TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Technische Universität Wien
Karlsplatz 13, 1040 Wien

DIPLOMARBEIT

Modellierung von Elektrizitäts-Forwardpreisen

Technische Mathematik
März 2014

Betreuer
Univ.Prof. Dipl.-Math. Dr.rer.nat. Thorsten Rheinländer
E105 - Institut für Wirtschaftsmathematik
E-Mail-Adresse: thorsten.rheinlaender@tuwien.ac.at

Mitbetreuerin
Univ.Ass. Dipl.-Ing. Dr.sc. Christa Cuchiero
E105 - Institut für Wirtschaftsmathematik
E-Mail-Adresse: christa.cuchiero@tuwien.ac.at

Autorin
Sabine Polzer, BSc
Finanz- und Versicherungsmathematik
E-Mail-Adresse: sabinepolzer@gmx.net

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit behandeln wir die Spot- und Forwardpreise von Elektrizität. Um den Spotpreis zu bestimmen, kann man entweder reduzierte oder strukturelle Modelle verwenden. Wir werden uns ausschließlich mit strukturellen Modellen beschäftigen, wobei wir hier vorallem auf das Modell von Aid, Campi, Huu, und Touzi [1] eingehen, aber auch das Modell von Barlow [2] betrachten. Weiters wollen wir die Forwardpreiskurven als Funktional eines endlich dimensionalen Markov-Prozesses darstellen. Wir wollen Konsistenzbedingungen für das Faktormodell finden und danach affine und polynomiale Kurvenfamilien betrachten, wobei wir zunächst affine und polynomiale Prozesse beschreiben.

Wir beginnen indem wir in den ersten zwei Kapiteln einen kurzen Einblick in Energie und Elektrizitäts-Märkte geben. In Kapitel 4 wenden wir uns den strukturellen Modellen zu, wobei wir hier das Modell von Barlow [2] als Motivation verwenden und uns anschließend mit dem Modell von Aid, Campi, Huu, und Touzi [1] beschäftigen. Hier wenden wir uns vorallem der Berechnung des Forwardpreises zu. In Kapitel 5 wollen wir Konsistenzbedingungen für ein Faktormodell finden und anschließend affine und polynomiale Kurvenfamilien betrachten.

2 Energie Märkte

Bei Energiemärkten handelt es sich um Rohstoffmärkte, die sich mit dem Handel von Energie beschäftigen. Dabei kann es sich um Elektrizitäts- und Treibstoff- (Gas, Öl, Kohle) Märkte und CO_2-Zertifikate, aber auch um Wetter und Temperatur Derivate handeln.

Treibstoffe können zur direkten Konsumation, aber auch zur Produktion von Elektrizität benutzt werden. Die wichtigsten Energieträger sind Erdöl, Kohle und Erdgas. Diese müssen erst bearbeitet und verfeinert werden, um Produkte zu erzeugen, die konsumiert werden können, wie z.B.: Benzin, Diesel oder Heizöl.
Es besteht eine große Qualitätsvielfalt. Bei Rohöl als auch bei Kohle wird diese Qualität durch den Schwefelgehalt bestimmt.

Rohstoffmärkte werden in Märkte unterschieden, bei denen eine Lagerung des jeweiligen Rohstoffes möglich ist und jene, bei denen es nicht möglich ist. Wenn eine Lagerung des Rohstoffes nicht möglich ist, dann muss der jeweilige Rohstoff sobald wie möglich nach der Produktion konsumiert werden. Somit sollten Produktion und Konsumation möglichst gleichzeitig stattfinden.

Der wichtigste Energiemarkt, bei dem der Rohstoff nicht gelagert werden kann, ist der Elektrizitätsmarkt. Dieser wird im nächsten Kapitel ausführlich beschrieben. Auch bei Wetter Derivaten ist die Lagerung des Underlyings nicht möglich.

Die Gemeinsamkeit aller Energiemärkte besteht darin, dass sie unvollständig und illiquid sind. Die Energie Märkte sind unvollständig, da nicht alle Risiken perfekt gehedged werden können. Die Illiquidität kommt daher, dass sogar relativ kleine Transaktionen das Potenzial haben, die Preise zu verändern.

3 Elektrizitätsmärkte

Dieses Kapitel beschreibt den wichtigsten Energie Markt, bei dem eine Lagerung des Rohstoffes nicht möglich ist, den Elektrizitätsmarkt. Elektrizität wird auch „flow commodity“ genannt, da Elektrizität über eine bestimmte Periode geliefert wird.

In den 1990er Jahren begann die Liberalisierung der Energiemärkte in einigen Ländern. Diese Deregulierung führte dazu, dass Elektrizitätsmärkte kein Monopol mehr darstellten. Man wollte die Konsumenten schützen und den Markt wettbewerbsfähig machen. So können die Konsumenten aus allen Anbietern den für sie günstigsten auswählen. Während die Bereiche Produktion, Handel und Konsumierung dem Wettbewerb unterliegen, werden die Bereiche Transport und Verteilung als staatliches Monopol reguliert.

Das Verhalten der Elektrizitätspreise wird als sehr komplex und volatil betrachtet. Die wichtigsten Gründe, für die Volatilität der Elektrizitätspreise, sind saisonale Einflüsse und die Nicht-Lagerfähigkeit der Elektrizität. Sie kann nicht physikalisch auf direktem Weg gelagert werden, daher müssen Produktion und Konsumation (bzw. Angebot und Nachfrage) weitgehend übereinstimmen, d.h. ein „Cost-of-Carry“-Modell ist nicht möglich. Unter „Cost-of-Carry“ versteht man die Kosten der Lagerung eines Rohstoffes, die Versicherung, Lagerkosten und Zinsen enthalten.

Da Elektrizität nicht gelagert werden kann, wird die Auswirkung verstärkt, die von einem Ungleichgewicht der Nachfrage und des Angebots kommt. Elektrizitätspreise können anders als bei anderen Rohstoffen und Finanzprodukten negativ sein. Das ist eine Folge von geringer Nachfrage und gleichzeitigem Überangebot.
Der Strompreis hängt stark von der Nachfrage ab. Man kann zwischen „on-peak“ und „off-peak“ Preisen unterscheiden.

Die Nachfrage von Elektrizität ist abhängig vom Wetter, wobei die Temperatur einer der einflussreichsten Faktoren ist.
Aber nicht nur die Temperatur beeinflusst die Nachfrage von Elektrizität, auch Feuch-

tigkeit und Niederschlag zeigen eine signifikante Korrelation mit der Elektrizitätsnachfrage. Windgeschwindigkeiten, Schneefall und Regen, sowie Wasserstand, Wolkenbedeckung und Sonnenscheindauer haben wiederum Einfluss auf das Elektrizitätsangebot, das durch Wasserkraft, Solar- und Windenergie erzeugt wird.

Die Nachfrage von Elektrizität wird auch stark durch die Wirtschaft beeinflusst. Die Elektrizitätsnachfrage wird üblicherweise als mean-reverting[1]-Prozess modelliert. Dies ist auch bei den zwei Modellen, die wir im nächsten Kapitel betrachten, der Fall. Die Nachfrage ist zudem unelastisch, da sie vom Wetter und nicht von den Treibstoffpreisen abhängt.

Elektrizität kann durch verschiedene Rohstoffe produziert werden.
Der wichtigste Produktionsprozess ist die Umwandlung fossiler Brennstoffe (Kohle, Gas, Öl). Allerdings wird auch eine große Menge an Strom aus Kernenergie, Wasserkraft oder anderen erneuerbaren Energien (Wind und Solar) erzeugt.
Elektrizitätspreise haben daher eine hohe Korrelation und Abhängigkeit von anderen Rohstoffen, sowie dem Wetter. Somit können Elektrizitätspreise nicht getrennt von den Brennstoffpreisen, die in der Produktion von Elektrizität verwendet werden, betrachet werden.
Bei Strom handelt es sich allerdings um ein homogenes Gut, d.h. anders als bei fossilen Energieträgern gibt es keine Qualitätsunterschiede.

Zusätzlich zu wirtschaftlichen, saisonalen bzw. Wetterabhängigkeiten und der Nicht-Lagerfähigkeit sind Elektrizitätspreise auch von Übertragungsbeschränkungen betroffen. Hierbei kann es sich um Transportverluste oder Kapazitätslimiten in Übertragungsleitungen handeln. Das führt zu unmöglichen und unökonomischen Übertragungen von Elektrizität in bestimmten Regionen.

Wie im ersten Kapitel bereits erwähnt ist der Elektrizitätsmarkt unvollständig und illiquid. Um Elektrizitätsderivate zu bepreisen, benötigen wir ein äquivalentes Martingalmaß. Dieses werden wir im nächsten Kapitel definieren.

Rohstoffe werden meistens durch Forward- und Futureverträge gehandelt.

[1]Nach Abweichungen kehrt der Preis wieder auf ein bestimmtes Niveau zurück

3.1 Spot- und Forwardpreise

Zuerst werden wir die Spot- und Forwardpreise, sowie ihre Beziehung zueinander definieren, da wir diese später noch verwenden werden.

Definition 3.1.1. Der *Spotpreis* S_t eines Rohstoffs, ist der Verkauf- oder Kaufpreis für sofortige Lieferung zur Zeit t. Der Spotmarkt wird auch als Day-ahead-Markt bezeichnet.

Definition 3.1.2. Der *Forwardpreis* $F(t, T)$ eines Rohstoffs, ist der Preis zur Zeit t, mit fixer Lieferung zur Zeit T, mit $t < T$.

Beim Forwardvertrag handelt es sich um einen OTC-Vertrag (Over-The-Counter-Vertrag). Dabei handelt es sich um einen außerbörslichen Vertrag zwischen zwei Parteien, wobei Lieferort, Menge und Qualität eines genau bestimmten Vertragsgegenstandes und ein Lieferdatum zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses vereinbart werden. Forwardverträge sind somit nicht standardisiert.

Definition 3.1.3. Der *Futurepreis* $F(t, T_1, T_2)$ mit Lieferperiode $[T_1, T_2]$, ist der Preis zur Zeit t mit Lieferung innerhalb der Periode $[T_1, T_2]$. Rohstoffe mit Lieferung innerhalb dieser Periode sind z.B. Erdgas und Elektrizität.

Im Gegensatz zum Forwardvertrag ist der Futurevertrag kein OTC-Vertrag, sondern wird an der Börse gehandelt. Der Futurevertrag ist standardisiert.

Es gibt zwei Arten von Modellen um den Spotpreis zu berechnen:

- reduzierte Modelle und
- strukturelle Modelle

Der Großteil der bisherige Literatur beschäftigt sich vorwiegend mit **reduzierten Modellen**. Diese ignorieren entweder die Treibstoffpreise oder nehmen sie als exogene korellierte Prozesse an, d.h. sie können die Abhängigkeit zwischen Elektrizität und Treibstoffen nicht erfassen. Spitzen bekommt man normalerweise nur durch das Einbeziehen von Sprungprozessen. Sie konzentrieren sich nur auf die Preise und ignorieren die Beziehung zwischen Angebot/Nachfrage und Preisen.

Wir werden nicht weiter auf reduzierte Modelle eingehen und verweisen für interessierte Leser an dieser Stelle auf [9], [21], [24], [25], [26] und [29].

Bei **strukturellen Modellen** wird, anders als bei den reduzierten Modellen, der Spotpreis aufgrund des Gleichgewichts zwischen Angebot bzw. Produktion und Nachfrage modelliert. Preisspitzen fallen üblicherweise mit einer hohen Nachfrage oder einer geringen Kapazität zusammen.
Im nächsten Kapitel werden zwei strukturelle Modelle vorgestellt, wobei wir auf [1] und [2] verweisen.

3.1.1 Spot-Forward-Beziehung

Basierend auf der Literatur von Benth, und Meyer-Brandis [4], Eydeland, und Wolyniec [15] und Geman [20] beschreiben wir nun die Spot-Forward-Beziehung.

