



DIPLOMARBEIT

Über einige neue Formeln für die Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell mit Gamma-Schäden

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik

Forschungsgruppe: Finanz- und Versicherungsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch
DI Besije Richter
Eichbachgasse 136
8041 Graz

Wien, am 06.09.2018

**Für Eli und Nana
Për Elin dhe Nanën**

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Einführung in die Ruintheorie	2
3	Einführung in Mittag-Leffler-Funktionen	10
4	Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden mit Formparameter r rational in Form einer endlichen Summe von Mittag-Leffler Funktionen	13
5	Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden in Form einer unendlichen Summe von Faltungen der Mittag-Leffler-Funktionen	19
6	Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden in Form einer unendlichen Summe von Ableitungen der Mittag-Leffler-Funktionen	27
7	Überlebenswahrscheinlichkeit in Form einer unendlichen Summe von Faltungen der Tail-Verteilungen	29
8	Asymptotische Approximation bei Gamma- bzw. invers Gauß-Schäden	41
9	Panjer's Schranken für die Überlebenswahrscheinlichkeit	44
10	Diskussion und Vergleich der Resultate	46
A	Tail-Verteilung und deren Laplace Transformation	56
B	n -Fache Faltung der Funktion $H(x)$	58
C	Beweis der Identität $I1$ und $I2$	59
D	Codes für die numerischen Implementierungen	62

Kapitel 1

Einleitung

Wie der Begriff sagt, ist ein Versicherungsunternehmen ein Unternehmen, das ein kalkuliertes Risiko (potentieller Schaden) in Kauf nimmt, um dieses im Gegenzug durch Erhebung einer Prämie zu versichern. Die Entwicklung des Geschäftsverlaufs eines Versicherungsunternehmens kann man einfach durch das Modell

$$\text{Startkapital} + \text{Prämieneinnahmen} - \text{Schäden}$$

beschreiben. Ziel ist einen möglichst positiven Ausgleich zwischen Einnahmen (vorhandendes Startkapital und die Prämieinnahmen), und Ausgaben (die eintretenden Schäden), zu erzielen. Von grossem Interesse ist die frühzeitige Erkennung von wann die Ausgaben die Einnahmen übertreffen könnten bzw. wann der versicherungstechnische Ruin eintritt. Hier kommt ins Spiel die Ruintheorie um die Ruinwahrscheinlichkeit zu berechnen. In der klassischen Ruintheorie als Ausgangsrisikomodell wird üblich das kollektive Crámer-Lundberg Modell verwendet.

Ziel dieser Arbeit ist explizite Ausdrücke für Ruinwahrscheinlichkeit im klassischen Crámer-Lundberg Risikomodell mit Gamma-Schäden bzw. light-tail-verteilten Schäden zu finden.

Kapitel 2

Einführung in die Ruintheorie

Das individuelle- und kollektive Risikomodell, sind die zwei von den Modellen der klassischen Risikotheorie der Versicherungsmathematik. Hat ein Portfolio in einer Periode $n \in \mathbb{N}$ Risiken, wird der Gesamtschaden im individuellen Modell als Summe der Schäden aller Einzelrisiken R_1, \dots, R_n

$$S = \sum_{i=1}^n R_i \quad (2.1)$$

berechnet. Die Einzelrisiken sind durch unabhängige, aber nicht notwendigerweise identisch verteilt, nichtnegative Zufallsvariablen $R_i, i = 1, \dots, n$ mit Verteilungsfunktionen $F_{R_i}, i = 1, \dots, n$ modelliert. Die Verteilungsfunktion F_S von S wird durch Faltung ermittelt.

Definition 2.1. *Sein X und Y unabhängige nichtnegative Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen F_X und F_Y . Das*

$$F(x) = \mathbb{E}[F_Y(x - X)] = \mathbb{E}[F_X(x - Y)] \quad (2.2)$$

nennt man Faltung von F_X und F_Y , symbolisch $F = F_X * F_Y$. F ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $X + Y$. Im Fall der unabhängigen stetigen Zufallsvariablen wird die Faltung der Verteilungsfunktionen

$$F(x) = \int_0^x F_X(x - y) dF_Y(y) = \int_0^x F_Y(x - y) dF_X(y) \quad (2.3)$$

Besitzen die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y Dichten f_X und f_Y , so hat die Verteilungsfunktion F die Dichte

$$f(x) = \int_0^x f_X(x - y) f_Y(y) dy = \int_0^x f_Y(x - y) f_X(y) dy \quad (2.4)$$

symbolisch $f = f_X * f_Y$. f ist die Faltung der Dichten f_X und f_Y . Im Fall der unabhängigen diskreten Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable $X + Y$ durch

$$\mathbb{P}(X + Y = x) = \sum_k \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = x - k) = \sum_k \mathbb{P}(Y = k) \mathbb{P}(X = x - k) \quad (2.5)$$

gegeben, wobei $\mathbb{P}(X + Y = x)$ die Punktwahrscheinlichkeit von $X + Y$ ist. Das definiert auch die Faltung der Verteilungsfunktionen F_X und F_Y .

Kommutativität und Assoziativität sind wichtige Eigenschaften der Faltungen.

Wegen der Unabhängigkeit der Einzelrisiken ist

$$F_S(x) = (F_{R_1} * F_{R_2} * \dots * F_{R_n})(x) \quad (2.6)$$

Wenn die Einzelrisiken zusätzlich identisch F_R -verteilt sind (S homogenes Portfolio) ist die Verteilungsfunktion F_S durch

$$F_S(x) = \underbrace{(F_R * F_R * \dots * F_R)}_{n\text{-mal}}(x) = F_R^{*n}(x) \quad (2.7)$$

gegeben. F_R^{*n} ist die n -fache Faltung von F_R .

Ohne die Annahme von identisch verteilten Einzelrisiken ist das individuelle Modell schwer zu benutzen und es können nur wenige Aussagen getroffen werden.

Im Gegensatz zum individuellen Modell geht man nicht von Einzelrisiken, sondern von Einzelschäden aus. Die Einzelschäden sind durch unabhängige, identisch verteilte, nichtnegative Zufallsvariable X_1, \dots, X_n mit Verteilungsfunktion F_X (im Weiteren F) und die Schadenanzahl durch eine \mathbb{Z}_+ -wertige diskrete Zufallsvariable N modelliert. Es wird weiters davon ausgegangen, dass die Einzelschäden X_1, \dots, X_n und die Schadenanzahl N unabhängig von einander sind. Der Gesamtschaden ist eine Zufallssumme, die durch

$$S = \sum_{i=1}^N X_i \quad (2.8)$$

gegeben ist. Für den Fall, dass kein Schaden $N = 0$ aufgetreten ist, setzen wir $S = 0$.

Mit Hilfe der Iterativität des Erwartungswertes und Unabhängigkeit der X_1, \dots, X_n und N können Formeln für die Verteilungsfunktion F_S und die momenterzeugende Funktion M_S der Zufallssumme S abgeleitet werden.

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \mathbb{P}[S \leq x] = \mathbb{E} \left[\mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^N X_i \leq x \mid N \right] \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = n] \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^n X_i \leq x \mid N = n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[N = n] \mathbb{P} \left[\sum_{i=1}^n X_i \leq x \right] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x) \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei $(p_n)_{n \geq 0}$ ist die Zähldichte von N und F_X^{*n} ist die n -fache Faltung der Verteilungsfunktion F_X der Einzelschäden.

$$\begin{aligned} M_S(s) &= \mathbb{E}[e^{sS}] = \mathbb{E}[e^{s \sum_{i=1}^N X_i}] = \mathbb{E}[E[e^{s \sum_{i=1}^N X_i} \mid N]] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{s \sum_{i=1}^n X_i} \mid N = n] \mathbb{P}[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{s X_i}] \mathbb{P}[N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{s X}]^n \mathbb{P}[N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} M_X(s)^n \mathbb{P}[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\ln(M_X(s)^n)} \mathbb{P}[N = n] = M_N(\ln(M_X(s))) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Weil die n -te Ableitung der momenterzeugenden Funktion $M_S(s)$ im Punkt 0 ist gleich dem n -ten Moment der Zufallsvariablen S , ist der Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[S] = M'_S(s) \Big|_{s=0} = M'_N(\ln(M_X(s))) \frac{M'_X(s)}{M_X(s)} \Big|_{s=0} = M'_N(0) M'_X(0) = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X] \quad (2.11)$$

Ähnlich:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S^2] &= M''_S(s) \Big|_{s=0} = M''_N(0) M'_X(0)^2 + M'_N(0) (M''_X(0) - M'_X(0)^2) \\ &= \mathbb{E}[N^2] \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[N] \text{Var}[X] \end{aligned}$$

So wird die Varianz

$$\text{Var}[S] = \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 = \mathbb{E}[N]\text{Var}[X] + \mathbb{E}[X]^2\text{Var}[N] \quad (2.12)$$

Häufig wird im kollektiven Modell die poissonverteilte Schadenanzahl $N \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$ verwendet. Die Poisson-Verteilung $P(\lambda)$ ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitverteilung über der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit Verteilungsfunktion

$$F(n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[N = k] = \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (2.13)$$

den Erwartungswert, die Varianz und die momenterzeugende Funktion

$$\mathbb{E}[N] = \text{Var}[N] = \lambda, \quad M_N(s) = e^{\lambda(e^s - 1)} \quad (2.14)$$

Wenn die Schadenanzahl poissonverteilt ist $N \sim P(\lambda)$, wird die Verteilung des Gesamtschadens S zusammengesetzte Poisson-Verteilung (ZGP) genannt. In dem Fall bekommt man für den Erwartungswert (2.11), die Varianz (2.12) und die momenterzeugende Funktion von S (2.10)

$$\mathbb{E}[S] = \lambda\mathbb{E}[X], \quad \text{Var}[S] = \lambda\mathbb{E}[X^2], \quad M_S(s) = e^{\lambda(M_X(s) - 1)} \quad (2.15)$$

Weil die Zeitpunkte, wann die Schäden auftreten, von Bedeutung sind, führt man einen Zeitparameter $t \in \mathbb{R}_+$ ein. Der Gesamtschaden im Intervall $[0, t]$ wird durch die Zufallsvariable

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (2.16)$$

beschrieben. So ist $(S(t), t \geq 0)$ und $(N(t), t \geq 0)$ ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit, den man Gesamtschaden- und Schadenanzahlprozess nennt.

Definition 2.2. *Ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit ist eine Familie von Zufallsvariablen $S(t)$, $t \geq 0$.*

Für ein festes t handelt es sich bei $S(t)$ um eine Zufallssumme, für die die Resultate von oben für den Erwartungswert (2.11), die Varianz (2.12) und die momenterzeugende Funktion (2.10) gelten. Weil $N(t)$ beschreibt die Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt t , geht es bei $(N(t), t \geq 0)$ um einen Zählprozess.

Die Zeitpunkte, wann die Schäden auftreten, sind zufällig. Die werden Ankunftszeiten genannt und mit T_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, bezeichnet. $(T_n)_{n \geq 1}$ ist ein stochastischer Prozess, die man Schadenzeitenprozess nennt.

Es gilt

$$T_n = \inf \{t \in \mathbb{R}^+ : N(t) = n\}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$T_0 = 0$$

Weil die Ankunftszeiten zufällig sind, ist die Zeit zwischen dem Auftreten des $(n - 1)$ -ten und den n -ten Schadens auch zufällig. Die werden als Zwischenankunftszeiten genannt und mit W_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, bezeichnet. Also

$$W_n = T_n - T_{n-1}, \quad n \geq 1$$

Es folgt:

$$T_n = \sum_{i=1}^n W_i$$

Es wird davon ausgegangen, dass die Zwischenankunftszeiten W_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ und Einzelschäden X_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ sind unabhängig und sowie Einzelschäden identisch verteilt sind.

Es wird jetzt die zeitliche Entwicklung des Geschäftsverlaufs des Versicherungsunternehmens betrachtet.

$$\text{Startkapital} + \text{Prämieinnahmen} - \text{Schäden}$$

Dieser Prozess nennt man Reservenprozess, Risikoprozess oder auch Überschussprozess. Das klassische kollektive Risikomodell der Risikotheorie geht auf die Arbeiten von Filip Lundberg und Harald Crámer. Es wird als das klassische Crámer-Lundberg Prozess genannt. Es ist durch

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad R(0) = u \quad (2.17)$$

gegeben, wobei u für das Anfangskapital, $c > 0$ für die Prämienrate steht. Wie bisher angenommen sind die Einzelschäden $(X_i)_{i \geq 1}$ unabhängig identisch verteilt und von $N(t)$ unabhängig. Bei dem Crámer-Lundberg Modell wird als Zählprozess $(N(t), t \geq 0)$ der homogene Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ verwendet. Somit ist $S(t)$ zusammengesetzt poissonverteilt und der Gesamtschadenprozess $S(t)$ ist ein zusammengesetzter Poisson-Prozess.

Definition 2.3. Ein Zählprozess $(N(t), t \geq 0)$ ist ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ wenn

1. $N(0) = 0$ f.s.
2. $N(t)$ hat unabhängige Inkremente
3. $N(t) - N(s) \sim \text{Poi}(\lambda(t - s))$, $0 \leq s \leq t$
4. hat f.s. cadlag (rechtsstetig mit existierenden Limes von links) Pfade

Für das Versicherungsunternehmen ist es wichtig, dass der Reserveprozess $(R(t), t \geq 0)$ nicht negativ wird. Der Reserveprozess kann aber auch negativ werden. Dies Ereignis, dass der Reserveprozess zum ersten mal negative Werte annimmt, bezeichnet man als technischen Ruin, weil es noch nicht bedeutet, dass das Versicherungsunternehmen gleich bankrott geht. In der Ruinthorie ist die Ruinwahrscheinlichkeit, die Wahrscheinlichkeit mit der $R(t)$ negativ wird, eine verbreitetes Risikomass. Definiert man den Ruinzeitpunkt, den ersten Zeitpunkt wann der Ruin eintritt,

$$\tau = \inf\{t > 0; R(t) < 0\} \quad (2.18)$$

so wird die Ruinwahrscheinlichkeit mit Anfangskapital u im Zeitintervall $(0, t]$ durch

$$\psi(u, t) = \mathbb{P}[\tau \leq t | R(0) = u] = \mathbb{P}[\inf_{0 < s \leq t} R(s) < 0 | R(0) = u] \quad (2.19)$$

und die totale Ruinwahrscheinlichkeit mit Anfangskapital u

$$\psi(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = \mathbb{P}[\inf_{t > 0} R(t) < 0 | R(0) = u] = \mathbb{P}[\tau < \infty | R(0) = u] \quad (2.20)$$

Es ist offensichtlich, dass die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u)$ fallend in u ist.

Oft wird die Wahrscheinlichkeit $\phi(u)$, die sogenannte Überlebenswahrscheinlichkeit, dass für Startkapital u kein Ruin eintritt, betrachtet.

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) \tag{2.21}$$

In dem klassischen Crámer-Lundberg Modell wird es angenommen, dass

$$c > \lambda \mathbb{E}[X] \tag{2.22}$$

Diese Bedingung nennt man “Nettoprofitbedingung“. Das bedeutet, dass die Prämieinnahmen grösser als die erwarteten Anspruchszahlungen sind. Weil der Gesamtschaden zusammengesetzt poissonverteilt ist, ist der Erwartungswert von $R(t)$

$$\mathbb{E}[R(t)] = \mathbb{E}[u + ct - S(t)] = u + ct - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} X_i\right] = u + t(c - \lambda \mathbb{E}[X])$$

Nach dem starken Gesetz der grossen Zahlen ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = c - \lambda \mathbb{E}[X] \text{ f.s.}$$

So soll die Prämienrate einen Sicherheitszuschlag enthalten, da sonst der Ruin mit Sicherheit eintreten würde. Wir schreiben

$$c = (1 + \Lambda)\lambda \mathbb{E}[X], \quad \Lambda > 0 \tag{2.23}$$

Die Konstante Λ nennt man “relativer Sicherheitszuschlag“.

Weil bei dem klassischen Crámer-Lundberg Modell ($N(t)$, $t \geq 0$) ein homogener Poisson-Prozess ist, ist der ab dem Stoppzeit τ startende Prozess ein Crámer-Lundberg Prozess mit Anfangskapital $R(\tau)$. Ausgehend von dieser Tatsache und mithilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, bekommt man für die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\phi(u) = e^{-\lambda h} \phi(u + ch) + \int_0^h \int_0^{u+ct} \phi(u + ct - y) dF(y) \lambda e^{-\lambda t} dt \tag{2.24}$$

wobei $h > 0$ sehr klein ist. Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(u)$ stetig ist. Lässt man in (2.24) h gegen 0 laufen, so sieht man leicht, dass $\phi(u)$ rechts- und links differenzierbar ist und es gilt

$$c\phi'(u) = \lambda(\phi(u) - \int_0^u \phi(u - y) dF(y)) \tag{2.25}$$

Somit ist $\phi(u)$ in allen Punkten, wo $F(u)$ stetig ist, differenzierbar.

Die obere Integro-Differentialgleichung (2.25) ist schwer zu lösen. Es gilt offenbar

$$\begin{aligned}
c(\phi(u) - \phi(0)) &= c \int_0^u \phi'(x) dx = \lambda \left(\int_0^u \phi(x) dx - \int_0^u \int_0^x \phi(x-y) dF(y) dx \right) \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \lambda \left(\int_0^u \phi(x) dx - \int_0^u \int_y^u \phi(x-y) dx dF(y) \right) \\
&= \lambda \left(\int_0^u \phi(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-y} \phi(x) dx dF(y) \right) \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \lambda \left(\int_0^u \phi(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-x} dF(y) \phi(x) dx \right) \\
&= \lambda \int_0^u \phi(x) (1 - F(u-x)) dx
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Weil

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x dF(x) = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx$$

wenn $u \rightarrow \infty$ erhält man nach dem Satz von beschränkten Konvergenz

$$c(1 - \phi(0)) = \lambda \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \lambda \mu \tag{2.27}$$

Es folgt

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{c} \mu, \quad \psi(0) = \frac{\lambda}{c} \mu \tag{2.28}$$

Wenn die Laplace-Stieltjes Transformation der Schäden existiert, kann man die Integro-Differentialgleichung (2.25) lösen, indem man die Laplace Transformation verwendet. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit e^{-su} , $s \in \mathbb{C}$, und integriert danach die beiden Seiten von 0 bis ∞ , so bekommt die Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\hat{\phi}(s) = \frac{c\phi(0)}{cs - \lambda + \lambda M_X(-s)}, \quad \Re(s) > 0 \tag{2.29}$$

Im Allgemeinen führt die Laplace Transformation eine gegebene Funktion f vom reellen Zeitbereich t in eine Funktion F im Spektralbereich s über. Die Wichtigste dabei ist, dass die Differentiation und Integration im reellen Originalbereich einfache algebraische Operationen im Bildbereich entsprechen.

Für die numerischen Berechnungen der Überlebenswahrscheinlichkeit, kann man die inverse Laplace Transformation bzw. das Bromwich Integral

$$\phi(u) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{su} \hat{\phi}(s) ds, \quad \gamma > s_0 \tag{2.30}$$

verwenden, wobei s_0 die Konvergenzabszisse von $\hat{\phi}(s)$ ist. Bei den numerischen Berechnungen auf dem Computer tauchen Probleme, weil der Integrand oszilliert, wenn s gross ist. Für grosse s kann man den Integrand mit

$$\hat{\phi}(s)e^{su} \approx \frac{\phi(0)}{s} e^{su}$$

approximieren. Ersetz man

$$s = re^{i\varphi} = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$$

so bekommt man

$$\hat{\phi}(s)e^{su} \approx \frac{\phi(0)}{r} e^{-i\varphi} e^{ru \cos \varphi + iru \sin \varphi} = \frac{\phi(0)}{r} e^{ru \cos \varphi} e^{i(ru \sin \varphi - \varphi)}$$

Wenn der Imaginärteil verschwindet bzw

$$ru \sin \varphi - \varphi = 0$$

wird es keine Schwingungen geben. Dies legt nahe, die Kontur

$$s(\varphi) = \frac{1}{u}(\varphi \cot \varphi + i\varphi), \quad -\pi < \varphi < \pi \quad (2.31)$$

zu verwenden. Diese Kontur ist eine Talbot Kontur [13] und kann man im Allgemeinen für die numerische Berechnung der inversen Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit verwenden.

Im Allgemeinen hängt es von der Versicherungssparte ab, welche Verteilungsfunktionen geeignete Modelle für die Schäden darstellen. Statistische Analysen zeigen, dass die Gammaverteilung und die inverse Gauß-Verteilung als realistische Modelle für Einzelschäden in Frage kommen. Die Gammaverteilung $\Gamma(r, \alpha)$ ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ , mit der Dichte:

$$f(x) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0 \quad (2.32)$$

Die zwei Parameter sind der Formparameter $r > 0$ und Skalenparameter $\alpha > 0$. Ausgehend von der Dichte der Gammaverteilung ist die momenterzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} M_X(s) &= \mathbb{E}[e^{sX}] = \int_0^\infty e^{sx} f(x) dx = \int_0^\infty \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-(\alpha-s)x} dx \\ &= \frac{\alpha^r}{(\alpha-s)^r} \underbrace{\int_0^\infty \frac{(\alpha-s)^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-(\alpha-s)x} dx}_1 \\ &= \left(\frac{\alpha}{\alpha-s} \right)^r, \quad \Re(s) < \alpha \end{aligned} \quad (2.33)$$

Der Erwartungswert und die Varianz werden:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(s)|_{s=0} = \frac{r\alpha^r}{(\alpha-s)^{r+1}}|_{s=0} = \frac{r}{\alpha} \quad (2.34)$$

$$\mathbb{E}[X^2] = M''_X(s)|_{s=0} = \frac{r(r+1)\alpha^r}{(\alpha-s)^{r+2}}|_{s=0} = \frac{r(r+1)}{\alpha^2}$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{r(r+1)}{\alpha^2} - \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 = \frac{r}{\alpha^2} \quad (2.35)$$

Die inverse Gauß-Verteilung $IG(\delta, \gamma)$ ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ , mit der Dichte:

$$f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)}, \quad x > 0, \delta > 0, \gamma > 0 \quad (2.36)$$

Ausgehend von der Dichte der inversen Gauß-Verteilung ist die momenterzeugende Funktion:

$$\begin{aligned}
M_X(s) &= \mathbb{E}[e^{sX}] = \int_0^\infty e^{sx} \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma x^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma x^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + (\gamma^2 - 2s)x)} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma} e^{-\delta\sqrt{\gamma^2 - 2s}} e^{\delta\sqrt{\gamma^2 - 2s} x^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + (\gamma^2 - 2s)x)} dx \\
&= e^{\delta(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 2s})} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\sqrt{\gamma^2 - 2s} x^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + (\gamma^2 - 2s)x)} dx}_1 \\
&= e^{\delta\gamma(1 - \sqrt{1 - \frac{2s}{\gamma^2}})}, \Re(s) \leq \frac{\gamma^2}{2}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Der Erwartungswert und die Varianz werden:

$$\mathbb{E}[X] = M'_X(s)|_{s=0} = \frac{\delta}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2s}{\gamma^2}}} e^{\delta\gamma(1 - \sqrt{1 - \frac{2s}{\gamma^2}})} \Big|_{s=0} = \frac{\delta}{\gamma} \tag{2.38}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = M''_X(s)|_{s=0} = \left(\frac{\delta^2}{\left(1 - \frac{2s}{\gamma^2}\right) \gamma^2} + \frac{\delta}{\sqrt{\left(1 - \frac{2s}{\gamma^2}\right)^3} \gamma^3} \right) e^{\delta\gamma(1 - \sqrt{1 - \frac{2s}{\gamma^2}})} \Big|_{s=0} = \frac{\delta^2}{\gamma^2} - \frac{\delta}{\gamma^3}$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{\delta^2}{\gamma^2} - \frac{\delta}{\gamma^3} - \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\delta}{\gamma^3} \tag{2.39}$$

Kapitel 3

Einführung in Mittag-Leffler-Funktionen

Die nach dem schwedischen Mathematiker Gösta Magnus Mittag-Leffler benannte Funktion

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, z \in \mathbb{C} \quad (3.1)$$

ist eine Verallgemeinerung der Exponentialfunktion

$$f(z) = e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Wenn man im Nenner bei der Gamma Funktion (3.1) $\alpha = 1$ nimmt, bekommt man unmittelbar die Exponentialfunktion. Mittag-Leffler definierte und studierte die Funktion zwischen 1902-1905 [2]. Diese Form von Mittag-Leffler Funktion hat nur ein Parameter und ist als klassische Mittag-Leffler Funktion bekannt.

