TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

Diplomarbeit

Modelle des Pensionsantrittsalters bei demographischen Änderungen

Ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Alexia Fürnkranz-Prskawetz

durch

Ines Hartmann
Nelkenweg 13
2380 Perchtoldsdorf

Wien, 13. Dezember 2017

Abstract

Demographische Veränderungen wie steigende Lebenserwartung oder sinkende Fertilitätsrate üben Druck auf die Pensionssysteme aus und zwingen Regierungen Pensionsreformen durchzuführen, um den Problemen bei Alterung der Bevölkerung gegenzusteuern. Eine Möglichkeit ist die Erhöhung des Pensionsantrittsalters. Diese Arbeit befasst sich mit unterschiedlichen Modellen des Pensionsantrittsalters und untersucht die Folgen der zuvor erwähnten demographischen Änderungen anhand von drei Modellen: (i) Ein OLG-Modell von Cipriani (2016); (ii) ein zeitstetiges Modell von Bethencourt und Perera-Tallo (2014); (iii) ein OLG-Modell von Miyazaki (2014). In (i) und (ii) wird das Pensionsantrittsalter durch eine Nutzenmaximierung optimal berechnet und die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung sowie einer sinkenden Fertilitätsrate auf den pro Kopf Kapitalstock, das Pensionsantrittsalter und die Pensionszahlungen betrachtet. In (iii) ist das Pensionsantrittsalter exogen geben und es werden die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters auf den pro Kopf Kapitalstock, den aggregierten Output und die Pensionszahlungen analysiert. In Rahmen dieser Arbeit wird das Modell von Cipriani (2016) um eine endogene Fertilitätsrate erweitert, sowie im Modell von Miyazaki (2014) die Lebenserwartung eingeführt. In (i) und (ii) wird gezeigt, dass das Pensionsantrittsalter bei steigender Lebenserwartung steigt. In (i) steigt das Pensionsantrittsalter auch bei sinkender Fertilitätsrate, in (ii) sind Auswirkungen auf das Pensionsantrittsalter, welche sich durch Änderungen der Fertilitätsrate ergeben, nicht eindeutig. In (iii) wird gezeigt, dass der pro Kopf Kapitalstock mit steigendem Pensionsantrittsalter sinkt, jedoch die Pensionszahlungen steigen. Die Auswirkungen auf den aggregierten Output sind nicht eindeutig.

Abstract (english)

Population ageing as caused by increasing life expectancy or decreasing fertility leads to major challenges for pensions systems. One way to deal with it could be an increase in the official retirement age. Therefore, the aim of this thesis is to review different models of retirement age and analyze the effects of demographic changes on key economic variables. Three different models are considered: (i) an OLG model (Cipriani, 2016); (ii) a continuous OLG model (Bethencourt and Perera-Tallo, 2014); (iii) an OLG model (Miyazaki, 2014). In (i) and (ii) the retirement age is endogenously chosen and the effects of an aging population on the capital stock, retirement age and pension benefits are investigated. In (iii) the retirement age is given exogenously and the effects of an increase in the retirement age on the capital stock, aggregate output and pension benefits are analyzed. Furthermore, the existing models are extended as follows: In (i) an endogenous fertility rate is considered, in (iii) life expectancy is introduced. In (i) and (ii) an increase in life expectancy leads to an increase in the retirement age. In (i) a drop in fertility induces an increasing retirement age, in (ii) the effects of a fertility drop are ambiguous. In (iii) an increase in the retirement age leads to a fall in the capital stock and an increase in the pensions benefits. The effects are ambiguous for the aggregate output.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit demographischen Änderungen und deren Auswirkungen auf das Pensionsantrittsalter. Dazu werden einerseits zwei verschiedene Modelle vorgestellt, in denen das Penionsantrittsalter optimal berechnet wird und die Effekte einer sinkenden Fertilität bzw. einer steigenden Lebenserwartung auf das Pensionsantrittsalter analysiert werden. Andererseits wird ein Modell betrachtet, bei dem das Pensionsantrittsalter exogen vorgegeben ist und die Effekte einer Veränderung des Pensionsantrittsalters auf den aggregierten Output untersucht werden.

Eine alternde Bevölkerung — also sinkende Fertilitätsrate und steigende Lebenserwartung — bewirkt, dass der Anteil der älteren Personen (über 65 Jahre) an der Gesamtbevölkerung steigt. Dadurch werden die staatlichen Pensionssysteme unter Druck gesetzt und müssen reagieren, um das Pensionsbudget weiterhin ausgeglichen zu halten. Bonenkamp et. al. (2017) zeigen, dass Pensionssysteme einer Reform unterzogen werden müssen, um den Problemen, die durch eine alternde Bevölkerung zustandekommen, gegenzusteuern. Die Pensionssysteme müssen geändert werden, damit sie langfristig nachhaltig sind. Dazu könnten einerseits bestehende Systeme angepasst werden, zum Beispiel durch Erhöhung des Pesionsantrittsalters oder der Pensionsbeiträge. Andererseits könnten, wenn nicht schon vorhanden, beitragsorientierte (defined contribution, DC) Pensionssysteme eingeführt werden. Bei einem Wechsel von einem leistungsdefinierten (defined benefit, DB) Pensionssystem zu einem beitragsdefinierten wird das Risiko einer steigenden Lebenserwartung eher auf die Pensionistinnen und Pensionisten übertragen. Bei einem leistungsdefinierten System werden die Pensionsbeiträge sofort mithilfe einer Formel in zu erwartende Leistungen umgewandelt. Pensionistinnen und Pensionisten erhalten also im Voraus festgelegte Pensionszahlungen. Bei einer steigenden Lebenserwartung müssen diese in gleicher Höhe jedoch länger ausbezahlt werden. Somit muss der Staat bei einer steigenden Lebenserwartung die zusätzlichen Kosten übernehmen.

Im Gegensatz dazu werden bei beitragsdefinierten Systemen die Pensionszahlung nicht fixiert, sondern ergeben sich aus den fixen Beiträgen, die während des Arbeitslebens angehäuft und zum Pensionsantritt in eine jährliche Pension umgewandelt werden. Eine höhere Lebenserwartung bedeutet in diesem Fall, dass die verfügbaren Einzahlungen länger ausbezahlt werden müssen, was die jährliche Rate senkt. Somit liegt das Risiko einer steigenden Lebenserwartung in diesem Fall bei den Pensionistinnen und Pensionisten.
Die Europäische Kommission zeigt in ihrem Bericht von Carone et. al. (2016), welche Reformen die europäischen Länder jeweils durchgeführt haben. Oft ist es eine Kombination aus der parametrischen Veränderung und dem Wechsel zu neuen Pensionssystemen. So haben zum Beispiel außer Luxemburg alle EU Länder das Pensionsantrittsalter angehoben. Außerdem wird neben Österreich beispielsweise in Kroatien, Italien, der Slowakei oder Großbritannien bis 2060 das Frauenpensionsantrittsalter an jenes der Männer angeglichen. Zusätzlich haben zum Beispiel Schweden, Italien (beide schon seit Ende der 1990er Jahre), Griechenland, Polen und Lettland auf ein NDC System gewechselt. Deutschland hat ein spezielles Punktesystem (point system), das einem beitragsdefinierten System ähnlich ist, da während des Erwerbslebens Punkte gesammelt werden, die dann zu Beginn der Pension in Pensionszahlungen umgewandelt werden. Auch Kroatien, Zypern, Rumänien und die Slowakei haben dieses Punktesystem eingeführt. Österreich hat seit 2005 ein leistungsdefiniertes Umlageverfahren (Pay-As-You-Go DB), das sich in eigenen Pensionskonten darstellt. Weiters wird in dem Bericht erwähnt, dass die Hälfte der EU Länder Mechanismen eingeführt haben, welche die Lebenserwartung berücksichtigen und damit versuchen die Nachhaltigkeit der Pensionssysteme zu gewährleisten. Einige Länder verwenden auch zwei Mechanismen in Kombination. Das wären zum einen so genannte Ausgleichsmechanismen (automatic balancing mechanisms), welche die Indexierung der Leistungen oder Beiträge bei DB bzw. DC Systemen gegebenenfalls anpassen[1]. Diese Mechanismen werden nur in Schweden, Deutschland und Spanien verwendet. Zum anderen wären das so genannte Nachhaltigkeitsfaktoren (sustainability factors), welche bei Änderungen der Lebenserwartung oder anderen demographischen Effekten direkt die Höhe der Pensionszahlungen verändern. Diese Variante wird zum Beispiel in Italien, Polen, Schweden oder Spanien verwendet. Und zuletzt gibt es noch die Methode das Pensionsantrittsalter an die Lebenserwartung automatisch anzupassen (automatic link between retirement age and life expectancy), welche beispielsweise in

[1] frei übersetzt aus Carone et. al. (2016), Seite 17

Italien, Griechenland, der Slowakei oder den Niederlanden zu finden sind[2].

Wie schon erwähnt sind Pensionsreformen wichtig, um den demographischen Änderungen entgegenzuwirken. In den letzten Jahren ist einerseits die Lebenserwartung gestiegen und andererseits die Fertilitätsrate gesunken, was in Abbildung 1.1. verdeutlicht wird. Die Lebenswartung ist von etwa 69 Jahren im Jahr 1960 auf knapp 82 Jahre im Jahr

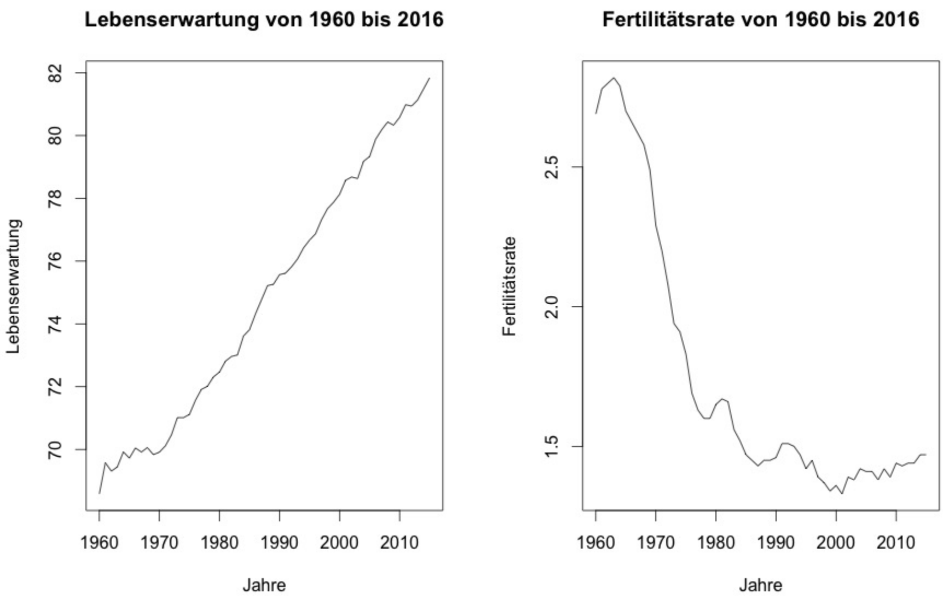


Abbildung 1.1.: Verlauf von Lebenserwartung und Fertilität der letzten 56 Jahre in Österreich. Quelle: Weltbank (2017).

2016 gestiegen. Die Fertilitätsrate ist von etwa 2,7 im Jahr 1960 auf knapp 1,5 im Jahr 2016 gesunken. Bei der Fertilitätsrate ist weiters zu sehen, dass es wieder einen leichten Aufwärtstrend gibt. Der tiefste Wert lag 2001 bei 1,3. Insgesamt bedeutet das, dass Menschen länger leben, jedoch nicht mehr so viele Kinder geboren werden. Die Bevölkerung wird sozusagen älter, der Altersabhängigkeitsquotient ("old-age dependency ratio") steigt. Dieser beschreibt das Verhältnis der über 65 jährigen zur Erwerbsbevölkerung, also

$$\text{Altersabhängigkeitsquotient} = \frac{\text{Anzahl der Menschen über 65 Jahre}}{\text{Anzahl der Menschen zwischen 15 und 64 Jahren}}.$$

[2]vgl. Carone et. al. (2016), Seite 8-18.

Laut dem Bericht der Europäischen Kommission von Carone et. al. (2016) wird erwartet, dass in der EU das Verhältnis von Erwerbspersonen (zwischen 15 und 64 Jahren) zu über 65 jährigen in Zukunft zwei zu eins sein wird, anstatt vier zu eins wie es bisher war. In Abbildung 1.2. wird dieser Trend eines steigenden Altersabhängigkeitsquotien-

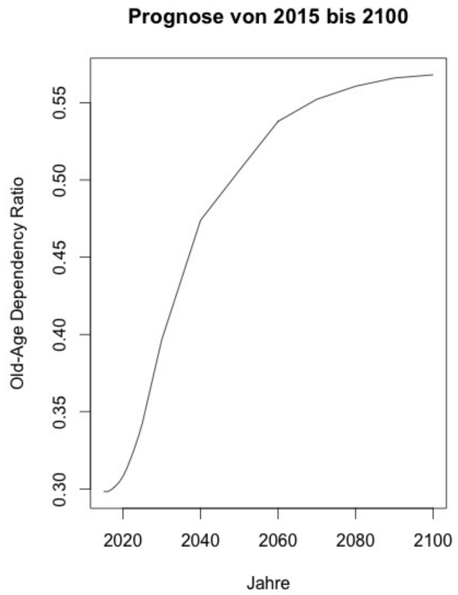


Abbildung 1.2.: Prognose des Altersabhängigkeitsquotienten in Österreich. Quelle: Statistik Austria (2017). Die Old-Age Dependency Ratio wurde hier als Verhältnis der über 65 jährigen zu jenen zwischen 20 und 64 Jahren definiert.

ten veranschaulicht. In Österreich kamen 2015 auf eine Person über 65 Jahre knapp 3 erwerbstätige Personen, 2050 werden es nur mehr zwei Personen sein.

Die EU Kommission schreibt in einem Bericht von Schwan und Sail (2013), dass eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters essentiell ist. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit verschiedene Modelle vorgestellt, die das Pensionsantrittsalter explizit betrachten und die Auswirkungen einer alternden Bevölkerung analysieren.
Viele Autoren beschäftigen sich mit dem Thema des Pensionsantrittsalters. So wird in Fanti (2012) ein Pay-As-You-Go System mit Fertilität betrachtet und gezeigt, dass ein Sinken der Fertilitätsrate kurzfristig immer positive Auswirkungen auf die Pensionszahlungen hat, dass es langfristig jedoch auf die aktuelle Fertilitätsrate sowie die Kosten der Kindererziehung ankommt.

Dedry et. al. (2014) betrachten ein Overlapping-Generations (OLG) Modell und unterscheiden einerseits zwischen exogenem und endogenem Pensionsantrittsalter und andererseits zwischen drei verschiedenen Pensionssystemen: leistungsdefiniert, beitragsdefiniert und ein Pensionssystem mit konstanter jährlicher Rate. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass die jeweiligen Auswirkungen einer alternden Bevölkerung auf die Kapitalakkumulation von der jeweiligen Kombination von Pensionsantrittsalter und Pensionssystem abhängen. Sie begründen ihr Ergebnis damit, dass sich nicht jedes Land gleich verhält und es deswegen wichtig ist, für ein Land die jeweils beste Lösung zu finden.
Prettner und Canning (2014) betrachten ein dezentrales, kontinuierliches Modell, bei dem das Pensionsantrittsalter durch die Nutzenmaximierung der Individuen optimal berechnet wird. Die Autoren untersuchen in ihrem Paper die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung auf das optimale Pensionsantrittsalter. Im Allgemeinen sind diese Effekte nicht eindeutig. Für hinreichend hohes Pensionsantrittsalter sind die Auswirkungen jedoch positiv. Die Autoren zeigen, dass dies für die G8 Länder erfüllt ist und kommen demnach zu dem Schluss, dass eine Erhöhung der Lebenserwartung einen Anstieg des optimalen Pensionsantrittsalters bewirkt.
Fanti und Gori (2010) betrachten in ihrem Paper keine alternde Bevölkerung, nehmen jedoch an, dass das Pensionsantrittsalter vom Gesundheitsstatus abhängt bzw. davon, wie viel der Staat in Gesundheit investiert. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass das Pensionsantrittsalter mit steigenden Gesundheitsausgaben steigt, mit steigenden Pensionsbeiträgen und in Folge steigenden Pensionszahlungen sinkt. Je gesünder man ist, desto länger kann man arbeiten. Werden die Pensionseinzahlungen erhöht, so kann kürzer gearbeitet werden, um trotzdem genügend Einkommen in der Pension zu Verfügung zu haben.

Diese Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: In Kapitel 2 wird das Modell von Cipriani (2016) vorgestellt. Es wird ein 2-Perioden OLG-Modell mit endogenem Pensionsantrittsalter betrachtet und gezeigt, dass sowohl eine Erhöhung der Lebenserwartung als auch ein Sinken der Fertilität das optimale Pensionsantrittsalter erhöhen. Steigt die Lebenserwartung, so wird die Pensionsdauer verlängert, weshalb Individuen länger arbeiten werden, um in der Pension keine finanziellen Einbußen zu haben. Sinkt die Fertilität, so werden die Pensionszahlungen von weniger Beitragszahlern finanziert, weshalb diese sinken. Um weiterhin genug Einkommen in der Pension zur Verfügung zu haben, werden Individuen länger arbeiten. In Kapitel 3 wird das Modell von Bethencourt und Perera-Tallo (2012) betrachtet. Es handelt sich um ein kontinuierliches Modell, welches mithilfe eines sozialen Planers wiederum das optimale Pensionsantrittsalter berechnet und die Auswirkung einer alternden Bevölkerung betrachtet. Auch hier führt eine Erhöhung der Lebenserwartung zu einem Anstieg des Pensionsantrittsalters. Ein Sinken der Fertilität hat in diesem Modell im Allgemeinen keinen eindeutigen Effekt. In Kapitel 4 wird das OLG-Modell von Miyazaki (2014) betrachtet. Diesmal ist das Pensionsantrittsalter exogen vorgegeben und es werden die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters auf den aggregierten Output betrachtet. Zusätzlich wurde noch die Lebenserwartung modelliert, um auch die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung auf den aggregierten Output zu analysieren. Diese Effekte sind nicht eindeutig. In einer realen Ökonomie führt eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters bzw. der Lebenserwartung für plausible Parameterwerte für Kapitalelastizität und Steuer zu einem Steigen des aggregierten Outputs. In allen Modellen dieser Arbeit wird die Annahme getroffen, dass das Staatsbudget zu jedem Zeitpunkt ausgeglichen ist. Das heißt, dass bei der Berechnung der Pensionszahlungen sowohl die Fertilität als auch die Lebenserwartung berücksichtigt werden. Zuletzt wird in Kapitel 5 eine Zusammenfassung sowie ein Vergleich der Modelle dargestellt.

Kapitel 2

Optimales Pensionsantrittsalter in einem OLG-Modell

In diesem Abschnitt wird das Modell "Aging, Retirement and Pay-As-You-Go Pensions" von Cipriani (2016) vorgestellt.

2.1. Modell

Cipriani (2016) verwendet ein Overlapping Generations (OLG-) Modell, um das optimale Pensionsantrittsalter zu berechnen und die Auswirkungen einer Erhöhung der Lebenserwartung oder eines Sinkens der Fertilität auf das Pensionsantrittsalter zu berechnen. Dazu wird das Leben der Individuen in drei Phasen unterteilt:

- Kindheit: Individuen müssen keine ökonomischen Entscheidungen treffen.
- Erwachsenenleben: Individuen arbeiten die ganze Zeit, es wird keine Freizeit angenommen. Individuen entscheiden, wie viel vom Lohn sie für Konsum ausgeben und wie viel sie für die Pension ansparen.
- Höheres Alter: Individuen müssen entscheiden wie lange sie noch arbeiten und ab wann sie in Pension gehen. In der Pension erhalten sie Pensionszahlungen vom Staat. Sie überleben jedoch nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit.

Da in der ersten Phase des Lebens keine ökonomischen Entscheidungen getroffen werden, modelliert das OLG-Modell nur das Erwachsenenleben (Periode 1) und das hohe Alter (Periode 2). Die Nutzenfunktion zum Zeitpunkt t lautet:

$$U_t = \ln c_{1,t} + \beta\pi[\ln c_{2,t+1} + \delta \ln(1 - l_t)], \tag{2.1}$$

wobei $c_{1,t}$ den Konsum der Individuen in der ersten Periode zum Zeitpunkt t und $c_{2,t+1}$ den Konsum der Individuen, die zum Zeitpunkt $t+1$ in der zweiten Periode sind, bezeichnet. Weiters beschreibt β den Diskontierungsfaktor, also wie viel einem die zweite Periode wert ist, π die Wahrscheinlichkeit in die zweite Periode zu kommen, welche als Lebenserwartung interpretiert werden kann, δ wie viel einem Freizeit wert ist und l_t welcher Anteil der zweiten Periode gearbeitet wird. l_t ist in diesem Modell endogen gegeben und wird durch eine Nutzenmaximierung optimal berechnet.
In der ersten Periode können Individuen ihr Nettoeinkommen für Konsum oder Ersparnis verwenden. Die Budgetrestriktion dieser Periode lautet:

$$c_{1,t} = (1-\tau)w_t - s_t, \tag{2.2}$$

wobei w_t den Lohn, τ die Einkommenssteuer und s_t die Ersparnis eines Individuums zum Zeitpunkt t bezeichnet. Weiters gilt, dass die Ersparnis nicht negativ sein kann, da sich Individuen nicht verschulden können:

$$s_t \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_{1,t} \leq (1-\tau)w_t \tag{2.3}$$

In der zweiten Periode setzt sich das verfügbare Kapital aus der Ersparnis der ersten Periode, die mit $\frac{R_{t+1}}{\pi}$ verzinst wird, dem Nettoeinkommen $(1-\tau)w_{t+1}$ für den Anteil l_t, den man arbeitet, und den Pensionszahlungen P_{t+1} für den Anteil $(1-l_t)$, den man in Pension ist, zusammen. Dieses Kapital wird nur für Konsum verwendet. Somit lautet die Budgetrestriktion dieser Periode:

$$c_{2,t+1} = \frac{R_{t+1}}{\pi}s_t + (1-\tau)w_{t+1}l_t + P_{t+1}(1-l_t). \tag{2.4}$$

Zu beachten ist, dass die Überlebenswahrscheinlichkeit bei der Verzinsung einberechnet wird. Je geringer die Wahrscheinlichkeit ist, dass man in die zweite Periode kommt, desto höher ist der Zinssatz. R_{t+1} beschreibt somit den "risikofreien" Zinssatz.
Drückt man aus Gleichung (2.2) die Ersparnis aus und setzt diese dann in Gleichung (2.4), so erhält man die intertemporale Budgetrestriktion:

$$\frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + c_{2,t+1} = \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t + (1-\tau)w_{t+1}l_t + P_{t+1}(1-l_t). \tag{2.5}$$

In diesem Modell wird angenommen, dass die Bevölkerung mit einer konstanten, exogenen Rate n wächst. N_t beschreibt die Anzahl der Individuen im Erwachsenenleben (Periode 1) zum Zeitpunkt t. Es gilt somit $N_t = (1+n)N_{t-1}$. Da jedoch nicht nur die Individuen der ersten Periode arbeiten sondern auch jene der zweiten Periode, setzt sich die erwerbstätige Bevölkerung L_t zum Zeitpunkt t wie folgt zusammen: $L_t = N_t + N_{t-1}\pi l_{t-1} = N_{t-1}(1+n+\pi l_{t-1})$.

Auf der Produktionsseite wird eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion mit den zwei Faktoren Kapital K_t und Arbeit L_t angenommen:

$$Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}, \tag{2.6}$$

wobei $A > 0$ den technologischen Fortschritt und $a \in (0,1)$ die Kapitalelastizität beschreibt. Letztere gibt die prozentuelle Veränderung des Outputs an, wenn sich der Inputfaktor Kapital um ein Prozent verändert. Je höher α ist, desto wichtiger sind Maschinen bzw. Kapital im Vergleich zu Arbeitskräften. Eine repräsentative Firma möchte nun zu jedem Zeitpunkt t ihren Gewinn $Y_t - w_tL_t - R_tK_t$ maximieren. Da ein vollständiger Wettbewerb angenommen wird, ist der Profit langfristig gleich Null. Die Arbeiter und das Kapital werden entsprechend ihrer Grenzproduktivität entlohnt:

$$w_t = \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = (1-\alpha)Ak_t^{\alpha} \qquad \text{und} \qquad R_t = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha A k_t^{\alpha-1}, \tag{2.7}$$

wobei $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ den Kapitalstock pro Arbeitskraft bezeichnet. Der Lohn hängt nur von der Zeit t ab, alle Individuen bekommen somit den gleichen Lohn.

Der Staat möchte sein Budget zu jedem Zeitpunkt ausgeglichen halten, das heißt, dass alle Einnahme durch Steuern gleich den Ausgaben durch das PAYG-Pensionssystem sein müssen. Für die Pensionszahlungen P_{t+1} gilt also

$$\pi(1-l_t)P_{t+1} = \tau w_{t+1}(1+n+\pi l_t)$$

$$\iff \qquad P_{t+1} = \frac{\tau w_{t+1}(1+n+\pi l_t)}{\pi(1-l_t)} \tag{2.8}$$

Individuen verhalten sich nun so als ob sie ihren Nutzen maximieren, unter der Annahme, dass Löhne, Zinssatz und Pension fix gegeben sind. Das Optimierungsproblem lautet somit[3]:

$$\max_{c_{1,t},c_{2,t+1},l_t} \ln c_{1,t} + \beta\pi[\ln c_{2,t+1} + \delta \ln(1-l_t)] \tag{2.9}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - (1-\tau)w_{t+1}l_t - P_{t+1}(1-l_t) = 0 \tag{2.10}$$

$$c_{1,t} - w_t(1-\tau) \leq 0 \tag{2.11}$$

$$l_t - 1 \leq 0 \tag{2.12}$$

$$c_{1,t}, c_{2,t+1}, l_t \geq 0 \tag{2.13}$$

Um dieses Problem zu lösen wird die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L(c_{1,t}, c_{2,t+1}, l_t, \lambda) = &\ln c_{1,t} + \beta\pi[\ln c_{2,t+1} + \delta \ln(1-l_t)] \\ &- \lambda[\frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - (1-\tau)w_{t+1}l_t - P_{t+1}(1-l_t)] \\ &- \mu_1[l_t - 1] - \mu_2[c_{1,t} - (1-\tau)w_t] \end{aligned}$$

herangezogen. Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} \overset{!}{\leq} 0, \qquad c_{1,t} \cdot \frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} \overset{!}{=} 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} \overset{!}{\leq} 0, \qquad c_{2,t+1} \cdot \frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} \overset{!}{=} 0 \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_t} \overset{!}{\leq} 0, \qquad l_t \cdot \frac{\partial L}{\partial l_t} \overset{!}{=} 0 \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \overset{!}{=} 0 \tag{2.17}$$

$$l_t - 1 \overset{!}{\leq} 0, \qquad \mu_1 \cdot (l_t - 1) \overset{!}{=} 0 \tag{2.18}$$

$$c_{1,t} - (1-\tau)w_t \overset{!}{\leq} 0, \qquad \mu_2 \cdot (c_{1,t} - (1-\tau)) \overset{!}{=} 0 \tag{2.19}$$

$$\mu_1,\ \mu_2 \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

$c_{1,t}$ und $c_{2,t+1}$ dürfen nicht Null sein, da sonst die Zielfunktion wegen $\ln(c_{1,t})$ bzw. $\ln(c_{2,t+1})$ gleich $-\infty$ wäre, also gilt $c_{1,t}, c_{2,t+1} > 0$. Dann folgt für Gleichung (2.14), dass die Ableitung $\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}}$ mit Gleichheit erfüllt sein muss, $\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} = 0$. Selbes gilt für Gleichung (2.15), $\frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} = 0$. Mit gleicher Argumentation kann gesagt werden, dass $l_t < 1$ gelten muss, da sonst wiederum die Zielfunktion gleich $-\infty$ wäre. Somit folgt in Gleichung

[3]In Cipriani (2016) wird gleich von einer inneren Lösung ausgegangen, in dieser Arbeit werden der Vollständigheit halber die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen angegeben.

(2.18), dass $\mu_1 = 0$ gelten muss. Die Lagrange-Funktion ändert sich zu

$$
\begin{aligned}
L(c_{1,t}, c_{2,t+1}, l_t, \lambda) = {} & \ln c_{1,t} + \beta\pi[\ln c_{2,t+1} + \delta \ln(1-l_t)] \\
& - \lambda[\frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - (1-\tau)w_{t+1}l_t - P_{t+1}(1-l_t)] - \mu_2[c_{1,t} - (1-\tau)w_t]
\end{aligned}
$$

Insgesamt lauten die Bedingungen erster Ordnung daher:

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} = \frac{1}{c_{1,t}} - \lambda \frac{R_{t+1}}{\pi} - \mu_2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} = \frac{\beta\pi}{c_{2,t+1}} - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.22}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_t} = -\frac{\beta\pi\delta}{1-l_t} + \lambda[(1-\tau)w_t - P_{t+1}] \stackrel{!}{\leq} 0, \quad l_t \cdot \left(-\frac{\beta\pi\delta}{1-l_t} + \lambda[(1-\tau)w_t - P_{t+1}]\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - (1-\tau)w_{t+1}l_t - P_{t+1}(1-l_t) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.24}$$

$$c_{1,t} - (1-\tau)w_t \stackrel{!}{\leq} 0, \qquad \mu_2 \cdot (c_{1,t} - (1-\tau)) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2.25}$$

$$\mu_1, \ \mu_2 \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.26}$$

Es müssen nun alle möglichen Punkte gesucht werden. Dazu werden die Fallunterscheidungen $\mu_2 > 0$, $\mu_2 = 0$, $l_t > 0$ und $l_t = 0$ betrachtet.

$\underline{\mu_2 > 0}$:
Aus Gleichung (2.25) folgt dann sofort, dass $c_{1,t} = (1-\tau)w_t$ und damit $s_t = 0$ gilt. In Folge würde das jedoch bedeuten, dass der Kapitalstock in der nächsten Periode Null wäre, da er sich aus der Ersparnis ergibt, $k_{t+1} = \frac{s_t}{(1+n+\pi l_t)} = 0$. Aus Gleichung (2.7) folgt dann wiederum, dass auch die Löhne gleich Null wären, $w_{t+1} = 0$. Insgesamt würde es zu einem degenerierten System führen, weshalb dieser Fall nicht weiter betrachtet wird.

$\underline{\mu_2 = 0}$:
Aus Gleichung (2.25) folgt, dass $c_{1,t} \leq (1-\tau)w_t$, also $s_t \geq 0$ gelten muss.

a) $l_t = 0$: Aus Gleichung (2.23) folgt, dass die Ableitung $\frac{\partial L}{\partial l_t} \leq 0$ nicht mit Gleichheit erfüllt sein muss.
   Drückt man aus Gleichung (2.21) und (2.22) jeweils λ aus und setzt diese gleich,

so folgt:

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{\pi}{R_{t+1}c_{1,t}} = \lambda \\[2em] \dfrac{\beta\pi}{c_{2,t+1}} = \lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \quad c_{2,t+1} = \beta R_{t+1} c_{1,t} \tag{2.27}$$

Für Gleichung (2.24) gilt mit $l_t = 0$, $P_{t+1} = \frac{\tau w_{t+1}(1+n)}{\pi}$ und Gleichung (2.27)

$$\frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + \beta R_{t+1} c_{1,t} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - \frac{\tau w_{t+1}(1+n)}{\pi} = 0 \quad \Big| \cdot \pi$$

$$\Longleftrightarrow \quad c_{1,t} R_{t+1}(1+\pi\beta) = R_{t+1}(1-\tau)w_t + \tau w_{t+1}(1+n)$$

$$\Longleftrightarrow \quad c_{1,t} = \frac{(1-\tau)w_t + \tau(1+n)\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}}{(1+\pi\beta)} \tag{2.28}$$

Wenn in der zweiten Periode nicht gearbeitet wird, setzt sich der Konsum in der ersten Periode aus dem verfügbaren Einkommen in der ersten Periode $(1-\tau)w_t$ und den auf heute abdiskondierten Pensionszahlungen $\tau(1+n)\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}$ zusammen, wobei der Konsum noch mit $\frac{1}{(1+\pi\beta)}$ gewichtet ist.

- Je höher der Lohn w_t in der ersten Periode ist, desto höher ist der Konsum. Individuen steht mehr Einkommen zu Verfügung, welches sie für Konsum ausgeben können.
- Je höher der Lohn w_{t+1} in der zweiten Periode ist, desto höher sind die Pensionszahlungen, die man bekommen wird, weshalb Individuen in der ersten Periode nicht so viel sparen müssen und mehr konsumieren können.
- Je höher der Zinssatz R_{t+1} ist, desto geringer ist der Konsum. Aufgrund des höheren Zinssatzes wird das Sparen attraktiver, weshalb Individuen mehr in Kapital investieren und somit weniger Einkommen für den Konsum ausgeben.
- Je höher die Fertilitätsrate n ist, desto mehr Menschen zahlen in die Pensionskasse ein, wodurch die Pensionszahlungen steigen. Dadurch muss in der ersten Periode nicht so viel gespart werden und es kann mehr konsumiert werden.
- Je höher β ist, desto wichtiger ist die zweite Periode, weshalb in der ersten

Periode mehr gespart und weniger konsumiert werden wird.

- Je höher die Lebenserwartung π ist, desto mehr gewinnt die zweite Periode an Bedeutung, wodurch mehr gespart wird und somit der Konsum in der ersten Periode sinkt.
- Eine Erhöhung der Steuer τ hat keinen eindeutigen Effekt auf den Konsum in der ersten Periode, da sich zum einen das verfügbaren Einkommen in der ersten Periode verringert, zum anderen jedoch die Pensionszahlungen erhöhen. Welcher Effekt überwiegt hängt von den jeweiligen Parameterwerten von w_t, w_{t+1}, R_{t+1} und n bzw. dem Vorzeichen von $-w_t R_{t+1} + (1+n)w_{t+1}$ ab. Um auf diese Bedingung zu kommen wurde der Konsum aus Gleichung (2.28) nach τ abgeleitet.

Im Weiteren erhält man die Bedingungen für den Fall, dass die Auswirkungen nicht eindeutig sind, durch Ableiten der jeweiligen Variable nach dem jeweiligen Parameter.

Für die Ersparnis gilt

$$s_t = (1-\tau)w_t - c_{1,t}$$

$$= \frac{(1-\tau)\pi\beta w_t - \tau(1+n)\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}}{(1+\pi\beta)} \tag{2.29}$$

- Je höher der Lohn in der ersten Periode w_t ist, desto höher ist das verfügbare Einkommen und desto mehr kann gespart werden.
- Je höher der Lohn in der zweiten Periode w_{t+1} bzw. die Fertilitätsrate n ist, desto höher sind die erwarteten Pensionszahlungen, weshalb Individuen in der ersten Periode weniger sparen müssen.
- Je höher der Zinssatz R_{t+1} ist, desto mehr wird gespart werden, da das Sparen attraktiver wird.
- Je höher β ist, desto wichtig ist die zweite Periode, weshalb in der ersten Periode mehr gespart wird.
- Je höher die Lebenserwartung π ist, desto mehr wird gespart, da die zweite Periode an Bedeutung gewinnt.

- Je höher die Steuer τ ist, desto weniger wird gespart werden. Zum einen verringert sich das verfügbare Einkommen in der ersten Periode, weshalb weniger gespart wird um weiterhin konsumieren zu können. Zum anderen werden die Pensionszahlungen erhöht, da durch die höhere Steuer mehr in die Pensionskasse eingezahlt wird, weshalb Individuen weniger sparen werden.

Zu beachten ist, dass diese Lösung nur erreicht wird, wenn $s_t \geq 0$ gilt, da sonst Gleichung (2.25) verletzt ist. Dazu muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$s_t \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\beta(1-\tau)w_t - \tau(1+n)\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}}{(1+\beta)} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \beta(1-\tau)w_t \geq \tau(1+n)\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}} \tag{2.30}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt es in diesem Fall keinen optimalen Punkt, sondern nur im degenerierten Fall mit $s_t = 0$ und $c_{1,t} = (1-\tau)w_t$.

