



Doctoral Thesis

Analysis of simple structural models for the dynamic calculation of railway bridges with focus on the ballast superstructure

submitted in satisfaction of the requirements for the degree of
Doctor of Science in Civil Engineering
of the Vienna University of Technology, Faculty of Civil Engineering

Dissertation

Analyse einfacher Tragwerksmodelle zur dynamischen Berechnung von Eisenbahnbrücken mit Schwerpunkt Schotteroberbau

ausgeführt zum Zwecke der Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der technischen Wissenschaft
eingereicht an der Technischen Universität Wien Fakultät für Bauingenieurwesen
von

Dipl.-Ing. Georg Brandstetter
Matrikelnummer 0525984
Kainzing 7, A-4753 Taiskirchen im Innkreis

Betreuer: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Josef Fink
Institut für Tragkonstruktionen – Forschungsbereich für Stahlbau
TU Wien, Karlsplatz 13, 1040 Wien

Gutachter: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christoph Adam
Institut für Grundlagen der Technischen Wissenschaften –
Arbeitsbereich für Angewandte Mechanik,
Universität Innsbruck, Technikerstraße 13, 6020 Innsbruck

Gutachter: a.o. Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Rudolf Heuer
Institut für Hochbau und Technologie –
Forschungsbereich für Baumechanik und Baudynamik
TU Wien, Karlsplatz 13, 1040 Wien

Wien, September 2018

Kurzfassung

Durch Entwicklungen und Optimierungen im Eisenbahnverkehr rücken gewisse dynamische Effekte in der Nachweisführung immer mehr in den Vordergrund. Zur Gewährleistung der Sicherheit des Betriebs und des Fahrgastkomforts kommt etwa der Beschränkung der vertikalen Oberbaubeschleunigung von Brücken eine wesentliche Bedeutung zu. Dieses Kriterium wird meist durch dynamische Berechnungen von Zugüberfahrten kontrolliert. Für die Durchführung solcher Berechnungen muss eine Modellierung des Tragwerks und des Zuges erfolgen. Da der Zug mit der Brücke und dem Untergrund in Wechselwirkung steht, ist eine adäquate Modellwahl nicht so einfach. Es stehen unzählige Modelle in unterschiedlichen Detaillierungsgraden zur Verfügung. Je komplexer das Modell, desto mehr Kennwerte sind erforderlich. Die korrekte Bestimmung dieser Werte ist oft schwierig. Im Gegensatz zu statischen Berechnungen ist die Verwendung von Mindestwerten nicht sinnvoll, da bei vielen Parametern nicht sicher gesagt werden kann, ob sich höhere oder niedrigere Werte günstiger auswirken. Vergleiche zwischen Messungen und Rechnungen haben gezeigt, dass gerade Dämpfungen und Eigenfrequenzen von Brücken rechnerisch oft erheblich unterschätzt werden. Da bereits die grundlegenden Tragwerkskennwerte (Spannweite, Massenbelegung, Biegesteifigkeit und Dämpfung) einer großen Schwankungsbreite unterliegen, liegt der Fokus dieser Arbeit auf einfachen Tragwerksmodellen.

Ein wesentlicher dynamischer Kennwert eines Brückentragwerks ist die erste Biegeeigenfrequenz des Systems. Diese bestimmt die für die Berechnung von Zugüberfahrten wesentlichen Resonanzgeschwindigkeiten des Systems. Für ein Tragwerksmodell ist somit eine zutreffende Abbildung der tatsächlichen Eigenfrequenzen essentiell. Um zu verifizieren, inwieweit sich ein dreidimensionales Brückentragwerk durch einen einfachen Bernoulli-Euler-Balken abbilden lässt, wird in der vorliegenden Arbeit der Einfluss ausgewählter Tragwerksparameter (z.B.: Plattenbreite, Lagerversatz oder Lagerschiefe) auf die erste Eigenfrequenz des Systems untersucht.

Eine weitere wesentliche Rolle in den durchgeführten Untersuchungen spielt der Schotteroberbau. Die Berücksichtigung des Oberbaus rein als zusätzliche Masse entspricht nicht dem tatsächlichen Verhalten. Eine entsprechende Modellierung, bei der auch die steifigkeitssteigernden Effekte berücksichtigt werden, stellt derzeit noch eine gewisse Herausforderung dar. Daher wird in dieser Arbeit ein einfaches Modell vorgestellt, das in der Lage ist, die versuchstechnisch festgestellten nichtlinearen Effekte des Schotteroberbaus abzubilden. Dadurch wird die Möglichkeit geschaffen, mit einem simplen Gleichungsapparat den Einfluss des Schotteroberbaus auf die erste Eigenfrequenz eines Brückentragwerks abzuschätzen.

Abstract

Due to developments and optimizations in the field of railway traffic, dynamic effects are getting more and more important for safety evidence. To ensure the safety of operation and passenger comfort, the vertical bridge deck acceleration has to be limited. This criterion is usually proved by dynamic calculations of train crossings. In order to perform such calculations, it is necessary to model the structure and the train. Since the train interacts with the bridge and the ground, an adequate model choice can be difficult. There are plenty of different models available with varying degrees of detail. The more complex the model, the more characteristic parameters are required. The correct determination of these values is often difficult. In contrast to static calculations, the use of minimum values is not meaningful, as for many parameters it cannot be said with certainty whether higher or lower values have a more favourable effect. Comparisons between measurements and calculations have shown that the bridge damping and the first natural frequencies are often significantly underestimated in calculations. Since the basic structural parameters (span length, mass, bending stiffness and damping) are already subjected to a wide range of uncertainties, this thesis focusses on simple structural models.

An important dynamic parameter of a bridge structure is the first bending eigenfrequency. It determines the resonance speeds of the system which are significant for the calculation of train crossings. Therefore a correct determination of the actual natural frequencies is essential for the structural model. In order to verify the extent to which a three-dimensional bridge girder can be covered by a simple Bernoulli-Euler beam, the influence of selected structural parameters (e.g. plate width, bearing offset or bearing skewness) on the first eigenfrequency of the system is investigated in this thesis.

Another important component of this research is the ballasted track. To consider the ballast bed purely as an additional mass does not correspond with the actual behaviour of the entire system. Finding an appropriate model model that also takes into account the increasing stiffness, is still considered a challenge. This thesis proposes a fairly simple way of modeling the bridge and the superstructure that takes the experimentally determined nonlinear effects of the ballasted track into consideration. Based on this model simple formulas are derived in order to estimate the influence of the ballast on the first eigenfrequency of a bridge.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	ii
Abstract	iii
Inhaltsverzeichnis	iv
Nomenklatur und Symbole	viii
Abkürzungen	viii
Lateinische Buchstaben	ix
Griechische Buchstaben.....	xiv
1. Einleitung	1
1.1 Motivation und Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung und Fragestellungen.....	2
1.3 Aufbau der Arbeit	3
2. Generelle Grundlagen und Randbedingungen.....	5
2.1 Einführung.....	5
2.2 Grundlagen der dynamischen Berechnung	6
2.2.1 Formulieren und Diskretisieren der Bewegungsgleichung	6
2.2.2 Lösung der Differentialgleichungen allgemein	10
2.2.3 Modale Analyse.....	11
2.2.4 Dämpfungsansätze	15
2.2.5 Analytische Lösung	17
2.2.6 Numerische Lösungen.....	19
2.2.7 Anzahl der Eigenformen.....	29
2.2.8 Modellierung des Tragwerks.....	30
2.2.9 Modellierung des Zuges	31

2.2.10	Resonanz- und Aufhebungseffekte.....	32
2.3	Tragwerkskennwerte.....	38
2.3.1	Quellen der Brückenparameter.....	38
2.3.2	Spannweiten.....	40
2.3.3	Eigenfrequenzen von Brückentragwerken.....	41
2.3.4	Tragwerksmasse.....	43
2.3.5	Biegesteifigkeit.....	44
2.3.6	Tragwerksdämpfung.....	45
2.4	Zugparameter.....	47
2.5	Grenzwerte.....	49
2.5.1	Erfordernis einer dynamischen Berechnung.....	49
2.5.2	Nachweis der Grenzzustände.....	51
2.5.3	Verformungen.....	51
2.5.4	Beschleunigungsgrenzwerte.....	52
2.6	Fahrzeug-Brücke Interaktion.....	54
2.7	Erkenntnisse aus Messungen.....	56
2.8	Anmerkungen zu Modellgenauigkeiten.....	60
3.	Einfache Tragwerksmodelle.....	63
3.1	Allgemeines zur Modellierung von Brücken.....	63
3.2	<i>Bernoulli-Euler</i> -Balken.....	65
3.3	Timoshenko-Balken.....	66
3.4	Verhältnis Spannweite zu Breite.....	68
3.5	Tragwerksschiefe.....	71
3.6	Lagerversatz.....	80
3.7	Rahmentragwerke.....	84
3.8	Modellierung des Untergrundes.....	91
3.8.1	Allgemeine Erkenntnisse aus der Literatur.....	91
3.8.2	Balken mit elastischer Lagerung.....	92
3.8.3	Einmassenschwinger-Analogon.....	95
3.8.4	Beispiele zum Einfluss der Auflagernachgiebigkeit auf die erste Eigenfrequenz.....	100

3.8.5	Grenzwertbetrachtung zum Einfluss der Auflagernachgiebigkeit auf die Eigenfrequenzen des Tragwerks	103
3.9	Allgemeines zur Modellierung des Gleiskörpers	106
3.10	Einfluss von durchgehendem Schotterbett.....	107
3.11	Vertikale Steifigkeit des Schotterkörpers.....	110
4.	Schubsteifigkeit des Schotterbettes.....	116
4.1	Auszüge aus der Literatur und Normvorgaben.....	116
4.2	Scherwiderstand aus Schotterkennwerten.....	126
4.2.1	Erkenntnisse zur Schubsteifigkeit des Schotters aus <i>Povse</i> [126]	130
4.2.2	Ermittlung des Schubsteifigkeit des Schotters aus Großversuchen der TU Wien	132
4.2.3	Zusammenfassung der Erkenntnisse.....	139
4.3	Abschätzung der Relativverschiebung im Schotter	140
4.3.1	Hebelarm von Brückentragwerken	140
4.3.2	Drehwinkel und Relativverschiebung	143
4.4	Modellierung der Verbundwirkung des Schotters	146
4.4.1	Charakteristik der Schotterfeder	146
4.4.2	Modellierung des Vorlandbereichs.....	148
4.4.3	Modellierung des Schubverbunds im Tragwerksbereich	157
4.4.4	Nachrechnung Versuche <i>Mähr</i>	172
4.4.5	Gesamtmodell für Tragwerk und Vorland.....	177
4.4.6	Validierung des Modells durch ein FEM-Modell.....	184
4.4.7	Anpassung der Nachrechnung der <i>Mähr</i> Versuche.....	200
4.4.8	Untersuchungen zum Einfluss des Schotteroberbaus auf die Grundschwingungsfrequenz des Tragwerks	202
4.5	Vergleich mit Messungen.....	205
5.	Schlussfolgerungen und Ausblick	210
	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen.....	210
	Ausblick.....	214
Anhang A.	Züge und Zugmodelle	216

A.1	Railjet.....	217
A.2	ICE 2.....	217
A.3	ICE 3.....	218
A.4	ICE 4.....	218
A.5	ETR500Y	219
A.6	Alfa Pendular HST.....	219
A.7	Green Train.....	220
A.8	Shinkansen.....	220
A.9	TGV	220
A.10	Thalys.....	221
A.11	Eurostar.....	221
A.12	AVE S-100 HST	222
A.13	Taurus 1116.....	222
A.14	HSLM-A Lastmodelle	223
Anhang B. Brückendaten		224
B.1	Frýba.....	224
B.2	ERRI Reports.....	225
B.3	Tragwerke ÖBB	226
B.4	Tragwerke Rauert.....	227
Literaturverzeichnis		228

Nomenklatur und Symbole

Englische Fachbegriffe und Eigennamen sind *kursiv* gesetzt. Vektoren werden mit **fett** gesetzten Kleinbuchstaben und Matrizen mit **fett** gesetzten Großbuchstaben bezeichnet. Komplexwertige Variablen sind mit einem Querstrich über dem betreffenden Symbol gekennzeichnet.

Die nachfolgenden Listen enthalten alle Symbole und Abkürzungen, die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet werden. Die Symbole und Abkürzungen werden im Text erläutert, wenn sie das erste Mal vorkommen.

Punkte über einem Symbol bezeichnen Ableitungen nach der Zeit: \dot{w} , \ddot{w} , \dddot{w} , ...

Tiefgestellte x mit vorangestelltem Beistrich bezeichnen Ableitungen nach dem Ort: $w_{,x}$, $w_{,xx}$, $w_{,xxx}$, ...

Abkürzungen

ADM	<i>Additional Damping Method</i>
BAM	Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung
BE	<i>Boundary Elements</i>
BEB	Bernoulli Euler Balken
BZ	Betriebszüge
DIM	<i>Detailed Interaction Model</i>
EF	Eigenfrequenz
EF1, EF2, EF3 . . .	1., 2., 3. ... Eigenform
EFDD	<i>Enhanced Frequency Domain Decomposition</i>
EKM	Einzelkraftmodell
EMS	Einmassenschwinger
ERRI	<i>European Rail Research Institute</i>
EW	Endwagen
FBI	Fahrzeug-Brücke Interaktion

FEM	Finite Elemente Methode
HSLM	<i>High Speed Load Model</i>
LM71	Lastmodell 71
LV	Lastverteilung
MKM	Mehrkörpermodell
MLM	<i>Moving Load Model</i>
MW	Mittelwagen
PVK	Prinzip der virtuellen Kräfte
SDOF	<i>Single Degree of Freedom</i>
SIM	<i>Simplified Interaction Model</i>
SSI	<i>Soil Structure Interaction</i>
SW	Schwerlastmodell
SW	Seitenwagen
TBI	<i>Train Bridge Interaction</i>
TK	Triebkopf
UBI	Untergrund Bauwerk Interaktion
WIB	Walzträger in Beton

Lateinische Buchstaben

a	Koeffizient
$a(t)$	Beschleunigung
a_0	dimensionslose Frequenz
a_i	Koeffizienten der Anpassung
A	Querschnittsfläche
A	Koeffizient
A_1, A_2, A_3, A_4	Koeffizient
A'	Koeffizient
\tilde{A}	Schubfläche
\mathbf{A}^*	Systemmatrix
A_{Fund}	Grundrissfläche des Fundamentes

A_{zz}	Trägheitsmoment eines Querschnitts
b	Koeffizient
b	Radsatzabstand
B	Definitionsbereich
B	Tragwerksbreite
B	Koeffizient
B'	Koeffizient
\mathbf{B}^*	Eingangsmatrix
c	Koeffizient
c	Dämpfungsmaß
c	Haftwiderstand
c_k	k -te modale Dämpfung
c_{krit}	kritische Dämpfung
c_φ	Drehfedersteifigkeit
\mathbf{C}	Dämpfungsmatrix
C	Koeffizient
C	Skalierungsfaktor
C'	Koeffizient
\mathbf{C}^*	Ausgabematrix
C_1	Skalierungsfaktor
C_{var}	Skalierungsfaktor für nichtlineare Schottersteifigkeit
d	Länge über Puffer
d_i	Lastabstand zur ersten Last
$D\{\dots\}$	Differentialoperator
D	Koeffizient
D'	Koeffizient
\mathbf{D}^*	Ausgabematrix
D_n	Dämpfungsparameter
e_L	Lagerversatz
E	Elastizitätsmodul
EA	Dehnsteifigkeit

EA_{Schiene}	Dehnsteifigkeit der Schienen
EA_{zz}	Biegesteifigkeit
$EA_{zz,Wand}$	Biegesteifigkeit der Auflagerwand
EI	Biegesteifigkeit
f_0	Grundfrequenz
$f_{0,agb}$	abgeschätzte Grundfrequenz
$f_{0,ang}$	angenäherte Grundfrequenz
$f_{1,res}$	erste Resonanzfrequenz
f_j	j -te Eigenfrequenz
$f_{M,j}$	Erhöhungsfaktor für die j -te modale Masse
f_n	n -te Biegeeigenfrequenz
f_{max}	höchste berücksichtigte Frequenz
$(f_s)_i$	nichtlineare Federkraft zum Zeitpunkt i
$f_{s,1}$	Schwingungsfrequenz
$f_{\omega,j}$	Erhöhungsfaktor für die j -te Eigenfrequenz
F_0	Durchschubwiderstand
F_A	Anregungsfrequenz aus Lastabstand
F_A	primäre Anregungsfrequenz
F_A	Horizontalkraft am Auflager
F_{AN}	Einflussfaktor der Auflagernachgiebigkeit
F_i	Kraft in der i -ten Schiene
F_k	Widerstandskraft
$F_{k,app}$	approximierte Widerstandskraft
F_L	Längenfaktor
F_R	Schubkraft
F_{Sch}	Normalkraft in der Schiene
F_v	Anregungsfrequenz aus Überfahrtgeschwindigkeit
F_V	Auflast
G	Schubmodul
$G\tilde{A}$	Schubsteifigkeit
h	Höhe der Auflagerwand

h	Hebelarm zwischen Schienenschwerpunkt und Lagerdrehpunkt
h	Höhe der elastischen Schicht
H	Tragwerkshöhe
$H(\tau)$	<i>Heaviside</i> Funktion
i	ganzzahlige Konstante
IT_i	i -ter Integrationsterm
j	ganzzahlige Konstante
k	ganzzahlige Konstante
k_{Anf}	Anfangssteifigkeit
k_{Ersatz}	Ersatzfedersteifigkeit des Gleises
$(k_i)_{sek}$	Sekantenmodul zum Zeitpunkt i
$(k_i)_T$	Tangentenmodul zum Zeitpunkt i
k_k	k -te modale Steifigkeit
k_{Koppl}	Kopplungssteifigkeit in der Schotterlängsfuge
k_s	Schubsteifigkeit des Schotters
$k_{s,app}$	approximierte Schubsteifigkeit des Schotters
$k_{s,\ddot{a}qu}$	äquivalente Schubsteifigkeit
k_v	Steifigkeit der Auflagerfeder
k_v	vertikale Schottersteifigkeit
$k_{v,B}$	vertikale Schottersteifigkeit über der Brücke
$k_{v,D}$	vertikale Schottersteifigkeit über dem Dammkörper
k_{Vor}	Ersatzsteifigkeit des Vorlandes
k_x	Wegfedersteifigkeit
k_φ	Drehfedersteifigkeit
K	Parameter
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
K_L	Lastfaktor
K_M	Massenfaktor
K_{Sch}	Schubanpassungsfaktor
K_{vor}	Formfunktion der Vorlandfeder
L	Spannweite

L'	äquivalente Spannweite
L_A	Lastabstand
L_v	Einleitungslänge
L_ε	Dehnlänge
L_Φ	maßgebende Länge
m	Fundamentmasse
m_{eff}	effektive Masse
m_{fiktiv}	fiktive Masse
m_k	k -te modale Masse
M	Biegemoment
\mathbf{M}	Massenmatrix
M_a	Biegemoment an der Stelle a
M_t	Gesamtmasse
n	Anzahl der Ansatzfunktionen
n	ganzzahlige Konstante
n_0	Grundfrequenz
N	Anzahl der Knotenpunkte
$N_{FG,K}$	Anzahl der Freiheitsgrade
N_P	Anzahl der Lasten
N_W	Wagenanzahl
$p(x, t)$	Lastfunktion
\mathbf{p}	Lastvektor
p_i	Belastung zum Zeitpunkt t_i
$P(\dots)$	Versagenswahrscheinlichkeit
P_i	Einzellast
$q_j(t)$	Generalisierte Koordinate (j -te Gewichtungsfunktion der)
$q_i(t)$	Knotenpunktverformung
$\mathbf{q}(t)$	Vektor mit generalisierten Koordinaten
r	äquivalenter Kreisradius
r	Schwerachsenabstand
r_I, r_{II}	Schwerpunkt Abstand von Balken I bzw. Balken II zur Schubfuge

s	Achsabstand zwischen zwei Wagen
t	Zeit
t	Höhe des Fundamentkörpers
t_i	Zeitpunkt
$t_{\ddot{u}}$	Überfahrdauer
T	kinetische Energie
T	Schubfluss
u	Relativverschiebung
u_0	Grenzverschiebung
u_A	Verschiebung am Auflager
u_T	Horizontalverschiebung des Tragwerks
v	Geschwindigkeit in m/s
$v(\xi, t)$	Verformungen zwischen den Knotenpunkten
\mathbf{v}_0	Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt $t = 0$
$v_{can,n,m}$	Aufhebungsgeschwindigkeit
$v_{krit,j,l}$	kritische Geschwindigkeit
v_s	Schwerwellengeschwindigkeit
V	Geschwindigkeit in km/h
$w(x, t)$	Verschiebung in z-Richtung
$w^*(x, t)$	Näherung für die Verschiebung in z-Richtung
\mathbf{w}_0	Verschiebungsvektor zum Zeitpunkt $t = 0$
x	Lagekoordinate
x_s	Laufkoordinate
y_{dyn}	dynamische Ergebnisgröße
y_{stat}	statische Ergebnisgröße
$\mathbf{y}(t)$	Koordinatenvektor im Zustandsraum

Griechische Buchstaben

α	Koeffizient
β	Koeffizient

β	Parameter für die Zeitschrittintegration
γ	Parameter für die Zeitschrittintegration
γ_S	Wichte Schotter
$\Gamma_i(t)$	Funktion zur Beschreibung des Lastterms
δ	Variation
δ	Vertikalverformung
δ_V	Vertikalverformung
$\delta(x)$	<i>Diracsche</i> Deltafunktion
δA	virtuelle Arbeit
$\delta A^{(a)}$	virtuelle äußere Arbeit
$\delta A^{(i)}$	virtuelle innere Arbeit
δM_a	virtuelles Moment an der Stelle a
Δf	Frequenzfehler, Frequenzabweichung
Δp_i	i-tes Lastinkrement
Δt	Zeitschritt
Δt_{krit}	kritischer Zeitschritt
$\Delta \zeta$	Zusatzdämpfung
ζ	<i>Lehrsche</i> Dämpfungsmaß
ζ_k	<i>Lehrsche</i> Dämpfungsmaß der k-ten Eigenform
κ	Steifigkeitsverhältnis
$\kappa(x)$	Verkrümmung an der Stelle x
λ	Eigenwert
λ_j	j-ter Eigenwert
λ_s	Stabschlankheit
$\tilde{\lambda}_s$	Schubslankheit
μ	Massenbelegung
$\Theta_i(t)$	Knotenpunktverdrehungen
ρ	Dichte
σ	Vertikalspannung
τ_f	Schwerwiderstand
ν	Querdehnzahl

$\phi_j(x)$	j-te Ansatzfunktion für $w(x, t)$
Φ	Schwingfaktor
Φ, Φ_2	dynamischer Beiwert
Φ	Eigenvektormatrix
$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$	quadratische reelle Matrizen
φ	Tragwerksschiefe
φ	Auflagerdrehwinkel
φ	Reibungswinkel
φ'	dynamischer Zuwachs
φ''	Zuwachs aus Gleisstörungen und Fahrzeugunregelmäßigkeiten
φ_a	Verdrehung an der Stelle a
$\varphi_{\text{äqu}}^*$	Äquivalenter Mindestreibungswinkel
$\psi_i(\xi)$	Ansatzfunktion der Finite Elemente
Ψ	Schwingbeiwert
ω	j-te Eigenkreisfrequenz
ω_0	Grundkreisfrequenz
$\omega_{1, \text{res}}$	erste Resonanzkreisfrequenz
$\omega_{1, \text{app}}$	Abgeschätzte erste Schwingungskreisfrequenz
$\omega_{d, n}$	n-te gedämpfte Eigenkreisfrequenz
ω_D	gedämpfte Eigenkreisfrequenz
$\omega_{j, RS}$	j-te Eigenfrequenz des <i>Timoshenko</i> Balkens
ω_n	n-te ungedämpfte Eigenkreisfrequenz
$\omega_{s, 1}$	Schwingungskreisfrequenz
Ω	Anregungskreisfrequenz

1. Einleitung

1.1 Motivation und Problemstellung

Durch den verstärkten Ausbau des Hochgeschwindigkeitsverkehrs und damit einhergehenden höheren Streckengeschwindigkeiten werden neue Anforderungen an Eisenbahnbrücken gestellt. Diese ergeben sich zum einen zur Einhaltung des Fahrgastkomforts und zum anderen zur Gewährleistung der Sicherheit. Durch den Hochgeschwindigkeitsverkehr rücken vor allem dynamische Aspekte in den Vordergrund, denen bei geringen Geschwindigkeiten noch wenig Bedeutung zugemessen wird. Im Besonderen ist hier die Resonanz hervorzuheben. Resonanzeffekte bei Zugüberfahrten können zu übermäßigen vertikalen Beschleunigungen und in weiterer Folge zu Gleisauflockerungen führen. Diese können Gleislagefehler zur Folge haben und somit im Extremfall zu einer Zugentgleisung führen. *Ein Beispiel dafür ist die vorübergehende Schließung der TGV Strecke von Paris nach Lyon. In diesem Fall wurden an mehreren Brücken überhöhte Beschleunigungen gemessen, die zu einer Verflüssigung des Gleisschotters und im Weiteren zur Entgleisungsgefahr geführt haben (siehe [1], sinngemäß aus [2] übernommen).*

Um dem vorzubeugen, wird die zulässige Vertikalbeschleunigung des Tragwerkoberbaues normativ beschränkt (siehe [3]). Für den Nachweis der Einhaltung dieser Beschränkungen sind dynamische Berechnungen und Messungen erforderlich. Gerade bei Brückenneubauten oder bei der Einführung eines neuen Zugmodells sind dynamische Überfahrtsberechnungen von besonderer Bedeutung. Eine detaillierte Modellierung des Zuges und des Tragwerks führt zu einer sehr zeitintensiven Berechnung. Speziell wenn ganze Streckenabschnitte zu untersuchen sind bzw. wenn viele unterschiedliche Zugkonfigurationen in Betracht gezogen werden müssen, wird gerne auf eine einfache Modellierung des Zuges und/oder der Brücke zurückgegriffen. Diese vereinfachten Modelle sind zwar nicht in der Lage alle Effekte zu erfassen, sie werden jedoch oft für eine erste Beurteilung der Situation herangezogen. Das Brückentragwerk wird dazu oft nur mittels eines einfachen Balkenmodells erfasst. Daher stellt sich die Frage, inwieweit diese einfachen Modelle die dynamischen Eigenschaften des realen Tragwerks abbilden können. Gerade für Resonanzmechanismen sind dabei die Eigenfrequenzen von besonderer Bedeutung.

Eine wichtige Rolle kommt auch der Modellierung des Schotteroberbaus zu. Bereits *Mähr* [4] hat gezeigt, dass eine reine Berücksichtigung des Oberbaukörpers als Masse die tatsächliche Systemfrequenzen nicht abbilden kann. Um das dynamische Systemverhalten richtig einschätzen zu können ist somit ein einfaches Konzept zur adäquaten Abbildung des Schotterverhaltens erforderlich.

1.2 Zielsetzung und Fragestellungen

Die Fragestellungen, die in dieser Arbeit behandelt werden, ergeben sich infolge von Weiterentwicklungen im Eisenbahnverkehr. Durch die Errichtung von Hochgeschwindigkeitsstrecken wurden neue Nachweiskriterien für Brückentragwerke erforderlich. Unter anderem sind für Tragwerke, wenn gewisse Anforderungen erfüllt werden, dynamische Berechnungen notwendig. Um eine Gleisdestabilisierung zu verhindern und somit die Entgleisungssicherheit der Züge zu gewährleisten, müssen Grenzwerte für die maximale Oberbaubeschleunigung von Brückentragwerken eingehalten werden.

Im Eurocode 1-2 [3] sind die Voraussetzungen für die Erforderlichkeit von dynamischen Berechnungen von Eisenbahnbrücken geregelt und die Grundsätze für deren Durchführung festgelegt. Diese Regelungen basieren großteils auf den Erkenntnissen des *European Rail Research Institute ERRI*, dokumentiert in den ERRI Reports aus dem Jahre 1999. Der Zug darf dabei als Folge von Einzelkräften (Einzelkraftmodell EKM, *engl.: moving load model MLM*) modelliert werden. In der Norm sind verschiedene Hochgeschwindigkeitslastmodelle HSLM (Größe und Anzahl der Einzelkräfte und deren Abstand) definiert, die in Summe die Charakteristika aller gängigen Hochgeschwindigkeitszüge in Europa abdecken sollen. Durch eine dynamische Berechnung einer Brücke mit jedem dieser Modelle sollten somit alle möglichen Belastungsszenarien abgedeckt sein.

Im Zuge der Effizienzsteigerung im Bahnverkehr werden immer wieder neue Hochgeschwindigkeitszüge entwickelt. Durch Optimierungen kommt es zu Änderungen in den Längen und Massenverteilungen der Zuggarnituren. Die Lasten- und Abstandsverhältnisse dieser neuen Züge können teilweise nicht mehr durch die im Eurocode enthaltenen HSLM Lastmodelle abgedeckt werden. Daher ist bei der Zulassung neuer Züge eine Überprüfung aller befahrenen Brückentragwerke auf die neuen Belastungskonfigurationen notwendig. Die Anzahl der zu überprüfenden Brücken kann dabei schnell in die Tausende gehen. Für die hohe Zahl von somit erforderlichen Simulationen wären Überfahrtsberechnungen mit einer detaillierten Modellierung der Tragwerke und der Züge sehr zeit- und kostenintensiv. Vor allem die Erstellung genauer Tragwerksmodelle würde sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Daher werden für solche Berechnungen vereinfachte Zugs- und Tragwerksmodelle verwendet. Der Zug wird dabei als MLM und die Brücke als einfaches Stabwerkmodell bzw. für Einfeldträger als *Bernoulli-Euler*-Balken BEB abgebildet. Diese Modellierung stellt zwar eine Möglichkeit dar, eine Vielzahl an Tragwerken mit relativ geringem Aufwand zu untersuchen, es stellt sich jedoch die Frage, wie genau damit die reale Situation abgebildet werden kann.

In den Untersuchungen der ERRI wurden die Brückentragwerke als Einfeldträger modelliert. Inwiefern diese Modellierung zulässig ist, ist fraglich. Vor allem bei kurzen Tragwerken ist zweifelhaft, ob durch einen einfeldrigen Balken das Tragwerksverhalten adäquat abgebildet werden kann. Daher werden in dieser Arbeit gewisse Tragwerkselemente, die Einfluss auf das Tragverhalten haben, aufgezeigt und Vorschläge zur einfachen Erfassung deren Effekte gegeben.

Je kürzer das Tragwerk, desto größer ist etwa der Einfluss des Schotteroberbaus auf das Systemverhalten. Daher muss einer wirkungsäquivalenten Abbildung des Oberbaus, gerade bei kurzen Tragwerken, die den Großteil der vorhandenen Brücken darstellen, eine große Bedeutung beigemessen werden. Um die Auswirkung unterschiedlicher Lastmodellierungen richtig bewerten zu können, müssen sie in Relation zu den Vereinfachungen in der Tragwerksmodellierung und deren Auswirkungen betrachtet werden. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit Fragestellungen zur vereinfachten Abbildung von Tragwerken und zum Einfluss des Schotteroberbaus bearbeitet:

- Welche Brückensysteme herrschen im Hochgeschwindigkeitseisenbahnnetz vor und welche dynamischen Kennwerte besitzen sie?
- Können diese Tragwerke durch ein einfaches Balkenmodell ausreichend genau beschrieben werden?
- Welchen Einfluss haben Tragwerkskennwerte wie Plattenbreite, Plattendicke, Lagerversatz, Tragwerksschiefe usw. auf die Eigenfrequenzen des Systems?
- Wie wirkt sich der Schotteroberbau auf die Biegesteifigkeit eines Tragwerks aus und wie groß ist die Einspannwirkung, die durch den Oberbau an den Auflagern erzeugt wird?
- Wie kann das Steifigkeitsverhalten des Gleisschotters beschrieben werden?
- Gibt es eine einfache Möglichkeit den Einfluss des Schotteroberbaus auf die dynamischen Kennwerte eines Balkentragwerks zu erfassen?

Die Fragestellungen werden grundsätzlich in einer zweidimensionalen Modellebene untersucht. Dabei werden für das Tragwerk nur Transversalschwingungen berücksichtigt, die mit Hilfe der *Bernoulli-Euler* Balkentheorie erfasst werden. Untersucht werden demnach nur schubstarre Balkentragwerke. Als Fahrzeugmodell dient das Modell der bewegten Einzelkräfte EKM (*engl.: moving load model MLM*).

Ein wesentlicher dynamischer Kennwert von Brückentragwerken ist die erste Biegeeigenfrequenz des Tragwerks. Sie bestimmt das dynamische Verhalten des Tragwerks im Wesentlichen. Daher werden in dieser Arbeit Vergleiche zwischen unterschiedlichen Modellen und Modellierungsgraden auf Basis der ersten Biegeeigenfrequenz angestellt.

1.3 Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit besteht aus drei Hauptteilen.

In **Kapitel 2** wird eine Einführung in die Brückendynamik gegeben. Es werden die Grundlagen zur dynamischen Berechnung von Eisenbahnbrücken unter der Belastung durch einen überfahrenden Zug erklärt und ein Überblick über verschiedenen Lösungsmethoden gegeben. Dabei werden gängige Modellierungen für Zug und Brücke gezeigt und es wird auf wesentliche dynamische Phänomene, die bei Zugüberfahrten auftreten können, eingegangen.

Des Weiteren erfolgt die Erhebung von exemplarischen Brücken und Zugkennwerten, die für die Durchführung einer realistischen Parameterstudie essentiell sind.

Aus der Literatur und aus am Institut durchgeführten Untersuchungen werden Erkenntnisse für dynamische Berechnungen und Messungen dargelegt, um einen Überblick über die vorhandenen Probleme und Fragestellungen zu geben.

In **Kapitel 3** wird der Einfluss unterschiedlicher Tragwerksparameter analysiert. Dabei wird die Auswirkung der einzelnen Parameter (z.B.: Plattenbreite, Lagerschiefe, Lagerversatz usw.) auf die Eigenfrequenz einer äquivalenten Balkenbrücke untersucht. Es werden Konzepte vorgestellt, mit denen die Eigenfrequenz des „Ersatzbalkens“ auf die der tatsächlichen Struktur angepasst werden kann.

Untersucht wird auch der Einfluss der Untergrundnachgiebigkeit auf die Eigenfrequenzen des Brückensystems. Dies erfolgt anhand einfacher Tragwerksmodelle und Analogien, da die einfache Anwendbarkeit der Modelle in dieser Arbeit im Vordergrund steht.

Es wird auch ein kurzer Überblick über die unterschiedlichen Wirkungsweisen des Schotteroberbaus gegeben.

Kapitel 4 widmet sich der Erhöhung der Systemsteifigkeit durch den Schotteroberbau. Es erfolgt eine Grundlagenenerhebung über bisherige Untersuchungen zum Schubverhalten des Gleisschotters. Daraus wird ein nichtlineares Modell für das Schubverhalten des Schotters erstellt. Mit Hilfe dieses Modells wird der Einfluss des Schotteroberbaus auf die Systemsteifigkeit und in weiterer Folge auf die Eigenfrequenzen der Brücken untersucht.

In **Kapitel 5** werden die Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst und es werden Vorschläge für weiterführende Untersuchungen gegeben.

2. Generelle Grundlagen und Randbedingungen

2.1 Einführung

Brücken dienen im Allgemeinen dazu, die Verbindung zwischen zwei Punkten herzustellen und Personen oder Gegenstände den Transfer von einem Punkt zum anderen zu ermöglichen. Nicht das ständige Verweilen von Objekten auf der Brücke sondern das Bewegen dieser über die Brücke ist beabsichtigt. Die Nutzung erfolgt demnach nicht statisch sondern dynamisch.

Im gegenständlichen Fall von Eisenbahnbrücken erfolgt die Nutzung durch die Überfahrt von Zügen. Eine Brücke wird im einfachsten Fall als gelenkig gelagerter Biegebalken mit Spannweite L modelliert. Die grundlegendste Art, die Überfahrt eines Zugs mit konstanter Geschwindigkeit v abzubilden, besteht in der Modellierung durch eine Folge von Einzellasten P_i (siehe Abbildung 2.1).

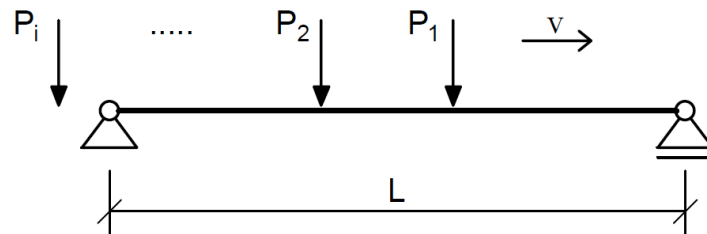


Abbildung 2.1: Einfeldträgermodell einer Brücke unter Einzellasten

Um die Beanspruchung des Tragwerks durch diese Lasten zu ermitteln, gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten:

(a) Durchführung einer statischen Berechnung (unterschiedliche Lastpositionen) und Erhöhen der Ergebnisse durch einen dynamischen Faktor. Dies ist die historisch gewachsene Methode, die etwa auch im Eurocode (EC1-2 [3]) vorgesehen ist. In der Norm wird dieser dynamische Faktor als Schwingfaktor Φ bezeichnet. Dieser entspricht aber nicht direkt dem, als Schwingbeiwert Ψ bezeichneten, dynamischen Vergrößerungsfaktor. Einen Überblick zur Entwicklung dieses Konzepts findet man unter anderem in [5].

(b) Durchführung einer tatsächlichen dynamischen Berechnung. Ein dynamischer Vergrößerungsfaktor ist jedoch nicht in der Lage gewisse Effekte wie Resonanz abzubilden. Daher wird auch im EC die Durchführung dynamischer Berechnungen unter gewissen Umständen vorgeschrieben.

2.2 Grundlagen der dynamischen Berechnung

Bei der Simulation einer Zugüberfahrt, also einer tatsächlichen dynamischen Berechnung, muss die Bewegungsgleichung des Systems gelöst werden. Dafür stehen mehrere Methoden zur Verfügung, die alle ihre Vor- und Nachteile haben.

Das dynamische Verhalten eines Systems wird durch ihre Bewegungsgleichung definiert. Um diese zu bestimmen, muss das Tragwerk modelliert werden. Dies kann für einfache Systeme analytisch oder mittels FEM (Finite Elemente Methode) geschehen. Für komplexere Strukturen wird jedenfalls der Einsatz von finiten Elementen erforderlich. Durch Lösen eines Eigenwertproblems lassen sich aus der Bewegungsgleichung eines linearen Systems die Eigenformen und zugehörigen Eigenfrequenzen ermitteln. Um die dynamische Systemantwort auf eine Belastung zu bestimmen, muss die Bewegungsgleichung gelöst werden. Dafür werden derzeit im Zeitbereich im Wesentlichen zwei unterschiedliche Methoden verwendet.

- Numerische Zeitschrittintegration des Gesamtsystems: Diese Methode ist auf der einen Seite sehr rechenintensiv, auf der anderen Seite bietet sie viele Möglichkeiten und Freiheiten in der Modellierung. Es kann dadurch auch ein nichtlineares Systemverhalten abgebildet werden.
- Modale Analyse: Diese Methode erlaubt eine erheblich schnellere Berechnung. Dies geht jedoch auf Kosten der Modellierungsfreiheiten. So kann etwa ein nichtlineares Materialverhalten nicht erfasst werden. Auch die Dämpfung des Systems muss gewisse Anforderungen erfüllen und kann nicht frei gewählt werden.

Das folgende Kapitel gibt einen Überblick über den Aufbau einer dynamischen Berechnung und eine kurze Erklärung der zugrundeliegenden Theorien.

2.2.1 Formulieren und Diskretisieren der Bewegungsgleichung

Mit dem Übergang von einem statischen auf ein dynamisches und damit zeitabhängiges System erweitert sich die Differentialgleichung der Biegelinie um zeitabhängige Terme. Für einen *Bernoulli-Euler*-Balken (schubstarr und Vernachlässigung der Rotationsträgheit) mit über die Länge konstanter Biegesteifigkeit EA_{zz} und Massenbelegung μ , der durch eine Lastfunktion $p(x, t)$ belastet wird, ergibt sich gemäß *Ziegler* [6] die Bewegungsgleichung wie folgt (siehe auch *Mähr* [4]).

$$EA_{zz} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = p(x, t) \quad (2.1)$$

Es handelt sich dabei um eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Das geschwindigkeitsproportionale (viskose) Dämpfungsmaß wird hier mit c bezeichnet. Um eine kompaktere Schreibweise zu ermöglichen wird eine partielle Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt über der Variablen dargestellt und eine partielle Ableitung nach der Koordinate x durch den Index „,x“ gekennzeichnet. Dadurch lässt sich die Bewegungsgleichung folgendermaßen anschreiben:

$$EA_{zz}w_{,xxxx} + \mu\ddot{w} + c\dot{w} = p \tag{2.2}$$

Ein kontinuierlicher Balken hat unendlich viele Freiheitsgrade. Zur Lösung der Differentialgleichung wird eine Diskretisierung durchgeführt. Dies kann auf unterschiedliche Arten erfolgen.

2.2.1.1 Verfahren von Ritz und Galerkin

Eine Möglichkeit stellt die Verwendung des *Ritz*schen Näherungsansatzes dar (vgl. [6]). Die von der Zeit t und der Lagekoordinate x abhängige Verformung $w(x, t)$ wird dabei durch die Summe von n gewichteten Form- bzw. Ansatzfunktionen $\phi_j(x)$ angenähert,

$$w(x, t) \approx w^*(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)q_j(t) \tag{2.3}$$

In Abbildung 2.2 sind *Ritz*sche Ansatzfunktionen für einen *Bernoulli-Euler*-Balken dargestellt.

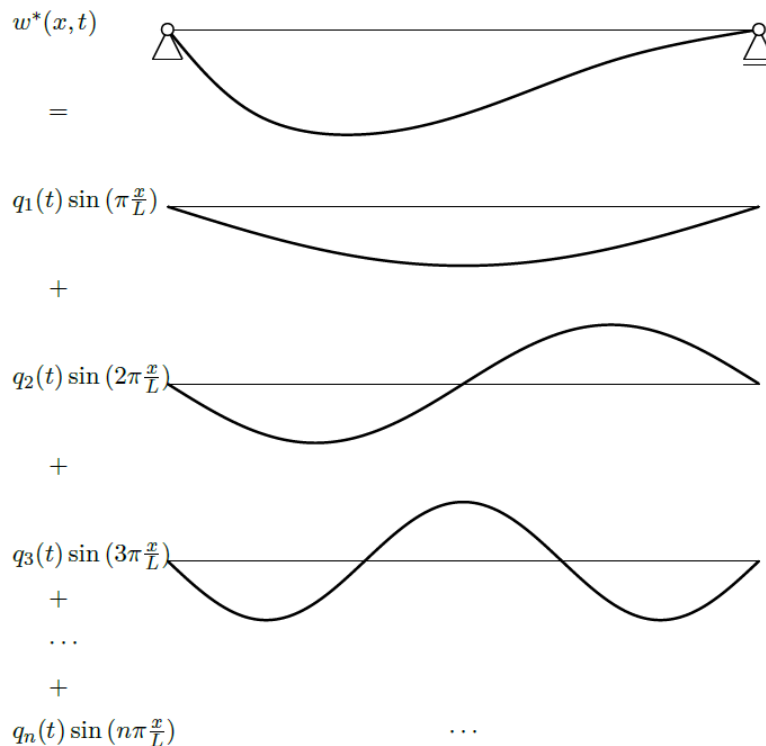


Abbildung 2.2: Gewichtete *Ritz*sche Ansatzfunktionen für einen Biegebalken, [7]

Die von der Zeit abhängigen Gewichtungsfunktionen $q_j(t)$ werden als generalisierte Koordinaten bezeichnet und stellen die Amplituden der jeweiligen Schwingungsformen dar. Die Formfunktionen können prinzipiell beliebig gewählt werden, solange gewisse Bedingungen erfüllt sind (vgl. [8] Seite

228, [4] Seite 11 oder [6] Seite 455 ff). Sie müssen die kinematischen und sollen die dynamischen Randbedingungen des Balkens erfüllen, ein linear unabhängiges Set darstellen und Ableitungen bis zu der Ordnung besitzen, die das gewählte Lösungsverfahren vorschreibt. Werden für die Formfunktionen die Eigenfunktionen verwendet, so spricht man von der *Modalen Analyse*. Werden zusätzlich, entsprechend der unendlich vielen Freiheitsgrade des kontinuierlichen Systems, unendlich viele Ansatzfunktionen berücksichtigt ($n = \infty$), so entspricht $w^*(x, t)$ der exakten Lösung $w(x, t)$.

Zur Erklärung des Differentialgleichungsverfahrens nach *Galerkin* [6] wird zunächst der Differentialoperator $D\{w\}$ eingeführt. Für die strenge Lösung gilt [6]:

$$D\{w\} = 0 \quad (2.4)$$

Werden mit dem *Ritzschen* Ansatz nicht nur die kinematischen Randbedingungen (beziehen sich auf die Verformungen w und $w_{,x}$) sondern auch die dynamischen (beziehen sich auf die Schnittgrößen und somit auf $w_{,xx}$ und $w_{,xxx}$) erfüllt, so verlangt die *Galerkinsche* Vorschrift, dass bei Integration über den gesamten Definitionsbereich B von w^* , unabhängig von der Variation der generalisierten Koordinaten, gilt [6]:

$$\int_0^B D\{w^*\} \phi_j dx = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

Setzt man den Näherungsansatz (2.3) in die Bewegungsgleichung (2.2) ein, multipliziert - entsprechend der *Galerkinschen* Vorschrift (2.5) - alle Terme mit ϕ_k und integriert über die Balkenlänge L so ergibt sich:

$$\int_0^L \sum_{j=1}^n [EA_{zz} q_j \phi_{j,xxxx} + \mu \ddot{q}_j \phi_j + c \dot{q}_j \phi_j] \phi_k dx = \int_0^L p \phi_k dx \quad (2.6)$$

Durch Verwendung der folgenden Definitionen [4]

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_j \phi_k dx &= \Phi_{1,kj} \\ \int_0^L \phi_{j,xxxx} \phi_k dx &= \Phi_{4,kj} \\ \int_0^L p \phi_k dx &= p_k \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{1,11} & \dots & \Phi_{1,1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{1,k1} & \dots & \Phi_{1,kj} \end{bmatrix}, \quad \Phi_4 = \begin{bmatrix} \Phi_{4,11} & \dots & \Phi_{4,1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{4,k1} & \dots & \Phi_{4,kj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{bmatrix}$$

und Einführung der generalisierten Matrizen [4]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \mu \Phi_1 \\
 \mathbf{K} &= EA_{zz} \Phi_4 \\
 \mathbf{C} &= c \Phi_1
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

lässt sich Gleichung (2.6) in Matrixschreibweise darstellen.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p} \tag{2.9}$$

\mathbf{M} wird als generalisierte Massenmatrix, \mathbf{K} als generalisierte Steifigkeitsmatrix und \mathbf{C} als generalisierte Dämpfungsmatrix bezeichnet. Nach Lösen des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems für die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}(t)$ muss nur mehr in den *Ritzschen* Ansatz (2.3) eingesetzt werden, um die gesuchte Verformungsgröße $w(x, t)$ zu erhalten.

2.2.1.2 Finite Elemente Methode (FEM)

Eine andere Möglichkeit, ein System zu diskretisieren, stellt die Verwendung der Finiten Elemente Methode (FEM) dar. Diese Methode kann als Weiterentwicklung des Verfahrens nach *Ritz* und *Galerkin* angesehen werden. Ansatzfunktionen gemäß dem *Ritzschen* Näherungsverfahren sind für komplexere Strukturen schwierig zu bestimmen. Bei der FE-Methode werden die Ansatzfunktionen nicht mehr für die gesamte Struktur gewählt, sondern nur mehr für kleinere Teilabschnitte, den Finiten Elementen. Dadurch wird diese Methode universell einsetzbar. Die Knotenpunktverschiebungen an den Enden der Elemente stellen die Freiheitsgrade dar. Die Massen und Belastungen werden auf die Knotenpunkte umgelegt. Daher ist für die Genauigkeit dieses Verfahrens die Netzfeinheit von großer Bedeutung.

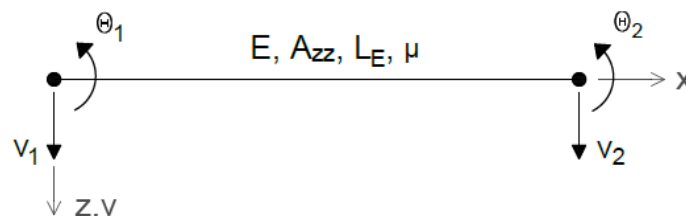


Abbildung 2.3: 2D *Bernoulli-Euler*-Balkenelement, [9]

Die Verformungen $v(\xi, t)$ zwischen den Knotenpunkten eines Stabtragwerks können als Linearkombination, der durch die Knotenpunktverformungen $q_i(t)$ gewichteten Ansatzfunktionen der Elemente $\psi_i(\xi)$, bestimmt werden,

$$v(\xi, t) = \sum_{i=1}^{2 N_{FG,K}} \psi_i(\xi) q_i(t) \tag{2.10}$$

ξ steht hier für die Laufoordinate eines Elements (in Abbildung 2.3 mit x bezeichnet), die Werte zwischen Null und der Elementlänge L_e annehmen kann. Mit $N_{FG,K}$ wird die Anzahl der Freiheitsgrade sprich Verformungsmöglichkeiten pro Knoten bezeichnet. Für einen Biegebalken können beispielsweise in jedem Knoten zwei Freiheitsgrade, die Knotenpunktverformung normal zur

Stabachse $q_{2i-1}(t) = v_i(t)$ sowie die Knotenpunktverdrehungen $q_{2i}(t) = \Theta_i(t)$, angesetzt werden (siehe Abbildung 2.3).

Basiert die Verformung auf *Bernoulli-Euler*-Balkenelemente, so ergeben sich als Ansatzfunktionen folgende vier *Hermitesche* Polynome [8]:

$$\psi_1(\xi) = 1 - 3 \left(\frac{\xi}{L_e} \right)^2 + 2 \left(\frac{\xi}{L_e} \right)^3 \quad (2.11)$$

$$\psi_2(\xi) = x - 2 L_e \left(\frac{\xi}{L_e} \right)^2 + L_e \left(\frac{\xi}{L_e} \right)^3 \quad (2.12)$$

$$\psi_3(\xi) = 3 \left(\frac{\xi}{L_e} \right)^2 - 2 \left(\frac{\xi}{L_e} \right)^3 \quad (2.13)$$

$$\psi_4(\xi) = -L_e \left(\frac{\xi}{L_e} \right)^2 + L_e \left(\frac{\xi}{L_e} \right)^3 \quad (2.14)$$

Für N Knoten erhält man somit $n = N * N_{FG,K}$ Knotenpunktverformungen q_j , die eine endliche Anzahl an Freiheitsgraden darstellt (siehe Abbildung 2.4). Es ergibt sich also ein lineares gewöhnliches Differentialgleichungssystem 2. Ordnung bestehend aus n gekoppelten Gleichungen,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (2.15)$$

\mathbf{M} bezeichnet die Massenmatrix, \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix und \mathbf{C} die Dämpfungsmatrix des Systems. \mathbf{p} stellt den Belastungsvektor dar. Die Verformungen q_1, q_2, \dots, q_n und deren Ableitungen sind dabei zu Vektoren zusammengefasst.

$$\mathbf{q} = (q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n)^T, \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_n)^T, \quad \ddot{\mathbf{q}} = (\ddot{q}_1 \quad \ddot{q}_2 \quad \dots \quad \ddot{q}_n)^T \quad (2.16)$$

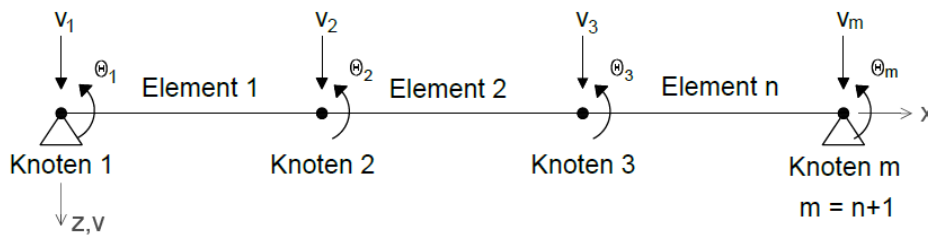


Abbildung 2.4: Diskretisierung eines Balkens mittels FEM, [9]

Die Systemmatrizen ($\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$) werden durch die Geometrie des Tragwerks und die Wahl der verwendeten Elemente definiert. Um den zeitlichen Verlauf der Verformungen zu erhalten, muss „nur“ das lineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (2.15) gelöst werden.

2.2.2 Lösung der Differentialgleichungen allgemein

Um den Zeitverlauf der Verformungsgrößen zu bestimmen, muss im Regelfall eine partielle Differentialgleichung gelöst werden. Für spezielle Fälle, wie etwa einen gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balken, der durch Einzelkräfte belastet wird, gibt es geschlossene analytische Lösungen. Für

allgemeine Systeme ist dies jedoch nicht mehr so einfach möglich. Wie oben gezeigt wurde, kann die Problemstellung auf das Lösen eines gewöhnlichen Differentialgleichungssystems 2. Ordnung (Gleichung (2.9) bzw. (2.15)) reduziert werden. Dazu stehen mehrere Möglichkeiten zur Verfügung. Der einfachste, jedoch rechenaufwendigste Zugang ist die numerische Zeitintegration. Eine andere Möglichkeit ist durch die *Modale Analyse* gegeben. Dabei wird durch modale Projektion bzw. modale Superposition (unter Ausnutzung der Orthogonalitätseigenschaften) das Gesamtsystem in ein Set von Ein-Freiheitsgradsystemen (Einmassenschwinger EMS, *engl.: single degree of freedom SDOF*) übergeführt. Diese können analytisch oder numerisch gelöst werden.

2.2.3 Modale Analyse

Die Modale Analyse liefert die exakte Lösung der Differentialgleichung. Sie ist grundsätzlich auf einen diskreten Mehrmassenschwinger genauso anwendbar, wie auf einen kontinuierlichen Balken mit theoretisch unendlich vielen Freiheitsgraden.

Bei Anwendung der Modalen Analyse auf ein System das durch die FEM diskretisiert wurde, wird der Vektor der Lagekoordinaten \mathbf{v} durch modale Projektion, sprich durch Entwicklung nach den Eigenformen (=Eigenvektoren) ϕ_j , in ein Set von q_j modalen Koordinaten transformiert, [10]

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{j=1}^n \phi_j q_j(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (2.17)$$

Die modalen (generalisierten) Koordinaten q_j werden zum Koordinatenvektor \mathbf{q} und die Eigenvektoren ϕ_j spaltenweise zur Modalmatrix Φ zusammengefasst, [10]

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n]^T \quad (2.18)$$

$$\Phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \quad (2.19)$$

Die Eigenvektoren ϕ_j und die Eigenkreisfrequenzen ω_j werden für das ungedämpfte System aus [8]

$$[\mathbf{K} - \omega_j^2 \mathbf{M}] \phi_j = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

bestimmt. Um eine andere als die triviale Lösung $\phi_j = \mathbf{0}$ zu erhalten, muss die Determinante für den Klammerausdruck in (2.20) für alle ω_j verschwinden. Unter der Voraussetzung der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} und der Massenmatrix \mathbf{M} resultieren folgende Orthogonalitätseigenschaften, [8]

$$\begin{aligned} \phi_j^T \mathbf{M} \phi_k = 0 \quad \text{und} \quad \phi_k^T \mathbf{M} \phi_k = m_k^* \quad \text{für } j \neq k &\rightarrow \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{diag}(m_k^*) \\ \phi_j^T \mathbf{K} \phi_k = 0 \quad \text{und} \quad \phi_k^T \mathbf{K} \phi_k = k_k^* \quad \text{für } j \neq k &\rightarrow \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{diag}(k_k^*) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Bei m_k^* , und k_k^* handelt es sich um die modale Masse und die modale Steifigkeit des k -ten Modes. Aus Einsetzen des Ansatzes (2.17) und linksseitiger Multiplikation des ungedämpften (streichen des Dämpfungsterms) Gleichungssystems (2.15) mit Φ^T ergibt sich:

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q}(t) + \Phi^T K \Phi q(t) = \Phi^T p(t) = p^*(t) \quad (2.22)$$

Durch die Orthogonalitätseigenschaften (2.21) entkoppelt das Gleichungssystem. Es ergibt sich für jede modale Koordinate q_k eine Differentialgleichung für einen äquivalenten (modalen) Einmassenschwinger, [10]

$$m_k^* \ddot{q}_k(t) + k_k^* q_k(t) = p_k^*(t) \quad (2.23)$$

p_k^* stellt dabei die k -te modale Kraft dar. Nach Division dieser Bewegungsgleichung durch die modale Masse erhält man folgende Form [10]:

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{1}{m_k^*} p_k^*(t) \quad (2.24)$$

Hierbei ist anzumerken, dass die Eigenkreisfrequenzen ω_k des Tragwerks durch die modale Projektion unbeeinflusst bleiben. Durch Lösen der Bewegungsgleichungen für die modalen Koordinaten q_k und Rückeinsetzen in den Ansatz (2.17) erhält man den gesuchten Zeitverlauf des Deformationsvektors.

Für gedämpfte Systeme erweitert sich das Gleichungssystem (2.22) um einen Dämpfungsterm, [10]

$$\Phi^T M \Phi \ddot{q}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{q}(t) + \Phi^T K \Phi q(t) = p^*(t) \quad (2.25)$$

Aus der Berücksichtigung der Orthogonalität der Eigenvektoren ergibt sich:

$$\mathbf{diag}(m_k) \ddot{q}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{q}(t) + \mathbf{diag}(k_k) q(t) = p^*(t) \quad (2.26)$$

Bis auf den Dämpfungsterm entkoppeln alle Terme des Gleichungssystems. Um auch hier eine modale Zerlegung durchführen zu können, muss der Dämpfungsterm ebenfalls entkoppeln (=orthogonal bezüglich der Eigenvektoren) und durch eine Diagonalmatrix darstellbar sein.

$$\Phi^T C \Phi = \mathbf{diag}(c_k^*) \quad (2.27)$$

Analog zu Einmassenschwinger, gilt für die modale Dämpfung c_k^* folgende Beziehung, [10]

$$c_k^* = 2 m_k^* \zeta_k \omega_k \quad (2.28)$$

Im Regelfall kann nicht davon ausgegangen werden, dass der Dämpfungsterm tatsächlich entkoppelt. Da die reale Dämpfung jedoch meist nicht bekannt ist und ein entkoppeln des Gleichungssystems eine wesentliche Vereinfachung darstellt, werden für die Dämpfung zumeist entsprechende Ansätze gewählt (gängige Ansätze der modalen Dämpfungskoeffizienten ζ_k finden sich in Abschnitt 2.2.4). Bei der Wahl eines solchen Ansatzes für die Dämpfung, entkoppelt das gesamte Gleichungssystem (2.26) und es ergibt sich wiederum für jede Eigenform ein äquivalenter Einmassenschwinger mit der entsprechenden Bewegungsgleichung in den modalen Koordinaten q_k , [10]

$$\ddot{q}_k(t) + 2 \zeta_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{1}{m_k^*} p_k^*(t) \quad (2.29)$$

Diese Einmassenschwinger können einzeln gelöst und durch Einsetzen in (2.17) zur Gesamtlösung aufsummiert werden.

Für einen kontinuierlichen Balken erfolgt die Modale Analyse durch modale Superposition. Dabei wird die Verformung w durch die unendliche Reihe der Eigenfunktionen $\phi_j(x)$ in die modalen Koordinaten $q_j(t)$ übergeführt, [8]

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) q_j(t) \quad (2.30)$$

Für praktische Anwendungen kann die unendliche Reihe jedoch durch n Glieder angenähert werden, [10]

$$w(x, t) \approx w^*(x, t) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) q_j(t) = \phi_1(x) q_1(t) + \dots + \phi_n(x) q_n(t) \quad (2.31)$$

Die Modale Analyse nutzt hierbei die Orthogonalität der Eigenfunktionen [10]

$$\int_0^L \phi_j \phi_k dx = 0 \quad \text{für } j \neq k \quad (2.32)$$

um das Gleichungssystem (2.9) zu entkoppeln. Wendet man diese Eigenschaften auf die Bewegungsgleichung (2.9) - hier nochmals angeführt -

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{p} \quad (2.9)$$

an, so sind nur die Diagonalelemente der Systemmatrizen \mathbf{M} und \mathbf{K} ungleich Null, [4]

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mu \Phi_1 = \mathbf{diag} \left(\int_0^L \mu \phi_k^2 dx \right) = \mathbf{diag}(m_k^*) \\ \mathbf{K} &= EA_{zz} \Phi_4 = \mathbf{diag} \left(\int_0^L EA_{zz} \phi_{k,xxxx} \phi_k dx \right) = \mathbf{diag}(k_k^*) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Wie beim diskreten Mehrmassenschwinger muss auch hier ein entkoppelnder Dämpfungsterm vorhanden sein um das System in modale Einmassenschwinger zu zerlegen. Dabei wird zunächst vom ungedämpften System ausgegangen (wodurch die Bewegungsgleichungen entkoppeln) und die viskose Dämpfung (analog zum Einmassenschwinger) nachträglich in die modale Bewegungsgleichung eingeführt, [10]

$$\ddot{q}_k(t) + 2\zeta_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \frac{1}{m_k^*} p_k(t) \quad (2.34)$$

dabei gilt [10]

$$\omega_k^2 = \frac{k_k^*}{m_k^*} \quad \text{und} \quad c_k^* = 2 m_k^* \zeta_k \omega_k \quad (2.35)$$

Bei m_k^* , k_k^* und c_k handelt es sich um die modale Masse, die modale Steifigkeit und die modale Dämpfung des jeweiligen Modes. Die Dämpfungsmatrix in (2.9) weist dadurch folgende Form auf,

$$\mathbf{C} = \mathbf{diag}(c_k^*) \quad (2.36)$$

Für den Ansatz der modalen Dämpfungskoeffizienten ζ_k wird abermals auf Abschnitt 2.2.4 verwiesen.

Nach separatem Lösen der Bewegungsgleichungen für die modalen Koordinaten ergibt sich nach Einsetzen in den Ansatz (2.31) durch Aufsummieren die Gesamtlösung. Anstelle der exakten Eigenfunktionen können für eine Näherung auch andere Funktionen verwendet werden, sofern diese bestimmte Anforderungen erfüllen (siehe Abschnitt 2.2.1.1). Hierbei spricht man dann vom *Ritz*-schen Näherungsansatz.

Die Bewegungsgleichungen der Einmassenschwinger können sowohl analytisch, als auch numerisch gelöst werden. Eine Lösungsmöglichkeit bietet sich mit der Verwendung des *Duhamelschen* Faltungsintegrals. Diese Methode basiert auf dem Superpositionsprinzip und ist somit nur für lineare Systeme gültig. Hierbei wird die Anregung in Einzelimpulse zerlegt. Die dynamische Antwort $q_k(t)$ eines modalen Einmassenschwingers auf eine allgemeine dynamische Anregung $p_k(t)$ ergibt sich zu [8]:

$$\begin{aligned} & q_k(t) \\ &= \frac{1}{m_k^* \omega_{d,k}} \int_0^t p_k(\tau) e^{-\zeta_k \omega_k (t-\tau)} \sin(\omega_{d,k} (t-\tau)) d\tau \\ &+ e^{-\zeta_k \omega_k t} \left(u_0 \cos(\omega_{d,k} t) + \frac{v_0 + \zeta_k \omega_k u_0}{\omega_{d,k}} \sin(\omega_{d,k} t) \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Hierbei kann die gedämpfte Eigenkreisfrequenz wie folgt bestimmt werden, [8]

$$\omega_{d,k} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad (2.38)$$

Unter Verwendung der Modalen Analyse und des *Duhamelschen* Integrals beschreibt *Mähr* [4] die analytische Lösung für einen gelenkig gelagerten Balken unter einer Folge von Einzelkräften. *Savin* [11] gibt diese Lösung für einen Balken mit unterschiedlichen Randbedingungen an.

Bei der Modalen Analyse wird mit vorab bestimmten Eigenformen gearbeitet. Die Eigenwertanalyse erfolgt somit nur einmal zu Beginn der Berechnungen. Der Hauptteil der Modalen Analyse besteht daher in der Ermittlung der Eigenformen und Eigenfrequenzen, sowie der Festlegung der relevanten Eigenformen. Durch die Reduktion der berücksichtigten Eigenformen und der Überführung in Einmassenschwinger kann der Rechenaufwand, im Vergleich zur Lösung des gekoppelten Gleichungssystems, erheblich reduziert werden. Nichtlineares Systemverhalten kann jedoch nicht abgebildet werden. Des Weiteren setzt die Modale Analyse das Entkoppeln der Dämpfungsmatrix voraus. Daher kommt meist die *Rayleigh*-Dämpfung oder die modale Dämpfung zum Einsatz, siehe [6], [4] oder [8]. Für kurze Tragwerke, die etwa auf Elastomerelementen gelagert sind oder bei

denen der Untergrund eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt, wird diese Art der Dämpfungsmodellierung problematisch. Da ein Großteil der Energiedissipation durch die Vertikalbewegung im Elastomer oder bzw. im Untergrund erfolgt, kann der Ansatz von modalen Dämpfungswerten zu einem falschen Systemverhalten führen. Dies gilt speziell, wenn die Eigenfrequenzen der Biegeeigenformen und der Starrkörperbewegungen in unmittelbarer Nähe liegen bzw. nicht mehr klar differenzierbar sind, siehe etwa [12].

2.2.4 Dämpfungsansätze

Da die tatsächliche Dämpfung oft nicht bekannt ist, müssen Ansätze für die Dämpfung getroffen werden. Im Folgenden werden zwei gängige Ansätze kurz beschrieben.

Modale Dämpfung

Bei diesem Ansatz wird für jede Schwingungsform (jeden Mode) eine entsprechende Dämpfung angesetzt. Diese Methode stellt einen gängigen Zugang in der Modalen Analyse dar, da der Dämpfungsterm entkoppeln und für die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} folgende Bedingung gelten muss [8]:

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{\Phi} = \mathit{diag}(c_j^*) \quad (2.39)$$

Grundsätzlich kann für jede Eigenform eine andere Dämpfung angesetzt werden. Der einfachste Zugang, die modale Dämpfung c_j^* zu bestimmen, ist jedoch für jede Eigenform das gleiche *Lehrsche* Dämpfungsmaß $\zeta_j = \zeta$ zu wählen, wodurch sich die modale Dämpfung zu [8]

$$c_j^* = 2 m_j^* \zeta_j \omega_j = 2 m_j^* \zeta \omega_j \quad (2.40)$$

ergibt.

Rayleigh Dämpfung

Eine weitere Methode, die sich als nützlich erwiesen hat und daher oft zum Einsatz kommt, ist die *Rayleigh* Dämpfung. Die Dämpfungsmatrix wird hierbei als lineare Kombination der Massen- und der Steifigkeitsmatrix angesetzt, [10]

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2.41)$$

Dieser Ansatz kann sowohl bei Verwendung der Modalen Analyse als auch bei einer rein numerischen Integration des gesamten Gleichungssystems, zum Einsatz kommen. Da bei der Modalen Analyse die Steifigkeits- und die Massenmatrix diagonalisieren, ergibt dieser Ansatz analog zu Gleichung (2.39) eine diagonale Dämpfungsmatrix und die diagonalen Glieder c_j^* ergeben sich zu [10]:

$$c_j^* = 2 m_j^* \zeta_j \omega_j = \alpha m_j^* + \beta k_j^* \quad (2.42)$$

Daraus lässt sich das *Lehrsche* Dämpfungsmaß ζ_j für die j -te Schwingung berechnen, [10]

$$\zeta_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \quad (2.43)$$

Die beiden Koeffizienten α und β können aus zwei Eigenfrequenzen ω_i und ω_j und den zugehörigen Dämpfungen ζ_i und ζ_j aus folgendem Gleichungssystem bestimmt werden, [10]

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_i^{-1} & \omega_i \\ \omega_j^{-1} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta\omega_j}{2} \quad (2.44)$$

Wird für die zwei Schwingungsformen die gleiche Dämpfung $\zeta_i = \zeta_j = \zeta$ angesetzt, so ergeben sich die gesuchten Koeffizienten zu [10]:

$$\alpha = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j}, \quad \beta = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (2.45)$$

Wie aus Abbildung 2.5 ersichtlich ist, werden Frequenzen, die wesentlich niedriger als ω_i oder höher als ω_j sind, stärker gedämpft. Der Beitrag von höheren Frequenzen zur Systemantwort wird somit rausgedämpft.

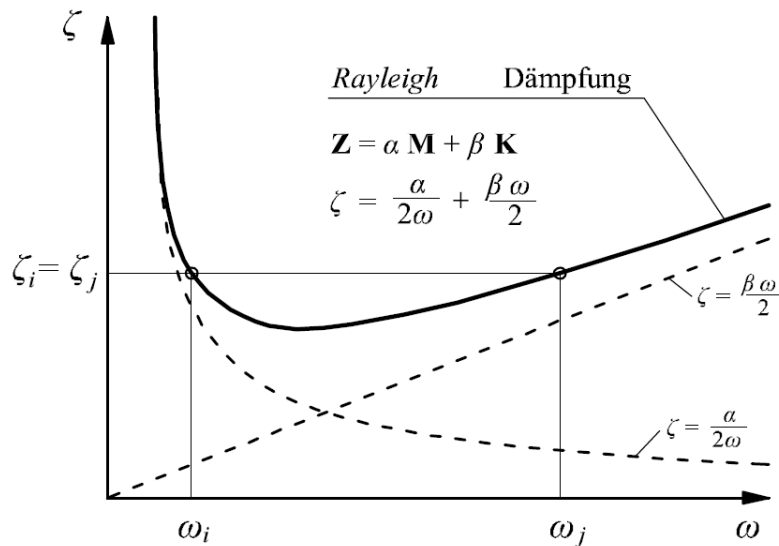


Abbildung 2.5: Rayleigh Dämpfung, [13]

Da diese meist ohnehin einen geringen Anteil haben, trifft dieser Ansatz in den meisten Fällen gut zu. Zur Erstellung der Dämpfungsmatrix sind somit die Dämpfungen für zwei Schwingungsformen erforderlich. Aus den oben angegebenen Eigenschaften dieses Ansatzes empfiehlt es sich Dämpfungen der Schwingungsformen zu wählen, die einen maßgeblichen Anteil an der dynamischen Systemantwort haben bzw. die obere und untere Grenze der relevanten Schwingungsformen darstellen. Die genaue Dämpfung der einzelnen Schwingungsformen ist meist nicht bekannt. Da für die Rayleighsche Methode die Dämpfung von nur zwei Eigenformen bekannt sein bzw. gewählt werden muss, hat sich dieses Verfahren in der Praxis bewährt. Will man jedoch die Schwingungsbeiträge von weit gestreuten (bezüglich Frequenzen) Eigenformen erfassen, so empfiehlt sich für die Modale Analyse die Verwendung einer modalen Dämpfung.

2.2.5 Analytische Lösung

Eine geschlossene analytische Lösung für einen *Bernoulli-Euler*-Balken, beansprucht von einer Folge von bewegten Lasten (dargestellt in Abbildung 2.6), wird etwa von *Frýba* [14] oder *Mähr* [4] gegeben. Eine übersichtliche Aufbereitung dieser Gleichungen findet sich in den Arbeiten von *Treder* [15] und *Rauter* [7].

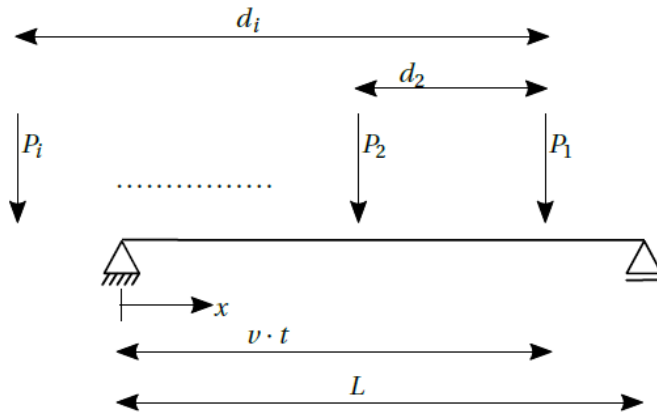


Abbildung 2.6: Folge von Einzelkräften auf einem *Bernoulli-Euler*-Balken, [15]

Der Lastterm $p(x, t)$ einer endlichen Anzahl N_p an Einzellasten P_i , die sich mit einer Geschwindigkeit v bewegen, wird dazu folgend formuliert, [14]

$$p(x, t) = \sum_{i=1}^{N_p} P_i \delta(x - x_i) (H(t - t_i) - H(t - T_i)), \quad H(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau < 0 \\ 1 & \text{für } \tau \geq 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

Die *Diracsche* Deltafunktion $\delta(x - x_i)$ beschreibt die Einheitseinwirkung am Lastangriffspunkt $x_i = v t - d_i$ der i -ten Last zum Zeitpunkt t dar,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_i) dx = f(x_i) \quad (2.47)$$

Die *Heaviside*-Funktion $H(\tau)$ nimmt je nach τ den Wert 1 oder 0 an. Die Funktion $\Gamma_i(t)$

$$\Gamma_i(t) = H(t - t_i) - H(t - T_i) \quad (2.48)$$

beschreibt, ob sich die i -te Einzellast zum Zeitpunkt t auf dem Tragwerk befindet oder nicht. Sie nimmt für die Zeit zwischen dem Zeitpunkt $t_i = d_i/v$, an dem die Last P_i die Brücke betritt, bis zum Zeitpunkt $T_i = (L + d_i)/v$, an dem sie die Brücke wieder verlässt, den Wert 1 an. An allen anderen Zeitpunkten ist $\Gamma_i(t)$ gleich Null. Die Bewegungsgleichung (2.1) eines gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balkens ergibt sich bei Verwendung des Lastterms (2.46) zu:

$$EA_{zz} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_p} P_i \delta(x - x_i) \Gamma_i(t) \quad (2.49)$$

Frýba [14] leitet die analytische Lösung dieser Bewegungsgleichung für den beidseitig gelenkig gelagerten Träger mit Hilfe der *Fourier*- und der *Laplace*-Transformation her. Eine detaillierte

Herleitung findet man in [14] oder [7]. Die Durchbiegung $w(x, t)$ und die Beschleunigung $a(x, t)$ können gemäß folgendem Gleichungsapparat ermittelt werden [14]:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_p} w_0 \frac{P_i}{P} n \Omega \omega_{d,1}^2 \left(f(t-t_i)(H(t-t_i) - (-1)^n f(t-T_i)(H(t-T_i))) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (2.50)$$

$$a(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_p} w_0 \frac{P_i}{P} n \Omega \omega_{d,1}^2 \left(\ddot{f}(t-t_i)(H(t-t_i) - (-1)^n \ddot{f}(t-T_i)(H(t-T_i))) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \quad (2.51)$$

$$f(\tau) = \frac{1}{\omega_{d,n} D_n} \left(\frac{\omega_{d,n}}{n\Omega} \sin(n\Omega\tau + \gamma_n) + e^{-\zeta_n \omega_n \tau} \sin(\omega_{d,n}\tau + \varphi_n) \right) \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \ddot{f}(\tau) = & \frac{1}{\omega_{d,n} D_n} \left(-\omega_{d,n} n\Omega \sin(n\Omega\tau + \gamma_n) \right. \\ & + e^{-\zeta_n \omega_n \tau} (\sin(\omega_{d,n}\tau + \varphi_n) ((\zeta_n \omega_n)^2 - \omega_{d,n}^2) \\ & \left. - 2\zeta_n \omega_n \omega_{d,n} \cos(\omega_{d,n}\tau + \varphi_n)) \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\gamma_n = \arctan\left(\frac{-2n\Omega\zeta_n\omega_n}{\omega_n^2 - (n\Omega)^2}\right) \quad (2.54)$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{2\omega_{d,n}\zeta_n\omega_n}{(\zeta_n\omega_n)^2 - \omega_{d,n}^2 + (n\Omega)^2}\right) \quad (2.55)$$

Durch das Anwenden des Arkustangens gehen Informationen über den Phasenwinkel, die für das hier verwendete Superpositionsprinzip erforderlich sind, verloren. Eine Möglichkeit, den Phasenwinkel korrekt zu berücksichtigen, ist die Verwendung der in vielen Programmiersprachen vorhandenen **atan2(y,x)** Funktion. Diese Funktion berücksichtigt Fallunterscheidungen bezüglich der durch die Ankathete x und die Gegenkathete y bestimmten Quadranten.

Die Laufvariable n kennzeichnet die Anzahl der Fourier-Glieder. Läuft n nicht bis unendlich, so wird die exakte Lösung nur angenähert. Die Anregungsfrequenz wird dabei mit

$$\Omega = \frac{\pi v}{L} \quad , \quad (2.56)$$

die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz des Systems mit

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EA_{zz}}{\mu}} \quad , \quad (2.57)$$

die gedämpfte Eigenkreisfrequenz mit

$$\omega_{d,n} = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \quad , \quad (2.58)$$

die Durchbiegung in Feldmitte zufolge der Referenzlast P mit

$$w_0 = \frac{2 P L^3}{\pi^4 E A_{zz}} \quad (2.59)$$

und der Dämpfungsparameter mit

$$D_n = \sqrt{(\omega_n^2 - (n\Omega)^2)^2 + 4(n\Omega\zeta_n\omega_n)^2} \quad (2.60)$$

bezeichnet.

Geschlossene analytische Lösungen für komplexere Aufgabenstellungen sind äußerst aufwendig und daher in der Literatur kaum zu finden. Ein analytisches Lösungsmodell zur Ermittlung der Tragwerksverformungen von Mehrfeldträgern unter einer Folge von Einzellasten wird etwa von *Leander* und *Karoumi* [16] vorgestellt. Es wird jedoch nur das Konzept und kein fertiger Gleichungsapparat, wie der oben gezeigte, angegeben.

2.2.6 Numerische Lösungen

Für einfache Systeme stellen die analytischen Verfahren eine schnelle und sinnvolle Lösungsmöglichkeit dar. Soll aber das Gleichungssystem aus einer FEM Modellierung vollständig und ohne Anwendung der Modalen Analyse gelöst werden oder liegt ein nichtlineares Systemverhalten vor, so gelangen analytische Lösungsmethoden an ihre Grenzen. Auch wenn die Komplexität der Belastung zunimmt, ist schnell der Punkt erreicht, an dem es nicht mehr bzw. nicht mehr so einfach möglich ist, eine geschlossene Lösung zu formulieren. In diesen Fällen wird eine numerische Lösung notwendig. Die Grundlagen zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen wurden [8], [13], [17] und [18] entnommen.