Die zwei Parameter Form der Mittag-Leffler Funktion

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \Re(\alpha) > 0, \Re(\beta) > 0, z \in \mathbb{C} \quad (3.2)$$

ist eine Verallgemeinerung von der ein Parameter Mittag-Leffler Funktion. Wenn man im Nenner bei der Gamma Funktion (3.2) $\beta = 1$ nimmt, bekommt man unmittelbar die ein Parameter Mittag-Leffler Funktion. Es ist offensichtlich eine weitere Verallgemeinerung der Exponentialfunktion. Die Form ist von Humbert und Argaval 1953, sowie Dzherbashyan 1954 weitreichend studiert [2].

Im weiteren kann man die Exponentialfunktion als ein Parameter bzw. zwei Parameter Mittag-Leffler Funktion schreiben.

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = E_1(z) = E_{1,1}(z), \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.3)$$

Bemerkung 3.1. Manche Mittag-Leffler Funktionen kann man mit unvollständigen Gamma Funk-

tionen ausdrücken.

$$\begin{aligned}
E_{1,\beta}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+\beta)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\beta-1)\Gamma(k+1)} B(\beta-1, k+1) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\beta-1)\Gamma(k+1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} t^k dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xt)^k}{\Gamma(k+1)}}_{\text{Taylorreihe von } e^{xt} \text{ in } 0} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta-1)} \int_0^1 (1-t)^{\beta-2} e^{xt} dt = x^{1-\beta} e^x \frac{\gamma(\beta-1, x)}{\Gamma(\beta-1)} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.2. Die n -fache Ableitung der zwei Parametern Mittag-Leffler Funktion kann man explizit berechnen. Ausgehend von der Berechnung der ersten und zweiten Ableitung

$$E_{\alpha,\beta}^{(1)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

$$E_{\alpha,\beta}^{(2)}(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)z^{k-2}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

kann man leicht sehen, dass

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,\beta}^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)z^{k-n}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \sum_{k=n-0}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)z^{k-n}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j)(n+j-1)\cdots(j+1)z^j j!}{\Gamma(\alpha(n+j) + \beta)} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j)!z^j}{j!\Gamma(\alpha j + \alpha n + \beta)} \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Die nächste Lemma gibt uns eine ganz wichtige analytische Eigenschaft der zwei Parameter Mittag-Leffler Funktion.

Lemma 3.3. Sei

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad \Re(\beta) > 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Dann ist:

$$\int_0^{\infty} e^{-sz} z^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm az^{\alpha}) dz = \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^{\alpha} \mp a)^{k+1}}, \quad \Re(s) > |a|^{1/\alpha} \tag{3.6}$$

Beweis. Für $z = \gamma + 1$ und $t = sz$ aus der Definition der Gamma Funktion ergibt sich:

$$\Gamma(\gamma + 1) = \int_0^{\infty} t^{\gamma} e^{-t} dt = s^{\gamma+1} \int_0^{\infty} z^{\gamma} e^{-sz} dz$$

Weiter:

$$\binom{-k-1}{j} = \frac{(-k-1)\cdots(-k-j)}{j!} = (-1)^j \frac{(j+k)\cdots(k+1)}{j!} = (-1)^j \binom{j+k}{j}$$

Bei dem nächsten Schritt wird Fubini-Tonelli Satz, Binomische Reihe, Lehrsatz für komplexe Exponenten und Bemerkung 3.2 verwendet. Wir fangen von der rechte Seite der Formel in (3.6) an.

$$\begin{aligned}
\frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha - a)^{k+1}} &= \frac{k!}{s^{\alpha k + \beta} \left(1 - \frac{a}{s^\alpha}\right)^{k+1}} = \frac{k!}{s^{\alpha k + \beta}} \left(1 - \frac{a}{s^\alpha}\right)^{-(k+1)} \\
&= \frac{k!}{s^{\alpha k + \beta}} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-k-1}{j} (-1)^j \frac{a^j}{s^{\alpha j}} = \frac{k!}{s^{\alpha k + \beta}} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{j+k}{j} \frac{a^j}{s^{\alpha j}} \\
&= k! \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{j+k}{j} \frac{a^j}{s^{\alpha j + \alpha k + \beta}} \frac{\Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)}{\Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{j!} \frac{a^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)} \int_0^\infty e^{-sz} z^{\alpha j + \alpha k + \beta - 1} dz \\
&= \int_0^\infty e^{-sz} z^{\alpha k + \beta - 1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{j!} \frac{(az^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha k + \beta)} dz \\
&= \int_0^\infty e^{-sz} z^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(az^\alpha) dz
\end{aligned}$$

Analog wird auch

$$\frac{k!s^{\alpha-\beta}}{(s^\alpha + a)^{k+1}} = \int_0^\infty e^{-sz} z^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(-az^\alpha) dz$$

berechnet. □

Kapitel 4

Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden mit Formparameter r rational in Form einer endlichen Summe von Mittag-Leffler Funktionen

Wir betrachten das klassische Risikomodell mit Gamma-Schäden. Zur Erinnerung aus dem Kapitel 1, ist die Gammaverteilung $\Gamma(r, \alpha)$ eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ , mit der Dichte:

$$f(x) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0$$

Die zwei Parameter sind der Formparameter $r > 0$ und Skalenparameter $\alpha > 0$.

Der Erwartungswert, die Varianz und die momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung sind:

$$\begin{aligned}\mu &= E[X] = \frac{r}{\alpha} \\ \text{Var}[X] &= \frac{r}{\alpha^2} \\ M_X(s) &= \left(\frac{\alpha}{\alpha - s} \right)^r, \quad \Re(s) < \alpha\end{aligned}$$

Wie im Kapitel 1 nehmen wir weiter an, dass die Nettoprofitbedingung

$$c > \lambda \frac{r}{\alpha}$$

erfüllt ist.

Der nächste Satz drückt die Überlebenswahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell mit Gamma-Schäden als unendliche Summe von Mittag-Leffler Funktionen aus, wenn der Formparameter r rational ist, $r = m/n$.

Satz 4.1. *Die Überlebenswahrscheinlichkeit für das klassische Model mit Gamma-Schäden mit dem Formparameter $r \in \mathbb{Q}_+$, und Skalenparameter $\alpha > 0$ ist:*

$$\phi(u) = e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^{m+n-1} m_{\ell} u^{\frac{1}{n}-1} E_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}}(s_{\ell} u^{\frac{1}{n}}), \quad r = m/n \quad (4.1)$$

Die Koeffizienten s_{ℓ} sind die einfachen Nullstellen des Polynoms (4.2):

$$Q_r(t) = (c(t^n - \alpha) - \lambda)t^m + \lambda \alpha \frac{m}{n}, \quad r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+ \quad (4.2)$$

und die Koeffizienten m_ℓ ergeben sich aus der Partialbruchzerlegung von

$$\frac{P_r(t)}{Q_r(t)} = \sum_{\ell=0}^{m+n-1} \frac{m_\ell}{t-s_\ell} \quad (4.3)$$

wobei

$$P_r(t) = c\phi(0)t^m \quad (4.4)$$

Beweis. Im Kapitel 1 haben wir gezeigt, dass die Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\hat{\phi}(s) = \frac{c\phi(0)}{cs - \lambda + \lambda M_X(-s)}, \quad \Re(s) > 0$$

Weil die Laplace Transformation der Dichte von Gammaverteilung $\Gamma(r, \alpha)$

$$\hat{f}(s) = M_X(-s) = \left(\frac{\alpha}{s + \alpha} \right)^r, \quad \Re(s) > -\alpha$$

$$\implies \hat{\phi}(s) = \frac{c\phi(0)}{cs - \lambda + \lambda \left(\frac{\alpha}{s + \alpha} \right)^r} = \frac{c\phi(0)(s + \alpha)^r}{(cs - \lambda)(s + \alpha)^r + \lambda\alpha^r}$$

Für rationalen $r = \frac{m}{n}$ betrachten wir die im Bildbereich verschobene Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(s - \alpha) &= \frac{c\phi(0)}{c(s - \alpha) - \lambda + \lambda \left(\frac{\alpha}{s} \right)^{m/n}} \\ &= \frac{c\phi(0)s^{m/n}}{(c(s - \alpha) - \lambda)s^{m/n} + \lambda\alpha^{m/n}} \\ &= \frac{P_r(s^{\frac{1}{n}})}{Q_r(s^{\frac{1}{n}})} \end{aligned}$$

Durch Ersetzen von $s^{\frac{1}{n}} = t$ werden:

$$P_r(t) = c\phi(0)t^m, \quad \text{Polynom des Grades } m$$

$$Q_r(t) = (c(t^n - \alpha) - \lambda)t^m + \lambda\alpha^{\frac{m}{n}}, \quad \text{Polynom des Grades } m + n$$

$Q_r(t)$ hat die Nullstellen $s_0, s_1, \dots, s_{m+n-1}$.

Die Nullstellen der ersten Ableitung des Polynoms $Q_r(t)$

$$Q'_r(t) = (c(m+n)t^n - m(c\alpha + \lambda))t^{m-1} = 0$$

sind

$$t_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-2$$

und

$$t_k = \sqrt[n]{\frac{m(c\alpha + \lambda)}{c(n+m)}} e^{\frac{i2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Unmittelbar sieht man, dass die Nullstelle 0 keine Nullstelle des Polynoms $Q_r(t)$ ist. Ersetzt man t in $Q_r(t)$ mit der t_k Nullstelle, so bekommt man

$$Q(t_k) = \left(\frac{m(c\alpha + \lambda)}{n+m} - \alpha c - \lambda \right) \left(\frac{m(\alpha + \frac{\lambda}{c})}{n+m} \right)^{\frac{m}{n}} e^{\frac{i2k\pi m}{n}} + \lambda \alpha^{\frac{m}{n}}$$

t_k ist die Nullstelle von $Q_r(t)$ nur wenn

$$\begin{aligned} \left(\frac{m(c\alpha + \lambda)}{n+m} - \alpha c - \lambda \right) &= -\lambda \\ \left(\frac{m(\alpha + \frac{\lambda}{c})}{n+m} \right)^{\frac{m}{n}} &= \alpha^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

und $\frac{km}{n}$ ganzzahlig ist. In dem Fall wird

$$c = \frac{m\lambda}{n\alpha} = \lambda \frac{r}{\alpha}$$

Weil

$$c > \lambda \frac{r}{\alpha}$$

angenommen wurde, sind keine der Nullstellen von $Q_r'(t)$ Nullstellen von $Q_r(t)$. So wurde gezeigt, dass $Q_r(t)$ $m+n$ einfache Nullstellen hat.

Die Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{P_r(t)}{Q_r(t)} &= \sum_{\ell=0}^{m+n-1} \frac{m_\ell}{t-s_\ell} \\ \implies \hat{\phi}(s-\alpha) &= \sum_{\ell=0}^{m+n-1} \frac{m_\ell}{s^{\frac{1}{n}}-s_\ell} \end{aligned}$$

Ausgehend von der analytischen Eigenschaft (3.6) der zwei Parameter der Mittag-Leffler Funktion für $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = \frac{1}{n}$, $k=0$, $s_\ell = a$, n natürliche Zahl:

$$\int_0^\infty e^{-sz} z^{\alpha-0+\frac{1}{n}-1} E_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}}(s_\ell z^{\frac{1}{n}}) dz = \frac{1}{s^{\frac{1}{n}}-s_\ell} \quad (4.5)$$

$$\implies \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{1}{n}}-s_\ell}; s, u \right] = u^{\frac{1}{n}-1} E_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}}(s_\ell u^{\frac{1}{n}}) \quad (4.6)$$

Schliesslich bekommen wir für die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^{m+n-1} m_\ell \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^{\frac{1}{n}}-s_\ell}; s, u \right] \\ &= e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^{m+n-1} m_\ell u^{\frac{1}{n}-1} E_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}}(s_\ell u^{\frac{1}{n}}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

□

Bemerkung 4.2. Die Polynomen $P_r(t)$ und $Q_r(t)$ kann man durch ihre Taylorreihen mit Entwicklungsstelle s_ℓ darstellen. Deswegen wird ihr Ratio:

$$\frac{P_r(t)}{Q_r(t)} = \frac{P_r(s_\ell) + \frac{P_r'(s_\ell)}{1!}(t-s_\ell) + \frac{P_r''(s_\ell)}{2!}(t-s_\ell)^2 + \dots}{Q_r(s_\ell) + \frac{Q_r'(s_\ell)}{1!}(t-s_\ell) + \frac{Q_r''(s_\ell)}{2!}(t-s_\ell)^2 + \dots}$$

Weil s_ℓ Nullstelle des Polynoms $Q_r(t)$ ist, ist

$$Q_r(s_\ell) = 0$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{P_r(t)}{Q_r(t)} &= \frac{1}{t-s_\ell} \frac{P_r(s_\ell) + \frac{P_r'(s_\ell)}{1!}(t-s_\ell) + \frac{P_r''(s_\ell)}{2!}(t-s_\ell)^2 + \dots}{\frac{Q_r'(s_\ell)}{1!} + \frac{Q_r''(s_\ell)}{2!}(t-s_\ell) + \dots} \\ &= \frac{P_r(s_\ell) + \frac{P_r'(s_\ell)}{1!}(t-s_\ell) + \frac{P_r''(s_\ell)}{2!}(t-s_\ell)^2 + \dots}{\frac{Q_r'(s_\ell)}{1!} + \frac{Q_r''(s_\ell)}{2!}(t-s_\ell) + \dots} = (t-s_\ell) \sum_{\ell=0}^{m+n-1} \frac{m_\ell}{t-s_\ell} \end{aligned}$$

Für $t = s_\ell$ bekommt man

$$\frac{P_r(s_\ell)}{Q_r'(s_\ell)} = m_\ell \quad (4.8)$$

Bemerkung 4.3. Für $n = 1$ ist r positiv ganzzahlig bzw. ist natürlichzahlig. In dem Fall ist die Dichte von Gammaverteilung $\Gamma(r, \alpha)$:

$$f(x) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x} = \frac{\alpha^r}{(r-1)!} x^{r-1} e^{-\alpha x}, \quad x \geq 0$$

gleich die Dichte von Erlangverteilung $\text{Erl}(\alpha, r)$, die ein spezieller Fall der Gammaverteilung ist.

In dem Fall und wegen (3.3) wird die Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^r m_\ell E_{1,1}(s_\ell u) = e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^r m_\ell e^{s_\ell u} \\ &= \sum_{\ell=0}^r m_\ell e^{(s_\ell - \alpha)u} \end{aligned}$$

Wie ersetzen

$$s_\ell - \alpha = \widehat{s}_\ell$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit wird:

$$\phi(u) = \sum_{\ell=0}^r m_\ell E_{1,1}(\widehat{s}_\ell u) = \sum_{\ell=0}^r m_\ell e^{\widehat{s}_\ell u} \quad (4.9)$$

Bemerkung 4.4. Für $m = 1$ und $n = 1$ ist $r = 1$. Wenn $r = 1$ bekommen wir von der Gammaverteilung die Exponentialverteilung $\text{Exp}(\alpha)$ mit Parameter $\alpha > 0$. Die Überlebenswahrscheinlichkeit in dem Fall wird

$$\begin{aligned} \phi(u) &= e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^1 m_\ell E_{1,1}(s_\ell u) = e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^1 m_\ell e^{s_\ell u} \\ &= \sum_{\ell=0}^1 m_\ell e^{(s_\ell - \alpha)u} \end{aligned}$$

Berechnung der Koeffizienten s_ℓ und m_ℓ aus (4.3) bzw. (4.8) ergibt:

$$s_0 = \alpha, \quad s_1 = \frac{\lambda}{c}$$

$$m_0 = \frac{c\alpha}{c\alpha - \lambda}\phi(0), \quad m_1 = -\frac{\lambda}{c\alpha - \lambda}\phi(0)$$

So folgt

$$\phi(u) = m_0 e^{(s_0 - \alpha)u} + m_1 e^{(s_1 - \alpha)u} = \frac{c\alpha}{c\alpha - \lambda}\phi(0) - \frac{\lambda}{c\alpha - \lambda}\phi(0)e^{(\frac{\lambda}{c} - \alpha)u}$$
(4.11)

Weil die Überlebenswahrscheinlichkeit mit dem Startkapital 0

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}, \quad \text{und } \psi(0) = \frac{\lambda}{\alpha c}$$

wird

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{c\alpha} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}$$

und die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\alpha} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}$$
(4.12)

Für $r = 1$ reduziert sich der Ausdruck in Satz 4.1 auf das klassische Ergebnis von Cramér.

Bemerkung 4.5. In der Bemerkung 4.4 Formel (4.12)

$$R = \alpha - s_1 = \alpha - \frac{\lambda}{c}$$

ist die Lösung der Lundberg Gleichung

$$M_X(s)M_T(-cs) = 1$$

wobei

$$M_X(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - s} \right), \quad \Re(s) < \alpha$$

ist die momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung $X \sim \Gamma(1, \alpha) = \text{Exp}(\alpha)$ und

$$M_T(-cs) = \frac{\lambda}{\lambda + sc}, \quad \Re(s) > -\frac{\lambda}{c}$$

ist die Laplace Transformation der Exponentialverteilung $T \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Beispiel 4.6. Für

$$r = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 1, \quad n = 2$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit aus (4.1) wird:

$$\phi(u) = e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^2 m_\ell u^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(s_\ell u^{\frac{1}{2}})$$

Die Berechnung der Koeffizienten s_ℓ und m_ℓ aus (4.3) bzw. (4.8) ergibt:

$$s_0 = \sqrt{\alpha}, \quad s_1 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\alpha c}} \right), \quad s_2 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\lambda}{\alpha c}} \right)$$

$$m_0 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \quad m_1 = \frac{\phi(0)s_1}{3s_1^2 - \alpha - \frac{\lambda}{c}}, \quad m_2 = \frac{\phi(0)s_2}{3s_2^2 - \alpha - \frac{\lambda}{c}}$$

wobei

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda r}{\alpha c} = 1 - \frac{\lambda}{2\alpha c}$$

die Überlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0 ist.

Beispiel 4.7. Für

$$r = 2 \Rightarrow m = 2, \quad n = 1$$

Wegen (3.3) wird die Überlebenswahrscheinlichkeit aus (4.1):

$$\phi(u) = e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^2 m_\ell E_{1,1}(s_\ell u) = e^{-\alpha u} \sum_{\ell=0}^2 m_\ell e^{s_\ell u}$$

Die Berechnung der Koeffizienten s_ℓ und m_ℓ aus (4.3) bzw. (4.8) ergibt:

$$s_0 = \alpha, \quad s_1 = \frac{\lambda}{2c} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha c}{\lambda}} \right), \quad s_2 = \frac{\lambda}{2c} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha c}{\lambda}} \right)$$

$$m_0 = 1, \quad m_1 = \frac{\phi(0)s_1}{3s_1 - 2(\alpha + \frac{\lambda}{c})}, \quad m_2 = \frac{\phi(0)s_2}{3s_2 - 2(\alpha + \frac{\lambda}{c})}$$

wobei

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda r}{\alpha c} = 1 - \frac{2\lambda}{\alpha c}$$

die Überlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0 ist.

Nach dem Ersetzen von m_0 und s_0 wird die Wahrscheinlichkeitswahrscheinlichkeit

$$\phi(u) = 1 + m_1 e^{(s_1 - \alpha)u} + m_2 e^{(s_2 - \alpha)u}$$

Kapitel 5

Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden in Form einer unendlichen Summe von Faltungen der Mittag-Leffler-Funktionen

In dem Kapitel wird die Überlebenswahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell mit Gamma-Schäden als unendliche Summe von Faltungen der Mittag-Leffler Funktionen ausgedrückt. Auch hier wird es angenommen, dass die Nettoprofitbedingung

$$c > \lambda \frac{r}{\alpha}$$

erfüllt ist. Als Erweiterung der im Kapitel 1 Definition 2.1 ist die n-fache Faltung einer auf der Menge der positiven reellen Zahlen definierten Funktion f :

$$f^{*n}(x) = \int_0^x f^{*(n-1)}(x-y)f(y)dy, \quad x \geq 0$$

$$f^{*1}(x) = f(x), \quad x \geq 0$$

$$f^{*0}(x) = \delta_0(x), \quad x \geq 0$$

Satz 5.1. Die Überlebenswahrscheinlichkeit für das klassische Modell mit Gamma-Schäden mit Formparameter $r > 0$ and Skalenparameter $\alpha > 0$ ist:

$$\phi(u) = e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} + e^{\alpha u} * \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n [e^{\alpha u} - (\alpha u)^r E_{1,1+r}(\alpha u)]^{*n} \right) \right\} \quad (5.1)$$

Beweis. Im Kapitel 1 haben wir gezeigt, dass die Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\hat{\phi}(s) = \frac{c\phi(0)}{cs - \lambda + \lambda M_X(-s)}, \quad \Re(s) > 0$$

ist, wobei M_X die momenterzeugende Funktion ist. Weiter kann man

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\phi(0)}{s} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c} \left(\frac{1}{s} - \frac{M_X(-s)}{s} \right)} = \phi(0) \frac{1}{s} \frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c} \left(\frac{1 - M_X(-s)}{\mu s} \right)}$$

schreiben, wobei

$$\mu = E[X] = \frac{r}{\alpha}$$

Im Anhang A ist es gezeigt, dass die Tail-Verteilung

$$g(x) = \frac{1}{\mu} \mathbb{P}(X > x), \quad x \geq 0 \quad (5.2)$$

eine Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, dass dessen Laplace Transformation der Term im Nenner

$$\hat{g}(s) = \frac{1 - M_X(-s)}{\mu s} = \frac{1}{\mu s} (1 - \hat{f}(s)) \quad (5.3)$$

ist und im $(0, 1)$ liegt. Wegen Nettoprofitbedingung

$$c > \lambda \mu$$

liegt

$$\frac{\lambda \mu}{c} \left(\frac{1 - M_X(-s)}{\mu s} \right)$$

in $(0, 1)$.