Für den Kapitalstock pro Arbeitskraft $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}$ gilt in diesem Fall wegen $L_{t+1} = (1+n)N_t$:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{(1+n)} = \frac{(1-\tau)\pi\beta w_t - \tau(1+n)\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}}{(1+\pi\beta)(1+n)}$$

$$\overset{(2.7)}{=} \frac{(1-\tau)\pi\beta(1-\alpha)\alpha A k_t^\alpha - \tau(1+n)(1-\alpha)k_{t+1}}{(1+\pi\beta)(1+n)\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow \quad k_{t+1} = \frac{A\pi\alpha\beta(1-\alpha)(1-\tau)}{(1+\pi\beta)(1+n)\alpha + \tau(1+n)(1-\alpha)} k_t^\alpha \tag{2.31}$$

Für den steady state Kapitalstock $k^* = k_{t+1} = k_t$ gilt damit:

$$k^* = \left[\frac{A\pi\alpha\beta(1-\alpha)(1-\tau)}{(1+\pi\beta)(1+n)\alpha + \tau(1+n)(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.32}$$

b) $l_t > 0$: Dieser Fall beschreibt die innere Lösung.
Drückt man aus Gleichung (2.21)-(2.23) jeweils λ aus und setzt diese gleich, so

erhält man aus den ersten beiden Gleichungen:

$$c_{2,t+1} = c_{1,t}\beta R_{t+1} \tag{2.33}$$

Um auch eine Darstellung von l_t als Funktion von $c_{1,t}$ zu bekommen, wird zunächst $P_{t+1} = \frac{\tau w_{t+1}(1+n+\pi l_t)}{\pi(1-l_t)}$ in Gleichung (2.23) eingesetzt und diese dann mit Gleichung (2.21) gleichgesetzt:

$$l_t = \frac{(1-\tau)\pi w_{t+1} - \tau w_{t+1}(1+n) - \beta\delta\pi R_{t+1}c_{1,t}}{\pi w_{t+1}} \tag{2.34}$$

Setzt man nun Gleichung (2.33) und (2.34) in Gleichung (2.24) und ersetzt P_{t+1} wie zuvor, so erhält man für den optimalen Konsum in der ersten Periode:

$$\begin{aligned}
& \frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + \beta R_{t+1}c_{1,t} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t \\
& \qquad - (1-\tau)w_{t+1}l_t - \frac{\tau w_{t+1}(1+n)}{\pi} - \tau w_{t+1}l_t = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + \beta R_{t+1}c_{1,t} + \beta\delta R_{t+1}c_{1,t} = \\
& \qquad \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau) + \frac{\tau w_{t+1}(1+n)}{\pi} + (1-\tau)w_{t+1} - \frac{\tau w_{t+1}(1+n)}{\pi} \\
\Leftrightarrow \quad & R_{t+1}c_{1,t} + \beta\pi R_{t+1}c_{1,t} + \beta\delta\pi R_{t+1}c_{1,t} = R_{t+1}(1-\tau)w_t + (1-\tau)\pi w_{t+1}
\end{aligned}$$

Für den Konsum folgt somit:

$$c_{1,t} = \frac{(1-\tau)\left[w_t + \pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]}{(1+(1+\delta)\pi\beta)} \tag{2.35}$$

Analog zum Fall $l_t = 0$ hängt der optimale Konsum in der ersten Periode positiv von den Löhnen w_t und w_{t+1} und negativ von dem Zinssatz R_{t+1} und dem Zeitpräferenzfaktor β ab. Neu sind in diesem Fall folgende Effekte:

- Je höher die Steuer τ ist, desto niedriger ist der Konsum, da den Individuen weniger Einkommen zu Verfügung steht, welches sie für Konsum ausgeben können.
- Je höher δ, desto niedriger ist der Konsum. Wenn für Individuen die Freizeit bzw. Pension wichtiger wird, dann wollen sie mehr Geld in der zweiten Periode zu Verfügung haben und werden in Folge in der ersten Periode weniger konsumieren und mehr sparen.

- Eine Erhöhung der Lebenserwartung π hat nur unter der Annahme, dass die Ersparnis positiv ist, eindeutige Auswirkungen auf den optimalen Konsum in der ersten Periode. Es können zwei Effekte unterschieden werden: Zum einen hat eine Erhöhung der Lebenserwartung den direkten Effekt, dass weniger in der ersten Periode konsumiert wird, da die zweite Periode an Bedeutung gewinnt. Jedoch gibt es auch den indirekten Effekt, dass sich durch eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit in die zweite Periode zu gelangen auch das erwartete Einkommen und somit der Konsum erhöht. Welcher Effekt überwiegt hängt vom Vorzeichen von $w_{t+1} - (1+\delta)\beta R_{t+1} w_t$ ab. Da die Ersparnis größer Null sein muss, überwiegt der direkte Effekt (siehe Gleichung (2.37)). Eine Erhöhung der Lebenserwartung senkt somit den Konsum.

An Gleichung (2.35) ist wieder gut zu sehen, warum die Bedingung $c_{1,t} \leq (1-\tau)w_t$ wichtig ist. Der Konsum hängt von dem Lohn der zweiten Periode ab. Wenn die Löhne in der zweiten Periode wesentlich höher sind als jene in der ersten Periode, könnte der Konsum höher als das verfügbare Einkommen dieser Periode sein. Dafür müssten die Individuen Schulden machen, was in diesem Modell nicht möglich ist. Für die optimale Ersparnis gilt:

$$s_t = (1-\tau)w_t - c_{1,t}$$

$$= \frac{(1-\tau)\pi[(1+\delta)\beta w_t - \frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}]}{(1+(1+\delta)\pi\beta)} \tag{2.36}$$

Die Effekte eine Erhöhung von w_t, w_{t+1}, R_{t+1}, τ und β sind analog zu jenen im Fall $l_t = 0$. Neu ist in diesem Fall:

- Je höher δ, desto höher ist das Gewicht der Freizeit in der zweiten Periode und in Folge steigt die Ersparnis, da Individuen mehr Geld in der zweiten Periode zur Verfügung haben wollen.
- Eine Erhöhung von π hat nur unter der Annahme, dass die Ersparnis größer Null ist, positive Auswirkungen auf die Ersparnis. Zum einen bewirkt eine höhere Lebenserwartung, dass Individuen mehr sparen, um in der zweiten Periode keine finanziellen Einbußen zu haben. Zum anderen wird durch eine höhere Lebenserwartung das erwarteten Einkommen der zweiten Periode erhöht, weshalb Individuen in der ersten Periode nicht mehr so viel sparen müssen. Welcher der beiden Effekte überwiegt hängt von $(1+\delta)\beta R_{t+1}w_t - w_{t+1}$

ab. Wie auch schon beim Konsum in der ersten Periode gilt für positive Ersparnis $(1+\delta)\beta R_{t+1} w_t > w_{t+1}$. Eine Erhöhung der Lebenserwartung hat somit positive Auswirkungen auf die Ersparnis.

Zu beachten ist, dass auch hier wieder $s_t \geq 0$ gelten muss. Dazu muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$
\begin{aligned}
s_t \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{(1-\tau)\pi[(1+\delta)\beta w_t - \frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}]}{(1+(1+\delta)\pi\beta)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (1+\delta)\beta w_t \geq \frac{w_{t+1}}{R_{t+1}} \qquad (2.37)
\end{aligned}
$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt es in diesem Fall keinen optimalen Punkt, sondern nur im degenerierten Fall mit $s_t = 0$ und $c_{1,t} = (1-\tau)w_t$.
Für den optimalen Anteil l_t, der in der zweiten Periode gearbeitet wird, gilt:

$$
\begin{aligned}
l_t &= \frac{(1-\tau)\pi w_{t+1} - \tau w_{t+1}(1+n) - \beta\delta\pi R_{t+1} c_{1,t}}{\pi w_{t+1}} \\
&= \frac{(1-\tau)\pi w_{t+1} - \tau w_{t+1}(1+n) - \beta\delta\pi \frac{R_{t+1}(1-\tau)w_t + (1-\tau)\pi w_{t+1}}{(1+(1+\delta)\pi\beta)}}{\pi w_{t+1}} \\
&= \frac{(1-\tau)\pi(1+\pi\beta)w_{t+1} - \tau(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta)w_{t+1} - \beta\delta\pi(1-\tau)R_{t+1}w_t}{\pi(1+(1+\delta)\pi\beta)w_{t+1}} \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Man könnte l_t auch als das optimale Pensionsantrittsalter ansehen, welches wie folgt interpretiert werden kann:

- Je höher der Lohn w_t in der ersten Periode ist, desto geringer ist das Pensionsantrittsalter. Individuen können durch den höheren Lohn in Periode 1 mehr sparen und müssen somit in Periode 2 nicht mehr so lange arbeiten, um genug Geld für diese Periode zur Verfügung zu haben.
- Je höher der Lohn w_{t+1} in der zweiten Periode ist, desto höher ist das Pensionsantrittsalter, da das Arbeiten in der zweiten Periode attraktiver wird.
- Je höher der Zinssatz R_{t+1} ist, desto niedriger ist das Pensionsantrittsalter. Durch den hohen Zinssatz wird in der ersten Periode mehr gespart, weshalb Individuen in der zweiten Periode mehr Geld zu Verfügung haben und somit nicht zusätzlich noch mehr Einkommen benötigt wird, weshalb in der zweiten

Periode nicht so lange gearbeitet werden muss.

- Je höher die Fertilitätsrate n ist, desto niedriger ist das Penionsantrittsalter, da mehr Individuen in die Pensionskasse einzahlen und sich die Pensionszahlungen somit erhöhen. Dadurch erhöht sich das Einkommen in der zweiten Periode, weshalb weniger lange gearbeitet wird.
- Je höher δ ist, desto wichtiger ist einem die Pension und desto geringer ist das Pensionsantrittsalter.
- Eine Erhöhung von τ hat zwei entgegengesetzte Effekte: einerseits haben Individuen durch eine Erhöhnug der Steuer selber weniger Einkommen zu Verfügung, weshalb sie länger arbeiten müssen, um den Konsum zu finanzieren. Andererseits erhalten Individuen dadurch höhere Pensionszahlungen, weshalb weniger lange gearbeitet werden muss. Welcher der beiden Effekte überwiegt, hängt von $-w_{t+1}[\pi(1+\pi\beta)+(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta)]+\beta\delta\pi R_{t+1}w_t$ ab.
- Eine Erhöhung von β hat negative Auswirkungen auf das optimale Pensionsantrittsalter. Die zweite Periode gewinnt an Bedeutung, weshalb Individuen in der ersten Periode mehr sparen werden, um nicht in der zweiten Periode länger arbeiten zu müssen.
- Eine Erhöhung der Lebenserwartung π hat im Allgemeinen keine eindeutigen Auswirkungen auf das optimale Pensionsantrittsalter. Die zweite Periode gewinnt wieder an Bedeutung. Je nachdem wie die Löhne ausfallen, wird man entweder weniger arbeiten, da in der ersten Periode genug angespart werden konnte, oder man wird länger arbeiten, da der hohe Lohn der zweiten Periode einen Anreiz dafür schafft. Für den Fall, dass die Ersparnis positiv ist (siehe Gleichung (2.37)), überwiegt der zweite Effekt. Eine Erhöhung der Lebenserwartung erhöht das optimale Pensionsantrittsalter.

Um tatsächlich eine innere Lösung zu erhalten, muss $l_t > 0$ gelten. Dazu muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{(1-\tau)\pi(1+\pi\beta)w_{t+1}-\tau(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta)w_{t+1}-\beta\delta\pi(1-\tau)R_{t+1}w_t}{\pi(1+(1+\delta)\pi\beta)w_{t+1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-\tau)\pi(1+\pi\beta)w_{t+1} \geq \tau(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta)w_{t+1}+\beta\delta\pi(1-\tau)R_{t+1}w_t \tag{2.39}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt es keinen optimalen Punkt mit $l > 0$ und $\mu_2 = 0$.

Für den Kapitalstock pro Arbeiter $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}}$ gilt wegen $L_{t+1} = N_t(1 + n + \pi l_t)$ somit

$$k_{t+1} = \frac{s_t N_t}{L_{t+1}} = \frac{s_t}{(1 + n + \pi l_t)} \tag{2.40}$$

Werden nun s_t und l_t durch die Terme in Gleichung (2.36) bzw. (2.38) ersetzt, so folgt nach einigen Umformungsschritten:

$$k_{t+1} = \frac{A\pi\alpha\beta(1 - \alpha + \delta)}{\alpha(1 + n) + \alpha\beta\pi^2 + \pi[1 + \alpha\beta(1 + n)(1 + \delta)]} k_t^\alpha \tag{2.41}$$

Für den steady state Kapitalstock pro Arbeiter $k^* = k_{t+1} = k_t$ gilt also:

$$k^* = \left[\frac{A\pi\alpha\beta(1 - \alpha + \delta)}{\alpha(1 + n) + \alpha\beta\pi^2 + \pi[1 + \alpha\beta(1 + n)(1 + \delta)]}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.42}$$

Mit einigen Umformungsschritten folgt dann für den optimalen Anteil l^*, den man in der zweiten Periode arbeitet[4]:

$$l^* = \frac{(1 - \tau)(1 + \pi\beta)}{(1 + (1 + \delta)\pi\beta)} - \frac{\tau(1 + n)}{\pi} - \frac{(1 - \tau)\delta\left[\alpha(1 + n) + \alpha\beta\pi^2 + \pi[1 + \alpha\beta(1 + n)(1 + \delta)]\right]}{\pi(1 + (1 + \delta)\pi\beta)(1 - \alpha + \delta)} \tag{2.43}$$

2.2. Erhöhung der Lebenserwartung

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen einer Erhöhung der Lebenserwartung auf den Kapitalstock k^*, das optimale Pensionsantrittsalter l^* sowie auf die Pensionszahlungen P^* analysiert. Dazu wird die jeweilige Ableitung betrachtet. Diese stellt die jeweilige Veränderungen dar, wenn sich die Lebenserwartung um eine marginale Einheit erhöht. Eine Erhöhung der Lebenserwartung hat einen positiven Effekt auf den Kapitalstock:

$$\frac{\partial k^*}{\partial \pi} > 0. \tag{2.44}$$

Je länger man lebt, desto mehr Bedeutung gewinnt die zweite Periode, weshalb in der ersten Periode mehr gespart wird, was wiederum den Kapitalstock erhöht.

[4]Wie mit dem Autor kommuniziert wurde, sind in Cipriani (2016) sind Tippfehler für l_t und l^*.

Auch das optimale Pensionsantrittsalter wird positiv durch eine Erhöhung der Lebenserwartung beeinflusst:

$$\frac{\partial l^*}{\partial \pi} > 0 \tag{2.45}$$

Da sich die Wahrscheinlichkeit erhöht, in die zweite Periode zu kommen, gewinnt diese wieder an Bedeutung. Durch die längere Lebensdauer wird mehr gearbeitet, um sich weiterhin in der Pension alles leisten zu können.

Werden zuletzt noch die Pensionszahlungen $P^* = \frac{\tau(1-\alpha)A(1+n+\pi l^*)(k^*)^\alpha}{\pi(1-l^*)}$ betrachtet, so hat eine Erhöhung der Lebenserwartung im Allgemeinen keinen eindeutigen Effekt auf die Pensionszahlungen. Es gibt zwei direkte Effekte: einerseits bewirkt eine Erhöhung der Lebenserwartung, dass die Pensionszahlungen länger ausgezahlt werden müssen, wodurch diese sinken. Andererseits wird mehr in die Pensionskasse eingezahlt, da die Wahrscheinlichkeit steigt, dass Individuen in der zweiten Periode arbeiten. Dies bewirkt, dass die Pensionszahlungen steigen. Es gibt zusätzlich auch zwei indirekte positive Effekte: zum einen bewirkt eine Erhöhung der Lebenserwartung, wie zuvor gesehen, eine Erhöhung des Kapitalstocks, da Individuen in der ersten Periode mehr sparen. Ein höherer Kapitalstock erhöht den Output. Dieser wiederum erhöht den Lohn und in Folge auch die Pensionszahlungen. Zum anderen führt eine Erhöhung der Lebenserwartung zu einem höheren optimalen Pensionsantrittsalters, welches, wie zuvor gesehen, die Pensionszahlungen erhöht. Welcher Effekt überwiegt hängt auch hier von der Parameterwahl ab.

Nun werden diese Ergebnisse in Abbildung 2.1. veranschaulicht. Der Anteil l^*, der in der zweiten Periode gearbeitet wird, der Kapitalstock pro Arbeiter k^* sowie die Pensionszahlungen P^* werden als Funktion der Lebenserwartung π dargestellt, um die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung zu analysieren. In Tabelle 2.1 sind die Parameterwerte der nachfolgenden Grafiken aufgelistet.
In Grafik (a) ist sehr schön zu sehen, dass es bis ca. $\pi = 0.55$ optimal ist, in der zweiten Periode nicht zu arbeiten. Aufgrund der geringen Überlebenswahrscheinlichkeit ist der Altersabhängigkeitsquotient klein, d.h. auf einen Pensionisten kommen mehrere Beitragszahler, was die Pension sehr hoch macht und Individuen deswegen, falls sie in die zweite Periode kommen, nicht arbeiten müssen. Auch beim Kapitalstock ist gut zu sehen, dass bei $\pi = 0.55$ der Wechsel von nicht Arbeiten in der zweiten Periode zu Arbeiten in der zweiten Periode stattfindet. Sowohl für den Fall $l^* = 0$ als auch für $l^* > 0$ steigt

Parameter	Wert	Anmerkung
A	10	Technologischer Fortschritt
α	0.3	Kapitalelastizität
β	0.95	Zeitpräferenzfaktor
τ	0.3	Einkommenssteuer
δ	0.1	Präferenzfaktor der Freizeit
n	0.01	Fertilitätsrate
π	0.9	Überlebenswahrscheinlichkeit

Tabelle 2.1.: Parameter der Simulation

der Kapitalstock bei steigender Lebenserwartung. Zu beachten ist, dass eine Lebenserwartung von unter 50% in einer realen Ökonomie nicht vorkommt. Weiters ist zu sehen, dass die Pensionszahlungen sinken. Da Individuen immer länger leben, müssen die Pensionszahlungen länger ausbezahlt werden. In Folge dessen sinken sie.
In Grafik (b) ist das qualitative Verhalten für l^* und k^* wie vorher. Bis etwa $\pi = 0.81$ ist es optimal in der zweiten Periode nicht zu arbeiten. Danach nimmt der Anteil, den Individuen in der zweiten Periode arbeiten, mit steigender Lebenserwartung zu. Auch der Kapitalstock steigt sowohl für den Fall $l^* = 0$ als auch für $l^* > 0$. Im Vergleich zu Grafik (a) ist zu sehen, dass die Pensionszahlungen mit steigender Lebenserwartung wachsen. Die Kapitalelastizität wurde auf $\alpha = 0.7$ gesetzt. Maschinen sind wichtiger für die Produktion, weshalb der Effekt des steigenden Kapitalstocks überwiegt.

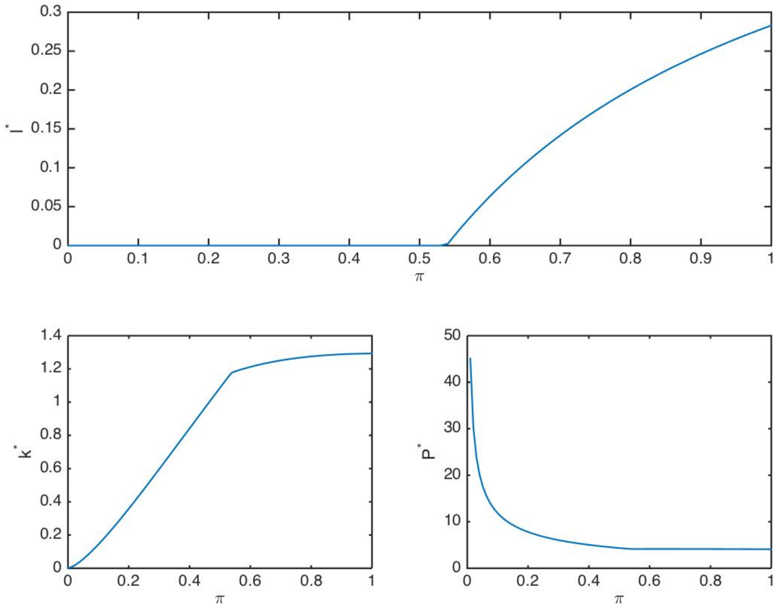
2.3. Erhöhung der Fertilität

Als nächstes wird die Veränderung des Kapitalstocks k^*, des optimalen Pensionsantrittsalters l^* und der Pensionszahlungen P^* betrachtet, wenn sich die Fertilität um eine marginale Einheit erhöht.

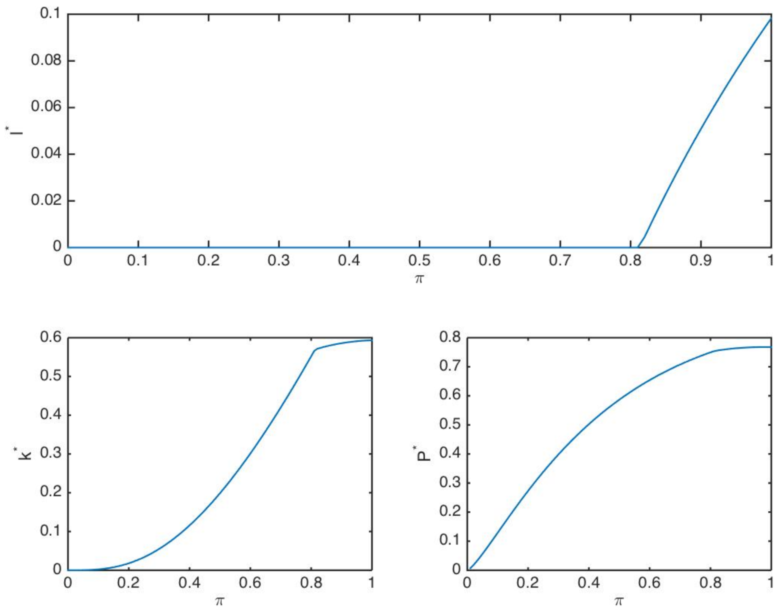
Für den steady state Kapitalstock k^* gilt:

$$\frac{\partial k^*}{\partial n} = \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}(k^*)^\alpha}_{>0} \left[\frac{-\alpha\beta\pi A(1-\alpha+\delta)[\alpha+\pi\alpha\beta(1+\delta)]}{(\alpha(1+n)+\alpha\beta\pi^2+\pi[1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta)])^2} \right] < 0 \tag{2.46}$$

Eine Erhöhung der Fertilität führt zu einem Sinken des Kapitalstocks. Je höher die Fertilität ist, desto mehr Individuen zahlen in die Pensionskasse ein, desto höher sind in Folge die Pensionszahlungen, weshalb in der ersten Periode weniger gespart werden muss, was wiederum den Kapitalstock senkt.



(a) $\alpha = 0.3$



(b) $\alpha = 0.7$

Abbildung 2.1.: Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung auf das Pensionsantrittsalter l^*, den Kapitalstock k^* sowie die Pensionszahlungen P^*

Wird nun das optimale Pensionsantrittsalter im steady state betrachtet, so gilt:

$$\frac{\partial l^*}{\partial n} = \frac{-\tau(1+(1+\delta)\pi\beta)(1-\alpha+\delta) - \delta(1-\tau)\alpha\,(1+(1+\delta)\pi\beta)}{\pi(1+(1+\delta)\pi\beta)(1-\alpha+\delta)} < 0 \tag{2.47}$$

Auch hier führt eine Erhöhung der Fertilität zu einem Sinken des Pensionsantrittsalters. Je höher die Fertilität ist, desto mehr Leute zahlen in die Pensionskasse ein, wodurch die Pensionszahlungen steigen. Dadurch erhöht sich das Einkommen in der zweiten Periode, weshalb das Pensionsantrittsalter sinkt.

Werden noch die Pensionszahlungen betrachtet, so ist der Effekt hier nicht eindeutig. Zum einen bewirkt eine Erhöhung der Fertilität, dass mehr Leute in die Pensionskasse einzahlen, wodurch die Pensionszahlungen steigen. Zum anderen senkt eine Erhöhung der Fertilität den Kapitalstock, wie oben zu sehen ist. Ein niedrigerer Kapitalstock verringert den Output und in Folge dessen sinkt der Lohn und die Pensionszahlungen. Ob die Pensionszahlungen bei steigender Fertilität nun steigen oder sinken, hängt von der jeweiligen Parameterwahl ab.

In Abbildung 2.2. werden diese Ergebnisse noch grafisch veranschaulicht. l^*, k^* und P^* werden als Funktion von n dargestellt, um die Auswirkungen einer Erhöhung der Fertilität zu analysieren. Um zu zeigen, dass eine steigenden Fertilität keine eindeutigen Effekte auf die Pensionszahlungen hat, wurde der Präferenzfaktor der Freizeit einmal auf $\delta = 0.2$ und einmal auf $\delta = 0.7$ und $\tau = 0.15$ gesetzt. In Grafik (a) ist zu sehen, dass es bis knapp $n = 0.7$ optimal ist in der zweiten Periode zu arbeiten. Danach sind die Pensionszahlungen durch die hohe Fertilität so hoch, dass Individuen in der zweiten Periode nicht mehr arbeiten werden. Werden die Parameter jedoch anders gewählt – beispielsweise α, δ oder τ sehr hoch bzw. β sehr niedrig – so wird in der zweiten Periode nicht gearbeitet. Weiters ist zu sehen, dass der Kapitalstock mit wachsender Fertilität sinkt. Wenn die Fertilität so hoch ist, zahlen viele Individuen in die Pensionskasse ein, wodurch die Pensionszahlungen erhöht werden. Aus diesem Grund werden Individuen in der ersten Periode weniger sparen und mehr konsumieren, wodurch der Kapitalstock sinkt. Da δ sehr gering gewählt ist, ist Individuen Freizeit in der zweiten Periode nicht so wichtig, weshalb in der ersten Periode nicht so viel gespart wird, wodurch der Kapitalstock und in Folge der Lohn und die Pensionszahlungen gesenkt werden. Dieser Effekt ist größer als jener, dass durch die steigende Fertilität mehr Leute in die Pensionskasse einzahlen, weshalb es insgesamt zu negativen Auswirkungen auf die Pensionszahlungen bei einer Erhöhung der Fertilität kommt. Für den Fall, dass in der zweiten Periode nicht gearbeitet wird, steigen die Pensionszahlungen mit steigender Fertilität. Wenn mehr Individuen in der ersten Periode leben, wird mehr in die Pensionskasse eingezahlt, was die Pension erhöht. Dieser Effekt ist größer als jener des sinkenden Kapitalstocks. In Grafik (b) ändert sich das qualitative Verhalten von l^* und k^* nicht. Die Pensionszahlungen steigen mit steigender Fertilität, egal ob in der zweiten Periode gearbeitet wird oder nicht.

2.4. Endogene Fertilität

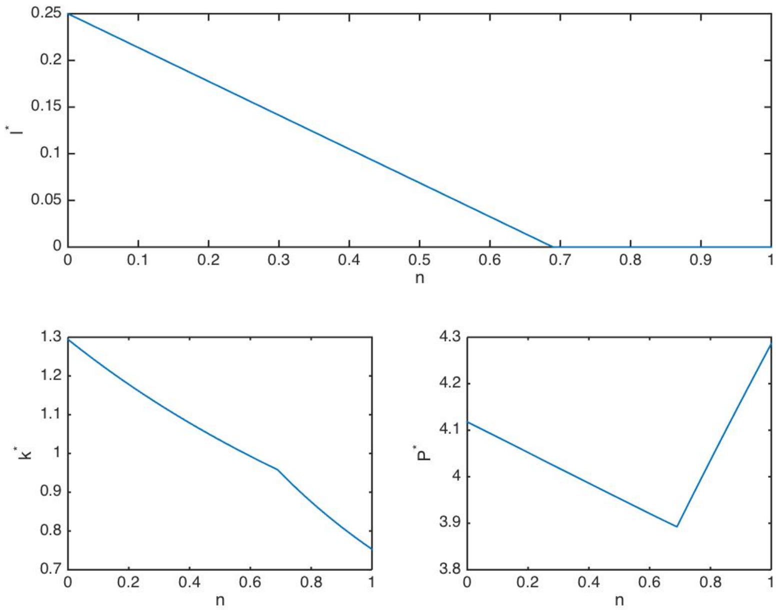
Zuletzt wird das Modell um eine endogene Fertilität erweitert. Die endogene Fertilität wird wie in Cipriani (2013), in dem jedoch das Pensionsantrittsalter nicht betrachtet wird, modelliert.
Für die Bevölkerung gilt $N_{t+1} = n_t N_t$, wobei n_t hier durch die Nutzenmaxierung der Individuen optimal bestimmt wird und die Anzahl der Kinder beschreibt. $(n_t - 1)$ stellt die Wachstumsrate der Bevölkerung dar. Individuen beziehen den Nutzen $\gamma \ln n_t$ aus der Anzahl der Kinder, wobei γ den Präferenzfaktor für Kinder beschreibt. Der Gesamtnutzen setzt sich wiederum additiv zusammen. Weiters müssen Individuen einen festen Anteil q ihres Einkommens in der ersten Periode für die Kindererziehung verwenden, weshalb die Budgetrestriktion der ersten Periode wie folgt geändert wird:

$$c_{1,t} + s_t + q w_t n_t = (1 - \tau) w_t \tag{2.48}$$

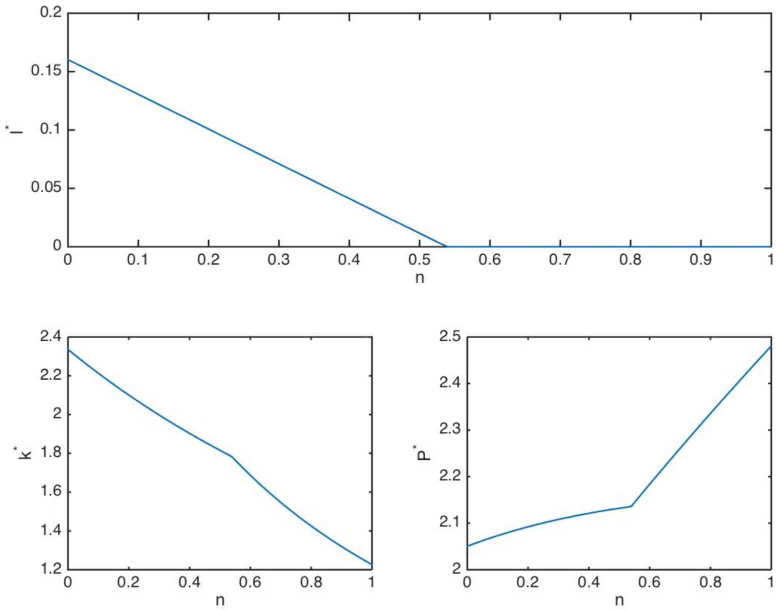
Da die Kosten für Kinder $w_t q n_t$ ein Anteil des Einkommens sind, sind diese umso höher, je höher der Lohn w_t ist. In der zweiten Periode ändert sich nichts. Individuen wählen weiterhin den optimalen Anteil l_t, den sie in der zweiten Periode arbeiten.

Das Optimierungsproblem lautet somit

$$\begin{aligned}
\max_{c_{1,t}, c_{2,t+1}, l_t, n_t} \quad & \ln c_{1,t} + \beta\pi[\ln c_{2,t+1} + \delta \ln(1 - l_t)] + \gamma \ln n_t \qquad (2.49)\\
\text{s.t.} \quad & \frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi} w_t (1 - \tau - q n_t) - (1 - \tau) w_{t+1} l_t - (1 - l_t) P_{t+1} = 0 \\
& l_t - 1 \leq 0 \\
& c_{1,t} + n_t q w_t - (1 - \tau) w_t \leq 0 \\
& c_{1,t}, c_{2,t+1}, l_t, n_t \geq 0,
\end{aligned}$$



(a) $\delta = 0.1$



(b) $\delta = 0.6$, $\tau = 0.15$

Abbildung 2.2.: Pensionszahlungen P^* als Funktion der Fertilität n

Es wird wiederum zwischen $l_t = 0$ und $l_t > 0$ unterschieden:

a) $l_t = 0$: Für den Konsum in der ersten Periode $c_{1,t}$ gilt:

$$c_{1,t} = \frac{R_{t+1} w_t^2 q(1-\tau)}{R_{t+1} w_t q(1+\pi\beta+\gamma) - \tau w_{t+1}\gamma} \tag{2.50}$$

Wie schon im Modell mit exogener Fertilität hat einer Erhöhung des Lohns in der zweiten Periode w_{t+1} positive Auswirkungen, eine Erhöhung des Zinssatzes R_{t+1}, der Lebenserwartung π sowie des Präferenzfaktors β negative Auswirkungen und eine Erhöhung der Steuer τ keine eindeutigen Auswirkungen auf den optimalen Konsum in der ersten Periode. Für die anderen Parameter gilt:

- Eine Erhöhung des Lohns in der ersten Periode w_t hat keine eindeutigen Auswirkungen auf den Konsum in der ersten Periode. Zum einen steht mehr Einkommen zu Verfügung, welches für Konsum verwendet werden kann. Jedoch werden durch ein höheres Einkommen die Kosten der Kinder größer, weshalb die Fertilitätsrate sinkt. Dies wiederum senkt die Pensionszahlungen, was wiederum den Konsum senkt. Welcher der beiden Effekte überwiegt hängt von den jeweiligen Parameterwerten bzw. genauer gesagt von dem Vorzeichen von $R_{t+1} w_t q(1+\pi\beta+\gamma) - 2\tau\gamma w_{t+1}$ ab. Um auf diese Bedingung zu kommen wurde der Konsum aus Gleichung (2.50) nach w_t abgeleitet.
- Eine Erhöhung der Kosten für Kinder q hat negative Auswirkungen auf den Konsum in der ersten Periode, da ein größerer Anteil des Einkommens für die Kindererziehung verwendet wird und somit weniger Einkommen für Konsum zu Verfügung steht.
- Eine Erhöhung des Präferenzfaktors für Kinder γ hat keine eindeutigen Auswirkungen auf den Konsum in der ersten Periode. Je wichtiger Kinder sind, desto mehr Kinder wird man bekommen, desto höher ist der Anteil des Einkommens, welcher für Kindererziehung verwendet wird, weshalb in der ersten Periode weniger konsumiert wird. Je mehr Kinder geboren werden, desto mehr Leute zahlen in die Pensionskasse ein, weshalb die Pensionszahlungen steigen und in der ersten Periode wiederum mehr konsumiert wird. Welcher der beiden Effekte überwiegt hängt vom Vorzeichen von $-R_{t+1} w_t q + \tau w_{t+1}$ ab.

Für die Fertilitätsrate n_t ergibt sich:

$$n_t = \frac{\gamma R_{t+1} w_t (1-\tau)}{R_{t+1} w_t q (1 + \pi\beta + \gamma) - \tau w_{t+1} \gamma} \tag{2.51}$$

- Eine Erhöhung des Lohns in der ersten Periode w_t hat negative Auswirkungen auf die Fertilitätsrate, da ein höherer Lohn auch höhere Kosten für Kinder bedeuten.
- Eine Erhöhung des Lohns in der zweiten Periode w_{t+1} hat positive Auswirkungen auf die Fertilitätsrate, da weniger gespart werden muss und somit in der ersten Periode mehr Geld für die Kindererziehung zu Verfügung steht.
- Eine Erhöhung des Zinssatzes R_{t+1} hat negative Auswirkungen auf die Fertilitätsrate, da das Sparen attraktiver wird und somit in der ersten Periode weniger Geld für Kinder zu Verfügung steht.
- Eine Erhöhung der Steuer τ hat keine eindeutigen Effekte auf die Anzahl der Kinder. Zum einen verringert eine höhere Steuer das verfügbare Einkommen in der ersten Periode, weshalb weniger Kinder geboren werden. Zum anderen werden die Pensionszahlungen höher, weshalb in der ersten Periode weniger gespart werden muss und in mehr Kinder investiert werden kann. Welcher Effekt überwiegt hängt von $-R_{t+1} w_t q(1 + \pi\beta) + \gamma w_{t+1}$ ab.
- Eine Erhöhung der Lebenserwartung π sowie des Zeitpräferenzfaktors β bewirken, dass die zweiten Periode wichtiger wird, wodurch in der ersten Periode mehr gespart wird und nicht mehr so viel Einkommen für die Kindererziehung zu Verfügung steht.
- Eine Erhöhung der Kosten für Kinder q hat negative Auswirkungen auf die Fertilitätsrate, da dadurch teurer werden.
- Eine Erhöhung des Präferenzfaktor für Kinder γ hat positive Auswirkungen auf die Fertilitätsrate, da Kinder immer wichtiger werden.

Für die optimale Ersparnis gilt

$$s_t = \frac{(1-\tau) q R_{t+1} w_t^2 \pi\beta - (1-\tau)\tau\gamma w_{t+1} w_t}{R_{t+1} w_t q (1 + \pi\beta + \gamma) - \tau w_{t+1} \gamma} \tag{2.52}$$

Wie schon im Modell mit exogener Fertilität hat eine Erhöhung des Lohns in der zweiten Periode w_{t+1} negative Auswirkungen und eine Erhöhung des Zinssatzes

R_{t+1}, der Lebenserwartung π sowie des Zeitpräferenzfaktors β positive Auswirkungen.

- Eine Erhöhung des Einkommens w_t hat wie schon beim Konsum in der ersten Periode keine eindeutigen Auswirkungen. Zum einen steht bei einer Erhöhung des Einkommens mehr Geld zu Verfügung, welches gespart werden kann. Jedoch hängt die Ersparnis auch vom Konsum der ersten Periode ab, bei dem es selbst keine eindeutigen Auswirkungen gibt.
- Eine Erhöhung der Steuer τ hat keine eindeutigen Auswirkungen. Zum einen gibt es den direkten negativen Effekt auf die Ersparnis. Zum anderen hängt das Ergebnis wiederum vom Konsum der ersten Periode ab, welcher keine eindeutigen Auswirkungen bei einer Erhöhung der Steuer aufweist. Welcher Effekt überwiegt hängt von $-R_{t+1}w_tq(1+\pi\beta+\gamma)+w_{t+1}\gamma-(1-2\tau)\gamma q(1+\pi\beta+\gamma)w_{t+1}R_{t+1}w_t^2-(2-\tau)\tau\gamma^2w_{t+1}^2w_t$ ab.
- Eine Erhöhung der Kosten für Kinder q hat positiven Auswirkungen auf die Ersparnis. Wenn die Kindererziehung teurer wird, entstehen zwei positive Effekte für die Ersparnis: zum einen werden Kinder durch Konsum in beiden Periode substituiert, wodurch die Ersparnis in der ersten Periode steigt. Zum anderen bewirken weniger Kinder auch niedrigere Pensionszahlungen, wodurch erneut mehr gespart werden muss.
- Eine Erhöhung des Präferenzfaktors für Kinder γ hat negative Auswirkungen auf die Ersparnis. Wenn Kinder sehr wichtig sind, werden mehr Kinder geboren, die in die Pensionskasse einzahlen, was wiederum die Pensionszahlungen erhöht und somit die Ersparnis senkt.

