Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Technischen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.
http://www.ub.tuwien.ac.at

The approved original version of this diploma or master thesis is available at the main library of the Vienna University of Technology.
http://www.ub.tuwien.ac.at/eng

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

MASTERARBEIT

Optimale Dividendenzahlungen mit Diffusionsprozessen in endlicher und unendlicher Zeit

Ausgeführt am
Institut für Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Claudia Michalecz BSc.
Wien

Wien, am 21. März 2014

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **i**

1. Grundlagen **1**
1.1. Zufall und seine Auswirkungen 1
1.2. Stochastische Prozesse 2
1.3. Brownsche Bewegungen 4
1.4. Stoppzeiten 6
1.5. Itô-Integration 7
1.6. Integration von Semimartingalen 13

2. Kontrolltheorie **17**
2.1. Modellbildung 18
2.2. Bellman-Prinzip und Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung 23

3. Optimale Dividendenzahlungen **27**
3.1. Modell mit Dividendenzahlungen 27
3.2. Dividenden in unendlicher Zeit 28
3.3. Monotone Follower Problem 40
3.4. Dividenden in endlicher Zeit 44
3.5. Dividenden in endlicher Zeit mit Ruinbeschränkung 53

4. Simulationen **59**
4.1. Simulation der Barrierefunktionen 59
4.2. Simulation einzelner Prozesse 60
4.3. Vergleich der Modellergebnisse 62

A. Programmcodes **63**

Einleitung

In der heutigen Zeit bestimmt der Aktienmarkt einen großen Teil unserer Wirtschaft. Die Abbildung eines Aktienmarktes und Aktionen in diesem sind eine große Herausforderung. Es fließen zu viele Aspekte ein um das Verhalten eines Wertpapiers exakt vorhersagen zu können - auch wenn es immer wieder versucht wird. Es lässt sich jedoch eine generelle Motivation hinter einem Wertpapierkurs erahnen. Dieser unterliegt oftmals einem voraussehbarem Trend, versehen mit einer zufälligen Schwankung. Dieses Konzept kann in der Mathematik näherungsweise über Diffusionsprozesse abgebildet werden. Wir nutzen diese Möglichkeit und werden in dieser Arbeit unsere Modelle auf diese Diffusionsprozesse aufbauen.

Der Verlauf der Kurswerte abzubilden ist aber leider nicht die einzige Schwierigkeit. Kaufen und verkaufen von Aktienwerten, verschieben von Geldern zwischen risikoreichen und risikoarmen Wertpapieren und ausschütten von Dividenden sind Handlungen, wie sie auf jedem Aktienmarkt durchgeführt werden können. Die Folgen von solchen Aktionen können jedoch nur in seltenen Fällen exakt vorhergesagt werden. Diese Handlungen mathematisch abzubilden führt zu weiteren Problemstellungen, mit welchen sich die Kontrolltheorie befasst. Mit ihr wird versucht, diese oftmals komplexen Strukturen und Abhängigkeiten auszuformulieren und dann die zu jedem Zeitpunkt optimale Reaktionen zu bestimmen, um den maximalen, erwarteten Gewinn zu erreichen.

Wir befassen uns in dieser Arbeit besonders mit Modellen für optimale Dividendenzahlungen. Dividenden sind Zahlungen, welche von einem Wertpapier ausgeschüttet werden. Anschließend wird das Wertpapier mit dem um die Dividende verringerten Wert weiter gehandelt. Wir müssen daher aufpassen, dass die Dividendenzahlungen nicht zu hoch angesetzt werden, sonst wird das Wertpapier zu schnell in den Ruin getrieben. Die Kernfrage für Modelle mit optimale Dividendenzahlungen ist: „Wann soll ich wie viel meiner Aktie zur Seite legen, um am Ende den meisten Gewinn in den Händen zu halten?“

Aber nicht nur die Dividendenzahlungen sind wichtig. Ein oftmals kaum beachteter Aspekt ist, dass wenn wir höhere Dividenden auszahlen, eine Aktie viel wahrscheinlicher in den Ruin eintreten wird. Eine Aktie ist jedoch nicht nur ein Papier. Dahinter steht oftmals ein Unternehmen. Der Ruin bedeutet manchmal mehr Verlust als die Dividendenzahlungen uns zurück geben können.

Wir werden in dieser Arbeit zunächst die wichtigsten mathematischen Grundlagen wiederholen und anschließend einen kurzen Einblick in die Kontrolltheorie geben. Speziell

der zweite Teil soll nur einen allgemeinen Überblick darüber geben, mit welchen Problemen wir in unseren Modellen zu kämpfen haben und welche Lösungsmöglichkeiten uns zur Verfügung stehen.

Im Kapitel 3 werden wir dann mehrere Modelle für das Problem der optimale Dividendenzahlungen betrachten. Alle Modelle werden auf Diffusionsprozessen basieren. Für die Handlungen auf einem unendliche Zeithorizont werden wir ein Modell aus [Sch08] und das Monotone Follower Problem aus [Kar81] näher analysieren. Für beide werden wir sehen, dass die beste Strategie immer mit einem Barrierewert verbunden ist. Wir werden die optimalen Dividendenzahlungen erhalten, indem wir jenen Anteil der Aktie, welche über dem Barrierewert liegt, auszahlen. Für einen unendlichen Zeithorizont ist die Ruinbetrachtung sehr einseitig. Eine Aktie basierend auf einem Diffusionsprozess, mit nach oben beschränktem Wert, wird fast sicher zu irgend einem Zeitpunkt den Wert null erreichen.

Dividendenmodelle in endlicher Zeit müssen dagegen im Allgemeinen nicht sicher in den Ruin eintreten. Wir werden zunächst die optimale Dividendenzahlungen in endlicher Zeit basieren auf [Gra13] betrachten. In einem zweiten Modell nach [Gra14] wollen wir zusätzlich zur Dividendenoptimierung auch noch eine maximale Ruinwahrscheinlichkeit vorgeben. Für beide Modelle ist weiterhin die optimale Strategie mit einer Barriere für den Aktienwert verknüpft. Im Gegensatz zu den Modellen auf unendlicher Zeit wird diese Barriere jedoch eine von der Zeit abhängige Kurve sein.

Im Abschluss dieser Arbeit werden wir die Erkenntnisse aus dem Kapitel 3 mit der Programmiersprache Matlab umsetzen und veranschaulichen.

1. Grundlagen

Bevor wir uns an das eigentliche Thema heranwagen, wollen wir zunächst einige wichtige Grundlagen wiederholen und einheitliche Variablenvorgaben definieren. Dies soll nur eine zusammenfassende Wiederholung darstellen. Sollten einige der Grundlagen dem Leser noch nicht bekannt sein empfehle ich die entsprechenden Referenzen heranzuziehen.

Dieses Kapitel basiert auf den Referenzen [CW90], [Ger79], [Gül11], [JS03], [Øks95] und [Pro05].

1.1. Zufall und seine Auswirkungen

Wir wollen uns zu Beginn mit Ereignissen und ihren Folgen befassen. Wir arbeiten in einem Teilgebiet der Mathematik in dem keine exakten Vorhersagen getroffen werden können. Hier werden Wahrscheinlichkeiten und Prognosen verwendet um an ein Ziel zu gelangen. Beginnen wir zunächst damit unserem Arbeitsbereich zu definieren.

Definition 1.1.1: Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bildet sich aus dem *Ereignisraum* Ω, welcher alle möglichen Elementarereignisse zusammenfasst, einer *σ-Algebra* $\mathcal{F}$, welche die möglichen Ereignisse beschreibt und der *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $\mathbb{P}$, welche die relative Häufigkeit beschreibt, mit welcher die Ereignisse eintreten können.

Nachdem sich mit Ereignissen, welche sich nicht in Zahlen darstellen lassen, zumeist nicht rechnen lässt, wird in der Mathematik sehr häufig der Begriff der Zufallsvariable verwendet, um mathematische Ergebniswerte unter bestimmten Ereignissen zu beschreiben:

Definition 1.1.2: Eine *Zufallsvariable* ist eine messbare Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die einem Ereignis $\omega \in \Omega$ einen Wert $X(\omega) \in \mathbb{R}$ zuweist. X ist messbar, wenn $\{X^{-1}(O) : O$ offene Teilmenge von $\mathbb{R}\} \subset \mathcal{F}$ gilt.

Jede Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum kann durch ihre Verteilungsfunktion eindeutig beschrieben werden.

Definition 1.1.3: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable auf diesem. Die Funktion $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ ist die *Verteilungsfunktion* von X.

Aus der Verteilungsfunktion können wir wichtige Eigenschaften einer Zufallsvariable ableiten.

Definition 1.1.4: Ist die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ einer Zufallsvariable X differenzierbar, dann heißt X *absolut stetig*.

Weitere wichtige Kenngrößen einer Zufallsvariable sind der Erwartungswert und die Varianz.

Definition 1.1.5: Für eine Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei der *Erwartungswert* $\mathbb{E}[X]$ beschrieben durch

$$\mathbb{E}[X] = \int_\Omega x \, dF_X(x)$$

und die *Varianz* $V(X)$ mit

$$V(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

In dieser Arbeit werden wir auch häufig den bedingten Erwartungswert benötigen.

Definition 1.1.6: Sei X eine Zufallsvariable im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Sei weiters $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Dann gibt es eine Zufallsvariable Y sodass gilt:

(i) Y ist $\mathcal{G}$-messbar,
(ii) $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ und
(iii) $\mathbb{E}[Y \cdot \mathbb{1}_B] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_B]$ für alle $B \in \mathcal{G}$.

Y wird auch mit $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ dargestellt und heißt *bedingter Erwartungswert*.

1.2. Stochastische Prozesse

Wir werden uns in dieser Arbeit aber nicht nur mit den Werten einer Variablen zu einzelnen Zeitpunkten und unter einzelne Ereignissen beschränken. Weitaus spannender wird es, wenn wir die Werte einer Variable im Verlauf der Zeit als gesamtes betrachten. Mit solchen Prozessen können wir dann beispielsweise Wetterkurven oder Aktienkurse darstellen. Wir müssen daher von den Zufallsvariablen noch einen Schritt weiter gehen.

Definition 1.2.1: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $I \neq \emptyset$ ein Intervall. Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in I}$ heißt *stochastischer Prozess*.

In dieser Arbeit häufig verwendete Intervalle sind: $[0, T]$ bzw. $[t, T]$ mit $0 \leq t < T$ und $[0, \infty)$ bzw. $[t, \infty)$. Sollte die Gültigkeit einer Aussage nicht von der Wahl des Intervalls abhängen, so wird nur I geschrieben.
Um die Schreibweise zu verkürzen werden wir statt dem stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in I}$ auch $\mathbf{X}$ schreiben.

Definition 1.2.2: Für jedes $\omega \in \Omega$ heißt die Funktion $t \to X_t(\omega)$ der *Pfad* des Prozesses oder auch *Trajektorie*.

Die meisten Eigenschaften eines stochastischen Prozesses beschreiben wir über die einzelnen Pfade. Wir werden die folgenden Eigenschaften benötigen:

Definition 1.2.3: Sei $\mathbf{X}$ ein stochastischer Prozess.
Sind fast alle seiner Pfade rechtsstetig (d.h. $\lim_{t \searrow s^+} X_t = X_s \, \forall s \in I$) und existiert der Limes von links so bezeichnen wir den Prozess als *cádlág*.
Sind fast alle seiner Pfade linksstetig (d.h. $\lim_{t \nearrow s^-} X_t = X_s \, \forall s \in I$) und existiert der Limes von rechts so bezeichnen wir den Prozess als *cágád*.
Falls alle Pfade stetig sind, so heißt der Prozess *stetig*.

Definition 1.2.4: Ein Prozess $\mathbf{X}$ heißt *messbar*, wenn die Abbildung $(t, \omega) \to X_t(\omega)$ messbar bezüglich $B(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{F}$ ist.

Über die Wahrscheinlichkeit können wir hinreichend ähnliche stochastische Prozesse betrachten.

Definition 1.2.5: Seien $(X_t)_{t \in I}$ und $(Y_t)_{t \in I}$ zwei stochastische Prozesse auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. $(X_t)_{t \in I}$ heißt *Version* oder *Modifikation* von $(Y_t)_{t \in I}$ falls $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \in I$ gilt.

$\mathcal{F}$ beschreibt die verschiedenen Ereignisse, welche eintreten können. So wie sich unser Prozess über die Zeit ändert, soll sich auch die Menge der möglichen Ereignisse über die Zeit anpassen.

Definition 1.2.6: Eine wachsende Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ von Teil-σ-Algebren von $\mathcal{F}$, das heißt für $s, t \in I, \; s \leq t$ gilt $\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, heißt *Filtration*.

Mit jeder echt kleineren Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ können wir weniger Ereignisse beschreiben als mit $\mathcal{F}$. Wir können sagen es liegen weniger Informationen vor. Eine Filtration beschreibt den Zuwachs an Informationen mit jedem vergangen Zeitpunkt.
Zur Vereinfachung werden wir $\mathbb{F}$ statt $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ schreiben.

Wir benötigen zwei wichtige Eigenschaften für Filtrierungen:

Definition 1.2.7: Eine Filtrierung $\mathbb{F}$ heißt *rechtsstetig*, wenn $\cap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ für alle $t \in I$ gilt.

Definition 1.2.8: Eine Filtrierung $\mathbb{F}$ heißt *vollständig*, wenn $\mathcal{F}_0$ alle $\mathbb{P}$-Nullmengen von $\mathcal{F}$ enthält.

Die in dieser Arbeit verwendeten Filtrierungen sind immer rechtsstetig und vollständig. Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einer Filtrierung $\mathbb{F}$ wird als *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum* bezeichnet und wird mit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ angeschrieben.
Zusammen mit einer Filtrierung können wir nun unseren Messbarkeitsbegriff weiter fassen.

Definition 1.2.9: Ein Prozess $\mathbf{X}$ heißt *adaptiert* bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$, wenn für jedes $t \in I$ gilt, dass X_t messbar bzgl. $\mathcal{F}_t$ ist.

Nachdem wir die stochastischen Prozesse über einen Zeithorizont I betrachten, sind für uns ihr Verhalten über die Zeit besonders interessant. Eine der wichtigsten Eigenschaften hierbei ist die, dass sich im Mittel die Werte nicht ändern. Wir verstehen unter dieser Beschreibung die Martingalseigenschaft.

Definition 1.2.10: Ein Prozess $\mathbf{X}$ ist ein *Martingal* bezüglich einer Filtration $\mathbb{F}$, wenn die folgenden Punkte für alle $t \in I$ erfüllt sind:

(i) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$,
(ii) X_t ist adaptiert und
(iii) $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ für alle $s \leq t$.

Bemerkung: Wird das Gleichheitszeichen in der Eigenschaft (iii) zu $\leq$ bzw. $\geq$ geändert, dann wird $\mathbf{X}$ als *Super-* bzw. *Submartingal* bezeichnet.

Einige wichtige Sätze welche wir im Zusammenhang mit Martingalen benötigen:

Satz 1.2.11 (Martingalkonvergenzsatz)**:** Sei $\mathbf{X}$ ein L^1-beschränktes Supermartingal, d.h. es gilt $\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$. Dann gilt: $\lim_{t\to\infty} X_t$ existiert f.s. und ist f.s. endlich.

Folgerung 1.2.12: Falls X_t ein nicht-negatives Supermartingal ist so gilt $\lim_{t\to\infty} X_t$ existiert fast sicher.

1.3. Brownsche Bewegungen

Ein wichtiger stochastischer Prozess ist die Brownsche Bewegung. Sie basiert auf der Normalverteilung mit Erwartungswert 0.

Definition 1.3.1: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein adaptierter $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess $(W_t)_{t\in I}$ heißt *d-dimensionale Brownsche Bewegung* bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$ und dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, falls gilt:

(i) $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$ *(d.h. der Startwert ist fast sicher* 0*)*,
(ii) für alle $s, t \in I$ ist $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ *(unabhängige Zuwächse)*,
(iii) für alle $s, t \in I$ gilt $W_{s+t} - W_s \stackrel{d}{=} W_t - W_0 \stackrel{d}{=} W_t$ *(stationäre Inkremente)*,
(iv) für alle $t \in I$ gilt $W_t - W_0 \sim \mathcal{N}(0, t \cdot \mathbb{I}_d)$, wobei $\mathbb{I}_d$ die d-dimensionale Einheitsmatrix beschreibt und
(v) $(W_t)_{t \in I}$ hat $\mathbb{P}$-f.s. stetige Pfade.

Bemerkung: Die Brownsche Bewegung wird in der oben definierten Form auch oft Wiener-Prozess genannt. Von daher stammt die Bezeichnung W_t.

Eine wichtige Eigenschaft der Brownschen Bewegung ist, dass diese ein Martingal ist. Der Beweis der ersten zwei Eigenschaften aus der Definition 1.2.10 ist trivial. Für die dritte Eigenschaft müssen wir ein wenig umformen:

$$\mathbb{E}[W_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s + W_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[W_s|\mathcal{F}_s].$$

Anschließend können wir die Eigenschaften (ii) bis (iv) der Brownschen Bewegung (Definition 1.3.1) anwenden und erhalten $\mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[W_t - W_s] = 0$. Weil der Prozess außerdem adaptiert ist gilt $\mathbb{E}[W_s|\mathcal{F}_s] = W_s$. Zusammengefasst folgt daraus, dass für die Brownsche Bewegung $\mathbb{E}[W_t|F_s] = W_s$ gilt. Die Brownsche Bewegung erfüllt damit die Martingalseigenschaft.

Aus dem Stetigkeitssatz von Kolmogorov-Chentov (siehe [Øks95]) folgt eine wichtige Stetigkeitsaussage für die Brownsche Bewegung.

Satz 1.3.2: Es existiert eine Version von $(W_t)_{t \in I}$, die stetige Pfade hat.

Für den Beweis dieser Aussage siehe die Referenz [Øks95]. Wir werden immer mit der stetigen Version einer Brownschen Bewegung arbeiten.

Mit der Brownschen Bewegung können viele interessante Prozesse dargestellt werden.

Definition 1.3.3: Für positive, reelle Konstanten x, μ und σ und eine Brownsche Bewegung $(W_t)_{t \in I}$ beschreibt

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t \quad \forall t \in I$$

einen stochastischen Prozess. Dieser heißt *Brownsche Bewegung mit Drift.*

Es ist leicht nachzurechnen, dass dieser Prozess kein Martingal ist. Wir können x als ein Startkapital betrachten. μ lässt sich als eine zu erwartende Steigung, wie beispielsweise die zu erwartende Performance einer Aktie interpretieren. Die Brownsche Bewegung beschreibt den Zufall, welcher auf den Prozess Einfluss nimmt, und σ ist ein Maß für die Stärke dieses Einflusses. Wir können σ als Schwankung bezeichnen.

1.4. Stoppzeiten

Wir wollen die Möglichkeit ergänzen einen Prozess zu stoppen sobald ein gewünschtes Ereignis eingetreten ist. Es muss dafür zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ bestimmbar sein, ob das Ereignis eingetreten ist oder nicht. Dafür benötigen wir wiederum den Begriff messbar und eine Filtration $\mathbb{F}$. Eine Variable, welche einen solchen Stoppzeitpunkt beschreibt, wird als Stoppzeit τ bezeichnet.

Definition 1.4.1: Sei $\mathbb{F}$ eine Filtrierung. Dann heißt $\tau : \Omega \to I \cup \{\infty\}$ *Stoppzeit*, falls $\{\omega \in \Omega | \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \in I$ gilt.

Eine Stoppzeit ist somit eine Zufallszeit. Für alle Zeitpunkte $t \leq \tau$ können wir meistens nicht mit Sicherheit sagen welchen Wert τ annehmen wird. Wir können aber zu jedem Zeitpunkt feststellen ob der Prozess zu stoppen ist bzw. bereits gestoppt wurde.
Wir werden in dieser Arbeit den *Ruinzeitpunkt* eines adaptieren stochastischen Prozesses $\mathbf{X}$ verwenden: $\tau = \inf\{t \in I | X_t < 0\}$.

Für einen stochastischen Prozess $\mathbf{X}$ und eine Stoppzeit τ bezeichnen wir $X_{t \wedge \tau}$ als den *gestoppten Prozess*. Sobald das für τ definierte Ereignis eingetreten ist hören wir auf zu handeln und belassen somit die Werte des Prozesses.

Eine weitere, öfters benötigte Information ist die *Stoppzeit-σ-Algebra*:
$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} | A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \in I\}$.

Aus dem Martingalkonvergenzsatz (1.2.11) folgt die nachstehende Aussage für gestoppte Martingale.

Folgerung 1.4.2: Sei $(M_t)_{t \in I}$ ein Martingal und τ_1 und τ_2 Stoppzeiten. Dann folgt $\mathbb{E}[M_{\tau_1 \wedge t} | \mathcal{F}_{\tau_2}] = M_{\tau_1 \wedge \tau_2 \wedge t}$ für alle $t \in I$.

Gilt speziell $\tau_2 \leq \tau_1 < \infty$ dann kann außerdem gefolgert werden, dass $\mathbb{E}[M_{\tau_1} | \mathcal{F}_{\tau_2}] = M_{\tau_2}$ gilt.

Mit Hilfe von Stoppzeiten können wir eine Vereinfachung des Martingalsbegriffs definieren.

Definition 1.4.3: Ein stochastischer Prozess $(M_t)_{t \in I}$ sei adaptiert bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. Sei weiters $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten mit der Eigenschaft $\tau_k \nearrow \sup I$ f.s.. Wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ der gestoppte Prozess $(M_{t \wedge \tau_n})_{t \in I}$ ein Martingal ist, wird $(M_t)_{t \in I}$ als *lokales Martingal* bezeichnet.
Die Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird als *Lokalisierungsfolge* von M bezeichnet.

Wir können leicht zeigen, dass jedes Martingal auch ein lokales Martingal ist.

1.5. Itô-Integration

Wir arbeiten in diesem Teil auf einem filtrieren Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ und nehmen an, dass die betrachtete Brownsche Bewegung stetige Pfade hat. Das Intervall $I \subseteq [0, \infty)$ sei von der Form $I = [a, b]$, $I = [a, b)$ oder $I = [a, \infty)$ mit $a < b$.

Gehen wir davon aus, dass unsere Brownsche Bewegung diverse Zahlungen zu den Zeitpunkten $t \in I$ abbildet. Uns würde natürlich auch die Summe der Zahlungen interessieren. Nachdem wir in stetiger Zeit arbeiten führt uns das zu einem Integral.
Die Brownsche Bewegung hat aber unendliche Totalvariation und daher können wir das Riemann-Integral nicht anwenden. In diesem Kapitel werden wir daher das *Itô-Integral* betrachten, welches für eben solche Berechnungen konstruiert wurde. Wir werden einige Konstruktionsschritte behandeln, sowie die wichtige Itô-Formel.

Das Itô-Integral ermöglicht uns die Integration über gewichtete Zuwächse der Brownschen Bewegung durchzuführen. Die Gewichte dürfen dabei zufällig sein. Das heißt das Itô-Integral löst für eine Brownsche Bewegung $(W_t)_{t \in I}$ und eine geeignete messbare Funkion $\phi : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_I \phi(t, \omega)\, dW_t(\omega).$$

Wie schon für das Riemann-Integral betrachten, wir zunächst einfache Treppenfunktionen:

Definition 1.5.1: Eine Funktion $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ darstellbar in der Form

$$f(t, \omega) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\omega) \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}, \quad t \in I, \omega \in \Omega$$

für ein $n \in \mathbb{N}$, eine Folge $\{t_1, ..., t_{n+1}\} \in I^n$ mit $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_{n+1}$ und Funktionen ϕ_j, welche $\mathcal{F}_{t_j}$-messbar sind, für alle $j \in \{1, ..., n\}$, heißt *einfach*.

Für diese Funktionen können wir das Itô-Integral definieren:

Definition 1.5.2 (Itô-Integral für einfache Funkionen)**:** Sei f eine einfache Funktion. Das *Itô-Integral* sei wie folgt definiert:

$$\int_I f(t, \omega)\, dW_t(\omega) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\omega) \left(W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega) \right).$$

Wir können diese Definition auf einen größeren Raum von Funktionen erweitern indem wir die Grenzfunktionen von Funktionsfolgen aus einfachen Funktionen betrachten. Dies führt uns zu den progressiv messbaren Funktionen.

Definition 1.5.3: Eine Funktion $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ heißt *progressiv messbar*, wenn für jedes $t \in I$ $f|_{[a,t]\times\Omega}$ $B([a,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ messbar ist. (B beschreibt die Menge der Borelmengen auf $[a,t]$)

Definition 1.5.4: Es sei $V_{\mathbb{F}}(I)$ definiert als die Menge aller Funktionen $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit

(i) f ist progressiv messbar und
(ii) $\mathbb{E}\left[\int_I f^2(s,.)\,ds\right] < \infty$.

Eine wichtige Eigenschaft der einfachen Funkionen aus $V_{\mathbb{F}}(I)$ ist die Itô-Isometrie.

Satz 1.5.5 (Itô-Isometrie)**:** Sei $f \in V_{\mathbb{F}}(I)$ und einfach. Dann gilt

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_I f(t,\omega)\,dW_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_I f^2(t,\omega)\,dt\right]. \tag{1.1}$$

Beweis: Wir betrachten die Darstellung einer einfachen Funktion aus der Definition 1.5.1:

$$f(t,\omega) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}, \quad t \in I, \omega \in \Omega.$$

Um Platz zu sparen schreiben wir $\Delta W_j(\omega) := W_{t_{j+1}}(\omega) - W_{t_j}(\omega)$.
Mittels der Turmeigenschaft können wir für alle $i, j \in \{0, ..., n\}$ zeigen, dass gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\phi_i(\omega)\phi_j(\omega)\Delta W_i(\omega)\Delta W_j(\omega)\right] = \\
&= \begin{cases} \mathbb{E}[\phi_i^2(\omega)\mathbb{E}[(\Delta W_i(\omega))^2|\mathcal{F}_{t_i}]] = (t_{i+1}-t_i)\mathbb{E}[\phi_i^2(\omega)] & \text{für } i = j, \\ \mathbb{E}[\phi_i(\omega)\phi_j(\omega)\Delta W_i(\omega)\mathbb{E}[\Delta W_j(\omega)|\mathcal{F}_{t_j}]] = 0 & \text{für } i < j, \\ \mathbb{E}[\phi_i(\omega)\phi_j(\omega)\mathbb{E}[\Delta W_i(\omega)|\mathcal{F}_{t_i}]\Delta W_j(\omega)] = 0 & \text{für } i > j. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit diesem Wissen und durch Anwendung des Itô-Integrals erhalten wir die gewünschte Formel:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_I f(t,\omega)\,dW_t(\omega)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} \phi_j(\omega)\Delta W_j(\omega)\right)^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\phi_j^2(\omega)\right](t_{j+1}-t_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\int_I \left(\phi_j(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)\right)^2 dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_I \sum_{j=1}^{n} \phi_j^2(\omega)\mathbb{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t)\,dt\right] = \mathbb{E}\left[\int_I f^2(t,\omega)\,dt\right].
\end{aligned}$$

□

Satz 1.5.6: Für ein beschränktes I liegen die einfachen Funktionen L^2-dicht in $V_{\mathbb{F}}(I)$.

Für den Beweis dieser Aussage siehe die Referenz [Øks95]. Wir können mit diesem Satz das Itô-Integral erweitern.