Weil die Laplace Transformation der Dichte von $\Gamma(r, \alpha)$

$$\hat{f}(s) = M_X(-s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^r, \quad \Re(s) > -\alpha$$

wird

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\phi(0)}{s} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{cs} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^r \right)} \quad (5.4)$$

Wir erkennen in (5.4) die geometrische Reihe mit dem allgemeinen Term

$$\frac{\lambda}{c} \left(\frac{1}{s} - \frac{\alpha^r}{s(s + \alpha)^r} \right) \quad (5.5)$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(s) = \frac{\phi(0)}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \left(\frac{1}{s} - \frac{\left(\frac{\alpha}{s + \alpha} \right)^r}{s} \right)^n \quad (5.6)$$

Für $s > \alpha$ können wir das Argument von (5.4) verschieben.

$$\hat{\phi}(s - \alpha) = \frac{\phi(0)}{s - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \left(\frac{1}{s - \alpha} - \frac{\alpha^r}{(s - \alpha)s^r} \right)^n \quad (5.7)$$

Weil $s > \alpha$, folgt:

$$\frac{1}{s - \alpha} - \frac{\alpha^r}{(s - \alpha)s^r} = \frac{1}{s - \alpha} - \frac{\alpha^r}{s^{r+1}} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{s}} \quad (5.8)$$

Wir erkennen in (5.8) wieder eine geometrische Reihe mit dem Term $\left(\frac{\alpha}{s} \right) < 1$:

$$\Rightarrow \frac{1}{s - \alpha} - \frac{\alpha^r}{(s - \alpha)s^r} = \frac{1}{s - \alpha} - \frac{\alpha^r}{s^{r+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{s} \right)^i = \frac{1}{s - \alpha} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^{r+i}}{s^{r+i+1}}$$

Zur Erinnerung:

$$\mathcal{L}[e^{\alpha u}] = \int_0^{\infty} e^{\alpha u} e^{-s\alpha} du = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)u} dy = \frac{1}{s-\alpha}, \Re(s) > \alpha, \alpha > 0 \quad (5.9)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{u^n}{n!}\right] = \int_0^{\infty} \frac{u^n}{n!} e^{-su} du = \frac{1}{s} \int_0^{\infty} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-su} du = \dots = \frac{1}{s^{n+1}}, \Re(s) > 0 \quad (5.10)$$

Wegen der Linearität Eigenschaft des Integrals und Definition der Gamma Funktion für jede natürliche Zahl folgt:

$$\frac{1}{s-\alpha} - \frac{\alpha^r}{(s-\alpha)s^r} = \int_0^{\infty} e^{-su} \left(e^{\alpha u} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^{r+i}}{\Gamma(r+i+1)} u^{r+i} \right) du \quad (5.11)$$

So folgt aus

$$\hat{\phi}(s-\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha)u} \phi(u) du$$

und des Faltungssatzes, dass:

$$e^{\alpha u} \phi(u) = \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \left[e^{\alpha u} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^{r+i}}{\Gamma(r+i+1)} u^{r+i} \right]^{*n} \right) \right\} \quad (5.12)$$

Aus der Definition der Mittag-Leffler Funktion (3.2) für $\alpha = 1$ und $\beta = 1 + r$ folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{\Gamma(r+i+1)} u^i &= E_{1,1+r}(\alpha u) \\ \implies e^{\alpha u} \phi(u) &= \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n [e^{\alpha u} - \alpha u^r E_{1,1+r}(\alpha u)]^{*n} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

□

Bemerkung 5.2. Man kann leicht die untere Relation (5.14) beweisen.

$$e^{\alpha u} \bar{F}_X(u) = e^{\alpha u} - \alpha^r u^r E_{1,r+1}(\alpha u) \quad (5.14)$$

Mit der Substitution von Argument x durch $\frac{k}{\alpha}$, und der Verwendung der Bemerkung 3.1, bekommen wir:

$$\begin{aligned} e^{\alpha u} \bar{F}_X(u) &= e^{\alpha u} (1 - F_X(u)) = e^{\alpha u} \left(1 - \int_0^u \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x} dx \right) \\ &= e^{\alpha u} \left(1 - \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^{\alpha u} k^{r-1} e^{-k} dk \right) = e^{\alpha u} \left(1 - \frac{1}{\Gamma(r)} \gamma(r, \alpha u) \right) \\ &= e^{\alpha u} (1 - (\alpha u)^r e^{-\alpha u} E_{1,r+1}(\alpha u)) = e^{\alpha u} - \alpha^r u^r E_{1,r+1}(\alpha u) \end{aligned}$$

Die obere Berechnung, die Definition von Faltung und n -Faltung sowie die Faltungseigenschaften erlauben es, wie folgend die Überlebenswahrscheinlichkeit zu schreiben:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n [e^{\alpha u} - (\alpha u)^r E_{1,1+r}(\alpha u)]^{*n} \right) \right\} \\
&= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n [e^{\alpha u} \bar{F}_X(u)]^{*n} \right) \right\} \\
&= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\delta_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n [e^{\alpha u} \bar{F}_X(u)]^{*n} \right) \right\} \\
&= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \left(e^{\alpha u} * [e^{\alpha u} \bar{F}_X(u)]^{*n} \right) \right\} \\
&= \phi(0) + \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_0^u \bar{F}_X^{*n}(y) dy \\
&= \phi(0) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_0^u \bar{F}_X^{*n}(y) dy \right) \\
&= \phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_0^u \bar{F}_X^{*n}(y) dy \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Man kann die Ruinwahrscheinlichkeit berechnen.

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= 1 - \phi(u) = 1 - \phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_0^u \bar{F}_X^{*n}(y) dy \\
&= 1 - \left\{ \phi(0) + \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \left[\int_0^{\infty} \bar{F}_X^{*n}(y) dy - \int_u^{\infty} \bar{F}_X^{*n}(y) dy \right] \right\}
\end{aligned}$$

Das Berechnen von dem ersten Integral mithilfe von der Faltung Definition und dem Fubini-Tonelli Satz ergibt:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \bar{F}_X^{*n}(y) dy &= \int_0^{\infty} \int_0^y \bar{F}_X^{*(n-1)}(u) \bar{F}_X(y-u) du dy \\
&= \int_0^{\infty} \bar{F}_X^{*(n-1)}(u) \int_u^{\infty} \bar{F}_X(y-u) dy du \\
&= \int_0^{\infty} \bar{F}_X^{*(n-1)}(u) \int_0^{\infty} \bar{F}_X(t) dt du \\
&= \mu \int_0^{\infty} \bar{F}_X^{*(n-1)}(u) du = \dots \\
&= \mu^n
\end{aligned}$$

Man kann weiter die Ruinwahrscheinlichkeit berechnen.

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= 1 - \left(\phi(0) + \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \mu^n - \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_u^{\infty} \bar{F}_X^{*n}(y) dy \right) \\
&= 1 - \left(\phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda \mu}{c} \right)^n - \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_u^{\infty} \bar{F}_X^{*n}(y) dy \right)
\end{aligned}$$

Wegen Nettoprofitbedingung ist $\frac{\lambda\mu}{c} < 1$, und die geometrische Reihe wird konvergieren.

$$\psi(u) = 1 - \left(\phi(0) \frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c}} - \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_u^{\infty} \bar{F}_X^{*n}(y) dy \right)$$

Weil $\phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$, schliesslich wird die Ruinwahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= 1 - \left(\phi(0) \frac{1}{\phi(0)} - \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_u^{\infty} \bar{F}_X^{*n}(y) dy \right) \\ &= \phi(0) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \int_u^{\infty} \bar{F}_X^{*n}(y) dy \end{aligned} \quad (5.16)$$

Die erworbene Formel ist als Beekman Formel bekannt.

Bemerkung 5.3. Für $r = 1$ reduziert sich der Ausdruck in Satz 5.1 auf das klassische Ergebnis von Cramér.

Für $r = 1$ ist der Ausdruck in eckiger Klammer in Satz 5.1 für alle $u > 0$ gleich 1. Die Lemma B.1 gibt seine n -fache Faltung.

$$1^{*n} = \frac{u^{n-1}}{(n-1)!}, \quad u > 0, \quad n \geq 1 \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \phi(u) &= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n 1^{*n} \right) \right\} \\ &= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\delta_0(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right\} \\ &= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\delta_0(u) + \underbrace{\frac{\lambda}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \frac{u}{n!}}_{\text{Taylorreihe von } e^{\frac{\lambda}{c}u} \text{ in } 0} \right) \right\} \\ &= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} + \frac{\lambda}{c} \underbrace{e^{\alpha u} * e^{\frac{\lambda}{c}u}}_I \right\} \\ &= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} + \frac{\lambda}{c} \left(\alpha - \frac{\lambda}{c} \right)^{-1} e^{\frac{\lambda}{c}u} \left[e^{(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} - 1 \right] \right\} \\ &= \phi(0) \frac{\alpha c}{\alpha c - \lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Es folgt ausführlich die Berechnung von mit I bezeichnete Faltung.

$$I: e^{\alpha u} * e^{\frac{\lambda}{c}u} = e^{\frac{\lambda}{c}u} \int_0^u e^{(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} du = \left(\alpha - \frac{\lambda}{c} \right)^{-1} e^{\frac{\lambda}{c}u} \left(e^{(\alpha - \frac{\lambda}{c})u} - 1 \right) \quad (5.19)$$

Weil $\phi(0) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c}$, so wird die Überlebenswahrscheinlichkeit (5.18):

$$\phi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}$$

Bemerkung 5.4. Für r ganzzahlig wird:

$$\begin{aligned}
E_{1,1+r}(\alpha u) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha u)^k}{\Gamma(k+r+1)} = \frac{1}{(\alpha u)^r} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(\alpha u)^k}{\Gamma(k+1)} \\
&= \frac{1}{(\alpha u)^r} \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha u)^k}{\Gamma(k+1)}}_{\text{Taylorreihe von } e^{\alpha u} \text{ in } 0} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\alpha u)^k}{\Gamma(k+1)} \right) \\
&= \frac{1}{(\alpha u)^r} \left(e^{\alpha u} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\alpha u)^k}{\Gamma(k+1)} \right) \tag{5.20}
\end{aligned}$$

So wird die Überlebenswahrscheinlichkeit von Satz 5.1:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \left[e^{\alpha u} - (\alpha u)^r \frac{1}{(\alpha u)^r} \left(e^{\alpha u} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right) \right] \right\} \\
&= e^{-\alpha u} \phi(0) \left\{ e^{\alpha u} * \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \left[\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\alpha u)^k}{k!} \right]^{*n} \right) \right\} \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Für $r = 2$ wird der Term in den eckigen Klammern $1 + \alpha u$. Seine n -fache Faltung mit Hilfe des Faltungssatzes ist:

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha u)^{*n} &= \underbrace{(1 + \alpha u) * (1 + \alpha u) * \dots * (1 + \alpha u)}_{n\text{-mal}} \\
\mathcal{L}[(1 + \alpha u)^{*n}] &= \underbrace{\mathcal{L}[1 + \alpha u] \cdot \mathcal{L}[1 + \alpha u] \cdot \mathcal{L}[1 + \alpha u] \cdot \dots \cdot \mathcal{L}[1 + \alpha u]}_{n\text{-mal}} \\
\mathcal{L}[1 + \alpha u] &= \int_0^{\infty} (1 + \alpha u) e^{-tu} du = \frac{t + \alpha}{t^2} \tag{5.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(1 + \alpha u)^{*n}] &= \left(\frac{t + \alpha}{t^2} \right)^n = \binom{n}{0} \frac{1}{t^n} + \binom{n}{1} \frac{\alpha}{t^{n+1}} \\
&+ \binom{n}{2} \frac{\alpha^2}{t^{n+2}} + \dots + \binom{n}{n-1} \frac{\alpha^{n-1}}{t^{2n-1}} + \binom{n}{n} \frac{\alpha^n}{t^{2n}} \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Aus (5.10):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1} \left[\left(\frac{t + \alpha}{t^2} \right)^n ; t, u \right] &= \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} + \binom{n}{1} \alpha \frac{u^n}{n!} + \binom{n}{2} \alpha^2 \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} \\
&+ \dots + \binom{n}{n-1} \alpha^{n-1} \frac{u^{2n-2}}{(2n-2)!} + \binom{n}{n} \alpha^n \frac{u^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{\alpha^i u^{n+i-1}}{(n+i-1)!} \tag{5.24}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 + \alpha u)^{*n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{\alpha^i u^{n+i-1}}{(n+i-1)!} \tag{5.25}$$

Weiter wird die Faltung von $e^{\alpha u}$ und die n-fache Faltung des Termes in den eckigen Klammern berechnet. Man erinnert sich, dass die Faltung von $e^{\alpha u}$ and u^k ist:

$$\begin{aligned} e^{\alpha u} * u^k &= \int_0^u e^{\alpha(u-s)} s^k ds = e^{\alpha u} \int_0^u e^{-\alpha s} s^k ds \\ &= -\sum_{j=1}^k \frac{u^j k!}{\alpha^{k+1-j} j!} + e^{\alpha u} \frac{k!}{\alpha^k} \int_0^u e^{-\alpha s} ds \\ &= -\sum_{j=0}^k \frac{u^j k!}{\alpha^{k+1-j} j!} + \frac{k!}{\alpha^{k+1}} e^{\alpha u} \end{aligned}$$

Aus der Distributivität Eigenschaft der Faltung folgt:

$$\begin{aligned} e^{\alpha u} * (1 + \alpha u)^{*n} &= e^{\alpha u} * \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{\alpha^i u^{n+i-1}}{(n+i-1)!} \right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(e^{\alpha u} * \frac{\alpha^i u^{n+i-1}}{(n+i-1)!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{e^{\alpha u}}{\alpha^n} - \sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \\ &= \frac{e^{\alpha u}}{\alpha^n} \underbrace{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}}_{=2^n} - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \\ &= \frac{e^{\alpha u}}{\alpha^n} 2^n - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit wird:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= e^{-\alpha u} \phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \left[\frac{e^{\alpha u}}{\alpha^n} 2^n - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \right] \\ &= \underbrace{\phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\lambda}{c\alpha} \right)^n}_{\text{geometrische Reihe}} - e^{-\alpha u} \phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Weil $c > \lambda\mu = \frac{2\lambda}{\alpha}$ und $\phi(0) = 1 - \frac{2\lambda}{\alpha c}$:

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \left(1 - \frac{2\lambda}{\alpha c} \right) \frac{1}{1 - \frac{2\lambda}{\alpha c}} - e^{-\alpha u} \left(1 - \frac{2\lambda}{\alpha c} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \\ &= 1 - e^{-\alpha u} \left(1 - \frac{2\lambda}{\alpha c} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Der nächste Schritt ist die Laplace Transformation der unendlichen Summe. Aus (5.10) ergibt sich:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{\alpha^j}{\alpha^n s^{j+1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha c}\right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \underbrace{\sum_{j=0}^{n+i-1} \left(\frac{\alpha}{s}\right)^j}_{\text{part. Summe geo. Reihe}} \\
&= \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha c}\right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{s}\right)^{n+i}}{1 - \frac{\alpha}{s}} \\
&= \frac{1}{s - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha c}\right)^n \left(\underbrace{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}}_{=2^n} - \underbrace{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{\alpha}{s}\right)^{n+i}}_{=\left(\frac{\alpha}{s}\right)^n (1 + \alpha/s)^n} \right) \\
&= \frac{1}{s - \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\alpha c}\right)^n \left(2^n - \left(\frac{\alpha}{s}\right)^n \left(1 + \frac{\alpha}{s}\right)^n \right)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Wir erkennen zwei geometrischen Reihen mit Termen $\frac{2\lambda}{\alpha c}$ und $\frac{\lambda}{cs} \left(1 + \frac{\alpha}{s}\right)$. Für $s > \alpha$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \right] &= \frac{1}{s - \alpha} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2\lambda}{\alpha c}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{cs} \left(1 + \frac{\alpha}{s}\right)\right)^n \right) \\
&= \frac{1}{(s - \alpha) \left(1 - \frac{2\lambda}{\alpha c}\right)} - \frac{1}{(s - \alpha) \left(1 - \frac{\lambda}{cs} \left(1 + \frac{\alpha}{s}\right)\right)} \\
&= \frac{2\lambda}{\alpha c - 2\lambda} \frac{s + \frac{\alpha}{2}}{s^2 - \frac{\lambda}{c}(s + \alpha)}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Der Schritt der Partialbruchzerlegung ergibt:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) \right] = \frac{2\lambda}{\alpha c - 2\lambda} \left(\frac{m_1}{s - s_1} + \frac{m_2}{s - s_2} \right) \tag{5.31}$$

wobei $s_{1/2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda\alpha c}}{2c}$ und $m_1 = \frac{-\alpha - 2s_1}{2(s_2 - s_1)}$, $m_2 = \frac{\alpha + 2s_2}{2(s_2 - s_1)}$.

Die inverse Laplace Transformation ergibt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\sum_{j=0}^{n+i-1} \frac{u^j}{\alpha^{n-j} j!} \right) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2\lambda}{\alpha c - 2\lambda} \left(\frac{m_1}{s - s_1} + \frac{m_2}{s - s_2} \right), s, u \right] \\
&= \frac{2\lambda}{\alpha c - 2\lambda} (m_1 e^{s_1 u} + m_2 e^{s_2 u})
\end{aligned}$$

Schliesslich wird die Überlebenswahrscheinlichkeit für $r = 2$:

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= 1 - \left(1 - \frac{2\lambda}{\alpha c}\right) e^{-\alpha u} \frac{2\lambda}{\alpha c - 2\lambda} (m_1 e^{s_1 u} + m_2 e^{s_2 u}) \\
&= 1 - \frac{2\lambda}{\alpha c} (m_1 e^{(s_1 - \alpha)u} + m_2 e^{(s_2 - \alpha)u})
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Kapitel 6

Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden in Form einer unendlichen Summe von Ableitungen der Mittag-Leffler-Funktionen

In dem Kapitel wird die Überlebenswahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell mit Gamma-Schäden als unendliche Summe von Ableitungen der Mittag-Leffler Funktionen ausgedrückt. Auch hier wird es angenommen, dass die Nettoprofitbedingung

$$c > \lambda \frac{r}{\alpha}$$

erfüllt ist.

Satz 6.1. Die Überlebenswahrscheinlichkeit für das klassische Modell mit Gamma-Schäden mit Formparameter $r > 0$ und Skalenparameter $\alpha > 0$ ist:

$$\phi(u) = e^{-\alpha u} \phi(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda \alpha^r}{c} \right)^k u^{(r+1)k} E_{1, r k + 1}^{(k)} \left(\left(\alpha + \frac{\lambda}{c} \right) u \right) \quad (6.1)$$

wobei $E_{\alpha, \beta}^{(n)}$ die n -fache Ableitung von Mittag-Leffler Funktion ist.

Beweis. Sei $\beta > \alpha$. Zuerst müssen wir eine Funktion g finden, deren Laplace Transformation für $s > S$, $S > 0$, ist:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{as^\beta + bs^\alpha + c} \quad (6.2)$$

wobei a, b, c Konstanten ungleich 0 sind.

Die $\hat{g}(s)$ kann man weiter schreiben:

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{c} \frac{c}{as^\beta + bs^\alpha} \frac{as^\beta + bs^\alpha}{as^\beta + bs^\alpha + c} = \frac{1}{c} \frac{\frac{c}{a} s^{-\alpha}}{s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a}} \frac{1}{1 + \frac{\frac{c}{a} s^{-\alpha}}{s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a}}} \quad (6.3)$$

Bezeichnet man $P = \frac{\frac{c}{a} s^{-\alpha}}{s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a}}$. Für die angenommenen Konstanten a, b, c gibt es ein $S > 0$ sodass für $s > S$ ist P in $(-1, 0)$. In (6.3) erkennen wir die geometrische Reihe mit dem allgemeinen Term

$-P$.

$$\begin{aligned}
\hat{g}(s) &= \frac{1}{c} \underbrace{\frac{P}{1 - (-P)}}_{\text{geom. Reihe}} = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} P(-P)^k = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k P^{k+1} \\
&= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{c}{a}\right)^{k+1} \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{\left(s^{\beta - \alpha} + \frac{b}{a}\right)^{k+1}} \\
&= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^{k+1} \frac{k! s^{(\beta - \alpha) - (\alpha k + \beta)}}{\left(s^{\beta - \alpha} + \frac{b}{a}\right)^{k+1}} \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Wegen der analytischen Eigenschaft der Mittag-Leffler Funktion (3.6) kann man Term für Term invertieren und finden, dass \hat{g} die Laplace Transformation der Funktion g ist.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{c}{a}\right)^{k+1} \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{\left(s^{\beta - \alpha} + \frac{b}{a}\right)^{k+1}}; s, t \right] \\
&= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^{k+1} t^{\beta(k+1) - 1} E_{\beta - \alpha, \beta + \alpha k}^{(k)} \left(-\frac{b}{a} t^{\beta - \alpha} \right) \tag{6.5}
\end{aligned}$$

Wir erinnern uns, dass nach dem Verschieben des Argumentes der Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell mit Gamma-Schäden ist:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(s - \alpha) &= \frac{c\phi(0)}{c(s - \alpha) - \lambda + \lambda \left(\frac{\alpha}{s}\right)^r} = \frac{c\phi(0)s^r}{cs^{r+1} - (\alpha c + \lambda)s^r + \lambda\alpha^r} \\
&= c\phi(0)s^r \underbrace{\frac{1}{cs^{r+1} - (\alpha c + \lambda)s^r + \lambda\alpha^r}}_{g(s)}
\end{aligned}$$

Jetzt können wir die oberen Berechnungen anwenden und finden, dass:

$$P = \frac{c\lambda\alpha^r}{s^r(cs - c\alpha - \lambda)}$$

Für $s > \alpha$ ist der P in $(-1, 0)$ und die Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit wird:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(s - \alpha) &= c\phi(0)s^r \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda\alpha^r)^k}{(cs^{r+1} - (c\alpha + \lambda)s^r)^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi(0) \left(\frac{\lambda}{c}\alpha^r\right)^k s^{-rk}}{\left(s - \left(\alpha + \frac{\lambda}{c}\right)\right)^{k+1}} \tag{6.6}
\end{aligned}$$

Jetzt führen wir die inverse Laplace Transformation von $\hat{\phi}(s - \alpha)$.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\hat{\phi}(s - \alpha); s, u \right] = e^{-\alpha u} \phi(u) = \phi(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda\alpha^r}{c}\right)^k u^{k(1+r)} E_{1, r k + 1}^{(k)} \left(\left(\alpha + \frac{\lambda}{c}\right) u \right)$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit ist:

$$\phi(u) = e^{-\alpha u} \phi(0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{\lambda\alpha^r}{c}\right)^k u^{k(1+r)} E_{1, r k + 1}^{(k)} \left(\left(\alpha + \frac{\lambda}{c}\right) u \right) \tag{6.7}$$

□

Kapitel 7

Überlebenswahrscheinlichkeit in Form einer unendlichen Summe von Faltungen der Tail-Verteilungen

In dem Kapitel wird das klassische Risikomodell mit light-tail-verteilten Schäden betrachtet. Zur Erinnerung, eine generische Schadensgrösse X ist light-tail-verteilt, wenn

$$\mathbb{E}[e^{sX}] < \infty, \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist. Wie im Kapitel 1 ist die Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Poisson-Prozesses wenn die Laplace-Stieltjests Transformation der Schäden existiert

$$\hat{\phi}(s) = \phi(0) \frac{1}{s} \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{c} \left(\frac{1 - M_X(-s)}{s} \right)} = \phi(0) \frac{1}{s} \frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c} \left(\frac{1 - M_X(-s)}{\mu s} \right)}$$

wobei M_X die momenterzeugende Funktion und μ der Erwartungswert von X sind. Im Anhang A ist es gezeigt, dass die Tail-Verteilung

$$g(x) = \frac{1}{\mu} \mathbb{P}(X > x), \quad x \geq 0 \tag{7.1}$$

eine Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, dass dessen Laplace Transformation der Term im Nenner

$$\hat{g}(s) = \frac{1 - M_X(-s)}{\mu s} = \frac{1}{\mu s} (1 - \hat{f}(s)) \tag{7.2}$$

ist und im $(0, 1)$ liegt. Wegen Nettoprofitbedingug

$$c > \lambda\mu$$

liegt

$$\frac{\lambda\mu}{c} \left(\frac{1 - M_X(-s)}{\mu s} \right)$$

in $(0, 1)$.

Deswegen lässt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit durch geometrische Reihe ausdrücken.

$$\hat{\phi}(s) = \phi(0) \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c} \right)^n \hat{g}(s)^n$$

Als Erweiterung der im Kapitel 1 Definition 2.1 ist die n -fache Faltung einer stetigen Verteilungsfunktion $G(x)$, $x \geq 0$, die eine Dichte $g(x)$, besitzt,

$$G^{*n}(x) = \int_0^x G^{*(n-1)}(x-y)dG(y) = \int_0^x g^{*n}(y)dy$$

$$G^{*1}(x) = G(x) = \int_0^x g(y)dy$$

$$G^{*0}(x) = \mathbb{1}(x \geq 0)$$

und die Laplace Transformation von $G^{*n}(x)$, wenn die Laplace Transformation von $g(x)$ existiert,

$$\begin{aligned} \widehat{G^{*n}}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} G^{*n}(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x g^{*n}(y)dydx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty g^{*n}(y) \int_y^\infty e^{-sx} dx dy \\ &= \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sy} g^{*n}(y)dy = \frac{1}{s} (\hat{g}(s))^n \end{aligned}$$

Weiter kann man die Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\hat{\phi}(s) = \phi(0) \frac{1}{s} \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c} \right)^n \hat{g}(s)^n = \phi(0) \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c} \right)^n \widehat{G^{*n}}(s)$$

schreiben.

