



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Algebren und ihre Geometrien

Ausgeführt am Institut für
Diskrete Mathematik und Geometrie
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von Ao.Univ.Prof. Univ.Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Hans Havlicek

durch

Jacqueline Fischer

Wurmbrandgasse 2/1, 1220 Wien

Datum

Unterschrift (Student)

*Für meine Eltern
Heidrun und Roman Fischer und
meinen Freund
Christoph Pillmayer*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	iii
2	Die Distanzrelation	1
2.1	Exkurs: Ringe und Moduln	1
2.2	Distanzräume	11
3	Die projektive Gerade über einem Ring	15
3.1	Definition und Eigenschaften	15
3.2	Projektivitäten	20
3.3	Die projektive Gerade über einem lokalen Ring	23
3.4	Die projektive Gerade über einem stabilen Ring	28
3.5	Die projektive Gerade über einem Unterring	31
4	Kettengeometrien und Kettenräume	35
4.1	Kettengeometrien	35
4.2	Axiomensystem eines Kettenraums	38
4.3	Affine Spurräume und affine Kettengeometrien	46
5	Benzebenen	51
5.1	Zweidimensionale K -Algebren	51
5.2	Möbiusebenen	54
5.3	Laguerreebenen	56
5.4	Minkowskiebenen	61
6	Unterräume von Kettenräumen	65
6.1	Unterräume und Unteralgebren	65
6.2	Jordan-Systeme	67
6.3	Kettengeometrien über Jordan-Systemen	71
7	Kettenräume auf Quadriken	77
7.1	Exkurs: Quadriken im projektiven Raum	77
7.2	Konstruktion eines Kettenraums aus einer Quadrik	80
7.3	Das Quadrikenmodell für $\Sigma(K, R)$	86
7.4	Hotje-Darstellung spezieller Kettengeometrien	96
	Literaturverzeichnis	97
	Symbol- und Sachverzeichnis	99

Kapitel 1

Einleitung

Ein Körper ist algebraisch betrachtet eine „schöne“ und vor allem abgeschlossene Struktur. Auch die Vektorraumtheorie über einem Körper lässt sich sehr kompakt von klein nach groß aufbauen. Hat man etwas im niedrig dimensionalen Raum verstanden ist es meist nur noch ein Katzensprung zur höheren Dimension. Auch der projektive Raum über einem Vektorraum lässt sich algebraisch schön beschreiben. Doch was passiert, wenn man den Körper durch einen Ring ersetzt?

Wir beginnen im ersten Kapitel mit der Verallgemeinerung der Vektorräume. Dies führt zu den Modulen. Grob gesprochen kann man diese als Vektorräume über Ringen klassifizieren. Es gibt auch durchaus einige Eigenschaften von Vektorräumen, die sich unmittelbar auf Module übertragen lassen, wie z.B. Linearkombinationen, Untermodule, die Summe, die direkte Summe und der Schnitt von Untermoduln, die Hülle, Erzeugendensysteme und linear unabhängig. Andererseits werden wir aber auch sehen, dass Module was die „Dimension“ angeht, wesentlich freier sind als Vektorräume.

Damit kommen wir zur Frage, was ein projektiver Raum über einem Ring ist? Eine erste Idee wäre – angelehnt an den projektiven Raum über einem Vektorraum – man betrachtet für einen Ring R einen so genannten R -Linksmodul M und den Verband seiner Untermoduln $(\text{Sub}(M), +, \cap)$ und erhält damit eine projektive Verbandsgeometrie. Als Punkte wählt man die zyklischen Untermoduln von M . Diese Idee wird uns dann im dritten Kapitel zur so genannten projektiven Gerade zu einem Modul bzw. über einem Ring führen.

Auch der restliche Ansatz für eine Geometrie ist gar nicht so schlecht, nur noch zu allgemein. Wir werden weitere Forderungen an den Ring R , den Linksmodul M und an die betrachteten Untermoduln stellen und so im vierten Kapitel zum Begriff der Kettengeometrie über einer Algebra gelangen. Diese Inzidenzstruktur wollen wir anhand des geometrischen Modells eines Kettenraums untersuchen. Weiters befassen wir uns unter anderem mit der affinen Betrachtungsweise und im sechsten Kapitel mit der klassischen Fragestellung der algebraischen Beschreibung von Unterräumen.

Für anschauliche Beispiele wird auf Kapitel 5 verwiesen. Dort werden die drei klassischen Geometrien von Möbius, Laguerre und Minkowski im Zweidimensionalen untersucht. Vor allem die reelle Möbiusebene ist der Prototyp für Kettengeometrien, an der viele theoretische Aspekte leicht anschaulich klar gemacht werden können. Aber nicht nur die Möbiusebene, sondern auch die Laguerre- und Minkowskiebene lassen sich über den reellen Zahlen sehr anschaulich mit Hilfe von Quadriken beschreiben.

Dieser Ansatz wird im letzten Kapitel weiter verfolgt. Schlussendlich wird – zumindest für spezielle Algebren – der Kreis geschlossen, indem eine Quadrik konstruiert wird, auf der die Kettengeometrie wiedergefunden werden kann.

Kapitel 2

Die Distanzrelation

Mit diesem Kapitel haben wir die Einleitung eigentlich noch nicht ganz hinter uns gelassen. Es dient zur Grundsteinlegung für das Folgende, indem grundlegende Begriffe definiert und Gegebenheiten aufgezeigt werden, auf denen die weiteren Kapitel aufbauen. Der erste Abschnitt steht nicht ohne Grund unter dem Titel „Exkurs“. Wie der Titel der Arbeit schon verrät, werden auch Erkenntnisse aus der Algebra beleuchtet, die sich vor allem mit den Begriffen „Ring“ und „Modul“ auseinander setzen. Demnach kommt man nicht umhin ein klein wenig abzuschweifen, um zumindest die für diese Arbeit notwendigen Definition und Sätze aus der Ringtheorie darzulegen. Dabei werden wir uns auf die Betrachtung von Ringen und Modulen beschränken und einiges aus der Operator- und Gruppentheorie voraussetzen. Für Informationen dazu siehe z.B. [14], S. 46 ff. Im zweiten Abschnitt nähern wir uns der Definition der Geometrien, indem wir den Raum kennen lernen, zu dem auch die zu konstruierenden Geometrien gehören.

2.1 Exkurs: Ringe und Moduln

Wir werden nun einige Begriffe und Sätze, die aus der Vektorraumtheorie bekannt sind (siehe dazu [6], S. 45 ff.), verallgemeinern, indem nicht ein Körper als Grundlage verwendet wird, sondern eine etwas schwächere Struktur, ein Ring. Diese Idee führt zum Begriff des Modul. An diesem Punkt angelangt, muss man natürlich nicht stehen bleiben, sondern kann versuchen, auch weitere Begriffe im Zusammenhang mit einem Vektorraum zu „adaptieren“. So kann man sich z.B. die Frage stellen, wie ein Unterraum oder eine lineare Abbildung in diesem Kontext aussieht. Es wird im Laufe der Untersuchungen auch immer wieder auf den Kontext in der Vektorraumtheorie hingewiesen werden.

Wie bereits erwähnt, soll dieses Kapitel nicht die gesamte Modultheorie abdecken, sondern nur die wichtigsten Ergebnisse aufzeigen, die im weiteren Verlauf der Arbeit von Bedeutung sind. Starten wir also bei der Definition eines Ringes.

Definition 2.1.1

Sei R eine nichtleere Menge auf der zwei binäre Operationen „+“ und „ \cdot “ wirken. Dann heißt R ein *Ring*, wenn gilt

- $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe (mit neutralem Element 0),
- (R, \cdot) ist eine Halbgruppe, d.h. R ist unter der Operation „ \cdot “ abgeschlossen und es gilt das Assoziativgesetz und

- es gelten die Distributivgesetze

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{und} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad \text{für alle } x, y, z \in R.$$

Ist die Struktur (R, \cdot) zusätzlich kommutativ oder besitzt sie ein neutrales Element 1, spricht man von einem *kommutativen Ring* bzw. von einem *Ring mit 1*.

Die Menge jener Elemente, welche mit allen Elementen des Rings kommutieren, bezeichnet man als *Zentrum*, im Zeichen

$$Z(R) := \{x \in R \mid x \cdot r = r \cdot x \quad \forall r \in R\}. \quad (2.1)$$

Im Fall eines kommutativen Rings stimmt das Zentrum mit dem ganzen Ring überein.

Im Folgenden betrachten wir Ringe mit 1, die allerdings nicht notwendigerweise kommutativ sein müssen. Der wesentliche Unterschied zwischen einem Ring und einem Körper liegt in der Struktur $(R \setminus \{0\}, \cdot)$. Diese ist im Fall eines Körpers eine Gruppe. Bei einem Ring im Gegenteil gibt es mehrere Typen von Elementen.

Definition 2.1.2

Ein Element $x \in R$ heißt

- *links-invertierbar*, wenn es ein *Linksinverses* $l \in R$ gibt, sodass $l \cdot x = 1$ gilt,
- *rechts-invertierbar*, wenn es ein *Rechtsinverses* $r \in R$ gibt, sodass $x \cdot r = 1$ gilt oder
- *invertierbar*, wenn es links- und rechts-invertierbar ist. Wie man leicht nachprüfen kann, stimmt in diesem Fall das Links- und Rechtsinverse überein und man spricht von dem *inversen Element*.

Die Menge der invertierbaren Elemente aus R bilden eine Gruppe, welche als *Einheitengruppe* R^* von (R, \cdot) bezeichnet wird. Ihre Elemente nennt man *Einheiten*, im Zeichen

$$R^* = \{x \in R \mid \exists r \in R : x \cdot r = r \cdot x = 1\}. \quad (2.2)$$

Wie anfangs schon erwähnt stimmt R^* für einen Körper mit der Menge $R \setminus \{0\}$ überein. Für einen Ring muss dies im Allgemeinen nicht stimmen.

Beispiele 2.1.3

- Die ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sind ein kommutativer Ring mit 1. Die Menge der invertierbaren Elemente \mathbb{Z}^* besteht allerdings nur aus $\{-1, 1\}$.
- Die Menge aller $n \times n$ (für $n \geq 1$) Matrizen über dem Körper \mathbb{R} bilden mit der Matrizenaddition und -multiplikation $(\mathbb{R}^{n \times n}, +, \cdot)$ einen Ring mit 1. Das neutrale Element der Matrizenmultiplikation ist die Einheitsmatrix E_n . Die Menge der invertierbaren Matrizen heißt *allgemeine lineare Gruppe in n Variablen über \mathbb{R}* und wird mit $GL_n(\mathbb{R})$ bezeichnet. Für $n > 1$ ist der Ring nicht kommutativ und das Zentrum daher nicht trivial. Für dieses gilt

$$Z(\mathbb{R}^{n \times n}) = \{\text{diag}(x, \dots, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

- Die Menge aller Polynome über einem kommutativen Körper K bilden einen kommutativen Ring mit 1. Dieser Ring $(K[X], +, \cdot)$ wird als der *Polynomring* über K bezeichnet. Für die Einheitengruppe gilt $K[X]^* = K \setminus \{0\}$.

Definition 2.1.4

Sei R ein Ring mit 1. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ ist ein *Unterring* von R , wenn

- $(S, +, \cdot)$ mit den von R auf S eingeschränkten Operationen wieder ein Ring ist und
- 1 in S enthalten ist.

Für eine beliebige Teilmenge A bezeichnet der *von A erzeugte Unterring* den kleinsten Unterring von R , der die Menge A enthält.

Beispiel 2.1.5

Betrachte den Ring \mathbb{R}^2 zusammen mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation. Die Teilmenge $R := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ ist sogar ein Ring, welcher das Einselement $(1, 0)$ besitzt. Allerdings enthält R nicht das Einselement von \mathbb{R}^2 und ist damit kein Unterring. Im Unterschied dazu ist die Teilmenge $S := \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ sehr wohl ein Unterring von \mathbb{R}^2 .

Definition 2.1.6

Eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq R$ ist ein *Linksideal* von R , wenn

- I unter der Operation $+$ abgeschlossen ist und
- $r \cdot x \in I$ für alle $r \in R$ und $x \in I$ gilt.

Ein *Rechtsideal* wird in analoger Weise definiert. Ist eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq R$ sowohl Links- als auch Rechtsideal, dann spricht man von einem *Ideal*.

Analog wie im Fall eines Unterrings erhält man auch für eine beliebige Teilmenge A das *von A erzeugte Ideal* als das kleinste Ideal von R , das die Menge A enthält.

Ein Ideal I von R mit $I \neq R$ hat die Eigenschaft *maximal* zu sein, wenn für jedes Ideal J mit $I \subseteq J \subseteq R$ bereits entweder $J = I$ oder $J = R$ folgt.

Im Allgemeinen enthält ein Ideal I von R das Einselement nicht. Betrachtet man allerdings die Menge aller Nebenklassen von I in R , im Zeichen

$$R/I := \{x + I \mid x \in R\}, \quad (2.3)$$

dann bildet R/I zusammen mit den Operationen $+$ und \cdot definiert für alle $x, y \in R$ durch

- $(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$

- $(y + I) \cdot (y + I) = (x \cdot y) + I$

einen Ring, welcher als *Faktoring* von I in R bezeichnet wird.

Bemerkung 2.1.7

Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Für ein maximales Ideal I von R ist der Faktoring R/I ein Körper. Für den Beweis dazu siehe [14], S. 197.

Beispiele 2.1.8

- Betrachte den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Wie man leicht nachprüft, ist $(m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ (für $m \geq 1$) ein Ideal in \mathbb{Z} . Der Faktoring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_m$ ist der bekannte *Restklassenring modulo m* . Im Fall, dass p eine Primzahl ist, ist $p\mathbb{Z}$ ein maximales Ideal in \mathbb{Z} und \mathbb{Z}_p ein Körper.
- Im Polynomring $(K[X], +, \cdot)$ über einem kommutativen Körper K sei I das von X^2 erzeugte Ideal, d.h.

$$I = (X^2) = \{a + bX \mid a \text{ und } b \in K\}.$$

Nach Konstruktion gilt für die Elemente des Faktorrings R/I

$$\begin{aligned} R/I &= \{a + bX + I \mid a, b \in K\} \\ &= \{a + b\varepsilon \mid a, b \in K, \varepsilon^2 = 0\} =: K(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dieser wird der *Ring der dualen Zahlen* genannt. Wie man leicht nachprüfen kann, gilt für die Gruppe der Einheiten

$$K(\varepsilon)^* = \{a + b\varepsilon \mid a \in K \setminus \{0\}, b \in K\}. \tag{2.5}$$

Definition 2.1.9

Seien $(R, +, \cdot)$ und $(\tilde{R}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ zwei Ringe mit 1. Eine Abbildung $\varphi : R \rightarrow \tilde{R}$ wird als Ringhomomorphismus bezeichnet, wenn für alle x und $y \in R$ gilt

- $(x + y)^\varphi = x^\varphi \tilde{+} y^\varphi$,
- $(x \cdot y)^\varphi = x^\varphi \tilde{\cdot} y^\varphi$ und
- $1^\varphi = \tilde{1}$.

Falls φ zusätzlich bijektiv ist, spricht man von einem *Ringisomorphismus* bzw. wenn R und \tilde{R} übereinstimmen von einem *Ringautomorphismus*. Die Gruppe der Automorphismen eines Rings R wird mit $\text{Aut}(R)$ bezeichnet.

Für einen Ring R und ein Ideal I in R ist

$$\kappa : R \rightarrow R/I : x \mapsto \bar{x} := x + I \tag{2.6}$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus. Dieser wird als der *kanonischer Homomorphismus* von I in R bezeichnet.

Die nächste Definition ist ein kurzer Exkurs in die Theorie der Operationen. Für das Verständnis der Arbeit wird im Bezug auf dieses Thema nicht mehr vorausgesetzt, als die Begriffe die im Folgenden erklärt werden.

Definition 2.1.10

Sei G eine Gruppe und X eine beliebige Menge. Eine Abbildung

$$\varphi : G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto x^g \tag{2.7}$$

ist eine *Operation* der Gruppe G auf der Menge X . Man sagt auch G *operiert* auf X vermöge φ .

Für einen Punkt $x \in X$ bezeichnet man die Menge aller Bilder unter G ,

$$B_G(x) := \{x^g \mid g \in G\}, \tag{2.8}$$

als die *Bahn* von x unter G und die Menge aller Elemente aus G , die x fixieren, im Zeichen

$$Stab_G(x) := \{g \in G \mid x^g = x\}, \tag{2.9}$$

als den *Stabilisator* von x unter G . Analog definiert man für eine Teilmenge $A \subseteq X$ den *Stabilisator* von A bzw. den *punktweisen Stabilisator* von A unter G als

$$Stab_G(A) := \{g \in G \mid a^g \in A \forall a \in A\} \tag{2.10}$$

$$Stab_G^p(A) := \{g \in G \mid a^g = a \forall a \in A\}. \tag{2.11}$$

Beispiel 2.1.11

Die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ operiert auf dem Vektorraum \mathbb{R}^n vermöge der Vektor-Matrix-Multiplikation, $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n : (A, x) \mapsto Ax$.

Nun kommen wir zum zweiten Teil des Exkurses, zu den Modulen. Diese sind grob gesprochen auf Ringe verallgemeinerte Vektorräume. Betrachtet man einen Vektorraum über einem Körper, dann zeichnet sich dieser durch die Existenz einer „Skalarmultiplikation“ aus, die gewisse Axiome erfüllt. Diese Idee wird mit der nächsten Definition auf Ringe verallgemeinert.

Definition 2.1.12

Sei $(M, +)$ eine kommutative Gruppe und R ein Ring. Dann heißt M *Linksmodul über R* , wenn es eine Verknüpfung

$$R \times M \rightarrow M : (r, m) \mapsto r \cdot m =: rm \tag{2.12}$$

gibt, die für alle $r, s \in R$ und $m, n \in M$ die folgenden Axiome erfüllt:

- $(r + s)m = rm + sm$
- $r(m + n) = rm + rn$

- $(rs)m = r(sm)$
- $1m = m$.

Analog dazu definiert man einen *Rechtsmodul über R* durch Multiplikation der „Skalare“ von rechts.

Bemerkung 2.1.13

Der Ring R kann auch als Links- bzw. Rechtsmodul über sich selbst aufgefasst werden, wenn man als Skalarmultiplikation die binäre Ringmultiplikation erklärt.

Beispiel 2.1.14

Für eine beliebige kommutative Gruppe $(M, +)$ kann man einen Linksmodul über \mathbb{Z} erzeugen. Die Skalarmultiplikation ist für $x \in \mathbb{Z}$ und $m \in M$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x \cdot m &= \underbrace{m + \dots + m}_{x \text{ mal}} && \text{für } x > 0 \\ x \cdot m &= 0 && \text{für } x = 0 \\ x \cdot m &= |x| \cdot (-m) && \text{für } x < 0. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.1.15

Streng genommen müsste man zwischen der Betrachtung von Links- und Rechtsmodulen unterscheiden. Es genügt allerdings, sich im Folgenden auf Linksmodule zu beschränken. Ein Linksmodul M über einem Ring R ist – wie man leicht nachprüft – ein Rechtsmodul über dem entgegengesetzten Ring R^{opp} . Dieser entspricht der Menge R mit derselben Addition. Nur die Multiplikation für a und $b \in R = R^{opp}$ ist definiert durch

$$a \cdot^{opp} b = b \cdot a.$$

Wir sprechen der Kürze halber im Folgenden von einem *Modul* und führen die Skalarmultiplikation immer von links durch.

Die nächste Definition verallgemeinert, was man aus der Linearen Algebra als „Unterraum“ eines Vektorraums kennt.

Definition 2.1.16

Sei M ein Modul über einem Ring R und U eine Teilmenge von M . Dann nennt man U einen *Untermodul von M* , wenn gilt

- $(U, +)$ ist eine Untergruppe der kommutativen Gruppe $(M, +)$ und
- U ist abgeschlossen unter der Skalarmultiplikation, d.h. $ru \in U$ für alle $r \in R$ und $u \in U$.

Ein Untermodul heißt *zyklisch*, wenn er die Form $Rm = \{rm \mid r \in R\}$ für $m \in M$ hat.

Da sich die Eigenschaften der Skalarmultiplikation eines Moduls über R aus Definition 2.1.12 auf seine Untermoduln übertragen, handelt es sich tatsächlich bei einem Untermodul wieder um einen Modul über R .

Beispiel 2.1.17

Betrachten wir den Ring $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ aufgefasst als Linksmodul M über \mathbb{Z}_3 . Dann beinhaltet dieser die Elemente

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Teilmenge $\mathbb{Z}_3 \times \{0\}$ ist ein Untermodul von M bestehend aus den Elementen

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 2.1.18

Seien M und N zwei Module über einem Ring R . Eine Abbildung $\varphi : M \rightarrow N$ heißt *Homomorphismus von R -Modulen*, wenn gilt

- $\varphi : (M, +) \rightarrow (N, +)$ ist ein Gruppenhomomorphismus und
- $(rm)^\varphi = r(m^\varphi)$ für alle $r \in R$ und $m \in M$.

Ist φ zusätzlich bijektiv, dann ist auch φ^{-1} ein Homomorphismus von R -Modulen und man spricht von einem *Isomorphismus von R -Modulen* bzw. wenn Ausgangs- und Zielmodul übereinstimmen von einem *Automorphismus von R -Modulen*. Die Gruppe der Automorphismen eines R -Moduls M wird mit $\text{Aut}_R(M)$ bezeichnet.

Wenn die Zielmenge mit dem Ring R übereinstimmt, d.h. $\varphi : M \rightarrow R$, spricht man von einer *Linearform*.

Bemerkung 2.1.19

Auch diese Abbildungen finden sich verkleidet in der Vektorraumtheorie wieder. Ersetzt man den Modul durch einen Vektorraum, entspricht die definierte Abbildung einer linearen Abbildung. Ein Homomorphismus von R -Modulen ist damit nichts anderes als eine R -lineare Abbildung.

Weiters werden noch einige Definitionen benötigt, die Aussagen über die Erzeugung eines Moduls tätigen. Unter anderem finden sich hier die Begriffe „Basis“ und „Dimension“ (wenn auch in anderer Bezeichnung) aus der Vektorraumtheorie wieder.

Definition 2.1.20

Sei M ein Modul über dem Ring R .

- Seien $b_1, \dots, b_n \in M$ für $n \in \mathbb{N}$, sodass die Abbildung

$$R^n \rightarrow M : (r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i b_i \quad (2.13)$$

eine Bijektion ist. Dann nennt man (b_1, \dots, b_n) eine *Basis* von M und (r_1, \dots, r_n) die *Koordinaten* von $\sum_{i=1}^n r_i b_i$ bezüglich der Basis (b_1, \dots, b_n) .

- Besitzt M eine Basis der Mächtigkeit $n \in \mathbb{N}$, dann heißt M *frei vom Rang n* .
- Der Modul M heißt *treu*, wenn es für alle $r \in R \setminus \{0\}$ ein $m \in M$ gibt, sodass $rm \neq 0$.

Bemerkung 2.1.21

Es sind im Zusammenhang mit den Begriffen „Basis“ und „frei“ zwei Dinge zu beachten. Zum einen ist im Allgemeinen im Gegensatz zu Vektorräumen für einen Modul nicht gewährleistet, dass es eine Basis gibt. Zum anderen folgt aus der Tatsache, dass ein Modul frei vom Rang n ist, nicht, dass n eindeutig ist. Es bedeutet nur, dass es eine Basis der Mächtigkeit n gibt. Es besteht allerdings durchaus die Möglichkeit der Existenz von Basen anderer Mächtigkeiten.

Zur Verdeutlichung dieser Aussage betrachten wir einen Vektorraum V über einem kommutativen Körper K mit unendlicher Dimension. Sei (b_0, b_1, \dots) eine fest gewählte Basis. Weiters betrachten wir den Ring $R := \text{End}_K(V)$ der linearen Selbstabbildungen von V auf sich aufgefasst als R -Rechtsmodul. Klarerweise ist id_V eine einelementige Basis. Außerdem sieht man leicht ein, dass die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha_0 & \text{ definiert durch } b_{2i} \mapsto b_i \text{ und } b_{2i+1} \mapsto 0 \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \alpha_1 & \text{ definiert durch } b_{2i} \mapsto 0 \text{ und } b_{2i+1} \mapsto b_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

eine zweielementige Basis von R bilden. Insbesondere ist R damit isomorph zu R^2 . Dieses Spiel kann man nun wiederholen und erhält

$$R \cong R \oplus R \cong R \oplus R \oplus R \cong \dots$$

Beispiel 2.1.22

Sei R ein Ring. Die Menge R^n ist mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Modul über R . Die kanonischen Einheitsvektoren,

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1),$$

bilden eine Basis, womit R^n frei vom Rang n ist.

Sei M ein weiterer freier Modul vom Rang n über R . Dann besitzt M eine Basis (b_1, \dots, b_n) und die Abbildung

$$R^n \rightarrow M : (r_1, \dots, r_n) \mapsto \sum_{i=1}^n r_i b_i$$

ist bijektiv. Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese die Bedingungen eines Homomorphismus von R -Modulen aus der Definition 2.1.18 erfüllt, womit ein R -Modul-Isomorphismus vorliegt. Somit kann man nach Auswahl einer Basis und Übergang zu Koordinaten Ergebnisse für den speziellen Modul R^n auf einen allgemeinen freien Modul vom Rang n übertragen.

Sei nun R ein Ring und M ein freier R -Modul vom Rang 2. Demnach existiert eine Basis (u, v) und man erhält den R -Modul-Isomorphismus

$$M \rightarrow R^2 : xu + yv \mapsto (x, y), \quad (2.14)$$

vermöge dessen M koordinatisiert werden kann.

Bemerkung 2.1.23

- Ein R -Modul-Endomorphismus φ kann vermöge der Zeilenvektor-Matrix-Multiplikation als R -lineare Abbildung durch eine Matrix mit Einträgen aus R dargestellt werden, sodass

$$(x, y)^\varphi = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (xa + yc, xb + yd). \quad (2.15)$$

- Es handelt sich genau dann um einen R -Modul-Automorphismen von M , wenn die Matrix invertierbar ist, d.h. die Zeilen der Matrix wieder eine Basis bilden. Die Gruppe aller invertierbarer 2×2 -Matrizen mit Einträgen aus R wird mit $\text{GL}_2(R)$ bezeichnet.
- Für einen Untermodul U von M und eine Abbildung φ induziert durch eine Matrix aus $\text{GL}_2(R)$ kann man ähnlich wie für einen Unterraum eines Vektorraums und eine lineare Abbildung nachrechnen, dass

$$U^\varphi := \{u^\varphi \mid u \in U\}$$

wieder ein Untermodul von M ist. Für einen zyklischen Untermodul $U = Rm$ für $m \in M$ erhält man als φ -Bild $U^\varphi = Rm^\varphi$ (vgl. Definition 2.1.18).

Demnach kann man also Automorphismen eines freien R -Moduls vom Rang 2 mit invertierbaren 2×2 Matrizen mit Einträgen in R identifizieren. Um leichter überprüfen zu können, ob eine solche Matrix invertierbar ist, betrachten wir das folgende Lemma.

Lemma 2.1.24

Seien A und $B \in R^{2 \times 2}$, sodass B aus A durch folgende Operationen hervorgeht:

- Addition eines Links- r -fachen einer Zeile,
- Addition eines Rechts- r -fachen einer Spalte,

- Links- bzw. Rechts-Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte mit einer Einheit oder
- Vertauschung der beiden Zeilen bzw. Spalten.

Dann ist $A \in \text{GL}_2(R)$ genau dann, wenn $B \in \text{GL}_2(R)$. Man spricht auch von *elementaren Spalten- bzw. Zeilenumformungen*.

Beweis:

Die Addition eines Links- r -fachen einer Zeile bzw. eines Rechts- r -fachen einer Spalte entspricht einer Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

für $r \in R$. Die inverse Matrix dazu ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix},$$

womit die Matrizen alle Elemente aus $\text{GL}_2(R)$ sind. Die Multiplikation einer Zeile bzw. Spalte mit einer Einheit entspricht einer Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $a \in R^*$ von links bzw. rechts, welche invertierbar sind. Die Vertauschung der beiden Zeilen bzw. Spalten entspricht der Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

von links bzw. rechts, welche ihre eigene Inverse ist. □

Bemerkung 2.1.25

Ist R ein kommutativer Ring, dann gibt es ein weiteres Hilfsmittel, um festzustellen, ob eine gegebene Matrix mit Einträgen aus R invertierbar ist, die Determinante. Diese ist definiert durch

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc. \tag{2.16}$$

Dabei gilt, dass eine Matrix mit Einträgen aus R genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante eine Einheit ist. In diesem Fall gilt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \left(\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

2.2 Distanzräume

Auch dieser Abschnitt ist noch sehr theoretisch und liefert viele Definitionen. Unter anderem werden Räume definiert, die sich durch eine spezielle Relation auszeichnen. Diese bilden die Grundlage für die Geometrien, mit denen wir uns im weiteren Verlauf der Arbeit beschäftigen werden.

Definition 2.2.1

Sei \mathbb{P} eine nichtleere Menge und $\Delta \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{P}$ eine Relation, die

- symmetrisch, d.h. aus $p \Delta q$ folgt $q \Delta p$ für alle p und $q \in \mathbb{P}$ und
- antireflexiv, d.h. es gilt $p \not\Delta p$ für alle $p \in \mathbb{P}$

ist. Dann bezeichnet man (\mathbb{P}, Δ) als Distanzraum, die Elemente von \mathbb{P} als *Punkte*, Δ als eine *Distanzrelation* und zwei Punkte, die bezüglich Δ in Relation stehen, als *distant*. Für p und $q \in \mathbb{P}$ verwenden wir folgende Schreibweisen

$$\Delta(p) = \{s \in \mathbb{P} \mid s \Delta p\} \quad (2.18)$$

$$\Delta(p, q) = \Delta(p) \cap \Delta(q). \quad (2.19)$$

Beispiele 2.2.2

- Für eine nichtleere Menge P ist die Relation \neq eine Distanzrelation.
- Ein anschaulicheres Beispiel ist die Menge der Geraden des Anschauungsraums zusammen mit der Relation „windschief“.

Wir werden noch ein weiteres Beispiel im nächsten Kapitel kennen lernen.

Bemerkung 2.2.3

Ein Distanzraum (\mathbb{P}, Δ) kann auch als ungerichteter Graph $G(\mathbb{P}, \Delta)$ aufgefasst werden. Dabei entsprechen die Punkte des Distanzraums den Knoten des Graphen und zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden Punkte distant sind. Entsprechend der Antireflexivität der Distanzrelation erhält man einen schlingenfreien Graphen. Umgekehrt entspricht auch jeder schlingenfreie Graph einem Distanzraum.

Angelehnt an die graphentheoretische Interpretation eines Distanzraums kann ein solcher folgende Eigenschaften besitzen.

Definition 2.2.4

Sei (\mathbb{P}, Δ) ein Distanzraum. Dann heißt dieser

- *nichttrivial*, wenn \mathbb{P} drei paarweise distante Punkte enthält,
- *stabil*, wenn zu je zwei Punkten p und $q \in \mathbb{P}$ ein Punkt $r \in \mathbb{P}$ existiert, sodass $p \Delta r \Delta q$ oder

- *zusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten p und $q \in \mathbb{P}$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Punkte $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ existieren, sodass $p_0 := p$, $p_n := q$ und $p_{i-1} \Delta p_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Beispiel 2.2.5

Die folgenden beiden schlingenfreien Graphen entsprechen beide nichttrivialen Distanzräumen. Der Graph (1) ist allerdings stabil und der Graph (2) nur zusammenhängend.

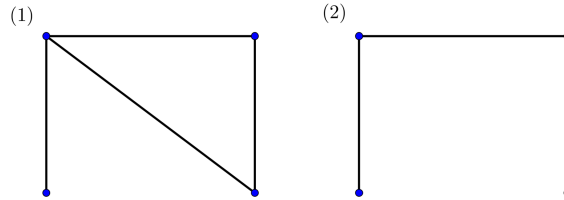


Abbildung 2.1: Schlingenfreie Graphen als Distanzräume

Betrachten wir Abbildungen zwischen Distanzräumen. Dabei interessieren uns natürlich jene, welche die Distanzrelation erhalten.

Definition 2.2.6

Seien (\mathbb{P}, Δ) und $(\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\Delta})$ Distanzräume und $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}$ eine Abbildung, die die Distanzrelation erhält, d.h.

$$p \Delta q \Rightarrow p^\varphi \Delta q^\varphi \text{ für alle } p \text{ und } q \in \mathbb{P}, \quad (2.20)$$

dann heißt φ *Morphismus von Distanzräumen*.

Ist φ zusätzlich bijektiv und auch φ^{-1} ein Morphismus von Distanzräumen, dann spricht man von einem *Isomorphismus von Distanzräumen* bzw. bei übereinstimmendem Ausgangs- und Zielraum von einem *Automorphismus von Distanzräumen*. Die Gruppe aller Automorphismen eines Distanzraums (\mathbb{P}, Δ) bezeichnet man als $\text{Aut}(\mathbb{P}, \Delta)$.

Bemerkung 2.2.7

- Da Morphismen von Distanzräumen die Distanzrelation erhalten, erhalten diese Abbildungen natürlich auch die Eigenschaften nichttrivial, stabil und zusammenhängend, welche in Definition 2.2.4 über die Distanzrelation erklärt sind.
- Im Gegensatz zu z.B. einem Homomorphismus von Modulen (siehe Definition 2.1.18) folgt im Allgemeinen bei einem bijektiven Homomorphismus von Distanzräumen noch nicht automatisch, dass die Umkehrabbildung ein Homomorphismus von Distanzräumen ist. Man betrachte z.B. die Abbildung

$$\text{id} : (\mathbb{P}, \Delta_1) \rightarrow (\mathbb{P}, \Delta_2),$$

wobei die Distanzrelationen so definiert sind, dass zwar aus $p \Delta_1 q$ folgt $p \Delta_2 q$ für alle p und $q \in \mathbb{P}$, es aber andererseits zwei Punkte s und $t \in \mathbb{P}$ gibt, sodass $s \Delta_2 t$ aber $s \not\Delta_1 t$ gilt.

Zum Abschluss des Abschnitts definieren wir Transitivitätseigenschaften, die im Folgenden sehr hilfreich sein werden.

Definition 2.2.8

Sei (\mathbb{P}, Δ) ein Distanzraum und Γ eine Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{P}, \Delta)$. Dann heißt Γ

- (scharf) 2- Δ -transitiv, wenn es zu je zwei Paaren distanter Punkte (genau) ein Element aus Γ gibt, welches die Punkte des einen Paares auf die entsprechenden Punkte des anderen abbildet.
- (scharf) 3- Δ -transitiv, wenn es zu je zwei Tripeln distanter Punkte (genau) ein Element aus Γ gibt, welches die Punkte des einen Tripels auf die entsprechenden Punkte des anderen abbildet.

