



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN



AUTOMATION & CONTROL INSTITUTE  
INSTITUT FÜR AUTOMATISIERUNGS-  
& REGELUNGSTECHNIK

# Regelung von Systemen mit signifikanter Totzeit

## DIPLOMARBEIT

Ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplom-Ingenieurs (Dipl.-Ing.)

unter der Leitung von

Univ.-Prof. Dr. techn. A. Kugi  
Assistant Prof. Dr. techn. A. Steinböck  
Dipl.-Ing. L. Marko

eingereicht an der

Technischen Universität Wien  
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

von

Stritzinger Wolfgang  
Matrikelnummer 1127529  
Gombrichgasse 4/44  
1100 Wien  
Österreich

Wien, im Oktober 2019



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Vorwort

Die vorliegende Diplomarbeit zum Thema "Regelung von Systemen mit signifikanter Totzeit" entstand im Rahmen meines Masterstudiums der Energie- und Automatisierungstechnik in der Gruppe für Komplexe Systeme (CDS) des Instituts für Automatisierungs- und Regelungstechnik der Technischen Universität Wien.

In den folgenden Zeilen möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Diplomarbeit unterstützt und motiviert haben.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Univ.-Prof. Dr.techn Andreas Kugi, Herrn Dr.techn Andreas Steinböck und Herrn Dipl.-Ing Lukas Marko für die Betreuung dieser Arbeit. Für die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Außerdem bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Ing Markus Gurtner und Herrn Dipl.-Ing Amadeus Lobe für das Korrekturlesen und die vielen interessanten Debatten, die maßgeblich zu dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Eltern und meiner Freundin Lisa bedanken, die mich während meines gesamten Studiums unterstützt haben und mir immer wieder Kraft und Zuversicht zum Abschluss dieser Arbeit gaben.

Wien, im Oktober 2019



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Abstract

This thesis examines control for deadtime dominant systems with negligible dynamics. To this end, different model based controller schemes are modified in order to suit the desired system type. Simulations in MATLAB/SIMULINK indicate that all investigated controllers are sensitive to errors in the expected deadtime as well as in the model parameters.

Hence, multiple deadtime and parameter estimators are investigated to increase the performance and stability of the controllers in view of the parameter uncertainties. Different deadtime and parameter estimators from the literature are adjusted for the desired system type. Furthermore, a recursive least squares estimator and an Kalman filter are developed and favorably benchmarked against the established estimators.

To avoid divergence of the recursive least squares estimator several methods are tested in simulation. It is shown that the variable forgetting factors fulfil the requirements of high performance in the presence of estimation errors and exhibit stability over long times, even in the case of small excitations.

The developed estimators are validated using data of a continuous hot dip galvanizing line. It is demonstrated that the estimation error can be decreased by the least squares estimator strategy and the Kalman filter. Furthermore, the estimated parameters converge to the parameters of the offline identification.

Due to their robust performance, the developed estimators are applied to an adaptive controller structure. An adaptive Smith predictor and an adaptive model based controller are implemented. Simulations show that the adaptive controllers lead to a lower quadratic output error when uncertainties in the parameters or deadtime are present while the behavior with nominal parameters remains undisturbed.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Kurzzusammenfassung

Diese Diplomarbeit untersucht modellbasierte Regelungen für Totzeit dominierte Systeme mit vernachlässigbarer Dynamik. Zu diesem Zweck werden verschiedene modellbasierte Regelungsentwürfe modifiziert, um auf die untersuchte Systemklasse zu passen. Simulationen in MATLAB/SIMULINK weisen darauf hin, dass alle untersuchten Regelungen empfindlich bezüglich Fehler in der erwarteten Totzeit und in den Modellparametern sind.

Mehrere Totzeit- und Parameterschätzer werden untersucht, um die Güte und Stabilität der Regelungen beim Auftreten von Parameterunsicherheiten zu erhöhen. Verschiedene Totzeit- und Parameterschätzer aus der Literatur werden an die untersuchte Systemklasse angepasst. Darüber hinaus werden Schätzer basierend auf dem rekursiven Least-Squares Verfahren und dem Kalman-Filter entwickelt und vorteilhaft mit den publizierten Schätzern verglichen.

Um Divergenz des entwickelten rekursiven Least-Squares Schätzers zu verhindern, wurden mehrere Methoden in Simulationen getestet. Es wird gezeigt, dass variable Vergessensfaktoren die Ansprüche auf hohe Güte trotz Schätzfehlern und auf Stabilität über lange Zeiträume sogar bei geringer Anregung erfüllen.

Die entwickelten Schätzer werden unter der Verwendung von Daten einer kontinuierlichen Feuerverzinkungsanlage validiert. Es wird gezeigt, dass Schätzfehler durch den entwickelten Least-Squares Schätzer und den Kalman-Filter verringert werden. Darüber hinaus konvergieren die geschätzten Parameter gegen die Parameter der Offline-Schätzung.

Aufgrund ihrer Robustheit werden die entwickelten Schätzer in adaptiven Regelungsstrukturen angewandt. Ein adaptiver Smith-Prädiktor und eine adaptive modellprädiktive Regelung werden implementiert. Simulationen zeigen, dass adaptive Regelungen zu einem geringen quadratischen Ausgangsfehler bei Auftreten von Unsicherheiten in den Parametern und der Totzeit führen, ohne das Verhalten der Regelungen mit nominellen Parametern zu verschlechtern.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Gliederung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Systeme mit Totzeit</b>	<b>5</b>
2.1	Eingangs- und Ausgangstotzeit . . . . .	5
2.2	Systeme mit dominanter Totzeit . . . . .	6
2.3	Transportgleichung . . . . .	7
2.4	Notation . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Regelung von Systemen mit dominanter Totzeit</b>	<b>9</b>
3.1	Literaturüberblick . . . . .	9
3.2	Smith-Prädiktor . . . . .	10
3.2.1	Gefilterter Smith-Prädiktor . . . . .	14
3.2.2	Vorsteuerung durch Modellinversion . . . . .	16
3.3	Kompensation von Modellfehlern . . . . .	17
3.4	Modellprädiktive Regelung . . . . .	18
3.4.1	MPC für Systeme mit Totzeit . . . . .	20
3.4.2	Offset-freie MPC . . . . .	22
3.5	Simulationsergebnisse . . . . .	23
3.5.1	Nominales Verhalten . . . . .	23
3.5.2	Störverhalten . . . . .	24
3.5.3	Unsicherheiten in den Parametern von $\hat{g}(u)$ . . . . .	25
3.5.4	Parameterunsicherheiten der Totzeit . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Online Parameterschätzer für Systeme mit dominanter Totzeit</b>	<b>31</b>
4.1	Grundlegende Betrachtungen . . . . .	32
4.2	Padé-Approximation . . . . .	34
4.3	Modifizierte normalisierte lineare Least-Squares Identifikation . . . . .	34
4.4	Endlich zeitliche Parameteridentifikation . . . . .	36
4.5	Verteilt verzögert gewichtete rekursive Least-Squares Identifikation . . . . .	38
4.5.1	Interpolation für eine lineare Funktion . . . . .	40
4.5.2	Linear unabhängige Anregung des Schätzers . . . . .	42
4.6	Verteilt verzögert gewichteter Kalman-Filter . . . . .	43
4.7	Simulationsergebnisse . . . . .	44
4.7.1	Schwankungen von $g(u)$ . . . . .	45
4.7.2	Schwankungen in der Totzeit . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Divergenz des rekursiven Least-Squares Schätzers</b>	<b>55</b>
5.1	Auftreten der Divergenz . . . . .	55

5.2	Vermeidung der Divergenz . . . . .	56
5.2.1	Singulärwertzerlegung der $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$ -Matrix . . . . .	56
5.2.2	Erhalten der Nichtnegativität von $\mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k$ . . . . .	58
5.2.3	Beschränkung der Spur von $\mathbf{P}_k$ . . . . .	59
5.2.4	Variabler Vergessensfaktor . . . . .	59
5.3	Simulationsergebnisse . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Kontinuierliche Feuerverzinkung</b>	<b>63</b>
6.1	Aufbau und Funktion . . . . .	63
6.2	Aufbereitung der Messdaten . . . . .	64
6.3	Anpassung des GRLS und GKF . . . . .	67
6.4	Vorgesteuerter rekursiver Least-Squares Schätzer . . . . .	70
6.5	Offline-Identifikation . . . . .	70
6.6	Online-Schätzung . . . . .	74
<b>7</b>	<b>Adaptive Regelung für Totzeitsysteme mit vernachlässigbarer Dynamik</b>	<b>83</b>
7.1	Adaptiver Smith-Prädiktor . . . . .	83
7.2	Adaptive modellbasierte Regelung . . . . .	85
7.3	Simulationsergebnisse . . . . .	86
7.3.1	Nominelles Verhalten . . . . .	87
7.3.2	Parameterschwankungen in $g(u)$ . . . . .	88
7.3.3	Schwankungen in der Totzeit . . . . .	91
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>95</b>
<b>A</b>	<b>Ununterscheidbarkeit durch linear abhängige Anregung</b>	<b>97</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Nichtlineares System mit Ausgangstotzeit. . . . .	5
3.1	Smith-Prädiktor für statische Abbildungen mit Totzeit. . . . .	11
3.2	Innerer und äußerer Kreis des Smith-Prädiktors für statische Abbildungen mit Totzeit. . . . .	12
3.3	Verhalten des Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in $g(u)$ . . .	13
3.4	Verhalten des Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in der Totzeit.	15
3.5	Gefilterter Smith-Prädiktor für statische Abbildungen mit Totzeit. . . . .	15
3.6	Vergleich zwischen SP und FSP bei Schwankungen in der Totzeit. . . . .	16
3.7	Smith-Prädiktor mit Vorsteuerung der inversen Ausgangsabbildung. . . . .	16
3.8	Vorsteuerung der zu erwartenden Stellgröße mit Kompensation von Modellunsicherheiten. . . . .	17
3.9	Schematische Darstellung der zeitlichen Abfolge der Zustände und der Stellgröße bei der Regelung eines Systems mit Totzeit $T_t = 4T_a$ durch einen MPC. . . . .	20
3.10	Offset-freie modellprädiktive Regelung mit externem Störschätzer. . . . .	23
3.11	Nominelles Verhalten der geschlossenen Regelkreise. . . . .	25
3.12	Störverhalten der geschlossenen Regelkreise. . . . .	26
3.13	Verhalten der geschlossenen Regelkreise bei Parameterunsicherheiten in $g(u)$ .	27
3.14	Verhalten der geschlossenen Regelkreise bei Parameterunsicherheiten in $T_t$ .	29
4.1	Schematische Darstellung des Grenzwerts der verteilt verzögert gewichteten rekursiven Least-Squares Identifikation mit der Ausgangsfunktion (4.1) für $T_t \notin M_{T_t}$ . . . . .	40
4.2	Anregung des Systems für die Schätzung der Parameter. . . . .	45
4.3	Schätzergebnis für konstantes $T_t$ und konstante aber unbekannte Parameter $a$ und $b$ . . . . .	47
4.4	Schätzergebnis mit angepasster Anregung für konstantes $T_t$ und konstante aber unbekannte Parameter $a$ und $b$ . . . . .	49
4.5	Schätzergebnis für konstantes $T_t$ , konstantes $b$ sowie veränderliches unbekanntes $a$ . . . . .	50
4.6	Schätzergebnis für konstantes und bekanntes $a$ und $b$ sowie konstantes unbekanntes $T_t$ . . . . .	52
4.7	Schätzergebnis für konstantes und bekanntes $a$ und $b$ sowie veränderliches $T_t$ .	53
5.1	Divergenz beim GRLS. . . . .	57
5.2	Verfahren zur Vermeidung der Divergenz des GRLS. . . . .	61
6.1	Schematischer Aufbau einer Feuerverzinkungsanlage. . . . .	64

6.2	Schematische Darstellung der dynamischen Bandverfolgung. . . . .	65
6.3	Schematische Darstellung der Aufteilung und Mittelung entlang des Bands.	66
6.4	3D-Plot der aufbereiteten Messdaten $w_{s,o}$ in Abhängigkeit von $\bar{v}$ , $\bar{d}_{s,o}$ und $\bar{p}$ .	67
6.5	Simulationsergebnisse für die Offline-Identifikation für Datensatz A für $N_x = 8$ . . . . .	72
6.6	Simulationsergebnisse für die Offline-Identifikation für Datensatz B für $N_x = 8$ . . . . .	73
6.7	Simulationsergebnisse für die Offline-Identifikation für Datensatz A für $N_x = 16$ . . . . .	75
6.8	Simulationsergebnisse für die Offline-Identifikation für Datensatz B für $N_x = 16$ . . . . .	76
6.9	Ergebnisse für die Online-Schätzungen des Zinkbelags der Oberseite für Datensatz A. . . . .	79
6.10	Ergebnisse für die Online-Schätzungen des Zinkbelags der Unterseite für Datensatz A. . . . .	80
6.11	Ergebnisse für die Online-Schätzungen des Zinkbelags der Oberseite für Datensatz B. . . . .	81
6.12	Ergebnisse für die Online-Schätzungen des Zinkbelags der Unterseite für Datensatz B. . . . .	82
7.1	Adaptiver Smith-Prädiktor. . . . .	84
7.2	Adaptive modellbasierte Regelung. . . . .	85
7.3	Sollwertverlauf für die adaptiven Regelungen. . . . .	87
7.4	Nominales Verhalten der adaptiven Regelungen. . . . .	88
7.5	Verhalten der adaptiven Regelungen bei Parameterunsicherheiten in $g(u)$ .	90
7.6	Verhalten der adaptiven Regelungen bei Parameterunsicherheiten in $T_t$ . .	93
A.1	Beispiel für die Ausgangsununterscheidbarkeit für eine lineare Funktion mit sinusförmiger Anregung. . . . .	98

# Tabellenverzeichnis

3.1	Regler-/Simulationparameter für das Verhalten des klassischen Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in $g(u)$ . . . . .	13
3.2	Streckenparameter für das Verhalten des klassischen Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in $g(u)$ . . . . .	13
3.3	Streckenparameter für das Verhalten des klassischen Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in $T_t$ . . . . .	14
3.4	Regler-/Simulationsparameter für die in Kapitel 3 vorgestellten Regelungen.	24
3.5	Streckenparameter für das nominelle Verhalten der Regelungen. . . . .	24
3.6	Quadratischer Ausgangsfehler bei nominellen Parameterwerten. . . . .	24
3.7	Quadratischer Ausgangsfehler zufolge einer rampenförmigen Störung. . . . .	25
3.8	Streckenparameter mit Unsicherheiten in $\hat{g}(u)$ . . . . .	26
3.9	Quadratischer Ausgangsfehler durch Parameterschwankung in $g(u)$ . . . . .	27
3.10	Streckenparameter mit Unsicherheiten in der Totzeit. . . . .	28
3.11	Quadratischer Ausgangsfehler durch Parameterschwankung in $T_t$ . . . . .	28
4.1	Simulationsparameter für die vorgestellten Identifikationsverfahren. . . . .	45
4.2	Streckenparameter für die Parameteridentifikation mit konstantem und unbekanntem $a$ und $b$ . . . . .	46
4.3	Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer für konstantes $T_t$ sowie konstantes und unbekanntes $a$ und $b$ . . . . .	46
4.4	Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer mit angepasster Anregung für konstantes $T_t$ sowie konstantes und unbekanntes $a$ und $b$ . . . . .	48
4.5	Streckenparameter für die vorgestellten Identifikationsverfahren bei konstantem $T_t$ , konstantem und unbekanntem $b$ und veränderlichem $a$ . . . . .	48
4.6	Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer bei konstantem $T_t$ , konstantem und unbekanntem $b$ und veränderlichem $a$ . . . . .	48
4.7	Streckenparameter für die Parameteridentifikation mit konstantem aber unbekanntem $T_t$ . . . . .	51
4.8	Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer für konstantes und bekanntes $a$ und $b$ sowie konstantes und unbekanntes $T_t$ . . . . .	51
4.9	Streckenparameter für die Parameteridentifikation bei unbekanntem und veränderlichem $T_t$ . . . . .	52
4.10	Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer für konstantes und bekanntes $a$ und $b$ sowie veränderliches $T_t$ . . . . .	53
5.1	Simulationsparameter für die Darstellung der möglichen Divergenz beim GRLS. . . . .	56
5.2	Quadratischer Parameterfehler des GRLS. . . . .	60

5.3	Simulationsparameter zur Unterdrückung der Divergenz des GRLS. . . . .	62
6.1	Offline identifizierte Streckenparameter für Datensatz A für $N_x = 8$ . . . . .	74
6.2	Offline identifizierte Streckenparameter für Datensatz B für $N_x = 8$ . . . . .	74
6.3	Offline identifizierte Streckenparameter für die Datensätze A und B für $N_x = 16$ . . . . .	77
6.4	Integrale quadratische Fehler der vorgestellten Schätzer. . . . .	77
6.5	Simulationsparameter für die Online-Schätzungen. . . . .	78
7.1	Regler-/Simulationsparameter für die in Kapitel 7 vorgestellten adaptiven Regelungen. . . . .	87
7.2	Streckenparameter zur Untersuchung des nominellen Verhaltens der adaptiven Regelungen. . . . .	88
7.3	Quadratischer Ausgangsfehler der adaptiven Regelungen im nominellen Fall. . . . .	89
7.4	Streckenparameter zur Untersuchung des Verhaltens der adaptiven Regelungen bei Parameterschwankungen in $\hat{g}(u)$ . . . . .	89
7.5	Quadratische Ausgangsfehler der adaptiven Regelungen bei Parameterschwankungen in $g(u)$ . . . . .	89
7.6	Streckenparameter der adaptiven Regelungen mit Unsicherheiten in $\hat{T}_t$ . . . . .	91
7.7	Quadratischer Ausgangsfehler der adaptiven Regelungen bei Schwankungen von $T_t$ . . . . .	92
A.1	Parameter und Ergebnisse für die Darstellung der Ausgangsununterscheidbarkeit für eine lineare Funktion mit sinusförmiger Anregung. . . . .	98

# Abkürzungsverzeichnis

**AMC** adaptive modellbasierte Regelung

**ASP** adaptiver Smith-Prädiktor

**FSP** gefilterter Smith-Prädiktor

**FTPI** endlich zeitliche Parameteridentifikation

**GKF** verteilt verzögert gewichteter Kalman-Filter

**GRLS** verteilt verzögert gewichtete rekursive Least-Squares Schätzer

**LS** Least-Squares Schätzer

**MPC** modellprädiktive Regelung

**NLS** modifizierter normalisierter linearer Least-Square Schätzer

**OFMPC** Offset-freie modellprädiktive Regelung

**RLS** rekursiver Least-Squares Schätzer

**SGKVS** Störgrößenkompensation mit Vorsteuerung

**SP** Smith-Prädiktor

**SPVS** Smith-Prädiktor mit Vorsteuerung

**VRLS** vorgesteuerter rekursiver Least-Squares Schätzer



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

# 1 Einleitung

Totzeiten treten in vielen technischen Anwendungen durch Transportprozesse, Signallaufzeiten oder Rechenzeiten auf. Oft sind die in der Praxis auftretenden Totzeiten jedoch so klein, dass sie beim Reglerentwurf vernachlässigt oder indirekt durch eine höhere Phasenreserve beim Reglerentwurf berücksichtigt werden können. Es gibt jedoch auch eine Vielzahl von Systemen, in denen die Totzeit explizit mitberücksichtigt werden muss. Beispiele für Systeme dieser Art reichen von Feuerverzinkungsanlagen und Walzanlagen in der Stahlindustrie über Verbrennungsmotoren bis hin zu Verkehrssystemen. Für die Regelung solcher Systeme werden üblicherweise modellprädiktive Regelstrukturen eingesetzt. Diese präzisieren die zu erwartende Systemantwort auf Basis eines internen Modells der Strecke. Dadurch ist es möglich, das zukünftige Systemverhalten zu schätzen und entsprechend vorzusteuern. Bei bekanntem zeitlichen Verlauf der Führungsgröße kann durch diese Vorsteuerung die Verzögerung im Führungsverhalten des Regelkreises kompensiert werden. Für Systeme mit variabler und/oder unbekannter Totzeit erweist sich dies als eine sehr schwierige und regelungstechnisch interessante Aufgabenstellung, die im Rahmen dieser Arbeit genauer untersucht wird.

Bevor Regler und Parameterschätzer für Systeme mit Totzeit entwickelt werden, müssen einige spezielle Eigenschaften von Totzeitsystemen genauer besprochen werden. Die Regelung von Totzeitsystemen erweist sich aus den folgenden Gründen als schwierig:

- Auf eine Störung am verzögerten Ausgang des Systems kann ein Regler zwar sofort reagieren, der Regeleingriff ist allerdings erst um die Totzeit verzögert am Ausgang des Systems zu erkennen.
- Tritt eine Störung am Eingang des Systems auf, wird ihre Auswirkung um die Totzeit verzögert am Ausgang sichtbar. Erst dann kann der Regler die Störung kompensieren.
- Eine Änderung in der Stellgröße ist erst um die Totzeit verzögert am Ausgang des Systems sichtbar. Dadurch kann eine klassische Regelung einer Änderung der Sollgröße erst nach frühestens einer Totzeit folgen.

Die Verzögerung zwischen dem Systemeingang und der am Ausgang messbaren Reaktionen ist eine systeminhärente Eigenschaft und kann somit durch Regelung nicht kompensiert werden. Die verwendeten Regelstrukturen müssen daher speziell auf diese Eigenschaften angepasst werden. An dieser Stelle wird ersichtlich, warum sich modellprädiktive Regler sehr gut für die Regelung von Systemen mit Totzeit eignen. Eine Regelung auf den präzisierten verzögerungsfreien Ausgang ermöglicht es, auf in die Zukunft prädisierte Systemantworten zu reagieren. Der Prädiktionsfehler zwischen dem gemessenen Ausgang und dem geschätzten Ausgang kann darüber hinaus für das Korrigieren von Fehlern im Führungsverhalten oder zur Adaption des Prädiktionsmodells verwendet werden.

Zur Umgehung der Verzögerung zwischen der Sollgröße und der Istgröße wird in dieser Diplomarbeit angenommen, dass die Sollgröße für mindestens eine Totzeit in der Zukunft bekannt ist. Dadurch ist es möglich, eine neue, um eine Totzeit in die Zukunft verschobene, Sollgröße einzuführen. Diese neue Sollgröße wird als Vorgabe für den Regler verwendet. Die Systemantwort aufgrund der neuen Sollgröße entspricht dann bei fehlerfreier Pädiktion dem Führungsverhalten der ursprünglichen Sollgröße mit kompensierter Totzeit. Diese Vorgehensweise ist besonders vorteilhaft bei Systemen mit veränderlicher Totzeit. Durch die Kompensation der nominellen Totzeit tritt nur noch der variable Anteil im Regelfehler auf, was dessen Interpretation enorm erleichtert.

Zur Regelung von Systemen mit veränderlicher Totzeit können adaptive Regelstrukturen entwickelt werden. Um einen Schätzer für die adaptive Regelung von Totzeitsystemen mit zeitvarianten Parametern verwenden zu können, müssen folgende Anforderungen erfüllt werden:

- Die Parameter der Strecke und die Totzeit müssen gleichzeitig online geschätzt werden.
- Es muss möglich sein, langsam veränderlichen Totzeiten und Parametern zu folgen.
- Die Schätzung muss auch bei minimaler Anregung stabil bleiben.
- Darüber hinaus muss der Schätzwert gegen den wahren Parameterwert konvergieren.

Auch wenn diese Vorgaben auf den ersten Blick nicht sehr restriktiv wirken, sind in der Literatur nur sehr wenige Verfahren zu finden, die diese Vorgaben erfüllen. Dies zeigt, dass die adaptive Regelung von Totzeitsystemen sehr schwierig ist und noch keinen hohen Reifegrad aufweist.

### 1.1 Gliederung

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über die in der Diplomarbeit behandelten Kapitel und Themen gegeben. Diese Arbeit beginnt mit einer genaueren Betrachtung von Totzeitsystemen in Kapitel ???. In Kapitel 3 werden verschiedene Regelstrukturen auf Basis des Smith-Prädiktors und anderer modellprädiktiver Verfahren vorgestellt. Die entwickelten Regler werden anschließend mithilfe von Simulationen in MATLAB/SIMULINK verglichen. Zur Erweiterung der gezeigten Konzepte auf den Fall unbekannter Parameterwerte werden in Kapitel 4 Online-Parameterschätzer entwickelt. Dafür werden mehrere aus der Literatur bekannte Totzeitparameterschätzer auf das gegebene System angewandt. Weiters werden eigene Verfahren speziell für die untersuchte Systemklasse entworfen. Diese untersuchten Verfahren werden anschließend mittels Simulationen verglichen und bewertet. Kapitel 5 behandelt Divergenzprobleme bei rekursiven Least-Squares Schätzern. Dabei werden die in Kapitel 4 entwickelten Schätzer so erweitert, dass Divergenz vermieden wird. Um die industrielle Anwendbarkeit der entwickelten Schätzer zu untersuchen, wird in Kapitel 6 ein einfaches Modell des Beschichtungsprozesses in Feuerverzinkungsanlage betrachtet. Mithilfe von Messungen und Simulationen werden die Parameterschätzer und das Modell validiert. Basierend auf den in Kapitel 4 vorgestellten Schätzern werden in Kapitel 7

adaptive Reglerstrukturen entwickelt und durch Simulationen verifiziert. Abschließend gibt Kapitel 8 eine kurze Zusammenfassung über die Ergebnisse und Erkenntnisse und mögliche weitere Arbeiten werden motiviert.



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

## 2 Systeme mit Totzeit

Bevor mit der Entwicklung von Regelungen und Schätzern begonnen wird, werden noch einige grundlegende Betrachtungen von Systemen mit Totzeit durchgeführt. Zuerst wird in Abschnitt 2.1 mit einer Gegenüberstellung der Systemdarstellung von Eingrößensystemen mit Eingangs- und Ausgangstotzeit begonnen. In Abschnitt 2.2 wird eine vereinfachte Systemdarstellung für Systeme mit dominanter Totzeit formuliert. Anschließend wird in Abschnitt 2.3 eine Beschreibung der Totzeit als partielle Differentialgleichung gegeben. Abschließend wird in Abschnitt 2.4 eine einheitliche Notation zur Beschreibung von zeitversetzten Größen eingeführt. Diese Notation wird in der gesamten Diplomarbeit verwendet, um eine kompakte Schreibweise der Gleichungen zu ermöglichen.

### 2.1 Eingangs- und Ausgangstotzeit

Bei Eingrößensystemen mit Totzeit kann formal zwischen Systemen mit Eingangs- und Ausgangstotzeit unterschieden werden. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass diese Unterscheidung zwar physikalisch sinnvoll sein mag, aber immer eine äquivalente Zustandsdarstellung mit identischem Eingangs-/Ausgangsverhalten existiert.

Abbildung 2.1 zeigt ein nichtlineares Eingrößensystem (SISO) mit der Ausgangstotzeit  $T_t$ . Dieses System kann in Zustandsraumdarstellung wie folgt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.1a)$$

$$\tilde{y}(t) = h(\mathbf{x}(t), u(t)) \quad (2.1b)$$

$$y(t) = \begin{cases} \varphi_y(t) & \text{wenn } 0 \leq t < T_t \\ \tilde{y}(t - T_t) & \text{wenn } T_t \leq t \end{cases} \quad (2.1c)$$

angeschrieben werden. Dabei bezeichnet  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  den Zustandsvektor mit dem Anfangswert  $\mathbf{x}_0$ ,  $u \in \mathbb{R}$  den Eingang,  $\tilde{y} \in \mathbb{R}$  den unverzögerten Ausgang,  $y$  den um die Totzeit  $T_t$  verzögerten Ausgang und  $\varphi_y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Ausgangsanfangsfunktion der Totzeitstrecke.

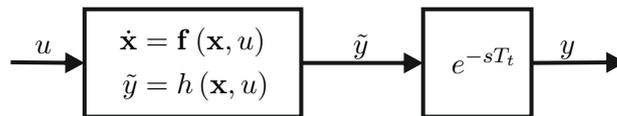


Abbildung 2.1: Nichtlineares System mit Ausgangstotzeit.

Wenn die Verzögerung am Eingang des nichtlinearen Eingrößensystems auftritt, kann dies durch ein System der Form

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \varphi_u(t) & \text{wenn } 0 \leq t < T_t \\ u(t - T_t) & \text{wenn } T_t \leq t \end{cases} \quad (2.3a)$$

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{w}(t), \bar{u}(t)), \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \quad (2.3b)$$

$$y(t) = h(\mathbf{w}(t), \bar{u}(t)) \quad (2.3c)$$

beschrieben werden. Wobei es sich bei  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  um den Zustand und bei  $\varphi_u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um die Eingangsanfangsfunktion der Totzeitstrecke handelt.

Für Eingrößensysteme kann leicht gezeigt werden, dass sich jedes System mit Eingangstotzeit bezüglich seines Eingangs-/Ausgangsverhaltens in ein äquivalentes System mit Ausgangstotzeit umschreiben lässt. Dafür wird die allgemeine Lösung von (2.3) als

$$\mathbf{w}(t) = \begin{cases} \Psi(\mathbf{w}_0, \varphi_u(t)) & \text{wenn } 0 \leq t < T_t \\ \Psi(\mathbf{w}_0, u(t - T_t)) & \text{wenn } T_t \leq t \end{cases} \quad (2.4)$$

mit der Lösungsfunktion  $\Psi$  angeschrieben. Dadurch ergibt sich die Lösung des Ausgangs zu

$$y(t) = \begin{cases} h(\Psi(\mathbf{w}_0, \varphi_u(t)), \varphi_u(t)) & \text{wenn } 0 \leq t < T_t \\ h(\Psi(\mathbf{w}_0, u(t - T_t)), u(t - T_t)) & \text{wenn } T_t \leq t. \end{cases} \quad (2.5)$$

Auf gleiche Art und Weise kann auch die Lösung für das System (2.1) zu

$$y(t) = \begin{cases} \varphi_y(t) & \text{wenn } 0 \leq t < T_t \\ h(\Psi(\mathbf{x}_0, u(t - T_t)), u(t - T_t)) & \text{wenn } T_t \leq t \end{cases} \quad (2.6)$$

bestimmt werden. Wählt man die Anfangszustände von (2.3) entsprechend

$$\varphi_y(t) = h(\Psi(\mathbf{w}_0, \varphi_u(t)), \varphi_u(t)) \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \mathbf{w}(T_t) = \Psi(\mathbf{w}_0, \varphi_u(T_t)) \quad (2.7b)$$

sind die beiden Systemdarstellungen bezüglich des Eingangs-/Ausgangsverhaltens identisch. Aus dieser Überlegung ist auch leicht ersichtlich, dass die Totzeit beliebig auf den Eingang und den Ausgang aufgeteilt werden kann und man weiterhin das identische Eingangs-/Ausgangsverhalten erhält. Für den Mehrgrößenfall ist diese Beziehung im Allgemeinen nur gültig, wenn alle Ein- bzw. Ausgänge die gleiche Zeitverzögerung aufweisen. Im Folgenden wird angenommen, dass alle untersuchten Systeme diese Eigenschaft aufweisen. Dadurch kann für alle Regelstrukturen und Schätzer beliebig entweder Ausgangstotzeit oder Eingangstotzeit gewählt werden. Eine weitere Unterscheidung zwischen Eingangs- und Ausgangstotzeit ist im Folgenden nicht mehr nötig.

## 2.2 Systeme mit dominanter Totzeit

In der Praxis treten Systeme mit langer Totzeit auf. Diese Totzeit ist oft eine oder mehrere Größenordnungen langsamer als die Dynamik des unverzögerten Systems. Solche Systeme

werden als Systeme mit dominanter Totzeit bezeichnet. Bei nichtlinearen Systemen mit dominanter Totzeit kann die Dynamik des unverzögerten Systems (2.1a) in vielen Fällen vernachlässigt werden. Dadurch vereinfacht sich das nichtlineare dynamische System mit Totzeit zu einer nichtlinearen Abbildung mit Totzeit der Form

$$y(t) = \begin{cases} \varphi_y(t) & \text{wenn } 0 \leq t < T_t \\ g(u(t - T_t)) & \text{wenn } T_t \leq t. \end{cases} \quad (2.8)$$

Bei der nichtlinearen Abbildung  $g$  handelt es sich im Allgemeinen nicht um die Ausgangsabbildung  $h$  aus (2.1) sondern um die Abbildung

$$y(t) = g(u(t - T_t)) = h(\mathbf{x}_R, u(t - T_t)) \quad (2.9)$$

mit der Ruhelage  $\mathbf{x}_R$  als Lösung der Gleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_R, u_R) \quad \text{mit } u_R = u(t - T_t). \quad (2.10)$$

In den folgenden Kapiteln werden verschiedene modellprädiktive Regler, Online-Parameterschätzer und adaptive Regler für solche Systeme entwickelt. Viele dieser Verfahren können gegebenenfalls um eine Dynamik erweitert werden.

## 2.3 Transportgleichung

Totzeitsysteme der Form (2.1) bzw. (2.3) werden durch retardierte Differentialgleichungen beschrieben. Diese Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen. Da sich das Zeitverzögerungsglied  $e^{-sT_t}$  auch als verteilt-parametrisches System der Form

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + \frac{1}{T_t} \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = 0, \quad z \in [0, 1], \quad (2.11a)$$

$$x(0, t) = \tilde{y}(t), \quad y(t) = x(1, t), \quad x(z, 0) = \varphi_y((1 - z)T_t) \quad (2.11b)$$

darstellen lässt. Hierbei handelt es sich um die klassische Transportgleichung

$$\frac{\partial x(z, t)}{\partial t} + v \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} = 0, \quad z \in [0, L], \quad (2.12a)$$

$$x(0, t) = \tilde{y}(t), \quad y(t) = x(L, t), \quad x(z, 0) = \varphi_y\left(\frac{1 - z}{v}\right) \quad (2.12b)$$

mit dem Transportweg  $L$  und der Transportgeschwindigkeit  $v$ , wobei für  $L = 1\text{m}$  und  $v = \frac{L}{T_t}$  eingesetzt wurde. Streng genommen sind Systemen mit dominanter Totzeit der Form (2.8) somit partielle Differentialgleichungen.

## 2.4 Notation

Um die Lesbarkeit der Arbeit zu verbessern und eine kompaktere Schreibweise zu ermöglichen, wird in der gesamten Diplomarbeit eine spezielle Notation verwendet. In diesem Abschnitt soll auf diese Notation kurz eingegangen werden. Viele der in den folgenden

Kapiteln vorgestellten Regelstrukturen und Parameterschätzer benötigen neben den Mess- und Schätzgrößen zum momentanen Zeitpunkt auch Messgrößen aus der Vergangenheit und Prädiktionsgrößen für die Zukunft. Alle eine nominelle bzw. geschätzte Totzeit in der Zukunft liegenden Größen sind mit einer Welle gekennzeichnet ( $\tilde{x}$ ). Alle um die nominelle bzw. geschätzte Totzeit verzögerten Größen erhalten einen Querstrich ( $\bar{x}$ ) und alle geschätzten Größen werden mit einem Dach versehen ( $\hat{x}$ ). Somit handelt es sich bei  $\bar{u}$  um den verzögerten Ausgang  $u(t - \hat{T}_t)$  und bei  $\hat{y}$  um den prädizierten Ausgang  $\hat{y}(t + \hat{T}_t)$ .

## 3 Regelung von Systemen mit dominanter Totzeit

In diesem Kapitel werden ausgewählte modellbasierte Verfahren für Totzeitsysteme näher besprochen und auf Systeme mit dominanter Totzeit angewandt. Dazu wird in Abschnitt 3.1 zunächst ein Überblick über die vorhandene Literatur zur Regelung von Totzeitsystemen gegeben. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 auf den klassischen Smith-Prädiktor und einige Varianten davon genauer eingegangen. In Abschnitt 3.3 wird eine Vorsteuerung mittels Modellinversion und Störgrößenkompensation vorgestellt. Als Alternative dazu behandelt Abschnitt 3.4 Konzepte basierend auf der modellprädiktiven Regelung. Abschließend werden die entwickelten Reglerkonzepte in Abschnitt 3.5 durch die Simulation einfacher Beispiele gegenübergestellt.

### 3.1 Literaturüberblick

Um den für die Regelung von Systemen mit Totzeit einzigartigen Anforderungen gerecht zu werden, wurden im Laufe der Jahre verschiedene Verfahren entwickelt. Die in der Literatur entwickelten Reglerstrukturen sind meist für lineare zeitinvariante Totzeitsysteme der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t - T_t) \quad (3.1a)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad (3.1b)$$

mit der Systemmatrix  $\mathbf{A}$ , dem Eingangsvektor  $\mathbf{b}$  und dem Ausgangsvektor  $\mathbf{c}$ , oder für nichtlineare Totzeitsysteme in der Form (2.3), konzipiert. Für Systeme mit dominanter Totzeit (2.8) müssen diese daher entsprechend adaptiert werden.

Einen guten Einstieg in die Regelung von Systemen mit Totzeit ermöglicht [1]. Es wird ein Überblick über vergangene Entwicklungen und offene Probleme gegeben. Dabei werden sowohl lineare als auch nichtlineare Systeme behandelt. Gängige Systemdarstellungen werden eingeführt und die Stabilität der verschiedenen Systemklassen wird kurz besprochen. Darüber hinaus wird auf eine Vielzahl bereits entwickelter Reglerkonzepte, z. B. flachheitsbasierte Vorsteuerung, passive Regler, optimale Regler und Smith-Prädiktoren für lineare und nichtlineare Totzeitsysteme und noch fehlende Konzepte verwiesen.

Bei [2] handelt es sich um eine Einführung in gängige modellprädiktive Verfahren für Totzeitsysteme. Dabei werden hauptsächlich lineare zeitinvariante verzögerte Eingrößensysteme mit und ohne Beschränkungen behandelt. Dabei wird kurz die PID-Regelung von linearen Totzeitsystemen und ihre Schwächen, vor allem für große Totzeiten, besprochen. Es wird der klassische Smith-Prädiktor eingeführt und dessen verschiedene Varianten vorgestellt. Außerdem wird die Wahl des Reglers  $R(s)$  für den Smith-Prädiktor näher

besprochen. Ein modellprädiktiver Regler für lineare Systeme wird ebenso motiviert. Abschließend werden modellprädiktive Verfahren für den Mehrgrößenfall und für lineare beschränkte Systeme entwickelt.

Eine allgemeine Betrachtung der nichtlinearen modellprädiktiven Regelung findet sich in [3]. Es werden verschiedene Varianten und Erweiterungen der diskreten nichtlinearen modellprädiktiven Regelung entwickelt. Unter anderem werden auch nicht optimale Regler oder Regler mit adaptivem Prädiktionshorizont diskutiert. Außerdem wird die Stabilität der verschiedenen Varianten der nichtlinearen modellprädiktiven Regelung untersucht. Dabei werden Bedingungen für eine geeignete Wahl der Gütefunktionen gegeben und Probleme auf Grund der numerischen Diskretisierung besprochen. Es wird ebenfalls die Implementierung eines nichtlinearen modellprädiktiven Reglers behandelt. Verzögerungen werden in diesem Buch allerdings nur in Form von Rechenverzögerungen berücksichtigt.

In [4] wird ein Verfahren zur Unterdrückung von bleibenden Regelfehlern zufolge einer Störung oder eines Modellfehlers für modellprädiktive Regler entwickelt. Dafür wird das Prädiktionsmodell um ein Störmodell erweitert. Es wird von einer konstanten Störung ausgegangen und empfohlen diese am Eingang des Systems zu modellieren. Dadurch kann oft eine bessere Güte des geschlossenen Kreises erzielt werden. Außerdem werden sowohl für den linearen als auch den nichtlinearen Fall hinreichende Bedingungen angegeben, damit der Ausgangsfehler im stationären Fall verschwindet. Dieses Verfahren wird als Offset-freie modellprädiktive Regelung bezeichnet.

In [5] werden Verfahren zur Regelung von linearen und nichtlinearen Totzeitsystemen basierend auf den Backstepping-Verfahren für verteilt-parametrische Systeme entwickelt. Dabei wird ausführlich auf Stabilität und Robustheit der entwickelten Regler eingegangen. Anhand von Beispielen und Simulationen werden die Backstepping-Regler genauer beleuchtet. Da es sich bei diesen Reglern um keine modellprädiktiven Regler im klassischen Sinn handelt und deren Betrachtung den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen würde, werden diese Verfahren allerdings nicht weiter behandelt.

## 3.2 Smith-Prädiktor

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über die Funktion und den Aufbau des klassischen Smith-Prädiktors (SP) gegeben. Weiters werden verschiedene Abwandlungen in Form des gefilterten Smith-Prädiktors, des Smith-Prädiktors mit Vorsteuerung der inversen Ausgangsabbildung und der Vorsteuerung der inversen Ausgangsabbildung mit Kompensation der Modellunsicherheiten vorgestellt.

Bei dem Smith-Prädiktor handelt es sich um eine der bekanntesten und in der Praxis am weitest verbreiteten Reglerstrukturen für Systeme mit Totzeit. Der SP wurde bereits 1959 publiziert und ist in seiner grundsätzlichen Form in Abbildung 3.1 dargestellt [6]. Das Konzept des SP ist nicht auf die Systemklasse der Systeme mit dominanter Totzeit beschränkt, sondern kann auch sehr einfach für lineare Systeme mit Totzeit [2] und für flache nichtlineare Systeme mit Totzeit [7] eingesetzt werden. Die grundlegende Idee des SP besteht darin, mithilfe eines Modells der zu regelnden Strecke, in dieser Arbeit  $\hat{g}(u)$ , den unverzögerten Ausgang  $\tilde{y}$  zu prädizieren und diesen anschließend für die Regelung heranzuziehen. Als Regler  $R(s)$  wird im linearen Fall typischerweise die inverse

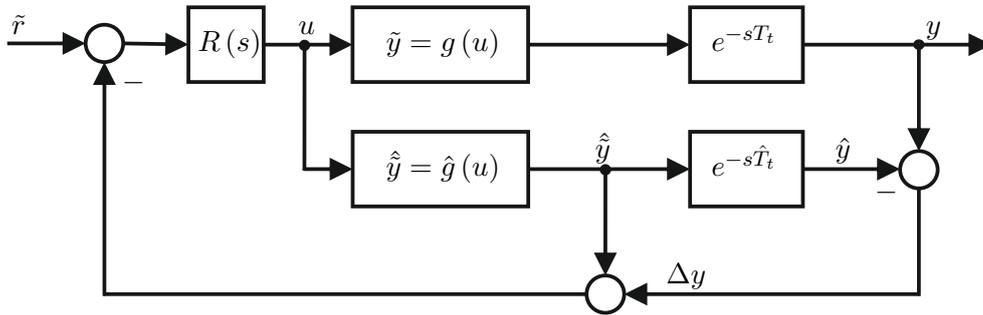


Abbildung 3.1: Smith-Prädiktor für statische Abbildungen mit Totzeit.