Die inverse Laplace Transformation gibt uns den nächsten Satz.

Satz 7.1. Die Überlebenswahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell kann in der folgenden Form geschrieben werden.

$$\phi(u) = \phi(0) \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c} \right)^n G^{*n}(u), \quad u > 0 \quad (7.3)$$

G^{*n} ist die n -fache Faltung der Verteilungsfunktion

$$G(x) = \int_0^x g(y)dy$$

und $g(x)$ ist die Tail-Verteilung von X_i . Sie kann als:

$$G^{*n}(x) = \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^x (x-y)^n f^{*k}(y)dy \right), \quad x \geq 0, \quad n \geq 1 \quad (7.4)$$

berechnet werden.

Bemerkung 7.2. Weil die Überlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0

$$\phi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$$

kann man die Überlebenswahrscheinlichkeit als

$$\phi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c} \right) \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\lambda\mu}{c} \right)^n G^{*n}(u) = \sum_{n=0}^\infty \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c} \right) \left(\frac{\lambda\mu}{c} \right)^n G^{*n}(u) \quad (7.5)$$

schreiben.

Weil die Nettoprofitbedingung

$$c > \lambda\mu$$

erfüllt ist, ist

$$\frac{\lambda\mu}{c} < 1$$

Unmittelbar sieht man, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit ist die Verteilungsfunktion der zusammengesetzt Geometrisch-verteilt Zufallsvariable mit $q = \frac{\lambda\mu}{c}$

$$Y \sim ZGeo\left(\frac{\lambda\mu}{c}, G\right)$$

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i, \quad N \sim Geo\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)$$

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d., $X_i \sim G$ -verteilt

Bemerkung 7.3. Weil $f^{*k}(x)$ ist die Dichte von $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$, wird

$$\int_0^x (x-y)^n f^{*k}(y) dy = \int_0^\infty (x-y)^n f^{*k}(y) \mathbb{1}(x-S_k \leq 0) dy = \mathbb{E}[(x-S_k)^n \mathbb{1}(x-S_k \leq 0)] = \mathbb{E}[(x-S_k)_+^n]$$

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i, \quad \mathbb{E}[(x-S_k)_+^n] = \mathbb{E}[(x-S_k)^n \mathbb{1}(S_k \leq x)]$$

mit der Konvention für leere Summen, d.h. $S_0 = 0$. Die n -fache Faltung der Verteilungsfunktion $G(x)$ wird

$$G^{*n}(x) = \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \mathbb{E}[(x-S_k)_+^n] \right) = \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \mathbb{E}[(x-S_k)_+^n] \quad (7.6)$$

Bemerkung 7.4. Zum praktischen Rechnen kann man das Integral

$$\int_0^x (x-y)^n f^{*k}(y) dy = \int_0^x \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} y^j f^{*k}(y) dy = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \int_0^x y^j f^{*k}(y) dy$$

bzw. der Erwartungswert

$$\mathbb{E}[(x-S_k)_+^n] = \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} S_k^j \mathbb{1}(S_k \leq x) \right] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \mathbb{E} \left[S_k^j \mathbb{1}(S_k \leq x) \right]$$

schreiben.

Bemerkung 7.5. Ausgehend von der Definition der n -fache Faltung von $G(x)$

$$G^{*n}(x) = \int_0^x G^{*(n-1)}(x-y) dG(y) = \int_0^x g^{*n}(y) dy$$

kann man die n -fache Faltung von $G(x)$ mithilfe der Fubini-Tonelli Satz

$$\begin{aligned} G^{*n}(x) &= \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^x (x-y)^n f^{*k}(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{\mu^n} \int_0^x \left(\frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \int_0^y (y-z)^{n-1} f^{*k}(z) dz \right) dy \end{aligned}$$

schreiben. Es folgt

$$g^{*n}(x) = \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \int_0^x (x-y)^{n-1} f^{*k}(y) dy \right)$$

und

$$\phi(x) = \phi(0) \left(1 + \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda \mu}{c} \right)^n g^{*n}(y) dy \right)$$

Aus der Bemerkung 7.3 folgt:

$$g^{*n}(x) = \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \mathbb{E} \left[(x - S_k)_+^{n-1} \right] \right) = \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \mathbb{E} \left[(x - S_k)_+^{n-1} \right]$$

Bemerkung 7.6. Weil

$$\mathbb{1}(S_k \leq x) = 1 - \mathbb{1}(S_k > x) \quad (7.7)$$

kann man die g^{*n} aus der f 7.5 weiter

$$\begin{aligned} g^{*n}(x) &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \mathbb{E} \left[(x - S_k)^{n-1} \mathbb{1}(S_k \leq x) \right] \\ &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+n-1}}{(n-1)!} \left(\mathbb{E} \left[(S_k - x)^{n-1} (1 - \mathbb{1}(S_k > x)) \right] \right) \\ &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+n-1}}{(n-1)!} \left(\mathbb{E} \left[(S_k - x)^{n-1} \right] - \mathbb{E} \left[(S_k - x)_+^{n-1} \right] \right) \end{aligned}$$

schreiben, wobei

$$\mathbb{E} \left[(S_k - x)_+^{n-1} \right] = \mathbb{E} \left[(S_k - x)^{n-1} \mathbb{1}(S_k > x) \right]$$

Wir betrachten die erste endliche Summe

$$\frac{1}{\mu^n} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E} \left[(S_k - x)^{n-1} \right] = \frac{1}{\mu^n} \frac{1}{(n-1)!} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E} \left[(x - S_k)^{n-1} \right]}_{I1}$$

Für alle Werten x im Definitionsbereich ist diese Summe gleich 0, weil $I1$ immer 0 ist.

$$I1 : \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E} \left[(x - S_k)^{n-1} \right] = 0$$

Der Beweis dieser Identität I1 befindet sich im Anhang C.

Wegen dem (7.7) kann man (7.6) in der Bemerkung 7.3 weiter

$$\begin{aligned} G^{*n}(x) &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \mathbb{E}[(x - S_k)^n \mathbb{1}(S_k \leq x)] \\ &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+n}}{n!} (\mathbb{E}[(S_k - x)^n (1 - \mathbb{1}(S_k > x))]) \\ &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+n}}{n!} (\mathbb{E}[(S_k - x)^n] - \mathbb{E}[(S_k - x)_+^n]) \end{aligned}$$

schreiben, wobei

$$\mathbb{E}[(S_k - x)_+^n] = \mathbb{E}[(S_k - x)^n \mathbb{1}(S_k > x)]$$

Wir betrachten die erste endliche Summe

$$\frac{1}{\mu^n} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[(S_k - x)^n] = \frac{1}{\mu^n} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[(x - S_k)^n]}_{I2}$$

Für alle Werten x im Definitionsbereich ist diese Summe gleich 1, weil I2 immer $\frac{1}{\mu^n} \frac{1}{n!}$ ist.

$$I2 : \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[(x - S_k)^n] = \frac{1}{\mu^n} \frac{1}{n!}$$

Der Beweis dieser Identität I2 befindet sich im Anhang C

Beweis (von Satz 7.1).

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\mu} \mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{\mu} (1 - \mathbb{P}(X \leq x)) = \frac{1}{\mu} \left(1 - \int_0^x f(y) dy\right) \\ &= \frac{1}{\mu} (H - F)(x), \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{7.8}$$

wobei

$$H(x) = \mathbb{1}(x \geq 0), \quad x \geq 0 \tag{7.9}$$

Die Definition von Faltung, und die Faltungseigenschaften, sowie die Dirac Delta Eigenschaften erlauben es, die folgende Berechnung von n-fache Faltung von g zu führen:

$$\begin{aligned} g^{*n} &= \left(\frac{1}{\mu}(H - F)\right)^{*n} = \underbrace{\left(\left(\frac{1}{\mu}(H - F)\right) * \dots * \left(\frac{1}{\mu}(H - F)\right)\right)}_{n \text{ mal}} \\ &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k F^{*k} * H^{*(n-k)} \end{aligned} \tag{7.10}$$

$$F(x) = \int_0^x 1 \cdot f(y) dy = \int_0^x H(x - y) f(y) dy = (H * f)(x), \quad x \geq 0 \tag{7.11}$$

$$\implies F^{*k} = \underbrace{(H * f) * \dots * (H * f)}_{n \text{ mal}} = H^{*k} * f^{*k} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} g^{*n} &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k F^{*k} * H^{*(n-k)} = \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (f^{*k} * H^{*k}) * H^{*(n-k)} \\ &= \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f^{*k} * H^{*n} = \frac{1}{\mu^n} \left(\delta_0 * H^{*n} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k f^{*k} * H^{*n} \right) \\ &= \frac{1}{\mu^n} \left(H^{*n} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k f^{*k} * H^{*n} \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Aus der Definition von der n-fache Faltung der Verteilungsfunktion $G(x)$

$$\begin{aligned} G^{*n}(x) &= \int_0^x g^{*n}(y) dy = \int_0^x \frac{1}{\mu^n} \left(H^{*n} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k f^{*k} * H^{*n} \right) (y) dy \\ &= \frac{1}{\mu^n} \int_0^x H(x-y) \left(H^{*n} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k f^{*k} * H^{*n} \right) (y) dy \\ &= \frac{1}{\mu^n} \left(H^{*(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k f^{*k} * H^{*(n+1)} \right) (x) \end{aligned}$$

Nach Lemma B.1:

$$G^{*n}(x) = \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^x (x-y)^n f^{*k}(y) dy \right) \quad (7.14)$$

□

Jetzt führen wir den alternativen Beweis mit Induktion durch.

Beweis mit Induktion (von Satz 7.1).

$$H(x) = \mathbb{1}(x \geq 0), \quad x \geq 0$$

$$F(x) = \int_0^x 1 \cdot f(y) dy = \int_0^x H(x-y) f(y) dy = (H * f)(x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x) &= \frac{1}{\mu} \mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{\mu} (1 - \mathbb{P}(X \leq x)) = \frac{1}{\mu} \left(1 - \int_0^x f(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{\mu} (H - F)(x) = \frac{1}{\mu} (H - H * f)(x), \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G^{*n}(x) &= \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^x (x-y)^n f^{*k}(y) dy \right) \\ &= \frac{1}{\mu^n} \left(H^{*(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k H^{*(n+1)} * f^{*k} \right) (x), \quad x \geq 0, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Jetzt wird die Induktion geföhrt.

$$\begin{aligned}
n = 1, \quad G(x) &= \frac{1}{\mu} \left(x + \sum_{k=1}^1 \binom{1}{k} (-1)^k \int_0^x (x-y) f^{*k}(y) dy \right) = \frac{1}{\mu} \left(x - \int_0^x \int_y^x f(y) dz dy \right) \\
&\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\mu} \left(x - \int_0^x \int_0^z f(y) dy dz \right) = \frac{1}{\mu} \left(x - \int_0^x P(X \leq z) dz \right) \\
&= \frac{1}{\mu} \left(x - \int_0^x (1 - P(X > z)) dz \right) = \frac{1}{\mu} \left(x - x + \int_0^x P(X > z) dz \right) \\
&= \frac{1}{\mu} \int_0^x P(X > z) dz = \int_0^x g(z) dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n = 2, \quad G^{*2}(x) &= \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{x^2}{2!} + \sum_{k=1}^2 \binom{2}{k} \frac{(-1)^k}{2!} \int_0^x (x-y)^2 f^{*k}(y) dy \right) \\
&= \frac{1}{\mu^2} \left(\underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{H^{*3}(x)} + \underbrace{\sum_{k=1}^2 \binom{2}{k} (-1)^k \int_0^x \frac{(x-y)^2}{2!} f^{*k}(y) dy}_{(H^{*3} * f^{*k})(x)} \right) \\
&= \frac{1}{\mu^2} \left(H^{*3} + \sum_{k=1}^2 \binom{2}{k} (-1)^k H^{*3} * f^{*k} \right) (x) = \frac{1}{\mu^2} \left(H^{*3} - 2H^{*3} * f + H^{*3} * f^{*2} \right) (x) \\
&= \left(\underbrace{\frac{1}{\mu} (H - H * f)}_g * \underbrace{\left(\frac{1}{\mu} (H^{*2} - H^{*2} * f) \right)}_G \right) (x) = (g * G)(x) \\
&= \int_0^x G(x-y) g(y) dy = \int_0^x G(x-y) dG(y)
\end{aligned}$$

Gehen wir davon aus, dass die Aussage für n bereits bewiesen ist. Wir müssen nun die n -fache Faltung für $(n+1)$ beweisen.

$$\begin{aligned}
G^{*(n+1)}(x) &= \frac{1}{\mu^{n+1}} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{(-1)^k}{(n+1)!} \int_0^x (x-y)^{n+1} f^{*k}(y) dy \right) \\
&= \frac{1}{\mu^{n+1}} \left(\underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{H^{*(n+2)}} - \underbrace{(-1)^n \int_0^x \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{*(n+1)}(y) dy}_{H^{*(n+2)} * f^{*(n+1)}} \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} (-1)^k \underbrace{\int_0^x \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{*k}(y) dy}_{H^{*(n+2)} * f^{*k}} \\
&= \frac{1}{\mu^{n+1}} \left(H^{*(n+2)} - (-1)^n H^{*(n+2)} * f^{*(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} (-1)^k H^{*(n+2)} * f^{*k} \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k H^{*(n+2)} * f^{*k} \Big) (x) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \left(H^{*(n+2)} + (-1)^{n+1} H^{*(n+2)} * f^{*(n+1)} \right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} H^{*(n+2)} * f^{*(k+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k H^{*(n+2)} * f^{*k} \Big) (x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu^{n+1}} \left(H^{*(n+2)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} H^{*(n+2)} * f^{*(k+1)} \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k H^{*(n+2)} * f^{*k} \right) (x) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \left(H^{*(n+2)} - H^{*(n+2)} * f \right. \\
&+ \left. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \left(H^{*(n+2)} * f^{*k} - H^{*(n+2)} * f^{*(k+1)} \right) \right) (x) \\
&= \left(\underbrace{\frac{1}{\mu} (H - H * f)}_g * \underbrace{\left(\frac{1}{\mu^n} \left(H^{*(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k H^{*(n+1)} * f^{*k} \right) \right)}_{G^{*n}} \right) (x) \\
&= (g * G^{*n})(x) = \int_0^x G^{*n}(x-y)g(y)dy = \int_0^x G^{*n}(x-y)dG(y)
\end{aligned}$$

Beispiel 7.7. Als erstes Beispiel betrachten wir den Fall, wenn die Schäden gammaverteilt $\Gamma(r, \alpha)$ sind.

$$X_i = X, \quad i = 1, \dots, k$$

$$X \sim \Gamma(r, \alpha), \quad r > 0, \quad \alpha > 0$$

$$\Rightarrow S_k = \sum_{i=1}^k X_i \sim \Gamma(kr, \alpha), \quad r > 0, \quad \alpha > 0$$

Die n -fache Faltung aus (7.4) kann man

$$\begin{aligned}
G^{*n}(x) &= \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^x (x-y)^n f^{*k}(y)dy \right) \\
&= \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^n}{n!} * \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} x^{kr-1} e^{-\alpha x} \right) \tag{7.15}
\end{aligned}$$

schreiben, und die Überlebenswahrscheinlichkeit aus (7.3) wird

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda \mu}{c} \right)^n G^{*n}(u) \\
&= \phi(0) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda \mu}{c} \right)^n \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{u^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{u^n}{n!} * \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} u^{kr-1} e^{-\alpha u} \right) \right) \\
&= \phi(0) \left(\underbrace{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda u}{c} \right)^n \frac{1}{n!}}_{e^{\frac{\lambda u}{c}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{u^n}{n!} * \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} u^{kr-1} e^{-\alpha u} \right) \\
&= \phi(0) \left(e^{\frac{\lambda u}{c}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c} \right)^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{u^n}{n!} * \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} u^{kr-1} e^{-\alpha u} \right)
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit als Doppelsumme der Faltung der n -fache Faltung von

$$H(x) = \mathbb{1}(x \geq 0)$$

(siehe Lemma B.1) und der Dichte

$$f^{*k}(x) = \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} x^{kr-1} e^{-\alpha x}, \quad x > 0,$$

von

$$S_k \sim \Gamma(kr, \alpha), \quad r > 0, \quad \alpha > 0$$

berechnet werden kann.

Als nächstes wird die Faltung von $H^{*(n+1)}(x)$ und $f^{*k}(x)$ berechnet, was exakte Ausdrücke- bzw. eine rekursive Formel ergibt, die leicht zu benutzen sind.

$$\begin{aligned} (H^{*(n+1)} * f^{*k})(x) &= \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{*k}(y) dy = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{n!} x^{n-j} \int_0^x y^j f^{*k}(y) dy \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{n!} x^{n-j} \int_0^x y^j \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} y^{kr-1} e^{-\alpha y} dy \end{aligned}$$

Das Integral der Faltung bezeichnen wir mit

$$v_{j,k}(x) = \int_0^x y^j \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} y^{kr-1} e^{-\alpha y} dy$$

Für $j = 0$ bekommt man

$$v_{0,k}(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} y^{kr-1} e^{-\alpha y}}_{\Gamma(kr, \alpha)} dy \quad (7.16)$$

Mithilfe der partielle Integration kann man $v_{j,k}(x)$ für $j = 1, 2, \dots, n$ berechnen.

$$\begin{aligned} v_{j,k}(x) &= \int_0^x y^j \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} y^{kr-1} e^{-\alpha y} dy = -\frac{x^j}{\alpha} \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} x^{kr-1} e^{-\alpha x} + \frac{kr+j-1}{\alpha} \underbrace{\int_0^x y^{j-1} \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} y^{kr-1} e^{-\alpha y} dy}_{v_{j-1,k}(x)} \\ &= -\frac{x^j}{\alpha} f^{*k}(x) + \frac{kr+j-1}{\alpha} v_{j-1,k}(x) \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\Rightarrow (H^{*(n+1)} * f^{*k})(x) = \frac{x^n}{n!} v_{0,k}(x) + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{n!} x^{n-j} \left(-\frac{x^j}{\alpha} f^{*k}(x) + \frac{kr+j-1}{\alpha} v_{j-1,k}(x) \right)$$

Alternativ kann man die n -fache Faltung $G^{*n}(x)$ aus der Bemerkung 7.3 berechnen.

$$G^{*n}(x) = \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \mathbb{E}[(x - S_k)_+^n]$$

Wie in der Bemerkung 7.4 kann man den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(x - S_k)_+^n] &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \mathbb{E}[S_k^j \mathbb{1}(S_k \leq x)] \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \int_0^x \frac{\alpha^{kr}}{\Gamma(kr)} y^{(kr+j)-1} e^{-\alpha y} dy \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \frac{1}{\alpha^j \Gamma(kr)} \int_0^{\alpha x} t^{(kr+j)-1} e^{-t} dt \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \frac{\gamma(kr+j, \alpha x)}{\alpha^j \Gamma(kr)}
\end{aligned}$$

berechnen.

Beispiel 7.8. Als zweites Beispiel betrachten wir den Fall, wenn die Schäden invers Gauß-verteilt $IG(\delta, \gamma)$ sind. Zur Erinnerung, ist die inverse Gauß-Verteilung $IG(\delta, \gamma)$ eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ , mit der Dichte:

$$f(x) = \frac{\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{\delta\gamma} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)}, \quad x > 0, \quad \delta > 0, \quad \gamma > 0$$

Der Erwartungswert, die Varianz und die momenterzeugende Funktion der inversen Gauß-Verteilung sind:

$$\begin{aligned}
\mu &= \mathbb{E}[X] = \frac{\delta}{\gamma} \\
\text{Var}[X] &= \frac{\delta}{\gamma^3} \\
M_X(s) &= e^{\delta\gamma(1-\sqrt{1-2s/\gamma^2})}, \quad \Re(s) \leq \frac{\gamma^2}{2}
\end{aligned}$$

Gleich wie bei gammaverteilten Schäden, wenn

$$\begin{aligned}
X_i &= X, \quad i = 1, \dots, k \\
X &\sim IG(\delta, \gamma), \quad \delta > 0, \quad \gamma > 0 \\
\Rightarrow S_k &= \sum_{i=1}^k X_i \sim IG(k\delta, \gamma), \quad \delta > 0, \quad \gamma > 0
\end{aligned}$$

Die n -fache Faltung aus (7.4) kann man

$$\begin{aligned}
G^{*n}(x) &= \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^x (x-y)^n f^{*k}(y) dy \right) \\
&= \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{x^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{x^n}{n!} * \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)} \right) \quad (7.18)
\end{aligned}$$

schreiben, und die Überlebenswahrscheinlichkeit aus (7.3) wird

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \phi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n G^{*n}(u) \\
&= \phi(0) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \frac{1}{\mu^n} \left(\frac{u^n}{n!} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{u^n}{n!} * \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 u^{-1} + \gamma^2 u)}\right)\right) \\
&= \phi(0) \left(1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda u}{c}\right)^n \frac{1}{n!}}_{e^{\frac{\lambda u}{c}}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{u^n}{n!} * \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 u^{-1} + \gamma^2 u)}\right) \\
&= \phi(0) \left(e^{\frac{\lambda u}{c}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{u^n}{n!} * \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} u^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 u^{-1} + \gamma^2 u)}\right)
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit als Doppelsumme der Faltung der n -fache Faltung von

$$H(x) = \mathbb{1}(x \geq 0)$$

(siehe Lemma B.1) und der Dichte

$$f^{*k}(x) = \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 x^{-1} + \gamma^2 x)}, \quad x > 0,$$

von

$$S_k \sim IG(k\delta, \gamma), \quad \delta > 0, \quad \gamma > 0$$

berechnet werden kann.