Damit $s_t > 0$ sichergestellt wird, muss gelten

$$R_{t+1}qw_t\pi\beta > \tau\gamma w_{t+1}. \tag{2.53}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so existiert in diesem Fall kein optimaler Punkt, sondern nur im degenerierten Fall mit $s_t = 0$.

Für den pro Kopf Kapitalstock k_{t+1} gilt:

$$k_{t+1} = \frac{\alpha q\pi\beta(1-\alpha)A}{\gamma\alpha+\tau\gamma(1-\alpha)}k_t^\alpha \tag{2.54}$$

Im steady state $k^* = k_{t+1} = k_t$ gilt dann:

$$k^* = \left[\frac{\alpha q \pi \beta (1-\alpha) A}{\gamma \alpha + \tau \gamma (1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.55}$$

Für den Anteil, der in der zweiten Periode gearbeitet wird, die Anzahl der Kinder sowie die Pensionszahlungen gilt mit Hilfe von k^* im steady state:

$$l^* = 0 \tag{2.56}$$

$$n^* = \frac{\gamma(1-\tau)\alpha A {k^*}^{\alpha-1}}{(1+\pi\beta+\gamma) q \alpha A {k^*}^{\alpha-1} - \tau\gamma} \tag{2.57}$$

$$P^* = \frac{\tau\gamma q (1-\tau)\alpha(1-\alpha) A^2 {k^*}^{2\alpha-1}}{\pi q^2 (1+\pi\beta+\gamma)\alpha A {k^*}^{\alpha-1} - \tau\gamma\pi q} \tag{2.58}$$

b) $l_t > 0$: Für den optimalen Konsum in der ersten Periode gilt:

$$c_{1,t} = \frac{(1-\tau)\left[w_t + \pi \frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)} \tag{2.59}$$

Da sich diese Gleichung nur im Nenner von jener aus dem Modell mit exogener Fertilität unterscheidet, sind die Auswirkungen einer Erhöhung von w_t, w_{t+1}, R_{t+1}, τ, π, β und δ analog zu jenen im Modell mit exogener Fertilität. Die einzige Neuerung ist der Präferenzfaktor für Kinder γ: Eine Erhöhung von γ senkt den Konsum in der ersten Periode, da mehr Kinder geboren werden und somit mehr Einkommen für Kindererziehung verwendet wird.

Die optimale Fertilitätsrate lautet mit Gleichung (A.36):

$$n_t = \frac{\gamma(1-\tau)\left[w_t + \pi \frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma) q w_t} \tag{2.60}$$

Die Auswirkungen einer Erhöhung von w_t, w_{t+1}, R_{t+1}, β, q und γ sind wie im Fall $l_t = 0$. Dadurch, dass in diesem Fall auch in der zweiten Periode gearbeitet wird, gilt für τ, π und δ:

- Eine Erhöhung der Steuer τ hat negative Auswirkungen auf die Fertilitätsrate.

Es steht weniger Einkommen zu Verfügung, wodurch die Kosten für Kinder nicht mehr leistbar wären und somit die Fertilitätsrate sinkt.

- Eine Erhöhung der Lebenserwartung π hat negative Auswirkungen, wenn die Ersparnis positiv ist. Die zweite Periode wird wichtiger, es wird mehr gespart, weshalb in der ersten Periode weniger Einkommen zu Verfügung steht und die Fertilitätsrate somit sinkt.
- Eine Erhöhung des Präferenzfaktors für Freizeit δ hat negative Auswirkungen auf die Fertilitätsrate, da wiederum die zweite Periode an Bedeutung gewinnt.

Für die optimale Ersparnis gilt:

$$s_t = \frac{(1-\tau)\pi\left[(1+\delta)\beta w_t - (1+\gamma)\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)} \tag{2.61}$$

Wie schon beim Konsum in der ersten Periode sind die Auswirkungen einer Erhöhung von w_t, w_{t+1}, R_{t+1}, τ, π, β und δ analog zu jenen im Modell mit exogener Fertilität. Eine Erhöhung des Präferenzfaktor für Kinder γ hat wie schon im Fall $l_t = 0$ negative Auswirkungen auf die Ersparnis.
Für eine positive Ersparnis muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$s_t > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1+\delta)\beta R_{t+1} w_t > (1+\gamma) w_{t+1} \tag{2.62}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so existiert in diesem Fall kein optimaler Punkt, sondern nur im degenerierten Fall $s_t = 0$.

Für das optimale Pensionsantrittsalter gilt:

$$l_t = \frac{(1-\tau)\left[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)w_{t+1}w_t - \tau\gamma w_{t+1}w_t - \beta\pi\delta q R_{t+1}w_t^2 - \tau\pi\gamma\frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}}\right]}{\pi q(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)w_{t+1}w_t} \tag{2.63}$$

Durch die Einführung einer endogenen Fertilität sind viele Effekte im Vergleich zum Modell mit exogener Fertilität nicht mehr eindeutig:

- Eine Erhöhung des Lohns in der ersten Periode w_t sowie des Zinssatzes R_{t+1} bewirkt zum einen, dass in der ersten Periode mehr gespart wird, wodurch in der zweiten Periode nicht so lange gearbeitet werden muss. Zum anderen werden jedoch weniger Kinder geboren. In Folge sinken die Penionszahlungen, wodurch länger gearbeitet werden muss, um in der zweiten Periode keine finanziellen Einbußen zu haben. Welcher der beiden Effekte überwiegt, hängt vom Vorzeichen von $-\beta\pi\delta q R_{t+1}^2 w_t^2 + \tau\pi\gamma w_{t+1}^2$ ab.

- Eine Erhöhung des Lohn in der zweiten Periode w_{t+1} macht zum einen das Arbeiten in der zweiten Periode attraktiver, wodurch l_t steigt. Zum anderen werden auch mehr Kinder geboren, wodurch die Pensionszahlungen steigen und somit in der zweiten Periode weniger gearbeitet werden muss. Welcher der beiden Effekte überwiegt hängt von $-\tau\pi\gamma w_{t+1}^2 + \beta\pi\delta q R_{t+1}^2 w_t^2$ ab. Es ist zu sehen, dass es genau die obige Bedingung für w_t mal Minus Eins ist. Damit kann nur entweder eine Erhöhung des Lohns in der ersten Periode oder eine Erhöhung des Lohns in der zweiten Periode positive Auswirkungen auf das Pensionsantrittsalter haben, aber nicht beide.

- Eine Erhöhung der Steuer τ hat wie im Modell mit exogener Fertilität keine eindeutigen Auswirkungen, da sich zum einen das verfügbare Einkommen verringert, wodurch mehr gearbeitet werden muss, um keine finanziellen Einbußen in der zweiten Periode zu haben. Zum anderen werden die Pensionszahlungen erhöht, wodurch weniger gearbeitet werden muss. Welcher der beiden Effekte überwiegt hängt vom Vorzeichen von $-[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-2\tau)\gamma]w_{t+1}w_t - (1-2\tau)\pi\gamma\frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}} + \beta\pi\delta q R_{t+1} w_t$ ab.

- Eine Erhöhung der Lebenserwartung π hat wie im Modell mit exogener Fertilität für eine positive Ersparnis positive Auswirkungen. Wenn Individuen länger leben, müssen sie auch länger arbeiten, um in der zweiten Periode keine finanziellen Einbußen zu haben.

- Eine Erhöhung des Präferenzfaktor β bzw. des Präferenzfaktors für Freizeit δ bewirkt, dass die zweite Periode an Bedeutung gewinnt, wodurch zum einen mehr gespart wird und weniger gearbeitet werden muss. Zum anderen sinkt die Fertilitätsrate und somit die Pensionszahlungen, wodurch länger gearbeitet werden muss. Welcher Effekt überwiegt hängt für β von $-\delta\pi q(1+\gamma)w_{t+1}w_t - (1+\gamma)R_{t+1}w_t^2 q\delta + \tau\gamma(1+\delta)w_{t+1}w_t + \tau\pi\gamma(1+\delta)\frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}}$ und für δ von $-(1+\pi\beta+\gamma)\pi\beta q w_t()R_{t+1}w_t + \pi w_{t+1} + \tau\gamma\pi\beta w_{t+1}(w_t + \pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}})$ ab.

- Eine Erhöhung der Kosten für Kindererziehung q hat negative Auswirkungen auf das Pensionsantrittsalter. Diese können in zwei entgegengesetzte Effekte unterteilt werden, wobei der negative Effekt überwiegt: Einerseits wird, wie oben beschrieben ist, durch höhere Kosten die Ersparnis erhöht, wodurch in der zweiten Periode weniger gearbeitet werden muss. Zum anderen werden jedoch weniger Kinder geboren, wodurch die Pensionszahlungen sinken und mehr gearbeitet werden muss.

- Eine Erhöhung des Präferenzfaktors für Kinder γ hat keine eindeutigen Auswirkungen auf das Pensionsantrittsalter. Zum einen bedeuten mehr Kinder auch höhere Pensionszahlungen, wodurch weniger lang gearbeitet werden muss. Zum anderen bedeuten mehr Kinder höhere Kosten, wodurch weniger gespart werden kann und somit länger gearbeitet werden muss. Welcher der beide Effekte überwiegt hängt von $\pi^2\beta\delta q w_{t+1}w_t - \tau w_{t+1}w_t(1+(1+\delta)\pi\beta) - \tau\pi w_{t+1}(1+(1+\delta)\pi\beta)$ ab.

Auch hier muss gelten $l_t > 0$. Dazu muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\pi q(1+\pi\beta+\gamma)w_{t+1}w_t \geq \tau\gamma w_{t+1}w_t + \beta\pi\ \delta q R_{t+1}w_t^2 + \tau\pi\gamma\frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}} \tag{2.64}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt es keinen optimalen Punkt mit $l_t > 0$.

Für den Kapitalstock pro Arbeiter gilt im steady state $k^* = k_{t+1} = k_t$:

$$k^* = \left[\frac{2A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta)}{A[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha]+\sqrt{A^2[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha]^2+4(1-\tau)\gamma\pi A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta)}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{2.65}$$

Mit Hilfe von k^* folgt dann für den Anteil, der in der zweiten Periode gearbeitet wird, l^*, die Anzahl der Kinder n^* sowie die Pensionszahlungen P^* im Optimum:

$$l^* = \frac{(1-\tau)[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)\alpha A - \tau\gamma\alpha A - \beta\pi\delta q\alpha^2A^2k^{*\alpha-1} - \tau\pi\gamma k^{*1-\alpha}]}{\pi q(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)\alpha A} \tag{2.66}$$

$$n^* = \frac{\gamma(1-\tau)\alpha A + \pi(1-\tau)\gamma k^{*1-\alpha}}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)\alpha A} \tag{2.67}$$

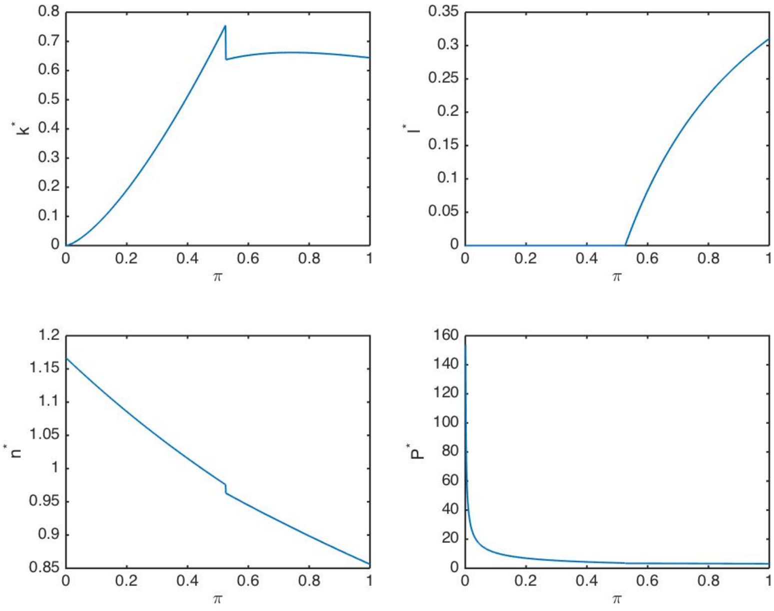
$$P^* = \frac{\tau(1-\alpha)Ak^{*\alpha}(n^*+\pi l^*)}{\pi(1-l^*)} \tag{2.68}$$

In der Abbildung 2.3. werden der Kapitalstock k^*, das Pensionsantrittsalter l^*, die Anzahl der Kinder n^* sowie die Pensionszahlungen P^* als Funktion der Lebenserwartung π dargestellt, um die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung zu analysieren. Die Parameter wurden wie in Tabelle 2.1 gewählt. α wurde variiert, um mögliche Fälle

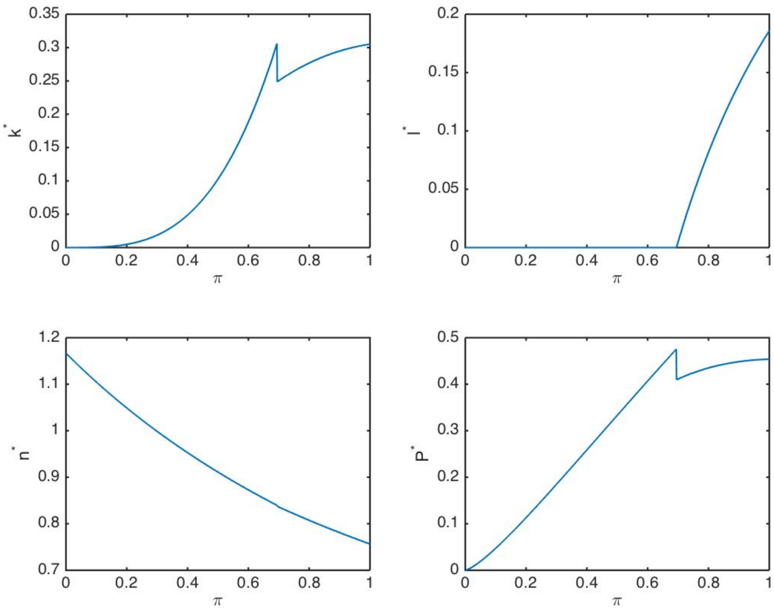
der Pensionszahlungen zu zeigen. Die Ergebnisse für das optimale Pensionsantrittsalter l^* sowie die Pensionszahlungen P^* stimmen mit jenen aus Kapitel 2.2 überein: ist die Lebenserwartung sehr gering, wird in der zweiten Periode nicht gearbeitet. Ab jedoch ca. $\tau = 0.55$ wird auch in der zweiten Periode gearbeitet. Es ist schön zu sehen, dass der Anteil, der in der zweiten Periode gearbeitet wird – und somit das optimale Pensionsantrittsalter – mit steigender Lebenserwartung steigen. Wie schon im Modell mit exogener Fertilität sinken die Pensionszahlungen für $\alpha = 0.3$ und steigen für $\alpha = 0.7$. Zu beachten ist, dass der Knick in den Grafiken für k^*, n^* und P^* jeweils den Wechsel von Nichtarbeiten in der zweiten Periode zu Arbeiten in der zweiten Periode darstellt.
Interessant ist, dass die Anzahl der Kinder mit steigender Lebenserwartung sinkt. Dieser Effekt ist dadurch zu erklären, dass Individuen in ihrer Nutzenmaximierung die Pensionszahlungen als gegeben ansehen und somit nicht berücksichtigen, dass mehr Kinder eine Erhöhung der Pensionszahlungen bedeuten.
Der Kapitalstock wächst für den Fall, dass in der zweiten Periode nicht gearbeitet wird, sowohl für $\alpha = 0.3$ als auch für $\alpha = 0.7$, da zum einen die Ersparnis erhöht wird und zum anderen die Anzahl der Kinder sinken, was zusammen zu einem Steigen des Kapitalstocks führt. Für den Fall, dass in der zweiten Periode gearbeitet wird, ist für $\alpha = 0.3$ zu sehen, dass der Kapitalstock für hohe Lebenserwartung zuerst ansteigt und dann jedoch wieder sinkt. Der Kapitalstock $k^* = \frac{s^*}{(n^*+\pi l^*)}$ unterscheidet sich von jenem im Modell mit exogener Fertilität. Dieser Effekt liegt genau an der endogenen Fertilität, da die Wachstumsrate der Erwerbsbevölkerung $(n^* + \pi l^*)$ einmal positiv und einmal negativ ist. Bis etwas $\pi = 0.7$ ist der Effekt der sinkenden Fertilität größer als jener des steigenden Pensionsantrittsalters. Dadurch sinkt die Erwerbsbevölkerung, was den Kapitalstock pro Arbeitskraft erhöht. Für sehr große π ist der Effekt des längeren Arbeitens höher als das Sinken der Fertilität, weshalb die Erwerbsbevölkerung steigt und somit der Kapitalstock pro Arbeitskraft wieder sinkt.

2.5. Zusammenfassung

In diesem OLG-Modell wurde das Pensionsantrittsalter optimal durch eine Nutzenmaximierung berechnet. Weiters wurden die Auswirkungen einer alternden Bevölkerung auf den Kapitalstock, das Pensionsantrittsalter und die Pensionszahlungen berechnet. Sowohl bei sinkender Fertilität als auch bei steigender Lebenserwartung erhöhen sich Kapitalstock und Pensionsantrittsalter. Diese demographischen Änderungen bewirken, dass Individuen zum einen mehr sparen, was den Kapitalstock erhöht, und dass sie zum



(a) $\alpha = 0.3$



(b) $\alpha = 0.7$

Abbildung 2.3.: Kapitalstock k^*, Pensionsantrittsalter l^*, Anzahl der Kinder n^* und Pensionszahlungen P^* als Funktion der Lebenserwartung π

anderen länger arbeiten. Die Auswirkungen auf die Pensionszahlungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig.

Zuletzt wurde die Fertilität endogenisiert und die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung auf den Kapitalstock, das Pensionsantrittsalter, die Fertilitätsrate sowie die Pensionszahlungen betrachtet. Eine Erhöhung der Lebenserwartung hat positive Auswirkungen auf das optimale Pensionsantrittsalter. Für eine Kapitalelastizität $\alpha < \frac{1}{2}$, was durchaus plausibel ist, bewirkt eine Erhöhung der Lebenserwartung ein Sinken der Pensionszahlungen. Die Auswirkungen auf den Kapitalstock sind nicht eindeutig. Für den Fall, dass die Lebenserwartung so gering ist, dass in der zweiten Periode nicht gearbeitet wird, steigt der Kapitalstock mit steigender Lebenserwartung. Für den Fall, dass in der zweiten Periode auch gearbeitet wird, steigt der Kapitalstock zunächst an und sinkt dann wieder etwas ab. Zuletzt hat eine Erhöhung der Lebenserwartung negative Auswirkungen auf die Fertilitätsrate.

Kapitel 3

Optimales Pensionsantrittsalter in einem zeitstetigen Modell

In diesem Abschnitt wird das Modell "Optimal Retirement Age and Aging Population" von Bethencourt und Perera-Tallo (2014) vorgestellt.

3.1. Modell

Im Vergleich zum vorigen Kapitel ist dieses Modell zeitstetig, $t \in \mathbb{R}$. Weiters wird ein Sozialer Planer herangezogen, der das Pensionsantrittsalter optimal festlegt. Zuletzt wird gezeigt, wie die optimale Lösung dezentralisiert werden kann und welche Mechanismen eingesetzt werden können, sodass die optimalen Allokationen im zentralen und dezentralen Problem übereinstimmen.

Die Lebensjahre eines Individuums werden mit a bezeichnet und haben eine obere Beschränkung $\bar{a}$. Somit gilt $a \in [0, \bar{a}]$. Das Leben wird wiederum in drei Phasen eingeteilt:

- Kindheit: $a \in [0, a_y)$
- Erwachsenenleben: $a \in [a_y, a_o)$
- Hohes Alter: $a \in [a_o, \bar{a}]$

Individuen konsumieren in allen drei Phasen, arbeiten jedoch nur als Erwachsene — genauer gesagt bis zum Pensionsantrittsalter $a_r(t)$, welches durch die Nutzenmaximierung durch einen sozialen Planer optimal bestimmt wird. $c(a, t)$ beschreibt den Konsum im Alter a zum Zeitpunkt t, also den Konsum der Generation $t - a$, die zum Zeitpunkt t im Alter a ist. Für die Individuen wird eine logarithmische Nutzenfunktion angenommen,

i.e. $U(c(a,t)) = \ln(c(a,t))$.
Für $a \in [a_y, a_o]$ beschreibt die Funktion $h : [a_y, a_o] \to \mathbb{R}_+$ die Produktivität bzw. Erfahrung eines Individuums im Alter a. Für h soll gelten: $h \in C^2$, wobei C^2 die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen darstellt. Individuen können jedoch nicht wählen wie viel sie arbeiten bzw. wie produktiv sie sind.
Das Arbeiten bringt allerdings auch einen Disnutzen $\phi(a)$ mit sich. Für ϕ gilt: $\frac{\partial \phi}{\partial a} > 0$, $\phi \in C^2$, ϕ konvex und $\lim_{a \to a_o} \phi'(a) = +\infty$. Man kann $\phi(a)$ als die gesundheitlichen Kosten des Arbeitens oder einfach als Annahmne, dass Individuen nicht ihr ganzes Leben lang arbeiten wollen, ansehen. Die Annahmen stellen somit dar, dass man eher gesundheitliche Probleme hat, je älter man ist, und die Kosten dann höher sind.
Zuletzt wird noch angenommen, dass $\frac{\phi(a)}{h(a)}$ eine steigende Funktion in a ist. Das bedeutet, dass die Kosten des Arbeitens $\phi(a)$ den Gewinn an Arbeit $h(a)$ übersteigen.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit $s(a)$ für jedes Alter a ist für die ersten beiden Phasen des Lebens gleich Eins. Man lebt also sicher bis $a = a_o$, da $s(a) = 1 \ \forall a \leq a_o$. Für $a > a_o$ gilt $s(a) = \psi(a, \xi)$, wobei ξ die Gesundheit der Individuen bezeichnet. Die Funktion $\psi : [a_o, \bar{a}] \times \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ gibt somit die Überlebenswahrscheinlichkeit für das Paar (a, ξ) an, wobei gilt $\frac{\partial \psi}{\partial a} < 0$ und $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} > 0$. Weiters gilt $\psi(a_o, \xi) = 1$ und $\psi(\bar{a}, \xi) = 0$. Das bedeutet also, je älter man wird, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass man noch ein Jahr länger lebt, und je gesünder man ist, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass man noch länger lebt. Somit kann eine Erhöhung der Lebenserwartungen als Erhöhung von ξ modelliert werden.

$N(a,t)$ bezeichnet die Anzahl aller Individuen im Alter a zum Zeitpunkt t. Man kann $N(a,t)$ auch als Produkt aller Individuen, die vor a Jahren geboren wurden (also zum Zeitpunkt $t - a$), multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass sie nach a Jahren noch leben, anschreiben. Es gilt also $N(a,t) = N(0, t-a)s(a)$. Wird angenommen, dass die Geburten mit konstanter Rate n wachsen, i.e. $\dot{N}(0,t) = nN(0,t)$, so gilt

$$N(a,t) = s(a)N(0,t)e^{-na}. \tag{3.1}$$

Wird die Gesamtbevölkerung $N(t)$ zum Zeitpunkt t betrachtet, so muss über jedes Alter in Gleichung (3.1) integriert werden:

$$N(t) = \int_0^{\bar{a}} s(a)N(0,t)e^{-na}da \tag{3.2}$$

Auch die Bevölkerung $N(t)$ hat eine konstante Wachstumsrate n:

$$\dot{N}(t) = \int_0^{\bar{a}} \frac{\partial}{\partial t}\left(s(a)N(0,t)e^{-na}\right) da$$

$$= \int_0^{\bar{a}} s(a)\dot{N}(0,t)e^{-na}da = \int_0^{\bar{a}} s(a)nN(0,t)e^{-na}da = nN(t) \tag{3.3}$$

Möchte man den Anteil μ der Individuen im Alter $\hat{a}$ der Bevölkerung betrachten, so gilt

$$\mu(\hat{a}) = \frac{s(\hat{a})N(0,t)e^{-n\hat{a}}}{\left[\int_0^{\bar{a}} s(a)N(0,t)e^{-na}da\right]} = \frac{s(\hat{a})e^{-n\hat{a}}}{\left[\int_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da\right]} \qquad \forall \hat{a} \leq \bar{a} \tag{3.4}$$

und

$$\int_0^{\bar{a}} \mu(a)da = \int_0^{\bar{a}} \frac{s(a)e^{-na}}{\left[\int_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da\right]}da = 1 \tag{3.5}$$

und daher kann man die Anzahl aller Individuen im Alter a zum Zeitpunkt t als Anteil aller Individuen im Alter a an der Gesamtbevölkerung $N(t)$ darstellen:

$$N(a,t) = \mu(a)N(t). \tag{3.6}$$

Diese Darstellung folgt sofort aus Gleichung (3.1) und (3.4).

Auf der Produzentenseite wird ein einziges Gut $Y(t)$ betrachtet, welches für Konsum $C(t)$ oder Investition $I(t)$ verwendet werden kann. Es gibt zwei Faktoren: Arbeit $L(t)$

und Kapital $K(t)$. Es wird eine Cobb-Douglas Produktionsfunktion angenommen:

$$Y(t) = A(t)^{1-\alpha} K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}, \tag{3.7}$$

wobei α die Kapitalelastizität und $A(t)$ den technologischen Fortschritt beschreibt. Letzterer ist exogen gegeben und wächst mit der Rate γ, i.e. $\dot{A}(t) = \gamma A(t)$.
Weiters wird eine neoklassische Kapitalakkumulation angenommen:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t), \tag{3.8}$$

wobei δ die Abschreibungsrate des Kapitals bezeichnet.
Im Folgenden stellen die Kleinbuchstaben jeweils den pro Kopf Wert der Variablen dar. So beschreibt $k(t) = \frac{K(t)}{N(t)}$ den pro Kopf Kapitalstock und es gilt:

$$\dot{k}(t) = \dot{\left(\frac{K(t)}{N(t)}\right)} = \frac{\dot{K}(t)}{N(t)} - k(t)\frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = i(t) - (\delta + n)k(t)$$

$$= A(t)^{1-\alpha} k(t)^{\alpha} l(t)^{1-\alpha} - c(t) - (\delta + n)k(t) \tag{3.9}$$

$c(t)$ stellt den aggregierten pro Kopf Konsum dar.

3.2. Sozialer Planer

Betrachtet man einen sozialen Planer, der den Nutzen der Individuen über die Zeit unter der Ressourcenbeschränkung maximiert, so kommt man auf folgendes Optimierungsproblem:

$$\max_{\{c(a,t)\}_{a=0}^{\bar{a}}, a_r(t)} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\bar{a}} \mu(a) \ln(c(a,t)) da - \int_{a_y}^{a_r(t)} \mu(a)\phi(a) da \right] e^{-(\rho-n)t} dt \tag{3.10}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{k}(t) = A(t)^{1-\alpha} k(t)^{\alpha} l(a_r(t))^{1-\alpha} - \int_0^{\bar{a}} \mu(a) c(a,t) da - (n+\delta)k(t)$$

$$\text{mit} \quad l(a_r(t)) = \int\limits_{a_y}^{a_r(t)} h(a)\mu(a)da,$$

wobei $l(a_r(t))$ das effektive pro Kopf Arbeitsangebot und ρ die Zeitpräferenz beschreibt. Es wird angenommen, dass $\rho > n$ gilt. Die Hamilton-Funktion lautet

$$\begin{aligned} H = & \int\limits_0^{\bar{a}} \mu(a) \ln(c(a,t))da - \int\limits_{a_y}^{a_r(t)} \mu(a)\phi(a)da \\ & + \lambda(t) \left[A(t)^{1-\alpha} k(t)^{\alpha} \left(\int\limits_{a_y}^{a_r(t)} h(a)\mu(a)da \right)^{1-\alpha} - \int\limits_0^{\bar{a}} \mu(a)c(a,t)da - (n+\delta)k(t) \right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

Da der Konsum zu jedem Zeitpunkt t und in jedem Alter a optimal gewählt werden soll, kann der Konsum in einem beliebigen, festen $a \in [0, \bar{a}]$ betrachtet werden. Die Bedingung erster Ordnung für den Konsum lauten für ein beliebiges, festes $a \in [0, \bar{a}]$:

$$\mu(a)\frac{1}{c(a,t)} = \lambda(t)\mu(a) \quad \Leftrightarrow \quad c(a,t) = \frac{1}{\lambda(t)} \tag{3.12}$$

Da $a \in [0, \bar{a}]$ beliebig gewählt war, gilt also

$$c(a,t) = \tilde{c}(t) \quad \forall\, a \in [0, \bar{a}], \forall\, t \in [0, \infty) \tag{3.13}$$

Der Konsum ist also für jedes Alter gleich und hängt nur von der Zeit t ab. Wird nun der aggregierte Konsum $c(t)$ betrachtet, so gilt:

$$c(t) = \int\limits_0^{\bar{a}} \mu(a) \underbrace{c(a,t)}_{=\tilde{c}(t)} da = \tilde{c}(t) \cdot \underbrace{\int\limits_0^{\bar{a}} \mu(a)da}_{=1} = \tilde{c}(t) \tag{3.14}$$

Somit kann das Optimierungsproblem aus Gleichung (3.10) wie folgt formuliert werden:

$$\max_{c(t),a_r(t)} \quad \int\limits_0^{\infty} \left[\ln(c(t)) - \int\limits_{a_y}^{a_r(t)} \mu(a)\phi(a)da \right] e^{-(\rho-n)t} dt \tag{3.15}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{k}(t) = A(t)^{1-\alpha} k(t)^{\alpha} l(a_r(t))^{1-\alpha} - c(t) - (n+\delta)k(t) \tag{3.16}$$

$$\text{mit} \quad l(a_r(t)) = \int\limits_{a_y}^{a_r(t)} h(a)\mu(a)da, \tag{3.17}$$

$k(t)$ stellt die Zustandsvariable dar, $c(t)$ und $a_r(t)$ die Kontrollvariablen. Um dieses Problem zu lösen, wird die (Momentanwert-)Hamilton-Funktion herangezogen:

$$H(k(t), c(t), a_r(t), \lambda(t)) =$$
$$\ln(c(t)) - \int\limits_{a_y}^{a_r(t)} \mu(a)\phi(a)da + \lambda(t)\left[A(t)^{1-\alpha}k(t)^{\alpha}l(a_r(t))^{1-\alpha} - c(t) - (n+\delta)k(t)\right] \tag{3.18}$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = \frac{1}{c(t)} - \lambda(t) \overset{!}{=} 0 \tag{3.19}$$
$$\frac{\partial H}{\partial a_r(t)} = -\mu(a_r(t))\phi(a_r(t)) + \lambda(t)(1-a)A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(a_r(t))}\right)^{\alpha} h(a_r(t))\mu(a_r(t)) \overset{!}{=} 0 \tag{3.20}$$
$$\dot{\lambda}(t) = (\rho - n)\lambda(t) - \lambda(t)\alpha A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(a_r(t))}\right)^{\alpha-1} + \lambda(t)(n+\delta) \tag{3.21}$$
$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)k(t) = 0 \tag{3.22}$$

Nach einigen Umformungsschritten (siehe Appendix A3) erhält man folgende Gleichungen:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \rho \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{c(t)} \cdot w(t)h(a_r(t)) = \phi(a_r(t)) \tag{3.24}$$

wobei $w(t) = (1-\alpha)A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(a_r(t))}\right)^{\alpha}$ den Lohn und $r(t) = \alpha A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(a_r(t))}\right)^{\alpha-1} - \delta$ den Zinssatz darstellen.
Diese Gleichungen können wie folgt interpretiert werden:

- Gleichung (3.23) stellt die klassische Euler-Gleichung (für den Spezialfall der logarithmischen Nutzenfunktion) dar. Sie gibt die Wachstumsrate des optimalen Konsums an. Durch einen höheren Zinssatz $r(t)$ sind die Individuen anfangs mehr an Ersparnis interessiert, welche sie später für Konsum ausgeben können. Dadurch steigt die Wachstumsrate des Konsums. Durch eine höhere Diskontierung ρ ist die Zukunft für Individuen weniger wichtig, weshalb der Konsum nicht so stark wächst oder sinkt. Es ist also zu sehen, dass die Wachstumsrate des Konsums nur positiv sein kann, wenn der Zinssatz echt größer als der Zeitpräferenzfaktor ist.

- Gleichung (3.24) gibt an, dass Individuen zum optimalen Pensionsantrittsalters $a_r(t)$ indifferent zwischen Arbeit und Pension sind. Der Disnutzen des Arbeitens $\phi(a_r(t))$ ist zu diesem Zeitpunkt gleich dem zusätzlichen Nutzen der durch Arbeiten entsteht. Letzterer entsteht dadurch, dass Individuen durch Arbeiten Einkommen in Höhe von $w(t)h(a_r(r))$ bekommen, welches sie für zusätzlichen Konsum verwenden können. Insgesamt bringt das einen Nutzengewinn von $\frac{1}{c(t)}w(t)h(a_r(r))$.

