

Diplomarbeit

Numerische Studien und Prüfstandskonzept eines Drehschwingungssystems unter Dirac-Impulskrafterregung

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines Diplom-Ingenieures
unter der Leitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Horst Ecker*

Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Pumhössel†

*Institut für Mechanik und Mechatronik
Technische Universität Wien

†Institut für Mechatronische Produktentwicklung und Fertigung
Johannes Kepler Universität Linz

eingereicht an der Technischen Universität Wien

Fakultät für Maschinenwesen und Betriebswissenschaften

von

Bernhard Hopfner

e0926583

Rendlsiedlung 6, 4132 Lembach im Mühlkreis

Wien, im März 2016

Erklärung zur Verfassung dieser Arbeit

Bernhard Hopfner

Rendsiedlung 6, 4132 Lembach im Mühlkreis

Ich habe zur Kenntnis genommen, dass ich zur Drucklegung meiner Arbeit unter der Bezeichnung **Diplomarbeit** nur unter der Bewilligung der Prüfungskommission berechtigt bin.

Ich erkläre weiters an Eides stattes, dass ich meine Diplomarbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen selbstständig ausgeführt habe, und alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, genannt habe.

Des Weiteren erkläre ich, dass ich dieses Diplomarbeitsthema bisher, weder im In- noch Ausland (einer Beurteilerin/einem Beurteiler zur Begutachtung), in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt habe, und dass diese Arbeit mit der vom Begutachter beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Danksagung

Zuallererst gebührt mein Dank Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Pumhössel, für die ausgezeichnete Betreuung und die vielen wertvollen Hinweise. Insbesondere für das entgegengebrachte Vertrauen, meine Diplomarbeit über noch nicht veröffentlichte Arbeiten zu Systemen unter Dirac-Impulskrafterregung verfassen zu können, möchte ich mich aufrichtig bedanken.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Horst Ecker, der die Erstellung dieser Arbeit durch viele Anregungen und Ratschläge, und nicht zuletzt durch die Vermittlung an Herrn Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Pumhössel erst ermöglicht hat.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei all denen bedanken, die mit ihrer fachlichen und moralischen Unterstützung zur Fertigstellung dieser Arbeit beigetragen haben.

Kurzfassung

Wirkt auf ein schwingungsfähiges mechanisches System eine stoßhafte Kraft, so führt dies im Allgemeinen zu einer Veränderung sowohl des modalen, als auch des gesamten Energieinhaltes. Ist die Kraftdauer klein gegenüber den Periodendauern der Eigenschwingungen des Systems, so kann der Kraftimpuls durch eine Dirac-Delta Funktion approximiert werden. Wie in [1] gezeigt werden konnte, kann eine geeignete Folge von Dirac-Impulsen auf Grund von zwei Mechanismen, nämlich dem Transfer von Energie zwischen beteiligten Schwingungsmoden, und der Energiezu- oder -abfuhr durch die Dirac-Impulse, bewirken, dass eine rasche Reduktion der Schwingungsenergie oder sogar eine Stabilisierung eines instabilen autonomen Systems möglich ist.

Mit Hilfe von numerischen Simulationen werden in dieser Arbeit die grundlegenden Effekte der Dirac-Impulskrafterregung anhand eines einseitig gefesselten Zweifreiheitsgrad-Dreh-schwingungssystems studiert. Insbesondere erfolgen Untersuchungen bei denen der gesamte Energieinhalt des mechanischen Systems durch die Dirac-Impulse unverändert bleibt, das heißt es tritt nur eine modale Verschiebung von Energie auf, als auch bei Energiezu- beziehungsweise -abfuhr. Durch umfangreiche Parameterstudien werden Bereiche der Systemparameter identifiziert, in denen durch die gewählte Dirac-Impulskraftfolge eine Stabilisierung eines selbsterregten Systems möglich ist. Es werden auch analytische Zusammenhänge zwischen den Eigenschwingungsdauern des mechanischen Systems und jenen Werten des zeitlichen Abstands zwischen den Impulsen angegeben, bei denen die Dirac-Impulskrafterregung das Systemverhalten nicht oder nur geringfügig beeinflussen kann. Des Weiteren wird die Kopplung von a priori ausgewählten Schwingungsmoden von Mehrfreiheitsgrad-Systemen diskutiert und beispielhaft für ein gedämpftes System mit drei Freiheitsgraden gezeigt.

Im Hinblick auf eine mögliche technische Anwendung der Dirac-Impulskrafterregung, erfolgen Untersuchungen mit endlichen Werten der Impulsdauer. Auf Basis dieser numerischen Simulationen wird ein Konzept eines Prüfstandes zum experimentellen Nachweis der gefundenen Ergebnisse entwickelt.

Abstract

If an impulsive force excitation is applied on a mechanical system, in general both, the modal and the total energy content of the system are altered. The approximation of an impulse with finite duration by an impulse function of Dirac-Delta type is feasible, if the impulse duration is small compared to the periods of the systems natural vibrations. It was shown in [1] that a proper sequence of Dirac-Delta impulses leads to a faster decay of damped vibrations or even to a stabilisation of an unstable autonomous system due to two mechanisms, namely the energy input or extraction by the Dirac-Delta impulses and/or the transfer of energy across modes of vibration.

In this thesis, the basic effects of an impulsively excited torsional system with two degrees of freedom are studied by using numerical simulations. The investigations focus on the cases of transferring energy across modes by impulsive force excitation where no energy crosses the system boundary, i.e. the overall energy content of the mechanical system remains constant, and on the case where the energy transfer is accompanied by extracting energy from, or feeding energy to the mechanical system. It is shown by means of parameter studies that parameter ranges exist, where a sequence of Dirac-Delta impulses allows to stabilise an otherwise unstable autonomous system. Furthermore, those intervals between impulses are identified, which should be avoided in order to affect the vibration behaviour of mechanical systems effectively. Moreover, the modal energy transfer across a priori chosen modes of vibration of multi degree of freedom systems is discussed. The findings are exemplarily applied to a damped torsional system with three degrees of freedom. Finally, investigations with sinusoidal shaped impulses are carried out. Based on this numerical results, a design of a test stand is presented.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	IV
Abstract	V
1. Einleitung	1
2. Grundlagen zu dynamischen Systemen mit Dirac-Impulskrafterregung	3
2.1. Modellbildung	3
2.2. Modale Transformation	4
2.3. Stabilitätsbedingung	5
2.4. Betrachtungen zum Stoßvorgang	7
3. Numerische Studien zur Dirac-Impulskrafterregung	11
3.1. Einführung eines numerischen Modells	11
3.2. Simulation in MATLAB	12
3.3. Ungedämpftes 2-FG-System	13
3.4. Gedämpftes 2-FG-System	16
3.4.1. Verbesserte Schwingungsdämpfung infolge des modalen Energietransfers	16
3.4.2. Modaler Energietransfer und Energieentnahme durch die Dirac-Impulse	23
3.5. Modaler Energietransfer im 3-FG-System	28
3.6. Stabilisierung von selbsterregten Systemen	30
3.6.1. Schwingungsunterdrückung durch den modalen Energietransfer	32
3.6.2. Schwingungsunterdrückung bei Energiezu- und -abfuhr	48
4. Prüfstandskonzept	55
4.1. Numerische Simulationen in MATLAB	56
4.1.1. Realisierbare Impulsformen	56
4.1.2. Simulationen mit dem Prüfstandsparametersatz	57
4.2. Prüfstandskonstruktion	66
4.2.1. Auswahl der Prüfstandskomponenten	66
4.2.2. Beschreibung der Grobkonstruktion	68

5. Zusammenfassung und Ausblick	70
A. Stabilitätskarten	74
A.1. Schwingungsunterdrückung infolge des modalen Energietransfers	74
A.2. Energiezu- und -abfuhr durch die Dirac-Impulse	76
B. Datenblatt	80

1. Einleitung

Die Dämpfung von unerwünschten Schwingungen ist ein Problem, das Ingenieure verschiedenster Fachbereiche seit Jahrzehnten beschäftigt. In dieser Arbeit wird die von Pumhössel in [1] vorgeschlagene Dirac-Impulskrafterregung (DIE) zur Dämpfung von Schwingungen mechanischer Systeme beziehungsweise zur Unterdrückung selbsterregter Schwingungen näher untersucht. Wie in [1] gezeigt werden konnte, bewirkt eine geeignet gewählte Folge von Dirac-Impulsen einen bidirektionalen Transfer von Energie zwischen beteiligten Schwingungsmoden. Dieser Energietransfer ermöglicht eine bessere Ausnutzung der Dämpfungseigenschaften eines mechanischen Systems, und somit eine raschere Dissipation von Schwingungsenergie. Im Folgenden wird ein Überblick über bestehende Methoden zur Schwingungsreduktion gegeben, die Parallelen zur Dirac-Impulskrafterregung aufweisen.

Erfolgt bei einem parametererregten System die zeitperiodische Variation der Systemparameter mit einer Frequenz nahe einer Parameterresonanz, so führt das im Allgemeinen zu einem raschen Aufklingen der Schwingungsamplituden, und, sofern nicht bewusst herbeigeführt, zu unerwünschten, mitunter gefährlichen Systemzuständen. Dass bei geeigneter Wahl der Frequenz der Parametererregung (PE) auch der gegenteilige Effekt auftreten kann, ist seit der Veröffentlichung von Tondl [2] bekannt. Anhand numerischer Simulationen konnte Tondl zeigen, dass die Unterdrückung von selbsterregten Schwingungen mit Hilfe von PE bei bestimmten Kombinationsresonanzen (Parameterantiresonanzen) möglich ist. Der stabilisierende Effekt basiert auf der Kopplung zweier Schwingungsmoden und dem damit verbundenen periodischen Energietransfer. Die gesamte im System enthaltene Energie schwankt periodisch um einen im Allgemeinen vom Wert der Anfangsenergie abweichenden Mittelwert [3], [4]. Neben der Stabilisierung von instabilen Systemen, kann bei PE in Antiresonanz auch die systeminherente Dämpfung durch Transfer von Energie in stärker gedämpfte Schwingungsmoden besser ausgenutzt werden.

Der Übergang von einer zeitkontinuierlichen PE zu einer Folge von Dirac-Funktionen führt zur Impuls-Parametererregung (IPE). Aufbauend auf den Arbeiten von Hsu et al. [5], [6] wurde der gezielte modale Energietransfer für Systeme mit Steifigkeitsimpulsen von Pumhössel und Hehenberger zum Beispiel in [7],[8] untersucht. Gezielt, da für jeden Zeitpunkt vorausberechnet werden kann, ob ein unidirektionaler, modaler Transfer von Energie möglich ist. Im Gegensatz zur PE kann bei der IPE durch geeignete Wahl der Impulsstärke der Energieaustausch mit

der Umgebung bewusst beeinflusst werden. Analog zur PE ermöglicht die IPE sowohl eine Unterdrückung selbsterregter Schwingungen, als auch ein schnelleres Abklingen gedämpfter Schwingungen.

Zur verbesserten Dissipation von Schwingungsenergie mit Hilfe von non-linear energy sinks (NES) existiert sehr umfangreiche Literatur. Hier sollen nur die beispielsweise zur Schwingungsreduktion bei seismischer Erregung vorgeschlagenen Vibro-Impact NES (VI NES) kurz betrachtet werden. Für eine genauere Beschreibung von VI NES oder NES im Allgemeinen sei auf [9], [10] und die dortigen Literaturzitate verwiesen.

Ein Subsystem geringer Masse, dessen maximal mögliche Auslenkung durch eine starre Barriere beschränkt ist, wird mit einem Primärsystem verbunden. Nach Schwingungsanregung der Gesamtstruktur kann die Reduktion der Schwingungsenergie durch zwei Mechanismen erfolgen. Infolge der inelastischen Stöße zwischen Subsystem und der starren Barriere wird einerseits lokal Energie dissipiert, andererseits erfolgt ein Energietransfer von niedrigen in höhere Schwingungsmoden.

Gemeinsames Merkmal all dieser Methoden ist die verbesserte Dämpfung auf Grund des modalen Energietransfers. Analog zu den VI NES wird bei der Dirac-Impulskrafterregung der Energietransfer durch eine stoßhafte Erregung initiiert. Jedoch kann aktiv sowohl der Zeitpunkt eines Impulses, als auch dessen Einfluss auf die im System enthaltene Gesamtenergie gesteuert werden.

Nach dieser überblicksmäßigen Einordnung der Dirac-Impulskrafterregung in bereits bestehende Methoden zur Schwingungsreduktion, erfolgt die detaillierte Beschreibung in drei Teilen. Kapitel 2 umfasst die Modellbildung eines Zweifreiheitsgrad-Systems, die Herleitung einer Stabilitätsbedingung und allgemeine Betrachtungen zum Stoßvorgang. Anschließend werden in Kapitel 3 grundlegende Effekte der Dirac-Impulskrafterregung anhand von numerischen Simulationen studiert. In Kapitel 4 erfolgt der Übergang von Dirac-Impulsen zu Sinusimpulsen und ein möglicher Prüfstand wird konzipiert. Zum Abschluss werden die gefundenen Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick gegeben.

2. Grundlagen zu dynamischen Systemen mit Dirac-Impulskrafterregung

2.1. Modellbildung

Das Minimalmodell zur Untersuchung des Effektes des modalen Energietransfers durch Impulskrafterregung stellt ein System mit 2 Freiheitsgraden (FG) dar. Abbildung 2.1 zeigt ein entsprechendes einseitig gefesselt DrehSchwingungsmodell.

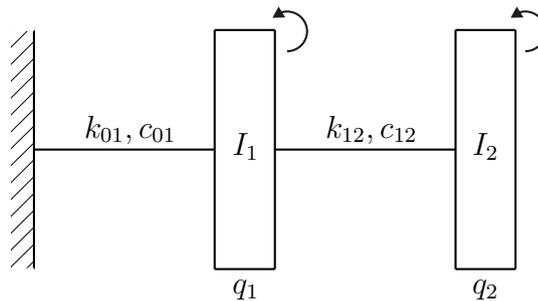


Abbildung 2.1.: Zu untersuchendes 2-FG DrehSchwingungssystem

Mit der Massenmatrix \mathbf{M} , der Dämpfungsmatrix \mathbf{C} und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{01} + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{01} + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_{12} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen des Systems zu

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(t - t_k) \mathbf{f}. \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet q_i die Verdrehung des Knotens i gegenüber dem Inertialsystem. Die rechte Seite der Gleichung (2.2) wird in Abbildung 2.1 durch Pfeile symbolisiert.

Zu festen Zeitpunkten t_k werden, beschrieben durch den Term $\varepsilon_k \delta(t - t_k) \mathbf{f}$, entweder eine der beiden oder beide Knotenmassen stoßhaft erregt. Die Verwendung der Dirac-Delta Funk-

tion $\delta(t - t_k)$ impliziert einen idealen mathematischen Stoß mit dem Stoßantrieb (Impuls) der Intensität 1 bei $t = t_k$. Der Skalar ε_k stellt daher einen Skalierungsfaktor der Impulsstärke dar. In den Zeitspannen zwischen den einzelnen Impulsen liegt ein lineares autonomes System vor. Während sowohl der zeitliche Abstand $T_P = t_{k+1} - t_k$, in weiterer Folge als Pulspause bezeichnet, als auch der Vektor \mathbf{f} feste Werte annehmen, wird im Allgemeinen $\varepsilon_{k+1} \neq \varepsilon_k$ sein, siehe Abbildung 2.2.

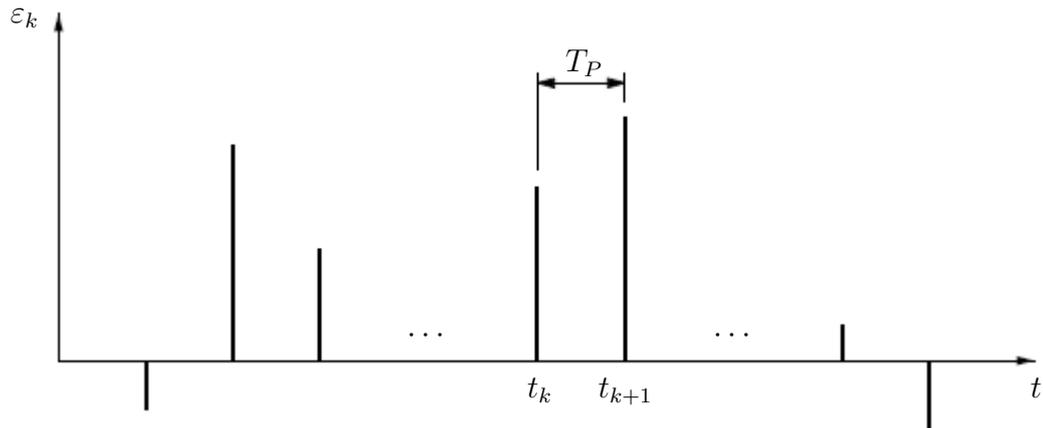


Abbildung 2.2.: Qualitative Impulsfolge mit zeitlichem Abstand T_P zwischen den Impulsen

2.2. Modale Transformation

Um die Energieinhalte der beiden Schwingungsmoden berechnen zu können, werden die physikalischen Koordinaten \mathbf{q} mittels

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{u} \quad (2.3)$$

auf die modalen Verdrehungen \mathbf{u} transformiert. Wobei die Transformationsmatrix $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2]$, die Modalmatrix, durch Bestimmen der Eigenvektoren φ_i , $i = 1, 2$ des ungedämpften, autonomen Systems aus

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{I}) \varphi_i = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

definiert ist.

Die Bewegungsgleichungen in modalen Koordinaten lauten nach Anwenden der Koordinatentransformation (2.3)

$$\bar{\mathbf{I}}\ddot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{u} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(t - t_k) \bar{\mathbf{f}}. \quad (2.5)$$

In weiterer Folge soll für die Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{C} = \beta \mathbf{K}, \quad (2.6)$$

mit $\beta = \text{konst.}$, gelten. Die Systemmatrizen $\bar{\mathbf{I}} = \text{diag}(\bar{I}_1, \bar{I}_2)$, $\bar{\mathbf{K}} = \text{diag}(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$ und $\bar{\mathbf{C}} = \beta \bar{\mathbf{K}}$ in (2.5) werden dann jeweils Diagonalmatrizen, das heißt die Bewegungsgleichungen des autonomen Systems sind voneinander entkoppelt. Ein Transfer von Energie zwischen den Schwingungsmoden kann daher nur auf Grund der externen Erregung zu den diskreten Zeitpunkten t_k erfolgen. Der modale Energieinhalt E_i ergibt sich zu

$$E_i(t) = \frac{1}{2} \left(\bar{I}_i \dot{u}_i(t)^2 + \bar{k}_i u_i(t)^2 \right). \quad (2.7)$$

Analog zum Lehrschen Dämpfungsmaß D des Einfreiheitsgrad-Systems, können für Mehrfreiheitsgrad-Systeme modale Dämpfungen ζ_i definiert werden. Unter Verwendung von (2.6) gilt

$$\zeta_i = \frac{\beta \omega_i}{2}. \quad (2.8)$$

2.3. Stabilitätsbedingung

Die im Folgenden hergeleitete Stabilitätsbedingung ist aus [1] entnommen. Im Sinne der Floquet-Theorie wird eine Abbildungsmatrix \mathbf{Q} bestimmt, die den Systemzustand zur Zeit t mit dem nach einer Periode $t + T_P$ verknüpft. Die Eigenwerte dieser Matrix entscheiden über die Stabilität des Systems.

Die Bewegungsgleichungen (2.2) können auch als Differentialgleichungssystem erster Ordnung angeschrieben werden. Mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}^T = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ folgt

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{I}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{I}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \sum_{k=1}^N \varepsilon_k \delta(t - t_k) \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

wobei \mathbf{E} die Einheitsmatrix bezeichnet.

Die Lösung eines autonomen Differentialgleichungssystems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ lautet unter Verwendung der Matrixexponentialfunktion und der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0. \quad (2.10)$$

Für das Zeitintervall zwischen zwei Impulsen ergibt sich für die Zustandsvektoren der einfache Zusammenhang

$$\mathbf{x}(t_{k+1})_- = e^{\mathbf{A}T_P} \mathbf{x}(t_k)_+ = \mathbf{D} \mathbf{x}(t_k)_+. \quad (2.11)$$

Die Indizes \mp kennzeichnen dabei die Zeitpunkte unmittelbar vor oder nach einem Impuls.

Zur vollständigen Definition der Abbildungsmatrix \mathbf{Q} muss noch die Änderung des Zustandsvektors infolge des Stoßvorganges betrachtet werden.

Die Drehimpulsbilanz zur Beschreibung der Änderung des Geschwindigkeitszustandes lautet

$$\mathbf{I} [\dot{\mathbf{q}}(t_k)_+ - \dot{\mathbf{q}}(t_k)_-] = \varepsilon_k \mathbf{f}, \quad (2.12)$$

oder nach Umformung

$$\dot{\mathbf{q}}(t_k)_+ = \dot{\mathbf{q}}(t_k)_- + \varepsilon_k \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f}. \quad (2.13)$$

Da aber die Lage der Körper unverändert bleibt, gilt

$$\mathbf{q}(t_k)_+ = \mathbf{q}(t_k)_-. \quad (2.14)$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_k)_+ \\ \dot{\mathbf{q}}(t_k)_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_k)_- \\ \dot{\mathbf{q}}(t_k)_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \varepsilon_k \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Gleichung (2.15) gilt noch ganz allgemein für jede beliebige Impulsstärke. Die Impulsstärke ε_k soll derart bestimmt werden, dass während des Stoßvorganges dem System weder Energie entzogen noch zugeführt wird. Da die potentielle Energie über einen Impuls hinweg konstant bleibt, siehe Gleichung (2.14), muss für die Änderung der kinetischen Energie ΔT_k gelten

$$\Delta T_k = T_{k+} - T_{k-} = 0. \quad (2.16)$$

Verwendet man Gleichung (2.13), folgt für die kinetische Energie unmittelbar nach einem Impuls

$$T_{k+} = \underbrace{\frac{1}{2} [\varepsilon_k^2 \mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} + 2\varepsilon_k \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{q}}(t_k)_-]}_{\Delta T_k} + \underbrace{\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T(t_k)_- \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}}(t_k)_-}_{T_{k-}}. \quad (2.17)$$

Damit erhält man für Gleichung (2.16)

$$\Delta T_k = \frac{1}{2} \varepsilon_k [\varepsilon_k \mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} + 2 \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{q}}(t_k)_-] = 0. \quad (2.18)$$

Die Nullstellen von ΔT_k lauten

$$\varepsilon_{k,1} = 0 \quad \varepsilon_{k,2} = -2 \frac{\mathbf{f}^T}{\mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f}} \dot{\mathbf{q}}(t_k)_-. \quad (2.19)$$

Die gesuchte Impulsstärke $\varepsilon_{k,2}$ bleibt beschränkt, da der Nenner stets ungleich Null ist. Durch Einführen eines zusätzlichen Faktors ϑ und der Wahl von $\varepsilon_k = \vartheta \varepsilon_{k,2}$ kann der Energieaustausch mit der Umgebung gezielt beeinflusst werden. Eine genauere Behandlung dieses Sachverhaltes ist zur Herleitung der Stabilitätsbedingung nicht notwendig, erfolgt aber im Abschnitt 2.4.

Für den Term $\varepsilon_k \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f}$ in Gleichung (2.15) folgt nach Einsetzen von ε_k

$$\varepsilon_k \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} = -2\vartheta \frac{\mathbf{f}^T}{\mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f}} \dot{\mathbf{q}}(t_k)_- \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.20)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} \varepsilon_k = -2\vartheta \frac{\mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} \mathbf{f}^T}{\mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f}} \dot{\mathbf{q}}(t_k)_- = -2\vartheta \mathbf{G} \dot{\mathbf{q}}(t_k)_-. \quad (2.21)$$

Damit kann Gleichung (2.15) umgeschrieben werden zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_k)_+ \\ \dot{\mathbf{q}}(t_k)_+ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} - 2\vartheta \mathbf{G} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_k)_- \\ \dot{\mathbf{q}}(t_k)_- \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

In Anlehnung an die einschlägige Literatur, siehe zum Beispiel [5], wird die Matrix \mathbf{J} als Sprungmatrix bezeichnet.

Mit den Gleichungen (2.11) und (2.22) lautet der Zustandsvektor nach einer Periode

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_{k+1})_+ \\ \dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})_+ \end{bmatrix} &= \mathbf{J} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_{k+1})_- \\ \dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})_- \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{J} \mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t_k)_+ \\ \dot{\mathbf{q}}(t_k)_+ \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.23)$$

und die gesuchte Abbildungsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J} \mathbf{D}. \quad (2.24)$$

Gleichung (2.23) stellt eine lineare Differenzgleichung dar. Die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist asymptotisch stabil falls für die Absolutbeträge aller Eigenwerte Λ_n gilt:

$$|\Lambda_n| = |\text{eig}(\mathbf{Q})| < 1. \quad (2.25)$$

Alternativ kann auch eine Matrix $\mathbf{Q}^* = \mathbf{D} \mathbf{J}$, also eine Verknüpfung der Zustandsvektoren unmittelbar vor einem Impuls, definiert werden. Da aber \mathbf{Q} und \mathbf{Q}^* die selben Eigenwerte besitzen, ändert sich die Stabilitätsaussage (2.25) nicht.

2.4. Betrachtungen zum Stoßvorgang

Zum Abschluss dieses theoretischen Kapitels wird der Stoßvorgang und insbesondere dessen Wirkung auf den Geschwindigkeitszustand des Systems untersucht.

Nach Gleichung (2.22) gilt

$$\dot{\mathbf{q}}(t_k)_+ = (\mathbf{E} - 2\vartheta\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t_k)_- \quad (2.26)$$

mit

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{I}^{-1}\mathbf{f}\mathbf{f}^T}{\mathbf{f}^T\mathbf{I}^{-1}\mathbf{f}}. \quad (2.27)$$

Das heißt, dass $\dot{\mathbf{q}}(t_k)_+$ von ϑ sowie den Einträgen in der Massenmatrix \mathbf{I} und dem Vektor \mathbf{f} beeinflusst wird.

Für ein N -FG-System mit $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, \dots, I_N)$ und $\mathbf{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ ergibt sich der Zähler von \mathbf{G} zu

$$\mathbf{I}^{-1}\mathbf{f}\mathbf{f}^T = \begin{bmatrix} \frac{f_1^2}{I_1} & \frac{f_1 f_2}{I_1} & \dots & \frac{f_1 f_N}{I_1} \\ \frac{f_2 f_1}{I_2} & \frac{f_2^2}{I_2} & \dots & \frac{f_2 f_N}{I_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_N f_1}{I_N} & \frac{f_N f_2}{I_N} & \dots & \frac{f_N^2}{I_N} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Der Nenner kann angeschrieben werden als

$$\mathbf{f}^T\mathbf{I}^{-1}\mathbf{f} = \sum_{i=1}^N \frac{f_i^2}{I_i}. \quad (2.29)$$

Ein erwartetes Ergebnis erhält man, falls die Stöße nur auf einen Körper wirken, das heißt $f_i \neq 0$ und alle anderen f_j ($i \neq j$) sind gleich Null. \mathbf{G} enthält dann mit $G_{ii} = 1$ nur einen Eintrag ungleich Null und für die Geschwindigkeitskomponente \dot{q}_i gilt

$$\dot{q}_i(t_k)_+ = (1 - 2\vartheta)\dot{q}_i(t_k)_-. \quad (2.30)$$

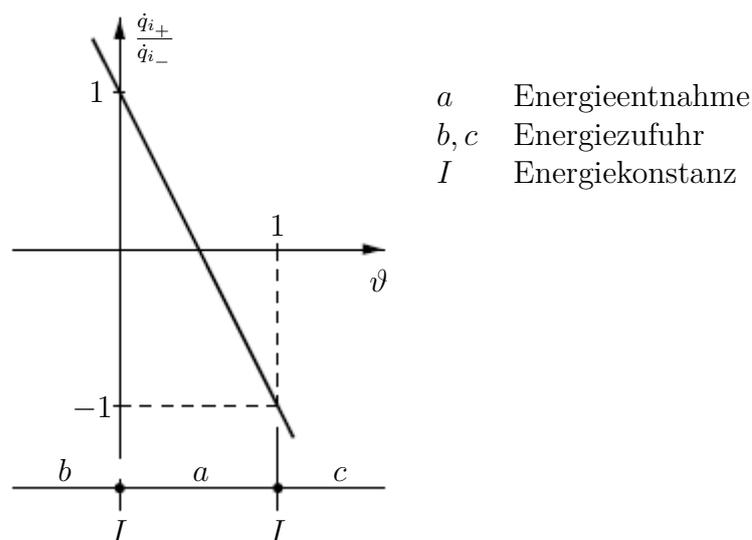


Abbildung 2.3.: Geschwindigkeitskomponente \dot{q}_i nach einem Impuls auf einen Körper als Funktion von ϑ

Da ein Stoß auf den i -ten Körper nur dessen Geschwindigkeitszustand ändern kann, muss für Energiekonstanz ($\vartheta = 1$) die entsprechende Geschwindigkeitskomponente ihr Vorzeichen ändern. Über ϑ kann die Änderung der kinetischen Energie gezielt beeinflusst werden. Bei $\vartheta = 0.5$ wird T_{k+} gleich Null und dem System mit

$$\Delta T_k = -T_{k-} = -\frac{1}{2}I_i\dot{q}_i(t_k)_-^2 \quad (2.31)$$

die maximal mögliche Energie entzogen. Für $\vartheta < 0$ und $\vartheta > 1$ nimmt die Energie zu, vergleiche Abbildung 2.3.

Bei gleichzeitigen Stößen auf mehrere Körper I_i ist die Matrix \mathbf{G} dichter besetzt. Auch werden die einzelnen Einträge im Unterschied zu vorher abhängig von den Werten der Massenträgheitsmomente I_i und der Komponenten f_i . Da sich die Geschwindigkeitskomponenten der unbelasteten j -Körper ($f_j = 0$) nicht ändern dürfen, müssen die Einträge G_{jj} und die Koppellemente $G_{ji} = G_{ij}$ gleich Null ergeben. Ein einfacher Zusammenhang wie in (2.30) kann nicht ohne Weiteres angegeben werden. Dass die obigen Aussagen in Bezug auf ϑ weiterhin Gültigkeit besitzen, kann bei genauerer Betrachtung des Ausdrucks für die Änderung der kinetischen Energie nach Gleichung (2.18) gezeigt werden.

Die in ε_k quadratische Funktion für $\Delta T_k(\varepsilon_k)$ lautete

$$\Delta T_k(\varepsilon_k) = \frac{1}{2}\varepsilon_k \left[\varepsilon_k \mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} + 2\mathbf{f}^T \dot{\mathbf{q}}(t_k)_- \right]. \quad (2.32)$$

Nach einmaligem Ableiten erhält man

$$\frac{d\Delta T_k}{d\varepsilon_k} = \varepsilon_k \mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} + \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{q}}(t_k)_-. \quad (2.33)$$

Der Extremwert liegt daher bei

$$\varepsilon_k^* = -\frac{\mathbf{f}^T}{\mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f}} \dot{\mathbf{q}}(t_k)_- = \frac{1}{2}\varepsilon_{k,2}. \quad (2.34)$$

$\varepsilon_{k,2}$ bezeichnete die erforderliche Impulsstärke für Energiekonstanz während des Stoßvorgangs. Da \mathbf{I} positiv definit ist, ergibt die zweite Ableitung

$$\frac{d^2\Delta T}{d\varepsilon_k^2} = \mathbf{f}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{f} \quad (2.35)$$

einen konstanten Wert größer Null. Das globale Minimum liegt bei ε_k^* und ΔT_k ist für $0 < \vartheta < 1$ negativ. Dem System wird Energie entzogen.

Zusammengefasst gilt:

$$\vartheta = \begin{cases} 0 < \vartheta < 1 & \text{Energie wird aus dem System abgef\u00fchrt} \\ \{0, 1\} & \text{Energie im System bleibt konstant} \\ < 0, > 1 & \text{Energie wird dem System zugef\u00fchrt.} \end{cases}$$

3. Numerische Studien zur Dirac-Impulskrafterregung

3.1. Einführung eines numerischen Modells

Um die Gültigkeit der in Abschnitt 2.3 hergeleiteten Stabilitätsbedingung zu verifizieren, sowie das allgemeine Systemverhalten studieren zu können, werden numerische Simulationen in MATLAB durchgeführt. Die in Tabelle 3.1 angegebenen Systemparameter stellen den Ausgangspunkt sämtlicher in diesem Kapitel durchgeführter Untersuchungen dar. Die angegebenen Werte stehen in keinem Bezug zu einem realen System und sind dimensionslose Größen.

Tabelle 3.1.: Default-Parametersatz

Parameter	Wert
Massenträgheitsmomente	$I_1 = I_2 = 1$
Steifigkeiten	$k_{01} = k_{12} = 1$
Proportionalitätsfaktor	$\beta = 0.01$
Dämpfungskonstanten	$c_{01} = c_{12} = 0.01$

Für den angegebenen Parametersatz können durch Lösen des Eigenwertproblems des konservativen Systems (2.4) folgende Systemgrößen berechnet werden

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 0.6180 & T_1 &= 10.1664 & \varphi_1 &= [0.5257, 0.8507]^T \\
 \omega_2 &= 1.6180 & T_2 &= 3.3882 & \varphi_2 &= [0.8507, -0.5257]^T.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dabei bezeichnet T_i die zur Eigenkreisfrequenz ω_i zugehörige Periodendauer. Einige relevante gedämpfte Größen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 \omega_{d1} &= 0.6180 & T_{d1} &= 10.1665 & \zeta_1 &= 0.0031 \\
 \omega_{d2} &= 1.6180 & T_{d2} &= 3.3883 & \zeta_2 &= 0.0081.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nachfolgend wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auch für die gedämpften Periodendauern das Formelzeichen T_i verwendet.

3.2. Simulation in MATLAB

Zusätzlich zu den Systemparametern aus Tabelle 3.1 müssen vor der Berechnung eines Zeitverlaufes in MATLAB noch die Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 , die Pulspause T_P , der Vektor \mathbf{f} und der in Abschnitt 2.3 definierte Skalierungsfaktor ϑ festgelegt werden.

Nach Gleichung (2.19) hängt die Impulsstärke vom Geschwindigkeitszustand vor einem Impuls ab. Da die Wahl der Anfangsbedingung den Systemzustand vor dem ersten Impuls bestimmt, werden für die nachfolgenden Simulationen zwei verschiedene Anfangsbedingungen verwendet: Der skalierte erste Eigenvektor aus (3.1) als Anfangsauslenkung bei verschwindenden Anfangsgeschwindigkeiten, im Folgenden als AB1 bezeichnet, und eine Geschwindigkeitsanfangsbedingung – AB2.

$$\mathbf{x}_0 = \begin{cases} [0.6180, 1, 0, 0]^T & \text{AB1} \\ [0, 0, 0, 1]^T & \text{AB2} \end{cases} \quad (3.3)$$

Eine Zeitsimulation läuft dann folgendermaßen ab:

1. Berechne Sprungmatrix \mathbf{J} als Funktion der festen Parameter \mathbf{I} , \mathbf{f} , ϑ
2. Löse das autonome System mit Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 im Zeitintervall $[0, t_1]$
3. Bestimme den Zustandsvektor nach dem Impuls mit Hilfe von \mathbf{J} aus Schritt 1
4. Setze Anfangsbedingung auf Zustandsvektor nach Impuls
5. Löse das autonome System mit neuer Anfangsbedingung im Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$
6. Wiederhole Schritt 3-5 bis zur gewünschten Simulationsdauer

Da zur Lösung des autonomen Systems die Exponentialmatrixfunktion verwendet werden kann und die Zustandsvektoren vor und nach einem Impuls über die Sprungmatrix verknüpft sind, bedarf es zur Lösung des Anfangswertproblems keines numerischen Solvers.

Der Zustandsvektor kann in den autonomen Zeitabschnitten mit gewünschter Zeitauflösung durch Auswerten der Matrixexponentialfunktion bestimmt werden. Dabei ist eine relative Zeit $t_r \in [0, T_P]$ zu verwenden, weil die Lösung, mit jeweils neuer Anfangsbedingung, in der Zeit zwischen zwei Impulsen erfolgt. Der Zusammenhang zur Zeit t ist durch den Zeitpunkt des letzten Impulses gegeben.

Der Stoßvorgang wird durch die Sprungmatrix abgebildet. Die explizite Berechnung der Impulsstärke ε_k ist nicht erforderlich.

3.3. Ungedämpftes 2-FG-System

Um einen ersten Einblick in das grundlegende Systemverhalten zu gewinnen, wird das konservative System betrachtet, das heißt $\mathbf{C} = \mathbf{0}$.

Zur besseren Darstellung der Auswirkungen der Dirac-Impulsrafterregung zeigt Abbildung 3.1 Zeitverläufe der physikalischen q_i und modalen Verdrehungen u_i ohne Dirac-Impulsrafterregung. Als Anfangsauslenkung wurde der erste Eigenvektor verwendet. Folgerichtig treten freie Schwingungen mit der Kreisfrequenz ω_1 auf und die modale Verdrehung u_2 des zweiten Schwingungsmodes bleibt stets gleich Null.

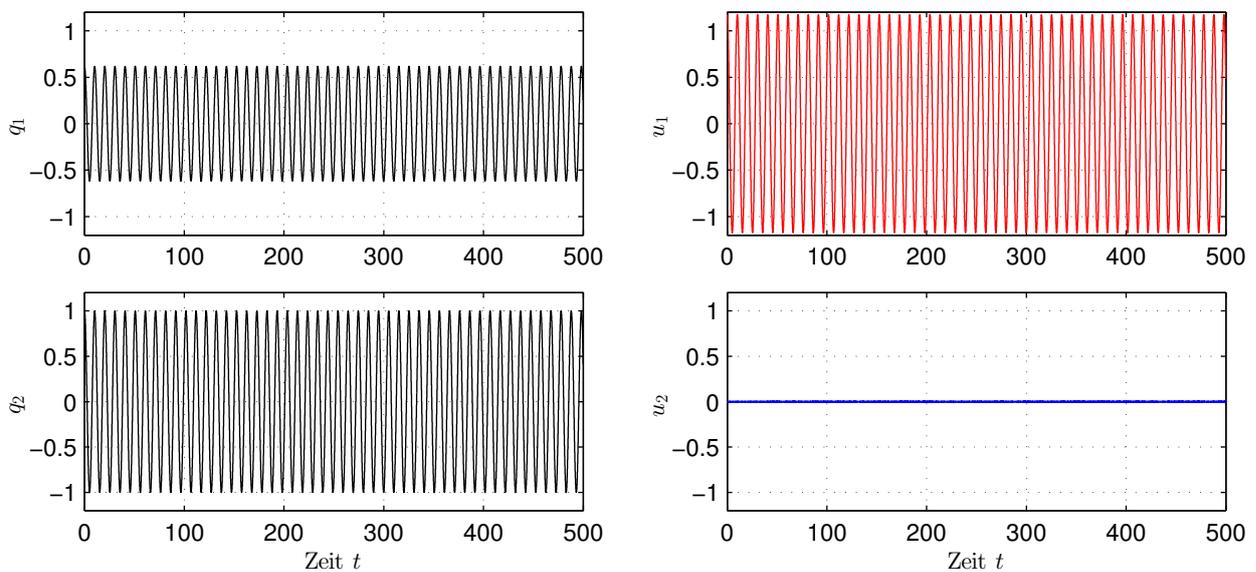


Abbildung 3.1.: Zeitverläufe der physikalischen (links) und modalen Verdrehungen (rechts) des ungedämpften Systems ohne DIE mit Anfangsbedingung AB1

Die Ergebnisse für eine Folge von Dirac-Impulsen auf Körper 1 mit $\vartheta = 1$ zeigt Abbildung 3.2. Der Wert der Pulspause wurde mit $T_P = 5.5$ so gewählt, dass der modale Energietransfer deutlich auftritt. Zusätzlich zu den Zeitverläufen der physikalischen und modalen Verdrehungen sind die Impulsstärke ε_k , die modalen Energieinhalte E_i sowie die Gesamtenergie des Systems E_{ges} dargestellt.

Die Wirkung der Dirac-Impulsrafterregung ist unmittelbar an den modalen Verdrehungen erkennbar. Während die Schwingungsamplitude des ersten Modes u_1 ausgehend von einem Maximalwert abnimmt, klingt der zweite Schwingungsmode u_2 auf. Der Maximalwert eines Schwingungsmodes wird erreicht, wenn der andere minimal wird. Das legt nahe, dass eine Kopplung der Schwingungsmodes und damit einhergehend der Transfer von Schwingungsenergie vom ersten in den zweiten Mode, und umgekehrt, stattfindet. Da sich die physikalischen Verdrehungen nach Gleichung (2.3) als Linearkombination der modalen Verdrehungen

ausdrücken lassen, erklärt der modale Energietransfer auch die in den Signalen der q_i auftretenden starken Amplitudenmodulationen und die sich ändernde Gewichtung der zwei Eigenkreisfrequenzanteile $\omega_{1,2}$. Korrespondierend zu Zeitabschnitten, in denen die Amplitude des zweiten Schwingungsmodes maximal wird, dominiert auch die zweite Eigenkreisfrequenz in den Schwingungssignalen der physikalischen Verdrehungen und vice versa.

