



DIPLOMARBEIT

Simulation des Stromflusses in Supraleiter-Kupfer-Kompositen

Ausgeführt am Institut für
Festkörperphysik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Michael REISSNER

durch

Patrick Binder, BSc

Hofstraße 44, 3123 Zagging

Oktober 2016

Erklärung

Ich erkläre eidesstattlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die angegebenen Quellen nicht benutzt und die den benutzten Quellen entnommenen Stellen als solche gekennzeichnet habe. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Wien, am 24. Oktober 2016

Patrick Binder, BSc

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei meiner Diplomarbeit und während meines Studiums unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Reisner, der mir hilfsbereit und äußerst geduldig mit seiner fachlichen Kompetenz zur Seite stand hat. Weiters bedanke ich mich bei Sebastian, der meine komplizierte Ausdrucksweise versteht und mir dabei geholfen hat, sie gut verständlich aufzubereiten. Ich bedanke mich auch bei Verena, die sehr viel Zeit in Lastminute-Rechtschreibkorrekturen investiert und bis tief in die Nacht diese Arbeit verbessert hat.

Außerdem gilt mein Dank meiner Freundin Anschi, die mich immer unterstützte und auch zu mir hält wenn es schwierig wird, meinen Eltern, die mich in meiner komplexen und schwierigen Bildungslaufbahn immer unterstützt haben, meinen Großeltern, die mir immer zuhörten auch wenn es mal unverständlich wurde, sowie meiner Lerngruppe, die trotz meiner Vorgabe eines straffen Zeitplans immer mitgemacht hat.

Abstract

The purpose of this thesis was to explain, why measured critical current densities, determined by transport measurement of multifilamentary MgB₂ superconductors are largely different, if measured on whole wire or only on single filaments. It should be checked how the Cu-matrix, in which the MgB₂ filaments are embedded, influences the current flow. Although, at first it was assumed that the Proximity effect may play a role, it could be excluded only by looking at the theoretical background. For further answers regarding the difference in measured critical current density, simulations of the current flow in magnesium diboride multifilament wires were made using COMSOL. In order to do so, a theoretical background for the simulations, as well as the physics modules of COMSOL, had to be understood and worked out.

In this thesis two and three dimensional simulations were made and it could be shown that contact resistances between power source and filament, as well as the surrounding normal conducting materials, have a strong influence on the measurement precision using four-point-measurement.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
2. Supraleitung	3
2.1. Historischer Überblick	3
2.2. Meißner-Ochsenfeld-Effekt	3
2.3. BCS-Theorie	5
2.4. Typen von Supraleitern	6
2.5. Flux Flow Bereich	6
3. Proximity	9
3.1. Proximity	9
3.1.1. Andreev-Reflexion	9
4. Widerstandsmessung	11
4.1. Zweileitermessung	11
4.2. Vierleitermessung	12
4.3. Mögliche Vierleitermessungsproblematik an einem supraleitenden Filament	14
5. Numerische Berechnung eines Supraleiters	17
5.1. Maxwell-Gleichungen	17
5.2. Materialgleichungen	18
5.3. Das magnetische Vektorpotential	18
5.4. Quasistatische Näherung	19
5.4.1. Makroskopische Formulierungen für die numerische Berechnung	19
5.5. Formulierungen und Parameter Zusammenfassung für die Simulationen	25
6. Comsol Multiphysics	27
7. Einführung in Comsol anhand des Beispielprogramms "Superconducting Wire"	29
7.1. Modell-Assistent	30
7.2. Model Builder	30
7.2.1. Definitionen	30
7.2.2. Geometrie	32
7.2.3. Material	32
7.2.4. Physik - Magnetische Feldformulierung	34
7.2.5. Das Netz - die Erstellung der finiten Elemente	35

7.3. Die Studie	36
7.4. Ergebnisse	37
7.5. Fazit	39
8. 2D Simulationen mit zeitabhängiger Stromquelle	41
8.1. Einfilament Supraleiter	41
8.1.1. Zusätzliche Eingaben	41
8.2. Zweifilament Supraleiter	48
8.2.1. Fazit	53
8.3. 17-Filamente in Anlehnung an die reale Probe	53
8.3.1. Die Messung	55
8.3.2. Fazit	59
9. 3D Simulationen mit zeitabhängiger Stromquelle	61
9.1. 16-Filament Supraleiter mit Goldkontakten	66
9.1.1. Messung	66
9.1.2. Fazit	68
9.2. 16-Filament Supraleiter mit verkleinerten Goldkontakten	68
9.2.1. Messung	68
9.2.2. Fazit	71
9.3. 16-Filament Supraleiter mit Aluminium Kontakten	72
9.3.1. Messung	72
9.3.2. Fazit	74
9.4. Supraleitendes Monofilament mit Gold Kontakten	74
9.4.1. Messung	75
9.4.2. Fazit	77
9.5. Supraleitendes Monofilamente mit Gold Kontakten ohne umliegende Normalleiter	78
9.5.1. Messung	78
9.5.2. Fazit	80
10. Zusammenfassung	81
A. Anhang	83
A.1. Comsol Import Export	83

1. Einführung

Bei Messungen eines supraleitenden Multifilamentdrahtes fiel auf, dass die Transportmessungen über das gesamte Multifilament nicht mit den elektrischen Vierleitermessungen an einem einzelnen Filament übereinstimmten. Letztere waren ca. um den Faktor 2-3 größer [1]. Naiverweise könnte man davon ausgehen, dass Strom, der an einem Filament angeschlossen ist, solange dieses supraleitend ist, nicht von den anderen Materialien und übrigen Filamenten beeinflusst wird. Meine Arbeit soll zur Klärung beitragen, warum es im supraleitenden Fall einen möglichen Stromfluss über das an die Filamente angrenzende Kupfer und Titan gibt. Drei Fragestellungen standen zu Beginn der Arbeit im Raum:

1. Hat es etwas mit dem Proximity-Effekt zu tun? Der Proximity-Effekt, auch Nachbarschafts-Effekt genannt, tritt unter anderem bei zu Supraleitern benachbarten Normalleitern auf. Die Cooper-Paare dringen in das benachbarte Material ein und verleihen ihm so den Effekt der Supraleitung [2]. Eine detaillierte Ausführung zum Proximity-Effekt ist in Kapitel 3 zu finden.
2. Fließt Strom über das Kupfer zu benachbarten Filamenten? Die Idee baut darauf auf, dass der Supraleiter nie homogen zusammenbricht, sondern nur lokal abhängig ist von der Stromdichte. Weiters bestand der Gedanke, dass das Filament, welches kontaktiert ist, zuerst in der Nähe der Kontaktstellen zusammenbräche, da dort die Stromdichte höher sein müsste. Der Strom nimmt bei zunehmender örtlicher Entfernung von der Kontaktstelle eher den Weg über das Kupfer.
3. Liegt es an den Kontakt- und Übergangswiderständen? Die Kontaktstellen der Stromquelle bei der Vierpunktmessung bestehen aus Gold. Sie liegen auch am Kupfer an [1] und besitzen Übergangswiderstände. Dadurch wird eine scheinbare Erhöhung des Widerstands des Supraleiters bewirkt. Eine nähere Ausführung über die Vierpunktmessung ist in Kapitel 4 zu finden.

In den Versuchen, auf die diese Arbeit aufbaut, wurde Magnesiumdiborid MgB_2 verwendet [3, 4, 1, 5]. Das Problem bei Magnesiumdiborid ist aber, dass es sich, sobald die Supraleitung zusammenbricht, stark erwärmt, da es einen hohen Widerstand im normalleitenden Bereich hat. Für die praktische Anwendung wird das Material als Multifilament in Kupfer gepackt. Die Kupferummantelung hat den Vorteil, dass sie den Strom bei Zusammenbruch der Supraleitung kurzfristig aufnehmen kann.

Um zu verhindern, dass das Magnesiumdiborid mit dem umliegenden Kupfer chemisch reagiert, wird eine Ummantelung aus Titan verwendet, welches mit beiden Materialien nicht reagiert. Zur mechanischen Stabilisierung des Multifilaments wird das Kupfer noch mit Stahl ummantelt [4]. Die Herstellung des Supraleiters erfolgt durch Sintern von Magnesium- und Borpulver [5].

In der folgenden Arbeit werden die genannten Erklärungsansätze diskutiert. Weiters werden mit Hilfe von numerischen Simulationen diese Ansätze untersucht. Den ersten Teil der Arbeit bilden der theoretische Hintergrund der Supraleitung (siehe Kapitel 2), eine Einführung in den Proximity Effekt (siehe Kapitel 3), eine Einführung in die Widerstandsmessung (siehe Kapitel 4) und die numerische Berechnung eines Supraleiters (siehe Kapitel 5).

In Kapitel 6 wird eine Einführung in COMSOL gegeben. Anhand eines Beispielprogramms wird die Einführung in COMSOL in Kapitel 7 vertieft. In den 2D Simulationen (siehe Kapitel 8) werden Mono-, Bi- und Multifilamentmodelle simuliert. In den 3D Simulationen (siehe Kapitel 9) werden ausgehend von einem Standardmodell, welches eine Approximation des realen Multifilamentdrahtes ist, Änderungen an den Kontaktstellen, den umliegenden Filamenten und Normalleitern (Kupfer und Titan) vorgenommen. Das kontaktierte Filament bleibt in allen Simulationen gleich, sodass durch Vergleich der Simulationen untereinander Rückschlüsse auf die Stromaufnahme der umliegenden Materialien gemacht werden können. In Kapitel 10 werden die Ergebnisse zusammengefasst dargestellt und wird gezeigt, dass der Proximity Effekt kaum eine Auswirkung auf die Messung hat, während die umliegenden Normalleiter, die nicht kontaktierten Filamente und die Kontaktstellen die Messung erheblich beeinflussen.

2. Supraleitung

Supraleiter sind Materialien, bei denen unterhalb einer materialspezifischen kritischen Temperatur keine Anregung stattfindet. Das bedeutet, sie verlieren sprunghaft ihren elektrischen Widerstand und erwärmen sich nicht bei Stromfluss unterhalb der Sprungtemperatur. Begrenzt in ihrer Leitfähigkeit sind diese Materialien durch ihre maximale Stromdichte, die von Größe, Material, Temperatur und Stärke eines externen Magnetfelds abhängen [6].

2.1. Historischer Überblick

1908 schaffte es Kamerlingh Onnes, Helium bei einer Temperatur von 4,2 K und unter Umgebungsdruck zu verflüssigen. Dies war ein historischer Grundstein für die Entdeckung der Supraleitung [7]. Drei Jahre später entdeckte er den ersten Supraleiter, als er mit Quecksilber und flüssigem Helium experimentierte. Dabei stellte er bei einer Temperatur von unter 4,2 K fest, dass das Quecksilber sprunghaft seinen Widerstand verlor und dieser unterhalb der Messtoleranz war. Daraufhin wurden viele Materialien untersucht und man fand die höchste Sprungtemperatur eines Elements von 9,2 K bei Niob [6].

Ein weiterer Durchbruch gelang 1933, als der Meißner-Ochsenfeld-Effekt entdeckt wurde, welcher die Verdrängung des Magnetfeldes aus dem Supraleiter beschreibt [8]. Die theoretische Grundlage zur Beschreibung von Typ I Supraleitern wurde 1935 von Friz und Heinz London in den London-Gleichungen aufgestellt. Sie beschreiben den Supraleiter als idealen Diamagnet und idealen Leiter [9]. 1950 entstand die Ginsburg-Landau-Theorie, die die Supraleiter Typen I und II auf einem makroskopischen Level beschreibt [9]. Bis zu einer mikroskopischen Theorie dauerte es noch sieben Jahre. 1957 folgten die Beschreibung der Ladungsträger als Cooper-Paare und die BCS-Theorie, benannt nach ihren Entwicklern Bardeen, Cooper und Schrieffer [10]. Der Josephson-Effekt, der das Tunneln der Cooper-Paare beschreibt, wurde 1962 entdeckt [11]. Im Jahr 2001 entdeckte man, dass Magnesiumdiborid der metallische Supraleiter mit der höchsten Sprungtemperatur von 39 K ist [12].

2.2. Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Der Meißner-Ochsenfeld-Effekt ist der erste entdeckte Effekt der magnetischen Eigenschaften eines Supraleiters. Er zeigt, dass ein supraleitender Zustand eine eigene Phase ist. Hier wird der Unterschied zu einem idealen Diamagnet und einem idealen Leiter dargestellt.

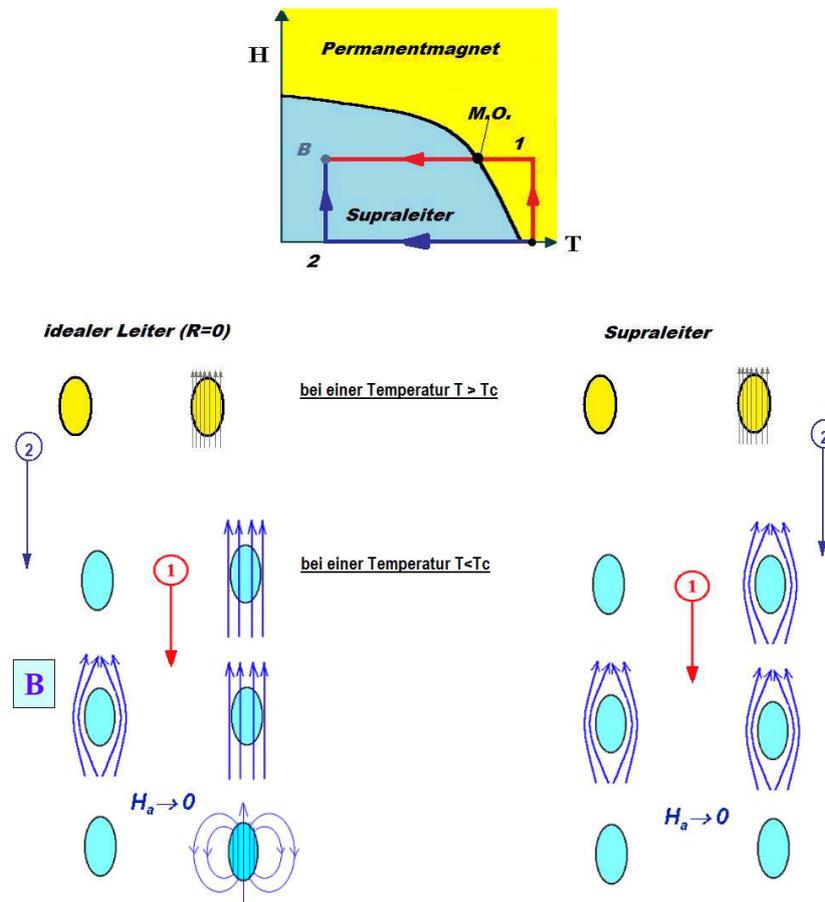


Abbildung 2.1.: Gegenüberstellung eines idealen Leiters und eines Supraleiters. Ein idealer Leiter ist keine eigene thermodynamische Phase. Da es egal sein müsste, ob zuerst die Temperatur gesenkt oder das Magnetfeld aktiviert wird. Im Unterschied dazu verdrängt ein Supraleiter das Magnetfeld im Inneren sobald dieser unter T_c abgekühlt wird [13].

Wie in Abbildung 2.1 dargestellt, ist bei $T > T_c$ (gelb) die normalleitende Phase mit und ohne Magnetfeld dargestellt. Bei $H > 0$ dringt das Magnetfeld in den Normalleiter ein. Senkt man die Temperatur auf $T < T_c$, verdrängt ein Supraleiter, im Unterschied zum idealen Leiter, das Magnetfeld. Würde man erst nach dem Abkühlen das Magnetfeld einschalten, verhindert es beide ein Eindringen des Feldes. Hier ist bereits verdeutlicht, dass ein idealer Leiter kein eigener thermodynamischer Zustand ist. Wie im Phasendiagramm dargestellt, dürfte es für diesen Zustand keinen Unterschied machen, ob man zuerst abkühlt oder zuerst das Magnetfeld einschaltet. Betrachtet man die Materialgleichungen der Elektrodynamik 2.1, sieht man, dass

bei $B = 0$ und $H > 0$ folgt, dass die magnetische Suszeptibilität $\chi = -1$ bzw. die relative magnetische Permeabilität $\mu_r = 0$ ist. Ein Supraleiter ist also ein idealer Diamagnet, man nennt diesen Zustand auch Meißner Phase [13].

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = 0 \quad (2.1)$$

2.3. BCS-Theorie

Die erste mikroskopische Beschreibung eines Supraleiters erfolgte im Jahre 1957 von J. Bardeen, L.N. Cooper und J.R. Schrieffer. Die Theorie beruht auf der Annahme, dass zwischen den Elektronen nicht nur die abstoßende Coulomb-Kraft wirkt, sondern auch eine anziehende Kraft. Diese Kopplung erfolgt mithilfe der Schwingungen des Gitters, den sogenannten Phononen. Dabei koppeln Elektronen, welche einen betragsmäßig gleichen aber richtungsmäßig entgegengesetzten Impuls und Spin haben (siehe Abbildung 2.2). Die Reichweite dieser Kopplung wird als Kohärenzlänge bezeichnet [14].

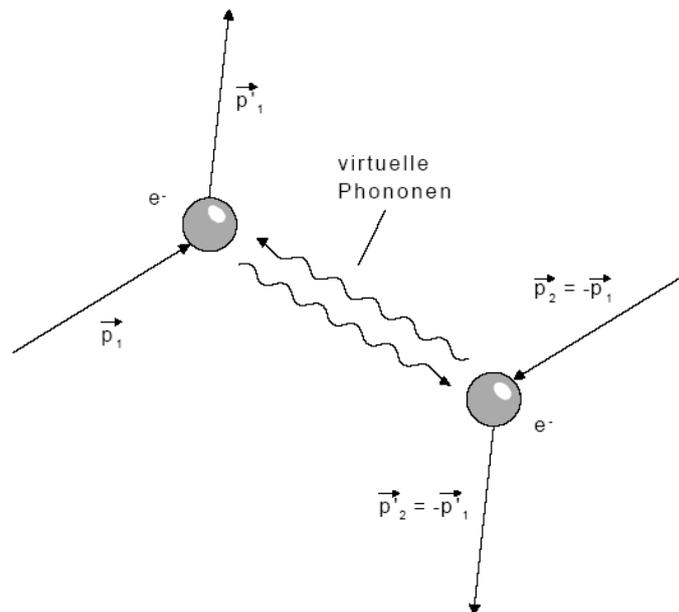


Abbildung 2.2.: Feynman-Diagramm zweier Elektronen (e^-), welche über virtuelle Phononen gekoppelt sind und ein Cooper-Paar bilden [15].

Durch diese Kopplung hat das neue Quasiteilchen einen ganzzahligen Spin und ist ein Boson. Im Gegensatz zu den Spin $1/2$ Teilchen (Fermionen) unterliegen die Bosonen nicht dem Pauliprinzip und können sich somit im selben Quantenzustand be-

finden. Sie unterliegen der Bose-Einstein-Statistik und wechselwirken nicht mit dem Atomgitter. Daraus folgt, dass diese Teilchen widerstandsfrei durch den Festkörper wandern können [16].

2.4. Typen von Supraleitern

Man unterscheidet zwei Arten von Supraleitern. Die Unterscheidung erfolgt anhand des Verhaltens während des Zusammenbruchs der Supraleitung bei Eindringen eines externen Magnetfelds. Während bei einem Typ 1 Supraleiter (siehe Abbildung 2.3)

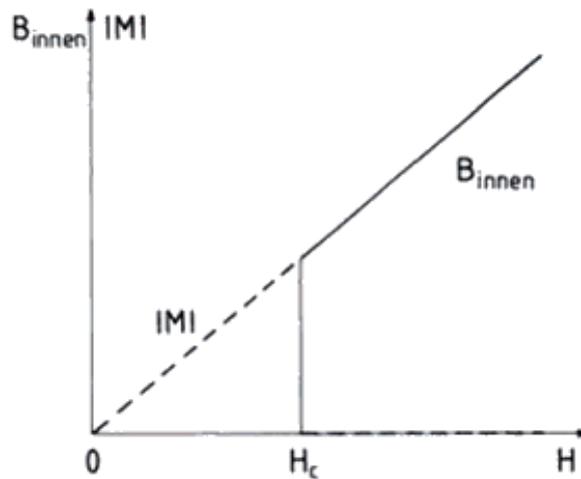


Abbildung 2.3.: Verhalten eines Typ 1 Supraleiters: Bei Überschreiten von H_c bricht die Supraleitung spontan zusammen und das Magnetfeld dringt ein [17].

ab einem kritischen H-Feld H_c die Supraleitung spontan zusammenbricht, geschieht der Zusammenbruch bei einem Typ 2 Supraleiter (siehe Abbildung 2.4) langsamer und über einen ganzen Bereich von H_{c1} bis H_{c2} . Innerhalb des Bereichs dringen immer mehr Flussschläuche ein, da dies im Gegensatz zum Typ 1 Verhalten energetisch günstiger ist. Außerhalb dieses Bereiches verhalten sich Typ 1 und Typ 2 Supraleiter gleich [17].

2.5. Flux Flow Bereich

Um verlustfrei Strom tragen zu können, müssen die Flussschläuche an sogenannten Pinningzentren verankert werden. Der kritische Strom ist definiert durch das Gleichsetzen der Verankerungskraft mit der durch das äußere Feld bzw. Eigenfeld des Stroms verursachte treibende Kraft. Wird die treibende Kraft größer als die Verankerungskraft, könnten sich die Flussschläuche frei bewegen, der Stromfluss ist

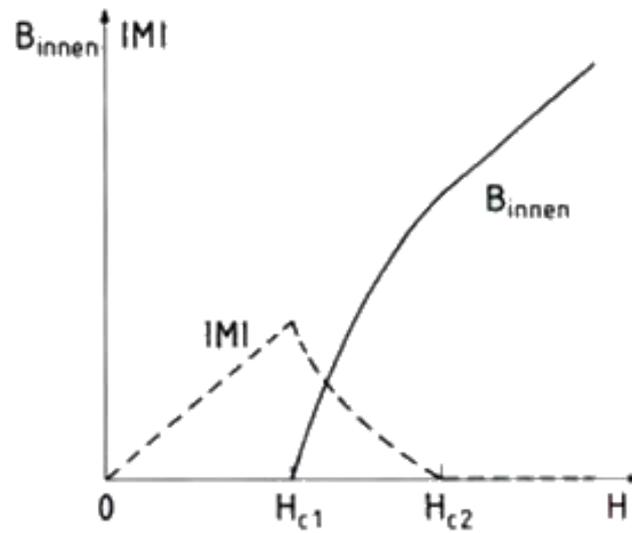


Abbildung 2.4.: Verhalten eines Typ 2 Supraleiters: Bei Überschreiten von H_{c1} dringen Flussschläuche in den Supraleiter ein. Erst bei Überschreiten von H_{c2} wird dieser normalleitend [17].

nicht mehr verlustfrei. Dies ist das sogenannte flux-flow Bereich. Die Lage der Grenze zwischen diesen beiden Bereichen ist abhängig vom jeweiligen Supraleiter. Für MgB_2 liegt sie sehr nahe an der Phasengrenze, wo die Supraleitung zusammen bricht [9].

3. Proximity

3.1. Proximity

Der Proximity-Effekt wird in der Arbeit von Wagner [2] ausführlich beschrieben und wird an dieser Stelle der Vollständigkeit wegen zusammengefasst. Der Effekt tritt an Grenzflächen zwischen Normalleiter und Supraleiter auf. In der Umgebung der Grenzfläche tunneln Cooper-Paare in den Normalleiter und verleihen ihm supraleitende Eigenschaften. Der Effekt des Tunnelns nennt sich Proximity-Effekt und verläuft ähnlich den Andreev-Reflexionen. Die Cooper-Paare stammen vom Supraleiter und werden nicht im Normalleiter erzeugt. Das bedeutet, dass der Normalleiter kein Supraleiter im herkömmlichen Sinne wird. Lediglich die Grenzflächen des Normalleiters erhalten die Fähigkeit der Supraleitung. Durch das Fehlen der Quasiteilchen in der supraleitenden Grenzschicht büßt diese etwas von ihrer Leitfähigkeit ein und kann letztlich nicht mehr die gleiche Menge an Ladung transportieren. Die Eindringtiefe hängt von der Kohärenzwellenlänge ab. Da die supraleitende Kohärenzlänge (siehe Kapitel 2.3) nur bis maximal 100 nm beträgt, ist die Reichweite des Proximity-Effekts stark beschränkt [2].

3.1.1. Andreev-Reflexion

Die Andreev-Reflexion tritt bei Normalleiter und Supraleiter an der Grenzschicht auf. In Abbildung 3.1 sind vier Möglichkeiten von Reflexionen dargestellt. Auf der linken Seite ist die Andreev-Reflexion dargestellt: Ein Elektron mit der Energie oberhalb des Fermi-Niveaus trifft auf die Grenzschicht (gelb), erzeugt ein Cooper-Paar und wird als Elektronenloch reflektiert (Abbildung a ohne und c mit Spin-flip). Nachdem das Cooper-Paar im Supraleiter aus zwei Elektronen besteht, welche miteinander korrelieren, müssen auch das Elektron und das Elektronenloch ein Quasiteilchen sein. Dieses Elektronen-Loch-Paar führt zum Proximity-Effekt. Auf der rechten Seite sind die Normalreflexionen (b ohne d mit Spin-flip) dargestellt, welches unterhalb des Fermi-Niveaus auftritt [18].

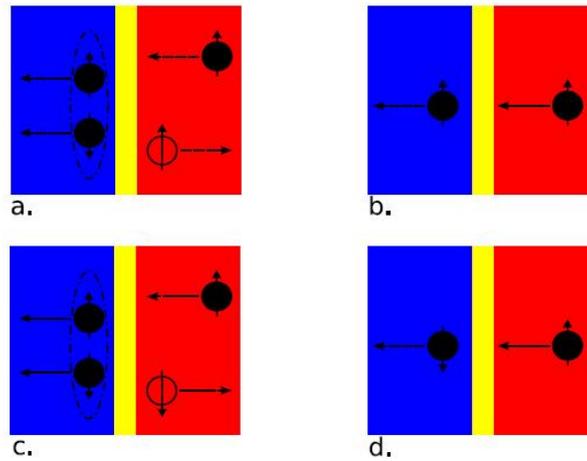


Abbildung 3.1.: Gegenüberstellung von Andreev-Reflexion (links): Im Normalleiter (rot) wird ein Elektron als Elektronenloch reflektiert und erzeugt ein Cooper-Paar (Bild a), dabei kann der Spin umklappen (Bild c). Das Elektron und das reflektierte Elektronenloch bilden ebenfalls ein Paar. Dieses Elektronen-Loch-Paar führt zum Proximity-Effekt. Normalreflexion (rechts): Es wird kein Cooper-Paar erzeugt, ein Spin-flip ist möglich (Bild b und d) [18].

4. Widerstandsmessung

Für die Widerstandsmessung ist eine oft verwendete Methode das Anlegen einer Stromquelle und das Messen der Spannung mit einem Voltmeter. Durch die Kenntnis dieser zwei Größen kann die dritte, der Widerstand, mit der Formel $R_x = \frac{U_{\text{Voltmeter}}}{I_{\text{Stromquelle}}}$ ermittelt werden [19].

4.1. Zweileitermessung

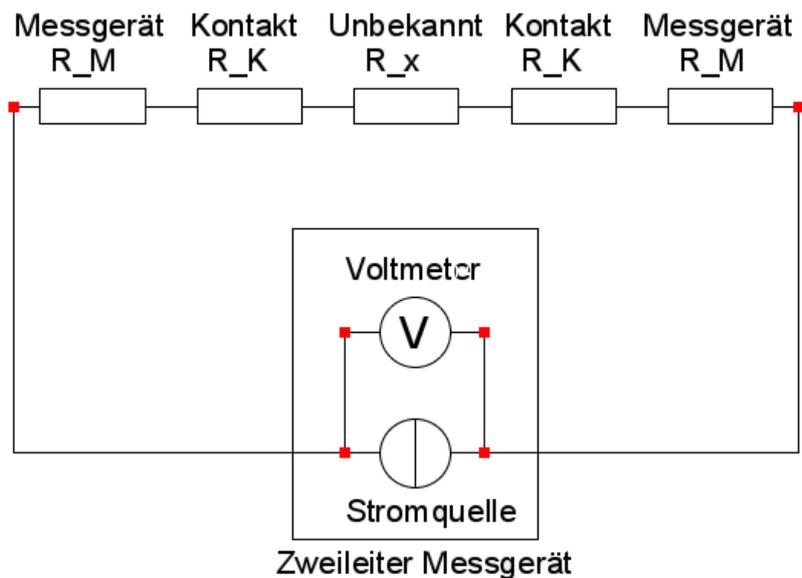


Abbildung 4.1.: Schematische Darstellung der Zweileitermessung. R_x ist der unbekannte zu messende Widerstand. R_K sind die Kontaktwiderstände und R_M ist die Gesamtheit der Widerstände des Messgerätes, z.B. des Kabels und geräteinterner Bauteile. Das Messinstrument selbst besteht aus Voltmeter und Stromquelle. Der Spannungsabfall bei R_x wird inklusive der Widerstände R_K und R_M gemessen.

Bei der Zweileitermessung (siehe Abbildung 4.1) wird ein Gerät verwendet, das intern eine Stromquelle und ein Voltmeter besitzt. Nach außen führen zwei Leitungen zum Messobjekt. Der Vorteil liegt in der Einfachheit, was auch zugleich ein Nachteil ist. Durch den Stromfluss der Stromquelle durch die Messleitungen, die das Volt-

meter ebenfalls nutzt, entsteht ein zusätzlicher Spannungsabfall, der vom Voltmeter ebenfalls gemessen wird und sich als Messfehler äußert. Es wäre zwar möglich, den Fehler der Leitungswiderstände zu berücksichtigen, aber aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Messleitungswiderstände würde durch eine Temperaturänderung ein zusätzlicher Fehler entstehen [19].

4.2. Vierleitermessung

Bei der Vierleitermessung (siehe Abbildung 4.2) werden für Voltmeter und Stromquelle eigene Leitungen verwendet, was dazu führt, dass der Spannungsabfall an den Leitungen der Stromquelle nicht mehr vom Voltmeter registriert wird, sondern nur mehr der Spannungsabfall auf der Messleitung und an den Kontaktstellen des Voltmeters. Dieser ist aber im Vergleich viel geringer, da über die Voltmeterleitungen aufgrund des großen Innenwiderstands R_V nur ein geringer Strom fließt. Deshalb wird mit einer Vierleitermessung der gesamte Fehler stark minimiert. Diese Messmethode ist unter anderem für kleine Widerstände zu empfehlen, da der Fehler bei der Zweileitermessung umgekehrt proportional zu kleinen Widerständen ist [19].

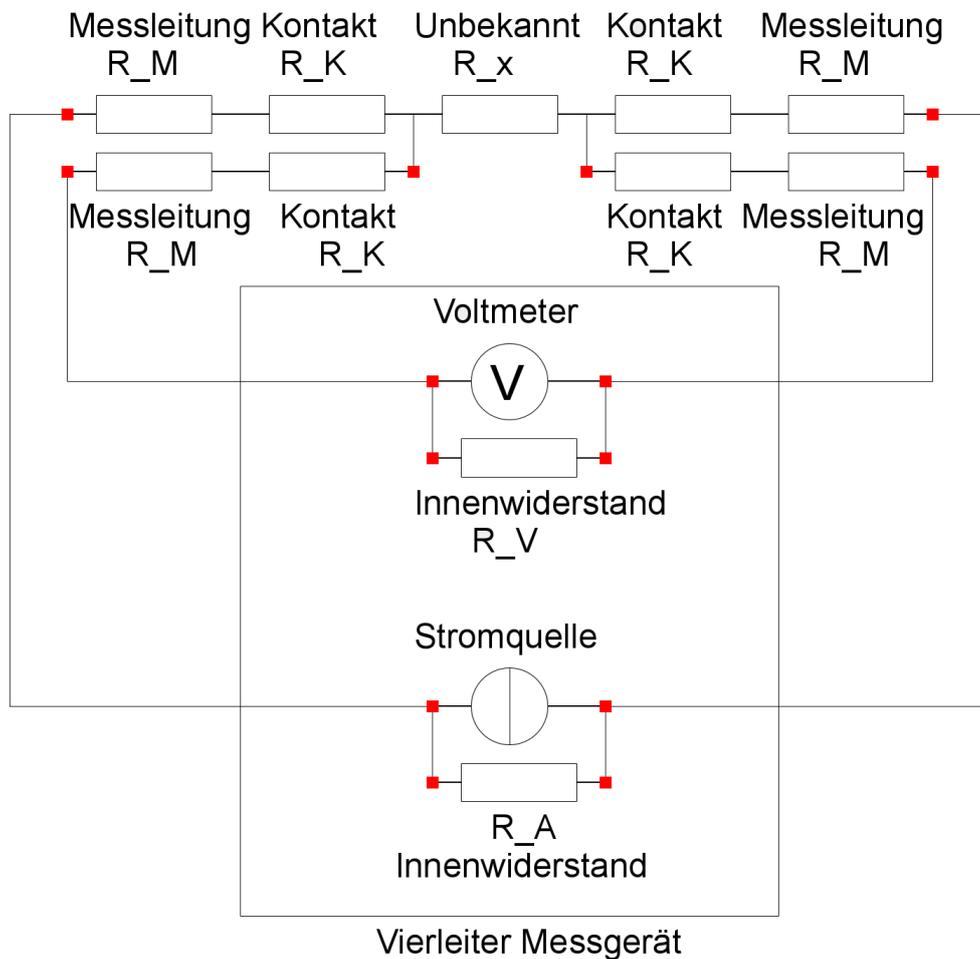


Abbildung 4.2.: Schematische Darstellung der Vierleitermessung. R_x ist der unbekannte zu messende Widerstand, R_K ist die Gesamtheit der Kontaktwiderstände und R_M ist der Widerstand der Messleitung. R_V und R_A sind die Innenwiderstände des Voltmeters bzw. der Stromquelle. Das Messinstrument selbst besteht aus Voltmeter und Stromquelle. Durch diese Aufteilung wird der Spannungsabfall bei R_K und R_M durch den Strom der Stromquelle vom Voltmeter ignoriert und führt deshalb nicht zu Fehlern. Der Strom über das Voltmeter ist aufgrund des hohen Innenwiderstands R_V sehr gering, weshalb auch der Spannungsabfall auf der Messleitung und an den Kontaktwiderständen des Voltmeters sehr gering ist. Dies führt im Gegensatz zu einer Zweileitermessung zu einem kleineren Fehler.

