



DIPLOMARBEIT

Stabile Verteilungen in der Modellierung von Finanzdaten

Ausgeführt am Institut für
Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie
der Technischen Universität Wien
unter der Anleitung von

Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Karl Grill
durch

Adam Steiner
0325963, E873

1020 Wien, Haussteinstraße 1A/6/2

10. Februar 2014

Kurzfassung

Stabile Verteilungen besitzen viele erstrebenswerte mathematische Eigenschaften. Deshalb finden sie häufig Verwendung in verschiedensten Bereichen der Naturwissenschaften. In dieser Diplomarbeit wird das stabile Modell auf Finanzdaten aus der Gegenwart angewandt. Dabei werden zunächst die Charakteristika der stabilen Verteilungsklasse vorgestellt und ihre Bedeutung in der Wahrscheinlichkeitstheorie hervorgehoben. Neben ihren Vorzügen wird auch auf Nachteile und praktische Schwierigkeiten eingegangen. So existiert etwa im allgemeinen Fall keine geschlossene Form für die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Die eigens für stabile Verteilungen verwendeten Methoden zur Simulation von Zufallsvariablen und zur Schätzung der Parameter werden vorgestellt. Mit deren Hilfe werden aktuelle Finanzdaten auf Stabilität untersucht und Unzulänglichkeiten der beliebten Normalverteilungsannahme aufgezeigt.

Abstract

Stable distributions have a lot of desirable mathematical properties. That's why they are proposed as a model in different areas of natural science. In this diploma thesis the stable model is applied for today's financial data. First we describe the characteristics of stable distributions and highlight their importance in probability theory. Beside a lot of advantages we will discuss the drawbacks and practical problems. For instance there exist no closed form expressions for the probability density function in general. We will describe adapted methods for stable distributions for simulating random variables and estimating parameters. With these skills we will examine current financial data for stability and outline shortcomings of the popular Gaussian distribution.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle recht herzlich bei Herrn Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Grill für die Vergabe meines interessanten Diplomarbeitsthemas und die Betreuung bedanken.

Weiters gilt mein Dank besonders meinen Eltern, die mir die Nähe zur Mathematik schon in die Wiege gelegt haben, mich während des gesamten Studiums unterstützt und mir dadurch erst ermöglicht haben, so weit zu kommen.

Viele Menschen waren im Laufe meiner Studienjahre und während des Schreibens an der Diplomarbeit wesentlich dafür verantwortlich, dass ich diese jetzt in den Händen halten kann. Ihnen allen und ganz besonders meiner Frau Katharina, die immer für mich da war und mit Rat und Tat zur Seite stand, möchte ich meinen Dank aussprechen.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	2
Abstract	3
1 Einleitung	7
2 Eigenschaften stabiler Verteilungen	9
2.1 Definition der Stabilität	9
2.2 Parametrisierung stabiler Verteilungen	13
2.3 Dichten und Verteilungsfunktionen	17
2.4 Momente	22
2.5 Summen	24
3 Fundamentale Grenzwertsätze	26
3.1 Anziehungsbereiche stabiler Verteilungen	26
3.2 Unbegrenzt teilbare Verteilungen	29
3.3 Verteilungen der Klasse L	32
4 Simulation	35
4.1 Methode von Chambers-Mallows-Stuck	35
5 Parameterschätzung	41
5.1 Schätzung über Quantile	41
5.2 Schätzung mit Hilfe der charakteristischen Funktion	45
5.3 Maximum-Likelihood-Schätzung	47
6 Anwendung	50
6.1 Vergleich der Parameterschätzmethoden	51
6.2 Anwendung auf Finanzdaten	55

Inhaltsverzeichnis

7 Zusammenfassung	74
Tabellenverzeichnis	75
Abbildungsverzeichnis	76
Literaturverzeichnis	77

1 Einleitung

Viele Konzepte in der Finanztheorie beruhen auf der Annahme, dass Renditen von Assets normalverteilt sind. Wenn man sie grafisch darstellt, ähneln sie einer Glockenkurve, bei der die Enden sehr dünn sind, was sehr hohe Gewinne und Verluste extrem unwahrscheinlich macht. Diese Theorien beruhen auf dem Werk von [Bachelier, 1900], in dem die eindimensionale Brownsche Bewegung als Modell in Finanz- und Rohstoffmärkten eingeführt wird. Tatsächlich weisen unzählige empirische Daten darauf hin, dass die allermeisten Finanzrenditen eine gewisse Schiefe und ein hohes Maß an schweren Enden, sogenannten "heavy" oder "fat tails", besitzen.

Fundamentale Arbeiten von Benoît Mandelbrot - u.a. [Mandelbrot, 1963], in dem er Baumwollpreise untersucht hat - haben die Normalverteilungsannahme für Asset Returns wegen deutlicher Exzesskurtosis klar widerlegt. Stattdessen wurde eine andere Familie von Verteilungen vorgeschlagen, die zum ersten Mal von [Lévy, 1925] beschriebenen stabilen Verteilungen. In weiterer Folge wurden diese näheren Untersuchungen unterzogen.

Man kann sich Änderungen von Finanzvariablen als das kumulierte Ergebnis von einer Fülle an kleinen Informationen, die uns stetig erreichen, vorstellen. Wie wir noch sehen werden, müssen nach dem verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz normierte, unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen gegen eine stabile Grenzverteilung streben. Also ist diese Annahme recht natürlich. Werden jedoch Asset Returns tatsächlich durch die stabile Verteilung, die eine unendliche Varianz besitzt, viel besser modelliert, so ist die Welt am Finanzmarkt ungleich risikoreicher als im rein normalen Fall. Enorme Preisschwankungen, wie sie auch in den letzten Jahren während der Weltwirtschaftskrise vermehrt auftraten, werden mit einer angemessenen Wahrscheinlichkeit berücksichtigt und auch das Potenzial für hohe Erträge kann besser ausgeschöpft werden.

Andererseits ist es genau diese Eigenschaft der unendlichen Varianz, die vielen

1 Einleitung

Kritikern ein Dorn im Auge ist, weshalb ihnen die Verwendung stabiler Verteilungen unpraktikabel erscheint.

[Rachev und Mittnik, 2000], [Uchaikin und Zolotarev, 1999]

In dieser Arbeit wollen wir zunächst die Klasse der stabilen Verteilungen vorstellen, definieren und ihre grundlegendsten Eigenschaften zeigen. In weiterer Folge behandeln wir fundamentale Grenzwertsätze, in denen die Wichtigkeit der stabilen Verteilungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie beleuchtet wird. Im Anschluss wird ein Verfahren zur Simulation stabiler Zufallsgrößen hergeleitet und bedeutende Methoden zur Schätzung der Parameter werden beschrieben. Im abschließenden praktischen Teil werden zunächst diese Schätzmethoden miteinander verglichen, sowie die Anwendbarkeit des stabilen Modells auf aktuelle Finanzdaten geprüft.

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

Stabile Verteilungen beschreiben eine große Klasse von Verteilungen, die Schiefe und heavy tails erlauben und viele verblüffende Eigenschaften besitzen. Dass für ihre Dichten - bis auf wenige Fälle - keine geschlossenen Formeln existieren, machte sie in Vergangenheit für praktische Zwecke unbrauchbar. Heutzutage kann man Wahrscheinlichkeitsdichten, Verteilungsfunktionen und Quantile mit Hilfe leistungsstarker Programme berechnen. Dadurch wird es ermöglicht stabile Verteilungen für praktische Modellierung zu verwenden.

Es tauchen u.a. in den Naturwissenschaften oft Probleme auf, bei denen eine stabile Verteilung gegenüber der allseits beliebten Normalverteilung zu bevorzugen ist. Einen weiteren Grund für die Verwendung des stabilen Modells liefert der verallgemeinerte zentrale Grenzwertsatz. Nicht zuletzt sprechen empirische Beobachtungen, die Schiefe und schwere Ränder aufweisen, für einen stabilen Ansatz.

2.1 Definition der Stabilität

Eine wichtige Eigenschaft normalverteilter Zufallsvariablen ist, dass ihre Summe ebenfalls normalverteilt ist. Genauer gesagt, sei X normalverteilt, dann gilt für unabhängige Kopien X_1 und X_2 von X , dass es für jede positive Konstante a und b ein positives c und ein $d \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} cX + d \tag{2.1}$$

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

gilt. Die obige Gleichung besagt also, dass unter Summation die Form von X bis auf Skalierung und Verschiebung beibehalten wird.

Definition 2.1.1

Eine Zufallsvariable X heißt stabil oder stabil im weiten Sinn, wenn es für beliebige, unabhängige Kopien X_1 und X_2 von X und jede positive Konstante a und b ein positives c und ein $d \in \mathbb{R}$ gibt, sodass Gleichung (2.1) erfüllt ist. Gilt $d = 0$ für jede Wahl von a und b , heißt die Zufallsvariable strikt stabil oder stabil im engen Sinn. Man spricht von einer symmetrisch stabilen Zufallsvariable, wenn sie stabil und symmetrisch verteilt um 0 ist, also $X \stackrel{d}{=} -X$.

Man benützt die Bezeichnung *stabil*, weil die Form bei Summen des Typs (2.1) stabil, oder unverändert, bleibt. Es gibt lediglich drei Fälle, bei denen es eine geschlossene Form für die Wahrscheinlichkeitsdichte gibt: Normal-, Cauchy- und Lévy-Verteilung. Die stabilen Parameter α und β werden in Definition 2.1.3 vorgestellt.

Beispiel 1

Normalverteilung: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wenn X die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < \infty$$

besitzt. Die Normalverteilung ist stabil mit Parametern $\alpha = 2$ und $\beta = 0$.

Beispiel 2

Cauchyverteilung: $X \sim \text{Cauchy}(\gamma, \delta)$, wenn X die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-\delta)^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

besitzt. Die Cauchyverteilung ist stabil mit Parametern $\alpha = 1$ und $\beta = 0$.

Beispiel 3

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

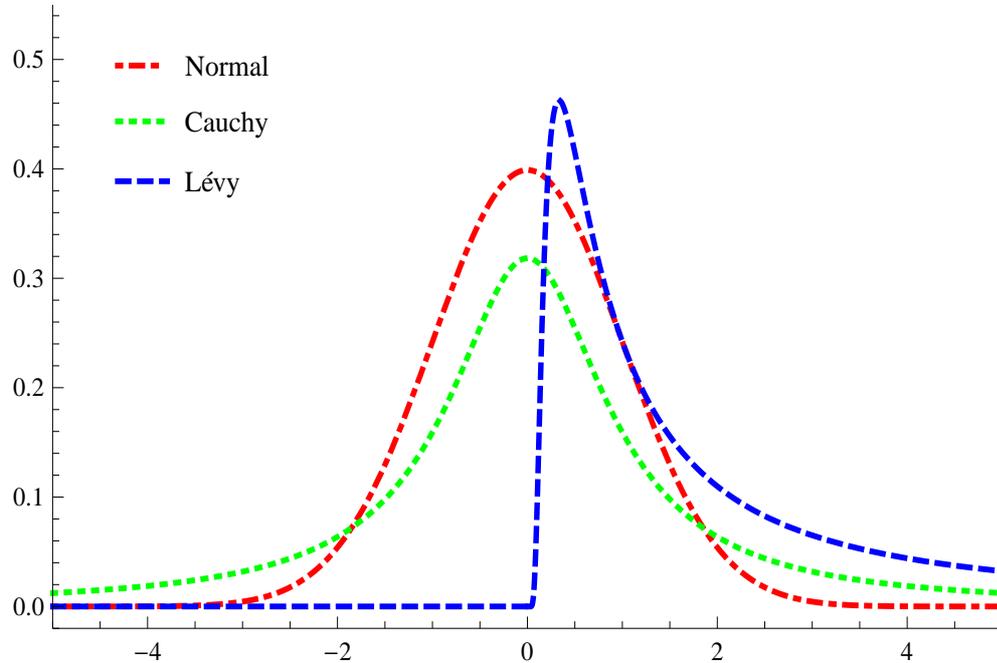


Abbildung 2.1: Standardisierte $N(0,1)$ -, $\text{Cauchy}(1,0)$ - und $\text{Lévy}(1,0)$ -Dichten

Lévyverteilung: $X \sim \text{Lévy}(\gamma, \delta)$, wenn X die Dichte

$$f(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \frac{1}{(x - \delta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\gamma}{2(x - \delta)}\right), \quad \delta < x < \infty$$

besitzt. Die Lévyverteilung ist stabil mit Parametern $\alpha = 0,5$ und $\beta = 1$.

Abbildung 2.1 zeigt die Dichten dieser drei Verteilungen. Die Normal- und die Cauchyverteilung sind beide symmetrisch und glockenförmig. Ein bedeutender Unterschied ist, dass die Cauchyverteilung viel schwerere Enden hat, wie es in Abbildung 2.2 gut ersichtlich ist. Noch mehr Gewicht am rechten Rand, sowie auch eine hohe Schiefe, besitzt die Lévyverteilung, deren Wahrscheinlichkeit auf $x > 0$ konzentriert ist. Mittels allgemeiner stabiler Verteilungen lässt sich der Grad an Schiefe und das Gewicht an den Enden der Verteilung variieren.

Es gibt auch andere äquivalente Definitionen der Stabilität.

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

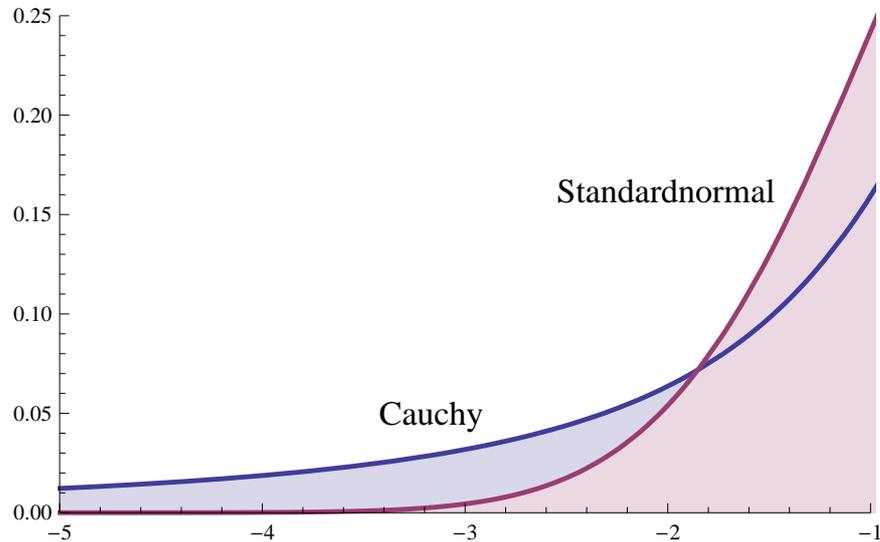


Abbildung 2.2: Linkes Ende der Normal- und Cauchyverteilung

Definition 2.1.2

Eine nicht degenerierte Zufallsvariable X ist stabil genau dann, wenn es für alle $n > 1$ Konstanten $c_n > 0$ und $d_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n,$$

wobei X_1, \dots, X_n unabhängige, identisch verteilte (u.i.v.) Kopien von X sind. X ist strikt stabil genau dann, wenn $d_n = 0$ für alle n .

Es lässt sich zeigen, dass für $\alpha \in (0, 2]$ $c_n = n^{1/\alpha}$ gelten muss. Die bisherigen Definitionen, sowie die Charakterisierung durch den verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz, benutzen Eigenschaften der Verteilung von X . Die andere Möglichkeit zur Beschreibung aller stabiler Verteilungen liefert die charakteristische Funktion $\phi(u) = \mathbb{E}[\exp(iuX)]$, die die Verteilung von X komplett festlegt. In der nächsten Definition wird die Funktion *sign* wie folgt verwendet

$$\text{sign } u = \begin{cases} -1 & u < 0 \\ 0 & u = 0 \\ 1 & u > 0 \end{cases}$$

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

und im Fall $\alpha = 1$ wird der Ausdruck $0 \cdot \log(0)$ als 0 interpretiert.

Definition 2.1.3

Eine Zufallsvariable X ist stabil genau dann, wenn $X \stackrel{d}{=} aZ + b$, mit $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ und einer Zufallsvariable Z mit charakteristischer Funktion

$$\mathbb{E}[\exp(iuZ)] = \begin{cases} \exp\left(-|u|^\alpha \left[1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}(\text{sign } u)\right]\right) & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-|u| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi}(\text{sign } u) \log |u|\right]\right) & \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Diese Verteilungen sind symmetrisch um Null, wenn $\beta = 0$ und $b = 0$. In diesem Fall hat die charakteristische Funktion von aZ die einfachere Form

$$\phi(u) = \exp(-a^\alpha |u|^\alpha).$$

In Tabelle 2.1 findet man die Parameter α , β , a und b für die drei stabilen Verteilungen mit geschlossener Form für die Dichte, die Normal-, Cauchy- und Lévyverteilung.

	α	β	a	b
$N(\mu, \sigma^2)$	2	0	$\sigma/\sqrt{2}$	μ
$Cauchy(\gamma, \delta)$	1	0	γ	δ
$Lévy(\gamma, \delta)$	1/2	1	γ	δ

Tabelle 2.1: Parameter für Normal-, Cauchy- und Lévyverteilung

2.2 Parametrisierung stabiler Verteilungen

Aus Definition 2.1.3 erkennt man, dass vier Parameter benötigt werden um stabile Verteilungen zu beschreiben: einen Stabilitätsindex oder charakteristischen Exponenten $\alpha \in (0, 2]$, einen Schiefeparameter $\beta \in [-1, 1]$, einen Skalierungsparameter $\gamma > 0$ und einen Lageparameter $\delta \in \mathbb{R}$. α und β beschreiben die Form

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

der Verteilung. Um Verwirrung zu vermeiden, wird hier σ und μ ausschließlich für die Standardabweichung und den Mittelwert verwendet, und γ und δ zur Beschreibung der Skalierung und der Lage.

In der Literatur taucht eine große Anzahl an verschiedenen Parametrisierungen für stabile Verteilungen auf. Dies ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass für verschiedene Probleme die eine viel praktischer anzuwenden ist, als eine andere. Wenn man sich ausführlicher mit stabilen Verteilungen auseinandersetzt, kommt man nicht umher, sich mit verschiedenen Parametrisierungen zu beschäftigen. In dieser Arbeit bezeichnet $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k)$ eine stabile Zufallsvariable. Die ersten vier Parameter wurden schon vorgestellt, der letzte gibt an, um welche Parametrisierung es sich handelt. Es sollte klargestellt werden, dass der Skalierungsparameter (sogar im normalen Fall) nicht für die Standardabweichung und der Lageparameter i.A. nicht für den Mittelwert stehen.

Definition 2.2.1

Eine Zufallsvariable $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$, wenn

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma(Z - \beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}) + \delta & \alpha \neq 1 \\ \gamma Z + \delta & \alpha = 1, \end{cases}$$

mit $Z = Z(\alpha, \beta)$ aus der Definition 2.1.3. X hat die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}[\exp(iuX)] = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha [1 + i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} (\text{sign } u) (|\gamma u|^{1-\alpha} - 1) + i\delta u]) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } u) \log(\gamma |u|) + i\delta u]) & \alpha = 1. \end{cases}$$

Wenn die Verteilung standardisiert, also $\gamma = 1$ und $\delta = 0$ ist, benützt man zur Abkürzung die Notation $\mathbf{S}(\alpha, \beta; 0)$.

Definition 2.2.2

Eine Zufallsvariable $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$, wenn

$$X \stackrel{d}{=} \begin{cases} \gamma Z + \delta & \alpha \neq 1, \\ \gamma Z + (\delta + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \log \gamma) & \alpha = 1 \end{cases}$$

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

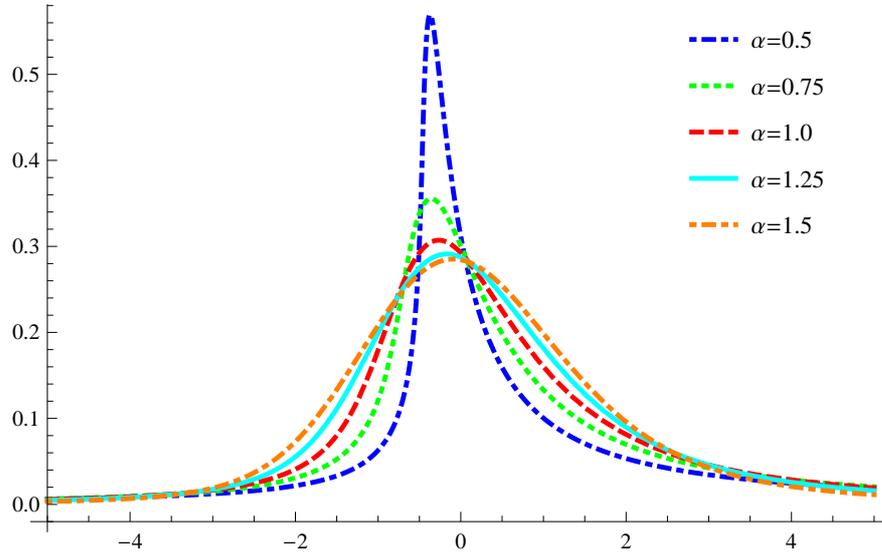


Abbildung 2.3: Stabile Dichten in der $\mathbf{S}(\alpha, 0.5, 1, 0; 0)$ Parametrisierung

mit $Z = Z(\alpha, \beta)$ aus der Definition 2.1.3. X hat die charakteristische Funktion

$$\mathbb{E}[\exp(iuX)] = \begin{cases} \exp(-\gamma^\alpha |u|^\alpha [1 - i\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} (\text{sign } u)] + i\delta u) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma |u| [1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign } u) \log |u|] + i\delta u) & \alpha = 1. \end{cases}$$

Wenn die Verteilung standardisiert, also $\gamma = 1$ und $\delta = 0$ ist, benützt man zur Abkürzung die Notation $\mathbf{S}(\alpha, \beta; 1)$.

Im Fall $\beta = 0$ sind die beiden Parametrisierungen identisch, außerdem beschreibt das Symbol $\mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}$ eine symmetrische α -stabile Verteilung: $\mathbf{S}_\alpha \mathbf{S}(\gamma) = \mathbf{S}(\alpha, 0, \gamma, 0; 0) = \mathbf{S}(\alpha, 0, \gamma, 0; 1)$

Man beachte, dass für $\alpha = 2$, $\mathbf{S}(2, 0, \gamma, \delta; 0) = \mathbf{S}(2, 0, \gamma, \delta; 1)$ eine Normalverteilung mit Erwartungswert δ beschreibt, aber die Varianz nicht γ^2 ist. Durch die Definition 2.2.1 der charakteristischen Funktion erhält man $\mathbf{S}(2, 0, \gamma, \delta; 0) = N(\delta, 2\gamma^2)$.

[Nolan, 2013] gibt Vor- und Nachteile der obigen Parametrisierungen an. Die 0-Darstellung eignet sich für numerische und statistische Untersuchungen, da sie die einfachste Form für die charakteristische Funktion hat, in der alle Parame-

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

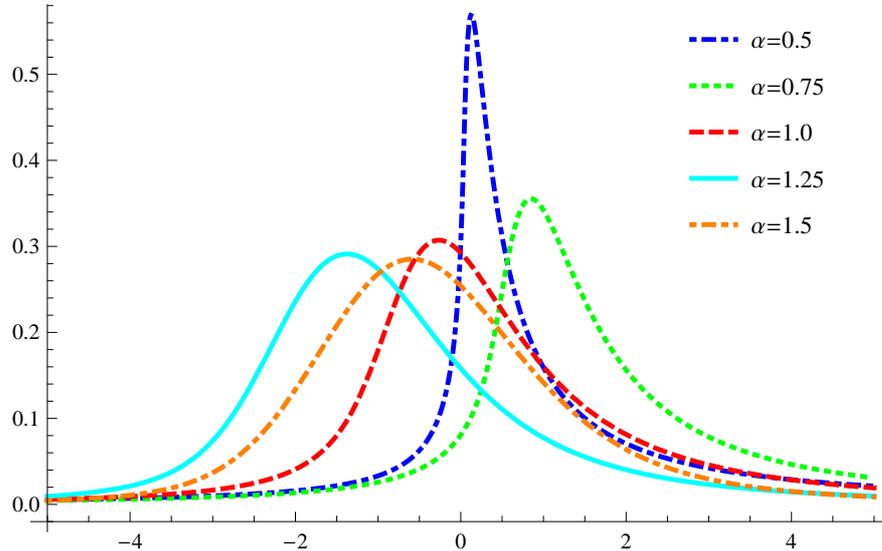


Abbildung 2.4: Stabile Dichten in der $\mathbf{S}(\alpha, 0.5, 1, 0; 1)$ Parametrisierung

ter stetig sind. Diese Form erlaubt außerdem die Standardisierung auf gewohnter Art: Ist $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$, dann ist $(X - \delta)/\gamma \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, 1, 0; 0)$, was z.B. für die 1-Darstellung im Fall $\alpha = 1$ nicht gilt. Die Vorzüge dieser Parametrisierung liegen in der einfacheren Form der charakteristischen Funktion und in vorteilhaften algebraischen Eigenschaften, weshalb diese Darstellung häufig angewandt wird. Ihre größte praktische Schwäche erkennt man daran, dass in jeder Umgebung von $\alpha = 1$ die Lage des Modus unbeschränkt ist: Sei $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ und $\beta > 0$, dann geht der Modus von X gegen $+\infty$ für $\alpha \uparrow 1$ und gegen $-\infty$ für $\alpha \downarrow 1$. Außerdem besitzt sie einige für Anwendungen wünschenswerte Eigenschaften, wie z.B. Stetigkeit der Verteilung bei variierenden Parametern, nicht.

