



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN**

Vienna University of Technology

## **Diplomarbeit**

# **Numerische Simulation der Strömung in der Beschaufelung einer Luftturbine**

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines

## **Diplom-Ingenieurs**

unter der Leitung von

**Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Reinhard Willinger**

(E302 Institut für Energietechnik und Thermodynamik, Forschungsbereich: Strömungsmaschinen)

**Dipl.-Ing. Dr. techn. Albert Benoni**

(E302 Institut für Energietechnik und Thermodynamik, Forschungsbereich: Strömungsmaschinen)

eingereicht an der Technischen Universität Wien

**Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften**

von

**Igor Grujic**

0725812 (066 445)

Troststraße 100

1100 Wien

Wien, im Februar 2014



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

Ich habe zur Kenntnis genommen, dass ich zur Drucklegung meiner Arbeit unter der Bezeichnung

## **Numerische Simulation der Strömung in der Beschaufelung einer Luftturbine**

nur mit Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Ich erkläre weitersan Eides statt, dass ich meine Diplomarbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen selbstständig ausgeführt habe und alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, genannt habe.

Weiters erkläre ich, dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher weder im In- noch Ausland (einer Beurteilerin/einen Beurteiler zur Begutachtung) in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe und dass diese Arbeit mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Wien, im Februar 2014

# Vorwort

Dem Herrn *Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Reinhard Willinger* möchte ich für die Vergabe dieser Diplomarbeit und seine ausgezeichnete Betreuung danken.

Herrn *Dipl.-Ing. Dr. techn. Albert Benoni* danke ich für die geduldige Betreuung und für seine fachlichen Ratschläge, die eine wichtige Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit waren.

Diese Arbeit ist meinen Eltern gewidmet, die mir das Studium ermöglicht haben. Dafür, dass sie mich stets unterstützt und mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind, gilt ihnen herzlichster Dank. Ebenso möchte ich meiner Schwester und meiner Freundin danken.

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die numerische Simulation der inkompressiblen, turbulenten, ebenen Strömung in den Gittern einer axialen Kaltluftturbine. Das Ziel ist die Berechnung der Einzelgittercharakteristiken der Leit- und Laufreihe. Genauer gesagt handelt es sich hierbei um den Abströmwinkel und den Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit des Zuströmwinkels. Des Weiteren werden die Nachlaufdüse und die statische Druckverteilung untersucht. Die anschließende Stufensimulation nach dem Mischungsebenenansatz dient der Ermittlung der Turbinenkennlinie und des Wirkungsgrades.

Aufgrund fehlender Messergebnisse werden zumindest die numerisch ermittelten Verlustbeiwerte des Leit- und Laufgitters anhand einer analytischen Stufennachrechnung beziehungsweise Verlustberechnung verifiziert. In diesem Zusammenhang sind die theoretischen Grundlagen axialer Turbinenstufen und die Behandlung auftretender Verlustquellen kurz zusammengefasst.

Eine bündige Darstellung der Modellierung turbulenter Strömungen mit Hauptaugenmerk auf die Grenzschichtbehandlung liegt ebenfalls vor. Die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen sind angegeben, die die Basis für das verwendete CFD-Programm ANSYS FLUENT bilden. Die Funktionsweise einiger Turbulenzmodelle wird behandelt, vor allem des zur Modellierung der Grenzschicht und Turbulenzen eingesetzten Menter-modifizierten  $k-\omega$ -SST-Modells.

Die Schaufelmodelle werden anhand vorliegender Datenblätter erstellt. Das verwendete Umströmungsgitter wird mit dem Programm ICEM CFD vernetzt. Die verwendete Netztopologie, aber vor allem die Randbedingungen werden näher erläutert. Ebenso sind die in ANSYS FLUENT durchgeführten Einstellungen vermerkt.

Schlussendlich findet eine grafische Darstellung und Auswertung der numerischen Ergebnisse statt. Zur höheren Übersichtlichkeit werden das Leit- und Laufgitter nacheinander behandelt. Ebenso wird auf die Auswertung der Turbinenkennlinie und Ermittlung des Stufenwirkungsgrades näher eingegangen.

Für Leit- und Laufgitter werden Berechnungen der Gittercharakteristiken und Verlustbeiwerte jeweils an der Schaufelnabe, in der Schaufelmitte und an der Schaufelspitze ausgeführt.

# Abstract

This master thesis deals with the numerical simulation of incompressible, turbulent, two-dimensional flow in the cascades of an axial air turbine. The goal is to calculate the individual characteristics of the guide row and rotor row. More specifically, these are the exit flow angle and the total pressure coefficient depending on the inlet flow angle. Further are the wake and the static pressure distribution examined. The numerical simulation of the turbine stage based on the Mixing-Plane-Method is used to determine the characteristic curve of turbine and the stage efficiency.

Due to lack of measurement results at least the numerically determined loss coefficients of the stator and rotor grid are verified with an analytical loss calculation. In this context, the theoretical foundations of axial turbine stages and the treatment occurring loss sources are summarized.

A presentation of the modeling of turbulent flows with a focus on the boundary layer treatment is also available. The full Navier-Stokes equations are given, which form the basis for using CFD program ANSYS FLUENT. The essentials of some turbulence models are discussed, especially the Menter-modified  $k-\omega$ -SST model which is used to model the boundary layer and turbulence.

The stator and rotor blades are created from existing data sheets. The calculation grid is meshed with the ICEM CFD program. The mesh topology, but most of all the boundary conditions are explained in detail. Those in ANSYS FLUENT implemented settings are also noted.

Finally, there will be a graphical representation and analysis of the numerical results. For greater clarity, the stator and rotor simulations are treated separately. Also, a further reflection of the evaluation of the characteristic turbine curve and the stage efficiency is given.

The calculations of the cascade characteristics and loss coefficients are carried out respectively at the blade hub, in the blade middle and at the blade tip.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundgleichungen der axialen Turbinenstufe</b>	<b>2</b>
2.1	Ideales Gas .....	3
2.2	Geschwindigkeitsdreieck .....	4
2.3	Arbeitsumsetzung .....	4
2.4	Dimensionslose Kennzahlen .....	6
2.5	Wirkungsgrade .....	7
2.6	Abströmwinkel in geraden Turbinengittern .....	8
<b>3</b>	<b>Verluste in einer axialen Turbinenstufe</b>	<b>10</b>
3.1	Beschaufelungsverluste .....	11
3.1.1	Profilverluste .....	11
3.1.2	Randverluste .....	13
3.2	Zusatzverluste .....	14
3.2.1	Spaltverluste .....	14
3.2.2	Restliche Verluste .....	15
<b>4</b>	<b>Analytische Verlustberechnung der Kaltluftturbine</b>	<b>16</b>
4.1	Kenndaten der axialen Luftturbine .....	16
4.2	Auslegungsrechnung .....	18
4.3	Analytische Verlustberechnung .....	19
<b>5</b>	<b>Modellierung turbulenter Strömung</b>	<b>22</b>
5.1	Kenngrößen turbulenter Strömung .....	22
5.2	Grenzschicht .....	23
5.2.1	Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht .....	24
5.2.2	Ablösung der Grenzschicht .....	26
5.3	Navier-Stokes-Gleichungen .....	27
5.3.1	Vollständige Navier-Stokes-Gleichungen .....	27
5.3.2	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen .....	30
5.4	Turbulenzmodelle .....	31
5.4.1	Standard-k- $\epsilon$ -Modell .....	32
5.4.2	k- $\omega$ -Modell .....	33
5.4.3	k- $\omega$ -SST-Modell .....	34

5.5	Numerische Lösungsverfahren	35
5.6	Berechnungsverfahren für Turbomaschinen	37
5.6.1	Frozen-Rotor-Methode	37
5.6.2	Mixing-Plane-Methode	37
5.6.3	Instationäre Berechnung	38
<b>6</b>	<b>Modellerstellung und Simulation</b>	<b>39</b>
6.1	Stetigkeitsanforderungen der Profilgeometrie	39
6.2	Leitgitter	41
6.2.1	Profilgeometrie	41
6.2.2	Netzgenerierung	42
6.3	Laufgitter	46
6.3.1	Profilgeometrie	46
6.3.2	Netzgenerierung	47
6.4	Randbedingungen	49
6.5	Einstellungen in FLUENT	49
6.6	Stufenmodellierung	51
6.6.1	Randbedingungen	51
<b>7</b>	<b>Berechnungsergebnisse</b>	<b>53</b>
7.1	Mittelungsverfahren	53
7.2	Leitgitter	55
7.2.1	Grafische Auswertung	55
7.2.2	Abströmwinkel und Geschwindigkeitsverteilung	60
7.2.3	Profildruckverteilung	61
7.2.4	Verlusteigenschaften	63
7.3	Laufgitter	66
7.3.1	Grafische Auswertung	66
7.3.2	Abströmwinkel und Geschwindigkeitsverteilung	71
7.3.3	Profildruckverteilung	72
7.3.4	Verluste	74
7.4	Stufensimulation	76
7.4.1	Turbinenkennlinie	76
7.4.2	Gebläsekennlinie	76
7.4.3	Wirkungsgradbestimmung	76
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>79</b>

<b>Anhang A</b>	<b>Kaltluftturbine</b>	<b>i</b>
A.1	Diagramme für die analytische Verlustberechnung.....	i
A.2	Simulationsergebnisse für die Leitschaufelnabe und -spitze.....	iii
A.3	Simulationsergebnisse für die Laufschaufelnabe und -spitze.....	vii
A.4	Teilungsgemittelte Simulationsergebnisse .....	xi



# Formelzeichen

## Lateinische Formelzeichen

$a$	[ $m$ ]	Abstand im engsten Kanalquerschnitt
$a$	[ $J/kg$ ]	spezifische Arbeit
$A$	[ $m^2$ ]	Querschnittsfläche
$b$	[ $m$ ]	axiale Schaufelbreite
$c$	[ $m/s$ ]	Absolutgeschwindigkeit
$c_m$	[ $m/s$ ]	Meridiangeschwindigkeit
$c_p$	[ $J/kgK$ ]	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
$c_v$	[ $J/kgK$ ]	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
$C$	[ $-$ ]	Stetigkeit
$C_p$	[ $-$ ]	statischer Druckkoeffizient
$C_{pt}$	[ $-$ ]	Totaldruckkoeffizient
$C_{1\epsilon}, C_{2\epsilon}, C_\mu$	[ $-$ ]	Konstanten im $k$ - $\epsilon$ -Modell
$D$	[ $-$ ]	Differentialoperator
$d$	[ $m$ ]	Durchmesser
$e$	[ $J/kg$ ]	spezifische innere Energie
$E$	[ $-$ ]	Konstante im universellen Wandgesetz
$E_t$	[ $J$ ]	totale Energie
$E_{in}, E_{kin}, E_{pot}$	[ $J$ ]	innere, kinetische und potentielle Energie
$f^V$	[ $N/m^3$ ]	spezifische Volumenkraft
$g$	[ $m/s^2$ ]	Erdbeschleunigung
$h$	[ $J/kg$ ]	spezifische Enthalpie
$h_s$	[ $J/kg$ ]	spezifische isentrope Enthalpie
$i, j, k, l$	[ $-$ ]	Laufvariablen
$k$	[ $m^2/s^2$ ]	turbulente kinetische Energie
$k$	[ $-$ ]	Korrekturfaktor
$l$	[ $m$ ]	Schaufellänge
$L_t$	[ $m$ ]	turbulentes Längenmaß
$m$	[ $kg$ ]	Masse
$\dot{m}$	[ $kg/s$ ]	Massenstrom
$Ma$	[ $-$ ]	Machzahl
$n$	[ $U/min$ ]	Drehzahl
$P$	[ $Pa$ ]	statischer Druck
$p_{dyn}$	[ $Pa$ ]	Dynamischer Druck
$p_t$	[ $Pa$ ]	Totaldruck
$P$	[ $J/s$ ]	Leistung
$P$	[ $m^2/s^3$ ]	turbulente Produktionsrate
$Pr$	[ $-$ ]	Prandtlzahl

$\dot{q}$	$[W/m^2]$	Wärmestromdichte
$\dot{Q}$	$[J/s]$	Wärmemenge pro Zeit
$r$	$[m]$	Radius
$R$	$[J/kgK]$	spezielle Gaskonstante
$Re$	$[-]$	Reynoldszahl
$R_k$	$[-]$	Reaktionsgrad
$s$	$[J/kgK]$	spezifische Entropie
$s$	$[m]$	Sehnenlänge
$s^*$	$[-]$	normierte Bogenlänge
$t$	$[s]$	Zeit
$t$	$[m]$	Schaufelteilung
$T$	$[K]$	Temperatur
$Tu$	$[-]$	Turbulenzgrad
$u$	$[J/kg]$	spezifische innere Energie
$u$	$[m/s]$	Umfangsgeschwindigkeit
$u$	$[m/s]$	Geschwindigkeitskomponente in $x$ -Richtung
$u^+$	$[-]$	dimensionslose Geschwindigkeit
$u_\tau$	$[m/s]$	Schubspannungsgeschwindigkeit
$v$	$[m/s]$	Geschwindigkeitskomponente in $y$ -Richtung
$\dot{V}$	$[m^3/s]$	Volumenstrom
$w$	$[m/s]$	Relativgeschwindigkeit
$\dot{W}$	$[J/s]$	Leistung
$x, y, z$	$[-]$	kartesische Koordinaten
$y^+$	$[-]$	dimensionsloser Wandabstand

### Griechische Formelzeichen

$\alpha$	$[^\circ]$	Absoluter Strömungswinkel, gemessen von der positiven Umfangersrichtung
$\beta$	$[^\circ]$	Absoluter Strömungswinkel, gemessen von der positiven Umfangersrichtung
$\beta^+$	$[^\circ]$	Relativer Strömungswinkel, gemessen von der negativen Umfangersrichtung
$\alpha, \beta, \beta^*$	$[-]$	Konstanten in den Turbulenzmodellen
$\gamma$	$[^\circ]$	Staffelungswinkel
$\delta$	$[m]$	Hinterkantendicke
$\delta$	$[m]$	Spaltweite
$\delta_{i,j}$	$[-]$	Kronecker-Symbol
$\varepsilon$	$[m^2/s^3]$	Turbulente Dissipationsrate
$\kappa$	$[-]$	Isentropenexponent
$\lambda$	$[J/msK]$	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda$	$[m^2/s]$	Volumenviskosität ("bulk viscosity")
$\lambda$	$[-]$	Arbeitszahl
$\mu$	$[Pas]$	dynamische Viskosität
$\mu_t$	$[Pas]$	turbulente dynamische Wirbelviskosität

$\nu$	$[m^2/s]$	kinematische Viskosität
$\nu_t$	$[m^2/s]$	turbulente kinematische Wirbelviskosität
$\xi$	$[-]$	Koordinate in $x$ -Richtung
$\rho$	$[kg/m^3]$	Dichte
$\sigma$	$[-]$	Spannungsmatrix
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon, \sigma_\omega$	$[-]$	Konstanten in den Turbulenzmodellen
$\tau$	$[N/m^2]$	Schubspannung
$\tau_w$	$[N/m^2]$	Wandschubspannung
$\tau_{i,j}$	$[-]$	Spannungsmatrix
$\psi$	$[-]$	Druckzahl
$\varphi$	$[-]$	Lieferzahl
$\Phi$	$[J/m^3s]$	Dissipation
$\phi$	$[-]$	allgemeine Strömungsgröße
$\omega$	$[1/s]$	spezifische Dissipation
$\omega$	$[rad/s]$	Winkelgeschwindigkeit
$\eta$	$[-]$	Wirkungsgrad
$\zeta$	$[-]$	Verlustbeiwert
$\Delta$	$[-]$	Differenz

### Tiefgestellte Indizes

0	Kontrollfläche vor dem Leitschaufelgitter
1	Kontrollfläche nach dem Leitschaufel-, vor dem Laufschaufelgitter
2	Kontrollfläche nach dem Laufschaufelgitter
$n$	Normalrichtung
$s$	isentrop
$x, y, z$	$x$ -, $y$ - und $z$ -Richtung
$t$	Turbulent, total
$\infty$	ungestörte Strömung

### Hochgestellte Indizes

$(.)'$	für das Leitgitter geltend
$(.)''$	für das Laufgitter geltend
$\overline{(.)}$	zeitlich gemittelte Größe
$\overline{(.)}$	über die Teilung gemittelte Größe
$(.)*$	Schätzwert
$(.)'$	Korrekturwert
$(.)'$	Schwankungsanteil
$(.)^{0,1,2,3}$	Ordnung der Ableitung

# 1 Einleitung

Die Methoden der numerischen Strömungsmechanik (Computational Fluid Dynamics) werden seit Jahrzehnten eingesetzt, optimiert und weiterentwickelt. Mittlerweile hat sich CFD sowohl in der Forschung und Entwicklung als auch zur Behandlung industrieller Problemstellungen etabliert. Die verbreitetsten Modelle, die zur Behandlung komplexer Strömungseffekte wie Turbulenzen oder der Grenzschicht genutzt werden, basieren auf nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, bekannt als Navier-Stokes-Gleichungen. Gleichzeitig können diese numerisch durchaus höchst aufwändigen Lösungsmethoden eine erheblich hohe Rechnerleistung und Speicherkapazität erfordern. Aufgrund hoher Genauigkeit kann in manchen Fällen sogar auf die Modellversuche verzichtet werden. Häufig werden numerische Simulationen jedoch zur Verifizierung der experimentellen Versuchsergebnisse verwendet.

Im Rahmen dieser Arbeit werden jeweils die Charakteristiken des Leit- und Laufgitters einer axialen 1½-stufigen Kaltluftturbine berechnet. Die verwendeten Schaufelprofile weisen eine stark umlenkende Geometrie auf. Folglich werden die Gittercharakteristiken numerisch ermittelt. Dabei handelt es sich um den Abströmwinkel und den Totaldruckverlustbeiwert in Abhängigkeit des Zuströmwinkels. Die Variation des Leitgitterzuströmwinkels  $\alpha_0$  findet im Bereich zwischen  $60^\circ$  und  $120^\circ$  und des Laufgittereintrittswinkels  $\beta_1$  zwischen  $20^\circ$  und  $80^\circ$  in jeweils  $10^\circ$ -Schritten statt. Damit kann der direkte Vergleich zwischen Bauch- und Rückenstoß und ihren Auswirkungen auf den Verlustbeiwert vorgenommen werden. Außerdem sind die Verteilung der Abströmgeschwindigkeit (Nachlaufdüse), der statische Druckkoeffizient und die Profildruckverteilung auszuwerten.

Als Rechengebiet wird ein ebenes Umströmgebiet gewählt, das mit dem Programm ICEM-CFD blockstrukturiert vernetzt wird. Zur numerischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen wird das CFD-Programm ANSYS FLUENT verwendet, ein auf Finite-Volumen-Diskretisierung basierender Solver. Die Berechnungen beschränken sich auf eine inkompressible ebene Strömung, sodass Kompressibilitätseffekte unberücksichtigt bleiben. Zur Modellierung des turbulenten Strömungsfeldes wird das Menter-modifizierte  $k-\omega$ -SST-Turbulenzmodell verwendet. Um die Auswirkung der, mit der Schaufelhöhe zunehmenden, Teilung auf das Strömungsfeld zu untersuchen, werden die Berechnungen außer für den Mittelschnitt noch zusätzlich für die Schaufelnabe und Schaufelspitze wiederholt. Aufgrund ausstehender Messergebnisse wird eine qualitative Beurteilung der numerischen Berechnung erfolgen. Teilweise können die Leitgittercharakteristiken mit den numerischen Resultaten aus [14] und [17] verglichen werden. Zur Verifizierung der Verlustbeiwerte wird angelehnt an [7] eine analytische Verlustberechnung für den Auslegungspunkt der Turbinenstufe durchgeführt. Die Simulation der gesamten Turbinenstufe erfolgt nach dem Mischungsebenenansatz (Mixing Plane), bei dem nach dem Stator eine Umfangsmittelung der Strömungsgrößen stattfindet, mit denen anschließend das Rotorströmungsfeld berechnet wird. Die Turbinenkennlinie kann in weiterer Folge, direkt aus der Druckdifferenz zwischen Stufeneintritt und -austritt ermittelt werden.

## 2 Grundgleichungen der axialen Turbinenstufe

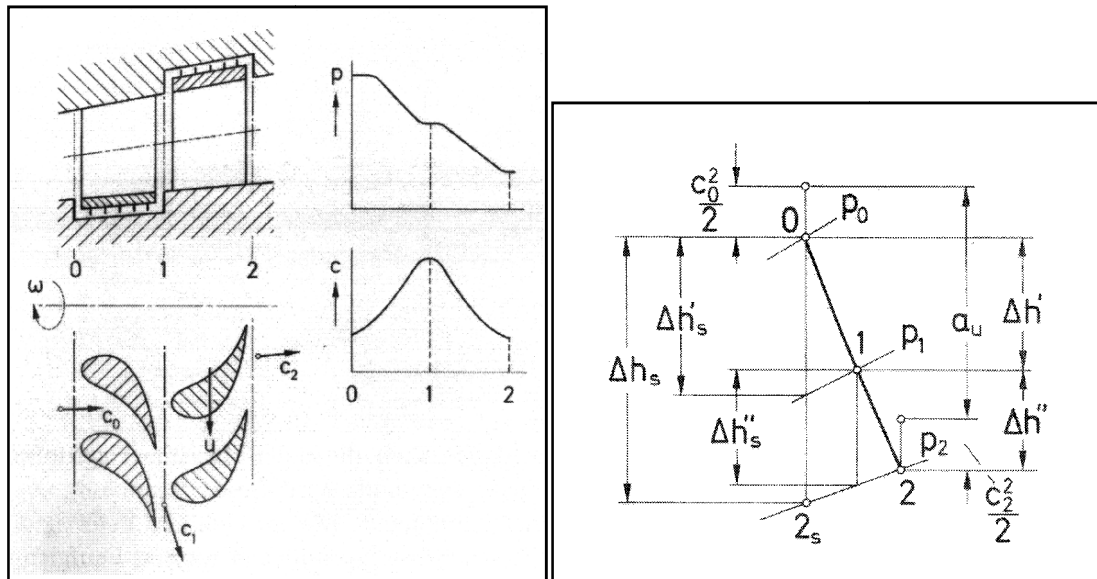
Das folgende Kapitel stellt eine bündige Zusammenfassung wichtigster kinematischer Beziehungen in axialen Turbomaschinen dar. Primär werden jene Gleichungen angegeben, die zur bevorstehenden analytischen Berechnung der Kaltluftturbine benötigt werden. Auf einen Bezug zu Verdichterstufen wird gänzlich verzichtet. Hierzu und auch für ausführlichere Informationen und Herleitungen wird auf die weiterführende Literatur wie *Willinger* [15] oder *Traupel* [13] verwiesen.

Moderne thermische Turbomaschinen werden meist mehrstufig ausgeführt, wobei man ein Paar aus einem stillstehenden und einem umlaufenden Schaufelkranz als Stufe bezeichnet. Die stillstehenden Schaufelkränze sind im Gehäuse befestigt und werden Leiträder oder auch Leitgitter genannt. Die mit dem Rotor verbundenen Schaufeln führen eine Drehbewegung aus, weshalb sie als Laufräder oder Laufgitter bezeichnet werden. Die Aufgabe besteht darin, das Arbeitsmedium von seinem durch ein höheres Druckniveau gekennzeichneten Anfangszustand auf einen Zustand niedrigeren Druckes zu bringen. Hierbei wird dem Arbeitsmedium Energie entzogen und in Wellenleistung umgewandelt.

Ausgehend vom Eintritt der axialen Turbinenstufe erfährt das arbeitsleistende Medium innerhalb des Leitgitters eine erhebliche Beschleunigung und eine möglichst weite tangentielle Umlenkung. Die Umlenkung sorgt dafür, dass die nachgeschaltete Laufreihe mit hohem Drall angeströmt wird. Innerhalb der Laufreihe wird die Strömung in ihre axiale Richtung zurückgelenkt, sodass sie das Laufgitter drallfrei beziehungsweise etwas drallbehaftet verlässt und zum nächsten Leitgitter strömt. Bezogen auf das Absolutsystem wird die Strömungsgeschwindigkeit in etwa auf ihren Zuströmwert gebracht. Durch die Impulsänderung im Arbeitsmedium resultiert eine Kraft, die vom Fluid auf die Laufschaufeln ausgeübt wird. Nach dem Hebelgesetz erzeugt diese ein Drehmoment auf die Welle. Wie später noch angegeben wird, ist der Drallunterschied zwischen Laufgittereintritt und -austritt für die Leistungserbringung und somit für die Effizienz ausschlaggebend. [15]

In der Abbildung 2.1 ist die Arbeitsweise einer axialen Turbinenstufe mit Hilfe eines Meridianschnittbildes grafisch dargestellt. Ebenso ist das Zusammenwirken zwischen der Geschwindigkeit und dem statischen Druck abgebildet. Wie die Bernoulligleichung lehrt, bewirkt jede Geschwindigkeitszunahme entlang einer Strombahnlinie im Gegenzug eine Senkung des statischen Druckes. Obwohl die Absolutgeschwindigkeit im Laufgitter abnimmt, bezogen auf das mit dem Laufrad rotierende Bezugssystem erfährt die Strömung eine Beschleunigung, wodurch der statische Druck weiter absinkt.

In der Abbildung 2.1 sind die Kontrollflächen für den Ein- und Austritt des Leit- und Laufgitters mit 0 – 1 – 2 gekennzeichnet. Sinngemäß werden die bilanzierten Zustandsgrößen und Geschwindigkeiten in der jeweiligen Kontrollfläche mit entsprechendem Index versehen.



**Abbildung 2.1:** (links) Arbeitsweise einer axialen Turbinenstufe, (rechts) Zustandsverlauf in der axialen Turbinenstufe [15]

## 2.1 Ideales Gas

Das ideale Gas stellt ein idealisiertes physikalisches Modell eines realen Gases dar. Trotz der durchaus starken Vereinfachungen kann das Verhalten realer Gase, speziell im Bereich niedrigerer Drücke ( $p < 0.5 \text{ MPa}$ ), ausgesprochen genau erfasst werden [2]. Charakteristisch für ideale Gase ist, dass sie den einfachen Gesetzen genügen. In diesem Fall lässt sich der Zusammenhang der Zustandsgrößen des Gases mit der thermischen Zustandsgleichung

$$pv = RT \quad (2.1)$$

angeben. Weiters ist die innere Energie  $u$ , und in weiterer Folge die Enthalpie  $h$  nur von der Temperatur abhängig.

$$du = c_v dT \text{ bzw. } dh = du + d(pv) = c_p dT \quad (2.2)$$

Die stoffspezifischen Parameter  $c_v(T)$  und  $c_p(T)$  sind für ideale Gase und Luft in der Regel komplexe Temperaturfunktionen. Sie lassen sich aus den Zusammenhängen

$$\kappa(T) = \frac{c_p(T)}{c_v(T)} \text{ und } R = c_p(T) - c_v(T) \quad (2.3)$$

bestimmen.

$$c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad (2.4)$$

$$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}. \quad (2.5)$$

Die spezifischen Wärmekapazitäten nehmen mit steigender Temperatur zu. Bei idealen Gasen und Luft kann man  $c_p$  über größere Temperaturbereiche durch die konstante mittlere spezifische Wärmekapazität ersetzen. [2]

## 2.2 Geschwindigkeitsdreieck

Für eine vollständige räumliche Erfassung des komplexen Strömungsverlaufs innerhalb der Turbinengitter wird in erster Linie auf Modellversuche zurückgegriffen. Ebenso häufig werden dreidimensionale numerische Strömungsberechnungen eingesetzt. Etwas einfacher gestaltet sich die Untersuchung des Geschwindigkeitsfeldes im zweidimensionalen Fall. Hierzu werden mehrere Schnitte durch die Beschauflung gelegt und in einer Ebene abgewickelt. Haben die Schaufeln im Vergleich zum mittleren Durchmesser eine kleine Länge, dann genügt es in der Regel, die Berechnung auf einen Mittelschnitt zu begrenzen, da die Änderungen (Geschwindigkeit) über der Schaufelhöhe gering sind. Die Geschwindigkeiten werden als impulsmäßige Mittelwerte betrachtet und können graphisch durch Vektoraddition aus den sogenannten Geschwindigkeitsdreiecken ermittelt werden.

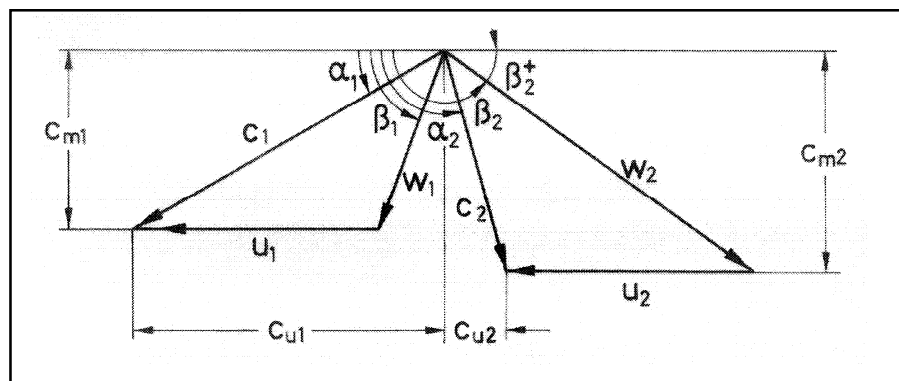


Abbildung 2.2: Geschwindigkeitsdreiecke einer Turbinenstufe [15]

Das Arbeitsmedium tritt mit der Zuströmgeschwindigkeit  $c_0$  in die erste Stufe ein und wird im Leitgitter auf die Absolutgeschwindigkeit  $c_1$  beschleunigt, wobei die Richtung durch die Leitschaufelgeometrie definiert wird. Sie lässt sich aus der Vektoraddition der Umfangsgeschwindigkeit am Laufgittereintritt und der relativen Laufradeintrittsgeschwindigkeit ermitteln

$$\vec{c}_1 = \vec{u}_1 + \vec{w}_1 \quad (2.6)$$

was das Eintrittsdreieck ergibt. Im Laufgitter wird die Relativgeschwindigkeit auf ihren Austrittswert  $w_2$  erhöht, die zusammen mit der Umfangsgeschwindigkeit  $u_2$  zu der absoluten Laufradaustrittsgeschwindigkeit  $c_2$  und somit zum Austrittsdreieck führt. Damit lassen sich unter Verwendung trigonometrischer Funktionen sämtliche Geschwindigkeitskomponenten ermitteln. Die Umfangskomponenten der Geschwindigkeiten werden in der Regel positiv gezählt, wenn sie in die Richtung der Umfangsgeschwindigkeit (Drehrichtung) zeigen.

## 2.3 Arbeitsumsetzung

Um einen direkten Bezug zu der Kaltluftturbine von Vornherein herzustellen, beziehen sich die Angaben folgender Gleichungen auf eine axiale Turbinenstufe mit zylindrischem Querschnitt. Obwohl die Umfangsgeschwindigkeit mit dem Radius zunimmt, so bleibt sie im Falle eines zylindrischen Querschnitts für den gesamten mittleren Schnitt konstant  $u_1 = u_2 = u$ . Ebenso ändert die axiale Durchflussgeschwindigkeit  $c_{ax}$  ihren Wert nicht. Diese

Vereinfachungen werden in den weiteren Gleichungen berücksichtigt. Des Weiteren wird der Rückgewinnungseffekt innerhalb der Stufe vernachlässigt, da der dadurch entstandene Fehler sehr gering ist.

Wie in der Funktionsbeschreibung bereits erwähnt, führt der Drallunterschied zwischen dem Laufgittereintritt und -austritt im Endeffekt zu einem auf die Welle ausgeübten Drehmoment. Infolgedessen kann am Rotor bei einer Umdrehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  theoretisch die Umfangsleistung

$$P_u = \dot{m}\omega r(c_1 \sin \alpha_1 - c_2 \sin \alpha_2) \quad (2.7)$$

abgeführt werden. Aus der Definition der Umfangsgeschwindigkeit  $u = r\omega$  und der Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit  $c_u = c \sin \alpha$ , gilt analog für die Relativgeschwindigkeit, folgt die massenstrombezogene am Radumfang geleistete Schaufelarbeit

$$a_u = u(c_{u1} - c_{u2}) \quad (2.8)$$

die ebenso als spezifische Umfangsarbeit bezeichnet wird. Diese Gleichung wird Eulersche Momentengleichung beziehungsweise Eulersche Hauptgleichung der Turbomaschinen genannt. Ebenso lässt sich die Schaufelarbeit aus der Zustandsänderung in der Turbinenstufe herleiten, die in der Abbildung 2.1 schematisch dargestellt ist. Das im Leitrad resultierende Enthalpiegefälle kann mit der Energiebilanzgleichung zwischen den Kontrollflächen 0 und 1 ermittelt werden

$$\Delta h' = h_0 - h_1 = \frac{c_1^2 - c_0^2}{2}. \quad (2.9)$$

Die Energiegleichung des Laufrades wird im rotierenden Koordinatensystem angegeben und lautet

$$\Delta h'' = h_1 - h_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}. \quad (2.10)$$

Somit beträgt die statische Enthalpiedifferenz in der Stufe

$$\Delta h = \Delta h' + \Delta h''. \quad (2.11)$$

Aus der Gleichung für die Totalenthalpie

$$h_t = h + \frac{c^2}{2} \quad (2.12)$$

folgt für die spezifische Stufenarbeit, die der Totalenthalpiedifferenz entspricht

$$a_u = \Delta h + \frac{c_0^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \quad (2.13)$$



Aufgrund entstehender Verluste ist das tatsächliche realisierbare Enthalpiegefälle  $\Delta h$  einer Stufe geringer als die idealisierte isentrope Enthalpiedifferenz  $\Delta h_s$ . Die auftretenden Verluste werden grundsätzlich in Beschauelungs- oder Strömungsverluste und Zusatzverluste unterschieden. Bei der Berechnung der Schaufelarbeit nach Glg. (2.8) oder (2.13) sind die Strömungsverluste bereits berücksichtigt. Einen wesentlichen Anteil der Zusatzverluste machen die Leckageverluste in den Radialspalten zwischen den stillstehenden und umlaufenden Bauteilen aus. Der Spaltmassenstrom  $\dot{m}'_{sp}$  bewirkt nach dem Leitrad Mischungsverluste und eine Enthalpieerhöhung des Hauptmassenstroms,  $\dot{m}''_{sp}$  trägt nicht zur Arbeitsleistung bei. Alle diese Verluste verringern die Schaufelarbeit und damit auch die Umfangsleistung auf

$$a_i = a_u - \Delta a'_{sp} - \Delta a''_{sp} - a_{zus} \quad (2.14)$$

beziehungsweise

$$P_i = \dot{m} a_i \quad (2.15)$$

wobei  $a_i$  die innere Arbeit und  $P_i$  die tatsächlich abgeführte innere Leistung bezeichnet.

## 2.4 Dimensionslose Kennzahlen

Das Verhältnis des Laufradenthalpiegefälles zum gesamten Stufengefälle wird als Reaktionsgrad bezeichnet

$$R_k = \frac{\Delta h''}{\Delta h' + \Delta h''} = \frac{\Delta h''}{\Delta h}. \quad (2.16)$$

In der Praxis wird der Reaktionsgrad während des Auslegungsprozesses festgelegt und hat einen Einfluss auf andere Kennzahlen, auf die Beschauelung und demzufolge auf das resultierende Geschwindigkeitsdreieck und den Zustandsverlauf. In der Praxis werden für Turbinenstufen üblicherweise Werte zwischen 0.1 bis 0.5 verwendet. Weitere charakteristische dimensionslose Kennzahlen einer Turbinenstufe sind die Durchflusszahl (oder Lieferzahl), die als Maß für die durch die Stufe transportierte Massenstrommenge dient

$$\varphi = \frac{c_m}{u}, \quad (2.17)$$

die Arbeitszahl, die im Endeffekt die Änderung der Totalenthalpie in der Stufe bezogen auf das Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit beschreibt

$$\lambda = \frac{c_{u1} - c_{u2}}{u} = \frac{a_u}{u^2} \quad (2.18)$$

und anschließend die Druckzahl, die die spezifische Arbeit auf die kinetische Energie (gebildet mit der Umfangsgeschwindigkeit) bezieht

$$\psi = \frac{a_u}{u^2/2}. \quad (2.19)$$

Diesen dimensionslosen Kennzahlen kommt eine große Bedeutung zu, da sie ausschlaggebend für die Anwendung sogenannter Ähnlichkeitsgesetze sind. Damit lassen sich aus Modellversuchen gewonnene Versuchsergebnisse auf praxisrelevante, industrielle Ausführungen anwenden.

## 2.5 Wirkungsgrade

Grundsätzlich stellt der Wirkungsgrad die tatsächlich, verlustbehaftet geleistete Arbeit zu der während der idealisierten Zustandsänderung geleisteten Arbeit ins Verhältnis. Wird die in der Geschwindigkeit am Laufradaustritt enthaltene Energie weiterhin verwertet, beispielsweise in der nachgeschalteten Stufe, so folgt für den inneren Total-zu-Totalwirkungsgrad

$$\eta_i = \frac{a_i}{\Delta h_s + \frac{c_0^2 - c_2^2}{2}} \quad (2.20)$$

und für den Umfangwirkungsgrad (Schaufelwirkungsgrad)

$$\eta_u = \frac{a_u}{\Delta h_s + \frac{c_0^2 - c_2^2}{2}} \quad (2.21)$$

Dieser lässt sich ebenso nur in Abhängigkeit von der verlustbehafteten Arbeit, unter Berücksichtigung der Gitterverluste, angeben

$$\eta_u = \frac{a_u}{a_u + \frac{c_1^2}{2} \left( \frac{1}{\eta'} - 1 \right) + \frac{w_2^2}{2} \left( \frac{1}{\eta''} - 1 \right)} \quad (2.22)$$

Bezieht man die Glg. (2.14) auf das isentrope Stufengefälle  $\Delta h_s$ , erhält man abschließend den statischen inneren Wirkungsgrad der Stufe in der Form

$$\eta_{i0} = \eta_{u0} - \zeta'_{sp} - \zeta''_{sp} - \zeta_{zus} \quad (2.23)$$

wobei  $\zeta$  die einzelnen Verlustbeiwerte bezeichnet und  $\eta_{u0}$  den statischen Umfangwirkungsgrad darstellt. Zur Effizienzbewertung des Leit- und Laufgitters dienen die Gitterwirkungsgrade, die sich mit der Berücksichtigung der Beschaukelungsverluste berechnen lassen. Ohne auf die genaue Herleitung näher einzugehen, werden die Wirkungsgrade bei bekannter Gitterkinematik im Leitgitter  $\eta'$  und Laufgitter  $\eta''$  wie folgt berechnet

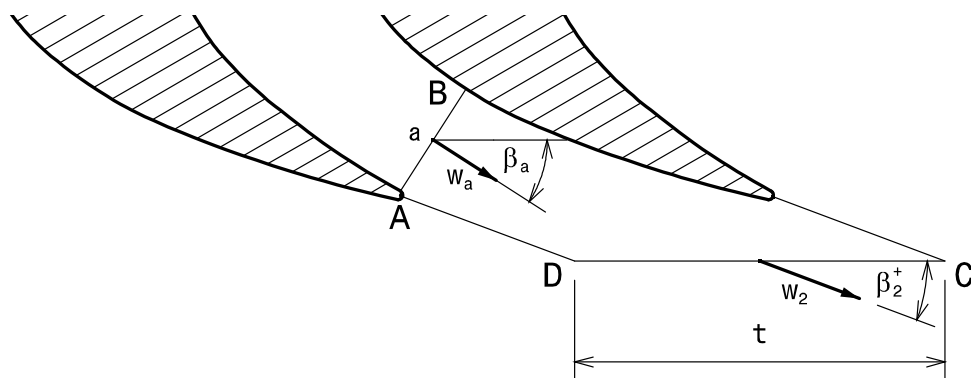
$$\eta' = \frac{c_1^2}{c_{1s}^2} \quad (2.24)$$

$$\eta'' = \frac{w_2^2}{w_{2s}^2} \quad (2.25)$$

worin  $c_{1s}^2$  und  $w_{2s}^2$  die während der isentropen Zustandsänderung gebildeten Geschwindigkeiten sind.

## 2.6 Abströmwinkel in geraden Turbinengittern

Um die Berechnung einer räumlichen Strömung auf einen abgewinkelten, ebenen Mittelschnitt reduzieren zu können, wird im Verhältnis zum mittleren Durchmesser eine kleine Schaufelhöhe vorausgesetzt. Aus der Grenzschichttheorie, die im Folgenden ausführlicher behandelt wird, ist bekannt, dass sich Reibungseffekte im wesentlichen auf die profilmahen Zonen beschränken, sodass die Außenströmung als annähernd reibungsfrei betrachtet werden kann. Bei einem stetigen Verlauf der Beschleunigung, ist die Berechnung der mittleren Strömung somit ausreichend. Dies ist vor allem bei stark umlenkender, eng geteilter Beschaukelung der Fall, bei denen die Gitter als ebene Strömungskanäle erscheinen. Aufschluss über die Abströmrichtung ergibt die Betrachtung des, für den Mittelschnitt des Laufgitters eingezeichneten, Kontrollvolumens ABCD, vgl. Abbildung 2.3.



**Abbildung 2.3:** Kontrollvolumen ABCD zur Herleitung des Abströmwinkels bei Unterschallströmung

Aus der Abbildung 2.3 sind die Axial- und Umfangskomponente der Abströmgeschwindigkeit direkt ablesbar

$$w_{2x} = w_2 \sin \beta_2^+ \quad (2.26)$$

$$w_{2u} = w_2 \cos \beta_2^+ . \quad (2.27)$$

Damit folgt die Beziehung für den relativen Abströmwinkel

$$\tan \beta_2^+ = \frac{w_{2x}}{w_{2u}} . \quad (2.28)$$

Die Massenbilanz zwischen der Kontrollfläche AB und dem Austrittsquerschnitt CD lautet

$$a \rho_a w_a = t \rho_2 w_{2x} . \quad (2.29)$$

Daraus folgt

$$w_{2x} = w_a \frac{a \rho_a}{t \rho_2} . \quad (2.30)$$

Die Impulsbilanz, angeschrieben in der allgemeinen Integralform, lautet

$$\oint_A \rho v_n \vec{v} dO + \oint_A p \vec{n} dO = \int_V \rho \vec{g} dV + \sum \vec{F}_K. \quad (2.31)$$

Mit der Voraussetzung, dass der Druck  $p$  entlang des Kontrollvolumens konstant bleibt und ebenso keine Kraft aus das Fluid wirkt, vereinfacht sich die Impulsbilanz zu

$$\oint_A \rho v_n \vec{v} dO = \rho_a \vec{w}_a w_{a,n} A_a + \rho_2 \vec{w}_2 w_{2,n} A_2, \quad (2.32)$$

womit sich zwei Bilanzgleichungen für die Axial- und Umfangsrichtung ergeben. Für die Umfangsrichtung liefert die Impulsbilanz

$$-\rho_a a w_a^2 \cos \beta_a + \rho_2 t w_2 \sin \beta_2^+ w_2 \cos \beta_2^+ = 0 \quad (2.33)$$

Zusammen mit der Glg. (2.30) folgt daraus

$$w_{2u} = w_a \cos \beta_a \quad (2.34)$$

Werden die Gleichungen (2.30) und (2.34) in Glg. (2.28) eingesetzt, so folgt für den mittleren Abströmwinkel bei Unterschallströmung

$$\tan \beta_2^+ = \frac{a \rho_a}{t \rho_2} \frac{1}{\cos \beta_a}. \quad (2.35)$$

Für den inkompressiblen Grenzfall gilt  $\rho_a = \rho_2$ , sodass der mittlere Abströmwinkel hauptsächlich von der Profilgeometrie im Austrittsbereich abhängt. Im eng geteilten Turbinengitter wird der Abströmwinkel in erster Linie vom Querschnittsverhältnis  $a/t$  und dem Korrekturfaktor bestimmt, ist somit weitgehend vom Zuströmwinkel unabhängig.

