



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Über Asset Korrelationen und Klassifizierung der Industriegruppen

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur/in

im Rahmen des Studiums

Finanz- und Versicherungsmathematik

ausgeführt am

**Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der TU Wien**

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr. Friedrich Hubalek

eingereicht von

Nikola Kocakova, BSc.
Matrikelnummer 01226634

Wien, 11. September 2019

(Unterschrift Verfasser/in) (Unterschrift Betreuer/in)

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit den Methoden zur Schätzung von Asset Korrelationen und hieraus abgeleiteter Zusammenhänge zwischen Industriegruppen. Im wesentlichen werden drei Methoden zur Schätzung der Korrelation vorgestellt. Einerseits handelt es sich um eine empirische Approximation, die anhand von Aktienkursen durchgeführt wird, andererseits werden zwei weiterführende Methoden ausgearbeitet, die auf der Parameterschätzung des Merton Modells basieren. In beiden der Merton Fälle handelt es sich um eine Maximum Likelihood Schätzung. Im ersten Schritt wird der sogenannte Survivorship Bias mitberücksichtigt und darauffolgend werden die Assets in direkte Abhängigkeit von den Industrieeffekten gesetzt. Letztendlich wird die erarbeitete Theorie in einer numerischen Analyse umgesetzt und die Vorgehensweise in der Praxis genau erklärt. Darüberhinaus werden die für das Thema der Asset Korrelationen relevanten Bestimmungen seitens der internationalen Bankenaufsicht nach Basel II kurz erläutert.

Abstract

The present thesis focuses on the approximation methods for asset correlations followed by the derivation of dependancies across industry groups. Basically three different estimation methods for asset correlations are introduced. On the one hand an empirical approximation taking into account adjusted stock returns is presented, on the other hand there are two further methods based on parameter estimation of the Merton model. In both cases of the Merton model we are dealing with a Maximum Likelihood estimation considering the so-called survivorship bias in the first step, followed by the modeling of asset values directly dependent on their industry classification. Finally the provided theory is put into a numerical analysis explaining in detail the accurate implementation in practice. Additionally it gives an overview of the international supervisory requirements within Basel II in respect of the credit risk relevant correlation rules.

Danksagung

In erster Linie möchte ich mich bei all jenen bedanken, die mich während des ganzen Studiums unterstützt haben und mir bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit zur Seite gestanden sind.

Ganz besonderer Dank geht an meinen Betreuer, Professor Friedrich Hubalek, der mir das Schreiben über ein Thema meiner Wahl ermöglicht und mir in der Recherche geholfen hat. Darüberhinaus möchte ich mich beim Professor Thomas Dangl für die Zurverfügungstellung der Daten bedanken.

Abschließend bedanke ich mich bei allen Freunden und Kollegen, die mir mit ihrer Geduld und motivierenden Worten stets entgegengekommen sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
2	Asset Values und das Kreditrisiko	7
2.1	Merton Model	7
2.1.1	Das risikoneutrale Black-Scholes-Merton Modell	8
2.1.2	Probability of Default und Distance to Default	10
2.2	Internal Ratings Based Approach	11
2.2.1	Asymptotic Single Risk Factor Modell	12
2.2.2	Risk Weighted Assets und Korrelationen	16
3	Schätzung von Asset Korrelationen	19
3.1	Empirischer Ansatz basierend auf Stock Returns	19
3.2	Merton ML-Approximation mit Survivorship Bias	20
3.2.1	Likelihood Funktion	21
3.2.2	Vorgehensweise	25
3.2.3	Numerische Implementierung	27
3.3	Merton ML-Approximation basierend auf Random-Effects	32
3.3.1	Random Effects Modell	33
3.3.2	Numerische Implementierung	37
4	Industrieklassifizierung	41
4.1	Unterschiede der Industrieklassifizierungen	42
4.2	Analyse der Industriekorrelationen	46
A	Anhang	52
A.1	Maximum Likelihood Schätzer für Multivariate Normalverteilung	52
A.2	Motivation für die Diskretisierung von Asset Values	54
A.2.1	Euler'sche Schema	54
A.2.2	Milstein Schema	55
A.3	Korrelationsmatrizen	57

1 Einführung

Während der Wirtschaftskrise im Jahr 2008 wurde am Beispiel von Lehmann Brothers deutlich ersichtlich, dass auch große internationale Konzerne beziehungsweise Banken vor einer Insolvenz nicht geschützt sind und, dass deren Zahlungsunfähigkeit auch andere Unternehmen ruinieren kann. Welchen Einfluss ein Unternehmen auf die gesamte Marktwirtschaft haben kann, ist insbesondere in Zeiten komplizierter Unternehmensstrukturen oft schwierig abzuschätzen.

Die Asset Korrelationen spielen also nicht nur bei der Diversifizierung eines Portfolios eine bedeutende Rolle. Ebenso im Bereich des Kredit- bzw. Kontrahentenausfallsrisikos ist es von besonderer Bedeutung, Abhängigkeiten zwischen Unternehmen zu quantifizieren und daraus Rückschlüsse auf mögliche Zahlungsschwierigkeiten zu ziehen. Insbesondere für staatlich geschützte Industriebereiche (zum Beispiel Banken, Versicherungen, etc.) ist die Anzahl der historischen Ausfallereignisse nicht groß genug, um daraus ein Muster ableiten zu können. Deswegen werden des öfteren für die Schätzung der Ausfallkorrelationen in der Praxis Zusammenhänge der Vermögenswerte herangezogen. Ähnlich wie im Portfoliomanagement werden auch bei der Quantifizierung des Kreditrisikos homogene Gruppen gebildet, die dem gleichen Risikofaktor, sei es geographisch oder industriespezifisch, unterliegen.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden drei verschiedene Methoden zur Schätzung der Asset Korrelationen erarbeitet, wobei die Fragenstellungen zum Teil der Arbeit von Klaus Düllmann, u.a. [4] folgen. Zuerst führen wir in das Thema des Kreditrisikos ein und beschreiben das hierfür häufig verwendete Merton Modell. Die genauen Definitionen eines Ausfalls beziehungsweise die Herleitung der Ausfallswahrscheinlichkeiten werden in Kapitel 2 näher beschrieben. Darüberhinaus werden auch die mathematischen Hintergründe des im Rahmen eines internen Ansatzes in Basel II vorgeschriebenen ASRF Modells erläutert. Dass der Zusammenhang zwischen Asset Korrelationen und den Mindestkapitalanforderungen insbesondere bei immer strengeren Regelungen nicht zu unterschätzen ist, wird ebenso kompakt dargestellt.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der eigentlichen Schätzung der Asset Korrelationen und deren numerischer Implementierung. Im ersten Schritt werden die Asset Korrelationen direkt aus den empirischen Zusammenhängen zwischen Aktienkursen geschätzt. Diese Methode wird zwar oft als erster Indikator verwendet, ist aber aufgrund der Vernachlässigung des Kreditrisikoteils nicht zur dessen Einschätzung geeignet. Die zweite Methode basiert auf einer direkten Maximum Likelihood Schätzung des Merton Modells. Nachdem wir in der Praxis nur an nicht ausgefallenen Unternehmen interessiert sind, fließt der sogenannte „Survivorship Bias“ ebenso mit in die Schätzung ein. Abschließend wird die dritte Methode vorgestellt, welche die Entwicklung der Assets in einen direkten Zusammenhang mit der Industriezugehörigkeit setzt und den Prozess der Asset Returns als ein Random-Effekts Modell darstellt.

Welche Industrieklassifizierungen am Markt vorhanden sind und in welcher Weise sie sich unterscheiden, wird im letzten Kapitel dieser Arbeit beschrieben. Vielen Unternehmen, die im Bereich des Investmentbankings, Consultings oder als Ratingagentur tätig sind, haben seine eigene Industriekategorien. Dadurch ist die Anzahl der unterschiedlichen Klassifizierungsstandards enorm groß und die Unterschiede nicht immer klar ersichtlich. Im wesentlichen gibt es zwei grundlegende Merkmale anhand von denen Unternehmen in Industrien eingeteilt werden:

- betriebsorientierte Klassifizierungen: z.B. SIC, NAICS
- finanzmarktorientierte Klassifizierungen: z.B. GICS, ICB, TRBC.

Welche der Klassifizierung am besten geeignet ist, lässt sich im Allgemeinen nicht beantworten, denn es hängt stark davon ab, worüber die darausfolgenden Aussagen getroffen werden sollen.

Zum Schluss wird für die im S&P 500 und STOXX 600 Europe enthaltenen Unternehmen eine empirische Analyse über mehrere Zeiträume durchgeführt. Die daraus resultierenden Ergebnisse zeigen, dass die Korrelationen zwischen amerikanischen Unternehmen deutlich höher sind als die der europäischen. Darüberhinaus kann aus der Analyse entnommen werden, dass die höchsten Assetkorrelationen während der Wirtschaftskrise beobachtet werden konnten. Nachdem die Auswirkungen der Wirtschaftskrise im Jahr 2012 stabilisiert wurden, sind die Korrelationen in den meisten Industrien nicht unter das Niveau von vor der Krise gesunken.

Anmerkung: Zur besseren Leserlichkeit werden die meisten Begriffe aus der Finanzmathematik in englischer Sprache verwendet.

2 Asset Values und das Kreditrisiko

Eines der bekanntesten Asset Value Modelle in der Bewertung des Kreditausfallsrisikos wurde im Jahr 1974 von Robert C. Merton [18] vorgestellt. Das Merton Modell stellt einen direkten Zusammenhang zwischen dem Aktienkurs und dem Kreditobligo eines Unternehmens dar und wird als Basis von vielen anderen Kreditrisikomodellen verwendet. Wird das Merton Modell auf eine Großzahl von identischen Firmen (homogenes Portfolio) ausgeweitet und das Gesetz der Großen Zahlen angewendet, so entspricht es dem sogenannten Asymptotic Single Risk Factor (ASRF) Modell [11]. Das ASRF Modell wird aufgrund dessen Portfolioinvarianz in Basel II für die Eigenkapitalhinterlegung des Ausfallsrisikos vorgeschlagen und stellt ebenso in den meisten Fällen die Grundlage für interne Modelle dar [21].

2.1 Merton Model

Wie bereits erwähnt, stellt das Merton Modell einen wichtigen Ansatz zur Schätzung des Kreditausfalls und somit auch zur Bepreisung von Krediten und Anleihen dar. Die Voraussetzungen stimmen mit denen von Black-Scholes überein und setzen sich wie folgt zusammen:

- fest vorgegebener risikoloser Zinssatz r
- keine Dividendenzahlungen
- Arbitragefreiheit
- keine Transaktionskosten bzw. Steuern
- hinreichend liquider Markt
- Assets werden in stetiger Zeit gehandelt

Die Grundannahme des Merton Modells ist, dass die Vermögenswerte (Assets) eines jeden Unternehmens unter dem physischen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} einer geometrischen Brownschen Bewegung folgen. Diese hat die folgende Form

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t) \quad (1)$$

wobei $S(t)$ den Wert der Assets zum Zeitpunkt t , μ den Drift und σ die Volatilität des stochastischen Prozesses darstellt und $W^{\mathbb{P}}(t)$ eine standard Brownsche Bewegung (unter dem physischen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}) ist. Nachdem wir in späterer Folge einen Maßwechsel durchführen möchten, dient die Schreibweise $W^{\mathbb{P}}(t)$ lediglich der Verdeutlichung der Maßabhängigkeit.

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1) kann zum Zeitpunkt T mit Hilfe des stochastischen Exponentials eindeutig bestimmt werden und ist gegeben durch

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W^{\mathbb{P}}(t) \right). \quad (2)$$

Darüber hinaus sind die Assets *lognormal* verteilt und es gilt:

$$\ln S(t) \sim \mathcal{N} \left(\ln S(0) + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T, \sigma^2 T \right). \quad (3)$$

Die Verbindlichkeiten eines Unternehmens werden im Merton Modell durch eine Zero-Coupon-Anleihe $B(t)$ mit dem Nominalwert (Strike) K dargestellt. Befindet sich der Wert der Assets zum Zeitpunkt der Fälligkeit T unter dem Rückzahlungswert der Anleihe/des Kredites, das heißt das Unternehmen ist nicht mehr zahlungsfähig, so sprechen wir von einem Ausfall.

In einem friktionslosen Markt setzt sich also der Wert der Assets $S(t)$ aus der Summe der Zeitwerte des Eigenkapitals $E(t)$ und der Anleihen $B(t)$ zusammen. Hiermit erhalten wir zum Zeitpunkt T zwei mögliche Szenarien:

- $S(t) \geq K$: Der Kreditgeber erhält den Betrag K und die Anteilseigner bekommen die Differenz $E(t) = S(t) - K$
- $S(t) < K$: Das Unternehmen kann seinen Verpflichtungen nicht nachkommen und es kommt zu einem Ausfall. Der Kreditgeber übernimmt das Unternehmen und die Anteilseigner steigen mit 0 aus, d.h. $B(t) = V(t)$ und $E(t) = 0$.

Daraus ergibt sich:

$$E(t) = (S(t) - K)^+$$

und der Wert des Eigenkapitals eines Unternehmens ist gleich einer europäischen Call Option auf die Assets der Firma mit der Fälligkeit T . Die zugänglichsten und in der Praxis am häufigsten verwendeten Assets sind Aktien und daher wurde diese für die folgenden Analysen herangezogen.

2.1.1 Das risikoneutrale Black-Scholes-Merton Modell

Damit wir, wie in der Praxis üblich, mit diskontierten Aktienkursen arbeiten können und gleichzeitig die Martingaleigenschaft unseres Wertprozesses nicht verlieren, ist die Transformation des physischen Wahrscheinlichkeitsmaßes notwendig.

Betrachten wir nun das risikolose Bankkonto gegeben durch die stochastische Differentialgleichung

$$dR(t) = r \cdot R(t)dt$$

mit der Lösung $R(t) = e^{rt}$ und den diskontierten Wertprozess $e^{-rt}S(t)$. Mit Hilfe der *Itô – Quotientenregel* erhalten wir die folgende SDGL:

$$d \left(\frac{S(t)}{R(t)} \right) = \frac{S(t)}{R(t)} \left[\frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{dR(t)}{R(t)} - \frac{d[S(t), R(t)]}{S(t)R(t)} + \frac{d[R(t), R(t)]}{R(t)^2} \right].$$

Da die Assets von der Entwicklung des Bankkontos unabhängig sind und die quadratischen Inkremente des Bankkontos verschwinden, erhalten wir

$$d\left(\frac{S(t)}{R(t)}\right) = \frac{dS(t)}{R(t)} - \frac{S(t)dR(t)}{R(t)^2}$$

und durch das Einsetzen der SDGL des ursprünglichen Wertprozesses $S(t)$ ergibt sich für den diskontierten Prozess

$$d\left(\frac{S(t)}{R(t)}\right) = \frac{1}{R(t)} [(\mu - r)S(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{P}}(t)].$$

Sei nun $(\Omega, \mathcal{F}(t), \mathbb{Q})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sodass \mathbb{Q} das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß des Marktmodells ist und \mathcal{F}_t die natürliche Filtration. Das Theorem von Girsanow liefert uns die notwendige Existenz eines solchen äquivalenten Martingalmaßes \mathbb{Q} der Gestalt $dW^{\mathbb{P}}(t) = \lambda dt + dW^{\mathbb{Q}}(t)$. Daraus ergibt sich für die obige Gleichung:

$$d\left(\frac{S(t)}{R(t)}\right) = \frac{1}{R(t)}(\mu - r + \sigma\lambda)S(t)dt + \frac{1}{R(t)}\sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t).$$

Damit der diskontierte Wertprozess ein \mathbb{Q} -Martingal ist, muss gelten

$$\mu - r + \sigma\lambda = 0.$$

Setzen wir nun $dW^{\mathbb{P}}(t) = \frac{r-\mu}{\sigma}dt + dW^{\mathbb{Q}}(t)$ in die ursprüngliche Gleichung zurück, so erhalten wir für den Wertprozess unter dem risikoneutralen Martingalmaß \mathbb{Q}

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (4)$$

Hiermit ist der diskontierte Wertprozess ein \mathbb{Q} -Martingal (unabhängig von μ) und hat die folgende Gestalt

$$d(e^{-rt}S(t)) = e^{-rt}\sigma S(t)dW^{\mathbb{Q}}(t). \quad (5)$$

Nachdem wir das risikoneutrale äquivalente Martingalmaß für den Prozess $S(t)$ konstruiert haben, kann der Wert des Eigenkapitals als \mathbb{Q} -Erwartungswert von dem diskontierten Payoff einer europäischen Call-Option $C(T, S(t)) = (S(t) - K)^+$ dargestellt werden

$$\begin{aligned} E(t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)}(S(t) - K)^+ | \mathcal{F}(t)] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)}S(t)\mathbb{I}_{\{S(t) > K\}} | \mathcal{F}(t)] - \underbrace{Ke^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{S(t) > K\}} | \mathcal{F}(t)]}_{\mathbb{Q}(S(t) > K)}. \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen von (2) und der Annahme, dass die Assets lognormalverteilt sind, erhalten wir den diskontierten Preis der Call-Option und somit die Lösung der ursprünglichen Problemstellung

$$E(t) = C(t, S(t)) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \quad (6)$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist und es gilt

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} [\log(S(t)/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)]$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} [\log(S(t)/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)].$$

Analogerweise gilt für die Verbindlichkeiten $B(t) = \min(S(t), K) = K - (K - S(t))^+$

$$B(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)}(K - (S(t) - K)^+) | \mathcal{F}(t)]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)}S(t)\mathbb{I}_{\{S(t) < K\}} | \mathcal{F}(t)] + Ke^{-r(T-t)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\mathbb{I}_{\{S(t) > K\}} | \mathcal{F}(t)]}_{\mathbb{Q}(S(t) > K)}$$

und somit erhalten wir

$$B(t) = Ke^{-r(T-t)}(1 - \Phi(-d_2)) + S(t)\Phi(-d_1). \quad (7)$$

2.1.2 Probability of Default und Distance to Default

Während die Verbindlichkeiten eines Unternehmens im Merton Modell als Nullkuponanleihe modelliert werden, gleicht der Wert des Eigenkapitals einer Call-Option auf dessen Assets. Fällt der Nominalbetrag der Anleihe unter den Wert der Assets so sprechen wir von einem Ausfall, das heißt das Unternehmen ist nicht mehr zahlungsfähig. Diese Definition eines Ausfalls stellt lediglich eine Vereinfachung im Rahmen des Merton Modells dar. In der Berechnung des Eigenkapitals werden von Basel II deutlich strenger Ausfallsdefinitionen herangezogen. Abgesehen von einem klassischen Insolvenzfall wird beispielsweise auch ein sogenannter „90-days-past-due“, das heißt der Kunde weist auf seinem Konto 90 Tage durchgehend ein negatives Saldo auf, als Ausfall betrachtet [1].

Die „Probability of Default“ (PD) eines Unternehmens zum Zeitpunkt T wird definiert als die Wahrscheinlichkeit, dass die Call-Option „out-of-the-money“ ausgeübt wird, das heißt der Wert der Assets liegt zum Zeitpunkt T unter dem Wert des Strikes K [17]:

$$PD = \mathbb{P}[S(t) \leq K] = \mathbb{P}[\ln(S(t)) \leq \ln(K)] \stackrel{(3)}{=} \Phi\left(\frac{\ln(K/S(0)) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right). \quad (8)$$

Betrachten wir die Ausfallswahrscheinlichkeit unter dem risikoneutralen Maß, so ergibt sich zum Zeitpunkt $t = 0$:

$$\mathbb{Q}[S(t) \leq K] = \mathbb{Q}[\ln(S(t)) \leq \ln(K)] \stackrel{(4)}{=} \Phi\left(\frac{\ln(K/S(0)) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \stackrel{(6)}{=} 1 - \Phi(d_2).$$

Hieraus ergeben sich für die PD folgende Aussagen:

- je höher der Ausübungspreis K desto höher ist die PD
- je höher der Anfangswert der Asset $S(0)$ desto kleiner ist die PD
- für $S(0) > K$ steigt die PD mit steigender Volatilität der Assets

Abgesehen von der Ausfallswahrscheinlichkeit, stoßen wir in der Praxis auch auf den sogenannten „Distance to Default“ (DD) [15]. Dieser gibt an, wie viele Standardabweichungen der gegebenen Assets im Falle einer positiven Auszahlung der Call Option abgedeckt wären:

$$DD(t) = \frac{\ln(S(0)/K) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \Rightarrow PD = \Phi(-DD).$$

D.h. je kleiner der DD desto größer ist die Wahrscheinlichkeit eines Defaults.

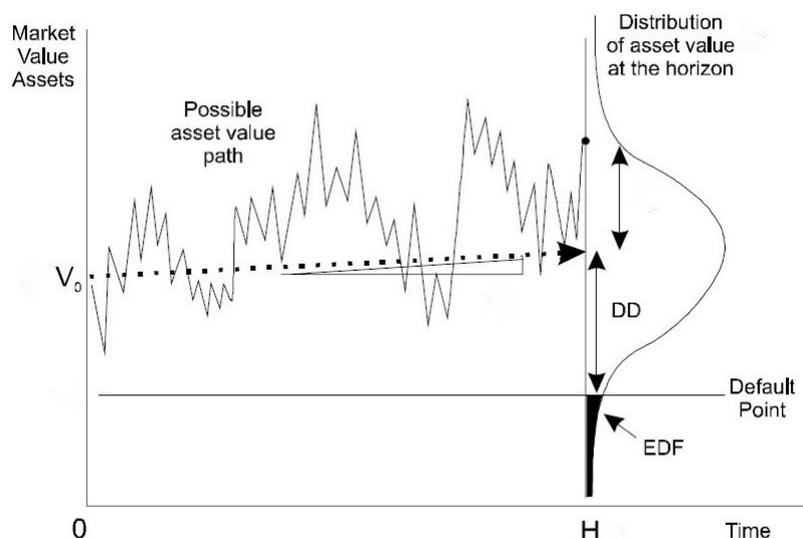


Abbildung 1: Merton Modell mit Anfangswert $S(0) = V_0$ und Ausübungszeitpunkt $T = H$ [3]

Dieser Indikator wird insbesondere im sogenannten KMV Modell von Moody's verwendet und dient in erster Linie zur Schätzung der Ausfallswahrscheinlichkeit [3]. Der Begriff der Ausfallswahrscheinlichkeiten PD hat sich jedoch in allen am Markt gängigen Modellen etabliert und wird auch als Basis für etliche Ratingagenturen zur Risikoeinschätzung herangezogen.