Kapitel 3

Die projektive Gerade über einem Ring

In diesem Kapitel werden wir uns mit einem speziellen Distanzraum beschäftigen, der so genannten projektiven Gerade über einem Ring. Im ersten Abschnitt werden wir diesen definieren und einige Eigenschaften ableiten. Insbesondere werden wir darauf eingehen, wie man erkennt, ob ein Element ein Punkt des Distanzraumes ist oder ob zwei Punkte distant sind. Anschließend betrachten wir eine spezielle Gruppe von Abbildungen auf dem Distanzraum, die sehr nützliche Transitivitätseigenschaften besitzt. Zum Abschluss werden wir uns mit projektiven Geraden über speziellen Ringklassen beschäftigen und in diesen Fällen die Eigenschaften verfeinern. Insbesondere die projektive Gerade über einem Unterring ist für das nächste Kapitel grundlegend.

Im folgenden Kapitel bezeichnet R immer einen nicht notwendigerweise kommutativen Ring mit 1 . Wie man leicht nachprüfen kann, ist auch $R = \{0\}$ ein Ring mit 1 , wobei in diesem Fall $0 = 1$ gilt. Dieser Fall wird im Folgenden oft stören, sodass wir weiters voraussetzen, dass $1 \neq 0$ gilt. Weiters bezeichne M einen freien Modul vom Rang 2 über R . Dabei sei (u, v) eine fix gewählte zweielementige Basis von M , sodass der freie Modul M nach (2.14) mit R^2 identifiziert werden kann.

3.1 Definition und Eigenschaften

Starten wir gleich mit der Definition der projektiven Gerade.

Definition 3.1.1

Sei $U = Ru$ der vom gewählten Basiselement¹ u erzeugte zyklische Untermodul von M . Dann betrachtet man die Bahn von U unter $\text{GL}_2(R)$, im Zeichen

$$\mathbb{P}(R, M) := \{U^\varphi \mid \varphi \in \text{GL}_2(R)\}. \quad (3.1)$$

Die Elemente von $\mathbb{P}(R, M)$ heißen *Punkte*.

Weiters ist auf den Punkten eine Distanzrelation Δ folgendermaßen erklärt: Zwei Punkte $X = Rx$ und $Y = Ry$ sind genau dann distant, wenn sie bezüglich M komplementär

¹Ein Basiselement eines freien Moduls M vom Rang 2 bezeichnet ein Element aus einer zweielementigen Basis von M .

sind, d.h. $M = X \oplus Y$. Der so entstehende Distanzraum $(\mathbb{P}(R, M), \Delta)$ ist die *projektive Gerade zu M* .

Im Spezialfall $M = R^2$ wählt man für (u, v) die kanonische Basis und setzt $\mathbb{P}(R) := \mathbb{P}(R, R^2)$. Dann erhält man mit $(\mathbb{P}(R), \Delta)$ die *projektive Gerade über R* .

Bemerkung 3.1.2

Die affine Gerade über einem Ring lässt sich naheliegender definieren. Diese stimmt mit der Menge R überein, wobei auch hier bei den Elementen in diesem Sinne aufgefasst, von Punkten gesprochen wird.

Eine äquivalente Definition der projektiven Gerade (siehe [9], S. 785) und der Distanzrelation liefert folgendes Lemma, welches direkt aus der Bemerkung 2.1.23 folgt.

Lemma 3.1.3

(1) Ein Untermodul N von M ist genau dann in $\mathbb{P}(R, M)$ enthalten, wenn gilt

- es gibt Elemente n und m aus M , sodass (m, n) eine zweielementige Basis von M bildet und $N = Rn$ gilt oder
- es gibt eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$, sodass $N = R(au + bv)$.

Im Spezialfall $M = R^2$ ergibt sich somit für die projektive Gerade über R

$$\mathbb{P}(R) = \left\{ R(a, b) \mid \exists c, d : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R) \right\}. \quad (3.2)$$

(2) Zwei Punkte X und Y aus $\mathbb{P}(R, M)$ sind genau dann distant, wenn gilt

- es gibt eine zweielementige Basis (x, y) von M , sodass $X = Rx$ und $Y = Ry$ oder
- es gibt eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$, sodass $X = R(au + bv)$ und $Y = R(cu + dv)$ oder
- es gibt ein $\varphi \in \text{GL}_2(R)$, sodass $X = (Ru)^\varphi$ und $Y = (Rv)^\varphi$.

Beispiel 3.1.4

Sei V ein 2-dimensionaler Linksvektorraum über einem Körper K . Nach Lemma 3.1.3(1) gilt

$$\mathbb{P}(K, V) = \{Kx \mid x \in V \setminus \{0\}\}, \quad (3.3)$$

womit Definition 3.1.1 mit der Definition einer projektiven Gerade im Sinne der projektiven Geometrie übereinstimmt. Für nähere Informationen dazu siehe [7], S. 22 f. Die Distanzrelation ist in diesem Fall die Relation \neq . Für die Distanzgraphen von projektiven Geraden über endlichen Körpern erhält man damit vollständige Graphen.

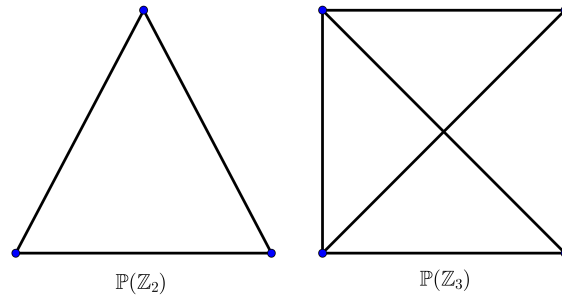


Abbildung 3.1: Distanzgraphen endlicher Körper

Der folgende Satz zeigt, dass sogar die Umkehrung gilt.

Satz 3.1.5

Sei $(P(R, M), \Delta)$ die projektive Gerade zum Modul M . Dann stimmt die Distanzrelation genau dann mit der Relation \neq überein, wenn R ein Körper ist.

Beweis:

Die eine Richtung wurde in Beispiel 3.1.4 demonstriert. Sei also die Distanzrelation gleich der Ungleichheitsrelation und $x \in R \setminus \{0\}$. Daher sind die Punkte Ru und $R(u + xv)$ verschieden und damit distant. Nach 3.1.3(2) ist somit die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix} \quad \text{und damit auch} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

ein Element aus $GL_2(R)$. Nach Lemma 2.1.24 ist $x \in R^*$ und R ein Körper. □

Lemma 3.1.6

Sei R kommutativ und m und $n \in M$.

- (1) Ein zyklischer Untermodul Rm ist in $\mathbb{P}(R, M)$ enthalten, wenn gilt
 - es gibt ein Element $n \in M$, sodass (m, n) eine zweielementige Basis von M bildet oder
 - $m = au + bv$ und es gibt c und $d \in R$, sodass $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^*$.

Im Spezialfall $M = R^2$ ergibt sich somit für die projektive Gerade über R

$$\mathbb{P}(R) = \left\{ R(a, b) \mid \exists c, d \in R : \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^* \right\}. \tag{3.4}$$

- (2) Zwei Punkte Rm und Rn der projektiven Gerade zu M sind genau dann distant, wenn gilt
 - $m = au + bv, n = cu + dv$ und $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^*$.

Beweis:

Nach Bemerkung 2.1.25 und Lemma 3.1.3 sind eigentlich fast alle Punkte klar. Es fehlt nur noch zu zeigen, dass für einen gegebenen Punkt Rm aus $\mathbb{P}(R, M)$ das Element m tatsächlich schon ein Basiselement einer zweielementigen Basis von M ist. Lemma 3.1.3 impliziert nämlich nur, dass es ein Basiselement w einer zweielementigen Basis von M gibt, sodass $Rm = Rw$.

Daher gibt es ein $r \in R$ mit $m = rw$. Da aber auch $w \in R(rw) = Rm$ gilt, gibt es ein \tilde{r} mit $w = \tilde{r}rw$ und somit $\tilde{r}r = 1$, da w Basiselement ist. Durch die Kommutativität von R ist das Linksinverse \tilde{r} automatisch ein Inverses, wodurch $r \in R^*$ gilt und m ein Basiselement einer zweielementigen Basis von M ist. \square

Beispiel 3.1.7

Betrachten wir den kommutativen Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_6$ und berechnen die Punkte der projektiven Gerade. Dazu halten wir zunächst fest, dass für die Gruppe der Einheiten gilt $\mathbb{Z}_6^* = \{1, 5\}$ und es zwei nichttriviale Ideale $\{0, 2, 4\}$ und $\{0, 3\}$ in \mathbb{Z}_6 gibt. Man sieht relativ leicht, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_6(x, 1) & \text{ für } x \in \mathbb{Z}_6 \text{ und} \\ \mathbb{Z}_6(1, y) & \text{ für } y \in \{0, 2, 3, 4\} \end{aligned}$$

zehn verschiedene Punkte von $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_6)$ sind, indem man mit $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ zu einer Matrix aus $\text{GL}_2(\mathbb{Z}_6)$ ergänzt.

Um die restlichen Punkte der projektiven Gerade – $\mathbb{Z}_6(a, b)$ für $a, b \in \mathbb{Z}_6 \setminus \mathbb{Z}_6^*$ – zu finden, verwenden wir Lemma 3.1.6, wonach $\mathbb{Z}_6(a, b)$ genau dann ein Element von $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_6)$ ist, wenn es Elemente c und $d \in \mathbb{Z}_6$ gibt, sodass $ad - bc \in \mathbb{Z}_6^*$ gilt. Daher können a und b nicht gemeinsam in einem der nichttrivialen Ideale liegen und es bleiben die Möglichkeiten

$$a, b \in \underbrace{\{(2, 3), (4, 3)\}}_{\in \mathbb{Z}_6(2,3)} \cup \underbrace{\{(3, 2), (3, 4)\}}_{\in \mathbb{Z}_6(3,2)}.$$

Da $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1$, haben wir die zwölf Punkte der projektiven Gerade gefunden.

Die Charakterisierung der Punkte von $\mathbb{P}(R, M)$ über ein Basiselement einer zweielementigen Basis von M ist in den meisten Fällen eher ungünstig. Die folgende Eigenschaft lässt sich für Modulelemente im Allgemeinen einfacher nachweisen.

Definition 3.1.8

Ein Element m aus dem Modul M heißt *unimodular*, wenn es eine Linearform λ gibt, sodass $m^\lambda = 1$.

Bemerkung 3.1.9

- Da auch jede Linearform als spezieller Homomorphismus von Moduln eine Matrixrepräsentation besitzt, ist das Element $m = au + bv$ aus M genau dann unimodular, wenn es x und $y \in R$ gibt, sodass $ax + by = 1$.

- Für eine zweielementige Basis (m, n) von M gibt es immer eine Linearform λ mit $m^\lambda = 1$.

Für Module über kommutativen Ringen kann man beweisen, dass sich die Punkte der projektiven Gerade über unimodulare Modulelemente bestimmen lassen, wie folgender Satz zeigt.

Satz 3.1.10

Sei R kommutativ und $m \in M$. Dann gehört Rm genau dann zur projektiven Gerade zu M , wenn m unimodular ist.

Beweis:

Sei zunächst das Element $m = au + bv$ unimodular. Nach Bemerkung 3.1.9 gibt es x und $y \in R$, sodass $ax + by = 1$. Die linke Seite der Gleichung lässt sich als Determinante einer Matrix mit Einträgen aus R auffassen, nämlich

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ -y & x \end{pmatrix} = 1.$$

Nach Lemma 3.1.6(1) gilt somit $Rm \in \mathbb{P}(R, M)$.

Ist Rm nun umgekehrt ein Punkt der projektiven Gerade zu M , dann ist m ebenfalls nach Lemma 3.1.6(1) ein Element einer zweielementigen Basis von M und demnach nach Bemerkung 3.1.9 unimodular. □

Zum Abschluss zeigen wir noch folgendes Lemma, welches wir später noch brauchen werden.

Lemma 3.1.11

Seien Rm und Rw zwei Punkte aus $\mathbb{P}(R, M)$ und sei zusätzlich w unimodular. Dann sind die beiden Punkte genau dann identisch, wenn $m = rw$ für $r \in R$, welches ein Linksinverses besitzt. Ist m zusätzlich unimodular, dann ist r eine Einheit von R .

Beweis:

Sei zunächst $m = rw$ und $\tilde{r} \in R$, sodass $\tilde{r}r = 1$. Dann ist $m \in Rw$ und $w = \tilde{r}rw = \tilde{r}m \in Rm$. Aus der Untermoduleigenschaft (vgl. Definition 2.1.16) folgt somit direkt $Rm = Rw$.

Für die Umkehrung sei $Rm = Rw$. Dann folgt wie im Beweis zu Lemma 3.1.6 die Existenz von r und $\tilde{r} \in R$, sodass $m = rw$ und $w = \tilde{r}rw$. Hier verwenden wir für die weiteren Schritte allerdings die Unimodularität von w . Demnach existiert eine Linearform λ , sodass $w^\lambda = 1$. Dadurch ist $\lambda|_{Rw}$ die Umkehrabbildung der Abbildung

$$\mu : R \rightarrow Rw : r \mapsto rw.$$

Somit ist μ bijektiv und insbesondere injektiv, wodurch aus $w = \tilde{r}rw$ sofort $\tilde{r}r = 1$ folgt.

Ist m ebenfalls unimodular, erhält man analog die Existenz eines Rechtsinversen, womit $r \in R^*$ gilt. □

3.2 Projektivitäten

Nach der Definition von $\mathbb{P}(R, M)$ als Bahn unter $\mathrm{GL}_2(R)$ (vgl. Definition 3.1.1) folgt, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_2(R)$ auf $\mathbb{P}(R, M)$ operiert. Außerdem lässt sich nach Lemma 3.1.3(2) und der Tatsache, dass Abbildungen induziert durch Elemente aus $\mathrm{GL}_2(R)$ Basen von M erhalten, leicht einsehen, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_2(R)$ die Distanzrelation erhält.

Daher induziert $\mathrm{GL}_2(R)$ auf $(\mathbb{P}(M, R), \Delta)$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(R, M), \Delta)$.

Definition 3.2.1

Die von $\mathrm{GL}_2(R)$ auf $(\mathbb{P}(M, R), \Delta)$ induzierte Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(R, M), \Delta)$ wird mit $\mathrm{PGL}_2(R)$ bezeichnet und heißt *projektive Gruppe von R* . Ihre Elemente nennt man *Projektivitäten*.

Beispiel 3.2.2

Betrachten wir die projektive Gerade über einem Vektorraum V . Eine Projektivität φ wird in diesem Fall durch eine lineare Bijektion $f : V \rightarrow V$ induziert. Man erhält somit

$$\varphi : \mathbb{P}(V, K) \rightarrow \mathbb{P}(V, K) : Kx \mapsto K(x^f).$$

Damit entsprechen die Projektivitäten im Sinne von Definition 3.2.1 Projektivitäten im Sinne der projektiven Geometrie (vgl. dazu [7], S. 31).

Um die Projektivitäten einer projektiven Gerade näher zu untersuchen, brauchen wir zuerst ein Lemma über den Stabilisator der speziellen Punkte Ru , Rv und $R(u + v)$ von $\mathbb{P}(R, M)$.

Lemma 3.2.3

Fixiert eine Abbildung φ induziert durch ein Element aus $\mathrm{GL}_2(R)$ die zyklischen Untermoduln $U := Ru$, $V := Rv$ und $W := R(u + v)$, dann wird φ induziert von einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ für $r \in R^*$.

Beweis:

Sei φ induziert von der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$. Fixiert φ die Untermoduln U , V und W , erhält man durch die Basiseigenschaft von (u, v) :

$$\begin{aligned} U = U^\varphi &\Rightarrow au + bv = u^\varphi = ru \quad \text{für } r \in R \\ &\Rightarrow b = 0 \\ V = V^\varphi &\Rightarrow c = 0 \quad (\text{analog}) \\ W = W^\varphi &\Rightarrow au + dv = (u + v)^\varphi = r(u + v) \quad \text{für } r \in R \\ &\Rightarrow a = d = r. \end{aligned}$$

Da die so erhaltene Matrix ein Element von $\mathrm{GL}_2(R)$ sein soll, muss nach Lemma 2.1.24 aber $r \in R^*$ gelten. \square

Satz 3.2.4

Der Kern der Operation von $\mathrm{GL}_2(R)$ auf $\mathbb{P}(R, M)$ ist die Gruppe $Z(R)^*E_2$, womit man die projektive Gruppe von R als Faktorgruppe erhält,

$$\mathrm{PGL}_2(R) = \mathrm{GL}_2(R)/Z(R)^*E_2. \quad (3.5)$$

Beweis:

Sei zunächst φ induziert durch $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ für $r \in Z(R)^*$. Wählt man einen beliebigen Punkt aus $\mathbb{P}(R, M)$, $Rm = R(xu + yv)$ für x und $y \in R$ entsprechend Lemma 3.1.3(1) passend, dann gilt

$$(Rm)^\varphi = Rm^\varphi = R(xru + yrv) = R(rxu + ryv) = Rm.$$

Daher ist φ im Kern der Operation enthalten.

Sei nun umgekehrt eine Abbildung φ im Kern der Operation gegeben. Dann fixiert φ unter anderem die Punkte Ru , Rv und $R(u+v)$. Nach Lemma 3.2.3 wird φ induziert von einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für $a \in R^*$.

Außerdem fixiert φ auch jeden Punkt $R(xu + v)$ für alle $x \in R$. Daher gilt

$$\begin{aligned} R(xu + v) &= (R(xu + v))^\varphi = R(xu + v)^\varphi = R(xau + av) \\ &= R(a(a^{-1}xau + v)) = R(a^{-1}xau + v) \\ &\Rightarrow xu + v = r(a^{-1}xau + v) \quad \text{für } r \in R. \end{aligned}$$

Da (u, v) eine Basis von M ist, erhält man aber $r = 1$ und

$$x = a^{-1}xa \Rightarrow ax = xa \quad \text{für alle } x \in R,$$

womit a ein Element aus dem Zentrum von R ist. Da a zusätzlich invertierbar ist, gilt $a \in Z(R) \cap R^*$. Es gilt aber allgemein

$$Z(R)^* = Z(R) \cap R^*.$$

Sei zunächst $z \in Z(R) \cap R^*$, dann gilt $zx = xz$ für alle $x \in R$ und es existiert ein Inverses z^{-1} . Durch Multiplikationen mit diesem erhält man aber $xz^{-1} = z^{-1}x$ für alle $x \in R$, womit $z^{-1} \in Z(R)$ und daher $z \in Z(R)^*$ gilt. Die umgekehrte Inklusion ist klar. Daher folgt die Behauptung. \square

Der nächste Satz wird uns im Folgenden oft das Leben erleichtern, indem Aussagen zuerst für spezielle Punkte gezeigt und anschließend mittels Projektivitäten auf die allgemeine Situation transportiert werden können.

Satz 3.2.5

Die projektive Gruppe $\mathrm{PGL}_2(R)$ operiert 3- Δ -transitiv auf $(\mathbb{P}(R, M), \Delta)$.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, dass es zu einem Tripel paarweise distanter Punkte aus $\mathbb{P}(R, M)$ eine Projektivität ψ gibt, die die drei Punkte auf Ru , Rv und $R(u+v)$ abbildet. Für zwei allgemeine Tripel paarweise distanter Punkte erhält man so zwei Abbildungen ψ_1 und ψ_2 und $\varphi := \psi_1\psi_2^{-1}$ ist eine Lösungsabbildung.

Seien also X, Y und Z drei paarweise distante Punkte aus $\mathbb{P}(R, M)$. Nach Lemma 3.1.3(2) gibt es eine Abbildung $\gamma \in \text{PGL}_2(R)$, sodass $X = (Ru)^\gamma$ und $Y = (Rv)^\gamma$. Die Umkehrabbildung γ^{-1} erhält als Projektivität natürlich die Distanz, womit $Z^{\gamma^{-1}}$ distant zu Ru und Rv ist. Für $Z^{\gamma^{-1}} = R(xu + yv)$ ist dies nach Lemma 3.1.3(2) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R).$$

Durch elementare Spalten- bzw. Zeilenumformungen (vgl. Lemma 2.1.24) erhält man daraus, dass auch $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$. Sei δ die von dieser Matrix induzierte Projektivität und $\psi := \delta\gamma$. Dann leistet diese genau das gewünschte, da δ die Punkte Ru und Rv fixiert und den Punkt $R(u+v)$ auf $Z^{\gamma^{-1}}$ abbildet. \square

Die scharfe 3- Δ -Transitivität der projektiven Gruppe ist nicht in allen Fällen gegeben. Der folgende Satz liefert notwendige und hinreichende Bedingungen dafür.

Satz 3.2.6

Die projektive Gruppe $\text{PGL}_2(R)$ operiert genau dann scharf 3- Δ -transitiv, wenn

- (1) die Einheitengruppe von R im Zentrum von R enthalten ist, $R^* \subseteq Z(R)$ oder
- (2) jede Projektivität die zwei distante Punkte vertauscht bereits eine Involution ist.

Beweis:

- (1) Die scharfe 3- Δ -Transitivität der projektiven Gruppe ist dazu äquivalent, dass der Stabilisator von je drei paarweise distanten Punkten mit der Identität übereinstimmt. Die Elemente dieses werden nach Satz 3.2.4 induziert von einer Matrix aus $Z(R)^*E_2 = (Z(R) \cap R^*)E_2$. Nach Lemma 3.2.3 stimmt der Stabilisator der drei paarweise distanten Punkte Ru , Rv und $R(u+v)$ aber mit R^*E_2 überein.
- (2) Wir zeigen die Äquivalenz von (2) zu (1). Sei ι eine Projektivität, die zwei distante Punkte vertauscht. Da die Gruppe $\text{PGL}_2(R)$ 2- Δ -transitiv operiert, kann man o.B.d.A. davon ausgehen, dass die Punkte Ru und Rv gewählt wurden.

Die Projektivitäten ι bzw. ι^2 werden demnach durch folgende Matrizen induziert:

$$\iota = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \iota^2 = \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ba \end{pmatrix} \quad \text{mit } a \text{ und } b \in R^*.$$

Für $R^* \subseteq Z(R)$ gilt somit $ab = ba \in Z(R)^*$, sodass ι^2 nach 3.2.4 mit der Identität übereinstimmt und ι eine Involution ist. Da a und $b \in R^*$ beliebig waren, gilt auch die Umkehrung. \square

Im Fall eines Körpers K stimmt die scharfe 3- Δ -Transitivität nach Bemerkung 3.1.4 mit der Eigenschaft (P_3) überein. Für nähere Informationen zur Eigenschaft (P_3) wird auf [7], S. 4 verwiesen. Aus Satz 3.2.6 erhält man in diesem Fall sofort Folgendes:

Korollar 3.2.7

Sei K ein kommutativer Körper. Dann operiert die projektive Gruppe $\text{PGL}_2(K)$ scharf dreifach transitiv auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}(K)$, d.h. es gilt (P_3) . Außerdem ist jede Projektivität, die zwei Punkte vertauscht, bereits eine Involution.

3.3 Die projektive Gerade über einem lokalen Ring

In diesem Abschnitt wollen wir die projektive Gerade über einem so genannten lokalen Ring untersuchen.

Betrachten wir zunächst die mit der Distanzrelation mitbestimmte Relation „nichtdistant“, im Zeichen $\not\sim$. Da die Distanzrelation antireflexiv und symmetrisch ist, ist die Relation $\not\sim$ klarerweise automatisch reflexiv und symmetrisch. Die Frage, die sich stellt, ist, in welchen Fällen eine Äquivalenzrelation vorliegt. Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel 3.3.1

Betrachte den kommutativen Ring $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} =: \mathbb{Z}_4$. Dann können wir die Punkte von $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_4)$ nach Satz 3.1.10 bestimmen. Demnach gehört ein Element $\mathbb{Z}_4(a, b)$ für a und b in \mathbb{Z}_4 genau dann der projektiven Gerade an, wenn es x und y in \mathbb{Z}_4 gibt, sodass $ax + by = 1$. Damit erhält man

$$\mathbb{P}(\mathbb{Z}_4) = \{\mathbb{Z}_4(1, 0), \mathbb{Z}_4(1, 2), \mathbb{Z}_4(0, 1), \mathbb{Z}_4(1, 1), \mathbb{Z}_4(2, 1), \mathbb{Z}_4(3, 1)\}.$$

Die Distanzrelation lässt sich über den Graphen $G(\mathbb{P}(\mathbb{Z}_4), \Delta)$ veranschaulichen, siehe dazu Abbildung 3.2.

Offensichtlich kann man hier die nichtdistanten Punkte in drei Klassen einteilen, sodass Punkte aus verschiedenen Klassen immer distant sind. Diese entsprechen gegenüberliegenden Punkten des Oktaeders. Die Relation „nichtdistant“ ist somit in diesem Fall eine Äquivalenzrelation.

Zum Vergleich sei auf das Beispiel 3.1.7 verwiesen. Wie man mit Hilfe von Bemerkung 2.1.25 leicht einsieht sind sowohl die Punkte $\mathbb{Z}_6(1, 0)$ und $\mathbb{Z}_6(2, 3)$, als auch $\mathbb{Z}_6(2, 3)$ und $\mathbb{Z}_6(0, 1)$ nicht distant. Allerdings sind die Punkte $\mathbb{Z}_6(1, 0)$ und $\mathbb{Z}_6(0, 1)$ distant, womit die Transitivität der Relation „nichtdistant“ verletzt ist.

Das eben erhaltene Resultat ist keine Überraschung. \mathbb{Z}_4 gehört nämlich zur Klasse der lokalen Ringe, die wir im Folgenden untersuchen werden.

Definition 3.3.2

Ein Ring R heißt *lokal*, wenn $I := R \setminus R^*$ ein Ideal von R ist.

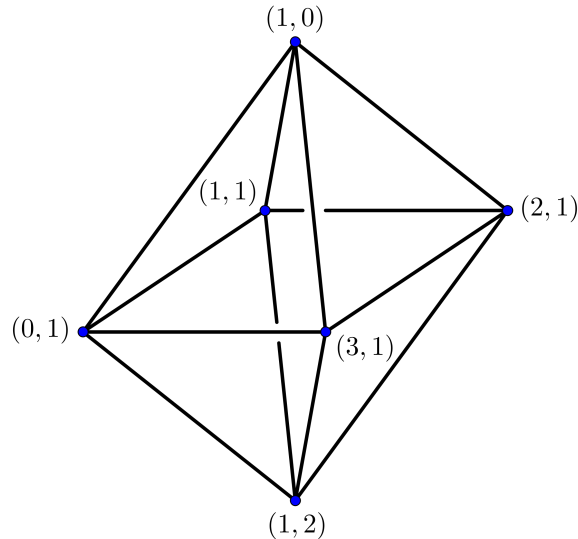


Abbildung 3.2: Distanzgraph $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_4)$

Beispiele 3.3.3

- Jeder Körper ist trivialerweise ein lokaler Ring, da die Menge der Nichteinheiten nur aus $\{0\}$ besteht.
- Die Ringe $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}_{p^n} =: \mathbb{Z}_{p^n}$ für p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ sind lokale Ringe, da für die Menge der Nichteinheiten gilt $I = (\mathbb{Z}_{p^n})p = \{0, p, \dots, (p^n - 1)p\}$, was ein Ideal ist. Das Beispiel 3.3.1 ist von diesem Typ.

Lemma 3.3.4

Für einen lokalen Ring R ist das Ideal $I := R \setminus R^*$ ein maximales Ideal. Daher ist $\bar{R} := R/I$ ein Körper. Sei

$$\kappa : R \rightarrow \bar{R} : r \mapsto \bar{r} := r + I$$

der kanonische Homomorphismus. Für eine Matrix $\alpha = (\alpha_{ij})$ mit Einträgen aus R sei $\bar{\alpha} := (\bar{\alpha}_{ij})$ für i und j aus $\{1, 2\}$. Dann gilt

$$r \in R^* \Leftrightarrow \bar{r} \in \bar{R}^* \quad (3.6)$$

$$\alpha \in \text{GL}_2(R) \Leftrightarrow \bar{\alpha} \in \text{GL}_2(\bar{R}). \quad (3.7)$$

Beweis:

Wir zeigen mit einem Beweis durch Widerspruch, dass I ein maximales Ideal ist, indem wir annehmen es gäbe ein Ideal J von R für welches gilt $I \subseteq J \subseteq R$ aber $I \neq J$ und zeigen, dass in diesem Fall J mit R übereinstimmt. Da J eine echte Obermenge von I ist, enthält es insbesondere eine Einheit a . Aus der Idealeigenschaft und $a^{-1} \in R$ folgt nun $a^{-1}a = 1 \in J$, womit J als Ideal mit R übereinstimmen muss.

Da I maximales Ideal ist, folgt, dass \bar{R} ein Körper ist (vgl. Bemerkung 2.1.7). Damit sind die Einheiten von \bar{R} aber genau die von $\bar{0} = I$ verschiedenen Elemente. Nun gilt aber

nach der Definition von I , dass $\bar{a} \in \bar{R}$ genau dann von $\bar{0}$ verschieden ist, wenn a eine Einheit in R ist.

Um die letzte angeführte Äquivalenz zu zeigen, sei zunächst $\alpha \in \text{GL}_2(R)$. Dann gibt es ein $\beta \in \text{GL}_2(R)$ mit $\alpha\beta = E_2$. Nach Übergang zum Faktorring gilt aber auch $\overline{\alpha\beta} = \overline{E_2}$, da κ ein Ringhomomorphismus ist.

Existiert umgekehrt ein $\bar{\beta} \in \text{GL}_2(\bar{R})$ mit $\overline{\alpha\beta} = \overline{E_2}$, dann findet man nach der Surjektivität von κ und (3.6) eine Matrix β mit Einträgen aus R , sodass

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} e & i \\ j & f \end{pmatrix} \quad \text{mit } e, f \in R^\star \text{ und } i, j \in I.$$

Da e und f Einheiten sind, kann man die rechte Matrix durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix überführen. Die Inverse zu α ist die Matrix β multipliziert mit den die Zeilenumformungen repräsentierenden Matrizen (vgl. Lemma 2.1.24). \square

Bevor wir allerdings die Relation „nichtdistant“ auf der projektiven Gerade über einem lokalen Ring untersuchen, brauchen wir erst einmal ein genaueres Bild der projektiven Gerade selbst und im weiteren der Distanzrelation.

Satz 3.3.5

Sei R ein lokaler Ring und I das Ideal der Nichteinheiten. Dann hat die projektive Gerade über R folgende Gestalt:

$$\mathbb{P}(R) = \{R(x, 1) \mid x \in R\} \cup \{R(1, y) \mid y \in I\}. \quad (3.8)$$

Die Distanzrelation lässt sich folgendermaßen charakterisieren: Für $x, \tilde{x} \in R$ und $y, \tilde{y} \in I$ gilt

$$\begin{aligned} R(x, 1) \triangle R(\tilde{x}, 1) &\Leftrightarrow x - \tilde{x} \notin I \\ R(1, y) \not\triangle R(1, \tilde{y}) &\text{ und } R(x, 1) \triangle R(1, y). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Beweis:

Für $x \in R$ und $y \in I$ sind die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Elemente aus $\text{GL}_2(R)$ (vgl. Lemma 2.1.24) und somit die beiden Mengen auf der rechten Seite nach 3.1.3(1) in $\mathbb{P}(R)$ enthalten. Nun betrachten wir die Abbildung

$$\vartheta : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathbb{P}(\bar{R}) : R(a, b) \mapsto \bar{R}(\bar{a}, \bar{b}),$$

welche nach (3.7) wohldefiniert ist. Für einen Punkt $R(a, b)$ aus $\mathbb{P}(R)$ ist also $\bar{R}(\bar{a}, \bar{b})$ ein Punkt aus $\mathbb{P}(\bar{R})$, welche eine projektive Gerade über einem Körper ist. Nach Beispiel 3.1.4 ist damit aber entweder $\bar{a} \neq \bar{0}$ oder $\bar{b} \neq \bar{0}$. Nach (3.6) ist dies äquivalent dazu, dass entweder a oder b eine Einheit ist. Wenn $b \in R^\star$, dann ist $R(a, b) = R(b^{-1}a, 1)$ vom ersten Typ. Andernfalls ist $b \in I$ und $R(a, b) = R(1, a^{-1}b)$ vom zweiten Typ.

Auch die Aussagen über die Distanzrelation lassen sich mit Hilfe der Abbildung ϑ sehr leicht einsehen, da diese nach (3.7) die Distanzrelation erhält. Auf $\mathbb{P}(\overline{R})$ nimmt diese eine sehr einfache Form an, nämlich die Relation \neq (vgl. Beispiel 3.1.4). Daher ergibt sich für x und \tilde{x} aus R und y und \tilde{y} aus I

$$\begin{aligned} R(x, 1) \triangle R(\tilde{x}, 1) &\Leftrightarrow \overline{R}(\overline{x}, \overline{1}) \neq \overline{R}(\overline{\tilde{x}}, \overline{1}) \Leftrightarrow x - \tilde{x} \notin I \\ R(1, y) \not\triangle R(1, \tilde{y}) &\Leftrightarrow \overline{R}(\overline{1}, \overline{y}) = \overline{R}(\overline{1}, \overline{\tilde{y}}) \Leftrightarrow y - \tilde{y} \in I \\ R(x, 1) \triangle R(1, y) &\Leftrightarrow \overline{R}(\overline{x}, \overline{1}) \neq \overline{R}(\overline{1}, \overline{y}). \end{aligned}$$

Die Aussagen am Ende der Äquivalenzkette zur zweiten und dritten Aussage stimmen, da einerseits I ein Ideal ist und andererseits $\overline{1}$ und \overline{y} für $y \in I$ auf jedem Fall verschieden sind. \square

Korollar 3.3.6

Sei R ein lokaler Ring und I das Ideal der Nichteinheiten. Dann hat die projektive Gerade über R die Mächtigkeit

$$\#\mathbb{P}(R) = \#R + \#I. \quad (3.10)$$

Beispiel 3.3.7

Betrachten wir den Ring der dualen Zahlen über dem Körper \mathbb{Z}_2 , im Zeichen

$$\mathbb{Z}_2(\varepsilon) = \{0, 1, \varepsilon, 1 + \varepsilon\}.$$

In Beispiel 2.1.8 haben wir gesehen, dass für die Einheitengruppe $\mathbb{Z}_2(\varepsilon)^* = \{1, 1 + \varepsilon\}$ gilt. Es ist leicht einzusehen, dass es sich bei $\mathbb{Z}_2(\varepsilon)$ um einen lokalen Ring handelt (vgl. dazu Lemma 5.3.2 in Kapitel 5). Daher erhält man direkt aus Satz 3.3.5 für die projektive Gerade über $\mathbb{Z}_2(\varepsilon)$:

$$\mathbb{P}(\mathbb{Z}_2(\varepsilon)) = \{\mathbb{Z}_2(\varepsilon)(0, 1), \mathbb{Z}_2(\varepsilon)(1, 1), \mathbb{Z}_2(\varepsilon)(\varepsilon, 1), \mathbb{Z}_2(\varepsilon)(1 + \varepsilon, 1)\} \cup \{\mathbb{Z}_2(\varepsilon)(1, 0), \mathbb{Z}_2(\varepsilon)(1, \varepsilon)\}.$$

Auch den Distanzgraph erhält man mit Hilfe von Satz 3.3.5.