Übertragungsfunktion der Strecke oder ein PI-Regler verwendet [2]. Im weiteren Verlauf dieser Diplomarbeit wird  $R(s)$  immer als PI-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$R(s) = \frac{V(1 + sT_I)}{s}, \quad (3.2)$$

der Verstärkung  $V$  und der Integratorzeitkonstanten  $T_I$  gewählt. Als Sollgröße für den SP dient der in die Zukunft verschobene Sollverlauf

$$\tilde{r} = r(t + T_{t,nom}) \quad (3.3)$$

mit der nominellen Totzeit  $T_{t,nom}$ . Der Smith-Prädiktor ist grundsätzlich als zweischleifiger Regelkreis aufgebaut. Der innere Kreis ist im umgezeichneten SP in Abbildung 3.2 in rot dargestellt. Durch die Rückführung der unverzögerten Prädiktion  $\hat{y}$  kann für den nominellen Fall der Einfluss der Totzeit auf den Reglereingang vollständig kompensiert werden und der Ausgang  $y$  entspricht der verzögerten Prädiktion  $\hat{y}$ . Aus Sicht der zu regelnden Strecke handelt es sich bei diesem inneren Kreis des SP um eine reine Steuerung, weshalb auf Störungen oder Modellfehler nicht reagiert werden kann.

Um diese Fehler ausgleichen zu können, wird der innere Kreis um eine Korrekturschleife, die den geschätzten Ausgang  $\hat{y}$  mit dem gemessenen Ausgang  $y$  vergleicht, erweitert. Der Prädiktionsfehler  $\Delta y$  wird dabei dazu verwendet, die Führungsgröße des inneren Kreises so zu adaptieren, dass der Ausgangsfehler verschwindet. Die Korrekturschleife ist in Abbildung 3.2 in grau dargestellt. Da  $\Delta y$  im nominellen Fall immer Null ist, hat die Korrekturschleife keinen Einfluss auf das nominelle Verhalten des SP. Allerdings sollte beachtet werden, dass, selbst bei einer perfekten Kenntnis der Strecke, der SP die Verzögerung zwischen dem Sollengang und dem Ausgang der Strecke nicht kompensieren kann.

Im Folgenden soll nun untersucht werden, wie der SP auf Fehler im Prädiktionsmodell  $\hat{g}(u)$  reagiert. Dabei wird angenommen, dass, ausgehend von einem stationären Zustand des Systems zum Zeitpunkt  $t = T_t$ , ein Arbeitspunktwechsel durchgeführt wird. Für die Untersuchung wird von der nichtlinearen Funktion

$$\tilde{y}(t) = g(u) = \sqrt{au + b} \quad (3.4)$$

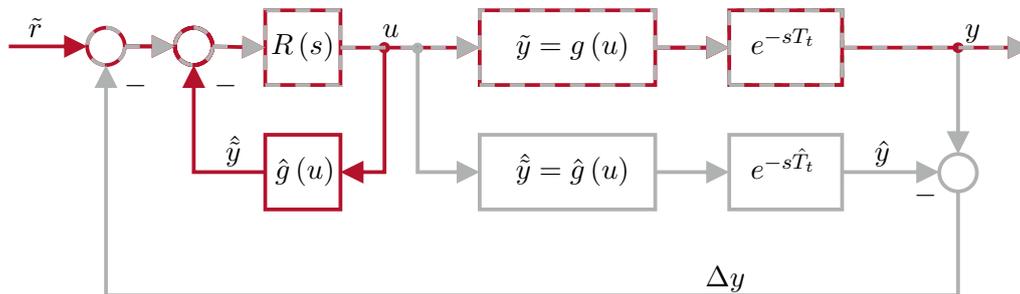


Abbildung 3.2: Innerer und äußerer Kreis des Smith-Prädiktors für statische Abbildungen mit Totzeit.

und dem entsprechenden internen Modell

$$\hat{y}(t) = \hat{g}(u) = \sqrt{\hat{a}u + \hat{b}} \quad (3.5)$$

ausgegangen. Die Regler-/Simulationsparameter und die Streckenparameter für die Simulation können Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2 entnommen werden. Die Reglerparameter wurden durch Versuch und Irrtum bestimmt. Um die nicht berücksichtigte Dynamik des Systems zu simulieren, wird  $g(u)$  und  $\hat{g}(u)$  außerdem noch um eine Aktuatordynamik in Form einer Übertragungsfunktion erster Ordnung

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT_u} \quad (3.6)$$

erweitert. Zusätzlich wurde dem Ausgang noch weißes Rauschen mit der Standardabweichung  $P_{Rausch}$  hinzugefügt. In Abbildung 3.3 ist die Sollgröße  $r$ , der Ausgang  $y$ , der geschätzte Ausgang  $\hat{y}$  und der Prädiktionsfehler  $\Delta y$  dargestellt. Für  $t \in [0, T_t]$  ist  $\Delta y$  zunächst konstant aber ungleich Null und  $u$  wird ausschließlich durch den inneren Kreis angepasst. Aufgrund der Parameterfehler wird für  $t > T_t$  eine Änderung im Prädiktionsfehler  $\Delta y$  sichtbar, welche über den Regler zu einer Anpassung der Stellgröße führt. Diese Änderung wird nach einer weiteren Totzeit am Ausgang sichtbar. Sie führt in der Regel zu einem charakteristischen Knick in der Ausgangskurve, welche wiederum  $\Delta y$  verändert. Dieser Knick kann in Abbildung 3.3 bei  $t = 2T_t$  beobachtet werden. Ein stationärer Zustand ist für den SP genau dann erreicht, wenn  $y$  gegen  $\tilde{r}$  und  $\Delta y$  gegen einen konstanten Wert konvergieren. In diesem Fall gilt dann  $\hat{y} + \Delta y = y$ .

Nachdem die Reaktion des SP auf Parameterfehler in  $g(u)$  besprochen wurden, wird die Auswirkung von Fehlern in der erwarteten Totzeit untersucht. Abbildung 3.4 zeigt die Ergebnisse einer Simulation mit den Regler-/Simulationsparametern und Streckenparametern entsprechend Tabelle 3.1 und Tabelle 3.3. Erneut wird  $\tilde{r}$  anstatt  $r$  dargestellt, wodurch die zeitliche Abfolge der Systemantworten besser nachvollzogen werden kann. Um die Auswirkung der Totzeitschwankung separat untersuchen zu können, wird angenommen, dass die beiden Abbildungen  $g(u)$  und  $\hat{g}(u)$  identisch sind. Wie zuvor soll wiederum bei

Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\hat{T}_t$	10 s	$\hat{a}$	2	$\hat{b}$	0.5
$V$	10	$T_I$	0.1 s	$T_u$	0.01 s
$P_{Rausch}$	$10^{-6}$				

Tabelle 3.1: Regler-/Simulationparameter für das Verhalten des klassischen Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in  $g(u)$ .

Parameter	Wert
$T_t$	10 s
$a$	2.2
$b$	0.6

Tabelle 3.2: Streckenparameter für das Verhalten des klassischen Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in  $g(u)$ .

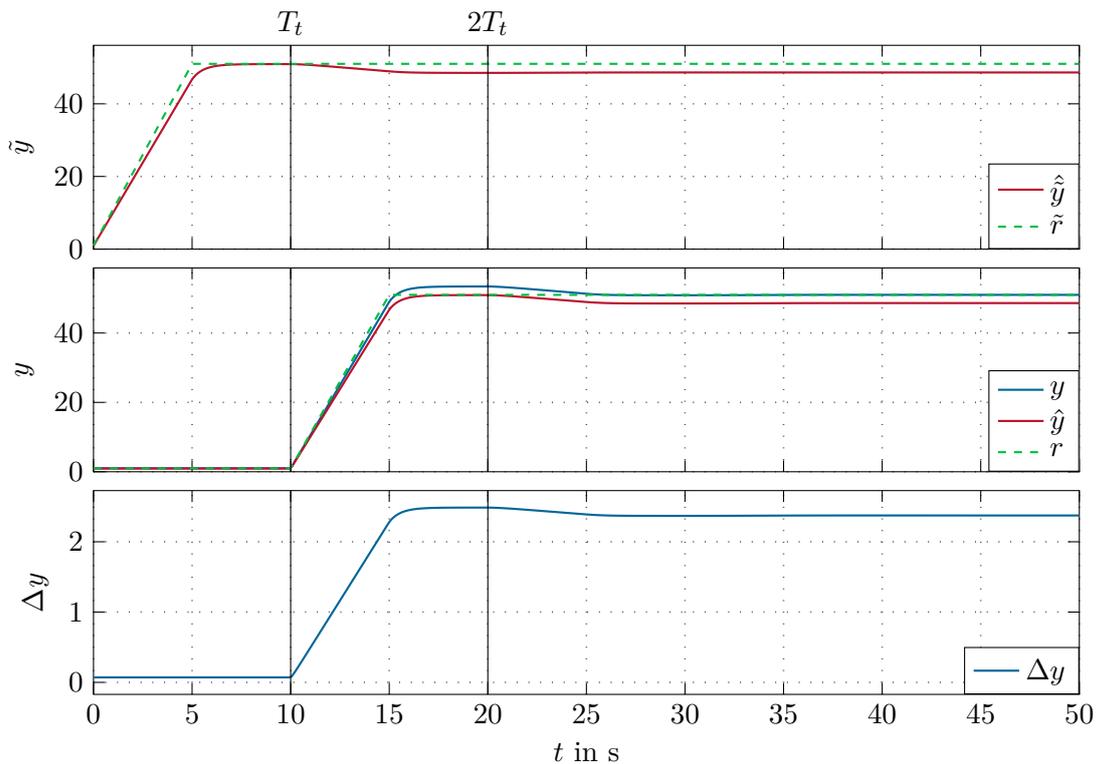


Abbildung 3.3: Verhalten des Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in  $g(u)$ .

$t = T_t$  ein Arbeitspunktwechsel durchgeführt werden. In Abbildung 3.4 ist die Dynamik des inneren Kreises, charakterisiert durch  $R(s)$  und  $\hat{g}(u)$ , um ein Vielfaches schneller als  $T_t$  und  $T_t$  ist größer als  $\hat{T}_t$ . Für  $t < \hat{T}_t$  ist  $\Delta y = 0$  und  $\tilde{y} = \hat{y}$ . Bei  $t = \hat{T}_t$  wird  $\Delta y$  von Null verschieden, da sich der geschätzte Ausgang  $\hat{y}$  ändert, während der wahre Ausgang  $y$  noch in seinem Anfangszustand verbleibt. Der Ausgangsfehler steigt an bis sich  $y$  bei  $t = T_t$  ändert. Aufgrund der schnellen Dynamik des inneren Kreises klingt der Prädiktionsfehler  $\Delta y$  vor  $t = 2\hat{T}_t$  ab. Zum Zeitpunkt  $t = 2\hat{T}_t$  wird am geschätzten Ausgang  $\hat{y}$  die Änderung zufolge der Stellgröße, verursacht durch  $\Delta y(\hat{T}_t)$ , sichtbar. Der Regler reagiert mit einer Stellgrößenänderung, was zu einer abermaligen Anregung des Systems bei  $t = 3\hat{T}_t$  führt. Diese wiederholte Anregung ist in Abbildung 3.4 deutlich zu erkennen.

Diese kurzen Überlegungen zeigen, dass bereits ein kleiner Fehler in der Totzeit zu einer sehr langsamen Konvergenz des Systems führt und deshalb nach Möglichkeit vermieden werden sollte.

Parameter	Wert
$T_t$	10.8s
$a$	2
$b$	0.5

Tabelle 3.3: Streckenparameter für das Verhalten des klassischen Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in  $T_t$ .

### 3.2.1 Gefilterter Smith-Prädiktor

Die Robustheit des Smith-Prädiktors gegenüber Schwankungen in der Totzeit lässt sich durch das Einführen eines Tiefpassfilters  $F(s)$  in der Korrekturschleife, wie in Abbildung 3.5 dargestellt, deutlich erhöhen [2, 8]. In den meisten Fällen führt bereits eine Filterordnung von 1 mit einer Filterzeitkonstanten  $T_f = \frac{T_t}{2}$  zu einem deutlichen Robustheitsgewinn. Deshalb wird in weiterer Folge ein einfacher Tiefpassfilter mit der Übertragungsfunktion

$$F(s) = \frac{1}{1 + sT_f} \quad (3.7)$$

verwendet. Diese Regelstruktur wird in der Literatur als gefilterter Smith-Prädiktor (FSP) bezeichnet. In Abbildung 3.6 ist das Ergebnis einer Simulation mit den Parametern aus Tabelle 3.1, Tabelle 3.3 und  $T_f = 5s$  dargestellt. Dabei wird das Systemverhalten eines SP und eines FSP auf einen rampenförmigen Arbeitspunktwechsel bei reinem Totzeitfehler untersucht. Als Strecke wird wieder die zeitverzögerte Wurzelfunktion aus (3.4) betrachtet. Wie erwartet zeigt sich, dass der Tiefpassfilter  $F(s)$  eine periodische Anregung durch den Totzeitfehler unterdrückt. Außerdem ist auch der anfängliche Regelfehler zufolge des Totzeitfehlers kleiner.

Das nominelle Verhalten des FSP entspricht dem des konventionellen SP. Das liegt daran, dass  $\Delta y$  Null ist und die verbleibende Reglerstruktur jener des SP entspricht. Im Gegensatz dazu führt der Tiefpassfilter  $F(s)$  im Fall eines Parameterfehlers in  $g(u)$  zu

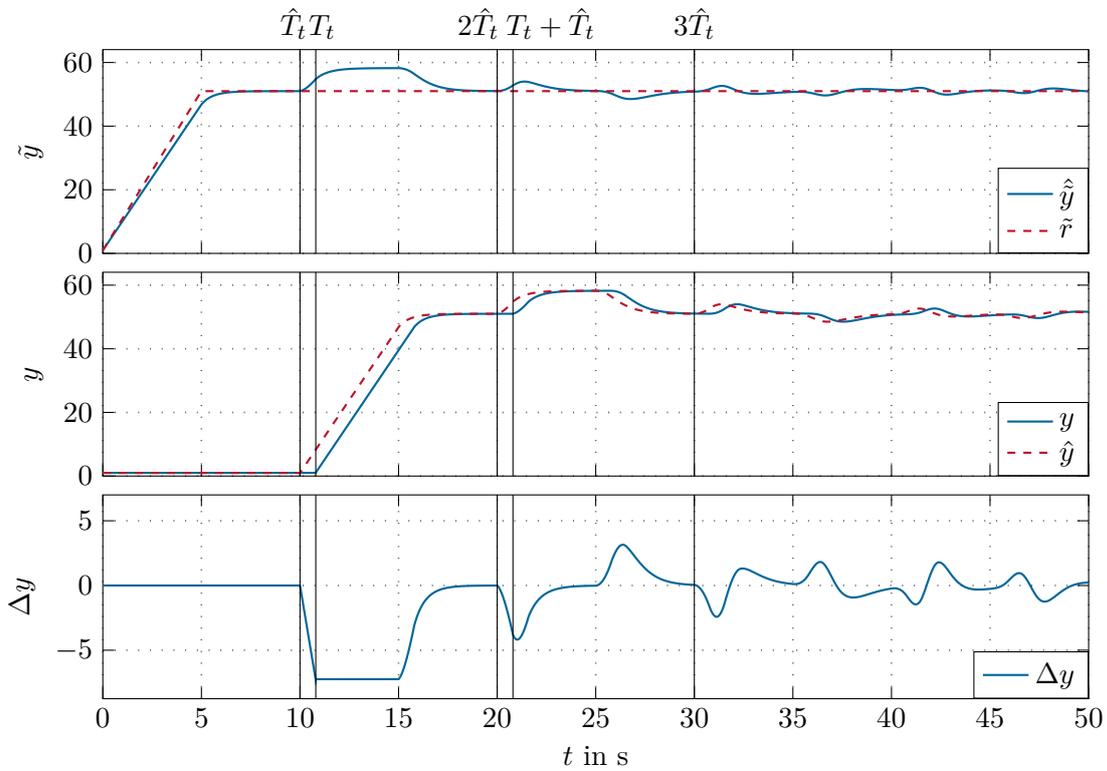


Abbildung 3.4: Verhalten des Smith-Prädiktors bei Parameterunsicherheiten in der Totzeit.

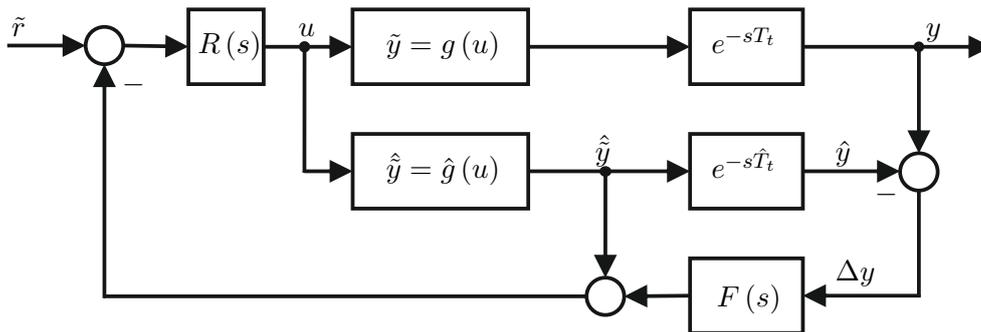


Abbildung 3.5: Gefilterter Smith-Prädiktor für statische Abbildungen mit Totzeit.

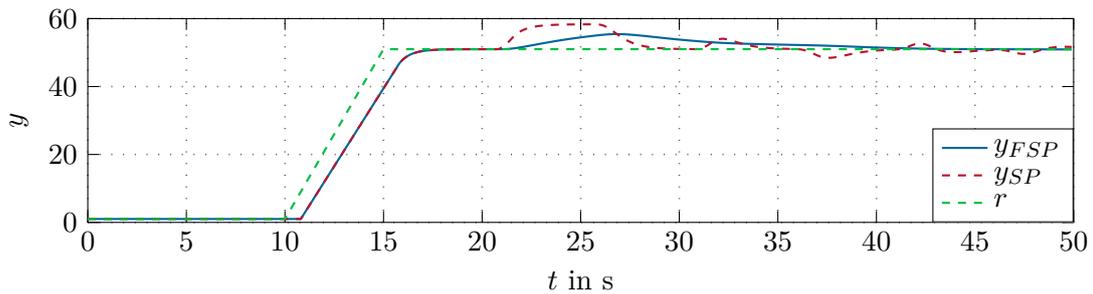


Abbildung 3.6: Vergleich zwischen SP und FSP bei Schwankungen in der Totzeit.

einem langsameren Einschwingen des geschlossenen Kreises, da der Prädiktionsfehler  $\Delta y$  durch  $F(s)$  geglättet wird. Eine ausführliche Analyse des Verhaltens des FSP und ein Vergleich mit anderen Reglerstrukturen erfolgt in Abschnitt 3.5.

### 3.2.2 Vorsteuerung durch Modellinversion

Eine naheliegende Erweiterung des Smith-Prädiktors für Systeme mit dominanter Totzeit ist, benötigte Stellgrößen direkt mittels einer Modellinversion zu bestimmen. Im nominellen Fall umgeht man damit die Dynamik des inneren Regelkreises. Im Vergleich zum klassischen SP und FSP führt dies im nominellen Fall zu einem besseren Führungsverhalten. Abbildung 3.7 zeigt ein Blockdiagramm des Smith-Prädiktors mit Vorsteuerung (SPVS).

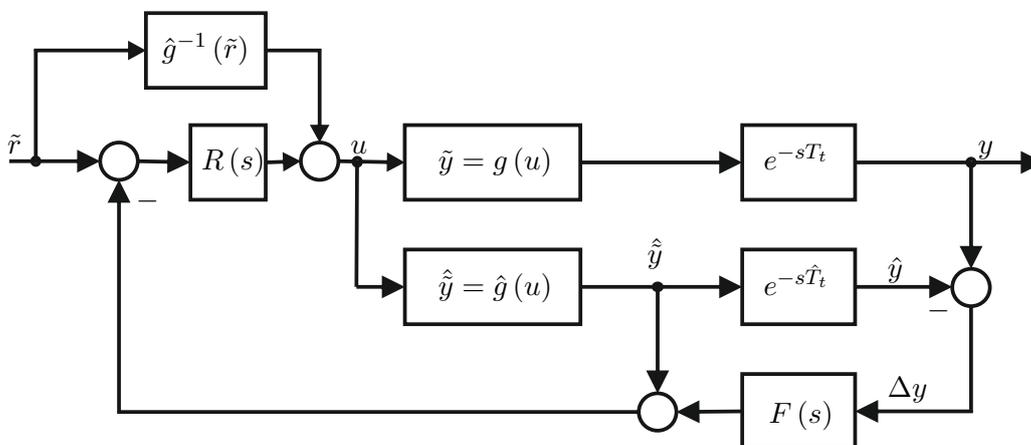


Abbildung 3.7: Smith-Prädiktor mit Vorsteuerung der inversen Ausgangsabbildung.

Wenn möglich ist es sinnvoll, die inverse Funktion  $\hat{g}^{-1}(\tilde{r})$  analytisch zu bestimmen. Alternativ kann auch eine punktweise numerische Bestimmung von  $\hat{g}^{-1}(\tilde{r})$  durchgeführt werden. Im Fall einer Parameterschwankung in  $g(u)$  übernimmt der PI-Regler die Rolle eines Fehlerreglers und stellt die zusätzlich benötigte Stellgröße zur Verfügung. Um die Robustheit gegen Totzeitschwankungen zu erhöhen, wird auch hier ein Tiefpassfilter  $F(s)$

in der Korrekturschleife verwendet.

### 3.3 Kompensation von Modellfehlern

Bei der Vorsteuerung der zu erwartenden Stellgröße können eventuelle Modellfehler auch durch einen Schätzer kompensiert werden. In Abbildung 3.8 ist das Blockdiagramm einer solchen Reglerstruktur dargestellt. Diese Reglerstruktur wird als Störgrößenkompensation mit Vorsteuerung (SGKVS) bezeichnet. Dabei werden Modellfehler ausgeglichen, indem ein konstanter Fehler  $\hat{q}$  am Eingang der Strecke geschätzt und direkt kompensiert wird. Diese Schätzung und Rückführung eines konstanten Fehlers am Eingang kann auch als integrierender Regler interpretiert werden. Darüber hinaus gleicht das nominelle Verhalten dieser Reglerstruktur dem des SPVS, da auch hier eine Vorsteuerung von  $\hat{g}^{-1}(\tilde{r})$  vorgenommen wird. Diese Struktur entspricht der in [4] vorgestellten Erweiterung für modellprädiktive Regler.

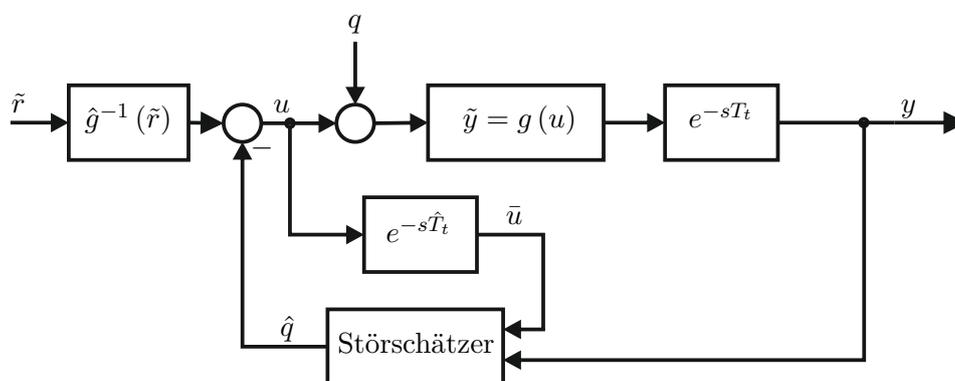


Abbildung 3.8: Vorsteuerung der zu erwartenden Stellgröße mit Kompensation von Modellunsicherheiten.

In Kombination mit einem geeigneten Schätzer kann das hier vorgestellte Verfahren auch für nichtlineare Systeme verwendet werden. Darüber hinaus können auch komplexere Störmodelle eingesetzt werden, sofern zusätzliche Information über die Charakteristik der Störung vorhanden ist.

Für die Formulierung des Schätzers wird im Folgenden angenommen, dass das Störmodell in den Parametern linear und in den betrachteten Zeiträumen näherungsweise konstant ist. Für die Wurzelfunktion aus (3.4) ergibt sich daher die zu schätzende Ausgangsfunktion als

$$\hat{y}(t) = \hat{g}(u, \hat{q}) = \sqrt{\hat{a} \left( u \left( t - \hat{T}_t \right) + \hat{q} \right) + \hat{b}}. \quad (3.8)$$

Es kann stets eine Störung  $\hat{q}$  so gefunden werden, dass

$$\hat{y}(t) = y(t) \quad (3.9)$$

gilt. Setzt man (3.9) in (3.8) ein und formt man auf die Störung  $\hat{q}$  um, erhält man

$$\hat{q} = \frac{y^2(t) - \hat{a}u(t - \hat{T}_t) - \hat{b}}{\hat{a}}. \quad (3.10)$$

Mit (3.10) kann  $\hat{q}$  direkt berechnet werden, jedoch kann es für  $a > 1$  und  $\hat{T}_t \neq T_t$  zu einer Verstärkung des Ausgangsrauschens kommen. Deshalb wird ein rekursiver Least-Squares Schätzer (RLS) entsprechend [9] verwendet. Die entsprechende Update-Vorschrift lautet

$$\mathbf{k}_k = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k} \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{P}_k = \lambda^{-1} \mathbf{P}_{k-1} - \lambda^{-1} \mathbf{k}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \quad (3.11b)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_k = \hat{\mathbf{p}}_{k-1} + \mathbf{k}_k \left( \frac{y^2(t) - \hat{a}u(t - \hat{T}_t) - \hat{b}}{\hat{a}} - \mathbf{s}_k^T \hat{\mathbf{p}}_{k-1} \right). \quad (3.11c)$$

Dabei handelt es sich bei  $\lambda$  um den Vergessensfaktor, bei  $\hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{R}^m$  um die momentane Parameterschätzung, bei  $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{m \times m}$  um die Inverse der Korrelationsmatrix, bei  $\mathbf{k}_k \in \mathbb{R}^m$  um den Verstärkungsvektor und bei  $m$  um die Anzahl der zu schätzenden Parameter. Der Datenvektor für den Störschätzer mit dem zu schätzenden Parameter  $\mathbf{p}_k = \hat{q}_k \in \mathbb{R}$  ergibt sich zu  $\mathbf{s}_k = 1 \in \mathbb{R}$ .

Aufgrund der in dieser Arbeit betrachteten Systemklasse bestehend aus einer Ausgangsabbildung mit Totzeit hängt der Ausgang zum Zeitpunkt  $t$  nur von dem Eingang zum Zeitpunkt  $t - T_t$  ab. Dem Störschätzer wird deshalb die zeitverzögerte Stellgröße  $u(t - T_t)$  übergeben. Bereits eine infinitesimale Änderung  $dT_t$  der Verzögerung führt dazu, dass der Ausgang  $y(t)$  unabhängig vom Eingang  $u(t - T_t - dT_t)$  ist. Daraus folgt unmittelbar, dass dieser Regler anfällig für Fehler in der Totzeit ist, da im transienten Fall aus nicht korrespondierenden Stellgrößen und Istgrößen Störgrößen geschätzt werden.

### 3.4 Modellprädiktive Regelung

In diesem Abschnitt wird zunächst das Grundprinzip der diskreten nichtlinearen modellprädiktiven Regelung erklärt und darauf aufbauend eine mögliche Wahl der Gütefunktion formuliert. In Abschnitt 3.4.1 wird die modellprädiktive Regelung auf allgemeine nichtlineare Totzeitsysteme erweitert und auf statische Abbildungen mit Totzeit angewandt. Anschließend wird die modellprädiktive Regelung in Abschnitt 3.4.2 um einen Störschätzer erweitert, um die Robustheit gegenüber Störungen und Modellunsicherheiten zu erhöhen.

Die Grundidee der diskreten modellprädiktiven Regelung (MPC) besteht darin, die optimale diskrete Stellgröße durch das regelmäßige Lösen eines statischen Optimierungsproblems zu berechnen. Dabei werden der momentane Systemzustand, das prädizierte zukünftige Verhalten der Strecke sowie Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt. Nach der Lösung dieses Optimierungsproblems wird der erste Wert der diskreten Stellgröße aufgeschaltet, der momentane Systemzustand gemessen und das Optimierungsproblem neu gelöst. Ein großer Vorteil der MPC ist die systematische Berücksichtigung von Beschränkungen der Stell- und Zustandsgrößen in der Optimierungsaufgabe. Das entsprechende

Optimierungsproblem für eine diskrete zeitvariante Sollgröße  $\mathbf{x}_k^{ref}$  mit dem Zeitindex  $k$  und ein allgemeines diskretes nichtlineares System der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad (3.12)$$

kann laut [3] folgendermaßen angeschrieben werden

$$(\mathbf{u}_k^*) = \arg \min_{(\check{\mathbf{u}}_k)} J_N(k, \mathbf{x}_k, (\check{\mathbf{u}}_k)) = \sum_{i=0}^{N-1} l_{k+i}(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{u}}_i) \quad (3.13a)$$

$$\text{u.B.v. } \check{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}, \quad \forall i = 0, \dots, N-1 \quad (3.13b)$$

$$\check{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{X}, \quad \forall i = 0, \dots, N \quad (3.13c)$$

$$\check{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_k, \quad \check{\mathbf{x}}_{i+1} = \mathbf{F}(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{u}}_i) . \quad (3.13d)$$

Bei  $\mathbf{u}^*$  handelt es sich um die Lösung des statischen Optimierungsproblems, bei  $(\check{\mathbf{u}}_k) = (\check{\mathbf{u}}_0, \dots, \check{\mathbf{u}}_{N-1})$  um die geplante Eingangsfolge, bei  $\check{\mathbf{x}}$  um den prädizierten Systemzustand zufolge von  $\mathbf{x}_k$  und  $\check{\mathbf{u}}$  sowie bei  $\check{\mathbf{x}}_0$  um den zum Zeitpunkt  $kT_a$  gemessenen Zustand  $\mathbf{x}_k$ . Die skalare Gütefunktion  $J_N$  ist die Summe von  $N$  positiv definiten Funktionen  $l$  mit dem Prädiktionshorizont  $N$ . Die beiden Mengen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{U}$  sind die abgeschlossenen Mengen der zulässigen Systemzustände und zulässigen Stellgrößen. Diese Darstellung kann gegebenenfalls um einen positiv definiten Endkostenterm  $L_{k+N}(\check{\mathbf{x}}_N)$  und um eine separate Endzustandsbeschränkung  $\check{\mathbf{x}}_N \in \mathcal{X}_N$  erweitert werden. Im Allgemeinen würde eine Erweiterung um einen Endkostenterm und eine Endzustandsbeschränkung zu einer Vereinfachung der Stabilitätsbedingungen führen, dies ist aber im Fall von Systemen mit dominanter Totzeit nicht notwendig, da die Dynamik des Systems vernachlässigt wird. Für (3.13) soll die Gütefunktion  $l$  die Eigenschaften

$$l_k(\mathbf{x}_k^{ref}, \mathbf{u}_k^{ref}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (3.14a)$$

$$l_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_k^{ref} \quad (3.14b)$$

mit

$$\mathbf{x}_{k+1}^{ref} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k^{ref}, \mathbf{u}_k^{ref}) \quad (3.15)$$

erfüllen. Die Bedingungen in (3.14) stellen sicher, dass es sich bei der angestrebten Trajektorie  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k^{ref}$  und  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_k^{ref}$  um ein globales Minimum der Gütefunktion handelt. Es ist leicht ersichtlich, dass die Wahl

$$l_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^{ref}\|^2 + v \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_k^{ref}\|^2 \quad (3.16)$$

für  $v \geq 0$  die Bedingungen in (3.14) einhält und somit eine zulässige Gütefunktion für (3.13) ist. Für Verfahren zum Lösen des Optimierungsproblems (3.13), für Stabilitätsbetrachtungen und für weitere Varianten der MPC wird auf die in Abschnitt 3.1 diskutierte Literatur verwiesen.

### 3.4.1 MPC für Systeme mit Totzeit

In diesem Abschnitt soll die diskrete nichtlineare MPC auf Systeme mit Totzeit der Form

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_{k-m}) \quad (3.17)$$

mit  $T_t = mT_a$  angewandt werden. Um eine kompaktere Schreibweise zu erlauben, wird von einem System mit Eingangstotzeit ausgegangen. Laut Abschnitt 2.1 kann dies immer in ein äquivalentes System mit Ausgangstotzeit umgeschrieben werden. Der Prädiktionshorizont  $NT_a$  der MPC laut (3.13) wird immer größer als die Totzeit gewählt.

In Abbildung 3.9 sind die Signale einer MPC für ein System mit Totzeit zum Zeitpunkt  $t = kT_a$  abgebildet. Um die veränderten Abhängigkeiten darstellen zu können, sind alle gemessenen Zustandsgrößen  $\mathbf{x}_k$  blau, alle bereits realisierten und noch nicht messbaren Zustandsgrößen  $\hat{\mathbf{x}}_k^{pr}$  braun und die Optimierungszustandsgrößen  $\check{\mathbf{x}}_k$  grün eingezeichnet. Die Farbe der Eingangsgrößen richtet sich dabei nach den korrespondierenden Zustandsgrößen aus (3.17). Der Zustand  $\mathbf{x}_k$  (blau) kann zwar zum Zeitpunkt  $t$  gemessen werden, ist jedoch von den vergangenen bereits realisierten Stellgrößen  $\mathbf{u}_{k-i}$  für  $i = 1, \dots, m$  (braun) unabhängig. Das bedeutet aber, dass  $\mathbf{x}_k$  nicht alle über den Systemzustand bekannten Informationen enthält. Deshalb wird ein zusätzlicher Prädiktionsschritt benötigt, der die Zustände  $\hat{\mathbf{x}}_{k+i}^{pr}$  mit  $i = 1, \dots, m$  (braun) aus der Messung  $\mathbf{x}_k$  und den Stellgrößen  $\mathbf{u}_{k-i}$  mit  $i = 1, \dots, m$  berechnet. Diese Prädiktion ist nötig, da zwar auf die bereits realisierten Stellgrößen kein Einfluss mehr genommen werden kann, aber ihre Auswirkung auf den zukünftigen Systemzustand berechnet werden muss. Weil aber für die MPC in jedem Fall ein Modell des Systems benötigt wird, kann diese Prädiktion ohne Weiteres durchgeführt werden.

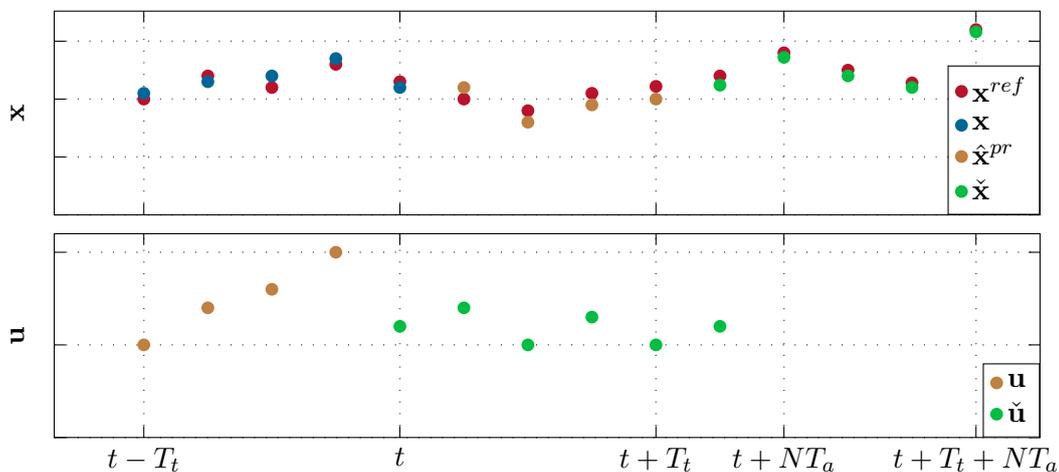


Abbildung 3.9: Schematische Darstellung der zeitlichen Abfolge der Zustände und der Stellgröße bei der Regelung eines Systems mit Totzeit  $T_t = 4T_a$  durch einen MPC.

Da nun alle Informationen über den momentanen Systemzustand bekannt sind, kann das statische Optimierungsproblem angeschrieben werden. Dafür unterteilt man die Stellgröße

$\check{\mathbf{u}}_i$  in die bereits realisierten Komponenten  $\mathbf{u}$  und die verbleibenden Optimierungsgrößen  $\mathbf{u}'$  gemäß

$$\check{\mathbf{u}}_i = \begin{cases} \mathbf{u}_{k+i-m} & \text{wenn } i = 0, \dots, m-1 \\ \mathbf{u}'_{i-m} & \text{wenn } i = m, \dots, N-1. \end{cases} \quad (3.18)$$

Zusammen mit der Gütefunktion  $J_N$  gemäß (3.13a) führt (3.18) zu

$$\begin{aligned} J_N(k, \mathbf{x}_k, (\mathbf{u}_k), (\mathbf{u}'_k)) &= \sum_{i=0}^{N-1} l_{k+i}(\check{\mathbf{x}}_i, \check{\mathbf{u}}_i) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} l_{k+i}(\check{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_{k+i-m}) + \sum_{i=m}^{N-1} l_{k+i}(\check{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}'_{i-m}) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} l_{k+i}(\check{\mathbf{x}}_i, \mathbf{u}_{k+i-m}) + \sum_{j=0}^{N'-1} l_{k+m+j}(\check{\mathbf{x}}_{m+j}, \mathbf{u}'_j) \end{aligned} \quad (3.19)$$

mit dem effektiven Prädiktionshorizont  $N' = N - m$ . Der linke Term auf der rechten Seite in (3.19) kann sich zwar in jedem Abtastpunkt ändern, ist aber unabhängig von der Optimierungsgröße  $\mathbf{u}'$ , da er nur vom Momentanzustand des Systems  $\mathbf{x}_k$  und der bereits realisierten Stellgröße  $\mathbf{u}_{k-j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , abhängt. Dieser Term hat nur Einfluss auf den Wert der Gütefunktion, nicht aber auf das Ergebnis der Optimierungsaufgabe ( $\mathbf{u}_k^*$ ). Deshalb kann dieser Term vernachlässigt werden, ohne das Ergebnis der Optimierungsaufgabe zu verändern. Bei genauerer Betrachtung des rechten Terms in der letzten Zeile von (3.19) fällt auf, dass er bis auf zwei Unterschiede der Gütefunktion von (3.13a) entspricht. Diese spiegeln den Totzeitcharakter des Systems wider. Einerseits wird die Stellgröße gegenüber dem Zustandsvektor um die Totzeit verzögert und bildet damit die Totzeit des Systems ab. Andererseits wird der Gütefunktion ein um die Totzeit verschobener Zeitparameter übergeben, der implizit der Vorsteuerung der Totzeit entspricht. Nun kann die statische Optimierungsaufgabe der MPC in der Form

$$(\mathbf{u}_k^*) = \arg \min_{(\mathbf{u}'_k)} J_{N'}(k, \mathbf{x}_k, (\mathbf{u}_k), (\mathbf{u}'_k)) = \sum_{j=0}^{N'-1} l_{k+m+j}(\check{\mathbf{x}}_{m+j}, \mathbf{u}'_j) \quad (3.20a)$$

$$\text{u.B.v. } \mathbf{u}'_j \in \mathcal{U}, \quad \forall j = 0, \dots, N' - 1 \quad (3.20b)$$

$$\check{\mathbf{x}}_j \in \mathcal{X}, \quad \forall j = 0, \dots, m + N' \quad (3.20c)$$

$$\check{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_k \quad (3.20d)$$

$$\check{\mathbf{x}}_{j+1} = \mathbf{F}(\check{\mathbf{x}}_j, \mathbf{u}_{k+j-m}), \quad \forall j = 0, \dots, m - 1 \quad (3.20e)$$

$$\check{\mathbf{x}}_{j+1} = \mathbf{F}(\check{\mathbf{x}}_j, \mathbf{u}'_{j-m}), \quad \forall j = m, \dots, m + N' - 1 \quad (3.20f)$$

angeschrieben werden. Während für die MPC am totzeitfreien System laut (3.13) die Sollgröße nur für den Prädiktionshorizont  $N$  bekannt sein muss, wird für die MPC am totzeitbehafteten System laut (3.20) die Sollgröße für die Totzeit  $T_t = mT_a$  und den effektiven Prädiktionshorizont  $N'$  benötigt. Alternativ zu (3.20) kann die Prädiktion des Systemzustands aus (3.20e) auch separat durchgeführt werden und als geändertes  $\mathbf{x}_{k'}$  mit der neuen Zeitvariable  $k'$  an (3.13) übergeben werden. In diesem Fall muss die Totzeit für

die Sollgröße aber separat vorgesteuert werden, da die dadurch entstehende MPC

$$m = k' - k \quad (3.21)$$

Abtastschritte in der Zukunft läuft.

