TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

DIPLOMARBEIT

Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

ausgeführt am Institut für

Analysis und Scientific Computing

der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von

Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Michael Kaltenbäck

durch

Claudio Rojik, BSc.

Anzengrubergasse 5/1
2380 Perchtoldsdorf

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das Konzept des sektoriellen Operators wurde etwa zeitgleich um das Jahr 1960 von Kato, Balakrishnan und Komatsu eingeführt. Von letzterem wurden sie damals allerdings noch als nicht-negative Operatoren bezeichnet. Die ersten Versuche, Funktionalkalküle für solche unbeschränkten Operatoren zu bauen, fußten auf der Rückführung auf den Fall beschränkter Operatoren, für den der Riesz-Dunford-Funktionalkalkül zur Verfügung stand. Bei den weiteren Entwicklungen in den nächsten Jahrzehnten wurden oft auch zusätzlich Bedingungen wie dichte Definitionsbereiche oder Injektivität der Operatoren gefordert. M. Haase wählte Anfang des jetzigen Jahrhunderts - beginnend mit seiner Dissertation [Ha2] - einen anderen Zugang über abstrakte Funktionalkalküle, bei dem er auf solche zusätzlichen Forderungen verzichten konnte.

Ebenfalls um das Jahr 1960 begannen Balakrishnan und Komatsu, für sektorielle Operatoren A den Ausdruck A^α für $\alpha \in \mathbb{C}$ mittels Integraldarstellungen zu definieren, wobei zahlreiche Fallunterscheidungen je nach Realteil der Exponenten notwendig waren, vgl. (1.2) in [M]. Um für diese „Fractional Powers“ Resultate zeigen zu können, mussten all diese Fälle abgehandelt werden, wobei man auch hier wieder meist dichten Definitionsbereich des Operators A forderte. M. Haase betrachtet den Ausdruck A^α ausgehend vom Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren, wobei er ohne diese Fallunterscheidungen und Annahmen an Dichtheit auskommt.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit dem Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren und dessen Anwendung auf Potenzen von Operatoren mit komplexen Exponenten beschäftigen, wobei wir den oben erwähnten Zugang von M. Haase wählen. Wir werden uns dabei vorwiegend an das Buch [Ha1] halten.

Kapitel 1 nimmt in dieser Arbeit eine Sonderstellung ein, da wir uns hier noch nicht mit dem zu entwickelnden Funktionalkalkül beschäftigen werden. Stattdessen werden wir die verwendete Notation erklären und wichtige Resultate aus Funktionalanalysis und Funktionentheorie in Erinnerung rufen. Weiters werden wir Holomorphie für banachraumwertige Funktionen erklären und in die Theorie der linearen Relationen einführen. Letztere werden wir zwar nur selten brauchen, allerdings ist es manchmal hilfreich, das Konzept im Hinterkopf zu haben. Die meisten Resultate dieses Kapitels wurden während meines Masterstudiums in diversen Vorlesungen behandelt und finden sich alle in [K1], [K2], [K3] und [W]. Die Ausnahmen dazu bilden der Abschnitt über Holomorphie in Banachräumen, der aus [N] stammt, und der Abschnitt über Potenzen von Operatoren aus [Ha1, Abschnitt A.6].

In Kapitel 2 beginnen wir mit der Einführung von abstrakten Funktionalkalkülen. Dieses Konzept funktioniert auf beliebigen kommutativen Algebren $\mathcal{M}$ mit Eins, die nur gewissen Eigenschaften genügen müssen. So fordert man nur die Existenz eines Homomorphismus von einer Unteralgebra von $\mathcal{M}$ in die beschränkten, linearen Operatoren auf einem Banachraum. Nachdem wir einige Eigenschaften gezeigt haben, werden wir konkreter und betrachten meromorphe Funktionalkalküle, bei denen die Algebra $\mathcal{M}$ aus meromorphen Funktionen besteht. Dieser Abschnitt wird die Grundlage bilden, auf dem der Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren aufbaut.

Den Anfang von Kapitel 3 bildet die Definition von (meist unbeschränkten) sektoriellen Operatoren. Es folgen Betrachtungen von Funktionen mit polynomiellen Grenzwerten, die die gesamte Arbeit über immer wieder auftauchen werden. Damit haben wir alle Werkzeuge beisammen, um das erste angestrebte Ziel - die Entwicklung des Funktionalkalküls für sektorielle Operatoren - erreichen zu können. Mittels Cauchy-Integralen können wir für geeignete Wege und Funktionen den Ausdruck

$$f(A) = \int_\Gamma f(A)(z - A)^{-1}\, dz$$

definieren, wenn A den sektoriellen Operator bezeichnet. Wir beenden dieses Kapitel danach mit dem Beweis der Kompositionsregel, die für geeignete Funktionen $(f \circ g)(A) = f(g(A))$ leistet.

In Kapitel 4 zeigen wir schließlich exemplarisch, wie man den entwickelten Funktionalkalkül anwenden kann. Für einen sektoriellen Operator A definieren wir die Potenzen A^α für $\alpha \in \mathbb{C}$ durch $A^\alpha := (z^\alpha)(A)$ mittels des Funktionalkalküls. Nach einer Sammlung von interessanten Eigenschaften, bei deren Beweisen oft Eigenschaften des Funktionalkalküls sowie die Kompositionsregel auftreten, kommen wir als Abschluss der Arbeit zu den Darstellungssätzen von Balakrishnan und Komatsu, die auch den historischen Bezug zur früher gebräuchlichen Definition von A^α herstellen.

Ich möchte mich an dieser Stelle noch bei Michael Kaltenbäck für die sorgfältige Betreuung meiner Diplomarbeit bedanken.

Claudio Rojik Wien, Dezember 2013

1 Grundlegende Resultate

Dieses Kapitel dient dazu, grundlegende Notationen zu erklären bzw. bekannte Resultate aus Operator- und Funktionentheorie in Erinnerung zu rufen. Viele Resultate werden hier daher auch ohne Beweis angegeben.

1.1 Bemerkungen zur Notation

Seien X und Y Banachräume über $\mathbb{C}$. Alle Operatoren $T : X \to Y$, die wir in dieser Arbeit betrachten, werden lineare Operatoren sein. Der Einfachheit halber werden wir meist das Wort „linear“ weglassen und nur von Operatoren sprechen. Mit $\mathcal{B}(X, Y)$ bezeichnen wir den Raum der beschränkten Operatoren von X nach Y. Falls $X = Y$, so schreiben wir kürzer $\mathcal{B}(X)$ für den Raum der beschränkten Operatoren von X nach X. Es ist ein bekanntes Resultat, dass der Raum $\mathcal{B}(X, Y)$ selber wieder ein Banachraum ist, wenn man ihn mit der Operatornorm versieht. Beachte, dass für lineare Operatoren die Beschränktheit äquivalent zur Stetigkeit ist. Im Übrigen werden wir für die Operatornorm und die Banachraumnorm auf X dieselbe Notation $\|.\|$ verwenden, was aber zu keinen Verwirrungen führen sollte.
Mit X' bezeichnen wir den topologischen Dualraum von X, der alle stetigen, linearen Funktionale $x' : X \to \mathbb{C}$ enthält. Als Resultat der Sätze von Hahn-Banach erhalten wir, dass der Raum X' punktetrennend auf X agiert.
Mit $B_r(x)$ bezeichnen wir die offene Kugel mit Radius r um den Punkt x. Die abgeschlossene Kugel wird dann als $\overline{B_r(x)}$ geschrieben.
Wir werden auch öfters die Funktion $z^\alpha := e^{\alpha \log(z)}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ betrachten. Damit diese wohldefiniert ist, beschränken wir uns immer auf $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ und wählen für den komplexen Logarithmus den Zweig mit $\log(1) = 0$.

1.2 Resultate aus Analysis und Funktionentheorie

Wir wollen in dieser Arbeit voraussetzen, dass Begriffe wie Holomorphie, aber auch Sätze wie die Cauchy'sche Integralformel und der Cauchy'sche Integralsatz, hinreichend bekannt sind, und wollen für eine detailliertere Einführung auf Literatur über Funktionentheorie verweisen. Dieser Abschnitt soll vor allem dazu dienen, den Holomorphiebegriff auf banachraumwertige Funktionen zu verallgemeinern und zu bemerken, wie man Sätze aus der klassischen Funktionentheorie auf $\mathbb{C}$ auf den banachraumwertigen Fall übertragen kann. Die folgenden Resultate dazu sind [N, Abschnitt 3.1] entnommen.
Abgerundet wird dieser Abschnitt noch mit einigen zusätzlichen Resultaten aus der (klassischen) Funktionentheorie, die wir später öfters brauchen werden.

1.2.1 Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und seien X, Y Banachräume über $\mathbb{C}$.

(i) Eine Funktion $f : D \to X$ heißt holomorph auf D, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to w} \frac{1}{z - w}(f(z) - f(w)) =: f'(w)$$

in X für alle $w \in D$ bezüglich der Banachraumnorm auf X existiert. Sie heißt schwach holomorph auf D, wenn $\hat{x} \circ f : D \to \mathbb{C}$ für alle $\hat{x} \in X'$ holomorph (im klassischen Sinn) ist.

(ii) Eine operatorwertige Funktion $T : D \to \mathcal{B}(X,Y)$ heißt holomorph auf D, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to w} \frac{1}{z-w}(T(z) - T(w)) =: T'(w)$$

in $\mathcal{B}(X,Y)$ für alle $w \in D$ bezüglich der Operatornorm existiert. Sie heißt schwach holomorph, wenn $z \mapsto \hat{y}(T(z)x)$ für alle $x \in X$ und alle $\hat{y} \in Y'$ holomorph (im klassischen Sinn) ist.

In der Tat sind die Begriffe holomorph und schwach holomorph äquivalent. Diese Betrachtungen werden der Inhalt der nächsten Resultate sein.

1.2.2 Lemma. Sei $f : D \to X$ und $T : D \to \mathcal{B}(X,Y)$. Dann gilt:

(i) Wenn die Funktion f holomorph ist, so ist sie auch schwach holomorph.

(ii) Wenn die Funktion T holomorph ist, so ist sie auch schwach holomorph.

Beweis. (i) Sei f holomorph. Wegen

$$(\hat{x} \circ f)'(w) = \lim_{z \to w} \frac{(\hat{x} \circ f)(z) - (\hat{x} \circ f)(w)}{z-w} = \hat{x}\left(\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z-w}\right) = \hat{x}(f'(w))$$

für alle $\hat{x} \in X'$ ist f auch schwach holomorph.

(ii) Beachte, dass die Existenz des Grenzwertes $\lim_{z \to w} \frac{T(z)-T(w)}{z-w}$ in der Operatortopologie die Existenz des Grenzwertes $\lim_{z \to w} \frac{T(z)x-T(w)x}{z-w}$ in Y für alle $x \in X$ impliziert. Wende nun (i) auf die Funktion $z \mapsto T(z)x$ an. $\square$

1.2.3 Bemerkung. Die Cauchy'sche Integralformel und der Cauchy'sche Integralsatz lassen sich sofort für banachraumwertige Funktionen verallgemeinern. Für eine holomorphe (und somit auch schwach holomorphe) Funktion $f : D \to X$ ist ja die Funktion $\hat{x} \circ f : D \to \mathbb{C}$ für $\hat{x} \in X'$ holomorph im klassischen Sinn. Daher gelten für diese die Cauchy'sche Integralformel und der Cauchy'sche Integralsatz. Da es sich bei banachraumwertigen Riemann-Integralen tatsächlich um Riemann-Summen handelt, kann man dann das Funktional $\hat{x}$ wegen seiner Stetigkeit aus dem Integral hinausziehen. Da X' punktetrennend ist, folgen die entsprechenden Sätze daher für die banachraumwertige Funktion f.
Mit analogen Argumenten kann man auch weitere Sätze auf den banachraumwertigen Fall verallgemeinern.

1.2.4 Proposition. Sei $f : D \to X$ und $T : D \to \mathcal{B}(X,Y)$. Dann gilt:

(i) Wenn die Funktion f schwach holomorph ist, so ist sie auch holomorph.

(ii) Wenn die Funktion T schwach holomorph ist, so ist sie auch holomorph.

Beweis. Wir nehmen vorerst an, dass die Funktion $z \mapsto T(z)x$ für alle $x \in X$ holomorph ist. Wir wollen dann zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{z \to w} \frac{T(z)-T(w)}{z-w}$ bezüglich der Operatornorm existiert, was äquivalent ist zur Cauchy-Bedingung

$$\lim_{z_1, z_2 \to w} \frac{T(z_1) - T(w)}{z_1 - w} - \frac{T(z_2) - T(w)}{z_2 - w} = 0. \tag{1.1}$$

Definiere dazu für $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq w$ und $z_2 \neq w$ den Operator

$$S(z_1, z_2) := \frac{1}{z_1 - z_2} \left(\frac{T(z_1) - T(w)}{z_1 - w} - \frac{T(z_2) - T(w)}{z_2 - w} \right) \in \mathcal{B}(X).$$

Sei nun r so groß gewählt, dass $\overline{B_r(w)} \subseteq D$. Für $z_1, z_2 \in B_{\frac{r}{2}}(w)$ und $x \in X$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|S(z_1, z_2)x\| &= \left\| \frac{1}{z_1 - z_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(w)} T(\zeta)x \left(\frac{\frac{1}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\zeta - w}}{z_1 - w} - \frac{\frac{1}{\zeta - z_2} - \frac{1}{\zeta - w}}{z_2 - w} \right) d\zeta \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(w)} T(\zeta)x \left(\frac{1}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)(\zeta - w)} \right) d\zeta \right\| \\
&\leq \frac{2r\pi}{2\pi} \max_{\zeta \in \partial B_r(w)} \|T(\zeta)x\| \left(\frac{2}{r} \right)^2 \frac{1}{r} \\
&= \frac{4}{r^2} \max_{\zeta \in \partial B_r(w)} \|T(\zeta)x\| =: C_x.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit gilt dabei, wenn man die Cauchy'sche Integralformel vier Mal anwendet. Für solche z_1 und z_2 gilt also die Abschätzung $\|S(z_1, z_2)x\| \leq C_x$ für alle $x \in X$, und mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Satz 1.3.14) folgt die Existenz einer Konstante $C > 0$ mit $\|S(z_1, z_2)\| \leq C$. Somit folgt (1.1), und in Folge ist T holomorph.

Wir wollen mit Hilfe der bisher geleisteten Vorarbeiten nun (i) zeigen. Dafür fassen wir X als abgeschlossenen Teilraum des Bidualraumes $X'' = \mathcal{B}(X', \mathbb{C})$ auf und betrachten die Funktion f als Funktion von D nach $X \subseteq \mathcal{B}(X', \mathbb{C})$. Nach unserer Voraussetzung an f ist $\hat{x} \circ f : D \to \mathbb{C}$ holomorph für alle $\hat{x} \in X'$. Durch die Identifizierung von X mit einem Teilraum von X'' können wir f also als operatorwertige Funktion auffassen, für die $z \mapsto \hat{x}(f(z)) = (f(z))(\hat{x})$ gilt. Nach dem ersten Schritt des Beweises ist f also holomorph.
Es bleibt noch (ii) zu zeigen. Sei also T schwach holomorph, d.h. $z \mapsto \hat{y}(T(z)x)$ ist für alle $x \in X$ und $\hat{y} \in Y'$ eine holomorphe Funktion von D nach $\mathbb{C}$. Somit ist nach (i) die Funktion $z \mapsto T(z)x$ holomorph und weiters auch T holomorph. □

Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass Holomorphie und schwache Holomorphie äquivalent sind.

Wir beenden nun die Betrachtungen von Holomorpie in Banachräumen und kehren zu Resultaten aus der klassischen Funktionentheorie zurück. Folgende Proposition ist oft nützlich, um die Holomorphie gewisser Funktionen nachzuprüfen.

1.2.5 Proposition. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \times \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion, für die folgende Eigenschaften gelten:

- $x \mapsto f(z, x)$ ist für alle $z \in G$ integrierbar,
- $z \mapsto f(z, x)$ ist holomorph für alle $x \in \Omega \backslash N$ mit einer festen Nullmenge $N \in \mathfrak{A}$,
- zu jeder kompakten Menge $K \subseteq G$ gibt es eine auf Ω integrierbare Funktion $g_K : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$, sodass für alle $z \in K$ und $x \in \Omega \backslash N$ gilt: $|f(z, x)| \leq g_K(x)$.

Dann ist die Funktion $F(z) := \int_\Omega f(z, .)\, d\mu$ holomorph auf G, und $\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, .)$ ist integrierbar für alle $z \in G$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$F^{(n)}(z) = \int_\Omega \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, .)\, d\mu.$$

Beweis. Für einen Beweis siehe [K2, Lemma 13.1.11]. □

1.2.6 Satz (Identitätssatz). Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls die Menge $N \subseteq D$ aller Nullstellen von $f - g$ einen Häufungspunkt in D hat, so stimmen f und g überein.

Beweis. Für einen Beweis siehe [K3, Satz 2.2.2]. □

1.2.7 Bemerkung. Sei X ein Banachraum und seien $f, g : D \to X$ holomorph. Wendet man auf die Funktionen f und g ein lineares Funktional $x' \in X'$ an, so erhalten wir Funktionen $x' \circ f, x' \circ g : D \to \mathbb{C}$, die wegen der Linearität von x' die Bedingung aus Satz 1.2.6 erfüllen. Daher sieht man sofort, dass der Identitätssatz auch für banachraumwertige Funktionen gilt.

1.2.8 Bemerkung. Für $t \in [0, +\infty)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt offenbar $|t^\alpha| = |t|^{\mathrm{Re}(\alpha)}$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt nur die Gleichheit

$$|z^\alpha| = |z|^{\mathrm{Re}(\alpha)} e^{-\mathrm{Im}(\alpha)\arg(z)}.$$

Diese folgt sofort aus $|z^\alpha| = e^{\mathrm{Re}(\alpha \log(z))}$ durch Ausmultiplizieren, wenn man $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ einsetzt.

1.3 Operatoren und lineare Relationen

In diesem Abschnitt wollen wir eine kurze Einführung in die Theorie der linearen Relationen geben und diskutieren, in welchem Zusammenhang sie mit Operatoren stehen.

1.3.1 Definition. Seien X und Y Banachräume und sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen. T heißt *lineare Relation* zwischen X und Y, falls T ein linearer Unterraum von $X \times Y$ ist, d.h. $T \leq X \times Y$. T heißt *abgeschlossene lineare Relation*, wenn $T \leq X \times Y$ abgeschlossen ist. Weiters bezeichne $\overline{T}$ den Abschluss von $T \leq X \times Y$.

1.3.2 Definition. Wir definieren

(i) den *Definitionsbereich* $\mathrm{dom}(T) := \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in T\}$,

(ii) den *Bildbereich* $\mathrm{ran}(T) := \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in T\}$,

(iii) den *Kern* $\ker(T) := \{x \in X : (x, 0) \in T\}$, und

(iv) den *Multi-Valued-Part* $\mathrm{mul}(T) := \{y \in Y : (0, y) \in T\}$.

1.3.3 Bemerkung. Indem man einen linearen Operator T von $M \leq X$ nach Y mit seinem Graph identifiziert, kann man T als lineare Relation betrachten. Umgekehrt ist eine lineare Relation mit $\mathrm{mul}(T) = \{0\}$ offensichtlich der Graph eines Operators.

1.3.4 Definition. Sind X, Y, Z Banachräume, $S, T \leq X \times Y$, $R \leq Y \times Z$ lineare Relationen, und $\alpha \in \mathbb{C}$, so definiert man

(i) $S + T := \{(x, y + z) \in X \times Y : (x, y) \in S, (x, z) \in T\}$,

(ii) $\alpha T := \{(x, \alpha y) \in X \times Y : (x, y) \in T\}$,

(iii) $T^{-1} := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in T\}$, und

(iv) $RS := \{(x, z) \in X \times Z : \exists y \in Y : (x, y) \in S \wedge (y, z) \in R\}$.

1.3.5 Bemerkung. Man sieht leicht, dass folgende Eigenschaften gelten:

- $\operatorname{dom}(S+T) = \operatorname{dom}(S) \cap \operatorname{dom}(T)$, $\operatorname{dom}(T^{-1}) = \operatorname{ran}(T)$, $\operatorname{dom}(\alpha T) = \operatorname{dom}(T)$ und $\operatorname{dom}(RS) = \{x \in \operatorname{dom}(S) : \exists y \in \operatorname{dom}(R) : (x, y) \in S\}$.
- Die Multiplikation ist assoziativ, d.h. es gilt $P(RS) = (PR)S$, wenn R und S lineare Relationen wie in Definition 1.3.4 sind und $P \leq Z \times V$ für einen weiteren Banachraum V.
- Für die Inversen gilt die Beziehung $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.
- Sind R, S, T lineare Operatoren, so entsprechen die Definitionen in Definition 1.3.4 den üblichen Operationen zwischen Operatoren, wobei T injektiv sein muss, um mit T^{-1} wiederum einen Operator zu erhalten.
- Für lineare Relationen $A, B \leq Y \times Z$, $C \leq X \times Y$, $D \leq Z \times W$ gelten die Distributivgesetze

  $$\begin{aligned} (A + B)C &\subseteq AC + BC \\ DA + DB &\subseteq D(A + B), \end{aligned}$$

  wobei in beiden Fällen Gleichheit gilt, falls $C \in \mathcal{B}(X, Y)$ bzw. $D \in \mathcal{B}(Z, W)$.

1.3.6 Bemerkung. Wir werden uns in dieser Arbeit (fast) nur mit Operatoren beschäftigen. Dennoch ist es oft nützlich, das Konzept der linearen Relationen zur Verfügung zu haben, da einige Schreibweisen dann selbsterklärend sind.

- Auf Grund der Identifizierung in Bemerkung 1.3.3 werden wir für einen Operator T von X nach Y und Elemente $x \in X$ und $y \in Y$ statt $Tx = y$ auch $(x, y) \in T$ schreiben (und umgekehrt).
- Die Inklusion $S \subseteq T$ ist für Operatoren S und T, die beide von X nach Y abbilden, ebenfalls im Sinne der linearen Relationen erklärt. Dies ist natürlich dazu äquivalent, dass $\operatorname{dom}(S) \subseteq \operatorname{dom}(T)$ und die Operatoren auf $\operatorname{dom}(S)$ übereinstimmen.
- Ein Operator T ist abgeschlossen, wenn T als lineare Relation abgeschlossen ist. Im selben Sinn ist auch der Abschluss eines Operators $\overline{T}$ zu verstehen.

1.3.7 Lemma. Sei $A \leq X \times X$ abgeschlossen, und sei $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann ist AT abgeschlossen.

Beweis. Seien $(x_i)_{i \in I}$ und $(y_i)_{i \in I}$ Netze in X, sodass $((x_i, y_i))_{i \in I}$ in AT gegen (x, y) konvergiert, was $x_i \to x$ und $y_i \to y$ bedeutet. Also gibt es für alle $i \in I$ ein z_i, sodass $(x_i, z_i) \in T$ und $(z_i, y_i) \in A$. Da T beschränkt ist, folgt $z_i = Tx_i \to Tx$. Da A abgeschlossen ist, folgt aus $(Tx_i, y_i) \to (Tx, y)$, dass $(Tx, y) \in A$. Dies impliziert aber unmittelbar $(x, y) \in AT$, womit AT abgeschlossen ist. $\square$

Wir kommen nun zu weiteren Begriffsbildungen, die in den folgenden Kapiteln oft auftauchen werden.

1.3.8 Definition. Ein Operator $B \in \mathcal{B}(X)$ *kommutiert* mit einer linearen Relation A, wenn $BA \subseteq AB$ gilt.

1.3.9 Bemerkung.

(i) Die Bedingung $BA \subseteq AB$ ist äquivalent zur Bedingung

$$(x,y) \in A \Longrightarrow (Bx, By) \in A. \tag{1.2}$$

Man beachte, dass nämlich die Bedingung (1.2) äquivalent ist zu $(B \times B)(A) \subseteq A$. Da weiters $(B \times B)(A) = BAB^{-1}$ und $BB^{-1} \subseteq I$ gilt, folgt aus $BA \subseteq AB$

$$(B \times B)(A) = BAB^{-1} \subseteq ABB^{-1} \subseteq A.$$

Die andere Implikation gilt, da aus $BAB^{-1} = (B \times B)(A) \subseteq A$ wegen $B^{-1}B \supseteq I$ die Beziehung

$$AB \supseteq BAB^{-1}B \supseteq BA$$

folgt.

(ii) Man erkennt aus (i) sofort, dass der Operator B genau dann mit A kommutiert, wenn er mit A^{-1} kommutiert. Dasselbe gilt für $A - \alpha$ und αA, falls $\alpha \neq 0$.

1.3.10 Lemma. Sei $B \in \mathcal{B}(X)$ ein Operator, der mit $A \leq X \times X$ kommutiert. Dann gilt

$$B(\operatorname{dom}(A)) \subseteq \operatorname{dom}(A).$$

Beweis. Da $x \in \operatorname{dom}(A)$, existiert ein $y \in X$, sodass $(x,y) \in A$. Daraus folgt dann $(Bx, By) \in A$ und daher $Bx \in \operatorname{dom}(A)$. □

Folgendes Lemma zeigt eine Identität, die für alle linearen Relationen gilt. Sie erweist sich als besonders nützlich, wenn wir Resolventen betrachten.

1.3.11 Lemma. Sei A eine lineare Relation auf einem Banachraum X. Dann gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ die Identität

$$I - (I + \lambda A^{-1})^{-1} = \lambda(\lambda + A)^{-1}.$$

Beweis. Für $x, y \in X$ definieren wir $z := \frac{1}{\lambda} y$ und erhalten damit

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \lambda(\lambda + A)^{-1} &\iff (x,z) \in (\lambda + A)^{-1} \\
&\iff (z,x) \in (\lambda + A) \\
&\iff (z, x - \lambda z) \in A \\
&\iff (x - \lambda z, z) \in A^{-1} \\
&\iff (x - \lambda z, \lambda z) \in \lambda A^{-1} \\
&\iff (x - \lambda z, x) \in (I + \lambda A^{-1}) \\
&\iff (x, x - \lambda z) \in (I + \lambda A^{-1})^{-1} \\
&\iff (x,y) \in (I - (I + \lambda A^{-1})^{-1}).
\end{aligned}$$

□

1.3.12 Definition. Sei A ein Operator auf dem Banachraum X. Wir definieren die *Resolventenmenge*

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)\}$$

und das *Spektrum* $\sigma(A) := \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ von A. Wir nennen die Abbildung

$$\begin{cases} \rho(A) & \to & \mathcal{B}(X) \\ \lambda & \mapsto & (\lambda - A)^{-1} =: R(\lambda, A) \end{cases}$$

die Resolvente des Operators A.

Wir werden jetzt einige nützliche Eigenschaften von Resolventen eines abgeschlossenen Operators A auflisten. Die Beweise der folgenden Aussagen sind - wenn nicht sowieso bekannt - beispielsweise in [Ha1, Abschnitt A.2] zu finden.

1.3.13 Bemerkung.

- Die Resolventenmenge $\rho(A)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.
- Die Resolventenabbildung $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ ist holomorph.
- Für alle $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt die Resolventengleichung
$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\mu, A) R(\lambda, A).$$
- Die Resolventen $R(\lambda, A)$ und $R(\mu, A)$ kommutieren für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ mit $\lambda \neq \mu$.
- Falls $\rho(A) \neq \emptyset$, so kommutieren die Resolventen $R(\lambda, A)$ mit dem Operator A für alle $\lambda \in \rho(A)$.

Die nächsten Resultate beschäftigen sich mit Konvergenzaussagen.

1.3.14 Satz (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, und sei A_i, $i \in I$, eine Familie beschränkter linearer Operatoren von X nach Y. Ist die Familie $\{A_i : i \in I\}$ punktweise beschränkt, d.h. gilt für jedes feste $x \in X$

$$\sup_{i \in I} \|A_i x\| = M_x < \infty,$$

so ist die Familie gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\sup_{i \in I} \|A_i\| = M < \infty.$$

Beweis. Einen Beweis findet man in [W, Korollar 4.2.2]. □

1.3.15 Lemma. Sei I eine gerichtete Menge, sei $(A_i)_{i \in I}$ ein Netz beschränkter, überall definierter Operatoren auf dem Banachraum X, und sei $D \subseteq X$. Weiters existiere eine Konstante $C > 1$, sodass $\|A_i\| \leq C$ für alle $i \in I$. Dann impliziert die Konvergenz $\lim_{i \in I} A_i x = x$ für alle $x \in D$ bereits die Konvergenz $\lim_{i \in I} A_i x = x$ für alle $x \in \overline{D}$.

Beweis. Seien $x \in \overline{D}$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Da die Menge D dicht ist in $\overline{D}$, existiert ein $u \in D$ mit $\|x - u\| < \frac{\epsilon}{3C} < \frac{\epsilon}{3}$. Wegen unserer Voraussetzung gibt es dann ein $i_0 \in I$, sodass für alle $i > i_0$ die Ungleichung $\|A_i u - u\| < \frac{\epsilon}{3}$ gilt. Daher folgt

$$\begin{aligned}\|A_i x - x\| &\leq \|A_i x - A_i u\| + \|A_i u - u\| + \|u - x\| \\ &\leq \|A_i\|\|x - u\| + \|A_i u - u\| + \|u - x\| \\ &< C\frac{\epsilon}{3C} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

für alle $i > i_0$. Da ϵ beliebig war, folgt $\lim_{i\in I} A_i x = x$ für alle $x \in \overline{D}$. □

1.3.16 Lemma. Seien A und B beschränkte Operatoren auf dem Banachraum X, und seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen beschränkter Operatoren auf X, die $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ für alle $x \in X$ und $\lim_{n\to\infty} B_n x = Bx$ für alle $x \in X$ erfüllen. Dann folgt auch

$$\lim_{n\to\infty} A_n B_n x = ABx.$$

für alle $x \in X$.

Beweis. Es gilt insbesondere $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\| < \infty$ für jedes $x \in X$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit haben wir $M := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$. Daher folgt

$$\begin{aligned}\|A_n B_n x - ABx\| &\leq \|A_n B_n x - A_n Bx\| + \|A_n Bx - ABx\| \\ &\leq \|A_n\|\|B_n x - Bx\| + \|A_n Bx - ABx\| \\ &\leq M\|B_n x - Bx\| + \|A_n Bx - ABx\| \overset{n\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

für alle $x \in X$. □

1.4 Potenzen und Polynome eines Operators

1.4.1 Definition. Sei A ein Operator auf einem Banachraum X. Wir definieren die Folge von Potenzen von A dann rekursiv durch

$$A^0 := I, \quad A^{n+1} := A^n A$$

für $n \in \mathbb{N}$.

1.4.2 Lemma. Für einen Operator A gilt die Rechenregel $A^{n+m} = A^n A^m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Weiters gilt für die Definitionsbereiche $\operatorname{dom}(A^{n+1}) \subseteq \operatorname{dom}(A^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die erste Rechenregel folgt sofort mittels vollständiger Induktion. Für die Aussage über die Definitionsbereiche betrachte die Beziehung $A^{n+1} = AA^n$. Die gewünschte Inklusion der Definitionsbereiche folgt unmittelbar daraus. □

1.4.3 Definition. Sei $p(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom vom Grad $\leq n$ mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$. Wir definieren dann den Operator $p(A)$ durch

$$p(A) := \sum_{k=0}^n a_k A^k.$$

1.4.4 Bemerkung. Offenbar ist der Operator $p(A)$ wegen der Assoziativität der Summe von Operatoren wohldefiniert. Für den Definitionsbereich gilt wegen Lemma 1.4.2 die Gleichheit $\mathrm{dom}(p(A)) = \mathrm{dom}(A^n)$.

1.4.5 Lemma. Seien $p, q \in \mathbb{C}[z]$. Wenn p nicht das Nullpolynom ist, so gilt $p(A)q(A) = (pq)(A)$. Insbesondere folgt für $p, q \neq 0$ die Aussage $p(A)q(A) = q(A)p(A)$.

Beweis. Falls p oder q nur Skalare sind, so stimmt die Aussage offensichtlich. Seien also p und q Polynome vom Grad ≥ 1. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion nach dem Grad von p.
Sei für den Induktionsanfang $\mathrm{grad}(p) = 1$. Das Polynom p lässt sich also in der Form $p(z) = z - \lambda$ schreiben. Mit einem Polynom q vom Grad n, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig ist, gilt

$$p(A)q(A)x = (A - \lambda)q(A)x = ((\cdot - \lambda)q)\,(A)x = (pq)(A)x,$$

wenn $x \in \mathrm{dom}((\cdot - \lambda)q)(A) \cap \mathrm{dom}(p(A)q(A))$. Wir wollen zeigen, dass die beiden Definitionsbereiche übereinstimmen. Sei dafür $x \in \mathrm{dom}(p(A)q(A))$. Daraus folgt $x \in \mathrm{dom}(q(A)) = \mathrm{dom}(A^n)$ und $q(A)x \in \mathrm{dom}(A)$, was $x \in \mathrm{dom}(A^{n+1})$ impliziert. Nach Bemerkung 1.4.4 gilt aber $\mathrm{dom}(A^{n+1}) = \mathrm{dom}((\cdot - \lambda)q)(A)$, was $x \in \mathrm{dom}(pq)(A)$ zeigt.
Für die andere Richtung sei $x \in \mathrm{dom}(pq)(A)$. Nach Lemma 1.4.2 folgt dann $x \in \mathrm{dom}(A^j)$ für alle $j = 1, \dots, n+1$, also insbesondere $x \in \mathrm{dom}(A^n) = \mathrm{dom}(q(A))$ und $q(A)x \in \mathrm{dom}(A)$. Die letzten beiden Aussagen implizieren sofort $x \in \mathrm{dom}(p(A)q(A))$.
Somit haben wir die Gleichheit $p(A)q(A) = (pq)(A)$ auf $\mathrm{dom}(pq)(A) = \mathrm{dom}(p(A)q(A))$ gezeigt.

Wir führen den Induktionsschritt $m - 1 \to m$. Es gelte also als Induktionsvoraussetzung $p(A)q(A) = (pq)(A)$ für p vom Grad $m - 1$. Wenn $\mathrm{grad}(p) = m$, dann können wir p nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerlegen in $p(z) = (z - \lambda)p_1(z)$, wobei p_1 ein Polynom vom Grad $m - 1$ ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} p(A)q(A) &= ((\cdot - \lambda)p_1)\,(A)q(A) = (A - \lambda)p_1(A)q(A) \\ &= (A - \lambda)(p_1 q)(A) = ((\cdot - \lambda)p_1 q)\,(A) = (pq)(A), \end{aligned}$$

wobei beim zweiten und vierten Gleichheitszeichen der Induktionsanfang und bei der dritten Gleichheit die Induktionsvoraussetzung eingehen.

Die verbleibende Aussage folgt unmittelbar aus $p(A)q(A) = (pq)(A) = (qp)(A) = q(A)p(A)$. □

1.4.6 Bemerkung. In Definition 1.4.1 haben wir Ausdrücke der Form A^n nur für natürliche Zahlen n definiert. In einem späteren Kapitel werden wir für einen gewissen Typ von Operatoren - den sektoriellen Operatoren - auch dem Ausdruck A^α für $\alpha \in \mathbb{C}$ Sinn geben.