3.3. Dynamisches System und Steady State

Um steady state Werte zu bekommen und auch weitere Analysen durchführen zu können, wird zunächst das dynamische System $\left(\dot{k}(t), \dot{a}_r(t)\right)$ aufgestellt. Für die $\dot{k}(t)$-Gleichung wird der Konsum $c(t)$ aus Gleichung (3.24) in Gleichung (3.16) eingesetzt:

$$\dot{k}(t) = A(t)^{1-\alpha}k(t)^{\alpha}l(a_r(t))^{1-\alpha} - \frac{(1-\alpha)A(t)^{1-\alpha}k(t)^{\alpha}l(a_r(t))^{-\alpha}h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))} - (n+\delta)k(t)$$

$$= A(t)^{1-\alpha}k(t)^{\alpha}l(a_r(t))^{1-\alpha} \cdot \left[1 - \frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}\right] - (n+\delta)k(t) \tag{3.25}$$

Für die $\dot{a}_r(t)$-Gleichung wird Gleichung (3.24) nach der Zeit t abgeleitet und man erhält:

$$\left[\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))} - \frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))}\right]\dot{a}_r(t) = -[r(t)-\rho] + \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \tag{3.26}$$

Ersetzt man zuletzt noch $r(t)$ und $\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}$, so erhält man insgesamt folgendes dynamisches System:

$$\dot{k}(t) = A(t)^{1-\alpha}k(t)^{\alpha}l(a_r(t))^{1-\alpha} \cdot \left[1 - \frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}\right] - (n+\delta)k(t) \tag{3.27}$$

$$\dot{a}_r(t) = \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta) + \alpha(\rho-n) - \alpha(1-\alpha)\left(\frac{A(t)l(a_r(t))}{k(t)}\right)^{1-\alpha}\frac{h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}}{\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))} - \frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))} + \alpha\frac{\mu(a_r(t))h(a_r(t))}{l(a_r(t))}} \tag{3.28}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}{(1-\alpha)h(a_r(t))} \cdot \left(\frac{k(t)}{A(t)l(a_r(t))}\right)^{1-\alpha} = 0, \tag{3.29}$$

wobei Gleichung (3.29) die Transversalitätsbedingung aus Gleichung (3.22) mit λ aus Gleichung (3.20) darstellt.
Zuletzt kann noch das Kapital pro effektiver Arbeit $\tilde{k}(t) = \frac{K(t)}{A(t)N(t)} = \frac{k(t)}{A(t)}$ betrachtet werden. Mit $\dot{\tilde{k}}(t) = \frac{\dot{k}(t)}{A(t)} - \tilde{k}(t)\gamma$ erhält man dann folgendes dynamisches System:

$$\dot{\tilde{k}}(t) = \tilde{k}(t)^{\alpha} l(a_r(t))^{1-\alpha} \cdot \left[1 - \frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}\right] - (n+\delta+\gamma)\tilde{k}(t) \tag{3.30}$$

$$\dot{a}_r(t) = \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta) + \alpha(\rho-n) - \alpha(1-\alpha)\left(\frac{l(a_r(t))}{\tilde{k}(t)}\right)^{1-\alpha} \frac{h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}}{\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))} - \frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))} + \alpha\frac{\mu(a_r(t))h(a_r(t))}{l(a_r(t))}} \tag{3.31}$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}{(1-\alpha)h(a_r(t))} \cdot \left(\frac{\tilde{k}(t)}{l(a_r(t))}\right)^{1-\alpha} = 0 \tag{3.32}$$

Um den steady state $(\tilde{k}^*, a_r^*)$ zu berechnen, werden die Gleichungen (3.30) und (3.31) Null gesetzt:

$$\dot{a}_r = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta) + \alpha(\rho-n) = \frac{\alpha(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))^{\alpha}} \frac{1}{\tilde{k}(t)^{1-\alpha}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{k}(t) = \left[\frac{\alpha(1-\alpha)h(a_r(t))}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]\phi(a_r(t)l(a_r(t)))^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.33}$$

und

$$\dot{\tilde{k}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{k}(t)^{\alpha} l(a_r(t))^{1-\alpha}\left[1 - \frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}\right] = (n+\delta+\gamma)\tilde{k}(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{k}(t) = l(a_r(t))\left[\frac{1 - \frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}}{n+\delta+\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.34}$$

Für den steady state werden Gleichung (3.33) und (3.34) gleichgesetzt:

$$\left[\frac{\alpha(1-\alpha)h(a_r(t))}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]\phi(a_r(t)l(a_r(t)))^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = l(a_r(t))\left[\frac{1-\frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}}{n+\delta+\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.35}$$

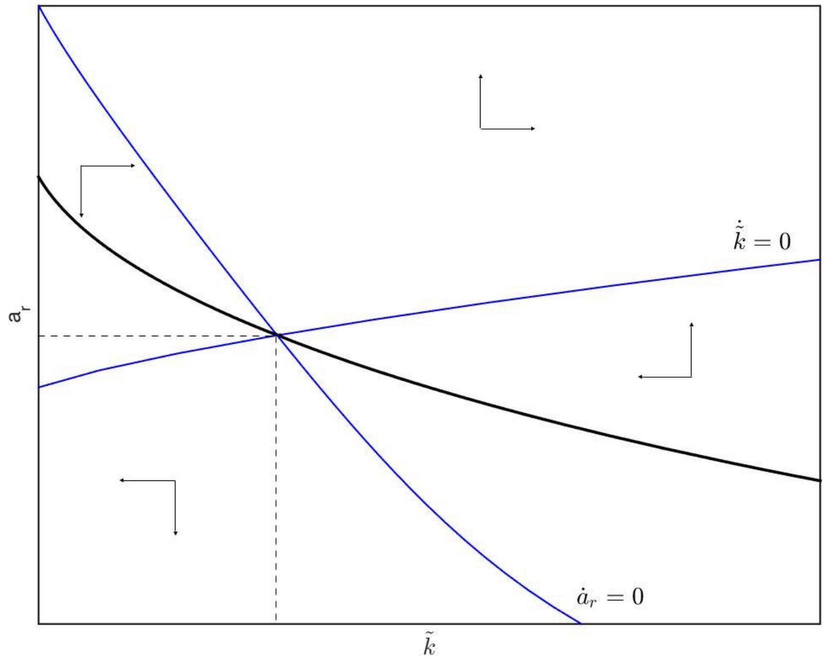
Daraus folgt eine implizite Gleichung für a_r^*:

$$\frac{\phi(a_r^*)l(a_r^*)}{h(a_r^*)} = \frac{(1-\alpha)(\delta+\gamma+\rho)}{(1-\alpha)(\delta+\gamma+\rho)+\alpha(\rho-n)} \tag{3.36}$$

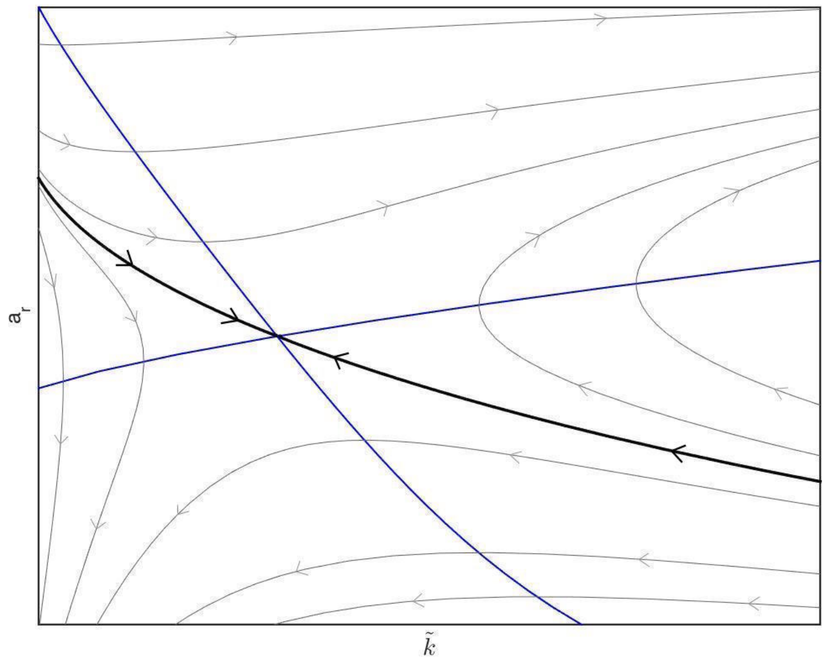
Wird dieser Ausdruck nun in Gleichung (3.34) eingesetzt, so erhält man den steady state Kapitalstock pro effektiver Arbeit $\tilde{k}^*$:

$$\tilde{k}^* = l(a_r^*)\cdot\left(\frac{\alpha}{\gamma+\delta+\rho}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{3.37}$$

In Abbildung 3.1. wird das dynamische System so wie der steady state grafisch dargestellt. Es ist sehr schön zu sehen, dass der steady state ein Sattelpunkt ist. Da für jeden gegeben Kapitalstock $\tilde{k}$ das Pensionsantrittsalter a_r festgelegt wird, kann der steady state durch eine geeignete Politik erreicht werden. Ökonomisch wird das als stabil bzw. Sattelpunkt-stabil bezeichnet. Jeweils in schwarz eingezeichnet ist der Sattelpunktpfad zu sehen. Wählt man einem gegebenen Startwert $\tilde{k}(0)$ ein passendes $a_r(0)$ auf diesem Sattelpunktpfad, so wird man immer zum steady state $(\tilde{k}^*, a_r^*)$ konvergieren. Startet man mit einem Kapitalstock links vom steady state, dh. $\tilde{k}(0) < \tilde{k}^*$, so ist das Kapital zu niedrig. Um das ausgleichen muss das Pensionsantrittsalter anfangs sehr hoch gewählt werden. Dadurch wird genug produziert, um den Kapitalstock zu erhöhen. Mit steigendem pro Kopf Kapital steigt auch der pro Kopf Output. In Folge dessen kann das Pensionsantrittsalter gesenkt und der Kapitalstock weiterhin erhöht werden bis der steady state erreicht wird. Startet man rechts vom steady state, dh. $\tilde{k}(0) > \tilde{k}^*$, so ist der pro Kopf Kapitalstock ineffizient hoch. Durch hohe Abschreibungen müsste sehr viel gespart werden um diesen konstant zu halten. Das würde jedoch sehr wenig Konsum bedeuten und wäre nicht optimal. Einerseits ist der pro Kopf Output groß genug, andererseits soll der Kapitalstock abgebaut werden, wodurch das Pensionsantrittsalter zu Beginn eher niedrig gesetzt wird. Bis zum steady state sinkt der Kapitalstock, wodurch Individuen länger arbeiten müssen, um das auszugleichen und das Pensionsantrittsalter steigt.



(a) Steady State $(\tilde{k}^*, a_r^*)$ und Sattelpunktpfad



(b) Dynamik des Problems

Abbildung 3.1.: Steady State $(\tilde{k}^*, a_r^*)$ und Dynamik

Weiters ist in Abbildung 3.1. (b) schön zu sehen, dass für ein gegebenes $\tilde{k}(0)$ mit einen anderen Startwert $a_r(0)$, der nicht auf dem Sattelpunktpfad liegt, niemals der steady state erreicht wird.

3.4. Erhöhung der Lebenserwartung

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen einer Erhöhung der Lebenserwartung auf die beiden steady state Werte $\tilde{k}^*$ und a_r^* analysiert. Es wird also die Veränderung betrachtet, wenn ξ um eine marginale Einheit erhöht wird. Wenn sich ξ erhöht, so wird die Gesundheit besser, was wiederum die Wahrscheinlichkeit erhöht in das hohe Alter zu kommen. Somit kann eine Erhöhung von ξ als Erhöhung der Lebenserwartung interpretiert werden. Die nachfolgenden Rechnungen sind in Appendix A3 zu finden.
Für das optimale Pensionsantrittsalter a_r^* gilt:

$$\frac{\partial a_r^*}{\partial \xi} > 0 \tag{3.38}$$

Wenn sich die Lebenserwartung erhöht, so werden Individuen länger arbeiten, um die (längere) Pension weiterhin finanzieren zu können.

Für den Kapitalstock pro effektiver Arbeit $\tilde{k}^*$ gilt:

$$\frac{\partial \tilde{k}^*}{\partial \xi} < 0 \tag{3.39}$$

In Gleichung (3.37) ist zu sehen, dass Veränderungen des Kapitalstocks infolge einer Erhöhung von ξ nur durch das effektive pro Kopf Arbeitsangebot $l(a_r^*)$ beeinflusst wird. Dieser Effekt kann in einen direkten und einen indirekten Effekt unterteilt werde: Durch eine Erhöhung von ξ, also einer Erhöhung der Lebenserwartung, nimmt zum einen die Anzahl der Individuen, die in Pension sind, und somit der Anteil der nicht arbeitenden Bevölkerung zu. Dadurch sinkt das effektive pro Kopf Arbeitsangebot und in Folge der Kapitalstock pro effektiver Arbeitskraft. Zum anderen bewirkt eine Erhöhung der Lebenserwartung ein höheres Pensionsantrittsalter. Dadurch steigt das effektive pro Kopf Arbeitsangebot und in Folge auch der Kapitalstock. Insgesamt überwiegt jedoch der negative Effekt, weshalb eine Erhöhung der Lebenserwartung einen niedriger Kapitalstock zur Folge hat.

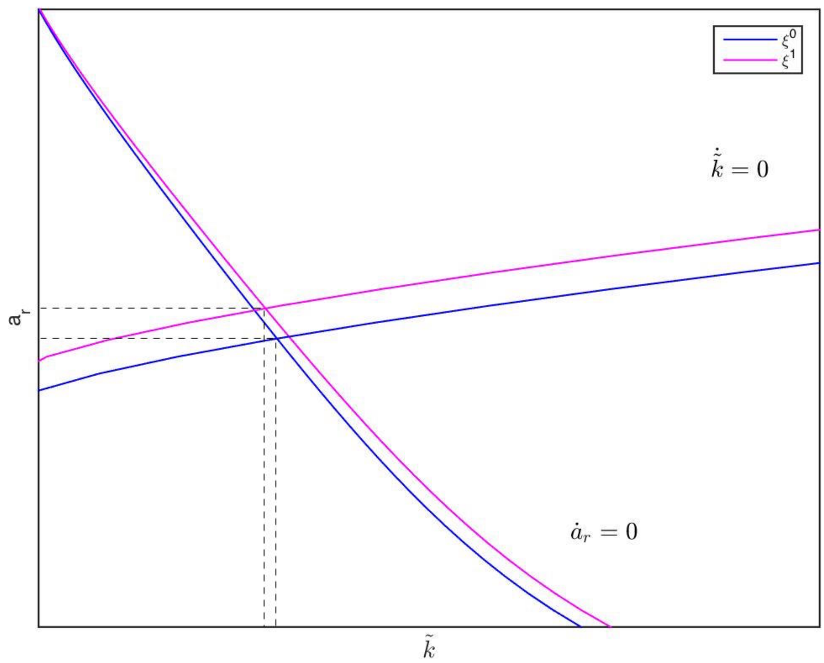


Abbildung 3.2.: Erhöhung der Lebenserwartung von ξ^0 auf ξ^1

In Abbildung 3.2. werden diese Ergebnisse grafisch veranschaulicht. Die blauen Linien zeigen das System in der Ausgangssituation mit ξ^0, die magentafarbenen Linien zeigen das System nach einer Erhöhung der Lebenserwartung auf $\xi^1 > \xi^0$. Es ist schön zu sehen, dass eine Erhöhung von ξ die ($\dot{\tilde{k}} = 0$)-Linie nach oben und die ($\dot{a}_r = 0$)-Linie nach rechts verschiebt. Der neue steady state stellt sich bei einem niedrigen Kapitalstock $\tilde{k}$ und einem höheren Pensionsnatrittsalter a_r ein. In Abbildung 3.3. sind der steady state Kapitalstock und das steady state Pensionsantrittsalter als Funktion der Lebenserwartung gezeichnet. Auch hier ist zu erkennen, dass eine höhere Lebenserwartung zu einem sinkenden Kapitalstock und einem steigenden Pensionsantrittsalter führt.

3.5. Erhöhung der Fertilität

Als nächstes werden noch die Effekte einer marginalen Erhöhung der Fertilität auf das Pensionsantrittsalter sowie den Kapitalstock betrachtet. Diese sind nur unter gewissen Annahmen eindeutig. Eine Erhöhung der Fertilität hat einerseits einen direkten negativen Einfluss auf das Kapital, den "capital dilution effect". Andererseits bewirkt eine

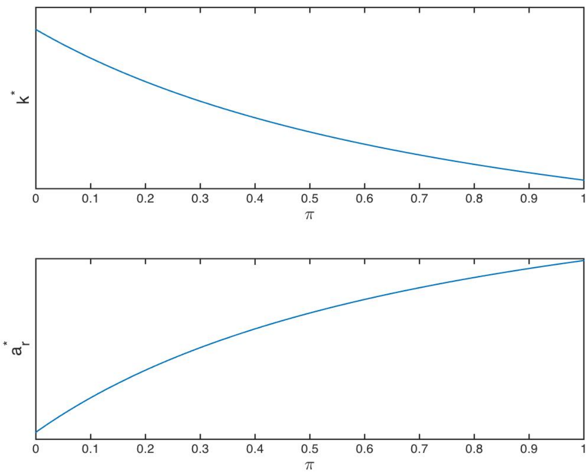


Abbildung 3.3.: Steady State Kapitalstock und Pensionsantrittsalter als Funktion der Lebenserwartung

höhere Geburtenrate, dass die Anzahl der Jungen steigt und jene der Alten sinkt, was keinen eindeutigen Effekt auf das Verhältnis von nicht arbeitender Bevölkerung zu Erwerbsbevölkerung hat. Außerdem, da in diesem Modell angenommen wird, dass man produktiver ist je älter man ist, reduziert eine höhere Fertilität die Arbeitsproduktivität, da im Vergleich weniger produktive Menschen am Arbeitsmarkt sind. Das wiederum senkt das effektive pro Kopf Arbeitsangebot. Die nachfolgenden Rechnungen sind wiederum im Appendix A3 zu finden.

Die Auswirkungen einer Erhöhung der Fertilität auf das Pensionsantrittsalter a_r^* sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Es gilt jedoch:

$$\frac{\partial l}{\partial n} < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial a_r^*}{\partial n} > 0 \tag{3.40}$$

Einer Erhöhung der Fertilität bewirkt also ein höheres Pensionsantrittsalter, wenn das effektive pro Kopf Arbeitsangebot sinkt. Letzteres sinkt wenn eine der Bedingungen erfüllt ist (siehe Gleichung (A.61) und (A.65)):

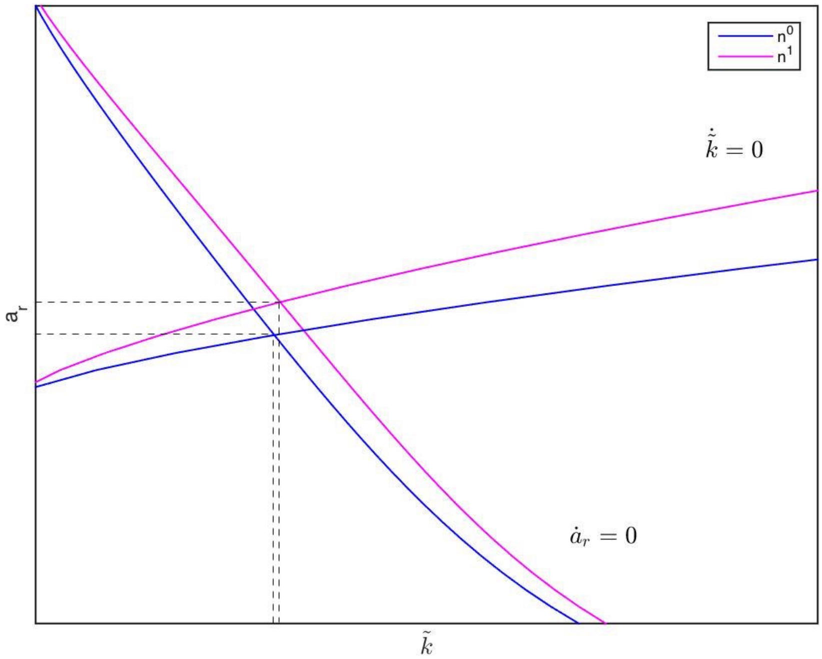
- Das Durchschnittsalter der effektiven Arbeitskräfte ist höher als des Durchschnittsalter der Gesamtbevölkerung.
- Das Durchschnittsalter der Erwerbsbevölkerung ist höher als das Durchschnittsalter Alter der Gesamtbevölkerung und die Produktivität zum Pensionsantritt (also am Ende der Erwerbsperiode) ist größer als die durchschnittliche Produktivität

der Erwerbsbevölkerung.

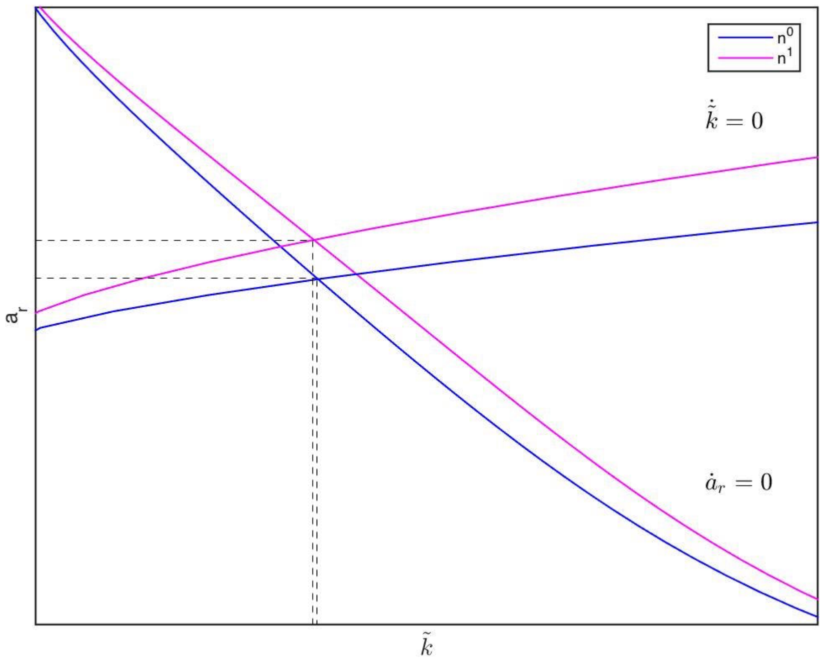
Einfach ausgedrückt bedeuten diese Bedingungen, dass ältere Arbeitskräfte durchschnittlich produktiver sind. In diesem Fall bedeutet eine höhere Fertilitätsrate n, dass der soziale Planer vorhandene Konsumgüter auf mehr Individuen aufteilen muss und der pro Kopf Konsum zunächst sinken würde. Dadurch steigt jedoch der Grenznutzen des Konsums, wodurch wiederum länger gearbeitet wird (siehe Gleichung (3.24)). Insgesamt führt eine Erhöhung der Fertilität zu einem höheren Pensionsantrittsalter, wenn Arbeitskräfte durchschnittlich im Alter produktiver sind.

Für den Kapitalstock $\tilde{k}^*$ ist der Effekt im Allgemeinen nicht eindeutig. Er hängt von der jeweiligen Wahl der Parameterwerte bzw. der Wahl der Produktivität $h(a)$ und des Disnutzens $\phi(a)$ ab.

In Abbildung 3.4. werden die Ergebnisse grafisch dargestellt. Die Produktivität wurde dazu als steigende Funktion in a gewählt, wodurch nach den obigen Bedingungen das effektive pro Kopf Arbeitsangebot bei steigender Fertilität sinkt und das optimale Pensionsantrittsalter steigt. Die blauen Linien zeigen das System in der Ausgangssituation mit n^0, die magentafarbenen Linien zeigen das System nach einer Erhöhung der Fertilitätsrate auf $n^1 > n^0$. Um sowohl ein Steigen als auch ein Sinken des Kapitalstocks zu zeigen, wurde die Disnutzenfunktion in den beiden Grafiken variiert. Welcher Fall eintritt hängt von der jeweiligen Wahl der Parameter und der Funktionen $\phi(a)$ und $h(a)$ ab. In beiden Grafiken ist zu sehen, dass, wie schon bei der Erhöhung der Lebenserwartung, die ($\dot{\tilde{k}} = 0$)-Linie nach oben und die ($\dot{a}_r = 0$)-Linie nach rechts verschoben werden. Es ist lediglich entscheidend um wie viel die Linien ansteigen. In Grafik a) ist zu sehen, dass eine Erhöhung der Fertilitätsrate sowohl einen höheren Kapitalstock als auch ein höheres Pensionsantrittsalter bewirkt. In Grafik b) stellt sich der neue steady state bei einem niedrigeren $\tilde{k}$ und einem höheren a_r ein. Eine höhere Fertilität bewirkt in diesem Fall, dass der Kapitalstock sinkt und das Pensionsantrittsalter steigt.



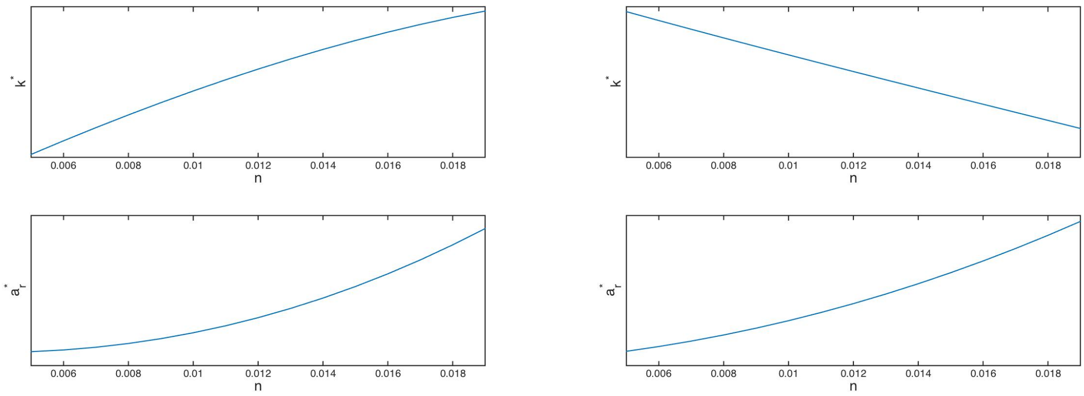
(a)



(b)

Abbildung 3.4.: Erhöhung der Fertilität von n^0 auf n^1

In Abbildung 3.5. werden zuletzt noch der steady state Kapitalstock sowie das steady state Pensionsantrittsalter als Funktion der Fertilitätsrate dargestellt. Auch hier ist zu



(a) (b)

Abbildung 3.5.: Steady State Kapitalstock und Pensionsantrittsalter als Funktion der Fertilität

sehen, dass das Pensionsantrittsalter mit steigender Fertilität wächst. Weiters wurde die Disnutzenfunktion erneut variiert, um sowohl ein Steigen (Grafik (a)) als auch ein Sinken (Grafik (b)) des steady state Kapitalstocks zu präsentieren.

3.6. Das dezentrale Problem

Bethencourt und Perera-Tallo zeigen in ihrem Paper weiters wie man das Problem dezentral lösen kann und welche Mechanismen eingesetzt werden können, um auch im dezentralen Problem auf die optimale Allokation des sozialen Planers zu kommen.

Eine Möglichkeit die dezentrale Lösung zu erhalten, ist einen repräsentativen Haushalt zu betrachten. Dieser soll einen durchschnittlichen Haushalt in der Ökonomie, was Alter und Vermögen angeht, darstellen. Seine Nutzenfunktion entspricht jener des sozialen Planers (Gleichung 3.15). Der repräsentative Haushalt berücksichtigt jedoch seine Budgetrestriktion und nicht die Ressourcenbeschränkung.

Das Optimierungsproblem des repräsentativen Haushalts lautet dann:

$$\max_{c(t),a_r(t)} \int_0^\infty \left[\ln(c(t)) - \int_{a_y}^{a_r(t)} \mu(a)\phi(a)da \right] e^{-(\rho-n)t} dt \tag{3.41}$$

$$\text{s.t.} \quad \dot{b}(t) = w(t)l(a_r(t)) + r(t)b(t) - c(t) - nb(t), \tag{3.42}$$

wobei $b(t)$ das Vermögen beschreibt. Der Haushalt optimiert also seinen Nutzen, welcher sich aus dem Nutzen durch Konsum $ln(c(t))$ minus dem Disnutzen des Arbeitens $\int_{a_y}^{a_r(t)} \mu(a)\phi(a)da$ zusammensetzt. Als seine Budgetrestriktion hat er das verfügbare Einkommen (Einkommen $w(t)l(a_r(t))$ plus Zinsen $r(t)b(t)$) abzüglich dem Konsum $c(t)$ und der Abschreibung $nb(t)$. Wichtig ist, dass der Haushalt als Preisnehmer den Lohn $w(t)$ sowie den Zinssatz $r(t)$ als gegeben ansieht.

Mithilfe der Bedingungen erster Ordnung erhält man folgende Optimalitätsbedingungen:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \rho \tag{3.43}$$

$$\phi(a_r(t)) = \frac{1}{c(t)} w(t)h(a_r(t)) \tag{3.44}$$

Auf der Produktionsseite wollen Firmen ihren Profit (Output $A(t)^{1-\alpha}k(t)^{\alpha}l(t)^{1-\alpha}$ minus Kosten $w(t)l(t) + (\delta + r(t))k(t)$) zu jedem Zeitpunkt t maximieren. Daraus ergeben sich der Lohn $w(t)$ sowie der Zinssatz $r(t)$:

$$w(t) = (1-\alpha)A(t)^{1-\alpha} \left(\frac{k(t)}{l(t)} \right)^{\alpha} \tag{3.45}$$

$$r(t) = \alpha A(t)^{1-\alpha} \left(\frac{k(t)}{l(t)} \right)^{\alpha-1} - \delta \tag{3.46}$$

Da sich der Markt zu jedem Zeitpunkt t im Gleichgewicht befinden soll, muss gelten:

$$l(t) = l(a_r(t)) \tag{3.47}$$

$$k(t) = b(t) \tag{3.48}$$

Fasst man Gleichung (3.43) - (3.48) zusammen, so müssen ingesamt folgende Bedingungen erfüllt sein, um eine optimale Lösung des dezentralen Problems zu erhalten:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \rho \tag{3.49}$$

$$\phi(a_r(t)) = \frac{1}{c(t)} w(t) h(a_r(t)) \tag{3.50}$$

$$w(t) = (1-\alpha) A(t)^{1-\alpha} \left(\frac{k(t)}{l(t)} \right)^{\alpha} \tag{3.51}$$

$$r(t) = \alpha A(t)^{1-\alpha} \left(\frac{k(t)}{l(t)} \right)^{\alpha-1} - \delta \tag{3.52}$$

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) k(t) = 0 \tag{3.53}$$

Es ist schön zu erkennen, dass diese Bedingungen mit jenen des sozialen Planers übereinstimmen (vgl. Gleichung (3.22), (3.23) und (3.24)). Da die Bedingungen ersten Ordnung überstimmen, haben die beiden Systeme gleiche Wachtsumsraten. Und da zusätzlich auch die Transversalitätbedingungen gleich sind, stimmen die optimalen Allokation des repräsentativen Haushalts mit jenen des sozialen Planers überein.

Eine weitere Möglichkeit das System zu dezentralisieren wäre ein einzelnes Individuum zu betrachten. Mit Hilfe eines Pensionssystem kann das Individuum zu der optimalen Allokation des sozialen Planers geführt werden. Wichtig ist dabei, dass der soziale Planer bei der optimalen Konsumallokation die Überlebenswahrscheinlichkeit eines einzelnen Individuums nicht berücksichtig. Im Gegensatz dazu spiet die Überlebenswahrscheinlichkeit eine zentrale Rolle, wenn ein einzelnes Individuum jedoch seinen Konsum optimiert: je geringer die Überlebenswahrscheinlichkeit ist, desto mehr wird ein Individuum in der Gegenwart konsumieren und desto weniger somit sparen. Somit würde ein Individuum nie auf die Allokation des sozialen Planers kommen. Um das zu umgehen, können Mechanismen eingebaut werden, die Individuen gegen die Unsicherheit des Überlebens versichern und somit die Ersparnis wieder erhöhen. Eine detailliertere Ausführung ist in Bethencourt und Perera-Tallo (2014) zu finden.

3.7. Zusammenfassung

In diesem Modell wurde das Pensionsantrittsalter optimal durch einen sozialen Planer berechnet und die Auswirkungen einer alternden Bevölkerung auf den Kapitalstock und das Pensionsantrittsalter untersucht. Es wurde gezeigt, dass eine steigende Lebenserwartung das Pensionsantrittsalter erhöht. Individuen werden länger arbeiten, um in der Pension keine finanziellen Einbußen zu haben. Eine steigende Lebenserwartung verringert den Kapitalstock, da das effektive pro Kopf Arbeitsangebot sinkt. Eine sinkende Fertilität hat keine eindeutigen Auswirkungen, da die Effekte vom effektiven pro Kopf Arbeitsangebot bzw. der Produktivität sowie dem Disnutzen von Arbeit abhängen. Es kann jedoch schon gesagt werden, dass das Pensionsantrittsalter bei sinkender Fertilität sinkt, wenn Arbeitskräfte im Alter durchschnittlich produktiver sind.

Kapitel 4

Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters in einem OLG-Modell

4.1. Modell

In diesem Kapitel wird das OLG-Modell von Miyazaki (2014) vorgestellt. Das Pensionsantrittsalter ist hier exogen gegeben und es werden im Vergleich zum OLG-Modell aus Kapitel 2 die Auswirkungen einer Veränderung des Pensionsantrittsalters auf den Kapitalstock, den aggregierten Output und die Pensionszahlungen betrachtet. Um hervorzuheben, dass das Pensionsantrittsalter nicht optimal gewählt wird, wird es nicht wie in Kapitel 2 mit l_t sondern mit x bezeichnet. Zudem wird in diesem Modell eine Arbeitsproduktivität $\theta \in (0,1]$ in der zweiten Periode angenommen. Weiters wird in Miyazaki (2014) angenommen, dass man mit Sicherheit in die zweite Periode gelangt und dass die Bevölkerung konstant ist. Die Überlebenswahrscheinlichkeit wird auf $\pi = 1$ und die Wachstumsrate der Bevölkerung auf $n = 0$ gesetzt.
Für die Konsumentenseite werden wiederum folgende Annahmen getroffen: Individuen leben zwei Perioden lang, wobei die Periodenlänge auf 1 normiert ist. In der ersten Periode sind Individuen bzw. Haushalte jung. Sie arbeiten und bekommen dafür einen Lohn w_t, den sie jedoch versteuern müssen. Somit bleibt ihnen als Einkommen $(1-\tau)w_t$, wobei $\tau \in [0,1)$ die Lohnsteuer beschreibt. Das Nettoeinkommen können sie in Konsum $c_{1,t}$ und Ersparnis s_t unterteilen. Die Budgetrestriktion für diese Periode lautet somit

$$c_{1,t} + s_t = (1-\tau)w_t. \tag{4.1}$$

Weiters ist es wichtig, dass die Ersparnis größer gleich Null ist, da sich Individuen nicht verschulden können:

$$s_t \geq 0 \iff c_{1,t} \leq (1-\tau)w_t \tag{4.2}$$

In der zweiten Periode sind die Individuen alt. Sie arbeiten in dieser Periode nur mehr einen Anteil $x \in [0,1)$ ihrer Zeit, die übrige Zeit $(1-x)$ sind sie in Pension. Man könnte x somit als Pensionsantrittsalter bezeichnen, welches in diesem Modell exogen gegeben ist. Für die Arbeit erhalten sie wieder den Lohn abzüglich der Steuer $(1-\tau)w_{t+1}$, wobei nun eine Arbeitsproduktivität von $\theta \in (0,1]$ angenommen wird. $\theta < 1$ kommt daher, dass angenommen wird, dass Individuen im Alter weniger produktiv sind. Das Einkommen setzt sich nun aus $(1-\tau)x\theta w_{t+1}$ zusammen. Die restliche Zeit sind Individuen in Pension und erhalten Transfers in Höhe von P_{t+1}. Weiters erhalten Individuen in der zweiten Periode das Ersparte aus der vorigen Periode, was noch verzinst wird — also $R_{t+1}s_t$. Dieses zu Verfügung stehende Kapital kann nun nur noch für Konsum $c_{2,t+1}$ ausgegeben werden, da Individuen in dieser Periode nicht mehr sparen müssen, da sie nur zwei Perioden lang leben. Die Budgetrestriktion für diese Periode lautet daher

$$c_{2,t+1} = R_{t+1}s_t + (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)P_{t+1}. \tag{4.3}$$

Setzt man die Ersparnis s_t aus Gleichung (4.1) in Gleichung (4.3) so erhält man die intertemporale Budgetrestriktion eines Individuums:

$$R_{t+1}c_{1,t} + c_{2,t+1} = (1-\tau)w_t R_{t+1} + (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)P_{t+1} \tag{4.4}$$

Individuen verhalten sich nun so, als ob sie ihren Nutzen maximieren würden. Dazu wird die folgende logarithmische Nutzenfunktion $U(c_{1,t}, c_{2,t+1}) = \ln(c_{1,t}) + \beta\ln(c_{2,t+1})$ angenommen, wobei $\beta \in (0,1)$ den Diskontierungsfaktor darstellt. Daraus ergibt sich das folgende Optimierungsproblem:

$$\max_{c_{1,t},c_{2,t+1}} \ln(c_{1,t}) + \beta\ln(c_{2,t+1}) \tag{4.5}$$

$$\text{s.t.} \quad R_{t+1}c_{1,t} + c_{2,t+1} - (1-\tau)w_t R_{t+1} - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1} = 0 \tag{4.6}$$

$$c_{1,t} - (1-\tau)w_t \leq 0 \tag{4.7}$$

$$c_{1,t}, c_{2,t+1} \geq 0 \tag{4.8}$$

Da dieses Maximierungsproblem analog zu Kapitel 2 mit der Lagrange-Funktion gelöst wird, werden hier nur die Ergebnisse präsentiert. Die Rechenschritte sind in Appendix A4 zu finden. Für den optimalen Konsum gilt:

$$c_{1,t} = \frac{R_{t+1}(1-\tau)w_t + (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)P_{t+1}}{(1+\beta)R_{t+1}} \tag{4.9}$$

Die Interpretation einer Erhöhung von w_t, w_{t+1}, R_{t+1}, τ und β ist analog zu Kapitel 2: ein höheres w_t bzw. w_{t+1} bewirkt ein Steigen des optimalen Konsums, ein höheres R_{t+1}, τ bzw. β bewirkt ein Sinken des optimalen Konsums. Neu in diesem Modell sind die Auswirkungen von θ, P_{t+1} und x:

- Eine Erhöhung der Arbeitsproduktivität θ in der zweiten Periode hat dieselben Auswirkungen wie eine Erhöhung der Transferzahlungen P_{t+1}: es steht mehr Einkommen zu Verfügung, welches für Konsum ausgegeben werden kann.
- Eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters x hat keine eindeutige Auswirkung, da der Lohn in der zweiten Periode länger ausbezahlt wird, die Transferzahlungen P_{t+1} jedoch kürzer.

Für die optimale Ersparnis gilt:

$$s_t = \frac{\beta(1-\tau)R_{t+1}w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1}}{(1+\beta)R_{t+1}} \tag{4.10}$$

Auch hier ist die Interpretation einer Erhöhung von w_t, w_{t+1}, R_{t+1}, τ und β wieder analog zu jener in Kapitel 2: ein höheres w_t, R_{t+1} bzw. β bewirkt ein Steigen der optimalen Ersparnis, ein höheres w_{t+1} bewirkt ein Sinken der Ersparnis und ein höheres τ hat keine eindeutigen Auswirkungen, da diese von den Werte der exogenen Parameter w_t, w_{t+1}, R_{t+1}, β, θ und x abhängen. In diesem Modell sind noch die Auswirkungen von θ, P_{t+1} und x relevant:

- Eine Erhöhung der Arbeitsproduktivität θ sowie der Transferzahlungen P_{t+1} bewirkt ein Sinken der Ersparnis, da sich dadurch das Einkommen in der zweiten Periode erhöht und in Folge in der ersten Periode weniger gespart werden muss.
- Eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters x hat keinen eindeutigen Effekt auf das Sparen in der ersten Periode.

Auch hier ist wieder zu beachten, dass $s_t \geq 0$ gelten muss. Dazu muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$s_t \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta(1-\tau)R_{t+1}w_t \geq (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)P_{t+1} \tag{4.11}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so befindet man sich im Fall $s_t = 0$ und $c_{1,t} = (1-\tau)w_t$. In Folge wäre auch der Kapitalstock gleich Null. Im weiteren wird angenommen, dass diese Bedingung erfüllt ist.

Wird auf der anderen Seite die Produzentenseite betrachtet, so wird angenommen, dass eine repräsentative Firma zu jedem Zeitpunkt einen Output produziert. Dazu wird Arbeit L_t und Kapital K_t verwendet. Die Produktionsfunktion lautet $Y_t = AK_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$, wobei $\alpha \in (0,1)$ die Kapitalelastizität und $A \equiv 1$ den technologischen Fortschritt beschreibt. In diesem Modell wird die Fertilität und somit das Bevölkerungswachstum nicht betrachtet. Die Wachstumsrate der Bevölkerung n wird auf Null gesetzt, $n = 0$, und die Bevölkerung bleibt daher konstant — $N_t = (1+n)N_{t-1} = N_{t-1}$, wobei N_t alle Individuen beschreibt, die zum Zeitpunkt t geboren sind. Da Individuen auch in der zweiten Periode arbeiten, setzt sich die Erwerbsbevölkerung L_t zum Zeitpunkt t wie folgt zusammen: $L_t = N_t + x\theta N_{t-1} = (1+x\theta)N_t$.