Grundsätzlich werden durch die numerischen Methoden die Bewegungsgleichungen der Systeme unter Zuhilfenahme der Anfangsbedingungen $w(0) = w_0$ und $\dot{w}(0) = v_0$ in diskreten Zeitpunkten t_i gelöst. Ausgehend von bekannten Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t_i stellt der Schritt von t_i auf t_{i+1} eine in sich geschlossene Aufgabe dar. Die Verformungen zu den Zeitpunkten t_i werden hierbei verkürzt mit $w(t_i) \equiv w_i$ bezeichnet. Analoges gilt für \dot{w}_i , \ddot{w}_i und p_i . Der Zeitschritt zwischen den diskreten Punkten wird mit

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad (2.61)$$

abgekürzt. Es gibt viele unterschiedliche Ansätze zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen. Aus der Vielzahl dieser Verfahren werden im Folgenden einige grundlegende Methoden vorgestellt.

2.2.6.1 Zeitschritt

Der Zeitschritt ist wesentlich für die Stabilität und die Qualität der Ergebnisse einer numerischen Berechnung. Die Bedingungen zur Beschränkung des Zeitschritts beruhen im Wesentlichen auf zwei unterschiedlichen Ursachen:

- Beschränkungen durch das gewählte Integrationsverfahren
- Beschränkungen durch zu berücksichtigende Frequenzen

Beschränkungen zufolge Integrationsverfahren

Um eine stabile Integration zu gewährleisten, sind für manche Verfahren maximale Zeitschritte einzuhalten. Der gewählte Zeitschritt Δt muss kleiner als der sogenannte kritische Zeitschritt Δt_{krit} sein.

Bei einem zu großen Zeitschritt können zwei Formen des Fehlers auftreten. Zum einen kann es zu einer Vergrößerung der Schwingungsperiode kommen, zum anderen zu einer Abminderung der Schwingungsamplitude, der sogenannten *numerischen Dämpfung*, vgl. [19].

Beschränkungen durch zu berücksichtigende Frequenzen

Es muss sichergestellt werden, dass die Perioden jeder relevanten Frequenz mit ausreichender Auflösung erfasst werden. Für die Wahl des Zeitschritts sind die Eigen- und die Anregungsfrequenzen zu berücksichtigen. Dabei gibt es unterschiedliche Ansätze, welcher Zeitschritt ausreicht, um die Schwingungen adäquat abzubilden.

Lt. ÖBB Richtlinie [18] darf der Zeitschritt nicht größer als ein Zwanzigstel der minimalen Schwingungsdauer sein. Hier wird Δt also auf $\Delta t = 1/(20 f_{max})$ beschränkt. Mit f_{max} ist die höchste berücksichtigte Frequenz in Hz gemeint. Auch *Museros et al* [2] wählen den Zeitschritt so, dass die Schwingungen der höchsten berücksichtigten Frequenz durch 20 Punkte abgebildet werden. Sie beschränken den maximalen Zeitschritt zusätzlich mit einem Hundertstel der Zeit, die eine Zugachse benötigt die Brücke zu überqueren.

Leander und *Karoumi* [16] limitieren den Zeitschritt mit $\Delta t \leq 1/(10 f_{max})$. Die Auflösung der Schwingungen ist demnach nur maximal halb so groß wie in den vorher genannten Arbeiten. Auch im Abschlussbericht des ERRI Komitees D-214 wird dieser Zeitschritt als ausreichend angesehen.

In der Regel sollte ein Zeitschritt genügen, der bewirkt, dass die höchste Eigenform durch fünf Schritte pro Schwingungshalbwelle modelliert wird. So dürfte beispielsweise ein Zeitschritt von 0.002 s klein genug für die Modellierung von Tragwerken mit Eigenfrequenzen bis zu 50 Hz sein. (siehe [20], Teil A, Seite 106)

Zur Überprüfung der angemessenen Wahl des Zeitschrittes wird in der ÖBB-Richtlinie [18] eine Vergleichsrechnung mit dem 0,65-fachen Zeitschritt vorgeschrieben. Dabei darf das Ergebnis nicht mehr als 10% vom Maximalergebnis abweichen.

2.2.6.2 Lösung des *Duhameleschen Integrals*

Für lineare Systeme kann eine aus der Interpolation der Lastfunktion entwickelte Lösungsmethode verwendet werden. Diese Methode ist auch geeignet, wenn keine Lastfunktion, sondern nur die Belastungswerte an diskreten Punkten gegeben sind. Dies ist etwa bei der Verwendung von gemessenen Belastungen der Fall (z.B. Erdbeben). Die Basis bildet die Annahme, dass bei ausreichend kleinen Zeitschritten Δt_i die Belastung $p(\tau)$ zwischen t_i und t_{i+1} linear angenähert werden kann, [13]

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (2.62)$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i \quad (2.63)$$

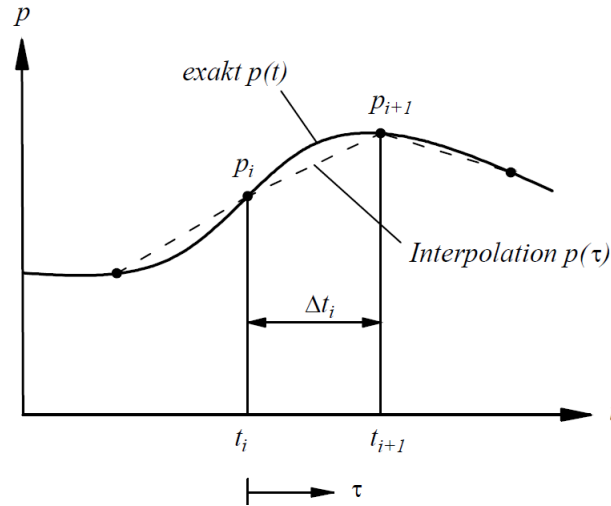


Abbildung 2.7: Verlauf der Belastungsfunktion, exakt und interpoliert (gemäß [13], Figure 5.2.1)

Für diese angenäherte Lastfunktion wird die exakte Schwingungsantwort ermittelt. Diese setzt sich im Allgemeinen aus einem Anteil aus der freien Schwingung - zufolge der Anfangsbedingungen w_i und \dot{w}_i - und einem Anteil aus der erzwungenen Schwingung zusammen. Durch Auswerten des *Duhamschen* Integrals für $\tau = \Delta t_i$ ergeben sich für den Einmassenschwinger die Gleichungen für die Verformungen w_{i+1} und deren Geschwindigkeiten \dot{w}_{i+1} [13]:

$$w_{i+1} = A w_i + B \dot{w}_i + C p_i + D p_{i+1} \quad (2.64)$$

$$\dot{w}_{i+1} = A' w_i + B' \dot{w}_i + C' p_i + D' p_{i+1} \quad (2.65)$$

Für einen konstanten Zeitschritt $\Delta t_i = \Delta t$ müssen die Koeffizienten A, B, \dots, D' nur einmal ermittelt werden. Die genaue Gleichung zur Bestimmung dieser Koeffizienten findet man etwa in [13]. Da diese Methode aus der exakten Lösung der Bewegungsgleichung hergeleitet ist, fordert sie keine Einschränkungen des Zeitschrittes. Der maximale Zeitschritt ergibt sich aus der Bedingung, die Anregung sowie die Systemantwort entsprechend genau abbilden zu können.

Für Mehrfreiheitsgradsysteme kann diese Lösung nur in Kombination mit einer Modalen Analyse verwendet werden.

2.2.6.3 Grundlagen der direkten Integration

Bei direkten Integrationsverfahren werden die Bewegungsgleichungen für die Zeitschritte numerisch integriert. Grundsätzlich können diese Verfahren sowohl zur Lösung des Gesamtsystems (Bewegungsgleichung (2.15)) als auch zur Lösung der entkoppelten modalen Systeme (Bewegungsgleichungen (2.29) bzw.(2.34)) verwendet werden. Da die Stärke dieser Methoden jedoch in der

Lösung komplexer Systeme liegt, wird in diesem Abschnitt von einem Mehrmassenschwinger (gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungssysteme) ausgegangen.

Die numerische Zeitschrittintegration erzeugt Näherungslösungen in diskreten Zeitpunkten t_i in einem Abstand von Δt_i . Der Einfachheit halber wird hier mit konstanten Zeitschritten Δt gearbeitet. Dies ist jedoch für die meisten Algorithmen nicht zwingend erforderlich. Für die Berechnung werden die Bewegungsgleichungen für den jeweiligen Zeitpunkt t_i formuliert. Dabei unterscheidet man ob die Gleichungen vor dem Zeitschritt bei t

$$M\ddot{\mathbf{w}}_t + C\dot{\mathbf{w}}_t + K\mathbf{w}_t = \mathbf{p}_t \quad (2.66)$$

oder nach dem Zeitschritt bei $t + \Delta t$

$$M\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} + C\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} + K\mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_{t+\Delta t} \quad (2.67)$$

definiert werden. Als Startpunkt für die Berechnung des ersten Zeitschrittes dienen die Anfangsbedingungen $\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0$ und $\dot{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{v}_0$. Um die Bewegungsgleichungen lösen zu können, wird mit Näherungsansätzen zur Beschreibung der Veränderung der Zustandsgrößen innerhalb eines Zeitschrittes gearbeitet.

Man unterscheidet zwischen **expliziten** und **impliziten** Verfahren. Als explizit wird ein Integrationsschema bezeichnet, wenn die Zustandsgrößen ($\mathbf{w}_{t+\Delta t}$, $\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$ und $\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$) für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ aus den Bewegungsgleichungen zum Zeitpunkt t (Gleichung (2.66)) bestimmt werden können. Ein Verfahren wird als implizit bezeichnet, wenn zur Ermittlung der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ die Bewegungsgleichungen zu eben diesem Zeitpunkt formuliert werden. Implizite Verfahren erfordern im Allgemeinen Iterationsvorgänge.

Damit ein Integrationsschema stabil ist, müssen im Grunde zwei Bedingungen erfüllt sein, [19]:

- Die Beiträge hochfrequenter Schwingungen (hohe $\Delta t/T_i$ -Verhältnisse) dürfen nicht künstlich verstärkt werden, um nicht die relevanten Beiträge der niedrigeren Frequenzen zu verfälschen.
- Fehler aus dem Rechenverfahren dürfen sich nicht aufsummieren.

Punkto Stabilität des Integrationsverfahrens kann des Weiteren zwischen **bedingt stabil** und **unbedingt stabil** unterschieden werden. Als unbedingt stabil werden Verfahren bezeichnet, wenn ihre Stabilität unbedingt von der Wahl des Zeitschritts Δt gegeben ist. Ist für die Stabilität jedoch erforderlich, dass der Zeitschritt Δt einen gewissen Grenzzeitschritt Δt_{krit} nicht überschreiten darf, so spricht man von einem bedingt stabilen Integrationsschema.

2.2.6.4 Eulersches Verfahren

Das *Eulersche* Verfahren ist eine explizite Methode und stellt einen sehr einfachen Ansatz zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichung dar. Für den Verlauf $\mathbf{w}(t)$ wird ein linearer Verlauf

innerhalb des Zeitintervalls Δt angenommen. Der Verschiebungs- und der Geschwindigkeitsverlauf werden durch die Anfangstangenten vorgegeben, [17]

$$\mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{w}_t + \dot{\mathbf{w}}_t \Delta t \quad (2.68)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{w}}_t + \ddot{\mathbf{w}}_t \Delta t \quad (2.69)$$

Die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{w}}_t$ können aus dem Umstellen der Bewegungsgleichung für den jeweiligen Zeitpunkt t berechnet werden, [17]

$$\ddot{\mathbf{w}}_t = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p}_t - \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}}_t - \mathbf{K}\mathbf{w}_t) \quad (2.70)$$

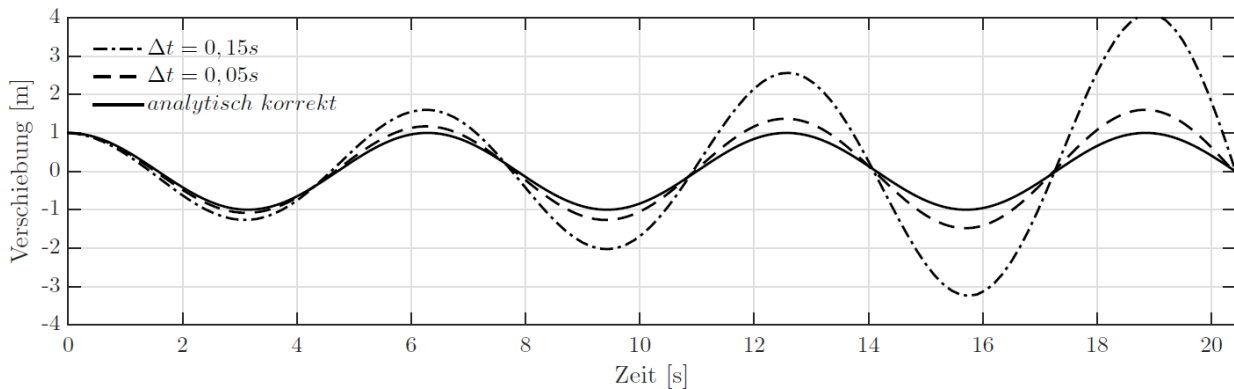


Abbildung 2.8: Numerische Lösung eines EMS mittels *Euler'schem* Verfahren, [7]

Bei diesem Verfahren wird ein sehr einfacher Ansatz gewählt, was auf Kosten der Qualität der Ergebnisse geht. Der Energiefehler wächst, wie aus Abbildung 2.8 ersichtlich, exponentiell mit der Zeit. Daher ist diese Methode nicht für längere Zeitspannen geeignet.

2.2.6.5 Zentrales Differenzenverfahren

Hierbei handelt es sich um ein explizites Verfahren. Die Bewegungsgleichungen werden demzufolge zum Zeitpunkt t formuliert. Innerhalb des Zeitintervalls wird ein quadratischer Funktionsverlauf unterstellt. Dazu wird zwischen $t - \Delta t$ und $t + \Delta t$ eine Parabel „eingehängt“. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zum Zeitpunkt t ergeben sich daraus zu [17]:

$$\dot{\mathbf{w}}_t = \frac{\mathbf{w}_{t+\Delta t} - \mathbf{w}_{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (2.71)$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_t = \frac{\mathbf{w}_{t+\Delta t} - 2\mathbf{w}_t + \mathbf{w}_{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (2.72)$$

Werden diese Bedingungen in die Bewegungsgleichung (2.66) eingesetzt, so erhält man durch Umformen [17]:

$$\left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t}\right) \mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_t - \left(\mathbf{K} - \frac{2\mathbf{M}}{\Delta t^2}\right) \mathbf{w}_t - \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t}\right) \mathbf{w}_{t-\Delta t} \quad (2.73)$$

Zur Ermittlung von $\mathbf{w}_{t+\Delta t}$ sind somit nur die Verschiebungen \mathbf{w}_t und $\mathbf{w}_{t-\Delta t}$ erforderlich. Die Berechnung startet bei $t = 0$, wodurch man \mathbf{w}_t als bekannte Anfangsverformung \mathbf{w}_0 erhält. Zur

Bestimmung von $\mathbf{w}_{-\Delta t}$ werden die Bedingungen (2.71) und (2.72) so kombiniert, dass sich eine Funktion ergibt, die rein von den Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t = 0$ abhängig ist. $\dot{\mathbf{w}}_t$ ist durch die Anfangsbedingung \mathbf{v}_0 gegeben und $\ddot{\mathbf{w}}_t$ lässt sich aus den Bewegungsgleichungen für den Zeitpunkt t bestimmen. Die Bestimmungsgleichung für den Startwert $\mathbf{w}_{-\Delta t}$ lautet somit folgendermaßen [17]:

$$\mathbf{w}_{-\Delta t} = \mathbf{w}_0 - \mathbf{v}_0 \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{C}\mathbf{v}_0 + \mathbf{K}\mathbf{w}_0 - \mathbf{p}(0)] \quad (2.74)$$

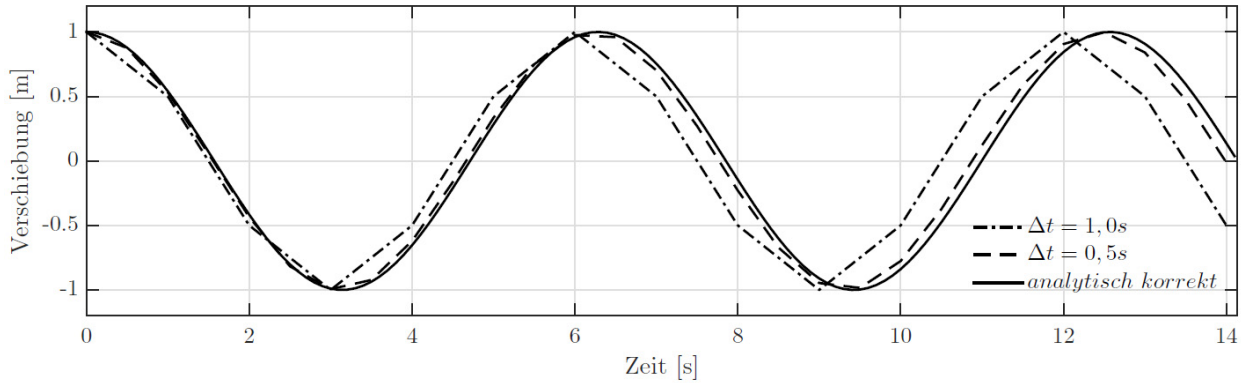


Abbildung 2.9: Numerische Lösung eines EMS mittels zentralem Differenzenverfahren, [7]

In Abbildung 2.28 ist die numerische Lösung eines Einmassenschwingers für unterschiedliche Zeitschritte dargestellt. Wie daraus erkennbar ist, bleibt die Gesamtenergie bei diesem Verfahren konstant, der Frequenzfehler nimmt jedoch mit zunehmender Schrittweite Δt zu. Dies macht sich durch ein Ansteigen der Frequenz bemerkbar. Das Verfahren ist nur bedingt stabil. Der kritische Zeitschritt ist mit [17]

$$\Delta t_{krit} = \frac{2}{\omega_{max}} = \frac{1}{\pi f_{max}} \quad (2.75)$$

gegeben.

2.2.6.6 Newmark Methode

Bei der *Newmark* Methode handelt es sich um ein implizites Verfahren. Dabei werden im Allgemeinen die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ aus den Gleichungen (2.76) und (2.77) bestimmt. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ ergibt sich aus der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t plus dem Integral der Beschleunigung über den Zeitraum Δt . Die Verschiebung für $t + \Delta t$ ergibt sich als Funktion der Verschiebung und der Beschleunigung zum Zeitpunkt t und aus einem Integral des Beschleunigungsverlaufs über den Zeitschritt Δt , [19]

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{w}}_t + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{w}}(\tau) d\tau \quad (2.76)$$

$$\mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{w}_t + \dot{\mathbf{w}}_t \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{w}}(\tau) (t + \Delta t - \tau) d\tau \quad (2.77)$$

Da der Beschleunigungsverlauf $\ddot{\mathbf{w}}(\tau)$ nicht bekannt ist, wird ein Ansatz für den Verlauf innerhalb der Zeitspanne Δt gewählt. Die Wahl des Ansatzes unterscheidet die Verfahren und ist somit auch Namensgeber des Rechenverfahrens. Der einfachste Zugang ist die Wahl eines konstanten Beschleunigungsverlaufs, woraus sich die Konstante-Beschleunigungs-Methode (engl.: *Constant Acceleration Method*) ergibt. Aus einem linearen Ansatz folgt entsprechend die Lineare-Beschleunigungs-Methode (engl.: *Linear Acceleration Method* auch *Newmark Linear Acceleration* genannt).

Unter Verwendung des Beschleunigungsmittels über den Zeitbereich [19]

$$\ddot{\mathbf{w}}_{t+\tau} = \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{w}}_t + \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}) \quad (2.78)$$

als konstanten Beschleunigungsansatz, ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für $\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$ und $\mathbf{w}_{t+\Delta t}$ zu [19]:

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{w}}_t + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{\mathbf{w}}_t + \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}) \quad (2.79)$$

$$\mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{w}_t + \dot{\mathbf{w}}_t \Delta t + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{w}}_t + \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}) \quad (2.80)$$

In einer allgemeineren Schreibweise lassen sich die Gleichungen auch folgendermaßen darstellen [8]:

$$\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{w}}_t + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{w}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{w}_t + \dot{\mathbf{w}}_t \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{w}}_t + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} \quad (2.82)$$

Die Parameter γ und β definieren somit die Abschätzung des Beschleunigungsverlaufes. Für den Ansatz der konstanten Beschleunigung ergeben sich diese Parameter zu $\gamma = 1/2$ und $\beta = 1/4$. Der lineare Beschleunigungsansatz liefert $\gamma = 1/2$ und $\beta = 1/6$. Da in den Bestimmungsgleichungen von $\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$ und $\mathbf{w}_{t+\Delta t}$ auch $\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$ vorkommt, ist hier ein iterativer Prozess erforderlich. Dabei wird $\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$ zunächst abgeschätzt und nach Bestimmung von $\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$ und $\mathbf{w}_{t+\Delta t}$ aus den Gleichgewichtsbedingungen (2.67) erneut ermittelt. Für lineare Systeme und bekannter Belastung $\mathbf{p}_{t+\Delta t}$ lässt sich aber eine geschlossene Lösung für $\mathbf{w}_{t+\Delta t}$ formulieren. Durch Umformen der Gleichungen (2.79) und (2.80) und Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung (2.66) für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ ergibt sich [17]:

$$\left[\mathbf{K} + \frac{4 \mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{2 \mathbf{C}}{\Delta t} \right] \mathbf{w}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_{t+\Delta t} + \left[\frac{4 \mathbf{M}}{\Delta t^2} + \frac{2 \mathbf{C}}{\Delta t} \right] \mathbf{w}_t + \left[\frac{4 \mathbf{M}}{\Delta t} + \mathbf{C} \right] \dot{\mathbf{w}}_t + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}}_t \quad (2.83)$$

Aus dieser Gleichung kann $\mathbf{w}_{t+\Delta t}$ in Abhängigkeit von den bekannten Zustandsgrößen (\mathbf{w}_t , $\dot{\mathbf{w}}_t$ und $\ddot{\mathbf{w}}_t$) und der Belastung $\mathbf{p}_{t+\Delta t}$ bestimmt werden. Mit Hilfe der Gleichungen (2.81) und (2.82) können danach auch $\dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$ und $\ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t}$ ermittelt werden. Die somit bekannten Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ dienen im Folgenden als Ausgangspunkt für den nächsten Zeitschritt.

Formuliert man Gleichung (2.83) in der allgemeineren Form mit den Parametern γ und β und fasst die Terme einzeln zusammen, so ergibt sich die „pseudostatische Gleichgewichtsbedingung“ [5], [13]

$$\hat{\mathbf{k}} \mathbf{w}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{p}}_t \quad (2.84)$$

mit

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} + \mathbf{K} \quad (2.85)$$

und

$$\begin{aligned} & \hat{\mathbf{p}}_t \\ = & \mathbf{p}_{t+\Delta t} + \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \right] \mathbf{w}_t + \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t} + \mathbf{C} \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \right] \dot{\mathbf{w}}_t \\ & + \left[\mathbf{M} \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) + \mathbf{C} \Delta t \left(\gamma + \frac{\gamma}{2\beta} - 2 \right) \right] \ddot{\mathbf{w}}_t \end{aligned} \quad (2.86)$$

Durch die von Wilson* eingeführte inkrementelle Schreibweise

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{w}_t &\equiv \mathbf{w}_{t+\Delta t} - \mathbf{w}_t & \Delta \dot{\mathbf{w}}_t &\equiv \dot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{w}}_t & \Delta \ddot{\mathbf{w}}_t &\equiv \ddot{\mathbf{w}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{w}}_t \\ \Delta \mathbf{p}_t &\equiv \mathbf{p}_{t+\Delta t} - \mathbf{p}_t \end{aligned} \quad (2.87)$$

erhält man die inkrementelle „pseudostatische Gleichgewichtsbedingung“ [13]

$$\hat{\mathbf{k}} \Delta \mathbf{w}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{p}}_t \quad (2.88)$$

mit einem etwas kompakteren $\hat{\mathbf{p}}_t$ Term, [13]

$$\hat{\mathbf{p}}_t = \Delta \mathbf{p}_t + \left[\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta} \right] \dot{\mathbf{w}}_t + \left[\frac{\mathbf{M}}{2\beta} + \mathbf{C} \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \right] \ddot{\mathbf{w}}_t \quad (2.89)$$

Eine etwas ausführlichere Einführung in dieses Thema findet sich etwa in *Chopra* [13].

Bei der Konstante-Beschleunigungs-Methode handelt es sich um ein unbedingt stabiles Verfahren. Numerische Stabilität ist demnach unabhängig vom Zeitschritt Δt . Dies trifft für die Lineare-Beschleunigungs-Methode nicht mehr zu. Hierbei handelt es sich um ein bedingt stabiles Verfahren. Der kritische Zeitschritt für diese Methode beträgt [13]

$$\Delta t_{krit} = \frac{\sqrt{12}}{\omega_{max}} \approx \frac{3,46}{\omega_{max}} = \frac{0,551}{f_{max}}, \quad (2.90)$$

was nicht einmal zwei Berechnungspunkte pro Periode bedeuten würde. Erfolgt die Wahl des Zeitschrittes so, dass die Schwingungen der maximalen Frequenz ω_{max} entsprechend abgebildet werden können, so tritt auch für den linearen Beschleunigungsansatz kein Stabilitätsproblem auf.

* Edward L. Wilson 1931

Die Gesamtenergie bleibt bei der *Newmark*-Methode über die Zeit konstant (vgl. Abbildung 2.10). Mit dem Zeitschritt nimmt jedoch der Frequenzfehler zu. Je größer der Zeitschritt, desto geringer wird die ermittelte Schwingungsfrequenz.

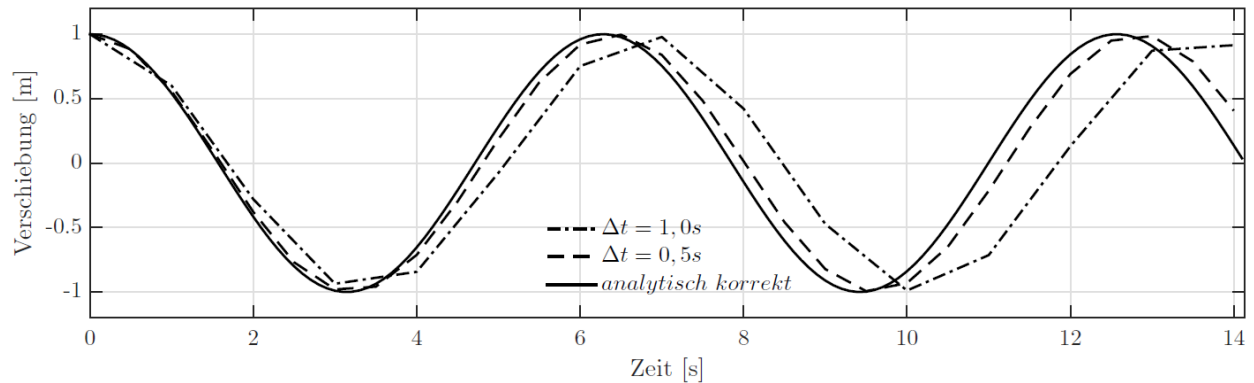


Abbildung 2.10: Numerische Lösung eines EMS mittels Newmark Konstante-Beschleunigungs-Methode, [7]

Die Newton *Linear Acceleration Method* stellt ein sehr stabiles Integrationsverfahren mit großer Genauigkeit dar. Es ist somit das geeignetste der hier vorgestellten Verfahren. Weitere Möglichkeiten zur numerischen Integration stellen etwa die *Wilson- Θ* -Methode oder die *Runge-Kutta*-Methode dar, die hier nicht weiter erklärt werden.

2.2.6.7 Newmark Methode für nichtlineare Einmassenschwinger

Die Newmark Methode kann relativ einfach für nichtlineare Systeme erweitert werden. Die Bewegungsgleichung ändert sich dahingehend, dass die Federkraft keine konstante Federsteifigkeit k mehr besitzt. Die nichtlineare Federkraft zum Zeitpunkt i wird hier mit $(f_s)_i$ bezeichnet. Die Bewegungsgleichung des nichtlinearen Einmassenschwingers zum Zeitpunkt i lautet demnach [13]:

$$m\ddot{w}_i + c\dot{w}_i + (f_s)_i = p_i \quad (2.91)$$

In inkrementeller Schreibweise nimmt die Bewegungsgleichung somit die folgende Form an [13]:

$$m \Delta\ddot{w}_i + c \Delta\dot{w}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta p_i \quad (2.92)$$

Wie in Abbildung 2.11 dargestellt, kann man die inkrementelle Federkraft als Produkt des Sekantenmoduls $(k_i)_{sek}$ und der inkrementellen Verformung Δw_i ausdrücken, [13]

$$(\Delta f_s)_i = (k_i)_{sek} \Delta w_i \quad (2.93)$$

Zur Bestimmung des Sekantenmoduls fehlt jedoch die Steifigkeit zum Zeitpunkt $i + 1$. Daher wird $(k_i)_{sek}$ mit dem Tangentenmodul $(k_i)_T = k_i$ zum Zeitpunkt i angenähert, [13]

$$(\Delta f_s)_i \approx (k_i)_T \Delta w_i \quad (2.94)$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich somit zu [13]:

$$m \Delta\ddot{w}_i + c \Delta\dot{w}_i + k_i \Delta w_i = \Delta p_i \quad (2.95)$$

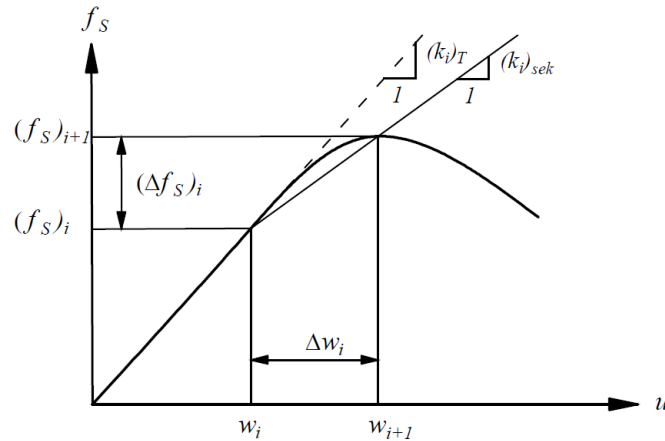


Abbildung 2.11: Inkrementelle Federkraft (gemäß [13], Figure 5.7.1)

Wegen der Ähnlichkeit dieser Bewegungsgleichung mit der des linearen Systems kann durch Ersetzen von k mit k_i die lineare Lösungsmethode angewendet werden. Um Fehler aus der Annäherung von $(k_i)_{sek}$ durch $(k_i)_T$ zu beseitigen ist aber jedenfalls ein Iterationsprozess erforderlich. Je nach Art der Nichtlinearität können auch variable Zeitschritte erforderlich werden. Näheres dazu findet sich in [13] bzw. in weiterführender Literatur.

2.2.6.8 Zustandsraum (*State Space*)

Im Zuge dieser Arbeit wird mit der Software *MATLAB* gearbeitet. Die verwendeten ODE-Solver dieser Software können nur gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen. Bei dem untersuchten System von Bewegungsgleichungen (siehe etwa Gleichung (2.66)) handelt es sich jedoch um gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung. Um dieses Problem zu lösen, wird in den Zustandsraum (*State Space*) übergegangen. Dazu werden die neuen Koordinaten $\mathbf{y}(t)$ eingeführt, [8]

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \mathbf{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

Die Ableitung dieser Koordinaten ergibt sich zu [8]:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{y}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{w}}(t) \\ \ddot{\mathbf{w}}(t) \end{pmatrix} \quad (2.97)$$

Wird $\ddot{\mathbf{w}}(t)$ durch eine Umformung der Bewegungsgleichung ausgedrückt [8]

$$\ddot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{p}(t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{w}(t) - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \dot{\mathbf{w}}(t) \quad (2.98)$$

und in (2.97) eingesetzt, so ergibt sich folgendes Gleichungssystem, [8]

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{y}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{p}(t) \quad (2.99)$$

Diese Gleichung wird auch als *Zustandsgleichung* bezeichnet und kann etwas allgemeiner als [8]

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}^* \mathbf{y}(t) + \mathbf{B}^* \mathbf{p}(t) \quad (2.100)$$

angeschrieben werden. \mathbf{A}^* ist die Systemmatrix und gibt die Systemeigenschaften wieder. \mathbf{B}^* kann auch als Eingangsmatrix bezeichnet werden und enthält Informationen zur Lasteinwirkung auf das System. Um nach Lösung der Differentialgleichung für $\mathbf{y}(t)$ wieder auf die ursprünglichen Zustandsgrößen $\mathbf{w}(t)$ zu gelangen, wird die folgende *Ausgabegleichung* verwendet, [8]

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{C}^* \mathbf{y}(t) + \mathbf{D}^* \mathbf{p}(t) \quad (2.101)$$

Die Form der Ausgabegleichung ist in (2.101) nur schematisch gegeben. Sie kann natürlich auch für $\dot{\mathbf{w}}(t)$, $\ddot{\mathbf{w}}(t)$ oder einzelne Koordinaten definiert werden. Die Matrizen \mathbf{C}^* und \mathbf{D}^* nehmen dann eine andere, den Ausgabegrößen entsprechende Form, an.

2.2.7 Anzahl der Eigenformen

Die Anzahl der berücksichtigten Eigenformen hat nicht nur auf die Qualität der Ergebnisse, sondern auch auf den Berechnungsaufwand einen Einfluss. Daher ist die Reduktion der Eigenformen auf eine sinnvolle Anzahl durchaus zielführend. Gerade bei komplexen Systemen, die mittels FEM gelöst werden, ist die Reduktion der Schwingungsformen eine anspruchsvolle Arbeit.

Die Wahl der Anzahl der einbezogenen Eigenformen ist stark vom untersuchten Tragwerk und dessen Modellierung abhängig. So werden für eine einfeldrige Brücke, die als Balken modelliert ist, die ersten 3 bzw. maximal 5 Eigenformen ausreichen, um die Reaktion des Modells gut abbilden zu können (vgl. *Mähr* [4] Seite 57). Für eine Bogenbrücke, die dreidimensional modelliert wird, wird dies wohl nicht mehr der Fall sein.

Ein weiterer Einflussparameter ist die Art der gesuchten Tragwerksreaktion. So wird man für die Berechnung der Durchbiegung in Tragwerksmitte mit weniger Eigenformen auskommen, als für die Ermittlung der maximalen Beschleunigung über die gesamte Tragwerkslänge notwendig wären. Besonders auf die Beschleunigungen hat die Anzahl der gewählten Eigenformen einen großen Einfluss. Je mehr Eigenformen berücksichtigt werden, desto höher fällt die Spitzenbeschleunigung aus. Gemäß [20] bewirken äußerst hochfrequente Beschleunigungen mit relativ kleinen Amplituden jedoch keine Auflösung des Schotterzusammenhaltes. Aus Mangel an detaillierteren Untersuchungen wird im ERRI Report empfohlen:

... die ersten n dominanten Eigenformen eines n -feldrigen Tragwerkes zu berücksichtigen und die damit zusammenhängenden Spitzenbeschleunigungen daraufhin zu überprüfen, ob sie die empfohlenen Grenzen einhalten. (siehe [20] Teil A, Seite 106)

An einer anderen Stelle empfiehlt der Ausschuss wiederum:

...die ersten drei oder vier dominanten Eigenformen eines Tragwerks zu berücksichtigen. (siehe [20] Teil A, Seite 168)

Es zeigt sich also, dass es nicht so einfach ist, die optimale Anzahl an zu berücksichtigenden Schwingungsformen zu ermitteln. Da die optimale Anzahl der zu verwendenden Eigenformen stark von den gesuchten Größen (Verformung, Beschleunigung oder Schnittgrößen), der Belastung und

dem untersuchten System abhängen, ist es schwierig, eine allgemein gültige Aussage zu treffen. Es empfiehlt sich jedoch Vergleichsrechnungen mit einer höheren bzw. niedrigeren Anzahl an Eigenformen durchzuführen.

2.2.8 Modellierung des Tragwerks

Die Modellbildung ist ein wesentlicher Bestandteil der Tragwerksanalyse, sowohl für statische als auch dynamische Berechnungen. Abbildung 2.12 zeigt drei unterschiedliche Modellbildungen für ein und dasselbe Tragwerk. Die Lösungsmethode einer dynamischen Berechnung ist von der Art des verwendeten Modells abhängig bzw. kann eine vorgegebene Lösungsmethode auch das zu verwendende Modell beeinflussen. Die prinzipiell genaueste Abbildung ist eine 3D Modellierung des Tragwerks inklusive Umgebungsmodell, wie in Abbildung 2.12 (c) dargestellt. Solche Modelle werden etwa in [21], [22] oder [23] verwendet. Ein solches Tragwerksmodell ist jedoch sehr aufwendig in der Modellerstellung und benötigt viel Rechenkapazität. Darüber hinaus ist es nicht so einfach, die Kennwerte der einzelnen Komponenten zu ermitteln bzw. abzuschätzen. Des Weiteren vermittelt eine detaillierte Modellierung eine gewisse Genauigkeit, die nicht notwendigerweise vorhanden sein muss. Es kann also sinnvoll sein, auf einfachere Modelle zurückzugreifen.

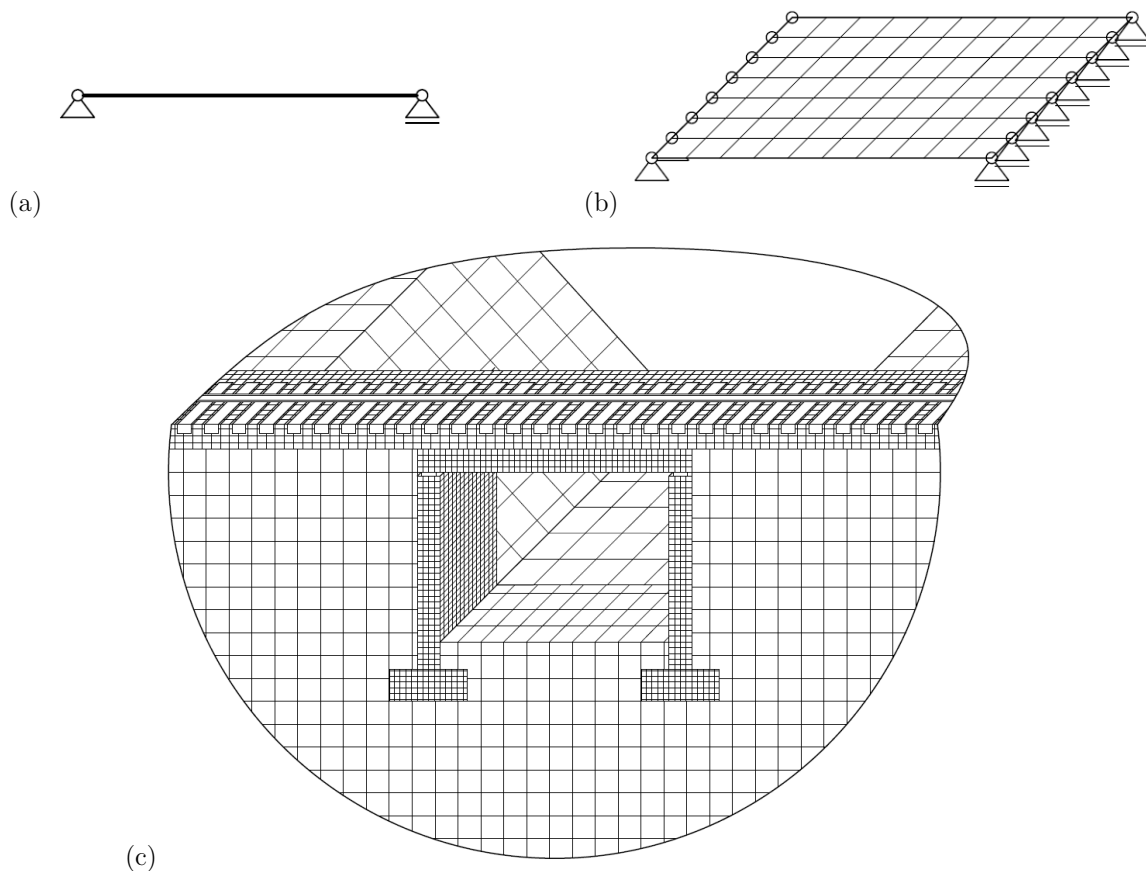


Abbildung 2.12: Tragwerksmodelle (a) 1D Balken (b) 2D Platte (c) 3D Tragwerksmodell inkl. Umgebungsmodellierung

Die Verwendung eines einfachen Balkenmodells, in Abbildung 2.12 (a) dargestellt, bringt vor allem lösungstechnische Vorteile. Für einen einfachen *Bernoulli-Euler*-Balken etwa existieren ge-

geschlossene analytische Lösungen (siehe [4] oder [14]). Dieses Modell ist jedoch nicht in der Lage Torsionsschwingungen abzubilden. Dies wäre zumindest mit einem 2D Plattenmodell (Abbildung 2.12 (b)) möglich. Je nach Beanspruchung stellt sich die Frage, ob die Torsionseigenformen überhaupt angeregt werden und deren Abbildung notwendig wird.

Gerade Materialkennwerte sind oft unzureichend genau bekannt bzw. ist die Wirkung einzelner Komponenten, wie der Schubverbund durch den Gleisschotter, schwierig zu erfassen. Ein Beispiel dafür stellt die Eisenbahnbücke, die *Kirchhofer* im Zuge seiner Dissertation [24] untersucht hat, dar. Aus Unwucht-Erreger-Versuchen wurde die erste Eigenfrequenz zwischen 5,63 Hz und 5,80 Hz ermittelt, siehe [24] Abbildung 6.24. Gemäß Kapitel 6.2.3.9 aus [24] müssen diese Werte um 0,5 Hz erhöht werden, um die zusätzlichen Massen der Unwucht-Erreger zu kompensieren. Die korrigierten Messwerte liegen somit zwischen 6,13 Hz und 6,3 Hz. *Frodl* [25] hat dieses Tragwerk in unterschiedlichen Detaillierungsgraden ebenfalls berechnet. Dabei ermittelte er die Frequenzen für unterschiedliche 3D Modelle mit Werten zwischen 5,83 Hz und 5,91 Hz (siehe [25] Tabelle 8.13). Die erste Eigenfrequenz eines gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler* Balkenmodells für diese Brücke ergibt sich lt. [24] Gleichung 6.4 zu 5,91 Hz. Wobei für die Biegesteifigkeit ein Mittelwert zwischen dem Brutto- und Nettoquerschnitt des Tragwerks verwendet wurde. Für dieses Tragwerk liefert eine detaillierte Modellierung der Brücke demnach keine bessere Übereinstimmung zur Messung als ein einfaches Balkenmodell.

Bei der Modellierung des Tragwerks muss also auf einige Aspekte geachtet werden. Etwa, welche Beanspruchung das System erfährt, welche Lösungsmöglichkeiten zur Verfügung stehen, in welchem Detaillierungsgrad Kennwerte der Struktur bekannt sind oder nicht zuletzt, was eigentlich das Ziel der Untersuchung ist. Für eine Parameterstudie über eine große Anzahl an Tragwerken, deren genauen Kennwerte nicht bekannt sind, wird wohl das einfachste Modell am zielführendsten sein.

2.2.9 Modellierung des Zuges

Grundsätzlich wird zwischen zwei Typen von Zugmodellen unterschieden. Das erste und simpelste ist, einen Zug durch seine Achslasten abzubilden. Die Belastung besteht demnach aus einer Folge von Einzellasten, die im Regelfall mit konstanter Geschwindigkeit das Tragwerk passieren. Das Lastmodell ist in Abbildung 2.13 (a) dargestellt und wird als Einzelkraftmodell EKM bezeichnet (engl.: *moving load model MLM*).

Dieser Zugang stammt eher aus den statischen Berechnungen, da dadurch die dynamischen Eigenschaften des Zuges vernachlässigt werden. Um die dynamischen Effekte des Zuges abzubilden, werden Mehrkörpermodelle MKM verwendet, dargestellt in Abbildung 2.13 (b). Dabei wird der Zug als eine Serie von durch Federn und Dämpfer gekoppelte Massen modelliert. Dadurch können auch Trägheitseffekte und die Energieabsorption aus dem Tragwerk erfasst werden. Es gibt eine Unzahl an Varianten von MKM. Die wohl einfachste Form eines MKM stellt dabei eine Folge von Einzelmassen dar. Auf der anderen Seite der Detaillierungsskala findet sich eine genaue Abbildung

des Zuges mit detaillierter Modellierung der Einzelmassen und deren Kopplungen (durch Federn und Dämpfer) untereinander. Eine exakte Abbildung des Zuges durch Mehrkörpermodelle ist nicht möglich bzw. nicht sinnvoll, da viele Parameter nicht genau bekannt sind bzw. die Berechnung zu komplex werden würde. In der Modellierung muss also immer ein Kompromiss zwischen Abbildungsgenauigkeit und Aufwand (Berechnungsaufwand, Modellierungsaufwand) gefunden werden. Die am häufigsten eingesetzten Modelle sind das EKM (vgl. [4], [21] oder [26]), das 2D MKM (vgl. [4], [20], [21] oder [26]) - bestehend aus Wagenkasten, Drehgestell und Radsatzmassen – und das 3D MKM (vgl. [23], [26] oder [27]) mit denselben Massenelementen wie beim 2D-Modell, nur mit dreidimensionaler Feder-Dämpfer-Kopplung. Eine genauere Beschreibung der Lastmodelle und der dahinter liegenden Berechnungen findet man etwa in [4] oder [21].

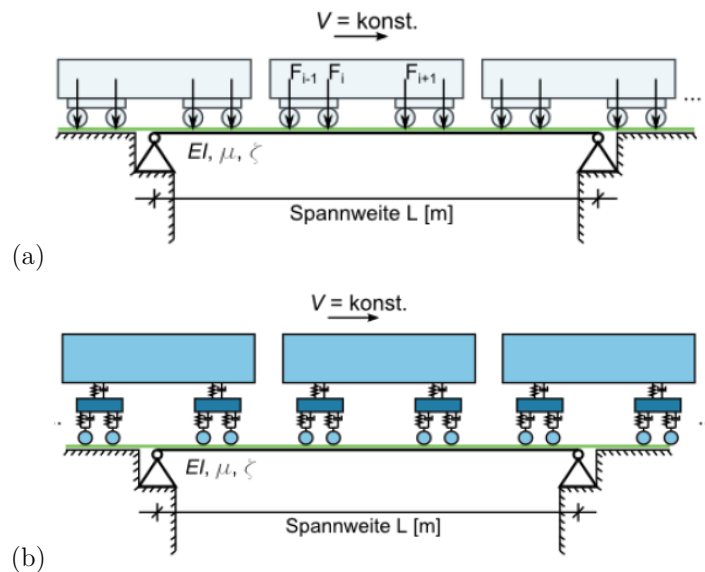


Abbildung 2.13: Zugmodelle (a) Einzelkraftmodell EKM, (b) Mehrkörpermodell MKM, [28]

Die Wahl des Zugmodells kann einen nicht unwesentlichen Einfluss auf die Tragwerksantwort haben. Generell kann aber gesagt werden, dass die Belastungsmodellierung auf kürzere Tragwerke einen größeren Einfluss hat als auf längere.

2.2.10 Resonanz- und Aufhebungseffekte

Bei der Überfahrt eines Zuges über eine Brücke tragen neben der Größe der Belastung zwei weitere Effekte entscheidend zur Form der Tragwerksreaktion bei. Dies sind die Belastungsgeschwindigkeit und die Lastwiederholung. Eine sehr schnelle, stoßartige Anregung stellt eine Art Impulsanregung dar, die ein sehr breites Frequenzspektrum erregt. Dies wäre etwa bei einem sehr weich gelagerten Tragwerk der Fall, bei denen sofort nach Auffahren des Zuges eine Systemverformung eintritt. Eisenbahnbrücken sind in der Regel aber sehr steif gelagert bzw. führt die Lastverteilung durch den Gleiskörper zu einer sanfteren Lastaufbringung. Stoßartige Anregungen resultieren eher aus Gleis- oder Laufradunebenheiten. Hierbei handelt es sich um Einzelbelastungen, die sich hauptsächlich im höherfrequenten Bereich abspielen und somit auf die wesentlich niedrigeren ersten Eigenfrequenzen des Systems kaum Einfluss haben. Auf die ersten Biegeeigenformen des

Tragwerks wirken sich vor allem Effekte aus der Lastwiederholung und der Überfahrtgeschwindigkeit aus. Bei den dynamischen Untersuchungen von Eisenbahnbrücken für den Hochgeschwindigkeitsverkehr sind Resonanzphänomene von großer Bedeutung, weshalb vor allem harmonische Anregungen von Interesse sind.

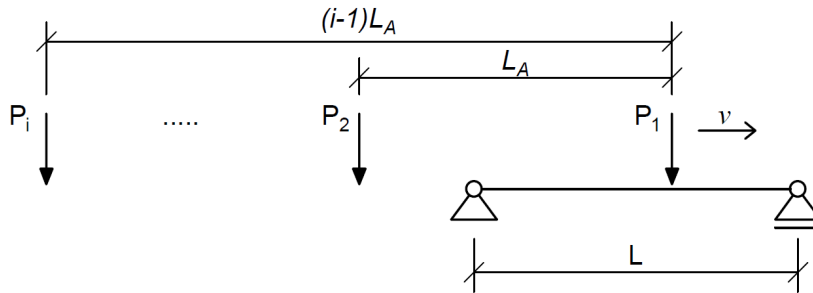


Abbildung 2.14: Einfeldträger unter einer Folge Einzellasten mit konstantem Abstand

Für einen gelenkig gelagerten Einfeldträger führt eine Folge von Einzellasten P_i mit konstantem Abstand L_A , die sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegen (dargestellt in Abbildung 2.14), zu einer harmonischen Anregung in der Erregerfrequenz F_A ,

$$F_A = \frac{v}{L_A} \quad (2.102)$$

Wenn die Anregungsfrequenz F_A oder ein ganzzahliges Vielfaches k von ihr mit einer Eigenfrequenz f_i des Systems übereinstimmt, können Resonanzerscheinungen auftreten, [4]

$$k F_A = f_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots; \quad k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.103)$$

Bei Zügen stellt vor allem die Waggonlänge d die relevante Wiederholungslänge dar. Sie wird auch als Länge über Puffer $L_{\text{üp}}$ bezeichnet. Die kritischen Geschwindigkeiten v_{krit} , bei denen Resonanzerscheinungen auftreten können, ergeben sich somit zu [4]:

$$v_{\text{krit},i,k} = \frac{d f_i}{k} \quad (i = 1, 2, 3, \dots; \quad k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.104)$$

Eine weitere Art der harmonischen Anregung kann durch die Überfahrtgeschwindigkeit selbst erfolgen (vgl. [6]). Die Zeit, die eine Last für die zweifache Tragwerkslänge L benötigt, stellt die geschwindigkeitsbezogene Anregungsperiode dar. Aus dem Kehrwert dieser Periode ergibt sich die zugehörige Anregungsfrequenz F_v zu [29]:

$$F_v = \frac{v}{2 L} \quad (2.105)$$

Gemäß Ziegler [6] oder Frýba [14] ergeben sich daraus weitere kritische Geschwindigkeiten, falls ein j -faches dieser Anregungsfrequenz mit der Eigenfrequenzen f_j übereinstimmt, [14]

$$v_{\text{krit},j} = \frac{2 L f_j}{j} \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.106)$$

Die daraus resultierenden Geschwindigkeiten befinden sich jedoch für die meisten Tragwerke außerhalb des relevanten Geschwindigkeitsbereichs. Da in [30] auch von Resonanzerscheinungen gesprochen wird, wenn ein l -faches der Anregungsfrequenz mit einer der Eigenfrequenzen f_j übereinstimmt (für $l = 1, 3, 5, \dots$) und auch in [15] gewisse Effekte für $l \neq j$ gezeigt werden, wird hier zur Bestimmung möglicher kritischer Anregungen aus der Überfahrtgeschwindigkeit selbst folgende Gleichung verwendet, [15]

$$v_{krit,j,l} = \frac{2 L f_j}{l} \quad (j = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.107)$$

Dieser Anregungseffekt hat vor allem dann einen Einfluss auf die Tragwerksantwort, wenn eine Resonanzgeschwindigkeit mit einer Resonanz zufolge des Lastabstandes übereinstimmt (vgl. [15]).

$$v_{krit,j,l} = v_{krit,i,k} \quad (2.108)$$

Unter Verwendung des aus (2.115) ersichtlichen Zusammenhangs $f_j = j^2 f_1$ (vgl. [14]) ergibt sich dieses Kriterium für einen gelenkig gelagerten Einfeldträger zu [15]:

$$\frac{2 L j^2}{l} = \frac{d i^2}{k} \quad (2.109)$$

Konzentriert man sich auf die Tragwerksantwort in Brückenmitte, so werden alle geraden Tragwerksfrequenzen vernachlässigbar. Da die niedrigsten Biegeeigenformen grundsätzlich den größten Anteil an der Tragwerksreaktion haben, sollte für die Bestimmung der Resonanzgeschwindigkeiten die Berücksichtigung der ersten und dritten Eigenform ausreichen. Konzentriert man sich für die Lastabstandsresonanz (Gleichung (2.104)) auf die erste Eigenform, so tritt die „Doppelresonanz“ nur dann auf, wenn für die im betrachteten Geschwindigkeitsbereich relevanten k -Werte, ganzzahlige l -Faktoren ($l \in \mathbb{N}$) liefern, [15]

$$\frac{2 L j^2 k}{d} = l \quad (j = 1, 3; \quad k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.110)$$

In Abbildung 2.15 ist für ein 15 m langes Brückentragwerk die Beschleunigungsantwort in Tragwerksmitte in Abhängigkeit von der Überfahrtgeschwindigkeit dargestellt. Die zugehörigen kritischen Geschwindigkeiten sind ergänzend in Tabelle 2.1 aufgelistet. Die Belastung wird durch zehn Einzellasten in einem Abstand von je 25 m gebildet. Die vertikalen Linien kennzeichnen die kritischen Geschwindigkeiten, die für die erste und dritte Eigenfrequenz (EF) ermittelt wurden. Die Geschwindigkeiten nach Gleichung (2.104) werden mit $V_{krit}(d)$ bezeichnet, da sie vom Lastabstand d abhängen. Die Ergebnisse aus Gleichung (2.107) sind durch Anwenden derselben Logik mit $V_{krit}(L)$ gekennzeichnet. Aus dem dargestellten Verlauf ist ersichtlich, dass die durch gestrichelte Linien markierten kritischen Geschwindigkeiten der dritten Eigenform nicht die Positionen der maximalen Tragwerksbeschleunigungen kennzeichnen. Dasselbe gilt für alle Geschwindigkeiten aus Gleichung (2.107). Die dargestellte Berechnung ist zwar nur beispielhaft, aber im Regelfall ist

es für Einfeldträger ausreichend, die kritischen Geschwindigkeiten aus Gleichung (2.104) für die erste Eigenform des Tragwerks zu ermitteln.

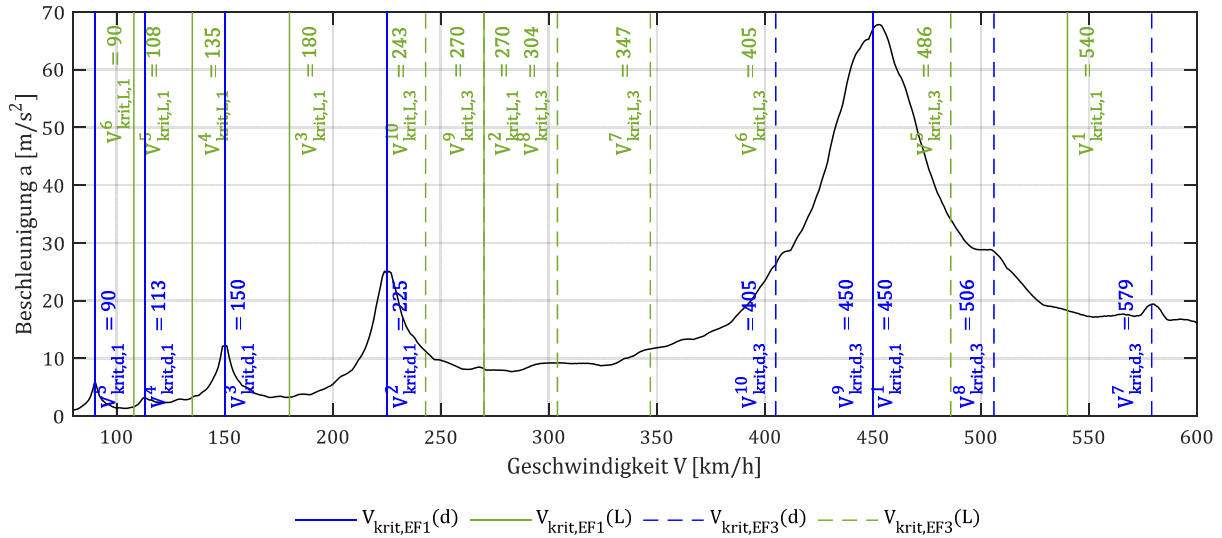


Abbildung 2.15: Tragwerksbeschleunigung in Brückenmitte a in Abhängigkeit von der Überfahrtgeschwindigkeit V inklusive Kennzeichnung der kritischen Geschwindigkeiten ($L = 15 \text{ m}$, $f_0 = 5 \text{ Hz}$, $\mu = 5 \text{ t/m}$, $\zeta = 1,0 \%$, $N = 5$, $P = 200 \text{ kN}$, $NP = 10$, $L_A = 25 \text{ m}$)

Die Resonanzgeschwindigkeiten v_{krit} werden also maßgeblich von der Tragwerkslänge L , der Überfahrtgeschwindigkeit v und den Eigenfrequenzen f_j bestimmt. Das Vorhandensein von Resonanzeffekten heißt jedoch nicht zwangsläufig, dass diese einen wesentlichen Einfluss auf die Tragwerksreaktion haben müssen. Die Resonanzamplituden werden im Wesentlichen von der Lastanzahl N und der vorhandenen Systemdämpfung ζ definiert, (vgl. etwa [15] oder [31]).

Vielfaches k, l	$V_{krit,EF1}^k(d)$ [km/h]	$V_{krit,EF3}^k(d)$ [km/h]	$V_{krit,EF1}^l(L)$ [km/h]	$V_{krit,EF3}^l(L)$ [km/h]
1	450	4050	540	2430
2	225	2025	270	1215
3	150	1350	180	810
4	113	1013	135	608
5	90	810	108	486
6	75	675	90	405
7	64	579	77	347
8	56	506	68	304
9	50	450	60	270
10	45	405	54	243

Tabelle 2.1: Kritische Geschwindigkeiten für eine 15 m lange Beispielbrücke (vgl. Abbildung 2.15)

Neben Resonanzeffekten, also dem Aufschaukeln der Tragwerksantwort, können auch Aufhebungseffekte (engl.: *cancelation phenomenons*) auftreten, vgl. [19], [31], [32] oder [33]. Der Aufhebungseffekt entsteht, wenn sich am Ende der Überfahrt einer Kraft, der partikuläre und der homogene Lösungsterm der Schwingung aufheben (vgl. [19] Bild 2.7 bzw. [31] Fig. 5). Dabei müssen sich nicht nur die Amplituden, sondern auch die Steigungen der beiden Lösungsterme kompensie-

ren. Für die erste Eigenfrequenz f_1 ist dies etwa dann der Fall, wenn die Überfahrtdauer t_U in einem gewissen Verhältnis zur Schwingungsperiode T_1 des Tragwerks steht, [19]

$$t_U = (m - 0,5) T_1 \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (2.111)$$

Die Gleichungen für die Aufhebungsgeschwindigkeiten v_{can} (Index *can* für *cancellation*) ergeben sich in allgemeiner Form gemäß *Xia et. al.* [34] wie folgt.

$$v_{can,n,m} = \frac{2 f_n L}{2 m - 1} \quad (n = 1, 3, 5, \dots ; \quad m = 1, 2, 3, \dots ; n \neq 2 m - 1) \quad (2.112)$$

$$v_{can,n,m} = \frac{2 f_n L}{2 m} \quad (n = 2, 4, 6, \dots ; \quad m = 1, 2, 3, \dots ; n \neq 2 m) \quad (2.113)$$

Bei $n = 2 m - 1$ bzw. $n = 2 m$ wird eine andere Resonanzbedingung erfüllt, daher werden diese Verhältnisse ausgeschlossen. Werden nur die Tragwerksreaktionen in Brückenmitte untersucht, so wird oftmals – wie etwa in [33] – auf die „geraden“ Schwingungen (antimetrische Schwingungsformen) verzichtet.

Für ein ungedämpftes System unterbindet der Aufhebungseffekt das Auftreten einer Nachschwingung. Für die in der Realität vorkommenden gedämpften Systeme reduziert dieser Effekt nur den Ausschwingvorgang. Je höher die Dämpfung, desto geringer die Reduktion, vgl. [35]. Am größten sind diese Aufhebungseffekte für die erste Eigenfrequenz f_1 , da diese auch den größten Einfluss auf die Systemschwingung in Brückenmitte hat, [34].

Wie *Yang et al.* in [29] zeigen, ist die Aufhebung stärker als das Resonanzphänomen. Treten also beide Phänomene bei einer Überfahrt auf, so ergibt sich die „statische“ Tragwerksantwort. Dieser Effekt wird auch von *Spengler* [5] und *Rauert* [19] beschrieben. Dabei wird die von der Waggonlänge abhängige Resonanzgeschwindigkeit (2.104) mit der von der Tragwerkslänge abhängigen Aufhebungsgeschwindigkeit (2.112) gleichgesetzt. Für die erste Eigenfrequenz ergibt sich dadurch das Längenverhältnis zu, [19]:

$$\frac{L}{d} = \frac{2 m - 1}{2 k} \quad (m = 2, 3, 4, \dots ; \quad k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.114)$$

Bei diesem Verhältnis treten der Resonanz- und der Aufhebungseffekt gleichzeitig auf. Da die Aufhebungseffekte stärker sind, stellt sich bei der Überfahrt in der entsprechenden Resonanzgeschwindigkeit annähernd die „statische“ Tragwerksantwort ein. Dieser Effekt ist etwa in [5] Abb. 4-26 anschaulich dargestellt.

Kumar et al. illustriert in [33], dass bei Überfahrtsgeschwindigkeiten, die einer Aufhebungsgeschwindigkeit der Grundeigenfrequenz entsprechen, sich auch alle anderen Schwingungsformen der freien Schwingungsantwort aufheben.

Vielfaches k, l, m	$V_{krit,EF1}^k(d)$ [km/h]	$V_{krit,EF1}^l(L)$ [km/h]	$V_{can,EF1}^m$ [km/h]
1	432	648	648
2	216	324	216
3	144	216	130
4	108	162	93
5	86	130	72
6	72	108	59
7	62	93	50

Tabelle 2.2: Kritische Geschwindigkeiten für eine 18 m lange Beispielbrücke (vgl. Abbildung 2.16)

Der Beschleunigungsverlauf einer 18 m langen Brücke ist in Abbildung 2.16 dargestellt. Die zugehörigen kritischen Geschwindigkeiten sind ergänzend in Tabelle 2.2 aufgelistet. Die Belastung erfolgt durch zehn Einzellasten in einem Abstand von je 24 m. Es ist gut erkennbar, dass an den durch V_{can} gekennzeichneten Geschwindigkeiten kein Aufschaukeln auftritt und an diesen Positionen zumeist sogar ein lokaler Tiefpunkt auftritt. Die zweite Resonanz der ersten Eigenfrequenz, tritt für dieses System bei einer Geschwindigkeit von 216 km/h auf. Da an der gleichen Geschwindigkeit ein Aufhebungseffekt stattfindet, muss gemäß den oben getroffenen Aussagen die Resonanz unterdrückt werden, was hier eindeutig erkennbar ist.

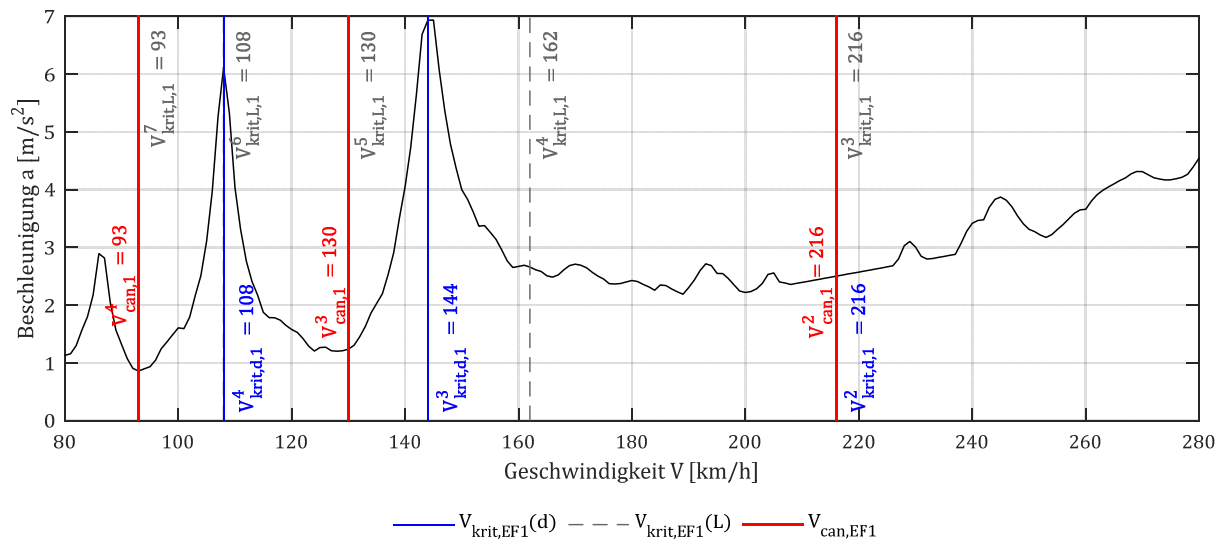


Abbildung 2.16: Tragwerksbeschleunigung in Brückenmitte a in Abhängigkeit von der Überfahrtgeschwindigkeit V inklusive Kennzeichnung der kritischen Geschwindigkeiten und der Aufhebungsgeschwindigkeiten ($L = 18 m, f_0 = 5 Hz, \mu = 5 t/m, \zeta = 1,0 \%, N = 5, P = 200 kN, NP = 10, L_A = 24 m$)

In Abbildung 2.16 ist auch gut erkennbar, dass die Beschleunigungsspitze bei 108 km/h besonders ausgeprägt ist. Für diese Geschwindigkeit trifft die Anregung aus dem Lastabstand jede vierte Schwingung der ersten Biegeeigenform und die Anregung aus der Tragwerkslänge jede sechste. Durch das gleichzeitige Auftreten beider Resonanzeffekte kann sich diese Spitze besonders ausprägen.

2.3 Tragwerkskennwerte

Die dynamische Antwort eines Tragwerks auf eine beliebige Anregung ist von den Tragwerkeigenschaften abhängig. Neben der Spannweite L sind die Biegesteifigkeit EI , die Massenbelegung μ und die Tragwerksdämpfung ζ von wesentlicher Bedeutung. Einen wesentlichen Kennwert zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften einer Konstruktion stellt die erste Eigenfrequenz f_1 dar. Sie ist von der Spannweite, der Massenbelegung und der Biegesteifigkeit abhängig. Die Tragwerksdämpfung wird zur Ermittlung der Eigenfrequenz meist vernachlässigt. Die Dämpfung beeinflusst vor allem das Abklingverhalten einer Schwingung und ist somit wesentlich für die maximale Tragwerksantwort im Falle einer Resonanzerscheinung.

2.3.1 Quellen der Brückenparameter

Um einen Überblick über die Bandbreite und die Verteilung der wesentlichen Tragwerksparameter von Eisenbahnbrücken zu erhalten, wurden aus verschiedenen Quellen Datensätze für die Kennwerte (Spannweite, Massenbelegung, gemessene Dämpfung, gemessene Eigenfrequenz, Anzahl der Gleise, usw.) erstellt. Insgesamt wurden so Angaben von etwa 470 Tragwerken, gesammelt. Es sei anzumerken, dass aus den unterschiedlichen Quellen eine unterschiedliche Anzahl an Angaben pro Tragwerk bestimmt werden konnte. Für die Tragwerke lt. *Frýba* stehen nur die Spannweite und die gemessene Eigenfrequenz zur Verfügung. Für die Tragwerke aus den ÖBB Daten dagegen sind auch genaue Angaben zur Geometrie, Materialkennwerte, teilweise gemessene Dämpfungswerte usw. vorhanden. Die wesentlichen Parameter sind für die jeweiligen Quellen in Anhang B in Diagramme zusammengefasst dargestellt. Bei den erhobenen Tragwerken handelt es sich um Eisenbahnbrücken auf Hochgeschwindigkeitsstrecken. Eine Darstellung weiterer Brückendaten, die jedoch nicht in diese Arbeit eingegangen sind, findet sich unter anderem in [5], [36] oder [37].

Die Datensätze enthalten gemessene und berechnete Kennwerte. Vor allem die gemessenen Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte sind von Interesse, da errechnete Kennwerte nicht zwangsläufig der Realität entsprechen müssen.

Daten *Frýba*

In [38] wurde von *Frýba* eine ausführliche Analyse der Eigenfrequenzen von Eisenbahnbrücken vorgenommen. Dabei werden die gemessenen Eigenfrequenzen der Tragwerke in Abhängigkeit von der Spannweite angegeben. Es erfolgt keine Unterscheidung der statischen Systeme. *Frýba* unterteilt die Tragwerke hinsichtlich der Werkstoffe in Stahl-Fachwerkbrücken, Stahl-Plattenbalken und Betonbrücken, jeweils mit und ohne Schotteroberbau. Auf diese Differenzierung wird in diesem Kapitel jedoch verzichtet. Insgesamt konnten 109 Datenpunkte aus [38] Fig. 4.26 zur weiteren Verwendung entnommen werden. Mangels näherer Angaben zur Fahrbahnkonstruktion werden Stahl-Fachwerkbrücken nicht zur weiteren Auswertung herangezogen und in der Datenbank als Brücken mit fester Fahrbahn geführt. Die Tatsache, dass diese Tragwerke eine relativ hohe Eigenfrequenz für die jeweilige Spannweite aufweisen, bekräftigt diesen Zugang (vgl. Abbildung B.1).

Die Anzahl der Tragwerke mit Schotteroberbau, die diesen Datenpunkten entnommen werden können, beläuft sich somit auf 43.

Daten ERRI

Aus dem ERRI-Report 3 und 8 ([39] und [40]) konnten weitere Datensätze entnommen werden. Da in diesen Daten unterschiedliche Untersuchungen derselben Tragwerke enthalten sind, sind hier auch Streuungen, die sich aus verschiedenen Auswertemethoden ergeben, abgebildet. Am Beispiel einer Brücke in Frankreich, auf der *SNCF-Strecke „Paris – Lille“ bei Saint-Denis, PK 6.382* wird ersichtlich, dass die Messwerte der Eigenfrequenz und mehr noch die der Dämpfung sehr stark streuen können. Für die 68,8 m lange Stahltragbrücke wird einmal eine Eigenfrequenz von ca. 2,0 Hz und einmal eine von 1,79 Hz angegeben. Die Dämpfung des Tragwerks wird zu $0,41 \pm 0,04 \%$ und 1,6 bis 1,8 % ermittelt. Die beiden Eigenfrequenzen liegen etwa 10 % auseinander, was aufgrund unterschiedlicher Witterungs- und Temperaturverhältnisse durchaus zutreffen kann. Die angegebenen Dämpfungswerte unterscheiden sich jedoch um den Faktor 4, was nahelegt, dass die hier angegebenen Dämpfungswerte mit Vorsicht zu betrachten sind.

Insgesamt wurden die Daten von 94 Tragwerken aus den Anhängen von [39] und [40] entnommen. Darunter waren 82 Datensätze für Tragwerke mit Schotteroberbau, welche in dieser Arbeit primär von Interesse sind.

Daten ÖBB

Die Tragwerke auf dem Streckennetz der Österreichischen Bundesbahnen (ÖBB), deren Kennwerte in dieser Arbeit verwendet werden, befinden sich auf einer Hochgeschwindigkeitsstrecke. Die derzeitige Maximalgeschwindigkeit, die auf dieser Strecke gefahren wird, beträgt etwa 250 km/h.

Liegen zwei Tragwerke mit den exakt gleichen Kennwerten an derselben Kilometrierung, so scheinen sie in dieser Arbeit nur als ein Tragwerk auf. Dies kann etwa bei getrennten Tragwerken für jede Fahrtrichtung der Fall sein. Dadurch werden Angaben, die eine Brückenanzahl benötigen, verfälscht. Dies ist beispielsweise bei einer Durchschnittsmassenbelegung oder einer Ausgleichsgeraden für die Brücken Kennwerte abhängig von der Spannweite der Fall, da gewisse Punkte eine „falsche“ Gewichtung erhalten.

In dieser Arbeit wurden Datensätze von 235 Tragwerken des ÖBB Streckennetzes aufgenommen. Dabei handelt es sich ausschließlich um Brücken mit Schotteroberbau.

Daten *Rauert*

Rauert gibt in [19] die wesentlichen Kennwerte von 35 Brücken des Hochgeschwindigkeitsnetzes in Deutschland an. Hierbei handelt es sich um Tragwerke der WIB-Bauweise (Walzträger in Beton) mit Spannweiten zwischen 5 und 25 m. Es wird zwischen zweigleisigen Überbauten und zwei eingleisigen Überbauten mit durchgehendem Schotterbett unterschieden. Die als gemessen bezeichneten Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte wurden aus dem Ausschwingverhalten nach Zugüber-

fahrten ermittelt. Sämtliche Tragwerke sind mit Schotteroberbau ausgeführt und ruhen auf Elastomerlagern. Um auch Angaben zur Schienenexzentrizität (Schwerpunkt Abstand der Schiene und des Tragwerks) machen zu können, wird hier eine einheitliche Schotterbetthöhe von 55 cm angenommen und der Querschnittsschwerpunkt der WIB-Tragwerke in halber Tragwerkshöhe angesetzt.

	Frýba [38]	ERRI [39], [40]	ÖBB	Rauert [19]	Summe
Tragwerke gesamt	109	94	235	35	473
Tragwerke mit Schotteroberbau	43	82	235	35	385

Tabelle 2.3: Anzahl der Tragwerke im Datensatz und zugehörige Quelle

Eine zusammenfassende Aufstellung der Anzahl der Tragwerksdatensätze und der zugehörigen Quellen ist in Tabelle 2.3 gegeben.

2.3.2 Spannweiten

Die Spannweite einer Brücke ist meist der Parameter, der am einfachsten und genauesten zu bestimmen ist. Eisenbahnbrücken können Spannweiten von wenigen Metern bis zu ca. 100 Meter aufweisen.

Johansson et al. untersuchten in [36] einen Teil des Schwedischen Eisenbahnnetzes mit über 1000 Tragwerken. Davon haben 70 % der Brücken eine Spannweite von weniger als 12 m und fast 50 % ist kürzer als 6 m. Lediglich 3 % der Brücken sind länger als 30 m. Von den in [41] untersuchten 400 Brücken auf dem österreichischen Schienennetz haben etwa 60 % eine Spannweite unter 12 m. Über 30 m Spannweite weisen nur 14 % der Tragwerke auf.

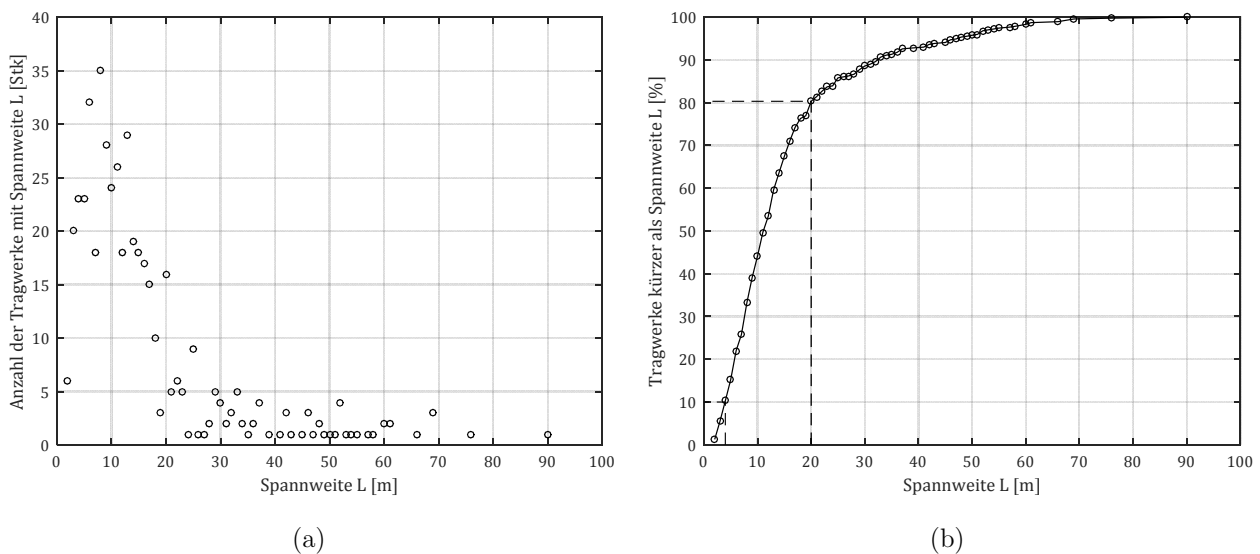


Abbildung 2.17: Spannweiten der Tragwerke im verwendeten Datensatz (a) Anzahl der Tragwerke je Spannweite L (auf Meter gerundet) (b) Summe der Tragwerke kürzer als die L

Aus Abbildung 2.17 ist ersichtlich, dass etwa 80 % der Tragwerke des vorliegenden Datensatzes (470 Tragwerke) eine Spannweite von weniger als 20 m aufweisen. Nur 10 % der Tragwerke sind kürzer als 4 m. 70% der Brücken liegen demnach zwischen 4 und 20 m.

2.3.3 Eigenfrequenzen von Brückentragwerken

Das dynamische Verhalten eines Tragwerks wird größtenteils durch die Biegeeigenfrequenzen f_n charakterisiert. Den größten Einfluss hat dabei im Regelfall die erste Biegeeigenfrequenz f_1 , die auch oft als Grundfrequenz f_0 oder n_0 bezeichnet wird (vgl. [5] oder [17]). Wie etwa aus Kapitel 2.2.10 ersichtlich ist, bestimmt die erste Biegeeigenfrequenz maßgeblich die kritischen Geschwindigkeiten des Tragwerks.

Für einen gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balken werden die Eigenfrequenzen aus der Biegesteifigkeit EI , der Massenbelegung μ und der Systemlänge L bestimmt. Die Gleichung für die unbelastete und ungedämpfte n -te Eigenfrequenz lässt sich wie folgt anschreiben [4]:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n^2 \pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (2.115)$$

Da sich viele Brücken als Einfeldträger idealisieren lassen, wird diese Gleichung oft zur ersten Abschätzung der Eigenfrequenzen verwendet.