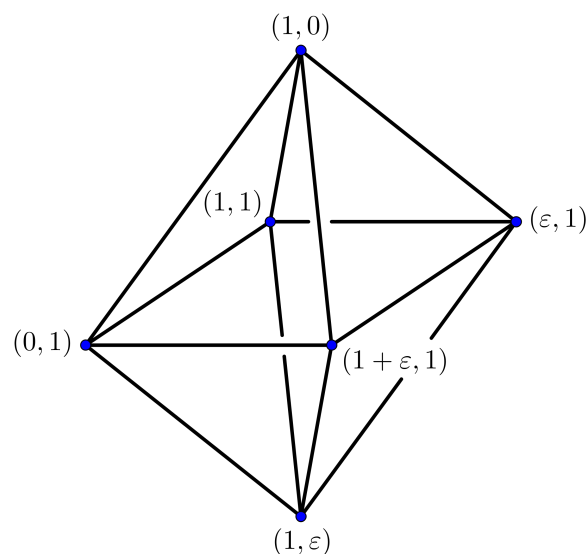


Abbildung 3.3: Distanzgraph $\mathbb{Z}_2(\varepsilon)$

Vergleicht man diesen nun mit dem Distanzgraph von $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_4)$ aus Beispiel 3.3.1, dann sind diese offensichtlich isomorph. Man sieht allerdings sofort, dass die beiden projektiven Geraden bzw. Ringe nicht isomorph sind, da $\mathbb{Z}_2(\varepsilon)$ den Unterkörper \mathbb{Z}_2 enthält, \mathbb{Z}_4 aber nicht.

Um die Hauptaussage dieses Abschnittes beweisen zu können, benötigen wir noch folgendes Lemma, das eine weitere Charakterisierung von lokalen Ringen liefert.

Lemma 3.3.8

Sei R ein Ring und bezeichne I die Menge der Nichteinheiten. Gilt für alle $x \in I$, dass $1 - x$ eine Einheit ist, dann ist R ein lokaler Ring.

Beweis:

(1) Die Menge I ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Einheiten: Angenommen es gäbe ein $x \in I$ und $r \in R^*$, sodass $rx \in R^*$ gilt. Durch Multiplikation mit r^{-1} folgt aus der Gruppeneigenschaft von R^* , dass $x \in R^*$ gilt, was ein Widerspruch zur Annahme $x \in I$ ist. Daher gilt $rx \in I$.

(2) Die Menge I ist abgeschlossen unter Addition. Angenommen $u = x + y$ für x und y aus I wäre kein Element von I , also eine Einheit. Dann wäre

$$1 - u^{-1}x = u^{-1}u - u^{-1}x = u^{-1}y.$$

Die linke Seite ist nach (1) und der Voraussetzung in R^* . Die rechte Seite ist allerdings nach (1) in I enthalten, was zu einem Widerspruch führt. Daher gilt $x + y \in I$.

(3) Ähnlich kann $xy \in I$ für x und y aus I gezeigt werden: Es gilt

$$xy = (1 - (1 - x))y = y - (1 - x)y.$$

Nach der Voraussetzung, (1) und (2) ist der rechte Ausdruck und damit auch $xy \in I$.

Da $R = R^* \cup I$ gilt, folgt aus den Punkten (1)-(3) bereits die Idealeigenschaft. □

Satz 3.3.9

Ein Ring R ist genau dann lokal, wenn die Relation „nichtdistant“ $\not\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen zu $\not\sim$ haben die Form

$$\{R(1, z) \mid z \in I\} \quad \text{und} \quad \{R(x + z, 1) \mid z \in I\}, \tag{3.11}$$

wobei x ein Repräsentationssystem von R/I durchläuft.

Beweis:

Sei zunächst R ein lokaler Ring. Nach eingängiger Bemerkung fehlt nur noch zu zeigen, dass $\not\sim$ transitiv ist. Nach den Aussagen aus Satz 3.3.5 reicht es aus, die Transitivität

für die Menge $\{R(x, 1) \mid x \in R\}$ nachzuprüfen. Dies ist eine einfache Rechnung unter Verwendung von (3.9) und der Idealeigenschaft von I . Seien x, y und z in R , dann gilt

$$\begin{aligned} R(x, 1) \not\sim R(y, 1) \text{ und } R(y, 1) \not\sim R(z, 1) &\Leftrightarrow x - y \in I \text{ und } y - z \in I \\ &\Leftrightarrow x - y + y - z = x - z \in I \\ &\Leftrightarrow R(x, 1) \not\sim R(z, 1). \end{aligned}$$

Sei umgekehrt \sim eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{P}(R)$. Wir wollen Lemma 3.3.8 verwenden und zeigen, dass aus $x \in I := R \setminus R^*$ folgt $1 - x \in R^*$. Es gilt nach 3.1.3(2), dass $R(1, x) \not\sim R(1, 0)$, da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}}_{\notin \text{GL}_2(R)} \notin \text{GL}_2(R).$$

Weiters gilt $R(1, 1) \sim R(1, x)$, da nach der Transitivität von \sim aus $R(1, 1) \not\sim R(1, x)$ und $R(1, x) \not\sim R(1, 0)$ auch $R(1, 1) \not\sim R(1, 0)$ folgen würde. Dies ist aber ein Widerspruch, da $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$ nach Lemma 2.1.24. Somit ist aber

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 - x \end{pmatrix}}_{\Rightarrow \in \text{GL}_2(R)} \in \text{GL}_2(R),$$

und damit $1 - x \in R^*$.

Die Darstellung der Äquivalenzklassen folgt direkt aus (3.9). □

Korollar 3.3.10

Sei R ein lokaler Ring und I das Ideal der Nichteinheiten. Dann hat jede Parallelklasse der projektiven Gerade über R die Mächtigkeit $\#I$.

3.4 Die projektive Gerade über einem stabilen Ring

Satz 3.1.10 liefert im Fall eines kommutativen Rings eine Charakterisierung der Punkte der projektiven Gerade über unimodulare Elemente. In diesem Abschnitt lernen wir eine weitere Klasse von Ringen kennen, die eine solche Charakterisierung zulässt.

Definition 3.4.1

Ein Ring R heißt *stabil*, wenn für jedes unimodulare Paar $(a, b) \in R^2$ ein $c \in R$ existiert, sodass $ac + b \in R^*$.

Bemerkung 3.4.2

Eine äquivalente Definition ist in [15] mit dem Begriff des stabilen Rangs 2 zu finden. Der *stabile Rang* eines Ringes R ist die kleinste Zahl $n \geq 2$, sodass es für alle unimodularen Elemente $(m_1, \dots, m_n) \in R^n$ Elemente des Rings x_1, \dots, x_{n-1} gibt, sodass auch $(m_1 + x_1 m_n, \dots, m_{n-1} + x_{n-1} m_n)$ unimodular in R^{n-1} ist.

Ein Ring R ist somit vom stabilen Rang 2, wenn es für jedes unimodulare Paar $(a, b) \in R^2$ ein $c \in R$ gibt, sodass $ac + b$ unimodular in R ist. Dies ist nach Bemerkung 3.1.9 gleichbedeutend damit, dass es ein $r \in R$ mit $(ac + b)r = 1$ gibt. Auch für einen Ring vom stabilen Rang 2 gilt, dass ein Element genau dann links-invertierbar ist, wenn es rechts-invertierbar ist (vgl. dazu Lemma 3.4.4 mit angepasstem Beweis). Damit ergibt sich $ac + b \in R^*$. Dass ein stabiler Ring von stabilem Rang 2 ist, folgt direkt durch Umkehrung der Argumentation.

Beispiel 3.4.3

Jeder lokale Ring ist stabil. Für ein unimodulares Paar $(a, b) \in R^2$ gibt es x und y aus R , sodass $ax + by = 1$. Wären nun sowohl a , als auch b in $I = R \setminus R^*$, dann wäre nach der Idealeigenschaft von I aber auch $ax + by = 1 \in I$, was ein Widerspruch ist. Demnach gilt (die Rückrichtung ist trivial) $(a, b) \in R^2$ ist genau dann unimodular, wenn a oder b eine Einheit ist.

Bevor wir den eingangs schon erwähnten Satz beweisen, benötigen wir noch folgendes Lemma, welches in stabilen Ringen inverse Elemente charakterisiert.

Lemma 3.4.4

Sei R ein stabiler Ring. Für ein Element $a \in R$ ist jedes Linksinverse von a auch ein Rechtsinverses von a und umgekehrt.

Beweis:

Sei $a \in R$ rechts-invertierbar, d.h. es existiert ein $b \in R$ mit $ab = 1$. Das Paar $(1 - ba, b)$ ist unimodular, da $1 - ba + ba = 1$. Aus der Stabilität von R folgt somit die Existenz eines $c \in R$ mit $d := c - bac + b \in R^*$. Damit berechnet man

$$ad = a(c - bac + b) = ac - ac + 1 = 1.$$

Das heißt $a = d^{-1} \in R^*$ und $b = d$. □

Satz 3.4.5

Sei R ein stabiler Ring und M ein Modul über R . Dann ist Rm genau dann ein Punkt der projektiven Gerade zu M , wenn m unimodular ist.

Beweis:

Sei zunächst m unimodular, dann hat m die Form $m = au + bv$, wobei das Paar $(a, b) \in R^2$ unimodular ist. Da R stabil ist, ist dies äquivalent zur Existenz eines $c \in R$ mit $d := ac + b \in R^*$. Sei $x := d^{-1}a$, dann gilt

$$\begin{aligned} d(x, 1 - xc) &= (dx, d - dxc) = (a, d - ac) = (a, b) \\ \Rightarrow Rm &= R(xu + (1 - xc)v) = Ru^\varphi, \end{aligned}$$

wobei $\varphi \in \text{PGL}_2(R)$ induziert wird von der Matrix

$$\begin{pmatrix} x & 1 - xc \\ 1 & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R).$$

Daher ist Rm ein Element der projektiven Gerade zu M .

Die Umkehrung besteht eigentlich nur noch aus dem Zusammenstoppeln von bereits bekannten Erkenntnissen. Für einen Punkt $Rm \in \mathbb{P}(R, M)$ gibt es nach Lemma 3.1.3(1) und Bemerkung 3.1.9 ein unimodulares $w \in M$, sodass $Rm = Rw$. Lemma 3.1.11 impliziert daraus die Existenz eines $a \in R$ mit $m = aw$, wobei a ein Linksinverses besitzt. Dieses ist nach Lemma 3.4.4 aber bereits eine Einheit und damit auch m unimodular. \square

Bemerkung 3.4.6

Aus dem Beweis zu Satz 3.4.5 erhält man zusätzlich Darstellungen für Punkte der projektiven Gerade über einem stabilen Ring:

$$R(xu + (1 + xy)v) \quad \text{oder} \quad (3.12)$$

$$R((1 + xy)u + xu) \quad \text{für } x, y \in R. \quad (3.13)$$

Die zweite Darstellung erhält man dadurch, dass mit $(x, y) \in R^2$ auch $(y, x) \in R^2$ unimodular ist.

Im letzten Satz dieses Abschnitts wollen wir noch den Zusammenhang zwischen stabilen Ringen und stabilen Distanzräumen (vgl. Definition 2.2.4) untersuchen.

Satz 3.4.7

Sei R ein stabiler Ring. Dann ist der Distanzraum $(\mathbb{P}(R, M), \Delta)$ für jeden Modul M über R stabil.

Beweis:

Das Ziel ist zu zwei Punkten X und Y aus $\mathbb{P}(R, M)$ einen Punkt Z aus $\mathbb{P}(R, M)$ zu finden, der sowohl zu X , als auch zu Y distant ist. Da $\text{PGL}_2(R)$ Δ -transitiv operiert können wir o.B.d.A. annehmen, dass $X = Rv$. Nach Bemerkung 3.4.6 hat Y die Form $Y = R(xu + (1 + xy)v)$ für x und y aus R . Setze $Z := R(u + yv) \in \mathbb{P}(M, R)$, dann ist Z wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R),$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 + xy \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$$

und Lemma 3.1.3(2) ein solcher gesuchter Punkt. \square

3.5 Die projektive Gerade über einem Unterring

Im folgenden Abschnitt sei S ein Unterring von R (vgl. Definition 2.1.4). Dann können wir die projektive Gerade über R und über S betrachten. Dieser Abschnitt befasst sich nun mit der Frage, inwieweit die beiden projektiven Geraden miteinander verbunden sind, bzw. unter welchen Voraussetzungen man die projektive Gerade über S als Teilstruktur der projektiven Gerade über R auffassen kann. Dabei ist der schlagende Punkt der, inwieweit die Distanzrelation auf S mit der Distanzrelation induziert von R übereinstimmt. Betrachten wir dazu zuerst einmal die Einbettung der projektiven Gerade über S und einige sehr leicht abzuleitende Eigenschaften.

Satz 3.5.1

Sei S ein Unterring von R und

$$\iota : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(R) : S(a, b) \mapsto R(a, b). \quad (3.14)$$

Dann ist ι ein wohldefinierter, injektiver Morphismus der Distanzräume $(\mathbb{P}(S), \Delta_S)$ und $(\mathbb{P}(R), \Delta_R)$.

Beweis:

Aus $S \subseteq R$, folgt direkt $R(S(a, b)) = R(a, b)$. Daher ist ι wohldefiniert. Auch die Eigenschaft eines Morphismus ist nach Lemma 3.1.3(2) und $\text{GL}_2(S) \leq \text{GL}_2(R)$ leicht einzusehen.

Es bleibt nur noch die Injektivität zu zeigen, um ι als Einbettung zu identifizieren. Seien dafür zwei Punkte $S(a, b)$ und $S(c, d)$ aus $\mathbb{P}(S)$ gegeben, sodass deren Bilder übereinstimmen. Nach Lemma 3.1.3(1) und Bemerkung 3.1.9 können wir o.B.d.A. (a, b) und (c, d) als unimodular in S^2 und damit auch in R^2 voraussetzen. Dies impliziert zusammen mit $R(a, b) = R(c, d)$ nach Lemma 3.1.11 die Existenz eines $r \in R^*$ mit $(a, b) = r(c, d)$. Da (c, d) unimodular in S^2 ist, gibt es x und y in S , sodass $cx + dy = 1$. Daraus folgt

$$r = r(cx + dy) = ax + by \in S.$$

Aus der Unimodularität von (a, b) in S^2 folgt analog $r^{-1} \in S$ bzw. $r \in S^*$ und damit $S(a, b) = S(c, d)$. Somit ist ι injektiv. \square

Wie eingangs schon erwähnt ist das Ziel den Distanzraum $(\mathbb{P}(S), \Delta_S)$ als Teilstruktur des Distanzraums $(\mathbb{P}(R), \Delta_R)$ aufzufassen. Mit der Einbettung der projektiven Gerade aus Satz 3.5.1 haben wir zumindest die Punktmenge schon so miteinander in Verbindung gebracht, dass distante Punkte wieder distant sind.

Die Frage, die bleibt, ist, was mit nichtdistanten Punkten geschieht. Ohne weitere Voraussetzungen werden im Allgemeinen nichtdistanten Punkte nicht auf nichtdistanten Punkte abgebildet. Betrachte dazu folgendes kurzes Beispiel:

Beispiel 3.5.2

Grundlage ist das Ring-Unterring-Paar \mathbb{Q} und \mathbb{Z} . Die Punkte $\mathbb{Z}(1, 0)$ und $\mathbb{Z}(1, 2)$ sind in $\mathbb{P}(\mathbb{Z})$ nichtdistant, da

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \notin \mathbb{Z}^* = \{1, -1\}.$$

Die Determinante der Matrix ist über \mathbb{Q} allerdings eine Einheit, womit $\mathbb{Q}(1, 0)$ und $\mathbb{Q}(1, 2)$ sehr wohl distant sind.

Zusammengefasst suchen wir Voraussetzungen, unter denen die Abbildung ι aus (3.14) – mit eingeschränkter Zielmenge $\mathbb{P}(S)^\iota$ – ausgestattet mit der von Δ_R induzierten Distanzrelation ein Isomorphismus ist. Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 3.5.3

Seien (\mathbb{P}, Δ) und $(\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\Delta})$ zwei Distanzräume mit $\mathbb{P} \subseteq \tilde{\mathbb{P}}$. Eine Abbildung

$$\iota : (\mathbb{P}, \Delta) \rightarrow (\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\Delta}) \tag{3.15}$$

heißt *Einbettung von Distanzräumen*, wenn $(\mathbb{P}, \Delta) \rightarrow (\mathbb{P}^\iota, \tilde{\Delta})$ ein Isomorphismus von Distanzräumen ist.

Satz 3.5.4

Sei S ein Unterring von R und $\iota : (\mathbb{P}(S), \Delta_S) \rightarrow (\mathbb{P}(R), \Delta_R)$ definiert wie in (3.14). Dann bildet ι genau dann nichtdistanten Punkte auf nichtdistanten Punkte ab, wenn

$$S^* = R^* \cap S. \tag{3.16}$$

Unter dieser Voraussetzung ist $\iota : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(S)^\iota$ ein Isomorphismus von Distanzräumen.

Beweis:

Sei zuerst $S^* = R^* \cap S$. Wir zeigen die Kontraposition der implizierten Aussage. Seien also X und Y zwei Punkte aus $\mathbb{P}(S)$, sodass deren Bilder X^ι und Y^ι bezüglich Δ_R distant sind. Auf der einen Seite operiert $\mathrm{GL}_2(S)$ auf $(\mathbb{P}(S), \Delta_S)$ Δ -transitiv und auf der anderen Seite operiert $\mathrm{GL}_2(S)$ als Unterring von $\mathrm{GL}_2(R)$ aber auch auf $(\mathbb{P}(R), \Delta_R)$ und lässt dabei $\mathbb{P}(S)^\iota$ fest. Daher kann man o.B.d.A. von $X = S(1, 0)$ ausgehen.

Aus $X^\iota \Delta_R Y^\iota$ folgt für $Y = S(c, d)$ mit c und d aus S nach Lemma 3.1.3(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R).$$

Dies ist aber nur möglich, wenn $d \in R^*$ und nach Voraussetzung also auch $d \in S^*$. Damit ist die oben betrachtete Matrix ein Element des Unterrings $\mathrm{GL}_2(S)$ und es gilt $X \Delta_S Y$.

Für die Umkehrung betrachte die beiden speziellen Punkte $X = S(1, 0)$ und $Y = S(1, s)$ für $s \in R^* \cap S$ der projektiven Gerade über S . Unter der Verwendung von ähnlichen Argumenten wie oben gilt das Folgende: Mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R) \quad \text{für } s \in R^*$$

gilt $X' \triangle_R Y'$, woraus nach Voraussetzung $X \triangle_S Y$ und somit $s \in S^*$ folgt. Da $s \in R^* \cap S$ beliebig gewählt war, impliziert dies $R^* \cap S \subseteq S^*$. Da die andere Implikation trivialerweise erfüllt ist, führt dies zu $R^* \cap S = S^*$. \square

Beispiel 3.5.5

Im Fall, dass $S =: K$ ein Unterkörper von R ist, folgt aus der Injektivität bereits, dass es sich bei der Abbildung ι definiert in (3.14) um eine Einbettung von Distanzräumen handelt, da die Relation $\not\triangleq$ auf $\mathbb{P}(K)$ nach Satz 3.1.5 mit der Relation \neq übereinstimmt.

Kapitel 4

Kettengeometrien und Kettenräume

In diesem Kapitel beginnen wir zum ersten Mal mit einer Inzidenzstruktur zu arbeiten. Eine *Inzidenzstruktur* besteht zum einen aus einer Punktmenge und zum anderen werden spezielle Teilmengen der Punktmenge ausgezeichnet, so genannte „Ketten“, die die Inzidenz beschreiben.

Dieses Kapitel enthält eine algebraische und eine geometrische Herangehensweise bei der Konstruktion einer Inzidenzstruktur. Im ersten Abschnitt wird algebraisch über einem Ring-Unterring-Paar eine Kettengeometrie aufgezo-gen. Im Gegensatz dazu definieren wir im zweiten Abschnitt über geometrische Axiome einen Kettenraum. Allerdings liegen die beiden Definitionen nicht allzu weit auseinander, da man unter den richtigen Voraussetzungen zeigen kann, dass eine Kettengeometrie ebenfalls die Axiome eines Kettenraums erfüllt. Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit affinen Kettenräumen und Kettengeometrien. Auch hier ist das Ziel eine vorerst sehr geometrisch definierte Inzidenzstruktur algebraisch zu beschreiben.

Im folgenden Kapitel bezeichnet R wieder einen nicht notwendigerweise kommutativen Ring mit 1. Weitere Eigenschaften werden explizit erwähnt. Außerdem bezeichnet S weiterhin einen Unterring von R . Im Fall, dass S ein Unterkörper von R ist, wird stattdessen der Buchstabe K verwendet.

4.1 Kettengeometrien

Ausgehend von der im vorherigen Kapitel definierten und untersuchten projektiven Gerade über einem Ring, wollen wir nun eine Inzidenzstruktur konstruieren. Diese wird zum einen aus den Punkten der projektiven Geraden bestehen. Die Ketten werden wir anschließend an den letzten Abschnitt im vorhergegangenen Kapitel mit Hilfe der projektiven Gerade über einem Unterring definieren. Allerdings werden wir nun weitere Anforderungen an diese Unterringe stellen.

Definition 4.1.1

Sei S ein Unterring des Rings R mit der Eigenschaft $S \subseteq Z(R)$. Dann nennt man den Ring R eine *Algebra über S* oder kurz eine *S -Algebra*.

Im Folgenden betrachten wir die projektive Gerade über S immer vermöge (3.14) in die projektive Gerade über R eingebettet und gehen davon aus, dass $\mathbb{P}(S) \subseteq \mathbb{P}(R)$. Unter

dieser Voraussetzung können wir nun die Teilmengen der Punktmenge für unsere Inzidenzstruktur definieren.

Definition 4.1.2

Sei R eine S -Algebra und φ eine Projektivität über R . Dann heißt die Teilmenge $\mathbb{P}(S)^\varphi \subseteq \mathbb{P}(R)$ *Kette* in $\mathbb{P}(R)$.

Wird φ induziert von der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$, so schreibt man auch

$$\mathbb{P}(S)^\varphi =: \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]. \tag{4.1}$$

Die Punkte der projektiven Gerade über R , zusammen mit der Menge aller Ketten,

$$\mathcal{C}(S, R) := \{ \mathbb{P}(S)^\varphi \mid \varphi \in \text{PGL}_2(R) \}, \tag{4.2}$$

bilden die Inzidenzstruktur

$$\Sigma(S, R) := (\mathbb{P}(R), \mathcal{C}(S, R)). \tag{4.3}$$

Diese Inzidenzstruktur wird *Kettengeometrie* über der Algebra (S, R) genannt.

Bemerkung 4.1.3

Diese Definition erwähnt noch nirgends die Distanzrelationen, die ja sowohl auf der projektiven Gerade über R , als auch auf der über S vorhanden ist. Wie bereits erwähnt, betrachten wir $\mathbb{P}(S)$ eigentlich als ihr eingebettetes Ebenbild in $\mathbb{P}(R)$. Dabei wurde aber bis jetzt verschwiegen, dass ohne weitere Voraussetzung auf $\mathbb{P}(S)$ in dieser Weise aufgefasst eigentlich die von Δ_R induzierte Distanzrelation gilt, welche im allgemeinen nicht mit Δ_S übereinstimmt. Daher wird die Bedingung aus Satz 3.5.4 im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

Bevor wir die ersten Eigenschaften der Kettengeometrien untersuchen, benötigen wir noch folgendes Lemma, welches sich mit dem punktweisen Stabilisator von $\mathbb{P}(S)$ in $\text{PGL}_2(R)$ beschäftigt.

Lemma 4.1.4

Sei R eine S -Algebra. Dann stimmt der punktweise Stabilisator von $\mathbb{P}(S)$ in $\text{PGL}_2(R)$ mit dem Stabilisator von $R(1, 0)$, $R(0, 1)$ und $R(1, 1)$ überein.

Beweis:

Nach Lemma 3.2.3 wird jede Projektivität im Stabilisator von $R(1, 0)$, $R(0, 1)$ und $R(1, 1)$ induziert von einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{für } r \in R^*.$$

Da die Punkte $R(1, 0)$, $R(0, 1)$ und $R(1, 1)$ in $\mathbb{P}(S)$ enthalten sind, ist der punktweise Stabilisator von $\mathbb{P}(S)$ sicherlich im Stabilisator der drei Punkte enthalten.

Für einen Punkt $R(a, b) \in \mathbb{P}(S)$ und $r \in R^*$ gilt nun aber umgekehrt

$$R(a, b) \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = R(ar, br) = R(ra, rb) = R(a, b),$$

da $a, b \in S$ und S im Zentrum von R enthalten ist. \square

Damit können wir nun zwei wichtige Aussagen über die Inzidenzstruktur $\Sigma(S, R)$ tätigen.

Satz 4.1.5

Sei R eine S -Algebra mit der Eigenschaft $S^* = R^* \cap S$. Für die Kettengeometrie $\Sigma(S, R)$ gilt dann, dass durch je drei paarweise distante Punkte genau eine Kette geht.

Beweis:

Seien X, Y und Z drei paarweise distante Punkte der projektiven Gerade über R . Dann gibt es nach der 3- Δ -Transitivität der Gruppe $\text{PGL}_2(R)$ auf $\mathbb{P}(R)$ (vgl. Satz 3.2.5) eine Abbildung $\varphi \in \text{PGL}_2(R)$, sodass $R(1, 0)^\varphi = X$, $R(0, 1)^\varphi = Y$ und $R(1, 1)^\varphi = Z$. Da die Punkte $R(1, 0), R(0, 1)$ und $R(1, 1)$ auch der projektiven Gerade über S angehören, enthält die Kette $C := \mathbb{P}(S)^\varphi$ die Punkte X, Y und Z .

Angenommen es gäbe noch eine weitere Kette $\tilde{C} := \mathbb{P}(S)^\psi \in \mathcal{C}(S, R)$ mit $\psi \in \text{PGL}_2(R)$. Die Voraussetzung $S^* = R^* \cap S$ ist nach Satz 3.5.4 äquivalent dazu, dass die Distanzrelationen Δ_R und Δ_S auf $\mathbb{P}(S)$ zusammenfallen. Demnach erfüllt die Gruppe $\text{GL}_2(S)$ die 3- Δ_S -Transitivität auf $\mathbb{P}(S)$ und lässt außerdem $\mathbb{P}(S)$ invariant.

Wir können daher o.B.d.A. davon ausgehen, dass $R(1, 0)^\psi = X$, $R(0, 1)^\psi = Y$ und $R(1, 1)^\psi = Z$. Daraus folgt aber, dass $\varphi\psi^{-1} \in \text{GL}_2(R)$ die Punkte $R(1, 0), R(0, 1)$ und $R(1, 1)$ der projektiven Gerade über S fixiert. Nach Lemma 4.1.4 ist $\varphi\psi^{-1}$ damit ein Element des punktweisen Stabilisators von $\mathbb{P}(S)$, d.h. $\mathbb{P}(S)^{\varphi\psi^{-1}} = \mathbb{P}(S)$. Daraus erhält man schließlich $C = \mathbb{P}(S)^\varphi = \mathbb{P}(S)^\psi = \tilde{C}$. \square

Bemerkung 4.1.6

Aus dem Beweis zu Satz 4.1.5 erhält man auch, dass es ganz ohne Voraussetzungen an die S -Algebra R bereits durch je drei paarweise distante Punkte mindestens eine Kette aus $\mathcal{C}(S, R)$ gibt.

Satz 4.1.7

Sei R eine S -Algebra mit der Eigenschaft $S^* = R^* \cap S$. Seien weiters C und $\tilde{C} \in \mathcal{C}(S, R)$ zwei Ketten und $X, Y, Z \in C$ bzw. $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \tilde{C}$ zwei Tripel paarweise distanter Punkte. Dann gibt es eine Abbildung φ induziert durch eine Matrix aus $\text{GL}_2(R)$, sodass

- $X^\varphi = \tilde{X}$, $Y^\varphi = \tilde{Y}$, $Z^\varphi = \tilde{Z}$ und
- $C^\varphi = \tilde{C}$.

Beweis:

Wir betrachten zunächst nur die Kette $C := \mathbb{P}(S)^\gamma$ für $\gamma \in \text{PGL}_2(R)$ und erhalten $C^{\gamma^{-1}} = \mathbb{P}(S)$. Mit derselben Argumentation wie im Beweis zu Satz 4.1.5 können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass $X^{\gamma^{-1}} = R(1, 0)$, $Y^{\gamma^{-1}} = R(0, 1)$ und $Z^{\gamma^{-1}} = R(1, 1)$. Für die Kette $\tilde{C} = \mathbb{P}(S)^\psi$ mit $\psi \in \text{PGL}_2(R)$ kann man diese Schritte natürlich in analoger Weise wiederholen. Somit erhält man mit $\varphi := \gamma\psi^{-1}$ eine Lösungsabbildung. \square

4.2 Axiomensystem eines Kettenraums

Wir wollen weiterhin Kettengeometrien untersuchen und noch einige wichtige Eigenschaften herleiten. Parallel dazu macht es aber Sinn den Begriff des Kettenraums einzuführen, der über diese Eigenschaften definiert wird.

Sei für den folgenden Abschnitt vorausgesetzt, dass R eine S -Algebra mit der Eigenschaft $S^* = R^* \cap S$ ist. In diesem Fall müssen wir nach Satz 3.5.4 nicht mehr zwischen der Distanzrelation Δ_S und Δ_R auf $\mathbb{P}(S)$ unterscheiden. Daher wird diese im Folgenden einfach mit Δ bezeichnet. Sollte diese Eigenschaft für ein Ergebnis ausschlaggebend sein, wird diese nochmals extra angeführt.

Definition 4.2.1

Für eine Inzidenzstruktur $(\mathbb{P}, \mathcal{C})$ sei auf deren Punktmenge eine Distanzrelation Δ definiert, sodass (\mathbb{P}, Δ) einen Distanzraum bildet. Dann bezeichnet man das Tripel $(\mathbb{P}, \mathcal{C}, \Delta)$ als *Inzidenzstruktur mit Distanzrelation*.

Erfüllt eine Inzidenzstruktur mit Distanzrelation $(\mathbb{P}, \mathcal{C}, \Delta)$ zusätzlich folgende Axiome,

- (K1) Jede Kette $C \in \mathcal{C}$ enthält mindestens drei Punkte und jeder Punkt $X \in P$ liegt auf mindestens einer Kette.
- (K2) Je drei paarweise distante Punkte X, Y und $Z \in \mathbb{P}$ liegen genau auf einer Kette $C \in \mathcal{C}$. Man setzt in diesem Fall $C := (XYZ)$.

dann spricht man von einem *schwachen Kettenraum*.

Bemerkung 4.2.2

Im Gegensatz zu Kettengeometrien (vgl. Bemerkung 4.1.3) taucht in der Definition eines schwachen Kettenraums sehr wohl eine Distanzrelation auf.

Aus Satz 4.1.5 erhält man sofort folgendes Korollar.

Korollar 4.2.3

Sei R eine S -Algebra mit der Eigenschaft $S^* = R^* \cap S$. Dann ist die Kettengeometrie $\Sigma(S, R) := (\mathbb{P}(R), \mathcal{C}(S, R))$ zusammen mit der Distanzrelation Δ auf der Punktmenge ein schwacher Kettenraum $(\Sigma(S, R), \Delta)$.

Die nächste Frage, die sich stellt, ist die, wie die Distanzrelation und die Inzidenz zusammenhängt. Wir haben immerhin in Bemerkung 4.1.6 schon festgehalten, dass je drei paarweise distante Punkte auf einer Kette liegen, was insbesondere auch für zwei distante Punkte gilt. Die Umkehrung, ob man von Inzidenz mit einer gemeinsamen Kette auf die Distanzrelation schließen kann, ist noch ungeklärt.

Satz 4.2.4

Für die Kettengeometrie $\Sigma(S, R)$ sind folgende Punkte äquivalent:

- $R^* \cap S = S^*$ und zwei verschiedene Punkte sind genau dann distant, wenn sie gemeinsam auf einer Kette liegen.
- S ist ein Körper.

Beweis:

Sei zunächst S ein Körper. Dann gilt offensichtlich $R^* \cap S = S \setminus \{0\} = S^*$. Wie bereits erwähnt liegen zwei distante Punkte wegen der 2- Δ -Transitivität von $\text{PGL}_2(R)$ immer auf einer gemeinsamen Kette. Wir müssen daher nur die Umkehrung zeigen. Seien also X und Y zwei verschiedene Punkte auf der Kette $C := \mathbb{P}(S)^\varphi$ für $\varphi \in \text{PGL}_2(R)$. Da φ eine Bijektion ist, sind damit natürlich auch die Urbilder $X^{\varphi^{-1}}$ und $Y^{\varphi^{-1}} \in \mathbb{P}(S)$ verschieden. S ist aber ein Körper, womit $X^{\varphi^{-1}}$ und $Y^{\varphi^{-1}}$ nach Satz 3.1.5 bezüglich Δ_S und daher auch bezüglich Δ_R distant sind. Projektivitäten erhalten die Distanz, woraus folgt, dass X und Y bezüglich Δ_R distant sind.

Gilt nun umgekehrt, dass $R^* \cap S = S^*$, dann folgt nach Satz 3.5.4 zunächst, dass die Distanzrelationen Δ_S und Δ_R auf $\mathbb{P}(S)$ übereinstimmen. Außerdem haben wir die Voraussetzung, dass zwei verschiedene Punkte genau dann distant sind, wenn sie gemeinsam auf einer Kette liegen. Wendet man dies insbesondere für die Kette $\mathbb{P}(S)$ an, erhält man für die Distanzrelation Δ_S die Relation \neq , was nach 3.1.5 äquivalent dazu ist, dass S ein Körper ist. \square

Dies motiviert folgende Definition eines schwachen Kettenraums mit stärkeren Voraussetzungen.

Definition 4.2.5

Sei $(\mathbb{P}, \mathcal{C}, \Delta)$ ein schwacher Kettenraum, welcher zusätzlich das Axiom

- (K3)** Zwei Punkte X und $Y \in \mathbb{P}$ sind genau dann distant, wenn sie verschieden sind und gemeinsam auf einer Kette liegen.

erfüllt, dann nennt man $(\mathbb{P}, \mathcal{C})$ einen *schwachen Kettenraum im eigentlichen Sinne* (i.e.S.).