Definition 1.5.7 (Itô-Integral für $V_{\mathbb{F}}(I)$)**:** Sei $f \in V_{\mathbb{F}}(I)$. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen, sodass

$$\mathbb{E}\left[\int_I \big(f(t,\omega) - f_n(t,\omega)\big)^2 dt\right] \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

gilt. Dann wird das Itô-Integral für f wie folgt definiert:

$$\int_I f(t,\omega)\, dW_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t,\omega)\, dW_t(\omega). \tag{1.2}$$

Bemerkung: Die Existenz des Grenzwertes in (1.2) ergibt sich aus der zuvor bewiesenen Itô-Isometrie. Aus der L^2-Konvergenz folgt, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Mit der Itô-Isometrie (1.1) folgt, dass auch $(\int_I f_n(t,\omega)\, dW_t(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Wegen der Vollständigkeit von L^2 existiert der Grenzwert.

Das erweiterte Itô-Integral für $f \in V_{\mathbb{F}}(I)$ hängt nicht von der speziellen Wahl der approximierenden Folge ab.

Einige leicht nachzurechnende Eigenschaften des Itô-Integrals lauten:

Satz 1.5.8: Sei $f, g \in V_{\mathbb{F}}(I)$ und sei $0 \le a < c < b$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. $\int_a^b f\, dW_t = \int_a^c f\, dW_t + \int_c^b f\, dW_t \quad f.s.$
2. $\int_a^b (cf + g)\, dW_t = c \cdot \int_a^b f\, dW_t + \int_a^b g\, dW_t \quad f.s.$
3. $\mathbb{E}[\int_a^b dW_t] = 0$
4. $\int_a^b f\, dW_t$ ist $\mathcal{F}_b$-messbar.

Eine weitere interessante Eigenschaft ist, dass das Itô-Integral (für Funktionen aus $V_{\mathbb{F}}(I)$) wieder ein Martingal ist.

Satz 1.5.9: Sei $f \in V_{\mathbb{F}}(I)$. Dann ist

$$M_t(\omega) = \int_a^t f(s,\omega)\, dW_s(\omega)$$

ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathbb{F}$.

Satz 1.5.10 (stetige Version des Itô-Integrals)**:** Sei $f \in V_{\mathbb{F}}(I)$. Dann existiert ein quadratisch integrierbares Martingal $(M_t)_{t\in I}$ mit stetigen Pfaden, sodass

$$M_t = \int_a^t f(s,\omega)\, dW_s(\omega) \quad f.s. \quad \forall t \in I$$

gilt.

Die Beweise dieser beiden Sätze kann wieder in der Referenz [Øks95] nachgelesen werden.

Zuletzt werden wir das Itô-Integral auf den Funktionenraum $W_{\mathbb{F}}(I)$ erweitern. Dieser ist eine Erweiterung von $V_{\mathbb{F}}(I)$ und beinhaltet zusätzlich unbeschränkte Funktionen, welche jedoch auf jedem endlichen Intervall fast sicher beschränkt sind. Wie schon für das lokale Martingal, werden wir wieder eine Lokalisierungsfolge bilden, sodass die Funktionen unter Einschränkung der Stoppzeiten in $V_{\mathbb{F}}(I)$ liegen. Dann können wir das Itô-Integral für die Funktionen aus $W_{\mathbb{F}}(I)$ definieren.

Definition 1.5.11: Es sei $W_{\mathbb{F}}(I)$ definiert als Menge aller Funktionen $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ mit

(i) f ist progressiv messbar und
(ii) $\mathbb{P}(\int_a^t f^2(s,\omega)\, ds < \infty \quad \forall t \in I) = 1$.

Sei $f \in W_{\mathbb{F}}(I)$. Wir benötigen zunächst unsere Lokalisierungsfolge:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\tau_n := \inf\{t \in I | \int_0^t f^2(s,\omega)ds \geq n\} \wedge b_n$ mit

$$b_n := \begin{cases} b & \text{falls } I = [a,b] \\ (b - \frac{1}{n}) \vee a & \text{falls } I = [a,b) \\ a \vee n & \text{falls } I = [a,\infty) \end{cases}$$

Dann nimmt τ_n nur Werte in I an und es ist leicht zu sehen, dass τ_n eine Stoppzeit ist. Mit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $f_n(t,\omega) := f(t,\omega)\cdot \mathbb{1}_{[0,\tau_n(\omega)]}(t)$ progressiv messbar und $\mathbb{E}[\int_I f_n^2(t,.)dt] \leq n$. Folglich gilt $f_n \in V_{\mathbb{F}}(I)$.
Zusätzlich gilt $\tau_n \leq \tau_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es folgt $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \sup I$ f.s..
Mittels dieser Lokalisierungsfolge können wir das Itô-Integral für $W_{\mathbb{F}}(I)$ definieren.

Definition 1.5.12 (Itô-Integral für $W_{\mathbb{F}}(I)$)**:** Sei $f \in W_{\mathbb{F}}(I)$ und sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Lokalisierungsfolge wie zuvor definiert. Dann existiert für jedes Paar $(t,\omega) \in I \times \Omega$ f.s. ein $n \in \mathbb{N}$ mit $t \leq \tau_n(\omega)$. Das Itô-Integral für f sei dann definiert als

$$\int_a^t f(s,\omega)\, dW_s(\omega) = \int_a^t f_n(s,\omega)\, dW_s(\omega).$$

Bemerkung: Das Itô-Integral für $f \in W_{\mathbb{F}}(I)$ kann ebenso über eine andere Lokalisierungsfolge erhalten werden. Der Wert ist unabhängig von der Wahl der Lokalisierungsfolge.

Das Itô-Integral ist für Funktionen $f \in W_{\mathbb{F}}(I)$ kein Martingal, sondern nur mehr ein lokales Martingal. Die Aussage kann mit der Lokalisierungsfolge bewiesen werden.

Ähnlich wie bei Riemann-Integralen kann man die meisten Itô-Integrale nicht direkt lösen. Bei Riemann wird vieles mit bekannten Lösungen und der Kettenregel gelöst. Ähnliches wollen wir für das Itô-Integral auch versuchen. Wir behandeln als nächsten Punkt eine Umformungsregel für das Itô-Integral.

Definition 1.5.13 (Itô-Prozess)**:** Sei $(W_t)_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Weiters sei $v \in W_{\mathbb{F}}(I)$ und $u : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ eine progressiv messbare Funktion mit $\mathbb{P}(\int_0^t |u(s,.)|ds < \infty \quad \forall t \geq 0) = 1$. Sei außerdem X_0 $\mathcal{F}_0$-messbar. Dann heißt der stochastische Prozess

$$X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t u(s,\omega)\, ds + \int_0^t v(s,\omega)\, dW_s(\omega) \quad t \geq 0, \omega \in \Omega \tag{1.3}$$

Itô-Prozess.

Bemerkung: Die Brownsche Bewegung selbst ist ein (sehr einfacher) Itô-Prozess mit $u \equiv 0$ und $v \equiv 1$.

Für jeden Itô-Prozess können wir eine Kettenregel für das Itô-Integral anwenden, nämlich die im nächsten Satz beschriebene Itô-Formel. Daraus ergeben sich oft Möglichkeiten einen unbekannten Prozess durch bereits bekannte Lösungen zusammenzusetzen oder unbekannte Itô-Integrale durch bekannte auszudrücken und damit zu lösen.

Satz 1.5.14 (Itô-Formel)**:** Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen, $\mathbf{X}$ ein Itô-Prozess, welcher nur Werte in U annimmt und $g : [0,\infty) \times U \to \mathbb{R}$ mit $g \in C^{1,2}([0,\infty) \times U)$. Dann ist $g(t, X_t)$ für $t \geq 0$ ebenfalls ein Itô-Prozess. Es gilt für fast alle $\omega \in \Omega$ und $t \geq 0$

$$\begin{aligned} g(t, X_t(\omega)) = g(0, X_0(\omega)) &+ \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s(\omega))\, ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s(\omega))\, dX_s(\omega) \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{(\partial x)^2}(s, X_s(\omega))\, d\langle X\rangle_s(\omega). \end{aligned}$$

Der Beweis ist auch hier etwas länger und kann in der Referenz [Øks95] nachgelesen werden.

Bemerkung: Einige Bemerkungen zur Itô-Formel:

1. $C^{1,2}(A \times B)$ ist die Menge aller Funktionen von $A \times B \to \mathbb{R}$, welche im ersten Argument einmal stetig differenzierbar und im zweiten Argument zweimal stetig differenzierbar sind. Diese Ableitungen sind außerdem gemeinsam stetig auf $A \times B$.

2. Die Ableitungen können wir auch kürzer anschreiben mit:

$$g_t := \frac{\partial g}{\partial t}, \quad g_x := \frac{\partial g}{\partial x}, \quad g_{xx} := \frac{\partial^2 g}{(\partial x)^2}.$$

Damit ergibt sich die kürzere Schreibweise der Itô-Formel:

$$\begin{aligned} g(t, X_t(\omega)) = g(0, X_0(\omega)) &+ \int_0^t g_t(s, X_s(\omega))\, ds + \int_0^t g_x(s, X_s(\omega))\, dX_s(\omega) \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t g_{xx}(s, X_s(\omega))\, d\langle X \rangle_s \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

3. Die Differentialgleichung von $\mathbf{X}$ ergibt sich aus (1.3) mit $dX_s(\omega) = u(s,\omega)\, ds + v(s,\omega)\, dW_s(\omega)$. Für die Variation von $\mathbf{X}$ ergibt sich weiters $\langle X \rangle_s = v^2(s,\omega)\, ds$. Damit kann die Itô-Formel auch in der folgenden Form angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} g(t, X_t(\omega)) = g(0, X_0(\omega)) &+ \int_0^t g_t(s, X_s(\omega))\, ds + \int_0^t g_x(s, X_s(\omega)) u(s,\omega)\, ds \\ &+ \int_0^t g_x(s, X_s(\omega)) v(s,\omega)\, dW_s(\omega) + \frac{1}{2} \int_0^t g_{xx}(s, X_s(\omega)) v^2(s,\omega)\, ds. \end{aligned}$$

Mit der Itô-Formel lässt sich eine partielle Integration für das Itô-Integral herleiten:

Satz 1.5.15: Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt fast sicher

$$\int_0^t f(s)\, dW_s = f(t) W_t - \int_0^t W_s f'(s)\, ds \quad \forall t \in [0,\infty).$$

Eine wichtige Eigenschaft für das Itô-Integral ist, dass dieses für die Integration über ein beschränktes Intervall ein Martingal darstellt (siehe Satz 1.5.9). Dann gilt für eine Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\in I}$, einer Funktion $v \in V_{\mathbb{F}}(I)$ und einem Startwert $X_0 \in L^2$, welcher $\mathcal{F}_0$-messbar ist, dass $X_t = X_0 + \int_0^t v(s)\, dW_s$ für $t \geq 0$ ein stetiges Martingal mit $X_t \in L^2$ für alle $t \geq 0$ ist.
Daraus können wir den Darstellungssatz für Itô-Ingetrale ableiten.

Satz 1.5.16 (Darstellung als Itô-Integral)**:** Sei $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$. Dann existiert ein $\lambda \otimes \mathbb{P}$-eindeutiges $f \in V_{\mathbb{F}}([0,T])$ mit

$$F(\omega) \overset{f.s.}{=} \mathbb{E}[F] + \int_0^T f(t,\omega)\, dW_t(\omega).$$

Satz 1.5.17: Sei W_t eine Brownsche Bewegung und $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal bezüglich der Filtrierung $\mathbb{F}$ mit $M_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ für $t \geq 0$. Dann existiert ein $\lambda \otimes \mathbb{P}$-eindeutiges g mit $g|_{[0,t]\times\Omega} \in V_{\mathbb{F}}([0,t])$ für alle $t \geq 0$, sodass für alle $t \geq 0$

$$M_t \overset{f.s.}{=} \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t g(s,\omega)\, dW_s(\omega)$$

gilt.

Ein Spezialfall der Itô-Prozesse sind *Itô-Diffusionsprozesse*. Diese werden dargestellt durch Funktionen, welche den Wert des Prozesses als Parameter verwenden. Sie werden üblicherweise über eine stochastische Differentialgleichungen definiert.

Definition 1.5.18: Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung auf diesem. Für messbare Funktionen $\mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei eine stochastische Differentialgleichung:

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t.$$

gegeben. Es seien die Lipschitz- und Wachstumsbedingungen erfüllt, dann existiert für die stochastische Differentialgleichung eine eindeutige Lösung. Diese Lösung wird als *Itô-Diffusion* bezeichnet.

Bemerkung: Für konstante Funktionen $\mu(t, x) = \mu$ und $\sigma(t, x) = \sigma$ kann die Schreibweise vereinfacht werden und wir können uns die Lösung der stochastischen Differentialgleichung direkt ausdrücken.

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma W_t$$

Die Itô-Formel kann für die Diffusionsprozesse auch in einer anderen Form angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} dg(t, X_t) = {} & g_t(t, X_t)\, dt + g_x(t, X_t)\mu(t, X_t)\, dt \\ & + g_x(t, X_t)\sigma(t, X_t)\, dW_t + \frac{1}{2} g_{xx}(t, X_t)\sigma^2(t, X_t)\, ds. \end{aligned}$$

1.6. Integration von Semimartingalen

Das Itô-Integral bildet uns jetzt die Grundlage um über Brownsche Bewegungen integrieren zu können. Um dieses verwenden zu können, müssen die Pfade des Prozesses stetig sein. Wir werden aber auch Prozesse behandeln, welche Sprünge beinhalten können. Wir werden daher noch einen weiteren Integralbegriff und eine weitere Art von Martingalen behandeln.

Definition 1.6.1: Sei $(M_t)_{t\in I}$ ein lokales Martingal mit $M_0 = 0$. Sei weiters $(A_t)_{t\in I}$ ein adaptierter Prozess mit $A_0 = 0$, cádlág-Pfaden und von beschränkter Variation. Ein Prozess $(X_t)_{t\in I}$ mit X_0 ist $\mathcal{F}_0$-messbar und von der Form

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \quad \forall t \in I$$

heißt *Semimartingal*.

Bemerkung: Alle Semimartingale sind cádlág und adaptiert. Die Wahl der Aufteilung $X_t = X_0 + M_t + A_t$ muss im allgemeinen nicht eindeutig sein.

Ähnlich wie wir für Martingale, lokale Martingale definieren konnten, können wir auch für Semimartingale, lokale Semimartingale über eine Folge von Stoppzeiten definieren.

Satz 1.6.2: Sei $\mathbf{X}$ ein Semimartingal wie in Definition 1.6.1 beschrieben. Für die quadratische Variation von $\mathbf{X}$ gilt $\langle \mathbf{X} \rangle = \langle \mathbf{M} \rangle$.

Bemerkung: Die folgende Integrationsformel nach Doleans-Dade und Meyer wird auf ähnliche Weise wie die Itô-Formel konstruiert. Die einzelnen Herleitungsschritte werden in [JS03] ausgeführt.

Satz 1.6.3 (Itô-Formel für Semimartingale)**:** Sei $\mathbf{X}$ ein Semimartingal und f eine Funktion aus $C^{1,2}$. Dann ist $f(t, X_t)$ wieder ein Semimartingal und es gilt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t f_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\, dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s)\, d\langle M \rangle_s \\ &+ \int_0^t f_x(s, X_s)\, dA_s + \sum_{s \in [0,t]} \left\{ f(s, X_s) - f(s, X_{s^-}) - f_x(s, X_s) \Delta^- X_s \right\} \end{aligned}$$

für alle $t \in I$ mit $\Delta^- X_s = X_s - X_{s^-}$.

Bemerkung: Ist der Prozess A stetig, so fällt der letzte Term weg.
Auch die Brownsche Bewegung ist ein Semimartingal. Setzten wir diese in die obige Formel statt X_t ein, erhalten wir die Itô-Formel.

Anlehnend an [Gül11] können wir Semimartingale auch mit Prozessen $(A_t)_{t \in I}$ mit der Eigenschaft cáglád statt cádlág betrachten. Die Ergebnisse unterscheiden sich nur geringfügig.

Satz 1.6.4: Sei $\mathbf{X}$ ein Semimartingal mit cáglád statt cádlág-Pfaden und $f \in C^{1,2}$. Dann ist $f(t, X_t)$ wieder ein Semimartingal mit cáglád-Pfaden und es gilt

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t f_t(s, X_s)\, dt + \int_0^t f_x(s, X_s)\, dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s)\, d\langle M \rangle_s \\ &+ \int_0^t f_x(s, X_s)\, dA_s + \sum_{s \in [0,t]} \left\{ f(s, X_{s^+}) - f(s, X_s) - f_x(s, X_s) \Delta^+ X_s \right\} \end{aligned}$$

für alle $t \in I$ mit $\Delta^+ X_s = X_{s^+} - X_s$.

Bemerkung: Wir können den Prozess $(A_t)_{t \in I}$ in einen stetigen Anteil A^c und die Sprungstellen A^s aufteilen. Die Zeitpunkte der Sprünge von $(A_t)_{t \in I}$ bezeichnen wir mit

D_A. Dann können wir die Itô-Formeln für die Semimartingale etwas kürzer anschreiben. Für cádlág-Pfade:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t f_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\, dM_s + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s)\, d\langle M \rangle_s \\ &+ \int_0^t f_x(s, X_s)\, dA_s^c + \sum_{s \in D_A \cap [0,t]} \{ f(s, X_s) - f(s, X_{s^-}) \} \end{aligned}$$

und für cáglád-Pfade

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t f_t(s, X_s)\, ds + \int_0^t f_x(s, X_s)\, dM_t + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X_s)\, d\langle M \rangle_s \\ &+ \int_0^t f_x(s, X_s)\, dA_s^c + \sum_{s \in D_A \cap [0,t]} \{ f(s, X_{s^+}) - f(s, X_s) \} \end{aligned} \tag{1.4}$$

jeweils für alle $t \in I$.

2. Kontrolltheorie

Bisher haben wir stochastische Prozesse nur ausgewertet und mit ihren Werten gerechnet. Wie in vielen Bereichen interessieren uns die Werte alleine aber nicht. Wir wollen beispielsweise einer Aktie nicht nur zusehen, sondern auch damit handeln! In der Praxis gibt es die Möglichkeit ins Geschehen einzugreifen. Wir können beispielsweise zwischen verschiedenen Aktien wechseln, Geld in der schlechten Wirtschaftslage auf ein Bankkonto transferieren oder als Unternehmen mittels Steuerung von Dividendenzahlungen aktiv eingreifen. Alle diese Handlungen haben Auswirkungen auf unser Ergebnis. Um das Zusammenspiel unserer Handlungen und der stochastischen Prozesse abbilden zu können benötigen wir ein passendes Modell.

In diesem Kapitel werden sogenannte *Kontrollprozesse* eingeführt. Diese progressiv messbaren Prozesse beschreiben externe Handlungen, welche Auswirkungen auf unsere Werte haben. Auch wenn wir uns theoretisch beliebig verhalten können, wollen wir doch einen möglichst großen Nutzen aus unseren Handlungen zu ziehen. Daher ist das Ziel der Kontrolltheorie die maximal erwarteten Gewinne unter den verschiedenen Kontrollprozessen zu bestimmen und den Kontrollprozess zu finden, welcher uns zu diesem Ergebnis führt.

Dieses Kapitel ist eine sehr allgemein gehaltene Vorstellung der Grundlagen der Kontrolltheorie. Wir werden uns erst im nächsten Kapitel mit konkreten Modellen und ihren Lösungen befassen. Die Inhalte dieses Kapitels basieren auf den Referenzen [Sas06] und [Sch08].

Wir betrachten in diesem Kapitel wieder einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit einer vollständigen, rechts stetigen Filtration $\mathbb{F}$. $(W_t)_{t\in I}$ sei wieder unsere Brownsche Bewegung.

2.1. Modellbildung

In der Kontrolltheorie betrachten wir besonders das Zusammenspiel von zwei wichtigen Prozessarten: *Kontrollprozesse* und *Zustandsprozesse*. Erstere sind Prozesse, welche wir selbst steuern und daher zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ bestimmen können. Sie bilden unsere Handlungen ab. Letztere dagegen werden von diskreten und zufälligen Schwankungen bestimmt. Sie beschreiben die Ergebnisse welche sich aus unseren Handlungen und den Wertschwankungen des zugrundeliegenden Kapitals ergeben.

Definition 2.1.1: Ein *Kontrollprozess* $(C_t)_{t\in I}$ ist ein $\mathcal{F}$-progressiv messbarer Prozess mit Werten in einer Menge $U \subseteq \mathbb{R}$. Wir bezeichnen den Kontrollprozess auch mit $\mathbf{C}$.

Kontrollprozesse können beispielsweise Anteile des Kapitals in Aktien oder Dividendenquoten abbilden.

Definition 2.1.2: Ein *Zustandsprozess* $(X_t)_{t\in I}$ ist ein Itô-Prozess und wird für einen Kontrollprozess $\mathbf{C}$ durch eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$d(X_t) = \mu(t, X_t, C_t)\, dt + \sigma(t, X_t, C_t)\, dW_t, \quad t \in I, \tag{2.1}$$

mit einer Brownschen Bewegung $(W_t)_{t\in I}$, den reellwertigen Funktionen μ und σ und einem Startwert $X_0 = x_0$ angegeben. μ und σ sind messbare Funktionen der Form

$$\begin{aligned} \mu &: I \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}, \\ \sigma &: I \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ein Zustandsprozess kann beispielsweise als Vermögen eines Investors interpretiert werden.

Bemerkung: Je nachdem welches Kontrollproblem betrachtet wird, werden oft noch weitere Bedingungen an μ und σ gestellt. Diese weiteren Bedingungen sind notwendig um die Existenz von $\mathbf{X}$ sicherzustellen.

In den meisten Fällen ist der Wert eines Finanzinstrumentes nicht alleine durch seinen rechnerischen Wert bestimmt. Vielmehr ergeben sich für uns in der Praxis dazu abweichende Nutzenwerte.

Wir beschreiben den laufenden Nutzen mit der Funktion $\psi(t, X_t, C_t)$ für $t \in I$. Für eine Betrachtung über ein endliches Intervall oder einen Prozess mit einer Stoppzeit als Endzeitpunkt verwenden wir zusätzlich einen Endnutzen zu einem Endzeitpunkt T (oder mit einer Stoppzeit τ) mit der Funktion $\Psi(T, X_T)$ (bzw. $\Psi(\tau, X_\tau)$). Der Wert eines Zustandsprozesses ergibt sich aus der Summe des noch ausstehenden Nutzens.

Bemerkung: Wir werden in dieser Arbeit immer mit Gewinnen arbeiten. Es ist natürlich auch möglich die Funktionen ψ und Ψ als Verluste zu betrachten. Die nachfolgenden Theorien können auch auf diese Funktionen angewendet werden. Wir müssten aber die nachfolgenden Maximierungsaufgaben als Minimierungsaufgaben betrachten.

Das *Zielfunktional* $J(t, x, \boldsymbol{C})$ beschreibt den zukünftigen erwarteten Nutzen aus unserem Zustandsprozess $(X_s)_{s\in I,\, s\geq t}$ mit $X_t = x$ unter dem Kontrollprozess $(C_s)_{s\in I,\, s\geq t}$.

Definition 2.1.3: Für die Funktionen $\psi : I \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ und $\Psi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist das *Zielfunktional* J auf einem endlichen Zeithorizont $I = [0, T]$ definiert mit

$$J(t, x, \mathbf{C}) = \mathbb{E}\left[\int_t^T \psi(s, X_s, C_s)\, ds + \Psi(T, X_T)\middle| X_t = x\right]. \tag{2.2}$$

Für einen unendlichen Zeithorizont $I = [0, \infty)$ wird das Zielfunktional definiert mit

$$J(t, x, \mathbf{C}) = \mathbb{E}\left[\int_t^\infty \psi(s, X_s, C_s)\, ds\middle| X_t = x\right].$$

Bemerkung: Wir können diese Definition natürlich auch auf ein Modell mit einer Stoppzeit τ anwenden. Im endlichen Fall wird der Endzeitpunkt T durch $T \wedge \tau$ ersetzt. Im unendlichen Fall verwenden wir ebenfalls die Formel (2.2), ersetzen aber T durch τ. Um Platz zu sparen schreiben wir in der Folge den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[.|X_t = x]$ mit $\mathbb{E}_{t,x}$ an.

Damit wir mit dem Kontrollproblem arbeiten können, muss die Differentialgleichung (2.1) lösbar sein. Für realistische Ergebnisse ist außerdem ein wohldefiniertes J sehr wichtig. Wir fassen daher in der Menge $\mathcal{A}(t, x)$ alle Kontrollprozesse $\mathbf{C}$, für welche diese beiden Bedingungen zum Zeitpunkt t und für das Kapital $X_t = x$ erfüllt sind, zusammen.

Definition 2.1.4: Für jedes $t \in I$ und $x \in \mathbb{R}^n$ beschreibt $\mathcal{A}(t, x)$ alle $\mathcal{F}$-progressiv messbaren Prozesse $\mathbf{C}$, sodass die stochastische Differentialgleichung für den Zustandsprozess eine eindeutige Lösung hat und das Zielfunktional $J(t, x, \mathbf{C})$ wohldefiniert ist. $\mathcal{A}(t, x)$ wird als die *Menge der zulässigen Kontrollprozesse* bezeichnet.

Wir werden in Zukunft zur Vereinfachung statt $\mathcal{A}(0, x)$ nur $\mathcal{A}$ schreiben.
Das Zielfunktional J beschreibt den erwarteten Ergebniswert unter einer Strategie $\mathbf{C}$. Wir wollen uns aber nicht beliebig, sondern (soweit möglich) optimal verhalten. Das heißt wir wählen jene Strategie, mit welcher das Zielfunktional J maximal wird. Daraus ergibt sich die Wertfunktion unseres Kontrollproblems.

Definition 2.1.5: Zu jedem Kontrollproblem beschreibt die *Wertfunktion* $V(t, x)$ den Wert unseres Modelles zu einem Zeitpunkt $t \in I$ und einem Kapital x. Sie wird wie folgt definiert:

$$V(t, x) = \sup_{\mathbf{C}\in A(t,x)} J(t, x, \mathbf{C}) \quad \forall t \in I, x \in U.$$

Wir werden an manchen Stellen zur Vereinfachung der Schreibweise $V(x)$ statt $V(0, x)$ verwenden.

Ziel der Kontrolltheorie ist es $V(x)$ zu berechnen und die optimale Strategie $\mathbf{C}^*$, mit welcher $J(0, x, \mathbf{C}^*) = V(x)$ gilt, zu bestimmen.

Motivierendes Beispiel

Damit die beschriebenen Begriffe etwas verständlicher werden, wollen wir uns einleitend mit einem Beispiel für ein Kontrollproblem aus [Sas06] befassen.

Unser Grundgedanke ist ein alltägliches Aktienbeispiel. Wir haben ein Startkapital x_0 und können im Intervall $[0, T]$ am Aktienmarkt handeln. Das heißt wir wollen zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ unser Kapital auf ein risikoloses Wertpapier und ein riskantes Wertpapier aufteilen. Das hier verwendete Modell ist das in der Finanzmathematik bekannte Black-Scholes-Modell.

Wir beginnen mit der Betrachtung unserer Ausgangsvariablen:
Das risikolose Wertpapier $(B_t)_{t\in[0,T]}$ definieren wir über die Differentialgleichung $dB_t = B_t\,\beta\,dt$ für eine Zinsrate $\beta > 0$ und mit dem Startwert $B_0 = 1$. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist $B_t = e^{rt}$. Die Anzahl der zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gehaltenen risikolosen Wertpapiere soll mit der Variable N_t^B dargestellt werden.