Setzt man weiters in grober Näherung  $\beta_a \approx \beta_2^+$ , so vereinfacht sich die Glg (2.35) zu der Sinusregel

$$\sin \beta_2^+ = \frac{a}{t}. \quad (2.36)$$

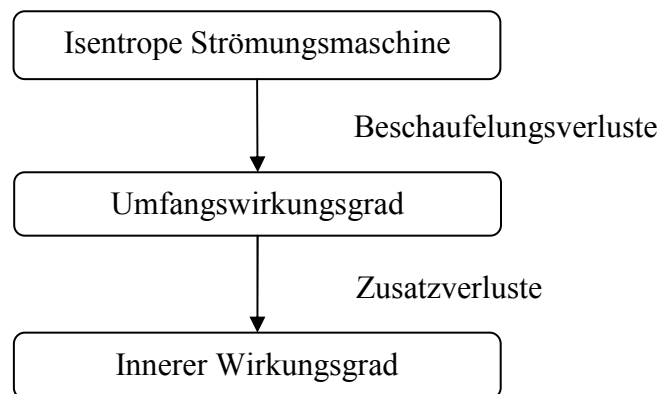
Diese Formel liefert vor allem im transsonischen Bereich  $Ma_2 \approx 1$  sehr gute Ergebnisse. Für kompressible Strömungen gibt Traupel [13] eine Formel an, die den Einfluss der Machzahl  $Ma_2$  auf den Abströmwinkel berücksichtigt.

$$\tan \beta_2^+ = \frac{a}{t} \frac{1}{\cos \beta_a} \left\{ 1 - \frac{Ma_2^2}{2} \left[ \left( \frac{\cos \beta_2^+}{\cos \beta_a} \right)^2 - 1 \right] \right\} \quad (2.37)$$

Diese Formel für den Abströmwinkel  $\beta_2^+$  kann nur iterativ gelöst werden, wobei sie in analoger Weise für das Leitgitter anzuwenden ist.

### 3 Verluste in einer axialen Turbinenstufe

Vor der genauen Klassifizierung der in Turbomaschinen auftretenden Verluste ist es vorteilhaft, sich mit den Wirkungsgraden auseinanderzusetzen, da diese zur Erfassung der Verluste verwendet werden. Geht man von dem isentropen Wirkungsgrad aus, so bezieht dieser die tatsächlich geleistete Nutzarbeit auf die bei einer idealisierten, adiabaten, reibungsfreien Zustandsänderung erzielbare Arbeit. Dissipation tritt im idealen Fall nicht auf, was bedeutet, dass der reversible Prozess ohne Energieverlust (z.B. Totaldruckverlust) stattfindet und in weiterer Folge zum höchsten Gitterwirkungsgrad führt. Die Wirkungsgrade einer realen Strömungsmaschine sind merklich geringer, wobei die Abnahme als Folge der vorherrschenden Verluste betrachtet werden kann.



**Abbildung 3.1:** Wirkungsgradentwicklung in einer Strömungsmaschine

Grundsätzlich unterscheidet man zwischen den inneren und äußeren Verlusten. Die äußeren Verluste haben keinen Einfluss auf den Verlauf der Zustandsänderung. Zu diesen gehören die Massenverluste an den Durchritten der Welle durch das Gehäuse, die jedoch mit konstruktiven Maßnahmen, wie beispielsweise Labyrinthdichtungen, sehr gering gehalten werden können. Ebenso enthalten sind die mechanischen Verluste infolge der Reibung, die durch den mechanischen Wirkungsgrad  $\eta_m$  angegeben werden. Die inneren Verluste hingegen treten direkt im Arbeitsfluid auf und beeinflussen somit den Ablauf der Zustandsänderung. Sie lassen sich prinzipiell unterteilen in Strömungsverluste innerhalb der Beschäufelung und Zusatzverluste, bei denen an erster Stelle die Spaltverluste zwischen den feststehenden und bewegenden Bauteilen überwiegen. Alle diese Verluste bewirken eine Absenkung der abgreifbaren Nutzenergie. Diese Energiedifferenz wird vom Arbeitsmittel aufgenommen, was zu einer Erwärmung des Fluids führt. [4, 15]

Aufgrund der direkten Auswirkung auf den Wirkungsgrad der realen Maschine, Abbildung 3.1, werden diese beiden Verlustkategorien im Folgenden näher ausgeführt.

### 3.1 Beschauelungsverluste

Die Hauptrolle spielen die Verluste im Inneren der Maschine, von denen die Verluste in der Beschauelung einen erheblichen Anteil ausmachen. Sie entstehen durch Reibung an der Schaufelprofiloberfläche und den Begrenzungswänden, durch Richtungs- und Querschnittsänderung und ebenso durch Strömungsablösung und Verdichtungsstöße. In ihrer Gesamtheit bewirken sie eine Verminderung der Gitterwirkungsgrade der Leit- und Laufreihe  $\eta'$  und  $\eta''$ . Diese werden im Folgenden allgemein, aufgrund identischer Gitterkinematik, als  $\eta$  bezeichnet und werden anhand folgender Beziehung erfasst:

$$\eta = 1 - \zeta. \quad (3.1)$$

Der Verlustbeiwert  $\zeta$  setzt sich zusammen aus dem Profilverlustbeiwert  $\zeta_P$  und dem Randverlustbeiwert  $\zeta_R$

$$\zeta = \zeta_P + \zeta_R. \quad (3.2)$$

#### 3.1.1 Profilverluste

Der Profilverlustbeiwert beinhaltet alle Verluste infolge der Reibungseffekte, der Strömungsablösung an der Hinterkante und der Diffusion und Dissipation im Nachlauf. Die in Wärme dissipierte Strömungsenergie führt zu einer Entropieerhöhung und folglich zum Totaldruckverlust. Rechnerisch kann der Profilverlust wie folgt ermittelt werden:

$$\zeta_P = (\zeta_{P0} + \zeta_\delta) k_F k_\Gamma k_{St} k_M. \quad (3.3)$$

Ein weiterer Korrekturfaktor berücksichtigt den Einfluss der Reynoldszahl, jedoch wird dieser auf den gesamten Verlustbeiwert angewendet. [15]

- **Grundverlustbeiwert  $\zeta_{P0}$**

Der Grundbeiwert des Profilverlustes ist von der Profilgestalt und somit vorrangig vom Umlenkwinkel, das heißt der Differenz zwischen dem Anström- und Abströmwinkel, abhängig. Weiteren Einfluss hat der Staffelungswinkel der Beschauelung, denn bei gleichem Umlenkwinkel kann durch Änderung des Staffelungswinkel eine beschleunigte, umgelenkte oder verzögerte Strömung erreicht werden. Für Turbinengitter kann  $\zeta_{P0}$  aus der Abbildung A.1 entnommen werden.

- **Hinterkantenverlustbeiwert  $\zeta_\delta$**

Aus herstellungstechnischen Gründen weist jedes Profilende eine gewisse Mindestdicke auf. Durch Messungen konnte man einen Hinterkantenunterdruck feststellen, der nach *Traupel* [13] berechnet werden kann

$$\Delta p = k \frac{\rho_a}{2} w_a^2 \quad (3.4)$$

mit  $k \approx 0.13 - 0.26$ . In diesem Gebiet treten zusätzliche Energiedissipationen auf. Dieser Effekt und somit in weiterer Folge der Verlustbeiwert an der Hinterkante  $\zeta_\delta$  ist somit primär von der Dicke der Hinterkante abhängig. Ferner spielt die Formgebung ebenfalls eine Rolle. Berechnen lässt sich der Hinterkantenverlustbeiwert nach

$$\zeta_\delta = k_\delta \frac{\delta}{t \sin \alpha_1} \quad (3.5)$$

wobei  $k_\delta$  ein vom Umlenkwinkel abhängiger Einflussfaktor und der Abbildung A.3 zu entnehmen ist.

- **Korrekturfaktor zu Berücksichtigung der Fächerung  $k_F$**

Bei der Verwendung von geraden Schaufeln in einer Turbine mit zylindrischem Querschnitt nimmt die Schaufelteilung von innen nach außen zu. Um die Verluste über die Schaufellänge vollständig erfassen zu können, müsste man den Verlustbeiwert für verschiedene Radien bestimmen und anschließend durch Integration über der Länge den Mittelwert bilden. Beschränkt man die analytische Berechnung, wie es in der Regel üblich ist, nur auf den ebenen Mittelschnitt, dann ist dieser Wert mit dem Korrekturfaktor

$$k_F = 1 + A \left( \frac{l}{d_m} \right)^2 \quad (3.6)$$

zu berichtigen. Der Faktor  $A$  berücksichtigt dabei die Profilgeometrie. Bei Schaufeln mit großem Vorderkantenradius, die üblicherweise unempfindlich auf Fehlanströmungen reagieren, ist  $A \approx 4$ . Für empfindliche Schaufeln mit großer Umlenkung, üblich bei Gleichdruckgittern, ist  $A \approx 6$  zu setzen [15].

- **Beiwert zur Berücksichtigung der Unregelmäßigkeit der Strömung  $k_\Gamma$**

Wie bereits erwähnt, entsteht hinter jeder Schaufel aufgrund der Strömungsablösung an der Hinterkante ein wirbelbehaftetes Nachlaufgebiet, wodurch die Gleichmäßigkeit der Anströmung des nachkommenden Gitters beeinträchtigt wird. Genauer gesagt, führt das am Eintritt des nachfolgenden Laufgitters zu einer periodisch wechselnden Zuströmung nach Betrag und Richtung. Unter Berücksichtigung des Schwankungsbeitrages der Gitteranströmgeschwindigkeit  $\Delta w_1$  und der Profilgeometrie mit dem Faktor  $F$  lässt sich der Korrekturbeiwert  $k_\Gamma$  wie folgt berechnen:

$$k_\Gamma = 1 + F \left( \frac{\Delta w_1}{w_1} \right)^2 \quad (3.7)$$

Für Turbinen mit kleinem Reaktionsgrad kann  $k_\Gamma$  in Abhängigkeit vom Axialspaltverhältnis und der Durchflusszahl aus der Abbildung A.6 entnommen werden.

- **Beiwert zu Berücksichtigung ungünstiger Anströmungswinkel  $k_{St}$**

Weichen die Betriebsbedingungen vom Auslegungspunkt ab, dann führt dies in der Regel zu fehlerhaften Anströmungswinkeln. Es kommt zu einer druck- oder saugseitigen Staupunktverschiebung und in weiterer Folge zu höherer Energiedissipation und steigenden

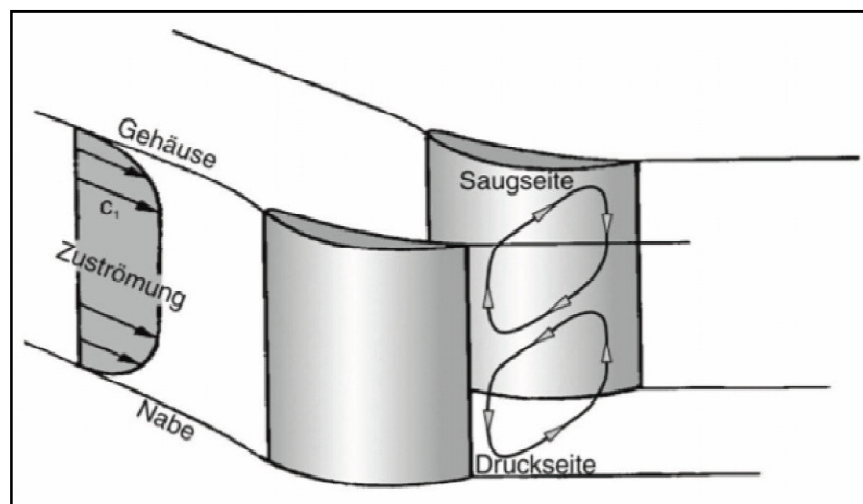
Verlusten. Mit der Abbildung A.4 können diese Fehlanströmungen berücksichtigt werden. Hierbei steht die Kurve a für ein gut gerundetes dickes Profil mit entsprechender Unempfindlichkeit gegenüber Fehlanströmungen, Kurve b gilt für schlanke oder spitze Turbinenprofile.

- **Korrekturfaktor für die Machzahl  $k_M$**

Um den Einfluss der Machzahl, der erst bei höheren Geschwindigkeiten zum Tragen kommt, erfassen zu können, wird der Beiwert  $k_M$  eingeführt, vgl. Abbildung A.5. Die Auswirkungen der Machzahl auf die Strömungsverluste sind in Turbinen bei  $Ma \geq 0.7$  und in Verdichtern schon bei  $Ma \geq 0.5$  bemerkbar [15]. Im Falle einer inkompressiblen Strömung ist  $k_M = 1$  zu setzen.

### 3.1.2 Randverluste

Die Randverluste entstehen an der strömungsbegrenzenden Naben- und Gehäusewand. Einerseits werden sie in Folge der Umlenkung und der Reibung beziehungsweise durch den damit verbundenen Grenzschichteffekten verursacht. Den wesentlichen Anteil machen hier die Sekundärverluste aus. Betrachtet man ein in genügender Entfernung zu den Seitenwänden fließendes Fluidteilchen, dann wird dieses aufgrund des Gleichgewichts zwischen den Druckkräften und der Zentripetalkraft auf seiner gekrümmten Strombahnlinie gehalten. In Wandnähe führen die Grenzschichteffekte (Geschwindigkeitsabnahme) zu erhöhten Druckgradienten, sodass die Fliehkraft nicht ausreicht, um das Gleichgewicht aufrechtzuerhalten. Es kommt zu einer von der Druck- zur Saugseite quer zur Hauptströmung fließenden Sekundärströmung [4, 15].



**Abbildung 3.2:** Schematische Darstellung der Sekundärströmungswirbel [4]

Die hier eingezeichneten Sekundärströmungswirbel wurden zur besseren visuellen Darstellung überdimensioniert eingezeichnet. Tatsächlich beschränken sich die Randverluste idealerweise auf einen seitenwandnahen Bereich, sodass die restliche Strömung als ungestört angesehen werden kann. Für ausreichend lange Schaufeln kann der Randverlustbeiwert in der Form

$$\zeta_R = F \frac{t}{l} \quad (3.8)$$



angesetzt werden. Die experimentell gewonnene Funktion  $F$  kann in Abhängigkeit vom Umlenkwinkel aus der Abbildung A.2 abgelesen werden.

- **Reynoldszahlkorrektur**

Eine Reynoldszahlkorrektur ist in jenen Fällen notwendig, in denen die tatsächlich Reynoldszahl den vorausgesetzten Referenzwert unterschreitet oder eine andere Oberflächenrauigkeit berücksichtigt werden soll. Da sowohl die Profilverluste als auch die Randverluste vom Verhalten der Grenzschicht an der Profiloberfläche beziehungsweise an den Seitenwänden abhängen, ist die Korrektur des gesamten Verlustbeiwerts  $\zeta$  vorzunehmen.

$$(\zeta_P + \zeta_R)_{korr} = (\zeta_P + \zeta_R) \left( \frac{Re}{2 \cdot 10^5} \right)^{-0,2} \quad (3.9)$$

## 3.2 Zusatzverluste

### 3.2.1 Spaltverluste

Grundsätzlich lassen sich Spaltverluste in Spaltverluste bei abgedeckten Schaufelkränzen und Spaltverluste bei frei endenden Schaufeln unterteilen. Sie entstehen im Radialspalt zwischen Sator und Nabe und zwischen Rotor und Gehäuse. Die Strömung fließt aufgrund des Druckausgleichs von der Druck- zur Saugseite, das heißt vom höheren zum niedrigeren Druckniveau. Der Fall frei endender Schaufel ist in der Abbildung 3.3 dargestellt. Dabei wird die

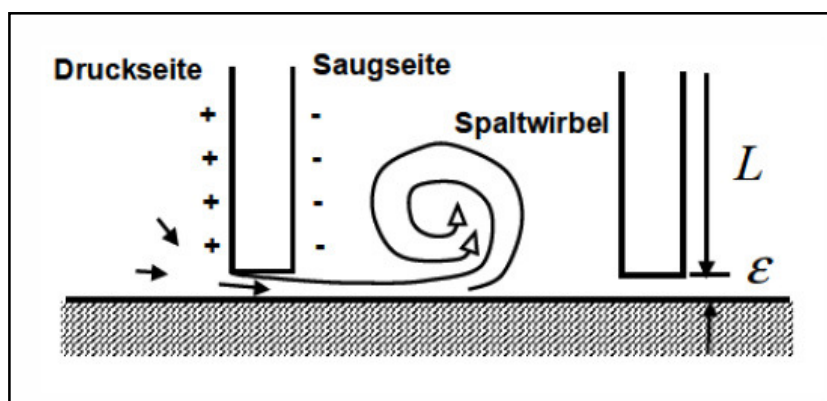


Abbildung 3.3: Spaltwirbelverluste [7]

Spaltströmung der Hauptströmung von der Eintritts- zur Austrittskante hin überlagert, sodass es zur Ausbildung eines Spaltwirbels kommt. Durch die Relativbewegung der Wand wird die an der Seitenwand anhaftende Grenzschicht durch den Spalt gezogen. Somit trägt der Spaltverlust erheblich zum Randverlust bei und lässt sich für ein Gitter in der Form

$$\zeta_{sp} = k_{sp} F \frac{t}{l} \quad (3.10)$$

ansetzen. Der Faktor  $k_{sp}$  stellt eine experimentell ermittelte Funktion dar, die die Geometrie des Schaufelendes berücksichtigt, vgl. Abbildung A.8. Gleichzeitig nimmt der

Spaltmassenstrom nicht an der Arbeitsumsetzung teil, wodurch die Nutzleistung der Turbine verringert wird. Eine theoretisch zu fordernde Minimierung der Spaltweite ist jedoch nur bis zum gewissen Grad umsetzbar, da das Anstreifen der umlaufenden auf den stehenden Teilen verhindert werden muss. Die Spaltverlustbeiwerte können ebenso auf das Stufengefälle bezogen werden:

$$\zeta'_{Sp} = k_{Sp} F \frac{t_1}{l_1} \frac{c_{1s}^2}{2\Delta h_s} \quad (3.11)$$

$$\zeta''_{Sp} = k_{Sp} F \frac{t_2}{l_2} \frac{w_{2s}^2}{2\Delta h_s}. \quad (3.12)$$

Der Leitradspaltmassenstrom verursacht einen Arbeitsverlust im Leitgitter, der Laufradspaltmassenstrom verringert die Umfangsleistung im Laufgitter. Der Leitradspaltverlust  $\Delta a'_{Sp}$  und der Laufradspaltverlust  $\Delta a''_{Sp}$  können aus folgenden Beziehungen ermittelt werden

$$\zeta'_{Sp} = \frac{\Delta a'_{Sp}}{\frac{c_{1s}^2}{2}} \quad (3.13)$$

$$\zeta''_{Sp} = \frac{\Delta a''_{Sp}}{\frac{w_{2s}^2}{2}}. \quad (3.14)$$

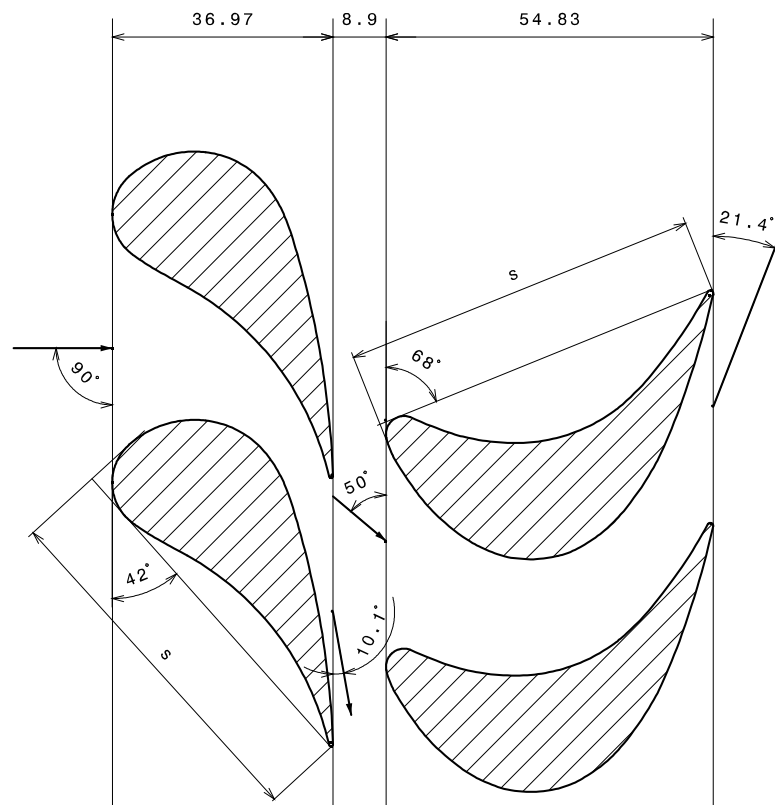
### 3.2.2 Restliche Verluste

Der Einsatz von Binde- und Dämpfungsdrähten zur Verhinderung von gefährlichen Schwingungen bei längeren Schaufeln kann sich störend auf die Gitterströmung auswirken und damit einen Arbeitsverlust verursachen. Weiters zu berücksichtigen ist der Verlust, der durch die Reibung an den Außenwänden der rotierenden Radscheiben entsteht, als auch der Ventilationsverlust in teilbeaufschlagten Regelstufen von Dampfturbinen.

## 4 Analytische Verlustberechnung der Kaltluftturbine

### 4.1 Kenndaten der axialen Luftturbine

Bei der Luftturbine handelt es sich um eine 1½-stufige Axialturbine, die im Saugbetrieb arbeitet. Die Luftversorgung erfolgt über den der Turbine nachgeschalteten Verdichter. Hierbei handelt es sich um ein SPG-Gebläse HR 40/40, das mit einem Gleichstrommotor angetrieben wird. Während des Anfahrvorgangs wird der Verdichter über ein Steuerventil solange mit Luft versorgt, bis der Betriebspunkt erreicht ist. Anschließend wird das Ventil geschlossen und die Turbine hochgefahren. Anstelle des Generators wird eine Wirbelstrombremse eingesetzt, die die vom Laufrad übertragene Nutzleistung aufnimmt und in Wärme umsetzt. Die Turbine weist einen zylindrischen Querschnitt mit konstanter Kanalhöhe auf. Sowohl bei den Leit- als auch den Laufschaufeln handelt es sich um gerade Schaufeln. Stellt man sich nun einen zylindrischen Mittelschnitt vor und wickelt diesen in eine Ebene ab, so entstehen drei ebene Schaufelgitter und die Strömung kann als zweidimensionale, ebene Strömung betrachtet werden. In der Abbildung 4.1 sind die erste Leitreihe und die Laufreihe als gerade Schaufelgitter dargestellt.



**Abbildung 4.1:** Mittlerer Zylinderschnitt der axialen Turbinenstufe

Zur Erstellung der 3D-Modelle wurde CATIA V5R20 verwendet. Die Profilgeometrie konnte anhand vorhandener Schnittzeichnungen beziehungsweise Datenblätter aus dem Jahr 1965 modelliert werden. Da die Datenblätter Koordinatenpunkte für das Überdruckprofil T85 und

das Gleichdruckprofil S85 enthalten, war eine Anpassung an die tatsächlich abgemessene Sehnenlänge notwendig. Eine detaillierte Betrachtung einzelner Schaufelprofile folgt im nächsten Kapitel. In der Tabelle 4.1 sind die wichtigsten geometrischen Kenndaten der Turbine zusammengefasst.

Außendurchmesser $d_a$	[mm]	430
Innendurchmesser $d_i$	[mm]	310
Mittlerer Durchmesser $d_m$	[mm]	370
Ringraumfläche $A$	[mm <sup>2</sup> ]	69743
Drehzahl $n$	[U/min]	3000
Winkelgeschwindigkeit $\omega$	[rad/s]	314.16
Schaufelanzahl erste Leitreihe	[-]	26
Schaufelanzahl Laufreihe	[-]	30
Schaufelanzahl zweite Leitreihe	[-]	26
Sehnenlänge Leitschaukel $s'$	[mm]	60
Sehnenlänge Laufschaufel $s''$	[mm]	60
Schaufelhöhe	[mm]	60
Staffelungswinkel Leitrad $\gamma'$	[°]	42
Staffelungswinkel Laufrad $\gamma''$	[°]	68
Mittlere Teilung Leitrad $t'$	[mm]	44.7
Mittlere Teilung Laufrad $t''$	[mm]	38.7

**Tabelle 4.1:** Geometrische Kenndaten der axialen Luftturbine

Als Arbeitsmedium wird Luft bei der internationalen Normatmosphäre verwendet. Der durch den Turbinenquerschnitt  $A$  mit der Geschwindigkeit  $c_m$  durchströmende Luftmassenstrom ergibt sich zu:

$$\dot{m} = \rho c_m A. \quad (4.1)$$

Die durchströmte Ringraumfläche  $A$  wird mit der Kreisringformel ermittelt:

$$A = (d_a^2 + d_i^2) \frac{\pi}{4}. \quad (4.2)$$

Die Luftdichte  $\rho$  ist der Tabelle 4.2 zu entnehmen und bleibt mit der Annahme einer inkompressiblen Strömung während des gesamten Strömungsverlaufs konstant.

Umgebungstemperatur $T_u$	[K]	288.15
Umgebungsdruck $p_u$	[Pa]	101325
Dichte $\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	1.225
kinematische Viskosität $\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	14.60 · 10 <sup>-6</sup>

**Tabelle 4.2:** Kenndaten des Arbeitsmediums Luft

## 4.2 Auslegungsrechnung

Zur Bestimmung des Auslegungspunktes der Turbine werden im ersten Schritt die Gitteraustrittswinkel ermittelt. Im Fall einer inkompressiblen Strömung werden diese nach der Glg (2.35) unter Berücksichtigung eines Korrekturfaktors ermittelt

$$\tan \beta_2^+ = \frac{a}{t} \frac{1}{\cos \beta_a} \quad (4.3)$$

worin  $a$  den engsten Strömungsquerschnitt bezeichnet. Der absolute Leitgitteraustrittswinkel beträgt  $\alpha_1 = 10.1^\circ$  und der relative Laufgitteraustrittswinkel  $\beta_2^+ = 21.4^\circ$ . Die Geschwindigkeitsdreiecke können nun iterativ ermittelt werden, indem die Meridiangeschwindigkeit  $c_m$  solange variiert wird, bis man den, durch die Laufradgeometrie vorgegebenen, relativen Laufgittereintrittswinkel  $\beta_1 = 50^\circ$  erreicht, vgl. Abbildung 4.2.

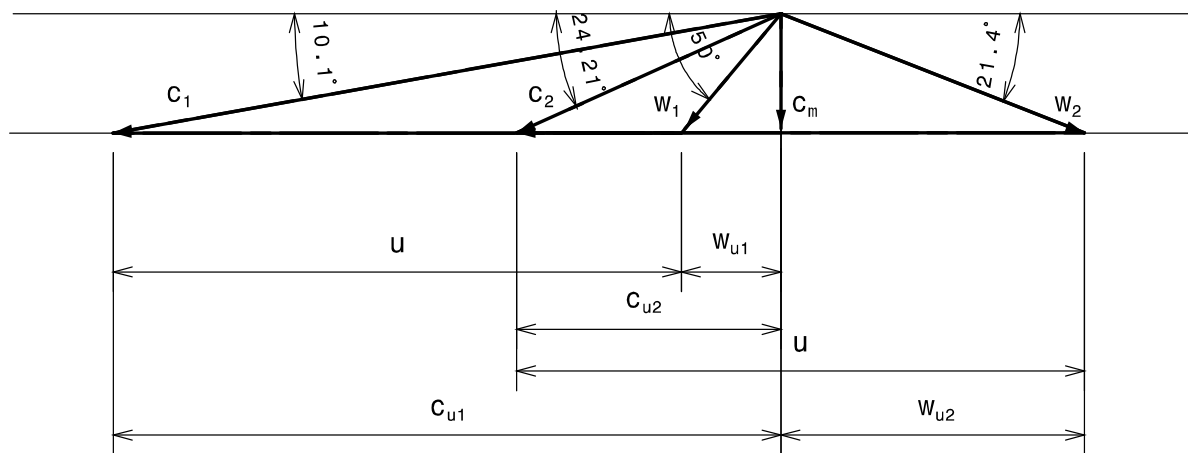


Abbildung 4.2: Geschwindigkeitsdreiecke

Mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen folgen auch die restlichen unbekanntenen Geschwindigkeitskomponenten, zusammengefasst in der Tabelle 4.3.

Geschwindigkeitskomponente [m/s]	Winkel [°]	
$u$	58.12	$\alpha_1$ 10.1
$c_m = c_0$	12.17	$\alpha_2$ 24.21
$c_1$	69.4	$\beta_1$ 50
$c_2$	29.67	$\beta_2$ 158.6
$w_1$	15.88	
$w_2$	33.35	
$c_{u1}$	68.32	
$c_{u2}$	27.07	
$w_{u1}$	10.20	
$w_{u2}$	-33.35	

Tabelle 4.3: Geschwindigkeiten und Winkel der axialen Turbinenstufe

Abschließend werden die charakteristischen Kennzahlen der Turbine als auch die theoretisch erreichbare Umfangsleistung angegeben.

Enthalpiegefälle Leitrad $\Delta h'$	[J/kg]	2334.1	Glg. (2.9)
Enthalpiegefälle Laufrad $\Delta h''$	[J/kg]	430.1	Glg. (2.10)
Lieferzahl $\varphi$	[-]	0.209	Glg. (2.17)
Arbeitszahl $\lambda$	[-]	0.709	Glg. (2.18)
Reaktionsgrad $R_k$	[-]	0.156	Glg. (2.16)
Luftmassenstrom $\dot{m}$	[kg/s]	1.04	Glg. (4.1)
Spez. Umfangsarbeit $a_u$	[J/kg]	2397.5	Glg. (2.8)
Umfangsleistung $P_u$	[kW]	2.493	Glg. (2.7)

**Tabelle 4.4:** Strömungstechnischen Kenndaten der Turbine

### 4.3 Analytische Verlustberechnung

Aufgrund fehlender experimenteller Versuchsergebnisse soll zur Validierung der numerischen Ergebnisse auf die analytische Verlustberechnung zurückgegriffen werden. Im Kapitel 3 sind sämtliche zur Berechnung notwendige Formeln und Abbildungen vermerkt, sodass die Berechnung im Folgenden auf eine tabellarische Übersicht einzelner Parameter beschränkt wird, um Wiederholungen zu vermeiden. Die Verlustberechnung bezieht sich auf die Einzelgitterzuströmung im Auslegungspunkt für den Mittelschnitt. Bei den im Leit- und Laufgitter verwendeten Schaufeln handelt es sich um frei endende Schaufeln mit einer Spaltweite von  $\delta = 0.65$  mm. Der zur Ermittlung der Spaltverlustbeiwerte notwendige Spalteinflussfaktor  $k_{sp}$  ist der Abbildung A.8 zu entnehmen. Zu diesem Zweck ist die Kurve a heranzuziehen, die die Spaltverlust-Einflussfunktion für eine Schaufel mit glatter Stirnfläche ohne Streifkante darstellt. Die Berechnung des Leit- und Laufradspaltverlustbeiwertes erfolgt anschließend mit der Glg. (3.10). Der Umfangswirkungsgrad  $\eta_u$  folgt aus der Glg. (2.22), wobei zur Berechnung der isentropen Enthalpieänderung die in den Tabellen 4.7 und 4.8 berechneten Gitterwirkungsgrade  $\eta'$  und  $\eta''$  verwendet werden. Die Leit- und Laufradspaltverluste  $\Delta a'_{sp}$  und  $\Delta a''_{sp}$  ergeben sich aus den Gleichungen (3.13) und (3.14), die innere Arbeit  $a_i$  aus der Glg. (2.14). Damit kann anschließend der innere Total- zu-Totalwirkungsgrad  $\eta_i$  berechnet werden

Spaltweite $\delta$	0.65 mm
Verhältnis $\delta/s$	0.0108
Spalteinflussfaktor $k_{sp}$	1.72
Leitradspaltverlustbeiwert $\zeta'_{sp}$	0.034
Laufradspaltverlustbeiwert $\zeta''_{sp}$	0.088
Leitrad-Spaltmengenanteil $\frac{\dot{m}'_{sp}}{\dot{m}}$	0.049
Laufrad-Spaltmengenanteil $\frac{\dot{m}''_{sp}}{\dot{m}}$	0.024

**Tabelle 4.5:** Berechnung der Gitterspaltverluste

Umfangswirkungsgrad $\eta_u$	0.871	Glg. (2.22)
Innerer Wirkungsgrad $\eta_i$	0.818	Glg. (2.20)

Tabelle 4.6: Wirkungsgrade der Turbinenstufe

Anströmwinkel $\alpha_0$	90°
Abströmwinkel $\alpha_1$	10.1°
Umlenkwinkel $\Delta\alpha = \alpha_0 - \alpha_1$	79.9°
Grundverlustbeiwert $\zeta_{P0}$	0.057
Hinterkantendicke $\delta'$	0.65 mm
Schaufelteilung $t'$	44.7 mm
Umlenkverlustfaktor $k_\delta$	0.189
Hinterkantenverlustbeiwert $\zeta_\delta$	0.016
Profilmfaktor A	4
Schaufelhöhe $l$	60 mm
Mittlerer Schaufeldurchmesser $d_m$	370 mm
Fächerungsverlustfaktor $k_F$	1.105
Axialspaltweite $x$	8.9 mm
Schaufelbreite $b$	36.968 mm
Axialspaltverhältnis $\frac{x}{b}$	0.24
Durchflusszahl $\frac{c_m}{u}$	0.209
Schwankungsverlustfaktor $k_\Gamma$	1.008
Stoßverlustfaktor im Nennlastpunkt $k_{St}$	1
Austrittsmachzahl $Ma$	0.203
Machzahlverlustfaktor $k_M$	1
Profilverlustbeiwert $\zeta_P'$	0.0813
Einflussfunktion F	0.027
Randverlustbeiwert $\zeta_R'$	0.020
Reynoldszahlkorrektur	
kinematische Viskosität am Austritt $\nu_1$	$1.461 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Reynoldszahl $Re'$	$2.85 \cdot 10^5 > 2 \cdot 10^5$ keine Korrektur notwendig
Leitgitterverlustbeiwert $\zeta'$	0.1013
Leitgitterwirkungsgrad $\eta'$	<u>0.8987</u>

Tabelle 4.7: Berechnung des Leitgitterverlustbeiwerts

Anströmwinkel $\beta_1$	50°
Abströmwinkel $\beta_2$	158.6°
Umlenkwinkel $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$	108.6°
Grundverlustbeiwert $\zeta_{p0}$	0.0512
Hinterkantendicke $\delta''$	0.96 mm
Schaufelteilung $t''$	38.746 mm
Umlenkverlustfaktor $k_\delta$	0.137
Hinterkantenverlustbeiwert $\zeta_\delta$	0.01
Profilmfaktor A	4
Schaufelhöhe $l$	60 mm
Mittlerer Schaufeldurchmesser $d_m$	370 mm
Fächerungsverlustfaktor $k_F$	1.105
Axialspaltweite $x$	8.9 mm
Schaufelbreite $b$	54.83 mm
Axialspaltverhältnis $\frac{x}{b}$	0.162
Durchflusszahl $\frac{c_m}{u}$	0.209
Schwankungsverlustfaktor $k_\Gamma$	1.01
Stoßverlustfaktor im Nennlastpunkt $k_{St}$	1
Austrittsmachzahl $Ma$	0.103
Machzahlverlustfaktor $k_M$	1
Profilverlustbeiwert $\zeta_p''$	0.0683
Einflussfunktion F	0.0790
Randverlustbeiwert $\zeta_R''$	0.0510
Reynoldszahlkorrektur	
kinematische Viskosität am Austritt $\nu_2$	$1.456 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Reynoldszahl $Re''$	$1.375 \cdot 10^5 < 2 \cdot 10^5$ Korrektur notwendig
Korrigierter Laufgitterverlustbeiwert $\zeta''_{korr}$	0.129
Laufgitterwirkungsgrad $\eta''$	<u>0.871</u>

Tabelle 4.8: Berechnung des Laufgitterverlustbeiwerts



## 5 Modellierung turbulenter Strömung

### 5.1 Kenngrößen turbulenter Strömung

Turbulente Strömungen kommen in technischen Problemstellungen sehr oft vor. Im Vergleich zu den eher seltener auftretenden laminaren Strömungen, die eine geordnete Stromlinienstruktur aufweisen, sind turbulente Strömungen durch zeitlich und räumlich schwankendes Strömungsverhalten charakterisiert. Wie in [10] genauer beschrieben, lassen sich diese stochastische Schwankungsbewegungen einer geordneten Kernströmung überlagern, schematisch in der Abbildung 5.1 dargestellt. Turbulente Strömungen sind stets wirbelbehaftet. Die Wirbel werden mit der Strömung transportiert und verursachen unterdessen eine zügige Durchmischung (Diffusion) der Strömung. Gleichzeitig sind sie einem Dissipationsvorgang unterworfen, sodass kinetische Strömungsenergie in thermische Energie umgewandelt wird.

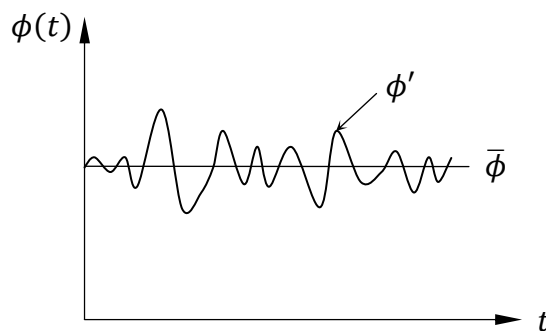


Abbildung 5.1: Stationäre turbulente Strömung [10]

Nach der Abbildung 5.1 kann jede Strömungsgröße  $\phi(\vec{x}, t)$  einer räumlichen turbulenten Strömung in ihren Mittelwert  $\bar{\phi}(\vec{x})$  und einen zeitabhängigen Schwankungsanteil  $\phi'(\vec{x}, t)$  aufgespalten werden.

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(\vec{x}) + \phi'(\vec{x}, t). \quad (5.1)$$

Dies bezeichnet man als die *Reynoldsche Zerlegung*. Zur Charakterisierung des Strömungszustands führte Reynolds weiters die dimensionslose Reynoldszahl  $Re$  ein, vgl. Gleichung (5.2), die das Verhältnis von Trägheitskraft zu Reibungskraft an einem Fluidteilchen darstellt.

$$Re = \frac{u_{\infty} l}{\nu} \quad (5.2)$$

Darin bezeichnet  $l$  die charakteristische Länge, wie beispielsweise die Länge einer Platte oder den inneren Durchmesser eines Rohres. Bleiben die Reynoldszahlen unterhalb eines kritischen Wertes  $Re_{krit}$ , so spricht man von einer laminaren Strömung. Wird  $Re_{krit}$  überschritten, handelt es sich um eine turbulente Strömung, wobei der Übergang von laminar zu turbulent als Transition bezeichnet wird.

Um den Schwankungsgrad der Strömung zu beurteilen, wird mit Hilfe der zeitlichen Mittelwerte der Geschwindigkeitsschwankungen der sogenannte Turbulenzgrad  $Tu$  wie folgt ermittelt:

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}}{u_\infty}. \quad (5.3)$$

Aufgrund experimenteller Versuche konnte man den Einfluss des Turbulenzgrades auf die Stabilität der Grenzschicht ermitteln. So verschiebt sich für geringe Turbulenzgrade die kritische Reynoldszahl  $Re_{krit}$  einer längsangeströmten ebenen Platte zu deutlich höheren Werten [10]. Ein Spezialfall der turbulenten Strömung stellt die isotrope Turbulenz dar, bei der die mittleren Geschwindigkeitsschwankungen in den Normalrichtungen gleich sind:

$$\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}. \quad (5.4)$$

Damit vereinfacht sich der Turbulenzgrad zu

$$Tu = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{u_\infty}. \quad (5.5)$$

Im nachfolgenden soll die Struktur einer turbulenten Strömung näher beschrieben und anhand einer längsangeströmten ebenen Platte veranschaulicht werden.

## 5.2 Grenzschicht

Betrachtet man als allgemeines Beispiel die Anströmung einer ebenen Platte, so bewirken Reibungskräfte eine Verlangsamung der Fluidteilchen in Wandnähe. Direkt an der Wand besitzen die Fluidteilchen die Geschwindigkeit null, sie haften an der Wand. Damit lässt sich nach *Schlichting und Gersten* [10] ein Strömungsfeld in eine annähernd reibungsfreie Außenströmung und jenen wandnahen Bereich, in dem der Reibungseinfluss aufgrund dynamischer Viskosität berücksichtigt werden muss, unterteilen. Dieses in der Regel dünne Gebiet an der Wand wird als Grenzschicht bezeichnet.