2 Theorie von Funktionalkalkülen

Das Ziel des Riesz-Dunford-Funktionalkalküls ist es, für beschränkte Operatoren A und holomorphe Funktionen f den Ausdruck $f(A)$ sinnvoll zu definieren. Die Idee ist, $f(A)$ durch ein Cauchy-Integral

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) R(z, A)\, dz$$

zu beschreiben, wobei Γ einen geeigneten Weg beschreibt, der das Spektrum von A umrundet. Durch geeignete Modifikation der Definition wollen wir diese auch auf gewisse Typen von unbeschränkten Operatoren - den sogenannten sektoriellen Operatoren - anwenden. Zuvor werden wir uns damit beschäftigen, wie man Funktionalkalküle auf abstraktem Wege beschreiben kann.

2.1 Abstrakte Funktionalkalküle

2.1.1 Definition. Sei X ein Banachraum, $\mathcal{M}$ eine kommutative Algebra mit Eins (das Einselement bezeichnen wir mit $\mathbf{1}$), $\mathcal{E}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{M}$ und $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{B}(X)$ ein Homomorphismus. Das Tripel $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ nennen wir *abstrakten Funktionalkalkül* (über dem Banachraum X).

2.1.2 Bemerkung. Falls das Einselement von $\mathcal{M}$ auch in $\mathcal{E}$ enthalten ist, wird $\mathcal{E}$ selber zu einer kommutativen Algebra mit Eins. Im Allgemeinen gilt aber $\mathbf{1} \notin \mathcal{E}$.

2.1.3 Definition. Definiere die Menge

$$Reg(\mathcal{E}) := \{e \in \mathcal{E} : \Phi(e) \in \mathcal{B}(X) \,\text{ist injektiv}\}.$$

Wenn $Reg(\mathcal{E})$ nicht die leere Menge ist, dann nennen wir den abstrakten Funktionalkalkül *nicht-degeneriert*. Jedes Element aus dieser Menge heißt dann *Regularisierer*. Falls es für ein $f \in \mathcal{M}$ einen Regularisierer $e \in Reg(\mathcal{E})$ gibt, sodass $ef \in \mathcal{E}$, dann nennen wir f *regularisierbar* (durch $\mathcal{E}$) und das Element e einen *Regularisierer für* f. Die Menge der regularisierbaren Elemente bezeichnen wir mit

$$\mathcal{M}_r := \{f \in \mathcal{M} : f \,\text{ist regularisierbar}\}.$$

2.1.4 Bemerkung. Die Menge $Reg(\mathcal{E})$ ist unter Multiplikation abgeschlossen.

2.1.5 Lemma. Seien $f, g \in \mathcal{M}_r$, sei e ein Regularisierer für f und $\tilde{e}$ ein Regularisierer für g. Dann ist $e\tilde{e}$ ein Regularisierer für f und g, für $f + g$ und für fg. Außerdem gilt $f + g, fg, \lambda f \in \mathcal{M}_r$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beweis. Es gilt $ef \in \mathcal{E}$ und $\tilde{e}g \in \mathcal{E}$. Daher folgt $\tilde{e}ef = e\tilde{e}f \in \mathcal{E}$ und $e\tilde{e}g \in \mathcal{E}$, weiters auch $e\tilde{e}(f+g) \in \mathcal{E}$ und $e\tilde{e}fg = (ef)(\tilde{e}g) \in \mathcal{E}$. $\square$

2.1.6 Bemerkung. Klarerweise ist das Einselement $\mathbf{1}$ regularisierbar genau dann, wenn der abstrakte Funktionalkalkül nicht-degeneriert ist, wobei dann die Menge $\mathcal{M}_r$ eine $\mathcal{E}$ enthaltende Unteralgebra von $\mathcal{M}$ darstellt, vgl. Lemma 2.1.5.

Wenn wir ab jetzt von einem abstrakten Funktionalkalkül sprechen, meinen wir damit immer, dass er nicht-degeneriert ist.

Als nächstes wollen wir den Homomorphismus Φ, der bisher nur auf $\mathcal{E}$ erklärt ist, auf eine größere Teilmenge von $\mathcal{M}$ fortsetzen. Es wird sich zeigen, dass dafür die Menge $\mathcal{M}_r$ eine geeignete Wahl ist.

2.1.7 Proposition. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ein abstrakter Funktionalkalkül, sei $f \in \mathcal{M}_r$ und bezeichne mit $\mathcal{A}$ die Menge der abgeschlossenen Operatoren auf X, vgl. Bemerkung 1.3.6. Dann ist die Abbildung $\tilde{\Phi} : f \mapsto \Phi(e)^{-1}\Phi(ef)$, wobei e ein Regularisierer für f ist, eine wohldefinierte Abbildung von $\mathcal{M}_r$ nach $\mathcal{A}$, die den Homomorphismus Φ fortsetzt.

Beweis. Als erstes zeigen wir die Wohldefiniertheit der Abbildung. Dass die Abbildung nach $\mathcal{A}$ hinein abbildet, ist klar nach Lemma 1.3.7. Seien nun e und $\tilde{e}$ Regularisierer für f. Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(e)^{-1}\Phi(ef) &= \Phi(e)^{-1}\Phi(\tilde{e})^{-1}\Phi(\tilde{e})\Phi(ef) = \Phi(\tilde{e})^{-1}\Phi(e)^{-1}\Phi(\tilde{e})\Phi(ef) = \\ &= \Phi(\tilde{e})^{-1}\Phi(e)^{-1}\Phi(\tilde{e}ef) = \Phi(\tilde{e})^{-1}\Phi(e)^{-1}\Phi(e)\Phi(\tilde{e}f) = \Phi(\tilde{e})^{-1}\Phi(\tilde{e}f),\end{aligned}$$

wobei bei der dritten und vierten Gleichheit die Homomorphismuseigenschaft von Φ eingeht, und das zweite Gleichheitszeichen wegen

$$\Phi(e)\Phi(\tilde{e}) = \Phi(e\tilde{e}) = \Phi(\tilde{e}e) = \Phi(\tilde{e})\Phi(e),$$

was $\Phi(e)^{-1}\Phi(\tilde{e})^{-1} = \Phi(\tilde{e})^{-1}\Phi(e)^{-1}$ impliziert, gilt. Also ist $\tilde{\Phi}$ wohldefiniert.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{\Phi}$ die Abbildung Φ fortsetzt. Dies ist aber klar, da nach Bemerkung 2.1.6 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_r$ und für $e, f \in \mathcal{E}$ mit $\Phi(e)$ injektiv wegen der Homomorphismuseigenschaft die Beziehung $\Phi(e)^{-1}\Phi(ef) = \Phi(e)^{-1}\Phi(e)\Phi(f) = \Phi(f)$ gilt. □

2.1.8 Bemerkung. Da nach vorangehender Proposition die Abbildung $\tilde{\Phi}$ eine Fortsetzung der Abbildung Φ darstellt, werden wir aus Gründen der notationellen Vereinfachung in Zukunft nicht zwischen Φ und seiner Fortsetzung unterscheiden und die Fortsetzung ebenfalls mit Φ bezeichnen.

2.1.9 Definition. Mit $\mathcal{M}_b$ definieren wir folgende Teilmenge von $\mathcal{M}_r$

$$\mathcal{M}_b := \{f \in \mathcal{M}_r : \Phi(f) \in \mathcal{B}(X)\}.$$

Wir können nun einige Eigenschaften der Abbildung Φ beweisen.

2.1.10 Proposition. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ein abstrakter Funktionalkalkül über dem Banachraum X. Dann gilt:

(i) Wenn ein Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ mit jedem $\Phi(e), e \in \mathcal{E}$, kommutiert, so auch mit jedem $\Phi(f), f \in \mathcal{M}_r$.

(ii) Für das Einselement gilt $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_r$ und $\Phi(\mathbf{1}) = I$, wobei I die Identität bezeichnet.

(iii) Für $f, g \in \mathcal{M}_r$ gelten die Beziehungen

$$\Phi(f) + \Phi(g) \subseteq \Phi(f+g)$$

und

$$\Phi(f)\Phi(g) \subseteq \Phi(fg),$$

wobei für die Definitionsbereiche $\mathrm{dom}(\Phi(f)\Phi(g)) = \mathrm{dom}(\Phi(fg)) \cap \mathrm{dom}(\Phi(g))$ gilt.

(iv) Falls $f \in \mathcal{M}_r$ und $g \in \mathcal{M}_b$, dann gilt in Punkt (iii) zwei Mal Gleichheit.

(v) Für $f, g \in \mathcal{M}_r$ mit $fg = \mathbf{1}$ folgt, dass $\Phi(f)$ injektiv ist und $\Phi(f)^{-1} = \Phi(g)$.

(vi) Die Menge $\mathcal{M}_b$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{M}$ mit Eins. Dabei ist die Abbildung

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{M}_b & \to & \mathcal{B}(X) \\ f & \mapsto & \Phi(f) \end{cases}$$

ein Algebrenhomomorphismus.

(vii) Wenn $f \in \mathcal{M}_b$ mit $\Phi(f)$ injektiv, dann folgt

$$\Phi(f)^{-1}\Phi(g)\Phi(f) = \Phi(g)$$

für alle $g \in \mathcal{M}_r$.

(viii) Für $f \in \mathcal{M}_r$ und $g \in \mathcal{M}$ mit $fg = \mathbf{1}$ und $\Phi(f)$ injektiv folgt $g \in \mathcal{M}_r$. Zusätzlich gilt $\Phi(g) = \Phi(f)^{-1}$.

Beweis. (i) Für $f \in \mathcal{M}_r$ und einen Regularisierer $e \in \mathcal{E}$ für f gilt (vgl. Bemerkung 1.3.9)

$$T\Phi(f) = T\Phi(e)^{-1}\Phi(ef) \subseteq \Phi(e)^{-1}T\Phi(ef) \subseteq \Phi(e)^{-1}\Phi(ef)T = \Phi(f)T.$$

Also kommutiert T auch mit $f \in \mathcal{M}_r$.
(ii) Nach Bemerkung 2.1.6 ist $\mathbf{1}$ regularisierbar und daher $\mathbf{1} \in \mathcal{M}_r$. Für einen Regularisierer e für $\mathbf{1}$ gilt dann $\Phi(\mathbf{1}) = \Phi(e)^{-1}\Phi(e\mathbf{1}) = \Phi(e)^{-1}\Phi(e) = I$.
(iii) Sei e_1 ein Regularisierer für f und e_2 einer für g. Dann ist $e := e_1 e_2$ ein Regularisierer für f und g, daher auch für $f+g$ und fg. Nun folgt die erste behauptete Inklusion wegen

$$\Phi(f) + \Phi(g) = \Phi(e)^{-1}\Phi(ef) + \Phi(e)^{-1}\Phi(eg) \subseteq \Phi(e)^{-1}\Phi(e(f+g)) = \Phi(f+g)$$

und die zweite Inklusion wegen

$$\begin{aligned} \Phi(f)\Phi(g) &= \Phi(e_1)^{-1}\Phi(e_1 f)\Phi(e_2)^{-1}\Phi(e_2 g) \subseteq \\ &\subseteq \Phi(e_1)^{-1}\Phi(e_2)^{-1}\Phi(e_1 f)\Phi(e_2 g) = \Phi(e)^{-1}\Phi(efg) = \Phi(fg). \end{aligned}$$

Das Inklusionszeichen gilt dabei, da $\Phi(e_1 f)$ mit $\Phi(e_2)$ und somit auch mit $\Phi(e_2)^{-1}$ kommutiert.
Zu zeigen bleibt jetzt noch die zusätzliche Aussage bezüglich der Definitionsbereiche. Sei dazu $x \in \mathrm{dom}(\Phi(fg)) \cap \mathrm{dom}(\Phi(g))$ gegeben. Es folgt $y := \Phi(e_2 g)x \in \mathrm{dom}(\Phi(e_2)^{-1})$ und daraus $\Phi(e_1 f)\Phi(e_2 g)x \in \mathrm{dom}(\Phi(e_2)^{-1})$, da $\Phi(e_1 f)$ mit $\Phi(e_2)^{-1}$ kommutiert, vgl. Lemma 1.3.10. Weiters gilt

$$\Phi(e_1 f)\Phi(g)x = \Phi(e_1 f)\Phi(e_2)^{-1}y = \Phi(e_2)^{-1}\Phi(e_1 f)y = \Phi(e_2)^{-1}\Phi(efg)x,$$

wobei die rechte Seite dieser Gleichungskette wegen $\Phi(e)^{-1} = \Phi(e_1)^{-1}\Phi(e_2)^{-1}$ und der Annahme $x \in \mathrm{dom}(\Phi(fg))$ in $\mathrm{dom}(\Phi(e_1)^{-1})$ liegt. Somit folgt dies auch für die linke Seite, was $\Phi(g)x \in \mathrm{dom}(\Phi(f))$

und $x \in \mathrm{dom}(\Phi(f)\Phi(g))$ impliziert.
Die Inklusion $\mathrm{dom}(\Phi(f)\Phi(g)) \subseteq \mathrm{dom}(\Phi(fg)) \cap \mathrm{dom}(\Phi(g))$ ist wegen $\Phi(f)\Phi(g) \subseteq \Phi(fg)$ klar, da $\mathrm{dom}(\Phi(f)\Phi(g)) \subseteq \mathrm{dom}(\Phi(g))$ allgemein gilt.
(iv) Aus Punkt (iii) wissen wir bereits $\Phi(f)+\Phi(g) \subseteq \Phi(f+g)$, somit auch $\mathrm{dom}(\Phi(f)) = \mathrm{dom}(\Phi(f)) \cap \mathrm{dom}(\Phi(g)) \subseteq \mathrm{dom}(\Phi(f+g))$, und $\Phi(f+g) - \Phi(g) \subseteq \Phi(f+g-g) = \Phi(f)$. Die Tatsache $\Phi(g) \in \mathcal{B}(X)$ impliziert $\mathrm{dom}(\Phi(g)) = X$ und daher $\mathrm{dom}(\Phi(f+g)) = \mathrm{dom}(\Phi(f+g)) \cap \mathrm{dom}(\Phi(g)) \subseteq \mathrm{dom}(\Phi(f)) = \mathrm{dom}(\Phi(f)) \cap \mathrm{dom}(\Phi(g))$, woraus die behauptete Gleichheit folgt.
Die Gleichheit $\Phi(f)\Phi(g) = \Phi(fg)$ folgt sofort aus $\mathrm{dom}(\Phi(f)\Phi(g)) = \mathrm{dom}(\Phi(fg)) \cap \mathrm{dom}(\Phi(g))$, da $\Phi(g)$ überall definiert ist.
(v) Seien $f, g \in \mathcal{M}_r$ mit $fg = 1$ gegeben. Die Punkte (ii) und (iii) implizieren dann

$$\Phi(g)\Phi(f) \subseteq \Phi(fg) = \Phi(\mathbf{1}) = I$$

und $\mathrm{dom}(\Phi(g)\Phi(f)) = \mathrm{dom}(I) \cap \mathrm{dom}(\Phi(f)) = \mathrm{dom}(\Phi(f))$, woraus die Injektivität von $\Phi(f)$ folgt. Die zweite Aussage folgt sofort, wenn man f und g in obigen Argumenten vertauscht.
(vi) Die Behauptung, dass die Abbildung Ψ in den Raum $\mathcal{B}(X)$ hinein abbildet, gilt nach Definition der Menge $\mathcal{M}_b$. Der Rest folgt unmittelbar aus (iv).
(vii) Seien e_1 ein Regularisierer für f und e_2 ein Regularisierer für g. Dann ist $e := e_1 e_2$ Regularisierer für f und g und es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(f)^{-1}\Phi(g)\Phi(f) &= \Phi(f)^{-1}\Phi(e)^{-1}\Phi(eg)\Phi(f) = \Phi(f)^{-1}\Phi(e)^{-1}\Phi(f)\Phi(eg) = \\ &= \Phi(e)^{-1}\Phi(f)^{-1}\Phi(f)\Phi(eg) = \Phi(e)^{-1}\Phi(eg) = \Phi(g),\end{aligned}$$

wobei hier die Kommutativität wegen (vi) und der Eigenschaft $\Phi(f)^{-1}\Phi(e)^{-1} = \Phi(e)^{-1}\Phi(f)^{-1}$ gegeben ist.
(viii) Sei $e \in \mathcal{E}$ ein Regularisierer für f. Dann gilt $fe \in \mathcal{E}$ und $(fe)g = e \in \mathcal{E}$. Multiplikation von $\Phi(f) = \Phi(e)^{-1}\Phi(fe)$ (vgl. Proposition 2.1.7) mit $\Phi(e)$ von rechts ergibt $\Phi(fe) = \Phi(f)\Phi(e)$. Daher ist $\Phi(fe)$ injektiv, und fe ist ein Regularisierer für g. Die Behauptung $\Phi(g) = \Phi(f)^{-1}$ folgt dann aus Punkt (v). □

Wir wollen nun betrachten, wie man aus einem gegebenen abstrakten Funktionalkalkül einen weiteren konstruieren kann.

2.1.11 Definition. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ein abstrakter Funktionalkalkül über dem Banachraum X. Eine Unteralgebra $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}_b$ heißt *zulässig*, wenn die Menge $\{f \in \mathcal{E}' : \Phi(f)\,\text{ist injektiv}\}$ nicht leer ist. Definiere weiters

$$\langle \mathcal{E}' \rangle := \{f \in \mathcal{M} : \exists e' \in \mathcal{E}'\,\text{mit}\,e'f \in \mathcal{E}'\,\text{und}\,\Phi(e')\,\text{injektiv}\}.$$

2.1.12 Proposition. Sei $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ ein abstrakter Funktionalkalkül über dem Banachraum X. Das Tripel $(\mathcal{E}', \mathcal{M}, \Phi)$, wobei $\mathcal{E}'$ zulässig ist, ist dann ein weiterer (nicht-degenerierter) abstrakter Funktionalkalkül über dem Banachraum X, dessen regularisierbaren Elemente genau durch die Menge $\langle \mathcal{E}' \rangle$ beschrieben werden. Es gilt $\langle \mathcal{E}' \rangle \subseteq \mathcal{M}_r$, und die Fortsetzung des Homomorphismus Φ auf $\langle \mathcal{E}' \rangle$ mittels regularisierbarer Elemente aus $\mathcal{E}'$ ist mit der in Proposition 2.1.7 betrachteten verträglich, d.h. für ein $f \in \langle \mathcal{E}' \rangle$ gilt $\Phi(f) = \Phi(e)^{-1}\Phi(ef) = \Phi(e')^{-1}\Phi(e'f)$ für e Regularisierer in $\mathcal{E}$ und e' Regularisierer in $\mathcal{E}'$.

Beweis. Um zu zeigen, dass $(\mathcal{E}', \mathcal{M}, \Phi)$ ein abstrakter Funktionalkalkül ist, genügt es nachzuprüfen, dass $\Phi|_{\mathcal{E}'} : \mathcal{E}' \to \mathcal{B}(X)$ ein Homomorphismus ist. (Man beachte, dass mit $\Phi|_{\mathcal{E}'}$ die Einschränkung der bereits auf $\mathcal{M}_r$ fortgesetzten Abbildung auf $\mathcal{E}'$ gemeint ist!) Dies ist aber klar nach Proposition 2.1.10

(iv).
Sei $f \in \langle \mathcal{E}' \rangle$, und sei e' Regularisierer für f in $\mathcal{E}'$. Dann gilt $e'f \in \mathcal{E}'$. Da wegen $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}_b$ alle Elemente aus $\mathcal{E}'$ in $\mathcal{E}$ regularisierbar sind, existieren Regularisierer $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$, sodass $e_1 e' \in \mathcal{E}$ und $e_2 e' f \in \mathcal{E}$. Nach Lemma 2.1.5 ist dann $e := e_1 e_2 \in \mathcal{E}$ ein Regularisierer für e' und $e'f$. Somit ist $ee' \in \mathcal{E}$ ein Regularisierer für f in $\mathcal{E}$, was $f \in \mathcal{M}_r$ impliziert, d.h. $\langle \mathcal{E}' \rangle \subseteq \mathcal{M}_r$.
Wegen $e' \in \mathcal{E}' \subseteq \mathcal{M}_b$ folgt mit Proposition 2.1.10, (iv) und (vii),

$$\Phi(e')^{-1}\Phi(e'f) = \Phi(e')^{-1}\Phi(f)\Phi(e') = \Phi(f).$$

Also ist die Fortsetzung mittels $\mathcal{E}'$ die aus Proposition 2.1.7. □

2.1.13 Korollar. Es gilt $\mathcal{M}_r = \langle \mathcal{E} \rangle = \langle \mathcal{M}_b \rangle$.

Beweis. Die Behauptung $\mathcal{M}_r = \langle \mathcal{E} \rangle$ ist klar nach Definition. Nach Proposition 2.1.12 gilt $\langle \mathcal{M}_b \rangle \subseteq \mathcal{M}_r$, und aus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_b$ folgt $\langle \mathcal{E} \rangle \subseteq \langle \mathcal{M}_b \rangle$. □

Folgendes Resultat, das sich ebenfalls mit mehreren Funktionalkalkülen befasst, wird später noch nützlich sein.

2.1.14 Proposition. Seien $(\mathcal{E}, \mathcal{M}, \Phi)$ und $(\mathcal{E}', \mathcal{M}', \Phi')$ abstrakte Funktionalkalküle über einem Banachraum X, für die ein Algebrenhomomorphismus $\theta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ mit den Eigenschaften $\theta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$ und $\Phi'(\theta(e)) = \Phi(e)$ für alle $e \in \mathcal{E}$ existiert. Dann folgt $\theta(\mathcal{M}_r) \subseteq (\mathcal{M}')_r$ und $\Phi'(\theta(f)) = \Phi(f)$ für alle $f \in \mathcal{M}_r$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{M}_r$ und $e \in \operatorname{Reg}(\mathcal{E})$ ein Regularisierer von f. Dann ist $\theta(e)$ ein Regularisierer von $\theta(f)$, da $\Phi'(\theta(e)) = \Phi(e)$ injektiv ist und wegen der Homomorphismuseigenschaft von θ die Beziehung $\theta(e)\theta(f) = \theta(ef) \in \theta(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{E}'$ gilt. Somit $f \in (\mathcal{M}')_r$ und schließlich

$$\Phi'(\theta(f)) = \left(\Phi'(\theta(e))\right)^{-1} \Phi'(\theta(e)\theta(f)) = (\Phi(e))^{-1} \Phi'(\theta(ef)) = (\Phi(e))^{-1} \Phi(ef) = \Phi(f).$$

□

2.1.15 Bemerkung.

(i) Man kann abstrakte Funktionalkalküle als Objekte einer geeigneten Kategorie betrachten. Die Morphismen dieser Kategorie sind dann genau die in Proposition 2.1.14 beschriebenen Abbildungen θ. Wie wollen den kategorientheoretischen Zugang nicht genauer behandeln.

(ii) Proposition 2.1.14 findet meist dann Anwendung, wenn die Menge $\mathcal{M}$ eine Unteralgebra von $\mathcal{M}'$ darstellt und die Abbildung $\theta : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ die Einbettungsabbildung beschreibt. Hat man also einen Funktionalkalkül auf $\mathcal{M}$ und einen weiteren auf einer Obermenge $\mathcal{M}'$, so sind die beiden Kalküle bereits dann konsistent, wenn sie es auf den Mengen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ sind. Dabei bezeichnen $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E}'$ die Mengen, aus denen die Funktionalkalküle auf $\mathcal{M}$ bzw. auf $\mathcal{M}'$ mittels Erweiterung hervorgegangen sind.

2.2 Meromorphe Funktionalkalküle

Wir wollen in diesem Abschnitt etwas konkreter werden und die Resultate des vorigen Abschnitts auf die Algebra $\mathcal{M}(\Omega)$ aller meromorphen Funktionen auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ anwenden, wobei wir $\mathcal{M}(\Omega)$ mit den punktweisen Operationen versehen.

2.2.1 Definition. Sei X ein Banachraum, Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $\mathcal{M}(\Omega)$ die Algebra der meromorphen Funktionen auf Ω. Weiters sei $\mathcal{E}(\Omega)$ eine Unteralgebra von $\mathcal{M}(\Omega)$ und $\Phi : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{B}(X)$ ein Homomorphismus. Angenommen es gelten die folgenden beiden Bedingungen:

(i) Die Abbildung $z := (w \mapsto w) \in \mathcal{M}(\Omega)$ ist regularisierbar durch $\mathcal{E}(\Omega)$, d.h. $z \in \mathcal{M}(\Omega)_r$.

(ii) Ein beschränkter Operator $T \in \mathcal{B}(X)$, der mit $\Phi(z)$ kommutiert, kommutiert auch mit allen $\Phi(e)$ für $e \in \mathcal{E}(\Omega)$.

Definiere $A := \Phi(z)$. Dann heißt das Tripel $(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{M}(\Omega), \Phi)$ *meromorpher Funktionalkalkül* für A.

2.2.2 Bemerkung. Der Operator $A = \Phi(z)$ ist gemäß Proposition 2.1.7 wohldefiniert. Man beachte allerdings, dass der Operator A nur ein abgeschlossener Operator ist, der im Allgemeinen nicht beschränkt ist.

Wir wollen nun die Notation, die wir im vorigen Abschnitt eingeführt haben, etwas abändern, damit sie unserer gewohnten Notation näher kommt. Wir schreiben $\mathcal{M}(\Omega)_A := \mathcal{M}(\Omega)_r$, $f(A) := \Phi(f)$ für $f \in \mathcal{M}(\Omega)_A$ und $H(A) := \mathcal{M}(\Omega)_b$.

2.2.3 Bemerkung. Da meromorphe Funktionalkalküle nur einen Spezialfall der anfangs eingeführten abstrakten Funktionalkalküle darstellen, gelten natürlich alle Eigenschaften von Proposition 2.1.10 auch in meromorphen Funktionalkalkülen, wobei nur die Notation entsprechend geändert werden sollte. Beispielsweise würde Punkt (iii) dieses Satzes dann folgendermaßen lauten: Für $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)_A$ gilt

$$f(A) + g(A) \subseteq (f+g)(A), \quad f(A)g(A) \subseteq (fg)(A)$$

mit Gleichheit, falls $g \in H(A)$.

Die Idee hinter der Entwicklung eines jeden Funktionalkalküls ist es nicht nur, Operatoren zu definieren, sondern Operatoren auch hintereinanderschalten zu können. Dazu beschäftigt man sich mit Kompositionsregeln, die $f(g(A)) = (f \circ g)(A)$ gewährleisten sollen. In allgemeinen meromorphen Funktionalkalkülen wissen wir jedoch zu wenig, um so ein Resultat ohne weitere Voraussetzungen beweisen zu können. Wenn wir aber im nächsten Kapitel sektorielle Operatoren betrachten und auch für solche einen Funktionalkalkül entwickeln, werden wir auf die Theorie der meromorphen Funktionalkalküle zurückgreifen. Folgendes Resultat wird uns dort behilflich sein, für diesen Typ von Operatoren die Kompositionsregel beweisen zu können.

2.2.4 Satz. Seien Ω, Ω' offene Teilmengen von $\mathbb{C}$ und X ein Banachraum. Sei weiters A ein abgeschlossener Operator auf X und $(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{M}(\Omega), \Phi)$ ein meromorpher Funktionalkalkül für A, und mit $g : \Omega \to \Omega'$ holomorph, $g \in \mathcal{M}(\Omega)_A$, sei $(\mathcal{E}(\Omega'), \mathcal{M}(\Omega'), \Phi')$ ein meromorpher Funktionalkalkül für $g(A)$, d.h. $\Phi'(w \mapsto w) = g(A)$. Dann gelten die Aussagen

$$f \circ g \in \mathcal{M}(\Omega)_A \tag{2.1}$$

und

$$(f \circ g)(A) = f(g(A)) \tag{2.2}$$

für alle $f \in \mathcal{M}(\Omega')_{g(A)}$, falls sie nur für alle $f \in \mathcal{E}(\Omega')$ gelten.

Beweis. Wir setzen $B := g(A)$. Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega')_B$, und sei $e \in \mathcal{E}(\Omega')$ ein Regularisierer für f, was $ef \in \mathcal{M}(\Omega')$ und die Injektivität von $e(B)$ impliziert. Man beachte hierbei, dass sich diese Situation im Funktionalkalkül für $B = g(A)$ abspielt. Nach der Annahme (2.1) folgt $e \circ g \in \mathcal{M}(\Omega)_A$ sowie $(ef) \circ g \in \mathcal{M}(\Omega)_A$. Gleichung (2.2) zeigt

$$(e \circ g)(A) = e(B)$$

und

$$\left((e \circ g)(f \circ g)\right)(A) = \left((ef) \circ g\right)(A) = (ef)(B). \tag{2.3}$$

Da dieser Operator in $\mathcal{B}(X)$ liegt, ist $e \circ g \in H(A)$ ein Regularisierer für $f \circ g$, wobei diese Eigenschaft hier im Sinne von Definition 2.1.11 zu verstehen ist. Somit gilt $f \circ g \in \langle H(A) \rangle$, worauf Anwendung von Korollar 2.1.13 $f \circ g \in \mathcal{M}(\Omega)_A$ ergibt. Außerdem gilt mit Proposition 2.1.12

$$(f \circ g)(A) = (e \circ g)(A)^{-1} \left((e \circ g)(f \circ g)\right)(A) = e(B)^{-1}(ef)(B) = f(B) = f(g(A)).$$

□

Wir wollen in diesem Abschnitt noch ein abschließendes Beispiel bringen.

2.2.5 Beispiel. Sei $A \in \mathcal{B}(X)$ mit $0 \in \sigma(A)$, und sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen mit der Eigenschaft $\Omega \supseteq \sigma(A)$. Wir bezeichnen mit $\mathcal{E}(\Omega) := \mathcal{O}(\Omega)$ die Algebra der holomorphen Funktionen auf Ω und definieren die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{E}(\Omega) & \rightarrow & \mathcal{B}(X) \\ f & \mapsto & f(A) \end{cases},$$

wobei $f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)(z - A)^{-1}\, dz$ mit einer geeigneten Familie von Wegen Γ in Ω, deren Gesamtumlaufzahl um $\sigma(A)$ eins ist, nach dem Riesz-Dunford-Funktionalkalkül definiert ist. Dann ist Φ ein Homomorphismus, und das Tripel $(\mathcal{E}(\Omega), \mathcal{M}(\Omega), \Phi)$ ist ein meromorpher Funktionalkalkül für A im Sinne von Definition 2.2.1.
In der Tat sind die beiden Bedingungen von Definition 2.2.1 erfüllt:

(i) Die Abbildung $z := (w \mapsto w)$ ist holomorph und liegt selber in $\mathcal{E}(\Omega)$. Somit lässt sie sich beispielsweise durch die konstante Einsfunktion $\mathbf{1}$ regularisieren. Beachte, dass nach dem Riesz-Dunford-Kalkül $\Phi(\mathbf{1}) = I$ gilt, was offenbar injektiv und somit $\mathbf{1}$ tatsächlich ein Regularisierer ist. Weiters gilt auch $\Phi(z) = z(A) = A$.

(ii) Sei $T \in \mathcal{B}(X)$ ein beschränkter Operator, der mit A kommutiert. Aus $TA = AT$ folgt $T(z-A) = (z - A)T$, also auch $(z - A)^{-1}T = T(z - A)^{-1}$. Da die Multiplikation stetig und das Integral eigentlich ein Grenzwert von Riemann-Summen ist, folgt für $e \in \mathcal{E}(\Omega)$

$$Te(A) = \frac{1}{2\pi i} T \int_\Gamma e(z)(z - A)^{-1}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e(z)(z - A)^{-1}\, dz\, T = e(A)T.$$

Wir wollen nun Beispiele regularisierbarer Funktionen in diesem Funktionalkalkül bringen.

- Sei der Operator A zusätzlich injektiv und gelte $0 \in \Omega$. Sei f holomorph auf Ω, und betrachte die Funktion $g(z) := \frac{f(z)}{z^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Falls $f(0) \neq 0$, so ist g auf Ω nur mehr meromorph. Allerdings gilt $g \in \mathcal{M}(\Omega)_A$. Wir können nämlich für g die Funktion $h(z) := z^n$ als Regularisierer verwenden. Es gilt $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, und $h(A) = A^n$ ist injektiv. Daher ist $g(A)$ nach der Theorie der meromorphen Funktionalkalküle durch $g(A) = (h(A))^{-1}(gh)(A) = (A^n)^{-1} f(A)$ definiert.

- Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, Punkte in $\sigma(A)$, sodass die Operatoren $A - \lambda_j$ für alle $j = 1, \dots, k$ injektiv sind. Dann gilt für eine auf Ω holomorphe Funktion f, dass $g(z) := \frac{f(z)}{p(z)} \in \mathcal{M}(\Omega)_A$, wenn p ein Polynom ist, das höchstens die k verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ hat. In diesem Fall können wir nämlich das Polynom p als Regularisierer verwenden, das nach dem Fundamentalsatz der Algebra in ein Produkt von Linearfaktoren $(z - \lambda_j)$ zerfällt. Da alle Operatoren $A - \lambda_j$ nach Voraussetzung injektiv sind, folgt auch die Injektivität von $p(A)$, und es gilt

$$g(A) = (p(A))^{-1}(pg)(A) = (p(A))^{-1} f(A).$$

3 Der meromorphe Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Wir wollen uns jetzt von den (abstrakten) Ausführungen des vorigen Kapitels entfernen und beginnen, sektorielle Operatoren zu betrachten. Die Theorie von Kapitel 2 werden wir erst wieder in Abschnitt 3.3 benötigen.

3.1 Sektorielle Operatoren und Funktionen mit polynomiellem Grenzwert

3.1.1 Definition. Sei X ein nicht-trivialer Banachraum und A ein (unbeschränkter) Operator auf X. Für $\omega \in [0, \pi]$ definiere den Sektor

$$S_\omega := \begin{cases} \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \omega\} & \text{falls} \quad \omega \in (0, \pi], \\ (0, \infty) & \text{falls} \quad \omega = 0. \end{cases}$$

Der Operator A heißt *sektoriell* mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, wenn folgende beiden Bedingungen gelten:

(i) $\sigma(A) \subseteq \overline{S_\omega}$,

(ii) $M(A, \omega') := \sup\{\|\lambda R(\lambda, A)\| : \lambda \in \mathbb{C} \backslash \overline{S_{\omega'}}\} < \infty$ für alle $\omega' \in (\omega, \pi)$,

vgl. Definition 1.3.12 für die Schreibweise $R(\lambda, A)$. Wir bezeichnen die Menge der sektoriellen Operatoren mit Winkel ω mit $\mathrm{Sect}(\omega)$.

Wir definieren außerdem

$$M(A) := M(A, \pi) := \sup_{t>0} \left\| t(t + A)^{-1} \right\|.$$

3.1.2 Bemerkung. Im Fall $\omega \in (0, \pi]$ ist S_ω der offene Sektor mit Scheitel bei 0 und Öffnungswinkel 2ω, der symmetrisch bezüglich der positiven reellen Achse liegt.