Das riskante Wertpapier $(S_t)_{t\in[0,T]}$ definieren wir über die Differentialgleichung $dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$ für eine Brownsche Bewegung $(W_t)_{t\in[0,T]}$, die positiven Konstanten μ und σ und mit einem Startwert $S_0 = s_0$. Es ist leicht zu zeigen, dass mit $S_t = s_0 \mathrm{e}^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$ die Differentialgleichung gelöst wird. Die Anzahl der zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gehaltenen riskanten Wertpapiere beschreiben wir mit der Variable N_t^S.

Unser Modell soll selbstfinanzierend sein. Das heißt alle Zuwächse oder Verluste ergeben sich aus den Wertveränderungen unserer Variablen. Es kommt zu keinen zusätzlichen Geldflüssen. Das bedeutet es soll

$$\begin{aligned} dX_t &= N_t^B dB_t + N_t^S dS_t \\ X_t &= N_t^B B_t + N_t^S S_t \end{aligned}$$

gelten.

Wir wollen in diesem Beispiel steuern, welchen Anteil des Kapitals wir in das risikolose Wertpapier und welchen Anteil wir in das riskante Wertpapier investieren. Wir wählen daher als Kontrollprozess die Aktienquote:

$$C_t = \frac{N_t^S S_t}{X_t}, \quad t \in [0, T].$$

Wir können diese Formel umformen und mit Hinzunahme der obigen Definitionen die Variablen N_t^B und N_t^S durch unseren Kontrollprozess $\mathbf{C}$ ersetzen. Damit erhalten wir für $\mathbf{X}$ einen Itô-Prozess (siehe Definition 1.5.13):

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{(1-C_t)X_t}{B_t}\,dB_t + \frac{C_t X_t}{S_t}\,dS_t \\ &= (1-C_t)\beta X_t\,dt + C_t X_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t) \\ &= (\beta - \beta C_t + \mu C_t)X_t\,dt + \sigma C_t X_t\,dW_t \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wir vermuten, dass die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung, die Form $\exp(Z_t)$ mit $dZ_t = g_t\,dt + h_t\,dW_t$ hat. Dann würde

$$X_t = x_0 \exp\left(\int_0^t g_s\,ds + \int_0^t h_s\,dW_s\right) = x_0 \exp(Z_t) \quad \forall t \in [0,T]$$

gelten.

Die Exponentialfunktion ist sicher aus $C^{1,2}$ und $(Z_t)_{t\in[0,T]}$ ist ein Itô-Prozess. Wir können daher die Itô-Formel anwenden und erhalten:

$$dX_t = g_t X_t\,dt + h_t X_t\,dW_t + \frac{1}{2}h_t^2\,dt. \tag{2.4}$$

Mittels Koeffizientenvergleich zwischen den Formeln (2.3) und (2.4) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
dW_t: \quad & h_t X_t = C_t \sigma X_t \\
& h_t = C_t \sigma \\
dt: \quad & (g_t + \frac{1}{2}h_t^2)X_t = (\beta - \beta C_t + \mu C_t)X_t \\
& g_t + \frac{1}{2}C_t^2\sigma^2 = \beta - \beta C_t + \mu C_t \\
& g_t = \beta + C_t(\mu - \beta) - \frac{1}{2}C_t^2\sigma^2.
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Lösungen für g_t und h_t in unseren Lösungsansatz ein erhalten wir die eindeutige Lösung für $\mathbf{X}$:

$$X_t = x_0 \exp\left(\int_0^t \beta + C_s(\mu - \beta) - \frac{1}{2}\sigma^2 C_s^2\,ds + \int_0^t \sigma C_s\,dW_s\right), \quad t \in [0,T].$$

In dieser Formel können wir ablesen, wie sich eine Änderung des Kontrollprozesses $\mathbf{C}$ auf den Zustandsprozess $\mathbf{X}$ auswirkt. Exakte Vorhersagen können daraus natürlich nicht getroffen werden. Für unser Zielfunktional $J(t,x,\mathbf{C})$ wählen wir für den Endnutzen $\Psi(T,X_T) = \ln(X_T)$ und setzen den laufenden Nutzen $\psi \equiv 0$. Dann gilt:

$$J(0,x_0,\mathbf{C}) = \mathbb{E}[\ln(X_T)|X_0 = x_0].$$

Wie bereits besprochen definieren wir die zulässigen Kontrollprozesse derart, dass die Lösung von $\mathbf{X}$ und die Funktion J existieren.

$$\mathcal{A} := \left\{ C \,\middle|\, C \text{ prog. messbar}, \mathbb{E}\left[\int_0^T \left|\beta + C_s(\mu - \beta) - \frac{1}{2}\sigma^2 C_s^2\right| ds + \int_0^T \sigma C_s\,dW_s\right] < \infty \right\}$$

Für die Wertfunktion $V(x)$ müssen wir das Zielfunktional maximieren. Daher betrachten wir $\mathbb{E}[\ln(X_T)|X_0 = x_0]$ genauer.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\ln(X_T)|X_0 = x_0] = \\
&\quad \mathbb{E}\left[\ln(x_0) + \int_0^T (\beta + u_s(\mu - \beta) - \frac{1}{2}\sigma^2 C_s^2)\,ds + \int_0^T \sigma C_s\,dWs \,\middle|\, X_0 = x_0\right]
\end{aligned}$$

C muss aus $\mathcal{A}(0,x)$ gewählt werden. Zusammen mit den Eigenschaften des Itô-Integrals ist daher der Prozess $(\int_0^t \sigma C_s \, dW_s)_{t\in[0,T]}$ ein Martingal. Deswegen gilt für den Erwartungswert $\mathbb{E}[\int_0^T \sigma C_s \, dWs] = 0$. $\ln(x_0)$ ist außerdem konstant. Zusammenfassend reduziert sich unsere Maximierungsaufgabe darauf $\mathbb{E}[\int_0^T (\beta + C_s(\mu-\beta) - \frac{1}{2}\sigma^2 C_s^2)\, ds]$ zu maximieren.
Wir suchen daher das Maximum der Funktion $f(C) := \beta + C(\mu-\beta) - \frac{1}{2}\sigma^2 C^2$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mu}(C) =& (\mu-\beta) - \sigma^2 C \\ & (\mu-\beta) - \sigma^2 C = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & C = \frac{\mu-\beta}{\sigma^2}.\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung zeigt uns, dass der gefundene Wert ein Maximum ist.

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial C)^2}(C) = -\sigma^2 < 0$$

Unsere optimale Strategie C^*, welche uns ein maximales Ergebnis liefert, lautet dann $C_t^* = \frac{\mu-\beta}{\sigma^2}$ für alle $t \in [0,T]$.

Für die Werte $\mu = 0,045$, $\beta = 0,015$ und $\sigma^2 = 0,2$ müssen wir somit idealerweise immer 15% unseres Kapital in das riskante Wertpapier investieren, die restlichen 85% verbleiben im risikolosen Wertpapier.

Abschließend betrachten wir noch die daraus ergebende Wertfunktion. Wenn wir unsere optimale Strategie C^* einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}V(x) &= \ln x + \mathbb{E}\left[\int_0^T \beta + \left(\frac{\mu-\beta}{\sigma^2}\right)(\mu-\beta) - \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{\mu-\beta}{\sigma^2}\right)^2 ds\right] \\ &= \ln x + T\left(\beta + \frac{(\mu-\beta)^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

2.2. Bellman-Prinzip und Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Es ist nicht jedes Kontrollproblem so einfach zu lösen wie in dem vorherigen Beispiel. Leider gibt es auch nicht für jedes Modell eine universelle Lösung. Die Lösung eines Modells muss je nachdem wie die Modellparameter vorgegeben sind individuell konstruiert werden. Wir werden uns daher in diesem Kapitel mit den grundsätzlichen Zusammenhängen und der theoretischen Vorgehensweise beschäftigen.

Der erste Schritt ist immer aus einem beschriebenen Problem, eine entsprechende Gleichung zu bestimmen, welche unser Problem widerspiegelt. Diese Gleichung wird als *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* (oder kurz HJB-Gleichung) bezeichnet. Die HJB-Gleichung kann oft nicht direkt bewiesen, sondern nur motiviert werden. Mit der HJB-Gleichung wird dann versucht eine Wertfunktion und einen optimalen Kontrollprozess zu finden. Wir können uns jedoch oft nicht sicher sein, ob die gefundenen Lösungen wirklich die gewünschte Wertfunktion und die optimale Strategie darstellen. Daher wird zu jeder Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung ein *Verifikationstheorem* angegeben. Ein solches Theorem beschreibt eine Menge von Konditionen unter denen eine Lösung der HJB-Gleichung tatsächlich die gesuchte Wertfunktion darstellt.

Wir wollen zunächst das *Bellman-Prinzip* (oder auch *dynamic programming principle*) motivieren und werden daraus die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung herleiten. Wir werden in diesem Kapitel die Konstruktion allgemein halten und nicht jeden Schritt vollständig begründen. Bei den Problemen im nächsten Kapitel werden wir daher teilweise zu anderen Ergebnissen gelangen.

Wir betrachten nun ein Kontrollproblem auf einem unendlichen Zeithorizont $I = [0, \infty)$ mit einer Stoppzeit τ. Es sei ein allgemeiner Zustandsprozess $\mathbf{X}$ und eine Menge der erlaubten Kontrollprozesse $\mathcal{A}$ gegeben. Unser allgemeines Zielfunktional lautet nach Formel (2.2):

$$J(t, x, \mathbf{C}) = \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau \psi(s, X_s, C_s)\, ds + \Psi(\tau, X_\tau)\right].$$

Wie wir aus der Definition 2.1.5 wissen, finden wir die Wertfunktion über die Maximierung des Zielfunktionals, d.h. $V(0, x) = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} J(0, x, \mathbf{C})$.

Wir wählen zwei Zeitpunkte $t_1, t_2 \in I$ mit $t_1 < t_2$. Für das Intervall $[t_1, t_2]$ wählen wir eine beliebige zulässige Strategie $\mathbf{C} \in \mathcal{A}$. Für ein $\epsilon > 0$ wechseln wir zum Zeitpunkt t_2 zu einer weiteren Strategie $\widetilde{\mathbf{C}} \in \mathcal{A}$. Für diese neue Strategie soll

$$V(t_2, X_{t_2}) < J(t_2, X_{t_2}, \widetilde{\mathbf{C}}) + \epsilon \tag{2.5}$$

gelten. Wir nehmen an diese Kombination von Strategien wäre wieder eine gültige Strategie $\widehat{C}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} V(t_1,x) \geq J(t_1,x,\widehat{C}) &= \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,C_s)\,ds + \int_{t_2}^{\tau} \phi(s,X_s,\widetilde{C}_s)\,ds + \Psi(\tau,X_\tau)\right] \\ &= \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,C_s)\,ds + \mathbb{E}_{t_2,X_{t_2}}\left[\int_{t_2}^{\tau} \phi(s,X_s,\widetilde{C}_s)\,ds + \Psi(\tau,X_\tau)\right]\right], \end{aligned}$$

wobei der zweite Erwartungswert genau unserem Zielfunktional $J(t_2,X_{t_2},\widetilde{\mathbf{C}})$ entspricht. Wir können nun unsere Bedingung (2.5) für $\widetilde{\mathbf{C}}$ anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} V(t_1,x) &\geq \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,C_s)\,ds + J(t_2,X_{t_2},\widetilde{\mathbf{C}})\right] \\ &> \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,C_s)\,ds + V(t_2,X_{t_2})\right] - \epsilon. \end{aligned}$$

Nachdem die Schlussbedingung nicht mehr von der Strategie $\widetilde{\mathbf{C}}$ abhängt, gilt die Ungleichung für alle ϵ und somit erhalten wir für das Supremum:

$$V(t_1,x) \geq \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,C_s)\,ds + V(t_2,X_{t_2})\right]. \tag{2.6}$$

Andererseits erhalten wir für eine beliebe Strategie $\overline{\mathbf{C}}$ leicht auch die gegenteilige Ungleichung:

$$\begin{aligned} J(t_1,x,\overline{\mathbf{C}}) &= \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,\overline{C}_s)\,ds + J(t_2,X_{t_2},\overline{\mathbf{C}})\right] \\ &\leq \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,\overline{C}_s)\,ds + V(t_2,X_{t_2})\right] \\ &\leq \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,\mathbf{C}_s)\,ds + V(t_2,X_{t_2})\right]. \end{aligned}$$

Wir wählen nun das Supremum über alle Kontrollprozesse $\overline{\mathbf{C}}$ und erhalten

$$V(t_1,x) \leq \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,C_s)\,ds + V(t_2,X_{t_2})\right]. \tag{2.7}$$

Aus den Formeln (2.6) und (2.7) ergibt sich das *Bellman-Prinzip*:

$$V(t_1,x) = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t_1,x}\left[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s,X_s,C_s)\,ds + V(t_2,X_{t_2})\right]. \tag{2.8}$$

Bemerkung: Während dieser beschreibenden Herleitung des Bellman-Prinzips haben wir einige Punkte nicht auf ihre Durchführbarkeit hin geprüft. Es ist daher nicht in allen Fällen anwendbar und muss für die konkrete Problemstellung auf seine Gültigkeit hin geprüft werden.

Das Bellman-Prinzip zeigt, dass wenn wir uns im Intervall $[t_1,t_2]$ optimal verhalten und nach t_2 wiederum optimal handeln, dann erhalten wir ein globales Optimum.

Wir wollen uns aus dem Bellman-Prinzip eine weitere wichtige Grundlage der Kontrolltheorie herleiten, die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung.

Wir nehmen an unsere Wertefunktion V wäre aus $C^{1,2}$ und wenden auf $V(t_1, X_{t_1})$ die Itô-Formel an. Das Ergebnis setzen wir in das Bellman-Prinzip (2.8) ein. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
V(t_1, x) &= \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t_1,x}\Bigg[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s, X_s, C_s)\, ds + V(t_1, x) + \int_{t_1}^{t_2} V_t(s, X_s)\, ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} V_x(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} V_{xx}(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s\Bigg] \\
&= \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t_1,x}\Bigg[\int_{t_1}^{t_2} \phi(s, X_s, C_s)\, ds + V(t_1, x) + \int_{t_1}^{t_2} V_t(s, X_s)\, ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} V_x(s, X_s)\mu(s, X_s, C_s)\, ds + \int_{t_1}^{t_2} V_x(s, X_s, C_s)\sigma(s, X_s, C_s)\, dW_s \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} V_{xx}(s, X_s)\sigma^2(s, X_s, C_s)\, ds\Bigg].
\end{aligned}$$

Für eine passende Funktion ist das Itô-Integral ein Martingal und der Erwartungswert daher gleich 0. Wir nehmen an $V_x(s, X_s, C_s)\sigma(s, X_s, C_s)$ erfüllt genau diese Voraussetzungen und erhalten

$$\begin{aligned}
V(t_1, x) = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t_1,x}\Bigg[&\int_{t_1}^{t_2} \phi(s, X_s, C_s)\, ds + V(t_1, x) + \int_{t_1}^{t_2} V_t(s, X_s)\, ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} V_x(s, X_s)\mu(s, X_s, C_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} V_{xx}(s, X_s)\sigma^2(s, X_s, C_s)\, ds\Bigg].
\end{aligned}$$

Wir ziehen $V(t_1, x)$ von beiden Seiten ab. Anschließend dividieren wir durch $t_2 - t_1$ und bilden den Limes für $t_2 \searrow t_1$. Wir vertauschen den Limes und das Supremum (unter der Annahme, dass wir es auch dürfen) und erhalten

$$0 = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \left\{\phi(t, x, C_t) + V_t(t, x) + V_x(t, x)\mu(t, x, C_t) + \frac{1}{2}V_{xx}(t, x)\sigma^2(t, x, C_t)\right\} \tag{2.9}$$

Die Gleichung (2.9) wird *Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung* oder kurz HJB-Gleichung genannt.

3. Optimale Dividendenzahlungen

Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel mit einem riskanten Wertpapier, basierend auf einem Diffusionsprozess. Wir bezeichnen dieses als Aktie. Zu jedem Zeitpunkt soll eine Auszahlung bis zur Höhe des aktuellen Aktienwertes möglich sein. Diese Auszahlung wird als Dividende bezeichnet. Unser Kontrollprozess steuert die Dividendenzahlungen. Die Nutzenfunktion soll einen Wertverlust im Verlauf der Zeit mit einer Zinsrate β widerspiegeln. Unser Ziel ist es die optimale Strategie zu finden, mit welcher die Dividendenzahlungen maximiert werden.

Wir werden die Dividendenzahlungen zunächst mit einen unendlichen und später mit einen endlichen Zeithorizont betrachten. In den meisten Modellen werden wir den Ruinzeitpunkt als Stoppzeit verwenden. Im letzten Teil dieses Kapitels werden wir dem Ruin eine größere Bedeutung zukommen lassen und werden diesen stärker in unser Modell einfließen lassen.

Für alle unserer Modelle werden wir als optimalen Kontrollprozess eine Barrierestrategie erhalten. Dabei wird als Dividende immer jener Wert ausgezahlt, um welchen die Aktie über eine bestimmte Barriere liegt.

Für die Modelle in unendlicher Zeit verwenden wir zunächst die Referenz [Sch08] für Prozesse mit cádlág-Pfaden. Für einen Prozess mit cáglád-Pfaden werden wir das Monotone Follower Problem behandeln. Anschließend werden wir ein Modell auf einem endlichen Zeithorizont nach [Gra13] betrachten. Den Abschluss macht ein Modell, für welches eine bestimmte Ruinwahrscheinlichkeit eingehalten werden soll, basierend auf der Referenz [Gra14].

3.1. Modell mit Dividendenzahlungen

Unsere Modelle für die Dividendenzahlungen basieren auf Diffusionsprozessen (siehe Definition 1.5.18). Zu jedem Zeitpunkt t darf eine nicht negative Dividende ausgezahlt werden. In $\mathcal{A}$ sind nur jene Kontrollprozesse enthalten, für welche der Wert der Dividende mit dem Gegenwert der Aktie zum Zeitpunkt t beschränkt ist.

Definition 3.1.1 (Modell mit Dividendenzahlungen)**:** Sei $(W_t)_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Seien μ und σ messbare Funktionen, sodass die folgende stochastische Differentialgleichung für jeden zulässigen

Kontrollprozess $\mathbf{C}$ eindeutig lösbar ist. Für ein $x > 0$ sei unser Zustandsprozess $\mathbf{X}$ beschrieben durch

$$\begin{aligned} dX_t &= x + \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dW_t - dC_t \quad \forall t \in I \\ X_t &= x. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wir verwenden den Ruinzeitpunkt als Stoppzeit.

$$\tau = \inf\{t \in I | X_t < 0\}$$

Für den laufenden Nutzen ψ verwenden wir die Abzinsung der Dividendenzahlung um eine Zinsrate $\beta > 0$ mit der Funktion $\psi(t, c) = e^{-\beta t} c$. Für den Endnutzen wählen wir die Funktion $\Psi(T, x) = e^{-\beta T} x$. Dieser wird erst in unseren Modellen in endlicher Zeit verwendet.

3.2. Dividenden in unendlicher Zeit

Für unser erstes Modell betrachten wir einen unendlichen Zeithorizont $I = [0, \infty)$. Wir wählen μ und σ konstant. Als Kontrollprozess betrachten wir zunächst die laufenden Dividendenzahlungen $(c_t)_{t \in I}$. Die Summe der Dividendenzahlungen ergibt sich zu $C_t = \int_0^t c_s\, ds$. Die Menge der zulässigen Prozesse $\mathcal{A}$ beinhaltet alle Prozesse $\mathbf{c}$, sodass die Prozesse $\mathbf{C}$ positive Prozesse mit cádlág-Pfaden sind. Weiters ist die Dividendenzahlung beschränkt mit dem aktuellen Aktienwert.

Diese Inhalte zu diesem Modell basieren auf [Sch08].

Wir werden dieses Modell auf zwei Schritte betrachten. Zunächst werden wir die Dividendenzahlung zu jedem Zeitpunkt $t \in I$ mit einem Wert $c_0 < \infty$ beschränken. Dieser Ansatz wird uns die HJB-Gleichung motivieren und dabei helfen die Hintergründe besser zu verstehen. In einem zweiten Schritt werden wir die Beschränkung der Dividenden aufheben.

beschränkte Dividendenhöhe

Sei $0 < c_0 < \infty$ gegeben. Für unseren Kontrollprozess $(c_t)_{t \in I}$ soll $0 \leq c_t \leq c_0$ gelten. Wie wir bereits in der Einleitung beschrieben haben, leitet sich der Wert des Prozesses direkt aus den zu erwartenden Dividenden ab

$$J(t, x, \mathbf{c}) = \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau c_s e^{-\beta s}\, ds\right] \quad \forall t \in I, x \in \mathbb{R}^+, \mathbf{c} \in \mathcal{A}$$

und es gilt

$$V(t,x) = \sup_{\mathbf{c}\in\mathcal{A}} J(t,x,\mathbf{c}) \quad \forall t \in I, x \in \mathbb{R}^+.$$

Aufgrund der Eigenschaften der Brownschen Bewegung gilt $V(t,0) = 0$.

Betrachten wir zunächst einige Eigenschaften der Wertfunktion.

Satz 3.2.1: Die Wertfunktion $V(x)$ ist beschränkt durch $\frac{c_0}{\beta}$ und streng wachsend. Sie konvergiert gegen $\frac{c_0}{\beta}$ für $x \to \infty$.

Beweis: Für einen beliebigen, zulässigen Kontrollprozess $\mathbf{c}$ gilt die Beschränkung $c_t \leq c_0$. Daher kann $V(x) \leq \int_0^\infty e^{-\beta s} c_0 \, ds$ abgeschätzt werden. Die Lösung dieses Integrals entspricht der gewünschten Grenze $\frac{c_0}{\beta}$.

Seien x und y beliebige positive Startkapitalien mit $y > x$. Sei weiters $\mathbf{c}^x$ ein beliebiger, zulässiger Kontrollprozess für das Startkapital x. τ^x beschreibt den Ruinzeitpunkt des Zustandsprozesses $\mathbf{X}$ für das Startkapital x.

Betrachten wir den gleichen Prozess $\mathbf{X}$ für ein Startkapital y, dann muss dieser zum Zeitpunkt τ^x, nach (3.1) den Wert $y - x$ haben. Basierend auf den Eigenschaften der Brownschen Bewegung können wir einen neuen Prozess $\widetilde{\mathbf{X}}$ mit der Darstellung aus (3.1) mit einem Startkapital $y-x$ und der Brownschen Bewegung $(W_{\tau^x+t} - W_{\tau^x})_{t\in I}$ definieren. $\widetilde{\mathbf{c}}$ sei eine erlaubte Strategie für den neuen Zustandsprozess $\widetilde{\mathbf{X}}$.

Wir können aus den Strategien $\mathbf{c}^x$ und $\widetilde{\mathbf{c}}$ eine gültige Strategie für das Startkapital y zusammensetzen:

$$c_t^y := \begin{cases} c_t^x & t \leq \tau^x \\ \widetilde{c}_{t-\tau^x} & t < \tau^x \leq \tau^y \end{cases} \qquad \forall t \in I.$$

Die Wahl der Kontrollprozesse $\mathbf{c}^x$ und $\widetilde{\mathbf{c}}$ erfolgte beliebig. Für die Wertfunktion ergibt sich daher:

$$V(x) + \mathbb{E}_{0,x}[e^{-\beta\tau^x}]V(y-x) \leq V(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } x < y.$$

Damit ist $V(x)$ eine streng wachsende Funktion.

Mit dem ersten Teil haben wir bereits $V(x) \leq \frac{c_0}{\beta}$ gezeigt. Betrachten wir nun die Strategie $c_t = c_0$. Für $x \to \infty$ konvergiert die Stoppzeit τ ebenfalls gegen unendlich. Daher konvergiert $\mathbb{E}_{0,x}[e^{-\beta\tau}]$ gegen null. Es folgt für das Zielfunktional:

$$\lim_{x\to\infty} J(0,x,\mathbf{c}) = \lim_{x\to\infty} \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^\tau e^{-\beta s} c_0 \, ds\right] = \lim_{x\to\infty} (1 - \mathbb{E}_{0,x}[e^{-\beta\tau}])\frac{c_0}{\beta} = \frac{c_0}{\beta}.$$

Folglich konvergiert die Wertfunktion gegen den Grenzwert $\frac{c_0}{\beta}$. □

Wir betrachten als nächstes die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung. Wie schon im Kapitel 2.2 wollen wir diese zunächst nur motivieren. Die Verifikation erfolgt im Anschluss.

Sei $\epsilon > 0$. Für jeden Wert x können wir einen Kontrollprozess $\mathbf{c}^x$ finden, sodass für das daraus ergebene Zielfunktional $J(0, x, \mathbf{c}^x) \leq V(x) - \epsilon$ gilt. Sei $0 \leq c \leq c_0$ und $h > 0$. Wir betrachten die Strategie

$$c_t := \begin{cases} c & 0 \leq t \leq \tau \wedge h, \\ c_{t-h}^{X_h} & t > h \text{ und } \tau > h \end{cases} \qquad \forall t \in I.$$

Wir nehmen an, dies wäre wieder eine zulässige Strategie aus $\mathcal{A}$. Dann gilt für diese Strategie:

$$\begin{aligned} V(x) \geq J(0, x, \mathbf{c}) &= \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^{\tau\wedge h} ce^{-\beta s}\, ds\right] + \mathbb{E}_{0,x}\left[\mathbb{1}_{\tau>h}\int_h^{\tau} c_s^{X_h} e^{-\beta(s+h)}\, ds\right] \\ &= c\,\mathbb{E}_{0,x}\left[\frac{1-e^{-\beta(\tau\wedge h)}}{\beta}\right] + e^{-rh}\mathbb{E}_{0,x}\left[\mathbb{1}_{\tau>h} J(h, X_h, \mathbf{c}^{X_h})\right] \\ &= c\,\frac{1-\mathbb{E}_{0,x}[e^{-\beta(\tau\wedge h)}]}{\beta} + e^{-rh}\mathbb{E}_{0,x}[\mathbb{1}_{\tau>h}(V(X_h)-\epsilon)] \\ &\geq c\,\frac{1-\mathbb{E}_{0,x}[e^{-\beta(\tau\wedge h)}]}{\beta} + e^{-rh}\mathbb{E}_{0,x}[V(X_{\tau\wedge h})-\epsilon]. \end{aligned}$$

Wir benutzen, dass $V(X_\tau) = V(0) = 0$ gilt. Weil wir ϵ beliebig gewählt haben, gilt das obige Ergebnis auch wenn wir den Grenzwert bilden.

$$V(x) \geq c\,\frac{1-\mathbb{E}[e^{-\beta(\tau\wedge h)}]}{\beta} + e^{-rh}\mathbb{E}_{0,x}[V(X_{\tau\wedge h})] \tag{3.2}$$

Wir nehmen an, dass $V(x)$ zweimalig stetig differenzierbar ist. Dann können wir die Itô-Formel darauf anwenden.

$$V(X_{\tau\wedge h}) = V(x) + \int_0^{\tau\wedge h} (\mu - u)V_x(X_s)\, ds + \int_0^{\tau\wedge h} \sigma V_x(X_s)\, dW_s + \int_0^{\tau\wedge h} \frac{\sigma^2}{2} V_{xx}(X_s)\, ds$$

Wir setzen das Ergebnis in unsere Formel (3.2) ein. Sei $(\int_0^t V_x(X_s)\, dW_s)_{t\in I}$ ein Martingal. Dann ist der Erwartungswert des stochastischen Integrals gleich null und wir können diesen Term weglassen.

$$V(x) \geq c\,\frac{1-\mathbb{E}_{0,x}[e^{-\beta(\tau\wedge h)}]}{\beta} + e^{-\beta h}\mathbb{E}_{0,x}\left[V(x) + \int_0^{\tau\wedge h} (\mu-u)V_x(X_s) + \frac{\sigma^2}{2}V_{xx}(X_s)\, ds\right]$$

Wir formen dieses Ergebnis um und dividieren beide Seiten durch den Wert h.

$$0 \geq c\frac{1-\mathbb{E}_{0,x}[e^{-\beta(\tau\wedge h)}]}{rh} - V(x)\frac{1-e^{-\beta h}}{h} + \mathbb{E}_{0,x}\left[\frac{1}{h}\int_0^{\tau\wedge h} (\mu-u)V_x(X_s) + \frac{\sigma^2}{2}V_{xx}(X_s)\, ds\right]$$

Wir bilden den Grenzwert für $h \to 0$. Unter der Annahme, dass wir den Limes und den Erwartungswert vertauschen können erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}(x) + (\mu - c)V_x(x) - \beta V(x) + c \leq 0.$$

Diese Ungleichung muss für jedes c mit $0 \leq c \leq c_0$ erfüllt sein. Das heißt es gilt:

$$\sup_{0 \leq c \leq c_0} \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}(x) + (\mu - c)V_x(x) - \beta V(x) + c \right\} \leq 0.$$

Aus dieser Formel können wir die HJB-Gleichung motivieren.

$$\sup_{0 \leq c \leq c_0} \left\{ \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - c)f'(x) - \beta f(x) + c \right\} = 0 \tag{3.3}$$

Wir suchen nun eine Funktion f, welche die HJB-Gleichung und die folgenden Bedingungen erfüllt:

(Z1) $f(x)$ ist positiv.
(Z2) $f(x)$ ist wachsend.
(Z3) $f(x)$ ist beschränkt mit $\frac{c_0}{\beta}$.
(Z4) $f(0) = 0$.