2.2 Internal Ratings Based Approach

Im Juni 2004 wurde von der Bankenaufsicht „Basel Committee on Banking Supervision“ eine weltweit einheitliche regulatorische Richtlinie Basel II vorgestellt, die für mehr Stabilität in der Finanzwirtschaft sorgen sollte. Eine Anpassung auf unterschiedliche lokale Bankensysteme erfolgt von der entsprechenden nationalen Aufsicht. Basel II basiert auf einem 3 Säulen System, wobei in erster Linie auf die minimalen Kapitalanforderung ein Augenmerk gesetzt wird. Während in der Säule II Prinzipien festgelegt sind, die zur Überprüfung der Eigenmittelvorschriften dienen, beschäftigt sich die Säule III mit einem transparenten Finanzmeldewesen. Basierend auf dem 3 Säulen System wurde nach der Finanzkrise ein strengeres Regelwerk Basel III zusammengefasst, das ab 2014 durch neue Eigenkapitalrichtlinien Schritt für Schritt Basel II ablöst. [22]

Für die Berechnung des notwendigen Eigenkapitals gibt es im Rahmen von Basel II zwei verschiedene Methoden. Der „Standardansatz“ stellt die Grundlage für alle Finanzinstitute dar, bringt aber durch verschiedene Vereinfachungen einen deutlichen Konservativitätsgrad mit sich. Insbesondere für große Finanzinstitute ist es oft von Vorteil auf interne Modelle umzusteigen und somit deren Eigenkapitalerfordernis zu senken. In erster Linie dürfen Modelle für die individuelle Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten angesetzt werden, im fortgeschrittenen Ansatz werden auch andere Risikofaktoren wie „Exposure at Default“ EAD und „Loss Given Default“ LGD intern geschätzt.

Um sicherstellen zu können, dass alle unerwarteten Verluste innerhalb eines bestimmten Konfidenzintervalls abgedeckt werden können, rechnet die „Risk Weight Formula“ alle Risikomaße wie PD , LGD und EAD in sogenannte Risikogewichte um. Diese dienen zur Bestimmung des notwendigen Eigenkapitals und basieren auf dem sogenannten „Asymptotic Single Risk Factor Modell“, das in weiterer Folge kurz vorgestellt wird.

2.2.1 Asymptotic Single Risk Factor Modell

Das ASRF Modell wurde im Jahr 2002 von Michael B. Gordy [11] entwickelt und basiert auf dem Gesetz der Großen Zahlen. Michael B. Gordy zeigte, dass bei einer großen Anzahl an Exposures, deren Höhe gleich verteilt ist, sich das idiosynkratische Risiko aufhebt und somit komplett verschwinden kann. Nachdem alle risikobehafteten Kredite dem gleichen systematischen Risiko ausgesetzt sind, wird die Eigenkapitalberechnung unter der Annahme einer Portfolioinvarianz wesentlich erleichtert. In der Praxis gibt es jedoch nur wenige Finanzinstitute, deren Portfolio groß genug wäre, um diesen Diversifikationsanforderungen zu genügen. Aus diesem Grund werden die Institutionen zusätzlich aufgefordert, das nicht diversifizierte idiosynkratische Risiko und dessen Konzentrationen in der Säule II auszuweisen.

Weiters wurde von Gordy [11] gezeigt, dass lediglich zwei Annahmen notwendig sind, um für die VaR-Kapitalberechnungen eine Portfolioinvarianz garantieren zu können.

1. *Portfolios sind unendlich granular, d.h. es gibt kein Exposure, welches mehr als einen beliebig kleinen Anteil am Exposure des Gesamtportfolios hätte.*
2. *Abhängigkeiten zwischen den Exposures sind durch einen einzigen systematischen Risikofaktor gegeben.*

Betrachten wir nun ein Portfolio mit N risikobehafteten Krediten sowie einen systematischen Risikofaktor X , der beispielsweise eine Industrie oder andere makroökonomische Variable darstellt. Im ASRF Modell wird also von Gordy angenommen, dass Korrelationen zwischen den kreditrelevanten Ereignissen lediglich durch die Sensitivität dieser Risikofaktoren gegeben sind. Das Konzept der Ausfallwahrscheinlichkeiten kann somit erweitert werden und es unterscheidet zwischen einer bedingten und einer unbedingten PD . Die unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit bezeichnen wir mit PD_n und die auf eine Realisierung von x von X bedingte Wahrscheinlichkeit wird mit $PD_n(x)$ bezeichnet.

Die unbedingte Ausfallswahrscheinlichkeit eines Schuldners n kann als der Mittelwert der bedingten $PD_n(x)$ über alle möglichen Ausprägungen des systematischen Risikofaktors x berechnet werden

$$PD_n(x) = PD_n \left(1 + \sum_{k=1}^K w_{nk}(x_k - 1) \right),$$

wobei w_i die Gewichtung der Einzelfaktoren mit Summe in $[0, 1]$ darstellt. Betrachten wir also den stochastischen Prozess der logarithmierten Asset Returns¹, gegeben durch

$$r_n = w_n X + \epsilon_n,$$

wobei ϵ_n das firmenspezifische idiosynkratische Risiko eines Schuldners n und X den systematischen Risikofaktor darstellt. Das idiosynkratische Risiko kann beispielsweise aus dem Fehler der linearen Regression bestimmt werden. Aus (3) wissen wir, dass die Assets lognormal verteilt sind und dementsprechend müssen die logarithmierten Asset Returns normal verteilt sein, d.h. $r_n \sim N(\mu, \Gamma)$. Somit sind die beiden Komponenten der Regressionsgleichung X und ϵ_n auch normalverteilt. Darüberhinaus wird angenommen, dass X und ϵ_n unabhängig sind und die Asset Returns nur durch den systematischen Risikofaktor X korrelieren. Betrachten wir also die Varianz von r_n so ergibt sich

$$\mathbb{V}[r_n] = w_n^T \mathbb{V}[X] w_n + \mathbb{V}[\epsilon_n].$$

Der Einfachheit halber werden die Gewichte w_n so kalibriert, dass die logarithmierten Returns standardnormalverteilt sind. Als Resultat erhalten wir das idiosynkratische Risiko gegeben durch $\mathbb{V}[\epsilon_n] = 1 - w_n^T \mathbb{V}[X] w_n$. Wird der systematische Risikofaktor X ebenso standardisiert, so ergibt sich

$$r_n \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad X \sim \mathcal{N}(0, 1), \quad \epsilon_n \sim \mathcal{N}(0, 1 - w_n^2). \quad (9)$$

In diesem Fall wird von einem Ausfall gesprochen, wenn die Returns des Schuldners n unter eine bestimmte Schranke $\gamma_n > 0$ fallen [10]. Unter der Annahme standardnormalverteilter logarithmierter Returns, ergibt sich für die unbedingte Ausfallswahrscheinlichkeit

$$PD_n = \mathbb{P}[r_n < \gamma_n] = \Phi(\gamma_n) \quad \Rightarrow \quad \gamma_n = \Phi^{-1}(PD_n). \quad (10)$$

Für die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit erhalten wir

$$PD_n(x) = \mathbb{P}[w_n X + \epsilon_n \leq \gamma_n | X = x] = \mathbb{P}[\epsilon_n \leq (\gamma_n - w_n X) | X = x] \quad (11)$$

$$\stackrel{(9)}{=} \Phi \left(\frac{\gamma_n - w_n x}{\sqrt{1 - w_n^2}} \right) \stackrel{(10)}{=} \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - x w_n}{\sqrt{1 - w_n^2}} \right). \quad (12)$$

¹Vgl. CreditMetrics in [10]

Zur besseren Veranschaulichung zeigt uns die folgende Grafik den Zusammenhang zwischen der bedingten Ausfallswahrscheinlichkeit $PD_n(x)$ und dem systematischen Risikofaktor X für drei verschiedene Parameterkombinationen. Wie ersichtlich, nimmt die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit insbesondere für die schlechteren Ausprägungen von x relativ hohe Werte an. Darüberhinaus können wir beobachten, dass die Erhöhung der Korrelation von 20% auf 40% besonders im systematisch schlechteren Bereich einen großen Einfluss auf die Ausfallswahrscheinlichkeit hat. Verdoppeln wir jedoch die unbedingte Ausfallswahrscheinlichkeit von 0.5% auf 1% so bewegt sich die gesamte Kurve nach oben und die Unterschiede sind zum Teil auch für positive x bemerkbar.

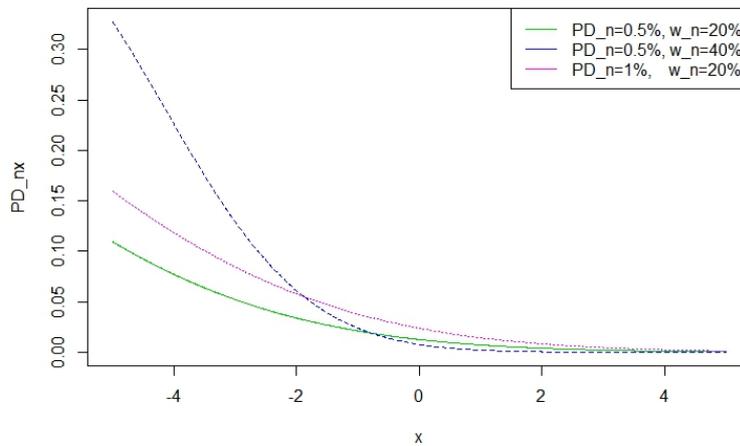


Abbildung 2: Zusammenhang zwischen $PD_n(x)$ und x von X für gegebene PD_n und w_n

Betrachten wir nun ein Exposure E_n , das bekannt und nicht stochastisch ist, und sei LGD_n der prozentuale Anteil vom Exposure, das im Falle eines Ausfalls D_n zum Verlust wird, so können die Voraussetzungen des ASRF Modells auch im mathematischen Sinne folgendermaßen zusammengefasst werden.

Voraussetzung 1. $LGD_n D_n$ ist beschränkt, genauer gesagt liegt es im Intervall $[0, 1]$, und bedingt auf X für alle n unabhängig.

Unter dieser Annahme, ist die Verlustquote des Portfolios gegeben durch

$$L_N = \frac{\sum_{n=1}^N LGD_n E_n D_n}{\sum_{n=1}^N E_n}.$$

Dementsprechend kann das Risikomaß „Value-at-Risk“ als das q -te Quantil der Verlustquotenverteilung definiert werden

$$VaR_q[L_N] = \alpha_q(L_N) = \inf\{y : \mathbb{P}[L_N \leq y] \geq q\}.$$

Um sicherstellen zu können, dass das idiosynkratische Risiko mit steigender Assetanzahl verschwindet, benötigen wir zusätzliche Annahmen. Darüberhinaus wird hiermit gewährleistet, dass ein einziges Exposure keinen großen Anteil am gesamten Portfolio darstellt.

Voraussetzung 2. E_n ist eine Folge von positiven Konstanten, sodass

1. $\sum_{n=1}^N E_n \nearrow \infty$ für $N \rightarrow \infty$
2. Es existiert ein $\xi \geq 0$, sodass $E_n / \sum_{n=1}^N E_n = \mathcal{O}(n^{-(1/2+\xi)})$.

Aus dem Gesetz der großen Zahlen und den ersten zwei Voraussetzungen folgt, dass die bedingte Verteilung von L_N für $N \rightarrow \infty$ gegen den bedingten Erwartungswert konvergiert.

Theorem 2.2.1. Sind die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt, so gilt für die Verlustquote des Portfolios bedingt auf alle möglichen Durchführungen von X :²

$$L_N - \mathbb{E}[L_N|X] \rightarrow 0, \text{ fast sicher für } N \rightarrow \infty.$$

In diesem Fall sprechen wir von einem unendlich granulären oder auch asymptotischen Portfolio. Wollen wir Aussagen über die unbedingte Verlustverteilung treffen, so wird uns durch das Theorem gewährleistet, dass die Verteilung von $\mathbb{E}[L_N|X]$ hierfür gute Ergebnisse liefert. Beispielsweise kann auch die Varianz der Verlustquote durch die Varianz der erwarteten bedingten Verluste approximiert werden.

Für die Approximation vom VaR erhalten wir ausschließlich eine schwächere Variante der Konvergenz.

Theorem 2.2.2. Sei F_N die Verteilungsfunktion von L_N und seien die Voraussetzungen 1 und 2 erfüllt, so gilt für alle $\epsilon \geq 0$:³

$$\begin{aligned} F_N(\alpha_q(\mathbb{E}[L_N|X] + \epsilon)) &\rightarrow [q, 1] \\ F_N(\alpha_q(\mathbb{E}[L_N|X] - \epsilon)) &\rightarrow [0, q]. \end{aligned}$$

Das heißt, für $N \rightarrow \infty$ existiert der Grenzwert und das q -te Quantil von $\mathbb{E}[L_N|X]$ zuzüglich einem beliebig kleinen ϵ deckt mindestens q oder mehr von der Verlustquotenverteilung ab. Die Verteilung von $\mathbb{E}[L_N|X]$ kann in der Praxis viel einfacher bestimmt werden und somit hat das Theorem im ASRF Modell eine zentrale Bedeutung.

Nachdem bis jetzt keine Einschränkung auf die Mehrdimensionalität des systematischen Risikofaktors gegeben wurden, erhalten wir mit Hilfe der folgenden Voraussetzungen eine deutliche Vereinfachung für die Berechnung der Quantile von $\mathbb{E}[L_N|X]$.

Voraussetzung 3. Der systematische Risikofaktor X ist eindimensional.

Voraussetzung 4. Es existiert ein offenes Intervall I , mit $\alpha_q(X) \in I$ und eine reelle Zahl $n_0 < \infty$, sodass für alle $N \geq n_0$ gilt:

1. $\mathbb{E}[L_N|X = x]$ ist in I nicht fallend
2. $\inf_{x \in I} \mathbb{E}[L_N|X = x] \geq \sup_{x \leq \inf I} \mathbb{E}[L_N|X = x]$
3. $\sup_{x \in I} \mathbb{E}[L_N|X = x] \leq \inf_{x \geq \sup I} \mathbb{E}[L_N|X = x]$.

²Für genaue Beweisführung siehe Appendix A in [11]

Diese Voraussetzung garantiert uns also, dass die Umgebung vom q -ten Quantil von $\mathbb{E}[L_N|X]$ mit der Umgebung vom q -ten Quantil des systematischen Risikofaktors X zusammenhängt. Ansonsten würden die Quantile am Ende der Verlustverteilung und somit auch das Verhalten der erwarteten Verluste je nach dem systematischen Risikofaktor sehr komplex variieren.

Theorem 2.2.3. *Seien die Voraussetzungen 3 und 4 erfüllt, so gilt:³*

$$\alpha_q(\mathbb{E}[L_N|X]) = \mathbb{E}[L_N|\alpha_q(X)].$$

Das obige Theorem liefert uns nun die notwendige Portfolioinvarianz, sodass die Kapitalanforderungen als exposure-gewichteter Mittelwert der bedingten erwarteten Verluste von individuellen Assets berechnet werden können.

2.2.2 Risk Weighted Assets und Korrelationen

Das ASRF Modell liefert uns die notwendigen mathematischen Grundlagen für die Berechnung der Eigenkapitalvorschriften für die unerwarteten Verluste aus dem Kreditrisiko. Die von Basel II hierfür verwendete Risk Weight Formula basiert auf den gleichen Annahmen eines granularen Portfolios, das lediglich vom systematischen Risiko der Kredite abhängt. In der Implementierung von ASRF werden die von der Bank geschätzten durchschnittlichen PDs als Parameter für die Bestimmung der erwarteten Verluste verwendet. Diese fließen ebenso in die Berechnung von den bedingten $PD_n(X)$ und bestimmen anschließend auch das erforderliche Eigenkapital [21].

Der erwartete Verlust eines Kredites n berechnet sich als das Produkt der durchschnittlichen PD_n und dem Prozentsatz des Exposures, das im Falle eines Ausfalls zum Verlust wird.

$$EL_n = PD_n \cdot LGD_n \cdot EAD_n \quad (13)$$

Die EL_n 's sollen von der Bank laufend bedeckt werden können und sind meistens in der Provisionierung der Kredite miteinberechnet. Dementsprechend sind die Eigenkapitalvorschriften nur für die Bedeckung der unerwarteten Verluste vorgesehen. Für die Berechnung von unerwarteten Verlusten kommt die auf das systematische Risiko bedingte $PD_n(X)$ zum Einsatz. Aus dem Theorem 2.2.3 wissen wir, dass der VaR von bedingten erwarteten Verlusten als der Erwartungswert bedingt auf den VaR vom systematischen Risikoparameter X berechnet werden kann. Dies führt uns insgesamt mit der Gleichung (13) auf die Definition vom unerwarteten Verlust:

$$UL_n = \mathbb{E}[L_n|\alpha_q(X)] = PD_n(\alpha_q(X)) \cdot LGD_n \cdot EAD_n. \quad (14)$$

Durch das Einsetzen der im ASRF hergeleiteten Formel für bedingte Ausfallswahrscheinlichkeiten (11) erhalten wir

$$UL_n = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \alpha_q(X)\rho_n}{\sqrt{1 - \rho_n^2}} \right) \cdot LGD_n \cdot EAD_n,$$

³Für genaue Beweisführung siehe Appendix A in [11]

wobei ρ_n die Abhängigkeit der Assets vom systematischen Risikofaktor darstellen.

Im Rahmen des Basel II Rahmenwerks werden Asset Korrelationen und somit auch die Abhängigkeit von der gewählten Risikoklasse der Firmenassets in Zusammenhang mit der durchschnittlichen Ausfallswahrscheinlichkeit gestellt, d.h.

$$\rho_n = 0.12 \cdot \frac{1 - \exp(-50 \cdot PD_n)}{1 - \exp(-50)} + 0.24 \cdot \left(1 - \frac{1 - \exp(-50 \cdot PD_n)}{1 - \exp(-50)}\right). \quad (15)$$

Wie in der unten stehenden Graphik ersichtlich, sind die Korrelationen innerhalb des Intervalls [12%, 24%] je nach Höhe der PD exponentiell verteilt. Für andere Kreditarten, wie z.B. das Retailgeschäft werden Abhängigkeiten zwischen 3% und 16% angenommen⁴.

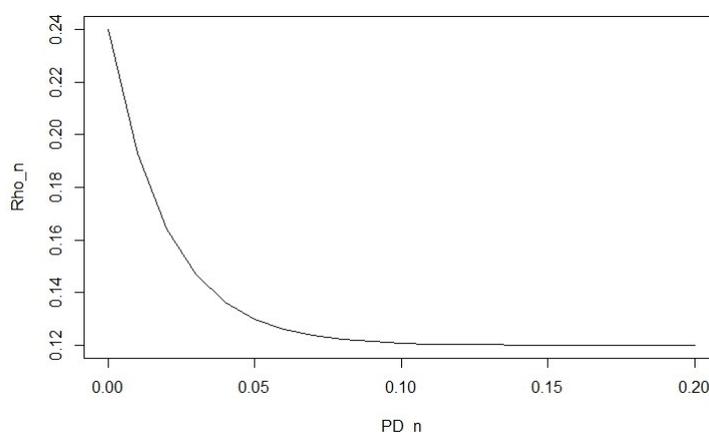


Abbildung 3: Exponentielle Verteilung von ρ_n bzgl. PD_n nach Basel II

Korrelationen, die in Basel II für Firmenassets, Banken- oder auch staatliche Kredite eingesetzt werden, wurden auf Basis von einem großen Datensatz der G10 Gruppe geschätzt. Die Analysen haben gezeigt, dass die Abhängigkeiten nicht nur mit der durchschnittlichen Ausfallswahrscheinlichkeit sondern auch mit der Größe des Unternehmens zusammenhängen. Je höher die durchschnittliche PD_n , desto mehr hängt die Lage des Unternehmens vom individuellen idiosynkratischen Risiko ab und die Korrelationen zu anderen Assets verringert sich. Betrachten wir auf der anderen Seite ein großes Unternehmen, dann ist es intuitiv, dass dieses mehr von der gesamten ökonomischen Situation am Markt abhängig ist, als ein Kleines. Die Ausfälle kleinerer Unternehmen sind meistens durch einen individuellen Faktor gegeben.

Aus diesem Grund gibt Basel II die Möglichkeit, die Korrelationen gemessen an der Größe des Unternehmens geringfügig anzupassen. Für alle Unternehmen, deren Jahresumsatz zwischen 5 und 50 Millionen Euro liegt, wird eine angepasste Form der Korrelationsgleichung verwendet

$$\rho_{n_{adjusted}} = \rho_n - 0.04 \cdot (1 - (S - 5)/45) \quad (16)$$

wobei, S den Jahresumsatz darstellt.

⁴siehe [21] Kapitel 5.3 Specification of the retail risk weight curves

Die theoretischen Grundlagen des ASRF Modells führen uns nun auf die eigentliche Aussage der Risk Weighted Assets Formel. Das erforderliche Eigenkapital wird im Rahmen von Basel II als das 99.9% - VaR der unerwarteten Verluste berechnet. Damit es zu keiner doppelten Hinterlegung kommt, wird der bereits in der Bepreisung von Krediten verrechnete erwartete Verlust abgezogen. Wie im Modell (9) beschrieben, wird der systematische Risikofaktor X ebenso als normal verteilt angenommen, das heißt $\alpha_{0.999}(X) = \Phi^{-1}(0.999)$.

Um auch die unterschiedliche Risikohaftigkeit von Finanzprodukten mit kurzen bzw. langen Laufzeiten zu berücksichtigen, wird das erforderliche Eigenkapital mit Hilfe von dem sogenannten „Maturity Adjustment“ angepasst.

$$K_n = LGD_n \cdot \left(\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_n) - \Phi^{-1}(0.999)\rho_n}{\sqrt{1 - \rho_n^2}} \right) - PD_n \right) \cdot MA_n$$

$$MA_n = \frac{1 + (M - 2.5) \cdot b(PD_n)}{1 - 1.5 \cdot b(PD_n)}$$

$$b(PD_n) = 0.11852 - 0.05478 \cdot \ln(PD_n)$$

Wie auch in der nachstehenden Graphik ersichtlich, wurde die Regressionsfunktion von MA_n bezüglich PD_n so gewählt, dass der Anpassungsfaktor linear und in M monoton steigend ist.

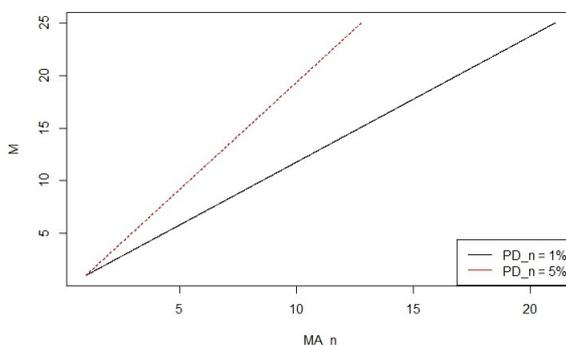


Abbildung 4: Lineare Anpassung der RWAs für eine Laufzeit von M Jahren

Letztendlich gelangen wir durch das Multiplizieren von dem beim Ausfall zu bedeckenden Exposure auf K_n zu der Definition von Risk Weighted Assets

$$RWA_n = 12.5 \cdot EAD_n \cdot K_n,$$

wobei 12.5 als reziprok der Mindestkapitalanforderung von 8% eingesetzt wird. Dementsprechend wird das tatsächliche Eigenkapitalerfordernis als die Summe über alle Risk Weighted Assets berechnet

$$MCR = 0.08 \cdot \sum_{n=1}^N RWA_n.$$

3 Schätzung von Asset Korrelationen

Für alle auf Merton basierenden Kreditausfallsmodelle spielen die Asset Korrelationen eine wesentliche Rolle. Nachdem die Anzahl der historisch realisierten Ausfälle in der Praxis sehr gering ist, benötigen wir für die Schätzung zusätzliche Annahmen, die nicht nur ökonomisch vertretbar sind sondern auch finanzmathematisch Sinn machen. Einerseits können wir direkt aus den Abhängigkeiten zwischen Aktienkursen oder deren Returns auf die Zusammenhänge möglicher Ausfälle schließen, andererseits werden in der Praxis auch Simulationsverfahren verwendet, die einen solchen Ausfall nachbilden können.

