

Die approbierte Originalversion dieser Diplom-/
Masterarbeit ist in der Hauptbibliothek der Techni-
schen Universität Wien aufgestellt und zugänglich.

<http://www.ub.tuwien.ac.at>



The approved original version of this diploma or
master thesis is available at the main library of the
Vienna University of Technology.

<http://www.ub.tuwien.ac.at/eng>

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Über die Modellierung der Solvenzquote in ORSA-Prozessen über mehrere Jahre für eine Nicht-Lebensversicherung

Ausgeführt am

Institut für Wirtschaftsmathematik

Forschungsgruppe: Finanz- und Versicherungsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao.Univ.Prof.Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek

durch

Lic. Zsuzsánna Feldman

Marchettigasse 12/24

1060 Wien

Wien, 16. Oktober 2013

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Ao.Univ.Prof.Dipl.-Ing. Dr.techn. Friedrich Hubalek für das Bereitstellen dieses interessanten Themas der Diplomarbeit und die freundliche Hilfsbereitschaft, die er mir entgegenbrachte.

Ein großes Dankeschön geht an Dipl.-Ing. Karin Munk für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Großer Dank gebührt auch meinem Freund, Ing. Csaba Beke, der zu jeder Zeit an mich geglaubt hat und mich in dieser entscheidenden Phase meiner beruflichen Laufbahn mit unendlicher Geduld und mit liebevoller Fürsorge auf dem richtigen Weg gehalten hat.

Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank an meine Familie, mein Sohn Tamás Feldman und seine Freundin Theresa Kugler für die Ermutigung und Unterstützung in dieser spannenden Phase meiner beruflichen Laufbahn.

Ich bedanke mich bei all jenen, die mich während dieses Studiums und bei der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben.

Danke an alle, die mir sonst noch mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
2	Solvency II	9
2.1	Einführung, historischer Hintergrund	10
2.2	Der „Drei-Säulen-Ansatz“	11
2.3	Quantitative Anforderungen unter Solvency II	13
2.3.1	Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen . . .	14
2.3.2	Solvabilitätsvorschriften, Berechnung von Solvenz- und Mindestkapitalanforderung	15
2.3.3	Solvenzkapitalanforderung (<i>SCR</i>) in der Standardformel . . .	18
2.3.4	Bestimmung der Eigenmittel	21
2.4	Solvabilität	22
3	ORSA (Own Risk and Solvency Assessment)	23
3.1	Definition und Ziel von ORSA	24
3.2	ORSA-Anforderungen	25
4	Modellierung der Solvenzquote in Solvency II über mehrere Jahre im Fall einer Nicht-Lebensversicherung	28
4.1	Notation und allgemeine Struktur	29
4.2	Definition der Modelldynamik	34
4.2.1	Risikofaktoränderungen	34
4.2.2	Entwicklungsgleichung anderer Variablen	37
4.3	Berechnung der Verteilung der diskontierten Netto-Verbindlichkeiten	39
4.3.1	Verteilung der Netto-Verbindlichkeiten	40
4.3.2	Approximation der diskontierten Netto-Verbindlichkeiten . . .	43
5	Ein einfaches Beispiel in ORSA	48
5.1	Beschreibung des Unternehmens	48
5.2	Bewertung der logarithmisch normalverteilten Approximation	50

5.3	Wahl des Risikoappetits (Risikobereitschaft)	53
5.4	Sensitivitätsanalyse	66
6	Approximation der Summe von logarithmischen Normalverteilungen	68
6.1	Die logarithmische Normalverteilung	68
6.2	Die Summe von logarithmischen Normalverteilungen	70
6.3	Modifiziertes Problem	74
7	Verwendete R-Programme	77
7.1	R-Codes zu Kapitel 5	77
7.1.1	R-Code zur Abbildung 5.1	77
7.1.2	R-Code zur Abbildung 5.2	79
7.1.3	R-Code zur Abbildung 5.4	82
7.1.4	R-Codes zu den Abbildungen 5.5 und 5.6	82
7.1.5	R-Codes zu den Abbildungen 5.7 und 5.8	85
7.1.6	R-Code zur Abbildung 5.11	87
7.1.7	R-Code zur Abbildung 5.12	90
7.1.8	R-Code zur Abbildung 5.13	93
7.1.9	R-Code zur Abbildung 5.14	95
7.2	R-Codes zu Kapitel 6	98
7.2.1	R-Code zur Abbildung 6.1	98
7.2.2	R-Code zur Abbildung 6.2	99
7.3	Verwendete Daten	101

Abbildungsverzeichnis

2.1	Das „Drei-Säulen-Modell“ von Solvency II	11
2.2	SCR und MCR schematisch (Quelle: [8])	17
2.3	Schematische Darstellung von SCR und MCR (Quelle: [1])	18
2.4	Modularer Aufbau der Standardformel (Quelle: [8])	18
2.5	Korrelationsmatrix $BSCR$ (Quelle: [8])	19
2.6	Ökonomische Bilanz (Quelle: [1], S. 52)	22
3.1	Governance-System nach Solvency II (Quelle: [10])	24
3.2	ORSA-Prozess und Dokumentation (Quelle: [10])	27
5.1	Vergleich der empirischen Verteilung und der logarithmischen Normalverteilung der Verbindlichkeiten ohne Risikomarge (nach Satz 6)	50
5.2	Vergleich der empirischen Verteilung und der logarithmischen Normalverteilung der Verbindlichkeiten mit Risikomarge (nach Satz 7)	51
5.3	Vergleich der empirischen Verteilung und der logarithmischen Normalverteilung der Verbindlichkeiten (nachgerechnet) nach dem Originalprogramm	52
5.4	Vergleich der Verteilungen der Approximationen ohne und mit Risikomarge	53
5.5	Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Solvvenzquote ohne Risikomarge (nach Satz 6)	54
5.6	Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Rendite ohne Risikomarge (nach Satz 6)	55
5.7	Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Solvvenzquote mit Risikomarge (nach Satz 7)	55
5.8	Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Rendite mit Risikomarge (nach Satz 7)	56
5.9	Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Solvvenzquote nach dem Originalprogramm (nachgerechnet)	56

5.10	Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Rendite nach dem Originalprogramm (nachgerechnet)	57
5.11	Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Solvenzquoten-Grenzen ohne Risikomarge	59
5.12	Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Renditen-Grenzen ohne Risikomarge	60
5.13	Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Solvenzquoten-Grenzen mit Risikomarge	61
5.14	Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Renditen-Grenzen mit Risikomarge	62
5.15	Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Solvenzquoten-Grenzen nach dem Originalprogramm (nachgerechnet)	63
5.16	Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Renditen-Grenzen nach dem Originalprogramm (nachgerechnet)	64
6.1	Dichtefunktion der Summe mit Parametern $\mu_{1,2} = 0; \sigma_{1,2} = 1$ und die Dichtefunktion der Approximation	73
6.2	Dichtefunktion der Summe mit Parametern $\mu_{1,2}; \sigma_{1,2}$ wie in Beispiel 6.2 definiert und die Dichtefunktion der Approximation	74

Tabellenverzeichnis

5.1	Grenzen für strategische Allokationen ohne Risikomarge	60
5.2	Grenzen für strategische Allokationen mit Risikomarge	62
5.3	Entwicklung des Quantil Levels der Solvenzquote (Quelle [14])	65
5.4	Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse (Quelle [14])	67
7.1	Bei die Brechnungen verwendete Daten P_Actif (Quelle: E-Mail von F. Planchet am 19.Juli 2013)	101

Kapitel 1

Einleitung

Das Wesen der Versicherung besteht in einem Risikotransfer vom Versicherungsnehmer auf den Versicherer gegen Zahlung einer Prämie. Das bedeutet, die gegenseitige Deckung eines im Einzelnen zufälligen, im Ganzen aber schätzbaren Geldbedarfs durch eine Vielzahl gleichartig bedrohter Wirtschaftseinheiten. Der Umgang mit Risiken und dessen Übernahme ist also das Kerngeschäft einer Versicherungsgesellschaft.

Damit die Versicherungsunternehmen diesen zufälligen aber schätzbaren Geldbedarf bei einem Schadensfall an den Versicherungsnehmer bezahlen zu können, müssen sie ein bestimmtes Kapital haben.

Versicherungsunternehmen sind aus verschiedenen Gründen unvorhergesehenen Schwankungen im Kapitalbedarf ausgesetzt. Versicherungsnehmer, Aktionäre und Gesetzgeber haben großes Interesse daran, dass die Schwankungen im Kapitalbedarf von Versicherungsunternehmen selbst getragen werden können, deshalb müssen sie jederzeit über ein bestimmtes Eigenkapital verfügen.

Alle diese Solvabilitätsvorschriften sind im Versicherungsaufsichtsgesetz geregelt und werden von der Finanzmarktaufsicht kontrolliert.

In dieser Arbeit wird ein kurzer Überblick über die neue Aufsichtsregelung Solvency II und über den ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) Prozess gegeben. Es wird ein einfaches Modell präsentiert und angewendet um die Solvenzkapitalanforderung ein Versicherungsunternehmen für mehrere Jahre im Voraus zu berechnen im Zusammenhang mit dem ORSA-Prozess.

Die Einführung von Solvency II wird maßgebliche Veränderungen in der Steuerung wie auch in der behördlichen Aufsicht von Versicherungsunternehmen bringen.

Kapitel 2 gibt einen Überblick über die Einführung und die historische Hintergründe von Solvency II, die genaue Struktur des sogenannten „Drei-Säulen-Modells“ und die quantitative Anforderung insbesondere die Berechnung der Solvenzkapital-

tal Anforderung mit der Standard Formel.

In Kapitel 3 werden Informationen über die Definition, Zielsetzung von ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) und die ORSA-Anforderungen präsentiert.

Den Kern der Arbeit stellen die Kapitel 4 und 5 dar. Da wird ein Modell beschrieben und für ein einfaches Beispiel angewendet um die Solvenzkapitalanforderung für mehrere Jahre im Voraus zu berechnen. Unter Berücksichtigung der Hauptrisiken wie versicherungstechnische Rückstellungen, Prämien und finanzielle Risiken wird die Verteilung der Solvenzquote dargestellt. Durch die Modellierung der Verteilung der Solvenzquote werden Grenzanforderungen für die Dauer des strategischen Plans gesetzt. Dieses Modell im ORSA umgesetzt, ermöglicht dem Management Entscheidungen betreffend der Prämienvolumen und Vermögen-Allokationen.

Das rein mathematische Kapitel 6 beinhaltet Informationen über die Approximation einer Summe von logarithmischen Normalverteilungen und Kapitel 7 beinhaltet die R-Codes, für die in Kapitel 5 und 6 dargestellten Informationen und Grafiken.

Kapitel 2

Solvency II

Solvency II ist eines der bedeutendsten Projekte der EU-Kommission zu einer grundlegenden Reform des Versicherungsaufsichtsrechts in Europa, welches die Solvabilitätsvorschriften für die Eigenmittelausstattung und die Anforderungen an das Risikomanagement von Versicherungsunternehmen reformiert. Dabei soll das Regelwerk zu einer Harmonisierung der Aufsicht in Europa beitragen, das bedeutet, ein einheitlicher Versicherungsschutz für Versicherungsnehmer in allen Ländern Europas und dadurch wird auch der internationale Transfer erleichtert. Die Grundidee von Solvency II ist, dass die Unternehmen sich an den wahren Risiken orientieren und eine zeitgemäße Risikokultur im Versicherungsunternehmen etablieren (siehe [3],[4]).

Die Zielsetzung von Solvency II besteht darin, Methoden zur risikoorientierten Steuerung der aktuellen Solvabilitätsvorschriften für Versicherungsgesellschaften zu entwickeln. Die heutigen Eigenmittelvorschriften decken nur Versicherungsrisiken ab, das Marktrisiko, das Kreditrisiko und das operationelle Risiko sind unberücksichtigt.

Mit Solvency II wird eine größere Risikoorientierung und mehr Aufsichtskonvergenz bezweckt, aber das wichtigste Ziel der Versicherungsaufsicht ist die Stärkung und Vereinheitlichung des Schutzes der Versicherungsnehmer.

Außerdem können noch andere Ziele genannt werden:

- Einführung risikoorientierter Regulierungsanforderungen,
- Erweiterung der bisher quantitativen Anforderungen um qualitative Vorschriften,
- Stärkung einer risikoorientierten Aufsicht,
- Erhöhung der Transparenz und Offenlegungspflicht,
- Herstellung einer engen Bindung der neuen Aufsichtsregelung an internationale Standards (siehe [1]).

2.1 Einführung, historischer Hintergrund

Im Jahr 1973 wurden für Nicht-Lebensversicherungen und im Jahr 1979 für Lebensversicherungen Solvabilitätsvorschriften in Europa eingeführt. Im Mittelpunkt dieser Solvabilitätsvorschriften standen die quantitativen Aspekte, was bedeutet, dass sich die Solvabilitätsregeln am Volumen des Versicherungsunternehmens und nicht nach dessen Risikostruktur orientierten. Durch gestiegene Anforderungen und die Globalisierung der Finanzmärkte waren die Solvabilitätsanforderungen für die Versicherungen und Banken nicht mehr zeitgemäß. Seitdem hat die Europäische Aufsichtsbehörde an der Verbesserung und später Neuausrichtung dieser Regeln gearbeitet. Im Jahr 1994 wurde eine Solvency I Arbeitsgruppe der Europäischen Aufsichtsbehörden eingesetzt und eine Bestandsaufnahme des derzeit gültigen Systems in den Europäischen Ländern gemacht. Im Jahr 1997 wurde ein Schlussbericht über eine Analyse der Insolvenzzursachen in der europäischen Versicherungswirtschaft veröffentlicht und es wurde beschlossen, dass ein neues System zur Schaffung neuer Eigenmittelvorschriften erarbeitet werden soll. So kam die Solvency I Richtlinie zustande.

Wie jedes Modell hat Solvency I sowohl Stärken als auch Schwächen. Solvency I ist einfach und die Ergebnisse können leicht verglichen werden. Es wird kritisch betrachtet, dass nicht alle Risiken berücksichtigt werden können und die unternehmensindividuelle Risikosituation nicht realistisch dargestellt werden kann.

Seit 2004 sind in Österreich modifizierte Eigenmittelvorschriften für Versicherungsunternehmen in Kraft. Diese Regelungen stellen aber keine grundlegende Änderung des Solvabilitätssystems dar, sondern passen nur die bereits bestehenden Eigenmittelanforderungen an. Sie basieren auf den gleichen Ansätzen wie die früheren Richtlinien und umfassen keine Regelungen zum Risikomanagement und Governance des Unternehmens. Sie berücksichtigen auch nicht die Entwicklung internationaler Rechnungslegungsvorschriften. Schon bei der Umsetzung von Solvency I wurde erkannt, dass für ein stabiles Solvabilitätssystem eine umfangreichere Bewertung der Finanzpositionen und der Risiken eines Versicherungsunternehmens notwendig ist (siehe [5],[6]).

Diese derzeit (bis 2014) gültigen Regeln sind als Solvency I bezeichnet. In den letzten Jahren wird intensiv auf europäischer und nationaler Ebene an einer umfassenden Neuregelung, Solvency II genannt, ein Solvabilitätssystem für Versicherungsgesellschaften erarbeitet.

Solvency II ist ein neues europäisches Aufsichtssystem, welches den Aufsichtsbehörden geeignete qualitative und quantitative Werkzeuge zur Verfügung stellen soll, um die Gesamtsolvabilität eines Versicherungsunternehmens ausreichend beurteilen

zu können (siehe [5],[6]).

Solvency II wird durch das Lamfalussy-Verfahren in nationales Recht umgesetzt. Das Lamfalussy-Verfahren besteht aus vier Rechtssetzungsebenen:

1. Ebene: Rahmenrichtlinie, da werden Grundsätze ohne Details festgeschrieben,
2. Ebene: Durchführungsrichtlinie, welche die Details zu den Modellen in der Rahmenrichtlinie enthält,
3. Ebene: Technische Regulierungs- bzw. Durchführungsstandards,
4. Ebene: Umsetzung in nationales Recht (siehe [8]).

Am Ende des Jahres 2005 wurden von CEIOPS die so genannten Quantitative Impact Studies (QIS) eingeführt. Die QIS Studien sind Auswirkungsstudien und haben das Ziel, die Angemessenheit der Berechnungsmethoden, die in Solvency II definiert sind, zu testen, ihre Praktikabilität zu überprüfen und eventuell Adaptierungen vorzunehmen. Diese Studien beschäftigen sich hauptsächlich mit der Höhe der benötigten Eigenmittelerfordernisse (siehe [5], [6], [7]).

2.2 Der „Drei-Säulen-Ansatz“

Im folgenden Abschnitt wird das „Drei-Säulen-Modell“ von Solvency II in Anlehnung an das Buch der Finanzmarktaufsicht (2012) beschrieben (siehe [1]).

Ähnlich wie in Basel II basiert die Harmonisierung des Versicherungsaufsichtsrechts durch Solvency II auf dem „Drei-Säulen-Modell“.

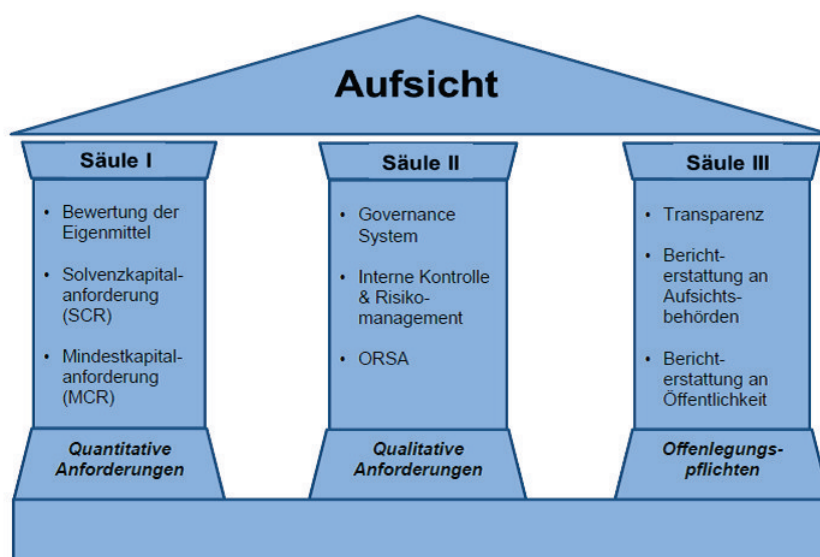


Abbildung 2.1: Das „Drei-Säulen-Modell“ von Solvency II

Säule I: Quantitative Anforderungen

In der ersten Säule werden neben den Vorschriften zur Bewertung von Vermögenswerten und Verbindlichkeiten die Kapitalanforderungen und Eigenmittelvorschriften festgelegt. Die Versicherungsunternehmen sollen jederzeit über ausreichendes Eigenkapital verfügen und die Bewertungen müssen marktkonsistent erfolgen. Hier wird eine Kapitalausstattung gefordert, die den tatsächlichen Risiken gerecht wird. Die aufsichtsrechtlich geforderte Kapitalausstattung soll dem „ökonomisch notwendigen Kapital“ entsprechen, welche eine Insolvenz unwahrscheinlich macht. In den Solvency II-Richtlinien sind zwei Kapitalanforderungen vorgesehen:

- Solvenzkapitalanforderung ($SCR = \text{Solvency Capital Requirement}$): soll jenem Kapitalniveau entsprechen, welches erforderlich ist, die unvorhergesehenen Verluste des Versicherungsunternehmens aufzufangen. SCR kann entweder mit dem Standard-Modell oder mit einem vom Unternehmen entwickeltem internen Modell berechnet werden. Die Solvenzkapitalanforderung wird so bestimmt, dass die Ruinwahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens für das Folgejahr maximal 0,5% beträgt.
- Mindestkapitalanforderung ($MCR = \text{Minimum Capital Requirement}$): ist die regulatorische Untergrenze des zu haltenden Solvenzkapitals, deren Unterschreitung eine ultimative Intervention seitens der Aufsicht auslösen würde.

Die Vorschriften zur Bildung von versicherungstechnischen Rückstellungen und zur Kapitalanlage werden genauso in Säule I berücksichtigt.

Säule II: Qualitative Anforderungen

Die zweite Säule enthält qualitative Anforderungen, das bedeutet, dass die neuen Vorschriften alle für ein Versicherungsunternehmen relevanten Risiken einbeziehen und nicht nur die quantifizierbaren Risiken. Diese qualitativen Anforderungen betreffen die Grundsätze und Methoden der Aufsicht und die qualitativen Anforderungen an die Geschäftsorganisation der Unternehmen. Hier wird insbesondere auf die einzelnen Bestandteile des Governance-Systems eingegangen. Die Hauptelemente des erforderlichen Governance-Systems unter Solvency II sind:

- Risikomanagement-System,
- Schlüsselfunktionen wie die versicherungsmathematische Funktion, Risikomanagement-Funktion, Compliance-Funktion und Internal Audit-Funktion,
- internes Kontrollsystem und interne Revision,

- die unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung ORSA (Own Risk and Solvency Assessment),
- das Outsourcing.

Die Versicherungsunternehmen sind verpflichtet, ein wirksames Risikomanagementsystem einzurichten und aufrecht zu erhalten, dessen Hauptbestandteil die unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung (ORSA), welche die Planung und Eigenmittelerfordernisse verbindet, ist. Alle Personen, die das Unternehmen effektiv leiten oder Schlüsselfunktionen innehaben müssen die „Fit & Proper“ Anforderungen erfüllen.

Säule III: Marktdisziplin und Transparenz

Die dritte Säule umfasst die Berichts- und Offenlegungspflichten der Unternehmen sowohl gegenüber der Aufsichtsbehörde als auch gegenüber der Öffentlichkeit. Es wird einen jährlich zu veröffentlichenden Bericht über die Solvabilität und Finanzlage des Unternehmens (SFCR = Solvency Financial and Condition Report) sowie einen mindestens alle drei Jahre zu erstellenden Bericht an die Aufsichtsbehörde (RSR = Regular Supervisory Report) geben. Dadurch soll die Transparenz und die Vergleichbarkeit der Versicherungsunternehmen erhöht werden. Dabei wird auch auf die Berücksichtigung der Internationalen Rechnungslegungsvorschriften (IFRS = International Financial Reporting Standards) geachtet.

2.3 Quantitative Anforderungen unter Solvency II

Zu den quantitativen Anforderungen gehören quantitative Eigenmittelanforderungen, Prinzipien zur Ermittlung der versicherungstechnischen Rückstellungen sowie Vorschriften über die Anlage von Vermögen.

Das Hauptaugenmerk bei den quantitativen Anforderungen unter Solvency II wird auf die in Säule I definierten Solvabilitätsbedingungen für die Eigenmittelausstattung eines Versicherungsunternehmens gelegt. In den Solvency II-Richtlinien sind zwei Kapitalanforderungen, die Solvenzkapitalanforderung (*SCR*) und die Mindestkapitalanforderung (*MCR*) vorgesehen. Die Basis für die Ermittlung der Solvenzkapitalanforderung bildet die ökonomische Bilanz, welche von einer marktwertnahen Bewertung der Aktiva und Passiva als Berechnungsbasis ausgeht.

Die Eigenmittel (Own Funds) eines Versicherungsunternehmens setzen sich aus Basiseigenmitteln und ergänzenden Eigenmitteln zusammen. Die Basiseigenmittel errechnen sich aus Vermögenswerten minus Verbindlichkeiten und dazugerechnet die

nachrangigen Eigenmittel. Ein wichtiger Faktor für die Höhe der Verbindlichkeiten und dadurch der Eigenmittel sind die versicherungstechnischen Rückstellungen.

In diesem Teil der Arbeit werden hauptsächlich Informationen aus dem Buch der Finanzmarktaufsicht (siehe [1]) und den Vorlesungsunterlagen über Solvency II (siehe [8]) verwendet.

2.3.1 Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen

Der wichtigste Bestandteil bei der Bilanzierung von Versicherungsunternehmen ist die Bildung von versicherungstechnischen Rückstellungen (Technical Provisions = TP), welche die dauerhafte Erfüllbarkeit der Verpflichtungen aus den Versicherungsverträgen gewährleisten. Nach aktuellen Regeln werden die versicherungstechnischen Rückstellungen nach dem Grundsatz der Vorsicht bewertet, aber unter Solvency II wird das Prinzip der marktkonsistenten Bewertung angewendet. Art. 76 Abs. 2 der Rahmenrichtlinie besagt:

„Der Wert der versicherungstechnischen Rückstellungen entspricht dem aktuellen Betrag, den Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmen zahlen müssten, wenn sie ihre Versicherungs- und Rückversicherungsverpflichtungen unverzüglich auf ein anderes Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmen übertragen würden.“ (siehe [1], S.23)

Das bedeutet, dass die versicherungstechnischen Rückstellungen unter Solvency II gemäß ihrem gegenwärtigen Marktpreis bilanziert werden sollen. Auf Grund der Tatsache, dass für die versicherungstechnischen Verbindlichkeiten keine Marktwerte vorhanden sind, ist die Umsetzung dieses Prinzips nicht möglich. Daher werden bei der Bewertung mathematische Modelle herangezogen. Art. 77 der Rahmenrichtlinie besagt:

„Der Wert der versicherungstechnischen Rückstellungen hat der Summe aus einem ‚besten Schätzwert‘ und einer Risikomarge[...] zu entsprechen.“ (siehe [1], S.23)

$$TP = BE + RM$$

- Best Estimate (BE)

Bei der Berechnung des Best Estimate (bester Schätzwert) werden alle zukünftigen Zahlungsströme berücksichtigt. Unter Verwendung der risikofreien Zinskurve wird der Zeitwert dieser zukünftigen Zahlungsströme und dann der wahrscheinlichkeitsgewichtete Durchschnitt dieser Werte berechnet. Das bedeutet, dass der Best Estimate der wahrscheinlichkeitsgewichtete Durchschnitt

der diskontierten zukünftigen Zahlungsströme ist (siehe [1], S.23). Der Best Estimate setzt sich aus den Rückstellungen für erwartete Zahlungen von bereits eingetretenen Schäden (Best Estimate for outstanding claims), diskontiert und den Rückstellungen für erwartete Zahlungen von zukünftigen Schäden und Kosten abzüglich erwarteter Prämien, diskontiert, ohne Berücksichtigung von Neugeschäft zusammen (siehe [8], S 5).