Die tatsächliche Schwingungseigenfrequenz f_D eines Tragwerks kann auch relativ simpel messtechnisch ermittelt werden und ist daher ein wesentlicher Indikator für das Verhalten eines Brückentragwerks. Meist wird die gemessene Frequenz f_D mit f_1 gleichgesetzt, obwohl es sich bei der gemessenen Frequenz um die tatsächlich vorhandene Frequenz - unter Berücksichtigung aller vorhandenen Effekte - handelt und f_1 sich auf das ungedämpfte System bezieht. Gleichung (2.116) beschreibt die gedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_D eines unterkritisch gedämpften Einmassenschwingers [6]:

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.116)$$

Daraus ist ersichtlich, dass für gering gedämpfte Systeme ($\zeta \leq 0,2$) $\omega_D \approx \omega_n$ angenommen werden kann. Diese Annahmen treffen im Allgemeinen bei Eisenbahnbrücken zu.

Um die Grundfrequenz einer Brücke abschätzen zu können, finden sich in der Literatur viele Näherungsansätze, die oftmals nur von der Spannweite und dem Material des Tragwerks abhängen. Auf der Basis von Messungen wird etwa in [42] folgende „Faustformel“ für die erste Biegeeigenfrequenz von kurzen Tragwerken angegeben:

$$f = \frac{165}{L [m]} [Hz] \quad (2.117)$$

Frýba verwendet in [14] die in [38] empirisch abgeleiteten Gleichungen für Beton- und Stahlbrücken, um die Eigenfrequenz in Abhängigkeit von der Spannweite abzuschätzen:

$$f_1 = \frac{140}{L [m]} \quad (2.118)$$

für Betonbrücken und

$$f_1 = \frac{250}{L [m]} \quad (2.119)$$

für Stahltragwerke. In [38] gibt er aber auch folgende vom Material des Tragwerks unabhängige Form der Abschätzformel an:

$$f_1 = 133 L [m]^{-0,9} [Hz] \quad (2.120)$$

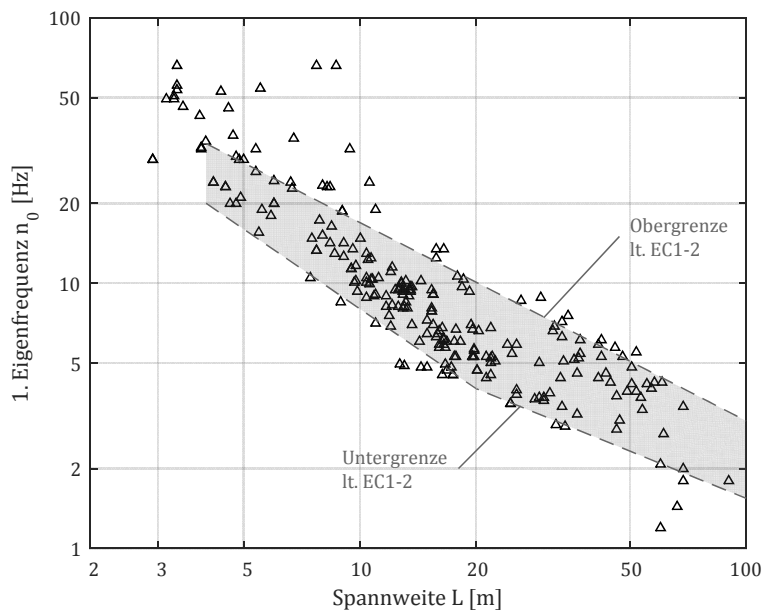


Abbildung 2.18: Gemessene Eigenfrequenzen von Eisenbahnbrücken in Abhängigkeit von der Spannweite

In Abbildung 2.18 sind für den gesamten Datensatz die gemessenen Eigenfrequenzen in Abhängigkeit von der Spannweite dargestellt. Da sich diese Arbeit aber primär auf Tragwerke mit Schotteroberbau konzentriert, werden hier Objekte mit fester Fahrbahn nicht berücksichtigt. Nicht für jedes Tragwerk mit Schotteroberbau ist eine gemessene Eigenfrequenz vorhanden, daher reduziert sich die Anzahl der eingetragenen Datenpunkte weiter. Hier wird jedoch nicht zwischen unterschiedlichen Baumaterialien oder zwischen ein- und mehrgleisigen Brücken unterschieden.

Neben den Datenpunkten der Tragwerke sind auch die im ERRI-Schlussbericht D214-RP9 (1999) [20] vorgeschlagenen Grenzwerte für die erste Brückeneigenfrequenz n_0 eingetragen. Liegt die erste Tragwerksfrequenz innerhalb dieser Grenzen, so kann gemäß Eurocode EC 1991-2 [3] auf eine dynamische Berechnung verzichtet werden. Wie aus Abbildung 2.18 erkennbar ist, liegen die meisten Tragwerke innerhalb dieser Grenzen. Eine dynamische Berechnung würde demnach für den Großteil der Brücken entfallen. Gerade Tragwerke unter 10 m Spannweite erfüllen dieses Kriterium jedoch oftmals nicht und wären daher genauer zu untersuchen.

2.3.4 Tragwerksmasse

Die Tragwerksmasse wird meist aus den Planangaben errechnet. Das Volumen der einzelnen Querschnittsteile kann dafür relativ genau ermittelt werden. Abweichungen zum tatsächlich vorhandenen Zustand ergeben sich hauptsächlich aus baulichen Abänderungen (z.B. Änderung der Gleiskörperhöhe) oder aus einem nicht exakten Ansatz der Materialdichten. Nach der Spannweite und der gemessenen Eigenfrequenz stellt die Masse des Tragwerks wohl den Kennwert dar, der mit der nächst geringsten Abweichung bestimmbar ist (mit Vorbehalte bei der Schottermasse).

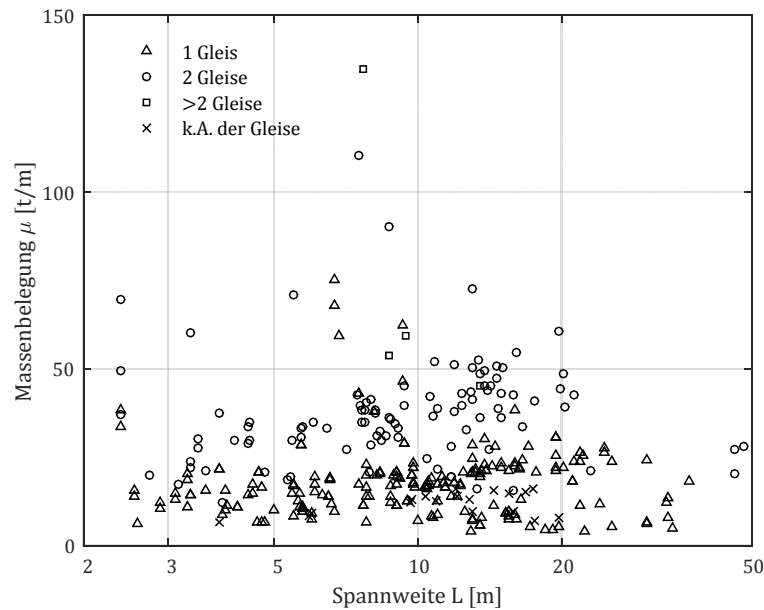


Abbildung 2.19: Massenbelegung in Abhängigkeit von der Spannweite

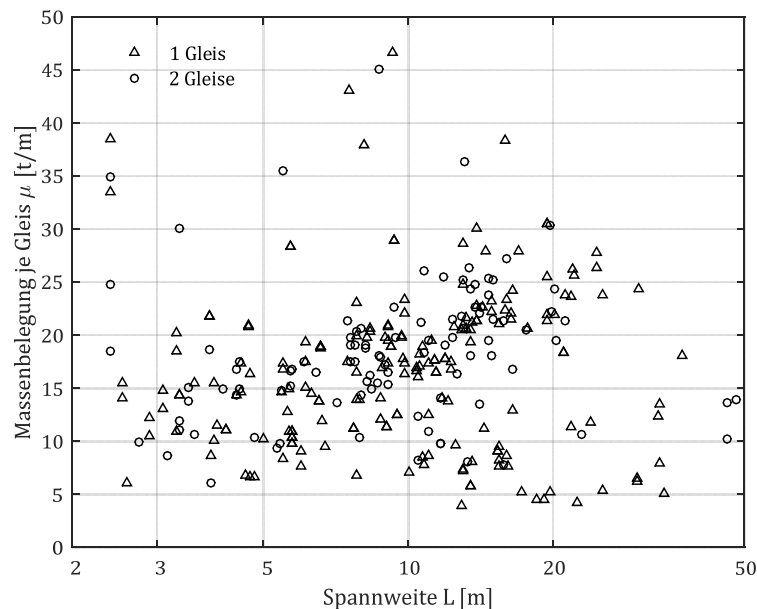


Abbildung 2.20: Massenbelegung je Gleis in Abhängigkeit von der Spannweite

Die Massenbelegung der Tragwerke aus dem vorhandenen Datensatz ist in Abbildung 2.19 dargestellt. Im Diagramm werden die Brücken anhand ihrer Gleisanzahl unterteilt. Bis auf wenige Ausreißer weisen alle eingleisigen Tragwerke eine Massenbelegung unter 50 t/m auf. Um eine nähere

Einschränkung treffen zu können, ist in Abbildung 2.20 die Massenbelegung pro Gleis dargestellt. Daraus ist gut ersichtlich, dass der Großteil der Brücken zwischen 5 und 30 t/m je Gleis liegt. Nur 21 der 320 berücksichtigten Tragwerke (nur für 320 Tragwerke sind Angaben zur Massenbelegung vorhanden) weisen eine Massenbelegung von mehr als 30 t/m je Gleis auf.

Die Massenbelegung von Brücken kann bei kurzen eingleisigen Stahltragwerken mit fester Fahrbahn sogar unter 2 t/m liegen, siehe [39]. Da sich diese Arbeit auf Tragwerke mit Schotteroberbau konzentriert, werden diese Tragwerke hier jedoch nicht weiter berücksichtigt.

2.3.5 Biegesteifigkeit

Der Einfluss der Biegesteifigkeit EI auf die Eigenfrequenz des Tragwerks hat die gleiche Gewichtung wie die Massenbelegung (vgl. Gleichung (2.115)). Eine Vervierfachung der Steifigkeit führt zu einer Verdopplung der Eigenfrequenz. Bei der Masse ist es umgekehrt, eine Vervierfachung bewirkt eine Halbierung der Eigenfrequenz. Ungenauigkeiten in diesen beiden Kennwerten wirken sich demnach nur unterlinear aus.

Eine rechnerische Ermittlung der Biegesteifigkeit gestaltet sich speziell für Betontragwerke sehr schwierig, da neben den Materialparametern auch der „Risszustand“ (Zustand I und Zustand II) einen wesentlichen Einfluss hat. Versuchstechnisch kann die Biegesteifigkeit etwa indirekt über Rückrechnung aus der Verformung zufolge einer bekannten Belastung bestimmt werden. Angaben von Biegesteifigkeiten beziehen sich jedoch meist auf rechnerische Werte aus Planunterlagen, da die versuchstechnische Ermittlung nur indirekt und mit viel Aufwand möglich ist.

Zu beachten ist auch, dass die Systemsteifigkeit und somit die Eigenfrequenzen von Brücken witterungs- und temperaturabhängig sind. Die von *Rauert* in [19] aus Zugüberfahrten ermittelten Biegeeigenfrequenzen eines WIB Tragwerks sind bei Messungen im Winter um bis zu 15 % höher. Für das von *Gonzales et al.* [43] untersuchte Brückentragwerk konnten sogar Frequenzunterschiede zwischen Messungen im Sommer und im Winter von bis zu 35 % festgestellt werden.

Aus den in Abbildung 2.21 dargestellten Datenpunkten ist ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Spannweite und Biegesteifigkeit erkennbar. Da die Bandbreite der möglichen Biegesteifigkeiten für eine vorgegebene Spannweite jedoch im Bereich von einer Zehnerpotenz liegt, wird hier auf die Angabe einer Gleichung für diesen Zusammenhang verzichtet.

Aus den Abbildung 2.19 und Abbildung 2.20 ist kein systematischer Zusammenhang zwischen der Spannweite L und der Massenbelegung μ erkennbar. Daher ist in Abbildung 2.22 die Massenbelegung in Abhängigkeit von der Biegesteifigkeit dargestellt, um etwaige Zusammenhänge zu erkennen. Aus dieser Darstellung ist eindeutig erkennbar, dass μ mit zunehmendem EI tendenziell ansteigt. Viel wesentlicher scheint jedoch der Umstand, dass auch die Bandbreite der Massenbelegung mit der Biegesteifigkeit steigt. Ein einfach beschreibbarer Rückschluss von der Biegesteifigkeit auf die Masse oder umgekehrt scheint somit nicht möglich.

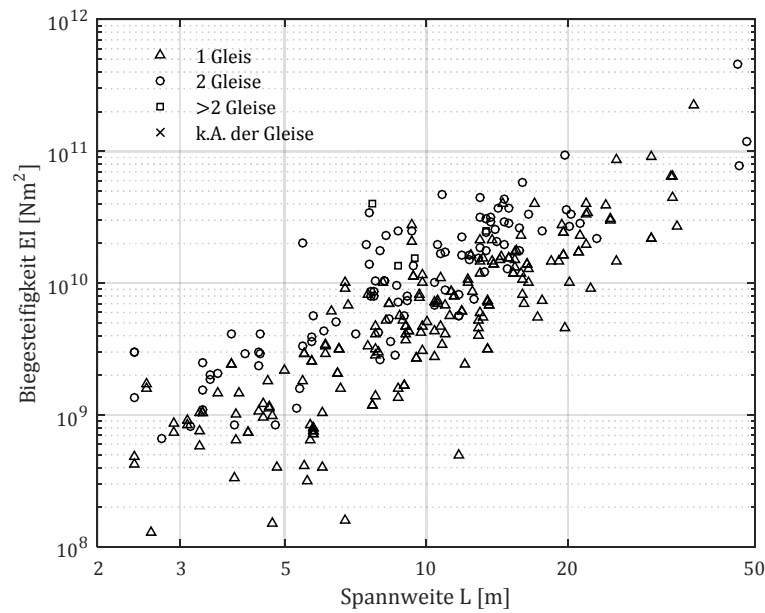


Abbildung 2.21: Biegesteifigkeit in Abhängigkeit von der Spannweite

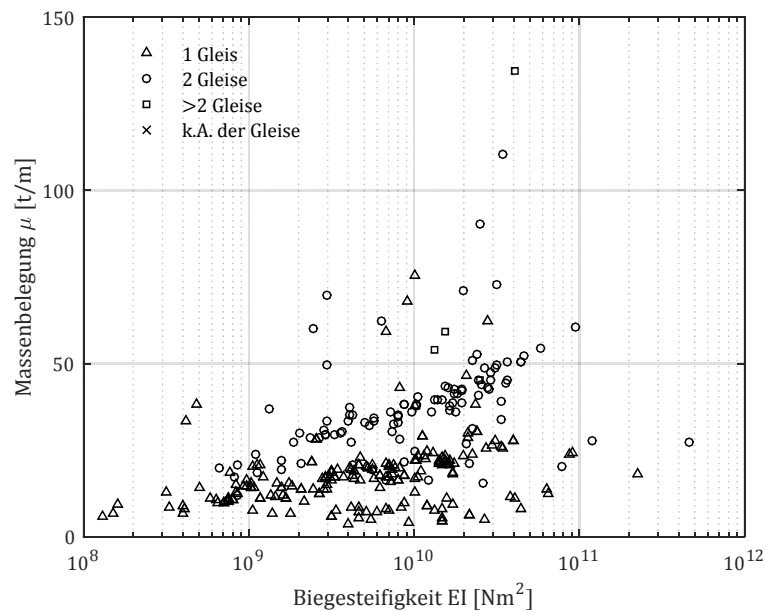


Abbildung 2.22: Massenbelegung in Abhängigkeit von der Biegesteifigkeit

2.3.6 Tragwerksdämpfung

Die Dämpfung ist entscheidend für das Nachschwingverhalten eines Tragwerkes und limitiert die maximale Schwingungsamplitude für den Resonanzfall. Dieser Parameter hat also einen großen Einfluss auf die Dimensionierung eines neuen Tragwerkes bzw. auf die dynamische Nachrechnung bestehender Objekte. Gemäß geltender Norm (EC 1-2 [3]) kann die Tragwerksdämpfung als Funktion der Spannweite ermittelt werden. Dabei wird hinsichtlich der Bauweise zwischen: (a) Stahl- und Verbund- (b) Spannbeton- und (c) Walzträger in Beton (WIB) und Stahlbetontragwerken unterschieden. Tabelle 2.4 gibt die unteren Grenzwerte für die Dämpfung laut Eurocode an. Diese Verläufe sind auch in Abbildung 2.23 dargestellt.

Brückentyp	ζ unterer Grenzwert der kritischen Dämpfung [%]	
	Spannweite $L < 20 \text{ m}$	Spannweite $L \geq 20 \text{ m}$
Stahl und Verbund	$\zeta = 0,5 + 0,125(20 - L)$	$\zeta = 0,5$
Spannbeton	$\zeta = 1,0 + 0,07(20 - L)$	$\zeta = 1,0$
WIB und Stahlbeton	$\zeta = 1,5 + 0,07(20 - L)$	$\zeta = 1,5$

Tabelle 2.4: Tragwerksdämpfung lt. Eurocode, [44]

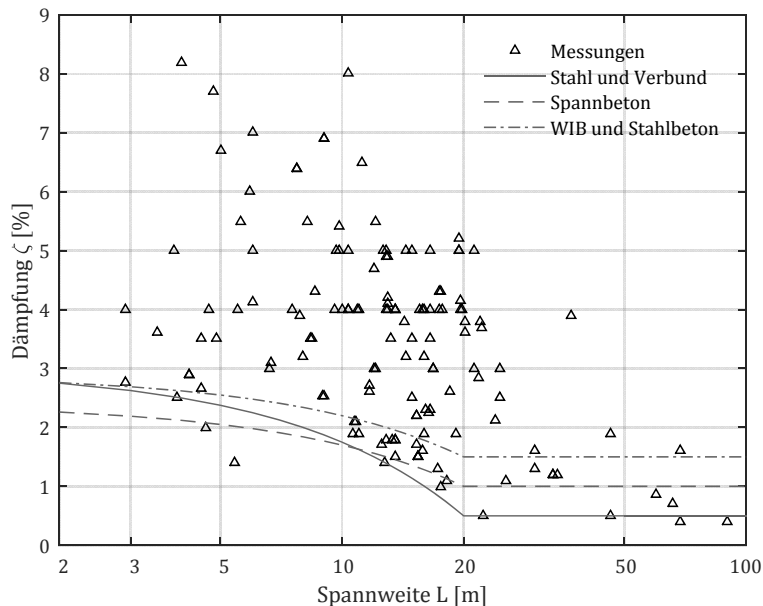


Abbildung 2.23: Dämpfungswerte in Abhängigkeit von der Spannweite mit eingetragenen Dämpfungsverläufen gemäß Tabelle 2.4

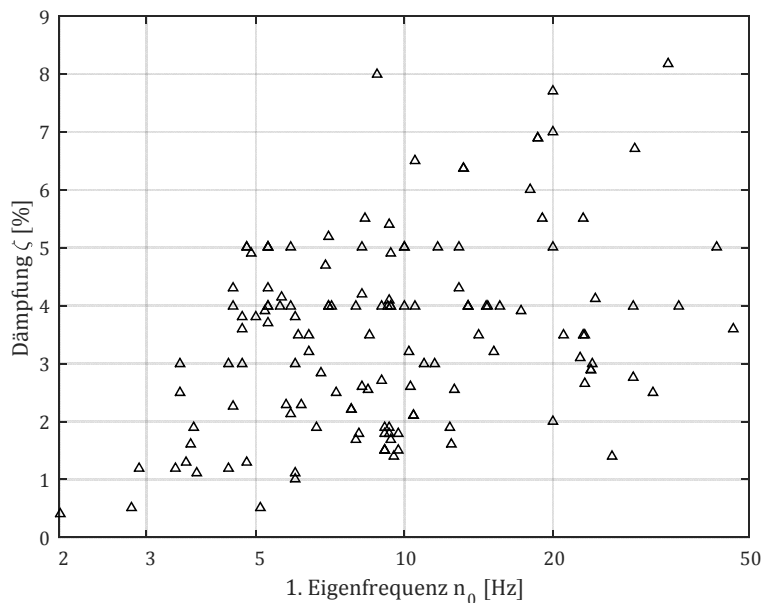


Abbildung 2.24: Dämpfungswerte in Abhängigkeit von der ersten Eigenfrequenz

Die gemessenen Tragwerksdämpfungen aller Objekte mit Schotteroberbau aus dem Datensatz sind in Abbildung 2.23 dargestellt. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass die normativen Grenzwerte für das Gros der Tragwerke einen sehr konservativen Ansatz bilden. Für manche Objekte liegt dieser Grenzwert jedoch auf der unsicheren Seite. Anhand der großen Streuungen der Dämpf-

fungswerte ist ersichtlich, dass die Spannweite alleine nicht ausreicht um die Tragwerksdämpfung abzuschätzen.

In Abbildung 2.24 sind die Dämpfungen in Bezug zur ersten Eigenfrequenz dargestellt. Diese Darstellung weist in etwa einen ebenso guten Parameterzusammenhang auf wie der in Abbildung 2.23 dargestellte Zusammenhang zwischen Dämpfung und Spannweite. Man könnte die Tragwerksdämpfung demnach auch anhand der Grundfrequenz eines Tragwerkes definieren, wodurch mehr Verbindung zur dynamischen Tragwerksreaktion gegeben wäre.

Es sei noch anzumerken, dass die oben dargestellten Dämpfungswerte relativ sind. Wie bereits in Abschnitt 2.3.1 erwähnt, können unterschiedliche Auswertemethoden zu stark abweichenden Kennwerten führen. Auch die Witterung und Temperatur kann einen nicht ganz unwesentlichen Einfluss auf die Dämpfung haben, wie *Rauert* in [19] aufzeigt. Um auf der sicheren Seite zu liegen, sind in Abbildung 2.23 und Abbildung 2.24 jeweils die niedrigeren Dämpfungswerte dargestellt, falls Angaben aus mehreren Messungen vorhanden sind.

Interessant sind auch die Aussagen der ERRI, wonach es *für die Dämpfung wenig Unterschied zwischen Gleisen mit und ohne Schotter gibt* und dass *die Auflagerbedingungen einen starken Einfluss auf die Dämpfung haben*, [45]. Des Weiteren wird in [45] erwähnt, *dass sich ein Zusammenhang der Dämpfung und Steifigkeit statistisch nicht nachweisen lässt*.

2.4 Zugparameter

Für eine dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken stellt die Belastung, also das Zugmodell, eine wesentliche Eingangsgröße dar. Entsprechend den Vorschlägen des ERRI Komitees D-214 enthält der Eurocode [3] die HSLM Lastmodelle, die zur Gewährleistung der Interoperabilität der damals gängigen europäischen Hochgeschwindigkeitszüge entwickelt wurden. In Anhang A.14 sind die Angaben zu den 10 HSLM-A Lastmodellen dargestellt. Als Grundlage für diese Lastmodelle dienten in [20] unter anderem folgende technische Spezifikationen:

- statische Grenzlast $P_0 \leq 18t/\text{Radsatz}$, wenn gilt: $V < 260 \text{ km/h}$
- statische Grenzlast $P_0 \leq 17t/\text{Radsatz}$, wenn gilt: $V \geq 260 \text{ km/h}$
- maximale Zuglängen von 400 m und eine maximale Gesamtzuglast von 10.000 kN

In Anhang A finden sich die technischen Spezifikationen von derzeit gängigen Zugmodellen. Dabei wird zwischen *herkömmlichen Zügen* und *Gelenkzügen* unterschieden. Eine Zusammenfassung der Kennwerte für die herkömmlichen Züge wird in Tabelle 2.5 angegeben. Die zugehörigen Abmessungen sind in Abbildung 2.25 eingetragen. Für die Zusammenfassung wurden die Kennwerte folgender Züge berücksichtigt: Railjet, ICE2, ICE3, ICE4, ETR500Y und Alfa Pendular HST. Zur Ermittlung der maximalen Wagenzahl wird (ausgenommen ICE2 und ETR500Y) mit Doppelgarnituren gerechnet.

Eine Bandbreite ausgewählter Parameter der Gelenkzüge wird in Tabelle 2.6 und Abbildung 2.26 angegeben. Als Basis dienen dabei die Kennwerte der Zugtypen: Eurostar, AVE S-100 HST, TGV und Thalys. Für die Bestimmung der maximalen Wagen- und Lastanzahl werden (ausgenommen Eurostar) auch hier Doppelgarnituren angesetzt. Da es sich bei allen vier Zügen primär um denselben Zug handelt, sind in Tabelle 2.6 nur Bandbreiten hinsichtlich der Wagen- und Achszahl feststellbar.

Beschreibung	Symbol	Einheit	min. Wert	max. Wert
Wagenanzahl gesamt	N_W	[Stk]	6	16
Anzahl der Achslasten	N_P	[Stk]	24	64
Länge über Puffer - TK	d	[m]	19,28	28,75
Radsatzabstand - TK	b	[m]	2,50	3,00
Achslast - TK	P	[kN]	120	225
Länge über Puffer - MW	d	[m]	24,78	28,75
Radsatzabstand - MW	b	[m]	2,30	3,00
Achsabstand zw. zwei Wagen - MW	s	[m]	4,00	6,96
Achslast - MW	P	[kN]	112	180

Tabelle 2.5: Bandbreite der Zugparameter für herkömmliche Züge

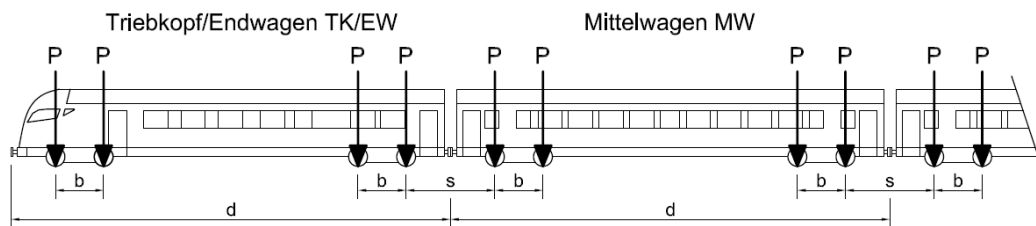


Abbildung 2.25: Abmessungen für herkömmliche Züge

Beschreibung	Symbol	Einheit	min. Wert	max. Wert
Wagenanzahl gesamt	N_W	[Stk]	10	22
Anzahl der Achslasten	N_P	[Stk]	26	58
Länge über Puffer - TK	d	[m]	22,15	22,15
Radsatzabstand - TK	b	[m]	3,00	3,00
Achslast - TK	P	[kN]	170	172
Länge über Puffer - MW	d	[m]	22,15	22,15
Radsatzabstand - MW	b	[m]	3,00	3,00
Achslast - MW	P	[kN]	155	170

Tabelle 2.6: Bandbreite der Zugparameter für Gelenkzüge

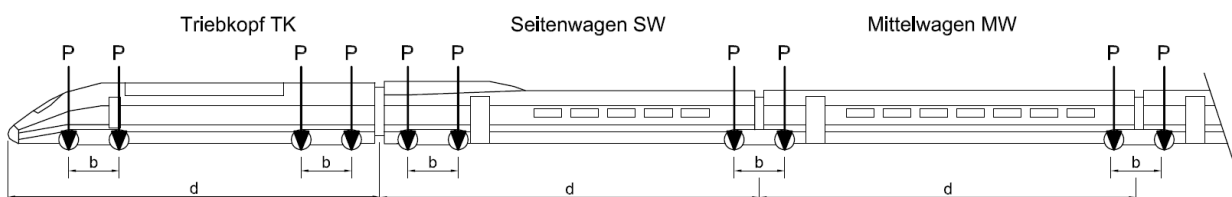


Abbildung 2.26: Abmessungen für Gelenkzüge

2.5 Grenzwerte

Die Grundlagen für die dynamische Bemessung von neuen Eisenbahnbrücken und die Beurteilung von bestehenden Objekten sind in zahlreichen Normen und Richtlinien festgelegt ([3], [6], [44], [46], [47]). Der Großteil der Vorschriften geht auf die Untersuchungen und Erkenntnisse des ERRI Komitees D-214 (siehe [20], [39], [40], [45], [48], [49], [50]) zurück. Dabei gibt es unterschiedliche Zwecke der einzelnen Forderungen, etwa zur Sicherstellung der Verkehrssicherheit, des Fahrgastkomforts oder generell der Tragsicherheit der Brücke. Im Wesentlichen erfolgt eine Begrenzung der auftretenden Schnittgrößen, Verformungen und Beschleunigungen. Die folgenden Absätze sollen eine kurze Übersicht über die für diese Arbeit wesentlichen Grenzwerte der Ergebnisse aus dynamischen Berechnungen geben.

2.5.1 Erfordernis einer dynamischen Berechnung

Zunächst einmal ist abzuklären, ob eine dynamische Berechnung überhaupt notwendig ist. In Österreich sind gemäß ÖBB Richtlinie [18] dynamische Berechnungen ab Streckenhöchstgeschwindigkeiten von 120 km/h erforderlich. Liegen die dynamischen Tragwerkskennwerte jedoch innerhalb bestimmter Grenzwerte aus Regelplanungen oder vorigen Untersuchungen, so kann auf eine dynamische Berechnung verzichtet werden. Dies gilt etwa für Tragwerke, die kürzer als 2,0 m sind und eine längenabhängige Mindestdicke aufweisen.

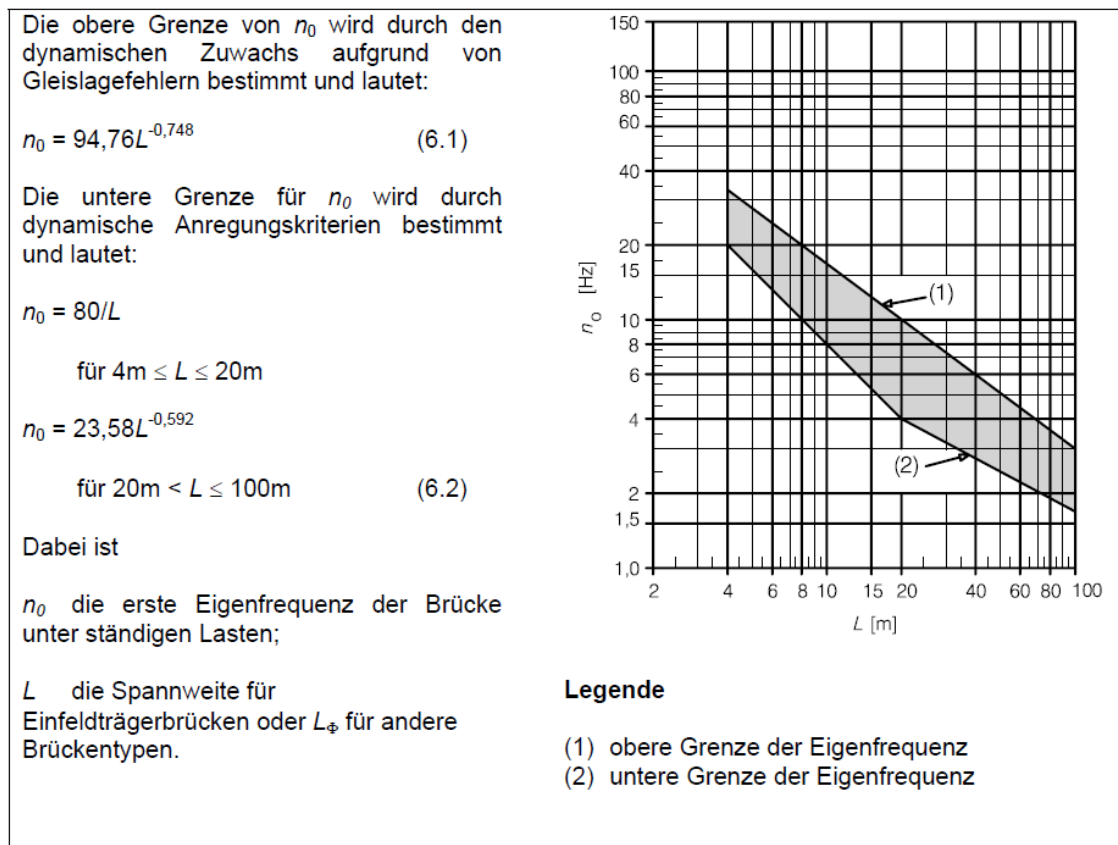


Abbildung 2.27: Grenzen der Brückeneigenfrequenz n_0 in [Hz] (siehe [3] Bild 6.10)

Gemäß Eurocode (EN 1991-2, Ausgabe: 2012-03-01) wird die Notwendigkeit einer dynamischen Berechnung jedoch aus dem Flussdiagramm in [3] (Bild 6.9) bestimmt. Ist die örtlich zulässige Geschwindigkeit V größer als 200 km/h, so ist, ein paar Sonderfälle ausgenommen, eine dynamische Berechnung erforderlich. Beträgt die örtliche Streckengeschwindigkeit weniger als 200 km/h und handelt es sich nicht um eine Durchlaufträgerbrücke, so kann die Erfordernis einer dynamischen Berechnung anhand von [3] (Bild 6.10), dargestellt in Abbildung 2.27, ermittelt werden. Liegt die erste Tragwerkseigenfrequenz innerhalb der Grenzfrequenzen, so kann auf eine dynamische Berechnung verzichtet werden.

Anmerkung

Oberhalb der unteren Frequenzgrenze $n_{0,\text{inf}}$ (2) kann gemäß [3] Anhang C der dynamische Vergrößerungsfaktor φ' , der gemäß Gleichung (2.121) definiert ist, für Geschwindigkeiten bis zu 200 km/h nach Gleichung (2.122) ermittelt werden. Dieser Faktor gibt den Zuwachs der dynamischen Ergebnisgröße y_{dyn} im Vergleich zur statischen y_{stat} an:

$$\varphi' = \max|y_{\text{dyn}}/y_{\text{stat}}| - 1 \quad (2.121)$$

$$\varphi' = \frac{K}{1 - K + K^4} \quad \text{für} \quad K < 0,76 \quad (2.122)$$

$$K = \frac{v}{2 L_{\Phi} f_0} \quad (2.123)$$

Der Parameter K stellt dabei das Verhältnis der Anregungsfrequenz F_v (vgl. Gleichung (2.105)) aus der Überfahrtgeschwindigkeit zur ersten Biegeeigenfrequenz f_0 , auch mit n_0 bezeichnet, dar. L_{Φ} steht für die maßgebende Länge. Diese ist vom Tragsystem abhängig. Der dynamische Zuwachs φ' nach Gleichung (2.122) besitzt bei $K = 0,76$ seinen Maximalwert von 1,325, der auch für größere Frequenzverhältnisse anzusetzen ist.

Unterhalb der oberen Frequenzgrenze $n_{0,\text{sup}}$ (1) aus Abbildung 2.27 kann der Zuwachs resultierend aus Gleisstörungen und Fahrzeugunregelmäßigkeiten φ'' folgendermaßen berechnet werden:

$$\varphi'' = \frac{\alpha}{100} \left[56 e^{-\left(\frac{L_{\Phi}}{10}\right)^2} + 50 \left(\frac{L_{\Phi} f_0}{80} - 1 \right) e^{-\left(\frac{L_{\Phi}}{10}\right)^2} \right], \quad \varphi'' \geq 0 \quad (2.124)$$

Für Geschwindigkeiten v höher als 22 m/s wird α gleich 1 gesetzt. Kombiniert man Gleichung (2.122) und (2.124) so können gemäß [3] Anhang C die dynamischen Effekte von Betriebszügen durch Multiplikation der aus den statischen Lasten resultierenden Kräfte und Momente mit dem dynamischen Beiwert $1 + \varphi$ berücksichtigt werden. Dieser dynamische Beiwert ergibt sich für sorgfältige Instandhaltung der Gleise (im Regelfall zutreffend) zu:

$$1 + \varphi = 1 + \varphi' + \varphi''/2 \quad (2.125)$$

Die dynamische Berechnung für Tragwerke innerhalb der Grenzwerte aus Abbildung 2.25 könnte demnach für Geschwindigkeiten unter 200 km/h durch eine *quasistatische* ersetzt werden.

2.5.2 Nachweis der Grenzzustände

Wird eine tatsächliche dynamische Berechnung durchgeführt, so ist die dynamische Vergrößerung im Allgemeinen bereits in den Ergebnissen enthalten. Die Berechnung hat gemäß Eurocode für die Betriebszüge BZ und die HSLM-Lastmodelle zu erfolgen. Werden die Effekte aus Gleisfehler und Fahrzeugunregelmäßigkeiten nicht durch das dynamische Tragwerks- bzw. Lastmodell berücksichtigt, so kann dies wiederum durch den Beiwert φ'' geschehen. Die Spannungen, Verformungen und Beschleunigungen aus den dynamischen Berechnungen müssen dazu mit dem Faktor $1 + \varphi''/2$ multipliziert werden. Dies gilt wiederum für sorgfältig instandgehaltene Gleise.

Für die Bemessung einer Brücke sind die ungünstigsten Werte aus den zwei folgenden Gleichungen zu verwenden:

$$(1 + \varphi''/2) * \text{dyn. Ergebnis für (HSLM oder BZ)} \quad (2.126)$$

$$\Phi * \text{statisches Ergebnis für (LM71 oder SW/0)} \quad (2.127)$$

Der dynamische Beiwert Φ hängt vom Instandhaltungszustand der Gleise ab. Er ergibt sich für sorgfältige Instandhaltung zu:

$$\Phi = \Phi_2 = \frac{1,44}{\sqrt{L_\Phi - 0,2}} + 0,82 \quad 1,0 \leq \Phi_2 \leq 1,67 \quad (2.128)$$

LM71 und SW/0 stellen zwei Lastmodelle für die statische Berechnung einer Eisenbahnbrücke dar. Für den Nachweis der Grenzzustände sind demnach die statischen Berechnungsergebnisse um einen dynamischen Beiwert zu erhöhen. Des Weiteren muss auch für die Ergebnisse einer dynamischen Berechnung (für BZ und HSLM), unter Berücksichtigung der Effekte aus Gleisfehler und Fahrzeugunregelmäßigkeiten, die erforderliche Sicherheit gegeben sein.

Für den Nachweis der Gebrauchstauglichkeit sind neben bestimmter Verformungsgrenzwerte auch Grenzwerte der Überbaubeschleunigung einzuhalten. Dies stellt eine Forderung der Betriebssicherheit dar, um die Gleisstabilität zu gewährleisten.

2.5.3 Verformungen

Zur Sicherstellung der Gebrauchstauglichkeit sind im Eurocode [3] und [46] mehrere Verformungskriterien definiert. In dieser Arbeit ist jedoch nur die Vertikalverformung von Interesse.

Um einen entsprechenden Fahrgastkomfort zu gewährleisten wird die maximale vertikale Beschleunigung, die im Fahrzeug auftritt, beschränkt. Dafür werden maximal zulässige Vertikalverformungen δ entlang der Gleisachse in Abhängigkeit von der Spannweite L , der Zuggeschwindigkeit V und dem Tragsystem festgelegt (vgl. [46] Abschnitt A.2.4.4.3). In Abbildung 2.28 sind die zulässigen Grenzverhältnisse L/δ für drei oder mehr aufeinander folgende Einfeldträger dargestellt. Für nur einen Einfeldträger können diese Werte mit einem Faktor von 0,7 multipliziert werden.

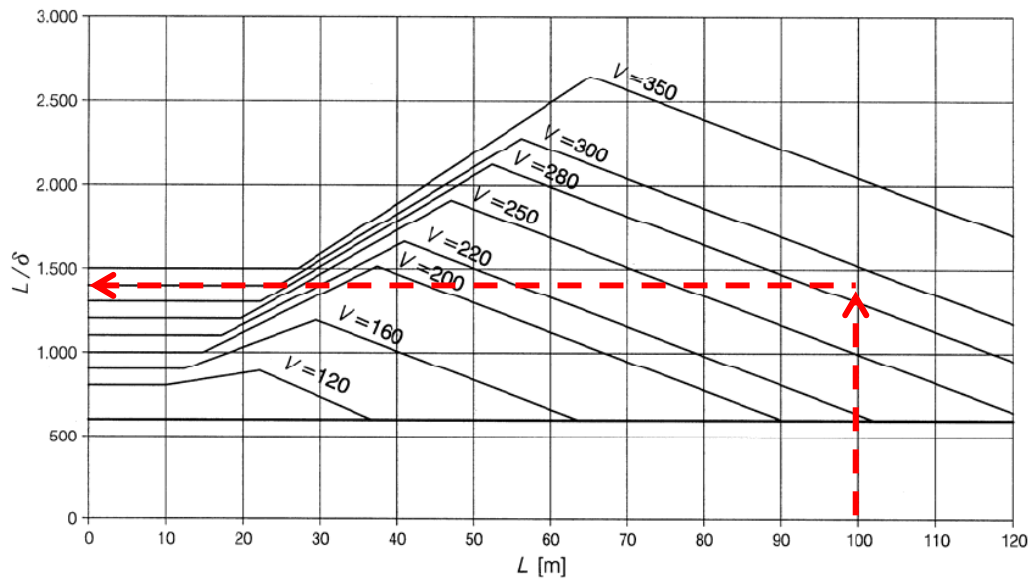


Abbildung 2.28: Maximal zulässige vertikale Verformungen δ für drei oder mehr aufeinander folgende Einfeldträger und der Komfortkategorie „sehr gut“, [46] Bild A.2.3

Der untere Grenzwert ist mit einem L/δ Verhältnis von 600 gegeben (auch für nur einen Einfeldträger). Für eine maximale Zuggeschwindigkeit von $V = 300$ km/h ist für Tragwerke unter 100 m Spannweite, unabhängig von der tatsächlichen Länge, ein Mindestwert von $L/\delta = 1400$ einzuhalten. Dies entspricht einem Verhältnis von 1000 bei einem Einfeldträger. Wie auch in [5] erwähnt, bestimmen diese relativ strengen Durchbiegungsbegrenzungen zumeist die Querschnittsabmessungen.

2.5.4 Beschleunigungsgrenzwerte

Für die Berechnung von neuen Brückenobjekten sind die maximalen Beschleunigungen nach ÖNORM EN 1990/A1 [46] einzuhalten. Die Beschleunigungen dürfen dabei

- 3,5 m/s² für Brücken mit Schotterbett und
- 5,0 m/s² für Brücken mit fester Fahrbahn nicht überschreiten.

Zur Bewertung bestehender Eisenbahnbrücken kann auf ONR 24008 [51] zurückgegriffen werden. Für Brücken mit gutem Erhaltungszustand dürfen dabei die zulässigen Beschleunigungswerte auf

- 6,0 m/s² für Brücken mit Schotterbett und
- 8,0 m/s² für Brücken mit fester Fahrbahn erhöht werden.

Die Ermittlung der Beschleunigungsgrenzwerte ist mit einer maximal auftretenden Frequenz nach oben beschränkt. Die Frequenzschränke ergibt sich aus dem höheren Wert von

- 30 Hz und dem
- 1,5 fachen der ersten Biegeeigenfrequenz und der
- Frequenz der dritten Eigenform.

Für höher auftretende Frequenzen gibt es in den Normen keine Beschleunigungsbeschränkungen, da diese ohnehin nicht bzw. nicht mit einem ausreichenden Energieinput angeregt werden. Laut ÖBB-Richtlinie für die dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken *können Eigenfrequenzen über 100 Hz vernachlässigt werden*, [18].

Anmerkungen

Diese Begrenzung der Beschleunigung erfolgt primär um Schotterauflockerungen und folglich Gleislagefehler zu vermeiden. Umfangreiche Untersuchungen dazu wurden etwa von *Rücker*, *Zacher* und *Baeßler* durchgeführt (z.B. [52], [53], [54], [55] oder [56]).

Aus Untersuchungen der Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) sowie aus Beobachtungen auf einer französischen Hochgeschwindigkeitsstrecke zeigte sich, dass der Schotteroberbau bei Beschleunigungen von 0,7g – 0,8g destabilisiert. ([55], Seite 413)

Der Versuchskörper, der bei diesen Untersuchungen zum Einsatz kam, war ein 3 m langes Teilstück eines Schotterfahrweges, das über eine starre Basis mit einer maximalen Beschleunigung von 1,0 g angeregt wurde. Dabei wurde festgestellt, dass ab einer Beschleunigung von 0,7 – 0,8 g große Schotterauflockerungen auftreten können. Daraus und aus einem globalen Sicherheitsfaktor von 2,0 (siehe [52] und [53]) ergibt sich der Grenzwert von 3,5 m/s² für Brücken mit Schotteroberbau. *Baeßler* weist auch ausdrücklich darauf hin, dass:

...auch wenige Beschleunigungsspitzen zu einer zwischenzeitlichen Auflockerung des Schotterbetts führen und erhöhte Setzungen bewirken. ([52], Seite 156)

Da der in den normativen Grenzwerten enthaltene Sicherheitsfaktor von 2,0 sehr konservativ scheint, wählen *Rocha et al.* in [57] und [58] sowie *Salcher et al.* in [59] einen probabilistischen Ansatz, um dies zu überprüfen. In [57] wird ausgehend von einer kritischen Grenzbeschleunigung von 7 m/s² (die in [54] vorgeschlagen wird) eine Versagenswahrscheinlichkeitsuntersuchung des Tragwerkes unter Berücksichtigung der Streuung ausgewählter Tragwerksparameter durchgeführt. Für die dynamischen Berechnungen wurde ein EK-Lastmodell angesetzt. Als einzuhaltende Versagenswahrscheinlichkeit wurde $P(a = 7m/s^2) = 10^{-4}$ verwendet. Die Grenzgeschwindigkeit nach dem probabilistischen Ansatz wurde dabei mit der Grenzgeschwindigkeit mit dem im Eurocode vorgeschriebenen Sicherheitsfaktor von 2,0 verglichen. Die Grenzgeschwindigkeit nach EN ergibt sich zu 255 km/h und weist eine Versagenswahrscheinlichkeit von $P = \sim 10^{-8}$ auf. Bei einer Geschwindigkeit von 295 km/h liegt die Versagenswahrscheinlichkeit bei $P = \sim 10^{-5}$, was noch immer eine Potenz kleiner als die einzuhaltende Grenze von $P = 10^{-4}$ ist. Es wird also bestätigt, dass ein Sicherheitsfaktor von 2,0 ein sehr konservativer Ansatz ist. *Rocha et al.* stellen daher in [58] eine statistische Methode zur Sicherheitsbewertung von kurzen Brücken, basierend auf der Extremwerttheorie, vorstellen.

2.6 Fahrzeug-Brücke Interaktion

Ein Brückentragwerk und ein Zug stellen jeweils ein separates dynamisches System dar. Bei der Überfahrt eines Zuges über eine Brücke kommt es zur Interaktion beider Systeme. Dabei wirkt sich der Zug meist dämpfend auf die dynamische Reaktion des Brückentragwerkes aus. Diese dämpfende Wirkung des Zuges beruht darauf, dass Energie vom Tragwerk auf den Zug übertragen wird. Dieser Effekt tritt bei Tragwerken mit Spannweiten im Bereich zwischen 10 und 20 m am stärksten auf. Bei kürzeren Tragwerken sind die Achsen zu kurz am Tragwerk, um Energie von ihm zu übernehmen. Bei längeren Tragwerken wird wieder Energie aus dem Zug an das Tragwerk zurückgegeben (vgl. [20]).

Gemäß Eurocode [3] darf für Tragwerke mit einer Spannweite zwischen 5 m und 30 m zur Berücksichtigung der Fahrzeug-Brücke Interaktion (FBI) eine Zusatzdämpfung $\Delta\zeta$ angesetzt werden. Dadurch sollen die positiven Effekte des Mehrkörpersystems des Zuges abgebildet werden. Das Ansetzen der Zusatzdämpfung ist somit nur zulässig, wenn diese Effekte nicht schon durch das Lastmodell abgebildet werden, sprich, nur bei einer Zugmodellierung durch Einzelkräfte (EKM). Dieses Vorgehen wird auch *additional damping method* (ADM) genannt und wird von ERRI Sachverständigenausschuss D-214 in [50] bzw. [20] vorgeschlagen.

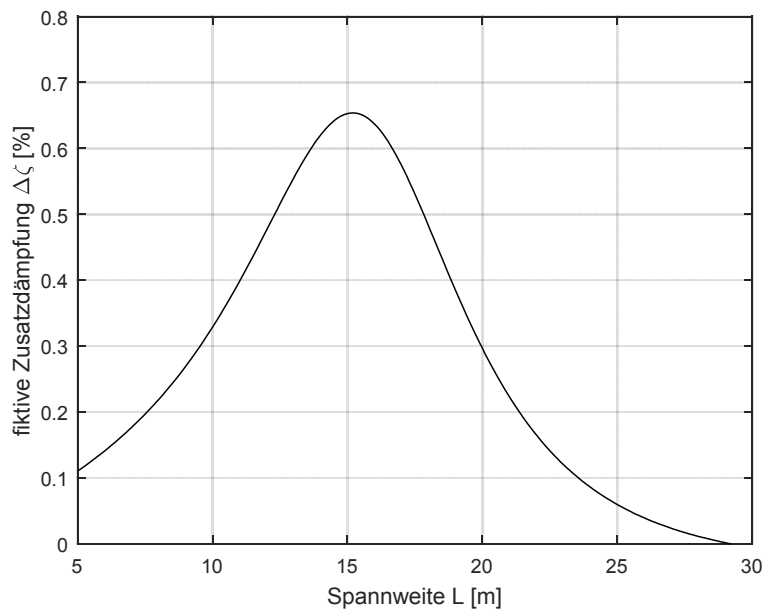


Abbildung 2.29: Zusatzdämpfung $\Delta\zeta$ nach [3] in Abhängigkeit von der Spannweite L

Die Werte der Zusatzdämpfung $\Delta\zeta$ lassen sich für jedes Tragwerk als Funktion der Spannweite nach

$$\Delta\zeta = \frac{0,0187 L - 0,00064 L^2}{1 - 0,0441 L - 0,0044 L^2 + 0,000255 L^3} [\%] \quad (2.129)$$

bestimmen. Der Verlauf dieser Funktion ist in Abbildung 2.29 dargestellt. Gleichung (2.129) ergibt sich als konservative Untergrenze der für mehrere Züge und Tragwerke ermittelten fiktiven

Zusatzdämpfung. Dabei wurden Überfahrtssimulationen mit dem EKM und dem so genannten *simplified interaction model* (SIM) untereinander verglichen. Die Tragwerksdämpfung wurde in der Berechnung mit dem EKM so angepasst, dass die Spitzenbeschleunigungen bei der kritischen Geschwindigkeit für beide Modelle übereinstimmen. Hierfür kamen zwei Züge zum Einsatz, der ICE2 und der Eurostar. Bei den Tragwerken beschränkte man sich auf 18 Parameterkombinationen. Diese ergeben sich aus sechs Tragwerkslängen zwischen 5 m und 30 m mit jeweils drei unterschiedlichen Steifigkeiten, die aus den L/δ -Verhältnissen (Spannweite zu Durchbiegung) 1000, 1500 und 2000, rückgerechnet wurden. Eine Auflistung dieser Tragwerksparameter wird in Tabelle 2.7 gegeben.

L [m]	5	10	15	20	25	30
	11,93073	6,84975	4,28013	3,07095	2,51096	2,12620
f_1 [Hz]	14,61210	8,38922	5,24208	3,76113	3,07528	2,60405
	16,87260	9,68701	6,05302	4,34298	3,55103	3,00690
μ [t/m]	7	10	15	20	22,5	25

Tabelle 2.7: Tragwerksparameter zur Ermittlung der Zusatzdämpfung [50]

Die Tragwerksdämpfung wurde mit $\zeta = 0,5 \%$ angesetzt und als Tragwerksmodell ein Einfeldträger verwendet, worauf im Endbericht nochmals ausdrücklich hingewiesen wird.

Der nach dem oben ausgeführten Prinzip ermittelte Wert der Zusatzdämpfung gilt nur für einfach gelagerte Balken. (siehe [20], Teil A, Seite 96)

Die ADM ist daher streng genommen nur unter Einhaltung dieser Parameter gültig.

Diese Zusatzdämpfung lt. Eurocode ist als von der Spannweite abhängige Funktion definiert. Da aber auch viele andere Parameter Einfluss auf die Interaktionswirkung haben (vgl. [60], [61] oder [62]), wird diese Methode von vielen Autoren kritisch hinterfragt und in zahlreichen Arbeiten untersucht, siehe etwa ([21], [28], [15]). Arvidsson analysiert in [21] den Einfluss von Modellierungsunsicherheiten auf die FBI. Da die ADM anhand von Einfeldträgern ermittelt wurde, ist es nicht verwunderlich, dass diese Methode für Rahmentragwerke nicht immer konservativ ist. Arvidsson empfiehlt daher die Entwicklung einer verbesserten Variante der ADM.

Es sei auch zu bemerken, dass die Interaktion zwischen Fahrzeug und Brücke nur im Resonanzfall von Bedeutung ist (vgl. [21], [50] oder [63]). Außerhalb des Resonanzbereiches wird die Tragwerksantwort oft durch die erste Achse am Tragwerk oder durch die schweren Triebachsen bestimmt (vgl. [20] oder [62]).

Ergänzend zur ADM wird in der ÖBB Richtlinie [18] vorgeschlagen, die Trägheitseffekte des Zuges durch Ansatz einer Zusatzmasse zu berücksichtigen. Diese Zusatzmasse kann vereinfachend mit 2 t/lfm Gleis angesetzt werden. Dieser Vorschlag bezieht sich auf „Große Tragwerke“ (mindestens $20,0 \text{ m}$ Stützweite). Für „Kleine Tragwerke“ (Stützweite kleiner $7,0 \text{ m}$ und einer niedrigsten Eigenfrequenz von über $1,5 \text{ Hz}$) kann der Einfluss der Zugmasse vernachlässigt werden.

„Mittlere Tragwerke“ (alle Tragwerke, die nicht als „Große“ oder „Kleine“ Tragwerke eingestuft werden) sind nach diesem Vorschlag mit und ohne Zusatzmasse zu berechnen.

2.7 Erkenntnisse aus Messungen

Messergebnisse müssen immer kritisch hinterfragt werden. Zum einen hat die Qualität der Durchführung und Auswertung einer Messung einen Einfluss auf die so ermittelten Dämpfungen oder Eigenfrequenzen und zum anderen können sich auch äußere Rahmenbedingungen, wie die Witterung und Temperatur, stark auf die Ergebnisse auswirken. Spricht man von gemessenen Dämpfungen oder Eigenfrequenzen, so kann leicht der Eindruck entstehen, dass es sich hier um absolute Werte handelt. Um zu verdeutlichen, dass dem nicht so ist und um einen Eindruck davon zu geben, wie weit diese Messergebnisse streuen können, sind in diesem Abschnitt die Erkenntnisse aus diversen Messungen angeführt.

Temperatur

Die Umgebungstemperatur kann einen nicht unwesentlichen Einfluss auf bestimmte Tragwerkparameter haben. Am offensichtlichsten tritt dies bei Tieftemperaturen (unter 0 C) zutage. Bei einem entsprechenden Feuchtegehalt vereist das Schotterbett bei konstanten Minustemperaturen. Die Steifigkeit des Tragwerkes wird dadurch erheblich erhöht. Die Dämpfung im Gegensatz dazu nimmt ab, siehe [24], [43] und [59]. Vereisung kann aber auch zur Erhöhung der Systemdämpfung führen. Aus den von *Rauert* [19] durchgeführten Wintermessungen ergaben sich teilweise ζ -Werte von 5 %. Dies entspricht, im Vergleich zu den 3 % Dämpfung aus der Sommermessung, einer relativen Erhöhung von mehr als 60 %.

Dass sich auch andere Umgebungseinflüsse auf die Messwerte auswirken bzw. Messwerte auch nur mit einer gewissen Toleranz reproduzierbar sind, kann man wiederum aus den Messungen von *Rauert* erkennen. In [19] Bild 3.15 sind für die *Erfttalbrücke* die ermittelten Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte aus mehreren Zugüberfahrten gegenübergestellt. Dabei sind Werte aus Messungen im Sommer und im Winter vorhanden. Ein Zusammenhang zwischen Überfahrtgeschwindigkeit und Dämpfung bzw. Eigenfrequenz ist darin nicht ersichtlich. Die angegebenen Dämpfungswerte streuen jedoch selbst bei annähernd gleicher Geschwindigkeit und Jahreszeit in einer Bandbreite von fast $\Delta\zeta = 0,5\%$, was bei einer Dämpfung von $\zeta = 3\%$ (Sommermessung) eine relative Abweichung von 15 % bedeutet. Wohlgedenkt, die Dämpfungswerte wurden hierbei mit der gleichen Methode ermittelt.

Auswertemethode und Anregungsart

Auch die Wahl der Methode, die zur Bestimmung der dynamischen Parameter verwendet wird, kann einen erheblichen Einfluss auf die Ergebnisse haben. Die Auswertung von ambienten Verfahren etwa überschätzt meist die Steifigkeit und unterschätzt die Dämpfung. Im Regelfall kann ge-

sagt werden, je höher der Energieeintrag in das System während der Messung, desto geringer die ermittelte Steifigkeit – sprich, auch die Eigenfrequenzen. Für die Dämpfung gilt genau das Gegenteil. Je höher der Energieeintrag und folglich die Schwingungsamplitude, desto höher ist die ermittelte Dämpfung. Gerade bei Dämpfungswerten können die Angaben für dasselbe Tragwerk bei unterschiedlichen Messungen bzw. Auswertungen stark variieren (vgl. [4], [24], [64] oder [65]). *Rauert* erwähnt etwa in [19], dass für ein Tragwerk die Eigenfrequenz aus dem Ausschwingvorgang nach einer Zugüberfahrt zu 3,3 Hz ermittelt wurde und für dasselbe Tragwerk aus ambienten Messungen zu 3,7 Hz. Der Unterschied beträgt also etwa 12 %, was sich im selben Maße auf die berechnete Resonanzgeschwindigkeit auswirkt.

Cantieni et al. zeigten in [66] anhand der Auswertung von Messungen an einer Fußgängerbrücke, dass die Wahl der Auswertemethode für die Dämpfung einen wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Die Dämpfungswerte aus Ausschwingvorgängen waren in etwa halb so groß wie die durch eine Frequenzbereichszerlegung durch die *Enhanced Frequency Domain Decomposition* (EFDD) ermittelten Werte aus ambienten Messungen. Des Weiteren wurde gezeigt, dass die Frequenzauflösung in einem entsprechenden Verhältnis zur betrachteten Eigenfrequenz sein muss. Für eine zu grobe Frequenzauflösung werden zu hohe Dämpfungswerte ermittelt. Auch die Größenordnung der gemessenen Beschleunigungen ist sehr stark von der Abtastrate der Messungen abhängig.

Nicht nur die Art der Anregung ist entscheidend für die Qualität der Auswertung, sondern auch die Position der Lasteinbringung. Dies sei speziell bei der Dämpfungsermittlung zu beachten. Wird ein System an einem bestimmten Punkt erregt, so antwortet es entsprechend dieser Anregung. Gleicht die Anregung in etwa der tatsächlich auftretenden Beanspruchung (z.B. Zugüberfahrt) des Systems, so ist diese Methode geeignet, die tatsächlich aktivierte Tragwerksdämpfung zu ermitteln. Erfolgt eine gezielte Anregung an einer festen Position (etwa mittels Unwucht-Erreger oder Shaker), so kann davon ausgegangen werden, dass nicht nur eine, sondern mehrere Eigenformen des Systems angeregt werden. Liegen mehrere Eigenformen, die an dieser Position keinen Schwingungsnullpunkt (=Auslenkung Null) haben, in relativer Nähe (bezüglich der Eigenfrequenz) zueinander, so kann es schwierig werden, die angeregte Schwingung einer Eigenform zuzuordnen. Bei der vertikalen Anregung eines Einfeldträgers in Tragwerksmitte kann beispielsweise davon ausgegangen werden, dass alle „geraden Eigenformen“, sprich die 2. Eigenform, 4. Eigenform usw. kaum angeregt werden, da diese in Tragwerksmitte einen Schwingungsnullpunkt besitzen. Alle „ungeraden Eigenformen“ weisen jedoch eine Auslenkung in Richtung der vertikalen Verschiebung in Tragwerksmitte auf und werden somit angeregt. Zwar sind die Eigenfrequenzen der höheren Eigenformen nicht in unmittelbarer Nähe der ersten Eigenform, doch wird, wie aus Gleichung (2.115) ersichtlich, durch gezielte Anregung der ersten Eigenform auch jede neunte Periode der dritten Eigenform erregt. Vor allem bei komplexeren Systemen muss beachtet werden, dass bei solchen Einzelpunkt-Erregungen mehrere Eigenformen angeregt werden und somit die ermittelte Dämpfung nicht nur einer einzigen Schwingungsform zugeordnet werden kann.

Um die Messungen zu vereinheitlichen und die Ergebnisabweichungen zufolge unterschiedlicher Messmethoden zu reduzieren, entstanden zahlreiche Richtlinien, etwa die von *Handl* erstellte Richtlinie für dynamische Messungen von Eisenbahnbrücken [67]. Darin sind zur Bestimmung der Dämpfung nur Zugüberfahrten zulässig. Dabei muss das Ausschwingen in der Grundfrequenz erfolgen und es müssen mindestens drei volle Schwingungsperioden berücksichtigt werden. Für eine repräsentative Aussage sind mindestens fünf eindeutig auswertbare Verläufe zu berücksichtigen. Auch ist gemäß dieser Richtlinie der Bandbreitenansatz nur in Ausnahmefällen zulässig.

Jede Zugüberfahrt ist unterschiedlich und kann sich, speziell bei nicht mehr ganz einfachen Systemen, unterschiedlich auf die ermittelte Dämpfung auswirken. *Vospornig* untersucht etwa in [68] zwei ca. 22 m lange Stahlbrücken mit gemeinsamen Schotterbett. Dazu wurden 54 Zugüberfahrten gemessen und ausgewertet. Die Dämpfung mit Werten zwischen 2,85 % und 5,17 % wird aus den Ausschwingvorgängen nach den Zugüberfahrten ermittelt. Hier liegt die Vermutung nahe, dass diese „Fast-Verdopplung“ der Dämpfung auf dem Mitschwingen des zweiten Tragwerkes beruht. Dieser Effekt tritt jedoch nicht bei jeder Überfahrt im gleichen Maße auf.

Bei Messungen, die während Zugüberfahrten gemacht werden, müssen etliche zusätzliche Effekte berücksichtigt werden. Zum einen „weicht“ die zusätzliche Masse des Zuges das System auf, andererseits erhöht sich durch die Auflast der Schubverbund zwischen Gleis und Tragwerk. In [42] wurden Messungen an einem knapp 15 m langen einfeldrigen Brückentragwerk durchgeführt. Die Eigenfrequenzen des Tragwerkes wurden mittels Sandsackmethode und aus ambienten Messungen ermittelt. Dabei zeigte sich, dass sich die Eigenfrequenzen bei einer zusätzlichen Auflast (Taurus Lokomotive) sogar erhöhen. Erklärt wird dieser Effekt mit einer zusätzlichen Steifigkeit aus der Tragwerksverformung und den daraus resultierenden Rückstellkräften in den Auflagern. Auch in [69] wurden die Eigenfrequenzen eines Tragwerkes (Rahmentragwerk mit etwa 12 m Stützweite) mit und ohne Belastung (Taurus Lokomotive) ermittelt. Dabei konnte jedoch für die ersten beiden Frequenzen kein Unterschied festgestellt werden.

Bei einer Zugüberfahrt entsteht ein gekoppeltes System zwischen Brücke und Zug. Die gemessenen Schwingungsfrequenzen während so einer Überfahrt sind daher von den tatsächlichen Tragwerksfrequenzen zu unterscheiden.

Kurze Tragwerke

Bei kurzen Bauwerken (Spannweite 7 m oder weniger) haben nichttragende Bauteile und das Schotterbett einen vergleichsweise großen Einfluss auf die Systemsteifigkeit. Dadurch werden messtechnisch oft Frequenzen ermittelt, die deutlich über den rechnerisch ermittelten liegen [42]. Untersuchungen zu Tragwerken mit kurzen Spannweiten legen die Vermutung nahe, dass der durchlaufende Gleiskörper (inkl. Schotterbett) eine nicht unwesentliche Auswirkung auf die Steifigkeit und Dämpfung des Systems hat [70]. Durch die Achslast entstehen Druckspannungen im Schotterkörper, die die zur Ausbildung eines Gleis-Brücke-Verbundkörpers notwendige Schubsteifigkeit liefert. Die variable Position der Zugachsen verursacht eine variable Steifigkeit des Gesamt-

systems. Da durch diese Druckspannungen sich auch die Reibungskräfte und mögliche Relativverschiebungen im Schotterbett ändern, ändern sich auch die Dämpfungseigenschaften des Gesamtsystems [70].

In mehreren Messungen konnte auch festgestellt werden, dass sich bei kurzen Eisenbahnbrücken keine ausgeprägte Schwingungscharakteristik des Bauwerkes ausbildet [42], welche eine Voraussetzung für die Ausbildung von Resonanzerscheinungen wäre. Es treten jedoch fallweise Starrkörperbewegungen auf. Das heißt, dass das gesamte Tragwerk mit vergleichsweise niedrigen Frequenzen vertikal schwingt und dafür die Bettung des Untergrundes verantwortlich ist [42]. Da kaum ausgeprägte Schwingungen auftreten, ist es auch schwierig die Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte aus Ausschwingvorgängen zu ermitteln. Die Eigenfrequenzen lassen sich dennoch gut mittels Sandsackmethode (25 kg aus ca. 1,5 m Fallhöhe) anregen [70].

In [42] und [70] wird darauf hingewiesen, dass für die dynamische Berechnung von kurzen Brücken eine Vielzahl von Einflussfaktoren berücksichtigt werden muss und das Tragwerk nicht mehr getrennt vom Baugrund betrachtet werden kann. Da dies nicht mit einem sinnvollen Aufwand möglich ist und bei kurzen Tragwerken ohnehin keine Resonanzerscheinungen festgestellt werden können, wird sogar eine Grenzstützweite von 5 bis 6 m vorgeschlagen, unter der keine dynamischen Berechnungen durchgeführt werden müssen.

Nichtlineares Verhalten

Aus vielen Messungen konnten nichtlineare Systemeigenschaften festgestellt werden. So wird etwa in [4], [24], [65] und [71] eine Abhängigkeit der Dämpfung von der Schwingungsamplitude aufgezeigt. Gerade der Schotteroberbau scheint für diesen Effekt verantwortlich zu sein. *Mähr* untersuchte in [4] eine 10 m lange Versuchsbrücke und verglich die dynamischen Eigenschaften des Tragwerkes mit und ohne Schotteroberbau. Dabei wurde für das „nackte“ Tragwerk ein lineares Systemverhalten festgestellt. Die Messungen des Tragwerkes mit Schotteroberbau ergaben ein ausgeprägt nichtlineares Verhalten. Mit zunehmender Schwingungsamplitude sinken die Eigenfrequenz und die Dämpfung. Das Tragwerk wurde dabei unterschiedlich (Impulshammer und Unwucht-Erreger) angeregt. Das nichtlineare Systemverhalten konnte aber nur aus den Unwucht-Versuchen festgestellt werden. Es sei hier aber auch anzumerken, dass es sich bei der untersuchten Versuchsbrücke um ein sehr leichtes Tragwerk handelt. Der Schotteroberbau hatte bei diesem Tragwerk deutlich mehr Einfluss als bei realen Brücken mit der gleichen Spannweite. Kirchhofer [24] untersuchte mit der gleichen Methode eine reale Eisenbahnbrücke mit einer Spannweite von etwa 21,4 m, konnte aber keine ausgeprägte Nichtlinearität feststellen.

Die Amplitudenabhängigkeit der Eigenfrequenz wird etwa auch in [72] festgestellt. Diese wird durch Auswertung der Ausschwingvorgänge einer 36 m langen Verbundbrücke nach Zugüberfahrten aufgezeigt. Mit abnehmender Beschleunigungsamplitude nimmt dabei die Schwingungsfrequenz zu. Diese Frequenz erhöht sich von etwa 3,3 Hz zu Beginn des Ausschwingens auf fast 3,9 Hz am Ende. Die Nichtlinearität ist hier demnach sehr deutlich erkennbar.

Vergleich Rechnung mit Messung

Die gemessenen Eigenfrequenzen von Brücken sind oft höher als die berechneten (vgl. [19] [70] oder [73]).

Die Abweichungen sind tendenziell bei kleineren Objekten und Betontragwerken deutlich ausgeprägter als zum Beispiel bei großen Stahltragwerken. ([73])

Dies kann im Allgemeinen auf falschen Modellen oder ungenauen Kennwerten beruhen. *Pircher et. al* [73] vermerken:

dass der E-Modul der in der Statik verwendet wird ein Mindestwert ist. Die wirklichen Werte sind systematisch höher, zudem liegt der dynamische über dem statischen E-Modul. Das gleiche gilt für Untergrundkennwerte.

Aus nicht zutreffenden Kennwerten folgen unexakte Verhaltensprognosen. *Pircher et. al.* haben in [73] 200 Tragwerke untersucht und dabei bei der Erstberechnung bei 40 % der Tragwerke eine Überschreitung der Grenzwerte festgestellt. Bei der Untersuchung wurde mit dem Einzellastmodell und der *Modalen Analyse* gearbeitet.

Andererseits wurde in [14] und [49] gezeigt, dass die Ergebnisse einer dynamischen Überfahrtsberechnung (EKM) für Geschwindigkeiten im nicht resonanzgefährdeten Bereich gut mit den Ergebnissen aus Messungen übereinstimmen (vgl. [2]).

Bezüglich der Dämpfung kann den Messungen auch entnommen werden, dass tendenziell die Dämpfung von Torsionsformen geringer als die der zugehörigen Biegeformen ist (vgl. [71], [24], [65]).

2.8 Anmerkungen zu Modellgenauigkeiten

Ein rechnerisch abgebildetes System wird nie exakt dem tatsächlich vorhandenen System entsprechen. Der Grund liegt zum einen durch Vereinfachungen in der Modellierung, diese werden bewusst in Kauf genommen um das System abbilden und - mit den zur Verfügung stehenden Mitteln in einem vertretbaren Aufwand - lösen zu können. Zum anderen entstehen Abweichungen durch Ungenauigkeiten in den Systemparametern, dazu zählen Eigenschaften des Tragwerkes wie Biegesteifigkeit, Masse und Dämpfung. Diese Eigenschaften setzen sich aus unzähligen unterschiedlichen Parametern (E-Modul, Höhe des Gleiskörpers, Schotterdichte, Betondichte, Temperatur, usw.) zusammen, welche wiederum eine gewisse Schwankungsbreite haben. Solche „Unbekannten“ gibt es auch auf der Lastseite. Die unterschiedlichen Parameter des Zuges (Achslast, Massenverteilung, Federsteifigkeiten, Dämpfungswerte) unterliegen natürlich auch einer gewissen Schwankungsbreite. Gleisunebenheiten sind zwar streng genommen Ungenauigkeiten im Tragwerk, wirken sich aber

hauptsächlich auf die Belastung aus (vgl. [59]). Grundsätzlich wird hier eine Unterteilung der Tragwerksparameter in geometrische Größen und Materialkennwerte vorgenommen.

Geometrische Größen

Die Geometrie des Tragwerkes ist generell relativ genau bekannt. Im Vergleich zu anderen Eingangsgrößen kann hierbei davon ausgegangen werden, dass die Angaben auf Plänen relativ genau zutreffen. Beim Schotteroberbau ist dies nicht mehr so eindeutig. Zwar kann davon ausgegangen werden, dass die Gleise in der Soll-Lage eingebaut wurden. Es kann jedoch, vor allem bei älteren Tragwerken nicht davon ausgegangen werden, dass die Schotterbetthöhe im Plan auch der tatsächlich vorhandenen entspricht, da es zu zwischenzeitlichen Umplanungen bzw. Trassenanpassungen gekommen sein kann. Da das Schotterbett wesentlich zur Gesamtmasse der Brücke beiträgt ist die Schotterbetthöhe eine nicht unwesentliche Variable, die potentiell als mit Unsicherheiten behaftet angesehen werden kann.

Materialkennwerte

Auf der Materialseite sind vor allem die Dichte, die Steifigkeit und das Dämpfungsverhalten wesentlich. Betrachtet man das Tragwerk, so unterliegen alle Baustoffe einer gewissen Streuung. Meist wird daher mit Grenzwerten oder Mittelwerten gerechnet. Alleine für den Schotter werden laut *Kirchhofer* [24] Wichten zwischen $\gamma_S=15 \text{ kN/m}^3$ bis $\gamma_S=20 \text{ kN/m}^3$ in Rechnung gestellt. Für Stahl hingegen sind die Kennwerte gut bekannt und weisen eine „relativ“ geringe Streuung auf. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Steifigkeit und die Masse von Stahltragwerken aus Plänen ziemlich genau prognostiziert werden kann. Für andere Materialien, wie Beton, trifft dies nicht mehr zu. Zwar ist die Streuung der Betonwichte eher gering, doch die Steifigkeit kann stark variieren. *Höller* etwa gibt in [74] den E-Modul mit einer Bandbreite von $\pm 15 \%$ an. Im Eurocode [75] wird der E-Modul von Beton sogar mit einer Bandbreite von -30% bis $+20 \%$ abhängig vom Zuschlagstoff angegeben. Gemäß der Annäherungsformel aus dem Betonkalender ([76], Seite 263) kann der E-Modul von Beton, je nach Gesteinskörnung, theoretisch auch um einen Faktor von 2,0 oder mehr variieren. In [77] empfehlen *Grübl et. al* den E-Modul durch Versuche zu bestimmen, falls er einen maßgebenden Einfluss auf die Bemessung hat.

Für eine dynamische Berechnung sind auch nicht die in der Statik üblichen Mindestwerte für Steifigkeiten maßgeblich, sondern die tatsächlich vorhandenen, da höhere Werte sich nicht zwangsläufig positiv auswirken müssen.

Die oben angeführten Materialien beziehen sich auf das planmäßig hergestellte Tragwerk und sind somit allesamt mehr oder weniger genau erfassbar. Betrachtet man jedoch den Baugrund, so werden die Streuungen hier wesentlich größer. Der genaue Aufbau des vorliegenden Untergrundes kann nie genau bekannt sein, da es sich bei den Bodenaufschlüssen prinzipiell um Punktaufnahmen handelt. Der Verlauf der einzelnen Schichten kann also nie sicher angegeben werden. Auch die Kennwerte der Schichten können innerhalb einer Schicht stark variieren. Zusätzlich hat auch

die Witterung einen Einfluss auf die Untergrundkennwerte, da die Bodeneigenschaften stark vom Wassergehalt abhängig sind. Regen und Trockenheit beeinflussen zwar nur die obere Schicht, Änderungen im Grundwasserspiegel finden jedoch in beliebiger Tiefe statt. Da dieses Thema sehr umfangreich ist, wird hier nicht weiter darauf eingegangen. Es sollte nur im Hinterkopf behalten werden, dass Angaben zu den Bodenkennwerten keineswegs als exakte Werte interpretiert werden dürfen und immer mit einer gesunden Vorsicht behandelt werden müssen.

Um solche Ungenauigkeiten im mechanischen Modell zu berücksichtigen, kommen oft stochastische Methoden zum Einsatz, so etwa durch *Salcher et. al* in [59]. Dabei werden ein dreidimensionales Tragwerksmodell mit den ersten 20 Eigenformen und ein dreidimensionales Zugmodell verwendet. Auch *Rocha et. al* [57] führen statistische Untersuchungen zur Auswirkung der Streuungen ausgewählter Tragwerkskennwerte auf die Eigenfrequenzen und die Tragwerksantwort durch. Dabei wird festgestellt, dass die Schwingungsantworten für streuende Kennwerten, oft erheblich von einer Gauß-Verteilung abweichen. Ein anderer simplerer Zugang, um mit diesen Ungenauigkeiten umzugehen, ist die Durchführung von Grenzwertberechnungen. So wird etwa auch in der UIC Richtlinie [47] gefordert, mit der Untergrenze der Masse die maximalen Beschleunigungen und mit der Obergrenze der Masse die niedrigste Resonanzgeschwindigkeit zu ermitteln. Dieser Zugang kann jedoch auch sehr konservativ sein.

In diesem Abschnitt geht es nicht um den Umgang mit diesen Ungenauigkeiten im System. Es geht hier primär um das Aufzeigen der Komplexität der Aufgabe, das dynamische Verhalten einer Brücke zu prognostizieren. Die Bandbreite der Ungenauigkeiten sollte speziell bei der Wahl der Modellierung beachtet werden. Ein Beispiel, wie stark sich diese Ungenauigkeiten im Modell und den zugehörigen Kennwerten auswirken können, wird in [19] ersichtlich. *Rauert* rechnet darin aus der gemessenen Eigenfrequenz die „gemessene“ Biegesteifigkeit zurück, wobei er auf bis zu 4,5-fach höhere Werte als die vorab kalkulierte Biegesteifigkeit kommt (vgl. [19] Bild 6.1). Es sei auch erwähnt, dass *Rauert* von einem gelenkig gelagerten Euler-Bernoulli-Balken ausgeht. Die Ungenauigkeiten sind also nicht nur in den Materialeigenschaften, sondern auch in der Systemmodellierung zu suchen.

Da sich diese Arbeit nicht auf Detailberechnungen einzelner Tragwerke konzentriert, sondern auf Modelle zur Erstellung umfangreicherer Parameterstudien bzw. Erstberechnungen von Brücken einer längeren Strecke, wird hier von wenigen bekannten Parametern ausgegangen. Daher liegt der Fokus auf einfachen Modellen.

3. Einfache Tragwerksmodelle

3.1 Allgemeines zur Modellierung von Brücken

Das Tragwerk kann in unterschiedlichen Detaillierungsgraden abgebildet werden. Am einfachsten, und daher gebräuchlichsten sind eindimensionale (1D) Modelle, etwa der *Bernoulli-Euler*-Balken (schubstarr) oder der *Timoshenko*-Balken (schubnachgiebig + Berücksichtigung der Rotationsfähigkeit). Diese Modellierungen haben den Vorteil, dass eine analytische Lösung für die Eigenfrequenzen und Eigenformen des Tragwerkes relativ einfach formuliert werden kann. Je nach Modellierung der Belastung ist sogar eine geschlossene Formulierung der Tragwerksreaktion während einer Zugüberfahrt möglich. Dabei sei auf *Timoshenko* und *Young* [78] verwiesen, die die Bewegungsgleichung für schubnachgiebige Balken unter bewegten Einzelkräften bereits 1955 abgeleitet haben.

Zwei- und dreidimensionale (2D und 3D) Modelle des Tragwerkes können mit Hilfe der FE-Methode generiert werden. Diese detaillierteren Modelle verfügen über erheblich mehr Freiheitsgrade und bedürfen daher eines wesentlich größeren Rechenaufwandes. Bedient man sich der Modalen Analyse und reduziert somit die Freiheitsgrade auf die Anzahl der Eigenformen, die berücksichtigt werden, so kann unter Verwendung einfacher Lastmodelle (EKM) der Rechenaufwand noch relativ gering gehalten werden. Werden jedoch Nichtlinearitäten in das Modell eingebaut, so dass das Gesamtmodell mittels Zeitschrittintegration gelöst werden muss, so „explodiert“ der erforderliche Berechnungsaufwand förmlich.