Beziehung zwischen 0- und 1-Parametrisierung

Während der Stabilitätsindex α , der Schiefeparameter β und der Skalierungsparameter γ in beiden Darstellungen gleich sind, gilt für den Lageparameter mit $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta_0; 0)$ und $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta_1; 1)$ die Beziehung

$$\delta_0 = \begin{cases} \delta_1 + \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \beta \frac{2}{\pi} \gamma \log \gamma & \alpha = 1 \end{cases}$$

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

$$\delta_1 = \begin{cases} \delta_0 - \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ \delta_0 - \beta \frac{2}{\pi} \gamma \log \gamma & \alpha = 1 \end{cases}$$

2.3 Dichten und Verteilungsfunktionen

Wie schon erwähnt, gibt es nur in wenigen Fällen explizite Formeln für stabile Verteilungen. Über ihre theoretischen Eigenschaften weiß man allerdings mehr.

Satz 2.3.1

Alle (nicht degenerierten) stabilen Verteilungen sind stetig mit einer unendlich oft differenzierbaren Dichte.

Lemma 2.3.2

Bezeichne $f(x|\alpha, \beta, \gamma, \delta; k)$ die Dichte und $F(x|\alpha, \beta, \gamma, \delta; k)$ die Verteilungsfunktion einer $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k)$ -Verteilung ($k = 0, 1$). Meistens gilt die ganze reelle Achse als Träger für stabile Dichten. Für $\alpha < 1$ und $\beta = \pm 1$ gilt jedoch

$$\begin{aligned} \text{Träger}[f(x|\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)] &= \begin{cases} [\delta - \gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}, \infty) & \alpha < 1 \text{ und } \beta = 1 \\ (-\infty, \delta + \gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2}] & \alpha < 1 \text{ und } \beta = -1 \\ (-\infty, +\infty) & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{Träger}[f(x|\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)] &= \begin{cases} [\delta, \infty) & \alpha < 1 \text{ und } \beta = 1 \\ (-\infty, \delta] & \alpha < 1 \text{ und } \beta = -1 \\ (-\infty, +\infty) & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Da die Konstante $\tan \frac{\pi\alpha}{2}$ häufig bei stabilen Verteilungen auftritt, wollen wir nun ihr Verhalten etwas genauer betrachten. In Abbildung 2.5 erkennt man, dass für $\alpha \uparrow 1$ $\tan \frac{\pi\alpha}{2} \uparrow +\infty$, der Ausdruck bei $\alpha = 1$ nicht definiert ist und für $\alpha \downarrow 1$ $\tan \frac{\pi\alpha}{2}$ gegen $-\infty$ geht. Wie man sieht, sorgt diese Unstetigkeit bei $\alpha = 1$ immer wieder für Schwierigkeiten.

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

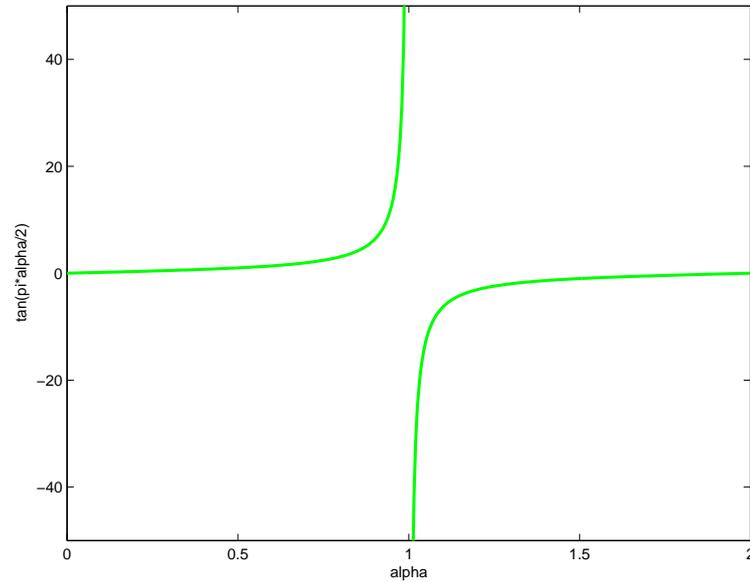


Abbildung 2.5: $\tan \frac{\pi\alpha}{2}$ als Funktion von α

Ein weiteres Merkmal stabiler Verteilungen ist die Spiegelungseigenschaft.

Proposition 2.3.3

Für jedes α und β , $Z \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta; k)$, $k = 0, 1$ gilt

$$Z(\alpha, -\beta) \stackrel{d}{=} -Z(\alpha, \beta)$$

Daraus folgt auch für die Dichte und Verteilungsfunktion einer $Z(\alpha, \beta)$ -verteilten Zufallsvariable

$$f(x|\alpha, \beta; k) = f(-x|\alpha, -\beta; k) \quad \text{und} \quad F(x|\alpha, \beta; k) = 1 - F(-x|\alpha, -\beta; k)$$

Man betrachte zunächst den Fall $\beta = 0$. Hier gilt $f(x|\alpha, 0; k) = f(-x|\alpha, 0; k)$, die Dichte und Verteilungsfunktion sind symmetrisch um 0. Abbildung 2.6 zeigt symmetrische stabile Verteilungen mit verschiedenen α . Man erkennt an der Dichte, dass mit sinkendem α die Spitze höher steigt und sich das Gewicht von der Mitte weg zu den Enden verlagert.

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

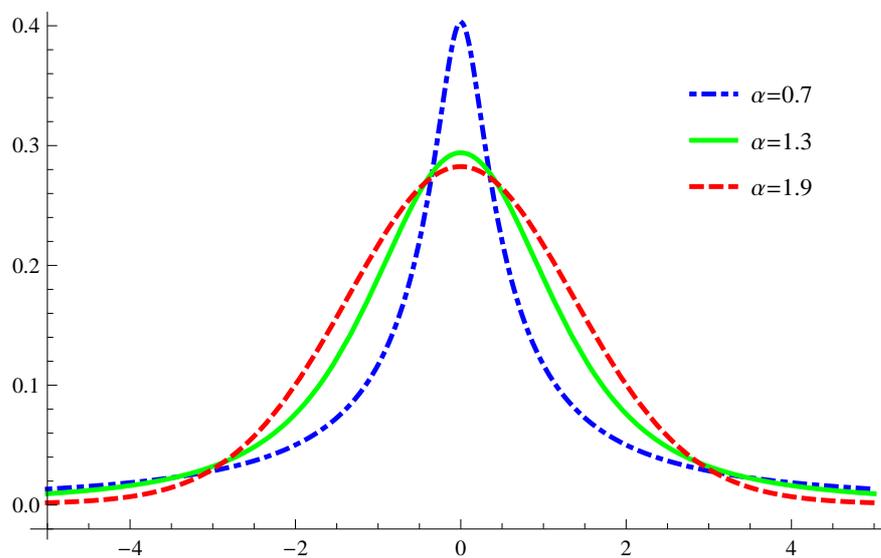


Abbildung 2.6: Dichte für symmetrisches stabiles $Z \sim \mathbf{S}(\alpha, 0; 0)$

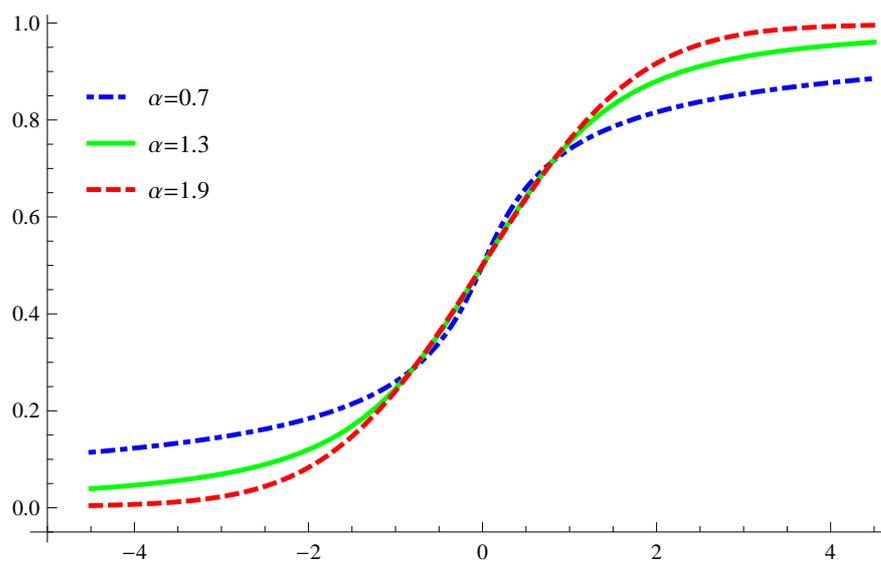


Abbildung 2.7: Verteilungsfunktion für symmetrisches, stabiles $Z \sim \mathbf{S}(\alpha, 0; 0)$

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

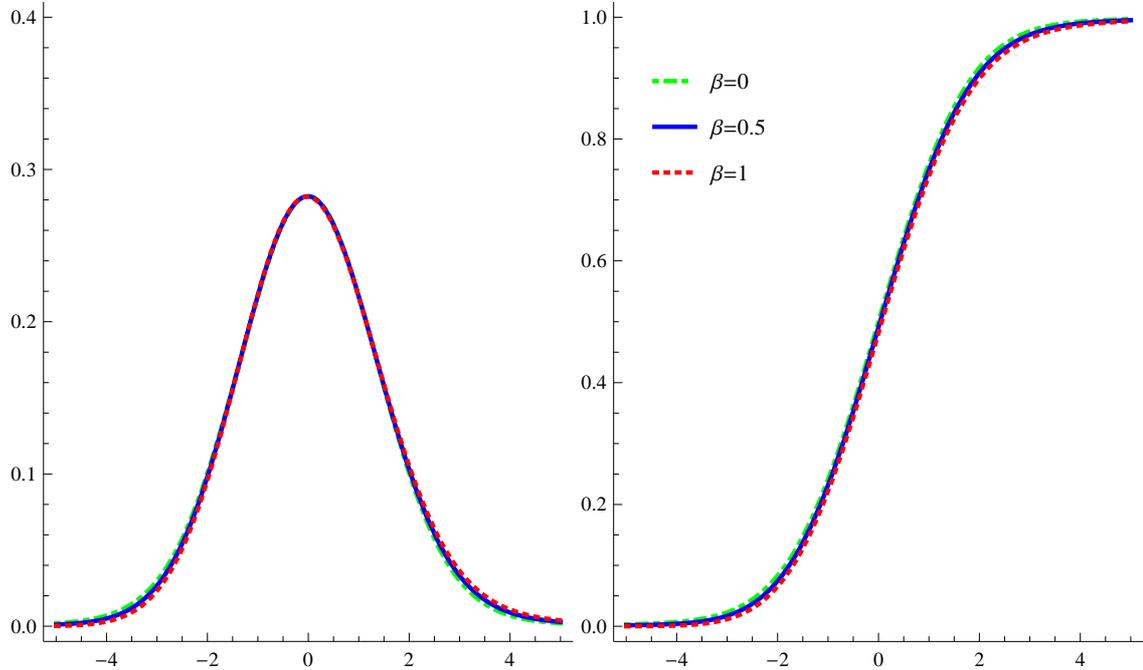


Abbildung 2.8: Dichte und Verteilungsfunktion für $Z \sim \mathbf{S}(1.9, \beta; 0)$

Ein positives β bedeutet eine rechtsschiefe Verteilung mit mehr Gewicht am rechten als am linken Rand: $\mathbb{P}(X > x) > \mathbb{P}(X < -x)$ für große $x > 0$. Wenn $\beta = 1$, ist die Verteilung total rechtsschief. Mittels der Spiegelungseigenschaft erhält man analoge Aussagen für linksschiefe stabile Verteilungen mit $\beta < 0$.

Bekannterweise ist eine stabile Verteilung mit $\alpha = 2$ normalverteilt. Betrachtet man die charakteristische Funktion aus der Definition 2.2.1, so erkennt man, dass der Term $\frac{\pi\alpha}{2}$ und mit ihr der imaginäre Teil verschwindet, also ist die Verteilung für jede Wahl von β symmetrisch: $Z(2, \beta) \stackrel{d}{=} Z(2, 0)$. Allgemein gilt, dass die Verteilung symmetrischer und β bedeutungsloser wird, wenn $\alpha \uparrow 2$, was man auch an der Abbildung 2.8 mit $\alpha = 1,9$ und variierendem β erkennen kann.

Umgekehrt gilt, dass bei sinkendem α die Rolle von β an Wert zulegt, siehe Abbildungen 2.9 bis 2.11. Man erkennt, dass für $\beta > 0$ das linke Ende immer leichter wird. Wenn sich α Null annähert, geht die Spitze steil nach oben und die Verteilung ähnelt der einer degenerierten Zufallsvariablen.

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

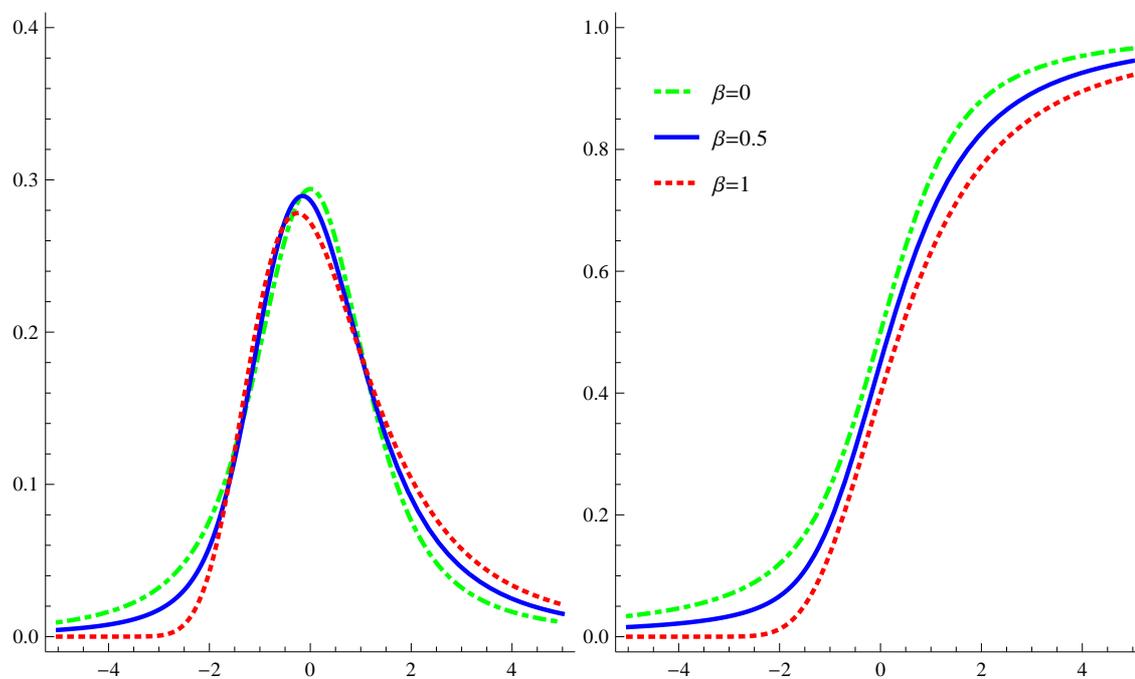


Abbildung 2.9: Dichte und Verteilungsfunktion für $Z \sim \mathbf{S}(1.3, \beta; 0)$

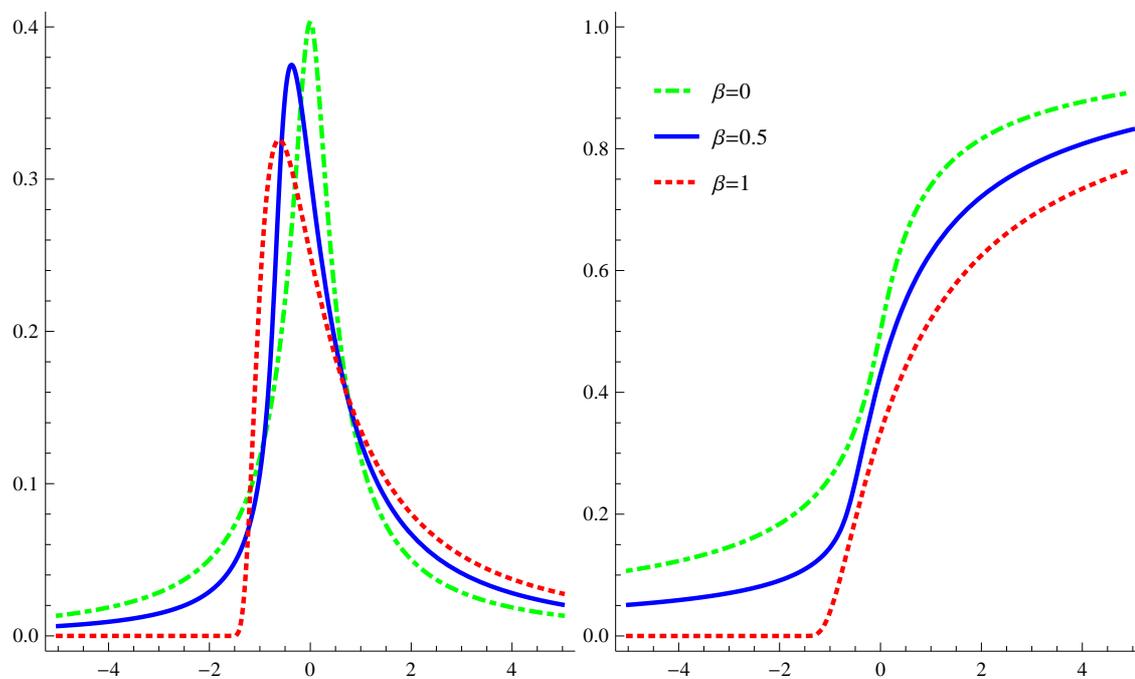


Abbildung 2.10: Dichte und Verteilungsfunktion für $Z \sim \mathbf{S}(0.7, \beta; 0)$

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

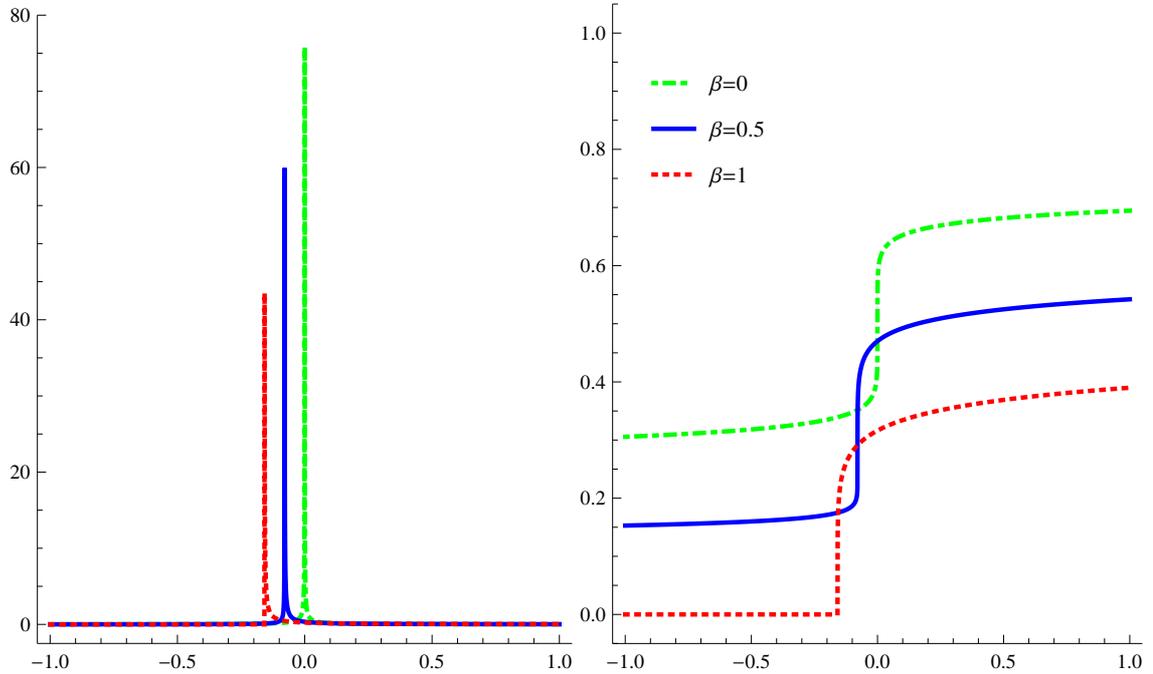


Abbildung 2.11: Dichte und Verteilungsfunktion für $Z \sim \mathbf{S}(0.1, \beta; 0)$

2.4 Momente

Zunächst soll das Verhalten der Ränder einer stabilen Verteilung untersucht werden. Nachdem die Normalverteilung gut erforscht ist, soll nun $\alpha < 2$ sein. Außer im Fall $\alpha < 1$ und $\beta = \pm 1$ mit nur einem Ende, haben beide Enden asymptotisch ein exponentielles Verhalten. Der Ausdruck $h(x) \sim g(x)$ mit $x \rightarrow a$ bedeutet $\lim_{x \rightarrow a} h(x)/g(x) = 1$.

Satz 2.4.1

Sei $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ mit $0 < \alpha < 2$, $-1 < \beta \leq 1$. Dann gilt für $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} P(X > x) &\sim \gamma^\alpha c_\alpha (1 + \beta) x^{-\alpha} \\ f(x|\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0) &\sim \alpha \gamma^\alpha c_\alpha (1 + \beta) x^{-(\alpha+1)}, \end{aligned}$$

wobei $c_\alpha = \sin(\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(\alpha)/\pi$. Mittels der Spiegelungseigenschaft erhält man die

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

Näherungen für das linke Ende (mit $-1 \leq \beta < 1$ und $x \rightarrow \infty$) durch:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < -x) &\sim \gamma^\alpha c_\alpha (1 - \beta) x^{-\alpha} \\ f(-x | \alpha, \beta, \gamma, \delta; 0) &\sim \alpha \gamma^\alpha c_\alpha (1 - \beta) x^{-(\alpha+1)}\end{aligned}$$

Eine Konsequenz von schweren Enden ist, dass nicht alle Momente existieren. Es lässt sich zeigen, dass für stabile Verteilungen $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$ für $0 < p < \alpha < 2$ und $\mathbb{E}[|X|^p] = +\infty$ für $p \geq \alpha$ gilt. Dies hat zur Folge, dass außer der Normalverteilung stabile Verteilungen kein zweites Moment und dadurch keine Varianz besitzen. Für $0 < \alpha \leq 1$ ergibt sich als Erwartungswert $+\infty$, sonst gilt

Satz 2.4.2

Sei $1 < \alpha \leq 2$, dann ist der Erwartungswert von $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; k)$, $k = 0, 1$:

$$\mu = \mathbb{E}[X] = \delta_1 = \delta_0 - \beta \gamma \tan \frac{\pi \alpha}{2}.$$

Betrachten wir eine standardisierte Zufallsvariable $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta)$, wenn $\alpha \downarrow 1$. Der Erwartungswert ist $\mu = -\beta \tan \frac{\pi \alpha}{2}$. Wenn $\beta = 0$, ist X symmetrisch und der $\mathbb{E}[X] = 0$. Sei nun $\beta > 0$ und α nähere sich 1 von oben an. Die Enden der Dichte werden schwerer und wegen der Rechtsschiefe geht der Erwartungswert gegen $+\infty$. Analog gilt $\mu \downarrow -\infty$, wenn $\beta < 0$. Schließlich, wenn α den Wert 1 erreicht, sind die Enden zu schwer und der Integralausdruck $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ konvergiert nicht mehr.

Man beachte, dass der Schiefeparameter β nicht der klassischen Schiefe entspricht. Diese ist ja für keine stabile Verteilung - außer der normalen - definiert, weil weder das dritte Moment noch die Varianz existieren. Genauso existiert keine Kurtosis für jede nicht-Gauß'sche stabile Zufallsvariable.

