als die Vervollständigung von X_2 bezüglich des Skalarprodukts

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}_1} := \langle \mathcal{T}_- \left(\begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}\right), \mathcal{T}_- \left(\begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix}\right) \rangle_{L^2(S^1)}, \quad \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \in \mathcal{X}_2. \quad (2.25)$$

Wie in seiner Vorlage [HN17] beschrieben, konnte er nun das Skalarprodukt (2.12b) von \mathcal{V}^{ext} als

$$\left\langle \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{V}^{\text{ext}}} := \left\langle \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}_2 \otimes L^2(\Upsilon)} + \left\langle \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{X}_1 \otimes H^1(\Upsilon)} \quad (2.26)$$

2 Die Hardy-Raum Methode in einem akustischen Wellenleiter

beschreiben. Bemerkenswert war, dass Meister PDE nun $(f_0, F)^T \in \mathcal{V}^{\text{ext}}$ mit $f_0 \in L^2(\Upsilon)$ und $F \in H^+(S^1) \otimes L^2(\Upsilon)$ verwendete, da

$$\mathcal{V}^{\text{ext}} \subset \mathcal{X}_2 \otimes L^2(\Upsilon) = (\mathbb{C} \oplus H^-(\Gamma)) \otimes L^2(\Upsilon) \sim L^2(\Upsilon) \oplus (H^-(\Gamma) \otimes L^2(\Upsilon)). \quad (2.27)$$

Kurzzeitig fragte sich Meister PDE noch, ob denn die Testfunktionen überhaupt dicht in \mathcal{V}^{ext} wären, doch da fiel ihm ein, dass er dies bereits einmal in [Hal+16] nachgelesen hatte.

Als letzte große Zutat fehlte noch die Innenraumformulierung auf Ω_{int} . Hierfür nahm Meister PDE die zwei frisch gepflückten Bilinearformen, definiert auf $H^1(\Omega_{\text{int}}) \times H^1(\Omega_{\text{int}})$,

$$a_{\text{int}}(u, v) := \int_{\Omega_{\text{int}}} (\nabla u)^T \nabla v \, dx, \quad b_{\text{int}}(u, v) := \int_{\Omega_{\text{int}}} uv \, dx. \quad (2.28)$$

Nun definierte er noch den fehlenden Lösungsraum für die Innenraumformulierung $\mathcal{V}^{\text{int}} := \{f \in H^1(\Omega_{\text{int}}) \mid \text{tr}_{\tilde{\Gamma}_D} f = g\}$ (siehe die Randbedingungen (2.3)). Um danach \mathcal{V}^{int} und den Lösungsraum für den Außenraum \mathcal{V}^{ext} in einen großen finalen Funktionsraum

$$\mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ F \end{pmatrix} \in V_g^{\text{int}} \oplus V^{\text{ext}} : \text{tr}_{\tilde{\Gamma}} f = f_0 \right\} \quad (2.29a)$$

mit dem zusammengesetzten Skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g_0 \\ G \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{V}} := \langle f, g \rangle_{\mathcal{V}^{\text{int}}} + \left\langle \begin{pmatrix} f_0 \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_0 \\ G \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{V}^{\text{ext}}} \quad (2.29b)$$

zusammen zu mischen.

Als letzten Schritt, nachdem alle Zutaten gut zusammengemischt und durchgeknetet waren, packt er den Teig in die Bilinearformen

$$a\left(\begin{pmatrix} u \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ V \end{pmatrix}\right) := a_{\text{int}}(u, v) + a_{\text{ext}}\left(\begin{pmatrix} \text{tr}_{\tilde{\Gamma}} u \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{tr}_{\tilde{\Gamma}} v \\ V \end{pmatrix}\right), \quad (2.30a)$$

$$b\left(\begin{pmatrix} u \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ V \end{pmatrix}\right) := b_{\text{int}}(u, v) + b_{\text{ext}}\left(\begin{pmatrix} \text{tr}_{\tilde{\Gamma}} u \\ U \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{tr}_{\tilde{\Gamma}} v \\ V \end{pmatrix}\right). \quad (2.30b)$$

Damit hatte Meister PDE sein Gericht, die Variationsformulierung für das Resonanzproblem 2.7 auf dem Wellenleiter Ω fertig:

2.7 Problem (Resonanzproblem). *Gesucht sind Eigenpaare $(\omega, (\frac{u}{V})) \in \mathbb{C} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$, die*

$$a((\frac{u}{V}), (\frac{v}{V})) = \omega^2 b((\frac{u}{V}), (\frac{v}{V})) \quad \forall (\frac{v}{V}) \in \mathcal{V} \quad (2.31)$$

lösen.

Es liegt also ein nichtlineares Eigenwertproblem auf einem unbeschränkten Gebiet vor.

2.8 Bemerkung. *Beim obigen Resonanzproblem hängen die Bilinearformen und damit auch die Resonanzen vom Parameter κ_0 ab. Tatsächlich existieren aber auch bestimmte Resonanzen, die zumindest für eine gewisse Menge von Parametern κ_0 von diesen unabhängig sind.*

Damit die berechneten Resonanzen auch Sinn machen, muss κ_0 aus einem bestimmten Bereich gewählt werden. Dieser Frage nachzugehen würde, den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher verweisen wir auf die Arbeit [HN17], welche sich sehr ausführlich mit dieser Thematik beschäftigt hat.

3 Diskretisierung der Hardy-Raum Methode im akustischen Wellenleiter

Nach unserem kurzen Ausflug in das Reich der Phedi-Ritter kehren wir wieder auf den Planeten Erde zurück.

In diesem Kapitel diskretisieren wir die in Kapitel 2 vorgestellten linearen Operatoren $\mathcal{T}_-, \mathcal{T}_+$ und gehen auf die Implementierung der Hardy-Raum Methode ein. Hierfür führen wir die Basis des Hardy-Raums ein, stellen Matrizen auf und sprechen über die Umsetzung des Tensorproduktraums in [NGS-Py]. Einleitend sei noch erwähnt, dass die hier vorgestellten Ideen und Umsetzungen zu einem großen Teil auf den Arbeiten von [Hal16], [Nan+13], [Nan16, Abschnitt 7], [Nan08] sowie der Implementierung eines allgemein gehaltenen Wellenleiters in [NGS-Py] von Dipl.-Ing. Markus Wess basieren.

3.1 Basis von $H^+(S^1)$

Wie bereits erwähnt, existiert für den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ die Hilbert-Orthogonalbasis $\{z^j : z \in S^1, j \in \mathbb{N}_0\}$. Dies führt, wie wir gleich sehen werden, zu ausgesprochen schönen Diskretisierungsmatrizen.

3.2 Die linearen Operatoren $\mathcal{T}_-, \mathcal{T}_+$

Fundamental für unsere Diskretisierung sind die injektiven und stetigen Operatoren $\mathcal{T}_\pm : \mathcal{X}_2 \rightarrow H^+(S^1)$. Wenn wir \mathcal{T}_\pm für ein $U(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j \in H^+(S^1)$ näher betrachten, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\pm \begin{pmatrix} u_0 \\ U \end{pmatrix} (z) &= \frac{1}{2}(u_0 + (z \pm 1)U(z)) \\ &= \frac{1}{2}(u_0 + (z \pm 1) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j) \\ &= \frac{1}{2}((u_0 \pm \alpha_0) + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{j-1} \pm \alpha_j) z^j). \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Operatoren \mathcal{T}_\pm auch als

$$\mathcal{T}_\pm^{(N)} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

darstellen. Für die Diskretisierung im endlichen Ansatzraum verwenden wir

$$\mathcal{T}_{\pm}^{(N)} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \pm 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+2) \times (N+2)}. \quad (3.2)$$

In weiteren Verlauf dieses Kapitels schreiben wir \mathcal{T}_{\pm} anstatt $\mathcal{T}_{\pm}^{(N)}$.

3.3 Lösungsraum

Der Innenraum wird durch einen Standard Finiten Elemente Raum diskretisiert, dieser soll aber nicht Thema sein. Wir beschäftigen uns mit dem Lösungsraum \mathcal{W}_K für den Außenraum. K ist ein unendlich langes Prisma mit $K := [0, \infty) \times \tilde{T}$ und \tilde{T} ein Rechteck. Der Lösungsraum \mathcal{W}_K ist definiert als

$$\mathcal{W}_K := \mathcal{W}_{\xi} \otimes \mathcal{W}_T. \quad (3.3)$$

Für die Oberfläche Υ verwenden wir die Spuren der Volumenelemente. Das heißt, wir haben für jedes Oberflächenelement $T \in \mathcal{T}_{\Upsilon}$ mit den Knoten P_1, P_2, P_3 und den Kanten E_{12}, E_{13}, E_{23} ein H^1 Element $\mathcal{W}_T := \mathcal{P}^p(T)$ mit

- Knoten Basisfunktionen ϕ^{P_i} ,
- Kanten Basisfunktionen $\phi_l^{E_{ij}}$, $l = 1, \dots, p-1$, und
- Element Basisfunktionen ϕ_l^T , $l = 1, \dots, \frac{1}{2}(p-2)(p-1)$.

Der Lösungsraum \mathcal{W}_{ξ} in longitudinaler Richtung, wird mit den Basisfunktionen

$$\Psi_{-1} := \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_-(1, 0), \quad \Psi_k := \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_-(0, (\bullet)^k), \quad k = 0, \dots, N, \quad (3.4)$$

gebildet. $\kappa_0 \in \mathbb{C}$ ist der Parameter der Möbiustransformation (2.13).

3.4 Herleitung der Diskretisierung im Außenraum Ω_{ext}

Für die schwache Formulierung des Resonanzproblems der Helmholtz-Gleichung (2.2) suchen wir Eigenpaare $(u, \omega) \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, so dass

$$a\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}\right) = \omega^2 b\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}\right), \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3.5)$$

mit den in (2.30) definierten Bilinearformen a und b . Da wir das Gebiet Ω in den Innenraum Ω_{int} und Außenraum Ω_{ext} teilen, und der Innenraum mittels Standard FEM diskretisiert wird, beschäftigen wir uns in weiterer Folge nur noch mit dem Integral über Ω_{ext} .

Wir wählen $u, v \in \mathcal{W}_K$ als Ansatz- und Testfunktionen. Daraus folgt

$$u(\xi, \eta) = \Psi(\xi)\Phi(\eta), \quad v(\xi, \eta) = \tilde{\Psi}(\xi)\tilde{\Phi}(\eta), \quad \xi \in [0, \infty), \quad \eta \in \Upsilon. \quad (3.6)$$

Wir schreiben über den Faktoren, aus denen sich die Testfunktionen v zusammensetzen, \sim -Symbole.

3.4.1 Berechnung von B^{ext}

Zuerst betrachten wir die rechte Seite von Gleichung (3.5). Die Diskretisierungsmatrix nennen wir $B^{\text{ext}} \in \mathbb{C}^{(\frac{1}{2}(p+2)(p+1)(N+2)) \times (\frac{1}{2}(p+2)(p+1)(N+2))}$, wobei N die Ordnung des Hardy-Raums ist.

Die Matrix B^{ext} ist gegeben durch

$$B^{\text{ext}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} u(\xi, \eta)v(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi \quad (3.7a)$$

$$= \int_0^\infty \int_{\Upsilon} \Psi(\xi)\Phi(\eta)\tilde{\Psi}(\xi)\tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta \, d\xi \quad (3.7b)$$

$$= \int_0^\infty \Psi(\xi)\tilde{\Psi}(\xi) \, d\xi \int_{\Upsilon} \Phi(\eta)\tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta. \quad (3.7c)$$

Die Hardy-Raum Matrix M^{long} diskretisiert die longitudinale Richtung und ist gegeben durch

$$M^{\text{long}} = \left(-2i\kappa_0 \left(\frac{1}{i\kappa_0} \right)^2 \right) \mathcal{T}_-^T \mathcal{T}_-. \quad (3.8)$$

Die transversale Matrix $M_{\text{H}^1}^{\text{trans}}$ für die Oberfläche Υ ist die Standard Finite Elemente Massematrix. Sie ist gegeben durch

$$M^{\text{trans}} = \int_{\Upsilon} \Phi(\eta)\tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta. \quad (3.9)$$

Zusammenfassend ist B^{ext} also gegeben durch

$$B^{\text{ext}} = M^{\text{long}} \otimes M_{\text{H}^1}^{\text{trans}}. \quad (3.10)$$

3.4.2 Berechnung von A^{ext}

Wir kommen nun zur linken Seite von Gleichung (3.5). Die Diskretisierungsmatrix nennen wir A^{ext} .