Durch die Modellierung des Tragwerkes als 1D Balken können gewisse Tragwerkseigenschaften nicht abgebildet werden, allen voran die Torsionseffekte. Bei, für kurze Spannweiten üblichen, einfachen Plattentragwerken liegt die erste Torsionseigenfrequenz in der Nähe der ersten Biegeeigenfrequenz. Für eine Belastung, die in der Brückenachse angreift, haben die Torsionsschwingungen quasi keinen Einfluss und das Tragverhalten kann auch von einem 1D Balken ausreichend genau abgebildet werden. Liegt das Gleis jedoch exzentrisch über dem Tragwerk oder befindet sich die Brücke in einer Kurve oder handelt es sich um ein zweigleisiges Tragwerk, so werden auch die Torsionsfrequenzen entsprechend angeregt. Um diese berücksichtigen zu können, sind jedoch umfangreichere Modelle erforderlich. In [79] wurde durch die Berücksichtigung der Torsionseffekte bei einer 3D Modellierung im Vergleich zu einem 2D Balkenmodell (ohne Torsion) eine um bis zu 100% höhere Beschleunigung ermittelt. Andererseits verglichen *Unterweger et al.* [41] auf Basis der Arbeit von *Pircher* [80] die dynamische Tragwerksantwort eines 1D Modelles mit der eines 3D

Tragwerksmodelles. Dabei wurde festgestellt, dass die beiden Modelle praktisch gleichwertig sind und für Parameterstudien 1D Modelle jedenfalls ausreichend sind. Auch Bauer [81] vergleicht den Einfluss der Torsionsschwingungen auf die dynamische Tragwerksantwort für eine Stabwerksmodell und eine 3D FE-Modell. Dabei konnte er für einen Holkastenquerschnitt sowohl für die Durchbiegung als auch für die Beschleunigung eine gute Übereinstimmung der dynamischen Ergebnisse für beide Modelle feststellen. Für eine Fachwerkbrücke stellten sich jedoch gerade für die Beschleunigungsantwort gravierende Unterschiede heraus. Weshalb für ein realitätsnahes Ergebnis eine detaillierte Modellierung des Tragwerks empfohlen wird.

Die Eigenfrequenzen und Eigenformen von eindimensionalen, einfeldrigen Balkentragwerken mit konstantem Querschnitt lassen sich mit geringem Aufwand analytisch bestimmen. Für eine Belastung durch Einzelkräfte kann dann mit Hilfe der Modalen Analyse auch mit geringem Aufwand die Bewegungsgleichung gelöst und die Tragwerksantwort erhalten werden. Handelt es sich um mehrfeldrige Tragwerke oder sind die Querschnitte nicht konstant, so wird die Lösung beträchtlich aufwendiger. *Adam und Salcher* verwendeten in [82] eine analytische Lösung für einen Zweifeldträger. Es wird dabei jedoch von zwei gleichen Spannweiten und einem konstanten Querschnitt ausgegangen. Eine allgemeinere Methode zeigt *Johansson* in [83]. Er stellt eine geschlossene Lösung für das dynamische Verhalten eines generellen Mehrfeldträgers vor. Dabei wird jedoch weiterhin von abschnittsweise konstanten Querschnitten ausgegangen. Im Allgemeinen wird aber für Strukturen, die komplexer als ein einfeldriger *Bernoulli-Euler*-Balken sind, auf die FEM zurückgegriffen, um die Eigenfrequenzen des Systems zu ermitteln (siehe [5], [21], [26], [59], [84]).

Bei Einfeldträgern dominiert (zumindest für die Durchbiegung) zumeist die erste Eigenform die dynamische Tragwerksantwort. Daher wird in einigen Untersuchungen dazu übergegangen, die Brücke als EMS zu modellieren, so etwa in [85] oder [86]. *Eriksson* und *Trolin* [79] versuchten dieses Konzept auch auf Mehrfeldtragwerke anzuwenden, konnten damit aber keine zufriedenstellende Lösung erzielen.

Da es sich bei der Mehrheit der Eisenbahnbrücken um kurze einfeldrige Tragwerke handelt (siehe [36] oder [41]), konzentriert sich diese Arbeit auf eben diese Systeme. Mehrfeldträger sind durch die Vielzahl an Kombinationsmöglichkeiten, wie etwa Steifigkeitsverhältnisse oder Stützweitenverhältnisse der Felder, sehr aufwendig zu parametrisieren. Des Weiteren hat *Johansson* etwa gezeigt, dass *Mehrfeldtragwerke eine bis zu 60 % geringere dynamische Tragwerksantwort als gleiche Einfeldträger aufweisen* [37] und somit wesentlich unempfindlicher sind. Gemäß ERRI-Report [45] *sind bei kontinuierlichen mehrfeldrigen Brücken, für einen Geschwindigkeitsparameter $\alpha < 0,5$ die Durchbiegungen geringer als für eine einfeldrige Brücke mit ansonsten gleichen Merkmalen*. Durch einsetzen in die Definition des Geschwindigkeitsparameters

$$\alpha = \frac{v}{2 f_0 L} \quad (3.1)$$

ergibt sich, dass für Geschwindigkeiten v kleiner als das Produkt der Spannweite L und der Grundeigenfrequenz f_0 Mehrfeldträger unkritischer sind als vergleichbare Einfeldträger.

Aus der Untersuchung von 22 Brückentragwerken erhielten *Leander* und *Karoumi* [16] die Erkenntnis, dass die dynamische Antwort von Mehrfeldträgern oft unter der statischen liegt.

Aus der Summe dieser Erkenntnisse und Schlussfolgerungen sieht sich der Autor der vorliegenden Arbeit im Ansatz bestätigt, nur einfeldrige Tragwerke zu untersuchen.

3.2 Bernoulli-Euler-Balken

Die Bewegungsgleichung des durch Einzellasten belasteten *Bernoulli-Euler*-Balkens kann gemäß *Ziegler* [6] (siehe auch *Mähr* [4]) wie folgt angeschrieben werden:

$$EA_{zz}w_{,xxxx} + \mu\ddot{w} + c_z\dot{w} = p_z \quad (3.2)$$

Um die Eigenformen und Eigenfrequenzen dieses Balkens zu erhalten, wird zunächst das unbelastete und ungedämpfte System betrachtet. Dazu werden der Dämpfungs- und der Lastterm gestrichen und aus Gleichung (3.2) ergibt sich:

$$EA_{zz}w_{,xxxx} + \mu\ddot{w} = 0 \quad (3.3)$$

Die Lösung erfolgt unter Zuhilfenahme des folgenden *Bernoullischen* Separationsansatzes [4]:

$$w(x, t) = \phi(x)q(t) \quad (3.4)$$

Wobei es sich bei $\phi(x)$ um eine positionsabhängige Formfunktion und bei $q(t)$ um eine zeitabhängige Gewichtungsfunktion handelt. Nach Einführen der Laufkoordinate

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (3.5)$$

und des Lösungsansatzes [4]

$$\phi(\xi) = e^{\lambda\xi} \quad (3.6)$$

erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 - L^4 \frac{\mu\omega^2}{EA_{zz}} = 0 \quad (3.7)$$

Aus den vier Wurzeln für λ ergibt sich ein komplexes Lösungssystem. Durch Verwendung von trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen sowie Streichen des imaginären Teils, resultieren die Eigenfunktionen des Balkens zu (vgl. [4]):

$$\phi(\xi) = A_1 \sin \lambda\xi + A_2 \cos \lambda\xi + A_3 \sinh \lambda\xi + A_4 \cosh \lambda\xi \quad (3.8)$$

Die Koeffizienten A_1 bis A_4 hängen von den Lagerungsbedingungen des Balkens ab und müssen folglich aus den *kinematischen* und *dynamischen* Randbedingungen bestimmt werden. Durch Einsetzen dieser Randbedingungen in Gleichung (3.8) ergibt sich ein Gleichungssystem für die vier Koeffizienten. Nullsetzen der Determinante dieses Gleichungssystems führt auf die Frequenzgleichung des Balkens. Einsetzen der Nullstellen λ_j in die charakteristische Gleichung (3.7) liefert die Eigenkreisfrequenzen ω_j . Des Weiteren können aus den Nullstellen der Frequenzgleichung drei der vier Unbekannten A_i bestimmt werden. Durch die vierte ist die Eigenfunktion $\phi(\xi)$ beliebig skalierbar (vgl. [4]).

Für einen gelenkig gelagerten Balken ergeben sich die Frequenzgleichung und deren Nullstellen λ_j zu:

$$\sin(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_j = j\pi \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \dots, \infty \quad (3.9)$$

Daraus erhält man die auf ein Maximum von 1,0 normierten Eigenfunktionen.

$$\phi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (3.10)$$

Die Eigenkreisfrequenzen ω_j können somit folgendermaßen angeschrieben werden.

$$\omega_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EA_{zz}}{\mu}} \quad (3.11)$$

Der gelenkig gelagerte Balken stellt das einfachste System einer Brücke dar und wird daher oft zu Vergleichszwecken herangezogen. Setzt man in Gleichung (3.11) anstelle von $j\pi$ die Nullstellen λ_j ein, so erhält man die allgemeine Grundform der Frequenzgleichung, welche auch für andere Lagerungsbedingungen gültig ist. Diese Grundform findet sich etwa auch bei einem Zweifeldträger mit konstantem Querschnitt und gleichen Stützweiten wieder (vgl. [82]).

3.3 Timoshenko-Balken

Bei dem *Timoshenko*-Balken-Modell wird auch die Rotationsträgheit und die Schubsteifigkeit des Balkens mitberücksichtigt, (vgl. [4] oder [8]). Die Bewegungsgleichung für eine Belastung durch Einzelkräfte ergibt sich somit zu (vgl. [4] Gl. 2.43):

$$\begin{aligned} & \frac{\rho A_{zz} \mu}{G\tilde{A}} \ddot{w} + EA_{zz} w_{,xxxx} - \left(\rho A_{zz} + \frac{EA_{zz}}{G\tilde{A}} \mu \right) \ddot{w}_{,xx} + \mu \ddot{w} \\ & + c_z \left(\frac{\rho A_{zz}}{G\tilde{A}} \ddot{w} - \frac{EA_{zz}}{G\tilde{A}} \dot{w}_{,xx} + \dot{w} \right) = p_z + \frac{\rho A_{zz}}{G\tilde{A}} \ddot{p}_z + \frac{EA_{zz}}{G\tilde{A}} p_{z,xx} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Schubfläche des Balkens wird dabei mit \tilde{A} bezeichnet. Durch dasselbe Prozedere wie für den *Bernoulli-Euler*-Balken kann die Bestimmungsgleichung für die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_j eines gelenkig gelagerten *Timoshenko*-Balkens hergeleitet werden, [87]

$$\frac{EA_{zz}}{\mu} \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 - \omega_j^2 - \left(\frac{A_{zz}}{A} + \frac{EA_{zz}}{G\tilde{A}}\right) \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \omega_j^2 + \frac{\rho A_{zz}}{G\tilde{A}} \omega_j^4 = 0 \quad (3.13)$$

Die ersten beiden Terme entsprechen dem Ausdruck für die Eigenfrequenz des *Bernoulli-Euler*-Balkens (vgl. Gleichung (3.11)). Die restlichen Terme kennzeichnen die Wirkung der Rotations­trägheit und der Schubfestigkeit. *Timoshenko* [78] sowie *Mähr* [4] führten eine Untersuchung zum Einfluss dieser beiden Kennwerte durch. Dabei stellten sie anhand eines Beispieltragwerkes fest, dass die Berücksichtigung der Schubsteifigkeit eine viermal höhere Auswirkung auf die Eigenfrequenz hat als die Rotationsträgheit. Es wird jedoch auch gezeigt, dass für ein Tragwerk mit einem Höhe H zu Länge L Verhältnis von 1:10 die Differenz der ersten Eigenfrequenz zwischen dem *Bernoulli-Euler*-Balken und dem *Timoshenko*-Balken etwa 2 % beträgt (vgl. *Mähr* [4] Seite 44). Diese Differenz erhöht sich für höhere Eigenformen, da sich der Wendepunkt­abstand der zugehörigen Schwingungsformen verringert, was einem größeren H/L -Verhältnis gleich kommt. Zur vereinfachten Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen $\omega_{j,RS}$ des Timoshenko Balkens gibt *Mähr* für die ersten fünf Frequenzen Diagramme zur Ermittlung des Korrekturfaktors $\omega_{j,RS}/\omega_j$ an. Dieser Faktor wird als Funktion der beiden Schlankheiten $\lambda_s = L\sqrt{A/A_{zz}}$ und $\tilde{\lambda}_s = L\sqrt{\tilde{A}/A_{zz}}$ bestimmt und spiegelt das Verhältnis zwischen der Eigenkreisfrequenz des Timoshenko-Balkens $\omega_{j,RS}$ und des *Bernoulli-Euler*-Balkens ω_j wieder.

Wird nur die Schubnachgiebigkeit berücksichtigt, so spricht man von einem schubweichen Balken. Die Gleichung zur Bestimmung der Eigenfrequenzen $\omega_{j,S}$ eines schubweichen Einfeldträgers unterscheidet sich nur geringfügig von der für den schubstarr­en Balken, [78]

$$\omega_j = \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EA_{zz}}{\mu \left(1 + \left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 \gamma\right)}} \quad (3.14)$$

$$\gamma = \frac{EA_{zz}}{G\tilde{A}} \quad (3.15)$$

Daher ist es oft sinnvoller den schubweichen Balken anstelle des *Timoshenko*-Balkens zu verwenden (vgl. etwa [88]).

Beschränkt man sich also auf die Bestimmung der ersten Eigenfrequenz vom 1D Balkenmodell (für Balkenbrücken), so hat die Schubsteifigkeit bis zu einem Länge L zu Höhe H Verhältnis von 10 einen nur unwesentlichen Einfluss (vgl. *Frýba* [38] und *Mähr* [4]). Aus Abbildung 3.1 ist ersichtlich, dass alle Tragwerke aus den vorhandenen Datensätzen, die eine Spannweite von mehr als 10 m aufweisen, dieses Verhältnis einhalten. Für kürzere Tagwerke kann dieses Verhältnis den Wert 10 unterschreiten, ist jedoch (mit einer Ausnahme) immer größer als 5.

Für Erstuntersuchungen sind oft keine genauen Angaben zur Schub- und Querschnittsfläche der Tragwerke vorhanden. Die meisten vorhandenen Tragwerke besitzen eine größere Schlankheit als 10, wodurch der Frequenzfehler, der durch die nicht Berücksichtigung der Rotationsträgheit und

Schubsteifigkeit gemacht wird, weniger als 2 % beträgt. Auch für L/H -Verhältnisse zwischen 5 und 10 hält sich der Fehler in Grenzen. Daher wird in der vorliegenden Arbeit mit dem *Bernoulli-Euler* Modell gerechnet. Es sollte jedoch nicht vergessen werden, dass bei Tragwerken unter 10 m Spannweite die Schubnachgiebigkeit durchaus einen Einfluss haben kann. Des Weiteren können auch Fachwerkbrücken durch Balkenmodelle abgebildet werden, für dies ist jedoch die Verwendung eines zumindest schubweichen Balkenmodells zwingend erforderlich.

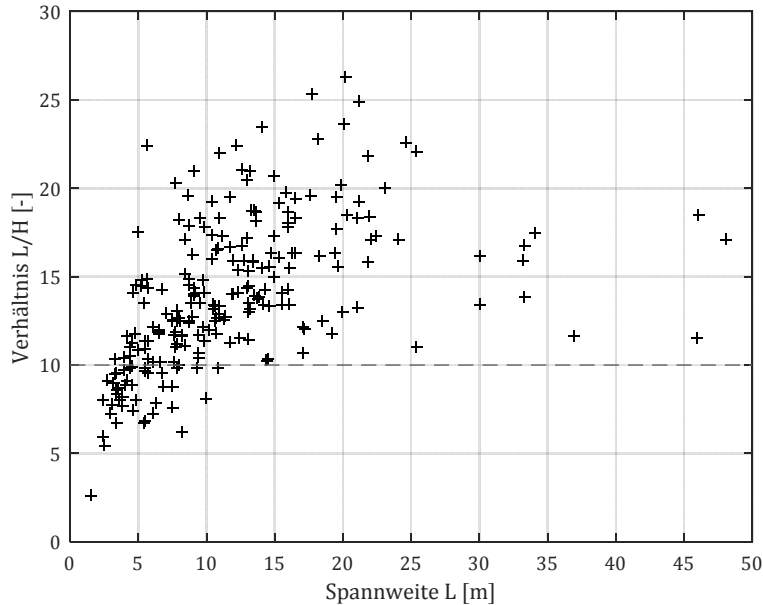


Abbildung 3.1: L/H -Verhältnis bezogen auf die Spannweite L für bestehende Tragwerke

Erfolgt eine genauere, dreidimensionale Modellierung des Tragwerkes, so ist der Unterschied zwischen einer schubnachgiebigen und einer schubsteifen Theorie größer, siehe z.B. [25]. Auch *Salcher* und *Adam* empfehlen in [26] die Verwendung einer schubnachgiebigen Theorie.

3.4 Verhältnis Spannweite zu Breite

Ein Balken ist dadurch definiert, dass die Höhe H und die Breite B klein gegenüber der Spannweite L sind. Wie im vorigen Kapitel beschrieben, ist dafür ein L/H -Verhältnis von größer gleich 10 ausreichend. Dies wird für die hier untersuchten Tragwerke vorausgesetzt. Doch um ein Tragwerk als Balken betrachten zu können, muss auch die Breite klein zur Länge sein. Gerade für Tragwerke mit kurzer Spannweite ($L < 10 \text{ m}$) trifft dies nicht mehr zu. Es handelt sich hier tatsächlich um Platten. Daher stellt sich die Frage, wie groß der Steifigkeitsfehler und in weiterer Folge der Frequenzfehler ist, der durch die Betrachtung des Tragwerkes als Balken gemacht wird. Am Beispiel eines 10 m langen Tragwerkes wird der Einfluss des L/B -Verhältnisses auf die erste Biegefrequenz untersucht. Um die Effekte unterschiedlicher Biegesteifigkeiten in Querrichtung ausschließen zu können, wird eine isotrope Platte mit einer konstanten Dicke von 90 cm gewählt. Dadurch ergibt sich ein L/H -Verhältnis, das größer als 10 ist, wodurch die Schubsteifigkeit vernachlässigt werden kann. Zur Bestimmung der Masse wird die Dichte von Stahlbeton mit $\rho =$

2500 kg/m^3 verwendet. Um die realistische Bandbreite der L/B -Verhältnisse von Eisenbahnbrücken - welche als Einfeldträger ausgeführt werden - abzudecken, wird eine Breite von 1,0 m und 10,0 m betrachtet. Unter Verwendung des E-Moduls für Beton von $E = 31.000 N/mm^2$, ergibt sich die Biegesteifigkeit zu:

$$EA_{zz} = E \frac{B H^3}{12} = B \cdot 1,883 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 \quad (3.16)$$

Für die Massenbelegung ergibt sich:

$$\mu = B \cdot 2250 \text{ kg/m} \quad (3.17)$$

Setzt man dies in Gleichung (3.11) ein und dividiert durch 2π , so folgt unabhängig von der Breite die Eigenfrequenz zu:

$$f_0 = 14,37 \text{ Hz} \quad (3.18)$$

Als Vergleich wird die Eigenfrequenz durch die FE-Software RFEM Version 5.04.0058 ermittelt. Die Schubsteifigkeit der verwendeten Flächenelemente wurde um drei Zehnerpotenzen hochgestellt, um die Ergebnisse mit der in (3.18) angegebenen Frequenz eines *Bernoulli-Euler*-Balkens vergleichen zu können.

B [m]	1	5	10	15	20	30
L/B [-]	10	2	1	0,667	0,5	0,333
$f_{1.BEF}$ [Hz]	14,38	14,45	14,53	14,57	14,60	14,62
$f_{1.TEF}$ [Hz]	164,71	42,75	24,89	19,82	17,72	16,07
$f_{1.TEF}/f_{1.BEF}$ [-]	11,45	2,96	1,71	1,36	1,21	1,10

Tabelle 3.1: Erste Biege- und Torsionseigenfrequenzen für eine 10 m lange Brücke

Die ersten Eigenformen und zugehörigen Eigenfrequenzen für 1,0 m und 10,0 m Breite sind in Abbildung 3.2 dargestellt. Für weitere Breiten sind die ersten Biege- und Torsionseigenfrequenzen in Tabelle 3.1 aufgelistet.

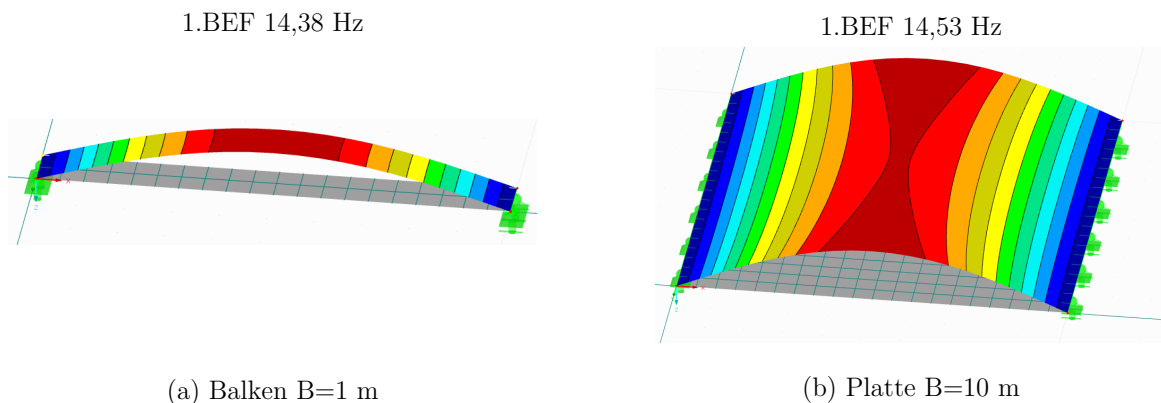


Abbildung 3.2: Ersten zwei Eigenformen aus (RFEM) für ein 10 m langes Tragwerkes für (a) einen Balken und (b) eine Platte

Aus den Frequenzen der FE Berechnung ist ersichtlich, dass das L/B -Verhältnis des Tragwerkes auf die erste Biegeeigenfrequenz praktisch keinen Einfluss hat. Die Frequenz des 1,0 m breiten Balkens entspricht fast exakt dem analytischen Ergebnis. Je kleiner L/B wird, desto größer wird der Frequenzunterschied zwischen Platte und Balken (analytisch). Doch selbst bei $L/B = 1,0$ liegt die Differenz zur analytischen Balkenfrequenz nur bei etwa 1 % (vgl. Abbildung 3.2 (b)) und ist somit im Verhältnis zu den Genauigkeiten der Eingangsparameter vernachlässigbar. In Abbildung 3.3 (a) ist, durch die beiden eingetragenen Linien, eine mittlere Breite von 5,0 m für eingleisige und 10,0 m für zweigleisige Tragwerke gekennzeichnet. Daraus ist ersichtlich, dass nur wenige eingleisige Brücken mit einer Spannweite über 5,0 m ein L/B -Verhältnis von 1,0 unterschreiten.

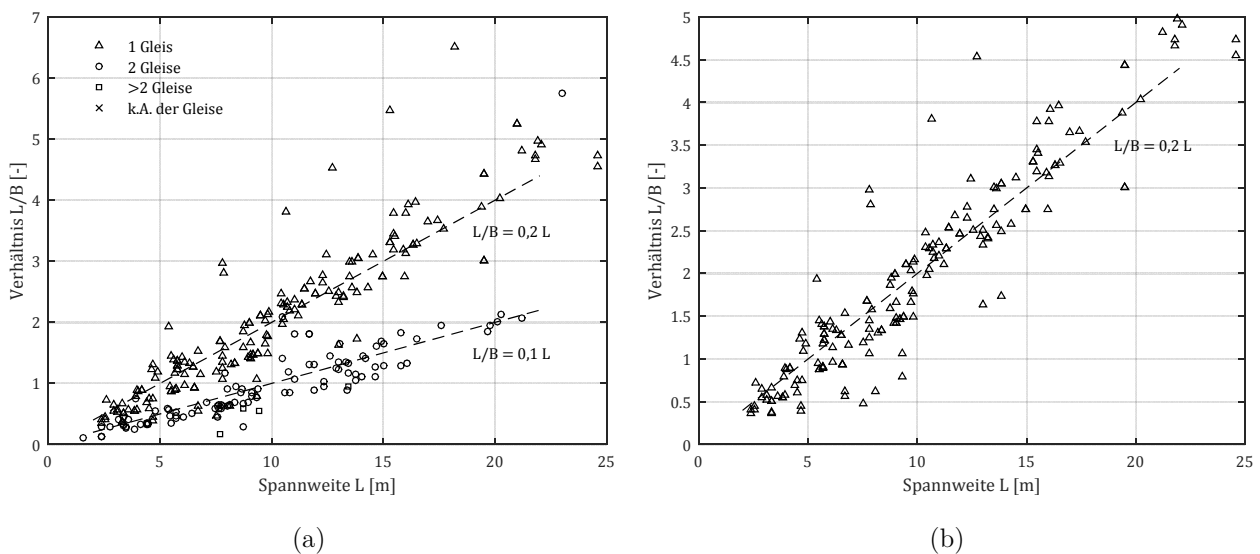


Abbildung 3.3: L/B -Verhältnis bestehender Tragwerke bezogen auf die Spannweite L ; (a) nach Anzahl der Gleise unterteilt (b) nur eingleisige Tragwerke dargestellt

Die Relation zwischen Länge und Breite des Tragwerkes hat jedoch einen bestimmenden Einfluss auf die Torsionseigenfrequenzen. Je kleiner das L/B -Verhältnis, desto näher rückt die erste Torsionsfrequenz an die erste Biegefrequenz heran (vgl. Tabelle 3.1). Für Plattentragwerke mit Liniennlagerung müsste dieses Verhältnis jedoch schon kleiner als 0,5 werden, damit die Torsionsfrequenz in der unmittelbaren Nähe der Biegefrequenz (weniger als 20 % entfernt) zu liegen kommt. Wie aus Abbildung 3.3 (b) erkennbar ist, trifft dies nur auf wenige Tragwerke zu. Dabei handelt es sich vorwiegend um sehr kurze Tragwerke, bei denen die Zulässigkeit einer Modellierung als *Bernoulli-Euler*-Balken ohnehin fraglich ist. Da Torsionseffekte hier generell außen vor gelassen werden, sei dieser Effekt nur nebenbei erwähnt.

Auf die dynamische Tragwerksantwort hat die Breite nur indirekt einen Einfluss, da breitere Tragwerke tendenziell schwerer sind. Bei gleicher Eigenfrequenz ergibt sich für eine breitere Brücke somit eine geringere Spitzenbeschleunigung (vgl. [79] Kapitel 5.3).

3.5 Tragwerksschiefe

Wege, Straßen oder Flüsse, welche die Errichtung von Brücken erst notwendig machen, kreuzen die Bahntrasse nicht immer rechtwinkelig. Daher haben Brückentragwerke oft eine Lagerachse, die nicht normal zur Tragwerkachse steht. In diesen Fällen spricht man von schiefen Tragwerken. Der Winkel zwischen Brückenachse und Lagerachse wird als (geometrische) Schiefe φ bezeichnet. Hier wird davon ausgegangen, dass die Lagerachsen parallel sind, die Schiefe ist somit für beide Auflager gleich. Gerade Tragwerke besitzen demnach eine Schiefe von $\varphi = 90^\circ$ (vgl. Abbildung 3.4).

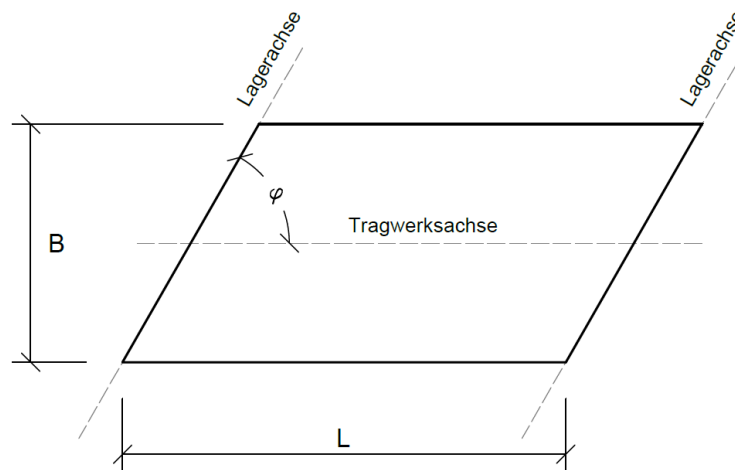


Abbildung 3.4: Grundriss Tragwerk mit schiefer Lagerung

Die Schiefe eines Tragwerkes beeinflusst die Eigenfrequenz des Systems. Um die Größe dieses Einflusses abschätzen bzw. erfassen zu können, führte *Eördög* [89] eine Parameterstudie durch. Dabei wurde für insgesamt 288 Tragwerke ein zweidimensionales FE-Modell erstellt und die zugehörige erste Eigenfrequenz ermittelt. Die untersuchten Spannweiten liegen zwischen 5,0 m und 30,0 m mit einer Schrittweite von 5,0 m.

L [m]	5	10	15	20	25	30
$f_{0,max}$ [Hz]	45,0	16,5	12,0	10,0	8,0	7,0
$f_{0,min}$ [Hz]	16,0	8,5	6,0	4,5	4,0	3,5
μ_{max} [t/m]	60,0	48,0	48,0	45,0	50	50
μ_{min} [t/m]	10,0	7,0	7,33	7,0	9,6	11,67

Tabelle 3.2: Grundfrequenzen und Massenbelegung für die von *Eördög* durchgeführten FE-Berechnungen

Für jede Spannweite wurde eine obere und eine untere Grundfrequenz $f_{0,max}$ und $f_{0,min}$ sowie eine obere und eine untere Massenbelegung μ_{max} und μ_{min} festgelegt (Auflistung siehe Tabelle 3.2). Es ergeben sich somit vier Parameterkombinationen für jede Spannweite (vgl. Tabelle 3.3). Diese vier Parameterkombinationen wurden für jede Spannweite mit jeweils vier Schiefen (90° , 75° , 60° , 45°) untersucht. Die FE-Berechnungen erfolgten mit dem Softwarepaket SOFiSTiK, wobei schubnachgiebige Flächenelemente zum Einsatz kamen. Die Biegesteifigkeit der Tragwerke wurde aus der jeweiligen Eigenfrequenz und der Massenbelegung durch Umformen der Frequenzgleichung (3.11)

rückgerechnet. Unter der Annahme eines rechteckigen Plattenquerschnittes und des E-Moduls für Stahl von $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$ erfolgte die Ermittlung einer fiktiven Plattendicke H .

Typ 1	Typ 2	Typ 3	Typ 4
$f_{0,max}$	$f_{0,max}$	$f_{0,min}$	$f_{0,min}$
$\mu_{min} + 0,75 \Delta\mu$	μ_{min}	μ_{max}	μ_{min}

Tabelle 3.3: Parameterkombinationen zur Berechnungen der Schiefe

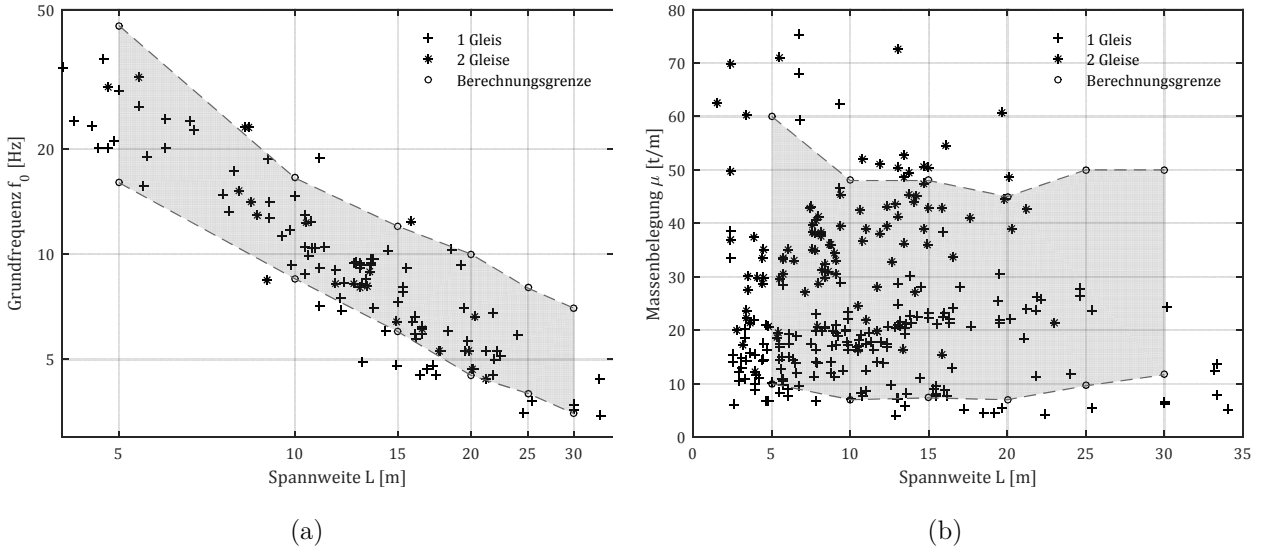


Abbildung 3.5: Vergleich der Tragwerkparameter für die FE Berechnung mit denen aus den Datensätzen für ein- und zweigleisige Brücken L ; (a) Eigenfrequenz (b) Massenbelegung

In Abbildung 3.5 werden die Parametergrenzen für die FE-Berechnung mit den tatsächlichen Tragwerkparametern aus den vorhandenen Datensatz (nur Brücken mit Schotteroberbau) verglichen. Wie daraus ersichtlich ist, decken die in der FE-Berechnung verwendeten Parametergrenzen den Großteil der realen Tragwerke ab. Es gibt aber durchaus Tragwerke, die außerhalb der untersuchten Parametergrenzen liegen. Da in den Berechnungen die minimale Eigenfrequenz mit der minimalen Massenbelegung und umgekehrt kombiniert wurden (was für reale Tragwerke nicht zutreffen wird), kann davon ausgegangen werden, dass zumindest die Bandbreite der untersuchten Biegesteifigkeiten so gut wie alle realen Tragwerke abdeckt.

Eine Betrachtung der Ergebnisse für eine Schiefe von 90° erlaubt einen Rückschluss auf die Auswirkung der Schubnachgiebigkeit auf die Eigenfrequenzen. In Abbildung 3.6 sind die Frequenzfehler, die sich aus einem Vergleich der Eigenfrequenzen aus der FE-Analyse $f_{0,FEM}$ und der analytischen Eigenfrequenz für einen *Bernoulli-Euler*-Balken (BEB) $f_{0,BEB}$ (Gleichung (3.11)) ergeben dargestellt. In Abbildung 3.6 (d) kennzeichnet die Größe des Kreises die Größe des Fehlers (nur qualitativer Fehlervergleich). Der Frequenzfehler Δf_0 wird dabei folgendermaßen ermittelt.

$$\Delta f_0 = \frac{f_{0,BEB} - f_{0,FEM}}{f_{0,FEM}} \quad (3.19)$$

Ein negativer Frequenzfehler bedeutet daher, dass mit der Eigenfrequenz eines BEB die Frequenz der FE Berechnung unterschätzt wird.

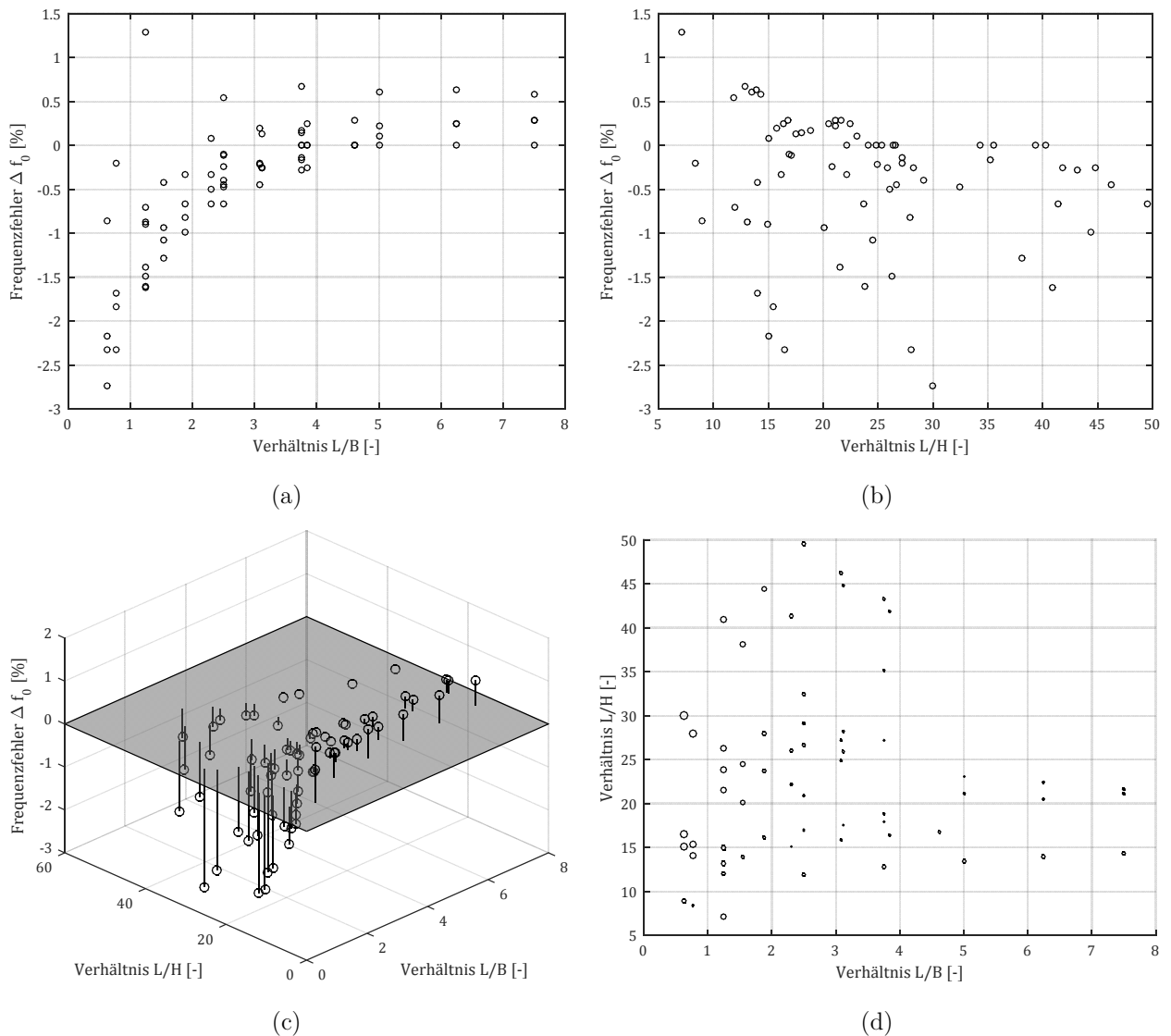


Abbildung 3.6: Frequenzfehler Δf_0 für gerade Tragwerke ($\varphi = 90^\circ$) in Abhängigkeit von L/H und L/B

Speziell aus Abbildung 3.6 (a) ist gut ersichtlich, dass der Absolutwert des Fehlers mit abnehmendem L/B -Verhältnis zunimmt. Aus Abbildung 3.6 (b) ist jedoch kein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Fehler und dem L/H -Verhältnis erkennbar. Betrachtet man jedoch Abbildung 3.6 (c) und Abbildung 3.6 (d), so wird ersichtlich, dass bei kleinen L/H -Verhältnissen die Balkengleichung die Eigenfrequenzen überschätzt. Mit den Abbildungen können also die Erkenntnisse der beiden vorhergehenden Kapitel bestätigt werden. Der Maximalfehler liegt also auch bei der gemeinsamen Betrachtung der Wirkung der Plattenbreite und der Schubnachgiebigkeit unter 3%. Dadurch wird der Ansatz bestätigt, dass beide Effekte vernachlässigt werden können. Abbildung 3.7 zeigt die Frequenzfehler Δf_0 der - für schiefe Tragwerke - bei der Berechnung als gerader BEB gemacht wird. Als Referenzwerte dienen hier ebenfalls die Ergebnisse der FE-Analyse. Aus dieser Abbildung ist eindeutig ersichtlich, dass mit zunehmender Abweichung des Lagerwinkels von 90° der Frequenzfehler zunimmt. Aus Abbildung 3.7 (a) und (b) kann geschlossen werden, dass das

L/B -Verhältnis einen wesentlich signifikanteren Einfluss auf die Eigenfrequenz des Systems hat als das L/H -Verhältnis.

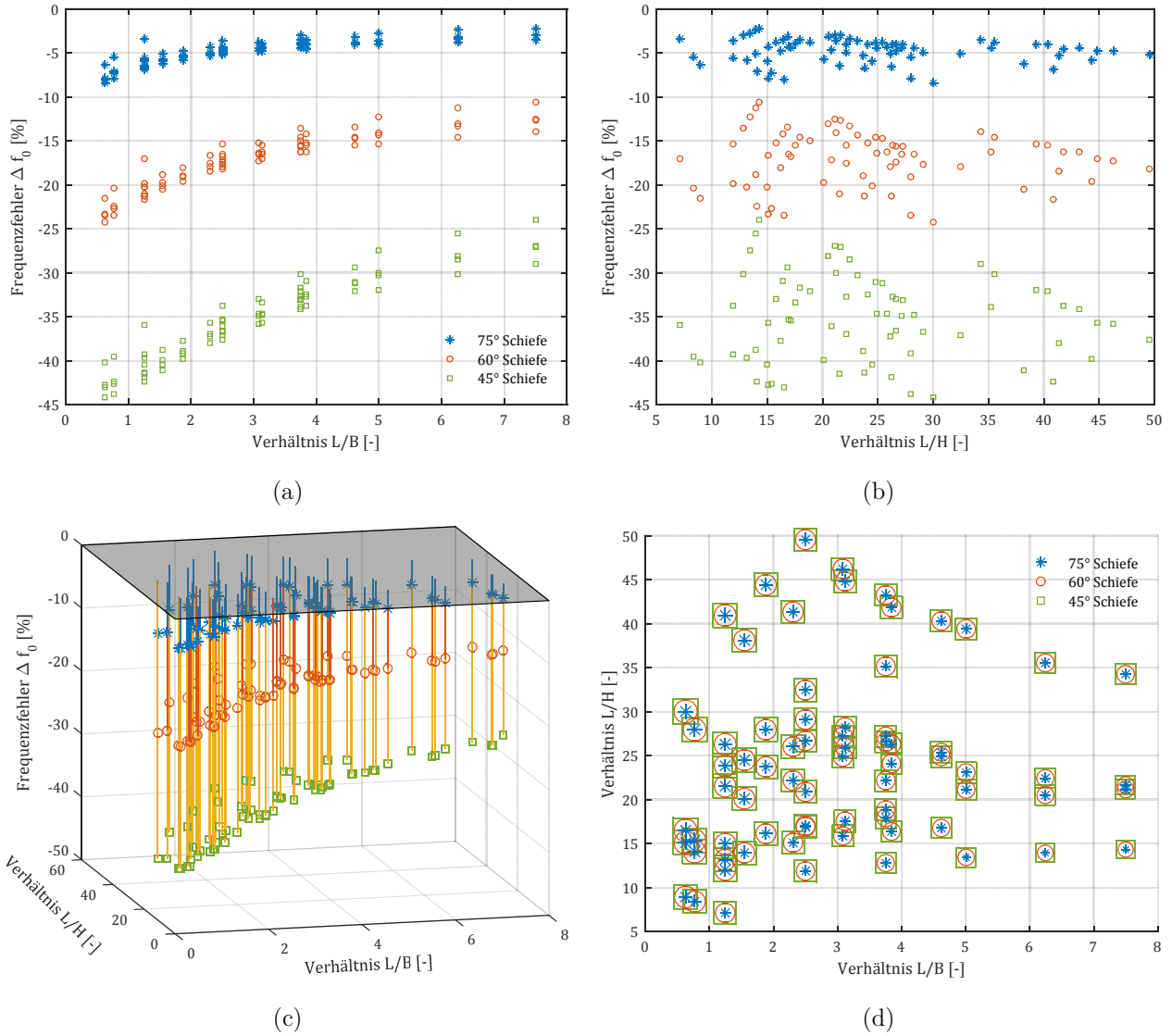


Abbildung 3.7: Frequenzfehler Δf_0 für schiefe Tragwerke in Abhängigkeit von L/H und L/B

Bei einer Schiefe von 45° kann, abhängig von L/B und L/H -Verhältnis, die tatsächliche Eigenfrequenz einer Platte um bis zu 45 % höher sein als die Werte, die aus der Balkengleichung resultieren. Die Auflagerschiefe kann also nicht einfach vernachlässigt werden. Es bedarf einer Anpassung der Gleichung, um die Eigenfrequenzen solcher Tragwerke abschätzen zu können. Eine Möglichkeit dies zu tun wird im ERRI Report [20] und [40] angegeben. Dabei wird aus der geometrischen Spannweite L , der Plattenbreite B und der Schiefe φ eine äquivalente mechanische Spannweite L' ermittelt. Die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der äquivalenten Spannweite L'

$$L' = \frac{L \sin \varphi}{\cos(\varphi - \psi)} \quad (3.20)$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - 0,9 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \frac{B}{L} \quad (3.21)$$

sind dem Report des ERRI Komitees D214/RP8 – Teil B [40] entnommen. Der Winkel ψ dient hierbei nur als Hilfwert. Zu Gleichung (3.21) ist anzumerken, dass im ERRI Report die Faktoren B und L , verglichen mit der hier dargestellten Gleichung, vertauscht sind. Die Eigenfrequenz kann nun für die äquivalente Länge aus der Gleichung für den *Bernoulli-Euler*-Balken ermittelt werden,

$$f_0 = \frac{\pi}{2 L'^2} \sqrt{\frac{EA}{\mu}} \quad (3.22)$$

Um diese Gleichungen zu evaluieren, werden zunächst die Eigenfrequenzen von Tragwerken berechnet, welche auch im Report des ERRI Komitees D214/RP8 [40] untersucht wurden. Hierbei wird zum einen die richtige Anwendung der Gleichung zur Bestimmung der äquivalenten Länge kontrolliert (vgl. Tabelle 3.4) und zum anderen werden die erhaltenen Frequenzen aus diesen Gleichungen mit den Ergebnissen aus FE Analysen verglichen. Dadurch konnte auch die in (3.21) dargestellte korrekte Gleichung für den Hilfswinkel ψ erkannt werden. Die Tragwerkskennwerte sind dem ERRI Report D214/RP8 – Teil B [40] Tabelle 4.1 entnommen.

Bauwerk	L [m]	B [m]	Schiefe φ [gon]	Schiefe φ [°]	L'_{ERRI} [m]	$L'_{\text{berechnet}}$ [m]
OA01.51	12,8	4,8	147	132,3	10,7	10,72
OA71.18	17,4	5,2	53	47,7	15	15,00
OA89.79	10,4	4,9	126	113,4	9,8	9,81
OA89.104	15,5	4,9	133	119,7	14,5	14,45
OA89.142	12,1	4,9	57	51,3	10,4	10,39

Tabelle 3.4: Tragwerke mit schiefer Lagerung aus ERRI/RP8

In Tabelle 3.5 erfolgt eine Gegenüberstellung der Eigenfrequenzen aus (3.22) mit jenen aus einer FE Berechnung. Durchgeführt wurde die FE Berechnung mit dem Programm RFEM Version 5.04.0058, wobei schubnachgiebige Flächenelemente zum Einsatz kamen. Aus der Biegesteifigkeit wurde unter der Annahme eines konstanten Rechteckquerschnittes und des E-Moduls für Beton ($E = 31000 \text{ N/mm}^2$) eine äquivalente Plattendicke H rückgerechnet.

Bauwerk	$ 90 - \varphi $ [°]	μ [kg/m]	EI [N/m ²]	$f_{0,\text{gerechnet}}$ [Hz]	$f_{0,\text{FEM}}$ [Hz]	Δf_0 [Hz]	Δf_0 [%]
OA01.51	42,2	13100	3,70E+09	7,26	7,56	-0,30	-4,00
OA71.18	42,3	15960	8,48E+09	5,09	5,46	-0,37	-6,82
OA89.79	23,4	13750	3,47E+09	8,19	8,22	-0,03	-0,35
OA89.104	29,7	14670	4,52E+09	4,18	4,34	-0,16	-3,73
OA89.142	33,0	13800	3,53E+09	7,37	7,55	-0,18	-2,44

Tabelle 3.5: Tragwerke mit schiefer Lagerung aus ERRI/RP8 - Überprüfung der Eigenfrequenzen

In der letzten Spalte von Tabelle 3.5 sind die prozentuellen Abweichungen der Näherungsgleichung lt. ERRI und den FE Ergebnissen angegeben. Daraus ist ersichtlich, dass die Näherung teilweise sehr gut passt. Andererseits treten für das zweite Tragwerk Abweichungen von fast 7 % auf. Dies legt nahe, dass eine nähere Untersuchung der Genauigkeit dieser Näherungsgleichung

zweckmäßig ist. Daher werden im nächsten Schritt die Eigenfrequenzen der FE Berechnungen von *Eördög* mit den Näherungsfrequenzen aus der Gleichung nach ERRI verglichen.

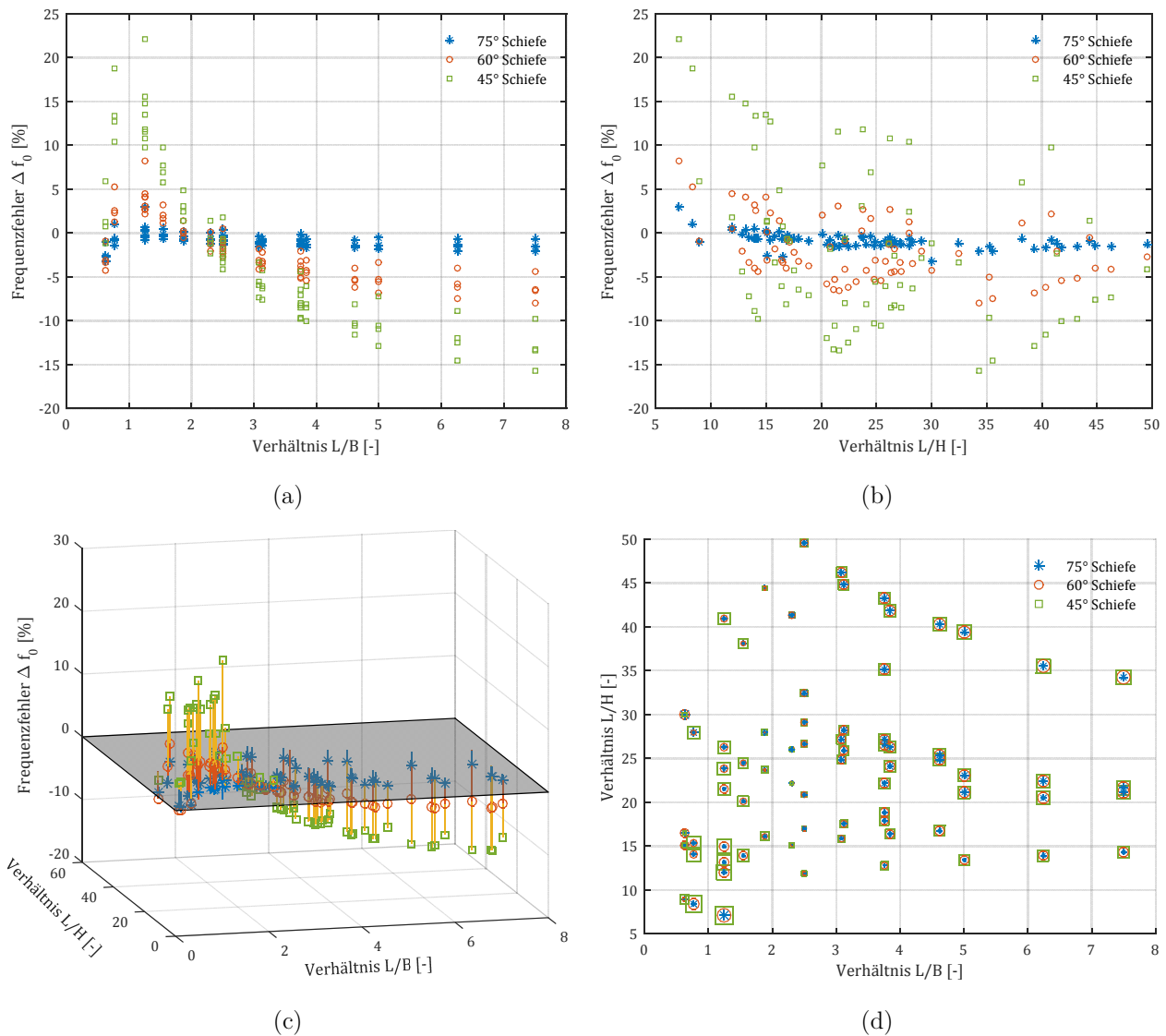


Abbildung 3.8: Frequenzfehler Δf_0 für schiefe Tragwerke durch die Näherungsgleichung nach ERRI

Der Frequenzfehler, der durch die „ERRI-Gleichung“ gemacht wird, ist dazu in Abbildung 3.8 dargestellt. Die Fehlerermittlung erfolgt dabei nach in Gleichung (3.19) gezeigtem Schema. Wie aus Abbildung 3.8 (a) und (d) erkennbar ist, ist die „ERRI-Gleichung“ vor allem in einem L/B -Verhältnis zwischen 1,5 und 2,5 in der Lage, die Eigenfrequenzen einer Platte gut abzubilden. Für ein L/B -Verhältnis von weniger als 1,5 kann die tatsächliche Eigenfrequenz jedoch um bis zu 20 % überschätzt werden. Auch für sehr schmale Tragwerke (großes L/B) kann der Fehler bis zu -15 % betragen. Der Fehler nimmt generell mit der Abweichung der Schiefe vom Normalenwinkel zu. Für geringe Auflagerschiefstellungen und L/B Verhältnisse zwischen 1,5 und 3,0 liefert die Näherungsgleichung brauchbare Werte. Um zu überprüfen, ob diese Grenzen von realen Tragwerken eingehalten werden, sind in Abbildung 3.9 die Winkelabweichungen zu 90° und die L/B Werte der vorhandenen Tragwerksdatensätze dargestellt. Dabei wird ersichtlich, dass in der Praxis auch durchaus Winkelabweichungen zwischen 30° und 45° (= Schiefe zwischen 60° und 45°) auf-

treten. Der Grenzwert der kleinen Winkelabweichungen kann demnach nicht bestätigt werden. Des Weiteren weisen viele Tragwerke mit einer Auflagerschiefe auch L/B -Verhältnisse von weniger als 1,5 oder mehr als 3,0 auf. Ein alternativer Ansatz zur vereinfachten Erfassung der Tragwerksschiefe scheint demnach erforderlich.

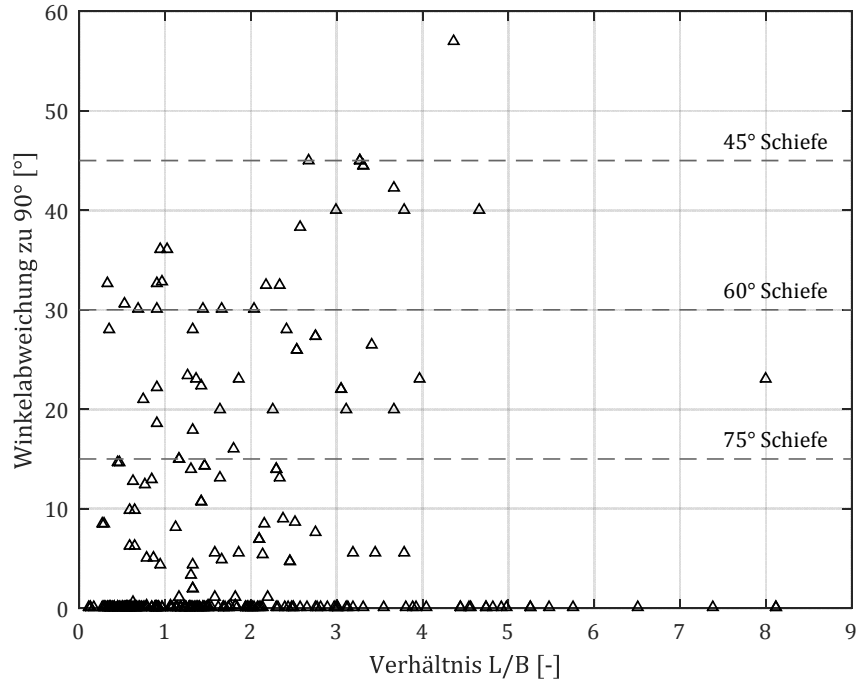


Abbildung 3.9: Tragwerksschiefe in Abhängigkeit vom L/B -Verhältnis

Aus Abbildung 3.7 ist eine klare Abhängigkeit der Eigenfrequenz bzw. des Frequenzfehlers vom L/B -Verhältnis und der Schiefe φ ersichtlich, weshalb die Anpassung der Frequenz über diese Parameter erfolgen muss. Die Ermittlung einer äquivalenten Länge scheint sinnvoll und wird daher weiterverfolgt. Die äquivalente Länge L' wird als Funktion der tatsächlichen Systemlänge L und einem von L/B und φ abhängigen Faktor F_L angenommen.

$$L' = F_L(L/B, \varphi) L \quad (3.23)$$

Durch Einsetzen von (3.23) in (3.22) ergibt sich:

$$f_0 = \frac{\pi}{2 L'^2} \sqrt{\frac{EA}{\mu}} = \frac{1}{F_L^2} f_{0,90^\circ} \quad (3.24)$$

Um zur Bestimmung der Funktion für den Längenfaktor F_L den Einfluss der Schubnachgiebigkeit zu reduzieren, werden die Eigenfrequenzen aus der FE-Berechnung für schiefe Lagerung jenen aus der FE-Berechnung für einen 90° Winkel gegenübergestellt. Die so ermittelten Faktoren F_L sind in Abbildung 3.10 dargestellt. Des Weiteren ist in dieser Abbildung auch der Längenfaktor $F_{L,ERRI}$ entsprechend der ERRI- Gleichung (L'_{ERRI} nach Gleichung (3.20))

$$F_{L,ERRI} = L'_{ERRI}/L \quad (3.25)$$

für die drei unterschiedlichen Schiefen dargestellt. Aus diesen strichliert dargestellten Funktionsverläufen ist ersichtlich, dass diese Gleichungen für Breiten die größer als die Systemlänge sind nicht mehr anwendbar sind. Aber auch für schmalere Tragwerke ist die nicht unwesentliche Abweichung des Längenfaktors von den FE Ergebnissen erkennbar.

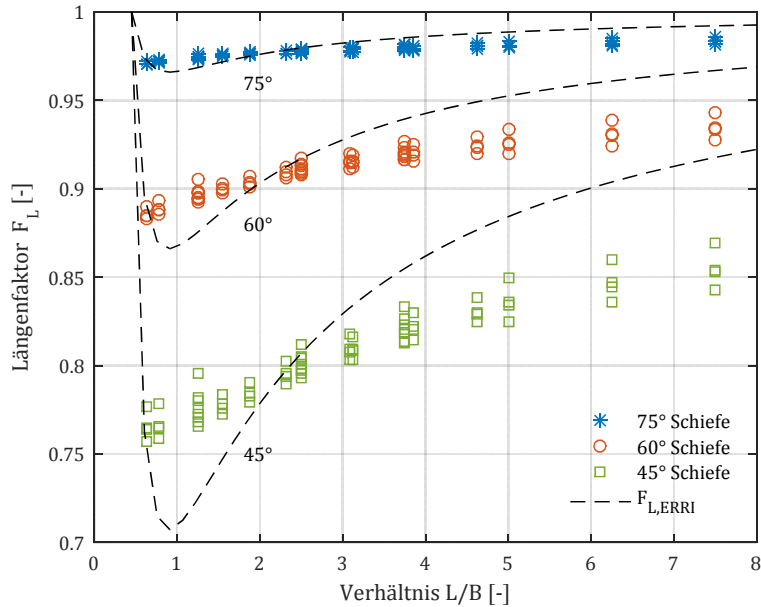


Abbildung 3.10: Längenfaktoren aus den FE-Berechnungen und aus der ERRI-Gleichung

Um eine bessere Übereinstimmung mit den empirisch ermittelten Verläufen zu erhalten, wird hier folgender lineare Funktionsverlauf des Längenfaktors empfohlen:

$$F_L = \sin\left(\varphi + \frac{90 - \varphi}{10}\right) + \frac{L}{B} \left(\frac{1 - \sin \varphi}{20}\right) \quad (3.26)$$

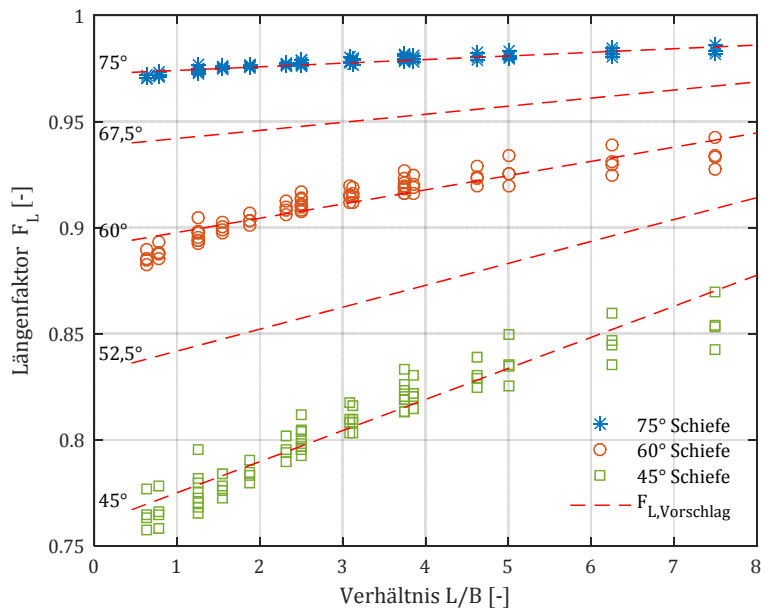


Abbildung 3.11: Längenfaktoren aus den FE-Berechnungen und lt. vorgeschlagener Gleichung

In Abbildung 3.11 ist dieser Funktionsverlauf für unterschiedliche Winkel der Schiefe φ dargestellt. Der Frequenzfehler, der mit der Annäherung der äquivalenten Länge nach (3.23) und (3.26) gegenüber einer schubweichen FE-Berechnung gemacht wird, ist in Abbildung 3.12 dargestellt.

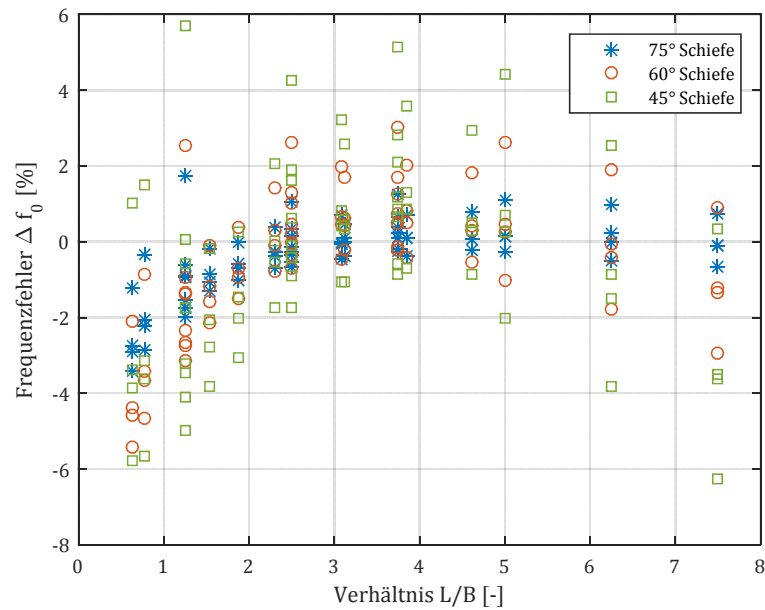


Abbildung 3.12: Frequenzfehler Δf_0 der Näherungsgleichung gegenüber einer schubweichen FE-Berechnung

Der maximale Frequenzfehler, der mit dieser Näherung gemacht wird, liegt für besonders breite oder besonders schmale Tragwerke bei maximal 6 %. Für den Großteil der untersuchten Systeme ist die Anpassungsgenauigkeit wesentlich höher und der maximale Fehler liegt in etwa bei ± 3 %.

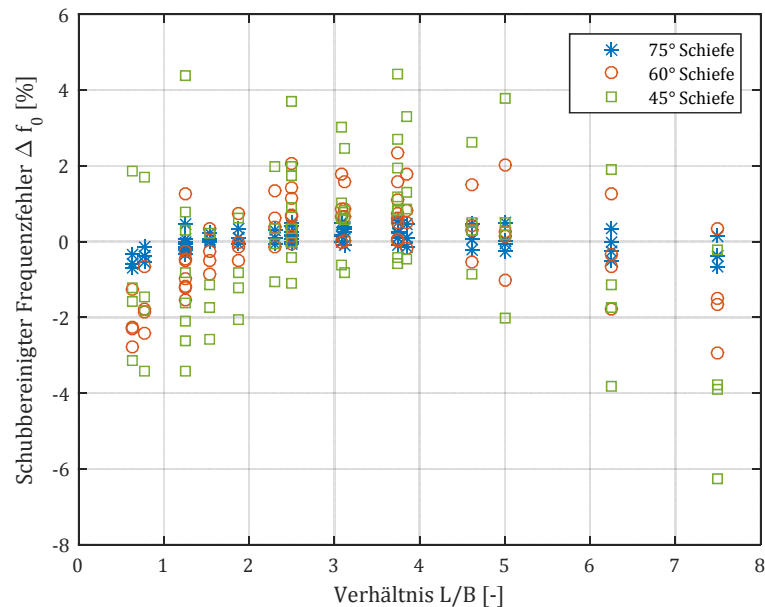


Abbildung 3.13: Frequenzfehler Δf_0 der Näherungsgleichung für „schubnormierte“ FE-Berechnungen

Es sei noch angemerkt, dass sich die hier dargestellten Frequenzfehler auf schubnachgiebige Berechnungen beziehen, das heißt, Frequenzfehler aus der Schubnachgiebigkeit sind in diesen Werten ebenfalls enthalten. Wird diese durch Division der Frequenzen aus der FE Berechnung durch die

zugehörigen Berechnungsergebnisse für gerade Tragwerke herausgekürzt, so erhält man die Frequenzfehler gemäß Abbildung 3.13. Der Fehler kann dadurch auf großteils unter 2 % gedrückt werden. Zur abschließenden Plausibilisierung wird der Längenfaktor nach (3.26) auf die Beispieltragwerke aus dem ERRI Report angewandt. Wie aus Tabelle 3.6 ersichtlich ist, können die Eigenfrequenzen für diese Objekte quasi exakt abgeschätzt werden. Die Näherungsformel (3.24) (bei Verwendung von (3.26)) wird somit als überprüft angesehen.

Bauwerk	L [m]	B [m]	Schiefe [°]	$f_{0,Georg}$ [Hz]	$f_{0,FEM}$ [Hz]	Δf_0 [%]
OA01.51	12,8	4,8	132,3	7,54	7,56	-0,25
OA71.18	17,4	5,2	47,7	5,48	5,46	0,35
OA89.79	10,4	4,9	113,4	8,22	8,22	0,04
OA89.104	15,5	4,9	119,7	4,35	4,34	0,12
OA89.142	12,1	4,9	51,3	7,55	7,55	-0,05

Tabelle 3.6: Tragwerke mit schiefer Lagerung aus ERRI/RP8; Frequenzabschätzung

3.6 Lagerversatz

Bei einem ideellen Balkenmodell wird davon ausgegangen, dass der Drehpunkt (Lagerpunkt) auf der Schwerachse des Stabes liegt. Alleine durch den Umstand, dass jeder Balken auch eine bestimmte Höhe besitzt, befindet sich der tatsächliche Lagerpunkt etwas exzentrisch. Dieser Abstand zwischen dem tatsächlichen Drehpunkt und der Schwerachse des Stabes wird als Lagerversatz e_L bezeichnet. Dieser Lagerversatz kann sich nun unterschiedlich auf die Eigenfrequenz des Tragwerkes auswirken, abhängig von der Art der Lagerung. Bei einer idealen schwimmenden Lagerung ändert sich faktisch nichts. Bei einer schwimmenden Lagerung mit Elastomerlager verformen sich die Lagerpakete bei der Durchbiegung des Balkens. Dadurch entstehen Rückstellkräfte und Momente, die das System versteifen und die Eigenfrequenz geringfügig erhöhen. Da die horizontale Rückstellkraft der Lagerpakete von der Lagerverdrehung und dem Lagerversatz abhängen, wirkt sich ein größerer Lagerversatz versteifend auf das System aus. *Rauert* [19] untersuchte diesen Effekt rechnerisch für exemplarische Tragwerke (ca. 11 Stück), konnte dabei aber nur eine Erhöhung der Eigenfrequenz von maximal 1,2 % feststellen. Daher wird dieser Effekt als vernachlässigbar angesehen.

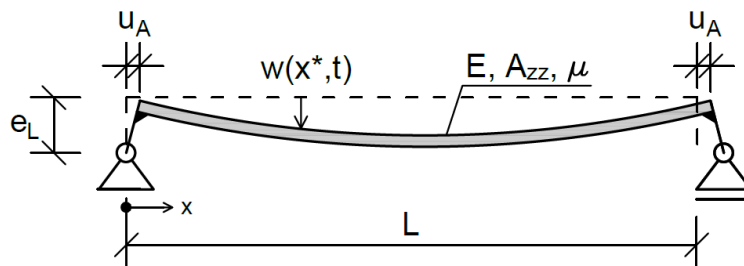


Abbildung 3.14: Träger auf zwei Stützen mit Lagerversatz

Ist der Balken jedoch statisch bestimmt, also auf einer Seite verschieblich und auf der anderen fest gelagert (siehe Abbildung 3.14), so stellt sich ein gegenteiliger Effekt ein. Bei der Durchbiegung des Balkens verursacht die Auflagerverdrehung φ_A durch die Festhaltung an einem Punkt eine horizontale Verschiebung der gesamten Konstruktion. Diese Verschiebung kann für den gesamten Balken entsprechend der Verschiebung u_A am festen Auflager angenommen werden.

$$u_A = w'(x = 0, t) e_L \quad (3.27)$$

Die kinetische Energie T , die in der *Lagrangeschen** Gleichung zur Ermittlung der Bewegungsgleichung benötigt wird, erhöht sich dadurch um:

$$\Delta T = \frac{1}{2} \mu L \dot{u}_A^2 \quad (3.28)$$

Unter Verwendung von

$$\phi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \quad (3.29)$$

als Ansatzfunktion für die Biegelinie, ergibt sich der Zusatzterm für die j -te Modale Masse Δm_j zu:

$$\Delta m_j = \mu L \left(\frac{j\pi e_L}{L}\right)^2 \quad (3.30)$$

Aus der Modalen Masse des gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balkens

$$m_j = \frac{1}{2} \mu L \quad (3.31)$$

erhält man den Erhöhungsfaktor $f_{M,j}$ für die Modale Masse zu:

$$f_{M,j} = 1 + 2 \left(\frac{j\pi e_L}{L}\right)^2 \quad (3.32)$$

Durch Einsetzen in $\omega_j = \sqrt{k_j/m_j}$ kann der Erhöhungsfaktor für die j -te Eigenfrequenz folgendermaßen bestimmt werden:

$$f_{\omega,j} = \frac{\omega_j(e_L)}{\omega_j(e_L=0)} = \sqrt{\frac{1}{1 + 2 \left(\frac{j\pi e_L}{L}\right)^2}} \quad (3.33)$$

Die Eigenfrequenz des Systems reduziert sich somit mit zunehmendem Lagerversatz. Gleichung (3.33) wurde für eine ideal gelenkige Lagerung hergeleitet. Vor allem bei kurzen Tragwerken kommen häufig Elastomerlager zum Einsatz, welche die Steifigkeit des Systems erhöhen und somit der Erhöhung der Modalen Masse entgegenwirken. Ohne genauere Informationen über die Lagerausführung stellt der Faktor $f_{\omega,j}$ somit eine Grenzwertbetrachtung dar. In Abbildung 3.15 ist der

* Joseph-Louis de Lagrange 1736 - 1813

Frequenzfehler $\Delta f_0 = 1 - f_{\omega,1}$ dargestellt, der bei Nichtberücksichtigung des Lagerversatzes gemacht wird. Für eine generellere Aussage ist der Fehler auf das e_L/L -Verhältnis bezogen.

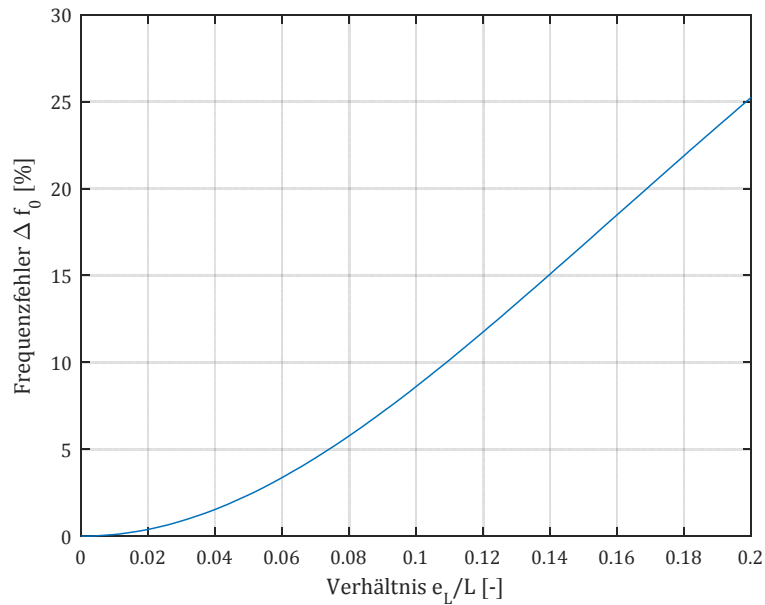


Abbildung 3.15: Frequenzfehler durch Vernachlässigung des Lagerversatzes e_L

Aus dem Fehlerverlauf wird ersichtlich, dass ab einem Lagerversatz von ca. 7 % der Länge der Frequenzfehler über 5 % liegt.

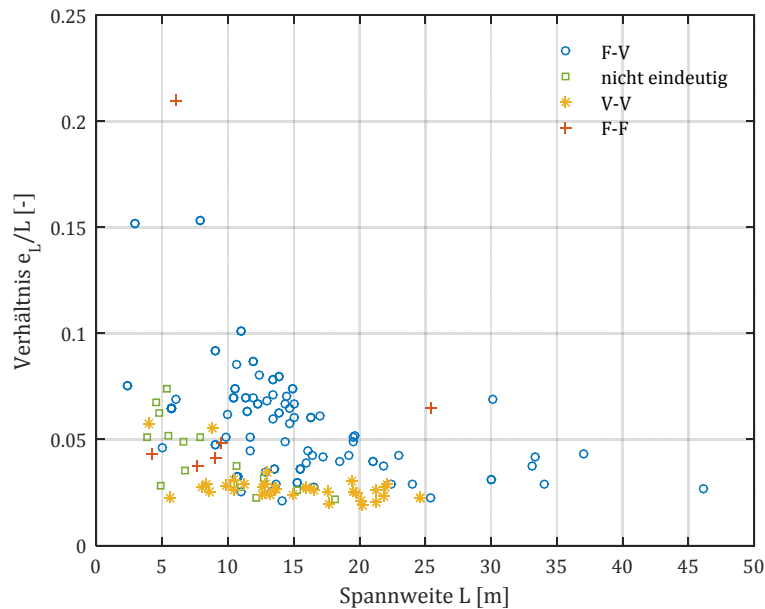


Abbildung 3.16: e_L/L -Verhältnis in Abhängigkeit von der Spannweite für unterschiedliche Lagerungen

Um abschätzen zu können, inwiefern dieser Effekt für reale Brücken relevant ist, sind in Abbildung 3.16 die e_L/L Verhältnisse von realen Tragwerken abgebildet. Aus den erhobenen Datensätzen (siehe Kapitel 2.3) waren für 212 Objekten mit Schotteroberbau auch Angaben zu den Lagerungsbedingungen vorhanden. Dabei steht F für ein festes Auflager und V für ein verschiebliches. Die Bezeichnung F-V steht somit für einen gewöhnlichen, statisch bestimmt gelagerten Einfeldträ-

ger. V-V hingegen steht für eine schwimmende Lagerung. Für etwa 20 Tragwerke konnte die Lagerung nicht eindeutig identifiziert werden, diese werden in den folgenden Abbildungen mit „nicht eindeutig“ gekennzeichnet.

Es wird ersichtlich, dass nur bei wenigen Brücken der Lagerversatz größer als 7 % der Spannweite ist. Tragwerke mit beidseits fester oder schwimmender Lagerung können für die weitere Untersuchung vernachlässigt werden, da bei ihnen keine horizontale Bewegung der Brückenmassen auftritt und somit Gleichung (3.33) nicht anwendbar ist. In Abbildung 3.17 sind die Frequenzfehler der Tragwerke mit „F-V“ und „nicht eindeutig“ bekannter Lagerung - abhängig von der Spannweite - aufgezeigt.

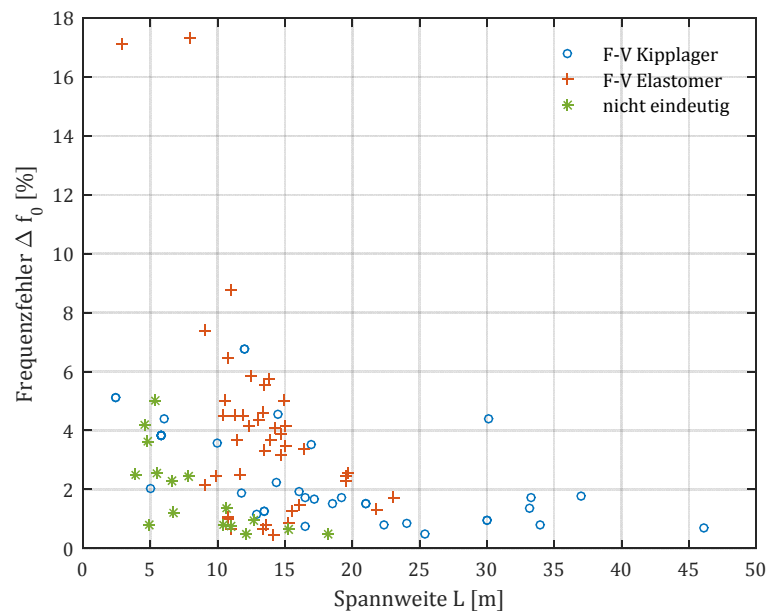


Abbildung 3.17: e_L/L -Verhältnis in Abhängigkeit von der Spannweite für unterschiedliche Lagerungen

Um den Einfluss des Lagerversatzes auf die Eigenfrequenz dieser Tragwerke besser einordnen zu können, wird dabei weiter zwischen Kipplager und Elastomerlager unterschieden. Mit Kipplager sind hier jene Lagerungen bezeichnet, die ein tatsächliches Gelenk darstellen und mehr oder weniger reibungsfrei das Verdrehen der Lagerpunkte ermöglichen. Für diese Tragwerke ist die Frequenzreduktion durch die horizontal schwingende Masse theoretisch voll wirksam. Für Brücken mit Elastomerlager, auch wenn ein Lager horizontal gesperrt ist, kann davon ausgegangen werden, dass der Frequenzfehler geringer ausfällt als in Abbildung 3.17 dargestellt. Für eine genauere Aussage müssten jedoch die genauen Eigenschaften der Lagerpakete bekannt sein.