- Risikomarge (RM)

Bei der Bestimmung der Marktwerte von versicherungstechnischen Rückstellungen laut den Solvency II-Richtlinien ist eine Rückstellung für eine sogenannte Risikomarge zu bilden. Diese Risikomarge ist in den meisten Fällen separat vom Best Estimate zu berechnen. Eine Berechnung ist nicht notwendig, wenn die zukünftigen Zahlungsströme anhand von Finanzinstrumenten verlässlich reproduzierbar sind. Die Berechnung der Risikomarge erfolgt nach der Kapitalkostenansatz-Methode (Cost of Capital Approach). Die Risikomarge spiegelt jene Kapitalkosten wider, die die Versicherungsunternehmen, zum Halten des benötigten Solvenzkapitals brauchen, welches für die Bedeckung der Versicherungsverpflichtungen während ihrer Laufzeit erforderlich ist. Nach aktuellen Richtlinien für die Berechnung der Risikomarge werden alle zukünftigen Solvenzkapitalerfordernisse für jedes Jahr bis zum Laufzeitende der Versicherungsverpflichtungen projiziert, mit dem Kapitalkostensatz ($\alpha = 6\%$) multipliziert, die Ergebnisse mit der risikofreien Zinskurve diskontiert und aufsummiert (siehe [1], S 24). Mathematisch betrachtet:

$$RM = \alpha \cdot \left[\sum_{t=0}^{\infty} SCR_t \cdot (1 + r_{t+1})^{-(t+1)} \right]$$

wobei α der Kapitalkostensatz (6%), t der Zeitpunkt in Jahren, SCR_t das zum Zeitpunkt t berechnete SCR und r_t der risikolose Zinssatz für eine Restlaufzeit von t Jahren ist (siehe [8]).

2.3.2 Solvabilitätsvorschriften, Berechnung von Solvenz- und Mindestkapitalanforderung

Gegenstand der Berechnungen in der Säule I von Solvency II sind das Solvenzkapital (SCR) und das Minimumsolvenzkapital (MCR) in Bezug auf die Solvenz-Bilanz des folgenden Geschäftsjahres.

- Solvenzkapitalanforderung

Die Solvenzkapitalanforderung (*SCR*) ist die Höhe der Eigenmittel, die aus aufsichtsrechtlicher Sicht dem Versicherungsunternehmen zur Verfügung stehen muss. Anders formuliert ist es jenes Kapital, das dem Versicherungsunternehmen ermöglicht, unvorhergesehene Verluste im nächsten Jahr aufzufangen.

„Die Solvenzkapitalanforderung wird so kalibriert, dass gewährleistet wird, dass alle quantifizierbaren Risiken, denen ein Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmen ausgesetzt ist, berücksichtigt werden. Sie deckt sowohl die laufende Geschäftstätigkeit als auch die in den folgenden zwölf Monaten erwarteten neuen Geschäfte ab.

In Bezug auf die laufende Geschäftstätigkeit deckt sie nur unerwartete Verluste ab. Sie entspricht dem VaR der Basiseigenmittel eines Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmens zu einem Konfidenzniveau von 99,5% über den Zeitraum eines Jahres.“ (siehe [1], S 26).

Die Solvency II-Richtlinie schreibt einen Standardansatz zur Berechnung der Solvenzkapitalanforderung vor. Wenn der vorgeschriebene Standardansatz den tatsächlichen Geschäfts- und Anlagerisiken eines Unternehmens nicht entspricht, besteht die Möglichkeit ein internes Modell zu verwenden. Ein internes Modell braucht eine aufsichtsbehördliche Genehmigung und muss bis auf einzelne Details dokumentiert werden. Die Aufsichtsbehörde und die Versicherungsunternehmen sollen dabei dem Grundsatz der Verhältnismäßigkeit folgen. Das bedeutet, dass das vom Unternehmen gewählte und von der Aufsichtsbehörde genehmigte Modell die Art, die Komplexität und den Umfang der unternehmenseigenen Risiken berücksichtigen soll. Sowohl partielle als auch volle interne Modelle sind möglich.

Die Solvenzkapitalanforderung im Standard Modell wird so bestimmt, dass die Ruinwahrscheinlichkeit des Unternehmens für das Folgejahr maximal 0,5% beträgt, oder anders formuliert, dass den Versicherungsunternehmen eine technische Sicherheit von 99,5% dafür garantiert wird, dass alle im Folgejahr anfallenden Zahlungsverpflichtungen seitens des Unternehmens bedient werden können (siehe [8]).

- Mindestkapitalanforderung

Die Mindestkapitalanforderung (*MCR*), aufsichtsrechtlich betrachtet, definiert die regulatorische Untergrenze des zu haltenden Solvenzkapitals. Sie stellt das Mindestkapital dar, das ein Versicherungsunternehmen zu jedem Zeitpunkt halten muss. Eine Unterschreitung dieses Mindestkapitals kann zu schwerwiegenden aufsichtsrechtlichen Maßnahmen bis hin zum Konzessionsentzug führen (siehe [1], S 30).

Die Mindestkapitalanforderung entspricht dem Value at Risk (*VaR*) der Basiseigenmittel eines Versicherungs- oder Rückversicherungsunternehmens zu einem Konfidenzniveau von 85% über ein Jahr.

Die Mindestkapitalanforderung wird mit folgenden Grenzen an die Solvenzkapitalanforderung gekoppelt:

$$SCR \cdot 25\% \leq MCR \leq SCR \cdot 45\%$$

In Abbildung 2.2 sind die Solvenzkapitalanforderung und die Mindestkapitalanforderung mit den oben beschriebenen Definitionen schematisch dargestellt.

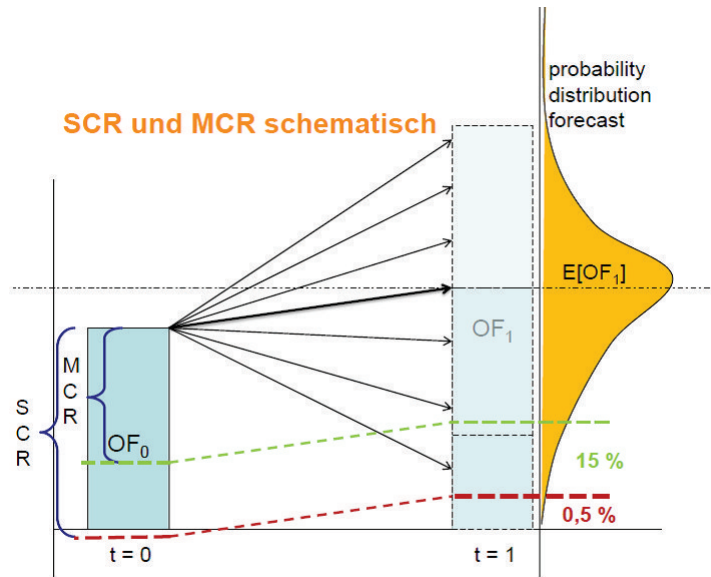


Abbildung 2.2: SCR und MCR schematisch (Quelle: [8])

Die Mindestkapitalanforderung (*MCR*) und die Solvenzkapitalanforderung (*SCR*) werden als Zuschläge auf die versicherungstechnischen Rückstellungen auf der Passivseite der Solvenz-Bilanz erhoben (siehe [9]).

Eine schematische Darstellung von Solvenzkapitalanforderung und Mindestkapitalanforderung aus der Sicht einer Bilanz ist in Abbildung 2.3 dargestellt:

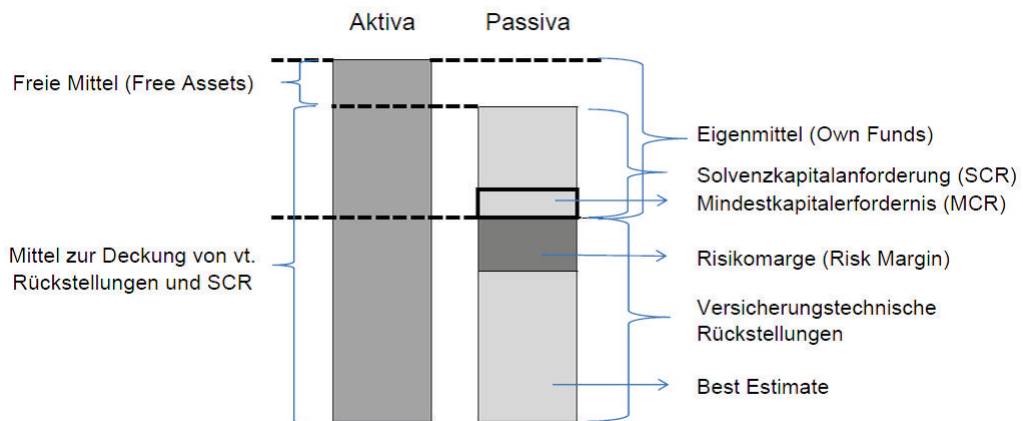


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung von *SCR* und *MCR* (Quelle: [1])

2.3.3 Solvenzkapitalanforderung (*SCR*) in der Standardformel

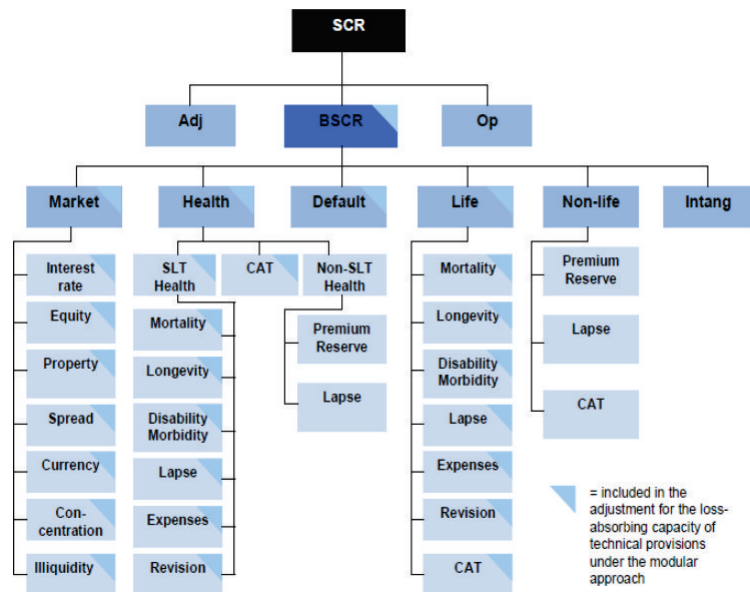


Abbildung 2.4: Modularer Aufbau der Standardformel (Quelle: [8])

Die Standardformel ist durch einen modularen Aufbau charakterisiert. Die Solvenzkapitalanforderung (*SCR*) setzt sich aus der Basis-Solvenzkapitalanforderung (*BSCR*), einer Kapitalanforderung für das operationelle Risiko (*SCR_{Op}*) und einem Anpassungsterm (*Adj*) zusammen.

$$SCR = BSCR - Adj + SCR_{Op}$$

Die Basis-Solvenzkapitalanforderung ($BSCR$) ergibt sich aus der Aggregation von einzelnen Risikomodulen.

Die Kapitalerfordernisse für die einzelnen Risiken werden in den entsprechenden Modulen berechnet:

- Marktrisiko (SCR_{Market}),
- Krankenversicherungstechnisches Risiko (SCR_{Health}),
- Gegenparteiausfallsrisiko ($SCR_{Default}$),
- Lebensversicherungstechnisches Risiko (SCR_{Life}),
- Nicht-Lebensversicherungstechnisches Risiko ($SCR_{Non-Life}$),
- Risiko für immaterielle Vermögensgegenstände (SCR_{Intang}).

Die einzelnen Module wiederum ergeben sich aus der Aggregation von Untermodulen, in denen Kapitalerfordernisse für die entsprechenden Risiken berechnet werden.

Die Berechnung der Kapitalerfordernisse beginnt in der untersten Ebene, die einzelnen Kapitalerfordernisse werden mit Hilfe einer Korrelationsmatrix aggregiert, wodurch Diversifikationseffekte zwischen den einzelnen Risiken geltend gemacht werden können.

Die Berechnung der Basis Solvenzkapitalanforderung lautet:

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j \in \mathcal{M}} SCR_i \cdot Corr_{ij} \cdot SCR_j} + SCR_{Intang}$$

wobei $\mathcal{M} = \{Market, Health, Default, Life, Non - Life\}$ und SCR_i und SCR_j die fünf Hauptrisikomodule und $Corr_{ij}$ die Einträge der folgenden symmetrischen Korrelationsmatrix bezeichnen:

i \ j	Market	Default	Life	Health	Non-life
Market	1				
Default	0.25	1			
Life	0.25	0.25	1		
Health	0.25	0.25	0.25	1	
Non-life	0.25	0.5	0	0	1

Abbildung 2.5: Korrelationsmatrix $BSCR$ (Quelle: [8])

Je nach Risikomodul wird die entsprechende Kapitalanforderung in der Standardformel nach szenariobasiertem Ansatz oder nach faktorbasiertem Ansatz berechnet (siehe [1], S. 29).

Im szenariobasierten Ansatz ist die Kapitalanforderung als Änderung der Eigenmittel unter einem vorgegebenen Schockszenario definiert.

Beim faktorbasierten Ansatz ist eine geschlossene Formel vorgegeben, in die das Versicherungsunternehmen seine unternehmenseigenen Werte wie z.B. versicherungstechnische Rückstellungen, einsetzen soll.

Wie vorhin erwähnt und in Abbildung 2.4 ersichtlich, wird das Kapitalerfordernis von einzelnen Modulen, aus Untermodulen berechnet.

Das Kapitalerfordernis für das Marktrisiko (SCR_{Market}) wird unter Verwendung einer symmetrischen Korrelationsmatrix aus folgenden Marktrisiko-Untermodulen aggregiert: Zinsrisiko, Aktienrisiko, Immobilienrisiko, Spreadrisiko, Wechselkursrisiko, Konzentrationsrisiko und Illiquiditätsrisiko.

Das Krankenversicherungstechnische Risiko (SCR_{Health}) enthält Krankenversicherungsverbindlichkeiten, die ähnlich wie Lebensversicherungen oder ähnlich wie Nicht-Lebensversicherungen betrieben werden und solche, die vom Krankenversicherungskatastrophenrisiko stammen.

Das Gegenparteiausfallsrisiko ($SCR_{Default}$) sind Risiken verbunden mit dem Ausfall einer Rückversicherungsunternehmens, säumigen Prämienzahlern oder dem Leistungsvorschuss an Versicherungsnehmer.

Das Lebensversicherungstechnische Risiko (SCR_{Life}) summiert sich aus Sterblichkeitsrisiko, Langlebigkeitsrisiko, Invaliditäts-/Morbiditätsrisiko, Kostenrisiko, Revisionsrisiko, Stornorisiko und Lebensversicherungskatastrophenrisiko.

Das Kapitalerfordernis im Bereich Nicht-Lebensversicherungstechnisches Risiko ($SCR_{Non-Life}$) wird aus Prämien- und Reserverisiko, Stornorisiko und Katastrophenrisiko berechnet.

Ein wesentlicher Bestandteil bei der Berechnung der Solvenzkapitalanforderung ist das operationelle Risiko.

Das operationelle Risiko ist das Risiko eines Verlustes, der sich aus der Unangemessenheit oder dem Versagen von internen Prozessen, Mitarbeitern (z.B. menschliches Versagen, Fehler, interner Betrug) oder Systemen (z.B. Computer, Programme) oder durch externe Ereignisse (z.B. externer Betrug) ergibt (siehe [1], S. 43).

Der Anpassungsterm (Adj) resultiert aus dem risikomindernden Effekt zukünftiger Überschussbeteiligungen und latenter Steuern :

$$Adj = Adj_{FDB} + Adj_{DT}$$

Anders gesagt, die Anpassung wird für die Verlustausgleichsfähigkeit der versicherungstechnischen Rückstellungen und für latente Steuern durchgeführt.

2.3.4 Bestimmung der Eigenmittel

Die Eigenmittelvorschriften von Versicherungsunternehmen werden durch Solvency II neu gestaltet und an das unternehmenseigene Risikoprofil angepasst. Je höher die Risiken sind desto mehr anrechenbare Eigenmittel werden gebraucht. Die Berechnung der Eigenmittel wird harmonisiert, und im Mittelpunkt der Ermittlung der anrechenbaren Eigenmittel steht die Erstellung der ökonomischen Bilanz.

Die anrechenbaren Eigenmittel der Versicherungsunternehmen sind verfügbare Finanzmittel, die als Risikopuffer dienen und eventuelle finanzielle Verluste auffangen können.

Gemäß Art. 87 der Rahmenrichtlinie sind die Eigenmittel (Own Funds) der Versicherungsunternehmen die Summe aus Basiseigenmitteln (in der ökonomischen Bilanz ausgewiesen) und ergänzenden Eigenmitteln (sind in der Bilanz nicht enthalten).

Die Basiseigenmittel sind eine Zusammensetzung des „ökonomischen Kapitals“. Das heißt, die Basiseigenmittel setzen sich aus dem Überschuss der Vermögenswerte über die Verbindlichkeiten und nachrangigen Verbindlichkeiten zusammen. Zum Überschuss der Vermögenswerte zählen z.B. das eingezahlte Grundkapital, Kapitalrücklagen („surplus funds“) sowie die durch die Umbewertungen entstehende Reserve („reconciliation reserve“):

Basiseigenmittel = Vermögenswerte - Verbindlichkeiten + nachrangige Verbindlichkeiten.

Die ergänzenden Eigenmittel beinhalten Verbindlichkeiten, welche die Versicherungsunternehmen zur Aufstockung ihrer Mittel abrufen können, die aber nur nach Genehmigung der Aufsichtsbehörde angerechnet werden können. Die ergänzenden Eigenmittelbestandteile können zum Ausgleich von Verlusten eingefordert werden. Zu den ergänzenden Eigenmittelbestandteilen zählen: nicht aufgerufenes, nicht eingezahltes Grundkapital bzw. Gründungsstock, Kreditbriefe und Garantien, alle die von Versicherungsunternehmen erhaltenen, sonstigen rechtsverbindlichen Verpflichtungen und künftige Forderungen eines Versicherungsvereins auf Gegenseitigkeit gegenüber seinen Mitgliedern (siehe [1], S. 52,53).

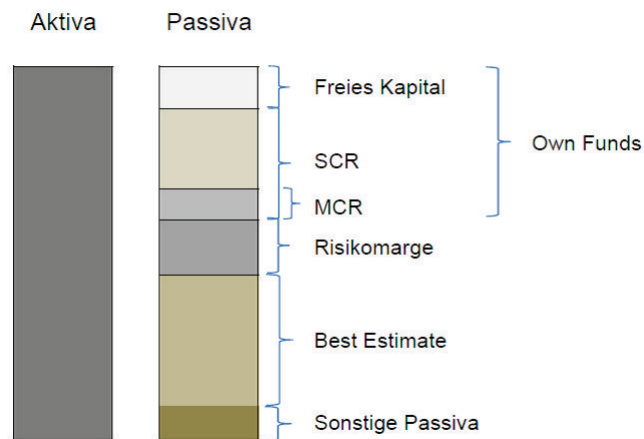


Abbildung 2.6: Ökonomische Bilanz (Quelle: [1], S. 52)

2.4 Solvabilität

Solvabilität bezeichnet die Fähigkeit eines Unternehmens, seinen finanziellen Verpflichtungen nachzukommen. Ein Unternehmen ist solvent, wenn es genügend Eigenmittel hat, um seine Verpflichtungen abdecken zu können

Die Analyse der Solvabilität basiert auf zwei Komponenten:

- Ermittlung der verfügbaren Eigenmittel (*Own Funds*),
- Ermittlung der erforderlichen Eigenmittel (*SCR*).

Die verfügbaren Eigenmittel werden mit den erforderlichen Eigenmitteln verglichen und beschreiben die Solvenzquote des Versicherungsunternehmens.

$$\text{Solvenzquote} = \frac{\text{Own Funds}}{\text{SCR}}$$

Die Solvenzquote ist eine zentrale Kennzahl unter Solvency II und sie misst, in wie weit das Vermögen eines Versicherungsunternehmens durch Solvenzkapital gedeckt ist.

Es stellt sich die Frage: sollen die Eigenmittel über den *SCR* liegen oder sollen sie gleich sein wie die?

Am effizientesten ist es, wenn die Solvenzquote genau 100% ist, weil die Eigenmittel über den *SCR* „herum liegen“. Darüber liegendes Kapital sollte für Neugeschäfte verwendet werden bzw. um die Rückversicherung zu reduzieren.

Andererseits, eine Solvenzquote von über 100%, gibt dafür Sicherheit.

Kapitel 3

ORSA (Own Risk and Solvency Assessment)

Im folgenden Kapitel wird das von Solvency II vorgesehene ORSA allgemein vorgestellt, in Anlehnung der Informationen aus ([10], [11], [12],[13]).

Mit der neuen Aufsichtsregelung Solvency II soll eine risikobasierte Steuerung der Gesamtsolvabilität von Versicherungsunternehmen eingeführt werden. Es sollen nicht nur die quantifizierbaren Risiken berücksichtigt werden, sondern auch alle anderen für die Versicherungsunternehmen relevanten Risiken erfasst werden. Die nicht quantifizierbaren Risiken können nur durch Governance-Anforderungen angesprochen werden. Die in der Solvency II-Richtlinie angesprochenen Governance Themen sollten in der Steuerung eines Versicherungsunternehmens eine wesentliche Rolle spielen. Einer der wichtigsten Bestandteile der Governance-Anforderungen ist ein funktionierendes Risikomanagement-System. Basis eines effektiven Risikomanagement-Systems in einem Versicherungsunternehmen ist eine Risikostrategie. Die Risikostrategie eines Unternehmens definiert die Ziele, die wichtigsten Risikomanagementprinzipien und den Risikoappetit. Die Risikomanagementprozesse und -abläufe müssen die Identifizierung, die Kontrolle, die Überwachung und die Berichterstattung über alle Risiken berücksichtigen und die Risikomanagementrichtlinien widerspiegeln. Z.B. sollen die festgelegten Risikolimits in täglichen Abläufen und Entscheidungen berücksichtigt werden. Risikomanagement bedeutet, Risiken zu verstehen und die Auswirkungen zu erkennen, selbst wenn diese Risiken nicht quantifizierbar sind (siehe [12]).

Ein wichtiger Bestandteil des Risikomanagement-Systems ist die Beurteilung und Überwachung der unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätslage („Own Risk and Solvency Assessment“ = ORSA) des Versicherungsunternehmens.

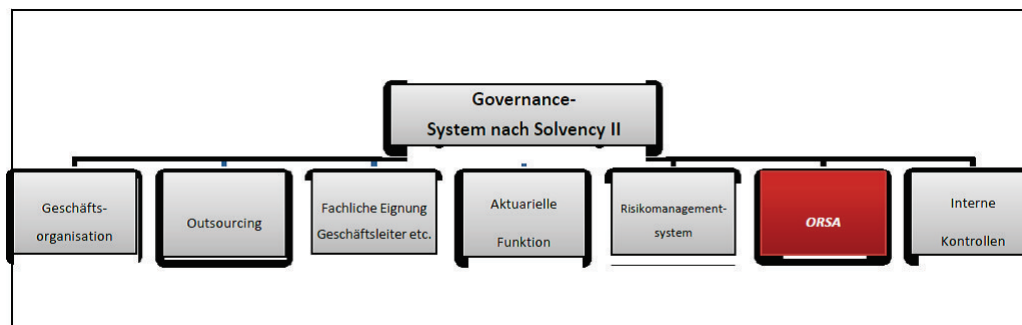


Abbildung 3.1: Governance-System nach Solvency II (Quelle: [10])

3.1 Definition und Ziel von ORSA

Der am 27. Mai 2008 veröffentlichte Artikel von CEIOPS (siehe [11]) definiert ORSA als „die Gesamtheit der Prozesse und Verfahren, die eingesetzt werden, um kurz- und langfristige Risiken, denen das Versicherungsunternehmen ausgesetzt ist bzw. ausgesetzt sein könnte, zu identifizieren, zu bewerten, zu kontrollieren, handzuhaben oder zu berichten und die der Ermittlung der Eigenmittel, die den gesamten Solvabilitätsbedarf sicherstellen sollen, dienen.“ (siehe [10]).

ORSA ist Teil des Risikomanagement-Systems des Unternehmens, baut auf der eigenen Risiko- und Solvabilitätsbewertung auf, aber ist nicht zwingend quantitativ. ORSA muss ein integrierter Bestandteil der Geschäftsstrategie sein und kontinuierlich in die strategischen Entscheidungen des Unternehmens einfließen.

Artikel 45 der Solvency II Rahmenrichtlinie verpflichtet die Versicherungsunternehmen, eine unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung durchzuführen. Die Beurteilung und die dabei notwendigen Berechnungen müssen mindestens folgende Elemente berücksichtigen:

- den Gesamtsolvabilitätsbedarf unter Berücksichtigung des eigenen Risikoprofils, der vom Vorstand genehmigten Risikotoleranzschwellen und der Geschäftsstrategie,
- die kontinuierliche Einhaltung der Kapitalanforderungen, wie die Mindestkapitalanforderung und Solvenzkapitalanforderung, sowie der Anforderungen an die versicherungstechnischen Rückstellungen,
- die Signifikanz der Abweichung des Risikoprofils des Versicherungsunternehmens von den Annahmen, die der Berechnung der Solvenzkapitalanforderung zugrunde liegen (siehe [10]).

Im Grunde genommen geht es darum, das unternehmenseigene Risikoprofil und den daraus resultierenden Risikokapitalbedarf fortlaufend zu analysieren, zu bewerten und diesen in den Gesamtprozess der strategischen Unternehmenssteuerung einbeziehen. Nicht zuletzt dient ORSA dazu, den Bedarf an Eigenmitteln zu ermitteln, um die sich aus dem Versicherungsgeschäft ergebenden Verpflichtungen dauerhaft zu erfüllen. Damit soll erreicht werden, dass sich die Versicherungsunternehmen mit der eigenen Risikosituation beschäftigen. Gleichzeitig soll eine Risikokultur im Unternehmen aufgebaut werden (siehe [10]).

Die Durchführung von ORSA erfolgt regelmäßig mindestens einmal jährlich und zusätzlich nach Eintreten wesentlicher Änderungen des Risikoprofils bzw. der Solvabilitätssituation oder bei Verwendung eines internen Modells mit dessen Änderungen. Die Ergebnisse von ORSA müssen der Aufsicht laufend berichtet werden und sind dementsprechend auch Bestandteil des aufsichtsrechtlichen Überprüfungsprozesses.

3.2 ORSA-Anforderungen

Die Darstellung der ORSA-Anforderungen kann in zwei Teile gegliedert werden, den ORSA-Prozess (materielle Durchführung) und die Dokumentation (formale Anforderungen).