Die Matrix A^{ext} ist gegeben durch

$$A^{\text{ext}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla u(\xi, \eta) \cdot \nabla v(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi \quad (3.11a)$$

$$= \int_{\Omega_{\text{ext}}} \left(\begin{pmatrix} \Psi'(\xi)\Phi(\eta) \\ \Psi(\xi)\nabla_{\eta}\Phi(\eta) \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} \tilde{\Psi}'(\xi)\tilde{\Phi}(\eta) \\ \tilde{\Psi}(\xi)\nabla_{\eta}\tilde{\Phi}(\eta) \end{pmatrix} \right) \, d\eta \, d\xi \quad (3.11b)$$

$$= \int_{\Omega_{\text{ext}}} \Psi'(\xi)\tilde{\Psi}'(\xi)\Phi(\eta)\tilde{\Phi}(\eta) + \Psi(\xi)\tilde{\Psi}(\xi)\nabla_{\eta}\Phi(\eta) \cdot \nabla_{\eta}\tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta \, d\xi \quad (3.11c)$$

$$= \int_0^{\infty} \Psi'(\xi)\tilde{\Psi}'(\xi) \, d\xi \int_{\Upsilon} \Phi(\eta)\tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta \quad (3.11d)$$

$$+ \int_0^{\infty} \Psi(\xi)\tilde{\Psi}(\xi) \, d\xi \int_{\Upsilon} \nabla_{\eta}\Phi(\eta) \cdot \nabla_{\eta}\tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta.$$

Um nun A^{ext} als Produkt von Matrizen, wie in (3.10), darzustellen, führen wir die Matrizen

$$S^{\text{long}} = (-2i\kappa_0)\mathcal{T}_+^T\mathcal{T}_+, \text{ und } S_{i,j}^{\text{trans}} = \int_{\Upsilon} \nabla_{\eta}\Phi(\eta) \cdot \nabla_{\eta}\tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta \quad (3.12)$$

ein.

Damit ist A^{ext} gegeben durch

$$A^{\text{ext}} = S^{\text{long}} \otimes M_{\text{H}^1}^{\text{trans}} + M^{\text{long}} \otimes S_{\text{H}^1}^{\text{trans}}. \quad (3.13)$$

3.5 Hardy-Raum Methode in NGS-Py

Wir geben abschließend einen kurzen Einblick in die Implementierung der Hardy-Raum Methode für einen akustischen Wellenleiter in Netgen\NGSolve ([Sch14], [Sch97], [NGS-Py]). In Abschnitt (5.3) werden wir die Implementierung vertiefen.

```
1 from ngsolve import *
2 from ngswaves import *
3
4 geo = MakeWaveguideGeometry()
5 mesh = geo.GenerateMesh(maxh = maxh)
6
7 fes = FESpacePlus('h1ho', m, order=order, complex=True)
8 hsm = WaveguideHSMEterior(hsmorigin, hsmorder, sigma, order=order, complex=True)
9 fes = fes.AddExterior(hsm, m.Boundaries('right'))
10
11 u, v = fes.TnT()
12 gf = GridFunction(fes, multidim=news)
13
14 b = BilinearFormPlus(fes, symmetric=True)
15 b += SymbolicBFI(eps*u*v)
16 b += ExtBFI('mass')
17
18 a = BilinearFormPlus(fes, symmetric=True)
19 a += SymbolicBFI(grad(u)*grad(v))
20 a += ExtBFI('laplace')
21
22 with TaskManager():
23     a.Assemble()
24     b.Assemble()
25
26 lam = sqrt(array(ArnoldiSolver(a.mat, b.mat, fes.FreeDofs(), gf.vecs,
    shift**2)))
```

Codeausschnitt 1: Beispiel

3.5.1 Aufstellen des Lösungsraums

Zuerst importieren wir benötigte Python Pakete. Danach stellen wir den Lösungsraum auf. Für die nächsten Schritte erstellen wir noch die Bilinearformen und lösen danach das Eigenwertproblem mit einem Eigenwertlöser.

Für mehr Details zur Implementierung verweisen wir nochmals auf Abschnitt (5.3).

3.6 Alternative Basis

Es gibt auch die Möglichkeit, statt dem $H^+(S^1)$ den $H^-(\Gamma)$ für die Diskretisierung zu verwenden. Dies ist in [HN17] der Fall und lässt die Möglichkeit einer sogenannten 2-Pol Basis (siehe [HN17]) offen.

Wie wir bereits in Abschnitt (2.4.1) gesehen haben, bildet die Möbiustransformation

$$m_{s_0}(s) := \frac{s + s_0}{s - s_0}, \quad (M_{s_0}F)(s) := \frac{2s_0}{s - s_0}F(m_{s_0}(s)), \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{s_0\},$$

$\Gamma \cup \Gamma^-$ bijektiv auf \bar{S}_1 bzw. $H^-(\Gamma)$ auf $H^+(S^1)$ ab.

Damit ergibt sich auch eine orthogonale Basis auf $H^-(\Gamma)$

$$\Psi_j^{s_0}(s) := \frac{2s_0}{s - s_0} \left(\frac{s + s_0}{s - s_0} \right)^j, \quad s \in \Gamma \cup \Gamma^-, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (3.14)$$

mit einem Pol s_0 . Daher wird diese Orthogonalbasis auch 1-Pol Basis genannt. Diese kann auch zu einer 2-Pol Basis verallgemeinert werden. Sei dafür $s_1 \in s_0\mathbb{R}_{>0}$ ein zweiter Parameter. Dann sind

$$\Psi_j^{s_0, s_1}(s) := \frac{s_0 + s_1}{s - s_1} \left(\frac{s + s_0}{s - s_0} \right)^{\lfloor (j+1)/2 \rfloor} \left(\frac{s + s_1}{s - s_1} \right)^{\lfloor (j+1) \rfloor}, \quad s \in \Gamma \cup \Gamma^-, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (3.15)$$

meromorphe Funktionen mit zwei Polen an s_0 und s_1 . Für eine weiterführende Betrachtung der 2-Pol Basis verweisen wir auf [Hal+16] bzw. [HN17]. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein.

4 Die Hardy-Raum Methode im elektromagnetischen Wellenleiter

Ausgangspunkt für die folgenden zwei Kapitel bildet ein Resonanzproblem auf dem zusammenhängenden, unbeschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ für die Maxwell-Gleichung. Für die Lösung des Resonanzproblems suchen wir Eigenpaare (\mathbf{u}, ω) , wobei $\mathbf{u} \neq 0$ ein elektrisches Feld bzw. eine Resonanzfunktion und $\omega \in \mathbb{C}$ eine Resonanz bezeichnet, sodass

$$\mathbf{curl} \mathbf{curl} \mathbf{u} = \omega^2 \epsilon \mathbf{u} \quad \text{auf } \Omega, \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (4.1b)$$

$$\mathbf{u} \text{ ist „auslaufend“}, \quad (4.1c)$$

gilt.

4.1 Benötigte Operatoren

Im Folgenden definieren wir mit $\partial_i := \left(\frac{\partial}{\partial i}\right)$, $i = x, y, z$ die partielle Ableitung.

Zu Beginn dieses Abschnittes definieren wir verschiedene curl-Operatoren, die wir im späteren Verlauf dieser Arbeit benötigen. Da die ersten zwei Operatoren, die wir hier definieren, nur auf der Oberfläche, also für die Variable $\eta = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, definiert sind, verwenden wir nur die partiellen Ableitungen in diese Richtungen.

Zuerst führen wir den auf der Oberfläche definierten vektoriellen **Curl**-Operator für $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein

$$\begin{aligned} \mathbf{Curl} v : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} \partial_z v \\ -\partial_y v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{Curl} v := \mathbf{Grad} v \times \mathbf{n}$. Dann führen wir den ebenfalls auf der Oberfläche definierten, skalaren Curl-Operator für $v = (v_2, v_3)^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \text{Curl} v : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &\mapsto -\partial_z v_2 + \partial_y v_3, \end{aligned}$$

ein. Des Weiteren benötigen wir noch den Standard **curl**-Operator

$$\mathbf{curl} v := \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir mithilfe des skalaren Curl und des vektoriellen **Curl** der Oberfläche den Standard **curl**-Operator anschreiben als

$$\mathbf{curl} \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (\text{id} \otimes \text{Curl}_{(y,z)})\mathbf{V} \\ (\text{id} \otimes \mathbf{Curl}_{(y,z)})V - (\partial_x \otimes \text{id}_{(y,z)})\mathbf{V} \times \mathbf{n} \end{pmatrix},$$

wobei $V = v_1$ und $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

4.2 Generelle Formulierung und Rand- und Ausstrahlungsbedingungen

Da wir uns mit der Formulierung der Hardy-Raum Methode und mit der Wahl der physikalisch sinnvollen Lösung und damit auch mit den dafür benötigten Rand- und Ausstrahlungsbedingungen sehr ausführlich in den Abschnitten (2.2) und (2.3) beschäftigt haben, gehen wir hier nur kurz darauf ein. Wie gehabt, orientieren wir uns dafür an [HN17].

4.2.1 Überblick über die generell Formulierung

Für den elektromagnetischen Wellenleiter behalten wir die Formulierung der vorherigen Kapitel bei, jedoch betrachten wir nun anstatt der Helmholtz-Gleichung (2.2) die Maxwell-Gleichung (4.1).

Das Gebiet $\Omega_{\text{int}} \subset \mathbb{R}^3$ und $\Upsilon \subset \mathbb{R}^2$ sind beschränkte Lipschitzgebiete. Zusätzlich haben wir $\tilde{\Upsilon} := \{0\} \times \Upsilon \subset \partial\Omega_{\text{int}}$ und den zylindrischen Wellenleiter $\Omega_{\text{ext}} := \mathbb{R}_{>0} \times \Upsilon$ definiert. Damit folgt, dass $\bar{\Omega}_{\text{int}} \cap \bar{\Omega}_{\text{ext}} = \tilde{\Upsilon}$ und $\Omega = \Omega_{\text{int}} \cup \tilde{\Upsilon} \cup \Omega_{\text{ext}}$.

Wir erinnern nochmal an eine mögliche Formulierung für Randbedingungen (2.3) und fordern

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Upsilon, \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = 0 \quad \text{auf } \tilde{\Upsilon}_N, \quad (4.2b)$$

$$u = g \quad \text{auf } \tilde{\Upsilon}_D. \quad (4.2c)$$

Der Rand von Ω stellt eine disjunkte Vereinigung von $\partial\Omega_{\text{ext}} \setminus \tilde{\Upsilon}$, mit $\tilde{\Upsilon}_N$ und $\tilde{\Upsilon}_D$, die Teilmengen von $\partial\Omega_{\text{int}} \setminus \tilde{\Upsilon}$ sind, dar.

4.2.2 Erweiterung der Polbedingung

Da \mathbf{u} die vektorwertige Helmholtz-Gleichung erfüllt und für die einzelnen kartesischen Komponenten \mathbf{u} die Silver-Müller Ausstrahlungsbedingung äquivalent zur Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung ist (siehe [CR98]), können wir laut [Nan+13, Abschnitt

2.4] die Polbedingung (2.14) auf äußere Maxwell-Probleme erweitern, indem wir die Polbedingung für jede Komponente von (4.1) anwenden.

Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die Polbedingung erfüllt ist, falls

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : \mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L}_\xi \mathbf{u}_i(\bullet, \eta) \in H^+(S^1), \quad \forall \eta \in \Upsilon \quad (4.3)$$

4.3 Variationsformulierung der Maxwell-Gleichung in der Hardy-Raum Formulierung

Für die Variationsformulierung orientieren wir uns an Abschnitt (2.4.1) und an [Nan+13, Abschnitt 2.3 & 2.4].