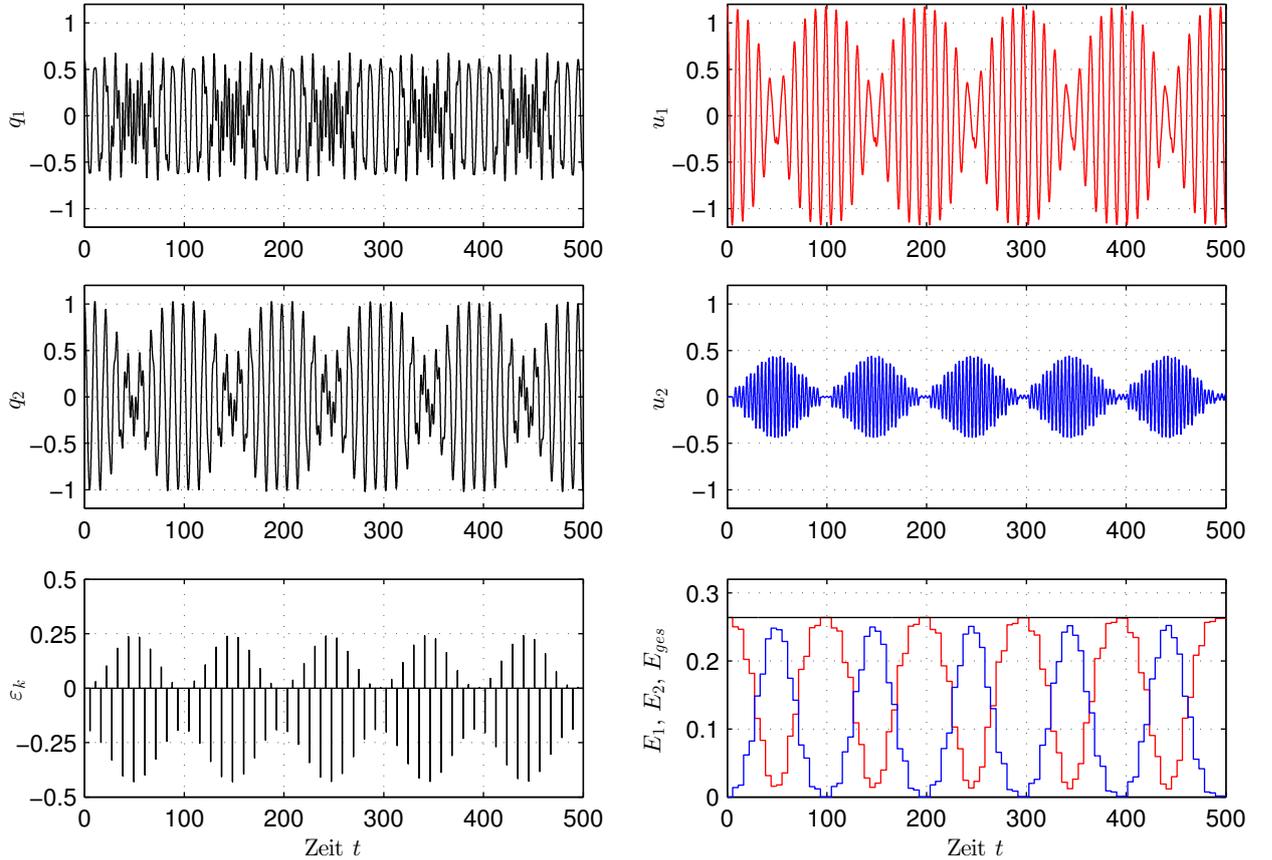


Abbildung 3.2.: Zeitverläufe der physikalischen und modalen Verdrehungen q_i und u_i ($i = 1, 2$), der Impulsstärke ε_k und der modalen Energieinhalte des ungedämpften Systems mit Anfangsbedingung AB1; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 5.5$ auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\eta = 1$

Die Berechnung der modalen Energieinhalte bestätigt die Annahme des Energietransfers zwischen den Schwingungsmode. Der Anfangsbedingung entsprechend, stimmen bei $t = 0$ die Gesamtenergie des Systems (schwarz) und der Energieinhalt des ersten Modes (rot) überein. Da ein konservatives System betrachtet wird und die Impulse derart bestimmt wurden, dass kein Energieaustausch mit der Umgebung stattfindet, muss eine Abnahme von E_1 zu einer entsprechenden Zunahme von E_2 führen. Wiederum bedeutet ein Maximum des Energieinhaltes eines Modes, ein Minimum des anderen. Der Energietransfer kann nur zu Zeiten eines Impulses stattfinden. Dementsprechend bleiben die modalen Energien abschnittsweise auf einem konstanten Wert und weisen an den diskreten Impulszeitpunkten Sprünge auf.

Ein nennenswertes Detail ist sowohl an den Zeitverläufen der u_i als auch an den Energieverläufen erkennbar. Während der Energieaustausch bei einem Maximum von E_1 nahezu

vollständig erfolgt, trifft das bei einem Maximum der Energie des zweiten Schwingungsmoden nicht zu. Auch sind die Zeitabschnitte, in denen die Energie des ersten Moden überwiegt, länger als jene, in denen E_2 größer als E_1 ist. Regelrechte, periodische Verhältnisse können aber auf Grund der zeitdiskreten Einwirkung auf das System nicht erwartet werden. Eine gewisse Asymmetrie ist auch im Verlauf der Impulsstärke ε_k erkennbar.

Nach der Betrachtung der Dirac-Impuls-Krafterregung bei Energiekonstanz (über einen Dirac-Impuls hinweg), $\vartheta = 1$, zeigt die Abbildung 3.3 zwei Simulationen für $\vartheta \neq 1$. Die Werte für ϑ wurden so gewählt, dass der grundlegende Effekt der Energiezu- und -abfuhr durch die Dirac-Impulse eindeutig gezeigt werden kann.

Die Zeitverläufe bestätigen die Aussagen aus Abschnitt 2.4. Für $\vartheta < 1$ wird dem System während eines Impulses Energie entnommen. Das Umgekehrte gilt für $\vartheta > 1$. Ein wichtiges Resultat ist, dass der modale Energietransfer weiterhin stattfindet. Daher stellt vor allem die DIE mit $\vartheta < 1$ eine vielversprechende Methode zur Schwingungsreduktion dar.

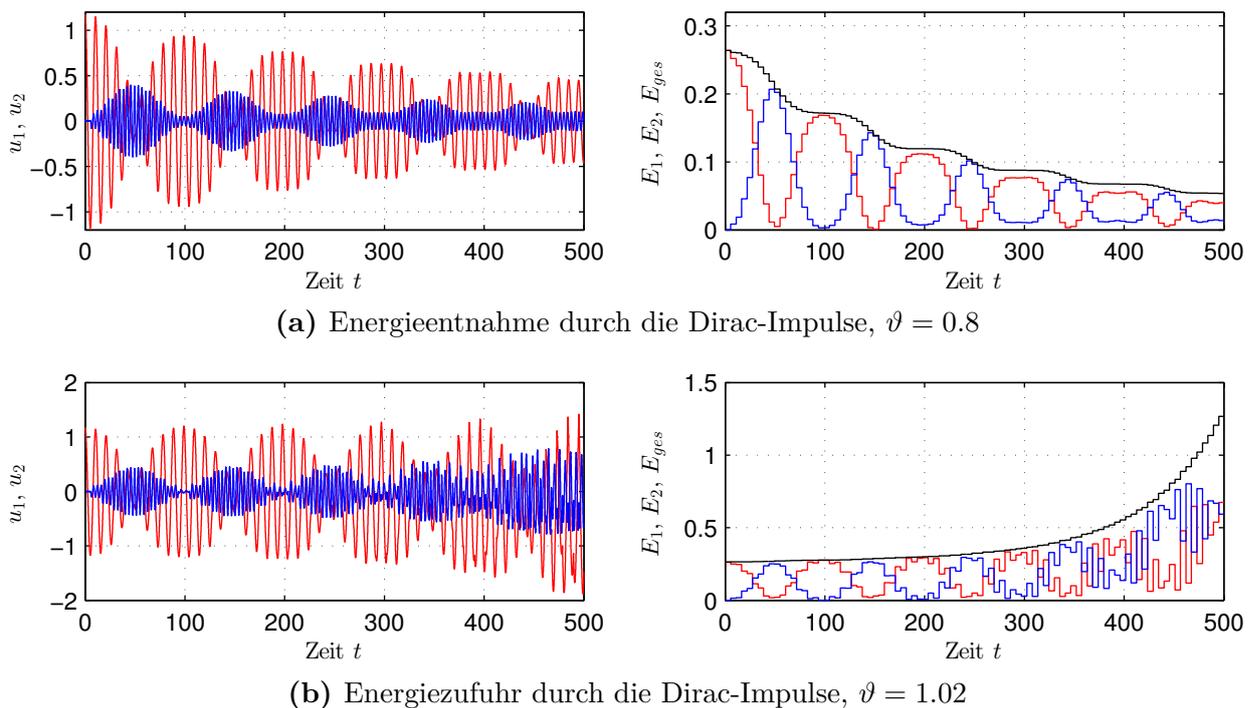


Abbildung 3.3.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des ungedämpften Systems mit Anfangsbedingung AB1; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 5.5$ auf Körper 1

3.4. Gedämpftes 2-FG-System

Nach der Diskussion der grundlegenden Effekte der DIE anhand des konservativen Systems, wird nun der Fokus auf das gedämpfte System gelegt. Die Fähigkeit die im System vorhandene Dämpfung durch den Transfer von Energie in stärker gedämpfte Schwingungsmoden besser auszunutzen, und die Reduktion der Schwingungsamplituden bei zusätzlicher Energieentnahme durch die Dirac-Impulse werden ausführlich behandelt.

3.4.1. Verbesserte Schwingungsdämpfung infolge des modalen Energietransfers

Die Wahl der Pulspause in den vorigen Simulationen erfolgte nicht nach der Trial-and-Error-Methode. Die Berechnung des betragsmäßig größten Eigenwertes der Abbildungsmatrix \mathbf{Q} des gedämpften Systems ergab in der Umgebung von $T_P = 5.5$ ein lokales Minimum. Das empfahl $T_P = 5.5$ als einen vielversprechenden Wert, um das Auftreten eines modalen Energietransfers zu zeigen. Dass der Transfer von Energie in stärker gedämpfte Schwingungsmoden tatsächlich eine verbesserte Schwingungsdämpfung ermöglicht, bestätigt Abbildung 3.4.

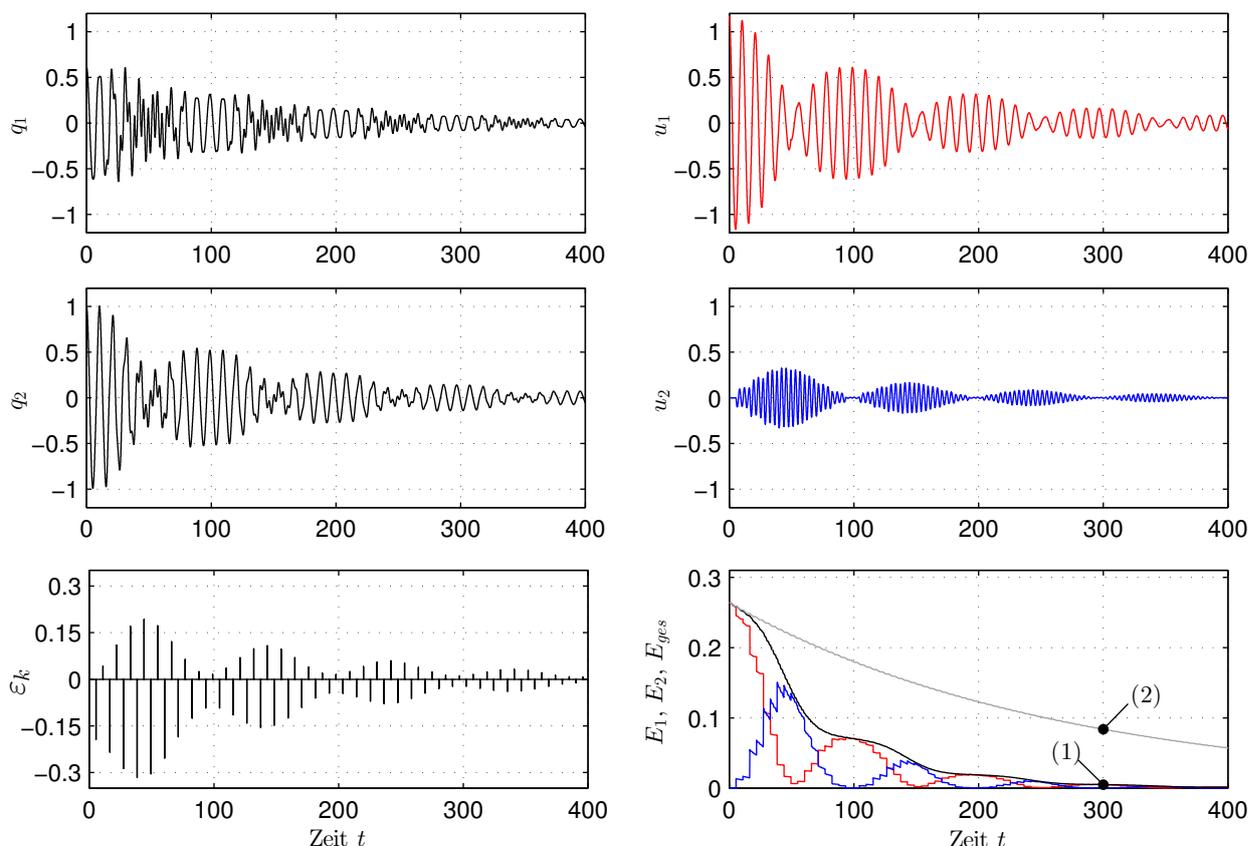


Abbildung 3.4.: Zeitverläufe der physikalischen und modalen Verdrehungen q_i und u_i ($i = 1, 2$), der Impulsstärke ε_k und der modalen Energieinhalte des gedämpften Systems mit Anfangsbedingung AB1; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 5.5$ auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Die Zeitverläufe der physikalischen und modalen Verdrehungen zeigen im Wesentlichen das im vorigen Abschnitt diskutierte Verhalten. Auf Grund der berücksichtigten Dämpfung nehmen jetzt die Amplituden der Zeitverläufe im Laufe der Simulation ab. Das Leistungsvermögen der Dirac-Impulskrafterregung ist im Plot der Energieinhalte klar ersichtlich. Die Zeitabschnitte, in denen der zweite Schwingungsmodus einen signifikanten Anteil der Gesamtenergie beinhaltet, weisen wegen der höheren modalen Dämpfung des zweiten Modos eine starke Energiedissipation auf. Die graue Linie repräsentiert die Gesamtenergie des Systems ohne DIE.

Neben der Abhängigkeit von der Pulspause wird auch ein Einfluss der Anfangsbedingung und des Vektors \mathbf{f} auf die schwingungsdämpfende Wirkung der Dirac-Impulskrafterregung erwartet. Zur Bewertung dieser Einflussgrößen wird in den Abbildungen 3.5 - 3.7 die Gesamtenergie des Systems bei $t = 300$ mit DIE für $T_P \in [1, 15]$, mit jener ohne DIE (graue Linie) verglichen, siehe auch die Punkte (1) und (2) in den Abbildungen 3.4 und 3.5. Um zu klären, ob ein genereller Zusammenhang zwischen der verbesserten Dissipation von Schwingungsenergie und dem Spektralradius von \mathbf{Q} besteht, ist auch der Spektralradius über der Pulspause dargestellt.

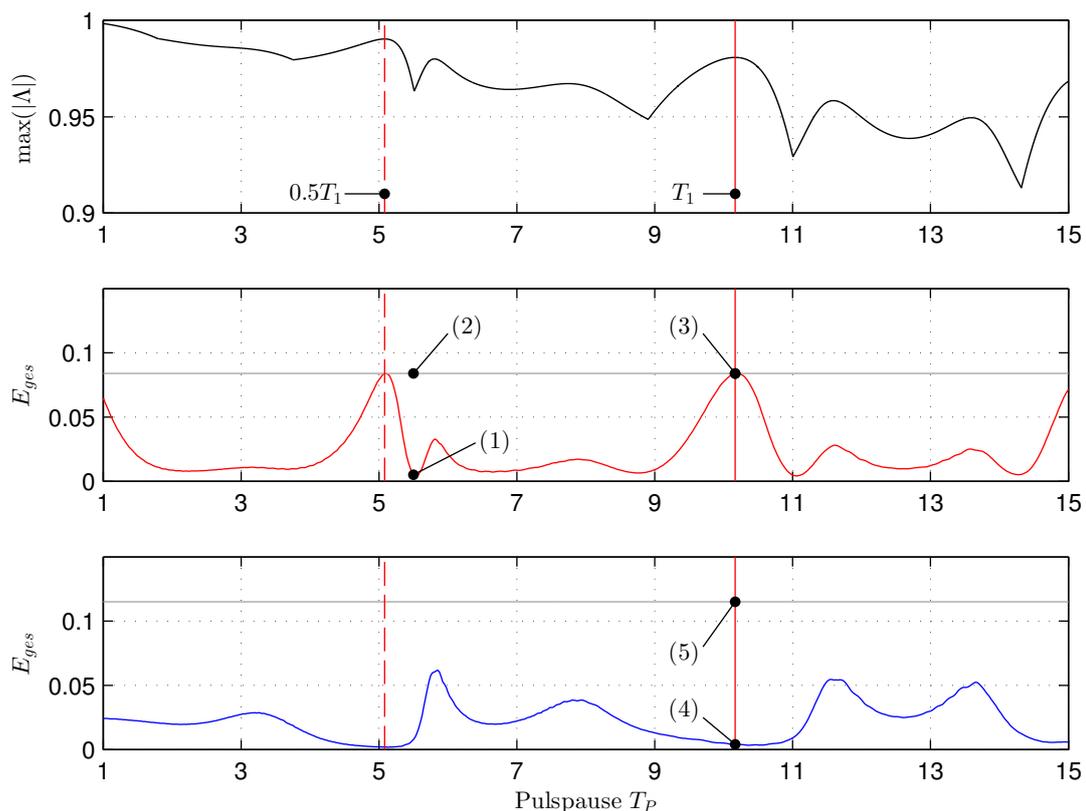


Abbildung 3.5.: Betragmäßig größter Eigenwert von \mathbf{Q} und Gesamtenergie bei $t = 300$; rot: Gesamtenergie für AB1, blau: Gesamtenergie für AB2; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

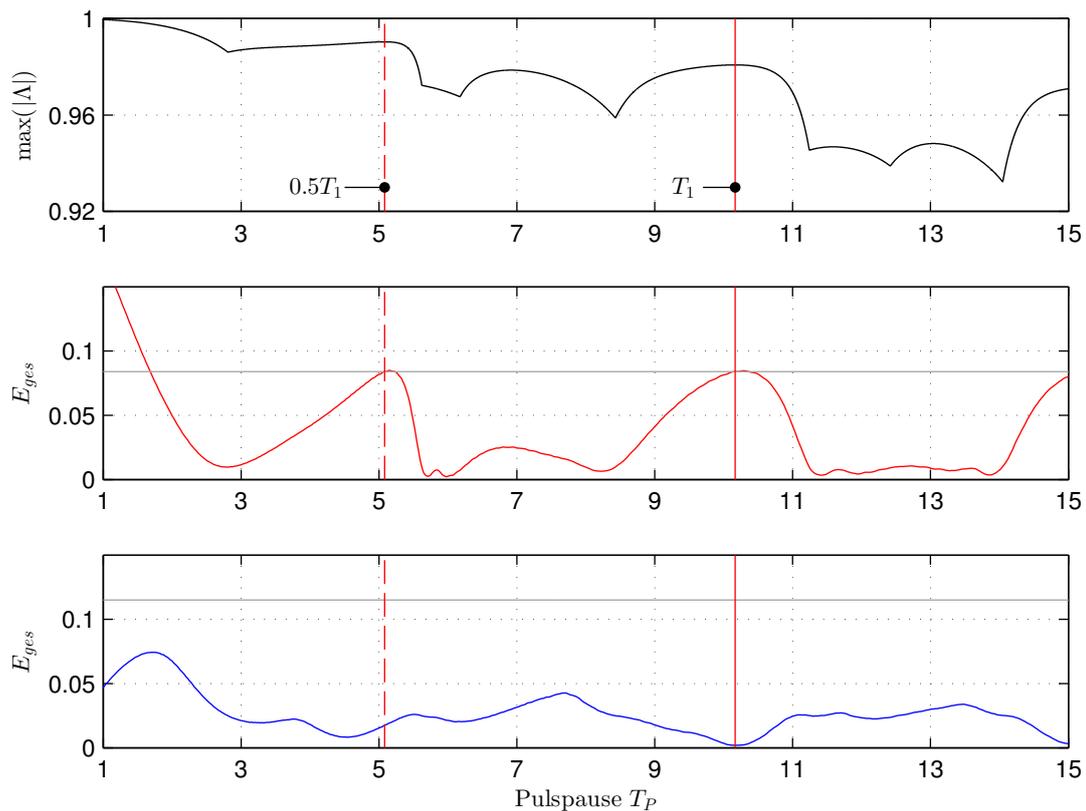


Abbildung 3.6.: Betragsmäßig größter Eigenwert von \mathbf{Q} und Gesamtenergie bei $t = 300$; rot: Gesamtenergie für AB1, blau: Gesamtenergie für AB2; Dirac-Impulse auf Körper 2; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Aus den Energieverläufen geht hervor, dass drei mögliche Effekte auftreten können:

- verbesserte Schwingungsdämpfung durch die Dirac-Impulskrafterregung
- kein Einfluss der Dirac-Impulskrafterregung auf die Gesamtenergie im System
- langsames Abklingen der Schwingungen mit Dirac-Impulskrafterregung

Während die Gesamtenergie des Systems mit DIE für die Geschwindigkeitsanfangsbedingung (AB2) unabhängig vom Vektor \mathbf{f} stets unter der Gesamtenergie des autonomen Systems liegt, siehe die Abbildungen 3.5 - 3.7, bewirkt die Dirac-Impulskrafterregung bei Verwendung des ersten Eigenvektors als Anfangsbedingung für manche Werte der Pulspause keine verbesserte Schwingungsdämpfung.

Auffallend ist, dass die Dirac-Impulskrafterregung bei Pulspausen, die ein halb- oder ganzzahliges Vielfaches¹ der Periodendauer der ersten Eigenkreisfrequenz T_1 betragen, den Energieinhalt für die Anfangsbedingung AB1 nicht beeinflusst. Wählt man jedoch AB2, so tritt

¹im Folgenden impliziert Vielfache, sofern nicht anders angegeben, halb- und ganzzahlige Vielfache

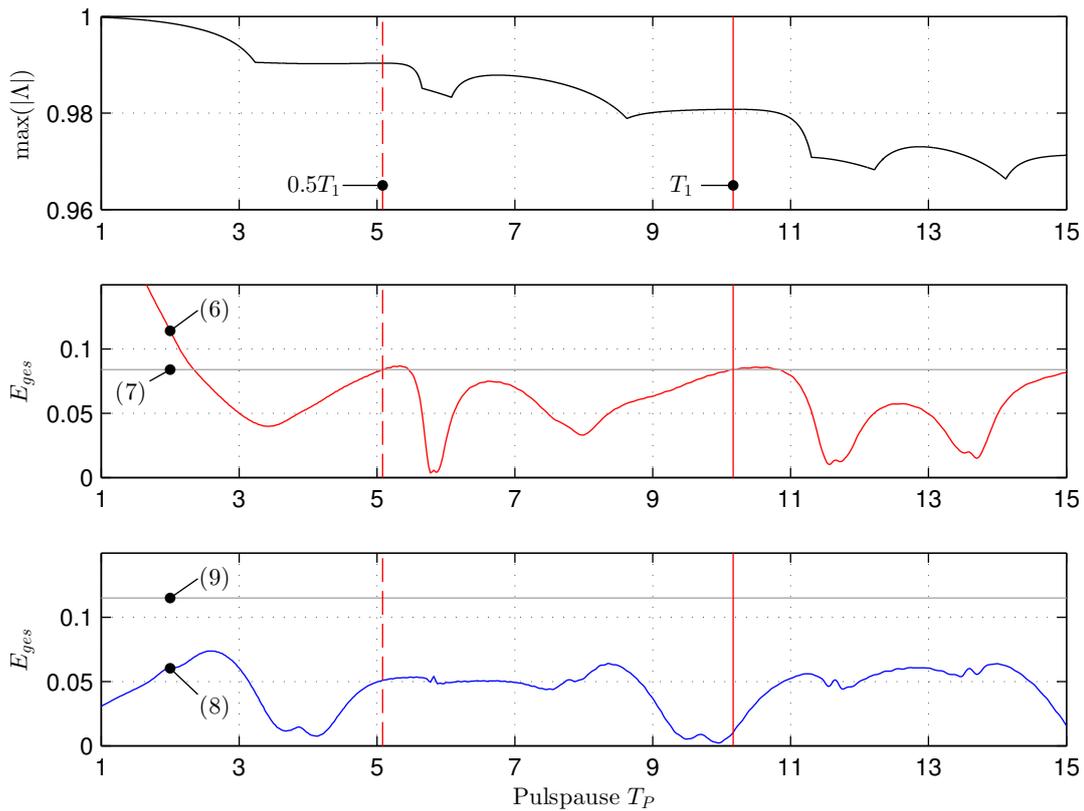


Abbildung 3.7.: Betragsmäßig größter Eigenwert von \mathbf{Q} und Gesamtenergie bei $t = 300$; rot: Gesamtenergie für AB1, blau: Gesamtenergie für AB2; Dirac-Impulse auf beide Körper; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

der gegenteilige Effekt ein. Der Verlauf der Gesamtenergie weist in der Nähe dieser Pulspausen sogar meist ein lokales Minimum auf. Die zu den Punkten (3) - (5) aus Abbildung 3.5 korrespondierenden Zeitverläufe sind in Abbildung 3.8 ersichtlich.

Wählt man für das autonome System den ersten Eigenvektor als Anfangsauslenkung, treten freie gedämpfte Schwingungen mit der Periodendauer T_1 auf. Die Nulldurchgänge beider physikalischer Geschwindigkeitskomponenten liegen bei Vielfachen von T_1 . Die Berechnung der Impulsstärke ε_k bei $t_k = kT_1$ ($k \in \mathbb{N}$) nach Gleichung (2.19) ergibt unabhängig von \mathbf{f} jeweils gleich Null, da stets $\dot{\mathbf{q}}(t_k) = 0$ gilt. Die Systeme mit und ohne DIE sind äquivalent und die modale Verdrehung u_1 sowie E_{ges} klingen im Einklang zum autonomen System exponentiell ab. Entsprechendes gilt auch für Systeme mit einem Vielfachen von T_1 als Pulspause.

Anders stellt sich der Sachverhalt bei der Geschwindigkeitsanfangsbedingung dar. Diese Anfangsbedingung besitzt in beiden Moden Anfangsenergie. Die Schwingungen des Systems ohne Dirac-Impulskrafterregung ergeben sich aus der Überlagerung von gedämpften Schwingungen im ersten und zweiten Mode, weshalb diese Periodizität der Nulldurchgänge der physikalischen Geschwindigkeiten nicht auftritt. Das bedeutet aber, dass für das System mit Dirac-Impulskrafterregung $\varepsilon_k \neq 0$ existieren und der Transfer von Energie möglich ist.

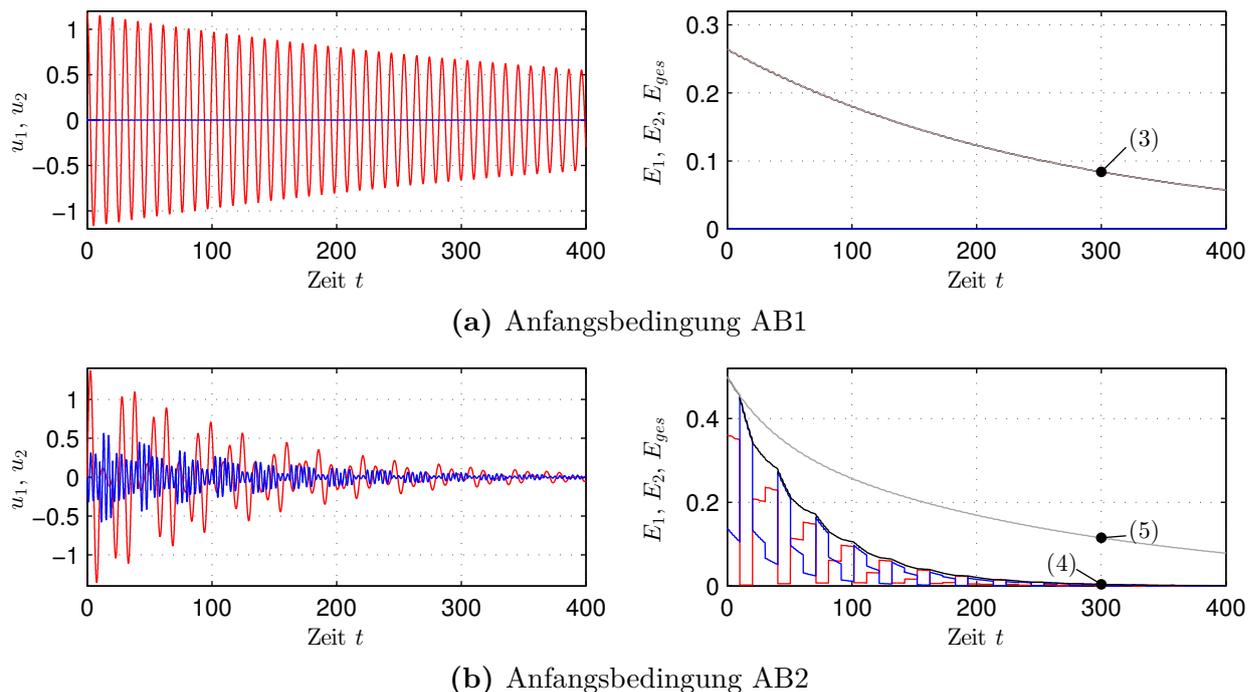
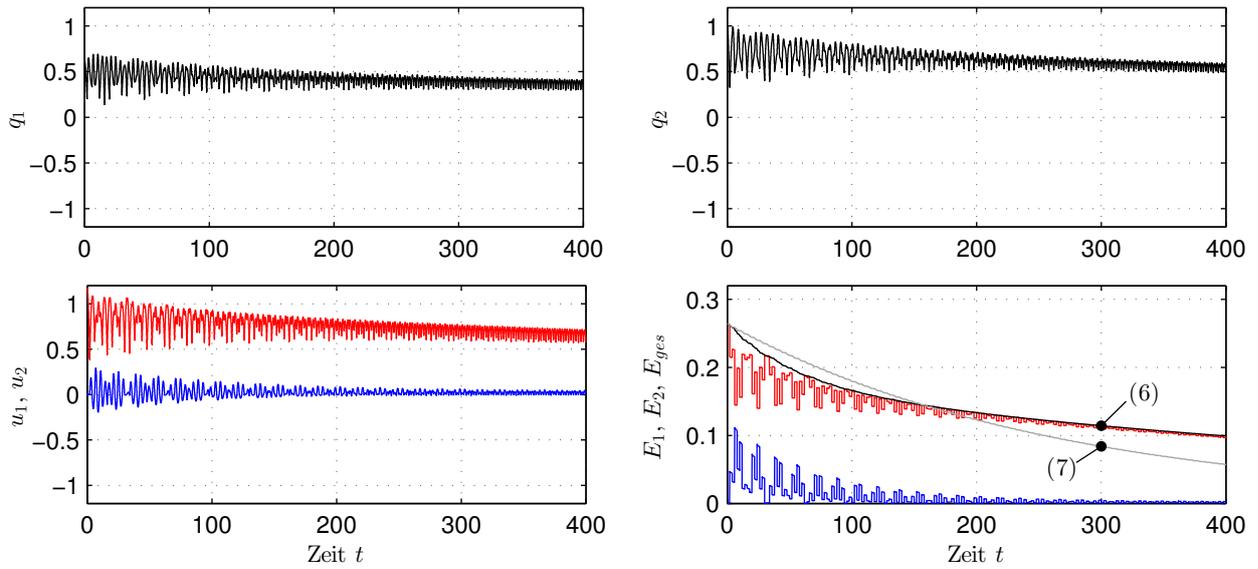
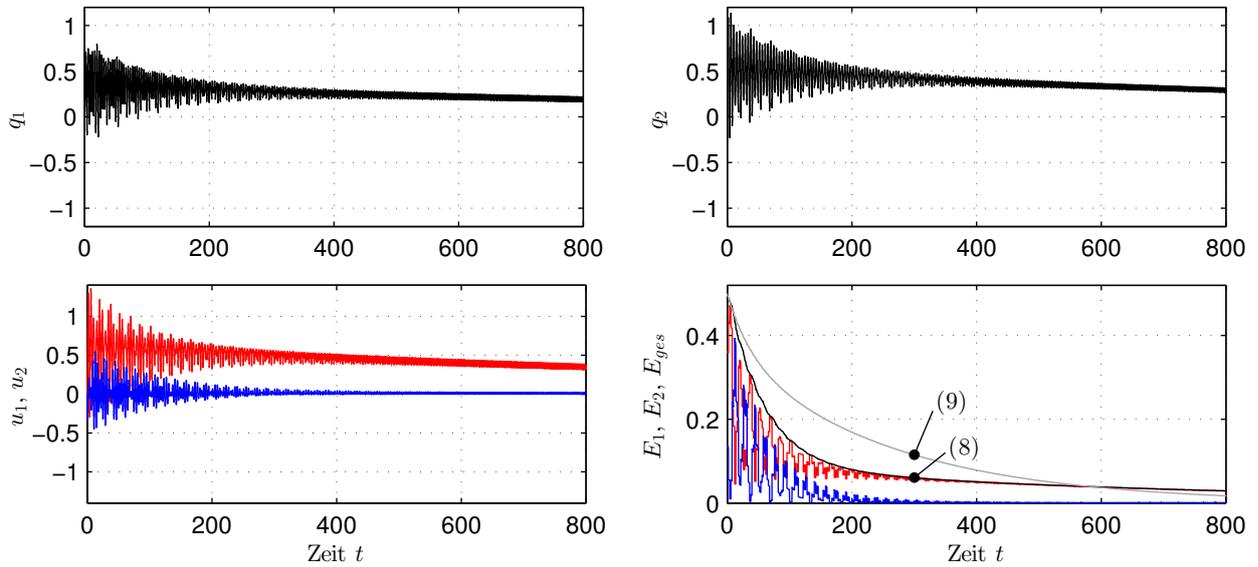


Abbildung 3.8.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des gedämpften Systems; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = T_1$ auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Für kleine T_P wird die Schwingungsenergie langsamer dissipiert als beim System ohne Dirac-Impulskrafterregung. Das ist bei Dirac-Impulsen auf Körper 2 bzw. auf beide Körper und AB1 aus den Abbildungen 3.6 und 3.7 direkt ersichtlich. Zeitsimulationen für beide Anfangsbedingungen mit der Pulspause $T_P = 2$ und $\mathbf{f}^T = (1, 1)$ zeigen, dass dieser Effekt etwa ab $t = 600$ auch bei Verwendung der Geschwindigkeitsanfangsbedingung auftritt, siehe Abbildung 3.9. Die kurze Zeitspanne zwischen den Impulsen bewirkt, dass beide physikalischen Verdrehungen um eine ausgelenkte Lage schwingen, die sich nur langsam der Nulllage nähert. Dieser Sachverhalt ist auch an den modalen Koordinaten erkennbar. Für die gewählten Simulationsparameter nähert sich die modale Verdrehung u_1 nur sehr langsam der Nulllage an.



(a) Anfangsbedingung AB1



(b) Anfangsbedingung AB2

Abbildung 3.9.: Zeitverläufe der physikalischen (oben) und modalen Verdrehungen und Energieinhalte (unten) des gedämpften Systems; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 2.0$ auf beide Körper; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Fasst man die \mathbf{D} -Matrix aus Gleichung (2.11) als Abbildungsmatrix des autonomen Systems auf, können durch Vergleich der betragsmäßig größten Eigenwerte von \mathbf{D} und \mathbf{Q} jene Wertebereiche der Pulspause bestimmt werden, für die ein langsames Abklingen der Schwingungen des Systems mit Dirac-Impulskrafterregung auftritt. Für $\mathbf{f}^T = (1, 1)$ ist dieser Vergleich in Abbildung 3.10 ersichtlich. Der betragsmäßig größte Eigenwert des autonomen Systems, $\max(|\rho|)$, fällt linear ab. Neben den bereits besprochenen kleinen Werten der Pulspause liegt die schwarze Eigenwertkurve des Systems mit DIE auch im Bereich $6.5 \leq T_P \leq 8$, und für Werte in

der Nähe von Vielfachen von T_1 über der des autonomen Systems. An den rot eingezeichneten Vielfachen von T_1 liegt jeweils ein Schnittpunkt der Eigenwertkurven. Wie vorher bereits gezeigt, werden für diese speziellen Fälle bei Verwendung von AB1 alle Impulse gleich Null und das System mit DIE entspricht dem autonomen System. Im Allgemeinen wird aber erst nach einer gewissen Zeitspanne der kritische Systemzustand erreicht, ab dem ein langsames Abklingen der Schwingungen eintritt, sodass die Dirac-Impulskrafterregung in den ersten Zeiteinheiten durchaus eine verbesserte Dämpfung bewirken kann. Trotzdem sind die lokalen Minima des Spektralradius von \mathbf{Q} als mögliche Pulspausen zu bevorzugen.

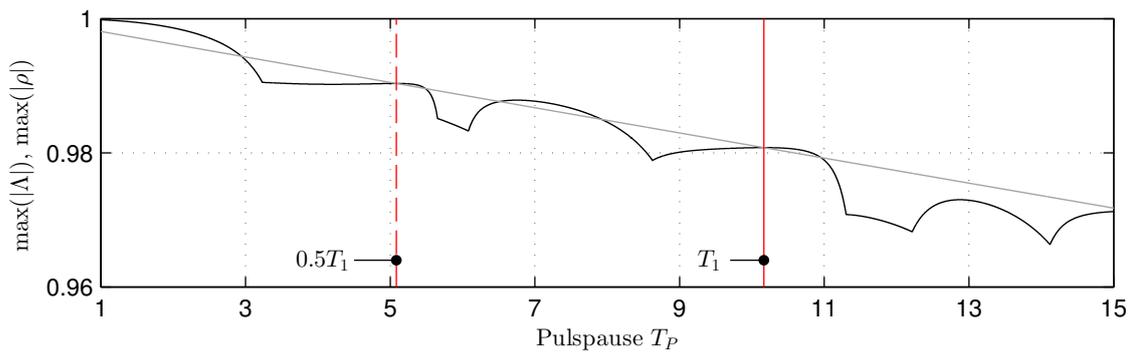


Abbildung 3.10.: Betragsmäßig größter Eigenwert der \mathbf{Q} - und \mathbf{D} -Matrix des gedämpften Systems; rot: Vielfache von T_1 ; Dirac-Impulse auf beide Körper; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Die Eigenwertkurve von \mathbf{Q} weist teils eher breite Minima-Bereiche als ein ausgeprägtes lokales Minimum auf, zum Beispiel für $5.5 \leq T_P \leq 6$ in Abbildung 3.10. Stellt man die Absolutbeträge aller Eigenwerte über der Pulspause dar, erkennt man, dass in diesen Bereichen für ein schmales Intervall von T_P ein Wechsel des betragsmäßig größten Eigenwertes erfolgt, siehe Abbildung 3.11.

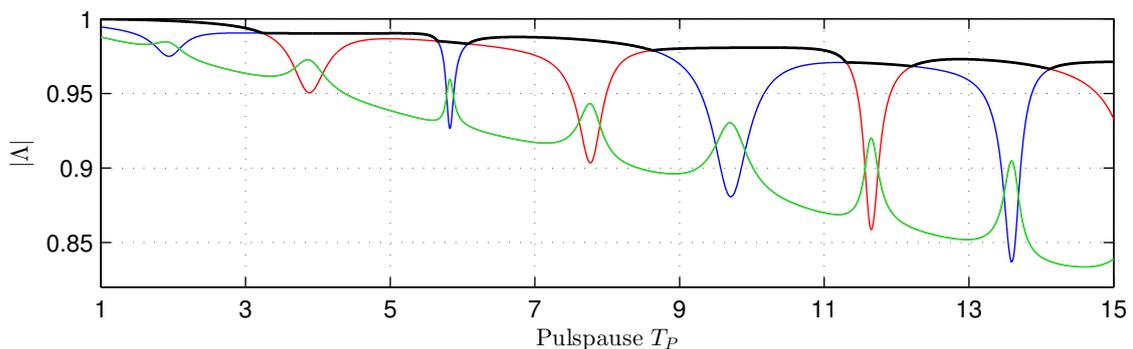


Abbildung 3.11.: Absolutbeträge aller Eigenwerte der \mathbf{Q} -Matrix des gedämpften Systems; rot/blau: reelle Eigenwerte, grün: konjugiert komplexe Eigenwerte, schwarz: Spektralradius; Dirac-Impulse auf beide Körper; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

3.4.2. Modaler Energietransfer und Energieentnahme durch die Dirac-Impulse

Die Dirac-Impulskrafterregung ermöglicht neben dem modalen Energietransfer noch einen weiteren sehr effizienten Mechanismus zur Schwingungsreduktion. Vorausgesetzt, dass der beeinflussbare Anteil der kinetischen Energie einen signifikanten Beitrag der Gesamtenergie darstellt, kann dem System durch die Dirac-Impulse sehr effektiv Energie entzogen werden. Um die Leistungsfähigkeit der zusätzlichen Energieentnahme klar zeigen zu können, werden für die Zeitsimulationen Parametersätze des vorigen Abschnitts verwendet, jetzt aber bei maximaler Energieentnahme durch die Dirac-Impulse, das heißt $\vartheta = 0.5$.