Als nächstes wird die Faltung von $H^{*(n+1)}(x)$ und $f^{*k}(x)$ berechnet, was exakte Ausdrücke- bzw. eine rekursive Formel ergibt, die leicht zu benutzen sind.

$$\begin{aligned}
(H^{*(n+1)} * f^{*k})(x) &= \int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!} f^{*k}(y) dy = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{n!} x^{n-j} \int_0^x y^j f^{*k}(y) dy \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{n!} x^{n-j} \int_0^x y^j \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 y^{-1} + \gamma^2 y)} dy
\end{aligned}$$

Das Integral der Faltung bezeichnen wir mit

$$v_{j,k}(x) = \int_0^x y^j \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 y^{-1} + \gamma^2 y)} dy$$

Für $j = 0$ bekommt man

$$v_{0,k}(x) = \int_0^x \underbrace{\frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 y^{-1} + \gamma^2 y)}}_{IG(k\delta, \gamma)} dy = \Phi\left(-\frac{k\delta}{\sqrt{x}} + \gamma\sqrt{x}\right) + e^{2k\delta} \Phi\left(-\frac{k\delta}{\sqrt{x}} - \gamma\sqrt{x}\right) \quad (7.19)$$

Für $j = 1$ bekommt man

$$v_{1,k}(x) = \int_0^x y \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 y^{-1} + \gamma^2 y)} dy = \int_0^x \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2 y^{-1} + \gamma^2 y)} dy$$

Nach dem Ersetzen von y durch $\frac{1}{z}$ wird

$$\begin{aligned}
v_{1,k}(x) &= - \int_{\infty}^{1/x} \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} z^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2y+\gamma^2y^{-1})} dz = \int_{1/x}^{\infty} \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2y+\gamma^2y^{-1})} dz \\
&= \frac{k\delta}{\gamma} \left(1 - \underbrace{\int_0^{1/x} \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} z^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2y+\gamma^2y^{-1})} dz}_{IG(k\delta,\gamma)} \right) \\
&= \frac{k\delta}{\gamma} \left(1 - \Phi\left(\frac{k\delta}{\sqrt{x}} - \gamma\sqrt{x}\right) - e^{2k\delta} \Phi\left(-\frac{k\delta}{\sqrt{x}} - \gamma\sqrt{x}\right) \right) \\
&= \frac{k\delta}{\gamma} \left(\Phi\left(\frac{-k\delta}{\sqrt{x}} + \gamma\sqrt{x}\right) - e^{2k\delta} \Phi\left(-\frac{k\delta}{\sqrt{x}} - \gamma\sqrt{x}\right) \right) \tag{7.20}
\end{aligned}$$

Mithilfe der partielle Integration kann man $v_{j,k}(x)$ für $j = 2, 3, \dots, n$ berechnen.

$$\begin{aligned}
v_{j,k}(x) &= \int_0^x y^j \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2y^{-1}+\gamma^2y)} dy = -\frac{2}{\gamma^2} x^n \underbrace{\frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} x^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2x^{-1}+\gamma^2x)}}_{f^{*k}(x)} \\
&+ \frac{2n-3}{\gamma^2} \underbrace{\int_0^x \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{(n-1)-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2y^{-1}+\gamma^2y)} dy}_{v_{j-1,k}(x)} \\
&+ \frac{k^2\delta^2}{\gamma^2} \underbrace{\int_0^x \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{(n-2)-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2y^{-1}+\gamma^2y)} dy}_{v_{j-2,k}(x)} \\
&= -\frac{2}{\gamma^2} x^n f^{*k}(x) + \frac{2n-3}{\gamma^2} v_{j-1,k}(x) + \frac{k^2\delta^2}{\gamma^2} v_{j-2,k}(x) \tag{7.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (H^{*(n+1)} * f^{*k})(x) &= \frac{x^n}{n!} v_{0,k}(x) - \frac{nx^{n-1}}{n!} v_{1,k}(x) \\
&+ \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{n!} x^{n-j} \left(-\frac{2}{\gamma^2} x^n f^{*k}(x) + \frac{2n-3}{\gamma^2} v_{j-1,k}(x) + \frac{k^2\delta^2}{\gamma^2} v_{j-2,k}(x) \right)
\end{aligned}$$

Alternativ kann man die n -fache Faltung $G^{*n}(x)$ aus der Bemerkung 7.3 berechnen.

$$G^{*n}(x) = \frac{1}{\mu^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n!} \mathbb{E}[(x - S_k)_+^n]$$

Wie in der Bemerkung 7.4 kann man den Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(x - S_k)_+^n] &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \mathbb{E}\left[S_k^j \mathbb{1}(S_k \leq x)\right] \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \int_0^x \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} y^{j-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2y^{-1}+\gamma^2y)} dy \\
&= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} \frac{2K_{j-\frac{1}{2}}(k\delta\gamma)}{\left(\frac{\gamma}{k\delta}\right)^{j-\frac{1}{2}}} \\
&\int_0^x \frac{\left(\frac{\gamma}{k\delta}\right)^{j-\frac{1}{2}}}{2K_{j-\frac{1}{2}}(k\delta\gamma)} y^{(j-\frac{1}{2})-1} e^{-\frac{1}{2}(k^2\delta^2y^{-1}+\gamma^2y)} dy
\end{aligned}$$

Der Integrand im oberen Ausdruck ist die Dichte der verallgemeinerten inversen Gauß-Verteilung $GIG(j - \frac{1}{2}, k\delta, \gamma)$. Zur Erinnerung, ist die verallgemeinerte inverse Gauß-Verteilung $GIG(p, a, b)$ eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge der positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ , mit der Dichte:

$$f(x) = \left(\frac{b}{a}\right)^p \frac{1}{2K_p(ab)} x^{p-1} e^{-\frac{1}{2}(a^2 x^{-1} + b^2 x)}, \quad x \geq 0$$

und den Parameter $a > 0, b > 0$, wobei $K_p(ab)$ die modifizierte Bessel Funktion zweiter Gattung ist. Im Fall von invers Gauß-verteilte Schäden sind die Parameter der $GIG(p, a, b)$ $p = j - \frac{1}{2}$, $a = k\delta$, $b = \gamma$. Weiter kann man den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[(x - S_k)_+^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n-j} \frac{k\delta}{\sqrt{2\pi}} e^{k\delta\gamma} \frac{2K_{j-\frac{1}{2}}(k\delta\gamma)}{(\frac{\gamma}{k\delta})^{j-\frac{1}{2}}} F_Y(x)$$

schreiben, wobei $Y \sim GIG(j - \frac{1}{2}, k\delta, \gamma)$.

Kapitel 8

Asymptotische Approximation bei Gamma- bzw. invers Gauß-Schäden

Mit den Annahmen, dass die momenterzeugende Funktion $M_X(s)$ der Schäden X im klassischen Risikomodell auf dem $(-\infty, a)$ oder $(-\infty, a]$ existiert, dass die Nettoprofitbedingung $c > \lambda\mu$ erfüllt ist und im Fall des Intervalls der Existenz $(-\infty, a]$ [Soren Asmussen, Hansjörg Albrecher: Ruin Probabilities, Second Edition [9]]

$$M_X(a) - 1 - \frac{c}{\lambda}a \geq 0$$

gilt, existiert dann genau eine positive Lösung R der Lundberg Gleichung

$$\begin{aligned} M_X(s)M_T(-cs) &= 1 \\ M_X(s) &= 1 + \frac{c}{\lambda}s \end{aligned}$$

Das erlaubt die Ruinwahrscheinlichkeit durch die asymptotische Formula [Hans U. Gerber: An Introduction to Mathematical Risk Theory [8]]

$$\Psi(u) \sim Ce^{-Ru}, \text{ für } u \rightarrow \infty \quad (8.1)$$

darzustellen, wobei C durch

$$C = \frac{\frac{1}{R} \left(\frac{c}{\lambda} - \mu \right)}{\int_0^\infty ye^{Ry} (1 - F_X(y)) dy} \quad (8.2)$$

berechnet wird. μ steht für den Erwartungswert $E[X]$ und $F_X(x)$ ist die Verteilungsfunktion von Schäden X . Weil

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{sy} (1 - F_X(y)) dy &= \int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{sy} \int_y^\infty f(z) dz dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^z e^{sy} f(z) dy dz = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \left(\frac{e^{sz} - 1}{s} \right) f(z) dz \\ &= \frac{M_X(s) - 1}{\mu s} \end{aligned} \quad (8.3)$$

ist das Integral in (8.2) die erste Ableitung von (8.3) an der Stelle $s = R$.

$$\int_0^\infty ye^{Ry} (1 - F_X(y)) dy = \left(\frac{M_X(s) - 1}{s} \right)' \Big|_{s=R} = \frac{M_X'(R)}{R} - \frac{M_X(R) - 1}{R^2} \quad (8.4)$$

Die Rechenregeln des Logarithmus erlauben es die momenterzeugende Funktion

$$M_X(s) = e^{K(s)}$$

weiter zu schreiben. Ihre erste Ableitung wird

$$M'_X(s) = e^{K(s)} K'(s) = M_X(s) K'(s) \quad (8.5)$$

Weil angenommen wurde, dass die Lundberg Gleichung eine eindeutige positive Lösung $R > 0$ hat, ist

$$M_X(R) = 1 + \frac{c}{\lambda} R$$

Es folgt

$$C = \frac{\frac{1}{R} \left(\frac{c}{\lambda} - \mu \right)}{\frac{M_X(R) K'(R)}{R} - \frac{M_X(R) - 1}{R^2}} = \frac{R(c - \lambda\mu)}{(\lambda + cR)(RK'(R) - 1) + \lambda} \quad (8.6)$$

Beispiel 8.1. Seien die Schäden X im klassischen Risikomodell gammaverteilt $\Gamma(r, \alpha)$. Die momenterzeugende Funktion $M_X(s)$ von Gammaverteilung $\Gamma(r, \alpha)$ existiert auf $(-\infty, \alpha)$. Weil die Gammaverteilung auf \mathbb{R}_+ definiert ist, gilt für das klassische Risikomodell $P[X > \frac{c}{\lambda}] > 0$. Weiter nehmen wir wie im Kapitel 1 an, dass die Nettoprofitbedingung $c > \lambda \frac{r}{\alpha}$ erfüllt ist. Dann hat die Lundberg Gleichung

$$M_X(s) = 1 + \frac{c}{\lambda} s$$

eine eindeutige positive Lösung $R > 0$. Wenn $r \in 1, 2, 3$ kann man die positive Lösung R analytisch berechnen. Für andere Werte von r , verwendet man Methoden wie z.B. Newton-Verfahren um eine numerische Lösung zu bekommen.

Die $M_X(s)$ man kann

$$M_X(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - s} \right)^r = e^{r \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha - s} \right)}, \Re(s) < \alpha$$

schreiben. Es folgt

$$K(s) = r \ln \left(\frac{\alpha}{\alpha - s} \right), \Re(s) < \alpha$$

und

$$K'(s) = \frac{r}{\alpha - s}, \Re(s) < \alpha$$

Weil der Erwartungswert der Gammaverteilung

$$\mu = \frac{r}{\alpha}$$

wird

$$C = \frac{R(c - \lambda \frac{r}{\alpha})}{(\lambda + cR) \left(\frac{Rr}{\alpha - R} - 1 \right) + \lambda} \quad (8.7)$$

Beispiel 8.2. Seien die Schäden X im klassischen Risikomodell invers Gauß-verteilt $IG(\delta, \gamma)$. Die momenterzeugende Funktion $M_X(s)$ von der inversen Gauß-Verteilung $IG(\delta, \gamma)$ existiert auf $(-\infty, \frac{\gamma^2}{2}]$. Weil die inverse Gauß-Verteilung auf \mathbb{R}_+ definiert ist, gilt für das klassische Risikomodell $P[X > \frac{c}{\lambda}] > 0$. Weiter nehmen wir wie im Kapitel 1 an, dass die Nettoprofitbedingung $c > \lambda \frac{\delta}{\gamma}$ erfüllt ist und zusätzlich

$$M_X(\gamma^2/2) - 1 - \frac{c}{\lambda} \frac{\gamma^2}{2} \geq 0$$

gilt. Dann hat die Lundberg Gleichung

$$M_X(s) = 1 + \frac{c}{\lambda} s$$

eine eindeutige positive Lösung $R > 0$. Weil die linke Seite der Gleichung eine Exponentialfunktion und die rechte Seite der Gleichung lineare Funktion ist, kann man R nur mithilfe der Methoden wie z.B Newton-Verfahren numerisch berechnen.

Weil die momenterzeugende Funktion

$$M_X(s) = e^{\delta\gamma(1 - \sqrt{1 - 2s/\gamma^2})}, \quad \Re(s) \leq \frac{\gamma^2}{2}$$

ist, ist

$$K(s) = \delta\gamma(1 - \sqrt{1 - 2s/\gamma^2}), \quad \Re(s) \leq \frac{\gamma^2}{2}$$

und

$$K'(s) = \frac{\delta}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - 2s/\gamma^2}}, \quad \Re(s) \leq \frac{\gamma^2}{2}$$

Weil der Erwartungswert der inversen Gauß-Verteilung

$$\mu = \frac{\delta}{\gamma}$$

wird

$$C = \frac{R(c - \lambda \frac{\delta}{\gamma})}{(\lambda + cR) \left(R \frac{\delta}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - 2R/\gamma^2}} - 1 \right) + \lambda} \quad (8.8)$$

Kapitel 9

Panjer's Schranken für die Überlebenswahrscheinlichkeit

Im Kapitel 7, Bemerkung 7.2, haben wir gesehen, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit die Verteilungsfunktion der zusammengesetzt Geometrisch-verteilt Zufallsvariable $ZGeo(\frac{\lambda\mu}{c}, G)$ ist. Das bedeutet, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit

$$\phi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n G^{*n}(u)$$

ist die Verteilungsfunktion von

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i$$

wobei $N \sim Geo(\frac{\lambda\mu}{c})$ und $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion $G(x)$ sind. Weil die geometrische Verteilung $Geo(q)$ ist gleich die negative Binomailverteilung $NB(r, q)$ mit $r = 1$, genügt die geometrische Verteilung die Panjer-Relation bzw. gehört zu Panjer-Klasse

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{ab } n_0 \in \mathbb{N} \quad (9.1)$$

mit $a = q$ und $b = 0$.

Aus der Kapitel 7 wissen wir, dass die Verteilung $G(x)$, $x \geq 0$, die als Dichte die Tail-Verteilung der Verteilungsfunktion der Schäden $g(x)$, $x \geq 0$ hat, eine stetige Verteilung ist. Wenn man $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i.i.d. mithilfe Auf- und Abrunden mit einem kleinen Zahl $\epsilon > 0$ diskretisiert, kann man das Panjer-Rekursion verwenden und die Panjer's Schranke für die Überlebenswahrscheinlichkeit $\phi(u)$ bekommen.

Sei $\epsilon > 0$. Das Auf- und Abrunden von $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\underline{Y}_i = \left\lfloor \frac{Y_i}{\epsilon} \right\rfloor, \quad \bar{Y}_i = \left\lceil \frac{Y_i}{\epsilon} \right\rceil$$

Sei

$$\underline{S} = \sum_{i=1}^N \underline{Y}_i, \quad \bar{S} = \sum_{i=1}^N \bar{Y}_i$$

dann

$$\epsilon \underline{S} \leq S \leq \epsilon \bar{S}$$

und

$$P \left[\bar{S} \leq \left\lfloor \frac{x}{\epsilon} \right\rfloor \right] \leq P[S \leq x] \leq P \left[\underline{S} \leq \left\lceil \frac{x}{\epsilon} \right\rceil \right]$$

Für sehr kleine $\epsilon > 0$ sind $\epsilon \underline{S}$ und $\epsilon \bar{S}$ sehr nach an S .

Wir definieren

$$\underline{g}_n = P[\underline{Y}_i = n], \quad \bar{g}_n = P[\bar{Y}_i = n]$$

Dann

$$\underline{g}_n = P[n\epsilon \leq Y_i < (n+1)\epsilon] = G((n+1)\epsilon) - G(n\epsilon), \quad n \geq 0$$

und

$$\bar{g}_0 = 0, \quad \bar{g}_n = P[(n-1)\epsilon < Y_i \leq n\epsilon] = G(n\epsilon) - G((n-1)\epsilon), \quad n \geq 1$$

Ähnlich definieren wir

$$\underline{h}_n = P[\underline{S} = n], \quad \bar{h}_n = P[\bar{S} = n]$$

Wir können jetzt die \underline{h}_n und \bar{h}_n mithilfe Panjer-Rekursion berechnen. Zur Erinnerung [Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J.: Stochastic Processes for Insurance and Finance [10]] ist die Rekursion

$$h_0 = \begin{cases} p_0 & g_0 = 0 \\ m_N(\ln g_0) & g_0 > 0 \end{cases}, \quad h_n = \frac{1}{1 - ag_0} \sum_{i=1}^n \left(a + b \frac{i}{n} \right) g_i h_{n-i}, \quad i \geq 1 \quad (9.2)$$

Weiter definieren wir

$$\underline{k}_n = \sum_{i=0}^n \underline{h}_i, \quad \bar{k}_n = \sum_{i=1}^n \bar{h}_i$$

die kann man wie folgt

$$\underline{k} = \underline{k}_{n-1} + \underline{h}_n, \quad \bar{k}_n = \bar{k}_{n-1} + \bar{h}_n$$

schneller berechnen. Schliesslich kann man die Panjer-Schranken berechnen.

$$\bar{k}_{\lfloor x/\epsilon \rfloor} \leq P[S \leq x] \leq \underline{k}_{\lfloor x/\epsilon \rfloor} \quad (9.3)$$

Kapitel 10

Diskussion und Vergleich der Resultate

In den vorherigen Kapiteln haben wir Formeln bekommen, um die Überlebenswahrscheinlichkeit im klassischen Risikomodell mit Gamma-Schäden in Form einer unendlichen Summe von Faltungen bzw. Ableitungen der Mittag-Leffler Funktionen zu berechnen. Wir haben auch eine generelle Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit bekommen, wenn die Schäden light-tail-verteilt sind, sowie die asymptotische Approximation und die Panjer Schranken für die Überlebenswahrscheinlichkeit. Es wurde immer angenommen, dass die Nettoprofitbedingung erfüllt ist.

Wenn der Formparameter $r > 0$ der Gammaverteilung ganzzahlig bzw. natürlichzahlig ist, kann man den Ausdruck (4.9) von Kapitel 4 leicht implementieren, um Resultate zu bekommen. Wenn aber $r > 0$ nicht ganzzahlig ist, dann braucht man numerische Methoden, um die Überlebenswahrscheinlichkeit zu berechnen. Hier wird R freie Programmiersprache für statistische Berechnungen und Grafiken verwendet, da sie bereits die meisten Funktionen stellt und auch die Möglichkeit bietet, eigene Funktionen zu schreiben.

Zuerst werden aber die Ergebnisse bzw. verschiedene erworbene Formeln für die Überlebenswahrscheinlichkeit diskutiert. Der Satz im Kapitel 4 ermöglicht die Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden als endliche Summe von Mittag-Leffler Funktionen zu berechnen, wenn $r > 0$ rational ist und das Polynom (4.2) einfache Nullstellen hat. Die Formel ist zwar leicht in R zu implementieren, ist aber nur im Fall $r > 0$ rational begrenzt.

Im Kapitel 5 ist die Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden in Form einer unendlichen Summe von Faltungen der Mittag-Leffler Funktionen gegeben (5.1). Bei der numerischen Implementierung hat man hier mehrere Möglichkeiten für die Mittag-Leffler Funktionen. Man kann die Beziehung (3.4) benutzen um die Mittag-Leffler Funktion durch die unvollständige Gamma Funktion zu berechnen. Man kann eine eigene Funktion für die Mittag-Leffler Funktion schreiben oder die Mittag-Leffler Funktion aus dem Paket "MittagLeffler" in R verwenden. Weil es um eine unendliche Summe geht, werden hier nur die n ersten Terme der Summe im Betracht genommen, um einen möglichst kleinsten truncation Error zu bekommen. Die Anzahl n der betrachteten Terme hängt von der Wertwahl der Parameter für das klassische Risikomodel und den Gamma-Schäden ab. Die Formel kann man leicht in R implementieren, aber ist wegen der n -fachen Faltung nicht zeiteffizient.

Im Kapitel 6 ist die Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden in Form einer unendlichen Summe von Ableitungen der Mittag-Leffler Funktionen gegeben (6.1). Weil die n -fache Ableitung der Mittag-Leffler Funktion eine unendliche Summe ist (3.5), in Wirklichkeit ist die Formel für die Überlebenswahrscheinlichkeit eine unendliche Doppelsumme. Die Formel kann man leicht implementieren. Sie ist zeiteffizienter als die Formel vom Kapitel 5. Weil es auch hier um eine unendliche

Summe geht, werden die m ersten Ableitungen der Mittag-Leffler Funktion und die n ersten Terme für die unendliche definierende Summe der Ableitungen im Betracht genommen, um einen möglichst kleinsten truncation Error zu bekommen. Die Anzahl n und m der betrachteten Terme hängt von der Wertwahl der Parameter für das klassische Risikomodel und die Gamma-Schäden ab.

Im Kapitel 7 ist die Überlebenswahrscheinlichkeit in Form einer unendlichen Summe von n -fachen Faltungen der Verteilungsfunktion der Tail-Verteilung von Schäden gegeben (7.3), die light-verteilt sind. Die n -fache Faltung wird durch die Formel (7.4) berechnet. Weil die n -fache Faltung der Gamma- bzw. der inversen Gauß-Verteilung wieder eine Gamma- bzw. ein inverse Gauß-Verteilung ist, kann man alternativ zu der Formel (7.15) bzw. (7.18) die Formeln (7.16) und (7.17) bzw. (7.19), (7.20) und (7.21) verwenden, um eine zeiteffiziente numerische Implementierung zu bekommen. Eigentlich ist sie die zeiteffizienteste von allen numerischen Implementierungen. Auch hier werden nur die n ersten Terme der unendlichen Summe im Betracht genommen, um einen möglichst kleinsten truncation Error zu bekommen. Die Anzahl n der betrachteten Terme hängt von der Wertwahl der Parameter für das klassische Risikomodel und den light-tail-verteilten Schäden ab.

Als letztes ist in den Kapiteln 8 und 9 die asymptotische Approximation bzw. die Panjer Schranken der Überlebenswahrscheinlichkeit bei light-Tail-verteilten Schäden gegeben. Im Fall der Gamma- bzw. der invers Gauß-Schäden kann man die asymptotische Approximation bzw. Panjer Schranken durch die Formeln (8.7) und (8.8) bzw. (9.3) Formel berechnen. Die numerische Implementierung ist leicht und zeiteffizient.

Wie genau sind die Ergebnisse der numerischen Implementierungen der erworbenen Formeln? Dafür braucht man eine Referenz, mit der man die Ergebnisse vergleichen kann. Bei Gamma-Schäden, bei der $r = 2$ ist, kann man die Überlebenswahrscheinlichkeit analytisch berechnen. Weil die Laplace Transformation der Gammaverteilung

$$M_X(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - s} \right)^2, \quad \Re(s) < \alpha$$

ist, wird die Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(s) &= \frac{c\phi(0)}{cs - \lambda + \lambda \left(\frac{\alpha}{s+\alpha} \right)^2} = \frac{c\phi(0)(s+\alpha)^2}{(cs - \lambda)(s+\alpha)^2 + \lambda\alpha^2} \\ &= \frac{\phi(0)(\alpha^2 + 2\alpha s + s^2)}{s \left(s^2 + \frac{2\alpha c - \lambda}{c}s + \frac{c\alpha^2 - 2\alpha\lambda}{c} \right)} \end{aligned}$$

Der Nenner ist ein Polynom des Grades 3. Durch die grosse Lösungsformel kann man leicht die Nullstellen berechnen.

$$s_0 = 0, \quad s_1 = -\frac{2\alpha c - \lambda}{2c} + \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\alpha\lambda c}}{2c}, \quad s_2 = -\frac{2\alpha c - \lambda}{2c} - \frac{\sqrt{\lambda^2 + 4\alpha\lambda c}}{2c}$$

Nach der Partialbruchzerlegung bekommt man für die Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit:

$$\hat{\phi}(s) = \frac{m_0}{s} + \frac{m_1}{s - s_1} + \frac{m_2}{s - s_2}$$

wobei

$$m_0 = 1, \quad m_1 = -\phi(0) \frac{(s_1 + \alpha)^2}{s_1(s_2 - s_1)}, \quad m_2 = \phi(0) \frac{(s_2 + \alpha)^2}{s_2(s_2 - s_1)}$$

Die inverse Laplace Transformation ergibt:

$$\phi(u) = 1 + m_1 e^{s_1 u} + m_2 e^{s_2 u}$$

Für die numerische Implementierung der Überlebenswahrscheinlichkeit kann man auch die Integralformel für die inverse Laplace Transformation, das Bromwich-Integral, auf der Talbot Kontur (2.31) verwenden. Für den Vergleich zwischen analytischer Berechnung und Bromwich-Integral der Überlebenswahrscheinlichkeit, wird man für die Parameter des klassischen Risikomodells $c = 2$, $\lambda = 1$ und $\theta = 0.4$ wählen. Für $r = 2$ wird $\alpha = 1.4$.

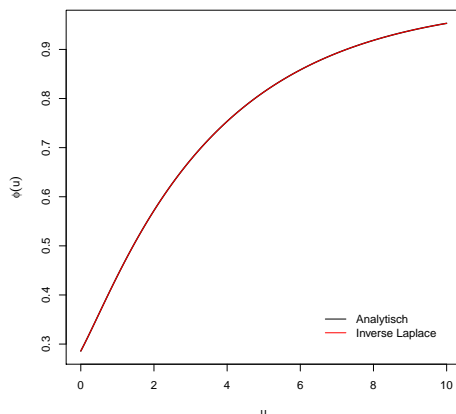


Abbildung 10.1: Vergleich von der inversen Laplace Transformation und analytischen Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden, Fall $r = 2$

Aus dem Plot 10.1 sieht man, dass die Integralformel für die inverse Laplace Transformation eine ziemlich genaue Approximation ist. Der truncation Error für die gewählten Werte der Parameter c , λ , r , α und θ ist kleiner als 10^{-6} . Für die anderen numerischen Implementierungen wird die Integralformel als Referenz und die Werte der Parameter $c = 2$, $\lambda = 1$ und $\theta = 0.4$ verwendet.