In einem ersten Schritt im ORSA-Prozess sollen die Unternehmen prüfen, ob die Solvabilitätsanforderungen jederzeit ausreichen, um die in der eigenen Risikoneigung festgelegten Zielsetzungen zu erfüllen, natürlich unter Berücksichtigung ihrer Geschäftsziele aus der strategischen Planung und ihres szenariobasierten projizierten Gesamtrisikoprofils. Der Zeithorizont soll mit dem Zeithorizont der Geschäftsplanung übereinstimmen. Bei den notwendigen Szenarioanalysen es ist wichtig, dass alle möglichen Szenarien angewendet werden, wobei die wichtigsten die Stressszenarien sind. Dafür sollte eine unternehmenseigene Richtlinie entwickelt werden, welche die Durchführung von Szenarioanalysen und Stresstests beschreibt und die verwendeten Parameter definiert. Dabei soll das unternehmensindividuelle Gesamtrisikoprofil ermittelt werden, sowohl die quantifizierbaren als auch die nicht quantifizierbaren Risiken, wodurch eine detaillierte Analyse der realen Risikosituation des Unternehmens gewährleistet werden kann. Die Ergebnisse des ORSA-Prozesses sollen für die weitere Planung bzw. Handlungsmaßnahmen des Managements verwendet werden.

Anders formuliert, der ORSA-Prozess besteht aus zwei Teilen: Analyseprozess und Prognoseprozess.

Im Analyseprozess wird untersucht, ob es Hinweise gibt, dass die Risiken nicht

richtig bewertet sind bzw. ob das Modell alle für das Unternehmen relevanten Risiken berücksichtigt.

Im Prognoseprozess werden relevante Fragen beantwortet wie:

- Wie sieht die Eigenmittelausstattung für die Zukunft aus, wird die Solvenzkapitalanforderung zukünftig gewährleistet?
- Wie sieht die Eigenmittelausstattung bei Eintritt negativer Entwicklungen aus, ist die Solvenzkapitalbedeckung auch noch gegeben? (siehe [13])

All diese Ergebnisse sollen dokumentiert werden und müssen der Aufsicht laufend und regelmäßig berichtet werden. Damit sind die Ergebnisse des ORSA-Prozesses auch Bestandteil des aufsichtsrechtlichen Überprüfungsprozesses.

Bei den ORSA-Anforderungen werden drei wichtige Leitlinien formuliert:

- das Proportionalitätsprinzip: es sind eigene ORSA-Prozesse, Arbeitsabläufe und Methoden einzurichten, die für die Wesensart, den Umfang und die Komplexität der Risiken angemessen sind,
- die Rolle des Verwaltungs-, Management- oder Aufsichtsorgans: diese Organe sollen eine aktive Rolle im ORSA-Prozess einnehmen,
- die Dokumentation: diese soll mindestens die ORSA-Richtlinie, die Aufzeichnung jedes ORSA-Prozesses, den internen ORSA-Bericht und den ORSA-Bericht für die Aufsichtsbehörde enthalten.

Die ORSA-Richtlinie soll mindestens beinhalten:

- Beschreibung der bestehenden Prozesse und Abläufe unter Berücksichtigung der zukünftige Ziele, um den ORSA-Prozess durchführen zu können,
- Darlegung der Zusammenhänge zwischen Risikoprofil, Risikotoleranzschwellen und Gesamtkapitalbedarf,
- Ergebnisse über Sensitivitätsanalysen und Stresstests, Informationen über Anforderungen an die Datenqualität, den Zeitpunkt und wie oft der ORSA-Prozess durchgeführt werden wird.

Der ORSA-Prozess und dessen Ergebnisse sollen einfach und verständlich intern dokumentiert werden, und nachdem die Ergebnisse vom Verwaltungs-, Management- oder Aufsichtsorgan bestätigt worden sind, sind sie mit Schlussfolgerungen an die betroffenen Mitarbeiter zu kommunizieren.

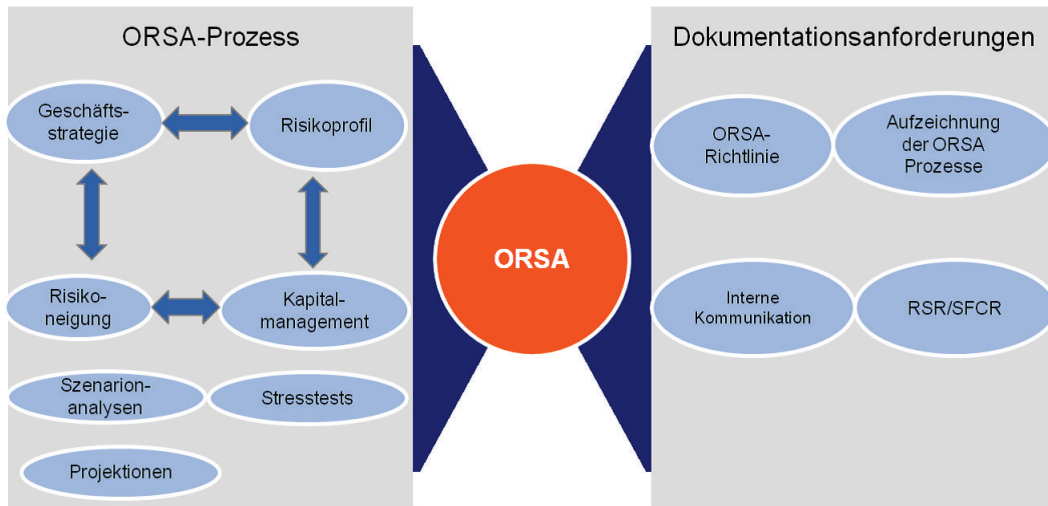


Abbildung 3.2: ORSA-Prozess und Dokumentation (Quelle: [10])

Kapitel 4

Modellierung der Solvenzquote in Solvency II über mehrere Jahre im Fall einer Nicht-Lebensversicherung

Im folgenden Kapitel wird ein einfaches Modell beschrieben und angewendet, um die Solvenzkapitalanforderung (*SCR*) für mehrere Jahre im Voraus zu berechnen, wie dies in ORSA vorgesehen ist. Hierbei sei auf den Artikel [14] verwiesen.

Mit der Einführung von ORSA unter der Säule II von Solvency II, fordern die Aufsichtsbehörden von den Versicherungsunternehmen, ihre eigenen Risiken und ihre Solvabilität nicht nur am Tag der Bestandsaufnahme, sondern auch für die Zukunft vorausschauend beurteilen zu können. Ein Versicherungsunternehmen muss in der Lage sein, seine wichtigsten Merkmale wie z.B. die Solvenzkapitalanforderung für die nächsten drei bis fünf Jahre zu planen, je nachdem wie der strategische Plan aussieht.

Um zu beweisen, dass die Solvenzkapitalanforderung (*SCR*) auch in der Zukunft erfüllt ist, muss das Versicherungsunternehmen den unsicheren, zugeordneten, zukünftigen Wert seines Vermögens und seiner Schulden schätzen. Diese Schätzung ist kompliziert, deshalb benötigen die Versicherungsunternehmen Prognosen für die wichtigsten Merkmale und aufsichtsrechtlichen Kennzahlen, um die Verteilung der Solvenzquote zu jedem Zeitpunkt anzunähern.

Um das Solvenzkapitalerfordernis (*SCR*) für mehrere Jahre im Voraus zu berechnen, wird ein einfaches Modell angewendet, um die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen einer Solvenzquote beurteilen zu können. Wir betrachten in dieser Arbeit Verträge für Nicht-Lebensversicherungen.

Als erstes wird ein Modell für die Darstellung der Zusammenhänge zwischen drei Arten von Risiken, finanziellen Risiken, versicherungstechnischen Risiken und

operationellen Risiken, beschrieben. Diese Risiken sind mit der Unsicherheit der zukünftigen Prämien verbunden.

Danach werden die zeitlichen Änderungen von Prämien, Verbindlichkeiten und Vermögenserträge berücksichtigt und die Methode für die Berechnung der Solvenzquote zukünftige Jahre abgeleitet.

In Kapitel 5 wird das hier vorgestellte Modell mit einem numerischen Beispiel illustriert.

4.1 Notation und allgemeine Struktur

Wir betrachten ein diskretes Zeitmodell mit Perioden $t = 0, \dots, T$ was einen Zeithorizont von 0 bis T bedeutet, wobei t sich auf die Zahlungen am Ende der Periode $[t, t + 1]$ bezieht.

- A_t bezeichnet den Marktwert des theoretischen Vermögens, investiert in S_t mit Rendite R_t ; Die Zinsen werden am Ende der Periode gutgeschrieben; der risikolose Zinssatz ist konstant und wird mit r bezeichnet
- L_t bezeichnet die versicherungstechnischen Rückstellungen und ist die Summe aus bester Schätzwert (Best Estimate = BEL_t) und Risikomarge (RM_t):

$$L_t = BEL_t + RM_t$$

Der beste Schätzwert (Best Estimate) setzt sich zusammen aus Rückstellungen für zu erwartete Zahlungen von bereits eingetretenen Schäden, diskontiert, plus Rückstellungen für zu erwartete Zahlungen von zukünftigen Schäden und Kosten abzüglich erwarteter Prämien, diskontiert, aber ohne Neugeschäft.

Die Risikomarge laut Solvency II wird nach dem Kapitalkostenansatz (Cost of Capital) berechnet

- D_t bezeichnet die Duration¹ der Verbindlichkeiten zum Zeitpunkt t
- P_t bezeichnet die verdienten Prämien (Zahlungen finden immer am Ende der Periode statt)
- C_t bezeichnet die Schadenszahlungen (Zahlungen finden immer am Ende der Periode statt)

¹(siehe [15] S. 57-62)

- β_t bezeichnet die kombinierte Schadenkostenquote (Combined Ratio)² zur Zeit t ; den eingenommenen Prämien P_t wird ein Kostenaufwand von $\beta_t \cdot P_t$ zugeordnet
- SCR_t bezeichnet die Solvenzkapitalanforderung laut Solvency II, und entspricht dem negativen Wert des 0,5% Quantils des für ein Jahr prognostizierten Vermögens. Anders formuliert: die Ruinwahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens für das Folgejahr beträgt maximal 0,5% bzw. wird vom Versicherungsunternehmen eine technische Sicherheit von 99,5% garantiert, dass alle im Folgejahr anfallenden Zahlungsverpflichtungen seitens des Versicherungsunternehmens bedient werden können.

Betrachten wir der Zufallsvariable

$$\chi_t = \frac{C_t + L_t - P_t}{1 + R_t}$$

welche die diskontierten Netto-Verbindlichkeiten zur der Zeit t bezeichnet.

Ausgehend von der obigen Definition der Solvenzkapitalanforderung (SCR) werden wir in folgenden die SCR berechnen (siehe [16]).

$$\mathbb{P}[A_1 - L_1 \geq 0] \geq 99,5\% \quad \text{wobei} \quad P_1 = 0$$

$$A_1 - L_1 = A_0 \cdot (1 + R_t) - C_1 - L_1 \quad \text{wobei} \quad A_0 = SCR_0 + L_0$$

$$A_1 - L_1 \geq 0 \quad \iff \quad (SCR_0 + L_0) \cdot (1 + R_t) - (C_1 + L_1) \geq 0$$

$$\iff \quad SCR_0 + L_0 \geq \frac{C_1 + L_1}{1 + R_1}$$

$$\iff \quad SCR_0 \geq \frac{C_1 + L_1}{1 + R_1} - L_0$$

$$\mathbb{P}[A_1 - L_1 \geq 0] = \mathbb{P} \left[SCR_0 \geq \frac{C_1 + L_1}{1 + R_1} - L_0 \right]$$

$$\mathbb{P}[A_1 - L_1 \geq 0] = 99,5\%$$

$$SCR_0 = VaR \left(\frac{C_1 + L_1}{1 + R_1}; 99,5\% \right) - L_0$$

²Schadenkostenquote = Schadensatz + Kostensatz (gibt das Verhältnis zwischen Prämieinnahmen und Aufwendungen für Schäden, Verwaltung und Abschlusskosten wieder)

$$Schadensatz = \frac{\text{wirksame Schäden}}{\text{abgegrenzten Prämien}}$$

$$Kostensatz = \frac{\text{Kosten}}{\text{abgegrenzten Prämien}}$$

Das gilt für jeden gegebenen Zeitpunkt, wobei die zukünftigen Prämien P_t berücksichtigt werden:

$$SCR_t = VaR_t \left(\frac{C_t + L_t - P_t}{1 + R_t}; 99,5\% \right) - L_t \quad (4.1)$$

mit $L_t = BEL_t + RM_t$.

Der Index t im VaR bedeutet, dass die Erwartungswerte und Varianzen von den verfügbaren Informationen zum Zeitpunkt t abhängig sind.

Der Risikomarge laut Solvency II wird nach dem Kapitalkostenansatz berechnet. Die Idee beim Kapitalkostenansatz ist, dass die Risikomarge jene Kapitalkosten widerspiegelt, die ein drittes Versicherungsunternehmen aufbringen müsste, um die Eigenmittelerfordernisse bei Übernahme des Portfolios zu erfüllen. Die Risikomarge soll marktkonsistent ermittelt werden. Die Risikomarge wird wie folgt berechnet: Die SCR wird in die Zukunft projiziert, die projizierten SCR werden mit dem Kapitalkostenfaktor ($\alpha = 6\%$) multipliziert, diskontiert und aufsummiert. Für eine genaue Beschreibung der Berechnung die Risikomarge nach dem Kapitalkostenansatz siehe [17].

$$RM_0 = \alpha \cdot \sum_{t=0}^T \mathbb{E}[SCR_t] \cdot e^{-rt}$$

Berücksichtigen wir die Proportionalität zwischen SCR_t und BEL_t :

$$SCR_t = k \cdot BEL_t,$$

dann folgt:

$$RM_0 = \alpha \cdot \sum_{t=0}^T \mathbb{E}[SCR_t] \cdot e^{-rt} = \alpha \cdot k \cdot \sum_{t=0}^T \mathbb{E}[BEL_t] \cdot e^{-rt}$$

$$RM_0 = \alpha \cdot k \cdot \sum_{t=0}^T \mathbb{E} \left[\sum_{u \geq t} \mathbb{E}_t[C_u] \cdot e^{-r(u-t)} \right] \cdot e^{-rt}$$

$$RM_0 = \alpha \cdot k \cdot \sum_{t=0}^T \left(\sum_{u \geq t} \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru} \right)$$

Wir können die Summen vertauschen, das Ergebnis umformen und erhalten:

$$\sum_{t=0}^T \left(\sum_{u \geq t} \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru} \right) = \sum_{u=0}^T u \cdot \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru}$$

$$\sum_{u=0}^T u \cdot \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru} = \frac{\sum_{u \geq 0} u \cdot \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru}}{\sum_{u \geq 0} \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru}} \cdot \sum_{u \geq 0} \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru} = D_0 \cdot BEL_0$$

$$\sum_{t=0}^T \left(\sum_{u \geq t} \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru} \right) = D_0 \cdot BEL_0$$

wobei $D_0 = \frac{\sum_{u \geq 0} u \cdot \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru}}{\sum_{u \geq 0} \mathbb{E}[C_u] \cdot e^{-ru}}$

Dann folgt:

$$RM_0 = \alpha \cdot k \cdot D_0 \cdot BEL_0$$

Laut Definition ist $k = \frac{SCR_t}{BEL_t}$ und für $t = 0$ $k = \frac{SCR_0}{BEL_0}$

$$RM_0 = \alpha \cdot \frac{SCR_0}{BEL_0} \cdot D_0 \cdot BEL_0 = \alpha \cdot D_0 \cdot SCR_0$$

Die Gleichung für SCR_0 können wir wie folgt umschreiben:

$$SCR_0 = VaR \left(\frac{C_1 + L_1}{1 + R_1}; 99, 5\% \right) - L_0$$

$$SCR_0 = VaR \left(\frac{C_1 + L_1}{1 + R_1}; 99, 5\% \right) - BEL_0 - \alpha \cdot D_0 \cdot SCR_0$$

$$SCR_0 + \alpha \cdot D_0 \cdot SCR_0 = VaR \left(\frac{C_1 + L_1}{1 + R_1}; 99, 5\% \right) - BEL_0$$

$$SCR_0 \cdot (1 + \alpha \cdot D_0) = VaR \left(\frac{C_1 + L_1}{1 + R_1}; 99, 5\% \right) - BEL_0$$

$$SCR_0 = \frac{1}{1 + \alpha \cdot D_0} \cdot \left(VaR \left(\frac{C_1 + L_1}{1 + R_1}; 99, 5\% \right) - BEL_0 \right)$$

Wie vorher schon angemerkt, gilt laut Definition $k = \frac{SCR_t}{BEL_t} = \frac{SCR_0}{BEL_0}$, das impliziert, dass die Formel für die Risikomarge für jedem gegebenem Zeitpunkt gilt:

$$RM_t = \alpha \cdot k \cdot D_t \cdot BEL_t = \alpha \cdot D_t \cdot SCR_t$$

Dann folgt die Berechnung von L_{t+1} :

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= BEL_{t+1} + RM_{t+1} = BEL_{t+1} + \alpha \cdot k \cdot D_{t+1} \cdot BEL_{t+1} \\ L_{t+1} &= BEL_{t+1} + \alpha \cdot \frac{SCR_t}{BEL_t} \cdot D_{t+1} \cdot BEL_{t+1} = BEL_{t+1} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{SCR_t}{BEL_t} \cdot D_{t+1} \right) \end{aligned}$$

$$L_{t+1} = h_t \cdot BEL_{t+1}$$

mit
$$h_t = 1 + \alpha \cdot \frac{SCR_t}{BEL_t} \cdot D_{t+1}$$

D_{t+1} wird durch D_t approximiert und daher
$$h_t = 1 + \alpha \cdot \frac{SCR_t}{BEL_t} \cdot D_t$$

$$\Rightarrow h_t \cdot BEL_t = BEL_t + \alpha \cdot SCR_t \cdot D_t = BEL_t + RM_t = L_t$$

Die diskontierten Netto-Verbindlichkeiten lauten daher

$$\chi_{t+1} = \frac{C_{t+1} + L_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}} = \frac{C_{t+1} + h_t \cdot BEL_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

Die Gleichung (4.1) wird wie folgt umgeschrieben:

$$SCR_t = VaR_t \left(\frac{C_{t+1} + h_t \cdot BEL_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}; 99, 5\% \right) - BEL_t - \alpha \cdot SCR_t \cdot D_t$$

$$SCR_t \cdot (1 + \alpha \cdot D_t) = VaR_t \left(\frac{C_{t+1} + h_t \cdot BEL_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}; 99, 5\% \right) - BEL_t$$

$$SCR_t = \frac{1}{1 + \alpha \cdot D_t} \cdot VaR_t \left(\frac{C_{t+1} + h_t \cdot BEL_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}; 99, 5\% \right) - BEL_t \quad (4.2)$$

wobei
$$h_t = 1 + \alpha \cdot \frac{SCR_t}{BEL_t} \cdot D_t.$$

Dieser Ausdruck ist kompliziert, da es sich um eine implizite Gleichung in SCR_t handelt, welche nur numerisch gelöst werden kann, wie später gezeigt wird.

Um SCR_t berechnen zu können, ist es in erste Linie notwendig, die Änderungen von verschiedenen Elementen wie den Wert des Vermögens, Verbindlichkeiten, Schadenszahlungen und Prämien zu betrachten.

4.2 Definition der Modelldynamik

Die Berechnung der Änderungen wird in zwei Schritten durchgeführt. Als erstes werden die Risikofaktoränderungen, für die vier Risikofaktoren definiert: Prämien, bester Schätzwert (Best Estimate), Schadenkostenquote (Combined Ratio) und Rendite. Zweitens wird die Formel für andere Variablen wie Schadensansprüche und Vermögenswerte abgeleitet.

4.2.1 Risikofaktoränderungen

Zur Beschreibung der oben genannten Risikofaktoren wird die logarithmische Normalverteilung verwendet. Bedingt die Information zur Zeit t , werden die Variablen BEL_{t+1} , P_{t+1} , β_{t+1} und S_{t+1} mit Hilfe von logarithmisch normalverteilten Zufallsvariablen wie folgt definiert:

$$P_{t+1} = P_t \cdot X_{t+1,p} \quad \text{mit} \quad X_{t+1,p} \sim \mathcal{LN}\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2}, \sigma_p^2\right)$$

$$\beta_t \sim \mathcal{LN}\left(\ln(\beta) - \frac{\sigma_\beta^2}{2}, \sigma_\beta^2\right)$$

$$BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} = BEL_t \cdot X_{t+1,l} \quad \text{mit} \quad X_{t+1,l} \sim \mathcal{LN}\left(\mu_l - \frac{\sigma_l^2}{2}, \sigma_l^2\right)$$

$$S_{t+1} = S_t \cdot X_{t+1,a} \quad \text{mit} \quad X_{t+1,a} \sim \mathcal{LN}\left(\mu_a - \frac{\sigma_a^2}{2}, \sigma_a^2\right)$$

S_{t+1} ist der Vermögenswert mit Rendite $\frac{S_{t+1}}{S_t} = 1 + R_{t+1}$ wobei β eine fixe Schadenkostenquote ist und die Parameter σ_β , (μ_p, σ_p) , (μ_l, σ_l) und (μ_a, σ_a) die Verteilung der unabhängigen logarithmisch normalverteilten Risikofaktoren beschreiben.

Das bedeutet, z.B. für die Prämien:

$$P_1 = P_0 \cdot X_{1,p}$$

$$P_2 = P_1 \cdot X_{2,p} = P_0 \cdot X_{1,p} \cdot X_{2,p}$$

.

$$P_{t+1} = P_t \cdot X_{t+1,p} = P_0 \cdot X_{1,p} \cdot X_{2,p} \cdot \dots \cdot X_{t+1,p}$$

$$P_{t+1} = P_0 \cdot \exp(\ln(X_{1,p}) + \ln(X_{2,p}) + \dots + \ln(X_{t+1,p}))$$

wobei $\ln(X_{1,p}) + \ln(X_{2,p}) + \dots + \ln(X_{t+1,p})$ ein Irrfahrt ist.

$$X_{t+1,p} \sim \mathcal{LN}\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2}, \sigma_p^2\right) \Rightarrow \ln X_{t+1,p} \sim \mathcal{N}\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2}, \sigma_p^2\right)$$

$$\ln X_{t+1,p} = \left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2}\right) + \sigma_p \cdot \varepsilon_{t+1,p} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{t+1,p} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$X_{t+1,p} = \exp\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \cdot \varepsilon_{t+1,p}\right)$$

Die Risikofaktoränderungen können daher wie folgt dargestellt werden:

$$P_{t+1} = P_t \cdot \exp\left(\mu_p - \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_p \cdot \varepsilon_{t+1,p}\right)$$

$$\beta_{t+1} = \beta \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_\beta^2}{2} + \sigma_\beta \cdot \varepsilon_{t+1,\beta}\right)$$

$$S_{t+1} = S_t \cdot \exp\left(\mu_a - \frac{\sigma_a^2}{2} + \sigma_a \cdot \varepsilon_{t+1,a}\right)$$

$$BEL_{t+1} = BEL_t \cdot \exp\left(\mu_l - \frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right) + \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}$$

wobei $\varepsilon_{t+1,p}$, $\varepsilon_{t+1,\beta}$, $\varepsilon_{t+1,a}$ und $\varepsilon_{t+1,l}$ unabhängige standard normalverteilte Zufallsvariablen sind.

Die Änderungsrate der Reserve μ_l ist von der Diskontierung und der Höhe der bezahlten Schäden abhängig. Daher wird die folgende einfache Beziehung angenommen:

$\mu_l = r + \ln(1 - \varphi)$, wobei φ eine konstante Senkung der Schadenszahlungen zwischen zwei Zeitpunkten ist.

Basierend auf diesen Annahmen können wir die Gleichung für die Variable BEL_{t+1} wie folgt beschreiben:

$$BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} = BEL_t \cdot X_{t+1,l} = BEL_t \cdot \exp\left(\mu_l - \frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right)$$

wird μ_l eingesetzt, dann folgt:

$$BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} = BEL_t \cdot \exp\left(r + \ln(1 - \varphi) - \frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right)$$

$$BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} = (1 - \varphi) \cdot BEL_t \cdot \exp\left(r - \frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right)$$

Division durch e^r ergibt

$$\begin{aligned} e^{-r} \cdot (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_t) &= \\ &= BEL_t \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right) - \varphi \cdot BEL_t \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right) \\ &= BEL_t \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right) = \\ &= e^{-r} \cdot (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) + \varphi \cdot BEL_t \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right) \end{aligned}$$

oder anders geschrieben

$$\begin{aligned} BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} &= \\ &= BEL_t \cdot \exp\left(r - \frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right) - \varphi \cdot BEL_t \cdot \exp\left(r - \frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right) \quad (4.3) \end{aligned}$$

Die Gleichung (4.3) spiegelt den Verbrauch der Reserven in der Abwicklung von Schadenreserven wider. Die Änderung des besten Schätzwertes wird durch die reduzierte Abzinsung der bezahlten Schäden verursacht.

Durch den Vergleich der zwei Termen in der Gleichung, ergibt sich für die Schäden:

$$C_{t+1} = \varphi \cdot BEL_t \cdot \exp\left(r - \frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right)$$

Wird in der Gleichung (4.3) durch $1 - \varphi$ dividiert, dann ergibt sich:

$$\frac{1}{1 - \varphi} \cdot (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) = BEL_t \cdot \exp\left(r - \frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l}\right)$$

$$C_{t+1} = \frac{\varphi}{1-\varphi} \cdot (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) = \theta \cdot (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1})$$

mit $\theta = \frac{\varphi}{1-\varphi}$.

Aufgrund der getroffenen Annahmen und mit Verwendung von Martingaleigenschaft von BEL_t erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t \left[BEL_t \cdot \exp \left(-\frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l} \right) \right] = \\ & = \mathbb{E}_t \left[e^{-r} \cdot (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) + \varphi \cdot BEL_t \cdot \exp \left(-\frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l} \right) \right] \\ & BEL_t \cdot \mathbb{E}_t \left[\exp \left(-\frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l} \right) \right] = \mathbb{E}_t \left[e^{-r} (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) + e^{-r} \cdot C_{t+1} \right] \end{aligned}$$

mit $\mathbb{E}_t \left[\exp \left(-\frac{\sigma_l^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l} \right) \right] = 1$ folgt:

$$BEL_t = \mathbb{E}_t \left[e^{-r} \cdot (C_{t+1} + BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) \right]$$

4.2.2 Entwicklungsgleichung anderer Variablen

Nachdem die Prozesse für die Änderung der verschiedenen vorher definierten Bilanzpositionen definiert sind, ist es nun notwendig, die Verteilung der diskontierten Netto-Verbindlichkeiten

$$\chi_t = \frac{C_t + L_t - P_t}{1 + R_t}$$

zu analysieren. Mit der Verwendung der vorher beschriebenen Risikofaktoränderungen wird die Entwicklung der diskontierten Netto-Verbindlichkeit wie folgt ausgedrückt.