Für den Großteil der Tragwerke in der Datenbank liegt der Frequenzfehler, der aus der Vernachlässigung des Lagerversatzes resultiert, unter 6 %. Die Abweichungen können jedoch auch höher sein, weshalb empfohlen wird, diesen Effekt zu berücksichtigen, falls die notwendigen Informationen vorhanden sind.

3.7 Rahmentragwerke

Eine große Anzahl der Tragwerke mit kurzer Spannweite stellen Rahmentragwerke dar. Dabei kann es sich um offene oder geschlossene Rahmen handeln. Von den über 1000 Brücken des in [36] untersuchten Teilstücks des schwedischen Eisenbahnnetzes sind 44 % Rahmentragwerke. Nur 28 % der Brücken sind einfeldrige Balken oder Plattentragwerke. *Unterweger et al.* untersuchten in [41] etwa 400 Tragwerke des österreichischen Schienennetzes. Dabei waren rund 35 % der Tragwerke Rahmentragwerke und fast 50 % Einfeldträger. In beiden Fällen decken also diese zwei Tragwerkstypen etwa dreiviertel der bestehenden Brückentragwerke ab.

Bei der Beurteilung der Brücken auf einer Eisenbahnstrecke kommt somit auch den dynamischen Eigenschaften von Rahmentragwerken eine große Bedeutung zu. So beschäftigen sich etwa *Goicolea et al.* [90] mit der Ermittlung der Eigenfrequenzen von Rahmenbrücken oder auch *Johansson et al.* behandeln in [36] - unter anderem - diese Aufgabenstellung.

Der Großteil der Studien zu dynamischen Eigenschaften von Eisenbahnbrücken beschäftigt sich jedoch mit einfeldrigen Balken. Inwiefern ein Rahmentragwerk durch einen Balken idealisiert werden kann, scheint somit eine wichtige Frage. Dieses Kapitel beschäftigt sich nur mit der Ermittlung der Biegeeigenfrequenzen von Rahmentragwerken. In dieser Arbeit wird im Weiteren nicht näher zwischen Einfeldträger und Rahmentragwerken differenziert. Es wird also im Stillen angenommen, dass sich Rahmen wie einfeldrige Balken mit höheren Steifigkeiten verhalten.

Um die Eigenfrequenzen und Eigenformen solcher Tragsysteme zu bestimmen, müssen zum einen die genauen geometrischen Abmessungen bekannt sein und zum anderen sind auch Informationen zum Untergrund erforderlich, da die Einspannwirkung der Auflagerwände auch von der Steifigkeit des angrenzenden Erdreiches abhängt. Diese detaillierten Informationen sind nicht immer vorhanden bzw. nicht so einfach zu ermitteln und sind überdies mit Unwägbarkeiten hinsichtlich der Materialkennwerte behaftet. Daher wird in diesem Abschnitt eine vereinfachte Methode zur Abschätzung der Eigenfrequenz eines Rahmentragwerks vorgestellt.

Eingespannter Träger

Für Rahmen, bei denen die Biegesteifigkeit des Riegels wesentlich geringer ist als die der Auflagerwände, kann vereinfachend ein beidseitig eingespannter Balken (siehe Abbildung 3.18) angenommen werden. Diese Modellierung dient auch als Abschätzung einer Frequenzobergrenze.

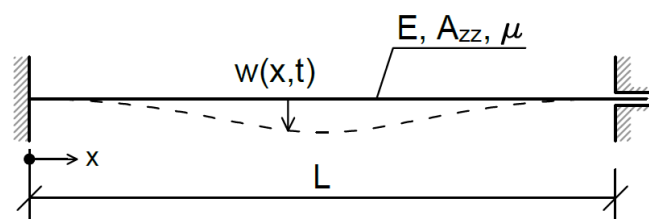


Abbildung 3.18: Beidseitig eingespannter Biegebalken

Die Frequenzgleichung für den beidseits eingespannten Balken lautet wie folgt (vgl. [4]).

$$\cosh \lambda_j \cos \lambda_j - 1 = 0 \quad j = 1, 2, 3, \dots \infty \quad (3.34)$$

Daraus ergeben sich deren Nullstellen λ_j zu:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 4,7300, \quad \lambda_2 = 7,8532, \quad \lambda_3 = 10,9956, \quad \lambda_4 = 14,1372, \quad \lambda_5 = 17,2788, \\ \lambda_j = (j + 0,5) \pi \quad j = 6, 7, \dots \infty \end{aligned} \quad (3.35)$$

Durch Einsetzen der Nullstellen in (3.36) lassen sich die Eigenkreisfrequenzen ω_j bestimmen.

$$\omega_j = \left(\frac{\lambda_j}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EA_{zz}}{\mu}} \quad (3.36)$$

Rahmen

In der Praxis wird kaum eine vollständige Einspannung vorhanden sein, weshalb das Modell des beidseits eingespannten Balkens die Eigenfrequenz des Tragwerks überschätzt. Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen eines Rahmens werden hier Auflagerwände und Balken getrennt betrachtet. Zunächst wird mittels dem Prinzip der *virtuellen Kräfte* PVK die Drehfedersteifigkeit der Auflagerwände bestimmt. Diese Drehfedern werden anschließend an beiden Enden des Balkens angebracht. Der Rahmen wird somit auf einen Träger auf zwei Stützen mit einer Teileinspannung der Auflager übergeführt (siehe Abbildung 3.19).

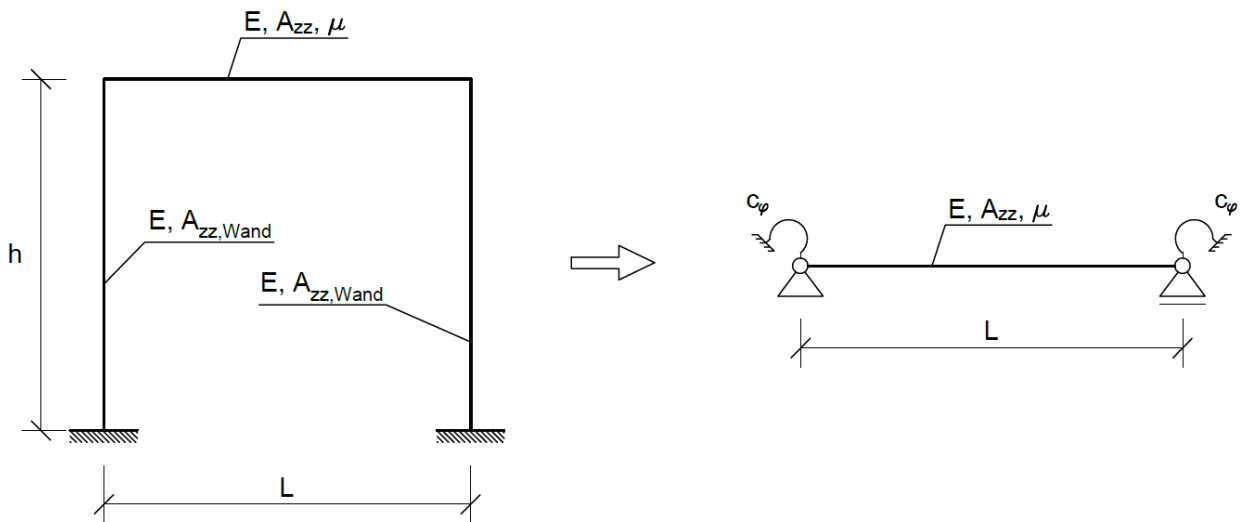


Abbildung 3.19: Modellierung der Auflagerwände als Drehfedern

Dieses Modell berücksichtigt nur die Biegeeigenfrequenzen des Rahmens unter Vernachlässigung der Massenträgheit der Auflagerwände und deren Dehnsteifigkeit. Es handelt sich demnach nur um eine Näherung, die die tatsächliche Eigenfrequenz eines Rahmens etwas überschätzt (vgl. Tabelle 3.7). Beim Prinzip der *virtuellen Kräfte* PVK wird die *virtuelle Arbeit* δA , die *virtuelle Kräfte*

an realen Formänderungen leisten, ermittelt und Null gesetzt (siehe [91]). Die *virtuelle Arbeit* wird in einen inneren (*i*) und einen äußeren (*a*) Anteil geteilt,

$$\delta A = \delta A^{(i)} + \delta A^{(a)} = 0 \quad (3.37)$$

Um eine Verdrehung φ_a an der Stelle a zu ermitteln, wird dort ein *virtuelles Moment* δM_a eingeprägt. Die innere und äußere Arbeit für einen schubstarrten Biegestab ohne Normalkräfte lassen sich dann wie folgt bestimmen (vgl. [91]):

$$\delta A^{(i)} = - \int_0^l \delta M(x) \kappa(x) dx = - \int_0^l \delta M(x) \left(\frac{M(x)}{EA_{zz}(x)} \right) dx \quad (3.38)$$

$$\delta A^{(a)} = \varphi_a \delta M_a \quad (3.39)$$

Dadurch ergibt sich φ_a zu:

$$\varphi_a = \frac{-\delta A^{(i)}}{\delta M_a} \quad (3.40)$$

Das Moment M_a verursacht an der in Abbildung 3.20 dargestellten Auflagerwand die Kopfverdrehung φ_a , wodurch sich die Drehfedersteifigkeit c_φ der Auflagerwand wie folgt bestimmen lässt:

$$c_\varphi = \frac{M_a}{\varphi_a} \quad (3.41)$$

Unter Verwendung der Integrationstabellen (siehe z.B. [91]) lässt sich die Drehfedersteifigkeit als Funktion von der Biegesteifigkeit der Auflagerwand $EA_{zz,Wand}$ und der Wandhöhe h ausdrücken.

$$c_\varphi = \frac{4 EA_{zz,Wand}}{h} \quad (3.42)$$

Der Rahmen kann somit auf einen Balken mit Drehfedern an beiden Auflagern umgeformt werden. Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen dieses Balkens kann wie in Abschnitt 3.2 vorgegangen werden. Durch die drehelastische Einspannung ergeben sich *implizite* Randbedingungen. Daraus resultiert die transzendente Frequenzgleichung des Balkens (siehe [9] und [92]).

$$\begin{aligned} & -1 + \cos(\lambda) \cosh(\lambda) - 2 \sin(\lambda) \cosh(\lambda) \left(\frac{EA_{zz}\lambda}{c_\varphi} \right) + \\ & + 2 \cos(\lambda) \sinh(\lambda) \left(\frac{EA_{zz}\lambda}{c_\varphi} \right) - 2 \sin(\lambda) \sinh(\lambda) \left(\frac{EA_{zz}\lambda}{c_\varphi} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Nullstellen λ_j dieser Gleichung können numerisch ermittelt werden. Durch Einsetzen dieser Nullstellen in die charakteristische Gleichung (3.7) ergeben sich die zugehörigen Eigenfrequenzen.

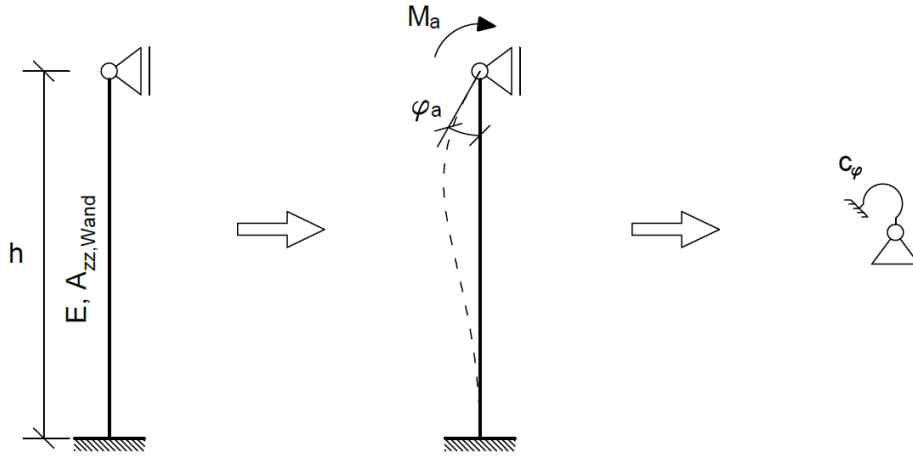


Abbildung 3.20: Ermittlung der Drehfedersteifigkeit der Auflagerwände

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der ersten Biegeeigenfrequenz ω_1 eines drehelastisch gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balkens stellt ein äquivalenter Einmassenschwinger dar (siehe [93]). Diese Methode verwendet auch *Bigelow et al.* in [94]. Der im Folgenden dargestellte Gleichungsapparat zur Berechnung der ersten Eigenfrequenz,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_L k}{K_M M_t}} \quad (3.44)$$

$$M_t = L \mu \quad (3.45)$$

$$k = \frac{384 \tilde{c} EA_{zz}}{5L^3 \tilde{c} - 4L^4} \quad (3.46)$$

$$K_L = \frac{8(6\tilde{c} - 5L)}{15(5\tilde{c} - 4L)} \quad (3.47)$$

$$K_M = \frac{256\tilde{c}^2}{(5L^3 \tilde{c} - 4L^4)^2} \left[\frac{31}{630} L^6 - \frac{17}{210} \frac{L^7}{\tilde{c}} + \frac{1}{30} \frac{L^8}{\tilde{c}^2} \right] \quad (3.48)$$

$$\tilde{c} = L + \frac{2EA_{zz}}{c_\varphi} \quad (3.49)$$

wurde eben dieser Arbeit entnommen. In Gleichung (3.44) wird die Grundfrequenz aus einer linearen Steifigkeit k , der Gesamtmasse M_t sowie den als Lastfaktor K_L und Massenfaktor K_M bezeichneten Termen bestimmt. In einer Schreibweise, die mehr der Form von (3.11) oder (3.36) entspricht, lässt sich die Gleichung auch folgendermaßen darstellen:

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{384 \tilde{c}}{\pi^2(5L^2 \tilde{c} - 4L^3)} \sqrt{\frac{K_L}{K_M}} \sqrt{\frac{EA_{zz}}{\mu}} \quad (3.50)$$

Aus einem Vergleich mit den Gleichungen für die Grundfrequenz eines gelenkig gelagerten und eines eingespannten Balkens ist ersichtlich, dass das Produkt der mittleren beiden Faktoren (im

Weiteren als λ^2 bezeichnet) zwischen 1 (gelenkiger Balken) und 2,27 (eingespannter Balken) liegen muss:

$$1 \leq \lambda^2 = \frac{384 \tilde{c}}{\pi^2(5L^2 \tilde{c} - 4L^3)} \sqrt{\frac{K_L}{K_M}} \leq 2,27 \quad (3.51)$$

Durch die Vernachlässigung der Massenträgheit der Auflagerwände und deren Dehnsteifigkeit ist das Ersatzmodell (Einfeldträger mit Dreheinspannung) steifer als der tatsächliche Rahmen. Wie groß die Frequenzfehler sind, die dadurch gemacht werden, wird anhand von 14 zufällig gewählten realen Beispieltragwerken gezeigt (vgl. Tabelle 3.7). Dabei werden die Grundfrequenzen $f_{0,abg}$ nach Gleichung (3.50) mit den Ergebnissen aus einer FE-Modellierung der Rahmen verglichen. Die Abweichungen werden dabei mit Hilfe des Frequenzfehlers Δf_0 dargestellt.

$$\Delta f_0 = \frac{f_{0,abg} - f_{0,FEM}}{f_{0,FEM}} \quad (3.52)$$

Die Modellierung erfolgt durch schubsteife Balkenelemente in der FE-Software RSTAB Version 8.05.0030.

Nr.	L [m]	h [m]	$EA_{zz,Wand}$ [GNm ²]	EA_{zz} [GNm ²]	μ [t/m]	$f_{0,abg}$ [Hz]	$f_{0,FEM}$ [Hz]	Δf_0 [%]
1	3,35	2,70	1,13	1,56	22,23	53,63	50,19	6,86
2	15,80	4,90	17,26	17,70	42,77	7,37	7,29	1,13
3	2,40	2,10	2,98	2,98	69,80	85,35	77,11	10,68
4	9,30	2,15	16,52	27,70	62,38	21,34	20,41	4,56
5	14,20	4,90	25,18	36,70	45,20	11,82	11,61	1,83
6	4,65	2,05	4,73	1,11	20,97	34,72	34,01	2,10
7	2,40	2,00	1,34	1,34	36,97	79,44	71,5	11,10
8	10,60	4,75	36,96	19,60	42,29	18,09	17,67	2,37
9	7,73	5,00	6,82	8,67	38,17	19,22	18,6	3,31
10	20,29	5,22	25,25	33,60	39,03	6,37	6,28	1,47
11	8,70	3,40	13,44	13,40	53,80	18,25	17,86	2,17
12	11,88	4,97	21,63	22,40	51,08	12,75	12,52	1,84
13	3,35	2,55	0,69	1,03	14,32	54,03	50,87	6,20
14	4,50	3,15	2,38	1,22	17,40	36,70	35,48	3,43

Tabelle 3.7: Vergleich der Rahmengrundfrequenz aus der Näherungsgleichung und einer FE-Berechnung

Aus Tabelle 3.7 ist ersichtlich, dass die Grundfrequenzen teilweise sehr gut übereinstimmen, andererseits treten auch Fälle auf, bei denen die Abweichungen über 10 % betragen. In Abbildung 3.21 sind die abgeschätzten Eigenfrequenzen $f_{0,abg}$ und Frequenzfehler Δf_0 bezogen auf die Spannweite dargestellt. Daraus ist eindeutig ersichtlich, dass die größten Abweichungen bei kurzen Tragwerken auftreten. Für alle Brücken mit einer Spannweite von mehr als 4,0 m betragen die ermittelten Frequenzfehler weniger als 5 %. Da man für Eisenbahnbrücken unter 4,0 m Spannweite die Genauigkeiten der Modellierung als Balkenmodell ohnehin in Frage stellen könnte, könnte man auch die vorhandene Größe der Frequenzfehler als ausreichend klein betrachten. Des Weiteren geht in

die Eigenfrequenz aus Gleichung (3.44) die Wirkung des Untergrundes nicht ein. Die Hinterfüllung der Auflagerwände wirkt etwa aussteifend und würde somit die Drehfedersteifigkeit des Ersatzbal-kens erhöhen. Die Eigenfrequenz einer Rahmenbrücke wird somit mit einem freistehenden Rah-menmodell ohnehin unterschätzt. Die Überschätzung der Steifigkeit durch Gleichung (3.44) kom-pensiert somit teilweise die Vernachlässigung der aussteifenden Wirkung der Hinterfüllung. Neben der seitlichen Aussteifung durch den Untergrund wird durch das einfache Rahmenmodell auch die vertikale Nachgiebigkeit nicht berücksichtigt. *Ulker-Kaustell* beschäftigt sich in [95] mit dem Thema der Untergrund-Bauwerk-Interaktion. Er konzentriert sich dabei speziell auf unterschiedli-che Modelle für Rahmentragwerke und stellt dabei fest, dass die Modellierung als Rahmen mit eingespannten Stützenfüßen unter Vernachlässigung des Untergrundes verglichen mit einer nach-giebigen Lagerung eines Rahmens nicht konservativ ist. Die Fehler, die durch Nichtberücksichti-gung des Erdkörpers gemacht werden, sind damit wesentlich gravierender als durch die oben ange-führte Abschätzung der Eigenfrequenz.

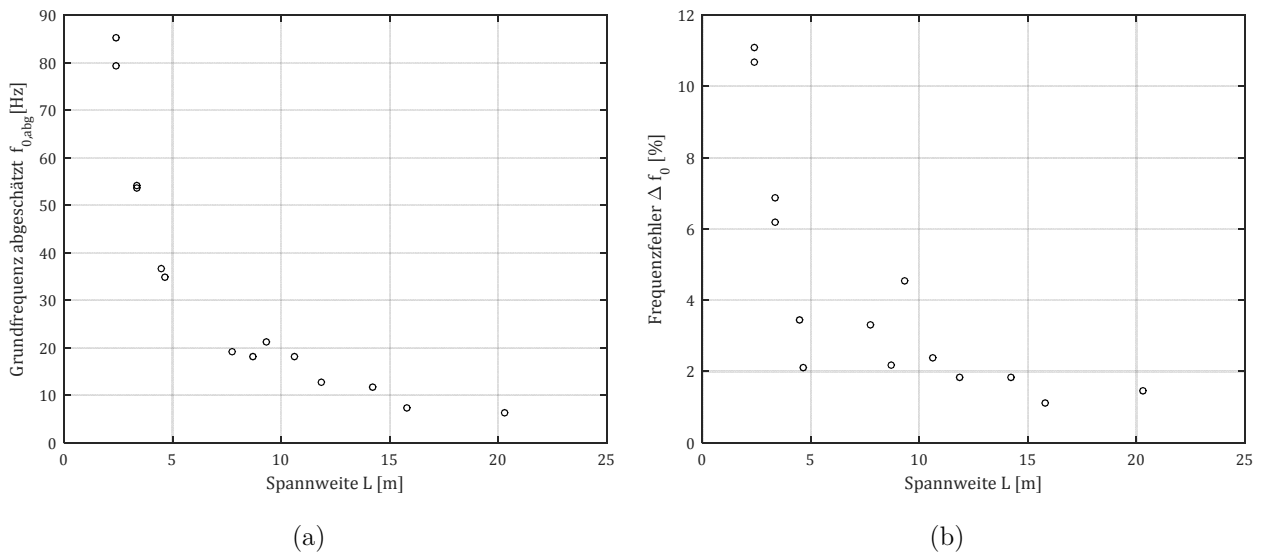


Abbildung 3.21: Eigenfrequenzen und Frequenzfehler nach der Abschätzformel für Rahmentragwerke

Um jedoch die theoretische Grundeigenfrequenz eines Rahmens ohne Hinterfüllung genauer ab-schätzen zu können, ist in Abbildung 3.22 der Frequenzfehler mit der abgeschätzten Grundfre-quenz in Bezug gesetzt. Daraus ist erkennbar, dass der Frequenzfehler mit zunehmender Frequenz zunimmt. Dieser Fehler kann durch folgende empirisch ermittelte Gleichung abgeschätzt werden.

$$\Delta f_0 = \frac{f_{0,abg}}{7,5} [\%] \quad (3.53)$$

Adaptiert man die abgeschätzte Grundfrequenz $f_{0,abg}$ aus (3.44) mit dieser Fehlerabschätzung, so kann die Grundeigenfrequenz eines Rahmens durch $f_{0,ang}$ etwas genauer angenähert werden.

$$f_{0,ang} = f_{0,abg} \left(1 - \frac{f_{0,abg}}{750} \right) \quad (3.54)$$

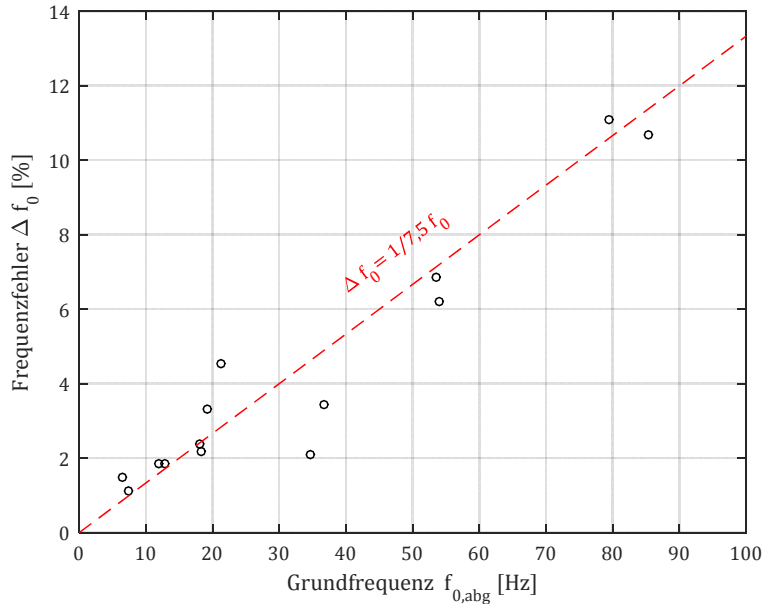


Abbildung 3.22: Frequenzfehler bezogen auf die Eigenfrequenz

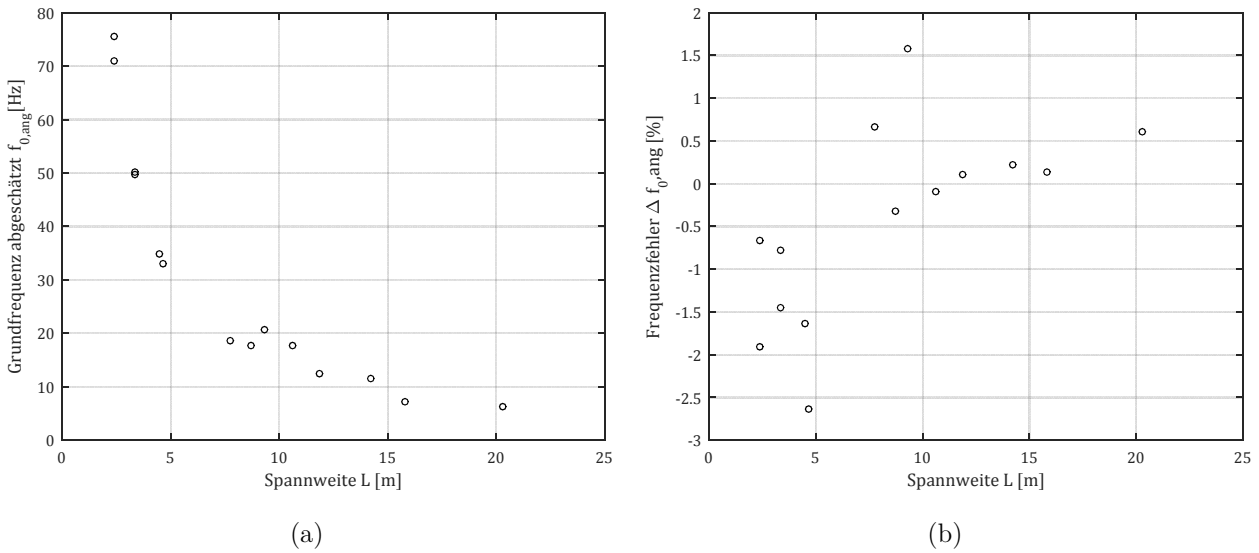


Abbildung 3.23: Grundfrequenzen und Frequenzfehler nach der angepassten Abschätzformel für Rahmen

Der maximale Frequenzfehler $\Delta f_{0,ang}$, der somit im Vergleich mit den FE Modellen gemacht wird, kann dadurch für die untersuchten Tragwerke auf etwa 3 % reduziert werden (vgl. Abbildung 3.23).

Eine andere Möglichkeit, die erste Eigenfrequenz eines Rahmens zu ermitteln, wird in [90] vorgestellt. Sie erfordert jedoch das Lösen einer nichtlinearen Gleichung.

3.8 Modellierung des Untergrundes

3.8.1 Allgemeine Erkenntnisse aus der Literatur

Gerade bei sehr steifen, kurzen Tragwerken scheint es offensichtlich, dass das Mitwirken des Untergrundes einen erheblichen Einfluss auf das dynamische Verhalten der Brücke haben kann. Nun stellt sich die Frage, wie man diese Umgebungseinflüsse adäquat berücksichtigt. Die Bandbreite hierfür reicht von einer Abbildung der vertikalen Nachgiebigkeit des Untergrundes durch Einführung einer Auflagerfeder bis zur exakten 3D-Modellierung der gesamten Umgebung. Es gibt bereits unzählige Studien, welche sich mit dieser Modellierung bzw. mit den Auswirkungen des Umgebungsmodells auf die dynamischen Eigenschaften der Brücken beschäftigen (siehe etwa [22], [29], [37], [70], [95], [96], [97], [98], [99], [100], [101] und [102]).

Der Einfluss einer elastischen Lagerung auf einen Einfeldträger wurde etwa von *Johansson* in [37] analysiert. Wie auch aus [96] ersichtlich wird, hat bei kurzen Tragwerken die Auflagernachgiebigkeit einen erheblichen Einfluss auf die berechneten Tragwerksbeschleunigungen. Daher ist ein realistischer Ansatz dieser Eigenschaft essentiell für die Qualität der Modellbildung.

Johansson [37] führt eine Parameterstudie mit unterschiedlich steifen Auflagerfedern für verschiedene Brückeneigenfrequenzen und Spannweiten durch. Im Allgemeinen resultieren weichere Federn in einer höheren Tragwerksbeschleunigung. Unterschreitet das Produkt der ersten Eigenfrequenz f_0 und der Spannweite L einen gewissen Grenzwert (abhängig von der Federsteifigkeit k_v) so hat die Auflagerfeder keinen Einfluss mehr auf die Beschleunigungsantwort der Brücke (vgl. [37] Figure 3.8). Mit der Untergrundsteifigkeit nimmt auch die Größe dieses Grenzwertes zu. Da längere Brücken im Regelfall auch steifere Auflager aufweisen, sinkt mit zunehmender Spannweite der Einfluss der Fundamentsteifigkeit auf die Beschleunigung des Tragwerks. *Romero et al.* [99] kommen ebenfalls zu der Erkenntnis, dass ein weicherer Untergrund zu höheren Tragwerksbeschleunigungen führt. Diese Aussagen decken sich auch mit den Erkenntnissen von *Doménech et al.* [100], die feststellen, dass - unabhängig von der Spannweite - Tragwerke mit niedriger Eigenfrequenz unempfindlicher auf die Untergrundnachgiebigkeit sind als Tragwerke mit hoher Eigenfrequenz.

Zur Systemmodellierung werden oft sehr unterschiedliche Zugänge gewählt. So verwendeten *Doménech et al.* [100] für die numerischen Berechnungen eine Kombination aus finiten Elementen (*finite element FE*) und Randelementen (*boundary element BE*). Das Tragwerk und der Gleiskörper werden mittels 3D-FE abgebildet. Der Untergrund wird als homogener Halbraum angenommen, welcher durch Randelemente (*engl.: boundary elements BE*) modelliert wird. Dieser Ansatz reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade im Untergrund erheblich. Zur einfacheren Handhabung dieser Methode wurde von *Galvín et al.* [101] eine *MATLAB-toolbox* entwickelt. Denselben Ansatz zur Modellbildung verwendet auch *Romero et al.* in [22] und [99].

In [70] wurden Umgebungsmodelle bestehend aus Boden, Bahndamm und Gleiskörper mit und ohne Brücke untersucht. Auf Basis dieser Untersuchungen wurde zur Erfassung der Tragwerk-

Untergrund-Interaktion eine erweiterte Form der Modalen Analyse vorgeschlagen. Dabei wird für jede Eigenfrequenz bzw. für jeden Einmassenschwinger EMS der modalen Analyse ein Zweimassensystem mit einer zugehörigen Untergrundmasse bzw. Feder angesetzt. Die Wahl der Berechnungsparameter stellt hier jedoch ein nicht unwesentliches Problem dar.

Kouroussis et al. geben in [97] einen Überblick über unterschiedliche Möglichkeiten, die Fahrzeug-Gleis-Untergrund Interaktion zu erfassen. Dabei wird auch auf die Anregung durch Gleis- und Radunebenheiten eingegangen.

Kylén vergleicht in [98] ein 2D Modell eines Rahmentragwerks inklusive Untergrund mit Messungen des Tragwerks während einer Zugüberfahrt. Als Ergebnis dieser Arbeit wird eine 3D Modellierung des Systems empfohlen, um gewisse Effekte besser abbilden zu können.

Auch *Ulker-Kaustell* [95] beschäftigt sich mit dem Thema der Untergrund-Bauwerk-Interaktion, die auch als *soil-structure interaction SSI* bezeichnet wird. In dieser Arbeit wird vor allem die Nichtlinearität der Untergrundeigenschaften hervorgehoben. Die dämpfende Wirkung des Untergrundes entsteht hauptsächlich durch die Wellenausbreitung, wodurch die Energie propagiert und nicht wirklich dissipiert wird. Dieser Effekt wird auch als geometrische Dämpfung bezeichnet. Eine größere Schwingungsamplitude führt zu größeren Dämpfungen. Auf Eigenformen mit einem großen Bewegungsanteil in den Kontaktflächen zwischen Tragwerk und Untergrund wirkt sich die Untergrunddämpfung demnach besonders stark aus. Die Dämpfung von niederfrequenten Schwingungen ist dabei wesentlich höher als die von höherfrequenten. Des Weiteren kann nicht von einer Proportionalität der Dämpfungsmatrix zur Steifigkeits- und Massenmatrix ausgegangen werden. Dies muss auch bei der Berechnung dieser Systeme berücksichtigt werden. So ist die reine Rayleigh Dämpfung nicht mehr anwendbar. Um diese Effekte für einfache Tragwerksmodelle durch die Modale Analyse abbilden zu können, versucht *Schobesberger* [9] die Eigenformen mit einem großen Einfluss der Untergrunddämpfung zu identifizieren und die Modale Dämpfung entsprechend zu erhöhen. Gerade wenn sich Eigenfrequenzen aus der Untergrundverformung in der Nähe der Eigenfrequenzen der Tragwerksbiegung liegen, kann die Zuordnung der Dämpfungen zu den Eigenformen schwierig werden.

Die angesetzte Strukturdämpfung verdoppelt sich in [22] durch Berücksichtigung der Untergrund-Tragwerk-Interaktion für jeden *Mode* von 2% auf fast 4%.

Es zeigt sich also, dass der Untergrund einen nicht unwesentlichen Einfluss auf die Steifigkeit und die Dämpfung des Systems hat. Dabei kann nicht so einfach gesagt werden, ob der Ansatz von höheren oder niedrigeren Bodenkennwerten zu konservativen Tragwerksantworten führt (vgl. [95]).

3.8.2 Balken mit elastischer Lagerung

Der einfachste Zugang, die Nachgiebigkeit des Untergrunds abzubilden, ist die Einführung von elastischen Auflagerfedern (siehe Abbildung 3.24). Dieses Modell kann etwa auch bei kurzen Tragwerken auf Elastomerlagern zur Berücksichtigung der Lagernachgiebigkeit verwendet werden.

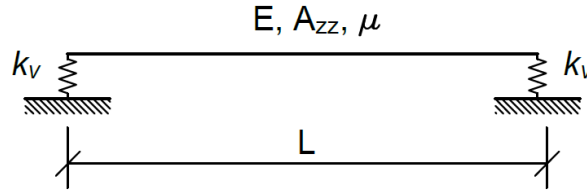


Abbildung 3.24: Biegebalken mit elastischer Lagerung

Durch vertikale Federn im Auflagerbereich ändern sich die Eigenfrequenzen der Tragwerke und somit auch die Resonanz- und Aufhebungsgeschwindigkeiten. Diese Phänomene werden von *Yang et al.* in [29] für einen Einfeldträger mit Federlagerung untersucht. Dabei spielt das Steifigkeitsverhältnis κ ,

$$\kappa = \frac{EA_{zz} \pi^3}{k_v L^3} \quad (3.55)$$

eine wesentliche Rolle. Die Federsteifigkeit der Auflagerfedern wird dabei als k_v bezeichnet. Für einen gelenkig gelagerten Einfeldträger ergibt sich demnach $\kappa = 0$. Je weicher die Lagerung, desto größer wird das Steifigkeitsverhältnis κ .

Yau et al. zeigen in [102], dass die erste Eigenfrequenz eines solchen Systems durch folgende Gleichung sehr genau angenähert werden kann.

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{\pi + 4\kappa}{\pi + 8\kappa + 2\pi\kappa^2}} \quad (3.56)$$

Mit ω_0 ist die hier nochmals angeführte Grundfrequenz des gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balkens gemeint.

$$\omega_0 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EA_{zz}}{\mu}} \quad (3.57)$$

Der Frequenzannäherung in (3.56) liegt folgender Ansatz für die erste Eigenform zugrunde:

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \kappa \quad (3.58)$$

Aus Gleichung (3.55) und (3.56) lässt sich erkennen, dass sich die Auflagernachgiebigkeit bei längeren Brücken weniger stark auf die Eigenfrequenzen auswirkt. Dazu wird von einem Referenztragwerk mit Spannweite L , Biegesteifigkeit EA_{zz} und einer Auflagersteifigkeit von k_v ausgegangen. Die Spannweite wird nun um einen Faktor F_L erhöht. Da die Biegesteifigkeit bei der Bemessung eines Tragwerks mit dem einwirkenden Biegemoment ins Verhältnis gesetzt wird, wird ihr hier der gleiche Vergrößerungsfaktor zugeordnet, sprich das Biegemoment und somit die Biegesteifigkeit wächst mit dem Quadrat der Länge. Dieses Verhältnis ist tendenziell auch aus Abbildung 2.21 ersichtlich. Die Auflagersteifigkeit steht in einem gewissen Verhältnis zur Auflagerkraft, wel-

che aus der Nutzlast und dem Eigengewicht der Konstruktion resultiert. Aus Abbildung 2.20 ist ersichtlich, dass sich die Tragwerksmasse pro Laufmeter Brücke tendenziell nur geringfügig erhöht. Da auch die Auflagerkraftkomponente der Nutzlast linear mit der Tragwerkslänge wächst, wird in dieser Untersuchung der Auflagersteifigkeit ein lineares Wachstum mit der Systemlänge unterstellt. Setzt man diese Überlegungen nun in Gleichung (3.55) ein, so ergibt sich das Steifigkeitsverhältnis κ für eine Brücke mit Länge L F_L zu:

$$\kappa = \frac{EA_{zz} F_L^2 \pi^3}{k_v F_L L^3 F_L^3} \quad (3.59)$$

Das Steifigkeitsverhältnis schrumpft demnach mit dem Quadrat des Längenfaktors. Der Wurzelterm der Gleichung (3.56) stellt den Einflussfaktor F_{AN} der Auflagernachgiebigkeit auf die Eigenfrequenz des Systems dar. Je kleiner der Verhältniswert κ wird, desto näher rückt dieser Faktor an 1,0 heran. Mit dem Längenfaktor F_L wächst der Einflussfaktor F_{AN} asymptotisch gegen eins. Die Auflagernachgiebigkeit verliert somit mit zunehmender Länge zunehmend an Bedeutung (vgl. Abbildung 3.25).

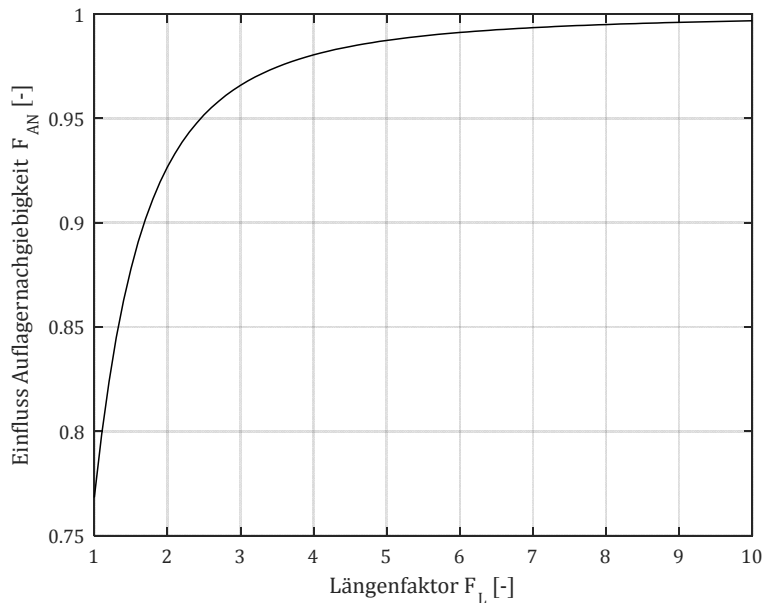


Abbildung 3.25: Entwicklung des Einflusses der Auflagernachgiebigkeit auf die erste Biegeeigenfrequenz mit steigendem Längenfaktor F_L , dargestellt für ein Ausgangswert von $\kappa = 0,5$

Um einen Eindruck für die mögliche Größe der Federsteifigkeit zu bekommen, sind hier einige Beispiele für die Steifigkeit von Elastomerlagern und Untergrundfedern angeführt. Die statische Steifigkeit der in [4] und [24] verwendeten Elastomerlager beträgt $7,45 \cdot 10^8 \text{ N/m}$. Da das Tragwerk auf vier Punkte gelagert ist, ergibt sich die Steifigkeit je Lagerachse zu:

$$k_v = 2 * 7,45 \cdot 10^8 \text{ N/m} \approx 1,5 \cdot 10^9 \text{ N/m} \quad (3.60)$$

Hierbei ist anzumerken, dass es sich bei dem untersuchten Tragwerk um eine 10 m lange Versuchsbrücke sehr geringer Steifigkeit handelt. In [103] wurde für die Lagersteifigkeit einer etwa 4,6 m langen Eisenbahnbrücke ein Wert von

$$k_v = 2 * 8,5 \cdot 10^8 \text{ N/m} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ N/m} \quad (3.61)$$

je Lagerachse angesetzt. Für das gleiche Tragwerk ermittelt *Schobesberger* in [9] eine Bandbreite für eine äquivalente Federsteifigkeit des Untergrunds. Als Untergrenze werden mitteldicht gelagerte Sande und Kiese angenommen. Die Obergrenze ergibt sich für sehr dichte Schluffe.

$$k_v = 5,0 \cdot 10^8 \text{ N/m} \div 2,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m} \quad (3.62)$$

Johansson [37] variierte die Auflagersteifigkeit in einer Parameterstudie in einem Bereich von:

$$k_v = 5,0 \cdot 10^8 \text{ N/m} \div 5,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m} \quad (3.63)$$

3.8.3 Einmassenschwinger-Analogon

Eine weitere Möglichkeit, die dynamischen Eigenschaften des Untergrunds abzuschätzen, bietet das *Einmassenschwinger-Analogon*. Dieser Ansatz stammt aus der dynamischen Auslegung von Maschinenfundamenten (vgl. [104] oder [105]). Die Methode wurde für blockartige, gedrungene Fundamente entwickelt. Dabei wird von einer harmonisch angeregten starren Platte auf einem unbegrenzten Untergrund ausgegangen. Durch die Anregung der Platte wird auch ein gewisser Bereich des Untergrunds in Schwingung versetzt. Die Größe dieses Bereiches und die resultierenden dynamischen Effekte hängen von unzähligen Parametern wie Anregungsfrequenz und Amplitude, Fundamentmasse oder Bodenaufbau und Bodenkennwerte ab. Im Untergrund entstehen halbkugelförmige Wellen, die die Schwingungsenergie vom Fundament fortleiten. Man spricht hierbei auch von *geometrischer Dämpfung*. Um diese Bodeneffekte mathematisch einfacher beschreiben zu können, wird das Konzept des elastischen Halbraums verwendet. Der elastische Halbraum dient hier als Modell für den Untergrund. Der dreidimensionale Raum wird dabei durch eine waagrechte Ebene geteilt. Die untere Hälfte mit einer unendlichen Ausdehnung wird als Halbraum bezeichnet. Dieser Halbraum ist masselos, homogen, linear elastisch und isotrop (vgl. [106]).

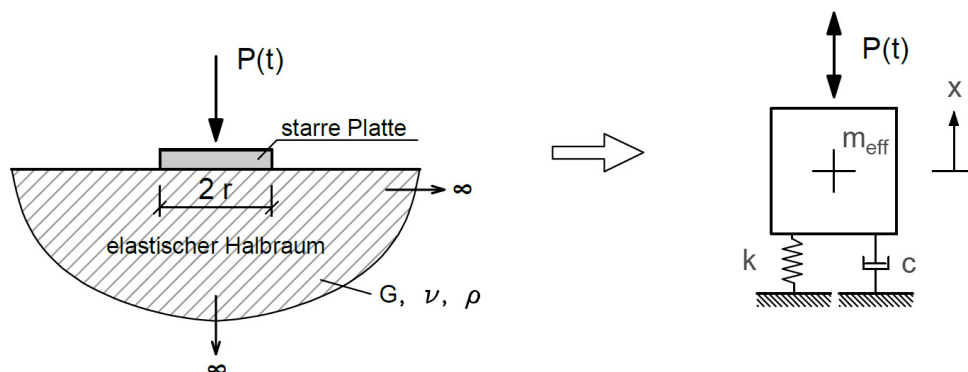


Abbildung 3.26: Idealisierung eines vertikal angeregten Fundamentes als Einmassenschwinger-Analogon

Lysmer* gewann die Erkenntnis, dass das dynamische Verhalten eines vertikal angeregten starren Fundamentes durch ein einfaches Feder-Dämpfer-System mit frequenzabhängigen Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten dargestellt werden kann (siehe [104], Seite 178). Um das Verhalten im niederen und mittleren Frequenzbereich anzunähern, verwendete er sogar frequenzunabhängige Koeffizienten. Ein starres Fundament kann somit durch einen Einmassenschwinger idealisiert werden (vgl. Abbildung 3.26).

Damit ergibt sich die zugehörige Bewegungsgleichung zu [104]:

$$m_{eff} \ddot{x} + c \dot{x} + k x = P(t) \quad (3.64)$$

Die Koeffizienten für die Steifigkeit k und Dämpfung c können abhängig von den Fundamentabmessungen (äquivalenter Radius r) und den Untergrundparametern (Schubmodul G , Querdehnzahl ν und Dichte ρ) ermittelt werden.

$$k = \frac{4 G r}{1 - \nu} \quad (3.65)$$

$$c = \frac{3,4 r^2}{1 - \nu} \sqrt{G \rho} \quad (3.66)$$

Hierbei wird von einem kreisförmigen Fundament ausgegangen, daher muss ein rechteckiger Querschnitt auf einen äquivalenten Kreisradius r umgerechnet werden. Dies kann anhand der Grundrissfläche A_{Fund} des Fundamentes folgendermaßen erfolgen [104]:

$$r = \sqrt{\frac{A_{Fund}}{\pi}} \quad (3.67)$$

Bei der angegebenen Federsteifigkeit k handelt es sich um eine statische Steifigkeit in vertikaler Richtung. Die tatsächliche Steifigkeit unter dynamischer Belastung ist jedoch nicht konstant, sondern nimmt mit zunehmender Frequenz ab. Um dennoch mit der konstanten statischen Steifigkeit rechnen zu können, erhöht Lysmer die tatsächliche Masse m – Maschinenmasse (= Tragwerksmasse bei Brücken) und Fundamentmasse – des Einmassenschwingers um eine fiktive Masse m_{fiktiv} . Die effektive Masse ergibt sich somit zu [104]:

$$m_{eff} = m + m_{fiktiv} \quad (3.68)$$

$$m_{fiktiv} = 0,27 \frac{4 \rho r^3}{1 - \nu} \quad (3.69)$$

Hier wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich bei m_{fiktiv} **nicht** um die Masse des mitschwingenden Bodens handelt, sondern dass damit die mit zunehmender Schwingungsfrequenz abnehmende Untergrundsteifigkeit erfasst wird. Die Frequenzanpassung über die fiktive Masse nach Gleichung (3.69) ist konstant. Dieser vereinfachte Zugang ist daher nur für verhältnismäßig

* Johan Lysmer 1931-1999

niedrige Schwingungsfrequenzen $a_0 < 2$ gültig. Die dimensionslose Frequenz a_0 ist folgendermaßen definiert (vgl. [104]).

$$a_0 = \frac{\Omega r}{v_s} \quad (3.70)$$

Mit Ω wird dabei die Kreisfrequenz der Anregung bezeichnet. v_s steht für die Scherwellengeschwindigkeit des Untergrunds. Um die Gültigkeit dieses Konzeptes für Eisenbahnbrücken zu überprüfen, wird als Untergrenze eine Scherwellengeschwindigkeit von $v_s = 200 \text{ m/s}$ angesetzt. Die kritische Anregung für Resonanz wird im Regelfall aus den konstanten Lastabständen nach Gleichung (2.102) bestimmt. Die primäre Anregungsfrequenz ergibt sich somit aus der Überfahrtsgeschwindigkeit v und der Länge über Puffer d .

$$F_A = \frac{v}{d} \quad (3.71)$$

Der Minimalwert für d kann gemäß Tabelle 2.5 und Tabelle 2.6 mit ca. 19,0 m angenommen werden. Für einen äquivalenten Radius r von beispielsweise 5,0 m erhält man bei $v = 300 \text{ km/h}$ eine dimensionslose Frequenz von:

$$a_0 = \frac{300 \frac{2 \pi}{3,6} 5,0}{19,0 \cdot 200} = 0,69 < 2,0 \quad (3.72)$$

Die Einhaltung des Grenzwertes sollte somit für reale Tagwerke bis zu 300 km/h gegeben sein.

Gazetas (siehe [105]) erweiterte diese Methode auf rechteckige Fundamente. Dazu formulierte er die statische Steifigkeit in Abhängigkeit vom B/L Verhältnis des Fundamentes. Für quadratische Fundamente tritt dabei praktisch kein Unterschied zu den Ergebnissen aus Gleichung (3.65) auf. Um die Frequenzabhängigkeit der Untergrundsteifigkeit zu erfassen, definiert *Gazetas* einen Faktor k_z , mit dem die statische Steifigkeit multipliziert werden muss. Dieser Faktor ist von der Frequenz a_0 und somit von der Anregungsfrequenz abhängig. In [9], Abbildung 4.8 oder in [107], Figure 3.4(a) sind exemplarische Verläufe dieses Faktors für unterschiedliche B/L Verhältnisse und Anregungsfrequenzen dargestellt. Bei einer Querdehnzahl von $\nu = 0,4$ und einem Seitenverhältnis von weniger als 10, liegt der Faktor k_z zwischen 0,65 und 1,3. Für diese Querdehnzahl kann man also von einer maximalen Schwankungsbreite von ca. $\pm 35\%$ ausgehen, mit der sich die statische von der dynamischen Steifigkeit unterscheidet. Diese Bandbreite ändert sich in Abhängigkeit von der Querdehnzahl. Für $\nu = 0,5$ wird beispielsweise der dynamische Einfluss um einiges größer (vgl. [107] Figure 3.4). Da dieses Verfahren um etliches aufwendiger ist als der Ansatz einer effektiven Masse, wird hier nicht weiter darauf eingegangen.

Zur Bestimmung der Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten wird der Schubmodul G benötigt. Dieser kann aus der Scherwellengeschwindigkeit und der Dichte des Untergrunds ermittelt werden (vgl. *Studer et al.* [104]):

$$G = v_s^2 \rho \quad (3.73)$$

Wird der Untergrund über ein Einmassenschwinger-Analogon berücksichtigt, sind somit die Dichte ρ , die Scherwellengeschwindigkeit v_s und die Querdehnzahl ν von besonderem Interesse. In Tabelle 3.8 sind daher charakteristische Werte dieser Untergrundparameter für verschiedene Bodenarten aufgelistet. Wie man daraus erkennt, kann gerade die Scherwellengeschwindigkeit je nach Bodenart stark variieren. Für auf Fels gegründete Fundamente, kann jedoch davon ausgegangen werden, dass die Auflagernachgiebigkeit vernachlässigbar ist. Eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit stellt sich bei lockeren Sanden und Kiesen bzw. weichen Tonen und Schluffen ein. Bei solch einem Untergrund kann jedoch nicht mehr von einem Blockfundament ausgegangen werden. Die Werte, die andere Autoren für ihre Studien verwendet haben, orientieren sich eher im unteren Bereich der möglichen Bandbreite. So verwendet *Romero et al.* etwa in [22] eine Scherwellengeschwindigkeit von $v_s = 400 \text{ m/s}$. In einer späteren Parameterstudie zur Untersuchung der Untergrund-Bauwerks-Interaktion variierte *Doménech et al* [100] die Scherwellengeschwindigkeit in einem Bereich zwischen $v_s = 150 - 365 \text{ m/s}$. Es stellte sich heraus, dass sich für noch höhere Scherwellengeschwindigkeiten kaum Abweichungen zu den Ergebnissen für 365 m/s ergeben. Verglichen wurde hierbei die freie Schwingungsantwort nach der Überfahrt einer Einzellast.

Bodenart	ρ [t/m ³]	ν [-]	v_s (vgl. [104]) [m/s]
Fels (nicht verwittert))	2,2 – 2,9	0,15 - 0,25	1000 - 4000
Kies	1,8 – 2,4	0,25 – 0,35	220 – 450
Kies im Grundwasser		0,45	400 – 600
Sand	1,7 – 2,1	0,25 – 0,35	220 – 450
Sand im Grundwasser		0,45	400 – 600
Schluffe	1,7 – 2,1	0,35 – 0,45	~120 - 540
Tone	1,5 – 2,1	0,45 – 0,50	~120 – 540

Tabelle 3.8: Querdehnzahl, Dichte und Scherwellengeschwindigkeit des Bodens (vgl. [106], [104])

Generell sei noch anzumerken, dass es sich bei der statischen Steifigkeit nach (3.65) um eine Untergrenze handelt. Besitzt die elastische Schicht, auf der das Fundament ruht, keine unendliche Ausdehnung nach unten, sondern liegt sie über einer starren Felsschicht (dargestellt in Abbildung 3.27 (a)), so erhöht sich die Steifigkeit. Nach [104], Tabelle 6.3. ist in diesem Fall die Steifigkeit nach (3.65) mit dem Faktor $(1 + 1,28 r/h)$ zu erhöhen. Die Höhe der elastischen Schicht wird hier mit h bezeichnet. Im Allgemeinen liegen Fundamente nicht auf dem Untergrund, sondern sind in diesen eingebettet (vgl. Abbildung 3.27 (b)), wodurch eine weitere Erhöhung der Steifigkeit erzielt wird. Unter der Annahme einer unendlich dicken elastischen Schicht, wird die Steifigkeit gemäß [104], Tabelle 6.4. um den Faktor $(1 + 0,5 t/r)$ erhöht. Aus den angeführten Effekten ist ersichtlich, dass alleine zur korrekten Verwendung dieses vereinfachten Untergrundmodelles, eine erhebliche Anzahl von Informationen über den Aufbau und die Eigenschaften des vorliegenden Bodens vorhanden sein müssen.

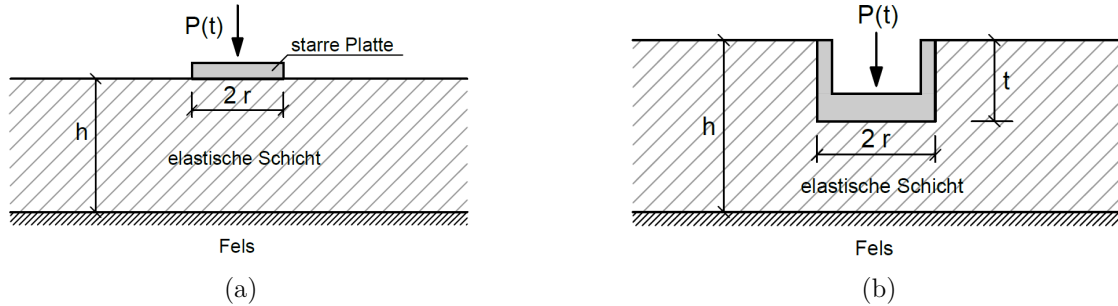


Abbildung 3.27: (a) Fundament auf elastischer Schicht über starrem Fels (b) In elastische Schicht eingebettetes Fundament auf starrem Fels

Um das Konzept des Einmassenschwinger-Analogons auf eine einfache Balkenbrücke anzuwenden, wird das dynamische Balkenmodell mit Punktmassen sowie vertikalen Federn und Dämpfern an den Auflagern erweitert (vgl. *Schobesberger* [9]). Die Punktmassen repräsentieren dabei die effektive Masse bestehend aus der Fundamentmasse und der fiktiven Masse eines Fundamentkörpers. Die Koeffizienten der Feder und des Dämpfers können nach (3.65) und (3.66) ermittelt werden. Dieses Modell sollte in der Lage sein, die grundlegenden Effekte des Untergrundes auf die dynamische Tragwerksantwort zu erfassen. Die Eigenfrequenzen dieses Modelles lassen sich am einfachsten unter Zuhilfenahme der FE-Methode bestimmen.

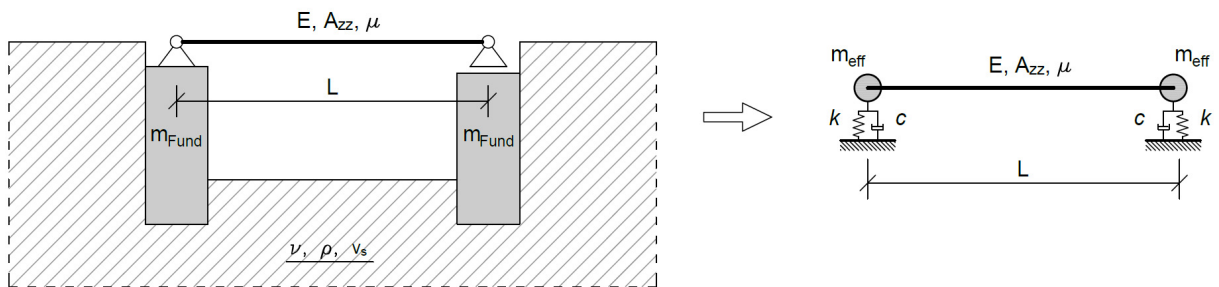


Abbildung 3.28: Modellbildung einer Brücke mit dem Konzept des Einmassenschwinger-Analogons

Vergleicht man das Modell in Abbildung 3.24 mit dem in Abbildung 3.28, so wird ersichtlich, dass mit elastischen Auflagerfedern alleine die Effekte des Untergrundes nur beschränkt erfasst werden können, da sich durch die Vernachlässigung der mitwirkenden Fundamentmassen das dynamische Verhalten erheblich ändert. Zur Abschätzung der ersten Eigenfrequenz kann auch auf Gleichung (3.56) zurückgegriffen werden. Dazu muss jedoch die Federsteifigkeit k aus Gleichung (3.65) über die zusätzlichen Massen auf k_v angepasst werden:

$$k_v \approx k \frac{\mu L}{\mu L + m_{eff}} \tag{3.74}$$

3.8.4 Beispiele zum Einfluss der Auflagernachgiebigkeit auf die erste Eigenfrequenz

Anhand der 4,6 m langen Eisenbahnbrücke, die in [9] und [103] untersucht wurde, wird der Einfluss unterschiedlicher Modellbildungen bzw. Steifigkeitskennwerte auf die erste Eigenfrequenz des Tragwerks gezeigt. Hierbei werden die Tragwerkskennwerte im Vergleich zu den oben genannten Quellen teilweise etwas abgeändert. Das Ziel ist hierbei nicht das Nachrechnen eines bestimmten Tragwerks, sondern die Ermittlung einer realistischen Bandbreite für ein vergleichbares Objekt mit verschiedenen Untergrundverhältnissen. Es handelt sich bei dieser Brücke um eine 40-45 cm dicke Betonplatte mit einer Spannweite von 4,3 m. Die Schotterbetthöhe beträgt in etwa 90 cm.

Zunächst wird der Einfluss einer nachgiebigen Lagerung durch Elastomerlager untersucht. Die für die Berechnung maßgebenden Tragwerkskennwerte sind in Tabelle 3.9 aufgelistet. Für die Steifigkeit der Elastomerlager wurden statische Kennwerte verwendet.

Parameter	Symbol	Einheit	Kennwerte
Spannweite	L	[m]	4,3
Massenbelegung	μ	[kg/m]	13.563
Biegesteifigkeit	EA_{zz}	[Nm ²]	9,62 10 ⁸
Steifigkeit der Auflagerfeder	k_v	[N/m]	1,70 10 ⁹

Tabelle 3.9: Tragwerkskennwerte für die Untersuchung der Auflagernachgiebigkeit

In Tabelle 3.10 sind die aus den Kennwerten in Tabelle 3.9 berechneten ersten Tragwerkseigenfrequenzen mit und ohne Berücksichtigung der Auflagernachgiebigkeit aufgelistet. Die Frequenzen des nachgiebig gelagerten Modells wurden anhand von Gleichung (3.56) bestimmt. Um auch den Einfluss einer falsch angesetzten Nachgiebigkeit abschätzen zu können, wurde die Auflagersteifigkeit mit $\pm 50\%$ variiert. Zusätzlich ist mit Δf_0 die prozentuelle Abweichung zur Grundeigenfrequenz des gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balkens angegeben.

				
		0,5 k_v	1,0 k_v	1,5 k_v
f_0	22,63 Hz	17,84 Hz	19,88 Hz	20,70 Hz
Δf_0	0,0 %	21 %	12 %	8,5 %

Tabelle 3.10: Tragwerkseigenfrequenz mit und ohne Berücksichtigung der Auflagernachgiebigkeit

Aus Tabelle 3.10 ist ersichtlich, dass für den „Grundwert“ der Auflagersteifigkeit der Frequenzfehler, der bei einer Vernachlässigung der nachgiebigen Lagerung gemacht wird, etwa 12 % beträgt. Diese Größenordnung ist zwar nicht mehr wirklich vernachlässigbar, im Vergleich zu anderen Ungenauigkeiten, die bei kurzen Tragwerken durch einfache Modelle gemacht werden, ist der Fehler jedoch noch sehr moderat. Aus dem Vergleich mit der 50 % höheren bzw. niedrigeren Auflagersteifigkeit ist ersichtlich, dass sich ein Aufweichen der Lagersteifigkeit deutlich mehr auswirkt als eine Versteifung um den gleichen Betrag. Die dynamischen Steifigkeiten von Elastomerlagern sind im

Regelfall höher als die statischen, weshalb davon auszugehen ist, dass für dieses Tragwerk der Frequenzfehler bei Vernachlässigung der Auflagernachgiebigkeit eher unter 12% liegt.

Als nächstes wird die Nachgiebigkeit des Elastomers vernachlässigt und die Auswirkungen der Untergrundnachgiebigkeit für dieses Tragwerk untersucht. Für eine Grenzwertbetrachtung wird für den Untergrund ein mitteldichter Sand/Kies und ein dicht gelagerter Schluff angesetzt. Die verwendeten Kennwerte bzw. die sich daraus ergebenden Parameter sind in Tabelle 3.11 aufgelistet.

Parameter	Symbol	Einheit	Kennwerte	
			Sand/Kies	Schluff
Spannweite	L	[m]	4,3	
Massenbelegung	μ	[kg/m]	13.563	
Biegesteifigkeit	EA_{zz}	[Nm ²]	9,62 10 ⁸	
Äquivalenter Radius (je Auflager)	r	[m]	1,9	
Masse Fundament + Endquerträger	m_{Fund}	[kg]	35.500	
Dichte des Untergrunds	ρ	[kg/m ³]	1.700	2.100
Scherwellengeschwindigkeit	v_s	[m/s]	200	550
Querdehnzahl	ν	[-]	0,25	0,45
Fiktive Masse	m_{fiktiv}	[kg]	16.800	28.300
Schubmodul	G	[N/m ²]	6,80 10 ⁷	6,35 10 ⁸
Steifigkeit der Untergrundfeder	k	[N/m]	~7,0 10 ⁸	~9,0 10 ⁹
Angepasste Auflagersteifigkeit	k_v	[N/m]	~3,6 10 ⁸	~4,2 10 ⁹

Tabelle 3.11: Tragwerkskennwerte für die Untersuchung der Untergrundnachgiebigkeit

In Tabelle 3.12 sind die berechneten ersten Eigenfrequenzen für drei unterschiedliche Modelle aufgelistet. Die Eigenfrequenzen für das Untergrundmodell mit den zusätzlichen Auflagermassen wurden mittels eines FE-Programmes bestimmt. Das „mittlere“ Modell eines elastisch gelagerten Biegebalkens dient hier als Kontrolle, wie gut die Eigenfrequenz des Untergrundmodells mit einer nach Gleichung (3.74) angepassten Auflagersteifigkeit durch Gleichung (3.56) angenähert werden kann. Der dargestellte Frequenzfehler bezieht sich wiederum auf die Eigenfrequenz des gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balkens.

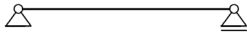


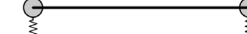

					
		Sand/Kies	Schluff	Sand/Kies	Schluff
f_0	22,63 Hz	14,34 Hz	21,41 Hz	13,65 Hz	21,97 Hz
Δf_0	0,0 %	37 %	5,4 %	40 %	2,9 %

Tabelle 3.12: Tragwerkeigenfrequenz mit und ohne Berücksichtigung der Untergrundnachgiebigkeit

Zu den Ergebnissen in Tabelle 3.12 sei anzumerken, dass, wie oben erwähnt, die Ermittlung der Untergrundsteifigkeit mit dem Modell des unendlichen Halbraums eine Untergrenze darstellt. Des Weiteren sind die Kennwerte, für den als Untergrenze angesetzten mitteldicht gelagerten Sand/Kies sehr niedrig. Daher kann daran gezweifelt werden, dass auf solch einen Untergrund direkt gegründet wird. Nichts desto trotz ist erkennbar, dass der Untergrund einen sehr großen Einfluss auf die Eigenfrequenz einer Brücke haben kann. Für den hier verwendeten weichen Un-

tergrund würde sich die Eigenfrequenz gar um 40 % reduzieren. Auf der anderen Seite ist der Einfluss der Untergrundnachgiebigkeit für den steifen Boden mit etwa 3 % doch sehr gering.

Man kann aus dieser Tabelle auch erkennen, dass unter der Prämisse eines bekannten Untergrunds die Tragwerkseigenfrequenz durch die relativ einfache Gleichung (3.56) gut abgeschätzt werden kann.

Neben der Änderung der Frequenzen ergibt sich durch das Einführen von zusätzlichen Freiheitsgraden an den Auflagern ein anderes Systemverhalten. Dies gilt im Speziellen für die Bereiche in Auflagernähe, da durch die nachgiebige Lagerung eine Vertikalverschiebung erst möglich gemacht wird. Bei einer Überfahrtsberechnung für solche Modelle liegt ein großes Augenmerk auf der Umsetzung der Lastaufbringung. Gerade bei den Modellen ohne zusätzliche Auflagermassen verursacht eine plötzliche Aufbringung der vollen Last zu einem Zeitpunkt eine starke Impulsanregung. Es entstehen dadurch unrealistisch große Beschleunigungen. Modelle mit Auflagermassen schwächen diesen Effekt durch die höhere Trägheit des Systems ab. Um eine Vergleichbarkeit mit einem gelenkig gelagerten Biegebalken möglich zu machen, liegt hier der Fokus auf der Tragwerksantwort in Brückenmitte. Exemplarisch sind in Abbildung 3.29 die maximalen Durchbiegungen und Beschleunigungen in Tragwerksmitte bei der Überfahrt eines HSLMA-10 Zugmodells dargestellt. Verglichen werden hier die Tragwerksmodelle gelenkig gelagerter *Bernoulli-Euler* Balken (BEB), elastisch gelagerter *Bernoulli-Euler*-Balken (BEB + el. Lagerung) und der *Bernoulli-Euler*-Balken mit elastischer Lagerung und Zusatzmassen aus der Untergrundwirkung (BEB + Untergrund).

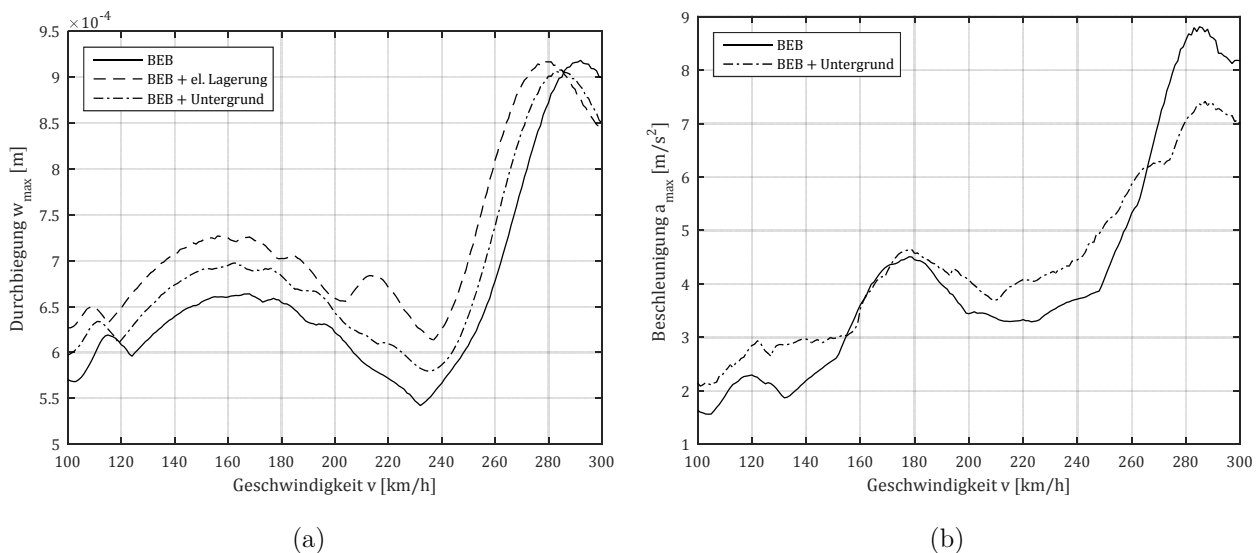


Abbildung 3.29: Verlauf der maximalen Tragwerksreaktion aus Überfahrtsberechnungen für ein HSLMA-10 Zugmodell unterschiedlicher Tragwerksmodelle in Brückenmitte (a) Durchbiegung, (b) Beschleunigung

Hierfür werden aus Tabelle 3.11 die Parameter für „Schluff“ verwendet. Wie aus Tabelle 3.12 ersichtlich, stimmen die ersten Eigenfrequenzen der drei Systeme fast genau überein. Für die Berechnung werden die ersten drei Biegeeigenformen des Balkens verwendet. Für die Modelle mit nachgiebiger Lagerung ergeben sich zwei „Starrkörperbewegungen“, daher werden die ersten fünf Eigenformen berücksichtigt. Es kommt eine Modale Dämpfung von 5,34 % für alle Eigenformen

zur Anwendung. Weiters wurde der berechnete Beschleunigungsverlauf mit 100 Hz tiefpassgefiltert. Dieser Vorgang soll zum einen den Einfluss von Anregungsimpulsen reduzieren und wird zum anderen durchgeführt, um die Vergleichbarkeit mit Messungen zu verbessern, die gemäß dem Vorschlag der ÖBB Richtlinie [18] auch bei 100 Hz gefiltert werden können.

Generell ist anzumerken, dass die Durchbiegungsverläufe der verschiedenen Modelle sehr ähnlich aussehen. Für das Untergrundmodell ergibt sich eine maximale Abweichung zum BEB von unter 0,05 mm, was einem Fehler von weniger als 10 % entspricht. Im Beschleunigungsverlauf fällt vor allem auf, dass sich das Modell mit Berücksichtigung des Untergrunds etwas träger verhält als der gelenkig gelagerte Balken. Die Beschleunigungsunterschiede zwischen den Spitzen und den Tälern sind wesentlich schwächer ausgeprägt als beim BEB. Gerade für Resonanzmechanismen sollte sich daher die Berücksichtigung des Untergrunds positiv auswirken. Der Beschleunigungsverlauf aus Abbildung 3.29 (b) lässt vermuten, dass es zulässig ist, zur vereinfachten Erfassung der Untergrundwirkung, die Überfahrtberechnung mit einem äquivalenten *Bernoulli-Euler*-Balken (reduzierte Eigenfrequenz) durchzuführen.

Es sei noch erwähnt, dass hier die Effekte der Untergrunddämpfung nicht berücksichtigt wurden. Da die durchaus hohe Energiedissipation des Untergrunds durch die Vertikalbewegung der Auflagerpunkte stattfindet, sind Schwingungsformen, die große Bewegungen in den Auflagern aufweisen, sicherlich höher gedämpft als reine Biegeschwingungen des Balkens. Ob bzw. wie diesem Umstand in der Berechnung Folge geleistet wird, kann die Berechnungsergebnisse nicht unwesentlich beeinflussen. *Schobesberger* [9] und *Rauter* [12] haben diese Problemstellung kurz angeschnitten, in der vorliegenden Arbeit wird jedoch nicht näher darauf eingegangen.

3.8.5 Grenzwertbetrachtung zum Einfluss der Auflagernachgiebigkeit auf die Eigenfrequenzen des Tragwerks

Eine reine Abschätzung der Untergrundkennwerte anhand der Bodenart liefert - wie oben gezeigt - ein breites Spektrum an möglichen Auflagersteifigkeiten. Dieses Ergebnis ist daher noch nicht wirklich zufriedenstellend. Es wird vor allem ein unterer Grenzwert für eine plausible Auflagersteifigkeit gesucht. Hierzu wird vom Gebrauchstauglichkeitsnachweis der Brücke ausgegangen. Die Vertikalverformung δ des Tragwerks ist mit gewissen L/δ -Verhältnissen begrenzt, um den Fahrgastkomfort sicher zu stellen (siehe Abschnitt 2.5.3). Aus diesem Verhältnis lässt sich über die statische Durchbiegungsgleichung ein Mindestwert für die Biegesteifigkeit bestimmen. Für einen gelenkig gelagerten Einfeldträger unter Gleichlast q erhält man so die Bedingung:

$$\frac{L}{[L/\delta]} > \delta = \frac{5 q L^4}{384 EA_{zz}} \quad (3.75)$$

Gemäß EC1-2 [3], 6.5.4.5.2 (3) darf die Vertikalverschiebung δ_V (aus veränderlichen Einwirkungen) zwischen Überbau (Tragwerk) und Widerlager bei einer örtlich zulässigen Geschwindigkeit von über 160 km/h einen Wert von 2 mm nicht überschreiten. Diese Relativverformung zwischen

Tragwerk und Widerlager ist vor allem bei der Verwendung von Elastomerlagern von Interesse. Für einen Einfeldträger unter Gleichlast muss somit folgendes Kriterium erfüllt sein.

$$\delta_V = \frac{q L}{2 k} \leq 0,002 \quad (3.76)$$

Durch Auflösen nach q und Einsetzen in (3.75) erhält man:

$$\frac{L}{[L/\delta]} \geq \delta = \frac{5 q L^4}{384 EA_{zz}} \leq \frac{5 L^4}{384 EA_{zz}} \frac{0,002 k}{L} \quad (3.77)$$

Die Durchbiegung δ muss also kleiner sein als zwei Grenzwerte. Einer ist von der Spannweite und einem L/δ – Wert abhängig, und einer beschränkt die Durchbiegung indirekt, durch die Beschränkung der Belastung q anhand der Auflagersteifigkeit. Unterstellt man eine optimierte Auslegung der Biegesteifigkeit des Tragwerks anhand des L/δ – Wertes, so kann man aus (3.77) folgende Bedingung gewinnen.

$$\frac{EA_{zz}}{k L^3} \leq \frac{[L/\delta] 0,02}{L} \quad (3.78)$$

Durch Einsetzen dieser Bedingung in (3.55) ergibt sich für das Steifigkeitsverhältnis κ die nachfolgende Beschränkung.

$$\kappa = \frac{EA_{zz} \pi^3}{k L^3} \leq \frac{[L/\delta] 0,02 \pi^3}{L} = \frac{[L/\delta] \pi^3}{L} \frac{1}{19200} \quad (3.79)$$

Für ein L/δ -Verhältnis von 1000 ergibt sich für die 4,3 m lange Beispielbrücke $\kappa \leq 0,38$, was einem Frequenzfaktor von $F_{AN} = 0,81$ entspricht. Der maximale Einfluss der Auflagersteifigkeit auf die Eigenfrequenz der Brücke wird demnach unter 20 % liegen.

In Abbildung 3.30 ist der Verlauf des Frequenzfaktors nach dem Kriterium in (3.79) für eine Durchbiegungsbeschränkung von $L/\delta = 1000$ dargestellt. Die hier dargestellte Grenze des Frequenzfaktors berücksichtigt nur die Nachgiebigkeit, die sich aus einer elastischen Lagerung (Elastomerlager) ergibt (keine Untergrundeffekte berücksichtigt). Für Tragwerke mit einer Spannweite von mehr als 5,0 m ist der maximale Einfluss der Auflagernachgiebigkeit demnach unter ca. 17 %. Es handelt sich hierbei um eine Grenzwertbetrachtung, die tatsächliche Reduktion der Frequenzen kann daher wesentlich geringer ausfallen. Die Überlegungen, die zum Kriterium (3.79) geführt haben, gehen von der Beschränkung der Relativverschiebung zwischen Tragwerk und Widerlager aus. Die vertikale Verformung eines Fundamentkörpers wird dadurch nicht erfasst. Um eine Größenordnung für den Einfluss der Untergrundnachgiebigkeit zu erhalten, ist daher ein anderer Ansatz erforderlich. Für die nachstehenden Überlegungen wird von einer festen Lagerung (kein Elastomer) ausgegangen. Die vertikale Nachgiebigkeit resultiert bei starren Fundamentkörpern dann rein aus der Untergrundverformung. Aus einer Belastung der Brücke ergibt sich eine Verschiebung des Fundamentkörpers. Dabei wird sich im Gleiskörper eine Art „Setzungsmulde“ ausbilden. Es scheint nur logisch, dass diese vertikale Verformung u , die sich aus der

Tragwerksbelastung q und der Nachgiebigkeit aus dem Untergrund k ergibt, ebenfalls kleiner als der zulässige δ -Wert sein muss. Da sich die Auflagerverformung zur Durchbiegung w des Tragwerks dazu addiert, wird hier als grobe Vereinfachung $u < w/2$ gefordert. Für einen Einfeldträger mit elastischer Lagerung folgt somit.

$$\frac{q L}{2 k} = u < w/2 = \frac{1}{2} \frac{5 q L^4}{384 EA_{zz}} \quad (3.80)$$

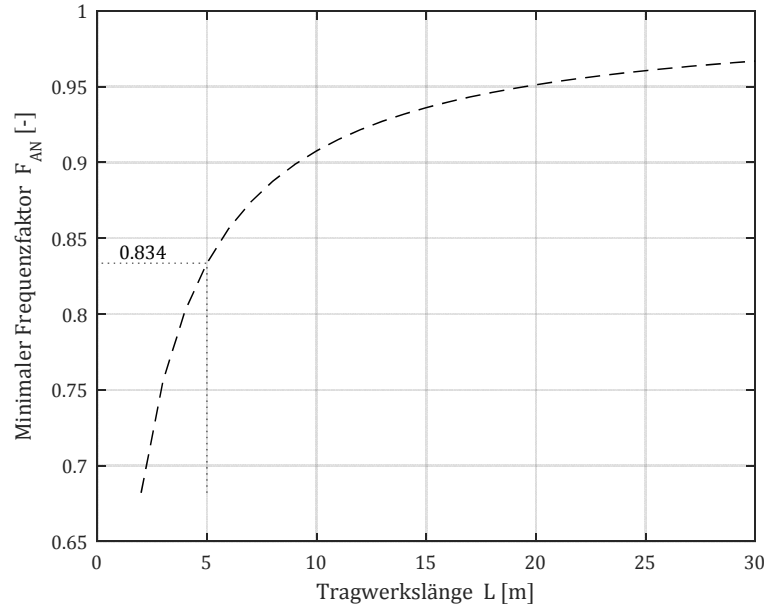


Abbildung 3.30: Minimaler Frequenzfaktor F_{AN} zur Berücksichtigung der vertikalen Nachgiebigkeit von Elastomerlager, auf die Eigenfrequenz, für eine Durchbiegungsbeschränkung von $L/\delta = 1000$ bei Optimierung der Biegesteifigkeit auf Basis der Durchbiegungsbeschränkung

Die Belastung lässt sich herauskürzen, wodurch k und EA_{zz} in Verhältnis gesetzt werden können.

$$\frac{EA_{zz}}{L^3 k} < \frac{5}{384} \quad (3.81)$$

Setzt man dieses Verhältnis in (3.56) ein, so ergibt sich eine Obergrenze für das Steifigkeitsverhältnis κ von:

$$\kappa \leq \frac{5 \pi^3}{384} = 0,41 \quad (3.82)$$

Der minimale Frequenzfaktor ergibt sich somit zu $F_{AN} = 0,80$. Es kann also davon ausgegangen werden, dass die Untergrundnachgiebigkeit die erste Eigenfrequenz um maximal 20 % reduziert. Im Regelfall ist jedoch von einem wesentlich kleineren Einfluss auszugehen.