Die Spot-Forward-Beziehung in Finanzmärkten unter der No-Arbitrage-Annahme schaut wie folgt aus

$$F(t,T) = S_t\, e^{r\,(T-t)}, \quad t < T$$

mit $F(T,T) = S_T$, wobei r die Zinsrate ist, die als konstant angenommen wird. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\leq T}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{Q}$ ein zum Maß $\mathbb{P}$ äquivalentes risikoneutrales Maß. Der Elektrizitätsmarkt ist unvollständig. Weiters kann der Forwardpreis aufgrund der Interpretation als sofortiges Derivat und aufgrund der Finanzmarkttheorie auf unvollständigen Märkten (siehe Björk [5]), als bedingter Erwartungswert unter einem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$

$$F(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T\,|\mathcal{F}_t]$$

dargestellt werden, wobei $\mathcal{F}_t$ alle zur Zeit t verfügbaren Informationen darstellt. Wegen dieser Beziehung folgt, dass $F(t,T)$ ein Martingal ist. Der obige Ausdruck zeigt, dass der jetztige Forwardpreis ein „non-biased“ Schätzer für den zukünftigen Spotpreis ist. Für lagerfähige Rohstoffe wird die Spot-Forward-Beziehung durch γ, convenience yield genannt, erweitert. Man erhält daher

$$F(t,T) = S_t\, e^{(r-\gamma)\,(T-t)}. \tag{3.1}$$

Für γ gilt $\gamma = \gamma_1 - c$, wobei mit c die Lagerkosten und mit γ_1 wird der Nutzen vom physikalische Rohstoff beschrieben werden. Somit erhalten wir für Rohstoffe, für die eine Lagerung möglich ist, folgende Beziehung

$$F(t,T) = S_t\, e^{(r-\gamma_1+c)\,(T-t)}$$

wobei
$r(T-t)$ die Finanzierungskosten,
$c(T-t)$ die Lagerkosten und
$\gamma_1(T-t)$ den reinen Nutzen vom Besitz des Rohstoffs darstellt.

Es gilt also

$$F(t,T) = S_t\, e^{(r-\gamma)\,(T-t)} = S_t\, e^{(r-\gamma_1+c)\,(T-t)}.$$

$(r-\gamma)$ ist negativ, wenn $r-c \leq \gamma_1$ gilt. Wenn $(r-\gamma)$ negativ ist, dann ist die Forwardkurve eine fallende Funktion bzgl. der Fälligkeit. Man spricht hier von „Backwardation“. Andererseits ist $(r-\gamma)$ positiv, wenn $r-c \geq \gamma_1$ gilt. Wenn $(r-\gamma)$ positiv ist, erhalten wir eine steigende Funktion bzgl. der Fälligkeit. Hierbei handelt es sich um die Situation des „Contangos“.

Betrachtet man nun Elektrizitätsmärkte, kann die obige Beziehung zwischen Spot- und Forwardpreis nicht mehr erfüllt werden, da Elektrizität nicht lagerfähig ist und es somit keine Möglichkeit des „carryings“ im „Cost-of-Carry“-Modell gibt. Elektrizität muss sofort konsumiert werden, somit macht die obige Eigenschaft keinen Sinn mehr.

Man kann allerdings argumentieren, dass selbst wenn Elektrizität nicht gelagert werden kann, die Treibstoffe für die Produktion von Elektrizität gelagert werden können. Diese Beobachtung führt zu Bedingungen der Termstruktur der Elektrizitätspreise. Nehmen wir eine fiktive Wirtschaft an, in der Elektrizität von einer einzigen Technologie, Kohleeinheiten mit derselben Effizienz, erzeugt wird und der Elektrizitäts-Spotmarkt wettbewerbsfähig ist. Der Elektrizitätspreis sollte folgendes erfüllen

$$F_e(t,T) = q_c\, F_c(t,T), \quad t \leq T$$

wobei q_c die Heatrate ist und e für Elektrizität und c für Kohle steht. Wenn es ein $t \leq T$ gibt, sodass $F_e(t,T) > q_c\, F_c(t,T)$ gilt, dann kann man zur Zeit t:

- Einen Elektrizitäts-Forward zu $F_e(t,T)$ verkaufen und q_c Kohle-Forwards zu $F_c(t,T)$ kaufen und zur Zeit T:

- q_c Kohle zu $S_c(T)$ verkaufen und Elektrizität zu $S_e(T) = q_c\, S_c(T)$ kaufen.

Diese Strategie liefert einen positiven Nutzen. Das wichtige in dieser fiktiven Wirtschaft ist nicht, dass Elektrizität durch Kohle produziert wird, sondern dass die Beziehung zwischen Kohle- und Elektrizitäts-Spotpreisen bekannt ist. Diese kann man wiederum auf die Forwardpreise ausweiten.

In realen Wirtschaften können ähnliche No-Arbitrage-Beziehungen zwischen Elektrizitäts- und Treibstoffpreisen nicht so einfach identifiziert werden. Der Grund dafür ist, dass die Produktion von Elektrizität durch viele Technologien mit vielen verschiedenen Effizienzleveln stattfindet. Die Elektrizitäts-Spotpreise werden als stündlicher Day-ahead-Markt betrachtet. Zu diesem Zeithorizont stellt jeder Produzent eine Ordnung seiner Produktionsmittel, auf der Basis ihrer Produktionskosten, auf. Diese Ordnung kann sich während der Zeit verändern, abhängig von Treibstoffpreisen und dem Zustand des Stromsystems (Nachfrage, Ausfall, etc.). Auch wenn der Forwardvertrag unterschrieben ist, ist die Ordnung zur Fälligkeit nicht bekannt.

4 Strukturelle Modelle

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit zwei strukturellen Modellen. Zum einen mit dem Modell von Barlow [2] und zum zweiten mit dem Modell von Aid, Campi, Huu, und Touzi [1]. Wir werden Barlow's Modell als Motivation verwenden, da es das erste Spotpreis-Modell war, das mittels Angebot und Nachfrage modelliert wurde. Wir werden auf die Unterschiede der zwei Modelle hinweisen und außerdem noch den Elektrizitäts-Forwardpreis bzgl. des zweiten Modells genauer betrachten.

4.1 Barlow's Modell

Das Modell von Barlow war der erste richtige Vorschlag um Spotpreis-Modelle mittels Angebot und Nachfrage zu modellieren. Er führt einen nicht-linearen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (NLOU-Prozess) ein. Dieses Modell hat keine Sprünge, allerdings produziert es Preisserien, die Spitzen haben.

Sei

$$\begin{aligned}&u_t \text{ das Angebot zur Zeit } t \text{ und}\\ &d_t \text{ die Nachfrage zur Zeit } t.\end{aligned}$$

Barlow nimmt an, dass das Angebot steigend und die Nachfrage fallend ist. Der Spotpreis zur Zeit t ist S_t, sodass

$$u_t(S_t) = d_t(S_t)$$

gilt. Weiters nimmt Barlow an, dass das Angebot nicht zufällig und unabhängig von t ist, sodass $u_t(x) = g(x)$ gilt. Die Nachfrage ist unelastisch, daher gilt $d_t(x) = D_t$, für einen stochastischen Prozess D_t, mit $t \in [0, T]$

Somit gilt

$$g(S_t) = u_t(S_t) = d_t(S_t) = D_t.$$

Also kann der Spotpreis als $S_t = g^{-1}(D_t)$ dargestellt werden.
In realen Märkten ist das totale Angebot begrenzt, somit betrachten wir g von der Form

$$g(x) = a_0 - b_0 x^{\alpha}, \quad \alpha < 0$$

wobei a_0 und b_0 Konstanten sind. Dann gilt

$$f(y) = g^{-1}(y) = \left(\frac{a_0 - y}{b_0}\right)^{1/\alpha}, \quad y < a_0.$$

Wenn die Nachfrage das maximale Angebot a_0 übersteigt, dann ist S_t mit einem maximalen Preis nach oben begrenzt. Somit erhalten wir das Modell

$$S_t = \begin{cases} \left(\frac{a_0 - D_t}{b_0}\right)^{1/\alpha}, & D_t < a_0 - \epsilon_0 b_0, \\ \epsilon_0^{1/\alpha}, & D_t \geq a_0 - \epsilon_0 b_0. \end{cases}$$

D_t wird durch einen OU(λ, a_1, σ_1)-Prozess[1] modelliert, mit $a_1 \in \mathbb{R}$ und $\lambda, \sigma_1 > 0$, und somit ist $D_t = a_1 - \sigma_1 Y_t$, wobei Y ein OU$(\lambda, 0, 1)$-Prozess ist. Auf $F_t = \{D_t < a_0 - \epsilon_0 b_0\} = \{Y_t > (a_1 - a_0 + b_0 \epsilon_0)/\sigma_1\}$ gilt

$$S_t = \left(\frac{a_0 - a_1}{b_0} + \frac{\sigma_1 Y_t}{b_0}\right)^{1/\alpha} = (1 + \alpha X_t)^{1/\alpha}$$

wobei

$$X_t = \frac{a_0 - a_1 - b_0}{\alpha b_0} + \frac{\sigma_1}{\alpha b_0} Y_t$$

auch ein OU-Prozess ist.

[1] Ein stochastischer Prozess $(X_t), t \geq 0$ heißt Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (OU-Prozess) mit $a, \mu \in \mathbb{R}$ und Konstanten $\lambda, \sigma > 0$, wobei a der Anfangswert, μ das Gleichgewichtsniveau, λ die „mean-reversion rate“ und σ die Diffusion bezeichnet, wenn er die folgende SDG löst:

$$dX_t = \lambda(\mu - X_t)\, dt + \sigma\, dW_t, \quad X_0 = a$$

Sei f_α eine nichtlineare Funktion der Form

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (1+\alpha\, x)^{1/\alpha}, & \alpha \neq 0, \\ e^x, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Die Inverse von f_α, auch Box-Cox-Transformation genannt [6], ist

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x^\alpha - 1}{\alpha}, & \alpha \neq 0,\ x > 0, \\ \log x, & \alpha = 0,\ x > 0. \end{cases}$$

Solange der Preis S_t unter dem Maximum $A_0 = \epsilon_0^{1/\alpha}$ bleibt, ist auch $g_\alpha(S_t)$ ein OU-Prozess. Obwohl wir zuerst $\alpha < 0$ verwendet haben, sind die Funktionen f_α und g_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert.

Für das Preismodell erhält man dann

$$S_t = \begin{cases} f_\alpha(X_t), & 1+\alpha\, X_t > \epsilon_0 \\ \epsilon_0^{1/\alpha}, & 1+\alpha\, X_t < \epsilon_0 \end{cases}$$

mit

$$dX_t = -\lambda(X_t - a)\, dt + \sigma\, dW_t.$$

Hierbei handelt es sich um einen NLOU$(\lambda, a, \sigma, \alpha, \epsilon_0)$-Prozess. Es ist üblich einen OU-Prozess zu verwenden, um das „mean-reverting"-Verhalten der Nachfrage zu bestimmen.

Dieses Modell hat jedoch einen Nachteil. Ein „closed-form"-Ausdruck für den Erwartungswert $(F(t,T) = \mathbb{E}_Q[S_T\,|\mathcal{F}])$ für ein allgemeines α ist nicht möglich. Da aufgrund der Definition von S_t eine nichtlineare Funktion angenommen wurde.

4.2 Modell 2

Die Autoren dieses Modells sind R. Aid, L. Campi, A. N. Huu, und N. Touzi. [1] Dieses Modell ist dem Modell von Barlow [2] sehr ähnlich, da der Elektrizitäts-Spotpreis als Gleichgewicht zwischen Nachfrage und Produktion definiert ist. Jedoch ist in diesem Modell die Angebotskurve durch verschiedene verfügbare Kapazitäten beschrieben und nicht durch eine einzelne parametrisierte Kurve. Dieses Modell teilt außerdem einige

Ideen mit dem Modell von Fleten, und Lemming [18].

Der strukturelle Aspekt des Modells kommt daher, dass die Elektrizitäts-Spotpreise von der Dynamik der Elektrizitätsnachfrage zur Fälligkeit T und von der zufällig verfügbaren Kapazität jedes Produktionsmittels abhängig sind. Wir sehen also, dass Elektrizitätspreise durch die Nachfrage und unterschiedliche Treibstoffpreise bestimmt werden.

Spitzen treten auf, wenn der Produzent von einer Technologie zur nächsten, mit verfügbaren geringeren Kosten wechseln muss. Die Dynamiken des Nachfrageprozesses erklären diesen Wechselprozess.

Ab sofort gilt:
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (W^0, W) sei eine $(n+1)$-dimensionale Standard Brown'sche Bewegung mit $W = (W^1, \ldots, W^n)$, $n \geq 1$. Wir unterscheiden zwischen der Filtration $\mathcal{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)$, erzeugt durch W^0, und der Filtration $\mathcal{F}^W = (\mathcal{F}_t{}^W)$, erzeugt durch die n-dimensionale Brown'sche Bewegung $W = (W^1, \ldots, W^n)$.

Für $i = 1, \ldots, n$ bezeichnet $P_t{}^i$ den Preis der Menge des Rohstoffs i zum Zeitpunkt t, die notwendig ist um 1 KWh Elektrizität zu produzieren und soll folgender stochastischen Differentialgleichung (SDG) folgen

$$dP_t^i = P_t^i \left(\mu_t^i \, dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_t^{ij} \, dW_t^j \right), \quad t \geq 0$$

wobei μ^i und σ^{ij} geeignet integrierbare, $\mathcal{F}^W$-adaptierte Prozesse sind.
Eine weitere Annahme ist, dass ein risikoloses Asset mit folgendem Preisprozess

$$P_t^0 = e^{\int_0^t r_u du}, \quad t \geq 0$$

existiert, wobei die Zinsrate $(r_t)_{t \geq 0}$ ein $\mathcal{F}^W$-adaptierter, nicht negativer Prozess ist, so dass $\int_0^t r_u du$ endlich ist, für jedes $t \geq 0$. Daraus ergibt sich, dass (r_t) unabhängig von der Brownschen Bewegung W^0 ist.