4.3. Mögliche Vierleitermessungsproblematik an einem supraleitenden Filament

Dass es bei einer Vierleitermessung bei Supraleitern mit ummanteltem Kupfer bzw. Titan zu Problemen kommen könnte, baut auf Annahmen des Autors auf, welche hier erklärt werden und später mit Simulationen untersucht werden. Der Gedanke lässt sich anhand eines Schaltplans (siehe Abbildung 4.3) erklären. Auch wenn im supraleitenden Fall $R_S = 0$ angenommen wird, ist $R_{\text{ÜS}} + R_{S1} \neq 0$. Das führt dazu, dass Strom über R_{K1} fließt. Dieser Stromfluss über das Kupfer, der durch den Übergangswiderstand hervorgerufen wird, könnte den supraleitenden Stromfluss entlasten und die Messung verfälschen. In der Abbildung 4.4 ist der Realfall fotografiert. Die Stromquelle ist nicht nur am Filament kontaktiert, sondern auch am Titan und Kupfer. Das Voltmeter ist weiter innen kontaktiert und misst nur den inneren Bereich des Filamentes. Ob es aus diesem Grund zu Messfehlern kommt, wird unter anderem im Kapitel 9 untersucht.

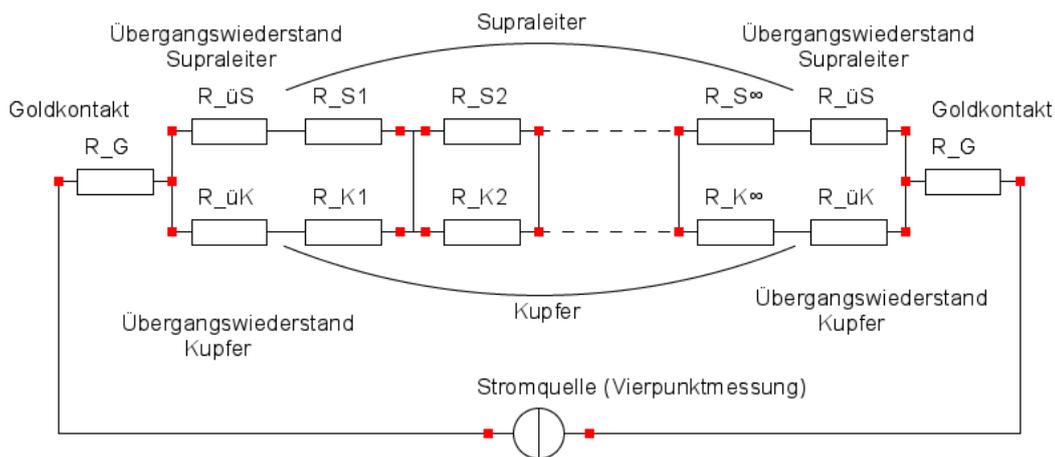


Abbildung 4.3.: Schematische Darstellung des Widerstandsnetzwerkes eines kupferummantelten Supraleiters, mit Goldkontakten für den Stromquellenanschluss der Vierpunktmessung. R_G ist der Widerstand der Goldkontakte, $R_{\text{Ü}}$ ist der Übergangswiderstand des Supraleiters und des Kupfers, und R_S und R_K sind die aufgesplitteten Widerstände des Supraleiters und Kupfers, welche über die gesamte Länge des Filaments miteinander in Kontakt stehen. Selbst bei $R_S = 0$ fließt Strom über R_{K1} , da $R_{\text{ÜS}} + R_{S1} \neq 0$ ist.

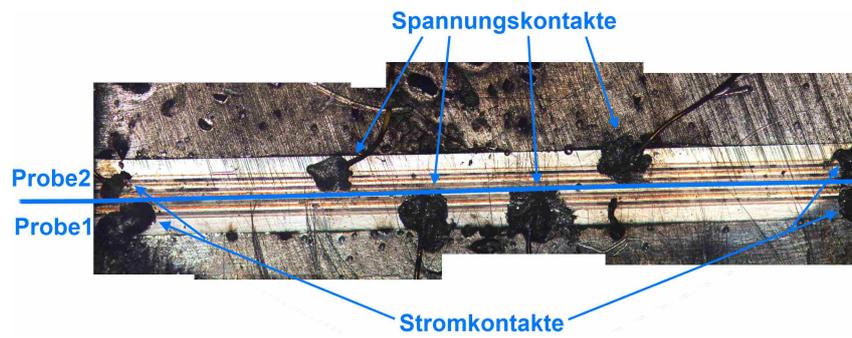


Abbildung 4.4.: Vierleitermessung von Magnesiumdiborid. 8 Kontakte, jeweils 4, sind für eine Messung gedacht. Die Äußeren für die Stromquelle die Inneren für das Voltmeter [4].

5. Numerische Berechnung eines Supraleiters

In diesem Kapitel soll die theoretische Grundlage zur Berechnung von Supraleitern im kommerziellen finite Element (FEM) Programm COMSOL erarbeitet werden. Das Kapitel lehnt sich stark an die Arbeit Hennings [14] an. Die Eingabe einer numerischen Formulierung für Supraleiter erfolgt in COMSOL über Materialparameter. Im Fall der programmeigenen Physikrubrik "Magnetische Feldformulierung" über das elektrische Feld und die Stromdichte (E - J Charakteristik). In der Rubrik "Elektrische Ströme" über den Leitwert und das elektrische Feld (σ - E Charakteristik). Dies ist ein Vorgriff bezüglich der nachfolgenden Kapitel, in denen weiter darauf eingegangen wird. Da es zielführender ist, zuerst den theoretischen Teil zu beschreiben und erst im Anschluss auf die Funktionsweise von COMSOL einzugehen, ist es erforderlich zu wissen, welche Eingabeparameter COMSOL benötigt.

5.1. Maxwell-Gleichungen

Die elektromagnetische Beschreibung erfolgt mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen, welche in den Sechzigern des 18. Jahrhunderts von James Clerk Maxwell aufgestellt worden sind. Es gibt die integrale und die differentielle Form [14]. Das FEM-Programm COMSOL verwendet die makroskopische Differentialform mit Zeitabhängigkeit. Die Gleichungen (siehe Formeln 5.1 bis 5.4) heißen der Reihe nach Amperesches Gesetz, Induktionsgesetz, Gaußsches Gesetz und Gaußsches Gesetz für Magnetfelder. Dabei sind \vec{E} und \vec{D} die elektrische Feldstärke bzw. Flussdichte und \vec{H} und \vec{B} die magnetische Feldstärke bzw. Flussdichte. ρ bezeichnet die Ladungsdichte und \vec{j} ist die elektrische Stromdichte.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.4)$$

5.2. Materialgleichungen

Um eine Beschreibung in Materie zu ermöglichen, werden die Materialgleichungen benötigt, die den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Flussdichten zur passenden Feldstärke beschreiben. In den Gleichungen 5.5 bis 5.7 sind diese dargestellt. Dabei ist die Permeabilität, μ_0 , des Vakuums mit $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ definiert. Die Definition der Permittivität ist $\epsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0}$, wobei c_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Gekoppelt ist elektrische Stromdichte mit der elektrischen Feldstärke über die elektrische Leitfähigkeit σ , welche der Kehrwert des spezifischen elektrischen Widerstands ist $\sigma = \rho^{-1}$. Der dielektrische Polarisationsvektor, \vec{P} , und die magnetische Polarisation, \vec{M} , beschreiben eine elektrische bzw. magnetische Polarisation (Ladungsverschiebung) der Dipolmomente pro Volumen im Medium. Die Dipolmomente richten sich in Feldrichtung aus. Der Zusammenhang von Polarisation zur zugehörigen Feldstärke ist proportional und parallel, wenn das Medium homogen, linear und isotrop ist (siehe Formeln 5.8 und 5.9). Den Proportionalitätsfaktor χ nennt man Suszeptibilität. Durch diese Bedingung an das Medium können die Gleichungen 2.1 und 5.8 bzw. 5.9) umgeschrieben werden. Dadurch erhalten wir die relative Permittivität (siehe Formel 5.10) ϵ_r und die relative Permeabilität (siehe Formel 5.11) μ_r , welche im Vakuum 1 sind.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (5.5)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (5.6)$$

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (5.7)$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (5.8)$$

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H} \quad (5.9)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (5.10)$$

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (5.11)$$

5.3. Das magnetische Vektorpotential

Als mathematisches Hilfsmittel für die magnetische Flussdichte \vec{B} wurde das magnetische Vektorpotential \vec{A} in 5.12 definiert. Mit diesem Hilfsmittel lässt sich das Induktionsgesetz umschreiben (siehe Formel 5.13 bis 5.15). Man erhält dadurch einen Zusammenhang des elektrischen Feldes mit dem Gradienten des Potentials $\vec{\nabla}V$ und einen zeitabhängigen Teil mit dem magnetischen Vektorpotential.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.13)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = 0 \quad (5.14)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.15)$$

5.4. Quasistatische Näherung

Nachdem das elektrische Feld eine Folge des elektrischen Potentials ist und die Ausbreitungsgeschwindigkeit endlich ist, sind Feld und Potential zeitlich voneinander getrennt. Durch die Annahme der Stationarität folgt daraus die quasistationäre Näherung und dadurch ergibt sich die Kontinuitätsgleichung 5.16.

Durch diese Näherung kann der zeitabhängige Teil des Ampereschen Gesetzes (siehe Formel 5.1) vernachlässigt werden und mit dem Ohmschen Gesetz 5.7 folgt die Formulierung 5.17. Bei Verwendung der Materialgleichung 5.11, der magnetischen Flussdichte 5.12 und dem elektrischen Feld 5.15 kann das Ampereschen Gesetzes noch weiter umgeschrieben werden (siehe Formel 5.18) und durch Umformung kommt man zum Ampereschen Gesetz wie es auch COMSOL verwendet 5.19.

Durch Einsetzen des Ampereschen Gesetzes (siehe Formel 5.18) in die Kontinuitätsgleichung (siehe Formel 5.16) erhalten wir die partielle Differentialgleichung 5.20.

Für die Berechnung folgen daraus eine Differentialgleichung für das elektrische Potential und für jede Raumrichtung eine Gleichung für das magnetische Vektorpotential.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (5.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (5.17)$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{j} = -\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} V \right) \quad (5.18)$$

$$\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) + \sigma \vec{\nabla} V = 0 \quad (5.19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\vec{\nabla} \left[\sigma \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} V \right) \right] = 0 \quad (5.20)$$

5.4.1. Makroskopische Formulierungen für die numerische Berechnung

Wie bereits im Kapitel 2 beschrieben hängt die Leitfähigkeit bei konstanter Temperatur und keinem externen Magnetfeld von der Stromdichte ab. Dieses Verhalten ist

der wichtigste Anhaltspunkt für die makroskopische Beschreibung, welche in Gleichung 5.21 bis 5.23 dargestellt ist [20]. ρ_c bzw. σ_c sind die Werte bei kritischer Stromdichte, wie in Formel 5.22 und 5.23 dargestellt. Für die kritische Feldstärke E_c werden laut Literatur meist die Werte $1 \mu\text{V}/\text{cm}$ oder $10 \mu\text{V}/\text{cm}$ gewählt. Diese Festlegung ist allerdings willkürlich. Der Fitparameter n wird aus Messdaten gewonnen. So ist es durch Annäherung an eine $\rho(\vec{j})$ bzw. $\sigma(\vec{j})$ Kurve möglich, einen Bereich von näherungsweise $0.1\text{-}10 \cdot E_c$ zu beschreiben [21, 20]. Eine vollständige makroskopische Beschreibung eines Supraleiters ist damit nicht möglich. Dass diese empirischen Formeln nur für kleine Bereiche für die jeweiligen n -Werte gelten, ist in Abbildung 5.1 am Beispiel einer $\rho(\vec{j})$ Messung dargestellt [22].

$$\frac{|\vec{E}|}{E_c} = \left(\frac{|\vec{j}|}{J_c} \right)^n \quad (5.21)$$

$$\frac{|\vec{\rho}|}{\rho_c} = \left(\frac{|\vec{j}|}{J_c} \right)^n \quad (5.22)$$

$$\sigma(|\vec{j}|) = \sigma_c \cdot \left(\frac{J_c}{|\vec{j}|} \right)^n \quad (5.23)$$

$$J_c = \sigma_c \cdot E_c \quad (5.24)$$

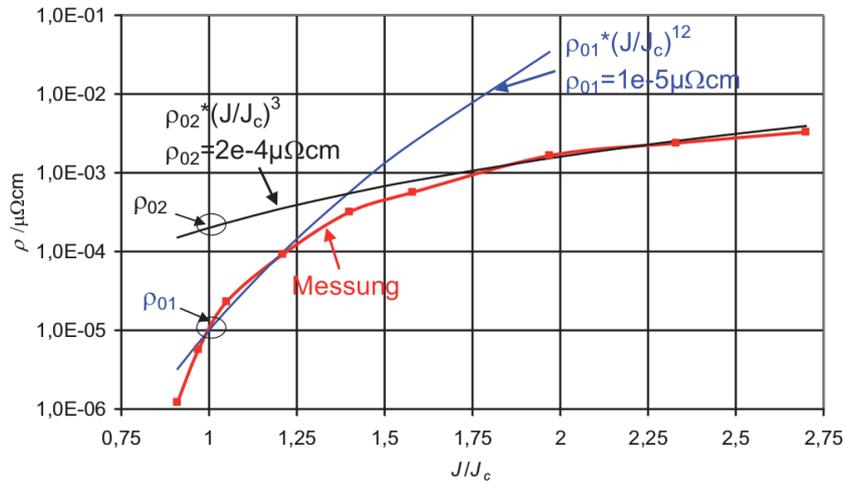


Abbildung 5.1.: Vergleich von Messdaten mit den theoretischen Werten für zwei unterschiedliche Exponenten n aus Formel 5.22. [22]

Um eine Beschreibung über einen größeren Bereich zu ermöglichen, ist ein zusätzlicher Freiheitsgrad nötig. Die Formel 5.25 von Grundmann [21] ermöglicht eine

Anpassung über einen größeren Bereich oberhalb von J_c . n wird hier durch den Fitparameter m und P ersetzt. Für $J < J_c$ ist noch eine Korrektur nötig, da es sonst zu negativen Widerständen kommt. Das würde dem Verhalten eines realen Supraleiters widersprechen. Eine Möglichkeit der Korrektur wäre es, das E-Feld mit einem zusätzlichen Feld $\vec{E} \rightarrow \vec{E} + \vec{X}$ zu begrenzen. \vec{X} ist frei wählbar, wobei sich herausstellt, dass $\vec{X} = 10^{-8}$ ein guter Wert, in Bezug auf Rechenaufwand und Aussagekraft ist, weil dies einem maximalen Leitwert von $\sigma \sim 10^{18}$ S/m entspricht. Dieser ist bedeutend größer als beispielsweise der Leitwert von Kupfer mit $\sigma_{Cu}(T = 77 \text{ K}) \approx 4,6 \cdot 10^{12}$ S/m. In Gleichung 5.26 wurde mittels $\vec{j} = \vec{E} \cdot \sigma$ und $\rho = \sigma^{-1}$ umgeformt. In Formel 5.27 wurde bereits die Korrektur für die Leitwertbegrenzung berücksichtigt. Somit erhalten wir die erste für COMSOL verwertbare Formulierung. Die Fitparameter P und m beschreiben den Fluxflowbereich und bewirken die Anpassung der Steigung und Krümmung. Sie wurden mit den Werten $P = 0,036$ und $m = \frac{10}{31}$ von Grundmann [21] für YBCO übernommen, da sie nicht für Magnesiumdiborid ermittelt werden konnten, weil bei den Messungen an Magnesiumdiborid Störungen durch Kupfer auftraten. Für die Fragestellung in dieser Arbeit ist die genaue Steigung aber nicht wesentlich, ein supraleitendes Verhalten genügt.

$$\rho^m(\vec{j}) = E_c^m \cdot \left(\frac{\vec{j}^{1-m} - (1-P) \cdot \vec{j}^{-m} \cdot J_c}{P \cdot J_c} \right) \quad (5.25)$$

$$\sigma(\vec{E}) = \frac{J_c \cdot \left(P \cdot \left(\frac{\vec{E}}{E_c} \right)^m + (1-P) \right)}{\vec{E}} \quad (5.26)$$

$$\sigma(\vec{E} + \vec{X}) = \frac{J_c \cdot \left(P \cdot \left(\frac{\vec{E} + \vec{X}}{E_c} \right)^m + (1-P) \right)}{\vec{E} + \vec{X}} \quad (5.27)$$

Die Temperaturabhängigkeit

Die Temperaturabhängigkeit der kritischen Stromdichte kann in Formel 5.27 mit Hilfe von Formel 5.28 berücksichtigt werden [23]. Um einen sinnvollen Wert für b zu gewinnen wurde auf experimentell ermittelte $J(T)$ Daten von Messung an MgB₂-Multifilamentdrähten von Csoklich [5] zurückgegriffen. Dabei wurde der Wert für b ermittelt durch einen Fit von Formel 5.28 an die Messdaten. Die optimale Anpassung erfolgte in Bezug zu den Relativwerten der Ausgangsdaten. Die Gegenüberstellung von Ausgangsdaten und Fittwerten ist inklusive der relativen Abweichung in Tabelle 5.1 dargestellt.

Tabelle 5.1.: Gegenüberstellung der gemessenen Daten von Csoklich [5], mit den für Formel 5.28 gefitteten Daten.

Beschreibung	Ausgangsdaten	Fittwerte	Abweichung
$J_c(4,2 \text{ K})$	$3 \cdot 10^{10} \text{ [A/m}^2\text{]}$	$2,48 \cdot 10^{10} \text{ [A/m}^2\text{]}$	$\sim 18\%$
$J_c(14 \text{ K})$	$9 \cdot 10^9 \text{ [A/m}^2\text{]}$	$1,097 \cdot 10^{10} \text{ [A/m}^2\text{]}$	$\sim 18\%$
$J_c(22 \text{ K})$	$5 \cdot 10^9 \text{ [A/m}^2\text{]}$	$4,238 \cdot 10^9 \text{ [A/m}^2\text{]}$	$\sim 18\%$
$J_c(39 \text{ K})$	$0 \text{ [A/m}^2\text{]}$	$0 \text{ [A/m}^2\text{]}$	0%
T_c	39 [K]	39 [K]	0%
b		$2,466$	

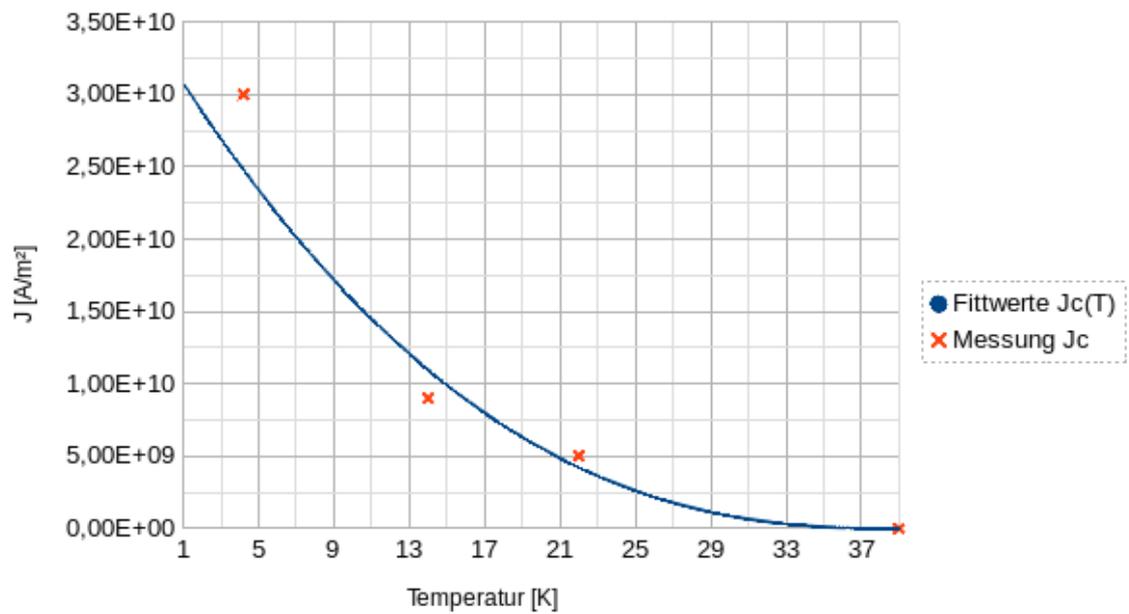


Abbildung 5.2.: Vergleich von Messdaten mit den gefitteten Daten für die Ermittlung von b .

$$J_c(T) = J_c(T_{\text{ref}}) \cdot \left(\frac{1 - \frac{T}{T_c}}{1 - \frac{T_{\text{ref}}}{T_c}} \right)^b \quad (5.28)$$

Der normalleitende Zustand

Es wird davon ausgegangen, dass in einem Supraleiter sowohl der normalleitende Zustand als auch der supraleitende Zustand zu jeder Zeit überlagert sind, bzw. dass bei einem Normalleiter $\sigma_S = 0$ nach Kunchur [24] folgt. Dies führt zum Ansatz (siehe Formel 5.29) der beide Zustände als Überlagerung in einer Formel vereint.

Aufgrund der tiefen Temperaturen und des großen Temperaturbereichs ($0 \text{ K} < T < \sim 100 \text{ K}$) ist es nötig, speziellere Formulierungen für das Temperaturverhalten zu finden. Der Grund hierfür ist, dass das oft verwendete lineare Gesetz $\rho(T) = \rho_0 \cdot (1 + \alpha(T - T_{\text{ref}}))$ nur für den Temperaturbereich um 300 K realitätsnahe Ergebnisse liefert. In Abbildung 5.3 ist das nicht lineare Verhalten von spezifischem

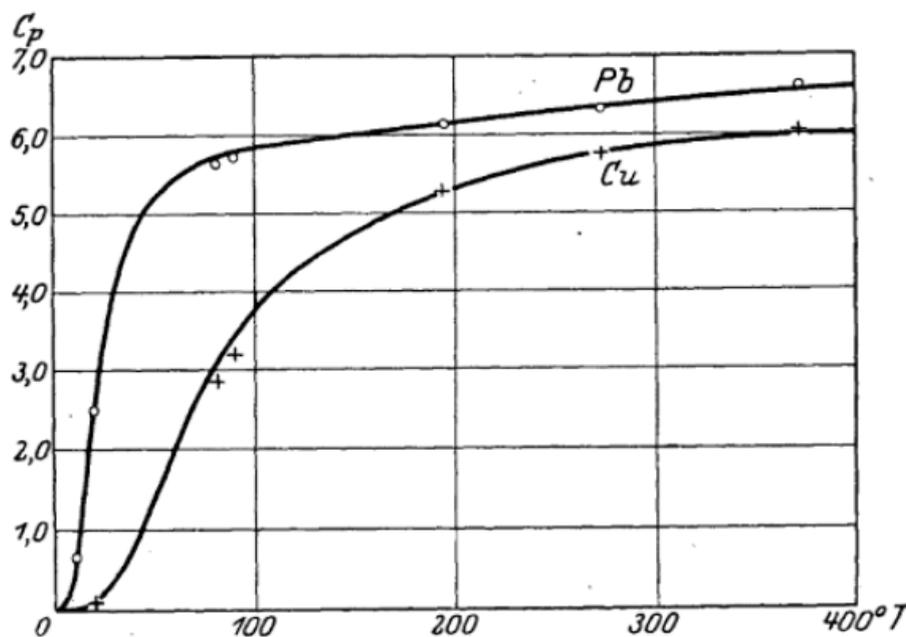


Abbildung 5.3.: ρ -T-Kurve von Kupfer und Blei: Zu sehen ist ein nicht lineares Verhalten bei tiefen Temperaturen [25]

Widerstand zu Temperatur von Blei und Kupfer gezeigt [25].

In Gleichung 5.30 ist die erweiterte Formulierung des spezifischen Widerstandes im normalleitenden Zustand mit den Temperaturkoeffizienten 1. Ordnung α , 2. Ordnung β und 3. Ordnung γ dargestellt. Diese Formulierung stammt von Klein [26] und wurde für Kupfer, Gold, Aluminium und Titan gewählt. Aus der Tabelle von Dauphinee [27] stammen die Werte für Kupfer. Es wurden 4 Stützstellen (4,2 K, 10 K, 30 K und 72 K) entnommen und als Referenztemperatur wurde $T_{\text{ref}}^{\text{Cu}} = 19 \text{ K}$ festgelegt. Aus der Tabelle von Haynes [28] stammen die Werte für Gold und Alu-

minium. Es wurden ebenfalls 4 Stützstellen (1 K, 10 K, 20 K und 60 K) entnommen und als Referenztemperatur wurde $T_{\text{ref}}^{\text{Au}} = 10$ K bzw. $T_{\text{ref}}^{\text{Al}} = 10$ K bestimmt. Mit Hilfe dieser Daten konnten die Temperaturkoeffizienten für Kupfer, Gold und Aluminium bestimmt werden. Für Titan wurden die Werte von Kemp [29] genommen. Bei Magnesiumdiborid wurde näherungsweise ein $\sim T^\xi$ Verhalten (siehe Abbildung 5.4) festgestellt, mit $\xi \sim 2,6$ [30]. Des Weiteren wurden die Formulierung 5.31 und die

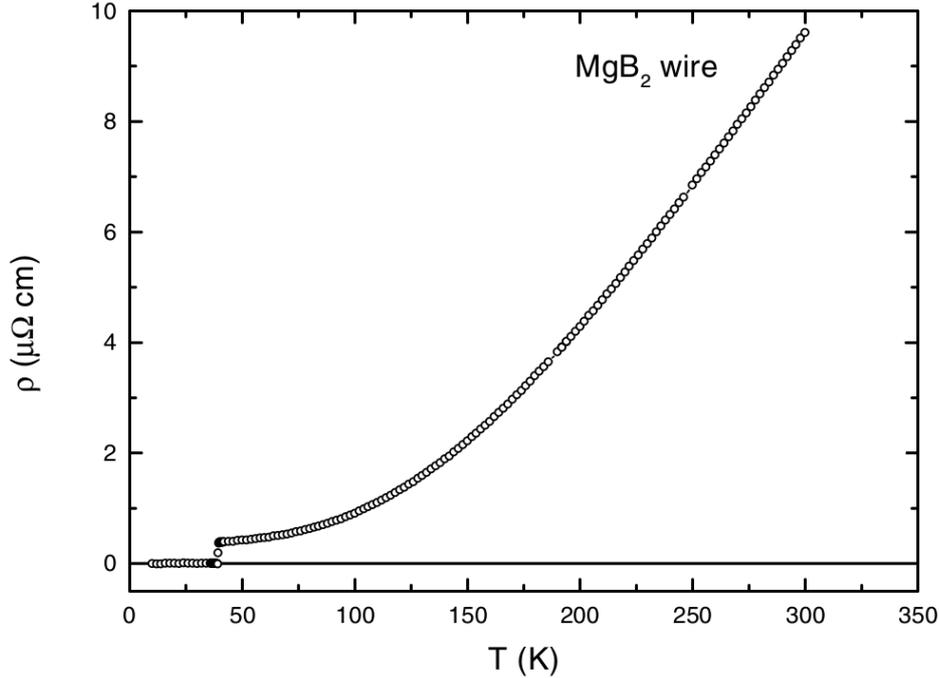


Abbildung 5.4.: ρ - T -Kurve von Magnesiumdiborid: Man sieht das T^ξ Verhalten des Widerstandes im normalleitenden Bereich.

Werte für den spezifischen Widerstand von Canfield [30] übernommen und daraus die Werte für $\rho_0^{\text{MgB}_2} = \rho^{\text{MgB}_2}(T = 0 \text{ K})$ und $\rho_1^{\text{MgB}_2}$ berechnet. Die für die Berechnung des temperaturabhängigen Leitwertes nötigen Werte sind ebenso wie die ausgerechneten und gerundeten Parameter in Tabelle 5.2 zusammengefasst dargestellt.

$$\sigma(\vec{E}, T) = \sigma_S(\vec{E}, T) + \sigma_N(T) \quad (5.29)$$

$$\rho_N(T) = \rho_0(T_{\text{ref}}) \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_{\text{ref}}) + \beta \cdot (T - T_{\text{ref}})^2 + \gamma \cdot (T - T_{\text{ref}})^3) \quad (5.30)$$

$$\rho_N^{\text{MgB}_2}(T) = \rho_0^{\text{MgB}_2} + \rho_1^{\text{MgB}_2} \cdot T^\xi \quad (5.31)$$

$$\sigma_N(T) = \rho_N^{-1}(T) \quad (5.32)$$

Berücksichtigung eines externen Magnetfeldes

Auch wenn in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, sei der Vollständigkeit halber die Formulierung für ein externes Magnetfeld (siehe Formel 5.33) erwähnt. k_a sei der Anisotropiekoeffizient, der für isotrope Materialien 1 ist. \vec{B}_x und \vec{B}_y seien die Komponenten der magnetischen Flussdichte und B_0 der Materialparameter für die Magnetfeldabhängigkeit. Für detailliertere Informationen sei auf die Literatur von Gömöry [31, 32] verwiesen.

$$J_c(\vec{B}) = J_c(\vec{B} = 0) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{k_a^2 \vec{B}_x^2 + \vec{B}_y^2}}{B_0} \right)^{-1} \quad (5.33)$$

5.5. Formulierungen und Parameter Zusammenfassung für die Simulationen

Dieses Unterkapitel ist eine Zusammenfassung und zeigt die Endformulierungen (siehe Formeln 5.34 bis 5.39) und Parameter in der Tabelle 5.2, wie sie für COMSOL verwendet wurden. In der für COMSOL üblichen Schreibweise zum Laden aus einer Textdatei sei auf den Anhang A verwiesen. Die zweite Formel (siehe Formel 5.35) zeigt die Berechnung des maximalen Leitwertes, diese Formel wird für spätere Simulationen benötigt. Für die genauen Hintergründe sei auf Kapitel 8.2 verwiesen.

$$\sigma^{\text{MgB}_2}(|\vec{E} + \vec{X}|, T) = J_c(T_{\text{ref}}) \cdot \frac{\left(P \cdot \left(\frac{|\vec{E} + \vec{X}|}{E_c} \right)^m + (1 - P) \right)}{|\vec{E} + \vec{X}|} \cdot \left(\frac{1 - \frac{T}{T_c}}{1 - \frac{T_{\text{ref}}}{T_c}} \right)^b + \sigma_{\text{N}}^{\text{MgB}_2}(T) \quad (5.34)$$

$$\sigma_{\text{Max}}^{\text{MgB}_2}(|\vec{X}|, T) = J_c(T_{\text{ref}}) \cdot \frac{\left(P \cdot \left(\frac{|\vec{X}|}{E_c} \right)^m + (1 - P) \right)}{|\vec{X}|} \cdot \left(\frac{1 - \frac{T}{T_c}}{1 - \frac{T_{\text{ref}}}{T_c}} \right)^b + \sigma_{\text{N}}^{\text{MgB}_2}(T) \quad (5.35)$$

$$\sigma^{\text{Au}}(T) = \rho_0^{\text{Au}}(T_{\text{ref}}^{\text{Au}}) \cdot (1 + \alpha^{\text{Au}} \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Au}}) + \beta^{\text{Au}} \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Au}})^2 + \gamma \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Au}})^3) \quad (5.36)$$

$$\sigma^{\text{Cu}}(T) = \rho_0^{\text{Cu}}(T_{\text{ref}}^{\text{Cu}}) \cdot (1 + \alpha^{\text{Cu}} \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Cu}}) + \beta^{\text{Cu}} \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Cu}})^2 + \gamma \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Cu}})^3) \quad (5.37)$$

$$\sigma^{\text{Al}}(T) = \rho_0^{\text{Al}}(T_{\text{ref}}^{\text{Al}}) \cdot (1 + \alpha^{\text{Al}} \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Al}}) + \beta^{\text{Al}} \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Al}})^2 + \gamma \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Al}})^3) \quad (5.38)$$

$$\sigma^{\text{Ti}}(T) = \rho_0^{\text{Ti}}(T_{\text{ref}}^{\text{Ti}}) \cdot (1 + \alpha^{\text{Ti}} \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Ti}}) + \beta^{\text{Ti}} \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Ti}})^2 + \gamma \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Ti}})^3) \quad (5.39)$$

Tabelle 5.2.: Zusammenfassung der Parameter für die Simulationen von Magnesiumdiborid in Kapitel 8 und 9.