Wird der Konsum pro Arbeiter betrachtet, also $k_t = \frac{K_t}{L_t}$, so folgt $y_t = \frac{Y_t}{L_t} = \frac{K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}}{L} = \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} = k_t^{\alpha}$. Die Inputfaktoren Kapital und Arbeit werden gemäß ihren Grenzproduktivitäten entlohnt:

$$R_t = \alpha k_t^{\alpha-1} \tag{4.12}$$

$$w_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha} \tag{4.13}$$

Zuletzt muss noch beachtet werden, dass das Staatsbudget für die Pensionszahlungen zu jedem Zeitpunkt ausgeglichen sein muss. Somit gilt

$$(1-x)P_{t+1} = \tau w_{t+1}(1+x\theta) \tag{4.14}$$

Der Kapitalstock K_{t+1} in der zweiten Periode setzt sich aus der Ersparnis s_t aller Individuen zusammen, die in Periode t leben, also $K_{t+1} = s_tN_t$. Wegen $L_{t+1} = (1+x\theta)N_t$

gilt für den Kapitalstock pro effektiver Arbeitskraft $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{s_t}{1+x\theta}$:

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\tau)R_{t+1}w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1}}{(1+x\theta)(1+\beta)R_{t+1}} \tag{4.15}$$

Mit Gleichungen (4.12), (4.13) und (4.14) folgt nun:

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\tau)w_t}{(1+x\theta)(1+\beta)} - \frac{(1-\tau)x\theta w_{t+1}}{(1+x\theta)(1+\beta)R_{t+1}} - \frac{\tau w_{t+1}}{(1+\beta)R_{t+1}}$$

$$= \frac{\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+x\theta)(1+\beta)}k_t^\alpha - \frac{(1-\tau)x\theta(1-a)}{(1+x\theta)(1+\beta)\alpha}k_{t+1} - \frac{\tau(1-\alpha)}{(1+\beta)\alpha}k_{t+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{(1+\beta)\alpha(1+x\theta)+(1-\alpha)(\tau+x\theta)}{(1+x\theta)(1+\beta)\alpha}\right)k_{t+1} = \frac{\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+x\theta)(1+\beta)}k_t^\alpha$$

Für den Kapitalstock pro Arbeiter gilt also:

$$k_{t+1} = \frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\beta)\alpha(1+x\theta)+(1-\alpha)(\tau+x\theta)}k_t^\alpha \tag{4.16}$$

Es gibt somit einen steady state $k^* = k_{t+1} = k_t$ für beliebiges $x \in [0,1)$:

$$k^* = \frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\beta)\alpha(1+x\theta)+(1-\alpha)(\tau+x\theta)}k^{*\alpha}$$

$$\Longleftrightarrow \quad k^* = \left[\frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\beta)\alpha(1+x\theta)+(1-\alpha)(\tau+x\theta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4.17}$$

4.2. Erhöhung des Pensionsantrittsalters

Im Folgenden werden die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters auf den Kapitalstock, den aggregierten Output sowie die Pensionszahlungen analysiert. Dazu wird zunächst die Veränderung vom Kapitalstock betrachtet, wenn sich der Anteil, den man in Periode 2 arbeitet, — und somit das Pensionsantrittsalter — um eine marginale Einheit erhöht. Wird also die Ableitung $\frac{\partial k^*}{\partial x}$ betrachtet, so ist zu sehen, dass diese negativ ist. Dazu wird die Kettenregel verwendet:

$$\frac{\partial k^*}{\partial x} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\beta)\alpha(1+x\theta)+(1-\alpha)(\tau+x\theta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\cdot \left[\frac{-\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)\cdot[(1+\beta)\alpha\theta+(1-\alpha)\theta]}{[(1+\beta)\alpha(1+x\theta)+(1-\alpha)(\tau+x\theta)]^2}\right] < 0 \qquad (4.18)$$

Da alle Parameter zwischen Null und Eins liegen, ist es leicht zu sehen, dass die erste Klammer positiv und die zweite Klammer, wegen des Minus im Zähler, negativ sein muss. Wenn das Pensionsantrittsalter erhöht wird, sparen Individuen in Periode 1 weniger und somit verringert dies den Kapitalstock pro effektiver Arbeit. Eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters hat in diesem Modell also eine negative Auswirkung auf das Kapital.

Wird nun der aggregierten Output $Y^* = (1 + x\theta)(k^*)^\alpha$ betrachtet, so sind die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters nicht eindeutig. Es gibt zwei entgegengesetzte Effekte: zum einen steigt durch eine Erhöhung des Pensionantrittsalters die effektive Arbeitskraft und somit der aggregierte Output. Zum anderen bewirkt ein längeres Arbeiten jedoch, dass in der ersten Periode weniger gespart wird, weshalb der Kapitalstock und in Folge dessen auch der Output sinkt. Welcher der beiden Effekte überwiegt hängt von den Parametern ab. Für die Analyse wird die Ableitung $\frac{\partial Y^*}{\partial x}$ herangezogen. Wichtig ist alleine das Vorzeichen, weshalb alle Terme, die größer Null sind und somit das Vorzeichen nicht beeinflussen, herausgehoben werden können. Insgesamt kann gesagt werden, dass ein eindeutiges $\bar{\alpha} \in (0, \frac{1}{2})$ existiert, sodass

- für alle $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ der aggregrierte Output Y^* für jedes $\tau \in [0, 1)$ in x steigt,
- für alle $\alpha \in (\bar{\alpha}, \frac{1}{2})$ ein eindeutiges $\bar{\tau} \in (0, 1)$ existiert, sodass der aggregierte Output Y^* für jedes $\tau \in [0, \bar{\tau})$ in x sinkt und für jedes $\tau \in (\bar{\tau}, 1)$ in x steigt,
- für alle $\alpha > \frac{1}{2}$ der aggregierte Output Y^* für jedes $\tau \in [0, 1)$ in x sinkt.

Nun werden diese Ergebnisse noch grafisch dargestellt. Abbildung 4.1. zeigt die oben beschriebenen Fallunterscheidungen. Die farbige Fläche zeigt jene (α, τ)-Kombinationen, für die der aggregierte Output wächst. Die weiße Fläche zeigt jene Kombinationen, für die der aggregierte Output sinkt. Das Pensionsantrittsalter wurde dazu auf $x = 0.5$ gesetzt, da sich für unterschiedliches x nicht das qualitative Verhalten, sondern nur der

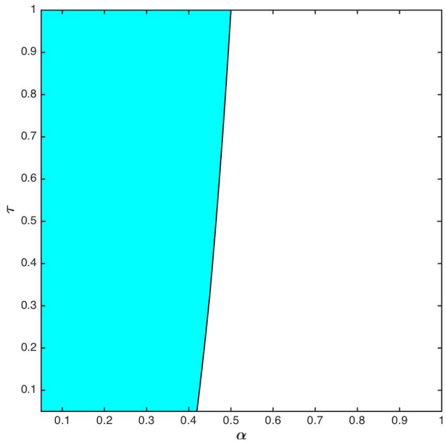


Abbildung 4.1.: Vorzeichen von $\frac{\partial Y^*}{\partial x}$ für verschiedene (α,τ)-Kombinationen

Wert von $\bar{\alpha}$ verändert.
In Abbildung 4.2. wird der aggregierte Output als Funktion des Pensionsantrittsalters grafisch dargestellt. Dazu wird für die jeweiligen α-Werte ($\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.49$ und $\alpha = 0.7$) jeweils die Grafik für $\tau = 0.3$ und $\tau = 0.7$ gezeigt, um alle vorigen Fallunterscheidungen zu präsentieren. In Grafik a), b) und d) ist zu sehen, dass die Kapitalelastizität α kleiner $\frac{1}{2}$ sein muss, damit eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters einen positiven Effekt auf den aggregierten Output haben kann. Grafik a) und b) beschreiben den ersten Fall. α ist klein genug gewählt, sodass der Output für jedes τ mit wachsendem x steigt. Wenn $\alpha < \frac{1}{2}$ ist, bedeutet das, dass Arbeit für die Produktion wichtiger ist als Kapital. In Folge dessen ist der Effekt der erhöhten effektiven Arbeitskraft größer als jener des sinkenden Kapitalstocks, weshalb der aggregierte Output steigt. In Grafik c) und d) ist der zweite Fall dargestellt und es ist zu sehen, dass die Höhe der Steuer τ entscheidend dafür ist, ob der aggregierte Output wächst oder sinkt. Wenn Kapital und Arbeit annähernd gleich wichtig sind, so ist die Höhe der Steuer entscheidend. Die Steuer ist nun entscheidend, welcher der beiden Effekte überwiegt. Ist die Steuer sehr hoch, so werden Individuen in der ersten Periode mehr sparen, um die Steuerabgaben zu kompensieren. Dadurch steigt wieder der Kapitalstock und somit der aggregierte Output. Bei einer niedrigen Steuer, wird nicht mehr sondern weniger gespart werden. In diesem Fall überwiegt der Effekt des sinkenden Kapitalstocks. Zuletzt ist noch in Grafik e) und f) der dritte Fall dargestellt. Für $\alpha > \frac{1}{2}$ sinkt der aggregierte Output mit wachsendem x für jedes τ. Wenn Maschinen wichtiger sind als Arbeitskräfte, überwiegt erneut der Effekt des sinkenden Kapitalstocks. Ein höheres Pensionsantrittsalter bewirkt, dass in

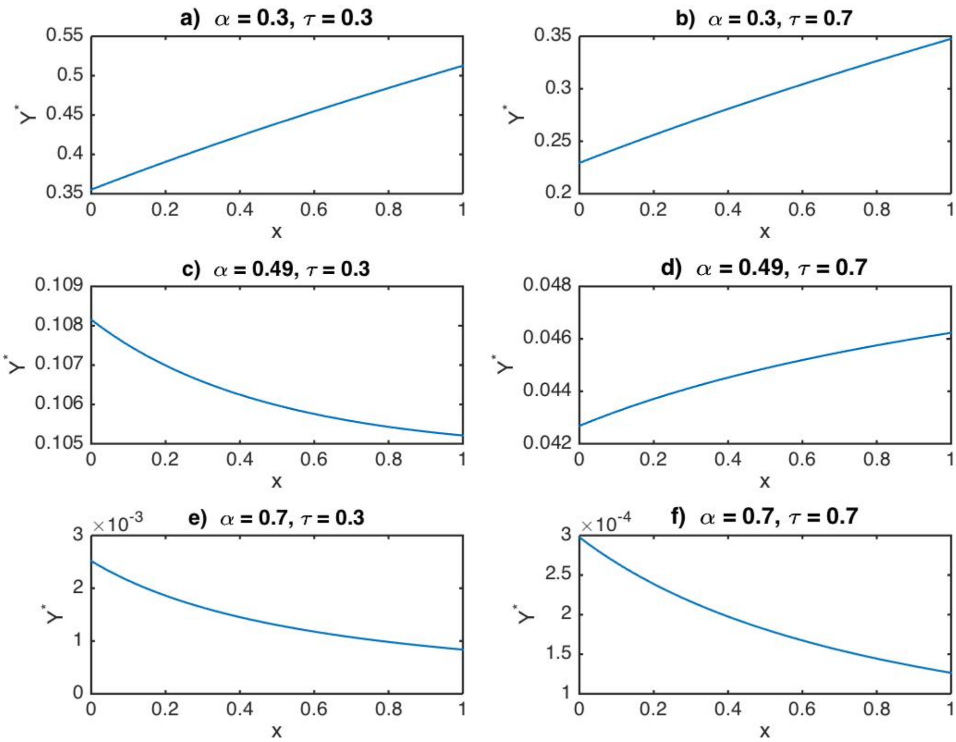


Abbildung 4.2.: Aggregierter Output Y^* als Funktion von x

der ersten Periode weniger gespart werden muss, wodurch das Kapital und somit der aggregierte Output sinkt.

Analog können auch die Pensionen betrachtet werden. Diese ergeben sich aus Gleichung (4.14): $P^* = \frac{\tau w^*(1+x\theta)}{(1-x)} = \frac{\tau(1+x\theta)(1-\alpha)}{(1-x)}(k^*)^\alpha$. Da auch hier die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters x interessant sind, wird die Ableitung $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ analysiert. Auch hier sind die Auswirkungen nicht eindeutig und hängen von den Parametern ab. Zum einen bewirkt eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters wieder, dass die effektive Arbeitskraft steigt, da Individuen länger arbeiten und somit länger in die Pensionskasse einzahlen. Individuen sind außerdem kürzer in Pension, weshalb die Pensionszahlungen weniger lange ausbezahlt werden müssen. Beides erhöht die Pensionszahlungen. Zum anderen bewirkt eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters, dass in der ersten Periode weniger gespart werden muss, was den Kapitalstock senkt. Ein niedrigerer Kapitalstock senkt den Output und in Folge auch den Lohn. Somit wird weniger in die Pensionskasse eingezahlt und die Pensionszahlungen sinken. Analog zum aggregierten Output ist für die Analyse wieder nur das Vorzeichen entscheidend. Insgesamt kann gezeigt werden[5], dass ein $\bar{\alpha} \in (0,1)$ existiert, sodass

- für alle $\alpha < \bar{\alpha}$ die Pensionszahlungen P^* für alle $\tau \in (0,1)$ in x steigen,
- für alle $\alpha \in \left(\bar{\alpha}, \frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta}\right)$ ein $\bar{\tau} \in (0,1)$ existiert, sodass die Pensionszahlungen P^* für alle $\tau < \bar{\tau}$ in x sinken und für alle $\tau > \bar{\tau}$ in x steigen,
- für alle $\alpha \in \left(\frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta}, 1\right)$ die Pensionszahlungen P^* für jedes $\tau \in (0,1)$ in x sinken.

Zu beachten ist, dass der Wert für α, ab welchem die Pensionszahlungen immer sinken, positiv von x abhängt. Je größer x ist, desto höher muss α sein, dass es zu einem Sinken der Pensionszahlungen kommen kann. Somit hängt das qualitative Verhalten erneut nur von $\bar{\alpha}$ ab. Abbildung 4.3. zeigt wiederum die oben beschriebenen Fallunterscheidungen: die farbige Fläche zeigt jene (α,τ)-Kombinationen, für die die Pensionszahlungen steigen, die weiße Fläche zeigt jene Kombinationen, für die die Pensionszahlungen sinken. Das Pensionsantrittsalter x wurde variiert, da der kritische Wert für α von x abhängt. Für den Fall $x = 0.2$ ist schön zu sehen, dass die Auswirkung einer Erhöhung x auf die Pensionszahlungen auch von τ abhängen. Für $\alpha = 0.7$ liegt der Punkt mit einem niedrigem τ in der weißen Fläche und bedeutet somit, dass mit dieser Wahl von α und τ eine Erhöhung von x die Pensionszahlungen sinken lässt. Kapital ist für die Produktion wichtiger als Arbeit, weshalb der Effekt des sinkenden Kapitalstocks und somit des sinkenden Lohns überwiegt. Für $\alpha = 0.7$ und hohem τ bewirkt eine Erhöhung von x auch eine Erhöhung von P^*, da die Parameterkombination (α, τ) dann im farbigen Bereich liegt. Wenn die Steuer sehr hoch ist, ist das Nettoeinkommen sehr gering, weshalb Individuen in der ersten Periode mehr sparen müssen, was den Kapitalstock und in Folge den Lohn und die Pensionszahlungen erhöht. Zu beachten ist, dass der kritische Wert für α, ab dem es zu einem Sinken der Pensionszahlungen kommen könnte, größer $\frac{1}{2}$ ist:

$$\frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta} > \frac{1}{2} \iff 2(1+\theta) > 1+2\theta-x\theta \iff 1+x\theta > 0 \tag{4.19}$$

Da $\alpha < \frac{1}{2}$ ein realistischer Parameterwert für die Kapitalelatizität ist, kann man sagen, dass eine Erhöhung des Pensionsantrittsalter auch zu einer Erhöhung der Pensionszahlungen führt.

Abbildung 4.4. zeigt die Pensionszahlungen als Funktion des Pensionsantrittsalters für verschiedene Werte von α und τ. In der oberen Grafik ist α klein genug gewählt, sodass

[5] Dieses Ergebnis unterscheidet sich wesentlich von Proposition 3.2. aus Miyazaki (2014).

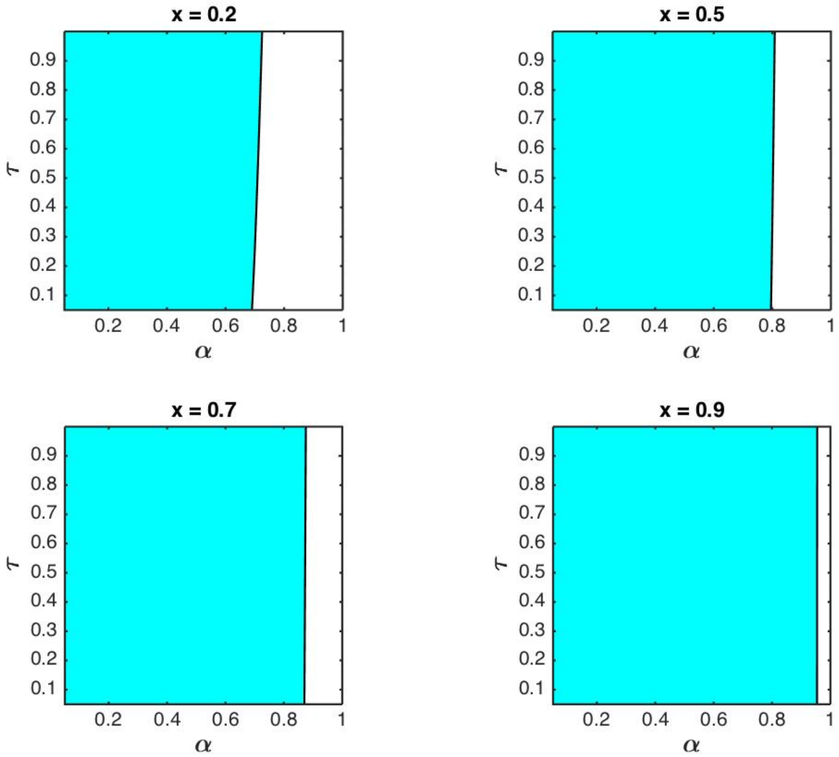


Abbildung 4.3.: Vorzeichen von $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ für verschiedene (α,τ)-Kombinationen

der erste Fall eintritt und die Pensionszahlungen in x steigen. In der unteren Grafik ist α sehr hoch gewählt. Es ist zu sehen, dass die Pensionszahlungen bis x etwa 0.9 sinken und danach steigen. Diese Grafik verdeutlicht, dass die Auswirkungen einer Erhöhung von x auf die Pensionszahlungen P^* von den jeweiligen Parameterwerten abhängen. Zusammengefasst gilt, dass prinzipiell eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters mehr Einkommen in der zweiten Periode generiert, weshalb mehr Steuern eingenommen werden und die Pensionszahlungen somit erhöht werden. Weiters senkt eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters die Ersparnis und somit den Kapitalstock und den Lohn, weshalb die Pensionszahlungen sinken. Speziell der Wert der Kapitalelastizität α ist entscheidend. Ist diese sehr hoch, ist Kapital für den Output wichtiger, weshalb ein Sinken des Kapitalstocks und in Folge des Lohns einen höheren Einfluss auf die Pensionszahlungen hat, als die Tatsache, dass durch die Erhöhung des Pensionsantrittsalters mehr Leute in die Pensionskasse einzahlen. Für niedriges α sind Arbeitskräfte von größerer Bedeutung, weshalb der Effekt durch die höhere effektive Arbeit überwiegt und die Pensionszahlungen somit steigen.

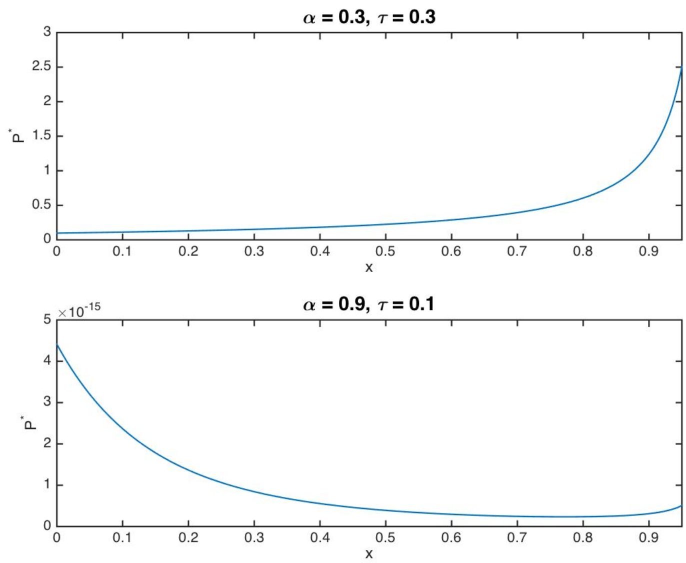


Abbildung 4.4.: Pensionszahlungen P^* als Funktion von x

4.3. Modell mit Überlebenswahrscheinlichkeit

Das in diesem Kapitel vorgestellte Modell basiert auf jenem von Miyazaki (2014), jedoch wurde zusätzlich eine Überlebenswahrscheinlichkeit $\pi \in (0, 1)$ der zweiten Periode eingeführt. Dieses Modell unterscheidet sich von jenem in Kapitel 2 also insofern, als dass das Pensionsantrittsalter wieder exogen gegeben ist und eine Arbeitsproduktivität $\theta < 1$ in der zweiten Periode angenommen wird. Das exogenen Pensionsantrittsalter wird verwendet, um wiederum die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters auf den Kapitalstock, den aggregierten Output und die Pensionszahlungen zu analysieren.

Das Optimierungsproblem der Individuen lautet somit:

$$\max_{c_{1,t}, c_{2,t+1}} \ln(c_{1,t}) + \pi\beta \ln(c_{2,t+1}) \tag{4.20}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1} = 0 \tag{4.21}$$

$$c_{1,t} - (1-\tau)w_t \leq 0 \tag{4.22}$$

$$c_{1,t}, c_{2,t+1} \geq 0 \tag{4.23}$$

Da das Maximierungsproblem analog zum vorigen Modell gelöst wird, sind die Rechenschritte in Appendix A5 zu finden. Für die optimale Ersparnis gilt:

$$s_t = \frac{\pi\beta(1-\tau)R_{t+1}w_t - \pi(1-\tau)x\theta w_{t+1} - \pi(1-x)P_{t+1}}{(1+\pi\beta)R_{t+1}} \tag{4.24}$$

Auch hier muss beachtet werden, dass $s_t \geq 0$ gilt. Dazu muss analog zu Kapitel 4.1 die Bedingung

$$s_t \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \beta(1-\tau)R_{t+1}w_t \geq (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)R_{t+1} \tag{4.25}$$

erfüllt sein. Ist dies nicht der Fall, so gilt $s_t = 0$ und $c_{1,t} = (1-\tau)w_t$ und in Folge dann, dass der Kapitalstock Null ist. Im weiteren wird angenommen, dass $s_t \geq 0$ erfüllt ist.

Die Produktionsseite bleibt durch die Einführung einer Überlebenswahrscheinlichkeit analog zu jener aus Kapitel 4.1. Weiterhin gilt für Zinssatz und Lohn: $R_t = \alpha k_t^{\alpha-1}$ und $w_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha}$.

Der Staat muss jedoch sehr wohl die Überlebenswahrscheinlichkeit π einkalkulieren, da weiterhin das Budget für die Pensionszahlungen ausgeglichen sein muss:

$$\pi(1-x)P_{t+1} = \tau w_{t+1} + \tau\pi x\theta w_{t+1} = \tau w_{t+1}(1+\pi x\theta) \tag{4.26}$$

Auch in diesem Modell gibt es einen steady state $k^* = k_{t+1} = k_t$ für beliebiges $x \in [0,1)$:

$$k^* = \left[\frac{\pi\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha + (1-\alpha)(\tau+\pi x\theta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{4.27}$$

4.4. Erhöhung des Pensionsantrittsalters sowie der Überlebenswahrscheinlichkeit

Wie zuvor wird wieder die Veränderung des Kapitalstocks betrachtet, wenn sich der Anteil, den Individuen in der zweiten Periode arbeiten, erhöht — $\frac{\partial k^*}{\partial x}$. Auch in diesem Modell mit Überlebenswahrscheinlichkeit hat eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters eine negative Auswirkung auf den Kapitalstock pro effektiver Arbeit:

$$\frac{\partial k^*}{\partial x} < 0 \tag{4.28}$$

Eine ceteris paribus Erhöhung des Pensionsantrittsalters veranlasst Individuen in der jungen Periode weniger zu sparen. Dies führt zu einer Verringerung des Kapitalstocks pro Arbeiter.

Nun wird auch noch die Veränderung des pro Kopf Kapitalstocks betrachtet, wenn die Überlebenswahrscheinlichkeit erhöht wird. Der Gedanke dahinter ist, dass heutzutage die Lebenserwartung immer mehr zunimmt und Individuen mehr sparen. Deswegen sind die Auswirkungen einer Erhöhung der Überlebenswahrscheinlichkeit auf den Kapitalstock positiv:

$$\frac{\partial k^*}{\partial \pi} > 0 \tag{4.29}$$

Eine Erhöhung der Überlebenswahrscheinlichkeit lässt Individuen in der jungen Periode mehr sparen und in Folge dessen erhöht sich der pro Kopf Kapitalstock.

Als nächstes werden die Ergebnisse dieses Modells grafisch dargestellt. Da die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters und der Überlebenswahrscheinlichkeit analysiert werden, werden diese in einem 3D-Plot dargestellt.

Zunächst wird in Abbildung 4.5. der gleichgewichtige pro Kopf Kapitalstock gezeigt. Es ist schön zu sehen, dass der pro Kopf Kapitalstock mit wachsendem x sinkt und mit wachsendem π steigt. Diese Grafik wurde für $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.9$, $\tau = 0.3$ und $\theta = 0.9$ geplottet. Eine Veränderung der Parameterwerte hat keine Auswirkung auf das qualitative Ergebnis — der pro Kopf Kapitalstock sinkt weiterhin für wachsendes x und steigt für wachsendes π —, lediglich die Stärke der Krümmung ändert sich. Wenn Individuen länger arbeiten müssen, werden sie in der ersten Periode weniger sparen, da sie länger Einkommen bekommen. Doch das Sinken der Ersparnis senkt den pro Kopf Kapitalstock. Steigt jedoch die Lebenserwartung, so steigt die Ersparnis, damit Individuen sich weiterhin den Konsum in der zweiten Periode leisten können, und in Folge dessen der pro Kopf Kapitalstock.

Wird nun der aggregierte Output $Y^* = (1 + \pi x \theta)(k^*)^\alpha$ betrachtet, so sind wegen

$$\frac{\partial Y^*}{\partial x} = \underbrace{\pi\theta}_{>0}\underbrace{(k^*)^\alpha}_{>0} + \underbrace{(1 + \pi x \theta)}_{>0}\underbrace{\frac{\partial (k^*)^\alpha}{\partial x}}_{<0} \tag{4.30}$$

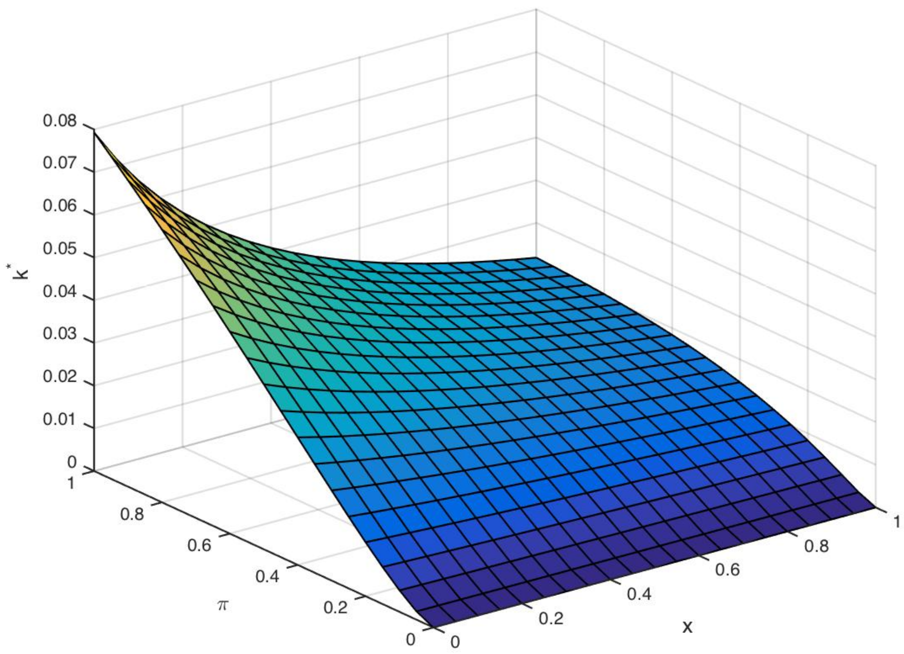
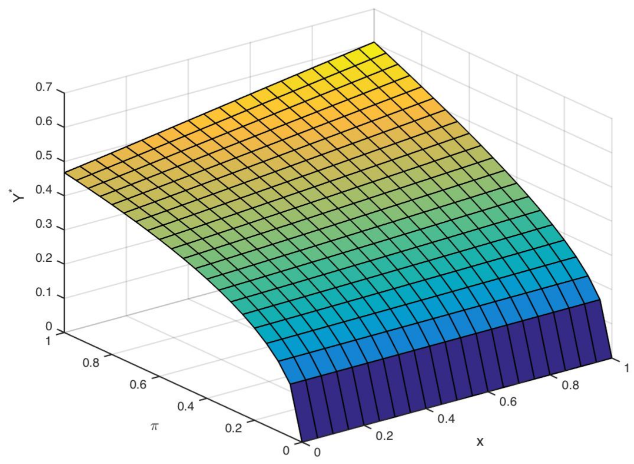


Abbildung 4.5.: Pro Kopf Kapitalstock

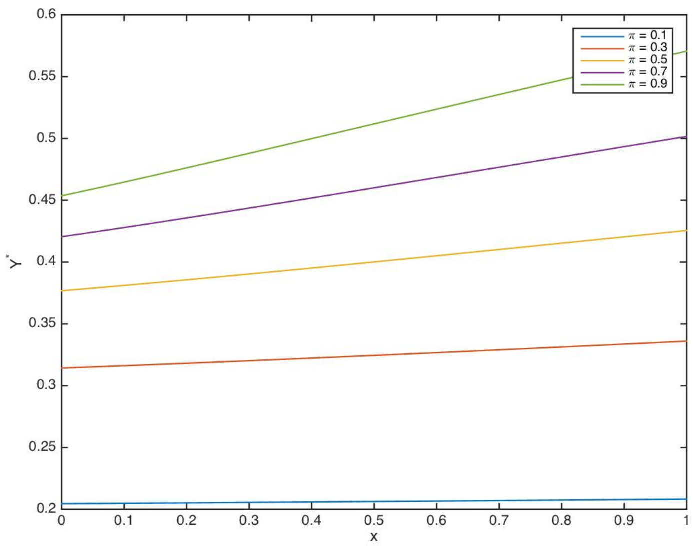
die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters auf den aggregierten Output nicht eindeutig. Der Gesamteffekt kann in zwei verschiedene Effekte zerlegt werden: zum einen bewirkt eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters, dass Individuen in der ersten Periode weniger sparen, was den pro Kopf Kapitalstock und somit auch den Output verringert. Zum anderen bedeutet eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters eine Erhöhung der effektiven Arbeitskraft pro Person, was wiederum den Output erhöht. Welcher Effekt überwiegt hängt wie schon in Kapitel 4.2 von den Parameterwerten ab. Auch hier sind wieder die Elastizität des Kapitals α und die Steuer τ entscheidend. Hinzu kommt in diesem Modell jedoch noch die Überlebenswahrscheinlichkeit π.
Wird nun eine Erhöhung der Lebenserwartung betrachtet, so ist schön zu sehen, dass diese, wegen

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \pi} = \underbrace{x\theta}_{>0} \underbrace{(k^*)^\alpha}_{>0} + \underbrace{(1 + \pi x\theta)}_{>0} \underbrace{\frac{\partial (k^*)^\alpha}{\partial \pi}}_{>0}, \tag{4.31}$$

immer zu einem Steigen im aggregierten Output führt. Je länger man lebt, desto mehr spart man an, desto höher ist der pro Kopf Kapitalstock und in Folge auch der aggregierte Output. In den nachfolgenden Grafiken werden die Ergebnisse für unterschiedliche Parameterwerte präsentiert:



(a) 3D-Plot von $Y^*(x, \pi)$



(b) Y^* als Funktion von x für gegebenes π

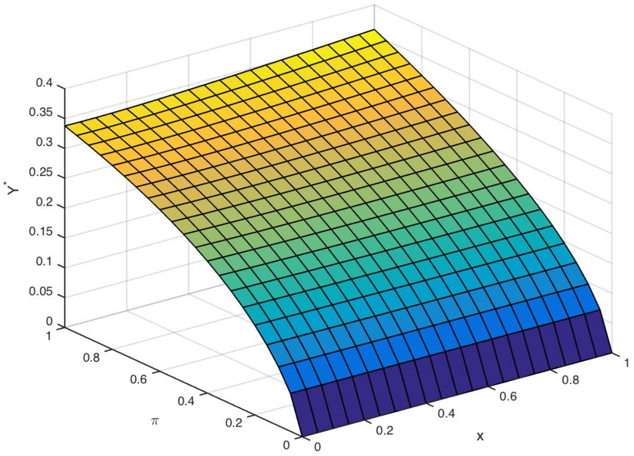
Abbildung 4.6.: Aggregierter Output für $\alpha = 0.3$ und $\tau = 0.3$

Abbildung 4.6. zeigt den aggregierten Output für $\alpha = 0.3$ und $\tau = 0.3$ zum einen

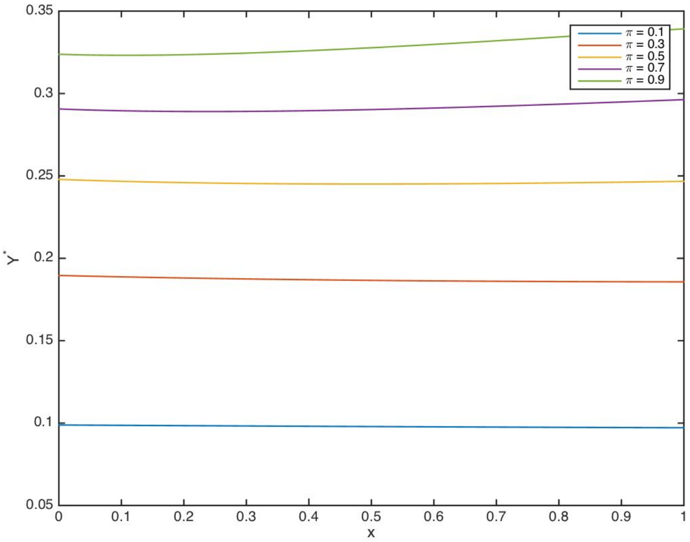
als Funktion von Pensionsantrittsalter und Steuer in einem 3D-Plot. Hier ist zu sehen, dass der Output sowohl in x als auch in π steigt. Zum anderen wird Y^* für feste π Werte gezeigt. Auch in dieser Grafik ist schön zu sehen, dass der Output steigt. Da α recht klein ist, sind Arbeitskräfte wichtiger als Kapital. Die Erhöhung der effektiven Arbeitskraft hat einen größeren Einfluss auf den aggregierten Output als das Sinken des Kapitalstocks, weshalb eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters auch eine Erhöhung des Outputs bewirkt.
Abbildung 4.7. zeigt nun den aggregierten Output für $\alpha = 0.4$ und $\tau = 0.2$ wiederum als 3D-Plot und als Funktion von x für gegebenes τ. Das Ergebnis ist in diesem Fall nicht eindeutig. In Grafik b) ist zu sehen, dass der Output für niedriges π nicht steigt, jedoch für hohes π sehr wohl. Zu beachten ist, dass sich die Werte in einem sehr geringen Intervall bewegen, weswegen das Sinken in x für niedriges τ im 3D-Plot nicht deutlich zu sehen ist. Da $\alpha < \frac{1}{2}$ sind Arbeitkräfte wieder wichtiger für die Produktion als Kapital. Für eher niedrige Steuern τ gilt, je länger man lebt, desto wichtiger wird der Effekt des längeren Arbeitens, was zu einem Steigen des Outputs führt. Ist die Lebenserwartung sehr gering, so hat einen Erhöhung des Pensionsantrittsalters zusätzlich den Effekt, dass weniger gespart wird, was den pro Kopf Kapitalstock und somit auch den Output senkt. Für geringe Lebenserwartung sind diese Effekte annähernd gleich bzw. überwiegt sogar der negative Effekt. Gut zu sehen ist jedoch, dass der Output für festes x aber steigendes π wächst.
Dazu im Vergleich ist es interessant die Grafik für $\alpha = 0.4$ und $\tau = 0.7$ anzusehen: Abbildung 4.8. zeigt nun einen Anstieg in x und in τ. Ist die Steuer sehr hoch, so bleibt einem durch das längere Arbeiten trotzdem nicht genug Kapital in der zweiten Periode, weshalb mehr gespart wird, was das Kapital und somit den Output erhöht. Für festes α kommt es also wie im Modell ohne Lebenserwartung darauf an wie die Steuer gewählt wird. In diesem Modell ist jedoch zusätzlich noch die Lebenserwartung entscheidend.
Zum Schluss wird nun in Abbildung 4.9. noch die Grafik für $\alpha = 0.7$ und $\tau = 0.3$ präsentiert: Es ist zu sehen, dass der aggregierte Output Y^* für jedes $\pi \in (0,1)$ in x sinkt und für jedes $x \in (0,1)$ in π steigt. Da α recht hoch gewählt ist, ist Kapital sehr wichtig im Vergleich zu Arbeit. Somit bewirkt eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters ein Sinken der Ersparnis und in Folge dessen ein Sinken des Outputs.