Später werden wir zeigen, dass die gefundene Funktion f unserer Wertfunktion $V(x)$ entspricht.

Um das Supremum zu erreichen, muss der optimale Kontrollprozess in Abhängigkeit von $f'(x)$ gewählt werden.

$$c(x) = \begin{cases} 0 & f_x(x) > 1, \\ \in [0, c_0] & f_x(x) = 1, \\ c_0 & f_x(x) < 1 \end{cases} \tag{3.4}$$

Wir versuchen eine zweifach integrierbare Lösung der obigen HJB-Gleichung (3.3) zu finden. Hierfür setzen wir die Lösung aus den Lösungen für $f'(x) < 1$ und $f'(x) > 1$ zusammen. An den Stellen mit $f'(x) = 1$ müssen wir die Lösungen zusammenführen.

Für den Bereich $\{f'(x) > 1\}$ wird die Gleichung mit $c(x) = 0$ maximal. Daher erhalten wir aus der HJB-Gleichung:

$$f(x) = \frac{\sigma^2}{2\beta} f''(x) + \frac{\mu}{\beta} f'(x) \quad \text{für } f'(x) > 1. \tag{3.5}$$

Wir wählen für f_1 den Ansatz

$$f_1(x) = Ae^{\theta_1(0)x} + Be^{-\theta_2(0)x} \quad \text{für } f'(x) < 1.$$

In dem Bereich $\{f'(x) < 1\}$ wird die Gleichung für $c(x) = c_0$ maximal. Aus der HJB-Gleichung folgt dann

$$f(x) = \frac{c_0}{\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta} f''(x) + \frac{\mu - c_0}{\beta} f'(x). \tag{3.6}$$

Wir wählen daher für f_2 den Ansatz

$$f_2(x) = \frac{c_0}{\beta} + Ce^{\theta_1(c_0)x} + De^{-\theta_2(c_0)x}.$$

Die Funktionen $\theta_1(.)$ und $\theta_2(.)$ erhalten wir durch Einsetzen der Ansätze in die jeweiligen Gleichungen (3.5) bzw. (3.6):

$$\theta_1(c) = \frac{\sqrt{(\mu - c)^2 + 2\beta\sigma^2} - (\mu - c)}{\sigma^2} > 0$$
$$\theta_2(c) = \frac{\sqrt{(\mu - c)^2 + 2\beta\sigma^2} + (\mu - c)}{\sigma^2} > 0$$

Betrachten wir nun verschiedenen Möglichkeiten für die Gestalt von f.

Fall 1: $f'(x) > 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$
In diesem Fall würde $f(x) = f_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gelten. Nach Bedingung (Z3) muss f beschränkt sein. Dafür muss $A = 1$ gelten. Zur Erfüllung der Bedingung (Z2) muss dann $B < 0$ gelten. Damit ist f aber negativ, was unsere Bedingung (Z1) widerspricht. Der Fall $f(x) = f_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ ist daher nicht möglich.

Fall 2: $f'(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$
Wir erhalten in diesen Fall $f(x) = f_2(x)$. Wegen der Bedingung (Z3) muss $C = 0$ gelten. Zur Erfüllung der Bedingung (Z2) muss weiters $D < 0$ gelten. Aus der Bedingung (Z4) können wir uns D ausdrücken und erhalten die mögliche Lösung

$$f(x) = c_0(1 - e^{-\theta_2(c_0)x})/\beta.$$

Die Funktion ist für $x \in \mathbb{R}^+$ sicher positiv und erfüllt somit auch die Bedingung (Z1). Zuletzt müssen wir noch die Ausgangsbedingung überprüfen.

$$f'(x) = c_0\theta_2(u_0)e^{-\theta_2(c_0)x}/\beta < 1$$
$$\Leftrightarrow c_0\theta_2(u_0)e^{-\theta_2(c_0)x} < \beta \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Diese Ungleichung ist nur dann für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gültig, wenn $\beta > c_0\theta_2(c_0)$ gilt. Folglich können wir den Fall 2 nur anwenden, wenn die zuvor genannte Bedingung gilt.

Fall 3: $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}^+$ mit $f'(x_0) = 1$
An diesem Punkt muss dann $f'(x_0) = f_1'(x_0) = f_2'(x_0) = 1$ gelten. Wir können dieses Wissen nutzen um $f_1''(x_0)$ genauer zu betrachten. Es gilt:

$$A\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} - B\theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0} = 1,$$

womit sich B ausdrücken und durch einsetzen in die ursprüngliche Gleichung auch ersetzen lässt.

$$f_1(x_0) = A\frac{\theta_1(0)+\theta_2(0)}{\theta_2(0)}e^{\theta_1(0)x_0} - \frac{1}{\theta_2(0)}$$

Die zweite Ableitung im Punkt x_0 ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned} f_1''(x_0) &= A\theta_1(0)(\theta_1(0)+\theta_2(0))e^{\theta_1(0)x_0} - \theta_2(0) \\ &= \theta_1(0)\theta_2(0)f(x_0) - (\theta_2(0)-\theta_1(0)) \\ &= \frac{2}{\sigma^2}(\beta f(x_0)-\mu). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Am Punkt x_0 können wieder mehrere Fälle eintreten.

Fall 3a: $f''(x_0) > 0$
Aufgrund der gewünschten Stetigkeit von f' muss für ein $\epsilon > 0$, $f(x) = f_1(x)$ für alle $x \in [x_0, x_0+\epsilon]$ gelten. Zusätzlich soll f eine wachsende Funktion sein (Bedingung (Z2)). An jedem Punkt $x > x_0$ mit $f'(x) = 1$ gilt (3.7) und es folgt $f_1''(x) = 2(\beta f(x)-\mu)/\sigma^2) \geq 2(\beta f(x_0)-\mu)/\sigma^2 > 0$. Die Funktion f muss dann auf $[x_0, \infty)$ mit der Funktion f_1 übereinstimmen. Wie schon für den Fall $f = f_1$ muss wieder $A = 0$ und $B < 0$ gelten um keine Bedingungen zu verletzten. Dann widerspricht die Funktion f_1 aber unserer Ausgangsbedingung $f_1''(x_0) > 0$.

Fall 3b: $f''(x_0) < 0$
Aus dem Fall 3a können wir ablesen, dass die Lösung für den Fall 3 für ein $x_0 \in [0, \infty)$ die folgende Form haben muss:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in [0, x_0), \\ f_2(x), & x \in [x_0, \infty) \end{cases}.$$

Wie schon für den Fall 2 folgt $C = 0$ und $D < 0$. Mit $f'(x_0) = f_2'(x_0) = 1$ folgt $D = -e^{\theta_2(c_0)x_0}/\theta_2(c_0)$. Aus $0 = f_1(0)$ folgt $B = -A$. $f'(x_0) = 1$ ergibt $A = (\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0})^{-1}$. Unsere Funktion f hat die Form:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\theta_1(0)x} - e^{-\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}}, & x \in [0, x_0) \\ \frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(c_0)}e^{-\theta_2(c_0)(x-x_0)}, & x \in [x_0, \infty) \end{cases}$$

mit

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x} + \theta_2(0)e^{\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}}, & x \in [0, x_0) \\ e^{-\theta_2(c_0)(x-x_0)}, & x \in [x_0, \infty) \end{cases}$$

Dieses f erfüllt die Bedingungen (Z2) und (Z3) trivialerweise für alle $x_0 \geq 0$. Für $x_0 > 0$ ist trivialerweise auch die Bedingung (Z4) erfüllt. Für $x_0 = 0$ muss $c_0\theta_2 = \beta$ gelten um die Bedingung (Z4) zu erfüllen.

Es fehlt noch die Bedingung (Z1). Für die Funktion f_1 ist dies trivialerweise erfüllt ($f_1(0) = 0$ und f_1 ist wachsend). f_2 hat auf $[x_0, \infty)$ sein Minimum an x_0 und es gilt $f_2(x_0) \geq 0$ für $c_0\theta_2(c_0) \geq \beta$.

Wir wollen jetzt den Punkt x_0 bestimmen. Es muss $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ gelten.

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &= \frac{e^{\theta_1(0)x_0} - e^{-\theta_2(0)x_0}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}} \\ &= \frac{e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0}}{\theta_1(0)e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} + \theta_2(0)} \\ &= f_2(x_0) = \frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)}. \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} = \frac{1 + \left(\frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(c_0)}\right)\theta_2(0)}{1 - \left(\frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(c_0)}\right)\theta_1(0)}. \tag{3.8}$$

Unter der Bedingung $c_0\theta_2(c_0) \geq \beta$ ist der Zähler bereits positiv. Damit die Gleichung gültig ist muss dann der Nenner strikt positiv sein. Wir überprüfen das:
Mit $\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} \cdot \mu < \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} \cdot \sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2}$ folgt

$$\theta_1(0) = \frac{\sqrt{\mu^2 + 2\beta\sigma^2} - \mu}{\sigma^2} < \frac{(\mu + \beta\sigma^2/\mu) - \mu}{\sigma^2} = \frac{\beta}{\mu}. \tag{3.9}$$

Weiters erhalten wir für $\frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(c_0)}$ durch Erweiterung des zweiten Bruches mit $(\sqrt{(c_0 - \mu)^2 + 2\beta\sigma^2} - (\mu - c_0))$:

$$\frac{c_0}{\beta} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{(c_0 - \mu)^2 + 2\beta\sigma^2} + \mu - c_0} = \frac{c_0 + \mu - \sqrt{(c_0 - \mu)^2 + 2\beta\sigma^2}}{2r}. \tag{3.10}$$

Die Umformung (3.10) und die Abschätzung (3.9) verwenden wir um den Nenner abzuschätzen.

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(c_0)}\right)\theta_1(0) &< 1 - \frac{c_0 + \mu - \sqrt{(c_0 - \mu)^2 + 2\beta\sigma^2}}{2\mu} \\ &= \frac{c_0 - \mu - \sqrt{(c_0 - \mu)^2 + 2\beta\sigma^2}}{2\mu} \end{aligned}$$

Es gilt $c_0 - \mu < \sqrt{(c_0 - \mu)^2 + 2\beta\sigma^2}$ und der Nenner ist positiv. Es folgt, dass (3.8) wohldefiniert ist und wir können x_0 ausdrücken.

$$x_0 = \frac{\log(1 + (\frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(c_0)})\theta_2(0)) - \log(1 - (\frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(u_0)})\theta_1(0))}{\theta_1(0) + \theta_2(0)} \tag{3.11}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass $x_0 = 0$ genau dann gilt, wenn $c_0\theta_2(c_0) = \beta$ gilt. Für $c_0\theta_2(c_0) > \beta$ ist $x_0 > 0$. Damit erfüllt für $c_0\theta_2(c_0) \leq \beta$ die Funktion f mit der Form

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\theta_1(0)x} - e^{-\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}}, & x \leq x_0 \\ \frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(c_0)} e^{-\theta_2(c_0)(x-x_0)}, & x > x_0 \end{cases}$$

alle unsere Bedingungen und die HJB-Gleichung. Weil $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ und $f_1'(x_0) = f_2'(x_0) = 1$ gilt folgt aus der Differentialgleichung, dass $f_1''(x_0) = f_2''(x_0)$ gilt. Die Funktion $f(x)$ ist folglich auch zweimalig stetig differenzierbar.

Aus der Ableitung von f kann man direkt ablesen, dass $f_2'(x) \leq 1$ gilt. Aus der Positivität der dritten Ableitung von f_1 folgt, dass $f_1''(x)$ wachsend ist. Wegen $f_1''(x_0) = f_2''(x_0) = -\theta_1(c_0) < 0$ muss $f_1''(x) < 0$ für $x \in [0, x_0)$ gelten. Mit $f_1'(x_0) = 1$ folgt daraus, dass $f_1'(x_0) \geq 1$ gelten muss. Damit erfüllen f_1 und f_2 unsere Ausgangsbedingungen an die Ableitungen.

Die allgemeine Lösung für die HJB-Gleichung können wir aus dem Fall 2 und 3 zusammensetzen. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c_0}{\beta}(1 - e^{-\theta_2(c_0)x}), & \beta < c_0\theta_2(0) \\ \frac{e^{\theta_1(0)x} - e^{-\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}}, & \beta \geq c_0\theta_2(0) \text{ und } x \leq x_0 \\ \frac{c_0}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(c_0)} e^{-\theta_2(c_0)(x-x_0)}, & \beta \geq c_0\theta_2(0) \text{ und } x > x_0 \end{cases} \tag{3.12}$$

ist zweimal stetig differenzierbar, löst die HJB-Gleichung und erfüllt unsere Zusatzbedingungen.

Bemerkung: Die Bedingung $\beta < c_0 r_2(u_0)$ ist äquivalent zu $\beta\sigma^2 < 2c_0\mu$. Daher gilt: Wenn β oder σ sehr groß sind oder wenn c_0 oder μ sehr klein sind, dann ist die optimale Dividendenstrategie $c_t = c_0$.

Das folgende Verifikationstheorem zeigt uns, dass die gefundene Funktion $f(x)$ genau unsere Wertfunktion $V(x)$ entspricht.

Satz 3.2.2 (Verifikationstheorem)**:** Die Funktion $f(x)$ aus (3.12) ist identisch mit $V(x)$ und die optimale Dividendenstrategie $\mathbf{c}^*$ lautet $c_t^* = c_0 \mathbb{1}_{X_t^* > x_0}$.

Beweis: Sei $\mathbf{c}$ eine beliebige Strategie. Unsere Lösung f der HJB-Gleichung ist zweimal stetig differenzierbar. Deswegen können wir auf $e^{-\beta t} f(X_t)$ die Itô-Formel anwenden. Aus der HJB-Gleichung folgt für unsere beliebige Strategie $\mathbf{c}$, dass $-\beta f(x) + (\mu - c_t) f'(X_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_t) \leq c_t$ gilt. Wir erhalten die Ungleichung

$$\begin{aligned} e^{-\beta(\tau\wedge t)} f(X_{\tau\wedge t}) &= f(x) + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s} \sigma f'(X_s)\, dW_s \\ &\quad + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s} \left(-\beta f(X_s) + (\mu - c_s) f'(X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(X_s) \right) ds \\ &\leq f(x) - \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s} c_s\, ds + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s} \sigma f'(X_s)\, dW_s \end{aligned} \tag{3.13}$$

In dem Fall $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ gilt Gleichheit. Die Ableitung $f'(x)$ ist beschränkt und es gilt $e^{-rt}f(x) \in V_{\mathbb{F}}(I)$. Folglich ist $(\int_0^{\tau\wedge t} e^{-rs}\sigma f'(X_s)\,dW_s)_{t\in I}$ ein Martingal. Wenn wir den Erwartungswert auf die Ungleichung (3.13) anwenden, erhalten wir

$$f(x) \geq \mathbb{E}_{0,x}\left[e^{-\beta(\tau\wedge t)}f(X_{\tau\wedge t}) + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s}c_s\,ds\right], \quad \forall t \in I$$

wobei für $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ weiterhin Gleichheit besteht. Für den Fall $\tau \leq t$ gilt $f(X_\tau) = 0$. Weil $f(x)$ beschränkt ist gilt $\lim_{\tau\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\beta(\tau\wedge t)}f(X_{\tau\wedge t})] = 0$. Damit ergibt sich

$$f(x) \geq \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^{\tau} e^{-\beta s}c_s\,ds\right] = J(0,x,\mathbf{c}),$$

wobei auch hier wieder Gleichheit für $\mathbf{c} = \mathbf{c}^*$ gilt. Somit gilt $J(0,x,\mathbf{c}) \leq f(x)$ für alle $\mathbf{c} \in \mathcal{A}$ und es folgt daraus $V(x) \leq f(x)$. Weil $f(x) = J(0,x,\mathbf{c}^*)$ gilt, folgt außerdem $V(x) \geq f(x)$. Somit gilt die Gleichheit und der obige Satz ist erfüllt. □

Bemerkung: Abschließende Bemerkungen zum Ruin:
Für $c_0 < \mu$ betrachte die Strategie $c_t = c_0$. Klarerweise gilt $X_t \leq X_t^*$ für alle t. Für die Ruinwahrscheinlichkeit gilt $\varphi(x,c_0) = e^{-2(\mu-c_0)x/\sigma^2} < 1$ für alle $x > 0$. Daraus folgt, dass auch $\varphi(x,c^*) \leq \varphi(x,c_0) < 1$ gilt und es ist möglich, dass kein Ruin eintritt.
Betrachte nun den Fall $\mu \leq c_0$. Wenn wir mit $x_0 + 1$ beginnen, wird der Punkt x_0 fast sicher erreicht. Also gilt $\liminf_{t\to\infty} X_t \leq x_0$. Sei $\tau_0 = \inf\{t \in I | X_t \leq x_0 + 1\}$ und $\tau_n = \inf\{t \geq \tau_{n-1}+1 | X_t \leq x_0+1\}$. Sei $A_n = [\inf\{\mu t + \sigma(W_{T_n+t} - W_{T_n}) | 0 \leq t \leq 1\} < -x_0 - 1]$. Dann gilt $\mathbb{P}(A_n) = \beta > 0$ und die A_n sind unabhängig von einander. Nach dem Borel-Cantelli-Lemma tritt A_n unendlich oft ein. Wenn jedoch A_n eintritt, tritt der Ruin ein. Das heißt der Ruin tritt unter der optimalen Strategie fast sicher ein, genau dann wenn $\mu \leq c_0$.

unbeschränkte Dividendenhöhe

Wir wollen nun von unserem Modell die Schranke c_0 für die Dividendenzahlungen aufheben. Wir betrachten ab jetzt als Kontrollprozess den summierten Konsumprozess $\mathbf{C}$. Für ein beliebiges $\mathbf{C} \in \mathcal{A}$ definieren wir $J(0,x,\mathbf{C}) = \mathbb{E}_{0,x}[\int_0^{\tau^{\mathbf{C}}} e^{-\beta t}\,dC_t]$.

Für ein $m > 0$ sei $\mathbf{C}^m$ der optimale Kontrollprozess mit maximaler Dividendenrate $c_0 = m$. Es gilt $\mathbf{C}^m \in \mathcal{A}$. Die Wertfunktion für das Modell mit einer Schranke haben wir im ersten Schritt beschrieben und wir verwenden das Ergebnis unter der Bezeichnung $V_m(x)$.

Die Wertfunktion wird wie gewohnt mit $V(x) = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} J(0,x,\mathbf{C})$ definiert. Weil $\mathbf{C}^m$ eine zulässige Strategie ist, gilt $V(x) \geq V_m(x)$. Das folgende Lemma sagt uns, dass die Wertfunktion des unbeschränkten Modells als Grenzwert der Wertfunktionen von Modellen mit einer Schranke m gebildet werden kann.

Satz 3.2.3: Sei $V_m(x)$ die Wertfunktion für ein Modell mit maximaler Dividendenauszahlung $c_t \leq m$ für alle $t \in I$. Dann existiert der Grenzwert und die Wertfunktion für das Modell ohne Beschränkung der Dividendenzahlung ist $\lim_{m\to\infty} V_m(x) = V(x)$.

Beweis: Wir bilden den Grenzwert $m \to \infty$.

$\theta_1(0)$ und $\theta_2(0)$ sind beide unabhängig vom Grenzwert m. $\theta_2(m)$ können wir ähnlich wie für (3.10) anschreiben mit

$$\theta_2(m) = \frac{2\beta}{\sqrt{(m-\mu)^2 + 2\beta\sigma^2} + m - \mu} \quad \forall m \in \mathbb{R}^+$$

Für $m \to \infty$ folgt $\theta_2(u) \to 0$.

Wir betrachten nun den Wert $V_m(x_0)$ für x_0 aus Formel (3.11). Für $\beta > m\theta_2(m)$ ist x_0 negativ und mit der Darstellung (3.12) folgt, dass $V_m(x_0)$ negativ ist.
Für $\beta \leq m\theta_2(m)$ ist $V_m(x_0) = \frac{m}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(m)}$. Wir können diesen Wert mit (3.10) umformen:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(m)} &= \frac{m + \mu - \sqrt{(m-\mu)^2 + 2\beta\sigma^2}}{2\beta} \\
&= \frac{(m+\mu)^2 - (m-\mu)^2 - 2\beta\sigma^2}{2\beta(m + \mu + \sqrt{(m-\mu)^2 + 2\beta\sigma^2})} \\
&= \frac{2m\mu - \beta\sigma^2}{\beta(m + \mu + \sqrt{(m-\mu)^2 + 2\beta\sigma^2})} \overset{m\to\infty}{\to} \frac{2\mu}{2\beta} = \frac{\mu}{\beta}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $V_m(x_0) \to \frac{\mu}{\beta}$. Sobald m groß genug ist, muss dann $m\theta_2(m) > \beta$ gelten.

Wir müssen uns den Grenzwert von x_0 für $m \to \infty$ ausdrücken und wir verwenden dafür unser Wissen aus der Gleichung (3.8). Mit dem Grenzwert ergibt sich der folgenden Gleichung.

$$e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} = \frac{1 + \frac{\mu\theta_2(0)}{\beta}}{1 - \frac{\mu\theta_1(0}{\beta}} = \frac{\beta + \mu\theta_2(0)}{\beta - \mu\theta_1(0)} \tag{3.14}$$

Aus dieser Gleichung kann x_0 ausgedrückt werden. Der Funktionsteil f_1 ist unabhängig von m und bleibt damit auch für $m \to \infty$ in der gleichen Form bestehen. Für $x \geq x_0$ fehlt uns noch der Grenzwert von $f_{2,m}(x)$. Wir formen die Gleichung leicht um

$$f_{2,m}(x) = \frac{m}{\beta} - \frac{1}{\theta_2(m)} + \frac{1}{r_2(m)}(1 - e^{-\theta_2(m)(x - x_0(m))}),$$

wobei wir hier verwenden, dass $x_0(m)$ den Barrierewert x_0 in Abhängigkeit von m darstellt. Das erzeugt den Grenzwert für V(x) auf dem Bereich $x \geq x_0 = x_0(\infty)$:

$$V(x) = \frac{\mu}{\beta} + x - x_0.$$

□

Wir haben im Beweis bereits die Funktion $V(x)$ und x_0 bestimmt und können diese Werte zur Wertfunktion zusammenfassen.

Folgerung 3.2.4: Die Wertfunktion für unser Modell ohne maximaler Dividendenauszahlung ist wie folgt gegeben

$$V(x) = \begin{cases} \frac{e^{\theta_1(0)x} - e^{-\theta_2(0)x}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}}, & x \leq x_0, \\ \frac{\mu}{\beta} + (x - x_0), & x > x_0 \end{cases}$$

mit

$$x_0 = \frac{\log(\beta + \mu\theta_2(0))) - \log(\beta - \mu\theta_1(0))}{\theta_1(0) + \theta_2(0)}.$$

Wir haben bereits im Satz 3.2.3 den Wert der Funktion $V(x_0) = \frac{\mu}{\beta}$ bestimmt. Die Ableitungen von beiden Seiten sind beide 1. Damit ist $V(x)$ differenzierbar. Die zweite Ableitung von rechts an der Stelle x_0 ist 0. Für die zweite Ableitung von links erhalten wir

$$\frac{\theta_1(0)^2 e^{\theta_1(0)x_0} - \theta_2(0)^2 e^{-\theta_2(0)x_0}}{\theta_1(0)e^{\theta_1(0)x_0} + \theta_2(0)e^{-\theta_2(0)x_0}} = \frac{\theta_1(0)^2 e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} - \theta_2(0)^2}{\theta_1(0)e^{(\theta_1(0)+\theta_2(0))x_0} + \theta_2(0)}$$

Hier setzen wir unsere Gleichung für x_0 (3.14) ein und erhalten

$$\begin{aligned} &= \frac{\theta_1(0)^2 \frac{\beta+\mu\theta_2(0)}{\beta-\mu\theta_1(0)} - \theta_2(0)^2}{\theta_1(0)\frac{\beta+\mu\theta_2(0)}{\beta-\mu\theta_1(0)} + \theta_2(0)} = \frac{\mu\theta_1(0)\theta_2(0) - \beta(\theta_2(0) - \theta_1(0))}{\beta} \\ &= \frac{1}{\beta}\left(\mu\frac{2r\sigma^2}{\sigma^4} - \beta\frac{2\mu}{\sigma^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass $V(x)$ zweimalig stetig differenzierbar ist.

Weil die Ableitungen im beschränkten Fall gegen die Ableitungen des unbeschränkten Falls konvergieren können wir die HJB-Gleichung intuitiv aus (3.3) herleiten. Wir schreiben die Formel um zu

$$\max\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + \mu f'(x) - \beta f(x), \frac{1}{m}\left(\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + (\mu - m)f'(x) - \beta f(x) + m\right)\right\} = 0.$$

Bilden wir den Grenzwert für $m \to \infty$ erhalten wir eine Idee für die HJB-Gleichung.

Satz 3.2.5: Die Funktion $V(x)$ erfüllt die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

$$\max\left\{\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \beta V(x), 1 - V'(x)\right\} = 0. \tag{3.15}$$

Beweis: Für $x \leq x_0$ gilt nach Konstruktion $V'(x) \geq 1$. Folglich gilt $1 - V'(x) \leq 0$. Aus der Konstruktion von f_1 folgt, dass $\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V''(x) - \beta V(x) = 0$ gilt.

Für $x > x_0$ ist $V'(x) = 1$ und es folgt $1 - V'(x) = 0$. Es gilt weiters $V''(x) = 0$ und damit

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V''(x) + \mu V'(x) - \beta V(x) = \mu - \beta V(x) \leq \mu - \beta\frac{\mu}{\beta} = 0.$$

Wir benutzen hierbei, dass $V(x) \geq V(x_0) = \frac{\mu}{\beta}$ für $x > x_0$ gilt. □

Wir benötigen nun nur noch die optimale Dividendenstrategie. Wir handeln optimal, wenn wir zu jedem Zeitpunkt jenes Kapital auszahlen, welches den Barrierewert x_0 übersteigt.