Betrachtet man Abbildung 3.12, so erkennt man, dass sowohl der modale Energietransfer als auch die Energieentnahme infolge der Stöße auf Körper 1 zu einer sehr guten Schwingungsdämpfung beitragen. In Analogie zu den bisherigen Energiediagrammen repräsentiert die graue Linie die Gesamtenergie des Systems ohne DIE. Der Vergleich der Gesamtenergien zeigt eindrucksvoll das Leistungsvermögen der Dirac-Impulskrafterregung. Noch interessanter ist jedoch die Gegenüberstellung mit dem System mit DIE und $\vartheta = 1$, vergleiche Abbildung 3.4. Ein mit $t = 200$ vergleichbares Energieniveau wird bei zusätzlicher Energieentnahme circa 100 Zeiteinheiten früher erreicht. Die gesamte Energie ist für $\vartheta = 0.5$ bei $t = 200$ dissipiert; bei alleinigem modalen Energietransfer erst etwa 150 Zeiteinheiten später.

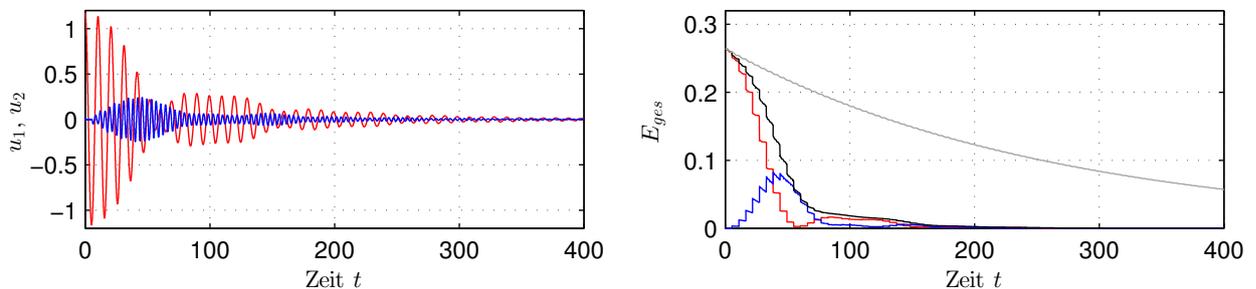


Abbildung 3.12.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des gedämpften Systems mit AB1; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 5.5$ auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

Nach Gleichung (2.31) kann dem System mit den Parametern $\mathbf{f}^T = (1, 0)$ und $\vartheta = 0.5$ bei jedem Stoß die gesamte kinetische Energie des ersten Körpers entzogen werden. Die vergleichsweise kleinen Sprünge in der Gesamtenergie bedeuten, dass zu den Stoßzeitpunkten der Anteil der kinetischen Energie von Körper 1 an der gesamten Energie jeweils gering war. Weiters kann die Schwingungsenergie bei kleineren Pulspausen wegen der größeren Impulszahl effektiver dissipiert werden.

Abbildung 3.13 zeigt Simulationsergebnisse für $T_P = 2.0$ und Dirac-Impulse auf beide Körper. Nach einem Impuls beträgt die Gesamtenergie nur mehr 15% des Ausgangswertes. Bei $t = 4$ ist beinahe die gesamte Energie dissipiert. Aus dem Energieverlauf und dem Zeitverlauf

der modalen Verdrehungen geht hervor, dass der modale Energietransfer zwar stattfindet, aber im Wesentlichen nicht zur Reduktion der Schwingungsamplituden beiträgt.

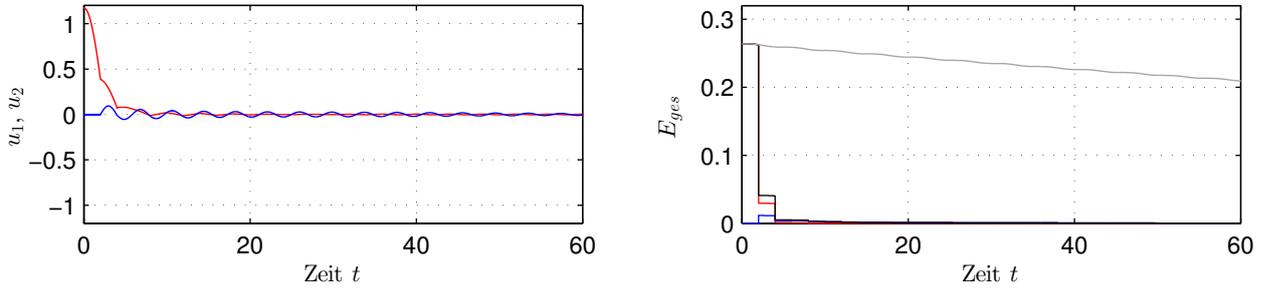


Abbildung 3.13.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des gedämpften Systems mit AB1; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 2.0$ auf beide Körper; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

Unmittelbar vor dem Impuls bei $t = 2$ beträgt der Anteil der kinetischen Energie an der Gesamtenergie 89%. Die große Energiemenge, die dem System während des ersten Impulses entzogen wird, legt nahe, den Stoßvorgang für $\mathbf{f}^T = (1, 1)$ genauer zu betrachten.

Nach den Gleichungen (2.27) - (2.29) gilt unabhängig von konkreten Werten für $f_1 = f_2$ und $I_1 = I_2$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Der Geschwindigkeitszustand nach einem Impuls ergibt nach Gleichung (2.26)

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}_+ = \begin{bmatrix} 1 - \vartheta & -\vartheta \\ -\vartheta & 1 - \vartheta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}_- = \begin{pmatrix} \dot{q}_{1-} - \vartheta (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)_- \\ \dot{q}_{2-} - \vartheta (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)_- \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Für die Änderung der kinetischen Energie erhält man mit $I_1 = I_2 = 1$

$$\Delta T_k = \vartheta^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)_- - \vartheta (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)_- \quad (3.6)$$

und speziell für $\vartheta = 0.5$

$$\Delta T_k = -\frac{1}{4} (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2)_-. \quad (3.7)$$

Aus den obigen Gleichungen sieht man unmittelbar, dass der Geschwindigkeitszustand für $\dot{q}_{1-} = -\dot{q}_{2-}$ unverändert bleibt und $\Delta T_k = 0$ ergibt. Vergleicht man (3.7) mit der kinetischen Energie vor einem Impuls, so erkennt man, dass dem System für $\dot{q}_{1-} = \dot{q}_{2-}$ die gesamte kinetische Energie entnommen wird. Ist eine der beiden Geschwindigkeitskomponenten gleich Null, ergibt ΔT_k immerhin noch die Hälfte von T_{k-} .

Für die Anfangsbedingung AB1 besitzen beide Geschwindigkeitskomponenten vor dem ersten Impuls das gleiche Vorzeichen. Daher kann dem System in Abbildung 3.13 ein Großteil der kinetischen Energie entzogen werden.

Die Simulation mit der Geschwindigkeitsanfangsbedingung, Abbildung 3.14, verdeutlicht die eben gefundenen Ergebnisse. Bei $t = 2$ ist \dot{q}_{2-} nahezu Null. Nach dem Impuls entspricht der Betrag beider Geschwindigkeitskomponenten der Hälfte von \dot{q}_{1-} , die kinetische Energie halbiert sich. Vor dem zweiten Stoß sind beide \dot{q}_{i-} negativ, ein großer Teil der kinetischen Energie kann dem System entnommen werden. Bei $t = 6$ bleibt die Gesamtenergie nahezu unverändert.

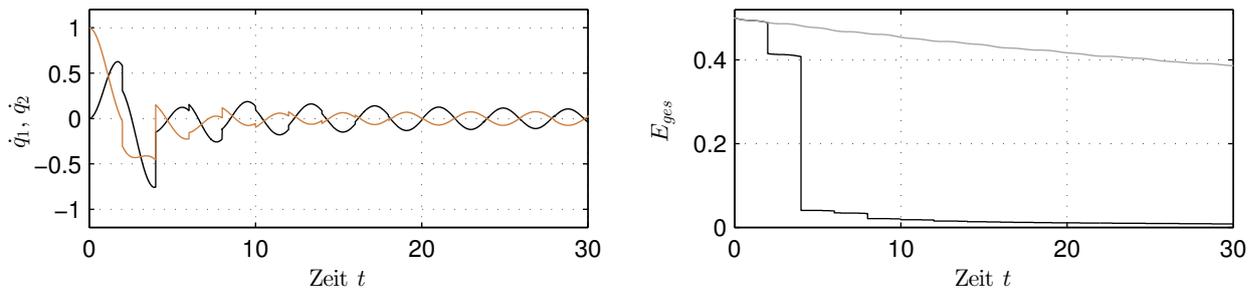


Abbildung 3.14.: Zeitverläufe der physikalischen Geschwindigkeiten \dot{q}_1 (schwarz), \dot{q}_2 (braun) und Gesamtenergie E_{ges} des gedämpften Systems mit AB2; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 2.0$ auf beide Körper; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

Identifikation der Extremstellen im Verlauf des betragsgrößten Eigenwertes

Bei Betrachtung des betragsgrößten Eigenwertes von \mathbf{Q} für verschiedene $\vartheta < 1$ stellt man fest, dass die Verläufe der Spektralradien bei mehreren Pulspausen ausgeprägte lokale Maxima aufweisen. Die Lage der Extremstellen hängt nicht von ϑ ab, siehe Abbildung 3.15. Mit Ausnahme von Vielfachen von T_1 , treten diese Extrema nur für ϑ innerhalb eines (schmalen) Intervalles um $\vartheta = 0.5$ auf.

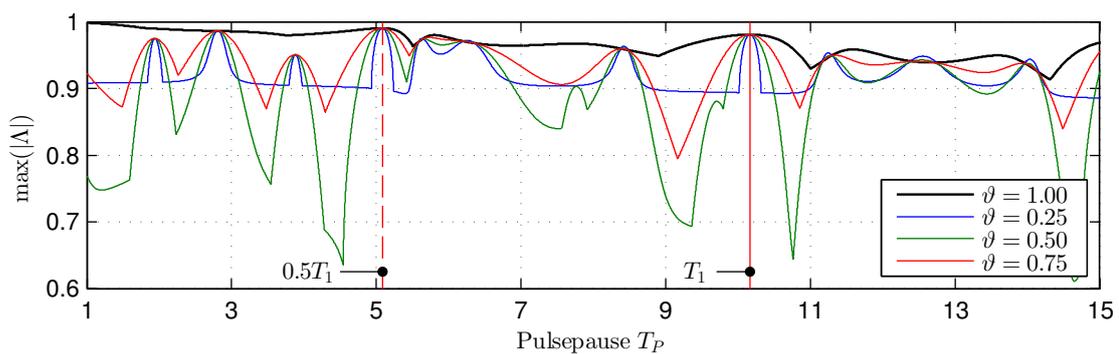


Abbildung 3.15.: Betragsmäßig größter Eigenwert der \mathbf{Q} -Matrix des gedämpften Systems bei Variation von ϑ ; Dirac-Impulse auf Körper 1

Während die Schwingungen bei der Dirac-Impulskrafterregung mit $\vartheta = 1$ auf Grund des bidirektionalen Energietransfers im Allgemeinen langsamer als autonome Schwingungen im zweiten Mode abklingen, ermöglicht die zusätzliche Energieentnahme ($\vartheta < 1$) ein rascheres

Abklingen der Schwingungsamplituden. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass für das System mit DIE der betragsgrößte Eigenwert $\max(|\Lambda|)$ unterhalb des betragsmäßig kleinsten Eigenwertes der \mathbf{D} -Matrix des autonomen Systems $\min(|\rho|)$ liegt.

Beträgt die Pulspause jedoch ein Vielfaches von T_2 , muss der Betrag eines Eigenwertes des Systems mit DIE (unabhängig von ϑ) mit dem betragsmäßig kleinsten Eigenwert der \mathbf{D} -Matrix übereinstimmen. Mit analoger Begründung wie oben, bleibt die DIE bei passend gewählter Anfangsbedingung, jetzt dem zweiten Eigenvektor als Anfangsauslenkung, ohne Wirkung. Das System mit Dirac-Impulskrafterregung und das autonome System sind äquivalent. Für andere Anfangsbedingungen kann dem System jedoch sehr effektiv Energie entzogen werden, vergleiche Abbildung 3.16.

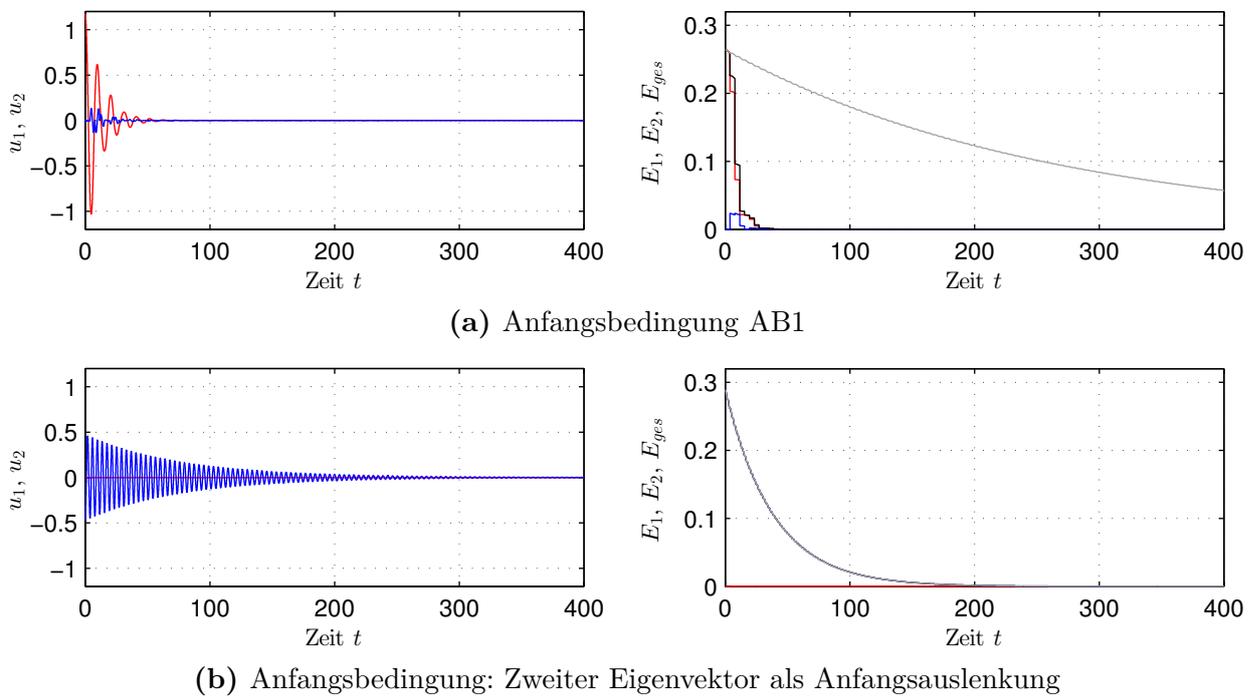


Abbildung 3.16.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des gedämpften Systems; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = T_2$ auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

Abbildung 3.17 bestätigt für $\vartheta = 0.5$, dass lokale Maximumstellen von $\max(|\Lambda|)$ bei Vielfachen von T_2 liegen. Neben den Absolutbeträgen aller Eigenwerte des Systems mit Dirac-Impulskrafterregung, sind auch die Absolutbeträge der Eigenwerte von \mathbf{D} (graue Linien) dargestellt. Bei $T_P = nT_2/2$ ($n \in \mathbb{N}$) stimmt stets der Betrag eines Eigenwertes mit $\min(|\rho|)$ überein.

Für nichtlineare und parametererregte MFG-Systeme ist bekannt, dass Resonanzphänomene auftreten können, welche für lineare zeitinvariante Systeme nicht vorhanden sind. Von Bedeutung sind vielfach Kombinationskreisfrequenzen der Form $\Omega = |\omega_j \pm \omega_k|$, wobei Ω beispielsweise die Eigenkreisfrequenz einer externen Erregung oder der Parametererregung darstellen. ω_j, ω_k

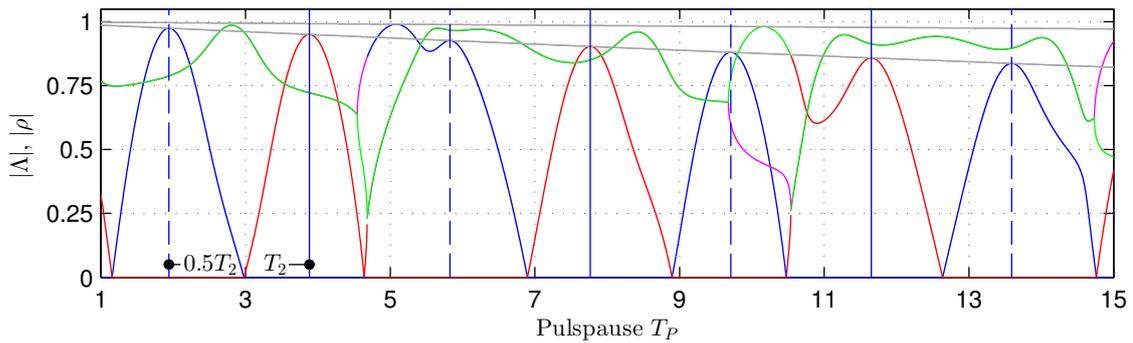


Abbildung 3.17.: Absolutbeträge der Eigenwerte der Q - und D -Matrix des gedämpften Systems; Dirac-Impulse auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

bezeichnen zwei Eigenkreisfrequenzen des ungedämpften Systems. In weiterer Folge wird versucht, die Pulspause der bisher nicht identifizierten Extremstellen mit den Periodendauern

$$T_{12,+} = \frac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2} \quad T_{12,-} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} \quad (3.8)$$

in Zusammenhang zu bringen.

In Abbildung 3.18 sieht man, dass die übrigen lokalen Extremstellen bei ganzzahligen Vielfachen von $T_{12,+}$ beziehungsweise $T_{12,-}$ liegen. Zur Unterscheidung werden in Abbildung 3.18 und in allen folgenden Diagrammen halbzahlige Vielfache durch strichlierte, ganzzahlige Vielfache mittels durchgezogener Linien gekennzeichnet.

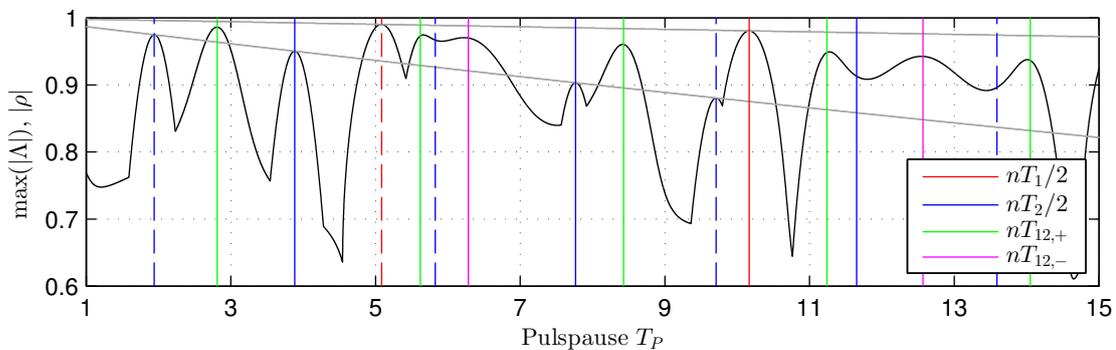


Abbildung 3.18.: Betragsgrößter Eigenwert der Q -Matrix des gedämpften Systems; Dirac-Impulse auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

Zeitsimulationen für verschiedene Anfangsbedingungen und $T_P = nT_{12,\pm}$ zeigen vielfach, dass die DIE das Systemverhalten ab einer gewissen Simulationsdauer nur mehr minimal beeinflussen kann. Exemplarisch sind in Abbildung 3.19 Simulationsergebnisse für $T_P = T_{12,+}$ dargestellt. Wählt man AB1 als Anfangsbedingung, kann nur der erste Impuls bei $t = 2.81$ dem System Energie entziehen, beziehungsweise einen modalen Energietransfer initiieren. Danach bleibt die Dirac-Impulskrafterregung nahezu wirkungslos. Für die Geschwindigkeitsanfangsbedingung beeinflusst die DIE das Systemverhalten während der gesamten Simulationsdauer nur

geringfügig. Bei beiden Anfangsbedingungen stellt sich der selbe Mittelwert für das Verhältnis der modalen Energieinhalte E_2/E_1 (braun) ein.

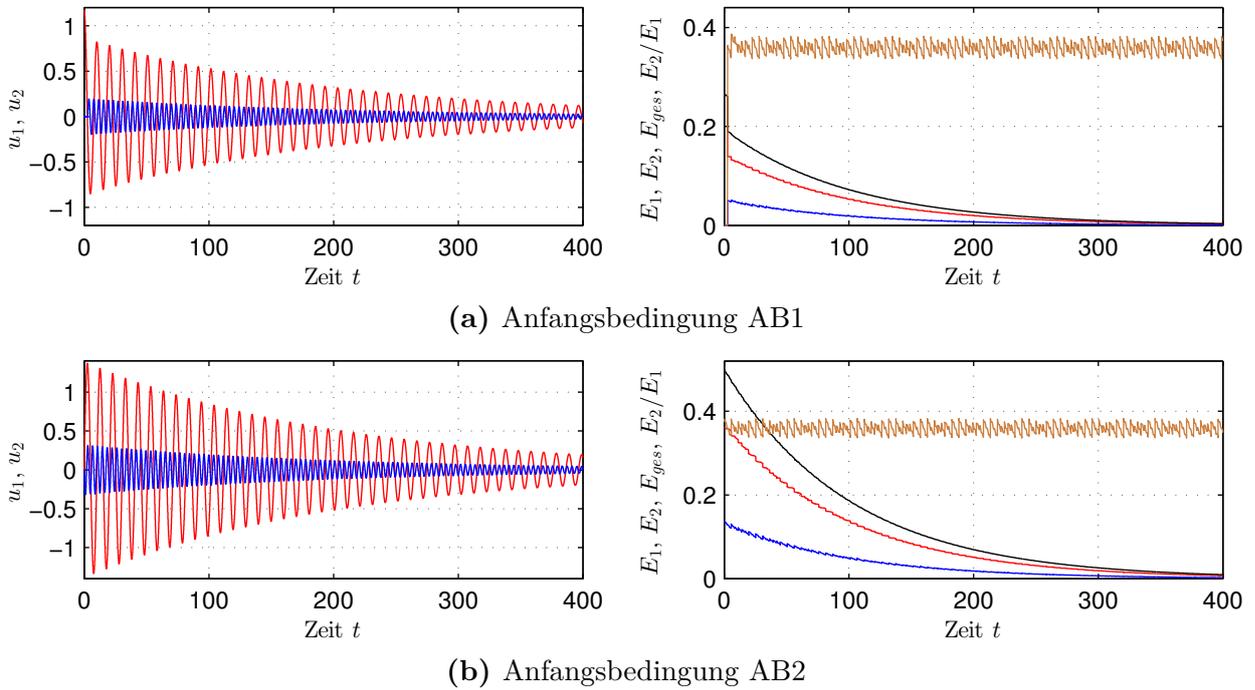


Abbildung 3.19.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des gedämpften Systems; braun: E_2/E_1 ; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = T_{12,+}$ auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

Zur bestmöglichen Schwingungsdämpfung durch die DIE sollten daher Pulspausen vermieden werden, die ein Vielfaches von T_1 beziehungsweise T_2 und ganzzahlige Vielfache von $T_{12,\pm}$ betragen.

3.5. Modaler Energietransfer im 3-FG-System

Bisher wurde der modale Energietransfer in 2-FG-Systemen untersucht. Um allgemeinere Aussagen zur Kopplung der Schwingungsmoden durch die Dirac-Impulskrafterregung angeben zu können, wird das System aus dem vorigen Abschnitt um einen Freiheitsgrad erweitert, siehe Abbildung 3.20. Die mit Hilfe dieses 3-FG-Systems dargestellten Ergebnisse gelten ganz allgemein für MFG-Systeme.

Weisen die Parameter des zusätzlichen Drehschwingungssubsystems gleichartige Eigenschaften wie das bereits bestehende System auf, erhält man für die Systemmatrizen

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.01 & 0 \\ -0.01 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

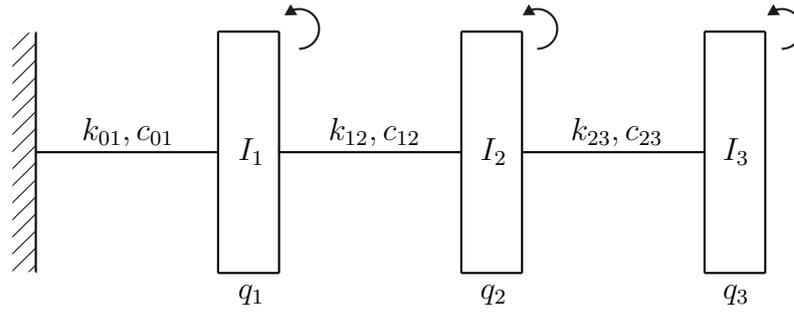


Abbildung 3.20.: Erweitertes Drehschwingungssystem

Die Modalmatrix und die gedämpften Periodendauern ergeben sich zu

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.3280 & -0.7370 & 0.5910 \\ 0.5910 & -0.3280 & -0.7370 \\ 0.7370 & 0.5910 & 0.3280 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

beziehungsweise

$$T_1 = 14.1182 \quad T_2 = 5.0387 \quad T_3 = 3.4869. \quad (3.11)$$

Die Bewegungsgleichungen in modalen Koordinaten (2.5) sind nur zu den diskreten Impulszeitpunkten über die rechte Seite gekoppelt. Zwischen welchen Schwingungsmoden der Energietransfer erfolgt, ist durch die von Null verschiedenen Komponenten des Vektors

$$\bar{\mathbf{f}} = \Phi^T \mathbf{f} \quad (3.12)$$

festgelegt. Anhand der Gleichungen (3.10) und (3.12) sieht man, dass für die bisher betrachteten Impulse auf einen Körper und gleich gewichteten Impulsen ($f_i = f_j$) auf mehrere Körper alle $\bar{f}_i \neq 0$ ergeben. Das heißt, zu den Stoßzeitpunkten sind alle Moden gekoppelt.

Kehrt man die Herangehensweise um, und bestimmt für ein festgelegtes $\bar{\mathbf{f}}$ den entsprechenden \mathbf{f} -Vektor, kann der modale Energietransfer zwischen zwei definierten Schwingungsmoden stattfinden. Im Allgemeinen findet man für N -FG-Systeme N linear unabhängige Eigenvektoren und Gleichung (3.12) ist eindeutig lösbar.

Abbildung 3.21 zeigt Zeitverläufe für $T_P = 8.2$ und dem skalierten ersten Eigenvektor, $\varphi_{1,max} = 1$, als Anfangsauslenkung bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit. Die grauen Linien stellen die Gesamtenergie des autonomen Systems dar. Beispielhaft für die Kopplung aller Moden sind die modalen Verdrehungen und Energieinhalte für eine Folge von Impulsen auf den zweiten Körper – $\mathbf{f}^T = [0, 1, 0]$ – dargestellt. Den gezielten Transfer von Energie zwischen erstem und zweiten Schwingungsmode zeigt Abbildung 3.21(b). Der dritte Mode (grün) wird nicht angeregt, sowohl u_3 als auch E_3 bleiben stets gleich Null. Analoges gilt für den zweiten Mode (blau) bei der Kopplung von Mode 1 und 3, siehe Abbildung 3.21(c).

Anmerkung: Die lokalen Minima im Verlauf des betragsgrößten Eigenwertes sind abhängig von der Wahl des Vektors \mathbf{f} . Daher stellt $T_P = 8.2$ kein gemeinsames lokales Minimum von $\max(|\Lambda|)$ dar. Bei der Wahl der Pulspause wurde darauf geachtet, dass der modale Energietransfer stets deutlich auftritt.

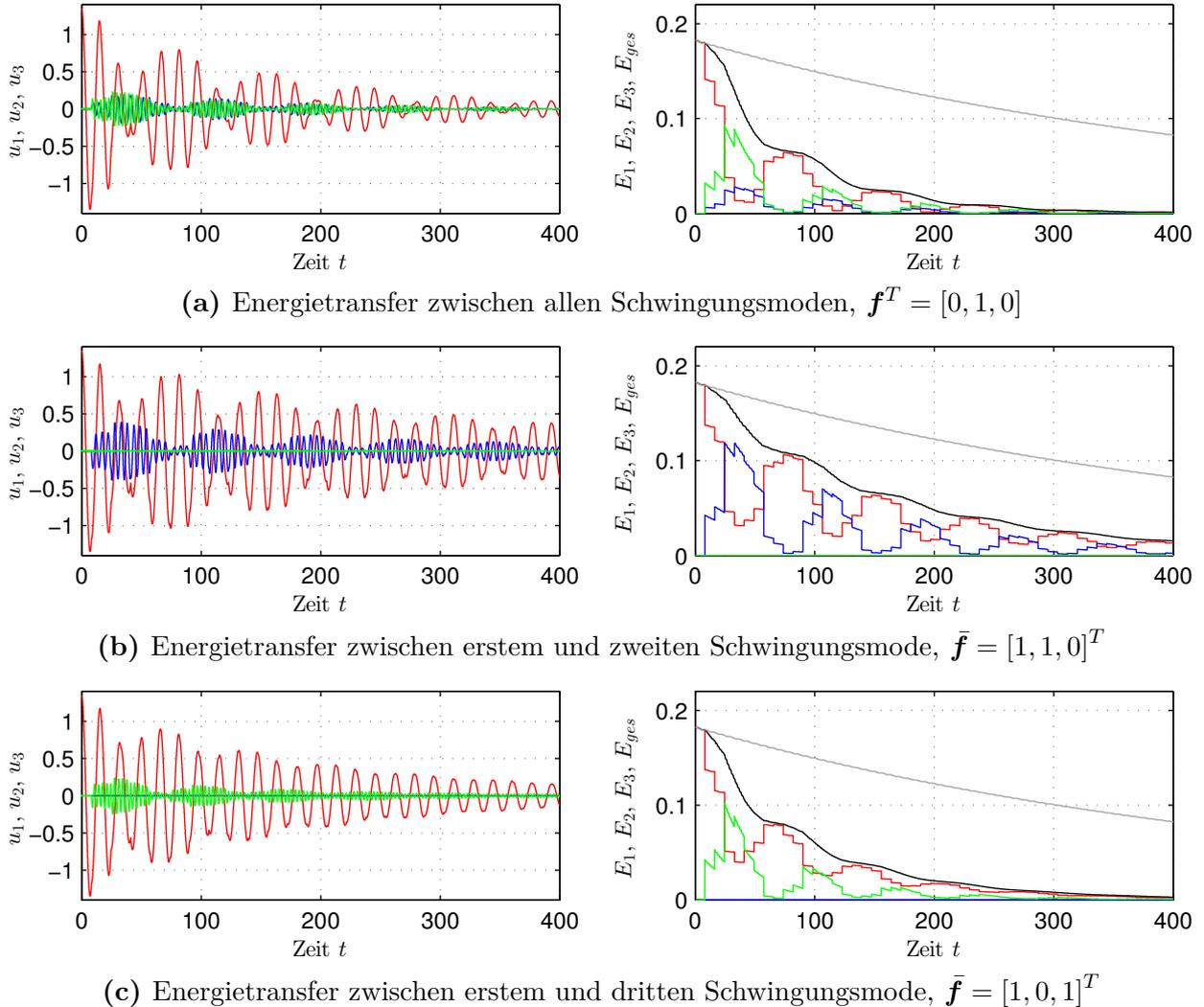


Abbildung 3.21.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen und Energieinhalte des gedämpften 3-FG-Systems; rot: Mode 1, blau: Mode 2, grün: Mode 3; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 8.2$; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

3.6. Stabilisierung von selbsterregten Systemen

In diesem Abschnitt soll die Dirac-Impulskrfterregung hinsichtlich ihrer Eignung zur Unterdrückung von selbsterregten Schwingungen untersucht werden. Zur Berücksichtigung der Selbsterregung im Modell, wird ein viskoses Dämpferelement mit negativer Dämpfungskon-

stante $c_{se} < 0$ zwischen Körper 2 und Inertialsystem eingefügt, vergleiche Abbildung 3.22. Alle anderen Parameter bleiben unverändert auf den in Tabelle 3.1 gelisteten Werten.

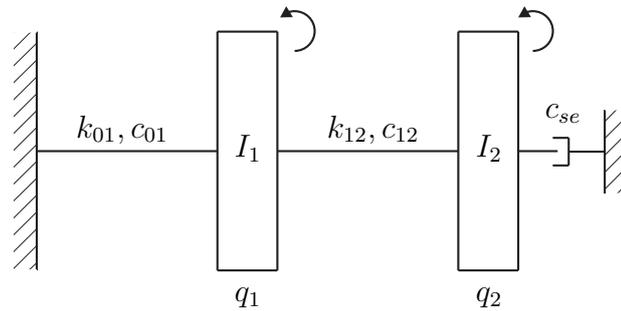


Abbildung 3.22.: 2-FG Drehungssystem mit Selbstregung

Neben dem Studium des Systemverhaltens an einem festen Parametersatz, ist auch der Einfluss der Systemparameter auf die Stabilität des Systems von Interesse. Ausgehend vom Standardparametersatz werden im Folgenden Parameterstudien für Pulspausen im Bereich von $0.001 \leq T_P \leq 30$ und Modellparameter im Intervall $[0.05, 15]$ durchgeführt. Das heißt, es werden nur reguläre und gefesselte Systeme betrachtet. Die Berechnung des betragsmäßig größten Eigenwertes an einem Raster von Wertepaaren ermöglicht das Auffinden von stabilen Bereichen im untersuchten Parameterraum.

Zur Interpretation der nachfolgenden Simulationsergebnisse mit DIE ist es hilfreich, vorweg die Stabilität des autonomen Systems zu untersuchen. In Abbildung 3.23 sind Stabilitätskarten für die später variierten Modellparameter I_1 und I_2 beziehungsweise k_{01} und k_{12} ersichtlich. Als zweiter freier Parameter wurde c_{se} gewählt. Die Realteile der Eigenwerte von \mathbf{A} entscheiden über Stabilität (weiß) oder Instabilität (grau). Der schmale weiße Streifen am linken Rand entsteht als Folge des gewählten Darstellungsintervalls der Modellparameter und stellt keinen stabilen Bereich dar. Der Standardparametersatz ist in den Diagrammen jeweils durch ein "*" gekennzeichnet.

Da die nachfolgenden Untersuchungen beinahe ausschließlich bei $c_{se} = -0.02$ durchgeführt werden, sei besonders hervorgehoben, dass das autonome System für diese Dämpfungskonstante stets instabil ist. Weiters zeigt eine eingehende Untersuchung der Eigenwerte, dass für diese Dämpfungskonstante bei

- Variation von I_1 Mode 1 für $I_1 \leq 3.46$ und für größere I_1 beide Moden instabil sind.
- Variation von I_2 beide Moden für $I_2 \leq 0.285$ und für größere I_2 Mode I instabil ist.
- Variation von k_{01} stets Mode 1 instabil ist.
- Variation von k_{12} stets Mode 1 instabil ist.

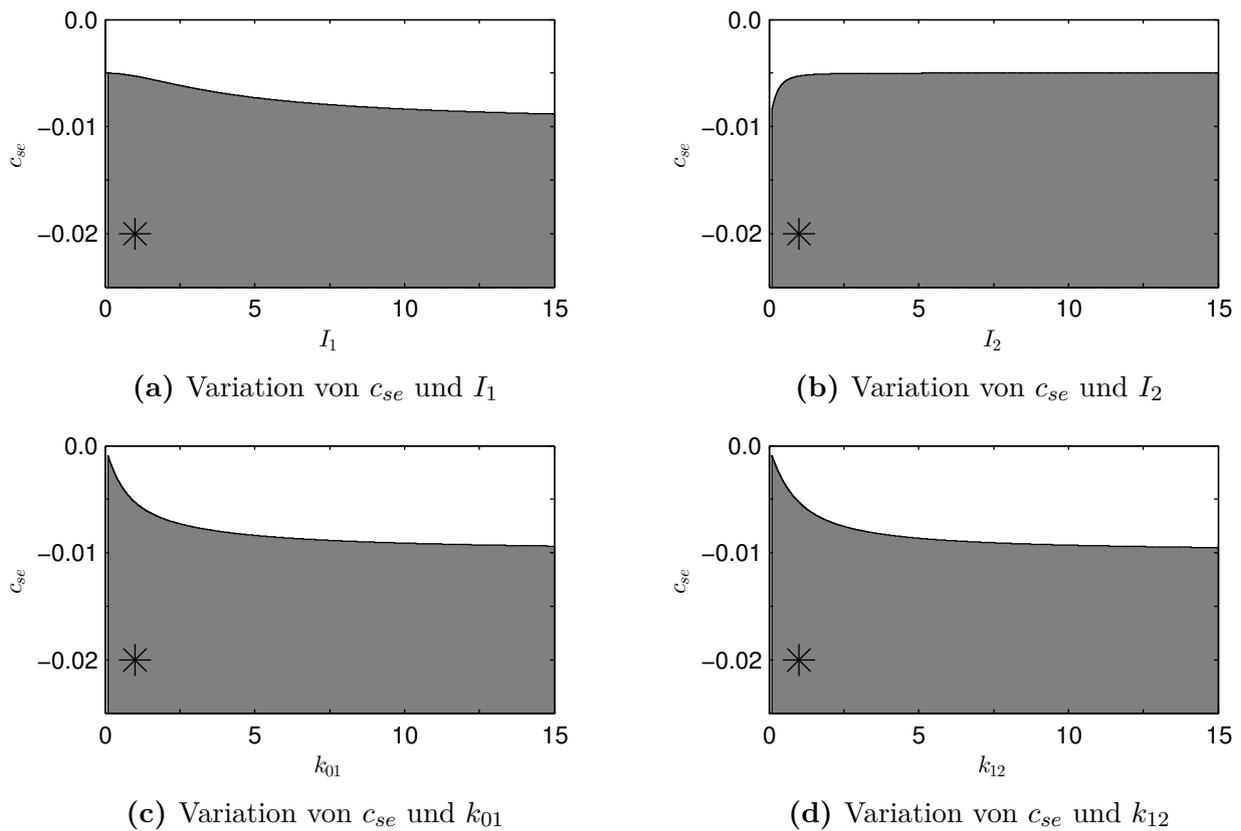


Abbildung 3.23.: Autonomes System: Stabilitätskarten bei Variation von c_{se} und eines zusätzlichen Modellparameters; weiß/grau: stabil/instabil

3.6.1. Schwingungsunterdrückung durch den modalen Energietransfer

Den Einfluss der einzelnen Parameter auf die Stabilität des Systems mit Selbsterregung für eine Folge von Impulsen auf Körper 1 zeigt Abbildung 3.24. Dargestellt ist jeweils der betragsgrößte Eigenwert im Zwei-Parameter-Raum (T_P und ein Modellparameter). Die schwarze Linie repräsentiert die Stabilitätsgrenze bei $\max(|\Lambda|) = 1$. Dem System soll durch die Impulse weder Energie entzogen noch zugeführt werden, daher wurde $\vartheta = 1$ gewählt. Daher kann nur der modale Energietransfer eine Stabilisierung des instabilen autonomen Systems bewirken.