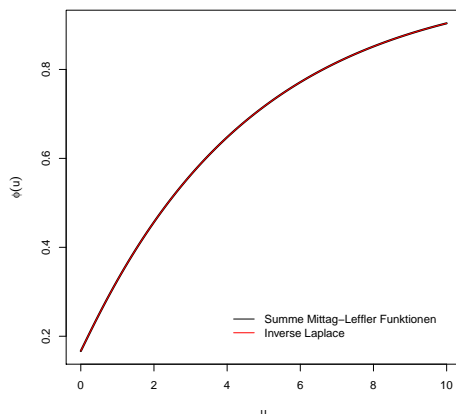


Abbildung 10.2: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die endliche Summe von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden wenn r rational

Der Plot 10.2, wie der Titel sagt, zeigt die Überlebenswahrscheinlichkeit durch die endliche Summe von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden wenn r rational ist. In den Fall ist $r = m/n = 7/6$ gewählt. Der truncation Error für die gewählten Werte der Parameter $c = 1$, $\lambda = 1$, r , $\alpha = 1.2 * r$ und $\theta = 0.2$ ist kleiner als 10^{-7} .

Der nächste Plot 10.3 und die nächste Tabelle 10.1 zeigen, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Faltungen der Mittag-Leffler Funktion auch eine ziemlich genaue Approximation zu der inversen Laplace Transformation ist, wenn man die $n = 14$ ersten Terme der Summe im Betracht nimmt. Weil hier die n-fache Faltung auftaucht, muss man für das Faltungsintegral das Integralintervall in Subintervallen von der Länge h trennen. Der Plot 10.4 zeigt, dass je kleiner die Länge h ist, desto genauer ist die Approximation. Für die numerische Implementierung bei dem Plot 10.3 und der Tabelle 10.1 wurde $h = 0.001$ genommen. Der truncation Error für die gewählten Werte der Parameter c , λ , r , α , θ und $h = 0.001$ ist kleiner als 10^{-3} .

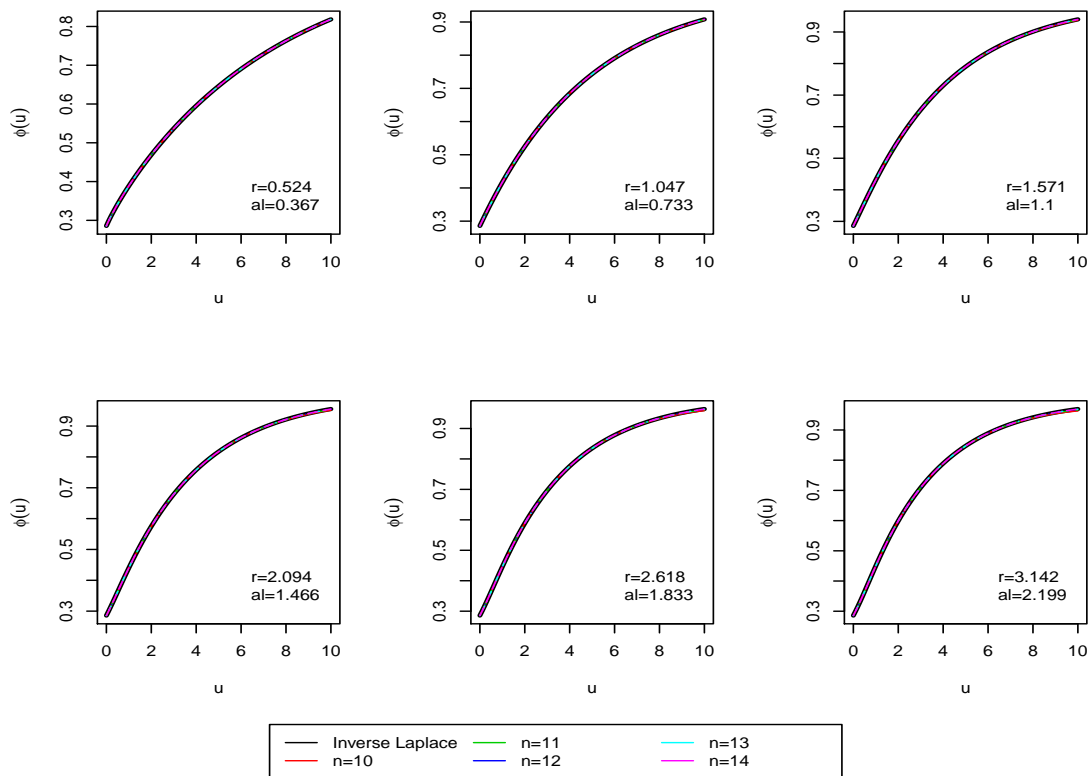


Abbildung 10.3: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Faltungen von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden

Startkapital	r=0.524	r=1.047	r=1.571	r=2.094	r=2.618	r=3.142
u=0	0.286	0.286	0.286	0.286	0.286	0.286
u=1	0.389	0.417	0.431	0.440	0.446	0.450
u=2	0.469	0.525	0.555	0.575	0.589	0.599
u=3	0.537	0.613	0.653	0.679	0.696	0.709
u=4	0.595	0.685	0.730	0.758	0.776	0.789
u=5	0.646	0.743	0.790	0.817	0.835	0.847
u=6	0.691	0.791	0.836	0.862	0.878	0.889
u=7	0.729	0.830	0.873	0.896	0.910	0.920
u=8	0.763	0.861	0.901	0.921	0.934	0.942
u=9	0.792	0.887	0.923	0.941	0.951	0.958
u=10	0.818	0.908	0.940	0.955	0.964	0.969

Tabelle 10.1: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Faltungen von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden

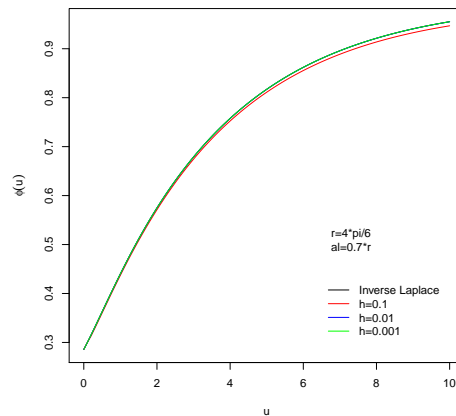


Abbildung 10.4: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Faltungen von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden für verschiedene Werte der Subintervallen h fürs Integrieren

Den Plot 10.5 bzw. 10.6 bekommt man für die Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Ableitungen der Mittag-Leffler Funktion bzw. durch die Tail-Verteilung bei Gamma-Schäden. Beide sind ziemlich genaue Approximationen. Die Anzahl der betrachteten Terme der Summe ist $n = 14$. In dem Fall der Ableitungen der Mittag-Leffler Funktion ist die Anzahl der betrachteten Terme für die endlich definierende Summe der n -fachen Ableitung $m = 50$. Der truncation Error für die gewählten Werte der Parameter c , λ , r , α und θ ist kleiner als 10^{-3} . Die Tabellen 10.2 und 10.3 bestätigen die obere Schlussfolgerungen.

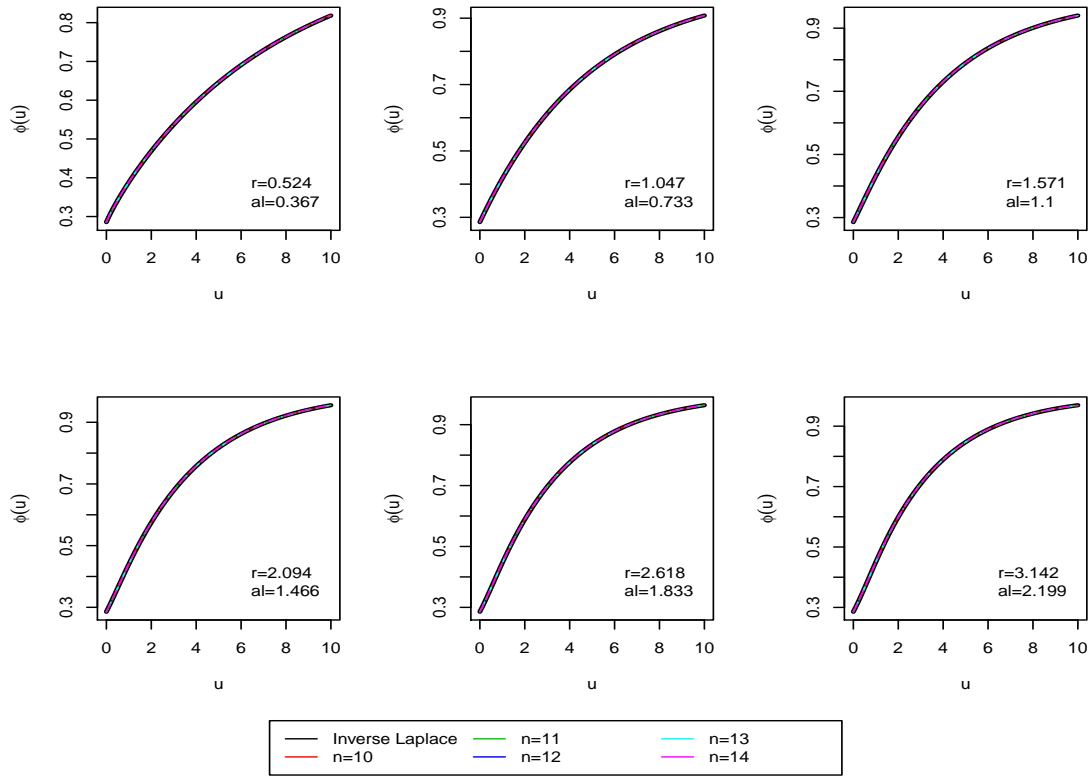


Abbildung 10.5: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Ableitungen von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden

Startkapital	r=0.524	r=1.047	r=1.571	r=2.094	r=2.618	r=3.142
x=0	0.286	0.286	0.286	0.286	0.286	0.286
x=1	0.389	0.417	0.431	0.440	0.446	0.450
x=2	0.469	0.525	0.555	0.575	0.589	0.599
x=3	0.537	0.613	0.653	0.679	0.696	0.709
x=4	0.595	0.685	0.730	0.758	0.776	0.789
x=5	0.646	0.743	0.790	0.817	0.835	0.847
x=6	0.691	0.791	0.836	0.862	0.878	0.889
x=7	0.729	0.830	0.873	0.896	0.910	0.920
x=8	0.763	0.861	0.901	0.921	0.934	0.942
x=9	0.792	0.887	0.923	0.941	0.951	0.958
x=10	0.818	0.908	0.940	0.955	0.964	0.969

Tabelle 10.2: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Ableitungen von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden

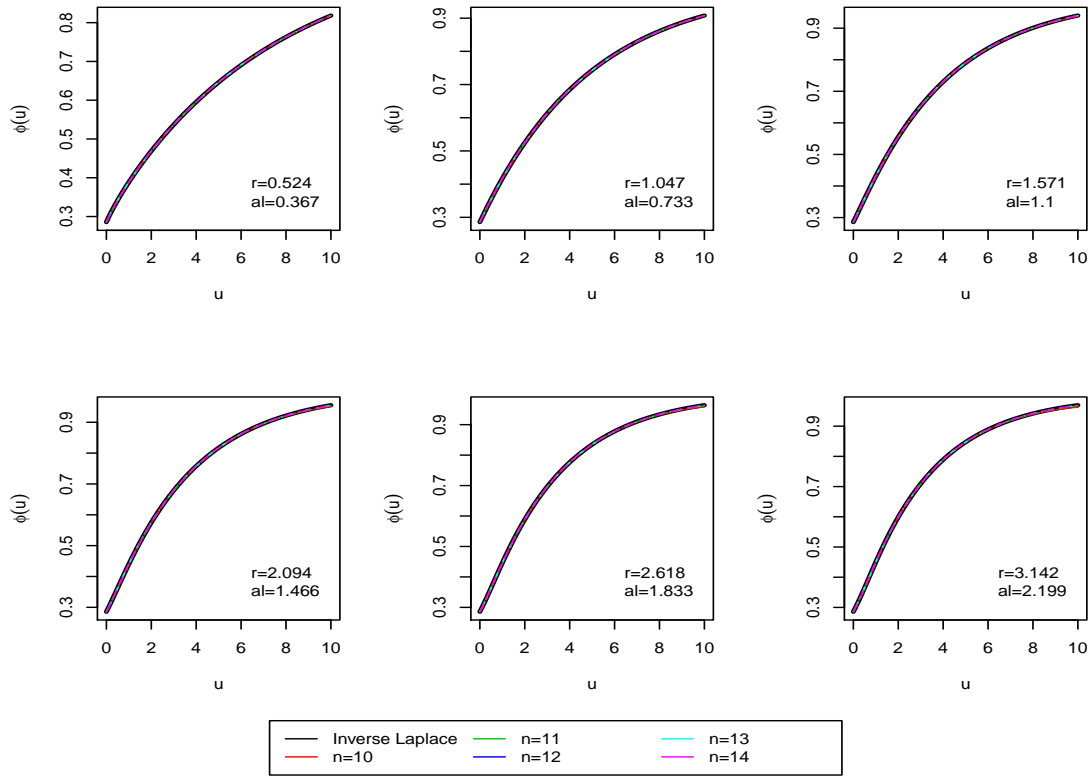


Abbildung 10.6: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Tail-Verteilung bei Gamma-Schäden

Startkapital	r=0.524	r=1.047	r=1.571	r=2.094	r=2.618	r=3.142
u=0	0.286	0.286	0.286	0.286	0.286	0.286
u=1	0.389	0.417	0.431	0.440	0.446	0.450
u=2	0.469	0.525	0.555	0.575	0.589	0.599
u=3	0.537	0.613	0.653	0.679	0.696	0.709
u=4	0.595	0.685	0.730	0.758	0.776	0.789
u=5	0.646	0.743	0.790	0.817	0.835	0.847
u=6	0.691	0.791	0.836	0.862	0.878	0.889
u=7	0.729	0.830	0.873	0.896	0.910	0.920
u=8	0.763	0.861	0.901	0.921	0.934	0.942
u=9	0.792	0.887	0.923	0.941	0.951	0.958
u=10	0.818	0.908	0.940	0.955	0.964	0.969

Tabelle 10.3: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Tail-Verteilung bei Gamma-Schäden

Die nächsten zwei Plots, Plot 10.7 und 10.8, zeigen die asymptotische Approximation und die Panjer Schranken der Überlebenswahrscheinlichkeit. Man sieht, dass die asymptotische Approximation auch für kleine Werte des Startkapitals z.B. $u = 1$ sehr gut funktioniert. Im Fall der Panjer Schran-

ken gilt je kleiner der Rundungsparameter ϵ ist desto näher ist die untere bzw. obere Schranke zu inversen Laplace Transformation. Es wurde $\epsilon = 0.1$ genommen.

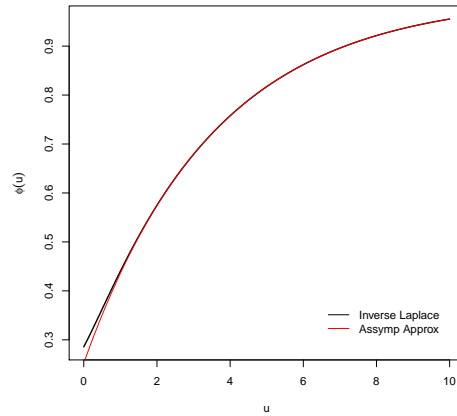


Abbildung 10.7: Asymptotische Approximation der Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden

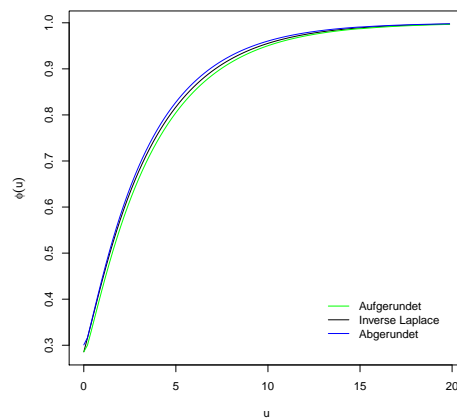


Abbildung 10.8: Panjer Schranken für die Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden

Aus dem Plot 10.9 sieht man, dass wenn die Schäden im klassischen Risikomodell mit den gleich gewählten Werte der Parameter invers Gauß-verteilt sind, ist die Überlebenswahrscheinlichkeit größer. Die Anzahl der betrachteten Terme der Summe ist $n = 14$. Der truncation Error für die gewählten Werte der Parameter c , λ , und θ ist kleiner als 10^{-2} .

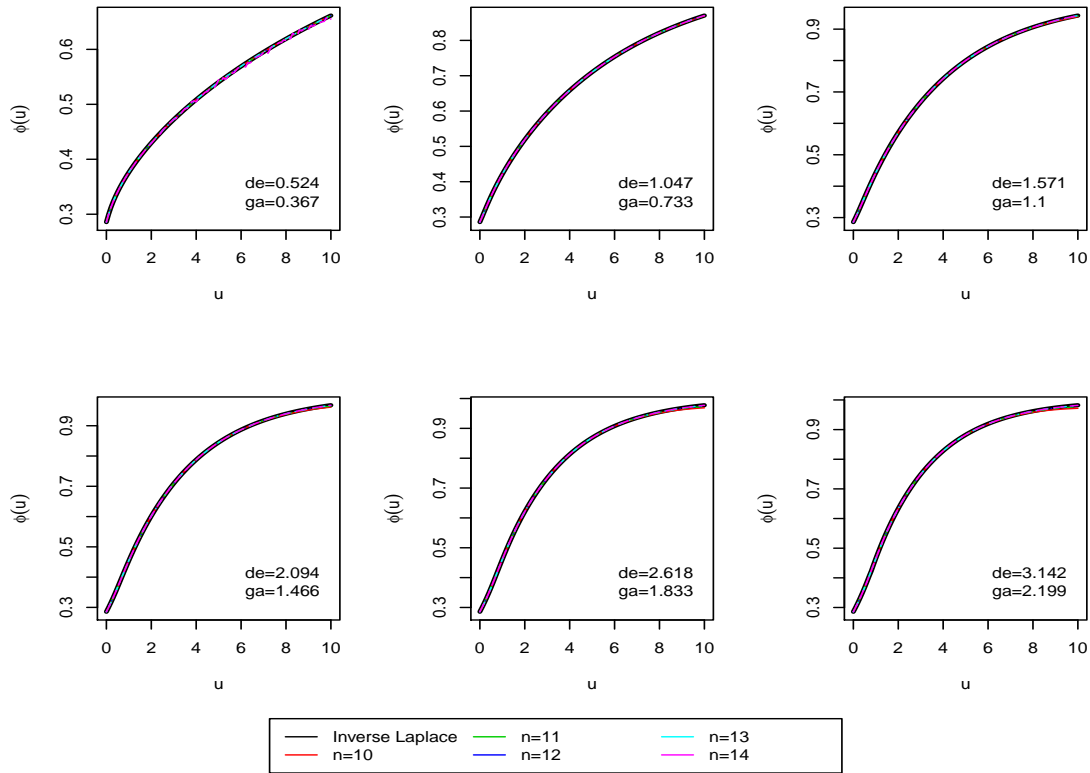


Abbildung 10.9: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Tail-Verteilung bei invers Gauß-Schäden

Startkapital	de=0.524	de=1.047	de=1.571	de=2.094	de=2.618	de=3.142
u=0	0.286	0.286	0.286	0.286	0.286	0.286
u=1	0.376	0.421	0.443	0.455	0.461	0.465
u=2	0.429	0.519	0.571	0.602	0.621	0.634
u=3	0.473	0.596	0.668	0.709	0.734	0.749
u=4	0.504	0.658	0.742	0.788	0.813	0.828
u=5	0.545	0.710	0.800	0.845	0.869	0.882
u=6	0.568	0.754	0.844	0.887	0.908	0.919
u=7	0.595	0.791	0.879	0.917	0.935	0.945
u=8	0.616	0.822	0.906	0.940	0.954	0.962
u=9	0.636	0.848	0.927	0.956	0.968	0.974
u=10	0.656	0.870	0.943	0.968	0.977	0.982

Tabelle 10.4: Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Tail-Verteilung bei invers Gauß-Schäden

Die nächste zwei Plots 10.10 und 10.11 zeigen die asymptotische Approximation und Panjer Schran-

ken der Überlebenswahrscheinlichkeit bei invers Gauß-Schäden.

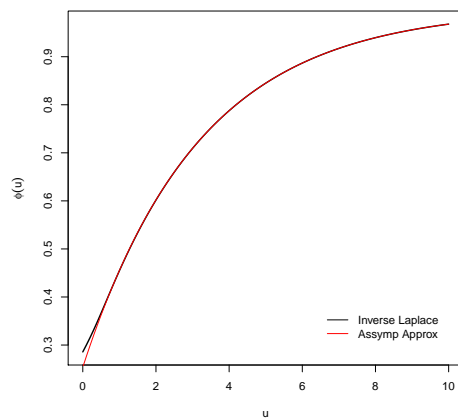


Abbildung 10.10: Asymptotische Approximation der Überlebenswahrscheinlichkeit bei invers Gauß-Schäden

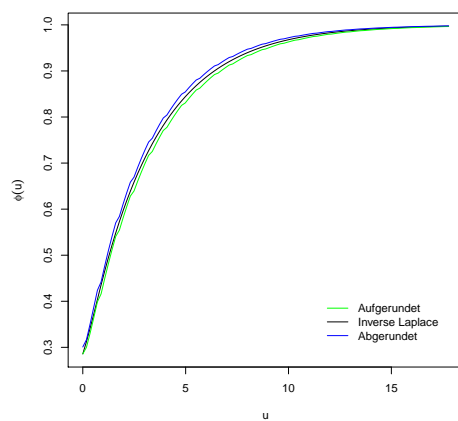


Abbildung 10.11: Panjer Schranken für die Überlebenswahrscheinlichkeit bei invers Gauß-Schäden

Anhang A

Tail-Verteilung und deren Laplace Transformation

Sei $f(x)$, $x \geq 0$, Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bezeichnen wir mit

$$\mu = \int_0^{\infty} x f(x) dx$$

ihren Erwartungswert und mit

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(y) dy, \quad x \geq 0$$

ihrer Verteilungsfunktion.

Weil $f(x)$, $x \geq 0$, eine Dichte ist, existiert ihre Laplace Transformation

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

mindest für $\Re(s) \geq 0$, [G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation [3]].

Wir nehmen an, dass $f(s)$ für $\Re(s) > -\epsilon$ für $\epsilon > 0$ (z.B. Laplace Transformation der Dichte von Gammaverteilung $\Gamma(r, \alpha)$ existiert für $\Re(s) > -\alpha$). Dann ist $\hat{f}(s)$ holomorph in $\Re(s) > -\epsilon$ und

$$\hat{f}'(s) = - \int_0^{\infty} e^{-sx} x f(x) dx \tag{A.1}$$

gilt, [G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation [3]].

Besonders als holomorphe Funktion ist $\hat{f}(s)$ stetig und differenzierbar für $s \in (-\epsilon, \infty)$.

$$\hat{f}(0) = \int_0^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$\hat{f}'(s) \leq 0, \text{ für alle } s \in (-\epsilon, \infty)$$

Somit liegt $\hat{f}(s)$ für alle $s > 0$ in $(0, 1)$.

Sodann betrachten wir ihre Tail-Verteilung

$$g(x) = \frac{1}{\mu}(1 - F(x)) = \frac{1}{\mu}(1 - P(X \leq x)) = \frac{1}{\mu}P(X > x), \quad x \geq 0$$

Weil $g(x) \geq 0$ und integrierbar für alle $x \geq 0$ ist, und

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(x) dx &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty P(X > x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_x^\infty f(y) dy dx \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^y dx f(y) dy = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty y f(y) dy = \frac{1}{\mu} \mu = 1 \end{aligned}$$

ist $g(x)$ Dichte einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Als Wahrscheinlichkeitsdichte, gleich so wie bei $f(x)$, existiert ihre Laplace Transformation mindest für $\Re(s) \geq 0$. Die Berechnung der Laplace Transformation von $g(x)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) &= \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-sx} \left(1 - \int_0^x f(t) dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{s} - \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(t) dt dx \right) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{s} - \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-sx} f(t) dx dt \right) \\ &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right) = \frac{1 - M_X(-s)}{\mu s} = \frac{1}{\mu s} (1 - \hat{f}(s)) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Der nächste Schritt ist Ergebnisse aus dem erworbenen Wissen von der Dichte $f(x)$ und deren Laplace Transformation $\hat{f}(s)$, herauszuziehen.