Name	Ausdruck	Beschreibung
P	0,036	Fittparameter Supraleitung Leitfähigkeit
m	1/3,1	Fittparameter Supraleitung Leitfähigkeit
b	2,466	Fittparameter Supraleitung Temperaturabhängigkeit
E_c	$1 \cdot 10^{-4}$ [V/m]	Kritisches E-Feld
X	$1 \cdot 10^{-8}$ [V/m]	Minimales E-Feld
T	4,2 [K]	Umgebungstemperatur
$J_c(T_{ref})$	$2,48 \cdot 10^{10}$ [A/m ²]	Kritische Stromdichte bei 4,2 K
T_c	39 [K]	Kritische Temperatur
T_{ref}	4,2[K]	Referenztemperatur Kritische Stromdichte
$\rho_0^{MgB_2}$	$3,13018 \cdot 10^{-9}$ [Ωm]	Spezifischer Widerstand normalleitende Phase bei 0 K
$\rho_1^{MgB_2}$	$4,57719 \cdot 10^{-14}$ [$\Omega m/K^\xi$]	Temperaturabhängigkeit normalleitende Phase
ξ	2,6	Temperaturkoeffizient von Magnesiumdiborid
ρ_0^{Cu}	$2,02152 \cdot 10^{-10}$ [Ωm]	Spezifischer Widerstand Kupfer bei T_{ref}^{Cu}
T_{ref}^{Cu}	19 [K]	Referenztemperatur für Kupfer
α^{Cu}	$1,43174 \cdot 10^{-2}$ [K^{-1}]	Temperaturkoeffizient 1. Ordnung von Kupfer
β^{Cu}	$1,21426 \cdot 10^{-3}$ [K^{-2}]	Temperaturkoeffizient 2. Ordnung von Kupfer
γ^{Cu}	$3,17193 \cdot 10^{-5}$ [K^{-3}]	Temperaturkoeffizient 3. Ordnung von Kupfer
ρ_0^{Al}	$1,93 \cdot 10^{-12}$ [Ωm]	Spezifischer Widerstand Aluminium bei T_{ref}^{Al}
T_{ref}^{Al}	10 [K]	Referenztemperatur für Aluminium
α^{Al}	$-1,81925 \cdot 10^{-1}$ [K^{-1}]	Temperaturkoeffizient 1. Ordnung von Aluminium
β^{Al}	$8,64087 \cdot 10^{-3}$ [K^{-2}]	Temperaturkoeffizient 2. Ordnung von Aluminium
γ^{Al}	$3,86708 \cdot 10^{-3}$ [K^{-3}]	Temperaturkoeffizient 3. Ordnung von Aluminium
ρ_0^{Au}	$2,26 \cdot 10^{-10}$ [Ωm]	Spezifischer Widerstand Gold bei T_{ref}^{Au}
T_{ref}^{Au}	10[K]	Referenztemperatur für Gold
α^{Au}	$2,41711 \cdot 10^{-2}$ [K^{-1}]	Temperaturkoeffizient 1. Ordnung von Gold
β^{Au}	$2,69504 \cdot 10^{-3}$ [K^{-2}]	Temperaturkoeffizient 2. Ordnung von Gold
γ^{Au}	$3,74573 \cdot 10^{-3}$ [K^{-3}]	Temperaturkoeffizient 3. Ordnung von Gold
ρ_0^{Ti}	$23,6 \cdot 10^{-8}$ [Ωm]	Spezifischer Widerstand Titan bei T_{ref}^{Ti}
T_{ref}^{Ti}	4,2 [K]	Referenztemperatur für Titan
α^{Ti}	0 [K^{-1}]	Temperaturkoeffizient 1. Ordnung von Titan
β^{Ti}	0 [K^{-2}]	Temperaturkoeffizient 2. Ordnung von Titan
γ^{Ti}	$3,17193 \cdot 10^{-14}$ [K^{-3}]	Temperaturkoeffizient 3. Ordnung von Titan

6. Comsol Multiphysics

Um die beiden letzten in der Einleitung gestellten Fragen zu beantworten, ist das Ziel dieser Arbeit die numerische Simulation eines Supraleiters. Bei der Suche nach einem geeigneten FEM-Programm stach das kommerzielle Programmpaket COMSOL hervor, da es flexibel aufgebaut ist und durch seine Vielzahl an Modulen (siehe Abbildung 6.1), jede Menge Möglichkeiten zur Berechnung liefert. Für die Berechnung

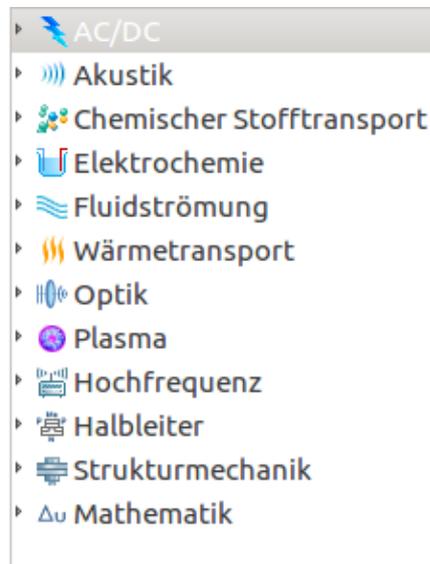


Abbildung 6.1.: Die in COMSOL verfügbaren Module. In dieser Arbeit wird das "AC/DC" Modul verwendet. [33]

eines Supraleiters ist das AC/DC-Modul das Richtige. Für die Wahl des Physikmoduls (siehe Abbildung 6.2) hängt es im Wesentlichen davon ab, ob eine elektrische (Strom oder Spannung) oder magnetische Quelle genutzt wird. Die Eingabe einer numerischen Formulierung für Supraleiter erfolgt in COMSOL über Materialparameter. Im Fall des Physikmoduls "Magnetische Feldformulierung" über die E - J Charakteristik und bei "Elektrische Ströme" über die σ - E Charakteristik. Dies ist ein Vorgriff bezüglich der nachfolgenden Kapitel, in denen noch weiter darauf eingegangen wird. Da es zielführender ist, zuerst den theoretischen Teil zu beschreiben und erst im Anschluss auf die Funktionsweise von COMSOL einzugehen, ist es wichtig zu wissen, welche Eingabeparameter COMSOL benötigt. Nachdem für die Fragestellungen vor allem der supraleitende-normalleitende Übergangsbereich sehr wichtig erscheint,



Abbildung 6.2.: Die im AC/DC-Modul verfügbaren Physikmodule [33]

stellt sich ebenfalls bereits zu Beginn die Frage, ob COMSOL mit so unterschiedlich großen Zahlen umgehen kann. Vor allem ist im Bereich des Übergangs meist mit sehr großen Änderungen zu rechnen. Sollte es COMSOL schaffen, dies zu berechnen, stellt sich als Letztes noch die Frage nach dem Rechenaufwand.

In den nächsten Kapiteln geht es um die Vorstellungen der einzelnen Simulationen. Während im ersten Kapitel 7 die Erstellung einer Simulation mit Hilfe des von COMSOL direkt angebotenen Beispielprogramms beschrieben wird, wird in den darauf folgenden bereits der zweiten und dritten Fragestellung (siehe Kapitel 1) nachgegangen. Die Modelle erstrecken sich von einem einfachen 2D-Modell im Kapitel 8 bis zu einem der Realität besser entsprechenden 3D-Modell im Kapitel 8.

7. Einführung in Comsol anhand des Beispielprogramms "Superconducting Wire"

Aufgrund der Komplexität von COMSOL werden jede Menge Beispielprogramme angeboten, darunter befindet sich auch eine vereinfachte Simulation eines Supraleiters. Es wurde das Physikmodul "Magnetisches Feld Formulierung" verwendet und damit ein magnetisches Feld definiert. In diesem Programm sieht man bereits, dass dieses Modell zwar einen Supraleiter simuliert, aber aufgrund der anderen Berechnungsmethode numerisch anders rechnet, als wenn man statt des Magnetfelds einen Strom anlegt. Trotzdem ist das Beispielprogramm als Einstieg zu empfehlen, da es die Grundlagen schnell näherbringt. Die knappe Anleitung [34] ist vor allem für die selbst erstellten Programme wohl die beste Hilfestellung. Um sich genauer in speziellere oder abweichende Funktionen einzulesen, ist die ausführliche Dokumentation [33] vorzuziehen. In der nachfolgenden Beschreibung wird nur auf Essentielles für diese Arbeit Rücksicht genommen, Funktionen, die nicht von Interesse sind, werden nicht kommentiert, da sie den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

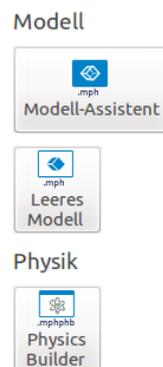


Abbildung 7.1.: Der Startbildschirm von COMSOL. "Der Modell-Assistent" erstellt im Gegensatz zu "Leeres Modell" bereits ein Grundgerüst. Er fragt vor Erstellung Details über die Dimension der Simulation, die Wahl des Physikmoduls und ob die Studie zeitabhängig sein soll. (Der "Physics Builder" wird in dieser Arbeit nicht behandelt) [33].

7.1. Modell-Assistent

Zu Beginn wird man bei COMSOL gefragt, ob man sich sein eigenes Physikmodul mit Hilfe von "Physics Builder" bauen will, oder ob man ein bestehendes nutzen will. Der Startbildschirm in [33] ist in der Abbildung 7.1 dargestellt, wenn man vom "Physics Builder" absieht (wird in dieser Arbeit nicht benötigt). Man hat die Möglichkeit ein "Leeres Modell" zu erstellen oder den "Modell-Assistent" zu nutzen, welcher bereits ein Grundgerüst bereitstellt. Der "Modell-Assistent" fragt vor Erstellung des Grundgerüsts nach der Art der zu behandelnden Geometrie. In diesem Fall ist es ein "2D-Modell", des Physikmoduls "Magnetische Feldformulierung". Die Art der Studie ist "Zeitabhängig". Nach Abschluss des Modell-Assistenten listet uns COMSOL den

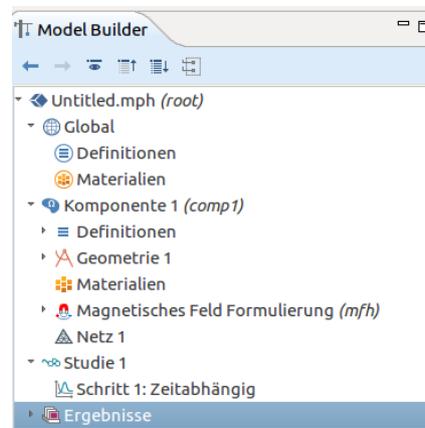


Abbildung 7.2.: Der Model Builder in COMSOL. In "Global" und "Komponente" gibt es die Möglichkeit seine Definitionen und Materialien zu hinterlegen. Die "Magnetische Feldformulierung" ist in diesem Beispiel das gewählte Physikmodul. Unter "Netz" werden die Finite-Elemente erzeugt. In "Studie" erfolgt die Berechnung und unter "Ergebnisse" findet man bei erfolgreicher Berechnung alle berechneten Werte [33].

vorkonfigurierten "Model Builder" (siehe Abbildung 7.2) auf, der nur noch nach den eigenen Wünschen weiter angepasst werden muss.

7.2. Model Builder

7.2.1. Definitionen

Den Menüpunkt "Definitionen" gibt es in COMSOL mehrmals. Einerseits unter "Global" für den gesamten "Model Builder" andererseits unter "Komponente". Mit "Komponente" ist in COMSOL eine Baugruppe bezeichnet. So ist es möglich, in einer Datei mehrere unterschiedliche Simulationen zu erstellen und diese dann in der Auswertung gegenüber zu stellen. In dieser Arbeit wird nur eine Baugruppe (siehe Ab-

bildung 7.2) verwendet, was es prinzipiell ermöglicht, frei zu wählen, wo Variablen (siehe Tabelle 7.2), Parameter (siehe Tabelle 7.1) und Funktionen (siehe Abbildung 7.4) definiert werden. Aufpassen muss man nur auf die Abhängigkeiten, da eine Va-

Tabelle 7.1.: Die Parameter des Beispiel Programm, welche in Global definiert sind [34].

Name	Ausdruck	Beschreibung
α	1,449621256	Parameter for resistivity model
J_c	$1,7 \cdot 10^7 [\text{A}/\text{m}^2]$	Critical current density
I_0	$1 \cdot 10^6 [\text{A}]$	Applied current
ρ_{air}	$1 \cdot 10^2 [\Omega \cdot \text{m}]$	Resistivity of air
τ	0,02 [s]	Time constant for applied current
T_c	92 [K]	Critical temperature
dT	4 [K]	Parameter for resistivity model
dJ	$J_c \cdot 10^{-4}$	Parameter for resistivity model
E_0	0,0836168 [V/m]	Parameter for resistivity model

Tabelle 7.2.: Die Variablen müssen wegen der Zeitabhängigkeit in "Komponente" definiert werden. I_1 ist der Strom der Stromquelle und wird über die zweite Formel in das Magnetfeld $H_{0\phi}$ umgerechnet [34].

Name	Ausdruck	Einheit
I_1	$I_0 \cdot (1 - \exp(\frac{-t}{\tau}))$	[A]
$H_{0\phi}$	$\frac{I_1}{(2\pi\sqrt{(x^2+y^2)})}$	[A/m]

riable in "Global" nicht auf Parameter aus "Komponente" zugreifen kann. Im Falle einer zeitabhängigen Studie gilt das auch auf die veränderliche Variable t die erst in "Komponente" definiert wird. Trotzdem hat sich bei späteren aufwendigeren Simulationen herausgestellt, dass es günstiger ist so "Global wie möglich" zu definieren. Die Vermutung liegt nahe, dass COMSOL als Beispiel eine Variable unter "Global" nur einmal berechnet wird und unter "Komponente" für jeden Zeitschritt. Weiters ist es möglich die definierten Parameter, Variablen und Funktionen in einer Textdatei zu speichern oder eine Textdatei zu öffnen. Für weitere Hintergrundinformationen und die genaue Schreibweise solch einer Textdatei sei auf den Anhang A verwiesen. Die Wahl von nur einer Baugruppe erleichtert das parallele Arbeiten. Während eine Baugruppe berechnet wird, kann man eine andere editieren.

7.2.2. Geometrie

Unter dem Punkt "Geometrie" gibt es die Möglichkeit, direkt in COMSOL eine Geometrie zu zeichnen. Man kann auch eine DXF-Datei importieren. Im Beispielprogramm aus Abbildung 7.3 sind zwei Kreise definiert mit 1 m und 0,1 m Radius, wobei der kleinere den Supraleiter und der größere die Luft darstellt.

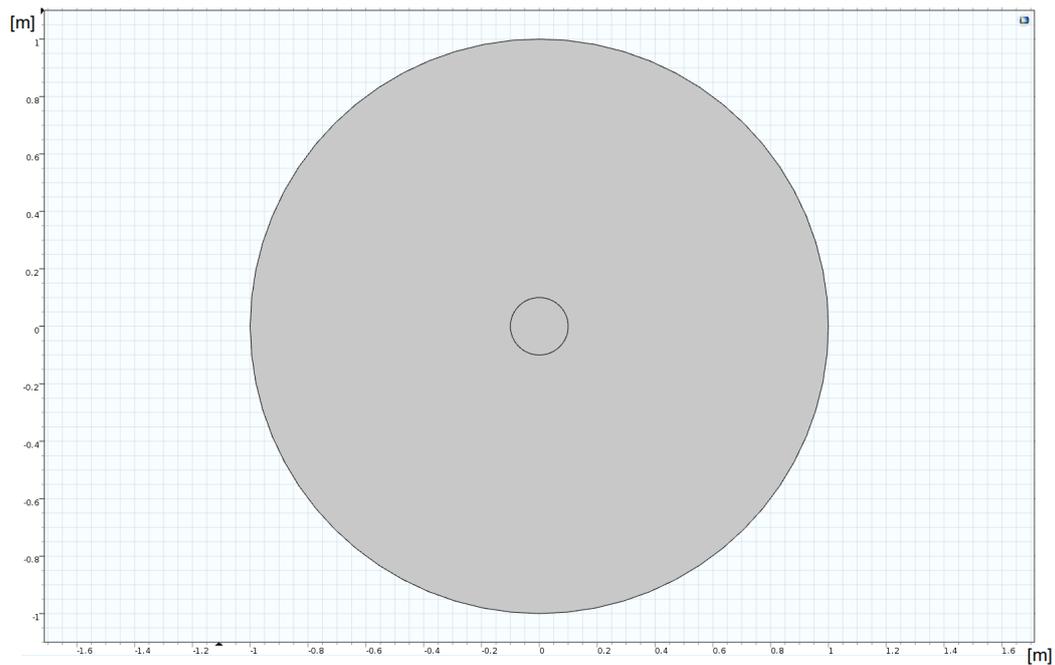


Abbildung 7.3.: Die Geometrie des Beispielprogramms. Innen ist der Supraleiter, außen die Luft.

7.2.3. Material

Wie bei den Definitionen gibt es auch bei den Materialien die Möglichkeit, diese global oder in einer Baugruppe zu definieren. Luft wurde gewählt, diese befindet sich auch in der Bibliothek. Der Supraleiter wurde als "leeres Material" hinzugefügt und nachträglich definiert. Die Zuweisung erfolgte so, dass sich im äußeren Ring Luft (siehe Abbildung 7.3) und im inneren der Supraleiter befindet. In den Tabellen 7.3 und 7.4 sind die Materialparameter angegeben. Der für die Supraleitung verantwortliche ist $|E|$. Um den supraleitenden Effekt zu erzeugen, wird die Step Funktion (siehe Abbildung 7.4) verwendet, welche für $|J| > J_c$ gegen 1 geht.

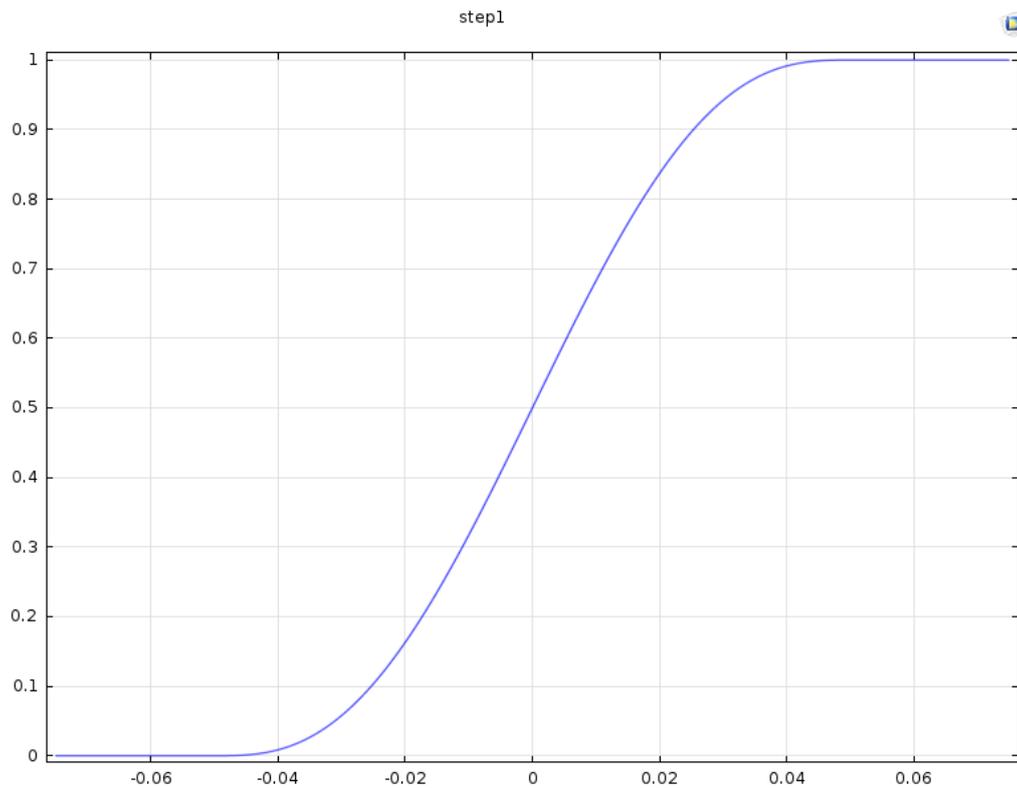


Abbildung 7.4.: Die Step Funktion erzeugt einen einfach supraleitenden Sprung.

Dabei verhält sich das E -Feld wie in einem Normalleiter. Für $|J| < J_c$ strebt die Step Funktion gegen 0. Dies ist gleichbedeutend mit der Verdrängung des E -Feldes im Supraleiter.

Tabelle 7.3.: Materialparameter der Luft [34].

Eigenschaft	Variable	Wert	Einheit	Eigenschaft Gruppe
Relative Dielektrizitätskonstante	ϵ_r	1	1	Basic
Relative Permeabilität	μ_r	1	1	Basic
Spezifischer Widerstand	r_{es}	ρ_{air}	$\Omega \cdot \text{m}$	Basic

Tabelle 7.4.: Materialparameter des Supraleiters. Bei norm E wurde die Stepfunktion verwendet (siehe Abbildung 7.4) [34].

Eigenschaft	Variable	Wert	Einheit	Gruppe
Dielektrizität	ϵ_r	1	1	Basic
Permeabilität	μ_r	1	1	Basic
norm E	$ E $	$E_0 \left(\frac{ J - J_c}{J_c} \cdot \text{step1} \left(\frac{ J - J_c}{1[\text{A/m}^2]} \right) \right)^\alpha$	V/m	<i>E-J</i> Charakteristik
norm J	$ J $	$\sqrt{(J1)^2 + J2^2 + J3^2}$	1	<i>E-J</i> Charakteristik

7.2.4. Physik - Magnetische Feldformulierung

Nachdem alle Eingabeparameter definiert sind, kommt man zum Punkt "Physik". Bei "Magnetische Feldformulierung" werden 4 Einträge (Faradaysches Gesetz, Gaußsches Gesetz des magnetischen Feldes, Magnetische Isolation und Anfangswerte) automatisch hinzugefügt. Prinzipiell ist es hier wieder möglich, eigene Parameter, die nicht vom Material definiert sind, zu nutzen. Davon sollte aufgrund der Übersichtlichkeit jedoch abgeraten werden. Bei den Formeln gibt es eingeschränkte Wahlmöglichkeiten. Das "Faradaysche Gesetz" benutzt 4 Formeln mit einigen Umformungen (siehe Formeln 7.1 bis 7.4. Da die Eingabeparameter für die erste Formel (*E*-Feld) (siehe Formel 7.1) bei der Luft der "Spezifische Widerstand", und beim Supraleiter die *E-J* Charakteristik (siehe Tabelle 7.4) ist, benötigt man hierfür zwei Mal dieses Gesetz, was auch COMSOL unterstützt und nach Erstellung nur der zugehörigen Geometrie zugeordnet werden muss. Die zweite Formel (siehe Formel 7.2) in diesem Gesetz bezieht sich auf den zeitabhängigen Teil, der bei einer Studie mit "Zeitabhängig" zum Tragen kommt. Eine Anpassung für dieses Beispiel ist nicht nötig. Beim *D*-Feld, Formel 7.3, lässt COMSOL keine Wahl und es muss daher nicht angepasst werden. Die vierte Formel (siehe Formel 7.4) ist für das *B*-Feld zuständig, deshalb ist es naheliegend, die relative Permeabilität zu nutzen, da wir bei Luft und Supraleiter dies in den Materialparameter (siehe Tabellen 7.3 und 7.4) bereits definiert haben.

$$\vec{E} = \sigma^{-1}(\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J}_e) = \rho(\vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{J}_e) = \vec{E}(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (7.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.2)$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (7.3)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = f(|\vec{H}|) \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|} = m u_0 (\mu' - i\mu'') \vec{H} = \mu_0 \mu_r (\vec{H} + \vec{B}_r) = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (7.4)$$

Für das Gaußsche Gesetz $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, die magnetische Isolation $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ (\vec{n} ist der Normalvektor am Rand) und die Anfangswerte ist eine Anpassung für das Beispielprogramm nicht nötig.

Bevor das Thema des Physikmoduls abgehakt werden kann, muss noch eine sogenannte Quelle hinzugefügt werden (siehe Formel 7.5, in diesem Fall ein H -Feld. Als Koordinatensystem ist es naheliegend ein zylindrisches zu wählen und zu definieren (siehe Tabelle 7.2).

$$\vec{H}_0 = \begin{pmatrix} r \\ \phi \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{0\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

7.2.5. Das Netz - die Erstellung der finiten Elemente

Bei der Erstellung des Netzes handelt es sich immer um eine Kompromisslösung. Je kleiner man die Elemente ansetzt, desto größer wird der Rechenaufwand, weil mehr Elemente berechnet werden müssen. Außerdem wird die Änderung der Simulationsgrößen von einem Element zum nächsten kleiner, womit es bei einer zu großen Toleranz zu Konvergenzproblemen kommt. Da Supraleiter sehr große Sprünge in ihrem Leitverhalten aufweisen, was zu sehr großen Änderungen von Element zu Element führen kann, ist es naheliegend, dass ein zu großes Netz durch diese großen Änderungen zu Problemen in der numerischen Berechnung führen kann.

Die genaue Größe der einzelnen Elemente, wie im Ausschnitt dieses Beispielprogramms dargestellt, erzeugt COMSOL selbst. Zur Erstellung werden 5 Parameter als Eingabe genutzt, die maximale und minimale Elementgröße, die maximale Elementwachstumsrate, der Krümmungsfaktor und die Auflösung kleiner Bereiche. Um die Wahl zu erleichtern, gibt es vordefinierte Sequenztypen von "extrem fein" bis "extrem grob". Zusätzlich lässt sich eine von 4 Kalibrierungen definieren; Standard, Strömungsdynamik, Plasma und Halbleiter. In der Abbildung 7.5 ist das erzeugte Netz des Beispielprogramm dargestellt [33].

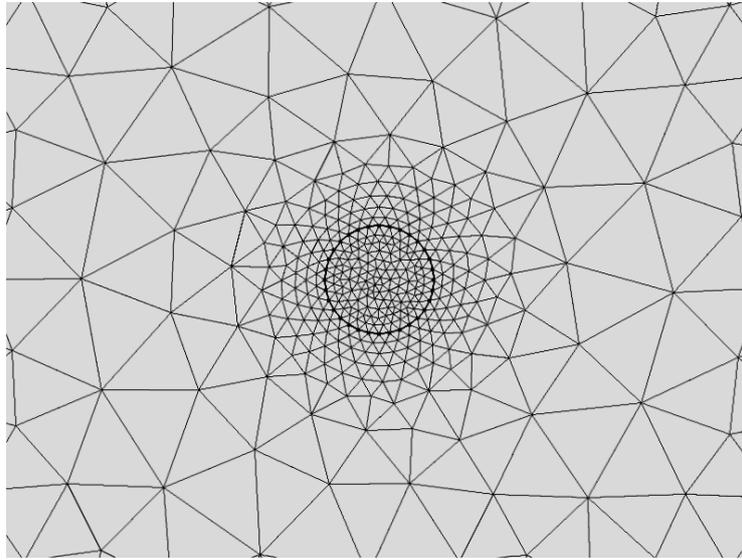


Abbildung 7.5.: Die Geometrie mit erstelltem Netz und den finiten Elementen.

7.3. Die Studie

Diese Arbeit beschränkt sich auf die "Zeitabhängige Studie", da man so einen Parameter, zum Beispiel den Strom oder die Spannung der Quelle über die Zeit verändern kann, um später das Verhalten des Modells bei zeitlich schrittweise veränderten Quellen zu analysieren. Die Zeitabhängigkeit kann dadurch beliebig mit dem Parameter t eingebaut werden. Im Beispielprogramm kommt die t Abhängigkeit in der Variable I_1 vor (siehe Tabelle 7.2). Der Zeitparameter verlangt in der Studie 4 Angaben: den Einheitspräfix 1, die Startzeit 0, die Endzeit 0,1 und die Schrittweite 0,005. Alternativ kann man die Schrittweite auch über die Schrittzahl eingeben, was aber nur die eventuell nötigen Umrechnungen bzw. Umformungen erspart. Gewählt wurde, wie in der Formel von I_1 ersichtlich definiert, die Zeitabhängigkeit. Über den kompletten Ausdruck $(1 - \exp(\frac{-t}{\tau}))$, durch den Parameter τ fällt die Einheit weg und so wird mit jedem Zeitschritt der Strom I_1 schrittweise erhöht.

Die Variable $H_{0\phi}$ (siehe Tabelle 7.2 und Formel 7.5) errechnet für die Quelle das Magnetfeld, da sich in diesem Beispiel die Physik auf die magnetische Feldformulierung beschränkt.

Nach Eingabe der Parameter in der Studie gibt es bereits die Möglichkeit, die Berechnung zu starten und COMSOL wählt selbst eine numerische Lösungskonfiguration, die man aber auch selbst vorab definieren kann, oder nachträglich anpassen und erneut berechnen lassen kann.

7.4. Ergebnisse

Nach der Berechnung gibt es unter "Ergebnisse" die Möglichkeit, das Ergebnis zu plotten. Hierbei gibt es vielfältige Möglichkeiten, das Modell zu analysieren. Zum Beispiel kann man das Eindringen des Magnetfeldes bei größerem H -Feld betrachten (siehe Abbildungen 7.6 und 7.7). Es ist außerdem noch möglich eigene Messpunkte

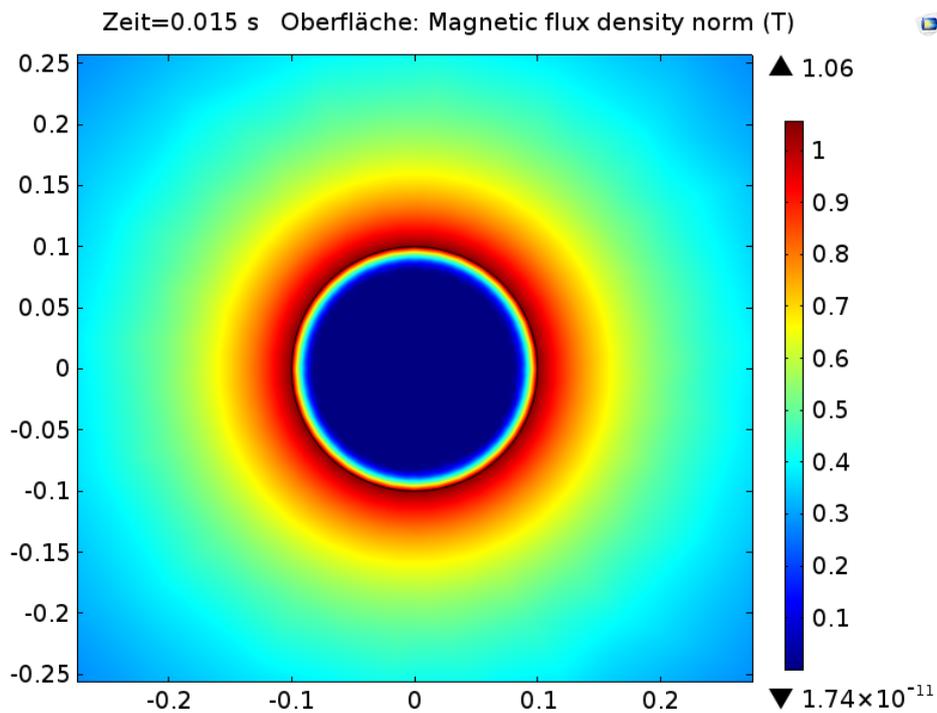


Abbildung 7.6.: Magnetfeldverdrängung: Zu sehen ist das B -Feld bei kleinem H -Feld ($t=0.015\text{s}$). Der Supraleiter (schwarzer Kreis) verdrängt das B -Feld fast vollständig in seinem Inneren. Nur an der Oberfläche dringt dieses ein.

zu setzen und diese ein- oder mehrdimensional zu plotten. Für mehr Hintergrundinformationen sei auf das Handbuch von COMSOL [33] verwiesen.

Bereits in diesem einfachen Beispielmodell sieht man sehr deutlich die Oberflächenströme, die das Magnetfeld abschirmen (siehe Abbildungen 7.8 und 7.9).

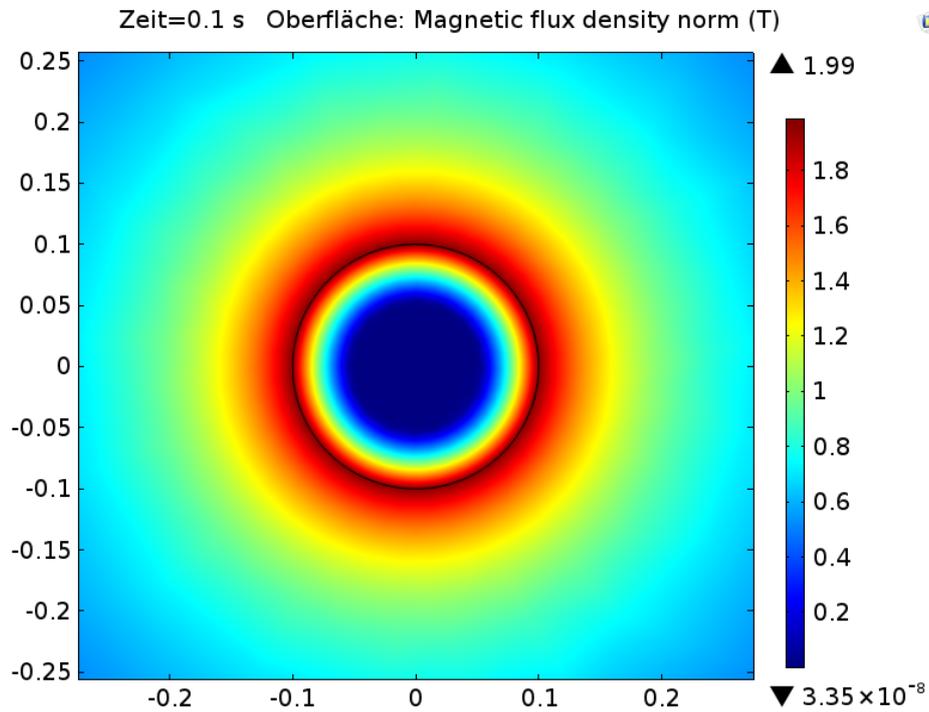


Abbildung 7.7.: Magnetfeld dringt ein: Zu sehen ist das B -Feld bei größerem H -Feld ($t=0.1s$). Der Supraleiter (schwarzer Kreis) mit weiter eindringendem B -Feld. Zum Vergleich siehe Abbildung 7.6 in der das Magnetfeld noch nicht so weit eingedrungen ist.