Nach Satz 4.2.4 muss der zugrunde liegende Unterring S einer Kettengeometrie ein Körper sein, damit die Kettengeometrie ein Kettenraum i.e.S. ist. Damit erhält man folgendes Korollar.

Korollar 4.2.6

Sei R eine Algebra über einem Körper K . Dann ist die Kettengeometrie $\Sigma(K, R) := (\mathbb{P}(R), \mathcal{C}(K, R))$ ein schwacher Kettenraum im eigentlichen Sinne.

Für einen Kettenraum i.e.S. gilt nun, dass die Menge aller zu einem festen Punkt X distanten Punkte genau jene sind, die von X verschieden sind und auf einer gemeinsamen Kette durch X liegen. Dies gibt Anlass zu folgender Definition.

Definition 4.2.7

Sei $\Sigma := (\mathbb{P}, \mathcal{C})$ ein schwacher Kettenraum i.e.S. und X ein Punkt. Bezeichne \mathcal{C}_X die Menge aller Ketten, die X enthalten, aus denen der Punkt X entfernt wurde, im Zeichen

$$\mathcal{C}_X := \{C \setminus \{X\} \mid X \in C \in \mathcal{C}\}. \quad (4.4)$$

Dann heißt

$$\Sigma_X := (\Delta(X), \mathcal{C}_X) \quad (4.5)$$

das *Residuum* von Σ in X und die Elemente von \mathcal{C}_X *Residuumsgeraden*.

Betrachten wir wieder den Fall einer Kettengeometrie über der Algebra (K, R) . Zuerst werden wir das Residuum eines speziellen Punktes untersuchen, nämlich jenes des Punktes $\infty := R(1, 0)^1$. Wie sich herausstellt lässt sich dieses sehr anschaulich darstellen und dessen Eigenschaften anschließend auf die Residuen von allen anderen Punkten übertragen. Beginnen wir mit der Punktmenge des Residuums Σ_∞ .

Lemma 4.2.8

Für die Punktmenge des Residuums im Punkt ∞ gilt

$$\Delta(\infty) = \{R(x, 1) \mid x \in R\}. \quad (4.6)$$

Beweis:

Es ist leicht einzusehen, dass die Menge $\{R(x, 1) \mid x \in R\}$ in $\Delta(\infty)$ enthalten ist, da nach Lemma 2.1.24 für alle $x \in R$ gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R).$$

Sei umgekehrt ein Punkt $R(a, b) \in \mathbb{P}(R)$ distant zu ∞ , dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R),$$

womit abermals nach Lemma 2.1.24 folgt, dass $b \in R^*$. Damit erhält man für den Punkt $R(a, b) = R(b^{-1}a, 1)$. \square

Bemerkung 4.2.9

Betrachte folgende Abbildung

$$\varepsilon : R \rightarrow \mathbb{P}(R) : x \mapsto R(x, 1). \quad (4.7)$$

¹Zur Wahl der Bezeichnung ∞ vgl. Kapitel 5

Diese ist offensichtlich injektiv und hat nach Lemma 4.2.8 die Punktmenge $\Delta(\infty)$ als Bild. Daher kann R vermöge ε in $\mathbb{P}(R)$ eingebettet mit $\Delta(\infty)$ identifiziert werden.

Beispiel 4.2.10

Als Fortsetzung von Beispiel 3.1.7 betrachten wir nun die Distanzrelation auf der projektiven Gerade über \mathbb{Z}_6 veranschaulicht durch folgendes Bild.

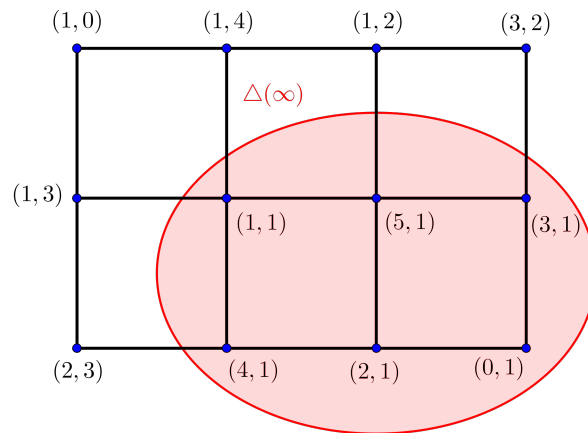


Abbildung 4.1: Distanzgraph $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_6)$

Zwei Punkte sind genau dann nichtdistant, wenn sie auf einer gemeinsamen Strecke liegen. Weiters ist die Menge aller Punkte, welche zu $\mathbb{Z}_6(1, 0)$ distant sind, veranschaulicht.

Mit Hilfe der Einbettung ε aus (4.7) lassen sich die modifizierten Ketten des Residuums im Punkt ∞ als Geraden eines affinen Raums auffassen. Bevor wir dieses Ergebnis beweisen, wollen wir zuerst die formale Definition eines affinen Raums angeben.

Definition 4.2.11

Sei $\mathbb{A} := (\mathbb{P}, \mathcal{B}, \parallel)$, wobei $(\mathbb{P}, \mathcal{B})$ eine Inzidenzstruktur ist. Die Element von \mathbb{P} heißen *Punkte* und die von \mathcal{B} *Geraden*. Für diese Inzidenzstruktur gelten die Voraussetzungen, dass

- es zu je zwei Punkten P und Q genau eine Gerade $g =: PQ$ gibt, die diese enthält, und
- jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält.

Weiters sei \parallel eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{B} , sodass das *Parallelen-Axiom* gilt. Dieses besagt

(A1) Für eine Gerade $g \in \mathcal{B}$ und einen Punkt $P \in \mathbb{P}$ gibt es genau eine Gerade $h \in \mathcal{B}$ mit $g \parallel h$ und $P \in h$. Wir schreiben $h = \pi(P, g)$.

Somit bildet die Relation \parallel eine Partition der Punkte. Die Klassen der Partition werden mit *Parallelklassen* bezeichnet. Gilt weiters das *Parallelogramm-Axiom* (A2) und das *Lenz-Axiom* (A3),

(A2) Für drei verschiedene Punkte P, Q und R gilt, dass $\pi(R, PQ) \cap \pi(Q, PR) \neq \emptyset$.

(A3) Seien P, Q und R drei verschiedene Punkt, so gewählt, dass die Geraden PR und QR verschieden sind. Dann gilt für alle Punkte $S \in PR$, dass $\pi(S, PQ) \cap QR \neq \emptyset$.

dann nennt man \mathbb{A} einen *affinen Raum*.

Bemerkung 4.2.12

Der affine Raum $\mathbb{A}(K, V)$ zu einem Vektorraum V über einem Körper K wird folgendermaßen erklärt: Die Elemente des Vektorraums entsprechen den Punkten. Die Geradenmenge ist

$$\mathcal{B} := \{Kv + w \mid v \in V \setminus \{0\}, w \in V\}. \quad (4.8)$$

Zwei Geraden $Kv + w$ und $K\tilde{v} + \tilde{w}$ sind genau dann parallel, wenn $Kv = K\tilde{v}$ gilt.

Sei R eine Algebra über einem Körper K , dann lässt sich R als Vektorraum über dem Körper K auffassen. In diesem Fall definiert man den affinen Raum $\mathbb{A}(K, R)$ wie eben beschrieben.

Satz 4.2.13

Sei R eine K -Algebra. Für eine Kette $C \in \mathcal{C}(K, R)$ mit $\infty \in C$ gilt

$$C \setminus \{\infty\} = C \cap \Delta(\infty). \quad (4.9)$$

Identifiziert man $\Delta(\infty)$ vermöge (4.7) mit R , so entspricht $C \setminus \{\infty\}$ einer Geraden im affinen Raum $\mathbb{A}(K, R)$.

Umgekehrt ist eine Gerade $a + Kb$ mit $a \in R$ und $b \in R \setminus \{0\}$ des affinen Raums $\mathbb{A}(K, R)$ genau dann von der Form $C \setminus \{\infty\}$ für $C \in \mathcal{C}(K, R)$, wenn b eine Einheit in R ist.

Beweis:

Sei zuerst $C \in \mathcal{C}(K, R)$ mit $\infty \in C$. Wie eingangs schon bemerkt, besteht die Kette C nach Satz 4.2.4 genau aus dem Punkt ∞ und lauter Punkten, die zu ∞ distant sind. Daher gilt klarerweise

$$C \setminus \{\infty\} = C \cap \Delta(\infty).$$

Da $GL_2(K)$ auf $\mathbb{P}(K)$ transitiv operiert, kann man o.B.d.A. annehmen, dass die Kette C die Gestalt

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$$

mit $c \in R$ und $d \in R^*$ hat. Daher berechnet man

$$\begin{aligned} C \setminus \{\infty\} &= \left\{ R(k, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \mid k \in K \right\} \\ &= \{R(k + c, d) \mid k \in K\} \\ &= \{R(d^{-1}k + d^{-1}c, 1) \mid k \in K\} \\ &= d^{-1}c + Kd^{-1} = a + Kb \end{aligned}$$

für $a := d^{-1}c \in R$ und $b := d^{-1} \in R^*$.

Ist umgekehrt $a + Kb$ mit $a \in R$ und $b \in R \setminus \{0\}$ eine Gerade des affinen Raums $\mathbb{A}(K, R)$. Dann gilt genau für $b \in R^*$

$$\begin{aligned} a + Kb &= \{R(a + kb) \mid k \in K\} \\ &= \left\{ R(k, 1) \begin{pmatrix} b & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid k \in K \right\} \\ &= \begin{bmatrix} b & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \setminus \{\infty\}. \end{aligned}$$

Daher erhält man die Gleichheit mit einer Residuumsgerade der Form $C \setminus \{\infty\}$ für $C \in \mathcal{C}(K, R)$. \square

Offensichtlich erhält man mit der Einschränkung $b \in R^*$ in Satz 4.2.13 im Allgemeinen nicht den gesamten affinen Raum $\mathbb{A}(K, R)$, aber zumindest gewisse Parallelenscharen von Geraden. Eine solche Struktur bezeichnet man als partiellen affinen Raum.

Definition 4.2.14

Sei $\mathbb{A} = (\mathbb{P}, \mathcal{B}, \parallel)$ ein affiner Raum. Wählt man $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ eine nichtleere Vereinigung von Parallelenscharen von Geraden, dann nennt man $(\mathbb{P}, \tilde{\mathcal{B}})$ einen *partiellen affinen Raum*. Fasst man den partiellen affinen Raum $(\mathbb{P}, \tilde{\mathcal{B}})$ als Teilstruktur des affinen Raums \mathbb{A} auf, dann nennt man die Geraden aus $\tilde{\mathcal{B}}$ *eigentliche Geraden* und jene aus $\mathcal{B} \setminus \tilde{\mathcal{B}}$ *isotrope Geraden*.

Beispiel 4.2.15

Ein Beispiel zur Veranschaulichung eines partiellen affinen Raums wäre die euklidische Ebene aus der alle Geraden parallel zur x - und y -Achse entfernt wurden (vgl. Abbildung 4.2). Diese sind die so genannten isotropen Geraden. Jede andere Gerade nicht parallel zu einer der Achsen wäre damit eine eigentliche Gerade.

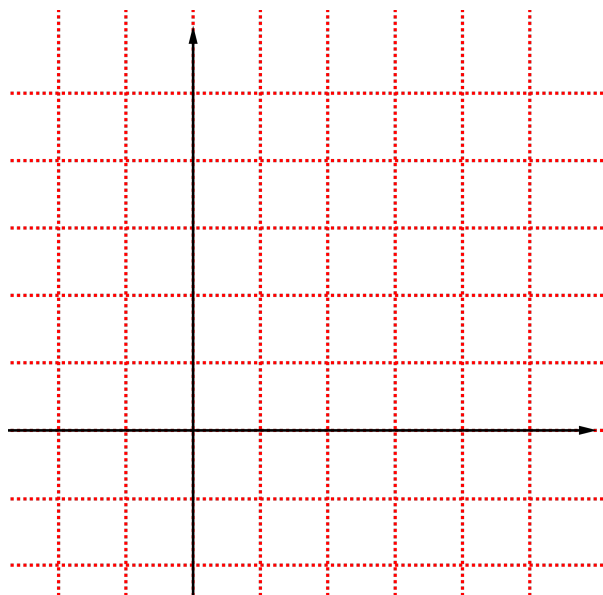


Abbildung 4.2: Partielle affine Ebene

Korollar 4.2.16

Sei $\Sigma(K, R)$ die Kettengeometrie über der Algebra (K, R) . Dann ist das Residuum Σ_∞ im Punkt ∞ ein partieller affiner Raum.

Damit kommen wir nun endlich zur Definition eines Kettenraums.

Definition 4.2.17

Sei $(\mathbb{P}, \mathcal{C})$ ein schwacher Kettenraum im eigentlichen Sinne, welcher zusätzlich das Axiom

(K4) Das Residuum von Σ in $X \in \mathbb{P}$ ist ein partieller affiner Raum für alle Punkte $X \in \mathbb{P}$.

erfüllt, dann bezeichnet man diesen als *Kettenraum*.

Das Ziel ist zu zeigen, dass die Kettengeometrie über der Algebra (K, R) ein Kettenraum ist. Bis jetzt haben wir aber erst für den speziellen Punkt ∞ gesehen, dass das Residuum tatsächlich ein partieller affiner Raum ist. Wie eingangs schon erwähnt, besteht die Vorgehensweise nun darin, die Ergebnisse für den speziellen Punkt ∞ mittels geeigneter Abbildungen auf einen beliebigen Punkt von $\mathbb{P}(R)$ zu übertragen.

Definition 4.2.18

Seien $(\mathbb{P}, \mathcal{C})$ und $(\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{C}})$ zwei Inzidenzstrukturen. Dann bezeichnet man eine Abbildung $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}$ mit der Eigenschaft

$$C^\varphi \in \tilde{\mathcal{C}} \quad \text{für alle } C \in \mathcal{C} \quad (4.10)$$

als *Morphismus von Inzidenzstrukturen*.

Seien $(\mathbb{P}, \mathcal{C}, \Delta)$ und $(\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\Delta})$ zwei schwache Kettenräume. Dann bezeichnet man eine Abbildung $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \tilde{\mathbb{P}}$, sodass

- $\varphi : (\mathbb{P}, \Delta) \rightarrow (\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\Delta})$ Morphismus von Distanzräumen und
- $\varphi : (\mathbb{P}, \mathcal{C}) \rightarrow (\tilde{\mathbb{P}}, \tilde{\mathcal{C}})$ Morphismus von Inzidenzstrukturen ist

als *Morphismus von schwachen Kettenräumen*.

In analoger Weise spricht man im Fall von zwei schwachen Kettenräumen i.e.S. bzw. Kettenräumen von einem *Morphismus von schwachen Kettenräumen i.e.S.* bzw. *Kettenräumen*.

In gewohnter Weise spricht man von einem *Isomorphismus* bzw. *Automorphismus*, wenn φ bijektiv ist und auch φ^{-1} ein Morphismus ist bzw. zusätzlich Ausgangs- und Zielmenge übereinstimmen.

Bevor wir zeigen, dass die Kettengeometrie über der Algebra (K, R) ein Kettenraum ist, benötigen wir noch das folgende eigentlich trivialerweise einzusehende Lemma, welches eine Untergruppe der Automorphismengruppe von $\Sigma(S, R)$ untersucht.

Lemma 4.2.19

Sei R eine S -Algebra mit der Eigenschaft $R^* \cap S = S^*$. Dann ist die Gruppe $\text{PGL}_2(R)$ eine Untergruppe von $\text{Aut}\Sigma(S, R)$, der Automorphismengruppe der Inzidenzstruktur $\Sigma(S, R)$. Diese operiert transitiv auf der Menge²

$$\mathfrak{F} = \{(X, C) \in \mathbb{P} \times \mathcal{C} \mid X \in C\}. \quad (4.11)$$

Beweis:

Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition 4.1.2 einer Kettengeometrie über der Algebra (S, R) , wonach die Ketten genau die Bilder von $\mathbb{P}(S)$ unter $\text{PGL}_2(R)$ sind.

Die Transitivitätseigenschaft der Untergruppe $\text{PGL}_2(R)$ auf der Menge der Fahnen ist eine Abschwächung des Satzes 4.1.7. \square

Damit kommen wir schließlich zum Endergebnis dieses Abschnitts.

Satz 4.2.20

Sei R Algebra über einem Körper K und $\Sigma := \Sigma(K, R)$ die Kettengeometrie über der Algebra (K, R) . Dann sind je zwei Residuen Σ_X und Σ_Y für X und $Y \in \mathbb{P}(R)$ isomorph. Insbesondere folgt daraus, dass die Inzidenzstruktur Σ ein Kettenraum ist.

Beweis:

Seien X und \tilde{X} zwei Punkte der projektiven Gerade über R . Man kann den Punkt X vermöge einer Abbildung $\varphi \in \text{PGL}_2(R)$ auf ∞ abbilden. Da φ als Element von $\text{PGL}_2(R)$ die Distanz erhält, gilt insbesondere

$$\Delta(X)^\varphi = \Delta(\infty).$$

Weiters gilt nun auch nach Lemma 4.2.19, dass φ als Element von $\text{Aut}\Sigma$ Ketten erhält. Somit gilt auch

$$(C \setminus \{X\})^\varphi \in \mathcal{C}_\infty \quad \text{für alle } C \setminus \{X\} \in \mathcal{C}_X.$$

Daher ist $\varphi|_{\Delta(X)} : \Sigma_X \rightarrow \Sigma_\infty$ ein Isomorphismus von Inzidenzstrukturen.

Analog erhält man natürlich auch für \tilde{X} einen solchen Isomorphismus $\tilde{\varphi}$ und $\varphi\tilde{\varphi}^{-1}$ zeigt, dass die beiden Residuen isomorph sind.

Insbesondere gilt nun aber, dass alle Residuen zum Residuum von Σ in ∞ isomorph sind, welches nach Korollar 4.2.16 ein partieller affiner Raum ist. \square

²Die Elemente der Menge heißen *Fahnen*.

4.3 Affine Spurräume und affine Kettengeometrien

Im vorgehenden Abschnitt haben wir bereits eine affine Inzidenzstruktur von einem Kettenraum abgeleitet. Ausgehend von einem Kettenraum kann man das Residuum in einem Punkt P betrachten und erhält einen partiellen affinen Raum. Die Punktmenge des Residuums ist $\Delta(P)$, doch wurden für die Definition des Residuums (vgl. Definition 4.2.7) nicht alle Ketten die Elemente aus $\Delta(P)$ enthalten verwendet. Dieser Abschnitt beschäftigt sich nun mit der Frage, wie diese übrigen Ketten wiederzufinden sind.

Definition 4.3.1

Sei $\Sigma := (\mathbb{P}, \mathcal{C})$ ein Kettenraum und $P \in \mathbb{P}$ ein Punkt. Sei weiters

$$\mathcal{C}(\Delta(P)) := \{C \cap \Delta(P) \mid C \in \mathcal{C}, |C \cap \Delta(P)| > 1\}. \quad (4.12)$$

Dann bildet $\text{Aff}_P(\Sigma) := (\Delta(P), \mathcal{C}(\Delta(P)))$ eine Inzidenzstruktur, welche *affiner Spurraum* von Σ bezüglich P genannt wird. Die Elemente der Menge $\mathcal{C}(\Delta(P))$ heißen *affine Ketten*.

Der Name „affine Ketten“ legt nahe, dass es sich beim affinen Spurraum eines Kettenraums ebenfalls um eine Art Kettenraum handelt. Tatsächlich benötigt man nur eine Quantitätsvoraussetzung an die affinen Ketten zu stellen, um einen schwachen Kettenraum i.e.S. zu erhalten.

Satz 4.3.2

Sei $\Sigma := (\mathbb{P}, \mathcal{C})$ ein Kettenraum und $P \in \mathbb{P}$ ein Punkt. Stattet man $\text{Aff}_P(\Sigma)$ mit der von Σ induzierten Distanzrelation aus, dann erfüllt der affine Spurraum die Axiome (K2) und (K3) eines Kettenraums.

Setzt man zusätzlich voraus, dass jede affine Kette aus $\mathcal{C}(\Delta(P))$ mindestens drei Punkte enthält, dann gilt auch das Axiom (K1), womit $\text{Aff}_P(\Sigma)$ ein Kettenraum i.e.S. ist.

Beweis:

(K2) Seien X, Y und $Z \in \Delta(P)$ paarweise distant. Dann folgt aus dem Axiom (K1) für den Kettenraum Σ , dass es genau eine Kette $C \in \mathcal{C}$ gibt, sodass $C = (XYZ)$. Daher gilt aber $|C \cap \Delta(P)| \geq 3$, womit $\bar{C} := C \cap \Delta(P) \in \mathcal{C}(\Delta(P))$ die einzige affine Kette ist, die die Punkte X, Y und Z enthält.

(K3) Seien zwei Punkte X und $Y \in \Delta(P)$ distant. Dann folgt aus dem Axiom (K2) für den Kettenraum Σ die Äquivalenz dazu, dass X und Y verschieden sind und gemeinsam auf einer Kette $C \in \mathcal{C}$ liegen. Analog wie oben folgt, dass $\bar{C} := C \cap \Delta(P) \in \mathcal{C}(\Delta(P))$ eine affine Kette ist, die die Punkte X und Y enthält.

Sei nun zusätzlich vorausgesetzt, dass jede affine Kette mindestens drei Punkte enthält.

(K1) Sei $X \in \Delta(P)$ ein Punkt. Dann gibt es eine Kette $C \in \mathcal{C}$ durch X und P , die nach dem Axiom (K1) für den Kettenraum Σ mindestens noch einen Punkt Y enthält, der nach (K3) distant zu P ist. Demnach gilt $|\Delta(P) \cap C| > 1$ und Y ist ein

Element der affinen Kette $\bar{C} = \Delta(P) \cap C$. Außerdem enthält jede affine Kette nach Voraussetzung mindestens drei Punkte. \square

Definition 4.3.3

Sei R eine Algebra über einem Körper K . Seien für eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$ die folgenden Mengen definiert:

$$\bar{C} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \{(sb + td)^{-1}(sa + tc) \in R \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K), sb + td \in R^*\} \quad (4.13)$$

$$\bar{C}(K, R) := \left\{ \bar{C} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R), \left| \bar{C} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right| > 1 \right\}. \quad (4.14)$$

Dann bildet $\Sigma_{\text{aff}}(K, R) := (R, \bar{C}(K, R))$ eine Inzidenzstruktur, welche als *affine Kettengeometrie* über der Algebra (K, R) bezeichnet wird. Die Elemente von $\bar{C}(K, R)$ heißen *affine Ketten*.

Bemerkung 4.3.4

Die affine Kette $\bar{C} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ist wohldefiniert, da sie nicht von der Wahl des Repräsentanten von $K(s, t) \in \mathbb{P}(K)$ abhängt. Für $(ks, kt) \in \mathbb{P}(K)$ erhält man nämlich, da K im Zentrum von R liegt,

$$(ksb + ktd)^{-1}(ksa + ktc) = k^{-1}(sb + td)^{-1}k(sa + tc) = (sb + td)^{-1}(sa + tc).$$

Es mag auf den ersten Blick unstimmig wirken, dass die Elemente des affinen Spurraums – konstruiert über den Kettenraum $\Sigma(K, R)$ in einem Punkt P – und die Elemente der eben definierten affinen Kettengeometrie über der Algebra (K, R) – konstruiert über die Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$ – gleich bezeichnet werden. Tatsächlich werden wir aber im nächsten Satz sehen, dass unabhängig von der Wahl des Punktes für die Konstruktion des Spurraums über einer Kettengeometrie, dieser isomorph zur affinen Kettengeometrie ist.

Satz 4.3.5

Sei R eine Algebra über einem Körper K und $\Sigma := \Sigma(K, R)$ die Kettengeometrie über der Algebra (K, R) . Dann ist für alle Punkte $P \in \mathbb{P}(R)$ der affine Spurräum $\text{Aff}_P(\Sigma)$ isomorph zur affinen Kettengeometrie $\Sigma_{\text{aff}}(K, R)$.

Insbesondere folgt daraus, dass zwei affine Spurräume (bezüglich verschiedener Punkte) isomorph sind.

Beweis:

Da die Untergruppe $\text{PGL}_2(R)$ von $\text{Aut}\Sigma$ transitiv auf der projektiven Gerade über R operiert, erhält man sofort, dass alle affinen Spurräume untereinander isomorph sind.

Wählt man nun zusätzlich einen Isomorphismus, der von einer Matrix aus $\mathrm{GL}_2(R)$ induziert wird, kann man o.B.d.A. $P = \infty$ annehmen. In diesem Fall wissen wir nach Lemma 4.2.8, dass die Punktmenge des affinen Spurraums bezüglich ∞ die Gestalt

$$\{R(x, 1) \mid x \in R\}$$

hat. Vermöge (4.7) kann man diese mit R identifizieren.

Es wird nun behauptet, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Aff}_\infty(\Sigma) \rightarrow \Sigma_{\mathrm{aff}}(K, R) : R(x, 1) \mapsto x$$

bereits der gesuchte Isomorphismus ist. Dazu muss man nur zeigen, dass φ und φ^{-1} affine Ketten von $\mathrm{Aff}_\infty(\Sigma)$ auf affine Ketten von $\Sigma_{\mathrm{aff}}(K, R)$ abbilden.

Sei also $\bar{C} := C \cap \Delta(\infty) \in \mathcal{C}(\Delta(\infty))$, d.h.

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$$

und die affine Kette \bar{C} enthält mindestens zwei Punkte. Beachte, dass ein Punkt $R(a, b)$ der projektiven Gerade über R genau dann zu $\Delta(\infty)$ gehört, wenn b eine Einheit ist. Damit berechnet man

$$\begin{aligned} \bar{C} &= \{R(sa + tc, sb + td) \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K), sb + td \in R^*\} \\ &= \{R((sb + td)^{-1}(sa + tc), 1) \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K), sb + td \in R^*\}. \end{aligned}$$

Wendet man nun φ an, erhält man die affine Kette $\bar{C} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \bar{\mathcal{C}}(K, R)$. □

Dieser Satz ist insofern sehr hilfreich, weil wir nun zwei Darstellungen von affinen Ketten im Fall einer Kettengeometrie über einer Algebra (K, R) zur Verfügung haben. Um die affinen Ketten aber näher untersuchen zu können, benötigen wir noch folgendes Lemma, welches gewisse Abbildungen aus $\mathrm{PGL}_2(R)$ als Translationen im affinen Raum $\mathbb{A}(K, R)$ enttarnt.

Lemma 4.3.6

Sei R eine Algebra über einem Körper K und $\Sigma := \Sigma(K, R)$ die Kettengeometrie über der Algebra (K, R) . Sei φ_c für $c \in R$ die von der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(R)$$

induzierte Abbildung aus $\mathrm{PGL}_2(R)$. Identifiziert man R vermöge der Einbettung ε aus (4.7) mit $\Delta(\infty)$, dann entsprechen die Translationen im affinen Raum $\mathbb{A}(K, R)$ genau der Abbildung φ_c eingeschränkt auf R , im Zeichen

$$\varphi_c : \mathbb{A}(K, R) \rightarrow \mathbb{A}(K, R) : x \mapsto x + c. \tag{4.15}$$

Beweis:

Man berechnet das φ -Bild eines Elements $x \in R$,

$$\begin{aligned} x^\varphi &= R(x, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \\ &= R(x + c, 1) = x + c. \end{aligned}$$

Dabei wird $y \in R$ mit $R(y, 1)$ identifiziert. □

Nun können wir die affinen Ketten algebraisch beschreiben.

Satz 4.3.7

Sei R eine Algebra über einem Körper K und $\bar{C} \in \bar{\mathcal{C}}(K, R)$ eine affine Kette. Dann gibt es eine Translation τ des affinen Raums $\mathbb{A}(K, R)$ und Elemente $a \in R^*$ und $b \in R$, sodass $\bar{C} = \bar{C}'^\tau$ für

$$\bar{C}' := \{0\} \cup \{(at + b)^{-1} \mid t \in K, at + b \in R^*\}. \quad (4.16)$$

Jede affine Kette durch 0 lässt sich mit passendem $a \in R^*$ und $b \in R$ in der Form \bar{C}' schreiben.

Umgekehrt ist \bar{C}'^τ für jede Translation τ des affinen Raums $\mathbb{A}(K, R)$ eine affine Kette.

Beweis:

Wir nützen aus, dass die affine Kettengeometrie $\Sigma_{\text{aff}}(K, R)$ isomorph ist zum affinen Spurraum bezüglich des Punktes ∞ . In diesem Sinne hat eine affine Kette die Form

$$\bar{C} := \bar{C} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R),$$

wobei \bar{C} mindestens zwei Punkte enthält die zu ∞ distant sind. Wir können annehmen, dass $R(z, w)$ einer dieser Punkte ist, womit $w \in R^*$ folgt und wir daher o.B.d.A. annehmen können, dass $w = 1$ gilt. Daraus erhält man

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$$

mit $u := x - yz \in R^*$. Da die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ nach Lemma 4.3.6 eine Translation τ auf $\mathbb{A}(K, R)$ induziert und

$$\begin{aligned} \bar{C}' &:= \bar{C} \begin{bmatrix} u & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \{(sy + t)^{-1}su \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K), sy + t \in R^*\} \\ &= \{0\} \cup \{(u^{-1}t + u^{-1}y)^{-1} \mid t \in K, u^{-1}t + u^{-1}y \in R^*\} \end{aligned}$$

gilt, erhält man mit $a := u^{-1} \in R^*$ und $b := u^{-1}y \in R$ die behauptete Form $\bar{C} = \bar{C}'^\tau$.

Enthält die betrachtete affine Kette \bar{C} bereits 0, dann kann man $z = 0$ setzen und die erhaltene Translation τ ist die Identität. Daher ist die affine Kette bereits von der Form \bar{C}' .

Die Umkehrung, dass die Menge \bar{C}'^τ für jede Translation von $\mathbb{A}(K, R)$ eine affine Kette ist, erhält man direkt aus den eben angestellten Überlegungen, indem man am Ende beginnt und mit Hilfe von $a \in R^*$ und $b \in R$ die entsprechende Darstellung der affinen Kette zu Beginn konstruiert. \square

Nun braucht man nur noch effektiv die Translation anzuwenden, um eine allgemeine Darstellung für die affinen Ketten zu bekommen. Dies wird in folgendem Korollar noch einmal zusammengefasst.

Korollar 4.3.8

Sei R eine Algebra über einem Körper K und $\bar{C} \in \bar{\mathcal{C}}(K, R)$ eine affine Kette, die das Element c enthält. Dann gibt es $a \in R^*$ und $b \in R$, sodass

$$\bar{C} =: \bar{C}(a, b, c) = \{c\} \cup \{(at + b)^{-1} + c \mid t \in K, at + b \in R^*\}. \quad (4.17)$$

Umgekehrt ist jedes $\bar{C}(a, b, c)$ mit $a \in R^*$ und $b \in R$ eine affine Kette.

Kapitel 5

Benzebenen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den drei klassischen Beispielen der Kettengeometrien beschäftigen: Möbius-, Laguerre- und Minkowskiebenen. Zusammen bilden diese die so genannten *Benzebenen*. Es handelt sich dabei um Kettengeometrien über einer zweidimensionalen K -Algebra, wobei K im Folgenden wieder einen nicht notwendigerweise kommutativer Körper bezeichnet. Im ersten Abschnitt werden diese genauer untersucht und das Aussehen von R auf drei Typen eingeschränkt. Anschließend wollen wir diese drei Typen genauer untersuchen, die affinen Ketten betrachten und ein geometrisches Modell dazu besprechen.

5.1 Zweidimensionale K -Algebren

Wir betrachten also im Folgenden eine zweidimensionale K -Algebra R . Das heißt es gibt in R – die additive Gruppe aufgefasst als ein Vektorraum über dem Körper K – eine Basis aus zwei Elementen $(u, v) \in R^2$, sodass gilt

$$R = Ku + Kv. \tag{5.1}$$

Im Folgenden wollen wir Kettengeometrien über solchen K -Algebren betrachten. Dafür nehmen wir aber zuerst die K -Algebren selbst genauer unter die Lupe. Es stellt sich nämlich heraus, dass es unter diesen Voraussetzungen nicht mehr viele Möglichkeiten für R gibt.

Um allerdings weitere Aussagen tätigen zu können, benötigen wir noch einige Begriffe und Aussagen aus der Algebra betreffend Körpererweiterungen und Polynomringe.

Definition 5.1.1

Sei L ein Oberkörper des Körpers K .

- Ein Polynom $p(X) \in K[X]$ mit führendem Koeffizienten 1 heißt *normiert*.
- Gilt für ein Polynom $p(X) \in K[X]$ mit $\deg p(X) \geq 1$, dass aus $p(X) = q(X)r(X)$ für zwei Polynome $q(X)$ und $r(X) \in K[X]$ folgt $\deg q(X) = 0$ oder $\deg r(X) = 0$, dann bezeichnet man $p(X)$ als *irreduzibel* über K .
- Für ein Element $\alpha \in L$ bezeichnet $K[\alpha]$ den kleinsten Unterring von L , der K und α enthält.

- Das Element α heißt *algebraisch* über K , wenn es ein Polynom $p(X) \in K[X]$ gibt, sodass $p(\alpha) = 0$ gilt. Der normierte Erzeuger $m_\alpha(X) \in K[X]$ des Ideals

$$I := \{p(X) \in K[X] \mid p(\alpha) = 0\} \quad (5.2)$$

heißt *Minimalpolynom* von α über K .

In der folgenden Bemerkung sind die wichtigsten Ergebnisse über algebraische Körpererweiterungen, die im Folgenden verwendet werden, zusammengefasst. Für die Beweise der einzelnen Aussagen siehe [4] S. 100 ff.

Bemerkung 5.1.2

Für ein irreduzibles Polynom $p(X) \in K[X]$ vom Grad k ist das von $p(X)$ erzeugte Ideal $(p(X))$ maximal und der Faktorring $K[X]/(p(X))$ nach Bemerkung 2.1.7 somit ein Körper mit

$$K[X]/(p(X)) = \{b_0 + b_1X + \dots + b_{k-1}X^{k-1} + (p(X)) \mid b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \in K\}. \quad (5.3)$$

Unter den Voraussetzungen der Definition 5.1.1 ist das Minimalpolynom $m_\alpha(X)$ irreduzibel und

$$\begin{aligned} K[\alpha] &\cong K[X]/(m_\alpha(X)) \\ &= \{b_0 + b_1\alpha + \dots + b_{k-1}\alpha^{k-1} \mid b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \in K\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

wobei $k := \deg m_\alpha(X)$, somit ein Körper. Man spricht von einer *algebraischen Körpererweiterung* bzw. im Fall, dass das Minimalpolynom vom Grad 2 ist, von einer *quadratischen Körpererweiterung*.