Nachfolgend soll die MPC, die für allgemeine Systeme mit Totzeit entwickelt wurde, für den Sonderfall der Systeme mit dominanter Totzeit vereinfacht werden. Da die Dynamik des Systems vernachlässigt wird, kann (3.20) zu

$$(u_k^*) = \arg \min_{(u'_k)} J_{N'}(k, (u'_k)) = \sum_{j=0}^{N'-1} l_{k+m+j}(u'_j) \quad (3.22a)$$

$$\text{u.B.v. } u'_j \in \mathcal{U}, \quad \forall j = 0, \dots, N' - 1 \quad (3.22b)$$

vereinfacht werden. Analog zu (3.16) kann die skalare Gütefunktion

$$l_k(u_{k-m}) = (\hat{g}(u_{k-m}) - r_k)^2 \quad (3.23)$$

gewählt werden. Unter der Annahme, dass

$$\exists u'_j \in \mathcal{U} \quad \hat{g}(u'_j) = r_{k+j} \quad \forall j = 0, \dots, N' - 1 \quad (3.24)$$

gilt, wird das statische Optimierungsproblem (3.22) mit der Gütefunktion (3.23) durch  $N'$  unabhängige Gleichungen der Form

$$\hat{g}(u_{k-m+j}^*) = r_{k+j} \quad \text{mit } u_{k-m+j}^* \in \mathcal{U} \quad \forall j = 0, \dots, N' - 1 \quad (3.25)$$

gelöst. Aufgrund der Unabhängigkeit der Gleichungen und der Neuberechnung der Optimierungsaufgabe nach dem Umschalten der ersten Stellgröße führt eine Erweiterung des Prädiktionshorizonts  $N'$  über 1 hinaus zu keiner Änderung der tatsächlich aufgeschalteten Stellgröße. Es zeigt sich also, dass die MPC numerisch die Umkehrfunktion  $\hat{g}^{-1}(r_k)$  bestimmt. Gegebenenfalls kann diese Modellinversion analytisch in der MPC durchgeführt werden, darauf wird aber an dieser Stelle verzichtet. Aus (3.22) wird ersichtlich, wieso bei (3.13) der Endkostenterm und das Endgebiet nicht berücksichtigt wurden.

### 3.4.2 Offset-freie MPC

Im vorhergehenden Abschnitt wurde eine MPC für Systeme mit dominanter Totzeit entwickelt. Es stellt sich die Frage, wie diese MPC auf Parameterschwankungen reagiert. Da die MPC durch das ihr zugrundeliegende Modell eine Inversion der Funktion  $r_k = \hat{g}(u_{k-m})$  durchführt, führt eine Abweichung in den Parameterwerten der Funktion zu einem bleibenden Fehler am Ausgang. Um diesen Fehler zu kompensieren, wird die MPC um einen Störschätzer erweitert. Der dadurch entstehende Regler wird in der Literatur als Offset-freie modellprädiktive Regelung (OFMPC) bezeichnet. Eine ausführliche Betrachtung und Bedingungen für das asymptotische Abklingen des Ausgangsfehlers von Offset-freien MPC für allgemeine nichtlineare Systeme findet man in [4]. Bei der OFMPC ist es möglich, den Störschätzer direkt in der MPC mit zu berücksichtigen oder extern der MPC zu übergeben.

Als Störschätzer kann der bereits in Abschnitt 3.3 entwickelte RLS herangezogen werden. Dabei wird die Dichte in der Gütefunktion

$$l_k(u_{k-m}, q_{k-m}) = (\hat{g}(u_{k-m}, \hat{q}_{k-m}) - r_k)^2 \quad (3.26)$$

mit  $\hat{g}(u_{k-m}, \hat{q}_{k-m})$  entsprechend (3.8) geändert.

Abbildung 3.10 zeigt das Blockdiagramm der OFMPC mit externem Störschätzer. Man erkennt, dass sich die Funktion des OFMPC und der SGKVS gemäß Abbildung 3.8 sehr ähnlich sind, allerdings gibt es zwei markante Unterschiede. Der SGKVS benötigt die Umkehrfunktion der Nichtlinearität  $\hat{g}^{-1}$  für die Vorsteuerung, während der OFMPC laut (3.22) die lokale Umkehrfunktion in jedem Abschnitt selbst berechnet. Dadurch benötigt der OFMPC ein Vielfaches der Rechenleistung des SGKVS. Im Gegenzug muss dem SGKVS die Sollgröße extern vorgesteuert werden, im Gegensatz dazu steuert der OFMPC die Sollgröße bereits intern vor.

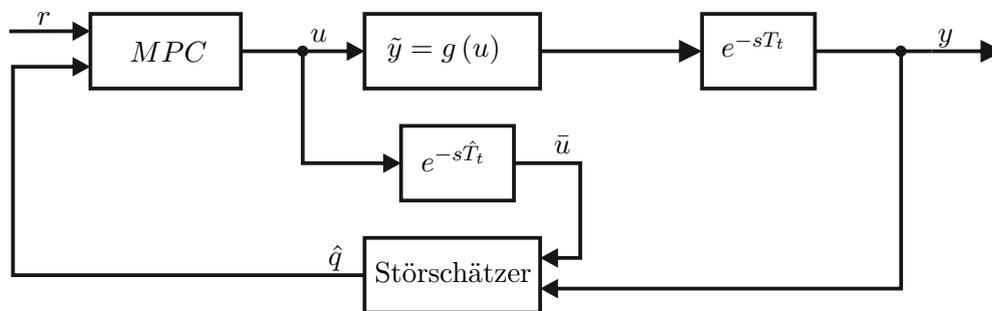


Abbildung 3.10: Offset-freie modellprädiktive Regelung mit externem Störschätzer.

## 3.5 Simulationsergebnisse

Um die in Abschnitt 3.2 und Abschnitt 3.4 erstellten Regelkonzepte zu vergleichen, wurden Simulationen in MATLAB/SIMULINK durchgeführt. Als Ausgangsfunktion wird die Wurzelfunktion aus (3.4) und für das interne Modell entsprechend die Funktion aus (3.5) gewählt. Für alle Regler außer der OFMPC wurde die Totzeit vorgesteuert, um die Dynamik des geschlossenen Systems und die auftretenden Fehler besser sichtbar zu machen. Die Regler-/Simulationsparameter für die folgenden Simulationen sind in Tabelle 3.4 angegeben. In den folgenden Abschnitten werden das nominelle Verhalten, das Störverhalten und das Verhalten der Regler bei Schwankungen in den Parametern von  $\hat{g}(u)$  und der Totzeit untersucht.

### 3.5.1 Nominelles Verhalten

Zunächst soll das nominelle Verhalten der Regler untersucht werden. Die verwendeten Parameter der Regler und der Strecke können in Tabelle 3.4 und Tabelle 3.5 entnommen werden. In Abbildung 3.11 ist das Führungsverhalten der entwickelten Regelungen bei

Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\hat{T}_t$	10 s	$\hat{a}$	2	$\hat{b}$	0.5
$V$	10	$T_I$	0.1 s	$T_u$	0.01 s
$T_a$	0.01s	$T_f$	5 s	$\lambda$	0.993
$T_{MPC}$	0.1 s	$N'$	1	$P_{Rausch}$	$10^{-6}$

Tabelle 3.4: Regler-/Simulationsparameter für die in Kapitel 3 vorgestellten Regelungen.

einem rampenförmigen Arbeitspunktwechsel dargestellt. Weiters ist in Tabelle 3.6 der integrale quadratische Ausgangsfehler

$$e_2(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))^2 d\tau \quad (3.27)$$

während des Arbeitspunktwechsels eingetragen.

Parameter	Wert
$T_t$	10 s
$a$	2
$b$	0.5

Tabelle 3.5: Streckenparameter für das nominelle Verhalten der Regelungen.

Regler	FSP	SPVS	SGKVS	MPC
$e_2$	34.7	0.00241	0.000266	1.396

Tabelle 3.6: Quadratischer Ausgangsfehler bei nominellen Parameterwerten.

Die Ausgangsgröße der Regler SPVS und SGKVS stimmen sehr gut mit der gewünschten Sollgröße überein. Da für die MPC eine Abtastzeit  $T_{MPC} = 0.1s$  gewählt wurde, ist ein minimaler Fehler zur Sollgröße zwischen den Optimierungsschritten zu erkennen, deshalb ist auch der quadratische Ausgangsfehler größer als bei SPVS und SGKVS. Das schlechtere Führungsverhalten des FSP ist darauf zurückzuführen, dass er der einzige Regler ist, der keine Umkehrfunktion  $\hat{g}^{-1}(r)$  berechnet, sondern einen PI-Regler verwendet, um den Ausgangsfehler auszugleichen.

### 3.5.2 Störverhalten

Nach dem nominellen Verhalten der unterschiedlichen Reglerstrukturen wird in diesem Abschnitt das Störverhalten untersucht. Die Parameter der Simulation können wiederum Tabelle 3.4 und Tabelle 3.5 entnommen werden. Abbildung 3.12 zeigt die Ausgangsänderung

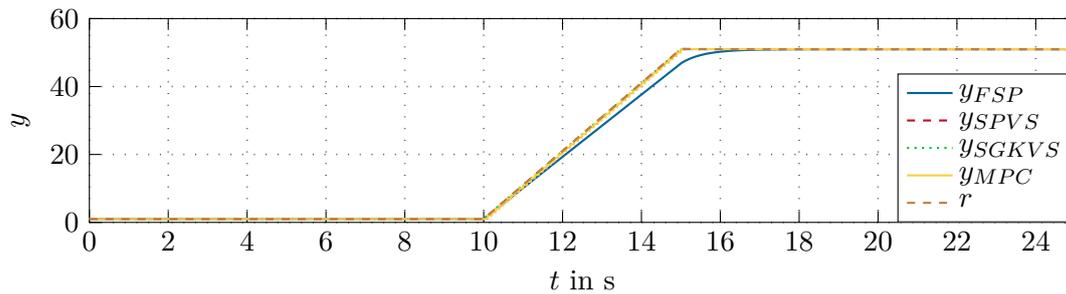


Abbildung 3.11: Nominelles Verhalten der geschlossenen Regelkreise.

der besprochenen Regler zufolge einer Störung  $q$  am Eingang der Strecke. Außerdem ist das Verhalten der Störschätzer dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass das System eine Totzeit  $T_t = 10\text{s}$  aufweist, woraus die zeitliche Verzögerung zwischen dem Auftreten der Störung und der Reaktion am Ausgang der Strecke folgt. Weiters vergeht eine weitere Totzeit, bevor ein Reglereingriff am Ausgang sichtbar wird. Dieses Verhalten wird nicht durch die Regler, sondern durch die Totzeit des Systems verursacht. Dadurch kann auch erklärt werden, warum erst bei  $t = 20\text{s}$  damit begonnen wird, die bei  $t = 0$  auftretende Störung zu kompensieren. Alle Regler können die Störung ausgleichen. Eine schnellere Kompensation der Störung gelingt in diesem Fall den Reglern mit Störschätzern. Dieses Verhalten ist auf die Parametrierung der PI-Regler und der Vergessensfaktoren zurückzuführen. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass die Störschätzer bereits  $10\text{s}$  nach Realisierung der Störung gegen den richtigen stationären Wert der Störung konvergieren. Damit ist eine Kompensation der Störung innerhalb von  $2T_t$  möglich. Abschließend sind in Tabelle 3.7 die integralen quadratischen Ausgangsfehler aufgrund der Störung eingetragen.

Regler	FSP	SPVS	SGKVS	MPC
$e_2$	11.39	11.39	8.94	8.98

Tabelle 3.7: Quadratischer Ausgangsfehler zufolge einer rampenförmigen Störung.

### 3.5.3 Unsicherheiten in den Parametern von $\hat{g}(u)$

Um die Reaktion des Systems auf Unsicherheiten in der Ausgangsabbildung  $\hat{g}(u)$  zu untersuchen, werden Simulationen in MATLAB/SIMULINK durchgeführt. Die Parameter dafür sind in Tabelle 3.4 und Tabelle 3.8 zusammengefasst. In Abbildung 3.13 sind die Ausgangsgrößen zufolge einer rampenförmigen Änderung der Sollgröße bei Parameterfehlern in  $\hat{g}(u)$ , die Regelfehler

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3.28)$$

und das Schätzergebnis der Störschätzer zu sehen. Aufgrund des Fehlers im internen Modell der Regler kommt es nach der Sollgrößenänderung zu einem Fehler am Ausgang. Dieser Fehler ist allerdings erst eine Totzeit nach dem Aufschalten der Stellgröße detektierbar.

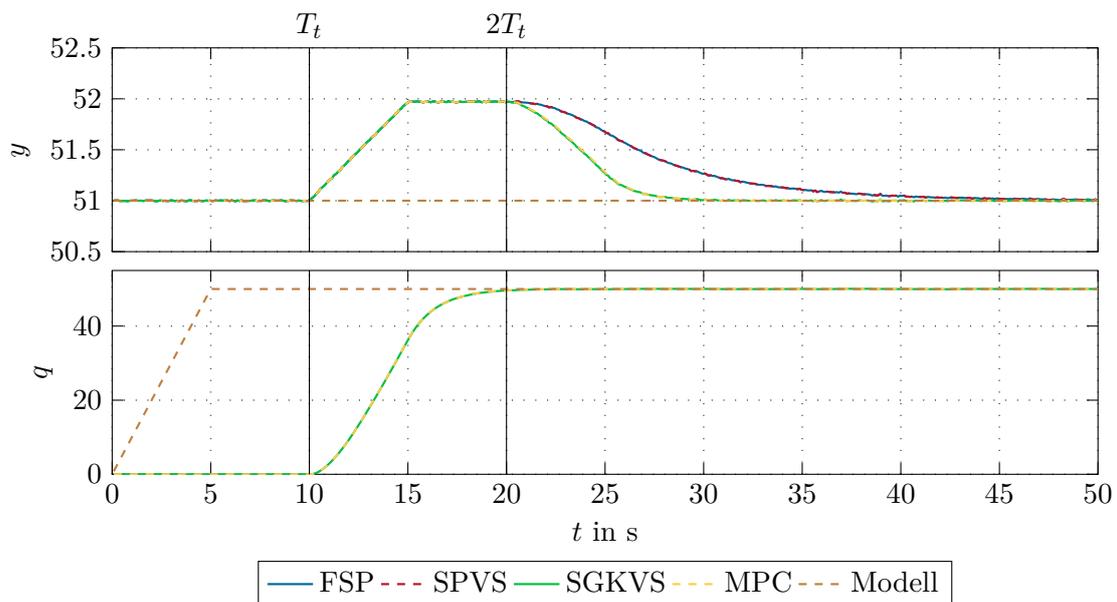


Abbildung 3.12: Störverhalten der geschlossenen Regelkreise.

Die Kompensation des Fehlers erfolgt bei dem FSP und dem SPVS über die Integration des Prädiktionsfehlers  $\Delta y$  und bei der MPC und der SGKVS durch die Schätzung eines fiktiven Ausgangsfehlers  $\hat{q}$ . Da keiner der hier vorgestellten Regler sein internes Modell adaptiert, würden bei der nächsten Änderung des Sollwerts wieder ähnliche Fehler auftreten. In Kapitel 7 werden daher Regler vorgestellt, die eine Änderung am internen Modell zufolge eines Prädiktionsfehlers vornehmen und somit ein besseres Verhalten bei Parameterschwankungen in  $\hat{g}(u)$  aufweisen. Wie in Tabelle 3.9 dargestellt, weisen alle Konzepte vergleichbare Ausgangsfehler auf. Die MPC und der SGKVS erreichen den gewünschten Sollwert zwar früher, schwingen aber minimal über.

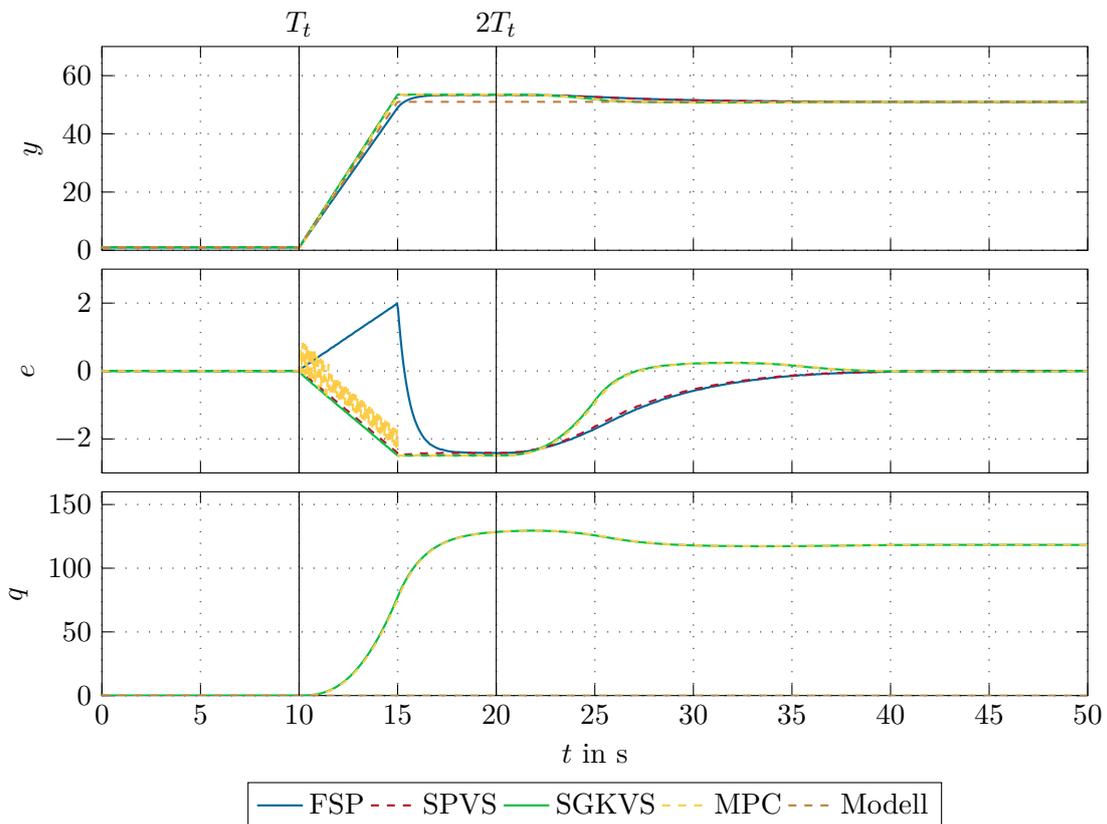
Parameter	Wert
$T_t$	10 s
$a$	2.2
$b$	0.6

Tabelle 3.8: Streckenparameter mit Unsicherheiten in  $\hat{g}(u)$ .

### 3.5.4 Parameterunsicherheiten der Totzeit

Den Abschluss bildet die Untersuchung der Reaktion der Regler auf Parameterunsicherheiten in der Totzeit. Die Simulationsparameter können erneut Tabelle 3.4 und Tabelle 3.10 entnommen werden. Abbildung 3.14 stellt das Systemverhalten zufolge einer rampenför-

Regler	FSP	SPVS	SGKVS	MPC
$e_2$	60.15	68.78	63.8	59.87

Tabelle 3.9: Quadratischer Ausgangsfehler durch Parameterschwankung in  $g(u)$ .Abbildung 3.13: Verhalten der geschlossenen Regelkreise bei Parameterunsicherheiten in  $g(u)$ .

migen Anregung und einer Schwankung in der Totzeit  $\Delta T_t = 0.8s$  dar. Diese Schwankung in der Totzeit führt bei allen Reglern zu Beginn der Sollwertänderung zu einem Ausgangsfehler. Dieser Fehler verschwindet wieder, wenn der Arbeitspunktwechsel durchgeführt ist, da er rein durch die Zeitverzögerung zwischen dem prädizierten Ausgang und dem wahren Ausgang entsteht. Da dieser Prädiktionsfehler aber eine Totzeit nach dem Beginn des Arbeitspunktwechsels am Ausgang sichtbar wird, versuchen die Regler diesen Fehler zu kompensieren. Dieser Reglereingriff führt zu einer Änderung von  $u$  und natürlich von  $y$ . Dies bewirkt nun einen tatsächlichen Ausgangsfehler und das System wird wiederum angeregt. Um diese wiederkehrende Anregung zu verhindern, müsste die Totzeit des internen Modells korrigiert werden. Alle Regler sind über mehrere Wiederanregungszyklen dazu im Stande, auf den gewünschten Wert zu konvergieren. Der integrale quadratische Ausgangsfehler in Tabelle 3.11 ist jedoch bei allen Konzepten sehr groß. Um diesen Fehler zu reduzieren, werden in Kapitel 7 adaptive Reglerkonzepte entwickelt. Die dafür notwendigen Grundlagen in Form von Parameterschätzern für die Parameter von  $g(u)$  und die Totzeit  $T_t$  werden anschließend in Kapitel 4 behandelt.

Parameter	Wert
$T_t$	10.8s
$a$	2
$b$	0.5

Tabelle 3.10: Streckenparameter mit Unsicherheiten in der Totzeit.

Regler	FSP	SPVS	SGKVS	MPC
$e_2$	596.6	422.7	371.5	406.5

Tabelle 3.11: Quadratischer Ausgangsfehler durch Parameterschwankung in  $T_t$ .

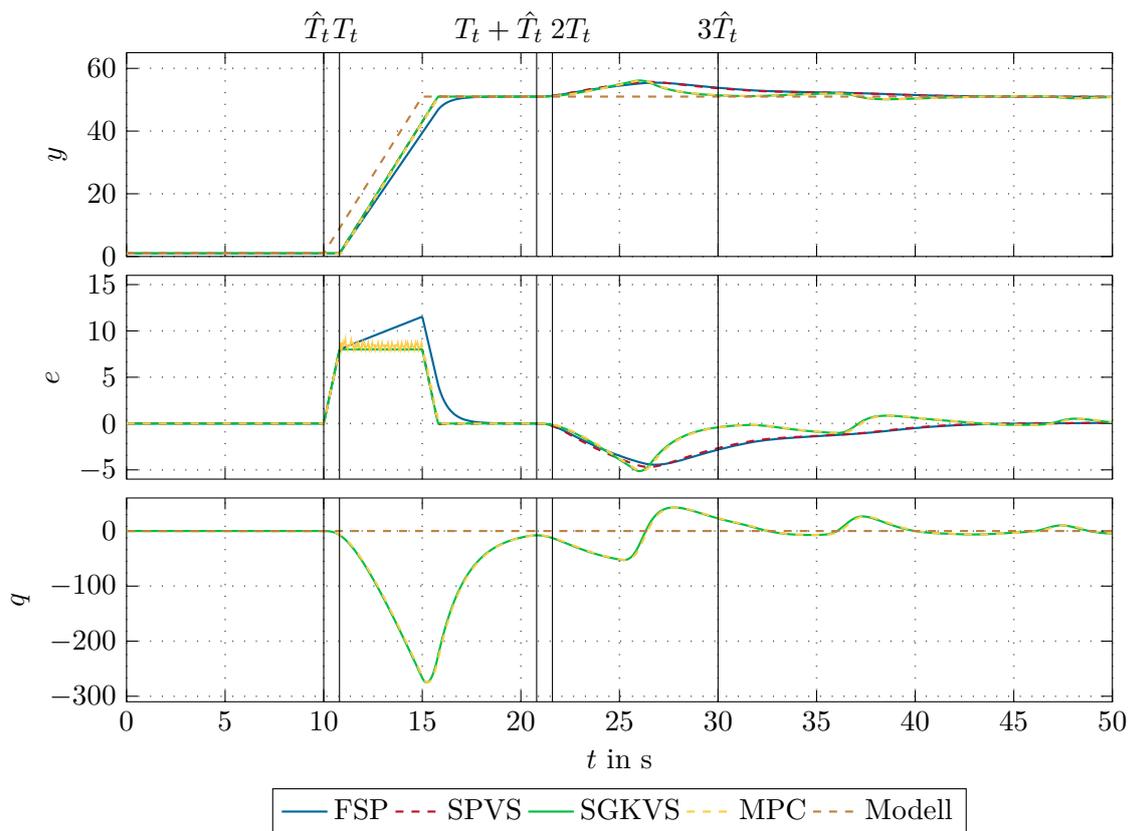


Abbildung 3.14: Verhalten der geschlossenen Regelkreise bei Parameterunsicherheiten in  $T_t$ .



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

## 4 Online Parameterschätzer für Systeme mit dominanter Totzeit

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt wurde, treten bei der Regelung von Systemen mit Totzeit bei Schwankung der Totzeit  $T_t$  und der Parameter von  $g(u)$  deutliche Beeinträchtigungen der Regelgüte auf. Das Verhalten gegenüber Parameterunsicherheiten in  $g(u)$  und in der Totzeit  $T_t$  kann verbessert werden, indem die verwendeten Regler um online Parameterschätzer erweitert werden. Dieses Kapitel beschäftigt sich daher mit der Entwicklung und dem Vergleich unterschiedlicher Parameterschätzer. Es werden Schätzer ohne Regler betrachtet, wobei davon ausgegangen wird, dass die Stellgröße frei gewählt werden kann. Laut [1] handelt es sich bei gleichzeitiger Identifikation von zeitvarianten Verzögerungen und Parametern immer noch um ein offenes Problem der Regelungstechnik, weshalb nur wenige Verfahren in der Literatur bekannt sind. Um eine weitere Einschränkung der möglichen Schätzer zu verhindern, sei angenommen, dass das System linear in den Parametern ist. Für viele Ausgangsfunktionen  $g(u, \mathbf{p})$ , die nichtlinear in den Parametern sind, existiert wiederum eine nichtlineare Ausgangstransformation so, dass das transformierte System linear in den Parametern wird. Ein Beispiel ist die in (3.4) eingeführte Wurzelfunktion. Wird der Schätzer für den Ausgang  $y' = y^2$  anstatt des Ausgangs  $y$  ausgelegt, ist das resultierende System linear in den Parametern. Im Weiteren wird als Ausgangsfunktion

$$g(u(t)) = au(t) + b \quad (4.1)$$

betrachtet. Zuerst werden in Abschnitt 4.1 grundlegende Diskussionen über die Identifizierbarkeit von Systemen mit Totzeit geführt und die Signalklasse der hinreichend nicht glatten Signale laut [10] eingeführt. Anschließend wird in Abschnitt 4.2 die in der Praxis weitverbreitete Padé-Approximation vorgestellt und ihre Anwendbarkeit für die Schätzung der Totzeit besprochen. Darauf aufbauend werden einige Parameterschätzer aus der Literatur genauer diskutiert und auf eine Ausgangsfunktion mit Totzeit angewandt. Dabei wird mit dem modifizierten normalisierten linearen Least-Squares Schätzer nach [11] in Abschnitt 4.3 begonnen. Dem folgt in Abschnitt 4.4 die Parameteridentifikation nach [12]. Im Anschluss werden zwei Abwandlungen der verteilt verzögert gewichteten Sliding-Mode Identifikation nach [13], die verteilt verzögert gewichtete rekursive Least-Squares Identifikation in Abschnitt 4.5 und die verteilt verzögert gewichtete Kalman-Filter Identifikation in Abschnitt 4.6 entwickelt. Abschließend werden in Abschnitt 4.7 die vorgestellten Schätzer mittels Simulationen gegenübergestellt und ihre Vor- und Nachteile diskutiert.

## 4.1 Grundlegende Betrachtungen

In diesem Abschnitt wird auf die Identifizierbarkeit von Systemen mit Totzeit näher eingegangen. Laut [14] ist eine Parametermenge  $\Omega$  an der Stelle  $\theta \in \Omega$  identifizierbar, wenn das Parameterpaar  $(\theta, \alpha)$  für alle  $\alpha \in \Omega$  und  $\alpha \neq \theta$  *ausgangsunterscheidbar* ist. Ein Parameterpaar  $(\theta, \alpha)$  ist genau dann *ausgangsunterscheidbar*, wenn

$$y(t, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{x}_0, \theta) \equiv y(t, \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{x}_0, \alpha) \quad (4.2)$$

für alle  $[\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot)] \in \mathbb{E}, 0 \leq t \leq T$  gilt.  $\mathbb{E}$  bezeichnet dabei die zulässige Menge von Anfangswerten  $\mathbf{x}_0$  und Eingangsgrößen  $\mathbf{u}$ . Gilt Bedingung (4.2) nicht, so wird das Paar als *ausgangsunterscheidbar* bezeichnet.

In [10] werden hinreichende Bedingungen für die Identifizierbarkeit von linearen verzögerten Systemen der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=0}^o [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t - T_{t,i}) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t - T_{t,i})] \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=0}^o \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t - T_{t,i}) \quad (4.3b)$$

mit den Zeitverzögerungen  $T_{t,i}$  mit  $i \in [1, \dots, o]$  und den Eingängen  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$  vorgestellt. Dabei bestehen alle  $T_{t,i}$  aus  $r$  inkommensurablen Zeitverzögerungseinheiten  $\tau_i$ . Diese sind genau dann *inkommensurabel*, wenn für die ganzzahligen Konstanten  $\kappa \in \mathbb{R}^r$

$$\sum_{i=1}^r \kappa_i \tau_i = 0 \quad (4.4)$$

mit

$$\sum_{i=1}^r \kappa_i^2 = 0 \quad (4.5)$$

gilt. Das zu (4.3) korrespondierende Schätzsystem kann als

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=0}^o [\hat{\mathbf{A}}_i \hat{\mathbf{x}}(t - \hat{T}_{t,i}) + \hat{\mathbf{B}}_i \mathbf{u}(t - \hat{T}_{t,i})] \quad (4.6a)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \sum_{i=0}^o \hat{\mathbf{C}}_i \hat{\mathbf{x}}(t - \hat{T}_{t,i}) \quad (4.6b)$$

mit  $\hat{r}$  inkommensurablen Zeitverzögerungseinheiten angeschrieben werden.

Für die Untersuchung der Identifizierbarkeit von Systemen in der Form (4.3) und den dazugehörigen Referenzmodellen der Form (4.6) werden zunächst hinreichend diskontinuierliche Signale und hinreichend nicht glatte Signale eingeführt. Nach [10] wird ein *hinreichend diskontinuierliches Signal* als ein Signal  $\mathbf{u}(t)$  definiert, welches folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Menge  $D$  der Unstetigkeitsstellen  $t_j$  von  $\mathbf{u}(t)$  besitzt eine Teilmenge  $D_0 \subset D$  bestehend aus mindestens  $(p + r + \hat{r})$  inkommensurablen Punkten.

- Die Sprünge  $\sigma_{t_i} = \mathbf{u}(t_{i+}) - \mathbf{u}(t_{i-})$  an beliebigen Punkten  $t_i \in D_0$  mit  $i = 1, \dots, p$  bilden eine Matrix mit vollem Rang, i.e.  $\text{rang}[\sigma_{t_1} \ \sigma_{t_2} \ \dots \ \sigma_{t_p}] = p$ . Bei  $\mathbf{u}(t_+)$  und  $\mathbf{u}(t_-)$  handelt es sich dabei jeweils um den linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwert von  $\mathbf{u}$  gegen  $t$ .
- Zwischen den Unstetigkeitsstellen handelt es sich bei  $u(t)$  um eine reguläre Funktion laut [15].

Ein stückweise reguläres Signal  $\mathbf{u}(t)$  aus der Klasse der  $(l-1)$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen  $\mathcal{C}^{l-1}$  mit  $l \geq 1$  wird in [10] als ein *hinreichend nicht glattes Signal* bezeichnet, wenn die  $l$ -te zeitliche Ableitung von  $u(t)$  ein hinreichend diskontinuierliches Signal ist. Dabei bezeichnet  $l$  die höchste zeitliche Ableitung von  $\mathbf{u}$ , die im System vorkommt. Die Parameter  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$  und  $T_{t,i}$  von (4.3) sind laut [16] identifizierbar, wenn

- und nur wenn das System (4.3) schwach steuerbar laut [16] ist und
- das System (4.3) mit einer hinreichend nicht glatten Funktion angeregt wird.

Da diese Bedingungen für alle linearen Systeme mit beliebig vielen Zeitverzögerungen erfüllt sein müssen und alle Systemzustände angeregt werden müssen, ist die sehr restriktive Beschränkung (ii) für  $\mathbf{u}(t)$  verständlich. Darüber hinaus kann bei BIBO-stabilen Systemen  $\mathbf{u}(t)$  für die Identifikation sehr häufig frei aus  $U$  gewählt werden. Um eine hinreichend nicht glatte Funktion zu generieren, erweist es sich als sinnvoll, wie folgt vorzugehen:

- Zuerst wählt man die gewünschten inkommensurablen Zeitpunkte  $t_j$ .
- Anschließend wird zwischen den Unstetigkeitsstellen eine reguläre Funktion gewählt.
- Abschließend wird die Funktion  $l$ -mal integriert.

Es sei noch angemerkt, dass eine Erweiterung eines Schätzers um  $j$  nicht inkommensurable Zeitverzögerungen zu keiner Änderung dieser Bedingungen führt.

Analog zu [14] lassen sich die Bedingungen (i) und (ii) auf den nichtlinearen Fall (2.3) erweitern. Bei  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$  handelt es sich um die Jacobi-Matrizen von  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{h}$  bezüglich  $\mathbf{x}$  und  $u$  an der Stelle  $(\mathbf{x}(t), u(t), t, \theta)$ . Dann impliziert eine Identifizierbarkeit von (4.3) an der Stelle  $(\mathbf{x}(t), u(t), t, \theta)$  auch eine Identifizierbarkeit von (2.3) an ebendieser Stelle. Somit kann für jede beliebige Trajektorie  $\mathbf{x}(t)$  die Identifizierbarkeit des nichtlinearen zeitverzögerten Systems anhand der Identifizierbarkeit des zeitvarianten verzögerten linearisierten Systems untersucht werden. Für dieses linearisierte System können die hier vorgestellten Bedingungen überprüft und die Identifizierbarkeit gezeigt werden. Eine ähnliche Argumentation für die Identifizierbarkeit von nichtlinearen verzögerten Systemen um eine Ruhelage kann in [17] gefunden werden.

Das Verhalten von Totzeitschätzern kann verbessert werden, wenn zusätzliche Information über die Totzeit nutzbar ist. Bei zeitvarianten beschränkten Totzeitschwankungen  $T_t(t) \in [T_{t_{min}}, T_{t_{max}}]$  kann die minimale Totzeit  $T_{t_{min}}$  vorgesteuert werden, um nur noch den zeitvarianten Anteil  $\Delta T_t(t) = T_t(t) - T_{t_{min}}$  schätzen zu müssen. Dies führt für viele Verfahren zu einer deutlichen Verbesserung des Konvergenzverhaltens. Diese Vorgehensweise wird besonders häufig bei Verfahren basierend auf der Padé-Approximation verwendet [1], kann aber auch für jedes andere Schätzverfahren verwendet werden, sofern zusätzliche Informationen über die Totzeit bekannt sind.

## 4.2 Padé-Approximation

In [1] wird eine ausführliche Beschreibung der Grenzen von Approximationen der Zeitverzögerung durch eine rationale Übertragungsfunktion der Form

$$e^{-T_t s} \approx \frac{p(-T_t s)}{p(T_t s)} \quad (4.7)$$

gegeben, wobei es sich bei  $p(T_t s)$  um ein passendes Hurwitzpolynom handelt. Hinter diesem Ansatz liegt die Hoffnung, die infinit-dimensionale Transportgleichung durch eine finit-dimensionale Approximation hinreichend genau beschreiben zu können. Der bekannteste Vertreter dieser Approximation ist die sogenannte Padé-Approximation erster Ordnung mit  $p(T_t s) = 1 - \frac{T_t s}{2}$ . Die Bestimmung der benötigten Polynomordnung kann, selbst für eine konstante bekannte Totzeit, a priori schwierig sein [1]. In der Regel bedingt eine größere Totzeit eine höhere Polynomordnung. Des Weiteren ist es nicht möglich, die Verzögerung beliebig genau im Sinne der  $H_\infty$ -Norm zu approximieren. In [1] wird zusätzlich gezeigt, dass diese Form der Approximation für zeitvariante Verzögerungen nicht anwendbar ist.

Darüber hinaus wird in [18] ein Beispiel für die Grenzen der Padé-Approximation gegeben. Das zeitverzögerte lineare System erster Ordnung mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{V_s}{1 + sT} e^{-T_t s} \quad (4.8)$$

wird durch einen klassischen PID-Regler geregelt. Der PID-Regler wird mithilfe einer Padé-Approximation der Verzögerung ausgelegt. Es wird gezeigt, dass PID-Regler existieren, die die Approximation der zeitverzögerten Strecke stabilisieren, für das wahre zeitverzögerte System (4.8) aber zu einem instabilen Systemverhalten führen. Wegen dieser Beschränkungen wird in dieser Diplomarbeit auf Verfahren basierend auf der Padé-Approximation verzichtet.

## 4.3 Modifizierte normalisierte lineare Least-Squares Identifikation

In [11] wird der modifizierte normalisierte lineare Least-Squares Schätzer (modified normalized linear least-squares estimator) entwickelt. Es handelt sich dabei um ein rekursives Verfahren, welches als ein approximierter linearer Least-Squares Schätzer für lineare zeitinvariante Systeme mit einer Eingangsverzögerung der Form

$$y^{(n)} + c_1 y^{(n-1)} + \dots + c_n y = d_0 \bar{u}^{(m)} + d_1 \bar{u}^{(m-1)} + \dots + d_m \bar{u} \quad (4.9)$$

mit der  $i$ -ten zeitlichen Ableitungen  $y^{(i)}$  von  $y$  und den zeitinvarianten Parametern  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $d_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , verstanden werden kann. Dafür werden im ersten Schritt der gemessene Eingang und Ausgang mit  $\frac{1}{T(s)}$  gefiltert. Dabei ist  $T(s)$  ein Hurwitzpolynom der Form  $s^n + f_1 s^{n-1} + \dots + f_n$ . Der geschätzte Ausgang kann als

$$\hat{y} = \hat{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\phi}(\hat{T}_t) \quad (4.10)$$

mit

$$\hat{\mathbf{p}}^T = [f_1 - \hat{c}_1 \quad \dots \quad f_n - \hat{c}_n \quad \hat{d}_0 \quad \dots \quad \hat{d}_m] \quad (4.11a)$$

$$\phi^T(\hat{T}_t) = \left[ \frac{s^{n-1}}{T(s)}[y] \quad \dots \quad \frac{1}{T(s)}[y] \quad \frac{s^m e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)}[u] \quad \dots \quad \frac{e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)}[u] \right] \quad (4.11b)$$

angeschrieben werden. Dabei bezeichnet  $\hat{\mathbf{p}}$  den geschätzten Parametervektor,  $\phi(\hat{T}_t)$  den Datenvektor und bei  $\frac{s^i}{T(s)}[y]$  und  $\frac{s^i e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)}[u]$  handelt es sich um die  $i$ -te Zeitableitung des gefilterten Ausgangs  $y$  und des Eingangs  $u$ . Außerdem werden der erweiterte Parametervektor  $\hat{\Theta} = [\hat{\mathbf{p}}^T \quad \hat{T}_t]^T$  und der negative Gradient des Schätzfehlers  $e = y - \hat{y}$  in der Form

$$\Phi(\hat{\Theta}) = -\frac{\partial e}{\partial \hat{\Theta}} = \left[ \phi^T(\hat{T}_t) \quad \hat{\mathbf{p}}^T \frac{\partial \phi}{\partial \hat{T}_t} \right]^T = \left[ \phi^T(\hat{T}_t) \quad -\sum_{i=0}^m \hat{d}_i \frac{s^{m-i+1} e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)}[u] \right]^T \quad (4.12)$$

eingeführt. Entsprechend [11] wird für den modifizierten normalisierten linearen Least-Squares Schätzer (NLS) das Kostenfunktional

$$J(\hat{\Theta}, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \underbrace{\frac{e^2(\tau)}{e^{-\beta(t-\tau)}}}_{\text{exponentielles Vergessen}} \underbrace{\frac{\left( y - \hat{\mathbf{p}}^T \phi(\hat{T}_t) \right)^2}{1 + \gamma \Phi^T(\hat{\Theta}) \Phi(\hat{\Theta})}}_{\text{Normalisierungsterm}} d\tau + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-\beta t} (\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_0)^T \mathbf{Q}_0 (\hat{\Theta} - \hat{\Theta}_0)}_{\text{Anfangskostenterm}} \quad (4.13)$$

mit dem Vergessensfaktor  $\beta \geq 0$ , dem Normalisierungsfaktor  $\gamma > 0$ , dem Startvektor des geschätzten erweiterten Parametervektors  $\hat{\Theta}_0$  und der positiv definiten Matrix  $\mathbf{Q}_0$  gewählt.

Zur Entwicklung einer Rekursionsvorschrift für die Schätzer wird die Matrix

$$\mathbf{P} = \left( \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\Theta}^2} \right)^{-1} \quad (4.14)$$

benötigt. Für sprungfähige Systeme ( $n = m$ ) ergibt sich die Iterationsvorschrift des NLS laut [11] zu

$$\dot{\hat{\Theta}} = \frac{\mathbf{P} \Phi(\hat{\Theta}) e}{1 + \gamma \Phi^T(\hat{\Theta}) \Phi(\hat{\Theta})} \quad (4.15a)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = \beta \mathbf{P} - \frac{\mathbf{P} \Phi(\hat{\Theta}) \Phi^T(\hat{\Theta}) \mathbf{P}}{1 + \gamma \Phi^T(\hat{\Theta}) \Phi(\hat{\Theta})} \quad (4.15b)$$

Die Startwerte des Schätzers werden dabei  $\mathbf{P}(0) = \mathbf{Q}_0^{-1}$  und  $\hat{\Theta}(0) = \hat{\Theta}_0 = [\hat{a}_{in} \quad \hat{b}_{in} \quad \hat{T}_{t,in}]^T$  gewählt.