2.5 Summen

Die Grundeigenschaft stabiler Verteilungen ist, dass die Summe α -stabiler Zufallsvariablen wieder α -stabil ist. Dazu müssen allerdings die Summanden das gleiche α besitzen, sonst lässt sich zeigen, dass die Summe nicht stabil ist.

Proposition 2.5.1

(i) Sei $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$, dann gilt für alle $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$:

$$aX + b \sim \mathbf{S}(\alpha, \text{sign}(a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b; 0)$$

(ii) Die charakteristische Funktionen, Dichten und Verteilungsfunktionen sind stetig in allen vier Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und in x .

(iii) Seien $X_1 \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_1, \gamma_1, \delta_1; 0)$ und $X_2 \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta_2; 0)$ unabhängig. Dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ mit

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \\ \gamma^\alpha &= \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha, \\ \delta &= \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 + (\tan \frac{\pi\alpha}{2})[\beta\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2] & \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \delta_2 + \frac{2}{\pi}[\beta\gamma \log \gamma - \beta_1\gamma_1 \log \gamma_1 - \beta_2\gamma_2 \log \gamma_2] & \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Formel $\gamma^\alpha = \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha$ ist eine Verallgemeinerung der Additionsregel für die Varianz bei unabhängigen Zufallsvariablen.

Proposition 2.5.2

(i) Sei $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$, dann gilt für alle $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$:

$$aX + b \sim \begin{cases} \mathbf{S}(\alpha, \text{sign}(a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b; 1) & \alpha \neq 1 \\ \mathbf{S}(1, \text{sign}(a)\beta, |a|\gamma, a\delta + b - \frac{2}{\pi}\beta\gamma a \log |a|; 1) & \alpha = 1. \end{cases}$$

(ii) Die charakteristische Funktionen, Dichten und Verteilungsfunktionen sind stetig in allen vier Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und in x .

(iii) Seien $X_1 \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_1, \gamma_1, \delta_1; 0)$ und $X_2 \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta_2; 0)$ unabhängig. Dann

2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

ist $X_1 + X_2 \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 0)$ mit

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}, \\ \gamma^\alpha &= \gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha, \\ \delta &= \begin{cases} \delta_1 + \delta_2 + (\tan \frac{\pi\alpha}{2})[\beta\gamma - \beta_1\gamma_1 - \beta_2\gamma_2] & \alpha \neq 1 \\ \delta_1 + \delta_2 + \frac{2}{\pi}[\beta\gamma \log \gamma - \beta_1\gamma_1 \log \gamma_1 - \beta_2\gamma_2 \log \gamma_2] & \alpha = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Durch Induktion gelangt man zu Formeln für eine Summe von n stabilen Zufallsvariablen: Für unabhängige $X_j \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$ und beliebige Gewichte w_1, \dots, w_n gilt

$$w_1 X_1 + w_2 X_2 + \dots + w_n X_n \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma^\alpha &= \sum_{j=1}^n |w_j \gamma_j|^\alpha \\ \beta &= \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j (\text{sign } w_j) |w_j \gamma_j|^\alpha}{\gamma^\alpha} \\ \delta &= \begin{cases} \sum_j w_j \delta_j + (\tan \frac{\pi\alpha}{2})[\beta\gamma - \sum_j w_j \beta_j \gamma_j] & \alpha \neq 1 \\ \sum_j w_j \delta_j + \frac{2}{\pi}[\beta\gamma \log \gamma - \sum_j w_j \beta_j \gamma_j \log |w_j \gamma_j|] & \alpha = 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Ein wichtiges Merkmal stabiler Verteilungen ist ihre Skalierungseigenschaft: Seien $X_j \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ u.i.v. Zufallsvariablen, dann gilt

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, n^{1/\alpha} \gamma, \delta_n) \quad (2.3)$$

mit

$$\delta = \begin{cases} n\delta + \gamma\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2} (n^{1/\alpha} - n) & \alpha \neq 1 \\ n\delta + \gamma\beta \frac{2}{\pi} n \log n & \alpha = 1. \end{cases}$$

Die Summe nimmt die Form der ursprünglichen Verteilung an. Dies ist nur bei stabilen Verteilungen möglich.

3 Fundamentale Grenzwertsätze

Der klassische zentrale Grenzwertsatz dient als eine wichtige Rechtfertigung für verschiedene Normalverteilungsannahmen. Er besagt, dass die standardisierte Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlicher Varianz gegen eine Normalverteilung konvergiert. Genauer gesagt, seien X_1, \dots, X_n u.i.v. Zufallsvariablen mit Mittelwert μ und Varianz $\sigma^2 < \infty$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1) \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

In diesem Kapitel widmen wir uns Grenzverteilungen normierter Summen

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{b_n} - a_n \quad (3.2)$$

und stellen die Frage, wie alle möglichen Grenzverteilungen für Summen der Form 3.2 - ohne die Bedingung der endlichen Varianz - aussehen. In Kapitel 3.1 werden Bedingungen an die Zufallsvariablen X gestellt, damit Konvergenz gegen eine gewisse Grenzverteilung stattfindet.

So fern nicht anders angegeben, stützen sich die Aussagen in diesem Kapitel auf [Gnedenko und Kolmogorov, 1959], wo man auch die ausführlichen Beweise dazu findet.

3.1 Anziehungsbereiche stabiler Verteilungen

Definition 3.1.1

Seien $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ u.i.v. Zufallsgrößen mit gemeinsamer Verteilungsfunk-

3 Fundamentale Grenzwertsätze

tion $F(x)$. Wenn es Konstanten $a_n \in \mathbb{R}$ und $b_n > 0$ gibt, sodass die Verteilungsfunktionen der Summen

$$S_n = \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n X_k - a_n \quad (3.3)$$

für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Verteilungsfunktion $G(x)$ konvergieren, so sagt man, dass $F(x)$ zum Anziehungsbereich von $G(x)$ gehört.

Satz 3.1.2 (Verallgemeinerter Zentraler Grenzwertsatz)

Eine Verteilung ist genau dann stabil, wenn sie einen nichtleeren Anziehungsbereich hat.

Somit erhalten wir die wichtige Eigenschaft stabiler Verteilungen, dass sie und nur sie als Grenzwert für Summen der Form 3.2 in Frage kommen. Die folgenden Sätze beschreiben die Charakteristika des Anziehungsbereiches. Zunächst stellen wir Bedingungen an die Verteilungsfunktion $F(x)$, damit sie zum Anziehungsbereich einer Normalverteilung gehört, danach erfolgt die Beschreibung in der Terminologie der charakteristischen Funktionen. Analog bestimmen wir den Anziehungsbereich allgemeiner stabiler Verteilungen.

Satz 3.1.3

Damit eine Verteilungsfunktion $F(x)$ zum Anziehungsbereich einer Normalverteilung gehört, ist es notwendig und hinreichend, dass für $X \rightarrow \infty$

$$\frac{X^2 \int_{|x|>X} dF(x)}{\int_{|x|<X} x^2 dF(x)} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

strebt.

Satz 3.1.4

Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ mit charakteristischer Funktion $\phi(x)$ liegt genau dann im Anziehungsbereich einer Normalverteilung, wenn für beliebiges $t \geq 0$ und $s \rightarrow 0$

$$\frac{\Re(\log \phi(st))}{\Re(\log \phi(s))} \rightarrow t^2 \quad (3.5)$$

3 Fundamentale Grenzwertsätze

gleichmäßig bezüglich t konvergiert.

Satz 3.1.5

Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ gehört zum Anziehungsbereich einer stabilen Verteilung mit charakteristischem Exponenten α , $0 < \alpha < 2$, dann und nur dann, wenn für $x \rightarrow \infty$

$$\frac{F(-x)}{1 - F(x)} \rightarrow \frac{c_1}{c_2} \tag{3.6}$$

und für jedes feste $k > 0$

$$\frac{1 - F(x) + F(-x)}{1 - F(kx) + F(-kx)} \rightarrow k^\alpha \tag{3.7}$$

konvergiert.

Satz 3.1.6

Sei für eine Verteilungsfunktion $F(x)$ mit charakteristischer Funktion $\phi(t)$

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) \tag{3.8}$$

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{für } \alpha \leq 1 \\ e^{-iat} \phi(t) & \text{für } \alpha > 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

Damit $F(x)$ im Anziehungsbereich einer α -stabilen Verteilung ($0 < \alpha < 2$) liegt, ist es hinreichend und notwendig, dass für $t \geq 0$ und $s \rightarrow 0$ die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

a) Im Falle $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$

$$\frac{\Re(\log \phi(st))}{\Re(\log \tilde{\phi}(s))} \rightarrow t \tag{3.10}$$

und

$$\frac{\Im(\log \tilde{\phi}(st))}{\Re(\log \tilde{\phi}(s))} \rightarrow \beta s^\alpha \tan \frac{\pi\alpha}{2}; \tag{3.11}$$

3 Fundamentale Grenzwertsätze

b) Im Falle $\alpha = 1$

$$\frac{\Re(\log \tilde{\phi}(st))}{\Re(\log \tilde{\phi}(s))} \rightarrow t \quad (3.12)$$

und

$$\frac{\Im[\log \tilde{\phi}(st) - s \log \tilde{\phi}(t)]}{\Re(\log \tilde{\phi}(s))} \rightarrow \frac{2\beta}{\pi} t \log t. \quad (3.13)$$

3.2 Unbegrenzt teilbare Verteilungen

Ausgangspunkt unserer Überlegungen in diesem Kapitel war, dass wir uns für mögliche Grenzverteilungen normierter Summen der Form 3.2 interessierten, die wir in den stabilen Verteilungen identifiziert haben. Diese Aufgabe ändern wir nun leicht ab, indem wir es den Konstanten a_n und b_n erlauben nur eine gewisse Teilfolge $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ durchzulaufen und gegen ∞ zu streben. So gelangen wir zur

Definition 3.2.1

Eine Funktion $F(x)$ liegt im partiellen Anziehungsbereich einer Verteilung $G(x)$, wenn es eine Folge $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ gibt, sodass die Verteilungsfunktionen der Summen S_{n_k} bei geeigneter Wahl der Konstanten b_n und a_n gegen $G(x)$ konvergieren.

Definition 3.2.2

Eine Zufallsvariable X ist unbegrenzt teilbar, wenn sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Summe

$$X = X_{n_1} + X_{n_2} + \dots + X_{n_n} \quad (3.14)$$

von n u.i.v. Zufallsgrößen $X_{n_1}, X_{n_2}, \dots, X_{n_n}$ dargestellt werden kann. Auch die Verteilungsfunktion einer unbegrenzt teilbaren Zufallsgröße soll unbegrenzt teilbar heißen.

3 Fundamentale Grenzwertsätze

Klarerweise ist eine Verteilungsfunktion $F(x)$ genau dann unbegrenzt teilbar, wenn ihre charakteristische Funktion $\phi(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die n -te Potenz einer gewissen charakteristischen Funktion $\phi_n(t)$ ist, die von n abhängt. Wenn $\phi_n(0) = 1$ und $\phi_n(t)$ stetig ist, gilt $\phi_n(t) = \sqrt[n]{\phi(t)}$ und $\phi_n(t)$ sowie die entsprechende Verteilungsfunktion $F_n(x)$ sind durch $\phi(t)$ bzw. $F(x)$ eindeutig bestimmt.

Es sollte erwähnt werden, dass unbegrenzte Teilbarkeit eine Typeneigenschaft ist. Verteilungen, die sich von $F(x)$ nur durch Lokalisationsparameter unterscheiden, sind genauso unendlich teilbar. Stabile Verteilungen sind unendlich teilbar, die Umkehrung gilt nicht.

Wir sehen uns nun einige Beispiele für unbegrenzt teilbare Verteilungen an und stellen wichtige Eigenschaften und ihre Darstellung über die charakteristische Funktion vor.

Beispiele

Zufallsvariablen mit einer Normal-, Cauchy- oder Poissonverteilung sind unbegrenzt teilbar. Dies folgt sofort durch einen Blick auf ihre charakteristischen Funktionen: Seien $Z_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $Z_2 \sim \text{Cauchy}(\gamma, \delta)$ und $Z_3 \sim P(\lambda)$, wobei die möglichen Werte von Z_3 der Form $a + kh$, $k = 0, 1, 2, \dots$, seien, dann sind ihre charakteristischen Funktionen gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi_{Z_1}(t) &= e^{i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} & \Rightarrow \phi_{nZ_1}(t) &= e^{i\frac{\mu}{n}t - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}} \\ \phi_{Z_2}(t) &= e^{i\delta t - \gamma|t|} & \Rightarrow \phi_{nZ_2}(t) &= e^{i\frac{\delta}{n}t - \frac{\gamma}{n}|t|} \\ \phi_{Z_3}(t) &= e^{iat + \lambda(\exp(it h) - 1)} & \Rightarrow \phi_{nZ_3}(t) &= e^{i\frac{a}{n}t + \frac{\lambda}{n}(e^{it h} - 1)} \end{aligned}$$

Eigenschaften

- Für die charakteristische Funktion $\phi(t)$ einer unbegrenzt teilbaren Verteilung gilt: $\phi(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$
- Die Summe von endlich vielen voneinander unabhängigen unbegrenzt teilbaren Zufallsvariablen ist ebenfalls unbegrenzt teilbar.
- Seien $F_k(x)$ unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktionen und konvergiere $F_k(x)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen eine Verteilungsfunktion $F(x)$. Dann ist auch $F(x)$ unbegrenzt teilbar.

3 Fundamentale Grenzwertsätze

- Wenn $\phi(t)$ die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung ist, dann ist auch die Funktion $\phi(t)^p$ für beliebiges $p > 0$ eine charakteristische Funktion.

Satz 3.2.3

Jede unbegrenzt teilbare Verteilungsfunktion besitzt einen partiellen Anziehungsbereich.

Satz 3.2.4

Eine Funktion $\phi(t)$ ist genau dann die charakteristische Funktion einer unbegrenzt teilbaren Verteilung, wenn sich ihr Logarithmus in der Form

$$\log \phi(t) = i\gamma t + \int \left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2} dG(u) \quad (3.15)$$

darstellen lässt. Dabei sei $\gamma \in \mathbb{R}$ konstant, $G(u)$ eine nichtfallende Funktion beschränkter Schwankung und der Integrand für $u = 0$ durch

$$\left[\left\{ e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right\} \frac{1+u^2}{u^2} \right]_{u=0} = -\frac{t^2}{2}$$

definiert.

Die Darstellung von $\log \phi(t)$ in der Formel 3.15 ist eindeutig und wird als *Lévy-Chintschinsche Formel* bezeichnet. Sie ist eine Verallgemeinerung der *Kolmogorowschen Formel*

$$\log \phi(t) = i\gamma t + \int \{ e^{itu} - 1 - itu \} \frac{1}{u^2} dK(u) \quad (3.16)$$

mit einer Konstanten γ und einer nichtfallenden Funktion beschränkter Schwankung $K(u)$. Auch diese Darstellung von $\log \phi(t)$ ist eindeutig und man erhält sie aus 3.15 durch die Wahl $K(u) = \int_{-\infty}^u (1+v^2)dG(v)$.

Mit Hilfe dieser Formeln wollen wir nun Konvergenzbedingungen für unbegrenzt teilbare Verteilungen aufstellen.

3 Fundamentale Grenzwertsätze

Satz 3.2.5

Eine Folge $F_n(x)$ unbegrenzt teilbarer Verteilungen konvergiert genau dann gegen eine Grenzverteilung $F(x)$, wenn für $n \rightarrow \infty$

1. $G_n(x) \rightarrow G(x)$,
2. $\int_{|x|>c} dG_n(x) \rightarrow 0$ für $c \rightarrow \infty$,
3. $\gamma_n \rightarrow \gamma$

gilt. Die Funktionen $G_n(x)$ und $G(x)$ sowie die Konstanten γ_n und γ bestimmt man aus der Lévy-Chintschinschen Formel für $F_n(x)$ und $F(x)$.

Satz 3.2.6

Damit eine Folge $F_n(x)$ unbegrenzt teilbarer Verteilungsfunktionen mit endlichen Streuungen gegen eine Normalverteilung $F(x)$, sowie ihre Streuungen gegen die Streuung der Grenzverteilung konvergiert, ist es notwendig und hinreichend, dass für $n \rightarrow \infty$

1. $K_n(x) \rightarrow K(x)$,
2. $\int_{|x|>c} dK_n(x) \rightarrow 0$ für $c \rightarrow \infty$ gleichmäßig bezüglich n ,
3. $\gamma_n \rightarrow \gamma$,

gilt. Die Funktionen $K_n(x)$ und $K(x)$ sowie die Konstanten γ_n und γ sind durch die Kolmogorowsche Formel für $F_n(x)$ und $F(x)$ gegeben.

3.3 Verteilungen der Klasse L

Definition 3.3.1

Man sagt, dass eine Verteilungsfunktion $F(x)$ zur Klasse L gehört, wenn es eine Folge $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ unabhängiger Zufallsgrößen gibt, sodass bei geeigneter Wahl der Konstanten a_n und $b_n > 0$ die Verteilungsfunktionen der Summen der Form 3.2 für $n \rightarrow \infty$ gegen $F(x)$ konvergieren und die Zufallsvariablen

$$X_{nk} = \frac{X_k}{B_n}, \quad 1 \leq k \leq n$$

3 Fundamentale Grenzwertsätze

asymptotisch konstant sind.

Offensichtlich ist eine L-Verteilungsfunktion $F(x)$ unbegrenzt teilbar und ihre charakteristische Funktion $\phi(t)$ lässt sich mit der Lévy-Chintschinschen Formel darstellen. Aus dieser wollen wir nun die Lévy'sche Formel herleiten. Dazu definieren wir die Funktionen $M(u)$ und $N(u)$ sowie eine Konstante γ^2 durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} M(u) &= \int_{-\infty}^u \frac{1+z^2}{z^2} dG(z) \quad \text{für } u < 0, \\ N(u) &= - \int_u^{\infty} \frac{1+z^2}{z^2} dG(z) \quad \text{für } u > 0, \\ \gamma^2 &= G(0+) - G(0-) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Für die Funktionen $M(u)$ und $N(u)$ gilt:

Sie sind nichtfallend in den jeweiligen Intervallen $(-\infty, 0)$ bzw. $(0, +\infty)$, sie sind stetig in genau jenen Punkten, in denen $G(u)$ stetig ist,

$$M(-\infty) = N(+\infty) = 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\epsilon}^0 u^2 dM(u) + \int_0^{\epsilon} u^2 dN(u) < +\infty$$

für beliebige $\epsilon > 0$.

Wir setzen nun $M(u)$ und $N(u)$ in Gleichung 3.15 ein und erhalten die Lévy'sche Formel:

$$\begin{aligned} \log \phi(t) &= i\gamma t - \frac{\gamma^2 t^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dM(u) \\ &\quad + \int_0^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) dN(u), \end{aligned} \tag{3.18}$$

[Lévy, 1937] fand heraus, dass folgende Bedingungen hinreichend und notwendig sind, damit eine Verteilungsfunktion $F(x)$ der Klasse L angehört:

Satz 3.3.2

Bezeichne $M'(u)$ und $N'(u)$ die rechts- oder linksseitige Ableitung von $M(u)$ bzw. $N(u)$. Eine Verteilungsfunktion gehört genau dann zur Klasse L, wenn die Funktionen $M(u)$ und $N(u)$ für jeden Wert rechts- und linksseitige Ableitungen besitzen und die Funktionen $uM'(u)$ für $u < 0$, $uN'(u)$ für $u > 0$ nicht steigend sind.

3 Fundamentale Grenzwertsätze

Definition 3.3.3

Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ heißt unimodal mit Modus m , wenn $F(x)$ konvex für $x < m$ und konkav für $x > m$ ist.

Satz 3.3.4

Alle Verteilungen der Klasse L sind unimodal.

Es ist interessant zu erwähnen, dass [Gnedenko und Kolmogorov, 1959] bereits in der russischen Originalausgabe aus dem Jahre 1949 einen Beweis für Satz 3.3.4 liefern. Dieser Beweis beruht auf einem Satz von Lapin, nach dem die Faltung zweier unimodaler Verteilungsfunktionen mit Modus 0 unimodal mit Modus 0 ist. Jedoch stellte sich bald heraus, dass Lapins Satz inkorrekt ist und so herrschte längere Zeit Unklarheit darüber, ob L -Verteilungsfunktionen nun unimodal sind oder nicht. Zunächst konnte man Unimodalität für symmetrische, später auch für andere Unterklassen von Verteilungen der Klasse L zeigen. Schließlich gelang es [Yamazato, 1978] den Beweis für die gesamte Klasse L zu erbringen.

4 Simulation

4.1 Methode von Chambers-Mallows-Stuck

Der Umstand, dass die Grenzverteilung für die normalisierte Summe von i.i.d. Zufallsvariablen stabil sein muss, erfordert eine Möglichkeit stabile Zufallsvariablen zu simulieren. Die Arbeit von Chambers, Mallows und Stuck [Chambers u. a., 1976] war die erste, die einen Algorithmus zur Simulation stabiler Zufallsvariablen für beliebige α ($0 < \alpha \leq 2$) und β ($-1 \leq \beta \leq 1$) liefert. Für die Herleitung dieser Methode greifen wir in diesem Abschnitt auf eine neue Parametrisierung zurück, die wir nun einführen wollen.

Definition 4.1.1

Eine Zufallsvariable $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_2, \gamma_2, \delta; 2)$ ist α -stabil genau dann, wenn sich ihre charakteristische Funktion als

$$\mathbb{E}[\exp(iuX)] = \begin{cases} \exp(-\gamma_2^\alpha |u|^\alpha \exp[-i\beta_2 \operatorname{sign}(u) \frac{\pi}{2} K(\alpha)] + i\delta u) & \alpha \neq 1 \\ \exp(-\gamma_2 |u| [\frac{\pi}{2} + i\beta_2 \operatorname{sign}(u) \log |u| + i\delta u]) & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\text{mit } K(\alpha) = \alpha - 1 + \operatorname{sign}(1 - \alpha) = \begin{cases} \alpha & \alpha < 1 \\ \alpha - 2 & \alpha > 1 \end{cases}$$

darstellen lässt.

Die Parameter γ_2 und β_2 verhalten sich zu γ_1 und β_1 aus der 1-Darstellung folgendermaßen: Für $\alpha \neq 1$ gelten

$$\tan(\beta_2 \frac{\pi K(\alpha)}{2}) = \beta_1 \tan \frac{\pi \alpha}{2}, \quad \sigma_2 = \sigma_1 (1 + \beta_1^2 \tan^2 \frac{\pi \alpha}{2})^{1/(2\alpha)}$$

4 Simulation

und für $\alpha = 1$ gelten $\beta_2 = \beta_1$, $\sigma_2 = \frac{2}{\pi}\sigma$.

Für den Beweis der Methode verwenden wir aus [Zolotarev, 1986] folgende

Proposition 4.1.2

Seien

$$\begin{aligned}\epsilon(\alpha) &= \text{sign}(1 - \alpha) \\ \gamma_0 &= -\frac{\pi}{2}\beta_2 \frac{K(\alpha)}{\alpha} \\ C(\alpha, \beta_2) &= 1 - 1/4 \cdot (1 + \beta_2 K(\alpha)/\alpha)(1 + \epsilon(\alpha)) \\ U_\alpha(\gamma, \gamma_0) &= \left(\frac{\sin \alpha(\gamma - \gamma_0)}{\cos \gamma} \right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos(\gamma - \alpha(\gamma - \gamma_0))}{\cos \gamma} \\ U_1(\gamma, \beta_2) &= \frac{\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma}{\cos \gamma} \exp\left(\frac{1}{\beta_2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma \right) \tan \gamma \right),\end{aligned}$$

dann gilt für die Verteilungsfunktion $F(x|\alpha, \beta_2; 2)$ einer stabilen Zufallsvariable, falls $\alpha \neq 1$ und $x > 0$

$$F(x|\alpha, \beta_2; 2) = C(\alpha, \beta_2) + \frac{\epsilon(\alpha)}{\pi} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)} U_\alpha(\gamma, \gamma_0)] d\gamma, \quad (4.1)$$

$$F(x|1, \beta_2; 2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[-e^{-x/\beta_2} U_1(\gamma, \beta_2)] d\gamma, \text{ falls } \alpha = 1 \text{ und } \beta_2 > 0. \quad (4.2)$$

Außerdem gilt für $\alpha < 1$: $\mathbb{P}(X \leq 0) = (1 - \beta_2)/2$.

Die Fälle $\alpha \neq 1$, $x < 0$ und $\alpha = 1$, $\beta_2 < 0$ können auf die entsprechenden Fälle $\alpha \neq 1$, $x > 0$ und $\alpha = 1$, $\beta_2 > 0$ zurückgeführt und mittels der Gleichung

$$F(-x|\alpha, \beta_2; 2) + F(x|\alpha, -\beta_2; 2) = 1 \quad (4.3)$$

gelöst werden.