Die Elektrizitätsnachfrage wird durch einen stetigen Prozess $D = (D_t)_{t \geq 0}$, adaptiert bzgl. der Filtration $\mathcal{F}^0 = (\mathcal{F}_t^0)$, modelliert. Der Prozess D ist strikt positiv, da er die gesamte Elektrizitätsnachfrage einer gegebenen geographischen Region modelliert.

4.2.1 Spotpreis

Der Spotpreis zur Zeit t wird mit S_t bezeichnet. Der Elektrizitätsproduzent kann zu jeder Zeit t entscheiden, welcher Rohstoff für die Produktion von Elektrizität, in diesem Moment am besten ist, d.h. der Elektrizitäts-Spotpreis ist proportional zum Spotpreis des gewählten Rohstoffs. Wegen der Definition von P^i gilt $S_t = P_t{}^i$ für $1 \leq i \leq n$, wenn der Rohstoff i zur Zeit t gewählt wurde.

Es werden nur die Rohstoffe betrachtet, die zur Erzeugung von Elektrizität verwendet werden können. Der Produzent möchte den günstigsten Rohstoff für die Produktion von Elektrizität benutzen, somit führen wir einen stochastischen Prozess (Δ_t^i) ein. (Δ_t^i) wird auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert und als unabhängig von (W^0, W) angenommen. $\mathcal{F}^\Delta = (\mathcal{F}_t^\Delta)$ beschreibt seine Filtration. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ bezeichnet $\Delta_t^i > 0$ die gegebene Kapazität der i-ten Technologie für die Elektrizitätsproduktion zur Zeit t. Wir nehmen weiters an, dass jedes Δ_t^i Werte in $[m_i, M_i]$ annimmt, wobei $0 \leq m_i < M_i$ die minimale und maximale Kapazität der i-ten Technologie ist. Beide Werte sind dem Produzenten bekannt.

Der Produzent ordnet die Rohstoffe vom billigsten zum teuersten, für jedes gegebene (t, ω). Die geordneten Rohstoffe werden wie folgt beschrieben

$$P_t^{(1)}(\omega) \leq \ldots \leq P_t^{(n)}(\omega).$$

Diese Ordnung enthält eine Permutation über ein Indexset $\{1, \ldots, n\}$, beschrieben durch $\pi_t = \{\pi_t(1), \ldots, \pi_t(n)\}$, wobei π_t ein $\mathcal{F}^W$-adaptierter stochastischer Prozess ist. Sei eine Rohstoff Ordnung π_t zur Zeit t gegeben, so gilt $\left(\text{mit} \sum_{i=1}^0 \equiv 0\right)$

$$I_k{}^{\pi_t}(t) := \left[\sum_{i=1}^{k-1} \Delta_t{}^{\pi_t(i)}, \sum_{i=1}^{k} \Delta_t{}^{\pi_t(i)} \right), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Daher gilt

$$S_t = \sum_{i=1}^{n} P_t{}^{(i)} \, \mathbb{1}_{\{D_t \in I_i{}^{\pi_t}(t)\}}, \quad t \geq 0. \tag{4.1}$$

Wenn D_t im Intervall $I_k{}^{\pi_t}(t)$ liegt, wird die letzte Elektrizitätseinheit mittels $\pi_t(k)$ produziert. Wenn es nicht verfügbar ist, wird es mit dem nächsten, teureren π_t in der Zeit-t Ordnung produziert.

Der Unterschied zu Barlow's Modell liegt darin, dass der Spotpreis dadurch charakterisiert ist, dass die Nachfrage D_t im Intervall $I_k{}^{\pi_t}(t)$ liegt, wobei bei Barlow [2] der Spotpreis $S_t = g^{-1}(D_t)$ ist. Anders als beim Modell von Barlow, bei dem die Angebotskurve eine fixe parametrische Funktion ist, werden hier Treibstoffpreise und die Kapazitäten berücksichtigt.
In beiden Modellen ist die Nachfrage unelastisch, da sie nicht von Treibstoffpreisen beeinflusst wird.

Im Modell 2 treten Spitzen auf, wenn der Produzent von einer Technologie zur nächsten billigeren wechselt. Und die Dynamiken des Nachfrageprozesses erklären diesen Wechselprozess. Die Spitzen resultieren also von einem hohen Level des Nachfrageprozesses. Das führt dazu, dass der Produzent eine teuerere Technologie benutzen muss.

Der Rohstoffmarkt und der Elektrizitätsmarkt sind unvollständig. Um Elektrizitätsderivate zu bepreisen, benötigen wir ein äquivalentes Martingalmaß. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten dieses Maß zu definieren, eine Möglichkeit ist folgende:

Bezeichne $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{min}$ das minimale Martingalmaß, eingeführt durch Föllmer, und Schweizer [19], d.h.

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(- \int_0^{T^*} \theta_u \, dW_u - \frac{1}{2} \int_0^{T^*} \|\theta_u\|^2 \, d_u \right)$$

wobei $T^* > 0$ ein gegebener endlicher Horizont und $\theta_t = \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t \mathbb{1}_n)$ der Risiko-Marktpreis für die Rohstoffmärkte $(S^1, \ldots, S^n)$ ist. Das gerade definierte Martingalmaß definiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_{T^*}$, welches äquivalent zum Maß $\mathbb{P}$ ist.

4.2.2 Forwardpreis

Ein Futurevertrag mit Fälligkeit $T_1 > 0$ und Lieferperiode $[T_1, T_2]$ ist ein Vertrag mit Auszahlung

$$(T_2 - T_1)^{-1} \int_{T_1}^{T_2} S_T \, dT$$

mit Fälligkeit T_1, dessen Preis $F(t, T_1, T_2)$ zur Zeit t zur Zeit T_1 bezahlt wird, für $T_1 < T_2 \leq T^*$. Wichtig ist, dass die Auszahlung, aufgrund der Definition des Spotpreises, durch Terme der Treibstoffpreise ausgedrückt werden. Im Modell 2 kann der

Forwardvertrag der Elektrizität als ein Forwardvertrag der Treibstoffe betrachtet werden und deshalb kann auch die klassische No-Arbitrage Theorie verwendet werden, um Elektrizitätsderivate zu bepreisen.

Mit der Annahme (4.1) und der klassischen Future-Bepreisung folgt sofort

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du} S_T\right]}{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\right]} \, dT.$$

Sei $T \in [T_1, T_2]$. Wir definieren nun das Forward-Maß $\mathbb{Q}_T$ durch die Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}} := \frac{e^{-\int_t^T r_u du}}{B(t,T)} \quad \text{auf } \mathcal{F}_T^W$$

wobei

$$B(t,T) := \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\right]$$

der Preis der Nullkuponanleihe zur Zeit t, mit Fälligkeit T ist.
Es gilt

$$\begin{aligned} F(t, T_1, T_2) &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[\, S_T | \, \mathcal{F}_t] \, dT \\ &= \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{i=1}^{n} \int_{T_1}^{T_2} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} \left[P_T{}^{(i)} \, \mathbb{1}_{\{D_T \in I_i{}^{\pi_T(T)}\}} \middle| \, \mathcal{F}_t \right] \, dT. \end{aligned}$$

Sei $\pi \in \Pi_n$ eine nicht zufällige Permutation, wobei Π_n die Menge aller Permutationen über das Indexset $\{1, \ldots, n\}$ ist. Unter der Annahme $P_t^i \in L^1(\mathbb{Q}_t)$ für $t \geq 0$ und $1 \leq i \leq n$ können wir folgenden Wahrscheinlichkeitswechsel auf $\mathcal{F}_T^W$ definieren:

$$\frac{d\mathbb{Q}_T^i}{d\mathbb{Q}_T} = \frac{S_T^i}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[S_T^i]}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad T \leq T^*.$$

Proposition 4.2.1. Unter diesen Annahmen und wenn $P_T^i \in L^1(\mathbb{Q}_T)$ für alle $T \in [T_1, T_2]$ und $1 \leq i \leq n$ gilt, erhält man

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in \Pi_n} \int_{T_1}^{T_2} F^{\pi(i)}(t, T) \, \mathbb{Q}_T{}^{\pi(i)}[\pi_T = \pi | \, \mathcal{F}_t^W] \, \mathbb{Q}_T[D_T \in I_i^{\pi}(T) | \, \mathcal{F}^{0,\Delta}] \, dT \tag{4.2}$$

für $t \in [0, T_1]$, wobei $F^i(t, T)$ den Forwardpreis des i-ten Rohstoffs zur Zeit t mit Fälligkeit T beschreibt und $\mathcal{F}_t{}^{0,\Delta}$ die natürliche Filtration, erzeugt durch W^0 und Δ, ist. Die letzte Formel zeigt, dass der Forwardpreis gleich dem gewichteten Mittel der Forwardpreise der Treibstoffe ist.

Beweis. Laut Definition gilt

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} F(t, T) \, dT$$

wobei $F(t, T) = \mathbb{E}^{Q_T}[S_T \, | \mathcal{F}_t]$ als Forwardpreis zur Zeit t mit Fälligkeit T und unmittelbarer Lieferung bei Fälligkeit interpretiert werden kann. Mit der Definition des Elektrizitäts-Forwardpreises $F(t, T)$ bekommen wir

$$\begin{aligned} F(t, T) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} \left[P_T{}^{(i)} \, \mathbb{1}_{\{D_T \in I_i{}^{\pi_T}(T)\}} \middle| \, \mathcal{F}_t \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in \Pi_n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} \left[P_T^{\pi(i)} \, \mathbb{1}_{\{D_T \in I_i{}^{\pi}(T)\}} \, \mathbb{1}_{\{\pi_T = \pi\}} \middle| \, \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Mit Verwendung der Unabhängigkeit zwischen W, W^0 und Δ erhalten wir

$$F(t, T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi \in \Pi_n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} \left[P_T^{\pi(i)} \mathbb{1}_{\{\pi_T = \pi\}} \middle| \, \mathcal{F}_t^W \right] \mathbb{Q}_T[D_T \in I_i{}^{\pi}(T) | \, \mathcal{F}_t^{0,\Delta}].$$

Unter der Verwendung der Wahrscheinlichkeit $d\mathbb{Q}_T^{\pi(i)} / d\mathbb{Q}_T$ gilt

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T} \left[P_T^{\pi(i)} \, \mathbb{1}_{\{\pi_T = \pi\}} \middle| \, \mathcal{F}_t^W \right] = F^{\pi(i)}(t, T) \, \mathbb{Q}_T^{\pi(i)}[\pi_T = \pi | \, \mathcal{F}_t^W]$$

anschließendes Integrieren zwischen T_1 und T_2 und dividieren durch $T_2 - T_1$ liefert die gewünschte Formel. □

Mit dem Modell von Aid, Campi, Huu, und Touzi [1] als Motivation können wir den

Elektrizitäts-Forwardpreis $F(t,T)$ wie folgt dargestellen:

$$F(t,T) = \sum_{i=1}^{n} a^i(t,T)\, F^i(t,T),$$

wobei $F^i(t,T)$, für $i = \{1,\dots,n\}$, die Forwardpreise der Rohstoffe sind, die für die Produktion von Elektrizität verwendet werden und $(a^i(t,T))_{t\in[0,T]}$ für jedes $T > 0$ und $i = \{1,\dots,n\}$ ein stochastischer Prozess ist. Aus dem vorigen Beweis wissen wir, dass

$$F(t,T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\pi\in\Pi_n} F^{\pi(i)}(t,T)\, \mathbb{Q}_T^{\pi(i)}[\pi_T = \pi |\, \mathcal{F}_t^W]\, \mathbb{Q}_T[D_T \in I_i^{\pi}(T) |\, \mathcal{F}_t^{0,\Delta}]$$

gilt. Setzen wir nun $j := \pi(i)$ erhalten wir

$$F(t,T) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\pi\in\Pi_n} F^{j}(t,T)\, \mathbb{Q}_T^{j}[\pi_T = \pi |\, \mathcal{F}_t^W]\, \mathbb{Q}_T[D_T \in I_{\pi^{-1}(j)}^{\pi}(T) \Big|\, \mathcal{F}_t^{0,\Delta}].$$

Somit gilt für $a^i(t,T)$:

$$a^i(t,T) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\pi\in\Pi_n} \mathbb{Q}_T^{j}[\pi_T = \pi |\, \mathcal{F}_t^W]\, \mathbb{Q}_T[D_T \in I_{\pi^{-1}(j)}^{\pi}(T) \Big|\, \mathcal{F}_t^{0,\Delta}].$$

4.3 Forwardpreis-Modellierung

Wir verwenden nun die vorige Darstellung des Forwarpreises $F(t,T)$

$$F(t,T) = \sum_{i=1}^{n} a^i(t,T)\, F^i(t,T),$$

als definierende Eigenschaft eines Modells für die Elektrizitäts-Forwardpreise. Ziel ist es Bedingungen an $a^i(t,T)$ und $F^i(t,T)$ Bedingungen zu finden, sodass $F(t,T)$ ein lokales Martingal ist.