Der NLS kann nun auf die Ausgangsfunktion (4.1) mit Totzeit angewandt werden. Daraus ergeben sich der erweiterte Parametervektor  $\hat{\Theta}$  und der Datenvektor  $\Phi(\hat{\Theta})$  zu

$$\hat{\Theta} = [\hat{a} \quad \hat{b} \quad \hat{T}_t]^T \quad (4.16a)$$

$$\Phi(\hat{\Theta}) = \left[ \frac{e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)}[u] \quad 1 \quad -\hat{a} \frac{se^{-\hat{T}_t s}}{T(s)}[u] \right]^T. \quad (4.16b)$$

Für die Implementierung in MATLAB wurde dieses Verfahren mittels des expliziten Euler-Verfahrens diskretisiert. So erhält man für den NLS

$$e_k = y_k - \hat{\mathbf{p}}_{k-1}^T \phi_k(\hat{T}_{t,k-1}) \quad (4.17a)$$

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} + T_a \frac{\mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k-1}(\hat{\Theta}_{k-1}) e_k}{1 + \gamma \Phi_{k-1}^T(\hat{\Theta}_{k-1}) \Phi_{k-1}(\hat{\Theta}_{k-1})} \quad (4.17b)$$

$$\mathbf{P}_k = (1 + T_a \beta) \mathbf{P}_{k-1} - T_a \frac{\mathbf{P}_{k-1} \Phi_{k-1}(\hat{\Theta}_{k-1}) \Phi_{k-1}^T(\hat{\Theta}_{k-1}) \mathbf{P}_{k-1}}{1 + \gamma \Phi_{k-1}^T(\hat{\Theta}_{k-1}) \Phi_{k-1}(\hat{\Theta}_{k-1})}. \quad (4.17c)$$

Der direkte Vergleich zwischen den Iterationsvorschriften des NLS aus (4.17) und des RLS aus (3.11) zeigt eine sehr große Ähnlichkeit. Dies begründet in [11] auch die Bezeichnung des Verfahrens (4.17) als modifiziertes Least-Squares Verfahren. Mit Modifizierung wird in diesem Fall die Erweiterung des Parametervektors und die Berücksichtigung des Einflusses der geschätzten Totzeit  $\hat{T}_t$  auf den Datenvektor bezeichnet. Ebenfalls sieht man sofort, dass (4.17) direkt auf den zeitverschobenen Eingang und deren Ableitungen zugreift und ihm somit keine Approximation der Totzeit zugrunde liegt. In Abschnitt 4.7 wird der NLS mit den anderen in diesem Kapitel vorgestellten Schätzern verglichen.

## 4.4 Endlich zeitliche Parameteridentifikation

Die endlich zeitliche Parameteridentifikation (finite-time parameter identification kurz FTPI) ist ein weiteres sehr verbreitetes Verfahren zur Parameter- und Totzeitschätzung für LTI-Systeme der Form (4.9). Dieses Verfahren ist in [12] detailliert beschrieben. Hierbei wird der Ein- und Ausgang wiederum mit  $\frac{1}{T(s)}$  gefiltert und  $\phi(\hat{T}_t)$  sowie  $\hat{\mathbf{p}}$  gemäß (4.11) eingeführt. Anschließend wird der Ausgang in

$$y = \mathbf{p}^T \phi(\hat{T}_t) + \mathbf{p}^T (\phi(T_t) - \phi(\hat{T}_t)) + \delta \quad (4.18)$$

mit einer unbekannt beschränkten gefilterten Störung  $\delta$  umgeschrieben. Im nächsten Schritt wird eine Taylorreihenentwicklung erster Ordnung von  $e^{-T_t s} - e^{-\hat{T}_t s}$  um  $\hat{T}_t$  gemäß

$$\mathbf{p}^T (\phi(T_t) - \phi(\hat{T}_t)) = -\Delta T_t \sum_{i=0}^m \hat{d}_i \frac{s^{m-i+1} e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)} [u] + \mathcal{O}(\Delta T_t) \quad (4.19)$$

mit  $\Delta T_t = T_t - \hat{T}_t$  durchgeführt. Aus (4.18) folgt damit

$$y = \Theta^T \Phi(\hat{\Theta}) + \hat{T}_t \sum_{i=0}^m \hat{d}_i \frac{s^{m-i+1} e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)} [u] + \rho \quad (4.20)$$

angeschrieben werden, wobei es sich bei

$$\Phi(\Theta) = \left[ \phi^T(\hat{T}_t) \quad - \sum_{i=0}^m \hat{d}_i \frac{s^{m-i+1} e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)} [u] \right]^T \quad (4.21)$$

um den erweiterten Datenvektor, bei  $\Theta = [\mathbf{p}^T \ T_t]^T$  um den erweiterten Parametervektor und bei  $\rho = \mathcal{O}(\Delta T_t) + \delta$  um eine beschränkte Störung handelt. Nun kann für dieses System ein Schätzer entwickelt werden. In [12] wird der Sliding-Mode Schätzer

$$\dot{\mathbf{P}} = -l\mathbf{P} + \Phi(\Theta) \Phi^T(\Theta), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{0} \quad (4.22a)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = -l\mathbf{q} + \Phi(\Theta) \left( y - \hat{T}_t \sum_{i=0}^m \hat{d}_i \frac{s^{m-i+1} e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)} [u] \right), \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{0} \quad (4.22b)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}\hat{\Theta} - \mathbf{q} \quad (4.22c)$$

$$\dot{\hat{\Theta}} = -\Gamma \frac{\mathbf{P}^T \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}, \quad \hat{\Theta}(0) = \hat{\Theta}_0 \quad (4.22d)$$

mit der erweiterten Regressormatrix  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{(n+m+2) \times (n+m+2)}$ , dem erweiterten Regressorvektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+m+2}$  und dem gewichteten Abstandsvektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+m+2}$  vorgestellt. Beim Vergessensfaktor  $l > 0$  und bei der adaptiven Lernverstärkung  $\Gamma > 0$  handelt es sich um die frei wählbaren Parameter des Schätzers. Die Grundidee hinter diesem Schätzer liegt nun darin, eine Grenzfläche (discontinuity surface)  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  laut [19] so zu konstruieren, dass sie global anziehend laut [20] ist und eine entsprechende Bewegung (sliding motion) auf der Mannigfaltigkeit  $\mathbf{w} = \mathbf{0}$  erzeugt.

Die erweiterte Regressormatrix  $\mathbf{P}$  und der erweiterte Regressorvektor  $\mathbf{q}$  sind die mit dem Tiefpass  $\frac{1}{1+s}$  gefilterten Systemdynamiken  $\Phi(\Theta) \Phi^T(\Theta)$  und  $y - \hat{T}_t \sum_{i=0}^m \hat{d}_i \frac{s^{m-i+1} e^{-\hat{T}_t s}}{T(s)} [u]$ . Wenn man die Differentialgleichungen (4.22b) und (4.22c) über die Zeit integriert und unter Zuhilfenahme von (4.20) in (4.22d) einsetzt, erhält man

$$\mathbf{w} = -\mathbf{P}\Delta\Theta + \Psi \quad (4.23)$$

mit dem Parameterfehler  $\Delta\Theta = \Theta - \hat{\Theta}$  und der beschränkten Störung

$$\Psi = - \int_0^t e^{-l(t-\tau)} \Phi(\Theta) \rho(\tau) d\tau. \quad (4.24)$$

Deshalb kann  $\mathbf{w}$  als der mit den Messwerten gewichtete aufintegrierte Ausgangsschätzfehler interpretiert werden. Dieser Schätzer wurde wiederum mit dem expliziten Euler-Verfahren diskretisiert und in MATLAB implementiert. Nach der Diskretisierung ergibt sich der

Schätzer zu

$$\mathbf{P}_k = (1 - lT_a)\mathbf{P}_{k-1} + T_a \Phi_k \left( \hat{\Theta}_{k-1} \right) \Phi_k^T \left( \hat{\Theta}_{k-1} \right) \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{0} \quad (4.25b)$$

$$\mathbf{q}_k = (1 - lT_a)\mathbf{q}_{k-1} + T_a \Phi_k \left( \hat{\Theta}_{k-1} \right) \left( y_k - \hat{T}_{t,k-1} \sum_{i=0}^m \hat{d}_{i,k-1} \bar{u}_{F,k}^{(m-i+1)} \left( \hat{T}_{t,k-1} \right) \right) \quad (4.25c)$$

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (4.25d)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{P}_{k-1} \hat{\Theta}_{k-1} - \mathbf{q}_{k-1} \quad (4.25e)$$

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} - T_a \Gamma \frac{\mathbf{P}_{k-1}^T \mathbf{w}_k}{\|\mathbf{w}_k\|} \quad (4.25f)$$

mit der  $i$ -ten Ableitung der gefilterten und um  $\hat{T}_t$  zeitverzögerten Stellgröße  $\bar{u}_{F,k}^{(i)} \left( \hat{T}_{t,k-1} \right)$  zum Zeitpunkt  $t = kT_a$ . Wenn dieser Schätzer nun auf die in (4.1) definierte Funktion angewandt wird, ergibt sich der Schätzer

$$\Phi_k \left( \hat{\Theta}_{k-1} \right) = \left[ \bar{u}_{F,k} \left( \hat{T}_{t,k-1} \right) \quad 1 \quad -\hat{a}_{k-1} \dot{\bar{u}}_{F,k} \left( \hat{T}_{t,k-1} \right) \right]^T \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{P}_k = (1 - lT_a)\mathbf{P}_{k-1} + T_a \Phi_k \left( \hat{\Theta}_{k-1} \right) \Phi_k^T \left( \hat{\Theta}_{k-1} \right) \quad (4.26b)$$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{0} \quad (4.26c)$$

$$\mathbf{q}_k = (1 - lT_a)\mathbf{q}_{k-1} + T_a \Phi_k \left( \hat{\Theta}_{k-1} \right) \left( y_k - \hat{T}_{t,k-1} \hat{a}_{k-1} \dot{\bar{u}}_{F,k} \left( \hat{T}_{t,k-1} \right) \right) \quad (4.26d)$$

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (4.26e)$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{P}_{k-1} \hat{\Theta}_{k-1} - \mathbf{q}_{k-1} \quad (4.26f)$$

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_{k-1} - T_a \Gamma \frac{\mathbf{P}_{k-1}^T \mathbf{w}_k}{\|\mathbf{w}_k\|} \quad (4.26g)$$

$$\hat{\Theta}_0 = \left[ \hat{a}_{in} \quad \hat{b}_{in} \quad \hat{T}_{t,in} \right]^T \quad (4.26h)$$

mit den Anfangswerten der Schätzgrößen  $\hat{a}_{in}$ ,  $\hat{b}_{in}$  und  $\hat{T}_{t,in}$ .

## 4.5 Verteilt verzögert gewichtete rekursive Least-Squares Identifikation

In [13] wird der verteilt verzögert gewichtete Sliding-Mode Schätzer (distributed delay flavored sliding mode identification) vorgestellt. Dieser Schätzer beruht auf dem verteilt verzögert gewichteten Ansatz, der es ermöglicht, die Schätzung der Totzeit indirekt anhand der Schätzung von Parametern durchzuführen. Im Folgenden soll ein rekursiver Least-Squares Schätzer beruhend auf dieser Idee entwickelt werden. Dafür wird die

Ausgangsfunktion (4.1) durch den verteilt verzögert gewichteten Ansatz zu

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{a}_i u(t - \hat{T}_{t,i}) + \hat{b} \quad (4.27a)$$

$$\hat{y}_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{a}_0 & \cdots & \hat{a}_{N-1} & \hat{b} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{p}}_k^T} \underbrace{\begin{bmatrix} u(kT_a - \hat{T}_{t,0}) \\ \vdots \\ u(kT_a - \hat{T}_{t,N-1}) \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_k} \quad (4.27b)$$

mit der fiktiven Totzeit  $\hat{T}_{t,i} = \hat{T}_{t,0} + i\Delta\hat{T}_t$  erweitert. Der Parametervektor  $\hat{\mathbf{p}}_k$  kann nun mit Hilfe der Rekursion (3.11) ermittelt werden. Für die Anwendung des RLS muss die Ausgangsfunktion linear in den Parametern sein. Es ist allerdings nicht zwingend notwendig, dass es sich dabei um eine lineare Funktion wie in (4.27) handelt. Um den Ansatz (4.27) zur Schätzung von Parametern und Totzeiten verwenden zu dürfen, muss sichergestellt werden, dass

$$\hat{T}_{t,0} \leq T_t \leq \hat{T}_{t,N-1} \quad (4.28)$$

erfüllt ist. In der Praxis stellt dies auf Grund des vorhandenen Modellwissens kein Problem dar, da  $\hat{T}_{t,0}$ ,  $\Delta\hat{T}_t$  und  $N$  frei gewählt werden können. Der Schätzer berechnet die Parameter nun so, als würden alle fiktiven Verzögerungen auf das System wirken.

Um eine ausreichende Anregung des fiktiven und des wahren Systems und somit die Konvergenz der Parameter auf den tatsächlichen Wert sicherzustellen, wird das System mit einer hinreichend nicht glatten Funktion angeregt (siehe Abschnitt 4.1). Wie bereits in Abschnitt 4.1 erwähnt wurde, führt diese Erweiterung des zu schätzenden Systems zu keiner weiteren Erschwerung der Bedingungen für die Identifikation laut [10], falls das System nur um kommensurable fiktive Verzögerungen erweitert wird. Dies kann sichergestellt werden, indem  $\hat{T}_{t,0} = j\Delta\hat{T}_t$  mit  $j \in \mathbb{N}_0$  gilt.

Die Menge der fiktiven Totzeiten kann als

$$M_{T_t} = \left\{ \hat{T}_{t,0} + i\Delta\hat{T}_t \mid i = 0, \dots, N-1 \right\} \quad (4.29)$$

angeschrieben werden. Wenn nun angenommen wird, dass das zu schätzende System nur über eine einzige Verzögerung  $T_t$  verfügt, so kann für  $t \rightarrow \infty$ ,  $a \neq 0$  und  $T_t$  konstant zwischen zwei Fällen unterschieden werden:

- a) Für  $T_t \in M_{T_t}$  nähert sich  $\hat{a}_i$  für  $T_t = \hat{T}_{t,i}$  an  $a$  an und sämtliche verbleibenden  $\hat{a}_i$  konvergieren gegen Null. Somit kann in diesem Fall von  $\hat{a}$  direkt auf  $T_t$  geschlossen werden.
- b) Für  $T_t \notin M_{T_t}$  läuft das Parameterpaar  $\hat{a}_i$  und  $\hat{a}_{i+1}$  gegen einen konstanten Wert ungleich Null, wobei  $\hat{T}_{t,0} + i\Delta\hat{T}_t \leq T_t \leq \hat{T}_{t,0} + (i+1)\Delta\hat{T}_t$  gilt. Alle anderen  $\hat{a}_i$  konvergieren gegen Null. In diesem Fall führt der Ansatz (4.27) selbst für  $t \rightarrow \infty$  zur Einführung einer zweiten Totzeit. Da das resultierende System zwei Eingänge mit verschiedenen Verzögerungen aufweist, kann es nicht ohne Weiteres mit einem Smith-Prädiktor geregelt werden.

Der hier besprochene Schätzer wird im Folgenden als verteilt verzögert gewichteter rekursiver Least-Squares Schätzer (kurz GRLS) bezeichnet.

### 4.5.1 Interpolation für eine lineare Funktion

Um nun auch für  $T_t \notin M_{T_t}$  aus den  $N$  verschiedenen Schätzungen  $\hat{a}_i$  auf eine Totzeit  $\hat{T}_t$  und einen Parameter  $\hat{a}$  zu schließen, wird das System (4.1) mit den konstanten Parametern  $a, b$  und  $T_t$  mithilfe des GRLS gemäß (4.27) und (3.11) mit dem Vergessenfaktor  $\lambda = 1$  identifiziert. Als Anregung  $u$  dient ein periodisches rechteckförmiges Signal mit einem allgemeinen High-Pegel  $u_H$  und einem Low-Pegel  $u_L = 0$ . Da  $\lambda = 1$  ist und die Systemparameter konstant sind, wird der Betrag der Änderung der geschätzten Parameter von Signalfanke zu Signalfanke abnehmen. Im Grenzübergang  $t \rightarrow t_\infty$  konvergieren alle Schätzparameter gegen einen stationären Wert laut  $b$ ). In Abbildung 4.1 sind der Ausgang  $y$  und der Ausgang des identifizierten Systems  $\hat{y}$  bei rechteckförmiger Anregung  $u$  mit eingeschwungenen Parametern dargestellt. Im eingeschwungenen Zustand minimiert der RLS die periodisch auftretende quadratische Fehler

$$A_\infty^2 = E_1^2 t_1 + E_2^2 t_2 \tag{4.30}$$

mit den in Abbildung 4.1 eingezeichneten Fehlern  $E_1 = -\hat{a}_i u_H$  und  $E_2 = \hat{a}_{i+1} u_H$  und den zugehörigen Zeiten  $t_1 = T_t - \hat{T}_{t,i}$  und  $t_2 = \hat{T}_{t,i+1} - T_t$ .

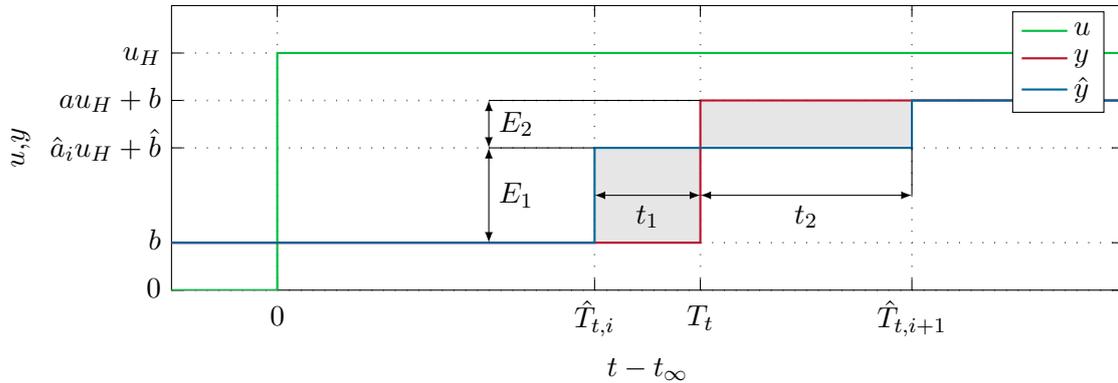


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des Grenzwerts der verteilt verzögert gewichteten rekursiven Least-Squares Identifikation mit der Ausgangsfunktion (4.1) für  $T_t \notin M_{T_t}$ .

Es wird davon ausgegangen, dass der Fehler zwischen dem gemessenen Ausgang  $y$  und dem geschätzten Ausgang  $\hat{y}$  mit Ausnahme der Übergänge Null ist, es gilt also

$$a = \hat{a}_i + \hat{a}_{i+1}, \tag{4.31a}$$

$$b = \hat{b}. \tag{4.31b}$$

Diese Bedingungen können unabhängig von den Fehlerflächen aufgrund der Übergänge erfüllt werden und sind somit von der Totzeitschätzung unabhängig. Im nächsten Schritt

wird in (4.30) für  $E_1$ ,  $E_2$  und  $\hat{a}_{i+1}$  eingesetzt und nach dem noch freien Parameter  $\hat{a}_i$  abgeleitet. Nullsetzen liefert dann

$$\frac{\partial A_\infty^2}{\partial \hat{a}_i} = 2\hat{a}_i t_1 u_H^2 - 2(a - \hat{a}_i) t_2 u_H^2 = 0. \quad (4.32)$$

Es folgt

$$\hat{a}_i t_1 + (a - \hat{a}_i) t_2 = 0, \quad (4.33)$$

womit die beiden in Abbildung 4.1 grau markierten Flächen im stationären Zustand des Schätzers ident sind. Aus (4.32) folgen  $\hat{a}_i$  und  $\hat{a}_{i+1}$  für  $u_H \neq 0$  zu

$$\hat{a}_i = \frac{t_2}{t_2 + t_1} a = \frac{\hat{T}_{t,i+1} - T_t}{\Delta \hat{T}_t} a \quad (4.34a)$$

$$\hat{a}_{i+1} = \frac{t_1}{t_2 + t_1} a = \frac{T_t - \hat{T}_{t,i}}{\Delta \hat{T}_t} a. \quad (4.34b)$$

Die zweite Ableitung von  $A_\infty^2$  entsprechend

$$\frac{\partial^2 A_\infty^2}{\partial \hat{a}_i^2} = 2(t_1 + t_2) u_H^2 = 2\Delta \hat{T}_t u_H^2 \quad (4.35)$$

ist immer größer Null. Da (4.30) eine quadratische Funktion in den Parametern ist, handelt es sich bei (4.34a) und (4.34b) um ein globales Minimum. In der Regel sind jedoch die geschätzten Parameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{a}_{i+1}$  bekannt und die wahren Parameter  $a$  und  $T_t$  unbekannt. Aus (4.34a) und (4.34b) erhält man

$$a = \hat{a}_i + \hat{a}_{i+1} \quad (4.36a)$$

$$T_t = \frac{\hat{a}_i}{a} \hat{T}_{t,i} + \frac{\hat{a}_{i+1}}{a} \hat{T}_{t,i+1}. \quad (4.36b)$$

Mit  $a_k = 0 \forall k \notin \{i, i+1\}$  kann (4.36) auch als

$$a = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k, \quad (4.37a)$$

$$T_t = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k \hat{T}_{t,k} \quad (4.37b)$$

angeschrieben werden. Diese Darstellung legt eine lineare Interpolation für  $\hat{T}_t$  und  $\hat{a}$  der Form

$$\hat{a} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k, \quad (4.38a)$$

$$\hat{T}_t = \frac{1}{\hat{a}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k \hat{T}_{t,k} \quad (4.38b)$$

nahe. Die Interpolation (4.38) erlaubt dem Schätzer, einen Wert für  $\hat{a}$  und  $\hat{T}_t$  zu übergeben, welcher im stationären Fall mit rechteckiger Anregung, der Ausgangsfunktion (4.1) und zeitinvarianten Parametern den wahren Werten  $a$  und  $T_t$  entspricht. Sowohl die Zeitinvarianz von (4.30) als auch die Bedingungen (4.31) sind im Betrieb des Schätzers in der Regel nicht erfüllt. Die Lösung des hier gegebenen Minimierungsproblems muss deshalb als Motivation und nicht als allgemein gültige Herleitung für die Interpolation verstanden werden.

#### 4.5.2 Linear unabhängige Anregung des Schätzers

Um die Ausgangsunterscheidbarkeit (4.2) für das System (4.1) mit dem Schätzmodell (4.27) sicherstellen zu können,

- I. muss das Eingangssignal  $u(t)$  vom zeitverzögerten Eingangssignal  $u(t - \tau) \forall \tau \in [0, (N - 1) \Delta T_t]$  unterscheidbar sein und
- II. darf die Ansatzfunktion  $u(t - \hat{T}_{t,i})$  nicht als Linearkombination anderer Ansatzfunktionen  $u(t - \hat{T}_{t,j})$  mit  $i \neq j$  darstellbar sein, da sonst unendlich viele Lösungen von der Umkehrfunktion von (4.27) mit unendlich vielen Parametern  $\hat{a}_i$  existieren.

Daraus folgt, dass  $u(t)$  zwar periodisch sein darf, jedoch muss die Periode  $T$  größer als die doppelte Suchfensterlänge  $2N\Delta T_t$  sein, da sonst der eindeutige Zusammenhang zwischen dem Eingang und dem Ausgang verloren geht. Eine Verletzung dieser Bedingung führt im Normalfall dazu, dass  $\hat{T}_t$  nicht gegen  $T_t$  konvergiert, sondern sich einem der Werte

$$\hat{T}_{t\infty} = T_t + i \frac{T}{2} \quad (4.39)$$

mit  $i \in \mathbb{Z}$  annähert. Bei Schätzern beruhend auf dem verteilt gewichteten Ansatz (4.27) kann dies darüber hinaus dazu führen, dass sich der Ausgang durch zwei oder mehrere verzögerte Eingangssignale unabhängig voneinander darstellen lässt. Dadurch geht die Eindeutigkeit der Inversion von (4.27) verloren.

Eine Funktion, die zumindest eine der Bedingungen verletzt, wird von nun an als *linear abhängige Anregung* bezeichnet. Bei einem konstanten Eingang  $u(t) = \text{const}$  oder einer reinen Sinusschwingung  $u(t) = \sin(\omega t)$  handelt es sich um solche linear abhängige Anregungen, da sie zu einer Ununterscheidbarkeit des Ausgangs führen und somit nicht als Eingangsfunktion geeignet sind. Der Beweis für die Ausgangsununterscheidbarkeit bei einer Anregung durch eine reine Sinusschwingung kann Anhang A entnommen werden. Bedingung II ist nicht auf Totzeitsysteme beschränkt, sondern tritt auch bei der Identifikation von linearen Systemen auf [9]. Um nun sicherzustellen, dass Bedingung II eingehalten wird, muss es sich bei  $u(t)$  um eine *gleichmäßig anhaltende Anregung* (uniformly persistent excitation) laut [9] handeln. Eine Anregung  $\mathbf{u}'_i$  ist genau dann gleichmäßig anhaltend, wenn die Matrix

$$\boldsymbol{\xi}_k = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \mathbf{u}'_i (\mathbf{u}'_i)^T \quad (4.40)$$

positiv definit ist, wobei  $\lambda$  der Vergessensfaktor und

$$\mathbf{u}'_i = \left[ u \left( iT_a - \hat{T}_{t,0} \right) \dots u \left( iT_a - \hat{T}_{t,N-1} \right) \right]^T \quad (4.41)$$

der Vektor der zeitverschobenen Eingangssignale ist. Eine gleichmäßig anhaltende Anregung ist eine Bedingung für Konvergenz der Parameter bei adaptiven Regelungen von nicht totzeitbehafteten Systemen laut [21].

## 4.6 Verteilt verzögert gewichteter Kalman-Filter

Eine weitere Möglichkeit mit dem Ansatz (4.27) einen Schätzer zu entwickeln ist, die fiktiven Zeitverzögerungen als ein Schieberegister der Form

$$\mathbf{x}_{s,k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\Phi_s} \mathbf{x}_{s,k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma_s} u_k \quad \mathbf{x}_s(0) = \mathbf{x}_{s,0} \quad (4.42a)$$

$$\mathbf{y}_{s,k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_s} \mathbf{x}_{s,k} \quad (4.42b)$$

mit der Dynamikmatrix  $\Phi_s \in \mathbb{R}^{n_s \times n_s}$ , dem Eingangsvektor  $\Gamma_s \in \mathbb{R}^{n_s}$  und der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{N \times n_s}$  anzuschreiben. Die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}_s$  wird so gewählt, dass aus den zeitversetzten Eingängen  $\mathbf{x}_{s,k}^T = [u(kT_a - n_s T_a) \cdots u(kT_a)]$  die um die fiktiven Totzeiten verzögerten Eingänge  $\mathbf{y}_{s,k}^T = [u(kT_a - \hat{T}_{t,0}) \cdots u(kT_a - \hat{T}_{t,N-1})]$  ausgewählt werden. Die Ordnung des Schieberegisters muss die Bedingung

$$n_s \geq \frac{\hat{T}_{t,N-1}}{T_a} \quad (4.43)$$

einhalten, um die benötigten verzögerten Eingangssignale  $u(kT_a - \hat{T}_{t,i})$  bereitstellen zu können. Die Ausgangsabbildung (4.27) kann als eine Differenzgleichung der Parameter in der Form

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{k+1} \\ b_{k+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\mathbf{E}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_k \\ b_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{N-1,k} \\ \vdots \\ a_{0,k} \end{bmatrix} \quad (4.44a)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{s,k}^T & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_k^T} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_k \\ b_k \end{bmatrix} \quad (4.44b)$$

interpretiert werden. Der zeitvariante Ausgangsvektor  $\mathbf{c}_k^T$  wird dabei durch (4.42) bestimmt. Für dieses System kann ein Kalman-Filter entwickelt werden. Der Kalman-Filter für das

lineare zeitvariante Abtastsystem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.45a)$$

$$y_k = \mathbf{c}_k^T \mathbf{x}_k + v_k \quad (4.45b)$$

mit der Störung  $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{N+1}$  und dem Messrauschen  $v_k \in \mathbb{R}$  kann laut [22] als

$$\hat{\mathbf{I}}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{c}_k \left( \mathbf{c}_k^T \mathbf{P}_k^- \mathbf{c}_k + R_k \right)^{-1} \quad (4.46a)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \hat{\mathbf{L}}_k \left( y_k - \mathbf{c}_k^T \hat{\mathbf{x}}_k^- \right) \quad (4.46b)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \left( \mathbf{E} - \hat{\mathbf{L}}_k \mathbf{c}_k^T \right) \mathbf{P}_k^- \quad (4.46c)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \hat{\mathbf{x}}_k^+ \quad (4.46d)$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{P}_k^+ + \mathbf{G}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{G}_k^T \quad (4.46e)$$

mit dem geschätzten Parametervektor  $\hat{\mathbf{x}}_k$ , der Kovarianzmatrix des Schätzfehlers  $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1}$ , der Kovarianzmatrix der Störung  $\mathbf{Q}_k \in \mathbb{R}^{N+1 \times N+1}$ , der Kovarianzmatrix des Messrauschens  $R_k \in \mathbb{R}$  und der Kalman Verstärkungsmatrix  $\hat{\mathbf{L}}_k \in \mathbb{R}^{N+1}$  angeschrieben werden. Bei den mit + (-) versehenen Größen handelt es sich um die a priori (a posteriori) Schätzung. Für den Kalman-Filter werden die Startwerte  $\hat{\mathbf{x}}_0^- = [\hat{a}_{N-1,in}, \dots, \hat{a}_{0,in}, \hat{b}_{in}]^T$  und  $\mathbf{P}_0^- = \mathbf{P}_0 > \mathbf{0}$  benötigt. Dieser Schätzer wird von nun an als verteilt verzögert gewichteter Kalman-Filter (GKF) bezeichnet. Die Interpolation der Parameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{T}_{t,i}$  gemäß (4.38) kann natürlich auch für den Kalman-Filter verwendet werden.

## 4.7 Simulationsergebnisse

Um die hier vorgestellten Verfahren miteinander vergleichen zu können, wurden in MATLAB/SIMULINK mehrere Simulationen durchgeführt. Für alle Schätzer wurde das System (4.1) mit weißem Messrauschen mit der Standardabweichung  $P_{rausch}$  simuliert. Die Parameter der Schätzer wurde über Versuch und Irrtum bestimmt. Alle Schätzer werden nach der maximalen Totzeit  $\hat{T}_{t,N}$  nach Beginn der Simulation gestartet, um einen Zugriff auf nicht sinnvolle Daten zu verhindern und den Einschwingvorgang der Schätzer nicht zu verfälschen.

Die in [10] eingeführten hinreichenden Bedingungen für die Identifikation von verzögerten linearen Systemen laut (4.1) benötigt ein hinreichend nicht glattes Signal mit mindestens drei inkommensurablen Punkten. Dafür wird das hinreichend diskontinuierliche Signal

$$u_1(t) = 0.2 \operatorname{sign}(\sin(0.356t + 0.1)) + 0.06 \operatorname{sign}(\sin(0.123t + 0.3)) \quad (4.47)$$

verwendet. Bei (4.47) handelt es sich streng genommen nur um eine Approximation eines hinreichend diskontinuierlichen Signals mit drei inkommensurablen Punkten. Jedoch überschreitet die Periode von (4.47) den Simulationszeitraum deutlich und verhält sich somit bezüglich der Schätzer wie ein hinreichend diskontinuierliches Signal mit drei inkommensurablen Punkten. Die höchste Eingangsableitung  $l$  im System (4.1) ist Null. Deshalb wird das Signal  $u_1(t)$  direkt als Anregung für die Schätzer gewählt. Bei  $u_1(t)$

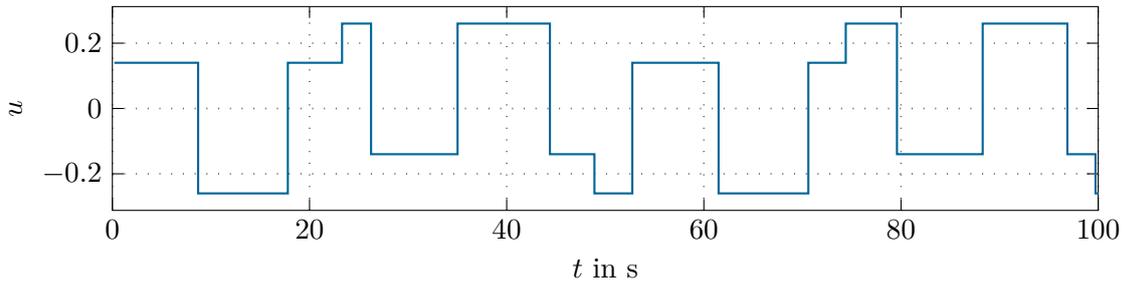


Abbildung 4.2: Anregung des Systems für die Schätzung der Parameter.

handelt es sich um eine linear unabhängige Anregung des Schätzers laut Abschnitt 4.5.2. Die verwendete Anregung ist in Abbildung 4.2 dargestellt.

Um ein Maß der Güte der Schätzer zu erhalten, werden die quadratischen Parameterfehler

$$e_{2,a}(t) = \int_0^t (a(\tau) - \hat{a}(\tau))^2 d\tau \quad (4.48a)$$

$$e_{2,b}(t) = \int_0^t (b(\tau) - \hat{b}(\tau))^2 d\tau \quad (4.48b)$$

$$e_{2,T}(t) = \int_0^t (T_t(\tau) - \hat{T}_t(\tau))^2 d\tau \quad (4.48c)$$

eingeführt. Für alle folgenden Simulationen wurden die Parameter aus Tabelle 4.1 verwendet.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\hat{T}_{t,in}$	10 s	$\hat{a}_{in}$	2
$\hat{b}_{in}$	1	$P_{Rausch}$	$10^{-6}$
$\hat{T}_{t,0}$	7 s	$T_a$	0.1s
$\Delta\hat{T}_t$	0.5 s	$N$	11
$\beta$	0.7	$\gamma_{NLS}$	0.5
$\mathbf{P}_{0,NLS}$	$\text{diag}([2, 2, 2])$	$\mathbf{P}_{0,GRLS}$	$\mathbf{E} \cdot 10^1$
$\lambda$	0.97	$l$	7
$\Gamma_{FTPI}$	0.6	$R$	$10^{-1}$
$\mathbf{P}_{0,GKF}$	$\mathbf{E} \cdot 10^1$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{E} \cdot 10^{-3}$
$T(s)$	$(1 + \frac{s}{30})^2$		

Tabelle 4.1: Simulationsparameter für die vorgestellten Identifikationsverfahren.

#### 4.7.1 Schwankungen von $g(u)$

Im ersten Schritt wird angenommen, dass die Totzeit konstant und gleich dem initialisierten Wert  $\hat{T}_{t,in}$  ist und die Parameter  $a$  und  $b$  unbekannt aber konstant sind. Die

Schätzergebnisse für diesen Fall sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Die Simulations- und Streckenparameter können in Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2 gefunden werden und die quadratischen Parameterfehler sind in Tabelle 4.3 festgehalten. Alle hier vorgestellten Schätzer konvergieren gegen die zu schätzenden Parameter  $a$  und  $b$ , wobei der Fehler vom FTPI um ein Vielfaches langsamer als der Fehler der anderen Schätzer abklingt. Der Schätzfehler bleibt für  $\hat{T}_t$  kleiner als 0.5s. Dieses Übersprechen ist beim GRLS und GKF zeitlich begrenzt. Beim NLS und FTPI tritt ein bleibender Fehler in der Totzeitschätzung auf. Der NLS und FTPI beruhen auf der Berechnung des negativen Gradienten des Schätzfehlers  $\Phi(\hat{\Theta})$ . Der Gradient des Schätzfehlers beinhaltet direkt die gefilterte erste Ableitung des Eingangs. Da (4.47) springt, ist die erste Ableitung dieses Signals nicht beschränkt. Das Schätzergebnis für den NLS und FTPI kann verbessert werden, wenn die Schätzer mit

$$\dot{u}_2(t) = 0.2 \operatorname{sign}(\sin(0.356t + 0.1)) + 0.06 \operatorname{sign}(\sin(0.123t + 0.3)) \quad (4.49a)$$

$$u_2(t) = \int_0^t \dot{u}_2(\tau) d\tau \quad (4.49b)$$

anstelle von  $u_1(t)$  aus (4.47) betrieben werden.

Parameter	Wert
$T_t$	10 s
$a$	3
$b$	1.5

Tabelle 4.2: Streckenparameter für die Parameteridentifikation mit konstantem und unbekanntem  $a$  und  $b$ .

Schätzer	NLS	FPTI	GRLS	GKF
$e_{2,a}$	20.24	67.24	14.19	14.28
$e_{2,b}$	3.50	5.69	3.39	3.41
$e_{2,T}$	4.46	46.27	0.09	0.09

Tabelle 4.3: Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer für konstantes  $T_t$  sowie konstantes und unbekanntes  $a$  und  $b$ .

In Abbildung 4.4 sind die Simulationsergebnisse zufolge der neuen Anregung laut (4.49) und den Parametern aus Tabelle 4.1 und Tabelle 4.2 gegeben. Die daraus resultierenden quadratischen Parameterfehler sind in Tabelle 4.4 eingetragen. Die quadratischen Parameterfehler mit der Anregung aus (4.49) sind deutlich geringer als die Parameterfehler aus Tabelle 4.3. Die Anfangsfehler in den Parametern klingen sowohl für den NLS als auch für den FTPI mit der angepassten Anregung schnell ab. Ein bleibender Fehler in der Totzeit ist trotz der Verbesserung des Verhaltens noch vorhanden. Das beste Verhalten in Bezug auf das Einschwingverhalten von  $a$  und  $b$  sowie das geringste Übersprechen auf

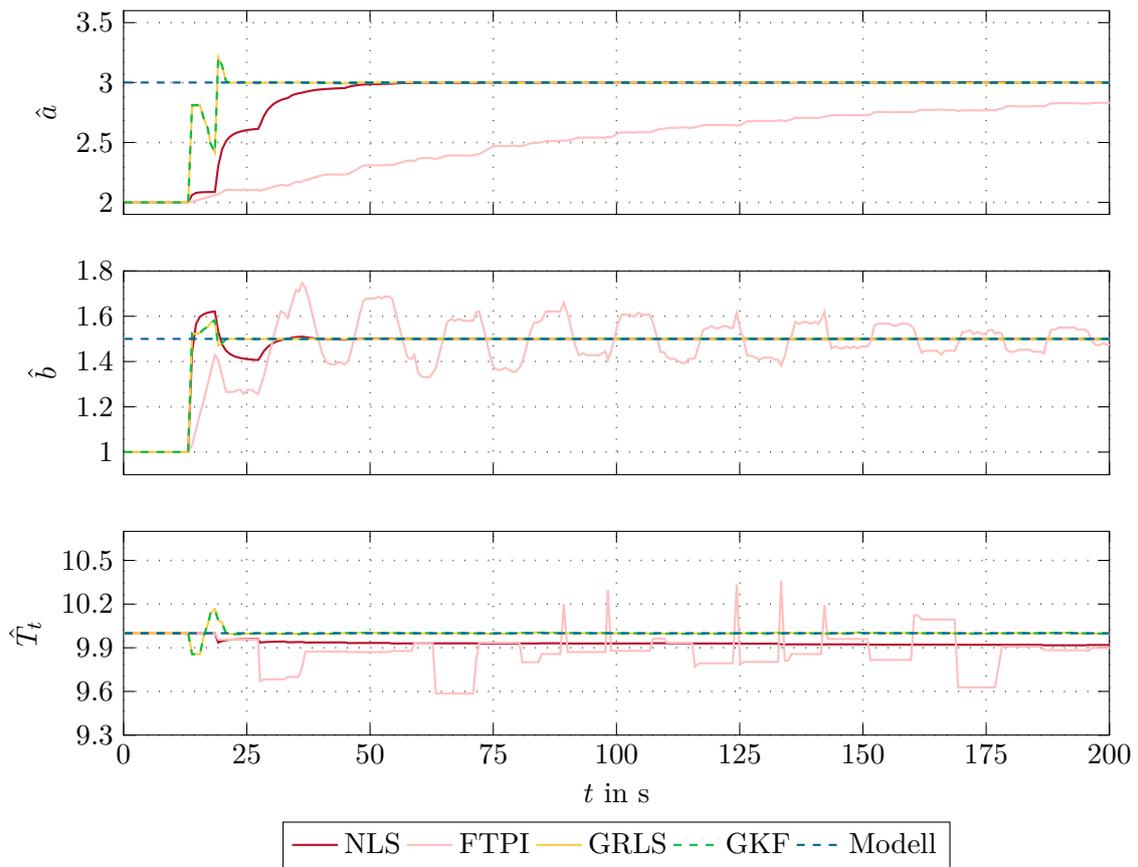


Abbildung 4.3: Schätzergebnis für konstantes  $T_t$  und konstante aber unbekannte Parameter  $a$  und  $b$ .

die Totzeitschätzung weisen der GRLS und der GKF auf. Da die Schätzungen mit der angepassten Anregung laut (4.49) den Schätzungen mit der ursprünglichen Anregung laut (4.47) in allen Gesichtspunkten überlegen sind, werden in den folgenden Simulationen der FTPI und der NLS immer mit der angepassten Anregung betrieben.

Schätzer	NLS	FPTI	GRLS	GKF
$e_{2,a}$	15.51	18.82	14.19	14.28
$e_{2,b}$	4.10	4.56	3.39	3.41
$e_{2,T}$	8.15	5.15	0.09	0.09

Tabelle 4.4: Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer mit angepasster Anregung für konstantes  $T_t$  sowie konstantes und unbekanntes  $a$  und  $b$ .