3.1 Empirischer Ansatz basierend auf Stock Returns

Einer der ersten empirischen Indikatoren für die Höhe der Korrelationen kann durch die direkte Berechnung des linearen Zusammenhangs zwischen den historischen Werten von Aktienkursen bzw. deren Returns erzielt werden. Betrachten wir beispielsweise die logarithmierten Returns der Aktienkurse von der Firma Daimler und Airbus ab 01.01.2003 bis 31.12.2017, so ergibt sich das folgende Bild.

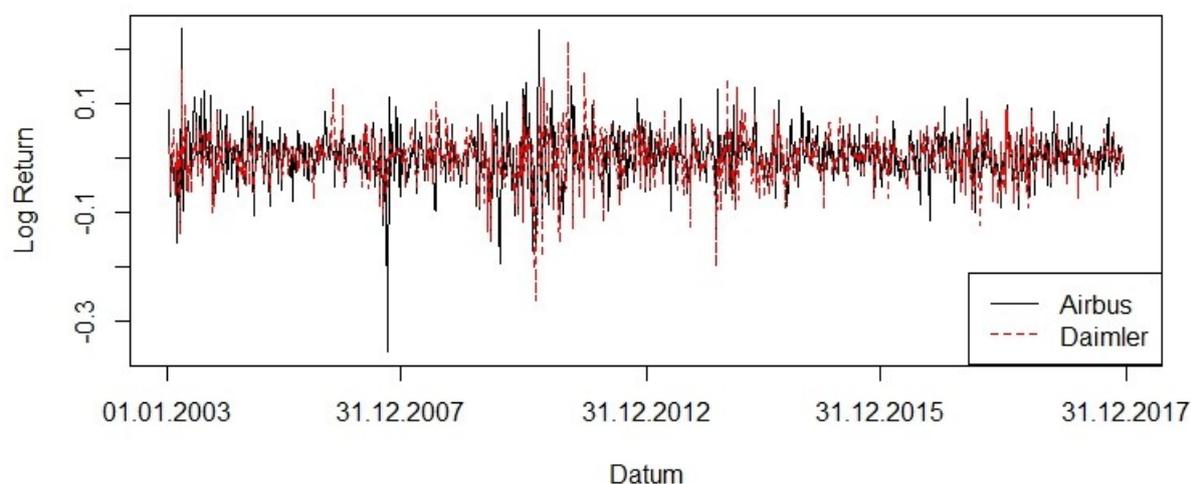


Abbildung 5: Log Returns für Daimler und Airbus

Anhand von den Aktienreturns kann die lineare Korrelation zwischen Daimler und Airbus berechnet werden. Wie in der nachstehenden Graphik ersichtlich, zeigen die Firmen eine signifikant hohe positive Korrelation von rd. 54,65%. Der Rangkorrelationskoeffizient Kendalls Tau liegt im Gegensatz hierzu bei rd. 38,75%.

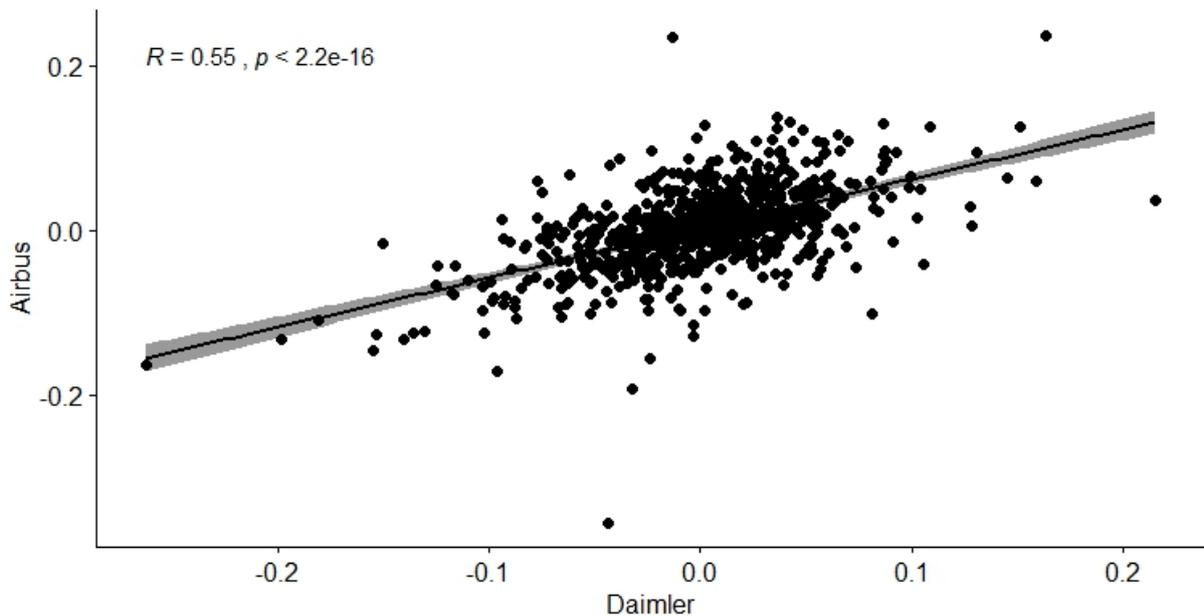


Abbildung 6: Scatter Plot für Daimler und Airbus mit linearer Korrelation

3.2 Merton ML-Approximation mit Survivorship Bias

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Korrelationen zwischen Assets wurde im Jahr 2003 von Jin-Chuan Duan entwickelt [6]. Diese Methode basiert auf einer Maximum Likelihood Schätzung des Merton Modells, die anhand von historischen Aktienkursen die Korrelationen der logarithmierten Equity Returns als Schätzer für die nicht beobachtbaren Asset Korrelationen verwendet. Die ML Methode bringt einige Vorteile mit sich. Vor allem durch die Konsistenz und asymptotische Normalverteilung der Schätzer wird die Qualität der Approximation gewährleistet. In der Praxis werden lediglich Daten von nicht insolventen Firmen in Betracht gezogen, weswegen der dadurch verursachte Bias in der Schätzung mitberücksichtigt werden muss. Darüberhinaus können Refinanzierungen zur Rettung der Gläubiger verwendet werden und einen möglichen Ausfall verhindern.

Erweitern wir also das Merton Modell wie in Kapitel 2.1 definiert, um eine weitere Komponente $i = 1, \dots, m$, die alle Variablen einem bestimmten Unternehmens i zuordnet und sei m die Anzahl der Unternehmen in dem zu untersuchenden Portfolio. Das erweiterte Modell kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

$$S_i(t) = E_i(t) + B_i(t) \quad \text{Equity Pricing Gleichung (17)}$$

$$dS_i(t) = \mu_i S_i(t) + \sigma_i S_i(t) dW_i(t) \quad \text{Wertprozess der Assets (18)}$$

$$E_i(t) = S_i(t) \Phi(d_1) - K_i e^{-r(T_i-t)} \Phi(d_2) \quad \text{Wert der Equitys (19)}$$

$$B_i(t) = K_i e^{-r(T_i-t)} \Phi(d_2) + S_i(t) \Phi(-d_1) \quad \text{Wert der Anleihen (20)}$$

$$PD_i = \Phi\left(\frac{\ln(K_i/S_i(0)) - (\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)T_i}{\sigma_i T_i}\right) \quad \text{Ausfallswahrscheinlichkeit (21)}$$

Die für die Unternehmen $i = 1, \dots, m$ gemeinsame Ausfallswahrscheinlichkeit kann durch eine multivariate Normalverteilung $N_{\mathbf{0}, \rho} : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ ausgedrückt werden:

$$\mathbb{P}[S_1(T_1) < K_1, \dots, S_m(T_m) < K_m | F(t)] = \mathbf{N}_{\mathbf{0}, \rho}(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (22)$$

wobei gilt

$$\beta_i = \frac{\ln(K_i/S(0)) - (\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(T_i - t)}{\sigma_i\sqrt{T_i - t}}. \quad (23)$$

In der erweiterten Version des Merton Modells ergeben sich die Korrelationen zwischen den Assets aus der Kovarianz der definierenden Brownschen Bewegungen:

$$Cov^{\mathbb{P}}[W_i(t), W_j(t)] = \rho_{i,j}t \text{ für alle } t \geq 0. \quad (24)$$

3.2.1 Likelihood Funktion

Die grundsätzliche Idee für die Konstruktion der Likelihood Funktion des Merton Modells wird ebenso von Jin-Chuan Duan in [5] näher beschrieben. Dabei beinhaltet die Datengrundlage eine beobachtete Zeitreihe mit Equity Preisen, welche anhand der Equity Pricing Gleichung für die Transformation der Assets verwendet wird. Die resultierende Likelihood Funktion wird somit mit der Jacobimatrix der Transformation zur Likelihood Funktion der implizierten Asset Values multipliziert.

Die Transformation ergibt sich aus der Equity Pricing Gleichung (17), sodass $E_i(t) = S_i(t) - B_i(t)$. Da die Wertefunktion der Assets in $E_i(t)$ und σ_i invertierbar ist, kann die Transformation durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$E_i(t) = g_i(S_i(t); t, T, \sigma_i). \quad (25)$$

Seien also $\{e_i(0), e_i(1), \dots, e_i(N)\}$ die beobachteten Equity Preise für die Firma $i = \{1, \dots, m\}$, wobei sich die Beobachtungszeitpunkte $t = \{1, \dots, N\}$ aus k Perioden mit h Stichtagen ergeben. Darüberhinaus sei θ ein Vektor mit den aus der m -dimensionalen Brownschen Bewegung zu schätzenden Parametern, sodass

$$\theta = [\mu_1, \dots, \mu_m, \sigma_1, \dots, \sigma_m, \rho_{12}, \dots, \rho_{1m}, \rho_{23}, \dots, \rho_{2m}, \dots]. \quad (26)$$

Wie bereits oben erwähnt, sind wir in der Praxis oft nur an Daten von existierenden bzw. nicht ausgefallenen Firmen interessiert. Die historische Überlebenswahrscheinlichkeit muss also in der Approximation mitberücksichtigt werden. Darüberhinaus könnte es in der Historie Zeitpunkte geben, bei denen das Unternehmen vor der Insolvenz gerettet worden ist und dabei eine Refinanzierung stattgefunden hat. Sind während der Beobachtungsperiode die zur Finanzierung verwendeten Anleihen fällig, so sollte der sogenannte „Survivorship Bias“ in den geschätzten Korrelationen berücksichtigt werden.

Im Allgemeinen wird von einer Refinanzierung gesprochen, wenn eine Nullkuponanleihe fällig wird, dies aber zum Ausfall führen würde und diese zum gleichen Zeitpunkt durch eine neue ersetzt wird. Seien also $n_1 < n_2 < \dots < n_c \leq N$ die Zeitpunkte einer möglichen Refinanzierung der im Portfolio enthaltenen Unternehmen.

Theorem 3.2.1. *Angenommen, eine Refinanzierung ist möglich und es gab während des Beobachtungszeitraumes keinen Ausfall. Dann ergibt sich die Log-Likelihood Funktion entsprechend der beobachteten Equitypreise wie folgt:*

$$\begin{aligned}
L(e_0, e_1, e_2, \dots, e_N, \theta) &= -\frac{mN}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(|\det \Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{w}^*(k) \Sigma^{-1} \mathbf{w}^*(k) - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \ln s_i^*(k) \quad (27) \\
&- \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \ln \Phi(d_1(s_i^*(k), k, \sigma_i, K_i, T_i)) + \sum_{l=1}^c \ln \mathbb{I}_{\mathbf{s}^*(n_l) \in \nu_l} - \ln P(D; \theta)
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{s}^*(k)$ ein m -dimensionaler Vektor mit $s_i^*(k)$ und $s_i^*(k) = g_i^{-1}(e_i(k); k, \sigma_i, K_i, T_i)$ die von den Equity implizierten Asset Werte sind und K_i und T_i den Nominalbetrag und die Fälligkeit der Anleihe des Unternehmens i zum Zeitpunkt t darstellen. Weiters sei $d_1(\dots)$ wie in der Gleichung (6) definiert und $\mathbf{w}^*(k)$ ist ein m -dimensionaler Vektor, sodass

$$\mathbf{w}^*(k) = \left(\ln s_i^*(k) - \ln s_i^*(k-1) - \left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) \right)_{m \times 1}$$

und

$$\Sigma = (\sigma_i \sigma_j \rho_{ij})_{i,j=1,\dots,m} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1 \sigma_m \rho_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1 \sigma_m \rho_{1m} & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$$

gilt. Darüberhinaus sei $\nu_l = \bigcap_{i=1}^m (s_i(n_l) \geq K_i(n_l) I_{T_i(n_l)=n_l}) \subseteq \mathbb{R}^m$ die Teilmenge aller Assets sodass, zum Zeitpunkt n_j keine Refinanzierung stattgefunden hat. Weiter sei $P(D, \theta)$ die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit zu den Refinanzierungszeitpunkten, gegeben durch

$$P(D; \theta) = \prod_{l=1}^c N_{0,\rho}(\beta_1(l)^*, \dots, \beta_m(l)^*).$$

Bevor wir mit dem Beweis des obigen Theorems beginnen, bleibt anzumerken, dass die ersten vier Terme der Gleichung (27) aus der gewöhnlichen logarithmierten Likelihood Funktion für beobachtbare Assetwerte ohne Survivorship Bias resultieren. Da die Assets in der Praxis aber nicht beobachtet werden können, müssen diese implizit aus den Equitypreisen berechnet werden. Diese Transformation wird durch den fünften Term der obigen Log-Likelihood Funktion beschrieben.

Der durch die Auswahl der Unternehmen verursachte Bias, wird durch mehrere Korrekturterme mitberücksichtigt. Einerseits wird die historische Überlebenswahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt der Refinanzierung $P(D; \theta)$ in Betracht gezogen, andererseits werden Beobachtungen, bei denen während der Ausfallsperiode die Anleihen des Unternehmens fällig werden, auf minus unendlich gesetzt und somit aus der Schätzung ausgeschlossen.

Beweis. Im ersten Schritt definieren wir die Beobachtung einer Refinanzierung. Diese findet statt, wenn der Wert der Assets zum Ausübungszeitpunkt der Anleihe unter dem Strike liegt. Seien die Zeitpunkte der Refinanzierung zumindest eines Unternehmens im Portfolio wie folgt

$$n_1 < n_2 < \dots < n_c \leq N.$$

Das „No-default Event“ wird für alle Unternehmen im Portfolio zum Zeitpunkt n_l als \mathcal{D}_l und das „No-Default Event für die gesamte Beobachtungsperiode“ als \mathcal{D} definiert, wobei gilt

$$\mathcal{D}_l = \bigcap_{i=1}^m \{S_i(n_l) > K_i(t) \mathbb{I}_{T_i(t)=n_l}\}, l = \{1, 2, \dots, c\} \quad (28)$$

Das heißt, ist zum Refinanzierungszeitpunkt der Wert der Assets eines Unternehmens $S_i(n_l)$ unter dem Strike K_i so sprechen wir von einem Ausfall. Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die Assets berechnet sich wie folgt

$$f_{S|\mathcal{D}}(s; \theta) = \frac{f_{S,\mathcal{D}}(s; \theta)}{P(\mathcal{D}; \theta)}.$$

Da die geometrische Brownsche Bewegung ein Markov Prozess ist, kann die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit $P(\mathcal{D}; \theta)$ mit Hilfe einer multivariaten Normalverteilungsfunktion ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} P(\mathcal{D}; \theta) &= \prod_{l=1}^c P(S_1(n_l) > F_1(t) \mathbb{I}_{T_1(t)=n_l}, \dots, S_m(n_l) > F_m(t) \mathbb{I}_{T_m(t)=n_l} | \mathcal{F}(n_{l-1})) \\ &= \prod_{l=1}^c N_{0,\rho}(\beta_{1,l}, \dots, \beta_{m,l}) \end{aligned} \quad (29)$$

wobei gilt

$$\beta_{i,l} = - \left(\frac{\ln(K_i(n_l)) - \ln(s_i(n_l)) - (\mu_i - \frac{1}{2}\sigma_i^2)(n_l - n_{l-1})}{\sigma_i \sqrt{(n_l - n_{l-1})}} \mathbb{I}_{T_i(n_l)=n_l} - \infty \mathbb{I}_{T_i(n_l) \neq n_l} \right).$$

Analog zu (28) wird die Menge der „No-Default Events“ für die implizit berechneten Werte der Assets $s_i(n_l)$ als \mathcal{V}_l definiert. Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte für die Assets der nicht ausgefallenen Unternehmen ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned} f_{S,\mathcal{D}}(s; \theta) &= \\ &= \prod_{l=1}^c \left(\prod_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} f_{S(k)|S(k-1)}(S(k)|S(k-1); \theta) \mathbb{I}_{s(n_l) \in \mathcal{V}_l} \right) \left(\prod_{k=n_c+1}^N f_{S(k)|S(k-1)}(S(k)|S(k-1); \theta) \right) \\ &= \left(\prod_{l=1}^c \mathbb{I}_{s_{n_l} \in \mathcal{V}_l} \right) \left(\prod_{k=1}^N f_{S(k)|S(k-1)}(S(k)|S(k-1); \theta) \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Nachdem die Asset Returns lognormalverteilt sind und es gilt

$$\ln \left(\frac{S_i(k)}{S_i(k-1)} \right) \sim \mathcal{N} \left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2, \sigma_i^2 \right), \text{ mit } \Sigma \equiv (\sigma_i, \sigma_j, \rho_{ij})_{i,j=1,\dots,m} \quad (31)$$

erhalten wir durch das Einsetzen der mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeitsdichte die folgende logarithmierte Likelihood Funktion

$$\begin{aligned} L(S; \theta) &= \ln f_{S|\mathcal{D}}(s; \theta) \\ &= \ln \left(\frac{f_{S,\mathcal{D}}(s, \theta)}{P(\mathcal{D}; \theta)} \right) \\ &\stackrel{(30)}{=} \sum_{k=1}^N \ln f_{S(k)|S(k-1)}(S(k)|S(k-1); \theta) + \sum_{l=1}^c \ln \mathbb{I}_{S_{n_l} \in \mathcal{V}_l} - \ln P(\mathcal{D}; \theta) \\ &= -\frac{mN}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(|\det \Sigma|) - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \ln s_i(k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{w}^\top(k) \Sigma^{-1} \mathbf{w}(k) \\ &\quad + \sum_{l=1}^c \ln \mathbb{I}_{S_{n_l} \in \mathcal{V}_l} - \ln P(\mathcal{D}; \theta) \end{aligned} \quad (32)$$

wobei gilt

$$\mathbf{w}(k) = \left(\ln s_i(k) - \ln s_i(k-1) - \left(\mu_i - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) \right)_{i \in \{1, \dots, m\}}.$$

Da die Werte der Assets nicht direkt beobachtet werden können, werden diese mit Hilfe der Equity Pricing Gleichung (17) transformiert. Sei g_i die für die Transformation verwendete Funktion definiert als $E_i(t) = g_i(S_i(t); t, \sigma_i, K_i(t), T_i(t))$. Durch das invertieren der Transformationsfunktion ergibt sich für die implizierten Werte der Assets

$$s^*(k) = \begin{bmatrix} s_1^*(k) \\ \vdots \\ s_m^*(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1^{-1}(e_1(k), k, \sigma_1, K_1(k), T_1(k)) \\ \vdots \\ g_m^{-1}(e_m(k), k, \sigma_m, K_m(k), T_m(k)) \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Wollen wir nun die logarithmierte Likelihood Funktion für die beobachteten Equity Preise aufstellen, so muss die Transformation in Form von der Jacobimatrix mitberücksichtigt werden. Sei $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_k)_{k=1, \dots, N}$ die Jacobimatrix, dann erhalten wir

$$\mathcal{J}_k = \left(\frac{\partial s_i^*(k)}{\partial e_j(k)} \right)_{i,j \in \{1, \dots, m\}}$$

wobei gilt

$$\frac{\partial s_i^*(k)}{\partial e_j(k)} = \begin{cases} \frac{1}{\Phi(d_1(s_i^*(k); k, \sigma_i, K_i(k), T_i(k)))} & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (34)$$

Durch das Einsetzen von (32) erhalten wir für die logarithmierte Likelihood Funktion der Equities:

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{e}; \theta) &= \\
&= \ln f_{\mathbf{E}|\mathcal{D}}(\mathbf{e}; \theta) \\
&= \ln f_{\mathcal{S}|\mathcal{D}}(\mathbf{s}^*; \theta) + \ln |\det \mathcal{J}| \\
&= -\frac{mN}{2} \ln(2\pi) - \frac{N}{2} \ln(|\det \Sigma|) - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \ln s_i(k) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \mathbf{w}^T(k) \Sigma^{-1} \mathbf{w}(k) \\
&+ \sum_{l=1}^c \ln \mathbb{I}_{S_{n_l} \in \mathcal{V}_l} - \ln P(\mathcal{D}; \theta) \\
&+ \underbrace{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^m \ln \Phi(d_1(s_i^*(k), k, \sigma_i, K_i(k), T_i(k)))}_{\ln |\det \mathcal{J}|}
\end{aligned}$$

■

Hiermit haben wir die genaue Zusammensetzung der logarithmierten Likelihood Funktion Schritt für Schritt hergeleitet und wissen, welche Terme aus dem Survivorship Bias hervorgehen. Insbesondere der direkte Miteinbezug der Überlebenswahrscheinlichkeit reflektiert die Tatsache, dass wir nur Unternehmen im Portfolio betrachten werden, die nicht ausgefallen sind. Wurde ein Unternehmen während der gesamten Beobachtungsperiode nie refinanziert, das heißt die Überlebenswahrscheinlichkeit ist gleich 1, kürzen sich die Terme $\ln P(\mathcal{D}; \theta) = 0$ und $\sum_{l=1}^c \ln \mathbb{I}_{S_{n_l} \in \mathcal{V}_l} = 0$ weg. Hiermit landen wir wieder bei der ursprünglichen logarithmierten Likelihood Funktion für nicht beobachtbare Assets ohne Survivorship Bias.

3.2.2 Vorgehensweise

Wollen wir nun zu der eigentlichen Schätzung der Asset Korrelationen übergehen, so wäre die Maximierung der vorhin vorgestellten Log Likelihood Funktion rein theoretisch am besten geeignet. Die Anzahl der zu schätzenden Parameter steigt jedoch mit der Anzahl der im Portfolio enthaltenen Unternehmen exponentiell an. Deshalb wurde von Jin-Chuan Duan im Rahmen der ML-Methode zur Schätzung des Merton Modells eine etwas einfachere Vorgehensweise vorgestellt. Die Angemessenheit der Schätzer wurde mit Hilfe einer Monte Carlo Simulation nachgewiesen und zeigt, dass auch solch eine Vereinfachung zufriedenstellende Ergebnisse liefert [6].