Wir arbeiten auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\le T}, \mathbb{Q})$ auf dem eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung W und eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung $\tilde{B}$ definiert ist, mit $d\langle \tilde{B}_t^i, W_t^j\rangle = \rho^{ij}\, dt$. $\mathbb{Q}$ bezeichnet hier bereits ein risikoneutrales Maß.

Wir nehmen an, dass für jedes $T > 0$, folgende Dynamik für die Forwardpreise der

Rohstoffe gilt:

$$dF^i(t,T) = F^i(t,T) \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(t,T)\, dW_t^j, \quad t \leq T, \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

wobei $(\sigma(t,T))_{t\in[0,T]}$ ein $\mathbb{R}^{n\times n}$-wertiger stochastischer Prozess ist. Daraus folgt, dass $F^i(t,T)$ ein lokales Martingal ist. Außerdem wird eine Dynamik für die Prozesse $(a^i(t,T))_{t\in[0,T]}$ festgelegt:

$$da^i(t,T) = a^i(t,T) \left(\alpha^i(t,T)\, dt + \sum_{j=1}^{m} \beta^{ij}(t,T)\, d\tilde{B}_t^j \right), \quad t \leq T, \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

wobei $\alpha(t,T)_{t\in[0,T]}$ $\mathbb{R}^n$- und $(\beta(t,T))_{t\in[0,T]}$ $\mathbb{R}^{n\times m}$-wertige stochastische Prozesse sind. Wir wollen nun Bedingungen an $\alpha(t,T)$ finden, sodass $F(t,T)$ ein lokales Martingal ist. Dies wollen wir mit Hilfe der Itô-Formel tun.

Wir wenden nun die Itô-Formel auf

$$g(t,a,G) := F(t,T)$$

an, wobei $G^i := F^i$ gilt. Es folgt

$$dg(t,a,G) = \underbrace{\partial_t g(t,a,G)\, dt}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \partial_{a^i} g(t,a,G)\, da^i + \sum_{i=1}^{n} \partial_{G^i} g(t,a,G)\, dG^i + \sum_{i=1}^{n} d\langle a^i, G^i \rangle. \tag{4.3}$$

Setzt man jetzt die vorher definierten Dynamiken in (4.3) ein, erhält man

$$\begin{aligned} dg(t,a,G) = &\sum_{i=1}^{n} G^i(t,T)\, a^i(t,T) \alpha^i(t,T)\, dt + \sum_{i=1}^{n} G^i(t,T)\, a^i(t,T) \sum_{j=1}^{m} \beta^{ij}(t,T)\, d\tilde{B}_t^j \\ &+ \sum_{i=1}^{n} a^i(t,T)\, G^i(t,T) \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(t,T)\, dW_t^j + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{d\langle a^i, G^i \rangle}_{*} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} * &= d\langle a^i(t,T) \sum_{j=1}^{m} \beta^{ij}(t,T)\, \tilde{B}_t^j, G^i(t,T) \sum_{k=1}^{n} \sigma^{ik}(t,T)\, W_t^k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a^i(t,T)\, \beta^{ij}(t,T)\, G^i(t,T)\, \sigma^{ik}(t,T)\, \underbrace{d\langle \tilde{B}_t^j, W_t^k \rangle}_{=\rho^{jk}\, dt}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} dg(t,a,G) &= \sum_{i=1}^{n} G^i(t,T)\, a^i(t,T)\, \alpha^i(t,T)\, dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} G^i(t,T)\, a^i(t,T)\, \beta^{ij}(t,T)\, \sigma^{ik}(t,T)\, \rho^{jk} dt \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \dots\ d\tilde{B}_t^j + \sum_{i=1}^{n} \dots\ dW_t^j. \end{aligned}$$

Da die letzten zwei Terme Itô-Integrale sind, müssen die ersten zwei Terme gleich Null sein, damit $F(t,T)$ ein lokales Martingal ist.
Somit folgt:

$$\sum_{i=1}^{n} G^i(t,T)\, a^i(t,T)\, \alpha^i(t,T)\, dt = -\sum_{i=1}^{n} G^i(t,T)\, a^i(t,T) \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \beta^{ij}(t,T)\, \sigma^{ik}(t,T)\, \rho^{jk} dt.$$

Somit haben wir folgenden Satz gezeigt:

Satz 4.3.1. Für ein Modell der Form

$$F(t,T) = \sum_{i=1}^{n} a^i(t,T)\, F^i(t,T),$$

und

$$\begin{aligned} dF^i(t,T) &= F^i(t,T) \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(t,T)\, dW_t^j, \quad t \le T, \quad i \in \{1,\dots,n\} \\ da^i(t,T) &= a^i(t,T) \left(\alpha^i(t,T)\, dt + \sum_{j=1}^{m} \beta^{ij}(t,T)\, d\tilde{B}_t^j \right), \quad t \le T, \quad i \in \{1,\dots,n\} \end{aligned}$$

gilt, $(F(t,T))_{t\le T}$ ist ein lokales Martingal, wenn

$$\alpha^i(t,T) = -\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \beta^{ij}(t,T)\, \sigma^{ik}(t,T)\, \rho^{jk} \tag{4.4}$$

gilt.

5 Konsistente Faktormodelle

In diesem Kapitel verweisen wir auf die Literatur von Filipović [16] und Hell, Meyer-Brandis, und Rheinländer [22].
Bisher haben wir Modelle der Form

$$F(t,T) = \sum_{i=1}^{n} a^i(t,T)\, F^i(t,T)$$

betrachtet. Nun wollen wir die Forwardpreiskurven als Funktional eines endlich dimensionalen Markov-Prozesses darstellen. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)t \geq 0, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{Q}$ ein zum Maß $\mathbb{P}$ äquivalentes risikoneutrales Maß. Wir wollen die obige Struktur bewahren und den Strompreis weiterhin als Linearkombination der Forwardpreise der Rohstoffe schreiben. Somit setzen wir

$$F(t,T) = \sum_{i=1}^{n} h^i(T-t, Y_t, X_t)\, g^i(T-t, X_t)$$

sodass $a^i(t,T) = h^i(T-t, Y_t, X_t)$ und $F^i(t,T) = g^i(T-t, X_t)$, wobei $g^i \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ und $h^i \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Die Prozesse Y und X sind n-dimensionale Diffusionsprozesse der Form

$$\begin{aligned} dX_t &= b^X(X_t)\, dt + \zeta^X(X_t)\, dW_t, \qquad && X_0 = x_0 \\ dY_t &= b^Y(Y_t, X_t)\, dt + \zeta^Y(Y_t, X_t)\, dB_t, \qquad && Y_0 = y_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei W eine n-dimensionale Standard $\mathbb{Q}$-Brown'sche Bewegung und B auch eine n-dimensionale Standard $\mathbb{Q}$-Brown'sche Bewegung ist, die miteinander korreliert sind, sodass $\langle B_t^i, W_t^j \rangle = \rho^{ij}$ gilt, wobei wir für ρ^{ii} nur ρ^i schreiben. $b^X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b^Y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\zeta^X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$, $\zeta^Y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ sind stetige Funktionen, sodass eine Lösung der SDGen existiert.

Wir wollen nun Konsistenzbedingungen finden, so dass $(g^i(T-t, X_t))_t$ ein lokales Martingal ist und die Driftbedingung (4.4) auf $h^i(T-t, Y_t, X_t)$ übertragen wird. Dazu setzen wir $s := T - t$.

Definition 5.0.2. Ein Faktormodell heißt *zulässig*, wenn folgende Annahmen erfüllt werden

(**A1**) $g^i \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ und $h^i \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$,

(**A2**) $b^X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $b^Y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind stetig und $\zeta^X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\zeta^Y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ sind messbar, sodass die Diffusionsmatrizen

$$a^X(x) = \zeta^X(x)\,\zeta^X(x)^T$$
$$a^Y(y,x) = \zeta^Y(y,x)\,\zeta^Y(y,x)^T$$

stetig in $x, y \in \mathbb{R}^n$ sind,

(**A3**)Die SDGen in (5.1) haben eine eindeutige $\mathbb{R}^n$-wertige Lösung X_t bzw. Y_t, für jedes $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definition 5.0.3. Ein zulässiges Modell $F(t,T)$ heißt *konsistent*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Für jedes $T > 0$ und jeden Anfangswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ist der Prozess $g^i(T-t, X_t)$ ein lokales Martingal (**A4**).

- Für jedes $T > 0$ und jeden Anfangswert $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, ist der Prozess $F(t,T) = \sum_{i=1}^n h^i(T-t, Y_t, X_t)\, g^i(T-t, X_t)$ ein lokales Martingal.

Bemerkung 5.0.4. Für den Prozess $h^i(T-t, Y_t, X_t)$ soll eine geeignete Bedingung gefunden werden, sodass die Driftbedingung (4.4) auf $h^i(T-t, Y_t, X_t)$ übertragen wird.

Für ein zulässiges Modell ist die folgende Konsistenzbedingung äquivalent zu (**A4**).

Theorem 5.0.5. (Konsistenzbedingung) In einem zulässigen Modell ist Bedingung (**A4**) genau dann erfüllt, wenn für $g^i(T-t, X_t)$ folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\partial_s G(s,x) = g^i(0,x) + \sum_{j=1}^n b_j^X(x)\,\partial_{x_j} G(s,x) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n a_{jk}^X(x)\,\partial_{x_j}\partial_{x_k} G(s,x) \tag{5.2}$$

für alle $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, wobei $G(s,x) = \int_0^s g^i(u,x)du$ und $a^X(x) = \zeta^X(x)\,\zeta^X(x)^T$, wie vorher definiert.

Beweis. Mit (**A1**) können wir die Itô-Formel auf g^i anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} dg^i(T-t,X_t) &= -\partial_s g^i(T-t,X_t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} g^i(T-t,X_t)\,dX_t^j \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_j}\partial_{x_k} g^i(T-t,X_t)\,\underbrace{d\langle X_t^j, X_t^k\rangle}_{**}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} ** &= d\langle \zeta_j^X(X_t)W_t^j,\, \zeta_k^X(X_t)W_t^k\rangle \\ &= \zeta_j^X(X_t)\,\zeta_k^X(X_t)\,d\langle W_t^j, W_t^k\rangle \\ &= a_{jk}^X(X_t)\,dt. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} dg^i(T-t,X_t) &= \Bigg(-\partial_s g^i(T-t,X_t) + \sum_{j=1}^{n} b_j^X(X_t)\,\partial_{x_j} g^i(T-t,X_t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^X(X_t)\,\partial_{x_j}\partial_{x_k} g^i(T-t,X_t)\Bigg)\,dt \\ &\quad + \sum_{j,k=1}^{n} \zeta_{jk}^X(X_t)\,\partial_{x_j} g^i(T-t,X_t)\,dW_t^k \end{aligned} \tag{5.3}$$

wobei $a^X(x) = \zeta^X(x)\zeta^X(x)^T$. Da der letzte Term ein Itô-Integral ist, ist $g^i(T-t,X_t)$ ein lokales Martingal, wenn der Drift verschwindet. Das ist genau dann der Fall, mit $s := T-t$, wenn

$$\partial_s g^i(s,x) = \sum_{j=1}^{n} b_j^X(x)\,\partial_{x_j} g^i(s,x) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^X(X_t)\,\partial_{x_j}\partial_{x_k} g^i(s,x)$$

für alle $(s,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Wenn beide Seiten bzgl. s integriert werden, erhält man das gewünschte Ergebnis. □

Das vorige Theorem liefert also eine Konsistenzbedingung für $g^i(T-t,X_t)$. Jetzt benötigen wir noch eine Driftbedingung für $h^i(T-t,Y_t)$, sodass $F(t,T)$ ein konsistentes Faktormodell ist. Wir werden dies für den eindimensionalen Fall durchführen, der mehrdimensionale Fall geht analog. Dazu machen wir folgende Annahme.