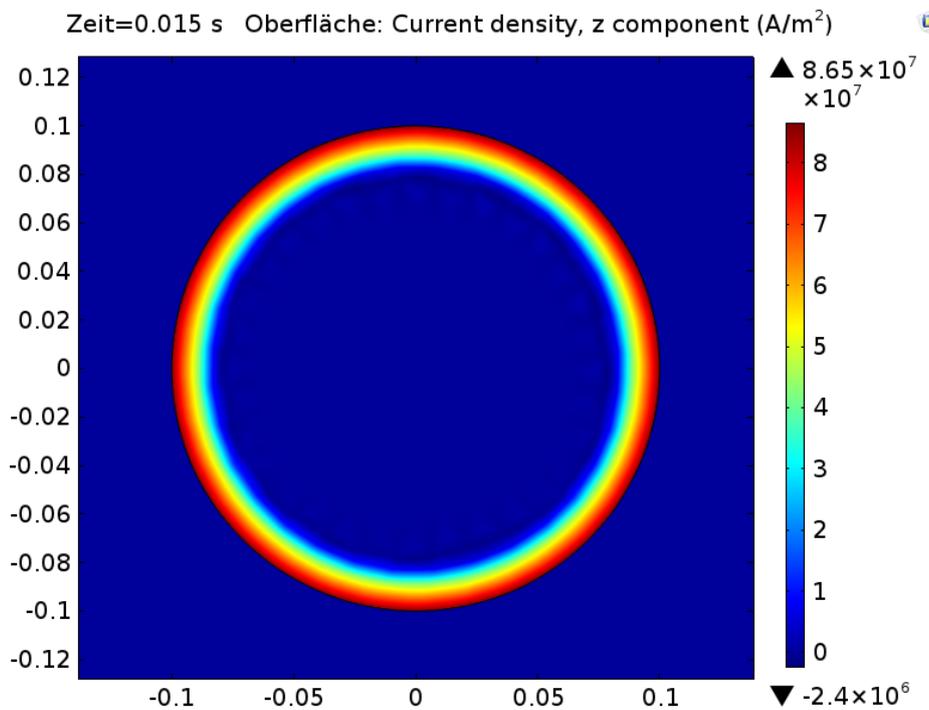


Abbildung 7.8.: Oberflächenströme des Supraleiters welche das Eindringen des Magnetfeldes verhindern. (Bei kleinem H -Feld und $t=0.015s$. Im Vergleich zu 7.9).

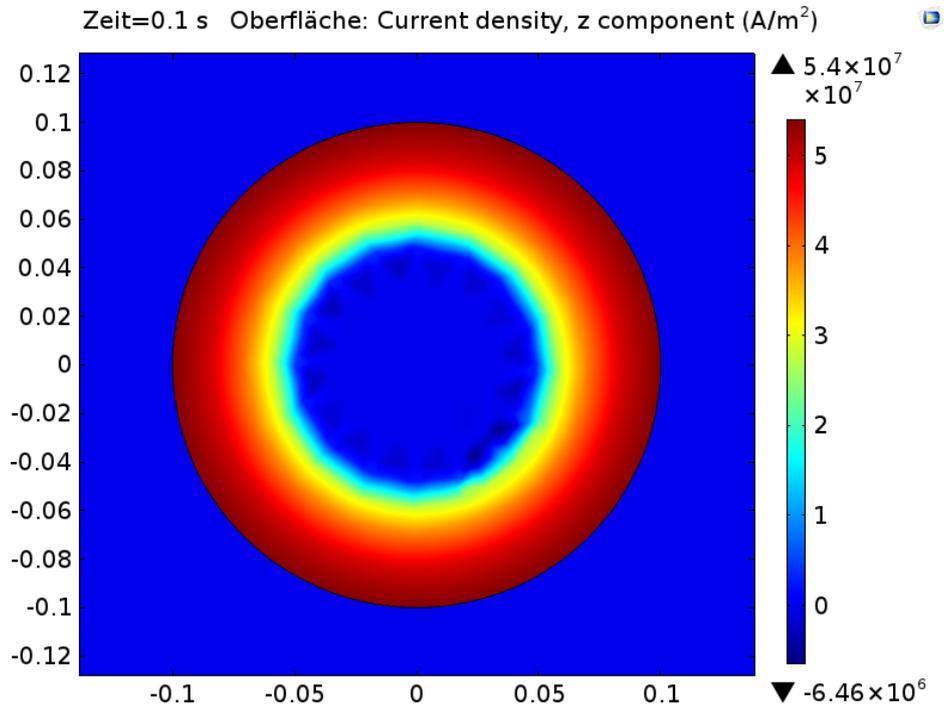


Abbildung 7.9.: Oberflächenströme des Supraleiters welche durch das äußere Magnetfeld bereits weiter zurück gedrängt wurden. (bei größerem H -Feld und $t=0.1s$. Im Vergleich zu 7.8).

7.5. Fazit

Prinzipiell kann COMSOL Supraleiter simulieren, doch darf man bei diesem Beispiel nicht die Einfachheit vergessen. Es gibt nur zwei Geometrien. Einen Kreis mit einem Ring außen. Auch der Verzicht auf die dritte Raumrichtung vereinfacht die Berechnung sehr.

8. 2D Simulationen mit zeitabhängiger Stromquelle

In diesem Kapitel werden, mit COMSOL, selbst erstellte 2D Simulationen vorgestellt. Um die Lesbarkeit zu erhöhen, wird bei den selbst erstellten Programmen nicht jeder Schritt ausführlich erklärt. Für eventuelle Unklarheiten sei auf das Beispielprogramm von COMSOL verwiesen (siehe Kapitel 7). Im Gegensatz zu diesem wurde das Physikmodul "Elektrische Ströme" gewählt, das es im Unterschied zur "Magnetischen Feldformulierung" ermöglicht, eine Strom- oder Spannungsquelle anzulegen (siehe Kapitel 6). Die Parameter wurden, wenn nicht explizit erwähnt, aus Tabelle 5.2 übernommen und die Definition der Leitfähigkeit wurde aus Gleichung 5.34 übernommen, die aus Übersichtsgründen in den Formeln 8.1 bis 8.4 nochmals dargestellt sind.

$$\sigma_{\text{N}}^{\text{Cu}}(T) = \frac{1}{\rho_0^{\text{Cu}} \cdot (1 + \alpha(T - T_{\text{ref}}^{\text{Cu}}) + \beta \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Cu}})^2 + \gamma \cdot (T - T_{\text{ref}}^{\text{Cu}})^3)} \quad (8.1)$$

$$\sigma_{\text{N}}^{\text{MgB}_2}(T) = \frac{1}{\rho_0^{\text{MgB}_2} + \rho_1^{\text{MgB}_2} \cdot T^\xi} \quad (8.2)$$

$$J_c(T) = \left(\frac{1 - \frac{T}{T_c}}{1 - \frac{T_{\text{ref}}}{T_c}} \right)^b \quad (8.3)$$

$$\sigma^{\text{MgB}_2}(\vec{E} + \vec{X}, T) = \frac{J_c(T) \cdot J_c(T_{\text{ref}}) \left(P \cdot \left(\frac{\vec{E} + \vec{X}}{E_c} \right)^m + (1 - P) \right)}{\vec{E} + \vec{X}} + \sigma_{\text{N}}^{\text{MgB}_2}(T) \quad (8.4)$$

8.1. Einfilament Supraleiter

8.1.1. Zusätzliche Eingaben

Wie im Beispielprogramm unter Definitionen 7.2.1 beschrieben, ist es günstiger die Variablen so global wie möglich zu definieren. Deshalb sind die Formeln 8.1 bis 8.3 in "Global" und die Formel 8.4 aufgrund ihrer E-Feld Abhängigkeit in "Komponente" definiert. Als Geometrie wurde in diesem Programm ein einfaches 2D Modell gewählt, das ein Filament mit ummanteltem Kupfer simulieren soll. Wie in der Abbildung 8.1 dargestellt, befindet sich in der Mitte ein $1 \times 1 \times 10$ [μm] großes Filament, welches von Kupfer umgeben ist. Die Abmessungen sind deshalb dreidimensional, weil COMSOL eine Dicke in z-Richtung für die Berechnung benötigt. Dies wird im Physikmodul als "Elektrische Ströme" definiert [33]. Die schwarze, dicke Linie stellt die Masse dar und die rote Linie ist der Pluspol für die Stromquelle. Um

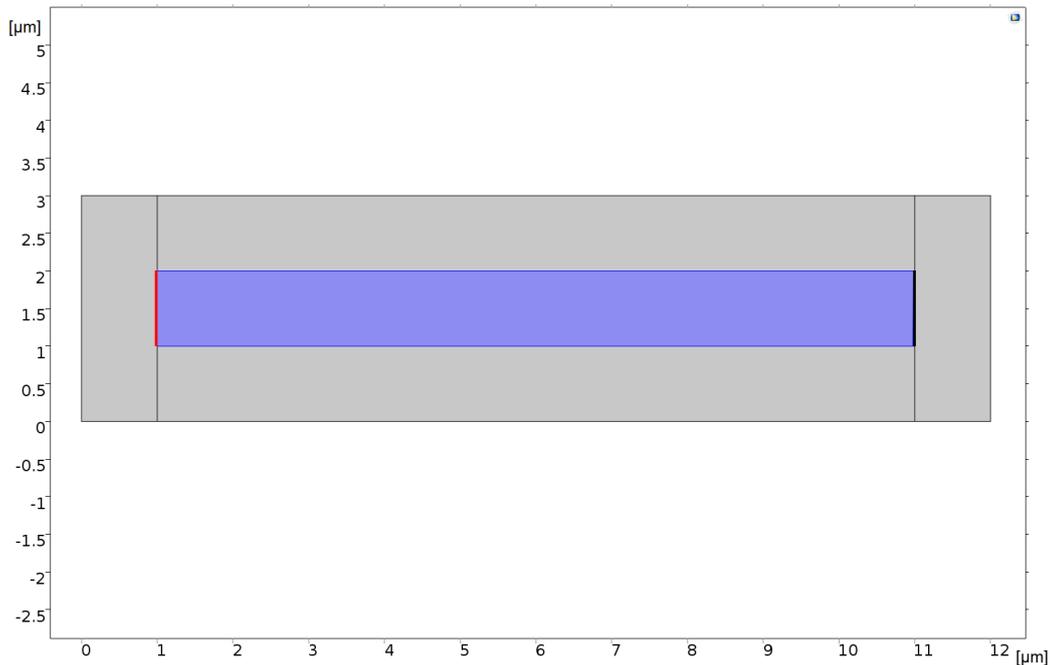


Abbildung 8.1.: Die Geometrie vom Simulationsmodell. Farblich gekennzeichnet sind das Kupfer in Grau und der Supraleiter in Blau. Der Pluspol der Stromquelle ist rot markiert und der Minuspol ist schwarz (dicke Linie).

eine bessere Betrachtung zu ermöglichen, wurde folgende Formel (siehe Tabelle 8.5) entwickelt.

$$I(t) = A \cdot J_0(t) = A \cdot J_0 \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \quad (8.5)$$

J_0 ist die angelegte Stromdichte, welche ein homogener Leiter mit der Fläche A bei $t = 0$ hätte. Die Fläche A entspricht dem Querschnitt eines Filaments und J_0 ist die zeitlich abhängige Stromdichtequelle. Die Multiplikation von Filamentquerschnitt und Stromdichte der Stromdichtequelle ergibt den Strom der Stromquelle. Die Wahl einer faktischen Stromdichtequelle ist deswegen sinnvoll, da ein Vergleich mit dem Parameter J_c des Supraleiters einfacher ist. Der zeitliche Term $(1 - \frac{t}{\tau})$ beschreibt die Veränderung des Stromes nach jedem Zeitschritt, wobei $0 \leq t \leq 1$ ns und $\tau=1$ ns ist. Der Ausdruck $(1 - \frac{t}{\tau})$ wurde statt $(\frac{t}{\tau})$ gewählt, weil es sich bei den Simulationen als notwendig herausstellte, um Konvergenzproblemen zu vermeiden. Die genaue Ursache war nicht ersichtlich. Für Kupfer und Magnesiumdiborid wurden die Standardwerte von COMSOL für den Leitwert σ in "Material" (siehe Kapitel 5.5) mit den Variablen $\sigma^{\text{Cu}}(T)$ und $\sigma^{\text{MgB}_2}(\vec{E} + \vec{X}, T)$ überschrieben.

Physikmodul - Elektrische Ströme

Bei Erstellung des Physikmoduls "Elektrische Ströme" werden automatisch 3 Einträge (Ladungserhaltung, elektrische Isolation und Anfangswerte) angelegt. Die Formulierungen der Ladungserhaltung sind in den Formeln 8.6 bis 8.9 dargestellt.

Die erste Formel ist für eventuelle Randstromquellen. Diese wurden in dieser Arbeit nicht verwendet, deshalb wird auch nicht weiter darauf eingegangen.

Die zweite Formel wurde vereinfacht, da es in dieser Studie darum geht, den Strom zeitlich zu ändern und nicht darum, die zeitliche Veränderung von elektrischen Feldern zu beobachten. Es wurde vom stationären Fall ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$) ausgegangen. Dies führt zur dritten Formel. Diese Betrachtung ist in COMSOL implementiert und muss nur im Physikmodul umgestellt werden.

Der Strom \vec{J}_e ist ein externer Strom bzw. eine Störquelle, welche in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wurde und deshalb mit $\vec{J}_e = 0$ angenommen wurde. Für weitere Hintergrundinformationen zum Ursprung der Formulierungen sei auf die Kapitel 5.3 und 5.4 verwiesen, in denen zusätzlich auf die vierte Formel eingegangen wird. Da das Physikmodul alle Parameter des Materials standardmäßig verwendet und diese bereits ausreichend definiert wurden, sind für die Ladungserhaltung, die elektrische Isolation und die Anfangswerte keine weiteren Anpassungen mehr nötig. Um zusätzlich eine Quelle anzuschließen, benötigt man die Einträge "Anschluss" und "Erdung", wobei beim Anschlusstyp "Strom" gewählt und I_0 , wie im Kapitel 8.1.1 beschrieben, eingetragen wurde. Der Ort des Anschlusses und der Erdung wurde so wie in der Abbildung 8.1 dargestellt definiert.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = Q_j \quad (8.6)$$

$$\vec{J} = \left(\sigma + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E} + \vec{J}_e \quad (8.7)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}_e \quad (8.8)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (8.9)$$

Studie

Bei der zeitabhängigen Studie muss die Variable t definiert werden. Wie bereits am Anfang des Kapitels angegeben, wurde ein Wertebereich von $0 \leq t \leq 1$ ns gewählt. Die Anzahl der Zeitschritte kann beliebig gewählt werden. Ein guter Kompromiss zwischen Rechenaufwand und Feinheit zeigte sich bei einem fixen Zeitschritt von $\Delta t = \frac{1}{1000}$, weshalb dieser auch genutzt wurde.

Studienergebnisse

In der Abbildung 8.2 ist die Leitfähigkeit grafisch bei $J_{01} = 209\% J_c$ dargestellt (siehe Kapitel 8.1.1). Zu sehen ist der Beginn des Zusammenbruchs des Supraleiters

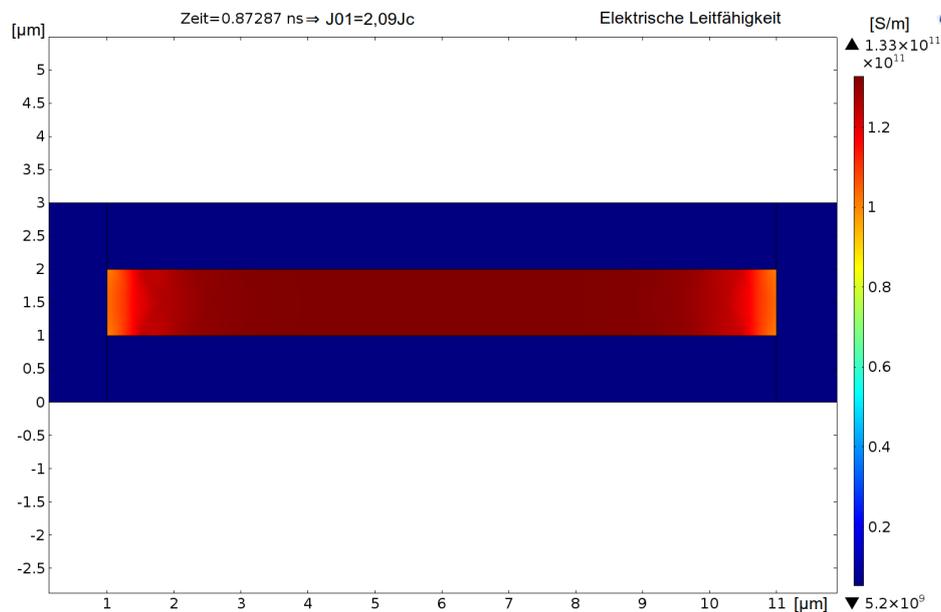


Abbildung 8.2.: Die elektrische Leitfähigkeit bei $t = 0,87287$ ns: Dies entspricht etwa $J_{01} = 209\% J_c$ (siehe Kapitel 8.1.1). Der Supraleiter hat an den Endstellen bereits eine geringere elektrische Leitfähigkeit, zu sehen an der orangen Farbe.

(Rot bis Gelb). Während in der Mitte (Bereich um $x = 6$) noch die Leitfähigkeit bei einem Wert von $\sigma = 1,33 \cdot 10^{11}$ S/m liegt, ist der Randbereich des Supraleiters ($x = 1$ bis $x = 2$ und $x = 10$ bis $x = 11$) um rund ein Viertel weniger leitfähig. Die Leitfähigkeit ist also im Vergleich zu Kupfer noch immer um etwa den Faktor 20 besser. Für den direkten Vergleich ist in der Abbildung 8.3 ebenfalls die elektrische Leitfähigkeit mit demselben Strom dargestellt. Im Unterschied dazu wurde das umliegende Kupfer entfernt. Der Vergleich der beiden Darstellungen zeigt den Einfluss des Kupfers. Ist es nicht vorhanden, ist die Leitfähigkeit homogen. Zu sehen ist zusätzlich der weiter fortgeschrittene Zusammenbruch, denn die Leitfähigkeit ist gegenüber dem Fall des aktivierten Kupfers um etwa 25% bis 45% schlechter. Die Fluktuationen in der Abbildung 8.3 sind Rechenfehler und resultieren aus dem kleinen Wertebereich (siehe Abbildung 8.3): Wertebereich der Leitfähigkeit). Die farblichen Unterschiede sind immer in Bezug auf den Wertebereich zu interpretieren.

In den Abbildungen 8.4 und 8.5 sind die Spannungsdifferenzen zwischen $x_1 = 4 \mu\text{m}$ und $x_2 = 8 \mu\text{m}$ angegeben. Dies entspricht einer Vierleitermessung (siehe Ka-

pitel 4) und wurde aus Vergleichsgründen zum realen Fall (siehe Abbildung 4.4) gewählt. Zu sehen ist die starke Dämpfung von Kupfer bei $\frac{J_{01}}{J_c} > 1$, beim Vergleich der beiden Abbildungen 8.4, mit Kupfer und 8.5, ohne Kupfer.

Knapp unterhalb von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ (bei J_{01} ca. 99,29% J_c) wurde in der Abbildung 8.6 mit Kupfer die Leitfähigkeit dargestellt.

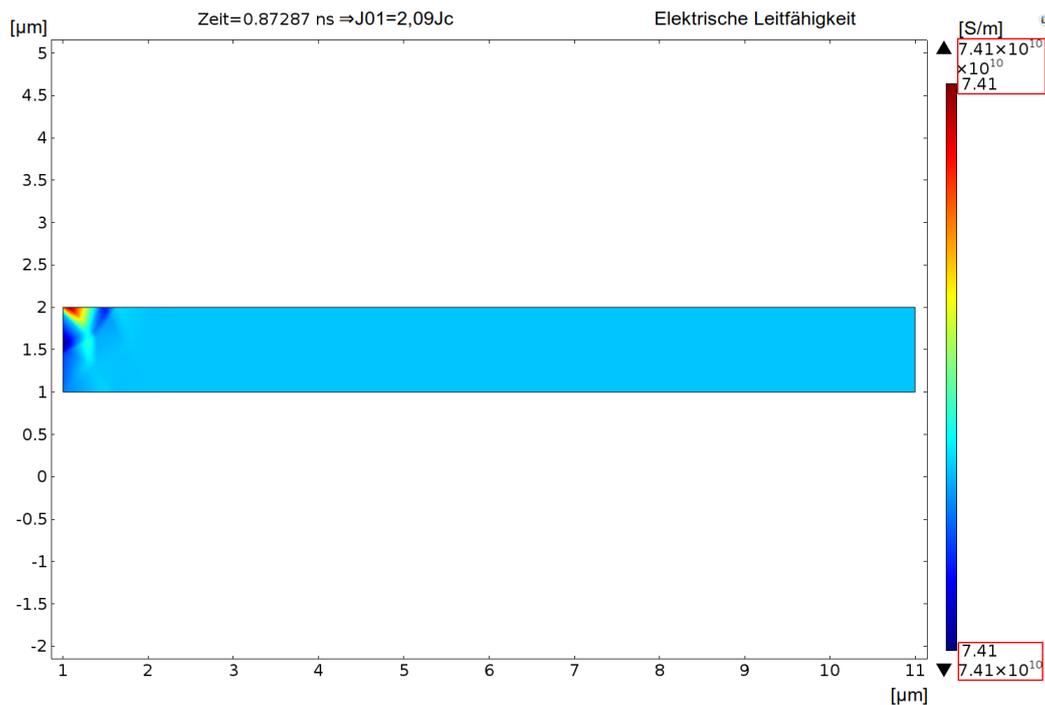


Abbildung 8.3.: Die elektrische Leitfähigkeit bei deaktiviertem Kupfer und bei $t = 0,87287$ ns dies entspricht etwa $J_{01} = 209\%J_c$ (siehe Kapitel 8.1.1). Die elektrische Leitfähigkeit ist homogen, zu sehen an dem rot eingerahmtem Wertebereich. Die Fluktuationen (links oben) sind Rechenfehler.

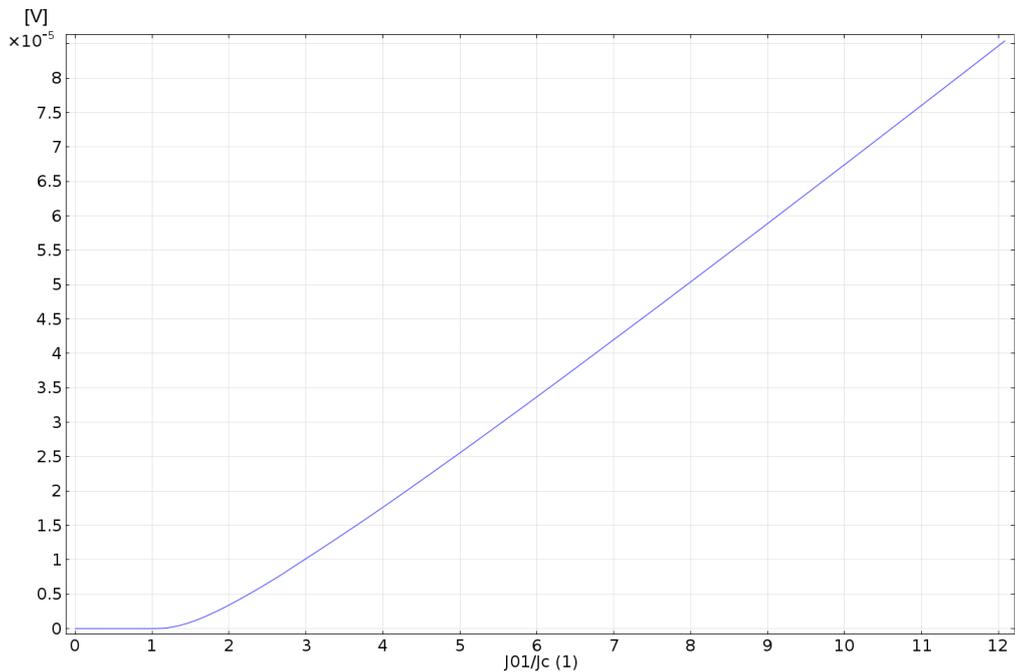


Abbildung 8.4.: Spannungsdifferenz bei der Simulation mit aktiviertem Kupfer zwischen $x_1 = 4 \mu\text{m}$ und $x_2 = 8 \mu\text{m}$. Auf der x-Achse wurde die Stromdichtequelle variiert und mit der kritischen Stromdichte des Supraleiters in Relation gesetzt. Im Vergleich zur Abbildung 8.5 steigt das elektrische Potential oberhalb von $J_{01} > J_c$ langsamer an.

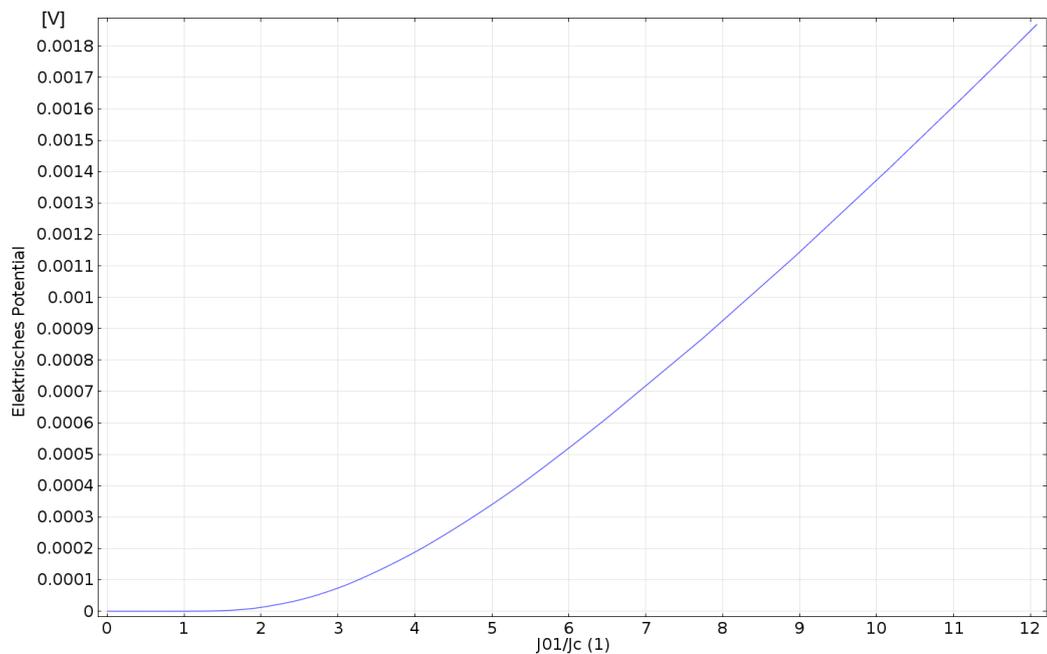


Abbildung 8.5.: Spannungsdifferenz bei der Simulation mit deaktiviertem Kupfer zwischen $x_1 = 4 \mu\text{m}$ und $x_2 = 8 \mu\text{m}$. Auf der x-Achse wurde die Stromdichtequelle variiert und mit der kritischen Stromdichte des Supraleiters in Relation gesetzt. Im Vergleich zur Abbildung 8.4 steigt des elektrische Potential oberhalb von $J_{01} > J_c$ stärker an.

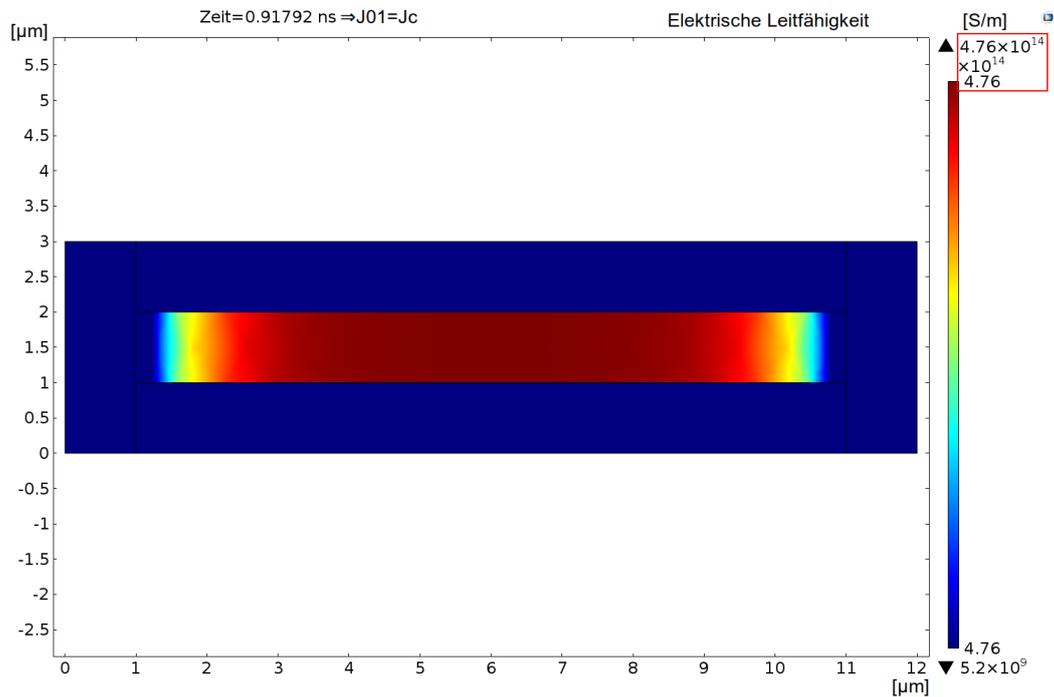


Abbildung 8.6.: Leitfähigkeit bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$, mit Kupfer. Der Farbbereich wurde stark eingeschränkt, damit die Unterschiede in der Leitfähigkeit im Supraleiter sichtbar werden. Die Leitfähigkeit ist am Rand geringfügig schlechter als im Zentrum des Supraleiters.

Zu beachten ist der Wertebereich. Als Minimum für die farbliche Darstellung wurde $\sigma = 4,7600 \cdot 10^{14}$ S/m gewählt. Das Maximum liegt bei $\sigma = 4,7642 \cdot 10^{14}$ S/m. Das bedeutet, dass die farbliche Darstellung nur einen sehr kleinen Bereich darstellt und die Unterschiede in der Leitfähigkeit im Supraleiter nur knapp unter 1‰ liegen. In der Gegenüberstellung ist in der Abbildung 8.7 die äquivalente Simulation des Supraleiters ohne Kupfer dargestellt.

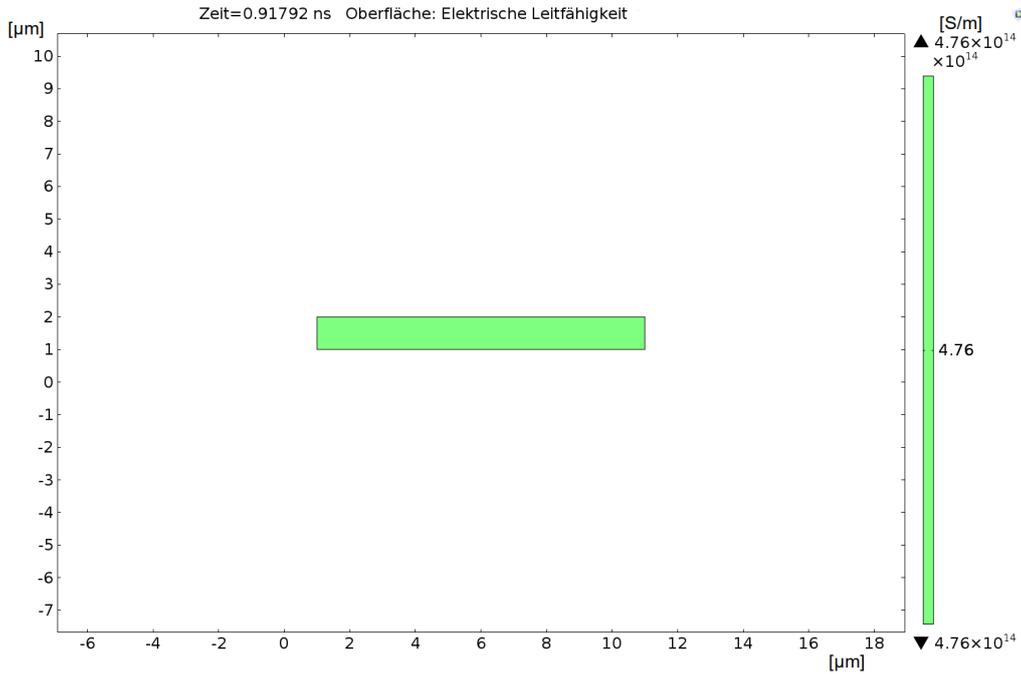


Abbildung 8.7.: Die Leitfähigkeit bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ ($t = 0,91792$ s siehe Kapitel 8.1.1). Es wurde das Kupfer bei der Simulation deaktiviert, um es mit der Abbildung 8.6 zu vergleichen. Zu sehen ist eine vollständig homogene Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit.

Die Leitfähigkeit ist homogen und beträgt $\sigma = 4,7584 \cdot 10^{14}$ S/m und ist damit bereits bei ca. $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ geringfügig schlechter. Zusammengefasst sieht man, dass Kupfer unterhalb von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ einen viel geringeren Anteil des Stromes trägt als oberhalb. Jedoch ist in diesem Modell der Anteil von Kupfer, am Unterschied der Leitfähigkeit bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ zu erkennen.