Als letzte Vorbereitung für den folgenden Satz 4.1.4 benötigen wir noch

4 Simulation

Lemma 4.1.3

Seien γ_0 und $U_\alpha(\gamma, \gamma_0)$ definiert wie in Proposition 4.1.2. Dann gilt für $\alpha \neq 1$ und $\gamma_0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$, dass $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_2, 1, 0; 2)$ genau dann, wenn für $x > 0$ gilt:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)} U_\alpha(\gamma, \gamma_0)] d\gamma = \begin{cases} \mathbb{P}(0 < X \leq x) & \alpha < 1 \\ \mathbb{P}(X \geq x) & \alpha > 1. \end{cases}$$

Beweis: Aus Gleichung (2.1) erhält man

$0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned} F(x|\alpha, \beta_2; 2) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= \frac{1 - \beta_2}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)} U_\alpha(\gamma, \gamma_0)] d\gamma \\ &= \frac{1 - \beta_2}{2} + \mathbb{P}(0 < X \leq x) \end{aligned}$$

$1 < \alpha \leq 2$:

$$\begin{aligned} F(x|\alpha, \beta_2; 2) &= \mathbb{P}(X \leq x) \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)} U_\alpha(\gamma, \gamma_0)] d\gamma \\ &= 1 - \mathbb{P}(X \geq x) \end{aligned}$$

□

Satz 4.1.4

Seien γ_0 definiert wie in Proposition 4.1.2, γ gleichverteilt auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und W eine unabhängige, mit Erwartungswert 1 exponentialverteilte Zufallsvariable. Dann gilt für $\alpha \neq 1$

$$X = \frac{\sin \alpha(\gamma - \gamma_0)}{(\cos \gamma)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(\gamma - \alpha(\gamma - \gamma_0))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_2, 1, 0; 2),$$

und für $\alpha = 1$

$$X = \left(\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma \right) \tan \gamma - \beta_2 \log \left(\frac{W \cos \gamma}{\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma} \right) \sim \mathbf{S}(1, \beta_2, 1, 0; 2).$$

4 Simulation

Beweis aus [Weron, 1996]:

Wenn $\gamma > \gamma_0$, dann ist der Ausdruck in Gleichung (2.4) positiv und kann ausgedrückt werden als

$$\left(\frac{a(\gamma)}{W}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}, \text{ wobei } a(\gamma) = \left(\frac{\sin \alpha(\gamma - \gamma_0)}{\cos \gamma}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} \frac{\cos(\gamma - \alpha(\gamma - \gamma_0))}{\cos \gamma}.$$

$0 < \alpha < 1$: In Gleichung (2.4) gilt $X > 0 \Leftrightarrow \gamma > \gamma_0$ und $(1 - \alpha)/\alpha > 0$, also

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(0 < X \leq x) &= \mathbb{P}(0 < X \leq x, \gamma > \gamma_0) \\ &= \mathbb{P}(0 < (a(\gamma)/W)^{(1-\alpha)/\alpha} \leq x, \gamma > \gamma_0) \\ &= \mathbb{P}(W \geq x^{\alpha/(\alpha-1)} a(\gamma), \gamma > \gamma_0) \\ &= \mathbb{E}_\gamma \exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)} a(\gamma), \gamma > \gamma_0] \mathbf{1}_{[\gamma > \gamma_0]} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)} a(\gamma)] d\gamma, \end{aligned}$$

wobei \mathbb{E}_γ den Erwartungswert nach γ bildet. Aus Lemma 4.1.3 und Gleichung 4.3 folgern wir $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_2, 1, 0; 2)$.

$1 < \alpha \leq 2$: Wegen $(\alpha-1)/\alpha > 0$ können wir für $x > 0$ schreiben

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq x) &= \mathbb{P}(X \geq x, \gamma > \gamma_0) \\ &= \mathbb{P}((a(\gamma)/W)^{(1-\alpha)/\alpha} \geq x, \gamma > \gamma_0) \\ &= \mathbb{P}(W/a(\gamma))^{(\alpha-1)/\alpha}, \gamma > \gamma_0) \\ &= \mathbb{P}(W \geq x^{\alpha/(\alpha-1)} a(\gamma), \gamma > \gamma_0) \\ &= \mathbb{E}_\gamma \exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)} a(\gamma), \gamma > \gamma_0] \mathbf{1}_{[\gamma > \gamma_0]} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \exp[-x^{\alpha/(\alpha-1)} a(\gamma)] d\gamma, \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.1.3 und Gleichung 4.3 folgern wir wieder $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta_2, 1, 0; 2)$.

$\alpha = 1$: Sei zunächst $\beta_2 = 0$, dann vereinfacht sich die rechte Seite von Gleichung (3.3) zu $\frac{\pi}{2} \tan \gamma$ und liefert eine Cauchy-Verteilung. Sei nun $\beta_2 \neq 0$, dann kann

4 Simulation

man sie als

$$\beta_2 \log \left(\frac{a_1(\gamma)}{W} \right), \text{ wobei } a_1(\gamma) = \frac{\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma}{\cos \gamma} \exp \left(\frac{1}{\beta_2} \left(\frac{\pi}{2} + \beta_2 \gamma \right) \tan \gamma \right)$$

ausdrücken. Für $\beta_2 > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leq x) &= \mathbb{P}(\beta_2 \log(a_1(\gamma)/W) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(W \geq e^{-x/\beta_2} a_1(\gamma)) \\ &= \mathbb{E}_\gamma \exp[e^{-x/\beta_2} a_1(\gamma)] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[e^{-x/\beta_2} a_1(\gamma)] d\gamma, \end{aligned}$$

also erhalten wir für alle β_2 : $X \sim \mathbf{S}(1, \beta_2, 1, 0; 2)$. \square

Mit Hilfe von Satz 4.1.4 lässt sich eine stabile Zufallsvariable $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, 1, 0; 1)$ für $\alpha \in (0, 2]$ und $\beta \in [-1, 1]$ folgendermaßen erzeugen:

- Generiere eine auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gleichverteilte Zufallsvariable V und eine mit Erwartungswert 1 exponentialverteilte Zufallsvariable W .
- Für $\alpha \neq 1$ berechne

$$\begin{aligned} X &= S_{\alpha, \beta} \cdot \frac{\sin(\alpha(V + B_{\alpha, \beta}))}{(\cos(V))^{1/\alpha}} \cdot \left(\frac{\cos(V - \alpha(V + B_{\alpha, \beta}))}{W} \right)^{(1-\alpha)/\alpha}, \\ \text{wobei} \\ B_{\alpha, \beta} &= \frac{\arctan(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2})}{\alpha} \\ S_{\alpha, \beta} &= \left[1 + \beta^2 \tan^2 \frac{\pi\alpha}{2} \right]^{1/(2\alpha)} \end{aligned}$$

- Für $\alpha = 1$ berechne

$$X = \frac{2}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \beta V \right) \tan V - \beta \log \left(\frac{W \cos V}{\frac{\pi}{2} + \beta V} \right) \right].$$

Die Terme $B_{\alpha, \beta}$ und $S_{\alpha, \beta}$ benötigt man aufgrund des Parameterwechsels von β_2 zu β bzw. von γ_2 zu γ .

4 Simulation

Mittels der folgenden Eigenschaft erreicht man schließlich eine stabile Zufallsvariable, die jeden zulässigen Wert für die Parameter α, β, γ und δ erlaubt:

Seien $X \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, 1, 0; 1)$ und

$$Y = \begin{cases} \gamma X + \delta & \alpha \neq 1 \\ \gamma X + \frac{2}{\pi} \beta \gamma \log \gamma + \delta & \alpha = 1. \end{cases}$$

dann ist $Y \sim \mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$.

5 Parameterschätzung

Die Aufgabe Parameter einer stabilen Verteilung zu schätzen wird im Allgemeinen dadurch erschwert, dass es bis auf wenige Ausnahmen keine geschlossene Darstellung für die Dichtefunktion gibt. Da viele übliche Methoden der Statistik auf dieser beruhen, können sie in diesem Fall nicht angewandt werden. Es wurden deshalb mehrere numerische Methoden entwickelt, die wir in diesem Kapitel vorstellen wollen. Ausgehend von einer Stichprobe x_1, \dots, x_n einer $\mathbf{S}(\alpha, \beta, \gamma, \delta; 1)$ -Verteilung liefern wir Schätzungen $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}$ für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Wir beginnen mit der schnellsten, einfachsten aber auch ungenauesten Methode, der Schätzung über Quantile. Wir setzen dann mit der etwas langsameren, dafür treffsichereren Schätzung mit Hilfe der charakteristischen Funktion fort und erläutern zum Schluss die rechenintensivste und genaueste Methode über Maximum-Likelihood.

5.1 Schätzung über Quantile

[Fama und Roll, 1971] präsentierten eine auf empirischen Quantilen basierte Methode zur Schätzung der Parameter α und γ einer symmetrischen ($\beta = 0, \delta = 0$) stabilen Verteilung, wenn $1 < \alpha \leq 2$. Die Methode von Fama und Roll ist einfach zu implementieren, leidet aber neben der Einschränkung der Parameter auch unter einer asymptotischen Verzerrtheit der Schätzer. [McCulloch, 1986] verallgemeinerte und verbesserte diese Methode. Er lieferte konsistente Schätzer für alle vier Parameter, mit $0,6 \leq \alpha \leq 2$ und behielt dabei die rechnerische Schlichtheit von Fama-Rolls Methode.

5 Parameterschätzung

Bezeichne x_p das empirische p-Quantil. McCulloch definiert

$$\nu_\alpha = \frac{x_{0,95} - x_{0,05}}{x_{0,75} - x_{0,25}}, \nu_\beta = \frac{x_{0,95} - x_{0,05} - 2x_{0,50}}{x_{0,95} - x_{0,05}} \quad (5.1)$$

und zeigt, dass die beiden Variablen unabhängig von γ und δ sind. Desweiteren sind sie eine fallende und steigende Funktion in α beziehungsweise β . Seien $\hat{\nu}_\alpha$ und $\hat{\nu}_\beta$ die entsprechenden Stichprobenwerte, dann sind $\hat{\nu}_\alpha$ und $\hat{\nu}_\beta$ konsistente Schätzer von ν_α beziehungsweise ν_β .

ν_α und ν_β sind Funktionen von α und β . Wenn man diese Beziehung invertiert, kann man die Parameter α und β als Funktionen von ν_α und ν_β betrachten:

$$\alpha = \psi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta), \beta = \psi_2(\nu_\alpha, \nu_\beta). \quad (5.2)$$

Ersetzt man nun ν_α und ν_β durch ihre Stichprobenwerte, erhält man konsistente Schätzer für α und β .

α	ν_β						
ν_α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
2.5	1.916	1.924	1.924	1.924	1.924	1.924	1.924
2.6	1.808	1.813	1.829	1.829	1.829	1.829	1.829
2.7	1.729	1.730	1.737	1.745	1.745	1.745	1.745
2.8	1.664	1.663	1.663	1.668	1.676	1.676	1.676
3.0	1.563	1.560	1.553	1.548	1.547	1.547	1.547
3.2	1.484	1.480	1.471	1.460	1.448	1.438	1.438
3.5	1.391	1.386	1.378	1.364	1.337	1.318	1.318
4.0	1.279	1.273	1.266	1.250	1.210	1.184	1.150
5.0	1.128	1.121	1.114	1.101	1.067	1.027	0.973
6.0	1.029	1.021	1.014	1.004	0.974	0.935	0.874
8.0	0.896	0.892	0.887	0.883	0.855	0.823	0.769
10.0	0.818	0.812	0.806	0.801	0.780	0.756	0.691
15.0	0.698	0.695	0.692	0.689	0.676	0.656	0.595
25.0	0.593	0.590	0.588	0.586	0.579	0.563	0.513

Tabelle 5.1: $\alpha = \psi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta) = \psi_1(\nu_\alpha, -\nu_\beta)$

Tabelle 5.1 zeigt α als Funktion von ν_α und ν_β . McCulloch legt den niedrigsten

5 Parameterschätzung

Wert von ν_α mit 2,439 fest. Sollte $\hat{\nu}_\alpha$ kleiner als 2,439 sein, was bei endlicher Stichprobe vorkommen kann, lauten die Schätzer $\hat{\alpha} = 2$ und $\hat{\beta} = 0$.

β	ν_β						
ν_α	0.0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	1.0
2.439	0.000	2.160	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2.5	0.000	1.592	3.390	1.000	1.000	1.000	1.000
2.6	0.000	0.759	1.800	1.000	1.000	1.000	1.000
2.7	0.000	0.482	1.048	1.694	1.000	1.000	1.000
2.8	0.000	0.360	0.760	1.232	2.229	1.000	1.000
3.0	0.000	0.253	0.518	0.823	1.575	1.000	1.000
3.2	0.000	0.203	0.410	0.632	1.244	1.906	1.000
3.5	0.000	0.165	0.332	0.499	0.943	1.560	1.000
4.0	0.000	0.136	0.271	0.404	0.689	1.230	2.195
5.0	0.000	0.109	0.216	0.323	0.539	0.827	1.917
6.0	0.000	0.096	0.190	0.284	0.472	0.693	1.759
8.0	0.000	0.082	0.163	0.243	0.412	0.601	1.596
10.0	0.000	0.074	0.147	0.220	0.377	0.546	1.482
15.0	0.000	0.064	0.128	0.191	0.330	0.478	1.362
25.0	0.000	0.056	0.112	0.167	0.285	0.428	1.274

Tabelle 5.2: $\beta = \psi_2(\nu_\alpha, \nu_\beta) = -\psi_2(\nu_\alpha, -\nu_\beta)$

Tabelle 5.2 zeigt β als Funktion von ν_α und ν_β . Werte > 1 in der Tabelle werden für bivariate lineare Interpolation benötigt. Wenn der interpolierte Schätzer für β größer als 1 sein sollte, wird $\hat{\beta} = 1$ gesetzt.

Tabelle 5.3 zeigt das Verhalten von

$$\nu_\gamma = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{\gamma}, \tag{5.3}$$

als eine Funktion $\psi_3(\alpha, \beta)$. Da $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{x}_{0,25}$ und $\hat{x}_{0,75}$ konsistente Schätzer für α , β , $x_{0,25}$ und $x_{0,75}$ sind, ist

$$\hat{\gamma} = \frac{x_{0,75} - x_{0,25}}{\psi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})} \tag{5.4}$$

ein konsistenter Schätzer für γ .

5 Parameterschätzung

ν_γ	β				
	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
2.0	1.908	1.908	1.908	1.908	1.908
1.9	1.914	1.915	1.916	1.918	1.921
1.8	1.921	1.922	1.927	1.936	1.947
1.7	1.927	1.930	1.943	1.961	1.987
1.6	1.933	1.940	1.962	1.997	2.043
1.5	1.939	1.952	1.988	2.045	2.116
1.4	1.946	1.967	2.022	2.106	2.211
1.3	1.955	1.984	2.067	2.188	2.333
1.2	1.965	2.007	2.125	2.294	2.491
1.1	1.980	2.040	2.205	2.435	2.696
1.0	2.000	2.085	2.311	2.624	2.973
0.9	2.040	2.149	2.461	2.886	3.356
0.8	2.098	2.244	2.676	3.265	3.912
0.7	2.189	2.392	3.004	3.844	4.775
0.6	2.337	2.635	3.542	4.808	6.247
0.5	2.588	3.073	4.534	6.636	9.14

Tabelle 5.3: $\nu_\gamma = \psi_3(\alpha, \beta) = \psi_3(\alpha, -\beta)$

Für den Lageparameter δ definiert McCulloch

$$\psi_4(\alpha, -\beta) = \nu_\eta = \frac{\eta - x_{0,50}}{\gamma} \tag{5.5}$$

mit

$$\eta = \begin{cases} \delta + \beta\gamma \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \alpha \neq 1 \\ \delta & \alpha = 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

Somit erhält man einen konsistenten Schätzer für δ durch

$$\hat{\delta} = \hat{x}_{0,5} + \hat{\gamma} \left(\psi_4(\hat{\alpha}, -\hat{\beta}) - \hat{\beta} \tan \frac{\pi\hat{\alpha}}{2} \right). \tag{5.7}$$

5 Parameterschätzung

ν_η	β				
α	0.0	0.25	0.5	0.75	1.0
2.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.90	0.0	-0.017	-0.032	-0.049	-0.064
1.80	0.0	-0.030	-0.061	-0.092	-0.123
1.70	0.0	-0.043	-0.088	-0.132	-0.179
1.60	0.0	-0.056	-0.111	-0.170	-0.232
1.50	0.0	-0.066	-0.134	-0.206	-0.283
1.40	0.0	-0.075	-0.154	-0.241	-0.335
1.30	0.0	-0.084	-0.173	-0.276	-0.390
1.20	0.0	-0.090	-0.192	-0.310	-0.447
1.10	0.0	-0.095	-0.208	-0.346	-0.508
1.00	0.0	-0.098	-0.223	-0.383	-0.576
0.90	0.0	-0.099	-0.237	-0.424	-0.652
0.80	0.0	-0.096	-0.250	-0.469	-0.742
0.70	0.0	-0.089	-0.262	-0.520	-0.853
0.60	0.0	-0.078	-0.272	-0.581	-0.997
0.50	0.0	-0.061	-0.279	-0.659	-1.198

Tabelle 5.4: $\nu_\eta = \psi_4(\alpha, -\beta) = -\psi_4(\alpha, \beta)$

5.2 Schätzung mit Hilfe der charakteristischen Funktion

Sei für eine Stichprobe x_1, \dots, x_n der Größe n die empirische charakteristische Funktion gegeben durch

$$\hat{\phi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(itX_j). \quad (5.8)$$

Da $|\hat{\phi}(t)|$ durch 1 beschränkt ist, sind alle Momente von $\hat{\phi}(t)$ endlich. Nach dem Gesetz der großen Zahlen ist $\hat{\phi}(t)$ ein konsistenter Schätzer der theoretischen charakteristischen Funktion $\phi(t)$.

Die in [Press, 1972] vorgestellte Methode der Momente beruht auf Transformationen der charakteristischen Funktion. Die erhaltenen Schätzer sind zwar konsistent,

5 Parameterschätzung

aber die Konvergenz zu den tatsächlichen Parametern hängt stark von den vier Ausgangspunkten ab.

[Koutrouvelis, 1980] präsentierte eine viel präzisere Regressionsmethode, die von einer ersten Parameterschätzung ausgehend so lang iterativ abläuft, bis vorgegebene Konvergenzkriterien erfüllt werden. Aus der Definition 2.2.2 erhält man

$$\log(-\log |\phi(t)|^2) = \log(2\gamma^\alpha) + \alpha \log |t|. \quad (5.9)$$

Für $\alpha \neq 1$ sind Real- und Imaginärteil von $\phi(t)$ gegeben durch:

$$\Re(\phi(t)) = \exp(-|\gamma t|^\alpha) \cos \left[\delta t + |\gamma t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right], \quad (5.10)$$

$$\Im(\phi(t)) = \exp(-|\gamma t|^\alpha) \sin \left[\delta t + |\gamma t|^\alpha \beta \text{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right]. \quad (5.11)$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$\arctan \frac{\Im(\phi(t))}{\Re(\phi(t))} = \delta t + \beta \gamma^\alpha \tan \frac{\pi\alpha}{2} \text{sign}(t) |t|^\alpha. \quad (5.12)$$

Gleichung 5.9 hängt nur von α und γ ab, daraus erhalten wir nach dem Vorschlag von Koutrouvelis Schätzer für diese Parameter mittels einer Regression von $y = \log(-\log |\phi_n(t)|^2)$ auf $\omega = \log |t|$ im Modell

$$y_k = m + \alpha \omega_k + \epsilon_k, \quad k=1,2,\dots, K, \quad (5.13)$$

mit $m = \log(2\gamma^\alpha)$, einem Fehlerterm ϵ_k und $t_k = \frac{\pi k}{25}$, $k = 1, 2, \dots, K$, K im Bereich zwischen 9 und 134 abhängig von verschiedenen Schätzwerten für α und der Stichprobengröße.

Sei nun $g_n(u) = \text{Arctan}(\Im(\phi(u)_n)/\Re(\phi(u)_n))$, wobei Arctan den Hauptwert der \arctan -Funktion bezeichnet. Aus der Gleichung 5.12 und den Schätzungen für α und γ kann man β und δ das Regressionsmodell $z = g_n(u) + \pi k_n(u)$ auf u und $\text{sign}(u)|u|^\alpha$

$$z_l = \delta u_l + \beta \gamma^\alpha \tan \frac{\pi\alpha}{2} \text{sign}(u_l) |u_l|^\alpha + \eta_l, \quad l=1,2,\dots, L, \quad (5.14)$$

5 Parameterschätzung

mit einem Fehlerterm η_l , $u_l = \frac{\pi^l}{50}$, $l = 1, 2, \dots, L$, $9 < L < 70$ benützen, um Schätzungen für β und δ zu erhalten. Der Ausdruck $k_n(u)$ wird benötigt um die anderen Werte der arctan-Funktion zu berücksichtigen.

Im nächsten Schritt werden die Regressionen mit $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ und $\hat{\delta}$ als initiale Parameter durchgeführt. Die Iteration wird wiederholt, bis bestimmte vorgegebene Konvergenzkriterien erfüllt sind.

	K			L		
α	200	800	1600	200	800	1600
1.9	9	9	10	9	10	11
1.5	11	11	11	12	14	15
1.3	22	16	14			
1.1	24	18	15	16	18	17
0.9	28	22	18	14	14	14
0.7	30	24	20	24	16	16
0.5	86	68	56	40	38	36
0.3	134	124	118	70	68	66

Tabelle 5.5: Anzahlen K und L für Regressionen 5.13 und 5.14

[Kogon und Williams, 1998] eliminierten diese Iteration und vereinfachten die Regressionsmethode. Für ihre Anfangsschätzwerte wenden sie die Methode von McCulloch an, benützen die in allen Parametern stetige Darstellung der charakteristischen Funktion in der 0-Parametrisierung und benötigen lediglich zehn gleichverteilte Punkte t_k . Aufgrund der Stetigkeit liefert diese Methode gute Ergebnisse in der Nähe von $\alpha = 1$.

5.3 Maximum-Likelihood-Schätzung

Von der Theorie her unterscheidet sich das Maximum-Likelihood (ML) Verfahren für stabile Verteilungen nicht von dem für andere Verteilungen. Für eine Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ erhält man den ML-Schätzer des Parametervektors $\theta =$

5 Parameterschätzung

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ durch Maximieren der Log-Likelihood-Funktion

$$L_\theta(x) = \sum_{i=1}^n \ln \tilde{f}(x_i; \theta), \quad (5.15)$$

wobei $\tilde{f}(\cdot; \theta)$ die stabile Dichtefunktion bezeichnet. Die Schlange über f betont, dass im allgemeinen Fall keine explizite Form für die Dichte bekannt ist und man sie numerisch berechnen muss.

In den Arbeiten von [DuMouchel, 1971] und [DuMouchel, 1973] beschreibt der Autor als Erster zu einer relativ frühen Zeit eine ML-Methode. Er zeigt, dass wenn sich die Anfangsschätzung θ_0 im Inneren des Parameterraumes $\Theta = (0, 2] \times [-1, 1] \times (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$ befindet, der ML-Schätzer der Standardtheorie folgt: Er ist konsistent und mit Erwartungswert θ_0 und einer Kovarianzmatrix $n^{-1}B$ asymptotisch normalverteilt, wobei $B = (b_{i,j})$ die Inverse der 4x4-Fischer- Informationsmatrix I ist. Die Einträge von I sind

$$I_{i,j} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \frac{\partial f}{\partial \theta_j} \frac{1}{f} dx. \quad (5.16)$$

Konfidenzintervalle für jeden Parameter erhält man durch

$$\hat{\theta}_i \pm z_{\alpha/2} \frac{\gamma_{\hat{\theta}_i}}{\sqrt{n}}, \quad (5.17)$$

wobei $\gamma_{\hat{\theta}_1}, \dots, \gamma_{\hat{\theta}_4}$ die Quadratwurzeln der Diagonaleinträge von B sind.

[Mittnik u. a., 1999] schlagen vor, die Dichte aus der charakteristischen Funktion mit schneller Fourier-Transformation zu erhalten. [Nolan, 2001] verwendet Spline-Approximationen für die Berechnung von stabilen Dichten und Likelihood-Funktionen. Er untersucht Standardabweichungen und Korrelationskoeffizienten $\rho_{i,j} = b_{i,j} / \sqrt{b_{ii}b_{jj}}$ um die Güte seiner Schätzungen zu untersuchen und gelangt zum Schluss, dass ML die asymptotisch effizienteste Methode darstellt.

Nach den Untersuchungen von [Ojeda, 2001] liefert die rechenintensive Maximum-Likelihood-Methode fast immer die genauesten Ergebnisse. Etwas weniger präzi-

5 Parameterschätzung

se, dafür aber schon wesentlich schneller sind die Regressionsmethoden von Kogon/Williams und Koutrouvelis, gefolgt von der einfachen und schnellen Quantilmethode von McCulloch.