Abbildung 4.5 gibt die Identifikationsergebnisse der Schätzer für konstantes unbekanntes  $b$  und zeitlich veränderliches unbekanntes  $a$  an. Die Parameter der Simulation sind in Tabelle 4.1 und Tabelle 4.5 angegeben. Abbildung 4.5 zeigt, dass alle Schätzer dem Verlauf von  $a$  prinzipiell folgen können. Beim FTPI tritt ein Übersprechen von  $\hat{a}$  auf die anderen geschätzten Parameter  $\hat{T}_t$  und  $\hat{b}$  auf. Der NLS weist ebenfalls eine Beeinflussung der Totzeitschätzung durch die Änderung von  $\hat{a}$  auf. Dieses Übersprechen ist bei den anderen Verfahren kaum zu beobachten. Aus diesem Verhalten ergeben sich die in Tabelle 4.6 angegebenen quadratischen Fehler. Die geringsten Fehler weisen wiederum der GKF und der GRLS auf. Anhand dieses Beispiels lässt sich zusammenfassen, dass der GKF und der GRLS sehr gut für die Schätzung von zeitlich veränderlichen Parametern bei konstanter Totzeit geeignet sind.

Parameter	Wert
$T_t$	10 s
$a$	$2 + \sin(2\pi 10^{-3}t)$
$b$	1.5

Tabelle 4.5: Streckenparameter für die vorgestellten Identifikationsverfahren bei konstantem  $T_t$ , konstantem und unbekanntem  $b$  und veränderlichem  $a$ .

Schätzer	NLS	FPTI	GRLS	GKF
$e_{2,a}$	8.35	6.95	6.04	6.23
$e_{2,b}$	3.72	5.55	3.41	3.45
$e_{2,T}$	3.48	10.7	0.23	0.12

Tabelle 4.6: Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer bei konstantem  $T_t$ , konstantem und unbekanntem  $b$  und veränderlichem  $a$ .

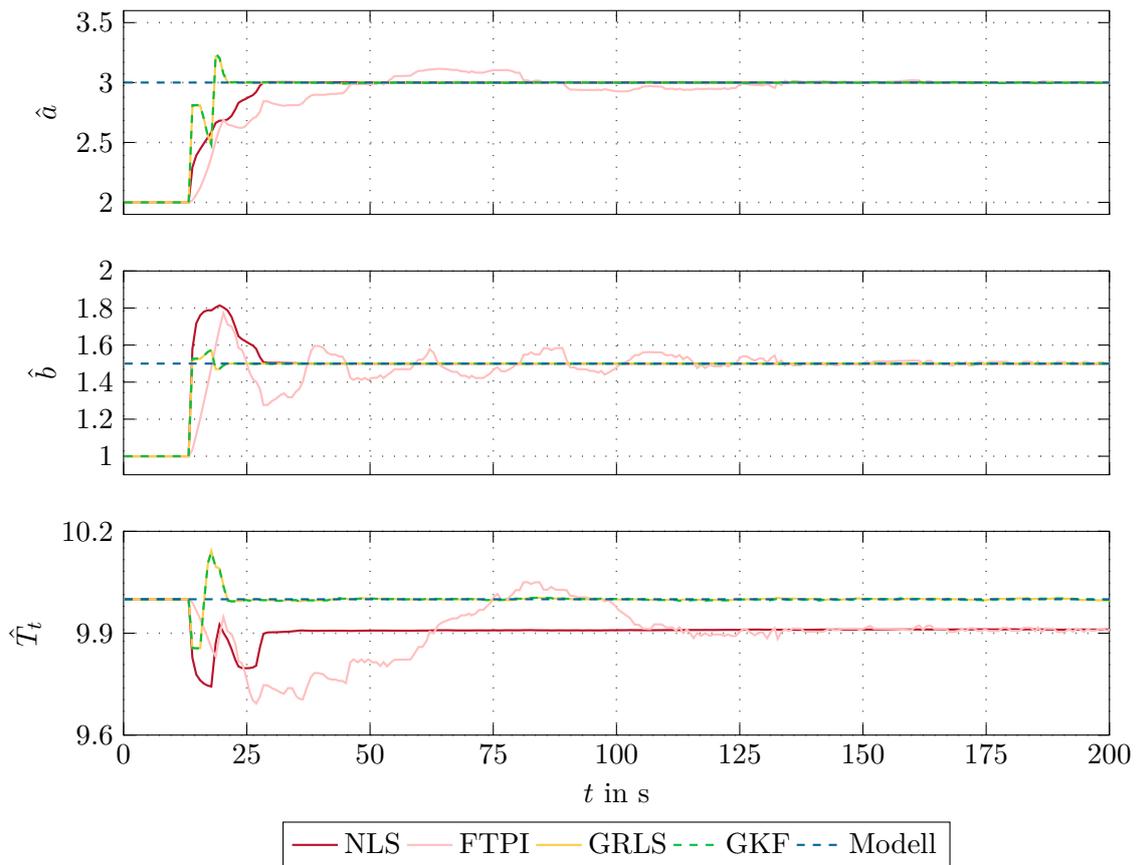


Abbildung 4.4: Schätzergebnis mit angepasster Anregung für konstantes  $T_t$  und konstante aber unbekannte Parameter  $a$  und  $b$ .

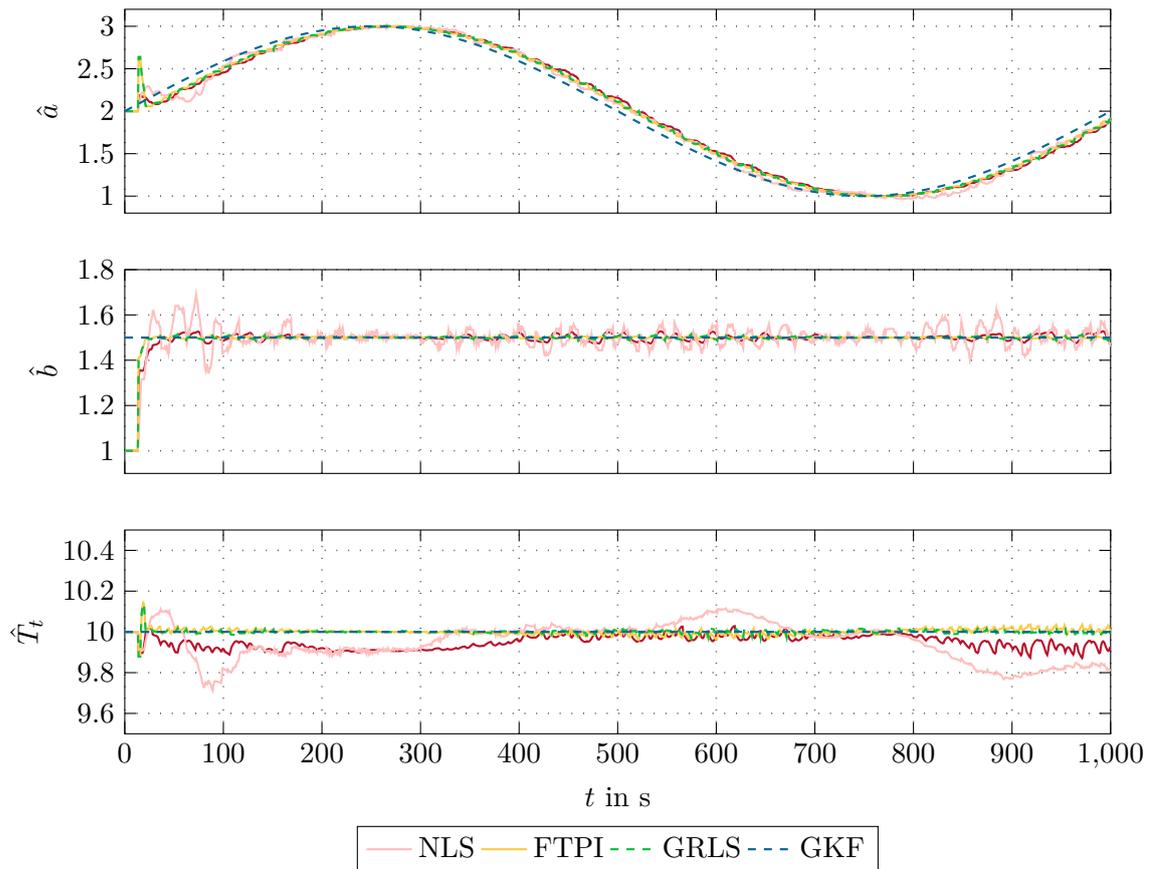


Abbildung 4.5: Schätzergebnis für konstantes  $T_t$ , konstantes  $b$  sowie veränderliches unbekanntes  $a$ .

### 4.7.2 Schwankungen in der Totzeit

Nachdem das Verhalten der Schätzer bei konstanter richtig initialisierter Totzeit untersucht wurde, wird das Identifikationsergebnis der Schätzer bei unbekannter Verzögerung simuliert. Zuerst wird von konstanten bekannten Werten von  $a$  und  $b$  sowie einer konstanten aber unbekanntem Totzeit  $T_t$  ausgegangen. Die Parameter für diese Simulation können in Tabelle 4.1 und Tabelle 4.7 gefunden werden. Das Schätzergebnis dieser Simulation ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Es zeigt sich, dass der NLS und der FTPI einen bleibenden Fehler in  $\hat{T}_t$  aufweisen. Der GRLS und der GKF konvergieren gegen den wahren Wert  $T_t$ . Bei FTPI tritt wiederum ein deutliches Übersprechen zwischen den Schätzparametern auf. Im Gegensatz dazu haben der GKF und GRLS einen erheblichen Fehler während des Einschwingens des Schätzers. Dieser Fehler tritt  $\hat{T}_{t,in}$  nach der ersten Flanke der Anregung auf, da der zum Startwert korrespondierende Parameterwert von  $a$  gegen Null konvergiert und der Ausgangsfehler vorübergehend durch  $b$  kompensiert wird. Aufgrund des kurzen Auftretens dieses Fehlers bleibt der quadratische Fehler in Tabelle 4.7 für den GRLS und den GKF relativ klein. Das Verhalten der anderen Schätzer führt zu einem deutlich höheren quadratischen Fehler.

Parameter	Wert
$T_t$	12s
$a$	2
$b$	1

Tabelle 4.7: Streckenparameter für die Parameteridentifikation mit konstantem aber unbekanntem  $T_t$ .

Schätzer	NLS	FPTI	GRLS	GKF
$e_{2,a}$	0.30	11.3	7.07	7.12
$e_{2,b}$	1.11	6.87	0.14	0.14
$e_{2,T}$	85.78	130.6	75.58	75.48

Tabelle 4.8: Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer für konstantes und bekanntes  $a$  und  $b$  sowie konstantes und unbekanntes  $T_t$ .

Abbildung 4.7 zeigt das Verhalten der Schätzer bei einer zeitlich veränderlichen Totzeit mit den Parametern gemäß Tabelle 4.1 und Tabelle 4.9. Abbildung 4.7 zeigt, dass alle Schätzer der zeitlich veränderlichen Totzeit sehr gut folgen können. Der NLS und der GRLS zeichnen sich durch sehr geringes Übersprechen auf  $a$  und  $b$  aus. Der FTPI weist ein sehr hohes Übersprechen zwischen den Parametern auf. Der GRLS hat den kleinsten quadratischen Parameterfehler laut Tabelle 4.10.

Zusammenfassend kann nun gesagt werden, dass am diskutierten System alle Schätzer dazu imstande sind, sowohl die Parameter von  $\hat{g}(u)$  als auch die Totzeit zu schätzen. Der

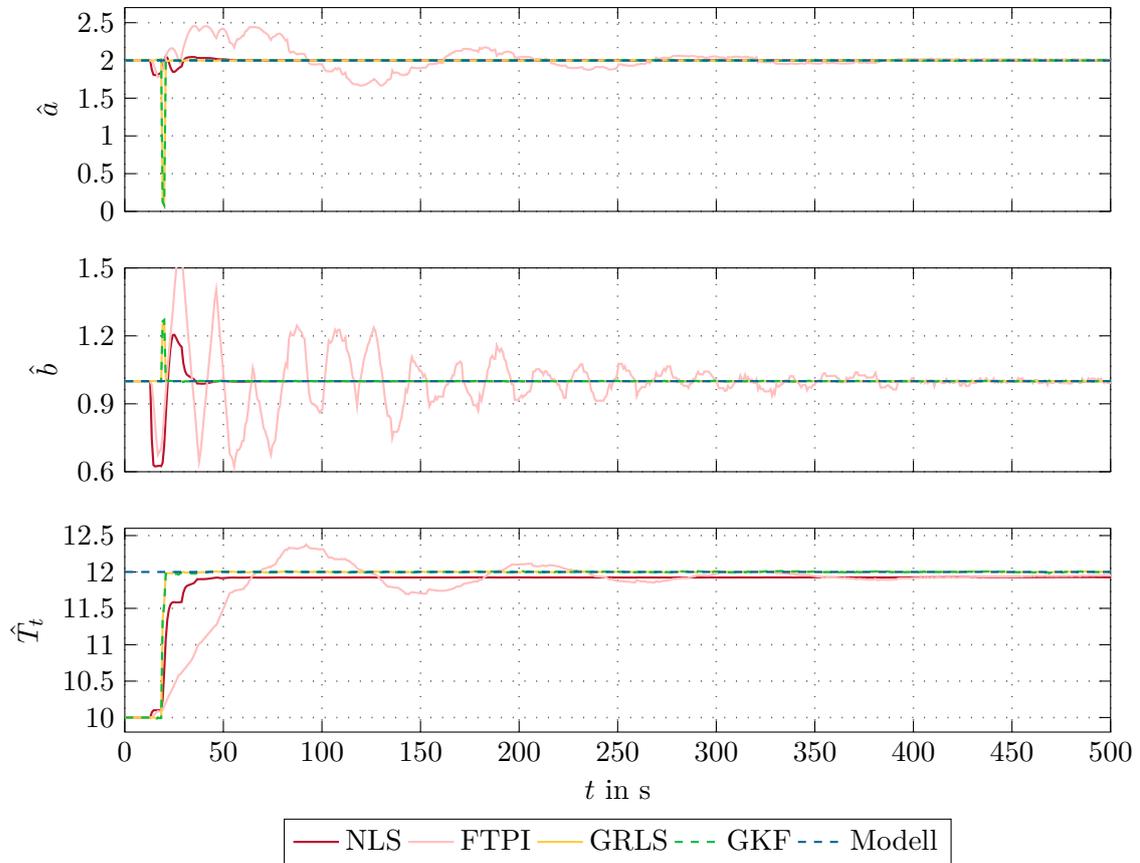


Abbildung 4.6: Schätzergebnis für konstantes und bekanntes  $a$  und  $b$  sowie konstantes unbekanntes  $T_t$ .

Parameter	Wert
$T_t$	$10 + 2 \sin(2\pi 10^{-3}t)s$
$a$	2
$b$	1

Tabelle 4.9: Streckenparameter für die Parameteridentifikation bei unbekanntem und veränderlichem  $T_t$ .

Schätzer	NLS	FPTI	GRLS	GKF
$e_{2,a}$	0.20	22.68	1.73	7.52
$e_{2,b}$	0.12	7.65	0.06	0.43
$e_{2,T}$	19.04	9.68	12.60	17.06

Tabelle 4.10: Quadratischer Parameterfehler der vorgestellten Schätzer für konstantes und bekanntes  $a$  und  $b$  sowie veränderliches  $T_t$ .

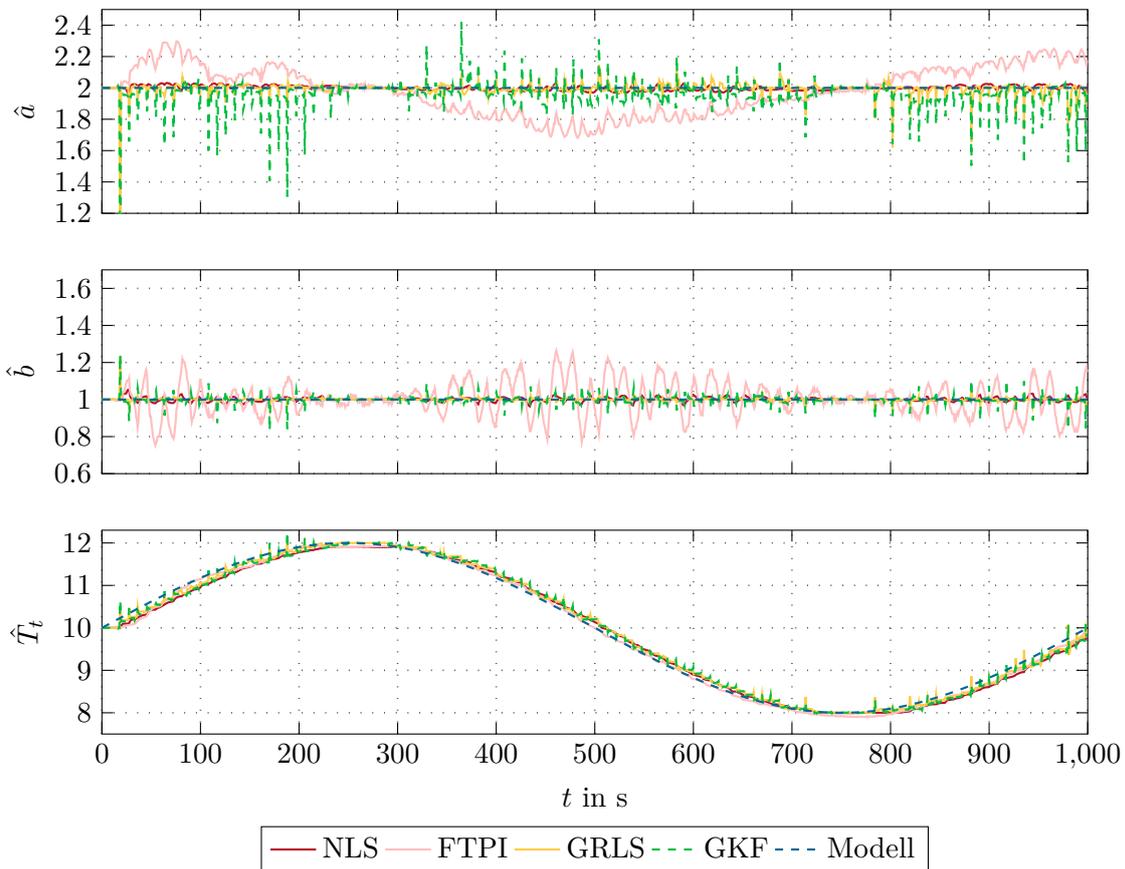


Abbildung 4.7: Schätzergebnis für konstantes und bekanntes  $a$  und  $b$  sowie veränderliches  $T_t$ .

GRLS und der GKF zeichnen sich durch ihr schnelles Einschwingverhalten sowie ihr sehr geringes Parameterübersprechen aus. Diese Eigenschaften führen zu einem geringeren quadratischen Fehler im Vergleich zu allen anderen Schätzern. Darüber hinaus tritt bei keinem dieser Schätzer ein bleibender Fehler in der Totzeit auf, weshalb die weiteren Untersuchungen auf diese beiden Schätzer beschränkt werden.

## 5 Divergenz des rekursiven Least-Squares Schätzers

Eine schwache Anregung von rekursiven Least-Squares Schätzern kann zur Divergenz [23, 24] des Schätzers führen. Die Divergenz wird in der einschlägigen Literatur auch oft einfach als numerische Instabilität [9, 25] bezeichnet. Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Ursachen dieses Phänomens und stellt Methoden vor, um trotz schwacher Anregung eine zuverlässige Schätzung zu generieren. Dazu werden in Abschnitt 5.1 Gründe für die Divergenz aufgezeigt und anhand einer exemplarischen Simulation plausibilisiert. Aufbauend darauf werden in Abschnitt 5.2 mehrere Verfahren zur Unterdrückung der Divergenz vorgestellt. In Abschnitt 5.3 werden diese Verfahren durch Simulation miteinander verglichen.

### 5.1 Auftreten der Divergenz

Beim Einsatz von rekursiven Least-Squares Schätzern gemäß (3.11) können in der Praxis Probleme mit numerischen Instabilitäten auftreten, insbesondere wenn der Schätzer nur schwach angeregt wird. Wenn der Schätzer über längere Zeit nicht linear unabhängig angeregt wird, also z. B.  $u(t)$  konstant ist, kann dies zur Divergenz führen. Dabei ändert sich der Parametervektor  $\mathbf{p}$  schlagartig, da  $\mathbf{P}_{k-1}$  seine positiv Definitheit verlieren kann. Wenn also die Bedingung

$$\mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k \geq 0 \quad (5.1)$$

nicht mehr erfüllt ist, wächst die Verstärkung  $\mathbf{k}_k$  sehr stark an und kann in Sonderfällen sogar schlagartig die Vorzeichen aller Einträge ändern. Divergenz tritt besonders häufig bei kleinem Vergessensfaktor und hoher Dimension von  $\mathbf{p}$  auf. Beides trifft im Fall des GRLS zu, da ein kleiner Vergessensfaktor benötigt wird, um den veränderlichen Parametern zu folgen und viele Parameter benötigt werden, um einen möglichst genauen Startwert für die Interpolation zu erhalten. Um die Symmetrie von  $\mathbf{P}_k$  erhalten zu können, wird der rekursive Least-Squares Schätzer (3.11) auf

$$\mathbf{k}_k = \frac{\lambda^{-1} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k} \quad (5.2a)$$

$$\mathbf{P}'_k = \lambda^{-1} \mathbf{P}_{k-1} - \lambda^{-1} \mathbf{k}_k \mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \quad (5.2b)$$

$$\mathbf{P}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{P}'_k + \mathbf{P}'_k{}^T) \quad (5.2c)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_k = \hat{\mathbf{p}}_{k-1} + \mathbf{k}_k (y_k - \mathbf{s}_k^T \hat{\mathbf{p}}_{k-1}) \quad (5.2d)$$

erweitert. Durch Hinzufügen von (5.2c) ist zumindest die Symmetrie der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_k$  garantiert.

Abbildung 5.1 zeigt exemplarisch das Auftreten der Divergenz für die Parameter von Tabelle 5.1 beim GRLS gemäß (5.2). Dabei wird das zu schätzende System zuerst mit einem rechteckförmigen Signal, anschließend mit einem konstanten Signal und zum Schluss wieder mit einem rechteckförmigen Signal angeregt. Ein genauere Blick auf Abbildung 5.1 zeigt, dass der Schätzer vor und nach dem Zeitintervall mit Divergenz bei ausreichender Anregung die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $T_t$  sehr gut schätzt. Der Schätzer wird bei  $t = \hat{T}_{t,N}$  gestartet, da davor keine sinnvollen Daten für  $u(t - \hat{T}_{t,N})$  vorhanden sind. Bei  $t_1$  ist ein enormer Anstieg von  $\hat{a}$  und  $\hat{T}_t$  zu erkennen. In Folge ändern sich  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  und  $\hat{T}_t$  mehrfach abrupt. Dieses Verhalten ist durch die Divergenz verursacht. Ab dem Zeitpunkt  $t = t_2$  wird der Schätzer wieder gleichmäßig anhaltend angeregt und die Parameterfehler klingen ab. Es zeigt sich somit, dass es nicht ausreicht, die Symmetrie von  $\mathbf{P}_k$  zu erhalten, um die Divergenz von (5.2) zu verhindern.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$T_t$	11 s	$\hat{T}_{t,in}$	10 s
$a$	3	$\hat{a}_{in}$	2
$b$	2	$\hat{b}_{in}$	1
$\hat{T}_{t,0}$	7 s	$P_{Rausch}$	$10^{-6}$
$\Delta\hat{T}_t$	0.5s	$T_a$	0.1 s
$N$	13	$\lambda$	0.99
$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{E} \cdot 10^4$		

Tabelle 5.1: Simulationsparameter für die Darstellung der möglichen Divergenz beim GRLS.

## 5.2 Vermeidung der Divergenz

Die Verwendung eines GRLS in einem adaptiven Regler im geschlossenen Kreis führt zwangsläufig zu Phasen geringer Anregung. Aus diesem Grund soll ein divergierender Schätzer vermieden werden, wobei in den folgenden Abschnitten einige Methoden zur Vermeidung dieses Phänomens vorgestellt werden.

### 5.2.1 Singulärwertzerlegung der $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$ -Matrix

Eine einfache Möglichkeit, die Divergenz zu vermeiden, ist es, den klassischen Least-Squares Schätzer (LS) laut [22] gemäß

$$\hat{\mathbf{p}}_k = \left( \mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k \right)^{-1} \mathbf{S}_k^T \mathbf{y}_k \quad (5.3)$$

zu verwenden und zusätzlich die Invertierbarkeit von  $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$  zu garantieren. Aufgrund eines immer weiter anwachsenden Datenvektors, einem damit immer weiter steigenden Speicherbedarf und einer damit verbundenen immer höheren Rechenzeit im Online-Betrieb,

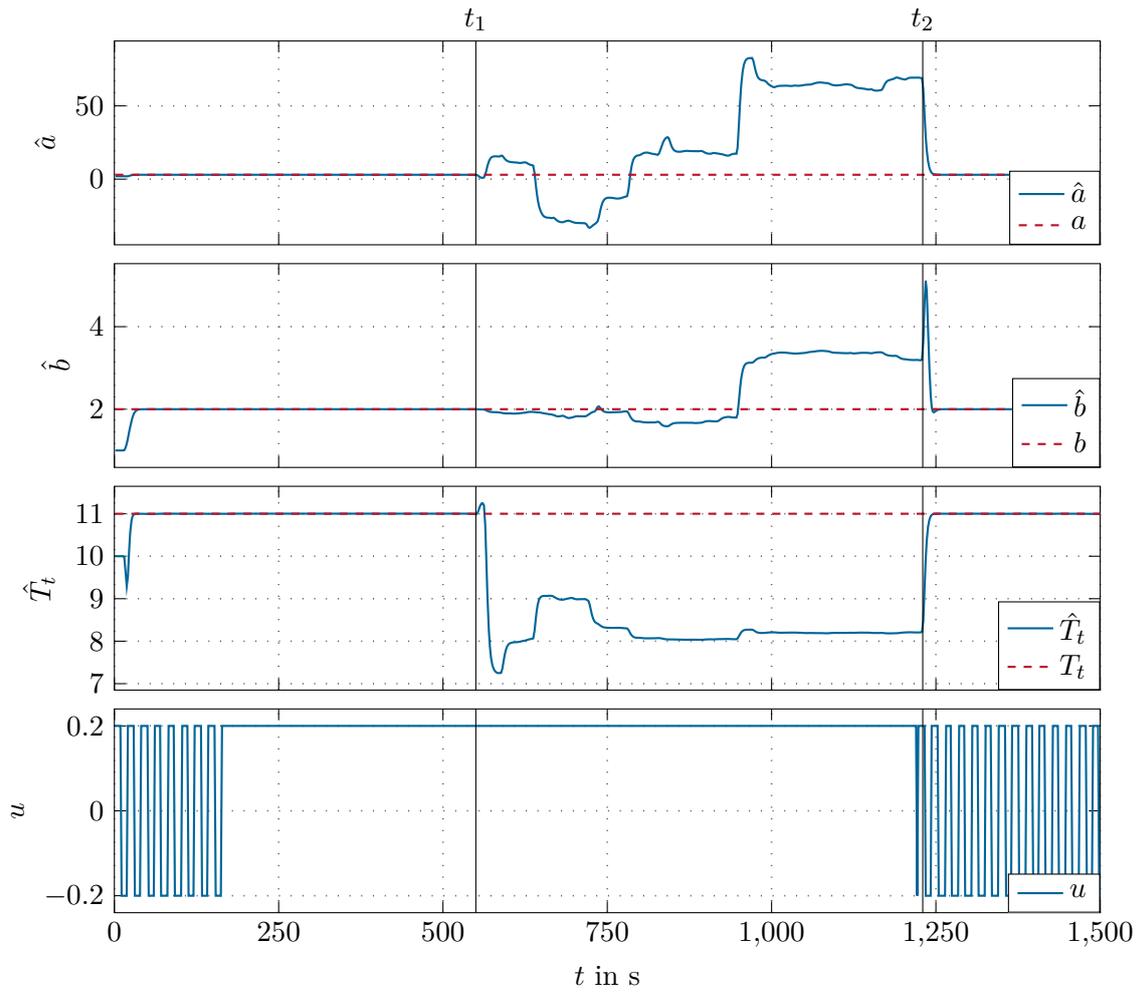


Abbildung 5.1: Divergenz beim GRLS.

ist ein wiederholtes Ausführen des klassischen Least-Squares Schätzers in der Praxis nicht sinnvoll. Aus diesem Grund wird eine Hybrid-Variante aus LS und RLS eingesetzt. Dafür wird eine Singulärwertzerlegung der Matrix  $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$  mit konstanter Zeilenanzahl  $N_{LS}$  durchgeführt. Anschließend erfolgt ein Vergleich der Form

$$\min \left( \text{diag} \left( \text{svd} \left( \mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k \right) \right) \right) > \delta \quad (5.4)$$

mit der Konstanten  $\delta > 0$ . Dies ermöglicht eine Prüfung, ob  $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$  numerisch stabil invertierbar ist. Die minimale konstante Zeilenanzahl  $N_{LS}$  kann abgeschätzt werden, indem die Bedingung

$$\lambda^{N_{LS}} \leq \lambda_{sta} \quad (5.5)$$

betrachtet wird. Dabei bezeichnet  $\lambda_{sta}$  eine untere Grenze, bis zu der die positive Definitheit von  $\mathbf{P}_k$  auf jeden Fall gegeben ist. Die Abschätzung (5.5) kann auf  $N_{LS}$  umgeformt werden und man erhält die Abschätzung für die untere Grenze von  $N_{LS}$  als

$$N_{LS} \geq \frac{\log(\lambda_{sta})}{\log(\lambda)}. \quad (5.6)$$

Falls nun  $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$  sehr kleine ( $\leq \delta$ ) Singulärwerte aufweist, wird der RLS gestoppt und gewartet, bis  $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$  wieder positiv definit ist. Dann wird ein klassischer LS-Schritt durchgeführt, der Vektor  $\hat{\mathbf{p}}_k$  dem RLS als Startwert übergeben und der RLS wieder gestartet.

Die Einträge der Matrix  $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$  sind den Einträgen der Matrix zur Überprüfung der gleichmäßig anhaltenden Anregung  $\boldsymbol{\xi}(k)$  aus (4.40) sehr ähnlich, die Summe läuft jedoch nur von  $i = n - N_{LS}$  bis  $i = n$  anstatt von  $i = 1$  bis  $i = n$  und der Vergessensfaktor  $\lambda$  wird nicht explizit mitgerechnet. Um zeitlich veränderlichen Parametern auch bei schwacher Anregung folgen zu können, sollte der RLS nicht zu früh gestoppt werden. Dadurch steigt die Zeilenanzahl der Matrix  $\mathbf{S}_k$  jedoch sehr stark. Bereits für  $\lambda = 0.98$  und  $\lambda_{sta} = 0.01$  erhält man laut (5.6) eine relativ hohe Zeilenanzahl  $N_{LS} = 228$ . Aufgrund der Singulärwertzerlegung benötigt dieses Verfahren mehr Rechenzeit als die nachfolgenden Methoden. Zusätzlich ist eine Schätzung erst nach  $t = N_{LS}T_a$  möglich, da  $\mathbf{S}_k$  ab diesem Zeitpunkt mit sinnvollen Daten gefüllt ist.

### 5.2.2 Erhalten der Nichtnegativität von $\mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k$

Solange  $\mathbf{P}_{k-1}$  positiv semidefinit ist, gilt  $\mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k \geq 0$ . Deshalb kann die Divergenz erkannt werden, indem das Vorzeichen von  $\mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k$  kontrolliert wird. Falls  $\mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k$  negativ ist, wird  $\mathbf{P}_{k-1}$  neu initialisiert und der RLS läuft normal weiter. Dadurch geht die in  $\mathbf{P}_{k-1}$  gespeicherte Information verloren. In den meisten Fällen ist dies jedoch kein Problem, da Divergenz nur dann auftritt, wenn wenig Information in  $\mathbf{P}_{k-1}$  gespeichert ist. Im vorliegenden Algorithmus wird überprüft, ob die Ungleichung

$$0 \leq r_{qj} = \frac{1}{1 + \lambda^{-1} \mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k} \leq 1 \quad (5.7)$$

erfüllt ist. Der Nenner von (5.7) entspricht dabei dem Nenner zur Berechnung der Verstärkung des RLS gemäß (5.2a). Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn

$$\mathbf{s}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{s}_k \geq 0 \quad (5.8)$$

gilt.

### 5.2.3 Beschränkung der Spur von $\mathbf{P}_k$

In [25] wird eine Variante vorgestellt, in der die Bedingung

$$\text{spur}(\mathbf{P}_k) < \chi \quad (5.9)$$

mit der Konstanten  $\chi > \text{spur}(\mathbf{P}_0)$  überprüft wird. Die Idee hinter diesem Verfahren ist, dass die Matrix  $\mathbf{P}_k$  bei geringer Anregung näherungsweise die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{P}_k = \lambda^{-1} \mathbf{P}_{k-1} \quad (5.10)$$

erfüllt. Dies führt zu einem Anwachsen von  $\mathbf{P}_k$  und damit zu einer sehr hohen Schätzerverstärkung  $\mathbf{k}_k$ . Aufgrund dieser hohen Verstärkung werden bereits durch kleine Schätzfehler große Parameteränderung hervorgerufen. Im Fall der adaptiven Regelung führt dies zu einer großen Änderung des Ausgangs. Dieses Verhalten wird als Schätzer blow-up bezeichnet und tritt in der Regel vor der Divergenz des Schätzers auf. Wenn nun die Bedingung (5.9) verletzt ist, wird  $\mathbf{P}_k$  auf den Startwert  $\mathbf{P}_0$  zurückgesetzt. Dadurch werden die Eigenwerte von  $\mathbf{P}_k$  nach oben begrenzt und die Divergenz kann verhindert werden.

### 5.2.4 Variabler Vergessensfaktor

Andere Verfahren, die versuchen, die Divergenz vor ihrem Auftreten zu verhindern, werden in [25] und [26] vorgestellt. Dabei handelt es sich um Verfahren, die den Vergessensfaktor adaptiv als Funktion des Schätzfehlers  $e_k = y_k - \mathbf{s}_k^T \hat{\mathbf{p}}_{k-1}$  anpassen. Dies führt dazu, dass der Vergessensfaktor bei guter Anregung in der Regel klein ist und verbleibende Fehler in den Parametern kompensiert werden. Wenn aber  $u(t)$  konstant ist, wird der Fehler klein und der Vergessensfaktor geht gegen 1. Durch diesen hohen Vergessensfaktor bei schlechter Anregung tritt keine Divergenz auf. In [25] wird ein variabler Vergessensfaktor  $\lambda_k$  entsprechend

$$\lambda_k = \lambda_{1,k} \lambda_{2,k} \quad (5.11a)$$

$$\lambda_{1,k} = \nu_1 \lambda_{1,k-1} + (1 - \nu_1) \lambda_{1,\infty} \quad (5.11b)$$

$$\lambda_{2,k} = 1 - \frac{e_k^2}{1 + e_k^2} \quad (5.11c)$$

vorgeschlagen. Dabei bezeichnet  $\lambda_{1,k} \in [0, 1]$  den Hilfsvergessensfaktor für den Start der Schätzung,  $\lambda_{2,k} \in [0, 1]$  den dynamischen Hilfsvergessensfaktor,  $\nu_1 \in [0, 1]$  die Einschwingkonstante und  $\lambda_{1,\infty}$  die obere Schranke von  $\lambda_k$ . In dieser Arbeit wurde  $\lambda_{1,\infty} = 1$  gewählt, da dadurch die beste Unterdrückung der Divergenz erzielt werden kann. Dabei beginnt  $\lambda_{1,k}$  beim Einschaltzeitpunkt  $k = 0$  bei  $(1 - \nu_1) \lambda_{1,\infty}$  und steigt für  $k \rightarrow \infty$  monoton gegen  $\lambda_{1,\infty}$ . Dadurch führt die Erweiterung um  $\lambda_{1,k}$  zu einem schnelleren Abklingen des Anfangsfehlers als der RLS mit  $\lambda = \lambda_{1,\infty}$ . Die Einführung von  $\lambda_{2,k}$  führt zu einer vom Ausgangsfehler abhängigen Adaption des Vergessensfaktors. Dabei nimmt  $\lambda_{2,k}$  einen Wert zwischen 1 für  $e_k^2 = 0$  und 0 für  $e_k^2 \rightarrow \infty$  an. Der in [25] vorgestellte variable

Vergessensfaktor wird um eine Dämpfungskonstante  $\nu_2 \in [0, 1]$  zu

$$\lambda_k = \lambda_{1,k} \lambda_{2,k} \quad (5.12a)$$

$$\lambda_{1,k} = \nu_1 \lambda_{1,k-1} + (1 - \nu_1) \lambda_{1,\infty} \quad (5.12b)$$

$$\lambda_{2,k} = 1 - \nu_2 \frac{e_k^2}{1 + e_k^2} \quad (5.12c)$$

erweitert, um den Einfluss des Ausgangsfehlers  $e_k$  auf den dynamischen Hilfsvergessensfaktor  $\lambda_{2,k}$  zu dämpfen. Damit wird  $\lambda_{2,k}$  nach unten auf  $1 - \nu_2$  begrenzt.

Das in [26] vorgestellte Verfahren berechnet den Vergessensfaktor über

$$\lambda_k = \max \left( \lambda_{min}, 1 - \frac{(1 - \mathbf{s}_k^T \mathbf{k}_k) e_k^2}{\sigma_0} \right), \quad (5.13)$$

mit dem minimal zulässigen Vergessensfaktor  $\lambda_{min}$  und der Konstanten  $\sigma_0$ . Die Idee hinter dieser Adaption besteht darin, den Vergessensfaktor  $\lambda_k$  so zu wählen, dass das Maß  $\sigma_k$  für den Informationsgehalt im Schätzer des RLS konstant gehalten wird. Dieses Maß für den Informationsgehalt berechnet sich laut [27] als

$$\sigma_k = \lambda_k \sigma_{k-1} + (1 - \mathbf{s}_k^T \mathbf{k}_k) e_k^2. \quad (5.14)$$

Die Herleitung dieses Maßes kann in [27] gefunden werden.

### 5.3 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die in Abschnitt 5.2 vorgestellten Anpassungen des RLS anhand einer Simulation miteinander verglichen. Dafür werden die Ausgangsfunktion (4.1) und die Parameter nach Tabelle 5.3 verwendet. Die Parametrierung der unterschiedlichen Schätzer wurde empirisch durchgeführt. Die Schätzergebnisse für  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  und  $\hat{T}_t$  sowie die Anregung  $u(t)$  sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Die quadratischen Parameterfehler (4.48) sind in Tabelle 5.2 angeführt und spiegeln die Konvergenzgeschwindigkeit der unterschiedlichen Implementierungen wider.

Variante	(5.4)	(5.7)	(5.9)	(5.12)	(5.13)
$e_{2,a}$	64.22	23.90	23.90	25.33	22.43
$e_{2,b}$	64.22	20.94	20.94	20.94	20.94
$e_{2,T}$	64.23	30.47	30.47	19.43	18.48

Tabelle 5.2: Quadratischer Parameterfehler des GRLS.

Aus Tabelle 5.2 erkennt man, dass die Singulärwertzerlegung der Matrix  $\mathbf{S}_k^T \mathbf{S}_k$  (5.4) den größten quadratischen Parameterfehler aufweist, da bis  $t = N_{LS} T_a$  gewartet werden muss, bevor die Schätzung beginnt. Bei allen anderen Schätzern beginnt die Schätzung bei  $t = \hat{T}_{t,N}$ , wodurch eine schnellere Konvergenz erzielt werden kann. Die beiden Verfahren

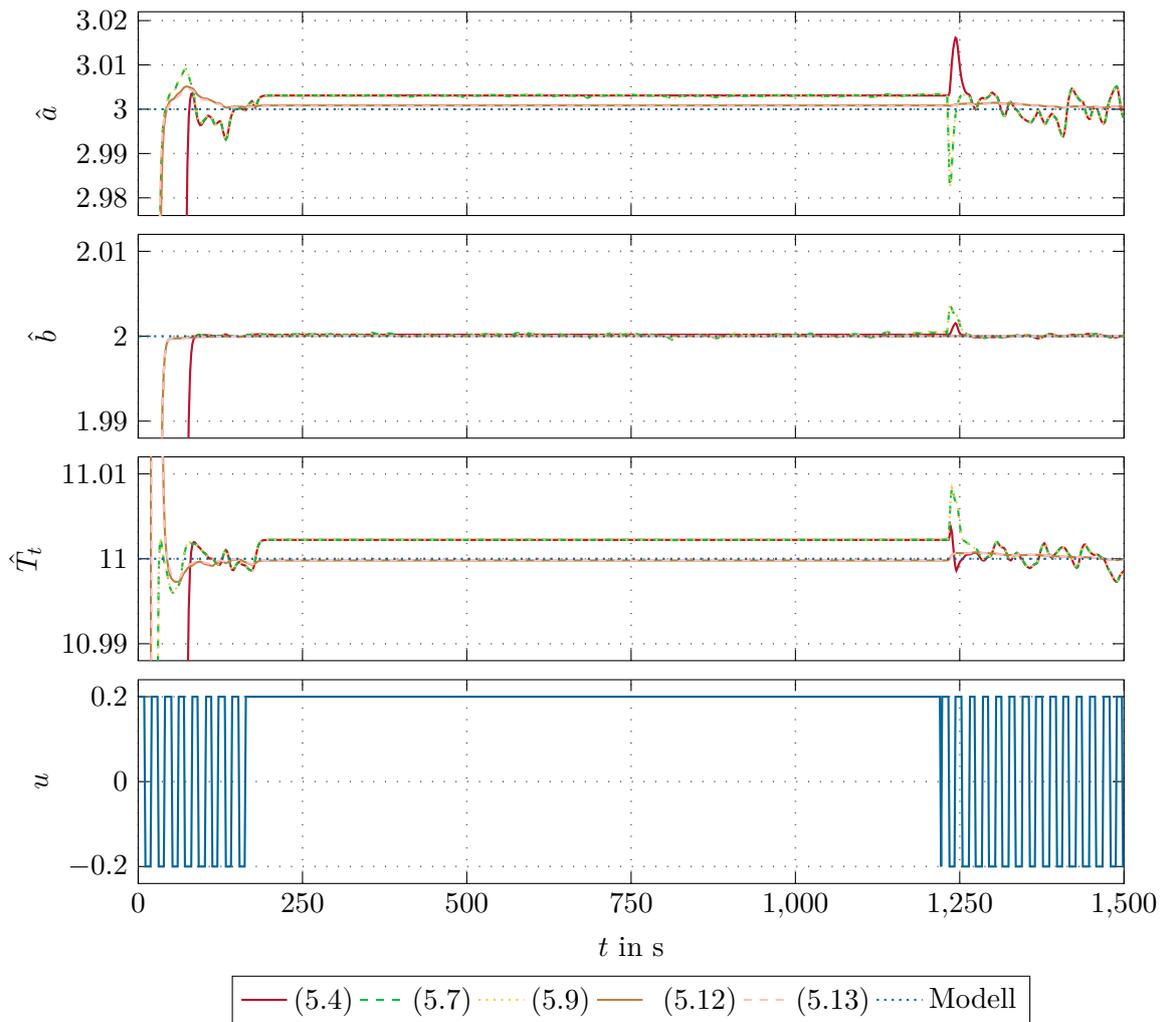


Abbildung 5.2: Verfahren zur Vermeidung der Divergenz des GRLS.