8.2. Zweifilament Supraleiter

Dieses Kapitel baut auf das vorige Kapitel 8.1 auf. Im Unterschied dazu gibt es jetzt zwei Supraleiter, wobei nur einer direkt kontaktiert ist. Die beiden Supraleiter sind durch Kupfer voneinander getrennt. Die genaue geometrische Konstellation ist in der Abbildung 8.8 dargestellt. Da es mit COMSOL bei zwei Supraleitern zu Konvergenzproblemen kommt, musste für den zweiten (nicht kontaktierten) Supraleiter eine alternative Formulierung, als die in Gleichung 8.4 gezeigte, gefunden werden.

$$\sigma_{\max}^{\text{MgB}_2}(\vec{X}, T) = \frac{J_c(T) \cdot J_c(T_{\text{ref}}) \left(P \cdot \left(\frac{\vec{X}}{E_c} \right)^m + (1 - P) \right)}{\vec{X}} + \sigma_N^{\text{MgB}_2}(T) \quad (8.10)$$

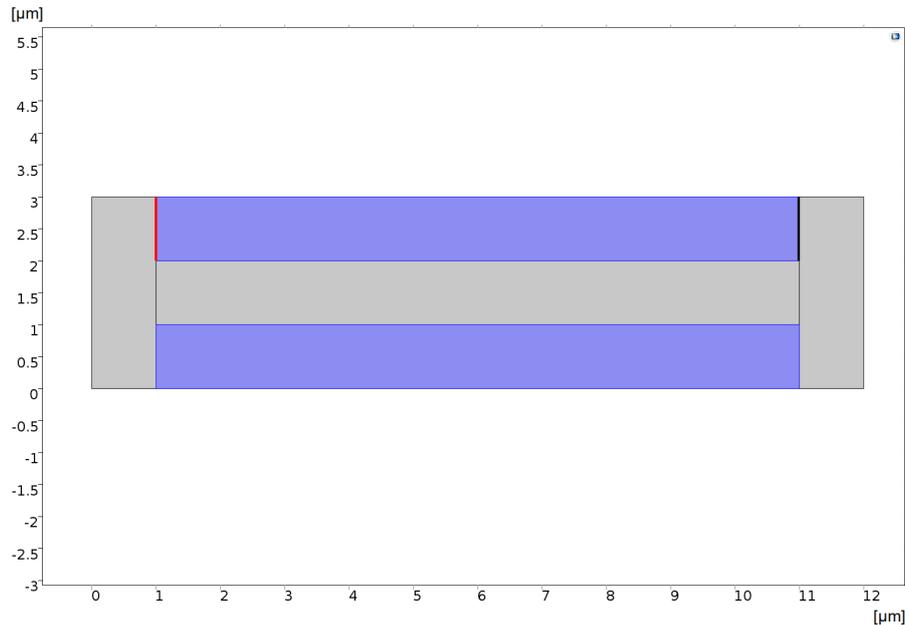


Abbildung 8.8.: Die Geometrie des Simulationsmodells: Farblich gekennzeichnet ist Kupfer in Grau und die beiden Supraleiter in Blau. Der Pluspol der Stromquelle ist mit rot markiert und der Minuspol mit schwarz (dicke Linie).

Da es für die Fragestellung (siehe Kapitel 1) ausreichend ist, den nicht kontaktierten Supraleiter unterhalb von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ zu betreiben, kann für diesen die Annahme $\vec{E} \approx 0$ getroffen werden, was zur Formulierung 8.10 führt. Durch diese Vereinfachung ist eine Berechnung mit zwei oder mehr Supraleitern möglich. Das Verhalten der Stromdichte zeigen die Abbildungen 8.9 und 8.10. Hierbei wurde wieder die Skalierung der Farben auf den gewünschten Supraleiter eingestellt. So lässt sich das Stromdichteverhalten abhängig vom Ort beobachten. Die Stromdichtequelle wurde wieder mit $209\%J_c$ ($\frac{J_{01}}{J_c} = 2,09$) angelegt. In der Abbildung 8.9 ist der kontaktierte Supraleiter zur Betrachtung eingestellt. Zu erkennen ist die Zunahme der Stromdichte vom Zentrum zu den beiden Endstellen. Im Unterschied zum nicht kontaktierten Supraleiter (siehe Abbildung 8.10) ist die Stromdichte von den Endstellen zum Zentrum fallend. Zu beobachten ist auch, dass der nicht kontaktierte Supraleiter trotz gleicher Abmessungen eine höhere Stromdichte aufweist als das Kupfer, welches die Verbindung herstellt. Um dies genauer betrachten zu können, wurden 4 Messpunkte (siehe Abbildung 8.13) an einer Endstellen und im Zentrum für jeden Supraleiter angelegt.

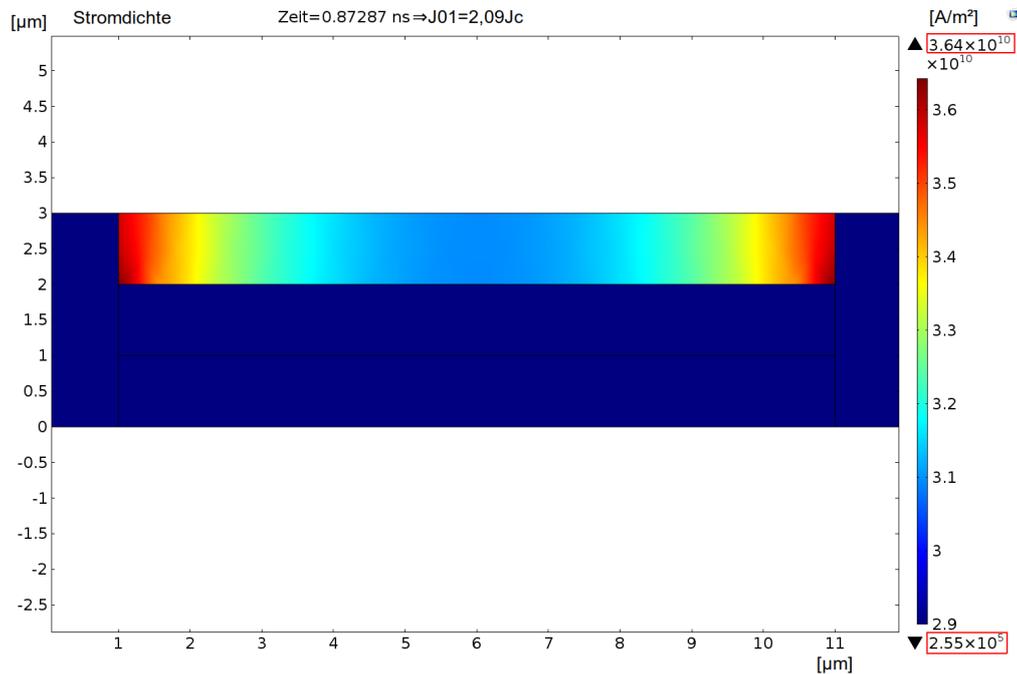


Abbildung 8.9.: Es wurde die Skalierung des Farbbereichs, um die Stromdichteverteilung des kontaktierten Supraleiters zu sehen, bei $t = 0,87287$ ns dies entspricht etwa $J01 = 209\%J_c$ (siehe Kapitel 8.1.1). Die Stromdichte ist an beiden Endstellen höher, als im Zentrum des Supraleiters. Im Vergleich zur Abbildung 8.10 ist der Grund zu sehen, denn die Stromdichte ist am nicht angeschlossenen Supraleiter im Zentrum größer als am Rand.

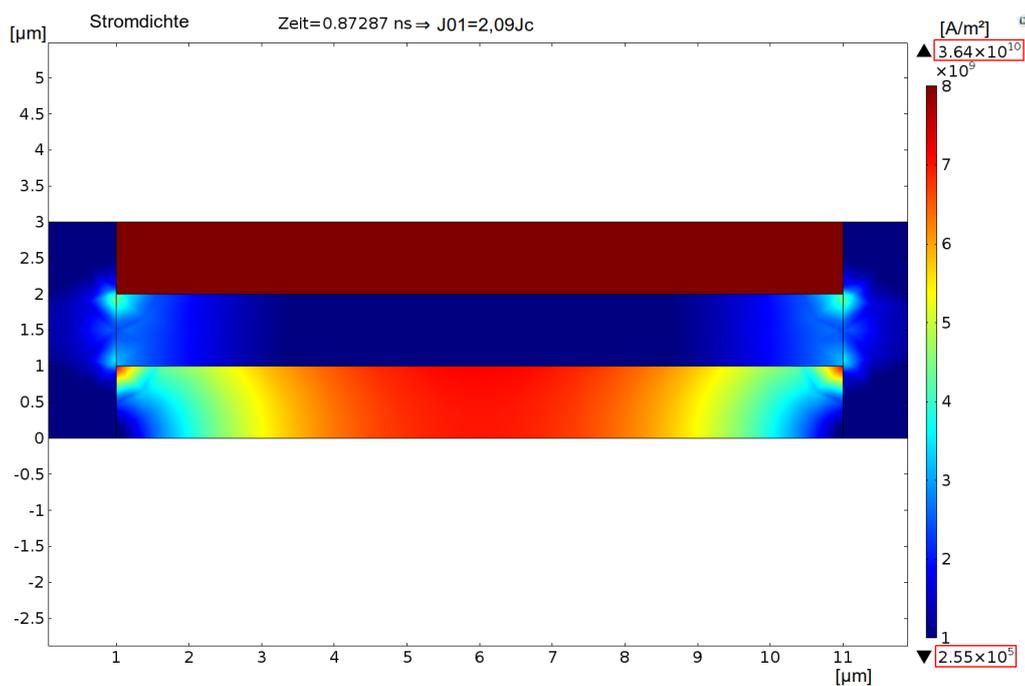


Abbildung 8.10.: Es wurde die Skalierung des Farbbereichs, um die Stromdichteverteilung des nicht kontaktierten Supraleiters zu sehen, bei $t = 0,87287$ ns dies entspricht etwa $J01 = 209\%J_c$ (siehe Kapitel 8.1.1). Der untere Supraleiter verhält sich im ortsabhängigen Verlauf entgegen dem oberen Supraleiter (siehe Abbildung 8.9).

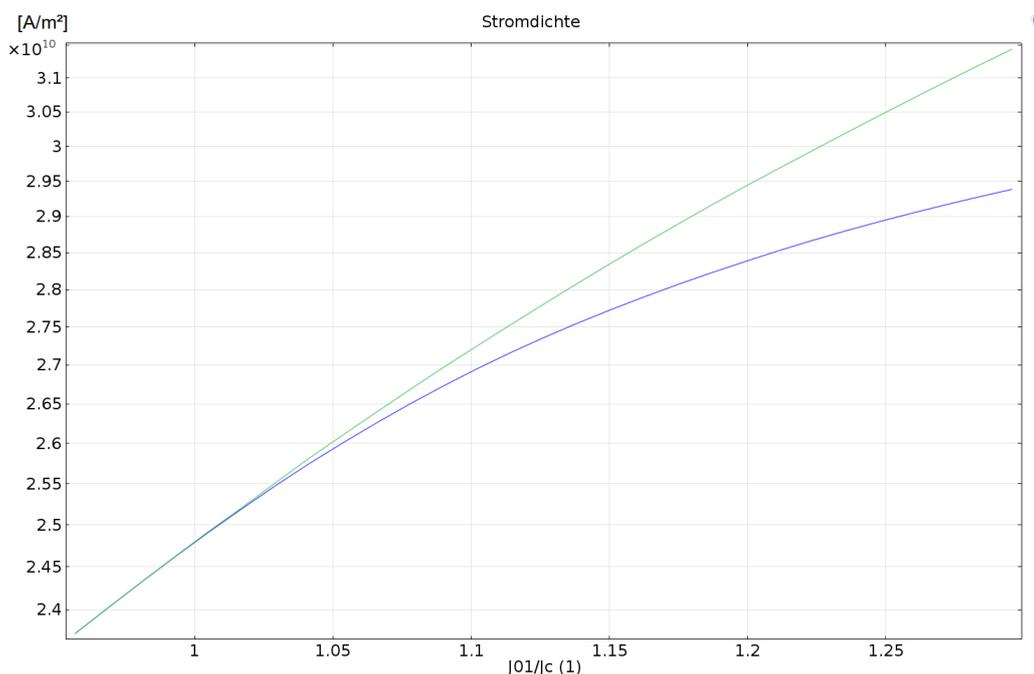


Abbildung 8.11.: Vergleich der Stromdichte (kontaktierter Supraleiter) in der Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Die grüne Kurve stellt die Stromdichte an linken der Endstelle dar. Die blaue Kurve stellt Die Stromdichte im Zentrum dar.

Das Messergebnis für den kontaktierten Supraleiter ist in Abbildung 8.11 dargestellt, wobei die grüne Kurve die Messpunkte an der Endstelle und die blaue Kurve die Messpunkte im Zentrum beschreibt. Auf der X-Achse ist die Stromdichtequelle normiert auf die kritische Stromdichte des Supraleiters, aufgetragen. Sehr deutlich ist oberhalb von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ das Auseinanderklaffen der Stromdichten zu sehen. Beim nicht kontaktierten Supraleiter in der Abbildung 8.12 ist ein starker Anstieg der Stromdichte in der Gegend von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ zu beobachten. Die aufgenommene Stromdichte liegt in diesem Fall bei ca. $5 \cdot 10^6$ A/m 2 und damit größenordnungsmäßig weit unterhalb der Stromdichte des kontaktierten Supraleiters. Für die genauere Betrachtung ist der kontaktierte Supraleiter in kleinster Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ nochmals in 8.14 dargestellt. Das Erreichen der Stromdichte von J_c ist an der Endstelle bei $J_{01} = 1,0001 \cdot J_c$ und im Zentrum bei circa $J_{01} = 1,00035 \cdot J_c$ der Fall.

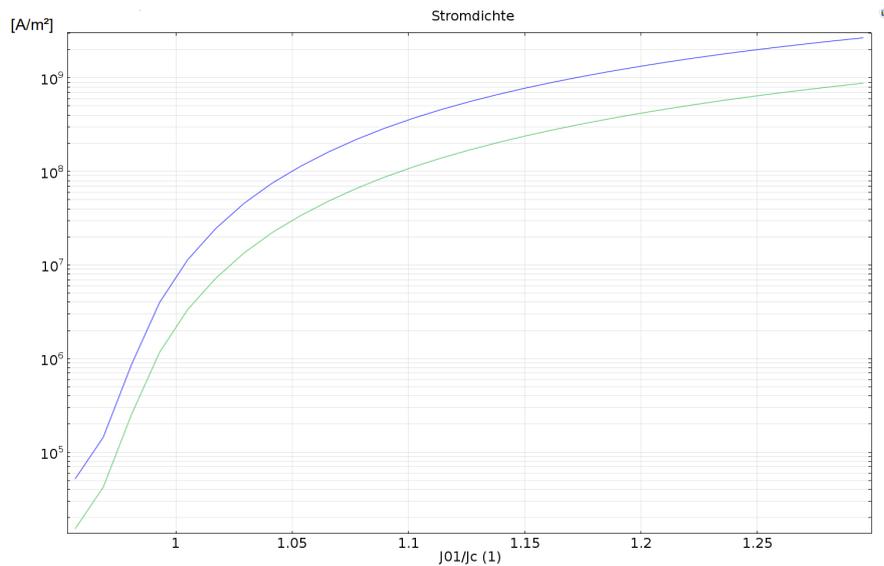


Abbildung 8.12.: Vergleich der Stromdichte (nicht kontaktierter Supraleiter) in der Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Die grüne Kurve stellt die Stromdichte der linken Endstellen dar. Die blaue Kurve stellt Die Stromdichte im Zentrum dar.

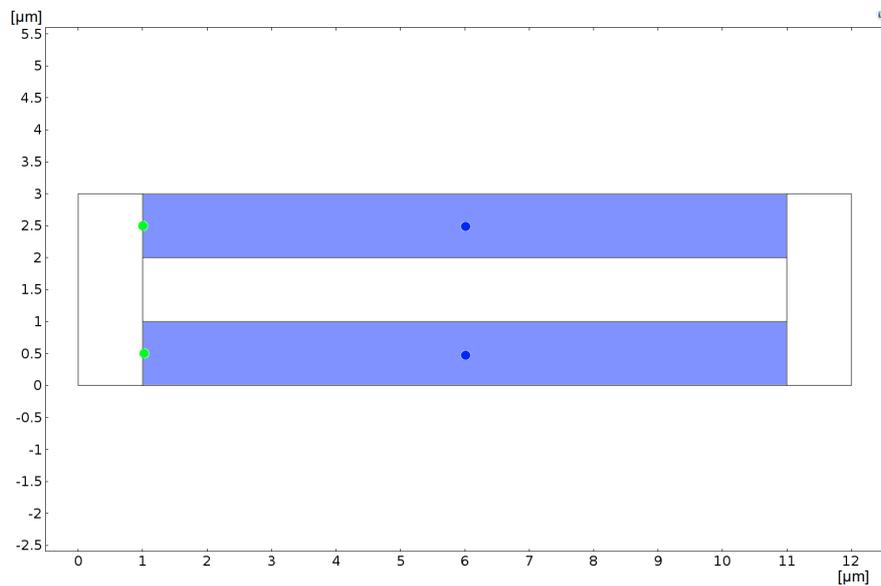


Abbildung 8.13.: Die 4 Messpunkte für die Stromdichte, oben kontaktierter Supraleiter. Unten nicht kontaktierter Supraleiter. Die grünen Punkte markieren die Messpunkte an den Endstellen und die blauen Punkte markieren die Messpunkte im Zentrum.

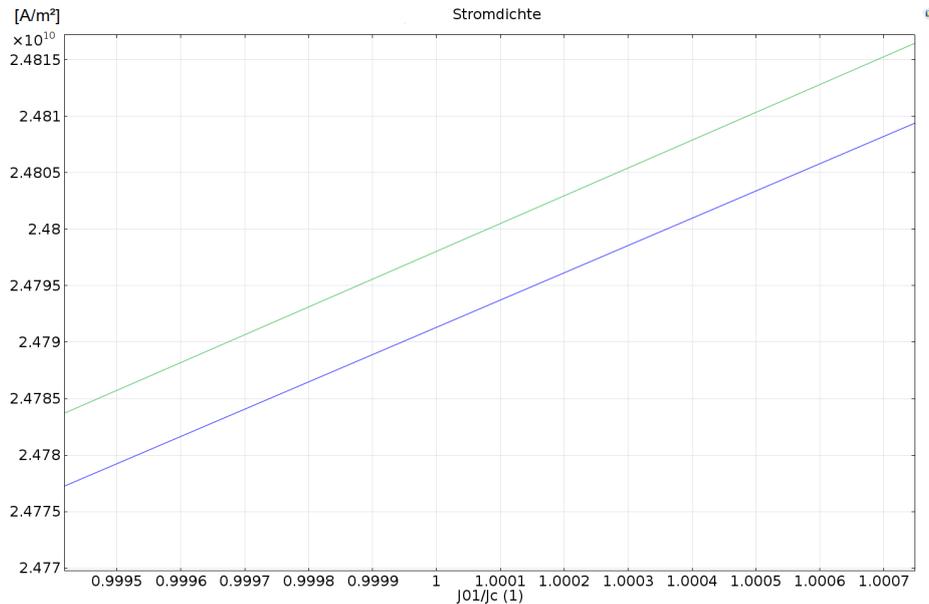


Abbildung 8.14.: Vergleich der Stromdichte (kontaktierter Supraleiter) in kleinster Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Die Farben entsprechen den Messpunkten der Abbildung 8.13. Grün markiert sind die Messpunkte der linken Endstellen und blau markiert sind die Messpunkte im Zentrum.

8.2.1. Fazit

Trotz des angedachten Einflusses durch das Kupfer ist der Unterschied in der Stromdichte gegenüber dem Zentrum und den Endstellen des Supraleiters (siehe Abbildungen 8.13 und 8.14) gering. Effekte sind zwar erkennbar, aber Rückschlüsse sind aufgrund der Einfachheit noch nicht auf das reale Experiment zu übertragen. Weiters sind auch die Abmessungen mit der realen Probe (siehe Abbildung 9.1) noch nicht abgestimmt.

8.3. 17-Filamente in Anlehnung an die reale Probe

Dies ist das dritte 2D-Modell. In der Abbildung 8.15 ist die Geometrie dargestellt. Es sind 17 supraleitende Filamente (blau) und 18 normalleitende Kupferfilamente dargestellt. Zusätzlich wurden an Anfang und Ende des Drahtes Kupfer angeschlossen, um die fehlende Kupferverbindung in der z-Achse zu kompensieren. Der Querschnitt jedes Filaments liegt bei $50 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$ und die Länge des Drahtes beträgt 5 mm. Diese Werte entsprechen größenordnungsmäßig denen der realen Multifilamente aus der Arbeit von Halwachs [3]. Der Pluspol ist rot und die Masse schwarz dargestellt. Zwischen diesen befindet sich ein kontaktierter Supraleiter.

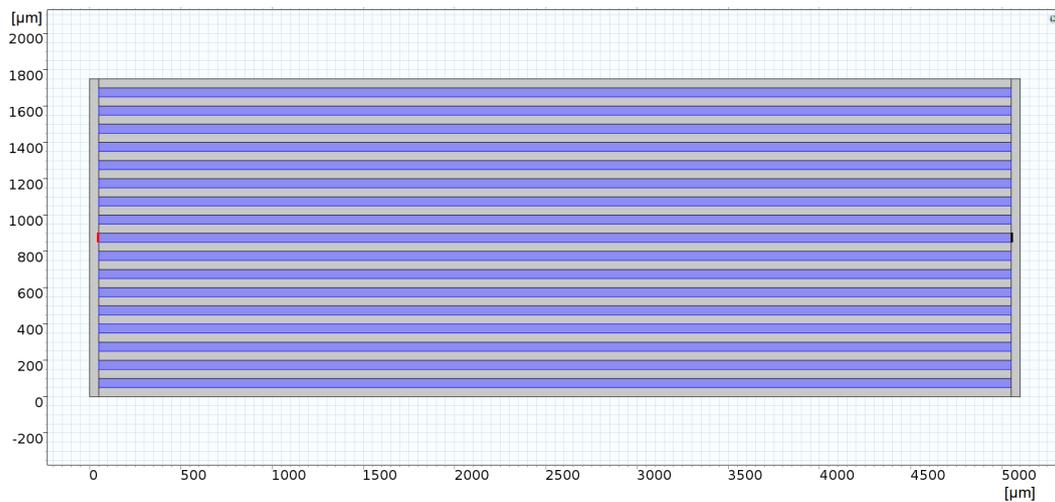


Abbildung 8.15.: Geometrie eines Multifilamentdrahtes mit 2D Filamenten (Filament Querschnitt $50 \times 5 \times 5000 \text{ } [\mu\text{m}]$) die Supraleiter sind blau eingefärbt. Der Pluspol der Stromquelle ist mit Rot markiert und der Minuspol mit Schwarz (dicke Linie).

Die Messpunkte wurden wie in der Abbildung 8.16 gewählt. An den Endstellen

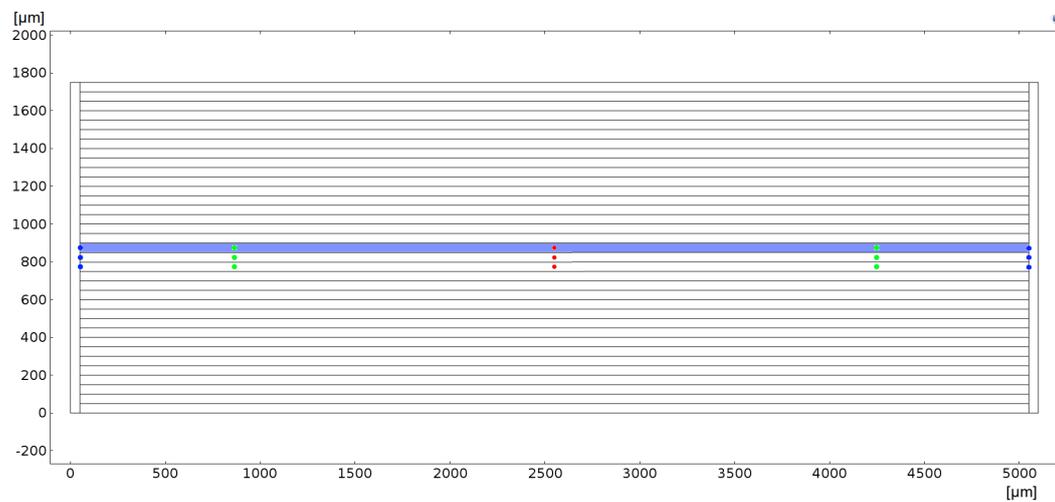


Abbildung 8.16.: Die 15 Messpunkte die oberen 5 am kontaktierten Supraleiter (blau gekennzeichnet), die unteren 5 am benachbarten nicht kontaktierten Supraleiter und dazwischen am Kupfer.

sind sie blau dargestellt ($x = 50 \text{ } \mu\text{m}$ und $x = 5050 \text{ } \mu\text{m}$), im Zentrum rot ($x = 2550 \text{ } \mu\text{m}$) und dazwischen grün ($x = 800 \text{ } \mu\text{m}$ und $x = 4300 \text{ } \mu\text{m}$), jeweils für den kon-

taktierten Supraleiter und den benachbarten Supraleiter darunter, sowie am Kupfer dazwischen.

8.3.1. Die Messung

Die Abbildungen 8.17 bis 8.19 zeigen Messungen am kontaktiert Supraleiter. Die

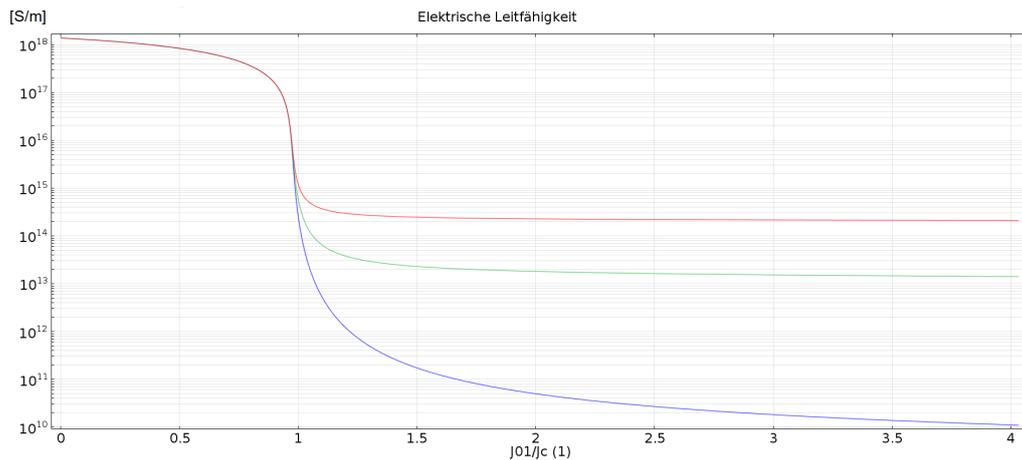


Abbildung 8.17.: Vergleich der elektrischen Leitfähigkeit am kontaktierten Supraleiter. Supraleitender Sprung bei $\frac{J01}{J_c} = 1$ mit unterschiedlich stark ausgeprägtem Abfall der Leitfähigkeit. Die Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16.

Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16.

In der ersten Simulation ist ein Abfall der Leitfähigkeit mit steigender Stromdichte zu beobachten. Der deutliche Knick ist bei ca. $\frac{J01}{J_c} = 1$ zu beobachten. Eine Verschiebung des Übergangsbereiches zu höheren Stromdichten ist nicht zu erkennen. Das umliegende Kupfer und die benachbarten Supraleiter scheinen nur den supraleitenden Zusammenbruch zu begrenzen. Je weiter man von den Endstellen zum Zentrum wandert, desto früher wird der Zusammenbruch des Supraleiters aufgehalten. Während im Zentrum trotz $\frac{J01}{J_c} = 1,5$ noch immer eine Leitfähigkeit von rund $2 \cdot 10^{14}$ S/m existiert und diese auch bei weiterer Erhöhung von $J01$ annähernd konstant bleibt, ist an den Endstellen ein deutlicher Abfall zu sehen. Bei $J01 = 1,5 \cdot J_c$ ist bereits die Leitfähigkeit auf rund $2 \cdot 10^{11}$ S/m gefallen und bei $J01 = 4 \cdot J_c$ ist die Leitfähigkeit in der Nähe der des Kupfers.

In der zweiten Simulation (siehe Abbildung 8.18) wurde die Stromdichte ermittelt. Während an den Endstellen die Stromdichte immer weiter steigt, wird zum Zentrum hin die Stromdichte annähernd konstant, sobald die Stromdichte in die Umgebung

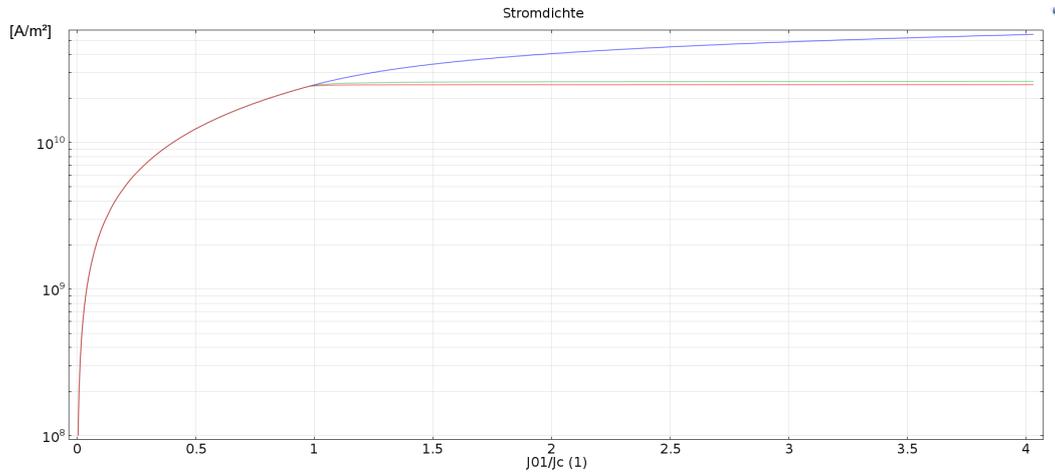


Abbildung 8.18.: Die Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16. Die Stromdichte an den Kontakten (blau) steigt kontinuierlich an. Beim Zusammenbruch der Supraleitung bleibt die Stromdichte innerhalb des Supraleiters annähernd konstant.

von J_c kommt, obwohl J_{01} weiter steigt.

Kombiniert man die Erkenntnisse dieser zwei Messungen, kann davon ausgegangen werden, dass die steigende Stromdichte am Rand den Supraleiter nach innen abschirmt, da durch die schlechtere Leitfähigkeit mehr Strom über benachbarte Filamente fließt.

Bei der dritten Messung wurde die Potentialdifferenz bestimmt. In der Abbildung 8.19 ist die Spannung zwischen den gleichfarbigen Messpunkten aus der Abbildung 8.16 dargestellt. Um einen besseren Vergleich zu haben, wurde auf den Abstand der Messpunkte (siehe Abbildung 8.16) normiert. Zu erkennen ist der Sprung der Supraleitung in der Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$, welcher zu den Endstellen (blaue Kurve) hin größer ausfällt.

Beim benachbarten Filament wurde nur die Stromdichte gemessen. Aufgrund der Einschränkung, dass bei den nicht kontaktierten Supraleitern $\vec{E} \approx 0$ gilt (siehe Kapitel 8.2), wäre die Leitfähigkeit konstant. Die Stromdichte ist in der Abbildung 8.20 dargestellt. Die Farben der Kurven entsprechen wieder den Farben der Messpunkte (siehe Abbildung 8.16). Gegenüber dem kontaktierten Supraleiter ist dieses Mal sowohl ein Sprung in der Stromdichte zu beobachten, als auch eine höhere Stromdichte im Zentrum. Die Ursache für diesen Sprung in der Stromdichte liegt beim kontaktierten Supraleiter. Durch den Zusammenbruch der Leitfähigkeit im kontaktierten

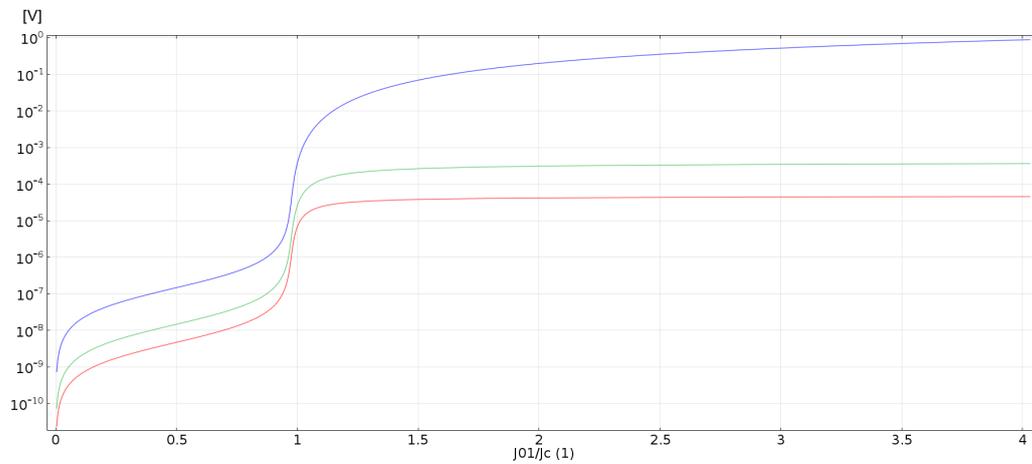


Abbildung 8.19.: Die Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16. Zu sehen ist der Spannungsverlauf mit Anstieg der Stromdichte, bei Zusammenbruch der Supraleitung. Weiters ist ein konstantes Verhalten im Inneren des Filaments ab ca. $\frac{J_{01}}{J_c} = 1, 2$.

Supraleiter erhöht sich die Spannung, was es für den Strom günstiger macht, über einen benachbarten Supraleiter zu fließen.