Satz 3.2.6: Für den optimalen Kontrollprozess $\mathbf{C}^*$ gilt $C_t = \max\{\sup_{0\leq s\leq t\wedge\tau} Y_s - x_0, 0\}$ für $Y_t = x + \mu t + \sigma W_t$ und für alle $t \in I$.

Beweis: Ist unser Startkapital bereits größer als die Schranke x_0, dann beginnen wir gleich damit die Differenz auszuzahlen, d.h. $C_0^* = x - x_0$ falls $x > x_0$. Weil $V(x) = V(x_0) + x - x_0$ gilt, reicht es die optimale Strategie für $x \leq x_0$ zu bestimmen.

Sei $X_t^* \leq x_0$. Der Prozess $\mathbf{C}^*$ ist stetig und wachsend und daher von beschränkter Variation. Daher können wir die Itô-Formel anwenden:

$$\begin{aligned} e^{-\beta(\tau\wedge t)}V(X^*_{\tau\wedge t}) &= V(x) + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s}\left(\mu V'(X_s^*) + \frac{1}{2}\sigma^2 V''(X_s^*) - \beta V(X_s^*)\right) dW_s \\ &\quad - \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s} V'(X_s^*)\, dC_s^* + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s}\sigma V'(X_s^*)\, dW_s \\ &= V(x) - \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s}\, dC_s^* + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s}\sigma V'(X_s^*)\, dW_s \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

Wir wenden dabei die HJB-Gleichung (3.15) und die Tatsache, dass $\mathbf{C}^*$ nur wächst wenn $X_s^* = x_0$ gilt, an. Die Ableitung $V'(x)$ ist beschränkt und folglich gilt, dass $(\int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s}\sigma V'(X_s^*)\, dW_s)_{t\in I}$ ein Martingal ist. Wenn wir die Erwartungswerte bilden erhalten wir

$$V(x) = \mathbb{E}_{0,x}\left[e^{-\beta(\tau\wedge t)}V(X^*_{\tau\wedge t}) + \int_0^{\tau\wedge t} e^{-\beta s}\, dC_s^*\right].$$

Wir bilden den Grenzwert $t \to \infty$. Weil $V(X^*_{\tau\wedge t})$ beschränkt ist können wir das Integral und den Limes vertauschen. Mit $V(X_\tau) = 0$ folgt dann $V(x) = V^{C^*}(x)$. □

Bemerkung: Für unbeschränkte Dividenden tritt der Ruin fast sicher ein. Das kann direkt aus der Brownschen Bewegung und der Tatsache, dass $\mathbf{X}^*$ beschränkt ist, gefolgert werden. Alternativ können wir den Prozess $\mathbf{X}$ betrachten, wessen Dividendenprozess durch $C_t = c_0 1_{X_t > x_0}$ beschrieben wird, wobei x_0 wie für das vorherige Modell gewählt wird. Es gilt dann $X_t \geq X_t^*$ für alle $t \in I$ weil $C_t \leq C_t^*$. Somit gilt ebenfalls $\tau^* \leq \tau^C < \infty$.

3.3. Monotone Follower Problem

Wir bleiben auf dem unendlichen Zeithorizont $I = [0, \infty)$. Bei dem vorherigen Modell hatten wir cádlág-Pfade für die Kontrollprozesse vorgesehen. Bei Sprüngen können wir mit solchen Prozessen jedoch erst verspätet reagieren. Unsere Werte hängen von den Werten vor der aktuellen Dividendenzahlung ab.

Erst mit cáglád-Pfaden reagiert der Kontrollprozess, und damit das Modell, direkt auf Sprünge. Wir wollen diese Methode anhand des Monotone Follower Problems besprechen. Dieses Modell basiert auf der Arbeit [Kar81]. Wir verwenden für unsere Betrachtung die Referenzen [Gül11] und [FS93].

Für dieses Modell verwenden wir einen allgemeineren Diffusionsprozess als für das erste Modell. Die Funktionen μ und σ sollen nicht konstant, sondern nur unabhängig von dem Parameter t sein. Zusätzlich werden wir allgemeinere Nutzenfunktionen verwenden.

Für diese Modell werden wir ohne Stoppzeit τ arbeiten. Die Ergebnisse lassen sich aber auch auf ein Modell mit dem Ruinzeitpunkt als Stoppzeit anwenden.

Definition 3.3.1 (Modell)**:** Sei $(W_t)_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. μ und σ seien reelle, messbare Funktionen und $x \geq 0$. Der Zustandsprozess $\mathbf{X}$ sei gegeben mit

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t - dC_t, \\ X_0 &= x, \end{aligned} \tag{3.16}$$

wobei $\mathbf{X}$ eindeutig lösbar sein soll. $\mathbf{C}$ ist unser Kontrollprozess und die Menge der zulässigen Kontrollprozesse $\mathcal{A}$ umfasst alle adaptierten cáglád-Prozesse mit nicht fallenden Pfaden und $C_0 = 0$.

Bemerkung: Die Lösung von (3.16) ist ein Semimartingal mit cáglád-Pfaden. Es ist leicht zu sehen, dass

$$dM_t = \sigma(X_t)\,dW_t \quad \text{und} \quad dA_t = \mu(X_t)\,dt - dC_t$$

gilt.

Wir definieren unser Zielfunktional für ein $x \in \mathbb{R}^+$, positive Konstanten r und K und eine nicht negative Funktion h, für welche das folgende Integral existieren soll, mit

$$J(0, x, \mathbf{C}) := \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} h(X_t)\,dt + K\int_0^\infty e^{-\beta t}\,dC_t\right].$$

Unsere Wertfunktion erhalten wir wie gewohnt mit

$$V(x) = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} J(0, x, \mathbf{C}).$$

Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung erhalten wir ähnlich wie im ersten Modell.

Satz 3.3.2: Sei $V \in C^2$. Dann erfüllt V die folgende HJB-Gleichung

$$\max\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(x)V''(x) + \mu(x)V'(x) - \beta V(x) + h(x), K - V'(x)\right\} = 0. \tag{3.17}$$

Beweis: Für ein $\tilde{t} > 0$ betrachten wir den folgenden Kontrollprozess

$$\widetilde{C}_t := \begin{cases} 0 & t \in [0, \tilde{t}], \\ \widetilde{C}^*_{t-\tilde{t}} & t > \tilde{t} \end{cases}.$$

Der Prozess $\widetilde{\mathbf{X}}$ beschreibt unseren Zustandsprozess aus (3.16) mit dem Kontrollprozess $\widetilde{\mathbf{C}}$. Weiters beschreibt $\widetilde{\mathbf{C}}^*$ den optimalen Kontrollprozess für einen Zustandsprozess mit Startkapital $\widetilde{X}_{\tilde{t}}$.

Der Prozess $\widetilde{\mathbf{C}}$ beschreibt die Strategie: „Zahle bis $\tilde{t}$ keine Dividenden aus und verhalte dich ab $\tilde{t}$ optimal.“ Wir erhalten für das Zielfunktional von $\widetilde{\mathbf{C}}$:

$$\begin{aligned} J(0, x, \widetilde{\mathbf{C}}) &= \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^{\tilde{t}} e^{-\beta t} h(\widetilde{X}_t)\, dt + \int_{\tilde{t}}^{\infty} e^{-\beta t} h(\widetilde{X}_t)\, dt + K \int_{\tilde{t}}^{\infty} e^{-\beta t}\, d\widetilde{C}^*_t\right] \\ &= \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^{\tilde{t}} e^{-\beta t} h(\widetilde{X}_t)\, dt + e^{-\beta \tilde{t}} V(\widetilde{X}_{\tilde{t}})\right] \leq V(x). \end{aligned}$$

Mit der Itô-Formel erhalten wir für $\mathbb{E}_{0,x}[e^{-\beta\tilde{t}} V(\widetilde{X}_{\tilde{t}})]$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{0,x}\left[e^{-\beta\tilde{t}} V(\widetilde{X}_{\tilde{t}})\right] = \\ &\quad \mathbb{E}_{0,x}\left[V(x) + \int_0^{\tilde{t}} e^{-\beta t}\left(\frac{\sigma^2(\widetilde{X}_t)}{2} V''(\widetilde{X}_t) + \mu(\widetilde{X}_t)V'(\widetilde{X}_t) - \beta V(\widetilde{X}_t)\right) dt\right], \end{aligned}$$

wobei wir hierbei wieder verwenden, dass das Itô-Integral ein Martingal ist und Erwartungswert null hat. Mit einsetzen des Ergebnisses in die erste Gleichung erhalten wir

$$\mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^{\tilde{t}} e^{-\beta t}\left(\frac{\sigma^2(\widetilde{X}_t)}{2} V''(\widetilde{X}_t) + \mu(\widetilde{X}_t)V'(\widetilde{X}_t) - \beta V(\widetilde{X}_t) + h(\widetilde{X}_t)\right) dt\right] \leq 0.$$

Wir dividieren durch $\tilde{t}$, bilden den Grenzwert und erhalten den ersten Teil der HJB-Gleichung:

$$\frac{\sigma^2(x)}{2} V''(x) + \mu(x)V'(x) - \beta V(x) + h(x) \leq 0. \tag{3.18}$$

Wir betrachten eine zweite Strategie $\overline{\mathbf{C}}$ für ein Kapital $\overline{x} > 0$.

$$\overline{C} := \begin{cases} 0 & t = 0 \\ \overline{C}^*_t + \overline{x} & t > 0 \end{cases}$$

Hierbei beschreibt $\overline{\mathbf{C}}^*$ die optimale Strategie für ein Startkapital $x - \overline{x}$. Der Zustandsprozess $\overline{\mathbf{X}}$ ist die Lösung von (3.16) mit dem Kontrollprozess $\overline{\mathbf{C}}$. Der Kontrollprozess $\overline{\mathbf{C}}$ beschreibt die Strategie: „Zahle zunächst $\overline{x}$ aus und handle anschließend (mit dem verbliebenen Kapital) optimal.“ Mit $\overline{\mathbf{C}}$ kann der zweite Teil der HJB-Gleichung hergeleitet werden.

$$\begin{aligned} J(0, x, \overline{\mathbf{C}}) &= \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} h(\overline{X}_t)\, dt + K\overline{x} + K\int_0^\infty e^{-\beta t}\, d\overline{C}_t^*\right] \\ &= K\overline{x} + V(x - \overline{x}) \leq V(x). \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist äquivalent zu

$$K \leq \frac{V(x) - V(x - \overline{x})}{\overline{x}}.$$

Wir bilden den Grenzwert für $\overline{x} \to 0$ und erhalten den zweiten Teil der HJB-Gleichung

$$\begin{aligned} & K \leq V'(x) \\ \Leftrightarrow \quad & K - V'(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Es ist möglich zu zeigen, dass für jedes x in (3.18) oder (3.19) Gleichheit herrscht. Der Beweis für diesen Teil kann beispielsweise in [FS93] nachgelesen werden. □

Uns fehlt noch ein Verifikationstheorem. Wir erinnern uns an unser erstes Modell: Wir suchen ein x_0, sodass für die Wertfunktion V gilt:

1. $\frac{\sigma^2}{2}(x)V''(x) + \mu(x)V'(x) - \beta V(x) + h(x) = 0$ für $x \leq x_0$ und
2. $K - V'(x) = 0$ für $x > x_0$.

Wir verwenden hierfür das von Lions und Sznitman beschriebene Skorohod Problem (siehe [Gül11], Lemma 2.16). Die Hintergründe zu dem folgenden Satz können in [LS84] nachgelesen werden.

Satz 3.3.3 (Skorohod Problem)**:** Es existieren eindeutige cáglád-Prozesse $\mathbf{X}^*$ und $\mathbf{C}^*$ sodass gilt:

(i) $X_t^* \leq x_0$ für alle $t > 0$,
(ii) $\mathbf{C}^*$ hat nicht fallende Pfade mit $C_0^* = 0$,
(iii) $x + \int_0^t \mu(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dW_s = X_t^* + C_t^* \quad \forall t \geq 0$,
(iv) $\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{s \geq 0 | X_s^* < x_0\}}\, dC_s^* = 0$.

Weiters sind $\mathbf{X}^*$ und $\mathbf{C}^*$ stetig genau dann, wenn $x \leq x_0$ gilt. Für $x > x_0$ gilt für den Kontrollprozess $C_{0+}^* - C_0^* = x - x_0$.
Erfüllen $\mathbf{X}^*$ und $\mathbf{C}^*$ alle genannten Bedingungen, dann sagen wir, dass $\mathbf{X}^*$ und $\mathbf{C}^*$ das Skorohod Problem erfüllen.

Das Verifikationstheorem folgt mit dem Skorohod Problem.

Satz 3.3.4 (Verifikationstheorem)**:** Sei $f \in C^2$ eine Lösung der HJB-Gleichung (3.17) und sei $(\mathbf{X}^*, \mathbf{C}^*)$ eine Lösung des Skorohod Problems. Gilt außerdem

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\beta t}\mathbb{E}[f(X_t)] = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \mathbf{C} \in \mathcal{A}, \tag{3.20}$$

dann ist f die Wertfunktion und $\mathbf{C}^*$ der optimale Kontrollprozess.

Beweis: Sei $f \in C^2$, $x \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{C} \in \mathcal{A}$. Wie wir wissen ist $\mathbf{X}$ ein Semimartingal. Wir können daher die Itô-Formel für Semimartingale (mit cáglád-Pfaden) (1.4) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{0,x}\left[e^{-\beta t}f(X_t)\right] = f(x)& \\ &+ \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^t e^{-\beta s}\left(-\beta f'(X_s) + \frac{\sigma^2(X_s)}{2}f''(X_s) + \mu(X_s)f'(X_s)\right)ds\right] \\ &- \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^t e^{-\beta s}f'(X_s)\,dC_s^c\right] \\ &+ \mathbb{E}_{0,x}\left[\sum_{s\in D_C\cap(0,t]}\{f(X_{s^+}) - f(X_s)\}\right] \quad \forall t \in I.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Das Itô-Integral ist wieder ein Martingal und wird unter dem Erwartungswert null. f erfüllt die HJB-Gleichung aus (3.17). Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung können wir die Elemente der Summe umformen und schließlich mit unserem Wissen aus der HJB-Gleichung abschätzen. Es gilt

$$f(X_{s^+}) - f(X_s) = f'(\zeta_s)\cdot(X_{s^+} - X_s) = -f'(\zeta_s)(C_{s^+} - C_s) \le -K\cdot(C_{s^+} - C_s),$$

für ein $\zeta_s \in (X_{s^+}, X_s)$. Die Integranden der beiden Integrale können wir ebenfalls mit der HJB-Gleichung abschätzen.

$$\begin{aligned}e^{-\beta s}\left(-\beta f'(X_s) + \frac{\sigma^2(X_s)}{2}f''(X_s) + \mu(X_s)f'(X_s)\right) &\le -e^{-\beta s}h(X_s) \\ e^{-\beta s}f'(X_s) &\ge Ke^{-\beta s}\end{aligned}$$

Fassen wir diese drei Abschätzungen zusammen erhalten wir

$$\mathbb{E}_{0,x}\left[e^{-\beta t}f(X_t)\right] \le f(x) - \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^t e^{-\beta s}h(X_s)\,ds + K\int_0^t e^{-\beta s}\,dC_s\right] \quad \forall t \in I. \tag{3.22}$$

Der letzte Term entspricht unserem Zielfunktional. Wenn wir den Grenzwert für $t \to \infty$ bilden erhalten wir, unter Verwendung der Eigenschaft (3.20), das Ergebnis:

$$0 \le f(x) - J(0, x, \mathbf{C}).$$

Wir haben $\mathbf{C} \in \mathcal{A}$ beliebig gewählt. Deswegen folgt $f(x) \geq V(x)$.

Sei nun $\mathbf{X}^*$ und $\mathbf{C}^*$ wie im Skorohod Problem beschrieben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $x \leq x_0$
In diesem Fall sind nach dem Skorohod Problem $\mathbf{X}^*$ und $\mathbf{C}^*$ stetig. Nach Kondition (iv) wächst der Prozess $\mathbf{C}^*$ nur für $X_t^* \geq x_0$. Mit diesem Wissen erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-\beta s} f'(X_s^*)\, dC_s^{*,c} = \int_0^\infty e^{-\beta s} f'(x_0)\, dC_s^* = K \int_0^\infty e^{-\beta s}\, dC_s^*$$

Nach Bedingung (i) gilt $X_t^* \leq x_0$ für alle $t \in I$ und es folgt die Gleichheit in der Formel (3.22).

$$\mathbb{E}_{0,x}\left[e^{-\beta t} f(X_t^*)\right] = f(x) - \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^t e^{-\beta s} h(X_s)\, ds + K \int_0^t e^{-\beta s}\, dC_s\right]$$

Bilden wir wieder den Grenzwert für $t \to \infty$ erhalten wir $f(x) = J(0, x, \mathbf{C}^*) = V(x)$.

Fall 2: $x > x_0$
In diesem Fall gilt mit dem Skorohod Problem: $C_{0+}^* = x - x_0$, $X_t^* \leq x_0$ für $t > 0$ und $(C_t^*)_{t>0}$ ist stetig. Für $X_t^* \leq x_0$ ist das erste Intervall von (3.21) null. Wir wenden wieder den Mittelwertsatz der Differentialgleichung an und sagen es gibt ein $\zeta_0 \in (x_0, x)$, sodass für jedes $t > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{0,x}\left[e^{-\beta t} f(X_t^*)\right] &= f(x) - \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^t e^{-\beta s} h(X_s^*)\, ds\right] \\ &\quad - \mathbb{E}_{0,x}\left[K \int_0^t e^{-\beta s}\, dC_s^{*,c} + f'(\zeta_0) \cdot (C_{0+} - C_0)\right] \qquad (3.23)\end{aligned}$$

gilt. Wegen $x > x_0$ gilt $f'(\zeta_0) = K$. Damit verkürzt sich unsere Gleichung (3.23) zu

$$\mathbb{E}_{0,x}\left[e^{-\beta t} f(X_t^*)\right] = f(x) - \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_0^t e^{-\beta s} h(X_s^*)\, ds - K \int_0^t e^{-\beta s}\, dC_s^*\right].$$

Wie schon im Fall 1 zeigt sich, dass $f(x) = V(x)$ gilt.

Damit ist f die Wertfunktion und $\mathbf{C}^*$ ist der optimale Kontrollprozess.

□

3.4. Dividenden in endlicher Zeit

Wir wollen nun Dividendenzahlungen auf einem endlichen Zeithorizont betrachten. Wir wählen ein $T < \infty$ und arbeiten mit dem Intervall $I = [0, T]$. Das Modell ändert sich im Vergleich zu den Vorgaben für einen unendlichen Zeithorizont nur geringfügig.

Die Inhalte zu diesem Modell stammen aus der Referenz [Gra13].

Wir werden sehen, dass auch in diesem Fall eine Barrierestrategie die optimale Lösung des Problems beschreibt. Anders als in den bisherigen Modellen wird die Barriere aber vom Zeitpunkt t abhängen. Wir werden diese Barrierefunktion mit $b(t)$ bezeichnen.

Definition 3.4.1 (Modell)**:** Sei $(W_t)_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit einer rechtsstetigen, vollständigen Filtrierung $\mathbb{F}$. Für jeden zulässigen Kontrollprozess $\mathbf{C}$ sei unserer Zustandsprozess $\mathbf{X}$ beschrieben mit

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t - C_t, \quad 0 \leq t \in I.$$

Hierbei sind x, μ und σ positive Konstanten. Sie beschreiben das Startkapital, die mittlere Schwankung und die Volatilität des Prozesses.

Die Menge der zulässigen Kontrollprozesse $\mathcal{A}$ umfasst alle adaptierten, nicht fallenden, cágląd-Prozesse, welche außerdem noch $\Delta C_t \leq X_t$ für alle $t \in I$ erfüllen.

Unser laufender Nutzen lautet wie bisher $\psi(t, X_t, C_t) = e^{-\beta t}c$ für eine Zinsrate $\beta > 0$ und für positive Dividendenzahlungen c. Als Endnutzen wählen wir $\Psi(T, X_T) = e^{-\beta T}X_T$. Der Endnutzen kann so interpretiert werden, dass wir den Wert der Aktie zum Endwert T als letzte Dividende auszahlen.

Für unser Zielfunktional folgt

$$J(0, x, \mathbf{C}) = \mathbb{E}_{0,x}\left[\int_{[0,\tau)} e^{-\beta s}\, dC_s + e^{-\beta\tau}X_\tau\right],$$

wobei τ den Ruinzeitpunkt der Aktie oder, im Fall von keinem Ruin bis zum Zeitpunkt T, den Endzeitpunkt beschreibt. Das heißt $\tau = \inf\{s > 0 | X_s = 0\} \wedge T$.

Bemerkung: Nur wenn der Prozess X_t nicht in den Ruin eintritt, ist $X_\tau > 0$. Tritt ein Ruin ein ($\tau < T$) fällt der Endnutzen weg.

Unsere Wertfunktion ergibt sich wie gewohnt.

$$V(t, x) = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_{[t,\tau)} e^{-\beta s}\, dC_s + e^{-\beta\tau}X_\tau\right] \tag{3.24}$$

Wie schon für das Monotone Follower Problem erhalten wir die folgende Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung.

Satz 3.4.2: Eine Wertfunktion $V(x)$ für das Modell 3.4.1 löst die HJB-Gleichung

$$\begin{aligned}
&\max\{\frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}(x) + \mu V_x(x), e^{-\beta t} - V_x\} \quad \text{mit}\\
&V(T, x) = e^{-\beta T}x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und}\\
&V(t, 0) = 0 \quad 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Der Beweis für diese Aussage kann ähnlich wie in 3.3.4 geführt werden. Diverse Lösungsansätze und Referenzen für verschiedene Lösungswege sind in [Gra13], Seite 198 beschrieben.

Wir wollen uns mit der Suche nach der Wertfunktion und dem optimalen Kontrollprozess befassen. Diese können über das leichter zu lösende *Approximationsmodell* gefunden werden. Für ein $\epsilon > 0$ gilt auf diesem die *approximative Wertfunktion*

$$V^{(\epsilon)}(t,x) = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_{[t,\tau)} e^{-\beta s}\, dC_s + e^{-\beta\tau} H^{(\epsilon)}(X_\tau)\right], \tag{3.25}$$

mit dem *approximativen Endnutzen* $H^{(\epsilon)}$.

Die aus dem Approximationsmodell resultierende Lösung bezeichnen wir als *ϵ-optimale Lösung*. Wir werden zeigen, dass die ϵ-optimale Lösung gegen die Lösung aus unserem ursprünglichen Modell konvergiert. Zunächst betrachten wir jedoch den approximativen Endnutzen genauer.

Wir verwenden im folgenden zur Verkürzung unserer Formeln die Werte $\hat{\beta} = \frac{\beta}{\sigma^2}$ und $\hat{\mu} = \frac{\mu}{\sigma}$.

Definition 3.4.3 (Eigenschaften approximativer Endnutzen)**:** Für ein $\epsilon \leq \epsilon_0$ hat der *approximative Endnutzen* $H^{(\epsilon)}(x)$ (hier H) die folgenden Eigenschaften zu erfüllen:

(i) $H(x) \in C^4([-\epsilon,\epsilon]) \cap C^2([-\epsilon,\infty))$,
(ii) $H(0) = 0$,
$H(\epsilon) = \epsilon + H_0$
(iii) $H'(0) = H_1$,
$H'(\epsilon) = 1$,
(iv) $H''(0) = -2\hat{\mu}H_1$,
$H''(\epsilon) = 0$,
(v) $H'''(0) = 3\hat{\mu}^2 H_1 + H_3$,
$H'''(\epsilon) = 2\hat{\beta}$,
(vi) $H^{(IV)}(0) = -4\hat{\mu}^3 H_1 - 4\hat{\mu}H_3$,
$H^{(IV)}(\epsilon) = \frac{4\hat{\beta}}{\sigma^2}H_4 - 4\hat{\mu}\hat{\beta}$,
(vii) $H(-x) = -H(x)e^{2\hat{\mu}x}$ für $x \in [0,\epsilon]$ und
(viii) $H^{(\epsilon)}(x) = x + H_0$ für $x \geq \epsilon$,
(ix) $H'(x) \geq 0$ und $H''(x) \leq 0$ für $x \in [-\epsilon,\epsilon]$,
(x) $2\hat{\mu}H''(x) + H'''(x) > 0$ für $x \in [-\epsilon,\epsilon]$.

Die Werte H_0 und H_1 sind nur abhängig von ϵ, mit dem asymptotischen Verhalten

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{H_0(\epsilon)}{\epsilon^2} = \frac{2}{7}\hat{\mu} \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{H_1(\epsilon)-1}{\epsilon} = \hat{\mu}. \tag{3.26}$$

Für H_3 gelte $H_3 = 6\hat{\mu}^2$ und H_4 sei ein beliebiger, von ϵ unabhängiger Wert.

Aus diesen Vorgaben für $H^{(\epsilon)}$ folgt direkt, dass $|H(x) - x| = O(\epsilon^2)$ für $x \in \mathbb{R}^+$ gilt. Die Existenz einer Funktion mit den Eigenschaften aus 3.4.3 zeigt der folgende Satz.

Satz 3.4.4: Für ein kleines $\epsilon \leq \epsilon_0$ existiert eine Funktion $h(x)$, welche die Eigenschaften aus Definition 3.4.3 erfüllt.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Konstruktion einer geeigneten Funktion h.
Um die Konstruktion zu vereinfachen teilen wir die Anforderungen auf und konstruieren h auf zwei Schritte: $h = f + g$. f soll die Eigenschaften der ersten zwei Ableitungen abdecken, g die der dritten und vierten Ableitung. Wir starten mit f und behandeln zunächst nur den Bereich $x \in [0, \epsilon]$. f soll die folgenden Bedingungen erfüllen:

(F1) $f(0) = 0$,
$f(\epsilon) = \epsilon + H_0$,
(F2) $f'(0) = H_1$,
$f'(\epsilon) = 1$,
(F3) $f''(0) = -2\hat{\mu}H_1$,
$f''(\epsilon) = 0$,
(F4) $f'''(0) = f'''(\epsilon) = f^{(IV)}(0) = f^{(IV)}(\epsilon)$,
(F5) $f'(x) \geq 1$ für $x \in [0, \epsilon]$,
(F6) $f''(x) + 4\hat{\mu}f'(x) + 4\hat{\mu}f(x) \geq \hat{\mu}$ für $x \in [0, \epsilon]$.

Wir definieren die vierte Ableitung mit

$$f^{(IV)}(x) = \alpha x \left(x - \frac{\epsilon}{2}\right)(x - \epsilon) \quad x \in [0, \epsilon].$$

α sei vorläufig noch beliebig gewählt. Wir werden es später durch die Eigenschaften von f exakt bestimmen. Für die vierte Ableitung sind mit dieser Funktion alle Bedingungen erfüllt. Mittels des Hauptsatzes der Integralrechnung und der Randbedingung für $f'''(0)$ aus Eigenschaft (F4) erhalten wir für die dritte Ableitung:

$$f'''(x) = \frac{\alpha x^2}{4}(x - \epsilon)^2 \quad x \in [0, \epsilon].$$

Mit $x = \epsilon$ erhalten wir, dass auch $f'''(\epsilon) = 0$ gilt. Damit sind alle Bedingungen von (F4) erfüllt.