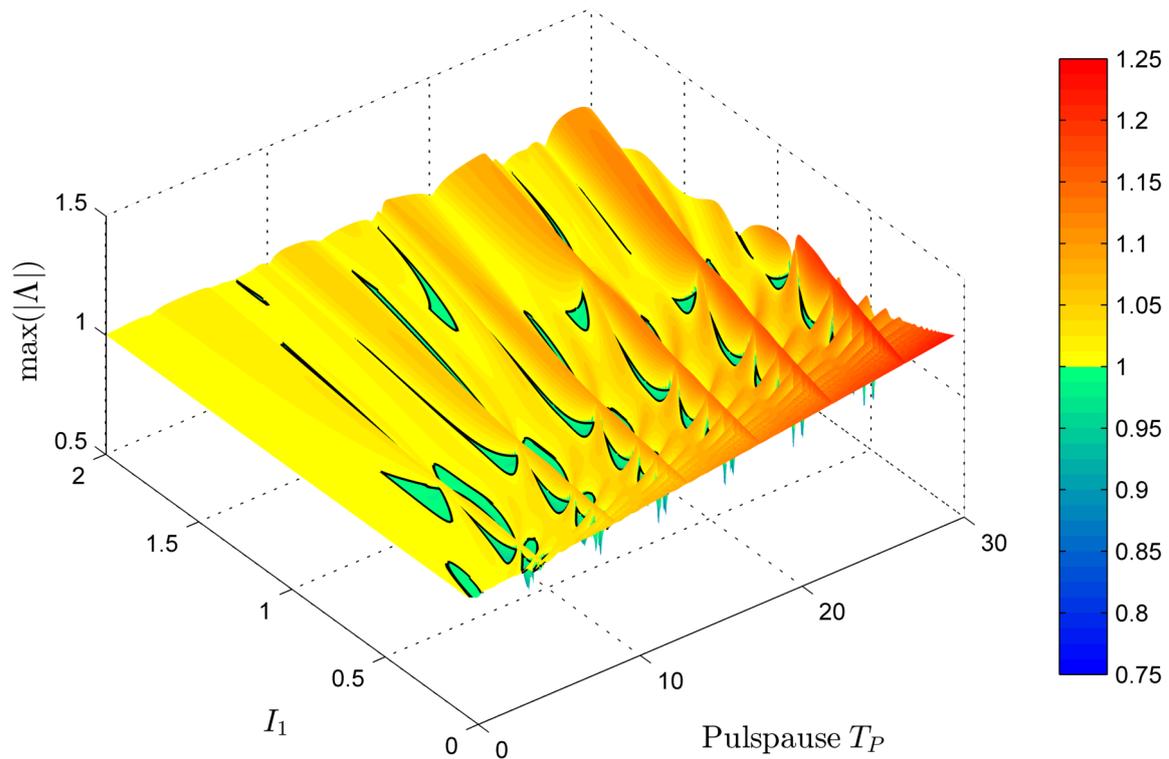
Bei der Variation des Massenträgheitsmoments I_1 in Abbildung 3.24(a) erkennt man mit steigendem T_P regelmäßige, gekrümmte Erhebungen, die immer stärker ausgeprägt sind. Kleine stabile Bereiche sind beidseitig von diesen instabilen Erhebungen angeordnet. Bei genauer Betrachtung sieht man, dass die stabilen Bereiche in I_1 -Richtung wiederum durch instabile Erhebungen getrennt werden. Die einzelnen stabilen Gebiete weisen deutlich ausgeprägte lokale Minima auf. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass das System für $I_1 \in [2, 15]$ stets instabil ist, daher wird nur der Bereich $0.05 \leq I_1 \leq 2$ dargestellt. Die Schwingungsunterdrückung durch den Transfer von Energie zwischen den Moden kann für $I_1 > 3.46$ nicht möglich sein,

da beide Moden des autonomen Systems instabil sind.

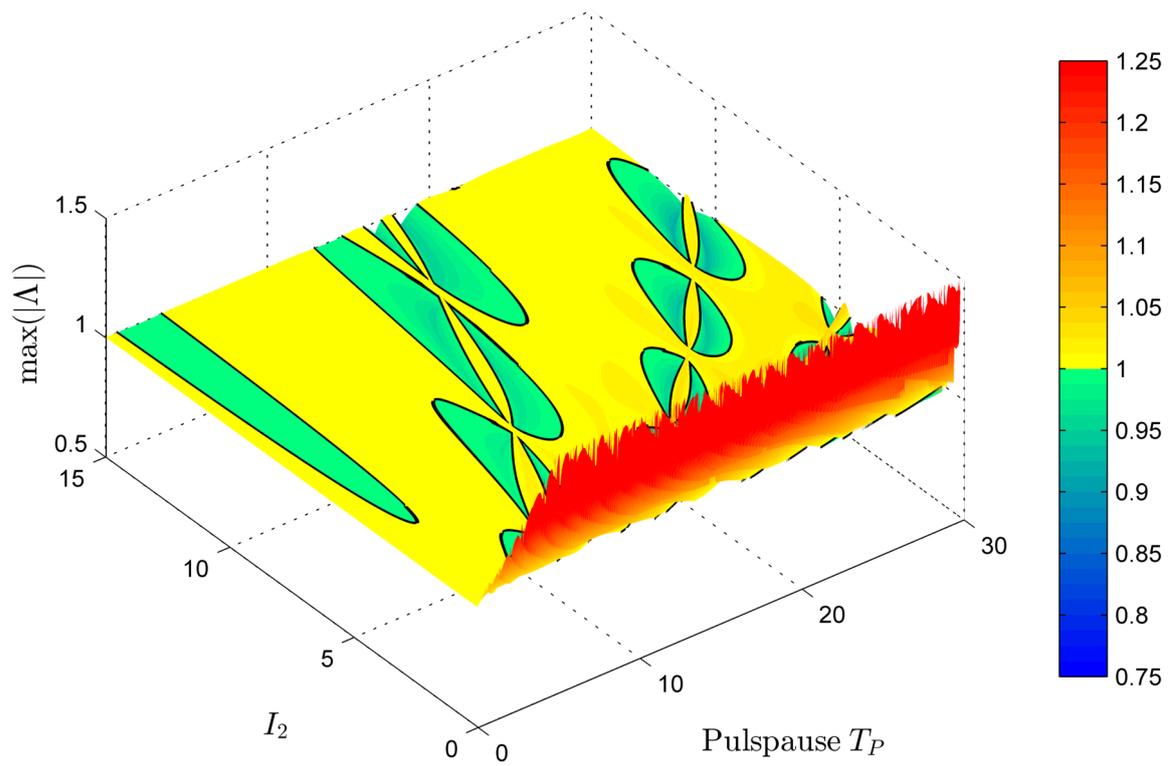
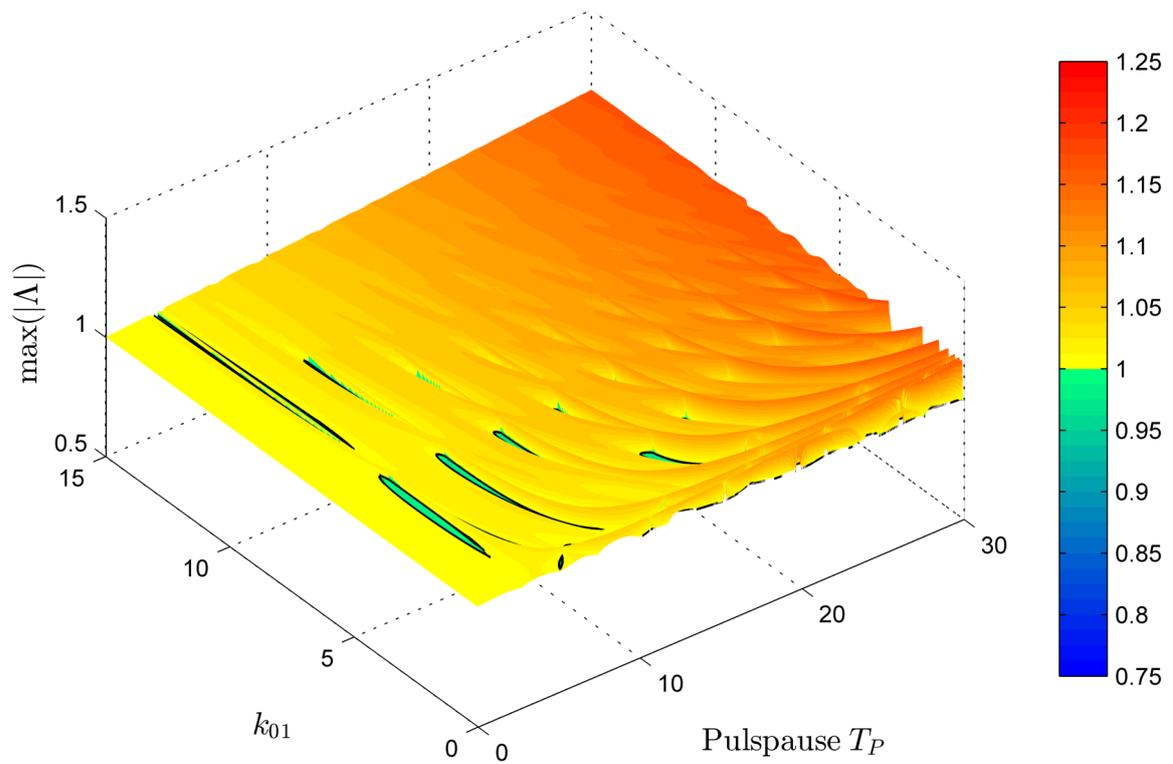
Auch bei der Variation von I_2 ist eine periodische Anordnung der stabilen Bereiche klar ersichtlich. Eine Ausnahme von dieser Regelmäßigkeit bildet das längliche stabile Gebiet links in Abbildung 3.24(b). Ein auffallendes Merkmal stellt der starke Anstieg des betragsgrößten Eigenwertes für kleine I_2 dar. Diese Instabilität liegt darin begründet, dass in diesem Parameterbereich beide Schwingungsmoden des autonomen Systems instabil sind, und der Realteil des zum zweiten Mode gehörigen Eigenwertes große positive Werte annimmt. Das heißt, dass zwischen den Impulsen Schwingungen im zweiten Mode sehr rasch aufklingen.

Variiert man k_{01} , ergibt sich eine mit zunehmendem T_P leicht ansteigende, von instabilen Erhebungen durchzogene Fläche. Zwischen den schmalen instabilen Erhebungen liegen vereinzelt kleine, längliche stabile Gebiete, deren Größe mit steigendem T_P abnimmt, siehe dazu auch die entsprechende Stabilitätskarte in Abbildung 3.25(c).

Ein etwas anderes Verhalten zeigt sich bei der Variation von k_{12} , vergleiche Abbildung 3.24(d). Das System ist im untersuchten Parameterraum größtenteils stabil. Die stabilen Gebiete werden nur durch in T_P regelmäßige schmale, annähernd gerade Erhebungen getrennt. Im Inneren der stabilen Bereiche nimmt der betragsgrößte Eigenwert mit zunehmender Pulspause kleinere Werte an. Für kleine k_{12} kann die DIE das System nicht stabilisieren.



(a) Variation von T_P und I_1

(b) Variation von T_P und I_2 (c) Variation von T_P und k_{01}

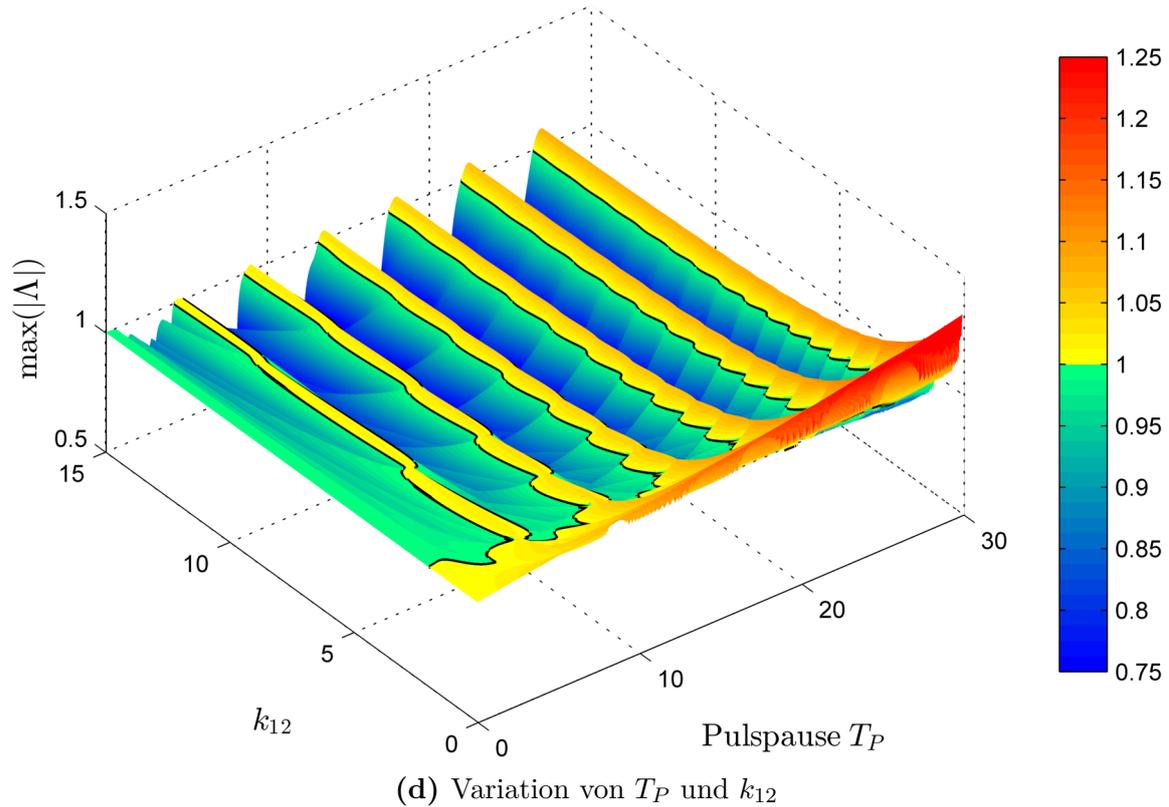
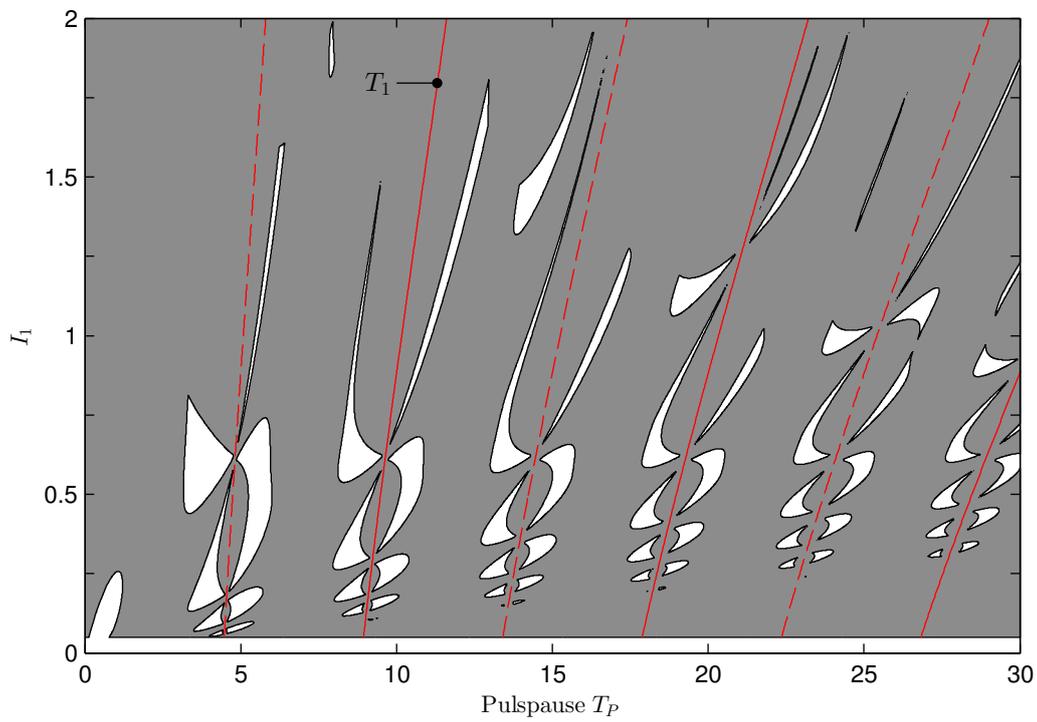
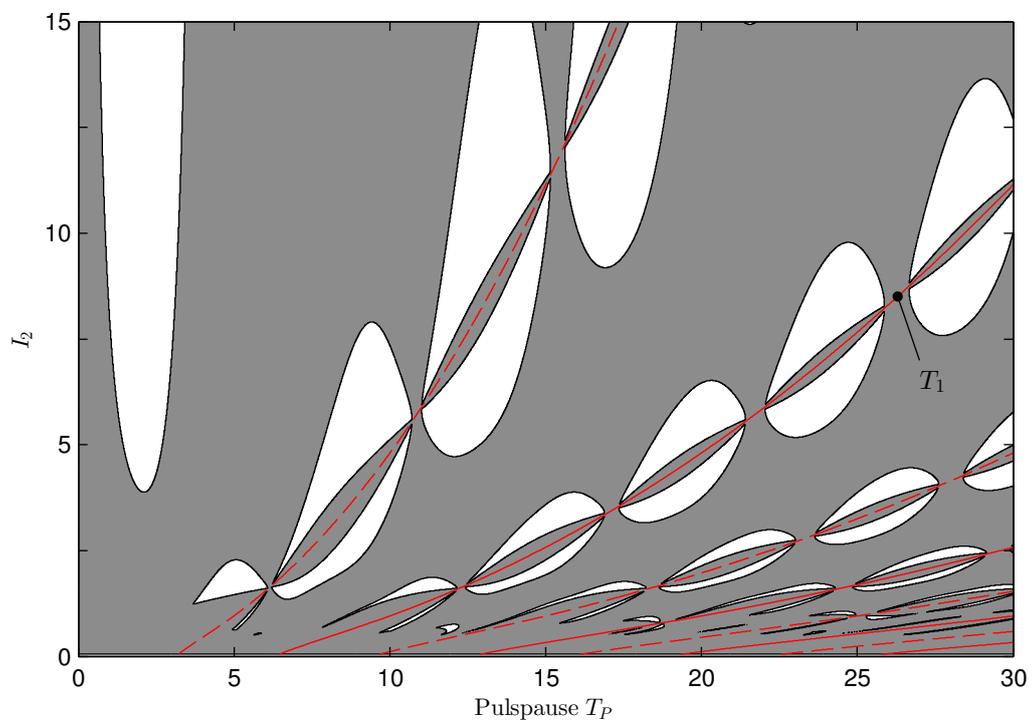


Abbildung 3.24.: Betragsgrößer Eigenwert der Q -Matrix bei Variation von T_P und eines zusätzlichen Modellparameters für $\mathbf{f}^T = (1, 0)$; schwarz: Stabilitätsgrenze; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Ruft man sich in Erinnerung, dass die DIE das gedämpfte System bei passend gewählter Anfangsbedingung und $T_P = nT_1/2$ ($n \in \mathbb{N}$) nicht beeinflussen konnte, so stellt sich die Frage, ob ein Zusammenhang zwischen den instabilen Bereichen und Vielfachen der Periodendauer der ersten Eigenkreisfrequenz T_1 hergestellt werden kann. Abbildung 3.25 zeigt daher nochmals die Stabilitätsuntersuchungen für $\mathbf{f}^T = (1, 0)$, diesmal als 2D-Stabilitätskarte dargestellt. Weiß/grau kennzeichnen darin stabile/instabile Bereiche. Die weißen Streifen an den Rändern ergeben sich wiederum als Folge der gewählten Darstellung. Zusätzlich sind in rot die Vielfachen von T_1 eingezeichnet. Zur Unterscheidung werden für halbzahlige Vielfache strichlierte und für ganzzahlige Vielfache durchgezogene Linien verwendet. Der Vergleich der Abbildungen 3.24 und 3.25 zeigt, dass die in T_P periodischen instabilen Erhebungen jeweils mit einem Vielfachen von T_1 zusammenfallen.

In dieser Darstellungsweise wird die regelmäßige Anordnung der stabilen Gebiete auch für die Parametervariation von k_{01} deutlich, vergleiche Abbildung 3.25(c).

In der Stabilitätskarte für die Variation von k_{12} , Abbildung 3.25(d), ist ersichtlich, dass entlang der Linien $T_P = nT_1/2$ markante Punkte liegen, an denen sich Ausbuchtungen zweier stabiler Gebiete einander gegenüberliegen. An den eben beschriebenen Stellen treten bei kleinen Werten der Drehsteifigkeit k_{12} schmale instabile Zungen auf, die ins Innere der großen stabilen Gebiete reichen, beziehungsweise von diesen kleine (stabile) Bereiche abtrennen.

(a) Variation von T_P und I_1 (b) Variation von T_P und I_2

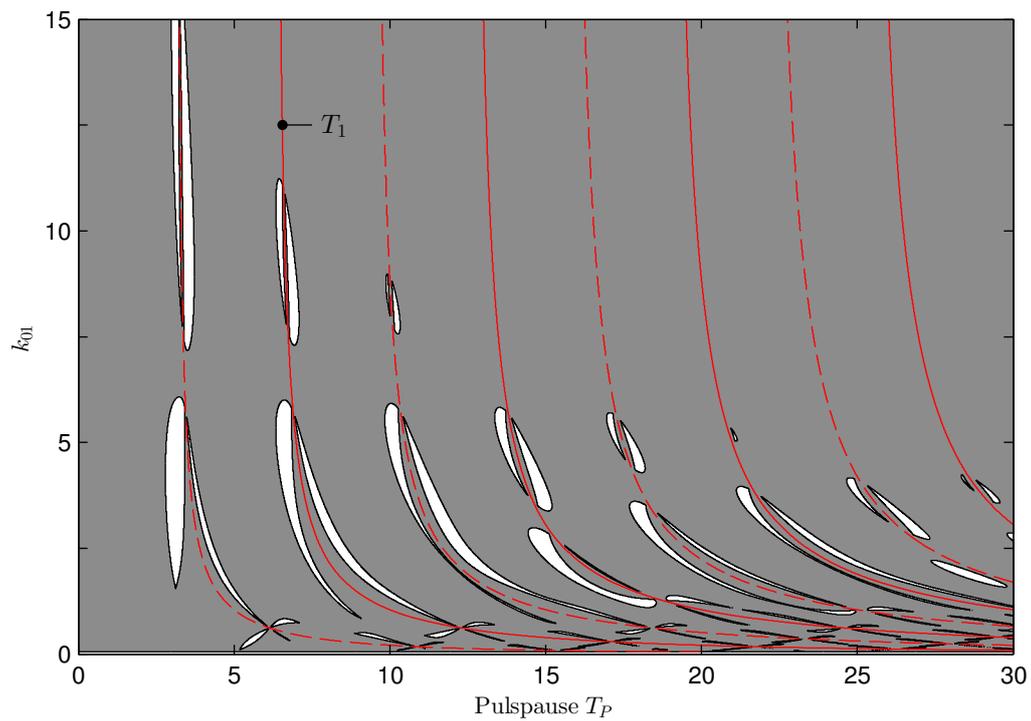
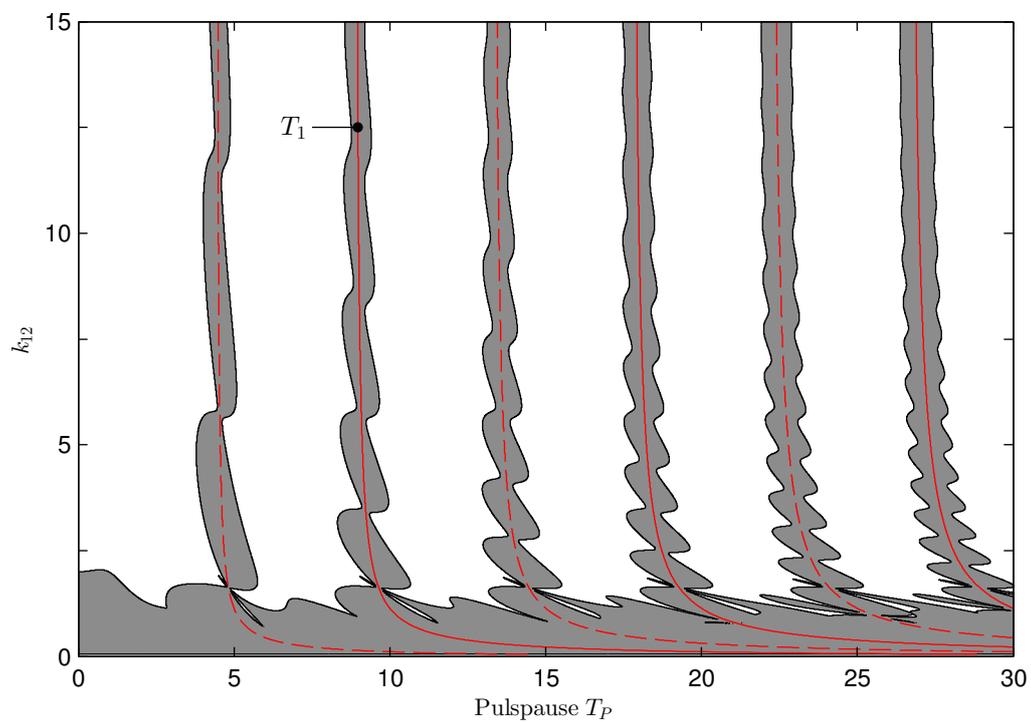
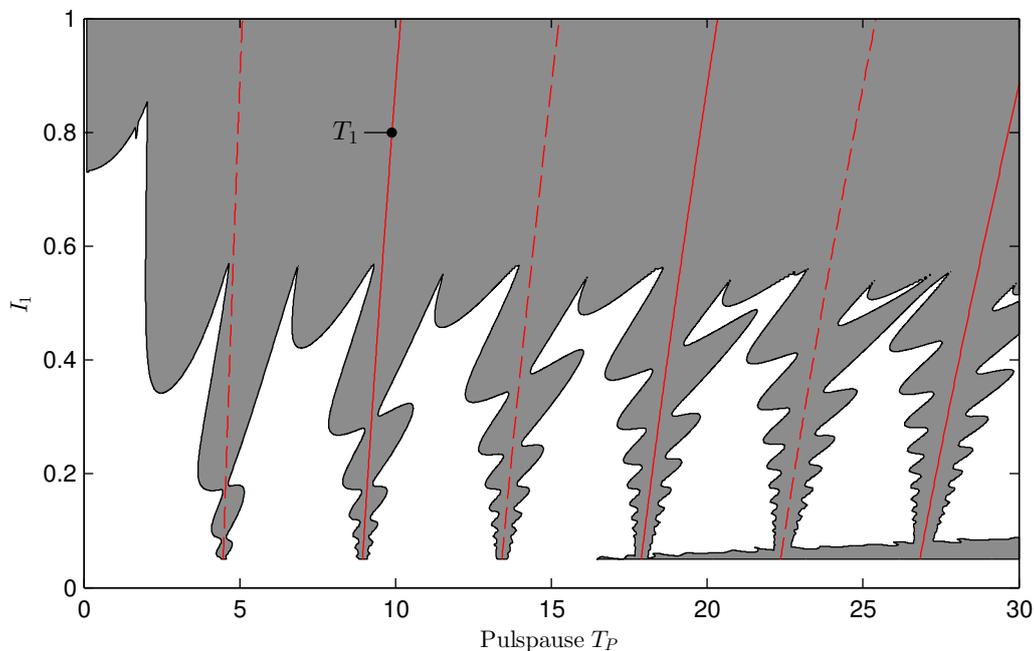
(c) Variation von T_P und k_{01} (d) Variation von T_P und k_{12}

Abbildung 3.25.: Stabilitätskarten bei Variation von T_P und eines zusätzlichen Modellparameters; weiß/grau: stabil/instabil; rot: Vielfache von T_1 ; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Die in Abbildung 3.26 dargestellten Stabilitätsuntersuchungen für Impulse auf beide Körper, $\mathbf{f}^T = (1, 1)$, bestätigen das soeben gefundene Ergebnis. Das System ist wiederum für T_P in der Umgebung von Vielfachen von T_1 stets instabil. Die einzelnen stabilen Bereiche ergeben jetzt im Unterschied zu vorher für alle Parametervariationen großteils zusammenhängende Gebiete, vergleichbar zur Variation von k_{12} und $\mathbf{f}^T = (1, 0)$ Abbildung in 3.25(d). Auch die Wertebereiche der Modellparameter, in denen stabile Gebiete existieren, unterscheiden sich von den Parameterstudien für eine Folge von Dirac-Impulsen auf Körper 1. Aber wie zuvor können keine stabilen Gebiete in Parameterbereichen existieren, in denen beide Schwingungsmoden instabil sind. Auch die markanten Punkte entlang von $T_P = nT_1/2$ sind wiederum klar erkennbar.

Ein erwähnenswertes Ergebnis ist, dass bei der Parameterstudie von k_{12} keine stabilen Gebiete gefunden werden konnten. Das ist insofern bemerkenswert, als die Parameterstudie für eine Impulsfolge auf Körper 1 sehr ausgeprägte stabile Bereiche ergab und die Dämpfung im System, auf Grund des gewählten steifigkeitsproportionalen Dämpfungsmodells, mit größer werdendem k_{12} zunimmt.

Für $\mathbf{f}^T = (0, 1)$ ergibt nur die Variation von k_{12} nennenswerte stabile Bereiche. Die Stabilitätskarten für eine Variation von I_1 , I_2 , k_{01} und k_{12} sind dem Anhang A.1 zu entnehmen.



(a) Variation von T_P und I_1

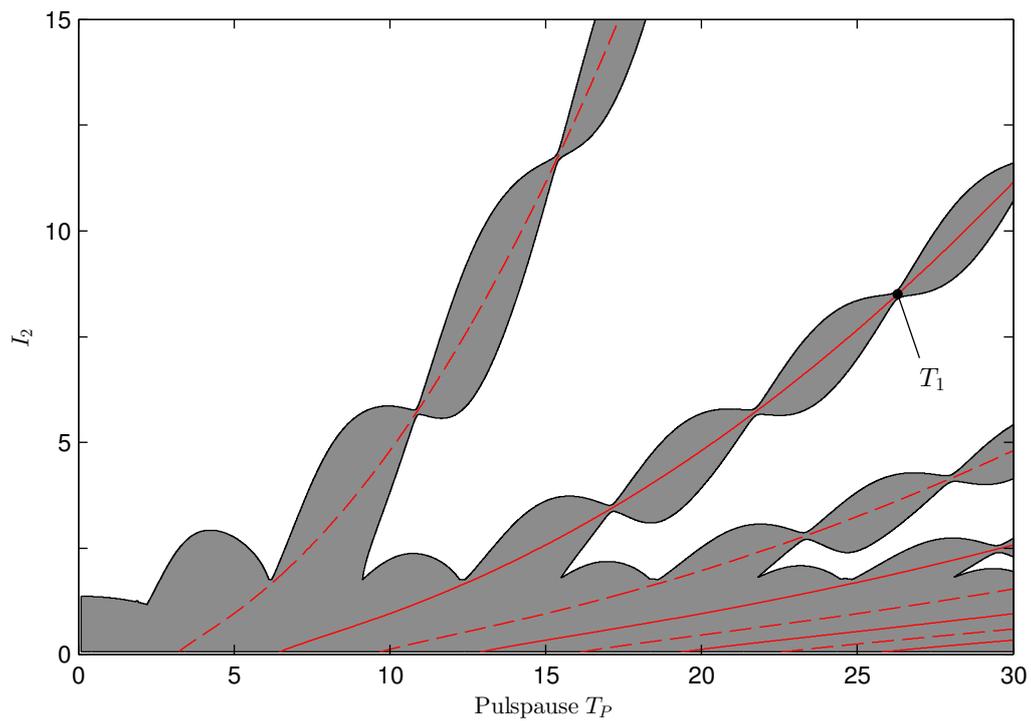
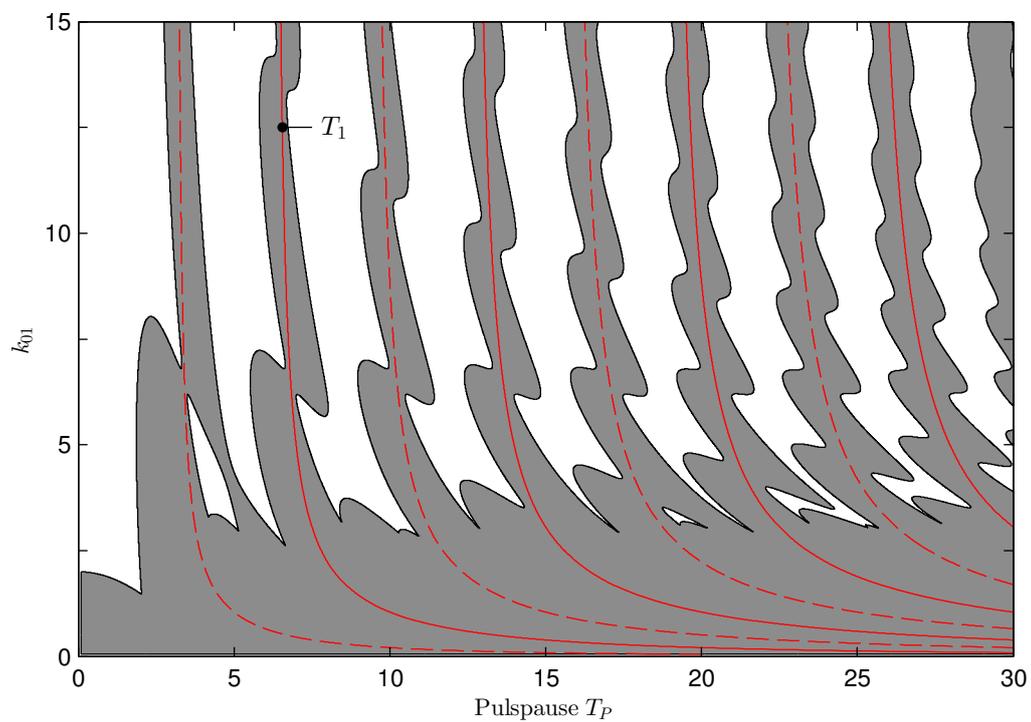
(b) Variation von T_P und I_2 (c) Variation von T_P und k_{01}

Abbildung 3.26.: Stabilitätskarten bei Variation von T_P und eines zusätzlichen Modellparameters; weiß/grau: stabil/instabil; rot: Vielfache von T_1 ; Dirac-Impulse auf beide Körper; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Bevor mit den Stabilitätsuntersuchungen fortgefahren wird, soll anhand eines konkreten Parametersatzes eine Begründung für die Instabilität bei $T_P = nT_1/2$ angegeben werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit erfolgen die weiteren Betrachtungen für $I_2 = 3$. Die übrigen Modellparameter stimmen mit den Standardwerten überein. AB1 und AB2 bedeuten in weiterer Folge Anfangsbedingungen gemäß (3.3), aber mit anderen Zahlenwerten.

In Abbildung 3.27 sind die Absolutbeträge aller Eigenwerte des Systems mit DIE und der betragsgrößte Eigenwert des autonomen Systems für den gewählten Satz von Parametern dargestellt. Wie oben gezeigt werden konnte, sind das System mit DIE und $T_P = nT_1/2$ und das autonome System für Anfangsbedingungen der Form AB1 äquivalent. Folgerichtig muss an diesen Pulspausen $\max(|\Lambda|) = \max(|\rho|)$ gelten.

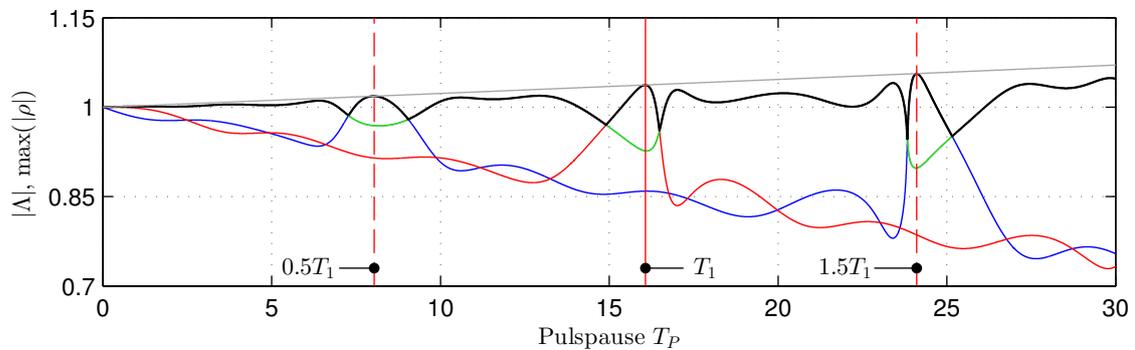


Abbildung 3.27.: Absolutbeträge aller Eigenwerte der \mathbf{Q} -Matrix des Systems mit Selbsterregung und $I_2 = 3$ und betragsgrößter Eigenwert des autonomen Systems (grau); rot/blau: reelle Eigenwerte, grün: konjugiert komplexe Eigenwerte, schwarz: Spektralradius; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Zeitverläufe für $T_P = T_1$ und einer Geschwindigkeitsanfangsbedingung AB2 sind in Abbildung 3.28 dargestellt. Daraus wird deutlich, dass die Instabilität bei den Vielfachen von T_1 in der Instabilität des ersten Modes begründet liegt. Nach anfänglicher Schwingungsreduktion infolge des modalen Energietransfers klingt der erste Schwingungsmodus auf. Die Impulse im zeitlichen Abstand von $T_P = T_1$ können das Systemverhalten ab etwa $t = 1000$ nicht mehr beeinflussen, der Energieinhalt des zweiten Schwingungsmodus bleibt ab diesem Zeitpunkt verschwindend gering. Die Berechnung der Impulsstärke ε_k erfolgt bei aufklingenden Schwingungen im ersten Mode an den Nullstellen der physikalischen Geschwindigkeiten und ergibt stets gleich Null. Der Verlust der Stabilität tritt für alle Anfangsbedingungen und Vektoren \mathbf{f} ein.

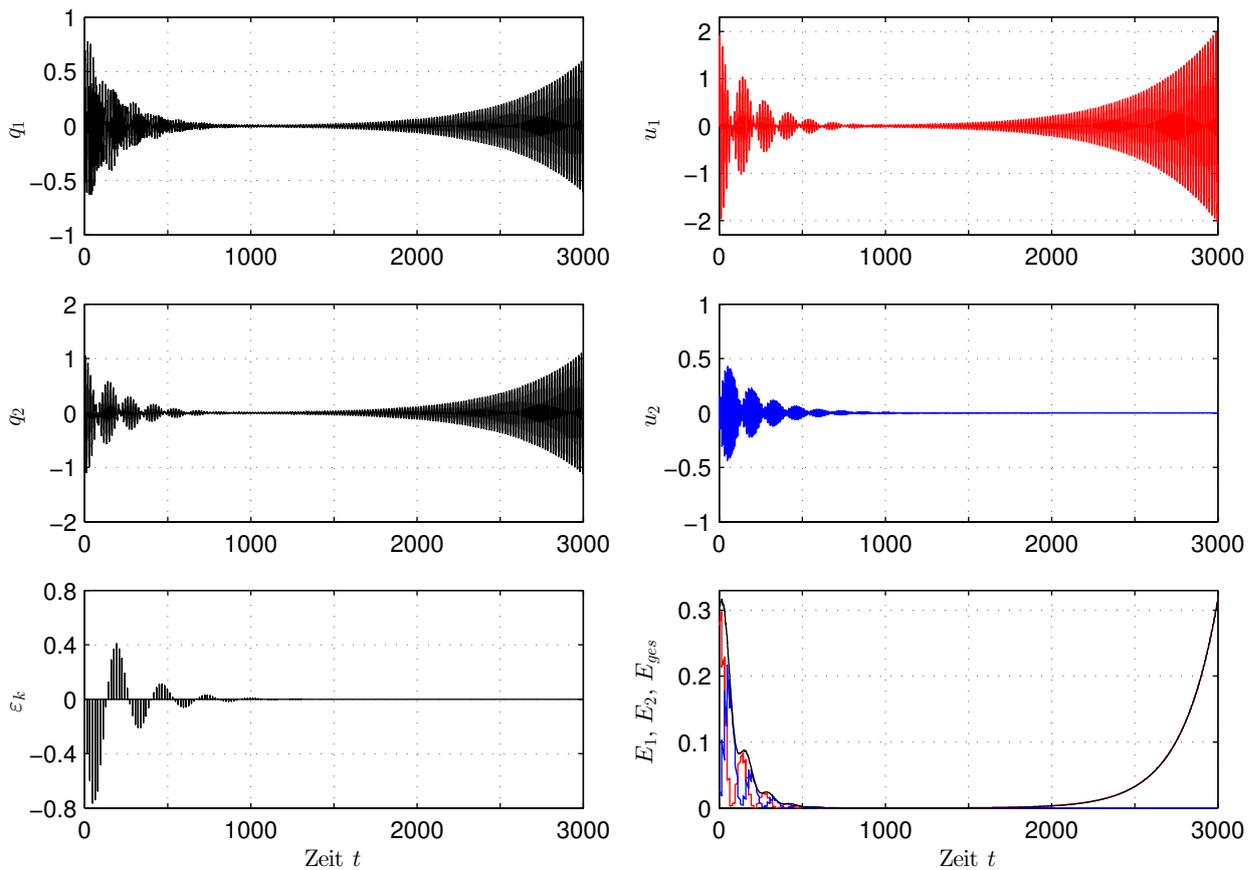
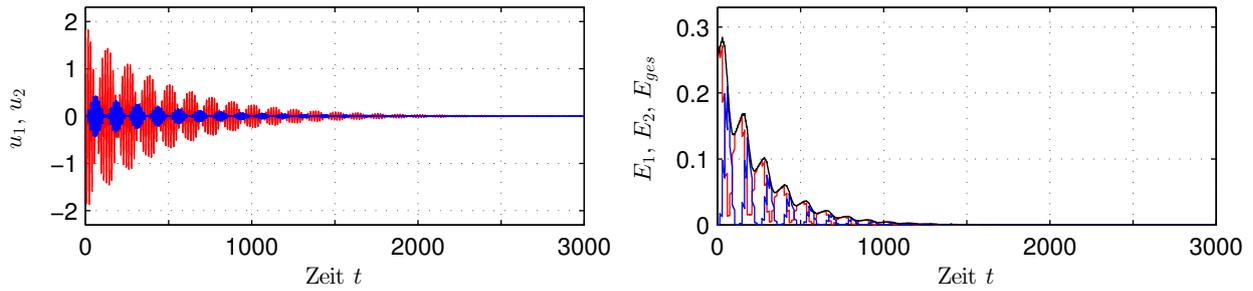


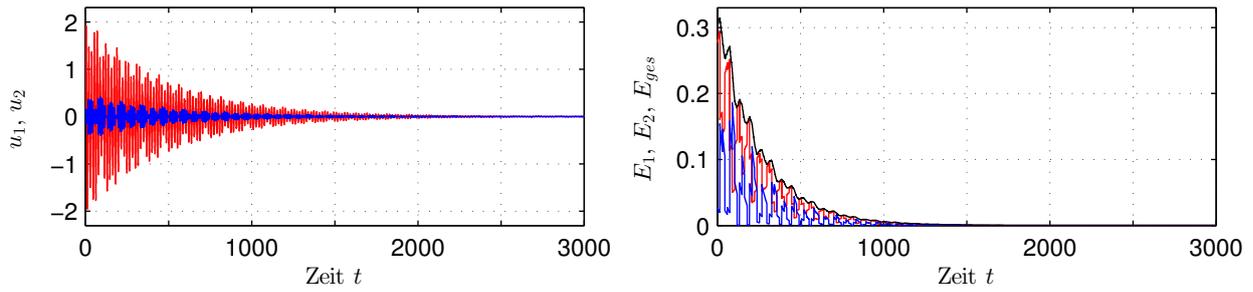
Abbildung 3.28.: Zeitverläufe der physikalischen und modalen Verdrehungen q_i und u_i ($i = 1, 2$), der Impulsstärke ε_k und der modalen Energieinhalte des Systems mit Selbsterregung, $I_2 = 3$ und Anfangsbedingung AB2; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = T_1$ auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Die vollständige Unterdrückung selbsterregter Schwingungen zeigt Abbildung 3.29. Die gewählte Pulspause $T_P = 14.90$ entspricht einem lokalen Minimum von $\max(|\Lambda|)$, vergleiche Abbildung 3.27. Der Transfer von Schwingungsenergie in den stabilen zweiten Mode führt zu einer raschen Schwingungsreduktion, die Schwingungen sind für beide Anfangsbedingungen bei $t = 2000$ beinahe vollständig abgeklungen. Der Zustandsvektor \mathbf{x} konvergiert auf Grund der asymptotischen Stabilität gegen die stabile triviale Lage.