6 Anwendung

Nach dem theoretischen Teil dieser Arbeit wollen wir nun zum praktischen übergehen. In diesem Kapitel werden wir zunächst die verschiedenen Möglichkeiten zur Erlangung der stabilen Parameter testen sowie die Güte dieser Schätzung beleuchten. Darauf aufbauend widmen wir uns aktuellen Finanzdaten, die wir auf Stabilität untersuchen.

Wenn man die empirische Verteilung von Beobachtungen untersucht, ist es nicht nur wesentlich die geeignetsten Parameter einer bestimmten Verteilungsklasse, die die Daten am besten beschreibt, zu ermitteln. Es ist genauso wichtig zu betrachten, wie gut die Anpassung zwischen theoretischer und empirischer Verteilung ist. Wenn man die Schätzparameter für eine bestimmte Verteilung ermittelt, erhält man lediglich den besten Kandidaten aus genau dieser Verteilungsfamilie, der die beobachteten Daten am besten beschreibt. Falls die wahre Verteilung, aus der die Stichprobe erzeugt wurde, aber nicht zu dieser Klasse von Verteilungen gehört, wird die geschätzte Verteilung die Daten niemals ausreichend gut genug wiedergeben können.

Deshalb entsteht die Notwendigkeit Kriterien einzuführen um bei einer gegebenen Stichprobe die empirische mit der vermuteten Verteilung vergleichen zu können. Aus diesen wollen wir feststellen, ob es plausibel ist, dass die Beobachtungen von der geschätzten Verteilung erzeugt wurden oder nicht.

Wir wenden zwei Kriterien zum Vergleich der Güte der Schätzung unter den Kandidatenverteilungen an. Sempel und in der Wahrscheinlichkeitstheorie häufig anzutreffen ist der Kolmogorov-Smirnov-Abstand (KS). Seien zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen P und Q auf der reellen Achse mit Verteilungsfunktionen $G(x)$ und $H(x)$, so legen wir den Abstand zwischen diesen beiden Verteilungen als das Supremum

$$\text{KD} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |G(x) - H(x)|. \quad (6.1)$$

6 Anwendung

fest. Diese Teststatistik ist unabhängig von der hypothetischen Verteilung Q . Vergleicht man nun die geschätzte Verteilungsfunktion $\hat{F}(x)$ mit der empirischen $F_s(x)$, erhalten wir das erste Kriterium für die Güte der Schätzung.

Oft ist es sinnvoll Abstände zwischen zwei Verteilungsfunktionen an verschiedenen Punkten anders zu gewichten. Speziell in finanzmathematischen Anwendungsgebieten interessiert man sich für genaue Schätzungen der Enden, da diese die unerwarteten Ereignisse mit hohen Gewinnen oder Verlusten modellieren. Der KS-Abstand legt gleich viel Gewicht auf den äußeren und mittleren Bereich. Im letzteren wird meistens die größte Abweichung gemessen. Eine Alternative bietet die Anderson-Darling-Statistik (AD), bei der die absoluten Abweichungen $|F_s(x) - \hat{F}(x)|$ durch die Standardabweichung von $F_s(x)$ dividiert werden:

$$\text{AD} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|F_s(x) - \hat{F}(x)|}{\sqrt{\hat{F}(x)(1 - \hat{F}(x))}}. \quad (6.2)$$

Man erkennt leicht, dass für sehr kleine und sehr große Werte x der Nenner kleiner wird, dass also Abweichungen an den Enden der Verteilung mehr ins Gewicht fallen.

6.1 Vergleich der Parameterschätzmethoden

Das zu Ende des letzten Kapitels von [Ojeda, 2001] vorgestellte Ergebnis wollen wir nun überprüfen.

Wir vergleichen die Quantilmethode von McCulloch mit der Regressionsmethode von Koutrouvelis, der modifizierten Regression von Kogon und Williams und der Maximum-Likelihood-Schätzung. Es wurde zunächst ein Testfallset bestehend aus 32 Fällen definiert. Dieses ist mit den geschätzten Parametern inklusive Güte der Schätzungen nach dem Kolmogorov-Smirnov- und Anderson-Darling-Test in den Tabellen 6.1 und 6.2 auf den folgenden Seiten dargestellt.

Da die Berechnungen für $\alpha < 0,6$ sehr aufwendig und auch ungenau werden, beschränken wir uns auf eine Teilmenge des Parameterraumes $\Theta = (0, 2] \times [-1, 1] \times$

6 Anwendung

$(0, \infty) \times (-\infty, \infty)$. Wie wir noch sehen werden, liegen typische Werte für Finanzdaten im Bereich von 1,4 bis 1,9 für α , -0,5 bis +0,5 für β , 0,1 bis 2 für γ und -0,3 bis +0,3 für δ . Auf diesem Bereich liegt der Schwerpunkt, zusätzlich wandern wir mit α noch in der Gegend von 1. Es wurden Zufallszahlen mit der in Kapitel 4 vorgestellten Methode von Chambers, Mallows und Stuck erzeugt, die Stichprobengröße variiert von 500 bis 4000 in 500er Schritten.

Als Programme dienten MATLAB, Mathematica und R je nach praktischen Gesichtspunkten und persönlicher Vorliebe. Die in Mathematica automatisch eingebaute Maximum-Likelihood-Schätzung von stabilen Parametern lieferte meistens nach einigen Sekunden schon ein Ergebnis. In R konnte man abhängig von der Datenanzahl und vom Parameter α auch über eine Stunde auf ein Ergebnis der numerischen Integration warten. Da die Parameter mindestens auf die dritte Nachkommastelle alle gleich waren, war Mathematica meine Ausgangsbasis. Die Ergebnisse der anderen Methoden lieferte MATLAB innerhalb von wenigen Sekunden für alle Fälle zusammen. Von der Rechenzeit her ist das ein klares Plus für die Quantil- und Regressionsmethoden. Allerdings fällt dieser Vorteil nicht so stark ins Gewicht, da Mathematica in einer sehr akzeptablen Zeit ML-Schätzer liefert.

Wesentlich ist die Frage nach der Güte der Schätzung und da sprechen beide Teststatistiken eine deutliche Sprache für sich. Die Maximum-Likelihood-Schätzer liefern unter jeder Parameterkonstellation gute Schätzwerte, die immer akzeptiert werden. Für mich überraschend war, dass die Regressionsmethode von Kogon und Williams nur knapp schlechter abschnitt. Lediglich um $\alpha = 1$ herum wird das Ergebnis verworfen, obwohl der Schätzer für α nur gering abweicht. Meistens ist es ein anderer Parameter, bei uns β oder γ , für den die Regression in die Irre führt. Ebenfalls erstaunt war ich darüber, dass die Regressionsmethode von Koutrouvelis sogar schlechter als die Quantilmethode von McCulloch abschnitt. Für unser Anliegen, aktuelle Finanzdaten auf Stabilität zu überprüfen, ist zumindest klar, dass Maximum Likelihood die besten Ergebnisse liefert und wir deshalb diese Methode verwenden werden.

Nr	Testfallset				Anzahl	Quantilmethode McCulloch				Regression Koutrouvelis				Kogon Williams				Maximum Likelihood			
	α	β	γ	δ		α	β	γ	δ	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ	α	β	γ	δ
1	1,97	0	0,1	0	500	2,00	-0,76	0,11	0,00	1,91	0,20	0,10	0,00	1,90	-0,09	0,10	0,00	1,92	-0,14	0,10	0,00
2	1,9	0,2	0,2	0,5	1000	1,84	0,39	0,21	0,52	1,87	0,50	0,20	0,51	1,88	0,55	0,20	0,49	1,86	0,40	0,20	0,49
3	1,83	0,4	0,4	1	1500	1,86	0,54	0,41	1,07	1,85	0,35	0,40	1,06	1,83	0,27	0,40	1,02	1,86	0,62	0,40	1,01
4	1,76	0,6	0,6	1,5	2000	1,76	0,86	0,59	1,64	1,79	0,86	0,60	1,64	1,81	0,88	0,60	1,47	1,77	0,67	0,60	1,47
5	1,69	0,1	0,7	2	2500	1,66	0,16	0,68	2,06	1,68	0,27	0,69	2,08	1,68	0,27	0,69	1,98	1,69	0,22	0,69	1,99
6	1,62	0,3	0,8	-0,5	3000	1,64	0,39	0,80	-0,33	1,63	0,33	0,81	-0,33	1,62	0,31	0,81	-0,51	1,63	0,39	0,81	-0,52
7	1,55	0,5	0,9	-1	3500	1,49	0,48	0,91	-0,57	1,52	0,42	0,91	-0,64	1,49	0,41	0,89	-1,02	1,50	0,44	0,90	-1,01
8	1,45	0,7	1	-1,5	4000	1,41	0,72	0,97	-0,50	1,44	0,67	1,01	-0,62	1,41	0,64	0,99	-1,42	1,45	0,72	1,01	-1,46
9	1,35	0,9	1,1	-2	1500	1,27	0,82	1,02	-0,08	1,33	0,94	1,06	106,19	1,31	0,87	1,06	-1,95	1,34	0,94	1,08	-2,03
10	1,25	0,05	1,2	0	2000	1,26	-0,03	1,18	0,01	1,22	0,05	1,20	0,25	1,25	0,05	1,22	0,08	1,26	0,04	1,21	0,07
11	1,15	0,15	1,3	0,5	2500	1,13	0,13	1,32	1,35	1,15	0,08	1,35	1,00	1,12	0,08	1,31	0,53	1,14	0,11	1,33	0,52
12	1,05	0,25	1,4	1	3000	1,04	0,29	1,36	1,03	1,09	0,26	1,44	3,52	1,05	-1,00	1,41	-0,63	1,05	0,27	1,41	1,04
13	1	0,35	1,6	1,5	3500	1,03	0,42	1,59	1,46	1,02	0,41	1,60	22,51	1,03	-1,00	1,61	-0,25	1,02	0,39	1,60	1,50
14	0,95	0,45	1,8	2	4000	0,92	0,47	1,75	-4,69	0,96	0,43	1,83	-9,64	0,94	0,44	1,79	1,83	0,93	0,45	1,80	1,99
15	0,85	0,55	2	-0,5	500	0,79	0,61	1,88	-4,06	0,73	0,45	1,92	-2,52	0,73	0,44	1,90	-0,63	0,78	0,51	2,00	-0,52
16	0,75	0,65	2,2	-1	1000	0,88	0,63	2,39	-9,20	0,75	0,67	2,12	-4,40	0,81	0,69	2,30	-0,82	0,80	0,63	2,14	-0,94
17	1,97	-0,65	1,15	-1,5	2500	1,92	-0,68	1,15	-1,51	1,97	-1,00	1,17	-1,52	1,98	-1,00	1,17	-1,45	1,97	-0,99	1,16	-1,46
18	1,9	-0,55	1,25	-2	3000	1,92	-0,64	1,24	-2,11	1,93	-0,85	1,24	-2,11	1,94	-0,92	1,24	-2,00	1,92	-0,72	1,23	-2,00
19	1,83	-0,45	1,35	0	3500	1,83	-0,30	1,33	-0,16	1,84	-0,42	1,34	-0,16	1,84	-0,31	1,34	-0,04	1,85	-0,51	1,34	-0,01
20	1,76	-0,35	1,45	0,5	4000	1,82	-0,72	1,44	0,24	1,78	-0,50	1,43	0,26	1,78	-0,55	1,43	0,53	1,78	-0,45	1,43	0,51
21	1,69	-0,25	1,65	1	500	1,60	-0,15	1,62	0,72	1,63	0,03	1,64	0,87	1,66	0,08	1,66	0,83	1,63	-0,18	1,65	0,91
22	1,62	-0,15	1,85	1,5	1000	1,52	-0,16	1,81	1,27	1,58	-0,26	1,84	1,17	1,61	-0,24	1,87	1,51	1,57	-0,20	1,84	1,51
23	1,55	-0,05	2,05	2	1500	1,48	-0,11	2,05	1,82	1,51	0,04	2,04	2,09	1,52	0,04	2,06	2,01	1,51	-0,09	2,05	2,07
24	1,45	-0,9	2,25	-0,5	2000	1,45	-0,96	2,23	-2,99	1,49	-0,88	2,29	-2,68	1,45	-0,87	2,24	-0,56	1,49	-0,98	2,28	-0,52
25	1,35	-0,7	0,05	-1	3500	1,33	-0,77	0,05	-1,07	1,33	-0,68	0,05	-1,06	1,32	-0,68	0,05	-1,00	1,33	-0,70	0,05	-1,00
26	1,25	-0,5	0,15	-1,5	4000	1,19	-0,63	0,15	-1,79	1,24	-0,55	0,15	-1,72	1,24	-0,51	0,15	-1,51	1,23	-0,60	0,15	-1,50
27	1,15	-0,3	0,35	-2	500	1,10	-0,53	0,37	-3,24	1,01	-0,42	0,36	-9,05	1,09	-0,44	0,38	-2,04	1,11	-0,47	0,38	-2,02
28	1,05	-0,1	0,55	0	1000	1,17	-0,29	0,53	-0,52	1,12	-0,20	0,52	-0,50	1,19	-0,20	0,56	0,00	1,15	-0,21	0,54	0,02
29	1	-0,6	0,65	0,5	1500	0,99	-0,66	0,61	0,54	0,98	-0,54	0,63	11,87	0,98	-0,04	0,62	0,28	0,99	-0,58	0,63	0,51
30	0,95	-0,4	0,75	1	2000	0,96	-0,49	0,72	1,02	0,97	-0,46	0,75	8,52	1,00	-1,00	0,76	21,65	0,97	-0,45	0,75	1,01
31	0,85	-0,2	0,85	1,5	2500	0,87	-0,16	0,88	2,18	0,87	-0,17	0,87	2,14	0,86	-0,18	0,87	1,45	0,84	-0,19	0,86	1,48
32	0,75	0	0,95	2	3000	0,74	-0,09	0,91	2,19	0,72	-0,06	0,91	2,11	0,74	-0,04	0,95	1,99	0,74	-0,06	0,92	1,98

Tabelle 6.1: Parameterschätzungen

Nr	α	β	γ	δ	Anzahl	Kolmogorov-Smirnov								Anderson-Darling							
						Quantil 7		Reg 4		KW 27		ML 32		Quantil 6		Reg 5		KW 27		ML 32	
						p-Wert	\mathcal{H}_0	p-Wert	\mathcal{H}_0	p-Wert	\mathcal{H}_0	p-Wert	\mathcal{H}_0	p-Wert	\mathcal{H}_0	p-Wert	\mathcal{H}_0	p-Wert	\mathcal{H}_0	p-Wert	\mathcal{H}_0
1	1,97	0	0,1	0	500	29,2%	1	34,8%	1	53,3%	1	67,4%	1	18,1%	1	55,6%	1	66,6%	1	53,0%	1
2	1,9	0,2	0,2	0,5	1000	3,7%	0	4,4%	0	85,8%	1	88,5%	1	2,2%	0	2,1%	0	86,9%	1	91,4%	1
3	1,83	0,4	0,4	1	1500	0,8%	0	14,7%	1	98,9%	1	99,9%	1	0,2%	0	10,7%	1	95,9%	1	99,5%	1
4	1,76	0,6	0,6	1,5	2000	0,0%	0	0,0%	0	78,9%	1	98,8%	1	0,0%	0	0,0%	0	93,4%	1	87,7%	1
5	1,69	0,1	0,7	2	2500	0,2%	0	0,0%	0	80,8%	1	98,5%	1	0,2%	0	0,0%	0	95,1%	1	86,8%	1
6	1,62	0,3	0,8	-0,5	3000	0,0%	0	0,0%	0	75,4%	1	93,9%	1	0,0%	0	0,0%	0	77,3%	1	81,4%	1
7	1,55	0,5	0,9	-1	3500	0,0%	0	0,0%	0	30,5%	1	98,5%	1	0,0%	0	0,0%	0	71,4%	1	65,8%	1
8	1,45	0,7	1	-1,5	4000	0,0%	0	0,0%	0	90,4%	1	86,4%	1	0,0%	0	0,0%	0	75,2%	1	91,9%	1
9	1,35	0,9	1,1	-2	1500	0,0%	0	0,0%	0	16,7%	1	87,5%	1	0,0%	0	0,0%	0	18,6%	1	83,2%	1
10	1,25	0,05	1,2	0	2000	5,2%	1	0,0%	0	87,5%	1	98,7%	1	2,4%	0	0,0%	0	84,1%	1	99,4%	1
11	1,15	0,15	1,3	0,5	2500	0,0%	0	0,0%	0	62,6%	1	99,9%	1	0,0%	0	0,0%	0	89,5%	1	99,1%	1
12	1,05	0,25	1,4	1	3000	30,4%	1	0,0%	0	0,0%	0	96,5%	1	59,0%	1	0,0%	0	0,0%	0	73,8%	1
13	1	0,35	1,6	1,5	3500	64,2%	1	0,0%	0	0,0%	0	99,9%	1	92,8%	1	0,0%	0	0,0%	0	99,1%	1
14	0,95	0,45	1,8	2	4000	0,0%	0	0,0%	0	0,0%	0	96,3%	1	0,0%	0	0,0%	0	0,1%	0	92,5%	1
15	0,85	0,55	2	-0,5	500	0,0%	0	0,0%	0	28,7%	1	96,6%	1	0,0%	0	0,0%	0	36,2%	1	87,3%	1
16	0,75	0,65	2,2	-1	1000	0,0%	0	0,0%	0	8,5%	1	88,5%	1	0,0%	0	0,0%	0	8,7%	1	74,7%	1
17	1,97	-0,65	1,15	-1,5	2500	1,1%	0	2,7%	0	87,4%	1	79,0%	1	2,3%	0	8,4%	1	64,1%	1	56,8%	1
18	1,9	-0,55	1,25	-2	3000	0,4%	0	0,2%	0	90,4%	1	99,3%	1	0,2%	0	0,1%	0	99,5%	1	94,8%	1
19	1,83	-0,45	1,35	0	3500	0,7%	0	0,1%	0	73,8%	1	73,9%	1	0,1%	0	0,0%	0	76,7%	1	61,7%	1
20	1,76	-0,35	1,45	0,5	4000	0,0%	0	0,0%	0	83,2%	1	83,5%	1	0,0%	0	0,0%	0	75,2%	1	84,2%	1
21	1,69	-0,25	1,65	1	500	39,8%	1	50,6%	1	75,6%	1	98,6%	1	29,0%	1	60,2%	1	70,2%	1	85,4%	1
22	1,62	-0,15	1,85	1,5	1000	0,7%	0	0,0%	0	91,2%	1	94,0%	1	1,3%	0	0,0%	0	92,1%	1	76,3%	1
23	1,55	-0,05	2,05	2	1500	0,8%	0	36,0%	1	90,6%	1	98,9%	1	0,4%	0	10,9%	1	55,2%	1	99,8%	1
24	1,45	-0,9	2,25	-0,5	2000	0,0%	0	0,0%	0	91,9%	1	99,5%	1	0,0%	0	0,0%	0	95,1%	1	98,3%	1
25	1,35	-0,7	0,05	-1	3500	0,0%	0	0,0%	0	91,0%	1	98,8%	1	0,0%	0	0,0%	0	92,2%	1	89,6%	1
26	1,25	-0,5	0,15	-1,5	4000	0,0%	0	0,0%	0	6,6%	1	96,4%	1	0,0%	0	0,0%	0	13,3%	1	92,0%	1
27	1,15	-0,3	0,35	-2	500	0,0%	0	0,0%	0	49,0%	1	98,6%	1	0,0%	0	0,0%	0	93,4%	1	71,9%	1
28	1,05	-0,1	0,55	0	1000	0,0%	0	0,0%	0	27,6%	1	96,5%	1	0,0%	0	0,0%	0	71,6%	1	87,7%	1
29	1	-0,6	0,65	0,5	1500	83,1%	1	0,0%	0	0,0%	0	99,8%	1	77,6%	1	0,0%	0	0,0%	0	98,5%	1
30	0,95	-0,4	0,75	1	2000	82,6%	1	0,0%	0	0,0%	0	99,9%	1	72,8%	1	0,0%	0	0,0%	0	99,9%	1
31	0,85	-0,2	0,85	1,5	2500	0,0%	0	0,0%	0	30,6%	1	93,6%	1	0,0%	0	0,0%	0	48,2%	1	98,5%	1
32	0,75	0	0,95	2	3000	0,0%	0	0,0%	0	59,4%	1	88,8%	1	0,0%	0	0,0%	0	51,0%	1	99,4%	1

Tabelle 6.2: Güte der Parameterschätzungen

6.2 Anwendung auf Finanzdaten

Seit den Arbeiten von Mandelbrot in den 1960er Jahren gab es mehrere Untersuchungen in finanziellen Anwendungsbereichen, u.a. trugen Famas Forschungen wesentlich zur Konsolidierung der stabilen Hypothese bei ([Fama, 1963] und [Fama, 1965]). In den 1970er Jahren kamen zum ersten Mal empirische Beweise auf, die "Inkonsistenzen" in der stabilen Annahme sahen. So suchte man nach alternativen Verteilungen mit heavy tails, u.a. wurden die Laplace-, Weibull-, Studentsche t-Verteilung und die hyperbolischen Verteilungen untersucht. Jedoch fehlt ihnen allen eine wünschenswerte Eigenschaft, die Stabilität. [Rachev u. a., 2005b]

Meine Untersuchungen fokussieren sich auf vier große Gruppen: Einerseits auf die in der Literatur viel diskutierten Aktienindizes und Aktien, sowie auf die ebenfalls recht häufig erwähnten Wechselkurse und selten behandelten Rohstoffe, womit sich der Kreis zu Mandelbrots Baumwollpreisuntersuchungen schließt. In den Tabellen auf den nächsten Seiten werden die Testergebnisse übersichtlich zusammengefasst.

Angeführt wird als Erstes die Bezeichnung, die eventuell mit Zusatzinformationen versehen ist. Diese geben an, aus welcher Region der Aktienkurs stammt, ob die österreichischen Aktien Bestandteil des ATX sind oder um welche Währung es sich handelt, da die Kürzel nicht alle selbsterklärend sind. Es folgen der Start und das Ende des Beobachtungszeitraumes inklusive der Anzahl der beobachteten Daten. Das Hauptaugenmerk liegt auf den 2000er Jahren mit Beginn 2000 und Ende 2013. Je nach Verfügbarkeit der Daten wurde gelegentlich ein anderer Zeitraum untersucht. Als Hauptquellen dienten die Seiten finance.yahoo.com, www.finanzen.at für Aktien, Indizes und Rohstoffpreise, sowie www.ecb.europa.eu, die Homepage der Europäischen Zentralbank, für die Euro-Wechselkurse.

Ich folge der Standardkonvention in der Literatur und definiere die Rendite r_t in der Periode t durch

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) * 100, \quad (6.3)$$

6 Anwendung

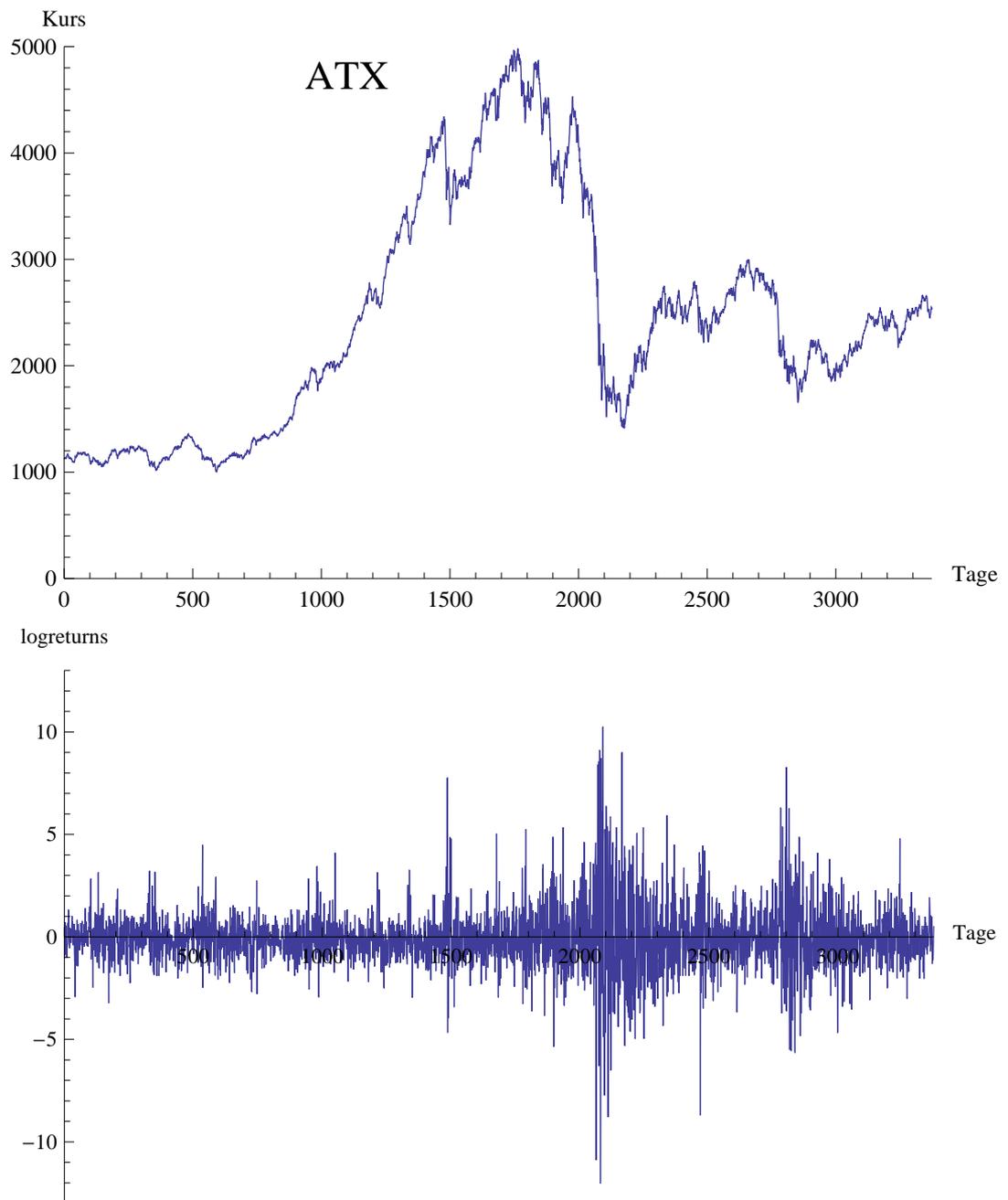


Abbildung 6.1: ATX Kursverlauf und logreturns

6 Anwendung

wobei P_t den (um Dividenden und Splits bereinigten) Schlusspreis eines Assets bezeichnet. Abbildung 6.1 zeigt den Verlauf des ATX samt den dazugehörigen täglichen Kursänderungen, den "logreturns", über den Zeitraum 22.05.2000 bis 02.01.2014.