Wir erinnern nochmal an die Definition der Bilinearform A_Υ in (2.22):

$$A_\Upsilon(F, G) = -2i\kappa_0 \int_\Upsilon \int_{S^1} F(z, \eta)^T G(z, \eta) |dz| d\eta, \quad F, G \in \left(H^+(S^1) \otimes L^2(\Upsilon)\right)^d, \quad (4.4)$$

für $d = 1, 2, 3$ und definieren

$$A_{\Upsilon, \text{Max}}((F_1, F_2, F_3), (G_1, G_2, G_3)) := -2i\kappa_0 \sum_{j,k=1}^3 \int_\Upsilon \int_{S^1} F_j(z, \eta) G_k(z, \eta) |dz| d\eta, \quad (4.5)$$

für $(F_1, F_2, F_3), (G_1, G_2, G_3) \in (H^+(S^1) \otimes L^2(\Upsilon))^3$.

Die schwache Formulierung für das Resonanzproblem der Maxwell-Gleichung lautet²: Gesucht sind Eigenpaare $(\mathbf{u}, \omega) \in H_{loc}(\mathbf{curl}) \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$, sodass

$$\int_\Omega \mathbf{curl} \mathbf{u}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v}(\xi, \eta) d\eta d\xi = \omega^2 \int_\Omega \mathbf{u}(\xi, \eta) \cdot \mathbf{v}(\xi, \eta) d\eta d\xi, \quad \forall \mathbf{v} \in H_c(\mathbf{curl}) \quad (4.6)$$

und u ausstrahlend ist.

Wir unterteilen wieder das Integral über Ω in Innen- und Außenraum und betrachten diese getrennt. Die Beschreibung des Lösungsraums, wie wir es in Abschnitt 2.4.1 sehr ausführlich gemacht haben, ersparen wir uns mit einem Verweis auf [Nan+13, Abschnitt 3]. Der Innenraum wird auf herkömmliche Art und Weise mit der Finiten Elemente Methode diskretisiert wird. Zuerst definieren wir

$$\begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}(\bullet, \eta) := \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L} \tilde{u}(\bullet, \eta) \\ \mathcal{M}_{\kappa_0} \mathcal{L} \tilde{\mathbf{u}}(\bullet, \eta) \end{pmatrix}, \quad \eta \in \Upsilon, \quad (4.7)$$

² $H_{loc}(\mathbf{curl}, \Omega)$ besteht aus allen Funktionen, die, eingeschränkt auf einer kompakte Teilmenge K von Ω , in $H(\mathbf{curl}, K)$ enthalten sind. Der Raum $H_c(\mathbf{curl})$ besteht aus allen Funktionen des $H(\mathbf{curl})$, die kompakten Träger besitzen.

4.3 Variationsformulierung der Maxwell-Gleichung in der Hardy-Raum Formulierung

mit $\tilde{u} := \mathbf{u}_1$ und $\tilde{\mathbf{u}} := \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_3^2 \end{pmatrix}$. Für die zweite Komponente $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}$ wenden wir die Operatoren auf jede einzelne kartesische Komponente von $\tilde{\mathbf{u}}$ an.

In Anlehnung an Abschnitt 2.4.1 verwenden wir nun $\widehat{\partial}_\xi := i\kappa_0 \mathcal{T}_+ \mathcal{T}_-^{-1}$, um die Transformation auf den Hardy-Raum $H^+(S^1)$ zu bezeichnen. Damit können wir nun den **curl** auf dem Hardy-Raum $H^+(S^1)$ definieren als

$$\widehat{\mathbf{curl}} \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (\text{id} \otimes \mathbf{Curl}) \mathbf{V} \\ (\text{id} \otimes \mathbf{Curl}) V - (\widehat{\partial}_\xi \otimes \text{id}) \mathbf{V} \times \mathbf{n} \end{pmatrix}.$$

Damit betrachten wir für den Außenraum

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, d\eta \, d\xi = a_{\text{ext,Max}}(\widehat{\mathbf{curl}} \begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{curl}} \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}), \quad (4.8a)$$

$$\text{und} \int_{\Omega_{\text{ext}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\eta \, d\xi = b_{\text{ext,Max}}(\begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}) \quad (4.8b)$$

mit den zwei Bilinearformen

$$a_{\text{ext,Max}}(\begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}) := A_{\Upsilon, \text{Max}} \left(\begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U}_3 \\ -\mathbf{U}_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V}_3 \\ -\mathbf{V}_2 \end{pmatrix} \right), \quad (4.9a)$$

$$b_{\text{ext,Max}}(\begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}) := A_{\Upsilon, \text{Max}}(\begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}). \quad (4.9b)$$

Für den Innenraum verwenden wir einfach die Bilinearformen

$$a_{\text{int,Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega_{\text{int}}} \mathbf{curl} \mathbf{u} \cdot \mathbf{curl} \mathbf{v} \, dx, \quad b_{\text{int,Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega_{\text{int}}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx. \quad (4.10)$$

Um zu unserer finalen Variationsformulierung zu kommen, definieren wir noch

$$a_{\text{Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a_{\text{ext,Max}}(\widehat{\mathbf{curl}} \begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \widehat{\mathbf{curl}} \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}) + a_{\text{int,Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (4.11a)$$

$$b_{\text{Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := b_{\text{ext,Max}}(\begin{pmatrix} U \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} V \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}) + b_{\text{int,Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (4.11b)$$

So können wir unser Resonanzproblem ausdrücken als: Gesucht sind Eigenpaar (\mathbf{u}, ω) mit $\mathbf{u} \neq 0$, so dass

$$a_{\text{Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega^2 b_{\text{Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (4.12)$$

5 Diskretisierung der Hardy-Raum Methode im elektromagnetischen Wellenleiter

Für den hier verwendeten Formalismus, sowie die Definitionen, soweit nicht anders vermerkt, richten wir uns nach [Nan+13] und [HN17].

Da wir die Oberfläche Υ unabhängig von der longitudinalen Richtung diskretisieren können, benutzen wir für die Ableitung in ξ - bzw. x -Richtung einen Strich '. Für die Ableitungen auf der Oberfläche, in y - und z -Richtung, behalten wir die Notation ∂_i , $i = y, z$.

5.1 Lösungsraum

Der Lösungsraum \mathcal{V}_K , auf dem unendlich langen Prisma $K := [0, \infty) \times \tilde{T}$, mit einem Rechteck \tilde{T} , ist gegeben durch

$$\mathcal{V}_K = \begin{pmatrix} \mathcal{W}'_\xi \otimes \mathcal{W}_T \\ \mathcal{W}_\xi \otimes \mathcal{V}_T \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Für die Diskretisierung der Oberfläche Υ verwenden wir den in Abschnitt 3.3 definierten Raum \mathcal{W}_T . Zusätzlich benötigen wir noch das $H(\mathbf{curl})$ Element $\mathcal{V}_T := (\mathcal{P}^{p-1}(T))^2$, $T \in \mathcal{T}_\Upsilon$ mit

- Kanten Basisfunktionen Φ_l^{Eij} , $l = 1, \dots, p$, und
- Element Basisfunktionen Φ_l^T , $l = 1, \dots, (p-2)p$.

Die radiale Richtung diskretisieren wir mit den Basisfunktionen

$$\Psi_{-1} := \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_-(1, 0), \quad \Psi_k := \frac{1}{i\kappa_0} \mathcal{T}_-(0, (\bullet)^k), \quad k = 0, \dots, N, \quad (5.2)$$

die das Element \mathcal{W}_ξ bilden und

$$\psi_{-1} := \mathcal{T}_+(1, 0), \quad \psi_k := \mathcal{T}_+(0, (\bullet)^k), \quad k = 0, \dots, N, \quad (5.3)$$

die das Element \mathcal{W}'_ξ bilden. Die erste Basisfunktion, Ψ_{-1} , ist eine Knoten Basisfunktion, die restlichen Ψ_k Element Basisfunktionen.

Bevor wir fortfahren, unterteilen wir den Raum \mathcal{V}_K in

$$\mathcal{V}_K = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{W}_\xi \otimes \mathcal{V}_T \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathcal{W}'_\xi \otimes \mathcal{W}_T \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

und

$$\forall v \in \mathcal{V}_1 : v = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi(\xi)\Phi^1(\eta) \\ \Psi(\xi)\Phi^2(\eta) \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \forall v \in \mathcal{V}_2 : v = \begin{pmatrix} \psi(\xi)\phi(\eta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

wobei Φ^i , $i = 1, 2$, die i -te Komponente von $\Phi(\eta)$ bezeichnet.

5.2 Herleitung der Diskretisierung im Außenraum Ω_{ext}

Für die schwache Formulierung des Resonanzproblems der Maxwell-Gleichung (4.1) suchen wir Eigenpaare (u, ω) , $u \neq 0$, so dass

$$a_{\text{Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega^2 b_{\text{Max}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (5.6)$$

wobei a_{Max} und b_{Max} die in (4.11) Bilinearformen sind.

Wir gehen nun analog zu Abschnitt 3.4 und unterteilen Ω . Der Innenraum wird durch die Finite Elemente Methode bearbeitet. Da sich diese Arbeit mit der Hardy-Raum Methode beschäftigt, gehen wir hier nicht näher darauf ein. Bei Interesse kann z. B. bei [KLS11] mehr über das Thema nachgelesen werden.

Wir wählen $u, v \in \mathcal{V}_K$ Ansatz- und Testfunktionen. Aus Gründen der Lesbarkeit verwenden wir für die Darstellung der Testfunktionen v als Produkt das \sim -Symbol über den einzelnen Faktoren, z. B. schreiben wir für $v \in \mathcal{V}_2$, $v = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}(\xi)\tilde{\phi}(\eta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5.2.1 Berechnung von $B^{\text{ext,Max}}$

Zuerst betrachten wir die rechte Seite von (5.6) genauer. Die aus der Diskretisierung resultierende Matrix nennen wir $B^{\text{ext,Max}} \in \mathbb{C}^{\left(\left(\frac{1}{2}(p+2)(p+1)+(p+1)p\right)(N+2)\right) \times \left(\left(\frac{1}{2}(p+2)(p+1)+(p+1)p\right)(N+2)\right)}$, wobei N die Ordnung des Hardy-Raums bezeichnet.

Die Diskretisierungsmatrix $B^{\text{ext,Max}}$ ist gegeben durch

$$B^{\text{ext,Max}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} u(\xi, \eta) \cdot v(\xi, \eta) \, d\eta \, d\xi. \quad (5.7)$$

Wir unterteilen die Matrix $B^{\text{ext,Max}}$ in vier Teilmatrizen $B_{i,j}^{\text{ext,Max}}$, $i, j = 0, 1$, wobei wir uns an der Aufteilung des Lösungsraums (5.4) orientieren,

$$B^{\text{ext,Max}} = \left(\begin{array}{c|c} B_{0,0}^{\text{ext,Max}} & B_{0,1}^{\text{ext,Max}} \\ \hline B_{1,0}^{\text{ext,Max}} & B_{1,1}^{\text{ext,Max}} \end{array} \right).$$

Daher unterscheiden wir nun im Folgenden vier Fälle, um die Teilmatrizen von $B^{\text{ext,Max}}$ zu berechnen.

1. Fall: $u, v \in \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{W}_\xi \otimes \mathcal{V}_T \end{pmatrix}$

$B_{0,0}^{\text{ext,Max}}$ ist gegeben durch

$$B_{0,0}^{\text{ext,Max}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} u \cdot v \, d\eta \, d\xi \quad (5.8a)$$

$$= \int_{\Omega_{\text{ext}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi(\xi)\Phi^1(\eta) \\ \Psi(\xi)\Phi^2(\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\Psi}(\xi)\tilde{\Phi}^1(\eta) \\ \tilde{\Psi}(\xi)\tilde{\Phi}^2(\eta) \end{pmatrix} d\eta \, d\xi \quad (5.8b)$$

$$= \int_0^\infty \int_{\Gamma} \Psi(\xi)\Phi^1(\eta)\tilde{\Psi}(\xi)\tilde{\Phi}^1(\eta) + \Psi_i(\xi)\Phi^2(\eta)\tilde{\Psi}(\xi)\tilde{\Phi}^2(\eta) \, d\eta \, d\xi \quad (5.8c)$$

$$= \int_0^\infty \Psi(\xi)\tilde{\Psi}(\xi) \, d\xi \left(\int_{\Gamma} \Phi(\eta) \cdot \tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta \right). \quad (5.8d)$$

Die longitudinale Richtung wird wieder mit M^{long} diskretisiert. Die Oberfläche diskretisieren wir mit der Massematrix $M_{\text{curl}}^{\text{trans}}$ aus $H(\mathbf{curl})$ Elementen, die durch

$$M_{\text{curl}}^{\text{trans}} = \int_{\Gamma} \Phi(\eta) \cdot \tilde{\Phi}(\eta) \, d\eta, \quad (5.9)$$

gegeben ist.