Beim Kupfer, das zwischen den Filamenten liegt, ist ebenfalls dieser Sprung zu beobachten (dargestellt in der Abbildung 8.21). Der Unterschied ist, dass die höchste Stromdichte an den Endstellen des Kupfers liegt und zum Zentrum hin sinkt. Die Ursache ist, dass der Strom nur die Möglichkeit hat, durch das Kupfer zum benachbarten Supraleiter zu gelangen. Da der Strom einen geringeren Widerstand hat, wenn er einen globalen Umweg über einen benachbarten Supraleiter wählt, ergibt sich die sinkende Stromdichte von den Endstellen zum Zentrum des Kupfers.

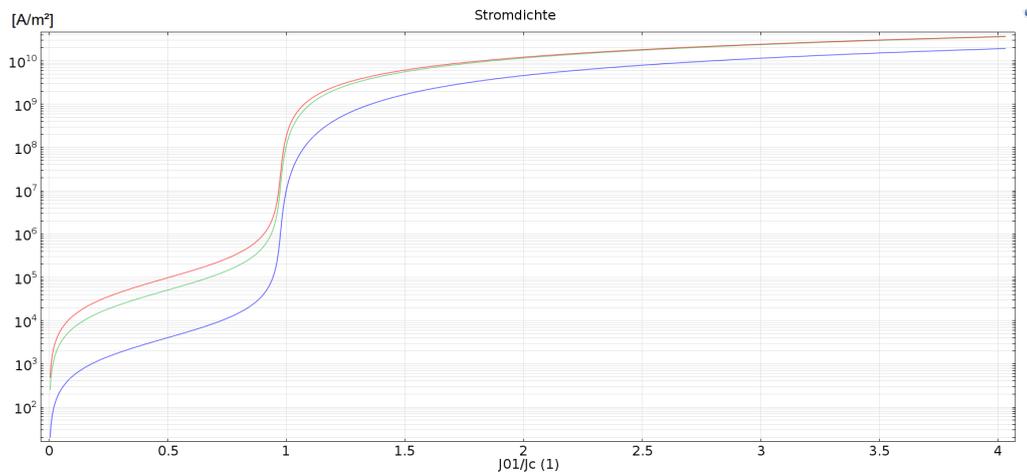


Abbildung 8.20.: Der Stromdichteverlauf am benachbarten Supraleiter erfolgt vom Verhalten entgegengesetzt zum kontaktierten Supraleiter (siehe Abbildung 8.18). Sobald der kontaktierte Supraleiter zusammenbricht übernimmt der benachbarte den zusätzlichen Stromfluss. Die Stromdichte ist im Inneren (rot, grün) höher als an den Endstellen (blau).

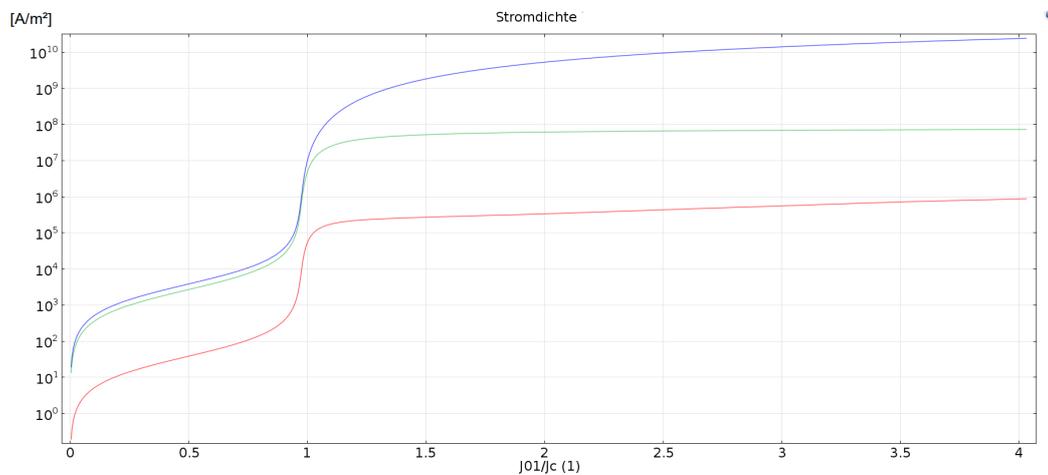


Abbildung 8.21.: Die Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16. Im Kupfer ist ebenfalls (siehe Abbildung 8.20) ein Stromdichteanstieg zu erkennen, der an den Rändern stärker ausfällt als im Inneren.

8.3.2. Fazit

Trotz des anliegenden Kupfers und der benachbarten Magnesiumdiboridfilamente ist kein markanter Stromfluss über das benachbarte Kupfer bei $J_{01} = J_c$ zu erkennen. Deshalb wurde die Stromdichte nicht in allen Filamenten untersucht. Der größte gefundene Effekt ist der unvollständige Zusammenbruch des Supraleiters abseits der Endstellen, der bei ungenauer Messung dazu führen kann, dass man den Zusammenbruch nicht mehr erkennen kann. Je näher die Kontakte des Voltmeters bei der Vierleitermessung beim Rand liegen, desto besser ist das supraleitende Verhalten zu erkennen. Da es in den 2D Simulation kaum neue Erkenntnisse gab, wurde auf dreidimensionale Simulationen umgestiegen.

9. 3D Simulationen mit zeitabhängiger Stromquelle

In diesem Kapitel werden die simulierten 3D Modelle vorgestellt. Dabei wurde eine vereinfachte Darstellung von dem polierten Multifilament (siehe Abbildungen 9.1 und 9.2), welches in der Arbeit von Kirchner [4] gemessen wurde, gemacht. Um den

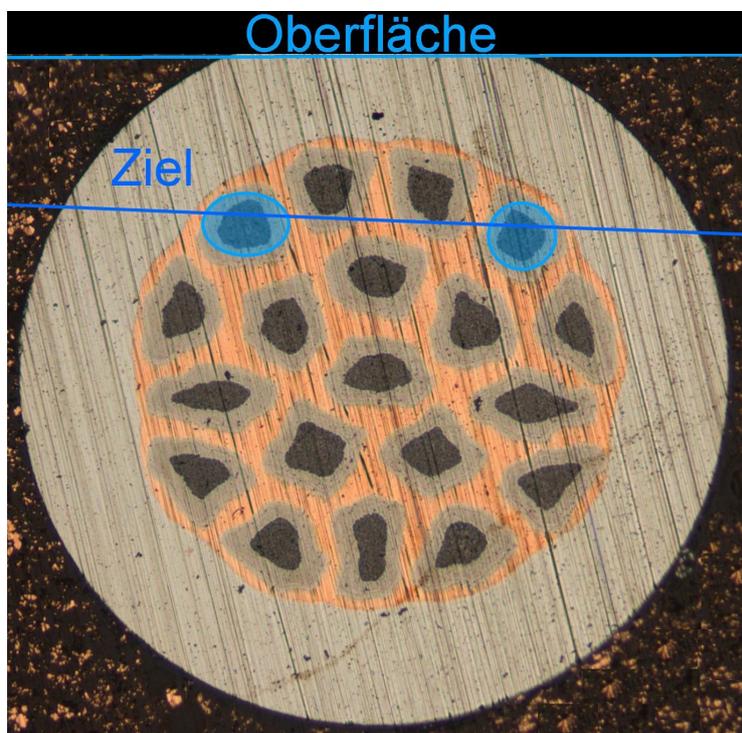


Abbildung 9.1.: Eine Querschnittaufnahme eines Multifilamentdrahtes. Mit den folgenden Farben sind die unterschiedlichen Materialien gekennzeichnet. Schwarz: Magnesiumdiborid. Grau: Titan. Rötlichbraun: Kupfer. Die blaue Linie, welche mit Ziel gekennzeichnet ist, zeigt an bis wohin das Material weg poliert wird. Das bereits polierte Multifilament ist in der Abbildung 9.2 dargestellt [4]

Rechenaufwand zu begrenzen, wurde auf eine runde Form verzichtet und statt dessen eine quaderförmige gewählt. Die Länge des Drahtes wurde auf 5 mm verkürzt. Wie in der Abbildung 9.3 dargestellt, gibt es in diesem Modell 16 Magnesiumdibo-

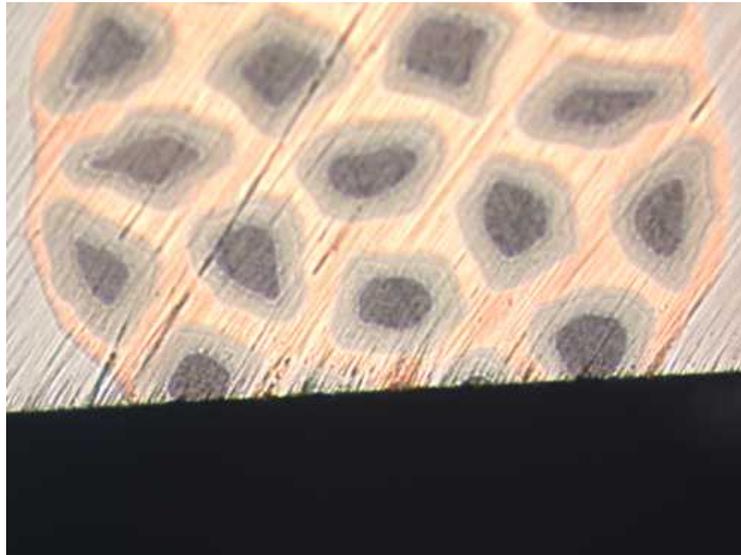


Abbildung 9.2.: Die Querschnittaufnahme eines Multifilamentdrahtes. Mit den folgenden Farben sind die unterschiedlichen Materialien gekennzeichnet. Schwarz: Magnesiumdiborid. Dunkelgrau: Titan. Hellgrau: Stahl. Rötlichbraun: Kupfer. An der Unterseite ist zu sehen, dass Stahl, Kupfer und Titan wegpoliert wurden, sodass zwei Magnesiumdiboridfilamente auf der Längsseite frei liegen (siehe Abbildung 9.4) [4]

rid Filamente (Abmessung: $50 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$), ummantelt von einer Titanschicht mit einer Dicke von $25 \mu\text{m}$ und in Kupfer eingebettet (Abmessungen $675 \mu\text{m} \times 600 \mu\text{m}$). Das Ganze ist wiederum in Titan gepackt (Abmessungen $1075 \mu\text{m} \times 800 \mu\text{m}$). Obwohl im Realfall Stahl verwendet wird (siehe Kapitel 1), wird in den Simulationen Titan gewählt, da es einen ähnlichen Leitwert wie Stahl bei Temperaturen um 4 K hat [35] und hierfür ausreichend genau ist. Auf der Oberseite des Drahtes wurden das Titan und Kupfer genauso wie im realen polierten Multifilament entfernt bzw. weggelassen, sodass einige Magnesiumdiboridfilamente und vor allem das zu kontaktierende Filament freiliegen. Auf der geschliffenen Seite wurden zwei Goldkontakte (Abmessung: $150 \mu\text{m} \times 150 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$) montiert, die den Kontakten in der Abbildung 9.4 entsprechen sollen.

In der Abbildung 9.5 sind die Messpunkte dargestellt. Gemessen wird im Inneren des Filaments und an der Kontaktfläche, bzw. an der Stromquelle, welche in hellblau gekennzeichnet wurde. Der rote Messpunkt befindet sich genau bei der Hälfte der Länge ($2500 \mu\text{m}$) des Filaments. Die grünen Punkte befinden sich in $850 \mu\text{m}$ Entfernung vom roten Messpunkt, der Blaue unterhalb der Kontakte auf $\pm 2100 \mu\text{m}$ vom roten Messpunkt aus. Die zwei Magentafarbigen bei $\pm 2225 \mu\text{m}$, welche aber

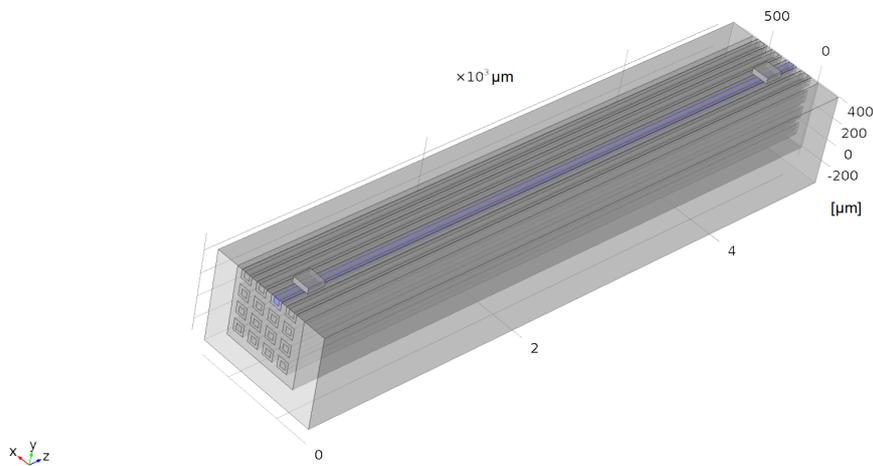


Abbildung 9.3.: Das Multifilamentsimulationsmodell ist ähnlich wie der Realfall. Magnesiumdiboridelemente ($50 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$) mit Titan ummantelt ($25 \mu\text{m}$ Dicke), in Kupfer eingebettet ($675 \mu\text{m} \times 600 \mu\text{m}$) und außen wieder mit Titan ummantelt ($200 \mu\text{m}$ Dicke).

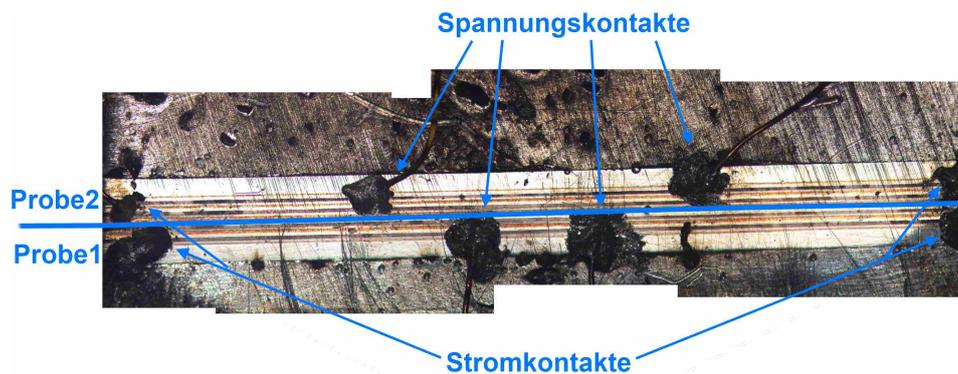


Abbildung 9.4.: Die Strom- und Spannungskontakte der Vierleitermessung an zwei herauspräparierten Magnesiumdiboridfilamenten [4]

auf der Kontaktobenseite sitzen und als Messpunkt für die Stromquelle dienen.

Für den Spannungsverlauf wird, wie bei einer Vierleitermessung (siehe Kapitel 4), die Differenz zwischen den gleichfarbigen Punkten gemessen und durch den Abstand normiert, um eine Vergleichbarkeit zu erhalten. Für den Stromdichteverlauf wird jeweils nur ein Messpunkt pro Farbe genommen, weil der andere aufgrund der Symmetrie dasselbe Ergebnis liefern würde.

Die vorgestellte Geometrie wird in den nachfolgenden Simulationen mit kleinen Änderungen weiterverwendet. Die Messpunkte bleiben bei den gleichen Koordinaten positioniert, denn das kontaktierte Filament wird gleich gelassen bzw. es werden nur die umliegenden Materialien und Geometrien verändert.

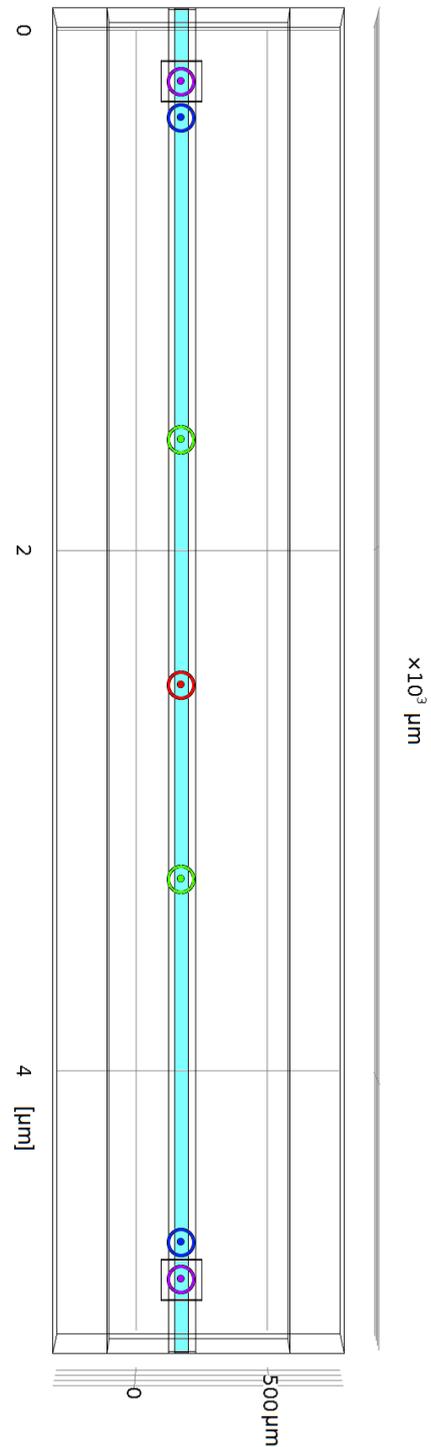


Abbildung 9.5.: Zu sehen sind die im Inneren, des in hellblau dargestellten Supraleiters, befindlichen Messpunkte. Der rote Messpunkt befindet sich genau im Zentrum, die anderen liegen im Bezug zu diesem bei $\pm 850 \mu\text{m}$ (grün) und bei $\pm 2100 \mu\text{m}$ (blau). Die magentatafarbige Messpunkte befinden sich auf den Kontakten bei $\pm 2250 \mu\text{m}$.

9.1. 16-Filament Supraleiter mit Goldkontakten

In diesem Unterkapitel wird das bereits in diesem Kapitel vorgestellte Modell (siehe Abbildung 9.3) genommen. Dieses Modell kommt dem Realfall am nächsten.

9.1.1. Messung

In der dreidimensionalen Darstellung (siehe Abbildung 9.6) ist die Stromdichte bei Anlegen von $J_{01} = J_c$ zu sehen. Rot gekennzeichnet ist der kontaktierte Supralei-

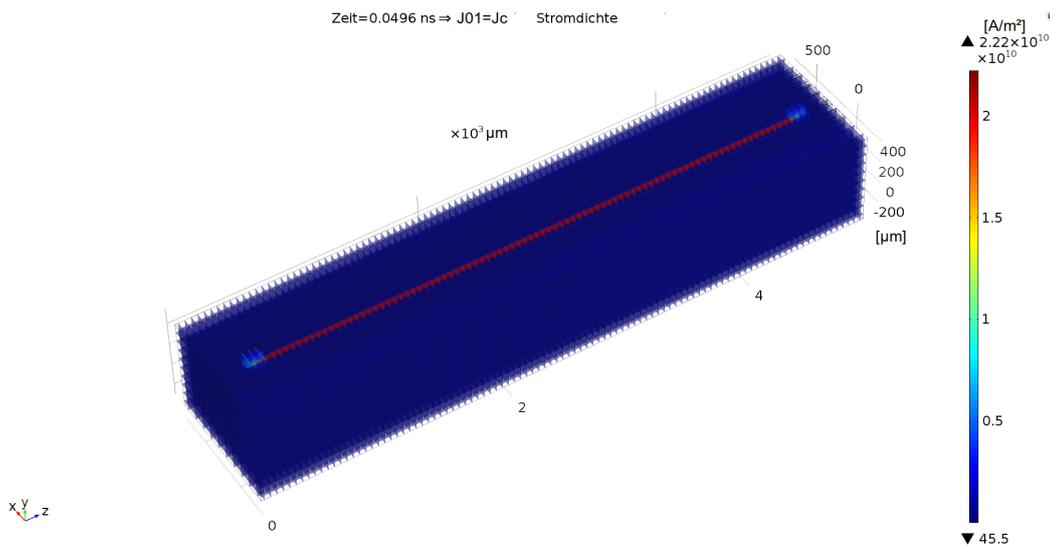


Abbildung 9.6.: Stromdichte im 3D-Modell bei angelegter Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Rot: Die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters, erreicht ein Maximum von $2,22 \cdot 10^{10}$ A/m².

ter, der die größte Stromdichte von $2,22 \cdot 10^{10}$ A/m² trägt. Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters ist in der Abbildung 9.7 dargestellt. Zu sehen ist der anfangs steile Anstieg, welcher immer mehr abflacht und sich in etwa bei der kritischen Stromdichte (y -Achse) einpendelt.

Der Spannungsverlauf innerhalb des Supraleiters ist in der Abbildung 9.8 dargestellt. Ein Sprung im Spannungsverlauf ist nicht zu sehen. Die Spannung an der Stromquelle in der Abbildung 9.9 steigt konstant, ohne dass im Supraleiter die Stromdichte nach ca. $\frac{J_{01}}{J_c} =$ weiter (siehe Abbildung 9.7) steigt.

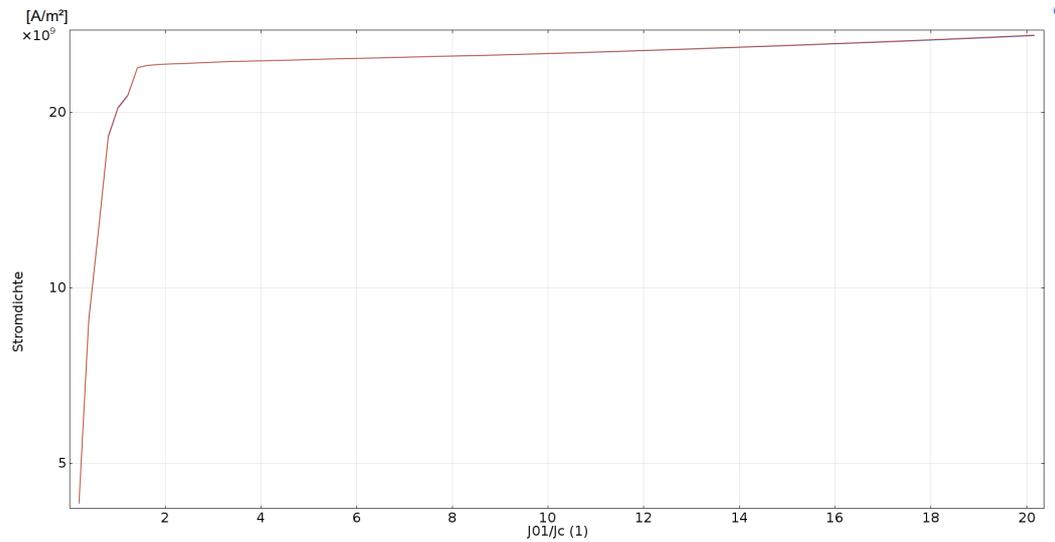


Abbildung 9.7.: Der Stromdichteverlauf bei variierenden Stromdichten ($J_0 I$). Zu sehen ist das Einpendeln der Stromdichte im Filament auf ca. J_c (y-Achse). Die rote, grüne und blaue Kurve der Messpunkte, welche sich überlagern, zeigen einen annähernd gleichen Stromdichteverlauf.

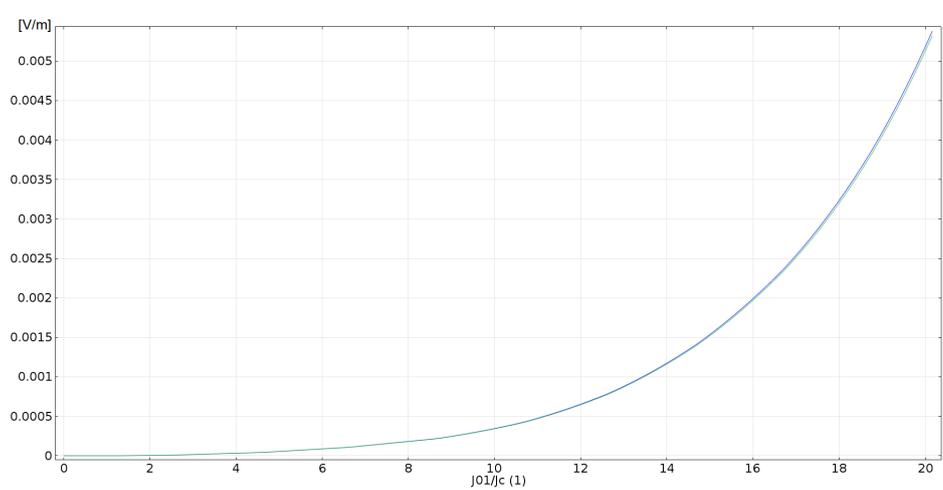


Abbildung 9.8.: Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung in der Nähe der Kontaktstellen (blau) steigt geringfügig schneller an als weiter innerhalb des Supraleiters (grün).

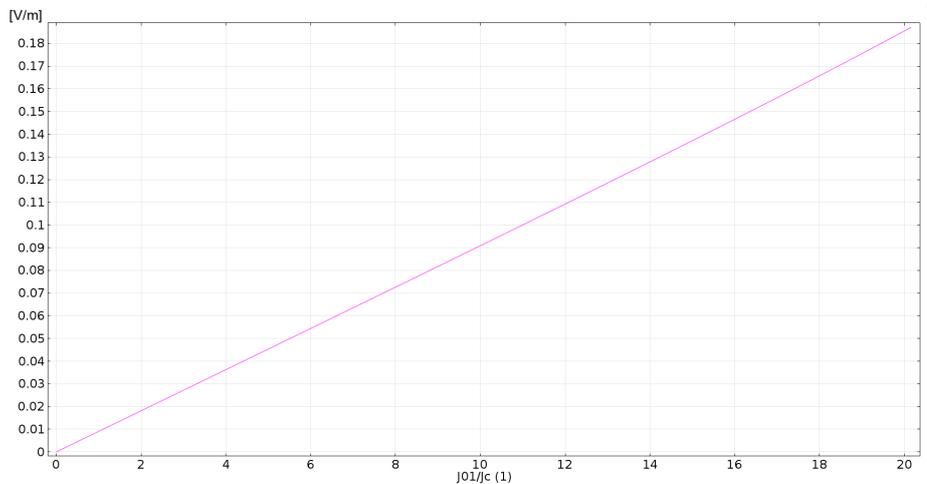


Abbildung 9.9.: Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung an den Kontaktstellen (magenta) steigt im Unterschied zu den Messpunkten innerhalb des Supraleiters linear an (vgl. Abbildung 9.8).

9.1.2. Fazit

Ein Zusammenbruch der Supraleitung ist auch bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 20$ nicht zu beobachten. Warum dies im realen Fall (siehe Kapitel 1) bei etwa $\frac{J_{01}}{J_c} = 2$ bis $\frac{J_{01}}{J_c} = 3$ auftritt, kann an dieser Stelle nur vermutet werden. Eine mögliche Erklärung wäre, dass die umliegenden idealen Supraleiter aufgrund von Konvergenzproblemen während der Simulation (siehe Abbildung 8.2) nie zusammenbrechen und der Rest des Multifilaments immer supraleitend bleibt.

9.2. 16-Filament Supraleiter mit verkleinerten Goldkontakten

Um die Frage aus Kapitel 1 nach den Übergangswiderständen zu beantworten, wurden in diesem Modell (siehe Abbildung 9.10) die Kontakte auf $(48 \times 100 \times 150 \text{ } [\mu\text{m}])$ verkleinert, sodass sie nur mehr an den Filamenten anliegen und nicht mehr in Kontakt mit dem Titan und dem Kupfer stehen.

9.2.1. Messung

In der 3D Darstellung der Stromdichte (siehe Abbildung 9.11), bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$, ist zu sehen, dass die Stromdichte an den Kontaktstellen relativ hoch ist und bis zu einem Wert von $4,41 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$ erreicht. Innerhalb des Filaments befindet weiterhin etwa die kritische Stromdichte. Der Stromdichteverlauf (siehe Abbildung 9.12) verhält

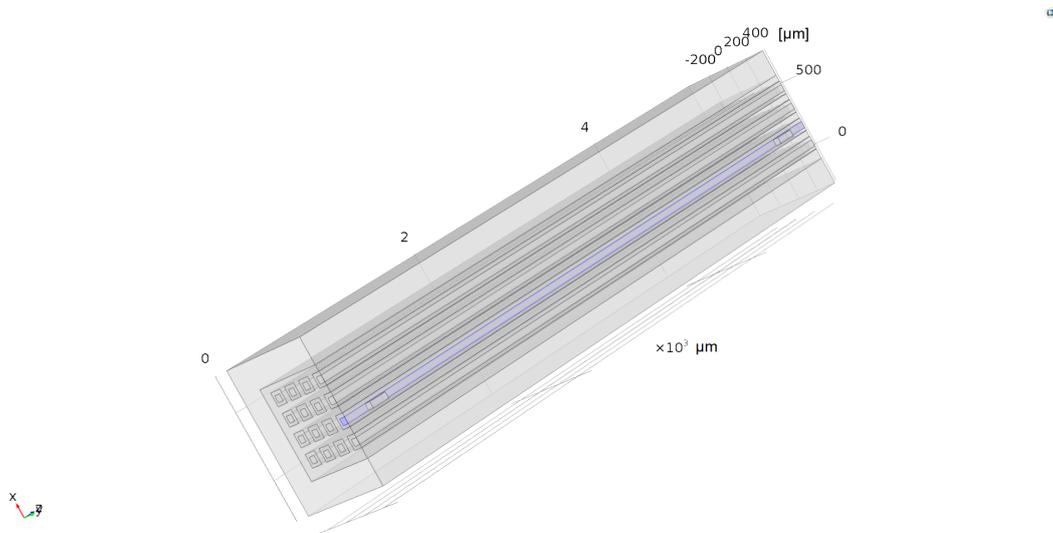


Abbildung 9.10.: Dreidimensionale Darstellung des Multifilament-Simulationsmodells mit verkleinerten Kontakten (Blau: kontaktierter Supraleiter).

sich anfangs wie im vorigen Modell (siehe Abbildung 9.7). Bei steigender Stromdichte in der Quelle erhöht sich die Stromdichte innerhalb des Filaments deutlich über J_c . Nach Überschreiten der kritischen Stromdichte ist auch ein Unterschied zwischen den Stromdichten bei den roten und grünen Messpunkten zu sehen.

Beim Spannungsverlauf (siehe Abbildung 9.13) ist zwischen einer angelegten Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ bis $\frac{J_{01}}{J_c} = 2$ ein Sprung zu sehen. Dieser fällt am äußeren Messpunkt beinahe genauso stark aus wie direkt an der Stromquelle (siehe Abbildung 9.14). An den grünen Messpunkten fällt dieser kaum auf.

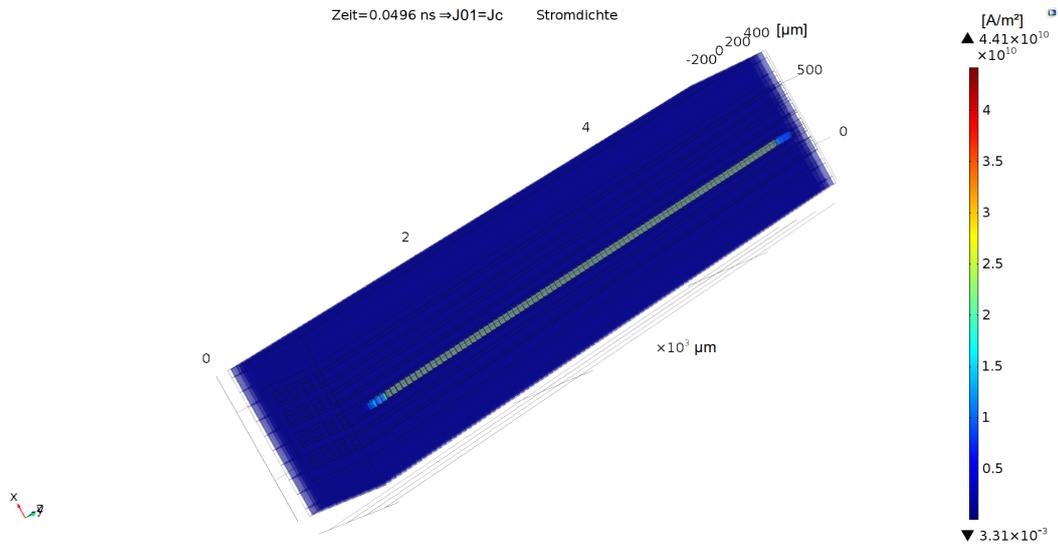


Abbildung 9.11.: Stromdichte im 3D-Modell bei der angelegten Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Gelb: Die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters erreicht ein Maximum von $4,41 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$.

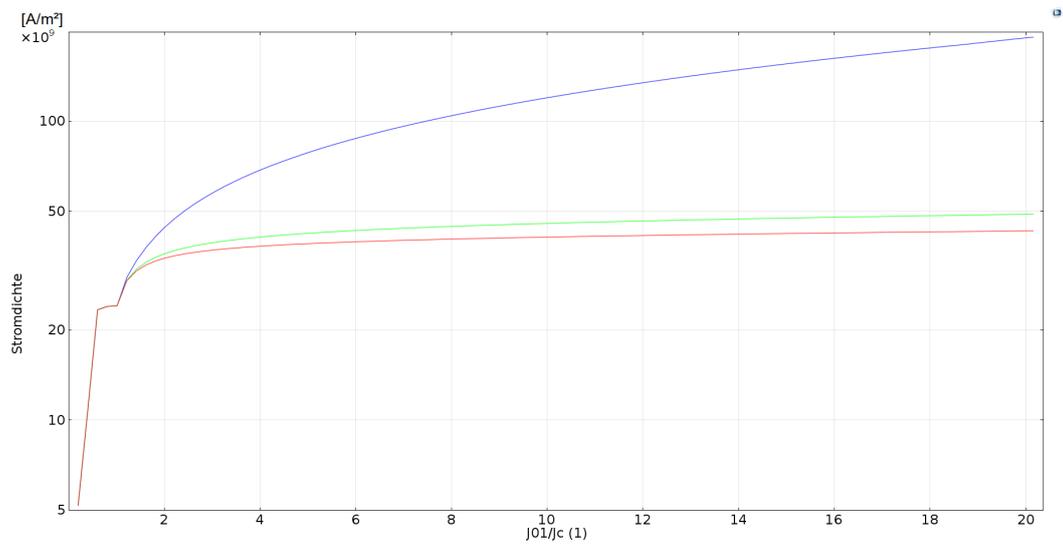


Abbildung 9.12.: Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters bei variierenden Stromdichten (J_{01}).