Für die weiteren Ableitungen integrieren wir wieder und verwenden die Randbedingungen aus den Bedingungen (F1), (F2) und (F3). Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -2\hat{\mu}H_1 + \alpha\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\epsilon x^4}{8} + \frac{\epsilon^2 x^3}{12}\right) && x \in [0, \epsilon], \\
f'(x) &= H_1 - 2\hat{\mu}H_1 x + \alpha\left(\frac{x^6}{120} - \frac{\epsilon x^5}{40} + \frac{\epsilon^2 x^4}{48}\right) && x \in [0, \epsilon] \quad \text{und} \\
f(x) &= H_1 x - \hat{\mu}H_1 x^2 + \alpha\left(\frac{x^7}{840} - \frac{\epsilon x^6}{240} + \frac{\epsilon^2 x^5}{240}\right) && x \in [0, \epsilon].
\end{aligned}$$

Wir müssen noch die Bedingungen für den Punkt ϵ sicherstellen. Wir verwenden die Vorgaben aus (F1) - (F3) um die noch offenen Konstanten H_1, H_0 und α zu bestimmen.

$$\begin{aligned} f''(\epsilon) &= 0 = -2\hat{\mu}H_1 + \alpha\frac{\epsilon^5}{120} \\ f'(\epsilon) &= 1 = H_1 - 2\hat{\mu}H_1\epsilon + \alpha\frac{\epsilon^6}{240} \\ f(\epsilon) &= \epsilon + H_0 = H_1\epsilon - \hat{\mu}H_1\epsilon^2 + \alpha\frac{\epsilon^7}{840} \end{aligned}$$

Durch lösen dieses Systems erhalten wir:

$$\alpha = \frac{240\hat{\mu}}{\epsilon^5(1-\epsilon\hat{\mu})}, \quad H_1 = \frac{1}{1-\epsilon\hat{\mu}} \quad \text{und} \quad H_0 = \frac{2}{7}\hat{\mu}H_1\epsilon^2.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass H_0 und H_1 das gleiche asymptotische Verhalten wie in (3.26) aufweisen.

Damit erfüllt unsere definierte Funktion die Bedingungen (F1) bis (F4). Die Eigenschaften (F5) und (F6) können durch nachrechnen leicht gezeigt werden.

Für den zweiten Teil g verwenden wir nun die Eigenschaften für die dritte und vierte Ableitung:

(G1) $g(0) = g(\epsilon) = g'(0) = g'(\epsilon) = g''(0) = g''(\epsilon) = 0$,
(G2) $g'''(0) = 3\hat{\mu}^2H_1 + H_3$,
$g'''(\epsilon) = 2\hat{\beta}$,
(G3) $g^{(IV)}(0) = -4\hat{\mu}^3H_1 - 4\hat{\mu}H_3$,
$g^{(IV)}(\epsilon) = \frac{4\hat{\beta}}{\sigma^2}H_4 - 4\hat{\mu}\hat{\beta}$.

Wir wählen den Ansatz $g(x) = x^3(x-\epsilon)^3(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3)$. Aus den vier Ableitungen und den Bedingungen (G1) - (G3) können wir mittels Koeffizientenvergleich die konstanten α-Werte bestimmen:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{3\hat{\mu}^2H_1 + H_3}{6\epsilon^3}, \\ \alpha_1 &= \frac{\hat{\mu}^3H_1 + \hat{\mu}H_3}{6\epsilon^3} - \frac{3\hat{\mu}^2H_1 + H_3}{2\epsilon^4}, \\ \alpha_2 &= \frac{9\hat{\mu}^2H_1 + 3H_3 + 4\hat{\beta}}{2\epsilon^5} - \frac{2\hat{\mu}^3H_1 + 2\hat{\mu}H_3 + \frac{\hat{\beta}}{\sigma^2}H_4 - \hat{\mu}\hat{\beta}}{6\epsilon^4} \quad \text{und} \\ \alpha_3 &= \frac{\hat{\mu}^3H_1 + \hat{\mu}H_3 + \frac{\hat{\beta}}{\sigma^2}H_4 - \hat{\mu}\hat{\beta}}{6\epsilon^5} - \frac{15\hat{\mu}^2H_1 + 5H_3 + 10\hat{\beta}}{6\epsilon^6}. \end{aligned}$$

Wobei H_1 bereits aus dem Teil für f bekannt ist und die Werte H_3 und H_4 nach Definition 3.4.3 von ϵ unabhängige Konstanten sind.

Unsere Funktion $h = f + g$ erfüllt dann die Bedingungen (ii) bis (vi). Wir verwenden die Eigenschaften aus 3.4.3 und definieren die Funktion auf $[-\epsilon, 0]$ und $[\epsilon, \infty)$ entsprechend

der Vorgaben (vii) und (viii). Die Stetigkeit der Ableitungen kann leicht überprüft werden. Die noch verbleibenden Bedingungen (ix) und (x) können in [Gra13] nachgelesen werden. □

Wir können jetzt zeigen, dass die approximative Wertfunktion (3.25) gegen die Wertfunktion (3.24) aus unserem ursprünglichen Problem konvergiert.

Satz 3.4.5: Sei $V^{(\epsilon)}(t,x)$ wie in (3.25) konstruiert. Dann konvergiert $V^{(\epsilon)}(t,x)$ gleichmäßig gegen $V(t,x)$, d.h. $\lim_{\epsilon\to 0}\sup_{(t,x)\in[0,T]\times[0,\infty)}\left|V(t,x)-V^{(\epsilon)}(t,x)\right|=0$.

Beweis: $V(t,x)$ und $V^{(\epsilon)}(t,x)$ unterscheiden sich nur in der Wahl des Endnutzens $e^{-\beta\tau}H^{(\epsilon)}(X_\tau)$ statt $e^{-\beta\tau}X_\tau$.

Unser gewähltes $H^{(\epsilon)}$ erfüllt die Bedingung $|H^{(\epsilon)}(x)-x|=O(\epsilon^2)$ für $x\in[0,\infty)$. Damit folgt für jeden erlaubten Kontrollprozess $\mathbf{C}$, dass $|J(t,x,\mathbf{C})-J^{(\epsilon)}(t,x,\mathbf{C})|=O(\epsilon^2)$ für alle $(t,x)\in[0,T]\times[0,\infty)$ gilt. Daraus folgt bereits die Aussage. □

Wir versuchen nun für unser Approximationsmodell den optimale Kontrollprozess zu finden. Wir bezeichnen diesen als approximativen Kontrollprozess. Wie wir sehen werden, ist dieser leider etwas komplizierter als im Fall mit unbeschränktem Zeithorizont. Eines haben sie jedoch wieder gemeinsam: Auch hier wird es wieder eine Barriere geben, welche unsere Dividendenzahlungen vorgibt. Wir befassen uns zunächst mit dem Verifikationstheorem und anschließend werden wir uns mit der Barrierefunktion $b(t)$ genauer befassen.

Satz 3.4.6 (Verifikationstheorem)**:** Sei eine Funktion $\widetilde{V}(t,x)$ und eine Barrierefunktion $b(t)$ gegeben, welche die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) $\widetilde{V}(T,x)=e^{-\beta T}H(x)$, $x\geq 0$,
(ii) $\widetilde{V}_t+\mu\widetilde{V}_x+\frac{\sigma^2}{2}\widetilde{V}_{xx}=0$ und
$\widetilde{V}_x\geq e^{-\beta t}$ für $0\leq x\leq b(t)$, $0\leq t\leq T$,
(iii) $\widetilde{V}_t+\mu\widetilde{V}_x+\frac{\sigma^2}{2}\widetilde{V}_{xx}\leq 0$ und
$V_x^{(\epsilon)}=e^{-\beta t}$ für $x\geq b(t)$, $0\leq t\leq T$,
(iv) $\widetilde{V}(t,0)=0$, $0\leq t\leq T$,
(v) $\widetilde{V}(t,x),\widetilde{V}_t(t,x),\widetilde{V}_x(t,x),\widetilde{V}_{xx}(t,x)$ sind stetig für $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}_0^+$,
(vi) $b(t)>0$ für $0\leq t\leq T$,
$b(T)=\epsilon$,
$b\in C^1([0,T])$,

dann ist $\widetilde{V}=V^{(\epsilon)}$ die approximative Wertfunktion aus (3.25).

Der optimale Kontrollprozess $\mathbf{C}^*$ und der optimale Zustandsprozess $\mathbf{X}^*$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} C_t^* &= \max_{0\leq s\leq t}[x+\mu s+\sigma W_s-b(s)]^+, \quad t>0,\\ C_0^* &= 0, \\ X_t^* &= x+\mu t+\sigma W_t+C_t^*. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Beweis: Sei $\mathbf{C}$ ein beliebiger zulässiger Kontrollprozess $\mathbf{C} \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathbf{C}$ adaptiert, nicht fallend, cáglád und mit $\Delta C_t \leq X_t$ von beschränkter Variation. Folglich ist der Prozess $X_t = x + \mu t + \sigma W_t - C_t$ ein Semimartingal. Nachdem für unsere Funktion nach Voraussetzung auch $\widetilde{V}(t, X_t) \in C^{1,2}$ gilt, können wir die Itô-Formel für Semimartingale (1.4) anwenden und erhalten für $\mathbb{E}_{t,x}[\widetilde{V}(\tau, X_\tau)]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t,x}\left[\widetilde{V}(\tau, X_\tau)\right] = &\widetilde{V}(t,x) + \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau \widetilde{V}_t(s, X_s)\, ds\right] + \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau \widetilde{V}_x(s, X_s)\, dM_s\right] \\ &+ \mathbb{E}_{t,x}\left[\frac{1}{2}\int_t^\tau \widetilde{V}_{xx}(s, X_s)\, d\langle X\rangle_s\right] + \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau \widetilde{V}(s, X_s)\, dA_s^c\right] \\ &+ \mathbb{E}_{t,x}\left[\sum_{s \in D_A \cap [t,\tau]} \widetilde{V}(s, X_{s^+}) - \widetilde{V}(s, X_s)\right]\end{aligned}$$

Wir können unseren bekannten Prozess $\mathbf{X}$ einsetzen. Zusätzlich verwenden wir wieder, dass das Itô-Integral ein Martingal ist und folglich den Erwartungswert 0 hat. Weiters können wir mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung $\widetilde{V}(s, X_{s^+}) - \widetilde{V}(x, X_s)$ gleichsetzen mit $-\widetilde{V}_x(s, \zeta_s)\Delta X_s$ für ein $\zeta_s \in [X_s, X_{s^+}]$. Aus der Definition von $\mathbf{X}$ folgt $\Delta X_s = \Delta C_s$. Zusammengefasst gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t,x}\left[\widetilde{V}(\tau, X_\tau)\right] = &\widetilde{V}(t,x) + \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau \widetilde{V}_t(s, X_s) + \mu\widetilde{V}_x(s, X_s) + \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{V}_{xx}(s, X_s)\, ds\right] \\ &- \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau \widetilde{V}_x(s, X_s)\, dC_s^c\right] - \mathbb{E}_{t,x}\left[\sum_{s \in D_A \cap [t,\tau)} \widetilde{V}_x(s, \zeta_s)(C_{s^+} - C_s)\right].\end{aligned} \tag{3.28}$$

Unter den Bedingungen (ii) und (iii) können wir daraus

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t,x}\left[\widetilde{V}(\tau, X_\tau)\right] &\leq \widetilde{V}(t,x) - \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau e^{-\beta t}\, dC_s^c\right] - \mathbb{E}_{t,x}\left[\sum_{s \in D_A \cap [t,\tau)} e^{-\beta t}(C_{s^+} - C_s)\right] \\ &= \widetilde{V}(t,x) - \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau e^{-\beta t}\, dC_s\right]\end{aligned} \tag{3.29}$$

ableiten. Mit den Bedingungen (i) und (iv), zusammen mit der Eigenschaft (ii) aus der Definition 3.4.3 folgt $\widetilde{V}(\tau, X_\tau) = e^{-\beta\tau}H(X_\tau)$.
Wir können dieses Wissen auf (3.29) anwenden und das Ergebnis umformen. Dann erhalten wir:

$$\widetilde{V}(t,x) \geq \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau e^{-\beta s}\, dC_s^* + e^{-\beta\tau}H^{(\epsilon)}(X_\tau)\right]. \tag{3.30}$$

Damit wissen wir, dass unsere Funktion $\widetilde{V}$ eine obere Schranke für $V^{(\epsilon)}$ darstellt. Um zu zeigen, dass tatsächlich die Gleichheit vorliegt, benötigen wir einen zulässigen Kontrollprozess, mit welchem wir das $\widetilde{V}$ erreichen. Dieser Prozess wäre der optimale Kontrollprozess.

Wir betrachten den Prozess aus (3.27).

Sei t ein beliebiger Zeitpunkt vor dem Ruin, d.h. $0 \leq t \leq T$ mit $X_t > 0$. Wir verwenden die Formel (3.28) und wollen den Kontrollprozess $\mathbf{C}^*$ anwenden. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: $X_t \leq b(t)$
Nach Voraussetzung ist in diesem Fall der Prozess $(C_s^*)_{s\geq t}$ eine nicht fallende, stetige Funktion und $(X_s^*)_{s\geq t}$ bleibt durch $b(s)$ beschränkt für jedes $s \geq t$. Nach Bedingung (ii) von $\widetilde{V}$ gilt dann $\widetilde{V}_t + \mu\widetilde{V}_t + \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{V}_{xx} = 0$ für jedes $s \geq t$. Für unsere Gleichung folgt dann:

$$\mathbb{E}_{t,x}\left[\widetilde{V}(\tau, X_\tau)\right] = \widetilde{V}(t,x) - \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau \widetilde{V}_x \, dC_s^*\right].$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathbf{C}^*$ nur dann wächst wenn $X_t^* = b(t)$ gilt. Für diesen Wert muss nach unseren Voraussetzungen $\widetilde{V}_x = e^{-\beta t}$ gelten. Damit können wir den letzten Term umschreiben zu

$$\int_t^\tau \widetilde{V} \, dC_s^* = \int_t^\tau e^{-\beta t} \, dC_s^*$$

und es folgt

$$\widetilde{V}(t,x) = \mathbb{E}_{t,x}\left[e^{-\beta\tau} H^{(\epsilon)}(X_\tau) + \int_t^\tau e^{-\beta s} dC_s^*\right] = J(t,x,\mathbf{C}^*).$$

Fall 2: $X_t > b(t)$
In diesem Fall erfolgt zum Zeitpunkt t ein Sprung in der Höhe $\zeta_t = X_t - b(t)$. Anschließend gilt $X_{t^+}^* < b(t)$ und wie schon in Fall 1 bleibt $\mathbf{X}^*$ für $s > t$ immer unter der Schranke $b(s)$. Eingesetzt in die Formel (3.28) erhalten wir:

$$\widetilde{V}(t,x) = \mathbb{E}_{t,x}\left[e^{-\beta\tau} H^{(\epsilon)}(X_\tau)\right] + \mathbb{E}_{t,x}\left[\int_t^\tau e^{-\beta s} \, dC_s^{*,c}\right] + \widetilde{V}_x(t,\zeta_t)\Delta C_t^*.$$

Nach Bedingung (iii) gilt $\widetilde{V}_x(t,\zeta_t) = e^{-\beta t}$. Dann erhalten wir auch für den Fall 2

$$\widetilde{V}(t,x) = \mathbb{E}_{t,x}\left[e^{-\beta\tau} H^{(\epsilon)}(X_\tau) + \int_t^\tau e^{-\beta s} \, dC_s^*\right].$$

Weil C^* ein zulässiger Kontrollprozess ist, gilt $V^{(\epsilon)}(t,x) \geq \widetilde{V}(t,x)$. Zusammen mit (3.30) folgt die Gleichheit der Funktionen. Nachdem C^* uns die Funktion $V^{(\epsilon)}$ liefert, erfüllt sie alle Voraussetzungen für die optimale Strategie. □

Die Herleitung der Barrierefunktion $b(t)$ wird ausführlich in der Referenz [Gra13] beschrieben. Wir wollen an dieser Stelle nur das Ergebnis vorstellen. Zunächst werden wir

einige der benötigten Funktionen definieren. Für $t \in [0, T]$ gilt im folgenden:

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \beta + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}, \quad \hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\sigma^2}, \quad d_1 = 2\hat{\mu}\hat{\beta} + 2\hat{\mu}^3, \\
&d(t) = e^{\beta t} \int_t^T (\mu e^{-\beta s} - \beta e^{-\beta s} b(s)) ds + H_0 e^{\beta(t-T)}, \\
&B(t) = e^{\hat{\mu} b(t) - \lambda t} \left(2\hat{\beta} + 3\hat{\mu}^2 + \hat{\mu}^3 (b(t) + d(t)) \right), \\
&D(t) = e^{\hat{\mu} b(t) - \lambda t} \left(4\hat{\mu}\hat{\beta} + 4\hat{\mu}^3 + \hat{\mu}^4 (b(t) + d(t)) + \frac{4\hat{\beta}}{\sigma^2} b'(t) \right), \\
&K(x, T-t; \zeta, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 (T-t-s)}} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{2\sigma^2 (T-t-s)}}, \\
&h(x) = e^{\hat{\mu} x - \lambda T} H^{(\epsilon)}(x).
\end{aligned}
$$

Satz 3.4.7: Sei die Wertfunktion aus Satz 3.4.6 gegeben. Dann ist die Barrierefunktion $b(t)$ eine C^1-Lösung der folgenden Integral-Gleichung

$$
\begin{aligned}
b'(t) = \frac{\sigma^2}{2\hat{\beta}} e^{-\hat{\mu} b(t) + \lambda t} \Bigg\{ &\int_0^{T-t} \int_{-b(T-s)}^{b(T-s)} K_x \left(b(t), T-t; \zeta, s \right) B'(T-s) \, d\zeta \, ds \\
&+ \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{T-t} K_x(b(t), T-t; b(T-s), s) D(T-s) \, ds \\
&+ \frac{\sigma^2}{2} \int_0^{T-t} K_x(b(t), T-t, -b(T-s), s) D(T-s) \, ds \\
&+ \int_{-b(T)}^{b(T)} K_x(b(t), T-t; \zeta, 0) (h'''(\zeta - B(T)) \, d\zeta \Bigg\} \\
&- \frac{\sigma^2}{2\hat{\beta}} \left(d_1 + \frac{\hat{\mu}^4}{2} (b(t) + d(t)) \right).
\end{aligned}
$$

Der Beweis kann in der Referenz [Gra13] nachgelesen werden.

3.5. Dividenden in endlicher Zeit mit Ruinbeschränkung

In den bisherigen Modellen wollten wir nur möglichst hohe Gewinne durch Dividendenzahlungen erwirtschaften. Dass für die Aktie dabei der Ruin eintreten kann, hat uns nur dahingehend interessiert, als dass wir danach keine weiteren Dividenden mehr auszahlen können. In der Praxis ist jedoch auch dieser Aspekt wichtig. Wir befassen uns abschließend mit einem Modell, welches eine maximale Ruinwahrscheinlichkeit einhalten will.

Die geringste Ruinwahrscheinlichkeit κ_0 erhalten wir, indem wir keine Dividenden mehr auszahlen. Wenn wir Dividenden optimal auszahlen wollen erreichen wir eine Ruinwahrscheinlichkeit κ_1 welche über κ_0 liegt. Wir wollen jetzt einen möglichst großen Gewinn mit Dividendenzahlungen erreichen und dabei eine maximale Ruinwahrscheinlichkeit κ mit $0 < \kappa_0 \leq \kappa < 1$ einhalten.

Unsere Zustands- und Kontrollprozesse werden wie im vorherigen Modell definiert.

Definition 3.5.1 (Modell)**:** Sei $(W_t)_{t\in I}$ eine Brownsche Bewegung auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit einer rechtsstetigen, vollständigen Filtrierung $\mathbb{F}$. Für jeden zulässigen Kontrollprozess $\mathbf{C}$ sei unserer Zustandsprozess $\mathbf{X}$ beschrieben mit

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t - C_t, \quad 0 \leq t \in I.$$

Hierbei sind x, μ und σ positive Konstanten. Sie beschreiben das Startkapital, die mittlere Schwankung und die Volatilität des Prozesses.

Auch unser laufender Nutzen und der Endnutzen bleiben gleich. Der laufende Nutzen wird durch $\psi(t, X_t, C_t) = e^{-\beta t}c$ für eine Zinsrate $\beta > 0$ und für positive Dividendenzahlungen c definiert. Für den Endnutzen gilt $\Psi(T, X_T) = e^{-\beta T}X_T$.

Unsere Problemstellung war bisher immer nur eine Maximierungsaufgabe für die Wertfunktion. Wir werden diese nun um eine maximale Ruinwahrscheinlichkeit κ erweitern.

$$\left.\begin{array}{l} J_0(0,x,C) = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\beta s}\, dC_s + e^{-\beta\tau}X_\tau\right] \to \max \\ \mathbb{P}(\tau < T) \leq \kappa \end{array}\right\} (P_0)$$

τ beschreibt auch hier wieder den Ruinzeitpunkt $\tau = \inf\{s > 0 | X_s = 0\} \wedge T$ und κ ist eine Konstante im Bereich $0 < \kappa_0 \leq \kappa < 1$. Es ist leicht zu sehen, dass diese zusätzliche Einschränkung unseren Gewinn verringern und unseren Kontrollprozess verändern wird.

Die Idee zur Lösung des Problems P_0 ist folgende:
Wir wollen das Erreichen des Endzeitpunkts T, ohne dass der Ruin eintritt, mit einem Wert $\bar{\gamma} > 0$ belohnen. Durch diesen zusätzlichen Endnutzen bekommt der Ruinzeitpunkt ein höheres Gewicht. Die optimale Strategie wird mehr Wert darauf legen, dass der

Zeitpunkt T erreicht wird und folglich wird unsere Ruinwahrscheinlichkeit fallen. Die Idee ist, dass wir die individuelle Ruinwahrscheinlichkeit κ durch Steuerung des Wertes $\bar{\gamma}$ erreichen können.

Um diesen Gedanken umzusetzen können wir das folgende Belohnungsproblem definieren.

$$J_1(0,x,C) = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau e^{-\beta s}\, dC_s + e^{-\beta\tau}(X_\tau + \bar{\gamma})\mathbb{1}_{\{\tau=T\}}\right] \to \max \quad (P_1)$$

Der folgende Satz wird zeigen, dass die Probleme (P_0) und (P_1) zusammenhängen.

Satz 3.5.2: Sei $\mathbf{C}^* \in \mathcal{A}$ der optimale Kontrollprozess des Problems (P_1) mit Ruinzeitpunkt τ^*. Gelte außerdem dass $\mathbb{P}(\tau^* < T) = \kappa$. Dann ist $\mathbf{C}^*$ auch der optimale Kontrollprozess des Problems (P_0).

Beweis: Sei $\mathbf{C}^*$ der optimale Kontrollprozess für das Problem (P_1). Angenommen es würde ein besserer Kontrollprozess $\widetilde{\mathbf{C}}$ für das Problem (P_0) existieren. Für $\widetilde{\mathbf{C}}$ würde dann

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_0^{\widetilde{\tau}} e^{-\beta s}\, d\widetilde{C}_s + e^{-\beta\widetilde{\tau}}\widetilde{X}_{\widetilde{\tau}}\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\beta s}\, dC_s^* + e^{-\beta\tau^*}X_{\tau^*}^*\right] = \rho \quad \text{für ein } \rho > 0 \text{ und}\\ &\mathbb{P}(\widetilde{\tau} < T) = \kappa - \delta \quad \text{für ein } \delta \geq 0\end{aligned} \tag{3.31}$$

gelten. Hierbei sind $\widetilde{\tau}$ und τ^* die Stoppzeiten und $\widetilde{\mathbf{X}}$ und $\mathbf{X}^*$ die Zustandsprozesse zu den Kontrollprozessen $\widetilde{\mathbf{C}}$ und $\mathbf{C}^*$. Wir wenden die Ergebnisse aus (3.31) auf das Zielfunktional von dem Problem (P_1) an.

$$\begin{aligned}J_1(0,x,\widetilde{\mathbf{C}}) &= \mathbb{E}\left[\int_0^{\widetilde{\tau}} e^{-\beta s}\, d\widetilde{C}_s + e^{-\beta\widetilde{\tau}}\widetilde{X}_{\widetilde{\tau}}\right] + \bar{\gamma}\mathbb{P}(\widetilde{\tau} = T)e^{-\beta T}\\ &= \rho + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\beta s}\, dC_s^* + e^{-\beta\tau^*}X_{\tau^*}^*\right] + \bar{\gamma}e^{-\beta T}(1-\kappa+\delta)\\ &= \rho + \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau^*} e^{-\beta s}\, dC_s^* + e^{-\beta\tau^*}X_{\tau^*}^*\right] + \bar{\gamma}e^{-\beta T}\mathbb{P}(\tau^* = T) + \delta\bar{\gamma}e^{-\beta T}\\ &= \rho + \delta\bar{\gamma}e^{-\beta t} + J_1(0,x,\mathbf{C}^*)\end{aligned}$$

Zusammengefasst heißt das, es würde

$$J_1(0,x,\widetilde{\mathbf{C}}) > J_1(0,x,\mathbf{C}^*)$$

gelten. Nachdem $\mathbf{C}^*$ der optimale Kontrollprozess ist, ist das ein Widerspruch. Folglich ist $\mathbf{C}^*$ die optimale Strategie für das Problem (P_0). □

Das Problem (P_0) kann daher über das Problem (P_1) gelöst werden. Eine möglicher Algorithmus um auf die Lösung von (P_0) zu kommen könnte lauten:

I) Wähle ein positives $\bar{\gamma}$.
II) Löse (P_1).
III) Berechne die korrespondierende Ruinwahrscheinlichkeit von (P_1).
IV) Ist die Wahrscheinlichkeit größer als κ dann erhöhe $\bar{\gamma}$, ist die Wahrscheinlichkeit kleiner dann verringere $\bar{\gamma}$.
V) Ist die gewünschte Ruinwahrscheinlichkeit (bis zu einer gewünschten Genauigkeit) noch nicht erreicht, dann springe zurück zu Punkt II.

Bemerkung: Für $\bar{\gamma} \to \infty$ konvergiert die Ruinwahrscheinlichkeit gegen κ_0. Für $\bar{\gamma} = 0$ erhalten wir κ_1.

Wir werden im folgenden nur noch die Lösung des Problems (P_1) behandeln. Wie schon im vorherigen Modell konzentrieren wir uns auf die Wertfunktion und den optimalen Kontrollprozess. Weitere Eigenschaften zu dem Modell können in [Gra14] nachgelesen werden.

Wie bereits im vorherigen Kapitel ersetzen wir unser Problem durch ein Approximationsproblem mit einem approximierten Endnutzen $H^{(\epsilon)}(x)$.