In Abbildung 3.30 sind Simulationsergebnisse an der Stabilitätsgrenze dargestellt. Der betragsgrößte Eigenwert ergibt für $T_P = 15.365$ gleich Eins, die Beträge der übrigen Eigenwerte sind kleiner als Eins, siehe Abbildung 3.27. Das heißt, das System ist für diese Pulspause stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Für beide Anfangsbedingungen treten etwa ab $t = 1500$ periodische Lösungen auf, jedoch bei stark unterschiedlicher Schwingungsamplitude. Da der Energietransfer für AB2 in der Umgebung von $T_P = nT_1/2$ im Allgemeinen auftritt (Abschnitt 3.4.1), kann bis $t = 1500$ bereits ein signifikanter Teil der Gesamtenergie dissipieren.

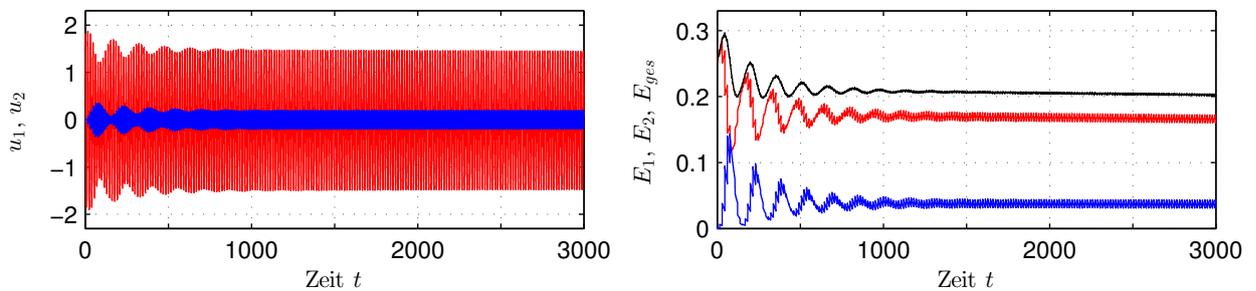


(a) Anfangsbedingung AB1

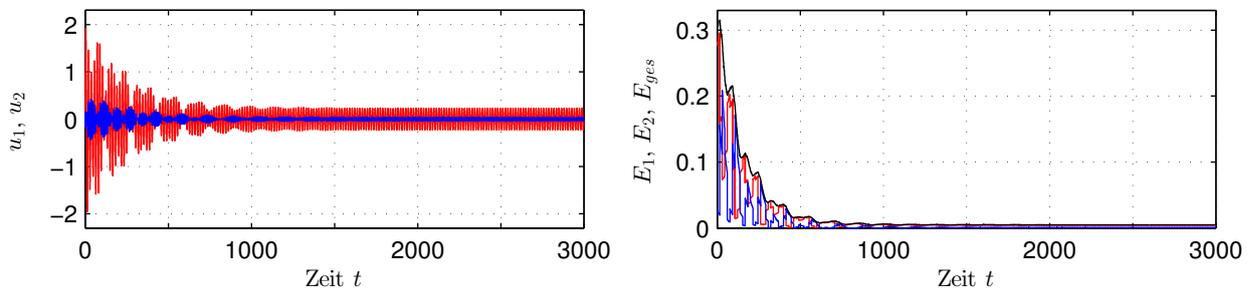


(b) Anfangsbedingung AB2

Abbildung 3.29.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des Systems mit Selbsterregung und $I_2 = 3$; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 14.90$ (lokales Minimum von $\max(|\Lambda|)$) auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$



(a) Anfangsbedingung AB1



(b) Anfangsbedingung AB2

Abbildung 3.30.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des Systems mit Selbsterregung und $I_2 = 3$; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 15.365$ (Stabilitätsgrenze) auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Vergleicht man die Abbildungen 3.29 und 3.30, erkennt man, dass die Gesamtenergie für $T_P = 15.365$ und AB2 vor dem Erreichen der periodischen Lösungen etwa gleich schnell dissipiert wird, wie für die Pulspause im lokalen Minimum. Vorausgesetzt die Anfangsbedingung entspricht nicht AB1, ist im gesamten Intervall $T_P \in [14.90, 15.365[$ eine rasche Schwingungsreduktion zu erwarten.

Wählt man die Stabilitätsgrenze bei $T_P = 14.107$ (Abbildung 3.27), ist dieser Effekt nicht beobachtbar. Es treten für beide Anfangsbedingungen periodische Lösungen mit etwa gleich großen Amplituden auf, siehe Abbildung 3.31.

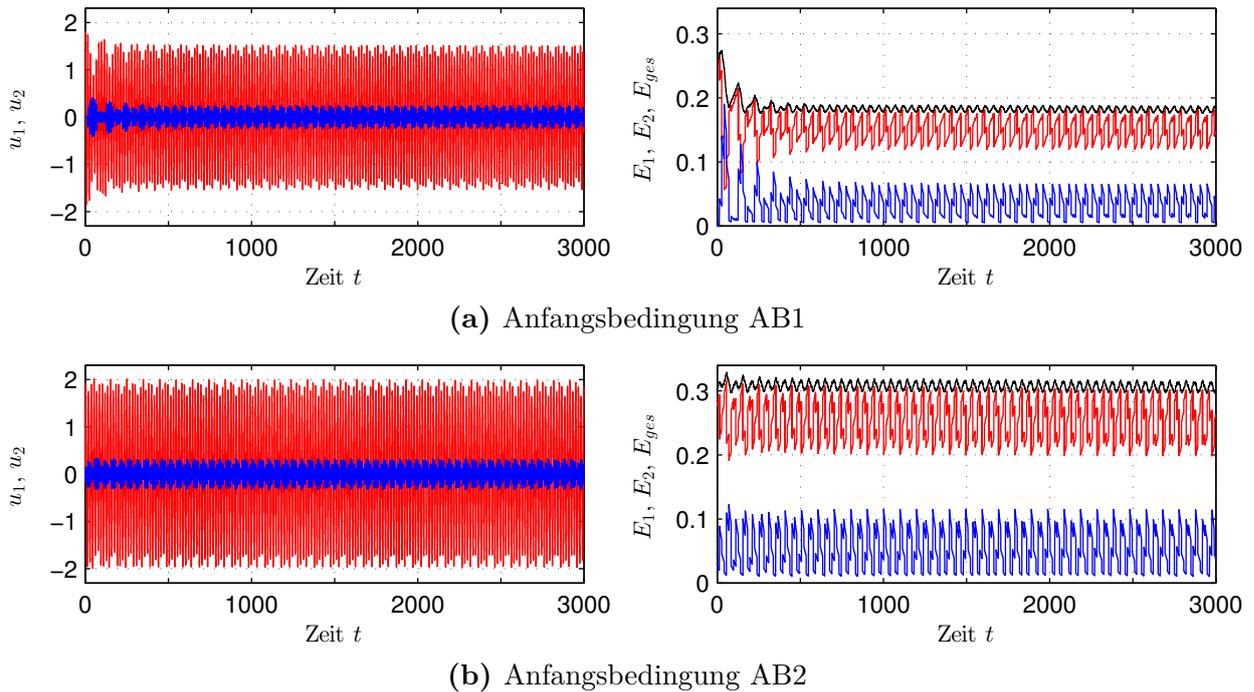


Abbildung 3.31.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und Energieinhalte (rechts) des Systems mit Selbsterregung und $I_2 = 3$; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 14.107$ (Stabilitätsgrenze) auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Resonanzen im selbsterregten System mit DIE ohne Energieentnahme

Anhand von vier Parameterstudien soll gezeigt werden, dass in den Stabilitätskarten markante Punkte beziehungsweise instabile Bereiche durch Pulspausen identifiziert werden können, die ein Vielfaches der Periodendauer einer der beiden Eigenfrequenzen oder einer Kombinationsfrequenz entsprechen. Die Abbildungen 3.32 - 3.35 zeigen 2D-Plots des Spektralradius und Stabilitätskarten für eine Folge von Dirac-Impulse auf Körper 1. In den Stabilitätskarten sind alle Vielfachen von T_1 , und ausgewählte (aufeinanderfolgende) Vielfache von T_2 sowie (aufeinanderfolgende) ganzzahlige Vielfache von $T_{12,\pm}$ eingezeichnet.

Abbildung 3.32 zeigt die Variation des Massenträgheitsmoments I_1 für $c_{se} = -0.02$. Mit Hilfe der eingezeichneten Linien wird deutlich, dass ausgezeichnete Punkte vorliegen, falls

$$nT_1 = mT_2 = oT_{12,+} = pT_{12,-} \quad n, m, o, p \in \mathbb{N} \quad (3.13)$$

oder

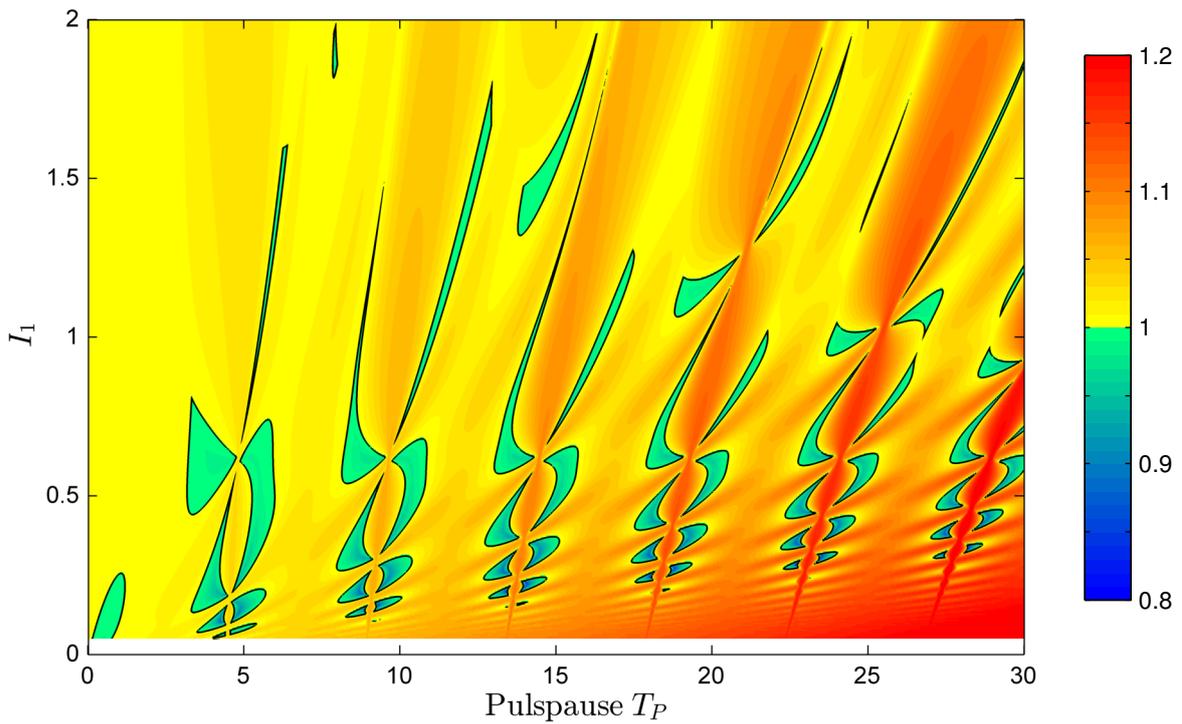
$$\frac{2n-1}{2}T_1 = \frac{2m-1}{2}T_2 = oT_{12,+} = pT_{12,-} \quad n, m, o, p \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

gilt. Ist eine dieser beiden Bedingungen erfüllt, können bei Vielfachen von T_2 in der Umgebung der Punkte (3.13) und (3.14) lokale Maxima des betragsgrößten Eigenwertes liegen. Dass diese lokalen Extrema auf die Umgebung der eben beschriebenen Punkte beschränkt bleiben, ist anhand der Farbskala in Abbildung 3.32(a) erkennbar (vergleiche auch die schmalen instabilen Erhebungen in Abbildung 3.24(a), die die instabilen Erhebungen bei $T_P = nT_1/2$ schneiden).

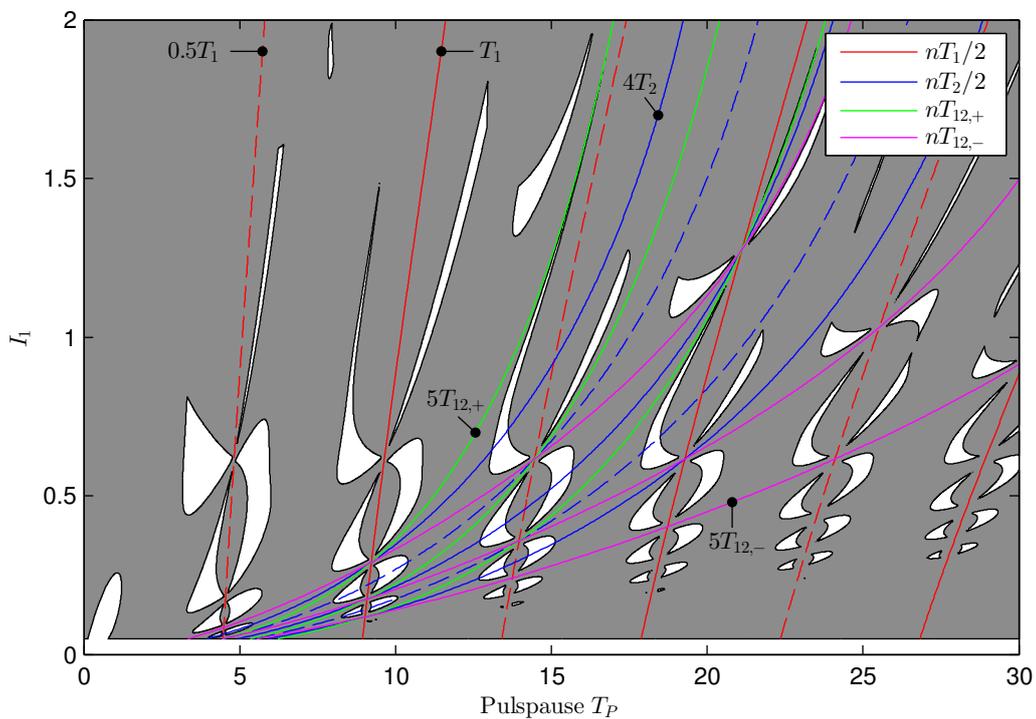
Die Variation der Drehsteifigkeit k_{12} ergab überwiegend große, zusammenhängende stabile Gebiete. Ein auffallendes Merkmal waren die Punkte entlang der Vielfachen von T_1 , an denen sich Ausbauchungen zweier stabiler Gebiete einander gegenüberliegen. Betrachtet man Abbildung 3.33(a), so erkennt man im Bereich der Ausbauchungen lokale Maxima, die sich ins innere der stabilen Gebiete fortsetzen. Analog zu oben können diese markanten Punkte durch die Gleichungen (3.13) und (3.14) identifiziert werden. Die Abtrennung der kleinen stabilen Gebiete bei $k_{12} < 2$ erfolgt entlang von $T_P = nT_2/2$, siehe Abbildung 3.33(b).

Die beiden letzten Parameterstudien, die Variation von I_1 für $c_{se} = -0.01$ (Abbildung 3.34) beziehungsweise k_{12} für $c_{se} = -0.03$ (Abbildung 3.35), verdeutlichen, dass die lokalen Extremstellen bei Vielfachen von T_2 liegen. Obwohl das autonome System bei $c_{se} = -0.01$ für alle $I_1 \in [0.05, 2]$ instabil ist, bewirkt die DIE, dass selbsterregte Schwingungen im Großteil des betrachteten Parameterraums unterdrückt werden können. Instabile Bereiche können in der Umgebung der Pulspausen $T_P = nT_1/2$ und $T_P = nT_2/2$ identifiziert werden, siehe Abbildung 3.34. Die Parametervariation von k_{12} bei $c_{se} = -0.03$ ist in Abbildung 3.35 dargestellt. Als Folge der stärkeren negativen Dämpfung, bildet sich jetzt im Bereich der Ausbauchungen eine größere Zahl von instabilen Zungen. Die bereits vorhandenen instabilen Bereiche werden größer.

Obwohl diese lokalen Extrema für diese Parameterstudien im dargestellten Parameterbereich existieren, soll mit Nachdruck darauf hingewiesen werden, dass ein Auftreten für andere Parameterstudien nicht gesichert ist. Bei der Wahl der Pulspause sollte nicht außer Acht gelassen werden, dass die soeben beschriebenen instabilen Gebiete mitunter erst bei stärkerer negativer Dämpfung auftreten.

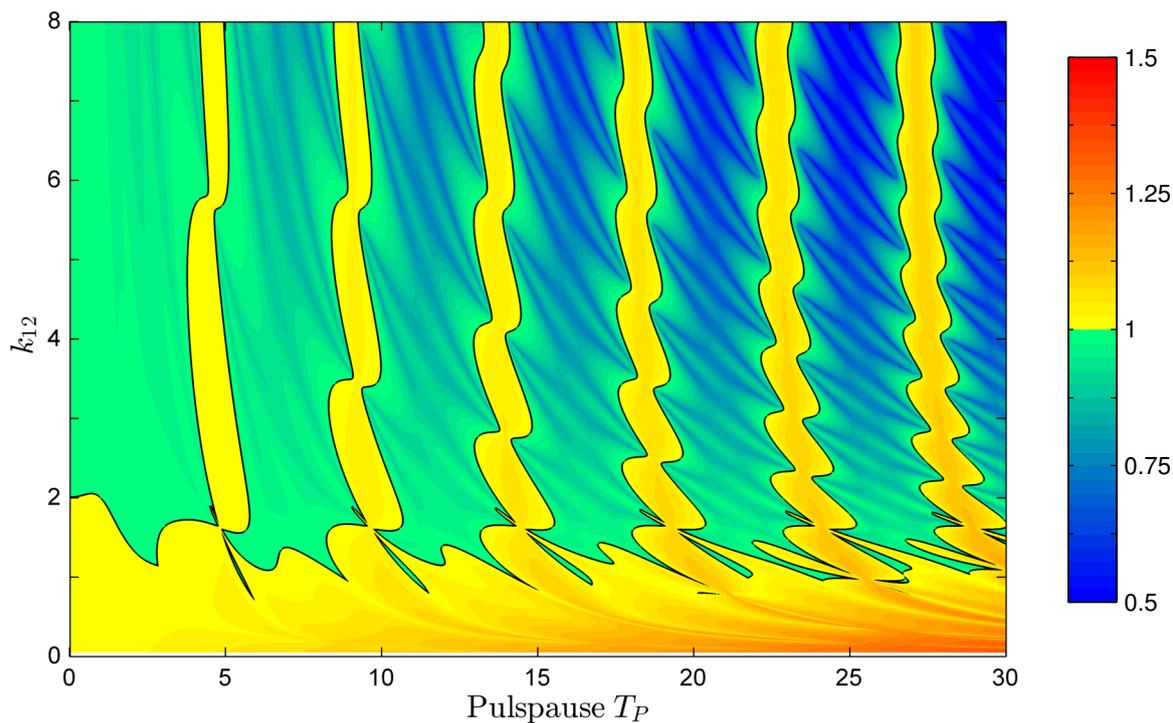


(a) Spektralradius für Variation von T_P und I_1 ; $c_{se} = -0.02$

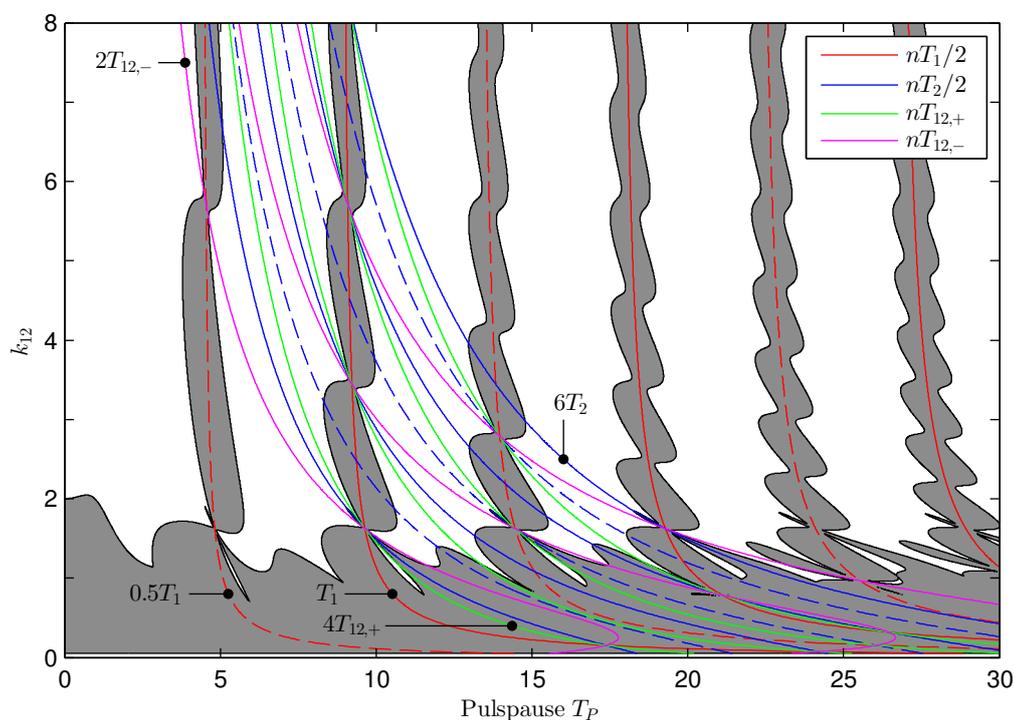


(b) Stabilitätskarte für Variation von T_P und I_1 ; $c_{se} = -0.02$

Abbildung 3.32.: Betragsgroßter Eigenwert der Q -Matrix (oben) und Stabilitätskarte (unten) bei Variation von T_P und I_1 ; weiß/grau: stabil/instabil; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$



(a) Spektralradius bei Variation von T_P und k_{12} ; $c_{se} = -0.02$



(b) Stabilitätskarte bei Variation von T_P und k_{12} ; $c_{se} = -0.02$

Abbildung 3.33.: Betragsgroßter Eigenwert der Q -Matrix (oben) und Stabilitätskarte (unten) bei Variation von T_P und k_{12} ; weiß/grau: stabil/instabil; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

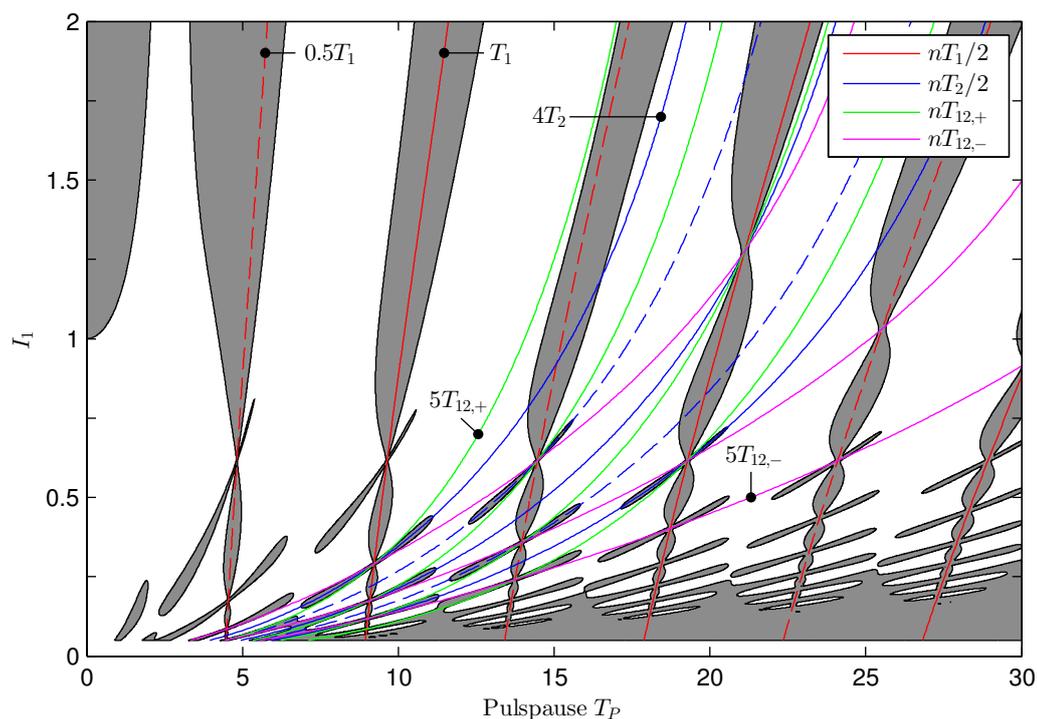


Abbildung 3.34.: Stabilitätskarte bei Variation von T_P und I_1 für $c_{se} = -0.01$; weiß/grau: stabil/instabil; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

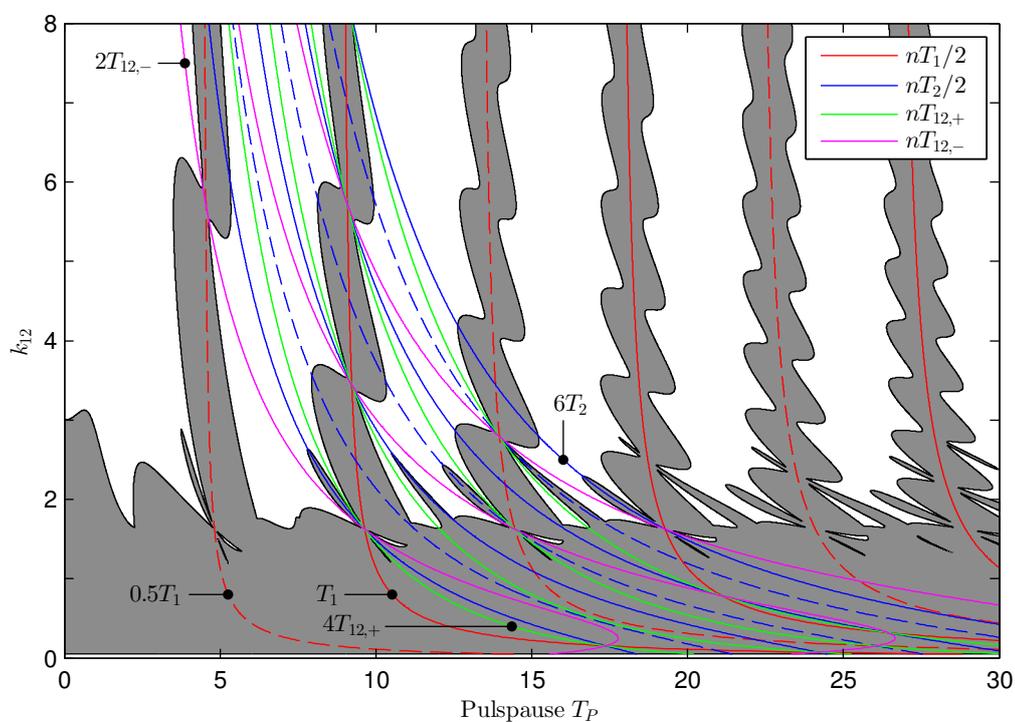


Abbildung 3.35.: Stabilitätskarte bei Variation von T_P und k_{12} für $c_{se} = -0.03$; weiß/grau: stabil/instabil; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

3.6.2. Schwingungsunterdrückung bei Energiezu- und -abfuhr

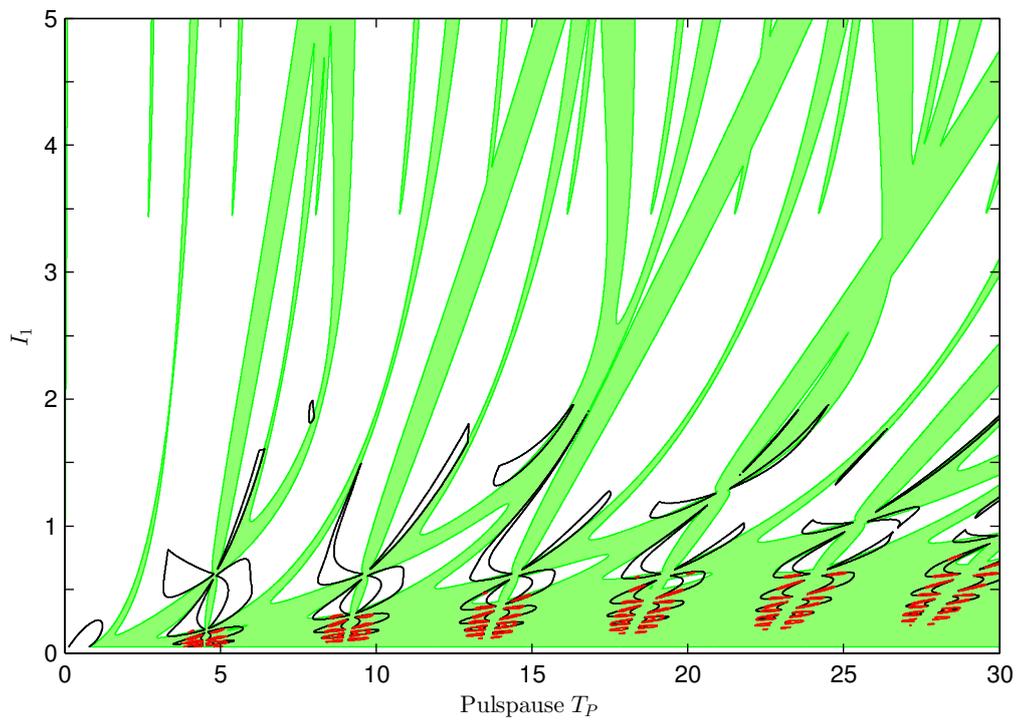
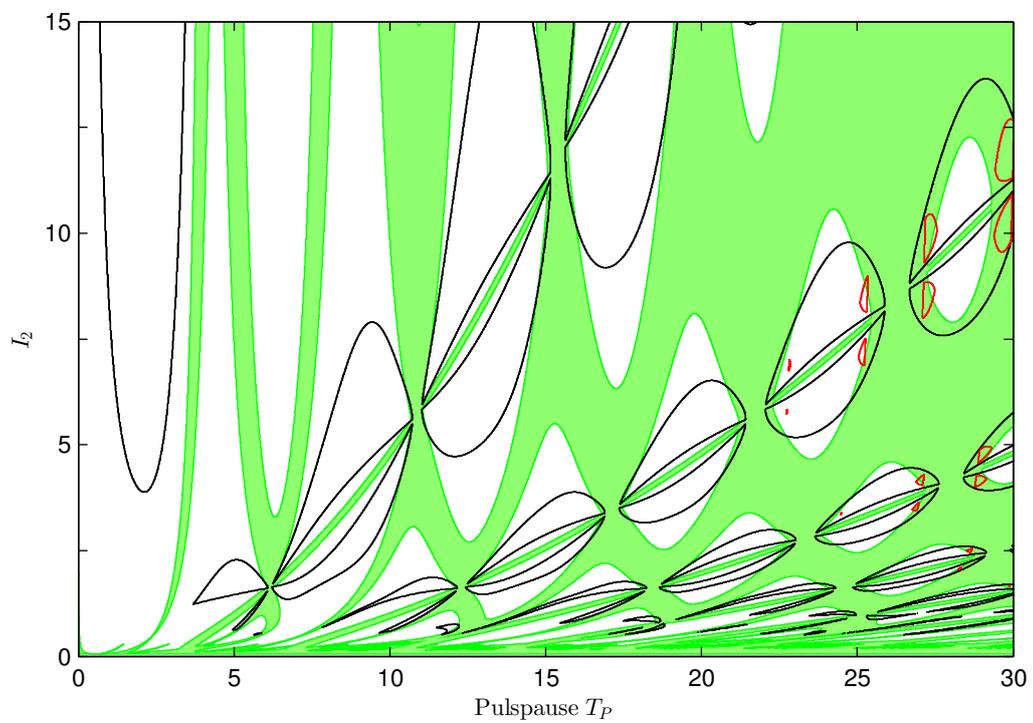
Im Folgenden wird das selbsterregte 2-FG-System mit Dirac-Impulskrafterregung und Energiezu- beziehungsweise -abfuhr durch die Dirac-Impulse studiert.

In den Abschnitten 2.4 und 3.4.2 wurde analytisch beziehungsweise anhand numerischer Simulationen gezeigt, dass die DIE mit maximaler Energieentnahme über einen Impuls hinweg, das heißt $\vartheta = 0.5$, eine rasche Reduktion der Schwingungsenergie ermöglicht. Zur Beurteilung der Auswirkung der Energieabfuhr auf die Stabilität des Systems, sind in den Stabilitätskarten für $\vartheta = 0.5$ und $\mathbf{f}^T = (1, 0)$ in Abbildung 3.36 (weiß/grün bedeutet darin Stabilität/Instabilität), schwarz die Stabilitätsgrenzen des Systems mit DIE und $\vartheta = 1$ überlagert. Die roten Linien (Stabilitätsgrenzen für $\vartheta = 1.25$) veranschaulichen, dass eine Stabilisierung von selbsterregten Schwingungen auch bei zusätzlicher Energiezufuhr durch die Dirac-Impulse möglich ist.

Betrachtet man die einzelnen Parameterstudien, so erkennt man, dass die Energiezu- beziehungsweise -abfuhr nicht eine bloße Vergrößerung respektive Verkleinerung der stabilen Bereiche bewirkt. Es existieren Parameterbereiche, in denen erst die Energiezufuhr eine Stabilisierung des instabilen autonomen Systems ermöglicht. Auch bedingt die Stabilität für $\vartheta = 1$ nicht zwingend die Stabilität für $\vartheta = 0.5$. Der sehr positive Effekt der Energieentnahme hinsichtlich der Stabilität des Systems bei kleinen Werten der Pulspause liegt darin begründet, dass auf Grund der sehr kurzen autonomen Zeitabschnitte die Energiezufuhr infolge des negativen Dämpferelementes gering bleibt und dem System in kurzen Zeitabständen Energie entnommen wird. Umgekehrt gilt bei Energiezufuhr durch die Impulse, dass stabile Bereiche bevorzugt bei größeren Zeitabständen zwischen den Impulsen existieren.

Wie oben schon erwähnt, sind für $I_1 \geq 3.46$ beide Schwingungsmoden des autonomen Systems instabil. Die Unterdrückung von selbsterregten Schwingungen ist daher nur für $\vartheta < 1$ möglich. Auffallend sind die vielen schmalen instabilen Bereiche, die scheinbar alle exakt bei diesem Grenzwert ($I_1 = 3.46$) enden und im gesamten Bereich in dem beide Moden instabil sind existieren, siehe Abbildung 3.36(a). Gleiches gilt für $I_2 < 0.29$ in Abbildung 3.36(b).

Ein interessantes Stabilitätsverhalten ist vor allem in Abbildung 3.36(a) für kleine I_1 und in Abbildung 3.36(c) für $k_{01} > 1.5$ erkennbar. Es scheint, als ob in der Umgebung eines Punktes im Parameterraum, die Koexistenz von stabilen Gebieten für $\vartheta = 0.5$ und $\vartheta = 1.25$ nur dann möglich ist, wenn in der Umgebung auch ein stabiler Bereich für $\vartheta = 1$ existiert. Das heißt, es kann im untersuchten Parameterraum kein Punkt gefunden werden, an dem (nicht zwingend deckungsgleich, aber in unmittelbarer Nähe) ein stabiler Bereich für $\vartheta = 0.5$ und $\vartheta = 1.25$, aber kein stabiles Gebiet für $\vartheta = 1$ vorliegt. Vergleiche dazu auch die Variation von $\vartheta \in [0, 2]$ für den Standardparametersatz und $I_1 = 0.2$, Abbildung 3.37. Im Bereich einer festen Pulspause liegt stets nur ein zusammenhängendes stabiles Gebiet.