Die zugehörige Teilmatrix $B_{0,0}^{\text{ext,Max}}$ ist damit gegeben durch

$$B_{0,0}^{\text{ext,Max}} = M^{\text{long}} \otimes M_{\text{curl}}^{\text{trans}}. \quad (5.10)$$

2. Fall: $u, v \in \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{W}'_\xi \otimes \mathcal{W}_T \\ 0 \end{pmatrix}$

$B_{1,1}^{\text{ext,Max}}$ ist gegeben durch

$$B_{1,1}^{\text{ext,Max}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} u \cdot v \, d\eta \, d\xi \quad (5.11a)$$

$$= \int_0^\infty \psi(\xi)\tilde{\psi}(\xi) \, d\xi \left(\int_{\Gamma} \phi(\eta)\tilde{\phi}(\eta) \, d\eta \right) \quad (5.11b)$$

und damit

$$B_{1,1}^{\text{ext,Max}} = S^{\text{long}} \otimes M_{\text{H}^1}^{\text{trans}}. \quad (5.12)$$

3. & 4. Fall: $u \in \mathcal{V}_1$, $v \in \mathcal{V}_2$ bzw. $u \in \mathcal{V}_2$, $v \in \mathcal{V}_1$

Diese Einträge von $B_{1,0}^{\text{ext,Max}}$ und $B_{0,1}^{\text{ext,Max}}$ sind alle 0, da

$$B_{1,0}^{\text{ext,Max}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} u \cdot v \, d\eta \, d\xi \quad (5.13a)$$

$$= \int_{\Omega_{\text{ext}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi(\xi)\Phi^1(\eta) \\ \Psi(\xi)\Phi^2(\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\psi}(\xi)\tilde{\phi}(\eta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\eta \, d\xi \quad (5.13b)$$

$$= 0. \quad (5.13c)$$

Damit ist $B^{\text{ext,Max}}$ gegeben durch

$$B^{\text{ext,Max}} = \left(\begin{array}{c|c} M^{\text{long}} \otimes M_{\text{curl}}^{\text{trans}} & 0 \\ \hline 0 & S^{\text{long}} \otimes M_{\mathbb{H}^1}^{\text{trans}} \end{array} \right). \quad (5.14)$$

5.2.2 Vorbereitungen - $\mathbf{curl} u_1$, $\mathbf{curl} u_2$

Um im Anschluss an diesen Unterabschnitt formal zügig und übersichtlich voran zu kommen, stellen wir einige Berechnungen schon im Vorfeld an.

- $\mathbf{curl} u_1$

Zuerst berechnen wir den \mathbf{curl} für ein $u \in V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{W}_\xi \otimes \mathcal{V}_T \end{pmatrix}$. Für $u \in \mathcal{V}_1$ gilt

$$u(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi(\xi)\Phi^1(\eta) \\ \Psi(\xi)\Phi^2(\eta) \end{pmatrix}, \quad \xi > 0, \eta \in \Upsilon, \Psi \in \mathcal{W}_\xi, \Phi \in \mathcal{V}_T, \quad (5.15)$$

wobei Φ^i , $i = 1, 2$, die i -te Komponente von $\Phi(\eta)$ bezeichnet. Damit folgt

$$\mathbf{curl} u(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \Psi(\xi) (\partial_y \Phi^2(\eta) - \partial_z \Phi^1(\eta)) \\ -\Psi'(\xi)\Phi^2(\eta) \\ \Psi'(\xi)\Phi^1(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(\xi)\text{Curl}(\Phi(\eta)) \\ -\Psi'(\xi)\Phi^2(\eta) \\ \Psi'(\xi)\Phi^1(\eta) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

- $\mathbf{curl} u_2$

Für $u \in \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{W}'_\xi \otimes \mathcal{W}_T \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$u(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \psi(\xi)\phi(\eta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi > 0, \eta \in \mathbb{R}^2, \psi \in \mathcal{W}'_\xi, \phi \in \mathcal{W}_T.$$

Damit folgt

$$\mathbf{curl} u(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\xi)\partial_z \phi(\eta) \\ -\psi(\xi)\partial_y \phi(\eta) \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

5.2.3 Berechnung von $A^{\text{ext,Max}}$

Die Diskretisierungsmatrix der linken Seite von (5.6) bezeichnen wir $A^{\text{ext,Max}}$.

Die Matrix $A^{\text{ext,Max}}$ ist gegeben durch

$$A^{\text{ext,Max}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \mathbf{curl} u(\xi, \eta) \cdot \mathbf{curl} v(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (5.18)$$

Analog zur Berechnung von $B^{\text{ext,Max}}$ unterteilen wir auch $A^{\text{ext,Max}}$ in vier Blöcke

$$A^{\text{ext,Max}} = \left(\begin{array}{c|c} A_{0,0}^{\text{ext,Max}} & A_{0,1}^{\text{ext,Max}} \\ \hline A_{1,0}^{\text{ext,Max}} & A_{1,1}^{\text{ext,Max}} \end{array} \right)$$

und unterscheiden vier Fälle.

1. Fall: $u, v \in \mathcal{V}_1$

Dann ist $A_{0,0}^{\text{ext,Max}}$ gegeben durch

$$A_{0,0}^{\text{ext,Max}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \mathbf{curl} u(\xi, \eta) \cdot \mathbf{curl} u(\xi, \eta) d\eta d\xi \quad (5.19a)$$

$$= \int_0^\infty \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \Psi(\xi) \text{Curl}(\Phi(\eta)) \\ -\Psi'(\xi) \Phi^2(\eta) \\ \Psi'(\xi) \Phi^1(\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}(\xi) \text{Curl}(\tilde{\Phi}(\eta)) \\ -\tilde{\Psi}'(\xi) \tilde{\Phi}^2(\eta) \\ \tilde{\Psi}'(\xi) \tilde{\Phi}^1(\eta) \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad (5.19b)$$

$$= \int_0^\infty \int_{\Gamma} \Psi(\xi) \tilde{\Psi}(\xi) \text{Curl}\Phi(\eta) \text{Curl}\tilde{\Phi}(\eta) d\eta d\xi \\ + \int_0^\infty \int_{\Gamma} \Psi'(\xi) \tilde{\Psi}'(\xi) \Phi^2(\eta) \tilde{\Phi}^2(\eta) d\eta d\xi \quad (5.19c)$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\Gamma} \Psi'(\xi) \tilde{\Psi}'(\xi) \Phi^1(\eta) \tilde{\Phi}^1(\eta) d\eta d\xi \\ = \int_0^\infty \Psi(\xi) \tilde{\Psi}(\xi) d\xi \left(\int_{\Gamma} \text{Curl}\Phi(\eta) \text{Curl}\tilde{\Phi}(\eta) d\eta \right) \\ + \int_0^\infty \Psi'(\xi) \tilde{\Psi}'(\xi) d\xi \left(\int_{\Gamma} \Phi(\eta) \cdot \tilde{\Phi}(\eta) d\eta \right). \quad (5.19d)$$

Wir führen nun die Matrix $S_{\text{curl}}^{\text{trans}}$ ein. Das ist die Finite Elemente Matrix, die durch den Curl der $H(\mathbf{curl})$ Elemente entsteht

$$S_{\text{curl}}^{\text{trans}} = \int_{\Gamma} \text{Curl}\Phi(\eta) \text{Curl}\tilde{\Phi}(\eta) d\eta. \quad (5.20)$$

Damit können wir die Teilmatrix $A_{0,0}^{\text{ext,Max}}$ beschreiben als

$$A_{0,0}^{\text{ext,Max}} = M^{\text{long}} \otimes S_{\text{curl}}^{\text{trans}} + S^{\text{long}} \otimes M_{\text{curl}}^{\text{trans}}. \quad (5.21)$$

2. Fall: $u, v \in \mathcal{V}_2$

$A_{1,1}^{\text{ext,Max}}$ ist gegeben durch

$$A_{1,1}^{\text{ext,Max}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(\xi)\partial_z\phi(\eta) \\ -\psi(\xi)\partial_y\phi(\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}(\xi)\partial_z\tilde{\phi}(\eta) \\ -\tilde{\psi}(\xi)\partial_y\tilde{\phi}(\eta) \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad (5.22a)$$

$$= \int_0^\infty \psi(\xi)\tilde{\psi}(\xi) d\xi \left(\int_{\Gamma} \nabla_\eta\phi(\eta) \cdot \nabla_\eta\tilde{\phi}(\eta) d\eta \right). \quad (5.22b)$$

Damit können wir die Teilmatrix $A_{1,1}^{\text{ext,Max}}$ beschreiben als

$$A_{1,1}^{\text{ext,Max}} = S^{\text{long}} \otimes S_{\text{H1}}^{\text{trans}}. \quad (5.23)$$

3. Fall: $u \in \mathcal{V}_1$, $v \in \mathcal{V}_2$

Abschließend betrachten wir die letzten beiden Blöcke von $A^{\text{ext,Max}}$.

Betrachten wir also

$$A_{1,0}^{\text{ext,Max}} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \begin{pmatrix} \Psi(\xi)\text{Curl}(\Phi(\eta)) \\ -\Psi'(\xi)\Phi^2(\eta) \\ \Psi'(\xi)\Phi^1(\eta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\psi}(\xi)\partial_z\tilde{\phi}(\eta) \\ -\tilde{\psi}(\xi)\partial_y\tilde{\phi}(\eta) \end{pmatrix} d\eta d\xi \quad (5.24a)$$

$$= - \int_0^\infty \Psi'(\xi)\tilde{\psi}(\xi) d\xi \int_{\Gamma} \Phi^2(\eta)\partial_z\tilde{\phi}(\eta) d\eta \quad (5.24b)$$

$$- \int_0^\infty \Psi'(\xi)\tilde{\psi}(\xi) d\xi \int_{\Gamma} \Phi^1(\eta)\partial_y\tilde{\phi}(\eta) d\xi$$

$$= - \int_0^\infty \Psi'(\xi)\tilde{\psi}(\xi) d\xi \left(\int_{\Gamma} \Phi(\eta) \cdot \nabla_\eta\tilde{\phi}(\eta) d\eta \right). \quad (5.24c)$$

Wir führen nun die Matrix $\text{Mix}^{\text{trans}}$ ein. Diese Finite Elemente Matrix für die Oberfläche besteht aus $H(\mathbf{curl})$ Basisfunktionen und den Gradienten von H^1 Elementen

$$\text{Mix}^{\text{trans}} = \int_{\Gamma} \Phi(\eta) \cdot \nabla_\eta\tilde{\phi}(\eta) d\eta. \quad (5.25)$$

Damit können wir die Teilmatrix $A_{1,0}^{\text{ext,Max}}$ beschreiben als

$$A_{1,0}^{\text{ext,Max}} = -S^{\text{long}} \otimes \text{Mix}^{\text{trans}}. \quad (5.26)$$

4. Fall: $u \in \mathcal{V}_2$, $v \in \mathcal{V}_1$

Aus Symmetriegründen ist es ausreichend, nur den vorherigen Fall zu betrachten, denn damit folgt der jetzige direkt.