Definition 3.5.3 (Eigenschaften approximativer Endnutzen)**:** Für ein $\epsilon \leq \epsilon_0$ soll der *approximative Endnutzen* $H^{(\epsilon)}(x)$ (hier kurz H) die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(i) $H(x) \in C^4([-\epsilon, \epsilon]\backslash\{0\}) \cap C^2([-\epsilon, \infty)\backslash\{0\})$ wobei $H^{(IV)}(0\pm)$ existiert,
(ii) $H(0) = H(0^+) = \bar{\gamma}$,
$H(0^-) = -\bar{\gamma}$,
$H(\epsilon) = \epsilon + H_0 + \bar{\gamma}$,
(iii) $H'(0^+) = H_1$,
$H'(0^-) = H'(0^+) + 2\hat{\mu}\bar{\gamma}$,
$H'(\epsilon) = 1$,
(iv) $H''(0^+) = -2\hat{\mu}H_1 - \hat{\mu}^2\bar{\gamma}$,
$H''(0^-) = H''(0_+) - 2\hat{\mu}^2\bar{\gamma}$,
$H''(\epsilon) = 0$,
(v) $H'''(0^+) = 3\hat{\mu}^2 H_1 + H_3$,
$H'''(0^-) = H'''(0^+) + 2\hat{\mu}^3\bar{\gamma}$,
$H'''(\epsilon) = 2\hat{\beta}$,
(vi) $H^{(IV)}(0^+) = -4\hat{\mu}H_1 - 4\hat{\mu}H_3 + 5\hat{\mu}^4\bar{\gamma}$,
$H^{(IV)}(0^-) = H^{(IV)}(0^+) - 7\hat{\mu}^4\bar{\gamma}$,
$H^{(IV)}(\epsilon) = \frac{4\hat{\beta}}{\sigma^2}H_4 - 4\hat{\mu}\hat{\beta}$,
(vii) $H(-x) = -H(x)e^{2\hat{\mu}x}$ für $x \in (0, \epsilon)$,
(viii) $H(x) = x + H_0 + \bar{\gamma}$ für $x \geq \epsilon$,
(ix) $H'(x) \geq 0$ und
$H''(x) \leq 0$ für $x \in [-\epsilon, \epsilon]$,
(x) $2\hat{\mu}H''(x) + H'''(x) > 0$ für $x \in [-\epsilon, \epsilon]$.

Die Werte H_0 und H_1 sind nur abhängig von ϵ, mit dem asymptotischen Verhalten

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{H_0(\epsilon)}{\epsilon^2} = \frac{2}{7}\hat{\mu} + \frac{\hat{\mu}^2\bar{\gamma}}{7} \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon \to 0} \frac{H_1(\epsilon) - 1}{\epsilon} = \hat{\mu} + \frac{\hat{\mu}^2\bar{\gamma}}{2}. \tag{3.32}$$

Für H_3 gelte $H_3 = 6\hat{\mu}^2 + 5\hat{\mu}^3\bar{\gamma}$ und H_4 sei ein beliebiger, von ϵ unabhängiger Wert.

Wie schon in 3.4 können wir zeigen, dass eine solche Funktion tatsächlich existiert.

Satz 3.5.4: Für ein $\epsilon \leq \epsilon_0$ existiert eine Funktion $h : [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto h(x)$, welche die Eigenschaften aus Definition 3.5.3 erfüllt.

Beweis: Wie schon beim vorherigen Modell erfolgt der Beweis durch Konstruktion einer passenden Funktion h. Wir teilen auch hier die Funktion auf zwei Funktionen auf und behandeln die verschiedenen Eigenschaften zunächst getrennt. Wir erhalten für $x \in [0, \epsilon]$ die Darstellung $h = f + g$ mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \bar{\gamma} + H_1 x - (\hat{\mu} + \frac{\hat{\mu}^2\bar{\gamma}}{2})H_1 x^2 + \alpha\left(\frac{x^7}{840} - \frac{\epsilon x^6}{240} + \frac{e^2 x^5}{240}\right) \text{ und} \\ g(x) &= x^3(x-\epsilon)^3(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3). \end{aligned}$$

Die Konstanten können wieder durch Lösung der Gleichungssysteme, welche mit den Randbedingungen für ϵ gegeben sind, ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{2}{7}\left(\hat{\mu}H_1 + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2\bar{\gamma}\right)\epsilon^2 \quad H_1 = \frac{1 + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2\bar{\gamma}\epsilon}{1 - \hat{\mu}\epsilon} \quad \alpha = \frac{240(\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\mu}^2\bar{\gamma})}{(1-\hat{\mu}\epsilon)\epsilon^5} \\ \alpha_0 &= -\frac{3\hat{\mu}H_1 + H_3}{6\epsilon^3} \\ \alpha_1 &= -\frac{3\hat{\mu}H_1 + H_3}{2\epsilon^4} + \frac{4\hat{\mu}^3 H_1 + 4\hat{\mu}H_3 - 5\hat{\mu}^4\bar{\gamma}}{24\epsilon^3} \\ \alpha_2 &= \frac{9\hat{\mu}H_1 + 3H_3}{2\epsilon^5} + \frac{2\hat{\beta}}{\epsilon^5} - \frac{4\hat{\mu}^3 H_1 + 4\hat{\mu}H_3 - 5\hat{\mu}^4\bar{\gamma}}{12\epsilon^4} - \frac{\frac{\hat{\beta}}{\sigma^2} - \hat{\mu}\hat{\beta}}{6\epsilon^4} \\ \alpha_3 &= -\frac{15\hat{\mu}H_1 + 5H_3}{6\epsilon^6} - \frac{5\hat{\beta}}{3\epsilon^6} + \frac{4\hat{\mu}^3 H_1 + 4\hat{\mu}H_3 - 5\hat{\mu}^4\bar{\gamma}}{24\epsilon^5} + \frac{\frac{\hat{\beta}}{\sigma^2} - \hat{\mu}\hat{\beta}}{6\epsilon^4} \end{aligned}$$

Es ist leicht zu zeigen, dass H_0 und H_1 das das gleiche asymptotische Verhalten wie in (3.32) aufweisen.

Für negative x wenden wir die Vorgabe (vii) an und erhalten $h(x) = -h(-x)e^{2\hat{\mu}x}$ für $x \in (-\epsilon, 0)$. Für $x > \epsilon$ verwenden wir die erwartete Eigenschaft (viii), welche besagt, dass $h(x) = x + H_0 + \bar{\gamma}$ gilt. □

Wie schon für das vorherige Modell, betrachten wir unser Problem (P_1) für ein $\epsilon > 0$ über das Approximationsmodell mit der approximativen Wertfunktion:

$$V^{(\epsilon)}(t,x) = \sup_{\mathbf{C}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau e^{-\beta s}\, dC_s + e^{-\beta\tau} H^{(\epsilon)}(X_\tau)\mathbb{1}_{\tau=T}\right]. \tag{3.33}$$

Der approximative Endnutzen $H^{(\epsilon)}$ soll die Eigenschaften aus Definition 3.5.3 erfüllen.

Bemerkung: Die Anpassung für unseren Belohnungswert $\bar{\gamma}$ sind vollständig in der Funktion $H^{(\epsilon)}(x)$ enthalten. Es kann daher analog zum Modell ohne Ruinbetrachtung gezeigt werden, dass die Lösung des Approximationsmodells gegen die Lösung von (P_1) konvergiert.

Das Approximationsmodell erhält als Lösung wieder einen Kontrollprozess mit einer Barrierefunktion.

Satz 3.5.5 (Verifikationstheorem)**:** Sei eine Funktion $\widetilde{V}(t,x)$ und eine Barrierefunktion $b(t)$ gegeben, welche das folgende System lösen:

(i) $\widetilde{V}(T,x) = e^{-\beta T}H(x)$, $x \geq 0$,
(ii) $\widetilde{V}_t + \mu\widetilde{V}_x + \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{V}_{xx} = 0$, $\widetilde{V}_x \geq e^{-\beta t}$ für $\{(t,x)|0 \leq x \leq b(t), 0 \leq t \leq T\}\backslash\{(T,0)\}$,
(iii) $\widetilde{V}_t + \mu\widetilde{V}_x + \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{V}_{xx} \leq 0$, $\widetilde{V}_x = e^{-\beta t}$ für $x \geq b(t)$, $0 \leq t \leq T$,
(iv) $\widetilde{V}(t,0) = 0$ für $0 \leq t < T$,
(v) $\widetilde{V}(t,x)$, $\widetilde{V}_t(t,x)$, $\widetilde{V}_x(t,x)$, $\widetilde{V}_{xx}(t,x)$ sind stetig für den Bereich $[0,T] \times \mathbb{R}_0^+\backslash\{(T,0)\}$,
(vi) $b(t) > 0$ für $0 \leq t \leq T$, $b(T) = \epsilon$, $b \in C^1([0,T])$,

Dann ist $\widetilde{V}$ die Wertfunktion für (3.33).

Der optimale Kontrollprozess $\mathbf{C}^*$ und der optimale Zustandsprozess $\mathbf{X}^*$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
C_t^* &= \max_{0\leq s\leq t}\{(s + \mu s + \sigma W_s - b(s))^+\}, \quad t > 0 \\
C_0^* &= 0, \\
X_t^* &= x + \mu t + \sigma W_t - C_t^* \quad \forall t \in I.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Beweis basiert darauf, dass die Wertfunktion die HJB-Gleichung

$$\min\{-\frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}(x) - \mu V_x(x) - V_t(x), -e^{-\beta t} + V_x\} = 0$$

löst. Für den optimalen Kontrollprozess kann der Beweis ähnlich zu dem von Satz 3.4.6 geführt werden (siehe [Gra14]).

Die Ergebnisse für die Barrierefunktion unterscheidet sich zu der für das Modell ohne Ruinaufwertung dadurch, dass die Ableitungsterme des Cauchyproblems

$$\begin{aligned}
&F_t(t,x) + \frac{\sigma^2}{2}F_{xx}(t,x) = 0 \\
&F(T,x) = sgn(x)
\end{aligned}$$

und Terme für unseren Belohnungsfaktor $\bar{\gamma}$ hinzukommen.

Für die Barrierefunktion benötigen wir die folgenden Funkionen.

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \beta + \frac{\mu^2}{2\sigma^2}, \quad \hat{\lambda} = \frac{\lambda}{\sigma^2}, \quad d_1 = 2\hat{\mu}\hat{\beta} + 2\hat{\mu}^3, \quad \tilde{\gamma} = e^{-\lambda T}\bar{\gamma},\\
&d(t) = e^{\beta t}\int_t^T (\mu e^{-\beta s} - \beta e^{-\beta s} b(s))ds + (H_0 + \bar{\gamma})e^{\beta(t-T)},\\
&F(t,x) = \frac{\tilde{\gamma}}{\sqrt{2\pi(T-t)\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} sgn(\zeta)e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{2\sigma^2(T-t)}}d\zeta,\\
&\widetilde{B}(t) = e^{\hat{\mu}b(t)-\lambda t}(2\hat{\beta} + 3\hat{\mu}^2 + \hat{\mu}^3(b(t)+d(t)) - F_{xxx}(t,b(t)),\\
&\widetilde{D}(t) = e^{\hat{\mu}b(t)-\lambda t}(4\hat{\mu}\hat{\beta} + 4\hat{\mu}^3 + \hat{\mu}^4(b(t)+d(t)) + \frac{4\hat{\beta}}{\sigma^2}b'(t)) - F_{xxxx}(t,b(t)),\\
&K(x,T-t;\zeta,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t-s)}}e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{2\sigma^2(T-t-s)}},\\
&h(x) = e^{\hat{\mu}x-\lambda T}H^{(\epsilon)}(x),\\
&\widetilde{h}(x) = h(x) - \tilde{\gamma}sgn(x)
\end{aligned}
$$

Satz 3.5.6: Sei der Satz 3.5.5 erfüllt. Dann ist die Barrierefunktion $b(t)$ die C^1-Lösung der folgenden Integralgleichung

$$
\begin{aligned}
b'(t) = \frac{\sigma^2}{2\hat{\beta}}e^{-\hat{\mu}b(t)+\lambda t}\Bigg\{&\int_0^{T-t}\int_{-b(T-s)}^{b(T-s)} K_x(b(t),T-t;\zeta,s)\widetilde{B}'(T-s)\,d\zeta\,ds\\
&+\frac{\sigma^2}{2}\int_0^{T-t} K_x(b(t),T-t;b(T-s),s)\widetilde{D}(T-s)\,ds\\
&+\frac{\sigma^2}{2}\int_0^{T-t} K_x(b(t),T-t;-b(T-s),s)\widetilde{D}(T-s)\,ds\\
&+\int_{-b(T)}^{b(T)} K_x(b(t),T-t;\zeta,0)(\widetilde{h}'''(\zeta) - \widetilde{B}(T))\,d\zeta\Bigg\}\\
&-\frac{\sigma^2}{2\hat{\beta}}\left(d_1 + \frac{\hat{\mu}^4}{2}(b(t)+d(t))\right).
\end{aligned}
$$

Der Beweis hierfür kann in [Gra14] nachgelesen werden.

4. Simulationen

Wir haben für die Modelle im vorherigen Kapitel Formeln für die optimale Dividendenzahlungen aufgestellt. Die daraus ergebenen Barrierefunktionen, besonders für den endlichen Fall, sind jedoch sehr komplex. Der tatsächliche Verlauf eines solchen Prozesses ist schwer per Hand nachzurechnen.

Dieses Kapitel soll dazu dienen der Fantasie nachzuhelfen. Wir werden in diesem Kapitel anhand der Programmiersoftware Matlab die Form der verschiedenen Barrierefunktionen mit einem konkreten Beispiel veranschaulichen. Anschließend werden wir einen Zustandsprozesse simulieren und die Auswirkung auf die Dividendenzahlungen und den Zustandsprozess in den verschiedenen Modellen betrachten. Wir werden abschließend unsere Simulationen nutzen, um die grundsätzlichen Eigenschaften der Modelle, wie die Ruinwahrscheinlichkeit und die durchschnittliche Dividendenzahlungen, zu analysieren.

In den verwendeten Simulationen wurde mit den folgenden Modellparametern gearbeitet:

$$\begin{array}{lll} \mu = 4; & \sigma^2 = 2; & \beta = 2; \\ \epsilon = 10^{-3}; & H_4 = -2; & T = 1; \\ \gamma = 0,5; & & \end{array}$$

Die verwendeten Programmcodes können im Appendix nachgelesen werden.

4.1. Simulation der Barrierefunktionen

Für die Modelle in endlicher Zeit hat die Barriere x_0 nach der Formel (3.14) und den zuvor genannten Parametern den Wert $x_0 = 0,9359$. Die Barrierefunktionen für die Modelle in endlicher Zeit wurden von Matlab berechnet. Die Grafik 4.1 veranschaulicht uns die Ergebnisse.

Die niedrigste Kurve ist die Barrierefunktion für das Modell aus 3.4, die Barrierefunktion für das Modell mit einer maximalen Ruinwahrscheinlichkeit aus 3.5 ist die mittlere Kurve und die obere Gerade stellt den Barrierewert x_0 für ein Modell mit unendlichem

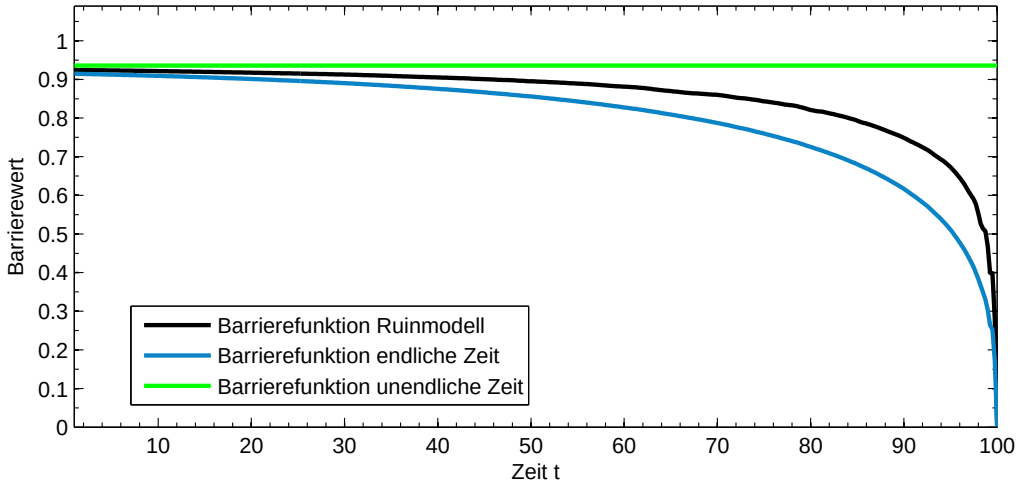

Abbildung 4.1.: Simulation der Barrierefunktionen mit Matlab.

Zeithorizont dar. Wir sehen also, dass die Betrachtung eines endlichen Zeithorizonts die Barrierefunktion über die Zeit soweit absenkt, sodass gegen Ende des Betrachtungszeitraums nahezu der gesamte Aktienwert als Dividende auszuzahlen wird. Dieses Verhalten kommt daher, dass eine später ausgezahlte Dividende durch die Abzinsung einen geringeren Wert zugemessen bekommt und die Ruinwahrscheinlichkeit, je näher wir dem Zeitpunkt T kommen, immer kleiner wird.

Es ist außerdem gut zu sehen, dass für eine geringer Ruinwahrscheinlichkeit ein höherer Wert in der Aktie verbleiben muss. Die Barrierefunktion des Modells 3.5 liegt besonders in der Schlussphase deutlich über der von dem Modell 3.4. Nachdem bei unendlicher Zeit kein Ablaufdatum vorliegt, ist ein späterer Ruin vorteilhafter. Deswegen liegt die Gerade über den beiden Kurven.

4.2. Simulation einzelner Prozesse

Wir können mit den bekannten Barrierefunktionen konkrete Zustandsprozesse simulieren. Wir simulieren einen Diffusionsprozess

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t$$

für eine Brownsche Bewegung $(W_t)_{t \in I}$. Es soll immer jenen Wert als Dividende ausgezahlt werden, welche unsere Barrierefunktion übersteigt. Wie wir bereits für die Barrierefunktionen aus Grafik 4.1 gesehen haben, erzeugen die unterschiedlichen Modelle abweichende Barrierefunktionen. Für konkrete Aktienwerte bedeutet das, dass wir bei einer höheren Barriere eine geringere Dividende bzw. die Dividende später auszahlen. Dafür kann für ein Modell mit geringerer Barriere auch schneller ein Ruin eintreten. Die

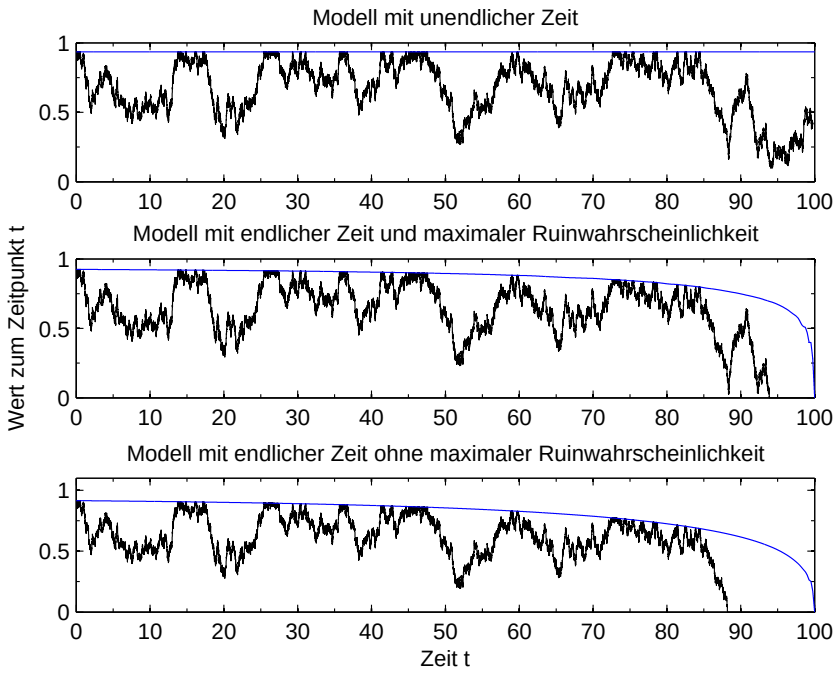

Abbildung 4.2.: Vergleich der drei Modelltypen mittels einem simulierten Prozesses.

Grafik zeigt den Verlauf einer Aktie unter den 3 Modellen. Dabei zeigt sich der frühere Ruin für die Modelle in endlicher Zeit besonders drastisch. Während die Aktie in diesen Modellen ruiniert wird, erholt sich die Aktie bei der höheren Barriere von dem Modell auf einem unendlichen Zeithorizont. Wir können auch den besseren Verlauf für unser Modell mit maximaler Ruinwahrscheinlichkeit betrachten. Für dieses Modell erholt sich der Prozess zunächst und tritt erst bei den nächsten schweren Wertverlusten in den Ruin ein.

Trotz Ruin können wir gut sehen wie sich der Aktienwert in den Modellen verhält. Immer wenn der Barrierewert erreicht wird, wird das Kapital direkt als Dividende ausgezahlt.

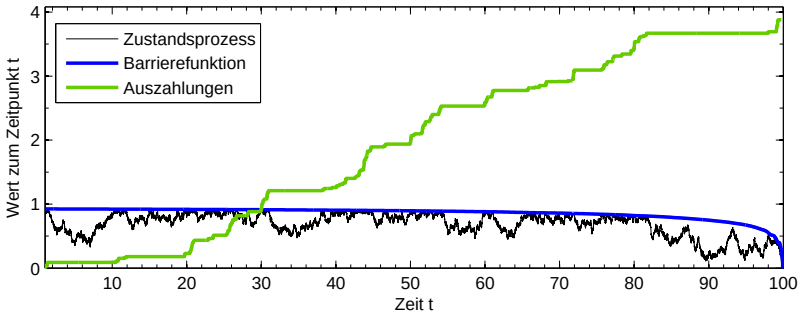

Abbildung 4.3.: Simulation eines Prozesses.

Die Grafik 4.3 zeigt uns das Zusammenspiel zwischen dem Aktienwert, der Barrierefunktion und den Dividendenzahlungen auf dem Modell aus 3.5. Die Dividendenzahlungen in dieser Grafik sind absolut gesehen und noch nicht mit dem Nutzenfunktion abgezinst.

4.3. Vergleich der Modellergebnisse

Zum Abschluss wollen wir die verschiedenen Modelleigenschaften gegenüberstellen. Wir simulieren für jedes Modell eine große Anzahl an Prozessen und berechnen die durchschnittliche Ruinhäufigkeit als Schätzer für die Ruinwahrscheinlichkeit und die mittlere Auszahlung. Die Ergebnisse unserer Simulationslaufs zeigt die folgende Tabelle:

	Ruinwahrscheinlichkeit	ØAuszahlung
Modell unendl. Zeit	$32,73\%$	$1,8523$
Modell endl. Zeit	$57,97\%$	$1,8744$
Modell endl. Zeit mit max. Ruinws.	$42,09\%$	$1,8602$
Ohne Dividendenauszahlung	$2,55\%$	

Tabelle 4.1.: Vergleich der Ruinwahrscheinlichkeit und der durchschnittlichen Auszahlung zwischen den verschiedenen Modellen. Simulation mit Matlab. Für jedes Modell wurden 10.000 Prozesse simuliert.

Bemerkung: Die hier angegebenen Auszahlung wurden, wie in mit unserer Nutzenfunktion angegeben, mit dem Zeitpunkt der Auszahlung abgezinst. In den durchschnittlichen Auszahlungen sind auch die jener Prozesse enthalten, welche in den Ruin eingetreten sind.

Die Tabelle bestätigt noch einmal die grundlegenden Eigenschaften der 3 Modelle. Je höher die Barrierefunktion angesetzt wird, umso niedriger sind die durchschnittlichen Auszahlungen und die durchschnittliche Ruinwahrscheinlichkeit.

A. Programmcodes

Hier werden die in Kapitel 4 verwendeten Programmcodes aufgelistet. Für die Berechnung der Barrierefunktion habe ich die Berechnung auf den Programmcode von [Gül11] aufgebaut und für das Modell mit Ruinbetrachtung aus 3.5 erweitert.