Annahme 5.0.6. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass g^i nur von X^i und h^i nur von Y^i, X^i abhängt und, dass $\zeta^Y(Y_t^i, X_t^i)$ und $\zeta^X(X_t^i)$ diagonal sind. Nach wie vor gilt

$d\langle B_t^i, W_t^i\rangle = \rho^i \, dt.$

Analog zum Theorem 5.0.4. erhalten wir mit der obigen Annahme eine Konsistenzbedingung für $g^i(T-t, X_t^i)$. Es gilt

$$\begin{aligned} dg^i(T-t, X_t^i) &= -\partial_t g^i(T-t, X_t^i)\, dt + \partial_x g^i(T-t, X_t^i)\, dX_t^i \\ &+ \frac{1}{2}\, \partial_{xx} g^i(T-t, X_t^i)\, d\langle X_t^i, X_t^i\rangle \\ &= \big[-\partial_t g^i(T-t, X_t^i) + b_i^X(X_t^i)\, \partial_x g^i(T-t, X_t^i) \\ &+ \frac{1}{2}\, (\zeta_i^X(X_t^i))^2\, \partial_{xx} g^i(T-t, X_t^i)\big] dt + \zeta_i^X(X_t^i)\, \partial_x g^i(T-t, X_t^i)\, dW_t^i. \end{aligned}$$

Der letzter Term ist ein lokales Martingal. Somit ist $g^i(X_t^i)$ genau dann ein lokales Martingal, wenn der Drift verschwindet, d.h. wenn

$$\partial_t g^i(T-t, X_t^i) = b_i^X(X_t^i)\, \partial_x g^i(T-t, X_t^i) + \frac{1}{2}\, (\zeta_i^X(X_t^i))^2\, \partial_{xx} g^i(T-t, X_t^i) \tag{5.4}$$

gilt. Wir haben somit die Konsistenzbedingung für $g^i(T-t, X_t^i)$ erhalten und möchten uns nun der Driftbedingung für $h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)$ widmen. Da h^i jetzt nur mehr von Y^i und X^i abhängt, gilt

$$\begin{aligned} dh^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) &= -\partial_t h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\, dt + \partial_y h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\, dY_t^i \\ &+ \partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\, dX_t^i + \frac{1}{2}\, \partial_{yy} h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\, \underbrace{d\langle Y_t^i, Y_t^i\rangle}_{*} \\ &+ \frac{1}{2}\, \partial_{xx} h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\, d\langle X_t^i, X_t^i\rangle + \partial_y \partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\, \underbrace{d\langle Y_t^i, X_t^i\rangle}_{**} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} * &= (\zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i))^2 dt, \\ ** &= \zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\, \zeta_i^X(X_t^i)\, \rho^i\, dt. \end{aligned}$$

Für $d\langle X_t^i, X_t^i\rangle$ erhält man ein analoges Ergebnis. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} dh^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) &= \big[-\partial_t h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) + b_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\, \partial_y h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) \\ &+ b_i^X(X_t^i)\, \partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) + \frac{1}{2}\, (\zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i))^2\, \partial_{yy} h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) \\ &+ \frac{1}{2}\, (\zeta_i^X(X_t^i))^2\, \partial_{xx} h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) \\ &+ \zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\, \zeta_i^X(X_t^i)\, \rho^i\, \partial_y \partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\big]\, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\, \partial_y h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\, dB_t^i \\
&+ \zeta_i^X(X_t^i)\, \partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\, dW_t^i.
\end{aligned}
$$

Da $h^i(T-t, Y_t, X_t) = a^i(t,T)$ gilt und wir wissen, dass die Dynamik von $(a^i(t,T))_{t\in[0,T]}$ wie folgt ausschaut

$$
da^i(t,T) = a^i(t,T)\left(\alpha^i(t,T)\,dt + \sum_{j=1}^{n} \beta^{ij}(t,T)\,d\tilde{B}_t^j\right), \quad t \le T, \quad i \in \{1,\dots,n\}
$$

erhalten wir für $\alpha^i(t,T)$

$$
\begin{aligned}
\alpha^i(t,T) = \big[&- \partial_t h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) + b_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\, \partial_y h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) \\
&+ b_i^X(X_t^i)\, \partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) + \frac{1}{2}\, (\zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i))^2\, \partial_{yy} h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) \\
&+ \frac{1}{2}\, (\zeta_i^X(X_t^i))^2\, \partial_{xx} h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) \\
&+ \zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\, \zeta_i^X(X_t^i)\, \rho^i\, \partial_y \partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\big] / h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i).
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

Mit der folgenden Definition

$$
\tilde{B}_t = (W_t^1, \dots, W_t^n, B_t^1, \dots, B_t^n)^T \tag{5.6}
$$

erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\beta^{ii}(t,T) &= \frac{\zeta_i^X(X_t^i)\, \partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)}{h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)} \\
\beta^{i(i+n)}(t,T) &= \frac{\zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\, \partial_y h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)}{h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)}.
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

Weiters wissen wir, dass $g^i(T-t, X_t) = F^i(t,T)$ mit der Dynamik

$$
dF^i(t,T) = F^i(t,T) \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(t,T)\, dW_t^j
$$

gilt. Daher erhalten wir

$$
\sigma^{ii}(t,T) = \frac{\zeta_i^X(X_t^i)\, \partial_x g^i(T-t, X_t^i)}{g^i(T-t, X_t^i)}. \tag{5.8}
$$

Da wir aus Satz 4.3.1. wissen, dass die Bedingung

$$
\alpha^i(t,T) = -\sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{n} \beta^{ij}(t,T)\, \sigma^{ik}(t,T)\, \rho^{jk}
$$

impliziert, dass $h^i(T-t, Y_t, X_t)$ ein lokales Martingal ist, bekommen wir nun folgende Driftbedingung

$$\alpha^i(t,T) = -\beta^{ii}(t,T)\,\sigma^{ii}(t,T) - \beta^{i(i+n)}(t,T)\,\sigma^{ii}(t,T)\,\rho^i, \quad i \in \{1,\dots,n\}. \tag{5.9}$$

Also bekommen wir mit (5.5), (5.7) und (5.8)

$$\begin{aligned}
&\big[-\partial_t h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i) + b_i^Y(Y_t^i,X_t^i)\,\partial_y h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i) + b_i^X(X_t^i)\,\partial_x h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)\\
&+\frac{1}{2}\,(\zeta_i^Y(Y_t^i,X_t^i))^2\,\partial_{yy}h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i) + \frac{1}{2}\,(\zeta_i^X(X_t^i))^2\,\partial_{xx}h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)\\
&+\zeta_i^Y(Y_t^i,X_t^i)\,\zeta_i^X(X_t^i)\,\rho^i\,\partial_y\partial_x h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)\big]\,/\,h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)\\
&= -\frac{\zeta_i^X(X_t^i)\,\partial_x h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)}{h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)}\cdot\frac{\zeta_i^X(X_t^i)\,\partial_x g^i(T-t,X_t^i)}{g^i(T-t,X_t^i)}\\
&-\frac{\zeta_i^Y(Y_t^i,X_t^i)\,\partial_y h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)}{h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)}\cdot\frac{\zeta_i^X(X_t^i)\,\partial_x g^i(T-t,X_t^i)}{g^i(T-t,X_t^i)}\,\rho^{ii}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Korollar 5.0.7. Unter Annahme 5.0.5. ist ein zulässiges Modell $F(t,T)$ genau dann konsistent, wenn $g^i(T-t,X_t^i)$ die Konsistenzbedingung (5.4), d.h.

$$\partial_t g^i(T-t,X_t^i) = b_i^X(X_t^i)\,\partial_x g^i(T-t,X_t^i) + \frac{1}{2}\,(\zeta_i^X(X_t^i))^2\,\partial_{xx}g^i(T-t,X_t^i)$$

erfüllt und für $h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)$ die Driftbedingung (5.9), d.h.

$$\alpha^i(t,T) = -\beta^{ii}(t,T)\,\sigma^{ii}(t,T) - \beta^{i(i+n)}(t,T)\,\sigma^{ii}(t,T)\,\rho^i$$

gilt, mit (5.5), (5.7) und (5.8).

Wir spezifizieren nun X^i als geometrische Brown'sche Bewegung mit Drift, d.h.

$$dX_t^i = b_i\,X_t^i\,dt + \zeta_i\,X_t^i\,dW_t^i$$

wobei es sich bei b_i und ζ_i um Konstanten handelt. X_t^i kann man als Spotpreis für Rohstoff i interpretiert werden. Da es sich bei den Rohstoffen um lagerfähige Rohstoffe handelt, ist es möglich den Forwardpreis $g^i(T-t,X_t^i) = F^i(t,T)$ mit der Spot-Forward-Beziehung (3.1) darzustellen, durch eine geeignete Wahl von convenience yield und Lagerkosten.

Für die Spot-Forward-Beziehung für lagerfähige Rohstoffe gilt

$$F(t,T) = S_t\, e^{(r-\gamma)(T-t)}$$

wobei S_t der Spotpreis zur Zeit t, r eine konstante Zinsrate und γ die convenience yield ist. Da X_t eine geometrische Brown'sche Bewegung mit $dX_t^i = b_i\, X_t^i\, dt + \zeta_i\, X_t^i\, dW_t^i$ ist, erhalten wir für den Forwardpreis

$$g^i(T-t, X_t^i) = F^i(t,T) = X_t^i\, e^{b_i(T-t)}. \tag{5.11}$$

Somit gilt $b_i = r - \gamma$.
Mit der Darstellung

$$g^i(T-t, X_t^i) = F^i(t,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_T^i \big| \mathcal{F}_t]$$

ist g^i ein lokales Martingal und die Konsistenzbedingung somit erfüllt.

Weiters bekommen wir für

$$\alpha^i(t,T) = -\beta^{ii}(t,T)\,\sigma^{ii}(t,T) - \beta^{i(i+n)}(t,T)\,\sigma^{ii}(t,T)\,\rho^i.$$

$$\begin{aligned}
&\big[-\partial_t h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) + b_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\,\partial_y h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) + b_i\, X_t^i\,\partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) \\
&+ \frac{1}{2}\,(\zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i))^2\,\partial_{yy} h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) + \frac{1}{2}\,(\zeta_i^2\, X_t^{i2}\,\partial_{xx} h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) \\
&+ \zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\,\zeta_i\, X_t^i\,\partial_y\partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)\big] / \, h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i). \\
&= -\frac{\zeta_i\, X_t^i\,\partial_x h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)}{h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)} \cdot \frac{\zeta_i\, X_t^i\,\partial_x g^i(T-t, X_t^i)}{g^i(T-t, X_t^i)} \\
&- \frac{\zeta_i^Y(Y_t^i, X_t^i)\,\partial_y h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)}{h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)} \cdot \frac{\zeta_i\, X_t^i\,\partial_x g^i(T-t, X_t^i)}{g^i(T-t, X_t^i)}\,\rho^i
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Wir spezifizieren nun $h^i(T-t, Y_t, X_t)$ als zweidimensionales Polynom von x^i und y^i, d.h. es gilt

$$h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) = \sum_{k_1,k_2=0}^{m} \gamma_{k_1,k_2}(T-t)\,(Y_t^i)^{k_1}\,(X_t^i)^{k_2} \quad \text{mit } k_1 + k_2 \le m.$$

Wir erhalten für $dh^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)$

$$\begin{aligned}
dh^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) = & \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} -\partial_t \gamma_{k1,k2}(T-t)\, k_1 (Y_t^i)^{k_1 - 1} \,(X_t^i)^{k_2}\, dt \\
= & \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\, k_1 (Y_t^i)^{k_1 - 1} \,(X_t^i)^{k_2}\, dY_t^i \\
+ & \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\, (Y_t^i)^{k_1} \, k_2 (X_t^i)^{k_2 - 1}\, dX_t^i \\
+ & \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\, k_1\,(k_1 - 1)(Y_t^i)^{k_1 - 2} \,(X_t^i)^{k_2}\, d\langle Y_t^i, Y_t^i \rangle \\
+ & \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\, (Y_t^i)^{k_1} \, k_2 (k_2 - 1)(X_t^i)^{k_2 - 2}\, d\langle X_t^i, X_t^i \rangle \\
+ & \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\, k_1 (Y_t^i)^{k_1 - 1} \, k_2 (X_t^i)^{k_2 - 1}\, d\langle Y_t^i, X_t^i \rangle.
\end{aligned}$$

Für Y_t^i verwenden wir nun folgende Dynamik

$$dY_t^i = (K + \kappa_i^Y \, Y_t^i + \kappa_i^X \, X_t^i)dt + (\Theta_i + \theta_i^Y \, Y_t^i + \theta_i^X \, X_t^i)dB_t^i.$$