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Einblick in die Komplexität der Untergrundwirkung gegeben. Für eine nähere Untersuchung des Einflusses des Untergrunds auf die dynamische Tragwerksantwort, sind - dem Autor nicht vorliegende - genauere Informationen zur Fundierung bzw. zum Untergrundaufbau, erforderlich. Mit der hier durchgeführten Grenzwertbetrachtung konnte jedoch die Größenordnung, in der der Untergrund die dynamischen Tragwerkparameter beeinflusst, ge-

zeigt werden. Dabei hat sich entgegen der ursprünglichen Vermutung des Autors gezeigt, dass sich der Einfluss der Auflagernachgiebigkeit (aus Elastomerlagern oder Untergrundeffekte) in den meisten Fällen wohl eher in Grenzen hält. Der maximale Frequenzfehler bei Nichtberücksichtigung der Untergrundnachgiebigkeit liegt ca. 20 % und daher etwa in der gleichen Größenordnung wie der Fehler der bei einer Vernachlässigung des Lagerversatzes gemacht wird.

3.9 Allgemeines zur Modellierung des Gleiskörpers

Der Gleiskörper wirkt nicht nur als Belastung auf das Tragwerk. Seine Hauptaufgabe besteht darin, dem Zug eine stabile Spurführung zu geben. Der Gleiskörper stellt somit die Verbindung zwischen der Belastung (dem Zug) und dem Brückentragwerk her. Durch die Biegesteifigkeit der Schienen und die Höhe des Schotterbetts stellt sich eine gewisse horizontale Verteilung der Last ein. Eine wesentliche Wirkung des Gleiskörpers besteht daher in der Lastverteilung. Dieser Effekt wird oft bereits lastseitig berücksichtigt. Dies geschieht etwa durch die Aufteilung der einwirkenden Einzelkräfte eines Lastmodells auf mehrere Kräfte in einem bestimmten Abstand (vgl. [3]). Auch etwaige Unebenheiten der Gleise führen in Verbindung mit der Trägheit des überfahrenden Zuges zu einer Veränderung der einwirkenden Lasten, weshalb auch dieser Effekt auf der Lastseite abgebildet wird. Die vertikale Nachgiebigkeit des Schotterkörpers und die Biegesteifigkeit der Schienen bewirkt nicht nur eine Lastverteilung, es bildet auch ein schwingfähiges System. Durch die relativ geringe Masse des Schienen-Schwellenkörpers im Vergleich zur Biegesteifigkeit der Schiene, sind die Eigenfrequenzen dieses Systems relativ hoch und können daher bei kurzen, steifen Tragwerken in Wechselwirkung mit den Tragwerksschwingungen treten.

Der Gleiskörper bildet jedoch nicht nur ein eigenes dynamisches System sondern trägt auch zur Biegetragwirkung bei. Zuzufolge der horizontalen Schubübertragung zwischen Schienen und Tragwerk durch das Schotterbett, trägt der Gleiskörper auch zur Biegesteifigkeit des Gesamtsystems bei.

Die Schubsteifigkeit des Schotterbetts hat aber auch einen Einfluss auf das dynamische Verhalten zweier nebeneinander liegender Tragwerke mit gemeinsamem Schotterbett. Dabei erfolgt eine teilweise Koppelung der beiden Tragwerke, wodurch sich vor allem eine zusätzliche Energieabsorption für das angeregte Tragwerk einstellt.

Da es schwierig ist, mit einem einfachen Modell all diese Wirkungsweisen zu erfassen, wird jeder Effekt einzeln betrachtet. Ein gewisser Teil der Schotter-Modellierung erfolgt daher auch auf der Lastseite.

3.10 Einfluss von durchgehendem Schotterbett

Durch ein durchgehendes Schotterbett (siehe Abbildung 3.31) werden zwei nebeneinander liegende Brückentragwerke gewissermaßen gekoppelt.

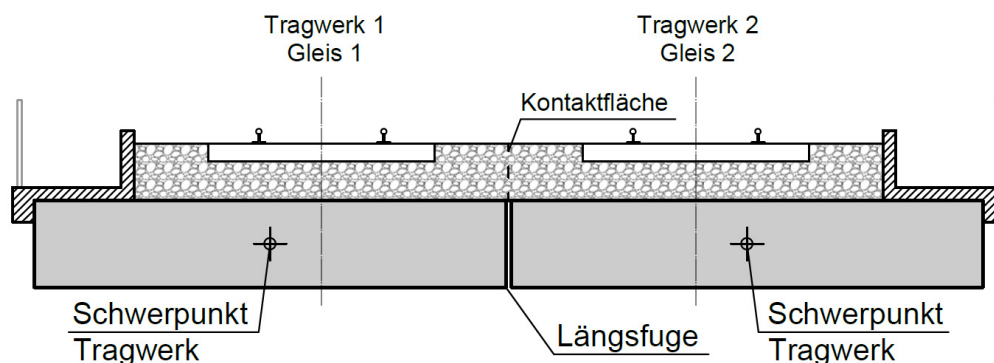


Abbildung 3.31: Brückenquerschnitt mit gemeinsamem Schotterbett

Bei der Belastung eines Tragwerks wird dadurch auch das zweite aktiviert. Zusätzlich ergibt sich aus der Relativbewegung zwischen den beiden Tragwerken auch ein weiterer Dämpfungsmechanismus. Solche Systeme verhalten sich damit dynamisch günstiger als völlig getrennte Einzeltragwerke. Durch die teilweise Aktivierung der Masse des Nachbartragwerks verringert sich die maximale Auslenkung bzw. Beschleunigung. Die Kopplung lässt sich auch im Ausschwingverhalten erkennen.

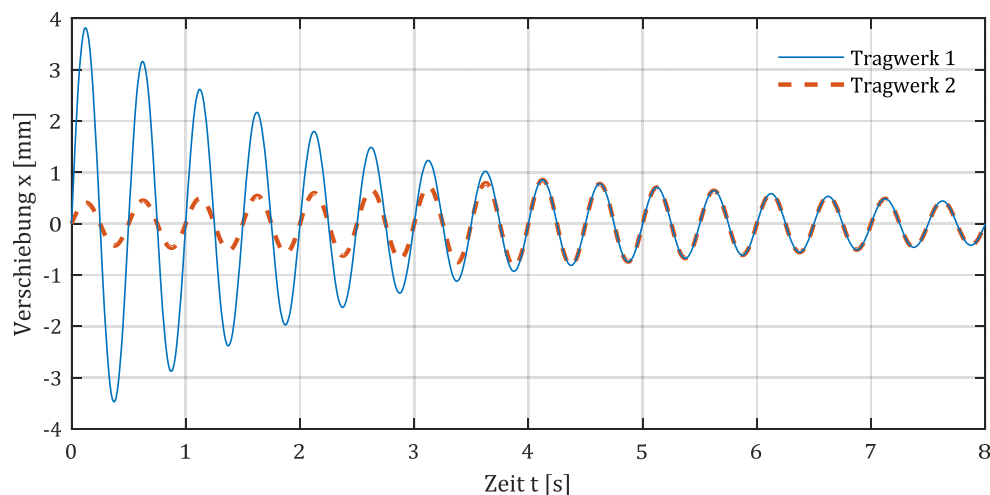


Abbildung 3.32: Schematischer Verlauf des Ausschwingverhaltens zweier Tragwerke mit durchgehendem Schotterbett (Tragwerk 1 belastet)

In Abbildung 3.32 ist der charakteristische Ausschwingverlauf zweier durch ein Schotterbett gekoppelter Tragwerke schematisch dargestellt. Eine Messung eines solchen Verlaufes ist in [68] abgebildet. Erfolgt eine erzwungene Anregung des Systems fernab einer Resonanzfrequenz, so wird hauptsächlich das belastete Tragwerk in Schwingung versetzt. Nach der Belastung erfolgt das

Ausschwingen in der ersten Eigenfrequenz, welche für beide Tragwerke annähernd gleich sein wird. In der ersten Phase des Ausschwingvorgangs überträgt das erste Tragwerk einen Teil einer Schwingungsenergie auf das zweite, wodurch für das erste Tragwerk eine scheinbar höhere Dämpfung auftritt. Die Schwingungsamplitude des zweiten Tragwerks hingegen nimmt zu. Sobald beide Tragwerke gleiche Schwingungsamplituden aufweisen, schwingen sie de facto synchron aus.

Erfolgt die Belastung jedoch in einer Resonanzfrequenz, so baut sich im unbelasteten Tragwerk ab dem Belastungsbeginn die Schwingungsamplitude auf. Die erste Phase des Ausschwingvorgangs mit der scheinbar höheren Dämpfung ist daher kürzer (vgl. [19], Bild 4.2).

Rauert [19] beschäftigte sich in seiner Dissertation näher mit diesem Thema. Er verwendete eine Versuchsanlage um die Kraftübertragung zwischen Tragwerken mit gemeinsamem Schotterbett zu untersuchen. Die Versuchsanlage bestand aus mehreren Stahlträgern mit oben aufgesetzten Kästen, in die Schotter gefüllt werden konnte. Diese Kästen waren zum jeweiligen Nachbartragwerk hin nicht geschlossen, sodass ein gemeinsames Schotterbett entstand. Durch die Lastaufbringung auf einem Tragwerk und die vertikale Festhaltung des anderen wurde die vertikale Kopplung der beiden Tragwerke ermittelt. Die Schubsteifigkeit der Schotterkontaktfläche in der Längsfuge (siehe Abbildung 3.31) ergab sich dabei zu:

$$k_{Koppl} = 4.350 \text{ (kN/m)/m}^2 \quad (3.83)$$

Diese Steifigkeit wird bis zu einer Relativverschiebung von 2,0 mm angegeben, danach wird ideal plastisches Verhalten unterstellt. Der Verlauf des Koppelwiderstandes nach diesem Modell ist in Abbildung 3.33 dargestellt.

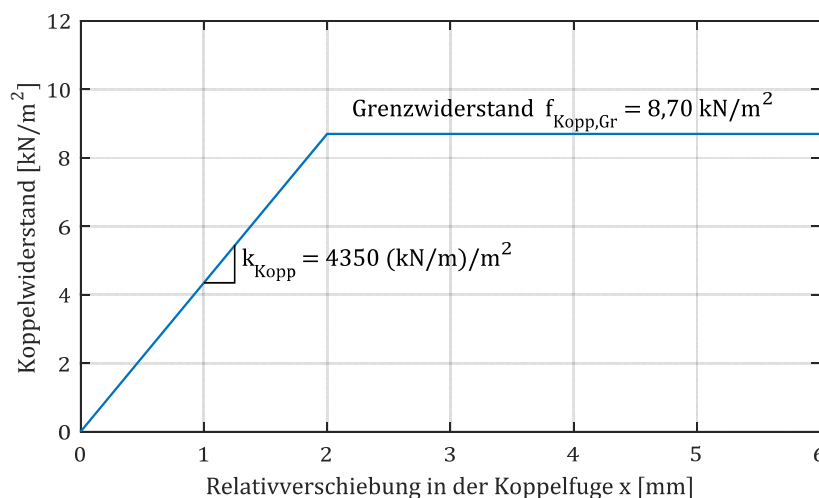


Abbildung 3.33: Widerstand der Koppelfeder nach *Rauert*, [19].

Die Kopplung der beiden Tragwerke erfolgt am Plattenrand und somit exzentrisch. Es treten somit auch Torsionseffekte auf. Das Tragwerksmodell muss also in der Lage sein, die Torsionseffekte aus der Kopplung abzubilden, weshalb von *Rauert* ein Plattenmodell gewählt wurde. Die beiden

Tragwerke wurden durch nebeneinander liegende Platten, die über vertikale Schotterfedern gekoppelt sind, modelliert (siehe Abbildung 3.34).

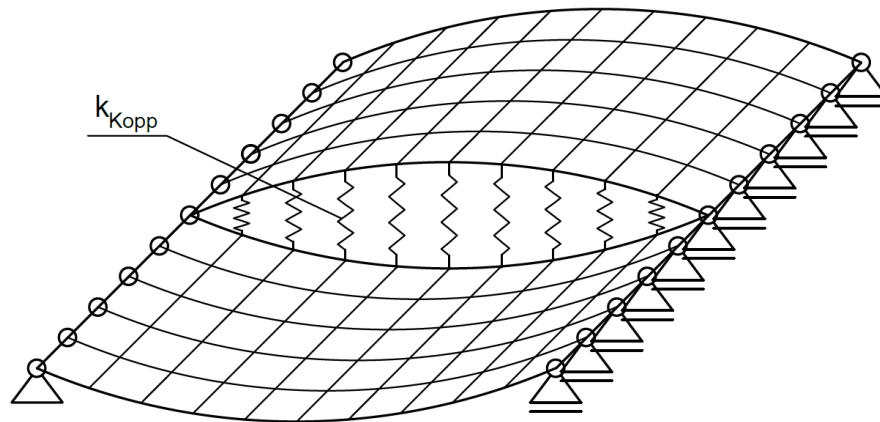


Abbildung 3.34: Plattenmodell zweier Tragwerke mit vertikaler Kopplungsfeder

Da der Fokus der vorliegenden Arbeit auf Systemvereinfachungen liegt, wird hierzu ein vereinfachter Alternativvorschlag gemacht. Handelt es sich um zwei Tragwerke mit gemeinsamem Schotterkörper, so sind die Tragwerke meist asymmetrisch aufgebaut. An der seitlichen Tragwerksaußenkante ist meist ein Randbalken zur Herstellung eines Wartungsweges bzw. als Abschluss des Schotterkörpers angebracht (vgl. Abbildung 3.31). Die Gleisachse liegt daher nicht genau über der Schwerachse des Tragwerks, sondern etwas näher an der Längsfuge. Durch die Berücksichtigung der Kopplungsfedern wird aber auch der Schwerpunkt etwas nach innen verschoben. Daraus ergibt sich die Vermutung, dass es für eine vereinfachte Untersuchung ausreichen könnte, die Torsionseffekte zu vernachlässigen und die „zwei“ Brücken als vertikal gekoppelte Balken zu modellieren. Für eine qualifizierte Aussage zur Zulässigkeit eines solchen Ansatzes sind nähere Untersuchungen erforderlich. Da für diese Untersuchungen jedoch genauere geometrische Angaben erforderlich sind, wird dieser Gedanke hier nicht weitergeführt.

Rauert kommt zu der erwartbaren Erkenntnis, dass die Koppelwirkung des Schotterbetts zwar die Beanspruchung des Tragwerks reduziert, aber praktisch keinen Einfluss auf die Eigenfrequenz des Systems hat. Da im Weiteren vor allem die Eigenfrequenzen der Brücken von Interesse sind, wird nicht näher auf die Kopplungseffekte eingegangen.

3.11 Vertikale Steifigkeit des Schotterkörpers

Die vertikale Steifigkeit des Schotterkörpers hat auch einen nicht unwesentlichen Einfluss auf das Tragverhalten. Zum einen entsteht durch eine vertikale Federkopplung des Brückentragwerks mit dem Gleiskörper ein zusätzliches dynamisches System, das vor allem bei kurzen steifen Brücken mit hohen Eigenfrequenzen die dynamische Tragwerksantwort beeinflussen kann (vgl. [7]). Zum anderen bewirkt die vertikale Kopplung der Schiene über Schwellen und Schotterbett mit dem Tragwerk eine Lastverteilung. Bei dem meistverbreiteten Lastmodell für dynamische Untersuchungen, dem Einzellastmodell (EKM) wird eine Zugachse als konzentrierte Last modelliert.

In der Praxis hat das Gleis eine lastverteilende Wirkung, so dass das Tragwerk in Wirklichkeit einer wandernden flächenförmigen Last unterliegt, wobei die Beanspruchung am vorderen und am hinteren Ende der Flächenlast nicht miteinander in Phase sind. Im Ergebnis führt das zu geringeren dynamischen Beanspruchungen im Tragwerk. [20]

Einfache Überlegungen legen nahe, dass dieser Effekt bei kurzen Tragwerken ausgeprägter als bei langen Tragwerken sein wird. Nun stellt sich die Frage, durch welche Modelle sich diese Effekte adäquat abbilden lassen. Speziell die lastverteilende Wirkung des Oberbaus wurde bereits in etlichen Studien untersucht bzw. miteinbezogen (siehe etwa. [5], [7], [23], [96], [108], [109], [110], [111] oder [112]).

Oberbaumodelle

Die einfachste Möglichkeit, die lastverteilende Wirkung des Schotteroberbaus abzubilden, besteht im Ansatz der Lastverteilung LV nach Eurocode [3]. Dabei darf eine Achslast auf drei Einzellasten aufgeteilt werden, dargestellt in Abbildung 3.35. Auf eine eigene Modellierung des Oberbaus kann dabei verzichtet werden.

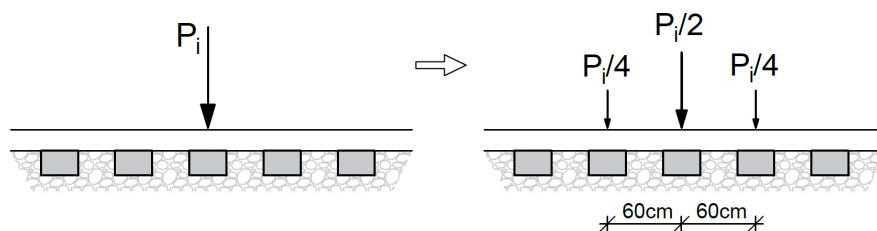


Abbildung 3.35: Lastverteilung LV nach Eurocode (Darstellung basiert auf [3], Bild 6.4)

Für eine tatsächliche Modellierung des Schotteroberbaus stehen unterschiedliche Modelle zur Verfügung. Diese besitzen immer einen Balken, der die Schienen darstellt und über unterschiedliche Zwischenebenen (bestehend aus Feder-, Dämpfer- und Massenelementen) mit dem Brückentragwerk verbunden ist.

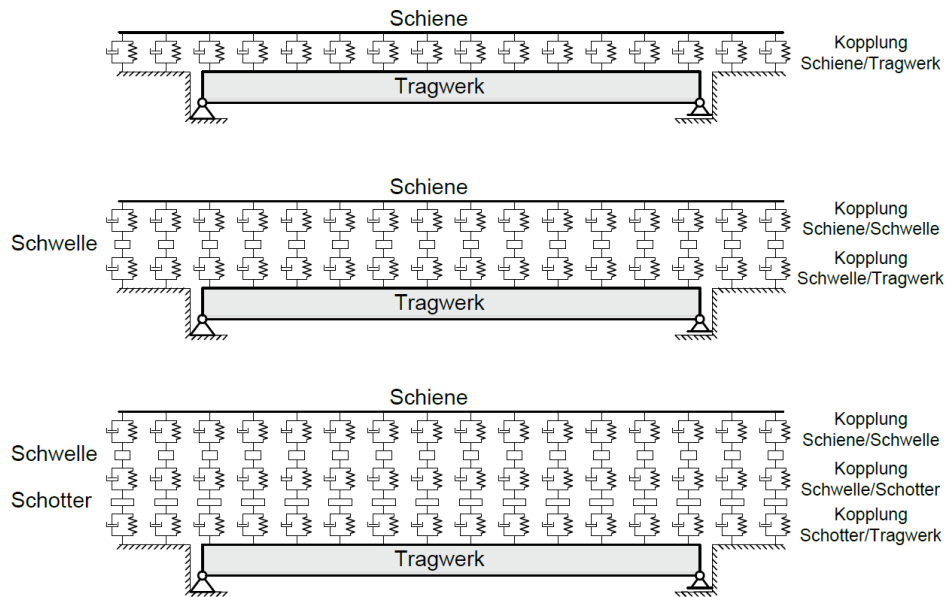


Abbildung 3.36: Modelle der vertikalen Gleis-Tragwerk-Kopplung mit ein, zwei und drei Kopplungsebenen (die Darstellung ist Arvidsson [62], Figure 17 nachempfunden)

Schiene und Tragwerk sind dabei nur vertikal gekoppelt, folglich können keine Schubkräfte übertragen werden. Ein paar dieser Modelle sind exemplarisch in Abbildung 3.36 dargestellt. Da die einzelnen Modelle eine unterschiedliche Anzahl an Kopplungsebenen aufweisen, muss bei der Übernahme von Steifigkeitskennwerten aus unterschiedlichen Arbeiten aufgepasst werden. Es ist zu unterscheiden, ob die vertikale Kopplungssteifigkeit für die einzelnen Verbindungen (z.B. Verbindung Schwelle-Tragwerk = Schotterschicht) oder für den gesamten Oberbau (Verbindung Schiene-Tragwerk) angegeben ist.

Eine Übersicht der Kennwerte dieser Modellkomponenten, die in unterschiedlichen Studien verwendet wurden, wird von *Arvidsson et al.* in [62] gegeben. Für eine vereinfachte Betrachtung am wichtigsten sind wohl die äquivalenten vertikalen Ersatzsteifigkeiten des gesamten Oberbaus. Diese wurden zwischen $51,6 \text{ MN/m/lfm}$ Gleis [109] und 343 MN/m/lfm Gleis [110] angegeben. Der Großteil der verwendeten Kennwerte liegt jedoch im Bereich von $100 - 150 \text{ MN/m/lfm}$. An der Untergrenze dieser Bandbreite liegt die von *Spengler* [5] aus gemessenen Schieneneinsenkungen hergeleitete Federsteifigkeit pro Schwelle von $k_v = 45 \text{ kN/mm}$ (Schwellenabstand von 60 cm). Umgerechnet ergibt dies eine vertikale Steifigkeit pro Laufmeter Gleis von $k_v = 75 \text{ MN/m/lfm}$.

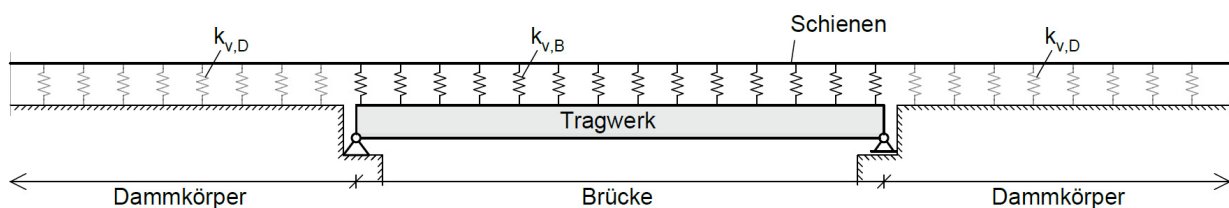


Abbildung 3.37: Vertikale Federkopplung durch das Schotterbett

Oft werden, wie in Abbildung 3.37 dargestellt, unterschiedliche Oberbausteifigkeiten für den Dammkörper und den Brückenbereich angegeben. *Vospernig* und *Reiterer* [108] verwenden etwa

über dem Dammkörper eine Federsteifigkeit pro Schwelle von $k_{v,D} = 104 \text{ MN/m}$ (entspricht einem Bettungsmodul von 100 MN/m^3 auf einer Einflussfläche der Schwelle von $1,04 \text{ m}^2$) und eine Federsteifigkeit über der Brücke von $k_{v,B} = 312 \text{ MN/m}$ (300 MN/m^3 Bettungsmodul). Die Steifigkeiten werden dabei bewusst höher angegeben als vermutet, um die Tragwerksantwort nicht zu unterschätzen. Ähnliche Werte werden auch in [113] verwendet. Dabei wird die vertikale Federsteifigkeit des Oberbaus k_v im Bereich des Dammkörpers mit $k_{v,D} = 100 \text{ MN/m/lfm}$ und über der Brücke mit $k_{v,B} = 218 \text{ MN/m/lfm}$ angegeben. Diese Ersatzfedersteifigkeiten wurden anhand von FE-Berechnungen aus einem 3D Modell der Brücke und des Dammkörpers ermittelt.

Für komplexere Modelle wird der E-Modul des Schotters benötigt. Dieser wird in der Literatur mit stark variierenden Zahlen angegeben. Je nach Quelle liegen die Werte zwischen 100 N/mm^2 und 350 N/mm^2 (siehe [114], [115] und [116]). So variierten *Axelsson et al.* [96] in Ihren Untersuchungen den E-Modul zwischen 100 N/mm^2 und 350 N/mm^2 . *Rocha et al.* [58] setzten noch etwas niedrigere Werte an und verwendeten eine Bandbreite von $80 - 160 \text{ N/mm}^2$.

Es wurden auch zahlreiche Studien mit dem Fokus auf den Schotter durchgeführt. So versuchten *Kruse et al.* [117] mittels Molekulardynamischer Simulation (MS) jeden einzelnen Schotterstein nachzubilden. Dabei kann an jeder Kontaktstelle ein Übergang von Haften zum Gleiten erfolgen. Es können sich auch Verbindungen lösen und neue Verbindungen bilden. Eine Abbildung des realen Schotterbettverhaltens war in dieser Arbeit noch nicht möglich. *Zhai et al.* [109] führten ein fünf Parameter Schotter Modell mit Schubsteifigkeit und Schubdämpfer ein. Damit konnte eine gute Übereinstimmung zwischen den Simulationsergebnissen und den Vergleichsmessungen erzielt werden. Es wurde festgestellt, dass die Resonanzfrequenz des Schotter in einem Bereich von $70 - 100 \text{ Hz}$ (Berechnung) bzw. $80 - 110 \text{ Hz}$ (Messung) liegen. Für die in dieser Arbeit im Vordergrund stehenden einfachen Modelle sind diese Studien jedoch wenig aufschlussreich.

Erkenntnisse aus der Literatur

Rigueiro et al. [111] untersuchten die Auswirkung unterschiedlicher Gleiskörpermodellierungen auf die dynamische Tragwerksantwort einer knapp 24 m langen Brücke. Für die Reaktion auf ein EKM konnte kein Einfluss des Oberbaumodells festgesellt werden. Wird für die Belastung ein MKM verwendet, so ergeben sich bei Verwendung der Oberbaumodelle geringfügig andere Ergebnisse als ohne Schottermodell. Welches Schottermodell verwendet wird, hatte wiederum keinen Einfluss auf die Tragwerksantwort. Zum gleichen Schluss kommt *Arvidsson et al.* [62], die aus Studien über Untersuchungen für Tragwerke mit Spannweiten von 11 m oder mehr die Grunderkenntnis gewinnt, dass in den meisten Fällen die Wahl des Gleismodells keinen großen Einfluss auf die Tragwerksantwort von Brücken über 10 m Spannweite hat (vgl. etwa [110]). Auf eine komplexe Modellierung des Oberbaus kann demnach verzichtet werden.

Auch *Axelsson et al.* [96] untersuchten die lastverteilende Wirkung des Schotterbetts. Dabei wurde ein 2D FE-Modell des Gleisoberbaus verwendet. Diese Ergebnisse des Oberbaumodells wurden anschließend bei Verzicht auf ein Oberbaumodell durch eine dreieckige Lastverteilung (3m Breite)

angenähert. Es erfolgte auch eine Untersuchung der Lastausbreitung durch das Schotterbett für das im Eurocode vorgeschlagene Lastverteilungsmodell. Um Beschleunigungsspitzen durch die Impulsanregung von konzentrierten Einzellasten zu vermeiden, empfiehlt *Axelsson* für kurze Tragwerke, die Implementierung der Lastausbreitung durch mehrere Einzellasten. Es sei aber auch erwähnt, dass durch die zusätzlichen Lasten zusätzliche Anregungsfrequenzen hervorgerufen werden, die bei Tragwerken mit hohen Eigenfrequenzen ($> 50 \text{ Hz}$) einen erheblichen Einfluss haben können. Vernachlässigt man diese besonders steifen Tragwerke, so kann demnach auf ein explizites Oberbaumodell verzichtet werden. Die vertikale Kopplungswirkung zwischen Gleis und Brücke kann über entsprechend verteilte Einzellasten abgebildet werden. Somit scheint der im Eurocode vorgeschlagene Ansatz zur Erfassung der lastverteilenden Wirkung des Oberbaus durch verteilte Einzellasten relativ plausibel.

Es stellt sich somit nur noch die Frage, wie diese Lastverteilung aussehen muss, um der tatsächlichen Wirkung zu entsprechen. Untersuchungen zur Aufteilung einer Einzellast durch einen elastisch gelagerten Balken (Gleis über festem Untergrund) finden sich etwa in [5] und [7]. In Abbildung 3.38 und Abbildung 3.39 sind als Grenzwertbetrachtung die Federkräfte (entsprechen den Ersatzlasten) zufolge einer 200 kN Last für unterschiedliche vertikale Oberbausteifigkeiten dargestellt.

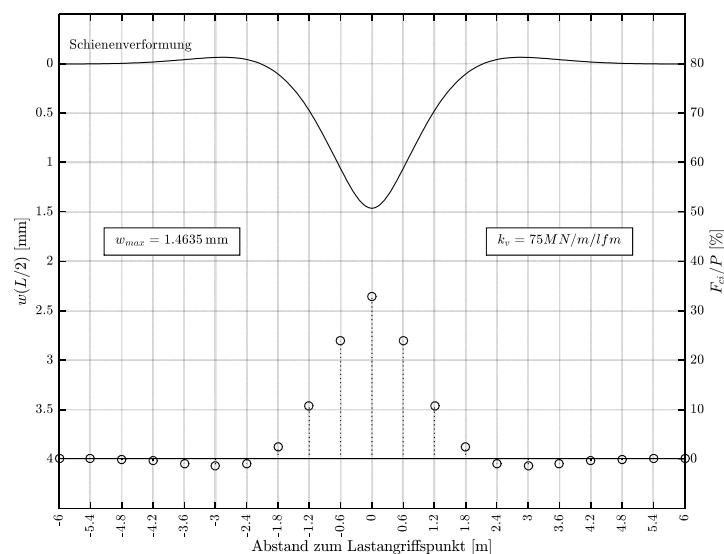


Abbildung 3.38: Lastverteilung durch den Schotteroberbau (Einzellast von $P = 200 \text{ kN}$) bei einer Oberbausteifigkeit von $k_v = 75 \text{ kN/m/lfm}$

Aus Abbildung 3.39 wird ersichtlich, dass das Ergebnis für eine sehr hohe Oberbausteifigkeit von $k_v = 350 \text{ kN/m/lfm}$ relativ genau dem EC-Modell (siehe Abbildung 3.35) entspricht. Ist die tatsächliche Steifigkeit geringer, so breitet sich die Last breiter aus (vgl. Abbildung 3.38), was sich positiv auf die Tragwerksantwort auswirkt. Die Lastverteilung nach Norm stellt somit noch immer einen konservativen Ansatz dar.

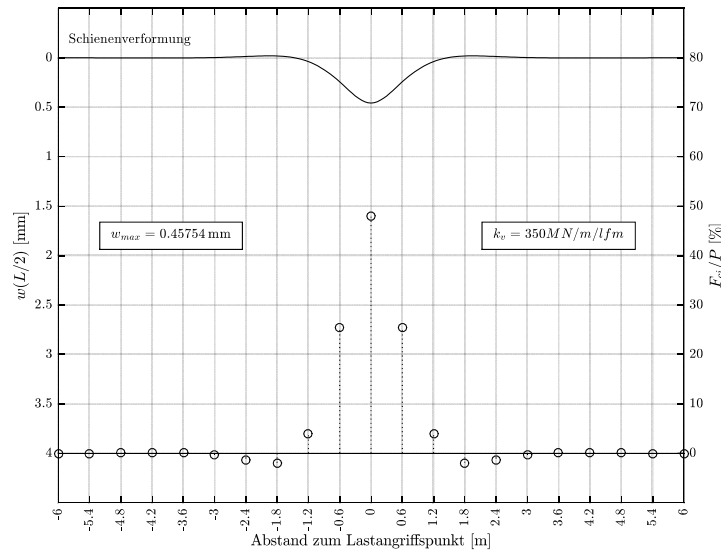


Abbildung 3.39: Lastverteilung durch den Schotteroberbau (Einzellast von $P = 200\text{kN}$) bei einer Oberbausteifigkeit von $k_v = 350\text{kN/m/lfm}$

Bei der Verwendung dieser normativen Lastverteilung stellte *Johansson* in [37] eine Reduktion der Tragwerksbeschleunigung von bis zu 20 % fest. Die lastverteilende Wirkung des Oberbaus führt speziell bei kurzen Brücken ($< 10\text{ m}$) zu deutlichen Reduktionen der Tragwerksantwort. *Spengler* beschäftigt sich in [5] umfassend mit diesem Thema. Er stellt fest, dass die Reduktion der Tragwerksantwort, die durch die lastverteilende Wirkung des Oberbaus erzielt wird, für Überfahrten in der ersten Resonanzfrequenz $v_{crit,1}$ relativ gering ist. Die Reduktion wird umso größer, umso kleiner das Verhältnis $\eta = v/v_{crit,1}$ wird. Ab einem Verhältnis kleiner als 0,3 wird die Reduktion besonders ausgeprägt (vgl. [5] Abb. 4-16).

Der Einfluss der Lastausbreitung durch die Schwellen und den Schotter (siehe Abbildung 3.40) wurde etwa von *Museros et. al.* [2] untersucht.

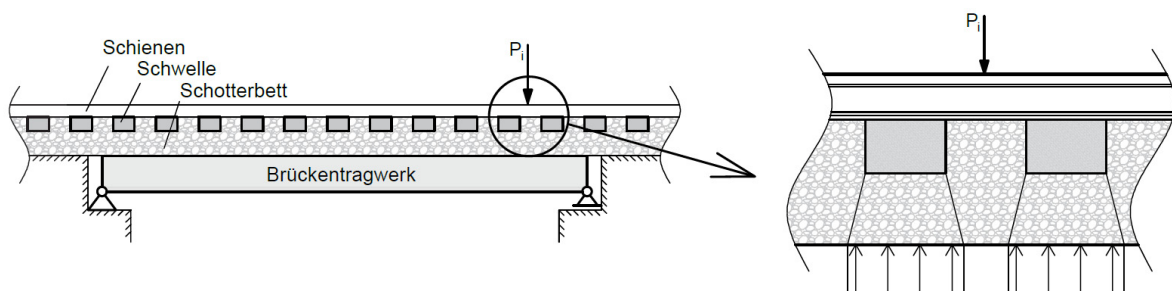


Abbildung 3.40: Verteilung der Achslast durch Schwellen und Schotterbett ([2] Fig. 4. nachempfunden).

Dazu wurde eine Lastverteilung über eine 1 m Breite Gleichlast verwendet. Die in [48] und [118] vorgeschlagenen Ähnlichkeitsgleichungen dienten dabei als Grundlage. Es wurde die Reduktion der Tragwerksbeschleunigungen durch die Lastverteilung ermittelt. Diese Reduktion ist darin folgend definiert:

$$R = \frac{a_{max,c} - a_{max,d}}{a_{max,c}} \times 100 \quad (3.84)$$

Die Indizes „c“ und „d“ stehen dabei für „konzentrierte Lasten“ und „verteilte Lasten“. In der Untersuchung wurden fünf europäische Hochgeschwindigkeitszüge (TALGO, THALY'S, ICE-2, ETR-Y und EUROSTAR) verwendet. Es wurde für jede Wellenlänge $\lambda = v/n_0$ das maximale Ergebnis aus den fünf Modellen gewählt. Untersucht wurden Tragwerke von 4 bis 15 m Länge mit einer Dämpfung von $\zeta = 0,01$. Die Reduktion der Beschleunigungen war dabei bei kürzeren Wellenlängen größer (vgl. [2] Fig. 8.). Als Ergebnis der Untersuchung ist folgende Funktion für die Reduktion der Beschleunigung angegeben:

$$R = 104,43\lambda^{-1,6} \quad (3.85)$$

Diese Funktion entspricht im Wesentlichen einer Untergrenze, wird jedoch in einigen Punkten trotzdem geringfügig unterschritten. Aus dem in Abbildung 3.41 dargestellten Verlauf der Reduktion der Tragwerksbeschleunigung ist ersichtlich, dass sich für Tragwerke mit hoher Grundeigenfrequenz durchaus hohe Reduktionen der Tragwerksreaktion ergeben können.

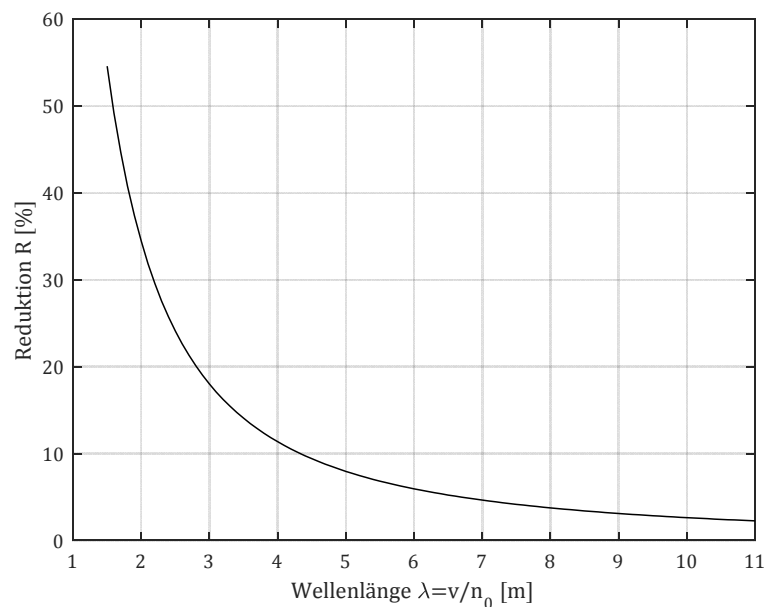


Abbildung 3.41: Verlauf der Reduktion der Beschleunigung nach [2]

Die vertikale Wirkung des Schotterkörpers, also die vertikale Kopplung zwischen Schienen und Tragwerk, kann, wie oben gezeigt, im Wesentlichen durch eine entsprechende Modifizierung der Lastmodelle erfasst werden. Die vertikale Schottersteifigkeit wirkt sich in einer Berechnung somit auf die Lastseite und nicht auf die Seite der Tragwerkeigenschaften aus. Da sich durch diese Kopplung die Systemeigenschaften des Tragwerks nicht verändern, wird hier nicht weiter auf dieses Thema eingegangen.

4. Schubsteifigkeit des Schotterbettes

Wird der Gleiskörper nur als Auflast betrachtet, so wird die tatsächliche Eigenfrequenz des Systems unterschätzt. Dass die Biegesteifigkeit der Schienen zur Gesamtsteifigkeit des Systems beiträgt, ist noch relativ eindeutig. Die Berücksichtigung der Schienenbiegung alleine unterschätzt jedoch noch immer die tatsächliche Biegesteifigkeit des Systems (vgl. [4]). Daher muss auch der Schotterkörper zur Steifigkeit beitragen. Da der Schotter keine Zugspannungen aufnehmen kann, ist es wohl nicht zielführend den Schotter, gleich wie die Schienen, als zusätzlichen Biegebalken zu betrachten. Die Wirkung des Schotters besteht darin, einen Teilverbund zwischen dem Tragwerk und den Schienen herzustellen, dargestellt in Abbildung 4.1.

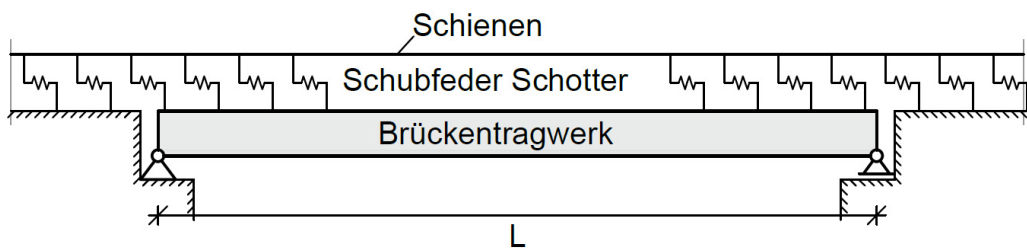


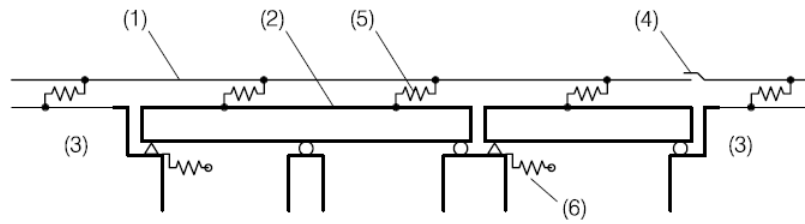
Abbildung 4.1: Tragwerksmodell mit Berücksichtigung der Schubsteifigkeit des Schotters

Die wesentliche Frage ist nun, welche Gestalt der Verlauf der Schotterfeder aufweist und wie dieser Schubverbund zu berücksichtigen ist.

4.1 Auszüge aus der Literatur und Normvorgaben

Laut der derzeit gültigen Norm (EC-1 [3]) kann die Schubsteifigkeit des Schotterkörpers durch nichtlineare Längsfedern berücksichtigt werden. In Abbildung 4.2 ist ein Auszug aus der Norm für ein Modell eines Gleis-/Tragwerksystems für eine dreifeldrige Struktur dargestellt. Dieses Modell dient eigentlich zur Berücksichtigung von Längskräften aus Bremsen und Anfahren. Es kann jedoch auch dazu verwendet werden, die versteifende Wirkung des Gleises zu berücksichtigen.

Für die horizontalen Federsteifigkeiten des Schotters wird das im ERRI Report [20] prognostizierte Schotterverhalten basierend auf einer bilinearen Beziehung, verursacht durch den Reibungseffekt, verwendet. Gemäß dieser Beziehung verhält sich der Schotter bis zu einer horizontalen Relativverschiebung von $u_0 = 0.002 \text{ m}$ linear elastisch, danach stellt sich ein plastisches Verhalten ein.



Legende

- (1) Gleis
- (2) Überbau (das Bild zeigt einen einzelnen Überbau mit zwei Feldern und einen Einfeldträger)
- (3) Erdbauwerk
- (4) Schienenauszug (wenn vorhanden)
- (5) nicht lineare Längsfedern stellen die Längsbelastung/das Verschiebeverhalten des Gleises dar
- (6) Längsfedern stellen die Steifigkeit K in Längsrichtung eines Festlagers dar, unter Berücksichtigung der Steifigkeit von Gründung, Stützen und Lagern usw.

Abbildung 4.2: Modell eines Gleis-/Tragwerksystems nach EC [3] Bild 6.19

Im Eurocode [3] wird der Scherwiderstand (Durchschubwiderstand) für ein unbelastetes Gleis ($F_V = 0 \text{ kN/lfm}$ Auflast) mit $F_0 = 20 \text{ kN/m}$ bis $F_0 = 40 \text{ kN/m}$ und für ein belastetes Gleis ($F_V = 80 \text{ kN/lfm}$ Auflast) mit $F_0 = 60 \text{ kN/m}$ angegeben (siehe Abbildung 4.3). Für gefrorenen Schotter bzw. für feste Fahrbahn wird die zugehörige Relativverschiebung auf $u_0 = 0.0005 \text{ m}$ reduziert.

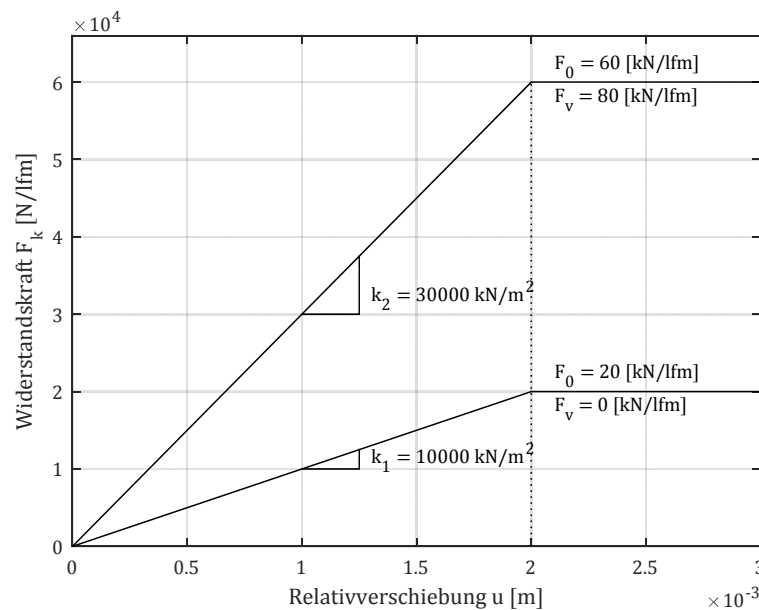


Abbildung 4.3: Verschiebungswiderstandsgesetz für ein Gleis in Längsrichtung gemäß ERRI [20]

Diese Kennwerte werden auch als Grundlage in etlichen Studien verwendet (vgl. [19], [57], [58], [94]). Durch die Angabe dieser Werte in der Norm scheint dies auch legitim. Andererseits wurden in weiteren Untersuchungen auch deutliche Abweichungen zu diesen Angaben festgestellt. So wurde aus Vergleichsrechnungen von Messungen in [119] ein etwas „weicheres“ Systemverhalten ermittelt. Der Übergang vom elastischen zum plastischen Verhalten wurde für ein unbelastetes Gleis bei $F_0 = 10 \text{ kN/lfm}$ (anstatt 20 kN/lfm) und einer Relativverschiebung von $u_0 = 0.003 \text{ m}$ (anstatt $0,002 \text{ m}$) bestimmt. Durch die geringere Schubsteifigkeit des Schotters verringert sich folg-

lich auch die Gesamtsteifigkeit des Systems. Die Vergrößerung des Grenzwertes der Relativverschiebung hat für die Berechnung durchaus positive Effekte. Bleibt die auftretende Relativverschiebung kleiner als der Grenzwert u_0 , so können die Reibungseigenschaften des Schotters als linear elastische Feder abgebildet und die nichtlinearen Eigenschaften in der Berechnung vernachlässigt werden. Entsprechend gehen etwa *Rocha et al.* in [57] vor.

Im Folgenden werden weitere Erkenntnisse aus der Literatur auszugsweise wiedergegeben. So sind im ERRI Report [20] die Ergebnisse von Untersuchungen über die Auswirkung des Gleises auf die Steifigkeit von Trägern angeführt. Die Untersuchungen wurden für Einfeldträger mit 5 m und 20 m Länge sowie für einen Durchlaufträger mit drei Feldern (10-18-10 m) durchgeführt. Dabei wurden folgende Ergebnisse erzielt:

...dass die versteifende Wirkung des Gleises bei kurzen und biegsamen Trägern höher ist. Insbesondere bei $L=5$ m und $L/f=1000$ ergab sich durch das Gleis eine um 23% höhere Steifigkeit. (siehe [20], Teil A, Seite 101)

Bei der betrachteten durchgehend gelagerten Brücke wurde keine nennenswerte Erhöhung der Steifigkeit vorausgesagt. (siehe [20], Teil A, Seite 101)

Mähr [4] stellte versuchstechnisch (an einer Versuchsbrücke ohne Vorland – Gleis endet am Tragwerksende) fest, dass die zusätzliche Steifigkeit, die durch den Schotteroberbau entsteht, nicht alleine aus der Biegesteifigkeit der Schiene herrührt. Vielmehr stellt der Schotter einen Teilverbund zwischen Brücke und Gleis her. Dazu werden das Tragwerk und der gesamte Schotteroberbau (Schotter, Schwellen und Schienen) als getrennte Biegebalken modelliert. Der Oberbaubalken weist nur die Biegesteifigkeit der beiden Schienen aber die Masse des gesamten Oberbaukörpers auf. Die Kopplung wurde durch eine Drehfeder und einen Drehdämpfer zwischen diesen beiden Balken abgebildet (in Abbildung 4.4 sind die Drehfeder und der Drehdämpfer durch Wegelemente mit einem Hebelarm dargestellt).

Mechanisches Modell für die Versuchsbrücke:

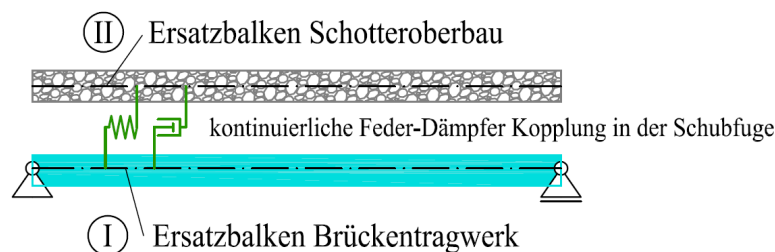


Abbildung 4.4: Mechanisches Modell der Versuchsbrücke von *Mähr* (*Mähr* [4] Abbildung 10.13)

Der Zusammenhang zwischen der Drehfedersteifigkeit k_φ und einer äquivalenten Wegfedersteifigkeit k_x ist dabei folgendermaßen definiert [4]:

$$k_\varphi = k_x (r_I + r_{II})^2 \quad (4.1)$$

Derselbe Zusammenhang gilt für die Drehdämpfung c_φ [4]:

$$c_\varphi = c_x(r_I + r_{II})^2 \tag{4.2}$$

Die beiden Werte r_I und r_{II} kennzeichnen den Schwerpunktabstand des jeweiligen Balkens zur Schubfuge. Diese Abstände können zum Schwerachsenabstand r der beiden Balken zusammengefasst werden. Um das nichtlineare Verhalten des Systems abzubilden, wurde eine nichtlineare Feder- bzw. Dämpferkopplung eingeführt. Aus den Versuchen ist auch ersichtlich, dass mit größer werdenden Amplituden die Nichtlinearität zunimmt. Aus dem in Abbildung 4.5 dargestellten Verlauf der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit zur Schwingungsamplitude ist ersichtlich, dass sich mit zunehmender Amplitude das System aufweicht. Es ist auch erkennbar, dass die Ergebnisse aus den Impulshammer-Versuchen gut in den quadratisch angepassten Amplituden-Frequenzen-Verlauf passen.

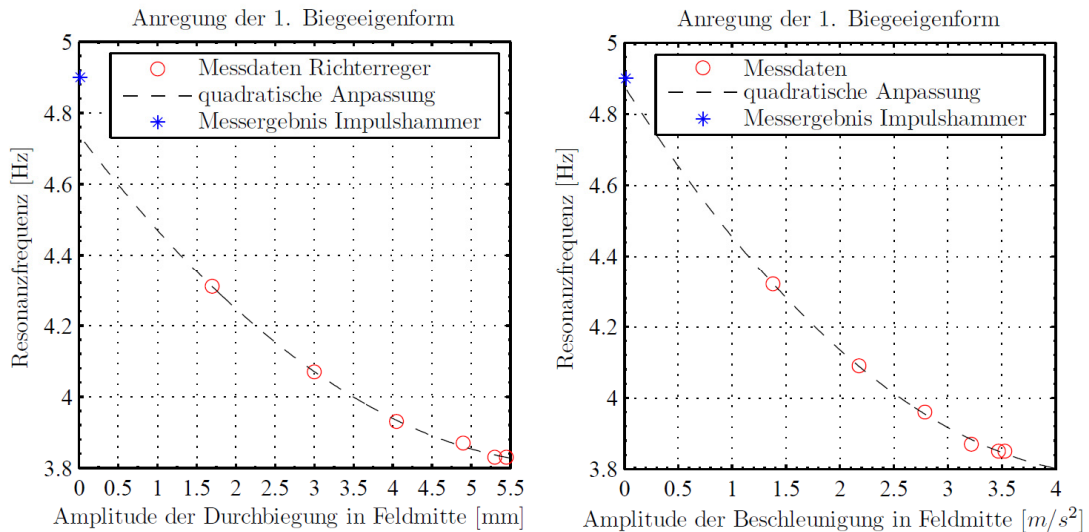


Abbildung 4.5: 1.Biegeeigenfrequenz in Abhängigkeit der Schwingungsamplitude (Mähr [4] Abbildung 9.19)

Die Dämpfung des unbelasteten Systems bleibt dagegen mehr oder weniger konstant (vgl. [4] Abbildung 9.11).

Für die Drehfedersteifigkeit wurde ein quadratisches Polynom des Querschnittsdrehwinkels φ angesetzt [4]:

$$k_\varphi = a + b|\varphi| + c \varphi^2 \tag{4.3}$$

Die Koeffizienten a, b und c wurden für das unbelastete Gleis aus einer Anpassung an die Messergebnisse folgendermaßen ermittelt.

$$a = 2,650 \cdot 10^7 \text{ Nm/m} \tag{4.4}$$

$$b = -3,904 \cdot 10^{10} \text{ Nm/m} \tag{4.5}$$

$$c = 1,936 \cdot 10^{13} \text{ Nm/m} \tag{4.6}$$

Um diese Werte mit dem Verschiebungswiderstandsverhalten lt. Eurocode (Abbildung 4.3) vergleichen zu können, wird die Drehfedersteifigkeit durch Division durch das Quadrat des Schwerachsenabstands $r = 0,97 \text{ m}$ auf eine Wegfedersteifigkeit umgerechnet. Durch eine Integration über die Relativverschiebung x (im Weiteren mit u bezeichnet) und Annahme der Lastfreiheit bei einer Nullverschiebung, ergibt sich der Verlauf der Scherkraft F_k zu:

$$F_k = \frac{1}{r^2} \left(a u + b \frac{u^2}{2} + c \frac{u^3}{3} \right) \quad (4.7)$$

Der Bereich der Messergebnisse und damit der Gültigkeit wird von *Mähr* [4] mit einem maximalen Drehwinkel von

$$|\varphi|_{max} = 1,71 \cdot 10^{-3} \quad (4.8)$$

angegeben. Der so ermittelte Verschiebungswiderstandsverlauf und die in u umgerechnete Gültigkeitsgrenze ($u_{Grenz} = r |\varphi|_{max} = 1,66 \cdot 10^{-3} \text{ m}$) sind in Abbildung 4.6 dargestellt.

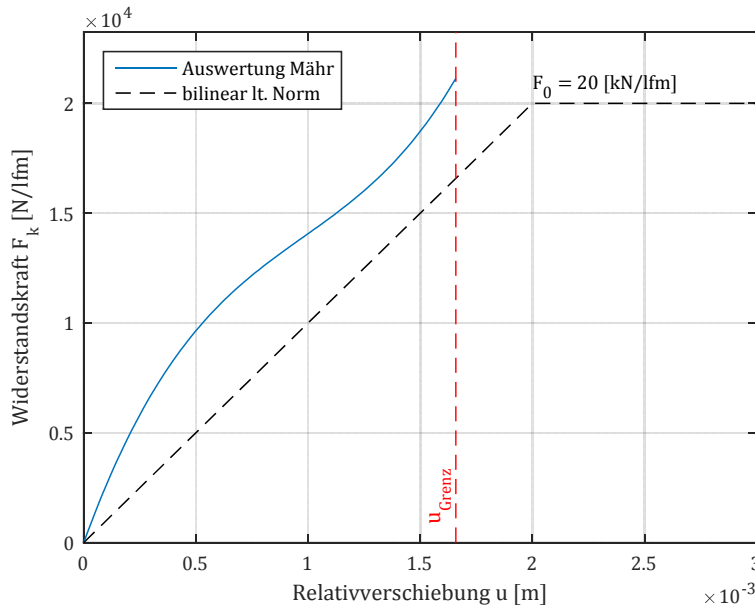


Abbildung 4.6: Verschiebungswiderstandsverlauf des unbelasteten Gleises aus den Versuchen von *Mähr* [4]

Wie man aus dieser Abbildung erkennen kann, ist der aus den Versuchen von *Mähr* ermittelte Schubwiderstandsverlauf gar nicht so weit vom normativ vorgegebenen Verlauf entfernt. Es ist jedoch anzumerken, dass die Anfangssteigung (=Anfangssteifigkeit) aus den Versuchen mehr als doppelt so groß wie nach Norm ist. Außerdem ergibt sich aus dieser Anpassung keine Obergrenze der Widerstandskraft, sprich kein Wert für den Durchschubwiderstand.

Mähr hat auch Versuche mit einem belasteten Gleis durchgeführt. Dabei wurden in vier regelmäßigen Abständen über Pressen vier fiktive Achslasten von 120 kN bzw. 240 kN aufgebracht. Daraus ergibt sich eine Auflast von $F_v = 48 \text{ kN/lfm}$ bzw. $F_v = 96 \text{ kN/lfm}$. Da das Gleis der Versuchsbrücke lose Enden aufweist, kann nicht davon ausgegangen werden, dass sich das exakt gleiche Systemverhalten wie bei einem „realen“ Tragwerk einstellt. Dies gilt besonders für die vorge-

spannten Versuche. Prinzipielle Aussagen können jedoch getroffen werden. Die Verläufe der Verschiebungswiderstände aus den Versuchen sind in Abbildung 4.7 den Angaben der Norm gegenübergestellt.

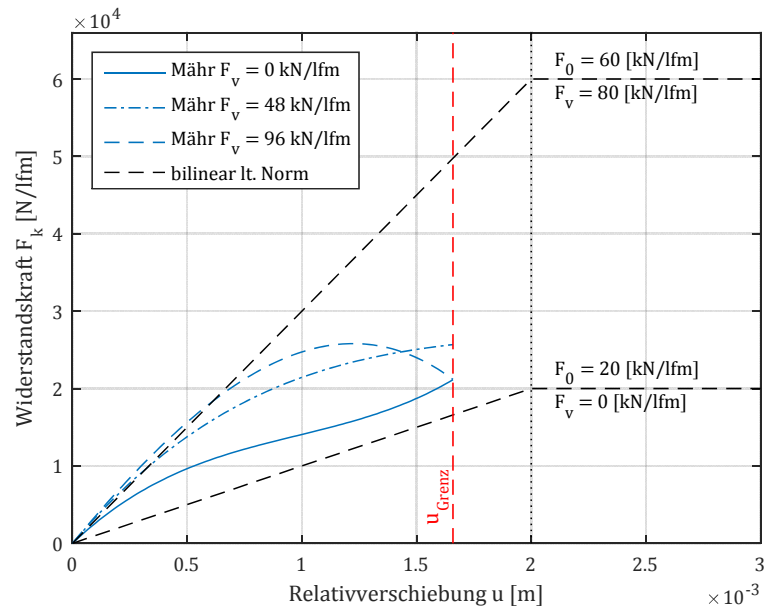


Abbildung 4.7: Vergleich der Verschiebungswiderstände von *Mähr* [4] und lt. Norm [3]

In der Darstellung fällt auf, dass für das belastete Gleis in den Versuchen wesentlich geringere Schubwiderstandskräfte ermittelt wurden als lt. Norm zu erwarten gewesen wäre. Des Weiteren sind die höheren Anfangssteifigkeiten auch für die Versuche mit dem belasteten Gleis kennzeichnend.

Battini et al. [72] stellt ein einfaches finites Element vor das die Eigenschaften des Schotters durch ein nichtlineares Reibungsgesetz beschreibt. Der Gleiskörper wird als Biegebalken dargestellt. Die Steifigkeitswirkung des Schotters wird dabei durch die Scherkraft in der Fuge zwischen Gleis und Brücke beschrieben. Die Scherkraft entsteht durch die Reibung zufolge der Relativverschiebung zwischen Tragwerk und Gleis. Das Element entspricht also der Modellbildung nach Eurocode. Die Parameter g_0 und F_0 beschreiben dabei das bilineare Reibungsgesetz. g_0 steht für die Relativverschiebung in der Gleitfuge beim Übergang zum plastischen Schubverhalten und ist somit gleichbedeutend mit u_0 . Der maximale Reibwiderstand pro Laufmeter wird hier mit F_0 (Durch Schubwiderstand) bezeichnet. Die Größe dieser Parameter wurde an Messungen angepasst. Für die von *Mähr* durchgeführten Messungen an der 10 m langen Versuchsbrücke (beschrieben in [120] und [4]) folgen die Schotterparameter zu [72]:

$$g_0 = 7.30 \cdot 10^{-4} m \quad \text{und} \quad F_0 = 1.45 \cdot 10^4 N/m. \quad (4.9)$$

Das zweite untersuchte Tragwerk ist eine 36 m lange Verbundbrücke in Schweden. Für dieses Tragwerk ergaben sich [72]:

$$g_0 = 2.103 \cdot 10^{-5} m \quad \text{und} \quad F_0 = 6685 N/m. \quad (4.10)$$

Diese Ergebnisse sind in Abbildung 4.8 grafisch dargestellt. Interessant ist, dass in beiden aus den Versuchsergebnissen ermittelten Widerstandsverläufen der Durchschubwiderstand doch beträchtlich kleiner als 20 kN/lfm ist. Der Verlauf, der sich aus dem Reibungsmodell für die von *Mähr* untersuchte Versuchsbrücke ergibt, wirkt bei einem Vergleich der von *Mähr* durchgeführten Auswertung (vgl. Abbildung 4.6) sehr plausibel. Bei den Ergebnissen für die Verbundbrücke fällt besonders der sehr niedrige Wert der Relativverschiebung beim Auftreten von Durchrutschen auf. Es sei noch erwähnt, dass bei den Messungen, die der Auswertung zu Grunde liegen, die Versuchsbrücke etwa 10 mal höhere Vertikalbeschleunigungen erfahren hat als die Verbundbrücke.

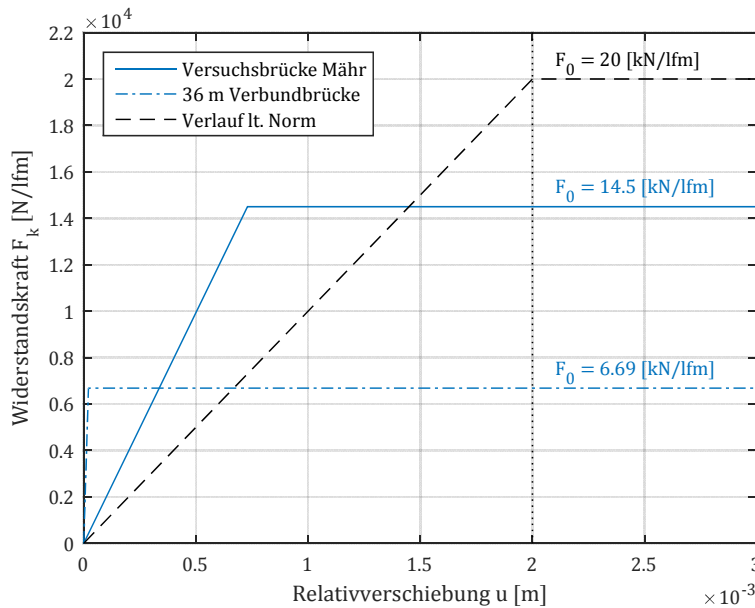


Abbildung 4.8: In [72] ermittelte Kennwerte für das bilineare Reibungsgesetz

Die Steifigkeitsabnahme mit Zunahme der Relativverschiebung wurde in etlichen Untersuchungen festgestellt. So konnte auch *Rauert* bei der von ihm untersuchten Versuchsbrücke nach einer Impulsanregung des Tragwerks (Schotterkörper ohne Gleis) ein eindeutig nichtlineares Ausschwingverhalten feststellen (vgl. [19], Bild 4.10). Mit abklingender Amplitude erhöhte sich dabei die Schwingungsfrequenz. Da das linear elastische Verhalten von Stahl gut bekannt ist, kann davon ausgegangen werden, dass die Nichtlinearität seinen Ursprung im Schotter hat. Die Nichtlinearität des Schotterbetts ist auch aus [121], Fig. 6 (a) gut ersichtlich. Darin ist dargestellt, wie nach einer Zugüberfahrt die Schwingungsfrequenz mit Abnahme der Amplitude zunimmt.

Einen etwas anderen Zugang, die Schubsteifigkeit des Schotters zu berücksichtigen, wurde von *Bigelow et al.* [94] oder von *Schobesberger* [9] gewählt. Sie berücksichtigen die Einspannwirkung des Gleiskörpers durch Drehfedern an den Auflagern, dargestellt in Abbildung 4.9.

Bei bekannter Federsteifigkeit kann dann etwa mit Gleichung (3.44) die erste Biegeeigenfrequenz des Tragwerks ermittelt werden. Zur Bestimmung dieser Drehfedersteifigkeit wurden jedoch vollkommen unterschiedliche Zugänge verwendet.

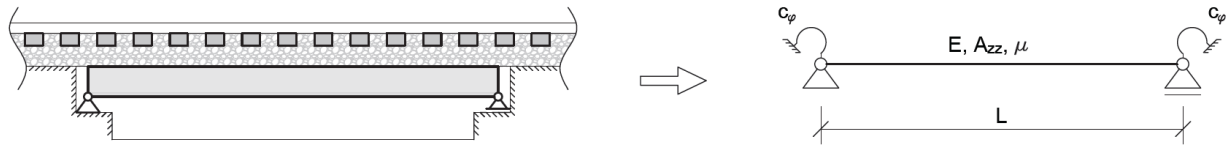


Abbildung 4.9: Einspannwirkung des Schotteroberbaus durch Drehfedern abgebildet

Bigelow *et al.* konzentriert sich rein auf die Dehnsteifigkeit des Gleiskörpers im Vorlandbereich. Diese setzt sich aus einer Kombination aus der Dehnung der Schienen und der Schotterfedern zusammen. Die Charakteristik der Schotterfedern ist dabei gemäß den Normangaben (Abbildung 4.3) definiert. Der Gleiskörper im Vorlandbereich wird durch eine horizontale Ersatzfeder ersetzt, welche auf der Höhe des Schienenschwerpunkts Schubstarr an den Brückenbalken angeschlossen wird (vgl. Abbildung 4.10). Die Schubnachgiebigkeit des Schotterkörpers am Brückentragwerk wird dadurch nicht berücksichtigt.

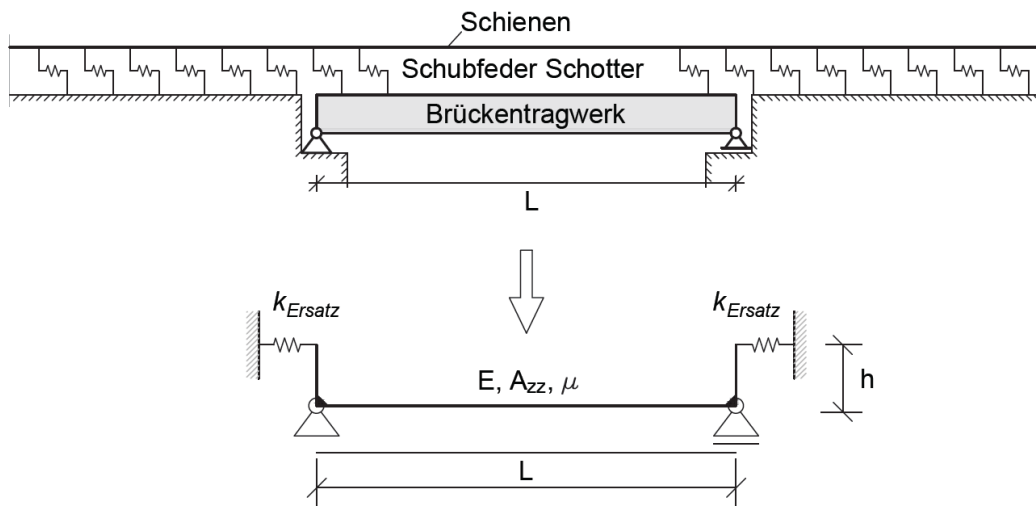


Abbildung 4.10: Ersetzen des Vorlandbereichs durch eine Ersatzfeder

Die Drehfedersteifigkeit für dieses Modell ergibt sich somit aus der Ersatzfedersteifigkeit des Gleises und dem Hebelarm h zwischen Schienenschwerpunkt und Lagerdrehpunkt,

$$c_{\varphi} = k_{Ersatz} h^2 \tag{4.11}$$

Dem von Schobesberger verwendeten Modell liegt ein etwas anderer Ansatz zugrunde. Hier wird basierend auf einem reinen Scherverhalten (kein elastischer Bereich) ein oberer Grenzwert für die ins Tragwerk weitergeleitete Schubkraft F_R ermittelt (Auf die Ermittlung des Scherwiderstandes wird im nächsten Abschnitt genauer eingegangen.). Unter der Annahme, dass keine Horizontalkräfte wirken, ist die Relativverschiebung zwischen Tragwerk und Gleiskörper in Brückenmitte gleich Null. Die maximale Einleitungslänge L_v , die zur Schubübertragung von der Schiene in das Tragwerk genutzt werden kann, ist jeweils die halbe Brückenlänge (vgl. Abbildung 4.11), da in der Tragwerksmitte die Wirkungsrichtung der Schubkraft wechselt.

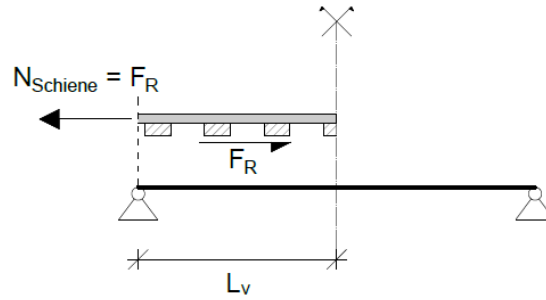


Abbildung 4.11: Schubeinleitungslänge eines Auflagers [9]

Die maximale Schubkraft ergibt sich somit zu:

$$F_R = F_0 L_v = F_0 L/2 \quad (4.12)$$

Als Basis für die erforderliche Verformung, um aus einer Kraft eine Federsteifigkeit abzuleiten, dient die Schienendehnung. Essenziell hierfür ist die Dehnlänge L_ϵ der Schienen. Der verwendete Ansatz ist relativ simpel. Die gleiche Länge, die am Tragwerk für die Lasteinleitung in die Schiene zur Verfügung steht, wird auch im Vorlandbereich zur Lastabgabe (von der Schiene in den Untergrund) angesetzt. In Abbildung 4.12 ist die resultierende Dehnlänge L_ϵ für die maximal übertragbare Schubkraft dargestellt.

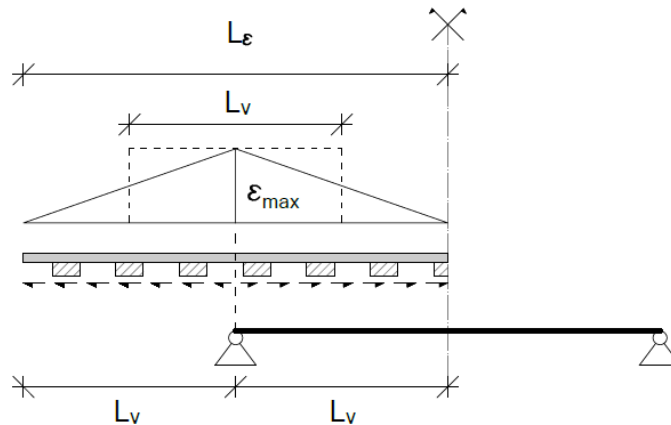


Abbildung 4.12: Dehnlänge der Schienen [9]

Für die Auflagerverdrehung bzw. Durchbiegung, bei der die maximale Schubkraft erreicht wird, erhält man als Dehnlänge L_ϵ die Balkenlänge L . Da sich die Schienenkraft über die Dehnlänge linear auf- und abbaut, kann die Gesamtdehnung Δl (in Abbildung 4.13 mit d bezeichnet) folgendermaßen ermittelt werden:

$$\Delta l = \frac{F_R L_v}{EA_{\text{Schienen}}} \quad (4.13)$$

Zur Bestimmung des zugehörigen Auflagerdrehwinkels φ wird der Abstand h zwischen Drehpunkt und Wirkungslinie der Schienennormalkraft benötigt, siehe Abbildung 4.13. Dabei stellt sich die Frage, welcher Punkt als Drehpunkt angenommen wird, mehr dazu in Kapitel 4.3.1.

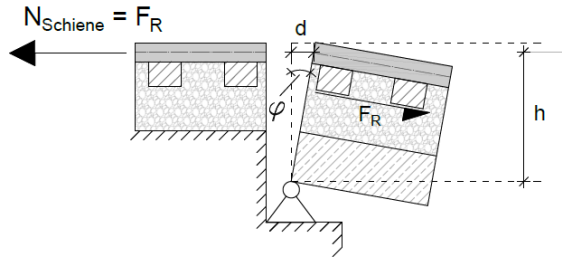


Abbildung 4.13: Auflagerdrehwinkel φ [9]

Von kleinen Verdrehungen ausgehend, kann der Drehwinkel bei Erreichen der maximal übertragbaren Schubkraft ermittelt werden:

$$\varphi = \frac{\Delta l}{h} \tag{4.14}$$

Durch das Einführen einer Drehfeder wird auch bei diesem Konzept von einer schubstarreren Krafteinleitung am Auflager ausgegangen. Der Ansatz der Schubeinleitung über die Tragwerkslänge wird hier nur als Hilfsmittel zur Bestimmung der Schienenkraft verwendet. Die Drehfedersteifigkeit erhält man durch Division des Momentes, das die Schienenkraft um den Drehpunkt erzeugt, durch den zugehörigen Auflagerdrehwinkel:

$$c_\varphi = \frac{F_R h}{\varphi} \tag{4.15}$$

Setzt man nun (4.13) und (4.14) in (4.15) ein, so sieht man, dass in diesen Ansatz nur die Dehnsteifigkeit der Schienen und der Höhenversatz h eingehen,

$$c_\varphi = \frac{F_R h}{\varphi} = \frac{F_R h^2}{\Delta l} = \frac{h^2 EA_{\text{Schienen}}}{L_v} \tag{4.16}$$

Wird die Auflagerverdrehung größer als zur Aktivierung der vollen Schubeinleitungslänge notwendig, so wird keine zusätzliche Kraft an das Tragwerk übertragen. Es nimmt zwar die Schienendehnung zu und somit erhöht sich auch die Normalkraft in den Schienen, es können jedoch keine weiteren Kräfte über den Schotter an das Tragwerk übertragen werden. In Abbildung 4.14 ist der Dehnungsverlauf der Schienen für 50, 100 und 150 % der Schienenkraft N_S dargestellt.

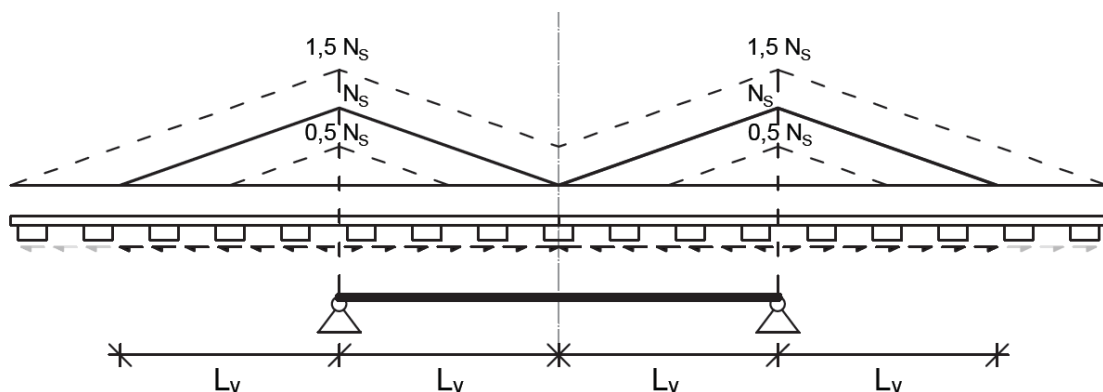


Abbildung 4.14: Schienendehnung für unterschiedliche Durchbiegungen

Mit zunehmendem Drehwinkel würde sich die Drehfeder aufweichen. Da Schobesberger dieses Konzept nur verwendet hat um eine Obergrenze der Einspannwirkung zu bestimmen, wurde diese Systemaufweichung nicht berücksichtigt.

Für UIC 60 Schienenprofile ergibt sich aus (4.16) die Obergrenze der Drehfedersteifigkeit zu:

$$c_{\varphi} = \frac{h^2}{L_v} 3,15 \cdot 10^9 \text{ [Nm/rad]} \quad (4.17)$$

Für ein unbelastetes Gleis ergibt sich nach *Bigelow et al.* [94] die Ersatzsteifigkeit des Gleises je nach Vorlandlänge zwischen 172,6 und 176,7 kN/mm. Wodurch sich aus (4.11) eine Drehfedersteifigkeit von

$$c_{\varphi} \approx h^2 1,73 \cdot 10^8 - h^2 1,77 \cdot 10^8 \text{ [Nm/rad]} \quad (4.18)$$

ergibt. Nach diesem Konzept hat die Tragwerkslänge kaum einen Einfluss auf die Dreheinspannung.

Einen großen Einfluss auf die Steifigkeit des Schotteroberbaus hat die Umgebungstemperatur, speziell wenn sie unter dem Gefrierpunkt liegt und es zur Vereisung kommt. Dieses Thema wird etwa von *Kirchhofer* [24] durch Versuche aufgezeigt. Spezifischere Aussagen dazu werden von *Salcher et al.* [59] getätigt. So wird der E-Modul von nicht gefrorenem Schotter mit $E = 0,177 \text{ GPa}$ angegeben. Für vollständig durchgefrorenen Schotter wird der E-Modul auf $E = 9,45 \text{ GPa}$ erhöht. Dieser Zustand wird lt. *Salcher* im Durchschnitt etwa bei $-6,3^{\circ} \text{ C}$ erreicht. Die Steigerung der Steifigkeit tritt annähernd sprunghaft auf. Die extreme Steigerung des E-Moduls von Schotter im gefrorenen Zustand führt zu einer entsprechenden Erhöhung der Biegesteifigkeit des Tragwerks, was gleichbedeutend mit der Erhöhung der Eigenfrequenzen ist. Für die in [59] verwendete Beispielbrücke mit knapp 17 m Spannweite ergibt sich eine Erhöhung der Eigenfrequenzen von bis zu 20 %.