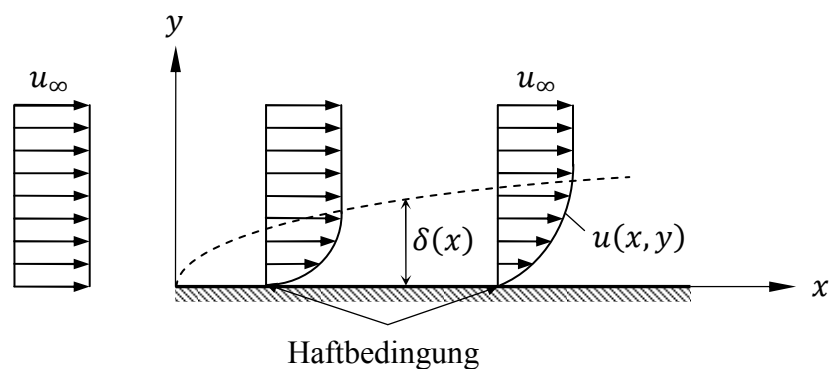


Abbildung 5.2: Grenzschichtentwicklung (schematische Darstellung) [10]

Sie beginnt an der Vorderkante der Platte beziehungsweise der umströmten Profilgeometrie und nimmt mit fortschreitender Länge  $x$  zu, sodass sie ihre maximale Dicke am Ende des Profils erreicht. Der Übergang von der Grenzschichtströmung in die reibungsfreie, ungestörte Strömung wird, zumindest bei laminaren Grenzschichten, kontinuierlich vollzogen. [10]

### 5.2.1 Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht

In Abhängigkeit von der Reynoldszahl  $Re$  können zwei verschiedene Grenzschichten unterscheiden werden. Die oben erwähnte laminare Grenzschicht tritt bei kleineren Strömungsgeschwindigkeiten, das heißt geringeren Reynoldszahlen auf. Die Grenzschichtströmung folgt der Hauptströmungsrichtung, wobei das Reibungsverhalten einzelner Fluidschichten wesentlich durch die Viskosität bestimmt wird. Übersteigt die Reynoldszahl einen kritischen Wert  $Re_{krit}$ , so schlägt die laminare Grenzschicht in eine turbulente Grenzschicht um. Das Strömungsfeld lässt sich dann in eine annähernd turbulenzfreie und reibungsfreie Außenströmung und eine turbulente Grenzschichtströmung, charakterisiert durch zufällige Strömungsschwankungen quer zur Hauptströmungsrichtung, unterteilen. Die Grenzschicht wiederum besteht aus zwei Schichten. In unmittelbarer Wandnähe bildet sich eine sehr dünne viskose Unterschicht aus, in der die Reibungskräfte grundsätzlich durch die Viskosität des Fluids beeinflusst werden. Den wesentlichen Anteil macht jedoch die vollturbulente Reibungsschicht aus, in der Reibungskräfte infolge turbulenter Querbewegungen auftreten. Da die Viskosität hierauf keinen Einfluss ausübt, spricht man in diesem Zusammenhang von sogenannter Scheinreibung. [10]

Die universelle Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht, vgl. Abbildung 5.3, veranschaulicht den Zusammenhang zwischen der dimensionslosen Geschwindigkeit  $u^+$  und dem dimensionslosen Wandabstand  $y^+$ . Die dimensionslose Geschwindigkeit  $u^+$  ist definiert nach

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad (5.6)$$

wobei  $u_\tau$  die Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (5.7)$$

darstellt. Darin wird  $\tau_w$  als Wandschubspannung bezeichnet. Der dimensionslose Wandabstand  $y^+$  ist wie folgt definiert:

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \quad (5.8)$$

Der funktionelle Zusammenhang wird hierbei für jedes einzelne Teilgebiet der Grenzschicht separat formuliert, wobei man insgesamt vier Teilbereiche unterscheidet:

(1) Viskose (laminare) Unterschicht, mit dem Zusammenhang

$$u^+ = y^+ \quad (5.9)$$

- (2) Übergangsbereich, der den Übergang zwischen der viskosen Unterschicht und der vollturbulenten Reibungsschicht umfasst. Zu dessen Beschreibung wird nach *Drabek* [6] das Gesetz von Reichardt verwendet.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + 0.4y^+) + 7.8 \left[ 1 - e\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} e^{(-0.33y^+)} \right] \quad (5.10)$$

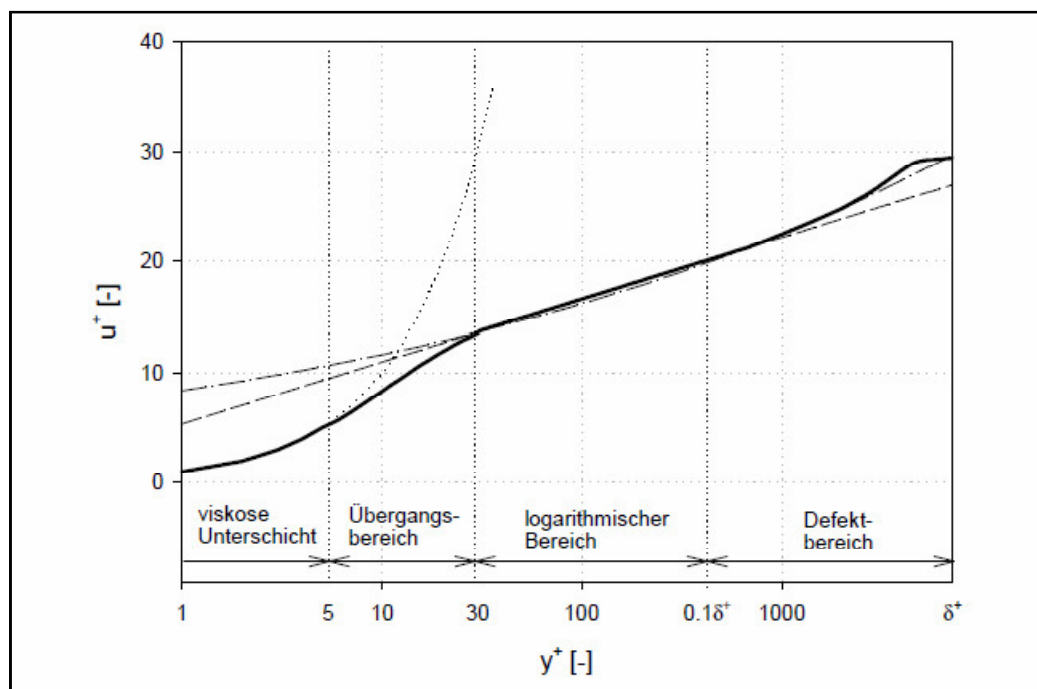
- (3) Vollturbulente Reibungsschicht, die dem logarithmischen Gesetz nach Glg. (5.11) genügt.

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(Ey^+) \quad (5.11)$$

- (4) Der Defektbereich beschreibt den Übergang der vollturbulenten Grenzschicht zur Außenströmung und kann mit Hilfe des 1/7-Potenzgesetzes angegeben werden.

$$u^+ = \frac{u_\infty}{u_\tau} \left( \frac{y^+}{\delta^+} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (5.12)$$

Darin stellt  $\kappa$  die Karman-Konstante mit dem Wert 0.41 dar. Für hydraulisch glatte Wände ist der Parameter  $E = 9.0$  zu setzen. Die dimensionslose Grenzschichtdicke ist nach der Beziehung  $\delta^+ = \delta \frac{u_\tau}{\nu}$  definiert. Die Tabelle 5.1 fasst die einzelnen Grenzschichtbereiche zusammen und gibt an, in welchem Geltungsbereich die mit den Gleichungen (5.9) bis (5.12) angegebenen Zusammenhänge ihre Gültigkeit besitzen.



**Abbildung 5.3:** Universelle Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht [6]

Grenzschichtbereich	Geltungsbereich
viskose Unterschicht	$0 \leq y^+ \leq 5$
Übergangsbereich	$5 \leq y^+ \leq 30$
logarithmischer Bereich	$30 \leq y^+ \leq 0.1\delta^+$
Defektbereich	$0.1\delta^+ \leq y^+ \leq \delta^+$

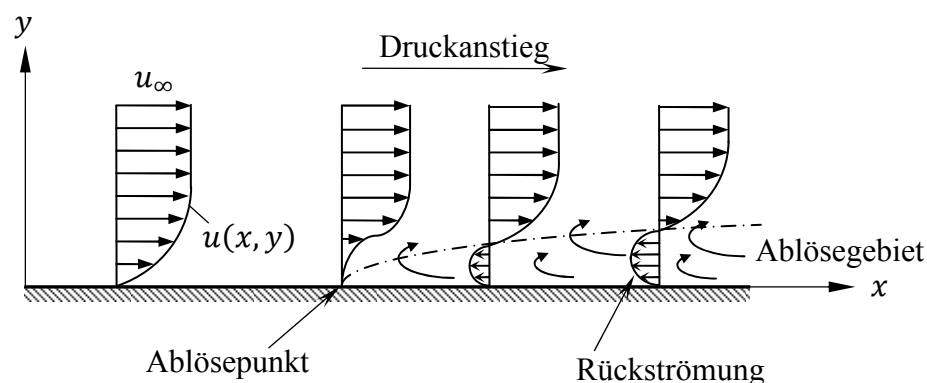
**Tabelle 5.1:** Geltungsbereich der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht

## 5.2.2 Ablösung der Grenzschicht

Die Charakteristiken und Strukturen der Grenzschicht wurden bereits beschrieben. Unter anderem wurde der Einfluss der Viskosität innerhalb der Grenzschichtströmung erwähnt. Sie bewirkt eine Verzögerung der Fluidteilchen in Wandnähe, sodass die Haftbedingung direkt an der Wand stets erfüllt wird. Das bedeutet, dass die kinetische Energie der Grenzschichtteilchen infolge Reibung beziehungsweise Dissipation abnimmt. In manchen Fällen sogar so stark, dass die Teilchen zum Stillstand kommen, in der Abbildung 5.4 als Ablösepunkt dargestellt. Die Lage der Ablösestelle ist durch das Verschwinden der Wandschubspannung gegeben, da dort der Geschwindigkeitsgradient senkrecht zur Hauptströmungsrichtung verschwindet.

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (5.13)$$

Handelt es sich bei der Außenströmung um eine verzögerte Strömung, so wird dieser Effekt in der Grenzschicht zusätzlich verstärkt. Das der Grenzschicht durch die Außenströmung aufgeprägte Druckfeld wirkt entgegen der Hauptströmungsrichtung. Die Fluidteilchen mit geringer kinetischer Energie, kleinem Impuls, können das Druckniveau nicht überwinden. Es kommt zur Rückströmung in der Grenzschicht und zur Wirbelbildung, die zu Energieverlusten führt. Die Außenströmung wird weiter von der Wand abgedrängt, wodurch sich im Gegenzug das Ablösegebiet weiter vergrößert. Es lässt sich schlussfolgern, dass die Gefahr für die Grenzschichtablösung in jenen Bereichen besteht, in denen ein Druckanstieg stattfindet. Man spricht von einer druckinduzierten Ablösung. Aus diesem Grund werden verzögerte Strömungen in thermischen Turbomaschinen vermieden. Im Fall einer beschleunigten Außenströmung werden diese wandnahen innerhalb der Grenzschicht abgebremsten Teilchen wieder beschleunigt, sodass eine Ablösung nicht stattfindet. [9]



**Abbildung 5.4:** Grenzschichtablösung und Rückströmung (schematische Darstellung) [9]

## 5.3 Navier-Stokes-Gleichungen

### 5.3.1 Vollständige Navier-Stokes-Gleichungen

Das als vollständige Navier-Stokes-Gleichungen bezeichnete Gleichungssystem umfasst die Kontinuitäts- und Energieerhaltungsgleichung als auch, im räumlichen Fall, die drei Impulserhaltungsgleichungen. In diesem Zusammenhang bedeutet vollständig, dass auch die kleinsten auftretenden Turbulenzen und Wirbel erfasst werden können [8].

#### 5.3.1.1 Massenerhaltungsgleichung

Die Massenerhaltungsgleichung (Kontinuitätsgleichung) besagt, dass die in ein Kontrollvolumen einströmende Masse gleich der aus dem Kontrollvolumen ausströmenden Masse sein muss. Die Kontinuitätsgleichung angeschrieben in Differentialform im kartesischen Koordinatensystem lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (5.14)$$

Darin beschreibt der erste Term die Änderung der Dichte  $\rho$  mit der Zeit, der zweite die Änderung der Massenstromdichte und somit des Massenstroms in der, im Fall einer ebenen Strömung,  $x$ - und  $y$ -Richtung.

#### 5.3.1.2 Impulsbilanzgleichung

Die Impulsbilanz für ein infinitesimales Volumenelement kann in Folge des Kräftegleichgewichts nach dem zweiten Gesetz von Newton aufgestellt werden. Dieses definiert Kraft als das Produkt von Masse mal Beschleunigung. Auf das Volumenelement wirken einerseits Volumenkräfte wie die Schwerkraft und andererseits Oberflächenkräfte bestehend aus Druck- und Reibungskräften. Die Reibungskraft setzt sich wiederum aus den Normal- und Schubspannungskräften zusammen. Schreibt man die Impulsbilanz in Integralform an, so lautet sie:

$$\oint_0 \rho u_i u_n dO = - \oint_0 p n_i dO + \oint_0 \tau_{ij} dO + \int_V f_i^V dV. \quad (5.15)$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, unter Anwendung der Kettenregel, lässt sich die Impulsbilanz (5.15) ebenso in differentialer Form darstellen

$$\frac{D(\rho u_i)}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i^V. \quad (5.16)$$

Das totale Differential  $D/Dt$  kann nach Glg. (5.17) berechnet werden. Die Volumenkräfte  $f_i^V$ , im Allgemeinen die Schwerkraft, werden als konstante von außen wirkende Kräfte angesehen.

$$\frac{D(\rho u_i)}{Dt} = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} \quad (5.17)$$

$$f_i^V = \rho g_i \quad (5.18)$$

Die reibungsbehafteten Normal- und Schubspannungen  $\tau_{ij}$  sind für Newtonsche Fluide proportional zu den Geschwindigkeitsgradienten.

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right) \quad (5.19)$$

Die Normalspannungen verursachen Kräfte, die das Element in die Länge ziehen, die Schubspannungen Kräfte, die das Element scheren. In der Glg. (5.19) ist  $\delta_{ij}$  der Kronecker-Einheitstensor mit der Fallunterscheidung  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$  und  $\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ . Darin ist ebenso die *Hypothese von Stokes*  $3\lambda + 2\mu = 0$  enthalten. Diese stellt eine Beziehung zwischen der Volumenviskosität  $\lambda$  und der dynamischen Viskosität  $\mu$  her, womit die Anzahl der Materialgrößen von zwei auf eine reduziert werden kann. Mit der Annahme einer ebenen Strömung lautet die Impulsbilanzgleichung für die  $x$ -Richtung

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (5.20)$$

und für die  $y$ -Richtung

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y. \quad (5.21)$$

Ebenso wird in der Literatur die Indexschreibweise (Einsteinsche Summenkonvention) sehr häufig angegeben.

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (5.22)$$

### 5.3.1.3 Energiegleichung

Die totale Energieänderung  $\dot{E}_{tot}$  pro Zeiteinheit kann mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik für ein geschlossenes System als Summe der Leistung und des übertragenen Wärmestroms im Volumenelement beschrieben werden.

$$\frac{DE_{tot}}{Dt} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (5.23)$$

Die totale Energie  $E_{tot}$  setzt sich zusammen aus der inneren Energie  $E_{in}$ , der kinetischen Energie  $E_{kin}$  und der potentiellen Energie  $E_{pot}$ , beschrieben mit den Gleichungen (5.24) bis (5.26):

$$E_{in} = m e \quad (5.24)$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{u}^2 = \frac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) \quad (5.25)$$

$$E_{pot} = mgh. \quad (5.26)$$

Darin ist  $e$  die spezifische innere Energie und  $\vec{u}$  der Geschwindigkeitsvektor. Der Beitrag potentieller Energie kann im Falle eines Gases vernachlässigt werden [8], wodurch sich die totale Energie wie folgt ergibt:

$$E_{tot} = E_{in} + E_{kin} = m \left( e + \frac{1}{2} \vec{u}^2 \right). \quad (5.27)$$

Der Wärmestrom  $\dot{Q}$ , den das Volumenelement mit anderen Elementen austauscht, setzt sich zusammen aus der Wärmestrahlung  $\dot{q}_s$  und der Wärmeleitung  $\dot{q}_L$ . Der Konvektionsanteil wird nicht berücksichtigt, da das Volumenelement der Strömungsbewegung folgt. Unter Berücksichtigung des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes

$$\dot{q}_L = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.28)$$

ergibt sich der gesamte Wärmestrom zu

$$\dot{Q} = \left[ \rho \dot{q}_s + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] dx dy dz. \quad (5.29)$$

Die erbrachte Leistung  $\dot{W}$  lässt sich unterteilen in Leistung durch den auf der Oberfläche wirkenden Druck  $p$  und den Normal- und Schubspannungen  $\tau$  und jener Leistung verursacht durch die Volumenkräfte, wie der Gravitation  $g$ .

Für ein bilanziertes Volumenelement folgt die Leistung  $\dot{W}$ , aufgeteilt in den drei Raumrichtungen, zu:

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (up + u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) - \frac{\partial}{\partial y} (vp + u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial z} (wp + u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz}) + \rho(ug_x + vg_y + wg_z) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (5.30)$$

Die einzelnen Normal- und Schubspannungen bilden zusammen den viskosen Spannungstensor  $\tau$ .

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Setzt man nun die Gleichungen (5.27), (5.29) und (5.30) in den ersten Hauptsatz ein, so folgt unter Berücksichtigung Stokesscher Beziehungen für die Druck-, Normal- und Schubspannungen und der Annahme eines isotropen Fluids ( $\lambda$  konstant) die vollständige Energiebilanz in der Form

$$\begin{aligned} \frac{D(\rho e)}{Dt} = & \rho \dot{q}_s + \lambda \left( \frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} \right) - p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \\ & + \rho(ug_x + vg_y + wg_z) + \mu \Phi \end{aligned} \quad (5.32)$$



mit  $\Phi$  als dem Dissipationsterm

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] &+ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ &+ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.33)$$

### 5.3.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Mit den oben angegebenen Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich sowohl laminare als auch turbulente Strömungen beschreiben, wobei die Letzteren zu deutlich höherem numerischen Aufwand führen. Um sämtliche Turbulenzen und Wirbel aufzulösen, fällt die Diskretisierung des Rechengebietes sehr fein aus, und die Rechenzeit nimmt stark zu. Um dem entgegenzuwirken, kommen in den modernen CFD-Programmen hauptsächlich sogenannte Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) zum Einsatz, bei denen kleine Turbulenzen nicht direkt aufgelöst, sondern durch Turbulenzmodelle modelliert werden. Hierzu werden turbulente Transportgrößen wie  $\rho$ ,  $u$  oder  $p$ , in der Glg. (5.34) verallgemeinert als  $\phi$  bezeichnet, in ihren zeitlichen Mittelwert  $\bar{\phi}$  und ihren Schwankungsanteil  $\phi'$  aufgeteilt.

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (5.34)$$

Setzt man diese Beziehung in die Glg. (5.22) ein, so folgen daraus die sogenannten Reynolds-Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_i} \delta_{ij} \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_{j,j} + \bar{u}_i\bar{\rho}\bar{u}_j + \bar{u}_j\bar{\rho}\bar{u}_i + \bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j) &- \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i)}{\partial t} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho}g_i \end{aligned} \quad (5.35)$$

| ||

Im Vergleich zu der ursprünglichen Gleichung (5.22) treten hier zwei weitere turbulente Korrelationsterme auf, wobei der Term | als Diffusionsfluss des Impulses aufgrund turbulenter Schwankungen angesehen werden kann. Im Fall einer inkompressiblen Strömung vereinfacht sich die Glg. (5.35) zu

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} - \bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j) - \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho}g_i. \quad (5.36)$$

Die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen können als zusätzliche turbulenten Spannungen  $\tau_{ij,t}$  interpretiert werden, die als Reynoldsspannungen bezeichnet werden. Mit dem Reynolds-Spannungstensor

$$\tau_{ij,t} = -\bar{\rho} \begin{pmatrix} \overline{\hat{u}_x \hat{u}_x} & \overline{\hat{u}_x \hat{u}_y} & \overline{\hat{u}_x \hat{u}_z} \\ \overline{\hat{u}_y \hat{u}_x} & \overline{\hat{u}_y \hat{u}_y} & \overline{\hat{u}_y \hat{u}_z} \\ \overline{\hat{u}_z \hat{u}_x} & \overline{\hat{u}_z \hat{u}_y} & \overline{\hat{u}_z \hat{u}_z} \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

ergeben sich die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen zu:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} + \tau_{ij,t}) - \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho}g_i. \quad (5.38)$$

Weiters kann man die laminaren und turbulenten Spannungsterme zu einem effektiven Spannungsterm

$$\tau_{ij,eff} = \tau_{ij} + \tau_{ij,t} \quad (5.39)$$

zusammenfassen. Unter Anwendung des Boussinesq-Ansatzes kann der turbulente Spannungsanteil in Analogie zur Glg. (5.19) modelliert werden:

$$\tau_{ij,t} = \mu_t \left( \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \left( \mu_t \frac{\partial\bar{u}_l}{\partial x_l} + \bar{\rho}\bar{k} \right) \delta_{ij}. \quad (5.40)$$

Darin bezeichnet  $\mu_t$  die turbulente Wirbelviskosität, mit der die Zunahme der Viskosität durch turbulente Schwankungsbewegungen beschrieben werden kann. Diese ist jedoch nicht mit der molekularen Viskosität zu verwechseln.

## 5.4 Turbulenzmodelle

Die in modernen CFD-Programmen eingesetzten Turbulenzmodelle haben stets die Aufgabe, reale physikalische Vorgänge möglichst genau zu erfassen und gleichzeitig den Rechenaufwand in einem akzeptablen Rahmen zu halten. Geht man von diesen zwei charakteristischen Eigenschaften aus, so lassen sich heutige Turbulenzmodelle unterteilen in solche, die auf Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS-Modelle) basieren, und solche, die die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen auflösen. Die Ersteren bieten, je nach gegebener Fragestellung, eine breite Modellauswahl an, wobei für diese Arbeit in erster Linie die *Wirbelviskositätsmodelle* von Interesse sind. Diese verwenden anstelle der Reynoldsspannungen die Wirbelviskosität  $\mu_t$ , um die turbulenten Strömungseigenschaften numerisch zu erfassen. Die Modelle werden nach der Anzahl der verwendeten Transportgleichungen gruppiert:

- Null-Gleichungsmodelle verwenden keine Transportgleichungen, sondern beschreiben die Wirbelviskosität mit einer einfachen algebraischen Gleichung. Eingesetzt werden sie zur Berechnung einfacher Scherströmungen.
- Ein-Gleichungsmodelle berechnen die Wirbelviskosität mit einer Differentialgleichung. In der Regel ist es die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$ , die sich mithilfe des Reynoldsschen Spannungstensors aufstellen lässt.

- Zwei-Gleichungsmodelle benutzen zusätzlich eine weitere zweite Differentialgleichung zur Berechnung der Wirbelviskosität. Hierzu bietet sich die Transportgleichung für die turbulente Dissipationsrate  $\epsilon$  oder die spezifische Dissipation  $\omega$  an.

Reynolds-Spannungsmodelle modellieren direkt die Reynoldsspannungen und können somit den Spannungstensor direkt berechnen. Unter den Turbulenzmodellen liefern sie die genauesten Ergebnisse, sind jedoch mit größtem numerischen Aufwand verbunden. In der direkten Simulation (DNS – Direct Numerical Simulation) werden anstelle der Reynoldsgleichungen die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst. Diese Methode erfordert eine sehr feine Diskretisierung des Rechengebiets, sodass die Berechnung inakzeptabel lange Rechenzeiten und gewaltigen Ressourcenbedarf mit sich bringt. Abhilfe schaffen die LES-Modelle (Large Eddy Simulation), die die direkte Simulation mit den Turbulenzmodellen verknüpfen. So werden große Wirbel direkt simuliert und kleine mit den Turbulenzmodellen erfasst. Allen Turbulenzmodellen gemeinsam ist die Vorgabe physikalischer Randbedingungen für alle Differentialgleichungen, um das System lösen zu können. [8]

Das in dieser Arbeit verwendete  $k$ - $\omega$ -SST-Turbulenzmodell wird im Folgenden etwas näher beschrieben, als auch jene beiden Modelle, aus denen sich dieses ableiten lässt.

### 5.4.1 Standard- $k$ - $\epsilon$ -Modell

Das  $k$ - $\epsilon$ -Modell verwendet zwei Differentialgleichungen, um die Entwicklung der turbulenten kinetischen Energie  $k$  und der turbulenten Dissipationsrate  $\epsilon$  zu modellieren. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um exakte Gleichungen, sondern um Transportgleichungen, die aus der Boussinesq-Approximation des Reynoldsschen Spannungstensors folgen. Zur Untersuchung vollturbulenter Strömungen (hohe Reynoldszahlen) ist das  $k$ - $\epsilon$ -Modell äußerst geeignet und liefert entsprechend genaue Lösungen. Bei wandnahen Strömungen (geringe Reynoldszahlen) greift dieses Modell auf eine Wandfunktion zurück. Diese setzt in den wandnahen Zellen eine vollturbulente Strömung voraus, wodurch die viskose Unterschicht als auch die Übergangsschicht nicht aufgelöst, sondern vielmehr überbrückt werden. Aus diesen Gründen gehört das  $k$ - $\epsilon$ -Modell zu der Gruppe der sogenannten High-Reynoldszahl-Turbulenzmodelle.

Die turbulente kinetische Energie  $k$  ist definiert durch

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}, \quad (5.41)$$

die Dissipationsrate  $\epsilon$  durch

$$\epsilon = \nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)}. \quad (5.42)$$

Aus der Kombination dieser beider Größen kann die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  nach

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.43)$$

berechnet werden. Die im  $k$ - $\epsilon$ -Modell zu lösenden modellierten Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie  $k$  und die turbulente Dissipationsrate  $\epsilon$  lauten

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \rho P - \rho \epsilon, \quad (5.44)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + C_{1\epsilon} \rho \frac{\epsilon}{k} P - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (5.45)$$

Darin beschreibt der erste Term auf der linken Seite die zeitliche Änderung und der zweite formuliert den konvektiven Transport. Der diffusive Transport wird mit dem ersten Term auf der rechten Seite formuliert. Die Produktionsrate  $P$  der kinetische Turbulenzenergie folgt aus

$$P = \nu_t S_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (5.46)$$

mit  $S_{ij}$  für den Schergeschwindigkeitstensor

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.47)$$

Die in *FLUENT* [1] angegebenen, experimentell bestimmten Modellkonstanten sind in der Tabelle 5.2 zusammengefasst. Darin sind  $\sigma_k$  und  $\sigma_\epsilon$  die turbulenten Prandtl-Zahlen für die kinetische Turbulenzenergie  $k$  und Dissipationsrate  $\epsilon$ .

$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$	$C_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\epsilon$
1.44	1.92	0.09	1.0	1.3

**Tabelle 5.2:** Standardwerte der  $k$ - $\epsilon$ -Modellkonstanten [1]

## 5.4.2 $k$ - $\omega$ -Modell

Das Standard- $k$ - $\omega$ -Modell nach *Wilcox* zählt ebenso zu den Zweigleichungsmodellen. Allerdings wird anstelle der turbulenten Dissipationsrate  $\epsilon$  die spezifische Dissipation  $\omega$  verwendet, wobei folgender Zusammenhang besteht

$$\omega = \frac{\epsilon}{k}. \quad (5.48)$$

Die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  ist in diesem Fall definiert nach

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k}{\omega}. \quad (5.49)$$

Der wesentliche Vorteil gegenüber dem  $k$ - $\epsilon$ -Modell liegt darin, dass das  $k$ - $\omega$ -Modell in der Lage ist, die Strömungsgrößen in der Grenzschicht vollständig aufzulösen. Somit entfällt der Einsatz der Wandfunktion zur Überbrückung der wandnahen Zellen. Allerdings nimmt die Genauigkeit mit steigenden Reynoldszahlen ab, sodass für vollausgebildete Außenströmungen das  $k$ - $\epsilon$ -Modell deutlich bessere Ergebnisse liefert. Daher zählt das  $k$ - $\omega$ -

Modell zu den sogenannten Low-Reynoldsnumber-Turbulenzmodellen. Die Anforderungen an die Netzfeinheit und -qualität in Wandnähe sind entsprechend hoch, wodurch die Anzahl verwendeter Gitterelemente beim  $k$ - $\omega$ -Modell in der Regel weitaus höher ausfällt.

Die Transportgleichungen des  $k$ - $\omega$ -Modells sind definiert durch

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \rho P - \rho \beta^* k \omega, \quad (5.50)$$

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \alpha \rho \frac{\omega}{k} P - \beta \rho \omega^2. \quad (5.51)$$

Die in *FLUENT* [1] angegebenen, experimentell bestimmten Modellkonstanten sind in der Tabelle 5.3 zusammengefasst.

$\alpha$	$\beta$	$\beta^*$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$
0.55	0.075	0.09	2.0	2.0

**Tabelle 5.3:** Standardwerte der  $k$ - $\omega$ -Modellkonstanten [1]

### 5.4.3 $k$ - $\omega$ -SST-Modell

Das  $k$ - $\omega$ -SST-Modell (Shear Stress Transport) nach *Menter* soll die Vorteile beider bisher erwähnten Turbulenzmodelle miteinander kombinieren. In Wandnähe kommt das  $k$ - $\omega$ -Modell zum Einsatz, sodass die mittleren Strömungsturbulenzen nach Glg. (5.50) und (5.51) bis zur Wand aufgelöst werden. Für die Außenströmung wird  $\omega$  aus der Glg. (5.45) und dem Zusammenhang aus Glg. (5.48) ermittelt, wodurch hier de facto die Stärken des  $k$ - $\epsilon$ -Modells ausgenutzt werden [11]. *Menter* koppelte das ursprüngliche  $k$ - $\omega$ -Modell mit einem modifizierten  $k$ - $\epsilon$ -Modell, sodass für den inkompressiblen Fall, nach Einführung des Multiplikators  $F_1$ , die Transportgleichungen des  $k$ - $\omega$ -SST-Modells wie folgt lauten [1] :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - \beta^* k \omega \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P - \beta \omega^2 + \underbrace{(1 - F_1) \frac{2\rho}{\sigma_\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}}_{CD_{k\omega}} \quad (5.53)$$

In der Glg. (5.53) wird der Term  $CD_{k\omega}$  als der sogenannte „Cross-Diffusion Term“ bezeichnet, der sich aus der erwähnten mathematischen Umformung der  $k$ - $\epsilon$ -Gleichungen in das  $k$ - $\omega$ -System ergibt. Die turbulenten Prandtl-Zahlen  $\sigma_k$  und  $\sigma_\omega$  lassen sich mit der Glg. (5.54) berechnen.

$$\sigma_i = \frac{1}{\frac{F_1}{\sigma_{i1}} + \frac{(1-F_1)}{\sigma_{i2}}} \quad (5.54)$$

Die Funktion  $F_1$  ermittelt man laut *FLUENT* [1] nach

$$F_1 = \tanh(\Phi_1^4), \quad (5.55)$$

mit

$$\Phi_1 = \min\left(\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega}\right); \frac{4\rho k}{\sigma_{\omega 2} CD_{k\omega} y^2}\right) \quad (5.56)$$

Ebenso erfährt die turbulente kinematische Wirbelviskosität, auch als Eddy-Viskosität bekannt, eine Modifizierung zu

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega; SF_2)} \quad (5.57)$$

worin  $a_1 = 0.31$  die Konstante von Bradshaw darstellt.

Die Funktion  $F_2$  ist definiert nach

$$F_2 = \tanh(\Phi_2^2) \quad (5.58)$$

mit

$$\Phi_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega}\right) \quad (5.59)$$

Die in *FLUENT* [1] angegebenen, experimentell bestimmten Modellkonstanten sind in der Tabelle 5.4 zusammengefasst.

$\sigma_{k1}$	$\sigma_{k2}$	$\sigma_{\omega 1}$	$\sigma_{\omega 2}$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta^*$
1.176	1.0	2.0	1.168	0.553	0.44	0.075	0.0828	0.09

**Tabelle 5.4:** Konstanten des  $k$ - $\omega$ -SST-Modells [1]

## 5.5 Numerische Lösungsverfahren

Zur Lösung der Gleichungssysteme werden grundsätzlich dichte-basierte und druck-basierte Algorithmen eingesetzt. Bei dichte-basierten Verfahren kommt die Dichte  $\rho$  als aktive Gleichungsgröße vor, weshalb man diese in erster Linie zur Berechnung kompressibler Strömungen verwendet. Da sich diese Diplomarbeit ausschließlich mit inkompressiblen Strömungen beschäftigt, wird für weitere Informationen auf die Literatur verwiesen. Die druck-basierten Verfahren kommen üblicherweise bei inkompressibler Strömungsberechnung zum Einsatz, können aber ebenso kompressible Strömungen auflösen. Zur Lösung der Gleichungssysteme mittels druck-basierter Verfahren können wiederum gekoppelte oder

sequentielle Lösungsverfahren verwendet werden. Die Ersteren eignen sich für stark miteinander gekoppelte Gleichungen, die gleichzeitig gelöst werden, und sind somit mit hohem Rechenaufwand verbunden. Im Fall sequentieller Algorithmen werden die Gleichungen nacheinander gelöst, wobei nichtsdestotrotz eine schwache Koppelung auch hier besteht und über eine sogenannte äußere Iterationsschleife berücksichtigt wird [11]. Der Nachteil dieser Variante liegt darin, dass der lokale Druck  $p$  in den Navier-Stokes-Gleichungen nicht bekannt ist. Um diese lösen zu können, muss für den Druck eine zusätzliche Bestimmungsgleichung eingeführt werden. Es besteht die Möglichkeit, eine Druck-Poisson- oder eine Druckkorrekturgleichung zu verwenden. Da die erste zwar exakt ableitbar, jedoch mit hohem numerischen Aufwand verbunden ist, ist es eher die Druckkorrekturmethode, die häufiger eingesetzt wird. Sind beispielsweise die Geschwindigkeits- und Druckwerte  $u_i^{(n)}$  und  $p^{(n)}$  aus dem  $n$ -ten Iterationsschritt bekannt, dann werden die Werte  $u_i^*$  und  $p^*$  für den nächsten Iterationsschritt erstmal geschätzt und anschließend die Korrekturfaktoren  $u_i'$  und  $p'$  berechnet. Damit folgen die korrigierten Größen im Iterationsschritt  $(n+1)$  zu

$$u_i^{(n+1)} = u_i^* + u_i' \quad (5.60)$$

$$p^{(n+1)} = p^* + p' . \quad (5.61)$$

Der bekannteste druckbasierte, sequentielle Löser, der die Druckkorrekturgleichung einsetzt, ist der SIMPLE-Algorithmus (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations). Die durchgeführten Berechnungsschritte sind nach [11]:

- (1.) Schätzen des Druckfeldes  $p^*$ . Hier besteht ebenfalls die Möglichkeit das Druckfeld aus dem letzten Iterationsschritt  $n$  als Schätzwert zu verwenden.
- (2.) Lösen der Impulsgleichungen liefert das Geschwindigkeitsfeld  $u_i^*$ , das jedoch die Kontinuitätsgleichung noch nicht erfüllt
- (3.) Aus der Druckkorrekturgleichung folgt  $p'$
- (4.) Aus der Koppelungsgleichung zwischen den Druck- und Geschwindigkeitskorrekturtermen folgt  $u_i'$
- (5.) Druckkorrektur nach  $p = p^* + p'$
- (6.) Korrektur des Geschwindigkeitsfeldes nach  $u_i = u_i^* + u_i'$
- (7.) Abschließend werden Gleichungen zur Bestimmung restlicher Strömungsgrößen, wie Turbulenz oder Temperatur, gelöst, sofern diese das Strömungsfeld beeinflussen.

Dieser iterative Prozess wird bis zur Konvergenz wiederholt, das bedeutet bis die Korrekturwerte für Druck und Geschwindigkeit näherungsweise null sind. Die Herleitung der Druckkorrekturgleichung beziehungsweise der Druck- und Geschwindigkeitskoppelung ist beispielsweise in Schäfer [9] ausführlich beschrieben und soll hier näher behandelt werden. Erwähnenswert ist jedoch, dass das SIMPLE-Verfahren einige Terme aus der verwendeten Druckkorrekturgleichung vernachlässigt, sodass in weiterer Folge eine Druck- und

Geschwindigkeitsunterrelaxation zur Sicherstellung der Konvergenz notwendig ist. Einige modifizierte Varianten des SIMPLE-Verfahrens sind der SIMPLER-Algorithmus (SIMPLE Corrected) und der PISO-Algorithmus (Pressure-Implicit Split-Operator). [10]

## 5.6 Berechnungsverfahren für Turbomaschinen

### 5.6.1 Frozen-Rotor-Methode

Bei der Frozen-Rotor-Methode erstreckt sich das Rechengebiet in der Regel über jeweils eine Leit- und Laufreihe, wobei die Lage beider Einzelgitter fixiert wird. Für axiale Turbomaschinen wird zuerst das Leitgitter berechnet, die Randwerte entlang der Kopplungsebene an das Laufgitter übergeben und dieses anschließend berechnet. Hierbei werden die Modellgleichungen für das Laufgitter im Relativsystem, für das Leitgitter im Absolutsystem aufgestellt und gelöst. Um die Relativbewegung zwischen den Schaufelreihen zu berücksichtigen, führt man die Berechnung für mehrere Relativstellungen der Gitter durch. Im Detail bedeutet das, dass die räumliche Lage zwischen der Leitreihe und der umlaufenden Laufreihe verändert und anschließend fixiert wird, bevor das Strömungsfeld erneut berechnet wird. Da das Strömungsfeld von der relativen Lage der Gitter abhängig ist, ermittelt man durch die Ergebnismittelung für unterschiedliche Relativstellung stellvertretend eine stationäre Lösung. Dementsprechend können instationäre Wechselwirkungen zwischen Stator und Rotor nicht simuliert werden, sehr wohl wird der Einfluss der räumlichen Schaufellage auf die Strömung berücksichtigt. [1, 16]

### 5.6.2 Mixing-Plane-Methode

Der Mischungsebenenansatz ähnelt in seiner Funktionsweise sehr der Frozen-Rotor-Methode. Die Strömungsfelder des Leit- und Laufgitters werden als Einzelgitter getrennt voneinander vernetzt, allerdings über eine sogenannte Mischungsebene (Mixing Plane) miteinander gekoppelt, die den Austausch stationärer Randbedingungen ermöglicht. Nachdem das Strömungsfeld des ersten Teilgebiets berechnet wurde, erfolgt entlang der Mischungsebene eine Umfangsmittelung bestimmter Strömungsgrößen. Diese werden als Randbedingungen an das nachkommende Rechengebiet übergeben, sodass dieses anschließend berechnet werden kann. In der Regel wird die umfangsgemittelte, radiale Druck- oder Geschwindigkeitsverteilung verwendet. Die relative räumliche Ausrichtung der Laufreihe bleibt während der gesamten Simulation unverändert, sodass diese einmalig durchgeführt wird und die Mittelung der berechneten Strömungsfelder, zur Ermittlung einer stationären mittleren Gesamtlösung, bei diesem Verfahren ausfällt. Die Umfangsmittelung führt zu einer gleichmäßigen Verteilung der Randwerte entlang der Mischungsebene und infolgedessen zu einem unrealistischen Anströmprofil am Eintritt der stromabwärts liegenden Beschauflung. Der daraus resultierende Fehler ist umso größer, je kleiner der axiale Gitterabstand zueinander beziehungsweise je geringer die Entfernung der Schaufelvorder- oder Schaufelhinterkante zu der Mischungsebene liegt. Wesentliche Vorteile dieses Verfahrens liegen in der großen Rechenstabilität und des beschränkten Ressourcenbedarfs im Vergleich zu einer instationären Berechnung. [1, 16]



### 5.6.3 Instationäre Berechnung

Die beiden oben beschriebenen Berechnungsverfahren sind auf stationäre Strömungsberechnung einzelner Schaufelreihen mit identischen Strömungsfeldern beschränkt. Die Annahme identischer Strömungsfelder in allen Schaufelkanälen lässt sich mit Hilfe von periodischen Randbedingungen umsetzen. Zur vollständigen Erfassung der zeitabhängigen Stator-Rotor-Wechselwirkungen und deren Einfluss auf das Strömungsfeld werden instationäre Berechnungen durchgeführt. Eine periodische Betrachtungsweise ist hierbei nur bedingt möglich und wird stark von den Anzahl der Leit- und Laufschaufeln beeinflusst. Man spricht in diesem Fall vom sogenannten Periodizitätsproblem. Besitzen das Leit- und Laufgitter die gleiche Schaufelzahl, so ist es ausreichend, das Rechengebiet über jeweils eine Schaufelreihe zu legen. In Umfangsrichtung gelten periodische Randbedingungen und somit wird, für jedes Teilgebiet, gleiche Strömung in allen Schaufelkanälen garantiert. Sehr häufig liegen die Anzahl der Stator- und Rotorschauflern sehr nah beieinander. Um die Periodizitätsbedingungen vollständig zu erreichen, muss in diesen Fällen das gesamte Leit- und Laufgitter als Berechnungsgrundlage herangezogen werden. Eine feine Diskretisierung dieses Rechengebiets ist mit sehr hohem Aufwand hinsichtlich der Rechenzeit und -leistung sowie der Speicherressourcen verbunden. Ebenso ist der Zeitbedarf für das Post-processing keinesfalls zu unterschätzen. Abhilfe schafft in diesem Fall eine gegenseitige Anpassung der Schaufelzahlen aneinander, sodass sich ein möglichst großer gemeinsamer Teiler findet. Dadurch reduziert sich einerseits die Anzahl der Schaufelkanäle, über die sich das Rechengebiet erstreckt, und damit auch der Rechenaufwand deutlich, andererseits wird das tatsächliche Schaufelzahlverhältnis und damit auch die instationären Strömungseffekte, die es zu untersuchen gilt, ausreichend berücksichtigt. [16]

Zur instationären Berechnung axialer Turbomaschinenstufen bietet FLUENT das sogenannte „Sliding-Mesh“-Verfahren an, in dem das gesamte Teilnetz des Rotors inklusive Beschauflung eine entsprechende Relativbewegung gegenüber dem fixierten Statornetz ausführt. Die Kopplung des bewegten und stillstehenden Teilgebiets erfolgt über eine Grenzfläche, ähnlich dem stationären Mischungsebenenansatz. In vielen CFD-Programmen, so auch in FLUENT, wird diese Kontrollschnittstelle als „Interface“ bezeichnet. Bei Verwendung nicht-konformer Netztopologie besitzen die beiden Teilnetze keine identischen Netzknoten, sodass die Strömungsgrößen, in der internen Kontrollfläche, vor der Übergabe interpoliert werden müssen. Hierbei muss die Massenerhaltung in den Kontrollvolumina gewährleistet sein. Der entstandene Interpolationsfehler ist vom Feinheitsgrad der Diskretisierung abhängig. [1]

## 6 Modellerstellung und Simulation

### 6.1 Stetigkeitsanforderungen der Profilgeometrie

Die Auslegung moderner Turbinenbeschaukelungen ist ein komplexer, zeitaufwändiger Iterationsprozess, bei dem die Profilform dahingehend optimiert wird, dass unter anderem die Gefahr einer Grenzschichtablösung ausgeschlossen wird. In diesem Zusammenhang ergeben sich bestimmte Anforderungen an die Profilstetigkeit, die sich aus der Druckverteilung an der Druck- und Saugseite des Profils ableiten lassen. Eine stetige Profilkontur weist in jedem Punkt eine Tangenten- und/oder Krümmungstetigkeit auf. Ebenso kann die stetige Änderung der Krümmung (Krümmungsableitung) gefordert werden, die sich jedoch nur mit Polynomfunktionen mindestens 4. Grades erfüllen lässt. Lediglich der Übergang zur Profilhinterkante ist von den Stetigkeitsanforderungen ausgenommen, da sich eine Strömungsablösung aufgrund endlicher Hinterkantendicke nicht vermeiden lässt. Ein tangenstetiger Übergang ist somit ausreichend. Im Folgenden werden die einzelnen Arten der Stetigkeit näher beschrieben. [12]

- **Punktstetigkeit ( $C^0$ )**

Eine explizit dargestellte Funktion  $y = f(x)$  ist im Punkt  $\xi \in D$  stetig, wenn der Grenzwert der Funktion existiert und für  $x \rightarrow \xi$  mit dem Funktionswert  $y$  an der Stelle  $\xi$  übereinstimmt.

$$\lim_{x \rightarrow \xi} y(x) = y(\xi) \quad (6.1)$$

Ist diese Bedingung für jeden Punkt im Definitionsbereich  $D$  erfüllt, so spricht man von der  $C^0$ -Stetigkeit. Treffen zwei Kurvenabschnitte aufeinander, dann haben sie im Schnittpunkt den gleichen Funktionswert und sind somit punktstetig.