Somit erhalten wir für α^i, β^{ii} und $\beta^{i(i+n)}$

$$\begin{aligned}
\alpha^i(t,T) = & \Bigg(\sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} -\partial_t \gamma_{k1,k2}(T-t)\, k_1 (Y_t^i)^{k_1 - 1} \,(X_t^i)^{k_2} \\
= & \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\, k_1 (Y_t^i)^{k_1 - 1} \,(X_t^i)^{k_2}\, (K_i + \kappa_i^Y \, Y_t^i + \kappa_i^X \, X_t^i) \\
+ & \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\, (Y_t^i)^{k_1} \, k_2 (X_t^i)^{k_2 - 1}\, b_i \, X_t^i \\
+ & \frac{1}{2} \sum_{\substack{0 \le k_1, k_2 \le m \\ k_1 + k_2 \le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\, k_1\,(k_1 - 1)(Y_t^i)^{k_1 - 2} \,(X_t^i)^{k_2}\, (\Theta_i + \theta_i^Y \, Y_t^i + \theta_i^X \, X_t^i)^2
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\substack{0\le k_1,k_2\le m\\ k_1+k_2\le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\,(Y_t^i)^{k_1}\,k_2(k_2-1)(X_t^i)^{k_2-2}\,\zeta_i^2\,X_t^{i2}$$

$$\left.+\sum_{\substack{0\le k_1,k_2\le m\\ k_1+k_2\le m}} \gamma_{k1,k2}(T-t)\,k_1(Y_t^i)^{k_1-1}\,k_2(X_t^i)^{k_2-1}\,(\Theta_i+\theta_i^Y\,Y_t^k+\theta_i^X\,X_t^k)\,\zeta_i\,X_t^i\right)$$

$$/h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i),$$

$$\beta^{ii}(t,T)=\frac{\sum_{\substack{0\le k_1,k_2\le m\\ k_1+k_2\le m}}\gamma_{k1,k2}(T-t)\,(Y_t^i)^{k_1}\,k_2(X_t^i)^{k_2-1}\,\zeta_i\,X_t^i}{h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)},$$

$$\beta^{i(i+n)}(t,T)=\frac{\sum_{\substack{0\le k_1,k_2\le m\\ k_1+k_2\le m}}\gamma_{k1,k2}(T-t)\,k_1(Y_t^i)^{k_1-1}\,(X_t^i)^{k_2}\,(\Theta_i+\theta_i^Y\,Y_t^i+\theta_i^X\,X_t^i)}{h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)}.$$

Wir schauen uns nun die Konsistenzbedingung für $h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)$ für die Fälle $m=1$ und $m=2$.

Korollar 5.0.8. Sei $m=1$. Das Modell

$$F(t,T)=\sum_{i=1}^n h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)\,g^i(T-t,X_t^i)$$

mit X_t^i und Y_t^i gegeben durch

$$dX_t^i=b_i\,X_t^i\,dt+\zeta_i\,X_t^i\,dW_t^i$$

$$dY_t^i=(K+\kappa_i^Y\,Y_t^i+\kappa_i^X\,X_t^i)dt+(\Theta_i+\theta_i^Y\,Y_t^i+\theta_i^X\,X_t^i)dB_t^i.$$

und g^i und h^i gegeben durch

$$g^i(T-t,X_t^i)=X_t^i\,e^{b_i(T-t)}$$

$$h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)=\sum_{k_1,k_2=0}^m\gamma_{k_1,k_2}(T-t)\,(Y_t^i)^{k_1}\,(X_t^i)^{k_2}\quad\text{mit } k_1+k_2\le m$$

ist konsistent, wenn γ_{k_1,k_2} folgende Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,0}(T-t) &= \frac{\exp\big[t(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y)\big]}{(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y)}\big(\Theta_i\,\zeta_i\,\rho^i + K_i\big)\,t\cdot C_{0,0},\\
\gamma_{1,0}(T-t) &= \exp\big[t\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y\big)\big]\cdot C_{1,0},\\
\gamma_{0,1}(T-t) &= \exp\big[\big(\zeta_i^2 + b_i\big)\,t\big]\cdot C_{0,1}\\
&\quad + \frac{\exp\big[(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y)\,t\big]\big(\theta_i^X\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^X\big)\cdot C_{1,0}}{(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y) - \big(\zeta_i^2 + b_i\big)}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Beweis. Es gilt

$$h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) = \sum_{k_1,k_2=0}^{m} \gamma_{k_1,k_2}(T-t)\,(Y_t^i)^{k_1}\,(X_t^i)^{k_2} \quad \text{mit } k_1 + k_2 \le m.$$

Für $m = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) &= \sum_{\substack{0\le k_1,k_2\le m\\ k_1+k_2\le 1}} \gamma_{k_1,k_2}(T-t)\,(Y_t^i)^{k_1}\,(X_t^i)^{k_2}\\
&= \gamma_{0,0}(T-t) + \gamma_{1,0}(T-t)\,Y_t^i + \gamma_{0,1}(T-t)\,X_t^i.
\end{aligned}$$

Wir wenden nun die Itô-Formel auf $h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i)$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
dh^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) &= \big(-\partial_t\gamma_{0,0}(T-t) - \partial_t\gamma_{1,0}(T-t)\,Y_t^i - \partial_t\gamma_{0,1}(T-t)\,X_t^i\big)\,dt\\
&\quad + \gamma_{1,0}(T-t)\,dY_t^i + \gamma_{0,1}(T-t)\,dX_t^i.
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
dX_t^i &= b_i\,X_t^i\,dt + \zeta_i\,X_t^i\,dW_t^i\\
dY_t^i &= (K_i + \kappa_i^Y\,Y_t^i + \kappa_i^X\,X_t^i)\,dt + (\Theta_i + \theta_i^Y\,Y_t^i + \theta_i^X\,X_t^i))\,dB_t^i
\end{aligned}$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
dh^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) &= \big[-\partial_t\gamma_{0,0}(T-t) - \partial_t\gamma_{1,0}(T-t)\,Y_t^i - \partial_t\gamma_{0,1}(T-t)\,X_t^i\\
&\quad + \gamma_{1,0}(T-t)\big(K_i + \kappa_i^Y\,Y_t^i + \kappa_i^X\,X_t^i\big) + \gamma_{0,1}(T-t)b_i\,X_t^i\big]dt\\
&\quad + \gamma_{1,0}(T-t)\big(\Theta_i + \theta_i^Y\,Y_t^i + \theta_i^X\,X_t^i\big)dB_t^i + \gamma_{0,1}(T-t)\big(\zeta_i\,X_t^i\big)\,dW_t^i.
\end{aligned}$$

Für die Driftbedingung (5.9)

$$\alpha^i(t,T) = -\beta^{ii}(t,T)\,\sigma^{ii}(t,T) - \beta^{i(i+n)}(t,T)\,\sigma^{ii}(t,T)\,\rho^i.$$

gilt also

$$\begin{aligned}\alpha^i &= \frac{-\partial_t\gamma_{0,0}(T-t) - \partial_t\gamma_{1,0}(T-t)\,Y_t^i - \partial_t\gamma_{0,1}(T-t)\,X_t^i}{h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)}\\ &\quad+ \frac{\gamma_{1,0}(T-t)\big(K_i + \kappa_i^Y\,Y_t^i + \kappa_i^X\,X_t^i\big) + \gamma_{0,1}(T-t)\,b_i\,X_t^i}{h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta^{ii} &= \frac{\gamma_{0,1}(T-t)\,\zeta_i\,X_t^i}{h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)},\\ \beta^{i(i+n)} &= \frac{\gamma_{1,0}(T-t)\big(\Theta_i + \theta_i^Y\,Y_t^i + \theta_i^X\,X_t^i\big)}{h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)}.\end{aligned}$$

Da wir aus (5.11) wissen, dass $g^i(T-t,X_t^i) = X_t^i\,e^{b_i(T-t)}$ gilt, erhalten wir für σ^{ii}

$$\begin{aligned}\sigma^{ii} &= \frac{\zeta_i\,X_t^i\,\partial_x g^i(T-t,X_t^i)}{g^i(T-t,X_t^i)}\\ &= \zeta_i.\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt einen Koeffizientenvergleich machen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_t\gamma_{0,0}(T-t) &= \gamma_{1,0}(T-t)\big(\Theta_i\,\zeta_i\,\rho^i + K_i\big),\\ \partial_t\gamma_{1,0}(T-t) &= \gamma_{1,0}(T-t)\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y\big),\\ \partial_t\gamma_{0,1}(T-t) &= \gamma_{0,1}(T-t)\big(\zeta_i^2 + b_i\big) + \gamma_{1,0}(T-t)\big(\theta_i^X\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^X\big).\end{aligned}$$

Nun kann man diese linearen Differentialgleichungen erster Ordnung lösen und erhält das gewünschte Ergebnis. □

Korollar 5.0.9. Sei $m = 2$. Das Modell

$$F(t,T) = \sum_{i=1}^{n} h^i(T-t,Y_t^i,X_t^i)\,g^i(T-t,X_t^i)$$

mit X_t^i und Y_t^i gegeben durch

$$dX_t^i = b_i\,X_t^i\,dt + \zeta_i\,X_t^i\,dW_t^i$$

$$dY_t^i = (K + \kappa_i^Y\, Y_t^i + \kappa_i^X\, X_t^i)dt + (\Theta_i + \theta_i^Y\, Y_t^i + \theta_i^X\, X_t^i)dB_t^i.$$

und g^i und h^i gegeben durch

$$g^i(T-t, X_t^i) = X_t^i\, e^{b_i(T-t)}$$

$$h^i(T-t, Y_t^i, X_t^i) = \sum_{k_1,k_2=0}^{m} \gamma_{k_1,k_2}(T-t)\,(Y_t^i)^{k_1}\,(X_t^i)^{k_2} \quad \text{mit } k_1 + k_2 \leq m$$

ist konsistent, wenn γ_{k_1,k_2} folgende Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned}
\gamma_{2,0}(T-t) &= \exp\left[2t\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big)\right] \cdot C_{2,0},\\
\gamma_{1,0}(T-t) &= \exp\left[\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y\big)\,t\right] \cdot C_{1,0}\\
&\quad + \frac{2\exp\left[2t(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y)\right]\big(\Theta_i\,\theta_i^Y + \Theta_i\,\zeta_i\,\rho^i + K_i\big) \cdot C_{2,0}}{\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + 2\,\theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y)}\\
\gamma_{1,1}(T-t) &= \exp\left[\big(2\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \zeta_i^2 + \kappa_i^X + b_i\big)\,t\right] \cdot C_{1,1}\\
&\quad + \frac{2\exp\left[2t(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y)\right]\big(\theta_i^X\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^Y\,\theta_i^X + \kappa_i^X\big) \cdot C_{2,0}}{2(\theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y) - \zeta_i^2 - \kappa_i^X - b_i}\\
\gamma_{0,0}(T-t) &= \big(\Theta_i\,\zeta_i\,\rho^i + K_i\big)\left[\frac{\exp\left[\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y\big)\,t\right] \cdot C_{1,0}}{\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y\big)}\right.\\
&\quad \left. + \frac{2\exp\left[2\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big)\,t\right]\big(\Theta_i\,\theta_i^Y + \Theta_i\,\zeta_i\,\rho^i + K_i\big) \cdot C_{2,0}}{2\,\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + 2\,\theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big)\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big)}\right]\\
&\quad + \frac{\exp\left[2t\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big)\right]\Theta_i^2 \cdot C_{2,0}}{2\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big)},\\
\gamma_{0,1}(T-t) &= \exp\left[\big(\zeta_i^2 + b_i\big)\,t\right] \cdot C_{0,1}\\
&\quad + (\theta_i^X\,\zeta_i\rho^i + \kappa_i^X)\left[\frac{\exp\left[\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y\big)\,t\right] \cdot C_{1,0}}{\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^Y\big) - \big(\zeta_i^2 + b_i\big)}\right.\\
&\quad + \frac{2\exp\left[2\,t\,\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big)\right]\big(\Theta_i\,\theta_i^Y + \Theta_i\,\zeta_i\,\rho^i + K_i\big) \cdot C_{2,0}}{\left[2\,\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big) - \big(\theta_i^X\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^Y\,\theta_i^X + \kappa_i^X\big)\right]}\\
&\quad \left. \cdot \frac{1}{\left[2\,\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \theta_i^{Y2} + \kappa_i^Y\big) - \big(\zeta_i^2 + b_i\big)\right]}\right]\\
&\quad + \big(2\Theta_i\,\zeta_i\,\rho^i + K_i\big)\left[\frac{\exp[t\,(2\,\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \zeta_i^2 + \kappa_i^X + b_i)] \cdot C_{1,1}}{2\,\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i + \kappa_i^X}\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2\,\exp[\big(2\,\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^{Y2}+\kappa_i^Y\big)\,t]\big(\theta_i^X\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^Y\,\theta_i^X+\kappa_i^X\big)\cdot C_{2,0}}{\big(2\,\theta_i^{Y2}+2\,\kappa_i^Y-\zeta_i^2-\kappa_i^X-b_i\big)}\\
&\left.\cdot\frac{1}{\big[2\,\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^{Y2}+\kappa_i^Y\big)-\big(\zeta_i^2+b_i\big)\big]}\right]\\
&+\frac{2\exp\big[2t\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^{Y2}+\kappa_i^Y\big)\big]\Theta_i\,\theta_i^X\cdot C_{2,0}}{2\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^{Y2}+\kappa_i^Y\big)-(\zeta_i^2+b_i)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_{0,2}(T-t)&=\exp\big[\big(2b_i+3\zeta_i^2\big)\,t\big]\cdot C_{0,2}\\
&+\big(2\theta_i^X\,\zeta_i\,\rho^i+\kappa_i^X\big)\left[\frac{\exp[\big(2\,\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\zeta_i^2+\kappa_i^X+b_i\big)\,t]\cdot C_{1,1}}{2\,\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\kappa_i^X-b_i+4\,\zeta_i}\right.\\
&\left.+\frac{2\exp[2\,t\,\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^{Y2}+\kappa_i^Y\big)]\big(\theta_i^X\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^Y\,\theta_i^X+\kappa_i^X\big)\cdot C_{2,0}}{\big(2\,\theta_i^{Y2}+2\,\kappa_i^Y-\zeta_i^2-\kappa_i^X-b_i\big)\big[2\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^{Y2}+\kappa_i^Y\big)-\big(2b_i+3\zeta_i^2\big)\big]}\right]\\
&+\frac{\exp\big[2t\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^{Y2}+\kappa_i^Y\big)\big]\,\theta_i^{X2}\cdot C_{2,0}}{2\big(\theta_i^Y\,\zeta_i\,\rho^i+\theta_i^{Y2}+\kappa_i^Y\big)-\big(2b_i+3\zeta_i^2\big)}.
\end{aligned}
$$

Der Beweis geht analog zum Fall $m = 1$.