Für $A_{0,1}^{\text{ext,Max}}$ gilt

$$A_{0,1}^{\text{ext,Max}} = A_{1,0}^{\text{ext,Max}} T. \quad (5.27)$$

Damit ist $A^{\text{ext,Max}}$ gegeben durch

$$A^{\text{ext,Max}} = \left(\begin{array}{c|c} M^{\text{long}} \otimes S_{\text{curl}}^{\text{trans}} + S^{\text{long}} \otimes M_{\text{curl}}^{\text{trans}} & -S^{\text{long}} \otimes \text{Mix}^{\text{trans}} \\ \hline -S^{\text{long}} \otimes \text{Mix}^{\text{trans} T} & S^{\text{long}} \otimes S_{\text{H}^1}^{\text{trans}} \end{array} \right). \quad (5.28)$$

5.3 Hardy-Raum Methode in NGS-Py

In diesem Abschnitt präsentieren wir einige Code-Ausschnitte zur Implementierung der Hardy-Raum Methode in [NGS-Py]. Die Ausschnitte stellen eine Mischung aus Pseudo-Code und tatsächlichem Python-Code dar. Der Text zwischen den einzelnen Codeausschnitten bezieht sich, soweit nicht anders angemerkt, immer auf den folgenden Codeausschnitt. Die Codeausschnitte sollen zeigen, dass wir nur wenige neue Funktionen implementieren müssen. Wir greifen hauptsächlich auf die Basisfunktionalitäten von [NGS-Py] zu. Wir implementieren die Klassen `FESpacePlus`, `MaxwellExterior` und `ExtBFI`.

```

1 from ngsolve import *
2 from ngswaves import *
3
4 geo = MakeWaveguideGeometry()
5 mesh = geo.GenerateMesh(maxh = maxh)
6
7 fes = FESpacePlus('hcurlho', mesh, order=polyorder, complex=True)
8 hsm = MaxwellExterior(3, hsmorder, kappa0, order=polyorder, complex=True)
9 fes = fes.AddMaxwellExterior(hsm, ['hcurlho', 'hiho'], m.Boundaries('right'))
10
11 u, v = fes.TnT()
12 gf = GridFunction(fes, multidim=nevs)
13
14 b = BilinearFormPlus(fes, symmetric=True)
15 b += SymbolicBFI(eps*u*v)
16 b += ExtBFI('mass')
17
18 a = BilinearFormPlus(fes, symmetric=True)
19 a += SymbolicBFI(curl(u)*curl(v))
20 a += ExtBFI('curl')
21
22 with TaskManager():
23     a.Assemble()
24     b.Assemble()
25
26 lam = sqrt(array(ArnoldiSolver(a.mat, b.mat, fes.FreeDofs(), gf.vecs,
    shift**2)))

```

Codeausschnitt 2: Beispiel

5.3.1 Aufstellen des Lösungsraumes

Bevor wir den Lösungsraum aufstellen, importieren wir verschiedene Python Pakete. Wir erstellen eine Geometrie und ein Finite-Elemente Gitter `mesh` (Zeilen 4 und 5). In Zeile 7 stellen wir den Innenraum auf, in der nächsten Zeile wird der Außenraum aufgestellt, um diese zwei dann miteinander zu verbinden (Zeile 9). Die Klasse `FESpacePlus` verfügt über die Member-Funktion `AddMaxwellExterior` um den Außenraum `MaxwellExterior` hinzuzufügen. `FESpacePlus` weiß, wie die Oberflächenkomponenten erzeugt werden. `MaxwellExterior` ist für den Außenraum zuständig und erhält die Hardy-Raum Parameter und weiß auch, wie die Bilinearformen im Außenraum aufgebaut werden.

5.3.2 Bilinearformen

Nachdem unser Lösungsraum steht, stellen wir die entsprechenden Bilinearformen auf. In den Zeilen 14 und 18 fügen wir die Innenraumformulierung mit gewöhnlichen [NGS-Py] Klassen hinzu. Danach (Zeilen 16 und 20) kommen noch die Außenraum Bilinearformen hinzu. Die Klasse `ExtBFI` kennt die longitudinalen Matrizen und fügt die Integratoren der Oberfläche hinzu.

5.3.3 Assemblieren der Matrizen

Da nun die Bilinearformen aufgestellt sind, assemblieren wir die Matrizen, so dass wir nun einen Eigenwertlöser anwenden können. Der Befehl `with TaskManager()`: erlaubt uns, das Aufstellen der Matrizen zu parallelisieren.

5.3.4 Lösen des Eigenwertproblems

Schlussendlich, nachdem wir die Matrizen assembliert haben, lösen wir das Resonanzproblem, mithilfe eines Eigenwertlösers (Zeile 26). Wir verwenden hier ein Shift-and-Invert Arnoldi-Verfahren.

6 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel präsentieren wir einige Resultate von unterschiedlichen Tests und Beispielen. Der erste Abschnitt befasst sich dabei mit dem akustischen Wellenleiter, der zweite Teil mit dem elektromagnetischen. Da letzterer für diese Arbeit größere Relevanz hat, befassen wir uns ausführlicher mit Resonanzproblemen der Maxwell-Gleichung.

Alle Berechnungen wurden mit Netgen/NGSolve ([NGS-Py], [Sch14], [Sch97]) durchgeführt.

6.1 Helmholtz-Gleichung

Zuerst betrachten wir das Resonanzproblem 2.7. Dafür liegt eine analytische Lösung, abhängig von den Wellenzahlen $\kappa_n(\omega)$, vor (siehe Abschnitt 2.3). Da dreidimensionale Wellenleiter einen erheblichen Rechenaufwand für die Finite Elemente Diskretisierung des Innenraums Ω_{int} und der Schnittstelle Υ bedeuten würden, und das Verhalten der Hardy-Raum Methode für den Außenraum unabhängig von der Dimension und der Form von Υ ist, beschränken wir uns für den akustischen Wellenleiter auf zweidimensionale Gebiete.

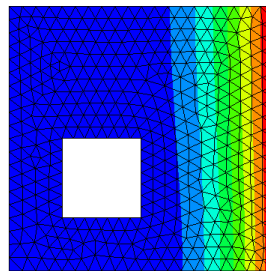
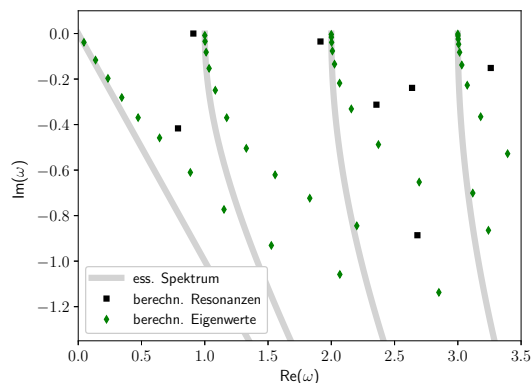
Sei also $\Omega_{\text{int}} = [0, 1]^2 \setminus S$, wobei S einen Streukörper im Innenraum bezeichnet und $\Upsilon = [0, 1]$. Wir verwenden oben und unten, $[0, 1] \times \{0, 1\}$, und links, $\{0\} \times [0, 1]$, homogene Neumanndaten. An den rechten Rand, $\{1\} \times \Upsilon$, setzen wir den Hardy-Raum. Der Außenraum ist daher gegeben durch $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}_{\geq 1} \times \Upsilon$. Der Innenraum wird mittels Finiten Elemente diskretisiert.

Das essentielle Spektrum $\sigma_{\text{ess}}(\kappa_0)$ der Helmholtz-Gleichung ist gegeben durch die Kurven

$$\omega_n^{\kappa_0} : t \mapsto \sqrt{\lambda_n - \kappa_0^2 t^2} \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{a^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.1)$$

wobei die λ_n , $n \in \mathbb{N}$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf der Oberfläche $[0, a]$ sind und wir die Wurzel mit negativem Imaginärteil verwenden. In unserem Fall ist $a = 1$. Das essentielle Spektrum ändert sich nicht für unterschiedliche Streukörper.

Für unsere numerischen Tests setzen wir drei unterschiedliche Streukörper S in den Innenraum. Wir verwenden in allen drei Beispielen, bis auf die Verschiebung des Arnoldi-Eigenwertlösers, die selben Parameter für die Diskretisierung. Für das erste Beispiel wählen wir $S_1 = [0.2, 0.5]^2$ und damit gilt $\Omega_1 = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 1]) \setminus S_1$. In Abbildung 6.1a sehen wir die berechneten Eigenwerte und das essentielle Spektrum davon. Für echte Resonanzen der Helmholtz-Gleichung verwenden wir ein anderes Symbol als für Eigenwerte, die dem essentiellen Spektrum zuzurechnen sind. Die Änderung der Symbole wurde nachträglich durchgeführt, da wir anhand der berechneten Eigenwerte selbstständig unterscheiden müssen, welche nun Resonanzen sind. In dieser Abbildung sieht man auch,



Heigen 6.2-der

(a) Eigenwerte von (2.2) für Ω_1 verglichen mit dem essentiellen Spektrum $\sigma_{\text{ess}}(2 + 2i)$

(b) Absolutbetrag des Realteils der Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 2.48 - 1.31i$

Abb. 6.1: Berechnete Eigenwerte und Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 2.48 - 1.31i$ des Gebietes Ω_1

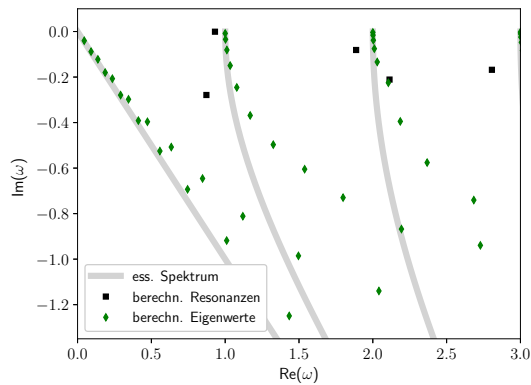
wie das diskrete essentielle Spektrum ab einem gewissen Punkt für jeden der Äste „abbiegt“. Dies lässt sich auf Diskretisierungsfehler im Innenraum zurückführen. Abbildung 6.1b zeigt, wie der Innenraum Ω_{int} und der Absolutbetrag des Realteils der Resonanzfunktion zum Eigenwert $\omega \approx 2.48 - 1.31i$ im Innenraum aussieht. Für die Diskretisierung des Innenraums verwenden wir Polynomordnung $p = 6$ und eine Gitter-Feinheit von $h = 0.05$. Wir wählen $N = 10$ Freiheitsgrad in longitudinaler Richtung. Der Parameter κ_0 wird mit $\kappa_0 = 2 + 2i$ gewählt. Die Dimension des Krylow-Raumes für das Arnoldi-Verfahren beträgt $d = 50$, die Verschiebung wird in die Nähe der ersten Resonanz gelegt und beträgt $s = 2.4 - 1.3i$.

Für die Abbildungen 6.2a und 6.2b wählen wir für den Streukörper S_2 einen Kreis mit Radius $r = 0.2$ und Mittelpunkt $(0.3, 0.3)$. Um die Schreibweise zu vereinfachen, nennen wir dieses Gebiet Ω_2 . Die Verschiebung des Arnoldi-Verfahren beträgt hier $s = 2.7 - 0.8i$. Alle anderen Parameter werden wie beim ersten Beispiel gewählt. Im Vergleich zum Beispiel zuvor treten merklich weniger Resonanzen auf.

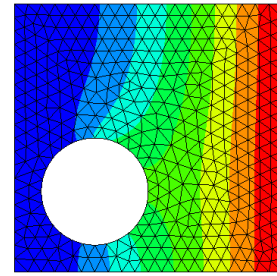
Die Resonanz, die bei etwa $\omega \approx 6.64 - 0.66i$ liegt, lässt sich nur schwer vom essentiellen Spektrum unterscheiden. Wie man in Abbildung 6.2c sieht, ist dies erst sicher durch die Wahl eines anderen Parameters $\kappa_0 = 2 + 0.5i$ möglich. Das schwarze Quadrat in Abbildung 6.2c wurde nachträglich eingefügt und soll auf den näher betrachteten Eigenwert aufmerksam machen.

Für das dritte Beispiel wählen wir $S_3 = [0.2, 0.75] \times [0.2, 0.5]$. Damit ist $\Omega_3 = (\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 1]) \setminus S_3$ und wir legen die Verschiebung des Arnoldi-Verfahrens auf $s = 1.8 - 0.95i$. Wie zuvor bleiben alle anderen Parameter gleich. Dieses Beispiel veranschaulicht einerseits nochmals, dass das essentielle Spektrum tatsächlich unabhängig vom Streukörper

6 Numerische Beispiele



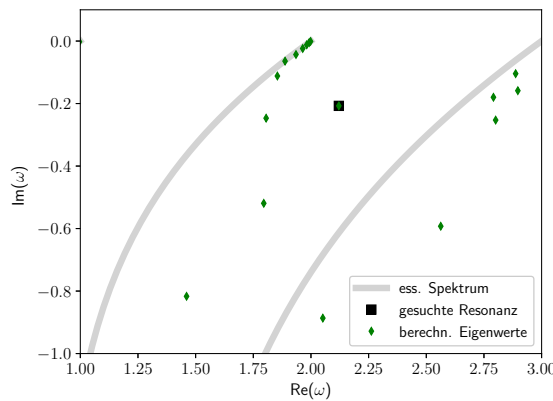
(a) Eigenwerte von (2.2) für Ω_2 , verglichen mit dem essentiellen Spektrum $\sigma_{\text{ess}}(2 + 2i)$



$\frac{u}{\kappa}$

Netgen 6.2-der

(b) Absolutbetrag des Realteils der Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 2.74 - 0.88i$



(c) Ausschnitt der Eigenwerte von (2.2) für Ω_2 , mit geändertem $\kappa_0 = 2 + 0.5i$

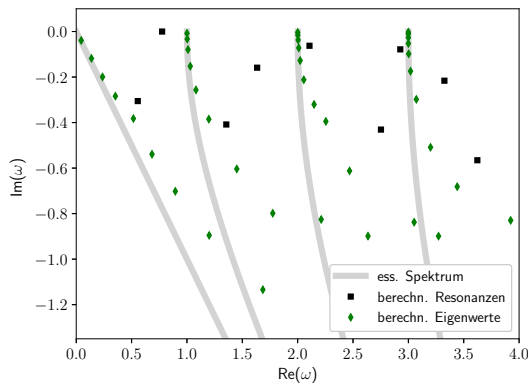
Abb. 6.2: Berechnete Eigenwerte und Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 2.74 - 0.88i$ des Gebietes Ω_2

im Innenraum ist, und andererseits, dass die Resonanzen sehr wohl vom Streukörper abhängen.