(a) Variation von T_P , I_1 und ϑ (b) Variation von T_P , I_2 und ϑ

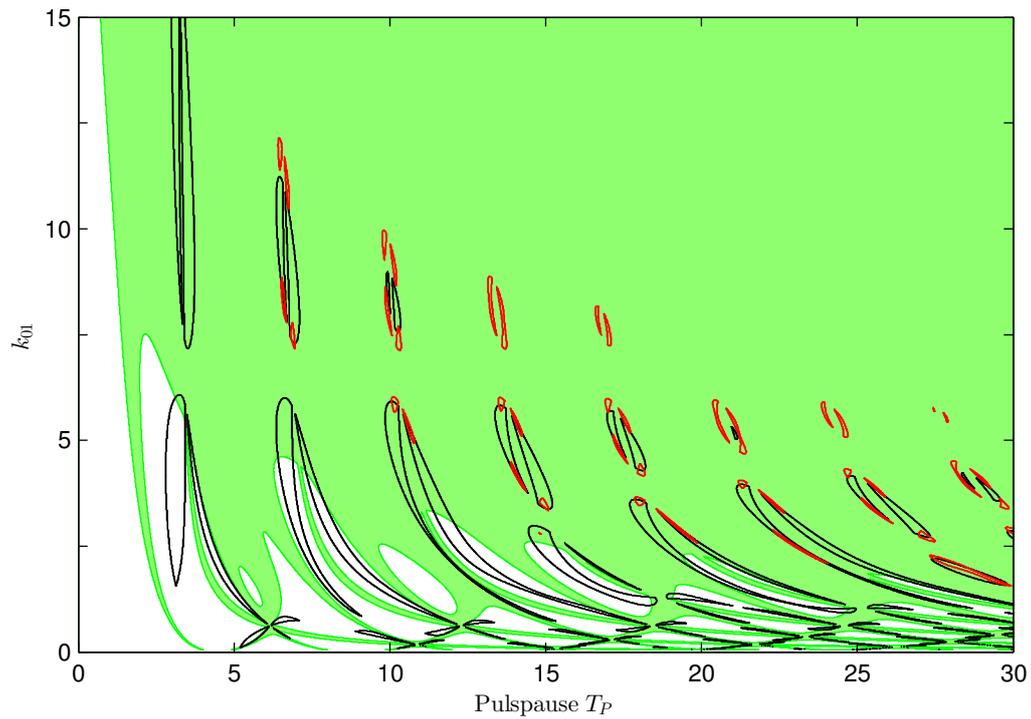
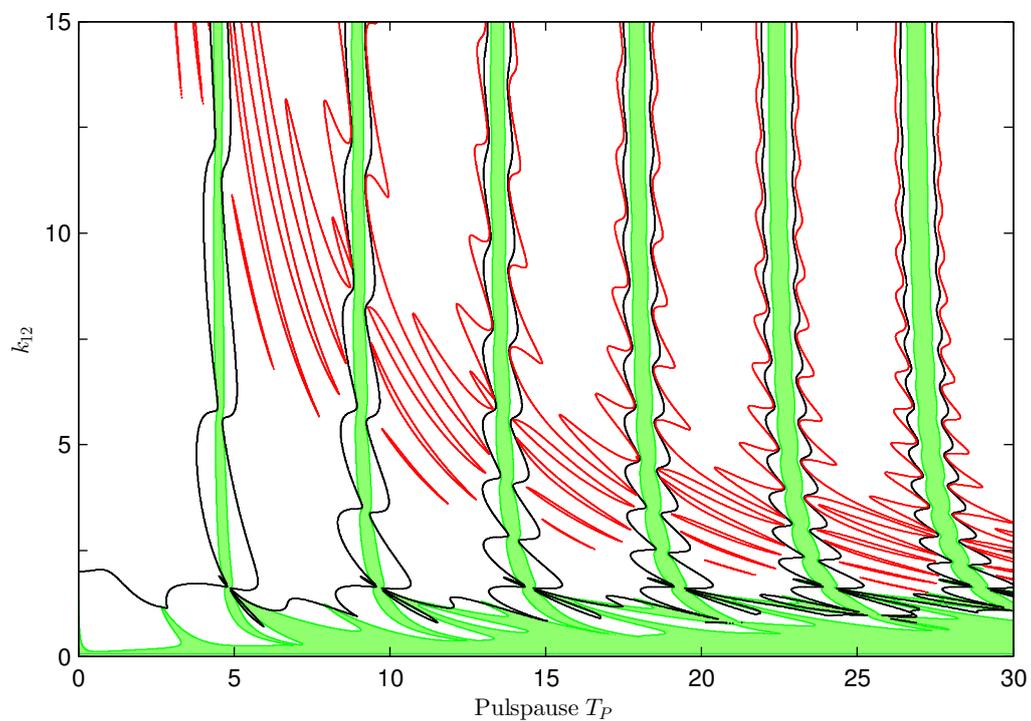
(c) Variation von T_P , k_{01} und ϑ (d) Variation von T_P , k_{12} und ϑ

Abbildung 3.36.: Stabilitätskarte bei Variation von T_P , eines Modellparameters und ϑ ; weiß/grün: stabil/instabil für $\vartheta = 0.5$, schwarz/rot: Stabilitätsgrenze für $\vartheta = 1/\vartheta = 1.25$; Dirac-Impulse auf Körper 1

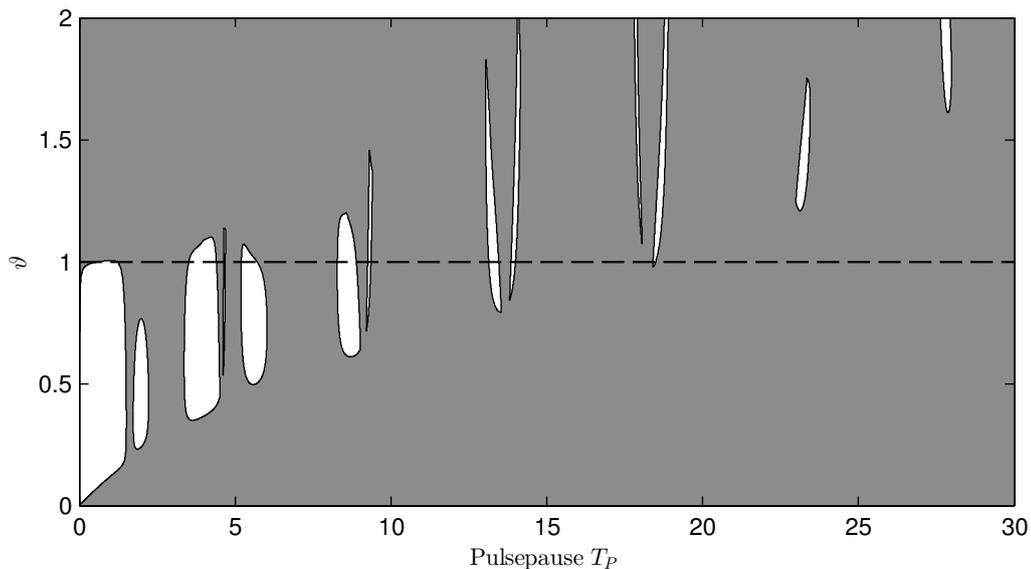


Abbildung 3.37.: Stabilitätskarte bei Variation von ϑ für $I_1 = 0.2$; Dirac-Impulse auf Körper 1

Gleichartige Stabilitätsuntersuchungen für Impulse auf Körper 2 beziehungsweise beide Körper zeigen ein zum eben beschriebenen analoges Systemverhalten. Auch die markanten instabilen Gebiete für $I_1 \in [3.46, 5]$ treten bei beiden Parameterstudien auf. Die entsprechenden Stabilitätskarten sind im Anhang A.2 beigelegt.

Identifikation von instabilen Bereichen und lokalen Extremstellen

In Abschnitt 3.4.2 wurde für das gedämpfte 2-FG-System mit DIE und Energieentnahme gezeigt, dass im Verlauf des betragsgrößten Eigenwertes lokale Extremstellen bei Vielfachen der Periodendauern T_1 , T_2 und $T_{12,\pm}$ liegen. Die Existenz dieser lokalen Maxima für das selbsterregte System mit DIE und $\vartheta < 1$ soll beispielhaft mit Hilfe der in Abbildung 3.38 ersichtlichen Parametervariation von I_1 demonstriert werden. Dem System wird über einen Impuls hinweg die maximal mögliche Energie entzogen, $\vartheta = 0.5$. In der Stabilitätskarte (unten) sind aufeinanderfolgende Vielfache von T_1 und T_2 , beginnend mit $T_P = 0.5T_i$ ($i = 1, 2$), sowie auf $T_P = T_{12,\pm}$ folgende ganzzahlige Vielfache von $T_{12,\pm}$ eingezeichnet.

Aus Abbildung 3.38(b) geht hervor, dass anhand der eingezeichneten Linien alle instabilen Bereiche identifiziert werden können. In der Umgebung der Vielfachen der Periodendauern der ersten Eigenfrequenz und der Kombinationsfrequenzen ist das System stets instabil. Auch bei Vielfachen von T_2 treten lokale Extremstellen auf, siehe Abbildung 3.38(a). Instabilität muss dann vorliegen, wenn der zweite Schwingungsmodus instabil ist. Wie die Zeitsimulation in Abbildung 3.39 für $I_1 = 5$ und $T_P = 3T_2$ verdeutlicht, bleibt die Amplitude der modalen Verdrehung u_1 ab etwa $t = 2000$ deutlich kleiner als u_2 , die Impulsstärke ε_k ergibt an den nachfolgenden Impulszeitpunkten nahezu Null. Der instabile zweite Schwingungsmodus klingt auf.

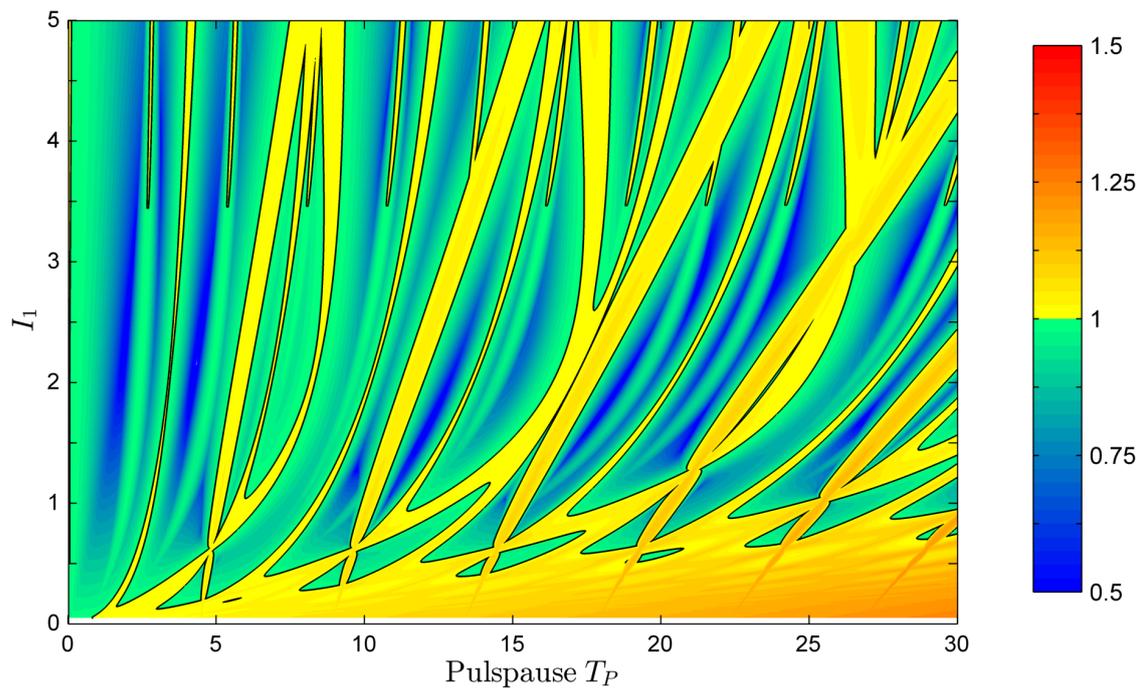
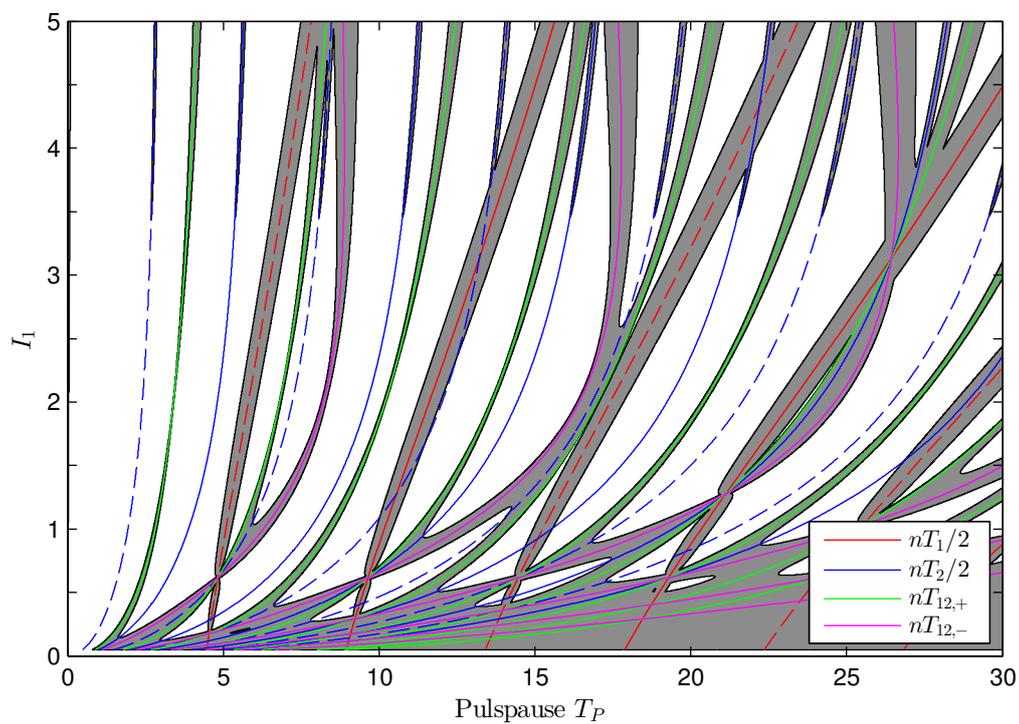
(a) Spektralradius für Variation von T_P und I_1 (b) Stabilitätskarte für Variation von T_P und I_1

Abbildung 3.38.: Betragsgößter Eigenwert der Q -Matrix (oben) und Stabilitätskarte (unten) bei Variation von T_P und I_1 ; Dirac-Impulse auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

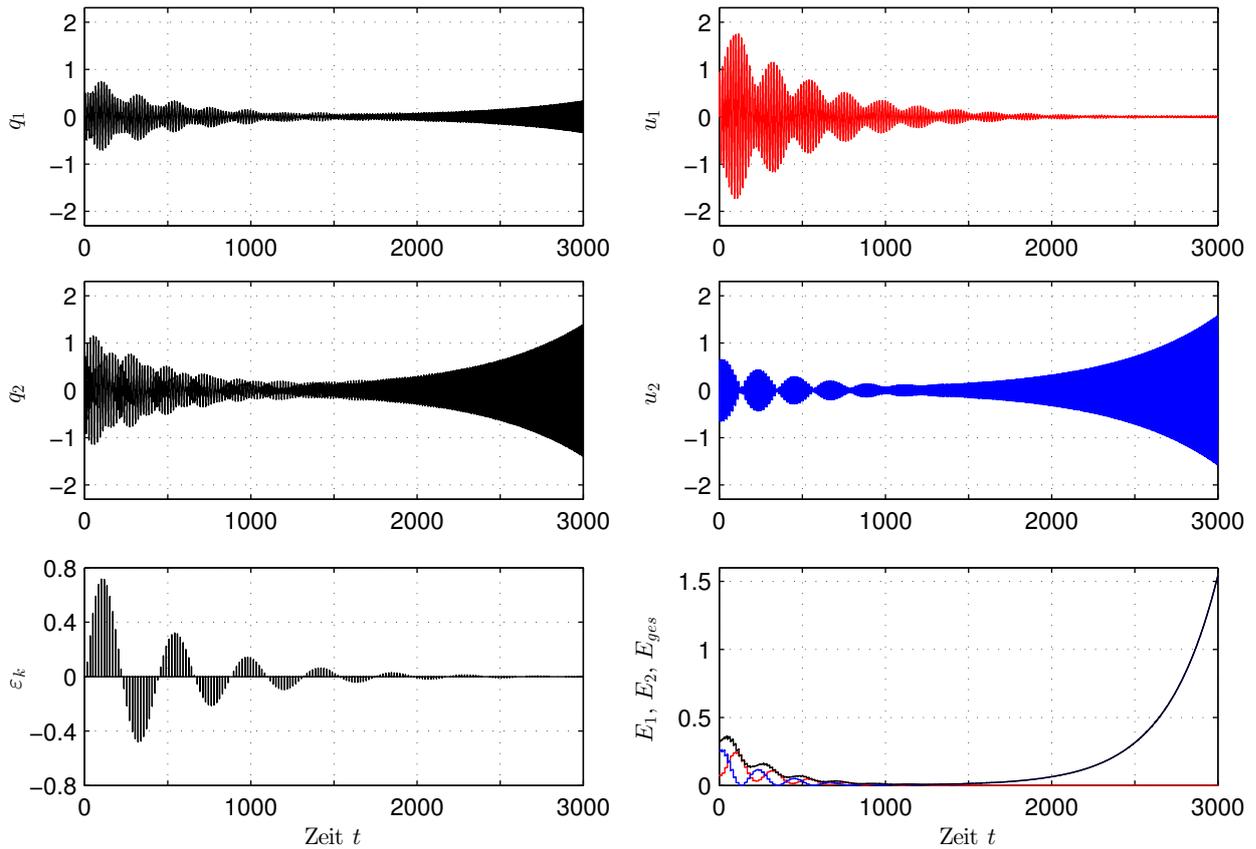


Abbildung 3.39.: Zeitverläufe der physikalischen und modalen Verdrehungen q_i und u_i ($i = 1, 2$), der Impulsstärke ε_k und der modalen Energieinhalte des Systems mit Selbsterregung, $I_1 = 5$ und Anfangsbedingung AB2; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 3T_2$ auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

Für die Instabilitäten bei $T_P = nT_1/2$ konnte eine sinngemäße Begründung angegeben werden. Verallgemeinert gilt für N-FG-Systeme: Eine Folge von Dirac-Impulsen im zeitlichen Abstand von $T_P = nT_i/2$ ($i = 1, 2, \dots, N$) kann das System nicht stabilisieren, falls der i -te Schwingungsmodus des autonomen Systems instabil ist.

Abschließend sollen noch zwei Zeitsimulationen betrachtet werden. Das Massenträgheitsmoment von Körper 1 wird abweichend vom Standardparametersatz auf $I_1 = 3$ gesetzt. In Abbildung 3.40 ist der betragsmäßig größte Eigenwert der Abbildungsmatrix \mathbf{Q} für den gewählten Parametersatz dargestellt.

Zur Veranschaulichung, dass die Dirac-Impulskrafterregung bei maximaler Energieentnahme selbsterregte Schwingungen sehr effektiv unterdrücken kann, wird für die Pulspause mit $T_P = 2.2$ ein Wert im Bereich des ersten lokalen Minimums gewählt. Für die Geschwindigkeitsanfangsbedingung $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0, 0.8]^T$ ist die gesamte Schwingungsenergie bereits nach sieben Impulsen oder 15.4 Zeiteinheiten dissipiert, wie in Abbildung 3.41 ersichtlich ist.

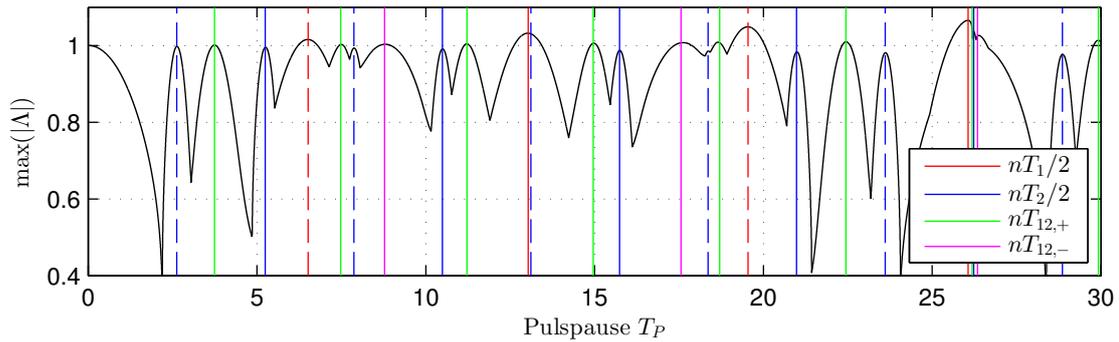


Abbildung 3.40.: Betragsgrößer Eigenwert der Q -Matrix des Systems mit Selbsterregung und $I_1 = 3$; Dirac-Impulse auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

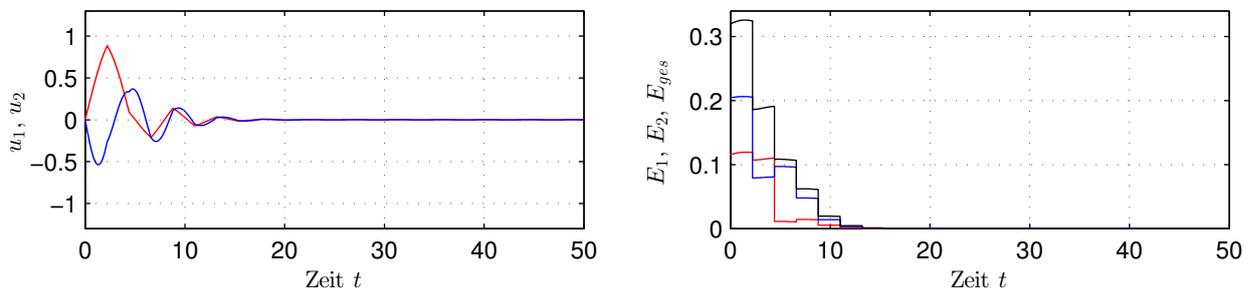


Abbildung 3.41.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und der modalen Energieinhalte (rechts) des Systems mit Selbsterregung, $I_1 = 3$ und Anfangsbedingung AB2; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = 2.2$ auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

Ein bemerkenswertes Systemverhalten zeigen die Simulationsergebnisse für $T_P = T_{12,+}$. Obwohl der zweite Schwingungsmodus stabil ist, blau in Abbildung 3.42, und daher die Energie im zweiten Mode zwischen den Impulsen abnimmt, bleibt das Verhältnis der modalen Energieinhalte E_1/E_2 während der gesamten Simulationsdauer auf einem konstanten Wert. Gleichartige Resultate ergaben sich auch für das gedämpfte System für $T_P = T_{12,\pm}$ und $\vartheta = 0.5$, vergleiche Abbildung 3.19.

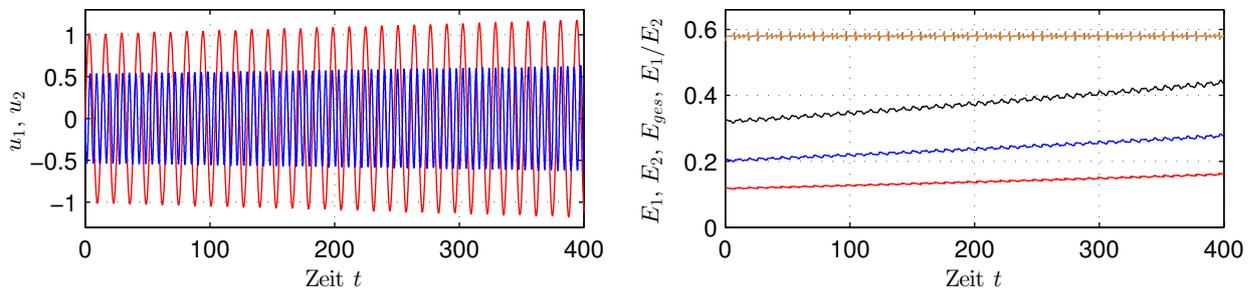


Abbildung 3.42.: Zeitverläufe der modalen Verdrehungen (links) und der modalen Energieinhalte (rechts) des Systems mit Selbsterregung, $I_1 = 3$ und Anfangsbedingung AB2; braun: E_1/E_2 ; Dirac-Impulse im Zeitabstand $T_P = T_{12,+}$ auf Körper 1; Maximale Energieentnahme während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 0.5$

4. Prüfstandskonzept

In diesem Kapitel soll ein grundlegendes Prüfstandskonzept zum experimentellen Nachweis der verbesserten Schwingungsdämpfung durch Dirac-Impulskrfterregung dargestellt werden. Abbildung 4.1 zeigt die Skizze eines zweckmäßigen Versuchsaufbaus für ein einseitig gefesseltes 2-FG-Drehschwingungssystem unter Dirac-Impulserregung.

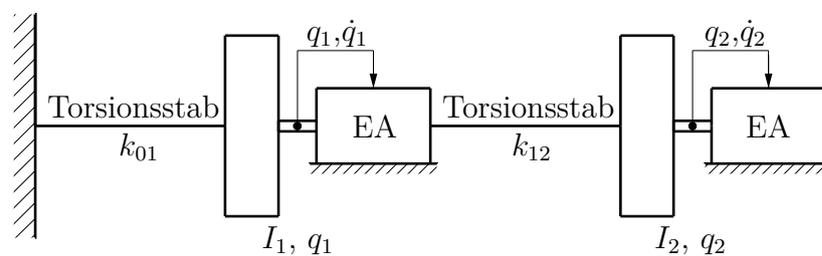


Abbildung 4.1.: Skizze der Versuchsanordnung

Die Lagerung der beiden Körper, das Einstellen von Anfangsauslenkungen am Versuchsbeginn und das Aufbringen der Drehmomentenimpulse erfolgt durch elektrische Aktoren (in der obigen Skizze durch die Abkürzung EA gekennzeichnet) in Form von zwei geregelten elektrischen Antrieben, wobei beide Antriebe nach der Herstellung der Anfangsbedingung gleichzeitig stromlos geschaltet werden, und auch in den Zeitabschnitten zwischen den Drehmomentenimpulsen inaktiv sind. Um die elektrischen Maschinen geregelt betreiben zu können, müssen die Lage q_i der Rotoren und die Rotorwinkelgeschwindigkeiten \dot{q}_i , $i = 1, 2$, gemessen beziehungsweise berechnet, und in die Regelung rückgeführt werden. Die Welle des ersten elektrischen Antriebes ist über einen Torsionsstab mit dem Inertialsystem, beziehungsweise dem zweiten Rotor verbunden. Die Drehsteifigkeit der Motorwellen soll dabei sehr viel größer als die Drehsteifigkeit k_{01} und k_{12} der Torsionsstäbe sein. Die gewünschten Massenträgheitsmomente I_1 und I_2 können durch Anbringen von Zusatzmassen erreicht werden.

Im Folgenden werden mögliche Prüfstandskomponenten auf Grundlage von numerischen Simulationen mit einem konkreten Parametersatz ausgewählt und eine Grobkonstruktion des Prüfstandes gezeigt.

4.1. Numerische Simulationen in MATLAB

4.1.1. Realisierbare Impulsformen

Auf Grund der Forderung nach einer unbeschränkten Stoßkraft über einer unendlich kurzen Impulsdauer sind Dirac-Impulse technisch nicht realisierbar. Sofern das Zeitintegral eines über der Impulsdauer t_p kontinuierlich wirkenden Drehmoments $M(t)$, dem Stoßantrieb des mit ε_k skalierten Einheitsimpulses bei $t = t_k$ entspricht, also

$$\int_0^{t_p} M(t) dt = \varepsilon_k \quad (4.1)$$

gilt, stellt $M(t)$ eine Approximation von $\varepsilon_k \delta(t - t_k)$ dar. Die idealisierte Beschreibung des Stoßvorganges, und damit die in Abschnitt 2.3 dargestellte Theorie, kann umso genauer abgebildet werden, je genauer die Impulsdauer t_p die Voraussetzung $t_p \rightarrow 0$ erfüllt.

Der Ablauf der in diesem Abschnitt durchgeführten Zeitsimulationen soll mit Hilfe der in Abbildung 4.2 dargestellten Rechteckimpulsfolge erklärt werden. Ausgehend von der Anfangsbedingung \mathbf{x}_0 wird die Impulsstärke ε_1 unter Verwendung der Matrixexponentialfunktion und Gleichung (2.19) vorausberechnet. Ein zentrierter Impuls mit Impulsdauer t_p und gleicher Impulsstärke $\varepsilon_1 = \hat{M}_1 t_p$ ersetzt den Dirac-Impuls bei $t = t_1$. Die Berechnung des Zustandsvektors im autonomen Zeitabschnitt kann durch Auswerten der Matrixexponentialfunktion erfolgen. Zur Integration des inhomogenen Differentialgleichungssystems für $t \in [t_1 - t_p/2, t_1 + t_p/2]$ wird die MATLAB-Routine `ode45` verwendet. Für die nachfolgenden Impulse erfolgt der Übergang zu Rechteckimpulsen durch analoges Vorgehen, jedoch wird die Impulsstärke ε_{k+1} ausgehend vom Zustandsvektor nach einem Impuls $\mathbf{x}(t_k + t_p/2)$, $k = 1 \dots N - 1$, vorausberechnet.

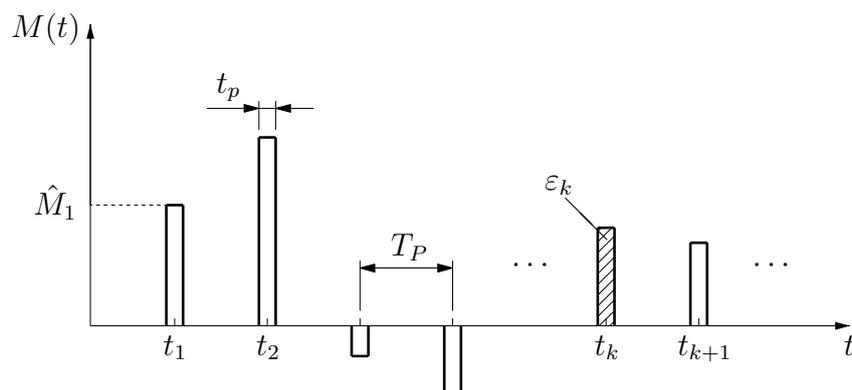


Abbildung 4.2.: Qualitative Rechteck-Impulsfolge mit zeitlichem Abstand T_P

Zum numerischen Nachweis der verbesserten Dämpfungseigenschaften könnte eine Folge von Rechteckimpulsen verwendet werden. Der im Versuch nicht realisierbare unendlich steile Mo-

mentenanstieg erfordert aber eine alternative Impulsform. Deshalb werden die Dirac-Impulse in den Zeitsimulationen im nächsten Abschnitt durch Impulse in Form einer Sinus-Halbwellen ersetzt. Den Scheitelwert \hat{M}_k eines charakteristischen Impulses bei $t = t_k$ erhält man aus

$$\int_0^{t_p} \hat{M}_k \sin\left(\frac{\pi}{t_p} t\right) dt = \varepsilon_k \quad (4.2)$$

und daraus folgt

$$\hat{M}_k = \frac{\pi \varepsilon_k}{2 t_p}. \quad (4.3)$$

Aus Gleichung (4.3) ist unmittelbar ersichtlich, dass neben der Impulsdauer auch die Wahl der Impulsform das erforderliche maximale Drehmoment M_{max} der elektrischen Antriebe beeinflusst. Im Vergleich zu einem stoßantriebs-äquivalenten Rechteckimpuls ergibt sich eine um den Faktor $\pi/2$ erhöhte Amplitude \hat{M}_k der Sinus-Halbwellen.

4.1.2. Simulationen mit dem Prüfstandsparametersatz

Für die folgenden Untersuchungen wird das Dämpfungsgesetz aus Gleichung (2.6) um einen zur Massenmatrix proportionalen Anteil erweitert, das heißt

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{K}, \quad (4.4)$$

wobei $\alpha, \beta = \text{konst.}$ Durch den Term $\alpha \mathbf{I}$ werden dem Modell zwei Absolutdämpfungen c_{0i} ($i = 1, 2$) hinzugefügt, die direkt an den beiden Körpern angreifen. Die Identifikation des Proportionalitätsfaktors α erlaubt eine angenäherte Beschreibung der durch die elektrischen Antriebe ins System eingebrachten Dämpfung auch dann, wenn der zugrundeliegende Dämpfungsmechanismus nicht dem der viskosen Dämpfung entspricht.

Da die Massenmatrix unter einer modalen Transformation ihre Diagonalgestalt beibehält, sind auch jetzt die Bewegungsgleichungen in modalen Koordinaten innerhalb der autonomen Zeitabschnitte voneinander entkoppelt. Die modalen Dämpfungen ergeben

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}. \quad (4.5)$$

Für die gewählten und in Tabelle 4.1 gelisteten Prüfstandsparameterwerte berechnen sich die Eigenkreisfrequenzen ω_i , die zugehörigen Periodendauern T_i und die Eigenvektoren φ_i ($i = 1, 2$) des konservativen Systems zu

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 6.6387 \text{ 1/s} & T_1 &= 0.9464 \text{ s} & \varphi_1 &= [0.6180, 1.0000]^T \\ \omega_2 &= 17.3805 \text{ 1/s} & T_2 &= 0.3615 \text{ s} & \varphi_2 &= [-1.0000, 0.6180]^T. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tabelle 4.1.: Prüfstandsparametersatz

Parameter	Wert
Massenträgheitsmomente	$I_1 = I_2 = 0.0065 \text{ kgm}^2$
Steifigkeiten	$k_{01} = k_{12} = 0.75 \text{ Nm}$
Proportionalitätsfaktoren	$\alpha = 0.02, \beta = 0.0002$
Dämpfungskonstanten	$c_{01} = 2.80 \cdot 10^{-4} \text{ Nsm},$ $c_{12} = 1.50 \cdot 10^{-4} \text{ Nsm},$ $c_{20} = 1.30 \cdot 10^{-4} \text{ Nsm}$

Die Proportionalitätsfaktoren des Dämpfungsgesetzes (4.4) wurden derart gewählt, dass für ein Subsystem des 2-FG-Ketten-Drehschwingers ($I_i, k_{i-1,i}, i = 1, 2$), die aus der Materialdämpfung resultierende Dämpfungskonstante $c_{i-1,i} = \beta k_{i-1,i}$ und jene infolge der Absolutdämpfung $c_{0i} = \alpha I_i$ annähernd gleich große Werte ergeben. Beide Dämpfungsmechanismen tragen etwa zu gleichen Teilen zur Gesamtdämpfung eines Subsystems bei. Die modalen Dämpfungen ergeben für die gewählten Parameterwerte nach Gleichung (4.5)

$$\zeta_1 = 2.170 \cdot 10^{-3} \quad \zeta_2 = 2.313 \cdot 10^{-3}. \quad (4.7)$$

Da sowohl Absolut- als auch Relativdämpfungen schwer zu quantifizierende Größen sind, können zuverlässige Werte für die Dämpfungskonstanten nur durch eine sorgfältige Parameteridentifikation angegeben werden. Das Verhältnis der Abklingkoeffizienten

$$\frac{\zeta_2 \omega_2}{\zeta_1 \omega_1} = \frac{\alpha + \beta \omega_2^2}{\alpha + \beta \omega_1^2} \quad (4.8)$$

zeigt jedoch, dass der positive Effekt des Energietransfers in den stärker gedämpften zweiten Schwingungsmode für alle $\beta > 0$ auftritt. Also für den Fall, dass die durch $\beta \mathbf{K}$ beschriebene Materialdämpfung gegenüber den Absolutdämpfungen $\alpha \mathbf{I}$ nicht vernachlässigbar klein ist. Das Verhältnis (4.8) ist für einige Werte von β in Tabelle 4.2 zusammengestellt. Für den gewählten Parametersatz ergibt sich ein Zahlenwert von $\zeta_2 \omega_2 / \zeta_1 \omega_1 = 2.791$. Schwingungen im zweiten Mode klingen wesentlich rascher ab, obwohl die modalen Dämpfungen in Gleichung (4.7) etwa gleich groß sind.

Tabelle 4.2.: Verhältnis der Abklingkoeffizienten in Abhängigkeit von β

$\beta \cdot 10^4$	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$\zeta_2 \omega_2 / \zeta_1 \omega_1$	1.000	1.581	2.057	2.454	2.791	3.079

Als Anfangsbedingung für die nachfolgenden Zeitsimulationen wird $\mathbf{x}_0 = [0.0402, 0.0650, 0, 0]^T$ (AB1) gewählt. Weiters soll die Sinus-Impulsfolge nur auf Körper 1 wirken, das heißt der elektrische Aktor des zweiten Modellknotens ist nach dem Einstellen der Anfangsauslenkung stets inaktiv. Die (Voraus-)Berechnung der Impulsstärke ε_k erfolgt unter der Annahme, dass die Gesamtenergie unmittelbar vor und nach einem Dirac-Impuls übereinstimmt, das heißt $\vartheta = 1$ (Abschnitt 2.3).

Ungedämpftes System

Zur Bewertung des Einflusses der endlichen Impulsdauer auf den Gesamtenergieinhalt des Systems E_{ges} wird das ungedämpfte System betrachtet. Die Impulsdauer wird stets in Bezug auf eine charakteristische Systemgröße angegeben, der Periodendauer der zweiten Eigenfrequenz. Da der Einfluss des zeitlichen Verlaufs von $M(t)$ und der Impulsdauer abnimmt, falls t_p klein gegenüber der kleinsten Eigenschwingungsdauer ist, wird unabhängig vom konkreten Parametersatz ein vergleichbares Systemverhalten erwartet, wenn t_p/T_2 übereinstimmt.

Abbildung 4.3 zeigt E_{ges} für drei verschiedene Werte der Impulsdauer bei einer Pulspause von $T_P = 2.30$ s. Die gewählte Pulspause entspricht einem lokalen Minimum im Verlauf des betragsgrößten Eigenwertes des gedämpften Systems mit Dirac-Impulskrfterregung, vergleiche Abbildung 4.6. Die schwarze Linie repräsentiert die Gesamtenergie des Systems für eine Folge von Dirac-Impulsen mit $\vartheta = 1$.

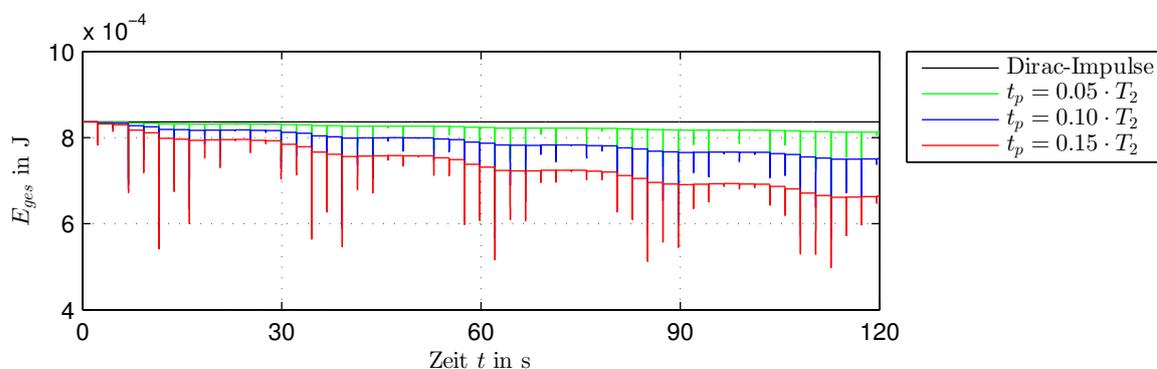


Abbildung 4.3.: Vergleich der Gesamtenergie E_{ges} des ungedämpften Systems für verschiedene Werte der Impulsdauer t_p ; Anfangsbedingung AB1; Sinus-Impulse im Zeitabstand $T_P = 2.30$ s auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Das beobachtete, kurzzeitige Absinken von E_{ges} während der Impulse resultiert daraus, dass die Änderung des Geschwindigkeitszustands bei nicht verschwindender Stoßdauer nicht mehr plötzlich, sondern kontinuierlich über der Stoßdauer stattfindet. Die Geschwindigkeitskomponente \dot{q}_1 muss für Energiekonstanz über einen Stoß hinweg ihr Vorzeichen wechseln. Der jetzt stetige Geschwindigkeitsverlauf bedingt, dass die kinetische Energie von Körper 1 zuerst abnimmt, kurzzeitig Null wird und dann wieder ansteigt.

Aus den Energieverläufen geht hervor, dass der Wert der Gesamtenergie nach einem Impuls nur mehr annähernd mit dem Wert vor dem Impuls übereinstimmt. Die Gesamtenergie nimmt im Laufe der Simulation für den Großteil der Stoßvorgänge ab, nur bei einigen Impulsen steigt E_{ges} minimal an. Am Simulationseende beträgt E_{ges} in Abhängigkeit von der Impulsdauer noch 97%, 90% beziehungsweise 79% der Anfangsenergie. Die Güte der Näherung (4.1) nimmt mit anwachsender Impulsdauer ab. Angesichts der sehr kurzen Impulsdauer wird jedoch $0.05 \cdot T_2$ (= 18 ms) als mögliche Impulsdauer nicht weiter betrachtet.

Weitere Simulationsresultate für $t_p = 0.10 \cdot T_2$ sind in Abbildung 4.4 dargestellt. An den Zeitverläufen der physikalischen und modalen Verdrehungen q_i und u_i , $i = 1, 2$, sowie den modalen Energieinhalten ist unmittelbar erkennbar, dass der Transfer von Schwingungsenergie zwischen den Moden stattfindet. Im Hinblick auf die Auswahl eines geeigneten elektrischen Antriebes und der technischen Realisierbarkeit, ist vor allem das maximale Drehmoment von $|M_{max}| = 0.134 \text{ Nm}$ und die Impulsdauer $0.10 \cdot T_2 = 36 \text{ ms}$ von Interesse. Der Antrieb muss das Bremsen und Antreiben in beide Drehrichtungen ermöglichen (Vier-Quadranten-Betrieb), da sowohl positive als auch negative Drehmomente erforderlich sind. Zur Überprüfung der Beanspruchung der Torsionsstäbe werden die Maximalwerte der Verdrehungen q_1 und $q_{21} = q_2 - q_1$ benötigt. Es ergibt sich jeweils ein gerundeter Wert von

$$|q_{1,max}| = 0.047 \text{ rad} \quad |q_{21,max}| = 0.047 \text{ rad}. \quad (4.9)$$

In Abbildung 4.3 ist erkennbar, dass die Gesamtenergie vor allem bei Impulsen mit hoher Impulsstärke abnimmt. Die Simulationsergebnisse für $T_P = 4.87 \text{ s}$ und $t_p = 0.15 \cdot T_2$ sollen neben diesem Effekt auch verdeutlichen, dass die gewählte Pulspause das maximale Drehmoment beeinflusst, siehe Abbildung 4.5. Obwohl T_P mehr als verdoppelt wurde, liegt die Gesamtenergie am Simulationseende mit nur mehr 54% der Anfangsenergie deutlich unter dem Vergleichswert von 79% bei $T_P = 2.30 \text{ s}$, vergleiche Abbildung 4.3. Begründet werden kann dies durch die vergleichsweise große Zahl an Impulsen, die ein hohes Drehmoment erfordern. An diesen Zeitpunkten nimmt E_{ges} merklich ab. Trotz der längeren Impulsdauer ist das maximale Drehmoment $|M_{max}| = 0.182 \text{ Nm}$ etwa um den Faktor 1.4 größer, als jenes für $T_P = 2.30 \text{ s}$ und $t_p = 0.10 \cdot T_2$.