Es werden ausschließlich tägliche Preisänderungen betrachtet, ohne Wochenenden und Feiertage ergibt sich über 14 Jahren eine Beobachtungsgröße von ungefähr 3500. Anhand der statistischen Charakteristika Mittelwert, Varianz, Schiefe und Kurtosis gewinnt man einen ersten Eindruck der untersuchten Beispiele.

Im zweiten Teil der Tabelle findet man die geschätzten Parameter einer stabilen Verteilung, sowie die bereits erwähnten Kennzahlen zur Beurteilung der Güte der Schätzung. Ebenfalls angeführt wird die Entscheidung, ob die Nullhypothese zu einem Konfidenzniveau von 5% verworfen wird (0) oder nicht (1). Zusätzlich wird auch noch der Maximum Log-Likelihood-Wert aus der ML-Schätzung angeführt. Man kann ihn als Maß für die Güte der Schätzung im gesamten Bereich ansehen, der besagt, von welcher Kandidatenverteilung die Beobachtungsdaten wahrscheinlicher stammen.

Alle Tabellen sind nach dem p-Wert des Anderson-Darling-Tests in absteigender Reihenfolge sortiert. Dieser Kennzahl werden wir in den Untersuchungen und Entscheidungsfindungen die wichtigste Rolle zukommen lassen, da auf Abweichungen in den Enden der Verteilung besonderer Wert gelegt wird.

Um einen optischen Eindruck zu gewinnen, werden einige ausgewählte Beobachtungen als Histogramme dargestellt und mit der geschätzten stabilen und normalen Dichtefunktion verglichen. [Nolan, 1999] beschreibt praktische Schwierigkeiten bei der Verwendung von QQ-Plots für Daten mit schweren Enden: Erstens sind die meisten Datenpunkte visuell auf eine kleine Region komprimiert und zweitens scheint es am Rand inakzeptabel hohe Abweichungen zur theoretischen geraden Linie zu geben. Die Verwendung von PP-Plots brachte in meinen Analysen nicht die nötige Aussagekraft um Unterschiede zwischen stabilen und nicht-stabilen Daten feststellen zu können. In Abbildung 6.2 wird der ATX mit der dazugehörigen stabilen Schätzung als Beispiel für PP- und QQ-Plots bei Verteilungen mit heavy-tails dargestellt.

6 Anwendung

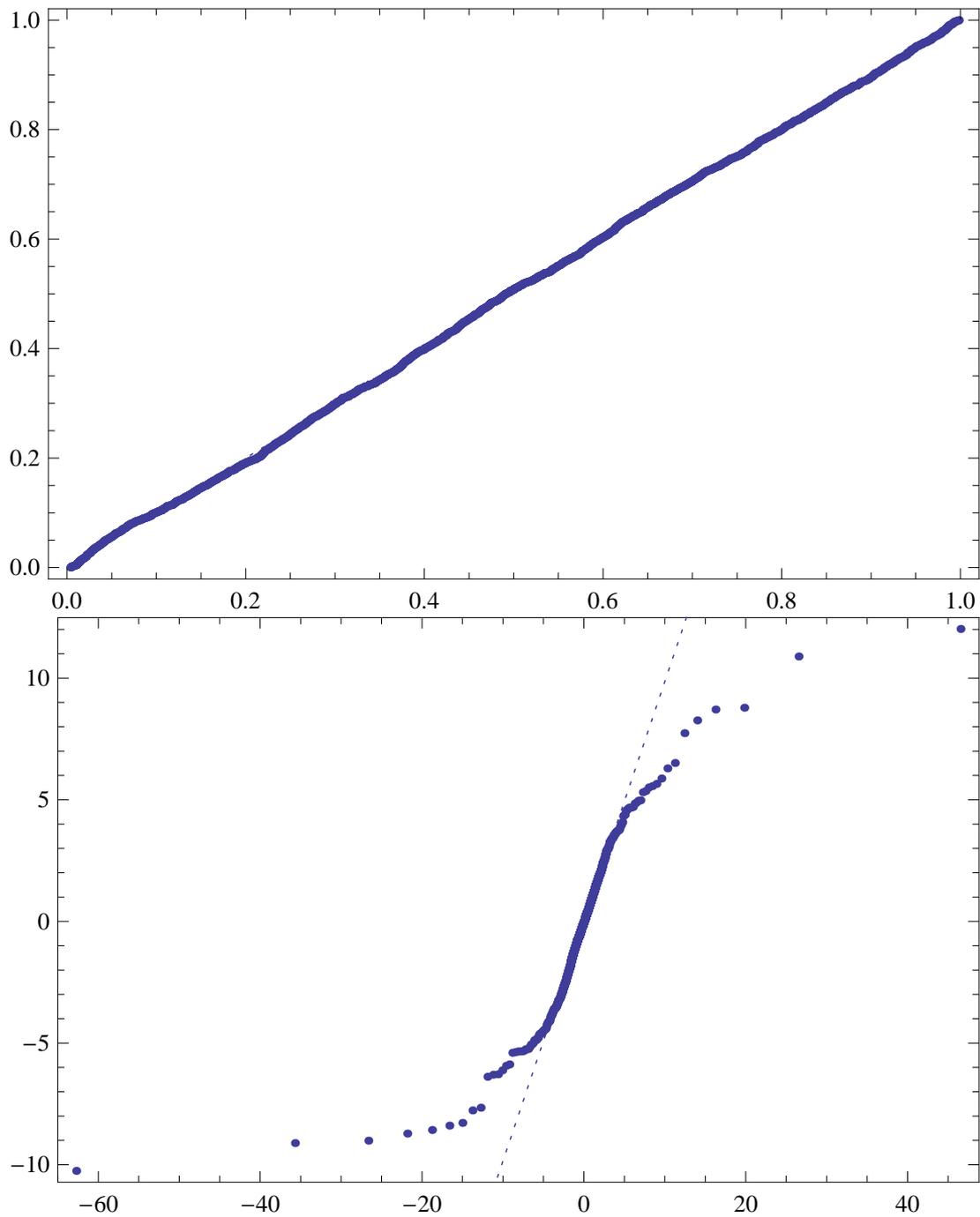


Abbildung 6.2: ATX pp- und qq-Plot

Nr	Bezeichnung	Region	von	bis	Anzahl	Mittelwert	Varianz	Schiefe	Kurtosis
1	NYSE Composite	USA	03.03.2011	02.01.2014	713	0,00	1,67	-0,47	6,6
2	IGPA	Chile	03.01.2000	02.01.2014	3470	0,03	0,69	-2,27	53,5
3	BOVESPA	Brasilien	03.01.2000	02.01.2014	3466	0,03	3,49	-0,11	6,9
4	ATX	Österreich	22.05.2000	02.01.2014	3373	0,02	2,28	-0,34	10,3
5	WBI	Wien	03.01.2000	03.01.2014	3463	0,02	1,57	-0,43	11,6
6	NSE	Kenia	26.09.2000	02.01.2014	3231	0,03	10,39	0,64	1379,8
7	BELEX	Serbien	15.10.2007	03.01.2014	1538	-0,11	2,60	0,86	21,0
8	BUX	Ungarn	04.01.2000	02.01.2014	3493	0,02	2,62	-0,08	8,7
9	Merval	Argentinien	15.05.2006	02.01.2014	1868	0,06	3,69	-0,61	8,1
10	TA	Israel	03.01.2000	01.01.2014	3409	0,03	1,84	-0,18	11,4
11	ISE	Türkei	04.01.2000	02.01.2014	3507	0,04	5,42	-0,09	9,7
12	SOFIX	Bulgarien	16.03.2005	02.01.2014	2169	-0,03	1,75	-0,93	12,3
13	SLI	Schweiz	04.01.2000	02.01.2014	3522	0,01	1,72	-0,08	8,2
14	RTS	Russland	20.09.2000	30.12.2013	3309	0,06	4,88	-0,49	12,7
15	NIKKEI	Japan	04.01.2000	30.12.2013	3438	0,00	2,48	-0,42	9,3
16	SENSEX	Indien	03.01.2000	01.01.2014	3492	0,04	2,62	-0,18	9,5
17	CAC	Frankreich	03.01.2000	02.01.2014	3578	-0,01	2,36	0,02	7,7
18	BET	Rumänien	21.06.2000	03.01.2014	3341	0,07	3,03	-0,34	11,2
19	FTSE	Großbritannien	04.01.2000	02.01.2014	3574	0,00	1,59	-0,15	9,1
20	BELEX	Belgien	21.05.2001	02.01.2014	3230	0,00	1,79	0,00	8,9
21	ATHEX	Griechenland	03.01.2000	03.01.2014	3492	-0,06	4,23	0,14	7,2
22	EUROSTOXX-50	Europa	03.01.2000	02.01.2014	3573	-0,01	2,42	0,02	7,3
23	WIG	Polen	03.01.2000	02.01.2014	3508	0,01	2,60	-0,10	5,4
24	OMXS	Schweden	03.01.2000	02.01.2014	3515	0,00	2,59	0,07	6,1
25	DJIA	USA	03.01.2000	02.01.2014	3525	0,01	1,53	-0,06	10,8
26	S&P-500	USA	03.01.2000	02.01.2014	3521	0,01	1,73	-0,17	10,7
27	IBEX	Spanien	03.01.2000	02.01.2014	3545	0,00	2,41	0,10	7,8
28	KOSPI	Südkorea	04.01.2000	02.01.2014	3464	0,02	2,86	-0,55	8,3
29	DAX	Deutschland	03.01.2000	02.01.2014	3562	0,01	2,50	-0,01	7,3
30	SSE Composite	China	04.01.2000	02.01.2014	3381	0,01	2,58	-0,09	7,2
31	Hang Seng	Hong Kong	03.01.2000	02.01.2014	3454	0,01	2,53	-0,07	10,7
32	NASDAQ-100	USA	03.01.2000	02.01.2014	3522	0,00	3,90	0,20	8,7

Tabelle 6.3: Aktienindizes Beobachtungsdaten

Nr	Bezeichnung	Parameter				Kolmogorov-Smirnov			Anderson-Darling			Likelihood	
		α	β	γ	δ	p-Wert	Teststatistik	\mathcal{H}_0	p-Wert	Teststatistik	\mathcal{H}_0	stabil	normal
1	NYSE Composite	1,653	-0,291	0,717	0,094	81,6%	0,024	1	81,9%	0,429	1	-1 148,5	-1 195,0
2	IGPA	1,660	-0,117	0,413	0,063	71,6%	0,012	1	75,4%	0,492	1	-3 699,5	-4 273,7
3	BOVESPA	1,797	-0,239	1,135	0,101	61,1%	0,013	1	58,7%	0,667	1	-6 928,4	-7 085,3
4	ATX	1,570	-0,231	0,745	0,135	56,2%	0,014	1	55,2%	0,708	1	-5 753,4	-6 174,7
5	WBI	1,549	-0,227	0,597	0,115	72,9%	0,012	1	50,1%	0,773	1	-5 192,1	-5 694,8
6	NSE	1,537	0,037	0,424	0,014	59,9%	0,013	1	47,4%	0,810	1	-3 776,3	-8 365,7
7	BELEX	1,418	-0,023	0,652	-0,102	68,7%	0,018	1	47,2%	0,813	1	-2 568,2	-2 916,7
8	BUX	1,755	0,000	0,943	0,025	48,6%	0,014	1	46,1%	0,828	1	-6 412,6	-6 637,1
9	Merval	1,588	-0,230	1,002	0,201	35,4%	0,021	1	37,9%	0,959	1	-3 707,6	-3 870,6
10	TA	1,699	-0,200	0,747	0,090	40,4%	0,015	1	32,9%	1,056	1	-5 565,6	-5 879,1
11	ISE	1,674	-0,090	1,273	0,087	34,5%	0,016	1	31,9%	1,078	1	-7 642,8	-7 939,4
12	SOFIX	1,437	-0,092	0,571	0,040	34,8%	0,020	1	28,8%	1,149	1	-3 302,1	-3 681,7
13	SLI	1,585	-0,210	0,676	0,082	17,6%	0,019	1	26,2%	1,213	1	-5 620,2	-5 956,0
14	RTS	1,601	-0,239	1,114	0,219	16,7%	0,019	1	23,6%	1,288	1	-6 908,4	-7 317,1
15	NIKKEI	1,786	-0,211	0,929	0,061	14,1%	0,020	1	23,3%	1,297	1	-6 212,3	-6 442,5
16	SENSEX	1,648	-0,213	0,882	0,130	34,6%	0,016	1	23,1%	1,304	1	-6 366,1	-6 636,9
17	CAC	1,652	-0,186	0,840	0,056	31,8%	0,016	1	20,5%	1,389	1	-6 348,2	-6 612,5
18	BET	1,519	0,006	0,825	0,093	39,6%	0,015	1	19,7%	1,420	1	-6 138,8	-6 593,2
19	FTSE	1,600	-0,136	0,656	0,049	37,3%	0,015	1	19,0%	1,444	1	-5 560,1	-5 895,7
20	BELEX	1,572	-0,196	0,686	0,077	27,7%	0,017	1	16,5%	1,550	1	-5 215,1	-5 521,2
21	ATHEX	1,567	-0,081	1,071	-0,020	16,0%	0,019	1	13,5%	1,702	1	-7 206,7	-7 472,5
22	EUROSTOXX-50	1,625	-0,128	0,839	0,037	9,4%	0,021	1	12,5%	1,761	1	-6 384,8	-6 647,3
23	WIG	1,739	-0,004	0,967	0,015	10,1%	0,021	1	9,9%	1,937	1	-6 538,3	-6 653,1
24	OMXS	1,644	-0,118	0,902	0,042	10,1%	0,021	1	6,9%	2,225	1	-6 483,8	-6 660,5
25	DJIA	1,553	-0,128	0,611	0,056	7,2%	0,022	1	6,7%	2,258	1	-5 332,4	-5 745,2
26	S&P-500	1,536	-0,160	0,644	0,066	5,3%	0,023	1	6,4%	2,295	1	-5 544,5	-5 959,7
27	IBEX	1,664	-0,147	0,869	0,045	12,8%	0,020	1	5,2%	2,461	1	-6 370,3	-6 585,8
28	KOSPI	1,593	-0,218	0,891	0,129	3,6%	0,024	0	4,7%	2,548	0	-6 451,1	-6 734,8
29	DAX	1,630	-0,180	0,857	0,081	2,9%	0,024	0	3,4%	2,817	0	-6 426,6	-6 687,5
30	SSE Composite	1,626	-0,122	0,867	0,069	1,6%	0,027	0	3,3%	2,835	0	-6 147,9	-6 396,0
31	Hang Seng	1,638	-0,126	0,848	0,062	1,4%	0,027	0	1,9%	3,306	0	-6 182,2	-6 502,6
32	NASDAQ-100	1,433	-0,168	0,917	0,097	1,5%	0,026	0	1,5%	3,520	0	-7 004,2	-7 392,7

Tabelle 6.4: Aktienindizes Schätzergebnisse

Nr	Bezeichnung	von	bis	Anzahl	Mittelwert	Varianz	Schiefe	Kurtosis
1	Twitter	07.11.2013	02.01.2014	37	1,10	24,07	-0,84	3,7
2	Facebook	18.05.2012	02.01.2014	406	0,09	11,06	1,17	14,1
3	Merck	03.01.2000	02.01.2014	3521	-0,01	3,51	-1,54	31,0
4	Sony	03.01.2000	02.01.2014	3516	-0,06	5,77	-0,07	7,7
5	Lockheed	03.01.2000	02.01.2014	3522	0,06	2,94	0,13	9,5
6	Google	19.08.2004	02.01.2014	2359	0,10	4,38	0,53	11,4
7	IBM	03.01.2000	02.01.2014	3522	0,02	3,04	-0,07	10,5
8	Post (ATX)	31.05.2006	31.12.2013	1926	0,05	2,61	-0,34	11,2
9	Adidas	03.01.2000	02.01.2014	3562	0,05	3,73	0,05	7,9
10	Yahoo	03.01.2000	02.01.2014	3521	-0,03	11,76	0,05	13,8
11	Pfizer	03.01.2000	02.01.2014	3521	0,00	2,89	-0,29	8,1
12	Allianz	03.01.2000	02.01.2014	3562	-0,02	5,41	0,14	9,7
13	Strabag (ATX)	19.10.2007	31.12.2013	1584	-0,05	6,61	-0,40	8,0
14	McDonalds	03.01.2000	02.01.2014	3522	0,03	2,49	-0,20	8,9
15	Philips	03.01.2000	02.01.2014	3521	0,01	7,15	-0,21	6,5
16	GE	03.01.2000	02.01.2014	3522	-0,01	4,27	0,02	10,7
17	Microsoft	03.01.2000	02.01.2014	3522	0,00	4,27	-0,13	12,1
18	Société Générale	03.01.2000	02.01.2014	3560	0,00	8,11	0,09	8,6
19	Nike	03.01.2000	02.01.2014	3516	0,06	4,06	-0,48	14,3
20	RBI (ATX)	25.04.2005	31.12.2013	2200	-0,02	10,74	-0,32	9,9
21	Apple	03.01.2000	02.01.2014	3521	0,09	8,96	-4,26	106,4
22	Siemens	03.01.2000	02.01.2014	3562	0,01	5,01	-0,11	8,1
23	Zumtobel (ATX)	12.05.2006	31.12.2013	1937	-0,02	7,70	-0,05	6,6
24	Unicredit	03.01.2000	02.01.2014	3560	-0,04	7,60	-0,10	8,0
25	Schöller-Bleckmann (ATX)	27.03.2003	31.12.2013	2777	0,08	5,71	0,33	10,7
26	RHI (ATX)	03.01.2000	31.12.2013	3580	-0,01	7,14	-1,01	31,8
27	Telekom Austria (ATX)	21.11.2000	31.12.2013	3388	0,00	3,95	-0,96	16,6
28	Erste (ATX)	03.01.2000	31.12.2013	3635	0,03	7,21	-0,20	10,2
29	EVN (ATX)	03.01.2000	31.12.2013	3633	0,07	21,61	11,30	728,2
30	Lenzing (ATX)	03.01.2000	31.12.2013	3631	0,13	15,31	35,33	1696,5
31	OMV (ATX)	03.01.2000	31.12.2013	3641	0,10	136,10	2,12	378,2
32	Voestalpine (ATX)	03.01.2000	31.12.2013	3634	0,08	11,37	18,23	745,1
33	Wienerberger (ATX)	03.01.2000	31.12.2013	3634	-0,02	6,15	-0,26	15,3

Tabelle 6.5: Aktien Beobachtungsdaten

Nr	Bezeichnung	Parameter				Kolmogorov-Smirnov			Anderson-Darling			Likelihood	
		α	β	γ	δ	p-Wert	Teststatistik	\mathcal{H}_0	p-Wert	Teststatistik	\mathcal{H}_0	stabil	normal
1	Twitter	1,680	-1,000	2,925	2,251	79,0%	0,103	1	96,2%	0,264	1	-109,2	-110,8
2	Facebook	1,726	-0,058	1,788	0,094	91,3%	0,027	1	93,5%	0,304	1	-1 014,7	-1 063,5
3	Merck	1,631	-0,036	0,926	0,031	46,0%	0,014	1	67,1%	0,576	1	-6 661,7	-7 207,9
4	Sony	1,711	0,071	1,357	-0,086	48,7%	0,014	1	53,2%	0,733	1	-7 825,3	-8 071,0
5	Lockheed	1,644	0,047	0,908	0,042	59,3%	0,013	1	52,9%	0,736	1	-6 554,5	-6 893,3
6	Google	1,572	-0,012	1,025	0,101	48,9%	0,017	1	52,9%	0,736	1	-4 779,5	-5 088,2
7	IBM	1,535	-0,034	0,850	0,040	78,4%	0,011	1	42,2%	0,887	1	-6 542,6	-6 954,1
8	Post (ATX)	1,581	0,083	0,821	0,014	3,7%	0,032	0	35,8%	0,999	1	-3 454,5	-3 658,0
9	Adidas	1,627	0,112	1,036	-0,012	30,7%	0,016	1	31,4%	1,088	1	-7 118,4	-7 396,9
10	Yahoo	1,464	0,006	1,534	-0,012	38,2%	0,015	1	25,3%	1,238	1	-8 784,4	-9 334,6
11	Pfizer	1,641	0,027	0,919	-0,004	25,6%	0,017	1	24,4%	1,266	1	-6 587,6	-6 862,0
12	Allianz	1,536	-0,116	1,134	0,049	29,1%	0,016	1	24,1%	1,273	1	-7 638,2	-8 061,7
13	Strabag (ATX)	1,547	0,020	1,291	-0,036	13,8%	0,029	1	23,7%	1,287	1	-3 587,3	-3 742,7
14	McDonalds	1,641	-0,071	0,847	0,058	18,0%	0,018	1	20,5%	1,391	1	-6 302,4	-6 600,4
15	Philips	1,583	-0,049	1,426	0,059	41,4%	0,015	1	19,4%	1,429	1	-8 234,3	-8 457,5
16	GE	1,497	-0,015	0,963	0,015	24,3%	0,017	1	14,6%	1,639	1	-7 062,4	-7 553,2
17	Microsoft	1,534	0,020	0,997	-0,005	34,1%	0,016	1	12,6%	1,755	1	-7 099,1	-7 555,2
18	Société Générale	1,539	-0,106	1,425	0,074	3,4%	0,024	0	12,1%	1,785	1	-8 425,2	-8 775,7
19	Nike	1,538	0,026	0,970	0,038	10,6%	0,020	1	11,4%	1,833	1	-6 982,5	-7 453,4
20	RBI (ATX)	1,561	-0,018	1,636	0,005	10,7%	0,026	1	10,6%	1,889	1	-5 486,7	-5 732,9
21	Apple	1,687	0,023	1,556	0,094	10,6%	0,020	1	8,8%	2,031	1	-8 345,0	-8 855,8
22	Siemens	1,619	-0,049	1,213	0,037	6,0%	0,022	1	6,1%	2,326	1	-7 678,7	-7 923,5
23	Zumtobel (ATX)	1,658	-0,124	1,557	0,046	5,7%	0,030	1	4,8%	2,529	0	-4 616,0	-4 724,6
24	Unicredit	1,549	-0,082	1,383	0,036	0,0%	0,048	0	3,4%	2,818	0	-8 303,7	-8 657,9
25	Schöller-Bleckmann (ATX)	1,536	0,027	1,202	0,071	0,0%	0,040	0	0,6%	4,267	0	-6 096,6	-6 360,0
26	RHI (ATX)	1,473	-0,023	1,112	0,037	0,0%	0,039	0	0,5%	4,515	0	-7 758,2	-8 597,6
27	Telekom Austria (ATX)	1,564	0,052	0,979	-0,010	0,0%	0,047	0	0,5%	4,554	0	-6 695,1	-7 133,2
28	Erste (ATX)	1,484	0,012	1,233	0,032	0,0%	0,043	0	0,2%	5,136	0	-8 220,6	-8 748,3
29	EVN (ATX)	1,524	0,040	0,806	-0,029	0,0%	0,082	0	0,0%	8,848	0	-6 580,4	-10 737,2
30	Lenzing (ATX)	1,563	0,148	0,987	-0,035	0,0%	0,148	0	0,0%	46,040	0	-7 190,9	-10 105,4
31	OMV (ATX)	1,635	-0,129	1,194	0,118	0,0%	0,082	0	0,0%	11,055	0	-7 829,0	-14 110,7
32	Voestalpine (ATX)	1,583	-0,072	1,286	0,113	0,0%	0,066	0	0,0%	6,335	0	-8 143,4	-9 572,9
33	Wienerberger (ATX)	1,497	-0,046	1,202	0,032	0,0%	0,040	0	0,0%	6,778	0	-8 056,4	-8 457,3