Satz 1. *Für die diskontierten Netto-Verbindlichkeiten gilt:*

a.) *Ohne Risikomarge:*

$$\chi_{t+1} = \frac{(1 + \theta) \cdot BEL_{t+1} - (1 + \theta \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}}{1 + R_{t+1}} \quad (4.4)$$

b.) Mit Risikomarge

$$\chi_{t+1} = \frac{(h_t + \theta) \cdot BEL_{t+1} - (1 + \theta \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}}{1 + R_{t+1}} \quad (4.5)$$

wobei $\theta = \frac{\varphi}{1 - \varphi}$ und $h_t = 1 + \alpha \cdot \frac{SCR_t}{BEL_t} \cdot D_t$.

Beweis. a.) Ohne Risikomarge: $L_{t+1} = BEL_{t+1}$

Wir gehen von den Gleichung $\chi_{t+1} = \frac{C_{t+1} + L_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$

aus, setzen wir C_{t+1} bzw. L_{t+1} ein und erhalten:

$$\chi_{t+1} = \frac{\theta \cdot (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) + BEL_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

$$\chi_{t+1} = \frac{(1 + \theta) \cdot BEL_{t+1} - (1 + \theta \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

b.) Mit Risikomarge: $L_{t+1} = BEL_{t+1} + RM_{t+1} = h_t \cdot BEL_{t+1}$

$$\chi_{t+1} = \frac{C_{t+1} + L_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}} = \frac{\theta \cdot (BEL_{t+1} - \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) + h_t \cdot BEL_{t+1} - P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

$$\chi_{t+1} = \frac{(h_t + \theta) \cdot BEL_{t+1} - (1 + \theta \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}}{1 + R_{t+1}}$$

□

QIS5 berechnet den Solvenzkapitalbedarf (SCR) ohne Berücksichtigung der Auswirkungen durch die Risikomarge (siehe CEIOPS[18]), aber diese Vereinfachung führt zu einer Überschätzung der SCR .

In diesem Kapitel werden die Berechnungen für die beiden Fälle durchgeführt.

Sobald der Solvenzkapitalbedarf bestimmt ist, können alle anderen Variablen berechnet werden.

Satz 2. Für den Wert des Vermögens und der versicherungstechnischen Rückstellungen gilt:

a.) Wert des Vermögens:

$$A_t = A_{t-1} \cdot (1 + R_t) - C_t + P_t \quad (4.6)$$

b.) Wert der versicherungstechnischen Rückstellungen:

$$L_t = BEL_t + \alpha \cdot D_t \cdot SCR_t \quad (4.7)$$

Beweis. a.) Laut Definition, das Vermögen ergibt sich aus dem Vorjahresvermögen unter Berücksichtigung der Zinsen und der verdienten Prämien abzüglich der Schadenszahlungen.

b.) Laut Definition von L_t und nach Einsetzen der Risikomarge erhalten wir:

$$L_t = BEL_t + RM_t = BEL_t + \alpha \cdot D_t \cdot SCR_t$$

□

Danach kann die jährliche Solvenzquote und die Reingewinnquote berechnet werden.

Satz 3. Für die Solvenzquote und Reingewinnquote gilt:

a.) Solvenzquote:

$$s_t = \frac{A_t - L_t}{SCR_t} \quad (4.8)$$

b.) Reingewinnquote:

$$w_t = \frac{A_t - L_t}{A_{t-1} - L_{t-1}} \quad (4.9)$$

Zuerst muss aber die Verteilung der diskontierten Netto-Verbindlichkeiten χ_{t+1} , bedingt die Information zur Zeit t bestimmt werden.

4.3 Berechnung der Verteilung der diskontierten Netto-Verbindlichkeiten

Wie aus den Gleichungen (4.4) und (4.5) ersichtlich, ist die Zufallsvariable χ_{t+1} eine Zusammensetzung von logarithmisch normalverteilten Zufallsvariablen. Eine gewichtete Summe von logarithmisch normalverteilten Zufallsvariablen im Zähler und eine logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable im Nenner.

Es ist bekannt, dass die Summe von logarithmisch normalverteilten Zufallsvariablen nicht logarithmisch normalverteilt ist, aber sie kann durch eine logarithmische Normalverteilung approximiert werden.

Die Zufallsvariable im Zähler der Gleichungen (4.4) und (4.5), die Netto-Verbindlichkeiten, wird durch eine logarithmische Normalverteilung approximiert, deren Parameter durch die Momentenmethode bestimmt werden. In Kapitel 6 wird allgemein die logarithmisch normalverteilte Approximation zweier logarithmisch normalverteilter Zufallsvariablen beschrieben.

4.3.1 Verteilung der Netto-Verbindlichkeiten

Die Netto-Verbindlichkeit χ_{t+1}^N , welche dem Zähler von χ_{t+1} , entspricht, ist die Summe von zwei logarithmisch normalverteilten Variablen minus einer weiteren logarithmisch normalverteilten Variablen. Wir betrachten wie zuvor die beiden Fälle.

Satz 4. Für die Netto-Verbindlichkeit χ_{t+1}^N gilt:

a.) Ohne Risikomarge:

$$\chi_{t+1}^N = (1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} - (1 - \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1} \quad (4.10)$$

b.) Mit Risikomarge:

$$\chi_{t+1}^N = (h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} - (1 - h_t \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1} \quad (4.11)$$

Beweis. a.) Ohne Risikomarge:

Wir gehen vom Zähler der Gleichung (4.4) aus, berücksichtigen die Risikofaktoränderung und erhalten die Gleichung (4.10).

$$\chi_{t+1}^N = (1 + \theta) \cdot BEL_{t+1} - (1 + \theta \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}$$

$$\chi_{t+1}^N = (1 + \theta) \cdot (BEL_t \cdot X_{t+1,l} + \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) - (1 + \theta \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}$$

$$\chi_{t+1}^N = (1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} + \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} + \theta \cdot \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} - P_{t+1} - \theta \cdot \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}$$

$$\chi_{t+1}^N = (1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} + \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} - P_{t+1}$$

$$\chi_{t+1}^N = (1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} - (1 - \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}$$

b.) Mit Risikomarge:

Ähnlich wie in Punkt a.) wir gehen vom Zähler der Gleichung (4.5) aus, berücksichtigen die Risikofaktoränderung und erhalten die Gleichung (4.11).

$$\chi_{t+1}^N = (h_t + \theta) \cdot BEL_{t+1} - (1 + \theta \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}$$

$$\chi_{t+1}^N = (h_t + \theta) \cdot (BEL_t \cdot X_{t+1,l} + \beta_{t+1} \cdot P_{t+1}) - (1 + \theta \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}$$

$$\begin{aligned}\chi_{t+1}^N &= (h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} + h_t \cdot \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} + \theta \cdot \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} - P_{t+1} - \theta \cdot \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} \\ \chi_{t+1}^N &= (h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} + h_t \cdot \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} - P_{t+1} \\ \chi_{t+1}^N &= (h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} - (1 - h_t \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}\end{aligned}$$

□

Satz 5. Für die Zufallsvariable $\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}}$ gilt:

a.) Ohne Risikomarge:

$$\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}} = (1 + \theta) \cdot \frac{BEL_t}{P_t} \cdot \exp\left(\mu_l - \mu_p - \frac{\sigma_l^2}{2} + \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l} - \sigma_p \cdot \varepsilon_{t+1,p}\right) + \beta_{t+1} - 1$$

b.) Mit Risikomarge

$$\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}} = (h_t + \theta) \cdot \frac{BEL_t}{P_t} \cdot \exp\left(\mu_l - \mu_p - \frac{\sigma_l^2}{2} + \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l} - \sigma_p \cdot \varepsilon_{t+1,p}\right) + h_t \cdot \beta_{t+1} - 1$$

Beweis. a.) Ohne Risikomarge:

Die Gleichung (4.10) wird durch $P_{t+1} = P_t \cdot X_{t+1,p}$ dividiert und wir erhalten:

$$\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}} = \frac{(1 + \theta) BEL_t \cdot X_{t+1,l} + \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} - P_{t+1}}{P_{t+1}}$$

$$\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}} = (1 + \theta) \cdot \frac{BEL_t \cdot X_{t+1,l}}{P_t \cdot X_{t+1,p}} + \beta_{t+1} - 1$$

Wenn wir berücksichtigen, dass die $X_{t+1,l}$ und $X_{t+1,p}$ logarithmisch normalverteilten Variablen sind, wird die vorherige Gleichung wie folgt umgeschrieben:

$$\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}} = (1 + \theta) \cdot \frac{BEL_t}{P_t} \cdot \exp\left(\mu_l - \mu_p - \frac{\sigma_l^2}{2} + \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l} - \sigma_p \cdot \varepsilon_{t+1,p}\right) + \beta_{t+1} - 1$$

b.) Mit Risikomarge:

Ähnlich wie im Fall a.) die Gleichung (4.11) wird durch $P_{t+1} = P_t \cdot X_{t+1,p}$ dividiert und wir erhalten:

$$\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}} = \frac{(h_t + \theta) BEL_t \cdot X_{t+1,l} + h_t \cdot \beta_{t+1} \cdot P_{t+1} - P_{t+1}}{P_{t+1}}$$

$$\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}} = (h_t + \theta) \cdot \frac{BEL_t \cdot X_{t+1,l}}{P_t \cdot X_{t+1,p}} + h_t \cdot \beta_{t+1} - 1$$

Wenn wir berücksichtigen, dass die $X_{t+1,l}$ und $X_{t+1,p}$ logarithmisch normalverteilten Variablen sind, wird die vorherige Gleichung wie folgt umgeschrieben:

$$\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}} = (h_t + \theta) \cdot \frac{BEL_t}{P_t} \cdot \exp\left(\mu_l - \mu_p - \frac{\sigma_l^2}{2} + \frac{\sigma_p^2}{2} + \sigma_l \cdot \varepsilon_{t+1,l} - \sigma_p \cdot \varepsilon_{t+1,p}\right) + h_t \cdot \beta_{t+1} - 1$$

□

Das bedeutet, dass in beiden Fällen $\frac{\chi_{t+1}^N}{P_{t+1}}$ als $\frac{X + Y - 1}{Z}$ dargestellt werden kann, wobei X , Y und Z logarithmisch normalverteilten Variablen sind.

Um zu zeigen, dass χ_{t+1}^N näherungsweise logarithmisch normalverteilt ist, reicht es zu zeigen, dass $X + Y - 1$ näherungsweise logarithmisch normalverteilt ist, und es müssen die Parameter ermittelt werden, welche die logarithmisch normalverteilte Approximation bestimmen.

In Situationen, wo die Volatilität nicht zu signifikant ist, kann die logarithmisch normalverteilte Approximation verwendet werden (näher beschrieben in Dufrense [22]).

Es ist bekannt, dass diese Approximation für höherer Standardabweichungen, zur Unterschätzung der Erwartungswerte und zur Überschätzung der Varianzen der Summe von logarithmischen Normalverteilungen neigt.

Diese Approximation kann nicht nur bei Summen, sondern auch bei einen modifizierten Fall von logarithmischen Normalverteilungen wie $X + Y - 1$, angewendet werden, aber nur wenn $X + Y \gg 1$, weil die Voraussetzung für eine logarithmische Normalverteilung eine positive Zufallsvariable ist (d.h. der Zähler muss positiv sein).

Der Nachweis, dass $X + Y - 1$ mit $X \sim \mathcal{LN}\left(\mu_X - \frac{\sigma_X^2}{2}, \sigma_X^2\right)$, $Y \sim \mathcal{LN}\left(\mu_Y - \frac{\sigma_Y^2}{2}, \sigma_Y^2\right)$ eine logarithmisch normalverteilte Variable ist, wurde mit Hilfe von Jarque-Bera- und Anderson-Darling-Tests durchgeführt.

Der Jarque-Bera-Test prüft anhand der Schiefe und der Wölbung in den Daten, ob eine Normalverteilung vorliegt. Die Teststatistik JB wird wie folgt definiert:

$$JB = \frac{n}{6} \cdot \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4}\right)$$

dabei ist n Anzahl der Beobachtungen, mit S wird die Schiefe und mit K die Wölbung bezeichnet.

Es gilt $JB \sim \chi_2^2$; das bedeutet, dass die Teststatistik JB asymptotisch Chi-Quadrat verteilt mit zwei Freiheitsgraden ist. Es gibt zwei Hypothesen:

H_0 : Die Stichprobe ist normalverteilt

H_1 : Die Stichprobe ist nicht normalverteilt (siehe [23]).

Mit dem Anderson-Darling-Anpassungstest kann festgestellt werden, ob die Häufigkeitsverteilung der Daten einer Stichprobe von einer vorgegebenen hypothetischen Wahrscheinlichkeitsverteilung abweicht. Dieser Anpassungstest wird am häufigsten zur Untersuchung einer Stichprobe auf Normalverteilung angewendet (siehe [24])

Nach diesen Tests können wir die folgende (statistische) Aussage treffen: $X+Y-1$ ist annähernd logarithmisch normalverteilt mit einer Fehler-Wahrscheinlichkeit von $p \geq 5\%$.

4.3.2 Approximation der diskontierten Netto-Verbindlichkeiten

Durch Approximieren der Variable $C_{t+1} + L_{t+1} - P_{t+1}$ bedingt die Information zum gegebenen Zeitpunkt t durch eine logarithmische Normalverteilung ergibt sich, dass die Netto-Verbindlichkeit χ_{t+1}^N durch eine logarithmische Normalverteilung approximiert werden kann.

Betrachten wir χ_{t+1}^N als eine logarithmische normalverteilte Zufallsvariable X mit Parametern (μ, σ) , dann gilt $X = e^Y$ und daher

$$\mathbb{P}[X \leq x_p] = p \quad \iff \quad \mathbb{P}[e^Y \leq x_p] = p \quad \iff \quad \mathbb{P}[Y \leq \ln(x_p)] = p$$

$$\Phi\left(\frac{\ln(x_p) - \mu}{\sigma}\right) = p \quad \iff \quad \frac{\ln(x_p) - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(p)$$

$$\ln(x_p) = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p)$$

$$x_p = VaR_p(X) = \exp(\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p))$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Die Berechnung dieses Quantils erfolgt durch die Berechnung der Parameter (μ, σ) der logarithmisch normalverteilten Approximation der Netto-Verbindlichkeiten χ_{t+1}^N .

Für eine logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable gilt:

$$\text{Erwartungswert von } X: \quad \mathbb{E}[X] = m = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\text{Varianz von } X: \quad \mathbb{V}[X] = \nu^2 = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$$

Mit der Hilfe vom Erwartungswert und der Varianz von X ist es daher möglich, die Parameter (μ, σ) zu berechnen:

$$\nu = m \cdot \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \frac{\nu}{m} = \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}$$

$$\omega^2 = \frac{\nu^2}{m^2} = \exp(\sigma^2) - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma^2 = \ln(1 + \omega^2)$$

$$\ln(m) = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \ln(m) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\mu = \ln(m) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + \omega^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \ln\left(\frac{m}{\sqrt{1 + \omega^2}}\right)$$

Um die Parameter (μ, σ) zu bestimmen werden die bedingte Erwartungswert und die bedingte Varianz der Netto-Verbindlichkeiten χ_{t+1}^N berechnet. Bei der Berechnung vom Erwartungswert und Varianz betrachten wir wieder die beiden Fälle mit und ohne Risikomarge.

Satz 6. *Mit obiger Approximation ergibt sich für den Zähler der diskontierten Netto-Verbindlichkeiten, ohne Risikomarge:*

$$\mathbb{E}_t [\chi_{t+1}^N] = (1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot \exp(\mu_l) - (1 - \beta) \cdot P_t \cdot \exp(\mu_p) \quad (4.12)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N] &= (1 + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_l) \cdot (\exp(\sigma_l^2) - 1) + \beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \cdot \\ &P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p + \sigma_p^2) + P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) \cdot (1 - \beta)^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Beweis. Bei der Berechnung der Erwartungswert und die Varianz der Netto-Verbindlichkeiten gehen wir von der Gleichung (4.10) aus und berücksichtigen die Unabhängigkeit der logarithmisch normalverteilten Risikofaktoränderungen.

Berechnung der Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t [\chi_{t+1}^N] &= \mathbb{E}_t [(1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} - (1 - \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}] \\ &= (1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot \mathbb{E}_t [X_{t+1,l}] - (1 - \mathbb{E}_t [\beta_{t+1}]) \cdot \mathbb{E}_t [P_{t+1}] \\ \mathbb{E}_t [X_{t+1,l}] &= \exp(\mu_l); \quad \mathbb{E}_t [\beta_{t+1}] = \beta; \quad \mathbb{E}_t [P_{t+1}] = P_t \cdot \mathbb{E}_t [X_{t+1,p}] = P_t \cdot \exp(\mu_p) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_t [\chi_{t+1}^N] = (1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot \exp(\mu_l) - (1 - \beta) \cdot P_t \cdot \exp(\mu_p)$$

Berechnung der Varianz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N] &= \mathbb{V}_t [(1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} - (1 - \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}] \\
&= \mathbb{V}_t [(1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l}] + \mathbb{V}_t [(1 - \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}] \\
\mathbb{V}_t [(1 + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l}] &= (1 + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \mathbb{V}_t [X_{t+1,l}] \\
&= (1 + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_l) \cdot (\exp(\sigma_l^2) - 1) \\
\mathbb{V}_t [(1 - \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}] &= \mathbb{V}_t [1 - \beta_{t+1}] \cdot \mathbb{V}_t [P_{t+1}] + \mathbb{V}_t [1 - \beta_{t+1}] \cdot \mathbb{E}_t [P_{t+1}]^2 + \\
&\quad \mathbb{V}_t [P_{t+1}] \cdot \mathbb{E}_t [1 - \beta_{t+1}]^2 \\
\mathbb{V}_t [1 - \beta_{t+1}] &= \mathbb{V}_t [\beta_{t+1}] = \beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \\
\mathbb{V}_t [P_{t+1}] &= P_t^2 \cdot \mathbb{V}_t [X_{t+1,p}] = P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) \\
\mathbb{E}_t [P_{t+1}]^2 &= P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \\
\mathbb{E}_t [1 - \beta_{t+1}]^2 &= (1 - \mathbb{E}_t [\beta_{t+1}])^2 = (1 - \beta)^2 \\
\mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N] &= (1 + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_l) \cdot (\exp(\sigma_l^2) - 1) + \\
&\quad \beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \cdot P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) + \\
&\quad \beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \cdot P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) + \\
&\quad P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) \cdot (1 - \beta)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N] &= (1 + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_l) \cdot (\exp(\sigma_l^2) - 1) + \\
&\beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \cdot P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p + \sigma_p^2) + P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) \cdot (1 - \beta)^2 \quad \square
\end{aligned}$$

Satz 7. *Mit obiger Approximation ergibt sich für den Zähler der diskontierten Netto-Verbindlichkeiten, mit Risikomarge:*

$$\mathbb{E}_t [\chi_{t+1}^N] = (h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot \exp(\mu_l) - (1 - h_t \cdot \beta) \cdot P_t \cdot \exp(\mu_p) \quad (4.14)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N] &= (h_t + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_l) \cdot (\exp(\sigma_l^2) - 1) + h_t^2 \cdot \beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \cdot \\
&\quad P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p + \sigma_p^2) + P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) \cdot (1 - h_t \cdot \beta)^2 \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Beweis. Ähnlich wie im Satz 6 bei der Berechnung der Erwartungswert und die Varianz der Netto-Verbindlichkeiten gehen wir von der Gleichung (4.11) aus und berücksichtigen die Unabhängigkeit der logarithmisch normalverteilten Risikofaktorränderungen.

Berechnung der Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t [\chi_{t+1}^N] &= \mathbb{E}_t [(h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} - (1 - h_t \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}] \\
&= (h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot \mathbb{E}_t [X_{t+1,l}] - (1 - h_t \cdot \mathbb{E}_t [\beta_{t+1}]) \cdot \mathbb{E}_t [P_{t+1}]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}_t [\chi_{t+1}^N] = (h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot \exp(\mu_l) - (1 - h_t \cdot \beta) \cdot P_t \cdot \exp(\mu_p)$$

Berechnung der Varianz:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N] &= \mathbb{V}_t [(h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l} - (1 - h_t \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}] \\
&= \mathbb{V}_t [(h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l}] + \mathbb{V}_t [(1 - h_t \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}] \\
\mathbb{V}_t [(h_t + \theta) \cdot BEL_t \cdot X_{t+1,l}] &= (h_t + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \mathbb{V}_t [X_{t+1,l}] \\
&= (h_t + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_l) \cdot (\exp(\sigma_l^2) - 1) \\
\mathbb{V}_t [(1 - h_t \cdot \beta_{t+1}) \cdot P_{t+1}] &= \mathbb{V}_t [1 - h_t \cdot \beta_{t+1}] \cdot \mathbb{V}_t [P_{t+1}] + \mathbb{V}_t [1 - h_t \cdot \beta_{t+1}] \cdot \\
&\quad \mathbb{E}_t [P_{t+1}]^2 + \mathbb{V}_t [P_{t+1}] \cdot \mathbb{E}_t [1 - h_t \cdot \beta_{t+1}]^2 \\
\mathbb{V}_t [1 - h_t \cdot \beta_{t+1}] &= h_t^2 \cdot \mathbb{V}_t [\beta_{t+1}] = h_t^2 \cdot \beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \\
\mathbb{V}_t [P_{t+1}] &= P_t^2 \cdot \mathbb{V}_t [X_{t+1,p}] = P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) \\
\mathbb{E}_t [P_{t+1}]^2 &= P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \\
\mathbb{E}_t [1 - h_t \cdot \beta_{t+1}]^2 &= (1 - h_t \cdot \mathbb{E}_t [\beta_{t+1}])^2 = (1 - h_t \cdot \beta)^2 \\
\mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N] &= (h_t + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_l) \cdot (\exp(\sigma_l^2) - 1) + \\
&\quad h_t^2 \cdot \beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \cdot P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) + \\
&\quad h_t^2 \cdot \beta^2 \cdot (\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \cdot P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) + \\
&\quad P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) \cdot (1 - h_t \cdot \beta)^2
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N] = (h_t + \theta)^2 \cdot BEL_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_l) \cdot (\exp(\sigma_l^2) - 1) + h_t^2 \cdot \beta^2 \cdot$$

$$(\exp(\sigma_\beta^2) - 1) \cdot P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p + \sigma_p^2) + P_t^2 \cdot \exp(2 \cdot \mu_p) \cdot (\exp(\sigma_p^2) - 1) \cdot (1 - h_t \cdot \beta)^2 \quad \square$$

In beiden Fällen sind die Parameter für die Variable χ_{t+1}^N :

$$\omega_t^2 = \frac{\mathbb{V}_t [\chi_{t+1}^N]}{\mathbb{E}_t [\chi_{t+1}^N]^2}$$

$$\sigma_t^2 = \ln(1 + \omega_t^2)$$

$$\mu_t = \ln\left(\frac{\mathbb{E}_t [\chi_{t+1}^N]}{\sqrt{1 + \omega_t^2}}\right)$$

Wir wissen, dass

$$\chi_{t+1} = \frac{\chi_{t+1}^N}{1 + R_{t+1}} = \frac{\chi_{t+1}^N}{\frac{S_{t+1}}{S_t}} = \frac{\chi_{t+1}^N}{\frac{S_t \cdot X_{t+1,a}}{S_t}} = \frac{\chi_{t+1}^N}{X_{t+1,a}}$$

wobei $\chi_{t+1}^N \sim \mathcal{LN}(\mu_t, \sigma_t^2)$ und $X_{t+1,a} \sim \mathcal{LN}\left(\mu_a - \frac{\sigma_a^2}{2}, \sigma_a^2\right)$

Das bedeutet, dass χ_{t+1} bedingt die Information zum Zeitpunkt t , ebenfalls eine logarithmische Normalverteilung mit den Parametern $\mu_t(\chi)$ und $\sigma_t(\chi)$, besitzt:

$$\mu_t(\chi) = \mu_t - \mu_a + \frac{\sigma_a^2}{2}$$

$$\sigma_t^2(\chi) = \sigma_t^2 - \sigma_a^2$$

Der Value at Risk berechnet sich wie folgt:

$$VaR_{99,5}(\chi_{t+1}) = \exp(\mu_t(\chi) + \sigma_t(\chi) \cdot \Phi^{-1}(99,5\%))$$

Die Gleichung (4.2) können wir daher wie folgt umschreiben:

$$SCR_t = \frac{1}{1 + \alpha \cdot D_t} \cdot (\exp(\mu_t(\chi) + \sigma_t(\chi) \cdot \Phi^{-1}(99,5\%)) - BEL_t) \quad (4.16)$$

Hier sind tatsächlich $\mu_t(\chi)$ und $\sigma_t^2(\chi)$ von SCR_t abhängig,

weil χ_{t+1} von $h_t = 1 + \alpha \cdot \frac{SCR_t}{BEL_t} \cdot D_t$ abhängt.

Diese Gleichung kann nur mittels einiger Standard-Algorithmen numerisch gelöst werden.

Der Wert des Vermögens und der versicherungstechnischen Rückstellungen bzw. die Solvenzquote und die Reingewinnquote werden, wie im Abschnitt 4.2.2 im Satz 2 bzw. Satz 3 definiert, berechnet.

Kapitel 5

Ein einfaches Beispiel in ORSA

In diesem Kapitel wird das in Kapitel 4 vorgestellte Modell im Zusammenhang mit dem ORSA dargestellt, wobei an den Artikel [14] verwiesen sei. Das Ziel dieses Beispiels ist es zu zeigen, dass das Modell in diesen Rahmen passt und die quantitativen Anforderungen liefert. Es wird für ein Nicht-Lebensversicherungsunternehmen angewendet in einem allgemeineren Zusammenhang mit ORSA wie in Solvency II definiert.

Dieser Prozess beinhaltet folgende Schritte:

- 1. Schritt: Wir definieren den Risikoappetit des Unternehmens, die Risikoparameter und den Zeithorizont unter der Annahme, dass das Unternehmen weitergeführt wird.
- 2. Schritt: Berechnung der definierten Risikoparameter, Projektion auf das erste Jahr und Überprüfung, ob die Risikoappetitgrenzen erfüllt sind.
- 3. Schritt: Die operationellen Grenzen des Risikos werden definiert in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Schritt 2.
- 4. Schritt: Überprüfung, ob die Risikoappetitgrenzen für die Dauer des strategischen Plans abgesichert sind.
- 5. Schritt: Durchführung einer Sensitivitätsanalyse, um die Stabilität des strategischen Plans beurteilen zu können.

5.1 Beschreibung des Unternehmens

Das Krankenversicherungstechnische Risiko enthält Krankenversicherungsverbindlichkeiten, die ähnlich wie Lebensversicherungen oder ähnlich wie Nicht-Lebensversicherungen betrieben werden.