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$T_t$	11	$\hat{T}_{t,in}$	10 s
$a$	3	$\hat{a}_{in}$	2
$b$	2	$\hat{b}_{in}$	1
$\hat{T}_{t,0}$	7	$P_{Rausch}$	$10^{-6}$
$\Delta\hat{T}_t$	0.5	$T_a$	0.1 s
$N$	13	$\lambda$	0.99
$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{E} \cdot 10^4$	$\delta$	$10^{-5}$
$\chi$	$10^{10}$	$\lambda_{sta}$	0.01
$\nu_1$	0.125	$\sigma_0$	5
$\nu_2$	0.5	$\lambda_{min}$	0.001

Tabelle 5.3: Simulationsparameter zur Unterdrückung der Divergenz des GRLS.

mit variablem Vergessensfaktor (5.12) und (5.13) erreichen einen geringen quadratischen Parameterfehler, da der Vergessensfaktor bei großem Startfehler relativ klein wird und die Verfahren dadurch schneller konvergieren.

Ein Blick auf Abbildung 5.2 zeigt, dass alle hier vorgestellten Verfahren dazu imstande sind, die Divergenz zu unterdrücken. Der direkte Vergleich mit dem in Abbildung 5.1 dargestellten rekursiven Least-Squares Schätzer zeigt ein deutlich verbessertes Schätzverhalten. Dadurch ist es möglich, die vorgestellten Schätzer im geschlossenen Regelkreis zu verwenden. Der Unterschied in den Verfahren beschränkt sich auf das Verhalten der Schätzer bei erneuter Anregung. Während die Verfahren, die auf einem Neustart des Algorithmus beruhen, einen kurzfristigen Parameterfehler von fast 2% erzeugen, zeigen die anderen Schätzer kein zusätzliches Einschwingverhalten. Dieses Überschwingen des Schätzers kann durch eine Verringerung von  $\mathbf{P}_0$  abgeschwächt werden, dies würde jedoch zu einem langsameren Einschwingverhalten führen. Die Verfahren mit variablem Vergessensfaktor mit den in Tabelle 5.3 gewählten Parametern weisen darüber hinaus eine bessere Störunterdrückung gegenüber dem Ausgangsrauschen auf. Da die Erweiterung um einen variablen Vergessensfaktor sowohl das Einschwingverhalten gegenüber dem in Abschnitt 4.5 vorgestellten Schätzer verbessert, als auch der Divergenz vorbeugt, wird in weiterer Folge ein GRLS mit variablem Vergessensfaktor verwendet.

## 6 Kontinuierliche Feuerverzinkung

Die in Kapitel 4 entwickelten Schätzer werden anhand von Messdaten einer Feuerverzinkungsanlage einem Praxistest und damit einer Plausibilisierung unterzogen. Eingangs wird in Abschnitt 6.1 der Aufbau und die Funktion der Feuerverzinkungsanlage erklärt und ein mathematisches Modell für das Auftragsgewicht gegeben. Anschließend werden der GRLS und der GKF aus Kapitel 4 in Abschnitt 6.3 an das verwendete Modell angepasst. Darüber hinaus wird in Abschnitt 6.4 ein rekursiver Least-Squares Schätzer für eine bekannte Totzeit entwickelt. In Abschnitt 6.5 werden eine Offline- und in Abschnitt 6.6 eine Online-Schätzung der Parameter anhand von Messungen durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Schätzungen werden miteinander verglichen und bewertet.

### 6.1 Aufbau und Funktion

Bei der kontinuierlichen Feuerverzinkung handelt es sich um den industriellen Standardprozess zur Produktion von verzinktem Stahlblech. Der schematische Aufbau einer solchen Anlage ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Das heiße Stahlband wird durch das flüssige Zink transportiert und dabei mit dem Zink benetzt. Nachdem das Stahlband das Zinkbad wieder verlässt, wird mit zwei Düsen das überschüssige Zink vom Blech abgeblasen, um die gewünschte Zinkschichtdicke zu erreichen. Der Abstand zwischen der oberen Düse und dem Blech wird dabei durch eine traversierende Laserabstandsmessung bestimmt. Bevor auch der Zinkbelag des Bandes gemessen werden kann, muss die Zinkschicht erstarren. Eine Messung der Zinkschichtdicke ist daher nur mit einer entsprechenden zeitlichen Verzögerung möglich. Um den Düsenabstand und das Auftragsgewicht über die gesamte Breite des Blechs messen zu können, traversieren sowohl die Laserabstandsmessung als auch Strahlenmessgeräte für die Bestimmung des Auftragsgewichts über das Blech. Die Zeitverzögerungen  $T_{t,o}$  und  $T_{t,u}$  zwischen der Abblasdüse und der Dickenmessung kann durch die impliziten Integralgleichungen

$$l_{Z,o} = \int_{t-T_{t,o}}^t v(\tau) d\tau \quad (6.1a)$$

$$l_{Z,u} = \int_{t-T_{t,u}}^t v(\tau) d\tau \quad (6.1b)$$

mit den Indizes für die Ober- und Unterseite des Bands  $o$  und  $u$ , der Bandlänge zwischen den Düsen und den Messungen  $l_{Z,o}$  und  $l_{Z,u}$  sowie der Bandgeschwindigkeit  $v$  bestimmt werden.

Aufgrund der vielen unabhängigen Variablen und der stark unterschiedlichen Auswirkung der Größen auf den Zinkbelag ist eine exakte physikalische Modellierung von Verzinkungsprozessen sehr schwierig. Viele Einflussgrößen sind schwer zu messen und

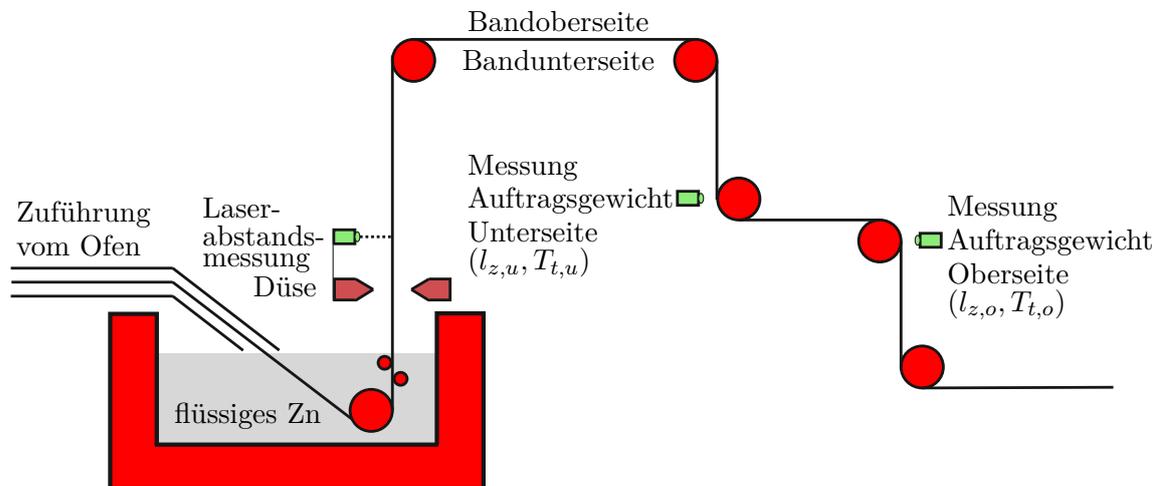


Abbildung 6.1: Schematischer Aufbau einer Feuerverzinkungsanlage.

hängen grundlegend von der Geometrie und der eingesetzten Düse ab. Deshalb wird zur Regelung von Feuerverzinkungsanlagen häufig das empirische Potenzmodell

$$w_o(x) = \kappa_o \bar{v}^{\alpha_o} \bar{d}_o(x)^{\beta_o} \bar{p}^{\gamma_o} \quad (6.2a)$$

$$w_u(x) = \kappa_u \bar{v}^{\alpha_u} \bar{d}_u(x)^{\beta_u} \bar{p}^{\gamma_u} \quad (6.2b)$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , dem Auftragsgewicht  $w$ , dem Blechabstand  $d$  sowie dem Düsendruck  $p$  verwendet [28]. Dieses Modell zeichnet sich besonders durch seine Einfachheit aus. Dabei muss berücksichtigt werden, dass  $w$  und  $d$  an der gleichen Stelle am Band gemessen und zwischen Ober- und Unterseite unterschieden werden muss. Bei diesem Modell wird davon ausgegangen, dass auf alle Größen dieselbe Zeitverzögerung wirkt. Eine große Schwäche dieses Modells ist, dass die geschätzten Koeffizienten für verschiedene Datensätze an derselben Anlage über 25% streuen können [28].

## 6.2 Aufbereitung der Messdaten

Das Abblasen des Zinks durch die Düsen führt zu einer ungleichmäßigen Verteilung des Zinks. An den Rändern des Blechs bildet sich eine 1.4–1.8fach dickere Zinkschicht als in der Mitte des Bands, siehe [29]. Dieser Randeffekt wird als Kantenüberbeschichtung (edge over coating) bezeichnet und soll für die Parameterschätzung nicht mitberücksichtigt werden. Deshalb werden nur Messwerte mit einem maximalen Abstand  $b_R$  zur Bandmitte  $x_m$  verwendet. Um die Mitte des Bands bestimmen zu können, müssen die Ränder des Bands  $x_{min}$  und  $x_{max}$  dynamisch verfolgt werden. Um die Bandkanten zu bestimmen, werden im ersten Schritt die Endpunkte der Traversierung bestimmt. Das Strahlenmessgerät bewegt sich bei der Traversierung mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung bis es das

Stahlblech verlassen hat. Dann wird die Richtung geändert und es nähert sich langsam dem Rand des Blechs an. Wenn die Kante erkannt wurde, wird das Strahlenmessgerät wiederum auf die Traversierungsgeschwindigkeit beschleunigt. Da die Messdaten der Zinkmessung außerhalb des Bands einen konstanten Wert aufweisen, kann die Bandkante an der Stelle der ersten Änderung von diesem Wert bestimmt werden. In Abbildung 6.2 ist dieser Vorgang schematisch dargestellt. Die Bandmitte berechnet sich dann zu

$$x_m = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}. \quad (6.3)$$

Derselbe Vorgang wird für die Laserabstandsmessung durchgeführt. Eventuell auftretende Offsetfehler zwischen den  $x$ -Messungen der Laser- und Zinkmessung werden durch eine Verschiebung des Ursprungs der  $x$ -Messungen nach  $x_m$  kompensiert. Die neue  $x$ -Koordinate der Messungen ergibt sich somit zu

$$x_o = x - x_m. \quad (6.4)$$

Dadurch besteht für beide Signale eine einheitliche räumliche Zuordnung auf dem Band.

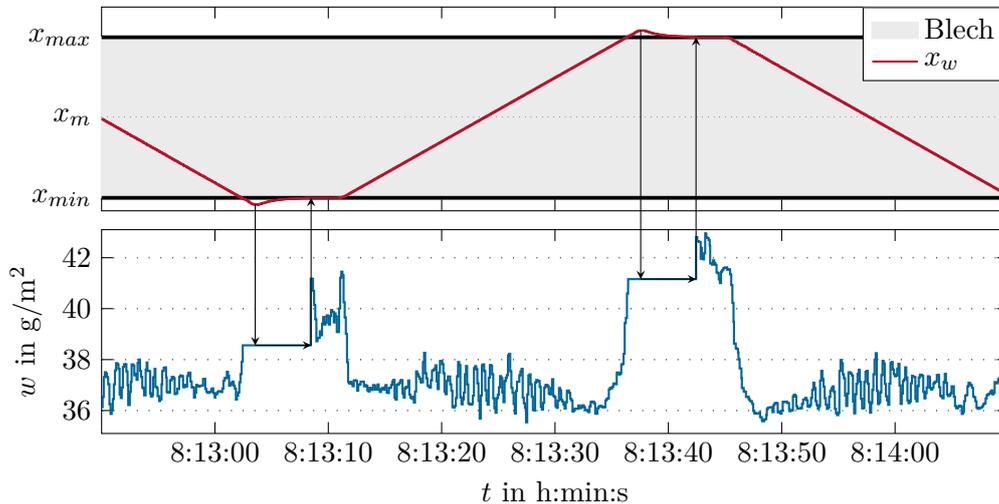


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung der dynamischen Bandverfolgung.

Die Traversierung der Abstands- und Auftragsgewichtsmessung wird mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchgeführt. Dies führt zu einer unterschiedlichen Ortsauflösung für die beiden Größen. Um die Auswirkungen dieses Effekts zu verringern, wird der berücksichtigte Teil des Bands von  $-b_R$  bis  $b_R$  in  $N_x$  Segmente geteilt. Dadurch wird auch die Anzahl der zu schätzenden Zinkschichtdickenwerte deutlich verkleinert. Dem  $s$ -ten Segment werden dabei die Werte  $w_s$  und  $d_s$  mit  $s = 1, \dots, N_x$  zugeteilt. Diese Werte werden als Durchschnitt über die Breite des Segments berechnet. Dadurch wird das Messsignal geglättet und der Einfluss des Messrauschens verringert. Damit vereinfacht sich das Potenzmodell aus (6.2) zu

$$w_{s,o} = \kappa_o \bar{v}^{\alpha_o} \bar{d}_{s,o}^{\beta_o} \bar{p}^{\gamma_o} \quad (6.5a)$$

$$w_{s,u} = \kappa_u \bar{v}^{\alpha_u} \bar{d}_{s,u}^{\beta_u} \bar{p}^{\gamma_u}. \quad (6.5b)$$

Die Breite eines Segments wird dabei über

$$b_T = \frac{2b_R}{N_x} \quad (6.6)$$

berechnet.

Diese Aufteilung und Mittelung ist in Abbildung 6.3 schematisch dargestellt. Dabei zeigt der obere Teil der Abbildung die traversierende Position der oberseitigen Messeinrichtung  $x_{w,o}$  über dem grau eingezeichneten Stahlblech. Darunter sind die Messdaten des Auftragsgewichts  $w$  und die für die Schätzung aufbereiteten Daten  $w_s$  zu sehen. Am ersten Blick fällt auf, dass die Messung des Auftragsgewichts ein beträchtliches Rauschen aufweist. Die Mittelung über das Segment führt zu einer wesentlichen Glättung des Messsignals. Diese Mittelung erfolgt streng genommen akausal, da für das gesamte Durchlaufen des Segments der Mittelwert ebendieses Segments übergeben wird. Da diese Daten jedoch ausschließlich für die Schätzung von Parametern verwendet werden und kein Einfluss auf das System genommen wird, stellt dies keine Einschränkung dar. Gegebenenfalls können die Schätzergebnisse einfach um die maximale Segmentdurchlaufzeit verzögert werden.

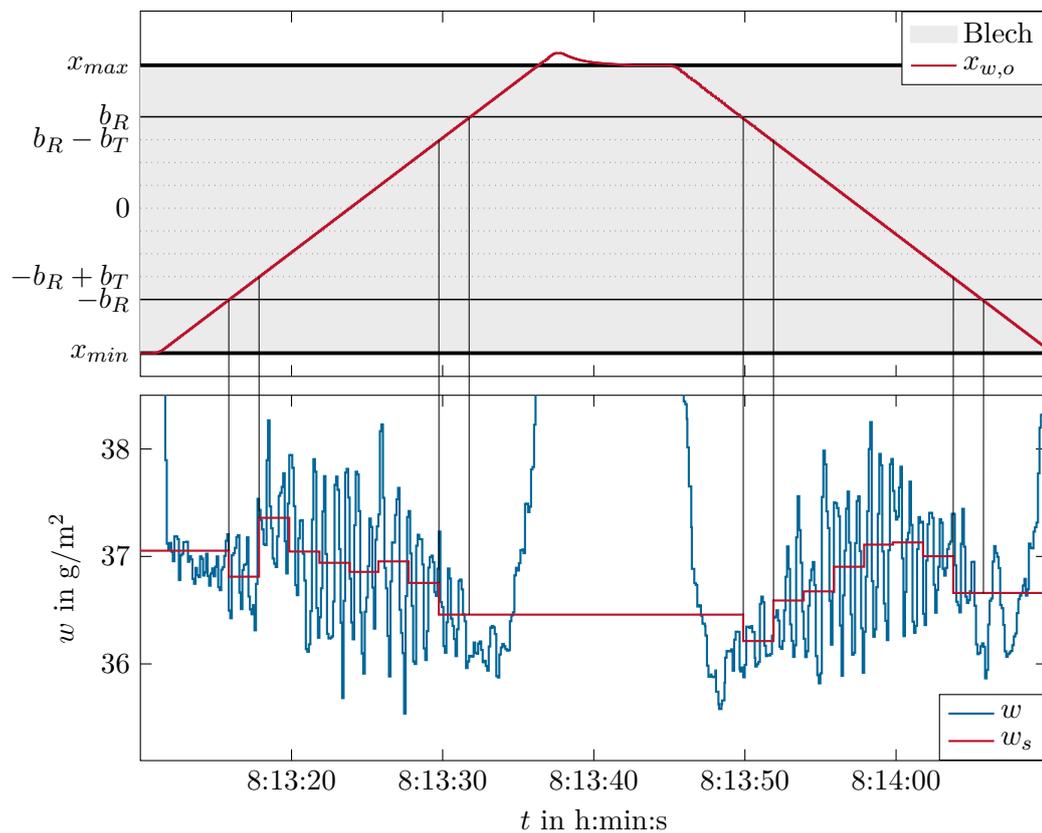


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung der Aufteilung und Mittelung entlang des Bands.

Die Aufbereitung der Abstandsmessung erfolgt auf gleiche Weise. Um für jeden Zeitpunkt einen zulässigen Wert der Abstandsmessung für jedes Segment zu erhalten, wird

zwischen den gemessenen und gemittelten Abstandswerten linear interpoliert. Da die Traversierung der Abstandsmessung um ein Vielfaches schneller als  $T_{t,o}$  bzw.  $T_{t,u}$  ist, kann diese Interpolation auch ohne Bedenken für Online-Schätzverfahren eingesetzt werden.

Bevor nun das empirische Potenzmodell aus (6.5) für die Schätzung des Auftragsgewichts herangezogen wird, soll das Modell anhand von Messdaten plausibilisiert werden. Dafür werden in Abbildung 6.4 die aufbereiteten Messdaten  $w_{s,o}$  mit den korrespondierenden Stellgrößen  $\bar{v}$ ,  $\bar{d}_{s,o}$  und  $\bar{p}$  dargestellt. Der Verlauf von  $w_{s,o}$  gleicht qualitativ Abbildung 6.4, weshalb hier auf eine Darstellung verzichtet wird. Wie zu erwarten ist, führt eine Verringerung des Düsendrucks  $\bar{p}$  und eine Erhöhung der Bandgeschwindigkeit  $\bar{v}$  und des Blechabstands  $\bar{d}_{s,o}$  zu einem höheren Auftragsgewicht. Es zeigt sich jedoch auch, dass zwei gleiche Punkte im  $(\bar{v}, \bar{d}_{s,o}, \bar{p})$ -Raum auf zwei erheblich unterschiedliche Auftragswerte abbilden können. Dieses Verhalten legt Modellfehler von (6.5) durch nicht berücksichtigte Größen und Dynamiken bzw. Messfehler durch Rauschen und die verwendete Interpolation nahe.

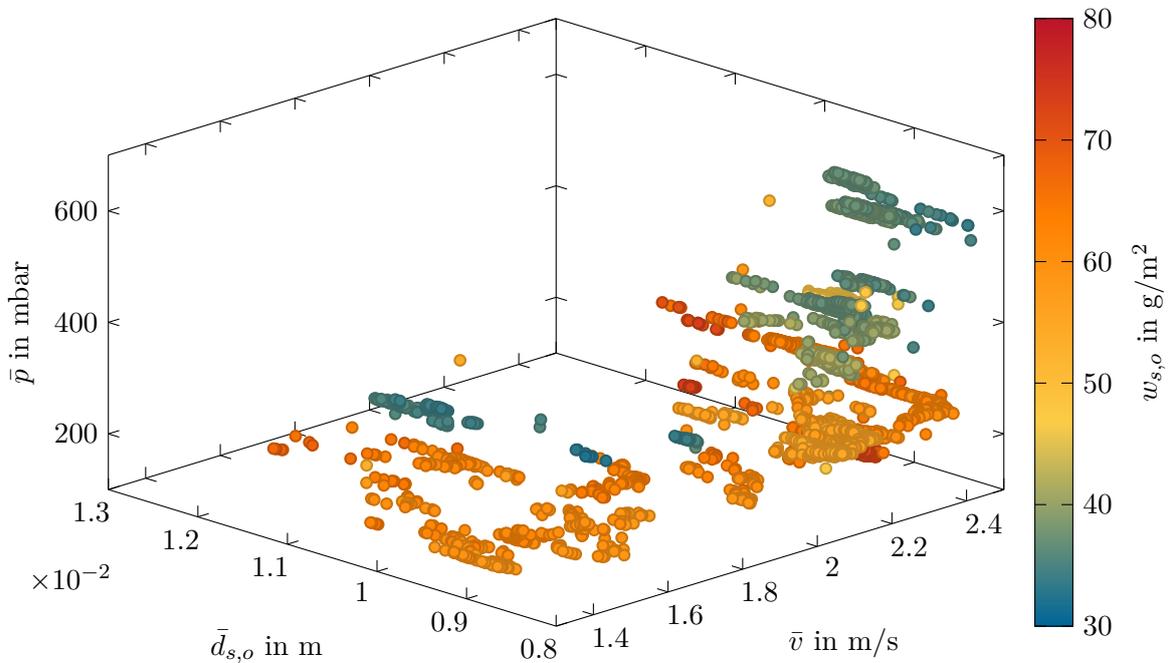


Abbildung 6.4: 3D-Plot der aufbereiteten Messdaten  $w_{s,o}$  in Abhängigkeit von  $\bar{v}$ ,  $\bar{d}_{s,o}$  und  $\bar{p}$ .

## 6.3 Anpassung des GRLS und GKF

Für eine Vereinfachung soll nicht ein separates Modell für die Ober- und Unterseite des Bands, sondern ein gemeinsames Modell entwickelt werden. In diesem Modell kann dann nach Bedarf für  $\bar{d}_s$ ,  $\bar{d}_{s,o}$  bzw.  $\bar{d}_{s,u}$ , für  $\bar{w}_s$ ,  $\bar{w}_{s,o}$  bzw.  $\bar{w}_{s,u}$ , für  $\alpha$ ,  $\alpha_o$  bzw.  $\alpha_u$  usw. eingesetzt

werden. Dadurch kann (6.5) als

$$w_s = \kappa \bar{v}^{-\alpha} \bar{d}_s^\beta \bar{p}^\gamma \quad (6.7)$$

angeschrieben werden. Die zeitdiskrete Darstellung von (6.7) folgt direkt zu

$$w_{s,k} = \kappa \bar{v}_k^{-\alpha} \bar{d}_{s,k}^\beta \bar{p}_k^\gamma. \quad (6.8)$$

Da dieses empirische Potenzmodell nichtlinear in den Parametern ist, muss eine Transformation des Modells durchgeführt werden, bevor der GRLS und der GKF aus Kapitel 4 eingesetzt werden können. In diesem Fall stellt sich die Transformation als besonders einfach dar, da das Potenzmodell laut (6.5) lediglich logarithmiert werden muss. Man erhält das transformierte Modell

$$w'_{s,k} = \kappa' + \alpha \bar{v}'_k + \beta \bar{d}'_{s,k} + \gamma \bar{p}'_k \quad (6.9)$$

mit den neuen Parametern

$$w'_{s,k} = \log(w_{s,k}), \quad \kappa' = \log(\kappa), \quad \bar{v}'_k = \log(\bar{v}_k), \quad (6.10a)$$

$$\bar{d}'_{s,k} = \log(\bar{d}_{s,k}), \quad \bar{p}'_k = \log(\bar{p}_k). \quad (6.10b)$$

Anschließend wird das zu schätzende System noch um die fiktiven Totzeiten  $\hat{T}_{t,i}$  zu

$$\hat{w}'_{s,k} = \hat{\kappa} + \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\alpha}_i v' (kT_a - \hat{T}_{t,i}) + \hat{\beta}_i d'_s (kT_a - \hat{T}_{t,i}) + \hat{\gamma}_i p' (kT_a - \hat{T}_{t,i}) \quad (6.11)$$

erweitert, wobei  $\hat{T}_{t,0}$  und  $\Delta \hat{T}_t$  als ganzzahlige Vielfache der Abtastzeit  $T_a$  gewählt werden. Es ist naheliegend, die fiktiven Totzeiten symmetrisch um die zeitvariante nominelle Totzeit  $\hat{T}_{t,nom}$  zu platzieren. Die zeitvariante nominelle Totzeit  $\hat{T}_{t,nom}$  kann in jedem Abtastschritt durch das Lösen der Integralgleichung (6.1a) bzw. (6.1b) bestimmt werden. Es wird die Summe

$$l_{Z,j} = \sum_{i=1}^j v_{k-i} T_a \quad (6.12)$$

gebildet, bis  $l_{Z,j}$  größer als  $l_{Z,o}$  bzw.  $l_{Z,u}$  ist. Anschließend kann die nominelle Totzeit als

$$\hat{T}_{t,nom} = j T_a \quad (6.13)$$

abgeschätzt werden. Der durch die Approximation von  $l_{Z,o}$  bzw.  $l_{Z,u}$  durch  $l_{Z,j}$  entstehende Fehler ist vernachlässigbar, da die Abtastzeit um mehrere Größenordnungen kleiner als die Totzeit ist. Damit ergibt sich eine minimale fiktive Totzeit

$$\hat{T}_{t,0} = \hat{T}_{t,nom} - \frac{N-1}{2} \Delta \hat{T}_t. \quad (6.14)$$

Mit diesem Vorgehen wird die Schätzung der Totzeit auf eine Schätzung des Totzeitfehlers um die nominelle Totzeit zurückgeführt. Der GRLS in der Form (5.2) kann nun direkt auf

(6.11) angewandt werden und lautet

$$\hat{w}'_{s,k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\kappa}' & \hat{\alpha}^T & \hat{\beta}^T & \hat{\gamma}^T \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{p}}_k^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \hat{\mathbf{v}}'_k \\ \hat{\mathbf{d}}'_{s,k} \\ \hat{\mathbf{p}}'_k \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_k} \quad (6.15)$$

mit den geschätzten Koeffizienten

$$\hat{\alpha}^T = [\hat{\alpha}_0 \quad \dots \quad \hat{\alpha}_{N-1}]^T \quad (6.16a)$$

$$\hat{\beta}^T = [\hat{\beta}_0 \quad \dots \quad \hat{\beta}_{N-1}]^T \quad (6.16b)$$

$$\hat{\gamma}^T = [\hat{\gamma}_0 \quad \dots \quad \hat{\gamma}_{N-1}]^T \quad (6.16c)$$

und den verzögerten Messungen

$$\hat{\mathbf{v}}_k'^T = [v'(kT_a - \hat{T}_{t,0}) \quad \dots \quad v'(kT_a - \hat{T}_{t,N-1})]^T \quad (6.17a)$$

$$\hat{\mathbf{d}}_{s,k}'^T = [d'_s(kT_a - \hat{T}_{t,0}) \quad \dots \quad d'_s(kT_a - \hat{T}_{t,N-1})]^T \quad (6.17b)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_k'^T = [p'(kT_a - \hat{T}_{t,0}) \quad \dots \quad p'(kT_a - \hat{T}_{t,N-1})]^T \quad (6.17c)$$

Um außerdem die Robustheit des GRLS gegen mögliche Divergenz zu erhöhen, wird der eingesetzte RLS um einen variablen Vergessensfaktor gemäß (5.12) erweitert.

Analog dazu kann das Schätzproblem für den GKF als

$$\hat{w}'_{s,k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \hat{\mathbf{v}}_k'^T & \hat{\mathbf{d}}_{s,k}'^T & \hat{\mathbf{p}}_k'^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_k^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\kappa}' \\ \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \\ \hat{\gamma} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_k} \quad (6.18)$$

angeschrieben werden. Auf dieses Schätzproblem kann dann direkt der GKF gemäß (4.46) angewandt werden.

Die Parameterinterpolation für den GRLS und GKF erfolgt nach (4.38)

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\alpha}_i \quad (6.19a)$$

$$\hat{\beta} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\beta}_i \quad (6.19b)$$

$$\hat{\gamma} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\gamma}_i \quad (6.19c)$$

$$\hat{T}_t = \frac{1}{w'_{s,k} - \hat{\kappa}'} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\alpha}_i v'(kT_a - \hat{T}_{t,i}) \hat{T}_{t,i} + \hat{\beta}_i d'_s(kT_a - \hat{T}_{t,i}) \hat{T}_{t,i} + \hat{\gamma}_i p'(kT_a - \hat{T}_{t,i}) \hat{T}_{t,i}, \quad (6.19d)$$

wobei stets sichergestellt werden muss, dass  $w'_{s,k} - \hat{\kappa}' \neq 0$  gilt. Dies stellt bei den betrachteten Messdaten und den verwendeten Schätzern jedoch kein Problem dar, weil  $w < 100$  bzw.  $w' < 2$  und  $\kappa \geq 1000$  bzw.  $\kappa' \geq 3$  gilt. Somit ist  $w'_{s,k} - \hat{\kappa}'$  immer kleiner als Null. Die Interpolation (6.19d) wird zu guten Ergebnissen führen, wenn alle Modelleingänge ausreichend angeregt sind. Falls einer der Modelleingänge über den gesamten Messbereich konstant bleibt, kann dies zu einer Verfälschung der geschätzten Totzeit führen. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Interpolation so zu ändern, dass nur die ausreichend angeregten Eingänge zur Schätzung der Totzeit verwendet werden.

## 6.4 Vorgesteuerter rekursiver Least-Squares Schätzer

Die Parameter von (6.9) können auch geschätzt werden, indem die nominellen Totzeiten  $\hat{T}_{t,nom}$  laut (6.1) vorgesteuert und eine RLS nach (5.2) ausgelegt wird. Dann ergibt sich das Schätzproblem zu

$$\hat{w}'_{s,k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\kappa}' & \hat{\alpha}^T & \hat{\beta}^T & \hat{\gamma}^T \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{p}}_{k,v}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ v' \left( kT_a - \hat{T}_{t,nom} \right) \\ d'_s \left( kT_a - \hat{T}_{t,nom} \right) \\ p' \left( kT_a - \hat{T}_{t,nom} \right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{s}_{k,v}} \quad (6.20a)$$

$$l_Z = \int_{t-\hat{T}_{t,nom}}^t v(\tau) d\tau. \quad (6.20b)$$

Im Gegensatz zum GRLS und GKF wird bei diesem Schätzer von einer bekannten zeitvarianten Totzeit  $T_t = \hat{T}_{t,nom}$  ausgegangen. Dadurch muss die Totzeit nicht geschätzt werden und kann einfach durch eine Verzögerung der Eingänge kompensiert werden. Um auch diesen Schätzer gegen Divergenz abzusichern, wird er ebenso um einen variablen Vergessensfaktor nach (5.12) erweitert. Der sich daraus ergebende Schätzer wird als vorgesteuerter rekursiver Least-Squares Schätzer (VRLS) bezeichnet. Dieser Schätzer soll zeigen, ob eine Schätzung der Schwankung der Totzeit überhaupt notwendig ist oder ob es für die Anwendung ausreicht, die implizite Integralgleichung in (6.20b) nach  $\hat{T}_t$  zu lösen. Um die Ergebnisse des VRLS und GRLS besser vergleichen zu können, werden für beide Schätzer idente Werte für den Initialwert der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_0$ , die Abtastzeit  $T_a$ , die Einschwingkonstante  $\nu_1$  und die Dämpfungskonstante  $\nu_2$  verwendet.

## 6.5 Offline-Identifikation

Um die Online-Identifikationsergebnisse und Güte des Potenzmodells (6.5) bewerten zu können, werden zwei Offline-Identifikationen durchgeführt, in denen die nominelle Totzeit wie in Abschnitt 6.4 vorgesteuert wird. Einerseits wird das logarithmierte Modell (6.9) mit einem Least-Squares Schätzer (LS) der Form

$$\hat{\mathbf{p}}_v = \left( \mathbf{S}^T \mathbf{S} \right)^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{w}' \quad (6.21a)$$

$$\hat{\mathbf{w}}'_{LS} = \mathbf{S} \hat{\mathbf{p}}_v \quad (6.21b)$$

mit  $\hat{\mathbf{p}}_v = [\hat{\kappa}' \quad \hat{\alpha} \quad \hat{\beta} \quad \hat{\gamma}]^T$  und der Datenmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{0,v}^T \\ \vdots \\ \mathbf{s}_{N_m-1,v}^T \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

den gemessenen Auflagewerten  $\mathbf{w}' = [w'_{s,0} \quad \cdots \quad w'_{s,N_m-1}]^T$  und der Anzahl der Messpunkte  $N_m$  bestimmt. Andererseits werden die Parameter des nichtlinearen Modells (6.5) über das nichtlineare Optimierungsproblem (NL)

$$\arg \min_{\{\hat{\kappa}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}\}} \sum_{i=0}^{N_m-1} (w_{s,i} - \hat{w}_{NL,i})^2 \quad (6.23a)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \hat{w}_{NL,i} = \hat{\kappa} \bar{v}_i^{\hat{\alpha}} \bar{d}_{s,i}^{\hat{\beta}} \bar{p}_i^{\hat{\gamma}} \quad (6.23b)$$

ermittelt. Die numerische Lösung erfolgt dabei durch die Funktion `fmincon` aus der MATLAB-Optimization Toolbox.

Beide Verfahren werden verwendet, um offline die Modellparameter für die Ober- und Unterseite des Bands aus zwei Datensätzen, Datensatz A und Datensatz B, zu ermitteln. Die beiden Datensätze bestehen aus den Stellgrößen und dem Auflagegewicht über eine Zeit von ca. 16 bzw. 14 Stunden. Die sich für Datensatz A ergebenden Parametersätze sind in Tabelle 6.1 angegeben. Es fällt sofort auf, dass sich die geschätzten Parameter der beiden Identifikationsverfahren kaum unterscheiden. Die Unterschiede sind auf die verschiedenen skalierten Kostenfunktionen der beiden Schätzer zurückzuführen. Der nichtlineare Schätzer löst das Optimierungsproblem (6.23) während der LS die Kostenfunktion

$$\sum_{i=0}^{N_m-1} (\log(w_{s,i}) - \log(\hat{w}_{LS,i}))^2 \quad (6.24)$$

minimiert. Die Parameter der Ober- und Unterseite des Bands für  $\hat{\alpha}$  und  $\hat{\gamma}$  unterscheiden sich nur minimal. Diese Übereinstimmung deckt die Erwartung, da  $v$  und  $p$  für beide Seiten des Bands ident sind. Die Schätzwerte  $\hat{\kappa}$  und  $\hat{\beta}$  weisen eine starke Streuung zwischen der Ober- und der Unterseite auf. Dies wird durch die unterschiedlichen Messwerte  $d_{s,u}$  und  $d_{s,o}$  verursacht. Wie bereits in Abschnitt 6.2 angesprochen, handelt es sich bei  $d_{s,u}$  und  $d_{s,o}$  um Interpolationen zwischen Mittelwerten über das jeweilige Segment  $s$ . Dieser durch die Traversierung und dadurch benötigten Interpolation verursachte Messfehler führt aufgrund der unterschiedlichen Verzögerungen zu unterschiedlichen  $\hat{\kappa}$  und  $\hat{\beta}$  für die Ober- und Unterseite des Bands.

Abbildung 6.5 stellt in den ersten Zeilen die Eingänge des Modells  $p$  und  $v$  dar. Darunter ist der Abstand zwischen der Oberseite des Bands und der Düse  $d_{s,o}$ , das Ergebnis der Identifikation der Oberseite des Bands der durch (6.21) und (6.23) beschriebenen Identifikation und ein vergrößerter Ausschnitt ebendieses angegeben. Abschließend sind in Abbildung 6.5 die beschriebenen Verläufe für die Unterseite des Bands gedarstellt. Die identifizierten Modelle sind dazu imstande, dem groben Verlauf der Messwerte zu folgen, können aber die Änderungen des Belags über die Breite des Bands nicht wiedergeben.

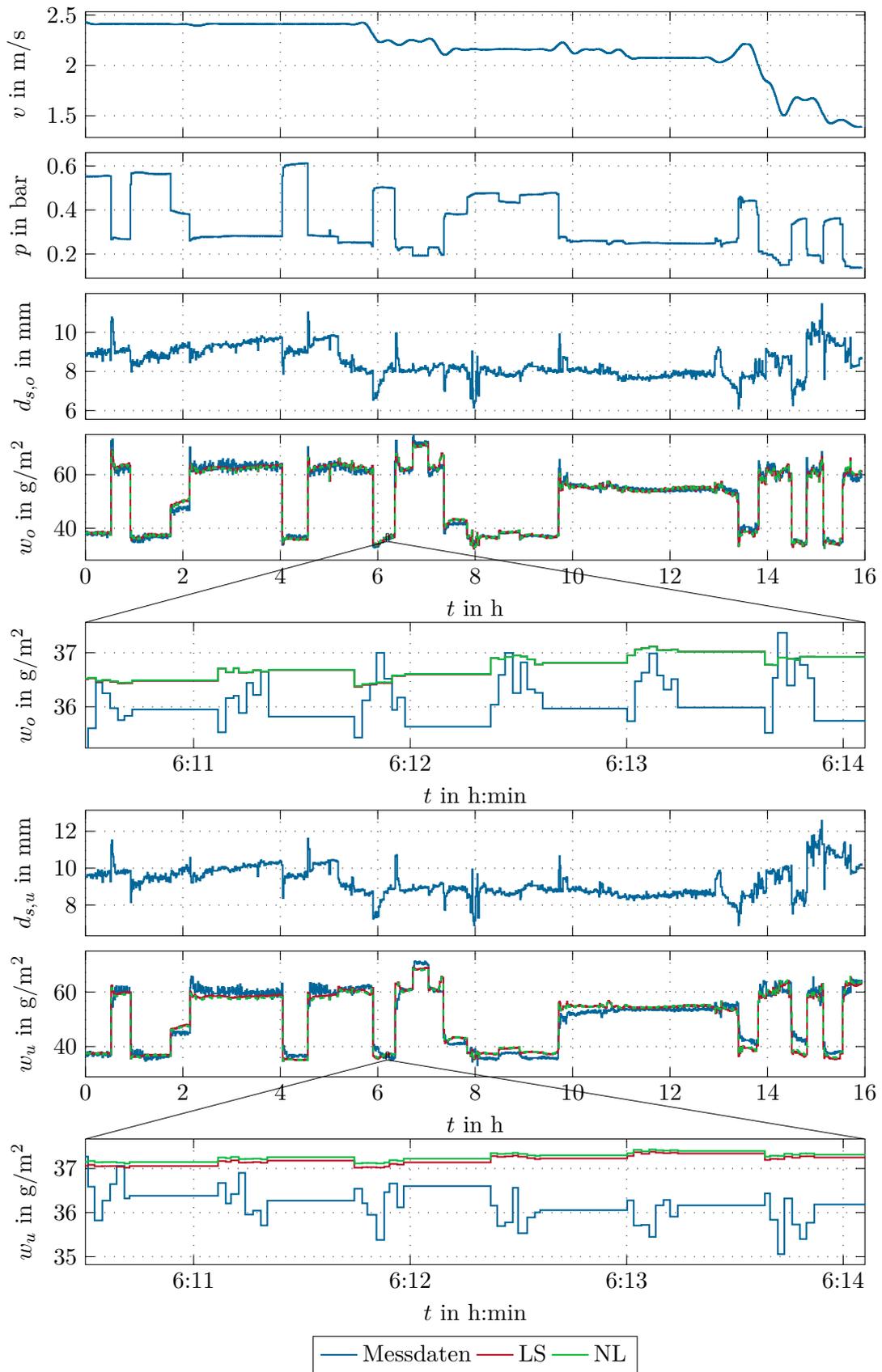


Abbildung 6.5: Simulationsergebnisse für die Offline-Identifikation für Datensatz A für  $N_x = 8$ .