Die Vereinfachung in der Schätzung basiert auf der Annahme, dass die Firmenassets in erster Linie keine Korrelationen aufweisen. Somit kann das Merton Modell Schritt für Schritt für jedes Unternehmen getrennt geschätzt werden und die Anzahl der zu schätzenden Parameter bleibt begrenzt. Anschließend ergeben sich die Korrelationen aus den Asset Returns, die unter Berücksichtigung der optimalen Modellparametern implizit aus den Equities berechnet werden.

In weiterer Folge wird die vereinfachte Vorgehensweise zur Schätzung der Asset Korrelationen auf Basis des ML-Merton Modells unter Berücksichtigung vom Survivorship Bias von Jin-Chuan Duan [6] näher beschrieben:

1. Bestimme anhand der logarithmierten Likelihood Funktion in (27) die optimalen Parameter für $\hat{\mu}_i$ und $\hat{\sigma}_i$ für jedes Unternehmen i getrennt und halte $m = 1$ fest. Die daraus resultierenden Schätzer sind asymptotisch normalverteilt um den wahren Parameter, wobei deren Kovarianzmatrix \hat{F}_i^{-1} die folgende Gestalt annimmt:

$$\hat{F}_i = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 L(e; \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i)}{\partial \mu_i^2} & -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 L(e; \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i)}{\partial \mu_i \partial \sigma_i} \\ -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 L(e; \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i)}{\partial \mu_i \partial \sigma_i} & -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 L(e; \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i)}{\partial \sigma_i^2} \end{pmatrix}.$$

2. Durch das Invertieren der durch die Equity Pricing Gleichung gegebenen Transformation in (25) können für alle $k = 1, \dots, N$ die implizierten Asset Werte als

$$S_i(k) = g^{-1}(E_i(k); k, T, \hat{\sigma}_i)$$

berechnet werden. Wie in der obigen Gleichung ersichtlich, werden die Assets an dieser Stelle bereits unter der Berücksichtigung des geschätzten Parameters $\hat{\sigma}_i$ bestimmt.

3. Anschließend können die logarithmierten Asset Returns wie folgt berechnet werden:

$$r_i(t) = \ln(S_i(k)/S_i(k-1)).$$

Da die Asset Returns die Veränderung der Asset Werte in der Zeit abbilden, werden sie als die Basis für die Schätzung der Korrelationen herangezogen.

4. Der gleiche Prozess wird für alle Unternehmen $i = 1, \dots, m$ in dem zu untersuchen Portfolio durchgeführt.
5. Darauffolgend können lineare Korrelation $\hat{\rho}_{ij}$ zwischen der Firma i und j als

$$\hat{\rho}_{ij} = \text{Corr}(r_i(k), r_j(k)), \text{ für alle } i \neq j.$$

berechnet werden. Der somit erzielte Schätzwert für die Asset Korrelationen ist um den wahren Parameter ρ_{ij} normalverteilt. Dessen Varianz ergibt sich aus den Diagonaleinträgen von \hat{F}_{ij}^{-1} wobei gilt

$$\hat{F}_{ij} = -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 L(e; \theta)}{\partial \theta_{ij}^{(k)} \theta_{ij}^{(l)}} \Big|_{\theta_{ij} = \hat{\theta}_{ij}}, \quad \theta_{ij} = [\mu_i, \mu_j, \sigma_i, \sigma_j, \rho_{ij}].$$

Anmerkung: An dieser Stelle entspricht $\theta_{ij}^{(k)}$ dem k -ten Eintrag des Vektor θ_{ij} , wobei die ersten vier Terme von $\hat{\theta}_{ij}$ aus der individuellen Schätzung im Schritt 1 hergenommen werden.

3.2.3 Numerische Implementierung

In erster Linie werden alle notwendigen Hilfsfunktionen definiert, welche die spätere Umsetzung der Log-Likelihood Funktion erleichtern sollen. Hierzu gehört beispielsweise die Funktion $d(S, K, si, T, t)$ aus dem Black Scholes Modell in (6). Darüberhinaus wird die Funktion $g(S, K, si, T, t)$ der Equity Pricing Gleichung des erweiterten Merton Modells in (17) sowie deren Inverse definiert.

```
# function d in Black Scholes
d <- function (S,K, si ,T, t){
  d <- (log(S/K) + (r+0.5*si^2)*(T-t))/(si*sqrt(T-t))
  return (d)
}

# function g Equity Pricing Equation
g <- function (S,K, si ,T, t){
  D <- K * exp(-r*(T-t))*(S/K*exp(-r*(T-t))
    * pnorm(-d(S,K, si ,T, t))
    + pnorm(d(S,K, si ,T, t)-si*sqrt(T-t)))
  E <- S - D
  return (E)
}

# function g invers
g_inv <- function (E, S, K, si , T, t){
  f <- function (S){
    D <- K * exp(-r*(T-t)) * (S/K*exp(-r*(T-t))
      * pnorm(-d(S,K, si ,T, t))
      + pnorm(d(S,K, si ,T, t)-si*sqrt(T-t)))
    a <- S - E - D
    return (a)
  }

  while (f(S)>0){
    S <- S/2
  }
  S_min <- S

  while (f(S)<0){
    S <- S*2
  }
  S_max <- S

  return (uniroot(f, c(S_min, S_max))$root)
}
```

Für die Bildung der Inversen von g wird die R-Funktion **uniroot** verwendet, die nach Nullstellen von f im gegebenen Intervall sucht. Um die Intervallgrenzen richtig auszuwählen wird mit dem Startwert $S(0)$ begonnen und dieser so lange halbiert bis der Funktionswert größer 0 ist oder verdoppelt bis der Funktionswert kleiner 0 ist. Auf diese Weise wird sichergestellt, dass die Funktion linear durch den Nullpunkt verläuft.

```

LogL <- function(mu, si) {

  # implizit Asset values as inverse
  S <- matrix(NA, nrow = length(E[,1]), ncol = length(E[1,]))
  for ( j in 1:length(E[,1]) ) {
    S[j,k] <- g_inv(E[j,k], S0, K[k], si, j+1, j)
  }

  # Default Information
  D_l <- matrix(NA, nrow = length(E[,1]), ncol = length(E[1,]))
  for ( j in 1:length(E[,1]) ) {
    D_l[j,k] <- S[j,k]> K[k]
  }

  # Refinancing Points
  n_l <- matrix(NA, nrow = length(E[,1]), ncol = length(E[1,]))
  for ( j in 1:length(D_I[,1]) ) {
    if (D_I[j,k] == 0) {
      n_l[j,k] <- j
    } else {
      n_l[j,k] <- 0
    }
  }

  # P(D; Theta)
  P_D_Theta <- matrix(NA, nrow=length(E[,1]), ncol=1)
  Sub_n_l <- subset(n_l[,1], n_l[,1] > 0 )

  if (length(Sub_n_l) > 0 ){
    beta <- matrix( NA, nrow = length(Sub_n_l)-1, ncol=1)
    for ( j in 1:length(Sub_n_l)-1 ) {
      beta[j,] <- - ( log( K[k] / S[Sub_n_l[j+1],1] )
                    - (mu-0.5*si^2)*
                      (Sub_n_l[j+1]-Sub_n_l[j]))
                    / ( si*sqrt((Sub_n_l[j+1]-Sub_n_l[j])) ) )
    }
    P_D_Theta[k] <- prod( pnorm(beta, mean=0, sd= si))
  }
}

```

```

    else {
      P_D_Theta[k] <- 1
    }

# normed log returns
W <- matrix(NA, nrow = length(E[,1]) - 1, ncol = length(E[1,]))
for ( j in 1:length(E[,1]) - 1 ) {
  W[j, k] <- log(S[j+1,k]/S[j, k]) - (mu - 0.5*si^2)
}

# Transformation Matrix
J <- matrix(NA, nrow = length(E[,1]) - 1, ncol = length(E[1,]))
for ( j in 1:length(E[,1]) - 1 ) {
  J[j, k] <- log(pnorm(d(S[j, k], K[k], si, j+1, j)))
}

a <- nYears*nPeriod/2*log(2*pi)
b <- nYears*nPeriod/2*log(si^2)
c <- 0.5*sum(W[,k] * 1/si^2 * W[,k])
d <- sum(log(S))
e <- sum(J)
f <- log(P_D_Theta)

R <- suppressWarnings(-a-b-c-d-e-f)

return(-sum(R))
}

```

Die obige Log-Likelihood Funktion wird entsprechend der Gleichung (27) folgendermaßen umgesetzt. Sei $\mathbf{E}[j, k]$ der Equity Wert der Firma k zum Zeitpunkt j und wir halten das k fest. Mit Hilfe der Funktion `g.inv` werden im ersten Schritt die gegebenen Equity Werte in Assets invertiert, wobei $\mathbf{K}[k]$ der entsprechende Strike ist und die Beobachtungsperiode auf 1 gesetzt wird. Ist der Fälligkeitszeitpunkt der Anleihe bekannt, so kann er an dieser Stelle statt $j + 1$ eingesetzt werden.

Danach wird für alle Zeitpunkte j beobachtet, ob der Wert der implizierten Assets $\mathbf{S}[j, k]$ größer ist als der Strike und die Information in einen Vektor gespeichert. Nachdem wir für die Berechnung der Überlebenswahrscheinlichkeit die genauen Refinanzierungszeitpunkte benötigen, werden diese extra in einen Vektor (\mathbf{n}_1) extrahiert.

In der Berechnung der bedingten Überlebenswahrscheinlichkeit werden zwei Fälle unterschieden. Firmen, bei denen während der gesamten Beobachtungsperiode keine Refinanzierung stattgefunden hat, wird $P(\mathcal{D}; \theta) = 1$ zugeordnet. Für alle anderen wird die Überlebenswahrscheinlichkeit zwischen den Refinanzierungszeitpunkten wie in Gleichung (29) berechnet.

Alle weiteren Hilfsberechnungen, wie zum Beispiel die der logarithmierten Transformationsmatrix $\mathbf{J}[\mathbf{j}, \mathbf{k}]$ als auch das Normieren der impliziten Asset Log>Returns $\mathbf{w}[\mathbf{j}, \mathbf{k}]$, werden wie in Theorem 3.2.1 durchgeführt. Schlussendlich wird die vollständige Log-Likelihood Gleichung aus den Einzeltermen zusammengesetzt und für die Optimierung vorbereitet.

```
Optim_Mle <- mle(LogL, start = list(mu=1, si=1),
  method="L-BFGS-B",
  lower=c(-Inf, 0.0001), upper=c(Inf, Inf))
```

Die Optimierung der logarithmierten Likelihood Funktion erfolgt mit **mle** aus dem R-Package **stats4**. Anzumerken ist, dass die hier verwendete Optimierungsfunktion **optim** grundsätzlich nach dem Minimum der negativen logarithmierten Likelihood Funktion sucht. Die Methode „L-BFGS-B“ eignet sich insbesondere für Schätzungen von Parametern, die obere oder untere Schranke erfüllen müssen. Nachdem wir, für $\hat{\sigma}$ nur positive Werte echt größer Null betrachten wollen, wird an dieser Stelle die untere Schranke auf 0.0001 gesetzt. Der Mittelwert der logarithmierten Returns darf sehr wohl negativ werden (insbesondere bei Unternehmen die einen negativen historischen Verlauf aufweisen), weswegen hier auch ganz \mathbb{R} durchsucht wird.

```
# implicit Asset values as inverse of g based on ML Estimates
for ( j in 1:length(E[,1]) ) {
  S_Opt[j,k] <- g_inv(E[j,k], S0, K[k],
    Optim_Mle@coef["si"], j+1, j)
}

# implicit Asset Returns
for ( j in 1:length(E[,1]) - 1 ) {
  r_Opt[j,k] <- log(S_Opt[j+1,k]/S_Opt[j,k])
}

# Correlation
Corr <- cor(r_Opt[,1], r_Opt[,2])
```

Haben wir die Parameter $\hat{\mu}_k$ und $\hat{\sigma}_k$ geschätzt, so können wir anhand von denen die implizierten Asset Returns bestimmen. Im zweiten Schritt führen wir die gleiche Prozedur für ein zweites Unternehmen durch und berechnen die Korrelationen mit Hilfe der Funktion **cor**. Führen wir an dieser Stelle keine weiteren Parameter an, berechnet uns die Funktion lediglich die linearen Korrelationen zwischen den zwei Unternehmen. Würden wir andere Abhängigkeitsstrukturen in Betracht ziehen wollen, gäbe es die Möglichkeit `method = c("pearson", "kendall", "spearman")` auszuwählen.

Betrachten wir nun die Unternehmen innerhalb der Beobachtungsperiode wie beim ersten empirischen Ansatz im Kapitel 3.1, d.h. wöchentliche Aktienkurse von der Firma Airbus und Daimler vom 01.01.2003 bis 31.12.2017 und führen für beide die gleiche Prozedur zur Schätzung von ML-Merton Parametern durch.⁵ Festzuhalten ist, dass für die zwei Unternehmen während der gesamten Beobachtungsperiode keine Refinanzierungszeitpunkte nachgebaut werden konnten. Die aus der Schätzung vorhergehenden Parameter sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengefasst.

Log>Returns	Airbus		Daimler	
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
empirische Aktienkurse	0.004298536	0.04950620	0.002957761	0.04634738
ML-Merton Asset	0.002025279	0.03419245	0.000701904	0.02726002

Tabelle 1: Parameterschätzer im ML-Merton Modell mit Survivorship Bias für Airbus und Daimler

Im Weiteren werden die implizierten Asset Log>Returns der zwei Unternehmen abgebildet. Wie in der Graphik ersichtlich, ähnelt das Bild der Graphik der Log>Returns von beobachteten Aktienkursen in Kapitel 3.1. Ebenso kann festgestellt werden, dass die Höhen und Tiefen der Returns ungefähr im gleichen Ausmaß und zu gleichen Zeitpunkten auftreten.

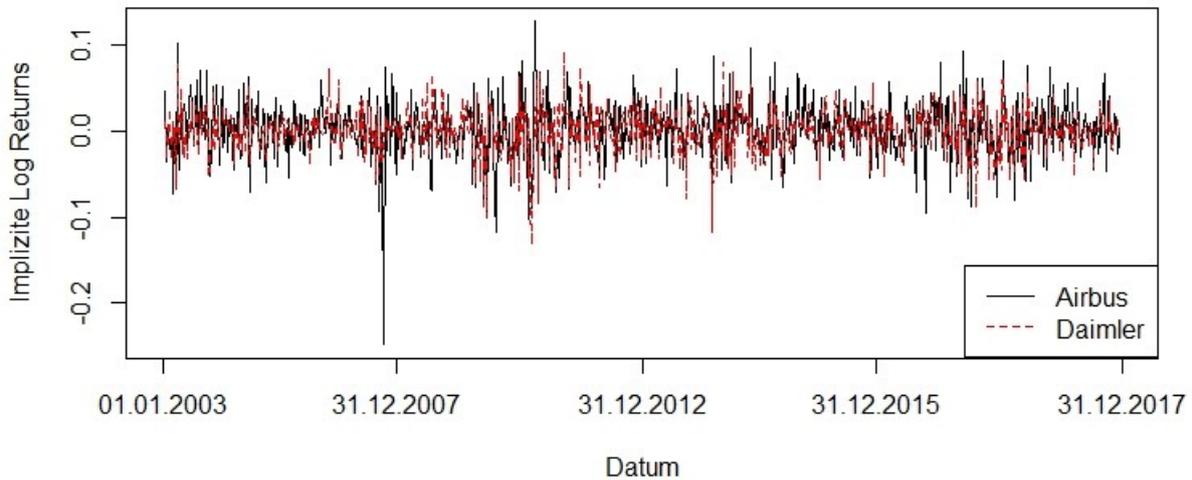


Abbildung 7: Log Returns der implizierten Assets aus dem ML-Merton Modell mit Survivorship Bias für Daimler und Airbus

Die daraus resultierende lineare Korrelation beträgt 54,79 %, was mit den empirischen Ergebnissen des ersten Kapitels 3.1 vergleichbar ist.

⁵Da die Ausübungspreise der Unternehmensanleihen K nicht öffentlich zugänglich sind, wurden diese am Anfang der Beobachtungsperiode anhand einer konstanten PD von 3% und $S(0) = E(0)$, wie in Gleichung (8) definiert, umgerechnet. Hierfür wurde aus den empirischen Aktienkursen μ und σ der Log>Returns geschätzt und $r = 1\%$ eingesetzt.

3.3 Merton ML-Approximation basierend auf Random-Effects

Im vorherigen Kapitel haben wir eine direkte Methode zur Schätzung der Asset Korrelationen vorgestellt, die die Annahme, dass ein Unternehmen während der gesamten Beobachtungsperiode überlebt hat, mitberücksichtigt. Dennoch wissen wir aus der Praxis, dass insbesondere größere Unternehmen dazu tendieren, dem Trend des Marktes, in dem sie tätig sind, zu folgen. Dies kann entweder durch deren industrielle, geographische oder je nach Unternehmensgröße spezifische Zugehörigkeit gegeben sein. Genau mit dieser Problematik hat sich Alan Pitts im Jahr 2004 auseinandergesetzt und eine weitere Methode zur Schätzung der Asset Korrelationen in Bezug auf das Kreditrisiko entwickelt [23].

Die Grundidee besteht darin, das existierende Merton Modell so zu erweitern, dass die Asset Korrelationen implizit aus den industriespezifischen oder geographischen Effekten hervorgehen. Das Modell kann direkt auf die Assets angewendet werden und die daraus resultierenden Schätzer erfüllen alle wünschenswerten statistischen Eigenschaften. Die einzige zusätzliche Information, die wir benötigen, ist die Industriezugehörigkeit beziehungsweise das Risikodomizil eines jeden im Portfolio enthaltenen Unternehmens.

Um das Merton Modell in (1) auf viele abhängige Unternehmen erweitern zu können, wird die Brownsche Bewegung $W(t)$ in zwei unabhängige Brownschen Bewegungen aufgesplittet. Einerseits haben wir den allgemeinen systematischen Risikofaktor $B(t)$ und auf der anderen Seite das firmenspezifische Risiko $X(t)$. Für Unternehmen die in Industrien gruppiert sind, definieren wir den Tupel (i, j) für die Firma i in der Industrie j . Hieraus ergibt sich die stochastische Differentialgleichung der Assets als:

$$dS_{ij}(t) = \mu_{ij}S_{ij}(t)dt + \sigma_{ij}S_{ij}(t)dB_j(t) + \tau_{ij}S_{ij}(t)dX_{ij}(t) \quad (35)$$

Anzumerken ist, dass der firmenspezifische stochastische Prozess X_{ij} von allen anderen firmenspezifischen Prozesse, von dem systematischen Risiko B_j als auch von anderen systematischen Risiken $B_{j'}$ unabhängig ist.

Für die Herleitung der Asset Korrelation (logarithmierter Returns) zum Zeitpunkt T zwischen zwei Unternehmen, wenden wir zuerst das Itô-Lemma auf den Prozess $\ln S_{ij}(t)$ an und integrieren von 0 bis T :

$$\ln S_{ij}(T) = \ln S_{ij}(0) + \left(\mu_{ij} - \frac{\sigma_{ij}^2 + \tau_{ij}^2}{2} \right) T + \sigma_{ij}B_j(T) + \tau_{ij}X_{ij}(T),$$

wobei gilt

$$B_j(T) \sim \mathcal{N}(0, T), \quad X_{ij}(T) \sim \mathcal{N}(0, T) \quad \text{und} \quad \text{corr}(B_j(T), B_{j'}(T)) = \rho_{jj'}.$$

Das heißt, die Korrelationen zwischen zwei Industrien werden durch die Korrelation des Systematischen Risikofaktors B_j beschrieben.

Aus der Definition der stochastischen Prozesse folgt, dass die Varianz und Kovarianz des bivariat normalverteilten Tupels $(\ln S_{ij}(T), \ln S_{i'j'}(T))$ gleich der Varianz und Kovarianz des bivariat normalverteilten Tupels $(\sigma_{ij}B_j(T) + \tau_{ij}X_{ij}(T), \sigma_{i'j'}B_{j'}(T) + \tau_{i'j'}X_{i'j'}(T))$ ist. Für die Berechnung der Asset Korrelationen kommt die Unabhängigkeit des systematischen und idiosynkratischen Risikos ins Spiel und wir gehen wie folgt vor:

$$\begin{aligned}
 \text{corr}(\ln S_{ij}(T), \ln S_{i'j'}(T)) &= \\
 &= \frac{\mathbb{E}[(\sigma_{ij}B_j(T) + \tau_{ij}X_{ij}(T)) * (\sigma_{i'j'}B_{j'}(T) + \tau_{i'j'}X_{i'j'}(T))]}{\sqrt{\mathbb{V}[(\sigma_{ij}B_j(T) + \tau_{ij}X_{ij}(T)) * (\sigma_{i'j'}B_{j'}(T) + \tau_{i'j'}X_{i'j'}(T))]} \\
 &\quad \frac{\mathbb{E}[(\sigma_{ij}B_j(T) + \tau_{ij}X_{ij}(T))] * \mathbb{E}[(\sigma_{i'j'}B_{j'}(T) + \tau_{i'j'}X_{i'j'}(T))]}{\underbrace{\mathbb{V}[(\sigma_{ij}B_j(T) + \tau_{ij}X_{ij}(T))] * \mathbb{V}[(\sigma_{i'j'}B_{j'}(T) + \tau_{i'j'}X_{i'j'}(T))]}_{=0}} \\
 &= \frac{\mathbb{E}[(\sigma_{ij}B_j(T) * \sigma_{i'j'}B_{j'}(T))]}{\sqrt{T\sigma_{ij}^2 + T\tau_{ij}^2} \sqrt{T\sigma_{i'j'}^2 + T\tau_{i'j'}^2}} \\
 &= \frac{\sigma_{ij}\sigma_{i'j'}\rho_{jj'}}{\sqrt{\sigma_{ij}^2 + \tau_{ij}^2} \sqrt{\sigma_{i'j'}^2 + \tau_{i'j'}^2}} \tag{36}
 \end{aligned}$$

Somit haben wir die Asset Korrelationen sowohl für Unternehmen innerhalb der gleichen Industrie als auch für Unternehmen aus unterschiedlichen Industrien definiert.

3.3.1 Random Effects Modell

Für die Schätzung der Varianz- und Korrelationsparameter wird das sogenannte Random Effects Modell verwendet. Hierbei handelt es sich um einen Spezialfall der Schätzung linearer Regressionsmodelle, deren Modellparameter Zufallsvariablen sind. Im Allgemeinen wird die erklärende Variable durch drei verschiedene Komponenten beschrieben [12]:

- Faktoren, die sowohl für das Individuum i als auch während der Beobachtungsperiode t veränderlich sind,
- Faktoren, die während der gesamten Beobachtungsperiode für das Individuum i konstant bleiben
- und Faktoren, die zum Zeitpunkt t für alle Individuen konstant sind.

In diesem Fall nimmt das Modell die folgende Gestalt an:

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda_t + u_{it}$$

wobei gilt

$$\mathbb{E}[\alpha_i] = \mathbb{E}[\lambda_t] = \mathbb{E}[u_{it}] = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[\alpha_i \mathbf{x}'_{it}] = \mathbb{E}[\lambda_t \mathbf{x}'_{it}] = \mathbb{E}[u_{it} \mathbf{x}'_{it}] = 0.$$

Nachdem die Varianz von y_{it} bedingt auf \mathbf{x}_{it} gleich der Varianz der einzelnen Komponenten ist, dh. $\sigma_y^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\lambda^2 + \sigma_u^2$, wird das Modell oft auch als Varianz-Komponenten Modell bezeichnet ⁶.