Für das Beispiel betrachten wir ein Versicherungsunternehmen mit einem einzigen Krankenversicherungsvertrag nach Art der Nicht-Lebensversicherung im Sinne von Solvency II.

Dieser Vertrag hat die folgende allgemeine Struktur:

- Durchschnittliche Combined Ratio von $\beta_0 = 100\%$,
- Durchschnittlicher Prämienabsatz von $P_0 = 75 \text{ Millionen Euro} = C_0$,
- Vermögens-Allokation bestehend aus 20% Aktien und 80% Anleihen (einjährige Staatsanleihen),
- Solvenzquote zu Beginn $s_0 = 204\%$,
- Der strategische Plan ist es, die aktuelle Risikoprofil-Struktur beizubehalten (Ziel wäre, dass der Wert bei $C_t = 75 \text{ Millionen Euro}$ bleibt und der Vermögens-Allokation gleich bleibt),
- Die Annahme in diesem Beispiel ist, dass die Duration der Verbindlichkeiten stabil über die Zeit ist: $D_0 = 2$. Dieser Wert basiert auf einer statistische Analyse eines französischen Versicherungsportfolios.

Basierend auf einer statistischen Analyse des Portfolios, konnte das Unternehmen die logarithmisch normalverteilten Merkmale ihrer Risiken bestätigen. Die Parameter dieser Risiken sind:

- Erwartungswert und Standardabweichung (Volatilität) der Prämien: $\mu_p = 0$; $\sigma_p = 1\%$,
- Volatilität und Rückgangsgeschwindigkeit der Schäden: $\sigma_l = 10\%$; $\varphi = 80\%$,
- Volatilität und Sollwert der Combined Ratio: $\sigma_\beta = 2\%$; $\beta = 100\%$,
- Erwartungswert und Standardabweichung des Vermögens: $\mu_a = 3,576032\%$; $\sigma_a = 6,258293\%$.

Nach der Beschreibung des Basis-Szenarios und der numerische Anwendung, bewerten wir die logarithmische Normalverteilung des wichtigsten Risikos χ_{t+1} . Als nächstes wird der ORSA-Prozess mit Hilfe des vorher beschriebenen Modells dargestellt.

5.2 Bewertung der logarithmisch normalverteilten Approximation

Nach der Überprüfung, ob die Parameter die Konditionen aus dem Abschnitt 4.3.1 erfüllen, wollen wir die Richtigkeit der logarithmische normalverteilten Approximation der bedingten Verteilung von χ_{t+1} durch den Vergleich der approximierten logarithmischen Normalverteilung mit der empirischen Verteilung beurteilen. Die empirische Verteilung von χ_{t+1} wird durch eine Simulation berechnet.

In den folgenden Abbildungen sind die Ergebnisse der empirischen Verteilung von χ_1 und die logarithmisch normalverteilte Approximation dargestellt.

a.) Ohne Risikomarge, berechnet nach dem Satz 6:

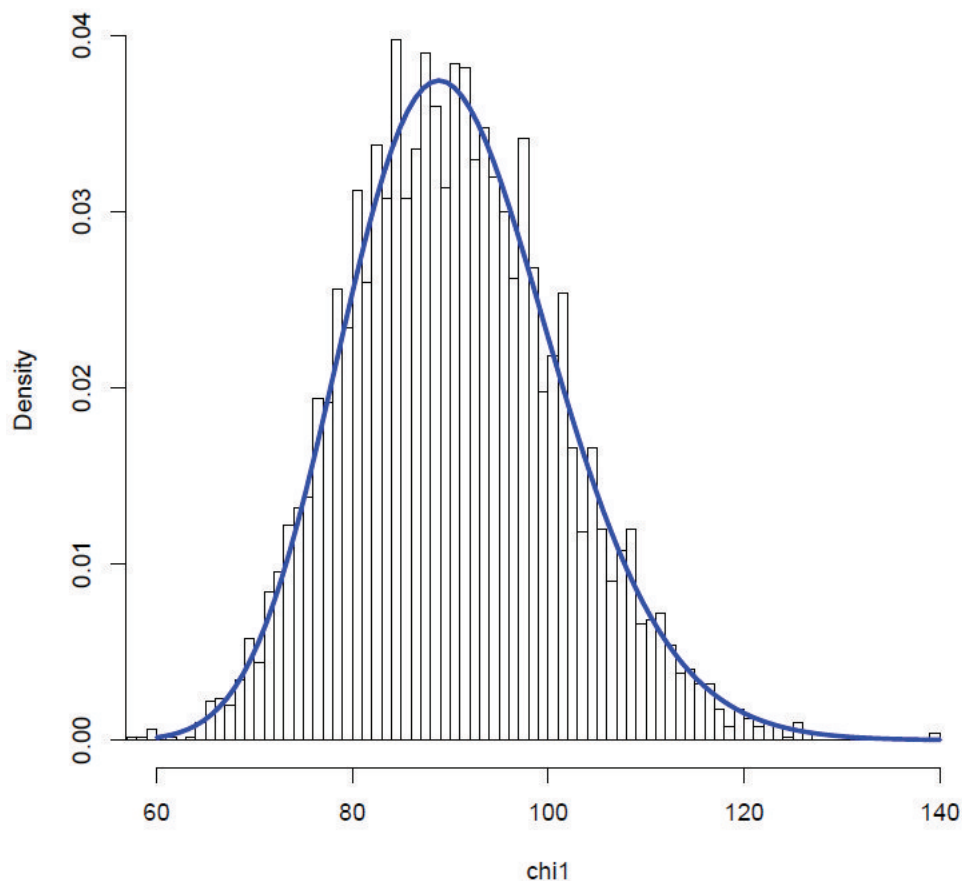


Abbildung 5.1: Vergleich der empirischen Verteilung und der logarithmischen Normalverteilung der Verbindlichkeiten ohne Risikomarge (nach Satz 6)

b.) Mit Risikomarge, berechnet nach dem Satz 7:

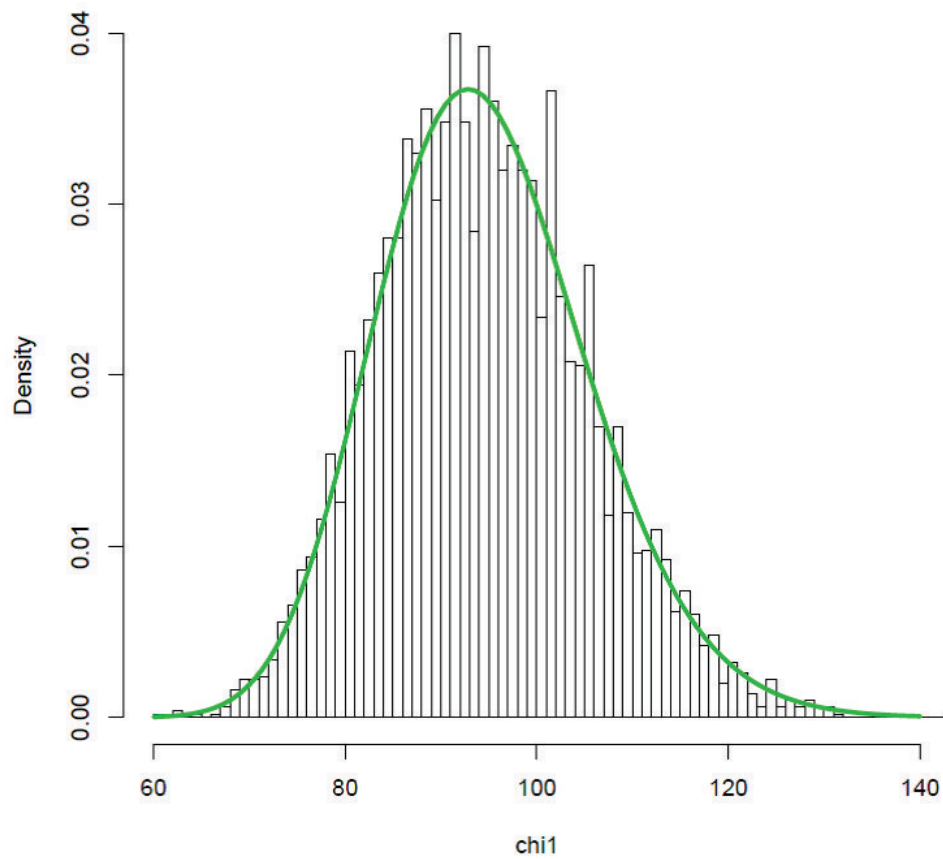


Abbildung 5.2: Vergleich der empirischen Verteilung und der logarithmischen Normalverteilung der Verbindlichkeiten mit Risikomarge (nach Satz 7)

Bemerkung 8. Die Berechnungen in dem Originalprogramm aus dem Artikel von F. Planchet / Q. Guibert / M. Juillar [14] beruhen auf einer Kombination der Formel aus den Sätzen 6 und 7. Dementsprechend weichen die Ergebnisse geringfügig ab.

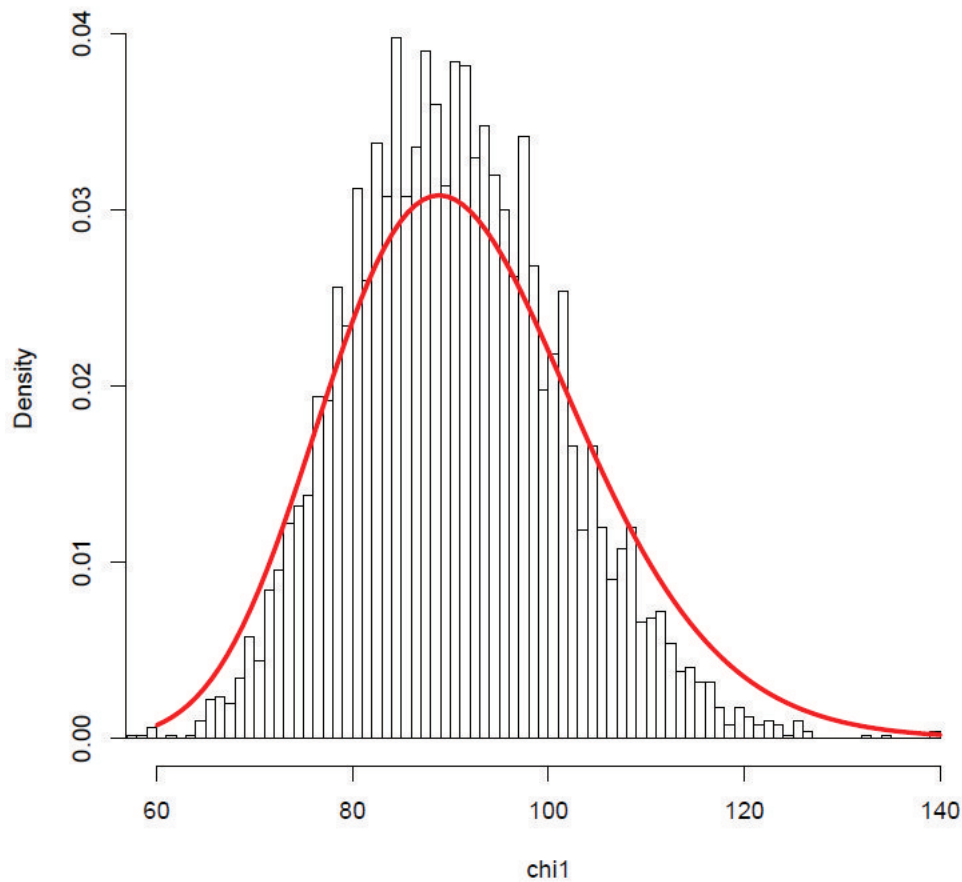


Abbildung 5.3: Vergleich der empirischen Verteilung und der logarithmischen Normalverteilung der Verbindlichkeiten (nachgerechnet) nach dem Originalprogramm

Die Berechnungen ergeben folgende Werte für die Parameter μ_{χ_1} und σ_{χ_1} der logarithmisch normalverteilten Approximation:

a.) Ohne Risikomarge:

$$\mu_{\chi_1} = 4,5008807 ; \quad \sigma_{\chi_1} = 0,1190401$$

b.) Mit Risikomarge:

$$\mu_{\chi_1} = 4,542690 ; \quad \sigma_{\chi_1} = 0,1162361$$

Die Verteilungen der beiden Approximationen weichen nur geringfügig voneinander ab, wie in Abbildung 5.4 ersichtlich ist.

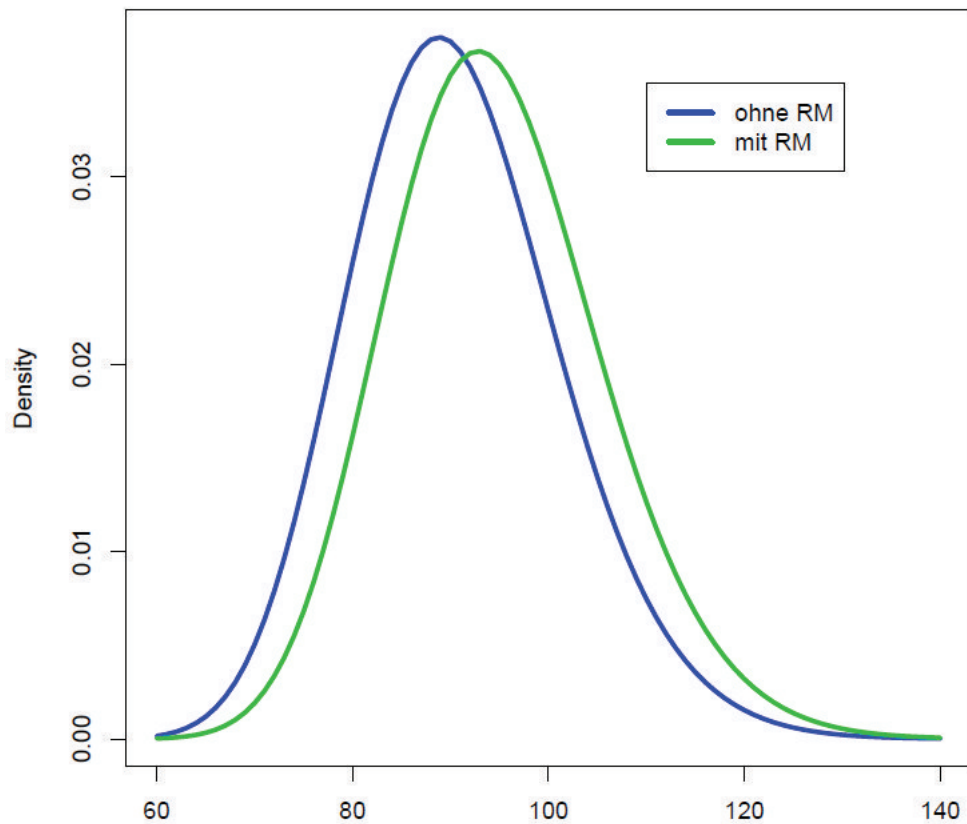


Abbildung 5.4: Vergleich der Verteilungen der Approximationen ohne und mit Risikomarge

Die Grafiken bestätigen die Anwendbarkeit der logarithmisch normalverteilten Approximation. Der Jarque-Bera Test ergibt, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 35%, $\ln(\chi_1)$ eine Normalverteilung vorliegt. Deshalb scheint die logarithmisch normalverteilte Approximation akzeptabel zu sein.

5.3 Wahl des Risikoappetits (Risikobereitschaft)

Als Teil des Risikoappetitprozesses, kontrolliert die Unternehmensführung zwei Indikatoren, die Zahlungsfähigkeit und die Rentabilität des Reinvermögens seiner Aktionäre.

Im Zusammenhang mit dem Risikoappetitprozess werden diese zwei Indikatoren wie folgt interpretiert:

- in 95% der Fälle soll eine jährliche Solvenzquote von 130% für die Dauer des strategischen Plans (5 Jahre) erfüllt werden,
- in 80% der Fälle soll eine Eigenkapital Rendite von 86,5% während mindestens einem Jahr gegeben sein (gemessen mit $w_t = \frac{A_t - L_t}{A_{t-1} - L_{t-1}}$)

Auf der Grundlage des vorgeschlagenen Projektions-Modell, wird die empirische Übereinstimmung zwischen der geplanten Unternehmens-Strategie und den Vorschriften für den Risikoappetit am Anfang verifiziert.

In den nächsten Abbildungen werden die empirischen Verteilungsfunktionen eine Ein-Jahres-Solvenzquote und einer Jahres-Eigenkapital-Rendite repräsentiert.

a.) Ohne Risikomarge, gerechnet mit der Formel aus Satz 6:

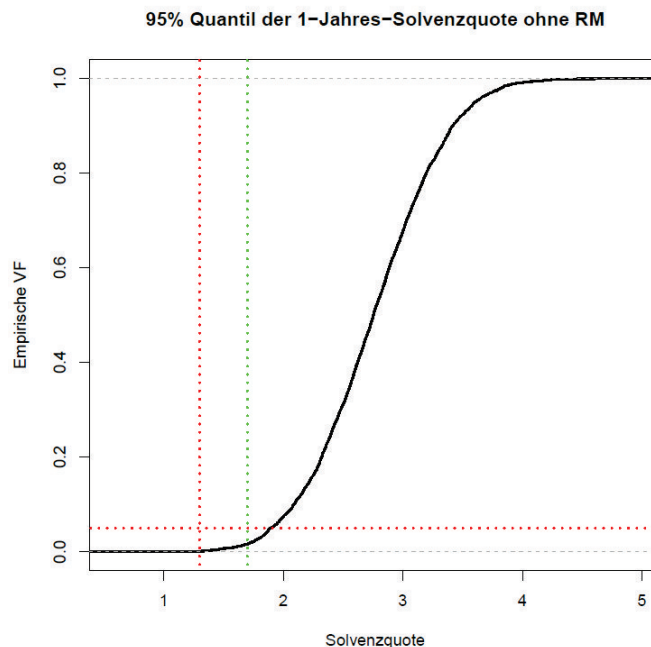


Abbildung 5.5: Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Solvenzquote ohne Risikomarge (nach Satz 6)

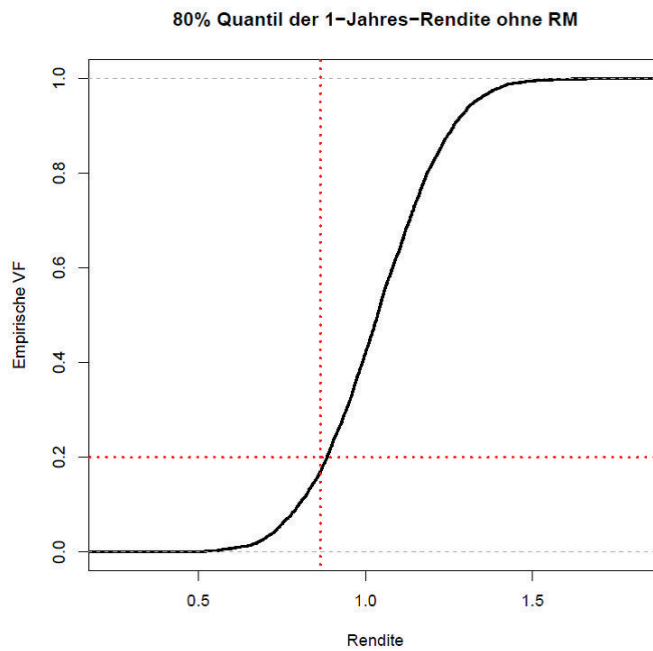


Abbildung 5.6: Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Rendite ohne Risikomarge (nach Satz 6)

b.) Mit Risikomarge, gerechnet mit der Formel aus Satz 7:

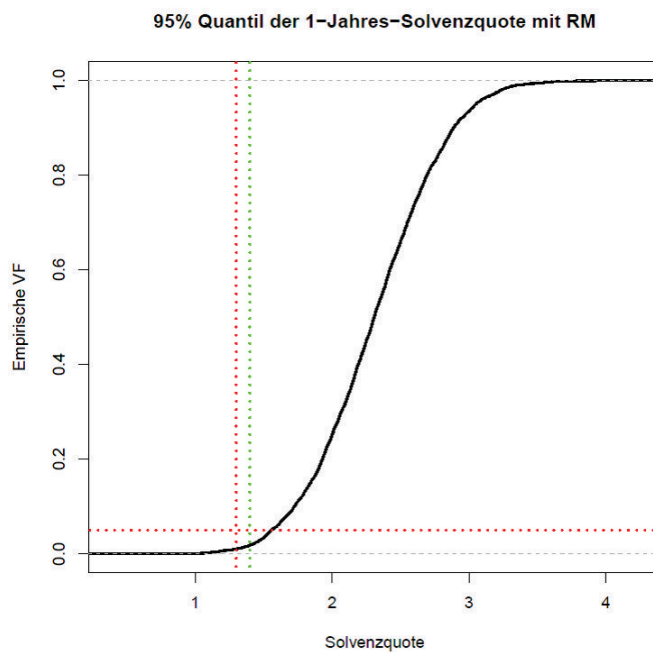


Abbildung 5.7: Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Solvenzquote mit Risikomarge (nach Satz 7)

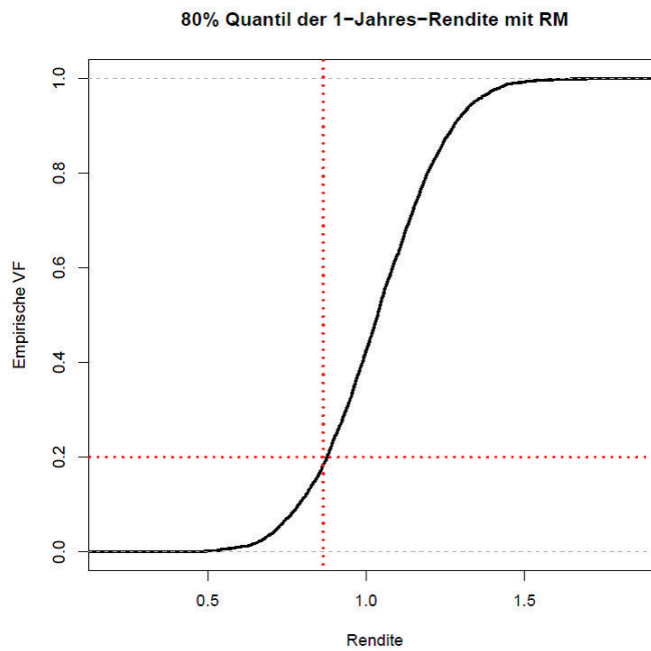


Abbildung 5.8: Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Rendite mit Risiko- marge (nach Satz 7)

Mit den Formeln des Originalprogramms (siehe Bemerkung 8) erhalten wir in den Abbildungen 5.9 und 5.10 dargestellten Grafiken (siehe Artikel [14]).

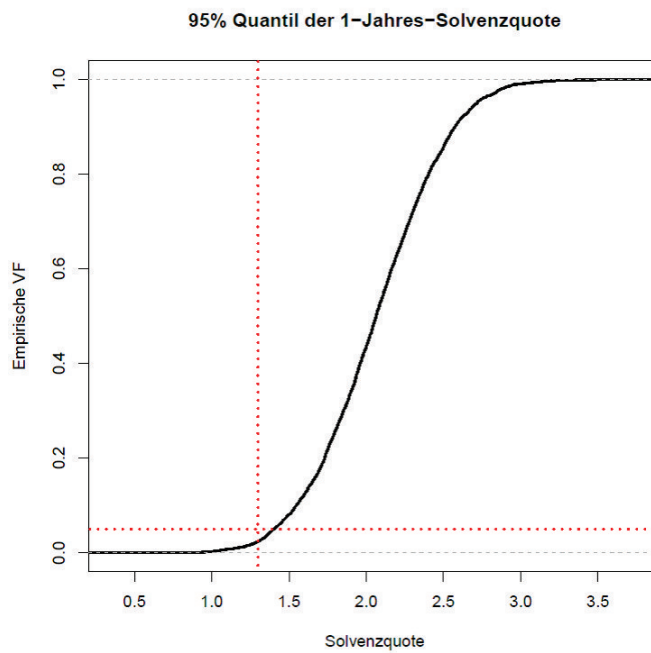


Abbildung 5.9: Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Solvenzquote nach dem Originalprogramm (nachgerechnet)

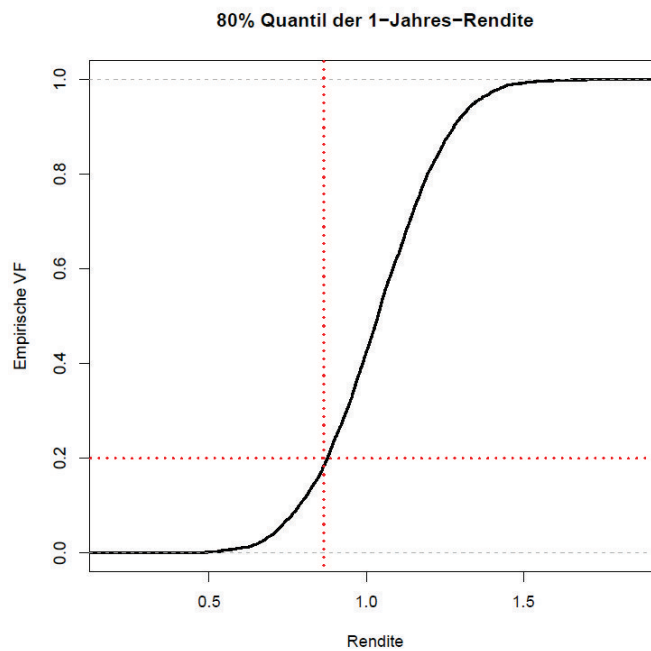


Abbildung 5.10: Empirische Verteilungsfunktion einer 1-Jahres-Rendite nach dem Originalprogramm (nachgerechnet)

Die Grafiken in den Abbildungen 5.5 bis 5.10 zeigen die empirischen kumulativen Verteilungsfunktionen ohne und mit Risikomarge bzw. jene nach dem Originalprogramm (nachgerechnet), der 1-Jahres-Solvenzquote und 1-Jahres-Eigenkapital-Rendite. Die vertikalen Linien zeigen die Risikoappetitgrenzen, die 130% Grenze für die Solvenzquote und 86,5 % für die Eigenkapital Rendite (rote Linie) bzw. im Fall ohne Risikomarge die 170% Grenze und mit Risikomarge die 140% Grenze für die Solvenzquote (grüne Linie). Die horizontalen Linien von 5 % und 20 % zeigen die Wahrscheinlichkeitsgrenzen.