Umgekehrt ist ein normiertes, irreduzibles Polynom $p(X) \in K[X]$ mit $p(\alpha) = 0$ bereits das Minimalpolynom von α über K .

Nun kommen wir zur Beschreibung zweidimensionaler K -Algebren.

Satz 5.1.3

Sei R eine zweidimensionale K -Algebra über dem Körper K . Dann hat R eine der folgenden Gestalten:

- (1) R ist eine quadratische Körpererweiterung von K .
- (2) R ist als K -Algebra isomorph zum Ring der dualen Zahlen über K (vgl. Beispiel 2.1.8).
- (3) R ist als K -Algebra isomorph zu $K \times K$.

In allen Fällen ist R kommutativ.

Beweis:

Da R als Vektorraum über K eine zweielementige Basis besitzt, kann man das Element

$1 \in R$ durch ein Element $t \in R \setminus K$ zu einer Basis von R über K ergänzen (vgl. Basisergänzungssatz, [6], S. 61). Somit gilt

$$R = K + Kt.$$

Insbesondere gibt es für das Element t^2 des Rings R eindeutige Elemente a und $b \in K$ mit

$$t^2 = a + bt.$$

Daher ist t eine Nullstelle des Polynoms $p(X) \in K[X]$ mit

$$p(X) = X^2 - bX - a.$$

Im Bezug auf die Nullstellen des Polynoms $p(X)$ und den Körper K gibt es drei Möglichkeiten:

- (1) Das Polynom $p(X)$ besitzt in K keine Nullstelle. Demnach ist $p(X)$ irreduzibel über K . Nach Bemerkung 5.1.2 ist $p(X) =: m_t(X)$ das Minimalpolynom von t über K und es gilt weiters

$$R = K + Kt = K[t] \cong K[X]/(m_t(X)),$$

womit R eine quadratische Körpererweiterung von K ist.

- (2) Das Polynom $p(X)$ besitzt in K eine doppelte Nullstelle $k \in K$. Da $p(X)$ normiert ist, gilt

$$p(X) = (X - k)^2.$$

Definiert man $\varepsilon := k - t \in R \setminus K$, dann erhält man, da t eine Nullstelle des Polynoms $p(X)$ ist,

$$\varepsilon^2 = (t - k)^2 = p(t) = 0.$$

Nach dem Austauschlemma (vgl. [6], S. 61) bildet auch $(1, \varepsilon)$ eine Basis von R über K und es gilt

$$R = K + K\varepsilon \quad \text{mit } \varepsilon^2 = 0.$$

- (3) Das Polynom $p(X)$ besitzt in K zwei verschiedene Nullstellen $k, l \in K$. Nach dem Satz von Vieta gilt $a = -kl$ und $b = k + l$. Da k und l verschieden sind, erhält man insbesondere, dass $2k - b = k - l \in K \setminus \{0\}$ und man definiert

$$e := (2k - b)^{-1}(k - t).$$

Aus $l = b - k$ erhält man $a = -kl = k^2 - bk$. Zusammen mit der Tatsache, dass t eine Nullstelle des Polynoms $p(X)$ ist, rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{(k - t)^2 - p(t)}{(2k - b)^2} \\ &= \frac{(k - t)(2k - b)}{(2k - b)^2} = e. \end{aligned}$$

Abermalige Verwendung des Austauschlemmas liefert, dass auch $(1, e)$ eine Basis von R über K bildet, womit $R = K + Ke$ gilt. Nun lässt sich leicht überprüfen, dass

$$\varphi : R \rightarrow K \times K : a + be \mapsto (a + b, a)$$

ein Ringisomorphismus ist.

Nach den Darstellungen von R ist in allen drei Fällen klar, dass R kommutativ ist. \square

5.2 Möbiusebenen

Definition 5.2.1

Sei $\Sigma := (\mathbb{P}, \mathcal{C})$ ein Kettenraum. Gilt, dass zwei verschiedene Punkte von \mathbb{P} bereits distant sind, d.h. die Distanzrelation ist die Ungleichheitsrelation, dann bezeichnet man Σ als einen *Möbiusraum*.

Ist zusätzlich jedes Residuum von Σ eine affine Ebene, dann spricht man von einer *Möbiusebene*.

Nach Satz 3.1.5 kann eine Kettengeometrie nur eine Möbiusebene sein, wenn der zugrunde liegende Ring ein Körper ist. Wir betrachten quadratische Körpererweiterungen.

Satz 5.2.2

Sei L eine quadratische Körpererweiterung von K , d.h. L ist vom Typ (1) in Satz 5.1.3. Dann ist die Kettengeometrie $\Sigma(K, L)$ eine Möbiusebene.

Beweis:

Eigentlich haben wir dafür bereits alles bewiesen. Nach Satz 3.1.5 ist die Distanzrelation auf der projektiven Geraden über dem Körper L die Relation \neq . Nach Satz 4.2.13 ist das Residuum im Punkt $L(\infty)$ die affine Ebene $\mathbb{A}(K, L)$ über K . Da nach Satz 4.2.20 alle Residuen isomorph zueinander sind, folgt die Aussage. \square

Für den restlichen Teil des Abschnitts betrachten wir eine spezielle quadratische Körpererweiterung: die Algebra \mathbb{C} über \mathbb{R} . Diese Algebra liefert die so genannte *reelle Möbiusebene* $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dies ist das Paradebeispiel für Kettengeometrien. Wir werden im Folgenden die affinen Ketten bestimmen und zwei geometrische Modelle betrachten.

Satz 5.2.3

Sei $\Sigma := \Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die reelle Möbiusebene. Die affinen Ketten der affinen reellen Möbiusebene $\Sigma_{\text{aff}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bestehen aus allen Geraden und Kreisen der affinen Ebene $\mathbb{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, welche mit der Gaußschen Zahlenebene identifiziert werden kann.

Beweis:

Nach Satz 4.3.7 reicht es aus affine Ketten durch 0 zu betrachten und zu zeigen, dass diese Geraden und Kreise durch 0 sind. Alle anderen entstehen durch eine Translation. Nach (4.16) haben diese die Form:

$$\bar{C}' = \{0\} \cup \{(at + b)^{-1} \mid t \in \mathbb{R}, at + b \neq 0\}$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$.

Unter den Voraussetzungen an a und b entspricht die Menge $\{at + b \mid t \in \mathbb{R}\}$ einer Gerade in der Gaußschen Zahlenebene und \bar{C}' ihrem Bild unter der Inversion

$$\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{N(z)}.$$

Nun gilt allerdings, dass die Inversion ι Geraden durch 0 auf sich selbst und Geraden, die nicht durch 0 gehen auf Kreise oder Geraden durch 0 abbildet (für genauere Informationen über Inversionen und Details zum Beweis der Aussage siehe [12], Appendix B. Inversions, S. 20 f.). Daher folgt die Behauptung. \square

Beispiel 5.2.4

Beginnen wir mit der Untersuchung der projektiven Gerade über \mathbb{C} . Da \mathbb{C} ein Körper ist, stimmt diese nach Beispiel 3.1.4 mit der projektiven Gerade aus der projektiven Geometrie überein und besteht somit aus allen eindimensionalen Unterräumen $\mathbb{C}(z, 1)$ von \mathbb{C}^2 und dem Punkt $\infty := C(1, 0)$. Daher lässt sich $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ ganz natürlich mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ identifizieren (vgl. Bemerkung 4.2.9).

Die Ketten der reellen Möbiusebene, auch *Möbiuskreise* genannt, sind die Bilder der „Standardkette“, im Zeichen

$$C_0 := \{\mathbb{C}(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}, \quad (5.5)$$

unter der Gruppe $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$. Dabei wird jede Abbildung $\varphi \in \text{PGL}_2(\mathbb{C})$ induziert von einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(\mathbb{C})$. Formal ausgeschrieben heißt das

$$\varphi : \mathbb{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}) : \mathbb{C}(x, y) \mapsto \mathbb{C} \left((x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right).$$

Daher hat ein beliebiger Möbiuskreis die Form

$$C := \{\mathbb{C}(xa + yc, xb + yd) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} \quad (5.6)$$

mit $ad - bc \neq 0$.

Nach der Identifikation von $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ mit $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ entspricht die Abbildung φ aus $\text{PGL}_2(\mathbb{C})$ somit einer so genannten *Möbiustransformation*

$$\mu_\varphi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} : z \mapsto \frac{za + c}{zb + d} \quad (5.7)$$

und die Standardkette der reellen Achse in der Gaußschen Zahlenebene zusammen mit ∞ . Da Möbiustransformationen Geraden (mit ∞) auf Kreise bzw. Geraden (mit ∞) abbilden, bestehen die Möbiuskreise in diesem Modell aus den Kreisen bzw. um ∞ erweiterten Geraden der Gaußschen Zahlenebene. Zur genaueren Betrachtung von Möbiustransformationen siehe [11] S. 10 ff.

Die Gaußsche Zahlenebene lässt sich mit der reellen euklidischen Ebene E_0 identifizieren. Nun kann man mit Hilfe einer stereographischen Projektion das so genannte Quadrikenmodell der reellen Möbiusebene konstruieren (vgl. Kapitel 7). Man verwendet die stereographische Projektion aus dem Nordpol $N := (0, 0, 1)$ der Einheitskugel \mathbb{S}_2 , definiert durch

$$\sigma : E_0 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{S}_2 : \begin{cases} (x, y) & \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} (2x, 2y, x^2 + y^2 - 1) \\ \infty & \mapsto N. \end{cases} \quad (5.8)$$

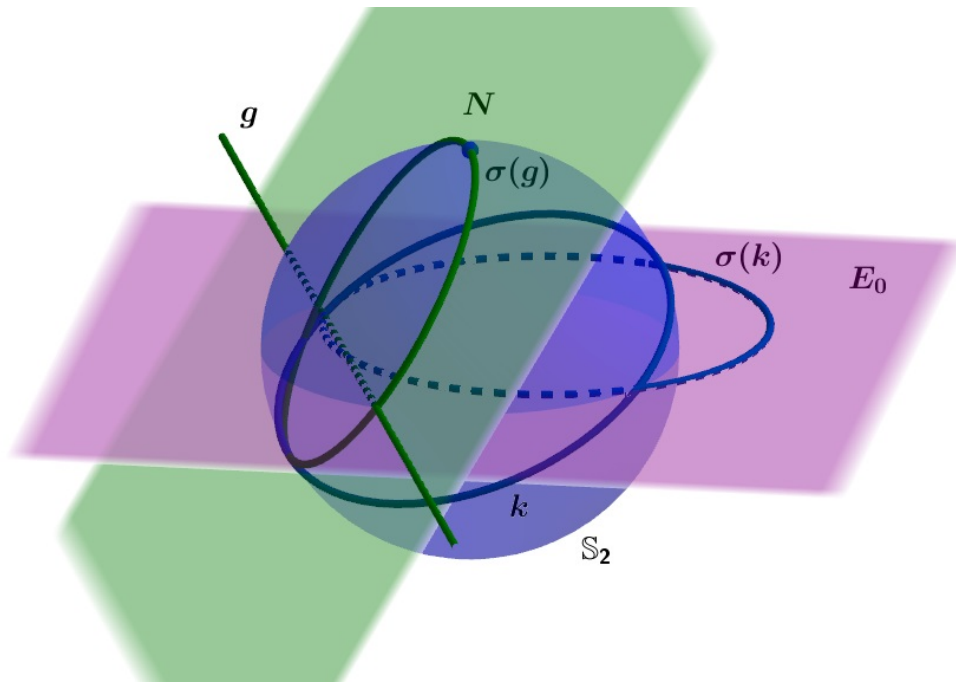


Abbildung 5.1: Stereographische Projektion auf die Einheitskugel

Da σ um ∞ erweiterte Geraden auf Kreise durch den Nordpol und Kreise auf Kreise nicht durch den Nordpol abbildet, entsprechen die Möbiuskreise in diesem Modell der Menge der Kreise auf der Einheitskugel bzw. allen ebenen Schnitten von \mathbb{S}_2 , die mehr als einen Punkt enthalten. Für den Beweis der Aussagen über die stereographische Projektion siehe [13], S. 31 f.

5.3 Laguerreebenen

Definition 5.3.1

Sei $\Sigma := (\mathbb{P}, \mathcal{C})$ ein Kettenraum. Ist die Relation $\not\sim$ eine Äquivalenzrelation und entsteht jedes Residuum Σ_X für $X \in \mathbb{P}$ durch Herausnahme einer Parallelschar von Geraden aus einer affinen Ebene, dann bezeichnet man den Kettenraum Σ als *Laguerreebene*.

Wir wollen zeigen, dass es sich bei der Kettengeometrie über den dualen Zahlen $K(\varepsilon)$ um eine Laguerreebene handelt. Da die Relation $\not\sim$ in diesem Fall eine Äquivalenzrelation sein soll, muss es sich bei $K(\varepsilon)$ nach Satz 3.3.9 um einen lokalen Ring handeln.

Lemma 5.3.2

Sei $K(\varepsilon)$ der Ring der dualen Zahlen über dem Körper K . Dann ist $K(\varepsilon)$ ein lokaler Ring und $I := K\varepsilon$ das Ideal der Nichteinheiten. I ist das einzige maximale Ideal in $K(\varepsilon)$.

Beweis:

Nach (2.5) gilt tatsächlich $K\varepsilon = K(\varepsilon) \setminus K(\varepsilon)^*$. Es bleibt für die Lokalität daher zu zeigen,

dass I ein Ideal ist. Klarerweise ist I unter der Addition abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit gegenüber der Multiplikation mit Elementen aus $K(\varepsilon)$ folgt aus

$$\begin{aligned} K\varepsilon(a + b\varepsilon) &= K(a\varepsilon + b\varepsilon^2) \\ &= K\varepsilon, \end{aligned}$$

womit I ein Ideal und $K(\varepsilon)$ daher ein lokaler Ring ist. Nach Lemma 3.3.4 ist I somit ein maximales Ideal. Angenommen, es gäbe noch ein weiteres maximales Ideal J . Da J keine Einheit enthalten kann, muss allerdings $J \subseteq I$ gelten. Aus der Maximalität von I und J , folgt direkt $J = I$. \square

Betrachten wir nun die Residuen der Kettengeometrie über dem Ring der dualen Zahlen. Aus der Darstellung der Nichteinheiten $I = K\varepsilon$ ergibt sich automatisch das Aussehen der Residuumsgeraden.

Lemma 5.3.3

Sei $\Sigma := \Sigma(K, K(\varepsilon))$ die Kettengeometrie über dem Ring der dualen Zahlen. Dann ist jedes Residuum Σ_X für $X \in \mathbb{P}(K(\varepsilon))$ isomorph zur partiellen affinen Ebene, die man durch Herausnahme einer Parallelschar von Geraden aus der affinen Ebene über K erhält.

Beweis:

Für einen Punkt $X \in \mathbb{P}(K(\varepsilon))$ ist das Residuum Σ_X nach Satz 4.2.20 isomorph zum Residuum im Punkt ∞ . Dieses entsteht nach Satz 4.2.13 aus der affinen Ebene $\mathbb{A}(K, K(\varepsilon))$ durch Herausnahme der Geraden $a + Kb$ für $b \in I = K\varepsilon$. Dies entspricht aber genau der Herausnahme einer Parallelschar von Geraden, nämlich genau der Geraden parallel zu $K\varepsilon$. \square

Nun folgt direkt aus den beiden eben gezeigten Lemmata der behauptete Satz.

Satz 5.3.4

Sei $R = K(\varepsilon)$ der Ring der dualen Zahlen, d.h. R ist vom Typ (2) in Satz 5.1.3. Dann ist die Kettengeometrie $\Sigma(K, K(\varepsilon))$ eine Laguerreebene.

Auch die affinen Ketten haben aufgrund der speziellen Eigenschaften des Rings $K(\varepsilon)$ eine einfache Gestalt, wie im folgenden Satz nachgerechnet wird.

Satz 5.3.5

Die affinen Ketten der affinen Laguerreebene $\Sigma_{\text{aff}}(K, K(\varepsilon))$ bestehen aus Parabeln mit Achse parallel zur y -Achse und Geraden, welche nicht parallel zur y -Achse sind (vgl. Abbildung 5.2).

Beweis:

Nach Satz 4.3.7 reicht es aus affine Ketten durch 0 zu betrachten. Alle anderen entstehen durch eine Translation. Nach (4.16) haben diese die Form:

$$\bar{C}' = \{0\} \cup \{(at + b)^{-1} \mid t \in K, at + b \in K(\varepsilon)^*\}$$



Abbildung 5.2: Affine Laguerreebene

mit $a = a_1 + a_2\varepsilon \in K(\varepsilon)^\star$ und $b = b_1 + b_2\varepsilon \in K(\varepsilon)$. Nach (2.5) gilt somit $a_1 \neq 0$ und $a_1t + b_1 \neq 0$. Damit erhält man

$$\begin{aligned} (at + b)^{-1} &= \frac{(a_1t + b_1) - \varepsilon(a_2t + b_2)}{(a_1t + b_1)^2} \\ &= \frac{1}{a_1t + b_1} - \frac{a_2t + b_2}{(a_1t + b_1)^2}\varepsilon \\ &= x + \left(\left(\frac{b_1a_2}{a_1} - b_2 \right) x^2 - \frac{a_2}{a_1}x \right) \varepsilon \end{aligned}$$

für $x = (a_1t + b_1)^{-1} \in K$. Identifiziert man nun das Element $a + b\varepsilon \in K(\varepsilon)$ mit dem Element $(a, b) \in K^2$, dann entspricht die affine Kette \bar{C}' dem Funktionsgraph $y = ux^2 + vx$ für u und $v \in K$. Dabei handelt es sich um eine Parabel parallel zur y -Achse bzw. eine Gerade nicht parallel zur y -Achse, beide durch den Nullpunkt. \square

Zum Abschluss des Abschnitts über Laguerreebenen wollen wir noch eine geometrische Interpretation der projektiven Gerade über dem Ring der dualen Zahlen betrachten. Zur besseren Visualisierung betrachten wir in diesem Fall als zugrunde liegenden Körper \mathbb{R} .

Beispiel 5.3.6

Betrachtet man die *Menge der orientierten Geraden* (Speere) in der euklidischen Ebene bezeichnet mit \mathfrak{G} . Eine orientierte Gerade s wird durch einen Richtungsvektor (r_1, r_2) und eine Gleichung

$$a_0 + a_1x + a_2y = 0 \quad \text{mit} \quad \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1$$

festgelegt, wobei (a_1, a_2) der normierte Normalvektor der Geraden ist. Der Richtungsvektor bestimmt die Orientierung und wird durch den Normalvektor zu einer Rechtsbasis ergänzt (vgl. Abbildung 5.3). Damit ist die Gleichung eindeutig.

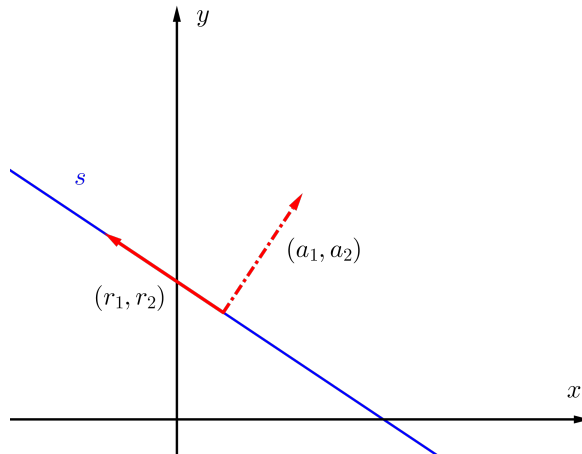


Abbildung 5.3: Orientierte Gerade

Ergänzend ist noch festzuhalten, dass zwei orientierte Geraden genau dann parallel sind, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind und ihre normierten Normalvektoren übereinstimmen.

Das Ziel ist zu zeigen, dass die Menge der orientierten Geraden ein Modell der projektiven Gerade über dem Ring $\mathbb{R}(\varepsilon)$ bildet. Als Zwischenschritt führen wir die *Blaschke-Abbildung* ein, welche die Menge der Speere zunächst bijektiv auf den Zylinder Ψ beschrieben durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ abbildet, im Zeichen

$$\beta : \mathfrak{S} \rightarrow \Psi : s \mapsto (-a_2, a_1, -a_0). \quad (5.9)$$

Klarerweise sind die Erzeugenden des Zylinders die Bilder paralleler Speere (vgl. Abbildung 5.4).

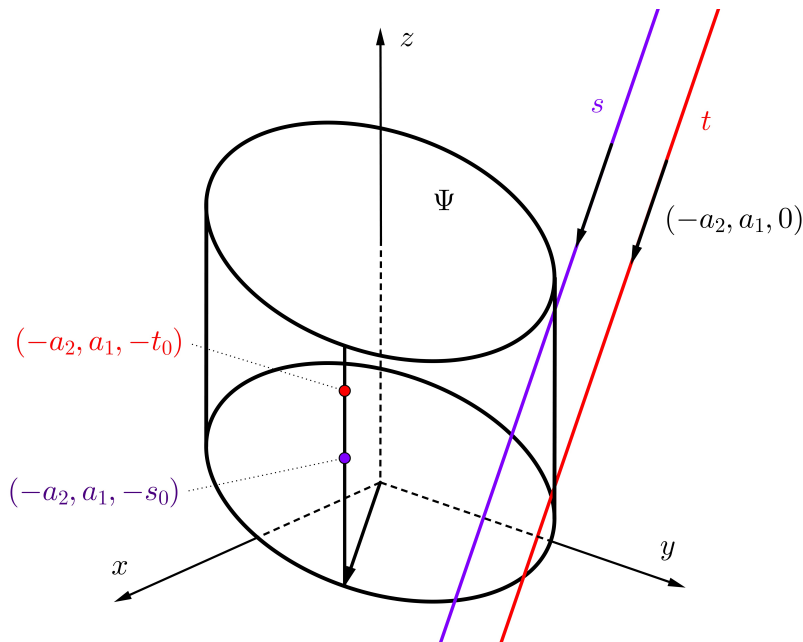


Abbildung 5.4: Blaschke Zylinder

Betrachtet man nun die stereographische Projektion σ aus dem Punkt $Z = (0, 1, 0)$ auf die Ebene $\delta := \{y = 0\}$ (vgl. Abbildung 5.5), dann ist diese für alle Elemente des Zylinders Ψ bis auf die Erzeugende Ω aller Elemente mit $a_1 = 1$ erklärt durch

$$\sigma : \Psi \setminus \Omega \rightarrow \delta : (-a_2, a_1, a_0) \mapsto \left(\frac{-a_2}{1-a_1}, 0, \frac{-a_0}{1-a_1} \right). \quad (5.10)$$

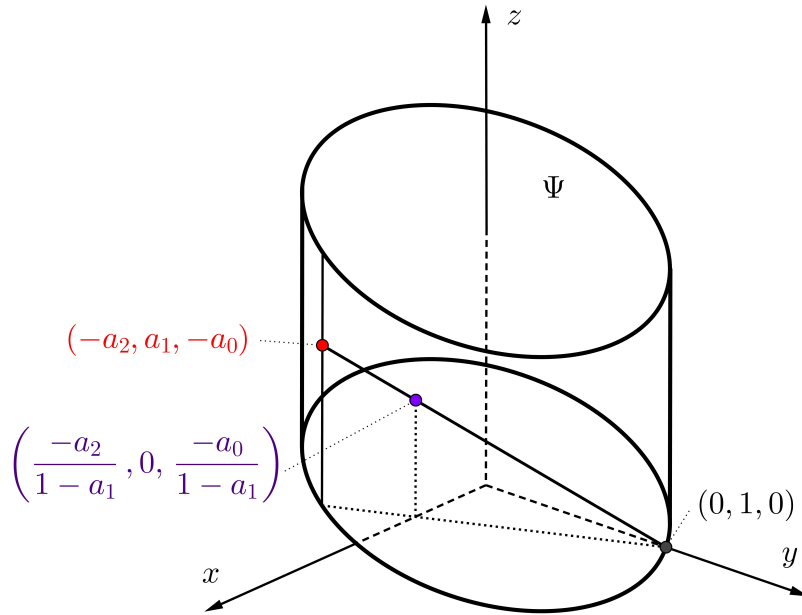


Abbildung 5.5: Stereographische Projektion aus Z

Durch Identifikation des Rings der dualen Zahlen über \mathbb{R} mit der Ebene δ erhält man mittels $\beta\sigma$ eine Abbildung der Speere auf $\mathbb{R}(\varepsilon)$, wobei die eine Parallelklasse an Speeren, welche der Erzeugenden des Zylinders in $(0, 1, 0)$ entspricht, verloren geht. Allerdings können wir eine Abbildung der gesamten Menge der orientierten Geraden auf die projektive Gerade über $\mathbb{R}(\varepsilon)$ definieren:

$$\mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}(\varepsilon)) : s \xrightarrow{\beta} (-a_2, a_1, -a_0) \mapsto \begin{cases} \mathbb{R}(\varepsilon) \left(\frac{-a_2}{1-a_1} + \frac{-a_0}{1-a_1}\varepsilon, 1 \right) & \text{für } a_1 \neq 1 \\ \mathbb{R}(\varepsilon) \left(1, \frac{1}{2}a_0\varepsilon \right) & \text{für } a_1 = 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Tatsächlich erhält man so nach Satz 3.3.5 alle Punkte der projektiven Geraden über $\mathbb{R}(\varepsilon)$. Damit erhalten wir gleich zwei Modelle für die projektive Gerade: die Menge der Speere und den so genannten *Blaschke-Zylinder*. Nichtdistante Punkte von $\mathbb{P}(\mathbb{R}(\varepsilon))$ entsprechen parallelen Speeren bzw. liegen auf einer gemeinsamen Erzeugenden des Blaschke-Zylinders.

5.4 Minkowskiebene

Definition 5.4.1

Sei $\Sigma := (\mathbb{P}, \mathcal{C})$ ein Kettenraum. Ist die Relation $\not\sim$ die Vereinigung von zwei Äquivalenzrelationen und entsteht jedes Residuum Σ_X für $X \in \mathbb{P}$ durch Herausnahme zweier Parallelscharen von Geraden aus einer affinen Ebene, dann bezeichnet man den Kettenraum Σ als *Minkowskiebene*.

Das Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass die Kettengeometrie über der Algebra $(K, K \times K)$ für einen Körper K eine Minkowskiebene ist. Wie im vorhergegangenen Abschnitt beginnen wir mit der Untersuchung der Nichteinheiten des Rings $K \times K$.

Lemma 5.4.2

Sei K ein Körper. Der Ring $K \times K$ besitzt genau zwei maximale Ideale $I_1 := K \times \{0\}$ und $I_2 := \{0\} \times K$. Die Menge der Nichteinheiten ist die Vereinigung der beiden Ideale I_1 und I_2 .

Beweis:

Die Mengen I_1 und I_2 sind Ideale, da sie klarerweise unter der Addition abgeschlossen sind und $0 \cdot k = 0$ für alle $k \in K$ gilt. Da K ein Körper ist, stimmt die Menge der Nichteinheiten mit $I_1 \cup I_2$ überein. Der Beweis, dass I_1 und I_2 die einzigen maximalen Ideale sind, erfolgt analog zu den Beweisen von Lemma 3.3.4 und Lemma 5.3.2. \square

Um zu zeigen, dass eine Minkowskiebene vorliegt, müssen wir als nächstes die Relation $\not\sim$ untersuchen und die zwei Äquivalenzrelationen identifizieren. Wie auch im Fall der Laguerreebenen ist die Darstellung der Relation stark verbunden mit dem Aussehen der Nichteinheiten.

Lemma 5.4.3

Betrachte die projektive Gerade über dem Ring $R := K \times K$ und seien I_1 und I_2 wie in Lemma 5.4.2. Seien weiters zwei Äquivalenzrelationen \parallel_i für $i \in \{1, 2\}$ auf $\mathbb{P}(R)$ gegeben durch

$$R(a, b) \parallel_i R(c, d) \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in I_i. \quad (5.12)$$

Dann ist die Relation $\not\sim$ die Vereinigung der zwei Äquivalenzrelationen \parallel_1 und \parallel_2 in dem Sinne, dass für zwei Punkte X und Y aus $\mathbb{P}(R)$ gilt

$$X \not\sim Y \Leftrightarrow X \parallel_1 Y \vee X \parallel_2 Y. \quad (5.13)$$

Beweis:

Da R kommutativ ist, gilt nach Bemerkung 2.1.25 für zwei Punkte aus $\mathbb{P}(R)$

$$R(a, b) \triangle R(c, d) \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^*.$$

Nach Lemma 5.4.2 ist die Relation $\not\sim$ somit die Vereinigung der beiden Relationen \parallel_1 und \parallel_2 .

Es bleibt zu zeigen, dass diese tatsächlich Äquivalenzrelationen sind. Für $i \in \{1, 2\}$ sind die Relationen nach der Definition über die Determinante und da $0 \in I_i$ gilt, reflexiv und symmetrisch. Da I_i ein Ideal ist, ist die Relation \parallel_i invariant unter $GL_2(R)$. Daher kann man o.B.d.A. bei der Überprüfung der Transitivität einen der Punkte durch ∞ ersetzen. Damit gilt

$$\begin{aligned} R(a, b) \parallel_i R(1, 0) \quad \wedge \quad R(1, 0) \parallel_i R(c, d) &\Leftrightarrow \\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -b \in I_i \quad \wedge \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = d \in I_i &\Rightarrow \\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb \in I_i, & \end{aligned}$$

da I_i ein Ideal in R ist. Damit ist die Transitivität nachgewiesen. \square

Somit haben wir bereits die erste Bedingung an eine Minkowskiebene gezeigt. Die Anforderung an die Residuen ist nun nur noch eine einfache Folgerung.

Lemma 5.4.4

Sei $\Sigma := \Sigma(K \times K, K)$. Dann ist das Residuum Σ_X in einem Punkt $X \in \mathbb{P}(K \times K)$ isomorph zu der partiellen affinen Ebene, welche durch Herausnahme der zu $K \times \{0\}$ und $\{0\} \times K$ parallelen Geraden aus der affinen Ebene $\mathbb{A}(K, K \times K)$ entsteht.

Beweis:

Die Behauptung folgt analog zum Beweis des Lemmas 5.3.3. \square

Nun haben wir alle Voraussetzungen an eine Minkowskiebene nachgeprüft und fassen die Ergebnisse noch einmal im folgenden Satz zusammen.

Satz 5.4.5

Sei $R = K \times K$, d.h. R ist vom Typ (3) in Satz 5.1.3. Dann ist die Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$ eine Minkowskiebene.

Betrachten wir auch hier noch die affinen Ketten, welche aufgrund der Struktur des Rings $K \times K$ einfache Formen annehmen.

Satz 5.4.6

Die affinen Ketten der affinen Minkowskiebene $\Sigma_{\text{aff}}(K, K \times K)$ bestehen aus Hyperbeln mit Asymptoten parallel zur x - und y -Achse und Geraden, welche nicht parallel zur x - bzw. y -Achse sind (vgl. Abbildung 5.6).

Beweis:

Analog zum Beweis von Satz 5.3.5 berechnen wir auch hier die Elemente $(at + b)^{-1}$ für

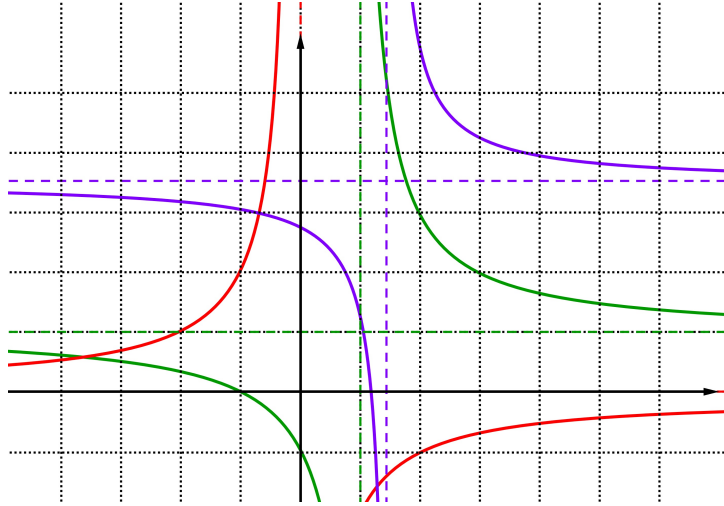


Abbildung 5.6: Affine Minkowskiebene

$a = (a_1, a_2) \in (K^2)^*$, $b = (b_1, b_2) \in K^2$ und $t \in K$, sodass auch $at + b$ invertierbar ist. Daher gilt $a_1, a_2, a_1t + b_1$ und $a_2t + b_2 \neq 0$ und man berechnet

$$\begin{aligned} (at + b)^{-1} &= \left(\frac{1}{a_1t + b_1}, \frac{1}{a_2t + b_2} \right) \\ &= \left(x, \frac{a_1x}{a_2 + (b_2a_1 - a_2b_1)x} \right) \end{aligned}$$

für $x = (a_1t + b_1)^{-1} \in K$. Damit entspricht eine affine Kette durch 0 dem Funktionsgraphen $y = \frac{ux}{v+wx}$ mit $u, v \in K \setminus \{0\}$ und $w \in K$. Dabei handelt es sich, wie zu zeigen war, um Hyperbeln mit Asymptoten parallel zur x - und y -Achse bzw. Geraden weder parallel zur x - noch zur y -Achse, alle durch den Nullpunkt. \square

Beispiel 5.4.7

Sei \mathfrak{H} ein einschaliges Hyperboloid im dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}_3(R)$ und $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ die Menge aller Schnitte von \mathfrak{H} mit Ebenen, die mindestens drei Punkte, aber keine Gerade von \mathfrak{H} enthalten. Die Inzidenzstruktur $(\mathfrak{H}, \mathcal{C}(\mathfrak{H}))$ ist ein Kettenraum (für den Beweis siehe Kapitel 7). Wir wollen zeigen, dass es sich um eine Minkowskiebene handelt.

Es sei zunächst festgehalten, dass ein einschaliges Hyperboloid zwei Scharen von Erzeugenden \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 trägt. Diese liegen derart, dass sich zwei Erzeugende derselben Schar niemals und zwei Erzeugende aus unterschiedlichen Scharen genau einmal schneiden. Jeder Punkt des Hyperboloids tritt als Schnitt zweier Erzeugenden auf. Ansonst enthält \mathfrak{H} keine weiteren Geraden.

Wir verwenden diese zwei Scharen von Erzeugenden zur Festlegung von zwei Äquivalenzrelationen auf dem Hyperboloid. Für X und $Y \in \mathfrak{H}$ und $i \in \{1, 2\}$ sei

$$X \parallel_i Y \Leftrightarrow \text{Es gibt eine Erzeugende } e_i \text{ aus der Schar } \mathcal{E}_i \text{ mit } X \in e_i \text{ und } Y \in e_i. \quad (5.14)$$

Da sich zwei Erzeugende aus derselben Schar niemals schneiden, handelt es sich tatsächlich um zwei Äquivalenzrelationen.