Wie bereits ersichtlich könnte das Random Effects Modell für unsere Schätzungen verwendet werden. Hierfür müssen wir aber in erster Linie das erweiterte Merton Modell diskretisieren und anschließend weitere Vereinfachungen durchführen. Wenden wir also das Itô-Lemma auf den Prozess $\ln S_{ij}$ an und integrieren von $t - \Delta$ bis t , so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \ln S_{ij}(t) - \ln S_{ij}(t - \Delta) &= \Delta (\mu_{ij} - (\sigma_{ij}^2 + \tau_{ij}^2)/2) \\ &\quad + \sigma_{ij} (B_j(t) - B_j(t - \Delta)) + \tau_{ij} (X_{ij}(t) - X_{ij}(t - \Delta)). \end{aligned}$$

Die Diskretisierung liefert uns ein einfaches Modell für die logarithmierten Asset Returns, wobei $\Delta = 1$ eingesetzt wird. Definieren wir nun die Asset Returns als $r_{ij}(t) = \ln(S_{ij}(t)/S_{ij}(t - 1))$ und beschreiben die Veränderungen der Brownschen Bewegungen als zwei Zufallseffekte mit $\beta_j = B_j(t) - B_j(t - 1)$ sowie $\epsilon_{ij} = X_{ij}(t) - X_{ij}(t - 1)$. Somit kann die obige Gleichung in

$$r_{ij}(t) = \alpha_{ij} + \sigma_{ij}\beta_j(t) + \tau_{ij}\epsilon_{ij}(t)$$

umgeschrieben werden und es gilt $\alpha_{ij} = \mu_{ij} - (\sigma_{ij}^2 + \tau_{ij}^2)/2$. Aus den Eigenschaften der Brownschen Bewegung und der Annahme, dass W_{ij} von B_j als auch von $W_{i'j'}$ unabhängig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned} \beta_j(t) &\sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{und} \quad \epsilon_{ij}(t) \sim \mathcal{N}(0, 1) \\ \mathbb{E}[\epsilon_{ij}(t), \epsilon_{i'j'}(t)] &= \mathbb{E}[\beta_j(t), \epsilon_{ij}(t)] = \mathbb{E}[\beta_j(t), \epsilon_{i'j'}(t)] = 0 \\ \text{corr}(\beta_j(t), \beta_{j'}(t)) &= \rho_{jj'}. \end{aligned}$$

Somit bleibt die Korrelation zwischen den Industrien j und j' bei der Betrachtung der Asset Returns die Gleiche. Darüberhinaus hat die Simplifizierung keinen Einfluss auf die Korrelation der Asset Returns, d.h. $\text{corr}(r_{ij}(T), r_{i'j'}(T))$ ist zum Zeitpunkt T gleich wie in Gleichung (36) gegeben.

Da die Anzahl der zu schätzenden Parameter für ein ganzes Portfolio enorm groß wäre, kann das Modell durch zusätzliche Homogenitätseinschränkungen weiter vereinfacht werden. Allen Unternehmen aus der gleichen Industrie wird die mittlere Sensitivität der Gruppe zugeordnet. Die Annahme, dass Unternehmen innerhalb einer Industriegruppe ähnlichen Schwankungen ausgesetzt sind, scheint auch ökonomisch plausible zu sein. Darüberhinaus kann durch diese Einschränkung eine bessere Stabilität der Volatilitätsparameter erreicht werden, da die Schätzung auf einer größeren Datenbasis durchgeführt wird. Die Homogenisierung des idiosynkratischen Parameters basiert wiederum auf der Annahme, dass Unternehmen der gleichen Größe dem gleichen Risiko ausgesetzt sind.

⁶Für weitere Informationen siehe [12], Seite 34-41

Zusammenfassend erhalten wir also

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_j && \text{für alle Unternehmen } i \text{ in der Industrie } j, \\ \tau_{ij} &= \tau_k && \text{für alle Unternehmen } i \text{ Größe } k .\end{aligned}$$

Ist die Anzahl der Industrien gleich J und die der Größenkategorien gleich K so sinkt die Anzahl der zu schätzenden Parameter auf $J + K$. Ein weiterer Vorteil in der Homogenisierung des Portfolios besteht darin, dass wir auf diese Weise auch Unternehmen mitberücksichtigen können, die nicht an der Börse notiert sind und wo keine Daten über die Entwicklung der Aktienkurse bzw. Returns vorliegen. Anhand der Unternehmensgröße und der Information über die Industriezugehörigkeit können auch hier die mittleren Volatilitätsparameter σ_j und τ_k eingesetzt werden.

Ein weiterer Schritt in der Ausformulierung des Merton Modells in die Richtung Random Effects folgt aus der Reproduktionseigenschaft der Normalverteilung. Das Modell wird folgendermaßen umgeschrieben:

$$r_{ij}(t) = \alpha_{ij}^* + \beta_j^*(t) + \epsilon_{ij}^*(t) \quad (37)$$

wobei gilt,

$$\begin{aligned}\beta_{ij}^*(t) &= \sigma_j(B_j(t) - B_j(t-1)), && \beta_{ij}^*(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_j^2) \\ \epsilon_{ij}^*(t) &= \tau_k(W_{ij}(t) - W_{ij}(t-1)), && \epsilon_{ij}^*(t) \sim \mathcal{N}(0, \tau_k^2)\end{aligned}$$

und die Eigenschaften der Zufallsprozesse ändern sich nicht. Für die Korrelation der Asset Returns erhalten wir analog zu (36):

$$\begin{aligned}\text{corr}(r_{ij}(t), r_{i'j}(t)) &= \frac{\sigma_j^2}{\sqrt{\sigma_j^2 + \tau_k^2} \sqrt{\sigma_j^2 + \tau_{k'}^2}} \\ \text{corr}(r_{ij}(t), r_{i'j'}(t)) &= \frac{\sigma_j \sigma_{j'} \rho_{jj'}}{\sqrt{\sigma_j^2 + \tau_k^2} \sqrt{\sigma_{j'}^2 + \tau_{k'}^2}}.\end{aligned}$$

Für die Schätzung der Volatilitätsparameter in einem Random Effects Modell können verschiedene Methoden verwendet werden [12]. Analog zu Kapitel (3.2) werden wir hier die Maximum Likelihood Methode vorstellen und somit die Eigenschaft der Brownschen Bewegung über unabhängige Inkremente ausnutzen.

Da die Anzahl der zu schätzenden Parameter für Portfolios mit mehreren Industriegruppen relativ schnell unüberschaubar wird, kann der systematische Risikofaktor mit Hilfe von einem Einfaktorenmodell beschrieben werden. Somit erzielen wir weitere Vereinfachung in der Approximation und senken den Rechenaufwand. Sei nun $\beta_j(t)$ folgendermaßen beschrieben:

$$\begin{aligned}\beta_j(t) &= b_j \gamma(t) + \nu_j(t), && \nu_j(t) \sim \mathcal{N}(0, \kappa^2), \quad \gamma(t) \sim \mathcal{N}(0, 1), \\ &&& \mathbb{E}[\nu_j(t), \gamma(t)] = \mathbb{E}[\nu_j(t), \nu_{j'}(t)] = 0 \text{ für alle } j \neq j' .\end{aligned}$$

Die Korrelationen zwischen den einzelnen Industriegruppen werden also indirekt über den Volatilitätsparameter b_j gegeben und es gilt

$$\text{corr}(\beta_j, \beta_{j'}) = \rho_{jj'} = \frac{b_j b_{j'}}{\sqrt{b_j^2 + \kappa^2} \sqrt{b_{j'}^2 + \kappa^2}}.$$

Dadurch verringert sich die Anzahl der zu schätzenden Parameter von $J(J+1)/2$ auf J für die b_j Parameter zuzüglich κ . Durch das Einsetzen der Industriekorrelationen des Einfaktorenmodells und $\sigma_j^2 = b_j^2 + \kappa^2$ erhalten wir für die Asset Korrelationen:

$$\frac{b_j^2 + \kappa^2}{\sqrt{b_j^2 + \kappa^2 + \tau_k^2} \sqrt{b_j^2 + \kappa^2 + \tau_{k'}}} \quad j = j' \quad (38)$$

$$\frac{b_j b_{j'}}{\sqrt{b_j^2 + \kappa^2 + \tau_k^2} \sqrt{b_{j'}^2 + \kappa^2 + \tau_{k'}}} \quad j \neq j' \quad (39)$$

Durch die Einführung von sogenannten Dummy-Variablen kann die Notation des Gesamtmodells weiter vereinfacht werden:

$$r_i(t) = \alpha_i + d_{i1}\beta_1(t) + d_{i2}\beta_2(t) + \dots + d_{iJ}\beta_J(t) + \epsilon_i(t)$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Unternehmen } i \text{ in der Industrie } j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies erleichtert uns die numerische Umsetzung und das industriespezifische Einfaktorenmodell kann in der Praxis besser umgesetzt werden.

O.B.d.A. betrachten wir nun ein Portfolio mit m Unternehmen, die innerhalb der gleichen Industrie $j = 1$ zusammenlagern, wobei jedes Unternehmen eine eigene Größenkategorie darstellt, d.h. $j = j'$ und $i = k$. Aus (37) wissen wir, dass $\mathbf{r}(t)$ multivariat normalverteilt ist, d.h.

$$\mathbf{r}(t) \sim \mathcal{N}(\alpha, \Sigma), \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}(t) = (r_i(t), \dots, r_m(t))^T,$$

wobei gilt

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} b^2 + \kappa^2 + \tau_1^2 & b^2 + \kappa^2 & \dots & b^2 + \kappa^2 \\ b^2 + \kappa^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b^2 + \kappa^2 \\ b^2 + \kappa^2 & \dots & b^2 + \kappa^2 & b^2 + \kappa^2 + \tau_m^2 \end{pmatrix}.$$

Für die Herleitung der logarithmierten Likelihood-Funktion betrachten wir zuerst die gemeinsame Verteilungsfunktion der Returns $f_{\mathbf{r}(t)}(\mathbf{r}(t); \theta)$ für $t = \{1, 2, \dots, N\}$, wobei $\theta = (\alpha_1, \dots, \alpha_m, b^2, \kappa^2, \tau_1^2, \dots, \tau_m^2)$ der zu schätzende Parameter ist. Aus der Unabhängigkeit der Inkremente der Brownschen Bewegung⁷ folgt

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{r}(1), \dots, \mathbf{r}(N)}(\mathbf{r}(1), \dots, \mathbf{r}(N); \theta) &= \prod_{k=1}^N f_{\mathbf{r}(k)|\mathbf{r}(k-1)}(\mathbf{r}(k)|\mathbf{r}(k-1); \theta) \\ &= \prod_{k=1}^N f_{\mathbf{r}(k)}(\mathbf{r}(k); \theta). \end{aligned}$$

Unter der Annahme eines homogenen Portfolios lässt sich die logarithmierte Likelihood-Funktion für das Modell (37) vereinfacht folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}; \theta) &= \ln f_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}; \theta) \\ &= \ln \left(\prod_{k=1}^N f_{\mathbf{r}(\mathbf{k})}(\mathbf{r}(\mathbf{k}); \theta) \right) \\ &= -\frac{mN}{2} \ln(2\pi) - \frac{m}{2} \ln(|\det \Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\mathbf{r}(\mathbf{k}) - \alpha)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{r}(\mathbf{k}) - \alpha), \end{aligned} \quad (40)$$

wobei die Determinante von $\Sigma = (b^2 + \kappa^2)\mathcal{I} + \text{diag}(\tau_1^2, \dots, \tau_m^2)$ auch als

$$|\det \Sigma| = \prod_{k=1}^N \prod_{i=1}^m \tau_k^2 + (b^2 + \kappa^2) \sum_{i=1}^m \frac{\prod_{k=1}^m \tau_k^2}{\tau_i^2} = \prod_{k=1}^m \tau_k^2 \left[1 + (b^2 + \kappa^2) \sum_{i=1}^m \frac{1}{\tau_i^2} \right]$$

geschrieben werden kann. Dass wir auch hier die gewöhnlichen Schätzer für μ und Σ erhalten, wird im Appendix (A.1) näher ausgeführt.

3.3.2 Numerische Implementierung

Wie bereits im vorigen Unterkapitel erwähnt, kann die numerische Implementierung durch die Einführung von Dummy-Variablen vereinfacht werden. Hierzu definieren wir als erstes eine Matrix, welche die Information über die Industriezugehörigkeit speichert. Sei also die Anzahl der zu untersuchenden Unternehmen gleich m , die Bezeichnungen der Industrien im Vektor **industry** und die Informationen über das jeweilige Unternehmen in der Matrix **Company_Info** gespeichert.

```
# dummy matrix for the industry information
m.industry <- matrix(NA, nrow=length(industry), ncol = m)
rownames(m.industry) <- industry
colnames(m.industry) <- rowname(Company_Info)
```

⁷Siehe Definition in (37)

```

for (i in 1:length(m.industry[,1])){
  for (k in 1:length(m.industry[1,])){
    if (Company_Info[k,2] == rownames(m.industry)[i]){
      m.industry[i,k]<-1
    } else {
      m.industry[i,k]<-0
    }
  }
}
}

```

Die obige Dummy-Matrix besteht daher aus den Einträgen „0“ und „1“ im Falle, dass das Unternehmen k der Industrie i zugehört. Obwohl der folgende Algorithmus nicht optimal gewählt wurde, ist der Rechenaufwand für kleinere Portfolios überschaubar. Angenommen, wir haben zehn Unternehmen in der Industrie i und halten das $\kappa = 0.01$ fix, dann kann die logarithmierte Likelihood Funktion gemäß der Gleichung (40) folgendermaßen umgesetzt werden:

```

LogL <- function(b_1,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_10,
tau_1,tau_2,tau_3,tau_4,tau_5,tau_6,tau_7,tau_8,tau_9,tau_10){

  tau <- c(tau_1,tau_2,tau_3,tau_4,tau_5
           ,tau_6,tau_7,tau_8,tau_10)
  b <- c(b_1)
  alpha <- c(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_10)

  # Sigma (m x m) Matrix
  Sigma <- matrix(0, nrow= length(m.data[1,]),
rownames(Sigma)<-colnames(m.data)
colnames(Sigma)<-colnames(m.data)

  for (i in 1:length(Sigma[1,])) {
    for (k in 1:length(Sigma[1,])) {
      if (i == k){
        Sigma[i,k] <- sqrt(b[1]^2+kappa^2+tau[i]^2)*
          sqrt(b[1]^2+kappa^2+tau[k]^2)
      } else {
        Sigma[i,k] <- sqrt(b[1]^2+kappa^2)*sqrt(b[1]^2+kappa^2)
      }
    }
  }
}

M <- matrix(0,nrow = length(m.data[,1]))
x <- matrix(0,nrow = length(m.data[,1])
           , ncol= length(m.data[1,]))

```

```

for (i in 1:length(m.Data_rt_Opt[,1])) {
  for (k in 1:length(m.data[1,])) {
    x[i,k] <- m.data[i,k]-alpha[k]
  }
  M[i] <- t(x[i,]) %*% solve(Sigma) %*% (x[i,])
}

a <- (m*nObs)/2*log(2*pi)
b <- nObs/2*log(abs(det(Sigma)))
c <- 0.5 * sum(M)

R <- suppressWarnings(-a-b-c)
return(-sum(R))
}

```

In erster Linie wird die Varianz-Kovarianzmatrix der Asset Returns Σ definiert, wobei sich die Diagonaleinträge um den idiosynkratischen Risikoparameter τ_i von den Kovarianzen unterscheiden. Der Hauptteil der Likelihood Funktion wird in zwei Schritten berechnet. Im ersten Schritt wird der Mittelwert α_k für alle Unternehmen k von jeder Beobachtung extrahiert und in der Matrix \mathbf{x} gespeichert. Die Vektor-Matrix-Vektor Multiplikation liefert uns dann für jeden Beobachtungszeitpunkt i für alle Unternehmen k einen anhand der Kovarianzen zusammengerechneten Wert $\mathbf{M}[i]$. Im Anschluss wird über alle Beobachtungszeitpunkte summiert und die weiteren zwei Komponenten der Likelihood Funktion ausgerechnet.

```

Optim_Mle <- mle2(LogL, start =
  list (b_1=1
    , a_1=0, a_2=0, a_3=0, a_4=0, a_5=0
    , a_6=0, a_7=0, a_8=0, a_9=0, a_10=0
    , tau_1=1, tau_2=1, tau_3=1, tau_4=1, tau_5=1
    , tau_6=1, tau_7=1, tau_8=1, tau_9=1, tau_10=1)
    , method="L-BFGS-B"
    , skip.hessian=TRUE
    , lower=c(0.0000001
    , -Inf, -Inf, -Inf, -Inf, -Inf, -Inf, -Inf, -Inf, -Inf
    , 0.0000001, 0.0000001, 0.0000001, 0.0000001, 0.0000001
    , 0.0000001, 0.0000001, 0.0000001, 0.0000001, 0.0000001)
  )

```

Wie in Kapitel 3.2.3 erwähnt, können die Maximum Likelihood Schätzer mit Hilfe der Funktion `mle` aus dem R-Package `stats4` bestimmt werden. Durch mehrere Singularitätsprobleme wurde hier jedoch die Funktion `mle2` aus dem R-Package `bbmle` verwendet, welche die Möglichkeit bietet, die Berechnung der Hesse-Matrix nicht durchzuführen. Um auch hier die negativen Volatilitätsparameter ausschließen zu können, kommt die `L - BFGS - B` Methode zur Anwendung.

```

# industry correlation based on one-factor model
Rho <- matrix(NA, nrow=length(industry), ncol=length(industry))
for(i in 1:length(industry)){
  for(k in 1:length(industry)) {
    if (i==k){
      Rho[i,k] <- b[i]^2/(b[i]^2+kappa^2)
    } else {
      Rho[i,k] <- b[i]*b[k] /
      (sqrt(b[i]^2+kappa^2)*sqrt(b[k]^2+kappa^2))
    }
  }
}

```

Nachdem die Parameter für jede einzelne Industriegruppe geschätzt wurden, kann für die Berechnung der Industriekorrelationen die oben beschriebene Prozedur verwendet werden. Durch die Wahl von $\kappa = 0.01$ wird sichergestellt, dass die Korrelationen innerhalb einer bestimmten Industriegruppe nahe bei 1 liegen, womit die Homogenisierungsanforderungen erfüllt werden.

```

# asset correlation
Asset_Corr <- matrix(0, nrow=N, ncol=N)
colnames(Asset_Corr)<-colnames(Data)
rownames(Asset_Corr)<-colnames(Data)

for(i in 1:length(industry)){
  for(j in 1:length(industry)){
    for(k in 1:length(Data[1,])){
      for(l in 1:length(Data[1,])){
        if(i == j && tau[i,k] != 0 && tau[j,l] != 0){
          Asset_Corr[k,l] <- (b[i]^2+kappa^2) /
          ( sqrt(b[i]^2+kappa^2+tau[i,k]^2) *
            sqrt(b[j]^2+kappa^2+tau[j,l]^2) )
        } else if (tau[i,k] != 0 && tau[j,l] != 0){
          Asset_Corr[k,l] <- (b[i]*b[j]) /
          ( sqrt(b[i]^2+kappa^2+tau[i,k]^2) *
            sqrt(b[j]^2+kappa^2+tau[j,l]^2) )
        }
      }
    }
  }
}

```

Letztendlich erfolgt die Berechnung der Asset-Korrelationsparameter für N Unternehmen anhand der Gleichungen (38) und (39).

4 Industrieklassifizierung

Die Suche nach passenden Homogenisierungskriterien für die Aktien stellt nicht nur im Bereich des Portfoliomanagements eine der größten Herausforderungen dar. Ebenso wird die Performance von Unternehmen in einen direkten Vergleich mit den sogenannten „Peer Groups“ gestellt, die anhand von unterschiedlichen Kriterien zusammengestellt werden. Wie wir bereits im Kapitel (2.2.1) und (3.3) gesehen haben, ist die Bildung von homogenen Aktiengruppierungen ebenso im Bereich der Bemessung des Kreditrisikos von besonderer Bedeutung und wird auch von Basel II im Rahmen des ASRF Modells empfohlen.

Abgesehen von ökonomisch oder geographisch bedingter Zusammenhänge werden in der Praxis auch statistische Methoden, wie zum Beispiel Clustering oder lineare Regressionsmodelle, verwendet. Dennoch gehört zu einer der gängigsten Methoden für die Portfoliohomogenisierung die Zusammenlegung von Unternehmen je nach deren Industriezugehörigkeit. Im weiteren wird ein kurzer Überblick über die verschiedenen Industrieklassifizierungen geben und auf deren Unterschiede hingewiesen.

Industrieklassifizierung	Verwendung/Erfindung
Standard Industrial Classification (SIC)	U.S. Government (1937)
North American Industry Classification System (NICS)	U.S. Government (1997)
Fama French (FF)	E.F. Fama und K.R. French (1997)
Global Industry Classification Standard (GICS)	MSCI und S&P (1999)
Industry Classification Benchmark (ICB)	STOXX und FTSE Russell (2004)
Thomson Reuters Business Classification (TRBC)	Thomson Reuters (2004)

Tabelle 2: Zusammenfassung der Industrieklassifizierungen und deren Anwendungsbereiche

4.1 Unterschiede der Industrieklassifizierungen

Am Finanzmarkt gibt es verschiedene Methoden wie Unternehmen in Industriegruppen klassifiziert werden. Eines der ältesten Verfahren ist der „Standard Industrial Classification“ Code (SIC), welcher ursprünglich für die Aufteilung der gesamten U.S. Wirtschaft in verschiedene Industriegruppen entwickelt wurde. SIC gehört zu der Gruppe der betriebsorientierten Klassifizierungen, die Unternehmen mit ähnlichen Endprodukten beziehungsweise Produktionsverfahren zu einer Gruppe zusammenaggregiert. Insbesondere die fortschreitende Technologie und die breite Skala von verschiedenen Produkten und Dienstleistungen haben dazu geführt, dass eine solche Industrieklassifizierung nicht mehr den aktuellen Standards entsprochen hat und im Jahr 1997 von den „North American Industry Classification Standard“ (NAICS) ersetzt wurde. Der NAICS wird jedoch weiterhin lediglich von den Regierungen der USA, Kanada und Mexiko verwendet [20].

Ein weiteres Klassifizierungsverfahren kommt direkt aus dem Bereich der „Capital Asset Pricing Models“ (CAPM). Eugene F. Fama und Kenneth R. French haben im Jahr 1997 das sogenannte Dreifaktorenmodell entwickelt, welches für die Prognose von Aktien Returns einen direkten Zusammenhang zu der Industriezugehörigkeit herstellt. Alle im Portfolio enthaltenen Unternehmen werden in 48 Industrien eingeteilt und für jede von ihnen wird ein eigenes Regressionsmodell aufgestellt. Die Aufteilung der Asset Returns auf verschiedene Industrien hat im Rahmen derer empirischen Studie in nahezu allen Kategorien stabilere Ergebnisse als das gewöhnliche CAPM geliefert [7]. Deswegen wurde dieses Schema oft auch in anderen empirischen Studien der Finanzwirtschaftsforschung verwendet. Nichtsdestotrotz gibt es derzeit keinen Nachweis, dass die FF Industrie-Gruppierungen auch einen ökonomischen Hintergrund haben.