3.1.3 Bemerkung. Die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z}$ bildet den Sektor S_ω bijektiv auf sich ab.

3.1.4 Bemerkung. Wenn $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ für einen Winkel $\omega \in [0, \pi)$ gilt, dann folgt aus Bedingung (ii) von Definition 3.1.1, dass $M(A) < \infty$. Außerdem gilt aus Stetigkeitsgründen

$$M(A, \omega') = \sup \{\|\lambda R(\lambda, A)\| : \lambda \in \mathbb{C} \backslash (S_{\omega'} \cup \{0\})\}.$$

Wir können über die Konstante $M(A)$ sogar noch mehr aussagen.

3.1.5 Lemma. Sei $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ für einen Winkel $\omega \in [0, \pi)$. Dann gilt $M(A) \geq 1$.

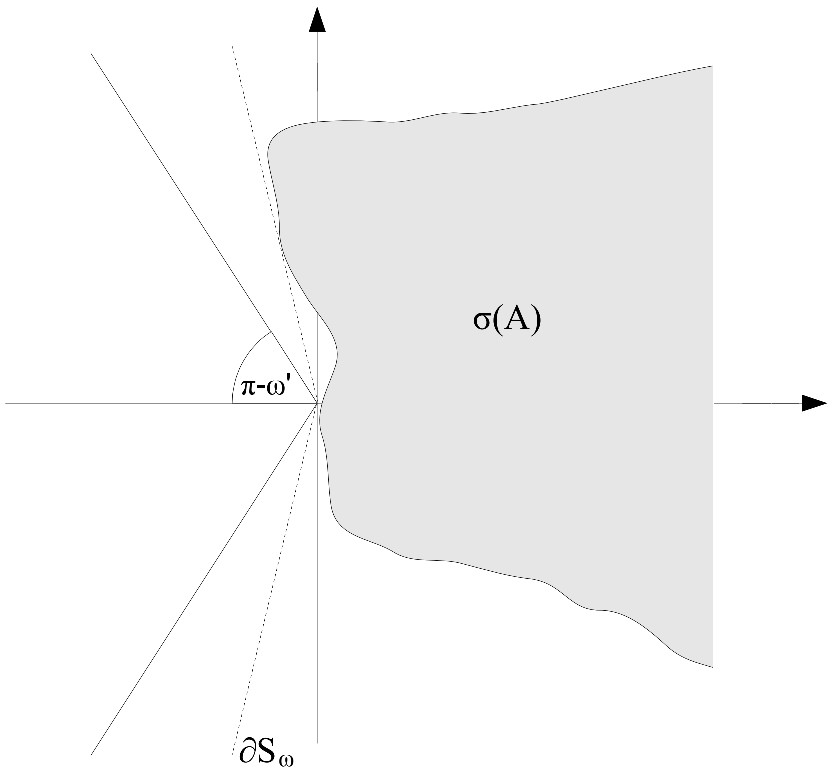

Abbildung 3.1: (Mögliche) Lage des Spektrums eines sektoriellen Operators. Der Punkt 0 kann ein Spektralpunkt sein.

Beweis. Sei $x \in \operatorname{dom}(A)$ und sei $\lambda > 0$ beliebig. Da die Resolventen von A mit A kommutieren, gilt wegen der Definition von $M(A)$

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\|(\lambda + A)^{-1}(\lambda + A)x\right\| = \left\|\lambda(\lambda + A)^{-1}\left(1 + \frac{1}{\lambda}A\right)x\right\| \\ &\leq M(A)\left\|\left(1 + \frac{1}{\lambda}A\right)x\right\| \leq M(A)\|x\| + \frac{1}{\lambda}M(A)\|Ax\|. \end{aligned}$$

Da $\lambda > 0$ beliebig gewählt war, folgt $\|x\| \leq M(A)\|x\|$ für alle $x \in \operatorname{dom}(A)\,(\neq \{0\})$, was nur für $M(A) \geq 1$ gelten kann. □

3.1.6 Definition (polynomieller Grenzwert). Sei $\phi \in (0, \pi]$ und $f \in \mathcal{M}(S_\phi)$, d.h. f ist meromorph auf dem Sektor S_ϕ.

- Die Funktion f hat *polynomiellen Grenzwert* $c \in \mathbb{C}$ bei 0, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, gibt, sodass $f(z) - c = O(|z|^\alpha)$ für $z \to 0$. Für c schreiben wir auch $f(0)$.
- Die Funktion f hat polynomiellen Grenzwert ∞ bei 0, wenn $\frac{1}{f}$ polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 hat.
- Die Funktion f hat polynomiellen Grenzwert $d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bei ∞, wenn $f(z^{-1})$ polynomiellen Grenzwert d bei 0 hat. Für d schreiben wir auch $f(\infty)$.

- Die Funktion f hat einen *endlichen polynomiellen Grenzwert* bei 0 (oder ∞), wenn ein $c \in \mathbb{C}$ existiert, sodass f polynomiellen Grenzwert c bei 0 (oder ∞) hat.

3.1.7 Beispiel. Die Funktion $f(y) := \frac{1}{1+y}$ (betrachtet als Funktion auf dem Sektor S_ϕ) hat polynomiellen Grenzwert 1 bei 0 und polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞. Um die Tatsache beim Punkt 0 einzusehen, betrachten wir die für betragsmäßig kleine Werte $y \in S_\phi$ gültige Aussage $1 \leq 2|y+1|$ und formen sie zu $\left|\frac{1}{y+1}\right| \leq 2$ um. Dies impliziert

$$\left|\frac{1}{1+y} - 1\right| = \left|\frac{y}{y+1}\right| \leq 2|y|$$

für y hinreichend nahe bei 0. Somit haben wir gezeigt, dass f polynomiellen Grenzwert 1 bei 0 hat (wähle in der Definition $\alpha = 1$).
Um zu zeigen, dass die Funktion f polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ besitzt, gehen wir von der bereits gezeigten Ungleichung $\left|\frac{y}{y+1}\right| \leq 2|y|$ aus und formen sie zu

$$\left|f(y^{-1})\right| = \left|\frac{1}{1+\frac{1}{y}}\right| = \left|\frac{y}{y+1}\right| \leq 2|y|$$

um. Obige Zeile gilt dabei wieder für y hinreichend nahe bei 0. Also haben wir gezeigt, dass die Funktion $f(y^{-1})$ polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 hat, was per definitionem bedeutet, dass f polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ hat.

3.1.8 Lemma. Sei $\phi \in (0,\pi]$, $f, g \in \mathcal{M}(S_\phi)$. Wenn f und g einen endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 (oder ∞) haben, so gilt dies ebenfalls für $f+g$ und fg.

Beweis. Bezeichne mit c den polynomiellen Grenzwert von f und mit d den polynomiellen Grenzwert von g. Nach Definition des polynomiellen Grenzwertes existieren somit $A, B, \alpha, \beta > 0$ und $\delta, \epsilon \in (0,1)$, sodass für alle $z \in S_\phi$ mit $|z| < \delta$ die Ungleichung $|f(z) - c| \leq A|z|^\alpha$ und für alle $z \in S_\phi$ mit $|z| < \epsilon$ die Ungleichung $|g(z) - d| \leq B|z|^\beta$ gelten. Für $z \in S_\phi$ mit $|z| < \min\{\delta, \epsilon\}$ gilt somit die Beziehung

$$\begin{aligned} |f(z) + g(z) - (c+d)| &\leq |f(z) - c| + |g(z) - d| \\ &\leq A|z|^{\min\{\alpha,\beta\}} + B|z|^{\min\{\alpha,\beta\}} = (A+B)|z|^{\min\{\alpha,\beta\}}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung für $f+g$ gezeigt ist.
Für fg betrachte man

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - cd| &= |f(z)g(z) - cg(z) + cg(z) - df(z) + df(z) - 2cd + cd| \\ &\leq |(f(z) - c)(g(z) - d)| + |c||g(z) - d| + |d||f(z) - c| \\ &\leq AB|z|^{\alpha+\beta} + |c|B|z|^\beta + |d|A|z|^\alpha \\ &\leq (AB + |c|B + |d|A)|z|^{\min\{\alpha,\beta\}}, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass fg einen endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 besitzt.
Die Aussage für den Punkt ∞ zeigt man analog. □

3.1.9 Definition. Definiere mit

$$\mathcal{O}(S_\phi) := \{f : S_\phi \to \mathbb{C} | f \text{ ist holomorph}\}$$

die Algebra der holomorphen Funktionen auf dem Sektor S_ϕ.
Wir bezeichnen mit

$$H^\infty(S_\phi) := \{f \in \mathcal{O}(S_\phi) : f \text{ ist beschränkt}\}$$

die Algebra der beschränkten, holomorphen Funktionen auf dem Sektor S_ϕ.

3.1.10 Bemerkung. Versehen mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(z)| : z \in S_\phi\}$$

wird $H^\infty(S_\phi)$ zu einem Banachraum.

3.1.11 Definition. Die Algebra

$$H^\infty_{0,0}(S_\phi) := \{f \in H^\infty(S_\phi) : f \text{ hat polynomiellen Grenzwert } 0 \text{ bei } 0 \text{ und } \infty\}$$

heißt *Dunford-Riesz-Klasse* auf S_ϕ.

3.1.12 Lemma. Die Menge $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ ist ein Ideal in $H^\infty(S_\phi)$.

Beweis. Seien $f \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ und $g \in H^\infty(S_\phi)$ gegeben. Für die Funktion f gilt dann hinreichend nahe bei 0 die Abschätzung $|f(z)| \leq C|z|^\alpha$ für $C, \alpha > 0$. Es folgt $|(fg)(z)| \leq C\|g\|_\infty |z|^\alpha$, womit die Funktion fg polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 hat. Genauso sieht man, dass die Funktion fg polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ hat, was $fg \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ impliziert. ☐

3.1.13 Beispiel. Die konstante Einsfunktion $\mathbf{1}$ und die Funktion $\frac{1}{1+z}$ liegen nicht in $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$. Beide Funktionen haben nämlich für $z \to 0$ Grenzwert 1. Somit können sie nicht polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 haben und daher nicht in $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ liegen.

3.1.14 Definition. Die Menge

$$\mathcal{E}(S_\phi) := \{f \in H^\infty(S_\phi) : f \text{ hat endlichen polynomiellen Grenzwert bei } 0 \text{ und } \infty\}$$

heißt *erweiterte Dunford-Riesz-Klasse.*

3.1.15 Proposition. Die erweiterte Dunford-Riesz-Klasse $\mathcal{E}(S_\phi)$ ist eine Unteralgebra von $H^\infty(S_\phi)$.

Beweis. Da Summe und Produkt zweier Funktionen aus $H^\infty(S_\phi)$ wieder in $H^\infty(S_\phi)$ liegen, folgt die Behauptung sofort aus Lemma 3.1.8. ☐

3.1.16 Lemma. Es gibt keine nichttriviale Linearkombination der Funktionen $\mathbf{1}$ und $\frac{1}{1+z}$, die in $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ liegt.

Beweis. Sei $c\mathbf{1} + d\frac{1}{1+z}$ mit $c, d \in \mathbb{C}$ eine Linearkombination von $\mathbf{1}$ und $\frac{1}{1+z}$, die in $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ liegt. Da eine solche Funktion bei 0 und ∞ Grenzwert 0 haben muss, folgt wegen

$$\lim_{z\to\infty} c\mathbf{1} + d\frac{1}{1+z} = c$$

$c = 0$ und wegen

$$\lim_{z\to 0} c\mathbf{1} + d\frac{1}{1+z} = c + d = d$$

auch $d = 0$. □

3.1.17 Proposition. Für $\phi \in (0, \pi]$ gilt

$$\mathcal{E}(S_\phi) = H^\infty_{0,0}(S_\phi) \oplus \left\langle \frac{1}{1+z} \right\rangle \oplus \langle \mathbf{1} \rangle .$$

Beweis. Wegen Lemma 3.1.16 handelt es sich bei den Summen auf der rechten Seite der Aussage tatsächlich um direkte Summen.
Um Gleichheit der Mengen zu bekommen, wollen wir beide Inklusionen zeigen.
Wir beginnen mit der Inklusion $\supseteq$. Sei eine Funktion f aus der rechten Seite gegeben. Die Funktion f ist dann sicher beschränkt. Da sowohl die Funktionen aus $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$, als auch die Funktionen $\mathbf{1}$ und $\frac{1}{1+z}$ endlichen polynomiellen Grenzwert besitzen, folgt die Behauptung.
Wir zeigen nun die Inklusion $\subseteq$. Sei $f \in H^\infty(S_\phi)$ mit endlichen polynomiellen Grenzwerten bei 0 und ∞ gegeben. Betrachte die Funktion

$$g(z) := f(z) - f(\infty) - \frac{f(0) - f(\infty)}{1+z}.$$

Die Funktion g hat offenbar endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 und ∞, der nach Definition der Funktion 0 beträgt. Somit liegt g in $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$. Die Umformung

$$f(z) = g(z) + f(\infty) + \frac{f(0) - f(\infty)}{1+z}$$

zeigt $f \in H^\infty_{0,0}(S_\phi) \oplus \left\langle \frac{1}{1+z} \right\rangle \oplus \langle \mathbf{1} \rangle$. □

3.1.18 Lemma. Sei $\phi \in (0, \pi]$. Gilt $f(z) \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ (oder $\mathcal{E}(S_\phi)$), so folgt auch $f(\frac{1}{z}) \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ (oder $\mathcal{E}(S_\phi)$).

Beweis. Für $f(z) \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ ist die Behauptung klar. Für $f(z) \in \mathcal{E}(S_\phi)$ folgt die Behauptung unmittelbar aus

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{z}{1+z} = \mathbf{1} - \frac{1}{1+z} \in \mathcal{E}(S_\phi).$$

□

3.1.19 Lemma. Sei $f \in H^\infty(S_\phi)$, wobei f polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ besitzt und sich in einer offenen Umgebung um den Punkt 0 holomorph fortsetzen lässt. Dann folgt $f \in \mathcal{E}(S_\phi)$.

Beweis. Sei eine solche Funktion f gegeben. Wegen der Holomorphie bei 0 existiert der Grenzwert

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}.$$

Also gibt es eine Konstante $c \geq 0$, sodass für z hinreichend nahe bei 0 die Ungleichung $\left|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right| \leq c$ gilt, was

$$|f(z) - f(0)| \leq c|z|$$

impliziert. Daher hat die Funktion f einen endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 und liegt wegen Lemma 3.1.17 in $\mathcal{E}(S_\phi)$. □

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir zur Verdeutlichung noch einige Beispiele bringen.

3.1.20 Beispiel. Es gelte $0 < \mathrm{Re}(a) < \mathrm{Re}(b)$. Dann gelten für alle $\phi \in (0, \pi)$ die Aussagen

(i) $\frac{1}{(1+z)^b} \in \mathcal{E}(S_\phi)$,

(ii) $\frac{z^a}{(1+z)^b} \in H_{0,0}^\infty(S_\phi)$ und

(iii) $\frac{z^a}{(1+z)^a} \in \mathcal{E}(S_\phi)$.

Der Punkt (i) ist dabei klar nach Lemma 3.1.19. Daraus folgt sofort, dass $\frac{z^a}{(1+z)^b}$ polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 hat. Um diese Tatsache für den Punkt ∞ zu zeigen, beachte man, dass die für hinreichend kleine $z \in S_\phi$ und eine geeignete Konstante $C > 0$ gültige Aussage

$$\left|\frac{z^{\frac{b-a}{2}}}{(z+1)^b}\right| \leq C$$

die Abschätzung

$$\left|\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^a}{\left(1+\frac{1}{z}\right)^b}\right| = \left|\frac{z^b}{z^a(z+1)^b}\right| \leq CD|z|^{\frac{\mathrm{Re}(b)-\mathrm{Re}(a)}{2}},$$

bedingt, wobei die Konstante D gemäß Bemerkung 1.2.8 auftritt. Somit ist Punkt (ii) gezeigt. Die Gültigkeit von (i) impliziert nach Lemma 3.1.18 $\frac{1}{(1+z^{-1})^a} \in \mathcal{E}(S_\phi)$, wodurch mittels

$$\frac{1}{(1+z^{-1})^a} = \left(\frac{z}{1+z}\right)^a = \frac{z^a}{(1+z)^a}$$

Punkt (iii) bewiesen ist.

3.2 Funktionalkalkül mittels Cauchy-Integralen

Für einen sektoriellen Operator A wollen wir den Ausdruck $f(A)$ für eine möglichst große Menge von holomorphen Funktionen sinnvoll definieren, indem wir $f(A)$ für alle Funktionen $f \in \mathcal{E}(S_\phi)$ definieren und mit Hilfe eines geeigneten Homomorphismus Φ einen meromorphen Funktionalkalkül $(\mathcal{E}(S_\phi), \mathcal{M}(S_\phi), \Phi)$ aufbauen. Auf diesen können wir dann die Ergebnisse aus Kapitel 2 anwenden und insbesondere dem Ausdruck $f(A)$ für geeignete meromorphe Funktionen auf dem Sektor S_ϕ Sinn geben. Das Ziel dieses Abschnittes soll es jetzt sein, alle noch fehlenden notwendigen Vorarbeiten zu leisten.

Generalvoraussetzung: In diesem Abschnitt bezeichne A immer einen sektoriellen Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$.

3.2.1 Proposition. Sei $\phi \in (\omega, \pi)$. Für $f \in H_{0,0}^{\infty}(S_\phi)$ und $\omega' \in (\omega, \phi)$ existiert dann der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} f(z)R(z,A)\,dz := -\int_0^\infty f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\,dt + \int_0^\infty f(te^{-i\omega'})R(te^{-i\omega'},A)e^{-i\omega'}\,dt$$

im Sinne von an beiden Grenzen uneigentlichen Riemann-Integralen. Dabei ist $\Gamma_{\omega'}$ der in positiver Richtung orientierte Rand von $S_{\omega'}$.

Beweis. Den Beweis für die Existenz des Integrals führen wir in mehreren Schritten.
1. Schritt: Da f polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ hat, gibt es ein $\epsilon > 0$, $C > 0$ und $\alpha > 0$, sodass für alle $z \in S_\phi$ mit $|z| < \epsilon$ die Ungleichung $|f(z^{-1})| \leq C|z|^\alpha$ gilt. Da f auch polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 hat, existiert ein $\delta > 0$, $D > 0$ und $\beta > 0$, sodass für alle $z \in S_\phi$ mit $|z| < \delta$ die Ungleichung $|f(z)| \leq D|z|^\beta$ gilt.
2. Schritt: Das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\,dt$$

existiert, falls

$$\int_0^\infty \|f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\|\,dt < \infty.$$

Wir zerlegen diesen Ausdruck in die folgenden drei Teile

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\|\,dt &= \int_0^\delta \|f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\|\,dt + \\ &+ \int_\delta^{\frac{1}{\epsilon}} \|f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\|\,dt + \\ &+ \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \|f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\|\,dt.\end{aligned}$$

3. Schritt: Um die Existenz des ersten Integrals zu zeigen, rechnen wir

$$\begin{aligned}\int_0^\delta \|f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\|\,dt &\leq \int_0^\delta |f(te^{i\omega'})|\|R(te^{i\omega'},A)\||e^{i\omega'}|\,dt \\ &\leq \int_0^\delta D|t|^{\beta-1}M(A,\omega')\,dt \quad < \infty,\end{aligned}$$

wobei bei der 2. Ungleichung die Abschätzung aus dem 1. Schritt und Bedingung (ii) aus Definition 3.1.1 eingehen.
4. Schritt: Ähnlich behandeln wir das dritte Integral. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \|f(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\|\,dt &\leq \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \left|f(te^{i\omega'})\right| \left\|R(te^{i\omega'},A)\right\| \left|te^{i\omega'}\right| \left|\frac{1}{t}\right|\,dt \\ &= \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \left|f\left(\left(\frac{1}{te^{i\omega'}}\right)^{-1}\right)\right| \left\|R(te^{i\omega'},A)\right\| \left|te^{i\omega'}\right| \left|\frac{1}{t}\right|\,dt \\ &\leq \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty C\left|\frac{1}{t}\right|^{\alpha+1} M(A,\omega')\,dt \quad < \infty,\end{aligned}$$

wobei bei der 3. Ungleichung wiederum Bedingung (ii) aus Definition 3.1.1 und eine Abschätzung aus dem 1. Schritt eingehen, denn für $t > \frac{1}{\epsilon}$ folgt $\left|\frac{1}{te^{i\omega'}}\right| < \epsilon$ und weiter

$$\left|f\left(\left(\frac{1}{te^{i\omega'}}\right)^{-1}\right)\right| \leq C\left|\frac{1}{te^{i\omega'}}\right|^\alpha.$$

Das Integral zum Winkel $-\omega'$ behandelt man analog. $\square$

3.2.2 Proposition. Sei $\phi \in (\omega, \pi)$. Für zwei Winkel $\omega', \omega'' \in (\omega, \phi)$, $\omega' \neq \omega''$, folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega'}} f(z)R(z,A)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega''}} f(z)R(z,A)\,dz.$$

Beweis. Gelte oBdA. $\omega' < \omega''$, und betrachte für feste $0 < r' < r < +\infty$ den geschlossenen Weg $\Gamma_{r,r'}$, der den Rand von $(S_{\omega''} \backslash S_{\omega'}) \cap B_r(0) \cap \overline{B_{r'}(0)}^c \cap \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$ in negativer Richtung durchläuft. Wir wollen $\Gamma_{r,r'}$ durch folgende Parametrisierung darstellen: $\Gamma_{r,r'} := \{\Gamma_{1,r,r'}, \Gamma_{2,r,r'}, \Gamma_{3,r,r'}, \Gamma_{4,r,r'}\}$ mit $\Gamma_{1,r,r'}(t) := -te^{i\omega'}, t \in [-r,-r']$, $\Gamma_{2,r,r'}(t) := te^{i\omega''}, t \in [r', r]$, $\Gamma_{3,r,r'}(t) := re^{-it}, t \in [-\omega'', -\omega']$, $\Gamma_{4,r,r'}(t) := r'e^{it}, t \in [\omega', \omega'']$. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r,r'}} f(z)R(z,A)\,dz = 0$$

nach dem Cauchy'schen Integralsatz, und weiters

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{3,r,r'}} f(z)R(z,A)\,dz \right\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega''}^{-\omega'} \left| f(re^{-it}) \right| \left\| R(re^{-it}, A) ire^{-it} \right\| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}(\omega'' - \omega') \sup_{t \in (\omega', \omega'')} \left| f(re^{it}) \right| M(A, \omega') \to 0 \end{aligned}$$

für $r \to \infty$, da f polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ hat. Ähnlich gilt

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{4,r,r'}} f(z)R(z,A)\,dz \right\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\omega'}^{\omega''} \left| f(r'e^{it}) \right| \left\| R(r'e^{it}, A) ir'e^{it} \right\| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi}(\omega'' - \omega') \sup_{t \in (\omega', \omega'')} \left| f(r'e^{it}) \right| M(A, \omega') \to 0 \end{aligned}$$

für $r' \to 0$, da f polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 hat. Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \to \infty} \lim_{r' \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{r,r'}} f(z)R(z,A)\,dz \\ &= \lim_{r \to \infty} \lim_{r' \to 0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{1,r,r'}} f(z)R(z,A)\,dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{2,r,r'}} f(z)R(z,A)\,dz + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{3,r,r'}} f(z)R(z,A)\,dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{4,r,r'}} f(z)R(z,A)\,dz \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega'} \cap \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}} f(z)R(z,A)\,dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega''} \cap \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}} f(z)R(z,A)\,dz. \end{aligned}$$

Analog zeigt man dies für die untere Halbebene, womit die Gleichheit der Integrale folgt. $\square$

Folgende Definition macht auf Grund der beiden vorangehenden Lemmata nun Sinn.

3.2.3 Definition. Sei $\phi \in (\omega, \pi)$. Für $f \in H_{0,0}^{\infty}(S_\phi)$ sei $f(A)$ definiert durch

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega'}} f(z)R(z,A)\,dz \in \mathcal{B}(X), \tag{3.1}$$

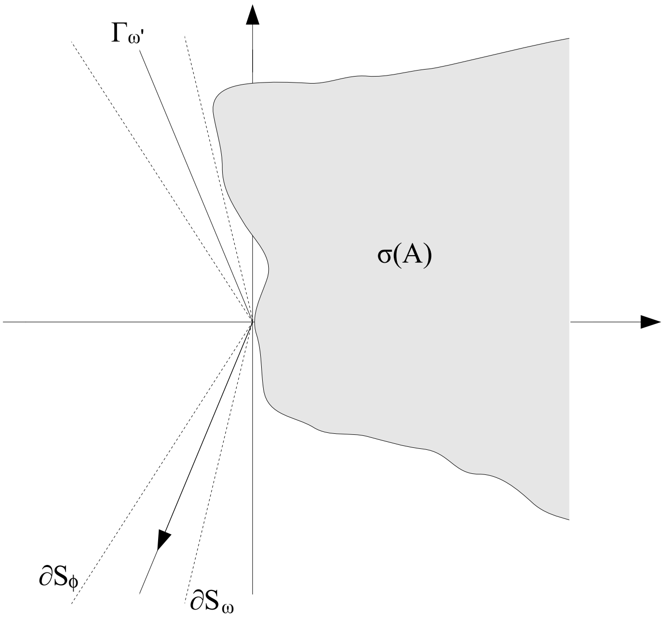

Abbildung 3.2: Der Integrationsweg $\Gamma_{\omega'}$.

wobei $\omega' \in (\omega, \phi)$ einen beliebigen Winkel darstellt, vgl. Abbildung 3.2.

Um Proposition 3.2.7 leichter beweisen zu können, formulieren wir Teile des Beweises als Lemmata.

3.2.4 Lemma. Sei $\phi \in (\omega, \pi)$, sei $h \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ und sei $\omega' \in (\omega, \phi)$. Definiere für $r, r' > 0$ mit $r > r'$ den Weg $\Gamma_{\omega',r,r'}$ als positiv durchlaufenen Rand von $S_{\omega'} \cap B_r(0) \cap \overline{B_{r'}(0)}^c$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta \quad = \quad \lim_{r\to\infty}\lim_{r'\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',r,r'}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta,$$

wobei z fest ist, aber nicht auf dem Weg $\Gamma_{\omega'}$ liegt.

Beweis. Für den Weg $\Gamma_{\omega',r,r'}$ bezeichnen wir den Teil auf den Strahlen als $\Gamma_{\omega',r,r',s}$, den Teil auf dem Kreisbogen mit Radius r als $\Gamma_{\omega',r,k}$ und den Teil auf dem Kreisbogen mit Radius r' als $\Gamma_{\omega',r',k}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\Gamma_{\omega',r,k}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta\right\| &= \left\|\int_{-\omega'}^{\omega'} h(re^{it})(z-re^{it})^{-1} ire^{it}\,dt\right\| \\ &\le 2\omega' \sup_{t\in(-\omega',\omega')}|h(re^{it})| \sup_{t\in(-\omega',\omega')}\left|\frac{e^{it}}{\frac{z}{r}-e^{it}}\right| \to 0\end{aligned} \tag{3.2}$$

für $r \to \infty$, wobei wir bei der Abschätzung verwenden, dass h Grenzwert 0 bei ∞ besitzt. Ähnlich folgt

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\Gamma_{\omega',r',k}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta\right\| \quad &= \quad \left\|\int_{-\omega'}^{\omega'} h(r'e^{it})(z-r'e^{it})^{-1} ir'e^{it}\,dt\right\| \\ &\le \quad 2\omega' \sup_{t\in(-\omega',\omega')}|h(r'e^{it})| \sup_{t\in(-\omega',\omega')}\left|\frac{r'e^{it}}{z-r'e^{it}}\right| \to 0\end{aligned}$$

für $r' \to 0$, wobei hier eingeht, dass h Grenzwert 0 bei 0 besitzt. Somit folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta &= \lim_{r\to\infty}\lim_{r'\to 0}\Bigg[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',r,r',s}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',r,k}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',r',k}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta\Bigg] \\ &= \lim_{r\to\infty}\lim_{r'\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',r,r'}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta.\end{aligned}$$

□

Wir werden das folgende Lemma im weiteren Verlauf noch öfters anwenden. Wenn es darum geht, die gleichmäßige Beschränktheit eines Ausdrucks zu zeigen, werden wir meist dieses Lemma bemühen.

3.2.5 Lemma.

(i) Seien $\omega, \omega' \in [0,\pi]$ Winkel mit $\omega \neq \omega'$. Dann ist der Ausdruck $\left|\frac{y}{y-z}\right|$ für $y \in \operatorname{ran}(\Gamma_\omega)\backslash\{0\}$ und $z \in \operatorname{ran}(\Gamma_{\omega'})\backslash\{0\}$ gleichmäßig beschränkt durch die Konstante

$$C_{\omega,\omega'} := \begin{cases} \frac{1}{\sin(|\omega'-\omega|)} & \text{falls } |\omega-\omega'| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{falls } |\omega-\omega'| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

(ii) Seien $\omega, \omega' \in [0,\pi]$ Winkel mit $\omega < \omega'$. Dann sind die Ausdrücke $\left|\frac{y}{y-z}\right|$ und $\left|\frac{z}{y-z}\right|$ für $y \in \operatorname{ran}(\Gamma_\omega)\backslash\{0\}$ und $z \notin S_{\omega'} \cup \{0\}$ durch die Konstante $C_{\omega,\omega'}$ gleichmäßig beschränkt.

(iii) Seien $\omega, \omega' \in [0,\pi]$ Winkel mit $\omega < \omega'$. Dann sind die Ausdrücke $\left|\frac{y}{y-z}\right|$ und $\left|\frac{z}{y-z}\right|$ für $y \in \overline{S_\omega}\backslash\{0\}$ und $z \in \operatorname{ran}(\Gamma_{\omega'})\backslash\{0\}$ durch die Konstante $C_{\omega,\omega'}$ gleichmäßig beschränkt.

Beweis. (i) Wir unterscheiden zwei Fälle.
<u>1. Fall:</u> Sei $|\omega'-\omega| \geq \frac{\pi}{2}$. Offenbar gilt dann $|y| \leq |y-z|$ und daher $\left|\frac{y}{y-z}\right| \leq 1$.
<u>2. Fall:</u> Sei $|\omega'-\omega| < \frac{\pi}{2}$. Angenommen es existieren $y' \in \operatorname{ran}(\Gamma_\omega)\backslash\{0\}$ und $z' \in \operatorname{ran}(\Gamma_{\omega'})\backslash\{0\}$, sodass $\left|\frac{y'}{y'-z'}\right| > C_{\omega,\omega'}$. Geht man nun zu dem (eindeutig bestimmten) $z'' \in \operatorname{ran}(\Gamma_{\omega'})\backslash\{0\}$ über, sodass der Abstand von y' zu z'' minimal wird, so folgt

$$C_{\omega,\omega'} < \left|\frac{y'}{y'-z'}\right| \leq \left|\frac{y'}{y'-z''}\right| = \frac{1}{\sin(|\omega'-\omega|)} = C_{\omega,\omega'}$$

nach einer elementar-geometrischen Überlegung. Dies ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme der Existenz von y' und z'.

(ii) Wir unterscheiden auch hier zwei Fälle.
<u>1. Fall:</u> Sei $\omega'-\omega \geq \frac{\pi}{2}$. Offenbar gilt dann $|y| \leq |y-z|$ und daher $\left|\frac{y}{y-z}\right| \leq 1$. Analog gilt $|z| \leq |y-z|$, was $\left|\frac{z}{y-z}\right| \leq 1$ impliziert.
<u>2. Fall:</u> Sei $\omega'-\omega < \frac{\pi}{2}$. Angenommen es existieren $y' \in \operatorname{ran}(\Gamma_\omega)\backslash\{0\}$ und $z' \notin S_{\omega'} \cup \{0\}$, sodass $\left|\frac{y'}{y'-z'}\right| > C_{\omega,\omega'}$. Dann gibt es einen Winkel $\omega'' \in [\omega',\pi]$, sodass $z' \in \operatorname{ran}(\Gamma_{\omega''})\backslash\{0\}$. Mit (i) folgt

$$C_{\omega,\omega'} < \left|\frac{y'}{y'-z'}\right| \leq C_{\omega,\omega''} \leq C_{\omega,\omega'},$$

was aber ein Widerspruch zu unserer Annahme der Existenz von y' und z' ist. Die gleichmäßige Beschränktheit von $\left|\frac{z}{y-z}\right|$ zeigt man genauso.