Programmcode für die Simulation der Barrierefunktion

Bemerkung: Für die Simulation der Barrierefunktion für das Modell 3.4 kann entweder das ursprüngliche Programm aus [Gül11] verwendet werden.

```
function res = barriere_ruin(C)

%-------------------------------------------------------------------------
%-------------------------------Parameter-------------------------------
%-------------------------------------------------------------------------
mu      = 4;
sigma   = 2^.5;
beta    = 2;                    %mu=0.03  beta=0.02  sigma=0.5
T       = 1;
epsilon = 10^(-3);
H4      = -2;
N       = 200;
n       = 401;
expo    = (1/2);
gew1    = 0.965;
gew2    = 0.965;
gew3    = 1;
gew4    = 1;
gamma   = 0.5;
F       = 1.631;
start   = 1;

%-------------------------------------------------------------------------
%-------------------------------Variablen-------------------------------
%-------------------------------------------------------------------------
```

```
mu1    = mu/sigma^2;
mu2    = mu1^2 * gamma / 2;
beta1 = beta/sigma^2;

H1 = (1 + mu2*epsilon)/(1 - mu1 * epsilon);
H0 = 2/7 * (mu1 * H1 + mu2) * epsilon^2;
H3    = 6*mu1^2+gamma*5*mu1^3;
lambda   = beta+mu^2/(2*sigma^2);
d1       = 2*mu1*beta1+2*mu1^3;
gamma1   = exp(-lambda*T)*gamma;

%-------------------------------------------------------------------------
%-------------------------------FUNKTION H-------------------------------
%-------------------------------------------------------------------------
alpha = 240 * (mu1 + mu2) / (epsilon^5 * (1- mu1 * epsilon));
a      = 3*mu1^2*H1+H3;
bb     = 2*beta1;
c      = -4*mu1*H3-4*mu1^3*H1 + 5*mu1^4*gamma;
d      = 4*beta1/sigma^2*H4-4*mu1*beta1;

alpha0 = -a/(6*epsilon^3);
alpha1 = -a/(2*epsilon^4)-c/(24*epsilon^3);
alpha2 =  3*a/(2*epsilon^5)+bb/(epsilon^5)+c/(12*epsilon^4)-d/(24*epsilon^4);
alpha3 = -5*a/(6*epsilon^6)-5*bb/(6*epsilon^6)-c/(24*epsilon^5)+d/(24*epsilon^5);

H =@(x) gamma + H1*x - (mu1 + gamma*mu1^2/2)*H1*x^2 + alpha*((1/840)*x^7 - (1/240)*epsilon*x^6 + (1/240)*epsilon^2*x^5) + x^3*(x-epsilon)^3*(alpha0 + alpha1*x + alpha2*x^2 + alpha3*x^3); %alt
%-------------------------------------------------------------------------
%-------------------dritte Ableitung von hpos-------------------------
%-------------------------------------------------------------------------
hprpos = @(x) (alpha*((1/4)*x^4-(1/2)*epsilon*x^3+(1/4)*epsilon^2*x^2)+6*(x-epsilon)^3*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+54*x*(x-epsilon)^2*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+18*x*(x-epsilon)^3*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+54*x^2*(x-epsilon)*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+54*x^2*(x-epsilon)^2*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+9*x^2*(x-epsilon)^3*(2*alpha2+6*alpha3*x)+6*x^3*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+18*x^3*(x-epsilon)*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+9*x^3*(x-epsilon)^2*(2*alpha2+6*alpha3*x)+6*x^3*(x-epsilon)^3*alpha3)*exp(mu1*x-lambda*T)+(3*(-2*(mu1+mu1
```

```
^2.*gamma/2)*H1+alpha*((1/20)*x^5-(1/8)*epsilon*x^4+(1/12)*
epsilon^2*x^3)+6*x*(x-epsilon)^3*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x
^2+alpha3*x^3)+18*x^2*(x-epsilon)^2*(alpha0+alpha1*x+alpha2*
x^2+alpha3*x^3)+6*x^2*(x-epsilon)^3*(alpha1+2*alpha2*x+3*
alpha3*x^2)+6*x^3*(x-epsilon)*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+
alpha3*x^3)+6*x^3*(x-epsilon)^2*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*
x^2)+x^3*(x-epsilon)^3*(2*alpha2+6*alpha3*x)))*mu1*exp(mu1*x
-lambda*T)+(3*(H1-2*(mu1+mu1^2.*gamma/2)*H1*x+alpha*((1/120)
*x^6-(1/40)*epsilon*x^5+(1/48)*epsilon^2*x^4)+3*x^2*(x-
epsilon)^3*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+3*x^3*(x-
epsilon)^2*(alpha0+alpha1*x+alpha2*x^2+alpha3*x^3)+x^3*(x-
epsilon)^3*(alpha1+2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)))*mu1^2*exp(mu1*
x-lambda*T)+H(x)*mu1^3*exp(mu1*x-lambda*T);

%-----------------------------------------------------------------
%-------------dritte Ableitung von hneg-------------------------
%-----------------------------------------------------------------
hprneg =@(x) -(6*x*(-x-epsilon)^3*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x
^2)-alpha*((1/4)*x^4+(1/2)*epsilon*x^3+(1/4)*epsilon^2*x^2)
+6*x^3*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)-6*(-x-epsilon
)^3*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)-12*x*(-x-epsilon
)^3*(-alpha1+2*alpha2*x-3*alpha3*x^2)+54*x*(-x-epsilon)^2*(
alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)+36*x^2*(-x-epsilon)
^2*(-alpha1+2*alpha2*x-3*alpha3*x^2)-54*x^2*(-x-epsilon)*(
alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)-3*x^2*(-x-epsilon)
^3*(2*alpha2-6*alpha3*x)-12*x^3*(-x-epsilon)*(-alpha1+2*
alpha2*x-3*alpha3*x^2)+3*x^3*(-x-epsilon)^2*(2*alpha2-6*
alpha3*x)+6*x^2*(-x-epsilon)^3*(-2*alpha2+6*alpha3*x)-18*x
^2*(-x-epsilon)^2*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)-6*x^3*(-x
-epsilon)^2*(-2*alpha2+6*alpha3*x)+6*x^3*(-x-epsilon)*(
alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+6*x^3*(-x-epsilon)^3*alpha3)
*exp(-mu1*x-lambda*T)+(-6*(mu1+mu1^2.*gamma/2)*H1-3*alpha
*((1/20)*x^5+(1/8)*epsilon*x^4+(1/12)*epsilon^2*x^3)-18*x*(-
x-epsilon)^3*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)+54*x
^2*(-x-epsilon)^2*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)-9*
x^2*(-x-epsilon)^3*(-alpha1+2*alpha2*x-3*alpha3*x^2)-18*x
^3*(-x-epsilon)*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)+9*x
^3*(-x-epsilon)^2*(-alpha1+2*alpha2*x-3*alpha3*x^2)+9*x^2*(-
x-epsilon)^3*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)-9*x^3*(-x-
epsilon)^2*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2)+3*x^3*(-x-
epsilon)^3*(-2*alpha2+6*alpha3*x))*mu1*exp(-mu1*x-lambda*T)
-(-3*H1-6*(mu1+mu1^2.*gamma/2)*H1*x-3*alpha*((1/120)*x
^6+(1/40)*epsilon*x^5+(1/48)*epsilon^2*x^4)-9*x^2*(-x-
epsilon)^3*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)+9*x^3*(-x
```

```
-epsilon)^2*(alpha0-alpha1*x+alpha2*x^2-alpha3*x^3)+3*x^3*(-x-epsilon)^3*(alpha1-2*alpha2*x+3*alpha3*x^2))*mu1^2*exp(-mu1*x-lambda*T)+H(-x)*mu1^3*exp(-mu1*x-lambda*T);

%-----------------------------------------------------------------------
%-------------------Die anfängliche Funktion b-----------------------
%-----------------------------------------------------------------------
dd=zeros(n,1);
y=zeros(n,1); %Ergebniswerte
k=zeros(n,1); %Steigungswerte
%Notation: y = k*t +dd

t=linspace(0,T,n); % Unterteilt das Intervall [0,T] in n Teile
k(n)  = H4;
y(n)  = epsilon;
dd(n) = epsilon-H4*T;

%Startfunktion von b
b =@(t) C*F*sqrt(T-t)*(-log(T-t))^(expo)+epsilon;
%Ableitung der Startfunktoin für b:
bpr=@(t)-C*F/(2*sqrt(T-t))*(-log(T-t))^(expo)+C*F*expo*(-log(T-t))^(expo-1)/(sqrt(T-t));

y(n-1)=b(t(n-1)); %erster Wert

%-----------------------------------------------------------------------
%-----------------------Funktion F-----------------------------------
%-----------------------------------------------------------------------
Fxxx  = @(t,x) gamma1/sqrt(2*pi*(T-t)*sigma^2)*2*exp(-x^2/(2*sigma^2*(T-t)))*(x^2/(sigma^2*(T-t))^2 - 1/(sigma^2*(T-t)));
Fxxxx = @(t,x) gamma1/sqrt(2*pi*(T-t)*sigma^2)*2*exp(-x^2/(2*sigma^2*(T-t)))*(-x^3/(sigma^2*(T-t))^3+3*x/(sigma^2*(T-t))^2);
Fxxxt = @(t,x) gamma1/sqrt(2*pi*(T-t)*sigma^2)*exp(-x^2/(2*sigma^2*(T-t)))*(-3/(sigma^2*(T-t)^2)+6*x^2/(sigma^4*(T-t)^3) - x^4/(sigma^6*(T-t)^4));

%-----------------------------------------------------------------------
%-------------------weitere Funktionen-------------------------------
%-----------------------------------------------------------------------
f0  = @(s)-beta * exp(-beta*s) * b(s);
d  = @(t) mu/beta + exp(beta*(t-T)) * (H0 + gamma - mu/beta) + exp(beta*t) * Int0(f0,t,T,N);
```

```
B  = @(t) exp(mu1*b(t) - lambda*t) * (2*beta1 + 3*mu1^2 + mu1^3*(b(t) + d(t)));
B2 = @(t) B(t) - Fxxx(t,b(t));
D  = @(t) exp(mu1.*b(t)-lambda.*t).*(4*mu1*beta1+4*mu1^3+mu1^4.*(b(t)+d(t))+4*beta1/sigma^2.*bpr(t)) - Fxxxx(t,b(t));

K  = @(x,tau,zeta,s)1./(sqrt(2*pi*sigma^2.*(tau-s))).*exp(-((x-zeta).^2)./(2*sigma^2.*(tau-s)));
Kx = @(x,tau,zeta,s)1./(sqrt(2*pi*sigma^2.*(tau-s))).*exp(-((x-zeta).^2)./(2*sigma^2.*(tau-s))).*(-(x-zeta)./(sigma^2.*(tau-s)));

B2t = @(t) B(t).*(mu1.*bpr(t)-lambda)+mu1^3.*(bpr(t)+beta.*d(t)+(-mu+beta*b(t)))*exp(mu1.*b(t)-lambda.*t) - Fxxxx(t,b(t))*bpr(t) - Fxxxt(t,b(t));

brec =@(t,b,bpr,B2,D,B2t,d) sigma^2/(2*beta1)*exp(-mu1*b(t)+lambda*t)*(int1(t,N,b,B2t)+sigma^2/2*int2(t,N,b,D)+sigma^2/2*int3(t,N,b,D)+int4(t,N,b,B2)+int5(t,N,b,B2))-sigma^2/(2*beta1)*(d1+mu1^4/2*(b(t)+d(t)));

%-----------------------------------------------------------------
%----------------Rekursion----------------------------------------
%-----------------------------------------------------------------
tic
for jj=1:(n-1)

  i=n-jj;
  k(i) = brec(t(i),b,bpr,B2,D,B2t,d);
  dd(i)=y(i)-t(i)*k(i);
  if i>1
    y(i-1)=k(i)*t(i-1)+dd(i);
  end

  khelp=k;
  khelp(1)=[]; %für die Ableitung des Splines: die erste Komponente von k wird gestrichen
  khelp(n)=0;  %danach wird noch die neue n-te Komponente mit 0 definiert, damit khelp die Länge n hat

  b=@(z)bfunc(z,t,y);
  bpr=@(z)bprfunc(z,t,khelp);

  %Die Fkt. müssen für jedes 'neue' b neu definiert werden.
```

```
  f0   = @(s)-beta * exp(-beta * s) * b(s);
  d    = @(t) mu/beta+exp(beta.*(t-T)).*(H0+gamma-mu/beta)+exp(beta*t)*Int0(f0,t,T,N);
  B    = @(t) exp(mu1.*b(t)-lambda.*t).*(2*beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(b(t)+d(t)));
  B2   = @(t) B(t) - Fxxx(t,b(t));
  D    = @(t) exp(mu1.*b(t)-lambda.*t).*(4*mu1*beta1+4*mu1^3+mu1^4.*(b(t)+d(t))+4*beta1/sigma^2.*bpr(t)) - Fxxxx(t,b(t));
  B2t = @(t) B(t).*(mu1.*bpr(t)-lambda)+mu1^3.*(bpr(t)+beta.*d(t)+(-mu+beta*b(t)))*exp(mu1.*b(t)-lambda.*t) - Fxxxx(t,b(t))*bpr(t) - Fxxxt(t,b(t));

end

% Neuberechnung für einen schönen Plot
max = 400;
xx  = linspace(0,T,max);
yy  = zeros(max,1);
for i=1:max
    yy(i) = bfunc(xx(i),t,y);
end
res=y;
plot(100.*xx,yy,'-b',100.*xx,F.*sigma.*sqrt(-log(T-xx).*(T-xx)),'--g',100.*xx,0.9359,'r');

%-----------------------------------------------------------------------
%----------------Die Funktion b-----------------------------------------
%-----------------------------------------------------------------------
function value=bfunc(x,t,y)
  if ((x>=t(n-start)) && (x<=T))
    value=C*F*sqrt(T-x)*(-log(T-x))^(expo)+epsilon;
  else
    value=interp1(t,y,x);
  end
end

%-----------------------------------------------------------------------
%---------------Die Funktion b'-----------------------------------------
%-----------------------------------------------------------------------
function value=bprfunc(x,t,khelp)
  if ((x>=t(n-start)) && (x<=T))
    value=-C*F/(2*sqrt(T-x))*(-log(T-x))^(expo)+C*F*expo*(-log(T-x))^(expo-1)/(sqrt(T-x));
  else
```

```
    value=interp1(t,khelp,x,'nearest');
  end
end

%-----------------------------------------------------------------
%----------------Hilfsfunktionen Int0----------------------------
%   Numerisches lösen des Integrals von a1 bis a2 über die
%   Funktion f mit N Interpolierungspunkten
%-----------------------------------------------------------------
function value = Int0(f,a1,a2,N)
  S=0;
  x=linspace(a1,a2,N);
  dist=(a2-a1)/(N-1); %hier omptimieren: Werte auf den ganzen Vektor anwenden (parall rechenbar und dann summieren
  for j=1:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
  end
  value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew2.*x(N)+(1-gew2).*x(N-1)));
end

%-----------------------------------------------------------------
%----------------Hilfsfunktionen Int1----------------------------
%-----------------------------------------------------------------
function value = int1(t,N,b,B2t)
  f=@(s)(K(b(t),T-t,-b(t-s),s)-K(b(t),T-t,b(t-s),s)).*B2t(T-s);

  S=0;
  x=linspace(0,T-t,N);
  dist=(T-t)./(N-1);
  S=S+dist.*(1/6).*(f(gew1.*x(1)+(1-gew1).*x(2))+4.*f((x(1)+x(1+1))/2)+f(x(1+1)));

  for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
  end

  value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew2.*x(N)+(1-gew2).*x(N-1)));
end


%-----------------------------------------------------------------
%----------------Hilfsfunktionen Int2----------------------------
```

```
%-----------------------------------------------------------------
function value = int2(t,N,b,D)

  f=@(s)Kx(b(t),T-t,b(T-s),s).*D(T-s);
  S=0;
  x=linspace(0,T-t,N); %Unterteilung von [0,T-t] in N gleich
      große Teile
  dist=(T-t)./(N-1); %Distanc der einzelen Teile
  S=S+dist.*(1/6).*(f(gew1.*x(1)+(1-gew1).*x(2))+4.*f((x(1)+x
      (1+1))/2)+f(x(1+1)));
  for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
  end

  value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew2
      .*x(N)+(1-gew2).*x(N-1)));
end

%-----------------------------------------------------------------
%----------------Hilfsfunktionen Int3---------------------------
%-----------------------------------------------------------------
function value = int3(t,N,b,D)

  f=@(s)Kx(b(t),T-t,-b(T-s),s).*D(T-s);
  S=0;
  x=linspace(0,T-t,N);
  dist=(T-t)./(N-1);

  S=S+dist.*(1/6).*(f(gew1.*x(1)+(1-gew1).*x(2))+4.*f((x(1)+x
      (1+1))/2)+f(x(1+1)));

  for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
  end

  value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew2
      .*x(N)+(1-gew2).*x(N-1)));
end

%-----------------------------------------------------------------
%----------------Hilfsfunktionen Int4---------------------------
%-----------------------------------------------------------------
function value = int4(t,N,b,B)

```

```
  %exp(mu1.*epsilon-lambda.*T).*(2*beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(2*epsilon))=B(T), da
  %b(T)=epsilon, nach Definition, und d(T)=H0 + gamma,.
  f=@(zeta)Kx(b(t),T-t,zeta,0).*(hprpos(zeta)-exp(mu1.*epsilon-lambda.*T).*(2*beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(H0+gamma+epsilon)));
  S=0;
  x=linspace(0,epsilon,N);
  dist=(epsilon)./(N-1);
  S=S+dist.*(1/6).*(f(gew3.*x(1)+(1-gew3).*x(2))+4.*f((x(1)+x(1+1))/2)+f(x(1+1)));

  for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
  end

  value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew3.*x(N)+(1-gew3).*x(N-1)));
end

%-----------------------------------------------------------------------
%----------------Hilfsfunktionen Int5-----------------------------------
%-----------------------------------------------------------------------
function value = int5(t,N,b,B)

  f=@(zeta)Kx(b(t),T-t,zeta,0).*(hprneg(zeta)-exp(mu1.*epsilon-lambda.*T).*(2*beta1+3*mu1^2+mu1^3.*(H0+gamma+epsilon)));
  S=0;
  x=linspace(-epsilon,0,N);
  dist=(epsilon)./(N-1);
  S=S+dist.*(1/6).*(f(gew4.*x(1)+(1-gew4).*x(2))+4.*f((x(1)+x(2))/2)+f(x(2)));

  for j=2:(N-2)
    S=S+dist.*(1/6).*(f(x(j))+4.*f((x(j)+x(j+1))/2)+f(x(j+1)));
  end

  value=S+dist.*(1/6).*(f(x(N-1))+4.*f((x(N-1)+x(N))/2)+f(gew4.*x(N)+(1-gew4).*x(N-1)));
end

end
```

Programmcodes für die Simulation der Prozesse

```
function [ruin, Auszahlung] = simulation_v2(b, t0, div, einzel,
    K)

% Funktion simulation()
%
% Übergabewerte:
% b ... Grenzfunktion
% t0 ... Startwert (Wert zwischen 1 und 100)
% div ... Auszahlung von Dividenden ja/nein
% einzel ... Einzelsimulation ja/nein - Auswirkung: Plot,
%            diverse Ausgaben
% K ... Verfeinerung d. Genauigkeit
%
% Verfeinerung in Version 2:
% Mittels der Funktion feiner wird die Grenzfunktion b
% verfeinert (bei einzel=0 wird angenommen das sie bereits
% verfeinert übergeben worden ist!). Anschließend erfolgt die
% Auszahlung der Dividenen (soweit vorgesehen) zu den neuen
% feineren Zeitpunkten.
%
% Rückgabewert:
% ruin ... gibt an ob Ruin eingetreten ist
%      1 ja
%      0 nein
%     -1 Fehler bei der Verarbeitung

% ------------------------------------------------------------
% ---------------- Parameter ---------------------------------
% ------------------------------------------------------------
mu      = 4;
sigma   = 2^.5;
beta    = 2;
T       = 1;
n       = 401;
nn      = (n-1)*K+1;

delta = T/(nn-1);
start = t0*(nn-1)/(T*100);

if start - floor(start) ~= 0 || start > (nn-1)
```

```
    'Unpassender Startwert - start muss ganzzahlig und kleiner n sein!'
    t0
    start
    return
end

if einzel == 1
    % Genauigkeit umsetzen
    % Bei Aufruf von Multisim wurde das bereits dort erleigt
    b = feiner(b,n,K,T);
end

% ---------------------------------------------------------------
% ------------------- Variablen ------------------------------
% ---------------------------------------------------------------

X   = zeros(nn,1);

W   = zeros(nn,1); %Wert d. Brownschen Bewegung
C   = zeros(nn,1); %Auszahlungsprozess
SC  = zeros(nn,1); %Summe der Auszahlungen ohne Abzinsung
t   = linspace(0,T,nn); %Zeitpunkte für die Auswertung
Auszahlung = 0;
ruin     = -1;

% ---------------------------------------------------------------
% ------------------- Simulation ------------------------------
% ---------------------------------------------------------------
X(start) = b(start); % Beginn ident mit Barrierefunktion

for jj=start+1:nn-K-1
    %Wdelta = Normalverteilte ZV mu=0 und sigma^2=delta
    Wdelta = delta^0.5*randn();
    X(jj) = X(jj-1) + mu*delta + sigma * Wdelta;
    W(jj) = W(jj-1) + Wdelta; %Dokumentation der BB
    if X(jj) <= 0
        %Abbruch
        %'Ruin'
        ruin = 1;
        if einzel == 1
            ['Ruinzeitpunkt: ', num2str(jj), ' = ', num2str(jj*100*delta)]
            ['Ausgezahlte Dividenen: ', num2str(Auszahlung)]
```

```
82          end
83          SC(jj) = SC(jj-1);
84          break
85      end
86      if X(jj) > b(jj) && div == 1
87          %Übertrag wird als Dividende ausgezahlt
88          C(jj) = X(jj) - b(jj);
89          X(jj) = X(jj) - C(jj);
90          Auszahlung = Auszahlung + C(jj) * exp(-beta*t(jj));
91      end
92      SC(jj) = SC(jj-1) + C(jj);
93  end
94
95  if X(nn-K-1) > 0 && ruin ~= 1
96      ruin = 0;
97      Auszahlung = Auszahlung + X(nn-K-1)*exp(-beta*t(nn-K-1));
98  end
99
100 if einzel == 1
101     %plot
102     m = max(max(max(SC),max(X)),max(b))+0.2;
103     xx  = linspace(0,T,nn);
104     plot(100.*xx(start:nn), X(start:nn), '-k',100.*xx(start:nn)
            , b(start:nn), '-b', 100.*xx(start:jj), SC(start:jj), '-
            g', 100.*xx(start:nn));
105     axis([t0 T*100 0 m]);
106     ['Auszahlung: ', num2str(Auszahlung)]
107 end
108
109 end
```

```
function [ruinzeitpunkt, rzp1, rzp2, rzp3] = dreifachsimulation
    (b1, b2, b3, K)


% Funktion dreifachsimulation()
%
% Simuliert einen Prozess Y_t und gibt das Verhalten des
% Zustandsprozesses X unter den drei übergebenen Barrierefunk-
% tionen aus. Wenn Y nicht schon alleine in den Ruin eintritt
% werden die X-Prozesse anschließend in einem gemeinsamen Plot
% ausgegeben.
%
% Übergabewerte:
% bi ... verschiedene Grenzfunktionen
% K ... Verfeinerung d. Genauigkeit
%
% Inkl. Verfeinerung:
% Mittels der Funktion feiner wird die Grenzfunktion b
% verfeinert. Anschließend erfolgt die Auszahlung der Dividenen
% (soweit vorgesehen) zu den neuen feineren Zeitpunkten.
%
% Rückgabewert:
% ruinzeiptunkt ... Gibt an wann Ruin ohne Dividendenzahlung
%                   eingetreten ist. Bei 0 ist kein Ruin
%                   eingetreten.
% rzpi          ... Gibt den ein Ruinzeitpunkt für
%                   Dividendenzahlungen mit Barrierefunktion
%                   bi an.

% ------------------------------------------------------------
% ---------------- Parameter ----------------------------------
% ------------------------------------------------------------
mu      = 4;
sigma   = 2^.5;
beta    = 2;
T       = 1;
n       = 401;
nn      = (n-1)*K+1;

delta = T/(nn-1);

% Genauigkeit umsetzen
b1 = feiner(b1,n,K,T);
```

```
b2 = feiner(b2,n,K,T);
b3 = feiner(b3,n,K,T);


% ------------------------------------------------------------------------
% ------------------------ Variablen ------------------------------------
% ------------------------------------------------------------------------
Y    = zeros(nn,1);
W    = zeros(nn,1);
ruinzeitpunkt     = 0;

% ------------------------------------------------------------------------
% ------------------------ Simulation  Y --------------------------------
% ------------------------------------------------------------------------
Y(1) = b1(1);
for jj=2:nn-K-1
    %Wdelta = Normalverteilte ZV mu=0 und sigma^2=delta
    Wdelta = delta^0.5*randn();
    Y(jj) = Y(jj-1) + mu*delta + sigma * Wdelta;
    W(jj) = W(jj-1) + Wdelta; %Dokumentation der BB
    if Y(jj) <= 0
        %'Ruin'
        ruinzeitpunkt = jj;
        break
    end
end

if (ruinzeitpunkt == 0)
    [X1, rzp1] = div_berechnung(b1,Y,nn,K);
    [X2, rzp2] = div_berechnung(b2,Y,nn,K);
    [X3, rzp3] = div_berechnung(b3,Y,nn,K);

    xx  = linspace(0,T,nn);

    subplot(3,1,1);
    plot(100.*xx, X1, '-k', 100.*xx, b1, '-b');
    subplot(3,1,2);
    plot(100.*xx, X2, '-k', 100.*xx, b2, '-b');
    subplot(3,1,3);
    plot(100.*xx, X3, '-k', 100.*xx, b3, '-b');
    axis([0 T*100 0 1.1]);
end
end
```

```
function [X, ruinzp] = div_berechnung(b,X,nn,K)

% Funktion div_berechnung()
%
% Berechnet für den übergebenen Prozess und Barrierefunktion b
% den Wertprozess nach Abzug der Dividendenzahlungen.
%
% Übergabewerte:
% b ... Barrierefunktion
% K ... Verfeinerung d. Genauigkeit
% nn ... Anzahl der Punkte
%
% Rückgabewert:
% ruinzp ... Gibt an wann Ruin ohne Dividendenzahlung
%            eingetreten ist. Bei 0 ist kein Ruin eingetreten.
% X      ... Zustandsprozess nach Abzug der Dividenden

C       = zeros(nn,1); %Auszahlungsprozess
CS      = zeros(nn,1); %Summierter Auszahlungsprozess
ruinzp  = 0;

for jj=2:nn-K-1

    X(jj) = X(jj) - CS(jj-1);

    if X(jj) <= 0
        %Ruin
        ruinzp = jj;
    end

    if X(jj) > b(jj) && ruinzp == 0
        %Übertrag wird als Dividende ausgezahlt
        C(jj) = X(jj) - b(jj);
        X(jj) = X(jj) - C(jj);
    end
    if ruinzp > 0
        X(jj) = 0;
    end
    CS(jj) = CS(jj-1) + C(jj);
end
end
```

Programmcode für die Massensimulation

```
function [ruinws,dausz,dausz_all] = multisim_v2(b,t0,div,anz,K)

% Funktion multisim()
% Simuliert mehrmals und Berechnet die geschätze
% Ruinwahrscheinlichkeit über die Summe der Ruine/Gesamtanzahl.
%
% Übergabewerte:
% b ... Grenzfunktion
% t0 ... Startwert
% div ... Auszahlung von Dividenden ja/nein
% anz ... Anzahl der Simulationen
% K ... zusätzliche Genauigkeit (Wichtig: Ganzzahlig!)
%
% Rückgabewerte:
% ruinws ... Schätzer für die Ruinwahrscheinlichkeit
% dausz ... Mittel der abgezinsten Dividenden (Mittel über
%           alle Fälle ohne Ruin)
% dausz_all ... Mittel der abgezinsten Dividenen (Mittel über
%               alle Fälle inkl. Ruin)

n=401;
T=1;

ruin = zeros(anz,1);
ausz = zeros(anz,1);
rausz = zeros(anz,1);

if K > 1
    b=feiner(b,n,K,T);
end

for kk=1:anz

    [ruin(kk),ausz(kk)] = simulation_v2(b,t0,div,0,K);
    if ruin(kk)==1
        rausz(kk)=ausz(kk);
        ausz(kk)=0;
    end
end

ruinws = sum(ruin)/anz;
```

```
dausz   = sum(ausz)/(anz-sum(ruin));
dausz_all = (sum(ausz)+sum(rausz))/anz;

%Ausgabe:
['Ruinwahrscheinlichkeit: ', num2str(ruinws)]
['Mittlere abgezinste Dividenden (ohne Ruin): ', num2str(dausz)]
['Mittlere abgezinste Dividenden (mit Ruin): ', num2str(dausz_all)]
end
```

Weitere verwendete Funktionen

```
function y = feiner (y1,n,K,T)

% Funktion feiner()
%
% Bestimmt die Funktion der mit y1 übergebenen Werten an den
% den n Stützstellen und gibt die Werte der Funktion an den
% um K verfeinerten Stützstellen zurück.
%
% Paramter:
%  y1 ... n Werte der Funktion
%  n ... Anzahl der alten bekannten Punkte
%  K ... Verfeinerung
%  T ... Endpunkt der Stützwerte (Beginnwert = 0)
%
% Rückgabewert:
%  y ... verfeinertes Gitter mit den Funktionswerten für die
%  n*K-Verfeinerung
%

t    = linspace(0,T,n); %Zeitpunkte für die Auswertung
t2   = linspace(0,T,(n-1)*K+1); %feinere Aufteilung
y=interp1(t,y1,t2); %Verfeinerung
```

Literaturverzeichnis

[CW90] Chung, K. L. ; Williams, R. J.: *Introduction to stochastic integration.* 2. Auflage. Birkhäuser, 1990

[FS93] Fleming, Wendell H. ; Soner, H. M.: *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* Springer, 1993

[Ger79] Gerber, Hans U.: *An introduction to mathematical risk theory.* Irwin, 1979

[Gül11] Gülüm, Ismail C.: *Controlles Diffusion Models with Applications to Dividend Payment*, TU Wien, Diplomarbeit, 2011

[Gra13] Grandits, Peter: Optimal Consumption in a Brownian Model with Absorption and Finite Time Horizon. In: *Applied Mathematics and Optimization* Bd. 67. Springer, April 2013, S. 197 – 241

[Gra14] Grandits, Peter: *An optimal consumption problem in finite time with a constraint on the ruin probability.* 2014

[JS03] Jacod, Jean ; Shiryaev, Albert N.: *Limit theorems for stochastic processes.* 2. Auflage. Springer, 2003

[Kar81] Karatzas, Ioannis: The monotone follower problem in stochastic decision theory. In: *Applied Mathematics and Optimization* Bd. 7. Springer, 1981, S. 175–189

[Øks95] Øksendal, Bernt: *Stochastic differential equations : an introduction with applications.* 4. Auflage. Springer, 1995

[LS84] Lions, P. L. ; Sznitman, A. S.: Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* Bd. 37. Wiley, Juli 1984, S. 511–537

[Pro05] Protter, Philip E.: *Stochastic integration and differential equations.* 2. Auflage. Springer, 2005

[Sas06] Sass, Jörn: *Stochastic Control: With Applications to Financial Mathematics.* 2006. – Unterlagen zur Vorlesung an der JKU Linz

[Sch08] Schmidli, Hanspeter: *Stochastic Control in Insurance.* Springer, 2008