Nahezu alle bekannten Rating- und Finanzmarktnachrichtenagenturen haben sich mit dem Thema der Industriezugehörigkeit ebenso beschäftigt. So wurde beispielsweise von der Agentur Thomson Reuters die sogenannte „Thomson Reuters Business Classification“ (TRBC) entwickelt, die vor allem als Basis für die Reuters Marktindizes verwendet wird. Der TRBC wird regelmäßig aktualisiert und es besteht die Möglichkeit die Klassifizierung entgeltlich auch für andere Indizes zu verwenden. Die Industriezugehörigkeit basiert auf der primären Geschäftstätigkeit des jeweiligen Unternehmens und dessen Auswirkung auf den Markt, in dem es tätig ist. Deswegen eignet sich der TRBC insbesondere für das Portfoliobenchmarking als auch für die Untersuchung von verschiedenen Finanzkennzahlen [24].

Kurz zusammengefasst deckt der TRBC mehr als 250.000 Wertpapiere in 130 Ländern ab und setzt sich folgendermaßen zusammen:

- 10 Wirtschaftliche Sektoren
- 28 Geschäftssektoren
- 54 Industriegruppen
- 143 Industrien
- 837 Tätigkeitsbereiche

Aufgrund der starken Marktorientierung und der alleinigen Zugänglichkeit vom TRBC über Thomson Reuters, hat sich die Klassifizierung mehr im Investmentbereich als im wissenschaftlichen Bereich etabliert.

Zur besseren Veranschaulichung führen wir hier einen der Thomson Reuters Indizes mit 1932 europäischen Unternehmen aus allen Marktsektoren an, dessen genaue Zusammensetzung in der unten stehenden Graphik ersichtlich ist⁸.

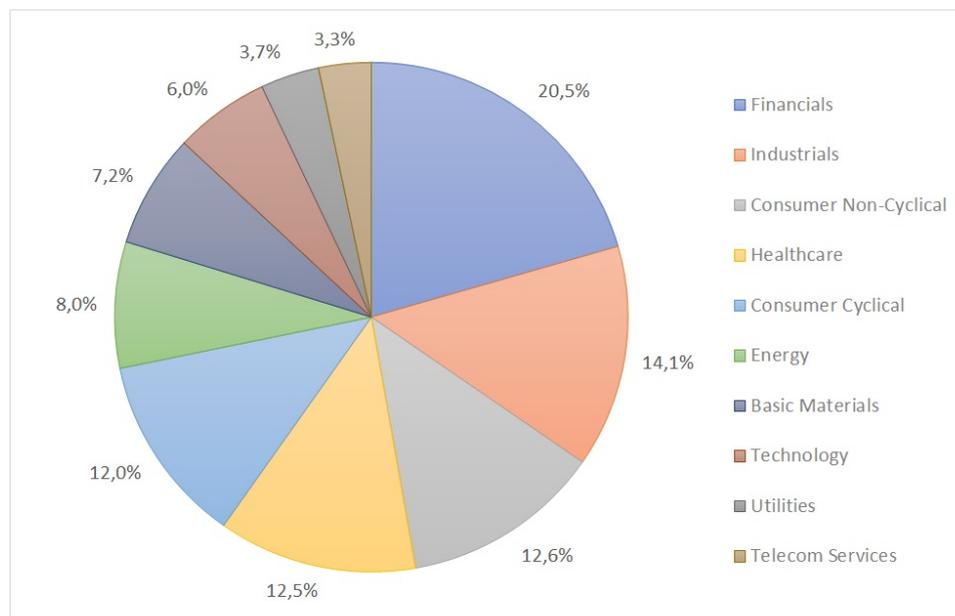


Abbildung 8: Sektorgewichte von „Thomson Reuters Europe Total Return Local Currency“

Der von Analysten am meisten verwendete Industrieschlüssel ist der „Global Industry Classification Standard“ (GICS). Entwickelt wurde die Klassifizierung im Jahr 1999 von der Ratingagentur Standard & Poor's und der Investmentbank Morgan Stanley Capital International (MSCI). Ähnlich wie bei der TRBC Methode handelt es sich beim GICS ebenso um eine finanzmarkt-basierte Industriezuordnung. Abgesehen von betrieblichen Charakteristiken wird auch die Einschätzung der Investoren berücksichtigt, welche Hauptgeschäftstätigkeit das jeweilige Unternehmen deren Ansicht nach hat.

Der GICS besteht nach der Einführung von einem neuen Sektor für „Communication Services“ in 2018 aus [13]

- 11 Sektoren
- 24 Industriegruppen
- 69 Industrien
- 158 Sub-Industrien

⁸Siehe: https://www.refinitiv.com/content/dam/marketing/en_us/documents/fact-sheets/global-equity-index-europe-fact-sheet.pdf

Der GICS wird einmal jährlich aktualisiert und für alle Unternehmen neu bewertet. Obwohl die Lizenz für den GICS Code in der Hand von MSCI liegt, ist dieser leichter zugänglich als der TRBC. So wird beispielsweise die genaue Industriezuordnung aller im S&P 500 Index enthaltenen Unternehmen veröffentlicht⁹. Die Zusammensetzung von S&P 500 je nach GICS Sektor ist in der unten stehenden Graphik abgebildet:

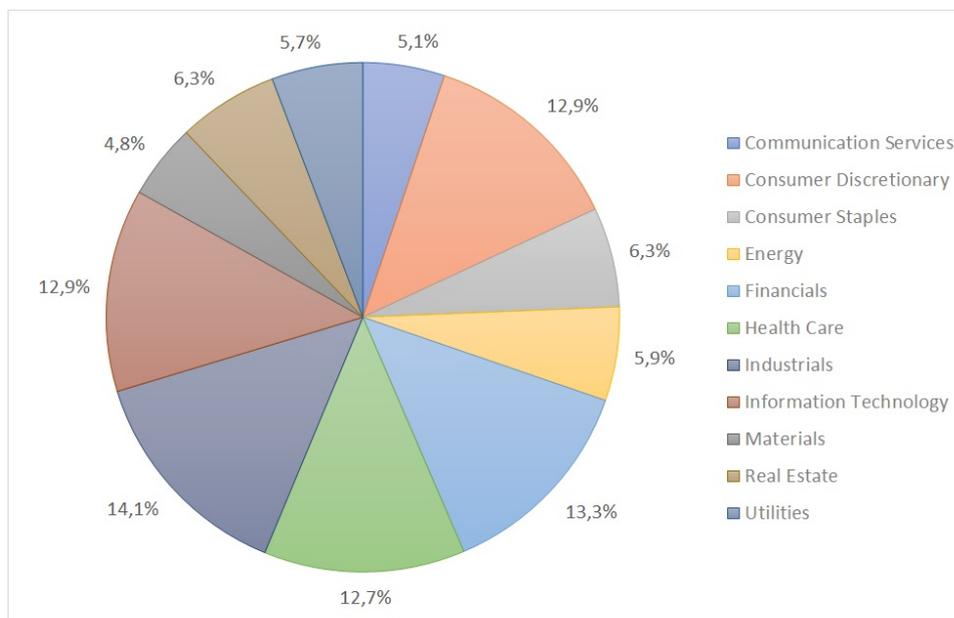


Abbildung 9: Zusammensetzung von S&P 500 nach GICS Sektoren

Die meisten akademischen Lizenzen für den Thomson Reuters Datastream, haben leider keinen Zugriff auf die MSCI Industrien, warum auch der Umgang mit dem GICS Code im wissenschaftlichen Bereich grundsätzlich erschwert ist. Umso mehr wird die Klassifizierung im Rahmen des Portfoliomanagements und bei der Erstellung diversifizierter Indexe verwendet.

Eine der letzten Industrieklassifizierungen, die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt werden, ist der „Industry Classification Benchmark“ (ICB), der im Jahr 2004 von einem der bekanntesten „Index provider“ STOXX und dem Subunternehmen von der London Stock Exchange Group FTSE Russell entwickelt wurde. Der ICB ordnet allen Unternehmen, je nach deren Umsatz oder der Hauptquelle vom Umsatz, die Subindustrie zu, die laut der eigenen Definition am besten geeignet ist. Der ICB verwendet eine 4-Säulen-Struktur und besteht aus [8]:

- 11 Industrien
- 20 Supersektoren
- 45 Sektoren
- 173 Subsektoren.

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_S%26P_500_companies

Obwohl die Bezeichnung vom Sektor und Industrie umgekehrt verwendet wird, als bei den restlichen Marktclassifizierungen, hat sich der ICB in der gesamten Finanzwirtschaft etabliert. Die Definitionen der Industrien sind mit den Sektoren des GICS Codes nahezu identisch, warum die zwei Klassifizierungen auch sehr stark miteinander konkurrieren.

Um später auch europäische Portfolios analysieren zu können, werden alle im STOXX Europe 600 enthaltenen Unternehmen in Betracht gezogen. Die genaue Zusammensetzung ist in der folgenden Graphik abgebildet:

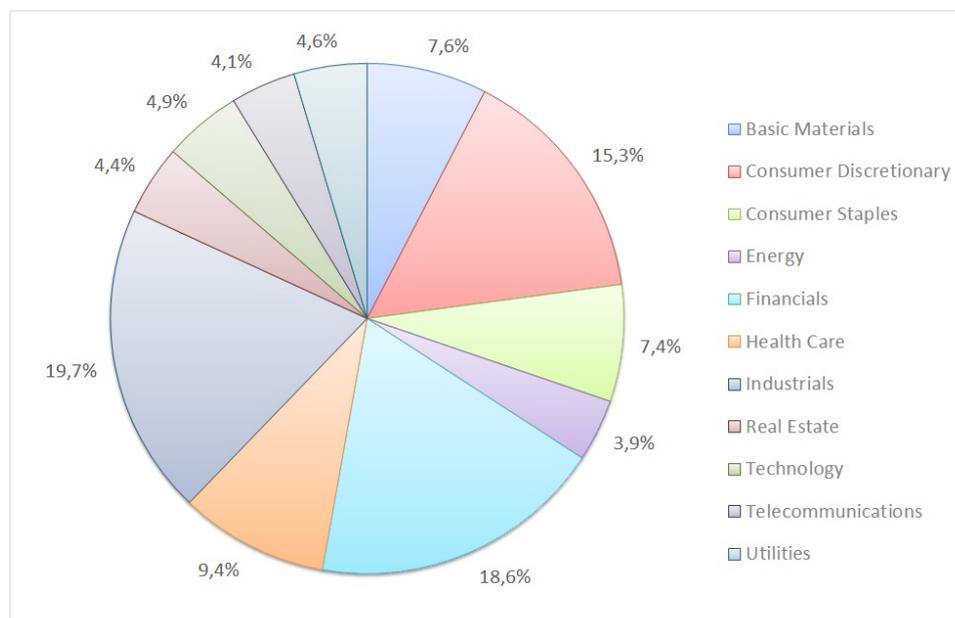


Abbildung 10: Zusammensetzung von STOXX Europe 600 nach den ICB Industrien

Anzumerken ist, dass die hier vorgestellten Industrieklassifizierungen bei weitem nicht das gesamte Angebot am Markt abdecken. Wie bereits erwähnt, sind alle Ratingagenturen sowie auch alle im Investmentbereich tätigen Unternehmen daran interessiert ihre eigenen Industriegruppierungen zu definieren und diese dementsprechend auch zu vermarkten. Klassifizierungen, die im wissenschaftlichen Bereich verwendet werden sind oft diejenigen, die am besten zugänglich sind wenn sie auch nicht unbedingt die beste Methodologie haben.

4.2 Analyse der Industriekorrelationen

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse einer empirischen Analyse auf Basis von zwei verschiedene Mengen an Unternehmen vorgestellt. Einerseits handelt es sich um tägliche Aktienreturns amerikanischer Unternehmen, die im S&P 500 Index enthalten sind und mit Hilfe des GICS in Sektoren eingeteilt werden. Auf der anderen Seite werden auch europäische Unternehmen aus dem STOXX 600 Europe und deren Einteilung in Industrien mittels ICB anhand der wöchentlichen Aktienreturns untersucht. Dabei handelt es sich um die bereinigten Aktienreturns, die jeweils zum Endpunkt der Beobachtungsperiode berechnet werden. In beiden Fällen wurden Unternehmen, für die während der gesamten Beobachtungsperiode vom 01.01.2003 bis 31.12.2017 nicht alle Datensätze vorhanden waren, aus der Schätzung ausgeschlossen.

Die industriebedingten Asset Korrelationen werden als die mittlere Korrelation zwischen den untersuchten Unternehmen berechnet. Hierfür unterscheiden wir zwischen Korrelationen innerhalb einer Industrie und zwischen zwei unterschiedlichen Industrien¹⁰. Sei also N_j die Anzahl der Unternehmen i in der Industrie j , dann ergibt sich die intrasektorale Korrelation als

$$\rho_{jj} = \frac{1}{N_j - 1} \sum_{i, i'=1; i \neq i'}^{N_j} \rho_{ii'}. \quad (41)$$

Die intersektorale Korrelation berechnet sich dementsprechend aus dem Mittelwert aus allen möglichen Kombinationen der Unternehmen aus der Industrie j und j' , d.h.

$$\rho_{jj'} = \frac{1}{N_j + N_{j'} - 1} \sum_{i, i'=1; i \in j; i' \in j', i \neq i'}^{N_j + N_{j'}} \rho_{ii'}. \quad (42)$$

Die empirischen Korrelationen werden als lineare Abhängigkeit der Aktienreturns berechnet. Dabei wird zwischen drei verschiedenen Beobachtungsperioden in 5-Jahresabschnitten unterschieden:

- Vor der Wirtschaftskrise: 01.01.2003-31.12.2007
- Während der Wirtschaftskrise: 01.01.2008 - 31.12.2012
- Nach der Wirtschaftskrise: 01.01.2013 - 31.12.2017

Die Zeitfenster wurden entsprechend der Entwicklungen am Finanzmarkt so gewählt, dass die Zeit während der Wirtschaftskrise getrennt betrachtet werden kann. Dabei beinhaltet die Periode den Zeitpunkt des großen Börsenabsturzes von Lehman Brothers am 15. September 2008, der viele anderen Insolvenzen als auch stark fallende Aktienkurse am gesamten Finanzmarkt verursacht hat. Darüberhinaus werden auch die Zeitpunkte der Stabilisierung des Marktes bis zum 31.12.2012 zu der Periode hinzugezählt, um jegliche Verzerrungen in den Daten auszuschließen. Die genauen Korrelationsmatrizen der untersuchten Industrien sind im Anhang A.3 abgebildet.

¹⁰Siehe auch [2]

Betrachten wir nun die S&P 500 Index Unternehmen und deren Einteilung in Industrien, so erhalten wir für den gesamten Beobachtungszeitraum als auch für die drei 5-Jahreszeitfenster folgende Ergebnisse:

	01.01.2003- 31.12.2017	01.01.2003- 31.12.2007	01.01.2008- 31.12.2012	01.01.2013- 31.12.2017
Min	35,91%	23,96%	44,12%	29,67%
Max	75,75%	69,17%	79,75%	74,46%
Mittelwert	47,99%	36,60%	55,32%	40,87%
Median	46,70%	35,53%	54,46%	40,74%

Tabelle 3: Übersicht über die mittleren empirischen Industriekorrelationen je nach GICS Sektor die für S&P 500 Index Unternehmen in unterschiedlichen Beobachtungszeiträumen

Analog ergibt sich für die STOXX 600 Europe Unternehmen und deren Industriekorrelationen nach der ICB Klassifizierung folgendes Bild:

	01.01.2003- 31.12.2017	01.01.2003- 31.12.2007	01.01.2008- 31.12.2012	01.01.2013- 31.12.2017
Min	24,29%	18,93%	25,47%	25,75%
Max	46,85%	43,28%	52,10%	50,26%
Mittelwert	34,93%	28,19%	39,50%	33,55%
Median	36,13%	28,37%	40,63%	33,19%

Tabelle 4: Übersicht über die mittleren empirischen Industriekorrelationen je nach ICB Industry für STOXX 600 Europe Index Unternehmen in unterschiedlichen Beobachtungszeiträumen

Wie in den obigen Tabellen ersichtlich, sind die empirischen Korrelationen der amerikanischen S&P 500 Index Unternehmen im Allgemeinen deutlich höher als die der europäischen Unternehmen aus dem STOXX 600 Europe Index. Außerdem kann festgestellt werden, dass der Einfluss von amerikanischen Unternehmen während der Wirtschaftskrise enorm angestiegen ist, sodass die Korrelationen im gesamten Beobachtungszeitraum von dieser Periode am meisten beeinflusst werden. Das gleiche Phänomen lässt sich bei den europäischen Unternehmen ebenso beobachten, jedoch bewegen sich dort die Industriekorrelationen lediglich zwischen 24,29% bis 46,85%, während die Industriekorrelationen der amerikanischen Unternehmen bis hin zu 75,75% reichen.

Darüberhinaus lässt sich feststellen, dass die intrasektoralen Korrelationen der S&P 500 Unternehmen für die Industrien „Real Estate“ und „Energy“ mit 73,60% bzw. 75,75% für den gesamten Beobachtungszeitraum die höchsten sind. Am europäischen Markt sind die Zusammenhänge innerhalb der Industrie „Financials“ mit 46,85% für den gesamten Beobachtungszeitraum am höchsten, wobei die intrasektoralen Korrelationen für die Industrie „Basic Materials“ während der Wirtschaftskrise auf rund 52,10% springt.

Betrachten wir nun die intersektoralen empirischen Korrelationen, so können wir aus den Korrelationsmatrizen schließen, dass der Zusammenhang zwischen den Industrien

„Real Estate“ und „Financials“ sowohl für die amerikanischen als auch für die europäischen Unternehmen für die gesamte Beobachtungsperiode am größten ist. Während der Wirtschaftskrise waren die Korrelationen der S&P Index Unternehmen zwischen den Industrien „Communication Services“ mit rund 65,23% am höchsten. Für die STOXX 600 Europe Index Unternehmen setzt sich der Einfluss des Finanzsektors insbesondere auf die Immobilienbranche seit der Wirtschaftskrise durch und die mittlere empirische Korrelation beträgt 48,49%.

Die zweite Analyse wurde anhand der numerischen Implementierung der Parameterschätzung des Merton Modells mit Survivorship Bias (Kapitel 3.2.3) durchgeführt. Da die Werte für den Ausübungspreis der Unternehmensanleihen nicht so einfach aus den öffentlich zugänglichen Daten abgelesen werden können, werden diese am Anfang der Beobachtungsperiode folgendermaßen hergeleitet. Sei zum Zeitpunkt $t = 0$ eine konstante Ausfallswahrscheinlichkeit $PD = 0.02$ gegeben, sodass die Equities den Assets entsprechen und im nächsten Zeitpunkt anhand der PD eine Anleihe ausgegeben wird. Dann kann der Strike K mit Hilfe der Gleichung (8) folgendermaßen bestimmt werden:

$$K = S(0) \cdot \exp \left(\Phi^{-1}(PD) \cdot \sigma + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \right). \quad (43)$$

Die Parameter μ und σ werden aus der empirischen Statistik der Aktienreturns ausgerechnet und im weiteren wird eine konstante Inflation mit $r = 0.01$ angenommen. Wird der Algorithmus auf die einzelnen Unternehmen angewendet so erhalten wir in erster Linie die optimalen Maximum Likelihood Parameter der Asset Returns.

	S&P 500		STOXX 600 Europe	
	μ	σ	μ	σ
Min	0,00087	0,02380	0,00015	0,01118
Max	0,02007	0,11692	0,33047	0,91676
Mittelwert	0,00855	0,05073	0,00601	0,03878

Tabelle 5: Übersicht über die geschätzten Parameter aus dem Merton ML Model mit Survivorship Bias

Insbesondere bei den europäischen Unternehmen sind mehrere Ausreißer zu beobachten. Dies resultiert vor allem aus der vereinfachten Vorgehensweise bei der der Strike am Anfang der Beobachtungsperiode anhand der PD ausgerechnet wurde. Für die Unternehmen, die während der Beobachtungsperiode besonders erfolgreich waren, ist der am Anfang ermittelte Fremdkapitalanteil mit der Zeit relativ niedrig geworden. Deswegen werden an dieser Stelle höhere Assetreturns verzeichnet als bei Unternehmen, die eine relativ stabile Entwicklung hinter sich haben.

Darüberberhinaus wird am Beispiel der TUI AG gezeigt, welcher Zusammenhang zwischen den empirisch beobachteten Aktienkursen und den implizierten Assets besteht und wie sich aus denen die Refinanzierungszeitpunkte ergeben.

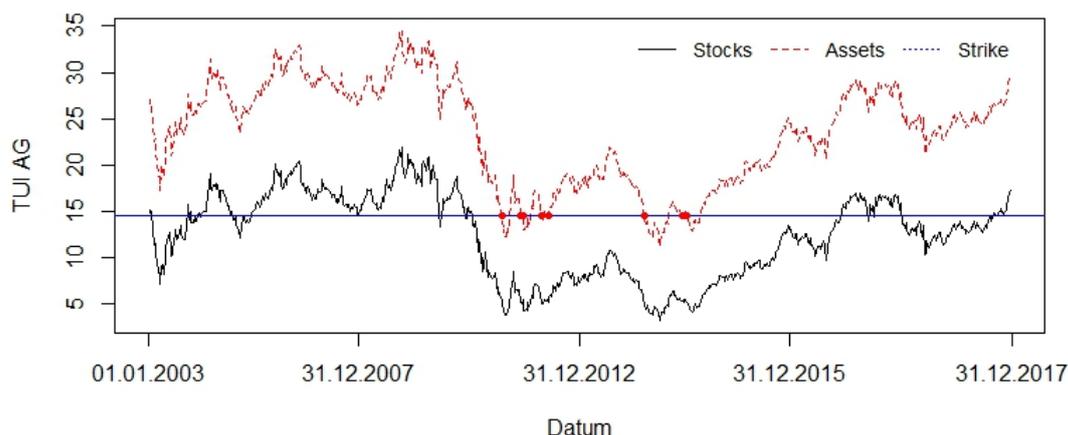


Abbildung 11: Zusammenhang zwischen Aktienkursen, impliziten Assets und den Refinanzierungszeitpunkten für die TUI AG vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

Darauffolgend können die Asset Korrelationen, wie in den Gleichungen (41) und (42) beschrieben, aus den Asset Returns berechnet werden. Eine Zusammenfassung der daraus resultierenden Industriekorrelationen ist in der nachstehenden Tabelle abgebildet.

	S&P 500	STOXX 600 Europe
Min	33,11%	25,28%
Max	71,59%	48,96%
Mittelwert	44,42%	35,64%
Median	43,46%	36,14%

Tabelle 6: Übersicht über die mittleren Industriekorrelationen unter Berücksichtigung von Survivorship Bias für den gesamten Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

Das bei den empirischen Korrelationen beobachtete Resultat, dass die Korrelationen der amerikanischen S&P 500 Index Unternehmen höher sind als die der europäischen STOXX 600 Europe Index Unternehmen, setzt sich auch bei der Berücksichtigung vom Survivorship Bias fort. Nichtsdestotrotz sind die Industriekorrelationen im Merton Modell während der gesamten Beobachtungsperiode für den Fall der amerikanischen Unternehmen etwas niedriger, bei den europäischen wiederum leicht höher als die empirischen Werte.