(iii) zeigt man mit analogen Argumenten wie (ii). $\square$

3.2.6 Lemma. Sei $\phi \in (\omega, \pi)$, seien $g, h \in H_{0,0}^{\infty}(S_\phi)$ und seien $\omega', \omega'' \in (\omega, \phi)$, $\omega' < \omega''$ gegeben. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_{\omega'}} \int_{\Gamma_{\omega''}} g(z)R(z,A)h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\, d\zeta\, dz = \int_{\Gamma_{\omega''}} \int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)R(z,A)h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\, dz\, d\zeta.$$

Beweis. Sei $x' \in X'$ ein stetiges, lineares Funktional. Da es sich bei den Integralen tatsächlich um Grenzwerte von Riemann-Summen handelt, können wir x' in die Integrale hineinziehen und erhalten

$$x'\left(\int_{\Gamma_{\omega'}} \int_{\Gamma_{\omega''}} g(z)R(z,A)h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\, d\zeta\, dz\right) = \int_{\Gamma_{\omega'}} \int_{\Gamma_{\omega''}} x'(g(z)R(z,A)h(\zeta)(z-\zeta)^{-1})\, d\zeta\, dz.$$

Mit der Definition $F(\zeta, z) := x'(g(z)R(z,A)h(\zeta)(z-\zeta)^{-1})$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_{\omega'}} \int_{\Gamma_{\omega''}} & F(\zeta,z)\, d\zeta\, dz = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty F(se^{i\omega''}, te^{i\omega'})e^{i(\omega'+\omega'')}\, ds\, dt + \int_0^\infty \int_0^\infty F(se^{-i\omega''}, te^{-i\omega'})e^{-i(\omega'+\omega'')}\, ds\, dt \\ &- \int_0^\infty \int_0^\infty F(se^{-i\omega''}, te^{i\omega'})e^{i(\omega'-\omega'')}\, ds\, dt - \int_0^\infty \int_0^\infty F(se^{i\omega''}, te^{-i\omega'})e^{i(-\omega'+\omega'')}\, ds\, dt,\end{aligned} \tag{3.3}$$

wobei alle Integrale natürlich wieder als uneigentliche Integrale zu verstehen sind. Wir wollen auf jedes der vier Integrale den Satz von Fubini anwenden, um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Wir zeigen nun beim ersten Integral, dass die Voraussetzungen dafür erfüllt sind, bei den anderen Integralen folgt es analog.
Wir müssen also zeigen, dass

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |F(se^{i\omega''}, te^{i\omega'})e^{i(\omega'+\omega'')}|\, ds\, dt < \infty. \tag{3.4}$$

Dafür verwenden wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty & |F(se^{i\omega''}, te^{i\omega'})|\, ds\, dt \\ & \leq \|x'\| \int_0^\infty \|g(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'}, A)\| \int_0^\infty \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'} - se^{i\omega''})^{-1}\right|\, ds\, dt\end{aligned} \tag{3.5}$$

und betrachten hier vorerst das innere Integral gesondert. Mit denselben Bezeichnungen für δ und ϵ wie im ersten Schritt des Beweises von Proposition 3.2.1 schreiben wir

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'} - se^{i\omega''})^{-1}\right|\, ds &= \int_0^\delta \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'} - se^{i\omega''})^{-1}\right|\, ds + \\ + \int_\delta^{\frac{1}{\epsilon}} \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'} - se^{i\omega''})^{-1}\right|\, ds &+ \int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'} - se^{i\omega''})^{-1}\right|\, ds.\end{aligned}$$

Nun erhalten wir mit Lemma 3.2.5 unmittelbar

$$\begin{aligned}\int_0^\delta \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'}-se^{i\omega''})^{-1}\right| ds &\leq \lim_{u\to 0}\int_u^\delta \left|se^{i\omega''}\right|^\beta \left|(te^{i\omega'}-se^{i\omega''})^{-1}\right| ds \\ &\leq C_{\omega',\omega''}\int_0^\delta |s|^{\beta-1}\, ds < \infty\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'}-se^{i\omega''})^{-1}\right| ds &\leq \lim_{u\to\infty}\int_{\frac{1}{\epsilon}}^u \left|\frac{1}{se^{i\omega''}}\right|^\alpha \left|(te^{i\omega'}-se^{i\omega''})^{-1}\right| ds \\ &\leq C_{\omega',\omega''}\int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty \left|\frac{1}{s}\right|^{\alpha+1} ds < \infty.\end{aligned}$$

Für das fehlende Integral beachte, dass wegen $|se^{i\omega''}| \in (\delta, \frac{1}{\epsilon})$, $|se^{i\omega''} - te^{i\omega'}| \geq C$ für ein von t unabhängiges $C > 0$. Mit $h \in H_{0,0}^\infty(S_\phi)$, also insbesondere h beschränkt, folgt

$$\int_\delta^{\frac{1}{\epsilon}} \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'}-se^{i\omega''})^{-1}\right| ds \leq \int_\delta^{\frac{1}{\epsilon}} C\|h\|_\infty\, ds < \infty.$$

Wir erhalten

$$\int_0^\infty \left|h(se^{i\omega''})(te^{i\omega'}-se^{i\omega''})^{-1}\right| ds \leq C'$$

für eine von t unabhängige Konstante C'. Somit folgt laut Gleichung (3.5)

$$\int_0^\infty\int_0^\infty |F(se^{i\omega''}, te^{i\omega'})|\, ds\, dt \leq \|x'\|C'\int_0^\infty \|g(te^{i\omega'})R(te^{i\omega'}, A)\|\, dt,$$

dessen Endlichkeit wir bereits in Proposition 3.2.1 nachgewiesen haben. Somit gilt (3.4).
Anwendung des Satzes von Fubini auf die vier Integrale aus (3.3) liefert nun

$$x'\left(\int_{\Gamma_{\omega'}}\int_{\Gamma_{\omega''}} g(z)R(z,A)h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\, d\zeta\, dz\right) = x'\left(\int_{\Gamma_{\omega''}}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)R(z,A)h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\, dz\, d\zeta\right),$$

wenn wir das Funktional wieder aus dem Integral herausziehen. Da der Raum X' punktetrennend ist, folgt die Behauptung. □

3.2.7 Proposition. Für $\phi \in (\omega, \pi)$ gilt:

(i) Die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} H_{0,0}^\infty(S_\phi) & \to \mathcal{B}(X) \\ f & \mapsto f(A) \end{cases}$$

ist ein Algebrenhomomorphismus.

(ii) Jeder abgeschlossene Operator T, der mit den Resolventen von A kommutiert, kommutiert auch mit $f(A)$.

(iii) Für alle $\lambda \notin \overline{S_\phi}$ gilt $R(\lambda, A)f(A) = ((\lambda - z)^{-1}f)(A)$.

Beweis. (i) Seien $g, h \in H_{0,0}^\infty(S_\phi)$. Die Tatsache $\Phi(g) + \Phi(h) = \Phi(g+h)$, sowie die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation folgt unmittelbar aus der Definition in (3.1). Wir zeigen $\Phi(g)\Phi(h) = \Phi(gh)$. Seien dafür $\omega', \omega'' \in (\omega, \phi)$, $\omega' < \omega''$ gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(g)\Phi(h) &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)R(z,A)\,dz \int_{\Gamma_{\omega''}} h(\zeta)R(\zeta,A)\,d\zeta \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_{\omega''}} h(\zeta)\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)R(z,A)\,dz\,R(\zeta,A)\,d\zeta \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_{\omega''}} h(\zeta)\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)R(z,A)R(\zeta,A)\,dz\,d\zeta.\end{aligned}$$

Mittels Resolventengleichung und Lemma 3.2.6 ist dies weiter gleich

$$\begin{aligned}\Phi(g)\Phi(h) &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_{\omega''}} h(\zeta)\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)(R(\zeta,A)-R(z,A))(z-\zeta)^{-1}\,dz\,d\zeta \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_{\omega''}} h(\zeta)R(\zeta,A)\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)(z-\zeta)^{-1}\,dz\,d\zeta + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)R(z,A)\int_{\Gamma_{\omega''}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta\,dz.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Wir definieren für $r, r' > 0$ mit $r > r'$ den Weg $\Gamma_{\omega',r,r'}$ als positiv durchlaufenen Rand von $S_{\omega'} \cap B_r(0) \cap \overline{B_{r'}(0)}^c$. Mit Lemma 3.2.4 folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega''}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta = \lim_{r\to\infty}\lim_{r'\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'',r,r'}} h(\zeta)(z-\zeta)^{-1}\,d\zeta = -h(z).$$

Die letzte Gleichheit gilt dabei nach der Cauchy'schen Integralformel, da wegen $\omega' < \omega''$ für hinreichend großes r und hinreichend kleines r' der Punkt z innerhalb des geschlossenen Weges $\Gamma_{\omega'',r,r'}$ liegt. Da eine ähnliche Argumentation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)(z-\zeta)^{-1}\,dz = 0$$

liefert, folgt mit (3.6)

$$\Phi(g)\Phi(h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)h(z)R(z,A)\,dz = \Phi(gh).$$

(ii) Diese Tatsache folgt sofort aus (3.1).

(iii) Definiere $g(z) := (\lambda - z)^{-1}f(z)$ und sei $\omega' \in (\omega, \phi)$. Es gilt

$$\begin{aligned}(\lambda - A)g(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)(\lambda - A)R(z,A)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)(\lambda - z + z - A)R(z,A)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} f(z)R(z,A)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} f(z)(\lambda - z)^{-1}\,dz = f(A),\end{aligned}$$

da das letzte Integral wegen $\lambda \notin \overline{S_\phi}$ nach Lemma 3.2.4 und dem Cauchy'schen Integralsatz 0 ergibt.

□

3.2.8 Definition. Sei $g(z) = f(z) + c(1+z)^{-1} + d$ mit $f \in H_{0,0}^\infty(S_\phi)$ und $c, d \in \mathbb{C}$. Für so ein g ist der Ausdruck $g(A)$ definiert durch

$$g(A) := f(A) + c(1+A)^{-1} + d. \tag{3.7}$$

3.2.9 Bemerkung. Gemäß Lemma 3.1.16 ist $g(A)$ wohldefiniert.

Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$\Phi_A : \begin{cases} \mathcal{E}(S_\phi) & \to \quad \mathcal{B}(X) \\ g & \mapsto \quad g(A) \end{cases}$$

ähnlich wie in Proposition 3.2.7, (i), ein Algebrenhomomorphismus wird. Um dies durchführen zu können, benötigen wir folgendes Lemma.

3.2.10 Lemma. Definiere

$$\begin{aligned} H_0^\infty(S_\phi \cup \{0\}) := \{f \in H^\infty(S_\phi) : & f \text{ hat polynomiellen Grenzwert } 0 \text{ bei } \infty \\ & \text{und hat holomorphe Fortsetzung auf Umgebung von } 0\}. \end{aligned}$$

Sei $f \in H_0^\infty(S_\phi \cup \{0\})$, $\omega' \in (\omega, \phi)$ und sei $\delta > 0$ so klein, dass die Funktion f in einer Umgebung von $\overline{B_\delta(0)}$ holomorph ist. Dann gilt

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) R(z, A)\, dz, \tag{3.8}$$

wenn $\Gamma = \Gamma_{\omega',\delta}$ der positiv orientierte Rand von $S_{\omega'} \cup B_\delta(0)$ ist.

3.2.11 Bemerkung. Wegen Lemma 3.1.19 gilt $H_0^\infty(S_\phi \cup \{0\}) \subseteq \mathcal{E}(S_\phi)$.
Außerdem folgt die Existenz von (3.8) aus

$$\int_\delta^\infty \|f(te^{i\omega'}) R(te^{i\omega'}, A) e^{i\omega'}\|\, dt < +\infty$$

ähnlich wie im Beweis von Proposition 3.2.1.

Beweis (von Lemma 3.2.10). Eine Funktion $f \in H_0^\infty(S_\phi \cup \{0\})$ lässt sich schreiben als $f = g + c(1+z)^{-1}$ mit $g \in H_0^\infty(S_\phi \cup \{0\}) \cap H_{0,0}^\infty(S_\phi)$ und $c \in \mathbb{C}$. Bezeichne als Weg Γ_{eck} den positiv orientierten Rand von $\overline{S_{\omega'}}^c \cap B_\delta(0)$ und für $r'' \in (0, \delta)$ als $\Gamma_{eck,r''}$ den positiv orientierten Rand von $\overline{S_{\omega'}}^c \cap B_\delta(0) \cap \overline{B_{r''}(0)}^c$.
Wegen

$$\int_{\omega'}^{2\pi-\omega'} \left\|g(r''e^{it}) R(r''e^{it}, A) i r'' e^{it}\right\|\, dt \le (2\pi - 2\omega') \sup_{t \in (\omega', 2\pi-\omega')} |g(r''e^{it})| M(A, \omega') \to 0$$

für $r'' \to 0$ folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{eck}} g(z)R(z,A)\,dz = \lim_{r''\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{eck,r''}} g(z)R(z,A)\,dz = 0.$$

Die letzte Gleichheit gilt dabei nach dem Cauchy'schen Integralsatz, da g in einer Umgebung von 0 holomorph ist. Somit folgt

$$\begin{aligned} g(A) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)R(z,A)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} g(z)R(z,A)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{eck}} g(z)R(z,A)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z)R(z,A)\,dz. \end{aligned}$$

Wir können also oBdA. $f(z) = (1+z)^{-1}$ annehmen.
Wir setzen $\Gamma' := -\Gamma_{\omega',r}$ mit $r > 1$ und $\Gamma'' := \Gamma_{\omega',r'}$ mit $r' > r$ ($\Gamma_{\omega',r}$, $\Gamma_{\omega',r'}$ wie im aktuellen Lemma definiert). Nach dem Cauchy'schen Integralsatz gilt

$$\int_{\Gamma'}(1+z)^{-1}R(z,A)\,dz + \int_{\Gamma''}(1+z)^{-1}R(z,A)\,dz = 0, \tag{3.9}$$

da die Summe der Integrale gleich ist einem Integral über einen geschlossenen Weg, der im Inneren keine Singularität enthält. Folglich gilt dies auch für den Grenzwert $r' \to \infty$. Mit $\gamma(t) := r'e^{it}$, $t \in (\omega', 2\pi - \omega')$ gilt

$$\begin{aligned} \left\|\int_\gamma (1+z)^{-1}R(z,A)\,dz\right\| &= \left\|\int_{\omega'}^{2\pi-\omega'} (1+r'e^{it})^{-1}R(r'e^{it},A)ir'e^{it}\,dt\right\| \\ &\le (2\pi - 2\omega')\sup_{t\in(\omega',2\pi-\omega')}\left\|(1+r'e^{it})^{-1}\right\| M(A,\omega') \stackrel{r'\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

und

$$\left\|\int_{r'}^{\infty}(1+te^{i\omega'})^{-1}R(te^{i\omega'},A)e^{i\omega'}\,dt\right\| \le M(A,\omega')\int_{r'}^{\infty}\left|\frac{1}{te^{i\omega'}(1+te^{i\omega'})}\right|\,dt \stackrel{r'\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

was zusammen mit (3.9)

$$\int_{\Gamma'}(1+z)^{-1}R(z,A)\,dz = 0$$

impliziert. Somit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (1+z)^{-1}R(z,A)\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (1+z)^{-1}R(z,A)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(1+z)^{-1}R(z,A)\,dz \\ &= -R(-1,A) = (1+A)^{-1} = (1+z)^{-1}(A) \end{aligned}$$

nach der Cauchy'schen Integralformel, da bei der Summe der Integrale ein Integral über einen geschlossenen Weg, der im Inneren die Singularität -1 enthält, übrig bleibt. □

3.2.12 Bemerkung. Wie im zweiten Teil des Beweises von Lemma 3.2.10 zeigt man, dass

$$\int_{\Gamma'}(1+z)^{-2}R(z,A)\,dz = 0.$$

Daraus folgt

$$(1+z)^{-2}(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (1+z)^{-2}R(z,A)\,dz = -(z \mapsto R(z,A))'(-1) = (1+A)^{-2}.$$

Wir haben nun alle nötigen Vorarbeiten für folgenden Satz geleistet, der Teile von Proposition 3.2.7 verallgemeinern wird.

3.2.13 Satz. Sei $\phi \in (\omega, \pi)$. Dann gilt:

(i) Die Abbildung

$$\Phi_A : \begin{cases} \mathcal{E}(S_\phi) & \to & \mathcal{B}(X) \\ g & \mapsto & g(A) \end{cases},$$

wobei $g(A)$ wie in (3.7) definiert ist, ist ein Algebrenhomomorphismus.

(ii) $\left(z(1+z)^{-1}\right)(A) = A(1+A)^{-1}$.

(iii) Jeder abgeschlossene Operator T, der mit den Resolventen von A kommutiert, kommutiert auch mit $g(A)$.

(iv) Für $x \in \ker(A)$ gilt $g(A)x = g(0)x$.

Beweis. (i) Seien zwei Funktionen $g_1, g_2 \in \mathcal{E}(S_\phi)$ mit den Darstellungen $g_i = f_i + c_i(1+z)^{-1} + d_i$, $i = 1, 2$ mit $f_i \in H_{0,0}^\infty(S_\phi)$ und $c_i, d_i \in \mathbb{C}$ gegeben. Die Linearität der Abbildung Φ_A ist klar.
Es bleibt also nur zu zeigen, dass die Abbildung Φ_A auch multiplikativ ist. Wegen der Linearität der Abbildung Φ_A reicht es, die gemischten Produkte getrennt zu betrachten, wobei bei den Produkten, bei denen als mindestens ein Faktor eine Konstante c_i vorkommt, die Behauptung offensichtlich klar ist. Das Produkt $f_1 f_2$ wurde bereits in Proposition 3.2.7 (i) behandelt, die Aussage für $f_i(1+z)^{-1}$ folgt sofort aus Proposition 3.2.7 (iii).
Aus Bemerkung 3.2.12 folgt $\Phi_A\left((1+z)^{-2}\right) = (1+A)^{-2} = \Phi_A\left((1+z)^{-1}\right)^2$.

(ii) Hierfür betrachtet man

$$\begin{aligned} \left(z(1+z)^{-1}\right)(A) &= \left((1+z-1)(1+z)^{-1}\right)(A) = \mathbf{1}(A) - (1+z)^{-1}(A) = I - (1+A)^{-1} \\ &= I + R(-1, A) = (-1-A)R(-1,A) + R(-1,A) = A(1+A)^{-1}. \end{aligned}$$

(iii) Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der entsprechenden Aussage in Proposition 3.2.7.

(iv) Unter den Voraussetzungen $x \in \ker(A)$ und $z \in \rho(A)$ gilt

$$R(z, A)x = (z-A)^{-1}\left(x - \frac{1}{z}Ax\right) = (z-A)^{-1}(z-A)\frac{1}{z}x = \frac{1}{z}x. \tag{3.10}$$

Für $f \in H_{0,0}^\infty(S_\phi)$ und $\omega' \in (\omega, \phi)$ folgt

$$f(A)x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} f(z)R(z,A)\,dz\,x = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega'}} \frac{f(z)}{z}\,dz\,x = 0x = f(0)x.$$

Das dritte Gleichheitszeichen gilt dabei nach dem Cauchy'schen Integralsatz, wenn man beachtet, dass

$$\int_{\gamma_r} \left|\frac{f(z)}{z}\right| dz = \int_{-\omega'}^{\omega'} \left|\frac{f(re^{it})}{re^{it}} ire^{it}\right| dt \overset{r\to\infty}{\to} 0$$

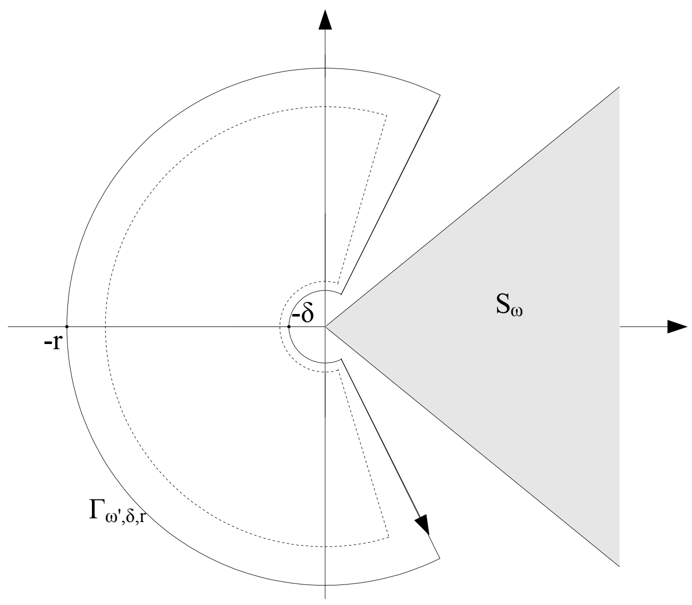

Abbildung 3.3: Der Integrationsweg $\Gamma_{\omega',\delta,r}$ in Korollar 3.2.15. Die Funktion f ist dabei außerhalb der strichlierten Linie holomorph.

und

$$\int_{\gamma_{r'}} \left|\frac{f(z)}{z}\right| dz \quad = \quad \int_{-\omega'}^{\omega'} \left|\frac{f(r'e^{it})}{r'e^{it}} ir'e^{it}\right| dt \overset{r'\to 0}{\to} 0.$$

Hier bezeichnet γ_r den Kreisbogen um 0 mit Radius r zwischen den Winkeln $-\omega'$ und ω' und $\gamma_{r'}$ den Kreisbogen um 0 mit Radius r' zwischen den Winkeln $-\omega'$ und ω'.
Für $f(z) = (1+z)^{-1}$ folgt die Behauptung sofort aus

$$f(A)x = (1+A)^{-1}x = -R(-1,A)x = x = f(0)x,$$

da $-1 \in \rho(A)$ (vgl. (3.10)).
Für $f(z) = c$, $c \in \mathbb{C}$, ist nichts zu zeigen.
Somit gilt $f(A)x = f(0)x$ für $x \in \ker(A)$ und $f \in \mathcal{E}(S_\phi)$. □

3.2.14 Definition. Wir nennen den Algebrenhomomorphismus

$$\Phi_A : \begin{cases} \mathcal{E}(S_\phi) & \to & \mathcal{B}(X) \\ g & \mapsto & g(A) \end{cases},$$

aus Satz 3.2.13 den *primären Funktionalkalkül* für A als sektoriellen Operator auf S_ϕ.

Ähnlich zu Lemma 3.2.10 wollen wir noch kurz betrachten, was passiert, wenn die Funktion f bei den Punkten 0 und ∞ holomorph ist, allerdings an keiner der beiden Stellen polynomiellen Grenzwert 0 besitzt.

3.2.15 Korollar. Sei $\phi \in (\omega, \pi)$, und sei $f \in H^\infty(S_\phi)$ holomorph bei 0 und ∞. Dann folgt $f \in \mathcal{E}(S_\phi)$ und

$$f(A) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega',\delta,r}} f(z)R(z,A)\,dz,$$

wenn $\Gamma_{\omega',\delta,r}$ den Weg wie in Abbildung 3.3 beschreibt. Dabei muss r hinreichend groß gewählt werden, sodass die Funktion f außerhalb von $U_r(0)$ holomorph ist.

Beweis. Die Funktion $g(z) := f(z) - f(\infty)$ liegt offenbar in $H_0^\infty(S_\phi \cup \{0\}) \subseteq \mathcal{E}(S_\phi)$, weswegen Definition 3.2.8 die Beziehung $g(A) = f(A) - f(\infty)I$ und somit $f(A) = f(\infty)I + g(A)$ impliziert. Lemma 3.2.10 zeigt dann

$$g(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega',\delta}} g(z)R(z,A)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega',\delta}} (f(z) - f(\infty))R(z,A)\,dz. \tag{3.11}$$

Wir wollen nun

$$\int_{\Gamma_{\omega',\delta}} g(z)R(z,A)\,dz = \int_{\Gamma_{\omega',\delta,r}} g(z)R(z,A)\,dz \tag{3.12}$$

zeigen, wobei r so groß gewählt wird, dass die Funktion g außerhalb von $U_r(0)$ holomorph ist. Dafür betrachten wir für $r' > r$ die Wege $\gamma_{1,r'}(t) := -te^{-i\omega'}, t \in [-r', -r]$, $\gamma_{2,r'}(t) := re^{-it}, t \in [-2\pi+\omega', -\omega']$, $\gamma_{3,r'}(t) := te^{i\omega'}, t \in [r, r']$ und $\gamma_{4,r'}(t) := r'e^{it}, t \in [\omega', 2\pi - \omega']$. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz folgt

$$\int_{\gamma_{1,r'}} g(z)R(z,A)\,dz + \int_{\gamma_{2,r'}} g(z)R(z,A)\,dz + \int_{\gamma_{3,r'}} g(z)R(z,A)\,dz + \int_{\gamma_{4,r'}} g(z)R(z,A)\,dz = 0. \tag{3.13}$$

Dies gilt auch für den Grenzwert $r' \to \infty$. Weil g beim Punkt ∞ polynomiellen Grenzwert 0 besitzt, folgt

$$\int_{\omega'}^{2\pi-\omega'} \left\| g(r'e^{it})R(r'e^{it},A)ir'e^{it} \right\| \,dt \le (2\pi - 2\omega') \sup_{t \in (\omega', 2\pi-\omega')} \left\| g(r'e^{it}) \right\| M(A,\omega') \overset{r'\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Aus Zeile (3.13) können wir also

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{r'\to\infty} \Bigg(\int_{\gamma_{1,r'}} g(z)R(z,A)\,dz + \int_{\gamma_{2,r'}} g(z)R(z,A)\,dz + \\
&\qquad + \int_{\gamma_{3,r'}} g(z)R(z,A)\,dz + \int_{\gamma_{4,r'}} g(z)R(z,A)\,dz \Bigg) \\
&= \int_{\gamma_{2,r'}} g(z)R(z,A)\,dz + \lim_{r'\to\infty} \int_{\gamma_{1,r'}} g(z)R(z,A)\,dz + \lim_{r'\to\infty} \int_{\gamma_{3,r'}} g(z)R(z,A)\,dz \\
&= - \int_{\Gamma_{\omega',r}} g(z)R(z,A)\,dz
\end{aligned}$$

herleiten. Daher gilt

$$\int_{\Gamma_{\omega',\delta}} g(z)R(z,A)\,dz = \int_{\Gamma_{\omega',\delta}} g(z)R(z,A)\,dz - \int_{\Gamma_{\omega',r}} g(z)R(z,A)\,dz = \int_{\Gamma_{\omega',\delta,r}} g(z)R(z,A)\,dz,$$

womit wir (3.12) gezeigt haben.
Wir können also in Zeile (3.11) den Integrationsweg $\Gamma_{\omega',\delta}$ durch den geschlossenen Weg $\Gamma_{\omega',\delta,r}$ ersetzen. Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes zeigt jetzt auf Grund der Holomorphie der Resolvente außerhalb des Spektrums von A

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega',\delta,r}} f(\infty)R(z,A)\,dz = 0,$$

was schlussendlich

$$f(A) = f(\infty)I + g(A) = f(\infty)I + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\omega',\delta,r}} f(z)R(z,A)\,dz$$

impliziert. □

3.3 Fortsetzung des primären Funktionalkalküls für sektorielle Operatoren

Wir wollen in diesem Abschnitt den bisher entwickelten Kalkül für sektorielle Operatoren auf die Resultate aus Kapitel 2 anwenden.

3.3.1 Proposition. Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und sei $\phi \in (\omega, \pi)$. Dann ist das Tripel

$$(\mathcal{E}(S_\phi), \mathcal{M}(S_\phi), \Phi_A)$$

ein meromorpher Funktionalkalkül für A.

Beweis. Da nach Satz 3.2.13 die Abbildung $\Phi_A : \mathcal{E}(S_\phi) \to \mathcal{B}(X)$ einen Algebrenhomomorphismus darstellt und $(1+z)^{-1} \in \mathcal{E}(S_\phi)$ gilt, wobei $\Phi_A((1+z)^{-1}) = (1+z)^{-1}(A) = (1+A)^{-1}$ injektiv ist, ist $(\mathcal{E}(S_\phi), \mathcal{M}(S_\phi), \Phi_A)$ ein nicht-degenerierter abstrakter Funktionalkalkül.
Um zu zeigen, dass es sich um einen meromorphen Funktionalkalkül für A gemäß Abschnitt 2.2 handelt, müssen wir noch die Punkte (i) und (ii) in Definition 2.2.1 nachprüfen. Punkt (i) gilt, da nach Beispiel 3.1.20 die Funktion $e(z) := (1+z)^{-1} \in \mathcal{E}(S_\phi)$ ein Regularisierer für die Funktion z ist und wegen Satz 3.2.13, (ii), die Beziehung

$$z(A) = (\Phi_A(e(z)))^{-1}\,\Phi_A(e(z)z) = (1+A)^{-1}(z(1+z)^{-1})(A) = (1+A)A(1+A)^{-1} = A$$

gilt. Für Punkt (ii) beachte, dass ein Operator $T \in \mathcal{B}(X)$, der mit A kommutiert, auch mit den Resolventen von A kommutiert, und benütze Satz 3.2.13, (iii). $\square$

Da wir nun einen meromorphen Funktionalkalkül zur Verfügung haben, wollen wir in Folge die Notation an Abschnitt 2.2 anpassen.

3.3.2 Definition. Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und sei $\phi \in (\omega, \pi)$. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{M}(S_\phi)_A := \{f \in \mathcal{M}(S_\phi) : \text{es gibt}\, e \in \mathcal{E}(S_\phi),\, \text{sodass}\, e(A)\, \text{injektiv und}\, ef \in \mathcal{E}(S_\phi)\}$$

die regularisierbaren Funktionen.
Für eine Funktion $f \in \mathcal{M}(S_\phi)_A$ definieren wir den Operator $f(A)$ durch

$$f(A) := e(A)^{-1}(ef)(A),$$

wenn $e \in \mathcal{E}(S_\phi)$ ein Regularisierer der Funktion f ist.

Unter gewissen Voraussetzungen können wir Regularisierer finden, die noch zusätzlichen Bedingungen genügen.

3.3.3 Lemma. Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, sei $\phi \in (\omega, \pi)$ und sei $f \in \mathcal{M}(S_\phi)_A$. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Man kann immer einen Regularisierer $e \in \mathcal{E}(S_\phi)$ für die Funktion f mit der Eigenschaft $e(\infty) = 0$ finden.

(ii) Sei A zusätzlich injektiv. Dann existiert ein Regularisierer $e \in H_{0,0}^\infty(S_\phi)$ für f.

Beweis. Sei d ein Regularisierer für f. Betrachtet man $e_1(z) := (1+z)^{-1}d(z) \in \mathcal{E}(S_\phi)$, so ist $e_1(A) = ((1+z)^{-1}d(z))(A) = (1+A)^{-1}d(A)$ injektiv und wegen $e_1 f = (1+z)^{-1}df \in \mathcal{E}(S_\phi)$ ein Regularisierer für f mit $e_1(\infty) = 0$. Somit gilt (i). Für (ii) betrachte man die Funktion $e_2(z) := z(1+z)^{-2}d(z)$, die wegen Beispiel 3.1.20 in $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ liegt. Wegen der Injektivität von A und der Gleichung

$$e_2(A) = \left(z(1+z)^{-2}d(z)\right)(A) = \left(z(1+z)^{-1}\right)(A)(1+z)^{-1}(A)d(A) = A(1+A)^{-1}(1+A)^{-1}d(A)$$

folgt, dass der Operator $e_2(A)$ injektiv ist. Mit der Tatsache $e_2 f \in \mathcal{E}(S_\phi)$ erweist sich e_2 also als Regularisierer für f, der (ii) erfüllt. □

3.3.4 Bemerkung. Für zwei Winkel $\phi_1 > \phi_2 > \omega$ betrachten wir $\mathcal{M}(S_{\phi_1})$ auf natürliche Art und Weise als Unteralgebra von $\mathcal{M}(S_{\phi_2})$, genauso wie dabei die Inklusion $\mathcal{E}(S_{\phi_1}) \subseteq \mathcal{M}(S_{\phi_2})$ gilt. Die zugehörigen meromorphen Funktionalkalküle sind dann nach Proposition 2.1.14 konsistent, d.h. der Operator $f(A)$ für $f \in \mathcal{M}(S_{\phi_1})_A \subseteq \mathcal{M}(S_{\phi_2})_A$ arbeitet in beiden Funktionalkalkülen gleich.

3.3.5 Definition. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{E}[S_\omega] := \{f \in \mathcal{O}(S_\omega) : f \text{ hat Fortsetzung zu Funktion aus } \mathcal{E}(S_\phi) \text{ für ein } \phi > \omega\}. \tag{3.14}$$

Unter $H^\infty[S_\omega]$ bzw. $H^\infty_{0,0}[S_\omega]$ verstehen wir die analogen Ausdrücke, wenn man in Zeile (3.14) $\mathcal{E}$ durch H^∞ bzw. $H^\infty_{0,0}$ ersetzt.

3.3.6 Bemerkung. Wir werden die Fortsetzung einer Funktion $f \in \mathcal{E}[S_\omega]$ auf $\mathcal{E}(S_\phi)$ für einen Winkel $\phi > \omega$ ebenfalls mit f bezeichnen, was aber zu keinen Missverständnissen führen sollte.

3.3.7 Bemerkung. Da die Inklusion $\mathcal{E}[S_\omega] \subseteq \mathcal{M}(S_\omega)$ gilt, können wir $\mathcal{E}[S_\omega]$ als Unteralgebra von $\mathcal{M}(S_\omega)$ auffassen. Das Tripel $(\mathcal{E}[S_\omega], \mathcal{M}(S_\omega), \Phi_A)$ ist also ein meromorpher Funktionalkalkül im Sinne von Abschnitt 2.2.

3.3.8 Definition. Wir nennen den meromorphen Funktionalkalkül

$$(\mathcal{E}[S_\omega], \mathcal{M}(S_\omega), \Phi_A)$$

den *natürlichen Funktionalkalkül* für A als sektoriellen Operator auf S_ω.

3.3.9 Bemerkung.

- Es gilt
$$\mathcal{M}(S_\omega)_A = \bigcup_{\phi \in (\omega,\pi)} \mathcal{M}(S_\phi)_A.$$
Hat man nämlich eine Funktion $f \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ gegeben, so gibt es einen Regularisierer $e \in \mathcal{E}[S_\omega]$. Also gilt $ef \in \mathcal{E}[S_\omega]$ und daher auch $e, ef \in \mathcal{E}(S_\phi)$ für einen geeigneten Winkel $\phi > \omega$. Insbesondere folgt daraus $f = \frac{ef}{e} \in \mathcal{M}(S_\phi)$, und f ist regularisierbar, weshalb f auch in $\bigcup_{\phi\in(\omega,\pi)} \mathcal{M}(S_\phi)_A$ liegt.
Hat man umgekehrt ein $f \in \bigcup_{\phi\in(\omega,\pi)} \mathcal{M}(S_\phi)_A$ gegeben, so existiert ein Winkel $\psi \in (\omega,\pi)$, sodass $f \in \mathcal{M}(S_\psi)_A$. Daher gibt es einen Regularisierer $e \in \mathcal{E}(S_\psi)$ für f. Offenbar gilt dann aber auch $e, ef \in \mathcal{E}[S_\omega]$, was $f \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ impliziert.

- Es gilt
$$H(A) = \{f \in \mathcal{M}(S_\omega)_A : f(A) \in \mathcal{B}(X)\},$$
vgl. Abschnitt 2.2.

Wir wollen jetzt einige weitere nützliche Eigenschaften bringen, die in unserem meromorphen Funktionalkalkül gelten. In Wahrheit handelt es sich dabei hauptsächlich um die Eigenschaften, die wir schon in Proposition 2.1.10 für abstrakte Funktionalkalküle betrachtet haben. Es erweist sich aber als nützlich, sie mit unserer jetzigen Notation noch einmal zu formulieren.

3.3.10 Satz. Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$. Für den meromorphen Funktionalkalkül $(\mathcal{E}[S_\omega], \mathcal{M}(S_\omega), \Phi_A)$ für A gelten dann folgende Aussagen:

(i) Sei $f \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$. Wenn ein Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ mit A kommutiert, so auch mit $f(A)$. Wenn $f(A) \in \mathcal{B}(X)$ gilt, dann kommutiert $f(A)$ mit A.

(ii) Es gilt $\mathbf{1}(A) = I$, wobei $\mathbf{1}$ die Einsfunktion bezeichnet, und $z(A) = A$.

(iii) Für $f, g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ gelten die Beziehungen
$$f(A) + g(A) \subseteq (f + g)(A)$$
und
$$f(A)g(A) \subseteq (fg)(A),$$
wobei für die Definitionsbereiche $\operatorname{dom}(f(A)g(A)) = \operatorname{dom}((fg)(A)) \cap \operatorname{dom}(g(A))$ gilt.

(iv) Falls $f \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ und $g \in H(A)$, dann gilt in Punkt (iii) Gleichheit.

(v) Für $f, g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ mit $fg = 1$ folgt, dass $f(A)$ injektiv ist und $f(A)^{-1} = g(A)$.

(vi) Die Abbildung
$$\Psi : \begin{cases} H(A) & \rightarrow & \mathcal{B}(X) \\ f & \mapsto & f(A) \end{cases}$$
ist ein Algebrenhomomorphismus.

(vii) Wenn $f \in H(A)$ mit $f(A)$ injektiv, dann folgt
$$f(A)^{-1}g(A)f(A) = g(A)$$
für $g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$.

(viii) Für $\mu \in \mathbb{C}$ gilt $(\mu - z)(A) = \mu - A$.

(ix) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$. Dann gilt
$$\frac{1}{\lambda - f(z)} \in \mathcal{M}(S_\omega)_A \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda - f(A) \text{ ist injektiv.}$$
In diesem Fall gilt
$$(\lambda - f(z))^{-1}(A) = (\lambda - f(A))^{-1}.$$
Insbesondere gilt $\lambda \in \rho(f(A))$ genau dann, wenn $(\lambda - f(z))^{-1} \in H(A)$.