Tabelle 6.6: Aktien Schätzergebnisse

Nr	Bezeichnung	Kategorie	von	bis	Anzahl	Mittelwert	Varianz	Schiefe	Kurtosis
1	EURAUD=X	Australischer Dollar	04.01.1999	31.12.2013	3841	-0,01	0,49	0,48	10,32
2	EURZAR=X	Südafrikanischer Rand	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,02	1,01	0,47	9,99
3	EURNZD=X	Neuseeland-Dollar	04.01.1999	31.12.2013	3841	-0,01	0,55	0,42	5,84
4	EURPLN=X	Polnischer Zloty	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,43	0,46	7,85
5	EURKRW=X	Südkoreanischer Won	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,64	0,16	12,73
6	EURSEK=X	Schwedische Krone	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,18	0,23	6,35
7	EURGBP=X	Britisches Pfund	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,25	0,35	6,73
8	EURCZK=X	Tschechische Krone	04.01.1999	31.12.2013	3841	-0,01	0,16	0,48	11,56
9	EURJPY=X	Japanischer Yen	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,66	-0,18	6,55
10	EURNOK=X	Norwegische Krone	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,19	0,31	10,38
11	EURCAD=X	Kanadischer Dollar	04.01.1999	31.12.2013	3841	-0,01	0,45	0,23	5,22
12	EURCHF=X	Schweizer Franken	04.01.1999	31.12.2013	3841	-0,01	0,15	2,62	66,06
13	EURSGD=X	Singapur-Dollar	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,29	0,21	5,77
14	EURUSD=X	US-Dollar	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,43	0,04	5,50
15	EURHKD=X	Hongkong-Dollar	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,42	0,05	5,57
16	EURHUF=X	Ungarischer Forint	04.01.1999	31.12.2013	3841	0,00	0,34	0,75	11,90
1	Blei		30.11.2004	02.12.2013	1822	0,04	8,23	0,51	16,45
2	Kakao		04.07.2005	02.01.2014	2176	0,03	2,97	-0,45	10,21
3	Nickel		30.11.2004	19.12.2013	1835	0,00	9,79	1,88	64,83
4	Zink		01.12.2004	02.12.2013	1822	0,03	10,31	8,97	232,06
5	Erdgas		05.11.2007	02.01.2014	1603	-0,04	8,59	0,72	6,73
6	Zinn		30.11.2004	02.12.2013	1823	0,05	6,07	1,60	35,68
7	Öl (Brent)		21.09.2000	02.01.2014	3391	0,03	4,50	-0,38	7,41
8	Kupfer		25.09.2002	02.01.2014	2823	0,06	3,53	-0,14	5,82
9	Heizöl		05.11.2007	01.01.2014	1608	0,01	3,64	-0,21	5,42
10	Platin		04.01.2000	02.01.2014	3578	0,03	2,43	-0,66	19,37
11	Aluminium		23.10.2002	02.01.2014	2633	0,01	2,19	-0,34	4,80
12	Palladium		04.01.2000	02.01.2014	3575	0,01	5,11	-0,52	8,66
13	Silber		04.01.2000	02.01.2014	3593	0,04	4,45	-1,07	12,68
14	Gold		03.01.2000	02.01.2014	3637	0,04	1,36	-0,34	8,80

Tabelle 6.7: Wechselkurse und Rohstoffe Beobachtungsdaten

Nr	Bezeichnung	Parameter				Kolmogorov-Smirnov			Anderson-Darling			Likelihood	
		α	β	γ	δ	p-Wert	Teststatistik	\mathcal{H}_0	p-Wert	Teststatistik	\mathcal{H}_0	stabil	normal
1	EURAUD=X	1,736	0,205	0,403	-0,038	67,0%	0,012	1	51,2%	0,758	1	-3 816,3	-4 082,9
2	EURZAR=X	1,769	0,303	0,582	-0,038	61,2%	0,012	1	47,2%	0,813	1	-5 173,5	-5 461,1
3	EURNZD=X	1,786	0,341	0,453	-0,052	62,5%	0,012	1	45,9%	0,831	1	-4 155,3	-4 292,5
4	EURPLN=X	1,671	0,235	0,358	-0,038	39,2%	0,014	1	40,7%	0,911	1	-3 501,0	-3 807,5
5	EURKRW=X	1,682	0,047	0,430	-0,011	39,7%	0,014	1	40,0%	0,923	1	-4 190,3	-4 584,6
6	EURSEK=X	1,731	0,063	0,246	-0,009	32,0%	0,015	1	37,3%	0,970	1	-1 929,2	-2 119,8
7	EURGBP=X	1,777	0,095	0,301	-0,007	38,8%	0,015	1	36,6%	0,984	1	-2 619,2	-2 801,8
8	EURCZK=X	1,608	0,019	0,208	-0,011	27,5%	0,016	1	29,0%	1,143	1	-1 549,7	-1 937,4
9	EURJPY=X	1,727	-0,195	0,474	0,034	24,3%	0,017	1	20,4%	1,394	1	-4 454,3	-4 638,1
10	EURNOK=X	1,732	0,328	0,251	-0,031	6,9%	0,021	1	13,0%	1,729	1	-2 001,7	-2 301,9
11	EURCAD=X	1,848	0,162	0,427	-0,022	3,7%	0,023	0	10,6%	1,885	1	-3 810,8	-3 896,7
12	EURCHF=X	1,401	-0,080	0,144	0,003	11,8%	0,019	1	9,5%	1,977	1	-663,6	-1 761,0
13	EURSGD=X	1,758	-0,031	0,328	-0,003	8,1%	0,020	1	8,8%	2,029	1	-2 959,7	-3 065,2
14	EURUSD=X	1,861	-0,043	0,421	0,006	5,8%	0,021	1	6,5%	2,276	1	-3 726,9	-3 809,6
15	EURHKD=X	1,861	-0,039	0,417	0,006	3,1%	0,023	0	4,1%	2,666	0	-3 693,0	-3 776,3
16	EURHUF=X	1,477	0,091	0,273	-0,020	0,0%	0,033	0	0,1%	5,821	0	-2 879,6	-3 366,4
1	Blei	1,731	-0,140	1,578	0,107	65,3%	0,017	1	80,5%	0,443	1	-4 310,5	-4 504,8
2	Kakao	1,749	-0,032	1,001	0,047	23,4%	0,022	1	75,9%	0,488	1	-4 132,4	-4 272,3
3	Nickel	1,690	0,091	1,553	-0,059	74,2%	0,016	1	64,7%	0,601	1	-4 340,2	-4 683,2
4	Zink	1,724	-0,058	1,459	0,042	61,4%	0,018	1	59,0%	0,664	1	-4 172,1	-4 710,2
5	Erdgas	1,845	0,482	1,843	-0,248	5,0%	0,034	1	58,8%	0,666	1	-3 937,4	-3 997,5
6	Zinn	1,585	-0,226	1,181	0,196	43,9%	0,020	1	46,5%	0,823	1	-3 928,5	-4 229,3
7	Öl (Brent)	1,723	-0,211	1,221	0,133	24,4%	0,018	1	38,6%	0,947	1	-7 156,0	-7 362,9
8	Kupfer	1,735	-0,136	1,115	0,115	36,8%	0,017	1	32,7%	1,060	1	-5 673,8	-5 786,6
9	Heizöl	1,678	-0,070	1,101	0,055	48,3%	0,021	1	32,7%	1,061	1	-3 255,3	-3 320,5
10	Platin	1,659	-0,191	0,818	0,114	23,7%	0,017	1	30,0%	1,119	1	-6 243,9	-6 665,5
11	Aluminium	1,852	-0,278	0,952	0,074	29,5%	0,019	1	23,0%	1,308	1	-4 715,4	-4 766,0
12	Palladium	1,670	-0,119	1,253	0,102	0,6%	0,028	0	7,9%	2,124	1	-7 735,3	-7 988,4
13	Silber	1,601	-0,186	1,060	0,185	1,4%	0,026	0	5,2%	2,453	1	-7 321,9	-7 779,2
14	Gold	1,702	-0,180	0,662	0,096	0,6%	0,028	0	2,6%	3,057	0	-5 479,0	-5 723,1

Tabelle 6.8: Wechselkurse und Rohstoffe Schätzergebnisse

6 Anwendung

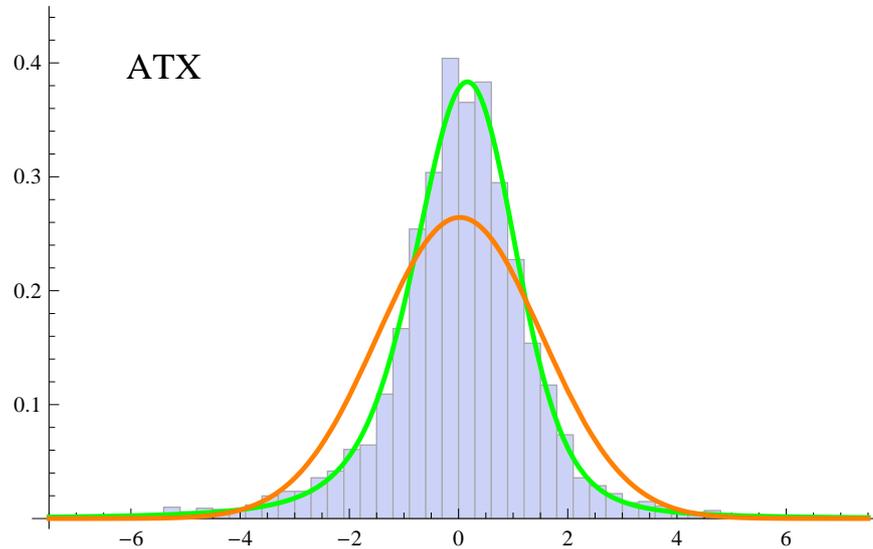


Abbildung 6.3: ATX Histogramm mit Dichteschätzungen

Es wurden Aktienindizes aus vielen verschiedenen Regionen untersucht. Es fanden österreichische, ost- und westeuropäische und auch die in der Literatur des öfteren untersuchten Indizes Dow Jones, S&P500, NIKKEI, DAX Einzug in die Beobachtungsmenge, um einige wenige herauszuheben. In der zweiten Kategorie lag ein Schwerpunkt auf heimischen Aktien. Neben aktuell hoch im Kurs stehender Unternehmen wie Apple, Google, Facebook und Twitter nahm ich andere große, internationale sowie dreizehn im ATX gelistete Firmen in meine Untersuchungen auf. Die Wechselkurse des Euro mit 16 anderen Währungen wurden seit seiner Einführung im Jahre 1999 untersucht. Darunter fallen wichtige Währungen globaler Wirtschaftsmächte, wie der US-Dollar, der Japanische Yen oder das Britische Pfund und auch Währungen kleinerer Länder. Die letzte Gruppe umfasst mit Edel- und Industriemetallen, Öl, Erdgas und Kakao 14 Rohstoffe.

Es ist fast schon auf einen Blick ersichtlich, dass ausschließlich alle Daten leptokurtisch sind und zum Großteil eine deutlich höhere Kurtosis als die Normalverteilung aufweisen. Heraus sticht der Kenianische Index NSE mit einer vierstelligen Kurtosis, die nicht einmal auf eine geringe Handelsaktivität zurückzuführen ist, da es von den 3231 Beobachtungen lediglich 20 ohne Kursänderung

6 Anwendung

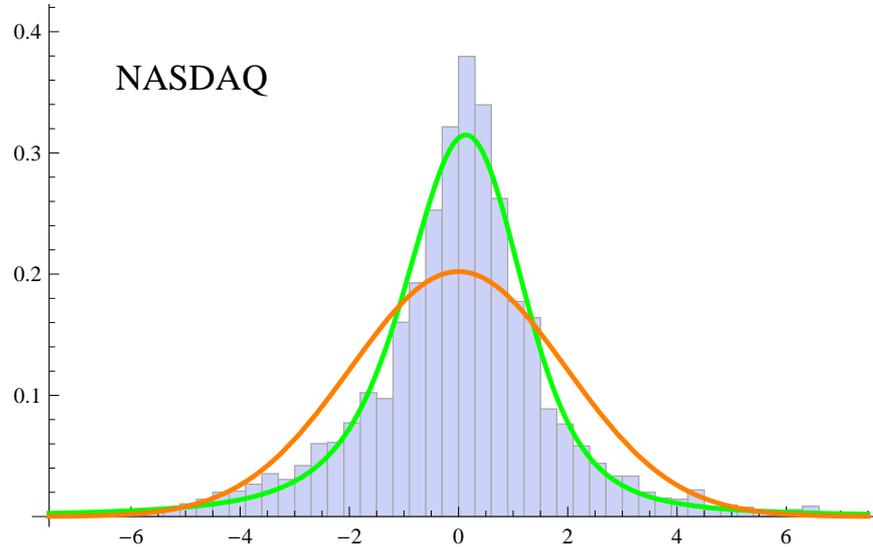


Abbildung 6.4: NASDAQ Histogramm mit Dichteschätzungen

gibt. Im Gegensatz dazu ist die ähnlich hohe Kurtosis bei der Aktie Lenzing leicht dadurch erklärt, dass 29% der Renditen Null sind. Ebenfalls erwähnenswert ist die aufgetretene Schiefe, wodurch der Parameter β an Bedeutung gewinnt.

Sowohl beim Anderson-Darling- als auch beim Kolmogorov-Smirnov-Test wurde bei den gleichen 27 Aktienindizes die Nullhypothese der stabilen Verteilung zum Konfidenzniveau von 5% angenommen, lediglich bei fünf von 32 verworfen. In Abbildung 6.3 wird der ATX mit einer guten Anpassung und in Abbildung 6.4 der NASDAQ-100, der Index mit dem niedrigsten p-Wert, veranschaulicht. Die Überlegenheit der in grüner Farbe dargestellten stabilen über der normalen Verteilung (orange) ist offensichtlich.

Ähnliche gute Ergebnisse erhält man auch für Aktien, bei denen in 22 von 33 Fällen Stabilität angenommen wird. Auffällig dabei ist, dass unter den elf negativen Testfällen zehn Mal eine ATX-Aktie auftaucht. Ein möglicher Grund dafür wäre, dass österreichische Aktien an der Wiener Börse ein kleines Handelsvolumen besitzen und seltener gehandelt werden. So entstehen öfter Tage, bei denen es zu keinen Preisunterschieden kommt, wie es im Beispiel Lenzing erwähnt wurde. Würde man einen um die ATX-Aktien bereinigten Testfallset untersuchen,

6 Anwendung

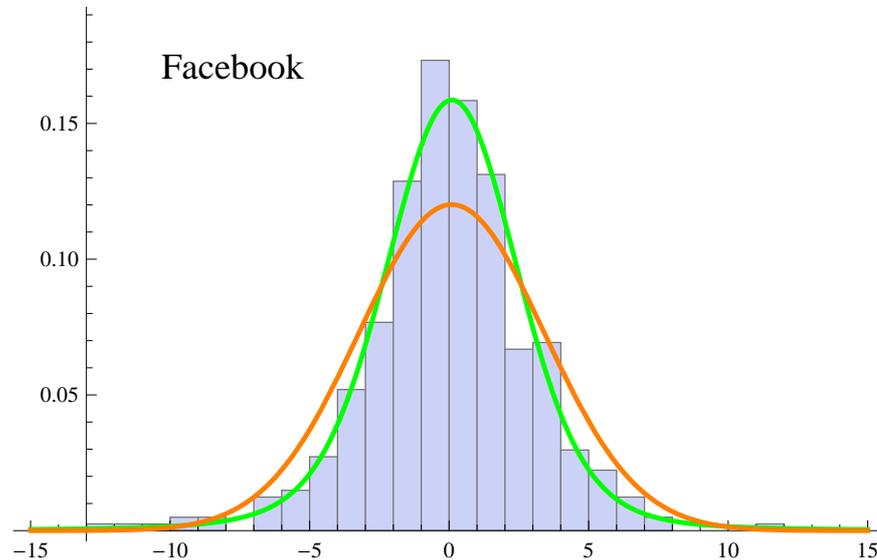


Abbildung 6.5: Facebook-Aktie Histogramm mit Dichteschätzungen

erhielte man sogar mit 19 aus 20 ein viel besseres Ergebnis. Es sind wohl "kleine", österreichische Unternehmen nicht gut mit "großen", internationalen vergleichbar.

Der Anderson-Darling-Test bescheinigt Twitter und Facebook große Nähe zu stabilen Verteilungen. Allerdings muss man hier ganz klar die Stichprobengröße in Betracht ziehen. Der Börsengang datiert bei beiden Unternehmen in der jüngsten Vergangenheit. Die Facebook-Aktie liefert 406 Beobachtungen, Twitter kommt gerade einmal auf 37. Man kann nicht viel Wert auf die Ergebnisse dieser beiden Aktien legen, da die Voraussetzungen zu den anderen Beispielen zu verschieden sind.

In den Abbildungen 6.5 bis 6.7 werden drei Schätzergebnisse zu Aktien optisch veranschaulicht. Die Renditen der Facebook- und Google-Aktien mit einem kleinen bzw. großen Datensatz werden durch die stabile Verteilung sehr gut beschrieben, während die Normalverteilung große Diskrepanzen aufweist. Der OMV-Kurs hat viele Beobachtungen sowohl im mittleren als auch äußeren Bereich und einen sehr untypischen Verlauf. Aufgrund der sehr hohen Varianz sieht die geschätzte Normalverteilung fast schon wie eine gerade Linie aus und auch die stabile Näherung

6 Anwendung

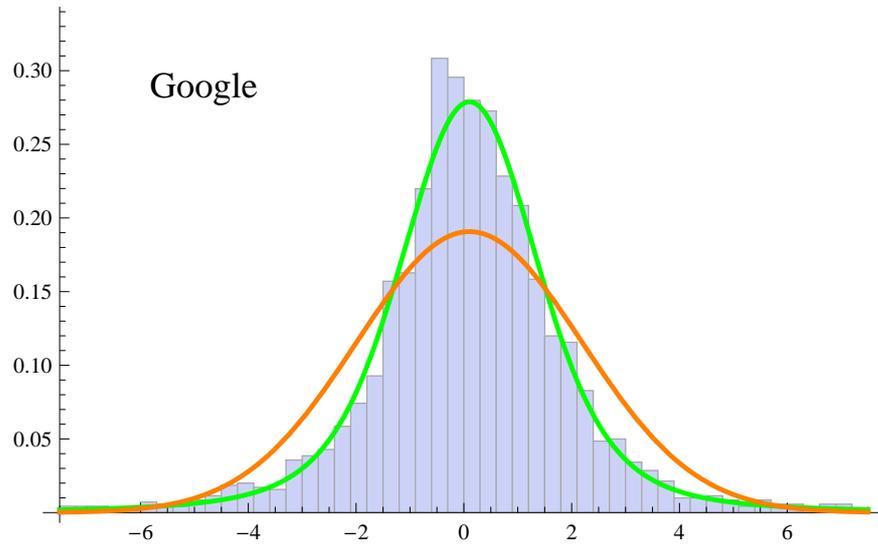


Abbildung 6.6: Google-Aktie Histogramm mit Dichteschätzungen

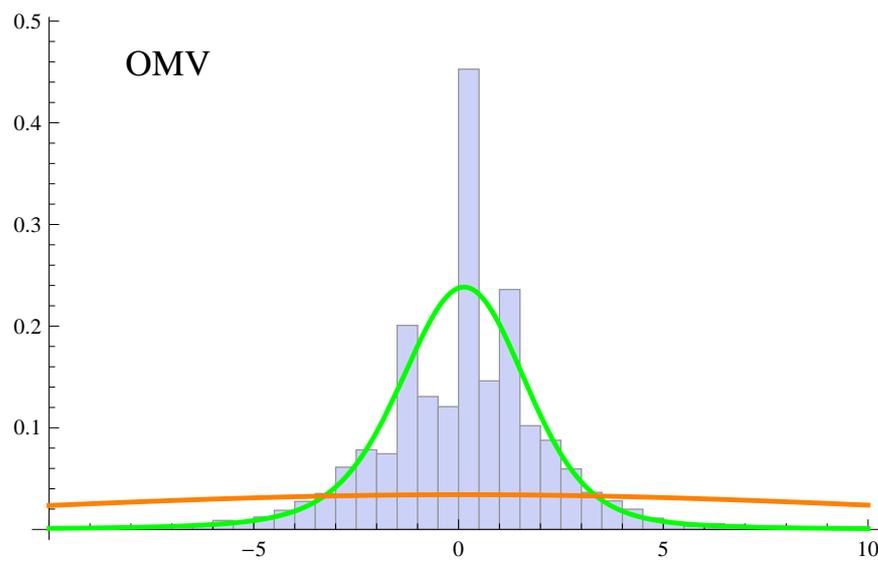


Abbildung 6.7: OMV-Aktie Histogramm mit Dichteschätzungen

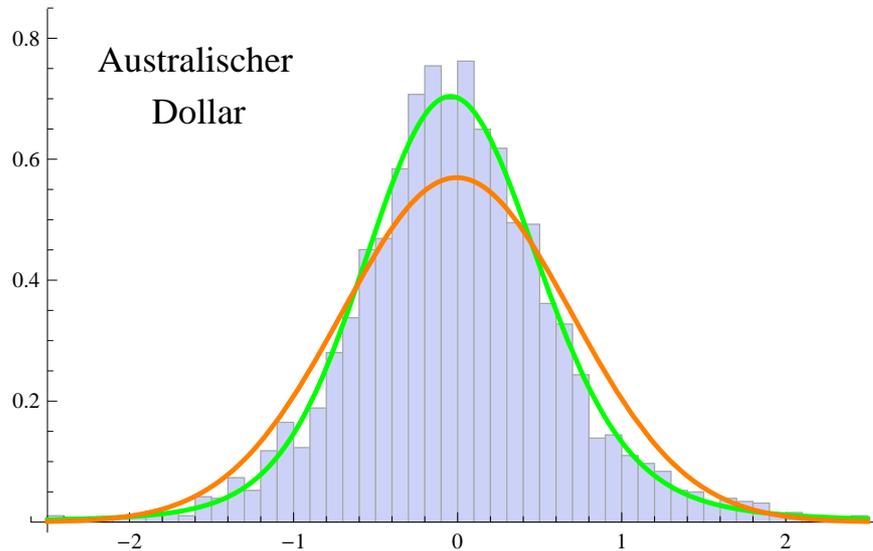


Abbildung 6.8: EUR/AUD-Wechselkurs Histogramm mit Dichteschätzungen

ist unzureichend.

Von den 16 Euro-Wechselkursen gibt es beim Ungarischen Forint starke Einwände gegen die Stabilitätsannahme, die außerdem noch beim Hongkong-Dollar abgelehnt wird. Für den ökonomisch wichtigen Euro/US-Dollar-Wechselkurs wird die Nullhypothese bei beiden Testkriterien knapp angenommen. Die anderen Beispiele weisen einen zum Teil deutlich höheren p-Wert auf. Abbildungen 6.8 und 6.9 zeigen auch bei Wechselkursen das gewohnte Bild, dass sich für die Datensätze die stabile Verteilung deutlich besser eignet als die Normalverteilung. Während der Australische Dollar im gesamten Bereich gut angenähert wird, gibt es beim Forint im Zentrum größere Abweichungen.

Ähnlich ist das Bild bei den Rohstoffen. Mit der stabilen Verteilung erreicht man eine gute Anpassung an Bleipreisrenditen. Lediglich bei Gold wird die stabile Nullhypothese verworfen, da das Verhalten im mittleren Bereich nicht gut modelliert wird, siehe Abbildungen 6.10 und 6.11.

Der Test auf Normalität ist schnell zusammengefasst. Es wurde eine zweite Nullhypothese, die Finanzdaten seien normalverteilt, aufgestellt und bis auf eine Ausnahme in allen Testfällen mit einem p-Wert sehr nahe bei Null glatt verworfen.