4.2 Scherwiderstand aus Schotterkennwerten

Die Schienen sind über den Schotterkörper und die Schwellen mit dem Tragwerk verbunden. Hierbei handelt es sich jedoch um keinen vollständigen Verbund. Entscheidend für die Mitwirkung der durchgehenden Schienen an der Biegesteifigkeit des Tragwerks ist die Schubkraft, die durch den Gleisschotter übertragen werden kann. Für die übertragbare Schubkraft wird meist ein bilineares Reibungsgesetz angenommen (vgl. Abbildung 4.3). Die maximal übertragbare Schubkraft pro Laufmeter Gleis wird dabei durch den Durchschubwiderstand F_0 begrenzt. Ab dieser Grenzkraft tritt demnach ein plastisches Verformen (Durchrutschen oder Abscheren) in der Scherfuge auf. Wie in Abbildung 4.15 dargestellt, gibt es zwei potentielle Ebenen, in denen eine Scherfuge auftreten kann. Das wäre zum einen die Ebene, in der die Schubkraft vom Schotterkörper an das Tragwerk übergeben wird und zum anderen die Kontaktfläche zwischen Schwelle und Schotter. Heut-

zutage kommen in vielen Fällen Unterschottermatten zum Einsatz, die den Reibungswinkel zwischen Tragwerk und Schotter erhöhen. Des Weiteren wirkt, zufolge der Belastung durch den Schotterkörper, in der unteren Fuge stets eine höhere Normalspannung als an der oberen Scherfuge. Daher wird davon ausgegangen, dass die Relativbewegungen zwischen Gleis (Schiene und Schwellen) und Tragwerk in der oberen Scherfuge (an der Unterseite der Schwellen) auftreten. Dieser Effekt wurde von *Hackl* in [122] anhand eines Modellversuchs gezeigt.

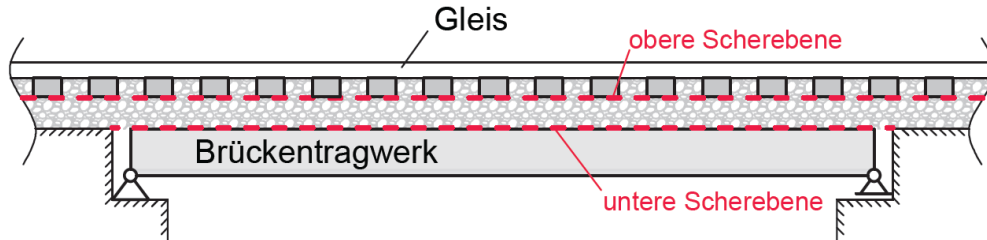


Abbildung 4.15: Potentielle Scherfugen im Schotterbett

Der Scherwiderstand τ_f kann durch das in Gleichung (4.19) angeführte *Coulombsche* Gesetz beschrieben werden.

$$\tau_f = c + \sigma \tan \varphi \tag{4.19}$$

Dabei steht c für den Haftwiderstand (Kohäsion bei bindigen Böden), σ für die Vertikalspannung und φ für den Reibungswinkel. Nicht bindige Böden weisen im Allgemeinen keine Kohäsion auf. *Klotzinger* gibt in [123] Haftwiderstände resultierend aus einer Kornverzahnung an. Die Werte stammen aus Versuchen mit einem Großschergerät. Als ursprüngliche Quelle wird jedoch lediglich auf die TU Graz verwiesen. Da diese Werte sehr hoch erscheinen und keine genauere Verifikation der Quelle durchgeführt werden konnte, sind diese Kennwerte hier zwar angeführt, über deren Ursprung und Anwendungsbereich kann jedoch keine Aussage getätigt werden. In Tabelle 4.1 sind Angaben zu den Haftwiderständen und zum Reibungswinkel von Schotter dargestellt.

Bezeichnung	c [N/cm ²]	φ [°]	Quelle
Kies, gleichförmig, enggestuft, dicht	0	37,5 - 40	[124]
Kies, gleichkörnig	0	34 - 42	[125]
Kies, sandig, wenig Feinkorn	0	35 - 45	[125]
Rundkies	4,2 (Verzahnung)	57,4	[123]
Aufbereiteter Schotter	9,2 (Verzahnung)	65,2	[123]

Tabelle 4.1: Scherwiderstandsparameter für Gleisschotter aus unterschiedlichen Quellen

Für die Ermittlung des Scherwiderstandes in der oberen Ebene (Unterkante Schwelle) wird zwischen zwei Bereichen unterschieden. Der Bereich A unter den Schwellen und der Bereich B zwischen den Schwellen, dargestellt in Abbildung 4.16. Die resultierenden Scherwiderstände pro Laufmeter Gleis sind in Tabelle 4.2 für ein unbelastetes Gleis und in Tabelle 4.3 für ein belastetes angegeben. Für die Schwellen wird dabei vereinfachend eine durchschnittliche Breite von 26 cm und eine Höhe von 20 cm angenommen. Der Achsabstand der Schwellen beträgt 60 cm. Für das

Schienenprofil UIC 60 wird ein Gewicht von 60 kg/m angesetzt. Das Schotterbett wird mit einer Höhe von 20 cm über Schwellenunterkante und einer Wichte von 19 kN/m³ gewählt. Für den Bereich A unter der Schwelle wird anstelle des inneren Reibungswinkel φ der Wandreibungswinkel δ angesetzt. Dieser wird mit einer Größe zwischen $\varphi/3$ und $\varphi/2$ gewählt. Für den unbelasteten Zustand (Tabelle 4.2) wird das Eigengewicht des Gleiskörpers bis Schwellenunterkante als Auflast angesetzt. Als Grundlage für den belasteten Zustand (Tabelle 4.3) dient eine Taurus Lokomotive mit einer Last von vier Achsen zu je 215 kN, verteilt auf eine Länge über Puffer von etwa 19,3 m (ca. 44,6 kN/lfm). Ein Vergleich mit den typischen Radsatzlasten von Hochgeschwindigkeitszügen (siehe Abschnitt 2.4) zeigt, dass diese Belastung wohl deutlich über der Durchschnittsbelastung während der Überfahrt eines Hochgeschwindigkeitszuges liegt. Die in der Norm angegebene Streckenlast von 80 kN/lfm für ein belastetes Gleis ist fast doppelt so hoch und kann maximal als Grenzwertbetrachtung herangezogen werden. Für die Auswertung der möglichen Scherwiderstände in Tabelle 4.3 wird daher mit 44,6 kN/lfm gerechnet.

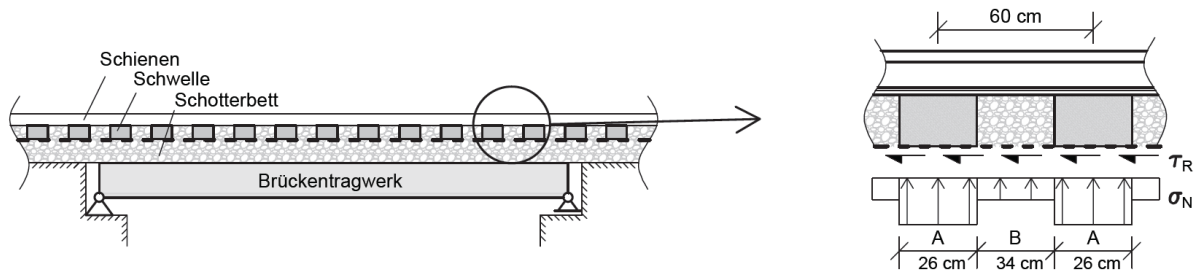


Abbildung 4.16: Scherkraft zwischen Gleiskörper und Schotter

Unter Berücksichtigung der von *Klotzinger* angegebenen Werte für die Schotterverzahnung (lt. Tabelle 4.1) ergibt sich bei unbelasteten Gleisen, rein aus der Verzahnung, ein Scherwiderstand zwischen 100 kN und 240 kN pro Laufmeter Gleis. Diese Werte scheinen sehr hoch. Des Weiteren kann wohl davon ausgegangen werden, dass sich durch die dynamische Belastung etwaige Blockierungen in kürzester Zeit lösen, weshalb diese Werte nicht als realistisch betrachtet werden. Die Auswertung für die sehr hohen Kennwerte von *Klotzinger* [123] erfolgt daher nur informativ. Für das belastete Gleis wird ein Großteil des Scherwiderstandes in der Kontaktfläche zwischen Schwelle und Schotter generiert.

	$c = 0,$ $\varphi = 35^\circ,$ $\delta = \varphi/3$		$c = 0,$ $\varphi = 45^\circ,$ $\delta = \varphi/2$		$c = 40 \text{ kN/m},$ $\varphi = 57^\circ,$ $\delta = \varphi/3$		$c = 90 \text{ kN/m},$ $\varphi = 65^\circ,$ $\delta = \varphi/2$	
Bereich	A	B	A	B	A	B	A	B
Fläche [m ²]	1,13	1,47	1,13	1,47	1,13	1,47	1,13	1,47
Belastung [kN/lfm]	6,83	5,60	6,83	5,60	6,83	5,60	6,83	5,60
Normalspannung σ [kN/m ²]	6,07	3,80	6,07	3,80	6,07	3,80	6,07	3,80
Scherwiderstand τ [kN/m ²]	1,25	2,66	3,50	3,80	2,09	45,85	5,72	98,15
Scherkraft [kN]	1,41	3,92	3,95	5,60	2,35	67,55	6,45	144,6
Scherkraft F_0 [kN/lfm]	5,33		9,54		69,91		151,0	

Tabelle 4.2: Scherwiderstände pro Laufmeter Gleiskörper (unbelastet)

	$c = 0,$ $\varphi = 35^\circ,$ $\delta = \varphi/3$		$c = 0,$ $\varphi = 45^\circ,$ $\delta = \varphi/3$		$c = 40 \text{ kN/m},$ $\varphi = 57^\circ,$ $\delta = \varphi/3$		$c = 90 \text{ kN/m},$ $\varphi = 65^\circ,$ $\delta = \varphi/3$	
Bereich	A	B	A	B	A	B	A	B
Fläche [m ²]	1,13	1,47	1,13	1,47	1,13	1,47	1,13	1,47
Belastung [kN/lfm]	51,43	5,60	51,43	5,60	51,43	5,60	51,43	5,60
Normalspannung σ [kN/m ²]	45,65	3,80	45,65	3,80	45,65	3,80	45,65	3,80
Scherwiderstand τ [kN/m ²]	9,43	2,66	26,36	3,80	15,72	45,85	43,07	98,15
Scherkraft [kN]	10,62	3,92	29,70	5,60	17,71	67,55	48,52	144,6
Scherkraft F_0 [kN/lfm]	14,5		35,3		85,3		193,1	

Tabelle 4.3: Scherwiderstände pro Laufmeter Gleiskörper (belastet)

Aus der letzten Zeile in Tabelle 4.2 ist ersichtlich, dass für das unbelastete Gleis eine Berechnung nach dem *Coulombschen* Gesetz wesentlich geringere Scherkräfte als die in der Norm angegebenen Durchschubwiderstände ermittelt werden.

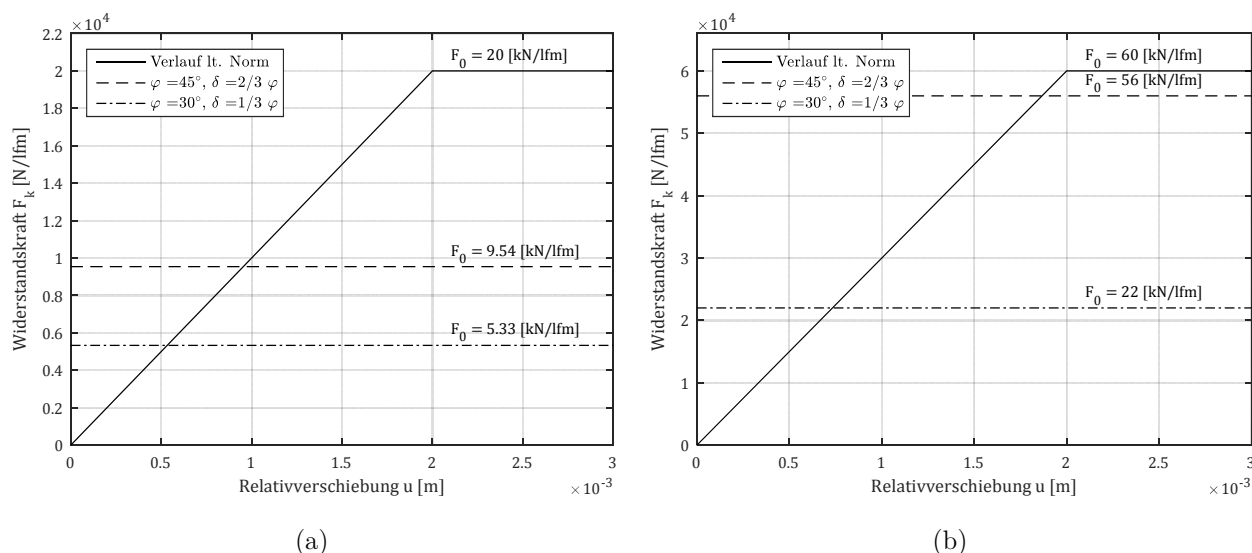


Abbildung 4.17: Scherkräfte für (a) unbelastete und (b) belastete Gleise

Um auch die Scherkraft des belasteten Gleises vergleichen zu können, wird eine Berechnung mit einer Auflast von 80 kN/lfm durchgeführt. Für die Schotterkennwerte aus der ersten und zweiten Spalte von Tabelle 4.3 ergeben sich die Scherkräfte zu $F_0 = 22 \text{ kN/lfm}$ und $F_0 = 56 \text{ kN/lfm}$. Die Werte für einen Gleitwinkel von $\varphi = 45^\circ$ und einem Wandreibungswinkel von $\delta = 2/3 \varphi$ stimmen also gut mit den vorgegebenen Wert von $F_0 = 60 \text{ kN/m}$ überein. Je nach den Kennwerten des tatsächlich vorhandenen Materials kann dieser Wert jedoch beträchtlich niedriger sein. Dargestellt sind diese Grenzwerte in Abbildung 4.17. Aus der Berechnung des Abscherwiderstandes kann jedoch keine Aussage über die Relativverschiebung beim Eintritt der plastischen Verformung gemacht werden.

4.2.1 Erkenntnisse zur Schubsteifigkeit des Schotters aus *Povse* [126]

Ende der 1970er führte *Povse* [126] an der TU Graz Versuche zum dynamischen Scherverhalten von Eisenbahnschotter durch. Dabei wurden statische und dynamische Versuche durchgeführt. Dynamisch wurde das Scherverhalten des Gleisschotters unter einer stoßartigen Horizontalbelastung – durch einen Fallhammer aufgebracht – getestet. Für die statischen Untersuchungen wurde eine Horizontallast durch einen hydraulischen Zylinder aufgebracht, 60 s gehalten und dann wieder weggenommen. Da sich zu Beginn Verdichtungseffekte einstellten, wiederholte man diesen Zyklus mehrmals und verwendete die Messungen erst nach dem zwanzigsten Zyklus. Für die Versuche kamen unterschiedliche Kombinationen aus Auflast (Normalspannung) und Horizontallast (Schubspannung) zum Einsatz. Das getestete Material (*Basaltschotter der Körnung 1: 30 – 60 mm Korndurchmesser*) befand sich in einer Scherbüchse mit den Abmessungen von 500/500/200 mm. Dabei wurden sowohl für die statische als auch für die dynamische Versuchsdurchführung festgestellt, dass sich der Scherweg aus einem elastischen und einem plastischen Teil zusammensetzt. Nach einer gewissen Verdichtungsphase (kleiner als 10 Lastzyklen) beträgt der elastische Anteil ein Vielfaches des plastischen. Der elastische Scherweg verringert sich mit jedem Lastzyklus. Es ist anzunehmen, dass der Scherweg gegen einen bestimmten Wert konvergiert, die statischen Versuche wurden jedoch nicht bis zum Konstantbleiben des elastischen Scherweges durchgeführt.

Da für die Stoßbelastung keine Schubkräfte gemessen wurden, wurden die Verhältnisse $\tan \varphi = \tau_0 / \sigma_0$ aus einer angenommenen Stoßzeit t rückgerechnet. Da es sich dabei nur um eine Schätzung handelt, werden diese Werte hier nicht näher angeführt.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass es sich hierbei nicht um klassische Scherversuche handelt, sondern, unter einem vorgegebenen Verhältnis von Schubspannung zu Normalspannung, die auftretende Scherverformung gemessen wurde. Es tritt kein Scherversagen auf und nur ein geringer Teil der auftretenden Verformungen sind plastisch (<4,5 %). Somit stellen die hier ermittelten Winkel φ nicht die Reibungswinkel, sondern Mindestmaße der tatsächlichen Reibungswinkel dar.

Die statischen Versuche wurden jeweils für drei unterschiedliche Normalspannungs- und vier Schubspannungszustände durchgeführt. Die daraus resultierenden Spannungsverhältnisse $\tan \varphi = \tau_0 / \sigma_0$ sind in Tabelle 4.4 dargestellt. Berechnet man aus diesen Spannungsverhältnissen einen äquivalenten Mindestreibungswinkel $\varphi_{\text{äqu}}^*$, so ergibt sich für das maximale Verhältnis von 2,07 ein Wert von $\varphi_{\text{äqu}}^* = 64^\circ$. Interessanterweise liegt dieser Maximalwert des Mindestreibungswinkels in der Größenordnung der von *Klotzinger* [123] mit Verweis auf die TU Graz angegebenen Werte. Die Vermutung liegt somit nahe, dass die „relativ hohen“ Schotterkennwerte von *Klotzinger* mit demselben Versuchsapparat durchgeführt wurden, den auch *Povse* verwendet hat. Setzt man den maximalen Korndurchmesser von 60 mm mit der Seitenlänge der Versuchsanlage ins Verhältnis, so ergibt sich ein Wert von mehr als 1/10. Es stellt sich somit die Frage, ob sich eine tatsächliche

Scherfuge überhaupt ausbilden konnte. Durch Blockiereffekte könnte dadurch ein wesentlich steiferes Materialverhalten prognostiziert worden sein als beim Auftreten einer wirklichen Scherfuge in einem Schotteroberbau tatsächlich vorhanden ist.

σ_0	τ_0	7,5 [N/cm ²]	15,2 [N/cm ²]	23,2 [N/cm ²]	31,2 [N/cm ²]
15,1 [N/cm ²]		0,50	1,01	1,54	2,07
23,4 [N/cm ²]		0,32	0,65	0,99	1,33
31,2 [N/cm ²]		0,24	0,49	0,74	1,00

Tabelle 4.4: Spannungsverhältnisse $\tan \varphi = \tau_0 / \sigma_0$ der statischen Versuche aus [126]

Nichtsdestotrotz sind die Ergebnisse der statischen Versuche aus [126] in Abbildung 4.18 dargestellt. Dabei wurde die aufgebrachte Schubspannung τ_0 dem gemessenen elastischen Scherweg gegenübergestellt. Die abgebildeten Werte gelten für den elastischen Anteil des Scherweges nach 40 Lastwechsel. Gut erkennbar ist für alle drei Normalspannungswerte die höhere Anfangssteifigkeit.

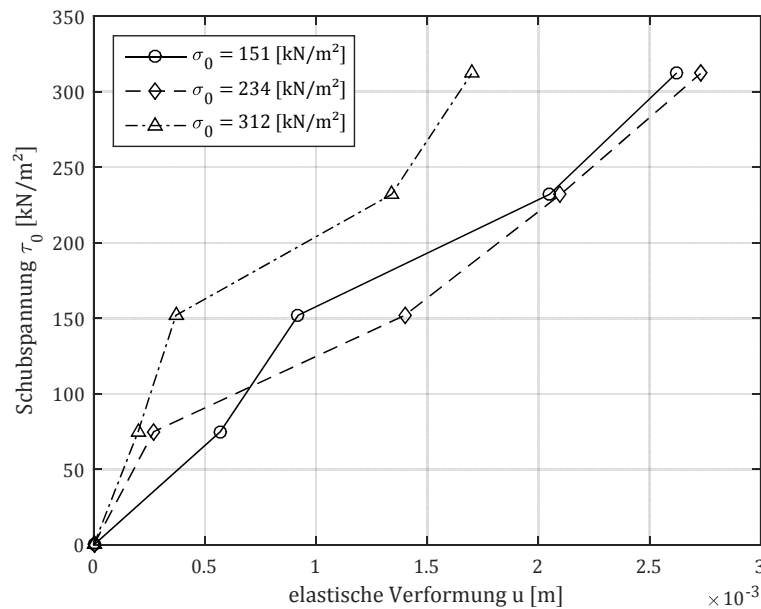


Abbildung 4.18: Schubspannung-Scherweg(elastisch)-Diagramm aus den statischen Versuchen in [126]

Um die Ergebnisse besser mit den Verschiebungswiderständen aus anderen Untersuchungen vergleichen zu können, werden die Normal- und Schubspannungen gemäß dem Schema in Tabelle 4.3 in äquivalente Auflasten F_v und Widerstandskräfte F_k pro Laufmeter Gleis umgerechnet. Der Anteil des Schotterkörpers zwischen den Schwellen an der Widerstandskraft wird dabei vernachlässigt. Die daraus erhaltenen Verläufe sind in Abbildung 4.19 den Angaben der Norm [20] gegenübergestellt. Es ist hier eindeutig ersichtlich, dass das Auflastniveau der Versuche von *Pouse* [126] deutlich über dem für Eisenbahngleise relevanten Bereich liegt, daher ist ein Vergleich der Ergebnisse schwierig. Gerade für geringere Verformungen (<0,5 mm) ist eine erhöhte Anfangssteifigkeit ersichtlich. Da sich aber, wie bereits erwähnt, durch das geringe Verhältnis von Scherkastengröße zu Korngröße, gewisse Blockiereffekte einstellen können, scheint eine weitere Interpretation der Ergebnisse nicht zweckmäßig.

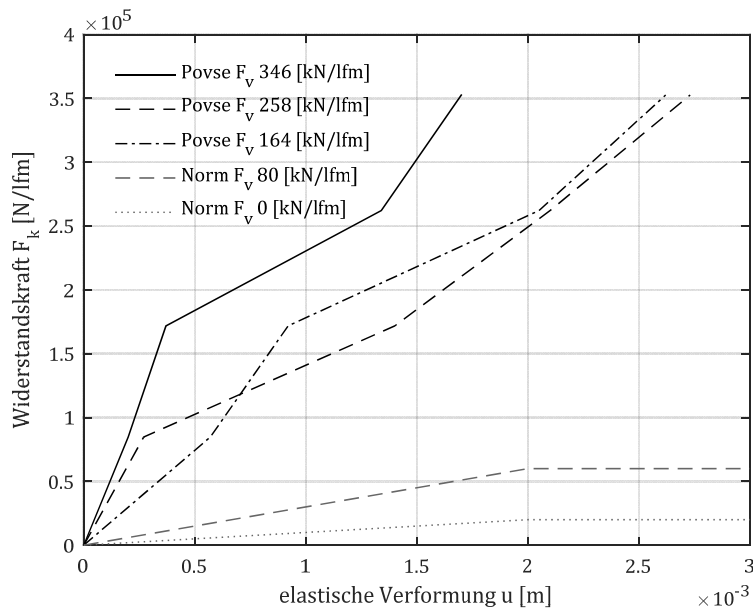


Abbildung 4.19: Rückgerechneter Widerstandskraftverlauf aus den Versuchen von *Povse* [126] im Vergleich zu den Verläufen der Norm

4.2.2 Ermittlung des Schubsteifigkeit des Schotters aus Großversuchen der TU Wien

Im Zuge der Erstellung der Dissertation von *Hackl* [127] wurde im Rahmen eines Forschungsprojekts (Kooperation zwischen TU Wien und der ÖBB) eine Versuchsanlage zur Ermittlung der dynamischen Eigenschaften des Gleisschotters entwickelt (dargestellt in Abbildung 4.20 und Abbildung 4.21). Eine genaue Beschreibung der Anlage und der durchgeführten Versuche findet sich in [127]. Das Hauptelement der Anlage ist ein Schottertrog, der als Kurbelviereck ausgebildet ist (vgl. Abbildung 4.20). Der Trog ruht auf der einen Seite auf einem Kipplager und auf der anderen auf Federpaketen. Die Anlage kann somit im Groben als Einmassenschwinger modelliert werden, dessen Eigenfrequenz durch Änderung der Position und der Steifigkeit der Federpakete eingestellt werden kann. In diesen Schottertrog ist ein etwa 5,5 m langer Gleiskörper mit einem „Standardquerschnitt“, wie er etwa bei eingleisigen Brücken zum Einsatz kommt, eingebaut.

Der Hauptzweck der durchgeführten Versuche war es, die Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften des Schotterkörpers zu ermitteln. Dazu wurde der Schottertrog mittels eines Unwuchterregers angeregt. Aus den gemessenen vertikalen Beschleunigungen und Wegen wurden die dynamischen Kennwerte der Anlage bzw. des Schotters rückgerechnet. Der Gleiskörper ist dabei über eine spezielle Haltevorrichtung an das Auflager gekoppelt, die Verbindung zwischen Gleis und Schottertrog wird rein durch den Schotter hergestellt. Wird der Schottertrog in vertikale Schwingungen versetzt, so entsteht über den Höhenversatz zwischen Lagerpunkt und Gleislage eine Relativverschiebung zwischen Gleis und Schottertrog. Diese Relativverschiebung sowie die Kraft die in der Haltevorrichtung des Gleiskörpers auftritt, wurde dabei gemessen (eingetragen in Abbildung 4.21).

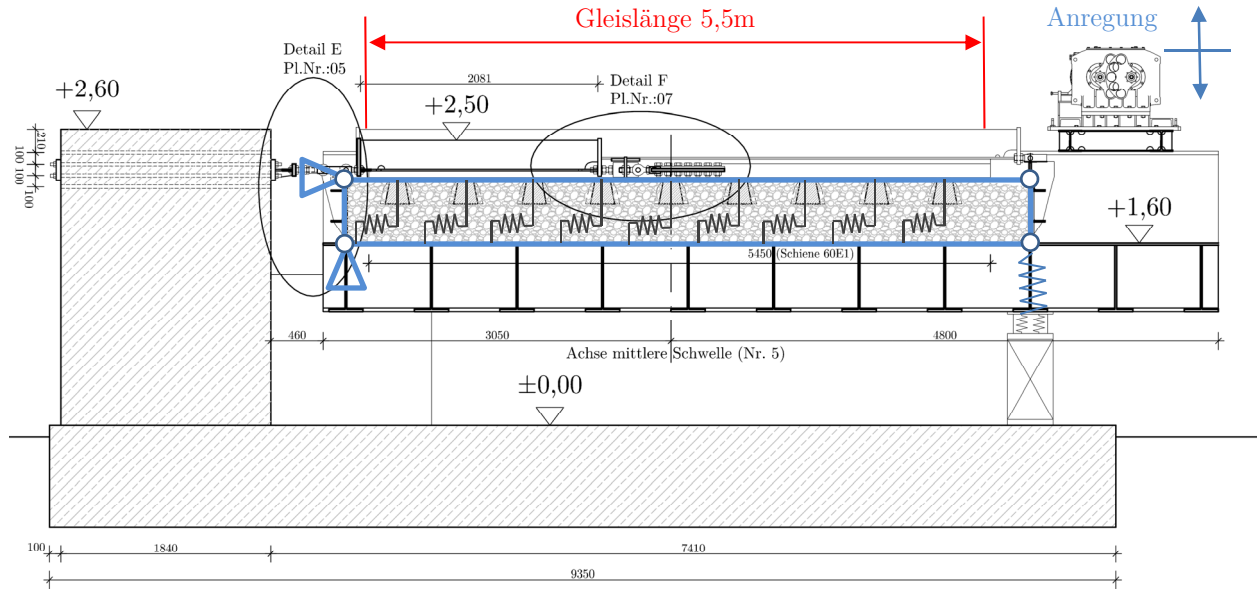


Abbildung 4.20: Längsschnitt der Versuchsanlage verwendet von Hackl [127]

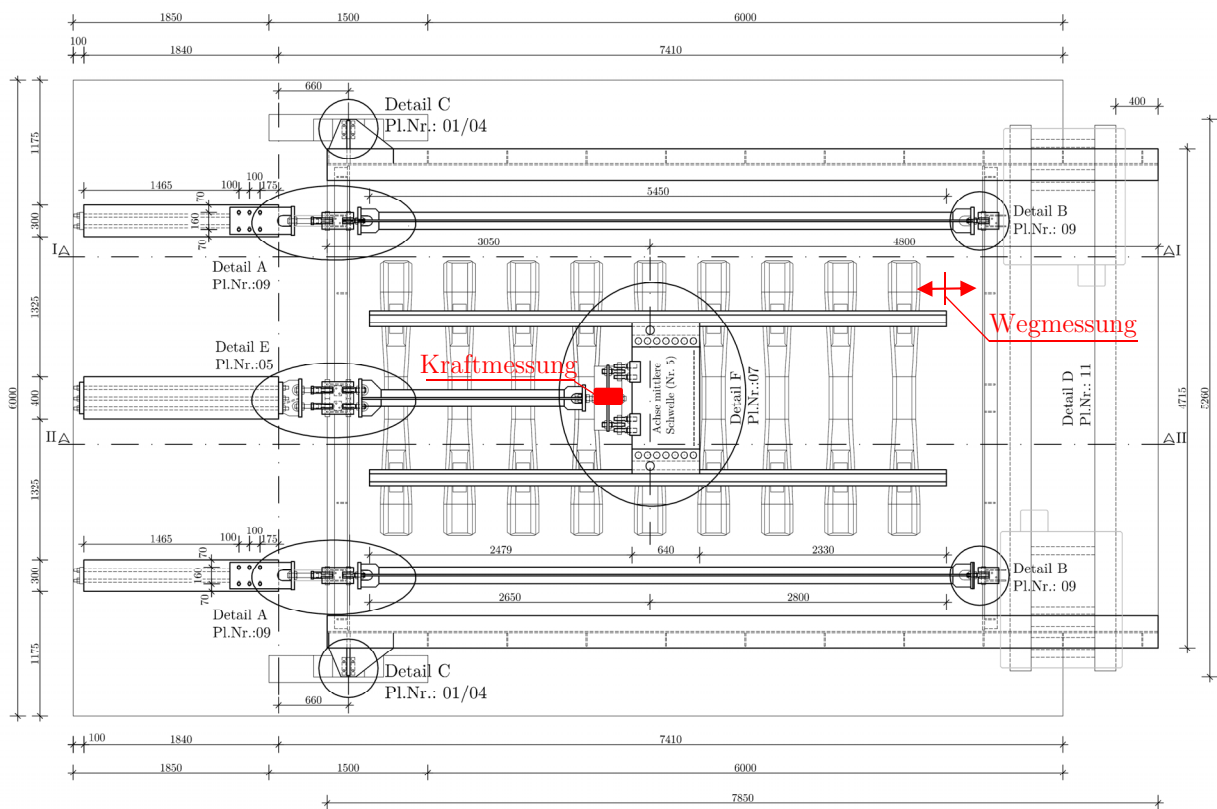


Abbildung 4.21: Grundriss der Versuchsanlage verwendet von Hackl [127]

Setzt man die gemessene Kraft zum gemessenen Weg in Relation, so lässt sich ein Schubwiderstand des Gleiskörpers ermitteln (siehe Abbildung 4.22 bis Abbildung 4.24). Dazu wurde die Schwingungsbreite (minimale Amplitude bis maximale Amplitude) der gemessenen Festhaltekraft durch die Schwingungsbreite der gemessenen Gleisverschiebung dividiert. Da die Weg- und Kraftamplituden von Periode zu Periode etwas schwanken, wurde für die Widerstandskraft ein Mittelwert über mehrere Perioden gebildet (vgl. Abbildung 4.24). Um den Schubwiderstand pro Laufme-

ter Gleis darzustellen, muss noch durch die vorhandene Gleislänge von ca. 5,5 m geteilt werden. Die Messungen wurden für unterschiedliche Federsteifigkeiten und damit unterschiedliche Eigenfrequenzen (EF) des Schottertroges (zwischen 4,1 und 8,7 Hz) durchgeführt. Die Auswertung erfolgte in Zeiträumen mit einer Dauer zwischen 5 s und 20 s. Bei einer Eigenfrequenz von 4,1 Hz wurde der Mittelwert somit aus über mindestens 20 Perioden gebildet.

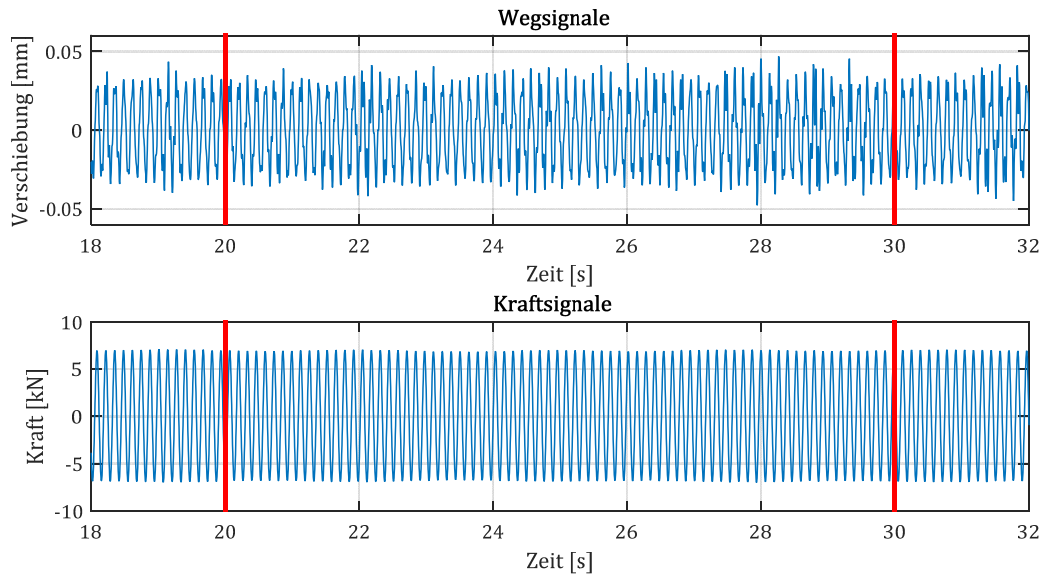


Abbildung 4.22: Zeitverlauf des Weg- und Kraftsignals in einem ausgewählten Zeitfenster

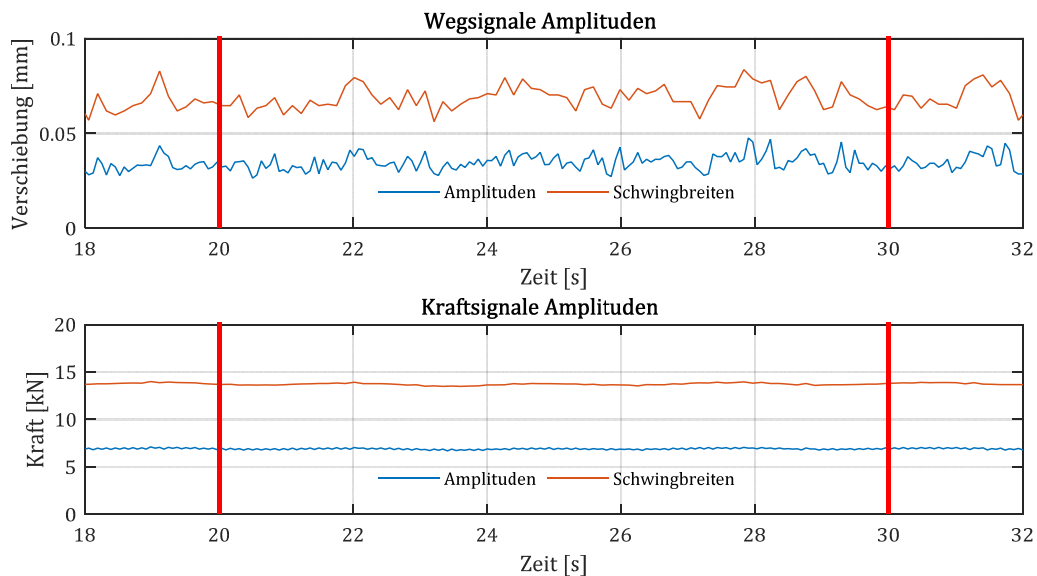


Abbildung 4.23: Amplituden und Schwingbreite des Weg- und Kraftsignals

Für jede Federkonfiguration wurde ein Frequenz-Sweep zur genauen Erfassung der Resonanzspitze durchgeführt. Dabei wurde die Anregungsfrequenz des Unwucherregers schrittweise gesteigert. Zwischen den Schritten wurde, sofern möglich, das Einstellen einer stationären Schwingung abgewartet. Somit stehen zur Auswertung für jede Federkonfiguration Werte für unterschiedliche Antwortfrequenzen mit unterschiedlichen Schwingungsbreiten zur Verfügung.

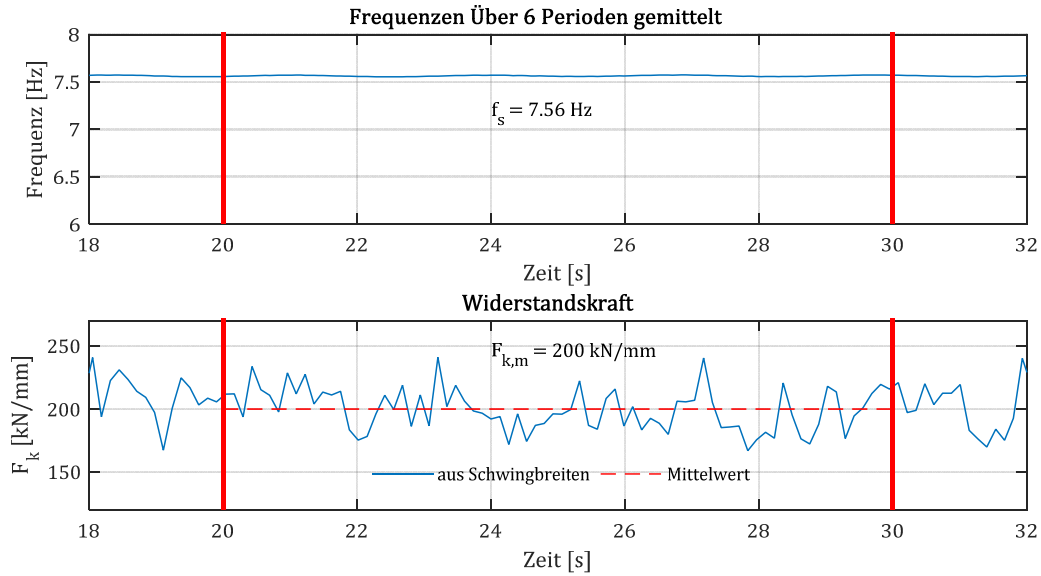


Abbildung 4.24: Ermittelte Schwingungsfrequenz und Widerstandskraft

Um auch ein belastetes Gleis abbilden zu können, wurde die Anlage von *Malik* [128] um eine Vorspannvorrichtung (Abbildung 4.25) ergänzt. Dabei wird die Vorspannung durch vier Einzellasten (zwei Lasten je Schiene) aufgebracht. Dadurch sollte die Belastung durch ein Drehgestell simuliert werden, weshalb die Lastaufbringpunkte in Längsrichtung einen für Drehgestelle typischen Abstand von 3,0 m aufweisen. Um der maximal zulässigen Achslast von 250 kN zu entsprechen, wurde eine Kraft von 125 kN je Angriffspunkt aufgebracht. Die Aufbringung der Vorspannung ist schematisch in Abbildung 4.25 dargestellt. Zwei mal 250 kN auf ca. 5,5 m entspricht einer Auflast von etwa 91 kN/lfm Gleis und liegt damit etwas über den 80 kN/lfm die im Eurocode für das belastete Gleis angegeben werden.

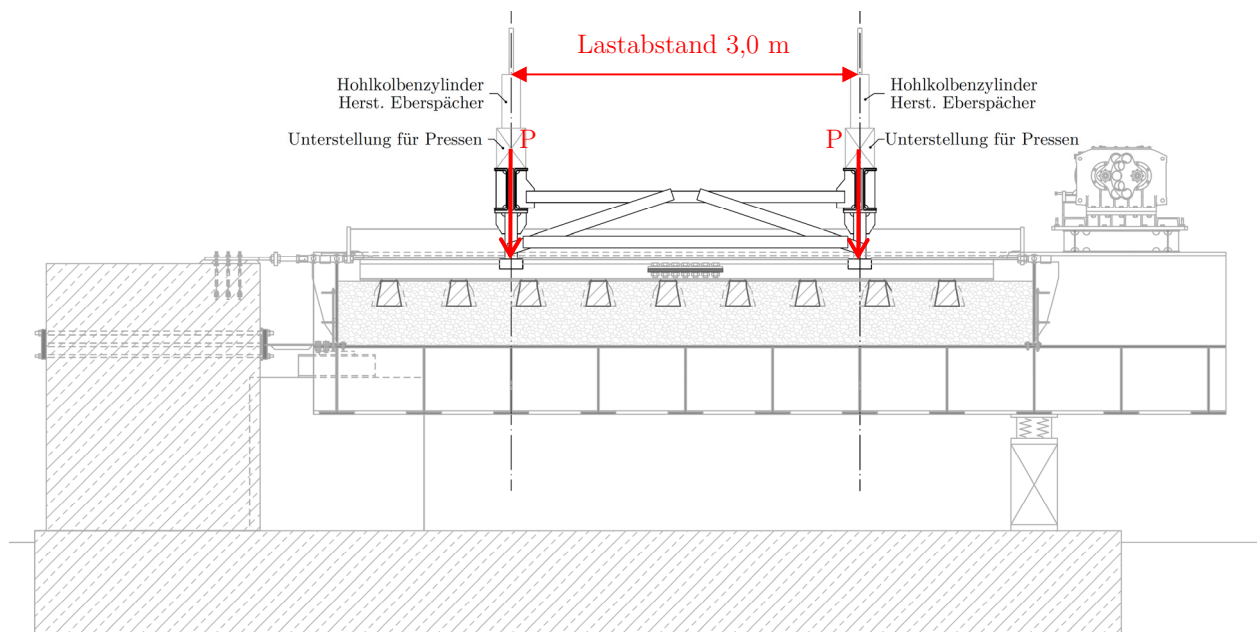


Abbildung 4.25: Längsschnitt der Versuchsanlage mit montierter Vorspannvorrichtung [128]

Die folgende Auswertung basiert auf Versuchen, die im Zuge der Bearbeitung des Forschungsprojekts [128] an der oben beschriebenen Versuchsanlage durchgeführt wurden. Die gemessenen Horizontalverschiebungen waren relativ gering. Sie lagen in einer Größenordnung von $\pm 0,025 \text{ mm}$ bis $\pm 0,15 \text{ mm}$, was einer Schwingungsbreite von $0,05 \text{ mm}$ bis $0,3 \text{ mm}$ entspricht. Das ist weniger als ein Zehntel der in der ERRI [20] angenommenen Verschiebung, ab der eine plastische Scherverformung auftritt und die Scherwiderstände konstant bleiben. Die gemessenen Kräfte liegen in einer Größenordnung von maximal $\pm 15 \text{ kN}$, sprich einer Schwingungsbreite von 30 kN .

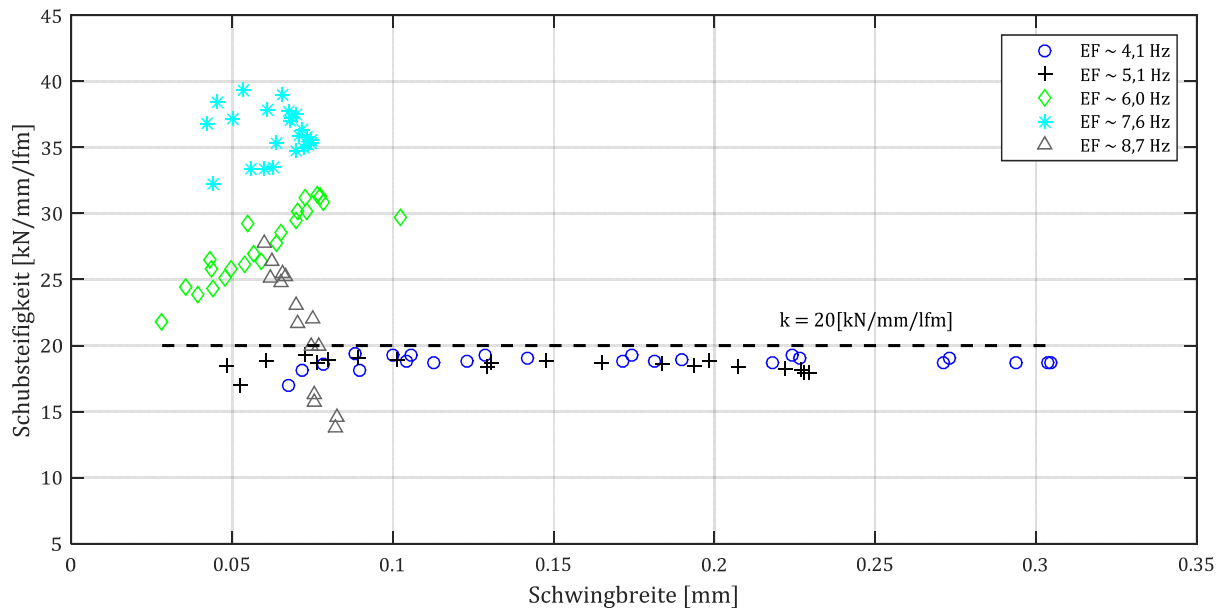


Abbildung 4.26: Schubsteifigkeit pro Laufmeter Gleis (unbelastet) in Abhängigkeit von der Schwingbreite, ausgewertet für unterschiedliche Eigenfrequenzen (EF) des Schottertroges

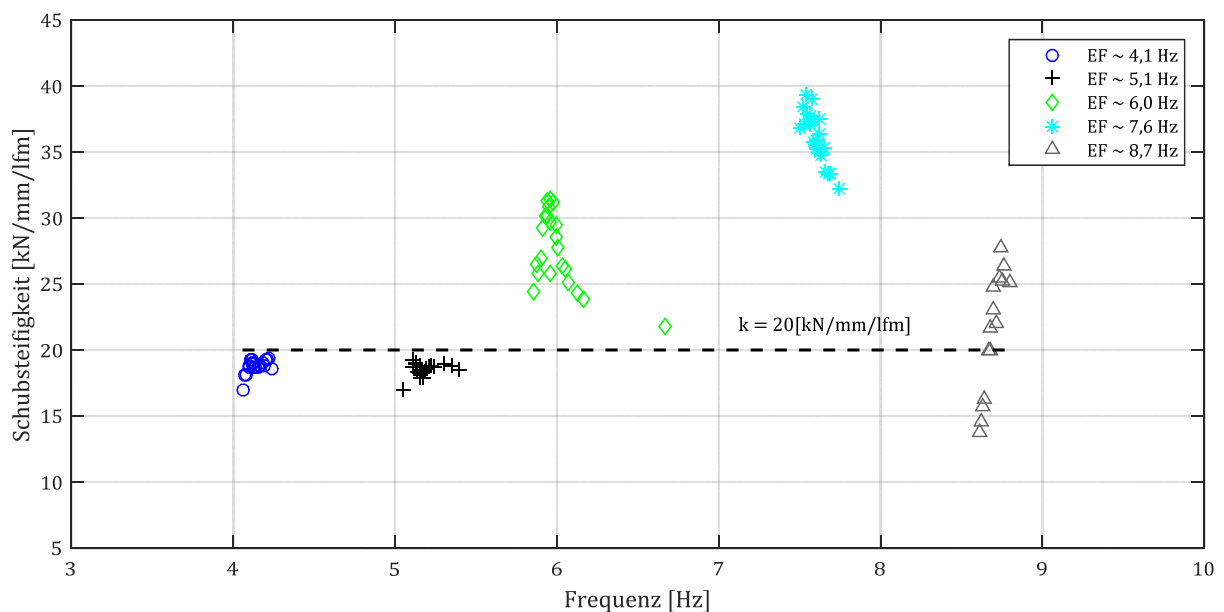


Abbildung 4.27: Schubsteifigkeit pro Laufmeter Gleis (unbelastet) bezogen auf die Schwingungsfrequenz des Schottertroges während der Versuchsdurchführung

In Abbildung 4.26 sind die erhaltenen Schubsteifigkeiten für das unbelastete Gleis in Abhängigkeit zur gemessenen Schwingbreite der Gleisverschiebung eingetragen. Dabei wird zwischen den einzel-

nen EF-Konfigurationen des Schottertroges unterschieden. Es ist gut erkennbar, dass die Wegamplitude keinen signifikanten Einfluss auf die ermittelte Schubsteifigkeit hat.

In Abbildung 4.27 sind die Scherwiderstände in Bezug auf die Schwingungsfrequenz während der Messung aufgetragen. Da nur bei einer Anregung nahe der eingestellten Eigenfrequenz der Anlage die Verschiebungen eine auswertbare Größe erreichten, konnte kein kontinuierlicher Verlauf der Scherwiderstände über die Schwingungsfrequenz ermittelt werden. Aus den ermittelten Werten ist kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Scherwiderstand und Schwingungsfrequenz ableitbar. Für die Konfiguration EF~7,6 Hz (Eigenfrequenz von ca. 7,6 Hz) wurden deutlich höhere Scherkräfte ermittelt als bei allen anderen Konfigurationen. Es konnten jedoch nur sehr geringe Verschiebungen erzielt werden. Die erhöhten Werte bei 7,6 Hz sind, wie weiter unten gezeigt wird, auch bei einem belasteten Gleis feststellbar. Dieser Effekt könnte sich auf Systemeigenschaften der Versuchsanlage gründen, die nicht auf diese Versuchsdurchführung ausgelegt wurde. Daher wird hier nicht näher auf dieses Phänomen eingegangen und es werden nur die ermittelten Versuchsergebnisse wiedergegeben. Als Steifigkeitswert für das unbelastete Gleis wird ein Wert von $k = 20 \text{ kN/mm/lfm}$ angegeben. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um den statistischen Mittelwert. Da die Wahl der auszuwertenden Zeitsignalbereiche anhand einer subjektiven Anschauung erfolgt, ist die Anzahl der Auswertepunkte willkürlich wählbar und hat somit keine statistische Relevanz. Da die Versuchsanlage nicht für die Ermittlung der Scherwiderstände konzipiert ist, müssen die erhaltenen Werte kritisch hinterfragt werden. Der Schottertrog ist an beiden Enden durch Stahlwände beschränkt, was eine Relativverschiebung zwischen Gleis und Schotterkörper behindern und eine potentielle Scherfuge an der Schwellenunterkante blockieren würde. Wie sich jedoch in den Versuchen gezeigt hat, hat sich das Gleis im Schotterbett soweit „freigearbeitet“, dass es sich ungehindert bewegen kann. Der Verlauf der Weg- und der Kraftmessung weist keinen Hinweis auf eine Bewegungsbehinderung auf. Ein „Freiarbeiten“ der Schwellen wird sich bei realen Tragwerken nach kurzer Nutzungsdauer wohl auch einstellen. Vor allem im Auflagerbereich, wo die größten Relativverschiebungen zwischen Tragwerk und Gleis zu erwarten sind. Des Weiteren stellt sich die Frage, inwiefern sich die vertikalen Schwingungen der Versuchsanlage auf die Scherwiderstände auswirken. Diese Situation tritt jedoch auch im Auflagerbereich von Brücken auf, weshalb man zwar nicht davon ausgehen kann, dass die vertikalen Schwingungen ohne Einfluss sind, sie aber gewissermaßen den realen Bedingungen ähneln. Daher wird hier davon ausgegangen, dass die ermittelten Werte zumindest die Größenordnung der auftretenden Schubsteifigkeiten des Gleiskörpers abbilden. Der ermittelte Steifigkeitswert für das unbelastete Gleis beträgt damit genau das Doppelte der im ERRI-Report [20] angenommenen Steifigkeit von 10.000 kN/m^2 .

Die Auswertung der vorgespannten Versuche erfolgt analog zu den Versuchen mit dem unbelasteten Gleis und ist in den Abbildung 4.28 und Abbildung 4.29 dargestellt. Es kann abermals keine eindeutige Abhängigkeit des Schubwiderstands von der Frequenz oder dem Verschiebungsweg festgestellt werden. Im Mittel ergab sich der Scherwiderstand des belasteten Gleises zu $k = 38 \text{ kN/mm/lfm}$. Es ist auch ersichtlich, dass bei kleineren Wegamplituden die Werte mehr streuen als bei größeren Verschiebungen. Wie für das unbelastete Gleis ist auch hier für die 7,6 Hz -

Konfiguration ein Ausreißer nach oben erkennbar. Für die 8,6 Hz – Konfiguration fallen die Scherwiderstände dafür etwas ab. Es sei jedoch angemerkt, dass für diese beiden Stellungen nur geringe Verschiebungswege erzielt werden konnten und die Schwingungsbreiten im Wegsignal einer erheblichen Schwankung unterlagen. Die Standardabweichung der Scherwiderstände dieser beiden Konfigurationen liegt bei etwa 10 % oder mehr der in Abbildung 4.28 und Abbildung 4.29 als Punkte dargestellten Mittelwerte. Für die Scherwiderstandspunkte der anderen Konfigurationen wurde im Schnitt eine Standardabweichung von 5 % des Mittelwertes ermittelt.

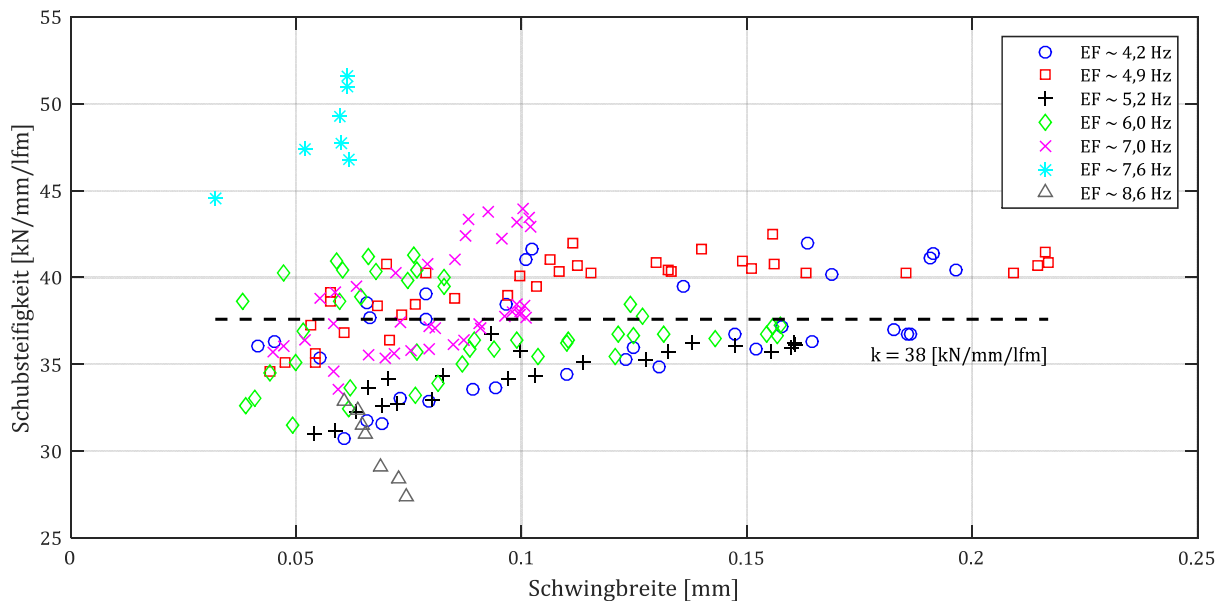


Abbildung 4.28: Schubsteifigkeit pro Laufmeter Gleis (belastet) in Abhängigkeit von der Schwingbreite, ausgewertet für unterschiedliche Eigenfrequenzen (EF) des Schottertroges

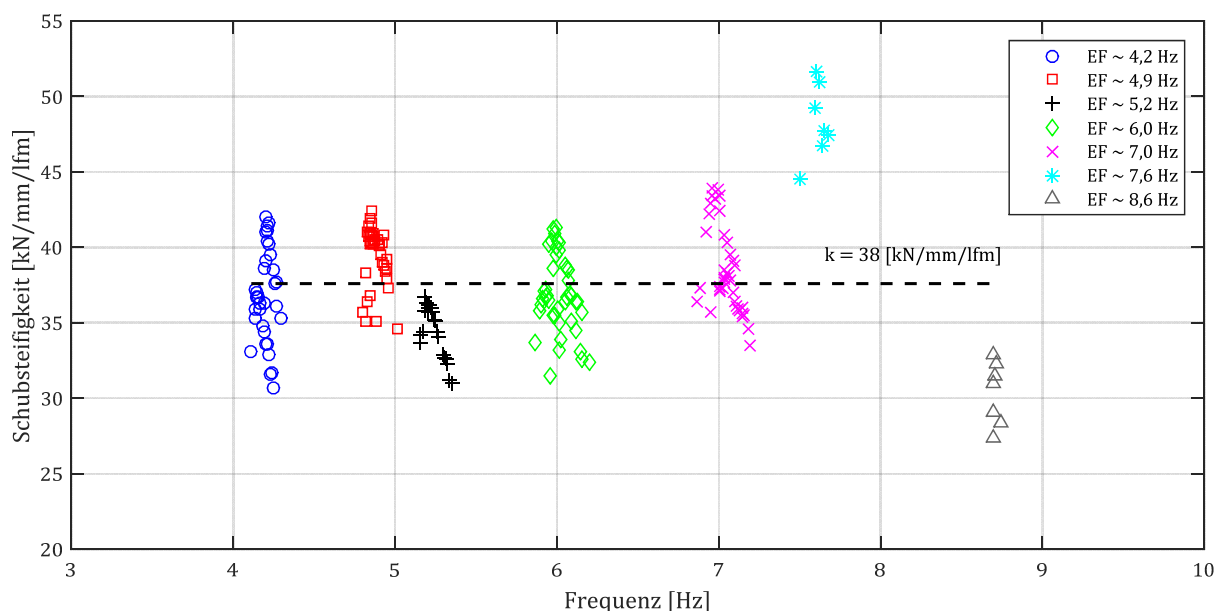


Abbildung 4.29: Schubsteifigkeit pro Laufmeter Gleis (belastet) bezogen auf die Schwingungsfrequenz des Schottertroges während der Versuchsdurchführung

Es sei noch angemerkt, dass die teilweise Versuchsauswertung hier nicht erfolgt um allgemeine Kennwerte zu ermitteln, sondern um eine Größenordnung der Schubsteifigkeit des Schotters zu erhalten.

Da die gemessenen Relativverschiebungen in diesen Versuchen generell sehr gering sind, kann nicht ausgeschlossen werden, dass es sich hierbei um eine erhöhte Anfangssteifigkeit handelt, die sich bei größeren Verschiebungen reduzieren würde. Eine weitere Frage ist, wie sich die Schubsteifigkeit mit der Frequenz entwickelt, da vor allem kurze Tragwerke, bei denen der Gleiskörper einen tendenziell größeren Einfluss auf die Tragwirkung der Brücke hat, eine oftmals um etliches höhere Eigenfrequenz als die hier maximal untersuchten 9 Hz, aufweisen. Diesbezüglich sei auf weitere Versuche von *Malik* verwiesen, die zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht abgeschlossen sind.

4.2.3 Zusammenfassung der Erkenntnisse

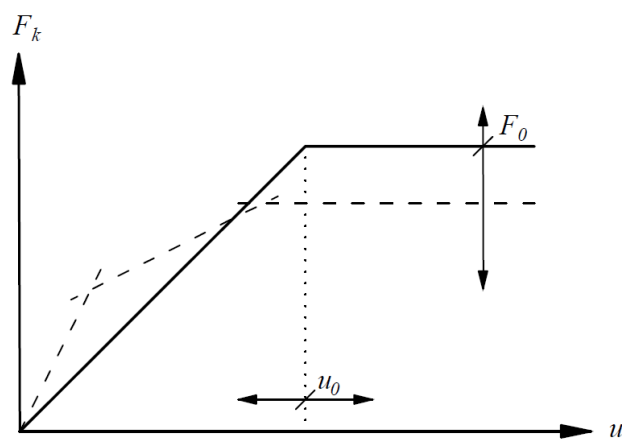


Abbildung 4.30: Anpassung des Verschiebungswiderstandsgesetzes des Gleiskörpers

Aus den vorhergehenden Kapiteln ist ersichtlich, dass es grundsätzlich möglich ist, die Schubsteifigkeit des Schotteroberbaus durch ein bilineares Verschiebungswiderstandsgesetz anzunähern. Dies ist jedoch eine Idealisierung des tatsächlich fließenden Übergangs zwischen elastischer und plastischer Verformung. Der Autor zieht jedoch noch folgende weitere Erkenntnisse daraus (schematisch durch die gestrichelten Linien in Abbildung 4.30 dargestellt):

- Vor allem bei unbelasteten Gleisen scheint der Durchschubwiderstand F_0 deutlich niedriger zu sein als der vorgegebene Wert von 20 kN/lfm (vgl. Abbildung 4.17).
- Die Schubsteifigkeit scheint bei geringen Relativverschiebungen höher zu sein und bei zunehmender Verformung abzunehmen (vgl. Abbildung 4.7 und Abbildung 4.19).
- Die Angaben zur Grenzverformung u_0 können stark variieren. So konnte *Povse* [126] bei Verschiebungen größer als 2,0 mm ein immer noch größtenteils elastisches Verhalten feststellen. Andererseits ermittelten *Battini et al.* [72] bei Rückrechnungen aus Messungen u_0 Werte im Zehntelmillimeterbereich und sogar darunter.

4.3 Abschätzung der Relativverschiebung im Schotter

Zunächst wird untersucht, wie groß die Relativverschiebung zwischen Gleiskörper und Tragwerk für reale Brücken unter der Belastung von Hochgeschwindigkeitszugverkehr tatsächlich ist. Dies dient dazu, eine Vorstellung über die Größenordnung der auftretenden Bewegungen zu bekommen, bzw. um einschätzen zu können, ob ein ausschließlich linearer Ansatz der Schottersteifigkeit für die meisten Fälle nicht sogar ausreichend ist. Dazu wird zunächst von einer schubstarrten Kopplung zwischen Gleiskörper und Tragwerk ausgegangen.

Für die Relativverschiebung sind zwei Größen wesentlich: Zum einen der Hebelarm h zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt des Gleises und zum anderen der maximale Enddrehwinkel φ_{max} (dargestellt in Abbildung 4.32).

4.3.1 Hebelarm von Brückentragwerken

Zunächst ist abzuklären, welcher Hebelarm für die Relativverschiebung relevant ist. Grundsätzlich gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder verwendet man den Höhenversatz h zwischen Schienenschwerpunkt und Auflagerdrehpunkt des Tragwerks, so wird etwa zur Ermittlung der Drehfedersteifigkeit in [94] und [9] vorgegangen. Oder man verwendet den Schwerpunktabstand r zwischen Tragwerk und Schiene (vgl. Abbildung 4.31). Letzterer Abstand wird von *Mähr* [4] zur Berechnung der Verbundwirkung zwischen Tragwerk und Gleiskörper gewählt.

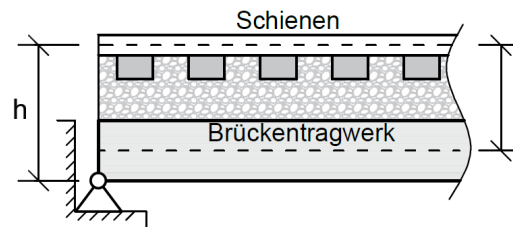


Abbildung 4.31: Hebelarm der Schiene

Unter Vernachlässigung des „Vorlandes“ (Bereich vor und nach dem Brückentragwerk, siehe Abbildung 4.39) beschreibt der Schwerpunktabstand r den Hebelarm zwischen den Schienen und dem hier relevantem Bezugspunkt, dem Tragwerksschwerpunkt. Nun stellt sich die Frage, wie sich das Ganze bei Berücksichtigung des Gleiskörpers im Vorlandbereich verhält. Für einen Einfeldträger mit schwimmender Lagerung tritt zufolge einer Biegebeanspruchung keine Horizontalverschiebung auf. Somit ist hier auch bei Berücksichtigung Schienendehnung im Vorland r der wirksame Hebelarm.

Für einen in Abbildung 4.32 dargestellten statisch bestimmt gelagerten Balken (Festlager + verschiebliches Lager) ist dies nicht so offensichtlich. Für die Schienen- bzw. Gleisverschiebung am Tragwerksende der Festlagerseite ist der Höhenversatz h wirksam. Die horizontale Verschiebung u_{S1} des Gleises zur Ursprungslage ergibt sich damit als das Produkt des Drehwinkels φ und des

Höhenversatzes h . Diese Verschiebung kann aber auch in eine Tragwerksverschiebung u_{T1} und eine Verschiebung zwischen Tragwerk und Gleis Δu aufgeteilt werden:

$$u_{S1} = h \varphi = u_{T1} + \Delta u = u_{T1} + r \varphi \quad (4.20)$$

Unter der Annahme von kleinen Verdrehungen und dass die Dehnsteifigkeit des Tragwerks viel größer als die Dehnsteifigkeit der Schienen ist, kann davon ausgegangen werden, dass die Horizontalverschiebung des Tragwerks u_T am linken und am rechten Auflager gleich groß ist:

$$u_{T1} = u_{T2} \quad (4.21)$$

Die Gleisverschiebung am anderen Tragwerksende (verschiebliches Lager), lässt sich somit folgendermaßen bestimmen:

$$u_{S2} = r \varphi - u_{T2} = r \varphi - u_{T1} \quad (4.22)$$

Die „Einspannwirkung“ durch den Gleiskörper im Vorlandbereich ist demnach für das feste und das verschiebliche Auflager unterschiedlich groß. Verwendet man zur Berechnung der Steifigkeit und in weiterer Folge der Eigenfrequenzen vereinfachend einen Mittelwert $\overline{u_S}$ für die Gleisverschiebungen, so ergibt sich:

$$\overline{u_S} = \frac{u_{S1} + u_{S2}}{2} = r \varphi \quad (4.23)$$

Somit ist gezeigt, dass unabhängig von der Lagerung für Einfeldträger näherungsweise der Schwerpunktabstand r als relevanter Hebelarm für die Berücksichtigung der Verbundwirkung zwischen Schiene und Tragwerk verwendet werden kann.

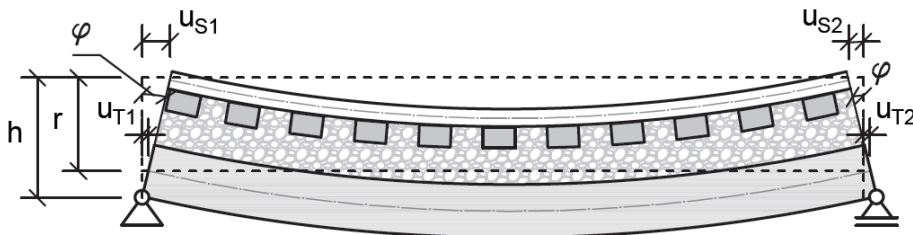


Abbildung 4.32: Schienenverschiebung u bei der Durchbiegung eines gelenkig gelagerten Einfeldträgers

Aus den in Kapitel 2.3 angeführten Datenquellen konnte für etwa 160 Tragwerke Daten bezüglich dem Schwerpunktabstand r und dem Höhenversatz h zwischen Auflagerdrehpunkt und Schienenschwerpunkt erhoben werden. Es sei anzumerken, dass hierbei nur balkenartige Tragwerke berücksichtigt wurden. Der Schwerpunktabstand lässt sich zwar auch für Rahmentragwerke einfach bestimmen, diese Werte werden in diese Untersuchung jedoch nicht aufgenommen.

Auf die Einspannwirkung hat neben dem Hebelarm h auch die maximal auftretende Auflagerverdrehung $\varphi_{A,max}$ einen wesentlichen Anteil. Dieser Drehwinkel ist sowohl für eine statische als auch für eine dynamische Berechnung sehr stark von der vorhandenen Biegesteifigkeit EI und der

Spannweite des Tragwerks abhängig. Daher sind in Abbildung 4.33 und Abbildung 4.34 der Hebelarm (r bzw. h) auf die Spannweite L und auf die planmäßige Biegesteifigkeit EI bezogen dargestellt. Für den Schwerpunktabstand können sich für Spezialfälle (Trogburgen) negative Werte ergeben. Diese sind aus Übersichtlichkeitsgründen, und da sie einen Sonderfall darstellen, jedoch nicht abgebildet.

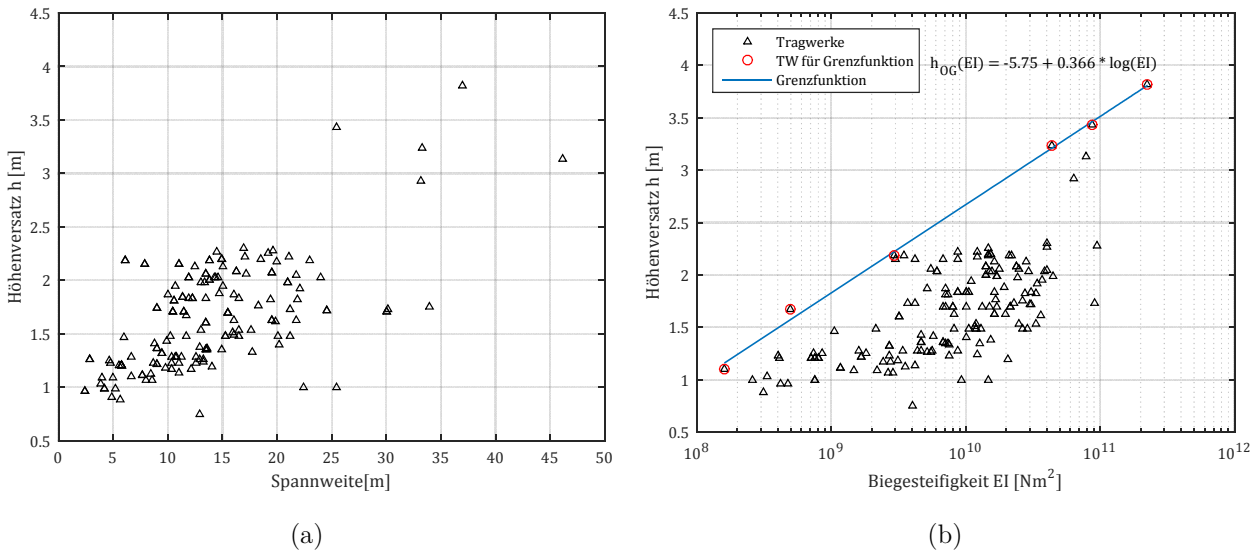


Abbildung 4.33: Höhenversatz h in Abhängigkeit von (a) der Spannweite L (b) der Biegesteifigkeit EI

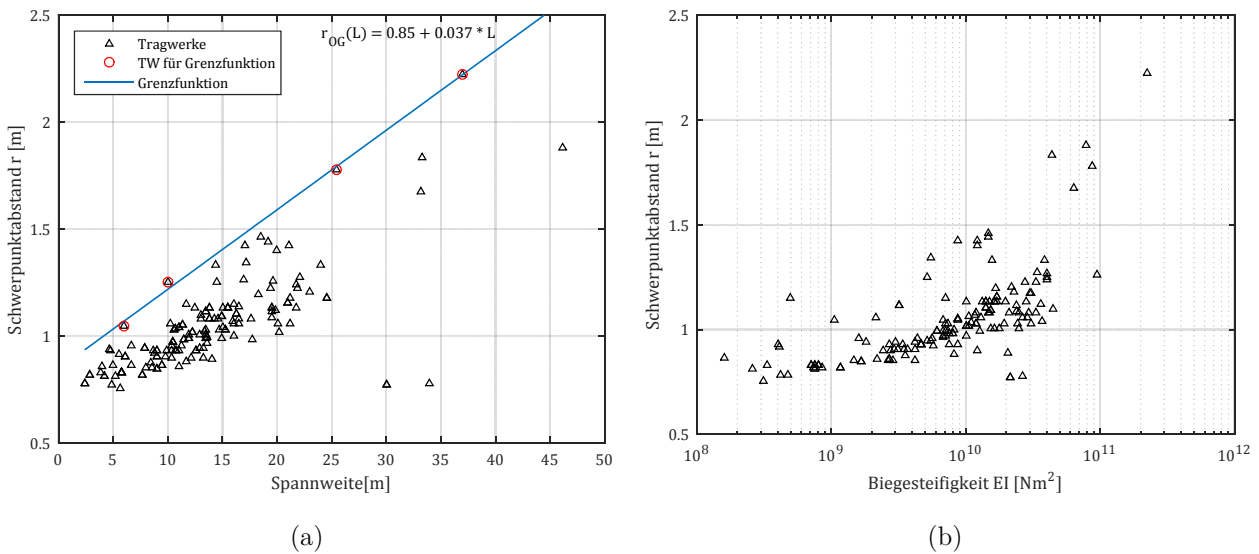


Abbildung 4.34: Schwerpunktabstand r in Abhängigkeit (a) der Spannweite L (b) der Biegesteifigkeit EI

Um die maximalen Horizontalverschiebung zwischen Gleiskörper und Tragwerk bzw. Unterbau (Näherungsansatz: $\bar{u}_s = r \varphi$) bestimmen zu können, ist die Angabe eines wirksamen Hebelarms unabdingbar. Da nicht für alle Tragwerke der erhobenen Datenbank Angaben zum Hebelarm vorhanden sind, wird eine Grenzfunktion für den möglichen Hebelarm gesucht. Diese Grenzfunktionen werden als Ausgleichsfunktionen von ausgewählten, die Obergrenze abbildenden Datenpunkten, bestimmt. Um nicht zu sehr auf der sicheren Seite (zu großer Hebelarm) bzw. zu weit weg von realen Werten zu sein, wird die obere Grenzfunktion für den Höhenversatz in Abhängigkeit von

der Biegesteifigkeit $h_{OG}(EI)$ und der Schwerpunktabstand in Abhängigkeit von der Spannweite $r_{OG}(L)$ definiert:

$$h_{OG}(EI) [m] = -5,75 + 0,366 \log(EI [Nm]) \quad (4.24)$$

$$r_{OG}(L) [m] = 0,85 + 0,037 L[m] \quad (4.25)$$

Die Tragwerke TW, die zur Ermittlung der Grenzfunktionen herangezogen wurden, sind in Abbildung 4.33 und Abbildung 4.34 als rote Kreise dargestellt. Mit Hilfe dieser Funktionen wird im Weiteren für Tragwerke, für die keine genauen Geometrieangaben bekannt sind, ein maximaler Hebelarm abgeschätzt.

4.3.2 Drehwinkel und Relativverschiebung

Zur Bestimmung des maximalen Enddrehwinkels φ_{max} wurden dynamische Überfahrtberechnungen für reale Tragwerksparameter durchgeführt. Als Grundlage für die Tragwerksparameter, wurden aus den erhobenen Datensatz jene 126 Tragwerke verwendet, für die gemessene Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte vorhanden sind. Die Berechnungen wurden für alle 10 HSLMA Zugmodelle in einem Geschwindigkeitsbereich zwischen 100 und 400 km/h (Schrittweite 1 km/h) durchgeführt. Die maximalen Enddrehwinkel über alle Zugmodelle und Geschwindigkeiten sind in Abbildung 4.35 (a) für die untersuchten Tragwerke bei der jeweiligen Geschwindigkeit eingetragen. Da für einen Großteil der Brücken der maximale Enddrehwinkel bei einer Geschwindigkeit von 400 km/h bzw. im Geschwindigkeitsbereich zwischen 300 und 400 km/h auftritt, sind in Abbildung 4.35 (b) die Ergebnisse für einen realistischeren Geschwindigkeitsbereich bis 300 km/h dargestellt. Die Ergebnisse für diesen reduzierten Bereich werden auch für die weitere Auswertung herangezogen:

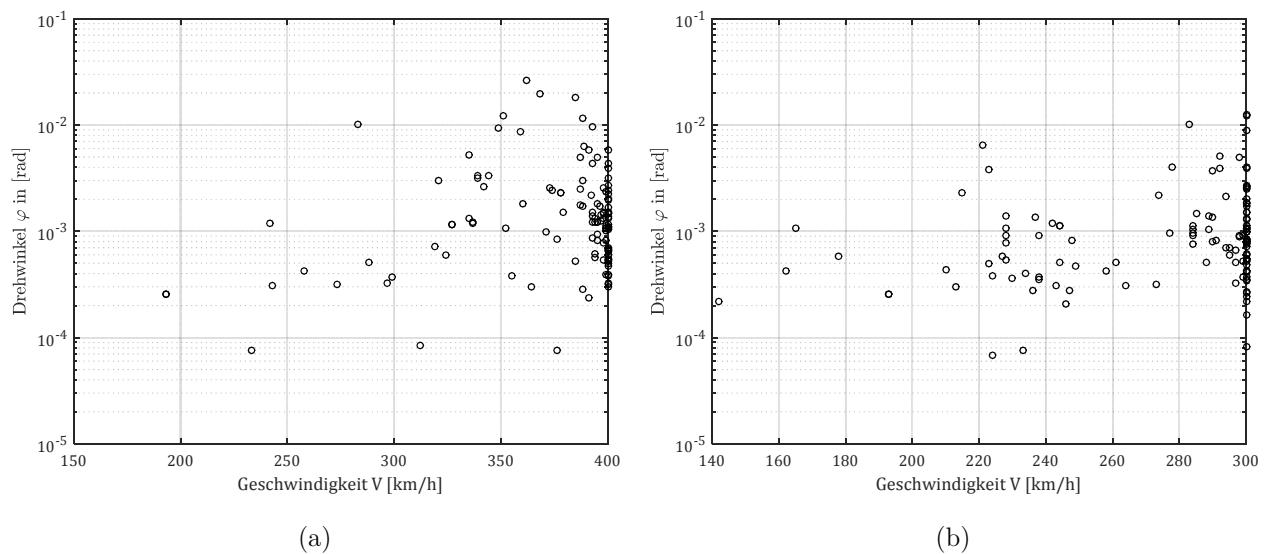


Abbildung 4.35: Maximaler Enddrehwinkel φ_{max} aus dynamischen Überfahrtberechnungen für alle HSLMA Zugmodelle für einen Geschwindigkeitsbereich von 100 km/h bis (a) 400 km/h (b) 300 km/h

Zu Vergleichszwecken wird hier auch ein Enddrehwinkel auf Basis der Durchbiegungsbeschränkung $L/\delta = 1000$ ermittelt. Dabei wird von der ersten Eigenfunktion eines gelenkig gelagerten *Bernoulli-Euler*-Balkens $\phi_1(x) = \sin(\pi x/L)$ ausgegangen. Durch einmaliges Ableiten und Auswerten für die Auflagerpunkte lässt sich der Enddrehwinkel als Funktion der Durchbiegung w_m in Tragwerksmitte formulieren.

$$|\varphi|_{max} = \frac{\pi}{L} |w_m| \quad (4.26)$$

Durch Einsetzen des Ausdrucks $w_m = \delta = L/1000$ ergibt sich der von der Spannweite unabhängige maximale Enddrehwinkel von:

$$|\varphi|_{max} = \frac{\pi}{1000} \quad (4.27)$$

In Abbildung 4.36 ist neben den maximalen Enddrehwinkeln aus der dynamischen Überfahrtberechnung auch der Vergleichswert aus der Durchbiegungsbeschränkung dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass der Drehwinkel aus der Durchbiegungsbeschränkung für einen Großteil der Tragwerke bei einer dynamischen Überfahrtberechnung gar nicht erreicht wird. Ein größerer Drehwinkel als (4.27) heißt nicht zwangsläufig, dass auch die maximalen Durchbiegungen überschritten werden, da für die dynamische Berechnung die ersten fünf Eigenformen herangezogen werden und die Betrachtung auf Basis der Durchbiegungsbeschränkung nur die erste Eigenfunktion verwendet. Interessanterweise sind es Spannweiten über 10 m, bei denen die größten Verdrehungen auftreten.