Beweis. Dieser Satz ist nur eine Umformulierung von Proposition 2.1.10, wenn man beachtet, dass in Punkt (i) Definition 2.2.1, (ii), eingeht und wir für Punkt (ii) die Tatsache $z(A) = A$ bereits bewiesen haben. □

3.3.11 Lemma. Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, sei $f \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ und sei $\lambda \in \overline{S_\omega}$. Dann gilt zumindest eine der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ und $\alpha > 0$, sodass $f(z) - c = O(|z|^\alpha)$ für $z \to \lambda$.

(ii) Der Operator $\lambda - A$ ist injektiv.

Beweis. Sei $e \in \mathcal{E}[S_\omega]$ ein Regularisierer für f. Daher gilt $ef \in \mathcal{E}[S_\omega]$. Angenommen die Funktion f erfüllt die Bedingung (i) nicht und es gelte $\lambda \neq 0$. Dann hat f eine Singularität bei λ, die ein Pol ist, da es sich bei f um eine meromorphe Funktion handelt. Da die Funktion $ef \in \mathcal{E}[S_\omega]$ beschränkt ist, folgt sofort $e(\lambda) = 0$. Dies impliziert

$$h(z) := \frac{e(z)}{z - \lambda} \in \mathcal{E}[S_\omega].$$

Die Funktion h hat nämlich immer noch endliche polynomielle Grenzwerte bei 0 und ∞ und ist beschränkt auf einem geeigneten Sektor S_ϕ mit $\phi > \omega$. Somit gilt auch $h(z)(z - \lambda) = e(z) \in \mathcal{E}[S_\omega]$. Daraus folgt mit Satz 3.3.10, (iii),

$$e(A) = (h(z)(z - \lambda))(A) \supseteq h(A)(A - \lambda).$$

Da $e(A)$ injektiv ist und $h(A) \in \mathcal{B}(X)$, muss $A - \lambda$ schon injektiv sein. Somit gilt in diesem Fall Bedingung (ii).

Angenommen, es gelte nun $\lambda = 0$, und sei Bedingung (ii) nicht erfüllt, d.h. A ist nicht injektiv, hat also nichttrivialen Kern. Für $x \in \ker(A)$ gilt nach Satz 3.2.13 die Beziehung $e(A)x = e(0)x$. Wegen der Injektivität von $e(A)$ folgt daraus $e(0) \neq 0$. Wir betrachten nun

$$f(z) - f(0) = \frac{(e(z)f(z) - e(0)f(0)) - f(0)(e(z) - e(0))}{e(z)}.$$

Da sowohl $e \in \mathcal{E}[S_\omega]$, als auch $ef \in \mathcal{E}[S_\omega]$ gilt, haben beide Funktionen bei 0 endlichen polynomiellen Grenzwert. Daher gelten für betragsmäßig hinreichend kleine z die beiden Ungleichungen $|e(z)f(z) - e(0)f(0)| \leq C|z|^\alpha$ und $|e(z) - e(0)| \leq \tilde{C}|z|^\beta$ für $C, \tilde{C}, \alpha, \beta > 0$, woraus wir (mit neuer Konstanten $C' > 0$)

$$|f(z) - f(0)| \leq C' \frac{|z|^{\min\{\alpha,\beta\}}}{|e(z)|} \leq C' \left| \frac{2}{e(0)} \right| |z|^{\min\{\alpha,\beta\}}$$

folgern können. Die letzte Ungleichung gilt hier, da $|e(z)| > |\frac{e(0)}{2}|$ für z nahe bei 0. Somit haben wir Bedingung (i) bewiesen. □

3.3.12 Korollar. Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$ und sei $f \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$. Wenn A nicht injektiv ist, so gilt $f(A)x = f(0)x$ für alle $x \in \ker(A)$.

Beweis. Da der Operator A nicht injektiv ist, folgt aus Lemma 3.3.11 die Existenz des Grenzwertes $f(0)$. Sei $e \in \mathcal{E}[S_\omega]$ ein Regularisierer für f. Es folgt für $x \in \ker(A)$

$$f(A)x = e(A)^{-1}(ef)(A)x = e(A)^{-1}(ef)(0)x = f(0)e(A)^{-1}e(0)x = f(0)e(A)^{-1}e(A)x = f(0)x,$$

wobei hier beim zweiten und vierten Gleichheitszeichen Satz 3.2.13, (iv), eingeht. □

3.3.13 Lemma. Für $f \in \mathcal{O}(S_\omega)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f hat eine Fortsetzung zu einer Funktion aus $\mathcal{E}(S_\phi)$ für ein $\phi > \omega$.

(ii) f hat eine Fortsetzung zu einer Funktion aus $\mathcal{O}(S_\phi)$ für ein $\phi > \omega$ mit endlichen polynomiellen Grenzwerten bei 0 und ∞.

Beweis. Die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) ist klar. Wir zeigen nun die umgekehrte Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i). Sei dafür $g \in \mathcal{O}(S_\phi)$ eine Fortsetzung von f auf den Sektor S_ϕ für ein geeignetes $\phi > \omega$ mit den Eigenschaften aus (ii). Da g endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 hat, existiert ein $r > 0$, sodass g auf $B_r(0) \cap S_\phi$ beschränkt ist. Wegen des endlichen polynomiellen Grenzwertes bei ∞ gibt es auch ein $r' > r$, sodass g auf $\overline{B_{r'}(0)}^c \cap S_\phi$ beschränkt ist. Wegen der Holomorphie der Funktion g auf dem Sektor S_ϕ ist g auch auf der kompakten Menge $\overline{S_{\phi'}} \cap \overline{B_{r'}(0)} \cap B_r(0)^c$ für ein $\phi' \in (\omega, \phi)$ beschränkt. Daher gilt $g \in H^\infty(S_{\phi'})$, und (ii) impliziert die Existenz einer Fortsetzung von f zu einer Funktion aus $H^\infty(S_{\phi'})$. Wegen der endlichen polynomiellen Grenzwerte bei 0 und ∞ liegt die Fortsetzung somit in $\mathcal{E}(S_{\phi'})$, wobei $\phi' > \omega$. □

3.4 Funktionen von polynomiellem Wachstum und injektive Operatoren

In diesem Abschnitt wollen wir Teilmengen von $\mathcal{M}(S_\omega)_A$ mit gewissen Eigenschaften genauer betrachten. Diese hier gewonnenen Erkenntnisse werden wir dann u.a. beim Beweis der Kompositionsregel in unserem meromorphen Funktionalkalkül benötigen.

3.4.1 Definition. Wir definieren

$$\mathcal{A}(S_\phi) := \left\{ f \in \mathcal{O}(S_\phi) : f(z)(1+z)^{-n} \in \mathcal{E}(S_\phi) \,\text{für ein}\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

und

$$\mathcal{A}[S_\omega] := \{ f \in \mathcal{O}(S_\omega) : f \,\text{hat Fortsetzung zu Funktion aus}\, \mathcal{A}(S_\phi) \,\text{für ein}\, \phi > \omega \}.$$

3.4.2 Lemma. Für $f \in \mathcal{O}(S_\omega)$, sodass f eine Fortsetzung zu einer Funktion aus $\mathcal{O}(S_\phi)$ für ein gewisses $\phi > \omega$ hat, sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es gilt $f \in \mathcal{A}[S_\omega]$.

(ii) Die Funktion f hat für ein gewisses $\psi \in (\omega, \phi]$ die folgenden Eigenschaften:

1) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $f|_{S_\psi}(z) = O(|z|^\alpha)$ für $z \to \infty$.

2) Die Funktion $f|_{S_\psi}$ hat endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0.

(iii) Es existieren $c \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $F \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$ mit $f(z) = c + (1+z)^n F(z)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Auf Grund der Voraussetzung $f \in \mathcal{A}[S_\omega]$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $g(z) := f(z)(1+z)^{-n} \in \mathcal{E}[S_\omega]$. Da g beschränkt ist, hat die Funktion $f(z) = g(z)(1+z)^n$ maximal polynomielles Wachstum bei ∞. Somit gilt Bedingung 1) in (ii). Bedingung 2) folgt sofort, wenn man beachtet, dass $g \in \mathcal{E}[S_\omega]$ einen endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 hat und sich diese Tatsache offenbar auf f überträgt.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Sei α wie in Punkt (ii) und wähle $n > \alpha$. Definiere damit die Funktion

$$F(z) := \frac{f(z) - f(0)}{(1+z)^n}.$$

Für z nahe bei 0 gilt dann

$$|F(z)| = \left| \frac{f(z) - f(0)}{(1+z)^n} \right| \leq C \frac{|z|^\beta}{|1+z|^n} \leq 2C|z|^\beta$$

für geeignete $\beta, C > 0$. Die erste Ungleichung gilt hier, da f endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 hat. Somit hat F polynomiellen Grenzwert 0 bei 0. Um zu zeigen, dass F polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ hat, betrachten wir für z in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0

$$\begin{aligned} \left| F\left(\frac{1}{z}\right) \right| &= \left| \frac{f(\frac{1}{z}) - f(0)}{(1+\frac{1}{z})^n} \right| \leq \frac{|f(\frac{1}{z})|}{|1+\frac{1}{z}|^n} + \frac{|f(0)|}{|1+\frac{1}{z}|^n} \\ &\leq C \frac{|\frac{1}{z}|^\alpha}{|1+\frac{1}{z}|^n} + \tilde{C}, \end{aligned}$$

wobei $C, \tilde{C} > 0$. Der erste Term lässt sich dabei wegen Voraussetzung 1) von Punkt (ii) so abschätzen. Anwendung von Beispiel 3.1.20, (ii), liefert wegen $n > \alpha$ nun unmittelbar, dass die Funktion F polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ hat. Mit Lemma 3.3.13 folgt $F \in H_{0,0}^\infty[S_\omega]$. Umformen ergibt (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (i): Aus der Voraussetzung $f(z) = c + (1+z)^n F(z)$ folgt sofort

$$f(z)(1+z)^{-n} = c(1+z)^{-n} + F(z) \in \mathcal{E}[S_\omega],$$

da $F(z) \in H_{0,0}^\infty[S_\omega]$ und $c(1+z)^{-n} \in \mathcal{E}[S_\omega]$. □

3.4.3 Korollar. Für $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ gilt $\mathcal{A}[S_\omega] \subseteq \mathcal{M}(S_\omega)_A$.

Beweis. Zu $f \in \mathcal{A}[S_\omega]$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(z)(1+z)^{-n} \in \mathcal{E}(S_\phi)$ für passendes $\phi \in (\omega, \pi)$. Die Funktion $(1+z)^{-n}$ ist offensichtlich ein Regularisierer für f. □

3.4.4 Proposition. Sei $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$. Für $f \in \mathcal{A}[S_\omega]$ gelten folgende Aussagen.

(i) Wenn $A \in \mathcal{B}(X)$ gilt, so auch $f(A) \in \mathcal{B}(X)$.

(ii) Für alle $\mu \in \mathbb{C}$ gilt
$$[(z-\mu)f(z)](A) = (A-\mu)f(A).$$

Beweis. (i) Für $f \in \mathcal{A}[S_\omega]$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $F(z) := f(z)(1+z)^{-n} \in \mathcal{E}(S_\phi)$ für ein $\phi > \omega$, wobei $(1+z)^{-n}$ ein Regularisierer für f ist. Somit folgt $f(A) = (1+A)^n F(A)$. Wenn also A ein beschränkter Operator ist, dann gilt auch $f(A) \in \mathcal{B}(X)$.

(ii) Wenn $(1+z)^{-n}$ ein Regularisierer für f ist, so ist $(1+z)^{-n-1}$ ein Regularisierer für die Funktion $(z-\mu)f(z)$. Für $F(z) := f(z)(1+z)^{-n}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
[(z-\mu)f(z)](A) &= (1+A)^{n+1}\left(\frac{(z-\mu)f(z)}{(1+z)^{n+1}}\right)(A) \\
&= (1+A)^{n+1}[(A-\mu)(1+A)^{-1}]F(A) \\
&= (A-\mu)(1+A)^{n+1}(1+A)^{-1}F(A) \\
&= (A-\mu)(1+A)^{n}F(A) = (A-\mu)f(A).
\end{aligned}$$

Bei der zweiten Gleichheit geht dabei ein, dass sowohl $\frac{z}{1+z}$, als auch $\frac{\mu}{1+z}$ in $\mathcal{E}[S_\omega]$ liegen, vgl. dazu auch Satz 3.2.13, (ii). Die dritte Gleichheit gilt wegen Lemma 1.4.5. □

Sei nun A ein *injektiver*, sektorieller Operator. Wir wollen in diesem Fall eine weitere Menge von Funktionen definieren, die unsere eben definierte Menge $\mathcal{A}$ erweitern wird.

3.4.5 Definition. Wir definieren die Funktion

$$\tau(z) := z(1+z)^{-2}.$$

3.4.6 Bemerkung. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$.

(i) Offensichtlich gilt $\tau \in H_{0,0}^\infty[S_\omega]$.

(ii) Da der Operator A injektiv ist, überträgt sich die Injektivität auch auf den Operator $\tau(A) = A(1+A)^{-2} \in \mathcal{B}(X)$. Für seine Inverse gilt dann

$$\tau(A)^{-1} = (1+A)^2 A^{-1} = 2 + A + A^{-1},$$

wobei $\mathrm{dom}(\tau(A)^{-1}) = \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{ran}(A)$.

(iii) Insbesondere folgt, dass es sich unter den gegebenen Voraussetzungen an den Operator A bei der Funktion τ um einen Regularisierer handelt.

3.4.7 Definition. Wir definieren für einen Winkel $\phi \in (0, \pi]$ die Mengen von Funktionen

$$\mathcal{T}(S_\phi) := \left\{ f \in \mathcal{O}(S_\phi) : \tau(z)^n f(z) \in H_{0,0}^\infty(S_\phi) \,\text{für ein}\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

und

$$\mathcal{T}[S_\omega] := \{ f \in \mathcal{O}(S_\omega) : f \,\text{hat Fortsetzung zu Funktion aus}\, \mathcal{T}(S_\phi) \,\text{für ein}\, \phi > \omega \}.$$

Es gelten nun folgende nützliche Eigenschaften.

3.4.8 Proposition. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$. Dann gilt:

(i) Die Mengen $\mathcal{T}(S_\phi)$ und $\mathcal{T}[S_\omega]$ sind Algebren, die $\mathcal{T}(S_\phi) \supseteq \mathcal{A}(S_\phi)$ und $\mathcal{T}[S_\omega] \supseteq \mathcal{A}[S_\omega]$ erfüllen.

(ii) Für eine Funktion $f \in \mathcal{O}(S_\omega)$, die eine Fortsetzung zu einer Funktion aus $\mathcal{O}(S_\phi)$ für ein gewisses $\phi > \omega$ hat, gilt $f \in \mathcal{T}[S_\omega]$ genau dann, wenn folgende zwei Eigenschaften mit einem $\psi \in (\omega, \phi]$ erfüllt sind:

1) Es existiert ein $\beta_1 \in \mathbb{R}$ mit $f|_{S_\psi}(z) = O(|z|^{\beta_1})$ für $z \to 0$.

2) Es existiert ein $\beta_2 \in \mathbb{R}$ mit $f|_{S_\psi}(z) = O(|z|^{\beta_2})$ für $z \to \infty$.

(iii) Die Algebra $H^\infty(S_\phi)$ ist eine Unteralgebra von $\mathcal{T}(S_\phi)$. Entsprechend ist auch die Algebra $H^\infty[S_\omega]$ eine Unteralgebra von $\mathcal{T}[S_\omega]$.

(iv) Es gilt $\mathcal{T}[S_\omega] \subseteq \mathcal{M}(S_\omega)_A$.

Beweis. (i) Dass $\mathcal{T}(S_\phi)$ eine Algebra ist, ist klar nach Definition und der Tatsache, dass $H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ eine Algebra ist. Für die zweite Aussage sei eine Funktion $f \in \mathcal{A}(S_\phi)$ gegeben. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(z)(1+z)^{-n} \in \mathcal{E}(S_\phi)$. Da die Funktion $\frac{z^n}{(1+z)^n}$ auch in $\mathcal{E}(S_\phi)$ liegt (vgl. Beispiel 3.1.20), folgt

$$\tau(z)^n f(z) = \frac{z^n}{(1+z)^{2n}} f(z) = \frac{z^n}{(1+z)^n} f(z)(1+z)^{-n} \in \mathcal{E}(S_\phi).$$

Da die (polynomiellen) Grenzwerte bei 0 und ∞ aber offensichtlich beide 0 sind, folgt $\tau(z)^n f(z) \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$, also $f \in \mathcal{T}(S_\phi)$.
Analoges gilt für die Mengen $\mathcal{T}[S_\omega]$ und $\mathcal{A}[S_\omega]$.
(ii) Sei $f \in \mathcal{T}[S_\omega]$. Dann gilt für passendes $n \in \mathbb{N}$ und passendes $\phi > \omega$, dass $\tau(z)^n f(z) \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$, was für z hinreichend nahe bei 0 die Tatsache $|\tau(z)^n f(z)| \le C|z|^\alpha$ mit $\alpha > 0$ impliziert. Daraus folgt

$$|f(z)| \le C|z|^\alpha \frac{|1+z|^{2n}}{|z|^n} \le 2C|z|^{\alpha-n},$$

also erfüllt f Bedingung 2). Beim Punkt ∞ argumentiert man analog.
Für die andere Richtung sei f eine holomorphe Funktion, die 1) und 2) erfüllt. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \beta_1$ und $n > \beta_2$. Somit folgt $\beta_1 + n > 0$ und $n - \beta_2 > 0$. Wegen Bedingung 1) gilt dann mit $C > 0$

$$|\tau(z)^n f(z)| \le C|z|^{\beta_1} \frac{|z|^n}{|1+z|^{2n}} \le 2C|z|^{\beta_1+n}$$

für z hinreichend nahe bei 0. Bedingung 2) impliziert

$$\left|\tau\left(\frac{1}{z}\right)^n f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \le C\left|\frac{1}{z}\right|^{\beta_2} \left|\tau\left(\frac{1}{z}\right)\right|^n = C\,|z|^{n-\beta_2}\,|z+1|^{-2n} \le 2C|z|^{n-\beta_2},$$

wenn z hinreichend nahe bei 0 liegt. Mit Lemma 3.3.13 haben wir also $\tau(z)^n f(z) \in H^\infty_{0,0}(S_\phi)$ und somit $f \in \mathcal{T}[S_\omega]$.
(iii) Diese Tatsache folgt sofort aus Punkt (ii), da Funktionen aus $H^\infty(S_\phi)$ beschränkt sind. Man kann daher $\beta_1 = \beta_2 = 0$ wählen.
(iv) Da der Operator A injektiv ist, ist $\tau(A)$ und somit offenbar auch $\tau(A)^n$ injektiv, vgl. auch Bemerkung 3.4.6. Nach Definition von $\mathcal{T}[S_\omega]$ ist $\tau(z)^n$ offenbar ein Regularisierer für Funktionen aus $\mathcal{T}[S_\omega]$.

□

3.5 Die Kompositionsregel für den Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren

Wir wollen in diesem Abschnitt die Kompositionsregel der Form $f(g(A)) = (f \circ g)(A)$ für sektorielle Operatoren A und geeignete Funktionen f und g beweisen. Es liegt dabei auf der Hand, dass diese Beziehung nicht für beliebige Funktionen gelten kann. Zum einen müssen die Funktionalkalküle für A und $g(A)$ geeignet zusammenpassen, zum anderen muss die Funktion g in einen Sektor hinein abbilden, damit man im Definitionsbereich von f landet. Trotz dieser Einschränkungen wird die Kompositionsregel ein wichtiges Werkzeug sein, das wir im darauffolgenden Kapitel öfters anwenden werden.
Da der Beweis der Kompositionsregel recht lang ist, werden wir ihn der Übersichtlichkeit halber in mehrere Teile aufspalten.

3.5.1 Satz (Kompositionsregel). Seien der Operator A und die Funktion g so gewählt, dass sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

(a) $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ für $\omega \in [0, \pi)$,

(b) $g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ und $g(A) \in \mathrm{Sect}(\omega')$ für $\omega' \in [0, \pi)$,

(c) für jeden Winkel $\phi' \in (\omega', \pi)$ gibt es einen Winkel $\phi \in (\omega, \pi)$, sodass $g \in \mathcal{M}(S_\phi)$ und $g(S_\phi) \subseteq \overline{S_{\phi'}} (\subseteq \mathbb{C})$.

Dann gilt $f \circ g \in \mathcal{M}[S_\omega]_A$ und

$$(f \circ g)(A) = f(g(A))$$

für alle $f \in \mathcal{M}(S_{\omega'})_{g(A)}$.

3.5.2 Bemerkung. Wenn die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Satz 3.5.1 erfüllt sind, dann gilt für die Funktion g offenbar auch $g(S_\omega) \subseteq \overline{S_{\omega'}}$.

3.5.3 Lemma. Wenn die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Satz 3.5.1 gelten, und $g = c$ konstant ist, dann gilt die Kompositionsregel $(f \circ g)(A) = f(g(A))$ für $f \in \mathcal{M}(S_{\omega'})_{g(A)}$.

Beweis. Wenn $g = c$ konstant ist, dann folgt $g(A) = cI$. Wegen (c) gilt $c \in \overline{S_{\omega'}}$. Wir unterscheiden die Fälle $c \neq 0$ und $c = 0$.
<u>1. Fall:</u> Sei $c \neq 0$. Es gilt $(f \circ g)(z) = f(c)$, was $(f \circ g)(A) = f(c)I$ impliziert. Sei nun ein Regularisierer $e \in \mathcal{E}[S_{\omega'}]$ für die Funktion f gegeben. Es gilt dann

$$f(g(A)) = e(g(A))^{-1}(ef)(g(A)).$$

Man beachte, dass wir uns hier im Funktionalkalkül für $g(A)$ befinden! Wegen $ef \in \mathcal{E}[S_{\omega'}]$ können wir sie in der Form $ef = h + d_1(1+z)^{-1} + d_2$ mit $h \in H_{0,0}^\infty[S_{\omega'}]$ und d_1, d_2 konstant zerlegen, siehe auch Definition 3.2.8. Für den Ausdruck $h(g(A))$ gilt dann

$$\begin{aligned} h(g(A)) &= \int_\Gamma h(\zeta) R(\zeta, g(A))\, d\zeta = \int_\Gamma h(\zeta)(\zeta - g(A))^{-1}\, d\zeta \\ &= \left(\int_\Gamma h(\zeta)(\zeta - c)^{-1}\, d\zeta \right) I = h(c)I, \end{aligned}$$

wobei Γ einen geeigneten Weg gemäß Definition 3.2.3 bezeichnet. Die letzte Gleichheit gilt dabei nach der Cauchy'schen Integralformel und Lemma 3.2.4, da c wegen Bemerkung 3.5.2 nicht auf dem Weg

Γ liegen kann.
Die Gleichheit $(1 + g(A))^{-1} = (1 + c)^{-1}I$ ist klar.
Setzt man diese Resultate nun zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned}(ef)(g(A)) &= h(g(A)) + d_1(1 + g(A))^{-1} + d_2I \\ &= h(c)I + d_1(1 + c)^{-1}I + d_2I = (ef)(c)I = e(c)f(c)I.\end{aligned}$$

Auf analoge Art und Weise bekommt man auch $e(g(A)) = e(c)I$, und daher folgt $f(g(A)) = f(c)I = (f \circ g)(A)$.

<u>2. Fall:</u> Sei $c = 0$. Somit gilt $g(A) = 0$, womit der Operator $g(A)$ nicht injektiv ist und $\ker(g(A)) = X$ gilt. Nach Lemma 3.3.11 existiert also ein $c \in \mathbb{C}$ und $\alpha > 0$, sodass $f(z) - c = O(|z|^\alpha)$ für $z \to 0$. Daher existiert der Grenzwert $f(0) := \lim_{z\to0} f(z)$, für den zusätzlich $(f \circ g)(z) = f(0)$ und daher $(f \circ g)(A) = f(0)I$ gilt. Um $f(g(A))$ zu betrachten, bemühen wir Korollar 3.3.12 und erhalten

$$f(g(A))x = f(0)x = (f \circ g)(A)x$$

für alle $x \in \ker(g(A)) = X$. Da obige Beziehung für alle $x \in X$ gilt, folgt Gleichheit der Operatoren und somit $f(g(A)) = (f \circ g)(A)$ auch in diesem Fall. □

Wir können somit ab jetzt ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Funktion g nicht konstant ist. Mit Hilfe des Satzes der Gebietstreue erhalten wir also statt Bedingung (c) von Satz 3.5.1 die stärkere Eigenschaft

(c') Für jeden Winkel $\phi' \in (\omega', \pi)$ gibt es einen Winkel $\phi \in (\omega, \pi)$, sodass $g \in \mathcal{M}(S_\phi)$ und $g(S_\phi) \subseteq S_{\phi'} (\subseteq \mathbb{C})$.

Wir wollen nun Satz 2.2.4 anwenden. Um die Voraussetzungen davon zu erfüllen, verwenden wir das Tripel

$$(\mathcal{E}[S_\omega], \mathcal{M}(S_\omega), \Phi_A)$$

als meromorphen Funktionalkalkül für A und das Tripel

$$(\mathcal{E}[S_{\omega'}], \mathcal{M}(S_{\omega'}), \Phi_{g(A)})$$

als meromorphen Funktionalkalkül für $g(A)$. Weiters ist die Funktion $g : S_\omega \to S_{\omega'}$ holomorph. Satz 2.2.4 zeigt nun, dass es bereits ausreicht, die Kompositionsregel für $f \in \mathcal{E}[S_{\omega'}]$ zu beweisen.
Zusammenfassend gilt also folgendes Resultat.

3.5.4 Korollar. Für ein nichtkonstantes g gelten die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Satz 3.5.1. Dann folgen die Aussagen $f \circ g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ und $(f \circ g)(A) = f(g(A))$ für alle $f \in \mathcal{M}(S_{\omega'})_{g(A)}$ bereits dann, wenn sie für alle $f \in \mathcal{E}[S_{\omega'}]$ gelten.

3.5.5 Lemma. Für ein nichtkonstantes g gelten die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Satz 3.5.1, und es sei $f \in \mathcal{E}[S_{\omega'}]$. Dann gilt:

(i) $f \circ g \in H^\infty[S_\omega] \cap \mathcal{M}(S_\omega)_A$.

(ii) Sei zusätzlich A nicht injektiv. Dann hat die Funktion $f \circ g$ endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0.

Beweis. Wegen der Voraussetzung $f \in \mathcal{E}[S_{\omega'}](\subseteq H^\infty[S_{\omega'}])$ gilt offenbar $f \circ g \in H^\infty[S_\omega]$. Zu zeigen bleibt daher noch $f \circ g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$. Wir unterscheiden dafür zwei Fälle.
<u>1. Fall:</u> Sei der Operator A injektiv. Dann folgt mit Hilfe von Proposition 3.4.8, (iii) und (iv), unmittelbar die Behauptung $f \circ g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$, also gilt (i) in diesem Fall.
<u>2. Fall:</u> Sei nun der Operator A nicht injektiv. Wir wollen zuerst zeigen, dass $f \circ g$ endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 hat. Nach Lemma 3.3.11 hat die Funktion g endlichen polynomiellen Grenzwert c bei 0. Im Fall $c = 0$ gilt daher $|g(z)| \leq C|z|^\alpha$ mit $C > 0, \alpha > 0$ für z hinreichend nahe bei 0. Wegen $f \in \mathcal{E}[S_{\omega'}]$ gilt

$$|f(z) - d| \leq D|z|^\beta \tag{3.15}$$

mit $d \in \mathbb{C}, D > 0, \beta > 0$. Insgesamt ergibt sich

$$|f(g(z)) - d| \leq D\,|g(z)|^\beta \leq DC^\beta |z|^{\alpha\beta}.$$

Dabei muss z betragsmäßig so klein sein, dass $g(z)$ hinreichend nahe bei 0 liegt, um Ungleichung (3.15) zu erfüllen. Dies ist aber möglich, da $g(z) \to 0$ für $z \to 0$.
Im Fall $c \neq 0$ gilt die Ungleichung $|g(z) - c| \leq C|z|^\alpha$ mit $C > 0, \alpha > 0$ für z hinreichend nahe bei 0. Wegen (c) gilt $c \in \overline{S_{\omega'}} \backslash \{0\} \subseteq S_{\phi'}$ für geeignetes $\phi' > \omega'$. Da die Funktion f bei c holomorph ist, gibt es eine Konstante $E \geq 0$, sodass für z nahe bei 0 die Ungleichung

$$|f(c + z) - f(c)| \leq E|z|$$

gilt, vgl. dazu auch den Beweis von Lemma 3.1.19. Für passende kleine z gilt dann die Ungleichungskette

$$|f(g(z)) - f(c)| = |f(g(z) - c + c) - f(c)| \leq E|g(z) - c| \leq CE|z|^\alpha,$$

womit auch in diesem Fall die Funktion $f \circ g$ endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 hat. Somit gilt (ii). Punkt (i) folgt jetzt sofort mit Lemma 3.4.2 und Korollar 3.4.3. □

Beweis (von Satz 3.5.1). Nach Korollar 3.5.4 reicht es aus, die Behauptungen für Funktionen $f \in \mathcal{E}[S_{\omega'}]$ zu zeigen. Die Tatsache $f \circ g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ haben wir bereits in Lemma 3.5.5 gezeigt. Wir müssen daher nur noch

$$f(g(A)) = (f \circ g)(A)$$

für $f \in \mathcal{E}[S_{\omega'}]$ zeigen, wobei wir wegen Lemma 3.5.3 g als nicht konstant annehmen können.
f lässt sich schreiben als

$$f(z) = f_1(z) + \frac{d}{1+z} + c,$$

wobei $f_1 \in H^\infty_{0,0}[S_{\omega'}]$ und $c, d \in \mathbb{C}$. Falls $f(z) = c$, so gilt die Kompositionsregel offenbar. Wenn $f(z) = \frac{d}{1+z}$, dann folgt die Aussage aus Satz 3.3.10, (ix), da

$$f(g(A)) = d(1 + g(A))^{-1} = d\left(\frac{1}{1 + g(z)}\right)(A) = (f \circ g)(A).$$

Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit weiters annehmen, dass $f \in H^\infty_{0,0}[S_{\omega'}]$.
Sei $\omega_2' \in (\omega', \pi)$ so gewählt, dass f auf dem Sektor $S_{\omega_2'}$ holomorph ist. Bezeichne mit Γ' den in positiver Richtung orientierten Rand des Sektors $S_{\omega_1'}$ für geeignetes $\omega_1' \in (\omega', \omega_2')$. Wir wählen nun einen Winkel $\phi' \in (\omega', \omega_1')$. Wegen Bedingung (c') finden wir dann einen Winkel $\phi \in (\omega, \pi)$, sodass die Inklusion $g(S_\phi) \subseteq S_{\phi'}$ gilt. Für festes $\lambda \notin \overline{S_{\phi'}}$ ist die Funktion $(\lambda - g(z))^{-1}$ nun beschränkt und holomorph auf dem Sektor S_ϕ, wobei $(\lambda - g(z))^{-1} \in H(A)$. Wegen Voraussetzung (b) gilt $\lambda \in \rho(g(A))$ und daher erhalten wir

$$f(g(A)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda) R(\lambda, g(A))\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{1}{\lambda - g(z)}\right)(A)\, d\lambda.$$

Wir müssen nun wieder zwei Fälle unterscheiden.
1. Fall: Der Operator A ist injektiv. Dies ist der leichtere Fall, da wir die Funktion $\tau(z) = z(1+z)^{-2} \in H_{0,0}^{\infty}[S_\omega]$ als Regularisierer für $f \circ g$ verwenden können. Da nämlich nach Lemma 3.5.5, $f \circ g \in H^\infty[S_\omega]$ gilt, folgt wegen Lemma 3.1.12, $\tau(z)(f \circ g)(z) \in H_{0,0}^{\infty}[S_\omega]$. Bezeichne Γ nun einen Weg gemäß Definition 3.2.3, der innerhalb des Sektors S_ϕ verläuft, aber links vom Sektor S_ω liegt. Wir berechnen jetzt

$$\begin{aligned}
f(g(A)) &= \tau(A)^{-1}\tau(A)f(g(A)) \\
&= \tau(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\tau(A)R(\lambda, g(A))\,d\lambda \\
&= \tau(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{z}{(1+z)^2(\lambda - g(z))}\right)(A)\,d\lambda \\
&= \tau(A)^{-1}\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} f(\lambda)\frac{z}{(1+z)^2(\lambda-g(z))}R(z,A)\,dz\,d\lambda \\
&= \tau(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{z}{(1+z)^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{\lambda - g(z)}\,d\lambda\, R(z,A)\,dz \\
&= \tau(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(g(z))z}{(1+z)^2}R(z,A)\,dz \\
&= \tau(A)^{-1}\left(\tau(z)(f\circ g)(z)\right)(A) \\
&= (f \circ g)(A).
\end{aligned}$$

Das erste Gleichheitszeichen ist dabei klar wegen $\tau(A) \in \mathcal{B}(X)$. Bei der vierten Gleichheit geht ein, dass $\tau(z)(\lambda - g(z))^{-1} \in H_{0,0}^{\infty}[S_\omega]$, da $(\lambda - g(z))^{-1}$ beschränkt ist. Das sechste Gleichheitszeichen gilt dabei nach Lemma 3.2.4 und der Cauchy'schen Integralformel, da $g(z) \in S_{\phi'}$ mit $\phi' < \omega_1'$. Beim fünften Gleichheitszeichen vertauschen wir die beiden Integrale mit Hilfe des Satzes von Fubini. Um diesen anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass nach Abschätzung der Resolvente der Integrand

$$f(\lambda)\frac{1}{(1+z)^2(\lambda - g(z))}$$

auf $\Gamma \times \Gamma'$ produktintegrierbar ist. Es gilt

$$f(\lambda)\frac{1}{(1+z)^2(\lambda - g(z))} = \frac{f(\lambda)}{\lambda}\frac{1}{(1+z)^2}\frac{\lambda}{\lambda - g(z)}. \tag{3.16}$$

Aus $f \in H_{0,0}^{\infty}[S_\omega]$ leitet man die Integrierbarkeit des ersten Faktors nach λ her. Der zweite Faktor ist offenbar nach z integrierbar. Der dritte Faktor ist nach Lemma 3.2.5 durch $C_{\phi',\omega_1'}$ gleichmäßig beschränkt. Daher folgt die Produktintegrierbarkeit, was die Anwendung des Satzes von Fubini ermöglicht. Somit ist im 1. Fall die Kompositionsregel gezeigt.