- **Tangentenstetigkeit ( $C^1$ )**

Tangentenstetigkeit liegt vor, wenn die erste Ableitung der Funktion existiert und nach Glg. (6.1) stetig ist.

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad (6.2)$$

Ein tangenstetiger Übergang zweier Kurven (Splines) liegt vor, wenn die erste Ableitung beider Funktionen im Übergangspunkt übereinstimmt,  $C^1$ -Stetigkeit wird erreicht, wobei die 1 die erste Ableitung symbolisiert.

- **Krümmungsstetigkeit ( $C^2$ )**

Die Krümmung beschreibt die Abweichung der Kurve  $y(x)$  von ihrer im Bezugspunkt anliegenden Tangente. Als Maß für die Krümmung dient

$$\kappa = \frac{1}{r} \quad (6.3)$$

wobei  $r$  den Krümmungsradius darstellt. Für eine ebene Kurve ist die Krümmung

$$\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (6.4)$$

Ein krümmungsstetiger Übergang erfordert somit die gleiche Krümmung beider Polynome im Übergangspunkt. Zusammen mit der Tangentenstetigkeit resultiert die  $C^2$ -Stetigkeit aus der Gleichheit der zweiten Ableitung im Übergangspunkt.

- **Krümmungsänderungsstetigkeit ( $C^3$ )**

Die Krümmungsableitung einer ebenen Kurve berechnet sich nach

$$\kappa' = \frac{y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2}{(1 + y'^2)^{5/2}}. \quad (6.5)$$

Für eine stetige Krümmungsänderung der Polynomfunktion sind somit stetige Ableitungen bis zum dritten Grad erforderlich. In vielen CAD-Anwendungen beruhen die Splinefunktionen auf parametrisch modellierten Kurven. Zum heutigen Standard haben sich die Bézier-Kurven und die NURBS-Kurven (Non Uniform Rational B-Splines) etabliert.

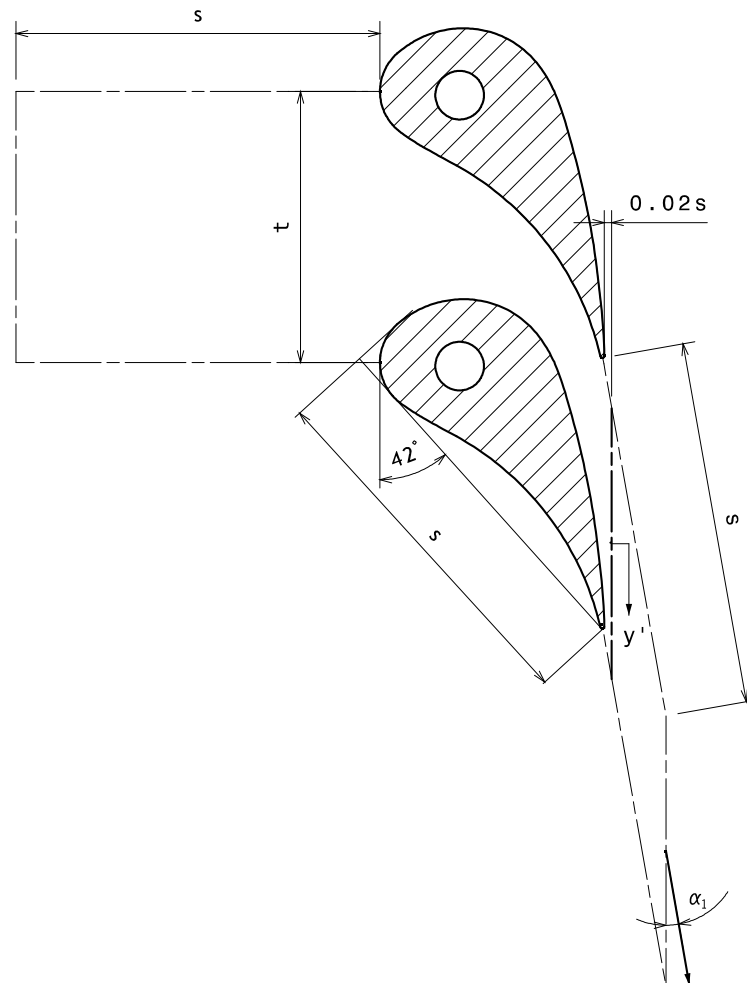
Unstetigkeitsstellen in der Profilkontur führen zu einer unstetigen Profildruckverteilung. Sie treten meistens entlang der Profilsaugseite auf, da diese in der Regel eine stärkere Krümmung aufweist. Durch die plötzliche Richtungs- beziehungsweise Krümmungsabweichung wird ein starker Druckanstieg induziert, der in weiterer Folge zur Ablösung der Grenzschicht führen kann. Im Kurvenverlauf der Profildruckverteilung sind sie als hügelartige Anhebungen, die relativ rasch wieder abnehmen, bemerkbar. Extreme Ablösungsbeispiele durch unstetige Geometrieänderung sind Diffusoren mit überkritischem Öffnungswinkel oder ein treppenartiger Kontursprung. In diesem Fall spricht man von einer geometrieinduzierten Ablösung. Auch wenn eine Unstetigkeitsstelle nicht zwingendermaßen eine Strömungsablösung verursacht, so bewirkt sie dennoch eine Erhöhung des Verlustbeiwertes des Profils und in weiterer Folge der Gitterverluste.

Das Leitradprofil konnte, ausgenommen an der Stelle, an der die Saugseite die größte Krümmung aufweist, annähernd frei von Unstetigkeitsstellen modelliert werden. Die Profilkontur der Laufradsaugseite wurde mit mehreren Glättungsdurchgängen in puncto Stetigkeit eindeutig verbessert. Nichtsdestotrotz sind aufgrund der starken saugseitigen Krümmung einige Unstetigkeitsstellen immer noch vorhanden und im Verlauf der Profildruckverteilung deutlich wahrnehmbar.

## 6.2 Leitgitter

### 6.2.1 Profilgeometrie

Wie anfangs bereits erwähnt, besteht die Turbine aus zwei Leitreihen und einer Laufreihe. Für die beiden Leitreihen werden identische Schaufelprofile verwendet, das sogenannte T85-Profil. Dieses wird auf eine Schaufelsehnenlänge von  $s = 60 \text{ mm}$  skaliert. Der Staffelungswinkel beträgt  $\gamma_{le} = 42^\circ$ , wie in den Skizzenblättern angegeben.

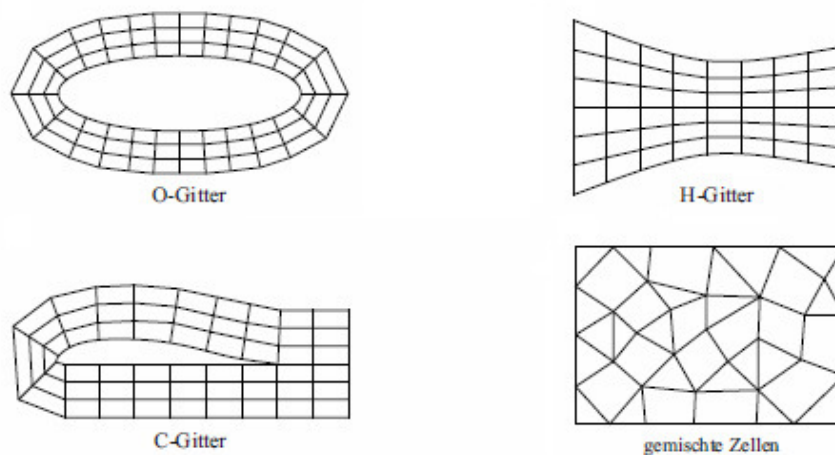


**Abbildung 6.1:** Leitgitter mit Zulauf- und Nachlaufstrecke

Die Schaufeln besitzen ein Überdruckprofil, dessen Eintrittskante einen großen Radius aufweist. In weiterer Folge wird sich zeigen, dass die Leitschaukel dementsprechend in einem breiten Bereich unempfindlich gegen Änderungen des Anströmwinkels reagiert. Weiters auffällig ist die stark ausgeprägte Umlenkung der Strömung, sodass am Schaufelaustritt mit einer deutlich höheren Strömungsgeschwindigkeit zu rechnen ist als am Eintritt. Die Auswertung der Gittercharakteristiken findet in der Messebene statt, die einen Abstand von  $0.02 \cdot$  Sehnenlänge zu der Austrittskante hat.

## 6.2.2 Netzgenerierung

Verwendet man das Softwarepaket ANSYS ICEM CFD für die Netzgenerierung, dann bieten sich die Möglichkeiten ein strukturiertes oder unstrukturiertes Netz zu erstellen. Der grundlegende Unterschied besteht in den Beziehungen zweier Nachbarszellen zueinander beziehungsweise in der Geometrie der Zellen an sich. Während ein strukturiertes Netz eine zusammenhängende, gleichmäßige Topologie aufweist, folgen die Zellen unstrukturierter Netze keinen festgelegten Beziehungen und können unterschiedliche Geometrie besitzen, beispielsweise Dreiecke und Vierecke im zweidimensionalen Fall. Der große Vorteil liegt hierbei in der automatischen Generierbarkeit und der guten Anpassungsfähigkeit an komplexe Geometrie. Dem gegenüber stehen ein höherer Speicherbedarf und ein höherer Rechenaufwand.

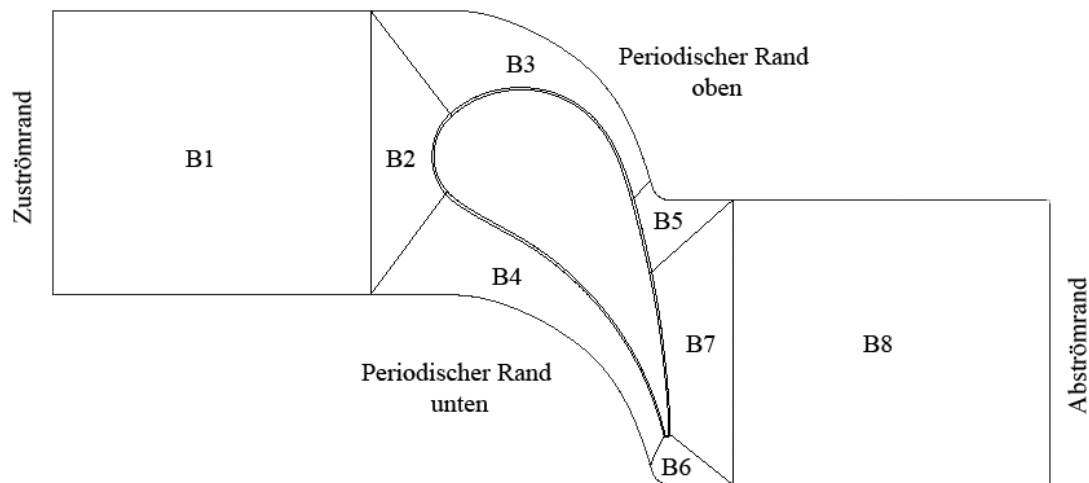


**Abbildung 6.2:** Strukturiertes und unstrukturiertes Gitter [11]

Die einfachste Art strukturierter Netze stellen die kartesischen Rechenetze mit rechtwinkligen Zellen dar. Trotz ihrer einfachen Erzeugung lassen sich durchaus Ergebnisse mit ausreichender Genauigkeit erzielen. Aufgrund der schwierigen Anpassung an die Profilkontur eines umströmten Körpers eignet sich das kartesische Netz vor allem für einfache Geometrie mit gerader Kontur, wie beispielsweise eine Rohrvernetzung. Bei komplexerer Geometrie kommen üblicherweise schiefwinkelige Rechenetze zum Einsatz. Dadurch kann die Netzgeometrie besser an die Profilkontur angepasst werden. Prinzipiell unterscheidet man zwischen O-, C- und H-Rechenetzen, vgl. Abbildung 6.2. Die Namen ergeben sich aus der Form beziehungsweise dem Verlauf der Netzlinien. So verläuft zum Beispiel ein O-Netz wie ein Ring um die Kontur der umströmten Geometrie. Mit entsprechend feinem Netz lässt sich damit die Grenzschicht sehr gut auflösen. Dies ist selbstverständlich mit den anderen Netztypen ebenfalls möglich, indem das Netz am gewünschten Profil verdichtet wird. Dadurch können sich jedoch ungünstige Seitenverhältnisse einer Zelle ergeben und die Netzqualität verschlechtert sich. [8, 11]

Für das hier vorliegende Rechenggebiet bietet sich ein blockstrukturiertes Netzgitter an, angelehnt an *Zahirovic* [17]. Hierzu unterteilt man das Strömungsgebiet in mehrere Blöcke, die dann einzeln strukturiert vernetzt werden. Dabei ist besonders auf den Übergang zwischen

zwei Blöcken zu achten. Besitzen benachbarte Blöcke entlang ihrer Grenzante nicht identische Netzknotten, so müssen die Rechengrößen vor der Übergabe entsprechend interpoliert werden. Daraus folgernd kann mit einer gut strukturierten Blockbelegung nicht nur die Netzqualität, sondern auch die Genauigkeit der Simulationsergebnisse verbessert werden. Ein weiterer Vorteil ist, dass besonders kritische Bereich sehr fein aufgelöst werden können und gleichzeitig die Netzgröße, das heißt die Anzahl der Zellen, gering gehalten werden kann.



**Abbildung 6.3:** Blockstruktur des Leitgitterrechnernetzes

In der Abbildung 6.3 ist das die Leitschaufel umschließende Rechengebiet zu sehen. Es besteht aus insgesamt 9 Blöcken, die mit ANSYS ICEM CFD erstellt wurden. Die Blöcke sind derart angeordnet, um Strömungsbereiche in Profilnähe, in denen große Geschwindigkeits- und Druckgradienten zu erwarten sind, feiner diskretisieren zu können. Hierzu wurde eine Kombination aus blockstrukturierten H- und O-Netz-Blöcken verwendet. Im Detail sind es acht H-Netz-Blöcke und ein profiläquidistantes O-Netz, welches sich jedoch in sechs Blöcke unterteilt, die aus Übersichtlichkeitsgründen nicht beschriftet werden. Diese Unterteilung ist aufgrund der starken Profilkrümmung notwendig. Dadurch wird gewährleistet, dass die der Profilkontur folgenden schiefwinkligen Zellen keine zu spitzen Winkel und keine Determinante kleiner 0.4 aufweisen, um in weiterer Folge eine höhere Netzqualität zu sichern. Die Tabelle 6.1 fasst die Netzgröße des verwendeten Leit- und Laufgitterrechnernetzes zusammen.

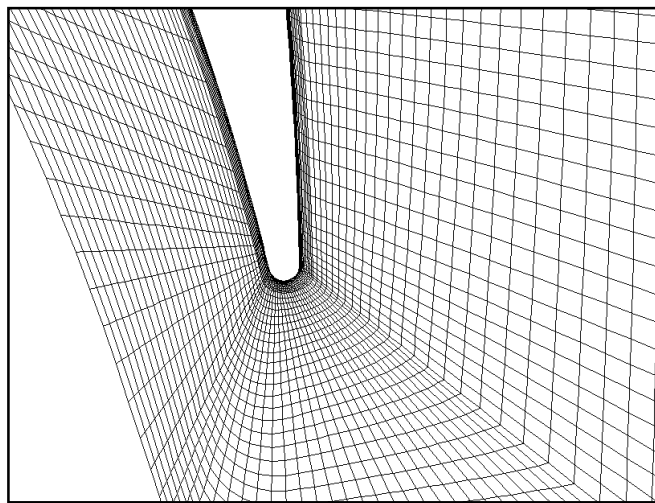
	Leitgitter	Laufgitter
Knotenzahl	15686	16770
Zellenzahl	15339	16369

**Tabelle 6.1:** Netzgröße des Leit- und Laufgitterrechnernetzes

Der Zuströmbereich wird aufgrund des homogenen Strömungsverlaufs relativ grob vernetzt, wobei die profilnahen Zellen feiner werden. Benachbarte Netzblöcke besitzen an den Blockrändern gleiche Elementknotten, so dass keine Interpolation der Strömungsgrößen notwendig ist. Das äquidistante O-Rechnernetz dient dazu, die wandnahe viskose Grenzschicht an dem Profil aufzulösen. Wie in der Abbildung 5.3 ersichtlich, kann eine viskose

Unterschicht bis zu einem dimensionslosen Wandabstand von  $y^+ < 5$  aufgelöst werden. Mit dem hier verwendeten Netz liegen die  $y^+$ -Werte entlang des ganzen Profils unter einem Wert von 2. Nichtsdestotrotz konnte dadurch die Anzahl der Elemente im gesamte Rechenggebiet klein gehalten werden, was mit einer einfachen Stauchung des H-Rechnernetzes um die Profilgeometrie nicht realisierbar wäre. Daraus ergibt sich eine höhere numerische Effizienz und höhere Netzqualität.

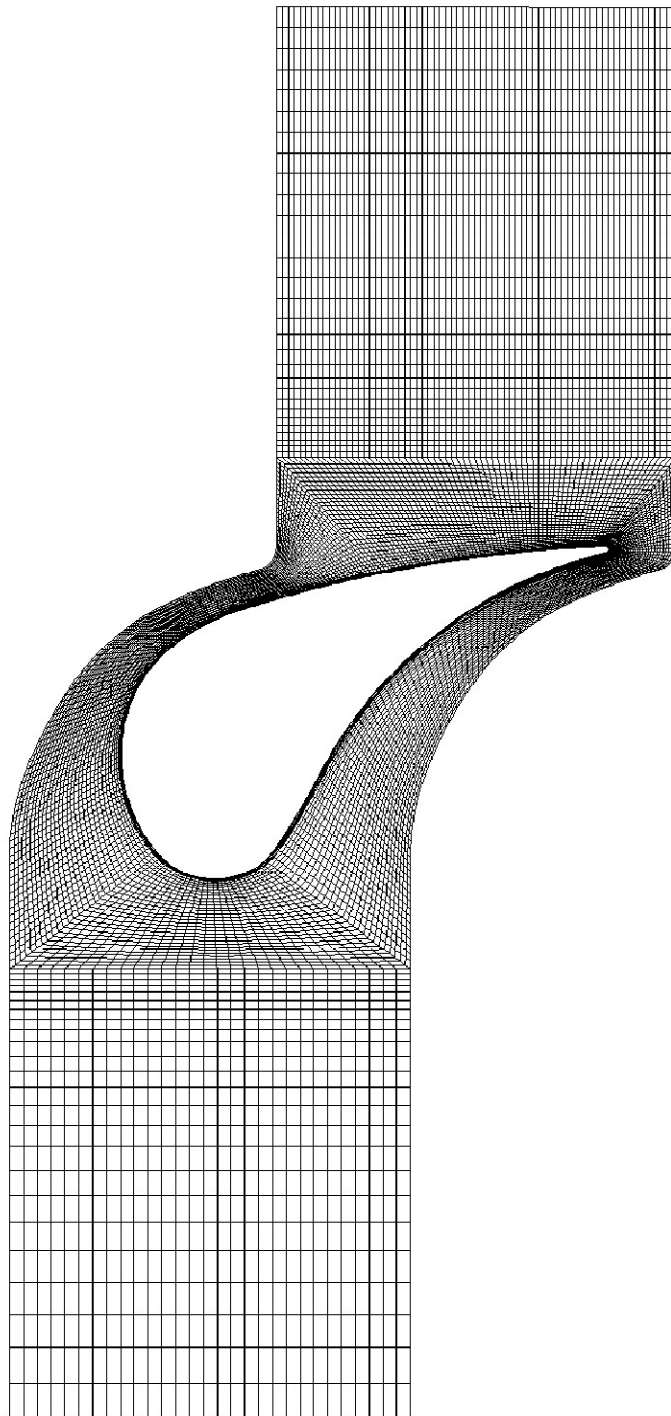
Oben wurde bereits die Notwendigkeit, kritische Strömungsgebiete feiner vernetzen zu können, erwähnt. Dazu zählt auch der Bereich um die Hinterkante der Schaufel. Dieser wird mit den Blöcken B4, B6 und B7 aufgelöst. Um die auftretenden hohen Gradienten direkt an der Austrittskante erfassen zu können, wurde der Block B6 besonders fein diskretisiert, vgl. Abbildung 6.4. Hier ist zu beachten, dass der periodische Übergang zum Block B5 ohne großen Unterschied in der Zellgröße verlaufen sollte. Gleiches gilt für den Block B4, der aufgrund der Periodizitätsbedingung in den Block B3 übergeht. Damit wird vor allem die Stabilität der Simulation verbessert. Es wurde ebenfalls darauf geachtet, die Zellen an die Strömungsrichtung anzupassen, um die numerischen Dissipationsverluste gering zu halten. Im Block B7 konnte dieser Verlauf nicht durchgehend umgesetzt werden. Die allgemein relativ starke Dissipation könnte in diesem Netzblock durch den ungünstigen Verlauf des Netzgitters zusätzlich verstärkt werden. Dieser Umstand ist, neben der starken Strömungsumlenkung, dafür verantwortlich, dass die Auswertungsebene sehr nahe an der Profilaustrittskante gelegt werden muss, um noch auswertbare Messungen garantieren zu können. In der Abbildung 6.5 ist das Leitgitterrechnernetz zu sehen.



**Abbildung 6.4:** Diskretisierung der Leitradhinterkante

Um die numerische Effizienz zu gewährleisten, wurde mit einem relativ groben Netz begonnen und die Netzverfeinerung solange wiederholt, bis keine groben Unterschiede in den Ergebnissen festzustellen waren. Zum Beispiel müsste man die Anzahl der Knoten im Hinterkantenbereich beinahe verdoppeln, um eine zwei-prozentige Änderung der Rechenergebnisse wahrzunehmen. Das Rechnernetz stellt somit einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand dar.

Die Vorgehensweise der Netzgenerierung ist für die Naben- und Spitzenebene identisch, wird daher nur für den Mittelschnitt ausführlicher behandelt. Selbiges gilt für die Laufreihe.



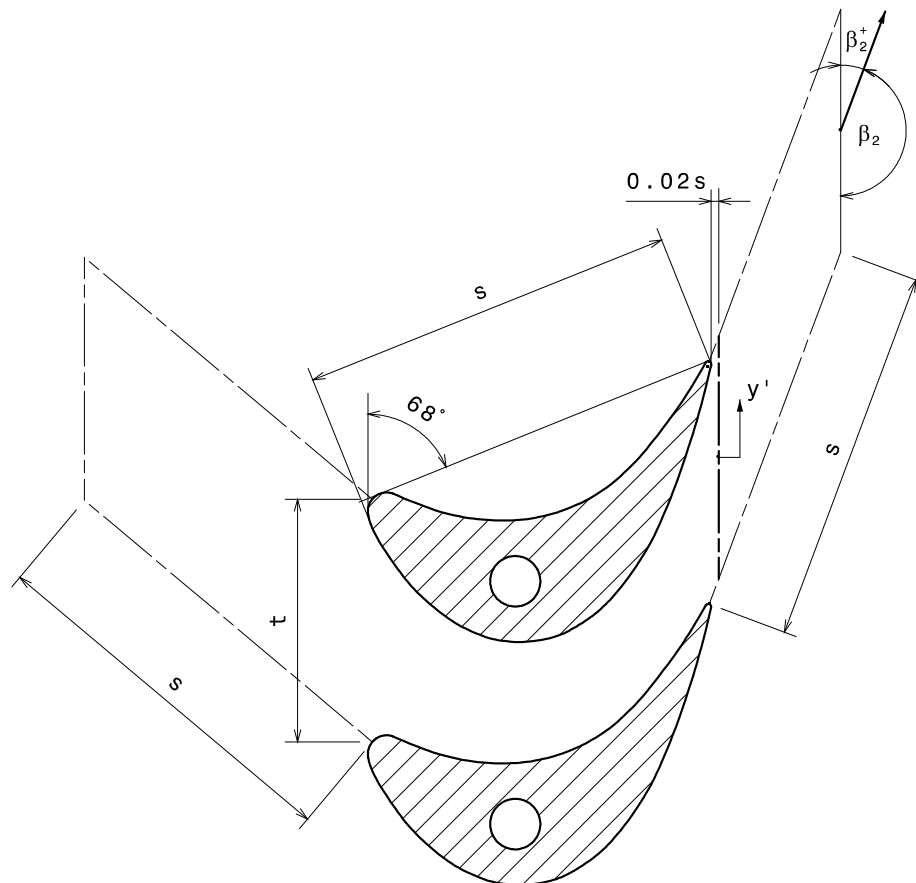
**Abbildung 6.5:** Leitgitterrechnetz



## 6.3 Laufgitter

### 6.3.1 Profilgeometrie

Das Laufrad wurde mit den Profilkoordinaten des Gleichdruckprofils S85 modelliert und an die entsprechende Sehnenlänge von 60 mm skaliert. Der Staffelungswinkel beträgt  $\gamma_{la} = 68^\circ$ . Der Abstand der Auswertungsebene zur Austrittskante beträgt auch hier zwei Prozent der Sehnenlänge.



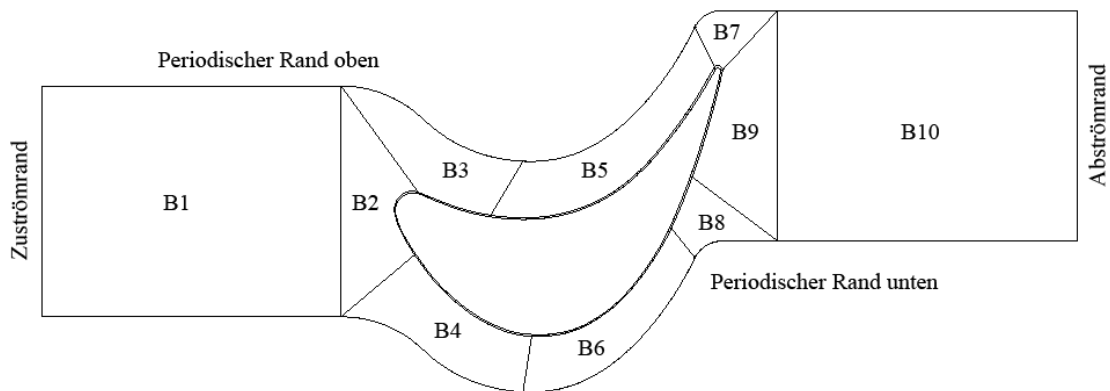
**Abbildung 6.6:** Laufgitter mit Zulauf- und Nachlaufstrecke

Bereits aus dem Profil der Laufradbeschaufelung lässt sich die Turbinenart schlussfolgern. Besitzt das Profil, so wie im aktuellen Fall, einen sichelförmigen Querschnitt, handelt es sich um eine Gleichdruckturbine. Ähnelt die Beschaufelung der Laufreihe jener der Leitreihe, wird die Turbine nach dem Überdruckprinzip betrieben. Nichtsdestotrotz beeinflusst die Wahl des Staffelungswinkels die Strömungsform entscheidend, sodass mit einem Gleichdruckprofil ebenso eine beschleunigte Strömung erreicht werden kann. Dementsprechend wird die Luftturbine nach dem Überdruckprinzip betrieben.

Der kleinere Radius der Schaufelvorderkante und der hohe Umlenkungswinkel der Strömung lassen, im Vergleich zum Leitschaufelprofil, höhere Profilverluste und eine stärkere Anfälligkeit gegenüber Änderungen des Anströmwinkels schlussfolgern.

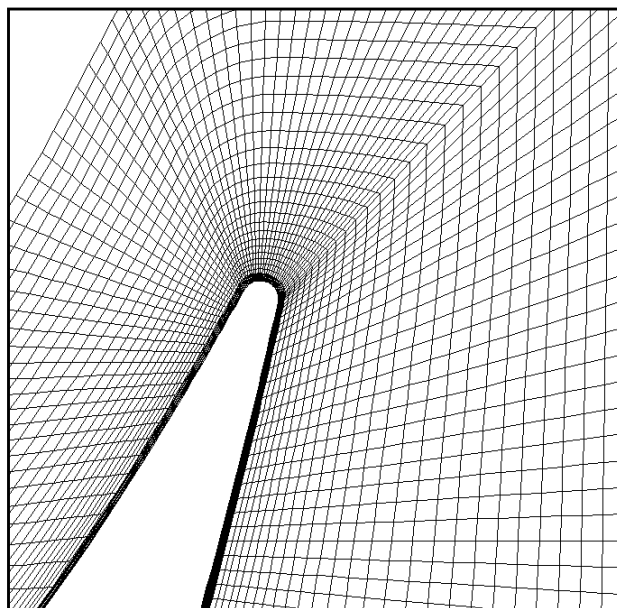
### 6.3.2 Netzgenerierung

Die Vernetzung des Laufgitters wird analog dem Leitgitterrechennetz ausgeführt. Es wurde eine Kombination aus insgesamt zehn H-Netz-Blöcken und einem profiläquidistanten O-Netz verwendet, das sich, aufgrund besserer Anpassbarkeit, auf insgesamt acht Blöcke unterteilt.

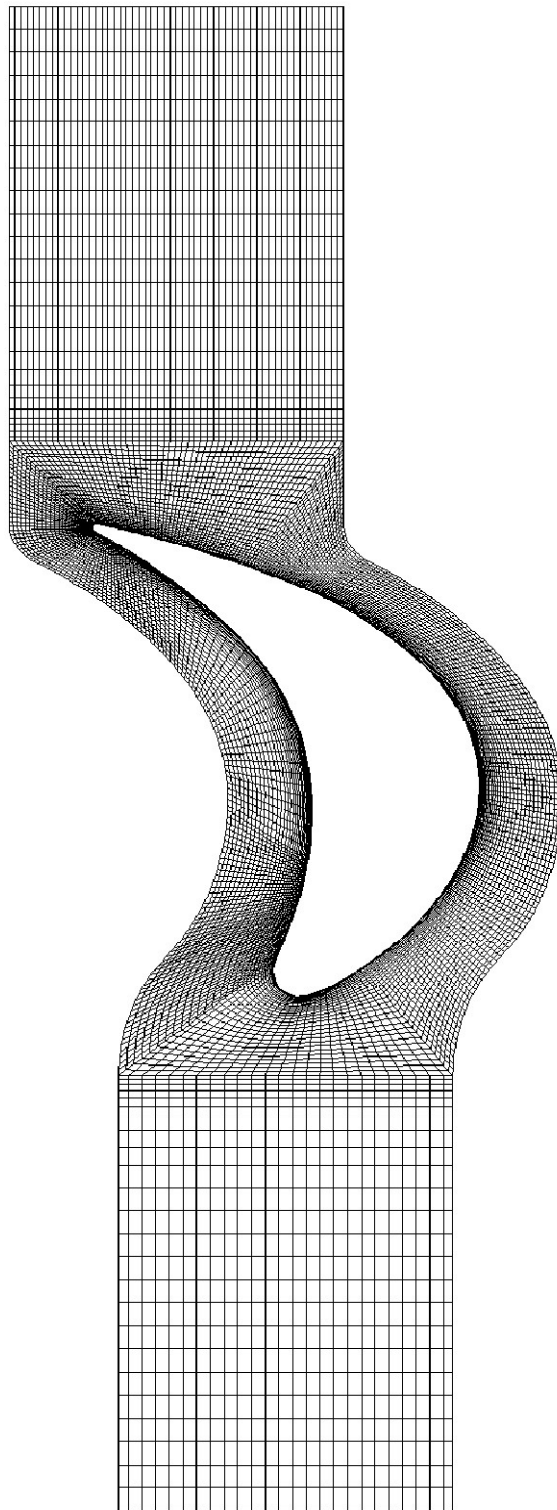


**Abbildung 6.7:** Blockstruktur des Laufgitterrechennetzes

Um die Netzqualität entlang der Saug- und Druckseite zu optimieren, war es im Vergleich zum Leitgitterrechennetz notwendig, zwei weitere Blöcke einzuführen. Somit konnten die schiefwinkligen Zellen effizienter an die stark gekrümmten Randflächen angepasst werden. Abschnittsweise weichen die Zellen jedoch von der Strömungsrichtung ab, wodurch, wie bereits erwähnt, höhere Dissipationsverluste auftreten können. Der Hinterkantenbereich wird mit den Blöcken B5, B9 und B7 aufgelöst, wobei der Letztere eine entsprechend feinere Diskretisierung aufweist. Abbildung 6.8 stellt einen vergrößerten Ausschnitt aus dem Laufgitterrechennetz im Bereich der Hinterkante dar, Abbildung 6.9 das vollständige Rechennetz.



**Abbildung 6.8:** Diskretisierung der Laufradhinterkante



**Abbildung 6.9:** Laufgitterrechnetz

## 6.4 Randbedingungen

Wie aus den Abbildungen 6.5 und 6.9 hervorgeht, wird als Rechengebiet ein Umströmnetzgitter verwendet, welches um das Schaufelprofil herum verläuft und durch entsprechende Begrenzungen von der Umgebung getrennt ist. Begrenzungsflächen sind einerseits der Eintritts- und Austrittsrand der Strömung und andererseits werden die mittleren Kanalkrümmungsflächen als seitliche Randgeometrie verwendet. Die Strömung im Inneren des Rechengebiets wird durch die eigentliche Profilkontur bestimmt.

Der Zuströmrand befindet sich in einem Abstand von einer Sehnenlänge zur Profilverderrkante. Eine genügend lange Einlaufstrecke garantiert eine homogene Geschwindigkeitsverteilung am Eintritt der Leitreihe. Als Randbedingung kann der Druck, der Massenstrom oder wie in diesem Fall die Eintrittsgeschwindigkeit vorgegeben werden. Um die grundlegende Betriebsweise der axialen Kaltluftturbine mit zylindrischem Querschnitt zu berücksichtigen wird hierzu eine konstante Meridiansgeschwindigkeit  $c_m = 12.17 \text{ m/s}$  für den gesamten Winkelvariationsbereich vorgegeben. Als Randbedingung am Abströmrand wurde für die Strömung der Umgebungsdruck  $p_u$  vorgegeben..

Die Profilkontur im Inneren des Gitters wird in diesem Fall als eine starre Wand betrachtet. An der Wand wird die Haftbedingung als Randbedingung für den Impulssatz vorgegeben, das heißt das Fluid besitzt an der Oberfläche die gleiche Geschwindigkeit wie das Schaufelprofil. Die Gittercharakteristiken werden am ruhenden Leit- und Laufgitter bestimmt, die Fluidgeschwindigkeit fällt somit auf null. Gleichmaßen kann eine rotierende Schaufel berechnet werden, indem für den zweidimensionalen Fall die Umfangsgeschwindigkeit als Translationsgeschwindigkeit in die gewünschte Richtung festgelegt wird.

An den seitlichen, zur Strömung parallel verlaufenden, Begrenzungsrandern werden translatorische Periodizitätsbedingungen in Umfangsrichtung definiert. Durch das Voraussetzen identischer Strömungsfelder in allen Schaufelkanälen kann mit Hilfe der periodischen Randbedingungen das Rechengebiet auf eine einzelne Schaufelreihe begrenzt werden, welches sich periodisch wiederholt. Durch die Verwendung identischer Knotenpunkte entlang der periodischen Randflächen entfällt die Interpolation der gesuchten Strömungsgrößen, so dass diese direkt übergeben werden können.

## 6.5 Einstellungen in FLUENT

Der hauptsächliche Unterschied in der Strömungssimulation des Leit- und Laufgitters liegt im Anströmwinkelbereich, für den die Gittercharakteristiken bestimmt werden. Sämtliche Einstellungen können somit analog durchgeführt werden, weshalb diese in weiterer Folge allgemeingültig vermerkt werden.

Nachdem das in ICEM CFD erstellte Netz in FLUENT importiert wurde, ist es, falls erforderlich, auf das richtige Längenmaß zu skalieren. Weiters ist es ratsam, das Netz auf mögliche Fehler hinsichtlich der Vorgabe der Randbedingungen, nicht vernetzter Flächen und weiterer Kontrollpunkte zu überprüfen (*Grid Check*). Die nachfolgende Tabelle 6.2 fasst die in FLUENT vorgenommenen Einstellungen zusammen.

Als Arbeitsmedium wird Luft bei der Normatmosphäre verwendet, die durch  $T_u = 288.15 \text{ K}$  und  $p_u = 101325 \text{ Pa}$  spezifiziert wird. Für die stationär durchgeführten Berechnungen wird der druckbasierte Solver SIMPLE verwendet. Die Eintrittsgeschwindigkeit wird in ihren Einzelkomponenten aufgespalten vorgegeben. Die Änderung des Zuströmwinkels wird somit durch die Vorgabe der Geschwindigkeitskomponenten in  $x$ - und  $y$ -Richtung berücksichtigt. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen, wurde die Meridiangeschwindigkeit  $c_m$  für den gesamten Winkelvariationsbereich des Leit- und Laufgitters konstant gehalten. Jede Variation des Anströmwinkels führt somit zu einer Änderung der Zuströmgeschwindigkeit  $c_0$  des Leitgitters beziehungsweise der relativen Zuströmgeschwindigkeit des Laufgitters  $w_1$ . Der Turbulenzgrad  $Tu$  wurde mit 5 % und das turbulente Längenmaß  $l_t$  mit  $0.01 \cdot$  Sehnenlänge angenommen.

<b>Generelle Einstellungen</b>		
Solver-Type	Pressure-Based	
Velocity Formulation	Absolute	
Time	Steady	
2D Space	Planar	
<b>Turbulenzmodell</b>		
$k$ - $\omega$ -SST	Default-Einstellungen	
<b>Material</b>		
Fluid	Luft	Default-Einstellungen $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ $\mu = 1.7894 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$
<b>Randbedingungen</b>		
<i>Velocity Inlet</i>	Velocity Specification Method  Turbulence Intensity Turbulent Length Scale	Components $x$ -Velocity [m/s] $y$ -Velocity [m/s] 5 % 0.6 mm
<i>Pressure Outlet</i>	Gauge Pressure  Backflow Turbulence Intensity Backflow Turbulent Length Scale	0 Pa 5 % 0.6 mm
<i>Periodic</i>	Periodic Type	Translational
<i>Wall</i>	Wall Motion Shear Condition Wall Roughness	Stationary Wall No Slip Default-Einstellungen

<i>Operating Conditions</i>	Operating Pressure Gravity	101325 Pa inaktiv
<b>Lösungsalgorithmus</b>		
<i>Pressure Velocity Coupling</i>	Scheme	Simple
<i>Discretization</i>	Pressure Momentum Turbulent Kinetic Energy Specific Dissipation Rate	Standard Second Order Upwind Second Order Upwind Second Order Upwind
<b>Residuen</b>		
Konvergenzgrenze	10 <sup>-5</sup>	

Tabelle 6.2: Einstellungen in FLUENT

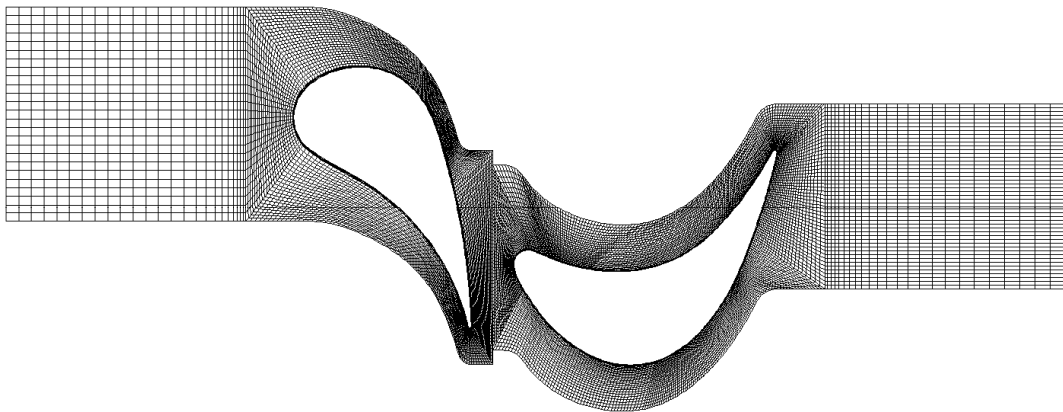
## 6.6 Stufenmodellierung

Das Ziel der Stufenmodellierung ist die numerische Ermittlung der Turbinenkennlinie, die sich bei einer isentropen Zustandsänderung direkt aus der Druckänderungen ergibt. Des Weiteren liefert die CFD-Berechnung sämtliche Strömungsgrößen, um auch den Umfangwirkungsgrad der Turbinenstufe zu ermitteln. Die Stufenmodellierung stellt besondere Bedingungen im Hinblick auf die Netzgenerierung. Insbesondere ist der axiale Abstand von 8.9 mm zwischen der Leitreihe und der Laufreihe einzuhalten. Dies führt zu einer Verkürzung des Abströmbereichs des Leitgitters als auch der Einlaufstrecke des Laufgitters. Im Vergleich zum Einzelgitterrechengebiet konnte die Blockstruktur großteils beibehalten werden. Eine entsprechende Anpassung war speziell im Zwischengitterraum notwendig. Da es sich dabei gerade um die kritischen Bereiche handelt, wurde auf eine entsprechend feine Auflösung geachtet, vgl. Abbildung 6.10. Aufgrund der starken Krümmung bei gleichzeitig sehr kurzer Einlaufstrecke im Bereich der Laufradeintrittskante konnten glatte Übergänge an den Blockrändern nicht durchgehend erreicht werden.