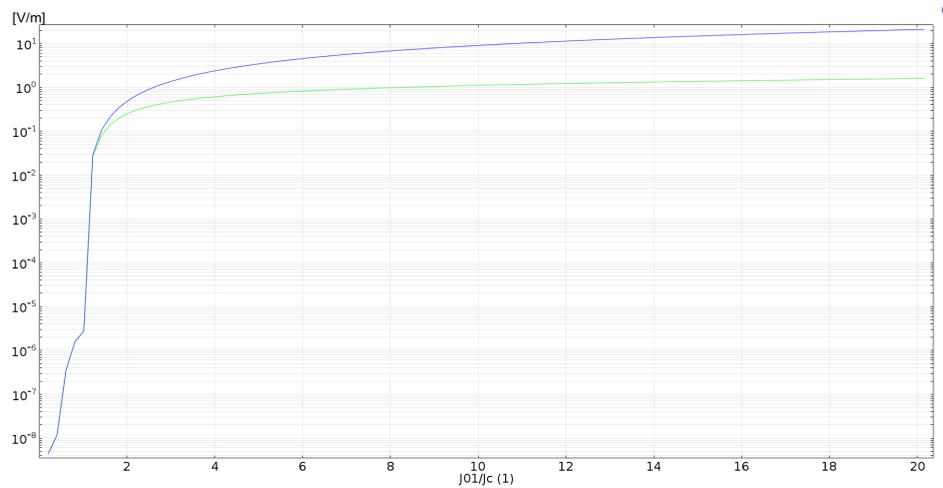


Abbildung 9.13.: Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung in der Nähe der Kontaktstellen (blau) steigt geringfügig schneller an als weiter innerhalb des Supraleiters (grün).

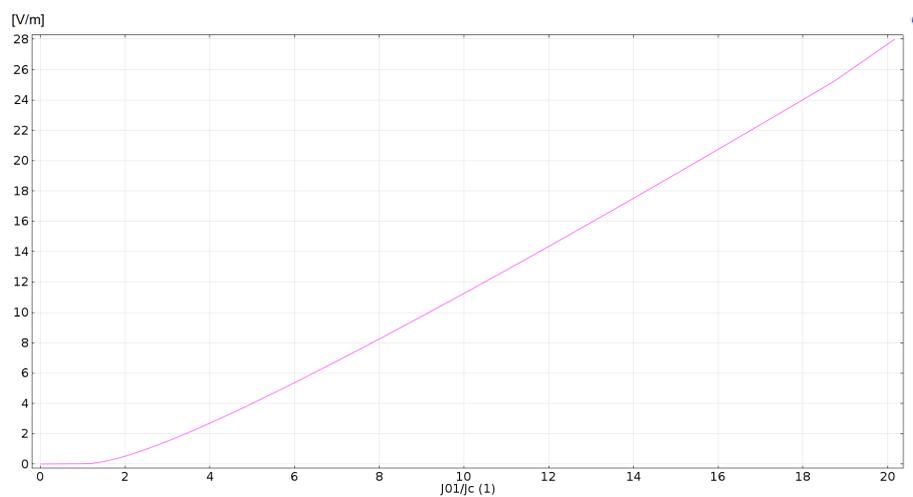


Abbildung 9.14.: Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung an den Kontaktstellen (magenta) steigt oberhalb von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ annähernd linear an.

9.2.2. Fazit

Der Zusammenbruch der Supraleitung ist in diesem Modell bereits zu beobachten. Allerdings ist auch in diesem Modell kein Sprung zu beobachten. Weiters wurde in diesem Modell deutlich gezeigt, dass es einen Unterschied macht, ob die Kontakt-

stellen nur am Supraleiter anliegen, oder auch am Kupfer und am Titan.

9.3. 16-Filament Supraleiter mit Aluminium Kontakten

Da es technisch äußerst schwierig ist, die Goldkontakte so klein zu machen, dass diese nur am Supraleiter anliegen, wird in diesem Modell wieder von Kontakten in Normalgröße ausgegangen. Da aber Gold einen höheren Widerstand, bei 4,2 K, gegenüber Kupfer besitzt, wurde Aluminium gewählt, welches einen geringeren Widerstand als Kupfer besitzt, um zu untersuchen, ob dies nur am hohen Widerstand von Gold liegt, oder ob es entscheidend ist, wo die Kontaktstellen in Verbindung stehen. Für die Geometrie sei auf das erste 3D Modell verwiesen (siehe Abbildung 9.3), da die Abmessungen gleich bleiben und nur das Material der Kontaktstellen geändert wurde.

9.3.1. Messung

Bei Anlegen von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ an den Kontakten, ergibt sich im Filament eine Stromdichte die ebenfalls in dieser Größenordnung liegt. Zu sehen ist ebenfalls eine leichte Erhöhung der maximalen Stromdichte in der Abbildung 9.15 gegenüber der Simulation im Kapitel 9.1 in der Abbildung 9.6. Beim Stromdichteverlauf (siehe Abbildung 9.16) ist bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ ein Rückgang der Steigung zu beobachten, welcher mit einem Sprung in der Stromdichte (y-Achse) bei ungefähr $\frac{J_{01}}{J_c} = 4,5$ endet.

Der Potenzialverlauf (siehe Abbildung 9.17) sieht oberhalb von etwa $\frac{J_{01}}{J_c} = 5$ nach einem numerischen Fehler aus. Der Grund für diesen könnte in dem bereits betrachteten, großen Stromdichtesprung in diesem Bereich begründet liegen. Ein leichter Sprung ist bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 4,5$ zu erkennen.

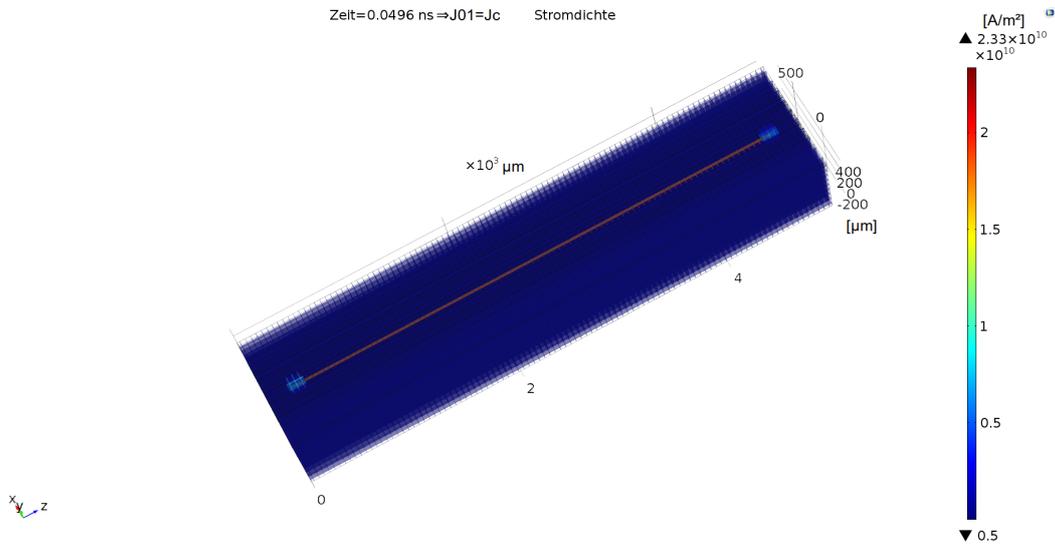


Abbildung 9.15.: Stromdichte im 3D-Modell bei angelegter Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Orange: die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters, erreicht ein Maximum von $2,33 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$.

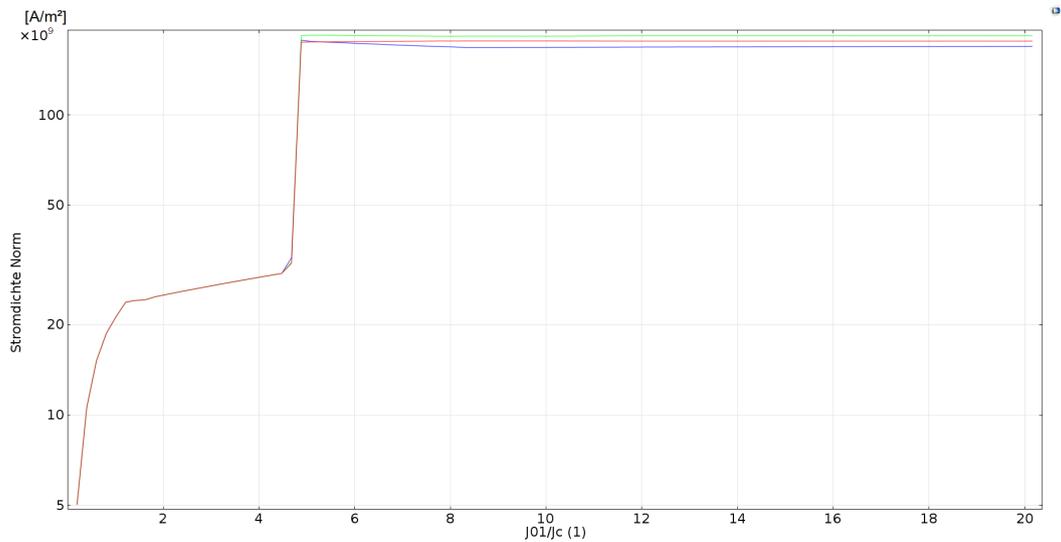


Abbildung 9.16.: Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters bei variierenden Stromdichten (J_{01}). Die Stromdichte bremst sich bei circa J_c (y-Achse) ein. Der Sprung in der Stromdichte tritt bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 5$ ein.

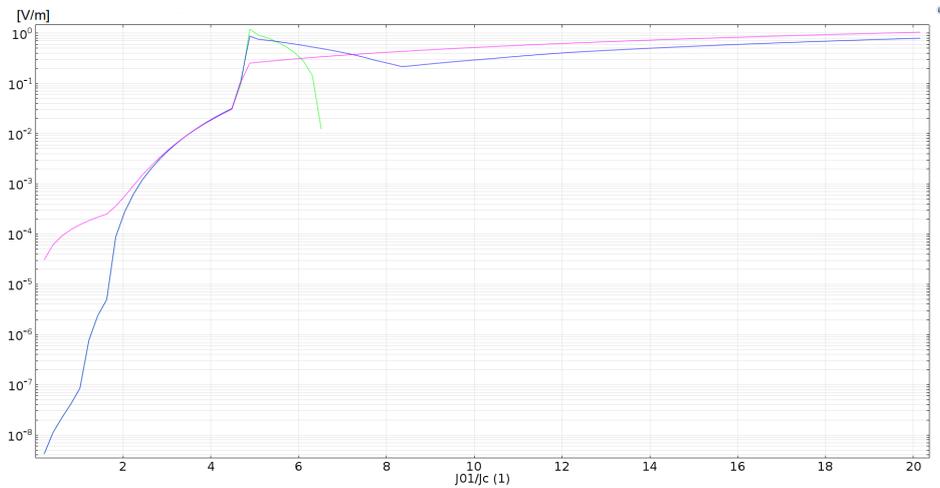


Abbildung 9.17.: Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte, die Spannung verhält sich bei allen Messpunkten bis circa $4,5J_c$ ähnlich. Zu Beginn sieht man einen leichten Sprung in der Spannung, danach dreht sich im Supraleiter die Spannung um (grüne Kurve), was auf numerische Fehler schließen lässt.

9.3.2. Fazit

Durch den Kontakt mit den umliegenden Metallen wurde eine Verzögerung des supraleitenden Sprunges verursacht. Trotz Anstieg des Stromes durch die Stromquelle (magentafarbene Kurve) fließt bei Erreichen der kritischen Stromdichte immer mehr Strom über umliegende Leiter ab. Der rasche Anstieg der Spannung ist in der Abbildung 9.17 bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 4,5$ zu erkennen. Da die Vierleitermessung (siehe Kapitel 4) der simulierten Stromquelle und den Spannungsmesspunkten entspricht, wurde somit gezeigt, dass der Widerstand der Kontaktstelle entscheidend für Messungsabweichungen (siehe Kapitel 1) sein kann.

9.4. Supraleitendes Monofilament mit Gold Kontakten

Um weiter zu untersuchen, warum die im vorigen Kapitel gefundene Verzögerung des supraleitenden Sprunges stattfindet, wurden in diesem Modell alle umliegenden Filamente entfernt. Die Geometrie ist in der Abbildung 9.18 dargestellt.

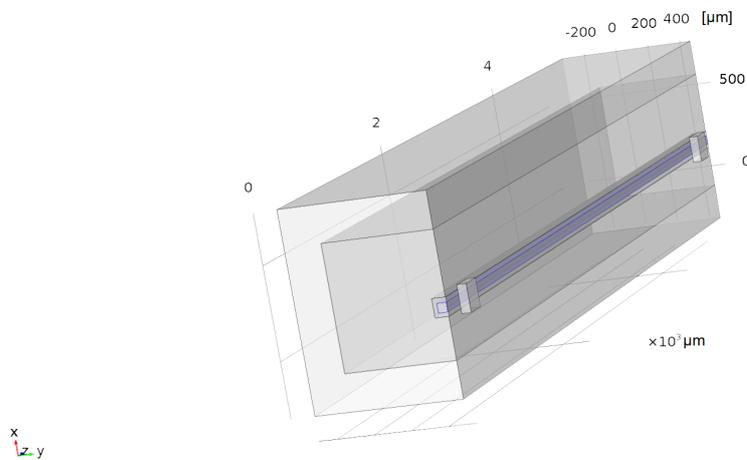


Abbildung 9.18.: Dreidimensionale Darstellung des Monofilamentsimulationsmodells mit Goldanschlüssen. (Blau: In Kontakt stehender Supraleiter). Die übrigen Filamente inklusive der Titanummantelung wurden entfernt.

9.4.1. Messung

In der 3D Stromdichte Darstellung (siehe Abbildung 9.19) ist eine maximale Stromdichte von $2,29 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$ zu erkennen. Dies ist gegenüber dem Ausgangsmodell (siehe Abbildung 9.6) nur geringfügig erhöht. Der Stromdichteverlauf ähnelt ebenfalls dem Ausgangsmodell (siehe Abbildung 9.7). Es zeigt sich ein anfangs rascher Anstieg, welcher immer mehr gedämpft wird und sich in der Gegend der kritischen Stromdichte einpendelt.

Der Spannungsverlauf im Inneren des Supraleiters lässt ebenfalls keine Rückschlüsse auf einen Sprung in der Stromdichte zu (siehe Abbildung 9.21). Der Spannungsverlauf der Stromdichtequelle (siehe Abbildung 9.22) folgt dem üblichen Muster des Ausgangsmodells (siehe Kapitel 9.1).

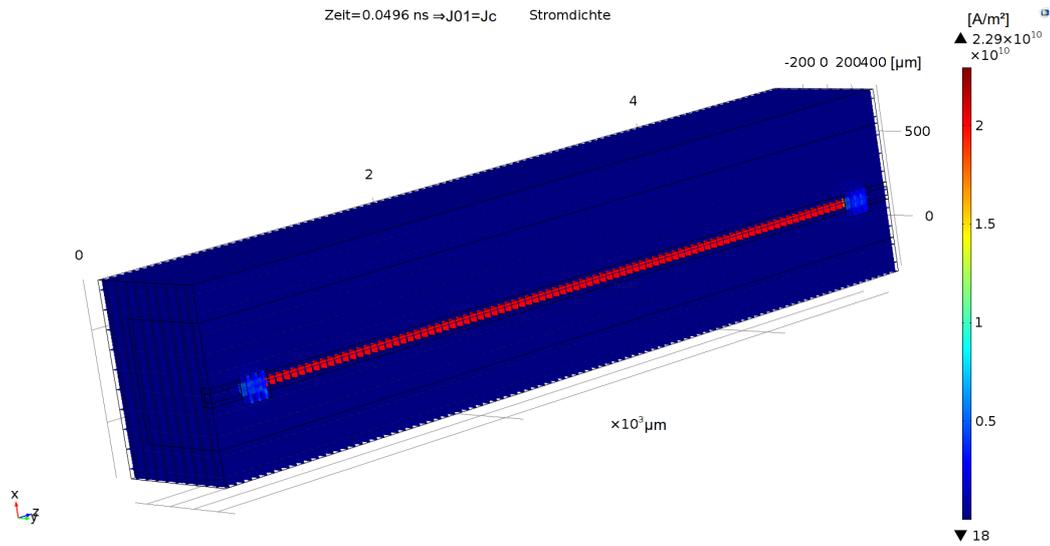


Abbildung 9.19.: Stromdichte im 3D-Modell bei angelegter Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Rot: Die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters erreicht ein Maximum von $2,29 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$.

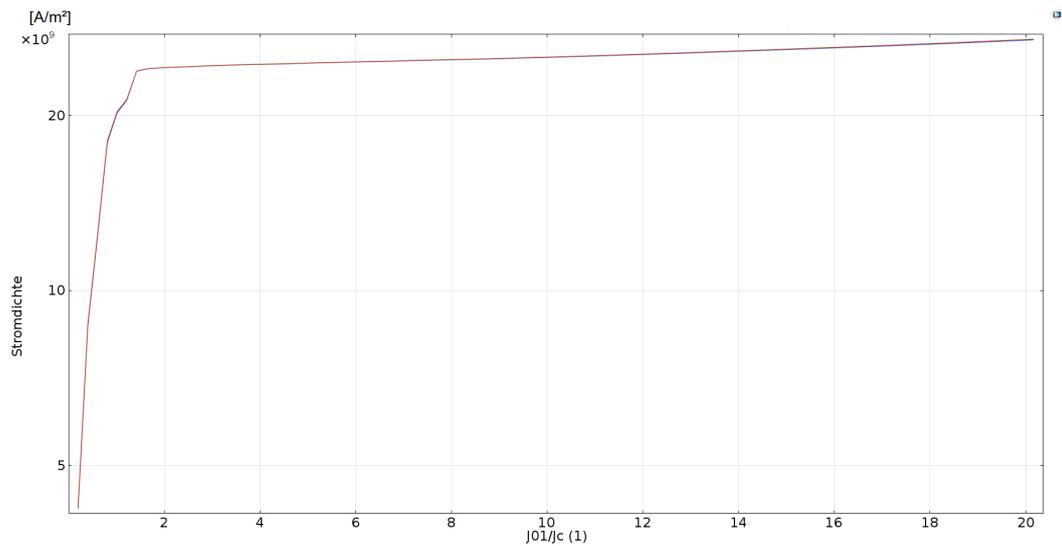


Abbildung 9.20.: Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters bei variierenden Stromdichten (J_{01}): Die rote, grüne und blaue Messkurve (Messpunkte im Supraleiter) überlagern sich und pendeln sich bei rund J_c (y-Achse) ein, ohne Sprung in der Spannung.

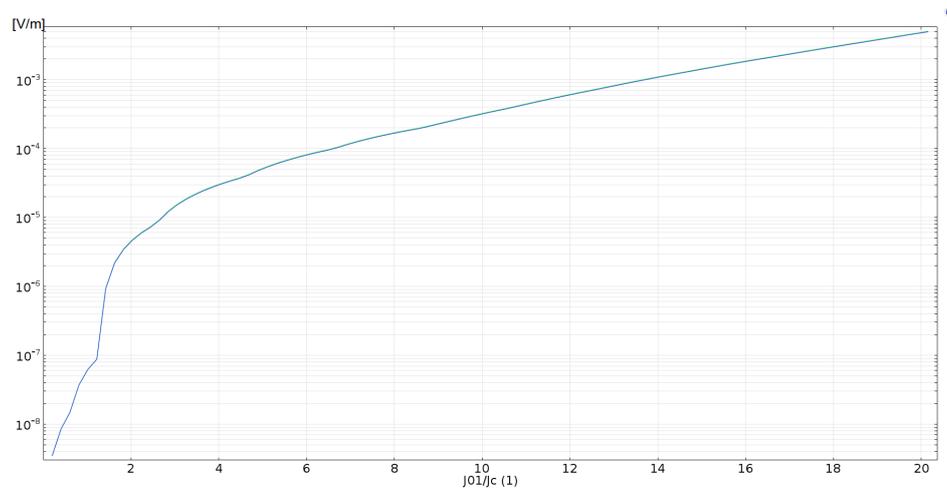


Abbildung 9.21.: Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung in der Nähe der Kontaktstellen (blau) und innerhalb des Filaments (grün). Es ist kein Sprung in der Spannung zu erkennen.

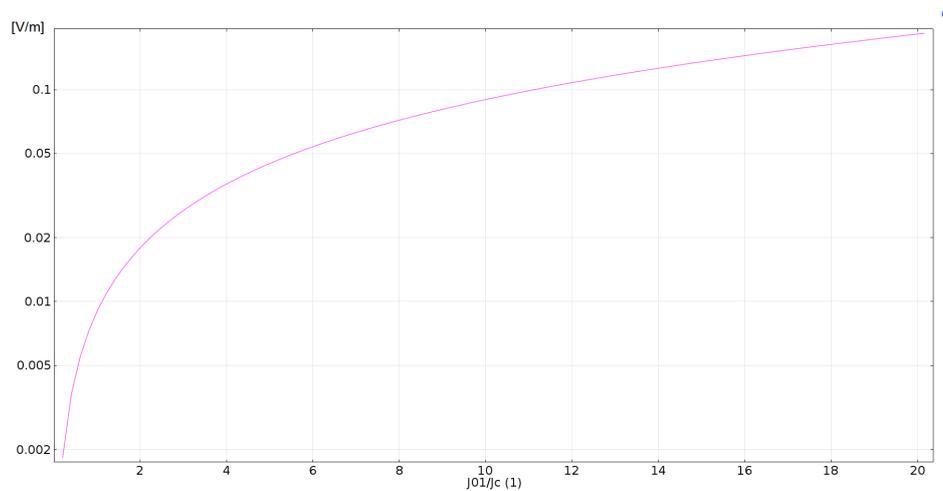


Abbildung 9.22.: Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung an den Kontaktstellen (magenta) steigt ohne zu erkennende Sprünge.

9.4.2. Fazit

Trotz des Nichtvorhandenseins von umliegenden Supraleitern sind keine markanten Unterschiede zum Ausgangsmodell (siehe Kapitel 9.1) zu erkennen. Das lässt darauf

schließen, dass der Einfluss des umliegenden Kupfers größer ist als die benachbarten Filamente.

9.5. Supraleitendes Monofilamente mit Gold Kontakten ohne umliegende Normalleiter

Um zu sehen, welchen Einfluss das umliegende Kupfer und Titan haben, wurde in diesem Modell alles bis auf das kontaktierte Filament und die Kontakte entfernt. Eine Darstellung der Geometrie ist in der Abbildung 9.23 zu finden.

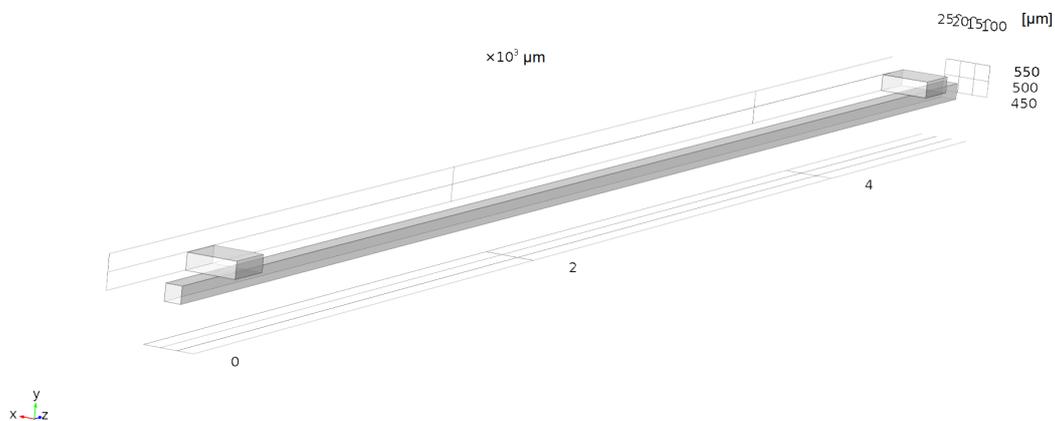


Abbildung 9.23.: Dreidimensionale Darstellung des Einfilamentsimulationsmodells mit Anschlüssen ohne Kupfer und Titan.

9.5.1. Messung

Bei der 3D Stromdichtedarstellung (siehe Abbildung 9.24) ist die gleichförmige Stromdichte von $2,22 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$ zwischen den Kontakten zu sehen. Auch in diesem Modell sieht man eine Verschiebung des supraleitenden Sprunges im Stromdichteverlauf, welcher in der Abbildung 9.25 dargestellt ist. Der Sprung in der Supraleitung findet bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 2$ statt und ist an dieser Stelle auch im Spannungsverlauf in der Abbildung 9.26 zu sehen.

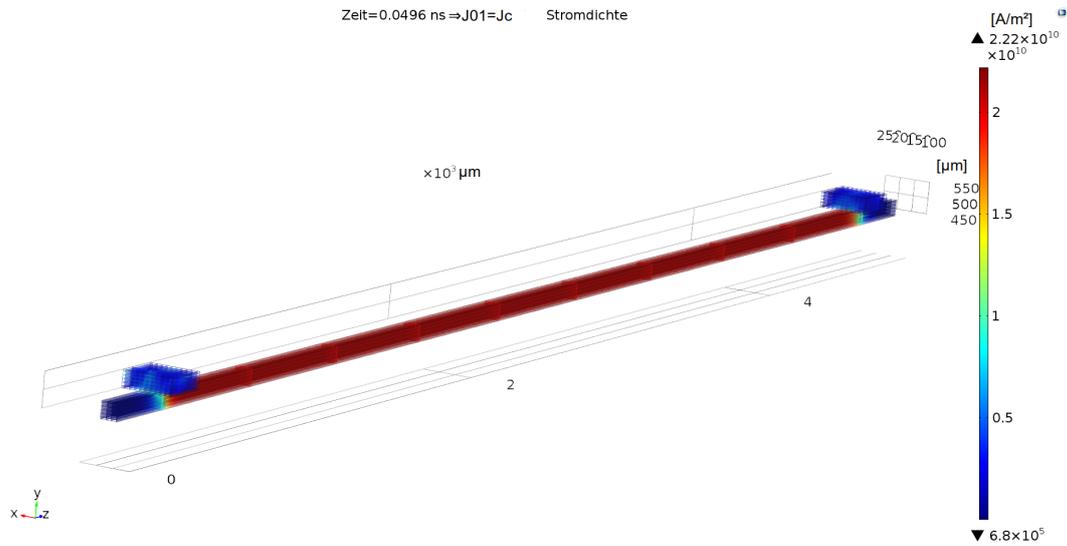


Abbildung 9.24.: Stromdichte im 3D-Modell bei angelegter Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Rot: Die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters erreicht ein Maximum von $2,22 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$.

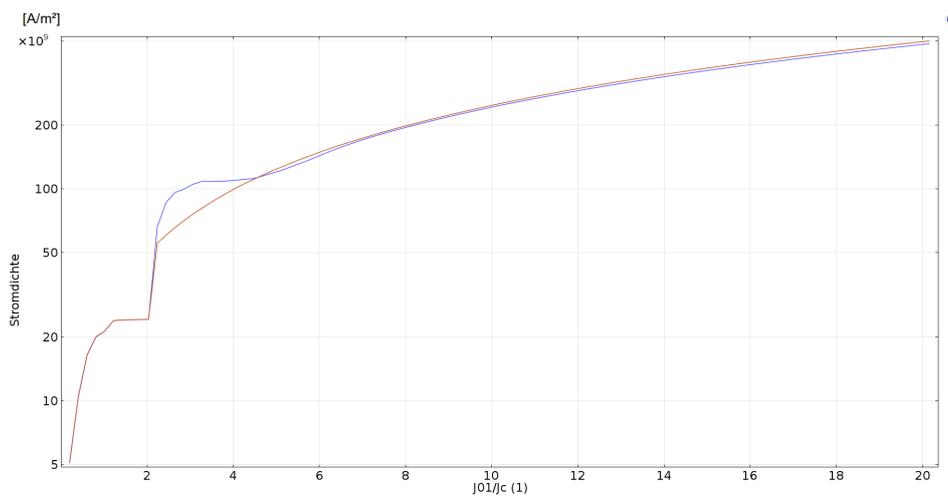


Abbildung 9.25.: Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters bei variierenden Stromdichten (J_{01}). Zuerst pendelt sich die Stromdichte bei rund J_c (y-Achse) ein, bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 2$ erfolgt der Sprung in der Spannung.

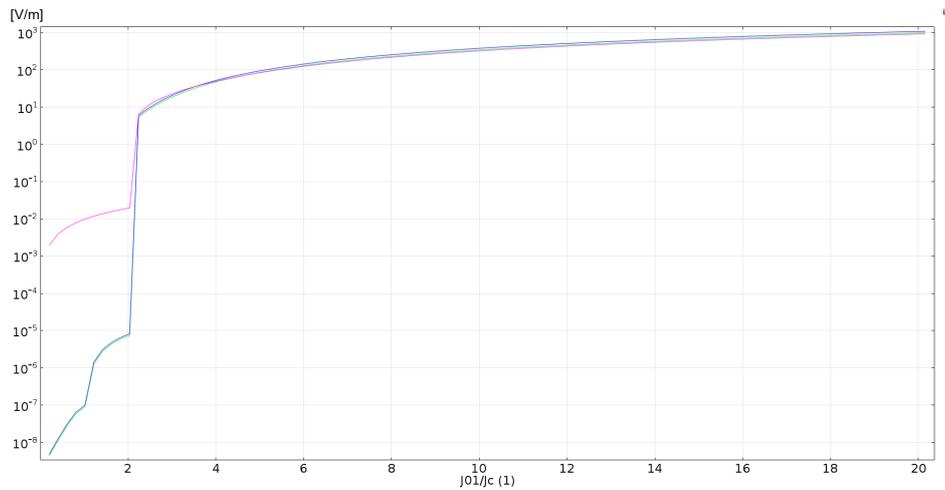


Abbildung 9.26.: Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung in der Nähe der Kontaktstellen (blau) sind deckungsgleich mit denen die weiter im Zentrum liegen (grün und rot). Magenta: Die Spannung der Stromdichtequelle (J_{01}). Diese steigt zuerst kontinuierlich an und bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 2$ regelt sie sprunghaft die Spannung nach.

9.5.2. Fazit

Woher die Verschiebung des supraleitenden Sprunges kommen kann ist nicht klar, da es diese nicht geben dürfte, da sich in der Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1,5$ die Stromdichte nicht mehr erhöht. Dies sollte aber weiterhin geschehen (siehe Formel 8.5). Auch im Spannungsverlauf (siehe Abbildung 9.26) ist zu sehen, dass die Stromquelle die Spannung erst bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 2$ sprunghaft hochregelt, was erst zu diesem Sprung in der Stromdichte und Spannung führt. Deshalb liegt die Vermutung nahe, dass COMSOL nicht richtig rechnet, wenn es um so rapide Änderungen wie beim Leitwert während des supraleitenden Übergangs geht.

10. Zusammenfassung

Dies sind nochmalig die Fragen aus der Einführung (siehe Kapitel 1), welche im Rahmen der Ergebnisse aufgearbeitet werden.

1. Hat der gemessene große Unterschied in der kritischen Stromdichte bei Messungen an Multifilamentdrähten im Vergleich zu Einzelfilamenten etwas mit dem Proximity-Effekt zu tun?
2. Fließt Strom über das Kupfer zu benachbarten Filamenten?
3. Liegt es an den Kontakt- und Übergangswiderständen?

Die erste Frage wurde bereits im Kapitel 3 mit genügend Informationen widerlegt. Die Filamente in den Proben haben etwa einen Abstand von 50-100 μm [5]. Dem gegenüber steht die Reichweite des Proximity-Effekts, welcher von der Kohärenzwellenlänge abhängt. Diese beträgt laut Wagner [2] maximal 100 nm. Somit ist die Reichweite um über einen Faktor 500 kleiner als der Abstand zwischen den Multifilamenten. Deshalb kann der Proximity-Effekt die Multifilamente nicht überbrücken und nicht der Grund für die große Diskrepanz bei den Messungen von Gnisen [1] sein.

Die Ergebnisse der Simulationen legen nahe, dass der Strom über das Kupfer und benachbarte Filamente fließt. In Kapitel 9.1, bei den Simulation mit 16 Filamenten mit Goldkontakten fand, trotz Ansteigen der Spannung, kein Zusammenbruch des supraleitenden Zustands statt. Die umliegenden Leiter und Supraleiter konnten den Strom aufnehmen. Der Autor geht davon aus, dass umliegende Leiter die Steigung des Anfangs des Sprunges in der Stromdichte verringern, was zu einem starken Abfluss des Stroms über die umliegenden Leiter führt und den supraleitenden Sprung verzögert, verringert oder gar verhindert. Gestützt wird diese Vermutung durch die Simulation "Supraleitendes Monofilament mit Goldkontakten ohne umliegende Normalleiter" (siehe Kapitel 9.5). Im Fall keiner umliegenden Leiter um den kontaktierten Supraleiter, nimmt dieser immer mehr Strom auf. Die Frage, ob das Kupfer oder die benachbarten Filamente den größten Beitrag liefern, wird in "Supraleiteres Monofilamente mit Goldkontakten" (siehe Kapitel 9.4) beantwortet. Es wird gezeigt, dass beim Entfernen der umgebenen supraleitenden Filamente, sodass nur mehr Kupfer vorhanden ist, kaum ein Unterschied zum Fall mit vorhanden Filamenten im direkten Vergleich der Stromdichtenverläufe besteht (siehe Abbildungen 9.7

und 9.20). Deshalb schließt der Autor darauf, dass Kupfer um ein Filament bereits genügt, um den Zusammenbruch des supraleitenden Zustands bedeutend hinauszuzögern.