Außerdem folgt aus der Definition der Distanz über die Ketten, dass zwei verschiedene Punkte X und $Y \in \mathfrak{H}$ genau dann nicht distant sind, wenn sie auf einer gemeinsamen Erzeugenden liegen. Demnach ist die Relation $\not\sim$ die Vereinigung der beiden Äquivalenzrelationen \parallel_1 und \parallel_2 .

Um das Residuum in einem Punkt $X \in \mathcal{H}$ zu untersuchen verwenden wir eine stereographische Projektion aus X auf eine Ebene E parallel zur Tangentialebene. Diese wird aufgespannt von den beiden Erzeugenden e_1 und e_2 , die den Punkt X enthalten.

Das Bild einer Kette durch X unter der stereographischen Projektion stimmt mit dem Schnitt der die Kette definierenden Ebene und E überein und ist somit eine Gerade. Umgekehrt ist auch jede Gerade g aus E , die nicht parallel zu e_1 oder e_2 ist, das Bild einer Kette durch X . Diese entsteht als Schnitt der zulässigen Ebene $g \oplus X$ mit dem Hyperboloid \mathcal{H} .

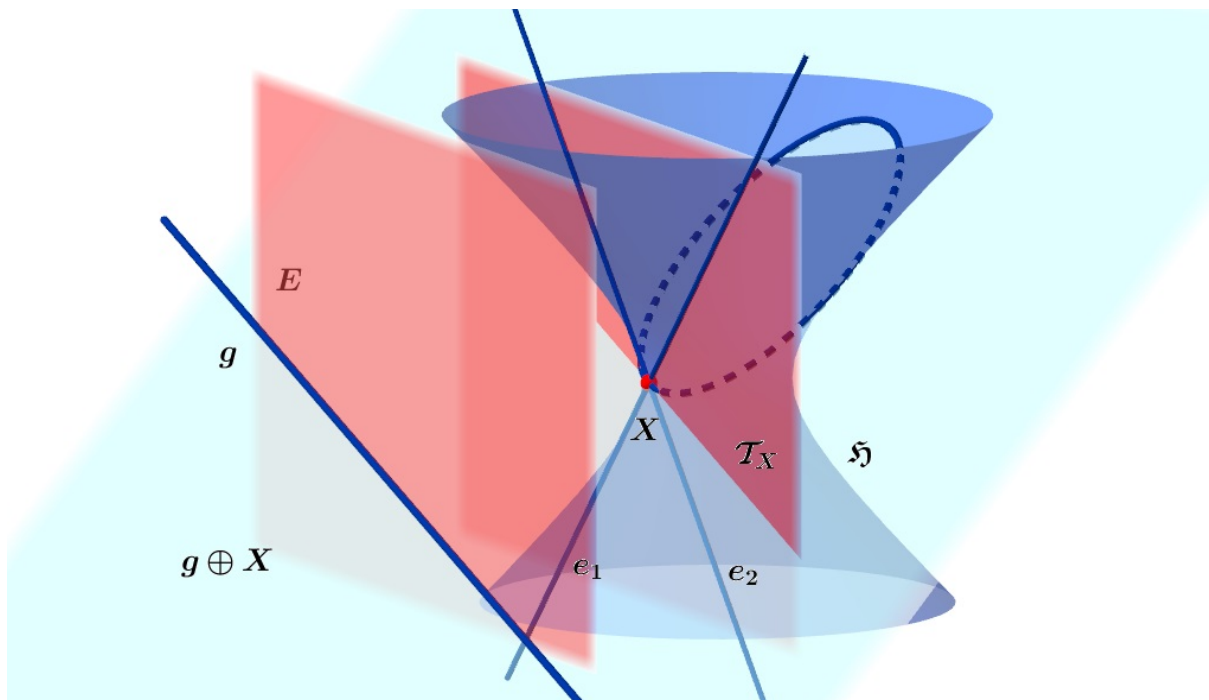


Abbildung 5.7: Stereographische Projektion des Hyperboloids

Somit entstehen die Residuumsgeraden in X (identifiziert mit ihrem Bild unter der stereographischen Projektion) aus der affinen Ebene E durch Herausheben der beiden Parallelscharen von Geraden parallel zu e_1 und e_2 . Damit ist $(\mathfrak{H}, \mathcal{C}(\mathfrak{H}))$ eine Minkowskiebene.

Kapitel 6

Unterräume von Kettenräumen

Hat man eine geometrische Struktur, interessiert man sich auch für Teilstrukturen dieser. Daher werden wir uns in diesem Kapitel mit Unterräumen von Kettenräumen und der Frage, wie man diese konstruieren kann, beschäftigen. Der erste Abschnitt gibt zuerst einmal die formale Definition eines Unterraums. Anschließend werden algebraische Unterstrukturen definiert, die für Kettengeometrien Unterräume liefern.

Sei im folgenden Kapitel R eine Algebra über einem Körper K . Man kann R als Vektorraum über K auffassen, wie wir es auch schon im vorherigen Kapitel getan haben. Nur ist jetzt die Dimension nicht auf 2 beschränkt. Wir werden sehr häufig algebraischen Teilstrukturen von R als Teilstrukturen des Vektorraums über K definieren.

6.1 Unterräume und Unteralgebren

Beginnen wir zunächst einmal mit der formalen Definition eines Unterraums eines Kettenraums. Diese ist wieder von rein geometrischer Form. Wie man schon ahnen wird, muss ein wichtiger Punkt bei der Definition eines Unterraums darin bestehen, dass verbindende Ketten als Ganzes wieder im Unterraum enthalten sind. Außerdem würde man sich natürlich wünschen, dass der Unterraum wieder ein Kettenraum ist.

Definition 6.1.1

Sei $\Sigma := (\mathbb{P}, \mathcal{C})$ ein Kettenraum und \mathbb{S} eine Teilmenge der Punktmenge. Gilt nun, dass

- \mathbb{S} mindestens drei paarweise distante Punkte enthält,
- für je drei paarweise distante Punkte X, Y und $Z \in \mathbb{S}$, die eindeutige Kette $C := (XYZ)$ ganz in \mathbb{S} enthalten ist – die Menge all dieser Ketten bezeichnet man mit $\mathcal{C}(\mathbb{S})$ – und
- die Inzidenzstruktur $(\mathbb{S}, \mathcal{C}(\mathbb{S}))$ ebenfalls einen Kettenraum bildet,

dann bezeichnet man $(\mathbb{S}, \mathcal{C}(\mathbb{S}))$ als einen *Unterraum* des Kettenraums Σ . Erfüllt die Teilmenge \mathbb{S} nur den zweiten Punkt, dann spricht man von einem *schwachen Unterraum*.

Bemerkung 6.1.2

Der Begriff schwacher Unterraum kommt nicht von ungefähr. Man kann sich leicht überlegen, dass eine wie in Definition 6.1.1 definierte Teilstruktur eines Kettenraums,

die den dort erwähnten zweiten Punkt erfüllt, bereits die Eigenschaften (K1), (K2) und (K3) vom ursprünglichen Kettenraum erbt und damit schon ein schwacher Kettenraum i.e.S. ist.

Triviale Beispiele für Unterräume eines Kettenraums sind der gesamte Kettenraum bzw. eine einzelne Kette. Um im Fall einer Kettengeometrie weitere Unterräume zu finden, definieren wir zunächst eine algebraische Teilstruktur, die schlussendlich Unterräume liefern wird.

Definition 6.1.3

Sei R eine Algebra über einem Körper K , dann kann man R als Vektorraum über K auffassen. Ist S ein Untervektorraum von R und gilt zusätzlich, dass

- $1 \in S$,
- S unter der Multiplikation abgeschlossen ist und
- S für die Elemente aus $S \cap R^*$ unter der Inversenbildung abgeschlossen ist, was so viel heißt wie $S \cap R^* = S^*$.

Dann nennt man S eine *Unteralgebra* von R .

Für eine beliebige Teilmenge A von R bezeichnet die *von A erzeugte Unteralgebra* die kleinste Unteralgebra, welche A enthält.

Bemerkung 6.1.4

In der Literatur wird die dritte Eigenschaft für eine Unteralgebra nicht verlangt. Es ist in diesem Zusammenhang allerdings zweckmäßig, weil andernfalls die von R auf S induzierte Distanzrelation im Allgemeinen nicht mit der Distanzrelation auf S übereinstimmt (vgl. dazu Satz 3.5.4).

Satz 6.1.5

Sei R eine Algebra über einem Körper K und S eine Unteralgebra von R . In diesem Fall ist die Einbettung der projektiven Gerade über S in die projektive Gerade über R

$$\iota : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(R) : S(a, b) \mapsto R(a, b) \quad (6.1)$$

ein injektiver Morphismus der Kettenräume $\Sigma(K, S)$ und $\Sigma(K, R)$. Das Bild $\Sigma(K, S)^\iota$ ist ein zu $\Sigma(K, S)$ isomorpher Unterraum des Kettenraums $\Sigma(K, R)$.

Beweis:

Da S eine Unteralgebra von R ist, folgt nach der dritten Eigenschaft aus Definition 6.1.3 und Satz 3.5.4, dass

$$\iota : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(S)^\iota$$

ein Isomorphismus von Distanzräumen ist und damit insbesondere die Distanzrelation Δ_S mit der Distanzrelation induziert von $\mathbb{P}(R)$ übereinstimmt.

Jede Kette aus dem Kettenraum $\Sigma(K, S)$ hat die Form

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(S).$$

Nun ist $\text{GL}_2(S)$ allerdings eine Untergruppe von $\text{GL}_2(R)$, wodurch ι Ketten aus $\Sigma(K, S)$ auf Ketten von $\Sigma(K, R)$ abbildet. Damit ist ι zusätzlich ein Morphismus von Inzidenzstrukturen und somit insgesamt ein injektiver Morphismus von Kettenräumen.

Um zu zeigen, dass $\iota : \mathbb{P}(S) \rightarrow \mathbb{P}(S)^\iota$ ein Isomorphismus von Kettenräumen ist, bleibt noch zu zeigen, dass ι^{-1} ebenfalls Ketten von $\Sigma(K, S)^\iota$ auf Ketten von $\Sigma(K, S)$ abbildet. Dies ist allerdings dadurch gegeben, dass eine Kette in beiden betrachteten Kettenräumen durch drei paarweise distante Punkte eindeutig bestimmt ist, und ι^{-1} wie eingangs gezeigt die Distanz erhält. \square

Tatsächlich ist unter den Gegebenheiten von Satz 6.1.5 der Kettenraum $\Sigma(K, S)$ eigentlich erst vermöge des Isomorphismuses ι ein Unterraum des Kettenraums $\Sigma(K, R)$. Wir werden im Folgenden $\Sigma(K, S)$ aber mit seinem Bild unter ι identifizieren und davon ausgehen, dass dieser schon der Unterraum von $\Sigma(K, R)$ ist.

Beispiele 6.1.6

Betrachtet man die Kettengeometrie über der Algebra (\mathbb{R}, \mathbb{H}) , wobei \mathbb{H} den Körper der Hamiltonschen Quaternionen bezeichnet, so ist diese nach Satz 3.1.5 ein Möbiusraum. Die Algebra \mathbb{C} ist eine Unter algebra von \mathbb{H} . Demnach kann man die reelle Möbiusebene $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ als Unterraum von $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ auffassen.

6.2 Jordan-Systeme

Im vorherigen Abschnitt haben wir sehr starke Voraussetzungen an einen Untervektorraum S von R gehabt (vgl. Definition 6.1.3), um die projektive Gerade über S im herkömmlichen Sinne – wie in Kapitel 3 – definieren zu können. Wie sich herausstellt, kommt man mit weniger Voraussetzungen aus, um eine Algebra und den passenden Unterraum (vgl. Abschnitt 6.3) zu konstruieren.

Definition 6.2.1

Sei R eine Algebra über einem Körper K . Für ein Element $x \in R$ bezeichne

$$e(x) := \{k \in K \mid x + k \in R^\star\}. \quad (6.2)$$

Fasst man wiederum R als Vektorraum über K auf und sei J ein Untervektorraum des Vektorraums R mit $1 \in J$. Dann bezeichnet man J als

- *Jordan-System* in R , wenn J für die Elemente aus $J \cap R^\star$ unter der Inversenbildung abgeschlossen ist, was so viel heißt wie $J^\star = J \cap R^\star$,
- *Jordan-abgeschlossen* in R , wenn für je zwei Elemente a und $b \in J$, auch $aba \in J$ gilt bzw.

- *stark* in R , wenn für alle $x \in J$ gilt

$$|e(x)| > |K \setminus e(x)|. \quad (6.3)$$

Bemerkung 6.2.2

Zur Motivation der Menge $e(x)$ für $x \in R$ kann man die Abbildung, die jedes Ringelement von rechts mit x multipliziert, betrachten,

$$\mu_x : R \rightarrow R : y \mapsto yx. \quad (6.4)$$

Wie man leicht einsieht, ist diese eine K -lineare Abbildung. Ist R eine endlichdimensionale Algebra über K , so ist μ_x zusätzlich beschränkt. Die Menge $e(x)$ entspricht dann der *Resolventenmenge* und $K \setminus e(x)$ dem *Spektrum* von μ_x (vgl. dazu [16], S. 129). Ein Untervektorraum J ist also *stark* im Sinne von Definition 6.2.1, wenn die Resolventenmenge von μ_x größer ist als das Spektrum für alle $x \in R$.

Wir wollen als nächstes einige Eigenschaften und Zusammenhänge von Jordan-System, Jordan-abgeschlossenen und starken Mengen zeigen. Dabei beginnen wir damit, dass aus der Definition einer Jordan-abgeschlossenen Menge bereits die Abgeschlossenheit unter weiteren Operationen folgt. Unter anderem enthält eine Jordan-abgeschlossene Menge die folgende Menge.

Lemma 6.2.3

Sei R eine Algebra über einem Körper K und a ein Element aus R . Der von 1 und a erzeugte Unterring von R hat die Gestalt

$$K[a] := \left\{ \sum_{i=0}^m k_i a^i \mid m \in \mathbb{N}, k_i \in K \right\}. \quad (6.5)$$

Dieser Unterring ist selbst wieder eine Algebra über dem Körper K .

Beweis:

Einerseits ist $K[a]$ ein Unterring von R , der die Elemente 1 und a enthält. Andererseits muss jeder Unterring der 1 und a enthält, auch die Menge $K[a]$ enthalten. Daher ist $K[a]$ der kleinste Unterring der 1 und a enthält und somit der von 1 und a erzeugte Unterring.

$K[a]$ enthält den Körper K als Unterring und da K im Zentrum von R enthalten ist, ist K natürlich auch im Zentrum von $K[a]$ enthalten. \square

Lemma 6.2.4

Sei J Jordan-abgeschlossen. Dann gilt zusätzlich, dass

- J abgeschlossen ist unter der Bildung von Quadraten,
- für zwei Elemente a und $b \in J$ auch $ab + ba$ in J enthalten ist und
- für jedes Element $a \in J$ auch $K[a]$ in J enthalten ist.

Beweis:

Für ein Element $a \in J$ ist nach der Definition von Jordan-abgeschlossen auch

$$a1a = a^2 \in J,$$

womit J unter der Bildung von Quadraten abgeschlossen ist. Aus dieser Eigenschaft, kombiniert mit der Vektorraumeigenschaft, ergibt sich auch direkt der zweite Punkt:

$$ab + ba = (a + b)^2 - a^2 - b^2 \in J.$$

Da J ein Vektorraum über dem Körper K ist, genügt für den dritten Punkt zu zeigen, dass für ein $a \in J$ auch $a^n \in J$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dazu verwendet man vollständige Induktion. Für $n = 0, 1$ und 2 gilt dies nach Voraussetzung bzw. wurde dies schon gezeigt. Für $n > 2$ unterscheidet man die Fälle, ob n gerade oder ungerade ist. Man erhält

$$\begin{aligned} m := \frac{n-2}{2} \quad a^n &= a^m a^2 a^m \in J \quad \text{für } n \text{ gerade} \\ m := \frac{n-1}{2} \quad a^n &= a^m a a^m \in J \quad \text{für } n \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

□

Abschließend wollen wir noch zeigen, dass ein starkes Jordan-System in einer Algebra über einem Körper bereits Jordan-abgeschlossen ist und damit neben der definierenden Eigenschaft von Jordan-abgeschlossen auch die gerade in Lemma 6.2.4 gezeigten Eigenschaften besitzt. Dazu müssen wir zunächst noch starke Untervektorräume näher untersuchen.

Lemma 6.2.5

Sei R eine K -Algebra und J stark in R . Definiert man für $x \in J$

$$e(x)^{-1} := \{k^{-1} \mid k \in e(x)\}, \tag{6.6}$$

dann gilt

- $e(x) \cap e(y) \neq \emptyset$ für $x, y \in J$,
- $0 \notin e(x)$, wenn $x \notin J^*$ und
- $e(x)^{-1} \cap e(y) \neq \emptyset$, wenn $x \notin J^*$ und $y \in J$.

Beweis:

Um den ersten Punkt zu beweisen, nehmen wir an, es würde $e(x) \cap e(y) = \emptyset$ für x und $y \in J$ gelten und führen dies zu einem Widerspruch. In diesem Fall folgt nämlich $e(x) \subseteq K \setminus e(y)$ und umgekehrt $e(y) \subseteq K \setminus e(x)$. Da J stark in R ist, folgt daraus aber der Widerspruch

$$|e(y)| \leq |K \setminus e(x)| < |e(x)| \leq |K \setminus e(y)| < |e(y)|.$$

Der zweite Punkt folgt direkt aus der Definition von $e(x)$ in (6.2) und den dritten erhält man analog zum ersten, da $|e(x)| = |e(x)^{-1}|$ gilt. □

Das folgende Lemma ist ein eher praktisches Werkzeug, welches eine Aussage über die Invertierbarkeit von Elementen tätigt.

Lemma 6.2.6

Seien R ein Ring und die Elemente a und b Einheiten in R , sodass auch $a - b$ eine Einheit ist. Dann ist auch $a^{-1} - b^{-1}$ invertierbar und man berechnet das Inverse als

$$(a^{-1} - b^{-1})^{-1} = a - a(a - b)^{-1}a. \tag{6.7}$$

Dieses Lemma wird als *Hua-Identität* bezeichnet.

Beweis:

Unter der Verwendung von

$$a^{-1} - b^{-1} = (a^{-1}b - 1)b^{-1} = a^{-1}(b - a)b^{-1},$$

rechnet man (6.7) leicht nach:

$$\begin{aligned} (a - a(a - b)^{-1}a)(a^{-1} - b^{-1}) &= (a - a(a - b)^{-1}a)(a^{-1}(b - a)b^{-1}) \\ &= (b - a)b^{-1} - a(a - b)^{-1}(b - a)b^{-1} \\ &= 1 - ab^{-1} + ab^{-1} = 1. \end{aligned}$$

□

Damit können wir nun folgenden Satz beweisen.

Satz 6.2.7

Sei R eine K -Algebra und J ein starkes Jordan-System in R . Dann ist J auch Jordan-abgeschlossen in R .

Beweis:

Wir führen diesen Beweis in mehreren Schritten. Eine wesentliche Argumentation, die häufiger vorkommen wird, ist dabei Lemma 6.2.5, wonach für je zwei Elemente x und $y \in J$ gilt $e(x) \cap e(y) \neq \emptyset$. Außerdem gilt für $x \in J$ weiters

$$e(x) = \{k \in K \mid x + k \in J^*\},$$

da J ein Jordan-System ist (vgl. Definition 6.2.1).

- (1) Zuerst zeigt man, dass für $a \in J^*$ auch $a^2 \in J$ enthalten ist. Dazu wählt man ein Element $k \in e(a) \cap e(0)$, d.h. $k \in K^*$ und $a + k \in J^*$. Aus der Hua-Identität aus Lemma 6.2.6 erhält man so

$$a + k^{-1}a^2 = a - a(-k)^{-1}a = (a^{-1} - (k + a)^{-1})^{-1} =: c \in J^*,$$

womit $a^2 = k(c - a) \in J$ gilt.

- (2) Als nächsts zeigt man eine abgeschwächtere Form der Charakterisierung von Jordan-abgeschlossen. Für $a \in J^*$ und $b \in J$ ist $aba \in J$. Dazu wählt man diesmal ein Element $k \in e(b) \cap e(b - a^{-1})$, d.h. $c := b + k \in J^*$ und $c - a^{-1} \in J^*$. Wiederum unter Verwendung der Hua-Identität erhält man

$$a - aca = (a^{-1} - (a - c^{-1})^{-1})^{-1} \in J.$$

Zusammen mit $a^2 \in J$ aus (1) ergibt sich

$$aba + ka^2 = aba + aka = a(b + k)a = aca \in J,$$

woraus $aba \in J$ folgt.

- (3) Um die Jordan-Abgeschlossenheit zeigen zu können, benötigen wir noch, dass für a und $b \in J$ auch $ab + ba$ in J enthalten ist. Dies zeigen wir zunächst für a und $b \in J^*$. Wählt man $k \in e(a + b)$, d.h. $a + b + k \in J^*$, dann gilt nach (1)

$$\begin{aligned} (a + b + k)^2 &= (a + b)^2 + 2k(a + b) + k^2 \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 + 2k(a + b) + k^2 \in J, \end{aligned}$$

womit auch $ab + ba \in J$ gilt.

Für a und $b \in J$ wählt man nun $k \in e(a)$ und $l \in e(b)$, d.h. $a + k$ und $b + l \in J^*$. Nach dem eben gezeigten erhält man somit

$$(a + k)(b + l) + (b + l)(a + k) = ab + ba + 2la + 2kb + 2kl \in J,$$

woraus auch $ab + ba \in J$ folgt.

- (4) Schlussendlich erhält man $aba \in J$ für a und $b \in J$, indem man ein $k \in e(a)$ wählt, d.h. $a + k \in J^*$. Nach (2) ist

$$(a + k)b(a + k) = aba + k(ab + ba) + k^2b \in J.$$

Weiters ist nach (3) aber $ab + ba \in J$ und somit auch $aba \in J$. Daher ist J Jordan-abgeschlossen in R . \square

6.3 Kettengeometrien über Jordan-Systemen

Nun wollen wir Kettengeometrien über Jordan-Systemen in einer K -Algebra R betrachten. Das Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass wir so einen Unterraum der Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$ konstruieren können. Beginnen wir also mit der Definition der Punktmenge, der projektiven Gerade über einem Jordan-System.

Definition 6.3.1

Sei R eine Algebra über einem Körper K und J ein starkes Jordan-System in R . Dann bezeichnet man die Menge

$$\mathbb{P}(J) := \{R(1 + ab, a) \mid a, b \in J\} \quad (6.8)$$

als *projektive Gerade über J* .

Tatsächlich kann man diese Darstellung noch verfeinern bzw. die beiden Koordinaten vertauschen, wie folgendes Lemma zeigt.

Lemma 6.3.2

Sei R eine K -Algebra und J ein starkes Jordan-System in R . Dann gilt für die projektive Gerade über J

$$\mathbb{P}(J) = \{R(1 + ab, a) \mid a \in J, b \in J^*\} \quad (6.9)$$

$$= \{R(c, 1 + cd) \mid c, d \in J\}. \quad (6.10)$$

Beweis:

Sei ein Element $R(1 + ab, a)$ mit a und $b \in J$ der projektiven Gerade über J gegeben. Analog wie im Beweis von Satz 6.2.7 ergibt sich auch hier aus der Eigenschaft des Jordan-Systems für $x \in J$

$$e(x) = \{k \in K \mid x + k \in J^*\}.$$

Für die Darstellung (6.9) ist im Fall, dass b bereits eine Einheit ist, nichts mehr zu zeigen. Andernfalls existiert nach Lemma 6.2.5 ein $k^{-1} \in e(-b)^{-1} \cap e(a)$, d.h. $k - b \in J^*$ und $k^{-1} + a \in J^*$. Damit ist aber auch $k(k^{-1} + a) = 1 + ak \in J^*$. Setzt man nun

$$x := 1 + ab, \quad a' := (1 + ak)^{-1}a, \quad x' := (1 + ak)^{-1}x \text{ und } b' := b - k.$$

Dann gilt $b' \in J^*$ und da nach Satz 6.2.7 das starke Jordan-System J auch Jordan-abgeschlossen ist, auch folgendes

$$\begin{aligned} a' &= (1 + ak)^{-1}a(1 + ak)(1 + ak)^{-1} \\ &= (1 + ak)^{-1}(a + a^2k)(1 + ak)^{-1} \in J. \end{aligned}$$

Schließlich berechnet man für den Punkt der projektiven Gerade

$$\begin{aligned} x - ab' &= 1 + ab - ab + ak = 1 + ak \\ x' - a'b' &= (1 + ak)^{-1}(x - ab') = 1 \\ \Rightarrow R(1 + a'b', a') &= R(x', a') = R(x, a) = R(1 + ab, a) \end{aligned}$$

mit $a' \in J$ und $b' \in J^*$ wie in (6.10) gefordert.

Um (6.10) zu zeigen, können wir nun schon o.B.d.A. für den Punkt $R(1 + ab, a)$ voraussetzen, dass $a \in J$ und $b \in J^*$ ist. Setzt man nun $d := b^{-1} \in J^*$ und $c := -b - bab \in J$, da J wie zuvor schon argumentiert Jordan-abgeschlossen ist, dann erhält man

$$\begin{aligned} R(1 + ab, a) &= R(-b(1 + ab), -ba) \\ &= R(c, 1 - (b + bab)b^{-1}) \\ &= R(c, 1 + cd), \end{aligned}$$

womit jeder Punkt aus $\mathbb{P}(J)$ von der Form (6.10) ist. Die Umkehrung wird durch dieselbe Rechnung gezeigt, wenn man nur von unten startet. \square

Die Ketten der Kettengeometrie über der Algebra (K, R) wurden definiert als Bahnen einer „Standardkette“ unter der Gruppe $\text{PGL}_2(R)$. Auch im Fall der Kettengeometrie über einem Jordan-System spielt eine Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{P}(J), \Delta)$ eine große Rolle bei der Definition der Ketten der Inzidenzstruktur.

Definition 6.3.3

Sei R eine Algebra über einem Körper K und J ein starkes Jordan-System in R . Die Untergruppe von $\text{PGL}_2(R)$, welche erzeugt wird von den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

für $c \in J$, wird mit $\Delta(J)$ bezeichnet.

Lemma 6.3.4

Sei R eine Algebra über einem Körper K und J ein starkes Jordan-System in R . Die Untergruppe $\Delta(J)$ von $\text{PGL}_2(R)$ lässt die projektive Gerade über J invariant. In diesem Sinne lässt sich $\Delta(J)$ als Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{P}(J), \Delta)$ auffassen.

Beweis:

Berechnet man die Bilder eines Punktes $R(1 + ab, a)$ für a und $b \in J$ der projektiven Gerade über J unter einer Abbildung induziert von einer Matrix der Form (6.11),

$$\begin{aligned} R(1 + ab, a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} &= R(1 + a(b + c), a) \\ R(1 + ab, a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= R(a, 1 + ab), \end{aligned}$$

dann erhält man nach Lemma 6.3.2 wieder Punkte von $\mathbb{P}(J)$. Klarerweise lässt dann jede Abbildung induziert von einer Abfolge solcher Matrizen die projektive Gerade $\mathbb{P}(J)$ invariant. \square

Außerdem erfüllt auch diese Gruppe eine Transitivitätseigenschaft auf der Punktmenge $\mathbb{P}(J)$.

Satz 6.3.5

Sei R eine Algebra über einem Körper K und J ein starkes Jordan-System in R . Dann operiert die Gruppe $\Delta(J)$ 2- Δ -transitiv auf der projektiven Gerade über J .

Beweis:

Wir zeigen wie schon häufig, dass man zwei distante Punkte X und Y mit Hilfe einer Abbildung aus $\Delta(J)$ in die speziellen Punkte $R(1, 0)$ und $R(0, 1)$ aus $\mathbb{P}(J)$ überführen

kann. Für zwei beliebige Paare distanter Punkte, kann man die beiden so konstruierten Abbildungen dann passend zusammenhängen und erhält eine Lösungsabbildung.

Sei also $X = R(1 + ab, a)$ für a und $b \in J$. Dann ist $X = R(0, 1)^\varphi$, wobei φ die Abbildung aus $\Delta(J)$ ist, welche induziert wird von der Matrix

$$\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 + ab & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Gruppe $\Delta(J)$ nach Lemma 6.3.4 eine Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{P}(J), \Delta)$ ist, ist der Punkt Y somit φ -Bild eines zu $R(0, 1)$ distanten Punktes in $\mathbb{P}(J)$. Mit Lemma 6.3.2 gilt $Y = Z^\varphi$ für

$$Z = R(c, 1 + cd) = R(1, x) \quad \text{für } c \in J^* \text{ und } d \in J$$

mit $x := c^{-1} + d \in J$.

Nun findet man aber eine Abbildung $\psi \in \Delta(J)$ induziert durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

welche $Z = R(1, 0)^\psi$ und $R(0, 1)^\psi = R(0, 1)$ leistet. Zusammengefasst führt $(\psi\varphi)^{-1}$ die Punkte X und Y in $R(0, 1)$ und $R(1, 0)$ über. \square

Damit kommen wir nun zur Definition der Kettengeometrie über einem Jordan-System, welche doch ein wenig von der Definition der Kettengeometrie in Kapitel 4 abweicht (vgl. Definition 4.1.2).

Definition 6.3.6

Sei J ein starkes Jordan-System in der K -Algebra R . Betrachte für $j \in J^*$ die Mengen

$$C_j := \{R(sj, t) \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K)\} \quad \text{und} \quad (6.12)$$

$$\mathcal{C}(K, R, J) := \{(C_j)^\delta \mid j \in J^*, \delta \in \Delta(J)\}. \quad (6.13)$$

Die Inzidenzstruktur

$$\Sigma(K, R, J) := (\mathbb{P}(J), \mathcal{C}(K, R, J)) \quad (6.14)$$

heißt *Kettengeometrie über der Algebra (K, R, J)* .

Bevor wir zeigen, dass es sich bei einer Kettengeometrie über der Algebra (K, R, J) tatsächlich um einen Unterraum der Kettengeometrie über der Algebra (K, R) handelt, wollen wir zuerst untersuchen, wie die Ketten zusammenhängen.

Satz 6.3.7

Sei J ein starkes Jordan-System in der K -Algebra R . Für je drei paarweise distante Punkte X, Y und $Z \in \mathbb{P}(J)$, liegt die eindeutige Kette $C = (XYZ) \in \mathcal{C}(K, R)$, die die drei Punkte verbindet, ganz in $\mathbb{P}(J)$.

Jede solche Kette C hat die Gestalt

$$C = (C_j)^\delta \quad \text{für } \delta \in \Delta(J) \text{ und } j \in J^*. \quad (6.15)$$

Umgekehrt ist für jede Abbildung $\delta \in \Delta(J)$ und jedes Element $j \in J^*$ die Menge $(C_j)^\delta$ in der projektiven Gerade über J enthalten.

Beweis:

Seien X, Y und Z drei paarweise distante Punkte der projektiven Gerade über J . Nach Satz 6.3.5 existiert eine Abbildung $\delta \in \Delta(J)$, welche $X^\delta = R(1, 0)$ und $Y^\delta = R(0, 1)$ leistet. Nach Lemma 6.3.4 ist Z^δ ein zu $R(1, 0)$ und $R(0, 1)$ distantes Element von $\mathbb{P}(J)$. Daher gilt

$$Z^\delta = R(j, 1) \quad \text{für } j \in J^*.$$

Zusammen erhält man, dass die drei paarweise distanten Punkte X^δ, Y^δ und Z^δ auf der Kette

$$C_j := \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \{R(sj, t) \mid K(s, t) \in \mathbb{P}(K)\} \in \mathcal{C}(K, R)$$

liegen. Durch eine einfache Umformung sieht man aber, dass

$$C_j = R(1, 0) \cup \{R(sj, 1) \mid s \in K\}$$

nach Lemma 6.3.2 in der projektiven Gerade über J enthalten ist. Die eindeutige Kette durch die Punkte X, Y und Z ist daher $(C_j)^{\delta^{-1}}$, welche für $\delta \in \Delta(J)$ ebenfalls ganz in $\mathbb{P}(J)$ enthalten ist. \square

Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir nun den Satz beweisen, auf den wir das gesamte Kapitel hingearbeitet haben.

Satz 6.3.8

Sei J ein starkes Jordan-System in der K -Algebra R . Betrachte die Inzidenzstruktur $\Sigma' := (\mathbb{P}(J), \mathcal{C}(K, R, J))$. Dann ist Σ' ein Unterraum des Kettenraums $\Sigma := \Sigma(K, R)$.

Beweis:

J enthält als Jordan-System die Elemente 0 und 1, womit die drei Punkte $R(1, 0), R(0, 1)$ und $R(1, 1)$ Element der projektiven Gerade über J sind. Diese enthält daher mindestens drei paarweise distante Punkte.

Satz 6.3.7 zeigt das zweite Kriterium eines Unterraums, wonach mit drei paarweise distanten Punkten, deren eindeutige Verbindungskette, ganz in $\mathbb{P}(J)$ enthalten ist.

Damit bleibt nur noch zu zeigen, dass es sich bei der Inzidenzstruktur Σ' tatsächlich um einen Kettenraum handelt. Nach Bemerkung 6.1.2 müssen wir dazu auch nur noch das Axiom (K4) nachprüfen, welches besagt, dass das Residuum Σ'_X eines jeden Punktes $X \in \mathbb{P}(J)$ ein partieller affiner Raum ist. Nach der Definition von Σ' sind die Elemente der Gruppe $\Delta(J)$ Automorphismen der Inzidenzstruktur Σ' . Außerdem operiert $\Delta(J)$

nach Satz 6.3.5 transitiv auf $\mathbb{P}(J)$. Daher können wir o.B.d.A. das Residuum im Punkt ∞ untersuchen.