### 6.6.1 Randbedingungen

Im Kapitel 5.6 wurden mögliche Methoden zur Stufenberechnung in axialen Turbinengittern beschrieben. Da eine instationäre Stufenberechnung primär zur Untersuchung der Wechselwirkungen zwischen dem Leit- und Laufgitter eingesetzt wird, wurde die aktuelle Simulation auf den stationären Fall beschränkt. Die Berechnungen wurden mit dem Mischungsebenenansatz (Mixing Plane) durchgeführt. Man macht sich somit zuerst, zeit- und ressourcensparend, ein Bild über den Strömungsverlauf, kann im Post-Processing entsprechende Anpassungen und Verfeinerungen vornehmen und anschließend ausführlichere Berechnungen durchführen. In der Regel ist diese Reihenfolge einer stationären Berechnung im ersten Schritt mit anschließender detaillierter, instationärer Simulation üblich.

Für den Mischungsebenenansatz muss in FLUENT jene Grenzfläche (Interface) definiert werden, die als Schnittstelle zwischen Leitgitteraustritt und Laufgittereintritt dient und in der die Umfangsmittelung stattfindet. Zuvor sind an den beiden Rändern entsprechende Randbedingungen zu setzen. Es werden jedoch keine einzuhaltenden Werte festgelegt, wie beispielsweise die Vorgabe der Eintrittsgeschwindigkeit im Stator oder des Austrittsdruckes im Rotor, sondern vielmehr jene Strömungsgrößen definiert, die umfangsgemittelt und anschließend an den Rotor übergeben werden. Zu beachten ist, dass FLUENT am Statoraustritt als Randbedingung den statischen Druck fordert, weshalb dieser als *Pressure Outlet* definiert wurde. Der Rotoreintritt ist als *Mass-Flow-Inlet* gesetzt, um eine homogene Geschwindigkeitsverteilung am Eintritt zu erzielen. Die Laufgitterrotation wird, im zweidimensionalen Fall, durch die Vorgabe der Umfangsgeschwindigkeit berücksichtigt, mit der das Laufgitter eine translatorische Bewegung ausführt. Sie ist unter *Cell Zone Conditions* zu setzen, wobei es auf die entsprechende Bewegungsrichtung zu achten gilt. Die Laufschaufel wird weiterhin als Wand (Wall) behandelt, wobei die Randbedingung auf *Moving Wall* zu ändern ist. Es handelt sich weiterhin um eine reibungsbehaftete Strömung, sodass an der Wand die Haftbedingung erfüllt werden muss. Die restlichen Einstellungen können der Tabelle 6.2 entnommen werden. Das Rechenetz der gesamten Stufe ist in der Abbildung 6.10 dargestellt.



**Abbildung 6.10:** Rechenetz der axialen Turbinenstufe

## 7 Berechnungsergebnisse

Bei der hier vorliegenden Nachrechnungsaufgabe handelt es sich näherungsweise um ein direktes Auslegungsproblem, das jedoch auf die Berechnung der Charakteristiken des Leit- und Laufgitters in Abhängigkeit vom Anströmwinkel reduziert wird. Die Profilgeometrie ist in beiden Fällen fest vorgegeben und wird nicht verändert.

Im nachfolgenden Abschnitt werden die Berechnungsergebnisse beider Einzelgitter für den Mittelschnitt besprochen. Zu Beginn werden die graphischen Auswertungen sämtlicher numerisch ermittelter Strömungsgrößen wiedergegeben. Im Anschluss werden diese einzeln näher erklärt und diskutiert. Die Variation des absoluten Anströmwinkels  $\alpha_0$  ( $60^\circ/70^\circ/80^\circ/90^\circ/100^\circ/110^\circ/120^\circ$ ) und des relativen Anströmwinkels  $\beta_1$  ( $20^\circ/30^\circ/40^\circ/50^\circ/60^\circ/70^\circ/80^\circ$ ) wird in  $10^\circ$ -Schritten vorgenommen. Um höhere Übersichtlichkeit zu gewährleisten, wird die graphische Darstellung einer auszuwertenden Strömungsgröße auf zwei Diagramme aufgeteilt, jeweils für den Bauch- und Rückenstoß.

Für den Naben- und Spitzenschnitt der Leit- und Laufreihe wurden äquivalente Simulationen durchgeführt, die Ergebnisse sind als Anhang A.2, A.3 und A.4 beigelegt. Dort können die gemittelten Strömungsgrößen, aber auch der über die Teilung aufgetragene Verlauf eingesehen werden.

### 7.1 Mittelungsverfahren

FLUENT bietet die Möglichkeit, das berechnete Strömungsfeld in der gewünschten Messebene näher auszuwerten. Es kann jede Strömungsgröße über die Schaufelteilung an den gewünschten Stützstellen ausgewertet werden. Die Position der verwendeten Auswerteebene ist für das Leitgitter in der Abbildung 6.1 und für das Laufgitter in der Abbildung 6.6 gekennzeichnet. Da in naher Zukunft die Turbine in Betrieb genommen werden soll, ist somit ein Vergleich der numerischen Ergebnissen mit den vorgenommenen Messungen möglich. Neben dem Abströmwinkel ist die Untersuchung der Verlusteigenschaften eines Gitters von großem Interesse. Um diese zu bewerten, werden der Totaldruckkoeffizient  $C_{pt}$  und der Profilverlustbeiwert  $\zeta$  herangezogen.

Die Änderung des statischen Druckes wird mit dem statischen Druckkoeffizienten  $C_p$  erfasst, der die Differenz der statischen Drücke in der Auswertungsebene und am Gittereintritt bezogen auf den dynamischen Druck am Gittereintritt darstellt.

$$\text{Leitgitter} \quad C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho c_0^2} \quad (7.1)$$

$$\text{Laufgitter} \quad C_p = \frac{p - p_1}{\frac{1}{2} \rho w_1^2} \quad (7.2)$$



Der Totaldruckkoeffizient ist das Verhältnis der Totaldruckdifferenz zwischen Auswertungsebene und Gittereintritt zum dynamischen Druck am Gittereintritt.

$$\text{Leitgitter} \quad C_{pt} = \frac{p_t - p_{t0}}{\frac{1}{2} \rho c_0^2} \quad (7.3)$$

$$\text{Laufgitter} \quad C_{pt} = \frac{p_t - p_{t1}}{\frac{1}{2} \rho w_1^2} \quad (7.4)$$

Der Totaldruck am Gittereintritt beziehungsweise in der Auswerteebene bildet sich aus der Summe des statischen Druckes  $p$  und des vorherrschenden dynamischen Druckes  $p_{dyn}$ .

Für die Charakterisierung der Einzelgitterprofile werden die numerischen Simulationsergebnisse in der Auswertungsebene zu teilungsgemittelten, mit der Massenstromdichte gewichteten Strömungsgrößen zusammengefasst. Bei der Gewichtung ist primär der Geschwindigkeitsverlauf ausschlaggebend, da bei einer inkompressiblen Strömung die Dichte im gesamten Strömungsfeld als konstant betrachtet wird.

- Mit der Massenstromdichte gewichteter teilungsgemittelter Abströmwinkel:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\int_0^t \alpha_1(y') c_1(y') \rho_1(y') \sin(\alpha_1(y')) dy'}{\int_0^t c_1(y') \rho_1(y') \sin(\alpha_1(y')) dy'} \quad (7.5)$$

- Mit der Massenstromdichte gewichteter teilungsgemittelter statischer Druckkoeffizient:

$$\bar{C}_{p1} = \frac{\int_0^t C_{p1}(y') c_1(y') \rho_1(y') \sin(\alpha_1(y')) dy'}{\int_0^t c_1(y') \rho_1(y') \sin(\alpha_1(y')) dy'} \quad (7.6)$$

- Mit der Massenstromdichte gewichteter teilungsgemittelter Totaldruckkoeffizient:

$$\bar{C}_{pt1} = \frac{\int_0^t C_{pt1}(y') c_1(y') \rho_1(y') \sin(\alpha_1(y')) dy'}{\int_0^t c_1(y') \rho_1(y') \sin(\alpha_1(y')) dy'} \quad (7.7)$$

Zur Auswertung der Integrale wurde die 5-Punkte-Newton-Cotes-Formel herangezogen, die in einer Matlabfunktion implementiert wurde. Die Diagramme wurden mit dem Analyse- und Darstellungsprogramm OriginPro erstellt.

## 7.2 Leitgitter

### 7.2.1 Grafische Auswertung

#### Abströmwinkel $\alpha_1$

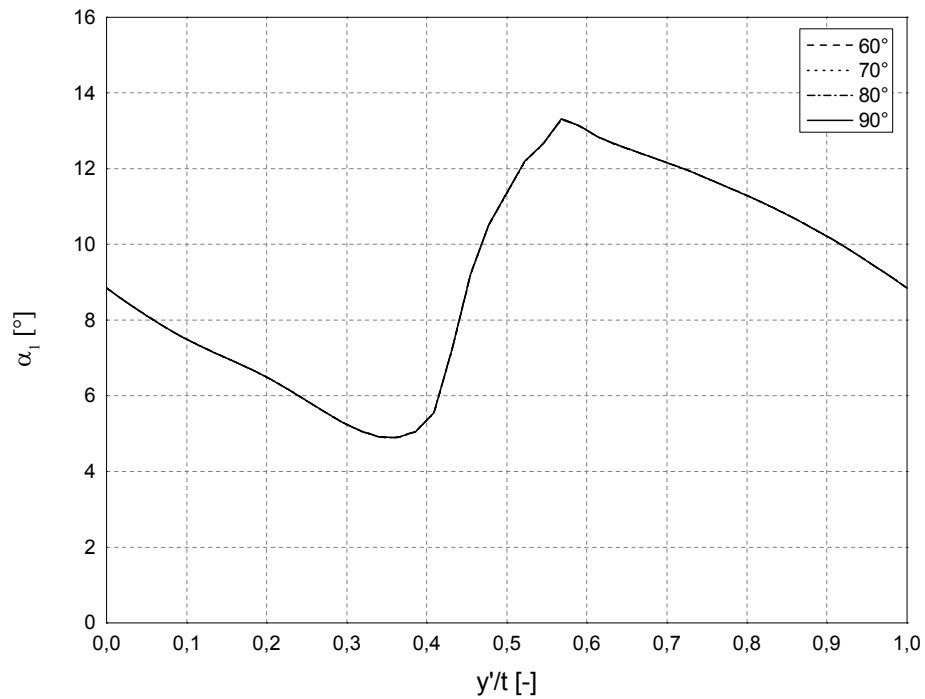


Abbildung 7.1: Verlauf von  $\alpha_1$  für  $\alpha_0 \leq 90^\circ$

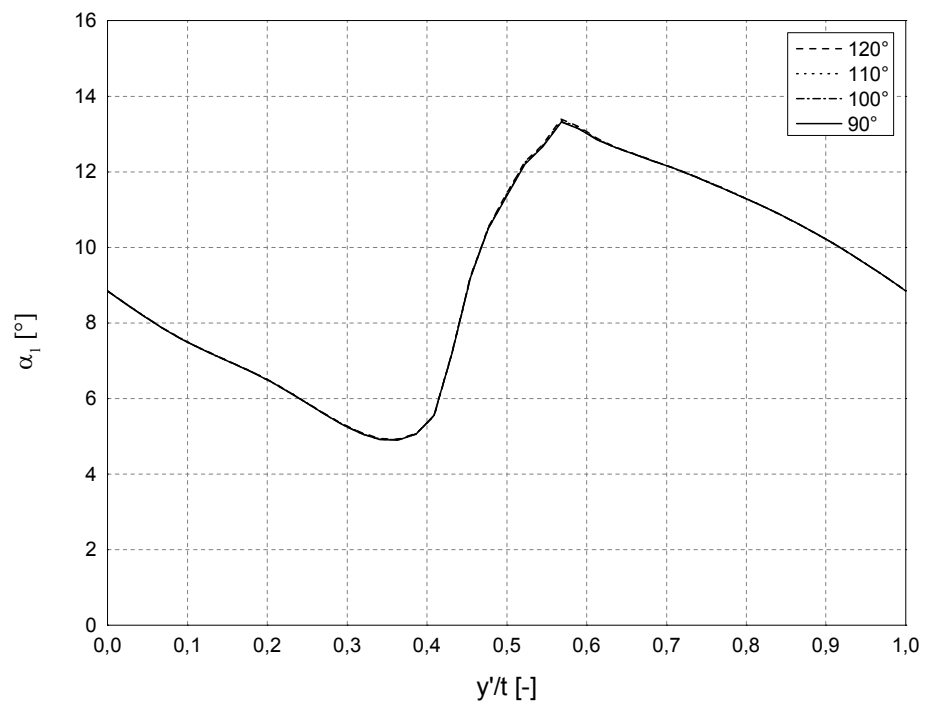


Abbildung 7.2: Verlauf von  $\alpha_1$  für  $\alpha_0 \geq 90^\circ$

Geschwindigkeitsverteilung  $\frac{c_1}{c_0}$

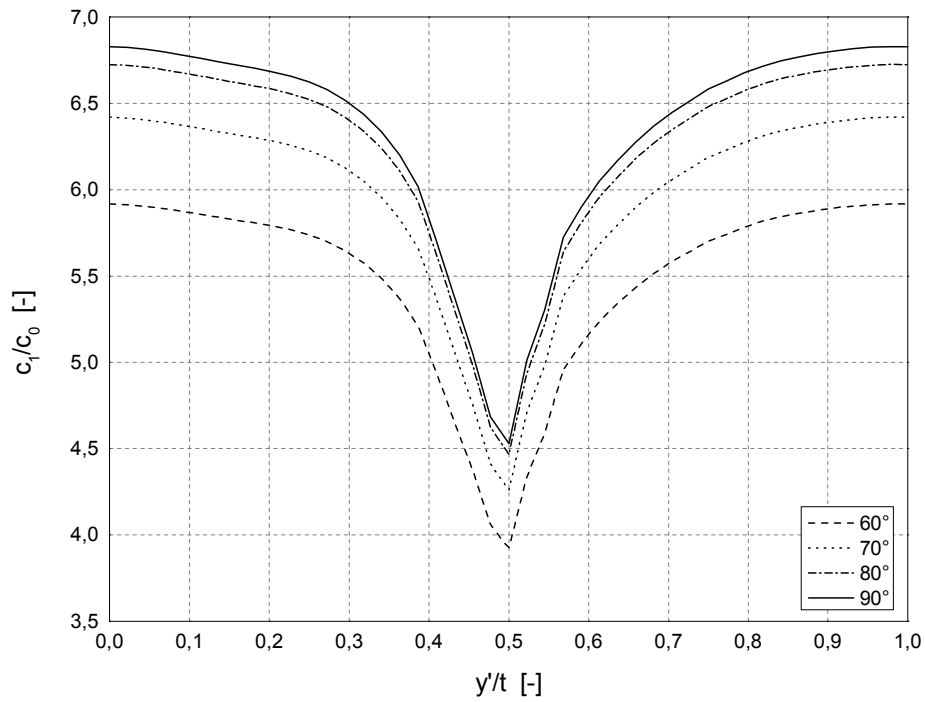


Abbildung 7.3: Verlauf von  $\frac{c_1}{c_0}$  für  $\alpha_0 \leq 90^\circ$

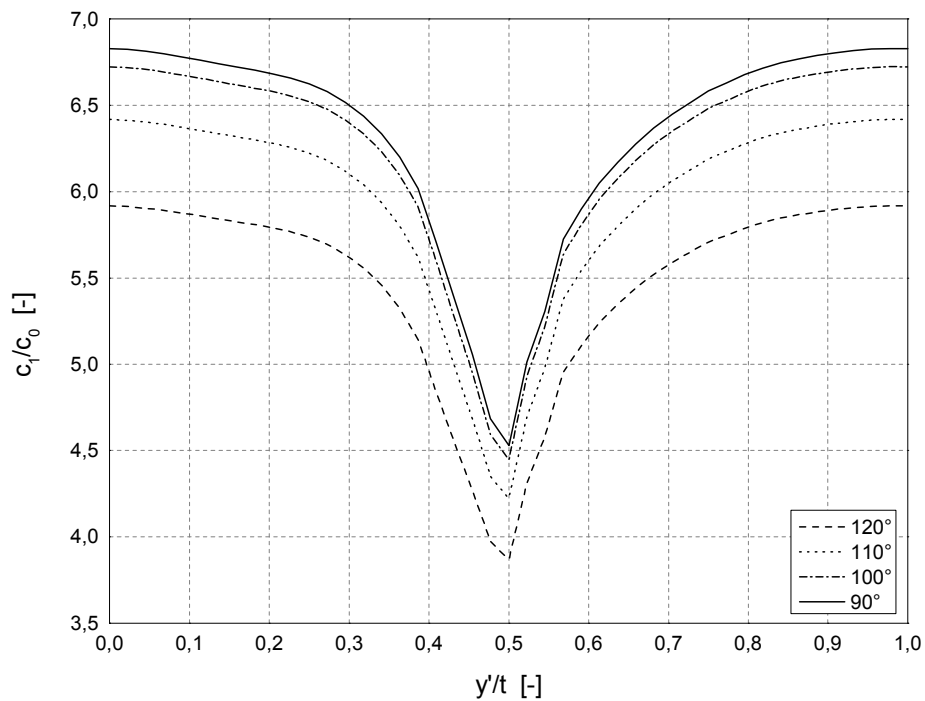
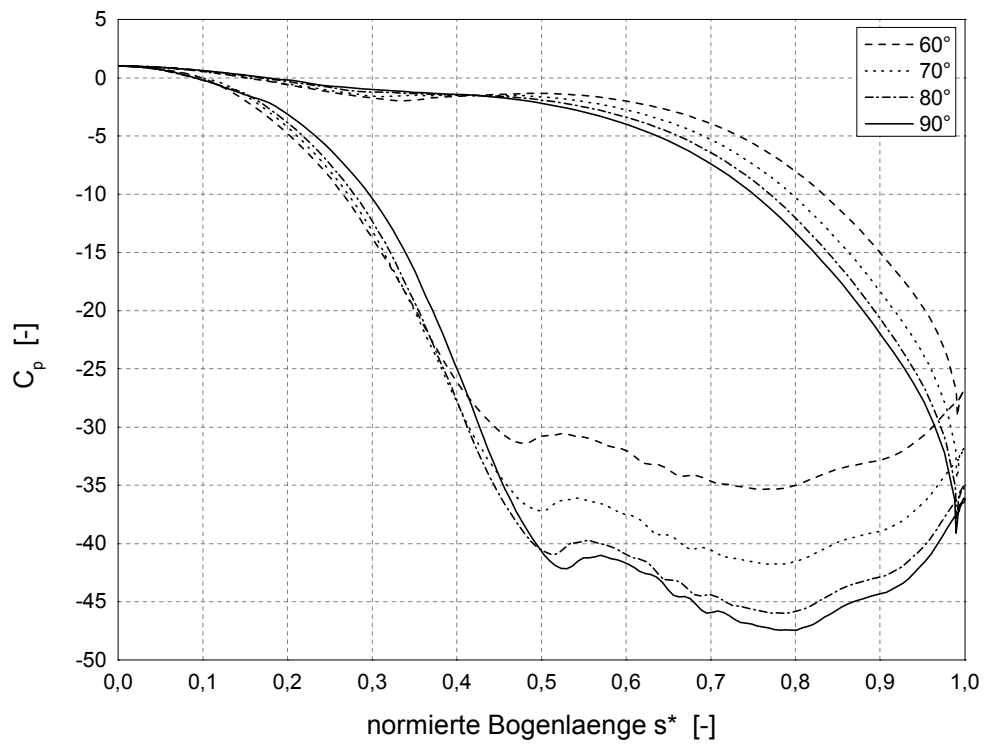
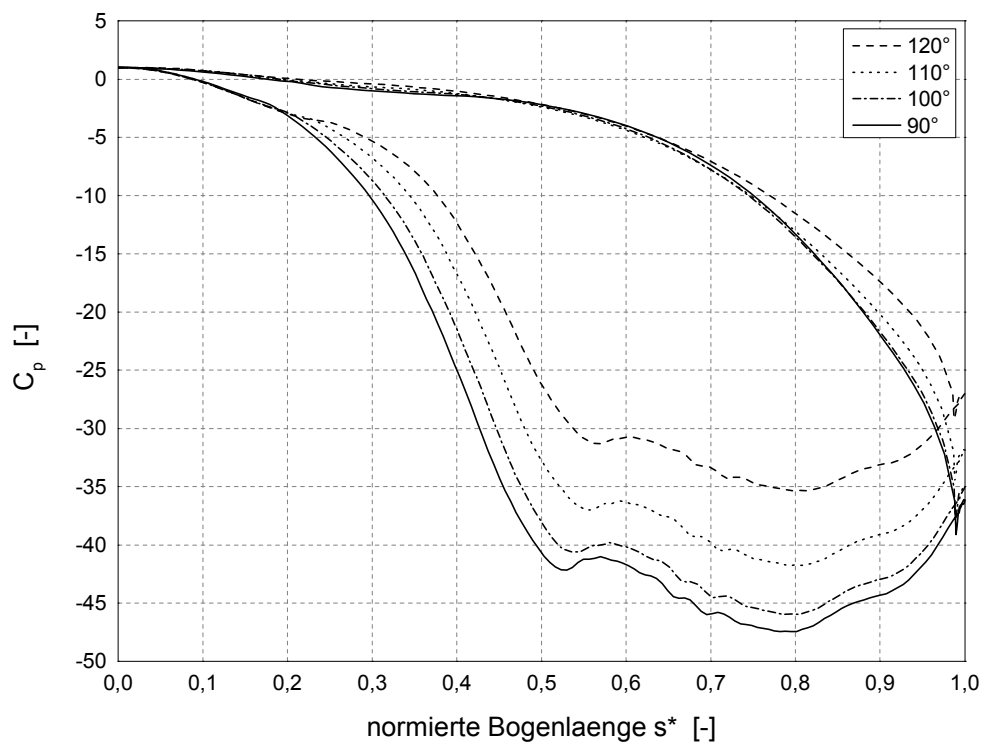


Abbildung 7.4: Verlauf von  $\frac{c_1}{c_0}$  für  $\alpha_0 \geq 90^\circ$

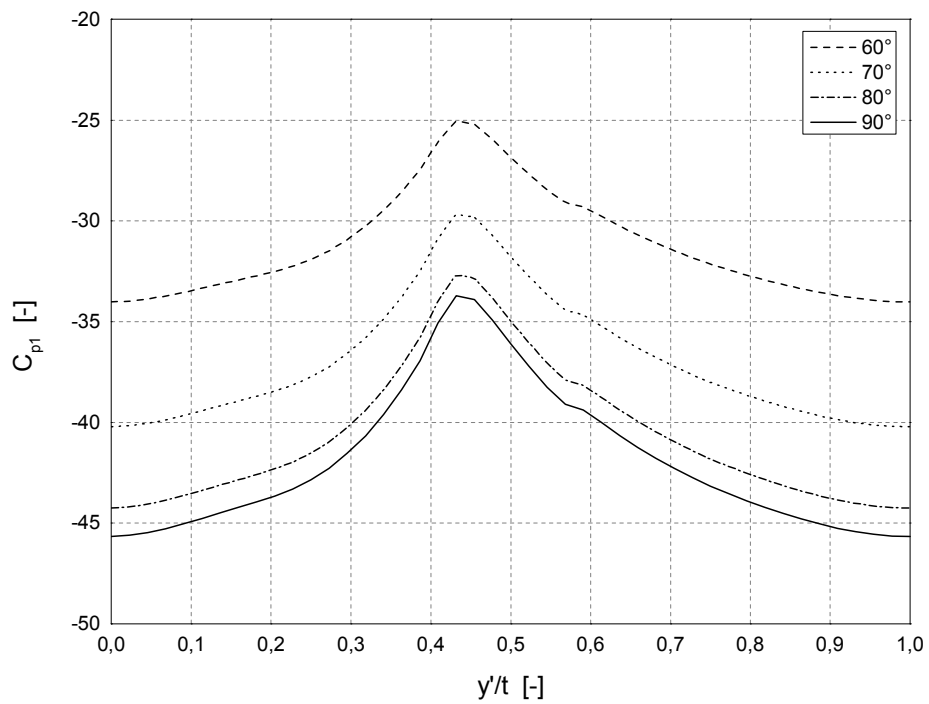
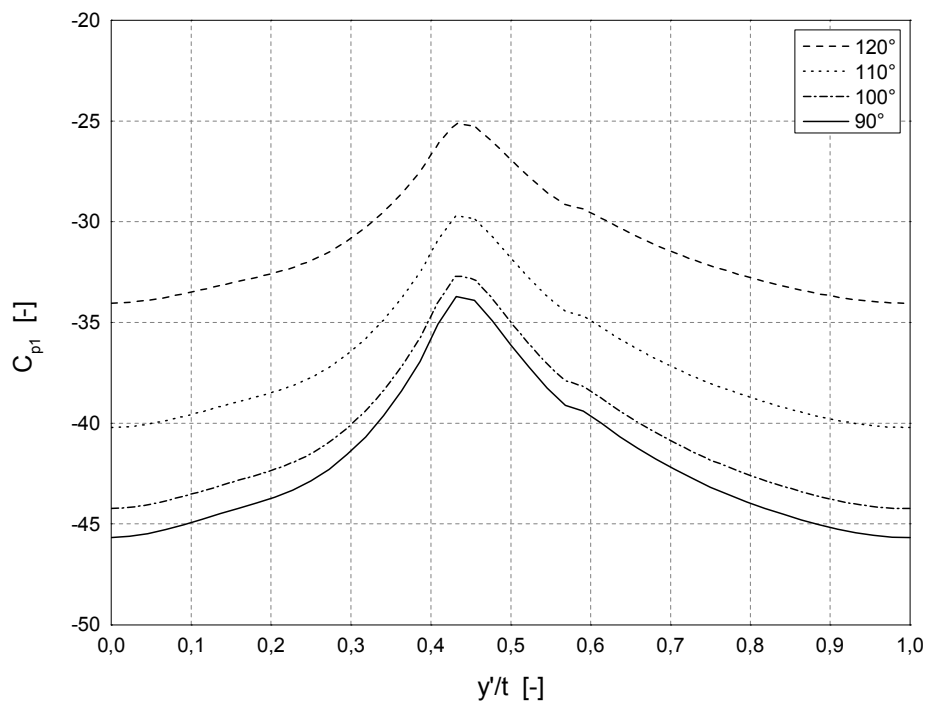
**Profildruckverteilung  $C_p$**



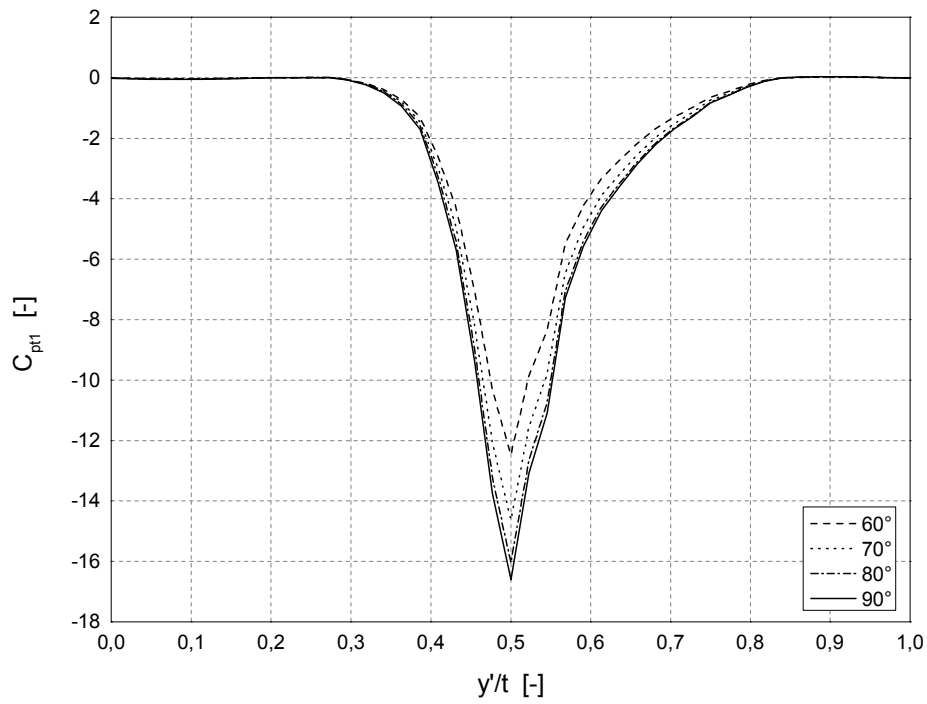
**Abbildung 7.5:** Profildruckverteilung  $C_p$  für  $\alpha_0 \leq 90^\circ$



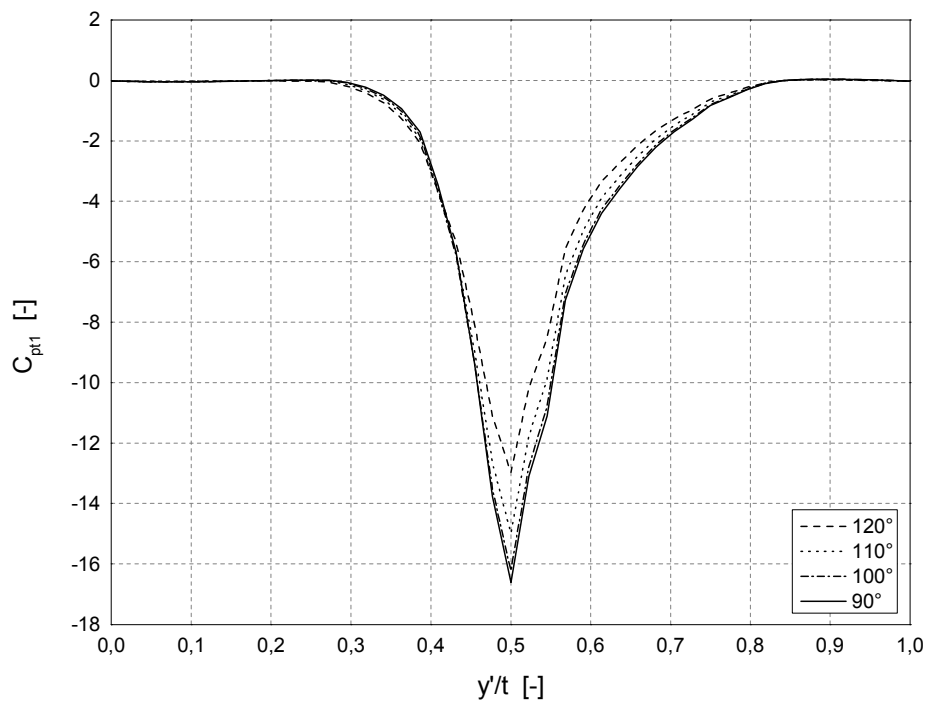
**Abbildung 7.6:** Profildruckverteilung  $C_p$  für  $\alpha_0 \geq 90^\circ$

Statischer Druckkoeffizient  $C_{p1}$ Abbildung 7.7: Verlauf von  $C_{p1}$  für  $\alpha_0 \leq 90^\circ$ Abbildung 7.8: Verlauf von  $C_{p1}$  für  $\alpha_0 \geq 90^\circ$

**Totaldruckkoeffizient  $C_{pt1}$**



**Abbildung 7.9:** Verlauf von  $C_{pt1}$  für  $\alpha_0 \leq 90^\circ$



**Abbildung 7.10:** Verlauf von  $C_{pt1}$  für  $\alpha_0 \geq 90^\circ$

## 7.2.2 Abströmwinkel und Geschwindigkeitsverteilung

Der numerisch berechnete Abströmwinkel des Leitgitters ist weitgehend vom Zuströmwinkel unabhängig, vgl. Abbildungen 7.1 und 7.2. Der über die Schaufelteilung aufgetragene Verlauf des Abströmwinkels  $\alpha_1$  wird hauptsächlich durch die Profilgeometrie des Austrittsbereichs bestimmt. So weist die Strömung auf der Druckseite einen größeren Abströmwinkel auf als auf der Saugseite. Beide Strömungen treffen unter einem Winkel aufeinander, der durch das keilförmige Profilende bestimmt wird (Keileffekt). Der Zusammenstoß bewirkt eine sprunghafte Verlaufsänderung im Bereich der Nachlaufdelle, die in den Abbildungen deutlich sichtbar ist. Im Fall einer inkompressiblen Strömung verläuft diese Änderung des Abströmwinkels stetig. Bei höheren Strömungsgeschwindigkeit ändert sich die Abströmrichtung deutlich rascher, beinahe sprunghaft.

Der Verlauf des Abströmwinkels  $\alpha_1$  bleibt über den gesamten Variationsbereich des Zuströmwinkels konstant. Im direkten Vergleich mit den Abbildungen A.9 und A.10 macht sich der Anstieg des Abströmwinkels über die Schaufelhöhe bemerkbar, ebenso ersichtlich aus Tabelle 7.2. Aufgrund der Schaufelfächerung nimmt die Strahlbreite  $a$  am Gitteraustritt über die Höhe stärker zu als die Teilung. Andererseits bewirkt die zunehmende Teilung grundsätzlich eine schlechter werdende Luftführung zwischen den Schaufeln.

Die Entstehung der Nachlaufdelle wird einerseits durch die endliche Hinterkantendicke und andererseits durch die stark ausgeprägten Grenzschichten entlang der Druck- und Saugseite des Profils beeinflusst. Die hier dominierenden Reibungseffekte sorgen dafür, dass die Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht stetig abnimmt, bis sie direkt an der Profilloberfläche den Wert null erreicht. Die Außenströmung kann, wie bereits beschrieben, als annähernd reibungsfrei betrachtet werden, wodurch ein Geschwindigkeitsdefizit entsteht. Darüber hinaus folgen aufgrund unterschiedlicher Drücke auch unterschiedliche Geschwindigkeiten auf der Druck- und Saugseite. Nach der Leitreihe gleichen sich die Defizite nicht unmittelbar aus, sondern machen sich in Form der Nachlaufdelle bemerkbar, siehe Abbildung 7.11. An der Austrittskante führt das Zusammentreffen beider Teilströmungen zu Verwirbelungen, die starke Turbulenzen verursachen.

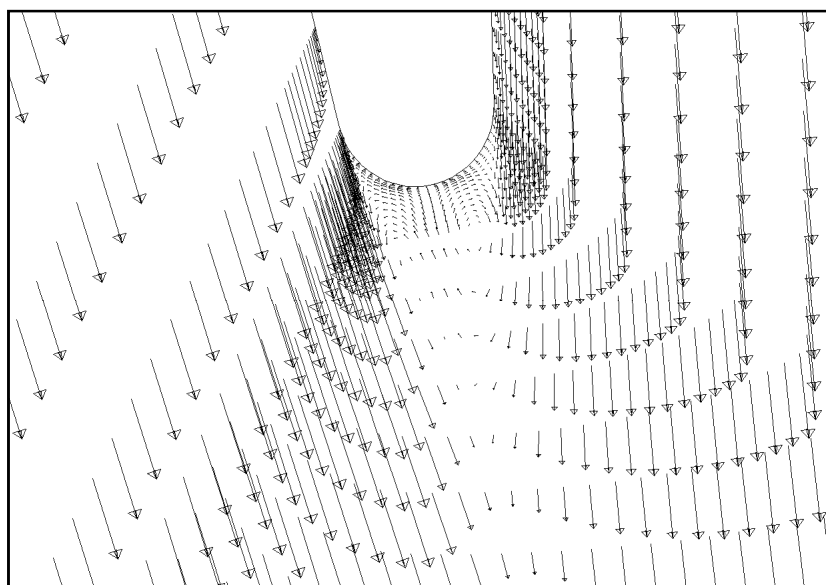
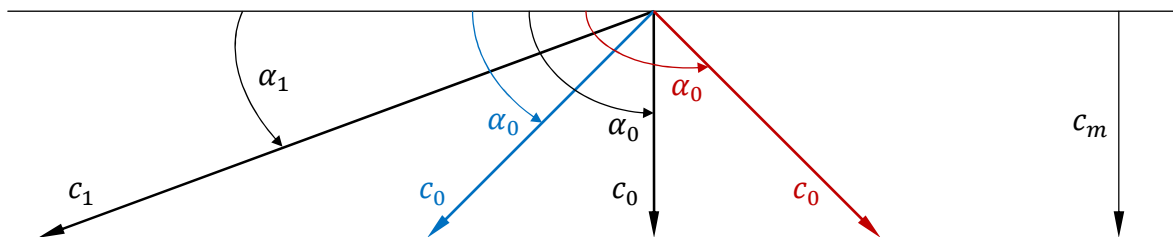


Abbildung 7.11: Geschwindigkeitsvektoren an der Hinterkante

Diese machen sich unter anderem durch einen erhöhten Anstieg der kinetischen Turbulenzenergie bemerkbar. Die Folge sind ansteigende Verluste aufgrund von Diffusions- und Dissipationsvorgängen.

Der Verlauf der Nachlaufdüse ist in den Abbildungen 7.3 und 7.4 dargestellt. Im Nennlastbetrieb wird die Leitreihe mit einem Winkel von  $90^\circ$  angeströmt. Dieser Referenzwert ist als durchgezogene Linie markiert. Der Bauch- und Rückenstoß führen offensichtlich zu symmetrischen Geschwindigkeitsverteilungen, bezogen auf den Referenzwert im Nennlastbetrieb, die mit Hilfe der Gitterkinematik erläutert werden können.



**Abbildung 7.12:** Geschwindigkeitsdreieck der Leitreihe für den Nennlastbetrieb (**schwarz**), Teillastbetrieb (**blau**) und Überlastbetrieb (**rot**) (schematische Darstellung)

Bei den Randbedingungen wurde bereits erwähnt, dass die Meridiankomponente der Zuströmgeschwindigkeit  $c_m$  für den gesamten Winkelvariationsbereich konstant bleibt. So führt jede Änderung des Anströmwinkels zu steigenden Zuströmgeschwindigkeiten  $c_0$  und betragsmäßig höheren Umfangsgeschwindigkeiten  $c_u$  der Zuströmung. Bei einem konstanten Abströmwinkel  $\alpha_1$ , vgl. Abbildungen 7.1 und 7.2 beziehungsweise Tabelle 7.1, bleibt dementsprechend die Abströmgeschwindigkeit  $c_1$  ebenso konstant, vgl. Abbildung 7.12. Die Beschleunigung im Leitgitter wird durch das Verhältnis

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} \quad (7.8)$$

charakterisiert. Daraus lassen sich, bezogen auf den Nennlastbetrieb, gleiche Geschwindigkeitsänderungen für den Bauch- und Rückenstoß schlussfolgern.

### 7.2.3 Profildruckverteilung

Die Abbildungen 7.5 und 7.6 zeigen die Auswertung des statischen Druckkoeffizienten  $C_p$  entlang des Schaufelprofils. Als Referenzwert dient der  $C_p$ -Verlauf im Auslegungszuströmwinkel  $\alpha_0 = 90^\circ$ , gekennzeichnet mit der durchgezogenen Linienführung. Im ersten Diagramm ist die Variation des Zuströmwinkels für den Rückenstoß (Teillastbetrieb) zu sehen, im zweiten für den Bauchstoß (Überlastbetrieb).

Den Maximalwert erreicht der Profildruck direkt im Staupunkt an der Profilnase. Die im Leitgitter eintretende Strömung wird im Staupunkt auf null abgebremst, wodurch eine Druckerhöhung auf den Eintrittsdruck der Leitreihe  $p_{1t}$  stattfindet. Die anschließende Strömungsbeschleunigung reduziert den Druck auf den Austrittsdruck  $p_2$ . Der Staupunkt ist durch den Wert  $C_p = 1$  charakterisiert. Die Variation des Zuströmwinkels führt zu unterschiedlichen Profilbelastungen entlang der Sehnenlänge. Auf der Druckseite wird die Strömung kontinuierlich beschleunigt. Im Gegenzug erfährt der Druck eine stetige Abnahme



bis zum Gitteraustritt. Auf der Saugseite wird die Strömung bis  $l/s = 0.8$  beschleunigt, wo sie ihre maximale Geschwindigkeit erreicht, gekennzeichnet durch das Druckminimum. Anschließend folgt eine relativ starke Verzögerung auf die Austrittsgeschwindigkeit (Austrittsdruck). Die Profilgeometrie weist auf der Saugseite eine stärkere Krümmung beziehungsweise Richtungsänderung auf als auf der Druckseite. Dementsprechend sind hier sehr kleine geometrische Unstetigkeiten vorhanden und machen sich in der Profildruckverteilung bemerkbar. Lediglich im Bereich der halben Sehnenlänge stechen sie offensichtlich hervor.

Beim Rückenstoß  $\alpha_0 < 90^\circ$  wandert der Staupunkt entlang der Profilvorderkante in Richtung der Saugseite. Hier ist vor allem ab etwa der Hälfte der Sehnenlänge eine offensichtliche Verschiebung der Profildruckverteilung in Richtung höherer Drücke erkennbar. Auf der Druckseite hingegen entsteht ein lokaler Unterdruckbereich bei steilerer Anströmrichtung. Die Druckverteilung entlang der Profilnase selbst ist eher unauffällig, was durch den großen Radius der Profilvorderkante begründet wird. Vergrößert man den Anströmwinkel über den Auslegungsanströmwinkel  $\alpha_0 > 90^\circ$ , kommt es zum Bauchstoß, vgl. auch Abbildung 7.12. Aufgrund der höheren druckseitigen Belastung verschwindet der lokale Unterdruckbereich und die Geschwindigkeit wird kontinuierlich bis zur Austrittskante beschleunigt. Besonders auffällig ist die saugseitige Druckerhöhung, die nach etwa  $l/s = 0.2$  plötzlich einsetzt. Die Druckbelastung im vorderen Teil des Profils wird kaum durch die Variation des Anströmwinkels beeinflusst. Allgemein lässt sich zusammenfassen, dass sich sowohl geometrische Unstetigkeiten, als auch die starke Strömungsverzögerung im Hinterkantenbereich ungünstig auf die Stabilität der Profildruckverteilung auswirken.

Der Verlauf des statischen Druckkoeffizienten  $C_{p1}$  in der Auswertungsebene ist in den Abbildungen 7.7 und 7.8 dargestellt. Mit der Bernoulli-Gleichung für den reibungsfreien Fall

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{c_0^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} \quad (7.9)$$

und der Beziehung für die Beschleunigung im Leitgitter nach Glg. (7.8), kann der statische Druckkoeffizienten  $C_{p1}$  ebenso wie folgt angeschrieben werden

$$C_{p1} = 1 - \left( \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} \right)^2. \quad (7.10)$$

Es lassen sich somit gleiche bezogene Druckänderungen (gleicher statischer Druckkoeffizient  $C_{p1}$ ) erreichen, unabhängig davon ob das Leitgitter im Teillast- oder Überlastbetrieb betrieben wird, wie in den Abbildungen dargestellt. In reibungsbehafteter Strömung führen unter anderem die Grenzschichtbildung aber auch Diffusionsvorgänge zu zusätzlichem Druckverlust, sodass die statischen Druckkoeffizienten betragsmäßig höher ausfallen.