Wenn die Laplace Transformation $\hat{f}(s)$ von $f(x)$ für $\Re(s) > -\epsilon$ existiert, dann existiert die Laplace Transformation $\hat{g}(s)$ von $g(x)$ für $\Re(s) > -\epsilon$ und aus (A.2)

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{\mu s} (1 - \hat{f}(s))$$

für $\Re(s) > -\epsilon$ gilt. So ist $\hat{g}(s)$ holomorph in $\Re(s) > -\epsilon$. Wegen der holomorphen Eigenschaft von $\hat{g}(s)$ schliesst man, dass $\hat{g}(s)$ differenzierbar und stetig in $\Re(s) > -\epsilon$ auch ist.

Mithilfe der l'Hospital Regel für den Grenzwert, ist $s = 0$ aus (A.2) eine hebbare Singularität

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \hat{g}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\mu s} (1 - \hat{f}(s)) \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} -\frac{1}{\mu} \lim_{s \rightarrow 0} \hat{f}'(s) \\ &= \frac{1}{\mu} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-sx} x f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

Das bestätigt nochmal das Ergebniss, dass für $s = 0$ ist die Laplace Transformation einer Wahrscheinlichkeitsdichte dessen Integral auf dem Definitionsbereich.

Weil $g(x)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, und ihre Laplace Transformation existiert, gilt gleich wie bei $f(x)$, dass

$$\hat{g}(s) \geq 0, \quad \hat{g}'(s) < 0$$

So haben wir gezeigt, dass

$$\hat{g}(s) \in (0, 1), \quad \text{für alle } s > 0$$

Anhang B

n -fache Faltung der Funktion $H(x)$

Lemma B.1. Sei $H(x) = \mathbb{1}(x \geq 0)$. Dann ist:

$$H^{*n}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x \geq 0, \quad n \geq 1 \quad (\text{B.1})$$

Beweis. Der Beweis wird mit Induktion durchgeführt.

$$n = 1, \quad H(x) = \frac{x^{1-1}}{(1-1)!} = 1 = \mathbb{1}(x \geq 0), \quad x \geq 0$$

$$n = 2, \quad H^{*2}(x) = \frac{x^{2-1}}{(2-1)!} = x = \int_0^x dy = \int_0^x H(x-y)H(y)dy$$

Gehen wir davon aus, dass die Aussage für n bereits bewiesen ist. Wir müssen nun die n -fache Faltung für $(n+1)$ beweisen.

$$\begin{aligned} H^{*(n+1)}(x) &= \frac{x^n}{n!} = \int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} dy = \int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} H(y) dy \\ &= \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} * H(x) = (H^{*n} * H)(x) \end{aligned}$$

□

Anhang C

Beweis der Identität I1 und I2

Lemma C.1. Nehmen wir an, dass die momenterzeugende Funktion

$$M_X(s) = E[e^{sX}]$$

in der Umgebung von $s = 0$ existiert. Sei

$$Q_n(s) = (1 - M_X(s))^n - 1, \quad n \geq 1 \quad (\text{C.1})$$

Dann

$$Q_n^{(j)}(s) = (-1)^j \binom{n}{j} j! (1 - M_X(s))^{n-j} \left[M_X'(s)^j + (1 - M_X(s)) A_{n,j}(s) \right], \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{C.2})$$

wobei $A_{n,j}(s)$ sind analytisch in der Umgebung von $s = 0$.

Beweis. Der Beweis wird mithilfe der Induktion geführt.

$$j = 1, \quad Q_n'(s) = -n(1 - M_X(s))^{n-1} M_X'(s) \quad \text{mit} \quad A_{n,1}(s) = 0$$

$$\begin{aligned} j = 2, \quad Q_n''(s) &= n(n-1)(1 - M_X(s))^{n-2} M_X'(s)^2 - n(1 - M_X(s))^{n-1} M_X''(s) \\ &= n(n-1)(1 - M_X(s))^{n-2} \left[M_X'(s)^2 + (1 - M_X(s)) \left(M_X''(s) + \frac{1}{n-1} \right) \right] \\ &= n(n-1)(1 - M_X(s))^{n-2} \left[M_X'(s)^2 + (1 - M_X(s)) A_{n,2}(s) \right] \\ &\quad \text{mit} \quad A_{n,2}(s) = M_X''(s) + \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Gehen wir davon aus, dass die Aussage für j bereits bewiesen ist. Wir müssen nun die Aussage für $j+1$ beweisen.

$$\begin{aligned} Q_n^{(j+1)}(s) &= (-1)^j \binom{n}{j} j! \left[-(n-j)(1 - M_X(s))^{n-j-1} M_X'(s) \right] \left[M_X'(s)^j + (1 - M_X(s)) A_{n,j}(s) \right] \\ &\quad + (1 - M_X(s))^{n-j} \left[j M_X'(s)^{j-1} M_X''(s) - M_X'(s) A_{n,j}(s) + (1 - M_X(s)) A'_{n,j}(s) \right] \\ &= (-1)^{j+1} \binom{n}{j+1} (j+1)! (1 - M_X(s))^{n-j-1} \left[M_X'(s)^{j+1} + (1 - M_X(s)) A_{n,j+1}(s) \right] \end{aligned}$$

mit

$$A_{n,j+1}(s) = M_X'(s) A_{n,j}(s) - \frac{1}{n-j} \left[j M_X'(s)^{j-1} M_X''(s) - M_X'(s) A_{n,j}(s) + (1 - M_X(s)) A'_{n,j}(s) \right]$$

□

Korollar C.2.

$$Q_n(0) = -1$$

$$Q_n^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$Q_n^{(n)}(0) = (-1)^n n! \mu^n$$

wobei $\mu = \mathbb{E}[X]$.

Beweis. Als Folge des Lemmas C.1, $M_X(0) = 1$ und $M'_X(0) = \mathbb{E}[X] = \mu$. □

Lemma C.3. Sei

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i$$

die Summe von k unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen X_i . Dann

$$x^{n-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[(x - S_k)^{n-1}] = 0 \quad (\text{C.3})$$

Proof. Wir betrachten die endliche Summe in (C.3). Sie kann man weiter

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[(x - S_k)^{n-1}] &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \mathbb{E}[S_k^j] x^{n-1-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[S_k^j] x^{n-1-j} \end{aligned}$$

schreiben. Wir bezeichnen mit

$$m_{kj} = \mathbb{E}[S_k^j], \quad w_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k m_{kj}$$

Nach dem Binomialsatz kann man $Q_n(s)$ aus dem Lemma C.1

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k M_X(s)^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k M_{S_k}(s)$$

schreiben. Die j -te Ableitung von $Q_n(s)$ an der Stelle $s = 0$ wird

$$Q_n^{(j)}(0) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k M_{S_k}^{(j)}(s) \Big|_{s=0} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k m_{kj}$$

Nach dem Korollar C.2 sind

$$Q_n(0) = -1; \quad Q_n^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

So haben wir gezeigt, dass die endliche Summe in (C.3) gleich $-x^{n-1}$ ist. □

Lemma C.4. Sei

$$S_k = \sum_{i=1}^k X_i$$

die Summe von k unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen X_i . Dann

$$x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[(x - S_k)^n] = n! \mu^n \quad (\text{C.4})$$

Proof. Gleich wie bei dem Lemma C.3 betrachten wir die endliche Summe in (C.4). Sie kann man weiter

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[(x - S_k)^n] &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \mathbb{E}[S_k^j] x^{n-j} = \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k \mathbb{E}[S_k^j] x^{n-j} \end{aligned}$$

schreiben. Auch hier bezeichnen wir mit

$$m_{kj} = \mathbb{E}[S_k^j], \quad w_{kj} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k m_{kj}$$

Wieder nach dem Binomialsatz kann man $Q_n(s)$ aus dem Lemma C.1

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k M_X(s)^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k M_{S_k}(s)$$

schreiben. Die j -te Ableitung von $Q_n(s)$ an der Stelle $s = 0$ wird

$$Q_n^{(j)}(0) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k M_{S_k}^{(j)}(s) \Big|_{s=0} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^k m_{kj}$$

Nach dem Korollar C.2 sind

$$Q_n(0) = -1; \quad Q_n^{(j)}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1; \quad Q_n^{(n)}(0) = (-1)^n n! \mu^n$$

So haben wir gezeigt, dass die endliche Summe in (C.4) gleich

$$n! \mu^n - x^n$$

ist. □

Anhang D

Codes für die numerischen Implementierungen

1. Vergleich von der inversen Laplace Transformation und analytischen Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden, Fall $r=2$

```
# Clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

# Dichte der Gammaverteilung
fg<- function(x,r,al) al^r/gamma(r)*x^(r-1)*exp(-al*x)

# Momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung
mx<- function(s) (al/(al-s))^r

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Gammaverteilung Parameter
al<- 1.4
r<- 2

# Erwartungswert der Gammaverteilung
mu<- r/al

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Plotbereich
xmin<- 0
xmax<- 10
nobs<- 100
x<- seq(xmin, xmax, length.out=nobs+1)

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit, analytische Berechnung
p<- Vectorize(function(x){
  s1<- (la-2*al*c+(la^2+4*la*al*c)^(1/2))/(2*c)
  s2<- (la-2*al*c-(la^2+4*la*al*c)^(1/2))/(2*c)
  m1<- -(1-(r*la)/(al*c))*((s1+al)^2)/(s1*(s2-s1))
  m2<- (1-(r*la)/(al*c))*((s2+al)^2)/(s2*(s2-s1))
  res<- 1+m1*exp(s1*x)+m2*exp(s2*x)
})
```

```

        return(res)})
# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun,0,pi)$value
})
# Plot
curve(p(x), from=xmin, to=xmax, type="l", lwd=2, col="black", xlab="Startkapital",
      ylab="Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
curve(lip(x), from=xmin, to=xmax, type="l", col="red", add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, c("Analytisch", "Inverse Laplace"), lty=1, col=c("
      black","red"), box.col=NA)

```

2. Überlebenswahrscheinlichkeit durch die endliche Summe von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden wenn r rational

```

# Clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

# Fuer die nicht in R verfuegbaren Mittag-Leffler Funktionen
library("MittagLeffler")

# Dichte der Gammaverteilung
fg<- function(x, r, al) al^r/gamma(r)*x^(r-1)*exp(-al*x)

# Momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung
mx<- function(s) (al/(al-s))^r

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Polynomzaehler der Laplace Transformation von Ueberlebenswahrscheinlichkeit
pm<- Vectorize(function(t) c*p0*t^m)

# Polynomnenner der Laplace Transformation von Ueberlebenswahrscheinlichkeit
qm<- Vectorize(function(t) c*t^(n+m)-(c*al+la)*t^m+la*al^r)

# Erste Ableitung der Polynomnenner der Laplace Transformation
# von Ueberlebenswahrscheinlichkeit
qma<- Vectorize(function(t) c*(n+m)*t^(n+m-1)-m*(c*al+la)*t^(m-1))

# Plotbereich und Anzahl der Punkte fuers Integrieren
xmin<- 0
xmax<- 10
nobs<- 100
x<- seq(xmin, xmax, length.out=nobs+1)

# Klassisches Risikomodell Parameter
c<- 1
la<- 1

```

```

# Gammaverteilung Parameter
m<- 7
n<- 6
r<- m/n
a1<- 1.2*r

# Erwartungswert der Gammaverteilung
mu<- r/a1

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Vektor fuer die Koeffizienten der Polynomnenner
polc<- rep(0, m+n+1)
polc[1]<- la*al^r
polc[m+1]<- -(c*al+la)
polc[n+m+1]<- c

# Nullstellen der Polynomnenner
nns<- polyroot(polc)
print(length(nns)==(n+m))

# Vektor fuer die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung
pbzc<- rep(0, m+n)
for(i in 1:(n+m)){
pbzc[i]<- pm(nns[i])/qma(nns[i])}

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit fuer "r" rational
p<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0);
  Re(exp(-al*x)*sum(sapply(1:(m+n), function(i) pbzc[i]*x^(1/n-1)*mlf(nns[i]*x^(1
/n),1/n,1/n))))})

# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun, 0, pi)$value
})

curve(p(x), from=xmin, to=xmax, col="black", lwd=3, xlab="Startkapital", ylab="
  Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
curve(lip(x), from=xmin, to=xmax, col="red", add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, c("Summe Mittag-Leffler Funktionen", "Inverse
  Laplace"), lty=1, col=c("black","red"), box.col=NA)

```

3. Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Faltungen von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden

```

# Clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

```

```

# Fuer die nicht in R verfuegbaren Mittag-Leffler Funktionen
library("MittagLefflerR")

# Dichte der Gammaverteilung
fg<- function(x, r, al) al^r/gamma(r)*x^(r-1)*exp(-al*x)

# Momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung
mx<- function(s) (al/(al-s))^r

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Faltung von zwei Funktionen
myconv<- function(a,b,h){
  n<- length(a)-1
  c<- rep(0,n+1)
  c[1]<- 0
  c[2]<- (a[1]*b[2]+a[2]*b[1])*h/2
  for(k in 2:n){
    j<- 2:k
    c[k+1]<- (sum(a[j]*b[k-j+2])+(a[1]*b[k]+a[k]*b[1])/2)*h
  }
  return(c)
}

# Plotbereich und Anzahl der Punkte fuer Integrieren
xmin<- 0
xmax<- 10
nobs<- 10000
dx<- xmax/nobs
x<- seq(xmin, xmax, length.out=nobs+1)

# Anzahl der in der Summe betrachteten Terme
nmax<- 14

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Fuer mehrere Plots in einem Fenster
op<- par(mfrow=c(2,3), oma=c(5,0,5,0), xpd=NA)

# Array fuer die Ueberlebenswahrscheinlichkeit
# fuer verschiedene Werte von Startkapital und Parameter "r"
mp1<- array(dim=c(xmax+1,6))

# Vektor fuer die Werte von "r"
co<- c()

# Schleife fuer mehrere Werte von Gammaverteilungsparametern,
# die eine Ratioverhaeltnis haben
for(i in 1:6){r<- i*pi/6;
  al<- 0.7*r

# Element von Vektor "co"
co[i]<- round(r,3)

# Erwartungswert der Gammaverteilung
mu<- r/al

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

```

```

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Arrays fuer die n-fache Faltung, die Summe und die Ueberlebenswahrscheinlichkeit
h<- array(dim=c(nmax, nobs+1))
s<- array(dim=c(nmax, nobs+1))
p1<- array(dim=c(nmax, nobs+1))

# Die erste Zeile von Arrays "h", "s" und "p1"
h[1,]<- exp(al*x)-(al*x)^r*mlf(al*x,1,1+r)
s[1,]<- la/c*h[1,]
p1[1,]<- p0*exp(-al*x)*(exp(al*x)+myconv(exp(al*x),s[1,],dx))

# Der Rest der Zeilen von Arrays "h", "s" und "p1"
for(n in 2:nmax){
  h[n,]<- myconv(h[n-1,],h[1,],dx)
  s[n,]<- s[n-1,]+(la/c)^n*h[n,]
  p1[n,]<- p0*exp(-al*x)*(exp(al*x)+myconv(exp(al*x),s[n,],dx))
}

# Spalte des Arrays "mp1"
mp1[,i]<- round(p1[nmax, seq(1, nobs+1, by=nobs/xmax)],3)

# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun, 0, pi)$value
})

# Plot
curve(lip(x), from=0, to=xmax, col="black", lwd=3, xlab="Startkapital", ylab="
  Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
matplot(x, t(p1[(nmax-4):nmax,]), type="l", col=c(2:(nmax-2)), add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, legend=c(paste0("r=",round(r,3)), paste0("al=",
  round(al,3))), box.col=NA)
}

# Gemeinsame Legende von allen Plots
legend(-26,-0.075,ncol=3,c("Inverse Laplace",paste0("n=",(nmax-4):nmax)),
  lty=1, col=c("black",2:(nmax-2)))

# Umbenennen von Zeilen und Spalten des Arrays "mp1"
rownames(mp1)<- paste0("x=", xmin:xmax)
colnames(mp1)<- paste0("r=", co)

```

4. Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Faltungen von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden für verschiedene Werte der Subintervallen dx fürs Integrieren

```

# Clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

# Fuer die nicht in R verfuegbaren Mittag-Leffler Funktionen

```

```

library("MittagLeffler")

# Dichte der Gammaverteilung
fg<- function(x, r, al) al^r/gamma(r)*x^(r-1)*exp(-al*x)

# Momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung
mx<- function(s) (al/(al-s))^r

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Faltung von zwei Funktionen
myconv<- function(a,b,h){
  n<- length(a)-1
  c<- rep(0,n+1)
  c[1]<- 0
  c[2]<- (a[1]*b[2]+a[2]*b[1])*h/2
  for(k in 2:n){
    j<- 2:k
    c[k+1]<- (sum(a[j]*b[k-j+2])+(a[1]*b[k]+a[k]*b[1])/2)*h
  }
  return(c)
}

# Klassisches Risikomodel Parameter
la<- 1
c<- 2

# Gammaverteilung Parameter
r<- 4*pi/6
al<- 0.7*r

# Erwartungswert der Gammaverteilung
mu<- r/al

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Anzahl der in der Summe betrachteten Terme
nmax<- 14

# Plotbereich
xmin<- 0
xmax<- 10

# Vektor fuer die Werte der Subintervalen fuer's Integrieren "dx"
co<- c()

# Liste fuer den Plotbereich von verschiedenen "dx"
pb<- list()

# Liste fuer die Ueberlebenswahrscheinlichkeit von verschiedenen "dx"
p<- list()

# Array fuer die Ueberlebenswahrscheinlichkeit
# fuer verschiedene Werte von Startkapital und "dx"
mp1<- array(dim=c(xmax+1,3))

# Schleife fuer mehrere Werte von "dx"
for(j in 1:3){nobs<- 10^(j+1);

```



```

# Subintervallen fuer Integrieren
dx<- xmax/nobs
x<- seq(xmin, xmax, length.out=nobs+1)

# Element von Vektor "co"
co[j]<- dx

# Element der Liste "pb"
pb[[j]]<- x

# Arrays fuer die n-fache Faltung, die Summe und die Ueberlebenswahrscheinlichkeit
h<- array(dim=c(nmax, nobs+1))
s<- array(dim=c(nmax, nobs+1))
p1<- array(dim=c(nmax, nobs+1))

# Die erste Zeile von Arrays "h", "s" und "p1"
h[1,]<- exp(al*x)-(al*x)^r*mlf(al*x,1,1+r)
s[1,]<- la/c*h[1,]
p1[1,]<- p0*exp(-al*x)*(exp(al*x)+myconv(exp(al*x),s[1,],dx))

# Der Rest der Zeilen von Arrays "h", "s" und "p1"
for(n in 2:nmax){
  h[n,]<- myconv(h[n-1,],h[1,],dx)
  s[n,]<- s[n-1,]+(la/c)^n*h[n,]
  p1[n,]<- p0*exp(-al*x)*(exp(al*x)+myconv(exp(al*x),s[n,],dx))
}

# Element der List "p"
p[[j]]<- p1[nmax,]

# Spalte des Arrays "mp1"
mp1[,j]<- round(p1[nmax, seq(1, nobs+1, by=nobs/xmax)],3)
}

# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x

    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun, 0, pi)$value
})

# Plot
curve(lip(x), from=xmin, to=xmax, col="black", xlab="Startkapital", ylab="
  Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
colors<- c("red","blue","green")
for(i in 1:3){
  par(new=TRUE)
  lines(pb[[i]],p[[i]], col=colors[i])
  legend("bottomright", inset=.05, c("Inverse Laplace","h=0.1","h=0.01","h=0.001"),
    lty=1, col=c("black",colors), box.col=NA)
  legend(6.2, 0.552, c("r=4*pi/6","al=0.7*r"), box.col=NA)

# Umbenennen von Zeilen und Spalten des Arrays "mp1"
rownames(mp1)<- paste0("x=", xmin:xmax)
colnames(mp1)<- paste0("h=", co)

```

5. Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Ableitungen von Mittag-Leffler Funktionen bei Gamma-Schäden

```
# clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrische Funktionen
library("pracma")

# Dichte der Gammaverteilung
fg<- function(x,r,al) al^r/gamma(r)*x^(r-1)*exp(-al*x)

# Momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung
mx<- function(z) (al/(al-z))^r

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# k-fache Ableitung der zwei Parameter Mittag-Leffler Funktion
# "m" steht f r die betrachteten Termen in der Summe
mlfab<- Vectorize(function(a, b, k, x, m){
  sum(sapply(0:m, function(j) x^j*factorial(j+k)/(factorial(j)*gamma(a*j+a*k+
    b))))})

# Plotbereich und Anzahl der Punkte fuers Integrieren
xmin<- 0
xmax<- 10
nobs<- 100
x<- seq(xmin,xmax, length.out=nobs+1)

# Anzahl der betrachteten Terme
mmax<- 50 # in den Ableitungen der Mittag-Leffler Funktionen
nmax<- 14 # in der Summe

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Fuer mehrere Plots in einem Fenster
op<- par(mfrow=c(2,3), oma=c(5,0,5,0), xpd=NA)

# Array f r die Ueberlebenswahrscheinlichkeit
# fuer verschiedene Werte von Startkapital und Parameter "r"
mp2<- array(dim=c(xmax+1, 6))

# Vektor fuer die Werte von "r"
co<- c()

# Schleife fuer mehrere Werte von Gammaverteilungsparameter,
# die eine Ratioverhaeltnis haben
for(i in 1:6){r<- i*pi/6;
  al<- 0.7*r

# Element von Vektor "co"
co[i]<- round(r,3)

# Erwartungswert der Gammaverteilung
mu<- r/al

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1
```

```

# Überlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Power-Funktion
powf<- Vectorize(function(x, k) {
  (-la*al^r*x^(r+1)/c)^k/factorial(k)})

# Array fuer die Überlebenswahrscheinlichkeit
p2<- array(dim=c(nmax, nobs+1))
for(j in 1:nmax){
p2[j,]<- p0*rowSums(sapply(0:j, function(k) exp(-al*x)*powf(x,k)*mlfab(1, r*k+1, k,
  (al+(la/c))*x, mmax))))}

# Spalte des Arrays "mp2"
mp2[,i]<- round(p2[nmax, seq(1, nobs+1, by=nobs/xmax)],3)

# Inverse Laplace Transformation der Überlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    lm(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun, 0, pi)$value
})

# Plot
curve(lip(x), from=xmin, to=xmax, col="black", lwd=3, xlab="Startkapital", ylab="
  Überlebenswahrscheinlichkeit")
matplot(x, t(p2[(nmax-4):nmax,]), type="l", col=c(2:(nmax-2)), add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, legend=c(paste0("r=", round(r,3)), paste0("al=",
  round(al,3))), box.col=NA)
}

# Gemeinsame Legende von allen Plots
legend(-26,-0.075, ncol=3,c("Inverse Laplace",paste0("n=",(nmax-4):nmax)),
  lty=1, col=c("black",2:(nmax-2)))

# Umbenennen von Zeilen und Spalten des Arrays "mp2"
rownames(mp2)<- paste0("x=", xmin:xmax)
colnames(mp2)<- paste0("r=", co)

```

6. Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Tail-Verteilung bei Gamma-Schäden

```

# clear workspace
rm(list=ls())

# fuer die nicht in R verfügbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

# Dichte der Gammaverteilung
fg<- function(x,r,al) al^r/gamma(r)*x^(r-1)*exp(-al*x)

# Verteilungsfunktion der Gammaverteilung
Fg<- function(x, r, al) Igamma(r, al*x, lower=TRUE)/gamma(r)

# Dichte von n-fache Faltung der Gammaverteilung
nf<- function(n,x) fg(x,n*r,al)