Zusammengefasst gibt es wie in Kapitel 4.2 mögliche Fälle für die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters auf den aggregierten Output:

- Für $\alpha > \frac{1}{2}$ sinkt der Output Y^* in x für jedes $\tau \in (0,1)$ und auch für jedes



(a) 3D-Plot von $Y^*(x, \pi)$

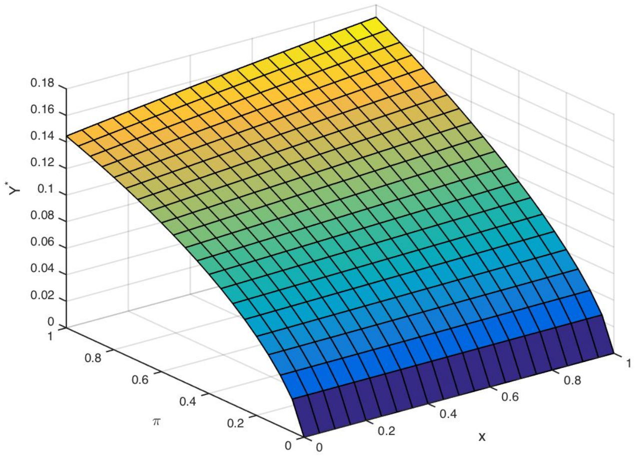


(b) Y^* als Funktion von x für gegebenes π

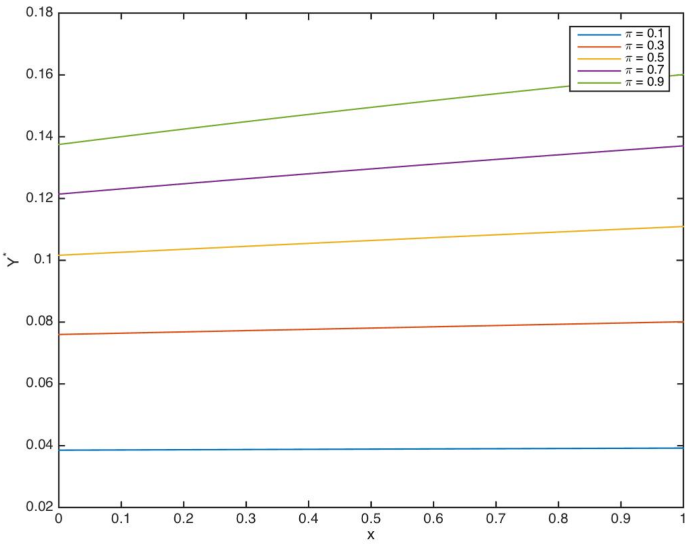
Abbildung 4.7.: Aggregierter Output für $\alpha = 0.4$ und $\tau = 0.2$

$\pi \in (0, 1)$.

- Für $\alpha < \frac{1}{2}$ gibt es ein $\bar{\alpha} \in (0, \frac{1}{2})$, sodass
  - für $\alpha < \bar{\alpha}$ steigt der Output Y^* in x für alle τ, $\pi \in (0, 1)$ und
  - für $\alpha \in (\bar{\alpha}, \frac{1}{2})$ hängt die Steigung des Outputs Y^* sowohl von τ als auch von π ab.

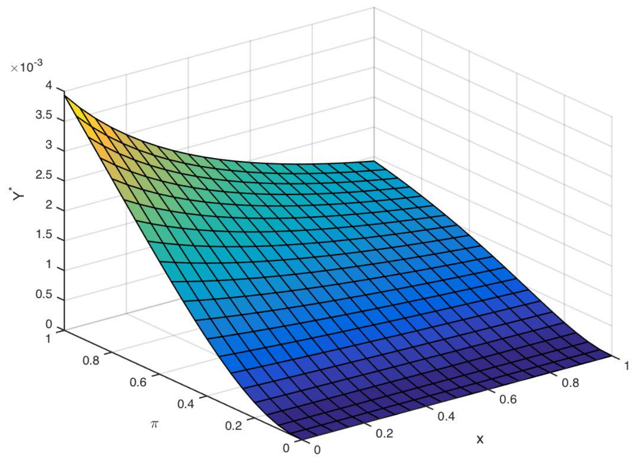


(a) 3D-Plot von $Y^*(x, \pi)$

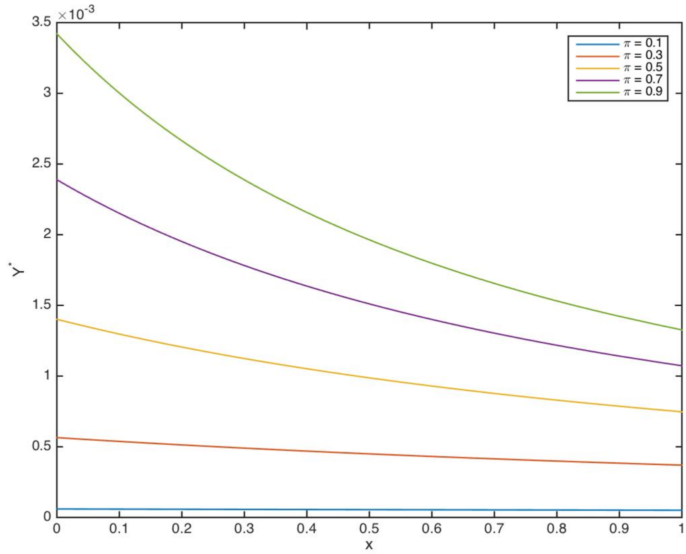


(b) Y^* als Funktion von x für gegebenes π

Abbildung 4.8.: Aggregierter Output für $\alpha = 0.4$ und $\tau = 0.7$



(a) 3D-Plot von $Y^*(x, \pi)$



(b) Y^* als Funktion von x für gegebenes π

Abbildung 4.9.: Aggregierter Output für $\alpha = 0.7$ und $\tau = 0.3$

Zuletzt werden noch die Auswirkungen einer Erhöhung von x und π auf die Pensionszahlungen $P^* = \frac{\tau(1+\pi x\theta)(1-\alpha)}{\pi(1-x)}(k^*)^\alpha$ betrachtet. Diese sind wegen

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \underbrace{\frac{\tau(1-\alpha)}{\pi}\left(\frac{\pi\theta(1-x)+(1+\pi x\theta)}{(1-x)^2}\right)}_{>0}\underbrace{(k^*)^\alpha}_{>0} + \underbrace{\frac{\tau(1+\pi x\theta)(1-\alpha)}{\pi(1-x)}}_{>0}\underbrace{\frac{\partial(k^*)^\alpha}{\partial x}}_{<0} \quad (4.32)$$

bzw.

$$\frac{\partial P^*}{\partial \pi} = \underbrace{-\frac{\tau(1-\alpha)}{(1-x)}\frac{1}{\pi^2}}_{<0}\underbrace{(k^*)^\alpha}_{>0} + \underbrace{\frac{\tau(1+\pi x\theta)(1-\alpha)}{\pi(1-x)}}_{>0}\underbrace{\frac{\partial (k^*)^\alpha}{\partial \pi}}_{>0} \tag{4.33}$$

nicht eindeutig. Auch hier kann der Gesamteffekt in zwei verschiedene Effekte zerlegt werden. Wird zuerst eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters betrachtet, so bewirkt diese zum einen wie vorher ein Sinken der Ersparnis und in Folge ein Sinken des Kapitals und der Pensionszahlungen. Zum anderen bedeutet eine Erhöhung des Penionsantrittsalters, dass mehr Individuen am Arbeitsmarkt sind und demnach Steuern zahlen, was die Pensionszahlungen erhöht. Wird nun eine Erhöhung der Lebenserwartung betrachtet, so bewirkt diese zum einem ein Steigen der Ersparnis und in Folge eine Erhöhung der Pensionszahlungen. Zum anderen bedeutet eine Erhöhung der Lebenserwartung, dass die Pension über einen längeren Zeitraum ausbezahlt werden muss, weshalb die Pensionszahlungen sinken. Welcher Effekt überwiegt hängt von der Kapitalelastizität α ab. Diese Ergebnisse werden anhand der nachfolgenden Grafiken noch verdeutlicht. Für alle Grafiken wurde die Steuer auf $\tau = 0.3$ gesetzt, α wurde variiert.

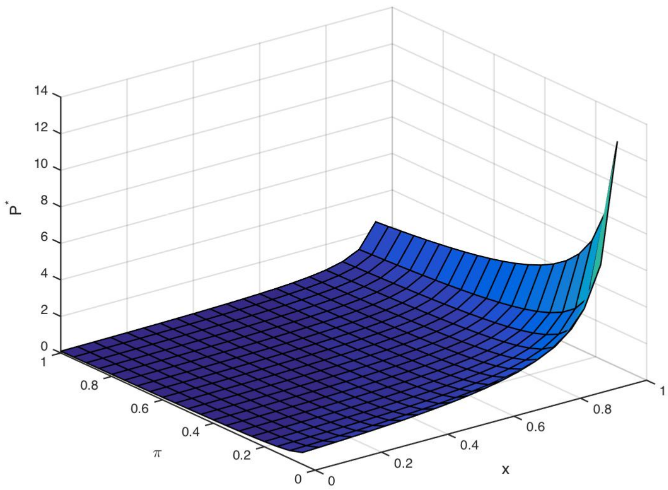


Abbildung 4.10.: 3D-Plot von $P^*(x, \pi)$ für $\alpha = 0.3$ und $\tau = 0.3$

In Abbildung 4.10. ist zu sehen, dass für $\alpha = 0.3$, also niedrige Kapitalelastizität, die Pensionszahlungen für festen π in x steigen und für festes x in π sinken. Wenn Arbeitskräfte im Vergleich zu Kapital wichtiger sind, so überwiegt der Effekt der größeren

Erwerbsbevölkerung, weshalb die Pensionszahlungen mit wachsendem Pensionsantrittsalter steigen. Für steigende Lebenserwartung überwiegt jedoch der Effekt der längeren Pension, weshalb die Pensionszahlungen sinken.

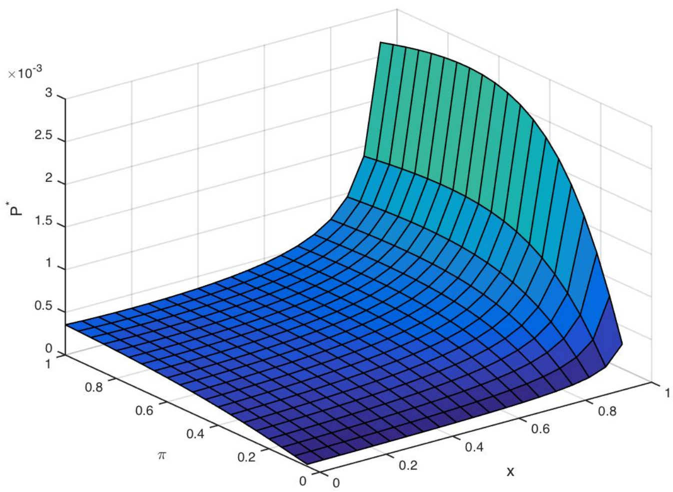


Abbildung 4.11.: 3D-Plot von $P^*(x, \pi)$ für $\alpha = 0.7$ und $\tau = 0.3$

Abbildung 4.11. zeigt die Pensionszahlungen für $\alpha = 0.7$. Es ist zu sehen, dass diese sowohl in x als auch in π steigen. Für dieses α überwiegen jeweils die positiven Effekte, weshalb insgesamt die Pensionszahlungen steigen.

Für $\alpha = 0.8$ steigen die Pensionszahlungen in π für festes x. Für festes π ist die Steigung in x nicht eindeutig. Da Kapital sehr wichtig im Vergleich zu Arbeitskräften ist, überwiegt bei einer Erhöhung der Lebenserwartung der Effekt, dass Individuen mehr sparen und somit das Kapital und in Folge die Pensionszahlungen erhöht werden. Bei einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters ist dieser Effekt nicht eindeutig. Für $x < \frac{1}{2}$, wenn man also mehr als die Hälfte der zweiten Periode in Pension ist, überwiegt der Effekt, dass weniger gespart wird, weshalb die Pensionszahlungen sinken. Sind Individuen jedoch kürzer in Pension, also $x > \frac{1}{2}$, so überwiegt der Effekt dass die Erwerbsbevölkerung zunimmt, weshalb die Pensionszahlungen steigen.

4.5. Zusammenfassung

In diesem Modell wurde das Penionsantrittsalter exogen angenommen und die Auswirkungen einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters auf den Kapitalstock, den aggregierten

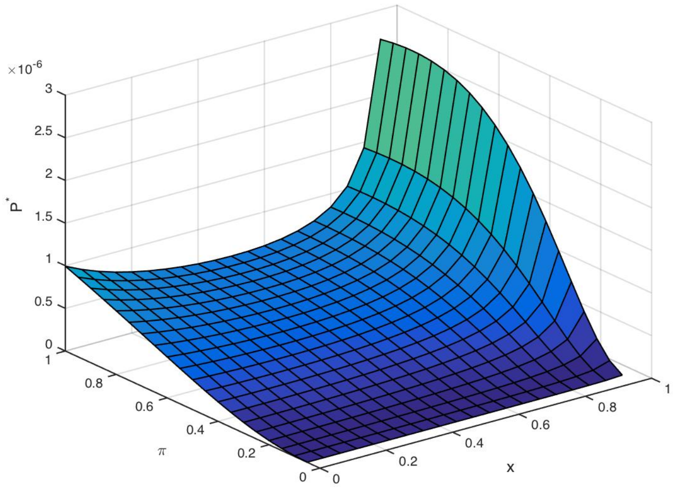


Abbildung 4.12.: 3D-Plot von $P^*(x,\pi)$ für $\alpha = 0.8$ und $\tau = 0.3$

Output sowie die Pensionszahlungen untersucht. Weiters wurde eine Überlebenswahrscheinlichkeit in die zweite Periode eingeführt, welche die Lebenserwartung modellieren soll. Es ist zu sehen, dass der Kapitalstock pro Arbeiter mit steigendem Pensionsantrittsalter sinkt und mit steigender Lebenserwartung steigt. Für den aggregierten Output und die Pensionszahlungen treten, je nachdem wie die Parameterwerte gewählt sind, unterschiedliche Effekte auf. Zu beachten ist jedoch, dass eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters nur dann einen negativen Effekt auf die Pensionszahlungen hat, wenn die Kapitalelastizität α sehr hoch gewählt wird, also wenn Kapital sehr viel wichtiger ist als Arbeit. Für $\alpha < \frac{1}{2}$, was in der Realität durchaus plausibel ist, treten die negativen Effekte nicht auf. Eine Erhöhung des Pensionsantrittsalters steigert somit die Pensionszahlungen. Eine Erhöhung der Lebenserwartung hat in einer realen Ökonomie negative Auswirkungen auf die Pensionszahlungen. Für den aggregierten Output kann es in einer realen Ökonomie nur dann zu negativen Auswirkungen sowohl einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters als auch einer Erhöhung der Lebenserwartung kommen, wenn die Kapitalelatizität nahe bei $\frac{1}{2}$ liegt und die Steuer klein gewählt wird. Gilt für die Kapitalelatizität zum Beispiel $\alpha = 0.3$, so sind die Auswirkungen auf den aggregierten Output immer positiv.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Fazit

In dieser Arbeit wurden unterschiedliche Modelle betrachtet, die explizit das Pensionsantrittsalter modellieren. Ziel war es zu untersuchen, welche Veränderungen nötig sind, um den Problemen bei Alterung der Bevölkerung entgegenzuwirken. Dazu wurden einerseits zwei Modelle betrachtet, in denen das Pensionsantrittsalter optimal bestimmt wurde und andererseits ein Modell, in dem das Pensionsantrittsalter exogen vorgegeben war. Es wurden die Auswirkungen von steigender Lebenserwartung sowie sinkender Fertilitätsrate analysiert.

Eine Erhöhung der Lebenserwartung hat sowohl in Kapitel 2 (Cipriani, 2016) als auch in Kapitel 3 (Bethencourt und Perera-Tallo, 2014) positive Auswirkungen auf das optimale Pensionsantrittsalter. In Kapitel 2 wurde ein OLG-Modell betrachtet, in dem Individuen in der ersten Periode voll arbeiten und in der zweiten Periode optimal wählen, welchen Anteil sie arbeiten. Den restlichen Teil sind sie in Pension und erhalten Pensionszahlungen. Es wurden die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung auf das optimale Penionsantrittsalter, den Kapitalstock pro Arbeitskraft sowie die Pensionszahlungen analysiert. Ist die Lebenserwartung eher niedrig, so ist es optimal in der zweiten Periode nicht zu arbeiten. Aufgrund der geringen Lebenserwartung ist der Altersabhängigkeitsquotient klein, dh. auf eine alte Person kommen viele Junge. Dadurch sind die Pensionszahlungen automatisch höher, weshalb in der zweiten Periode nicht gearbeitet werden muss. Erst ab einer gewissen Lebenserwartung werden Individuen auch in der zweiten Periode arbeiten. Je höher die Lebenserwartung dann ist, desto höher ist auch das optimale Pensionsantrittsalter. In entwickelten Ländern, in denen die Lebenserwartung hoch ist, wird immer auch in der zweiten Periode gearbeitet. Sowohl für den Fall, dass in der zweiten Periode nicht gearbeitet wird, also auch für den Fall, dass in der zweiten Periode gearbeitet wird, steigt der Kapitalstock pro Arbeiter mit

steigender Lebenserwartung. Die zweite Periode gewinnt an Bedeutung, wodurch Individuen mehr sparen, um keine finanziellen Einbußen zu haben. Im Allgemeinen sind die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung auf die Pensionszahlungen nicht eindeutig. In einer realen Ökonomie führt eine höhere Lebenserwartung jedoch zu einem Sinken der Pensionszahlungen. Individuen arbeiten zwar länger, jedoch überwiegt der Effekt der längeren Pension, wodurch die Pensionszahlungen sinken. Als Erweiterung zu Cipriani (2016) wurde die Fertilitätsrate endogenisiert. Die Effekte für Pensionsantrittsalter, Kapitalstock und Pensionszahlungen bleiben gleich. Jedoch hat eine steigende Lebenserwartung negative Auswirkungen auf die Fertilitätsrate. Da Individuen in ihrer Nutzenmaximierung die Pensionszahlungen als gegeben ansehen, bewirkt eine höhere Lebenserwartung lediglich, dass die zweite Periode an Bedeutung gewinnt, wodurch mehr gespart wird und somit weniger Einkommen für Kinder zur Verfügung steht und damit die Fertilitätsrate sinkt.
Auch in Kapitel 3 hat eine Erhöhung der Lebenserwartung positive Auswirkungen auf das optimale Pensionsantrittsalter. Es wurde ein zeitstetiges Modell vorgestellt, in dem das Pensionsantrittsalter durch die Nutzenmaximierung eines sozialen Planers optimal berechnet wird. Dieser teilt vorhandene Güter so auf, dass der Nutzen aller Individuen optimiert wird. Es wurden jedoch auch Möglichkeiten gezeigt wie das Modell dezentralisiert werden kann. Während des Arbeitslebens verfügen Individuen über eine gewisse Produktivität. Zugleich tragen sie auch einen Disnutzen vom Arbeiten, welcher mit dem Alter steigt. Im Optimum bewirkt eine höhere Lebenserwartung, dass zum einen länger gearbeitet wird, zum anderen jedoch der Kapitalstock sinkt. Letzterer hängt vom effektiven pro Kopf Arbeitsangebot ab, welches mit steigender Lebenserwartung abnimmt, da verhältnismäßig weniger Personen im Erwerbsleben sind.
In Kapitel 4 wurde zusätzlich zu Miyazaki (2014) eine Überlebenswahrscheinlichkeit eingebaut, welche als Lebenserwartung interpretiert werden kann, um wiederum die Auswirkungen einer steigenden Lebenserwartung zu analysieren. Die Effekte für den Kapitalstock sowie die Pensionszahlungen sind analog zu Kapitel 2. Neu in diesem Modell sind die Auswirkungen auf den aggregierten Output. Dieser steigt mit steigender Lebenserwartung. Für den aggregierten Output sind die Inputfaktoren Kapital und Arbeit entscheidend. Einerseits wird das Kapital erhöht, andererseits steigt die Zahl der Erwerbspersonen, da die Wahrscheinlichkeit erhöht wird in die zweite Periode zu gelangen und somit in der zweiten Periode zu arbeiten.

Ein weiteres Ziel war es, die Auswirkungen einer sinkenden Fertilität zu betrachten.

In Kapitel 2 sind die Auswirkungen analog zur steigenden Lebenserwartung: eine niedrigere Fertilitätsrate erhöht das Pensionsantrittsalter sowie den Kapitalstock und senkt die Pensionszahlungen. In Kapitel 3 sind die Auswirkungen einer sinkenden Fertilität im Allgemeinen weder für den Kapitalstock noch für das Pensionsantrittsalter eindeutig. Entscheidend ist wiederum das effektive pro Kopf Arbeitsangebot. Unter der Annahme, dass ältere Personen im Arbeitsleben durchschnittlich produktiver sind, steigt durch eine sinkende Fertilität das effektive pro Kopf Arbeitsangebot und in Folge sinkt das Pensionsantrittsalter.

Zuletzt wurde in Kapitel 4 das Pensionsantrittsalter exogen vorgegeben und die Auswirkungen eines höheren Pensionsantrittsalters untersucht. Ein höheres Pensionsantrittsalter senkt den pro Kopf Kapitalstock. Wenn Individuen länger arbeiten, muss in der ersten Periode nicht so viel gespart werden, wodurch der Kapitalstock sinkt. Für realistische Parameterwerte steigen die Pensionszahlungen mit höherem Pensionsantrittsalter. Der Kapitalstock sinkt zwar – und in Folge auch die Löhne –, jedoch werden durch die Erhöhung des Pensionsantrittsalters zum einen länger Steuern gezahlt und zum anderen muss die Pension kürzer ausbezahlt werden, was insgesamt zu einem Steigen der Pensionszahlungen führt. Die Auswirkungen auf den aggregierten Output sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Für realistische Parameterwerte wie beispielsweise $\alpha = 0,3$ für die Kapitalelastizität, führt ein höheres Pensionsantrittsalter zu einem steigenden aggregierten Output.

In allen drei Kapiteln wurde angenommen, dass das Staatsbudget zu jedem Zeitpunkt ausgeglichen ist. Der Staat reagiert auf demographische Veränderung sofort perfekt und passt das Pensionssystem an. Das bedeutet beispielsweise, dass der Staat das Pensionsantrittsalter bei steigender Lebenserwartung erhöht, um das Budget ausgeglichen zu halten. Das ist eine strenge Annahme, die eine Vereinfachung darstellt. In der Realität reagiert die Regierung nicht immer sofort und perfekt auf demographische Änderungen und hält das Staatsbudget nicht unbedingt ausgeglichen. Deshalb müsste untersucht werden, ob und wie sich die Ergebnisse dieser Arbeit ändern, wenn diese Annahme nicht erfüllt ist.
Dennoch sind diese Modelle ein guter Ansatz, um die Auswirkungen von demographischen Änderungen auf Pensionssysteme, aber auch Kapitalstock und Output zu modellieren.

Anhang A

Appendix

A1: Modell von Cipriani (2016)

Kapitalstock und optimales Pensionsantrittsalter

$$k_{t+1} = \frac{\frac{\pi(1-\tau)[\beta(1+\delta)R_{t+1}w_t - w_{t+1}]}{R_{t+1}(1+(1+\delta)\pi\beta)}}{1+n+\frac{(1-\tau)\pi(1+\pi\beta)w_{t+1}-\tau(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta)w_{t+1}-\beta\delta\pi(1-\tau)w_t}{(1+(1+\delta)\pi\beta)w_{t+1}}}$$

$$= \frac{\pi\left[\beta(1+\delta)R_{t+1}w_t - w_{t+1}\right]}{(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta)w_{t+1} + \pi(1+\pi\beta)w_{t+1} - \beta\delta\pi R_{t+1}w_t} \cdot \frac{w_{t+1}}{R_{t+1}} \tag{A.1}$$

Setzt man nun Lohn und Zinssatz aus Gleichung (2.7) ein, so folgt

$$k_{t+1} = \frac{(1-\alpha)\pi\left[\beta(1+\delta)A\alpha k_t^{\alpha} - k_{t+1}\right]}{\alpha(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta)k_{t+1} + \alpha\pi(1+\pi\beta)k_{t+1} - \alpha\beta\delta\pi A\alpha k_t^{\alpha}} k_{t+1}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \alpha(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta)k_{t+1} + \alpha\pi(1+\pi\beta)k_{t+1} - \alpha\beta\delta\pi A k_t^{\alpha} \\
& = (1-\alpha)\pi\beta(1+\delta)A\alpha k_t^{\alpha} - (1-\alpha)\pi k_{t+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & \left[\alpha(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta) + \alpha\pi(1+\pi\beta) + (1-\alpha)\pi\right] k_{t+1} \\
& = \left[(1-\alpha)\pi\beta(1+\delta)A\alpha + \alpha\beta\delta\pi A\alpha\right] k_t^{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad k_{t+1} = \frac{A\pi\alpha\beta(1-\alpha+\delta)}{\alpha(1+n) + \alpha\beta\pi^2 + \pi[1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta)]} k_t^{\alpha} \tag{A.2}$$

Für das optimale Penionsantrittsalter setzt man Lohn und Zinssatz aus Gleichung (2.7) in Gleichung (2.38) und schreibt k^* wie in Gleichung (2.42). Insgesamt gilt

$$l^* = \frac{(1-\tau)\pi(1+\pi\beta) - \tau(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta) - \beta\delta\pi(1-\tau)\alpha A(k^*)^{\alpha-1}}{\pi(1+(1+\delta)\pi\beta)}$$

$$= \frac{(1-\tau)\pi(1+\pi\beta) - \tau(1+n)(1+(1+\delta)\pi\beta) - \frac{(1-\tau)A\alpha\beta\delta\pi\left[\alpha(1+n)+\alpha\beta\pi^2+\pi[1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta)]\right]}{A\alpha\beta\pi(1-\alpha+\delta)}}{\pi(1+(1+\delta)\pi\beta)}$$

$$= \frac{(1-\tau)(1+\pi\beta)}{(1+(1+\delta)\pi\beta)} - \frac{\tau 1+n}{\pi} - \frac{(1-\tau)\delta\left[\alpha(1+n)+\alpha\beta\pi^2+\pi[1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta)]\right]}{\pi(1+(1+\delta)\pi\beta)(1-\alpha+\delta)} \tag{A.3}$$

Veränderungen von k^* und l^* bei einer Erhöhung von π

Für den Kapitalstock gilt:

$$\frac{\partial k^*}{\partial\pi} = \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}(k^*)^\alpha}_{>0}\left[\frac{\alpha\beta A(1-\alpha+\delta)[\alpha(1+n)+\alpha\beta\pi^2+\pi[1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta)]]}{(\alpha(1+n)+\alpha\beta\pi^2+\pi[1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta)])^2} - \frac{\alpha\beta\pi A(1-\alpha+\delta)[2\alpha\beta\pi+1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta)]}{(\alpha(1+n)+\alpha\beta\pi^2+\pi[1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta)])^2}\right] \tag{A.4}$$

Das Vorzeichen hängt also nur vom Zähler ab:

$$\alpha\beta A(1-\alpha+\delta)\cdot\left[\alpha(1+n)-\alpha\beta\pi^2\right] > 0, \tag{A.5}$$

da wegen $\beta,\pi,n \in (0,1)$ $(1+n) > \beta\pi^2$ gilt.

Für das Pensionsantrittsalter gilt:

$$\frac{\partial l^*}{\partial\pi} = -\frac{(1-\tau)\beta\delta}{(1+(1+\delta)\pi\beta)^2} + \frac{\tau(1+n)}{\pi^2} + \frac{(1-\tau)\delta\alpha(1+n)(1+2(1+\delta)\pi\beta)}{\pi^2(1+(1+\delta)\pi\beta)^2(1-\alpha+\delta)}$$

$$-\frac{(1-\tau)\delta\alpha\beta}{(1+(1+\delta)\pi\beta)^2(1-\alpha+\delta)} + \frac{(1-\tau)\delta(1+\alpha\beta(1+n)(1+\delta))(1+\delta)\beta}{(1+(1+\delta)\pi\beta)^2(1-\alpha+\delta)} - \frac{(1-\tau)\beta\delta}{(1+(1+\delta)\pi\beta)^2}$$

$$= \frac{\tau(1+n)}{\pi^2} + \frac{(1-\tau)\delta\alpha(1+n)(1+2(1+\delta)\pi\beta)}{\pi^2(1+(1+\delta)\pi\beta)^2(1-\alpha+\delta)} + \frac{(1-\tau)\beta\delta(1+\delta)\alpha\beta(1+n)(1+\delta)}{(1+(1+\delta)\pi\beta)^2(1-\alpha+\delta)} > 0 \tag{A.6}$$

A2: Erweiterung Cipriani (2016), endogene Fertilität

Das Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned}
\max_{c_{1,t},c_{2,t+1},l_t,n_t} \quad & \ln c_{1,t} + \beta\pi[\ln c_{2,t+1} + \delta \ln(1-l_t)] + \gamma \ln n_t \\
\text{s.t.} \quad & \frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi} w_t(1-\tau-qn_t) - (1-\tau)w_{t+1}l_t - (1-l_t)P_{t+1} = 0 \\
& l_t - 1 \leq 0 \\
& c_{1,t} + n_t q w_t - (1-\tau)w_t \leq 0 \\
& c_{1,t}, c_{2,t+1}, l_t, n_t \geq 0,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Um dieses Problem zu lösen wird die zugehörigen Lagrange-Funktion aufgestellt:

$$\begin{aligned}
L = & \ln c_{1,t} + \beta\pi[\ln c_{2,t+1} + \delta \ln(1-l_t)] + \gamma \ln n_t \\
& - \lambda[\frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi} w_t(1-\tau-qn_t) - (1-\tau)w_{t+1}l_t - (1-l_t)P_{t+1}] \\
& - \mu_1[l_t - 1] - \mu_2[c_{1,t} + n_t q w_t - (1-\tau)w_t]
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Die Bedingungen erster Ordnung lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} \overset{!}{\leq} 0, \quad c_{1,t} \cdot \frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} \overset{!}{=} 0 \tag{A.9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} \overset{!}{\leq} 0, \quad c_{2,t+1} \cdot \frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} \overset{!}{=} 0 \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_t} \overset{!}{\leq} 0, \quad l_t \cdot \frac{\partial L}{\partial l_t} \overset{!}{=} 0 \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_t} \overset{!}{\leq} 0, \quad n_t \cdot \frac{\partial L}{\partial n_t} \overset{!}{=} 0 \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \overset{!}{=} 0 \tag{A.13}$$

$$l_t - 1 \overset{!}{\leq} 0, \quad \mu_1[l_t - 1] \overset{!}{=} 0 \tag{A.14}$$

$$c_{1,t} + n_t q w_t - (1-\tau)w_t \overset{!}{\leq} 0, \quad \mu_2[c_{1,t} + n_t q w_t - (1-\tau)w_t] \overset{!}{=} 0 \tag{A.15}$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \tag{A.16}$$

Da $\ln 0$ in keinem Fall optimal sein wird, folgt für Gleichung (A.9), (A.10) und (A.12), dass die Ableitung mit Gleichheit erfüllt sein muss, da weder $c_{1,t}$ noch $c_{2,t+1}$ noch n_t gleich Null sein können. Weiters folgt aus Gleichung (A.14), dass $\mu_1 = 0$ sein muss, da $l_t = 1$ nicht optimal sein kann.
Die Lagrange-Funktion kann für diesen Fall folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} L =& \ln c_{1,t} + \beta\pi[\ln c_{2,t+1} + \delta \ln(1 - l_t)] + \gamma \ln n_t \\ &- \lambda[\frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi} w_t(1 - \tau - qn_t) - (1 - \tau)w_{t+1}l_t - (1 - l_t)P_{t+1}] \\ &- \mu_2[c_{1,t} + n_t q w_t - (1 - \tau)w_t] \end{aligned} \tag{A.17}$$

Und somit lauten die Bedingungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} = \frac{1}{c_{1,t}} - \frac{R_{t+1}}{\pi}\lambda - \mu_2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} = \frac{\beta\pi}{c_{2,t+1}} - \lambda \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial l_t} = -\frac{\beta\pi\delta}{1 - l_t} + \lambda[(1 - \tau)w_{t+1} - P_{t+1}] \stackrel{!}{\leq} 0, \quad l_t \cdot \left(-\frac{\beta\pi\delta}{1 - l_t} + \lambda[(1 - \tau)w_{t+1} - P_{t+1}]\right) \tag{A.20}$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_t} = \frac{\gamma}{n_t} - \lambda\frac{R_{t+1}w_t q}{\pi} - \mu_2 q w_t \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.21}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi}w_t(1-\tau-qn_t) - (1-\tau)w_{t+1}l_t - (1-l_t)P_{t+1} \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.22}$$

$$c_{1,t} + n_t q w_t - (1 - \tau)w_t \stackrel{!}{\leq} 0, \quad \mu_2[c_{1,t} + n_t q w_t - (1 - \tau)w_t] \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.23}$$

$$\mu_2 \geq, \lambda \in \mathbb{R} \tag{A.24}$$

Es müssen nun die Fallunterscheidungen $\mu_2 > 0$, $\mu_2 = 0$, $l_t > 0$ und $l_t = 0$ getroffen werden.

$\underline{\mu_2 > 0:}$
Aus Gleichung (A.23) folgt sofort $c_{1,t} + n_t q w_t = (1 - \tau)w_t$ und somit $s_t = 0$. In Folge wäre jedoch $k_{t+1} = \frac{s_t}{(n_t + \pi l_t)}$ gleich Null, was zu einem degenerierten System führt.

$\underline{\mu_2 = 0:}$
Aus Gleichung (A.23) ist zu sehen, dass $c_{1,t} + n_t q w_t \leq (1 - \tau)w_t$ und somit $s_t \geq 0$ gelten muss.

a) $l_t = 0$: Aus Gleichung (A.20) folgt, dass die Ableitung $\frac{\partial L}{\partial l_t} \leq 0$ nicht mit Gleichheit erfüllt sein muss.

Drückt man aus Gleichung (A.18), (A.19) und (A.21) jeweils λ aus und setzt diese gleich, so folgt

$$\frac{\pi}{R_{t+1}c_{1,t}} = \frac{\beta\pi}{c_{2,t+1}} \quad \Longleftrightarrow \quad c_{2,t+1} = \beta R_{t+1}c_{1,t} \tag{A.25}$$

und

$$\frac{\pi}{R_{t+1}c_{1,t}} = \frac{\gamma\pi}{n_t R_{t+1} w_t q} \quad \Longleftrightarrow \quad n_t = \frac{\gamma c_{1,t}}{w_t q} \tag{A.26}$$

Werden Gleichung (A.25) und (A.26) in Gleichung (A.22) eingesetzt, so folgt mit $P_{t+1} = \frac{\tau w_{t+1} n_t}{\pi}$ für den Konsum in der ersten Periode $c_{1,t}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + \beta R_{t+1}c_{1,t} - \frac{R_{t+1}}{\pi}w_t(1-\tau) + \frac{R_{t+1}}{\pi}w_t q n_t - \frac{\tau w_{t+1} n_t}{\pi} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + \beta R_{t+1}c_{1,t} + \frac{R_{t+1}}{\pi}\gamma c_{1,t} - \frac{\tau w_{t+1}\gamma c_{1,t}}{\pi w_t q} = \frac{R_{t+1}}{\pi}w_t(1-\tau) \\
\Longleftrightarrow \quad & c_{1,t}\left[\frac{R_{t+1}w_t q(1+\pi\beta+\gamma) - \tau w_{t+1}\gamma}{w_t q}\right] = R_{t+1}w_t(1-\tau) \\
\Longleftrightarrow \quad & c_{1,t} = \frac{R_{t+1}w_t^2 q(1-\tau)}{R_{t+1}w_t q(1+\pi\beta+\gamma) - \tau w_{t+1}\gamma} && \text{(A.27)}
\end{aligned}$$

Für die Fertilitätsrate n_t folgt dann

$$n_t = \frac{\gamma(1-\tau)R_{t+1}w_t}{R_{t+1}w_t q(1+\pi\beta+\gamma) - \tau w_{t+1}\gamma} \tag{A.28}$$

Für die optimale Ersparnis gilt

$$\begin{aligned}
s_t &= (1-\tau)w_t - c_{1,t} - n_t w_t q = (1-\tau)w_t - (1+\gamma)c_{1,t} \\
&= \frac{(1-\tau)w_t^2 R_{t+1} q(1+\pi\beta+\gamma) - (1-\tau)\tau\gamma w_{t+1}w_t - R_{t+1}w_t^2 q(1-\tau)(1+\gamma)}{R_{t+1}w_t q(1+\pi\beta+\gamma) - \tau w_{t+1}\gamma} \\
&= \frac{(1-\tau)qR_{t+1}w_t^2\pi\beta - (1-\tau)\tau\gamma w_{t+1}w_t}{R_{t+1}w_t q(1+\pi\beta+\gamma) - \tau w_{t+1}\gamma} && \text{(A.29)}
\end{aligned}$$

Damit $s_t > 0$ sichergestellt wird, muss gelten

$$R_{t+1}qw_t\pi\beta > \tau\gamma w_{t+1}. \tag{A.30}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so existiert in diesem Fall kein optimaler Punkt, sondern nur im degenerierten Fall mit $s_t = 0$.