## 7.2.4 Verlusteigenschaften

- **Totaldruckkoeffizient  $C_{pt1}$**

Als Maß für die Profilverluste im gesamten Strömungskanal kann die Änderung des Totaldruckes herangezogen werden. Auf den Profilverlust wurde bereits im Kapitel 3 näher eingegangen. Außerhalb der saug- und druckseitigen Grenzschicht wird die Strömung als reibungsfrei angesehen. Dieses Gebiet zeichnet sich, aufgrund fehlender viskoser Reibungseffekte, durch minimale beziehungsweise keine Totaldruckänderungen und somit durch  $C_{pt} \approx 0$  aus. In den Abbildungen 7.9 und 7.10 sind es Bereiche, die sich in ausreichender Entfernung von der Nachlaufdüse befinden. Die Totaldruckänderung wird nicht nur direkt in der Grenzschicht, sondern auch in weiterer Folge durch die Diffusionsverluste im Bereich der Nachlaufdüse an der Austrittskante verursacht.

- **Profilverlustbeiwert  $\zeta_{le}$**

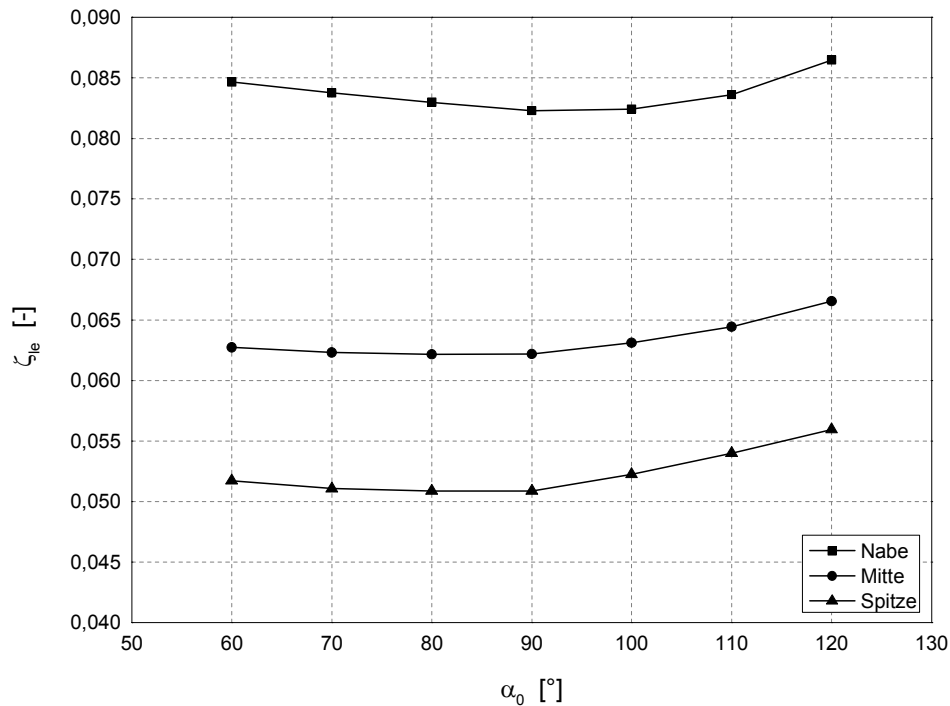
Der Profilverlustbeiwert  $\zeta$  beinhaltet die Verluste in der Gitterbeschaukelung, die einerseits auf der Profilloberfläche in Folge der Reibungseffekte (Grenzschichtbildung) und andererseits durch die Hinterkantenablösung verursachte Energiedissipation entstehen. Der Verlustbeiwert  $\zeta$  kann allgemein als das Verhältnis der Totaldruckdifferenz zwischen Gittereintritt und Auswertungsebene zum dynamischen Druck in der Auswertungsebene interpretiert werden. Für das Leitgitter kann er in folgender Form angeschrieben werden:

$$\zeta_{le} = \frac{p_{t0} - p_{t1}}{\frac{1}{2} \rho c_1^2}. \quad (7.11)$$

Greift man auf die teilungsgemittelten Größen zurück, so folgt nach Umformen für den Verlustbeiwert

$$\zeta_{le} = \frac{-\bar{C}_{pt1}}{\left(\frac{c_1}{c_0}\right)^2}. \quad (7.12)$$

In der Abbildung 7.13 sind die Profilverlustbeiwerte in Abhängigkeit des Zuströmwinkels dargestellt.



**Abbildung 7.13:** Profilverlustbeiwerte des Leitgitters in Abhängigkeit von  $\alpha_0$

Neben dem Mittelschnitt sind ebenso die Verluste an der Schaufelnabe und -spitze ersichtlich. Im Auslegungszustand wird die Leitreihe mit einem Winkel von  $90^\circ$  angeströmt. Höhere Inzidenzen führen zu steigenden Verlusten, was auch in der obigen Abbildung zu beobachten ist. Aufgrund der relativ dicken Profilvorderkante (großer Radius) weist die Leitschaufel eine geringe Empfindlichkeit gegenüber Fehlanströmungen auf. Dies äußert sich in einem sehr flachen Verlauf des Profilverlustbeiwertes über dem gesamten Anströmwinkel zwischen  $60^\circ$  und  $120^\circ$ . Tendenziell lässt sich jedoch erkennen, dass das Profil empfindlicher auf den Bauchstoß reagiert als auf den Rückenstoß. Betrachtet man die Entwicklung der Profilverluste über die Schaufelhöhe, dann nehmen diese von der Nabe zur Spitze ab, wobei die untere Schaufelhälfte mit größeren Verlusten behaftet ist. Einen großen Einfluss darauf hat die kleinere Teilung. Der Strömung steht eine größere benetzte Oberfläche zur Verfügung, wodurch die Verluste infolge Reibung bemerkbar anwachsen. Abschließend stellt die Tabelle 7.1 die teilungsgemittelten, mit der Massenstromdichte gewichteten Gittercharakteristiken dar.

$\alpha_0$ [°]	$\bar{\alpha}_1$ [°]	$\bar{C}_{p1}$ [-]	$\bar{C}_{pt1}$ [-]	$\overline{\left(\frac{c_1}{c_0}\right)}$ [-]	$\zeta$ [-]
60	9.89	-31.4	-1.895	5.496	0.0627
70	9.89	-37.1	-2.216	5.964	0.0623
80	9.89	-40.8	-2.427	6.249	0.0622
90	9.89	-42.1	-2.504	6.345	0.0622
100	9.90	-40.8	-2.461	6.245	0.0631
110	9.91	-37.1	-2.287	5.958	0.0644
120	9.91	-31.4	-2.005	5.489	0.0665

**Tabelle 7.1:** Teilungsgemittelte Simulationsergebnisse für die Leitschaufelmitte

Der für den Mittelschnitt bei einem Anströmwinkel von  $\alpha_0 = 90^\circ$  numerisch berechnete Profilverlustbeiwert liegt in der gleichen Größenordnung wie der analytisch ermittelte Wert. Die analytische Verlustberechnung berücksichtigt einerseits mehrere Einflussfaktoren, wie die Schaufelfächerung oder die Anströmschwankungen. Andererseits werden diese Faktoren anhand experimentell gewonnener Funktionen ermittelt. Nichtsdestotrotz liefert sie durchaus brauchbare Ergebnisse.

Der Abströmwinkel des Leitgitters  $\alpha_1$  bleibt in allen drei simulierten Schaufelschnitten für den gesamten Variationsbereich des Anströmwinkels konstant, und somit vom Anströmwinkel unabhängig. Da die berechnete Strömung als inkompressibel betrachtet wurde, hat ebenfalls die Machzahl  $Ma$  keinen Einfluss auf den Abströmwinkel. Im Endeffekt wird dieser hauptsächlich durch die Schaufelgeometrie, das heißt durch das Querschnittsverhältnis  $a/t$  bestimmt. Dieses nimmt über die Schaufelhöhe zu und führt somit zu einem größeren Abströmwinkel. Die teilungsgemittelten numerischen Ergebnisse stimmen weitgehend mit den nach Glg. (2.35) und Glg. (2.36) analytisch ermittelten Werten überein, vgl. Tabelle 7.2. Wie bereits erwähnt, gilt die Glg. (2.35) für eng geteilte Turbinengitter, wodurch mit steigender Teilung der Korrekturfaktor zu übermäßiger Erhöhung des Abströmwinkels führt. Die Sinusregel liefert hier ein besseres Ergebnis.

	$\alpha_{1Korr}$ [°]	$\alpha_{1Sinusr}$ [°]	$\bar{\alpha}_{1CFD}$ [°]
Nabe	8.25	8.02	8.29
Mitte	10.1	9.57	9.89
Spitze	13.57	11.82	12.26

**Tabelle 7.2:** Änderung des Abströmwinkels  $\alpha_1$  über die Schaufelhöhe

Ebenso deckt sich der tendenzielle Verlauf mit den Berechnungsergebnissen aus *Widhalm* [14] und *Zahirovic* [17]. Sie untersuchten das gleiche Leitradprofil für einen Anströmwinkel von  $\alpha_0 = 90^\circ$  und einen Staffelungswinkel von  $\gamma = 51.5^\circ$ . Die abweichenden Staffelungswinkel spiegeln sich in den unterschiedlichen teilungsgemittelten Ergebnissen wieder.

## 7.3 Laufgitter

### 7.3.1 Grafische Auswertung

Abströmwinkel  $\beta_2^+$

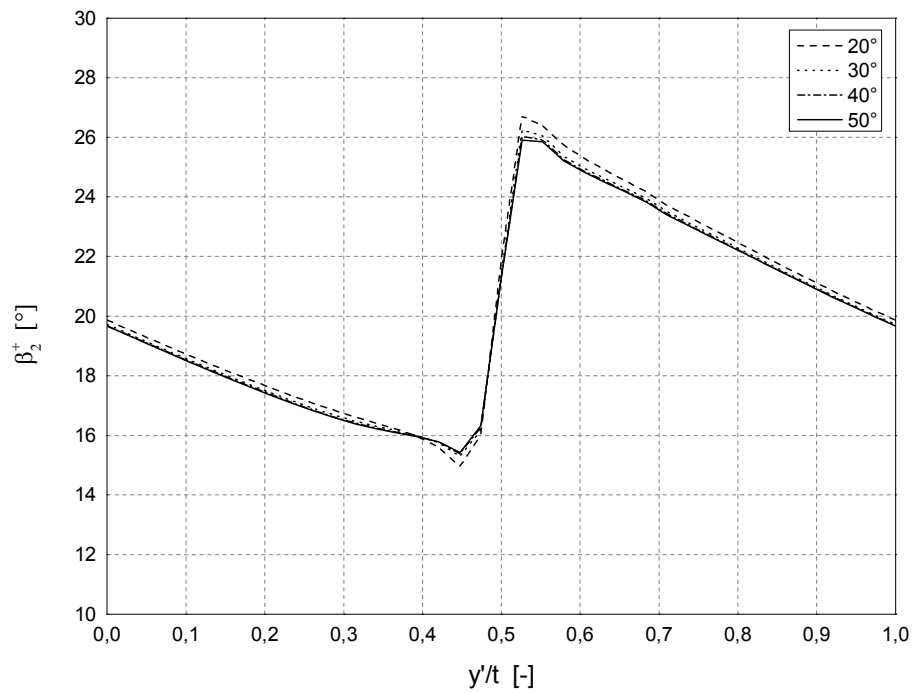


Abbildung 7.14: Verlauf von  $\beta_2^+$  für  $\beta_1 \leq 50^\circ$

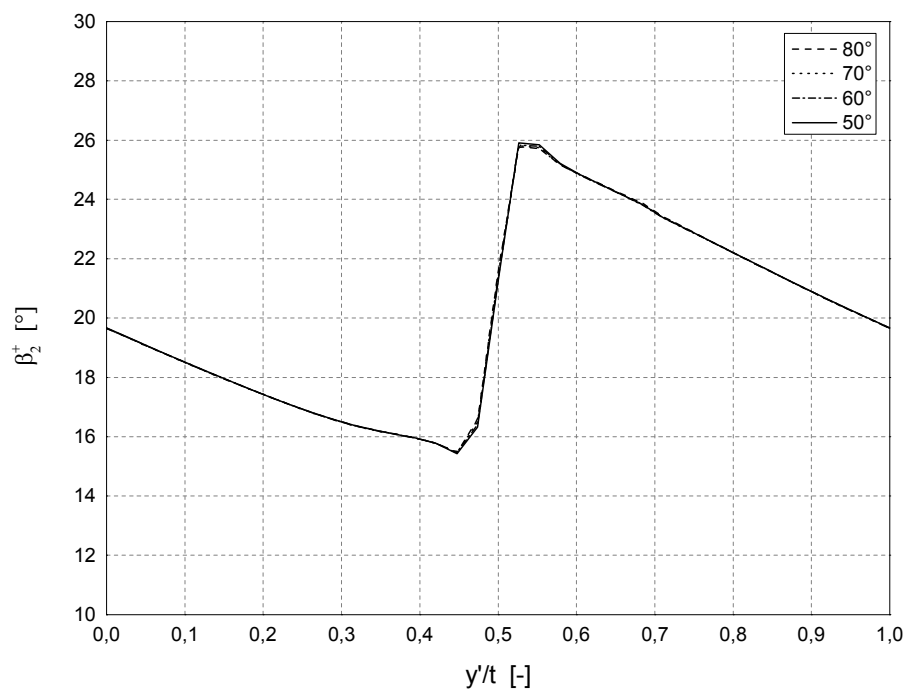


Abbildung 7.15: Verlauf von  $\beta_2^+$  für  $\beta_1 \geq 50^\circ$

Geschwindigkeitsverteilung  $\frac{w_2}{w_1}$

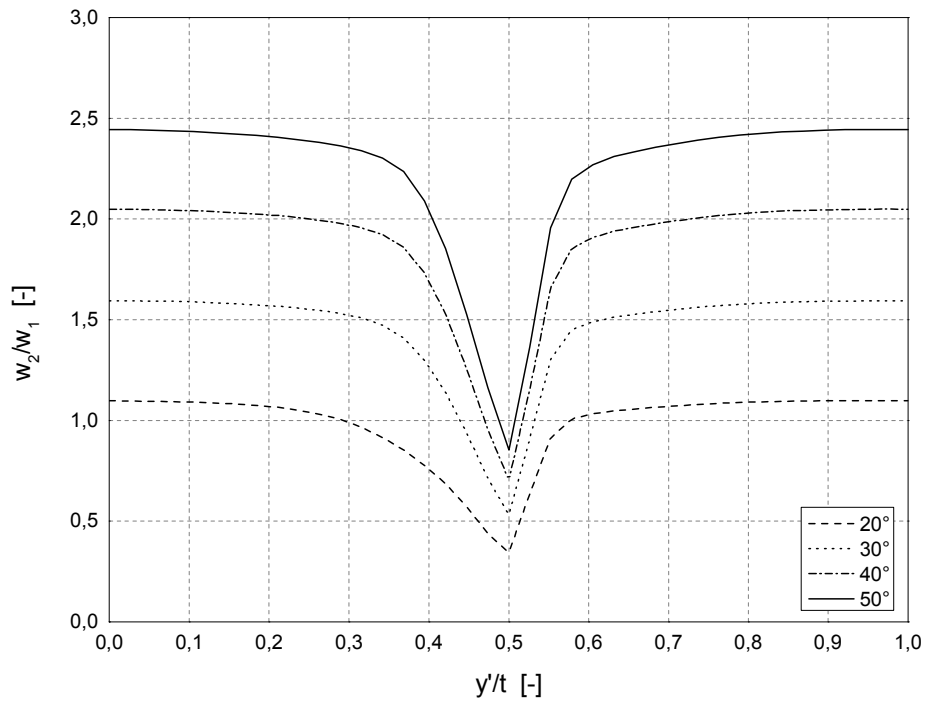


Abbildung 7.16: Verlauf von  $\frac{w_2}{w_1}$  für  $\beta_1 \leq 50^\circ$

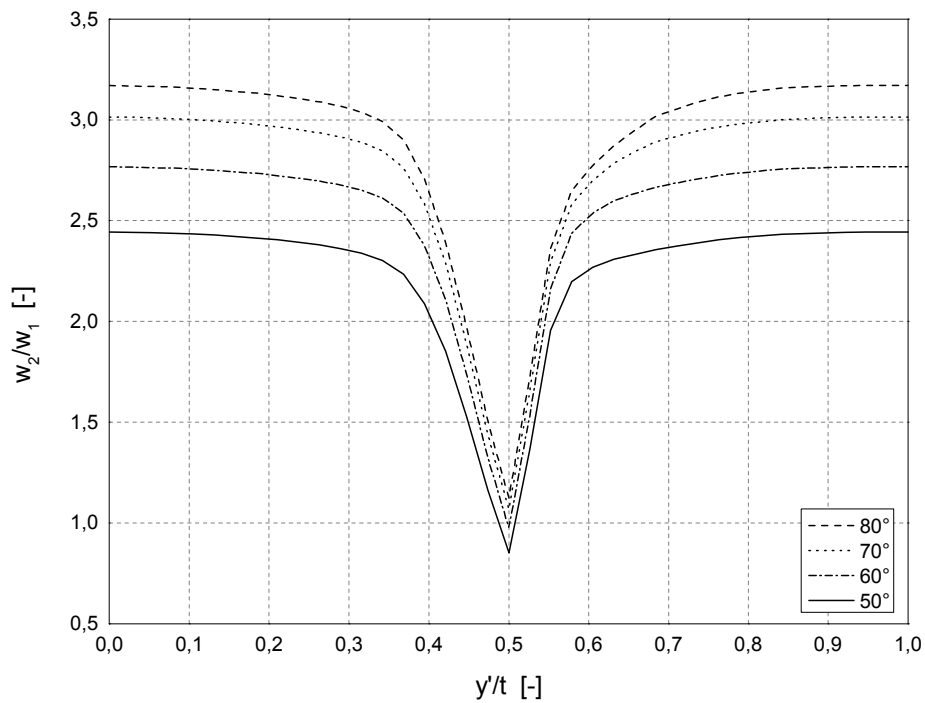
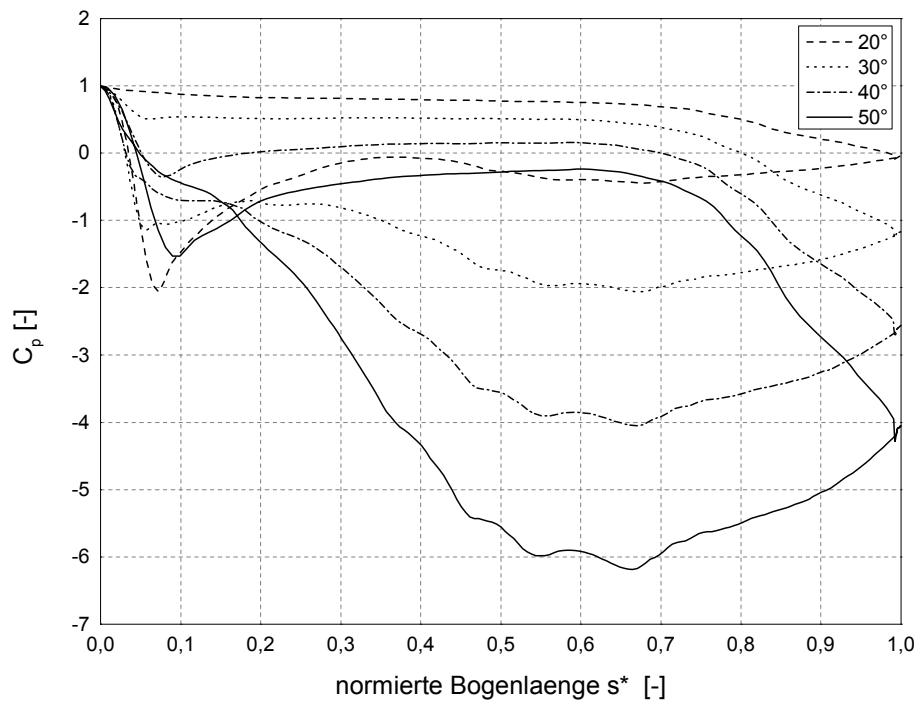
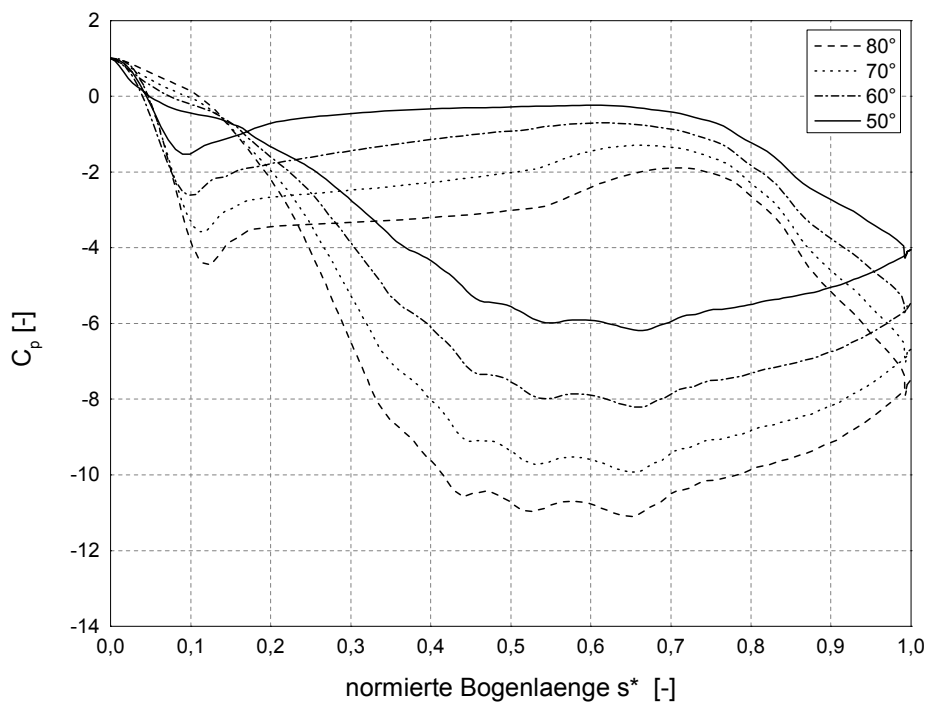


Abbildung 7.17: Verlauf von  $\frac{w_2}{w_1}$  für  $\beta_1 \geq 50^\circ$

**Profildruckverteilung  $C_p$**

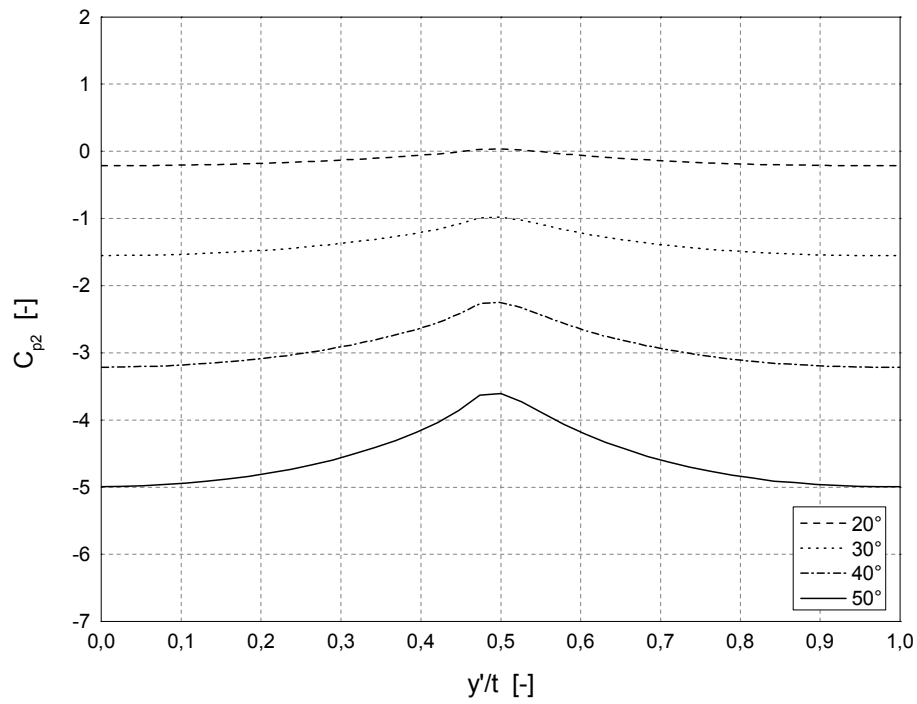


**Abbildung 7.18:** Profildruckverteilung  $C_p$  für  $\beta_1 \leq 50^\circ$

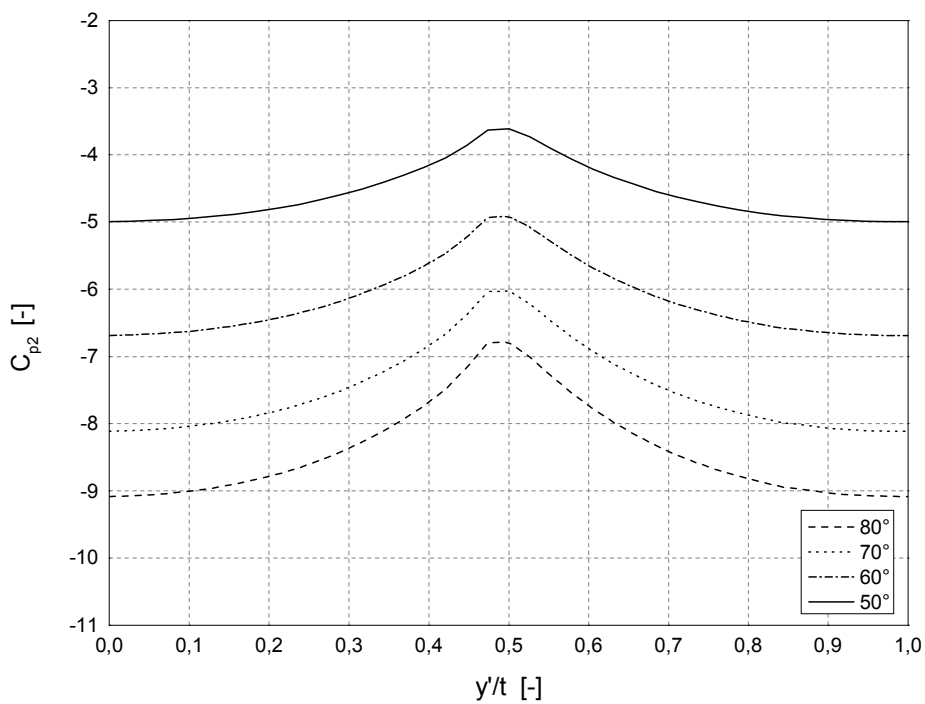


**Abbildung 7.19:** Profildruckverteilung  $C_p$  für  $\beta_1 \geq 50^\circ$

**Statischer Druckkoeffizient  $C_{p2}$**



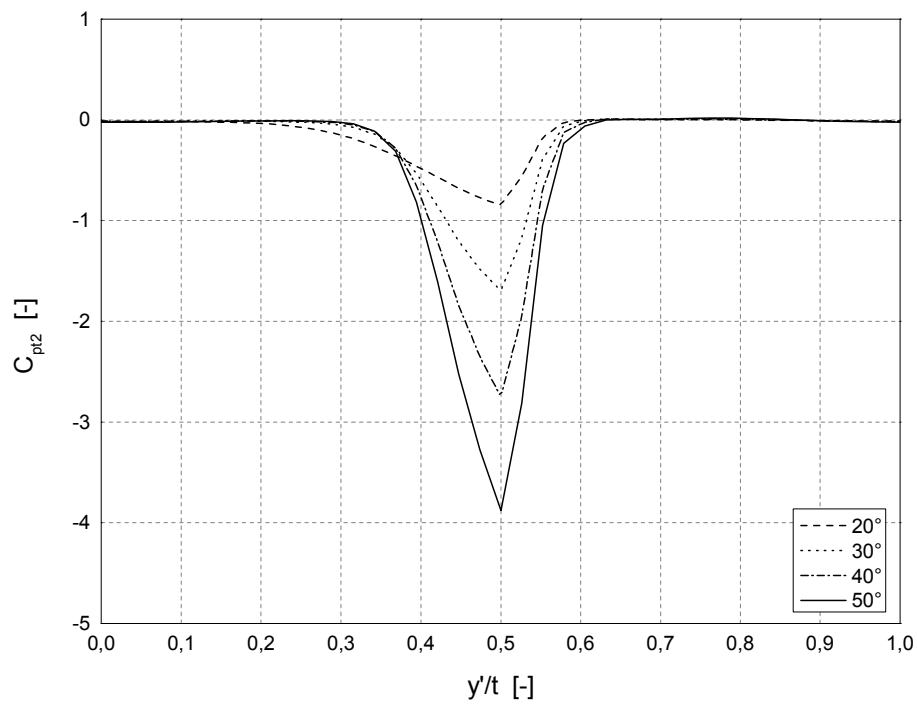
**Abbildung 7.20:** Verlauf von  $C_{p2}$  für  $\beta_1 \leq 50^\circ$



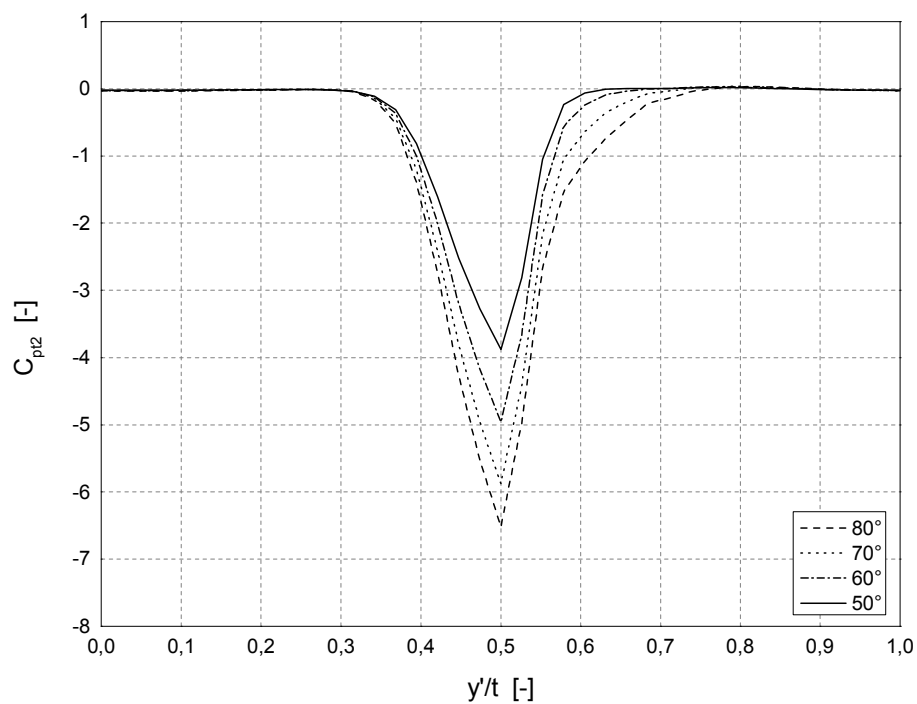
**Abbildung 7.21:** Verlauf von  $C_{p2}$  für  $\beta_1 \geq 50^\circ$



**Totaldruckkoeffizient  $C_{pt2}$**



**Abbildung 7.22:** Verlauf von  $C_{pt2}$  für  $\beta_1 \leq 50^\circ$



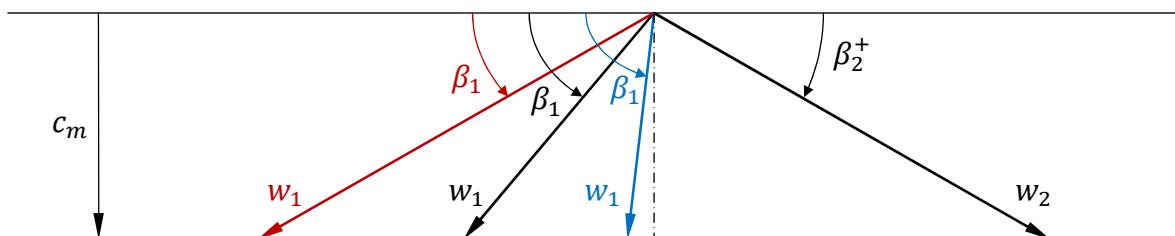
**Abbildung 7.23:** Verlauf von  $C_{pt2}$  für  $\beta_1 \geq 50^\circ$

### 7.3.2 Abströmwinkel und Geschwindigkeitsverteilung

Zur Bestimmung der Gittercharakteristiken wurde die Drehbewegung der Laufreihe vernachlässigt und die Berechnung an der ruhenden Beschau felung durchgeführt. Der Verlauf des relativen Abström winkels  $\beta_2^+$  in der Auswertungsebene ist, für den Mittelschnitt, in den Abbildungen 7.14 und 7.15 zu sehen. Grundsätzlich ist eine weitgehende Unabhängigkeit vom Anström winkel  $\beta_1$  feststellbar. Der prinzipielle Verlauf wird durch den Keileffekt bestimmt, indem die druckseitige (größerer Abström winkel) und die saugseitige (kleinerer Abström winkel) Strömung unter einem durch die Profilform vorgegebenen Winkel zusammenstoßen. Abweichungen treten hauptsächlich im Bereich der Nachlauf dellen auf, wo sie durch die entstehenden Turbulenzen beeinflusst werden. Lediglich bei einem Eintrittswinkel von  $\beta_1 = 20^\circ$  ist eine sichtbare Änderung der Abströmung erkennbar.

Betrachtet man die bezogene Abströmgeschwindigkeit in der Auswertungsebene, so können hier wesentliche Unterschiede zwischen dem Bauch- und dem Rückenstoß festgestellt werden. Im Referenzzustand  $\beta_1 = 50^\circ$  erreicht die Strömung die Schaufel im Staupunkt auf der Profilnase, woraufhin es zu einer beidseitigen Beschleunigung kommt. Aufgrund der sichelförmigen Profilgeometrie verläuft die anfängliche Geschwindigkeitserhöhung im vorderen Schaufelteil moderat ab. Die eigentliche Geschwindigkeitszunahme findet hauptsächlich im hinteren Teil der Beschau felung statt, wobei sie auf der konvexen Rückenseite früher einsetzt als auf der konkaven Bauchseite.

Analog dem Leitgitter wird auch hier die Meridiangeschwindigkeit  $c_m$  und somit die Axialkomponente der relativen Zu strömgeschwindigkeit  $w_{1ax}$  für den gesamten Winkelvariationsbereich konstant gehalten.



**Abbildung 7.24:** Geschwindigkeitsdreiecke der Laufreihe für den Nennlastbetrieb (**schwarz**), Teillastbetrieb (**blau**) und Überlastbetrieb (**rot**) (schematische Darstellung)

Dementsprechend bleibt bei einem konstanten Abström winkel  $\beta_2^+$ , vgl. Abbildungen 7.14 und 7.15 aber auch Tabelle 7.4, die relative Abströmgeschwindigkeit der Laufreihe  $w_2$  konstant. Die Beschleunigung im Laufgitter wird durch das Verhältnis

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \quad (7.13)$$

charakterisiert. Im Überlastbetrieb (Bauchstoß) wird das Laufgitter mit einem Eintrittswinkel  $\beta_1 < 50^\circ$  angeströmt. Entsprechend der Abbildung 7.24 wird damit eine, im Vergleich zum Nennlastbetrieb, höhere Zu strömgeschwindigkeit  $w_1$  erreicht. Demzufolge nimmt das Verhältnis der Austrittsgeschwindigkeit zur Eintrittsgeschwindigkeit ab, was in der Abbildung 7.16 beobachtet werden kann. Druck- und saugseitig ist eine kontinuierliche

Geschwindigkeitssteigerung mit zunehmender Entfernung von der Nachlaufdüse gegeben. In Kombination mit der Profildruckverteilung, Abbildung 7.18, lässt sich erkennen, dass die Strömung im hinteren Teil der Druckseite beschleunigt, auf der Saugseite verzögert wird. Dementsprechend fällt der saugseitige Geschwindigkeitsverlauf geringfügig flacher aus als auf der Druckseite. Größere Anströmwinkel  $\beta_1 > 50^\circ$  verursachen kleinere Anströmgeschwindigkeiten, sodass die Beschleunigung mit steigender Inzidenz zunimmt, vgl. Abbildung 7.17. Die Turbine wird im Teillastbereich betrieben.

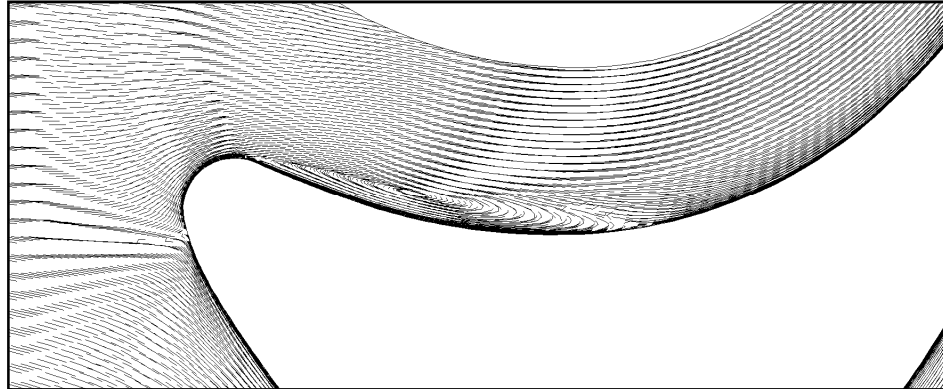
Zu beachten ist, dass bei einem Anströmwinkel von  $\beta_1 = 20^\circ$  die Strömung lediglich umgelenkt wird, sodass das Laufgitter als ein Gleichdruckgitter betrieben wird. Die anfänglich geringe druckseitige Beschleunigung setzt sich annähernd über die gesamte Schauffellänge fort, die Strömung wird hauptsächlich umgelenkt. Erst im hinteren Teil der Schaufel  $l/s = 0.7$  beschleunigt die Strömung auf ihre Austrittsgeschwindigkeit, die geringfügig höher liegt als am Gittereintritt, vgl. mit Abbildung 7.18. Auf der Saugseite erreicht die Strömungsgeschwindigkeit sehr rasch ihren Maximalwert, wird daraufhin verzögert und umgelenkt. Mit steigender Teilung über die Schauffelhöhe nimmt die Strömungsgeschwindigkeit bekanntlich ab. Infolgedessen liegt die Abströmgeschwindigkeit im Bereich der Schaufelspitze, beinahe über der gesamten Kanalbreite, unter dem Eintrittswert, vgl. mit Abbildung A.20. Eine Anströmung mit  $\beta_1 = 20^\circ$  verursacht somit im Bereich der Laufschaufelspitze eine verzögerte Strömung, wodurch die Profilverluste über die Schauffelhöhe deutlich ansteigen.

### 7.3.3 Profildruckverteilung

Die Auswertungen der statischen Druckverteilung entlang des Laufschaufelprofils sind in den Abbildungen 7.18 und 7.19 ersichtlich. Im Nennlastzustand  $\beta_1 = 50^\circ$  wird die Strömung druckseitig aus dem Staupunkt beschleunigt, bemerkbar an dem Druckabfall. Anschließend wird sie weitestgehend umgelenkt, gefolgt von einer starken Beschleunigung, die einen rapiden Druckabfall bewirkt. Saugseitig wird die Strömung bis zu einem gewissen Maximalwert beschleunigt (Druckminimum) und anschließend kontinuierlich auf die Austrittsgeschwindigkeit verzögert. Auf der konvexen Profelseite sind stellenweise größere Unstetigkeiten wahrnehmbar.

Bei größeren Anströmwinkel  $\beta_1 > 50^\circ$  bildet sich entlang der Profildruckseite, beginnend in der Nähe der Profilverkante, ein Gebiet aus, das ein oder mehrere in sich geschlossene Wirbel einschließt – die Strömung löst ab. Eine höhere saugseitige Fehlanströmung führt zu einer Vergrößerung der Ablöseblase. Der Ablösepunkt verlagert sich immer mehr auf die Vorderkante, das Ablösegebiet weitet sich über der halben Sehnenlänge aus, wie in der Abbildung 7.23 zu sehen ist. Innerhalb der größer werdenden Ablöseblase bildet sich eine Rückströmung, die entgegengesetzt zu der Hauptströmung fließt. Wie im Kapitel 5.2.2 ausführlich beschrieben, kommt die Rückströmung dadurch zustande, dass den abgebremsten Teilchen in der Grenzschicht von den benachbarten Teilchen der angrenzenden beschleunigten Strömung nicht genügend kinetische Energie zugeführt wird, um den durch die Strömungsverzögerungen entstandenen Druckanstieg zu überwinden. Die Strömung folgt dem Druckgradienten in die zur Außenströmung entgegengesetzte Richtung. Im Ablösegebiet kommt es dadurch zur Wirbelbildung, die in weiterer Folge zum Verlust der kinetischen

Energie und zur Erhöhung der Energiedissipation führen. Der Widerstand des umströmten Laufschaufelprofils steigt. Durch den in der Hauptströmungsrichtung vorliegenden Druckabfall werden die in der Grenzschicht abgebremsten Teilchen fortlaufend mitgenommen und beschleunigt, sodass das Fluid stromabwärts wieder an das Profil anlegt, wie in der Abbildung 7.25 dargestellt.



**Abbildung 7.25:** Strömungsablösung im Laufgitter für  $\beta_1 = 80^\circ$

Eine Strömungsablösung äußert sich in der Profildruckverteilung in Form eines Plateaus, das in der Abbildung 7.19 erkennbar ist. Wie bereits erwähnt, führen größere Inzidenzen zu größeren Ablösegebieten, wodurch das Verlaufsplattform bei einer Anströmung mit  $\beta_1 = 80^\circ$  am längsten ausfällt.

Der Bauchstoß verursacht eine Verschiebung der Profildruckverteilung hin zu größeren Drücken. Im Vorderkantenbereich lässt sich eine deutlich höhere druckseitige Belastung erkennen, wobei die Profildruckverteilung eine unerwartet große Abhängigkeit von Anströmwinkel aufweist. Eine Ablösung findet zwar nicht statt, nichtsdestotrotz reagiert das Profil empfindlicher als bei dem Rückenstoß. Insgesamt führt die Variation des Zuströmwinkels zu unterschiedlichen Belastungen des Laufschaufelprofils. Der Einfluss auf die Druckdifferenz ist dabei über die gesamte Sehnenlänge ausdrücklich bemerkbar. Im Vergleich zum Leitgitterprofil sind im Laufgitter entsprechend höhere Randverluste zu erwarten, was bereits die analytische Verlustberechnung demonstrierte.