Dieses ist die Inzidenzstruktur $\Sigma_\infty = (\Delta'(\infty), \mathcal{C}'_\infty)$ mit

$$\Delta'(\infty) = \Delta(\infty) \cap \mathbb{P}(J) = \{R(x, 1) \mid x \in J\}.$$

Analog zu (4.7) kann man auch hier $\Delta'(\infty)$ mit J identifizieren. In diesem Fall erhält man aus Satz 6.3.7 und Satz 4.2.13

$$\begin{aligned} \mathcal{C}'_\infty &= \{C \setminus \{\infty\} \mid \infty \in C \in \mathcal{C}(K, R, J)\} \\ &= \{C \setminus \{\infty\} \in \mathcal{C}_\infty \mid C \subseteq \mathbb{P}(J)\} \\ &= \{a + Kb \mid a \in J, b \in J^*\}. \end{aligned}$$

Damit ist Σ'_∞ ein partieller affiner Raum in $\mathbb{A}(K, J)$ und die Inzidenzstruktur Σ' somit ein Kettenraum. \square

Kapitel 7

Kettenräume auf Quadriken

Zum Abschluss wollen wir noch einmal zur Geometrie zurückkehren und uns mit Kettenräumen auf Quadriken beschäftigen. Wir haben bereits in Beispiel 5.4.7 einen Kettenraum über einem Hyperboloid betrachtet. Als Ketten wurden spezielle ebene Schnitte der Quadrik gewählt. Diese Idee werden wir im folgenden Kapitel auf allgemeine Quadriken übertragen. Der Beweis, dass es sich tatsächlich um einen Kettenraum handelt, wurde in dem Beispiel unterschlagen. Dieser wird direkt aus dem allgemeinen Resultat folgen, welches das Hauptergebnis des zweiten Abschnitts ist. Schließlich wollen wir im dritten Abschnitt zumindest für Kettengeometrien über speziellen Algebren die Lücke schließen und zum algebraischen Modell ein Quadrikenmodell konstruieren.

7.1 Exkurs: Quadriken im projektiven Raum

Bevor wir Kettenräume auf Quadriken betrachten, wollen wir in diesem Kapitel ein wenig ausholen und zuerst Quadriken auf einem projektiven Raum definieren und einige Eigenschaften vermerken. Für eine genauere Betrachtung von Quadriken in einem projektiven Raum siehe z.B. [7], S. 56 ff.

Wir werden uns im Weiteren auf die Betrachtung eines projektiven Raums über einem Vektorraum beschränken, wobei wir zusätzlich noch voraussetzen, dass der zugrunde liegende Körper kommutativ ist. Wir sprechen also vom projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$, welcher die Punktmenge

$$\mathfrak{P} := \{Kv \mid v \in V \setminus \{0\}\}$$

besitzt. Für weitere Details über projektive Räume und im Speziellen zur Konstruktion eines projektiven Raums über einem Vektorraum wird auf [7], S. 21 ff. verwiesen. Weiters wird im Laufe des Kapitels oft auf die Konstruktion eines affinen Raums aus einem projektiven Raum durch Auszeichnung einer Fernhyperebene verwiesen. Für Einzelheiten dazu siehe [7], S. 27 ff.

Definition 7.1.1

Sei V ein Vektorraum über einem kommutativen Körper K . Eine Abbildung

$$Q : V \rightarrow K : v \mapsto Q(v) \tag{7.1}$$

wird als *quadratische Form* bezeichnet, wenn gilt, dass

- $Q(kv) = k^2Q(v)$ für alle $k \in K$ und $v \in V$ erfüllt ist und

- die Abbildung

$$f_Q : V \times V \rightarrow K : (v, w) \mapsto Q(v + w) - Q(v) - Q(w) \quad (7.2)$$

eine symmetrische Bilinearform ist.

Bemerkung 7.1.2

Es sei kurz festgehalten, dass nach Wahl einer Basis $(v_i)_{i \in I}$ des Vektorraums V durch die Elemente $Q(v_i)$ und $f_Q(v_i, v_j)$ für i und $j \in I$ die quadratische Form Q bereits eindeutig bestimmt ist.

Im Spezialfall $V = K^n$ ist jede quadratische Form von der Gestalt

$$Q : V \rightarrow K : v \mapsto v^T A v$$

für $A \in K^{n \times n}$. Umgekehrt beschreibt eine solche Abbildung aber auch eine quadratische Form.

Ausgehend von einer quadratischen Form auf dem zugrunde liegenden Vektorraum können wir nun eine Quadrik auf dem projektiven Raum definieren.

Definition 7.1.3

Sei Q eine quadratische Form auf dem Vektorraum V . Dann bezeichnet man die Menge

$$\mathfrak{Q} := \{Kv \in \mathfrak{P} \mid Q(v) = 0\} \quad (7.3)$$

als *Quadrik* im projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$.

Bemerkung 7.1.4

Da Q eine quadratische Form ist, ist die Quadrik wohldefiniert. Aufgrund der quadratischen Eigenschaft erhält man für ein Element $v \in V$, dass $Q(v) = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn $Q(kv) = k^2 Q(v) = 0$ für alle $k \in K$ gilt.

Definition 7.1.5

Sei Q eine quadratische Form auf dem Vektorraum V und \mathfrak{Q} die entsprechende Quadrik im projektiven Raum über V .

- Für eine Gerade im projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$ unterscheidet man die folgenden Fälle: Besitzt die Gerade mit der Quadrik
 - genau einen Schnittpunkt oder ist sie in dieser enthalten, dann spricht man von einer *Tangente*.
 - zwei Schnittpunkte, dann spricht man von einer *Sekante*.
 - gar keinen Schnittpunkt, dann spricht man von einer *Passante*.
- Für einen Punkt X auf der Quadrik \mathfrak{Q} bildet die Menge aller Tangenten durch X an die Quadrik den *Tangentialraum* an \mathfrak{Q} in X , bezeichnet mit

$$\mathcal{T}_X := \{Y \in G \mid G \text{ ist Tangente an } \mathfrak{Q} \text{ durch } X\} \cup \{X\}. \quad (7.4)$$

- Gilt für einen Punkt X auf der Quadrik Ω , dass der Tangentialraum an Ω in X mit der gesamten Punktmenge des projektiven Raums übereinstimmt, dann bezeichnet man den Punkt X als einen *Doppelpunkt* von Ω .
- Im Folgenden bezeichnet Ω^* die Menge der Quadrikkpunkte, die keine Doppelpunkte sind.

Wie schon zu Beginn des Abschnitts erwähnt, ist das Thema der projektiven Quadriken wesentlich umfangreicher als es hier dargestellt werden soll. Es werden im folgenden Lemma nur einige Eigenschaften bewiesen, die im weiteren Verlauf von großer Wichtigkeit sind.

Lemma 7.1.6

Sei Ω eine Quadrik zur quadratischen Form Q über einem Vektorraum V und $X = Kv$ ein Punkt der Quadrik.

- (1) Der Tangentialraum an Ω in X hat die Gestalt

$$\mathcal{T}_X := \{Kw \in \mathfrak{P} \mid f_Q(v, w) = 0\}. \tag{7.5}$$

- (2) Ist X kein Doppelpunkt von Ω , dann ist der Tangentialraum \mathcal{T}_X eine Hyperebene.
 (3) Jede Gerade durch den Punkt X ist entweder eine Tangente oder Sekante an die Quadrik Ω .

Beweis:

- (1) Um die Darstellung des Tangentialraums in (7.5) zu zeigen, sei G eine beliebige Tangente durch X , d.h. $G = X \oplus Y$ für $Y = Kw$. Nach Definition 7.1.5 ist G genau dann eine Tangente, wenn nur der Punkt X oder alle Punkte von G auf der Quadrik liegen, d.h.

$$\begin{aligned} Y \in \Omega &\Leftrightarrow Z \in \Omega \text{ für alle } Z \in G \setminus \{X, Y\} \\ &\Leftrightarrow Q(w) = 0 \Leftrightarrow kf_Q(v, w) + Q(w) = Q(kv + w) = 0 \text{ für alle } k \in K \\ &\Leftrightarrow kf_Q(v, w) = 0 \text{ für alle } k \in K \\ &\Leftrightarrow f_Q(v, w) = 0. \end{aligned}$$

Da Y auf G beliebig gewählt war, folgt die Aussage.

- (2) Nach (7.5) ist ein Punkt $Y = Kw$ genau dann im Tangentialraum von X enthalten, wenn w im Kern der linearen Abbildung

$$\varphi : V \rightarrow K : x \mapsto f_Q(v, x)$$

liegt. Das Bild von φ ist genau dann $\{0\}$, wenn X ein Doppelpunkt ist. Im anderen Fall ist φ surjektiv, womit nach der Rangformel für lineare Abbildungen (siehe z.B. [6], S.79) der Kern die Dimension $\dim V - 1$ hat und \mathcal{T}_X somit eine Hyperebene ist.

- (3) Es ist zu zeigen, dass eine Gerade, die neben X noch zwei weitere Punkte Y und $Z \in \mathfrak{Q}$ enthält, bereits eine Tangente ist. Es ist $G = X \oplus Y$ mit $Y = Kw \in \mathfrak{Q}$ und $Z = K(kv + w) \in G \cap \mathfrak{Q}$ für $k \in K^*$. Daher gilt

$$0 = Q(kv + w) - k^2Q(v) - Q(w) = kf_Q(v, w),$$

sodass $f_Q(v, w) = 0$ folgt, womit nach (7.5) die Gerade G eine Tangente ist. \square

7.2 Konstruktion eines Kettenraums aus einer Quadrik

Nun wollen wir aus einer Quadrik durch Wahl einer passenden Menge von Punkten und Ketten einen Kettenraum konstruieren. Dazu setzen wir allerdings voraus, dass die Dimension des zugrunde liegenden Vektorraums mindestens 4 ist. Weiters soll die gewählte Quadrik \mathfrak{Q} nicht ausgeartet sein. Das ist in dem Sinne zu verstehen, dass die Quadrik mindestens eine Sekante besitzt und nicht in zwei Hyperebenen enthalten ist. Unter dieser Generalvoraussetzung definieren wir eine passende Inzidenzstruktur.

Definition 7.2.1

Sei \mathfrak{Q} eine nicht ausgeartete Quadrik im projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$. Man nennt eine Ebene E von $\mathbb{P}(K, V)$ *zulässig*, wenn $E \cap \mathfrak{Q}$ mindestens drei Punkte aus \mathfrak{Q}^* , aber keine Gerade enthält. Durch die *Menge zulässiger Schnitte*

$$\mathcal{C}(\mathfrak{Q}) := \{\mathfrak{Q} \cap E \mid E \text{ ist zulässige Ebene}\} \quad (7.6)$$

erhält man die Inzidenzstruktur

$$\Sigma(\mathfrak{Q}) := (\mathfrak{Q}^*, \mathcal{C}(\mathfrak{Q})), \quad (7.7)$$

welche *Kettenraum auf \mathfrak{Q}* genannt wird.

Bemerkung 7.2.2

Aus der Definition ist noch nicht ganz ersichtlich, dass es sich bei $\Sigma(\mathfrak{Q})$ tatsächlich um eine Inzidenzstruktur handelt, da die Punktmenge ja auf die Menge \mathfrak{Q}^* beschränkt ist, obwohl die Menge der „Ketten“ $\mathcal{C}(\mathfrak{Q})$ noch weitere Elemente enthalten könnte. Allerdings sieht man leicht ein, dass $\mathfrak{Q} \cap E = \mathfrak{Q}^* \cap E$ für jede zulässige Ebene E gilt.

Angenommen $\mathfrak{Q} \cap E$ würde einen Doppelpunkt X enthalten. Dann wäre die Verbindungsgerade von X mit einem Punkt aus $\mathfrak{Q}^* \cap E$ – welcher existiert, da E zulässig ist – eine Tangente und damit ganz in \mathfrak{Q} enthalten. Daher wäre diese aber auch in $\mathfrak{Q} \cap E$ enthalten, was ein Widerspruch zur Zulässigkeit von E ist.

Nach den Anforderungen an \mathfrak{Q} ist jeder Schnitt mit einer zulässigen Ebene $\mathfrak{Q} \cap E$ ein Kegelschnitt in der Ebene.

Der Name „Kettenraum auf \mathfrak{Q} “ in der Definition 7.2.1 greift bereits darauf vor, dass wir im Weiteren zeigen wollen, dass es sich bei der Inzidenzstruktur $\Sigma(\mathfrak{Q})$ tatsächlich um einen Kettenraum handelt. Für einen Kettenraum ist allerdings nicht nur eine Inzidenzstruktur definiert, sondern auch eine Distanzrelation. Im Hinblick auf das Axiom (K3) ist diese folgendermaßen erklärt.

Definition 7.2.3

Sei \mathfrak{Q} eine nicht ausgeartete Quadrik im projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$. Für die Inzidenzstruktur $\Sigma(\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q}^*, \mathcal{C}(\mathfrak{Q}))$ wird eine Distanzrelation Δ definiert: Zwei Punkte X und $Y \in \mathfrak{Q}^*$ sind genau dann distant, wenn sie verschieden sind und es ein Element $C \in \mathcal{C}(\mathfrak{Q})$ gibt, welches X und Y enthält.

Um die Kernaussage dieses Abschnitts zu beweisen, müssen wir noch genauer untersuchen, was es heißt, dass eine Ebene zulässig ist und wie die definierte Distanzrelation mit der Quadrik zusammenhängt.

Lemma 7.2.4

Sei \mathfrak{Q} eine nicht ausgeartete Quadrik und E eine Ebene im projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$. Dann ist E genau dann zulässig, wenn es in $\mathfrak{Q} \cap E$ drei Punkte X, Y und Z gibt, sodass die Verbindungsgeraden $X \oplus Y$, $Y \oplus Z$ und $Z \oplus X$ verschiedene Sekanten von \mathfrak{Q} sind.

Beweis:

Sei zunächst E eine zulässige Ebene. Nach der Definition der Zulässigkeit besitzt $\mathfrak{Q} \cap E$ drei verschiedene Punkte X, Y und Z , sodass deren Verbindungsgeraden nicht ganz in \mathfrak{Q} enthalten sind. Nach Lemma 7.1.6(3) handelt es sich damit um Sekanten.

Für die Umkehrung seien drei Punkte X, Y und Z in $\mathfrak{Q} \cap E$ gegeben, sodass deren Verbindungsgeraden verschiedene Sekanten von \mathfrak{Q} sind. Damit sind diese drei Punkte aber keine Doppelpunkte und liegen daher in $\mathfrak{Q}^* \cap E$, womit die erste Voraussetzung der Zulässigkeit von E erfüllt ist.

Um zu zeigen, dass $\mathfrak{Q} \cap E$ keine Gerade enthält, nehmen wir das Gegenteil an. Eine solche Gerade $G \subseteq \mathfrak{Q} \cap E$ ist somit eine Tangente an die Quadrik. Da nach Voraussetzung die drei Verbindungsgeraden von X, Y und Z Sekanten sind, kann die Gerade G nur höchstens einen der drei Punkte enthalten. Daher muss sie aber mindestens eine der drei Sekanten in einem von X, Y und Z verschiedenen Punkt schneiden.

Da G in der Quadrik enthalten ist, würde diese Sekante dann aber mindestens drei Punkte der Quadrik enthalten, was ein Widerspruch ist (siehe dazu Abbildung 7.1). Daher kann $\mathfrak{Q} \cap E$ keine Gerade enthalten, womit E eine zulässige Ebene ist. \square

Aus der Definition der Distanzrelation über zulässige Ebenen und dem eben gezeigten Lemma lässt sich nun auch ein Zusammenhang zwischen distanten Punkten und Sekanten der Quadrik ableiten.

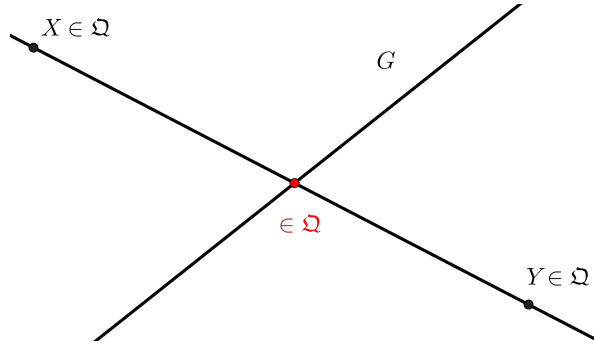


Abbildung 7.1: Schnitt G mit $X \oplus Y$

Lemma 7.2.5

Sei Ω eine nicht ausgeartete Quadrik im projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$. Zwei verschiedene Punkte X und $Y \in \Omega^*$ sind genau dann distant, wenn deren Verbindungsgerade $X \oplus Y$ eine Sekante der Quadrik ist.

Beweis:

Seien zunächst zwei Punkte X und $Y \in \Omega^*$ distant. Dann folgt direkt aus der Definition der Distanzrelation (vgl. Definition 7.2.3), dass X und Y gemeinsam in einer zulässigen Ebene liegen. Nach der Definition der Zulässigkeit kann deren Verbindungsgerade keine Tangente sein, wodurch aus Lemma 7.1.6(3) die Behauptung folgt.

Ist umgekehrt die Verbindungsgerade zweier Punkte X und $Y \in \Omega^*$ eine Sekante. Das Ziel ist es eine zulässige Ebene durch X und Y zu konstruieren, die dann das Element aus $\mathcal{C}(\Omega)$ für die Distanz liefert.

Nach Lemma 7.1.6(2) sind die Tangentialräume \mathcal{T}_X und \mathcal{T}_Y Hyperebenen. Da Ω nicht ausgeartet ist, gibt es somit einen Punkt $Z \in \Omega \setminus \{\mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_Y\}$. Nach der Wahl von Z sind auch die Verbindungsgeraden $X \oplus Z$ und $Y \oplus Z$ Sekanten. Nach Lemma 7.2.4 ist damit die Ebene aufgespannt von den drei Punkten X , Y und Z zulässig und die Punkte X und Y damit distant. □

Nun wollen wir zeigen, dass der Kettenraum auf einer Quadrik tatsächlich ein Kettenraum im Sinne der Definition 4.2.17 ist. Dazu müssen die vier Axiome eines Kettenraums nachgewiesen werden. Die ersten drei ergeben sich ziemlich schnell aus der Definition der Ketten und der Distanzrelation. Für den Beweis des vierten verwenden wir – wie schon im Beispiel 5.4.7 des Hyperboloids – eine stereographische Projektion.

Satz 7.2.6

Sei Ω eine nicht ausgeartete Quadrik im projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$. Dann ist die Inzidenzstruktur $\Sigma(\Omega) = (\Omega^*, \mathcal{C}(\Omega))$ ein Kettenraum.

Beweis:

(K1) Für $X \in \Omega^*$ gibt es mindestens eine Sekante durch X . Mit Hilfe von Lemma 7.2.5 ist dies aber äquivalent zur Existenz einer Kette $C \in \mathcal{C}(\Omega)$ durch X .

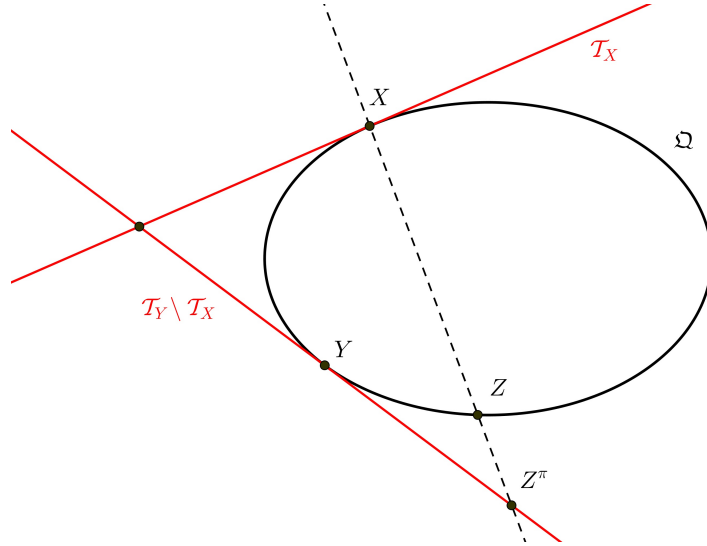


Abbildung 7.2: Stereographische Projektion auf \mathbb{A}

- (K2) Für drei paarweise distante Punkte X , Y und Z gibt es nur eine Ebene E – die Ebene aufgespannt von den drei Punkten – welche die drei verschiedenen Punkte enthält. Daher gibt es für die verbindende Kette überhaupt nur einen Kandidaten, nämlich $\Omega \cap E$. Die Zulässigkeit von E folgt aus den Lemmata 7.2.5 und 7.2.4.
- (K3) folgt direkt aus der Definition der Distanzrelation (vgl. Definition 7.2.3).
- (K4) Wir untersuchen das Residuum von $\Sigma(\Omega)$ in einem Punkt $X \in \Omega^*$ mit Hilfe einer stereographischen Projektion. Dazu wählt man einen Punkt $Y \in \Delta(X)$ und definiert

$$\mathbb{A} := \mathcal{T}_Y \setminus \mathcal{T}_X.$$

Nach Konstruktion von \mathbb{A} durch Herausnahme der Hyperebene $\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_X$ aus \mathcal{T}_Y erhält man mit \mathbb{A} einen in \mathcal{T}_Y enthaltenen affinen Raum mit Fernhyperebene $\mathcal{T}_Y \cap \mathcal{T}_X$. Nun definieren wir die Projektion von $\Delta(X)$ auf \mathbb{A} durch

$$\pi : \Delta(X) \rightarrow \mathbb{A} : Z \mapsto (X \oplus Z) \cap \mathbb{A}.$$

Für $Z \in \Delta(X)$ ist $X \oplus Z$ nach Lemma 7.2.5 eine Sekante und π damit wohldefiniert. Aufgrund der Eindeutigkeit der Verbindungsgerade zweier Punkte ist π injektiv. Außerdem ist für einen beliebigen Punkt $P \in \mathbb{A} = \mathcal{T}_Y \setminus \mathcal{T}_X$ die Verbindungsgerade $X \oplus P$ keine Tangente, womit sie nach Lemma 7.1.6 (3) eine Sekante ist. Der zweite Schnittpunkt wird nach Konstruktion unter π auf P abgebildet, wodurch π surjektiv und damit bijektiv ist (siehe dazu Abbildung 7.2).

Als nächsten Schritt wollen wir zeigen, dass π Residuumsgeraden auf affine Geraden von \mathbb{A} abbildet (siehe dazu Abbildung 7.3). Jede Residuumsgerade $C \in \mathcal{C}_X$ entsteht durch Schnitt einer zulässigen Ebene, welche X enthält, mit der Quadrik. Eine solche schneidet \mathcal{T}_Y in einer Geraden, welche nicht in \mathcal{T}_X liegt und \mathbb{A} somit in einer affinen Gerade. Das π -Bild einer Residuumsgerade entspricht aber gerade

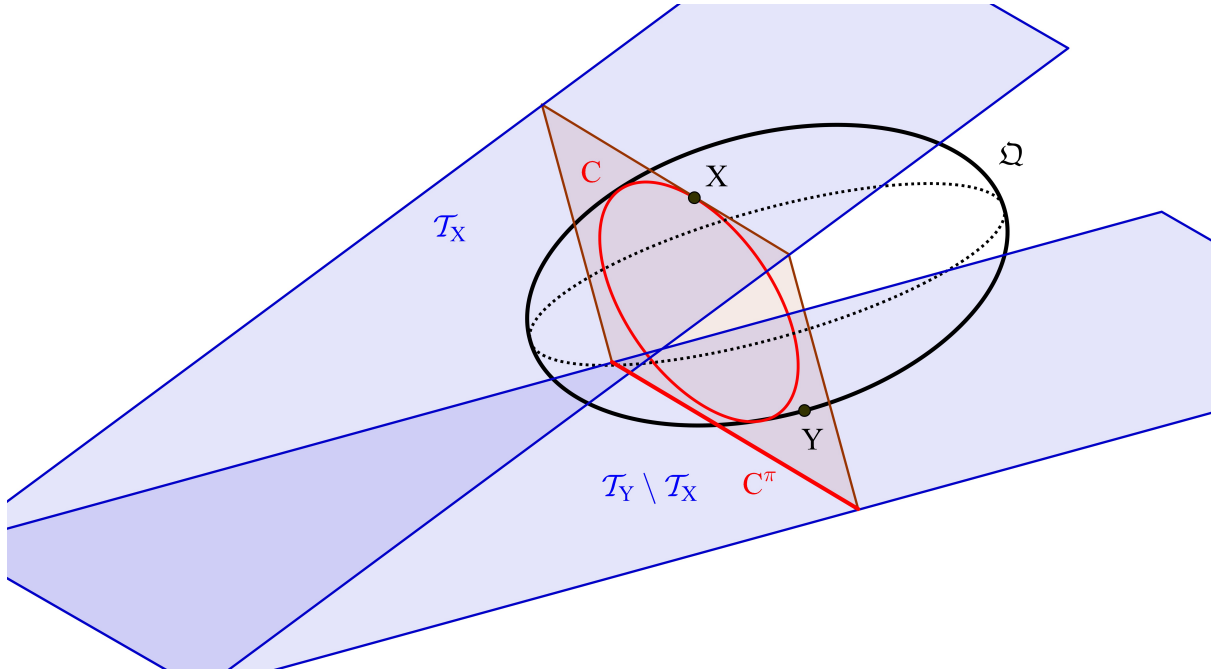


Abbildung 7.3: Bild der Residuumsgeraden unter σ

dem Schnitt der entsprechenden zulässigen Ebene mit \mathbb{A} und ist somit eine affine Gerade in \mathbb{A} .

Als letzten Schritt bleibt noch zu zeigen, dass die π -Bilder der Residuumsgeraden einen partiellen affinen Raum bilden. Dazu zeigt man, dass für ein π -Bild einer Residuumsgerade in \mathbb{A} auch alle parallelen affinen Geraden in \mathbb{A} aus Residuumsgeraden unter π hervorgehen (siehe dazu Abbildung 7.4).

Sei also $G = (C \setminus \{X\})^\pi$ das π -Bild einer Residuumsgerade, d.h.

$$X \in C = \Omega \cap E \in \mathcal{C}(\Omega),$$

wobei E eine zulässige Ebene ist. Sei weiters H eine zu G parallele affine Gerade in \mathbb{A} . Naheliegenderweise definiert man im projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$

$$E' := H \oplus X \quad \text{und} \quad C' := \Omega \cap E'.$$

Dann erhält man direkt

$$(C' \cap \Delta(X))^\pi = H.$$

Mit Hilfe von Satz 4.2.13 fehlt nur noch zu zeigen, dass E' zulässig und C' somit ein Element von $\mathcal{C}(\Omega)$ ist. Da die affinen Geraden G und H parallel in \mathbb{A} sind, gilt

$$T := E \cap E' \subset \mathcal{T}_X$$

ist eine Tangente an die Quadrik in X .

nichts anderes als $(\mathfrak{Q}^*)^\kappa \subseteq \mathfrak{Q}^*$ und $\mathcal{C}(\mathfrak{Q}) \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{Q})$. Die entgegengesetzten Inklusionen erhält man durch dieselbe Argumentation für κ^{-1} . \square

7.3 Das Quadrikenmodell für $\Sigma(K, R)$

Nun kommen wir wieder zurück zur Betrachtung einer Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$ über einer K -Algebra R . Im vorgehenden Abschnitt haben wir uns noch nicht auf eine konkrete Quadrik festgelegt. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine spezielle Quadrik passend für die Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$ zu finden, sodass der Kettenraum $\Sigma(K, R)$ isomorph zum Kettenraum auf der Quadrik ist. In diesem Fall spricht man von einem Quadrikenmodell des Kettenraums $\Sigma(K, R)$.

Wir werden uns allerdings bei der Konstruktion der Quadrik auf spezielle K -Algebren beschränken.

Definition 7.3.1

Sei R eine Algebra über einem Körper K . Dann wird R als *kinematisch* bezeichnet, wenn es für jedes Element $x \in R$ Elemente k und $l \in K$ gibt, sodass

$$x^2 = kx + l. \quad (7.8)$$

Bevor wir Beispiele für kinematische K -Algebren angeben, wollen wir einige wichtige Eigenschaften zusammenstellen. Für den Beweis siehe [10].

Satz 7.3.2

Sei K ein Körper, welcher mindestens drei Elemente enthält und $R \neq K$ eine kinematische K -Algebra.

(1) Es gibt genau einen K -linearen Automorphismus von R

$$\kappa : R \rightarrow R : x \mapsto \bar{x}, \quad (7.9)$$

sodass die Elemente

$$N(x) := x\bar{x} \quad \text{und} \quad Sp(x) = x + \bar{x}$$

für alle $x \in R$ in K enthalten sind. Dabei bezeichnet $N(x)$ die *Norm* und $Sp(x)$ die *Spur* von x .

(2) Für alle $x \in R$ gilt

$$x^2 - Sp(x)x + N(x) = 0. \quad (7.10)$$

(3) Die Abbildung $N : R \rightarrow K : x \mapsto N(x)$ ist eine quadratische Form auf dem Vektorraum R über K und es gilt für alle x und $y \in R$

- $f_N(x, y) = x\bar{y} + y\bar{x}$
- $N(xy) = N(x)N(y)$

- $N(\bar{x}) = N(x)$
- $x \in R^* \Leftrightarrow N(x) \neq 0$
- $x \in R^* \Rightarrow x^{-1} = N(x)^{-1}\bar{x}$.

(4) Die Abbildung $Sp : R \rightarrow K : x \mapsto Sp(x)$ ist eine Linearform mit der kommutierenden Eigenschaft

$$Sp(xy) = f_N(\bar{x}, y) = f_N(\bar{y}, x) = Sp(yx) \quad \text{für alle } x, y \in R. \quad (7.11)$$

Die Algebren, welche im Kapitel 5 besprochen wurden, sind kinematisch. Wir betrachten die Abbildungen κ , N und Sp .

Beispiele 7.3.3

- Für die Algebra \mathbb{C} über \mathbb{R} ist κ die Konjugation

$$\kappa : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : a + bi \mapsto a - bi.$$

Für Norm und Spur einer komplexen Zahl gilt $N(a + bi) = a^2 + b^2$ und $Sp(a + bi) = 2a$.

- Für den Ring der dualen Zahlen über einem Körper \mathbb{R} ist κ gegeben durch

$$\kappa : \mathbb{R}(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}(\varepsilon) : a + b\varepsilon \mapsto a - b\varepsilon.$$

Für die Norm bzw. Spur ergibt sich somit $N(a + b\varepsilon) = a^2$ und $Sp(a + b\varepsilon) = 2a$.

- Für den Ring der 2×2 Matrizen über \mathbb{R} ist

$$\kappa : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Die Norm bzw. Spur einer Matrix $X \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ entspricht der Determinante bzw. Spur der Matrix. Die Algebra $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kann aufgefasst werden als der Unterring von $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ bestehend aus allen Diagonalmatrizen. Damit erhält man für κ

$$\kappa : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (a, b) \mapsto (b, a)$$

und für die Norm bzw. Spur $N((a, b)) = ab$ bzw. $Sp((a, b)) = a + b$.

Wir betrachten im Folgenden immer eine kinematische Algebra R über einem Körper K , auch wenn es manchmal nicht explizit erwähnt wird. Wir setzen zusätzlich voraus, dass $|K| > 2$ und $K \neq R$ gilt. Nun wollen wir eine spezielle Quadrik bzw. die sie definierende quadratische Form auf dem Vektorraum $R \times K \times K$ über K , welcher im Folgenden mit V bezeichnet wird, definieren.

Lemma 7.3.4

Die Abbildung

$$Q : V \rightarrow K : (x, k, l) \mapsto N(x) - kl \quad (7.12)$$

ist eine quadratische Form auf dem Vektorraum $R \times K \times K$ über K . Für die dazugehörige Bilinearform gilt

$$f_Q((x, k, l), (y, s, t)) = f_N(x, y) - kt - sl = x\bar{y} + y\bar{x} - kt - sl. \quad (7.13)$$

Beweis:

Es gilt $Q(kv) = k^2Q(v)$ für alle $k \in K$ und $v \in V$, da N nach Satz 7.3.2 eine quadratische Form ist. Durch Nachrechnen der angegebenen Form,

$$\begin{aligned} f_Q((x, k, l), (y, s, t)) &= N(x + y) - (k + s)(l + t) - N(x) + kl - N(y) + st \\ &= f_N(x, y) - kt - sl, \end{aligned}$$

folgt direkt, dass f_Q eine Bilinearform ist. \square

Um tatsächlich einen Kettenraum auf \mathfrak{Q} definieren zu können, muss noch nachgeprüft werden, dass \mathfrak{Q} nicht ausgeartet ist. Wir wollen zuerst eine Sekante finden.

Lemma 7.3.5

Die Gerade $K(0, 1, 0) \oplus K(0, 0, 1)$ ist eine Sekante an die Quadrik \mathfrak{Q} .

Beweis:

Betrachten wir die Schnittpunkte der Geraden

$$g : K(0, 1, 0) \oplus K(0, 0, 1) = \{K(0, s, t) \mid (s, t) \in K^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$$

mit der Quadrik \mathfrak{Q} . Da $Q((0, s, t)) = -st = 0$ genau dann gilt, wenn $s = 0$ oder $t = 0$ gilt, sind die Schnittpunkte genau die beiden Punkte $K(0, 1, 0)$ und $K(0, 0, 1)$ und die Gerade g eine Sekante. \square

Weiters benötigen wir noch das folgende Lemma, welches schon zeigt, dass die Tangentialräume nicht ausgeartet sind.

Lemma 7.3.6

Für jeden Punkt $X \in \mathfrak{Q}$ gilt, dass der Tangentialraum in X nicht ganz in der Quadrik enthalten ist, d.h. $\mathcal{T}_X \not\subseteq \mathfrak{Q}$.

Beweis:

Die Idee des Beweises liegt darin, für einen beliebigen Punkt $X = Kv \in \mathfrak{Q}$ mit $v \in V$ einen Punkt $Y = Kw$ mit $w \in V$ im Tangentialraum in X zu finden, der nicht auf der Quadrik liegt. Dazu verwendet man Darstellung (7.5) und folgende Fallunterscheidung:

(1) Für $X = K(x, k, l)$ mit k und $l \in K^\star$ sei $Y = K(0, l^{-1}, -k^{-1})$. Dann gilt wie gesucht

$$\begin{aligned} f_Q(v, w) &= f_N(x, 0) - ll^{-1} + kk^{-1} = 0 \\ Q(w) &= N(0) + l^{-1}k^{-1} = l^{-1}k^{-1} \neq 0. \end{aligned}$$

(2) Für $X = K(x, 0, l)$ mit $l \in K^*$ (bzw. für $l = 0$ und $k \in K^*$ analog) wählt man $Y = K(1, s, 0)$ mit $s = l^{-1}f_N(x, 1)$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} f_Q(v, w) &= f_N(x, 1) - ls = 0 \\ Q(w) &= N(1) = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

(3) Für $X = K(x, 0, 0)$ setzt man schlussendlich $Y = K(0, 1, 1)$ und erhält auch hier

$$\begin{aligned} f_Q(v, w) &= f_N(x, 0) - 0 - 0 = 0 \\ Q(w) &= N(0) - 1 = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

In allen Fällen ist damit die Behauptung gezeigt. \square

Korollar 7.3.7

Die Quadrik \mathfrak{Q} ist nicht ausgeartet und die Inzidenzstruktur $\Sigma(\mathfrak{Q})$ daher ein Kettenraum.