Die Grafiken zeigen, dass die empirischen kumulativen Verteilungen unter den roten Schnittpunkten liegen. Das bedeutet, dass während des strategischen Plans, die angewendeten Risikoappetitgrenzen eingehalten werden können. Die Grafiken in den Abbildungen 5.5 bzw. 5.7 zeigen, dass die empirischen kumulativen Verteilungen unter den roten Schnittpunkten liegen, aber die 130 % Grenze für die Solvenzquote sehr niedrig ist, es wäre also ideal, die Grenzen zu erhöhen: Vorschlag 170% ohne Risikomarge bzw. 140% mit Risikomarge (grüne Grenzen).

Mit diesem ersten Schritt ersparen wir uns die Ausführung der Berechnung für die Dauer des strategischen Plans, aber es gibt für die Allokationen keine genauen operationellen Grenzwerte, sondern nur ein Intervall. Für dieses Problem gibt es zwei Lösungen:

- Testen von verschiedenen Arten von willkürlich festgelegten Allokationen,
- Definition der Menge der Allokationen so, dass diese die vom Unternehmen definierten Risikoappetitgrenzen erfüllen.

Es ist nicht ratsam, eine beliebige Reihe von strategischen Allokationen in Zusammenhang mit Risikoappetitgrenzen zu testen, weil das Ziel dieses Prozesses ist, die optimale strategische Allokation zu finden. Das Unternehmen sollte daher die Menge von akzeptablen Allokationen definieren. Erstens werden alle akzeptablen Allokationen definiert welche das 5% Quantil der 1-Jahres Solvenzquoten über der Menge aller möglichen Allokationen darstellen. Das bedeutet, die Menge aller strategischen Allokationen und die Menge der zukünftigen Prämien wird so gewählt, dass die Solvenzquote mit 95% Wahrscheinlichkeit (in 95% der Fälle) den Wert 130% übersteigt. Diese Berechnungen zeigen, dass umso größer das Prämienvolumen des Unternehmens ist, desto geringer ist seine Aktienzuteilung. Dies ist die Erklärung für das Konzept des Kapitaltransfers zwischen den Risiken. Zuerst analysiert das Unternehmen die Beschränkungen der Rendite von Investitionen der Aktionäre und danach werden die Grenzen für die Investitionen definiert. Zweitens werden alle akzeptablen Allokationen definiert welche das 20% Quantil von der 1-Jahres Reinvermögen Rendite über alle möglichen Allokationen darstellen. Das heißt, die Menge aller strategischen Allokationen und die Menge der künftigen Prämien wird so gewählt, dass die Rendite des Reinvermögens in 80% der Fälle den Wert 86,5% übersteigt.

Die Berechnungen zeigen, dass die Entwicklung der Rendite von Investitionen die Minimum-Grenze definiert, während die Entwicklung der Solvenzquote die Maximum-Grenze von Risikoinvestition darstellt.

An dieser Stelle muss das Unternehmen eine Entscheidung über seine Risikopräferenz treffen, ob die Risiken verbunden mit den Vermögenswerten oder die Risiken verbunden mit den Verbindlichkeiten gewählt werden. Die Risiken verbunden mit den Verbindlichkeiten stehen in Zusammenhang mit der Geschäftsentwicklung. Diese Tatsache führt zu einer Konzentration auf das Risikokapital verbunden mit den Verbindlichkeiten. Das Unternehmen setzt also schon zu Beginn die operationellen Grenzen bezüglich des Preisgestaltungsrisikos fest, entweder einen Prämienabsatz zwischen 75 Millionen und 79 Millionen Euro oder 5% Prämienwachstum in den kommenden 5 Jahren zu erzielen. Angesicht der Risikoveränderungen basierend auf dem Prämienvolumen basieren die Grenzen für die Investitionen auf einem Prämienabsatz von 79 Millionen Euro.

Mit dieser Zielvorgabe eines Prämienabsatzes von 79 Millionen Euro wird die Menge aller strategischen Allokationen so definiert, dass die Solvenzquote in 95% der

Fälle den Wert 130% übersteigt und die Rendite von Reinvermögen mit 80% Wahrscheinlichkeit den Wert 86,5% übersteigt. Bzw. ohne Risikomarge die Solvenzquote mit 95% Wahrscheinlichkeit den Wert 170% und mit Risikomarge die Solvenzquote in 95% der Fälle den Wert 140% übersteigt. Die Berechnungen werden wie vorher für die Fälle ohne und mit Risikomarge durchgeführt.

a.) Ohne Risikomarge:

Die Grafik in Abbildung 5.11 zeigt, wie sich die Menge der strategischen Allokationen bei einer 1-Jahres-Solvenzquote über 130% mit 95% Wahrscheinlichkeit (siehe rote Linie) und bei einer 1-Jahres-Solvenzquote über 170% mit 95% Wahrscheinlichkeit (siehe grüne Linie) verändert.

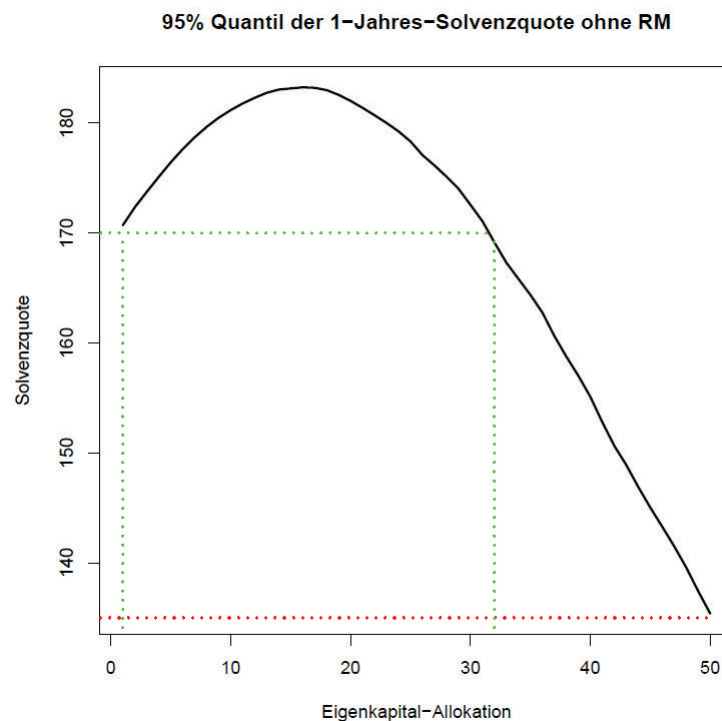


Abbildung 5.11: Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Solvenzquoten-Grenzen ohne Risikomarge

Die Grafik in Abbildung 5.12 zeigt, wie sich die Menge der strategischen Allokationen bei einer 1-Jahres Rendite von Reinvermögen über 86,5% in den 80% der Fälle (siehe rote Linie) und bei einer 1-Jahres Rendite von Reinvermögen über 87,5% in 80% der Fälle (siehe grüne Linie) verändert.

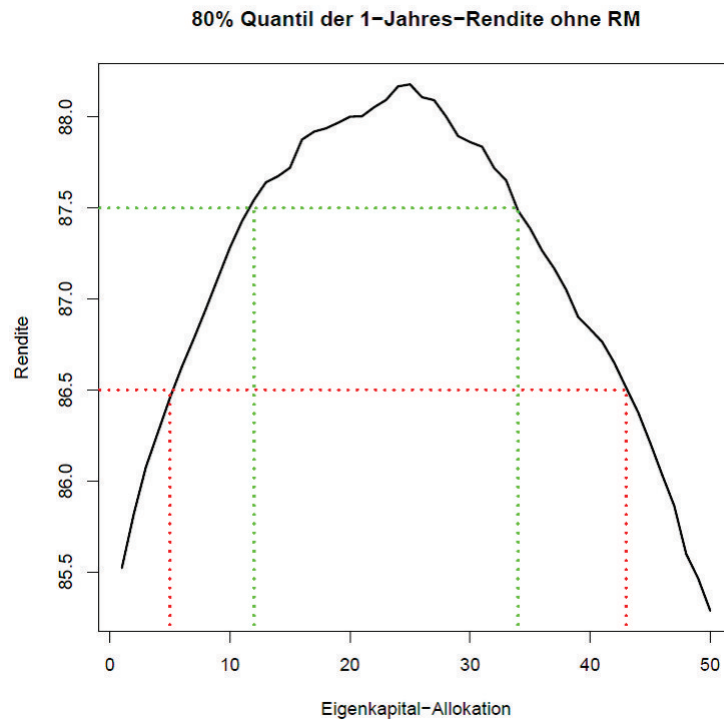


Abbildung 5.12: Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Renditen-Grenzen ohne Risikomarge

Die Werte der möglichen strategischen Allokationen sind in der Tabelle 5.1 zusammengefasst. Der Prozentsatz gibt den Anteil den Stock an was sich in den Parametern μ_a und σ_a gemäß Tabelle P_Actif (siehe Tab.7.1) auswirkt.

Grenzen für strategische Allokationen ohne Risikomarge		
130% Solvenzquote in 95% der Fälle	0%-50%	5,5%-43%
86,5% Rendite in 80% der Fälle	5,5%-43%	
170% Solvenzquote in 95% der Fälle	1%-32%	5,5%-32%
86,5% Rendite in 80% der Fälle	5,5%-43%	
170% Solvenzquote in 95% der Fälle	1%-32%	12%-32%
87,5% Rendite in 80% der Fälle	12%-34%	

Tabelle 5.1: Grenzen für strategische Allokationen ohne Risikomarge

b.) Mit Risikomarge:

Die Grafik in Abbildung 5.13 zeigt, wie sich die Menge der strategischen Allokationen bei einer 1-Jahres-Solvvenzquote über 130% mit 95% Wahrscheinlichkeit (siehe rote Linie) und bei einer 1-Jahres-Solvvenzquote über 140% mit 95% Wahrscheinlichkeit (siehe grüne Linie) verändert.

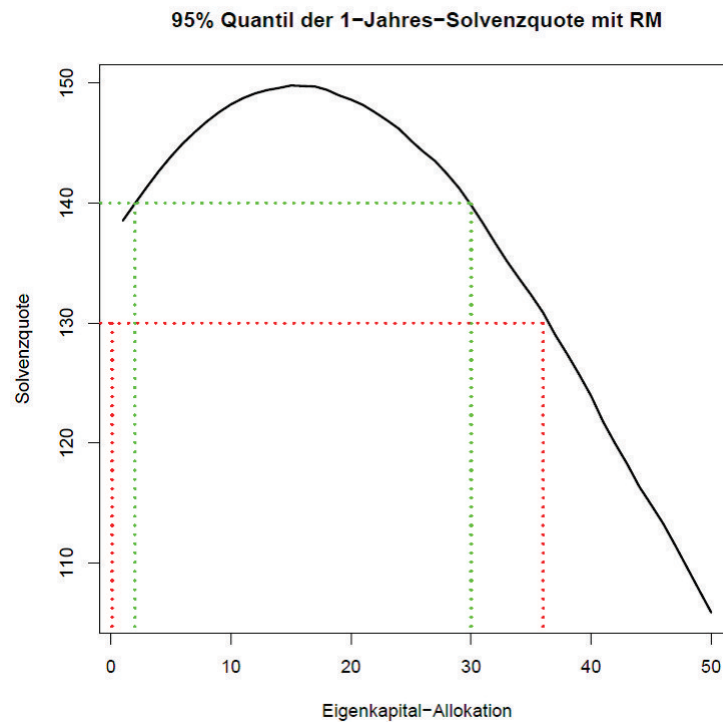


Abbildung 5.13: Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Solvenzquoten-Grenzen mit Risikomarge

Die Grafik in Abbildung 5.14 zeigt, wie sich die Menge der strategischen Allokationen bei einer 1-Jahres-Rendite von Reinvermögen über 86,5% in den 80% der Fälle (siehe rote Linie) verändert.

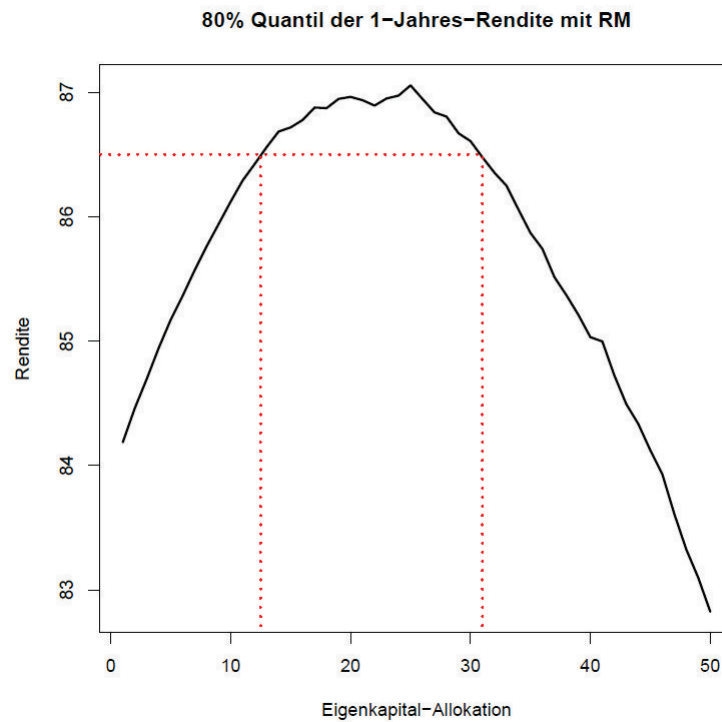


Abbildung 5.14: Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Renditen-Grenzen mit Risikomarge

Die Werte der möglichen strategischen Allokationen sind in der Tabelle 5.2 zusammengefasst. Der Prozentsatz gibt den Anteil den Stock an was sich in den Parametern μ_a und σ_a gemäß Tabelle P_Actif (siehe Tab.7.1) auswirkt.

Grenzen für strategische Allokationen mit Risikomarge		
130% Solvenzquote in 95% der Fälle	0%-36%	12,5%-31%
86,5% Rendite in 80% der Fälle	12,5%-31%	
140% Solvenzquote in 95% der Fälle	2%-30%	12,5%-30%
86,5% Rendite in 80% der Fälle	12,5%-31%	

Tabelle 5.2: Grenzen für strategische Allokationen mit Risikomarge

Mit den Formeln des Originalprogramms (siehe Bemerkung 8) nachgerechnet, erhalten wir die Grafiken aus den Abbildungen 5.15 und 5.16 (siehe Artikel [14]).

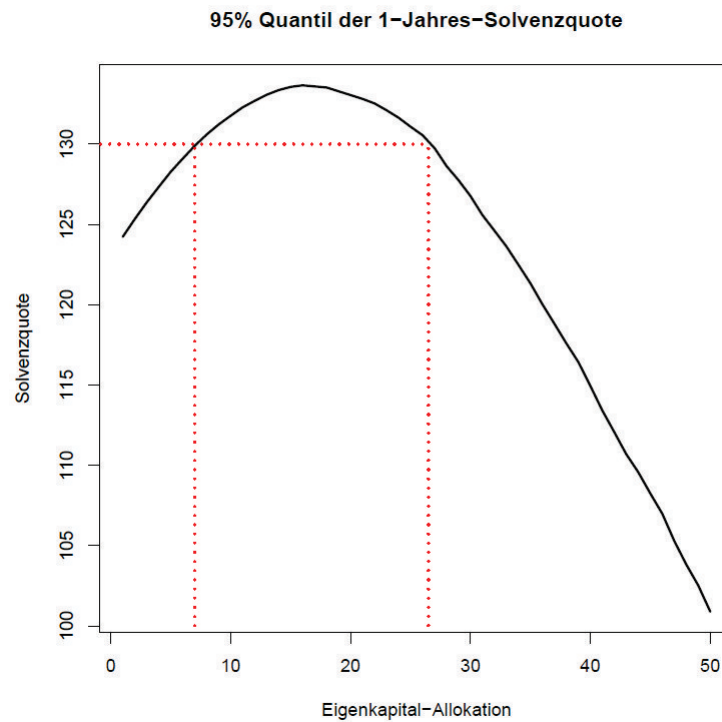


Abbildung 5.15: Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Solvenzquoten-Grenzen nach dem Originalprogramm (nachgerechnet)

Die Grafik in Abbildung 5.15 zeigt, wie sich die Menge der strategischen Allokationen bei einer 1-Jahres-Solvvenzquote über 130% mit 95% Wahrscheinlichkeit verändert. Die Berechnungen zeigen, dass die Haltung der Solvenzquote eines Jahres über 130% im 95% der Fälle mit 79 Millionen Euro Prämienvolumen zu einer strategischen Allokation zwischen 7,7% und 26,5% führt.

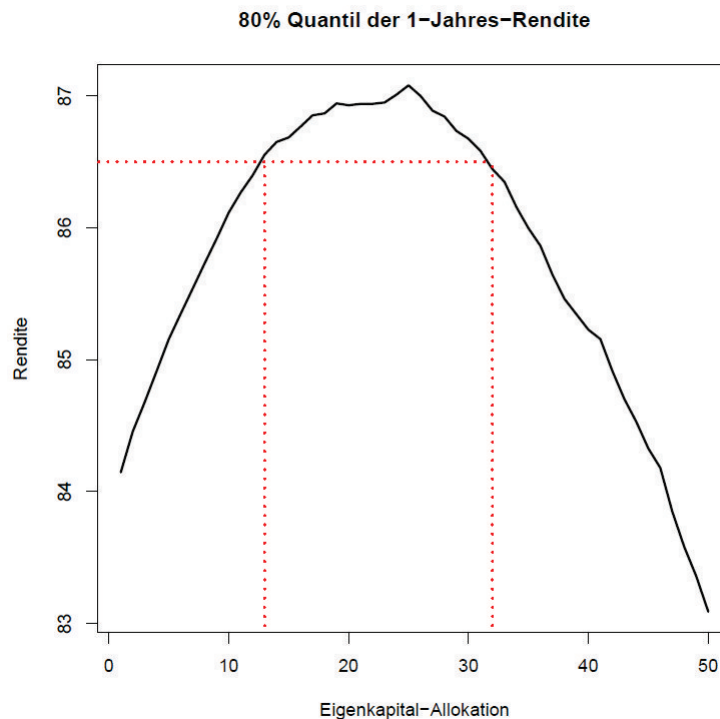


Abbildung 5.16: Operationellen Grenzen der strategischen Allokationen bei Berücksichtigung der Renditen-Grenzen nach dem Originalprogramm (nachgerechnet)

Die Grafik in Abbildung 5.16 zeigt, wie sich die Menge der strategischen Allokationen bei einer 1-Jahres-Rendite von Reinvermögen über 86,5% in den 80% der Fälle verändert. In diesem Fall zeigen die Berechnungen, dass die Haltung der Rendite von Reinvermögen für ein Jahr über 86,5% mit 80% Wahrscheinlichkeit mit 79 Millionen Euro Prämienvolumen zu einer strategischen Allokation zwischen 13% und 32% führt.

Nach diesen Untersuchungen und Berechnungen entscheidet das Unternehmen über die Festlegung der operationellen Grenzen wie folgt:

a.) Ohne Risikomarge:

Bei Beibehaltung der zu Beginn festgelegten Risikoappetitgrenzen wäre die Entscheidung:

- Prämienvolumen zwischen 75 Millionen und 79 Millionen Euro,
- Eigenkapital-Allokation zwischen 5,5% und 43%.

Die Berechnungen zeigen, dass es in diesem Fall empfehlenswert wäre, die Risikoappetitgrenzen auf 170% für die Solvenzquote in 95% der Fälle bzw. 87,5% für die Rendite in 80% der Fälle zu erhöhen. Nach dieser Erhöhung ergeben sich folgende Entscheidungen:

- Prämienvolumen zwischen 75 Millionen und 79 Millionen Euro,
- Eigenkapital-Allokation zwischen 12% und 32%.

b.) Mit Risikomarge:

Bei Beibehaltung der zu Beginn festgelegte Risikoappetitgrenzen wäre die Entscheidung:

- Prämienvolumen zwischen 75 Millionen und 79 Millionen Euro,
- Eigenkapital-Allokation zwischen 12,5% und 31%.

Die Berechnungen zeigen, dass es in diesem Fall empfehlenswert wäre die Risikoappetitgrenze, auf 140% für die Solvenzquote in 95% der Fälle zu erhöhen. Nach dieser Erhöhung ergeben sich folgende Entscheidungen:

- Prämienvolumen zwischen 75 Millionen und 79 Millionen Euro,
- Eigenkapital-Allokation zwischen 12,5% und 30%.

Mit den Formeln des Originalprogramms (nachgerechnet) ergeben sich folgende Entscheidungen:

- Prämienvolumen zwischen 75 Millionen und 79 Millionen Euro,
- Eigenkapital-Allokation zwischen 13% und 26,5%.

Um den Risikoappetitprozess zu beenden, muss das Unternehmen die Einhaltung dieser operationellen Grenzen über die Dauer des strategischen Plans (d.h. für 5 Jahre) bestätigen. Unter Beibehaltung der operationellen Grenzen und einer fünf Jahres Prognose für den strategischen Plan, wird das Modell dann wiederholt. Wenn wir eine jährliche Wahrscheinlichkeit von 95% betrachten, dann ist das Quantil Level für das Jahr "n" $0,95^n$.

Die Tabelle 5.3 zeigt die Entwicklung des Quantil Levels für die Dauer des strategischen Plans (siehe [14]).

Projektions Jahr	Quantil Level	Solvvenzquote
1	95%	1,31
2	90%	1,3
3	85%	1,33
4	81%	1,41
5	77%	1,52

Tabelle 5.3: Entwicklung des Quantil Levels der Solvenzquote (Quelle [14])

Die Berechnungen zeigen, dass die operationellen Grenzen mit der Risikotragfähigkeit des Unternehmens über den Zeitraum des strategischen Plans übereinstimmen. Weiters werden die Grenzen der Renditen der Eigenkapitalinvestitionen nach einem Jahr kontrolliert.

Es ist zu beachten, dass die operationellen Grenzen, nach der Analyse der Resultate über ein Jahr festgelegt und gesetzt sind. Somit kann bei Beibehaltung dieser Grenzen für die Dauer des strategischen Plans eine relativ kleine Verletzung auftreten, was die Überprüfung der operationellen Grenzen bedeuten würde.

5.4 Sensitivitätsanalyse

Der letzte Schritt eines ORSA-Prozesses ist die Durchführung einer Sensitivitätsanalyse, um die Richtigkeit des strategischen Plans zu überprüfen. Eine Sensitivitätsanalyse sagt allgemein aus, wie sehr die Änderungen in den Eingangsbedingungen oder Parametern ein Ergebnis beeinflussen, also wie sensibel ein System bzw. ein Prozess auf die Änderungen reagiert. In unserem speziellen Fall wird eine Sensitivitätsanalyse der im Modell verwendeten Parameter durchgeführt, so dass das Versicherungsunternehmen die wichtigsten Risikofaktoren einer Insolvenz erkennen kann. Bei der Durchführung einer Sensitivitätsanalyse sind zwei wesentliche Punkte zu beachten:

- diese Sensitivitätsanalyse muss zuerst für die äußeren (exogenen) Risikofaktoren durchgeführt werden, weil diese Risikofaktoren bekannt sind,
- als Ziel bei der Durchführung der Sensitivitätsanalyse muss die Risikotragfähigkeit und nicht der Risikoappetit (Risikobereitschaft) berücksichtigt werden.

Die Sensitivitätsanalyse kann allgemein wie folgt durchgeführt werden:

- unter Berücksichtigung der eigentlichen Volatilität des Schätzer bezüglich der Hauptrisikotreiber,
- auf Basis von Stresstests; dies erlaubt uns die Meinung von Experten einzuholen.

Aus der Perspektive des Risikomanagements ist es notwendig, die Meinung von Fachpersonal zu berücksichtigen.

Die Hauptrisiken bei Nicht-Lebensversicherungen sind mit den Prämien und den versicherungstechnischen Rückstellungen verbundenen Risiken, deshalb wird die Entwicklung der Minimum-Solvenzquote über die Dauer des strategischen Plans analysiert. Auf Basis von Stresstests werden die Volatilität für versicherungstechnische

Rückstellungen und für die Combined Ratio erhöht und die Entwicklung der Solvenzquote für die nächsten fünf Jahren bewertet. Auf Basis von statistischen Tests wird die Stabilität der Solvenzquote analysiert, wenn der Wert von Combined Ratio auf die Obergrenze des 95% Konfidenzintervalls erhöht wird.

In der Tabelle 5.4 sind die wichtigsten Punkte der Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse entsprechend dem Original-Artikel (siehe [14]) zu sehen. Hier wird von einer Minimum-Solvequote von 130% für der Dauer des strategischen Plans ausgegangen.

Test Parameter	Minimum-Solvvenzquote über 5 Jahre
Erhöhung von σ_β um 10%	1,18
Erhöhung von σ_β um 20%	1,06
Erhöhung von σ_β um 25%	0,99
Erhöhung von σ_l um 10%	1,32
Erhöhung von σ_l um 20%	1,32
Erhöhung von σ_l um 25%	1,30
Erhöhung von β zu dem obere 95% Konfidenzinterwall Grenze	0,99

Tabelle 5.4: Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse (Quelle [14])

Diese Ergebnisse zeigen die Stabilität der Resultate aus dem ORSA-Prozess, die Risikotragfähigkeit ist nur im extremen Fällen nicht gegeben. Das Versicherungsunternehmen kann daran glauben, dass der strategische Plan die Risikotragfähigkeit reflektiert.

Kapitel 6

Approximation der Summe von logarithmischen Normalverteilungen

6.1 Die logarithmische Normalverteilung

Die logarithmische Normalverteilung ist eine stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der positiven reellen Zahlen und steht in engem Zusammenhang zur Normalverteilung. Eine positive Zufallsvariable X hat eine logarithmische Normalverteilung mit Parametern μ und σ^2 , wenn der natürliche Logarithmus der Variable X normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 ist; $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

Also $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ wenn $Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wobei μ der Erwartungswert und σ^2 die Varianz der normalverteilte Zufallsvariable $Y = \ln(X)$ ist.