Der statische Druckkoeffizient  $C_{p2}$  kann im reibungsfreien Fall mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung und der Beziehung für die Beschleunigung im Laufgitter, wie folgt ermittelt werden

$$C_{p2} = 1 - \left( \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \right)^2. \quad (7.14)$$

Für einen konstanten Abströmwinkel von etwa  $\beta_2 = 160^\circ$ , vgl. Tabelle 7.4, sind die nach Glg. (7.14) berechneten statischen Druckkoeffizienten in der Tabelle 7.3 zusammengefasst.

$\beta_1$ [°]	20	30	40	50	60	70	80
$C_{p2}$ [-]	0	-1.14	-2.53	-4.0	5.41	-6.55	-7.29

**Tabelle 7.3:** Statischer Druckkoeffizient  $C_{p2}$  der Laufreihe

Die teilungsgemittelten statischen Druckkoeffizienten  $\bar{C}_{p2}$  fallen aufgrund reibungsbedingter Druckverluste und der auftretenden Verdrängungswirkung betragsmäßig höher aus.

### 7.3.4 Verluste

- **Totaldruckkoeffizient  $C_{pt2}$**

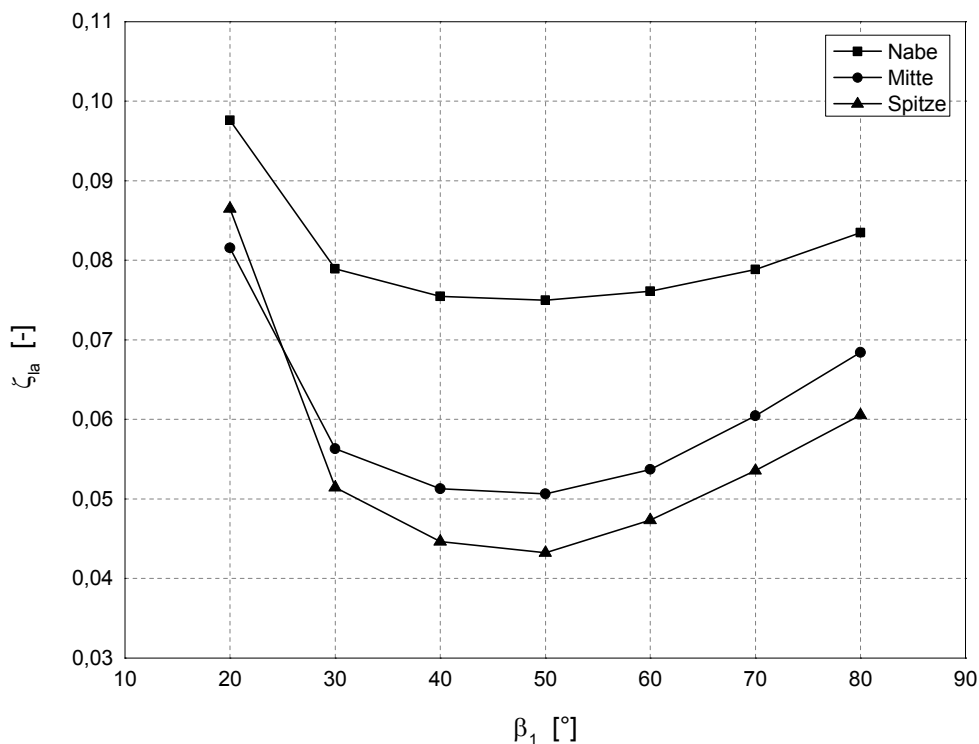
Grundlegend entspricht die in den Abbildungen 7.22 und 7.23 dargestellte Änderung des Totaldruckkoeffizienten dem erwarteten Verlauf, wie er bereits im Leitgitter festgestellt wurde. Im Bereich reibungsfreier Außenströmung sind keine Totaldruckverluste festzustellen, demgemäß folgt  $C_{pt2} \approx 0$ . Die höchsten Verluste werden im Bereich der Nachlaufdehle durch Diffusions- und Dissipationsprozesse ausgelöst. Die druckseitige Strömungsablösung verursacht bei einem Rückenstoß, im Vergleich zur Profilsaugseite geringfügig höhere Druckverluste.

- **Profilverlustbeiwert  $\zeta_{la}$**

Der Profilverlustbeiwert des Laufgitters  $\zeta_{la}$  kann unter Verwendung der teilungsgemittelten Größen wie folgt ermittelt werden

$$\zeta_{la} = \frac{-\bar{C}_{pt2}}{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2}. \quad (7.15)$$

Im Vergleich zum Leitgitter weisen die Profilverluste des Laufgitterprofils eine explizit höhere Abhängigkeit vom Anströmwinkel auf. Die kleinsten Profilverluste erreicht das Laufgitter für den Nennanströmwinkel  $\beta_1 = 50^\circ$ . Jegliche Winkelvariation bewirkt eine Steigerung der Verluste und infolgedessen eine Verringerung des Gitterwirkungsgrades.



**Abbildung 7.26:** Profilverlustbeiwerte des Laufgitters in Abhängigkeit von  $\beta_1$

Prinzipiell reagiert die Schaufel empfindlicher auf den Rückenstoß als auf den Bauchstoß. Sehr ungünstig erweist sich eine Anströmung mit  $\beta_1 = 20^\circ$ , die zu einem erheblichen Anstieg

der Verluste führt. Hierbei wird die Strömung in erster Linie umgelenkt. Aufgrund der über die Schaufelhöhe zunehmenden Teilung kommt es im Bereich der Schaufelspitze zu einer Strömungsverzögerung  $w_2/w_1 < 1$ , die sich gemäß der Glg. (7.15) deutlich auf den Profilverlustbeiwert auswirkt. Höhere Verluste ergeben sich ebenso infolge der Strömungsablösung. Nichtsdestotrotz führt eine ungünstige Fehlanströmung mit anschließender Strömungsverzögerung im Laufgitter zu deutlich höheren Verlusten als sie durch Ablösung verursacht werden.

Die teilungsgemittelten Ergebnisse der numerischen Berechnungen sind in der Tabelle 7.4 zusammengefasst. Die Profilverlustbeiwerte sind nach Glg (7.15) berechnet.

$\beta_1$ [°]	$\bar{\beta}_2^+$ [°]	$\bar{C}_{p2}$ [-]	$\bar{C}_{pt2}$ [-]	$\overline{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)}$ [-]	$\zeta$ [-]
20	20.92	-0.15	-0.085	1.021	0.0815
30	20.65	-1.40	-0.126	1.496	0.0563
40	20.57	-2.96	-0.190	1.925	0.0513
50	20.53	-4.62	-0.267	2.296	0.0506
60	20.51	-6.21	-0.362	2.596	0.0537
70	20.49	-7.56	-0.480	2.818	0.0604
80	20.48	-8.48	-0.597	2.954	0.0684

**Tabelle 7.4:** Teilungsgemittelte Simulationsergebnisse für die Laufschaufelmitte

Ähnlich der Leitgitterberechnung weichen ebenso die für den Laufgittermittelschnitt numerisch ermittelten Profilverlustbeiwerte geringfügig vom analytischen Wert ab. Der Abströmwinkel  $\beta_2^+$  zeigt im jeweiligen Schnittbild eine vernachlässigbar geringe Abhängigkeit vom Anströmwinkel  $\beta_1$ , die durchaus auf die numerischen Fehler zurück geführt werden kann. Ausgenommen ist die Anströmung mit  $\beta_1 = 20^\circ$ . Die numerisch und mit Gleichungen (2.35) und (2.36) analytisch berechneten Werte sind in der Tabelle 7.5 zusammengefasst.

	$\beta_{2\text{Korr}}^+$ [°]	$\beta_{2\text{Sinusr}}^+$ [°]	$\bar{\beta}_{2\text{CFD}}^+$ [°]
Nabe	18.35	17.03	18.59
Mitte	21.4	19.2	20.53
Spitze	24.5	21.3	23.08

**Tabelle 7.5:** Änderung des Abströmwinkels  $\beta_2^+$  über die Schaufelhöhe

## 7.4 Stufensimulation

### 7.4.1 Turbinenkennlinie

Vor den Inbetriebnahme der Luftturbine ist es empfehlenswert, den Betriebspunkt derselben zu definieren. Dieser wird durch das Zusammenwirken des SPG-Gebläses und der 1½-stufigen Axialturbine festgelegt. Die Kennlinie der Axialturbine stellt die Änderung der isentropen spezifischen Enthalpiedifferenz  $\Delta h_s$  bei Variation des Volumenstroms  $\dot{V}$  dar und kann direkt aus der numerischen Stufenberechnung ausgewertet werden. Die allgemeine Definition der Enthalpie in differentialer Form lautet

$$dh = Tds + vdp . \quad (7.16)$$

Für die Auswertung des Stufengefälles bei einer isentropen Zustandsänderung vereinfacht sich diese Beziehung, angeschrieben in Differenzenform, zu

$$\Delta h_s = \frac{\Delta p}{\rho} . \quad (7.17)$$

### 7.4.2 Gebläsekennlinie

Bei dem Verdichter handelt es sich um ein Radialgebläse des Typs SGP Gebläse HR 40/40. Das Gebläsekennfeld ist in [7] für eine Drehzahl von 8000 U/min abgebildet. Um den Betriebspunkt, der als Schnittpunkt der Gebläse- und Turbinenkennlinie resultiert, zu bestimmen, sind folgende Annahmen notwendig. Zuallererst werden die Druckverluste im Verbindungsrohr zwischen der Turbine und dem Gebläse vernachlässigt, sodass gilt

$$\Delta h_{s,Turbine} = \Delta h_{s,Gebläse} . \quad (7.18)$$

Im nächsten Schritt ist eine Anpassung der Drehzahl notwendig, wodurch sich die Kennlinie hin zu kleineren Enthalpiewerten verschiebt. Zur Berechnung der neuen Drehzahl und der dazu gehörigen isentropen spezifischen Energiedifferenz werden Ähnlichkeitsgesetze herangezogen. Diese ermöglichen es, das Gebläse auf einen anderen Betriebspunkt zu fahren, solange die dimensionslosen Kennzahlen gleich bleiben. Verwendet werden die dimensionslose Druckzahl  $\psi$  und die Lieferzahl  $\varphi$ . Für die detaillierte Herleitung wird auf [7] verwiesen.

### 7.4.3 Wirkungsgradberechnung

Zur vollständigen Charakterisierung des Turbinenkennfeldes ist es notwendig, den Verlauf des Wirkungsgrades der Stufe als Funktion des Volumenstromes zu bestimmen. Zu diesem Zweck soll der Umfangswirkungsgrad der Stufe  $\eta_u$  bestimmt werden. Der Anströmwinkel der Stufe beträgt konstante  $\alpha_0 = 90^\circ$ , der Volumenstrom  $\dot{V}$  wird schrittweise erhöht. Mit der teilungsgemittelten Umfangskomponente der absoluten Laufgittereintrittsgeschwindigkeit  $c_{u1}$  und Laufgitteraustrittsgeschwindigkeit  $c_{u2}$  kann die spezifische Umfangsarbeit  $a_u$  nach Glg.

(2.8) berechnet werden. Mit der nach Glg. (7.17) bestimmten isentropen Enthalpiedifferenz  $\Delta h_s$  folgt der Umfangswirkungsgrad  $\eta_u$  aus Glg. (2.21). Dieser berücksichtigt die entstehenden Profilverluste, jedoch keine Rand- und Spaltverluste.

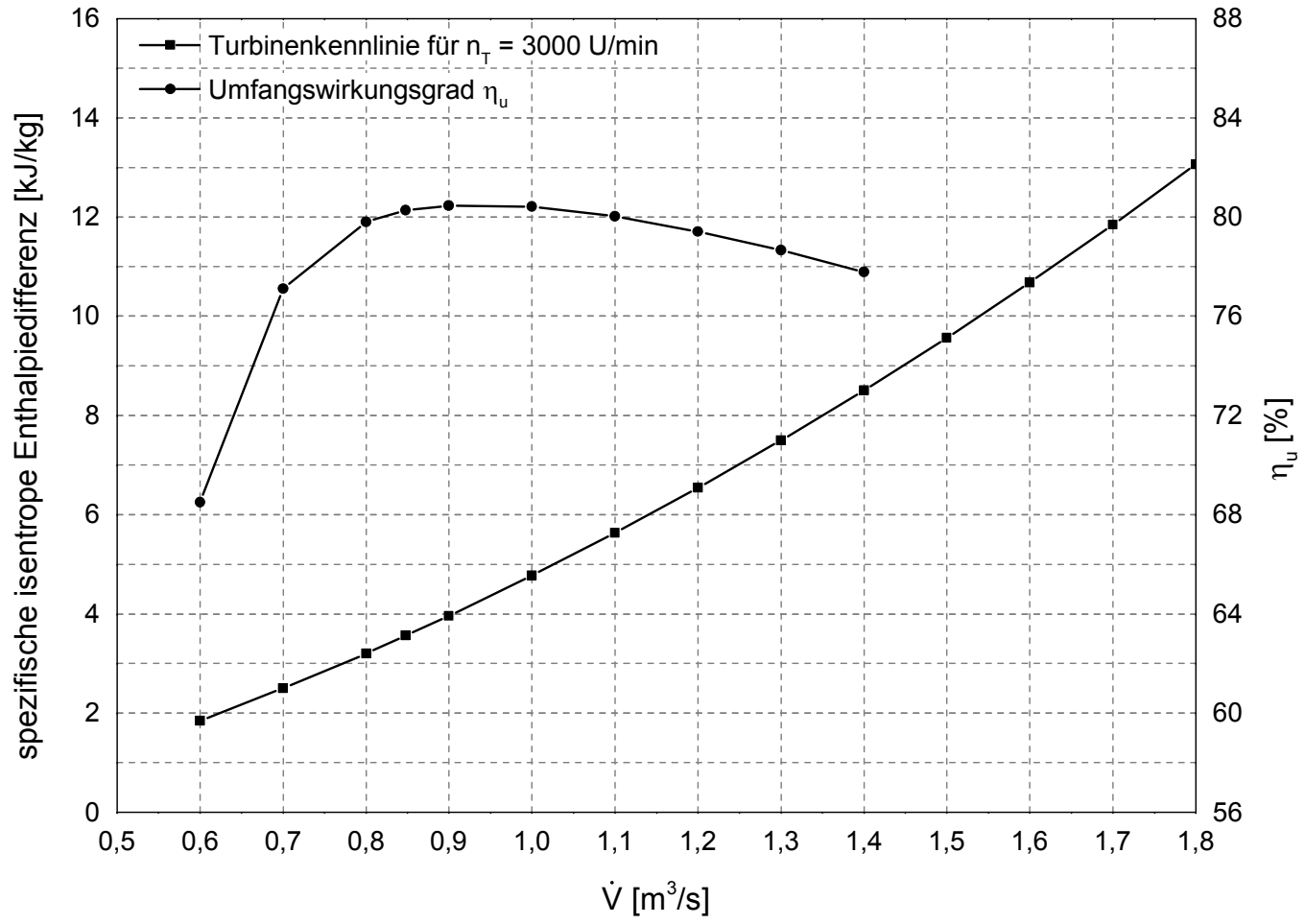
Bereits aus den numerisch berechneten Profilverlustbeiwerten, vgl. Abbildung 7.13 und 7.26, konnte man feststellen, dass sowohl das Leitgitter, aber auch das Laufgitter relativ unempfindlich auf geringe Inzidenzen rund um den Auslegungsanströmwinkel reagieren. Der Wirkungsgradlinie zufolge befindet sich die Turbine bis zu einem Volumenstrom von etwa  $\dot{V} = 0.8 \text{ m}^3/\text{s}$  im Teillastbetrieb. Bis zu einem Volumenstrom von  $\dot{V} = 1.4 \text{ m}^3/\text{s}$  können verschiedene Betriebspunkte durchfahren werden, danach kommt es in der Turbinenstufe zu einer verzögerten Strömung. Der flache Verlauf der Wirkungsgradlinie ermöglicht es den Volumenstrom, ausgehend vom analytisch ermittelten Betriebspunkt, zu erhöhen und somit die theoretische Nutzleistung  $P_u$  zu steigern. Die damit verbundenen Fehlanströmungen führen im Gegenzug zu höheren Profil- sowie Rand- und Spaltverlusten, sodass der innere Wirkungsgrad  $\eta_i$  mit steigendem Volumenstrom  $\dot{V}$  stärker abnehmen wird als die Umfangswirkungsgrad. Im Vergleich zum im Auslegungspunkt analytisch berechneten Umfangswirkungsgrad  $\eta_u = 0.871$  führt die numerische Stufenberechnung nach dem Mischungsebenenansatz zu kleineren Werten, die teilweise auf die durch die Mittelung entstehenden zusätzlichen Verluste zurückgeführt werden können. Um das Durchfahren verschiedener Betriebspunkte, bei konstanter Turbinendrehzahl  $n_T = 3000 \text{ U/min}$ , zu ermöglichen, sind in der Tabelle 7.6 die wichtigsten Parameter zusammengefasst.

$\dot{V}$ [m <sup>3</sup> /s]	$\Delta h_s$ [kJ/kg]	$n_V$ [U/min]	$\eta_u$ [%]
0.6	1.84	3080	68.50
0.7	2.50	3600	77.11
0.8	3.20	4080	79.81
0.849	3.56	4300	80.26
0.9	3.96	4550	80.46
1	4.78	5000	80.43
1.1	5.63	5450	80.03
1.2	6.54	5900	79.41
1.3	7.50	6330	78.66
1.4	8.50	6750	77.78
1.5	9.56	7200	
1.6	10.68	7600	

**Tabelle 7.6:** Kenndaten mehrerer Betriebspunkte für  $n_T = 3000 \text{ U/min}$



Abbildung 7.27: Turbinenkennlinie



## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Diplomarbeit soll in ihrer Gesamtheit einen weiteren Beitrag zur Aktivierung der institutseigenen 1½-stufige axialen Kaltluftturbine leisten. Hierzu galt es die Charakteristiken der Leitrad- und Laufradbeschaufelung in Abhängigkeit des Anströmwinkels zu berechnen. Das Strömungsfeld wurde mit dem auf der Finite-Volumen-Methode basierendem, CFD-Programm ANSYS FLUENT simuliert. Als Turbulenzmodell wurde das  $k$ - $\omega$ -SST-Modell eingesetzt. Die wichtigsten Kenngrößen, Abströmwinkel, Nachlaufdüse, statische Druckverteilung und die Totaldruckverteilung konnten im Rahmen des Postprocessing in der Messebene ausgewertet und analysiert werden.

Die 3D-Modelle der Leit- und Laufschaufel konnten anhand vorhandener Datenblätter mit dem CAD-Programm CATIA erstellt werden. Durch das Abwickeln eines zylindrischen Schnittes in der Schaufelmitte konnte für die Leit- und Laufreihe ein ebenes Strömungsgitter erzielt werden. Die Verwendung eines blockstrukturierten Rechennetzes im Zusammenhang mit dem kreisbogenförmigen Strömungskanal hat sich schlussendlich als suboptimal erwiesen. Da das Rechennetz einen großen Einfluss auf die Ergebnisse der numerischen Simulation ausübt, musste vor allem der Hinterkantenbereich besonders fein diskretisiert werden. Die Netzqualität wird durch die starke Kanalkrümmung sehr vermindert. Es treten hohe numerische Dissipationen auf, die vor allem im Leitgitter besonders ausgeprägt sind. Teilweise können diese ebenfalls auf das verwendete  $k$ - $\omega$ -SST-Modell zurückgeführt werden, das ein sehr feines Netz mit hoher Qualität erfordert. Aufgrund komplexer Profilgeometrie und der stark gekrümmten Randflächen wäre eine unstrukturierte Netzgenerierung durchaus in Erwägung zu ziehen.

Aufgrund mangelnder Messergebnisse konnte nur eine qualitative Beurteilung der charakteristischen Kenngrößen vorgenommen werden. Teilweise ließ sich für das Leitgitter ein Vergleich mit den numerischen Resultaten aus [14] und [17] anstellen, anhand dessen der über der Schaufelteilung dargestellte Verlauf der Strömungsgrößen auf seine Richtigkeit evaluiert wurde. Die teilungsgemittelten, mit der Massenstromdichte gewichteten Abströmwinkel liegen in der mit der Glg. (2.35) und Glg. (2.36) ermittelten Größenordnung. Lediglich im Bereich der Laufschaufelspitze führt die abnehmende Kanalführung zu leichten Abweichungen. In beiden Gittern ist der Abströmwinkel weitgehend unabhängig vom Zuströmwinkel. Die numerischen Profilverlustbeiwerte für das Leit- und Laufgitter liegen wie erwartet unter den analytisch ermittelten Werten. Das Leitgitter weist im gesamten Variationsbereich des Zuströmwinkels eine äußerst flache Profilverlustkennlinie auf. Das Laufgitter reagiert empfindlicher gegenüber Änderungen des Zuströmwinkels.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit war die Ermittlung der Turbinenkennlinie für eine Drehzahl von  $n_T = 3000 \text{ U/min}$ . Aus der numerischen Stufensimulation konnten das isentrope Enthalpiegefälle, die spezifische Umfangsarbeit und auch der Umfangswirkungsgrad ausgewertet werden. Die Wirkungsgradlinie weist einen relativ flachen Verlauf auf, wobei die Berechnung nach dem Mischungsebenenansatz zu zusätzlichen Verlusten infolge der Mittelung führt. Schlussendlich wurde für verschiedene Betriebspunkte die Gebläsedrehzahl, anhand der in [7] angegebener Kenndaten, ermittelt.

## Ausblick

Die im Rahmen dieser Arbeit behandelten inkompressiblen ebenen Turbinengitterströmungen liefern samt ihrer Ergebnisse, Ansatzpunkte für weitere numerische und experimentelle Arbeiten.

Eine Windkanalmessung wichtiger Kenngrößen im subsonischen Bereich (Abströmwinkel, Nachlaufdüse, Profildruckverteilung und die Totaldruckverteilung im Abströmgebiet) ist zur Verifizierung der numerischen Berechnungsergebnisse wünschenswert. Möglicherweise sind anschließend weitere Simulationen notwendig, um die Treffsicherheit und Genauigkeit der numerischen Resultate zu steigern.

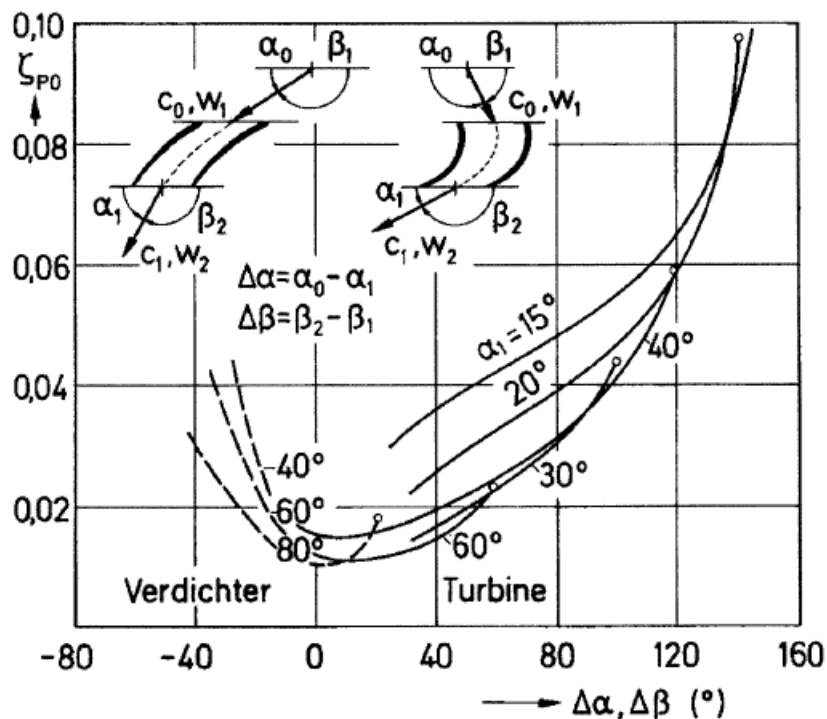
Ein wesentlicher Punkt wäre, Untersuchungen auf dem Gebiet der transsonischen Strömungen durchzuführen. Durch die Annahme einer inkompressiblen Strömung wurden sämtliche Auswirkungen der Machzahl, beispielsweise auf den Abströmwinkel, vernachlässigt. Die Effekte einer transsonischen Strömung wurden für das Leitgitter in [14] und [17] teilweise untersucht. Die Änderung des Staffelungswinkels hat jedoch Auswirkungen auf den Verdichtungsstoß, beispielsweise auf die Lage, die von hohem Interesse sein könnten. Für das Laufschaufelprofil wurden in diesem Zusammenhang noch keine Simulationen durchgeführt.

Die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen beschränken sich auf die stationäre Gitterströmung. Der geringen axiale Abstand zwischen der Leit- und Laufreihe lässt auf eine ausgeprägte Stator-Rotor-Wechselwirkung schließen, die im Rahmen einer instationären Berechnung untersucht werden könnte. In diesem Zusammenhang gilt es auch die Netzgenerierung zu überdenken, vor allem im Bereich der Profilhinterkante, um die numerische Dissipation so gering wie möglich zu halten.

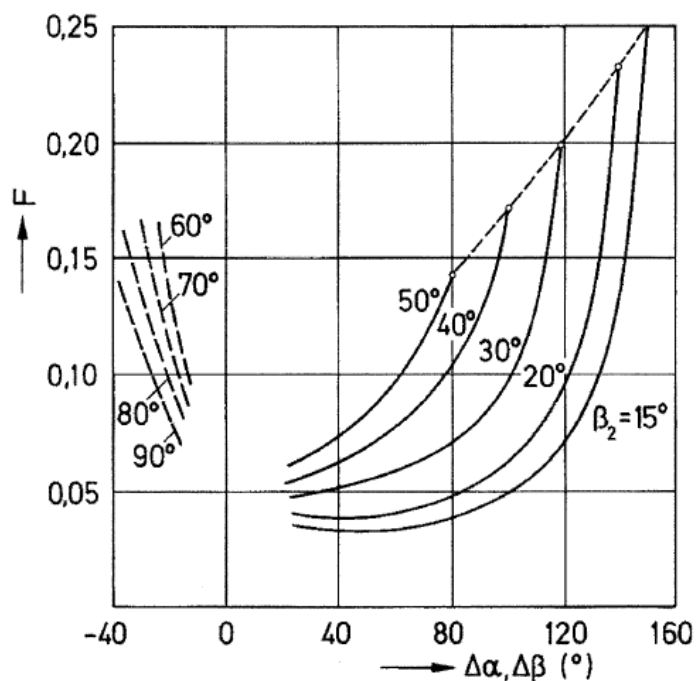
Schlussendlich könnte die numerische Berechnung auf die räumliche Gitterströmung ausgeweitet werden. Bereits aus der analytischen Verlustberechnung, aber auch anhand der Profildruckverteilung konnten ausgeprägte Kanalwirbel geschlussfolgert werden. Der Einfluss der Spalt- und Sekundärströmungswirbel trägt bei der vorliegenden, stark umlenkenden, Beschaukelung wesentlich zu den Gitterverlusten bei. Zur Beseitigung der Unstetigkeitsstellen in der Profilkontur, vor allem im Laufradprofil, könnte ein inverser Auslegungsprozess durchgeführt werden, obwohl dadurch der Bezug zur Kaltluftturbine teilweise verloren geht.

## Anhang A Kaltluftturbine

### A.1 Diagramme für die analytische Verlustberechnung



**Abbildung A.1:** Verlustbeiwert gerader unendlich langer Profildüsen in Abhängigkeit vom Umlenkwinkel und vom Austrittswinkel bei aerodynamisch stoßfreiem Eintritt.  $Re \approx 2 \cdot 10^5$ ,  $k/s \approx (0.2 - 0.5) \cdot 10^{-3}$ ,  $Ma \approx 0.6$  [15]



**Abbildung A.2:** Einflussfunktion  $F$  für Randverluste [15]

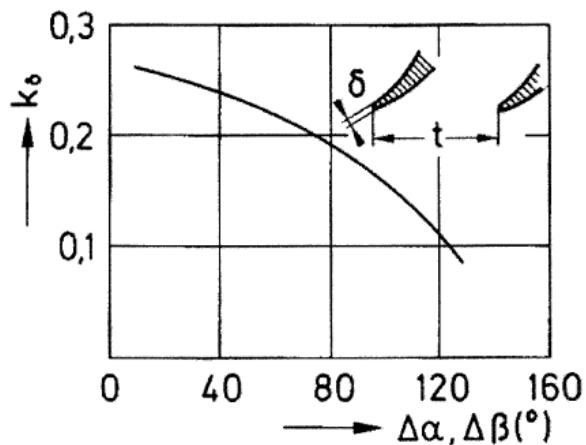


Abbildung A.3: Einflussfaktor  $k_\delta$  auf den Hinterkantenverlust [15]

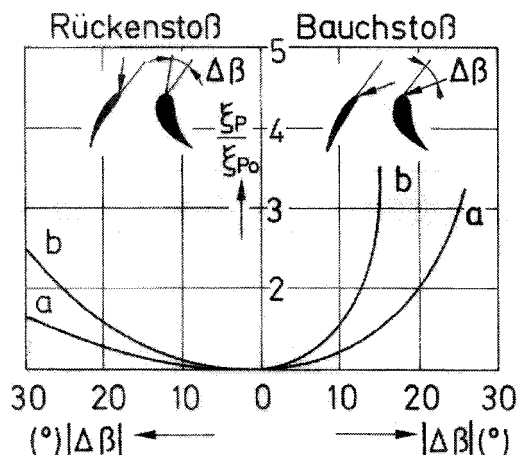


Abbildung A.4: Einfluss der Abweichungen vom optimalen Zuströmwinkel [15]

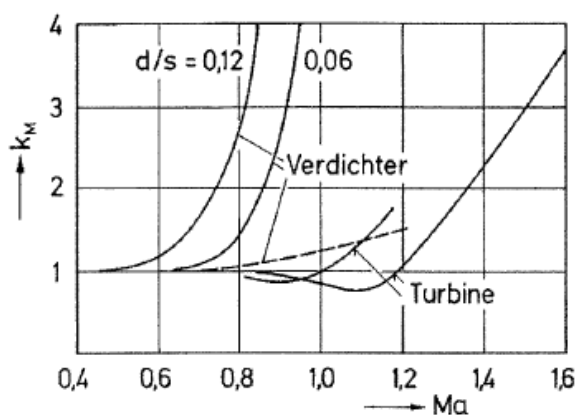


Abbildung A.5: Korrekturfaktor  $k_M$  bei höheren Machzahlen [15]

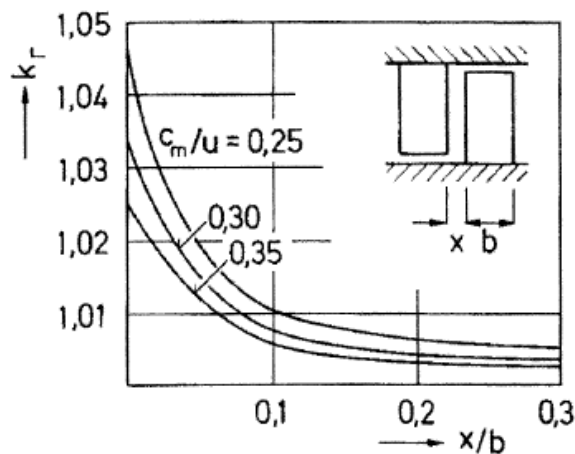


Abbildung A.6: Schwankungsverlustfaktor  $k_F$  in Abhängigkeit von Axialspaltverhältnis und Durchflusszahl in Turbinenstufen mit kleinem Reaktionsgrad [15]

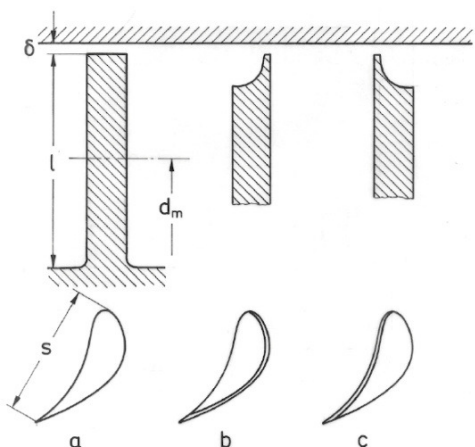


Abbildung A.7: Gestaltung des freien Schaufelendes [15]

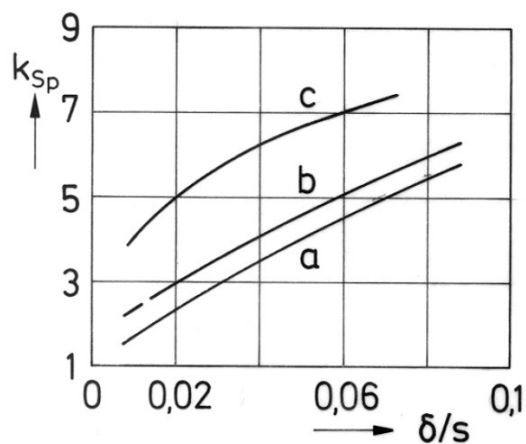


Abbildung A.8: Spaltverlust-Einflussfaktor  $k_{Sp}$  [15]

## A.2 Simulationsergebnisse für die Leitschaufelnabe und -spitze

Abströmwinkel  $\alpha_1$

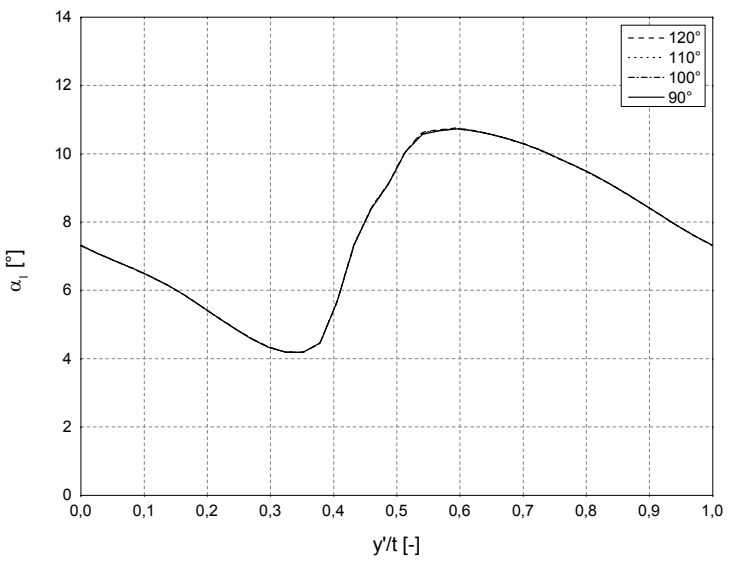
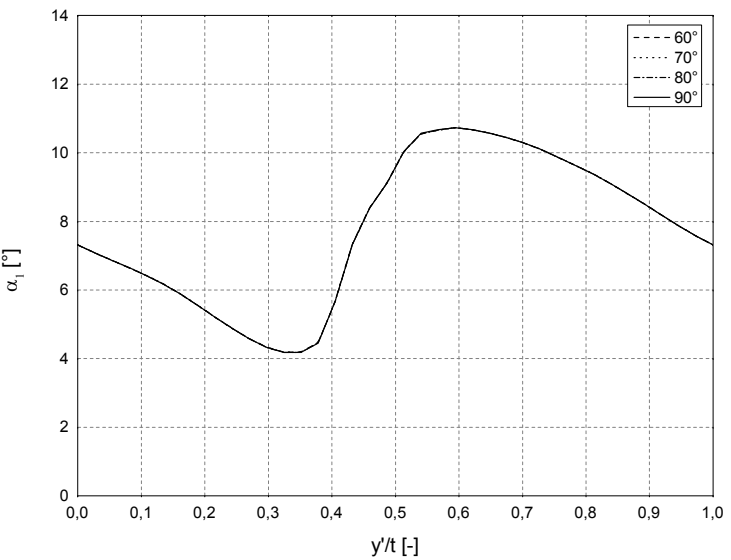


Abbildung A.9: Verlauf von  $\alpha_1$  für  $60^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$  (Nabe)

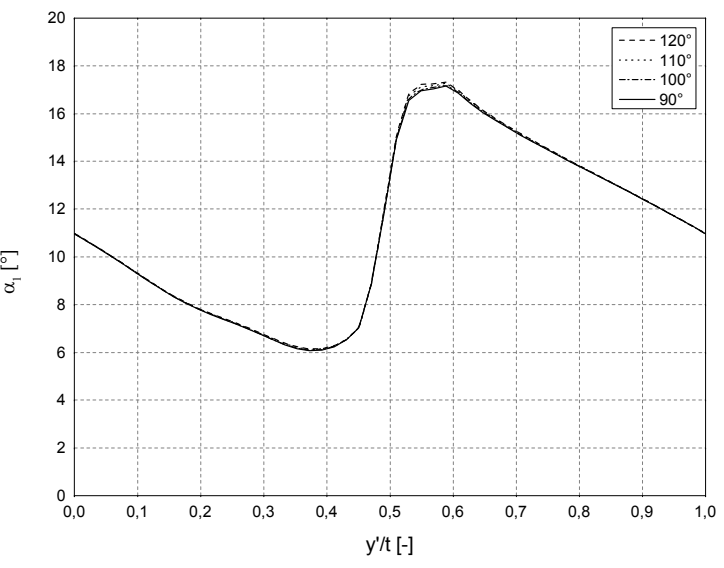
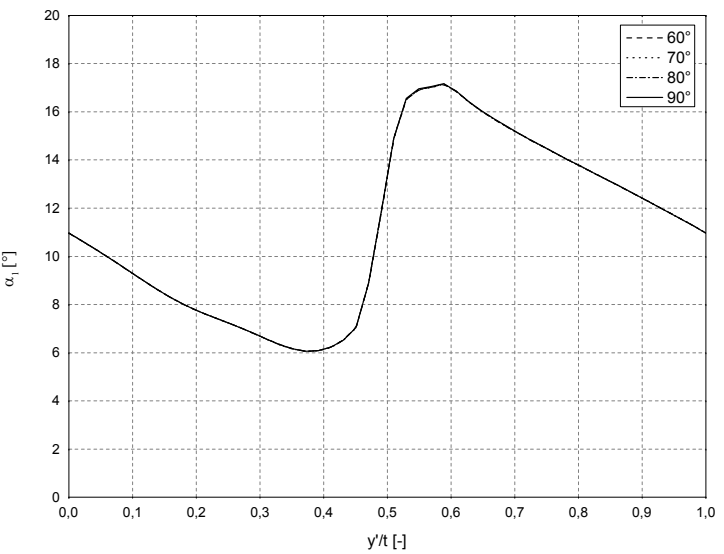


Abbildung A.10: Verlauf von  $\alpha_1$  für  $60^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$  (Spitze)

**Geschwindigkeitsverteilung  $c_1/c_0$**

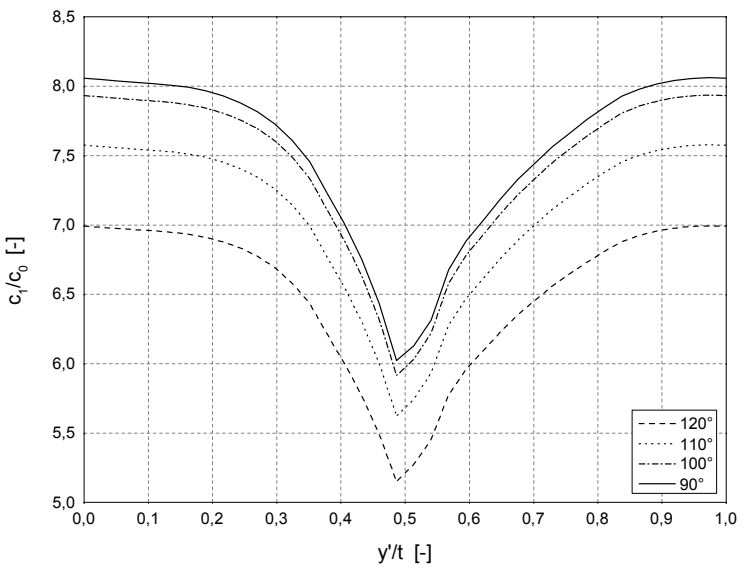
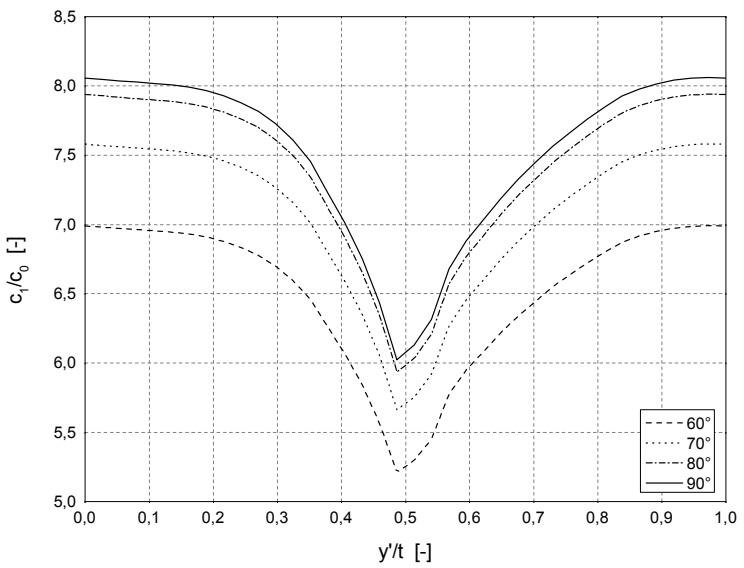


Abbildung A.11: Verlauf von  $c_1/c_0$  für  $60^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$  (Nabe)