Der pro Kopf Kapitalstock k_{t+1} setzt sich aus der Ersparnis s_t der jungen Individuen N_t im Verhältnis zur arbeitenden Bevölkerung $L_{t+1} = n_t N_t$ zusammen:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{n_t} = \frac{\frac{(1-\tau)qR_{t+1}w_t^2\pi\beta-(1-\tau)\tau\gamma w_{t+1}w_t}{R_{t+1}w_tq(1+\pi\beta+\gamma)-\tau w_{t+1}\gamma}}{\frac{\gamma R_{t+1}w_t(1-\tau)}{R_{t+1}w_tq(1+\pi\beta+\gamma)-\tau w_{t+1}\gamma}} = \frac{w_tq\pi\beta - \tau\gamma\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}}{\gamma} \tag{A.31}$$

Mit $w_t = (1-\alpha)Ak_t^\alpha$ und $R_{t+1} = \alpha Ak_{t+1}^{\alpha-1}$ folgt weiter:

$$k_{t+1} = \frac{\alpha q\pi\beta(1-\alpha)Ak_t^\alpha - \tau\gamma(1-\alpha)Ak_{t+1}}{\gamma\alpha}$$

$$\iff \quad k_{t+1}[\gamma\alpha + \tau\gamma(1-\alpha)] = \alpha q\pi\beta(1-\alpha)Ak_t^\alpha$$

$$\iff \quad k_{t+1} = \frac{\alpha q\pi\beta(1-\alpha)A}{\gamma\alpha + \tau\gamma(1-\alpha)}k_t^\alpha \tag{A.32}$$

Im steady state $k^* = k_{t+1} = k_t$ gilt dann:

$$k^* = \left[\frac{\alpha q\pi\beta(1-\alpha)A}{\gamma\alpha + \tau\gamma(1-\alpha)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{A.33}$$

b) $l_t > 0$: Aus Gleichung (A.20) folgt dann

$$-\frac{\beta\pi\delta}{1-l_t} + \lambda[(1-\tau)w_{t+1} - P_{t+1}] = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{\beta\pi\delta}{(1-l_t)(1-\tau)w_{t+1} - (1-l_t)P_{t+1}} = \frac{\beta\pi\delta}{(1-l_t)(1-\tau)w_{t+1} - \frac{\tau w_{t+1}(n_t+\pi l_t)}{\pi}}$$

$$\iff \lambda = \frac{\beta\pi^2\delta}{(1-\tau)\pi w_{t+1} - \tau w_{t+1}n_t - l_tw_{t+1}\pi} \tag{A.34}$$

Drückt man auch aus Gleichung (A.18), (A.19) und (A.21) jeweils λ aus und setzt diese gleich so folgt:

$$\frac{\pi}{R_{t+1}c_{1,t}} = \frac{\beta\pi}{c_{2,t+1}} \quad \iff \quad c_{2,t+1} = \beta R_{t+1}c_{1,t} \tag{A.35}$$

und

$$\frac{\pi}{R_{t+1}c_{1,t}} = \frac{\gamma\pi}{n_t R_{t+1} w_t q} \quad \Longleftrightarrow \quad n_t = \frac{\gamma c_{1,t}}{w_t q} \tag{A.36}$$

und

$$\frac{\pi}{R_{t+1}c_{1,t}} = \frac{\beta\pi^2\delta}{(1-\tau)w_{t+1}\pi - \tau w_{t+1}n_t - l_t w_{t+1}\pi}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1-\tau)w_{t+1}\pi - \tau w_{t+1}n_t - \beta\pi\delta R_{t+1}c_{1,t} = l_t w_{t+1}\pi$$

$$\Longleftrightarrow \quad l_t = \frac{(1-\tau)w_{t+1}\pi - \tau w_{t+1}n_t - \beta\pi\delta R_{t+1}c_{1,t}}{w_{t+1}\pi}$$

$$\Longleftrightarrow \quad l_t = \frac{(1-\tau)w_{t+1}\pi - \left(\frac{\tau w_{t+1}\gamma}{w_t q} + \beta\pi\delta R_{t+1}\right)c_{1,t}}{w_{t+1}\pi}$$

$$= \frac{(1-\tau)w_{t+1}\pi w_t q - (\tau w_{t+1}\gamma + \beta\pi\delta q R_{t+1}w_t)c_{1,t}}{\pi q w_{t+1}w_t} \tag{A.37}$$

Wird nun wieder alles in Gleichung (A.22) eingesetzt, so folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + \beta R_{t+1}c_{1,t} - \frac{R_{t+1}}{\pi}w_t(1-\tau) + \frac{R_{t+1}}{\pi}w_t q n_t - (1-\tau)w_{t+1}l_t \\
& \qquad - \frac{\tau w_{t+1}n_t}{\pi} - \tau w_{t+1}l_t = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{R_{t+1}}{\pi}c_{1,t} + \beta R_{t+1}c_{1,t} - \frac{R_{t+1}}{\pi}w_t(1-\tau) + \frac{R_{t+1}}{\pi}\gamma c_{1,t} - (1-\tau)w_{t+1} \\
& \qquad + \frac{\tau w_{t+1}n_t}{\pi} + \beta\delta R_{t+1}c_{1,t} - \frac{\tau w_{t+1}n_t}{\pi} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & c_{1,t}R_{t+1}(1 + (1+\delta)\pi\beta + \gamma) = R_{t+1}w_t(1-\tau) + (1-\tau)\pi w_{t+1}
\end{aligned}$$

Für den optimalen Konsum in der ersten Periode gilt:

$$c_{1,t} = \frac{(1-\tau)\left[w_t + \pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]}{(1 + (1+\delta)\pi\beta + \gamma)} \tag{A.38}$$

Die optimale Fertilitätsrate lautet mit Gleichung (A.36):

$$n_t = \frac{\gamma(1-\tau)\left[w_t + \pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)qw_t} \tag{A.39}$$

Die optimale Ersparnis wird wie folgt berechnet:

$$s_t = (1-\tau)w_t - w_t q n_t - c_{1,t} = (1-\tau)w_t - (1+\gamma)c_{1,t}$$

$$= \frac{(1-\tau)w_t(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma) - (1+\gamma)(1-\tau)w_t - (1+\gamma)(1-\tau)\pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)}$$

$$= \frac{(1-\tau)\pi\left[(1+\delta)\beta w_t - (1+\gamma)\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)} \tag{A.40}$$

Für eine positive Ersparnis muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$s_t > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1+\delta)\beta R_{t+1}w_t > (1+\gamma)w_{t+1} \tag{A.41}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so existiert in diesem Fall kein optimaler Punkt, sondern nur im degenerierten Fall $s_t = 0$.

Für das optimale Pensionsantrittsalter wird Gleichung (A.37) herangezogen:

$$l_t = \frac{(1-\tau)w_{t+1}w_t q\pi - \frac{(\tau w_{t+1}\gamma + \beta\pi\delta q R_{t+1}w_t)(1-\tau)\left(w_t+\pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right)}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)}}{w_{t+1}\pi w_t q}$$

$$= \frac{(1-\tau)w_{t+1}w_t q\pi(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma) - (\tau w_{t+1}\gamma + \beta\pi\delta q R_{t+1}w_t)(1-\tau)\left(w_t + \pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right)}{\pi q(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)w_{t+1}w_t}$$

$$= \frac{(1-\tau)\left[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)w_{t+1}w_t - \tau\gamma w_{t+1}w_t - \beta\pi\delta q R_{t+1}w_t^2 - \tau\pi\gamma\frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}}\right]}{\pi q(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)w_{t+1}w_t} \tag{A.42}$$

Auch hier muss gelten $l_t > 0$. Dazu muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\pi q(1+\pi\beta+\gamma)w_{t+1}w_t \geq \tau\gamma w_{t+1}w_t + \beta\pi\ \delta q R_{t+1}w_t^2 + \tau\pi\gamma\frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}} \tag{A.43}$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so gibt es keinen optimalen Punkt mit $l_t > 0$.

Wird nun der Konsum pro Arbeiter betrachtet, so gilt $k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{s_t N_t}{L_{t+1}}$. Mit $L_{t+1} = (n_t + \pi l_t)N_t$ und Gleichung (A.39), (A.41) und (A.42) folgt dann weiters:

$$k_{t+1} = \frac{s_t}{(n_t + \pi l_t)}$$
$$= \frac{\frac{(1-\tau)\left[(1+\delta)\pi\beta w_t - (1+\gamma)\pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}\right]}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)}}{\frac{\gamma(1-\tau)[w_t+\pi\frac{w_{t+1}}{R_{t+1}}]}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)qw_t} + \frac{(1-\tau)\left[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)w_{t+1}w_t - \tau\gamma w_{t+1}w_t - \beta\pi\delta q R_{t+1}w_t^2 - \tau\pi\gamma\frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}}\right]}{(1+(1+\delta)\pi\beta+\gamma)qw_{t+1}w_t}}$$

$$= \frac{(1+\delta)\pi\beta q w_t^2 w_{t+1} - (1+\gamma)\pi q w_t \frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}}}{(1-\tau)\gamma w_t w_{t+1} + (1-\tau)\gamma\pi\frac{w_{t+1}^2}{R_{t+1}} + \pi q(1+\pi\beta+\gamma)w_t w_{t+1} - \beta\delta\pi q R_{t+1} w_t^2} \tag{A.44}$$

Mit $w_t = (1-\alpha)Ak_t^\alpha$ und $R_{t+1} = \alpha A k_{t+1}^{\alpha-1}$ folgt weiters:

$$k_{t+1} = \frac{(1+\delta)\pi\beta q A^3(1-\alpha)^3 k_t^{2\alpha} k_{t+1}^\alpha - (1+\gamma)\pi q A^2 \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} k_t^\alpha k_{t+1}^{\alpha+1}}{(1-\tau)[\gamma A^2(1-\alpha)^2 k_t^\alpha k_{t+1}^\alpha + \gamma\pi A\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}k_{t+1}^{\alpha+1}] + A^2(1-\alpha)^2 k_t^\alpha[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)A^2 k_{t+1}^\alpha - \beta\delta\pi q A\alpha k_t^\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}]}$$

$$\iff \quad 1 = \frac{(1+\delta)\pi\beta q A^2\alpha(1-\alpha)k_t^{2\alpha} - (1+\gamma)\pi q A(1-\alpha)k_t^\alpha k_{t+1}}{(1-\tau)\gamma A\alpha k_t^\alpha k_{t+1} + (1-\tau)\gamma\pi k_{t+1}^2 + \pi q(1+\pi\beta+\gamma)A\alpha k_t^\alpha k_{t+1} - \beta\delta\pi q A^2\alpha^2 k_t 2\alpha} \tag{A.45}$$

Im steady state $k^* = k_{t+1} = k_t$ gilt:

$$(1-\tau)\gamma A\alpha k^{*\alpha+1} + (1-\tau)\gamma\pi k^{*2} + \pi q(1+\pi\beta+\gamma)A\alpha k^{*\alpha+1} - \beta\delta\pi q A^2\alpha^2 k^{*2\alpha}$$
$$= (1+\delta)\pi\beta q A^2\alpha(1-\alpha)k^{*2\alpha} - (1+\gamma)\pi q A(1-\alpha)k^{*\alpha+1}$$
$$\iff$$
$$k^{*2(\alpha-1)}A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta) - k^{*\alpha-1}A[\pi q(1+\pi\beta+\gamma) + (1-\tau)\gamma\alpha] - (1-\tau)\gamma\pi = 0$$

Für den pro Kopf Kapitalstock gilt:

$${k_{1,2}^*}^{\alpha-1} = \frac{A[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha] \pm \sqrt{A^2[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha]^2 + 4(1-\tau)\gamma\pi A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta)}}{2A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta)} \tag{A.46}$$

Da die Wurzel größer als Null und auch größer als $A[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha]$ ist und $k^{*\alpha-1}$ nicht negativ sein kann, folgt

$$k^{*\alpha-1} = \frac{A[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha] + \sqrt{A^2[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha]^2+4(1-\tau)\gamma\pi A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta)}}{2A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta)}$$

$$\iff$$

$$k^* = \left[\frac{2A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta)}{A[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha]+\sqrt{A^2[\pi q(1+\pi\beta+\gamma)+(1-\tau)\gamma\alpha]^2+4(1-\tau)\gamma\pi A^2\alpha\pi\beta q(1-\alpha+\delta)}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{A.47}$$

A3: Modell von Bethencourt und Perera-Tallo (2011)

Optimaler Konsum und optimales Pensionsantrittsalter

Drückt man $\lambda(t)$ jeweils aus Gleichung (3.19) und (3.20) aus und setzt diese gleich, so folgt:

$$\frac{1}{c(t)} = \frac{\phi(a_r(t))}{\underbrace{(1-\alpha)A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(a_r(t))}\right)^{\alpha}}_{=w(t)} \cdot h(a_r(t))}$$

$$\iff \quad \frac{1}{c(t)} \cdot w(t)h(a_r(t)) = \phi(a_r(t)) \tag{A.48}$$

Gleichung (A.48) stellt eine implizite Gleichung für das optimale Penionsantrittsalter $a_r(t)$ dar.

Leitet man Gleichung (3.19) nach der Zeit t ab, so folgt $\dot{c}(t) = -\frac{1}{\lambda(t)^2}\dot{\lambda}(t)$. Aus Gleichung (3.21) erhält man $\dot{\lambda}(t) = \lambda(t) \cdot \left[\rho - \alpha A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(a_r(t))}\right)^{\alpha-1} + \delta\right] = \lambda(t) \cdot [\rho - r(t)]$. Betrachtet man nun $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$ und setzt die jeweiligen Terme für $\lambda(t)$ bzw. $\dot{\lambda}(t)$ ein, so folgt:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = r(t) - \rho \tag{A.49}$$

Mit $\lambda(t)$ aus Gleichung (3.19) bzw. (3.20) erhält man zwei Alternativen für die Transversalitätsbedingung:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{c(t)}k(t)=0 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{\phi(a_r(t))}{w(t)h(a_r(t))}k(t)=0 \tag{A.50}$$

Dynamisches System

Für die $\dot{a}_r(t)-$Gleichung wird Gleichung (A.48) nach der Zeit abgeleitet:

$$-\frac{\dot{c}(t)}{c(t)^2}w(t)h(a_r(t))+\frac{1}{c(t)}\dot{w}(t)h(a_r(t))+\frac{1}{c(t)}w(t)h'(a_r(t))\dot{a}_r(t)=\phi'(a_r(t))\dot{a}_r(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{c(t)}w(t)h(a_r(t))}_{\overset{(A.48)}{=}\phi(a_r(t))}\cdot\left[-\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}+\frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))}\dot{a}_r(t)\right]=\phi(a_r(t)\cdot\left[\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))}\dot{a}_r(t)\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))}-\frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))}\right]\dot{a}_r(t)=-\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))}-\frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))}\right]\dot{a}_r(t)=-[r(t)-\rho]+\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \tag{A.51}$$

Für $\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}$ gilt:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}=\frac{1}{A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(a_r(t))}\right)^{\alpha}}$$

$$\cdot\left[(1-\alpha)A(t)^{-\alpha}\dot{A}(t)\left(\frac{k(t)}{l(a_r(t))}\right)^{\alpha}+\alpha\left(\frac{A(t)l(a_r(t))}{k(t)}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{\dot{k}(t)l(a_r(t))-k(t)\dot{l}(a_r(t))}{l(a_r(t))^2}\right)\right]$$

$$=(1-\alpha)\frac{\dot{A}(t)}{A(t)}+\alpha\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}-\alpha\frac{\dot{l}(a_r(t))}{l(a_r(t))}$$

$$=(1-\alpha)\gamma+\alpha\left[\left(\frac{A(t)l(a_r(t))}{k(t)}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}\right)-(n+\delta)\right]$$

$$- \alpha \frac{h(a_r(t))\mu(a_r(t))}{l(a_r(t))} \dot{a}_r(t) \tag{A.52}$$

Somit folgt insgesamt für die $\dot{a}_r(t)-$Gleichung:

$$\left[\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))} - \frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))}\right] \dot{a}_r(t) = -\alpha \left(\frac{A(t)l(a_r(t))}{k(t)}\right)^{1-\alpha} + \delta + \rho + (1-\alpha)\gamma + \alpha \left(\frac{A(t)l(a_r(t))}{k(t)}\right)^{1-\alpha}$$

$$- \alpha \left(\frac{A(t)l(a_r(t))}{k(t)}\right)^{1-\alpha} \frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))} - \alpha(n+\delta) - \alpha \frac{h(a_r(t))\mu(a_r(t))}{l(a_r(t))} \dot{a}_r(t)$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))} - \frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))} + \alpha \frac{h(a_r(t))\mu(a_r(t))}{l(a_r(t))}\right] \dot{a}_r(t) = (1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta) + \alpha(\rho - n)$$

$$- \alpha(1-\alpha) \left(\frac{A(t)l(a_r(t))}{k(t)}\right)^{1-\alpha} \frac{h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{a}_r(t) = \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta) + \alpha(\rho-n) - \alpha(1-\alpha)\left(\frac{A(t)l(a_r(t))}{k(t)}\right)^{1-\alpha} \frac{h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}}{\frac{\phi'(a_r(t))}{\phi(a_r(t))} - \frac{h'(a_r(t))}{h(a_r(t))} + \alpha \frac{h(a_r(t))\mu(a_r(t))}{l(a_r(t))}} \tag{A.53}$$

Steady State

$$\left[\frac{\alpha(1-\alpha)h(a_r(t))}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]\phi(a_r(t)l(a_r(t)))^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = l(a_r(t)) \left[\frac{1 - \frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}}{n+\delta+\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\alpha(1-\alpha)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} \frac{h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))} = \frac{1 - \frac{(1-\alpha)h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))}}{n+\delta+\gamma}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[\frac{\alpha(1-\alpha)(n+\delta+\gamma)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} + 1 - \alpha\right] \frac{h(a_r(t))}{\phi(a_r(t))l(a_r(t))} = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\phi(a_r^*)l(a_r^*)}{h(a_r^*)} = \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} \tag{A.54}$$

Damit folgt dann:

$$\begin{aligned}
\tilde{k}^* &= l(a_r^*) \left[\frac{1 - \frac{(1-\alpha)h(a_r^*)}{\phi(a_r^*)l(a_r^*)}}{n+\delta+\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&= l(a_r^*) \left[\frac{1 - \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)}{(\gamma+\rho+\delta)}}{n+\delta+\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \\
&= l(a_r^*) \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \text{(A.55)} \\
&\overset{(A.54)}{=} \left(\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r*)} \right)^{-1} \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \text{(A.56)}
\end{aligned}$$

Wichtige Ableitungen
Die nachfolgenden Ableitungen sind für die Auswirkungen einer Erhöhung der Lebenserwartung oder einer Erhöhung der Fertilität auf den Kapitalstock sowie das Pensionsantrittsalter essentiell.
Als erstes wird das effektive pro Kopf Arbeitsangebot $l(a_r(t))$ betrachtet. Der Einfachheit halber wird im Folgenden der Zeitindex t beim Pensionsantrittsalter a_r weggelassen:

$$l(a_r) = \int_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da \overset{(3.4)}{=} \frac{\int_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)e^{-na}da}{\int_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da} = \frac{\int_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)e^{-na}da}{\int_0^{a_o} e^{-na}da + \int_{a_o}^{\bar{a}} \psi(a,\xi)e^{-na}da} \qquad \text{(A.57)}$$

Die Ableitung von $l(a_r)$ nach a_r ist positiv:

$$\frac{\partial l(a_r)}{\partial a_r} = h(a_r)\mu(a_r) > 0 \qquad \text{(A.58)}$$

Die Ableitung von $l(a_r)$ nach ξ ist wegen $\frac{\partial\psi(a,\xi)}{\partial\xi} > 0$ negativ:

$$\frac{\partial l}{\partial\xi} = -l(a_r) \frac{\int_{a_o}^{\bar{a}} \frac{\partial\psi(a,\xi)}{\partial\xi} e^{-na}da}{\int_0^{a_o} e^{-na}da + \int_{a_o}^{\bar{a}} \psi(a,\xi)e^{-na}da} < 0 \qquad \text{(A.59)}$$

Die Ableitung von $l(a_r)$ nach n ist nicht eindeutig:

$$\frac{\partial l}{\partial n} = \frac{\left[\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)(\text{-}a)e^{-na}da\right]\left[\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da\right] - \left[\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)e^{-na}da\right]\left[\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)(\text{-}a)e^{-na}da\right]}{\left[\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)e^{-na}da\right]\left[\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)ae^{-na}da\right] - \left[\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)ae^{-na}da\right]\left[\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da\right]}{\left[\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da\right]^2}$$

$$= \underbrace{\frac{\left[\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)e^{-na}da\right]}{\left[\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da\right]}}_{l(a_r)} \cdot \left[\frac{\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)ae^{-na}da}{\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da} - \frac{\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)ae^{-na}da}{\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)e^{-na}da}\right]$$

$$= l(a_r)\left[\underbrace{\int\limits_0^{\bar{a}} a\frac{s(a)e^{-na}}{\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da}da}_{E[a]} - \underbrace{\int\limits_{a_y}^{a_r} a\frac{h(a)s(a)e^{-na}}{\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)e^{-na}da}da}_{E_\nu[a/[a_y,a_r]]}\right] \qquad \text{(A.60)}$$

$E[a]$ beschreibt das durchschnittliche Alter der Gesamtbevölkerung mit

$$E[a] = E[a/[0,\bar{a}]] = \int\limits_0^{\bar{a}} a\mu(a)da.$$

$E_\nu[a/[a_y, a_r]]$ beschreibt das Durchschnittsalter der effektiven Arbeitskräfte mit

$$E_\nu[a/[a_y,a_r]] = \int\limits_{a_y}^{a_r} a\,\frac{h(a)s(a)e^{-na}}{\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)s(a)e^{-na}da}\,\underbrace{\frac{\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da}{\int\limits_0^{\bar{a}} s(a)e^{-na}da}}_{=1}da$$

$$= \int_{a_y}^{a_r} a \frac{h(a)\mu(a)}{\int_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da} da = \int_{a_y}^{a_r} a\, \nu(a, a_r) da,$$

wobei ν die Gewichtung mit der Produktivität, also die Effektivität, kennzeichnet. Das Vorzeichen von $\frac{\partial l}{\partial n}$ hängt also von $E[a]$ und $E_\nu[a/[a_y, a_r]]$ ab. Es können zwei Aussagen getroffen werden. Die erste folgt direkt aus Gleichung (A.60) mit $l(a_r) > 0$:

$$\frac{\partial l}{\partial n} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad E_\nu[a/[a_y, a_r]] > E[a] \tag{A.61}$$

Das pro Kopf Arbeitsangebot sinkt mit wachsender Fertilität, wenn das Durchschnittsalter einer effektiven Arbeitskraft höher ist als jenes der Gesamtbevölkerung. Das entspricht genau dem, dass durch die steigende Geburtenrate die Arbeitsproduktivität und somit das pro Kopf Arbeitsangebot sinkt.

Für die zweite Aussage über $\frac{\partial l}{\partial n}$ wird zunächst eine Bedingung hergeleitet. Unter der Annahme, dass $h(a_r) > E[h(a)/[a_y, a_r]]$, gilt $E_\nu[a/[a_y, a_r]] - E[a/[a_y, a_r]] \geq 0$, wobei $h(a_r)$ die Produktivität im Alter a_r und $E[h(a)/[a_y, a_r]] = \int_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da$ die durchschnittliche Produktivität der Erwerbstätigen beschreibt. Diese Annahme bedeutet also, dass die Produktivität am Ende des Arbeitslebens am größten sein soll. Es gilt also:

$$E_\nu[a/[a_y, a_r]] - E[a/[a_y, a_r]] = \frac{\int_{a_y}^{a_r} a\, h(a)\mu(a)da}{\int_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da} - \frac{\int_{a_y}^{a_r} a\, \mu(a)da}{\int_{a_y}^{a_r} \mu(a)da}$$

$$= \frac{\int_{a_y}^{a_r} a\, h(a)\mu(a)da - \frac{\overbrace{\int_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da}^{E[h(a)/[a_y, a_r]]}}{\int_{a_y}^{a_r} \mu(a)da} \cdot \int_{a_y}^{a_r} a\, \mu(a)da}{\int_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da}$$

$$= \frac{\int\limits_{a_y}^{a_r} a\, h(a)\mu(a)da - E[h(a)/[a_y, a_r]] \int\limits_{a_y}^{a_r} a\, \mu(a)da}{\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da}$$

$$= \frac{1}{\int\limits_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da} \left[\int\limits_{a_y}^{a_r} a\ (h(a) - E[h(a)/[a_y, a_r]])\ \mu(a)da \right] \tag{A.62}$$

Um das Vorzeichen zu bestimmen, wird zunächst noch der Ausdruck $(h(a) - E[h(a)/[a_y, a_r]])$ betrachtet. Da $h(a)$ stetig ist, folgt nach dem "Satz vom Minimum und Maximum", dass $h(a)$ im kompackten Intervall $[a_y, a_r]$ ein Minimum annimmt. Unter der Annnahme, dass $h(a)$ quasikonkav ist, gilt:

$$h(a) = h(\lambda(a)a_y + (1 - \lambda(a))a_r) \geq \min\{h(a_y), h(a_r)\} \qquad \forall a \in (a_y, a_r)$$

$$\text{mit} \quad \lambda(a) = \frac{a_r - a}{a_r - a_y}$$

Da angenommen wurde, dass $h(a_r) > E[h(a)/[a_y, a_r]]$ wird das Minimum bei a_y angenommen. Insgesamt gilt also

$$h(a_r) > E[h(a)/[a_y, a_r]] \qquad \text{und} \qquad h(a_y) < E[h(a)/[a_y, a_r]].$$

Da $h(\cdot)$ stetig ist, existiert ein $\tilde{a} \in (a_y, a_r)$, sodass

$$h(\tilde{a}) = E[h(a)/[a_y, a_r]] \qquad \text{und} \qquad h(a) < E[h(a)/[a_y, a_r]] \quad \forall a \in [a_y, \tilde{a}). \tag{A.63}$$

Mit der Quasikonkavität von $h(a)$ gilt:

$$h(a) = h(\tilde{\lambda}(a)\tilde{a} + (1 - \tilde{\lambda}(a))a_r) \geq \min\{h(\tilde{a}), h(a_r)\} = E[h(a)/[a_y, a_r]] \qquad \forall a \in (\tilde{a}, a_r]$$

$$\text{mit} \quad \tilde{\lambda}(a) = \frac{a_r - a}{a_r - \tilde{a}} \tag{A.64}$$

Insgesamt folgt für Gleichung (A.62):

$$\begin{aligned}
&\int_{a_y}^{a_r} a\ (h(a) – E[h(a)/[a_y, a_r]])\ \mu(a)da \\
&= \int_{a_y}^{a_r} a\ (h(a) – E[h(a)/[a_y, a_r]])\ \mu(a)da - \tilde{a} \int_{a_y}^{a_r} \mu(a)da \underbrace{\left[\frac{\int_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da}{\int_{a_y}^{a_r} \mu(a)da} - E[h(a)/[a_y, a_r]]\right]}_{=0} \\
&= \int_{a_y}^{a_r} a\ (h(a) – E[h(a)/[a_y, a_r]])\ \mu(a)da - \tilde{a} \left[\int_{a_y}^{a_r} h(a)\mu(a)da - E[h(a)/[a_y, a_r]] \int_{a_y}^{a_r} \mu(a)da\right] \\
&= \int_{a_y}^{a_r} a\ (h(a) – E[h(a)/[a_y, a_r]])\ \mu(a)da - \tilde{a} \left[\int_{a_y}^{a_r} (h(a) - E[h(a)/[a_y, a_r]])\, \mu(a)da\right] \\
&= \int_{a_y}^{a_r} (a - \tilde{a})\, (h(a) - E[h(a)/[a_y, a_r]])\, \mu(a)da \\
&= \int_{a_y}^{\tilde{a}} \underbrace{(a - \tilde{a})}_{<0} \underbrace{(h(a) - E[h(a)/[a_y, a_r]])}_{<0} \underbrace{\mu(a)}_{>0} da + \int_{\tilde{a}}^{a_r} \underbrace{(a - \tilde{a})}_{>0} \underbrace{(h(a) - E[h(a)/[a_y, a_r]])}_{>0} \underbrace{\mu(a)}_{>0} da \\
&> 0,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung mit Gleichung (A.63) und (A.64) folgt.
Für $\frac{\partial l}{\partial n}$ bedeutet das also

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial n} &= l(a_r)\, (E[a] - E_\nu[a/[a_y, a_r]]) \\
&= \underbrace{l(a_r)}_{>0} \cdot \left(\underbrace{E[a] - E[a/[a_y, a_r]]}_{\text{Ann.:}<0} + \underbrace{E[a/[a_y, a_r]] - E_\nu[a/[a_y, a_r]]}_{\text{mit } h(a_r) > E[h(a)/[a_y, a_r]]:\, <0} \right)
\end{aligned}$$

insgesamt gilt also

$$E[a/[a_y, a_r]] > E[a], \quad h(a_r) > E[h(a)/[a_y, a_r]], \quad h(a) \text{ quasikonkav} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial l}{\partial n} < 0 \tag{A.65}$$

Das pro Kopf Arbeitsangebot sinkt mit steigender Fertilitätsrate, wenn zum einen das durchschnittliche Alter der Erwerbsbevölkerung größer ist als jenes der Gesamtbevölkerung und wenn die Produktivität zum Pensionsantritt größer ist als die durchschnittliche Produktivität.

Als nächstes wird die ($\dot{a}_r = 0$)- bzw. die daraus resultierende Gleichung für den Kapitalstock $\tilde{k}$ betrachtet. Der Einfachheit halber wurde der Zeitindex t wieder weggelassen:

$$\tilde{k}\big|_{\dot{a}_r=0} = \left[\frac{\alpha(1-\alpha)h(a_r)}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]\phi(a_r)l(a_r)^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{A.66}$$

Für die Ableitung von $\tilde{k}$ nach a_r gilt:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \tilde{k}}{\partial a_r}\right|_{\dot{a}_r=0} =& \frac{1}{1-\alpha}\left(\tilde{k}\big|_{\dot{a}_r=0}\right)^{\alpha}\frac{(1-\alpha)\alpha}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} \\
&\cdot\left[\frac{h'(a_r)\phi(a_r)\left(l(a_r)\right)^{\alpha}-h(a_r)\phi'(a_r)\left(l(a_r)\right)^{\alpha}-h(a_r)\phi(a_r)\alpha\left(l(a_r)\right)^{\alpha-1}\mu(a_r)h(a_r)}{\phi(a_r)^2\left(l(a_r)\right)^{2\alpha}}\right] \\
=& \frac{\tilde{k}^{\alpha}}{1-\alpha}\underbrace{\frac{(1-\alpha)\alpha}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)}\frac{h(a_r)}{\phi(a_r)\left(l(a_r)\right)^{\alpha}}}_{\tilde{k}^{1-\alpha}}\left[\frac{h'(a_r)}{h(a_r)}-\frac{\phi'(a_r)}{\phi(a_r)}-\frac{\alpha\mu(a_r)h(a_r)}{l(a_r)}\right] \\
=& \frac{\left(\tilde{k}\big|_{\dot{a}_r=0}\right)}{1-\alpha}\left[\frac{h'(a_r)}{h(a_r)}-\frac{\phi'(a_r)}{\phi(a_r)}-\underbrace{\frac{\alpha\mu(a_r)h(a_r)}{l(a_r)}}_{>0}\right] < 0
\end{aligned} \tag{A.67}$$

Da angenommen wird, dass $\frac{\phi(a)}{h(a)}$ steigend in a ist, gilt $\forall a \in [a_y, a_r]$:

$$\frac{\partial\frac{\phi(a)}{h(a)}}{\partial a} = \frac{\phi'(a)h(a)-\phi(a)h'(a)}{h(a)^2} > 0 \iff \underbrace{\frac{\phi(a)}{h(a)}}_{>0}\left[\frac{\phi'(a)}{\phi(a)}-\frac{h'(a)}{h(a)}\right] > 0 \iff \frac{\phi'(a)}{\phi(a)}-\frac{h'(a)}{h(a)} > 0$$

Insgesamt folgt dann

$$\left.\frac{\partial \tilde{k}}{\partial a_r}\right|_{\dot{a}_r=0} < 0. \tag{A.68}$$

Weiters gilt

$$\left.\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\xi}\right|_{\dot{a}_r=0} = \frac{\left(\tilde{k}|_{\dot{a}_r=0}\right)^{\alpha}(1-\alpha)\alpha h(a_r)(-\alpha)}{(1-\alpha)((1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n))\phi(a_r)\,(l(a_r))^{\alpha+1}}\frac{\partial l}{\partial\xi}$$

$$= \frac{-\alpha}{1-\alpha}\frac{\left(\tilde{k}|_{\dot{a}_r=0}\right)}{l(a_r)}\underbrace{\frac{\partial l}{\partial\xi}}_{<0} > 0 \tag{A.69}$$

und

$$\left.\frac{\partial\tilde{k}}{\partial n}\right|_{\dot{a}_r=0} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\tilde{k}|_{\dot{a}_r=0}\right)^{\alpha}\frac{(1-\alpha)\alpha h(a_r)}{\phi(a_r)}\frac{\alpha}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]^2\,(l(a_r))^{2\alpha}}$$

$$\cdot\left[(l(a_r))^{\alpha}-(l(a_r))^{\alpha-1}\frac{\partial l}{\partial n}[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]\right]$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\tilde{k}|_{\dot{a}_r=0}\right)\left[-\frac{1}{l(a_r)}\frac{\partial l}{\partial n}+\frac{1}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\tilde{k}|_{\dot{a}_r=0}\right)\left[-\left(E[a]-E_{\nu}[a/[a_y,a_r]]\right)+\frac{1}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)}\right] \tag{A.70}$$

Im Allgemeinen ist dieses Vorzeichen nicht eindeutig. Unter gewissen Annahmen, wie in (A.61) und (A.65) zu sehen ist, gilt $\frac{\partial l}{\partial n} < 0$ und somit

$$\left.\frac{\partial\tilde{k}}{\partial n}\right|_{\dot{a}_r=0} > 0. \tag{A.71}$$

Als nächstes wird die ($\dot{\tilde{k}} = 0$)- bzw. die daraus resultierende Gleichung für den Kapitalstock $\tilde{k}$ betrachtet. Der Einfachheit halber wurde der Zeitindex t wieder weggelassen:

$$\tilde{k}|_{\dot{\tilde{k}}=0} = l(a_r)\left[\frac{1-\frac{(1.\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}}{n+\delta+\gamma}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{A.72}$$

Für die Ableitung von $\tilde{k}$ nach a_r gilt:

$$\left.\frac{\partial\tilde{k}}{\partial a_r}\right|_{\dot{\tilde{k}}=0} = h(a_r)\mu(a_r)\left[\frac{1-\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}}{n+\gamma+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + l(a_r)\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1-\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}}{n+\gamma+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{n+\gamma+\delta}$$

$$\cdot\left[\frac{-(1-\alpha)h'(a_r)\phi(a_r)l(a_r)+(1-\alpha)h(a_r)\phi'(a_r)l(a_r)+(1-\alpha)h(a_r)\phi(a_r)h(a_r)\mu(a_r)}{\phi(a_r)^2 l(a_r)^2}\right]$$

$$= \frac{\left(\tilde{k}|_{\dot{\tilde{k}}=0}\right)^{\alpha} h(a_r)}{(n+\gamma+\delta)\left(l(a_r)\right)^{\alpha}\phi(a_r)}\left[\mu(a_r)\phi(a_r)+\frac{\alpha h(a_r)\mu(a_r)}{l(a_r)}\underbrace{-\frac{h'(a_r)}{h(a_r)}+\frac{\phi'(a_r)}{\phi(a_r)}}_{>0}\right] > 0. \tag{A.73}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\xi}\right|_{\dot{\tilde{k}}=0} = \frac{\partial l}{\partial\xi}\left[\frac{1-\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}}{n+\gamma+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + \frac{l(a_r)}{1-\alpha}\left[\frac{1-\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}}{n+\gamma+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\frac{1}{n+\gamma+\delta}\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)(l(a_r))^2}\frac{\partial l}{\partial\xi}$$

$$= \left(\tilde{k}|_{\dot{\tilde{k}}=0}\right)^{\alpha}\frac{1}{(n+\gamma+\delta)\left(l(a_r)\right)^{\alpha}}\left[1+\frac{\alpha(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}\right]\underbrace{\frac{\partial l}{\partial\xi}}_{<0} < 0 \tag{A.74}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{k}}{\partial n}\right|_{\dot{\tilde{k}}=0} = \frac{\partial l}{\partial n}\left[\frac{1-\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}}{n+\gamma+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + l(a_r)\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1-\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}}{n+\gamma+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\cdot\left[\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{(n+\gamma+\delta)\phi(a_r)l(a_r)^2}\frac{\partial l}{\partial n}-\frac{1-\frac{(1-\alpha)h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}}{n+\gamma+\delta}\right]$$

$$= \left(\tilde{k}|_{\dot{\tilde{k}}=0}\right)^{\alpha}\frac{1}{\left(l(a_r)\right)^{\alpha}(n+\gamma+\delta)}\left[1+\frac{\alpha h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}\right]\frac{\partial l}{\partial n}-\frac{\left(\tilde{k}|_{\dot{\tilde{k}}=0}\right)}{(1-\alpha)(n+\gamma+\delta)}$$

$$= \frac{\left(\tilde{k}|_{\dot{\tilde{k}}=0}\right)^{\alpha}\left[1+\frac{\alpha h(a_r)}{\phi(a_r)l(a_r)}\right]l(a_r)}{\left(l(a_r)\right)^{\alpha}(n+\gamma+\delta)}\left(E[a]-E_{\nu}[a/[a_y,a_r]]\right)-\frac{\left(\tilde{k}|_{\dot{\tilde{k}}=0}\right)}{(1-\alpha)(n+\gamma+\delta)} \tag{A.75}$$

Im Allgemeinen ist auch dieses Vorzeichen nicht eindeutig. Unter gewissen Annahmen, wie in (A.61) und (A.65) zu sehen ist, gilt $\frac{\partial l}{\partial n} < 0$ und somit

$$\left.\frac{\partial \tilde{k}}{\partial n}\right|_{\dot{\tilde{k}}=0} < 0. \tag{A.76}$$

Auswirkungen einer Erhöhung der Lebenserwartung

Die Auswirkungen einer Erhöhung der Lebenserwartung ξ auf das Pensionsantrittsalter a_r^* und den Kapitalstock pro effektiver Arbeitskraft $\tilde{k}$ werden mit dem Impliziten Funktionentheorem, angewendet auf Gleichungen (A.54) und (A.55) bzw. (A.56), berechnet. Dazu werden a_r^* und $\tilde{k}$ jeweils als Funktion von ξ angesehen:

$$a_r^* = a_r^*(\xi), \quad \tilde{k}^* = \tilde{k}^*(\xi), \quad \phi(a_r^*) = \phi(a_r^*(\xi)), \quad h(a_r^*) = h(a_r^*(\xi)), \quad l(a_r^*) = l(a_r^*(\xi), \xi)$$

Wird nun Gleichungen (A.54) total nach ξ differenziert, so folgt, dass eine Erhöhung der Lebenserwartung positive Auswirkungen auf das optimale Pensionsantrittsalter hat:

$$\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)} l(a_r^*) - \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} = 0 \quad \Big| \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{\partial \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*} \frac{\partial a_r^*}{\partial \xi} l(a_r^*, \xi) + \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)} \left(\frac{\partial l(a_r^*, \xi)}{\partial a_r^*} \frac{\partial a_r^*}{\partial \xi} + \frac{\partial l(a_r^*, \xi)}{\partial \xi} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial a_r^*}{\partial \xi} = - \frac{\overbrace{\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}^{>0} \overbrace{\frac{\partial l(a_r^*, \xi)}{\partial \xi}}^{<0}}{\underbrace{\frac{\partial \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*} l(a_r^*, \xi)}_{>0} + \underbrace{\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)} \frac{\partial l(a_r^*, \xi)}{\partial a_r^*}}_{>0}} > 0 \tag{A.77}$$

Für den Kapitalstock wird Gleichung (A.55) bzw. (A.56) total nach ξ differenziert:

$$\tilde{k}^*(\xi) - \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} l(a_r^*, \xi) = 0 \quad \Big| \frac{d}{d\xi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{k}^*(\xi) - \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} \left(\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r*)}\right)^{-1} = 0 \quad |\frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{\partial\tilde{k}^*}{\partial\xi} + \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} \frac{\frac{\partial\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*}\frac{\partial a_r^*}{\partial\xi}}{\left(\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}\right)^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial\tilde{k}^*}{\partial\xi} = -\underbrace{\left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)}}_{>0} \frac{\overbrace{\frac{\partial\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*}}^{>0}\overbrace{\frac{\partial a_r^*}{\partial\xi}}^{>0}}{\underbrace{\left(\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}\right)^2}_{>0}} < 0 \quad \text{(A.78)}$$

Eine Erhöhung der Lebenserwartung hat somit negative Auswirkungen auf den Kapitalstock.