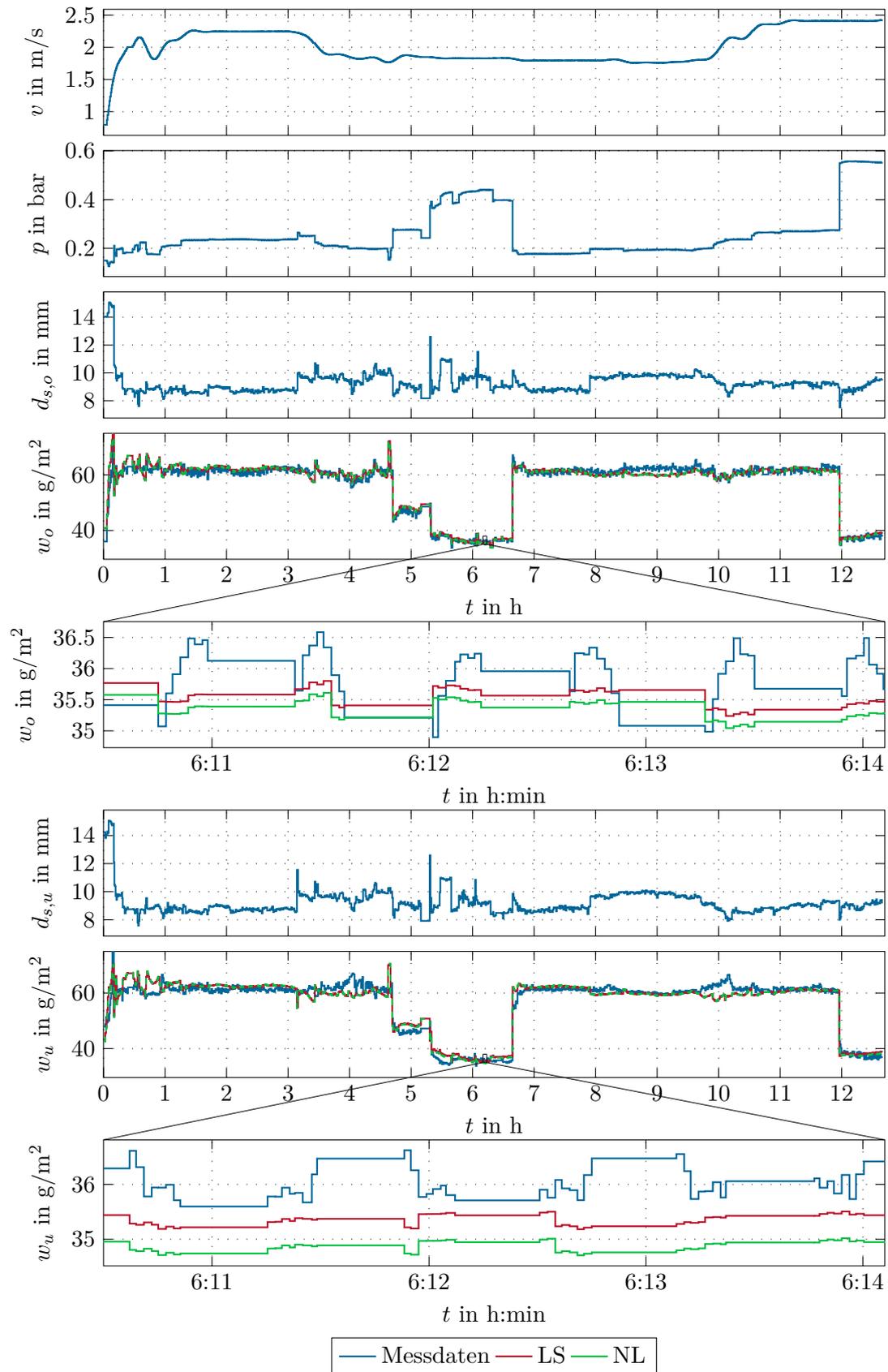


Abbildung 6.6: Simulationsergebnisse für die Offline-Identifikation für Datensatz B für  $N_x = 8$ .

		$\hat{\kappa}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
Oberseite	NL	14226	0.8417	0.4924	-0.6866
	LS	13160	0.8348	0.4752	-0.6865
Unterseite	NL	3947	0.8647	0.2714	-0.6540
	LS	4026	0.8822	0.2584	-0.6741

Tabelle 6.1: Offline identifizierte Streckenparameter für Datensatz A für  $N_x = 8$ .

In Tabelle 6.2 sind die Modellparameter für Datensatz B eingetragen. Wenn man nun Tabelle 6.1 und Tabelle 6.2 vergleicht, fällt auf, dass  $\hat{\gamma}$  nur einen minimalen Unterschied von der ersten zu der zweiten Identifikation aufweist. Die Änderung in  $\hat{\kappa}$  und  $\hat{\alpha}$  ist jedoch sehr groß. Diese Abweichung ist wiederum auf die Mittelung und Interpolation der Abstandsmessung zurückzuführen. Die Simulationsergebnisse entsprechen qualitativ den in Abbildung 6.5 dargestellten Graphen und sind in Abbildung 6.6 dargestellt.

		$\hat{\kappa}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
Oberseite	NL	8776	0.8721	0.4162	-0.6699
	LS	9398	0.8789	0.4232	-0.6775
Unterseite	NL	3947	0.8647	0.2714	-0.6540
	LS	4026	0.8822	0.2584	-0.6741

Tabelle 6.2: Offline identifizierte Streckenparameter für Datensatz B für  $N_x = 8$ .

Um die Auswirkung der Segmentierung auf das Simulationsergebnis und die Streckenparameter untersuchen zu können, werden die Simulationen für beide Datensätze mit erhöhter Segmentanzahl  $N_x = 16$  wiederholt. Die daraus resultierenden Parametersätze sind in Tabelle 6.3 eingetragen. Die Verläufe der Simulationsergebnisse sind für Datensatz A in Abbildung 6.7 und für Datensatz B in Abbildung 6.8 dargestellt. Ein Vergleich zwischen den offline identifizierten Streckenparametern aus Tabelle 6.1 bzw. Tabelle 6.2 und Tabelle 6.3 zeigt, dass sich die identifizierten Streckenparameter durch die Segmentierung ändern. Jedoch sind die Parameter in der gleichen Größenordnung wie in Tabelle 6.1 bzw. Tabelle 6.2 und die Änderungen zwischen den Streckenparametern der verschiedenen Datensätze sind deutlich größer. Die Verläufe der Simulationsergebnisse für  $N_x = 8$  und  $N_x = 16$  sind qualitativ gleich. Trotz der Erhöhung der Segmentanzahl konnte der Änderung des Zinkbelags über die Breite des Bands nicht besser gefolgt werden. Darum wird in weiterer Folge  $N_x = 8$  verwendet.

## 6.6 Online-Schätzung

In Abbildung 6.5 bis Abbildung 6.8 wurde dargestellt, dass der grobe Verlauf des Zinkbelags von zwei unabhängigen Messungen durch Offline-Identifikation von (6.9) approximiert werden kann. Die in Abschnitt 6.3 und Abschnitt 6.4 entwickelten Schätzer werden verwen-



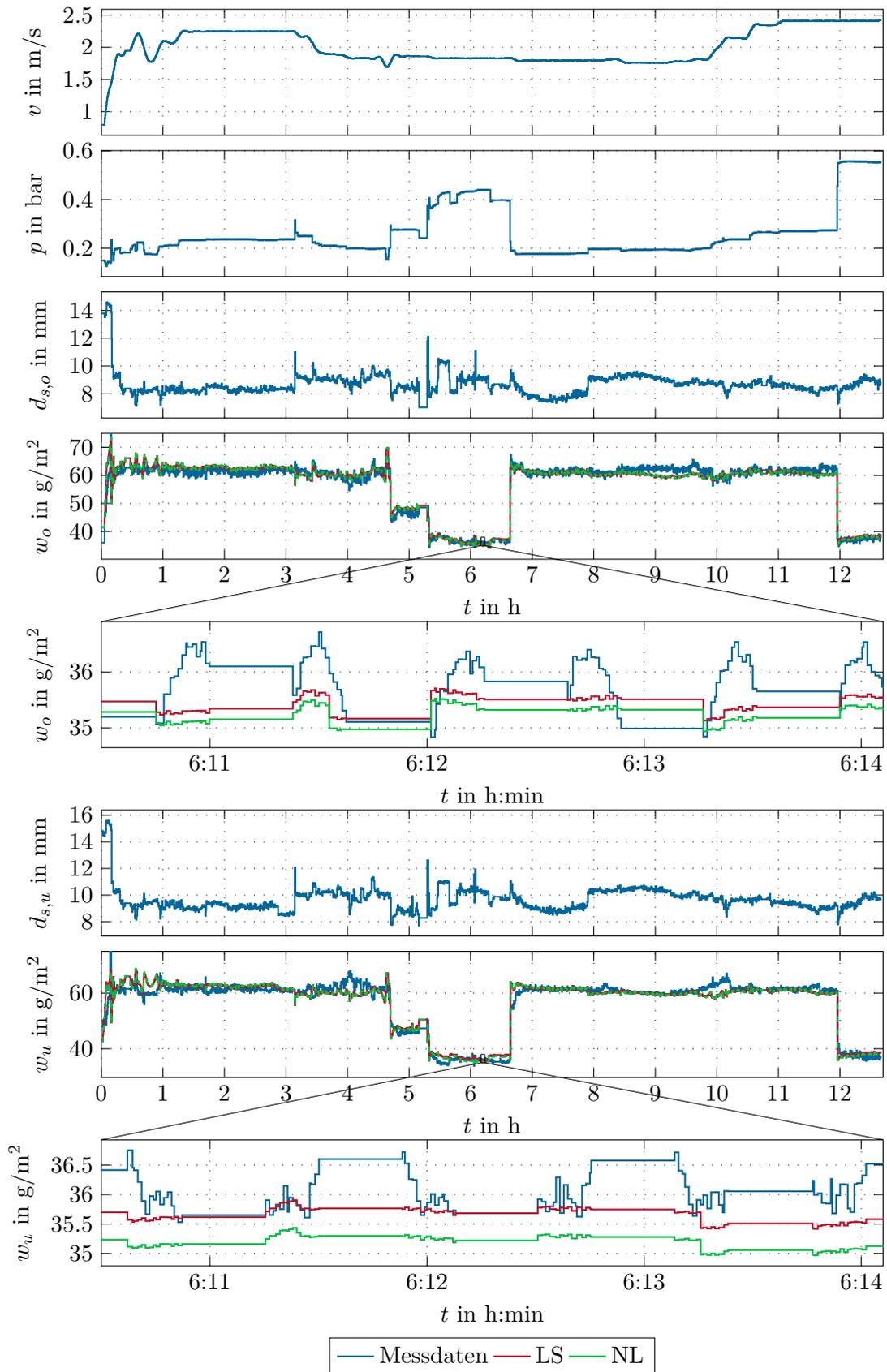


Abbildung 6.8: Simulationsergebnisse für die Offline-Identifikation für Datensatz B für  $N_x = 16$ .

			$\hat{\kappa}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$
Datensatz A	Oberseite	NL	11127	0.8914	0.2818	-0.6834
		LS	10307	0.8607	0.4477	-0.6856
	Unterseite	NL	3396	0.6974	0.2370	-0.6357
		LS	2312	0.6428	0.2040	-0.6292
Datensatz B	Oberseite	NL	6738	0.8595	0.3483	-0.6782
		LS	7264	0.8689	0.3578	-0.6850
	Unterseite	NL	4625	0.8722	0.2945	-0.6640
		LS	4670	0.8914	0.2818	-0.6791

Tabelle 6.3: Offline identifizierte Streckenparameter für die Datensätze A und B für  $N_x = 16$ .

det, um zeitvariante Änderungen der Modellparameter und der Totzeit mitberücksichtigen zu können. Ziel dabei ist, den Verlauf des Zinkbelags über die Bandbreite besser vorherzusagen zu können. Um diese Hypothese zu überprüfen, wurde eine Simulation mit dem Datensatz A (Abbildung 6.5) und dem Datensatz B (Abbildung 6.6) durchgeführt. Um die Schätzgüte zu quantifizieren, wird als Gütemaß der integrale quadratische Schätzfehler

$$e_{2,w}(t) = \int_0^t n(x) (w(\tau) - \hat{w}(\tau))^2 d\tau \quad (6.25a)$$

$$n(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_m - b_R \leq x \leq x_m + b_R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (6.25b)$$

festgelegt und die berechneten Fehler in Tabelle 6.4 aufgelistet. Die Simulationsparameter können Tabelle 6.5 entnommen werden. In Abbildung 6.9 bis Abbildung 6.12 sind die Schätzwerte und der Messwert des Zinkbelags, die geschätzten Parameter  $\hat{\kappa}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  und  $\hat{T}_t$  sowie der Zinkbelag über die Breite des Bands für alle drei Schätzer dargestellt.

		Schätzer	VRLS	GRLS	GKF
Datensatz A	Oberseite	$e_{2,w}$	2042	1513	1147
	Unterseite	$e_{2,w}$	2564	2273	1188
Datensatz B	Oberseite	$e_{2,w}$	2689	2480	1661
	Unterseite	$e_{2,w}$	2591	2430	1801

Tabelle 6.4: Integrale quadratische Fehler der vorgestellten Schätzer.

Die Online-Schätzer sind, ebenso wie die Offline-Identifikation, dazu imstande, den groben Verlauf des Zinkbelags zu folgen. Im Gegensatz zu den Offline-Identifikationen aus Abbildung 6.5-Abbildung 6.8 können die Online-Schätzer den Verlauf über die Breite des Bands mit kleinerem Fehler approximieren. Der Verlauf von  $\hat{\gamma}$  ist für alle Schätzer unabhängig vom Datensatz qualitativ gleich und alle Schätzer konvergieren gegen ähnliche

Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\hat{\kappa}_{in}$	1000	$\hat{\alpha}_{in}$	0.5
$\hat{\beta}_{in}$	1	$\hat{\gamma}_{in}$	1
$l_{Z,o}$	105.33m	$l_{Z,u}$	93.56 m
$\mathbf{P}_0$	$\mathbf{E} \cdot 10^2$	$N$	5
$\Delta \hat{T}_t$	2.5 s	$\nu_1$	0.1
$\nu_2$	0.02	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{E} \cdot 10^{-5}$
$R$	10		

Tabelle 6.5: Simulationsparameter für die Online-Schätzungen.

Werte. Der Verlauf von  $\hat{\beta}$  unterscheidet sich beim GKF wesentlich vom Verlauf des GRLS und des VRLS Schätzers. Bei Datensatz A können aufgrund der konstanten Bandgeschwindigkeit  $v$  bis  $t < 5h$  Teile von  $\hat{\kappa}$  in  $\hat{\alpha}$  und vice versa verschoben werden, da sich  $\hat{\kappa}$  und  $\hat{\alpha}$  bis dahin bezüglich des Schätzers identisch verhalten. Nach der Änderung der Bandgeschwindigkeit nähern sich die Verläufe von  $\hat{\kappa}$  und  $\hat{\alpha}$  des GRLS und des GKF an. Alle Schätzer konvergieren gegen Werte in derselben Größenordnung. Der GKF und der GRLS schätzen Totzeiten  $\hat{T}_t$ , die sich nur minimal von der nominelle Totzeit  $\hat{T}_{t,nom}$  des VRLS unterscheiden. Wenn man die quadratischen Ausgangsschätzfehler der Schätzer in Tabelle 6.4 miteinander vergleicht, fällt auf, dass durch die Erweiterung des VRLS um fiktive Totzeiten zum GRLS das Fehlermaß für alle Simulationen verringert werden kann. Der Ausgangsfehler des GKF ist am geringsten und zeigt somit das beste Verhalten bezüglich des gewählten Gütemaßes. Dies deutet an, dass das Schätzverhalten des RLS mit vorgesteuerter Totzeit durch die in Abschnitt 6.3 entwickelten Schätzer übertroffen werden kann und somit die Schätzung der Totzeit zu einer Verbesserung des Schätzergebnisses führt.

Ergänzend sei an dieser Stelle erwähnt, dass es sich bei dem hier verwendeten Potenzmodell um ein empirisches Modell für den Zinkbelag handelt, welches das Verhalten der untersuchten kontinuierlichen Feuerverzinkungsanlage nur in groben Zügen abbilden kann. Die verbleibenden Fehler der Schätzung können sowohl durch das empirische Modell als auch durch die benötigte Interpolation zwischen den Abstandsmesswerten oder den verwendeten Schätzern verursacht werden.

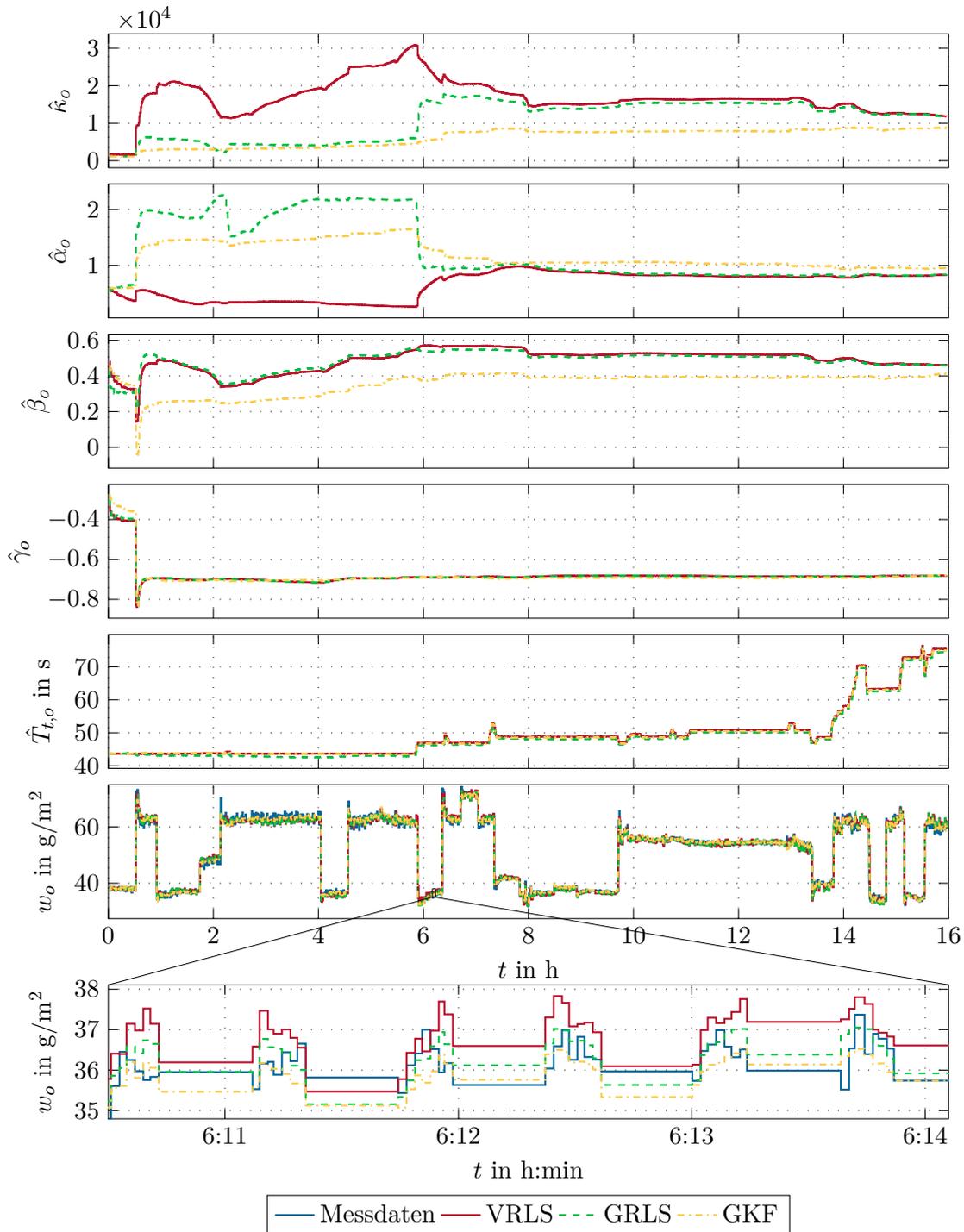


Abbildung 6.9: Ergebnisse für die Online-Schätzungen des Zinkbelags der Oberseite für Datensatz A.

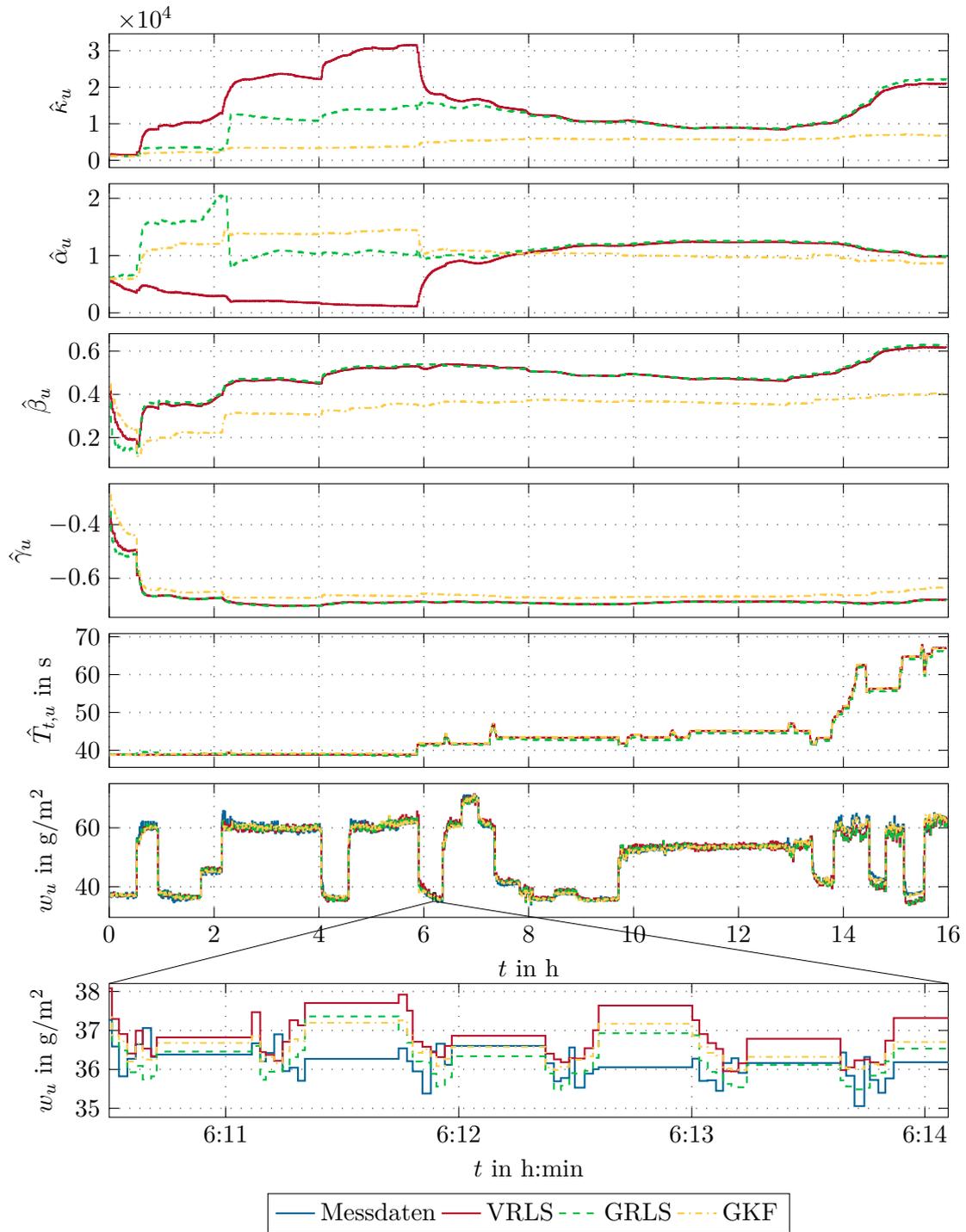


Abbildung 6.10: Ergebnisse für die Online-Schätzungen des Zinkbelags der Unterseite für Datensatz A.

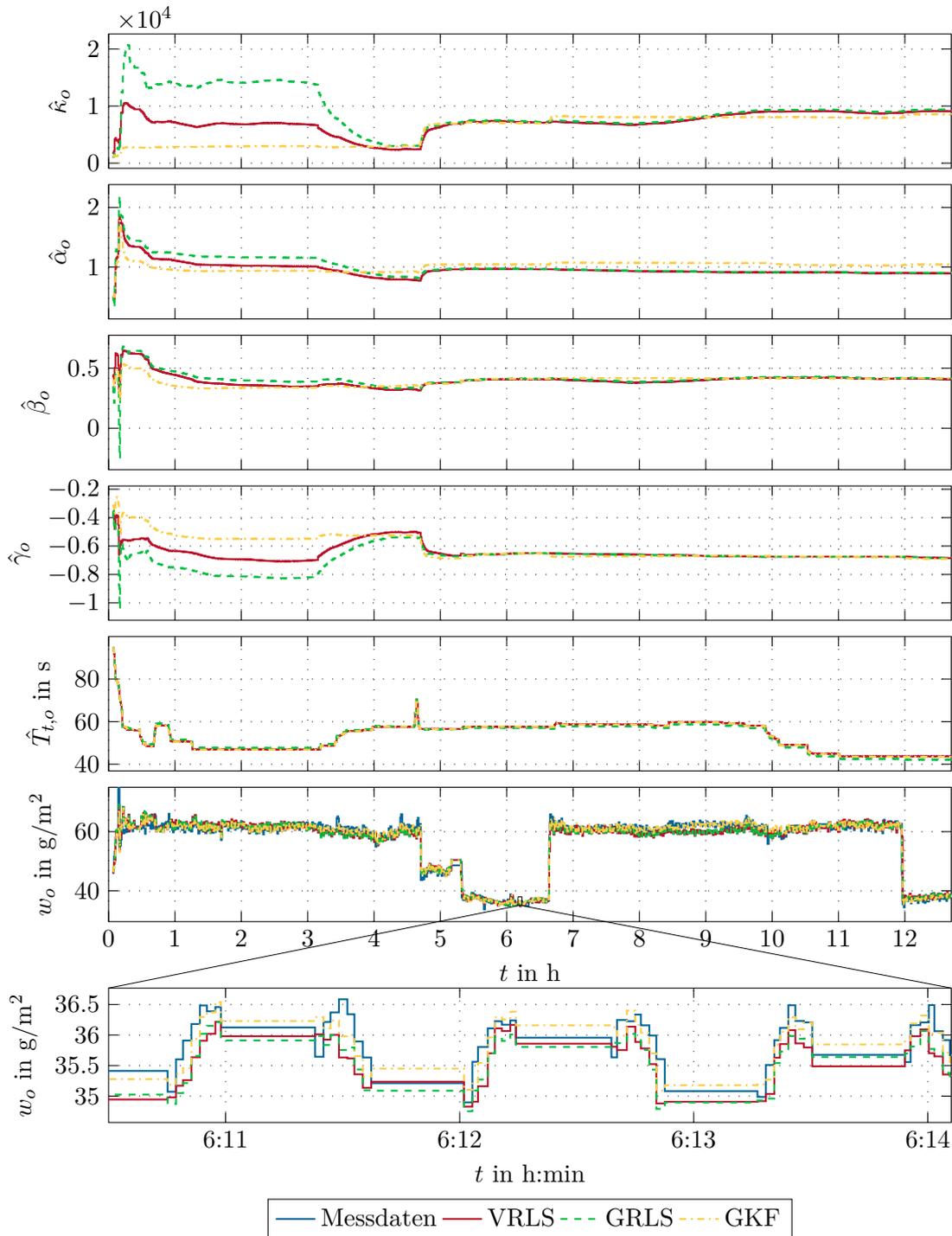


Abbildung 6.11: Ergebnisse für die Online-Schätzungen des Zinkbelags der Oberseite für Datensatz B.

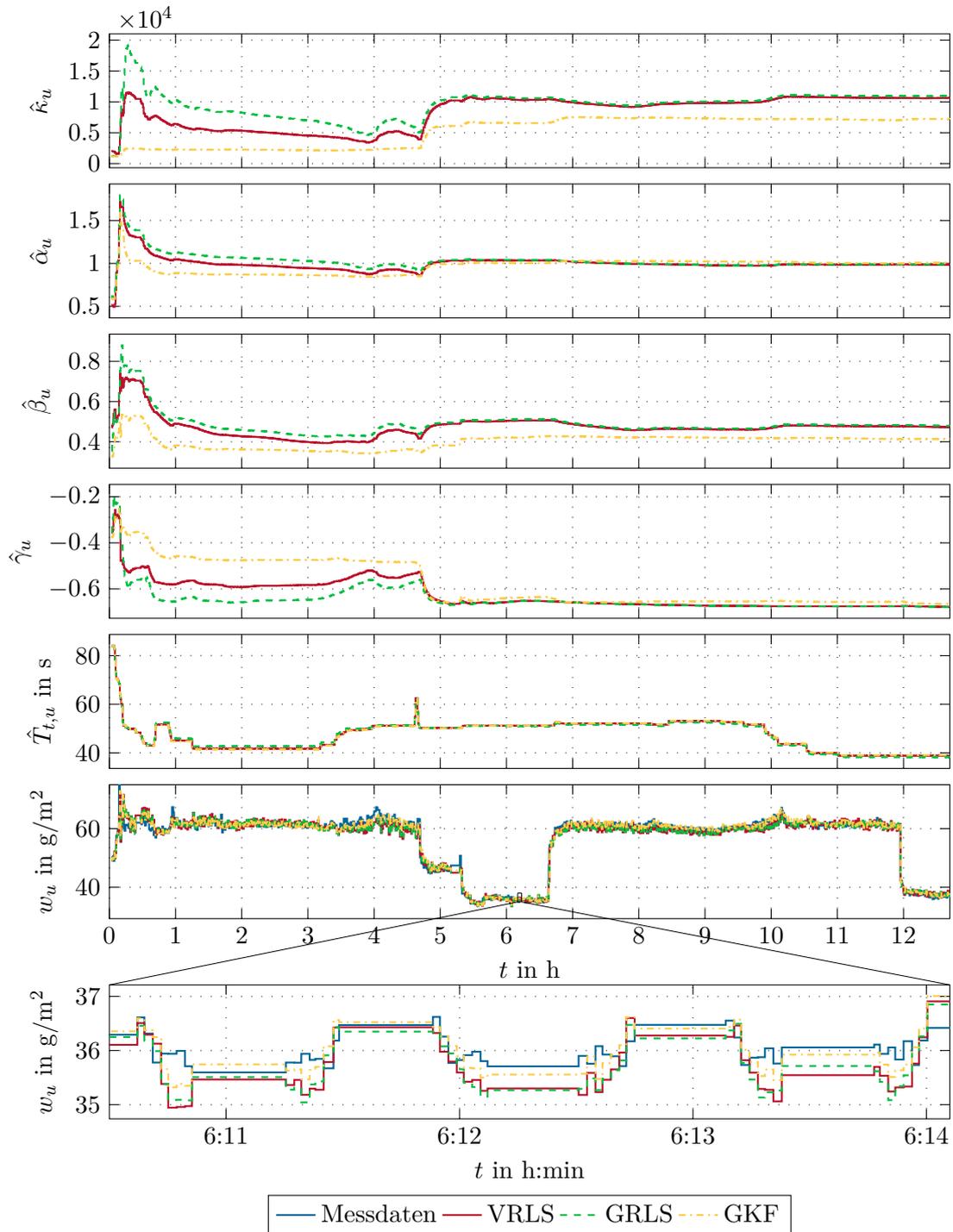


Abbildung 6.12: Ergebnisse für die Online-Schätzungen des Zinkbelags der Unterseite für Datensatz B.

## 7 Adaptive Regelung für Totzeitsysteme mit vernachlässigbarer Dynamik

In Kapitel 3 konnte durch Simulationen gezeigt werden, dass geringe Abweichungen der Totzeit zu großen Ausgangsfehlern des geschlossenen Regelkreises bis hin zur Instabilität führen können. Die in Kapitel 4 und Kapitel 6 untersuchten Schätzer können nun verwendet werden, um die in Kapitel 3 besprochenen Regelungskonzepte zu erweitern und die Robustheit gegen Parameterschwankungen zu erhöhen. Dafür wird in Abschnitt 7.1 der gefilterte Smith-Prädiktor aus Abschnitt 3.2.1 um einen Parameter- und Totzeitschätzer zum adaptiven Smith-Prädiktor erweitert. Anschließend wird in Abschnitt 7.2 eine Abwandlung des adaptiven Smith-Prädiktors für hinreichend schnelle Parameter- und Totzeitschätzer vorgestellt. In Abschnitt 7.3 werden abschließend die beiden adaptiven Regelungen mit dem gefilterten Smith-Prädiktor verglichen. Als geregeltes System wird in diesem Kapitel stets eine lineare Funktion der Form

$$g(u) = au + b \quad (7.1)$$

verwendet.

### 7.1 Adaptiver Smith-Prädiktor

Beim Smith-Prädiktor aus Abschnitt 3.2 führt ein Fehler im internen Modell zu einem Ausgangsfehler, der erst nach mehreren Totzeiten kompensiert werden kann. Da im Smith-Prädiktor bei einem Modellfehler keine Änderung des internen Modells vorgesehen ist, tritt bei einem abermaligen Arbeitspunktwechsel wiederum ein vergleichbares Fehlermuster auf. Um diesen wiederkehrenden Fehler verringern zu können, bietet es sich an, den Smith-Prädiktor um einen Parameterschätzer für das interne Modell zu erweitern. Dadurch können Fehler in den Systemparametern und der Totzeit korrigiert und die Güte sowie die Robustheit des geschlossenen Kreises erhöht werden. Darüber hinaus kann die geschätzte Totzeit verwendet werden, um die Sollgröße dynamisch um  $\hat{T}_t$  vorzusteuern. Für  $T_t = \hat{T}_t$  kann dadurch der Einfluss der Totzeit auf das Führungsverhalten perfekt kompensiert werden. Als Schätzer können die in Kapitel 4 vorgestellten GRLS und GKF verwendet werden. Dieser erweiterte Smith-Prädiktor wird als adaptiver Smith-Prädiktor (ASP) bezeichnet. In Abbildung 7.1 ist das Blockdiagramm des ASP dargestellt.

Ein Fehler in der initialen Totzeit führt zu einem großen zeitlich begrenzten Fehler im Ausgang während eines Arbeitspunktwechsels. Dies führt, wie bereits in Abschnitt 3.2 besprochen, zu einer wiederkehrenden Anregung des Systems. Im Gegensatz zum SP kann ein ASP diesen Fehler in der Totzeit durch eine Adaption des internen Modells kompensieren. Dafür wird das Verzögerungsglied  $e^{-s\hat{T}_t}$  als Schieberegister ausgeführt

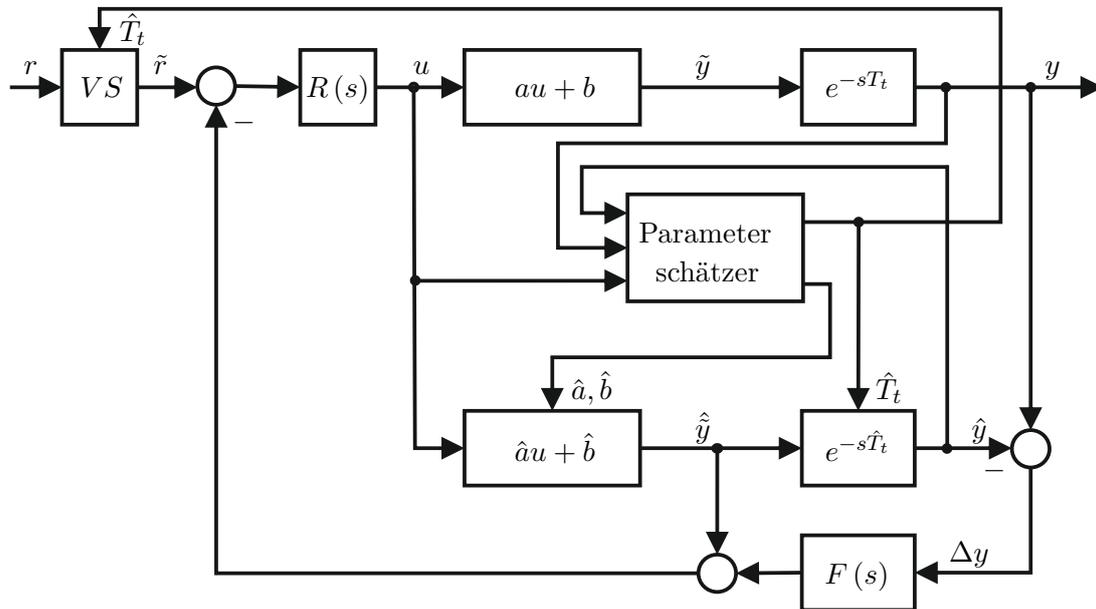


Abbildung 7.1: Adaptiver Smith-Prädiktor.

und der Ausgangsvektor  $\mathbf{c}^T$  des Schieberegisters so adaptiert, dass der Eingang um die geschätzte Totzeit  $\hat{T}_t$  verzögert wird. Durch diese Adaption klingt die Anregung des Fehlers durch den Regler schneller ab und es kann eine erneute Anregung abgeschwächt bzw. idealerweise sogar verhindert werden. Obwohl der Parameterschätzer den Fehler in der Totzeit ausgleichen kann, eignet sich der FSP besser als der SP als Grundstruktur für den ASP, da durch die Erweiterung um  $F(s)$  die Robustheit gegen Schwankungen in der Totzeit noch weiter erhöht werden kann.

Ein Fehler in den Modellparametern

$$e_a = \hat{a} - a \quad (7.2a)$$

$$e_b = \hat{b} - b \quad (7.2b)$$

führt eine Totzeit nach der Realisierung der Stellgröße zu einer erneuten Änderung von  $u$ . Diese Änderung setzt sich beim ASP aus zwei Komponenten zusammen. Einerseits wird über den äußeren Kreis aufgrund von  $\Delta y \neq 0$  versucht, den Ausgangsfehler zu kompensieren. Andererseits adaptiert der Parameterschätzer das interne Modell des ASP. Dies führt zu einem Regelfehler im inneren Kreis ungleich Null. Diese beiden Eingriffe weisen dasselbe Vorzeichen auf und versuchen unabhängig den Fehler zu kompensieren. Dies führt in der Regel zu einer Überkompensation des Fehlers bis sich  $\Delta y = 0$  einstellt. Deshalb eignet sich der ASP lediglich für Anwendungen mit geringer Unsicherheit in den Parametern. Jedoch führt die Rückführung des Schätzfehlers über den äußeren Kreis des ASP zu geringeren Anforderungen an den Parameterschätzer bezüglich des Konvergenzverhaltens, da der Schätzfehler gegebenenfalls durch den PI-Regler  $R(s)$  kompensiert wird. Die in diesem Kapitel vorgestellten adaptiven Regler müssen selbst bei

minimalen Anregungen stabil in den Parametern sein. Um das Auftreten von Regelfehlern zufolge von Divergenz zu verhindern, wird im Weiteren stets der GRLS mit variablem Vergessensfaktor aus Abschnitt 5.2.4 verwendet.

## 7.2 Adaptive modellbasierte Regelung

Um die mehrfache Kompensation des Fehlers bei Schwankungen in den Parametern zu verhindern, kann die äußere Schleife des ASP entfernt werden. Die resultierende Reglerstruktur verwendet dann ein internes Modell, welches durch einen Parameter- und Totzeitschätzer adaptiert wird. Die Regelkreisstruktur wird deshalb als adaptive modellbasierte Regelung (AMC) bezeichnet. In Abbildung 7.2 ist das Blockdiagramm des AMC dargestellt.

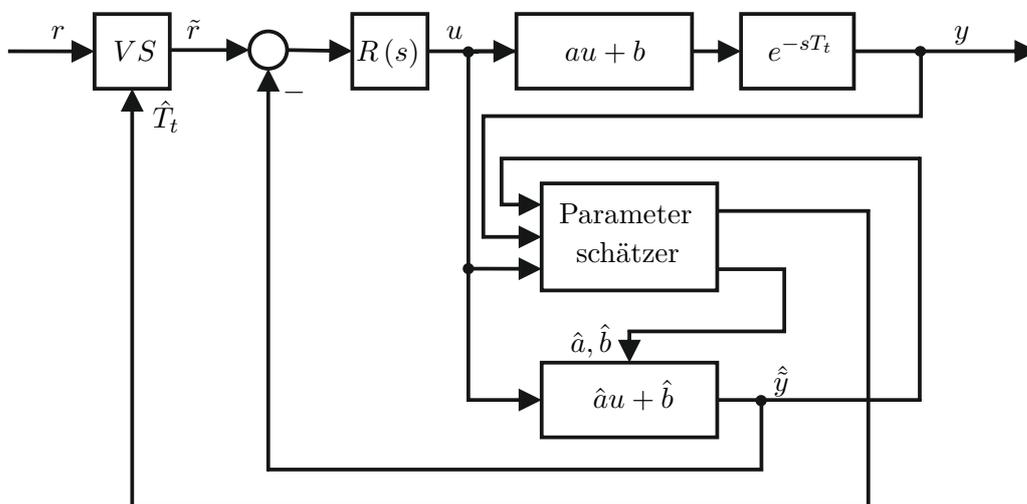


Abbildung 7.2: Adaptive modellbasierte Regelung.

Beim AMC handelt es sich um keine Ausgangsregelung im klassischen Sinne. Eine Änderung der Sollgröße führt erst nach der Totzeit zu einer Veränderung am Ausgang. Dieser Umstand wird sowohl bei allen SP-Varianten als auch beim AMC durch ein internes Modell zur Prädiktion des Systemverhaltens ohne Totzeit umgangen. Andererseits wird der Fehler des inneren Modells im Gegensatz zum SP nicht über den PI-Regler kompensiert, sondern führt über den Parameterschätzer zu einer Adaption der Parameter. Die Adaption der Parameter gleicht dann indirekt den Fehler über das interne Modell und den PI-Regler aus.

Diese indirekte Struktur kann das Problem der in Abschnitt 3.2 beschriebenen periodischen Anregung des Systems durch den SP bei Schwankungen in der Totzeit umgehen, da der Ausgangsfehler des internen Modells nicht mehr auf den Eingang des Reglers rückwirkt. Aus Sicht der Regelung wird die Schätzung der Totzeit  $\hat{T}_t$  nur benötigt, um die Sollgröße entsprechend vorsteuern zu können. An dieser Stelle sei jedoch wiederholt

erwähnt, dass die Schätzung der Totzeit beim GKF und GRLS auf eine Schätzung der fiktiv zeitversetzten Parameter von  $g(u)$  zurückzuführen ist. Dadurch kann eine Änderung der geschätzten Totzeit nur durch eine Änderung der fiktiv zeitverzögerten Parameter von  $\hat{g}(u)$  erfolgen. Diese Anpassung der Parameter wird in der Regel zu einem Übersprechen auf die geschätzten Parameter nach der Interpolation laut (4.38) führen. Dieses Übersprechen führt wiederum zu einem Ausgangsfehler des geschlossenen Kreises während der Adaption der Parameter des inneren Modells. Im Gegensatz zum SP klingt dieser Fehler jedoch asymptotisch ab, solange der Parameterschätzer asymptotisch gegen den wahren Wert der Parameter konvergiert.