Das heißt $X = \exp(Y) \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$; $X = \exp(\mu + \sigma \cdot Z)$
mit $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Die Dichtefunktion $f_{\mathcal{LN}}$ die logarithmische Normalverteilung ergibt sich mittels des Transformationsatzes für Dichten mit $y = \ln(x)$ aus der Dichte $f_{\mathcal{N}}$ der Normalverteilung und es gilt:

$$f_{\mathcal{N}}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{(y - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}; \quad -\infty < y < \infty$$

$$f_{\mathcal{LN}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot x} \cdot \exp\left\{-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}\right\}; \quad x > 0$$

Die Verteilungsfunktion der logarithmischen Normalverteilung kann auf die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung zurückgeführt werden. Daher lautet die Verteilungsfunktion der logarithmisch normalverteilten Zufallsvariable X :

$$X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Der Erwartungswert der logarithmischen Normalverteilung X beträgt:

$$m = \mathbb{E}[X] = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Die Varianz ergibt sich analog:

$$\nu^2 = V[X] = \exp(2 \cdot \mu + \sigma^2) \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$$

Wenn Erwartungswert und Varianz der logarithmisch normalverteilten Variable $X = \exp(Y)$ bekannt sind, ist es möglich, die Parameter μ und σ zu berechnen.

$$\nu^2 = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\nu^2}{m^2} = (\exp(\sigma^2) - 1)$$

$$\omega^2 = \frac{\nu^2}{m^2} = \exp(\sigma^2) - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exp(\sigma^2) = 1 + \omega^2$$

$$\sigma^2 = \ln(1 + \omega^2)$$

$$\ln(m) = \mu + \frac{\sigma^2}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \ln(m) - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\mu = \ln(m) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + \omega^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu = \ln(m) - \ln(\sqrt{1 + \omega^2})$$

$$\mu = \ln\left(\frac{m}{\sqrt{1 + \omega^2}}\right)$$

Mit Hilfe dieser Formeln können die Parameter einer logarithmischen Normalverteilung in Abhängigkeit von ihren ersten beiden Momenten bestimmt werden.

Die Informationen dieses Abschnittes sind an das Buch von Crow und Shimizu (siehe [25]) angelehnt.

6.2 Die Summe von logarithmischen Normalverteilungen

Eine wichtige Eigenschaft der Normalverteilung ist die Stabilität unter der Addition. Anders gesagt, die Summe von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen ist wieder normalverteilt. Die logarithmische Normalverteilung besitzt diese Eigenschaft nicht.

Die Summe von zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist durch die Faltung gegeben. Für normalverteilte Zufallsvariablen ist das mit Hilfe der charakteristischen Funktionen leicht zu berechnen.

Die charakteristische Funktion für die logarithmische Normalverteilung ist nicht explizit darstellbar. Die numerische Berechnung der Faltung zweier logarithmischer Normalverteilungen zeigt, dass die Summe der Verteilungen nicht exakt logarithmisch normalverteilt ist aber den die Regeln einer logarithmischen Normalverteilung mit einer angemessenen Approximation folgt. Zusammengefasst kann angenommen werden, dass die Summe zweier unabhängiger logarithmischer Normalverteilungen durch eine logarithmische Normalverteilung approximiert werden kann. Das Problem ist, diese Verteilung zu finden. Die Idee ist, eine logarithmische Normalverteilung zu finden, welche die gleiche Momente wie die Summe zweier unabhängiger logarithmischer Normalverteilungen hat.

Betrachten wir zwei unabhängige logarithmisch normalverteilte Zufallsvariablen X_1 und X_2 :

$$X_1 \sim \mathcal{LN}(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \implies \quad \ln(X_1) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim \mathcal{LN}(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \implies \quad \ln(X_2) \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$X = X_1 + X_2$ ist die Summe der beiden logarithmischen Normalverteilungen.

Bezeichnen wir mit Y die logarithmisch normalverteilte Approximation der Summe der beiden oben definierten Zufallsvariablen:

$$Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2) \quad \implies \quad \ln(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Wir suchen die Parameter μ und σ so, dass Erwartungswerte und Varianzen der approximierenden logarithmischen Normalverteilung und der approximierten Verteilung jeweils übereinstimmen:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y]$$

Um die Parameter μ und σ zu bestimmen, berechnen wir die Momente von X und Y und lösen die beide Gleichungen auf.

Die Momente der beiden unabhängiger logarithmisch normalverteilter Zufallsvariablen können wie folgt berechnet werden:

$$\mathbb{E}[X_1] = m_1 = \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right); \quad \mathbb{V}[X_1] = \nu_1^2 = m_1^2 \cdot (\exp(\sigma_1^2) - 1)$$

$$\mathbb{E}[X_2] = m_2 = \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right); \quad \mathbb{V}[X_2] = \nu_2^2 = m_2^2 \cdot (\exp(\sigma_2^2) - 1)$$

dann folgt für den Erwartungswert und die Varianz der Summe:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] \stackrel{u.a.}{=} \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = m_1 + m_2 = \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right) + \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[X] &= \mathbb{V}[X_1 + X_2] \stackrel{u.a.}{=} \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] = \nu_1^2 + \nu_2^2 \\ &= m_1^2 \cdot (\exp(\sigma_1^2) - 1) + m_2^2 \cdot (\exp(\sigma_2^2) - 1) \end{aligned}$$

Die Momente der Approximation lauten:

$$\mathbb{E}[Y] = m = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right); \quad \mathbb{V}[Y] = \nu^2 = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$$

Dann folgt:

$$\mathbb{E}[X] = m_1 + m_2 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{V}[X] = \nu_1^2 + \nu_2^2 = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) = \mathbb{V}[Y]$$

Wenn die zweite Gleichung durch m^2 dividiert wird, erhalten wir:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) \quad \implies \quad \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{m^2} = \exp(\sigma^2) - 1$$

$$\omega^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{m^2} = \exp(\sigma^2) - 1 \quad \implies \quad \exp(\sigma^2) = 1 + \omega^2$$

$$\sigma^2 = \ln(1 + \omega^2) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{m^2}$$

Wenn auf beiden Seiten der ersten Gleichung die Logarithmusfunktion angewendet wird, ergibt sich :

$$m_1 + m_2 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \implies \quad \ln(m_1 + m_2) = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\mu = \ln(m_1 + m_2) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + \omega^2) \quad \implies \quad \mu = \ln(m_1 + m_2) - \ln\sqrt{1 + \omega^2}$$

$$\mu = \ln\left(\frac{m_1 + m_2}{\sqrt{1 + \omega^2}}\right)$$

Die Dichtefunktionen von X_1 und X_2 lauten:

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_1 \cdot x} \cdot \exp\left\{-\frac{(\ln(x) - \mu_1)^2}{2 \cdot \sigma_1^2}\right\}; \quad x > 0$$

$$f_{X_2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_2 \cdot x} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\ln(x) - \mu_2)^2}{2 \cdot \sigma_2^2} \right\}; \quad x > 0$$

Die Dichtefunktion der Summe X erhalten wir durch die Faltung:

$$f(x) = \int_0^x f_{X_1}(y) \cdot f_{X_2}(x-y) dy; \quad x > 0$$

Diese Faltungsintegral werten wir numerisch mit dem Programm (siehe Kapitel 7.2) aus.

Die Dichtefunktion der Approximation Y lautet :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma \cdot x} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\}; \quad x > 0$$

Beispiel 6.1: In folgenden Beispiel betrachten wir zwei logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable mit unten angeführten Parametern und werden die Erwartungswerte und die Varianzen der einzelnen Zufallsvariablen berechnet. Mit Hilfe der oben beschriebenen Formeln werden Erwartungswert, Varianz und die Parameter (μ, σ) der logarithmisch normalverteilten Approximation berechnet.

$$X_1 \sim \mathcal{LN}(0, 1) \quad \implies \quad \mu_1 = 0; \sigma_1 = 1$$

$$X_2 \sim \mathcal{LN}(0, 1) \quad \implies \quad \mu_2 = 0; \sigma_2 = 1$$

Der Erwartungswert, die Varianz und die Parameter von $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ sind:

$$\mathbb{E}[Y] = m = 3,297443 \quad ; \quad \mathbb{V}[Y] = \nu^2 = 9,341549$$

$$\mu = 0,8830899 \quad ; \quad \sigma = 0,7874735$$

In Abbildung 6.1 sind die Dichtefunktion der Summe beiben logarithmisch normalverteilter Zufallsvariablen durch Faltung (schwarze Linie) und die Dichtefunktion der logarithmisch normalverteilten Approximation (rote Linie) dargestellt.

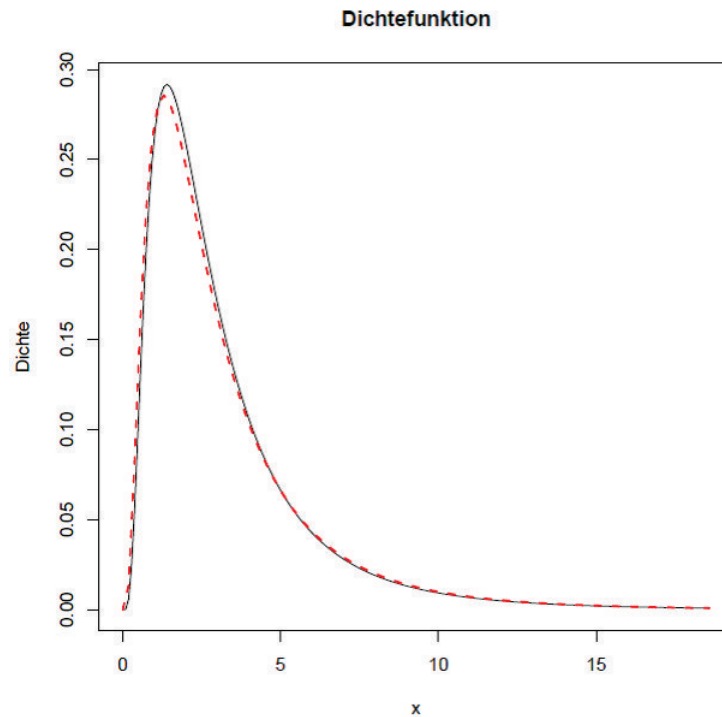


Abbildung 6.1: Dichtefunktion der Summe mit Parametern $\mu_{1,2} = 0; \sigma_{1,2} = 1$ und die Dichtefunktion der Approximation

Beispiel 6.2: Ein zweites Beispiel mit anderen Parametern:

$$\mu_1 = 0.5 ; \sigma_1 = 1.5$$

$$\mu_2 = 0.8 ; \sigma_2 = 1.8$$

Der Erwartungswert, die Varianz und die Parameter von $Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ sind:

$$\mathbb{E}[Y] = m = 16,32428 \quad ; \quad \mathbb{V}[Y] = \nu^2 = 3321,665$$

$$\mu = 1,492611 \quad ; \quad \sigma = 1,612478$$

In Abbildung 6.2 sind die Dichtefunktion der Summe beider logarithmisch normalverteilter Zufallsvariablen durch Faltung (schwarze Linie) und die Dichtefunktion der logarithmisch normalverteilten Approximation (grüne Linie) dargestellt.

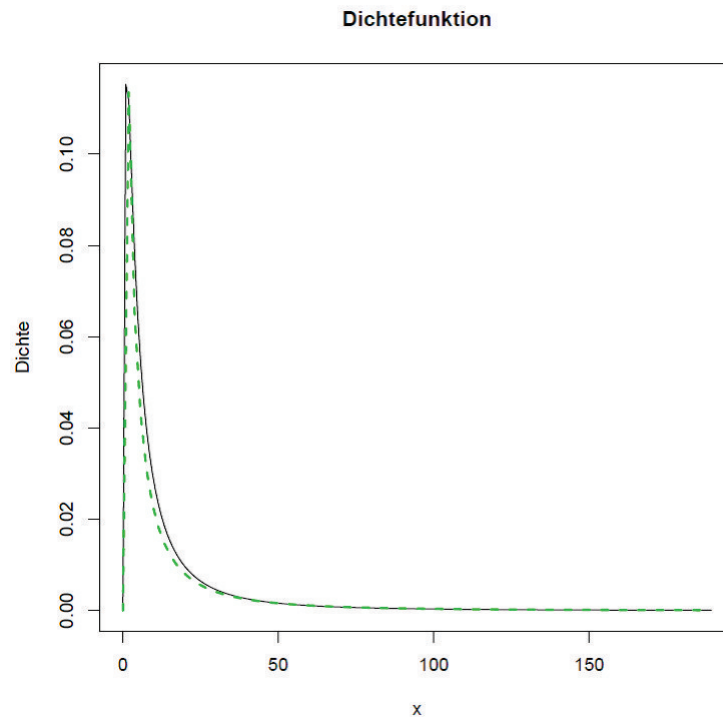


Abbildung 6.2: Dichtefunktion der Summe mit Parametern $\mu_{1,2}; \sigma_{1,2}$ wie in Beispiel 6.2 definiert und die Dichtefunktion der Approximation

6.3 Modifiziertes Problem

Betrachten wir zwei unabhängige logarithmisch normalverteilte Zufallsvariablen X_1 und X_2 definiert wie im Abschnitt 6.2:

$$X_1 \sim \mathcal{LN}(\mu_1, \sigma_1^2) \quad \implies \quad \ln(X_1) \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \sim \mathcal{LN}(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \implies \quad \ln(X_2) \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Wir wollen $X = X_1 + X_2 - 1$ mit einer logarithmischen Normalverteilung Y approximieren.

$$Y \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2) \quad \implies \quad \ln(Y) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Die Zufallsvariable X ist auf dem Intervall $[-1, +\infty)$ definiert. Die Voraussetzung für eine logarithmische Normalverteilung ist eine positive Zufallsvariable. Dennoch können wir versuchen, die Verteilung von $X = X_1 + X_2 - 1$ auf dem Intervall $[0, +\infty)$ durch eine logarithmische Normalverteilung zu approximieren, weil die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X negative Werte annimmt, sehr gering ist.

Wir suchen die Parameter μ und σ so, dass Erwartungswerte und Varianzen der approximierenden logarithmischen Normalverteilung und der approximierten Verteilung jeweils übereinstimmen:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[Y]$$

Um die Parameter μ und σ zu bestimmen, berechnen wir die Momente von X und Y und lösen die beiden Gleichungen auf.

Die Momente der beiden unabhängiger logarithmisch normalverteilter Zufallsvariablen können wie folgt berechnet werden:

$$\mathbb{E}[X_1] = m_1 = \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right); \quad \mathbb{V}[X_1] = \nu_1^2 = m_1^2 \cdot (\exp(\sigma_1^2) - 1)$$

$$\mathbb{E}[X_2] = m_2 = \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right); \quad \mathbb{V}[X_2] = \nu_2^2 = m_2^2 \cdot (\exp(\sigma_2^2) - 1)$$

dann folgt für den Erwartungswert und die Varianz der gewichteten Summe:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 - 1] \stackrel{u.a.}{=} \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] - 1 = m_1 + m_2 - 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}\right) + \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}\right) - 1$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{V}[X_1 + X_2] \stackrel{u.a.}{=} \mathbb{V}[X_1] + \mathbb{V}[X_2] = \nu_1^2 + \nu_2^2 \\ = m_1^2 \cdot (\exp(\sigma_1^2) - 1) + m_2^2 \cdot (\exp(\sigma_2^2) - 1)$$

Die Momente der Approximation lauten:

$$\mathbb{E}[Y] = m = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right); \quad \mathbb{V}[Y] = \nu^2 = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1)$$

Dann folgt:

$$\mathbb{E}[X] = m_1 + m_2 - 1 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) = \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{V}[X] = \nu_1^2 + \nu_2^2 = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) = \mathbb{V}[Y]$$

Wenn die zweite Gleichung durch m^2 dividiert wird, erhalten wir:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 = m^2 \cdot (\exp(\sigma^2) - 1) \quad \implies \quad \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{m^2} = \exp(\sigma^2) - 1$$

$$\omega^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{m^2} = \exp(\sigma^2) - 1 \quad \implies \quad \exp(\sigma^2) = 1 + \omega^2$$

$$\sigma^2 = \ln(1 + \omega^2) \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{m^2}$$

Wenn auf beiden Seiten der ersten Gleichung die Logarithmusfunktion angewendet wird, ergibt sich:

$$m_1 + m_2 - 1 = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \implies \quad \ln(m_1 + m_2 - 1) = \mu + \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\mu = \ln(m_1 + m_2 - 1) - \frac{1}{2} \cdot \ln(1 + \omega^2)$$

$$\mu = \ln(m_1 + m_2 - 1) - \ln\sqrt{1 + \omega^2}$$

$$\mu = \ln \left(\frac{m_1 + m_2 - 1}{\sqrt{1 + \omega^2}} \right)$$

Die logarithmisch normalverteilte Approximation kann nicht nur bei Summen, sondern auch bei einem modifizierten Fall von logarithmischen Normalverteilungen wie $X_1 + X_2 - 1$, angewendet werden, aber nur wenn $X_1 + X_2 \geq 1$, weil die Voraussetzung für eine logarithmische Normalverteilung eine positive Zufallsvariable ist.

Kapitel 7

Verwendete R-Programme

7.1 R-Codes zu Kapitel 5

7.1.1 R-Code zur Abbildung 5.1

```
# remove everything from the workspace to start fresh
rm(list=ls(all=TRUE))
# fix the random seed for reproducability of results
set.seed(1234)
# number of simulations
n=5000
#Premiums
#
#P0...initial premium
#mup...premium parameter mu_p
#sip...premium parameter sigma_p
#Xp1...lognormal innovation factor vector year 1
#P1...premium vector year 1
P0=75
mup=0
sip=0.01
Xp1=exp(rnorm(n,mup-sip^2/2,sip))
P1=P0*Xp1
#Asset
A0=170
mua=0.03576032
sia=0.06258293
```

```

Xa1=exp(rnorm(n,mua-sia^2/2,sia))
A1=A0*Xa1
# Combined ratio
be=1
sib=0.02
be1=exp(rnorm(n,log(be)-sib^2/2,sib))
# Liabilities and Best Estimate
BEL0=90
r=0.04
ph=0.8
mul=r+log(1-ph)
sil=0.1
Xl1=exp(rnorm(n,mul-sil^2/2,sil))
BEL1=be1*P1+BEL0*Xl1
# Further parameters for SCR calculations
#al...alpha
#th...theta
#D0...duration
al=0.06
th=ph/(1-ph)
D0=2
#scrfun evalutes the RHS of equation(2) from the papers
#expression taken from the authors'program (differ from the paper)
scrfun=function(scr,bel,p)
{
#h=1+al*scr/bel*D0
m=(1+th)*bel*exp(mul)-(1-be)*p*exp(mup)
v=(1+th)^2*bel^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(be)^2*(exp(sib^2)-1)
*p^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+p^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
1/(1+al*D0)*(exp(mu_chi+s_chi*qnorm(0.995))-bel)
}
print(scrfun(30,BEL0,P0))

```

```

SCR0=scrfun(28.95188,BEL0,P0)
SCR0=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL0,P0)-x,c(0,BEL0))$root
print(SCR0)
SCR1=rep(0,n);
for(j in 1:n)
{
SCR1[j]=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL1[j],P1[j])-x,c(0,BEL1[j]))$root
}
print(SCR1)
L1=BEL1
C1=th*(BEL1-be1*P1)
A1=A0*Xa1-C1+P1
s1=(A1-L1)/SCR1
#theoretische Parameter
#h=1+al*SCR0/BEL0*D0
m=(1+th)*BEL0*exp(mul)-(1-be)*P0*exp(mup)
v=(1+th)^2*BEL0^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(be)^2*(exp(sib^2)-1)
*P0^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+P0^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
print(c(mu_chi,s_chi))
#Histogramm
chi1=((1+th)*BEL1-(1+th*be1)*P1)/Xa1
pdf("Fig.2a.pdf")
hist(chi1,breaks=100,main=" ", probability=TRUE,xlim=c(60,140))
x=seq(60,140)
curve(dlnorm(x,mu_chi,s_chi), col = 4, lty = 1, lwd = 3, add = TRUE)
dev.off()
###

```

7.1.2 R-Code zur Abbildung 5.2

```

# remove everything from the workspace to start fresh
rm(list=ls(all=TRUE))
# fix the random seed for reproducibility of results

```

```

set.seed(1234)
# number of simulations
n=5000
#Premiums
#
#P0...initial premium
#mup...premium parameter mu_p
#sip...premium parameter sigma_p
#Xp1...lognormal innovation factor vector year 1
#P1...premium vector year 1
P0=75
mup=0
sip=0.01
Xp1=exp(rnorm(n,mup-sip^2/2,sip))
P1=P0*Xp1
#Asset
A0=170
mua=0.03576032
sia=0.06258293
Xa1=exp(rnorm(n,mua-sia^2/2,sia))
A1=A0*Xa1
# Combined ratio
be=1
sib=0.02
be1=exp(rnorm(n,log(be)-sib^2/2,sib))
# Liabilities and Best Estimate
BEL0=90
r=0.04
ph=0.8
mul=r+log(1-ph)
sil=0.1
Xl1=exp(rnorm(n,mul-sil^2/2,sil))
BEL1=be1*P1+BEL0*Xl1
# Further parameters for SCR calculations
#al...alpha
#th...theta
#D0...duration

```

```

a1=0.06
th=ph/(1-ph)
D0=2
#scrfun evalutes the RHS of equation(2) from the papers
#expression taken from the authors'program (differ from the paper)
scrfun=function(scr,bel,p)
{
h=1+a1*scr/bel*D0
m=(h+th)*bel*exp(mul)-(1-h*be)*p*exp(mup)
v=(h+th)^2*bel^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(h*be)^2*(exp(sib^2)-1)
*p^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+p^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-h*be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
1/(1+a1*D0)*(exp(mu_chi+s_chi*qnorm(0.995))-bel)
}
print(scrfun(30,BEL0,P0))
SCR0=scrfun(32.61352,BEL0,P0)
SCR0=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL0,P0)-x,c(0,BEL0))$root
print(SCR0)
SCR1=rep(0,n);
for(j in 1:n)
{
SCR1[j]=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL1[j],P1[j])-x,c(0,BEL1[j]))$root
}
print(SCR1)
L1=BEL1+a1*D0*SCR1
C1=th*(BEL1-be1*P1)
A1=A0*Xa1-C1+P1
s1=(A1-L1)/SCR1
#theoretische Parameter
h=1+a1*SCR0/BEL0*D0
m=(h+th)*BEL0*exp(mul)-(1-h*be)*P0*exp(mup)
v=(h+th)^2*BEL0^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(h*be)^2*(exp(sib^2)-1)
*P0^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+P0^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-h*be)^2

```

```

om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
print(c(mu_chi,s_chi))
#Histogramm
chi1=((h+th)*BEL1-(1+th*be1)*P1)/Xa1
pdf("Fig.2b.pdf")
hist(chi1,breaks=100,main=" ",probability=TRUE,xlim=c(60,140))
x=seq(60,140)
curve(dlnorm(x,mu_chi,s_chi), col = 3, lty = 1,lwd = 3, add = TRUE)
dev.off()
###

```

7.1.3 R-Code zur Abbildung 5.4

```

#Vergleich mit und ohne RM
pdf("Vergl.2a.2b.pdf")
x=seq(60,140)
plot(x,dlnorm(x,4.5008807,0.1190401),xlab=" ",ylab="Density", col = 4,
type = "l" , lwd = 3,xlim=c(60,140))
lines(x,dlnorm(x,4.5442690,0.1162361), col = 3, lty = 1, lwd = 3,xlim=c(60,140))
legend(110,0.035,col=c(4,3), lwd=3,legend=c("ohne RM", "mit RM"))
dev.off()
###

```

7.1.4 R-Codes zu den Abbildungen 5.5 und 5.6

```

# remove everything from the workspace to start fresh
rm(list=ls(all=TRUE))
# fix the random seed for reproducability of results
set.seed(1234)
# number of simulations
n=5000
#Premiums
#
#P0...initial premium

```

```

#mup...premium parameter mu_p
#sip...premium parameter sigma_p
#Xp1...lognormal innovation factor vector year 1
#P1...premium vector year 1
P0=75
mup=0
sip=0.01
Xp1=exp(rnorm(n,mup-sip^2/2,sip))
P1=P0*Xp1
#Asset
A0=170
mua=0.03576032
sia=0.06258293
Xa1=exp(rnorm(n,mua-sia^2/2,sia))
A1=A0*Xa1
# Combined ratio
be=1
sib=0.02
be1=exp(rnorm(n,log(be)-sib^2/2,sib))
# Liabilities and Best Estimate
BEL0=90
r=0.04
ph=0.8
mul=r+log(1-ph)
sil=0.1
Xl1=exp(rnorm(n,mul-sil^2/2,sil))
BEL1=be1*P1+BEL0*Xl1
# Further parameters for SCR calculations
#al...alpha
#th...theta
#D0...duration
al=0.06
th=ph/(1-ph)
D0=2
#scrfun evaluates the RHS of equation(2) from the papers
#expression taken from the authors'program (differ from the paper)
scrfun=function(scr,bel,p)

```



```

{
h=1+al*scr/bel*D0
m=(1+th)*bel*exp(mul)-(1-be)*p*exp(mup)
v=(1+th)^2*bel^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(be)^2*(exp(sib^2)-1)
*p^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+p^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
print(c(mu_chi,s_chi))
1/(1+al*D0)*(exp(mu_chi+s_chi*qnorm(0.995))-bel)
}
print(scrfun(30,BEL0,P0))
SCR0=scrfun(28.95188,BEL0,P0)
SCR0=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL0,P0)-x,c(0,BEL0))$root
print(SCR0)
SCR1=rep(0,n);
for(j in 1:n)
{
SCR1[j]=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL1[j],P1[j])-x,c(0,BEL1[j]))$root
}
print(SCR1)
L0=BEL0
L1=BEL1
C1=th*(BEL1-be1*P1)
A1=A0*Xa1-C1+P1
s1=(A1-L1)/SCR1
w1=(A1-L1)/(A0-L0)
pdf("Fig.3aoRM.pdf")
ecdf(s1)
plot(ecdf(s1),lwd=2,main="95% Quantil der 1-Jahres-Solvenzquote ohne RM",
xlab="Solvenzquote",ylab="Empirische VF")
lines(c(1.3,1.3),c(-2,2),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(1.7,1.7),c(-2,2),col="green",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(-10,10),c(0.05,0.05),col="red",lty="dotted",lwd=2)
dev.off()

```

```

pdf("Fig.3boRM.pdf")
ecdf(w1)
plot(ecdf(w1),lwd=2,main="80% Quantil der 1-Jahres-Rendite ohne RM",
xlab="Rendite",ylab="Empirische VF")
lines(c(0.865,0.865),c(-2,2),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(-10,10),c(0.2,0.2), col="red",lty="dotted",lwd=2)
dev.off()
###

```

7.1.5 R-Codes zu den Abbildungen 5.7 und 5.8

```

# remove everything from the workspace to start fresh
rm(list=ls(all=TRUE))
# fix the random seed for reproducability of results
set.seed(1234)
# number of simulations
n=5000
#Premiums
#
#P0...initial premium
#mup...premium parameter mu_p
#sip...premium parameter sigma_p
#Xp1...lognormal innovation factor vector year 1
#P1...premium vector year 1
P0=75
mup=0
sip=0.01
Xp1=exp(rnorm(n,mup-sip^2/2,sip))
P1=P0*Xp1
#Asset
A0=170
mua=0.03576032
sia=0.06258293
Xa1=exp(rnorm(n,mua-sia^2/2,sia))
A1=A0*Xa1
# Combined ratio
be=1
sib=0.02