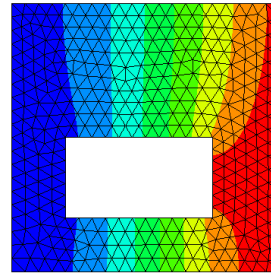
Um die Grafiken lesbarer zu gestalten, wurden alle Werte nachträglich, mit dem Faktor $1/\pi$ skaliert.

6.2 Maxwell-Gleichung

In diesem Abschnitt betrachten wir numerische Beispiele zur Maxwell-Gleichung (4.1) auf einem unbeschränkten Wellenleiter. Anders als im vorherigen Unterabschnitt betrachten wir nun ein dreidimensionales Gebiet. Um das Konvergenzverhalten der Hardy-Raum Methode nachzuweisen, führen wir Selbstkonvergenztests durch. Dafür generieren



(a) Eigenwerte von (2.2) für Ω_3 verglichen mit dem essentiellen Spektrum $\sigma_{\text{ess}}(2 + 2i)$



$\frac{y}{x}$

Netgen 6.2-der

(b) Absolutbetrag des Realteils der Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 1.75 - 0.96i$

Abb. 6.3: Berechnete Eigenwerte und Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 1.75 - 0.96i$ des Gebietes Ω_3

wir Referenzwerte, indem wir für den Innenraum eine feinere Diskretisierung und eine höhere Polynomordnung wählen und im Außenraum die Anzahl der Freiheitsgrade vergrößern.

Sei $\Upsilon = [0, 1]^2$ und $\Omega_{\text{int}} = [0, 1]^3 \setminus [0.25, 0.75]^3$. Wir fordern überall, außer am rechten Rand $\{1\} \times \Upsilon$, homogene Neumanndaten. An den rechten Rand setzen wir den Hardy-Raum. Damit ist der Außenraum gegeben durch $\Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}_{\geq 1} \times \Upsilon$. Wir wählen für den Innenraum bewusst ein symmetrisches Gebiet, denn dadurch verändern sich die berechneten Eigenwerte nicht, wenn wir den Innenraum entlang der y -Achse halbieren. Dadurch, dass wir das Diskretisierungsgebiet verkleinern, sparen wir die Hälfte der Freiheitsgrade im Innenraum ein. Da dreidimensionale Probleme schnell sehr rechenaufwändig werden, ist dies, um brauchbare Ergebnisse in zumutbarer Zeit zu generieren, unabdingbar. Der Tensorproduktansatz der Hardy-Raum Methode trägt ebenfalls dazu bei, dass die Anzahl der Freiheitsgrade rapide wächst. Außerdem werden die Rechnungen bereits auf einem Server mit 48 Kernen und 256 Gigabyte Arbeitsspeicher ausgelagert. Bei sehr feinen Diskretisierungen des Innenraums stoßen wir selbst dort an die kapazitären Grenzen.

In Abbildung 6.4 sehen wir, wie das von Netgen ([Sch97]) erzeugte Finite-Elemente Gitter aussieht, wenn wir Ω_{int} halbieren. Da wir mit Hardy-Raum Infiniten Elementen die longitudinale x -Richtung diskretisieren, halbieren wir den Innenraum normal zur z -Achse. Da die Anzahl der Freiheitsgrade mit der Größe des Gebietes kubisch wächst, ermöglicht uns die Halbierung, den Innenraum feiner aufzulösen. Für die Abbildung 6.4 verwenden wir eine Schrittweitengröße von $h = 0.1$.

In den darauffolgenden Abbildungen 6.5 berechnen wir die Eigenwerte der Maxwell-

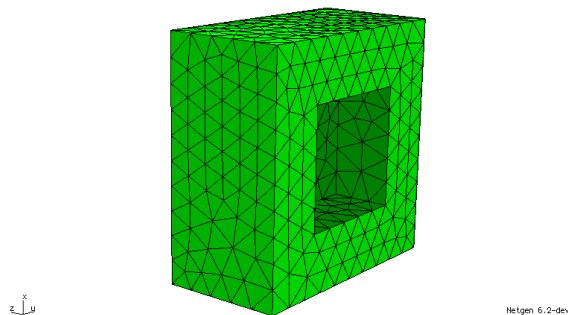


Abb. 6.4: Darstellung des Finite Elemente Gitters bei einem Durchschnitt durch den Innenraum Ω_{int} normal zur z -Achse

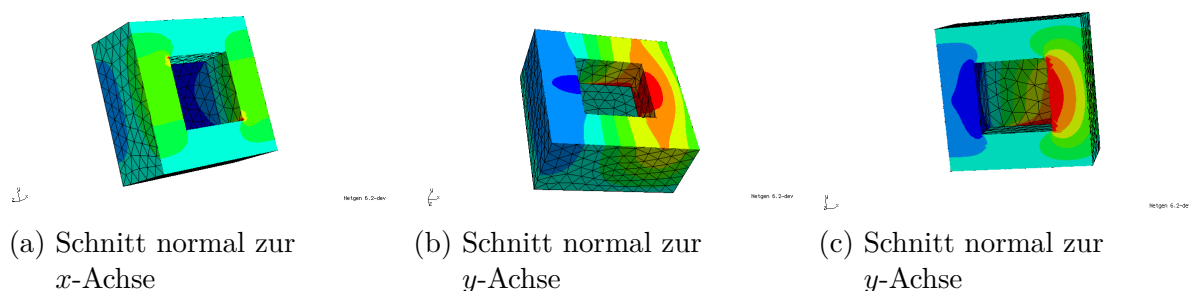


Abb. 6.5: Darstellung verschiedener Schnitte durch Ω_{int} mit dem Realteil einer Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 5.24 - 0.31i$

Gleichung auf dem vollständigen Innenraum, um den Realteil der Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 5.24 - 0.31i$ zu plotten. Damit wir sehen, wie sich die Resonanzfunktion im Inneren verhält, schneiden wir entlang unterschiedlicher Achsen durch Ω_{int} . Die Figuren werden dabei immer nur so weit gedreht, dass die Ausstrahlungsrichtung immer noch rechts liegt.

6.2.1 Spektrum und der Parameter κ_0

In Abbildung 6.6 sehen wir, wie sich das Spektrum bei unterschiedlicher Wahl des Parameters κ_0 verhält. Bevor wir näher auf das Verhalten der Spektren eingehen, befassen wir uns noch eingehender mit unserer Konfiguration. Für die Diskretisierung des Innenraums wählen wir Polynomordnung $p = 6$, eine maximale Schrittweite von $h = 0.2$, $N = 9$ Freiheitsgrad im Außenraum und legen die Verschiebung $s = 5.2 - 0.3i$, des Arnoldi-Verfahrens, in die Nähe der numerisch berechneten Referenzresonanz $\omega \approx 5.24 - 0.31i$. Wir variieren die Dimension d des Krylow-Raums. Der rote Kreis in den Abbildungen wurde nachträglich von uns eingefügt und zeigt die Referenzresonanz $\omega = 5.24410457447 - 0.311548449379i$ an. Die Parameter zur Berechnung der Referenzresonanz sind: $h = 0.1$, $p = 10$, $N = 15$, $\kappa_0 = 3 + 3i$, $s = 5.2 - 0.3i$ und $d = 50$. Um die Referenzresonanz zu berechnen, halbieren wir den Innenraum.

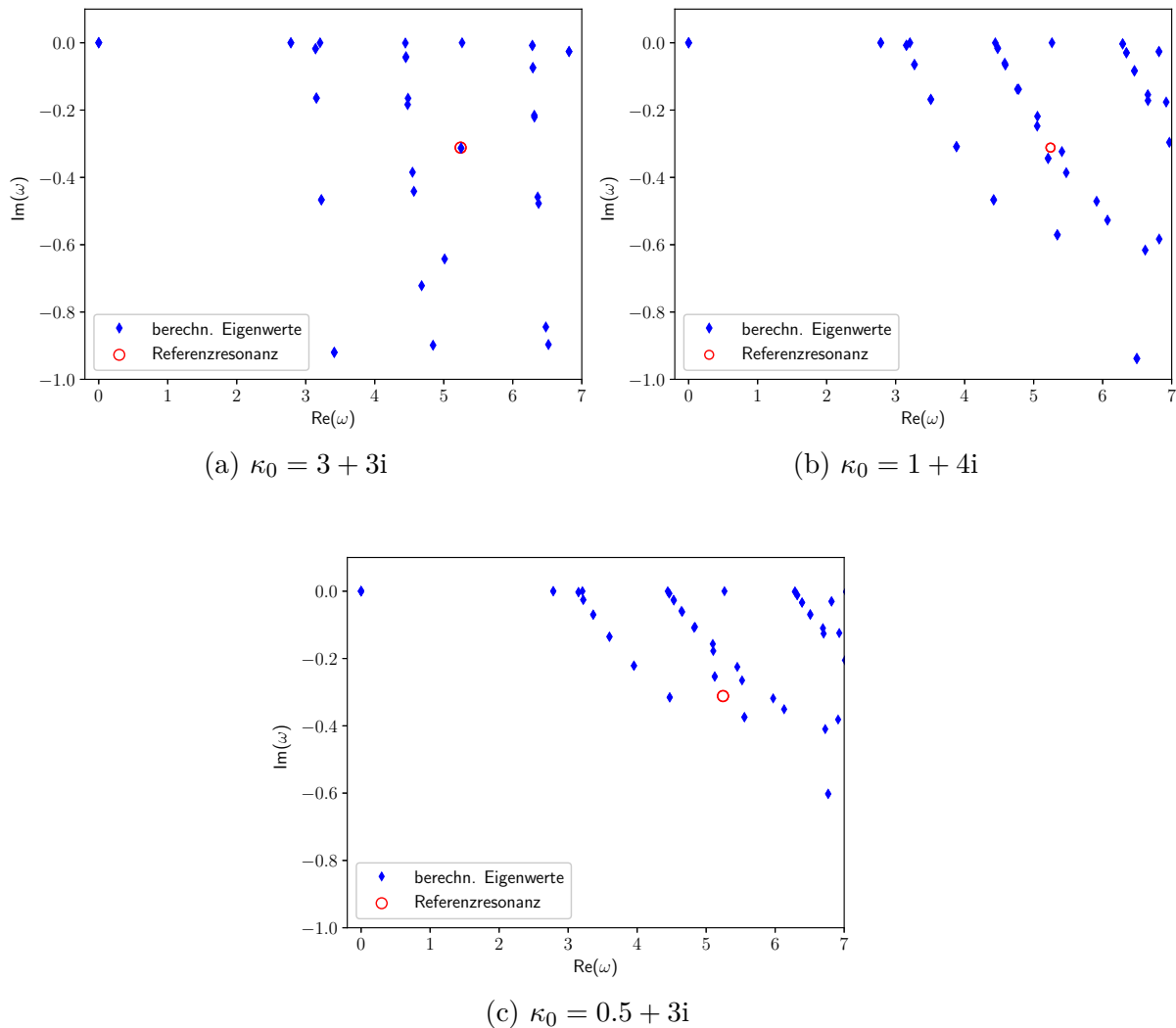


Abb. 6.6: Veränderung des essentiellen Spektrums $\sigma_{\text{ess}}(\kappa_0)$ der Maxwell-Gleichung anhand von κ_0

In der ersten der drei Abbildungen, 6.6a, sehen wir, dass $\kappa_0 = 3 + 3i$ für unser Konfiguration eine sehr gute Wahl ist und sich die berechneten Eigenwerte gut zwischen Resonanzen und essentielles Spektrum unterscheiden lassen. Die Äste, startend bei π , stellen das essentielle Spektrum dar. Wir können auch in Abbildung 6.6a erkennen, dass einer der gefundenen Eigenwerte sehr gut unsere Referenzresonanz annähert. In longitudinaler Richtung nehmen wir $N = 9$ Freiheitsgrade. Dies sind, wie wir auch im Unterabschnitt 6.2.3 sehen, für $\kappa_0 = 3 + 3i$ mehr als ausreichend. Die Dimension des Krylow-Raums wählen wir $d = 50$.