Beweis:

Nach Lemma 7.3.5 besitzt \mathfrak{Q} eine Sekante. Angenommen \mathfrak{Q} wäre in der Vereinigung der beiden Hyperebenen H_1 und H_2 enthalten. Dann stimmen die Tangentialebenen der Punkte, welche keine Doppelpunkte sind, entweder mit H_1 oder H_2 überein. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 7.3.6. Daher ist \mathfrak{Q} nicht ausgeartet. \square

Nun kommen wir zur Festlegung eines Isomorphismus der Kettenräume $\Sigma(K, R)$ und $\Sigma(\mathfrak{Q})$. Für die Definition einer Abbildung der Punkte $\mathbb{P}(R)$ auf \mathfrak{Q}^* benötigt man allerdings die folgenden zwei Lemmata, die spezielle Eigenschaften kinematischer Algebren liefern.

Lemma 7.3.8

Sei R eine kinematische K -Algebra. Jedes links-invertierbare Element ist invertierbar.

Beweis:

Sei $x \in R$ links-invertierbar. Dann existiert ein $l \in R$, sodass $lx = 1$ gilt. Nach Satz 7.3.2(3) folgt daraus $N(l)N(x) = 1$. Daher gilt aber $N(l) \neq 0$ und $N(x) \neq 0$, womit wiederum nach Satz 7.3.2(3) folgt, dass x und l invertierbar sind. \square

Lemma 7.3.9

Sei R eine kinematische K -Algebra. Seien weiters a und b Nichteinheiten, sodass $x, y \in R$ mit $ax + by = 1$ existieren. Dann gilt $f_N(ax, by) = 1$.

Beweis:

Nach Satz 7.3.2 sind a und b Nichteinheiten genau dann, wenn $N(a) = 0$ und $N(b) = 0$ gilt. Damit rechnet man unter der Verwendung von Satz 7.3.2(3) nach,

$$f_N(ax, by) = N(ax + by) - N(ax) - N(by) = 1,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Damit können wir folgende Abbildung definieren und die Wohldefiniertheit und Injektivität dieser zeigen.

Satz 7.3.10

Sei R eine kinematische K -Algebra. Die Abbildung ψ sei definiert durch

$$\psi : \mathbb{P}(R) \rightarrow \mathfrak{Q} : R(a, b) \mapsto K(\bar{b}, a, N(a), N(b)). \quad (7.14)$$

Dann ist ψ wohldefiniert und injektiv.

Beweis:

Beginnen wir mit dem Beweis der Wohldefiniertheit. Für jeden Punkt $R(a, b)$ aus $\mathbb{P}(R)$ existiert nach Bemerkung 3.1.9 ein unimodularer Repräsentant $(c, d) \in R^2$. Nach Lemma 3.1.11 existiert somit ein links-invertierbares $r \in R$, sodass $(a, b) = r(c, d)$ gilt. Nach Lemma 7.3.8 ist r sogar invertierbar. Daher ist $N(r) \neq 0$ und es gilt

$$\begin{aligned} K(\bar{b}a, N(a), N(b)) &= K(\bar{d}\bar{r}rc, N(rc), N(rd)) \\ &= K(N(r)(\bar{d}c, N(c), N(d))) \\ &= K(\bar{d}c, N(c), N(d)). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass das Bild nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängt.

Als nächstes zeigen wir, dass es sich bei jedem Bild tatsächlich um einen Quadrikkpunkt handelt. Dazu muss man zuerst nachprüfen, dass $K(\bar{b}a, N(a), N(b))$ für $R(a, b) \in \mathbb{P}(R)$ überhaupt ein Punkt des projektiven Raums $\mathbb{P}(K, V)$ ist. Angenommen es würde gelten $(\bar{b}a, N(a), N(b)) = (0, 0, 0)$, dann wären a und b Nichteinheiten in R . Außerdem können wir wie zuvor o.B.d.A. annehmen, dass (a, b) unimodular ist. Daher gibt es $x, y \in R$ mit $ax + by = 1$ und die Bedingungen von Lemma 7.3.9 sind erfüllt. Allerdings gilt widersprüchlich nach Satz 7.3.2(4)

$$f_N(ax, by) = Sp(ax\bar{y}\bar{b}) = Sp(\bar{b}ax\bar{y}) = Sp(0) = 0.$$

Dass es sich um einen Quadrikkpunkt handelt, rechnet man nach:

$$\begin{aligned} Q(\bar{b}a, N(a), N(b)) &= N(\bar{b}a) - N(a)N(b) \\ &= N(a)N(b) - N(a)N(b) = 0. \end{aligned}$$

Um schließlich die Injektivität zu zeigen, seien $R(a, b)$ und $R(c, d)$ zwei Punkte aus $\mathbb{P}(R)$ mit $R(a, b)^\psi = R(c, d)^\psi$. Daher gibt es ein $k \in K^*$ mit

$$(\bar{b}a, N(a), N(b)) = k(\bar{c}d, N(c), N(d)).$$

Betrachten wir zuerst den Fall $a \in R^*$. Dann gilt nach Satz 7.3.2(3), dass $N(a) \neq 0$ und damit auch $N(c) \neq 0$ bzw. $c \in R^*$ und $k = N(a)N(c)^{-1}$. Daher erhält man

$$\bar{b}a = N(a)N(c)^{-1}\bar{c}d = \bar{c}d^{-1}N(a) = \bar{c}d^{-1}\bar{a}a.$$

Daraus ergibt sich aber $b = ac^{-1}d$ und somit

$$R(a, b) = R(ac^{-1}(c, d)) = R(c, d).$$

Ein analoges Resultat erhält man für den Fall $b \in R^*$, womit nur noch der Fall, dass a und b Nichteinheiten sind, übrig bleibt. Wie schon zuvor sei (a, b) o.B.d.A. unimodular und es existieren $x, y \in R$ mit $ax + by = 1$. Nach Lemma 7.3.9 gilt somit $f_N(ax + by) = 1$ und man berechnet

$$\begin{aligned}
(a, b) &= f_N(ax + by)(a, b) \\
&= (by\bar{x}\bar{a} + ax\bar{y}\bar{b})(a, b) \\
&= (by\bar{x}N(a) + ax\bar{y}\bar{b}a, by\bar{x}\bar{a}b + ax\bar{y}N(b)) \\
&= (by\bar{x}kN(c) + ax\bar{y}k\bar{d}c, by\bar{x}k\bar{c}d + ax\bar{y}kN(d)) \\
&= k(by\bar{x}\bar{c} + ax\bar{y}\bar{d})(c, d).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $R(a, b) \subseteq R(c, d)$ und die analogen Schritte angewandt auf (c, d) ergeben die Gleichheit, womit ψ injektiv ist. \square

Nun ist die Punktmenge des Kettenraums über \mathfrak{Q} nicht ganz \mathfrak{Q} , sondern \mathfrak{Q}^* . Im nächsten Satz untersuchen wir die Bildmenge der Abbildung ψ .

Satz 7.3.11

Für die Bildmenge der Abbildung ψ aus (7.14) gilt

$$\mathbb{P}(R)^\psi = \mathfrak{Q}^*. \quad (7.15)$$

Beweis:

Sei zunächst $X = R(a, b)$ ein Punkt aus $\mathbb{P}(R)$. Wir zeigen, dass X^ψ kein Doppelpunkt ist, indem wir eine Element $Y \in \mathfrak{Q}$ finden, sodass $X^\psi \oplus Y$ eine Sekante an \mathfrak{Q} ist. Nach der Darstellung des Tangentialraums in (7.5) und Lemma 7.3.4 muss für ein solches $Y = K(u, s, t) \in V$ mit $N(u) = st$ gelten

$$0 \neq f_Q((\bar{b}a, N(a), N(b)), (u, s, t)) = f_N(\bar{b}a, u) - N(a)t - N(b)s.$$

Für den Fall $a \in R^*$ ist $N(a) \neq 0$ und $Y = K(0, 0, 1)$ ein passender Kandidat. Analog erhält man für $b \in R^*$ den Punkt $Y = K(0, 1, 0)$.

Für den Fall, dass a und b Nichteinheiten sind, kann man wie schon zuvor (a, b) als unimodular voraussetzen und es gibt $x, y \in R$ mit $ax + by = 1$. Nach Lemma 7.3.9 gilt somit

$$1 = f_N(ax, by) = Sp(\bar{y}\bar{b}ax) = Sp(\bar{b}ax\bar{y}) = f_N(\bar{b}a, y\bar{x}).$$

Da $N(a) = 0$ und $N(b) = 0$ gilt, ist in diesem Fall $Y = K(y\bar{x}, N(x), N(y))$ ein passender Kandidat, und es gilt in jedem Fall $X^\psi \in \mathfrak{Q}^*$.

Sei nun umgekehrt $P \in \mathfrak{Q}^*$ gegeben. Dann gibt es auch hier drei Fälle zu unterscheiden.

- Für $P = K(x, k, 1)$ mit $N(x) = k$ gilt $P = R(x, 1)^\psi$.
- Für $P = K(x, 1, l)$ mit $N(x) = l$ gilt $P = R(1, \bar{x})^\psi$.

- Für $P = K(x, 0, 0)$ mit $N(x) = 0$ (aber $x \neq 0$) nützt man aus, dass $P \in \mathfrak{Q}^*$ und es somit ein $Y = K(u, s, t) \in \mathfrak{Q}$ gibt, sodass $P \oplus Y$ eine Sekante ist. Mit derselben Argumentation wie oben gilt somit $N(u) = st$ und $f_N(x, u) = f_Q(P, Y) \neq 0$. Daher gilt auch

$$0 \neq x f_N(x, u) = x(\bar{x}u + \bar{u}x) = N(x)u + x\bar{u}x = x\bar{u}x.$$

Setzt man $X = R(x, u\bar{x})$, dann ergibt sich

$$X^\psi = K(x\bar{u}x, 0, 0) = K(f_N(x, u)x, 0, 0) = K(x, 0, 0) = P.$$

Aus $f_N(x, u) = x\bar{u} + u\bar{x} \neq 0$ erhält man außerdem

$$\begin{pmatrix} x & u\bar{x} \\ 1 & -\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_N(x, u) & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\bar{u} \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R),$$

womit X tatsächlich ein Punkt aus $\mathbb{P}(R)$ ist.

In jedem Fall erhält man den Punkt $P \in \mathfrak{Q}^*$ als Bild eines Punktes aus $\mathbb{P}(R)$, womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Damit wissen wir, wie wir die Punktmenge transportieren können. Jetzt kommen wir zur Frage, was mit den Ketten unter der Abbildung ψ passiert. Die Vorgangsweise dafür sieht folgendermaßen aus: Wir betrachten zuerst das Bild der „Standardkette“ $\mathbb{P}(K)$. Anschließend werden wir die Projektivitäten auf $\mathbb{P}(R)$ passend auf Automorphismen des Kettenraums auf der Quadrik übertragen. Starten wir also damit zu zeigen, dass das Bild der Standardkette auch eine Kette im Kettenraum auf \mathfrak{Q} ist.

Lemma 7.3.12

Sei $E_0 = K(1, 0, 0) \oplus K(0, 1, 0) \oplus K(0, 0, 1)$ und $C_0 := \mathbb{P}(K)$ die Standardkette von $\mathbb{P}(R)$. Dann ist E_0 eine zulässige Ebene und es gilt

$$C_0^\psi = \mathfrak{Q} \cap E_0 \in \mathcal{C}(\mathfrak{Q}). \quad (7.16)$$

Beweis:

Analog zum Beweis von Lemma 7.3.5 lässt sich zeigen, dass die Verbindungsgeraden der Punkte $K(1, 1, 1)$, $K(0, 1, 0)$ und $K(0, 0, 1)$ aus $E_0 \cap \mathfrak{Q}$ Sekanten sind. Nach Lemma 7.2.4 ist E_0 damit zulässig.

Einerseits ist für einen Punkt $R(k, l) \in C_0$ das Bild $R(k, l)^\psi = K(lk, k^2, l^2)$ ein Element der Ebene E_0 . Ist umgekehrt ein Punkt $K(k, l, m) \in E_0 \cap \mathfrak{Q}$. Dann ist $(k, l, m) \in K^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ mit $k^2 = lm$. Demnach ist entweder $l \in K^*$ oder $m \in K^*$ und man kann o.B.d.A. $l = 1$ oder $m = 1$ voraussetzen. Wir betrachten den Fall $l = 1$ (der Fall $m = 1$ folgt analog). Dann ist $K(k, 1, k^2) = R(1, k)^\psi$ und $R(1, k) \in C_0$. \square

Nun kommen wir zu den Projektivitäten. Diese transportieren wir zunächst auf Kollineationen des projektiven Raums über V .

Lemma 7.3.13

Sei $\varphi \in \text{PGL}_2(R)$ induziert durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$. Die lineare Bijektion auf dem Vektorraum V definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{M} : V \rightarrow V : (x, k, l) \mapsto & (\bar{d}xa + \bar{d}lc + \bar{b}ka + \bar{b}\bar{x}c, \\ & kN(a) + lN(c) + Sp(xa\bar{c}), \\ & kN(b) + lN(d) + Sp(xb\bar{d})) \end{aligned} \quad (7.17)$$

induziert eine Kollineation $\hat{\varphi}$ auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}(K, V)$ (vgl. [7], S. 35 f.). Dann ist die Abbildung

$$\Psi : \text{PGL}_2(R) \rightarrow \text{Aut}\mathbb{P}(K, V) : \varphi \mapsto \hat{\varphi} \quad (7.18)$$

ein wohldefinierter, injektiver Gruppenhomomorphismus.

Beweis:

Identifiziert man den Vektor $(x, k, l) \in V$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} k & \bar{x} \\ x & l \end{pmatrix}$, kann man leicht nachprüfen, dass \hat{M} sich schreiben lässt als

$$\hat{M} : \begin{pmatrix} k & \bar{x} \\ x & l \end{pmatrix} \rightarrow \bar{M}^T \begin{pmatrix} k & \bar{x} \\ x & l \end{pmatrix} M.$$

In dieser Darstellung sieht man direkt, dass

$$\text{GL}_2(R) \rightarrow \text{Aut}_K(V) : M \mapsto \hat{M}$$

und damit auch

$$\Psi : \text{PGL}_2(R) \rightarrow \text{Aut}\mathbb{P}(K, V) : \varphi \mapsto \hat{\varphi}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Für eine Matrix M der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit $a \in Z(R)^*$ reduziert sich die Abbildung \hat{M} zu

$$\hat{M} : V \rightarrow V : (x, k, l) \mapsto N(a)(x, k, l),$$

und induziert somit auf $\mathbb{P}(K, V)$ die Identität. Nach Satz 3.2.4 folgt, dass Ψ wohldefiniert ist.

Für den Beweis der Injektivität betrachtet man den Kern der Abbildung Ψ . Wie man leicht nachrechnen kann, induziert \hat{M} genau für $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mit $a \in Z(R)^*$ die Identität auf $\mathbb{P}(K, V)$, womit Ψ injektiv ist. \square

Als nächstes wollen wir überprüfen, wie die transportierten Projektivitäten auf der Quadrik wirken. Dazu betrachten wir die Wirkung auf die quadratische Form Q .

Lemma 7.3.14

Sei $\varphi \in \text{PGL}_2(R)$ induziert durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(R)$ und die lineare Bijektion \hat{M} wie in Lemma 7.3.13 erklärt. Dann gilt für alle Elemente $(x, k, l) \in V$

$$Q((x, k, l)^{\hat{M}}) = (N(a)N(d) + N(b)N(c) - Sp(\bar{d}\bar{c}\bar{a}\bar{b}))Q((x, k, l)) = c_{\hat{M}}Q((x, k, l)) \quad (7.19)$$

mit $c_{\hat{M}} \in K^*$. Daraus ergibt sich

$$\Omega^{\hat{\varphi}} = \Omega, \quad (7.20)$$

womit $\hat{\varphi}$ eingeschränkt auf die Menge Ω^* ein Element aus $\text{Aut}\Sigma(\Omega)$ ist.

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch direktes Berechnen des Bildes von $(x, k, l) \in V$ unter \hat{M} und anschließender Anwendung der quadratischen Form Q .

Da $M \in \text{GL}_2(R)$ invertierbar ist, muss für \hat{M}^{-1} in (7.19) der Faktor $c_{\hat{M}^{-1}}$ invers zu $c_{\hat{M}}$ sein. Daher gilt für alle $v \in V$

$$Q(v) = 0 \Leftrightarrow Q(v^{\hat{M}}) = 0,$$

was gleichbedeutend mit $\Omega^{\hat{\varphi}} = \Omega$ ist. Nach Lemma 7.2.7 ist $\hat{\varphi} \upharpoonright_{\Omega^*}$ somit ein Element aus $\text{Aut}\Sigma(\Omega)$. \square

Im Folgenden wird der Einfachheit halber nicht zwischen $\hat{\varphi}$ und $\hat{\varphi} \upharpoonright_{\Omega^*}$ unterschieden. Nun haben wir die Gruppe der Projektivitäten auf $\mathbb{P}(R)$ mit Ψ auf Elemente aus $\text{Aut}\Sigma(\Omega)$ abgebildet. Es ist aber nicht augenscheinlich klar, wie diese Abbildung mit der zuvor für die Punkte $\mathbb{P}(R)$ definierte Abbildung ψ zum Transport auf Ω^* zusammenwirkt. Den Zusammenhang der beiden Abbildungen liefert das folgende Lemma.

Lemma 7.3.15

Für $\varphi \in \text{PGL}_2(R)$ sei $\hat{\varphi}$ wie in Lemma 7.3.13 erklärt. Weiters sei ψ die Abbildung aus Satz 7.3.10. Dann gilt

$$\varphi\psi = \psi\hat{\varphi}. \quad (7.21)$$

Das heißt die Permutationsgruppen $(\text{PGL}_2(R), \mathbb{P}(R))$ und $(\text{PGL}_2(R)^\psi, \Omega^*)$ sind ähnlich.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(R) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(R) \\ \psi \downarrow & & \psi \downarrow \\ \Omega^* & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \Omega^* \end{array}$$

Beweis:

Sei φ induziert von der Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dann wird $\hat{\varphi}$ induziert von

$$\hat{M} : V \rightarrow V : \begin{pmatrix} k & \bar{x} \\ x & l \end{pmatrix} \rightarrow \bar{M}^T \begin{pmatrix} k & \bar{x} \\ x & l \end{pmatrix} M.$$

Für einen Punkt $R(x, y)$ aus $\mathbb{P}(R)$ berechnet man einerseits

$$\begin{aligned} R(x, y) &\xrightarrow{\varphi} R(xa + yc, xb + yd) \\ &\xrightarrow{\psi} K(\overline{(xb + yd)}(xa + yc), N(xa + yc), N(xb + yd)), \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} R(x, y) &\xrightarrow{\psi} K(\bar{y}x, N(x), N(y)) \\ &\xrightarrow{\hat{\varphi}} \bar{M}^T \begin{pmatrix} N(x) & \bar{x}y \\ \bar{y}x & N(y) \end{pmatrix} M \\ &= \begin{pmatrix} N(xa + yc) & \overline{(xa + yc)}(xb + yd) \\ (xb + yd)(xa + yc) & N(xb + yd) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Da wir nun gesehen haben, dass die Standardkette aus $\Sigma(K, R)$ unter ψ in eine Kette und Projektivitäten von $\mathbb{P}(R)$ in Automorphismen des Kettenraums $\Sigma(\Omega)$ übergehen, ergibt sich nun automatisch, was mit den restlichen Ketten von $\Sigma(K, R)$ unter ψ geschieht.

Satz 7.3.16

Für alle Ketten C der Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$ ist das Bild unter ψ aus (7.14) eine Kette aus $\mathcal{C}(\Omega)$.

Beweis:

Sei $C \in \mathcal{C}(K, R)$, dann gilt $C = C_0^\varphi$, wobei C_0 die Standardkette $\mathbb{P}(K)$ und φ eine Projektivität von $\mathbb{P}(R)$ bezeichnet. Nach Lemma 7.3.12 ist $C_0^\psi = C'$ eine Kette aus $\mathcal{C}(\Omega)$. Nach Lemma 7.3.15 gilt

$$C'^\psi = C_0^{\varphi\psi} = C_0^{\psi\hat{\varphi}} = C'^{\hat{\varphi}}.$$

Da $\hat{\varphi}$ ein Element aus $\text{Aut}\Sigma(\Omega)$ ist, ist $C'^{\hat{\varphi}}$ somit eine Kette aus $\mathcal{C}(\Omega)$. \square

Bevor wir zum Beweis der Hauptaussage dieses Abschnitts kommen, fehlt nun nur noch die Antwort auf die Frage, was mit distanten Punkten unter der Abbildung ψ geschieht.

Lemma 7.3.17

Für je zwei Punkte X und Y aus $\mathbb{P}(R)$ gilt

$$X \triangle Y \Leftrightarrow X^\psi \triangle Y^\psi. \quad (7.22)$$

Beweis:

Seien X und Y zwei distante Punkte. Da $\text{PGL}_2(R)$ transitiv auf der Menge $\mathbb{P}(R)$ operiert und man nach Lemma 7.3.15 und Lemma 7.3.14 für jedes $\varphi \in \text{PGL}_2(R)$ ein $\hat{\varphi} \in \text{Aut}\Sigma(\Omega)$ konstruieren kann, welches die Distanz erhält, kann man o.B.d.A. von $X = R(1, 0)$ und $Y = R(a, b)$ ausgehen. Dann gilt

$$\begin{aligned} X \triangle Y &\Leftrightarrow b \in R^* \Leftrightarrow N(b) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow f_Q((0, 1, 0), (\bar{b}a, N(a), N(b))) = -N(b) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow X^\psi \oplus Y^\psi \text{ ist eine Sekante} \\ &\Leftrightarrow X^\psi \triangle Y^\psi, \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Damit kommen wir zum Hauptresultat des Abschnitts.

Satz 7.3.18

Sei R eine kinematische Algebra über dem Körper K und \mathfrak{Q} die projektive Quadrik definiert über die quadratische Form aus Lemma 7.3.4. Dann ist die Abbildung ψ aus (7.14) ein Isomorphismus der Kettenräume $\Sigma(K, R)$ und $\Sigma(\mathfrak{Q})$. Der Kettenraum auf der Quadrik \mathfrak{Q} ist die so genannte *Hotje-Darstellung* der Kettengeometrie $\Sigma(K, R)$.

Beweis:

Aus Lemma 7.3.17 folgt bereits, dass ψ ein Morphismus von Distanzräumen ist. Weiters gilt nach Satz 7.3.16, dass ψ ein Isomorphismus von Inzidenzstrukturen ist. Für die Eigenschaft eines Isomorphismus von Kettenräumen fehlt nur noch zu zeigen, dass jede Kette aus $\mathcal{C}(\mathfrak{Q})$ das ψ -Bild einer Kette aus $\mathcal{C}(K, R)$ ist.

Sei also $C = (XYZ) \in \mathcal{C}(\mathfrak{Q})$ eine Kette, festgelegt durch drei paarweise distante Punkte X, Y und Z . Dann sind nach Lemma 7.3.17 aber auch $X^{\psi^{-1}}, Y^{\psi^{-1}}$ und $Z^{\psi^{-1}}$ paarweise distant und bestimmen eine Kette $C' = (X^{\psi^{-1}}, Y^{\psi^{-1}}, Z^{\psi^{-1}}) \in \mathcal{C}(K, R)$. Nach Satz 7.3.16 ist C'^{ψ} nun aber auch eine Kette in $\mathcal{C}(\mathfrak{Q})$, welche die Punkte X, Y und Z enthält. Nach (K2) in $\Sigma(\mathfrak{Q})$ gilt damit $C = C'^{\psi}$, womit die Behauptung gezeigt ist. \square

7.4 Hotje-Darstellung spezieller Kettengeometrien

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir für die drei Beispiele aus Kapitel 5 die Hotje-Darstellung nachrechnen. Da im Kapitel 5 bereits demonstriert, ist zu erwarten, dass für die Algebra \mathbb{C} eine Kugel, für die Algebra der dualen Zahlen $\mathbb{R}(\varepsilon)$ ein Zylinder und für die Algebra $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein einschaliges Hyperboloid das Ergebnis ist. Alle Algebren werden dabei über dem Körper \mathbb{R} betrachtet.

Es werden im Folgenden die Elemente von \mathbb{C} und $\mathbb{R}(\varepsilon)$ in kanonischer Weise mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ identifiziert und die Koordinaten des vierdimensionalen Vektorraums V in allen Fällen mit (x_0, x_1, x_2, x_3) bezeichnet. Die quadratische Form Q aus Lemma 7.3.4 schreibt sich somit als

$$Q : V \rightarrow V : (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto N((x_0, x_1)) - x_2x_3.$$

Die Berechnung der Quadrik in den einzelnen Fällen besteht damit nur im Einsetzen der entsprechenden Norm aus Beispiel 7.3.3.

- Beginnen wir mit der Algebra \mathbb{C} über \mathbb{R} . In diesem Fall erhält man für die Quadrik

$$\mathfrak{Q} = \{ \mathbb{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4) \mid x_0^2 + x_1^2 - x_2x_3 = 0 \}.$$

Durch einen Koordinatenwechsel, den man leicht nachrechnen kann, erhält man

$$\mathfrak{Q} = \{ \mathbb{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \},$$

was in affinen Koordinaten der Einheitskugel mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

entspricht.

- Für die Algebra $\mathbb{R}(\varepsilon)$ gilt für die Quadrik

$$\Omega = \{ \mathbb{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4) \mid x_0^2 - x_2x_3 = 0 \}.$$

Durch einen Koordinatenwechsel berechnet man in diesem Fall

$$\Omega = \{ \mathbb{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \},$$

was in affinen Koordinaten dem Zylinder mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

entspricht.

- Zum Schluss erhält man für die Algebra $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die entsprechende Quadrik

$$\Omega = \{ \mathbb{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4) \mid x_0x_1 - x_2x_3 = 0 \}.$$

Abermalige Anwendung eines Koordinatenwechsels liefert die Darstellung

$$\Omega = \{ \mathbb{R}(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^4) \mid -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \},$$

was in affinen Koordinaten dem einschaligen Hyperboloid mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

entspricht.

Literaturverzeichnis

- [1] I. T. Adamson. *Rings, Modules and Algebras*. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1971.
- [2] W. Benz. *Vorlesungen über Geometrie der Algebren*. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [3] A. Blunck, A. Herzer. *Kettengeometrien Eine Einführung*. Shaker, Aachen, 2005.
- [4] M. Goldstern. *Algebra*. Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien, 2008.
- [5] H. Havlicek. *Ringgeometrien*. Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien.
- [6] H. Havlicek. *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. Heldermann, Lemgo, 2008.
- [7] H. Havlicek. *Projektive Geometrie*. Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien, 2011-2012.
- [8] H. Havlicek. *Divisible Designs, Laguerre Geometry and Beyond*. J. Math. Sci. (N. Y.), 186:882–926, 2012.
- [9] A. Herzer. *Chain Geometries*. F. Buekenhout, (Hrsg.), *Handbook of Incidence Geometry*, 781–842. Elsevier Science B.V., 1995.
- [10] H. Karzel. *Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 41:158–171, 1974.
- [11] G. Maresch. *Komplexe Analysis*. TU Wien, 2010.
- [12] J. Parkkonen. *Hyperbolic Geometry*. ETH Zürich, 2012.
- [13] M. Peternell. *Kreis- und Kugelgeometrien*. Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie, TU Wien, 2012.
- [14] G. Scheja, U. Storch. *Lehrbuch der Algebren, Teil 1*. B. G. Teubner, Stuttgart, 1980.
- [15] F. D. Veldkamp. *Projective Ring Planes and their Homomorphisms*. R. Kaya, P. Plaumann, K. Strambach, (Hrsg.), *Rings and Geometry*, 289–296. D. Reidel Publishing Company, 1985.
- [16] P. Wittbold. *Funktionalanalysis I*. TU Berlin, 2006.

Symbolverzeichnis

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 36	$\Delta(p, q)$, 11
$\bar{C} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 47	$\Delta(J)$, 73
(A1), 41	$e(x)$, 67
(A2), 41	E_0 , 55, 92
(A3), 41	$\text{End}_K(V)$, 8
(K1), 38	G , 5
(K2), 38	$\text{GL}_2(R)$, 9
(K3), 39	$\text{GL}_n(\mathbb{R})$, 2
(K4), 44	\mathfrak{H} , 63
0, 1	I , 23
1, 1	∞ , 40
\mathbb{A} , 41	ι , 54
$\mathbb{A}(K, V)$, 42	J , 67
$\mathbb{A}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 54	$K[\alpha]$, 51
$\text{Aff}_P(\Sigma)$, 46	$K(\varepsilon)$, 4
$\text{Aut}_R(M)$, 7	$K(\varepsilon)^*$, 4
$\text{Aut}(\mathbb{P}, \Delta)$, 12	L , 51
$\text{Aut}(R)$, 4	M , 15
β , 58	\hat{M} , 93
$B_G(x)$, 5	$m_\alpha(X)$, 51
C_0 , 92	μ_φ , 55
\bar{C}' , 49	N , 55, 86
C_j , 74	\mathbb{P} , 11
$\mathbb{C} \cup \infty$, 55	$\mathbb{P}(J)$, 71
\mathcal{C}_X , 40	$\text{PGL}_2(R)$, 20
$\mathcal{C}(\Delta(P))$, 46	$\hat{\varphi}$, 93
$\mathcal{C}(K, R, J)$, 74	Ψ , 58
$\mathcal{C}(\Omega)$, 80	Q , 77
$\mathcal{C}(\mathbb{S})$, 65	Ω , 78
$\mathcal{C}(S, R)$, 36	Ω^* , 78
$\bar{\mathcal{C}}(K, R)$, 47	R , 1, 15
Δ , 11	
$\Delta(p)$, 11	

R^* , 2
 S , 66
 \mathfrak{S} , 58
 \mathbb{S} , 65
 \mathbb{S}_2 , 55
 Sp , 86
 $Stab_G(x)$, 5
 $Stab_G(A)$, 5
 $Stab_G^p(A)$, 5
 Σ_X , 40
 $\Sigma(K, R)$, 40
 $\Sigma(K, R, J)$, 74
 $\Sigma(\mathfrak{Q})$, 80
 $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 54
 $\Sigma(S, R)$, 36
 $\Sigma_{\text{aff}}(K, R)$, 47
 $\Sigma_{\text{aff}}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, 54
 \mathcal{T}_X , 78
 (u, v) , 15
 $Z(R)$, 1

Sachverzeichnis

- 2- Δ -transitiv, 13
 - scharf, 13
- 3- Δ -transitiv, 13
 - scharf, 13
- affine Gerade
 - über einem Ring, 16
- affiner Raum, 41
 - partiell, 43
 - zu einem Vektorraum, 42
- Affiner Spurraum, 46
- Algebra
 - kinematisch, 86
 - Unteralgebra, 66
 - Unteralgebra von A erzeugt, 66
- algebraisch, 51
- allgemeine lineare Gruppe, 2
- Automorphismus
 - von Distanzräumen, 12
 - von R -Modulen, 7
 - von Inzidenzstrukturen, 44
 - von Kettenräumen, 44
 - von Ringen, 4
 - von schwachen Kettenräumen, 44
 - von schwachen Kettenräumen i.e.S., 44
- Bahn, 5
- Basis, 8
- Benzebene, 51
- Blaschke-Abbildung, 58
- Blaschke-Zylinder, 58
- Determinante, 10
- distant, 11
- Distanzraum, 11
 - nichttrivial, 11
 - stabil, 11
 - zusammenhängend, 11
- Distanzrelation, 11
- Doppelpunkt, 78
- Einbettung von Distanzräumen, 32
- Einheit, 2
- Einheitengruppe, 2
- Einheitsmatrix, 2
- Elementare Spalten- bzw. Zeilenumformungen, 9
- Gerade, 41
- Homomorphismus
 - kanonisch, 4
 - von R -Modulen, 7
 - von Ringen, 4
- Hotje-Darstellung, 96
- Hua-Identität, 70
- Ideal, 3
 - Ideal erzeugt von A , 3
 - Linksideal, 3
 - maximal, 3
 - Rechtsideal, 3
- inverses Element, 2
 - Linksinverses, 2
 - Rechtsinverses, 2
- Inversion, 54
- invertierbar, 2
 - links, 2
 - rechts, 2
- Inzidenzstruktur, 35
 - mit Distanzrelation, 38
- irreduzibel, 51
- Isomorphismus
 - von Distanzräumen, 12
 - von R -Modulen, 7
 - von Inzidenzstrukturen, 44
 - von Kettenräumen, 44
 - von Ringen, 4
 - von schwachen Kettenräumen, 44
 - von schwachen Kettenräumen i.e.S., 44

Jordan-abgeschlossen, 67
 Jordan-System, 67
 Körpererweiterung
 algebraisch, 52
 quadratisch, 52
 Kette, 36
 affin, 46, 47
 Kettengeometrie, 36
 über der Algebra (K, R, J) , 74
 über der Algebra (S, R) , 36
 affin, 47
 Kettenraum, 44
 auf einer Quadrik, 80
 schwach, 38
 schwach i.e.S., 39
 Koordinaten, 8
 Laguerreebene, 56
 Lenz-Axiom, 41
 Linearform, 7
 Möbiusebene, 54
 reell, 54
 Möbiuskreis, 55
 Möbiusraum, 54
 Möbiustransformation, 55
 Minimalpolynom, 51
 Minkowskiebene, 61
 Modul, 6
 frei, 8
 Linksmodul, 5
 Rechtsmodul, 5
 treu, 8
 Unterm modul, 6
 zyklisch, 6
 Morphismus
 von Distanzräumen, 12
 von Inzidenzstrukturen, 44
 von Kettenräumen, 44
 von schwachen Kettenräumen, 44
 von schwachen Kettenräumen i.e.S., 44
 Norm, 86
 normiert, 51
 Operation, 5
 orientierte Gerade, 58
 Parallelen-Axiom, 41
 Parallelogramm-Axiom, 41
 Passante, 78
 Polynomring, 2
 projektive Gerade
 über einem starken Jordan-System, 71
 über einem Ring, 15
 zu einem Modul, 15
 projektive Gruppe, 20
 Projektivität, 20
 Punkt, 11, 41
 Quadratische Form, 77
 Quadrik, 78
 Rang, 8
 stabil, 29
 Residuum, 40
 Residuumsgerade, 40
 Resolventenmenge, 68
 Restklassenring modulo m , 4
 Ring, 1
 Faktoring, 3
 kommutativ, 1
 lokal, 23
 mit 1, 1
 stabil, 28
 Unterring, 3
 Unterring erzeugt von A , 3
 Ring der dualen Zahlen, 4
 Sekante, 78
 Speer, 58
 Spektrum, 68
 Spur, 86
 Stabilisator, 5
 punktweise, 5
 stark, 67
 Tangente, 78
 Tangentialraum, 78
 unimodular, 18
 Unterraum, 65
 schwach, 65
 Zentrum, 1
 zulässige Ebene, 80