Bei der AMC wird der Ausgangsfehler ausschließlich über den Schätzer kompensiert. Somit muss der geschätzte Ausgang  $\hat{y}$  gegen den gemessenen Ausgang  $y$  konvergieren, ansonsten ist die Regelung von  $y$  durch die Regelung von  $\hat{y}$  nicht zulässig. Selbst wenn der Regelfehler

$$e_R = \tilde{r} - \hat{y} \quad (7.3)$$

verschwindet, kann nicht garantiert werden, dass der Ausgang  $y$  der Sollgröße  $r$  folgt. Für einen hinreichend schnellen Schätzer wird erwartet, dass der Ausgangsfehler des AMC den Ausgangsfehler des ASP deutlich unterschreitet. In diesem Fall reicht die Parameteradaption im inneren Modell  $\hat{g}(u)$  aus, um den durch die Parameterschwankungen verursachten Ausgangsfehler zu kompensieren. Ein deutlich langsamerer Schätzer wird beim AMC zu einem großen Ausgangsschätzfehler

$$e_S = y - \hat{y} \quad (7.4)$$

und Ausgangsfehler führen. Beim ASP führt ein größerer Ausgangsschätzfehler nicht zwangsläufig zu einem größeren Ausgangsfehler, da der Ausgangsschätzfehler durch  $\Delta y$  kompensiert wird. Bei nominellen Parametern unterscheidet sich das Verhalten des FSP, des ASP und des AMC nicht, da sowohl  $\Delta y$  als auch die Parameteradaption gleich Null sind.

Abschließend kann somit festgehalten werden, dass die Anforderungen bezüglich des Schätzers beim AMC höher als beim ASP sind, dafür zeigt der AMC eine höhere maximal erreichbare Güte und Robustheit gegen Totzeitschwankungen als der ASP. Die Schwächen des SP können also in den Schätzer verschoben und dort kompensiert werden.

### 7.3 Simulationsergebnisse

Um die Stärken und Schwächen der in Abschnitt 7.2 und Abschnitt 7.1 vorgestellten Reglerstrukturen zu verdeutlichen, werden sie simulativ mit dem FSP aus Abschnitt 3.2.1 verglichen. Als Schätzer wird der GKF nach (4.46) und der MLRS nach (3.11) mit einem variablen Vergessensfaktor laut (5.12) implementiert. Um aus den fiktiv zeitversetzten Parametern einzelne Werte für  $\hat{a}$  und  $\hat{T}_t$  zu erhalten, wird die Interpolation aus (4.38) verwendet. Der quadratische integrale Ausgangsfehler

$$e_2(t) = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau))^2 d\tau \quad (7.5)$$

wird für alle drei Arbeitspunktwechsel und die gesamte Simulationsdauer ausgewertet.

In Tabelle 7.1 sind die Schätzer- und Reglerparameter für alle folgenden Simulationen festgehalten. Diese Parameter wurden zwischen den Simulationen nicht geändert, um die Regelungsstrukturen in ihrer Gesamtheit vergleichen zu können. In den folgenden Simulationen werden jedoch die Streckenparameter verändert, um verschiedene Unsicherheiten nachstellen zu können.

Parameter	Wert	Parameter	Wert	Parameter	Wert
$\hat{T}_{t,in}$	10 s	$\hat{a}_{in}$	2	$\hat{b}_{in}$	1
$V$	1	$T_I$	0.1 s	$T_u$	0.01 s
$T_a$	0.01 s	$T_f$	5 s	$\mathbf{P}_{0,GRLS}$	$\mathbf{E} \cdot 10^{-7}$
$\hat{T}_{t,0}$	0.5 s	$\Delta\hat{T}_t$	0.5 s	$N$	9
$\nu_1$	0	$\nu_2$	0.01	$\lambda_{1,\infty}$	1
$\mathbf{Q}$	$\mathbf{E} \cdot 10^{-14}$	$R$	$10^{-4}$	$P_{Rausch}$	$10^{-6}$

Tabelle 7.1: Regler-/Simulationsparameter für die in Kapitel 7 vorgestellten adaptiven Regelungen.

Um das Einschwingverfahren und die erreichbare Güte der adaptiven Regelungen im Vergleich mit dem FSP zu zeigen, werden auf alle getesteten Reglerstrukturen drei rampenförmige Arbeitspunktwechsel gleicher Höhe aufgeschaltet. In Abbildung 7.3 ist die zugehörige Sollwertvorgabe dargestellt.

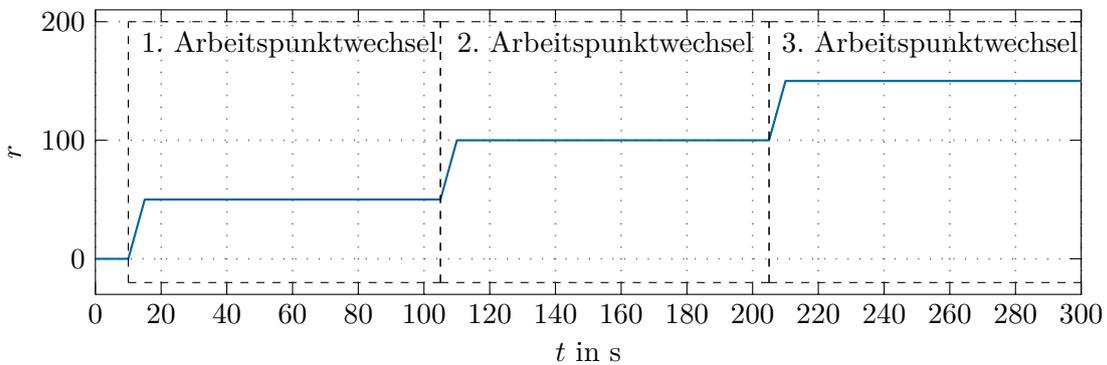


Abbildung 7.3: Sollwertverlauf für die adaptiven Regelungen.

### 7.3.1 Nominelles Verhalten

Zunächst soll das Verhalten der Regelungen bei nominellen Streckenparametern entsprechend Tabelle 7.2 untersucht werden. Ein Blick auf die quadratischen Ausgangsfehler in Tabelle 7.3 zeigt, dass alle Reglerstrukturen auf zwei signifikante Stellen den gleichen quadratischen Ausgangsfehler aufweisen. Auch in den Graphen für den Ausgang und den Ausgangsfehler

$$e(t) = r(\tau) - y(\tau) \quad (7.6)$$

in Abbildung 7.4 ist kein signifikanter Unterschied zwischen den Reglern festzustellen.

Parameter	Wert
$T_t$	10s
$a$	2
$b$	1

Tabelle 7.2: Streckenparameter zur Untersuchung des nominellen Verhaltens der adaptiven Regelungen.

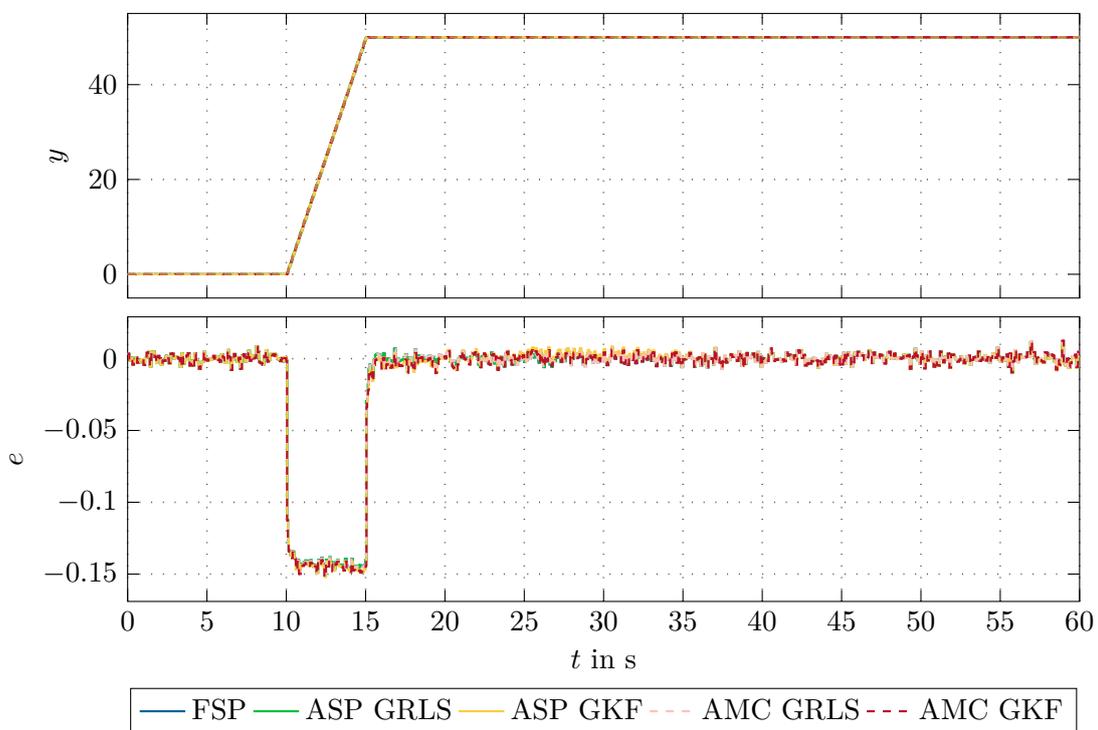


Abbildung 7.4: Nominelles Verhalten der adaptiven Regelungen.

Alle Schätzer sind dazu imstande, den initialisierten Anfangswert der Parameter zu halten. Der GRLS kann trotz geringer Anregung ein Steigen von  $\mathbf{P}_k$  verhindern und die Divergenz somit vermeiden. Die Simulation zeigt, dass mit dem ASP und der AMC im nominellen Fall vergleichbare Ergebnisse wie mit dem FSP erzielt werden können.

### 7.3.2 Parameterschwankungen in $g(u)$

Im nächsten Schritt soll das Verhalten der adaptiven Regelung und des FSP bei Schwankungen in den Parametern von  $g(u)$  untersucht werden. Dafür wird mit den Streckenparametern aus Tabelle 7.4 und wiederum mit dem Sollgrößenverlauf aus Abbildung 7.3

Arbeitspunkt- wechsel	FSP	ASP		AMC	
		GRLS	GKF	GRLS	GKF
1	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
2	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
3	0.016	0.016	0.016	0.016	0.016
Gesamt	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048

Tabelle 7.3: Quadratischer Ausgangsfehler der adaptiven Regelungen im nominellen Fall.

simuliert. Die daraus resultierenden Zeitverläufe für  $y$ ,  $e$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  und  $\hat{T}_t$  sind in Abbildung 7.5 dargestellt.

Parameter	Wert
$T_t$	10 s
$a$	1.8
$b$	0.9

Tabelle 7.4: Streckenparameter zur Untersuchung des Verhaltens der adaptiven Regelungen bei Parameterschwankungen in  $\hat{g}(u)$ .

Der quadratische Ausgangsfehler ist in Tabelle 7.5 eingetragen. Der ASP weist beim ersten Arbeitspunktwechsel für beide Schätzer einen größeren quadratischen Ausgangsfehler als der FSP auf. Im Gegensatz dazu ist der quadratische Ausgangsfehler der AMC beim ersten Arbeitspunktwechsel bereits geringer als jener des FSP. Nachdem der ASP und die AMC eingeschwungen sind, sind die quadratischen Ausgangsfehler vergleichbar mit der Simulation mit nominellen Parametern entsprechend Tabelle 7.3.

Arbeitspunkt -wechsel	FSP	ASP		AMC	
		GRLS	GKF	GRLS	GKF
1	303.8	422.5	314.1	274.7	197.5
2	303.8	0.104	0.012	0.219	0.010
3	303.7	0.031	0.013	0.162	0.012
Gesamt	911.31	422.63	314.08	275.11	197.49

Tabelle 7.5: Quadratische Ausgangsfehler der adaptiven Regelungen bei Parameterschwankungen in  $g(u)$ .

In Abbildung 7.5 erkennt man, dass die Schätzergebnisse der beiden Reglerstrukturen fast identisch sind. Die einzigen Unterschiede sind auf die Schätzer GKF und GRLS

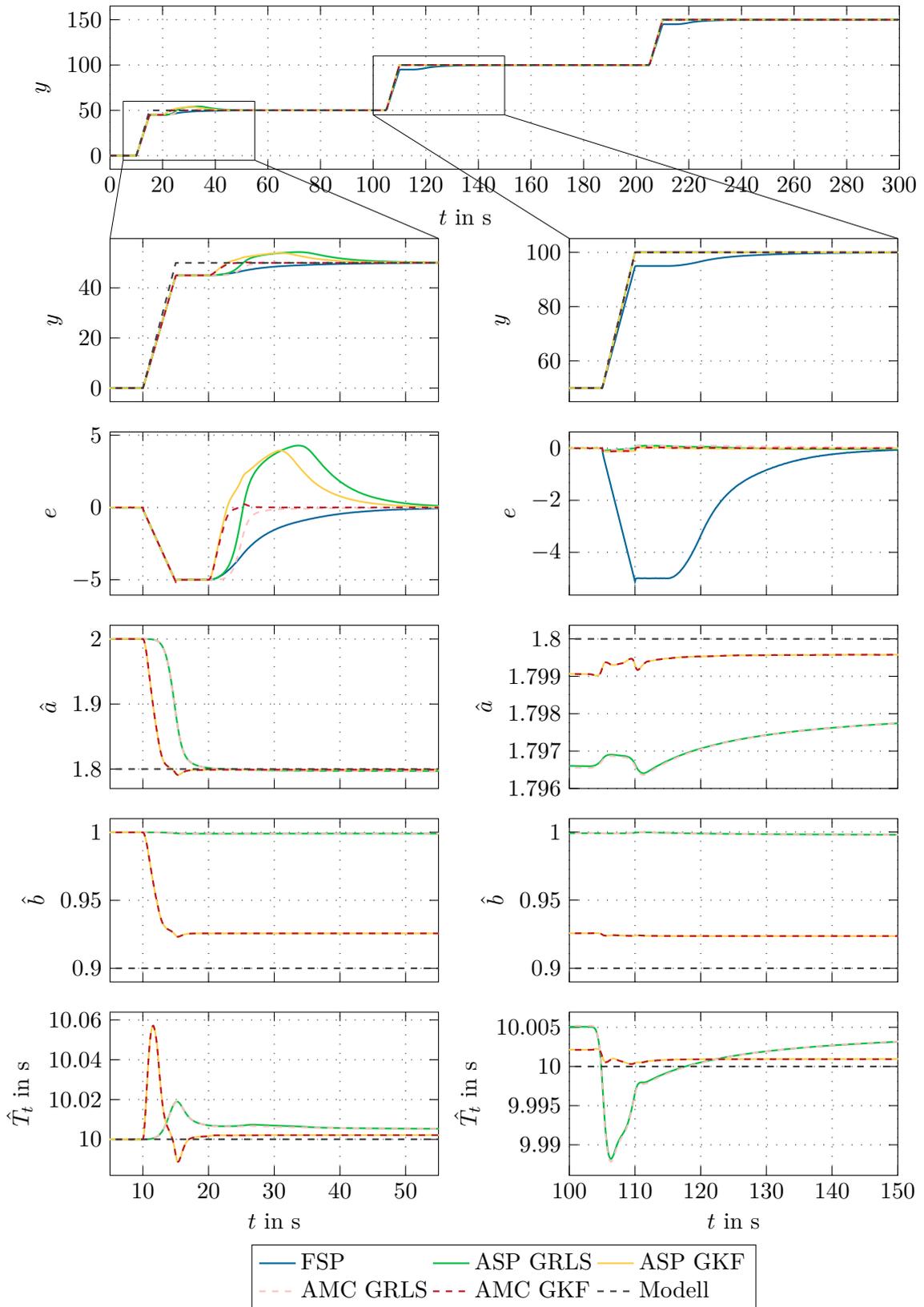


Abbildung 7.5: Verhalten der adaptiven Regelungen bei Parameterunsicherheiten in  $g(u)$ .

zurückzuführen. Bei allen Schätzern ist ein bleibender Fehler in den Parametern nach einem Arbeitspunktwechsel erkennbar, jedoch ist der daraus resultierende Ausgangsfehler weder im Zeitverlauf noch im quadratischen Fehler zu erkennen, da der bleibende Fehler in den Parametern um ein Vielfaches kleiner als die ursprüngliche Unsicherheit in den Parametern ist. Der bleibende relative Parameterfehler für  $\hat{a}$  und  $\hat{T}_t$  ist deutlich kleiner als 1%. Aus einer weiteren Anregung des Systems durch einen erneuten Arbeitspunktwechsel folgt eine weitere Verringerung des Parameterfehlers.

Die mehrfache Kompensation des Parameterfehlers beim ASP führt zu einem deutlich erkennbaren Überschwingen. Bei der AMC tritt nur minimales Überschwingen auf und der Ausgangsfehler klingt schneller ab als beim FSP und ASP. Alles in allem zeigt der AMC das beste Verhalten gegenüber Parameterunsicherheiten in  $g(u)$ , da beide Schätzer den Parameterfehler schneller als der I-Anteil des PI-Reglers kompensieren können. Darüber hinaus konvergiert  $\hat{y}$  gegen  $y$  und somit auch  $y$  gegen  $r$ . Bei erneuter Anregung weisen sowohl der AMC als auch der ASP eine Regelgüte auf, die beinahe dem nominellen Fall entspricht.

### 7.3.3 Schwankungen in der Totzeit

Abschließend soll nun das Verhalten der adaptiven Regelung bei Schwankungen in der Totzeit untersucht werden. Dafür wurde eine Simulation mit den Reglerparametern aus Tabelle 7.1 und den Streckenparametern aus Tabelle 7.6 durchgeführt. Als Sollwert wurden wiederum die drei rampenförmigen Arbeitspunktwechsel aus Abbildung 7.3 verwendet. Die Ergebnisse dieser Simulation sind in Abbildung 7.6 dargestellt.

Parameter	Wert
$T_t$	10.8s
$a$	2
$b$	1

Tabelle 7.6: Streckenparameter der adaptiven Regelungen mit Unsicherheiten in  $\hat{T}_t$ .

Die quadratischen Ausgangsfehler  $e_2$  bei Schwankung von  $T_t$  sind in Tabelle 7.7 zusammengefasst. Beim ersten Arbeitspunktwechsel ist  $e_2$  nur für den AMC GRLS nahe des Fehlers des FSP. Alle anderen Schätzer-Regler Kombinationen führen zu einem deutlich größeren  $e_2$  als der FSP. Dieses Verhalten ist auf das Überschreiten von Totzeitschwankungen auf die Parameter beim GKF und GRLS zurückzuführen. Bei den folgenden Arbeitspunktwechseln zeigen die adaptiven Reglerstrukturen beruhend auf dem GKF quadratische Ausgangsfehler in der Größenordnung der quadratischen Fehler der Regler mit nominellen Parametern. Das bedeutet, der Schätzer war nach einer Anregung dazu imstande, den Anfangsfehler in den Parametern so zu kompensieren, dass bezüglich  $e_2$  kein Unterschied mehr erkennbar ist.

Die Ergebnisse der Simulation für  $y$ ,  $e$ ,  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  und  $\hat{T}_t$  sind in Abbildung 7.6 dargestellt. Alle adaptiven Regler weisen ein erhebliches Überschwingen auf, welches durch die zeitbegrenzten Fehler in  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  verursacht wird. Aufgrund der gewählten Schätzerparameter ist

Arbeitspunkt -wechsel	FSP	ASP		AMC	
		GRLS	GKF	GRLS	GKF
1	428.6	892.2	1171.2	462.0	846.6
2	428.6	1.458	0.058	2.461	0.045
3	428.6	0.015	0.039	0.010	0.033
Gesamt	1285.7	893.68	1171.3	464.47	846.72

Tabelle 7.7: Quadratischer Ausgangsfehler der adaptiven Regelungen bei Schwankungen von  $T_t$ .

der Anfangsfehler des GKF deutlich größer als jener des GRLS, klingt dafür aber schneller ab. Dem GKF gelingt es, die Totzeit nach dem ersten Arbeitspunktwechsel auf unter 4ms genau zu schätzen, während der absolute Totzeitfehler des GRLS fast 80ms beträgt. Nach dem zweiten Arbeitspunktwechsel verringert sich der Fehler bei beiden Schätzern auf unter 2ms. Wenn man nun die Ergebnisse des GRLS mit jenen des GKF vergleicht, wird ersichtlich, dass ein Kompromiss zwischen dem Abklingen der Parameterfehler nach einer Anregung und dem Überschwingen des geschlossenen Kreises getroffen werden muss. Beim zweiten und dritten Arbeitspunktwechsel ist das Verhalten der adaptiven Regelungen mit dem Verhalten des FSP mit nominellen Streckparametern vergleichbar und kaum unterscheidbar.

Die mehrfache Kompensation des Fehlers durch den ASP führt erneut zu einem deutlich größeren Ausgangsfehler als die einfache Kompensation des AMC. Durch die zusätzliche Anregung kann jedoch der Fehler in  $\hat{T}_t$ ,  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  minimal verkleinert werden.

Diese Simulationen zeigen, dass sich das Verhalten des FSP gegenüber Parameterschwankungen in  $T_t$  durch eine Erweiterung um einen Parameterschätzer zum ASP deutlich verbessern lässt. Eine weitere Steigerung kann darüber hinaus noch erzielt werden, wenn der äußere Kreis des ASP entfernt wird. Die daraus resultierende AMC zeigt das beste Verhalten gegenüber Schwankungen sowohl in der Totzeit  $T_t$  als auch in den Parametern von  $g(u)$ .

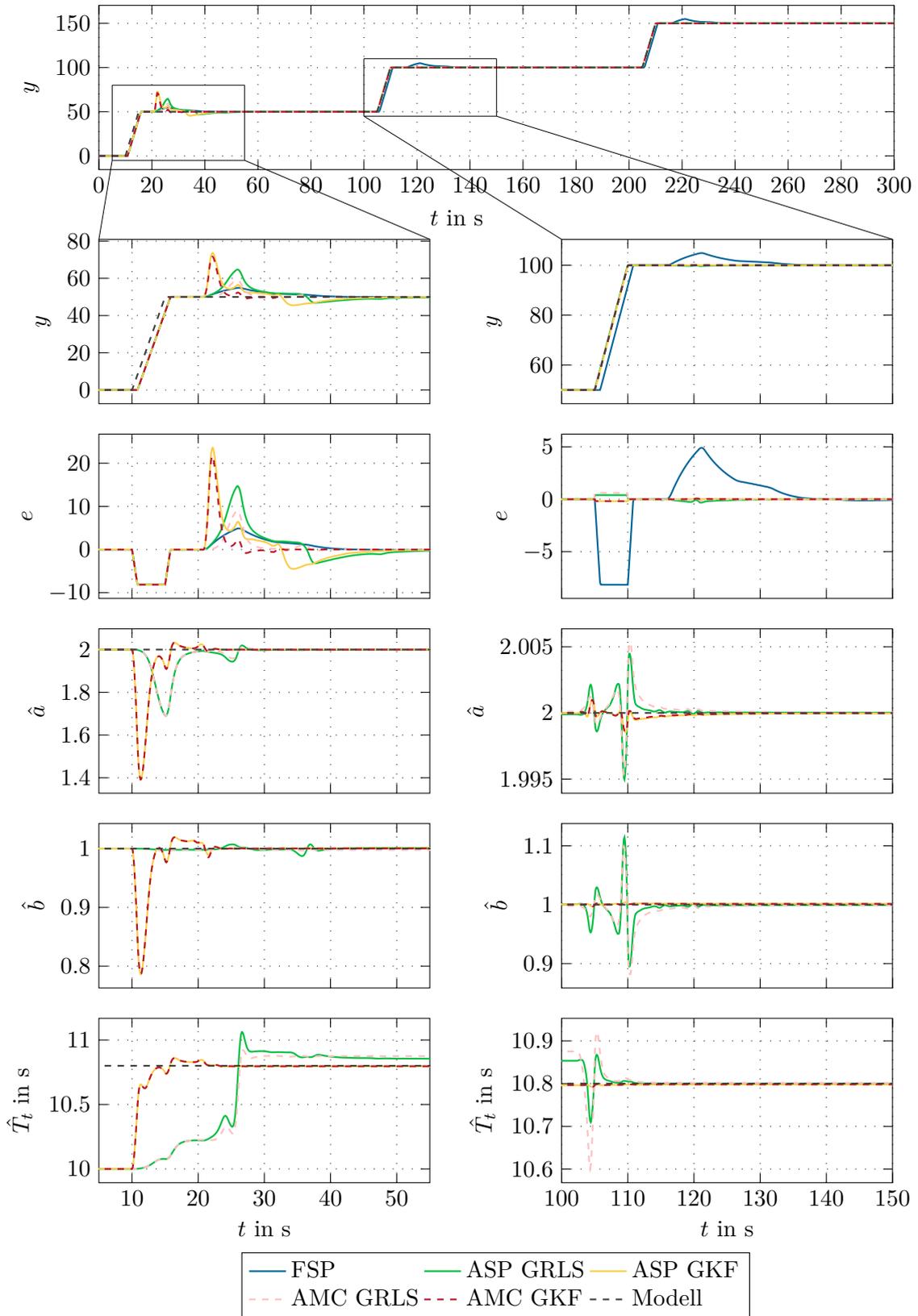


Abbildung 7.6: Verhalten der adaptiven Regelungen bei Parameterunsicherheiten in  $T_t$ .



Die approbierte gedruckte Originalversion dieser Diplomarbeit ist an der TU Wien Bibliothek verfügbar.  
The approved original version of this thesis is available in print at TU Wien Bibliothek.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit werden modellprädiktive Regelungskonzepte für die Regelung von Systemen mit dominanter Totzeit und vernachlässigbarer Dynamik entwickelt. Dafür werden Regelungskonzepte aus der Literatur für diese Systemklasse modifiziert und durch Simulationen miteinander verglichen. Dabei stellt sich heraus, dass Parameterunsicherheiten in der Totzeit beim Smith-Prädiktor und seinen Abwandlungen zu großen Ausgangsfehlern und auch zur Instabilität führen können. Um die Robustheit des Smith-Prädictors gegenüber Schwankungen in der Totzeit zu erhöhen, werden Parameterschätzer für Totzeitsysteme benötigt, die sowohl die unbekannte Parameter der statischen Strecke als auch die Totzeit schätzen können.

Parameter- und Totzeitschätzer aus der Literatur werden auf die untersuchte Systemklasse angewandt und mit dem in der Diplomarbeit entwickelten verteilt verzögert gewichteten rekursiven Least-Squares Schätzer und dem verteilt verzögert gewichteten Kalman-Filter durch Simulationen verglichen. Die beiden hier vorgestellten Schätzer beruhen auf dem Ansatz der fiktiven Totzeiten. Dieser Ansatz ermöglicht es, die Schätzung der Totzeit auf die Schätzung von mehreren Parametern zurückzuführen. Anschließend wird mithilfe einer modellspezifischen Interpolation aus diesen zeitversetzten Modellparametern ein Parameter und eine Totzeit berechnet. Durch Simulationen wurde gezeigt, dass sich der verteilt verzögert gewichtete Kalman-Filter und der verteilt verzögert gewichtete rekursive Least-Squares Schätzer besser als die aus der Literatur bekannten Schätzer für die in dieser Arbeit betrachtete Systemklasse eignen. Jedoch tritt beim verteilt verzögert gewichteten rekursiven Least-Squares Schätzer aufgrund der hohen Anzahl zu schätzender Parameter das Phänomen der Divergenz auf.

Der verteilt verzögert gewichtete rekursive Least-Squares Schätzer wird um mehrere Verfahren zur Unterdrückung der Divergenz aus der Literatur erweitert, welche durch Simulationen miteinander verglichen werden. Die Erweiterung des Schätzers um einen variablen Vergessensfaktor führt zu einer deutlich besseren Robustheit gegenüber der Divergenz des Schätzers.

Um die in dieser Arbeit entwickelten Schätzer plausibilisieren zu können, werden die Schätzer auf Messdaten einer Feuerverzinkungsanlage angewandt. Dafür werden im ersten Schritt die vorliegenden Daten so aufbereitet, dass eine Schätzung mit den vorgestellten Schätzern möglich wird. Anschließend werden die Schätzer auf ein Modell mit dominanter Totzeit und vernachlässigbarer Dynamik für eine Feuerverzinkungsanlage angepasst. Durch Simulationen und einen Vergleich der Schätzer mit Offline-Identifikationen und einem um die nominelle Totzeit versetzten rekursiven Least-Squares Schätzer kann gezeigt werden, dass die verteilt verzögert gewichtete rekursive Least-Squares Identifikation und der verteilt verzögert gewichtete Kalman-Filter zu einem besseren Schätzergebnis als die Vergleichsschätzer führen.

Abschließend wird noch gezeigt, dass der um einen Parameterschätzer erweiterte adaptive

Smith-Prädiktor ein besseres Verhalten gegenüber Schwankungen der Parameter der statischen Strecke und der Totzeit aufweist, ohne dabei die Funktion bei nominellen Parametern zu verändern. Darüber hinaus geht aus den Simulationen hervor, dass das Verhalten noch weiter verbessert werden kann, indem der äußere Kreis des adaptiven Smith-Prädiktors entfernt wird. Die so entstehende adaptive modellbasierte Regelung vermeidet zusätzlich das Problem der wiederkehrenden Anregung durch Totzeitfehler des Smith-Prädiktors.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Regelungskonzepte und Schätzer könnten auf lineare Systeme mit Totzeit und dadurch auf eine breitere Systemklasse angewandt werden, womit ein besserer Vergleich mit den in der Literatur üblichen Verfahren möglich wäre.

Möglicherweise könnten die Ergebnisse der Feuerverzinkungsanlage noch weiter verbessert werden, wenn das Potenzmodell durch ein anderes physikalisch besser gestütztes Modell ersetzt wird. Ebenfalls ist die benötigte Interpolation zur Bestimmung des Düsenabstands an der  $x$ -Position eine mögliche Fehlerquelle. Dieser Fehler könnte vermindert werden, indem der Laser und das Zinkauflagemessgerät mit der gleichen Periodendauer und um die nominelle Totzeit verschoben traversieren. Dadurch wäre im nominellen Fall eine Messung am selben Ort sichergestellt und eine Interpolation würde nicht benötigt werden.

## A Ununterscheidbarkeit durch linear abhängige Anregung

Um die Identifizierbarkeit der Parameter des in Kapitel 4 verwendeten Systems mit dominanter Totzeit (4.1) mit einem Schätzmodell beruhend auf dem verteilt verzögert gewichteten Ansatz (4.27) sicherstellen zu können, muss das durch die Stellgröße  $u(t)$  angeregte Modell ausgangsununterscheidbar sein. Laut (4.2) ist ein System mit einem Eingang  $u(t)$  genau dann ausgangsununterscheidbar, wenn ein  $\alpha \neq \theta$  existiert, sodass

$$y(u(t), \theta) \equiv y(u(t), \alpha) \quad (\text{A.1})$$

$\forall t$  gilt. Nun soll gezeigt werden, dass dies für den Ansatz (4.27) mit dem Eingang  $u(t) = \sin(\omega t)$  zutrifft. Diese Anregung führt zu einem Ausgang des Systems

$$y(t) = a \sin(\omega(t - T_t)) + b = a \sin(\omega t) \cos(\omega T_t) - a \cos(\omega t) \sin(\omega T_t) + b \quad (\text{A.2})$$

und einem Ausgang des Modells

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{a}_i \sin(\omega(t - \hat{T}_{t,i})) + \hat{b} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{a}_i \sin(\omega t) \cos(\omega \hat{T}_{t,i}) - \sum_{i=0}^{N-1} \hat{a}_i \cos(\omega t) \sin(\omega \hat{T}_{t,i}) + \hat{b}. \quad (\text{A.3})$$

Im Fall der Identifizierbarkeit müssen Parameter so existieren, dass  $\hat{y}(t) = y(t) \forall t$  gilt. Daraus erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega \hat{T}_{t,0}) & \cos(\omega \hat{T}_{t,1}) & \cdots & \cos(\omega \hat{T}_{t,N-1}) & 0 \\ \sin(\omega \hat{T}_{t,0}) & \sin(\omega \hat{T}_{t,1}) & \cdots & \sin(\omega \hat{T}_{t,N-1}) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_{N-1} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos(\omega T_t) \\ a \sin(\omega T_t) \\ b \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Im Allgemeinen ist die Lösung des Gleichungssystems (A.4) nur für  $N = 2$  eindeutig. Für  $N > 2$  ist das System mit einem Schätzer auf Basis von (4.27) und einer Anregung  $\sin(\omega t)$  also ausgangsununterscheidbar, da sich jeder der Terme in der Summe des Ansatzes laut (A.3) als Linearkombination von zwei oder mehr anderen Termen darstellen lässt und (A.1) somit gilt. Ein beliebiger Term aus dieser Summe mit den Parameter  $\hat{a}_i$  und  $\hat{T}_{t,i}$  kann durch

$$\hat{a}_i \sin(\omega(t - \hat{T}_{t,i})) = \hat{a}_{k,1} \sin(\omega(t - \hat{T}_{k,1})) + \hat{a}_{k,2} \sin(\omega(t - \hat{T}_{k,2})) \quad (\text{A.5})$$

mit

$$\hat{a}_{k,1} = -\frac{\hat{a}_i \cos(\omega \hat{T}_{t,i}) \sin(\omega(\hat{T}_{t,i} - \hat{T}_{k,2}))}{\cos(\omega \hat{T}_{k,2}) \sin(\omega(\hat{T}_{t,i} - \hat{T}_{k,1})) - \cos(\omega \hat{T}_{k,1}) \sin(\omega(\hat{T}_{t,i} - \hat{T}_{k,2}))} \quad (\text{A.6a})$$

$$\hat{a}_{k,2} = \frac{\hat{a}_i \cos(\omega \hat{T}_{t,i}) \sin(\omega(\hat{T}_{t,i} - \hat{T}_{k,1}))}{\cos(\omega \hat{T}_{k,2}) \sin(\omega(\hat{T}_{t,i} - \hat{T}_{k,1})) - \cos(\omega \hat{T}_{k,1}) \sin(\omega(\hat{T}_{t,i} - \hat{T}_{k,2}))} \quad (\text{A.6b})$$

ausgedrückt werden. In Abbildung A.1 ist ein Beispiel für die Parameter aus Tabelle A.1 dargestellt.

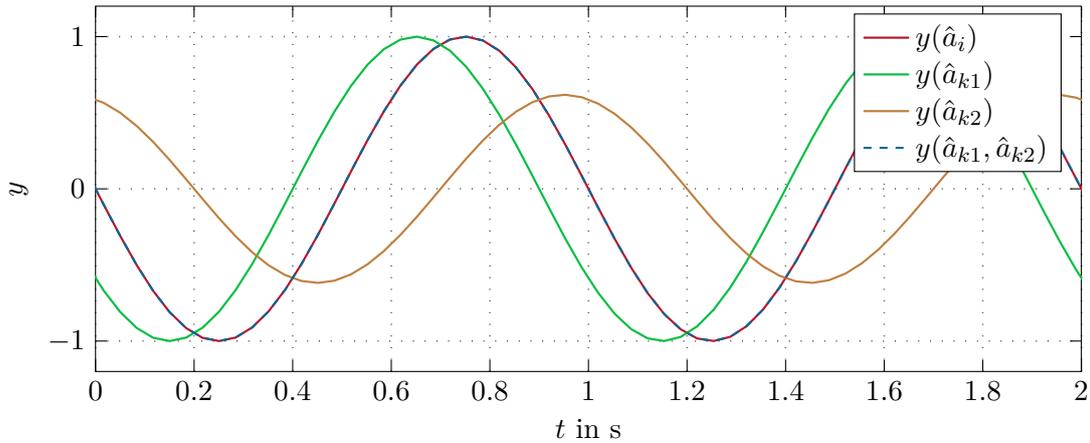


Abbildung A.1: Beispiel für die Ausgangsunterscheidbarkeit für eine lineare Funktion mit sinusförmiger Anregung.

Parameter		Ergebnisse	
$\hat{a}_i$	1	$\hat{a}_{k1}$	1
$\hat{T}_i$	0.5 s	$\hat{a}_{k2}$	0.618
$\hat{T}_{k1}$	0.4 s		
$\hat{T}_{k2}$	0.7 s		
$\omega$	$2\pi \text{ s}^{-1}$		

Tabelle A.1: Parameter und Ergebnisse für die Darstellung der Ausgangsunterscheidbarkeit für eine lineare Funktion mit sinusförmiger Anregung.

## Literatur

- [1] J.-P. Richard, „Time-delay Systems: An Overview of Some Recent Advances and Open Problems“, *Automatica*, Jg. 39, Nr. 10, S. 1667–1694, 2003.
- [2] J. Normey-Rico und E. Camacho, *Control of Dead-time Processes*. Springer, London, 2007.
- [3] L. Grüne und J. Pannek, *Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms*. Springer, Basel, 2013.
- [4] M. Morari und U. Maeder, „Nonlinear offset-free model predictive control“, *Automatica*, Jg. 48, Nr. 9, S. 2059–2067, 2012.
- [5] M. Krstic, *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive and PDE Systems*. Birkhäuser, Basel, 2009.
- [6] O. Smith, „A controller to overcome dead time“, *ISA Journal of Instrument Society of America*, Jg. 6, S. 28–33, 1959.
- [7] C. Kravaris und R. Wright, „Deadtime Compensation for Nonlinear Processes“, *AIChE Journal*, Jg. 35, Nr. 9, S. 1535–1542, 1989.
- [8] J. Normey-Rico, C. Bordons und E. Camacho, „Improving the robustness of dead-time compensating PI controllers“, *Control Engineering Practice*, Jg. 5, Nr. 6, S. 801–810, 1997.
- [9] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [10] Y. Orlov, L. Belkoura, J. P. Richard und M. Dambrine, „On identifiability of linear time-delay systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 47, Nr. 8, S. 1319–1324, 2002.
- [11] X. M. Ren, A. B. Rad, P. T. Chan und W. L. Lo, „Online identification of continuous-time systems with unknown time delay“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 50, Nr. 9, S. 1418–1422, 2005.
- [12] J. Na, X. Ren und Y. Xia, „Adaptive parameter identification of linear SISO systems with unknown time-delay“, *Systems & Control Letters*, Jg. 66, S. 43–50, 2014.
- [13] O. Gomez, Y. Orlov und I. V. Kolmanovsky, „On-line identification of SISO linear time-invariant delay systems from output measurements“, *Automatica*, Jg. 43, Nr. 12, S. 2060–2069, 2007.
- [14] M. Grewal und K. Glover, „Identifiability of linear and nonlinear dynamical systems“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 21, Nr. 6, S. 833–837, 1976.
- [15] K. Hulek, *Elementare algebraische Geometrie*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.

- [16] Y. Orlov, L. Belkoura, J.-P. Richard und M. Dambrine, „Adaptive identification of linear time delay systems“, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Jg. 13, S. 857–872, 2003.
- [17] L. Denis-Vidal, C. Jauberthie und G. Joly-Blanchard, „Identifiability of a nonlinear delayed-differential aerospace model“, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Jg. 51, Nr. 1, S. 154–158, 2006.
- [18] G. J. Silva, A. Datta und S. P. Bhattacharyya, „Controller design via Pade approximation can lead to instability“, in *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Bd. 5, 2001, S. 4733–4737.
- [19] V. Utkin, *Sliding Mode in Control Optimization*. Springer, Berlin Heidelberg, 1992.
- [20] A. Kugi, *Skriptum zur VO Regelungssysteme 2 (SS 2019)*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2019. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/master/regelungssysteme-2/>.
- [21] S. Sastry und M. Bodson, *Adaptive control : stability, convergence, and robustness*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.
- [22] W. Kemmetmüller und A. Kugi, *Skriptum zur VO Regelungssysteme 1 (WS 2019)*. Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik, TU Wien, 2019. Adresse: <https://www.acin.tuwien.ac.at/master/regelungssysteme-1/>.
- [23] G. E. Bottomley und S. T. Alexander, „A novel approach for stabilizing recursive least squares filters“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Jg. 39, Nr. 8, S. 1770–1779, 1991.
- [24] A. P. Liavas und P. A. Regalia, „On the numerical stability and accuracy of the conventional recursive least squares algorithm“, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Jg. 47, Nr. 1, S. 88–96, 1999.
- [25] J. Love, *Process automation handbook: a guide to theory and practice*. Springer, London, 2007.
- [26] T. Fortescue, L. S. Kershenbaum und B. E. Ydstie, „Implementation of self-tuning regulators with variable forgetting factors“, *Automatica*, Jg. 17, Nr. 6, S. 831–835, 1981.
- [27] A. Albert und R. W. Sittler, „A Method for Computing Least Squares Estimators that Keep Up with the Data“, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, Jg. 3, Nr. 3, S. 384–417, 1965.
- [28] W. Edwards, A. Carlton, G. Harvey, R. Evans und P. J. McKerrow, „Coating mass control system design for a continuous galvanizing line“, *Automatica*, Jg. 12, Nr. 3, S. 225–235, 1976.
- [29] S. Joon Kim, J. Won Cho, K. Jang Ahn und M. Chung, „Numerical Analysis of Edge Overcoating in Continuous Hot-dip Galvanizing“, *Isij International*, Jg. 43, S. 1495–1501, 2003.

# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit gemäß dem Code of Conduct – Regeln zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis (in der aktuellen Fassung des jeweiligen Mitteilungsblattes der TU Wien), insbesondere ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel, angefertigt wurde. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder in ähnlicher Form in anderen Prüfungsverfahren vorgelegt.

Wien, im Oktober 2019

---

Stritzinger Wolfgang