Wir geben jetzt einen kurzen Einblick in affine und polynomiale Prozesse.

5.1 Affine Prozesse

Basierend auf Duffie, Filipović, und Schachermayer [14] und Filipović, und Mayerhofer [17] definieren wir affine Prozesse, als Klasse von zeit-homogenen Markov-Prozessen in stetiger Zeit mit Wertebereich $\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$, deren logarithmierte charakteristische Funktion auf affine Weise vom Anfangszustand des Prozesses abhängt.

Sei $n \geq 1$ und $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, ein nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Weiters sei $b^X : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $\zeta^X : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ messbar, sodass die Diffusionsmatrix

$$a^X(x) = \zeta^X(x)\zeta^X(x)^T$$

stetig in $x \in \mathcal{D}$ ist. Weiters bezeichne W eine n-dimensionale Brownsche Bewegung.

Wir nehmen an, dass für jedes $x \in \mathcal{D}$ eine Lösung $X = X^x$ der SDG

$$dX_t = b^X(X_t)\, dt + \zeta^X(X_t)\, dW_T, \quad X_0 = x$$

existiert.

Definition 5.1.1. X heißt *affin*, wenn die charakteristische Funktion von X_T bedingt durch $\mathcal{F}_t$ exponential affin in X_T ist, für alle $t \leq T$. Es existieren $\mathbb{C}$- und $\mathbb{C}^n$- wertige Funktionen $\phi(t,u)$ und $\psi(t,u)$, so dass $X = X^x$

$$\mathbb{E}\left[e^{u^T X_T} \middle| \mathcal{F}_t\right] = e^{\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)^T X_t} \tag{5.14}$$

erfüllt, für alle $u \in \mathbf{i}\mathbb{R}^n, t \leq T$ und $x \in \mathcal{D}$.

Theorem 5.1.2. Wir nehmen an, dass X affin ist. Dann ist die Diffusionsmatrix $a^X(x)$ und der Drift $b^X(x)$ affin in x. Das gilt, wenn

$$\begin{aligned} a^X(x) &= a + \sum_{i=1}^n x_i\, \alpha_i \\ b^X(x) &= b + \sum_{i=1}^n x_i\, \beta_i = b + \mathcal{B}x \end{aligned} \tag{5.15}$$

für $n \times n$-Matrizen a und α_i, und n-Vektoren b und β_i, wobei

$$\mathcal{B} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

die $n \times n$-Matrix mit i-tem Spaltenvektor $\beta_i, 1 \leq i \leq n$ bezeichnet. Weiters lösen ϕ und $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^T$ das System der Riccati-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t,u) &= \frac{1}{2}\, \psi(t,u)^T\, a\, \psi(t,u) + b^T\, \psi(t,u), \\ \phi(0,u) &= 0, \\ \partial_t \psi_i(t,u) &= \frac{1}{2}\, \psi(t,u)^T\, \alpha_i\, \psi(t,u) + \beta_i^T\, \psi(t,u),\ 1 \leq i \leq n, \\ \psi(0,u) &= u. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Insbesondere wird ϕ bestimmt durch ψ mittels simpler Integration

$$\phi(t,u) = \int_0^t \left(\frac{1}{2}\, \psi(s,u)^T\, a\, \psi(s,u) + b^T \psi(s,u) \right) ds.$$

Umgekehrt nehmen wir an, dass die Diffusionsmatrix $a^X(x)$ und der Drift $b^X(x)$ affin von der Form (5.15) sind und, dass eine Lösung (ϕ, ψ) der Riccati-Gleichungen (5.16) existiert, sodass $\phi(t,u) + \psi(t,u)^T x$ einen negativen Realteil für alle $t \geq 0, u \in \mathbf{i}\mathbb{R}^n$ und $x \in \mathcal{D}$ hat. Dann ist X affin mit bedingter charakteristischer Funktion (5.14).

Beweis. Wir verweisen auf das Theorem 10.1 in Filipović [16]. Wir nehmen an, dass X affin ist. Für $T > 0$ und $u \in \mathbf{i}\mathbb{R}^n$ ist der komplex-wertige Itô-Prozess definiert durch

$$M_t = e^{\phi(T-t,u)+\psi(T-t,u)^T X_t}.$$

Wir können die Itô-Formel separat auf den Real- und Imaginärteil von M anwenden und erhalten

$$dM_t = I_t \, dt + \psi(T-t,u)^T \, \rho(X_t) \, dW_t, \; t \leq T$$

mit

$$\begin{aligned} I_t &= -\partial_T \phi(T-t,u) - \partial_T \psi(T-t,u)^T \, X_t + \psi(T-t,u)^T \, b^X(X_t) \\ &+ \frac{1}{2} \, \psi(T-t,u)^T \, a^X(X_t) \psi(T-t,u). \end{aligned}$$

Da M ein Martingal ist, erhalten wir $I_t = 0$ für alle $t \leq T$. Für $t \to 0$, wegen der Stetigkeit der Parameter, erhalten wir

$$\partial_T \phi(T,u) + \partial_T \psi(T,u)^T x = \psi(T,u)^T \, b^X(x) + \frac{1}{2} \, \psi(T,u)^T a^X(x) \, \psi(T,u)$$

für alle $x \in \mathcal{D}, T \geq 0, u \in \mathbf{i}\mathbb{R}^n$. Da $\psi(0,u) = u$ ist folgt, dass a^X und b^X affin von der Form (5.15) sind. Setzt man das nun in die obige Gleichung ein und trennt die Terme 1. Ordnung in x, erhält man (5.16).

Umgekehrt, nehmen wir an, dass a^X und b^X von der Form (5.15) sind. Sei (ϕ, ψ) eine Lösung der Riccati-Gleichungen (5.16), so dass $\phi(t,u) + \psi(t,u)^T x$ einen negativen Realteil, für alle $t \geq 0, u \in \mathbf{i}\mathbb{R}^n$ und $x \in \mathcal{D}$ hat. Dann ist M, mit der obigen Definition, ein gleichmäßig beschränktes lokales Martingal und daher ein Martingal, mit $M_T = e^{u^T X_T}$. Somit gilt $\mathbb{E}[M_T | \, \mathcal{F}_t] = M_t$, für alle $t \leq T$, das wiederum ist gleich (5.14), somit ist das Theorem bewiesen. $\square$

Weiters ist jeder affine Prozess ein Feller Prozess, für interessierte Leser verweisen wir auf die Literatur von Keller-Ressel [23] und Duffie [14].

5.2 Polynomiale Prozesse

Basierend auf Cuchiero, Keller-Ressel, und Teichmann [11] definieren wir polynomiale Prozesse, als spezielle Klasse von zeit-homogenen Markov-Prozessen mit Zustandsraum $S \subset \mathbb{R}^n$.
Wir betrachten eine zeit-homogene Markov-Semigruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch

$$P_t\, f(x) := \int_S f(\zeta)\, p_t(x, d\zeta), \quad x \in S_\Delta \tag{5.17}$$

wobei $f : S_\Delta \to \mathbb{R}$ eine Borel messbare Funktion ist, für die das Integral wohldefiniert ist. Es gilt

$$P_t\, f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = \mathbb{E}[\, f(X_t) |\, X_0 = x].$$

Die Übergangsfunktion wird mit $(p_t)_{t\geq 0}$ definiert und erfüllt zusätzlich zu den üblichen Bedingungen auch folgende:

1. für alle $x \in S_\Delta$, $p_0(x, \cdot) = \delta_x$, wobei δ_x das Dirac-Maß beschreibt,

2. für alle $t \geq 0$ und $x \in S$, $p_t(x, \{\Delta\}) = 1 - p_c(x, S)$ und $p_t(\Delta, \{\Delta\}) = 1$.

Sei $\mathcal{P}_m$ ein endlich dimensionaler Vektorraum von Polynomen bis Grad $m \geq 0$ auf S, d.h. Polynome auf $\mathbb{R}^n$ werden eingeschränkt auf S, definiert durch

$$\mathcal{P}_m := \left\{ S \ni x \mapsto \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{m} \alpha_{\mathbf{k}}\, x^{\mathbf{k}}, \delta \mapsto 0 \Big|\, \alpha_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R} \right\}$$

wobei wir die Multi-Index Notation $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n, |\mathbf{k}| = k_1 + \ldots + k_n$ und $x^{\mathbf{k}} = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ verwenden. Die Dimension von $\mathcal{P}_m$ wird beschrieben durch $N < \infty$ und hängt von S ab. Wenn S ein einzelner Punkt ist, ist die Dimension immer 1 und, wenn S der ganze Raum $\mathbb{R}^n$ ist, ist sie maximal.
Weiters definieren wir für jeden Multi-Index $\mathbf{k}$ Funktionen $f_{\mathbf{k}}$ durch

$$f_{\mathbf{k}} = \begin{cases} x^{\mathbf{k}}, & \text{wenn } x \in S, \\ 0, & \text{wenn } x = \Delta. \end{cases}$$

Außerdem schreiben wir f_i, wenn $\mathbf{k} = e_i$ und f_{ij}, wenn $\mathbf{k} = e_i + e_j$, wobei e_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, den i-ten kanonischen Basisvektor bezeichnet. Dann entspricht der Raum

$\mathcal{P}_m$ der lineare Hülle der Funktionen $\{f_{\mathbf{k}}, |\mathbf{k}| \leq m\}$.

Definition 5.2.1. Ein S_Δ-wertiger zeit-homogener Markov-Prozess heißt *m-polynomial*, wenn wir für alle $k \in \{0, \ldots, m\}$, für alle $f \in \mathcal{P}_k$, $x \in S$ und $t \geq 0$

$$x \mapsto P_t f(x) \in \mathcal{P}_k$$

haben, d.h. für jedes Polynom f ist $x \mapsto P_t f(x)$ wieder ein Polynom. Zusätzlich nehmen wir an, dass $t \mapsto P_t f(x)$ stetig bei $t = 0$ ist, für alle $f \in \mathcal{P}_m$.
Wenn X m-polynomial für alle $m \geq 0$ ist, dann nennt man X *polynomial*.

Ein Spezialfall eines Markov-Prozesses ist der Diffusionsprozess.

Definition 5.2.2. Sei $n \geq 1$ und $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, ein nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Weiters sei $b^X : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und $\zeta^X : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ messbar, sodass die Diffusionsmatrix

$$a^X(x) = \zeta^X(x)\zeta^X(x)^T$$

stetig in $x \in \mathcal{D}$ ist. Weiters bezeichne W eine n-dimensionale Brownsche Bewegung. Wir nehmen an, dass für jedes $x \in \mathcal{D}$ eine Lösung $X = X^x$ der SDG

$$dX_t = b^X(X_t)\,dt + \zeta^X(X_t)\,dW_T, \quad X_0 = x$$

existiert. X nennt man einen *Diffusionsprozess.*

Aus der Definition für polynomiale Prozesse folgt, dass ein Diffusionsprozess *polynomial* heißt, wenn der Driftterm $b^X(x)$ affin ist und die Diffusionsmatrix höchstens quadratisch ist.