2. Fall: Der Operator A ist nicht injektiv. Nach Lemma 3.3.11 hat dann die Funktion g endlichen polynomiellen Grenzwert $c := \lim_{z\to 0} g(z)$ bei 0. Wir wählen nun für die Funktion $g_1(z) := g(z) - c$ einen Regularisierer $\tilde{e} \in \mathcal{E}[S_\omega]$, der $\tilde{e}(\infty) = 0$ erfüllt, vgl. Lemma 3.3.3. Mit $e := \tilde{e}^2$ folgt $eg_1 \in H_{0,0}^{\infty}[S_\omega]$, da eg_1 endlichen polynomiellen Grenzwert bei 0 und ∞ besitzt und dieser offenbar an beiden Stellen

0 beträgt. Wir berechnen jetzt

$$\begin{aligned}
f(g(A)) &= e(A)^{-1}e(A)f(g(A)) \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)e(A)R(\lambda,g(A))\,d\lambda \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{e(z)}{\lambda-g(z)}\right)(A)\,d\lambda \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{g_1(z)e(z)}{(\lambda-g(z))(\lambda-c)}+\frac{e(z)}{\lambda-c}\right)(A)\,d\lambda \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{g_1(z)e(z)}{(\lambda-g(z))(\lambda-c)}\right)(A)+\frac{f(\lambda)}{\lambda-c}e(A)\,d\lambda \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{g_1(z)e(z)}{(\lambda-g(z))(\lambda-c)}\right)(A)\,d\lambda+e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{\lambda-c}\,d\lambda\, e(A) \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{g_1(z)e(z)}{(\lambda-g(z))(\lambda-c)}\right)(A)\,d\lambda+f(c)I.
\end{aligned}$$

Das fünfte Gleichheitszeichen gilt dabei, da für $\lambda \notin \overline{S_{\phi'}}$ beide Summanden innerhalb der Klammer in $\mathcal{E}[S_\omega]$ liegen - in der Tat gilt sogar $\frac{g_1(z)e(z)}{(\lambda-g(z))(\lambda-c)} \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$. Die letzte Gleichheit folgt wiederum aus Lemma 3.2.4 und der Cauchy'schen Integralformel. Bezeichne Γ nun einen Weg wie im ersten Fall. Dann gilt

$$\begin{aligned}
f(g(A)) &= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{g_1(z)e(z)}{(\lambda-g(z))(\lambda-c)}\right)(A)\,d\lambda+f(c)I \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{(g_1e)(z)}{(\lambda-g(z))(\lambda-c)}R(z,A)\,dz\,d\lambda+f(c)I \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(\lambda)\left(\frac{1}{\lambda-g(z)}-\frac{1}{\lambda-c}\right)d\lambda\right)e(z)R(z,A)\,dz+f(c)I \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{\lambda-g(z)}\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{f(\lambda)}{\lambda-c}\,d\lambda\right)e(z)R(z,A)\,dz+f(c)I \\
&= e(A)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(f(g(z))-f(c))e(z)R(z,A)\,dz+f(c)I \\
&= e(A)^{-1}\left(((f\circ g)(z)-f(c))e(z)\right)(A)+f(c)I \\
&= (f\circ g)(A)-f(c)I+f(c)I \\
&= (f\circ g)(A).
\end{aligned}$$

Beim fünften Gleichheitszeichen gehen hier wieder Lemma 3.2.4 und die Cauchy'sche Integralformel ein. Die sechste Gleichheit gilt, da $((f\circ g)(z)-f(c))e(z) \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$ wegen $e(\infty)=0$ und $f\circ g \in H^\infty[S_\omega]$ mit endlichem polynomiellem Grenzwert bei 0, vgl. Lemma 3.5.5. Um die dritte Gleichheit zu rechtfertigen, müssen wir noch die Voraussetzungen des Satzes von Fubini nachprüfen. Wir wollen also - nach der Abschätzung der Resolvente - die Produktintegrierbarkeit von

$$F(\lambda,z) := f(\lambda)\frac{(g_1e)(z)}{(\lambda-g(z))(\lambda-c)z} \tag{3.17}$$

auf $\Gamma\times\Gamma'$ nachprüfen. Es gilt dabei

$$F(\lambda,z) = \frac{f(\lambda)}{\lambda}\frac{\lambda}{(\lambda-g(z))}\frac{1}{\lambda-c}\frac{(g_1e)(z)}{z}.$$

Wir müssen nun unterscheiden, ob $c = 0$ oder $c \neq 0$. Wir beginnen mit dem Fall $c \neq 0$. Der erste Faktor macht bei der Integrierbarkeit keine Probleme, da er nur von einer Integrationsvariable abhängt und $f \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$ gilt. Analoges gilt für den vierten Faktor wegen $e_1 g \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$. Der dritte Faktor ist wegen $\lambda \in \Gamma'$ und $c \neq 0$ sowieso beschränkt, der zweite Faktor ist hier nach Lemma 3.2.5 gleichmäßig beschränkt. Somit ist $F(\lambda, z)$ produktintegrierbar.
Im Fall $c = 0$ gilt $g_1(z) = g(z)$ und wir schreiben (3.17) um in

$$\begin{aligned} F(\lambda, z) &= f(\lambda)\frac{(g_1 e)(z)}{(\lambda - g(z))(\lambda - c)z} \\ &= \frac{f(\lambda)}{\lambda}\frac{1}{(\lambda - g(z))}\frac{(ge)(z)}{z} \\ &= \frac{f(\lambda)}{\lambda^{1+\alpha}}\frac{\lambda^\alpha g(z)^{1-\alpha}}{(\lambda - g(z))}\frac{g(z)^\alpha e(z)}{z}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha \in (0,1)$ so gewählt wird, dass der erste Faktor (im Betrag) nach λ integrierbar bleibt. Dies ist wegen $f \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$ möglich. Der zweite Faktor ist wegen der Abschätzung

$$\left|\frac{\lambda^\alpha g(z)^{1-\alpha}}{(\lambda - g(z))}\right| \leq \frac{\max\{|\lambda|, |g(z)|\}}{|\lambda - g(z)|}$$

und Lemma 3.2.5 gleichmäßig in λ und z beschränkt. Der dritte Faktor ist integrierbar und von λ unabhängig, da aus $g(z)e(z) \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$ auch $g(z)^\alpha e(z)^\alpha \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$ folgt, was dann $g(z)^\alpha e(z) = e(z)^{1-\alpha}(g(z)^\alpha e(z)^\alpha) \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$ impliziert.
Daher ist F in beiden Fällen $c = 0$ und $c \neq 0$ produktintegrierbar, was die Anwendung des Satzes von Fubini ermöglicht.
Wir haben also die Kompositionsregel auch im Fall eines Operators A, der nicht injektiv ist, gezeigt.

$\square$

Wir werden die Kompositionsregel im nächsten Kapitel öfters anwenden. Wir wollen allerdings jetzt schon ein Beispiel bringen, wie die Kompositionsregel arbeitet. Zuvor brauchen wir noch ein kurzes Lemma.

3.5.6 Lemma. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$. Dann folgt auch $A^{-1} \in \mathrm{Sect}(\omega)$ und es gilt die Identität

$$\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1} = I - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} + A\right)^{-1} \tag{3.18}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{S_\omega}$. Insbesondere gilt $M(A^{-1}, \omega') \leq 1 + M(A, \omega')$ für alle $\omega' \in (\omega, \pi)$.

Beweis. Mit Lemma 1.3.11 folgt sofort die Gleichheit

$$\lambda(\lambda + A^{-1})^{-1} = I - (I + \lambda A)^{-1} = I - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda} + A\right)^{-1}.$$

Sei nun ein Punkt $\mu \notin \overline{S_\omega}$ gegeben. Dann folgt auch $\frac{1}{\mu} \notin \overline{S_\omega}$, vgl. Bemerkung 3.1.3. Es gilt weiters $\frac{1}{\mu} \in \rho(A)$, da $\sigma(A) \subseteq \overline{S_\omega}$. Setzt man nun in der Gleichung (3.18) $\lambda := -\mu$, so folgt aus der Tatsache $(\frac{1}{\mu} - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$, dass auch $(\mu - A^{-1})^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Somit gilt $\mu \in \rho(A^{-1})$, woraus sofort $\sigma(A^{-1}) \subseteq \overline{S_\omega}$ folgt.
Die Abschätzung $M(A^{-1}, \omega') \leq 1 + M(A, \omega')$ für alle $\omega' \in (\omega, \pi)$ folgt unmittelbar aus Gleichung (3.18)

mittels Dreiecksungleichung. Da A ein sektorieller Operator ist, ist $M(A,\omega')$ endlich und somit auch $M(A^{-1},\omega')$. Zusammen mit $\sigma(A^{-1}) \subseteq \overline{S_\omega}$ haben wir also gezeigt, dass A^{-1} ein sektorieller Operator mit Winkel ω ist. $\square$

Wir wollen nun als erste Anwendung der Kompositionsregel betrachten, wie sich die Funktionen f und $f(z^{-1})$ zueinander verhalten.

3.5.7 Korollar. Sei $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ injektiv, und sei $f \in \mathcal{M}(S_\phi)$ für einen Winkel $\phi \in (\omega,\pi)$. Dann gilt

$$f \in \mathcal{M}(S_\phi)_{A^{-1}} \Longleftrightarrow f(z^{-1}) \in \mathcal{M}(S_\phi)_A.$$

In diesem Fall gilt zudem

$$f(A^{-1}) = f(z^{-1})(A).$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{M}(S_\phi)_{A^{-1}}$ gegeben. Um die Kompositionsregel auf f und die Funktion $g(z) := z^{-1}$ anwenden zu können, müssen wir die Bedingungen (a), (b) und (c) aus Satz 3.5.1 nachprüfen.

(a) $A \in \operatorname{Sect}(\omega)$ ist klar nach Voraussetzung.

(b) $g \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ ist ebenfalls erfüllt, da sich die Funktion g beispielsweise durch $\frac{z}{1+z} \in \mathcal{E}(S_\phi)$ regularisieren lässt. Bedingung $g(A) \in \operatorname{Sect}(\omega')$ gilt nach Lemma 3.5.6 mit $\omega' = \omega$.

(c) Diese Bedingung ist erfüllt, da $g(S_{\phi'}) \subseteq S_{\phi'}$ für alle Winkel $\phi' > \omega$.

Satz 3.5.1 liefert uns nun $f(z^{-1}) \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$ und

$$f(z^{-1})(A) = f(z^{-1}(A)) = f(A^{-1}),$$

wobei die letzte Gleichheit nach Satz 3.3.10, (ix), gilt.
Die andere Implikation $f(z^{-1}) \in \mathcal{M}(S_\phi)_A \Rightarrow f \in \mathcal{M}(S_\phi)_{A^{-1}}$ zeigt man analog, indem man die Rollen von A und A^{-1} vertauscht. $\square$

4 Potenzen von sektoriellen Operatoren

Wir wollen nun zeigen, wie wir die Resultate des vorigen Kapitels auf spezielle Funktionen anwenden können. Unser Ziel soll dabei sein, an Bemerkung 1.4.6 anzuknüpfen und für einen sektoriellen Operator A dem Ausdruck A^n nicht nur für natürliche Zahlen n, sondern auch für komplexe Zahlen einen Sinn zu geben. Wo es passend erscheint, werden wir auch Querverbindungen zum Fall natürlicher Exponenten herstellen.

4.1 Exponenten mit positivem Realteil

Wir beginnen unsere Ausführungen mit der Einschränkung, dass wir für die Exponenten α von A^α nicht alle komplexen Zahlen, sondern vorerst nur Zahlen mit positivem Realteil zulassen wollen. Das Ziel dieses Abschnitts soll es jetzt sein, den Ausdruck A^α genauer zu behandeln und gewisse „Rechenregeln“ zu beweisen. Unter anderem wollen wir Gesetze der Form $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$ und $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ unter geeigneten Voraussetzungen zeigen und uns anschauen, wie sich der Operator $(A+\epsilon)^\alpha$ für $\epsilon > 0$ verhält.

Wir beginnen vorerst mit der Einführung von A^α und einigen grundlegenden Eigenschaften.

Generalvoraussetzung: In diesem Abschnitt bezeichne X immer einen Banachraum und A einen sektoriellen Operator auf X mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$.

4.1.1 Proposition. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, und sei $f(z) := z^\alpha$. Dann folgt $f \in \mathcal{A}(S_\phi)$ für alle Winkel $\phi \in (0, \pi]$ und es gilt

$$(z^\alpha)(A) = (1 + A)^n \left(\frac{z^\alpha}{(1 + z)^n} \right) (A),$$

wenn $n > \mathrm{Re}(\alpha)$.

Beweis. Wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $n > \mathrm{Re}(\alpha)$. Nach Beispiel 3.1.20 gilt dann

$$f(z)(1 + z)^{-n} = \frac{z^\alpha}{(1 + z)^n} \in H^\infty_{0,0}(S_\phi),$$

woraus $f \in \mathcal{A}(S_\phi)$ folgt. Da die Funktion $(1 + z)^{-n}$ die Funktion f regularisiert, gilt

$$(z^\alpha)(A) = (1 + A)^n \left(\frac{z^\alpha}{(1 + z)^n} \right) (A).$$

□

4.1.2 Definition. Wir definieren

$$A^\alpha := (z^\alpha)(A) = (1 + A)^n \left(\frac{z^\alpha}{(1 + z)^n} \right) (A),$$

wobei $n > \mathrm{Re}(\alpha)$ beliebig gewählt ist.

4.1.3 Bemerkung. Mit Hilfe von Satz 3.2.13, (ii), sieht man leicht, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Definition von A^n gemäß Definition 4.1.2 mit Definition 1.4.1 konsistent ist.

4.1.4 Definition. Sei I eine nichtleere Indexmenge. Eine Familie von Operatoren $(A_i)_{i\in I}$ heißt *gleichmäßig sektoriell* mit Winkel $\omega \in [0,\pi)$, wenn $A_i \in \operatorname{Sect}(\omega)$ für alle $i \in I$ und $\sup_{i\in I} M(A_i, \omega') < \infty$ für alle $\omega' \in (\omega, \pi)$ gilt.

Wir wollen jetzt einige wichtige Eigenschaften des Operators A^α zusammenfassen. Zuvor benötigen wir noch ein Lemma.

4.1.5 Lemma.

(i) Sei $\epsilon > 0$, $n, m \in \mathbb{N}$ und $x \in X$. Dann gilt die Äquivalenz

$$\big(A(A+\epsilon)^{-1}\big)^n x \in \operatorname{dom}(A^m) \Longleftrightarrow x \in \operatorname{dom}(A^m).$$

(ii) Die Familien von Operatoren $(A+\delta)_{\delta\geq 0}$, $(\epsilon A)_{\epsilon>0}$ und $\{(A+\delta)(A+\epsilon+\delta)^{-1} : \epsilon > 0, \delta \geq 0\} \subseteq \mathcal{B}(X)$ sind alle gleichmäßig sektoriell mit Winkel ω.

Beweis. (i) Wir beginnen mit der Richtung $\Leftarrow$. Sei dafür $x \in \operatorname{dom}(A^m)$ gegeben. Dann gilt

$$A(A+\epsilon)^{-1}x = (A+\epsilon-\epsilon)(A+\epsilon)^{-1}x = x - \epsilon(A+\epsilon)^{-1}x \in \operatorname{dom}(A^m),$$

vgl. Lemma 1.3.10. Iteration dieses Arguments liefert sofort $(A(A+\epsilon)^{-1})^n x \in \operatorname{dom}(A^m)$.
Für die andere Implikation sei vorerst $n = 1$. Wir schreiben x als

$$x = A(A+\epsilon)^{-1}x + \epsilon(A+\epsilon)^{-1}x$$

und zeigen die Behauptung mittels Induktion nach m. Für $m = 1$ gilt $A(A+\epsilon)^{-1}x \in \operatorname{dom}(A)$ nach Voraussetzung, und weiters gilt $\epsilon(A+\epsilon)^{-1}x \in \operatorname{ran}((A+\epsilon)^{-1}) = \operatorname{dom}(A)$. Daher folgt $x \in \operatorname{dom}(A)$, womit der Induktionsanfang erfüllt ist.
Wir führen nun den Induktionsschritt $(m-1) \to m$. Sei also $A(A+\epsilon)^{-1}x \in \operatorname{dom}(A^m) \subseteq \operatorname{dom}(A^{m-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann $x \in \operatorname{dom}(A^{m-1})$. Also gilt auch $\epsilon(A+\epsilon)^{-1}x \in \operatorname{dom}(A^{m-1})$ und es folgt

$$A^{m-1}\epsilon(A+\epsilon)^{-1}x = \epsilon(A+\epsilon)^{-1}A^{m-1}x \in \operatorname{ran}((A+\epsilon)^{-1}) = \operatorname{dom}(A).$$

Dies impliziert $\epsilon(A+\epsilon)^{-1}x \in \operatorname{dom}(A^m)$ und somit $x \in \operatorname{dom}(A^m)$.
Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung wieder iterativ.

(ii) Definiere $A_\delta := A + \delta$, und sei $\omega' \in (\omega, \pi)$. Sei $\lambda \notin \overline{S_{\omega'}}$. Damit gilt auch $\lambda - \delta \notin \overline{S_{\omega'}}$. Daher folgt mit

$$\lambda R(\lambda, A_\delta) = \lambda(\lambda - A_\delta)^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda-\delta}(\lambda-\delta)(\lambda-\delta-A)^{-1}$$

die Beziehung

$$M(A_\delta, \omega') \leq M(A, \omega') \sup_{\lambda\notin\overline{S_{\omega'}}} \left|\frac{\lambda}{\lambda-\delta}\right|.$$

Anwendung von Lemma 3.2.5 zeigt, dass der Ausdruck $\left|\frac{\lambda}{\lambda-\delta}\right|$ in λ und δ gleichmäßig durch $C_{0,\omega'}$ beschränkt ist. Somit folgt $\sup_{\delta\geq 0} M(A+\delta, \omega') < \infty$, und die Familie $(A+\delta)_{\delta\geq 0}$ ist gleichmäßig sektoriell mit Winkel ω.

Um zu zeigen, dass $(\epsilon A)_{\epsilon>0}$ gleichmäßig sektoriell ist, sei wieder $\omega' \in (\omega, \pi)$. Für $\lambda \notin \overline{S_{\omega'}}$ folgt $\frac{\lambda}{\epsilon} \notin \overline{S_{\omega'}}$. Also impliziert

$$\lambda(\lambda - \epsilon A) = \frac{\lambda}{\epsilon}\left(\frac{\lambda}{\epsilon} - A\right)^{-1}$$

die Beziehung $M(\epsilon A, \omega') = M(A, \omega')$. Die Familie $(\epsilon A)_{\epsilon>0}$ ist also gleichmäßig sektoriell.

Wähle nun $\epsilon > 0$ und $\delta \geq 0$. Für $\lambda \notin \overline{S_{\omega'}}$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda - A_\delta(A_\delta + \epsilon)^{-1} &= (\lambda(A_\delta + \epsilon) - A_\delta)(A_\delta + \epsilon)^{-1} \\
&= \left((\lambda - 1)A_\delta + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda - 1}\epsilon\right)(A_\delta + \epsilon)^{-1} \\
&= (\lambda - 1)\left(A + \delta + \frac{\lambda}{\lambda - 1}\epsilon\right)(A_\delta + \epsilon)^{-1}.
\end{aligned}$$

Da dieser Operator wegen $-\lambda(\lambda-1)^{-1}\epsilon - \delta \notin \overline{S_{\omega'}}$ invertierbar ist, folgt

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\lambda - A_\delta(A_\delta + \epsilon)^{-1}\right)^{-1} &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}(A_\delta + \epsilon)\left(A_\delta + \frac{\lambda}{\lambda - 1}\epsilon\right)^{-1} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - 1}(A_\delta + \frac{\lambda}{\lambda - 1}\epsilon - \frac{\epsilon}{\lambda - 1})\left(A_\delta + \frac{\lambda}{\lambda - 1}\epsilon\right)^{-1} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - 1}I - \frac{1}{\lambda - 1}\left(\frac{\lambda\epsilon}{\lambda - 1}\left(A_\delta + \frac{\lambda\epsilon}{\lambda - 1}\right)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Da die Ausdrücke $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ und $\frac{1}{\lambda-1}$ beschränkt sind und die Familie $(A_\delta)_{\delta\geq 0}$ gleichmäßig sektoriell ist, folgt somit die gewünschte Aussage. □

4.1.6 Proposition. Für $A \in \mathrm{Sect}(\omega)$ gilt:

(i) Wenn der Operator A beschränkt ist, so ist es auch A^α. In diesem Fall ist die Abbildung

$$\begin{cases} \{\alpha \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\alpha) > 0\} & \to \quad \mathcal{B}(X) \\ \qquad\alpha & \mapsto \quad A^\alpha \end{cases}$$

holomorph.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, n)$. Dann gilt $\mathrm{dom}(A^n) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha)$, und die Abbildung

$$\begin{cases} \{\alpha \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(\alpha) < n\} & \to \quad X \\ \qquad\alpha & \mapsto \quad A^\alpha x \end{cases}$$

ist holomorph für alle $x \in \mathrm{dom}(A^n)$.

(iii) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0$ gilt

$$A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta.$$

Insbesondere gilt $\mathrm{dom}(A^\gamma) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha)$ für $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\gamma)$.

(iv) Wenn der Operator A injektiv ist, dann gilt $(A^{-1})^\alpha = (A^\alpha)^{-1}$. Insbesondere folgt aus der Tatsache $0 \in \rho(A)$, dass auch $0 \in \rho(A^\alpha)$.

(v) Wenn ein Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ mit A kommutiert, so auch mit A^α.

(vi) Sei $\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0$, sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann gilt $x \in \mathrm{dom}(A^\beta)$ genau dann, wenn $(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha x \in \mathrm{dom}(A^\beta)$.

Beweis. (i) Wenn A beschränkt ist, dann folgt die Beschränktheit von A^α sofort aus der Definition von A^α. Wir müssen also nur zeigen, dass die Abbildung $\Psi := (\alpha \mapsto A^\alpha)$ holomorph ist. Da $\Psi(\alpha) = A^\alpha \in \mathcal{B}(X)$ gilt, ist dies aber genau dann der Fall, wenn die Abbildung

$$\alpha \mapsto x'(A^\alpha x) \in \mathbb{C}$$

für alle $x \in X$ und $x' \in X'$ holomorph ist. Dafür betrachten wir

$$x'(A^\alpha x) = x'\left(\int_{\Gamma_{\omega'}} \frac{z^\alpha}{(1+z)^n} R(z,A)\,dz\,(1+A)^n x\right),$$

wobei $\Gamma_{\omega'}$ ein geeigneter Weg ist. Nach Parametrisierung des Weges können wir das stetige Funktional x' ins Integral hineinziehen. Man beachte, dass es sich bei dem Integral in der Tat um Grenzwerte von Riemann-Summen handelt, die mit stetigen Funktionalen vertauschen. Es bleibt somit die Holomorphie von

$$\begin{aligned} \alpha \quad \mapsto \quad & -\int_0^\infty \frac{(te^{i\omega'})^\alpha}{(1+te^{i\omega'})^n} e^{i\omega'} x'(R(te^{i\omega'},A)(1+A)^n x)\,dt \\ + \quad & \int_0^\infty \frac{(te^{-i\omega'})^\alpha}{(1+te^{-i\omega'})^n} e^{-i\omega'} x'(R(te^{-i\omega'},A)(1+A)^n x)\,dt \end{aligned}$$

auf $\{\alpha \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(\alpha) < n\}$ zu zeigen. Wir wollen hier nur das erste Integral behandeln, die Holomorphie des zweiten folgt analog.
Um die Holomorphie zu zeigen, wollen wir Proposition 1.2.5 anwenden. Wir setzen dazu $G := \{\alpha \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(\alpha) < n\}$. Die ersten beiden Bedingungen dieser Proposition sind offensichtlich erfüllt. Es bleibt also zu zeigen, dass wir zu jeder kompakten Menge $K \subseteq G$ eine integrierbare Funktion $g_K : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ finden können mit

$$\left|\frac{(te^{i\omega'})^\alpha}{(1+te^{i\omega'})^n} e^{i\omega'} x'(R(te^{i\omega'},A)(1+A)^n x)\right| \leq g_K(t)$$

für alle $\alpha \in K$ und $t \in (0,\infty)$. Für $t < 1$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left|\frac{(te^{i\omega'})^\alpha}{(1+te^{i\omega'})^n} e^{i\omega'} x'(R(te^{i\omega'},A)(1+A)^n x)\right| &\leq M(A,\omega')\|x'\|\|(1+A)^n\|\|x\|Ct^{\mathrm{Re}(\alpha)-1} \\ &\leq M(A,\omega')\|x'\|\|(1+A)^n\|\|x\|Ct^{\alpha'-1}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha' := \inf_{\alpha\in K}\mathrm{Re}(\alpha)$ und $C > 0$ konstant - vgl. dazu auch Bemerkung 1.2.8 und beachte, dass $|\mathrm{Im}(\alpha)|$ wegen $\alpha \in K$ beschränkt ist. Das erste Ungleichheitszeichen gilt dabei, da der Ausdruck $|(1+te^{i\omega'})^n|$ in t nach unten beschränkt ist. Für $t > 1$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \left|\frac{(te^{i\omega'})^\alpha}{(1+te^{i\omega'})^n} e^{i\omega'} x'(R(te^{i\omega'},A)(1+A)^n x)\right| &\leq M(A,\omega')\|x'\|\|(1+A)^n\|\|x\|CC_{\omega',\pi}^{-n}t^{\mathrm{Re}(\alpha)-1-n} \\ &\leq M(A,\omega')\|x'\|\|(1+A)^n\|\|x\|CC_{\omega',\pi}^{-n}t^{\alpha''-n-1}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha'' := \sup_{\alpha\in K}\mathrm{Re}(\alpha)$ und $C > 0$ konstant. Die erste Ungleichheit gilt hierbei, da wegen $\left|\frac{te^{i\omega'}}{1+te^{i\omega'}}\right| \leq C_{\omega',\pi}$ (vgl. Lemma 3.2.5) die Abschätzung $|(1+te^{i\omega'})^n| \geq C_{\omega',\pi}^{-n}|t|^n$ folgt. In beiden Fällen ist die rechte Seite der Ungleichungen nach t integrierbar und von α unabhängig. Die gewünschte Holomorphie folgt nun mit Proposition 1.2.5.

(ii) folgt mit analogen Argumenten wie (i).

(iii) Aus Satz 3.3.10, (iii), folgt sofort die Inklusion $A^\alpha A^\beta \subseteq A^{\alpha+\beta}$, wobei für die Definitionsbereiche $\operatorname{dom}(A^\alpha A^\beta) = \operatorname{dom}(A^{\alpha+\beta}) \cap \operatorname{dom}(A^\beta)$ gilt.
Sei nun $n > \max(\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta))$ fest, und sei $x \in \operatorname{dom}(A^{\alpha+\beta})$. Wir definieren dann die Operatoren

$$\Phi_\alpha := \left(\frac{z^\alpha}{(1+z)^n}\right)(A) \in \mathcal{B}(X)$$

und

$$\Phi_\beta := \left(\frac{z^\beta}{(1+z)^n}\right)(A) \in \mathcal{B}(X).$$

Es folgt

$$\Phi_\alpha \Phi_\beta x = \left(\frac{z^{\alpha+\beta}}{(1+z)^{2n}}\right)(A)x \in \operatorname{dom}(A^{2n}).$$

Da $\frac{z^{n-\alpha}}{(1+z)^n}(A)$ mit A kommutiert, folgt

$$A^n(1+A)^{-2n}\Phi_\beta x = \frac{z^{n+\beta}}{(1+z)^{3n}}(A)x = \frac{z^{n-\alpha}}{(1+z)^n}(A)\Phi_\alpha\Phi_\beta x \in \operatorname{dom}(A^{2n}),$$

vgl. Lemma 1.3.10. Mit Lemma 4.1.5, (i), erhalten wir sofort $(1+A)^{-n}\Phi_\beta x \in \operatorname{dom}(A^{2n})$, was $\Phi_\beta x \in \operatorname{dom}(A^n)$ impliziert. Also gilt $x \in \operatorname{dom}(A^\beta)$. Insgesamt folgt daher

$$x \in \operatorname{dom}(A^{\alpha+\beta}) \cap \operatorname{dom}(A^\beta) = \operatorname{dom}(A^\alpha A^\beta)$$

und somit die Gleichheit $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$.
Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus dem eben Gezeigten.

(iv) Für injektives A gilt $f(z) := z^{-\alpha} \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{M}_A$, vgl. Proposition 3.4.8, und somit

$$(A^{-1})^\alpha = f(z^{-1})(A^{-1}) = f(A) = (f^{-1}(A))^{-1} = (A^\alpha)^{-1},$$

wobei die zweite Gleichheit wegen Korollar 3.5.7 und die dritte Gleichheit wegen Satz 3.3.10, (v), gilt.

(v) ist ein Spezialfall von Satz 3.3.10, (i).

(vi) Sei $x \in \operatorname{dom}(A^\beta)$. Der Operator $A(A+\epsilon)^{-1} = I - \epsilon(A+\epsilon)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ ist nach Lemma 4.1.5, (ii), sektoriell. Da $A(A+\epsilon)^{-1}$ klarerweise mit sich selbst kommutiert, kommutiert $A(A+\epsilon)^{-1}$ nach Proposition 4.1.6, (v), auch mit $(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha \in \mathcal{B}(X)$. Somit kommutiert $(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha$ mit $I - \epsilon(A+\epsilon)^{-1}$. Wiederholte Anwendung von Bemerkung 1.3.9, (ii), zeigt, dass $(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha$ mit A kommutiert. Nach Proposition 4.1.6, (v), kommutiert nun $(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha$ mit A^β. Mit Lemma 1.3.10 erhalten wir $(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha x \in \operatorname{dom}(A^\beta)$.
Für die andere Implikation sei $(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha x \in \operatorname{dom}(A^\beta)$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \max(\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta))$. Mit der eben gezeigten Implikation erhalten wir

$$(A(A+\epsilon)^{-1})^n x = (A(A+\epsilon)^{-1})^{n-\alpha}(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha x \in \operatorname{dom}(A^\beta).$$

Mit der Definition

$$\Phi_\beta := \left(\frac{z^\beta}{(1+z)^n}\right)(A)$$

folgt $\Phi_\beta(A(A+\epsilon)^{-1})^n x \in \mathrm{dom}(A^n)$. Dies impliziert wegen Lemma 4.1.5, (i), die Tatsache $\Phi_\beta x \in \mathrm{dom}(A^n)$, woraus $x \in \mathrm{dom}(A^\beta)$ folgt. $\square$

Man kann vermuten, dass für einen sektoriellen Operator A mit Winkel ω auch der Operator A^α sektoriell ist. Allerdings ist das nur der Fall, wenn man den Winkel entsprechend anpasst. Diese Betrachtungen werden Inhalt der nächsten Proposition sein.

4.1.7 Proposition. Sei $[\epsilon, \delta] \subseteq (0, \frac{\pi}{\omega})$ ein kompaktes Intervall. Dann ist die Familie von Operatoren $(A^\alpha)_{\epsilon \leq \alpha \leq \delta}$ gleichmäßig sektoriell mit Winkel $\delta\omega$.
Insbesondere ist für jedes $\alpha \in (0, \frac{\pi}{\omega})$ der Operator A^α sektoriell mit Winkel $\alpha\omega$.

Beweis. <u>1. Schritt:</u> Sei $[\epsilon, \delta] \subseteq (0, \frac{\pi}{\omega})$ ein kompaktes Intervall. Wir wählen einen Winkel $\phi \in (\omega, \pi)$, sodass $\delta\phi < \pi$ gilt, beliebig, aber fest. Dies ist tatsächlich möglich, da nach der Wahl des kompakten Intervalls der Winkel $\delta\omega$ strikt kleiner ist als π. Sei nun $\alpha \in [\epsilon, \delta]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\arg(\lambda)| \in [\delta\phi, \pi]$ beliebig, und wähle zwei weitere Winkel $\omega' \in (\omega, \phi)$ und $\omega'' \in (\omega', \phi)$.

<u>2. Schritt:</u> Wir definieren die Funktion

$$\psi_{\lambda,\alpha}(z) := \frac{\lambda}{\lambda - z^\alpha} - \frac{|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}}{z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}}$$

und wollen zeigen, dass $\psi_{\lambda,\alpha} \in H_{0,0}^\infty(S_{\omega''})$.
Für $z \in S_{\omega''}$ gilt

$$\begin{aligned} |\psi_{\lambda,\alpha}(z)| &= \left| \frac{\lambda z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} z^\alpha}{(\lambda - z^\alpha)(z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}})} \right| \\ &\leq \frac{|\lambda||z|}{|\lambda - z^\alpha| \left| z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \right|} + \frac{|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} |z|^\alpha}{|\lambda - z^\alpha| \left| z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \right|}. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden hier die Fälle, ob $\epsilon < 1$, $\epsilon > 1$ oder $\epsilon = 1$.
<u>1. Fall:</u> Für $\epsilon < 1$ zerlegen wir obigen Ausdruck weiter in

$$|\psi_{\lambda,\alpha}(z)| \leq |\lambda| \left| \frac{z^\epsilon}{\lambda - z^\alpha} \right| \frac{|z|^{1-\epsilon}}{\left| z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \right|} + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \left| \frac{z^{\alpha-\epsilon}}{\lambda - z^\alpha} \right| \frac{|z|^\epsilon}{\left| z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \right|}.$$

Für z hinreichend nahe bei 0 sind die Ausdrücke $\left| \frac{z^\epsilon}{\lambda - z^\alpha} \right|$ und $\left| \frac{z^{\alpha-\epsilon}}{\lambda - z^\alpha} \right|$ für festes λ in der Variablen z durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt. Dies folgt aus der Beschränktheit der Nenner nach unten, die wegen

$$|\arg(z)| < \omega'' \Longrightarrow |\arg(z^\alpha)| < \alpha\omega'' < \delta\phi \leq |\arg(\lambda)|$$

gilt. Somit folgt für hinreichend kleine z die Abschätzung

$$|\psi_{\lambda,\alpha}(z)| \leq 2|\lambda|^{1+\frac{1}{\alpha}} C |z|^{1-\epsilon} + 2|\lambda|^{\frac{2}{\alpha}} C |z|^\epsilon. \tag{4.1}$$

Dabei geht zusätzlich noch ein, dass wir $\left| z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \right|$ nach unten durch $\frac{|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}}{2}$ abschätzen können. Aus Ungleichung (4.1) folgt, dass die Funktion $\psi_{\lambda,\alpha}$ polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 hat.
Um dies auch beim Punkt ∞ zu zeigen, schätzen wir weiter ab mittels

$$\begin{aligned} \left| \psi_{\lambda,\alpha}\left(\frac{1}{z}\right) \right| &\leq |\lambda| \left| \frac{z^{-\epsilon}}{\lambda - z^{-\alpha}} \right| \frac{|\frac{1}{z}|^{1-\epsilon}}{\left| \frac{1 + z|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}}{z} \right|} + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \left| \frac{z^{-\alpha+\epsilon}}{\lambda - z^{-\alpha}} \right| \frac{|\frac{1}{z}|^\epsilon}{\left| \frac{1 + z|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}}{z} \right|} \\ &\leq 2|\lambda| \tilde{C} |z|^\epsilon + 2|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \tilde{C} |z|^{1-\epsilon} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $\tilde{C} > 0$. Diese Abschätzung gilt wieder für hinreichend kleine z und ist hier möglich, da $\left|\frac{z^{-\epsilon}}{\lambda - z^{-\alpha}}\right|$ und $\left|\frac{z^{-\alpha+\epsilon}}{\lambda - z^{-\alpha}}\right|$ für festes λ auch nach oben beschränkt sind. Daher hat die Funktion $\psi_{\lambda,\alpha}$ polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ und liegt in $H^\infty_{0,0}(S_{\omega''})$.
<u>2. Fall:</u> Sei $\epsilon > 1$. In diesem Fall verwenden wir die Abschätzung

$$|\psi_{\lambda,\alpha}(z)| \leq |\lambda| \left|\frac{z^{1+\lfloor\epsilon\rfloor-\epsilon}}{\lambda - z^\alpha}\right| \frac{|z|^{\epsilon-\lfloor\epsilon\rfloor}}{\left|z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}\right|} + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \left|\frac{z^{\alpha-\epsilon+\lfloor\epsilon\rfloor}}{\lambda - z^\alpha}\right| \frac{|z|^{\epsilon-\lfloor\epsilon\rfloor}}{\left|z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}\right|}.$$

Die weitere Argumentation verläuft analog zum ersten Fall.
<u>3. Fall:</u> Sei $\epsilon = 1$. Nun schätzen wir mittels

$$|\psi_{\lambda,\alpha}(z)| \leq |\lambda| \left|\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\lambda - z^\alpha}\right| \frac{|z|^{\frac{1}{2}}}{\left|z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}\right|} + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \left|\frac{z^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\lambda - z^\alpha}\right| \frac{|z|^{\frac{1}{2}}}{\left|z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}\right|}$$

ab und argumentieren dann analog zum ersten Fall.
Also haben wir gezeigt, dass in jedem Fall $\psi_{\lambda,\alpha} \in H^\infty_{0,0}(S_{\omega''})$ gilt.