Bei der dritten Frage, ob die Übergangswiderstände eine Rolle spielen, kann gesagt werden, dass die Simulationen auf eine wesentliche Beteiligung hindeuten. Sie unterstützen sogar die Stromdichtenkompensation am Anfang des Sprunges durch umliegende Leiter. Bei Veränderung des Widerstandes der Kontakte von Gold auf Aluminium (siehe Kapitel 9.3), oder bei Verkleinern der Kontaktfläche auf Filamentgröße (siehe Kapitel 9.2) ist ein Sprung in Spannung und Leitfähigkeit zu erkennen. Bei verkleinerten Kontakten ist dieser bereits bei zirka $J_{01} = 1,5J_c$ (siehe Abbildung 9.12) zu erkennen, bei Aluminiumkontakten bei rund $J_{01} = 4,5J_c$ (siehe Abbildung 9.16).

Eine eventuelle Lösung für die numerischen Probleme wäre, ein feineres Netz zu wählen, da die 3D-Simulationen mit dem groben Netz bereits die 35 GB Marke an Auslagerungsdateien erreichen. Dafür ist eine bessere Hardware, als die, die dieser Arbeit zur Verfügung stand, notwendig.

A. Anhang

A.1. Comsol Import Export

In Comsol gibt es die Möglichkeit Parameter, Variablen und Funktionen zu exportieren und importieren. Für diese Arbeit wurden unter "Global" Parameter und Variablen und unter "Komponente" zeitabhängige Variablen wie folgt definiert (siehe Auflistung A.1 bis A.3):

Listing A.1: Die Auflistung der Parameter unter "Global" im Format zum COMSOL-Import

```
1 P 0.036 Materialparameter Supraleitung Leitfähigkeit
2 m 1/3.1 Materialparameter Supraleitung Leitfähigkeit
3 b 2.466 Materialparameter Supraleitung Temperaturabhängigkeit
4 Ec 1E-4[V/m] Kritisches E-Feld
5 X 1E-8[V/m] Minimales E-Feld
6 T 4.2[K] Umgebungstemperatur
7 Jc 2.48E10[A/m^2] Kritische Stromdichte bei 4,2 K
8 Tc 39[K] Kritische Temperatur
9 T_ref_J 4.2[K] Referenztemperatur Kritische Stromdichte
10 rho_0_MgB2 3.13018E-9[ohm*m] Spezifischer Widerstand Normalleitende Phase bei OK
11 rho_1_MgB2 4.57719E-14[ohm*m/K] Temperaturabhängigkeit Normalleitende Phase
12 xi 2.6 Temperaturkoeffizient von Magnesiumdiborid
13 rho_0_Cu 2.02152E-10[ohm*m] Spezifischer Widerstand Kupfer bei T_ref^Cu
14 T_ref_Cu 19[K] Referenztemperatur für Kupfer
15 Cu_alpha 1.43174E-2[K^-1] Temperaturkoeffizient 1. Ordnung von Kupfer
16 Cu_beta 1.21426E-3[K^-2] Temperaturkoeffizient 2. Ordnung von Kupfer
17 Cu_gamma 3.17193E-5[K^-3] Temperaturkoeffizient 3. Ordnung von Kupfer
18 rho_0_Al 1.93E-12[ohm*m] Spezifischer Widerstand Aluminium bei T_ref^Cu
19 T_ref_Al 10[K] Referenztemperatur für Aluminium
20 Al_alpha -1.81925E-1[K^-1] Temperaturkoeffizient 1. Ordnung von Aluminium
21 Al_beta 8.64087E-3[K^-2] Temperaturkoeffizient 2. Ordnung von Aluminium
22 Al_gamma 3.86708E-3[K^-3] Temperaturkoeffizient 3. Ordnung von Aluminium
23 rho_0_Au 2.26E-10[ohm*m] Spezifischer Widerstand Gold bei T_ref^Cu
24 T_ref_Au 10[K] Referenztemperatur für Gold
25 Au_alpha 2.41711E-2[K^-1] Temperaturkoeffizient 1. Ordnung von Gold
26 Au_beta 2.69504E-3[K^-2] Temperaturkoeffizient 2. Ordnung von Gold
27 Au_gamma 3.74573E-5[K^-3] Temperaturkoeffizient 3. Ordnung von Gold
28 rho_0_Ti 23.6E-8[ohm*m] Spezifischer Widerstand Titan bei T_ref^Cu
29 T_ref_Ti 4.2[K] Referenztemperatur für Titan
30 Ti_alpha 0E-2[K^-1] Temperaturkoeffizient 1. Ordnung von Titan
31 Ti_beta 0E-3[K^-2] Temperaturkoeffizient 2. Ordnung von Titan
32 Ti_gamma 17E-14[K^-3] Temperaturkoeffizient 3. Ordnung von Titan
33 tau 1[ns] Time constant for applied current
34 JO 3.5E10[A/m^2] Angelegter Strom
35 A 400*2.5*2.5[μm^2] Querschnittsfläche 3D-Modell
```

36 A 1 [μm^2] Querschnittsfläche 2D-Modell

Listing A.2: Die Auflistung der Variablen unter "Global" im Format zum COMSOL-Import

```

1 JcT ((1-(if(T>Tc,Tc,T)/Tc))/(1-(T_ref_J/Tc)))^b Temperaturabhängigkeit
  supraleitende Phase
2 dT_Cu T-T_ref_Cu Temperaturdifferenz zu T_ref Kupfer
3 dT_Au T-T_ref_Au Temperaturdifferenz zu T_ref Gold
4 dT_Ti T-T_ref_Ti Temperaturdifferenz zu T_ref Titan
5 dT_Al T-T_ref_Al Temperaturdifferenz zu T_ref Aluminium
6 sigma_N_Cu 1/(rho_0_Cu*(1+Cu_alpha*(dT_Cu)+Cu_beta*dT_Cu^2+Cu_gamma*dT_Cu^3))
  Leitfähigkeit Kupfer
7 sigma_N_Au 1/(rho_0_Au*(1+Au_alpha*(dT_Au)+Au_beta*dT_Au^2+Au_gamma*dT_Au^3))
  Leitfähigkeit Gold
8 sigma_N_Ti 1/(rho_0_Ti*(1+Ti_alpha*(dT_Ti)+Ti_beta*dT_Ti^2+Ti_gamma*dT_Ti^3))
  Leitfähigkeit Titan
9 sigma_N_Al 1/(rho_0_Al*(1+Al_alpha*(dT_Al)+Al_beta*dT_Al^2+Al_gamma*dT_Al^3))
  Leitfähigkeit Aluminium
10 sigma_N_MgB2 1/(rho_0_MgB2+rho_1_MgB2*(T/1[K])^xi) Leitfähigkeit normalleitende
  Phase MgB2
11 sigma_S_MgB2_max (Jc*JcT*(P*(sqrt(3*X^2)/Ec)^m+(1-P)))/(sqrt(3*X^2))+1/
  sigma_N_MgB2 Maximale Leitfähigkeit MgB2

```

Listing A.3: Die Auflistung der Variablen unter "Komponente" im Format zum COMSOL-Import

```

1 J01 J0*(t/tau) Stromdichtequelle
2 IO J01*A Stromquelle
3 sigma_Mg2 (Jc*JcT*(P*((sqrt((ec.Ex+X)^2+(ec.Ey+X)^2+(ec.Ez+X)^2))/Ec)^m+(1-P)))
  /(sqrt((ec.Ex+X)^2+(ec.Ey+X)^2+(ec.Ez+X)^2))+sigma_N_MgB2 Leitfähigkeit MgB2

```

Abbildungsverzeichnis

2.1. Gegenüberstellung eines idealen Leiters und eines Supraleiters. Ein idealer Leiter ist keine eigene thermodynamische Phase. Da es egal sein müsste, ob zuerst die Temperatur gesenkt oder das Magnetfeld aktiviert wird. Im Unterschied dazu verdrängt ein Supraleiter das Magnetfeld im Inneren sobald dieser unter T_c abgekühlt wird [13].	4
2.2. Feynman-Diagramm zweier Elektronen (e^-), welche über virtuelle Photonen gekoppelt sind und ein Cooper-Paar bilden [15].	5
2.3. Verhalten eines Typ 1 Supraleiters: Bei Überschreiten von H_c bricht die Supraleitung spontan zusammen und das Magnetfeld dringt ein [17].	6
2.4. Verhalten eines Typ 2 Supraleiters: Bei Überschreiten von H_{c1} dringen Flussschläuche in den Supraleiter ein. Erst bei Überschreiten von H_{c2} wird dieser normalleitend [17].	7
3.1. Gegenüberstellung von Andreev-Reflexion (links): Im Normalleiter (rot) wird ein Elektron als Elektronenloch reflektiert und erzeugt ein Cooper-Paar (Bild a), dabei kann der Spin umklappen (Bild c). Das Elektron und das reflektierte Elektronenloch bilden ebenfalls ein Paar. Dieses Elektronen-Loch-Paar führt zum Proximity-Effekt. Normalreflexion (rechts): Es wird kein Cooper-Paar erzeugt, ein Spin-flip ist möglich (Bild b und d) [18].	10
4.1. Schematische Darstellung der Zweileitermessung. R_x ist der unbekannte zu messende Widerstand. R_K sind die Kontaktwiderstände und R_M ist die Gesamtheit der Widerstände des Messgerätes, z.B des Kabels und geräteinterner Bauteile. Das Messinstrument selbst besteht aus Voltmeter und Stromquelle. Der Spannungsabfall bei R_x wird inklusive der Widerstände R_K und R_M gemessen.	11

4.2.	Schematische Darstellung der Vierleitermessung. R_x ist der unbekannte zu messende Widerstand, R_K ist die Gesamtheit der Kontaktwiderstände und R_M ist der Widerstand der Messleitung. R_V und R_A sind die Innenwiderstände des Voltmeters bzw. der Stromquelle. Das Messinstrument selbst besteht aus Voltmeter und Stromquelle. Durch diese Aufteilung wird der Spannungsabfall bei R_K und R_M durch den Strom der Stromquelle vom Voltmeter ignoriert und führt deshalb nicht zu Fehlern. Der Strom über das Voltmeter ist aufgrund des hohen Innenwiderstands R_V sehr gering, weshalb auch der Spannungsabfall auf der Messleitung und an den Kontaktwiderständen des Voltmeters sehr gering ist. Dies führt im Gegensatz zu einer Zweileitermessung zu einem kleineren Fehler.	13
4.3.	Schematische Darstellung des Widerstandsnetzwerkes eines kupferummantelten Supraleiters, mit Goldkontakten für den Stromquellenanschluss der Vierpunktmessung. R_G ist der Widerstand der Goldkontakte, R_U ist der Übergangswiderstand des Supraleiters und des Kupfers, und R_S und R_K sind die aufgesplitteten Widerstände des Supraleiters und Kupfers, welche über die gesamte Länge des Filaments miteinander in Kontakt stehen. Selbst bei $R_S = 0$ fließt Strom über R_{K1} , da $R_{U_S} + R_{S1} \neq 0$ ist.	14
4.4.	Vierleitermessung von Magnesiumdiborid. 8 Kontakte, jeweils 4, sind für eine Messung gedacht. Die Äußeren für die Stromquelle die Inneren für das Voltmeter [4].	15
5.1.	Vergleich von Messdaten mit den theoretischen Werten für zwei unterschiedliche Exponenten n aus Formel 5.22. [22]	20
5.2.	Vergleich von Messdaten mit den gefitteten Daten für die Ermittlung von b	22
5.3.	ρ -T-Kurve von Kupfer und Blei: Zu sehen ist ein nicht lineares Verhalten bei tiefen Temperaturen [25]	23
5.4.	ρ -T-Kurve von Magnesiumdiborid: Man sieht das T^ξ Verhalten des Widerstandes im normalleitenden Bereich.	24
6.1.	Die in COMSOL verfügbaren Module. In dieser Arbeit wird das "AC/DC" Modul verwendet. [33]	27
6.2.	Die im AC/DC-Modul verfügbaren Physikmodule [33]	28
7.1.	Der Startbildschirm von COMSOL. "Der Modell-Assistent" erstellt im Gegensatz zu "Leeres Modell" bereits ein Grundgerüst. Er fragt vor Erstellung Details über die Dimension der Simulation, die Wahl des Physikmoduls und ob die Studie zeitabhängig sein soll. (Der "Physics Builder" wird in dieser Arbeit nicht behandelt) [33].	29

7.2.	Der Model Builder in COMSOL. In "Global" und "Komponente" gibt es die Möglichkeit seine Definitionen und Materialien zu hinterlegen. Die "Magnetische Feldformulierung" ist in diesem Beispiel das gewählte Physikmodul. Unter "Netz" werden die Finite-Elemente erzeugt. In "Studie" erfolgt die Berechnung und unter "Ergebnisse" findet man bei erfolgreicher Berechnung alle berechneten Werte [33].	30
7.3.	Die Geometrie des Beispielprogramms. Innen ist der Supraleiter, außen die Luft.	32
7.4.	Die Step Funktion erzeugt einen einfach supraleitenden Sprung. . . .	33
7.5.	Die Geometrie mit erstelltem Netz und den finiten Elementen. . . .	36
7.6.	Magnetfeldverdrängung: Zu sehen ist das B -Feld bei kleinem H -Feld ($t=0.015s$). Der Supraleiter (schwarzer Kreis) verdrängt das B -Feld fast vollständig in seinem Inneren. Nur an der Oberfläche dringt dieses ein.	37
7.7.	Magnetfeld dringt ein: Zu sehen ist das B -Feld bei größerem H -Feld ($t=0.1s$). Der Supraleiter (schwarzer Kreis) mit weiter eindringendem B -Feld. Zum Vergleich siehe Abbildung 7.6 in der das Magnetfeld noch nicht so weit eingedrungen ist.	38
7.8.	Oberflächenströme des Supraleiters welche das Eindringen des Magnetfeldes verhindern. (Bei kleinem H -Feld und $t=0.015s$. Im Vergleich zu 7.9).	38
7.9.	Oberflächenströme des Supraleiters welche durch das äußere Magnetfeld bereits weiter zurück gedrängt wurden. (bei größerem H -Feld und $t=0.1s$. Im Vergleich zu 7.8).	39
8.1.	Die Geometrie vom Simulationsmodell. Farblich gekennzeichnet sind das Kupfer in Grau und der Supraleiter in Blau. Der Pluspol der Stromquelle ist rot markiert und der Minuspol ist schwarz (dicke Linie).	42
8.2.	Die elektrische Leitfähigkeit bei $t = 0,87287$ ns: Dies entspricht etwa $J_{01} = 209\%J_c$ (siehe Kapitel 8.1.1). Der Supraleiter hat an den Endstellen bereits eine geringere elektrische Leitfähigkeit, zu sehen an der orangen Farbe.	44
8.3.	Die elektrische Leitfähigkeit bei deaktiviertem Kupfer und bei $t = 0,87287$ ns dies entspricht etwa $J_{01} = 209\%J_c$ (siehe Kapitel 8.1.1). Die elektrische Leitfähigkeit ist homogen, zu sehen an dem rot eingerahmtem Wertebereich. Die Fluktuationen (links oben) sind Rechenfehler.	45
8.4.	Spannungsdifferenz bei der Simulation mit aktiviertem Kupfer zwischen $x_1 = 4 \mu m$ und $x_2 = 8 \mu m$. Auf der x-Achse wurde die Stromdichtequelle variiert und mit der kritischen Stromdichte des Supraleiters in Relation gesetzt. Im Vergleich zur Abbildung 8.5 steigt das elektrische Potential oberhalb von $J_{01} > J_c$ langsamer an.	46

8.5. Spannungsdifferenz bei der Simulation mit deaktiviertem Kupfer zwischen $x_1 = 4 \mu\text{m}$ und $x_2 = 8 \mu\text{m}$. Auf der x-Achse wurde die Stromdichtequelle variiert und mit der kritischen Stromdichte des Supraleiters in Relation gesetzt. Im Vergleich zur Abbildung 8.4 steigt des elektrische Potential oberhalb von $J_{01} > J_c$ stärker an.	46
8.6. Leitfähigkeit bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$, mit Kupfer. Der Farbbereich wurde stark eingeschränkt, damit die Unterschiede in der Leitfähigkeit im Supraleiter sichtbar werden. Die Leitfähigkeit ist am Rand geringfügig schlechter als im Zentrum des Supraleiters.	47
8.7. Die Leitfähigkeit bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ ($t = 0,91792 \text{ s}$ siehe Kapitel 8.1.1)). Es wurde das Kupfer bei der Simulation deaktiviert, um es mit der Abbildung 8.6 zu vergleichen. Zu sehen ist eine vollständig homogene Verteilung der elektrischen Leitfähigkeit.	48
8.8. Die Geometrie des Simulationsmodells: Farblich gekennzeichnet ist Kupfer in Grau und die beiden Supraleiter in Blau. Der Pluspol der Stromquelle ist mit rot markiert und der Minuspol mit schwarz (dicke Linie).	49
8.9. Es wurde die Skalierung des Farbbereichs, um die Stromdichteverteilung des kontaktiertem Supraleiters zu sehen, bei $t = 0,87287 \text{ ns}$ dies entspricht etwa $J_{01} = 209\%J_c$ (siehe Kapitel 8.1.1). Die Stromdichte ist an beiden Endstellen höher, als im Zentrum des Supraleiters. Im Vergleich zur Abbildung 8.10 ist der Grund zu sehen, denn die Stromdichte ist am nicht angeschlossenen Supraleiter im Zentrum größer als am Rand.	50
8.10. Es wurde die Skalierung des Farbbereichs, um die Stromdichteverteilung des nicht kontaktierten Supraleiters zu sehen, bei $t = 0,87287 \text{ ns}$ dies entspricht etwa $J_{01} = 209\%J_c$ (siehe Kapitel 8.1.1). Der untere Supraleiter verhält sich im ortsabhängigen Verlauf entgegen dem oberen Supraleiter (siehe Abbildung 8.9).	50
8.11. Vergleich der Stromdichte (kontaktierter Supraleiter) in der Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Die grüne Kurve stellt die Stromdichte an linken der Endstelle dar. Die blaue Kurve stellt Die Stromdichte im Zentrum dar.	51
8.12. Vergleich der Stromdichte (nicht kontaktierter Supraleiter) in der Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Die grüne Kurve stellt die Stromdichte der linken Endstellen. Die blaue Kurve stellt Die Stromdichte im Zentrum dar.	52
8.13. Die 4 Messpunkte für die Stromdichte, oben kontaktierter Supraleiter. Unten nicht kontaktierter Supraleiter. Die grünen Punkte markieren die Messpunkte an den Endstellen und die blauen Punkte markieren die Messpunkte im Zentrum.	52

8.14. Vergleich der Stromdichte (kontaktierter Supraleiter) in kleinster Umgebung von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Die Farben entsprechen den Messpunkten der Abbildung 8.13. Grün markiert sind die Messpunkte der linken Endstellen und blau markiert sind die Messpunkte im Zentrum.	53
8.15. Geometrie eines Multifilamentdrahtes mit 2D Filamenten (Filament Querschnitt $50 \times 5 \times 5000$ [μm]) die Supraleiter sind blau eingefärbt. Der Pluspol der Stromquelle ist mit Rot markiert und der Minuspol mit Schwarz (dicke Linie).	54
8.16. Die 15 Messpunkte die oberen 5 am kontaktierten Supraleiter (blau gekennzeichnet), die unteren 5 am benachbarten nicht kontaktierten Supraleiter und dazwischen am Kupfer.	54
8.17. Vergleich der elektrischen Leitfähigkeit am kontaktierten Supraleiter. Supraleitender Sprung bei $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ mit unterschiedlich stark ausgeprägtem Abfall der Leitfähigkeit. Die Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16.	55
8.18. Die Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16. Die Stromdichte an den Kontakten (blau) steigt kontinuierlich an. Beim Zusammenbruch der Supraleitung bleibt die Stromdichte innerhalb des Supraleiters annähernd konstant.	56
8.19. Die Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16. Zu sehen ist der Spannungsverlauf mit Anstieg der Stromdichte, bei Zusammenbruch der Supraleitung. Weiters ist ein konstantes Verhalten im Inneren des Filaments ab ca. $\frac{J_{01}}{J_c} = 1, 2$	57
8.20. Der Stromdichteverlauf am benachbarten Supraleiter erfolgt vom Verhalten entgegengesetzt zum kontaktierten Supraleiter (siehe Abbildung 8.18). Sobald der kontaktierte Supraleiter zusammenbricht übernimmt der benachbarte den zusätzlichen Stromfluss. Die Stromdichte ist im Inneren (rot, grün) höher als an den Endstellen (blau).	58
8.21. Die Farben der Kurven entsprechen den Farben der Messpunkte aus der Abbildung 8.16. Im Kupfer ist ebenfalls (siehe Abbildung 8.20) ein Stromdichteanstieg zu erkennen, der an den Rändern stärker ausfällt als im Inneren.	58
9.1. Eine Querschnittaufnahme eines Multifilamentdrahtes. Mit den folgenden Farben sind die unterschiedlichen Materialien gekennzeichnet. Schwarz: Magnesiumdiborid. Grau: Titan. Rötlichbraun: Kupfer. Die blaue Linie, welche mit Ziel gekennzeichnet ist, zeigt an bis wohin das Material weg poliert wird. Das bereits polierte Multifilament ist in der Abbildung 9.2 dargestellt [4]	61

- 9.2. Die Querschnittaufnahme eines Multifilamentdrahtes. Mit den folgenden Farben sind die unterschiedlichen Materialien gekennzeichnet. Schwarz: Magnesiumdiborid. Dunkelgrau: Titan. Hellgrau: Stahl. Rötlichbraun: Kupfer. An der Unterseite ist zu sehen, dass Stahl, Kupfer und Titan wegpoliert wurden, sodass zwei Magnesiumdiboridfilamente auf der Längsseite frei liegen (siehe Abbildung 9.4) [4] 62
- 9.3. Das Multifilamentsimulationsmodell ist ähnlich wie der Realfall. Magnesiumdiboridelemente ($50 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$) mit Titan ummantelt ($25 \mu\text{m}$ Dicke), in Kupfer eingebettet ($675 \mu\text{m} \times 600 \mu\text{m}$) und außen wieder mit Titan ummantelt ($200 \mu\text{m}$ Dicke). 63
- 9.4. Die Strom- und Spannungskontakte der Vierleitermessung an zwei herauspräparierten Magnesiumdiboridfilamenten [4] 63
- 9.5. Zu sehen sind die im Inneren, des in hellblau dargestellten Supraleiters, befindlichen Messpunkte. Der rote Messpunkt befindet sich genau im Zentrum, die anderen liegen im Bezug zu diesem bei $\pm 850 \mu\text{m}$ (grün) und bei $\pm 2100 \mu\text{m}$ (blau). Die magentatafarbige Messpunkte befinden sich auf den Kontakten bei $\pm 2250 \mu\text{m}$ 65
- 9.6. Stromdichte im 3D-Modell bei angelegter Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Rot: Die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters, erreicht ein Maximum von $2,22 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$ 66
- 9.7. Der Stromdichteverlauf bei variierenden Stromdichten (J_{01}). Zu sehen ist das Einpendeln der Stromdichte im Filament auf ca. J_c (y-Achse). Die rote, grüne und blaue Kurve der Messpunkte, welche sich überlagern, zeigen einen annähernd gleichen Stromdichteverlauf. 67
- 9.8. Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung in der Nähe der Kontaktstellen (blau) steigt geringfügig schneller an als weiter innerhalb des Supraleiters (grün). 67
- 9.9. Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung an den Kontaktstellen (magenta) steigt im Unterschied zu den Messpunkten innerhalb des Supraleiters linear an (vgl. Abbildung 9.8). 68
- 9.10. Dreidimensionale Darstellung des Multifilament-Simulationsmodells mit verkleinerten Kontakten (Blau: kontaktierter Supraleiter). 69
- 9.11. Stromdichte im 3D-Modell bei der angelegten Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Gelb: Die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters erreicht ein Maximum von $4,41 \cdot 10^{10} \text{ A/m}^2$ 70
- 9.12. Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters bei variierenden Stromdichten (J_{01}). 70
- 9.13. Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung in der Nähe der Kontaktstellen (blau) steigt geringfügig schneller an als weiter innerhalb des Supraleiters (grün). 71

9.14. Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung an den Kontaktstellen (magenta) steigt oberhalb von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$ annähernd linear an.	71
9.15. Stromdichte im 3D-Modell bei angelegter Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Orange: die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters, erreicht ein Maximum von $2,33 \cdot 10^{10}$ A/m ²	73
9.16. Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters bei variierenden Stromdichten (J_{01}). Die Stromdichte bremst sich bei circa J_c (y-Achse) ein. Der Sprung in der Stromdichte tritt bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 5$ ein.	73
9.17. Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. die Spannung verhält sich bei allen Messpunkten bis circa $4,5J_c$ ähnlich. Zu Beginn sieht man einen leichten Sprung in der Spannung, danach dreht sich im Supraleiter die Spannung um (grüne Kurve), was auf numerische Fehler schließen lässt.	74
9.18. Dreidimensionale Darstellung des Monofilamentsimulationsmodells mit Goldanschlüssen. (Blau: In Kontakt stehender Supraleiter). Die übrigen Filamente inklusive der Titanummantelung wurden entfernt. . .	75
9.19. Stromdichte im 3D-Modell bei angelegter Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Rot: Die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters erreicht ein Maximum von $2,29 \cdot 10^{10}$ A/m ²	76
9.20. Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters bei variierenden Stromdichten (J_{01}): Die rote, grüne und blaue Messkurve (Messpunkte im Supraleiter) überlagern sich und pendeln sich bei rund J_c (y-Achse) ein, ohne Sprung in der Spannung.	76
9.21. Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung in der Nähe der Kontaktstellen (blau) und innerhalb des Filaments (grün). Es ist kein Sprung in der Spannung zu erkennen.	77
9.22. Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung an den Kontaktstellen (magenta) steigt ohne zu erkennende Sprünge.	77
9.23. Dreidimensionale Darstellung des Einfilamentsimulationsmodells mit Anschlüssen ohne Kupfer und Titan.	78
9.24. Stromdichte im 3D-Modell bei angelegter Stromdichte von $\frac{J_{01}}{J_c} = 1$. Rot: Die hohe Aufnahme der Stromdichte des Supraleiters erreicht ein Maximum von $2,22 \cdot 10^{10}$ A/m ²	79
9.25. Der Stromdichteverlauf innerhalb des Supraleiters bei variierenden Stromdichten (J_{01}). Zuerst pendelt sich die Stromdichte bei rund J_c (y-Achse) ein, bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 2$ erfolgt der Sprung in der Spannung.	79

- 9.26. Der Spannungsabfall ist normiert auf den Abstand der Messpunkte. Die Spannung in der Nähe der Kontaktstellen (blau) sind deckungsgleich mit denen die weiter im Zentrum liegen (grün und rot). Magenta: Die Spannung der Stromdichtequelle (J_{01}). Diese steigt zuerst kontinuierlich an und bei circa $\frac{J_{01}}{J_c} = 2$ regelt sie sprunghaft die Spannung nach. 80

Tabellenverzeichnis

5.1. Gegenüberstellung der gemessenen Daten von Csoklich [5], mit den für Formel 5.28 gefitteten Daten.	22
5.2. Zusammenfassung der Parameter für die Simulationen von Magnesiumdiborid in Kapitel 8 und 9.	26
7.1. Die Parameter des Beispiel Programm, welche in Global definiert sind [34].	31
7.2. Die Variablen müssen wegen der Zeitabhängigkeit in "Komponente" definiert werden. I_1 ist der Strom der Stromquelle und wird über die zweite Formel in das Magnetfeld $H_{0\phi}$ umgerechnet [34].	31
7.3. Materialparameter der Luft [34].	33
7.4. Materialparameter des Supraleiters. Bei norm E wurde die Stepfunktion verwendet (siehe Abbildung 7.4) [34].	34

Literaturverzeichnis

- [1] J. Gnilsen. *Präparation und Messung supraleitender Eigenschaften einzelner Filamente eines MgB_2 Multifilamentdrahtes*. PhD thesis, Technischen Universität Wien, January 2014.
- [2] Christian Wagner. *Proximity-Effekt in FSF-Heterostrukturen*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 2011.
- [3] M. Halwachs. *Präparation und Messung eines MgB_2 Filaments*. PhD thesis, Technischen Universität Wien, März 2012.
- [4] M. Kirchner. *Präparation und Messung von zwei MgB_2 Filamenten aus einer Draht-Probe*. PhD thesis, Technischen Universität Wien, Juni 2012.
- [5] C. Csoklich. *Präparation and Measurement of a MgB_2 Single Filament*. PhD thesis, Technischen Universität Wien, 2015.
- [6] M. Basler, P.A. Tipler, G. Mosca, R. Dohmen, C. Heinisch, A. Schleitzer, and M. Zillgitt. *Physik: für Wissenschaftler und Ingenieure*. Spektrum Akademischer Verlag, 2009.
- [7] H.C. Stahl and S. Hunklinger. *Tieftemperaturphysik*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [8] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit. *Naturwissenschaften*, 21:787–788, 1933.
- [9] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity*. McGraw-Hill, 1996.
- [10] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175, 1957.
- [11] B. D. Josephson. Possible new effects in superconducting tunnelling. *Phys. Rev.*, 1:251–253, 1962.
- [12] J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Zenitani Y., and J. Akimitsu. Superconductivity at 39 K in magnesium diboride. *Nature*, 410:63–64, 2001.
- [13] A. Nöldechen. *Die Supraleitung: Nobelpreis für eine technische Revolution*. Econ, 1988.

- [14] Alexander Henning. *Entwicklung eines Simulationsverfahrens für Supraleiter unter Berücksichtigung von Temperatur, Stromdichte und Magnetfeld*. PhD thesis, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Havelberg, 2012.
- [15] W. Buckel and R. Kleiner. *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*. Lehrbuch Physik. Wiley, 2013.
- [16] Holger Liebermann. *Entwicklung einer supraleitenden CH-Beschleuniger-Struktur für leichte und schwere Ionen*. PhD thesis, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Rodenbach, 2007.
- [17] H. Daniel. *Elektrodynamik - relativistische Physik*. Physik / H. Daniel. de Gruyter, 1997.
- [18] Roland Grein. *Spin-Activity at Interfaces between Superconductors and Strongly Polarized Ferromagnets*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 2008.
- [19] R. Parthier. *Messtechnik: Grundlagen und Anwendungen der elektrischen Messtechnik*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2016.
- [20] S.K. Gupta, P. Berdahl, and R.E. Russo. Pulse i-v characteristics measurement to study the dissipation mechanism in epitaxial $YBa_2Cu_3O_x$ thin films at high current densities. *Physica C*, 206:335–344, 1993.
- [21] J. Grundmann. *Kennlinienfeldmessung und Modellierung der Auslösung und Quenchausbreitung in HTSL-Strombegrenzern*. Cuvillier, 2008.
- [22] J. Grundmann, M. Lindmayer, R. Röcklein, and W. Schmidt. Simulation of hts switching with the finite element analysis program ansys. *Superconductor Science and Technology*, 16:562–565, 2003.
- [23] M. Prester. Current transfer and initial dissipation in high- T_c superconductors. *Superconductor Science and Technology*, 11:333–357, 2003.
- [24] KUNCHUR and N. MILIND. Novel transport behavior found in the dissipative regime of superconductors. *Modern Physics Letters B*, 09(07):399–426, 1995.
- [25] E. Baars, A. Coehn, G. Ettisch, H. Falkenhagen, W. Gerlach, E. Grüneisen, B. Gudden, A. Güntherschulze, G. Hevesy, G. Laski, et al. *Handbuch der Physik: Band XIII Elektrizitätsbewegung in festen und flüssigen Körpern*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [26] P. Klein. *Schaltungen und Systeme: Grundlagen, Analyse und Entwurfsmethoden*. De Gruyter, 2005.
- [27] T. M. Dauphinee and H. Preston-Thomas. A copper resistance temperature scale. *Review of Scientific Instruments*, 22:884–886, 1954.

-
- [28] W.M. Haynes. *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 96th Edition*. 100 Key Points. CRC Press, 2015.
- [29] W. R. G. KEMP, P. G. KLEMENS, and G. K. WHITE. Thermal and electrical conductivities of iron, nickel, titanium, and zirconium at low temperatures. *Australian Journal of Physics* 9, pages 180–188, 1956.
- [30] P. C. Canfield, D. K. Finnemore, and S. L. Bud'ko. Superconductivity in dense mgb 2 wires. *Physical Review B*, 86:2, 2001.
- [31] F. Gömöry, M. Vojenčiak, E. Pardo, and J. Šouc. Magnetic flux penetration and ac loss in a composite superconducting wire with ferromagnetic parts. *Superconductor Science and Technology*, 22(3):034017, 2009.
- [32] F. Gömöry, M. Vojenčiak, E. Pardo, M. Solovyov, and J. Šouc. Ac losses in coated conductors. *Superconductor Science and Technology*, 23(3):034012, 2010.
- [33] Comsol 5.0. *Comsol Dokumentation*. COMSOL, Inc., 2014.
- [34] Roberto Brambilla. *Beispielprogramm Superconducting Wire*. COMSOL, Inc.
- [35] P Duthil. Material Properties at Low Temperature. (arXiv:1501.07100):18 p, 2014. Comments: 18 pages, contribution to the CAS-CERN Accelerator School: Superconductivity for Accelerators, Erice, Italy, 24 April - 4 May 2013, edited by R. Bailey.