6 Anwendung

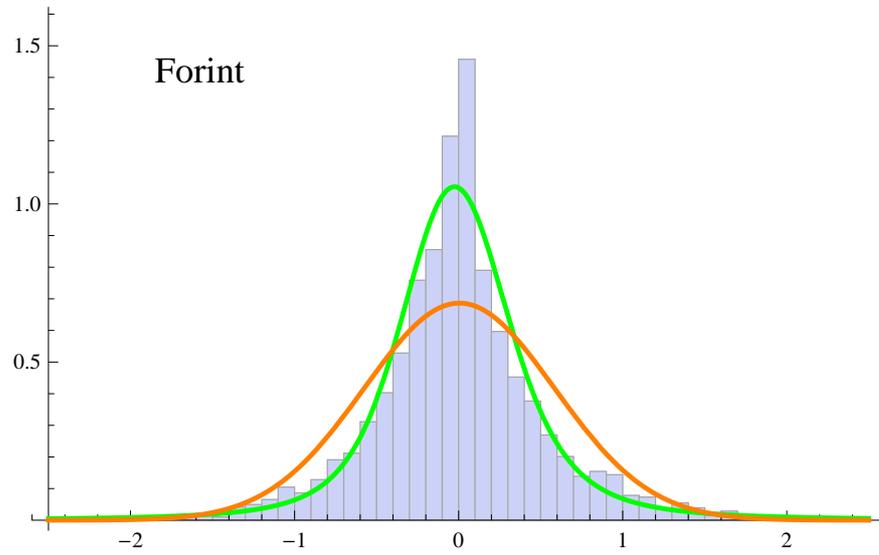


Abbildung 6.9: EUR/HUF-Wechselkurs Histogramm mit Dichteschätzungen

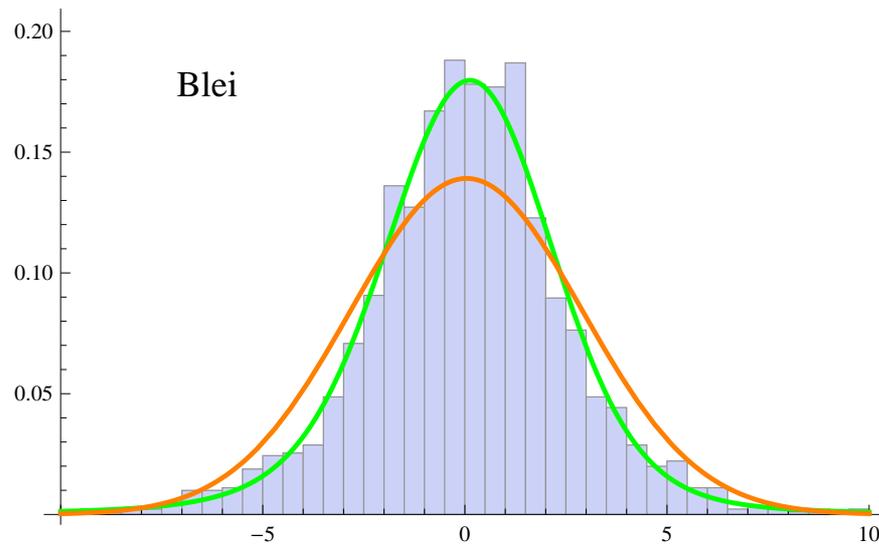


Abbildung 6.10: Blei Histogramm mit Dichteschätzungen

6 Anwendung

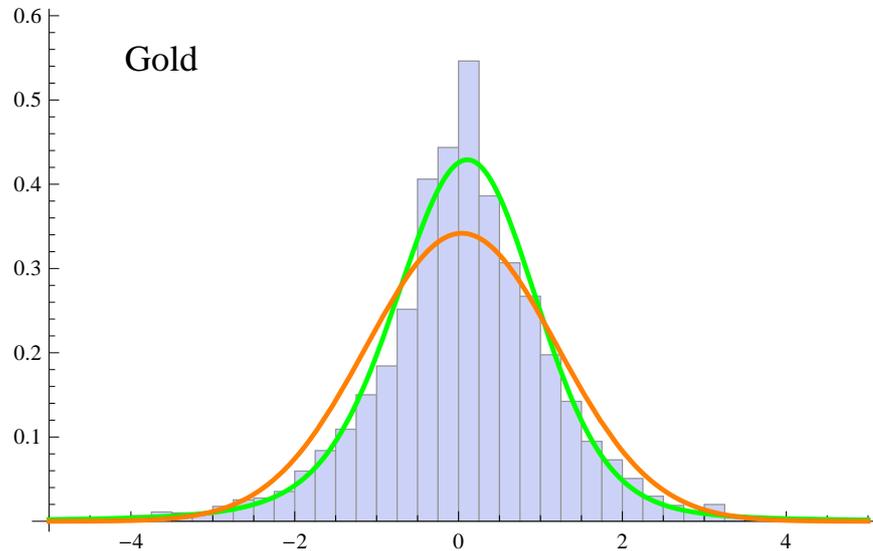


Abbildung 6.11: Gold Histogramm mit Dichteschätzungen

Diese Ausnahme ist natürlich Twitter mit lediglich 37 Beobachtungsdaten, was absolut nicht ausreichend ist um einen aussagekräftigen Schluss zuzulassen. Der stabile Likelihood-Wert ist stets größer als der normale. Im Grunde genommen ist es aber auch nicht überraschend, dass eine Verteilung mit vier statt zwei Parametern viel bessere Ergebnisse erzielt.

Die Abbildungen 6.12 und 6.13 zeigen die Lage der geschätzten Parameter mit der Unterscheidung, ob die Nullhypothese angenommen oder verworfen wurde. Aus optischen Gründen wurde die nicht repräsentative Schätzung von Twitter weggelassen.

Der Stabilitätsindex α liegt zwischen 1,4 und 1,9, die meisten Aktien und Aktienindizes liegen im für Finanzdaten typischen Bereich 1,5-1,7. Während allgemein eine leichte Tendenz zur Linksschiefe zu beobachten ist, gilt für Wechselkurse das Gegenteil. Der Skalierungsparameter γ nimmt Werte zwischen 0,1 und 2 ein, wobei Wechselkurse für die niedrigen und Aktien für die hohen Werte verantwortlich sind. Der Lageparameter δ liegt zwischen -0,25 und +0,25, die meisten Werte davon sind leicht positiv.

6 Anwendung

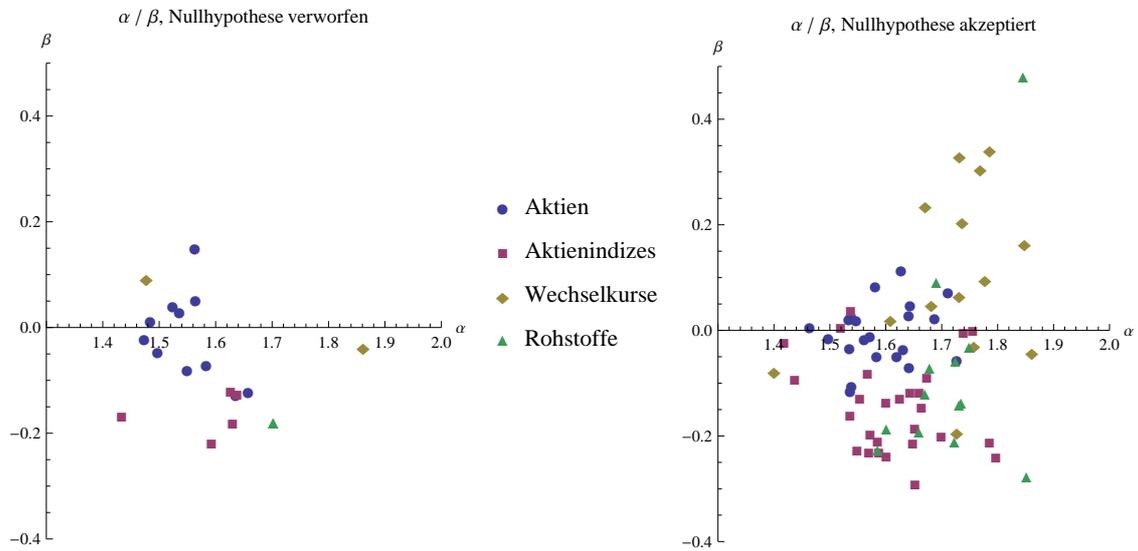


Abbildung 6.12: Lage der geschätzten Parameter α und β

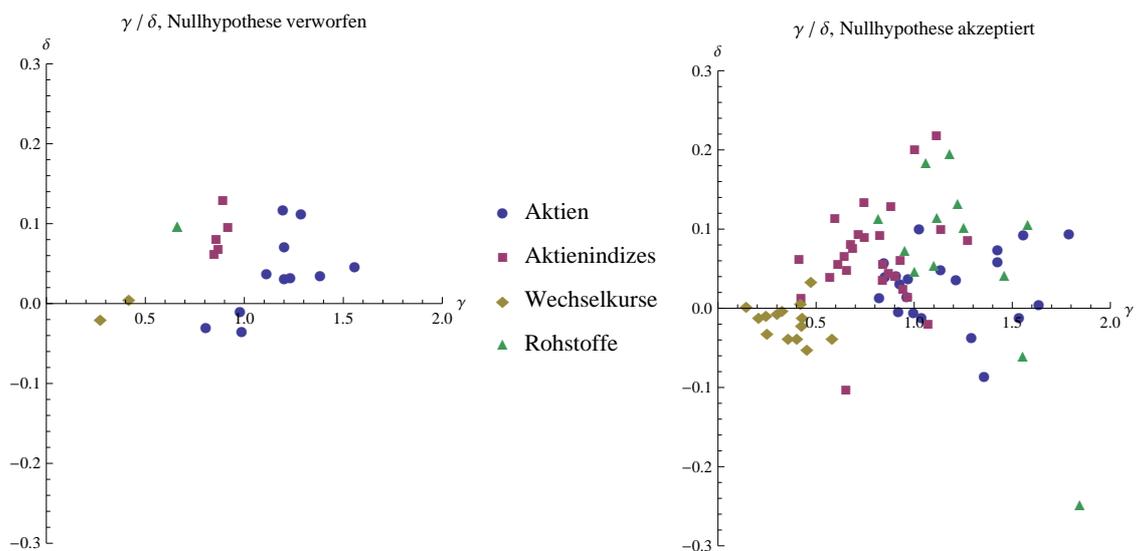


Abbildung 6.13: Lage der geschätzten Parameter γ und δ

6 Anwendung

Zu Vergleichszwecken seien hier noch zwei Ergebnisse von anderen Autoren, die Aktienindizes auf Stabilität geprüft hatten, erwähnt. [Frain, 2008] untersuchte den DAX, für den hier die stabile Annahme verworfen wurde, über drei verschiedene Zeiträume - vom 29.09.1959 beginnend bis zum 26.09.2005 drei Mal 4000 Beobachtungen hintereinander. Seine Schätzwerte für den Stabilitätsindex α sind 1,820 in der ersten, 1,777 in der zweiten und 1,636 in der dritten Periode, sowie 1,687 über den gesamten Zeitraum. Verworfen wird die Stabilitätsannahme nur im letzten Drittel.

Der hier nach dem Anderson-Darling-Test am schlechtesten abschneidende Index NASDAQ-100 wird in [Belov u. a., 2006] über einen kürzeren Zeitraum beobachtet und die stabile Nullhypothese wird mit recht unterschiedlichen Parametern für $\mathbf{S}(1.675, 0.243, 1.450, 0.130; 0)$ angenommen.

Als Schlussfolgerung kann man daraus ziehen, dass es meistens eine wesentliche Rolle spielt, von welchem Zeitpunkt an und wie lange man Beobachtungen untersucht. Eine Aussage, dass ein bestimmter Aktienindex über einen längeren Zeitraum einer stabilen Verteilung mit Parametern $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ und δ_i folgt, wird man nicht treffen können. Genauso wenig kann man allgemein behaupten, dass Finanzdaten stabil verteilt sind. Man kann aber festhalten, dass es genügend empirische Beweise gibt, dass sich die stabile Verteilungsfamilie zumindest als Kandidat zur Modellierung von Finanzdaten anbietet. Nach einer optischen und statistischen Prüfung spricht nichts dagegen, das stabile Modell zu verwenden.

Man könnte meine Testergebnisse in einem Satz folgendermaßen kurz und bündig zusammenfassen: In knapp 80% der untersuchten Beispiele wurde die Nullhypothese zu einem Konfidenzniveau von 5% angenommen. In meinen Augen ist das ein überraschend gutes Ergebnis, ohne ATX wären es sogar 87% gewesen! Diese Zahl sollte man aber mit Vorsicht genießen. Ich bin davon überzeugt, dass man mit anderen Finanzdaten, seien es andere Kurse oder Beobachtungszeiträume, ein gänzlich anderes, nämlich schlechteres Ergebnis erzielen könnte.

7 Zusammenfassung

Die Theorie über stabile Verteilungen geht bis in die 1920 Jahre beginnend mit Paul Lévy's Arbeiten zurück. Es wurde eine Verteilungsklasse vorgestellt, die schwere Enden und Schiefe aufweist. Ihre Bedeutung in der Wahrscheinlichkeitstheorie spiegelt sich im verallgemeinerten zentralen Grenzwertsatz wider, nach dem die Grenzverteilung von standardisierten Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen stabil sein muss. Mit den Untersuchungen von Benoît Mandelbrot und Eugene Fama wurde in den 1960er Jahren die stabile Hypothese für die Modellierung in finanziellen Anwendungsbereichen aufgestellt. Anfängliche praktische Probleme wurden im Laufe der Zeit dank effizienter Methoden und leistungsstarker Computer in den Hintergrund gedrängt.

Verwendung finden stabile Verteilungen ebenfalls im Risikomanagement. Es gibt Untersuchungen zu Value-at-Risk und ARCH- oder GARCH-Modellen, die hier aber nicht behandelt wurden, da sie den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden. In eine andere Richtung geht die Forschung bei der Verallgemeinerung der Stabilität. So behandeln [Rachev und Mittnik, 2000] u.a. Stabilität unter Multiplikation und Maximum- und Minimum-Stabilität. In Erinnerung gerufen werden sollte auch die Kritik an der stabilen Hypothese und der Vorschlag alternativer Verteilungen mit heavy tails.

In meinen Untersuchungen wurden Aktienindizes, Aktien, Wechselkurse und Rohstoffe untersucht. Es gibt ganz klare Anzeichen dafür, dass sich stabile Verteilungen viel besser als die Normalverteilung zur Modellierung von Finanzdaten eignen. Trotz aller Schönheit, theoretischer Gründe und empirischer Beweise sollte man sich dennoch bewusst sein, dass die stabile Modellverteilungsannahme keine Allzweckwaffe ist.

Tabellenverzeichnis

2.1	Parameter für Normal-, Cauchy- und Lévyverteilung	13
5.1	$\alpha = \psi_1(\nu_\alpha, \nu_\beta) = \psi_1(\nu_\alpha, -\nu_\beta)$	42
5.2	$\beta = \psi_2(\nu_\alpha, \nu_\beta) = -\psi_2(\nu_\alpha, -\nu_\beta)$	43
5.3	$\nu_\gamma = \psi_3(\alpha, \beta) = \psi_3(\alpha, -\beta)$	44
5.4	$\nu_\eta = \psi_4(\alpha, -\beta) = -\psi_4(\alpha, \beta)$	45
5.5	Anzahlen K und L für Regressionen 5.13 und 5.14	47
6.1	Parameterschätzungen	53
6.2	Güte der Parameterschätzungen	54
6.3	Aktienindizes Beobachtungsdaten	59
6.4	Aktienindizes Schätzergebnisse	60
6.5	Aktien Beobachtungsdaten	61
6.6	Aktien Schätzergebnisse	62
6.7	Wechselkurse und Rohstoffe Beobachtungsdaten	63
6.8	Wechselkurse und Rohstoffe Schätzergebnisse	64

Abbildungsverzeichnis

2.1	Standardisierte $N(0,1)$ -, Cauchy(1,0)- und Lévy(1,0)-Dichten	11
2.2	Linkes Ende der Normal- und Cauchyverteilung	12
2.3	Stabile Dichten in der $\mathbf{S}(\alpha, 0.5, 1, 0; 0)$ Parametrisierung	15
2.4	Stabile Dichten in der $\mathbf{S}(\alpha, 0.5, 1, 0; 1)$ Parametrisierung	16
2.5	$\tan\frac{\pi\alpha}{2}$ als Funktion von α	18
2.6	Dichte für symmetrisches stabiles $Z \sim \mathbf{S}(\alpha, 0; 0)$	19
2.7	Verteilungsfunktion für symmetrisches, stabiles $Z \sim \mathbf{S}(\alpha, 0; 0)$	19
2.8	Dichte und Verteilungsfunktion für $Z \sim \mathbf{S}(1.9, \beta; 0)$	20
2.9	Dichte und Verteilungsfunktion für $Z \sim \mathbf{S}(1.3, \beta; 0)$	21
2.10	Dichte und Verteilungsfunktion für $Z \sim \mathbf{S}(0.7, \beta; 0)$	21
2.11	Dichte und Verteilungsfunktion für $Z \sim \mathbf{S}(0.1, \beta; 0)$	22
6.1	ATX Kursverlauf und logreturns	56
6.2	ATX pp- und qq-Plot	58
6.3	ATX Histogramm mit Dichteschätzungen	65
6.4	NASDAQ Histogramm mit Dichteschätzungen	66
6.5	Facebook-Aktie Histogramm mit Dichteschätzungen	67
6.6	Google-Aktie Histogramm mit Dichteschätzungen	68
6.7	OMV-Aktie Histogramm mit Dichteschätzungen	68
6.8	EUR/AUD-Wechselkurs Histogramm mit Dichteschätzungen	69
6.9	EUR/HUF-Wechselkurs Histogramm mit Dichteschätzungen	70
6.10	Blei Histogramm mit Dichteschätzungen	70
6.11	Gold Histogramm mit Dichteschätzungen	71
6.12	Lage der geschätzten Parameter α und β	72
6.13	Lage der geschätzten Parameter γ und δ	72

Literaturverzeichnis

- [Bachelier 1900] BACHELIER, L.: Théorie de la Spéculation. In: *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* 17 (1900), S. 21–86
- [Belov u. a. 2006] BELOV, I. ; KABASINSKAS, A. ; ; SAKALAUŠKAS, L.: A Study of Stable Models of Stock Markets. In: *Information Technology and Control* 35 (2006), S. 34–56
- [Borak u. a. 2005] BORAK, S. ; HÄRDLE, W. ; WERON, R.: *Stable distributions*. S. 21–44. In: CIZEK, P. (Hrsg.) ; HÄRDLE, W. (Hrsg.) ; WERON, R. (Hrsg.): *Statistical tools for finance and insurance*. Berlin : Springer, 2005
- [Chambers u. a. 1976] CHAMBERS, J.M. ; MALLOWS, C.L. ; STUCK, B.W.: A Method for Simulating Stable Random Variables. In: *Journal of the American Statistical Association* 71 (1976), S. 340–344
- [DuMouchel 1971] DUMOUCHEL, W.H.: *Stable distributions in statistical inference*. Univ. Microfilms, Ann Arbor, Mich., Univ. Ann Arbor, Dissertation, 1971
- [DuMouchel 1973] DUMOUCHEL, W.H.: On the asymptotic normality of the maximum-likelihood estimate when sampling from a stable distribution. In: *Ann. Stat.* 1 (1973), S. 948–957
- [Fama 1963] FAMA, E.: Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. In: *Journal of Business* 36 (1963), S. 420–429
- [Fama 1965] FAMA, E.: The behaviour of stock markets. In: *Journal of Business* 28 (1965), S. 34–105

Literaturverzeichnis

- [Fama und Roll 1971] FAMA, E.F. ; ROLL, R.: Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions. In: *Journal of the American Statistical Association* 66 (1971), S. 331–338
- [Feller 1971] FELLER, W.: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Bd. 2. New York : Wiley, 1971
- [Frain 2008] FRAIN, J.C.: Maximum Likelihood Estimates of Regression Coefficients with stable residuals and Day of Week effects in Total Returns on Equity Indices. Trinity Economics Papers, 2008. – Forschungsbericht. Working Paper
- [Garcia u. a. 2006] GARCIA, R. ; RENAULT, E. ; VEREDAS, D.: *Estimation of stable distributions by indirect inference*. 2006. – Preprint, available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=795366>.
- [Gnedenko und Kolmogorov 1959] GNEDENKO, B.W. ; KOLMOGOROV, A.N.: *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen*. Berlin : Akademie Verlag, 1959
- [Kogon und Williams 1998] KOGON, S.M. ; WILLIAMS, D.B.: *Characteristic function based estimation of stable parameters*. S. 311–338. In: R. ADLER, M. T. (Hrsg.): *Practical Guide to Heavy Tailed Data*. Boston : Birkhäuser, 1998
- [Koutrouvelis 1980] KOUTROUVELIS, I.A.: Regression type estimation of the parameters of stable laws. In: *Journal of the American Statistical Association* 75 (1980), S. 918–928
- [Lévy 1925] LÉVY, P.: *Calcul des Probabilités*. Paris : Gauthiers-Villars, 1925
- [Lévy 1937] LÉVY, P.: *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Paris : Gauthiers-Villars, 1937
- [Mandelbrot 1963] MANDELBROT, B.: The variation of certain speculative prices. In: *Journal of Business* 26 (1963), S. 394–419

Literaturverzeichnis

- [McCulloch 1986] McCULLOCH, J.H.: Simple consistent estimators of stable distribution parameters. In: *Communications in Statistics. Simulation and Computation* 15 (1986), S. 1109–1136
- [Mittnik u. a. 1999] MITTNIK, S. ; RACHEV, S.T. ; DOGANOGLU, T. ; CHENYAO, D.: Maximum likelihood estimation of stable Paretian models. In: *Mathematical and Computer Modelling* 29 (1999), S. 275–293
- [Mittnik u. a. 1998] MITTNIK, S. ; S.RACHEV ; PAOLELLA, M.: Unconditional and Conditional Distributional Models for the Nikkei Index. In: *Asia-Pacific Financial Markets* 5 (1998), S. 99–128
- [Nolan 1999] NOLAN, J.P.: *Fitting data and assessing goodness-of-fit with stable distributions*. In: NOLAN, J. P. (Hrsg.) ; SWAMI, A. (Hrsg.): *Proceedings of the ASA/IMS Conference on Heavy Tailed Distributions*, 1999
- [Nolan 2001] NOLAN, J.P.: *Maximum likelihood estimation of stable parameters*. S. 379–400. In: BARNDORFF-NIELSEN, O. E. (Hrsg.) ; MIKOSCH, T. (Hrsg.) ; RESNICK, S. I. (Hrsg.): *Levy Processes: Theory and Applications*. Boston : Birkhäuser, 2001
- [Nolan 2013] NOLAN, J.P.: *Stable Distributions - Models for Heavy Tailed Data*. Boston : Birkhäuser, 2013. – In progress, Chapter 1 online at academic2.american.edu/~jpnolan
- [Ojeda 2001] OJEDA, D.: *Comparative study of stable parameter estimators and regression with stably distributed errors*, American University, Dissertation, 2001
- [Press 1972] PRESS, S.J.: Estimation in univariate and multivariate stable distributions. In: *Journal of the American Statistical Association* 67 (1972), S. 842–846
- [Rachev u. a. 2005a] RACHEV, S. ; MENN, C. ; FABOZZI, F.: *Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection and Option Pricing*. New York : Wiley, 2005

Literaturverzeichnis

- [Rachev und Mittnik 2000] RACHEV, S. ; MITTNIK, S.: *Stable Paretian Models in Finance*. New York : Wiley, 2000
- [Rachev u. a. 2005b] RACHEV, S.T. ; STOYANOV, S.V. ; BIGLOVA, A. ; FABOZZI, F.J.: An Empirical Examination of Daily Stock Return Distributions for U.S. Stocks. In: *Data Analysis and Decision Support* (2005), S. 269–281
- [Samorodnitsky und Taqqu 1994] SAMORODNITSKY, G. ; TAQQU, M.: *Stable Non-Gaussian Random Processes*. New York : Chapman and Hall, 1994
- [Uchaikin und Zolotarev 1999] UCHAIKIN, V.U. ; ZOLOTAREV, V.M.: *Chance and Stability - Stable Distributions and their Applications*. VSP, 1999
- [Weron 1995] WERON, R.: Performance of the estimators of stable law parameters. Hugo Steinhaus Center, 1995. – Forschungsbericht. HSC Research Reports
- [Weron 1996] WERON, R.: On the Chambers-Mallows-Stuck Method for Simulating Skewed Stable Random Variables. In: *Statistics and Probability Letters* 28 (1996), S. 165–171. – See also R. Weron (1996) Correction to: On the Chambers-Mallows-Stuck Method for Simulating Skewed Stable Random Variables, Research Report HSC/96/1, <http://www.im.pwr.wroc.pl/~hugo/Publications.html>
- [Yamazato 1978] YAMAZATO, M.: Unimodality of infinitely divisible distribution functions of class L. In: *The Annals of Probability* 6 (1978), S. 523–531
- [Zolotarev 1986] ZOLOTAREV, V.M.: *One-dimensional Stable Distributions*. Bd. 65. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1986