Betrachten wir nun die durchschnittlichen Asset Korrelationen pro Industriegruppe für die S&P 500 Index Unternehmen¹¹, so ist die durchschnittliche Asset Korrelation im Sektor „Real Estate“ mit rund 71,59% am höchsten. Ebenso zeigt der Immobiliensektor den größten Zusammenhang mit dem Sektor „Utilities“ und deren durchschnittliche Asset Korrelation liegt bei rund 55,63%. Die niedrigsten Asset Korrelationen bestehen zwischen den Sektoren „Health Care“ und „Consumer Staples“ mit rund 33,11%.

Aus den durchschnittlichen Asset Korrelationen für die europäischen STOXX 600 Europe Index Unternehmen¹² lässt sich ablesen, dass auch hier die Immobilienindustrie die größten Zusammenhänge aufzeigt. Die am höchsten beobachtete Korrelation ist innerhalb der Industrie „Real Estate“ und beträgt 48,96%. Die Korrelationen des Finanzsektors zeigen ebenso relativ hohe Werte an, so liegt beispielsweise die durchschnittliche Asset Korrelation zwischen „Financials“ und „Real Estate“ bei rund 45,30%. Die niedrigste beobachtete Asset Industriekorrelation ist zwischen den Sektoren „Telecommunication“ und „Health Care“ mit rd. 25,28%.

Bei der letzten Methode zur Schätzung der Asset Korrelationen wurde die Volatilität der logarithmierten Asset Returns in einen direkten Zusammenhang mit der Industriegruppe gestellt und als Random Effect modelliert. Die Korrelationen wurden wie im letzten Abschnitt des Kapitels 3.3.2 dargestellt berechnet. Eine Zusammenfassung der daraus resultierenden Asset Korrelationen ist in der nachstehenden Tabelle abgebildet.

	S&P 500	STOXX 600 Europe
Minimum	9,66%	1,35%
Maximum	84,14%	77,32%
Mittelwert	45,03%	34,47%
Standardabweichung	13,07%	10,76%
Median	44,74%	34,40%

Tabelle 7: Übersicht der Asset Korrelationen basierend auf dem Random Effects Modell für den gesamten Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

Dass auch hier bei den S&P 500 Index Unternehmen größere Zusammenhänge zwischen den Unternehmen bestehen, kann bereits aus den einzelnen Asset Korrelationen abgelesen werden. Die größte beobachtete Asset Korrelation wurde zwischen zwei Immobilieninvestmentmagnaten Boston Properties, Inc. und Regency Centers Corp mit rund 84,14% geschätzt. Im Bereich der europäischen Unternehmen, vertreten durch den STOXX 600 Europe Index, besteht der größte Zusammenhang zwischen dem französischen Mineralölunternehmen Total und einem der weltweit größten Mineralölunternehmen Royal Dutch Shell und diese liegt bei 77,32%.

¹¹Siehe Abbildung 23 im Appendix A.3

¹²Siehe Abbildung 21 im Appendix A.3

Ähnlich wie bei den vorigen Analysen werden auch hier die Korrelationen der Industriegruppen aus den mittleren Asset Korrelationen bestimmt, wobei diese bereits in Abhängigkeit von der Industrie geschätzt wurden. In weiterer Folge wird ein kurzer Überblick über die Industriekorrelationen gegeben, wobei die genauen Ergebnisse im Appendix A.3 abgebildet sind.

	S&P 500	STOXX 600 Europe
Minimum	30,87%	22,81%
Maximum	75,13%	45,58%
Mittelwert	46,88%	34,56%
Median	45,75%	34,46%

Tabelle 8: Übersicht der mittleren Asset Korrelationen pro Industriegruppe basierend auf dem Random Effects Modell für den gesamten Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

Betrachten wir nun die mittleren Asset Korrelationen des Random Effects Modells, so lässt sich feststellen, dass die Größenordnung der Korrelationen mit denen des Maximum Likelihood Modells mit Survivorship Bias vergleichbar sind. Ebenso sind auch hier die größten beobachteten Korrelationen innerhalb des „Real Estate“ Sektors der S&P 500 Index Unternehmen und liegen bei rund 75,13%. Für die europäischen STOXX 600 Europe Index Unternehmen sind die „Financials“ mit rund 45,58% weiterhin die am stärksten korrelierte Industriegruppe.

Für die intersektoralen Korrelationen lässt sich feststellen, dass die größte mittlere Asset Korrelation am amerikanischen Markt, wie auch bei den vorangehenden Analysen ersichtlich, zwischen den Industrien „Real Estate“ und „Energy“ mit rund 71,18% zu beobachten ist. Die Aussagen über die Korrelationen der europäischen Unternehmen lassen sich aus den vorherigen Analysen ebenso bestätigen und die höchste Asset Korrelation besteht zwischen „Financials“ und „Real Estate“ mit rund 45,27%. Nichtsdestotrotz hat sich für manche der Industriegruppen bei der Betrachtung von Random Effects die Korrelation maßgeblich geändert. Einer der Ausreißer ist der europäische „Energy“ Sektor bei dem die intrasektorale Korrelation um rund 12,06%-Punkte gefallen ist. Andererseits hat sich die Korrelation zwischen den Industrien „Energy“ und „Real Estate“ um rund 17,57%-Punkte erhöht.

Ob die hier dargestellten Korrelationen aufgrund der vereinfachten Annahmen und beschränkter Datenbasis für den gesamten Markt im Rahmen des Kreditrisikos repräsentativ sind, lässt sich nur anhand von einer größeren Datenmenge und genauen Kreditinformationen überprüfen. Nichtsdestotrotz sind die hier präsentierten Ergebnisse mit Hilfe der vorgestellten numerischen Methoden nachvollziehbar und können vollkommen reproduziert werden. Darüberhinaus erscheinen die hier vorgestellten Zusammenhänge zwischen Industrien wirtschaftlich sinnvoll und bringen für die drei Beobachtungsperioden die Auswirkungen der Wirtschaftskrise besser zum Vorschein.

A Anhang

A.1 Maximum Likelihood Schätzer für Multivariate Normalverteilung

Der hier angeführte Beweis folgt dem Buch von Parimal Mukhopadhyay über Multivariate Statistische Analyse [19].

Sei (x_1, \dots, x_n) multivariat normalverteilt mit $N(\mu, \Sigma)$, dann ist die gemeinsame Verteilungsfunktion das Produkt von $f(x_i)$, $i = \{1, \dots, n\}$. Die logarithmierte Likelihood Funktion ist somit folgendermaßen gegeben:

$$\log L(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\det \Sigma|) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu) \quad (44)$$

Betrachten wir nun den Ausdruck $(\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu)$ auf der rechten Seite der obigen Gleichung, so lässt es sich, unter der Annahme dass \bar{x} der empirische Mittelwert unserer Stichprobe ist, schreiben als

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu) &= (\mathbf{x}_i - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu) + \\ &\quad 2(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \bar{x}). \end{aligned}$$

Nachdem $(\mathbf{x} - \bar{x})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \bar{x}) = \text{spur}\{\Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \bar{x})(\mathbf{x} - \bar{x})^T\}$ erhalten wir durch das Summieren von $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}_i - \mu) = \text{spur}\{\Sigma^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{x})(\mathbf{x}_i - \bar{x})^T\} + n(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu). \quad (45)$$

Definieren wir nun $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{x})(\mathbf{x}_i - \bar{x})^T$ als die empirische Varianz-Kovarianz Matrix, so erhalten wir durch das einsetzen von 45 für die logarithmierte Likelihood Funktion

$$\log L(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(|\det \Sigma|) - \frac{n}{2} \text{spur}\{\Sigma^{-1} S_n\} - \frac{n}{2} \underbrace{(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)}_{\text{spur}\{\Sigma^{-1} (\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T\}}.$$

Sei nun $\mu \in \mathbb{R}^p$ und Σ positive definit, wobei $n \geq p + 1$ ist. Durch das einsetzen von $A := \Sigma^{-1} (= a_{ij})$ ¹³ kann die obige $\log L$ Funktion geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \log L(\mathbf{x}; \mu, \mathbf{A}) &= -\frac{np}{2} \ln(2\pi) + \frac{n}{2} \ln(|\det \mathbf{A}|) - \frac{n}{2} \text{spur}\{\mathbf{A} S_n\} - \frac{n}{2} \text{spur}\{\mathbf{A} (\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T\} \\ &= -\frac{np}{2} \ln(2\pi) + \frac{n}{2} \ln(|\det \mathbf{A}|) - \frac{n}{2} \text{spur}\{\mathbf{A} (S_n + (\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T)\}. \end{aligned}$$

¹³ $\log(\det |\mathbf{A}^{-1}|) = \log(|(\det \mathbf{A})^{-1}|) = -\log(|\det \mathbf{A}|)$

Wollen wir nun nach μ und \mathbf{A} ableiten um die logarithmierte Likelihood Funktion zu maximieren, so erhalten wir die folgende DGL:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = n\mathbf{A}(\bar{x} - \mu) \quad (46)$$

Für die partielle Ableitung nach \mathbf{A} betrachten wir zuerst

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(|\det \mathbf{A}|)}{\partial a_{ij}} &= \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \frac{\partial |\det \mathbf{A}|}{\partial a_{ij}} = \begin{cases} \mathbf{A}_{ii}/|\det \mathbf{A}|, & i = j \\ 2\mathbf{A}_{ij}/|\det \mathbf{A}|, & i \neq j \end{cases} \\ &= \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} (2\mathbf{A}_{ij} - \text{diag}(\mathbf{A}_{ij})) \\ &= 2\Sigma - \text{diag}(\Sigma) \end{aligned} \quad (47)$$

wobei \mathbf{A}_{ij} die Kofaktoren von a_{ij} sind. Für den zweiten Teil verwenden wir die Eigenschaften der Spur einer Matrix¹⁴ und erhalten

$$\frac{\partial \text{spur}\{\mathbf{A}S_n\}}{\partial \mathbf{A}} = 2S_n - \text{diag}(S_n) \quad (48)$$

$$\frac{\partial \text{spur}\{\mathbf{A}(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T\}}{\partial \mathbf{A}} = 2(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T - \text{diag}((\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T) \quad (49)$$

Setzen wir nun die drei partiellen Ableitungen in (47), (48) und (49) zusammen, so ergibt sich für die Ableitung nach \mathbf{A}

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{A}} &= \frac{n}{2}(2\Sigma - \text{diag}(\Sigma)) - \frac{n}{2}(2S_n - \text{diag}(S_n)) \\ &\quad - \frac{n}{2}(2(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T - \text{diag}((\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T)) \\ &= \frac{n}{2}(2\mathbf{M} - \text{diag}(\mathbf{M})) \end{aligned} \quad (50)$$

wobei gilt $\mathbf{M} = \Sigma - S_n - (\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)^T$. Setzen wir nun die beiden Ableitungen in (46) und (50) gleich 0 so erhalten wir

$$\mu = \bar{x}$$

und daraus ergibt sich aus der Definition von \mathbf{M}

$$\Sigma = S_n.$$

¹⁴Ist \mathbf{X} eine symmetrische Matrix so gilt: $\frac{\partial \text{spur}\{\mathbf{X}\mathbf{Y}\}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T - \text{diag}(\mathbf{Y})$

A.2 Motivation für die Diskretisierung von Asset Values

In der Theorie werden in den meisten Modellen Asset Values anhand von zeitstetigen stochastischen Prozessen definiert. Auf der anderen Seite ist es in der Praxis üblich, dass die Bepreisung von Optionen als auch die Schätzung des Ausfallsrisikos mit Hilfe von unterschiedlichen Simulationsverfahren durchgeführt werden. Dadurch wird unter bestimmten Verteilungsannahmen eine große Anzahl an Asset Values bzw. Returns generiert, die in weitere Berechnungen einfließen. Da die Simulationen in den meisten Fällen auf eine bestimmte Zahl von Handelstagen, Wochen oder Quartalen eingeschränkt sind, benötigen wir eine Methode zur Diskretisierung der stochastischen Prozesse. Im Folgenden werden zwei verschiedene Vorgehen vorgestellt, die je nach gewünschten Eigenschaften zur Diskretisierung von Black Scholes-Merton Modell hergenommen werden können.

Im weiteren betrachten wir den stochastischen Prozess gegeben durch:

$$dS(t) = a(S(t), t)dt + b(S(t), t)dW(t). \quad (51)$$

und durch das Iterationsverfahren ergibt sich für $t \rightarrow t + dt$

$$S(t + dt) = S(t) + \int_t^{t+dt} a(S(u), u)du + \int_t^{t+dt} b(S(u), u)dW(u). \quad (52)$$

A.2.1 Euler'sche Schema

Eine der einfachsten Methoden zur Diskretisierung von stochastischen Prozessen ist das sogenannte Euler'sche Schema (oder auch als Euler-Muramaya Schema bezeichnet). Basierend auf dem expliziten Euler Verfahren für deterministische Differentialgleichungen wird der stochastische Prozess (51) approximiert.

Da der Wert von $S(t)$ zum Zeitpunkt t bekannt ist, erhalten wir für das erste Integral

$$\int_t^{t+dt} a(S(u), u)du \approx a(S(t), t) \int_t^{t+dt} du = a(S(t), t)dt. \quad (53)$$

Analogerweise gehen wir beim zweiten Integral vor

$$\int_t^{t+dt} b(S(u), u)dW(u) \approx b(S(t), t) \int_t^{t+dt} dW(u) \quad (54)$$

$$= b(S(t), t)(W(t + dt) - W(t)) \quad (55)$$

$$= b(S(t), t)\sqrt{dt}Z \quad (56)$$

wobei, die Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung verwendet wird

$$(W(t + dt) - W(t)) \sim \mathcal{N}(0, dt) \rightarrow \sqrt{dt}(W(t + dt) - W(t)) \sim \mathcal{N}(0, 1) =: \sqrt{dt}Z.$$

Aus (53) und (56) erhalten wir für (52)

$$S(t + dt) = S(t) + a(S(t), t)dt + b(S(t), t)\sqrt{dt}Z. \quad (57)$$

Wie in [16] bewiesen, konvergiert das Euler'sche Schema in Verteilung lediglich für hinreichend glatte Koeffizienten $a(S(t), t)$ und $b(S(t), t)$.

Für den stochastischen Prozess der Asset Values im Merton Modell (1) ergibt sich

$$S(t + dt) = S(t) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma \sqrt{dt} Z \right). \quad (58)$$

Da wir von einer konstanten Volatilität sowie auch einem konstanten Drift ausgehen, haben wir für den diskreten Asset Value Prozess keine Probleme mit der Konvergenz.

A.2.2 Milstein Schema

Eine weitere Methode zur Diskretisierung von stochastischen Differentialgleichungen ist das sogenannte Milstein Schema. Obwohl dieses durch dessen starke Konvergenz in der Theorie genauere Ergebnisse liefert, ist das Euler'sche Schema in der Praxis gängiger. Darüber hinaus funktioniert das Milstein Schema nur für stochastische Differentialgleichungen deren Koeffizienten lediglich von $S(t)$ nicht aber von t abhängen [9].

Im weiteren betrachten wir also einen Prozess der folgenden Form

$$dS(t) = a(S(t))dt + b(S(t))dW(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \quad (59)$$

sowie die dazugehörige Integralform

$$S(t + dt) = S(t) + \int_t^{t+dt} a(s)ds + \int_t^{t+dt} b(s)dW_s. \quad (60)$$

Das Milstein Schema basiert auf Anwendung von dem Lemma von Itô auf die einzelnen Koeffizienten $a(S(t))$ und $b(S(t))$, wodurch eine stärkere Konvergenz erreicht werden kann.

Unter der Annahme, dass $a(t)$ und $b(t)$ zweimal stetig differenzierbar sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} da(t) &= \left(a(t)'a(t) + \frac{1}{2}a(t)''b(t)^2 \right) dt + a(t)'b(t)dW(t) \\ db(t) &= \left(b(t)'b(t) + \frac{1}{2}b(t)''b(t)^2 \right) dt + b(t)'b(t)dW(t) \end{aligned}$$

wobei $a(t)'$ und $b(t)'$ als Ableitungen nach $S(t)$ zu verstehen sind und die Ableitungen nach t verschwinden. Hieraus ergibt sich für die zwei obigen Gleichungen die folgende Integralschreibweise

$$\begin{aligned} a(s) &= a(t) + \int_t^s \left(a(u)'a(u) + \frac{1}{2}a(u)''b(u)^2 \right) du + \int_t^s a(u)'b(u)dW(u) \\ b(s) &= b(t) + \int_t^s \left(b(u)'b(u) + \frac{1}{2}b(u)''b(u)^2 \right) du + \int_t^s b(u)'b(u)dW(u). \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung (60) erhalten wir

$$\begin{aligned}
S(t+dt) &= \\
&S(t) + \int_t^{t+dt} \left[a(t) + \int_t^s \left(a(u)'a(u) + \frac{1}{2}a(u)''b(u)^2 \right) du + \int_t^s a(u)'b(u)dW(u) \right] ds \\
&+ \int_t^{t+dt} \left[b(t) + \int_t^s \left(b(u)'b(u) + \frac{1}{2}b(u)''b(u)^2 \right) du + \int_t^s b(u)'b(u)dW(u) \right] dW(s)
\end{aligned}$$

Aufgrund der gewünschten Konvergenzeigenschaft fallen alle Terme höherer Ordnung als 1, das heißt $(dsdu = \mathcal{O}((dt)^2), dsdW(u) = \mathcal{O}((dt)^{\frac{3}{2}})$, weg. Da der Fehler des Terms $dW(u)dW(s) = \mathcal{O}(dt)$ erster Ordnung ist, bleibt dieser erhalten.

Dadurch vereinfacht sich die obige Gleichung auf

$$S(t+dt) = S(t) + a(t) \int_t^{t+dt} ds + b(t) \int_t^{t+dt} dW(s) + \int_t^{t+dt} \int_t^s b(t)'b(t)dW(u)dW(s) \quad (61)$$

Wenden wir das Euler'sche Schema auf den letzten Summanden an, so ergibt sich

$$\int_t^{t+dt} \int_t^s b(t)'b(t)dW(u)dW(s) \quad (62)$$

$$\approx b(t)'b(t) \left(\underbrace{\int_t^{t+dt} W(s)dW(s)}_{\text{Itô-Formel}} - W(t)W(t+dt) + W(t)^2 \right) \quad (63)$$

$$\approx \frac{1}{2}b(t)'b(t) [(W(t+dt) - W(t))^2 - dt] \quad (64)$$

Verwenden wir wiederum die Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung und definieren $Z = W(t+dt) - W(t)$, dann gilt $\sqrt{dt}Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Setzen wir (64) in (61) so erhalten wir die gewünschte Diskretisierung für $S(t)$

$$S(t+dt) = S(t) + a(t)dt + b(t)\sqrt{dt}Z + \frac{1}{2}b(t)'b(t)dt (Z^2 - 1) \quad (65)$$

Betrachten wir also den Wertprozess (1) so erhalten wir mit Hilfe des Milstein Schemas die folgende Diskretisierung

$$S(t+dt) = S(t) + \mu S(t)dt + \sigma S(t)\sqrt{dt}Z + \frac{1}{2}\sigma^2 dt (Z^2 - 1) \quad (66)$$

wobei $\sqrt{dt}Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Im Falle einer risikoneutralen Bewertung ist $\mu = r - \sigma\lambda$ einzusetzen. Aufgrund der starken Konvergenzeigenschaft eignet sich das Milstein Schema besonders für die Diskretisierung von Modellen mit stochastischer Volatilität, wie in [14] beschrieben.

A.3 Korrelationsmatrizen

	Communication Services	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Information Technology	Materials	Real Estate	Utilities
Communication Services	52,25%	43,00%	40,96%	56,29%	54,44%	37,44%	51,76%	44,08%	46,54%	58,80%	55,78%
Consumer Discretionary	43,00%	46,05%	39,21%	43,92%	48,56%	36,35%	47,54%	41,61%	44,00%	48,97%	43,01%
Consumer Staples	40,96%	39,21%	44,75%	43,56%	46,52%	35,91%	45,71%	39,25%	41,05%	46,70%	47,60%
Energy	56,29%	43,92%	43,56%	73,60%	53,15%	39,34%	53,16%	44,63%	56,27%	56,99%	56,14%
Financials	54,44%	48,56%	46,52%	53,15%	60,02%	42,40%	52,72%	47,05%	53,76%	58,48%	50,62%
Health Care	37,44%	36,35%	35,91%	39,34%	42,40%	38,88%	42,16%	37,50%	37,99%	40,09%	39,58%
Industrials	51,76%	47,54%	45,71%	53,16%	52,72%	42,16%	55,60%	47,16%	52,52%	53,45%	50,32%
Information Technology	44,08%	41,61%	39,25%	44,63%	47,05%	37,50%	47,16%	46,24%	44,19%	46,25%	42,91%
Materials	46,54%	44,00%	41,05%	56,27%	53,76%	37,99%	52,52%	44,19%	53,98%	56,98%	52,09%
Real Estate	58,80%	48,97%	46,70%	56,99%	58,48%	40,09%	53,45%	46,25%	56,98%	75,75%	57,65%
Utilities	55,78%	43,01%	47,60%	56,14%	50,62%	39,58%	50,32%	42,91%	52,09%	57,65%	71,92%

Abbildung 12: Mittlere Empirische Korrelation der täglichen Aktienkurse für S&P 500 Index Unternehmen pro GICS Sektor im Gesamtbeobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

	Communication Services	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Information Technology	Materials	Real Estate	Utilities
Communication Services	44,49%	32,99%	29,73%	45,54%	44,26%	25,09%	37,26%	33,49%	36,73%	46,08%	45,88%
Consumer Discretionary	32,99%	36,06%	29,40%	31,90%	38,82%	25,50%	34,88%	30,95%	34,14%	36,30%	34,37%
Consumer Staples	29,73%	29,40%	32,87%	31,51%	37,77%	23,96%	32,59%	28,23%	30,93%	34,94%	35,53%
Energy	45,54%	31,90%	31,51%	69,17%	39,44%	25,69%	36,58%	30,75%	45,34%	44,64%	47,92%
Financials	44,26%	38,82%	37,77%	39,44%	49,31%	31,83%	40,16%	36,29%	43,55%	45,03%	43,77%
Health Care	25,09%	25,50%	23,96%	25,69%	31,83%	25,94%	28,71%	25,65%	25,99%	27,85%	27,77%
Industrials	37,26%	34,88%	32,59%	36,58%	40,16%	28,71%	40,34%	33,52%	38,59%	38,02%	37,54%
Information Technology	33,49%	30,95%	28,23%	30,75%	36,29%	25,65%	33,52%	35,87%	32,91%	33,30%	32,45%
Materials	36,73%	34,14%	30,93%	45,34%	43,55%	25,99%	38,59%	32,91%	45,91%	45,36%	43,70%
Real Estate	46,08%	36,30%	34,94%	44,64%	45,03%	27,85%	38,02%	33,30%	45,36%	64,59%	49,43%
Utilities	45,88%	34,37%	35,53%	47,92%	43,77%	27,77%	37,54%	32,45%	43,70%	49,43%	62,55%