```

```

# Momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung
mx<- function(s) (al/(al-s))^r

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Plotbereich und Anzahl der Punkte fuer Integrieren
xmin<- 0
xmax<- 10
nobs<- 100
x<- seq(xmin,xmax, length.out=nobs+1)[-1]

# Anzahl der in der Summe betrachteten Terme
nmax<- 14

# Fuer mehrere Plots in einem Fenster
op<- par(mfrow=c(2,3), oma=c(5,0,5,0), xpd=NA)

# Array fuer die Ueberlebenswahrscheinlichkeit
# fuer verschiedene Werte von Startkapital und Parameter "r"
mp3<- array(dim=c(xmax+1, 6))

# Vektor fuer die Werte von "r"
co<- c()

# Schleife fuer mehrere Werte von Gammaverteilungsparameter,
# die eine Ratioverhaeltnis haben
for(i in 1:6){r<- i*pi/6;
  al<- 0.7*r

# Element von Vektor "co"
co[i]<- round(r,3)

# Erwartungswert der Gammaverteilung
mu<- r/al

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit, Array Variante
# Erster Schhritt, Array fuer die Momente der k-fache Faltung der Gammaverteilung
v0<- array(dim=c(nmax,nobs))
v<- array(dim=c(nmax,nmax,nobs))
for(k in 1:nmax){
  v0[k,]<- pgamma(x, k*r, al, lower.tail=TRUE)
  v[1,k,]<- -x/al*nf(k, x)+k*r/al*v0[k,]
  for(n in 2:nmax){
    v[n,k,]<- -x^n/al*nf(k, x)+(k*r+n-1)/al*v[n-1,k,]
  }
}

# Zweiter Schritt, Array fuer die Faltung von (n+1)-fache Faltung der
# Indikatorfunktion
# und Dichte der k-fache Faltung der Gammaverteilung
u<- array(dim=c(nmax,nmax,nobs))
for(n in 1:nmax){
  for(k in 1:nmax){

```

```

    u[n,k,]  

  }  

}
# Dritter Schritt, Array fuer die n-fache Faltung der Verteilungsfunktion der Tail-  

  Verteilung  

G<- array(dim=c(nmax,nobs))  

for(n in 1:nmax){  

  G[n,]  

  factorial(n)  

}
# Vierter Schritt, Ueberlebenswahrscheinlichkeit  

p3<- array(dim=c(nmax,nobs))  

for(n in 1:nmax){  

  p3[n,]  

}
# Den Fall mit Startkapital 0 im Betracht nehmen  

y<- c(0,x)  

p3<- cbind(rep(p0,nmax),p3)
# Spalte des Arrays "mp3"  

mp3[,i]<- round(p3[nmax, seq(1, nobs+1, by=nobs/xmax)],3)
# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit  

lip<- Vectorize(function(x){  

  if(x==0) return(p0)  

  fun<- function(p){  

    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x  

    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x  

    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)  

  }  

  1/pi*integrate(fun,0,pi)$value  

})
# Plot  

curve(lip(x),from=xmin,to=xmax,col="black",lwd=3, xlab="Startkapital", ylab="  

  Ueberlebenswahrscheinlichkeit")  

matplot(y,t(p3[(nmax-4):nmax,]),type="l",col=c(2:(nmax-2)),add=TRUE)  

legend("bottomright", inset=.05, legend=c(paste0("r=", round(r,3)), paste0("al=",  

  round(al,3))), box.col=NA)  

}
# Gemeinsame Legende von allen Plots  

legend(-26,-0.075,ncol=3,c("Inverse Laplace",paste0("n=", (nmax-4):nmax)),  

  lty=1, col=c("black",2:(nmax-2)))
# Umbenennen von Zeilen und Spalten des Arrays "mp3"  

rownames(mp3)<- paste0("x=", xmin:xmax)  

colnames(mp3)<- paste0("r=", co)

```

7. Überlebenswahrscheinlichkeit durch die Tail-Verteilung bei invers Gauß-Schäden

```

# clear workspace  

rm(list=ls())
# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen  

library("pracma")

```

```

# Dichte der inversen Gauss-Verteilung
fig<- function(x,de,ga) de/sqrt(2*pi)*exp(de*ga)*x^(-3/2)*exp(-1/2*(de^2/x+ga^2*x))

# Dichte von n-fache Faltung der inversen Gauss-Verteilung
nf<- function(n, x) fig(x, n*de, ga)

# Momenterzeugende Funktion der inversen Gauss-Verteilung
mx<- function(s) exp(de*(ga-sqrt(ga^2-2*s)))

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Plotbereich und Anzahl der Punkte fuer Integrieren
xmin<- 0
xmax<- 10
nobs<- 100
x<- seq(xmin,xmax, length.out=nobs+1)[-1]

# Anzahl der in der Summe betrachteten Terme
nmax<- 14

# Fuer mehrere Plots in einem Fenster
op<- par(mfrow=c(2,3), oma=c(5,0,5,0), xpd=NA)

# Array fuer die Ueberlebenswahrscheinlichkeit
# fuer verschiedene Werte von Startkapital und Parameter "de"
mp3<- array(dim=c(xmax+1, 6))

# Vektor fuer die Werte von "de"
co<- c()

# Schleife fuer mehrere Werte von Parameter der inversen Gauss-Verteilung,
# die eine Ratioverhaeltnis haben
for(i in 1:6){de<- i*pi/6;
              ga<- 0.7*de

# Element von Vektor "co"
co[i]<- round(de,3)

# Erwartungswert der inversen Gauss-Verteilung
mu<- de/ga

#Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

#Ueberlebenswahrscheinlichkeit, Array Variante
# Erster Schritt, Array fuer die Momente der k-fache Faltung der inversen Gauss-
# Verteilung
v0<- array(dim=c(nmax,nobs))
v<- array(dim=c(nmax,nmax,nobs))
for(k in 1:nmax){
  v0[k,]<- pnorm(-k*de/sqrt(x)+ga*sqrt(x))+exp(2*k*de*ga)*pnorm(-k*de/sqrt(x)-ga*
  sqrt(x))
  v[1,k,]<- k*de/ga*(pnorm(-k*de/sqrt(x)+ga*sqrt(x))-exp(2*k*de*ga)*pnorm(-k*de/
  sqrt(x)-ga*sqrt(x)))
  v[2,k,]<- 1/ga^2*v[1,k,]+k^2*de^2/ga^2*v0[k,]-2/ga^2*x^2*nf(k,x)
  for(n in 3:nmax){

```

```

    v[n,k,]<- (2*n-3)/ga^2*v[n-1,k,]+k^2*de^2/ga^2*v[n-2,k,]-2/ga^2*x^n*mf(k,x)
  }
}

# Zweiter Schritt, Array fuer die Faltung von (n+1)-fache Faltung der
  Indikatorfunktion
# und Dichte der k-fache Faltung der inversen Gauss-Verteilung
u<- array(dim=c(nmax,nmax,nobs))
for(n in 1:nmax){
  for(k in 1:nmax){
    u[n,k,]<- x^n*v0[k,]+rowSums(sapply(1:n,function(j)choose(n,j)*(-1)^j*x^(n-j)*v
      [j,k,]))
  }
}

# Dritter Schritt, Array fuer die n-fache Faltung der Verteilungsfunktion der Tail-
  Verteilung
G<- array(dim=c(nmax,nobs))
for(n in 1:nmax){
  G[n,]<- (x^n+rowSums(sapply(1:n,function(k)choose(n,k)*(-1)^k*u[n,k,]))) /
    factorial(n)
}

# Vierter Schritt, Ueberlebenswahrscheinlichkeit
p3<- array(dim=c(nmax,nobs))
for(n in 1:nmax){
  p3[n,]<- (1-la*mu/c)*(1+rowSums(sapply(1:n,function(k)(la/c)^k*G[k,])))
}

# Den Fall mit Startkapital 0 im Betracht nehmen
y<- c(0,x)
p3<- cbind(rep(p0,nmax),p3)

# Spalte des Arrays "mp3"
mp3[,i]<- round(p3[nmax, seq(1, nobs+1, by=nobs/xmax)],3)

# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun,0,pi)$value
})

# Plot
curve(lip(x),from=xmin,to=xmax,col="black",lwd=3, xlab="Startkapital", ylab="
  Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
matplot(y,t(p3[(nmax-4):nmax,]),type="l",col=c(2:(nmax-2)),add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, legend=c(paste0("de=", round(de,3)), paste0("ga=",
  round(ga,3))), box.col=NA)
}

# Gemeinsame Legende von allen Plots
legend(-26,-0.075,ncol=3,c("Inverse Laplace",paste0("n=",(nmax-4):nmax)),
  lty=1, col=c("black",2:(nmax-2)))

# Umbenennen von Zeilen und Spalten des Arrays "mp3"
rownames(mp3)<- paste0("x=", xmin:xmax)
colnames(mp3)<- paste0("de=", co)

```

8. Asymp Approx der Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden

```

# clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

# Dichte der Gammaverteilung
fg<- function(x,r,al) al^r/gamma(r)*x^(r-1)*exp(-al*x)

# Momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung
mx<- function(s) (al/(al-s))^r

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Gammaverteilung Parameter
r<- 4*pi/6
al<- 0.7*r

# Erwartungswert der Gammaverteilung
mu<- r/al

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Plotbereich
xmin<- 0
xmax<- 10

# Lundberg Koeffizient
lun<- function(z) mx(z)-1-c/la*z
R1<- al/2
while(lun(R1)>0) R1<- R1/2
print(c(R1, lun(R1)))
R2<- al/2
while(lun(R2)<0) R2<- (R2+al)/2
print(c(R2, lun(R2)))
print("Schranken fuer den Lundberg Koeffizient")
print(c(R1,R2))
R<- uniroot(lun,c(R1,R2))$root
print("Lundberg Koeffizient")
print(R)

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit, Asymp Approx
C<- R*(c-la*r/al)/((la+c*R)*(R*r/(al-R)-1)+1)
print(C)
ap<- function(x) 1-C*exp(-R*x)

# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x

```



```

    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun,0,pi)$value
})

# Plot
par(oma=c(2,0,0,0))
curve(lip(x), from=xmin, to=xmax, col="black", lwd="2", xlab="Startkapital", ylab="
  Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
curve(ap(x), from=xmin, to=xmax, col="red", add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, c("Inverse Laplace", "Assymp Approx"), lty=1, col=
  c("black", "red"), box.col=NA)

```

9. Asymp Approx der Überlebenswahrscheinlichkeit bei invers Gauß-Schäden

```

# clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

# Dichte der inversen Gauss-Verteilung
fig<- function(x,de,ga) de/sqrt(2*pi)*exp(de*ga)*x^(-3/2)*exp(-1/2*(de^2/x+ga^2*x))

# Momenterzeugende Funktion der inversen Gauss-Verteilung
mx<- function(s) exp(de*(ga-sqrt(ga^2-2*s)))

# Laplace Transformation der berlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Inverse Gauss-Verteilung Parameter
de<- 4*pi/6
ga<- 0.7*de

# Erwartungswert der inversen Gauss-Verteilung
mu<- de/ga

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Plotbereich
xmin<- 0
xmax<- 10

# Lundberg Koeffizient
lun<- function(z) mx(z)-1-c/la*z
print("Check die Existenz von Lundberg Koeffizient")
print(lun(ga^2/2)>=0)
R1<- ga^2/4
while(lun(R1)>0) R1<- R1/2
print(c(R1, lun(R1)))
R2<- ga^2/4
while(lun(R2)<0)R2<- (R2+ga^2/2)/2
print(c(R2, lun(R2)))

```

```

print("Schranken fuer den Lundberg Koeffizient")
print(c(R1,R2))
R<- uniroot(lun,c(R1,R2))$root
print("Lundberg Koeffizient")
print(R)

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit, Asymp Approx
C<- R*(c-la*de/ga)/((la+c*R)*(R*de/(ga*sqrt(1-2*R/ga^2))-1)+la)
print(C)
ap<- function(x) 1-C*exp(-R*x)

# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun,0,pi)$value
})

# Plot
curve(lip(x), from=xmin, to=xmax, col="black", lwd="2", xlab="Startkapital", ylab="
  Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
curve(ap(x), from=xmin, to=xmax, col="red", add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, c("Inverse Laplace", "Assymp Approx"), lty=1, col=
  c("black", "red"), box.col=NA)

```

10. Panjer Schranken für die Überlebenswahrscheinlichkeit bei Gamma-Schäden

```

# Clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

# Fuer die nicht in R verfuegbaren Arrays, die am 0 starten
library("Darray")

# Fuer die nicht in R verfuegbaren unvollstaendigen Gamma Funktionen
library("zipfR")

# Dichte der Gammaverteilung
fg<- function(x,r,al) al^r/gamma(r)*x^(r-1)*exp(-al*x)

# Verteilungsfunktion der Gammaverteilung
Fg<- function(x,r,al) Igamma(r, al*x, lower=TRUE)/gamma(r)

# Tail-Verteilung der Gammaverteilung
ftg<- function(x) (1-Fg(x,r,al))/mu

# Verteilungsfunktion der Tail-Verteilung der Gammaverteilung
Ftg<- function(x) integrate(ftg, 0, x)$value

# Momenterzeugende Funktion der Gammaverteilung
mx<- function(s) (al/(al-s))^r

# Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

```

```

# Wahrscheinlichkeiten der geometrischen Verteilung
p<- function(n) (1-q)*q^n

# Momenterzeugende Funktion der geometrischen Verteilung
mn<- function(z)(1-q)/(1-q*exp(z))

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Gammaverteilung Parameter
r<- 4*pi/6
al<- 0.7*r

# Erwartungswert der Gammaverteilung
mu<- r/al

# Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenswahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Geometrische Verteilung Parameter
q <- la*mu/c

# Erwartungswert und Varianz der geometrischen Verteilung
en<- q/(1-q)
vn<- q/(1-q)^2

# Erwartungswert und Varianz der Tail-Verteilung von Gammaverteilung
m1<- r/al
m2<- r*(r+1)/al^2
m3<- r*(r+1)*(r+2)/al^3
ex<- m2/(2*m1)
vx<- m3/(3*m1)-(m2/(2*m1))^2

# Erwartungswert und Varianz der ZGeo
es<- en*ex
vs<- en*vx + ex^2*vn

# Plotbereich
xmin<- 0
xmax<- es+5*sqrt(vs)

# Panjer s Parameter fuer geometrische Verteilung
a<- q
b<- 0

# Rundungsparameter
ep<- 0.1

# Anzahl der Diskretisierungspunkte
nmax<- ceiling(xmax/ep)

# Angabe des Arrays
# fu...Wahrscheinlichkeiten fuer aufgerundete Schaeden
# fd...Wahrscheinlichkeiten fuer abgerundete Schaeden
# gu...Wahrscheinlichkeiten fuer die Summe von aufgerundeten Schaeden
# gd...Wahrscheinlichkeiten fuer die Summe von abgerundeten Schaeden
# hu...Kumulative Wahrscheinlichkeiten fuer die Summe von aufgerundeten Schaeden
# hd...Kumulative Wahrscheinlichkeiten fuer die Summe von abgerundeten Schaeden

fu<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)

```

```

fd<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
gu<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
gd<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
hu<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
hd<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)

fu[0]<- 0
fd[0]<- Ftg(ep)
for(n in 1:nmax){
  fu[n]<- Ftg(n*ep)-Ftg((n-1)*ep)
  fd[n]<- Ftg((n+1)*ep)-Ftg(n*ep)
}

gu[0]<- ifelse(fu[0]==0,p(0),mn(log(fu[0])))
gd[0]<- ifelse(fd[0]==0,p(0),mn(log(fd[0])))
hu[0]<- gu[0]
hd[0]<- gd[0]
for(n in 1:nmax){
  k<- 1:n
  gu[n]<- 1/(1-a*fu[0])*sum((a+b*k/n)*fu[k]*gu[n-k])
  gd[n]<- 1/(1-a*fd[0])*sum((a+b*k/n)*fd[k]*gd[n-k])
  hu[n]<- hu[n-1]+gu[n]
  hd[n]<- hd[n-1]+gd[n]
}

# Diskretisierung der Verteilungsfunktion
x<- ep*(1:nmax)
lo<- stepfun(x,hu[0:nmax])
hi<- stepfun(x,hd[0:nmax])

# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun,0,pi)$value
})

# Plot
curve(lip(x),from=xmin,to=xmax,col="black", xlab="Startkapital", ylab="
  Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
curve(lo(x),from=xmin,to=xmax,col="green",add=TRUE)
curve(hi(x),from=xmin,to=xmax,col="blue",add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, c("Aufgerundet", "Inverse Laplace", "Abgerundet"),
  lty=1, col=c("green", "black", "blue"), box.col=NA)

```

11. Panjer Schranken für die Überlebenswahrscheinlichkeit bei invers Gauß-Schäden

```

# Clear workspace
rm(list=ls())

# Fuer die nicht in R verfuegbaren trigonometrischen Funktionen
library("pracma")

# Fuer die nicht in R verfuegbaren Arrays, die am 0 starten
library("Oarray")

# Fuer die nicht in R verfuegbaren unvollst ndigen Gammafunktionen

```

```

library("zipfR")

# Dichte der inversen Gauss-Verteilung
fig<- function(x,de,ga) de/sqrt(2*pi)*exp(de*ga)*x^(-3/2)*exp(-1/2*(de^2/x+ga^2*x))

# Verteilungsfunktion der inversen Gauss-Verteilung
Fig<- function(x,de,ga) pnorm(-de/sqrt(x)+ga*sqrt(x))+exp(2*de*ga)*pnorm(-de/sqrt(x)
)-ga*sqrt(x))

# Tail-Verteilung der inversen Gauss-Verteilung
ftig<- function(x) (1-Fig(x,de,ga))/mu

# Verteilungsfunktion der Tail-Verteilung der inversen Gauss-Verteilung
Ftig<- function(x) integrate(ftig, 0, x)$value

# Momenterzeugende Funktion der inversen Gauss-Verteilung
mx<- function(s) exp(de*(ga-sqrt(ga^2-2*s)))

# Laplace Transformation der berlebenschwahrscheinlichkeit
lp<- function(s) c*p0/(c*s-la+la*mx(-s))

# Wahrscheinlichkeiten der geometrischen Verteilung
p<- function(n) (1-q)*q^n

# Momenterzeugende Funktion der geometrischen Verteilung
mn<- function(z)(1-q)/(1-q*exp(z))

# Klassisches Risikomodell Parameter
la<- 1
c<- 2

# Inverse Gauss-Verteilung Parameter
de<- 4*pi/6
ga<- 0.7*de

# Erwartungswert der inverse Gauss-Verteilung
mu<- de/ga

#Relativer Sicherheitszuschlag
th<- c/(la*mu)-1

# Ueberlebenschwahrscheinlichkeit mit Startkapital 0
p0<- th/(1+th)

# Geometrische Verteilung Parameter
q <- la*mu/c

# Erwartungswert und Varianz der geometrischen Verteilung
en<- q/(1-q)
vn<- q/(1-q)^2

# Erwartungswert und Varianz der Tail-Verteilung von inversen Gauss-Verteilung
m1<- de/ga
m2<- de/ga^3*(1+de*ga)
m3<- de/ga^5*(3+3*de*ga+de^2*ga^2)
ex<- m2/(2*m1)
vx<- m3/(3*m1)-(m2/(2*m1))^2

# Erwartungswert und Varianz der ZGeo
es<- en*ex
vs<- en*vx + ex^2*vn

# Plotbereich
xmin<- 0

```

```

xmax<- es+5*sqrt(vs)

# Panjer s Parameter f r geometrische Verteilung
a<- q
b<- 0

# Rundungsparameter
ep<- 0.1

# Anzahl der Diskretisierungspunkte
nmax<- ceiling(xmax/ep)

# Angabe des Arrays
# fu...Wahrscheinlichkeiten fuer aufgerundete Schaeden
# fd...Wahrscheinlichkeiten fuer abgerundete Schaeden
# gu...Wahrscheinlichkeiten fuer die Summe von aufgerundeten Schaeden
# gd...Wahrscheinlichkeiten fuer die Summe von abgerundeten Schaeden
# hu...Kumulative Wahrscheinlichkeiten fuer die Summe von aufgerundeten Schaeden
# hd...Kumulative Wahrscheinlichkeiten fuer die Summe von abgerundeten Schaeden

fu<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
fd<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
gu<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
gd<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
hu<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)
hd<- Oarray(dim=nmax+1,offset=0)

fu[0]<- 0
fd[0]<- Ftig(ep)
for(n in 1:nmax){
  fu[n]<- Ftig(n*ep)-Ftig((n-1)*ep)
  fd[n]<- Ftig((n+1)*ep)-Ftig(n*ep)
}

gu[0]<- ifelse(fu[0]==0,p(0),mn(log(fu[0])))
gd[0]<- ifelse(fd[0]==0,p(0),mn(log(fd[0])))
hu[0]<- gu[0]
hd[0]<- gd[0]
for(n in 1:nmax){
  k<- 1:n
  gu[n]<- 1/(1-a*fu[0])*sum((a+b*k/n)*fu[k]*gu[n-k])
  gd[n]<- 1/(1-a*fd[0])*sum((a+b*k/n)*fd[k]*gd[n-k])
  hu[n]<- hu[n-1]+gu[n]
  hd[n]<- hd[n-1]+gd[n]
}

# Diskretisierung der Verteilungsfunktion
x<- ep*(1:nmax)
lo<- stepfun(x,hu[0:nmax])
hi<- stepfun(x,hd[0:nmax])

# Inverse Laplace Transformation der Ueberlebenswahrscheinlichkeit
lip<- Vectorize(function(x){
  if(x==0) return(p0)
  fun<- function(p){
    s<- (p*cot(p)+1i*p)/x
    ds<- (cot(p)-p*csc(p)^2+1i)/x
    Im(lp(s)*exp(s*x)*ds)
  }
  1/pi*integrate(fun,0,pi)$value
})

# Plot
curve(lip(x),from=xmin,to=xmax,col="black", xlab="Startkapital", ylab="

```

```
Ueberlebenswahrscheinlichkeit")
curve(lo(x),from=xmin,to=xmax,col="green",add=TRUE)
curve(hi(x),from=xmin,to=xmax,col="blue",add=TRUE)
legend("bottomright", inset=.05, c("Aufgerundet", "Inverse Laplace", "Abgerundet"),
      lty=1, col=c("green", "black", "blue"), box.col=NA)
```

Literaturverzeichnis

- [1] Corina Constantinescu, Gennady Samorodnitsky, Wei Zhu: *Ruin probabilities in classical risk models with gamma claims*. Scandinavian Actuarial Journal, 2017, 555-575.
- [2] Rudolf Gorenflo, Anatoly A. Kilbas, Francesco Mainardi, Sergei V. Rogosin: *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer Monographs in Mathematics, 2014, Springer.
- [3] G. Doetsch: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*. Berlin Verlag von Julius Springer, 1937.
- [4] Ejup Hamiti: *Matematika III/2*. Timegate, Prishtinë, 1996.
- [5] Ernst Eberlein: *Application of Generalized Hyperbolic Lévy Motions to Finance*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [6] Ole E. Barndorff-Nielsen, Neil Shephard: *Modelling by Lévy Processes for Financial Econometrics*. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [7] Wim Schoutens: *Lévy Processes in Finance*. John Wiley & Sons Ltd, Cichester, 2003.
- [8] Hans U. Gerber: *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- [9] Soren Asmussen, Hansjörg Albrecher: *Ruin Probabilities, Second Edition*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010.
- [10] Tomasz Rolski, Hanspeter Schmidli, Volker Schmidt, Jozef Teugels: *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. John Wiley & Sons Ltd, Cichester, 1999.
- [11] Rob Kaas, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, Michel Denuit: *Modern Actuarial Risk Theory, Using R, Second Edition*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [12] Hanspeter Schmidli: *Risk Theory*. Springer actuarial lecture notes, 2017.
- [13] A. Talbot: *The accurate numerical inversion of Laplace transforms*. Mathematics Department, Brunei University, Uxbridge, April 1976, TR/61, W9261050