Für $\kappa_0 = 1 + 4i$ sehen wir in Abbildung 6.6c, dass die Referenzresonanz von zu vielen berechneten Eigenwerten umgeben ist und damit nicht mehr sicher unterschieden werden

kann, ob die Eigenwerte Teil des essentiellen Spektrums sind, oder ob sie tatsächlich eine Resonanz darstellen. Da wir bereits übermäßig viele Eigenwerte um $\omega \approx 5.24 - 0.31i$ erhalten, vergrößern wir die Dimension des Krylow-Raums nicht und wählen, wie zuvor, $d = 50$.

Es kann aber auch das Gegenteil vom vorherigen Fall auftreten. Im dritten Bild 6.6b sehen wir, dass es bei einer ungünstigen Wahl von κ_0 , wie hier mit $\kappa_0 = 0.5 + 3i$, passieren kann, dass, obwohl im Bereich der Referenzresonanz kein essentielles Spektrum durchläuft, trotzdem der gesuchte Eigenwert approximiert wird. Die Resonanzfunktion zum Eigenwert $\omega \approx 5.24 - 0.31i$ ist für $\kappa_0 = 0.5 + 3i$ nicht mehr ausstrahlend. Da wir aber austrahlende Lösungen suchen, wird diese durch die Hardy-Raum Methode nicht mehr gefunden. Um sicher zu gehen, dass wir wirklich alle Eigenwerte in dem Bereich der Verschiebung gefunden haben und wir den gesuchten Eigenwert eventuell doch noch finden, vergrößern wir den Krylow-Raum auf die Dimension $d = 80$.

6.2.2 Vergleiche zur PML

Die Perfectly-Matched-Layer Methode ist neben der Hardy-Raum Methode und anderen ebenfalls eine Möglichkeit um unbeschränkte Gebiete zu bearbeiten. Der große Nachteil der PML im Vergleich zur Hardy-Raum Methode ist, dass es mehr Parameter gibt, die aufeinander eingestellt werden müssen, um optimale Konvergenz zu erreichen. Bei der Hardy-Raum Methode kann man einfach die Anzahl der Freiheitsgrade in longitudinaler Richtung vergrößern, vorausgesetzt der Innenraum wird gut genug diskretisiert. Der Parameter κ_0 des Hardy-Raum und der komplexe Skalierungsparameter σ der PML stehen (siehe [HN15, Abschnitt 5.2]) im folgenden Zusammenhang:

$$\kappa_0 = \frac{i}{\sigma}. \quad (6.2)$$

Diesen Zusammenhang erkennen wir gut in Abbildung 6.7. Hierfür wählen wir $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$ und damit $\sigma = 1 + i$. Die berechneten Eigenwerte sind ähnlich. Auch die Referenzresonanz $\omega = 5.2441063335 - 0.311548484321i$ wird getroffen. Für die Hardy-Raum Methode und die PML wählen wir für den Innenraum $h = 0.25$, $p = 4$ und $s = 5.2 - 0.3i$. In longitudinaler Richtung wählen wir für die Hardy-Raum Methode $N = 10$. Für die Dicke der PML wählen wir $l = 6$ und diskretisieren das PML Gebiet mit einem Gitter der Feinheit $h_2 = 0.1$. Die Parameter zur Berechnung der Referenzresonanz sind: $h = 0.1$, $p = 10$, $N = 30$, $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$, $s = 5.2 - 0.3i$, $d = 50$. Um die Referenzresonanz zu berechnen, halbieren wir den Innenraum.

In Abbildung 6.8 sehen wir das Problem der PML im Vergleich zur Hardy-Raum Methode. Wenn wir $\kappa_0 = 3 + 3i$ und damit $\sigma = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}i$ wählen, können wir die Referenzresonanz $\omega = 5.24410457447 - 0.311548449379ii$, wenn wir $l = 2.5$ wählen, mit der PML nur noch schlecht approximieren. Erst wenn wir die Dicke der PML wieder auf $l = 6$ setzen, treffen wir die gesuchte Resonanz, wie wir in Abbildung 6.8a sehen. Um eine bessere Approximation zu generieren, müssten wir weiter an den Parametern der PML

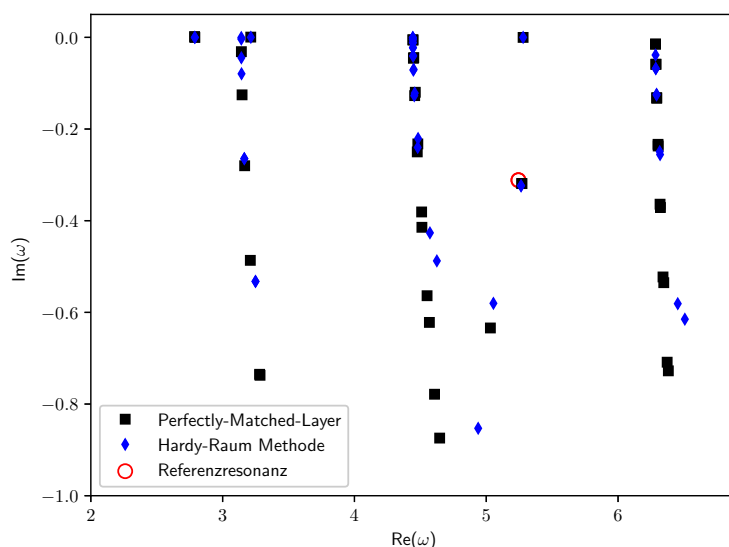


Abb. 6.7: Vergleich der berechneten Eigenwerte zwischen der Perfectly-Matched-Layer und der Hardy-Raum Methode für $\sigma = 1 + 1i$, $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$ und Dicke der PML 6

drehen. Da jedoch die Hardy-Raum Methode im Fokus dieser Arbeit steht, belassen wir es hierbei.

6.2.3 Konvergenz der Hardy-Raum Infsiniten Elemente

Für die Helmholtz-Gleichung erreicht die Hardy-Raum Methode in der Theorie (siehe z. B. [HN17]) exponentielles Abfallverhalten des Fehlers bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade in Ausstrahlungsrichtung $N \in \mathbb{N}$.

Für den absoluten Fehler err_{κ_0} einer Resonanz, zu einer Wellenzahl $\kappa_n(\omega)$, $n \in N$, gilt

$$\text{err}_{\kappa_0} \leq \left| \frac{\kappa_0 - i\kappa_n(\omega)}{\kappa_0 + i\kappa_n(\omega)} \right|^N, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (6.3)$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist daher abhängig vom Parameter κ_0 . Da sich eine Resonanzfunktion aus unterschiedlich stark gewichtet Eigenmoden zusammensetzt, gilt selbiges auch für den Fehler. Das bedeutet, je stärker eine Eigenmode in einer Resonanz vertreten ist, desto größer auch der Beitrag der zugehörigen Wellenzahl zum Fehler. Ein ähnliches Resultat, wie in Ungleichung (6.3), liegt für die Maxwell-Gleichung noch nicht vor, jedoch deuten die numerischen Ergebnisse auf die Existenz eines derartigen hin.

Um das Konvergenzverhalten der Hardy-Raum Methode zu beobachten, testen wir für fixierte Schrittweite h unterschiedliche Polynomordnungen der Diskretisierung im Innenraum. Das eben beschriebene Abfallverhalten können wir auch in den Abbildungen 6.9

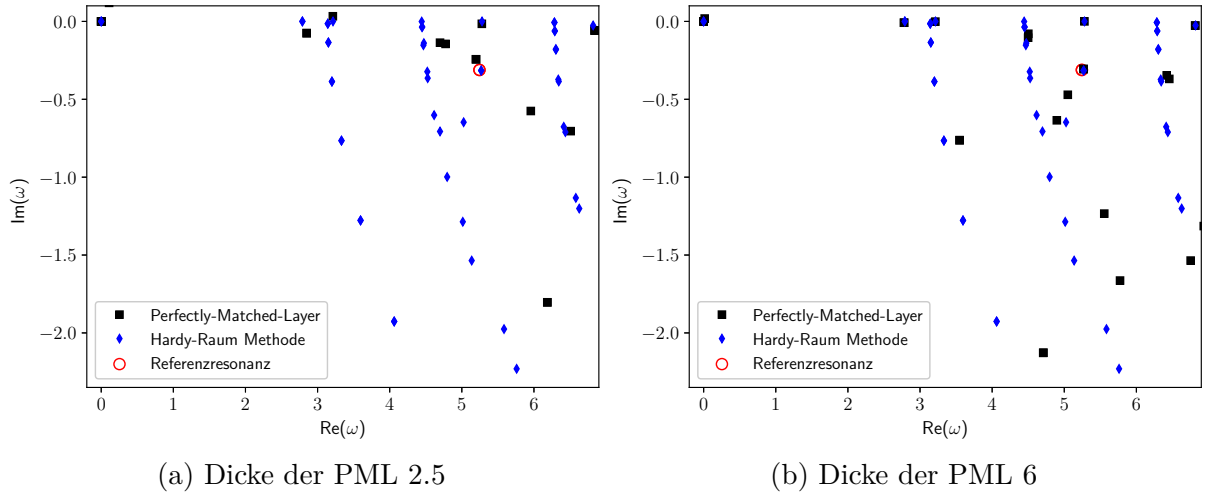
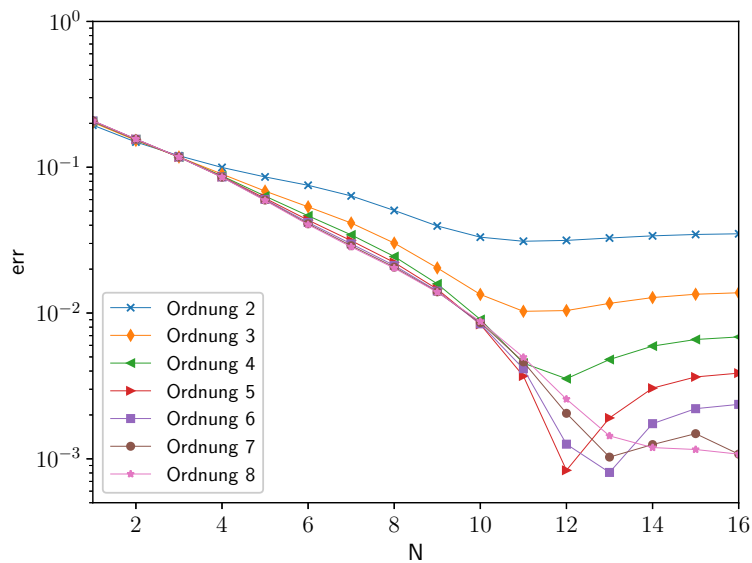
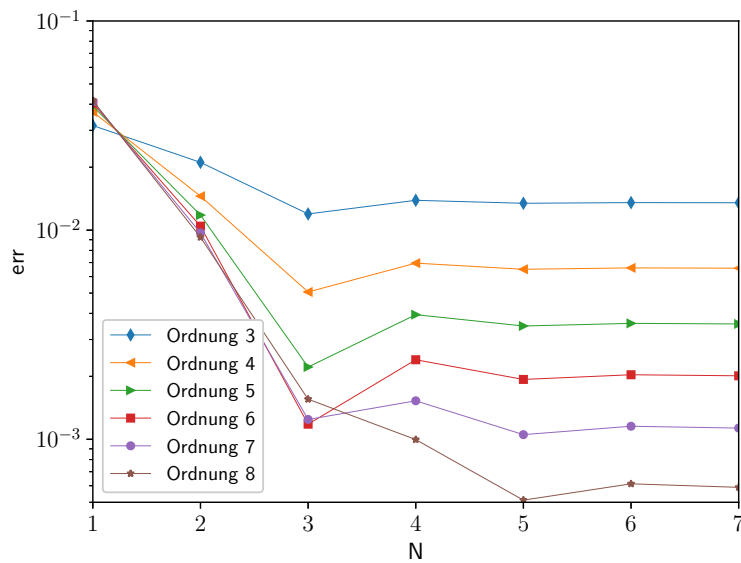