Abbildung 13: Mittlere Empirische Korrelation der täglichen Aktienkurse für S&P 500 Index Unternehmen pro GICS Sektor im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2007 vor der Wirtschaftskrise

	Communication Services	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Information Technology	Materials	Real Estate	Utilities
Communication Services	58,86%	51,64%	47,75%	64,47%	58,48%	45,72%	60,21%	52,67%	53,70%	65,23%	62,71%
Consumer Discretionary	51,64%	54,75%	47,13%	52,57%	54,31%	44,56%	56,16%	50,63%	52,25%	57,62%	51,40%
Consumer Staples	47,75%	47,13%	50,35%	51,71%	51,31%	44,12%	53,77%	47,51%	47,44%	52,72%	54,51%
Energy	64,47%	52,57%	51,71%	78,28%	58,15%	48,71%	62,26%	54,75%	63,51%	63,90%	64,92%
Financials	58,48%	54,31%	51,31%	58,15%	62,92%	48,20%	58,13%	53,34%	57,67%	63,54%	55,84%
Health Care	45,72%	44,56%	44,12%	48,71%	48,20%	46,80%	50,68%	46,03%	45,74%	47,76%	48,75%
Industrials	60,21%	56,16%	53,77%	62,26%	58,13%	50,68%	63,68%	56,13%	60,34%	61,60%	59,19%
Information Technology	52,67%	50,63%	47,51%	54,75%	53,34%	46,03%	56,13%	54,46%	52,59%	55,26%	52,16%
Materials	53,70%	52,25%	47,44%	63,51%	57,67%	45,74%	60,34%	52,59%	59,24%	63,31%	58,66%
Real Estate	65,23%	57,62%	52,72%	63,90%	63,54%	47,76%	61,60%	55,26%	63,31%	79,75%	61,48%
Utilities	62,71%	51,40%	54,51%	64,92%	55,84%	48,75%	59,19%	52,16%	58,66%	61,48%	75,43%

Abbildung 14: Mittlere Empirische Korrelation der täglichen Aktienkurse für S&P 500 Index Unternehmen pro GICS Sektor im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2008 bis 31.12.2012 während der Wirtschaftskrise

	Communication Services	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Information Technology	Materials	Real Estate	Utilities
Communication Services	43,77%	31,28%	37,35%	46,20%	51,72%	33,52%	43,25%	38,31%	37,82%	45,66%	50,07%
Consumer Discretionary	31,28%	33,72%	30,73%	33,56%	41,57%	29,67%	36,92%	33,26%	32,48%	33,35%	31,81%
Consumer Staples	37,35%	30,73%	44,23%	37,22%	43,75%	32,05%	38,86%	34,99%	36,45%	41,33%	45,25%
Energy	46,20%	33,56%	37,22%	64,60%	50,51%	33,54%	44,61%	38,42%	47,03%	42,76%	43,23%
Financials	51,72%	41,57%	43,75%	50,51%	59,60%	40,74%	49,21%	44,73%	51,22%	45,94%	42,84%
Health Care	33,52%	29,67%	32,05%	33,54%	36,64%	36,64%	36,32%	34,12%	34,08%	34,19%	32,96%
Industrials	43,25%	36,92%	38,86%	44,61%	49,21%	36,32%	48,18%	40,86%	44,52%	41,10%	39,74%
Information Technology	38,31%	33,26%	34,99%	38,42%	44,73%	34,12%	40,86%	41,84%	38,93%	36,89%	35,09%
Materials	37,82%	32,48%	36,45%	47,03%	51,22%	34,08%	44,52%	38,93%	47,25%	43,04%	44,28%
Real Estate	45,66%	33,35%	41,33%	42,76%	45,94%	34,19%	43,04%	36,89%	43,04%	62,44%	54,89%
Utilities	50,07%	31,81%	45,25%	43,23%	42,84%	32,96%	39,74%	35,09%	44,28%	54,89%	74,46%

Abbildung 15: Mittlere Empirische Korrelation der täglichen Aktienkurse für S&P 500 Index Unternehmen pro GICS Sektor im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2013 bis 31.12.2017 nach der Wirtschaftskrise

	Basic Materials	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Real Estate	Technology	Tele-communications	Utilities
Basic Materials	43,84%	37,33%	30,57%	40,75%	43,53%	27,70%	39,88%	39,31%	38,91%	34,51%	37,09%
Consumer Discretionary	37,33%	37,29%	31,41%	34,98%	40,27%	29,32%	37,97%	36,74%	36,61%	33,81%	34,08%
Consumer Staples	30,57%	31,41%	28,17%	28,19%	36,52%	24,41%	33,81%	29,42%	28,35%	26,43%	29,38%
Energy	40,75%	34,98%	28,19%	42,35%	42,92%	25,16%	38,14%	36,13%	35,04%	31,42%	37,25%
Financials	43,53%	40,27%	36,52%	42,92%	46,85%	34,43%	40,94%	43,97%	43,02%	41,58%	42,03%
Health Care	27,70%	29,32%	24,41%	25,16%	34,43%	24,57%	32,23%	26,12%	26,67%	24,29%	25,71%
Industrials	39,88%	37,97%	33,81%	38,14%	40,94%	34,43%	40,94%	43,97%	43,02%	41,58%	42,03%
Real Estate	39,31%	36,74%	29,42%	36,13%	43,97%	26,12%	38,66%	45,28%	36,85%	32,58%	36,51%
Technology	38,91%	36,61%	28,35%	35,04%	43,02%	26,67%	38,70%	36,85%	39,03%	31,90%	33,95%
Tele-communications	34,51%	33,81%	26,43%	31,42%	41,58%	24,29%	36,45%	32,58%	31,90%	31,46%	32,73%
Utilities	37,09%	34,08%	29,38%	37,25%	42,03%	25,71%	36,92%	36,51%	33,95%	32,73%	41,30%

Abbildung 16: Mittlere Empirische Korrelation der wöchentlichen Aktienkurse für STOXX 600 Europe Index Unternehmen pro ICB Industry im Gesamtbeobachtungszeitraum von 01.01.2003 bis 31.12.2017

	Basic Materials	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Real Estate	Technology	Tele-communications	Utilities
Basic Materials	33,33%	29,86%	23,51%	31,68%	38,83%	23,22%	31,23%	28,43%	31,10%	28,37%	27,16%
Consumer Discretionary	29,86%	30,60%	25,29%	28,13%	35,93%	24,98%	30,27%	27,80%	30,29%	28,62%	27,03%
Consumer Staples	23,51%	25,29%	20,48%	21,24%	33,38%	18,93%	26,62%	20,72%	21,94%	20,38%	20,92%
Energy	31,68%	28,13%	21,24%	35,74%	38,23%	20,72%	29,94%	26,38%	28,45%	25,79%	27,42%
Financials	38,83%	35,93%	33,38%	38,23%	43,28%	32,74%	35,38%	37,73%	39,45%	38,98%	37,29%
Health Care	23,22%	24,98%	18,93%	20,72%	32,74%	19,47%	26,36%	19,84%	22,26%	20,26%	19,59%
Industrials	31,23%	30,27%	26,62%	29,94%	35,38%	26,36%	31,47%	29,47%	30,85%	29,55%	28,49%
Real Estate	28,43%	27,80%	20,72%	26,38%	37,73%	19,84%	29,47%	31,57%	25,97%	24,32%	25,16%
Technology	31,10%	30,29%	21,94%	28,45%	39,45%	22,26%	30,85%	25,97%	34,08%	29,34%	24,95%
Tele-communications	28,37%	28,62%	20,38%	25,79%	38,98%	20,26%	29,55%	24,32%	29,34%	29,89%	24,77%
Utilities	27,16%	27,03%	20,92%	27,42%	37,29%	19,59%	28,49%	25,16%	24,95%	24,77%	29,57%

Abbildung 17: Mittlere Empirische Korrelation der wöchentlichen Aktienkurse für STOXX 600 Europe Index Unternehmen pro ICB Industry im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2007 vor der Wirtschaftskrise

	Basic Materials	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Real Estate	Technology	Tele-communications	Utilities
Basic Materials	52,10%	43,54%	34,50%	48,47%	48,20%	30,97%	47,10%	46,41%	46,92%	39,39%	43,64%
Consumer Discretionary	43,54%	42,77%	35,22%	40,63%	44,57%	32,58%	44,42%	42,55%	42,37%	37,83%	38,76%
Consumer Staples	34,50%	35,22%	29,64%	31,66%	39,62%	26,20%	39,05%	32,04%	31,84%	27,72%	31,86%
Energy	48,47%	40,63%	31,66%	48,35%	47,21%	28,21%	44,99%	41,75%	42,42%	35,70%	43,50%
Financials	48,20%	44,57%	39,62%	47,21%	50,36%	36,89%	46,19%	48,49%	47,17%	44,30%	45,89%
Health Care	30,97%	32,58%	26,20%	28,21%	36,89%	25,75%	36,88%	28,68%	29,18%	25,47%	28,32%
Industrials	47,10%	44,42%	39,05%	44,99%	46,19%	36,88%	46,64%	45,55%	45,71%	42,07%	43,13%
Real Estate	46,41%	42,55%	32,04%	41,75%	48,49%	28,68%	45,55%	50,34%	43,48%	35,75%	40,13%
Technology	46,92%	42,37%	31,84%	42,42%	47,17%	29,18%	45,71%	43,48%	44,93%	34,95%	39,78%
Tele-communications	39,39%	37,83%	27,72%	35,70%	44,30%	25,47%	42,07%	35,75%	34,95%	31,61%	35,97%
Utilities	43,64%	38,76%	31,86%	43,50%	45,89%	28,32%	43,13%	40,13%	39,78%	35,97%	45,85%

Abbildung 18: Mittlere Empirische Korrelation der wöchentlichen Aktienkurse für STOXX 600 Europe Index Unternehmen pro ICB Industry im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2008 bis 31.12.2012 während der Wirtschaftskrise

	Basic Materials	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Real Estate	Technology	Tele-communications	Utilities
Basic Materials	37,77%	31,88%	30,29%	35,65%	41,25%	27,25%	35,39%	35,68%	31,91%	31,68%	32,32%
Consumer Discretionary	31,88%	32,50%	30,10%	30,56%	37,24%	27,94%	33,36%	33,37%	31,46%	30,80%	30,30%
Consumer Staples	30,29%	30,10%	34,40%	29,69%	36,02%	28,16%	31,97%	34,38%	29,49%	31,20%	31,67%
Energy	35,65%	30,56%	29,69%	39,61%	41,74%	25,75%	34,36%	35,73%	29,55%	30,70%	33,50%
Financials	41,25%	37,24%	36,02%	41,74%	46,64%	34,36%	38,25%	43,10%	40,99%	41,71%	40,78%
Health Care	27,25%	27,94%	28,16%	25,75%	29,05%	29,05%	30,64%	29,97%	27,91%	27,40%	26,78%
Industrials	35,39%	33,36%	31,97%	34,36%	38,25%	30,64%	35,83%	35,29%	34,27%	33,65%	33,45%
Real Estate	35,68%	33,37%	34,38%	35,73%	43,10%	29,97%	35,29%	50,26%	35,86%	36,08%	35,52%
Technology	31,91%	31,46%	29,49%	29,55%	40,99%	27,91%	34,27%	35,86%	32,92%	29,11%	30,13%
Tele-communications	31,68%	30,80%	31,20%	30,70%	41,71%	27,40%	33,65%	36,08%	29,11%	34,11%	33,19%
Utilities	32,32%	30,30%	31,67%	33,50%	40,78%	26,78%	33,45%	38,52%	30,13%	33,19%	38,89%

Abbildung 19: Mittlere Empirische Korrelation der wöchentlichen Aktienkurse für STOXX 600 Europe Index Unternehmen pro ICB Industry im Beobachtungszeitraum von 01.01.2013 bis 31.12.2017 nach der Wirtschaftskrise

	Communication Services	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Information Technology	Materials	Real Estate	Utilities
Communication Services	36,07%	37,73%	36,13%	51,38%	51,48%	33,96%	48,24%	40,12%	39,21%	53,66%	51,58%
Consumer Discretionary	37,73%	40,22%	35,44%	40,01%	45,72%	33,42%	44,37%	38,19%	39,34%	44,60%	39,09%
Consumer Staples	36,13%	35,44%	39,47%	40,03%	44,15%	33,11%	42,86%	36,16%	36,81%	43,46%	44,87%
Energy	51,38%	40,01%	40,03%	70,03%	50,92%	36,41%	50,65%	41,48%	52,48%	53,61%	52,75%
Financials	51,48%	45,72%	44,15%	50,92%	57,29%	40,28%	50,80%	44,78%	51,14%	55,43%	48,07%
Health Care	33,96%	33,42%	33,11%	36,41%	40,28%	35,29%	39,73%	35,10%	34,91%	37,09%	36,42%
Industrials	48,24%	44,37%	42,86%	50,65%	50,80%	39,73%	52,26%	44,52%	49,50%	50,50%	47,36%
Information Technology	40,12%	38,19%	36,16%	41,48%	44,78%	35,10%	44,52%	42,13%	40,66%	42,74%	39,53%
Materials	39,21%	39,34%	36,81%	52,48%	51,14%	34,91%	49,50%	40,66%	44,97%	52,45%	48,06%
Real Estate	53,66%	44,60%	43,46%	53,61%	55,43%	37,09%	50,50%	42,74%	52,45%	71,59%	55,63%
Utilities	51,58%	39,09%	44,87%	52,75%	48,07%	36,42%	47,36%	39,53%	48,06%	55,63%	69,61%

Abbildung 20: Mittlere Korrelation der täglichen impliziten Assetreturns unter Berücksichtigung von Survivorship Bias für die S&P 500 Index Unternehmen pro GICS Sektor im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

	Basic Materials	Consumer Discretionary	Consumer Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Real Estate	Technology	Telecommunications	Utilities
Basic Materials	43,27%	36,69%	31,46%	40,73%	44,02%	28,00%	40,15%	40,09%	38,38%	35,15%	37,19%
Consumer Discretionary	36,69%	36,75%	31,88%	34,70%	40,16%	29,51%	38,05%	36,80%	36,14%	34,04%	34,02%
Consumer Staples	31,46%	31,88%	30,85%	29,45%	37,09%	25,93%	34,80%	31,94%	29,67%	28,53%	30,89%
Energy	40,73%	34,70%	29,45%	42,41%	43,70%	25,60%	38,83%	38,06%	35,05%	31,89%	37,42%
Financials	44,02%	40,16%	37,09%	43,70%	48,08%	34,36%	41,75%	45,30%	43,53%	42,72%	42,91%
Health Care	28,00%	29,51%	25,93%	25,60%	34,36%	25,76%	32,89%	27,70%	27,25%	25,28%	26,09%
Industrials	40,15%	38,05%	34,80%	38,83%	41,75%	32,89%	40,36%	39,65%	39,15%	37,51%	37,77%
Real Estate	40,09%	36,80%	31,94%	38,06%	45,30%	27,70%	39,65%	48,96%	38,11%	35,32%	38,78%
Technology	38,38%	36,14%	29,67%	35,05%	43,53%	27,25%	39,15%	38,11%	38,70%	32,36%	34,01%
Telecommunications	35,15%	34,04%	28,53%	31,89%	42,72%	25,28%	37,51%	35,32%	32,36%	32,24%	33,02%
Utilities	37,19%	34,02%	30,89%	37,42%	42,91%	26,09%	37,77%	38,78%	34,01%	33,02%	42,46%

Abbildung 21: Mittlere Korrelation der wöchentlichen impliziten Assetreturns unter Berücksichtigung von Survivorship Bias für die STOXX 600 Europe Index Unternehmen pro ICB Industry im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

	Communication			Consumer			Information				
	Services	Discretionary	Staples	Energy	Financials	Health Care	Industrials	Technology	Materials	Real Estate	Utilities
Communication Services	35,28%	36,22%	37,16%	56,31%	50,80%	31,46%	45,55%	36,70%	38,24%	61,70%	55,50%
Consumer Discretionary	36,22%	36,55%	36,88%	46,80%	45,95%	32,92%	42,54%	36,59%	37,50%	49,66%	46,53%
Consumer Staples	37,16%	36,88%	38,05%	49,86%	47,82%	32,94%	43,88%	37,10%	38,59%	53,31%	49,46%
Energy	56,31%	46,80%	49,86%	67,31%	58,15%	40,35%	53,31%	45,44%	54,96%	71,18%	66,20%
Financials	50,80%	45,95%	47,82%	58,15%	54,42%	41,25%	50,69%	45,01%	50,51%	60,63%	57,67%
Health Care	31,46%	32,92%	32,94%	40,35%	41,25%	30,87%	38,47%	33,49%	32,82%	42,65%	40,23%
Industrials	45,55%	42,54%	43,88%	53,31%	50,69%	38,47%	47,87%	42,02%	45,75%	55,71%	52,93%
Information Technology	36,70%	36,59%	37,10%	45,44%	45,01%	33,49%	42,02%	37,09%	37,69%	47,83%	45,22%
Materials	38,24%	37,50%	38,59%	54,96%	50,51%	32,82%	45,75%	37,69%	40,14%	59,48%	54,30%
Real Estate	61,70%	49,66%	53,31%	71,18%	60,63%	42,65%	55,71%	47,83%	59,48%	75,13%	70,03%
Utilities	55,50%	46,53%	49,46%	66,20%	57,67%	40,23%	52,93%	45,22%	54,30%	70,03%	65,58%

Abbildung 22: Mittlere Asset Korrelationen pro Industriegruppe im Random Effects Model für S&P 500 Index Unternehmen pro GICS Sektor im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

	Consumer		Consumer Staples		Energy	Financials	Health Care	Industrials	Real Estate	Technology	Tele-communications		Utilities
	Discretionary	Staples	Discretionary	Staples							Tele-communications	Utilities	
Basic Materials	34,46%	33,75%	32,18%	32,86%	41,69%	26,81%	36,72%	38,69%	34,38%	31,52%	35,68%		
Consumer Discretionary	33,75%	33,92%	32,48%	33,07%	38,58%	29,01%	35,47%	36,02%	33,82%	32,43%	34,46%		
Consumer Staples	32,18%	32,48%	30,92%	30,51%	39,73%	25,74%	35,50%	35,73%	32,02%	29,28%	32,94%		
Energy	32,86%	33,07%	30,51%	30,35%	42,09%	24,56%	36,51%	38,30%	32,67%	28,39%	34,14%		
Financials	41,69%	38,58%	39,73%	42,09%	45,58%	34,92%	40,20%	45,27%	42,45%	41,52%	43,82%		
Health Care	26,81%	29,01%	25,74%	24,56%	34,92%	22,81%	32,24%	28,86%	26,15%	23,46%	26,36%		
Industrials	36,72%	35,47%	35,50%	36,51%	40,20%	32,24%	37,81%	38,83%	36,97%	36,05%	37,66%		
Real Estate	38,69%	36,02%	35,73%	38,30%	45,27%	28,86%	38,83%	45,52%	39,57%	36,84%	42,05%		
Technology	34,38%	33,82%	32,02%	32,67%	42,45%	26,15%	36,97%	39,57%	34,57%	31,05%	36,04%		
Tele-communications	31,52%	32,43%	29,28%	28,39%	41,52%	23,46%	36,05%	36,84%	31,05%	26,32%	32,32%		
Utilities	35,68%	34,46%	32,94%	34,14%	43,82%	26,36%	37,66%	42,05%	36,04%	32,32%	38,37%		

Abbildung 23: Mittlere Asset Korrelationen pro Industriegruppe im Random Effects Model für STOXX 600 Europe Index Unternehmen pro ICB Industrie im Beobachtungszeitraum vom 01.01.2003 bis 31.12.2017

Literatur

- [1] European Banking Authority. Guidelines on the application of the definition of default under article 178 of regulation (eu) no 575/2013, 9 2016. Available from <https://eba.europa.eu/documents/10180/1597103/Final+Report+on+Guidelines+on+default+definition+%28EBA-GL-2016-07%29.pdf>.
- [2] Louis K.C. Chan, Josef Lakonishok, and Bhaskaran Swaminathan. Industry classifications and return comovements. *Financial Analysts Journal*, 63(6):56–70, 2007.
- [3] Peter Crosbie and Jeff Bohn. Modeling default risk. Moody’s KMV Company, 2003.
- [4] Klaus Düllmann, Jonathan Küll, and Michael Kunisch. Estimating asset correlations from stock prices or default rates — which method is superior? *Journal of Economic Dynamics & Control*, 34(11):2341–2357, 2010.
- [5] Jin-Chuan Duan. Maximum likelihood estimation using price data of the derivative contract. *Mathematical Finance*, 4:155 – 167, 1994.
- [6] Jin-Chuan Duan, Geneviève Gauthier, Jean-Guy Simonato, and Sophia Zaanoun. Estimating merton’s model by maximum likelihood with survivorship consideration. *University of Toronto Working Paper*, 2003.
- [7] Eugene F. Fama and Kenneth R. French. Industry costs of equity. *Journal of Financial Economics*, 43(2):153 – 193, 1997.
- [8] FTSE Russell. Industry Classification Benchmark(ICB), 2019. Available from: https://content.ftserussell.com/sites/default/files/support_document/icb_methodology_overview_effective_july-01-2019.pdf.
- [9] Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*. Springer, New York, 2004.
- [10] Michael B. Gordy. A comparative anatomy of credit risk models. Board of Governors of the Federal Reserve System, 1998.
- [11] Michael B. Gordy. A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules. *Journal of Financial Intermediation*, 12(3):199–232, 2003.
- [12] Cheng Hsiao. *Analysis of Panel Data*. Econometric Society Monographs. Cambridge University Press, 2 edition, 2003.
- [13] Morgan Stanley Capital International. GICS structure and & sub-industry definitions. Available from: https://www.msci.com/documents/1296102/11185224/GICS_map+2018.xlsx.
- [14] Christian Kahl and Peter Jäckel. Fast strong approximation Monte Carlo schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 6(6):513–536, 2006.
- [15] Tomas Klietnik, Maria Misankova, and Katarina Kocisova. Calculation of distance to default. *Procedia Economics and Finance*, 23:238 – 243, 2015.

- [16] Peter E. Kloeden and Eckhard Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlin, 1992.
- [17] Eva Lütkebohmert. *Concentration Risk in Credit Portfolios*. EAA Series. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [18] Robert C. Merton. On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 29(2):449–470, 1974.
- [19] Parimal Mukhopadhyay. *Multivariate Statistical Analysis*. WORLD SCIENTIFIC, 2008.
- [20] Executive Office of the President Office of Management and Budget. North american industry classification system. United States, 2017. Available from: https://www.census.gov/eos/www/naics/2017NAICS/2017_NAICS_Manual.pdf.
- [21] Basel Committee on Banking Supervision. An explanatory note on the Basel II IRB risk weight functions, July 2005. Available from www.bis.org/bcbs/.
- [22] Basel Committee on Banking Supervision. High-level summary of Basel III reforms, 2017. Available from www.bis.org/bcbs/.
- [23] Alan Pitts. Correlated defaults: Let’s go back to the data. *Risk Magazine*, 17 (6):75–79, 2004.
- [24] Thomson Reuters. Thomson reuters business classification methodology, Updated January 2012. Available from: www.refinitiv.com/content/dam/marketing/en_us/documents/methodology/trbc-business-classification-methodology.pdf.