Wir betrachten jetzt Elektrizitäts-Forwardpreise von der Gestalt

$$F(t, T) = q(T - t, Z_t)$$

wobei Z_t ein n-dimensionaler Diffusionsprozess ist, gegeben durch

$$dZ_t = b(Z_t)\,dt + \zeta(Z_t)\,dW_t, \quad Z_0 = z_0$$

und $q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine deterministische Funktion ist. W_t ist eine n-dimensionale Brown'sche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ und $\mathbb{Q}$ ist ein zum Maß $\mathbb{P}$ äquivalentes risikoneutrales Maß. $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times n}$ sind stetige Funktionen, sodass eine Lösung der SDG existiert.

Wir wollen nun Konsistenzbedingungen finden, so dass $(q(T-t, Z_t))_t$ ein lokales Martingal. Dazu setzen wir $s := T - t$.

Definition 5.2.3. Ein Faktormodell heißt *zulässig*, wenn folgende Annahmen erfüllt werden

(**A1**) $q \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$,

(**A2**) $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist stetig und $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ist messbar, sodass dieDiffusionsmatrix

$$a(z) = \zeta(z)\,\zeta(z)^T$$

stetig in $z \in \mathbb{R}^n$ ist,

(**A3**)Die SDG hat eine eindeutige $\mathbb{R}^n$-wertige Lösung Z_t für jedes $z_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definition 5.2.4. Ein zulässiges Modell $F(t,T)$ heißt *konsistent*, wenn für jedes $T > 0$ und jeden Anfangswert $z_0 \in \mathbb{R}^n$, der Prozess $q(T-t, Z_t)$ ein lokales Martingal ist (**A4**).

Für ein zulässiges Modell ist die folgende Konsistenzbedingung äquivalent zu (**A4**).

Theorem 5.2.5. (Konsistenzbedingung) In einem zulässigen Modell ist Bedingung (**A4**) genau dann erfüllt, wenn für $q(T-t, Z_t)$ folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\partial_s G(s,z) = q(0,z) + \sum_{j=1}^{n} b_j(z)\,\partial_{z_j} G(s,z) + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(z)\,\partial_{z_j}\partial_{z_k} G(s,z) \tag{5.18}$$

für alle $(s,z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, wobei $G(s,z) = \int_0^s q(u,z)du$ und $a(z) = \zeta(z)\,\zeta(z)^T$, wie vorher definiert.

Der Beweis geht analog wie zum Theorem 5.0.5.

Wir kommen nun zu folgender Definition.

Definition 5.2.6. Das Diffusions-Charaktersistik-Paar $\{b,a\} = \{b(z), a(z)\}$, und die Parametrisierung der Forwardpreiskurve $q = q(s,z)$ ist *konsistent*, wenn das dazugehörige Faktormodell konsistent ist.

Annahme 5.2.7. Für das restliche Kapitel nehmen wir an, dass das Faktormodell zulässig ist.

Für die Existenz und die Eindeutigkeit von konsistenten Faktormodellen betrachten wir folgendes Theorem.

Theorem 5.2.8. Unter der obigen Annahme, werden die Funktionen aus (5.18)

$$\partial_{z_j} G(\cdot, z) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\partial_{z_j}\partial_{z_k} G(\cdot, z) \tag{5.19}$$

für $1 \leq j \leq k \leq n$ als linear unabhängig angenommen, für alle z, in einer dichten Teilmenge $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Dann existiert genau ein konsistentes Paar $\{b, a\}$.

Wenn wir also die parametrisierte Kurvenfamilie $\{q(\cdot, z) \,|z \in \mathbb{R}^n\}$, die die Bedingung (5.19) erfüllt, für die tägliche Schätzung der Forwardpreiskurve benutzen, dann wird jedes konsistente Diffusionsmodell für z total von q bestimmt. Wird diese Bedingung (5.19) nicht erfüllt, hat man eine größere Flexibilität um ein konsistentes Faktorprozess zu wählen.

Wir werden jetzt konsistente Faktormodelle betrachten vom affinen und polynomialen Typ, d.h. in unserem Modell $F(t, T) = q(T - t, Z_t)$ ist q affin oder polynomial.

5.3 Affine Kurvenfamilien

Wir verweisen wieder auf Filipović [16] und Hell, Meyer-Brandis, und Rheinländer [22]. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall, der zeit-homogenen affinen Term-Struktur. q ist affin in z von der Form:

$$q(s, z) = \hat{g}_0(s) + \hat{g}_1(s)z_1 + \ldots + \hat{g}_n(s)z_n. \tag{5.20}$$

Die Ableitungen 2.Ordnung verschwinden hier und die Konsistenzbedingung (5.18) wird reduziert auf

$$\hat{g}_0(s) - \hat{g}_0(0) + \sum_{j=1}^{n} z_j(\hat{g}_j(s) - \hat{g}_j(0)) = \sum_{j=1}^{n} b_j(z)G_j(s) \tag{5.21}$$

mit

$$G_j(s) = \int_0^s \hat{g}_j(u)du.$$

Da alle 2.Ableitungen bzgl. z von $G(\cdot, z)$ gleich Null sind, sind sie nicht linear unabhängig. Es existiert keine eindeutige Lösung für das Paar $\{b, a\}$. Wenn die n Funktionen $G_j(s)$ linear unabhängig sind, können wir die lineare Gleichung (5.21) invertieren und für b lösen. Da die linke Seite von (5.21) affin in z ist und wenn wir annehmen, dass die $G_j(s)$ unabhängig sind erhalten wir, dass auch b affin ist, von der From

$$b_j(z) = c_j + \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk} z_k \tag{5.22}$$

wobei c_j und δ_{jk} Konstanten sind. Wenn man das in (5.20) einfügt und konstante Terme und Terme mit z_k zusammenfasst, erhalten wir folgende Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \partial_s G_0(s) = \hat{g}_0(0) + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \, G_j(s) \\ \\ \partial_s G_k(s) = \hat{g}_k(0) + \sum\limits_{j=1}^{n} \delta_{jk} \, G_j(s), \quad k = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{5.23}$$

Wir haben dann folgendes bewiesen:

Theorem 5.3.1. Wir nehmen an, dass die Funktionen $G_j, 1 \leq j \leq n$, linear unabhängig sind. Wenn das Paar $\{b, a\}$ konsistent ist mit der affinen Term-Struktur (5.20), dann ist b notwendigerweise affin von der Form (5.22). Und die Funktionen G_j lösen das System der Riccati-Gleichungen (5.23) mit der Anfangsbedingung $G_j(0) = 0$. Umgekehrt nehmen wir an, dass das Faktormodell zulässig ist und, dass b affin von der Form (5.22) ist und seien $\hat{g}_j(0), 1 \leq j \leq n$, gegebene Konstanten. Wenn die Funktionen G_j das Gleichungssystem (5.23) mit der Anfangsbedingung $G_j(0) = 0$ lösen, dann ist die z-affine Funktion q in (5.20) konsistent mit $\{b, a\}$.

Für die Diffusionsmatrix $a(z)$ gibt es keine zusätzliche Konsistenzbedingung.

5.4 Polynomiale Kurvenfamilien

Wir erweitern die affine Term-Struktur und betrachten eine polynomiale Term-Struktur der Form

$$q(s, z) = \sum_{|\mathbf{j}|=0}^{m} \hat{g}_{\mathbf{j}}(s) z^{\mathbf{j}} \tag{5.24}$$

wobei wir die Multi-Index Notation $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$, $|\mathbf{j}| = j_1 + \ldots + j_n$ und $z^{\mathbf{j}} = z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$ verwenden. Hier bezeichnet m den Grad der Polynomfunktion, das heißt es existiert

ein Index $\mathbf{j}$ mit $|\mathbf{j}| = m$ und $\hat{g}_{\mathbf{j}} \neq 0$. Für $m = 1$ handelt es sich um den Fall der affinen Kurvenfamilien, welchen wir im vorigen Abschnitt behandelt haben.
Hier gibt es Einschränkungen für b und a.
Zur Vereinfachung konzentrieren wir uns auf den Spezialfall $n = 1$, wobei wir einfach $j \equiv |\mathbf{j}| = j_1 \in \{0, \ldots, m\}$ identifizieren und die Gleichung (5.24) als

$$q(s, z) = \sum_{j=0}^{m} \hat{g}_j(s) z^j$$

schreiben. Wir definieren

$$G_j(s) = \int_0^s \hat{g}_j(u) du.$$

Der allgemeine Fall geht analog.

Theorem 5.4.1. Wir nehmen an, dass $G_j, 1 \leq j \leq m$ linear unabhängige Funktionen sind. Dann impliziert die Konsistenz, dass der Drift $b(z)$ und die Diffusions-Charakteristiken $a(z)$ von der folgenden Form sind

$$b(z) = b_1(z) + p(z); \quad a(z) = a_1(z) - \frac{2zp(z)}{m-1} \tag{5.25}$$

wobei $b_1(z)$ ein Polynom mit maximal 1. Ordnung und $a_1(z)$ und $p(z)$ Polynome mit maximal 2. Ordnung sind.

Literaturverzeichnis

[1] R. Aid, L. Campi, A. Huu, und N. Touzi, *A Structural risk-neutral Model of Electricity Prices*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 12(7):925-947, 2009.

[2] M. T. Barlow, *A Diffusion Model for Electricity Prices*, Mathemaival Finance **12** (2002), No. 4, 287-298.

[3] F. E. Benth, J. Kallsen, und T. Meyer-Brandis, *A non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck Process for Electricity Spot Price Modeling and Derivatives Pricing*, Appl. Math. Finance, 14(2):153-169, 2007.

[4] F. E. Benth, und T. Meyer-Brandis, *The Information Premium in Electricity Markets*, 2008.

[5] T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*

[6] G. E. P. Box, und D. R. Cox, *An Analysis of Transformations*, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), Vol. 26, No. 2, 211-252, 1964.

[7] R. Carmona, und M. Coulon, *A Survey of Commodity Markets and Structural Models for Electricity Prices*, Preprint, 2012.

[8] A. Cartea, und P. V. Conde, *Spot price Modeling and the Valuation of Electricity Forward Contracts: the Role of Demand and Capacity*, 2008.

[9] A. Cartea, und M. G. Figuerona, *Pricing in Electricity Markets: A Mean Reverting Jump Diffusion Model with Seasonality*, Applied Mathematical Finance, 12(4), 313-335.

[10] A. Cartea, M. G. Figuerona, und H. Geman, *Modelling Electricity Prices with Forward Looking Capacity Constrains*, 2008.

[11] C. Cuchiero, M. Keller-Ressel, und J. Teichmann, *Polynomial Processes and their Applications to Mathematical Finance*, Finance Stoch., 2012.

[12] M. Czakainski, F. Lamprecht, und M. Rosen, *Energiehandel und Energiemärkte - Eine Einführung*, Energieverlag GmbH, Essen, 2010.

[13] D. Duffie, *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2001.

[14] D. Duffie, D. Filipović, und W. Schachermayer, *Affine Processes and Applications in Finance*, 2001.

[15] A. Eydeland, und K. Wolyniec, *Energy and Power: Risk Management - New Developments in Modeling, Pricing and Hedging*, Wiley Finance, 2003.

[16] D. Filipović, *Term-structure Models, A graduate Course*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin 2009.

[17] D. Filipović, und E. Mayerhofer, *Affine Diffusion Processes: Theory and Applications*, 2009.

[18] S. E. Fleten, und J. Lemming, *Constructing Forward Price Curves in Electricity Markets*, Energy Economics **25** (2003), 409-424.

[19] H. Föllmer, und M. Schweizer, *Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information*, Applied Stochastic Analysis (London, 1989), Stochastics Monogr., 5, Gordon and Breach, New York (1991), 389-414.

[20] H. Geman, *Commodities and Commodity Derivatives, Modeling and Pricing for Agriculturals, Metals and Energy*, John Wiley and Sons Ltd., 2005.

[21] H. Geman, und A. Roncoroni, *Understanding the Fine Structure of Electricity Prices*, The Journal of Business, 79(3), 7-14, 2006.

[22] P. Hell, T. Meyer-Brandis, and T. Rheinländer, *Consistent factor Models for Temperature Markets*, International Journal of Theoretical and Applied Finance (IJTAF), 15(4):1250027-1-1,2012.

[23] M. Keller-Ressel, *Affine Processes - Theory and Applications in Finance*, Dissertation, 2008.

[24] S. Koekebakker, und F. Ollmar, *Forward Curve Dynamics in Nordic Electricity Markets*, Managerial Finance, 31(6), 73-94, 2005.

[25] J. Lucia, und E. Schwartz, *Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange*, Review of Derivatives Research, 5(1):5-50, 2002.

[26] D. Pilipović, *Energy Risk: Valuing and Managing Energy Derivatives*, McGraw Hill, 1997.

[27] E. Schwartz, *The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging*, The Journal of Finance, 52:923-973, 1997.

[28] G. Trenks, *Modelling Energy Markets and Energy Derivatives*, Diplomarbeit, 2007.

[29] P. Villaplana, *Pricing Power Derivates: A Two-factor Jump-diffusion Approach*, 2003.