Abb. 6.8: Vergleich der berechneten Eigenwerte zwischen der Perfectly-Matched-Layer und der Hardy-Raum Methode für $\kappa_0 = 3 + 3i$ und $\sigma = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}i$ und verschiedene Dicken der PML

und 6.10 beobachten. Für die Abbildung 6.9 wählen wir $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$ und eine Gitter-Feinheit von $h = 0.1$. Die Verschiebung des Arnoldi-Verfahrens legen wir, wie bereits bei vorherigen Beispielen, an $s = 5.24 - 0.3i$. Wir beobachten den Fehler an der Referenzresonanz $\omega = 5.2441063335 - 0.311548484321i$. Da wir mithilfe geschickter Transformationen die zeit-harmonische Maxwell-Gleichung in die vektorielle Helmholtz-Gleichung mit zusätzlichen Bedingungen überführen können (siehe [KH14, Abschnitt 1.3]), sollten die Wellenzahlen der Maxwell-Gleichung eine Teilmenge davon sein und die Form $\kappa_n(\omega) = \sqrt{\omega^2 - n^2\pi^2}$ aufweisen. Wenn wir diese Vermutung verwenden, um uns Wellenzahlen der Maxwell-Gleichung zu berechnen, erhalten wir für den berechneten Eigenwert $\omega = 5.24504741857 - 0.311025063818i$, bei einer Polynomordnung $p = 8$, und $n = 1$ einen Koeffizient in (6.3) von ca. 0.7742 und damit einen Fehler von $\text{err} \approx 0.0167$ für $N = 16$. Dies entspricht nahezu dem Fehler, der sich auch in Abbildung 6.9 einstellt. Der Knick, der sich bei allen Ordnungen bildet, lässt sich auf die Konditionierung des Eigenwertproblems und des Fehlers im Innenraum zurückführen. Wäre es möglich, den Innenraum noch besser zu diskretisieren, das heißt, wir müssten ein feineres Finite Elemente Gitter und/oder eine höhere Polynomordnung wählen, könnten wir auch den Fehler verbessern. Da wir aber bereits 1230625 Freiheitsgrade für $h = 0.1$, $p = 8$, $N = 16$ berechnen müssen, obwohl wir den Innenraum Ω_{int} , wie in Abbildung 6.4 bereits halbiert haben, stoßen wir an unsere Grenzen, um Lösungen in annehmbarer Zeit zu generieren.

In der zweiten Abbildung zum Konvergenzverhalten der Hardy-Raum Methode wählen wir $\kappa_0 = 3 + 3i$. Wir fixieren wieder die maximale Schrittweite und testen für unterschiedliche Polynomordnungen. Wir beobachten den Fehler an der Referenzresonanz $\omega = 5.24410457447 - 0.311548449379i$. Wie wir hier gut erkennen können, konvergiert die Hardy-Raum Methode exponentiell und wesentlich schneller als für $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$,

Abb. 6.9: Abfallverhalten des Fehlers für $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$ Abb. 6.10: Abfallverhalten des Fehlers für $\kappa_0 = 3 + 3i$

da der Koeffizient aus Ungleichung (6.3), für $n = 1$ mit ca. 0.3612 wesentlich kleiner als für $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$ ist. Der Hardy-Raum Fehler pendelt sich bereits bei $N = 5$ ein und der Innenraumfehler dominiert. Das bedeutet, bei einer optimalen Wahl des Parameters κ_0 können wir schnellere Konvergenzraten erzielen.

7 Conclusio

Wir haben in dieser Arbeit zwei Arten von Wellen betrachtet, nämlich akustische und elektromagnetische Wellen und uns mit deren Resonanzproblemen auf unendlichen Wellenleitern beschäftigt. Den beschränkten Innenraum diskretisieren wir mithilfe der Finiten Elemente Methode. Um den unbeschränkten Außenraum zu diskretisieren verwenden wir die Hardy-Raum Methode. In Kapitel 2 haben wir uns, mithilfe von Meister PDE, mit dem theoretischen Zugang der Hardy-Raum Methode für die Helmholtz-Gleichung befasst. In Kapitel 4 haben wir selbiges für die Maxwell-Gleichung getan.

In Kapitel 6 haben wir numerische Tests durchgeführt. Dabei konnten wir exponentielles Abfallverhalten des Fehlers bezüglich der Anzahl der Freiheitsgrade in Ausstrahlungsrichtung beobachten. Auf Grund der Komplexität der Maxwell-Gleichung auf einem dreidimensionalen Gebiet sind wir jedoch rasch an die Grenzen unserer Rechenkapazitäten gestoßen. Des weiteren haben wir den Einfluss des Parameters κ_0 auf die Konvergenz und auf das essentielle Spektrum studiert.

Im Vergleich zur beliebten Perfectly-Matched-Layer Methode haben wir gesehen, dass die geringere Anzahl an Parametern und die exponentielle Konvergenz der Hardy-Raum Methode ein großer Vorteil ist. Man sollte sich daher vom etwas komplizierteren theoretischen Zugang nicht abschrecken lassen.

Für zukünftige Projekte bietet es sich an, anstatt eines Wellenleiters unterschiedliche Außenräume zu betrachten. Zusätzlich kann man sich noch gründlicher mit der Wahl des Parameters κ_0 beschäftigen und unterschiedliche Gebiete für den Innenraum betrachten.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Diese Skizze zeigt eine mögliche Wahl für das Gebiet Ω . Der Rand von Ω_{int} wird durch die dicken schwarzen Linien skizziert. An der gepunkteten Linie Υ , dem Übergang zwischen Innen- und Außenraum, koppeln Ω_{int} und Ω_{ext} . Für die strichlierten Ränder von Ω_{ext} wählen wir homogene Neumann-Daten. Der rechte gezackte Rand von Ω_{ext} deutet an, dass Ω_{ext} unbeschränkt, nach rechts, weitergeht. Der Kreis in Ω_{int} stellt einen Streukörper (z. B. einen Stein) dar. Der Streukörper ist nicht Teil von Ω_{int} .	2
2.1	Meister PDEs Skizze der Pole für ein ω mit $\lambda_2 < \omega^2 < \lambda_3$	9
6.1	Berechnete Eigenwerte und Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 2.48 - 1.31i$ des Gebietes Ω_1	35
6.2	Berechnete Eigenwerte und Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 2.74 - 0.88i$ des Gebietes Ω_2	36
6.3	Berechnete Eigenwerte und Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 1.75 - 0.96i$ des Gebietes Ω_3	37
6.4	Darstellung des Finite Elemente Gitters bei einem Durchschnitt durch den Innenraum Ω_{int} normal zur z -Achse	38
6.5	Darstellung verschiedener Schnitte durch Ω_{int} mit dem Realteil einer Resonanzfunktion zur Resonanz $\omega \approx 5.24 - 0.31i$	38
6.6	Veränderung des essentiellen Spektrums $\sigma_{\text{ess}}(\kappa_0)$ der Maxwell-Gleichung anhand von κ_0	39
6.7	Vergleich der berechneten Eigenwerte zwischen der Perfectly-Matched-Layer und der Hardy-Raum Methode für $\sigma = 1 + 1i$, $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$ und Dicke der PML 6	41
6.8	Vergleich der berechneten Eigenwerte zwischen der Perfectly-Matched-Layer und der Hardy-Raum Methode für $\kappa_0 = 3 + 3i$ und $\sigma = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}i$ und verschiedene Dicken der PML	42
6.9	Abfallverhalten des Fehlers für $\kappa_0 = 0.5 + 0.5i$	43
6.10	Abfallverhalten des Fehlers für $\kappa_0 = 3 + 3i$	43

Verzeichnis der Codeausschnitte

1	Beispiel	20
2	Beispiel	32

Literatur

- [BS91] K. Yusuf Billah und Robert H. Scanlan. „Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks“. In: *American Journal of Physics* 59.2 (1991), S. 118–124. DOI: 10.1119/1.16590. eprint: <https://doi.org/10.1119/1.16590>. URL: <https://doi.org/10.1119/1.16590>.
- [CR98] D. Colton und Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. 2nd ed. Appl. Math. Sci. 93. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [Hal16] Martin Halla. „Convergence of Hardy Space Infinite Elements for Helmholtz Scattering and Resonance Problems“. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 54.3 (2016), S. 1385–1400. DOI: 10.1137/15M1011755. URL: <https://doi.org/10.1137/15M1011755>.
- [HN17] Martin Halla und Lothar Nannen. „Two scale Hardy space infinite elements for scalar waveguide problems“. In: *Advances in Computational Mathematics* (2017). ISSN: 1572-9044. DOI: 10.1007/s10444-017-9549-5. URL: <https://doi.org/10.1007/s10444-017-9549-5>.
- [Hal+16] Martin Halla u. a. „Hardy space infinite elements for time harmonic wave equations with phase and group velocities of different signs“. In: *Numerische Mathematik* 133.1 (2016), S. 103–139. ISSN: 0945-3245. DOI: 10.1007/s00211-015-0739-0. URL: <https://doi.org/10.1007/s00211-015-0739-0>.
- [HN15] Thorsten Hohage und Lothar Nannen. „Convergence of infinite element methods for scalar waveguide problems“. In: *BIT Numerical Mathematics* 55.1 (1. März 2015), S. 215–254. ISSN: 1572-9125. DOI: 10.1007/s10543-014-0525-x. URL: <https://doi.org/10.1007/s10543-014-0525-x>.
- [KH14] Andreas Kirsch und Frank Hettlich. *The Mathematical Theory of Maxwell’s Equations*. Karlsruhe, 24. Mai 2014. URL: <http://www.math.kit.edu/ianmip/lehre/sobraum2014s/media/main.pdf>.
- [KLS11] C. Koutschan, C. Lehrenfeld und J. Schoeberl. „Computer Algebra meets Finite Elements: an Efficient Implementation for Maxwell’s Equations“. In: *ArXiv e-prints* (Apr. 2011). eprint: 1104.4208.
- [Lar00] Allan Larsen. „Aerodynamics of the Tacoma Narrows Bridge - 60 Years Later“. In: *Structural Engineering International* 10.4 (2000), S. 243–248. DOI: 10.2749/101686600780481356. eprint: <https://doi.org/10.2749/101686600780481356>. URL: <https://doi.org/10.2749/101686600780481356>.
- [SW1] George Lucas. *Star Wars Episode 1: Eine dunkle Bedrohung*. 1999.
- [Nan08] Lothar Nannen. „Hardy-Raum Methoden zur numerischen Lösung von Streu- und Resonanzproblemen auf unbeschränkten Gebieten“. Diss. Deutschland: Universität Göttingen, 2008. ISBN: 978-3-89959-742-4.

Literatur

- [Nan16] Lothar Nannen. *Streu- und Resonanzprobleme*. 2016. URL: <http://www.asc.tuwien.ac.at/~lnannen/Lectures/Scattering2016/ScatteringProblems.pdf>.
- [Nan+13] Lothar Nannen u. a. „Exact Sequences of High Order Hardy Space Infinite Elements for Exterior Maxwell Problems“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 35.2 (2013), A1024–A1048. DOI: 10.1137/110860148. URL: <https://doi.org/10.1137/110860148>.
- [Sch97] Joachim Schöberl. „NETGEN An advancing front 2D/3D-mesh generator based on abstract rules“. In: *Computing and Visualization in Science* 1.1 (1. Juli 1997), S. 41–52. ISSN: 1432-9360. DOI: 10.1007/s007910050004. URL: <https://doi.org/10.1007/s007910050004>.
- [NGS-Py] Joachim Schöberl. *Netgen/NGSolve, Version 6.2.1802*. 2018. URL: <https://ngsolve.org/docu/latest/>.
- [Sch14] Joachim Schoeberl. „C++11 Implementation of Finite Elements in NGSolve“. In: *ASC Report 30/2014* (Sep. 2014).