Auswirkungen einer Erhöhung der Fertilität

Analog wird auch hier wieder das impliziten Funktionentheorem auf die Gleichungen (A.54) und (A.55) bzw. (A.56) angewandt. Dazu werden a_r^* und $\tilde{k}^*$ also Funktionen von n angesehen:

$$a_r^* = a_r^*(n), \quad \tilde{k}^* = \tilde{k}^*(n), \phi(a_r^*) = \phi(a_r^*(n)), \quad h(a_r^*) = h(a_r^*(n)), \quad l(a_r^*) = l(a_r^*(n), n)$$

Für das optimale Pensionsantrittsalter gilt damit:

$$\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)} l(a_r^*, n) - \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} = 0 \quad |\frac{d}{dn}$$

$$\frac{\partial\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*}\frac{\partial a_r^*}{\partial n} l(a_r^*, n) + \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}\left(\frac{\partial l(a_r^*, n)}{\partial a_r^*}\frac{\partial a_r^*}{\partial n} + \frac{\partial l(a_r^*, n)}{\partial n}\right) - \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)\alpha}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial a_r^*}{\partial n} = -\frac{\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}\frac{\partial l(a_r^*,n)}{\partial n} - \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)\alpha}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]^2}}{\frac{\partial\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*} l(a_r^*, n) + \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}\frac{\partial l(a_r^*,n)}{\partial a_r^*}}$$

$$= -\frac{\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)} l(a_r^*, n) \left(E[a] - E_\nu[a/[a_y, a_r]]\right) - \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)\alpha}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]^2}}{\frac{\partial \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*} l(a_r^*, n) + \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)} \frac{\partial l(a_r^*, n)}{\partial a_r^*}}$$

$$\overset{(A.61)}{=} \frac{E_\nu[a/[a_y, a_r]] - E[a] + \overbrace{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)}}^{>0}}{\underbrace{\frac{\frac{\partial \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*}}{\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}}_{>0} + \underbrace{\frac{h(a_r^*)\mu(a_r^*)}{l(a_r^*)}}_{>0}} \tag{A.79}$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial a_r^*}{\partial n}$ ist nicht eindeutig. Wenn jedoch $E_\nu[a/[a_y, a_r]] > E[a]$, also mit Gleichung (A.61) $\frac{\partial l}{\partial n} < 0$, dann hat eine Erhöhung der Fertilitätsrate positive Auswirkungen auf das optimale Pensionsantrittsalter.

Die Auswirkungen auf den Kapitalstock sind bei einer Erhöhung der Fertilität nicht eindeutig:

$$\tilde{k}^*(n) - \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} l(a_r^*, \xi) = 0 \quad \Big| \frac{d}{d\xi}$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{k}^*(n) - \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} \left(\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r*)}\right)^{-1} = 0 \quad \Big| \frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{\partial \tilde{k}^*}{\partial n} - \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)\alpha}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]^2} \left(\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r*)}\right)^{-1}$$

$$- \left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)} \frac{\frac{\partial \frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*} \frac{\partial a_r^*}{\partial n}}{\left(\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}\right)^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \tilde{k}^*}{\partial n} = \underbrace{\left[\frac{\alpha}{\gamma+\rho+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}_{>0} \underbrace{\frac{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)h(a_r^*)}{[(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)]\phi(a_r^*)}}_{>0}$$

$$\cdot\left[\underbrace{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(\gamma+\rho+\delta)+\alpha(\rho-n)}}_{>0} - \frac{\overbrace{\frac{\partial\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}{\partial a_r^*}}^{>0}\;\overbrace{\frac{\partial a_r^*}{\partial n}}^{>0 \text{ falls } \frac{\partial l}{\partial n}}}{\underbrace{\frac{\phi(a_r^*)}{h(a_r^*)}}_{>0}}\right] \tag{A.80}$$

Parameter zu den Grafiken des dynamischen Systems

Die Funktionen $h(a)$, $\phi(a)$ und $v(a,\xi)$ wurden wie folgt gewählt, sodass die gewünschten Eigenschaften erfüllt sind:

- $h(a) = e^{\frac{a-a_y}{a_o-a_y}}$
- $\phi(a) = \frac{a_o}{a_o-a}$ bzw. für Abbildung 3.4. b): $\phi(a) = \frac{a_o-15}{a_o-a}$
- $\psi(a,\xi) = 1 - \left(\frac{a-a_o}{\bar{a}-a_o}\right)^{\xi}$

In der nachfolgenden Tabelle werden alle Parameter aufgelistet:

Parameter	Wert	Anmerkung
α	0.3	Kapitalelastizität
δ	0.05	Abschreibungsrate des Kapitals
γ	0.02	Wachstumsrate des technologischen Fortschritts
ρ	0.04	Diskontrate
a_y	15	Beginn des Arbeitslebens/Erwachsenenlebens
a_o	65	Ende des Arbeitslebens/Erwachsenenlebens
$\bar{a}$	100	Beschränkung des Alters/Lebens
n^0	0.01	Fertilitätsrate
n^1	0.03	Erhöhung der Fertilitätsrate
ξ^0	0.1	Gesundheitsparameter
ξ^1	0.9	Erhöhung des Gesundheitsparameters

Tabelle A.1.: Parameter der Simulation

Repräsentativer Haushalt
Die Hamilton-Funktion des repräsentativen Haushalts lautet:

$$H(c(t), a_r(t), \lambda(t)) = \ln(c(t)) - \int\limits_{a_y}^{a_r(t)} \mu(a)\phi(a)da + \lambda(t)[w(t)l(a_r(t)) + r(t)b(t) - c(t) - nb(t)]$$

Die Bedingungen erster Ordnung des repräsentativen Haushalts lauten:

$$\frac{\partial H}{\partial c(t)} = \frac{1}{c(t)} - \lambda(t) \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.81}$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_r(t)} = -\mu(a_r(t))\phi(a_r(t)) + \lambda(t)w(t)\mu(a_r(t))h(a_r(t)) \tag{A.82}$$

$$\dot{\lambda}(t) = (\rho - n)\lambda(t) - \lambda(t)[r(t) - n] = \lambda(t)[\rho - r(t)] \tag{A.83}$$

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)b(t) = 0 \tag{A.84}$$

Aus Gleichung (A.81) folgt $\frac{1}{c(t)} = \lambda(t)$. Leitet man das nach der Zeit t ab, so gilt $-\frac{\dot{c}(t)}{c(t)^2} = \dot{\lambda}(t)$. Insgesamt erhält man mit Gleichung (A.83):

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = -\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \rho \tag{A.85}$$

Für die Bedingung an das Pensionsantrittsalter $a_r(t)$ wird Gleichung (A.81) in Gleichung (A.82) eingesetzt:

$$\phi(a_r(t)) = \frac{1}{c(t)} w(t)h(a_r(t)) \tag{A.86}$$

Auf der Produktionsseite gilt:

$$\max_{l(t),k(t)} P(t) = A(t)^{1-\alpha}k(t)^{\alpha}l(t)^{1-\alpha} - w(t)l(t) - (\delta + r(t))k(t) \tag{A.87}$$

Mit den Bedingungen erster Ordnung folgt:

$$\frac{\partial P(t)}{\partial l(t)} = (1-\alpha)A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(t)}\right)^{\alpha} - w(t) \stackrel{!}{=} 0 \iff w(t) = (1-\alpha)A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(t)}\right)^{\alpha} \tag{A.88}$$

$$\frac{\partial P(t)}{\partial k(t)} = \alpha A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(t)}\right)^{\alpha-1} - \delta - r(t) \stackrel{!}{=} 0 \iff r(t) = \alpha A(t)^{1-\alpha}\left(\frac{k(t)}{l(t)}\right)^{\alpha-1} - \delta \tag{A.89}$$

A4: OLG-Modell von Miyazaki (2014)

Optimale Ersparnis sowie steady state Kapitalstock
Das Optimierungsproblem lautet:

$$\max_{c_{1,t},c_{2,t+1}} \ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1}) \tag{A.90}$$

$$\text{s.t.} \quad R_{t+1}c_{1,t} + c_{2,t+1} - (1-\tau)w_t R_{t+1} - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1} = 0 \tag{A.91}$$

$$c_{1,t} - (1-\tau)w_t \leq 0 \tag{A.92}$$

$$c_{1,t}, c_{2,t+1} \geq 0 \tag{A.93}$$

In Miyazaki (2014) wird gleich von einer inneren Lösung ausgegangen, der Vollständigkeit halber werden hier die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen präsentiert. Dazu wird die Lagrange-Funktion $L(c_{1,t}, c_{2,t+1}, \lambda, \mu) = \ln(c_{1,t}) + \beta \ln(c_{2,t+1}) - \lambda[R_{t+1}c_{1,t} + c_{2,t+1} - (1-\tau)w_t R_{t+1} - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1}] - \mu[c_{1,t} - (1-\tau)w_t]$ herangezogen. Die Bedingungen erster Ordnung (FOCs) müssen erfüllt sein:

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} \overset{!}{\leq} 0, \quad c_{1,t} \cdot \frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} \overset{!}{=} 0 \tag{A.94}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} \overset{!}{\leq} 0, \quad c_{2,t+1} \cdot \frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} \overset{!}{=} 0 \tag{A.95}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \overset{!}{=} 0 \tag{A.96}$$

$$c_{1,t} - (1-\tau)w_t \overset{!}{\leq} 0, \quad \mu \cdot (c_{1,t} - (1-\tau)w_t) \overset{!}{=} 0 \tag{A.97}$$

$$\mu \geq 0, \lambda \in \mathbb{R} \tag{A.98}$$

Da $c_{1,t}$ und $c_{2,t+1}$ nicht Null sein können, da sonst die Zielfunktion gleich $-\infty$ wäre, sind die Ableitung in Gleichung (A.94) und (A.95) mit Gleichheit erfüllt. Die Bedingungen erster Ordnung lauten damit:

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} = \frac{1}{c_{1,t}} + \lambda R_{t+1} \overset{!}{=} 0 \tag{A.99}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} = \frac{\beta}{c_{2,t+1}} + \lambda \overset{!}{=} 0 \tag{A.100}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = R_{t+1}c_{1,t} + c_{2,t+1} - (1-\tau)w_t R_{t+1} - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1} \overset{!}{=} 0 \tag{A.101}$$

$$c_{1,t} - (1-\tau)w_t \overset{!}{\leq} 0, \quad \mu \cdot (c_{1,t} - (1-\tau)w_t) \overset{!}{=} 0 \tag{A.102}$$

$$\mu \geq 0, \, \lambda \in \mathbb{R} \tag{A.103}$$

Um alle kritischen Punkte zu erhalten, muss zwischen $\mu > 0$ und $\mu = 0$ unterschieden werden:

$\underline{\mu > 0}$: Aus Gleichung (A.102) folgt sofort, dass $c_{1,t} = (1-\tau)w_t$ und somit $s_t = 0$ gilt. In Folge wäre dann auch der Kapitalstock gleich Null, da sich dieser aus der Ersparnis ergibt, $k_{t+1} = \frac{s_t}{1+x\theta} = 0$, und weiters dann auch der Output und die Löhne.

$\underline{\mu = 0}$: Aus Gleichung (A.102) folgt, dass $c_{1,t} \leq (1-\tau)w_t$ gelten muss.
Drückt man λ aus Gleichung (A.99) und (A.100) jeweils aus und setzt diese dann gleich, so ergibt das

$$\frac{1}{R_{t+1}c_{1,t}} = \frac{\beta}{c_{2,t+1}} \quad \Longleftrightarrow \quad c_{2,t+1} = \beta R_{t+1} c_{1,t}. \tag{A.104}$$

Wird Gleichung (A.104) in Gleichung (A.101) eingesetzt, so folgt für den Konsum in der ersten Periode

$$R_{t+1}c_{1,t} + \beta R_{t+1}c_{1,t} - R_{t+1}(1-\tau)w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (1+\beta)R_{t+1}c_{1,t} = R_{t+1}(1-\tau)w_t + (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)P_{t+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad c_{1,t} = \frac{R_{t+1}(1-\tau)w_t + (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)P_{t+1}}{(1+\beta)R_{t+1}} \tag{A.105}$$

Für die optimale Ersparnis eines Individuums gilt wegen Gleichung (4.1):

$$\begin{aligned} s_t &= (1-\tau)w_t - c_{1,t} \\ &\overset{(A.105)}{=} (1-\tau)w_t - \frac{R_{t+1}(1-\tau)w_t + (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)P_{t+1}}{(1+\beta)R_{t+1}} \\ &= \frac{(1+\beta)(1-\tau)R_{t+1}w_t - R_{t+1}(1-\tau)w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1}}{(1+\beta)R_{t+1}} \end{aligned}$$

$$\iff \quad s_t = \frac{\beta(1-\tau)R_{t+1}w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1}}{(1+\beta)R_{t+1}} \tag{A.106}$$

Auswirkungen einer Erhöhung von x auf Y^*

Es ist interessant die Auswirkung einer Erhöhung des Pensionsantrittsalters x auf den aggregierten Output $Y^* = (1+x\theta)(k^*)^\alpha$ zu analysieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y^*}{\partial x} &= \theta(k^*)^\alpha + (1+x\theta)\alpha(k^*)^{\alpha-1}\frac{\partial k^*}{\partial x} \\
&= \underbrace{(k^*)^{\alpha-1}}_{>0} \cdot \left[\underbrace{\theta k^* + (1+x\theta)\alpha\frac{\partial k^*}{\partial x}}_{=:A}\right]
\end{aligned}$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial Y^*}{\partial x}$ wird also durch jenes von A bestimmt, wobei $B = (1+\beta)\alpha(1+x\theta) + (1-\alpha)(\tau + x\theta) > 0$ gilt:

$$A = \theta \cdot \left[\frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{B}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} + \frac{(1+x\theta)\alpha}{1-\alpha} \cdot \left[\frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{B}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\cdot \left[\frac{-\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha) \cdot [(1+\beta)\alpha\theta + (1-\alpha)\theta]}{B^2}\right]$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{B}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}}_{>0} \cdot \underbrace{\left[\theta + \frac{(1+x\theta)\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{B}\right)^{-1}\right.}$$

$$\underbrace{\left.\cdot \left(\frac{-\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha) \cdot [(1+\beta)\alpha\theta + (1-\alpha)\theta]}{B^2}\right)\right]}_{C}$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial Y^*}{\partial x}$ wird also durch jenes von C bestimmt.

$$C = \theta - \frac{(1+x\theta)\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{(1+\beta)\alpha\theta + (1-\alpha)\theta}{B}$$

$$= \underbrace{\frac{\theta}{(1-\alpha)B}}_{>0} \cdot \underbrace{\left[(1+\beta)\alpha(1-\alpha)(1+x\theta) + (1-\alpha)^2(\tau + x\theta) - (1+x\theta)\alpha(1+\alpha\beta)\right]}_{D}$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial Y^*}{\partial x}$ wird also durch jenes von D bestimmt. Mit einigen Umformungsschritten kommt man nun auf folgendes Ergebnis:

$$D = \underbrace{(1-\alpha)^2\tau + (1-\alpha)^2 x\theta + (1+x\theta)\alpha[\beta - \alpha(1+2\beta)]}_{=:G(\tau,\alpha)} \tag{A.107}$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial Y^*}{\partial x}$ hängt somit vom Vorzeichen von $G(\tau, \alpha)$ ab. Es ist leicht zu sehen, dass $G(\cdot, \alpha)$ strikt wachsend in τ auf $[0, 1)$ ist. Das heißt, falls $G(0, \alpha) \geq 0$ gilt $G(\tau, \alpha) > 0 \ \forall \tau \in (0, 1)$. Somit wird also $G(0, \alpha)$ betrachtet:

$$G(0, \alpha) = (1-\alpha)^2 x\theta + (1+x\theta)\alpha[\beta - \alpha(1+2\beta)] \tag{A.108}$$

Um $G(0, \alpha)$ für alle α zu analysieren, wird in Gleichung (A.108) der Fall für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ betrachtet:

$$\begin{aligned} G(0,0) &= x\theta > 0 \\ G(0,1) &= -(1+x\theta)(1+\beta) < 0 \end{aligned}$$

Da sich die Vorzeichen unterscheiden und $G(\tau, \alpha)$ quadratisch in α ist, gibt es genau eine Nullstelle $\bar{\alpha} \in (0, 1)$, das heißt es existiert genau ein $\bar{\alpha} \in (0, 1)$, sodass gilt

$$\forall\ \alpha < \bar{\alpha} \quad G(0, \alpha) > 0 \qquad \text{und} \tag{A.109}$$

$$\forall\ \alpha > \bar{\alpha} \quad G(0, \alpha) < 0. \tag{A.110}$$

Aus Gleichung (A.109) folgt somit insgesamt, dass genau ein $\bar{\alpha} \in (0, 1)$ existert, sodass für alle α kleiner $\bar{\alpha}$ gilt $\frac{\partial Y^*}{\partial x} > 0$ für jedes $\tau \in [0, 1)$.

Für $G(0, \alpha) < 0$ hängt das Vorzeichen von $\frac{\partial Y^*}{\partial x}$ von jenem von $G(1, \alpha)$ ab. Wenn $G(1, \alpha) > 0$ gilt, existiert genau ein $\bar{\tau} \in (0, 1)$ sodass

$$G(\tau, \alpha) < 0 \quad \forall\ \tau \in [0, \bar{\tau}) \qquad \text{und} \tag{A.111}$$

$$G(\tau, \alpha) > 0 \quad \forall\ \tau \in (\bar{\tau}, 1). \tag{A.112}$$

Dazu wird also $G(1,\alpha)$ betrachtet:

$$\begin{aligned} G(1,\alpha) &= (1-\alpha)^2(1+x\theta) + (1+x\theta)\alpha[\beta - \alpha(1+2\beta)] \\ &= (1+x\theta)[1-\alpha(2-\beta) - 2\alpha^2\beta] \end{aligned} \tag{A.113}$$

Auch hier ist es wieder interessant eine Nullstelle von Gleichung (A.113) zu berechnen, um Unterscheidungen treffen zu können:

$$\begin{aligned} G(1,\alpha) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (1+x\theta)[1-\alpha(2-\beta) - 2\alpha^2\beta] = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha^2 2\beta + \alpha(2-\beta) - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{A.114}$$

Mit Gleichung (A.114) gilt somit:

$$G(1,\alpha) > 0 \quad \forall\ \alpha < \frac{1}{2} \qquad \text{und} \tag{A.115}$$

$$G(1,\alpha) < 0 \quad \forall\ \alpha > \frac{1}{2} \tag{A.116}$$

Somit kann man sagen, dass für $\alpha \in (\bar{\alpha}, \frac{1}{2})$ wegen Gleichungen (A.111) und (A.112) genau ein $\bar{\tau} \in (0,1)$ existiert, sodass

$$\frac{\partial Y^*}{\partial x} < 0 \quad \forall\ \tau < \bar{\tau} \qquad \text{und} \tag{A.117}$$

$$\frac{\partial Y^*}{\partial x} > 0 \quad \forall\ \tau > \bar{\tau} \tag{A.118}$$

Zu beachten ist, dass auch für α in Gleichung (A.109) $\alpha < \frac{1}{2}$ gilt, da $G(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}x\theta - \frac{1}{4}(1+x\theta) = -\frac{1}{4} < 0$.

Auswirkungen einer Erhöhung von x auf P^*

Bei der Analyse von $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ wird analog zum aggregierten Output vorgegangen. Für die Pensionszahlungen gilt $P^* = \frac{\tau(1+x\theta)(1-\alpha)}{(1-x)}(k^*)^\alpha$. Nach einigen Umformungsschritten und wie oben $B := (1+\beta)\alpha(1+x\theta) + (1-\tau)x\theta(1-\alpha) + (1+x\theta)\tau(1-\alpha)$ folgt:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \tau(1-\alpha)\cdot\left[\frac{\theta(1-x)+(1+x\theta)}{(1-x)^2}(k^*)^\alpha + \frac{(1+x\theta)}{(1-x)}\alpha(k^*)^{\alpha-1}\frac{\partial k^*}{\partial x}\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\tau(1-\alpha)(k^*)^\alpha}{(1-x)^2(1-\alpha)B}}_{>0} \cdot \underbrace{[(1+\theta)(1-\alpha)B - (1+x\theta)\alpha\theta(1+\alpha\beta)(1-x)]}_{D}$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ hängt nur von jenem von D ab. Mit einigen Umformungsschritten erhält man:

$$D = \underbrace{(1+\theta)(1-\alpha)^2\tau + (1+\theta)(1-\alpha)[(1+\beta)\alpha + (1+\alpha\beta)x\theta] - (1+x\theta)\alpha\theta(1+\alpha\beta)(1-x)}_{=:G(\tau,\alpha)}$$

Das Vorzeichen von $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ hängt nur von jenem von $G(\tau, \alpha)$ ab. Die weiteren Schritte werden analog zum aggregierten Output geführt. Es ist leicht zu sehen, dass G strikt wachsend in τ ist. Falls also $G(0, \alpha) > 0$, so wäre $G(\tau, \alpha) > 0$ für alle $\tau \in (0, 1)$. Somit wird $G(0, \alpha) = (1+\theta)(1-\alpha)[(1+\beta)\alpha + (1+\alpha\beta)x\theta] - (1+x\theta)\alpha\theta(1+\alpha\beta)(1-x)$ für den Fall $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ betrachtet:

$$G(0,0) = (1+\theta)x\theta > 0 \tag{A.119}$$

$$G(0,1) = -(1+x\theta)\theta(1+\beta)(1-x) < 0 \tag{A.120}$$

Somit existiert also ein $\bar{\alpha} \in (0, 1)$, sodass gilt:

$$\forall\alpha < \bar{\alpha} \quad G(0,\alpha) > 0 \quad \text{und} \tag{A.121}$$

$$\forall\alpha > \bar{\alpha} \quad G(0,\alpha) < 0. \tag{A.122}$$

Aus Gleichung (A.121) folgt somit, dass für $\alpha < \bar{\alpha}$ gilt $\frac{\partial P^*}{\partial x} > 0$ für alle $\tau \in (0, 1)$. Für den Fall $\alpha > \bar{\alpha}$ muss $G(1, \alpha)$ betrachtet werden, um das Vorzeichen von $\frac{\partial P^*}{\partial x}$ zu bestimmen. Ist $G(1, \alpha) > 0$, so existiert ein $\bar{\tau} \in (0, 1)$, sodass

$$G(\tau,\alpha) < 0 \quad \forall\tau < \bar{\tau} \quad \text{und} \tag{A.123}$$

$$G(\tau,\alpha) > 0 \quad \forall\tau > \bar{\tau} \tag{A.124}$$

Da $G(1, \alpha) = (1+\theta)(1-\alpha)^2 + (1+\theta)(1-\alpha)[(1+\beta)\alpha + (1+\alpha\beta)x\theta] - (1+x\theta)\alpha\theta(1+\alpha\beta)(1-x)$ nicht für alle $\alpha \in (\bar{\alpha}, 1)$ größer oder kleiner Null ist, wird nun jenes $\alpha \in (\bar{\alpha}, 1)$ berechnet, für das $G(1, \alpha) = 0$ gilt, um zu wissen, ob und wenn bei welchem α es einen

Vorzeichenwechsel gibt:

$$
\begin{aligned}
&G(1,\alpha) = 0\\
\iff\quad & (1+\theta)(1-\alpha)[(1-\alpha)+(1+\beta)\alpha+(1+\alpha\beta)x\theta] - (1+x\theta)\alpha\theta(1+\alpha\beta)(1-x) = 0\\
\iff\quad & (1+\theta)(1-\alpha)(1+\alpha)(1+x\theta) - (1+x\theta)\alpha\theta(1+\alpha\beta)(1-x) = 0\\
\iff\quad & \underbrace{(1+\alpha\beta)(1+x\theta)}_{>0}\cdot[1+\theta-\alpha(1+2\theta-x\theta)] = 0\\
\iff\quad & 1+\theta-\alpha(1+2\theta-x\theta) = 0\\
\iff\quad & \alpha = \frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta} \qquad \text{(A.125)}
\end{aligned}
$$

Somit gilt also

$$G(1,\alpha) > 0 \quad \forall \alpha < \frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta} \quad \text{und} \tag{A.126}$$

$$G(1,\alpha) < 0 \quad \forall \alpha > \frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta}. \tag{A.127}$$

Wegen Gleichung (A.123) und (A.124) kann man sagen, dass für $\alpha \in \left(\bar{\alpha}, \frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta}\right)$ ein $\bar{\tau} \in (0,1)$ existiert, sodass

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} < 0 \quad \forall \tau < \bar{\tau} \quad \text{und} \tag{A.128}$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} > 0 \quad \forall \tau > \bar{\tau}. \tag{A.129}$$

Zu beachten ist, dass auch hier für α in Gleichung (A.121) $\alpha < \frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta}$ gilt, da mit einigen Umformungsschritten folgt

$$
\begin{aligned}
G\left(0, \frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta}\right) =& (1+\theta)\cdot\left(\frac{\theta(1-x)}{1+2\theta-x\theta}\right)\cdot(1+\beta)\cdot\frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta}\\
&+(1+\theta)\cdot\frac{\theta(1-x)}{1+2\theta-x\theta}\cdot\left(\frac{1+2\theta-x\theta+\beta+\theta\beta}{1+2\theta-x\theta}\right)\cdot x\theta\\
&-(1+x\theta)\cdot\frac{1+\theta}{1+2\theta-x\theta}\cdot\theta\cdot\left(\frac{1+2\theta-x\theta+\beta+\theta\beta}{1+2\theta-x\theta}\right)\cdot(1-x)
\end{aligned}
$$

$$= \underbrace{\frac{(1+\theta)\theta(1-x)}{(1+2\theta-x\theta)^2}}_{>0} \cdot [\theta(x-3)] < 0$$

A5: OLG-Modell von Miyazaki (2014) mit Überlebenswahrscheinlichkeit

Optimale Ersparnis sowie steady state Kapitalstock:
Auch hier werden die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen verwendet. Die Lagrange-Funktionen ist durch $L(c_{1,t}, c_{2,t+1}, \lambda, \mu) = \ln(c_{1,t}) + \pi\beta \ln(c_{2,t+1}) - \lambda[\frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1}] - \mu[c_{1,t} - (1-\tau)w_t]$ gegeben. Die Bedingungen erster Ordnung lauten in diesem Fall, da $c_{1,t}$ und $c_{2,t+1}$ nicht gleich Null sein können:

$$\frac{\partial L}{\partial c_{1,t}} = \frac{1}{c_{1,t}} + \lambda \frac{R_{t+1}}{\pi} \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.130}$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_{2,t+1}} = \frac{\pi\beta}{c_{2,t+1}} + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.131}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + c_{2,t+1} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1} \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.132}$$

$$c_{1,t} - (1-\tau)w_t \stackrel{!}{\leq} 0, \quad \mu \cdot (c_{1,t} - (1-\tau)w_t) \stackrel{!}{=} 0 \tag{A.133}$$

$$\mu \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R} \tag{A.134}$$

Auch hier wird wieder zwischen $\mu > 0$ und $\mu = 0$ unterschieden:

$\underline{\mu > 0}$: Aus Gleichung (A.133) folgt sofort, dass $c_{1,t} = (1-\tau)w_t$ und $s_t = 0$ und damit wieder $k_{t+1} = \frac{s_t}{1+\pi x\theta} = 0$.

$\underline{\mu = 0}$: Aus Gleichung (A.133) folgt, dass $c_{1,t} \leq (1-\tau)w_t$ gelten muss.
Durch analoges Vorgehen wie in Kapitel 4.1 erhält man aus Gleichung (A.130) und (A.131) folgende Beziehung des Konsums in den zwei Perioden:

$$\frac{\pi\beta}{c_{2,t+1}} = \frac{\pi}{R_{t+1}c_t} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta R_{t+1} c_{1,t} = c_{2,t+1} \tag{A.135}$$

Wird dieses Ergebnis in Gleichung (A.132) eingesetzt, so ergibt das für den Konsum in der ersten Periode:

$$\frac{R_{t+1}}{\pi} c_{1,t} + \beta R_{t+1} c_{1,t} - \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t - (1-\tau)x\theta w_{t+1} - (1-x)P_{t+1} = 0$$

$$\iff \quad (\frac{1+\pi\beta}{\pi})R_{t+1}c_{1,t} = \frac{R_{t+1}}{\pi}(1-\tau)w_t + (1-\tau)x\theta w_{t+1} + (1-x)P_{t+1}$$

$$\iff \quad c_{1,t} = \frac{(1-\tau)R_{t+1}w_t + \pi(1-\tau)x\theta w_{t+1} + \pi(1-x)P_{t+1}}{(1+\pi\beta)R_{t+1}} \tag{A.136}$$

Für die optimale Ersparnis gilt:

$$\begin{aligned} s_t &= (1-\tau)w_t - c_{1,t} \\ &= (1-\tau)w_t - \frac{(1-\tau)R_{t+1}w_t + \pi(1-\tau)x\theta w_{t+1} + \pi(1-x)P_{t+1}}{(1+\pi\beta)R_{t+1}} \end{aligned}$$

$$\iff \quad s_t = \frac{\pi\beta(1-\tau)R_{t+1}w_t - \pi(1-\tau)x\theta w_{t+1} - \pi(1-x)P_{t+1}}{(1+\pi\beta)R_{t+1}} \tag{A.137}$$

Um ein Gleichgewicht zu berechnen, wird analog zu Kapital 4.1 erneut der Kapitalstock pro effektiver Arbeit betrachtet unter Berücksichtigung von Zinssatz R_t und Lohn w_t und den Pensionszahlungen von Gleichung (4.26):

$$\begin{aligned} k_{t+1} = \frac{s_t}{1+\pi x\theta} &= \frac{\pi\beta(1-\tau)R_{t+1}w_t - \pi(1-\tau)x\theta w_{t+1} - \pi(1-x)P_{t+1}}{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)R_{t+1}} \\ &= \frac{\pi\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)}k_t^\alpha - \frac{[\pi(1-\tau)x\theta + \tau(1+\pi x\theta)]\,(1-\alpha)}{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha}k_{t+1} \end{aligned}$$

Und somit gilt:

$$\frac{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha + \pi(1-\tau)x\theta(1-\alpha) + \tau(1+\pi x\theta)(1-\alpha)}{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha}k_{t+1} = \frac{\pi\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)}k_t^\alpha \tag{A.138}$$

Auswirkungen einer Erhöhung von x bzw. π auf k^*

$$\frac{\partial k^*}{\partial x} = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\pi\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha + (1-\alpha)(\tau+\pi x\theta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\cdot\left[\frac{-\pi\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)\cdot[(1+\pi\beta)\pi\theta\alpha+(1-\alpha)\theta\pi]}{[(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha+(1-\alpha)(\tau+\pi x\theta)]^2}\right]<0 \tag{A.139}$$

Da alle Parameter zwischen Null und Eins liegen, ist der Ausdruck aufgrund des Minus in der zweiten Klammer negativ.

$$\frac{\partial k^*}{\partial \pi}=\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{\pi\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)}{(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha+(1-\alpha)(\tau+\pi x\theta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\cdot\left[\frac{\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)\cdot[(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha+(1-\alpha)(\tau+\pi x\theta)]}{[(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha+(1-\alpha)(\tau+\pi x\theta)]^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\pi\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)\cdot[\beta(1+\pi x\theta)\alpha+(1+\pi\beta)x\theta\alpha+(1-\alpha)x\theta]}{[(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha+(1-\alpha)(\tau+\pi x\theta)]^2}\right]>0 \tag{A.140}$$

Da wieder alle Parameter zwischen Null und Eins liegen, ist die erste Klammer immer positiv. Wegen des Quadrats ist der Nenner der zweiten Klammer auch immer positiv. Entscheidend ist nun das Vorzeichen im Zähler in der zweiten Klammer:

$$\begin{aligned}
&\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)\,[(1+\pi\beta)(1+\pi x\theta)\alpha+(1-\alpha)(\tau+\pi x\theta)\\
&\quad-\pi\beta(1+\pi x\theta)\alpha-\pi(1+\pi\beta)x\theta\alpha-(1-\alpha)\pi x\theta]\\
&=\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)\cdot[(1+\pi\beta)\alpha-\pi\beta(1+\pi x\theta)\alpha+(1-\alpha)\tau]\\
&=\alpha\beta(1-\tau)(1-\alpha)\cdot\left[(1-\pi^2\beta x\theta)\alpha+(1-\alpha)\tau\right]>0
\end{aligned}$$

Letzte Ungleichung kommt wieder daher, dass alle Parameter zwischen Null und Eins liegen und deswegen die linke Seite — und somit der Zähler — immer positiv ist.

Literaturverzeichnis

[1] Bethencourt, C. and Perera-Tallo, F. (2014). Optimal Retirement Age and Aging Population.

[2] Bonenkamp, J., Meijdam, L., Ponds, E. and Westerhout, E. (2017). Ageing-driven pension reforms. *J Popul Econ (2017) 30:953-976.*

[3] Carone, G., Eckefeldt, P., Giamboni, L., Laine, V. and Pamies Sumner, S. (2016). Pensions Reforms in the EU since the Early 2000's: Achievements and Challenges Ahead. *European Commission. Discussion Paper 042.*

[4] Cipriani, G. P. (2013). Population aging and PAYG pensions in the OLG model. *J Popul Econ (2014) 27:251-256.*

[5] Cipriani, G. P. (2016). Aging, Retirement and Pay-As-You-Go Pensions. *Macroeconomic Dynamics, 2016, Page 1 of 11.*

[6] Dedry, A., Onder, A. and Pestieau, P. (2014). Aging, Social Security Design and Capital Accumulation. *Core Discussion Paper 2014/23*

[7] Fanti, L. (2012). PAYG pensions and fertility drop: some (pleasant) arithmetic. *Discussion Paper n. 146.*

[8] Fanti, L. and Gori, L. (2010). Complex equilibrium dynamics in a simple OLG model of neoclassical growth with endogenous retirement age and public pensions. *MPRA Paper No. 23694.*

[9] Feichtinger, G. and Hartl, R. F. (1986). Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse. Anwendung des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften. *Walter de Gruyter Verlag, Berlin.*

[10] Miyazaki, K. (2014). The effects of the raising-the-official-pension-age policy in an overlapping generations economy. *Economics Letters 123 (2014) 329-332.*

[11] Prettner, K. and Canning, D. (2014). Increasing life expectancy and optimal retirement in general equilibrium. *Economic Theory, Volume 56, Issue 1, pp 191-217.*

[12] Schwan, A, and Sail, E. (2013). Assessing the economic and budgetary impact of linking retirement ages and pension benefits to increases in longevity. *European Commission. Economic Papers 512.*

[13] Statistik Austria (2017). Data for old-age dependency ratio available at `https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/demographische_prognosen/bevoelkerungsprognosen/index.html`.

[14] World Bank (2017). Fertility rate data available at `https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.TFRT.IN?end=2015&locations=AT&start=1960`.

[15] World Bank (2017). Life expectancy data available at `https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LE00.IN?end=2015&locations=AT&start=1960`.