<u>3. Schritt:</u> Wir zeigen nun, dass λ mit $|\arg(\lambda)| \in [\delta\phi, \pi]$ in der Resolventenmenge des Operators A^α liegt. Dafür betrachten wir

$$\frac{1}{\lambda - z^\alpha} = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}}{z + |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}} + \psi_{\lambda,\alpha}(z)\right).$$

Wegen $\frac{|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}}{z+|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}} \in \mathcal{E}(S_{\omega''})$ folgt, dass die Funktion $z \mapsto \frac{1}{\lambda - z^\alpha}$ in $H(A)$ liegt. Satz 3.3.10, (ix), liefert $\lambda \in \rho(A^\alpha)$. Aus der Beliebigkeit von $\phi > \omega$ folgt $\sigma(A^\alpha) \subseteq \overline{S_{\delta\omega}}$.

<u>4. Schritt:</u> Es bleibt noch die Normabschätzung der Resolvente zu zeigen.
Ebenfalls aus Satz 3.3.10, (ix), erhalten wir

$$\lambda R(\lambda, A^\alpha) = |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} \left(|\lambda|^{\frac{1}{\alpha}} + A\right)^{-1} + \psi_{\lambda,\alpha}(A).$$

Da die Funktion $\psi_{\lambda,\alpha}$ für $t > 0$ die Eigenschaft $\psi_{t^\alpha\lambda,\alpha}(tz) = \psi_{\lambda,\alpha}(z)$ erfüllt, folgt

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A^\alpha)\| &\leq M(A) + \left\|\psi_{\frac{\lambda}{|\lambda|},\alpha}\left(|\lambda|^{-\frac{1}{\alpha}} A\right)\right\| \\
&\leq M(A) + \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\Gamma_{\omega'}} \psi_{\frac{\lambda}{|\lambda|},\alpha}(z) R(z, |\lambda|^{-\frac{1}{\alpha}} A)\, dz\right\|.
\end{aligned}$$

Parametrisieren des Weges und Abschätzen der Resolvente des Operators $|\lambda|^{-\frac{1}{\alpha}} A$ liefert

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A^\alpha)\| &\leq M(A) + \frac{1}{2\pi} M(A, \omega') \int_0^\infty \left|\psi_{\frac{\lambda}{|\lambda|},\alpha}(te^{i\omega'})\right| \frac{1}{|t|}\, dt \\
&+ M(A) + \frac{1}{2\pi} M(A, \omega') \int_0^\infty \left|\psi_{\frac{\lambda}{|\lambda|},\alpha}(te^{-i\omega'})\right| \frac{1}{|t|}\, dt.
\end{aligned}$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$\sup\left\{\int_0^\infty \left|\psi_{\lambda,\alpha}(te^{i\omega'})\right| \frac{1}{|t|}\, dt : |\lambda| = 1, |\arg(\lambda)| \in [\delta\phi, \pi], \alpha \in [\epsilon, \delta]\right\} < \infty, \tag{4.2}$$

und ebenso die entsprechende Endlichkeitsaussage für das zweite Integral. Wir verwenden dafür dieselbe Fallunterscheidung für ϵ und dieselben Abschätzungen wie im 2. Schritt. Für $t \in (0, \infty)$, $\alpha \in [\epsilon, \delta]$, λ mit $|\lambda| = 1$ und $|\arg(\lambda)| \in [\delta\phi, \pi]$ und $\epsilon < 1$ gilt

$$\left|\psi_{\lambda,\alpha}(te^{i\omega'})\right| \frac{1}{|t|} \leq \left|\frac{(te^{i\omega'})^{\epsilon}}{\lambda - (te^{i\omega'})^{\alpha}}\right| \frac{|te^{i\omega'}|^{-\epsilon}}{|te^{i\omega'} + 1|} + \left|\frac{(te^{i\omega'})^{\alpha-\epsilon}}{\lambda - (te^{i\omega'})^{\alpha}}\right| \frac{|te^{i\omega'}|^{\epsilon-1}}{|te^{i\omega'} + 1|}.$$

Wegen $|\lambda| = 1$ bleibt λ strikt vom Punkt 0 weg, was zusammen mit $\epsilon < \alpha$ und $\alpha - \epsilon < \alpha$ die gleichmäßige Beschränktheit von $\left|\frac{(te^{i\omega'})^{\epsilon}}{\lambda-(te^{i\omega'})^{\alpha}}\right|$ und $\left|\frac{(te^{i\omega'})^{\alpha-\epsilon}}{\lambda-(te^{i\omega'})^{\alpha}}\right|$ in den Parametern α, λ und t impliziert. Die übrigen Terme hängen nicht mehr von λ und α ab und sind integrierbar, woraus die Gültigkeit von (4.2) folgt.
Die anderen beiden Fälle $\epsilon > 1$ und $\epsilon = 1$, genauso wie das zweite Integral, behandelt man analog. Somit gilt auch Bedingung (ii) von Definition 3.1.1 für alle Operatoren A^{α}, $\alpha \in [\epsilon, \delta]$. Zusammen mit Zeile (4.2) folgt, dass die Familie von Operatoren $(A^{\alpha})_{\epsilon \leq \alpha \leq \delta}$ gleichmäßig sektoriell ist.

Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten, wenn man $\delta = \epsilon$ wählt. □

Wir können nun einige nützliche Folgerungen angeben, die sich unmittelbar aus der vorigen Proposition und Proposition 4.1.6 ergeben.

4.1.8 Korollar. Sei $\alpha \in (0, \frac{\pi}{\omega})$. Wenn $f \in \mathcal{M}(S_{\alpha\omega})_{A^{\alpha}}$, dann folgt $f(z^{\alpha}) \in \mathcal{M}(S_{\omega})_A$, und es gilt

$$f(A^{\alpha}) = (f(z^{\alpha}))\,(A)$$

für solche f.

Beweis. Aus Proposition 4.1.7 folgt, dass der Operator A^{α} sektoriell ist mit Winkel $\alpha\omega$. Mit der Definition $g(z) := z^{\alpha}$ gilt somit Bedingung (b) von Satz 3.5.1. Sei nun ein beliebiger Winkel $\phi' \in (\alpha\omega, \pi)$ gegeben. Mit der Wahl des Winkels $\phi := \frac{\phi'}{\alpha}$ gilt $g(S_{\phi}) \subseteq S_{\phi'}$, also Bedingung (c) der Kompositionsregel. Da Bedingung (a) klar ist, folgt $f(z^{\alpha}) \in \mathcal{M}(S_{\omega})_A$ und

$$f(A^{\alpha}) = f(g(A)) = (f \circ g)(A) = (f(z^{\alpha}))\,(A)$$

für alle $f \in \mathcal{M}(S_{\alpha\omega})_{A^{\alpha}}$. □

Als nächstes wollen wir ein Resultat bringen, das sich mit Rechenregeln für Exponenten - ähnlich der Beziehung $A^{\alpha+\beta} = A^{\alpha}A^{\beta}$ aus Proposition 4.1.6 - beschäftigt.

4.1.9 Korollar. Sei $\alpha \in (0, \frac{\pi}{\omega})$. Dann gilt

$$(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta}$$

für alle $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\beta) > 0$.

Beweis. Da A^{α} sektoriell ist und die Funktion $f(z) := z^{\beta}$ in $\mathcal{M}(S_{\alpha\omega})_{A^{\alpha}}$ liegt, folgt die Behauptung sofort aus Korollar 4.1.8. □

4.1.10 Bemerkung. Anhand von Korollar 4.1.9 merkt man, dass es bei Potenzen von Operatoren mit komplexen Exponenten öfters zu Einschränkungen kommt, denen man bei natürlichen Exponenten nicht begegnet. So gilt beispielsweise die Tatsache $(A^{\alpha})^{\beta} = A^{\alpha\beta}$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Wie wir

eben gesehen haben, müssen wir bei komplexen Exponenten mit positivem Realteil die zusätzliche Einschränkung treffen, dass α sogar nur einem gewissen reellen Intervall enthalten sein darf.
Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass die Gültigkeit der Beziehung $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ auf beliebige komplexe Zahlen β ausgeweitet werden kann. Die Bedingung jedoch, dass es sich bei α um eine reelle Zahl handeln muss, werden wir auch dort nicht fallenlassen können.

Folgendes Korollar ist eine Verallgemeinerung von Proposition 4.1.6, (ii).

4.1.11 Korollar. Sei $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\gamma) > 0$, und sei $x \in \mathrm{dom}(A^\gamma)$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{cases} \{\alpha \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\gamma)\} & \to & X \\ \alpha & \mapsto & A^\alpha x \end{cases}$$

holomorph.

Beweis. Da Holomorphie eine lokale Eigenschaft ist und nach Proposition 4.1.6, (iii), die Beziehung $\mathrm{dom}(A^\gamma) \subseteq \mathrm{dom}(A^{\mathrm{Re}(\gamma)-\epsilon})$ für beliebig kleine $\epsilon > 0$ gilt, können wir hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma > 0$. Wähle nun eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \gamma$. Da $\frac{\gamma}{n} < 1 < \frac{\pi}{\omega}$ gilt, können wir Korollar 4.1.9 anwenden und erhalten mit der Definition $B := A^{\frac{\gamma}{n}}$

$$A^\alpha x = A^{\frac{\gamma}{n}\frac{\alpha n}{\gamma}} x = \left(A^{\frac{\gamma}{n}}\right)^{\frac{\alpha n}{\gamma}} x = B^{\frac{\alpha n}{\gamma}} x, \tag{4.3}$$

wobei $x \in \mathrm{dom}(B^n)$ gilt. Wegen Proposition 3.3.10, (ii), ist nun die Abbildung

$$\begin{cases} \{\beta \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(\beta) < n\} & \to & X \\ \beta & \mapsto & B^\beta x \end{cases}$$

holomorph. Die Bedingung $\mathrm{Re}(\alpha) < \gamma$ ist äquivalent zur Bedingung $\mathrm{Re}(\frac{\alpha n}{\gamma}) < n$. Die Behauptung folgt daher mit Gleichung (4.3). □

In den nächsten Resultaten wollen wir uns damit beschäftigen, in welcher Beziehung die Potenzen der Operatoren A und $A + \epsilon$ für positives ϵ zueinander stehen.

4.1.12 Proposition. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, 1)$, und sei $\epsilon > 0$. Dann gilt

$$T_\epsilon := ((z + \epsilon)^\alpha - z^\alpha)(A) \in \mathcal{B}(X)$$

und

$$A^\alpha + T_\epsilon = (A + \epsilon)^\alpha.$$

Beweis. Wir definieren die Funktion

$$\psi_1(z) := (z + 1)^\alpha - z^\alpha - (z + 1)^{-1}$$

und wollen $\psi_1 \in H_{0,0}^\infty[S_\omega]$ zeigen.
Die Funktion $z \mapsto (z + 1)^{-1}$ liegt nach Proposition 3.1.17 in $\mathcal{E}[S_\omega]$ und hat polynomiellen Grenzwert 1 bei 0 und polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞. Offenbar hat die Funktion $z \mapsto z^\alpha$ polynomiellen Grenzwert 0 bei 0. Da die Funktion $z \mapsto z^\alpha$ in einer Umgebung um den Punkt 1 holomorph ist, folgt die Ungleichung

$$\left| \frac{(z + 1)^\alpha - 1}{z} \right| \leq C \tag{4.4}$$

mit $C > 0$ für z hinreichend nahe bei 0. Somit hat $z \mapsto (z+1)^\alpha$ polynomiellen Grenzwert 1 bei 0, was zusammen die Tatsache impliziert, dass ψ_1 polynomiellen Grenzwert 0 bei 0 besitzt.
Um $\psi_1 \in H_{0,0}^\infty[S_\omega]$ zu zeigen, müssen wir noch zeigen, dass die Funktion $f(z) := (z+1)^\alpha - z^\alpha$ polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ hat. Für z hinreichend nahe bei 0 gilt

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| &= \left| \left(\frac{1}{z}+1\right)^\alpha - \frac{1}{z^\alpha} \right| = \left| \frac{(z+1)^\alpha - 1}{z^\alpha} \right| \\ &\leq \left| \frac{(z+1)^\alpha - 1}{z^\alpha} \right| \frac{1}{|z|^{1-\mathrm{Re}(\alpha)}} \leq C_\alpha \left| \frac{(z+1)^\alpha - 1}{z} \right| \end{aligned}$$

mit einer nur von α abhängigen Konstanten $C_\alpha > 0$, vgl. Bemerkung 1.2.8. Wie in Ungleichung (4.4) folgt $C_\alpha \left|\frac{(z+1)^\alpha-1}{z}\right| \leq C_\alpha C$, womit f polynomiellen Grenzwert 0 bei ∞ hat. Aus $\psi_1 \in H_{0,0}^\infty[S_\omega]$ erhalten wir auch

$$\psi_\epsilon(z) := \epsilon^\alpha \psi_1\left(\frac{z}{\epsilon}\right) = (z+\epsilon)^\alpha - z^\alpha - \epsilon^\alpha \left(\frac{z}{\epsilon}+1\right)^{-1} \in H_{0,0}^\infty[S_\omega],$$

was $(z+\epsilon)^\alpha - z^\alpha \in H(A)$ impliziert. Also folgt $T_\epsilon \in \mathcal{B}(X)$ und

$$A^\alpha + T_\epsilon = z^\alpha(A) + ((z+\epsilon)^\alpha - z^\alpha)(A) = (z+\epsilon)^\alpha(A) = (A+\epsilon)^\alpha$$

wegen Satz 3.3.10, (iv), und der Kompositionsregel. $\square$

4.1.13 Proposition. Sei $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ und $\epsilon > 0$. Dann gelten die folgenden Gleichheiten:

(i) $A^\alpha((A+\epsilon)^{-1})^\alpha = (A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha \in \mathcal{B}(X)$ und

(ii) $\mathrm{dom}(A^\alpha) = \mathrm{dom}((A+\epsilon)^\alpha)$.

Beweis. (i) Wir definieren die Funktionen $f(z) := z^\alpha$ und $g(z) := (z+\epsilon)^{-1}$. Man beachte, dass der Operator $g(A) = (A+\epsilon)^{-1}$ selber sektoriell ist und die Funktion g einen Sektor auf sich selbst abbildet, siehe Bemerkung 3.1.3. Mit Proposition 4.1.6, (i), und der Kompositionsregel - angewendet auf f und g - folgt daher

$$(z+\epsilon)^{-\alpha}(A) = ((z+\epsilon)^{-1})^\alpha(A) = ((A+\epsilon)^{-1})^\alpha \in \mathcal{B}(X),$$

was $(z+\epsilon)^{-\alpha} \in H(A)$ impliziert. Daher gilt weiters

$$(A(A+\epsilon)^{-1})^\alpha = \left(\frac{z^\alpha}{(z+\epsilon)^\alpha}\right)(A) = z^\alpha(A)(z+\epsilon)^{-\alpha}(A) = A^\alpha((A+\epsilon)^{-1})^\alpha.$$

Das erste Gleichheitszeichen gilt dabei wegen der Kompositionsregel angewendet auf die Funktionen $f(z) = z^\alpha$ und $g(z) = \frac{z}{z+\epsilon}$, vgl. auch Lemma 4.1.5, (ii). Die zweite Gleichheit ist klar nach Satz 3.3.10, (iv). Also haben wir Punkt (i) bewiesen.

(ii) Da $A+\epsilon$ ein injektiver, sektorieller Operator ist, folgt aus Proposition 4.1.6, (iv), die Gleichheit der Operatoren

$$\left((A+\epsilon)^{-1}\right)^\alpha = ((A+\epsilon)^\alpha)^{-1}.$$

Wegen (i) folgt daher

$$\mathrm{dom}((A+\epsilon)^\alpha) = \mathrm{ran}(((A+\epsilon)^{-1})^\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(A^\alpha).$$

Für die andere Inklusion sei $x \in \mathrm{dom}(A^\alpha)$ und $n > \mathrm{Re}(\alpha)$. Anwenden von (i) und Proposition 4.1.6, (iii) und (v), zeigt

$$\begin{aligned}\left(A(A+\epsilon)^{-1}\right)^\alpha \left((A+\epsilon)^{-1}\right)^{n-\alpha} x &= A^\alpha \left((A+\epsilon)^{-1}\right)^\alpha \left((A+\epsilon)^{-1}\right)^{n-\alpha} x \\ &= A^\alpha \left((A+\epsilon)^{-1}\right)^n x \\ &= \left((A+\epsilon)^{-1}\right)^n A^\alpha x \in \mathrm{dom}(A^n).\end{aligned}$$

Mit Proposition 4.1.6, (vi), folgt $\left((A+\epsilon)^{-1}\right)^{n-\alpha} x \in \mathrm{dom}(A^n)$, was schließlich

$$x = (A+\epsilon)^{n-\alpha} \left((A+\epsilon)^{-1}\right)^{n-\alpha} x \in \mathrm{dom}((A+\epsilon)^\alpha)$$

impliziert. □

4.2 Der Darstellungssatz von Balakrishnan

Wir wollen in diesem Abschnitt den Darstellungssatz von Balakrishnan zeigen, mit dem man $A^\alpha x$ für x aus einem geeigneten Definitionsbereich berechnen kann, wobei man aber nur Potenzen von A und der Resolvente von A mit Exponenten aus $\mathbb{N}$ braucht. Dieser Satz stellt auch die Verbindung zu anderer Literatur her, in der der Operator A^α oft nicht über unseren Funktionalkalkül entwickelt, sondern eben über diesen Darstellungssatz definiert wird, vgl. die Einführung zu [M]. Aus der Gültigkeit des Darstellungssatzes folgt auch, dass unsere Definition von A^α konsistent ist mit der Definition von A^α über die Integraldarstellung (4.5), die beispielsweise von Balakrishnan verwendet wurde.

4.2.1 Satz (Darstellungssatz von Balakrishnan). Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, und sei $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, 1)$. Dann gilt

$$A^\alpha x = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1} Ax \, dt \tag{4.5}$$

für alle $x \in \mathrm{dom}(A)$.
Wenn $n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, n)$, dann gilt

$$A^\alpha x = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(A(t+A)^{-1}\right)^n x \, dt \tag{4.6}$$

für alle $x \in \mathrm{dom}(A^n)$, wobei

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{-x} e^{-t} \, dt$$

die Gammafunktion bezeichnet.

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

<u>1. Schritt:</u> Sei $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, 1)$. Wir wollen für $x \in \mathrm{dom}(A)$ und $\phi \in (\omega, \pi)$

$$A^\alpha x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\phi} z^{\alpha-1} R(z, A) Ax \, dz \tag{4.7}$$

zeigen.
Offenbar ist $(z+\epsilon)^{-1}$ mit $\epsilon > 0$ ein Regularisierer für die Funktion z^α. Für $x \in \mathrm{dom}(A)$ und $\phi \in (\omega, \pi)$

gilt daher

$$\begin{aligned}
A^\alpha x &= \left(\frac{z^\alpha}{z+\epsilon}\right)(A)(A+\epsilon)x \\
&= \left(\frac{z^\alpha}{z+\epsilon}\right)(A)Ax + \epsilon\left(\frac{z^\alpha}{(z+\epsilon)(z+1)}\right)(A)(1+A)x \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\phi} z^{\alpha-1}\left(\frac{z}{z+\epsilon}\right)R(z,A)Ax\,dz + \frac{\epsilon}{2\pi i}\int_{\Gamma_\phi}\frac{1}{z+\epsilon}\left(\frac{z^\alpha}{z+1}\right)R(z,A)(1+A)x\,dz. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Wir wollen nun den Grenzwert $\epsilon \to 0$ bilden.
Wir beginnen mit der Betrachtung des zweiten Integrals von (4.8). Es gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{2\pi i}\int_{\Gamma_\phi}\frac{1}{z+\epsilon}\left(\frac{z^\alpha}{z+1}\right)R(z,A)(1+A)x\,dz \\
&\qquad = \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\epsilon}{te^{i\phi}+\epsilon}\left(\frac{(te^{i\phi})^\alpha}{te^{i\phi}+1}\right)e^{i\phi}R(te^{i\phi},A)(1+A)x\,dt \\
&\qquad - \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty \frac{\epsilon}{te^{i\phi}+\epsilon}\left(\frac{(te^{i\phi})^\alpha}{te^{i\phi}+1}\right)e^{i\phi}R(te^{i\phi},A)(1+A)x\,dt \qquad (4.9) \\
&\qquad + \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{\epsilon}{te^{-i\phi}+\epsilon}\left(\frac{(te^{-i\phi})^\alpha}{te^{-i\phi}+1}\right)e^{-i\phi}R(te^{-i\phi},A)(1+A)x\,dt.
\end{aligned}$$

Wir wollen den Satz von der beschränkten Konvergenz anwenden. Die Integranden konvergieren dabei punktweise gegen 0 für $\epsilon \to 0$. Für den Integranden des ersten Integrals auf der rechten Seite von (4.9) gilt außerdem die Abschätzung

$$\left\|\frac{\epsilon}{te^{i\phi}+\epsilon}\left(\frac{(te^{i\phi})^\alpha}{te^{i\phi}+1}\right)e^{i\phi}R(te^{i\phi},A)(1+A)x\right\| \le C_{\phi,\pi}D|t|^{\alpha-1}M(A,\omega')\|(1+A)x\|,$$

wobei $D > 0$ konstant und $\omega' \in (\omega,\phi)$ beliebig. Der letzte Ausdruck ist bei 0 nach t integrierbar und von ϵ unabhängig. Unter Berücksichtigung der Abschätzung $|te^{i\phi}+1| \ge D|t|$ für $t > 1$, wobei $D > 0$ konstant, berechnen wir für den Integranden des zweiten Integrals in (4.9)

$$\left\|\frac{\epsilon}{te^{i\phi}+\epsilon}\left(\frac{(te^{i\phi})^\alpha}{te^{i\phi}+1}\right)e^{i\phi}R(te^{i\phi},A)(1+A)x\right\| \le C_{\phi,\pi}D^{-1}|t|^{\alpha-2}M(A,\omega')\|(1+A)x\|$$

für einen beliebigen Winkel $\omega' \in (\omega,\phi)$. Das dritte Integral in (4.9) behandelt man analog. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt also

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{2\pi i}\int_{\Gamma_\phi}\frac{1}{z+\epsilon}\left(\frac{z^\alpha}{z+1}\right)R(z,A)(1+A)x\,dz = 0.$$

Um den Grenzwert des ersten Integrals von (4.8) zu bilden, betrachten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_\phi} z^{\alpha-1}\left(\frac{z}{z+\epsilon}-1\right)R(z,A)Ax\,dz &= \int_0^1 (te^{i\phi})^{\alpha-1}\left(\frac{\epsilon}{te^{i\phi}+\epsilon}\right)e^{i\phi}R(te^{i\phi},A)Ax\,dt \\
&+ \int_1^\infty (te^{i\phi})^{\alpha-1}\left(\frac{\epsilon}{te^{i\phi}+\epsilon}\right)e^{i\phi}R(te^{i\phi},A)Ax\,dt \qquad (4.10) \\
&- \int_0^\infty (te^{-i\phi})^{\alpha-1}\left(\frac{\epsilon}{te^{-i\phi}+\epsilon}\right)e^{-i\phi}R(te^{-i\phi},A)Ax\,dt.
\end{aligned}$$

Wir wollen auch hier den Satz von der beschränkten Konvergenz anwenden. Die Integranden konvergieren für $\epsilon \to 0$ punktweise gegen die Nullfunktion. Da die Ausdrücke $\left|\frac{\epsilon}{te^{i\phi}+\epsilon}\right|$ durch $C_{\phi,\pi}$ gleichmäßig in t und ϵ beschränkt sind, folgt für den Integranden des ersten Integrals

$$\left\|(te^{i\phi})^{\alpha-1}\left(\frac{\epsilon}{te^{i\phi}+\epsilon}\right)e^{i\phi}R(te^{i\phi},A)Ax\right\| \quad \leq \quad \left|(te^{i\phi})^{\alpha-1}\right| C_{\phi,\pi}\|R(te^{i\phi},A)Ax\|. \qquad (4.11)$$

Der letzte Ausdruck lässt sich wegen der Ungleichung

$$\|R(z,A)Ax\| = \|R(z,A)(z+A-z)x\| \leq \|R(z,A)(z-A)x\|+\|zR(z,A)x\| \leq \|x\|+M(A,\omega')\|x\| \quad (4.12)$$

für einen beliebigen Winkel $\omega' \in (\omega,\phi)$ und $z \notin \overline{S_{\omega'}}$ weiter nach oben durch $\left|(te^{i\phi})^{\alpha-1}\right| C_{\phi,\pi}(\|x\| + M(A,\omega')\|x\|)$ abschätzen. Dieser Ausdruck ist bei 0 nach der Variablen t integrierbar und daher eine von ϵ unabhängige, integrierbare Majorante für das erste Integral bei (4.10). Die integrierbare Majorante für das zweite Integral von (4.10) bekommt man mit der Abschätzung

$$\left|(te^{i\phi})^{\alpha-1}\right| C_{\phi,\pi}\|R(te^{i\phi},A)Ax\| \leq \left|(te^{i\phi})^{\alpha-2}\right| C_{\phi,\pi}\|Ax\|,$$

was bei ∞ integrierbar ist, vgl. dazu auch (ii) in Definition 3.1.1. Das dritte Integral von (4.10) behandelt man analog.
Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt somit

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\phi} z^{\alpha-1}\left(\frac{z}{z+\epsilon}-1\right)R(z,A)Ax\,dz = 0,$$

was

$$\begin{aligned} A^\alpha x &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\phi} z^{\alpha-1}\left(\frac{z}{z+\epsilon}\right)R(z,A)Ax\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\phi} z^{\alpha-1}R(z,A)Ax\,dz \end{aligned}$$

impliziert.

2. Schritt: Wir zeigen nun (4.5).
Nach dem Cauchy'schen Integralsatz ist das Integral in (4.7) unabhängig vom Winkel $\phi \in (\omega,\pi)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} A^\alpha x &= \lim_{\phi\to\pi}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\phi} z^{\alpha-1}R(z,A)Ax\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\phi\to\pi}\left(-\int_0^\infty (te^{i\phi})^{\alpha-1}e^{i\phi}R(te^{i\phi},A)Ax\,dt + \int_0^\infty (te^{-i\phi})^{\alpha-1}e^{-i\phi}R(te^{-i\phi},A)Ax\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\phi\to\pi}\left(-\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{i\phi\alpha}R(te^{i\phi},A)Ax\,dt + \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-i\phi\alpha}R(te^{-i\phi},A)Ax\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty -t^{\alpha-1}e^{i\pi\alpha}(-t-A)^{-1}Ax + t^{\alpha-1}e^{-i\pi\alpha}(-t-A)^{-1}Ax\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\left(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}\right)(t+A)^{-1}Ax\,dt \\ &= \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt. \end{aligned}$$

Bei der vierten Gleichheit haben wir dabei den Satz von Lebesgue verwendet, dessen Anwendung man mit Hilfe ähnlicher Argumente wie im ersten Schritt rechtfertigen kann. Beachte dazu, dass $M(A,\psi) \leq M(A,\psi')$ für Winkel ψ und ψ' mit $\psi > \psi'$.

<u>3. Schritt:</u> Wir zeigen nun (4.6) für $\mathrm{Re}(\alpha) \in (n-1,n)$.
Sei dafür $x \in \mathrm{dom}(A^n)$. Dann gilt nach (4.5) mit partieller Integration (beachte dabei $\frac{d}{dt}(t+A)^{-1} = -(t+A)^{-2}$)

$$\begin{aligned} A^\alpha x &= A^{\alpha-(n-1)}A^{n-1}x = \frac{\sin((\alpha-n+1)\pi)}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-n}(t+A)^{-1}A^n x\,dt \\ &= \frac{\sin((\alpha-n+1)\pi)}{(\alpha-n+1)\pi}\left(t^{\alpha-n+1}(t+A)^{-1}A^n x\Big|_0^\infty + \int_0^\infty t^{\alpha-n+1}(t+A)^{-2}A^n x\,dt\right). \end{aligned}$$

Der Randterm verschwindet, indem man für $t\to\infty$ die Standard-Resolventenabschätzung für sektorielle Operatoren verwendet und für $t \to 0$ die Abschätzung (4.12) nimmt. Iterative Anwendung von partieller Integration liefert daher

$$A^\alpha x = \frac{\sin((\alpha-n+1)\pi)(n-1)!}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\cdots(\alpha-1)\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-n}A^n x\,dt.$$

Man beachte, dass in jedem Schritt die Randterme verschwinden, da sich die Ausdrücke $t^{\alpha-n+k}(t+A)^{-k}A^n x$ für $k \in (2,n-1)$ wegen der Abschätzung

$$\left\|t^{\alpha-n+k}(t+A)^{-k}A^n x\right\| \leq \left|t^{\alpha-n+1}\right| M(A)^{k-1}\left\|(t+A)^{-1}A^n x\right\|$$

auf den Fall des ersten Integrationsschrittes zurückführen lassen, den wir bereits behandelt haben. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} A^\alpha x &= \frac{\sin((\alpha-n+1)\pi)(n-1)!}{(\alpha-n+1)(\alpha-n+2)\cdots(\alpha-1)\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-n}A^n x\,dt \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-n}A^n x\,dt. \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichheit gehen dabei die Eigenschaften der Gamma-Funktion $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ und $\frac{\sin(\pi z)}{\pi} = \frac{1}{(\Gamma(z)\Gamma(1-z))}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ ein.

<u>4. Schritt:</u> Wir zeigen nun (4.6) für $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0,n)$.
Man beachte, dass die rechte Seite von (4.6) sogar für $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0,n)$ Sinn macht, was man sofort nach geeigneter Abschätzung der Resolvente wie in den vorigen Beweisschritten sieht. Daher wollen wir hier den Identitätssatz (Satz 1.2.6) auf die Funktionen $f(\alpha) := A^\alpha x$ und $g(\alpha) := \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-n}A^n x\,dt$ anwenden, um die Voraussetzung $\mathrm{Re}(\alpha) \in (n-1,n)$ durch $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0,n)$ ersetzen zu können, vgl. dazu auch Bemerkung 1.2.7.
Die Funktion $\alpha \mapsto A^\alpha x$ ist für α mit $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0,n)$ holomorph nach Proposition 4.1.6, (ii). Der Ausdruck $\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)}$ ist ebenfalls holomorph. Um die Holomorphie des Integrals auf der rechten Seite zu zeigen, wenden wir ein stetiges lineares Funktional $x' \in X'$ auf das Integral an und wollen nun Proposition 1.2.5 bemühen. Wir müssen also nachprüfen, dass die drei Bedingungen der Proposition mit den Definitionen $G := \{\alpha \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\alpha) \in (0,n)\}$ und $\Omega := (0,\infty)$ erfüllt sind. Die erste Bedingung folgt sofort, nachdem man die Resolvente auf übliche Art geeignet abgeschätzt hat. Die zweite Bedingung ist klar. Für die dritte Bedingung schreiben wir das Integral um in

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1}x'((t+A)^{-n}A^n x)\,dt = \int_0^1 t^{\alpha-1}x'((t+A)^{-n}A^n x)\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}x'((t+A)^{-n}A^n x)\,dt.$$

Sei nun $K \subseteq G$ eine beliebige kompakte Menge. Den Integranden des ersten Integrals können wir dann für $\alpha \in K$ mittels

$$\left|t^{\alpha-1}x'((t+A)^{-n}A^n x)\right| \leq |t|^{\alpha'-1}\|x'\|(M(A)+1)^n\|x\|$$

abschätzen, wobei $\alpha' := \inf_{\alpha\in K}\operatorname{Re}(\alpha)$. Die verwendete Resolventenabschätzung sieht man sofort ein, wenn man die Abschätzung (4.12) iterativ anwendet. Definiere $\alpha'' := \sup_{\alpha\in K}\operatorname{Re}(\alpha)$. Für den Integranden des zweiten Integrals gilt dann

$$\left|t^{\alpha-1}x'((t+A)^{-n}A^n x)\right| \leq |t|^{\alpha''-n-1}\|x'\|M(A)^n\|A^n x\|$$

nach n-maliger Anwendung der Standard-Resolventenabschätzung für sektorielle Operatoren.
Somit ist auch die dritte Bedingung von Proposition 1.2.5 erfüllt. Der Identitätssatz liefert uns somit (4.6). □

Wir haben in Definition 3.1.1 $M(A) = \sup_{t>0}\left\|\left(t(t+A)^{-1}\right)\right\|$ gesetzt. Als erstes Korollar des Darstellungssatzes betrachten wir, was mit diesem Ausdruck passiert, wenn wir im Inneren der Norm noch einen Exponenten α hinzufügen.