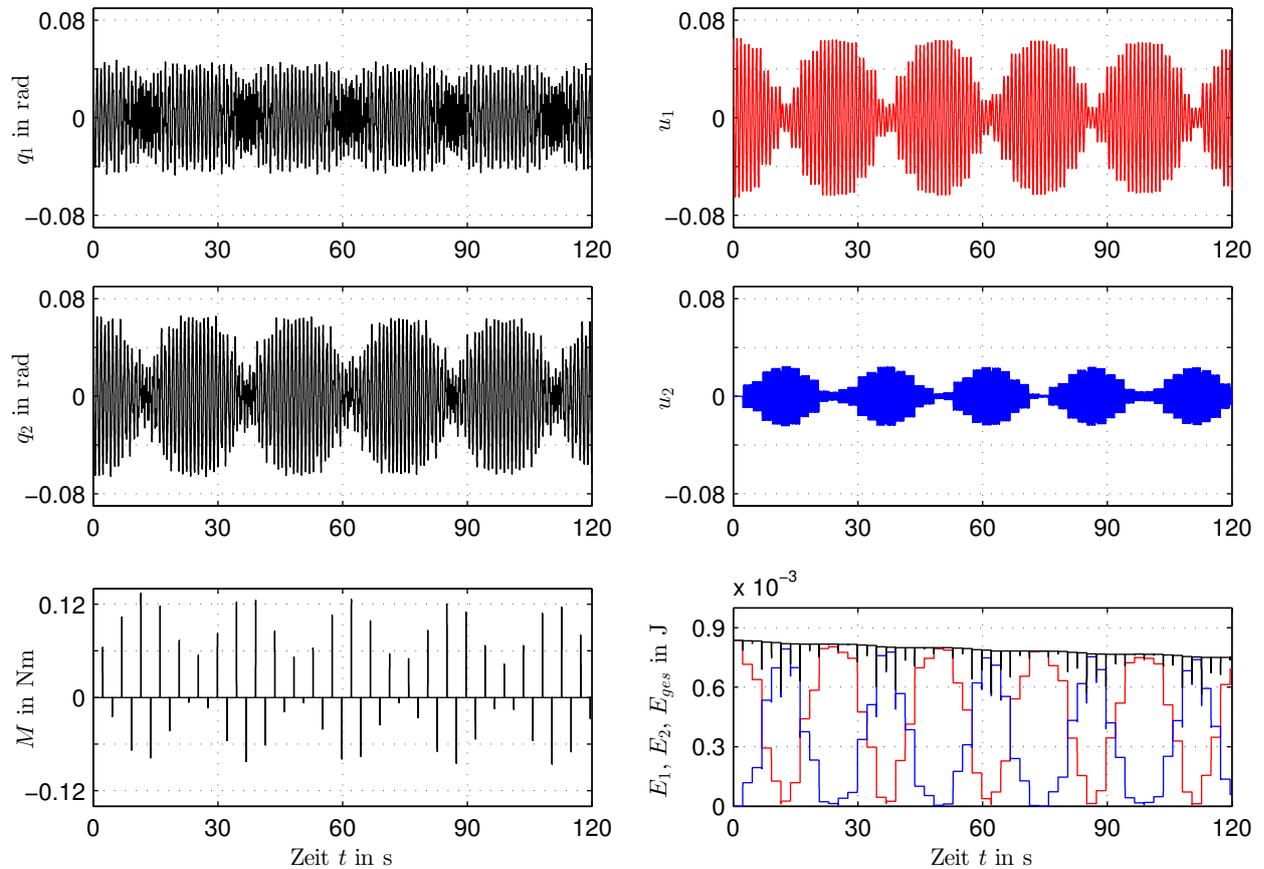


Abbildung 4.4.: Zeitverläufe der physikalischen und modalen Verdrehungen q_i und u_i ($i = 1, 2$), des Drehmoments M und der modalen Energieinhalte des ungedämpften Systems mit Anfangsbedingung AB1; Sinus-Impulse mit Impulsdauer $t_p = 0.10 \cdot T_2$ im Zeitabstand $T_P = 2.30\text{s}$ auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

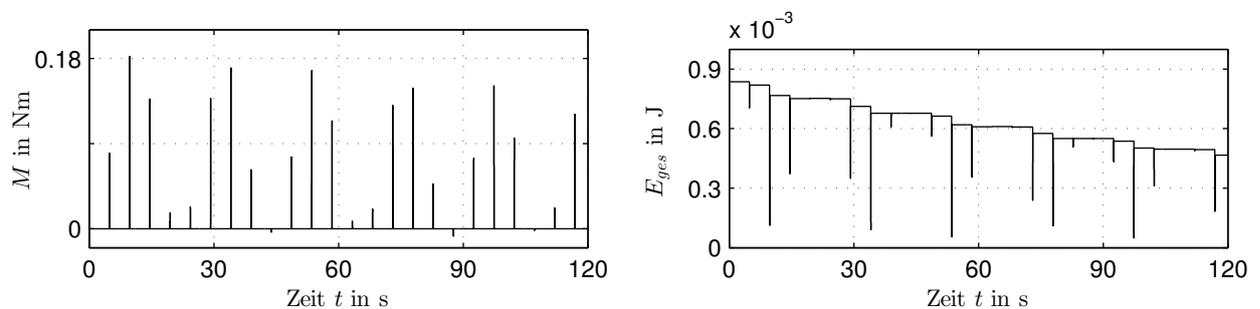


Abbildung 4.5.: Zeitverläufe des Drehmoments M und der Gesamtenergie des ungedämpften Systems mit Anfangsbedingung AB1; Sinus-Impulse mit Impulsdauer $t_p = 0.15 \cdot T_2$ im Zeitabstand $T_P = 4.87\text{s}$ auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Gedämpftes System

Der Vergleich der betragsmäßig größten Eigenwerte der Systeme mit und ohne DIE in Abbildung 4.6 zeigt, dass für die gewählte Anfangsbedingung nur im Bereich der rot eingezeichneten Vielfachen von T_1 , und für sehr kleine Werte von T_P keine verbesserte Schwingungsdämpfung erwartet werden kann. Um die Simulationsergebnisse mit denen des ungedämpften Systems vergleichen zu können, wird als Pulspause wiederum das lokale Minimum bei $T_P = 2.30$ s gewählt.

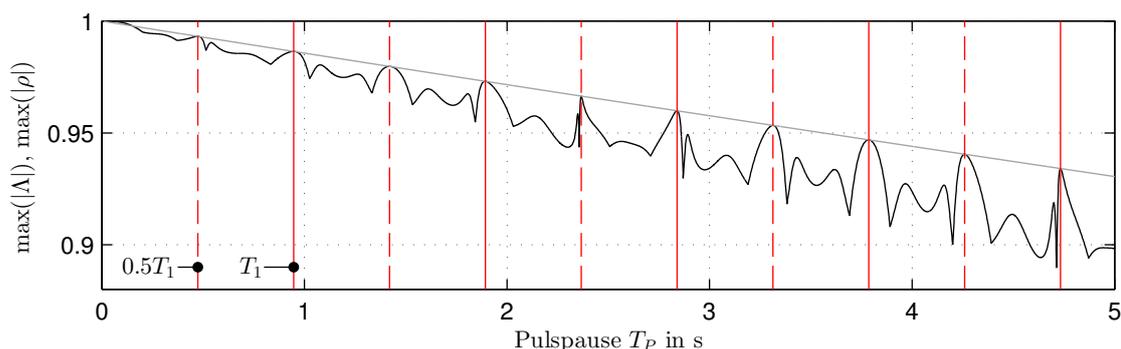


Abbildung 4.6.: Betragsmäßig größter Eigenwert der Q - und D -Matrix des gedämpften Systems; rot: Vielfache von T_1 ; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Abbildung 4.7 zeigt die für die Bemessung der Prüfstandskomponenten relevanten Zeitverläufe der physikalischen Verdrehungen q_1 , q_2 und des Drehmoments M für $t_p = 36$ ms und $t_p = 54$ ms. Zusätzlich sind jeweils die modalen Energieinhalte des Systems mit Dirac-Impulskrafterregung und die Gesamtenergie des autonomen Systems (grau) dargestellt. Anhand der Zeitverläufe von q_1 , q_2 und der Gesamtenergie E_{ges} ist erkennbar, dass sich für beide Werte der Impulsdauer qualitativ und quantitativ sehr gut übereinstimmende Resultate ergeben. Ein zum autonomen System am Simulationsende vergleichbares Energieniveau wird mit Dirac-Impulskrafterregung, nahezu unabhängig von t_p , bereits bei etwa $t = 65$ s erreicht. Die Maximalwerte des Drehmoments und der Verdrehungen¹ der beiden Torsionsstäbe

$$|M_{max}| = 0.099 \text{ Nm} \quad |q_{1,max}| = 0.044 \text{ rad} \quad |q_{21,max}| = 0.041 \text{ rad} \quad (4.10)$$

ergeben im Vergleich zum ungedämpften System kleinere Werte.

In Abbildung 4.8 ist der Impuls mit maximaler Impulsstärke bei $t = 11.5$ s im Detail ersichtlich. An der mechanischen Leistung P ist erkennbar, dass das maximale Drehmoment im Stillstand das wesentliche Kriterium bei der Auswahl des elektrischen Antriebes darstellt. Die erforderliche elektrische Leistung liegt im mW-Bereich.

¹Die gerundeten Maximalwerte stimmen für beide Werte von t_p überein.

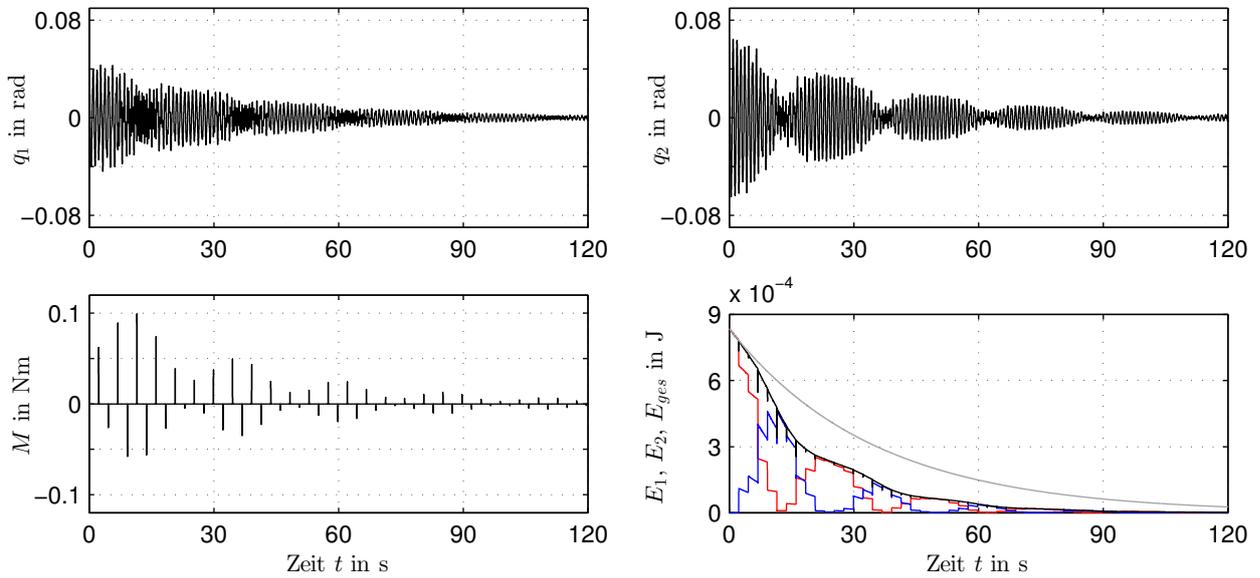
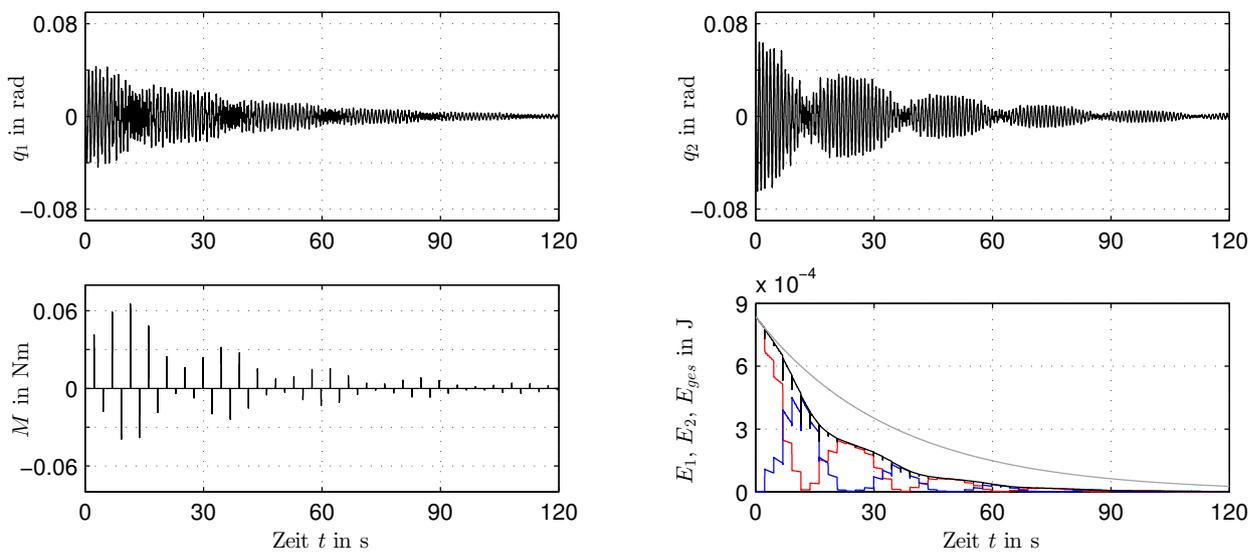
(a) Impulsdauer beträgt 10% von T_2 (b) Impulsdauer beträgt 15% von T_2

Abbildung 4.7.: Zeitverläufe der physikalischen Verdrehungen q_i ($i = 1, 2$), des Drehmoments M und der modalen Energieinhalte des gedämpften Systems mit Anfangsbedingung AB1; Sinus-Impulse im Zeitabstand $T_P = 2.30$ s auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

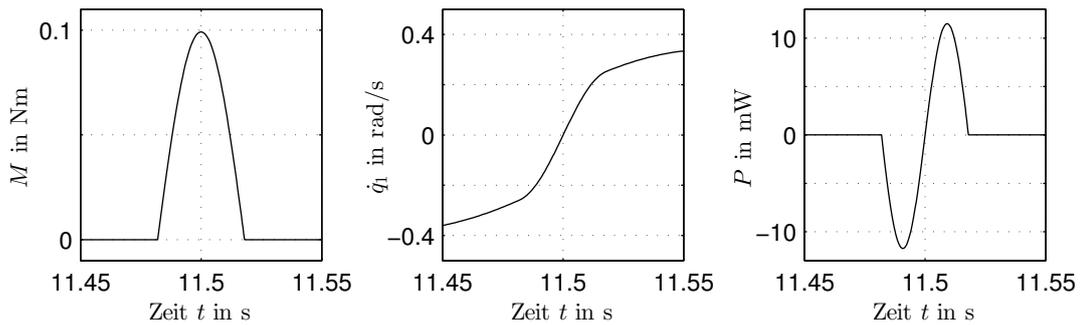


Abbildung 4.8.: Drehmoment M , physikalische Geschwindigkeit \dot{q}_1 und mechanische Leistung P für den Impuls mit maximaler Impulsstärke bei $t = 11.5$ s auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

System mit Selbsterregung

Fügt man analog zum Abschnitt 3.6 ein Dämpferelement mit negativer Dämpfungskonstante $c_{se} = -5 \cdot 10^{-4}$ Nsm zwischen Körper 2 und Inertialsystem ein, wird der erste Schwingungsmodus des autonomen Systems instabil. Abbildung 4.9 zeigt den Verlauf des betragsgrößten Eigenwertes für den gewählten Parametersatz.

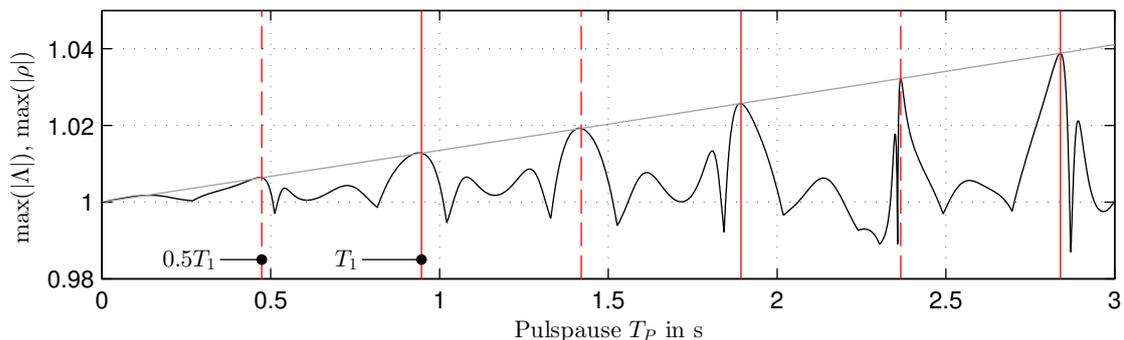


Abbildung 4.9.: Betragsmäßig größter Eigenwert der \mathbf{Q} - und \mathbf{D} -Matrix des Systems mit Selbsterregung; rot: Vielfache von T_1 ; Dirac-Impulse auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

In Abbildung 4.10 sind Simulationsergebnisse für eine Folge von Sinus-Impulsen im zeitlichen Abstand $T_p = 2.30$ s auf Körper 1 dargestellt. Der Transfer von Schwingungsenergie in den stabilen zweiten Modus bewirkt die Unterdrückung der selbsterregten Schwingungen sowohl für $t_p = 0.10 \cdot T_2$, als auch für $t_p = 0.15 \cdot T_2$. Die Zeitverläufe zeigen eine sehr gute Übereinstimmung für die beiden Werte der Impulsdauer. Die Maximalwerte des Drehmoments und der Verdrehungen der Torsionsstäbe ergeben

$$|M_{max}| = 0.126 \text{ Nm} \quad |q_{1,max}| = 0.050 \text{ rad} \quad |q_{21,max}| = 0.049 \text{ rad} \quad (4.11)$$

und damit vergleichbare Werte zum ungedämpften System, siehe Gleichung (4.9).

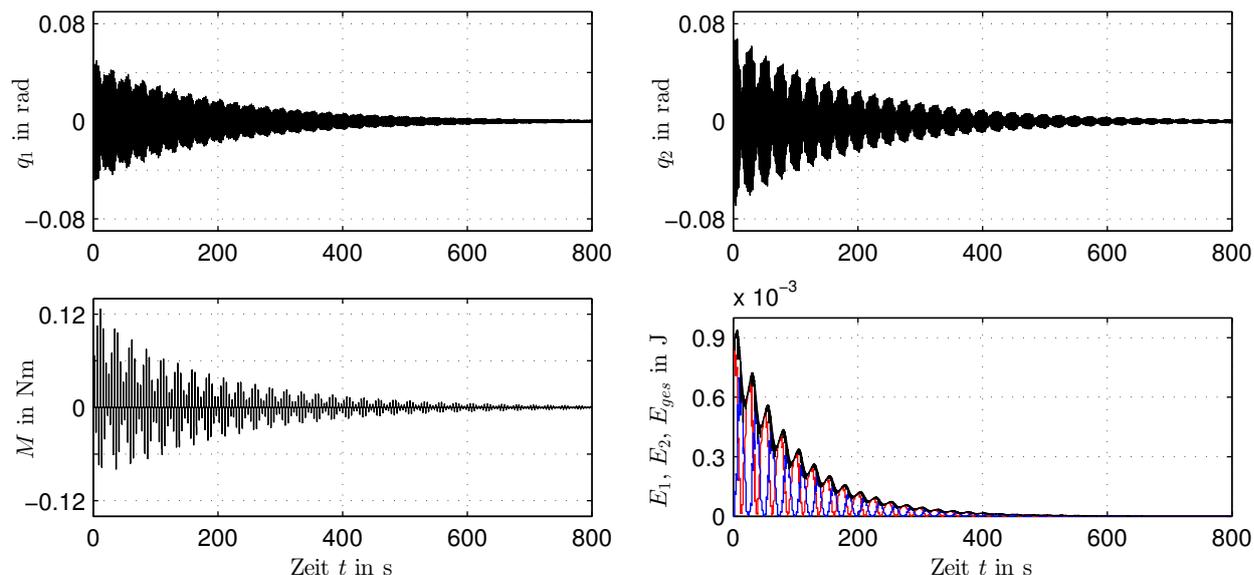
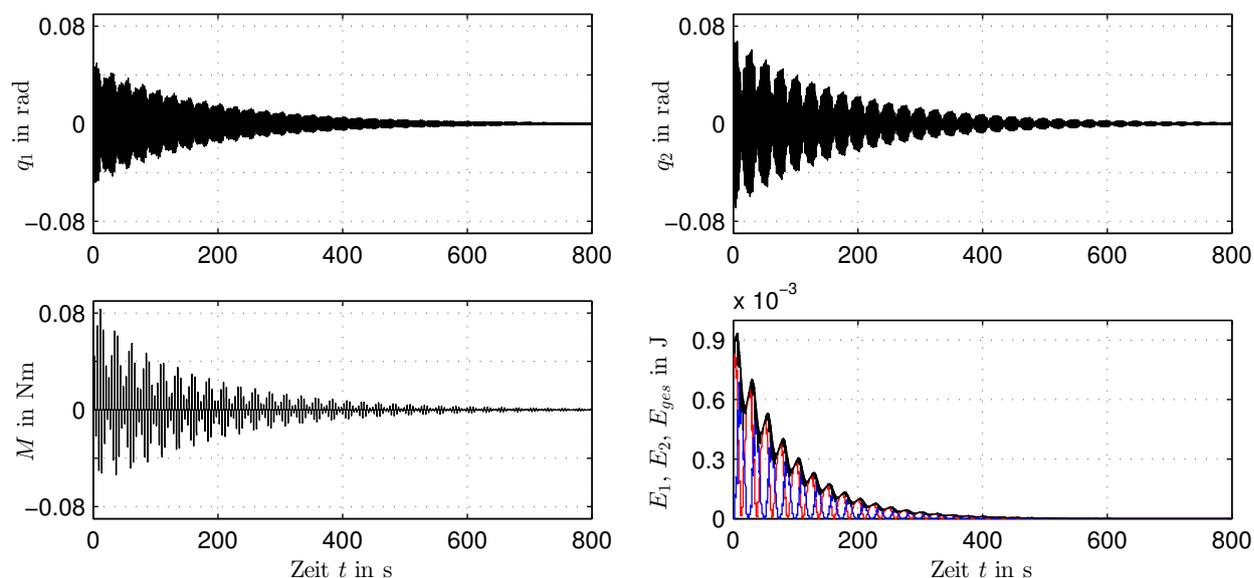
(a) Impulsdauer beträgt 10% von T_2 (b) Impulsdauer beträgt 15% von T_2

Abbildung 4.10.: Zeitverläufe der physikalischen Verdrehungen q_i ($i = 1, 2$), des Drehmoments M und der modalen Energieinhalte des Systems mit Selbsterregung und Anfangsbedingung AB1; Sinus-Impulse im Zeitabstand $T_P = 2.30$ s auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

Der Einfluss der endlichen Impulsdauer wird erst für Pulspausen in der Umgebung jener Pulspause deutlich, bei der sich das System an der Stabilitätsgrenze befindet. Während das System für beide Werte der Impulsdauer bei $T_P = 2.335$ s ($\max(|\Lambda|) = 0.9997$) stabil und bei $T_P = 2.336$ s ($\max(|\Lambda|) = 1.0006$) instabil ist, das heißt die Stabilitätsbedingung (2.25) exakt abgebildet wird, verschiebt sich die Stabilitätsgrenze bei $T_P = 2.196$ s merkbar. Das System ist für $t_p = 0.10 \cdot T_2$ erst bei $T_P = 2.181$ s ($\max(|\Lambda|) = 1.0026$) instabil. Wählt man bei gleicher Pulspause die Impulsdauer $t_p = 0.15 \cdot T_2$, werden die selbsterregten Schwingungen unter-

drückt, siehe Abbildung 4.11. Die Simulationen für das ungedämpfte System haben gezeigt, dass die Gesamtenergie des Systems an den Impulszeitpunkten im Allgemeinen abnimmt. Berechnet man die Stabilitätsgrenzen bei sehr geringer Energieentnahme durch die Dirac-Impulse, $\vartheta = 0.99$, so erkennt man, dass sich nur die Stabilitätsgrenze bei $T_P = 2.196$ s verändert. Die Stabilitätsgrenzen des untersuchten stabilen Bereichs liegen jetzt bei $T_P = 2.175$ s und $T_P = 2.335$ s. Man beachte, dass die stabilen Gebiete bei Energieentnahme durch die Impulse nicht notwendigerweise vergrößert werden, Abschnitt 3.6.2. Zuverlässige Angaben zum Stabilitätsverhalten sind nur für kleine Werte der Impulsdauer möglich.

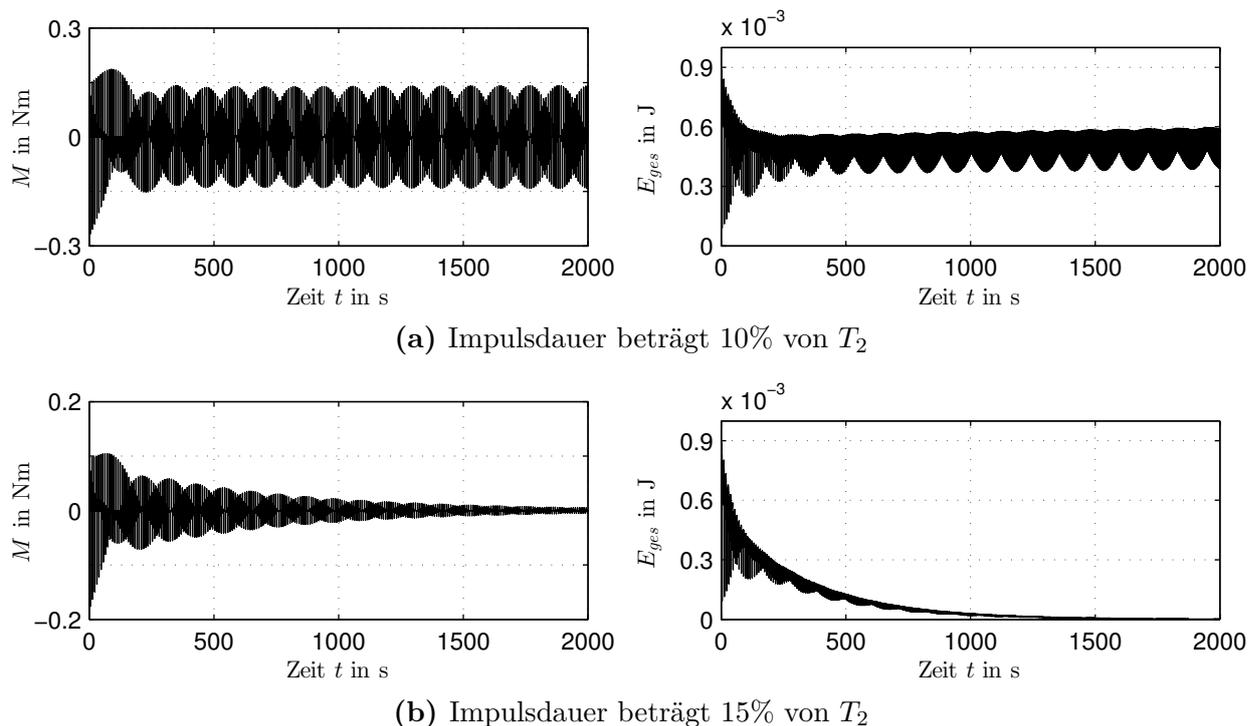


Abbildung 4.11.: Zeitverläufe des Drehmoments M und der Gesamtenergie des Systems mit Selbsterregung für Anfangsbedingung AB1; Sinus-Impulse im Zeitabstand $T_P = 2.181$ s auf Körper 1; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

4.2. Prüfstandskonstruktion

4.2.1. Auswahl der Prüfstandskomponenten

Torsionsstäbe

Die Drehsteifigkeit k eines glatten Wellenstücks der Länge l und konstanter Drillsteifigkeit GJ_T berechnet sich zu

$$k = \frac{GJ_T}{l}. \quad (4.12)$$

Um eine definierte Drehsteifigkeit bei möglichst linear-elastischem Materialverhalten zu erhalten, sollen zwei Torsionsstäbe aus Stahl verwendet werden. Die gewünschten sehr niedrigen Steifigkeiten erfordern einen Querschnitt mit sehr geringem Drillwiderstand J_T , beispielsweise einen schmalen Rechteckquerschnitt. Der Drillwiderstand J_T und die maximale Torsionsspannung τ_{max} können aus

$$J_T = \kappa_1 b h^3 \quad \tau_{max} = \kappa_2 \frac{M_T}{h^2 b} \quad (4.13)$$

berechnet werden.

Die gewählten Abmessungen und die daraus resultierenden Berechnungsfaktoren κ_1 und κ_2 , siehe zum Beispiel [11], sind in Tabelle 4.3 gelistet².

Tabelle 4.3.: Abmessungen des Rechteckquerschnittes und der Koeffizienten κ_1 , κ_2

h	b	G	κ_1	κ_2
1 mm	10 mm	80.0 GPa	0.312	3.20

Die Überprüfung, ob die Torsionsstäbe die Belastung ertragen können, erfolgt anhand der maximalen Verdrehungen des ungedämpften Systems, Gleichung (4.9). Das stellt eine konservative Abschätzung der maximalen Beanspruchung der Torsionsstäbe dar, da unter Einbeziehung der Dämpfung kleinere Maximalwerte der Verdrehungen erwartet werden, vergleiche Gleichung (4.10). Unter Berücksichtigung, dass für das Torsionsmoment $M_T = kq$ gilt, erhält man die in der Tabelle 4.4 zusammengestellten Berechnungsergebnisse.

Tabelle 4.4.: Berechnungsergebnisse für den gewählten Rechteckquerschnitt

J_T	l	$M_{T,max}$	τ_{max}
3.12 mm ⁴	332.80 mm	0.035 Nm	11.30 N/mm ²

Die maximale Torsionsspannung liegt auch für das System mit Selbsterregung unter dem Richtwert von 100 N/mm² (Verdrehdauerfestigkeit für S235JR bei wechselnder Beanspruchung). Wird ein Torsionsstab im Fehlerfall durch das maximal mögliche Drehmoment des Motors von 3 Nm belastet, versagt der Torsionsstab.

Elektrische Maschinen

Die Auswahl der elektrischen Maschinen erfolgt in dieser Arbeit nach mechanischen und konstruktiven Gesichtspunkten, das heißt in Hinblick auf das abgebbare Drehmoment im Stillstand und der Möglichkeit die gewünschten Massenträgheitsmomente I_1 und I_2 durch das Anbringen von Zusatzmassen zu erreichen. Die technische Umsetzung der Regelung wird nicht betrachtet.

²Auf eine Indexierung wird verzichtet, da zwei Torsionsstäbe mit gleichen Abmessungen verwendet werden.

Das Datenblatt der gewählten permanenterregten Synchronmaschine (PSM) ist im Anhang B beigefügt. Das im Stillstand abgebbare Drehmoment wurde auf Grund der vielen Einflussfaktoren wie zum Beispiel der Pulspause und der unbekanntenen Dämpfungskonstanten höher gewählt, als das in Gleichung (4.10) angegebene maximal erforderliche Drehmoment des gedämpften Systems mit $T_P = 2.30$ s. Die Drehmomentreserven ermöglichen aber auch Versuche mit Impulsformen, die einen höheren Scheitelwert \hat{M}_k erfordern (wie zum Beispiel Dreiecksimpulse), oder Untersuchungen zur minimal möglichen Impulsdauer.

Die Verwendung einer PSM bringt die Vorteile einer im Allgemeinen hohen Drehmomentendynamik und im Vergleich zur Asynchronmaschine einfachere Verhältnisse bei der Regelung mit sich. Es treten aber auf Grund der dauerhaften Erregung unerwünschte Drehmomente auf. Der Einfluss auf das Systemverhalten in den autonomen Zeitabschnitten kann jedoch entweder durch die Regelung unterbunden werden, wie das Drehmoment infolge der induzierten Spannung in den Statorwicklungen durch die Regelung des Stromraumzeigers auf Null, oder werden wegen des konstruktiv optimierten Motoraufbaus (Rastmomente und Wirbelströme) und geringen Winkelgeschwindigkeit (Wirbelströme) als gering erwartet.

4.2.2. Beschreibung der Grobkonstruktion

Abbildung 4.12 zeigt schematisch den Versuchsaufbau für die ausgewählten Prüfstandskomponenten. Die Fixierung des ersten Torsionsstabes im Inertialsystem erfolgt über eine Konsole, die auf einem Aufspanntisch befestigt ist. Auch die beiden permanenterregten Synchronmaschinen sind mittels geschweißter Konsolen mit dem Aufspanntisch verbunden. Auf den Motorwellen ist jeweils ein Wellenadapter befestigt, der zur Fixierung der Zusatzmasse und des Torsionsstabes verwendet wird. Um die geforderten Massenträgheitsmomente zu erreichen, ist eine zylindrische Stahlscheibe mit Außendurchmesser $d_a = 162$ mm, Innendurchmesser $d_i = 24$ mm bei einer Dicke von $t = 12$ mm erforderlich, wobei die Massenträgheitsmomente des Rotors und des Wellenadapters berücksichtigt wurden. Die Verbindung der beiden elektrischen Antriebe über den zweiten Torsionsstab ist nur nach Abnahme des Drehgebers und Anbringen eines Wellenadapters möglich³. Der geregelte Betrieb der PSM 1 ist somit nur nach Aufbau einer zusätzlichen Messeinrichtung möglich. Die in der Skizze angegebene Länge der Torsionsstäbe von 333 mm bedeutet die freie Weglänge zwischen den Einspannungen.

³In der Abbildung 4.12 ist die PSM 1 daher nur schematisch eingezeichnet.

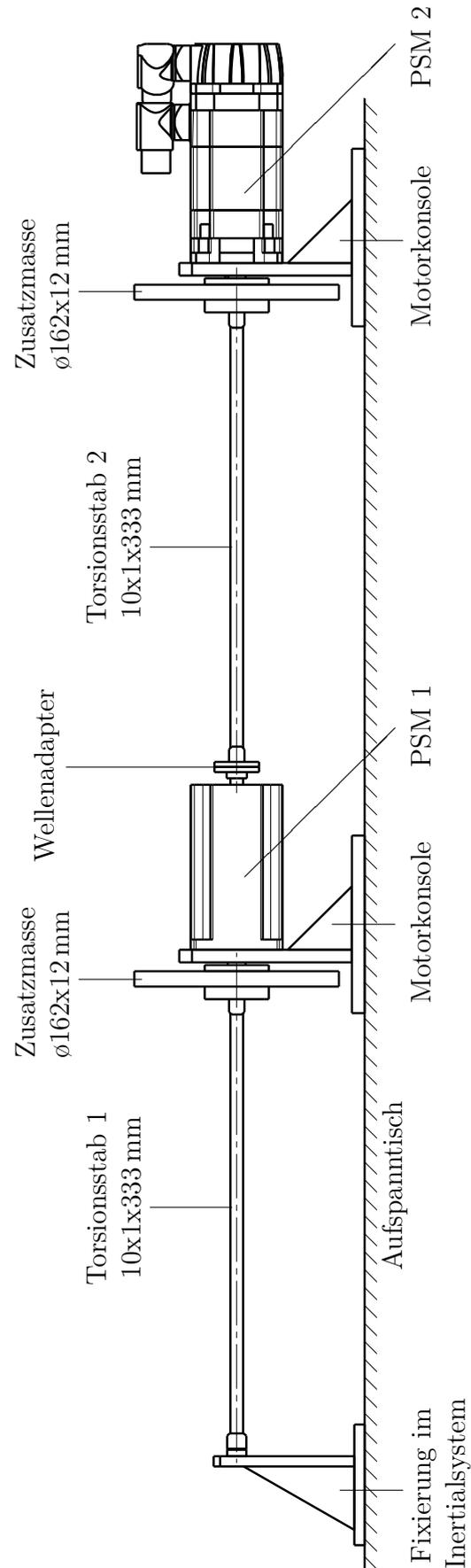


Abbildung 4.12.: Grobe Konstruktion der Versuchseinrichtung

5. Zusammenfassung und Ausblick

Mit Hilfe numerischer Simulationen wurde die Möglichkeit der verbesserten Schwingungsdämpfung und die Unterdrückung selbsterregter Schwingungen durch eine wiederholte stoßhafte Erregung der Körper eines Drehschwingungssystems untersucht. Bei der Herleitung einer Stabilitätsbedingung nach [1], wurde unter Verwendung der elementaren Stoßtheorie und eines festen zeitlichen Abstands zwischen den Impulsen, der Pulspause T_P , eine Abbildungsmatrix ermittelt, deren Eigenwerte über die Stabilität des Systems entscheiden. Die Impulsstärke wurde dabei derart bestimmt, dass der Gesamtenergieinhalt des Systems über einen Impuls hinweg konstant bleibt. Eine passend gewählte Folge von Dirac-Impulsen bewirkt einen bidirektionalen Transfer von Schwingungsenergie zwischen ausgewählten Moden und ermöglicht dadurch eine bessere Ausnutzung der Dämpfungseigenschaften beziehungsweise die Stabilisierung eines instabilen autonomen Systems. Durch Skalieren der Impulsstärke mit dem Faktor ϑ , kann an den diskreten Stoßzeitpunkten zusätzlich die Gesamtenergie des Systems gezielt beeinflusst werden. Es zeigt sich, dass die Energieentnahme bei $\vartheta = 0.5$ maximal wird. Für $\vartheta = 0$ beziehungsweise $\vartheta = 1$ bleibt der Energieinhalt des Systems über einen Impuls hinweg konstant.

Zeitsimulationen für ein gedämpftes 2-FG-System und $\vartheta = 1$ zeigten für den Großteil der betrachteten Pulspausen einen positiven Effekt der Dirac-Impulskrafterregung hinsichtlich einer rascheren Schwingungsreduktion. Wurde jedoch eine zum ersten Eigenvektor proportionale Anfangsauslenkung bei verschwindender Anfangsgeschwindigkeit als Anfangsbedingung gewählt, konnte die Dirac-Impulskrafterregung das Systemverhalten nicht beeinflussen, falls T_P einem ganz- oder halbzahligen Vielfachen der Periodendauer der ersten Eigenfrequenz T_1 entsprach. Die zum Geschwindigkeitszustand unmittelbar vor einem Impuls direkt proportionale Impulsstärke ergab dann jeweils Null, weil zu den diskreten Impulszeitpunkten stets ein Nulldurchgang der physikalischen Geschwindigkeiten vorlag. Bei sehr kurzen Abständen zwischen den Impulsen konnte ein im Vergleich zum autonomen System langsames Abklingen der Schwingungsamplituden auftreten, da sich die ausgelenkte Lage, um die das System schwingt, nur sehr langsam der Nullage näherte. Die Beurteilung, ob eine verbesserte Schwingungsdämpfung zu erwarten ist, erfolgte durch Vergleichen der betragsgrößten Eigenwerte der Systeme mit und ohne Dirac-Impulskrafterregung.

Wurde dem System durch die Dirac-Impulse die maximal mögliche Energiemenge entnommen, das heißt $\vartheta = 0.5$, trug der modale Energietransfer bei geeignet gewählter Pulspause nur mehr unwesentlich zur Reduktion der Schwingungsenergie bei. Wenn die Dirac-Impulse auf einen Körper wirken, kann dem Körper bei einem Stoß die gesamte, momentan gespeicherte kinetische Energie entzogen werden. Für den gewählten Parametersatz des untersuchten 2-FG-Systems zeigte sich, dass bei gleich gewichteten Impulsen auf beide Körper ($f_1 = f_2$) die Entnahme der gesamten kinetischen Energie des Systems möglich ist, wenn die Absolutbeträge und Vorzeichen der physikalischen Geschwindigkeitskomponenten übereinstimmen. Die gesamte Schwingungsenergie konnte deshalb innerhalb weniger Impulse dissipiert werden. Pulspausen, die einem ganz- oder halbzahligen Vielfachen einer Eigenfrequenz entsprechen, sollten jedenfalls vermieden werden, da beobachtet werden konnte, dass stets eine Anfangsbedingung existiert, bei der die Dirac-Impulskrafterregung ohne Wirkung bleibt. Im Verlauf des betragsgrößten Eigenwertes konnten neben den lokalen Maximumstellen bei ganz- und halbzahligen Vielfachen der Periodendauer einer Eigenfrequenz, auch lokale Maxima bei ganzzahligen Vielfachen der Periodendauer von Kombinationsfrequenzen identifiziert werden. Zeitsimulationen zeigten, dass sich für diese Pulspausen ein im Mittel konstantes Verhältnis der modalen Energieinhalte einstellt. Das Systemverhalten war dann nur mehr geringfügig beeinflussbar.