```

```

be1=exp(rnorm(n,log(be)-sib^2/2,sib))
# Liabilities and Best Estimate
BEL0=90
r=0.04
ph=0.8
mul=r+log(1-ph)
sil=0.1
Xl1=exp(rnorm(n,mul-sil^2/2,sil))
BEL1=be1*P1+BEL0*Xl1
# Further parameters for SCR calculations
#al...alpha
#th...theta
#D0...duration
al=0.06
th=ph/(1-ph)
D0=2
#scrfun evalutes the RHS of equation(2) from the papers
#expression taken from the authors'program (differ from the paper)
scrfun=function(scr,bel,p)
{
h=1+al*scr/bel*D0
m=(h+th)*bel*exp(mul)-(1-h*be)*p*exp(mup)
v=(h+th)^2*bel^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(h*be)^2*(exp(sib^2)-1)
*p^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+p^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-h*be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
print(c(mu_chi,s_chi))
1/(1+al*D0)*(exp(mu_chi+s_chi*qnorm(0.995))-bel)
}
print(scrfun(30,BEL0,P0))
SCR0=scrfun(32.61352,BEL0,P0)
SCR0=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL0,P0)-x,c(0,BEL0))$root
print(SCR0)
SCR1=rep(0,n);

```

```

for(j in 1:n)
{
SCR1[j]=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL1[j],P1[j])-x,c(0,BEL1[j]))$root
}
print(SCR1)
L0=BEL0+a1*D0*SCR0
h1=1+a1*(SCR1/BEL1)*D0
L1=BEL1+a1*D0*SCR1
C1=th*(BEL1-be1*P1)
A1=A0*Xa1-C1+P1
s1=(A1-L1)/SCR1
w1=(A1-L1)/(A0-L0)
pdf("Fig.3amRM.pdf")
ecdf(s1)
plot(ecdf(s1),main="95% Quantil der 1-Jahres-Solvenzquote mit RM",
xlab="Solvenzquote",ylab="Empirische VF",lwd=2)
lines(c(1.3,1.3),c(-2,2),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(1.4,1.4),c(-2,2),col="green",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(-10,10),c(0.05,0.05), col="red",lty="dotted",lwd=2)
dev.off()
pdf("Fig.3bmRM.pdf")
ecdf(w1)
plot(ecdf(w1),main="80% Quantil der 1-Jahres-Rendite mit RM",
xlab="Rendite",ylab="Empirische VF",lwd=2)
lines(c(0.865,0.865),c(-2,2),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(-10,10),c(0.2,0.2), col="red",lty="dotted",lwd=2)
dev.off()
###

```

7.1.6 R-Code zur Abbildung 5.11

```

# remove everything from the workspace to start fresh
rm(list=ls(all=TRUE))
# fix the random seed for reproducability of results
set.seed(1234)
# number of simulations
n=5000
#Premiums

```

```

#
#P0...initial premium
#mup...premium parameter mu_p
#sip...premium parameter sigma_p
#Xp1...lognormal innovation factor vector year 1
#P1...premium vector year 1
P0=79
mup=0
sip=0.01
Xp1=exp(rnorm(n,mup-sip^2/2,sip))
P1=P0*Xp1
#Asset
A0=170
mua=0.03576032
sia=0.06258293
Xa1=exp(rnorm(n,mua-sia^2/2,sia))
A1=A0*Xa1
# Combined ratio
be=1
sib=0.02
be1=exp(rnorm(n,log(be)-sib^2/2,sib))
# Liabilities and Best Estimate
BEL0=90
r=0.04
ph=0.8
mul=r+log(1-ph)
sil=0.1
Xl1=exp(rnorm(n,mul-sil^2/2,sil))
BEL1=be1*P1+BEL0*Xl1
# Further parameters for SCR calculations
#al...alpha
#th...theta
#D0...duration
al=0.06
th=ph/(1-ph)
D0=2
#scrfun evaluates the RHS of equation(2) from the papers

```

```

#expression taken from the authors'program (differ from the paper)
scrfun=function(scr,bel,p)
{
h=1+a1*scr/bel*D0
m=(1+th)*bel*exp(mul)-(1-be)*p*exp(mup)
v=(1+th)^2*bel^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+be^2*(exp(sib^2)-1)*
p^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+p^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
#print(c(mu_chi,s_chi))
1/(1+a1*D0)*(exp(mu_chi+s_chi*qnorm(0.995))-bel)
}
print(scrfun(25,BEL0,P0))
SCR0=scrfun(28.98322,BEL0,P0)
SCR0=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL0,P0)-x,c(0,BEL0))$root
print(SCR0)
#
setwd("C:/users/Kolo/Documents/UNI/Abschlussarbeit/R Dateien")
P_Actif=read.table("P_Actif.csv",sep=";",dec=",")
epa=rnorm(n)
Q=rep(0,50)
SCR1=rep(0,n);
for(k in 1:50)
{
mua=P_Actif[100-k,1]
sia=P_Actif[100-k,2]
Xa1=exp(mua-sia^2/2+sia*epa)
for(j in 1:n)
{
SCR1[j]=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL1[j],P1[j])-x,c(0,BEL1[j]))$root
}
#print(SCR1)
L1=BEL1
C1=th*(BEL1-be1*P1)

```

```

A1=A0* $X_{a1}$ -C1+P1
s1=(A1-L1)/SCR1
Q[k]=100*quantile(s1,0.05)
print(c(k,Q[k]))
}
pdf("Fig.6.oRM(5.11).pdf")
plot(1:50,Q,type="l",main="95% Quantil der 1-Jahres-Solvenzquote ohne RM",
xlab="Eigenkapital-Allokation",ylab="Solvenzquote",lwd=2)
lines(c(-10,32),c(170,170),col="green",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(-10,50),c(135,135),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(1,1),c(-2,170),col="green",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(32,32),c(-2,170),col="green",lty="dotted",lwd=2)
dev.off()
###

```

7.1.7 R-Code zur Abbildung 5.12

```

# remove everything from the workspace to start fresh
rm(list=ls(all=TRUE))
# fix the random seed for reproducability of results
set.seed(1234)
# number of simulations
n=5000
#Premiums
#
#P0...initial premium
#mup...premium parameter mu_p
#sip...premium parameter sigma_p
#Xp1...lognormal innovation factor vector year 1
#P1...premium vector year 1
P0=79
mup=0
sip=0.01
Xp1=exp(rnorm(n,mup-sip^2/2,sip))
P1=P0*Xp1
#Asset
A0=170
mua=0.03576032

```

```

sia=0.06258293
Xa1=exp(rnorm(n,mua-sia^2/2,sia))
A1=A0*Xa1
# Combined ratio
be=1
sib=0.02
be1=exp(rnorm(n,log(be)-sib^2/2,sib))
# Liabilities and Best Estimate
BEL0=90
r=0.04
ph=0.8
mul=r+log(1-ph)
sil=0.1
Xl1=exp(rnorm(n,mul-sil^2/2,sil))
BEL1=be1*P1+BEL0*Xl1
# Further parameters for SCR calculations
#al...alpha
#th...theta
#D0...duration
al=0.06
th=ph/(1-ph)
D0=2
#scrfun evalutes the RHS of equation(2) from the papers
#expression taken from the authors'program (differ from the paper)
scrfun=function(scr,bel,p)
{
h=1+al*scr/bel*D0
m=(1+th)*bel*exp(mul)-(1-be)*p*exp(mup)
v=(1+th)^2*bel^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(be)^2*(exp(sib^2)-1)*
p^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+p^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
#print(c(mu_chi,s_chi))
1/(1+al*D0)*(exp(mu_chi+s_chi*qnorm(0.995))-bel)
}

```



```

}
print(scrfun(30,BEL0,P0))
SCR0=scrfun(28.98322,BEL0,P0)
SCR0=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL0,P0)-x,c(0,BEL0))$root
print(SCR0)
#
setwd("C:/users/Kolo/Documents/UNI/Abschlussarbeit/R Dateien")
P_Actif=read.table("P_Actif.csv",sep=";",dec=",")
epa=rnorm(n)
Q=rep(0,50)
SCR1=rep(0,n);
for(k in 1:50)
{
mua=P_Actif[100-k,1]
sia=P_Actif[100-k,2]
Xa1=exp(mua-sia^2/2+sia*epa)
for(j in 1:n)
{
SCR1[j]=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL1[j],P1[j])-x,c(0,BEL1[j]))$root
}
#print(SCR1)
L0=BEL0
L1=BEL1
C1=th*(BEL1-be1*P1)
A1=A0*Xa1-C1+P1
s1=(A1-L1)/SCR1
w1=(A1-L1)/(A0-L0)
Q[k]=100*quantile(w1,0.2)
print(c(k,Q[k]))
}
pdf("Fig.7.oRM(5.12).pdf")
plot(1:50,Q,type="l",main="80% Quantil der 1-Jahres-Rendite ohne RM",
xlab="Eigenkapital-Allokation",ylab="Rendite",lwd=2)
lines(c(-10,43),c(86.5,86.5),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(5,5),c(-2,86.5),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(43,43),c(-2,86.5),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(-10,34),c(87.5,87.5),col="green",lty="dotted",lwd=2)

```

```

lines(c(12,12),c(-2,87.5),col="green",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(34,34),c(-2,87.5),col="green",lty="dotted",lwd=2)
dev.off()
###

```

7.1.8 R-Code zur Abbildung 5.13

```

# remove everything from the workspace to start fresh
rm(list=ls(all=TRUE))
# fix the random seed for reproducibility of results
set.seed(1234)
# number of simulations
n=5000
#Premiums
#
#P0...initial premium
#mup...premium parameter mu_p
#sip...premium parameter sigma_p
#Xp1...lognormal innovation factor vector year 1
#P1...premium vector year 1
P0=79
mup=0
sip=0.01
Xp1=exp(rnorm(n,mup-sip^2/2,sip))
P1=P0*Xp1
#Asset
A0=170
mua=0.03576032
sia=0.06258293
Xa1=exp(rnorm(n,mua-sia^2/2,sia))
A1=A0*Xa1
# Combined ratio
be=1
sib=0.02
be1=exp(rnorm(n,log(be)-sib^2/2,sib))
# Liabilities and Best Estimate
BEL0=90
r=0.04

```

```

ph=0.8
mul=r+log(1-ph)
sil=0.1
Xl1=exp(rnorm(n,mul-sil^2/2,sil))
BEL1=be1*P1+BEL0*Xl1
# Further parameters for SCR calculations
#al...alpha
#th...theta
#D0...duration
al=0.06
th=ph/(1-ph)
D0=2
#scrfun evalutes the RHS of equation(2) from the papers
#expression taken from the authors'program (differ from the paper)
scrfun=function(scr,bel,p)
{
h=1+al*scr/bel*D0
m=(h+th)*bel*exp(mul)-(1-h*be)*p*exp(mup)
v=(h+th)^2*bel^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(h*be)^2*(exp(sib^2)-1)*
p^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+p^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-h*be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
#print(c(mu_chi,s_chi))
1/(1+al*D0)*(exp(mu_chi+s_chi*qnorm(0.995))-bel)
}
print(scrfun(30,BEL0,P0))
SCR0=scrfun(32.7946,BEL0,P0)
SCR0=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL0,P0)-x,c(0,BEL0))$root
print(SCR0)
#
setwd("C:/users/Kolo/Documents/UNI/Abschlussarbeit/R Dateien")
P_Actif=read.table("P_Actif.csv",sep=";",dec="," )
epa=rnorm(n)
Q=rep(0,50)

```

```

SCR1=rep(0,n);
for(k in 1:50)
{
mua=P_Actif[100-k,1]
sia=P_Actif[100-k,2]
Xa1=exp(mua-sia^2/2+sia*epa)
for(j in 1:n)
{
SCR1[j]=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL1[j],P1[j])-x,c(0,BEL1[j]))$root
}
#print(SCR1)
L1=BEL1+al*D0*SCR1
C1=th*(BEL1-be1*P1)
A1=A0*Xa1-C1+P1
s1=(A1-L1)/SCR1
Q[k]=100*quantile(s1,0.05)
print(c(k,Q[k]))
}
pdf("Fig.6.mRM(5.13).pdf")
plot(1:50,Q,type="l",main="95% Quantil der 1-Jahres-Solvenzquote mit RM",
xlab="Eigenkapital-Allokation",ylab="Solvenzquote",lwd=2)
lines(c(-10,30),c(140,140),col="green",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(2,2),c(-2,140),col="green",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(30,30),c(-2,140),col="green",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(-10,36),c(130,130),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(0.1,0.1),c(-2,130),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(36,36),c(-2,130),col="red",lty="dotted",lwd=2)
dev.off()
###

```

7.1.9 R-Code zur Abbildung 5.14

```

# remove everything from the workspace to start fresh
rm(list=ls(all=TRUE))
# fix the random seed for reproducability of results
set.seed(1234)
# number of simulations
n=5000

```

```

#Premiums
#
#P0...initial premium
#mup...premium parameter mu_p
#sip...premium parameter sigma_p
#Xp1...lognormal innovation factor vector year 1
#P1...premium vector year 1
P0=79
mup=0
sip=0.01
Xp1=exp(rnorm(n,mup-sip^2/2,sip))
P1=P0*Xp1
#Asset
A0=170
mua=0.03576032
sia=0.06258293
Xa1=exp(rnorm(n,mua-sia^2/2,sia))
A1=A0*Xa1
# Combined ratio
be=1
sib=0.02
be1=exp(rnorm(n,log(be)-sib^2/2,sib))
# Liabilities and Best Estimate
BEL0=90
r=0.04
ph=0.8
mul=r+log(1-ph)
sil=0.1
Xl1=exp(rnorm(n,mul-sil^2/2,sil))
BEL1=be1*P1+BEL0*Xl1
# Further parameters for SCR calculations
#al...alpha
#th...theta
#D0...duration
al=0.06
th=ph/(1-ph)
D0=2

```

```

#scrfun evalutes the RHS of equation(2) from the papers
#expression taken from the authors'program (differ from the paper)
scrfun=function(scr,bel,p)
{
h=1+al*scr/bel*D0
m=(h+th)*bel*exp(mul)-(1-h*be)*p*exp(mup)
v=(h+th)^2*bel^2*exp(2*mul)*(exp(sil^2)-1)+(h*be)^2*(exp(sib^2)-1)*
p^2*exp(2*mup)*exp(sip^2)+p^2*exp(2*mup)*(exp(sip^2)-1)*(1-h*be)^2
om=(v^0.5)/m
s=(log(1+om^2))^0.5
mu=log(m/(1+om^2)^0.5)
mu_chi=mu-mua+sia^2/2
s_chi=(s^2+sia^2)^0.5
#print(c(mu_chi,s_chi))
1/(1+al*D0)*(exp(mu_chi+s_chi*qnorm(0.995))-bel)
}
print(scrfun(30,BEL0,P0))
SCR0=scrfun(37.7946,BEL0,P0)
SCR0=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL0,P0)-x,c(0,BEL0))$root
print(SCR0)
#
setwd("C:/users/Kolo/Documents/UNI/Abschlussarbeit/R Dateien")
P_Actif=read.table("P_Actif.csv",sep=";",dec="," )
epa=rnorm(n)
Q=rep(0,50)
SCR1=rep(0,n);
for(k in 1:50)
{
mua=P_Actif[100-k,1]
sia=P_Actif[100-k,2]
Xa1=exp(mua-sia^2/2+sia*epa)
for(j in 1:n)
{
SCR1[j]=uniroot(function(x)scrfun(x,BEL1[j],P1[j])-x,c(0,BEL1[j]))$root
}
#print(SCR1)
L0=BEL0+al*D0*SCR0

```

```

L1=BEL1+al*D0*SCR1
C1=th*(BEL1-be1*P1)
A1=A0*Xa1-C1+P1
s1=(A1-L1)/SCR1
w1=(A1-L1)/(A0-L0)
Q[k]=100*quantile(w1,0.2)
print(c(k,Q[k]))
}
pdf("Fig.7.mRM(5.14).pdf")
plot(1:50,Q,type="l",main="80% Quantil der 1-Jahres-Rendite mit RM",
xlab="Eigenkapital-Allokation",ylab="Rendite",lwd=2)
lines(c(-10,31),c(86.5,86.5),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(12.5,12.5),c(-2,86.5),col="red",lty="dotted",lwd=2)
lines(c(31,31),c(-2,86.5),col="red",lty="dotted",lwd=2)
dev.off()
###

```

7.2 R-Codes zu Kapitel 6

7.2.1 R-Code zur Abbildung 6.1

```

#Grafische Darstellung der Dichtefunktion der Summe (durch Faltung)
zwei Lognormale Zufallsvariable und die Lognormale Approximation
mu1=0
mu2=0
sig1=1
sig2=1
m1=exp(mu1+sig1^2/2)
m2=exp(mu2+sig2^2/2)
nu1hoch2=m1^2*(exp(sig1^2)-1)
nu2hoch2=m2^2*(exp(sig2^2)-1)
nuhoch2=nu1hoch2+nu2hoch2
m=m1+m2
omhoch2=nuhoch2/m^2
sig=log(1+omhoch2)^.5
mu=log(m/(1+omhoch2)^.5)
print(sig)

```

```

print(mu)
h=function(x)
{
fun=function(y)
{
dlnorm(y,mu1,sig1)*dlnorm(x-y,mu2,sig2)
}
integrate(fun,0,x)$value
}
n=200
x=seq(0,m+5*sqrt(nuhoch2),length=n)
y=rep(0,n)
y=sapply(x,h)
pdf("Fig.10.pdf")
plot(x,y,type="l",main="Dichtefunktion",ylab="Dichte")
curve(dlnorm(x,mu,sig), col = 2, lty = 2, lwd = 2, add = TRUE)
dev.off()
###

```

7.2.2 R-Code zur Abbildung 6.2

```

#Grafische Darstellung der Dichtefunktion der Summe(durch Faltung)
zwei Lognormale Zufallsvariable und die Lognormale Approximation
mu1=0.5
mu2=0.8
sig1=1.5
sig2=1.8
m1=exp(mu1+sig1^2/2)
m2=exp(mu2+sig2^2/2)
nu1hoch2=m1^2*(exp(sig1^2)-1)
nu2hoch2=m2^2*(exp(sig2^2)-1)
nuhoch2=nu1hoch2+nu2hoch2
m=m1+m2
omhoch2=nuhoch2/m^2
sig=log(1+omhoch2)^.5
mu=log(m/(1+omhoch2)^.5)
print(sig)
print(mu)

```



```

h=function(x)
{
fun=function(y)
{
dlnorm(y,mu1,sig1)*dlnorm(x-y,mu2,sig2)
}
integrate(fun,0,x)$value
}
n=200
x=seq(0,m+3*sqrt(nu*och2),length=n)
y=rep(0,n)
y=sapply(x,h)
pdf("Fig.10a.pdf")
plot(x,y,type="l",main="Dichtefunktion",ylab="Dichte")
curve(dlnorm(x,mu,sig), col = 2, lty = 3, lwd = 2, add = TRUE)
dev.off()
###

```

7.3 Verwendete Daten

Nr.	mua	sia			
1	0,07686131	0,198016395	50	0,054577634	0,104730319
2	0,076509988	0,196034275	51	0,054014201	0,102990761
3	0,076154392	0,194053697	52	0,053446385	0,101264144
4	0,075794519	0,192074722	53	0,052874185	0,099551161
5	0,075430368	0,190097411	54	0,052297599	0,097852549
6	0,075061935	0,188121831	55	0,051716624	0,096169089
7	0,074689219	0,18614805	56	0,051131258	0,094501613
8	0,074312217	0,184176137	57	0,0505415	0,092851003
9	0,073930927	0,182206166	58	0,049947347	0,091218196
10	0,073545346	0,180238215	59	0,049348798	0,089604187
11	0,073155472	0,178272364	60	0,04874585	0,088010032
12	0,072761303	0,176308695	61	0,048138503	0,086436853
13	0,072362836	0,174347297	62	0,047526753	0,084885837
14	0,071960069	0,172388259	63	0,046910598	0,083358245
15	0,071552999	0,170431678	64	0,046290038	0,081855412
16	0,071141625	0,168477652	65	0,04566507	0,08037875
17	0,070725944	0,166526285	66	0,045035691	0,078929753
18	0,070305954	0,164577686	67	0,044401901	0,077509995
19	0,069881652	0,162631968	68	0,043763698	0,076121138
20	0,069453037	0,16068925	69	0,043121078	0,074764928
21	0,069020105	0,158749656	70	0,042474042	0,0734432
22	0,068582854	0,156813317	71	0,041822586	0,072157873
23	0,068141284	0,15488037	72	0,041166709	0,070910954
24	0,06769539	0,152950958	73	0,040506409	0,069704529
25	0,067245171	0,15102523	74	0,039841685	0,068540764
26	0,066790625	0,149103346	75	0,039172534	0,067421894
27	0,066331749	0,147185469	76	0,038498954	0,066350218
28	0,065868541	0,145271776	77	0,037820945	0,065328086
29	0,065400999	0,143362447	78	0,037138503	0,064357886
30	0,064929121	0,141457676	79	0,036451628	0,063442029
31	0,064452905	0,139557664	80	0,035760317	0,062582929
32	0,063972348	0,137662625	81	0,035064569	0,061782981
33	0,063487448	0,135772784	82	0,034364382	0,061044541
34	0,062998203	0,133888375	83	0,033659754	0,060369894
35	0,062504611	0,132009648	84	0,032950684	0,059761229
36	0,06200667	0,130136867	85	0,03223717	0,05922061
37	0,061504377	0,128270307	86	0,031519209	0,058749945
38	0,060997731	0,126410261	87	0,030796801	0,058350955
39	0,060486729	0,124557038	88	0,030069944	0,058025149
40	0,059971369	0,122710965	89	0,029338635	0,057773793
41	0,05945165	0,120872386	90	0,028602874	0,057597892
42	0,058927568	0,119041666	91	0,027862659	0,057498167
43	0,058399123	0,117219192	92	0,027117987	0,057475043
44	0,057866311	0,115405372	93	0,026368858	0,057528642
45	0,057329131	0,113600638	94	0,025615269	0,057658777
46	0,05678758	0,11180545	95	0,024857219	0,057864961
47	0,056241657	0,110020293	96	0,024094707	0,058146413
48	0,05569136	0,108245682	97	0,023327731	0,058502073
49	0,055136686	0,106482164	98	0,022556288	0,058930625
			99	0,021780379	0,05943052

Tabelle 7.1: Bei die Brechnungen verwendete Daten P_Actif (Quelle: E-Mail von F. Planchet am 19.Juli 2013)

Literaturverzeichnis

- [1] FMA Österreichische Finanzmarktaufsicht; Solvency II Handbuch: Eine Einführung in das neue europäische Versicherungsaufsicht; LexisNexis; (2012)
- [2] Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht (BaFin); Solvency II: Aufbau und Gesetzgebung; www.bafin.de/DE/Internationales/Regelungsvorhaben/Solvency2; (Abgerufen: 15. August 2013)
- [3] Seite „Solvency II“; In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie; de.wikipedia.org/wiki/Solvency_II; (Abgerufen: 14. August 2013)
- [4] Excellence in Solvency II; Definition Solvency II , Solvency II Fachblog; metafinanz Informationssysteme GmbH München; solvencyii.metafinanz.de/; (Abgerufen: 14. August 2013)
- [5] FMA Österreichische Finanzmarktaufsicht; Solvency II, Allgemeine Grundlagen; www.fma.gv.at/de/sonderthemen/solvency-ii/allgemeine-grundlagen; (Abgerufen: 30. Juli 2013)
- [6] FMA Österreichische Finanzmarktaufsicht; Solvency II, Rechtliche Grundlagen; www.fma.gv.at/de/sonderthemen/solvency-ii/rechtliche-grundlagen; (Abgerufen: 30. Juli 2013)
- [7] B. Weindorder; Solvency II: Eine Übersicht, Working Paper Series Nr. 64; Fachhochschule des bfi Wien; (August 2011)
- [8] Ch. Krischanitz; Einführung Solvency II; VU Risikomanagement in Versicherungsunternehmen und Banken; TU Wien; (2012)
- [9] D. Pfeiler; Solvenzkapital; solvency-ii-kompakt.de/content/solvenzkapital; (Abgerufen: 14. Juli 2013)
- [10] ASSEKURATA, Köln; Own Risk and Solvency Assesment (ORSA); [solvency-ii-kompakt.de content/own-risk-and-solvency-assessment-orsa-ein-pr-gnantes-kernelement-von-solvency-ii](http://solvency-ii-kompakt.de/content/own-risk-and-solvency-assessment-orsa-ein-pr-gnantes-kernelement-von-solvency-ii); (Abgerufen: 14. Juli 2013)

- [11] CEIOPS Issues Paper(IGSRR-09/08) vom 27.05.2008: „Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)“; (2008)
- [12] K. Ehrlich; ORSA Unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung; Munich RE, Solvency Consulting Knowledge Series; www.munichre.com/publications/302-07573_de.pdf; (August 2012)
- [13] R. Korherr, Th. Smrekar; Unter die Lupe genommen, ORSA: was steckt hinter diesem Begriff?; Zeitschrift: Dimensionen, Fokus Versicherung, KPMG Austria AG; (Ausgabe 4/Dezember 2012)
- [14] F. Planchet, Q. Guibert, M. Juillard; Measuring uncertainty of solvency coverage ratio in ORSA for non-life insurance; Eur. Actuar.J.:205–226; (2012)
- [15] D. G. Luenberger; Investment Science; Oxford University; (1998)
- [16] Q. Guibert, M. Juillard, F. Planchet; Un cadre de référence pour un modèle interne partiel en assurance de personnes; Bulletin Francais d’Actuariat 10(20); (2010)
- [17] C. Y. Robert; Market value margin calculations under the cost of capital approach within a Bayesian chain ladder framework; ISFA; Working Paper; (2011)
- [18] CEIOPS (2010b); QIS5 Technical Specifications; (July 2010)
- [19] L. F. Fenton; The sum of log-normal probability distributions in scattered transmissions systems; IRE Trans Commun Syst 8:57–67; (1960)
- [20] N. E. El Faouzi, M. Maurin; Sur la loi de la somme de variables log-normales: application à la fiabilité de temps de parcours routiers; Working Paper; INRETS; (2006)
- [21] S. Schwartz; On the distribution function and moments of power sums of with log-normal components; Bell Syst Tech J 61:1441–1462; (1982)
- [22] D. Dufrense; The log-normal approximation in financial and other applications; Adv Appl Prob 36:747–773; (2004)
- [23] C. M. Jarque, A. K. Bera; Efficient tests for normality, heteroscedasticity and serial independence of regression residuals; Economic Letter 6:255–259; (1980)
- [24] T. W. Anderson, D. A. Darling; A test of goodness of fit.; JASA 49:765–769; (1954)

- [25] E. L. Crow, K. Shimizu; Lognormal Distributions: Theory and Applications; Marcel Dekker, Inc, New York; (1988)