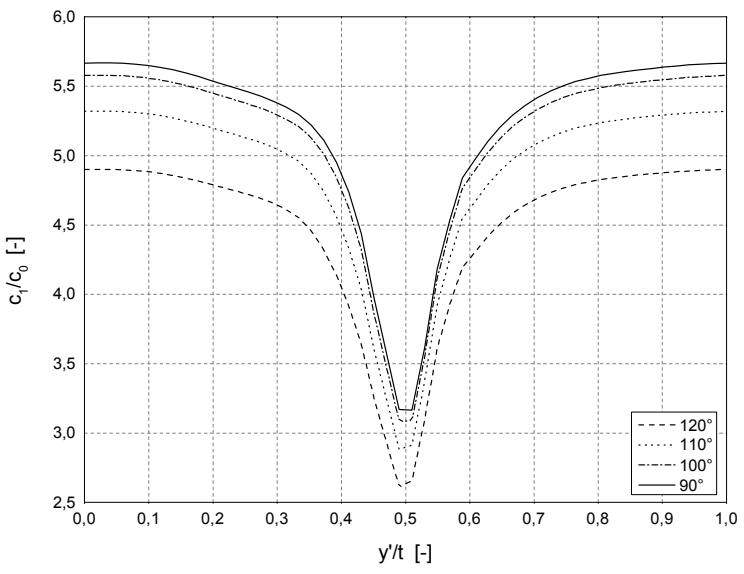
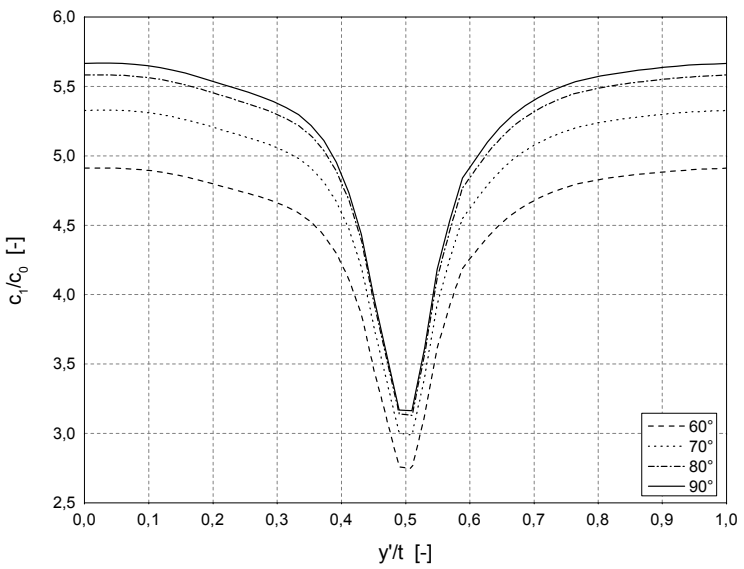


Abbildung A.12: Verlauf von  $c_1/c_0$  für  $60^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$  (Spitze)

Statischer Druckkoeffizient  $C_{p1}$

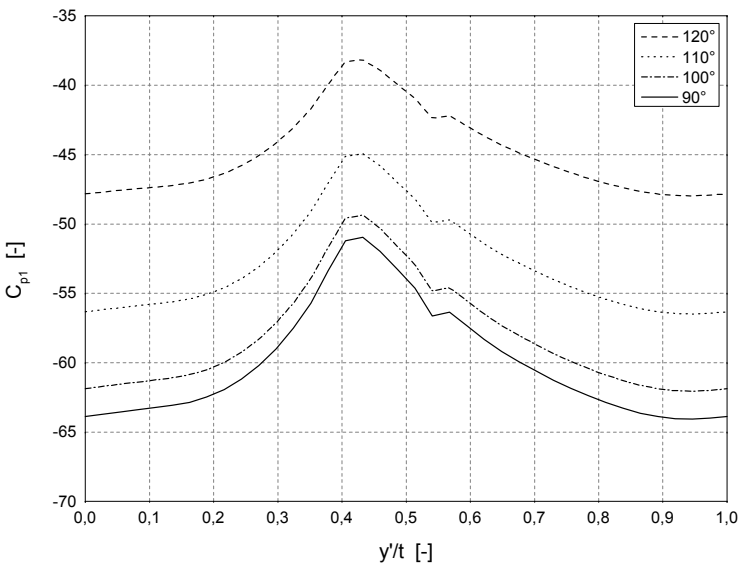
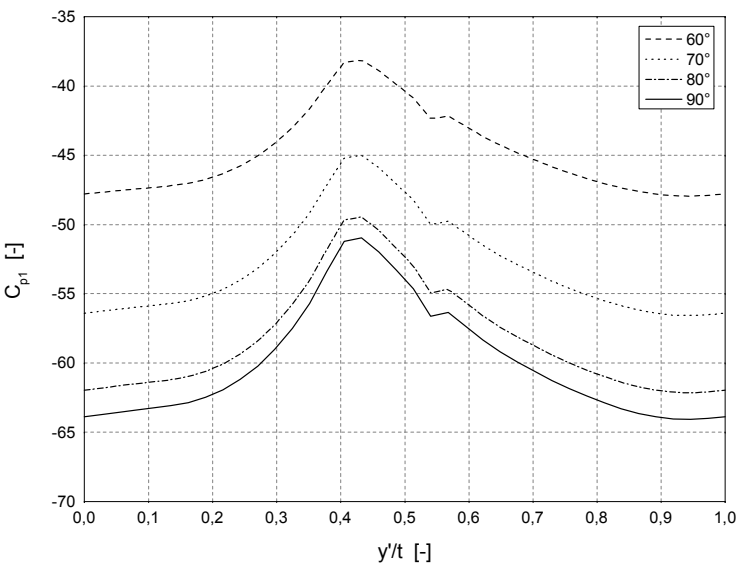


Abbildung A.13: Verlauf von  $C_{p1}$  für  $60^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$  (Nabe)

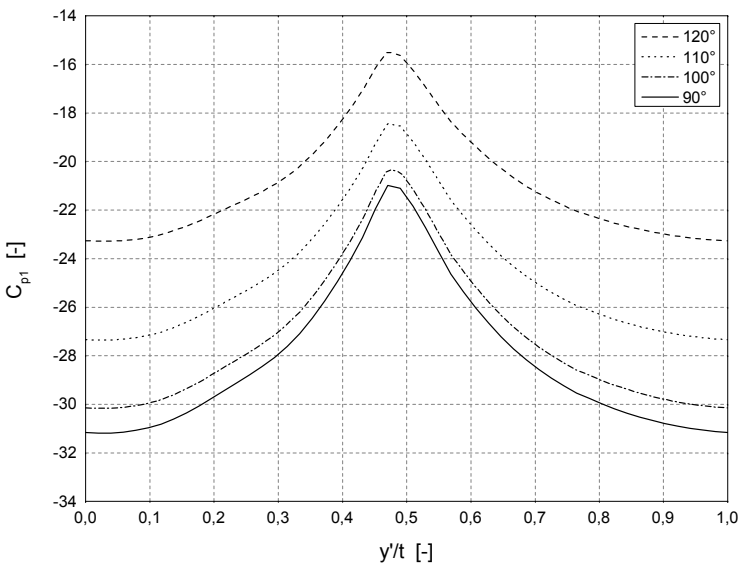
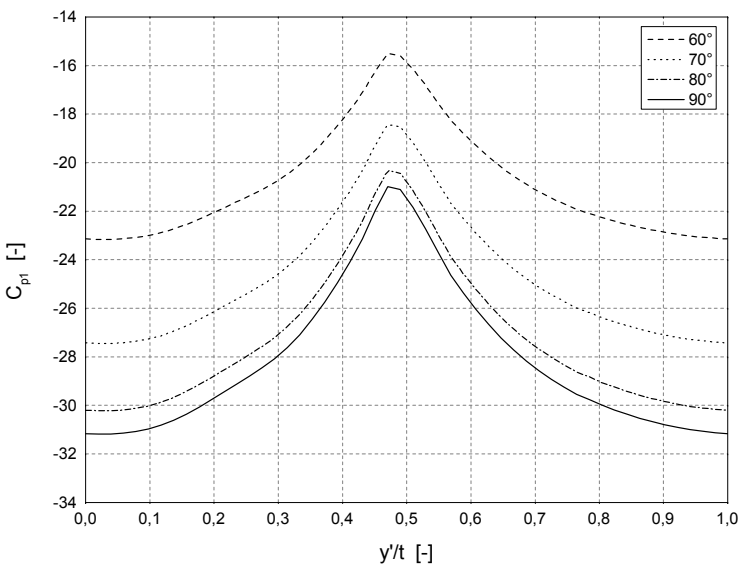
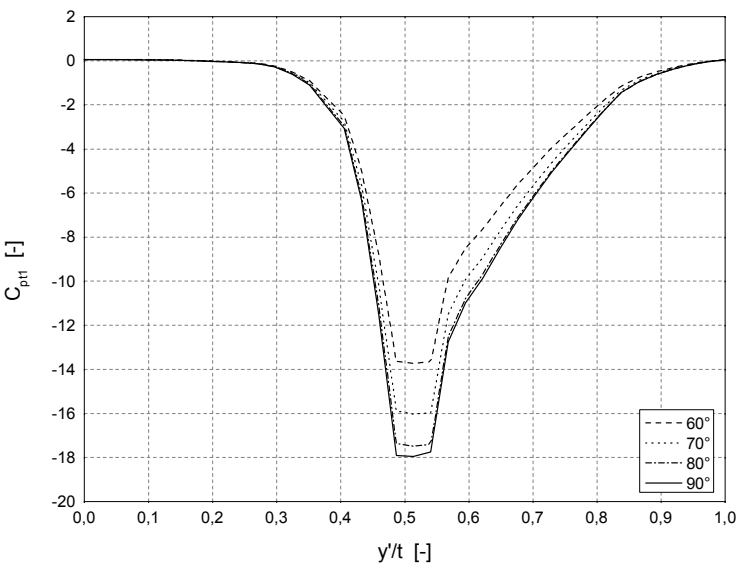


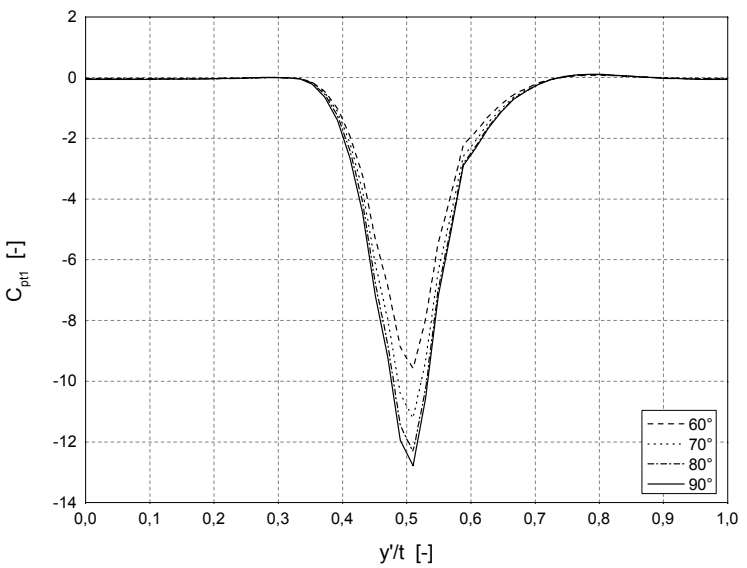
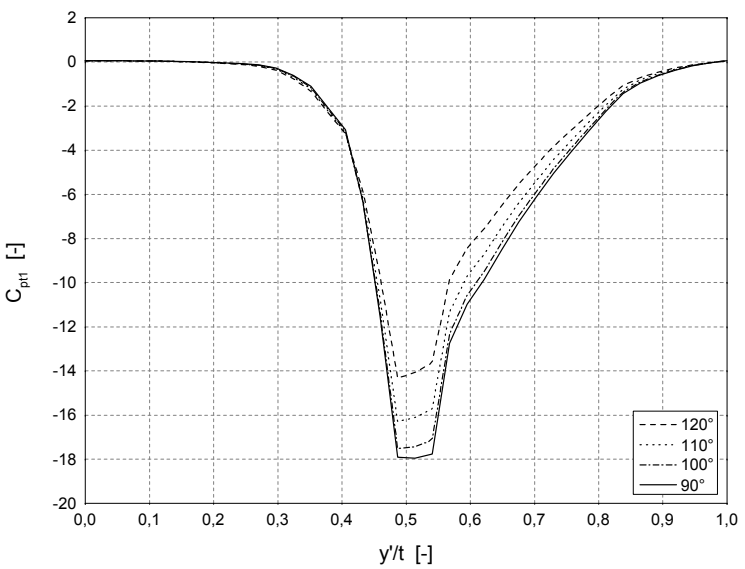
Abbildung A.14: Verlauf von  $C_{p1}$  für  $60^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$  (Spitze)



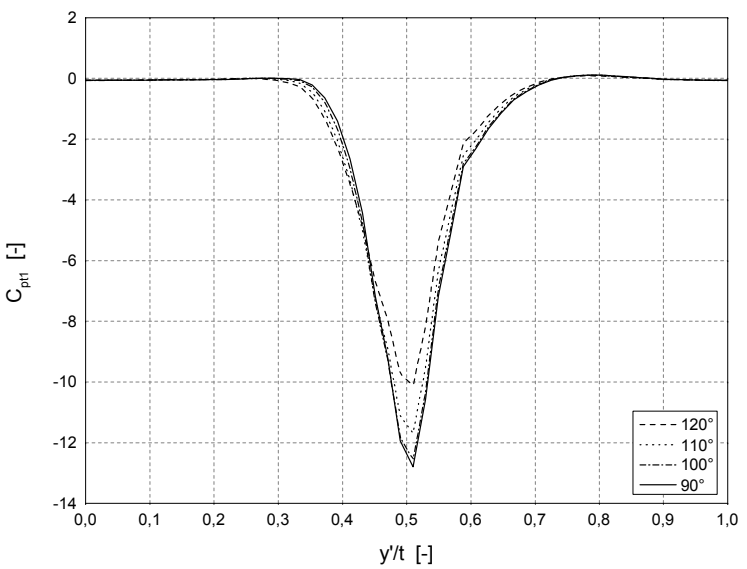
**Totaldruckkoeffizient  $C_{pt1}$**



**Abbildung A.15:** Verlauf von  $C_{pt1}$  für  $60^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$  (Nabe)



**Abbildung A.16:** Verlauf von  $C_{pt1}$  für  $60^\circ \leq \alpha_0 \leq 120^\circ$  (Spitze)



### A.3 Simulationsergebnisse für die Laufschaufelnabe und -spitze

Abströmwinkel  $\beta_2^+$

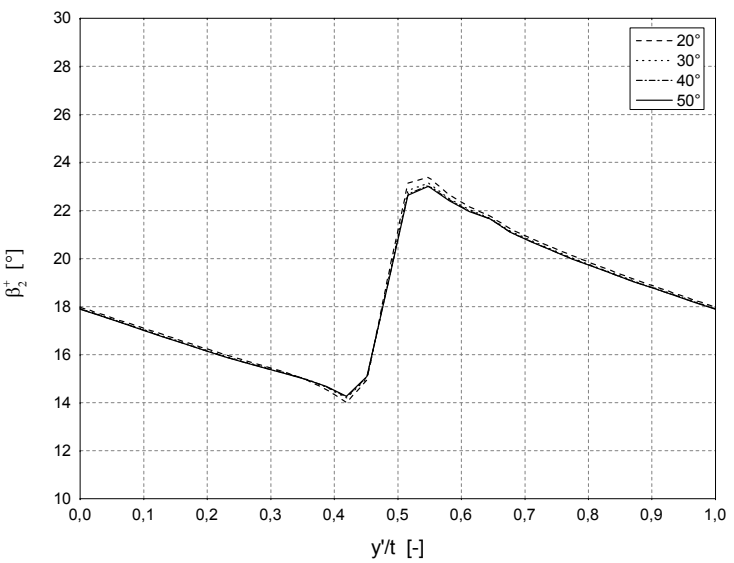


Abbildung A.17: Verlauf von  $\beta_2^+$  für  $20^\circ \leq \beta_1 \leq 80^\circ$  (Nabe)

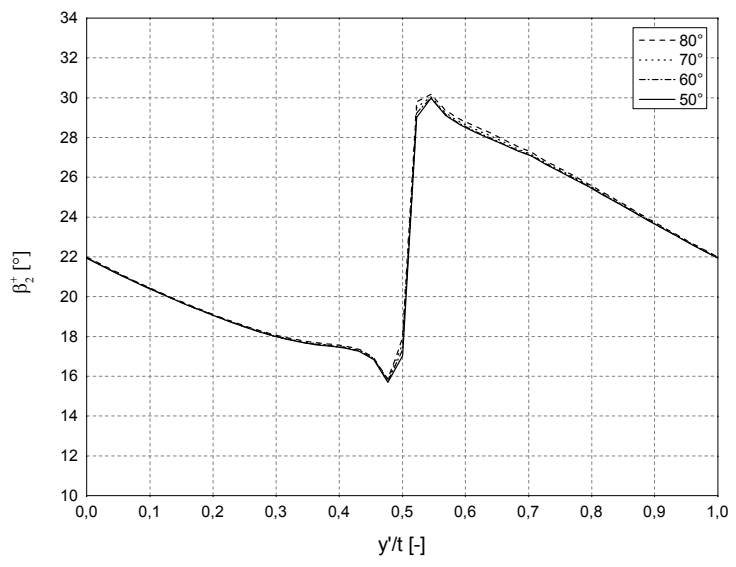
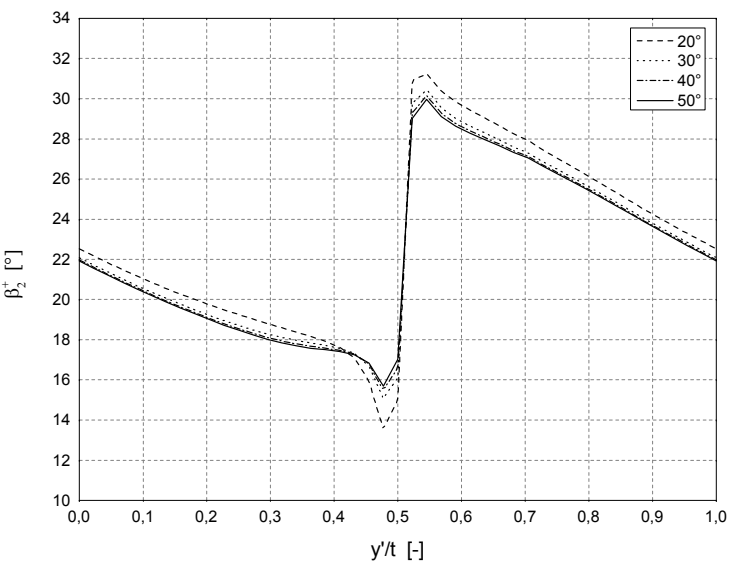
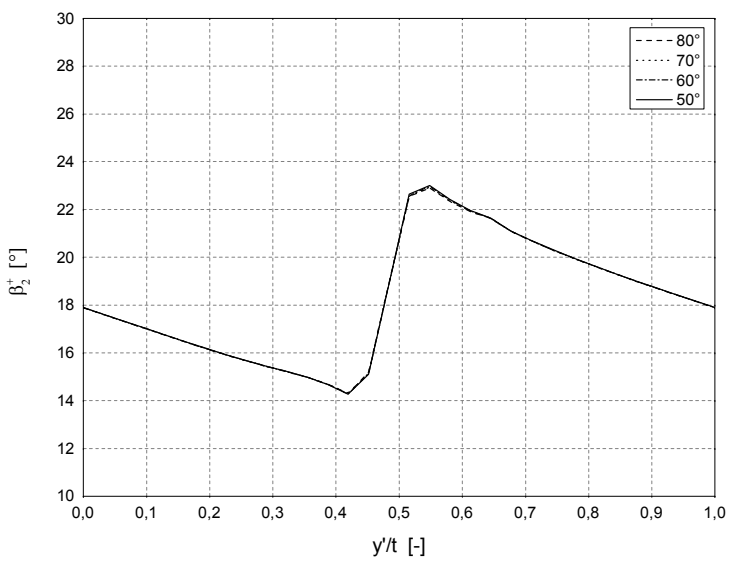


Abbildung A.18: Verlauf von  $\beta_2^+$  für  $20^\circ \leq \beta_1 \leq 80^\circ$  (Spitze)

Geschwindigkeitsverteilung  $\frac{w_2}{w_1}$

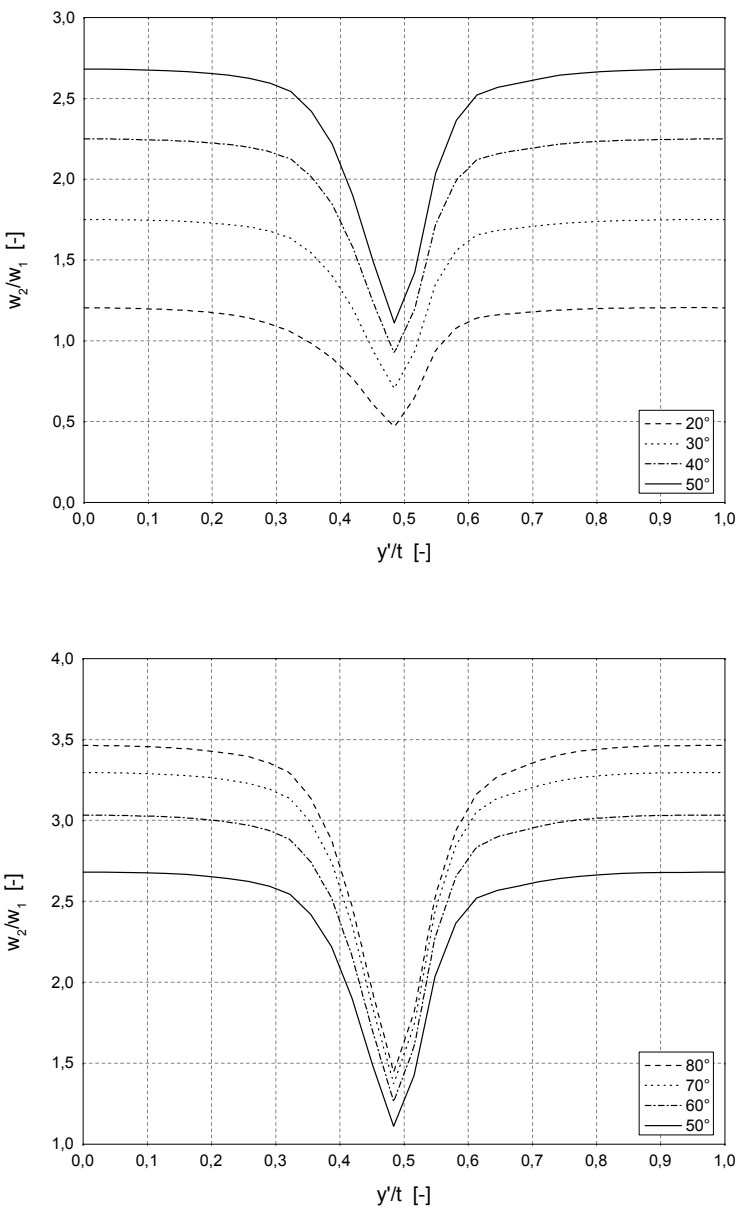


Abbildung A.19: Verlauf von  $w_2/w_1$  für  $20^\circ \leq \beta_1 \leq 80^\circ$  (Nabe)

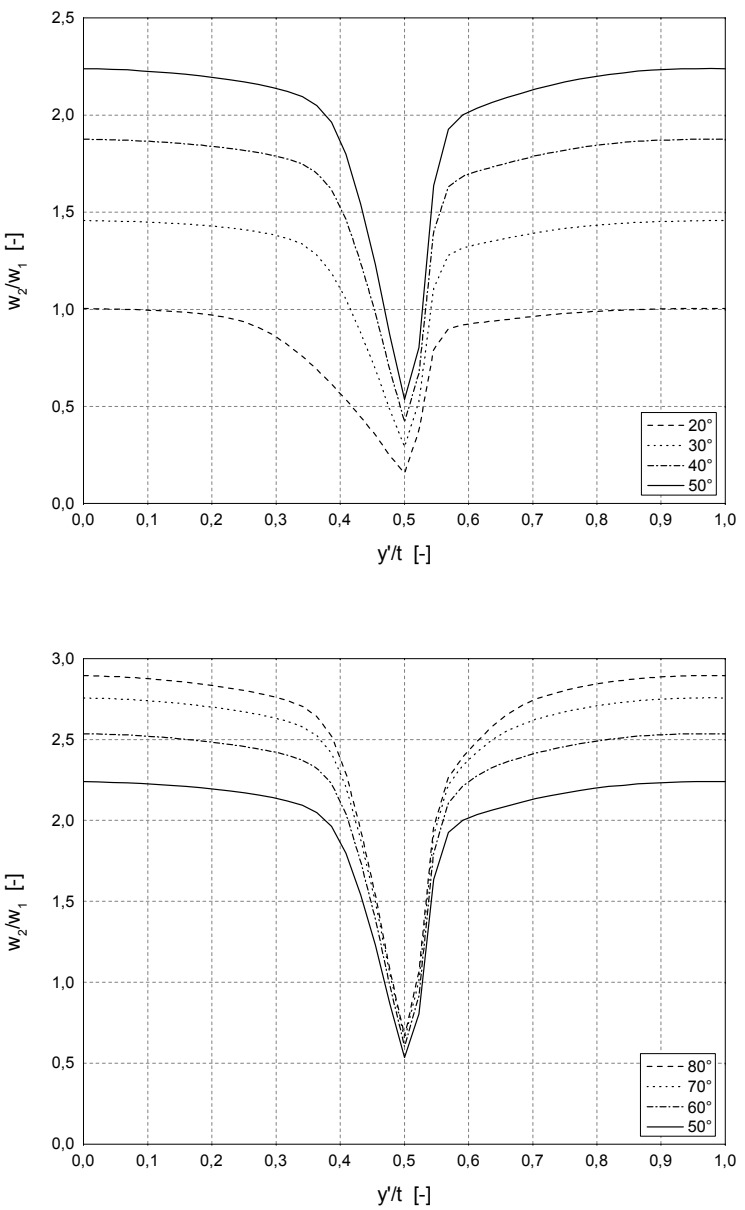
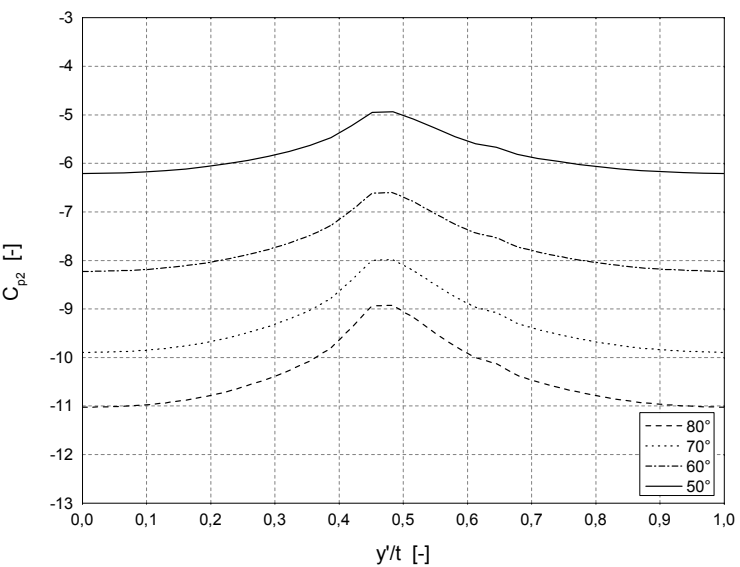
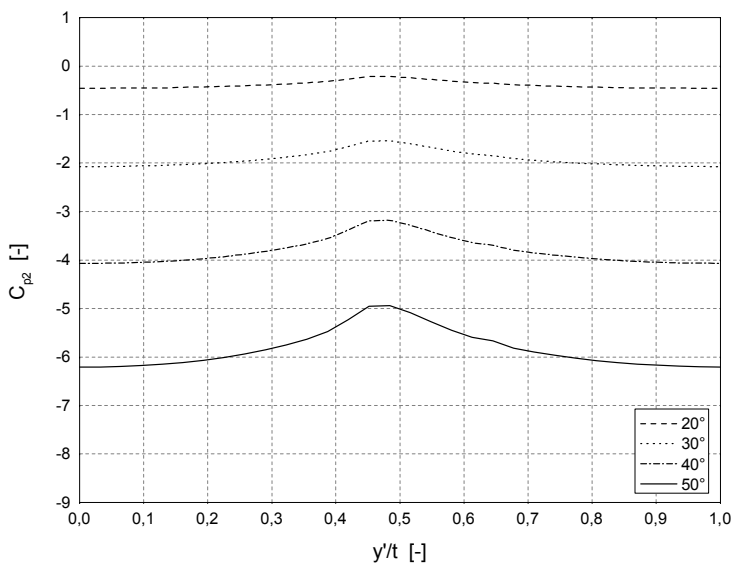
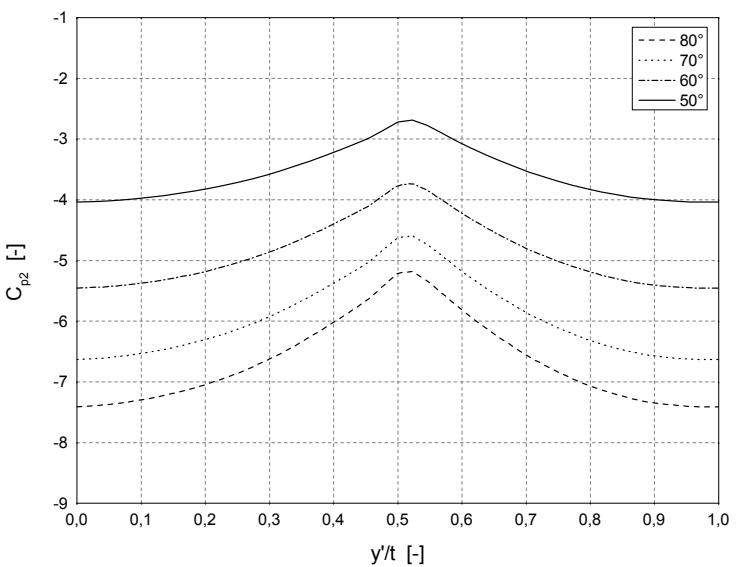
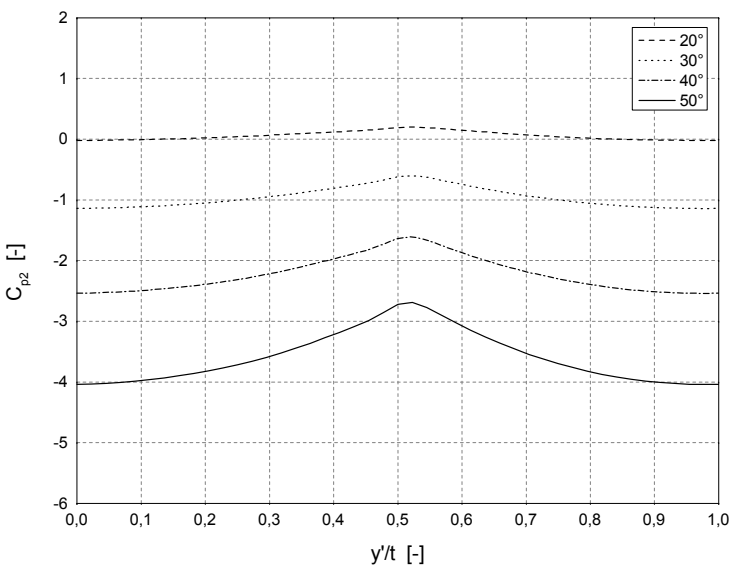


Abbildung A.20: Verlauf von  $w_2/w_1$  für  $20^\circ \leq \beta_1 \leq 80^\circ$  (Spitze)

**Statischer Druckkoeffizient  $C_{p2}$**

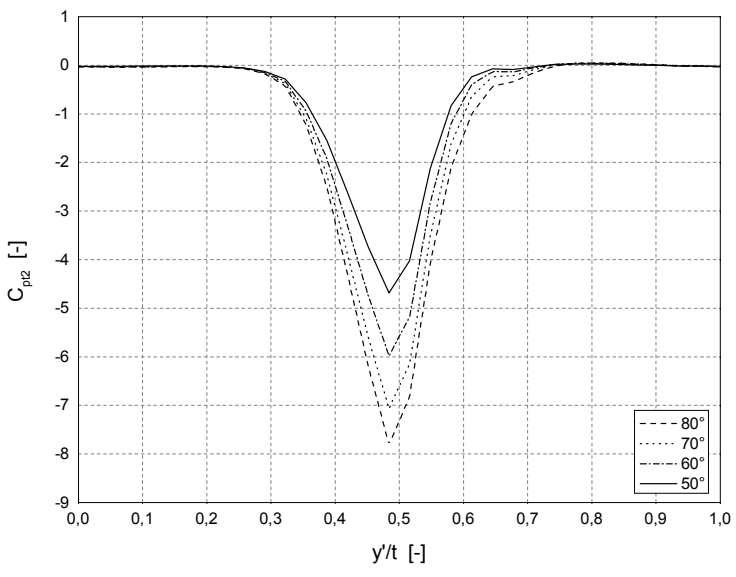
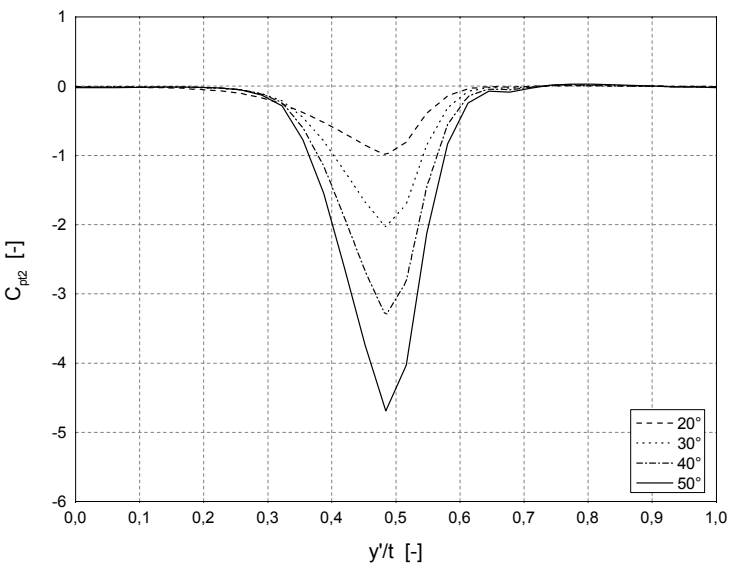


**Abbildung A.21:** Verlauf von  $C_{p2}$  für  $20^\circ \leq \beta_1 \leq 80^\circ$  (Nabe)

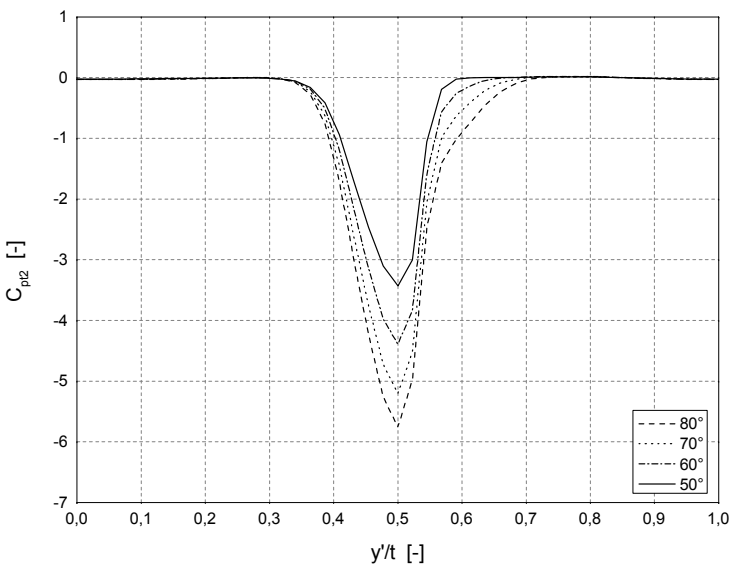
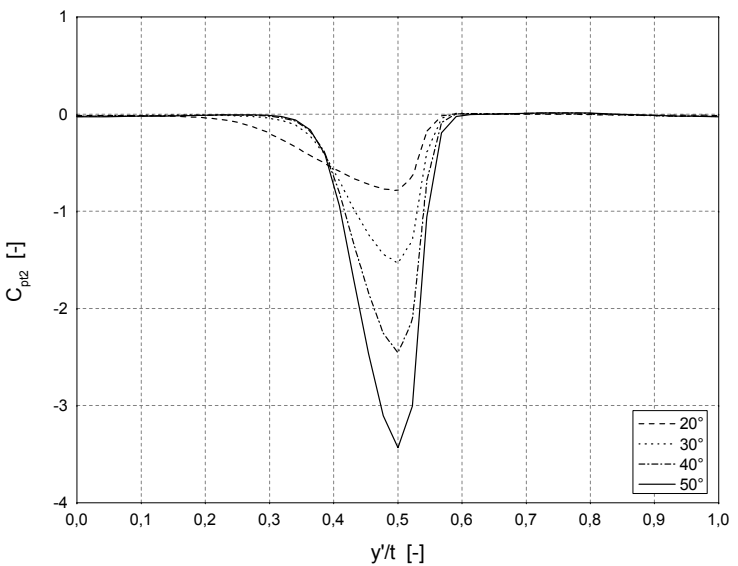


**Abbildung A.22:** Verlauf von  $C_{p2}$  für  $20^\circ \leq \beta_1 \leq 80^\circ$  (Spitze)

**Totaldruckkoeffizient  $C_{pr2}$**



**Abbildung A.23:** Verlauf von  $C_{pr2}$  für  $20^\circ \leq \beta_1 \leq 80^\circ$  (Nabe)



**Abbildung A.24:** Verlauf von  $C_{pr2}$  für  $20^\circ \leq \beta_1 \leq 80^\circ$  (Spitze)

## A.4 Teilungsgemittelte Simulationsergebnisse

$\alpha_0$ [°]	$\bar{\alpha}_1$ [°]	$\bar{C}_{p1}$ [-]	$\bar{C}_{pt1}$ [-]	$\overline{\left(\frac{c_1}{c_0}\right)}$ [-]	$\zeta$ [-]
60	8.29	-45.0	-3.570	6.494	0.0847
70	8.29	-53.1	-4.58	7.046	0.0838
80	8.29	-58.4	-4.522	7.382	0.0830
90	8.29	-60.2	-4.623	7.496	0.0823
100	8.30	-58.3	-4.482	7.379	0.0824
110	8.30	-53.1	-4.146	7.042	0.0836
120	8.30	-45.1	-3.644	6.492	0.0865

**Tabelle A.1:** Teilungsgemittelte Simulationsergebnisse für die Leitschaukelnabe

$\alpha_0$ [°]	$\bar{\alpha}_1$ [°]	$\bar{C}_{p1}$ [-]	$\bar{C}_{pt1}$ [-]	$\overline{\left(\frac{c_1}{c_0}\right)}$ [-]	$\zeta$ [-]
60	12.25	-21.1	-1.063	4.533	0.0517
70	12.25	-25.0	-1.242	4.931	0.0511
80	12.25	-27.5	-1.363	5.176	0.0509
90	12.26	-28.4	-1.416	5.275	0.0509
100	12.28	-27.5	-1.396	5.169	0.0522
110	12.30	-24.9	-1.310	4.926	0.0540
120	12.31	-21.2	-1.151	4.535	0.0560

**Tabelle A.2:** Teilungsgemittelte Simulationsergebnisse für die Leitschaukelspitze

$\beta_1$ [°]	$\bar{\beta}_2^+$ [°]	$\bar{C}_{p2}$ [-]	$\bar{C}_{pt2}$ [-]	$\overline{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)}$ [-]	$\zeta$ [-]
20	18.78	-0.40	-0.122	1.118	0.0976
30	18.65	-1.93	-0.211	1.635	0.07989
40	18.61	-3.84	-0.334	2.104	0.0754
50	18.59	-5.88	-0.472	2.509	0.0750
60	18.57	-7.80	-0.612	2.836	0.0761
70	18.56	-9.39	-0.747	3.078	0.0788
80	18.55	-10.47	-0.869	3.227	0.0834

**Tabelle A.3:** Teilungsgemittelte Simulationsergebnisse für die Laufschaufelnabe

$\beta_1$ [°]	$\bar{\beta}_2^+$ [°]	$\bar{C}_{p2}$ [-]	$\bar{C}_{pt2}$ [-]	$\overline{\left(\frac{w_2}{w_1}\right)}$ [-]	$\zeta$ [-]
20	24.12	-0.05	-0.074	0.925	0.0865
30	23.38	-0.98	-0.095	1.359	0.0514
40	23.18	-2.26	-0.137	1.752	0.0446
50	23.08	-3.64	-0.189	2.091	0.0432
60	23.09	-4.94	-0.264	2.362	0.0473
70	23.12	-6.02	-0.351	2.560	0.0536
80	23.18	-6.75	-0.434	2.678	0.0605

**Tabelle A.4:** Teilungsgemittelte Simulationsergebnisse für die Laufschaufelspitze

## Literaturverzeichnis

- [1] ANSYS: *ANSYS FLUENT User's Guide 14.0*. Ansys Inc., November 2011
- [2] BAEHR H.D.: *Thermodynamik – Grundlagen und technische Anwendungen*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2005
- [3] BENONI A.: *Numerische Simulation der Strömung im Schaufelgitterkanal*. TU Wien, Diplomarbeit, Juli 2009
- [4] BRÄUNLING W.J.G.: *Flugzeugtriebwerke – Grundlagen, Aero-Thermodynamik, ideale und reale Kreisprozesse, Thermische Turbomaschinen, Komponenten, Emissionen und Systeme*. Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 2009
- [5] BREDBERG J.: *On Two-equation Eddy-Viscosity Models*. Göteborg, Chalmers University of Technology, 2001
- [6] DRABEK T.: *Numerische Simulation der turbulenten Strömung in ebenen Diffusoren*. TU Wien, Diplomarbeit, Mai 2001
- [7] ILIC S.: *Strömungstechnische Nachrechnung eines Luftturbinenprüfstandes*. TU Wien, Diplomarbeit, Oktober 2011
- [8] LECHELER S.: *Numerische Strömungsberechnung*. Wiesbaden, Vieweg+Teubner Verlag, 2011
- [9] SCHÄFER M.: *Numerik im Maschinenbau*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1999
- [10] SCHLICHTING H., GERSTEN K.: *Grenzschicht-Theorie*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2006
- [11] SCHWARZE R.: *CFD-Modellierung – Grundlagen und Anwendungen bei Strömungsprozessen*. Berlin Heidelberg, Springer Verlag, 2013
- [12] SOMMER L.F.Y.: *Geometrieparametrisierungen für die aerodynamische Optimierung von Verdichterschaufelsektionen unter besonderer Berücksichtigung der Krümmung*. BTU Cottbus, Dissertation, August 2011
- [13] TRAUPEL W.: *Thermische Turbomaschinen – Erster Band*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1988
- [14] WIDHALM M.: *Berechnung der ebenen kompressiblen turbulenten Strömung in einem Turbinengitter*. TU Wien, Diplomarbeit, März 2000
- [15] WILLINGER R.: *Thermische Turbomaschinen*. TU Wien, Vorlesungsskript, November 2008

- [16] WILLINGER R.: *Numerische Strömungsberechnung von thermischen Turbomaschinen*. TU Wien, Vorlesungsskript, Februar 2012
- [17] ZAHIROVIC S.: *Anwendung der Methode der Finiten-Volumen auf transsonische Strömungsprobleme in thermischen Turbomaschinen*. TU Wien, Diplomarbeit, September 2002