Der Vektor \mathbf{f} legte fest, an welchen Körpern die Erregung angreift. Für N -FG-Systeme, mit $N > 2$, sind an den Stoßzeitpunkten bei einer einfachen Wahl von \mathbf{f} im Allgemeinen alle Schwingungsmoden gekoppelt. Dass der modale Energietransfer durch geeignete Wahl von \mathbf{f} nur zwischen ausgewählten Schwingungsmoden auftritt, wurde beispielhaft anhand eines gedämpften 3-FG-Systems gezeigt.

Die Untersuchung von selbsterregten 2-FG-Systemen erfolgte mit Hilfe von Parameterstudien, dabei wurde stets die Pulspause T_P und zusätzlich ein Modellparameter variiert. Die Selbsterregung wurde im Modell durch das Hinzufügen eines Dämpferelementes mit negativer Dämpfungskonstante eingeführt. Hinsichtlich der Parameterbereiche, für die eine Stabilisierung des instabilen Systems möglich ist, zeigte sich eine Abhängigkeit von der Wahl des Vektors \mathbf{f} . Unabhängig von \mathbf{f} und ϑ galt, dass eine Folge von Dirac-Impulsen im zeitlichen Abstand von Vielfachen der Periodendauer einer der beiden Eigenfrequenzen das System nicht stabilisieren konnte, falls der zugehörige Schwingungsmodus des autonomen Systems instabil war. Diese Bedingung kann auf Mehrfreiheitsgrad-Systeme verallgemeinert werden. In den Stabilitätskarten für Energiekonstanz über einen Stoß hinweg lagen markante Punkte vor, wenn ganzzahlige Vielfache der Periodendauern der Kombinationsfrequenzen und halb- oder ganzzahlige Vielfache der Periodendauern der Eigenfrequenzen übereinstimmen. Es konnte für einige Parameterbereiche beobachtet werden, dass in der Umgebung dieser Punkte, lokale Maximumstellen und daher unter Umständen instabile Bereiche entlang von Vielfachen von T_2 existieren.

Als Ergebnis der Parameterstudien bei Energiezu- oder -abfuhr durch die Dirac-Impulse lässt sich festhalten, dass eine Entnahme von Energie nicht notwendigerweise eine Vergrößerung der stabilen Gebiete bedingte. Die Stabilisierung des instabilen autonomen Systems war in manchen Parameterbereichen nur bei Energiezufuhr durch die Dirac-Impulse möglich. Bei größtmöglicher Energieentnahme durch die Dirac-Impulse, nahm der betragsgrößte Eigenwert in den lokalen Minima mitunter sehr niedrige Werte an. Selbsterregte Schwingungen konnten innerhalb weniger Impulse vollständig unterdrückt werden. Analog zum gedämpften System, traten auch für das System mit Selbsterregung und maximaler Energieentnahme an den Impulszeitpunkten lokale Maximumstellen des betragsgrößten Eigenwertes bei Vielfachen der Periodendauer der Kombinationsfrequenzen $T_{12,\pm}$ auf. Zeitsimulationen zeigten wiederum, dass sich über die Impulse ein konstantes Verhältnis der modalen Energien einstellt. Die Identifikation aller instabiler Bereiche durch Pulspausen, die ein Vielfaches von T_1 , T_2 und $T_{12,\pm}$ betragen, wurde exemplarisch für die Parametervariation von I_1 und $\vartheta = 0.5$ gezeigt.

Der Übergang zu technisch realisierbaren Impulsformen mit endlicher Impulsdauer erfolgte unter der Voraussetzung, dass die Impulsdauer stets klein gegenüber der kleinsten Eigenschwingungsdauer des mechanischen Systems ist. Der Parametersatz des untersuchten einseitig gefesselten 2-FG-Systems wurde derart gewählt, dass eine Umsetzung in Form eines Prüfstandes möglich ist. Am ungedämpften System wurde für eine Folge von Sinus-Impulsen gezeigt, dass die Gesamtenergie an den Impulszeitpunkten im Allgemeinen abnimmt. Dieser Effekt war für Impulse mit hoher Impulsstärke und für große Werte der Impulsdauer stärker ausgeprägt. Der Vergleich der Zeitverläufe für die Werte der Impulsdauer $t_p = 0.10 \cdot T_2$ und $t_p = 0.15 \cdot T_2$ zeigte eine sehr gute Übereinstimmung, falls eine Pulspause in einem lokalen Minimum des betragsgrößten Eigenwertes verwendet wurde. Das galt sowohl für das gedämpfte System als auch für das System mit Selbsterregung. Der Einfluss der endlichen Impulsdauer trat bei Zeitsimulationen an der Stabilitätsgrenze deutlich hervor. In Bezug auf technisch realisierbare Werte der Impulsdauer, ergab sich für den gewählten Parametersatz daher die Forderung nach einer möglichst großen Periodendauer T_2 . Dies wurde bei der Konzeption des Prüfstandes durch Torsionsstäbe mit sehr geringem Drillwiderstand und dem Anbringen von Zusatzmassen auf den Rotoren der zwei elektrischen Aktoren erfüllt. Die elektrischen Aktoren in Form von geregelten elektrischen Antrieben stellen am Versuchsbeginn die Anfangsauslenkung ein und sind dann, mit Ausnahme der inhomogenen Zeitabschnitte, stets inaktiv.

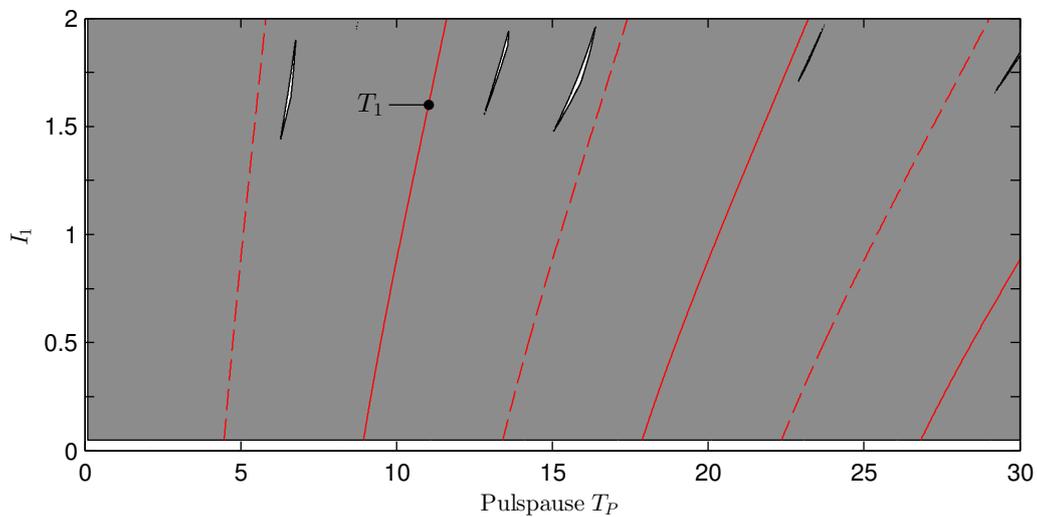
Da die Dirac-Impulskrafterregung in dieser Arbeit erstmals umfassend betrachtet wurde, ergeben sich viele offene Fragestellungen. Die Untersuchungen beschränkten sich beinahe ausschließlich auf 2-FG-Systeme, daher stellt sich die Frage, ob die gefundenen Erkenntnisse auch auf Mehrfreiheitsgrad-Systeme übertragbar sind. Vor allem in Hinblick darauf, dass jene Pulspausen, die keinen oder nur einen geringen Einfluss auf das Systemverhalten erlaubten, in Zusammenhang zu den Eigen- und Kombinationsfrequenzen des Systems gebracht werden

konnten. Weiters eröffnet die zeitdiskrete Einwirkung die Möglichkeit, durch eine intelligente Regelung nur dann einen Impuls aufzubringen, wenn der Transfer von Energie in stärker gedämpfte oder stabile Schwingungsmoden erfolgt, wie für die Impuls-Parametererregung von Pumhössel und Hehenberger in [7],[8] vorgeschlagen. Auch wird erwartet, dass, bei gleicher Impulsdauer und Impulsstärke, Impulsformen mit einem hohen Flächenanteil in der unmittelbaren Umgebung des Impulszeitpunktes eine bessere Näherung des Dirac-Impulses darstellen.

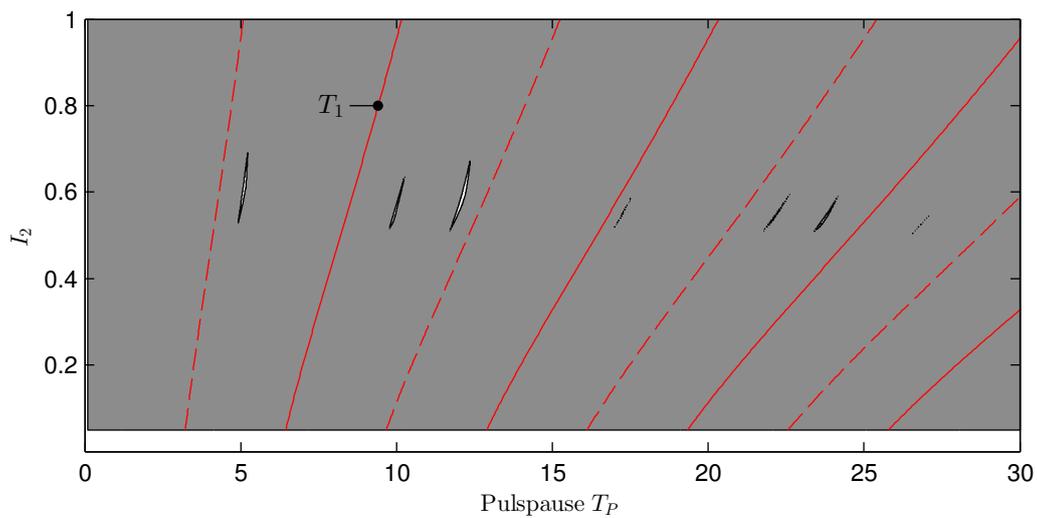
Das erarbeitete Prüfstandskonzept und der verwendete Parametersatz können nur als Anhaltspunkt für weitere Entwicklungen in Richtung der endgültigen Konstruktion dienen. Wesentliche Einflussfaktoren, wie zum Beispiel welche Werte der Impulsdauer tatsächlich realisiert werden können, waren noch nicht bekannt. Des Weiteren muss noch geprüft werden, ob die Verwendung einer selbstgeköhlten permanenterregten Synchronmaschine zulässig ist, oder ob auf Grund der Temperaturabhängigkeit der Maschinenparameter eine Fremdkühlung vorgesehen werden muss. Darüber hinaus ist für den ausgewählten Servomotor keine Sonderausführung mit zweitem Wellenende verfügbar, die vorgesehene Verwendung der ersten elektrischen Maschine ist somit nur nach Abnahme des Drehgebers und Aufbau einer separaten Messeinrichtung möglich. Diese Lösung ist aus ökonomischer Sicht nicht sinnvoll und sollte wenn möglich vermieden werden. Um im praktischen Versuch gute Ergebnisse zu erhalten, muss eine sorgfältige Parameteridentifikation durchgeführt werden, da die Vorausberechnung der benötigten Impulsstärke einen wesentlichen Einflussfaktor darstellt. Zur möglichst genauen Erfassung der Absolutdämpfungen infolge der elektrischen Maschinen, muss eventuell ein alternativer Dämpfungsansatz in Form einer Diagonalmatrix mit individuell identifizierbaren Dämpfungskonstanten gewählt werden. Eine brauchbare Annäherung der realen Dämpfung durch das massenproportionale Dämpfungsmodell, kann, wenn überhaupt, nur bei baugleichen elektrischen Maschinen und gleich großen Zusatzmassen erwartet werden.

A. Stabilitätskarten

A.1. Schwingungsunterdrückung infolge des modalen Energietransfers



(a) Variation von T_P und I_1



(b) Variation von T_P und I_2

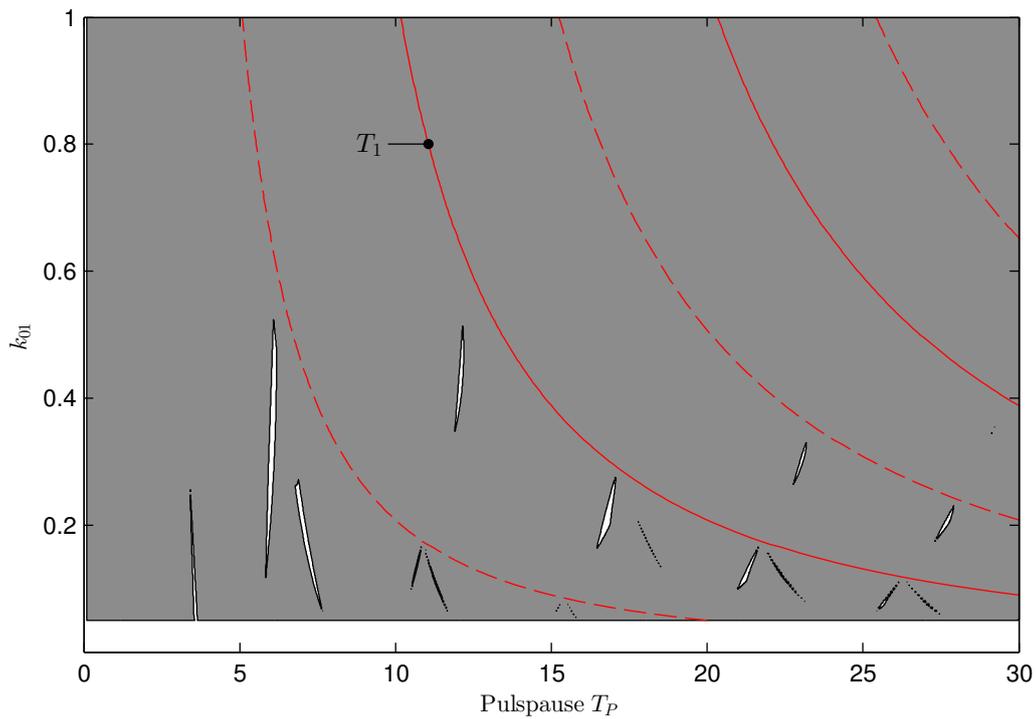
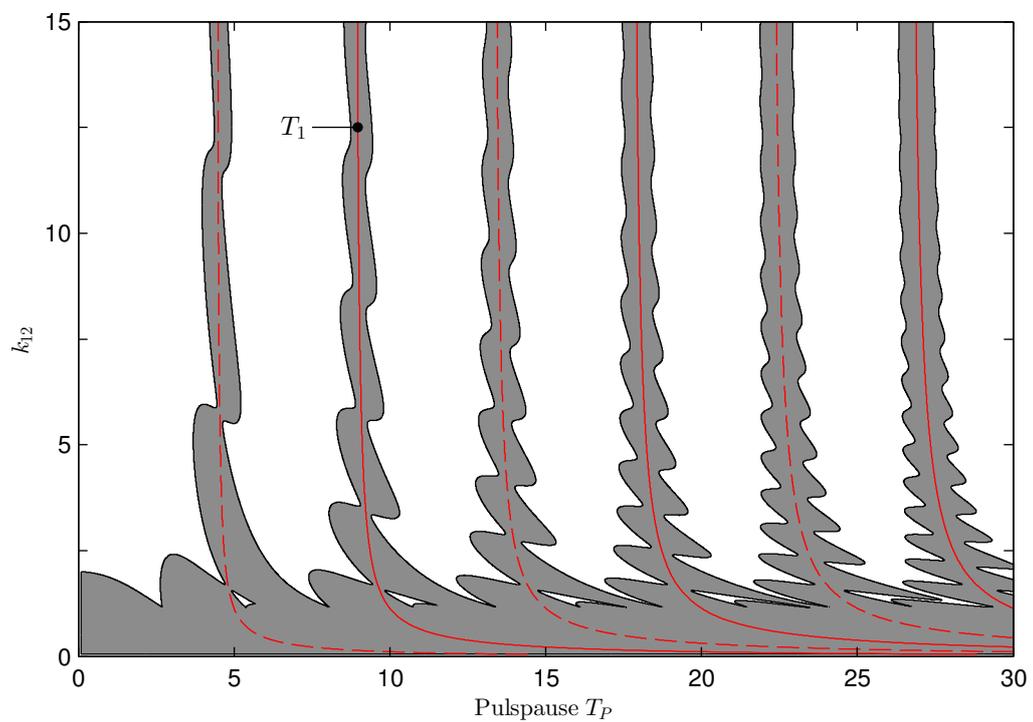
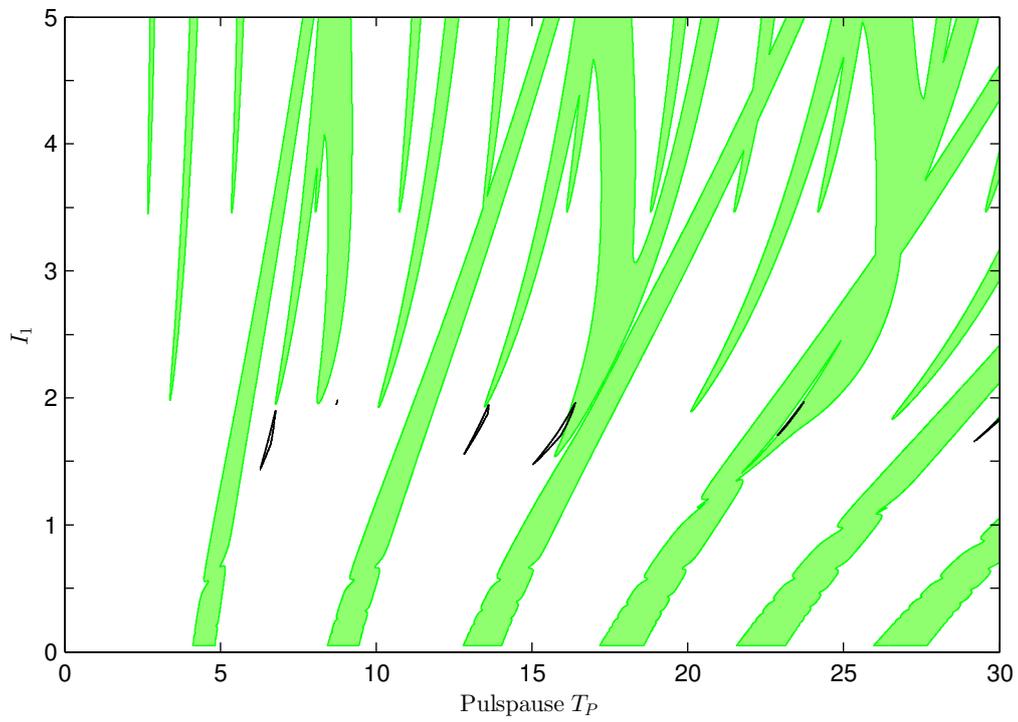
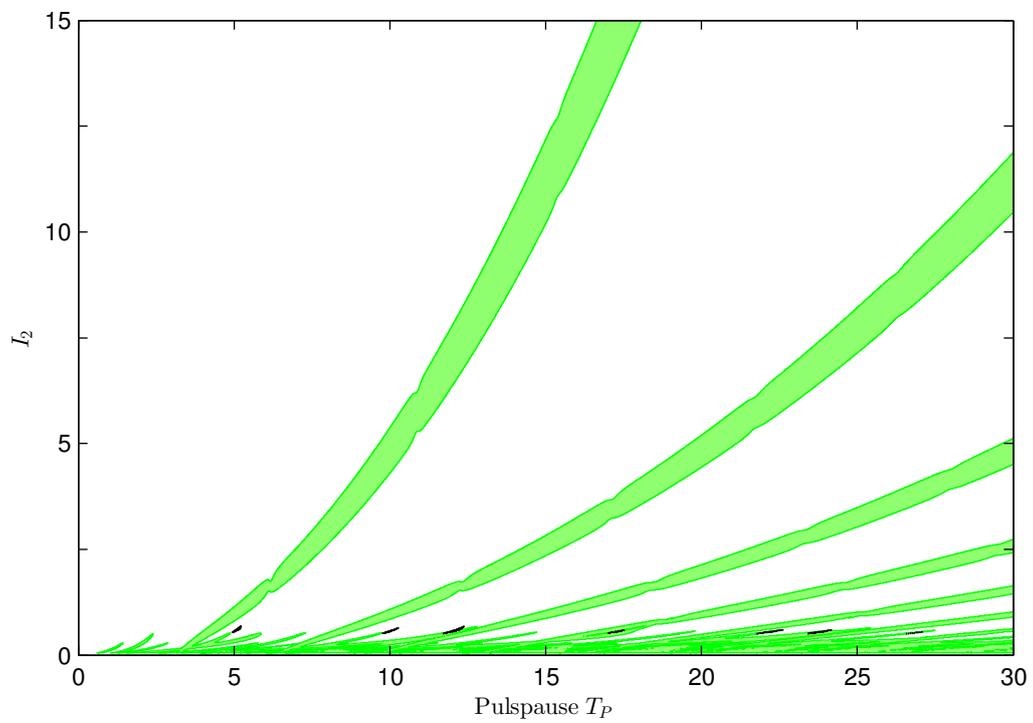
(c) Variation von T_P und k_{01} (d) Variation von T_P und k_{12}

Abbildung A.1.: Stabilitätskarten bei Variation von T_P und eines zusätzlichen Parameters; weiß/grau: stabil/instabil, rot: Vielfache von T_1 ; Dirac-Impulse auf Körper 2; Energiekonstanz während des Stoßes, d.h. $\vartheta = 1$

A.2. Energiezu- und -abfuhr durch die Dirac-Impulse



(a) Variation von T_P , I_1 und ϑ



(b) Variation von T_P , I_2 und ϑ

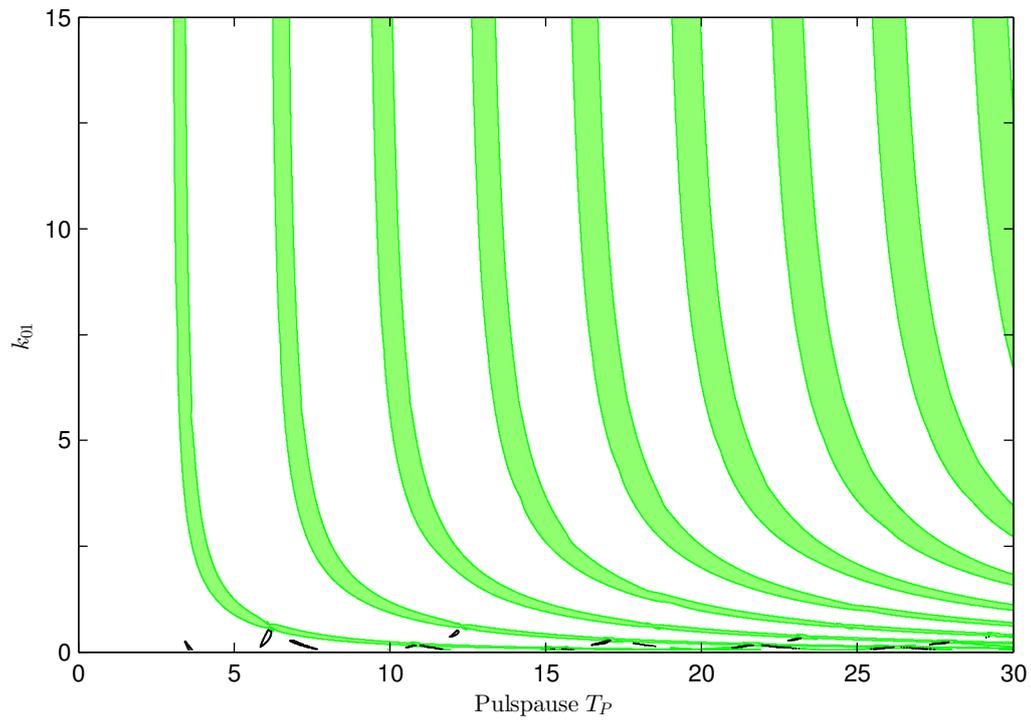
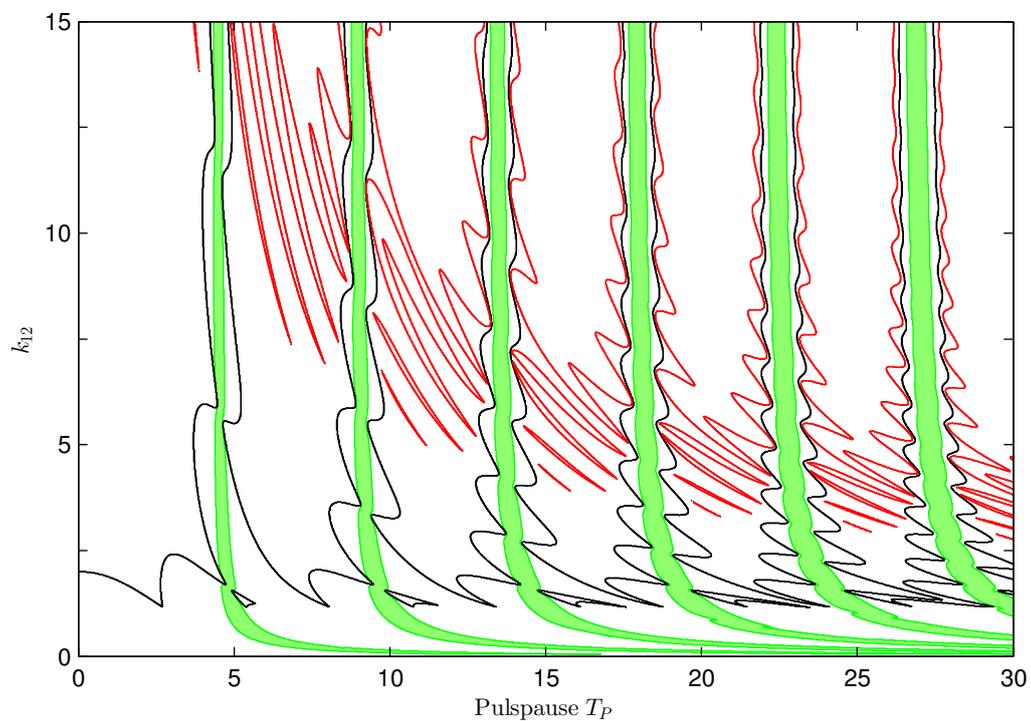
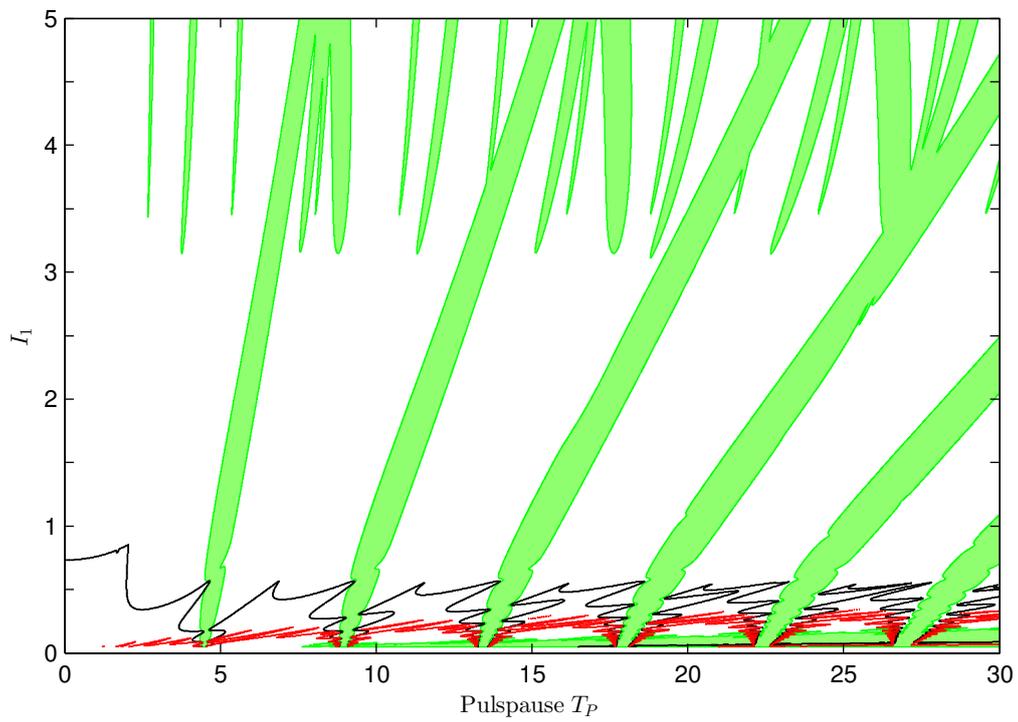
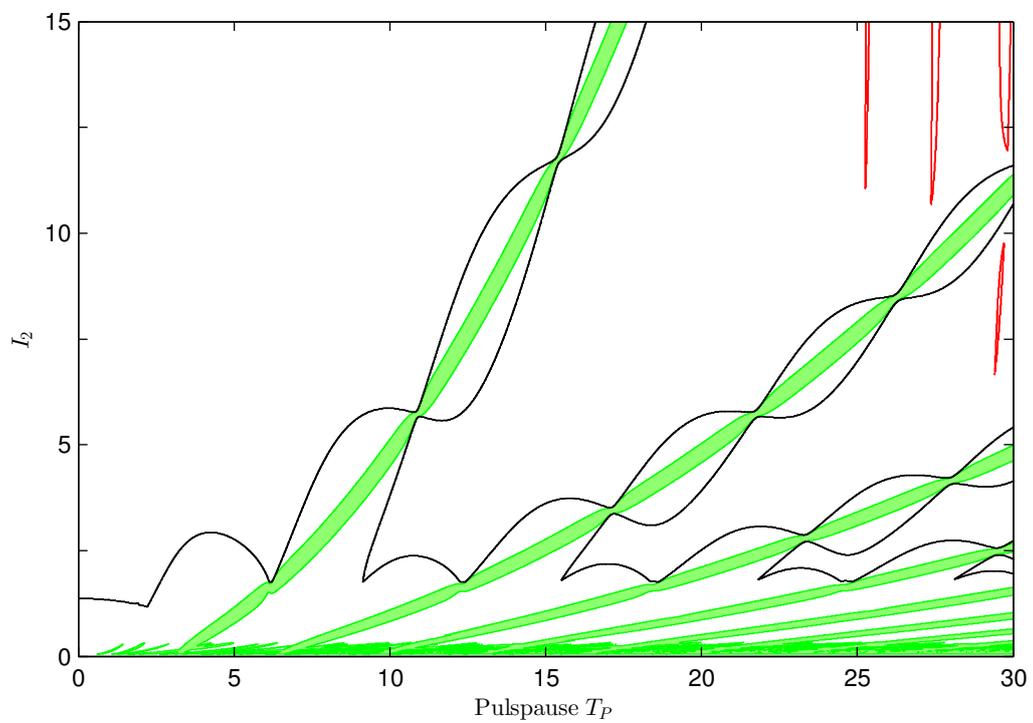
(c) Variation von T_P , k_{01} und ϑ (d) Variation von T_P , k_{12} und ϑ

Abbildung A.2.: Stabilitätskarte bei Variation von T_P , eines Modellparameters und ϑ ; weiß/grün: stabil/institut für $\vartheta = 0.5$, schwarz/rot: Stabilitätsgrenze für $\vartheta = 1/\vartheta = 1.25$; Dirac-Impulse auf Körper 2



(a) Variation von T_P , I_1 und ϑ



(b) Variation von T_P , I_2 und ϑ

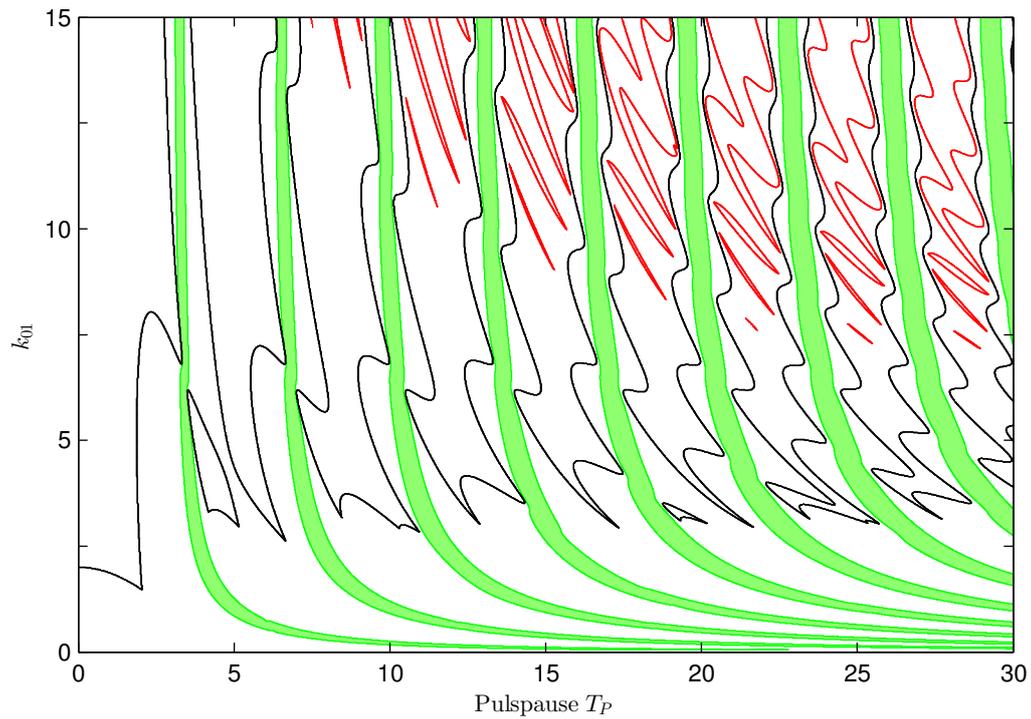
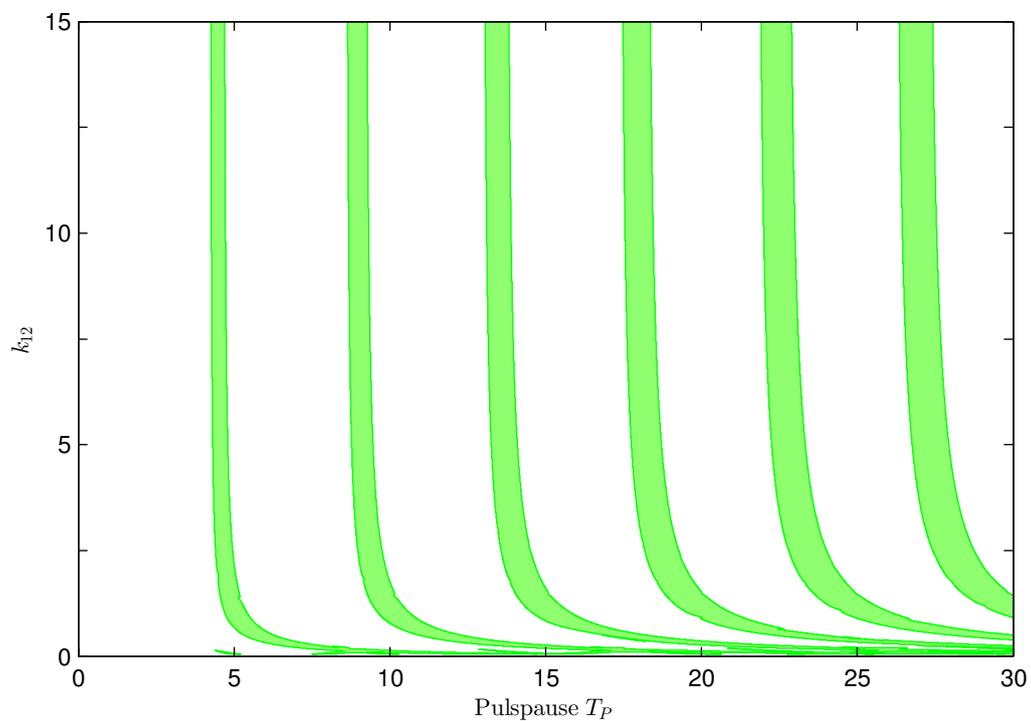
(c) Variation von T_P , k_{01} und ϑ (d) Variation von T_P , k_{12} und ϑ

Abbildung A.3.: Stabilitätskarte bei Variation von T_P , eines Modellparameters und ϑ ; weiß/grün: stabil/instabil für $\vartheta = 0.5$, schwarz/rot: Stabilitätsgrenze für $\vartheta = 1/\vartheta = 1.25$; Dirac-Impulse auf beide Körper

B. Datenblatt

SIEMENS

Synchronservomotor

Bestelldaten 1FK7032-2AF21-1BA0



Abbildung ähnlich

Kunden-Auftrags-Nr. :
Siemens-Auftrags-Nr. :
Angebots-Nr. :
Bemerkung :

Item-Nr. :
Komm.-Nr. :
Projekt :

Projektierungsdaten		Physikalische Konstanten	
Bemessungsdrehzahl	3000 1/min	Drehmomentkonstante	0,67 Nm/A
Polzahl	6	Spannungskonstante bei 20° C	45,0 V/1000*min ⁻¹
Bemessungsdrehmoment (100 K)	1,0 Nm	Wicklungswiderstand bei 20° C	5,05 Ω
Bemessungsstrom	1,6 A	Drehfeldinduktivität	17,3 mH
Stillstandsrehmoment (60 K)	0,95 Nm	Elektrische Zeitkonstante	3,45 ms
Stillstandsrehmoment (100 K)	1,1 Nm	Mechanische Zeitkonstante	2,20 ms
Stillstandsstrom (60 K)	1,4 A	Thermische Zeitkonstante	25 min
Stillstandsstrom (100 K)	1,7 A	Wellentorsionssteifigkeit	6000 Nm/rad
Trägheitsmoment des Rotors	0,0000650 kgm ²	Nettogewicht des Motors	2,7 kg
Wirkungsgrad	85,0 %		
Mechanische Daten		Optimaler Betriebspunkt	
Motortyp	Compact	Optimale Drehzahl	3000 1/min
Achshöhe	36 mm	Optimale Leistung	0,3 kW
Gebersystem	Encoder AS24DQ1: Absolutwertgeber Singleturn 24 bit	Empfohlenes Motor Module	
Kühlung	Selbstkühlung	Bemessungsstrom Umrichter	2 A
Haltebremse	keine Bremse	Maximalstrom Umrichter	5 A
Wellenende	Passfeder u. Passfedernut	Max. Drehmoment	3,00 Nm
Rundlauf toleranz	N		
Schwinggrößenstufe	Stufe A		
Steckergröße	1		
Schutzart	IP64		
Bauform gemäß Code I	IM B5 (IM V1,IM V3)		
Elektrischer Anschluss	Stecker für Signale und Leistung, drehbar		
Farbe des Gehäuses	Anthrazit RAL 7016		

Literaturverzeichnis

- [1] Pumhössel, T.: *Targeted modal energy transfer in dynamical systems by force excitation of impulsive type*. Technical Report, Johannes Kepler Universität Linz, Austria, 2015.
- [2] Tondl, A.: *To the problem of quenching self-excited vibrations*. Acta Technica CSAV, 43, S.109-116, 1998.
- [3] Ecker, H.; Pumhössel, T.: *Vibration Suppression and Energy Transfer by Parametric Excitation in Drive Systems*. Proceedings IMechE Part C., J Mechanical Engineering Science 226(8), S.2000-2014, 2012.
- [4] Dohnal, F.; Tondl, A.: *Induced energy transfer between vibration modes using time periodicity*. In: 11th International Conference on Vibration Problems, Lisbon, Portugal, 2013.
- [5] Hsu, C.S.: *Impulsive Parametric Excitation: Theory*. Journal of Applied Mechanics, Vol.39(2), S.551-558, 1972.
- [6] Hsu, C.S.; Cheng, W.-H.: *Applications of the Theory of Impulsive Parametric Excitation and New Treatments of General Parametric Excitation Problems*. Journal of Applied Mechanics, Vol.40(1), S.78-86, 1973.
- [7] Pumhössel, T.; Hehenberger, P.: *Impulsive parametric excitation as a means to transfer energy between modes of vibration*. Proceedings of 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC), Wien, 2014.
- [8] Pumhössel, T.; Hehenberger, P.: *Analysis of time-varying mechanical systems using the method of impulsive parametric excitation*. IFAC-PapersOnLine, Proceedings of 8th Vienna International Conference on Mathematical Modelling, Volume 8, Number 1, S.75-80, 2015.
- [9] Nucera, F.; Vakakis, A.F.; McFarland, D.M.; Bergman, L.A.; Kerschen, G.: *Targeted energy transfer in vibro-impact oscillators for seismic mitigation*. Nonlinear Dynamics, 50, S.651-677, 2007.

- [10] Al-Shudeifat, M.A.; Wierschem, N.; Quinn, D.D.; Vakakis, A.F.; Bergman, L.A.; Spencer Jr., B.F.: *Numerical and experimental investigation of a highly effective single-sided vibro-impact nonlinear energy sink for shock mitigation*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 52, S.96-109, 2013.
- [11] Parkus, H.: *Mechanik der festen Körper*. 2. Auflage 6. unveränderter Nachdruck, Springer Verlag, 2005.