4.2.2 Korollar. Sei A ein sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0,\pi)$. Sei weiters $n \in \mathbb{N}$ und sei $\alpha \in (0,n)$. Dann gilt

$$\sup_{t>0}\left\|\left(t(t+A)^{-1}\right)^\alpha\right\| \leq M(A)^n.$$

Beweis. Wir zeigen die Aussage mit Induktion nach n. Für den Induktionsanfang sei vorerst $\alpha \in (0,1)$. Dann folgt für $t > 0$ aus dem Darstellungssatz von Balakrishnan (Satz 4.2.1) und Formel (3.18)

$$\begin{aligned}
\left((t+A)^{-1}\right)^\alpha &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\left(s+(t+A)^{-1}\right)^{-1}(t+A)^{-1}\,ds \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\left(I - s\left(s+(t+A)^{-1}\right)^{-1}\right)ds \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}+t+A\right)^{-1}ds.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung

$$\left\|\left(\frac{1}{s}+t\right)\left(\frac{1}{s}+t+A\right)^{-1}\right\| \leq M(A)$$

impliziert

$$\frac{1}{s}\left\|\left(\frac{1}{s}+t+A\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s}+t\right)^{-1}M(A) = (st+1)^{-1}M(A).$$

Also folgt mit der Substitution $u = st$

$$\begin{aligned}
\left\|\left((t+A)^{-1}\right)^\alpha\right\| &\leq M(A)\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}(st+1)^{-1}\,ds \\
&= M(A)\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^\infty \frac{u^{\alpha-1}}{t^{\alpha-1}}(u+1)^{-1}\frac{1}{t}\,du \\
&= M(A)\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{1}{t^\alpha}\int_0^\infty u^{\alpha-1}(u+1)^{-1}\,du \\
&= M(A)\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{1}{t^\alpha}B(\alpha,1-\alpha) = M(A)\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{1}{t^\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) \\
&= M(A)\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\frac{1}{t^\alpha}\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = M(A)\frac{1}{t^\alpha},
\end{aligned}$$

wobei $B(x, y)$ die Betafunktion und $\Gamma(x)$ die Gammafunktion bezeichnen. Durch eine einfache Umformung folgt nun

$$\sup_{t>0} \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right)^{\alpha} \right\| \leq M(A).$$

Also haben wir den Induktionsanfang $n = 1$ gezeigt.
Es bleibt noch der Induktionsschritt $n - 1 \to n$ zu zeigen. Gelte also nun als Induktionsvoraussetzung

$$\sup_{t>0} \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right)^{\alpha} \right\| \leq M(A)^{n-1}$$

für $\alpha \in (0, n-1)$. Wir müssen zeigen, dass diese Aussage dann auch für $\alpha \in (0, n)$ gilt, wobei auf der rechten Seite der Exponent n beträgt.
Falls unser $\alpha \in (0, n)$ tatsächlich kleiner als $n - 1$ ist, dann folgt wegen der Induktionsvoraussetzung und $M(A) \geq 1$ (vgl. Lemma 3.1.5)

$$\sup_{t>0} \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right)^{\alpha} \right\| \leq M(A)^{n-1} \leq M(A)^{n}.$$

Sei nun $\alpha \in [n-1, n)$. Der Fall $\alpha = n - 1$ ist dabei klar, da

$$\sup_{t>0} \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right)^{n-1} \right\| \leq \left(\sup_{t>0} \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right) \right\| \right)^{n-1} = M(A)^{n-1} \leq M(A)^{n}$$

nach Definition von $M(A)$. Für $\alpha \in (n-1, n)$ gilt $\alpha - (n-1) \in (0, 1)$. Daher folgt für $t > 0$

$$\begin{aligned} \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right)^{\alpha} \right\| &\leq \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right)^{n-1} \right\| \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right)^{\alpha-(n-1)} \right\| \\ &\leq M(A)^{n-1} M(A) = M(A)^{n}, \end{aligned}$$

und infolge

$$\sup_{t>0} \left\| \left(t(t+A)^{-1}\right)^{\alpha} \right\| \leq M(A)^{n},$$

womit die Induktion abgeschlossen ist. □

Wir wollen noch eine Darstellung von $A^{\alpha}x$ angeben, bei der man zur Berechnung von $A^{\alpha}x$ nur die Resolventen des Operators A^{-1} benötigt, allerdings ohne Kenntnis des Operators A auskommt.

4.2.3 Korollar. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, 1)$. Dann gilt

$$A^{\alpha}x = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-\alpha} \left(t + A^{-1}\right)^{-1} x \, dt$$

für alle $x \in \mathrm{dom}(A)$.

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen folgt mit Gleichung (4.5) aus dem Darstellungssatz von Balakrishnan und der Substitution $t = \frac{1}{s}$

$$\begin{aligned}
A^\alpha x &= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1}(s+A)^{-1}Ax\,ds \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_\infty^0 t^{-\alpha+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1} Ax\,dt \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha-1}\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1} Ax\,dt \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1}\left(\frac{1}{t}+A-\frac{1}{t}\right) x\,dt \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha}\frac{1}{t}\left(I-\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1}\right) x\,dt \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha}\frac{1}{t}t\left(t+A^{-1}\right)^{-1} x\,dt \\
&= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha}\left(t+A^{-1}\right)^{-1} x\,dt.
\end{aligned}$$

Beachte, dass die sechste Gleichheit dabei wegen (3.18) aus Lemma 3.5.6 gilt. □

4.2.4 Bemerkung. Korollar 4.2.3 bleibt auch gültig, wenn man für den Operator A keine Injektivität fordert. In diesem Fall ist die Inverse A^{-1} als lineare Relation mit $\operatorname{mul}(A^{-1}) \neq \{0\}$ zu betrachten. Die Ausdrücke, die in der Aussage des Korollars sowie in dessen Beweis vorkommen, bleiben aber nach wie vor Operatoren. Denn man beachte, dass es sich bei den Resolventen von A^{-1} auch im Fall von linearen Relationen um beschränkte, überall definierte Operatoren handelt.

4.3 Potenzen von Operatoren mit beliebigen komplexen Exponenten

Wir wollen die Betrachtungen von Potenzen von Operatoren, wobei die Exponenten positiven Realteil haben, abschließen und nun beliebige Exponenten aus $\mathbb{C}$ zulassen. Wir haben gesehen, dass bei Exponenten mit positivem Realteil die Funktion $z \mapsto z^\alpha$ in $\mathcal{A}(S_\phi)$ liegt. Somit ist $A^\alpha = (z^\alpha)(A)$ gemäß dem Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren definiert. Bei allgemeinen Exponenten $\alpha \in \mathbb{C}$ hat die Funktion z^α diese Eigenschaft nicht mehr. Stellen wir allerdings die zusätzliche Forderung an den Operator A, dass er injektiv sein soll, zeigt uns das folgende Lemma, dass sich A^α dann wieder sinnvoll definieren lässt.

4.3.1 Lemma. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, und sei $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt $z^\alpha \in \mathcal{T}(S_\phi)$ für alle Winkel $\phi \in (0, \pi)$. Somit ist der Operator $(z^\alpha)(A)$ durch den Funktionalkalkül für sektorielle Operatoren definiert.

4.3.2 Bemerkung. Wir möchten daran erinnern, dass die Menge $\mathcal{T}(S_\phi)$ definiert war als

$$\mathcal{T}(S_\phi) := \left\{ f \in \mathcal{O}(S_\phi) : \tau(z)^n f(z) \in H_{0,0}^\infty(S_\phi) \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \right\},$$

wobei $\tau(z) = z(1+z)^{-2}$, vgl. Definition 3.4.7.

Beweis (von Lemma 4.3.1). Sei $\phi \in (0, \pi)$ und wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $n > |\mathrm{Re}(\alpha)|$. Dann gilt

$$\tau(z)^n z^\alpha = \frac{z^{\alpha+n}}{(1+z)^{2n}} \in H_{0,0}^\infty(S_\phi)$$

nach Beispiel 3.1.20. Daher folgt $z^\alpha \in \mathcal{T}(S_\phi)$ und nach Proposition 3.4.8, (iv), auch $z^\alpha \in \mathcal{M}(S_\omega)_A$, womit $(z^\alpha)(A)$ definiert ist. □

Wegen Lemma 4.3.1 macht folgende Definition Sinn.

4.3.3 Definition. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$. Wir definieren dann die Potenz des Operators A mit beliebigem Exponenten als

$$A^\alpha := (z^\alpha)(A),$$

wobei $\alpha \in \mathbb{C}$.

Wir wollen die Definition von A^α in diesem Abschnitt mit einigen nützlichen Eigenschaften des Operators A^α ergänzen. Im Vergleich zu unseren Resultaten aus den vorigen beiden Abschnitten werden wir uns dabei allerdings teilweise mit schwächeren Aussagen begnügen müssen. Zur Motivation, warum sich nicht alle Resultate ohne Einschränkungen übertragen lassen, soll folgendes Beispiel dienen.

4.3.4 Beispiel. Wenn wir für die Exponenten von A beliebige komplexe Zahlen zulassen, wird die „Rechenregel“ $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ im Allgemeinen nicht mehr gelten. In der Tat verliert sie ihre Gültigkeit bereits dann, wenn wir uns bei den Exponenten auf ganze Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ einschränken. Wählen wir $\alpha = -1$ und $\beta = 1$, dann folgt mit Proposition 3.3.10, (iii),

$$A^{-1}A \subseteq A^{-1+1} = A^0 = I,$$

siehe dazu auch Proposition 4.1.6, (ii). Falls der Operator A aber die Eigenschaft $\mathrm{dom}(A) \neq X$ besitzt, ist diese Inklusion offensichtlich strikt.

4.3.5 Proposition. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$. Dann gilt:

(i) Der Operator A^α ist injektiv und es gilt $(A^\alpha)^{-1} = A^{-\alpha} = (A^{-1})^\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$A^\alpha A^\beta \subseteq A^{\alpha+\beta},$$

wobei die Definitionsbereiche die Beziehung $\mathrm{dom}(A^\beta) \cap \mathrm{dom}(A^{\alpha+\beta}) = \mathrm{dom}(A^\alpha A^\beta)$ erfüllen.

(iii) Falls $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) \in (0, 1)$, dann gilt

$$A^{-\alpha}x = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty t^{-\alpha}(t + A)^{-1}x \, dt$$

für $x \in \mathrm{ran}(A)$.

(iv) Falls $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $|\alpha| < \frac{\pi}{\omega}$, dann folgt $A^\alpha \in \mathrm{Sect}(|\alpha|\omega)$ und

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$$

für alle $\beta \in \mathbb{C}$.

(v) Seien $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha_0), \mathrm{Re}(\alpha_1) > 0$. Dann gilt

$$\mathrm{dom}(A^{\alpha_1}) \cap \mathrm{ran}(A^{\alpha_0}) \subseteq \mathrm{dom}(A^{\alpha})$$

für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $-\mathrm{Re}(\alpha_0) < \mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\alpha_1)$. Weiters ist die Abbildung

$$\begin{cases} \{\alpha \in \mathbb{C} : -\mathrm{Re}(\alpha_0) < \mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\alpha_1)\} & \to & X \\ \alpha & \mapsto & A^{\alpha}x \end{cases}$$

holomorph für alle $x \in \mathrm{dom}(A^{\alpha_1}) \cap \mathrm{ran}(A^{\alpha_0})$.

(vi) Sei $0 \in \rho(A)$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{cases} \{\alpha \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\alpha) > 0\} & \to & \mathcal{B}(X) \\ \alpha & \mapsto & A^{-\alpha} \end{cases}$$

holomorph.

(vii) Wenn ein Operator $T \in \mathcal{B}(X)$ mit A kommutiert, so auch mit A^{α} für $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beweis. (i) zeigt man genauso wie Proposition 4.1.6, (iv).

(ii) folgt unmittelbar aus Satz 3.3.10, (iii).

(iii) Für $x \in \mathrm{ran}(A) = \mathrm{dom}(A^{-1})$ folgt mit (i) und Korollar 4.2.3

$$A^{-\alpha}x = \left(A^{-1}\right)^{\alpha} x = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} t^{-\alpha} \left(t + A\right)^{-1} x \, dt.$$

(iv) Wir unterscheiden hier die beiden Fälle, ob α positiv oder negativ ist.
<u>1. Fall:</u> Falls $\alpha \in (0, \frac{\pi}{\omega})$, so haben wir die erste Aussage bereits in Proposition 4.1.7 gezeigt. Die Funktion $z \mapsto z^{\beta}$ liegt für alle $\beta \in \mathbb{C}$ in $\mathcal{T}[S_{\omega}]$ und somit wegen der Injektivität des Operators A^{α} auch in $\mathcal{M}(S_{\alpha\omega})_{A^{\alpha}}$. Daher folgt die zweite Behauptung unmittelbar aus Korollar 4.1.8.
<u>2. Fall:</u> Sei jetzt $\alpha \in (-\frac{\pi}{\omega}, 0)$. Da der Operator A injektiv und sektoriell ist, gilt dies auch für A^{-1}. Anwendung von (i) und Proposition 4.1.7 impliziert dann $A^{\alpha} = \left(A^{-1}\right)^{-\alpha} \in \mathrm{Sect}(|\alpha|\omega)$, wenn man beachtet, dass $-\alpha \in (0, \frac{\pi}{\omega})$ gilt. Mit (i) und dem bereits im ersten Fall Bewiesenen folgt also

$$(A^{\alpha})^{\beta} = \left(\left(A^{-1}\right)^{-\alpha}\right)^{\beta} = \left(A^{-1}\right)^{-\alpha\beta} = A^{\alpha\beta}$$

für alle $\beta \in \mathbb{C}$.

(v) Seien $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha_0), \mathrm{Re}(\alpha_1) > 0$ gegeben, und wähle $x \in \mathrm{dom}(A^{\alpha_1}) \cap \mathrm{ran}(A^{\alpha_0})$. Wir wollen zeigen, dass $x \in \mathrm{dom}(A^{\alpha})$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$, die $-\mathrm{Re}(\alpha_0) < \mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\alpha_1)$ erfüllen. Dazu unterscheiden wir drei Fälle.
<u>1. Fall:</u> Es gilt $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$. Dann folgt die Behauptung wegen

$$x \in \mathrm{dom}(A^{\alpha_1}) \cap \mathrm{ran}(A^{\alpha_0}) \subseteq \mathrm{dom}(A^{\alpha_1}) \subseteq \mathrm{dom}(A^{\alpha}),$$

wobei sich die letzte Inklusion aus Proposition 4.1.6, (iii), ergibt.
<u>2. Fall:</u> Es gilt $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$. In diesem Fall folgt $0 < -\mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\alpha_0)$ und daher

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{dom}(A^{\alpha_1}) \cap \mathrm{ran}(A^{\alpha_0}) &\subseteq \mathrm{ran}(A^{\alpha_0}) = \mathrm{dom}((A^{\alpha_0})^{-1}) \\ &= \mathrm{dom}((A^{-1})^{\alpha_0}) \subseteq \mathrm{dom}((A^{-1})^{-\alpha}) = \mathrm{dom}(A^{\alpha}) \end{aligned}$$

mit Hilfe von (i) und wiederum Proposition 4.1.6, (iii).
3. Fall: Es gilt $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$. Wir schreiben $\alpha = is$ mit $s \in \mathbb{R}$. Wähle nun $n \in \mathbb{N}$ so, dass $n > \max\{\frac{1}{\mathrm{Re}(\alpha_0)}, \frac{1}{\mathrm{Re}(\alpha_1)}\}$ und definiere den Operator $B := A^{\frac{1}{n}}$. Dann folgt wegen $\frac{1}{n} < \mathrm{Re}(\alpha_0)$ und $\frac{1}{n} < \mathrm{Re}(\alpha_1)$ die Inklusionenkette

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{dom}(A^{\alpha_1}) \cap \mathrm{ran}(A^{\alpha_0}) &= \mathrm{dom}(A^{\alpha_1}) \cap \mathrm{dom}((A^{-1})^{\alpha_0}) \\ &\subseteq \mathrm{dom}(A^{\frac{1}{n}}) \cap \mathrm{dom}((A^{-1})^{\frac{1}{n}}) = \mathrm{dom}(B) \cap \mathrm{ran}(B), \end{aligned}$$

vgl. wieder Proposition 4.1.6, (iii). Der Operator B ist injektiv und sektoriell. Daher folgt wegen Bemerkung 3.4.6, (ii), dass $x \in \mathrm{dom}(\tau(B)^{-1})$. Da die Funktion $z \mapsto z^{ins} \in \mathcal{T}[S_\omega]$ durch τ regularisiert wird, folgt mit der Definition

$$g(z) := \tau(z) z^{ins} \in H^\infty_{0,0}[S_\omega]$$

offenbar $g(B) = \left(\tau(z)z^{ins}\right)(B) \in \mathcal{B}(X)$. Nach Satz 3.3.10, (i), kommutiert dann $g(B)$ mit B, somit auch mit B^{-1} und daher mit $\tau(B)^{-1}$. Wir können also aus $x \in \mathrm{dom}(\tau(B)^{-1})$ folgern, dass $x \in \mathrm{dom}(B^{ins})$. Dies sieht man leicht ein, da wegen der eben gezeigten Kommutativitätseigenschaft

$$B^{ins} = \tau(B)^{-1}\left(\tau(z)z^{ins}\right)(B) \supseteq \left(\tau(z)z^{ins}\right)(B)\tau(B)^{-1}$$

nach dem natürlichen Funktionalkalkül gilt. Nun gilt weiters

$$x \in \mathrm{dom}(B^{ins}) = \mathrm{dom}(A^{is}) = \mathrm{dom}(A^\alpha).$$

Somit haben wir die erste Behauptung von (v) gezeigt.
Die Holomorphieeigenschaft folgt unmittelbar aus Korollar 4.1.11, da aus (ii)

$$A^\alpha x = A^{\alpha+\alpha_0} A^{-\alpha_0} x$$

folgt und $\mathrm{Re}(\alpha + \alpha_0) \in (0, \mathrm{Re}(\alpha_0 + \alpha_1))$ gilt.

(vi) Wegen $0 \in \rho(A)$ ist der Operator A injektiv, wobei seine Inverse A^{-1} sektoriell und beschränkt ist, vgl. Lemma 3.5.6. Nach Proposition 4.1.6, (i), ist dann auch der Operator $(A^{-1})^\alpha = A^{-\alpha}$ beschränkt, und die Abbildung

$$\begin{cases} \{\alpha \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\alpha) > 0\} & \to & \mathcal{B}(X) \\ \alpha & \mapsto & \left(A^{-1}\right)^\alpha \end{cases}$$

ist holomorph.

(vii) ist ein Spezialfall von Satz 3.3.10, (i). □

Wie wir bereits in Beispiel 4.3.4 festgestellt haben, gilt für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ im Allgemeinen die Aussage $A^{\alpha+\beta} = A^\alpha A^\beta$ nicht mehr. Trotzdem können wir Punkt (ii) von Proposition 4.3.5 noch verschärfen.

4.3.6 Proposition. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, der dichten Definitions- und Bildbereich hat, d.h. für den $\overline{\mathrm{dom}(A)} = X$ und $\overline{\mathrm{ran}(A)} = X$ gilt. Dann gilt

$$A^{\alpha+\beta} = \overline{A^\alpha A^\beta}$$

für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Der Übersichtlichkeit halber wollen wir einen Teil des Beweises als Lemma formulieren.

4.3.7 Lemma. Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, und seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$. Dann gilt:

(i) $\lim_{t\to\infty} t^n(t+A)^{-n}x = x$ für alle $x \in \overline{\mathrm{dom}(A)}$, und

(ii) $\lim_{t\to 0} t^n(t+A)^{-n}x = 0$ für alle $x \in \overline{\mathrm{ran}(A)}$.

Beweis. (i) Sei vorerst $x \in \mathrm{dom}(A)$. Dann gelten für $t > 0$ die Gleichheiten

$$\begin{aligned} x &= t(t+A)^{-1}x + x - t(t+A)^{-1}x \\ &= t(t+A)^{-1}x + (t+A)^{-1}(t+A)x - t(t+A)^{-1}x \\ &= t(t+A)^{-1}x + (t+A)^{-1}(t+A-t)x \\ &= t(t+A)^{-1}x + \frac{1}{t}\left(t(t+A)^{-1}\right)Ax. \end{aligned}$$

Setzt man nun den gerade erhaltenen Ausdruck in die erste Variable x in der letzten Zeile ein, erhält man

$$\begin{aligned} x &= t(t+A)^{-1}\overbrace{\left(t(t+A)^{-1}x + \frac{1}{t}\left(t(t+A)^{-1}\right)Ax\right)}^{=x} + \frac{1}{t}\left(t(t+A)^{-1}\right)Ax \\ &= \left(t(t+A)^{-1}\right)^2 x + \frac{1}{t}\left(t(t+A)^{-1}\right)^2 Ax + \frac{1}{t}\left(t(t+A)^{-1}\right)Ax \\ &= \left(t(t+A)^{-1}\right)^2 x + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{2}\left(t(t+A)^{-1}\right)^k Ax. \end{aligned}$$

Iterativ ergibt sich

$$x = \left(t(t+A)^{-1}\right)^n x + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n}\left(t(t+A)^{-1}\right)^k Ax.$$

Wegen

$$\sup_{t>0}\left\|t(t+A)^{-1}\right\| \le M(A) < \infty \tag{4.13}$$

folgt daraus $\lim_{t\to\infty}\left(t(t+A)^{-1}\right)^n x = x$. Wegen (4.13) und Lemma 1.3.15 folgt die Aussage auch für alle $x \in \overline{\mathrm{dom}(A)}$.

(ii) Wir zeigen die Aussage mit Induktion nach n.
Sei $n = 1$. Die Bedingung $x \in \overline{\mathrm{ran}(A)}$ impliziert $x \in \overline{\mathrm{dom}(A^{-1})}$. Mit (i) und (3.18) folgt daher

$$x = \lim_{t\to\infty} t\left(t + A^{-1}\right)^{-1}x = x - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1}x,$$

was unmittelbar $0 = \lim_{t\to 0} t\,(t+A)^{-1}x$ ergibt. Somit ist der Induktionsanfang gezeigt.
Es bleibt der Induktionsschritt $n-1 \to n$ zu zeigen. Gelte also als Induktionsvoraussetzung

$$x \in \overline{\mathrm{ran}(A)} \Longrightarrow \lim_{t\to 0} t^k(t+A)^{-k}x = 0$$

für $k = 1, \ldots, n-1$. Da wieder $x \in \overline{\mathrm{dom}(A^{-1})}$ gilt, folgt mit (i) und (3.18)

$$\begin{aligned} x &= \lim_{t\to\infty}\left(t\left(t+A^{-1}\right)^{-1}\right)^n x \\ &= \lim_{t\to 0}\left(I - t\,(t+A)^{-1}\right)^n x \\ &= \lim_{t\to 0}\left(x + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k}\left(t\,(t+A)^{-1}\right)^k x + (-1)^n t^n(t+A)^{-n}x\right) \\ &= x + (-1)^n\lim_{t\to 0} t^n(t+A)^{-n}x, \end{aligned}$$

was $\lim_{t\to 0} t^n(t+A)^{-n}x = 0$ impliziert. Man beachte, dass die vierte Gleichheit dabei wegen der Induktionsvoraussetzung gilt. $\square$

Beweis (von Proposition 4.3.6). Wegen Proposition 4.3.5, (ii), gilt die Inklusion $A^\alpha A^\beta \subseteq A^{\alpha+\beta}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Schließen wir beide Seiten ab, bleibt die Inklusion erhalten. Daher gilt

$$\overline{A^\alpha A^\beta} \subseteq \overline{A^{\alpha+\beta}} = A^{\alpha+\beta},$$

da die Operatoren, die wir durch den Funktionalkalkül für meromorphe Funktionen erhalten, immer abgeschlossen sind, vgl. Proposition 2.1.7.
Um die andere Inklusion zu zeigen, sei $x \in \operatorname{dom}(A^{\alpha+\beta})$. Wähle weiters ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\operatorname{dom}(A^k) \cap \operatorname{ran}(A^k) \subseteq \operatorname{dom}(A^\beta)$, vgl. dazu Proposition 4.3.5, (v). Definiere dann den Operator

$$\tau_n(A) := n(n+A)^{-1} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+A\right)^{-1}$$

für $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, und sei $x_n := \tau_n(A)^k x$. Wir wollen $x_n \in \operatorname{dom}(A^\alpha A^\beta)$ zeigen.
Offenbar ist $\tau_n(A)$ ein beschränkter Operator, der mit A kommutiert, da die Resolventen von A mit dem Operator A kommutieren. Also kommutiert $\tau_n(A)^k$ mit A und nach Proposition 4.3.5, (vii), auch mit $A^{\alpha+\beta}$. Lemma 1.3.10 zeigt $x_n \in \operatorname{dom}(A^{\alpha+\beta})$.
Für den Operator $\tau_n(A)$ gilt

$$\begin{aligned}
\tau_n(A) &= n(n+A)^{-1} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+A\right)^{-1} \\
&= (n+A)^{-1}\left(\frac{n^2-1}{n}\right)\left(\frac{n^2}{n^2-1}I - \frac{1}{n^2-1}(n+A)\left(\frac{1}{n}+A\right)^{-1}\right) \\
&= (n+A)^{-1}\left(\frac{n^2-1}{n}\right)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\frac{1}{n}+A\right)\left(\frac{1}{n}+A\right)^{-1} - \frac{1}{n^2-1}(n+A)\left(\frac{1}{n}+A\right)^{-1}\right) \\
&= (n+A)^{-1}\left(\frac{n^2-1}{n}\right)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\left(\frac{1}{n}+A\right) - \frac{1}{n^2-1}(n+A)\right)\left(\frac{1}{n}+A\right)^{-1} \\
&= (n+A)^{-1}\left(\frac{n^2-1}{n}\right)A\left(\frac{1}{n}+A\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Da die Resolventen von A mit dem Operator A kommutieren, erkennt man aus dieser Darstellung, dass $\operatorname{ran}(\tau_n(A)^k) \subseteq \operatorname{dom}(A^k) \cap \operatorname{ran}(A^k)$. Somit folgt $x_n \in \operatorname{ran}(\tau_n(A)^k) \subseteq \operatorname{dom}(A^\beta)$ nach unserer Wahl von k. Zusammen mit dem vorigen Absatz gilt also

$$x_n \in \operatorname{dom}(A^{\alpha+\beta}) \cap \operatorname{dom}(A^\beta) = \operatorname{dom}(A^\alpha A^\beta),$$

wobei die Gleichheit der Definitionsbereiche aus Proposition 4.3.5, (ii), folgt.
Für $x \in X = \overline{\operatorname{dom}(A)} \cap \overline{\operatorname{ran}(A)}$ gilt weiters

$$\tau_n(A)^k x = \left(\sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} (-1)^j (n(n+A)^{-1})^j \left(\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+A\right)^{-1}\right)^{k-j}\right) x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Die behauptete Konvergenz folgt dabei wegen Lemma 4.3.7 und Lemma 1.3.16. Insbesondere folgt daraus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und

$$A^\alpha A^\beta x_n = A^{\alpha+\beta}\tau_n(A)^k x = \tau_n(A)^k A^{\alpha+\beta} x \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A^{\alpha+\beta}x,$$

da natürlich auch $A^{\alpha+\beta}x \in X = \overline{\operatorname{dom}(A)} \cap \overline{\operatorname{ran}(A)}$. Zusammensetzen der bisher gezeigten Teile liefert somit

$$A^{\alpha+\beta} \subseteq \overline{A^\alpha A^\beta},$$

da wir zu $(x, y) \in A^{\alpha+\beta}$ eine Folge von Paaren $(x_n, y_n) \in A^\alpha A^\beta$ gefunden haben mit $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

$\square$

Den Abschluss unserer Ausführungen soll der Darstellungssatz von Komatsu bilden. Ähnlich wie der Darstellungssatz von Balakrishnan beschäftigt er sich mit Integraldarstellungen des Operators A^α, wobei wir uns jetzt nicht mehr auf $\alpha \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil beschränken. In den Integralen kommen wiederum nur die Operatoren A, A^{-1} und entsprechende Resolventen vor. Daher lassen sie sich oft leichter handhaben als der Operator A^α, der über den Funktionalkalkül für meromorphe Funktionen definiert ist.

4.3.8 Satz (Darstellungssatz von Komatsu). Sei A ein injektiver, sektorieller Operator mit Winkel $\omega \in [0, \pi)$, und sei $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ mit $\operatorname{Re}(\alpha) \in (-1, 1)$. Dann gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} A^\alpha x = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \Bigg(& \frac{1}{\alpha}x - \frac{1}{1+\alpha}A^{-1}x + \int_0^1 t^{\alpha+1}(t+A)^{-1}A^{-1}x\,dt \\ & + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \Bigg) \end{aligned} \tag{4.14}$$

und

$$A^\alpha x = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha}x + \int_0^1 t^{-\alpha}(1+tA)^{-1}Ax\,dt - \int_0^1 t^\alpha (1+tA^{-1})^{-1}A^{-1}x\,dt \right) \tag{4.15}$$

für $x \in \operatorname{dom}(A) \cap \operatorname{ran}(A)$.

Beweis. Wir nehmen vorerst $\operatorname{Re}(\alpha) \in (0, 1)$ an. Der allgemeine Fall wird dann ähnlich wie beim Darstellungssatz von Balakrishnan mittels Identitätssatz folgen. Für solche α und $x \in \operatorname{dom}(A) \cap \operatorname{ran}(A)$ können wir Formel (4.5) aus dem Darstellungssatz von Balakrishnan anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}A^\alpha x &= \int_0^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\ &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\ &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}(t+A-t)x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\ &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(x - t(t+A)^{-1}x)\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\ &= \int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} + A^{-1}\right)^{-1} x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\ &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1+tA^{-1})^{-1}x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt, \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Zeile die Identität (3.18) eingeht. Wir formen weiter um zu

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}A^\alpha x &= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1+tA^{-1})^{-1}x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1}(1+tA^{-1})^{-1}(1+tA^{-1}-tA^{-1})x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\
&= \int_0^1 t^{\alpha-1}\left(1-(1+tA^{-1})^{-1}tA^{-1}\right)x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}x - \int_0^1 t^{\alpha}(1+tA^{-1})^{-1}A^{-1}x\,dt + \int_1^\infty s^{\alpha-1}(s+A)^{-1}Ax\,ds \qquad (4.16) \\
&= \frac{1}{\alpha}x - \int_0^1 t^{\alpha}(1+tA^{-1})^{-1}A^{-1}x\,dt + \int_0^1 t^{-\alpha-1}\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1}Ax\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}x - \int_0^1 t^{\alpha}(1+tA^{-1})^{-1}A^{-1}x\,dt + \int_0^1 t^{-\alpha}\left(1+tA\right)^{-1}Ax\,dt,
\end{aligned}$$

wenn wir in der vorletzten Zeile $t=\frac{1}{s}$ substituieren. Die Integrale in der letzte Zeile machen sogar für $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) \in (-1,1)$ Sinn, da

$$\left\|(1+tA)^{-1}\right\| = \left\|\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}+A\right)^{-1}\right\| \leq M(A)$$

gilt, und das erste Integral somit existiert. Analoges gilt natürlich für das zweite Integral. Um die Gleichheit (4.15) für $\mathrm{Re}(\alpha) \in (-1,1)$ zu erhalten, wollen wir nun Holomorphie (als Funktionen von α) auf beiden Seiten zeigen und den Identitätssatz (Satz 1.2.6) anwenden.
Der Ausdruck auf der linken Seite von (4.15) ist holomorph, da $\alpha \mapsto \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ holomorph ist und wir die Holomorphie von $A^\alpha x$ bereits in Proposition 4.3.5, (v), nachgewiesen haben.
Wir wollen jetzt zeigen, dass das erste Integral auf der rechten Seite schwach holomorph ist. Dafür wollen wir wieder Proposition 1.2.5 benützen, nachdem wir ein beliebiges stetiges, lineares Funktional $x' \in X'$ auf das Integral angewendet und ins Integral hineingezogen haben. Mit $\Omega = (0,1)$ und $G = \{\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \mathrm{Re}(\alpha) \in (-1,1)\}$ sind dann die ersten beiden Bedingungen von Proposition 1.2.5 offenbar erfüllt. Sei nun eine beliebige kompakte Menge $K \subseteq G$ gegeben. Die dritte Bedingung gilt dann mit der Funktion $g_K(t) = t^{\alpha'}M(A)\|x'\|\|A^{-1}x\|$, wobei $\alpha' := \inf_{\alpha\in K}\mathrm{Re}(\alpha)$. Somit ist die Funktion

$$\alpha \mapsto \int_0^1 t^\alpha(1+tA^{-1})^{-1}A^{-1}x\,dt$$

schwach holomorph und daher auch holomorph. Das andere Integral behandelt man analog.
Der Identitätssatz liefert jetzt (4.15) für $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha) \in (-1,1)$, vgl. auch wieder Bemerkung 1.2.7.
Es bleibt nur noch die Identität (4.14) zu zeigen. Dafür benützen wir die für $x \in \mathrm{dom}(A) \cap \mathrm{ran}(A)$ gültige Gleichheit

$$\begin{aligned}
t^{-1}(t+A)^{-1}x &= t^{-1}(t+A)^{-1}\left((t+A)A^{-1}-tA^{-1}\right)x \\
&= t^{-1}(t+A)^{-1}(t+A)A^{-1}x - (t+A)^{-1}A^{-1}x \\
&= t^{-1}A^{-1}x - (t+A)^{-1}A^{-1}x
\end{aligned}$$

und berechnen aus Zeile (4.16)

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}A^\alpha x &= \frac{1}{\alpha}x - \int_0^1 t^\alpha (1+tA^{-1})^{-1}A^{-1}x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}x - \int_0^1 t^\alpha (A^{-1}x - t(t+A)^{-1}A^{-1}x)\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}x - \int_0^1 t^{\alpha+1}t^{-1}(t+A)^{-1}x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}x - \int_0^1 t^\alpha A^{-1}x\,dt + \int_0^1 t^{\alpha+1}(t+A)^{-1}A^{-1}x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt \\
&= \frac{1}{\alpha}x - \frac{1}{\alpha+1}A^{-1}x + \int_0^1 t^{\alpha+1}(t+A)^{-1}A^{-1}x\,dt + \int_1^\infty t^{\alpha-1}(t+A)^{-1}Ax\,dt,
\end{aligned}$$

wobei bei der zweiten Gleichheit die Identität (3.18) eingeht. Multiplizieren mit $\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}$ ergibt (4.14).

□

Literaturverzeichnis

[Ha1] MARKUS HAASE: *The Functional Calculus for Sectorial Operators*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[Ha2] MARKUS HAASE: *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods*, Dissertation, Nürnberg, 2003.

[He] HARRO HEUSER: *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1992.

[K1] MICHAEL KALTENBÄCK: *Funktionalanalysis II*, Skriptum, TU Wien, 2012.
`http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/main.pdf`

[K2] MICHAEL KALTENBÄCK: *Analysis 3 für technische Mathematik*, Skriptum, TU Wien, 2011.
`http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/ANA_III_alt.pdf`

[K3] MICHAEL KALTENBÄCK, HARALD WORACEK: *Komplexe Analysis für technische Mathematik*, Skriptum, TU Wien, 2013.
`http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/mykana.pdf`

[M] CELSO MARTÍNEZ, MIGUEL SANZ, LUIS MARCO: *Fractional Powers of Operators*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 40, No. 2 (1988), 331-347.

[N] CHRISTOPH NEUNER: *Shift-invariant subspaces as linear relations on the Hardy Space*, Diplomarbeit, Wien, 2012.
`http://www.asc.tuwien.ac.at/~funkana/downloads_general/dipl_neuner.pdf`

[W] HARALD WORACEK, MICHAEL KALTENBÄCK, MARTIN BLÜMLINGER: *Funktionalanalysis*, Skriptum, TU Wien, 7. Auflage 2012.
`http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/fana.pdf`