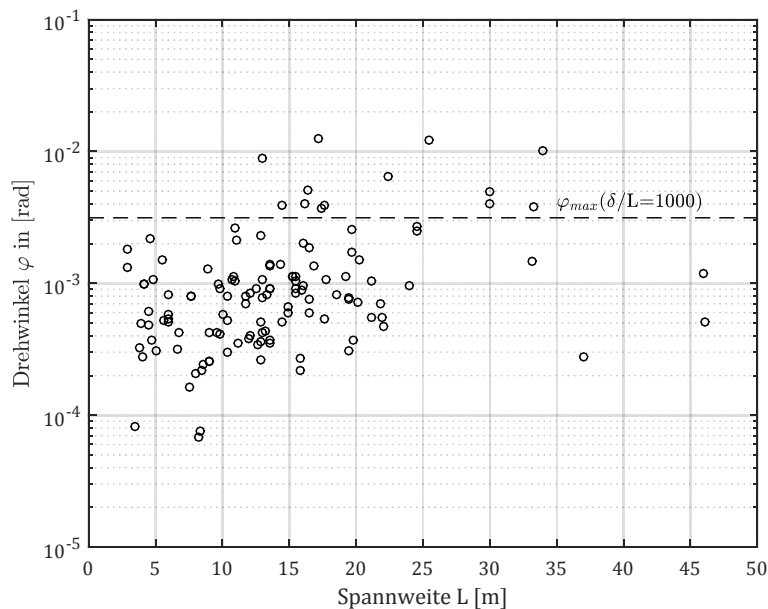


Abbildung 4.36: Maximaler Drehwinkel aus der Überfahrtberechnung als Funktion der Spannweite

Die maximale Relativverschiebung zwischen Tragwerk und Gleiskörper ergibt sich als das Produkt des maßgebenden Hebelarms r und des maximalen Enddrehwinkels φ_{max} . Dargestellt ist diese Relativverschiebung in Abhängigkeit zur Spannweite in Abbildung 4.37. Es ist auch ein abgeschätzter Verlauf der Relativverschiebung als Produkt des Enddrehwinkels aus der Durchbiegungsbeschränkung und der oberen Grenzfunktion des Schwerpunktabstands abgebildet. Aus der

Abbildung ist gut erkennbar, dass für die Mehrheit der Tragwerke die Relativverschiebung kleiner als 2 mm ist. Bei Anwendung der Federcharakteristik nach Norm (siehe Abschnitt 4.1) würde somit die Verwendung einer linear elastischen Federsteifigkeit ausreichen. Da für manche Tragwerke wesentlich größere Relativverschiebungen als 2 mm auftreten, muss für eine allgemeine Betrachtung auch der nichtlineare bzw. plastische Teil der Federcharakteristik berücksichtigt werden.

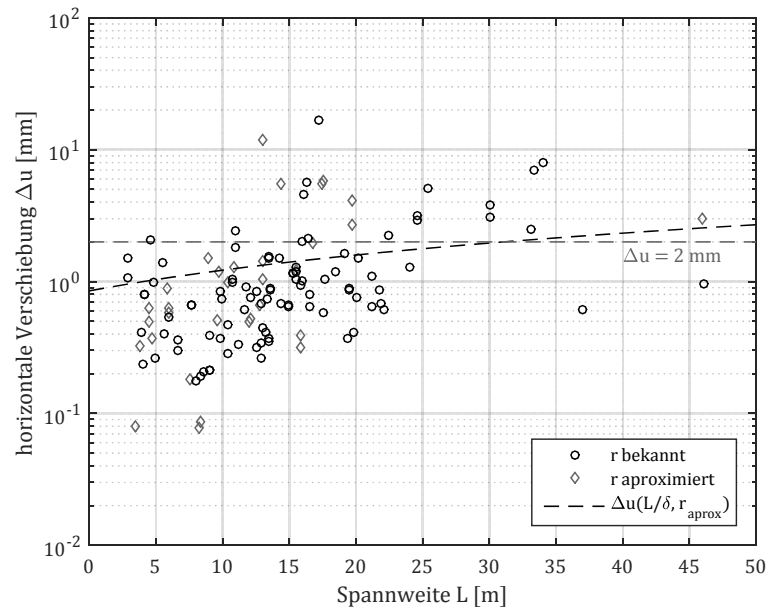


Abbildung 4.37: Maximale Relativverschiebung u aus dynamischen Überfahrberechnungen im Verhältnis zur Tragwerksspannweite L

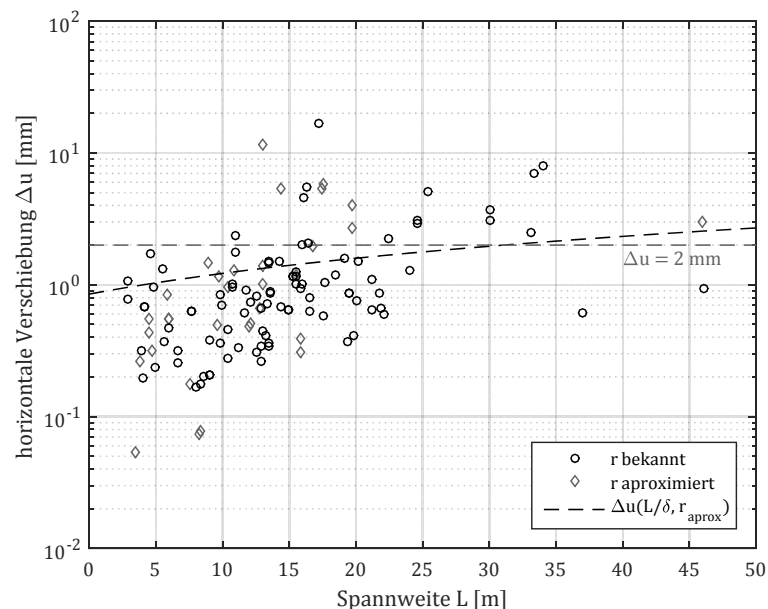


Abbildung 4.38: Maximale Relativverschiebung u aus dynamischen Überfahrberechnungen unter Berücksichtigung der Lastverteilung L_V

In Abbildung 4.38 sind die Relativverschiebungen aus der dynamischen Berechnung bei Berücksichtigung der Lastverteilung (der Einzellasten) nach Norm abgebildet. Die Unterschiede, die sich im Vergleich zur nicht Berücksichtigung der L_V ergeben, sind jedoch minimal.

4.4 Modellierung der Verbundwirkung des Schotters

Die steifigkeitserhöhende Wirkung des gesamten Gleiskörpers ist bekannt. Die Frage, die sich stellt, ist, wie groß diese genau ist und wie man sie rechnerisch erfassen kann. In der vorliegenden Arbeit wird ein vereinfachendes Konzept vorgestellt, um die Wirkung des Schotteroberbaus auf die erste Biegeeigenfrequenz des Tragwerks mit einer einfachen Gleichung abschätzen zu können. Prinzipiell wird dazu der Schotter als Schubfeder zwischen den Schienen und dem Tragwerk bzw. dem Dammkörper betrachtet (vgl. Abbildung 4.39). Ein sehr wesentlicher Aspekt dabei ist die Charakteristik der Schubfedern. Dabei sind die Größe und die Form des Federkraft zu Federweg Verlaufs von besonderem Interesse. Um den Einfluss der Schubwirkung auf die Eigenfrequenz erfassen zu können, wird der Gleiskörper über dem Tragwerk und der über dem Dammkörper (im Weiteren als Vorlandbereich bezeichnet) getrennt betrachtet. Als statisches System der Brücke dient ein gelenkig gelagerter Einfeldträger.

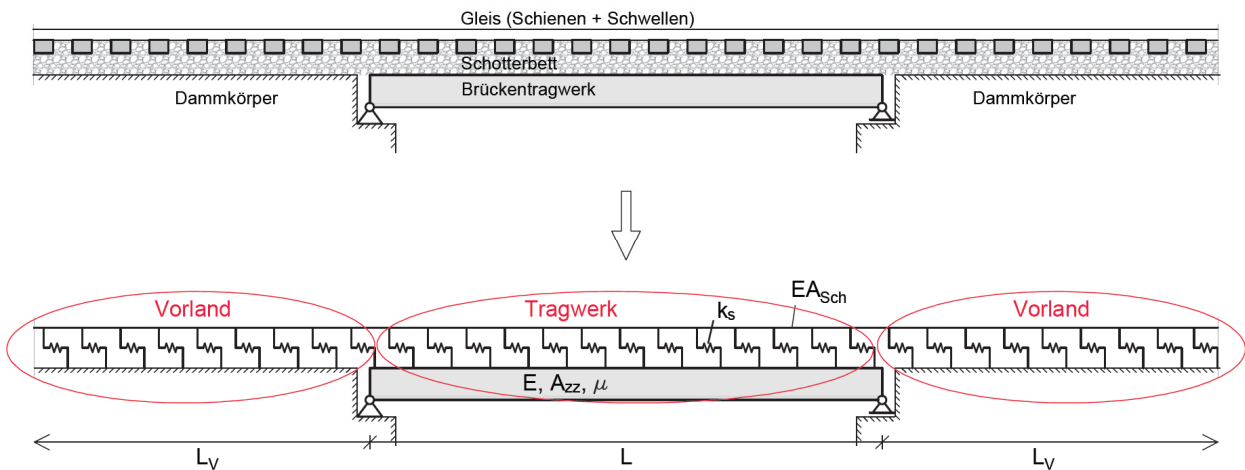


Abbildung 4.39: Modellierung des Schotterkörpers als Schubfeder für einen Einfeldträger mit durchgehendem Schotteroberbau

4.4.1 Charakteristik der Schotterfeder

Für die Charakteristik der Schotterfedern werden zwei unterschiedliche Verläufe behandelt. Beschrieben werden die Federcharakteristika durch den Verlauf des Verschiebungswiderstands. Die erste Federcharakteristik, die auch als Grundlage für den zweiten Verlauf dient, entspricht dem normativ vorgegebenen bilinearen Verschiebungswiderstandsgesetz nach EC [3] (vgl. Abbildung 4.3). Der Federsteifigkeitsverlauf zufolge dieses Widerstandsgesetzes kann anhand von zwei Parametern (Durchschubwiderstand F_0 und maximale elastische Relativverschiebung u_0) vollständig beschrieben werden. Der charakteristische Verlauf des Verschiebungswiderstands und der zugehörigen Schubsteifigkeit sind in Abbildung 4.40 dargestellt. Die Schubsteifigkeit k_s ergibt sich dabei als Quotient aus der Widerstandskraft F_k durch die Horizontalverschiebung u , und Es sei noch anzumerken, dass hier von einem rein elastischen Systemverhalten ausgegangen wird. Für Verschiebungen größer als u_0 wird die Steifigkeit der Schubfeder entsprechend reduziert. Treten Relativverschiebungen auf, die viel größer als u_0 sind, so ergibt sich aus der reduzierten Schubsteifig-

keit ein nicht unwesentlicher Einfluss auf das dynamische Schwingungsverhalten des Gesamtsystems.

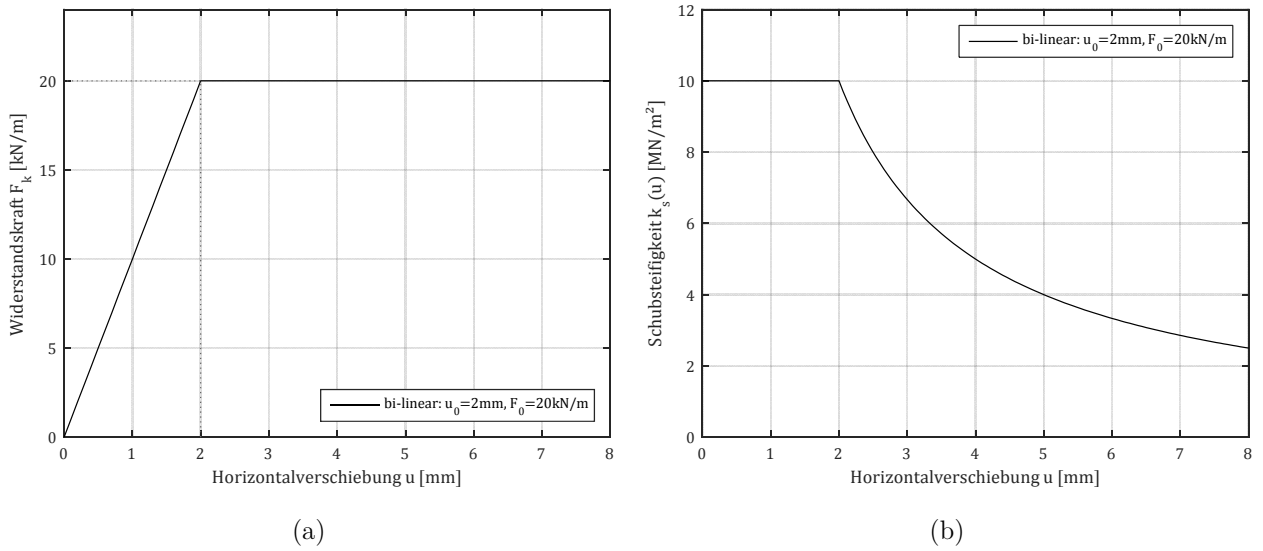


Abbildung 4.40: (a) Bilinearer Verschiebungswiderstandsverlauf und (b) zugehörige Schubsteifigkeit

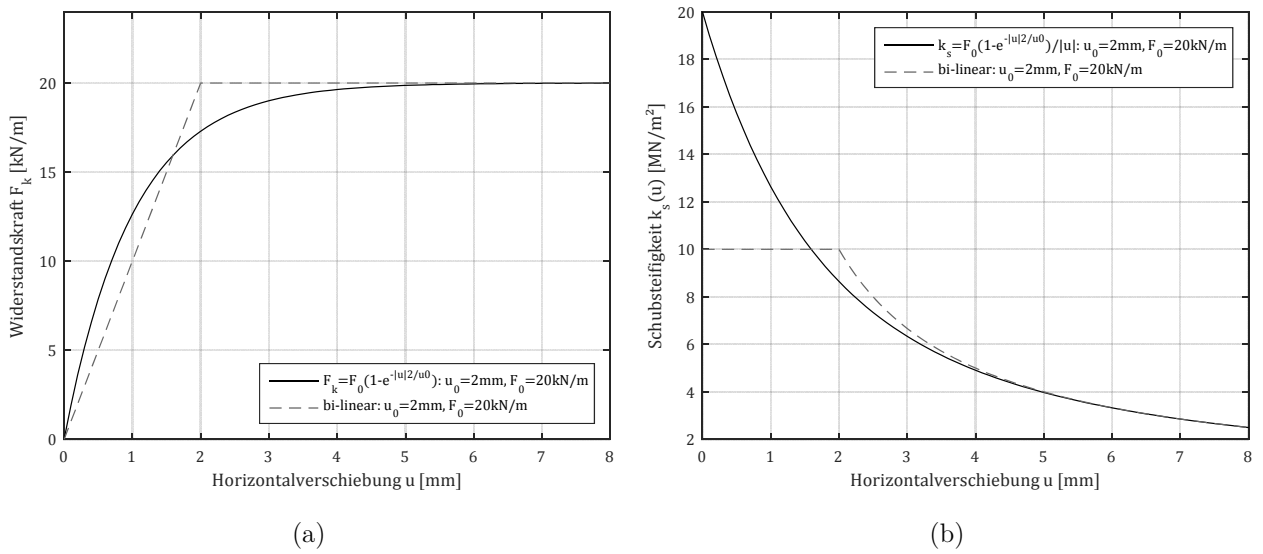


Abbildung 4.41: (a) Angepasster Verschiebungswiderstandsverlauf und (b) zugehörige Schubsteifigkeit

Die zweite hier untersuchte Form der Federcharakteristik stellt eine Abwandlung des bilinearen Verschiebungswiderstandsgesetzes dar. Darin fließen die Erkenntnisse aus Abschnitt 4.2.3 ein. Der Verschiebungswiderstand F_k wird dabei durch folgende Funktion beschrieben:

$$F_k = F_0 \left(1 - e^{-|u| \frac{2}{u_0}} \right) \quad (4.28)$$

Im Weiteren wird diese Schubcharakteristik als angepasster Verlauf bzw. als e-Verlauf Modell bezeichnet. Wie in Abbildung 4.41 (b) dargestellt, verfügt dieser Verlauf über eine doppelt so große Anfangssteifigkeit wie der vergleichbarere bilineare Verlauf nach Abbildung 4.40 (a). Außerdem gibt es keinen abrupten Übergang zwischen elastischem und plastischem Verhalten. Durch die Definition als Funktion im gesamten Wertebereich von u ergeben sich Vorteile bei der analyti-

schen Bearbeitung bzw. wird eine Ableitung und Integration der Steifigkeit dadurch erst sinnvoll möglich. Der Verschiebungswiderstands- und der zugehörige Steifigkeitsverlauf sind in Abbildung 4.41 veranschaulicht.

4.4.2 Modellierung des Vorlandbereichs

Ein durchgehender Gleiskörper (ohne Schienenauszug) zwischen Brücke und Vorland ruft eine gewisse Einspannwirkung hervor. Der Auflagerverdrehung wirkt die Dehnsteifigkeit der Schienen ($2 * UIC60 \rightarrow EA_{Sch} = 3220 \cdot 10^6 \text{ N}$) und der Schubverbund zwischen Schienen und Untergrund entgegen. Daher scheint es naheliegend, für eine Vereinfachung des Systems, den gesamten Vorlandbereich durch eine Dehnfeder zu ersetzen (dargestellt in Abbildung 4.42). Diese Feder ist an die Schienen im Tragwerksbereich gekoppelt. Über den Höhenabstand zwischen Auflagerdrehpunkt und der Wirkungsebene dieser Dehnfeder (Schienenschwerpunkt) kann eine gewisse Drehfedersteifigkeit ermittelt werden. So wird etwa in [9] und [94] vorgegangen. Diese Herangehensweise impliziert jedoch die Kopplung zwischen Tragwerk und Dehnfeder über einen biegesteifen Exzenterstab. Daher liegt hier der Fokus vorerst auf der Ermittlung einer Ersatzdehnfedersteifigkeit k_{Ersatz} des Vorlandbereichs. Kennwerte für die Ersatzfedersteifigkeit k_{Ersatz} des unbelasteten Gleiskörpers (Schubsteifigkeit des Schotters lt. EC1-2 [3]; $k_S = 10 \text{ MN/m}^2$) sind etwa von *Bigelow et al.* [94], abhängig von der Vorlandlänge, angegeben.

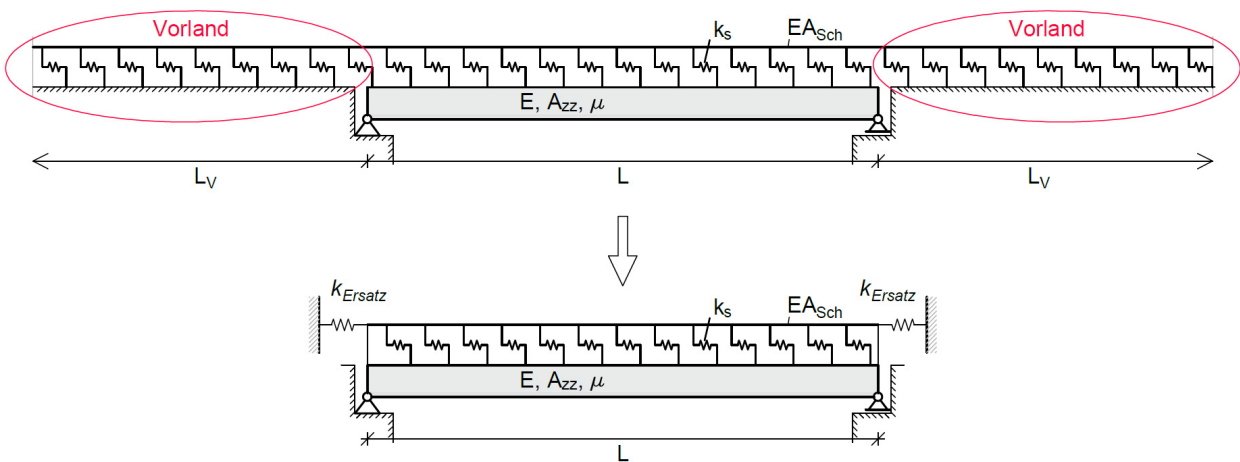


Abbildung 4.42: Ersatz des Gleiskörpers im Vorland durch eine Dehnfeder

Zur Bestimmung der Ersatzdehnsteifigkeit in Abhängigkeit von der Schubsteifigkeit des Schotters wird hier zunächst analog zu *Bigelow et al.* [94] vorgegangen. Dabei wird gedanklich der Vorlandbereich getrennt von der Brücke betrachtet. Die Federsteifigkeit k_{Ersatz} ergibt sich dann aus einer am Gleisrost anziehenden horizontalen Kraft F_A und die dadurch hervorgerufene Horizontalverschiebung u_A am Schnittpunkt.

$$k_{Ersatz} = \frac{F_A}{u_A} \tag{4.29}$$

Zunächst wird für das Vorland ein statisches Modell eingeführt (dargestellt in Abbildung 4.43). Dieses besteht aus einem Zugstab, der die Schienen abbildet und im Abstand von d über eine ho-

rizontale Feder, welche die Schubübertragung des Schotters abbildet, mit dem Untergrund verbunden ist. Die Länge des berücksichtigten Vorlandbereichs wird über die Wahl des Federabstands d und die Feldanzahl m festgelegt. Die Steifigkeit der Einzelfedern k_k ergibt sich aus dem Produkt der Schubsteifigkeit k_S und dem Federabstand d . Für die Berechnung wird von einer linearen Federsteifigkeit ausgegangen. Bei Verwendung des Verschiebungswiderstandsverlauf nach EC, ist dies somit bis zu einer maximalen Verformung von $u_A = 2,0 \text{ mm}$ gültig.

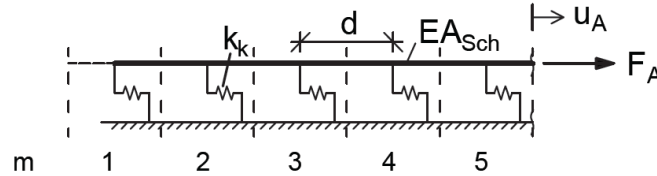


Abbildung 4.43: Modell des Vorlandbereichs

Zur Bestimmung der gesuchten Verschiebung u_A wird das Prinzip der virtuellen Kräfte (PVK) angewendet. Das vorliegende System ist n -fach ($n = m - 1$) statisch unbestimmt. Als Unbekannte x_i werden die Federkräfte der Felder 2 bis m gewählt. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\delta_{ij} x_i + \delta_{i0} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

mit den Elementen

$$\delta_{ii} = \frac{i d}{EA_{Sch}} + \frac{2}{k_k} \quad (4.31)$$

$$\delta_{ij} = \frac{\min(i, j) d}{EA_{Sch}} + \frac{1}{k_k}, \quad \text{für } i \neq j \quad (4.32)$$

$$\delta_{i0} = - \left(\frac{F_A i d}{EA_{Sch}} + \frac{F_A}{k_k} \right) \quad (4.33)$$

Dabei gilt: $i = 1 \dots n$, sowie $j = 1 \dots n$

Aus dem Gleichungssystem in (4.30) können die Unbekannten x_i bestimmt werden. Die Unbekannten x_i entspricht dabei der Federkraft im Feld $i + 1$. Aus diesen Federkräften können durch Division durch die Federsteifigkeit k_k die Verschiebungen u_i in der Mitte des jeweiligen Feldes ermittelt werden. Die Verschiebung am Übergang zwischen Brücke und Vorland ergibt sich somit zu:

$$u_A = \frac{F_m}{k_k} + \frac{F_A d}{2 EA_{Sch}} \quad (4.34)$$

In Abbildung 4.44 (a) ist der Verlauf der Normalkraft in der Schiene F_{Sch} über die Vorlandlänge für ein 100 m langes Vorland für unterschiedliche Schottersteifigkeiten dargestellt. Mit x_L wird hier der Abstand im Vorland zum Auflagerpunkt = Lasteinleitpunkt bezeichnet. Die Normalkraft

in der Schiene an der Position x_L ergibt sich als die Differenz zwischen der eingeleiteten Kraft F_A und der Summe der bis x_L an den Untergrund abgegebenen Schubkräfte (Federkräfte) x_i . Mit abnehmender Schubsteifigkeit k_S erhöht sich die erforderliche Vorlandlänge, um die Schienennormalkraft in den Untergrund einzuleiten. Es ist jedoch auch ersichtlich, dass selbst mit der geringen Steifigkeit von $k_S = 10 \text{ MN/m}^2$ nach 50 m Vorland bereits ca. 95 % der eingeleiteten Normalkraft F_A an den Untergrund abgegeben wurde. Die hier gewählten 100 m Vorland sollten demnach für die üblichen Größen der Schubsteifigkeit des Gleisschotters ausreichen um die Ersatzfedersteifigkeit zu bestimmen. In Abbildung 4.44 (b) ist die Ersatzsteifigkeit, die sich für unterschiedliche Vorlandlängen und Schubsteifigkeiten ergeben, wiedergegeben. Die dargestellten Ergebnisse zeigen, dass bereits 40 m Vorland ausreichend sind, um die Ersatzsteifigkeit mit ausreichender Genauigkeit zu ermitteln.

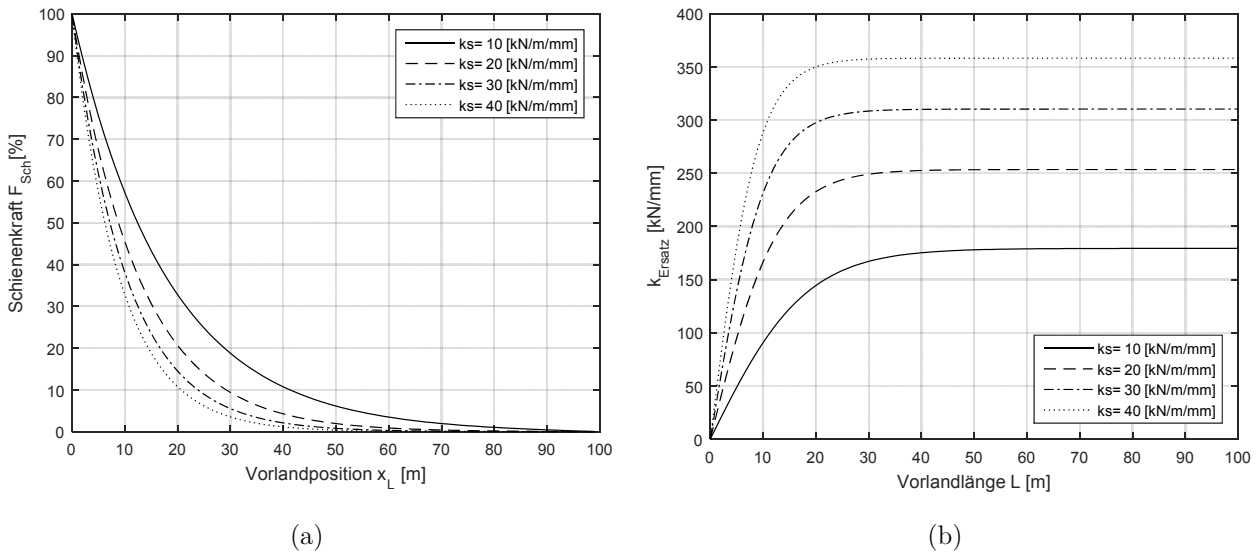


Abbildung 4.44: (a) Verlauf der Schienennormalkraft über die Vorlandlänge (b) Ersatzsteifigkeit des Vorlandbereichs in Abhängigkeit von der Vorlandlänge

Da diese Methode, die Ersatzfedersteifigkeit zu bestimmen, etwas umständlich ist, wird hier ein anderer Zugang untersucht.

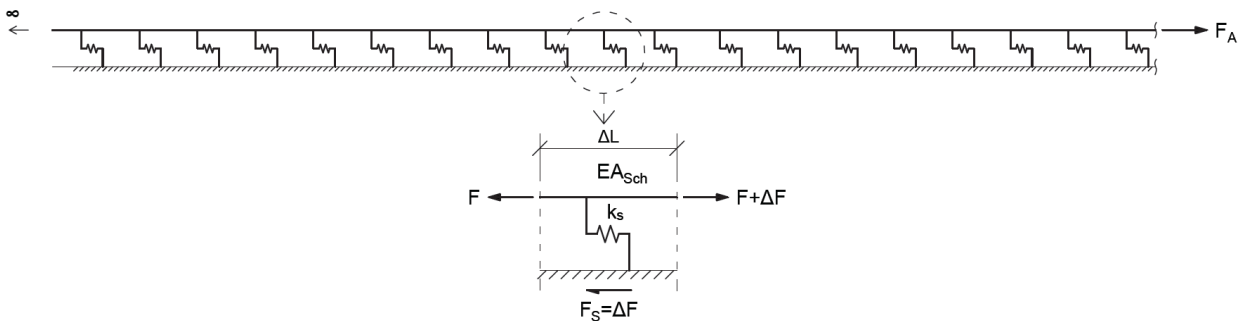


Abbildung 4.45: Abschnitt des Vorlandbereiches

Dazu wird von einer unendlichen Ausdehnung des Vorlands ausgegangen. Da, wie aus Abbildung 4.44 ersichtlich, für Schubsteifigkeiten k_S von 10 MN/m^2 oder mehr, eine größere Vorlandlänge als 40 m kaum bis keinen Einfluss auf die Steifigkeit der Ersatzfeder hat, scheint dieser Zugang legi-

tim. Betrachtet man, wie in Abbildung 4.45 dargestellt, einen kurzen Abschnitt des Vorlands (Länge ΔL), so wird in diesem die Teilkraft ΔF aus der Schiene in den Untergrund übertragen. Die Relativverschiebung Δu_{EA} die in diesem Abschnitt zufolge Schienendehnung Δu_{EA} entsteht muss gleich der Relativverschiebung Δu_{ks} , die zur Aktivierung der Schubkraft notwendig ist, sein.

$$\Delta u_{EA} = \Delta u_{ks} = \Delta u \quad (4.35)$$

$$\Delta u_{EA} = \frac{\Delta F \Delta L}{EA_{Sch}} \quad (4.36)$$

$$\Delta u_{ks} = \frac{\Delta F}{k_s \Delta L} \quad (4.37)$$

$$\frac{\Delta F \Delta L}{EA_{Sch}} = \frac{\Delta F}{k_s \Delta L} \quad (4.38)$$

Damit Gleichung (4.38) erfüllt ist, muss die Länge ΔL folgenden Wert aufweisen.

$$\Delta L = \sqrt{\frac{EA_{Sch}}{k_s}} \quad (4.39)$$

Dieser Wert ist unabhängig von der eingeleiteten Kraft. Ersetzt man in Gleichung (4.37) Δu_{ks} mit u_A sowie ΔF mit F_A und berücksichtigt das Verhältnis aus (4.39), so ergibt sich für die Dehnsteifigkeit des Vorlands (für $L = \infty$) folgende einfache Gleichung.

$$k_{Ersatz} = k_{Vor} = \frac{F_A}{u_A} = \sqrt{k_s EA_{Sch}} \quad (4.40)$$

Eine etwas exaktere Vorgehensweise führt hier auf das gleiche Ergebnis. Dazu wird ein infinitesimaler Abschnitt des Gleiskörpers betrachtet (siehe Abbildung 4.46).

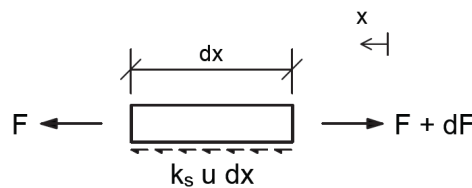


Abbildung 4.46: Infinitesimaler Abschnitt des Gleiskörpers im Vorland

Aus dem horizontalen Kräftegleichgewicht in Abbildung 4.46 unter Berücksichtigung von

$$u' = \varepsilon = \frac{F}{EA_{Sch}} \quad \rightarrow \quad F = u' EA_{Sch} \quad (4.41)$$

$$u'' = \frac{dF}{dx} \frac{1}{EA_{Sch}} \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{dx} = u'' EA_{Sch} \quad (4.42)$$

ergibt sich die Differentialgleichung der Vorlanddehnung $u(x)$:

$$u'' - \frac{k_s}{EA_{Sch}} u = 0 \quad (4.43)$$

Zur Lösung wird von den Randbedingungen $F(x=0) = F_A$ und $F(x=\infty) = 0$ Gebrauch gemacht. Die Verschiebung an der Stelle $x=0$ ergibt sich nach dem Lösen der Differentialgleichung zu:

$$u_A = u(x=0) = \frac{F_A}{\sqrt{k_s EA_{Sch}}} \quad (4.44)$$

Setzt man die eingeleitete Kraft F_A nun mit der resultierenden Endverschiebung in Relation, so erhält man die gesuchte Ersatzsteifigkeit k_{Ersatz} (im Weiteren auch als Vorlandsteifigkeit bezeichnet) zu:

$$k_{Ersatz} = k_{Vor} = \frac{F_A}{u_A} = \sqrt{k_s EA_{Sch}} \quad (4.45)$$

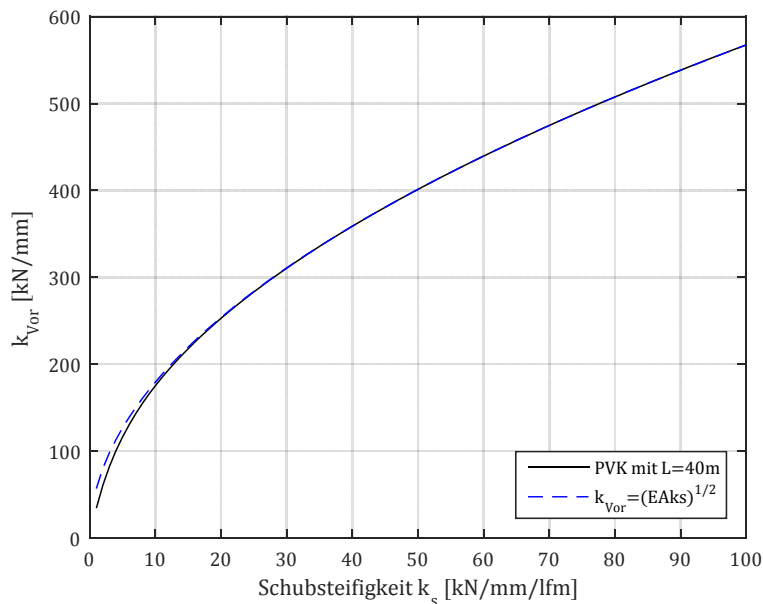


Abbildung 4.47: Ersatzsteifigkeit k_{Ersatz} des Vorlands für unterschiedliche Schubsteifigkeiten k_s

In Abbildung 4.47 ist die Ersatzfedersteifigkeit nach Gleichung (4.40) für Schubsteifigkeiten von $k_s = 1 \text{ kN/mm/lfm}$ bis $k_s = 100 \text{ kN/mm/lfm}$ ausgewertet. In dieser Abbildung ist auch die Ersatzsteifigkeit auf Basis des Modells nach Abbildung 4.43 (PVK) für eine Vorlandlänge von 40 m dargestellt. Es ist erkennbar, dass ab einer Schubsteifigkeit von $k_s = 10 \text{ kN/mm/lfm}$ die Steifigkeiten für das unendlich lange Vorland verwendet werden können.

Für einen linearen Schubsteifigkeitsverlauf des Schotters ist somit eine einfache Erfassung der Dehnsteifigkeit des Gleiskörpers im Vorlandbereich möglich. Aus Abbildung 4.38 ist jedoch ersichtlich, dass für reale Tragwerke durchaus Relativverschiebungen von mehr als 2,0 mm auftreten und somit selbst bei einem bilinearen Schubwiderstandsmodell ein nichtlineares Verschiebungsverhalten des Gleiskörpers im Vorland berücksichtigt werden muss.

Für einen bilinearen Verlauf des Verschiebungswiderstands wird das Vorland in zwei Bereiche geteilt. Diese zwei Bereiche entsprechen jeweils einer Dehnfeder. Durch seriell Schalten der bei-

den Federn wird die Steifigkeit des gesamten Vorlandbereichs abgebildet (dargestellt in Abbildung 4.48).

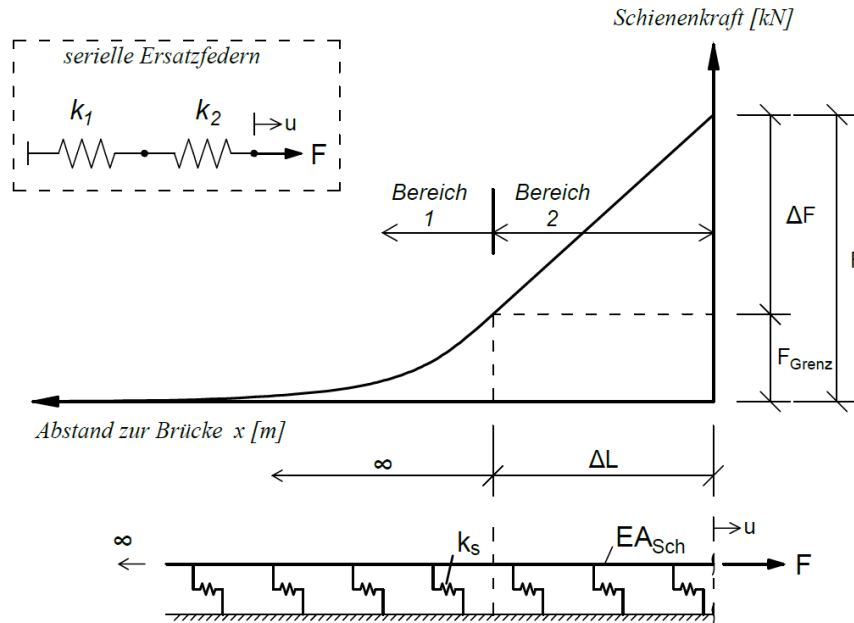


Abbildung 4.48: Modell der Vorlandfeder für einen bilinearen Verlauf des Schubwiderstands

Bereich 1 spiegelt das Verhalten bis zu einer Relativverschiebung von u_0 wider. Die Steifigkeit k_1 entspricht somit der Ersatzsteifigkeit nach (4.40) für ein linear elastisches Schubverhalten. Im Bereich 2 liegt „plastisches“ Verhalten vor. In der Verbundfuge wird der Durchschubwiderstand F_0 aktiviert. Die Kraft ΔF , die über die Länge ΔL in den Untergrund übertragen wird, ergibt sich demnach zu:

$$\Delta F = F_0 \Delta L \quad (4.46)$$

Die Gesamtkraft F , die an der Stelle $x = 0$ in die Schiene eingeleitet wird, setzt sich somit aus ΔF und F_{Grenz} zusammen. Die maximale Grenzkraft F_{Grenz} , bei der im Vorland nur linear elastische Relativverschiebungen auftreten, lässt sich folgendermaßen bestimmen:

$$F_{Grenz} = u_0 \sqrt{EA_{Sch} k_s} \quad (4.47)$$

Wobei sich die elastische Schubsteifigkeit k_s aus dem Durchschubwiderstand F_0 und der Grenzverschiebung u_0 wie folgt ermitteln lässt:

$$k_s = F_0/u_0 \quad (4.48)$$

Die gesamte Relativverschiebung u kann, wie die Kraft, in einen elastischen Term u_0 und einen „plastischen“ Term Δu aufgeteilt werden. Δu kann dabei folgend bestimmt werden:

$$\Delta u = \frac{1}{EA_{Sch} F_0} \left(\frac{\Delta F^2}{2} + \frac{F_{Grenz} \Delta F}{1} \right) \quad (4.49)$$

Die Ersatzsteifigkeit k_{Vor} des gesamten Vorlandbereichs wird als Verhältnis zwischen der wirkenden Gesamtkraft F und der zugehörigen Gesamtverschiebung u ermittelt,

$$k_{Vor} = \frac{F}{u} = \frac{F}{u_0 + \Delta u} \tag{4.50}$$

Diese Steifigkeit kann sowohl als Funktion der Gesamtkraft F

$$k_{Vor}(F) = \frac{2 EA_{Sch} F F_0}{F^2 + EA_{Sch} F_0 u_0}, \tag{4.51}$$

als auch als Funktion der Gesamtverschiebung u

$$k_{Vor}(u) = \sqrt{\frac{EA_{Sch} (2 u F_0 - F_0 u_0)}{u^2}} \tag{4.52}$$

angegeben werden. Diese Berechnungsgleichungen für die Steifigkeit der Vorlandfeder sind für $u > u_0$ bzw. $F > F_{Grenz}$ gültig. In Abbildung 4.49 sind für $u_0 = 2,0 \text{ mm}$ und $F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$ die Steifigkeitsverläufe der Vorlandfeder dargestellt.

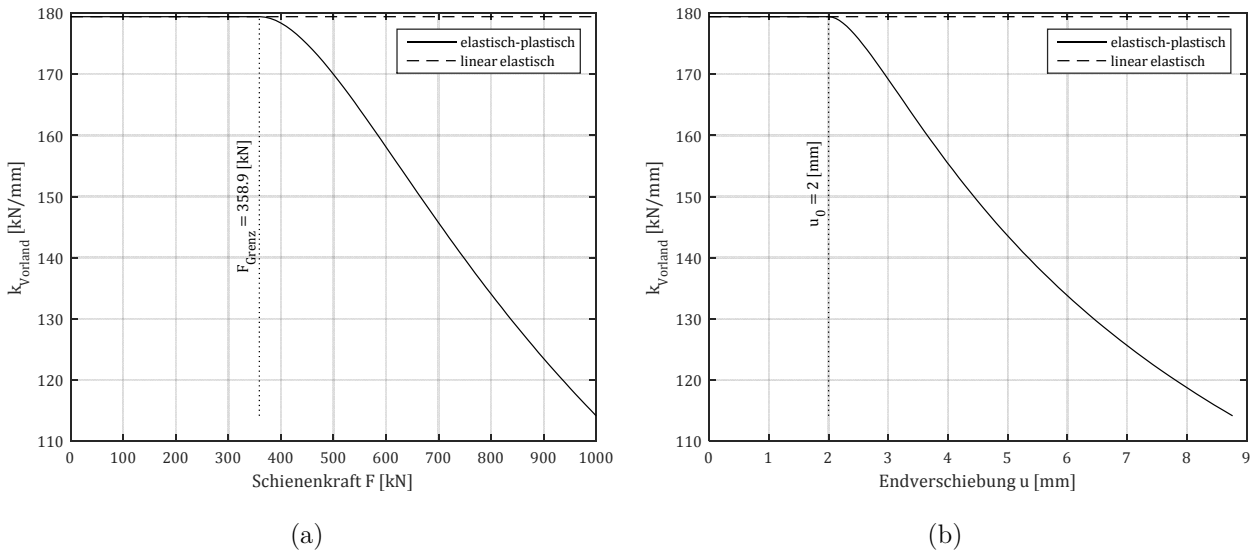


Abbildung 4.49: Steifigkeit der nichtlinearen Vorlandfeder (a) als Funktion der eingeleiteten Schienenkraft (b) als Funktion der Endverschiebung

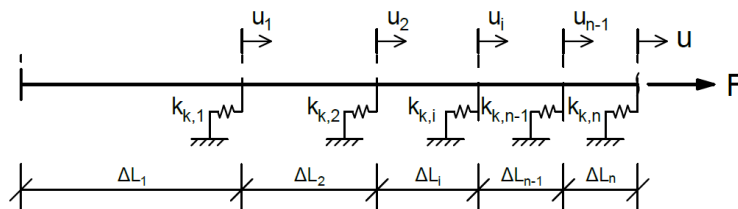


Abbildung 4.50: Modell der Vorlandfeder für den angepassten Schubwiderstandsverlauf

Für einen bilinearen Schubwiderstandsverlauf sind somit einfache Gleichungen zur Ermittlung der Ersatzfedersteifigkeit vorhanden. Da in der vorliegenden Arbeit jedoch auch ein angepasster

Schubwiderstandsverlauf untersucht wird, ist auch ein Konzept zur Bestimmung der Ersatzsteifigkeit für die e-Verlauf Schubcharakteristik erforderlich. Dazu wird das theoretisch unendlich lange Vorland gedanklich in n Teile geteilt (siehe Abbildung 4.50). Die Aufteilung erfolgt dabei so, dass die Dehnung jedes Teils ein n -tel zur Gesamtdehnung u beiträgt.

$$\Delta u = \Delta u_i = \frac{u}{n}, \quad i = 1 \dots n \quad (4.53)$$

Weiters wird angenommen, dass die Schienenkraft in jedem Bereich konstant bleibt. Die Gesamtkraft F kann auch als Summe der Schubfederkräfte $F_{F,i}$ gesehen werden.

$$F = \sum F_{F,i} \quad (4.54)$$

Somit können die Schienenkräfte F_i aus der Summe der Schubfederkräfte vor (von 1 bis i) dem betrachteten Abschnitt bestimmt werden.

$$F_i = \sum_{j=1}^i F_{F,j} \quad (4.55)$$

Die Schubfedersteifigkeit $k_{k,i}$ wird auf Basis des angepassten Schubwiderstandsverlaufs (4.28) (auch als e-Verlauf bezeichnet) ermittelt. Zur besseren Übersicht ist dieser Verlauf hier nochmals angeführt:

$$F_k = F_0 \left(1 - e^{-|u| \frac{2}{u_0}} \right) \quad (4.56)$$

Für eine entsprechend große Anzahl von n kann die Schubwiderstandskraft pro Länge des i -ten Bereichs mit

$$F_{k,i} = F_0 \left(1 - e^{-(\Delta u \cdot i) \frac{2}{u_0}} \right) \quad (4.57)$$

angesetzt werden. Die fiktive Abschnittslänge ΔL_i kann aus der Dehnung Δu und der Schienenkraft F_i im jeweiligen Abschnitt bestimmt werden.

$$\Delta L_i = \frac{EA_{Sch} \Delta u}{F_i} \quad (4.58)$$

Aus dieser Länge und der Schubwiderstandskraft $F_{k,i}$ für den jeweiligen Abschnitt kann die zugehörige Schubfederkraft bestimmt werden.

$$F_{F,i} = \Delta L_i F_{k,i} \quad (4.59)$$

Durch Umformen und Verwendung von

$$F_i = F_{i-1} + F_{F,i} \quad (4.60)$$

ergeben sich die Schubfederkräfte aus nachstehender Folge.

$$F_{F,i} = -\frac{F_{i-1}}{2} + \sqrt{\Delta u EA_{Sch} F_{k,i} + \frac{F_{i-1}^2}{4}} \quad (4.61)$$

Nach Ermittlung der Schubfederkräfte kann aus dem Verhältnis der Gesamtkraft und der Verformung die Ersatzsteifigkeit des Vorlands k_{Vor} bestimmt werden,

$$k_{Vor} = \frac{F}{u} = \frac{\sum F_{F,i}}{u} \quad (4.62)$$

Abbildung 4.51 zeigt den Verlauf der Vorlandsteifigkeit für das angepasste Schubwiderstandsverhalten für Schotterkennwerte von $u_0 = 2,0 \text{ mm}$ und $F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$. Für die dargestellte Berechnung wurde ein n von 200 verwendet.

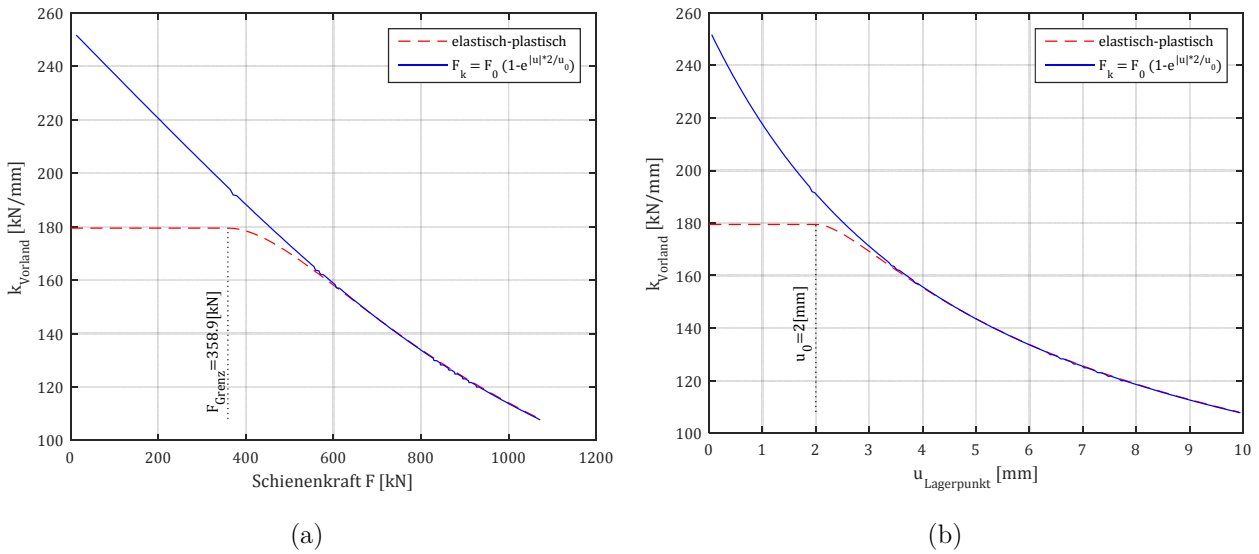


Abbildung 4.51: Steifigkeit der Vorlandfeder für den angepassten Schubwiderstandsverlauf ($u_0 = 2,0 \text{ mm}$ und $F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$) (a) Verlauf über die Schienenkraft (b) Verlauf über die Endpunktverschiebung

Um sich die relativ aufwendige Berechnung der Schubfederkraftfolge zu ersparen, wird eine rein von der Verschiebung am Lagerpunkt u_{LA} abhängige Formfunktion gesucht. Aus Vergleichen der Verläufe der Steifigkeit der Vorlandfeder für unterschiedliche Schotterkennwerte (F_0 und u_0) zeigt sich, dass solch eine Formfunktion mit K_{vor} gegeben ist. Die Ersatzsteifigkeit der Vorlandfeder kann für das e-Verlauf Modell des Schubwiderstands dadurch folgendermaßen ermittelt werden.

$$k_{Vor} = K_{vor} \sqrt{\frac{F_0}{u_0}} \quad (4.63)$$

Die exakte Formfunktion K_{vor} wird dabei durch eine polynomielle Anpassung angenähert.

$$K_{vor} = 79754 - 24486 \frac{u_{LA}}{u_0} + 6191,4 \frac{u_{LA}^2}{u_0^2} - 932,99 \frac{u_{LA}^3}{u_0^3} + 73,308 \frac{u_{LA}^4}{u_0^4} - 2,2967 \frac{u_{LA}^5}{u_0^5} \quad (4.64)$$

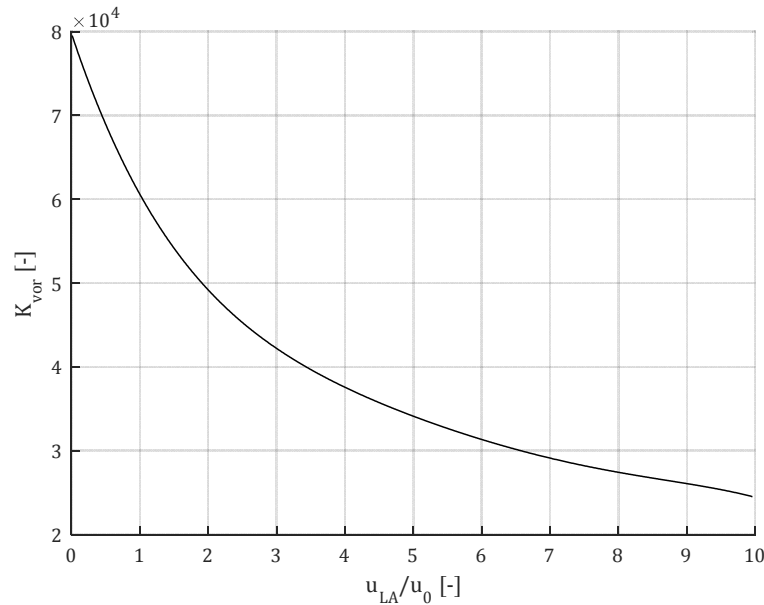


Abbildung 4.52: Verlauf des Formfaktors K_{vor} der Vorlandfeder (e-Verlauf)

Somit wurde auch für den angepassten Schubwiderstandsverlauf eine Möglichkeit eingeführt, um die Ersatzfedersteifigkeit der Vorlandfeder zu bestimmen.

Wird die hier vorgestellte Vorlandfeder für eine dynamische Berechnung verwendet, so wird für die Federsteifigkeit ein elastisches Verhalten (nichtlinear) impliziert. Tritt in der Realität tatsächlich eine plastische Verformung auf, so weicht das Schwingungsverhalten der Ersatzfeder von dem des realen Systems ab. Treten die plastischen Relativverschiebungen jedoch nur in geringer Größe auf, so kann dieser Effekt vernachlässigt werden.

4.4.3 Modellierung des Schubverbunds im Tragwerksbereich

Wird das Vorland vernachlässigt, so stellen das Gleis und das Brückentragwerk zwei getrennte Biegeträger dar, die über den Schotterkörper miteinander verbunden sind. Durch die Schubkräfte, die der Schotter überträgt, stellt sich eine gewisse Verbundwirkung ein und die zwei Balken können als ein Verbundträger behandelt werden (dargestellt in Abbildung 4.53).

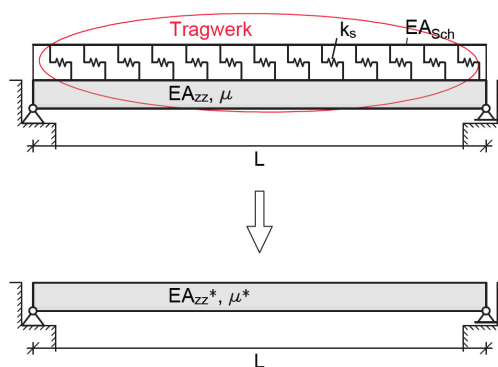


Abbildung 4.53: Modellierung des Tragwerks und Gleiskörpers als Verbundträger

Das mechanische Modell des Koppelbalkens mit Feder-Dämpferkopplung in x-Richtung, wird etwa in den Arbeiten von *Adam et al.* [129] [130] [131] und von *Jeschko* [132] behandelt. Hier wird von einem auf diesen Arbeiten basierendes Modell ausgegangen, dass von *Mähr* [4] zur Beschreibung einer Versuchsbrücke verwendet wurde. Das Tragwerk und der gesamte Schotteroberbau werden dabei als eigene Biegebalken betrachtet, die über eine kontinuierliche Feder-Dämpfer Kopplung in einer fiktiven Schubfuge miteinander verbunden sind (dargestellt in Abbildung 4.54).

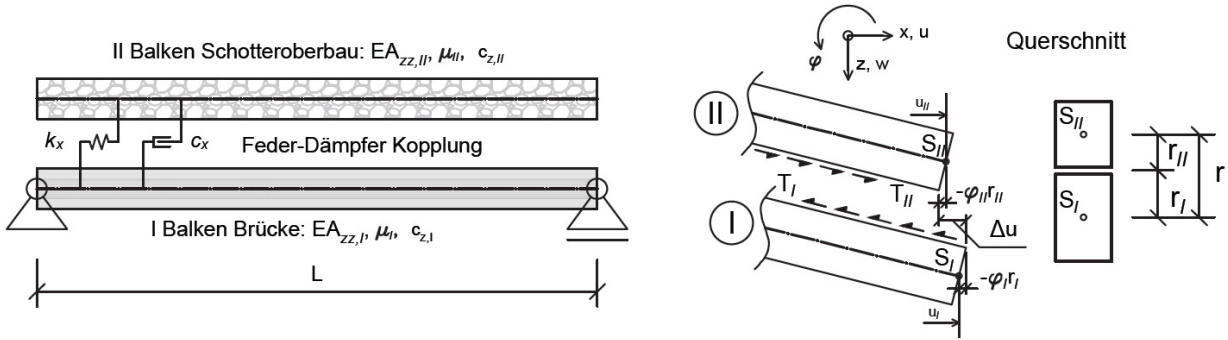


Abbildung 4.54: Modellierung der gekoppelten Balken (nach [4], Abbildung 2.10 und Abbildung 10.13)

Um die Bewegungsgleichungen der Transversalschwingungen beider Balken zu erhalten, werden folgende Vereinfachungen getroffen [4]:

- Die Berechnung beschränkt sich auf die Theorie I. Ordnung.
- Die Stäbe werden als dehnstarr angenommen ($u_I = u_{II} = 0$).
- Es werden keine Längsschwingungen berücksichtigt.
- Effekte zufolge Schub und Rotationsträgheit werden vernachlässigt. Die Balken werden als Bernoulli-Euler-Balken behandelt ($\varphi = -w_{,x}$).
- Die beiden Balken sind vertikal gekoppelt ($w_I = w_{II}$; $\Delta w = 0$).

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich daraus zu (vgl. [4], (2.70) und (2.71)):

$$EA_{zz,I} w_{I,xxxx} + c_{z,I} \dot{w}_I + \mu_I \ddot{w}_I = p_z + T_{I,x} r_I \quad (4.65)$$

$$EA_{zz,II} w_{II,xxxx} + c_{z,II} \dot{w}_{II} + \mu_{II} \ddot{w}_{II} = p_z + T_{II,x} r_{II} \quad (4.66)$$

An beiden Balken wirkt der gleiche Schubfluss $T = T_I = T_{II}$, der folgendermaßen ermittelt werden kann [4]:

$$T = k_x \Delta u + c_x \Delta \dot{u} = k_x (w_{I,x} r_I + w_{II,x} r_{II}) + c_x (\dot{w}_{I,x} r_I + \dot{w}_{II,x} r_{II}) \quad (4.67)$$

Der Schubfluss ist rein von den translatorischen Freiheitsgraden w_I und w_{II} abhängig, da Längsschwingungen ausgeschlossen wurden und für die Relativverschiebung Δu nur mehr die Verdrehungen übrig bleiben [4]:

$$\Delta u = u_I - u_{II} - \varphi_I r_I - \varphi_{II} r_{II} = w_{I,x} r_I + w_{II,x} r_{II} \quad (4.68)$$

Berücksichtigt man $w_I = w_{II}$ sowie $r = r_I + r_{II}$, so ergibt sich der Schubfluss und dessen Ableitung nach x zu [4]:

$$T = k_x w_{,x} r + c_x \dot{w}_{,x} r \quad (4.69)$$

$$T_{,x} = k_x w_{,xx} r + c_x \dot{w}_{,xx} r \quad (4.70)$$

Des Weiteren lassen sich durch Addition die Bewegungsgleichungen der beiden Balken zusammenfassen [4]:

$$EA_{zz} w_{,xxxx} - r^2 (k_x w_{,xx} + c_x \dot{w}_{,xx}) + c_z \dot{w} + \mu \ddot{w} = p_z \quad (4.71)$$

Dabei gilt [4]:

$$EA_{zz} = EA_{zz,I} + EA_{zz,II} \quad (4.72)$$

$$c_z = c_{z,I} + c_{z,II} \quad (4.73)$$

$$\mu = \mu_I + \mu_{II} \quad (4.74)$$

Die Biegesteifigkeit EA_{zz} , Dämpfung c_z sowie die Massenbelegung μ des Ersatzbalkens kann demnach durch Addition der Werte der Einzelbalken bestimmt werden.

Zunächst wird für die horizontale Schotterfeder k_x ein linearer Ansatz untersucht. Bei Verwendung einer Sinus-Halbwellen für den eingliedigen *Ritzschen* Ansatz

$$w(x, t) = \phi(x) q(t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t) \quad (4.75)$$

und Anwenden der *Galerkinschen* Vorschrift (2.5) auf die Bewegungsgleichung (4.71) ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Koordinate $q(t)$:

$$EA_{zz} \frac{\pi^4}{2 L^3} q + r^2 k_x \frac{\pi^2}{2 L} q + c_x r^2 \frac{\pi^2}{2 L} \dot{q} + c_z \frac{L}{2} \dot{q} + \mu \frac{L}{2} \ddot{q} = \int_0^L p_z \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx \quad (4.76)$$

Für das ungedämpfte frei schwingende System reduziert sich die Bewegungsgleichung auf:

$$\left(EA_{zz} \frac{\pi^4}{2 L^3} + r^2 k_x \frac{\pi^2}{2 L} \right) q + \mu \frac{L}{2} \ddot{q} = 0 \quad (4.77)$$

Daraus folgt die ungedämpfte erste Eigenfrequenz ω_1 zu:

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + r^2 k_x \frac{L^2}{\pi^2}}{\mu}} \quad (4.78)$$

Für eine konstante Steifigkeit der Schubfeder und ein dehnstarres Gleis würde sich die Biegesteifigkeit einer Einfeldträgerbrücke somit um

$$\Delta EA_{zz} = r^2 k_x \frac{L^2}{\pi^2} \quad (4.79)$$

erhöhen. Hierbei handelt es sich jedoch um eine Steifigkeitsüberschätzung, da vor allem bei längeren Tragwerken nicht von einer unendlichen Dehnsteifigkeit der Schienen ausgegangen werden kann. Eine konstante Schubfedersteifigkeit ist auch nicht in der Lage die oft beobachtete Nichtlinearität des Schwingungsverhaltens abzubilden.

Zunächst wird näher auf das nichtlineare Verhalten eingegangen. Wie etwa in den Versuchen von *Mähr* gezeigt wurde, verringert sich die Eigenfrequenz mit zunehmender Schwingungsamplitude. Zur Abbildung dieses Verhaltens wird für das Schubverhalten des Schotterkörpers das e-Verlauf Modell des Schubwiderstandsgesetzes nach Gleichung (4.28) verwendet. Zur Bestimmung der ungedämpften Eigenfrequenz erfolgt eine Spezialisierung der Bewegungsgleichung (4.71) für eine freie und ungedämpfte Schwingung.

$$EA_{zz} w_{,xxxx} - r^2 k_x w_{,xx} + \mu \ddot{w} = 0 \quad (4.80)$$

Die horizontale Schubsteifigkeit k_x wird durch den von der Relativverschiebung Δu abhängigen Verlauf

$$k_x = \frac{F_k}{\Delta u} = \frac{F_0}{|\Delta u|} \left(1 - e^{-|\Delta u| \frac{2}{u_0}} \right) \quad (4.81)$$

ersetzt. Durch Anwendung der *Galerkinschen* Vorschrift mit dem eingliedrigen *Ritzschen* Ansatz (4.75) auf Gleichung (4.80) ergibt sich für den Schubterm folgendes Integral.

$$\int_0^L r^2 k_x \phi_{,xx} q \phi \, dx = \int_0^L r^2 \frac{F_0}{|\Delta u|} \left(1 - e^{-|\Delta u| \frac{2}{u_0}} \right) \phi_{,xx} q \phi \, dx \quad (4.82)$$

Darin kann die Relativverschiebung Δu durch

$$\Delta u(x, t) = r \varphi(x, t) = r \phi_{,x}(x) q(t) \quad (4.83)$$

ersetzt werden. Das Integral kann dadurch in der folgenden Form dargestellt werden.

$$\int_0^L r F_0 \left(1 - e^{-|r \phi_{,x} q| \frac{2}{u_0}} \right) \frac{\phi_{,xx} q \phi}{\phi_{,x} |q|} \, dx \quad (4.84)$$

Bei Verwendung der Abkürzungen

$$a = r F_0 \quad \text{und} \quad b = \frac{2 r}{u_0} \quad (4.85)$$

ergibt sich

$$\int_0^L a (1 - e^{-|\varphi| b}) \frac{\phi_{,xx} q \phi}{|\varphi|} \, dx . \quad (4.86)$$

Für die Integration dieses Ausdrucks wird von der Potenzreihe von e^x Gebrauch gemacht.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.87)$$

Dadurch erhält man das Integral zu:

$$\int_0^L a \left[b - |\varphi| \frac{b^2}{2!} + \varphi^2 \frac{b^3}{3!} - |\varphi|^3 \frac{b^4}{4!} + \dots \right] \phi_{,xx} q \phi \, dx \quad (4.88)$$

Welches auch folgendermaßen ausgedrückt werden kann.

$$\int_0^L a \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi|^{n-1} (-1)^{n-1} \frac{b^n}{n!} \right] \phi_{,xx} q \phi \, dx \quad (4.89)$$

Vertauscht man nun die Reihenfolge der Integration und der Summierung, so ergibt sich daraus:

$$a q \left[\sum_{n=1}^{\infty} |q|^{n-1} (-1)^{n-1} \frac{b^n}{n!} \int_0^L |\phi_{,x}|^{n-1} \phi_{,xx} \phi \, dx \right] \quad (4.90)$$

Die Summenterme können somit einzeln über die Länge integriert werden. Unter Berücksichtigung von

$$\phi = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \phi_{,x} = \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \quad \phi_{,xx} = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (4.91)$$

Ergeben sich die Integrale der einzelnen Terme zu:

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi_{,xx} \phi \, dx &= -\frac{\pi^2}{L^2} \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \, dx = -\frac{\pi^2}{2L} \\ \int_0^L |\phi_{,x}| \phi_{,xx} \phi \, dx &= -\frac{\pi^3}{L^3} \int_0^L \left| \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right| \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \, dx = -\frac{2\pi^2}{3L^2} \\ \int_0^L \phi_{,x}^2 \phi_{,xx} \phi \, dx &= -\frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \, dx = -\frac{\pi^4}{8L^3} \\ \int_0^L |\phi_{,x}|^3 \phi_{,xx} \phi \, dx &= -\frac{\pi^5}{L^5} \int_0^L \left| \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right|^3 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \, dx = -\frac{4\pi^4}{15L^4} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.92)$$

Durch Einsetzen der Integrale aus (4.92) ergibt sich (4.90) zu:

$$a q \left[-b \frac{\pi^2}{2L} + b^2 |q| \frac{\pi^2}{3L^2} - b^3 q^2 \frac{\pi^4}{48L^3} + b^4 |q|^3 \frac{\pi^4}{90L^4} - \dots + \dots \right] \quad (4.93)$$

Für die hier gesuchte Näherung wird davon ausgegangen, dass nach dem m -ten Glied abgebrochen wird. Ab welchem Glied das gilt, darauf wird später näher eingegangen. Die ungedämpfte freie Bewegungsgleichung des gekoppelten Balkens lässt sich somit folgendermaßen darstellen:

$$EA_{zz} \frac{\pi^4}{2 L^3} q + a q \left[b \frac{\pi^2}{2 L} - b^2 |q| \frac{\pi^2}{3 L^2} + b^3 q^2 \frac{\pi^4}{48 L^3} - b^4 |q|^3 \frac{\pi^4}{90 L^4} + \dots \right] + \mu \frac{L}{2} \ddot{q} = 0 \quad (4.94)$$

Da die zeitabhängige Variable $q(t)$ nicht nur selbst und in der zweiten zeitlichen Ableitung $\ddot{q}(t)$ vorkommt, sondern auch die Terme q^n (nichtlineare Gleichung), kann die Eigenfrequenz nur mehr in Abhängigkeit von der Amplitude bestimmt werden. Hierzu wird das gleiche Vorgehen, welches auch von *Mähr* [4] verwendet wurde, gewählt. Mit dem Verweis auf die Empfehlung von *Klotter* [133], dass sich für schwach nichtlineare Systeme, die Verwendung von harmonischen Funktionen als Ansatzfunktionen empfiehlt, wird folgender *Ritzscher* Ansatz für die in t periodischen Schwingungen gewählt.

$$q(t) = w_m \cos(\omega t) \quad (4.95)$$

Es wird also unterstellt, dass das System in der Frequenz ω und der Schwingungsamplitude w_m schwingt. Aus der *Galerkinschen* Vorschrift (2.5) folgt die Forderung

$$\int_0^{2\pi/\omega} D\{q(t)\} \cos(\omega t) dt = 0. \quad (4.96)$$

Den Differentialoperator $D\{q(t)\}$ stellt hierbei die Bewegungsgleichung (4.94) dar. Durch Einsetzen von (4.94) in (4.96) und Aufintegrieren der einzelnen Terme über die Periode von $t = 0 \dots 2\pi/\omega$ erhält man:

$$\begin{aligned} & -\mu \frac{L}{2} w_m \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt + EA_{zz} \frac{\pi^4}{2 L^3} w_m \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt \\ & + \left[a b \frac{\pi^2}{2 L} w_m \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt - a b^2 \frac{\pi^2}{3 L^2} w_m^2 \int_0^{2\pi/\omega} |\cos(\omega t)| \cos^2(\omega t) dt \right. \\ & \quad \left. + a b^3 \frac{\pi^4}{48 L^3} w_m^3 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^4(\omega t) dt - \dots \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

Mittels der bestimmten Integrale

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2(\omega t) dt &= \frac{\pi}{\omega} \\ \int_0^{2\pi/\omega} |\cos(\omega t)| \cos^2(\omega t) dt &= 2 \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} \cos^3(\omega t) dt = \frac{8}{3\omega} \\ \int_0^{2\pi/\omega} \cos^4(\omega t) dt &= \frac{3\pi}{4\omega} \\ \int_0^{2\pi/\omega} |\cos(\omega t)| \cos^4(\omega t) dt &= 2 \int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega} \cos^5(\omega t) dt = \frac{32}{15\omega} \end{aligned} \quad (4.98)$$

⋮

ergibt sich (4.97) zu:

$$\frac{\pi w_m}{\omega} \left(-\mu \frac{L}{2} \omega^2 + EA_{zz} \frac{\pi^4}{2 L^3} + a b \frac{\pi^2}{2 L} - a b^2 \frac{8 \pi}{6 L^2} w_m + a b^3 \frac{\pi^4}{64 L^3} w_m^2 - \dots \right) = 0 \quad (4.101)$$

Wird die Schwingungsfrequenz $\omega = \omega_1$ gesetzt, so ergibt sich die erste Eigenfrequenz ω_1 als Funktion der Schwingungsamplitude w_m .

$$\omega_1(w_m) = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + a b \frac{L^2}{\pi^2} - a b^2 \frac{8 L}{3 \pi^3} w_m + a b^3 \frac{1}{32} w_m^2 - \dots}{\mu}} \quad (4.102)$$

Somit ist eine Möglichkeit gegeben, die erste Eigenfrequenz des Gesamtsystems (Brücke mit dehnstarrem Gleis) anhand der maximalen Auslenkung (w_m steht hier für die maximale Durchbiegung in Feldmitte) abzuschätzen.

In Abbildung 4.55 sind beispielhaft für eine etwa 15,5 m lange Brücke die ersten Eigenfrequenzen für unterschiedliche Werte einer konstanten Schubsteifigkeit bzw. für einen e-Verlauf der Schubkraft dargestellt. Das Tragwerk besitzt eine Biegesteifigkeit von $EA_{zz} = 1,33 \cdot 10^{10} \text{ Nm}$, eine Massenbelegung von $\mu = 7690 \text{ kg/m}$ und einen Schwerpunktabstand zwischen Schiene und Tragwerk von $r = 1,69 \text{ m}$. Daraus ergibt sich für einen Einfeldträger (*Bernoulli-Euler-Balken*) die erste Biegeeigenfrequenz zu $f_0 = 8,63 \text{ Hz}$. Für den Schotter wurden die Normvorgaben für ein unbelastetes Gleis von $F_0 = 20 \text{ kN/m}$ und $u_0 = 2 \text{ mm}$ verwendet.

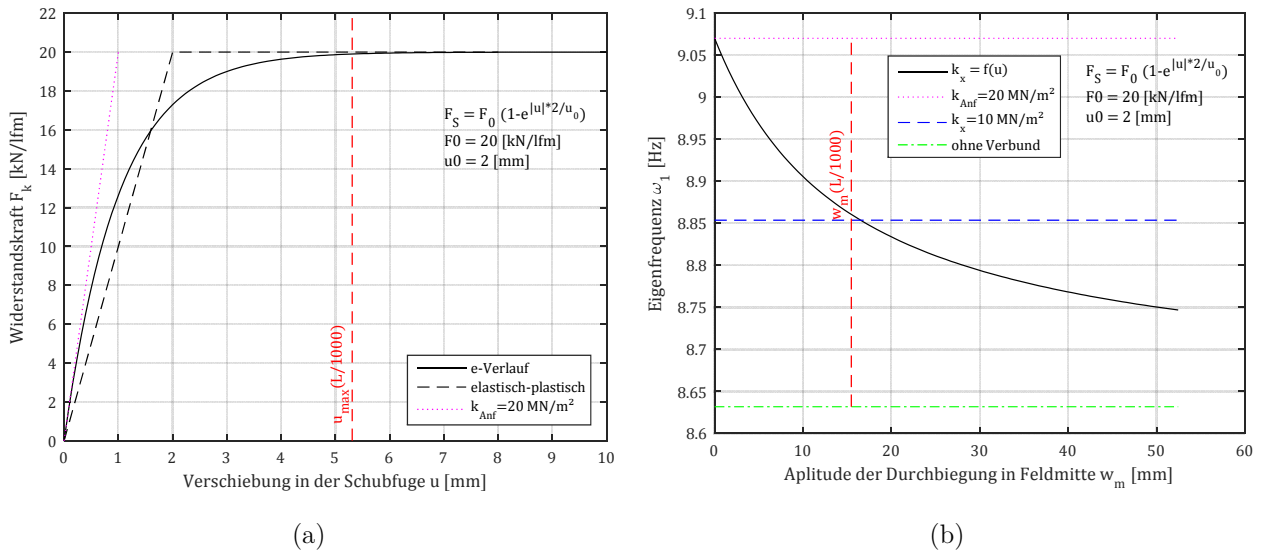


Abbildung 4.55: (a) Widerstandskraftverlauf des Schotters (b) Eigenfrequenzen einer 15,5 m langen Brücke für unterschiedliche Schottersteifigkeiten in Abhängigkeit von der Durchbiegungsamplitude w_m (dehnstarres Gleis)

Aus Abbildung 4.55 (b) ist ersichtlich, dass das System bei der geringsten Auslenkung die höchste Eigenfrequenz aufweist. Dies entspricht auch dem Verhalten, das bei Messungen beobachtet werden kann. Dadurch würde sich auch erklären lassen, dass Messmethoden mit nur geringem Energieeintrag, wie etwa Auswertungen von ambienten Messungen, höhere Eigenfrequenzen liefern als

Auswertungen der Schwingungen nach Zugüberfahrten. Der dargestellte Verlauf ist jedoch nur beispielhaft, da die tatsächlichen Schotterkennwerte nicht bekannt sind und hierbei Effekte aus der Schienendehnung bzw. aus dem Einfluss des Gleises im Vorlandbereich noch nicht berücksichtigt sind. Als Extremfälle sind hier die beiden Varianten „ohne Verbund“ und mit konstanter Anfangssteifigkeit k_{Anf} dargestellt. Es ist ersichtlich, dass sich mit zunehmender Schwingungsamplitude die Eigenfrequenz vom Höchstwert (Anfangssteifigkeit) zum niedrigsten Wert („ohne Verbund“) verschiebt. Der Verlauf der Eigenfrequenzen bei Verwendung des e-Verlauf Modells für den Schubwiderstand des Schotters scheint somit plausibel. Um Gleichung (4.102) auch anwenden zu können, stellt sich die Frage nach der Anzahl n der zu berücksichtigenden Reihenglieder für die Entwicklung der e-Funktion (4.87).

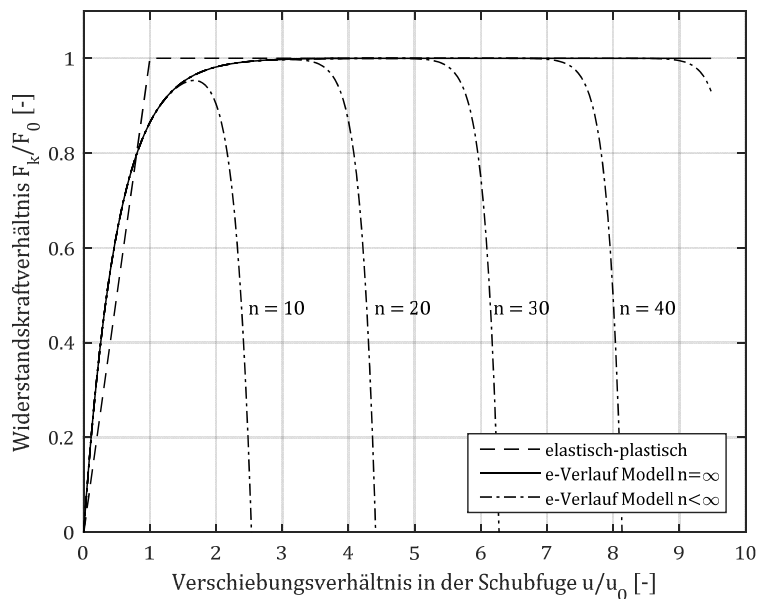


Abbildung 4.56: Schubwiderstandsverlauf für eine unterschiedliche Anzahl an Ansatzgliedern

Wie aus Abbildung 4.56 ersichtlich ist, ist die erforderliche Anzahl der Ansatzglieder vom maximal auftretenden Verhältnis zwischen u und u_0 abhängig. Die maximale Relativverschiebung kann anhand der Durchbiegungsbeschränkung $L/\delta = 1000$ in Abhängigkeit vom Schwerpunktabstand r abgeschätzt werden, vgl. Gleichung (4.27),

$$u_{max} \approx \varphi_{max} r = \frac{r \pi}{1000} \quad (4.103)$$

Um die Relation u/u_0 zu bestimmen, ist jedoch auch die Grenzverschiebung u_0 erforderlich. Für den tatsächlichen Wert von u_0 muss auf Abschnitt 4.2 bzw. auf noch durchzuführende Versuche verwiesen werden. Mangels genauerer Daten wird der Vorgabewert von 2 mm verwendet. Aus Abbildung 4.37 ist ersichtlich, dass bei der Einhaltung des Durchbiegungskriteriums für die untersuchten Tragwerke aus der vorliegenden Datenbank eine maximale Relativverschiebung von 3,0 mm auftritt. Dies würde einem u/u_0 - Wert von 1,5 entsprechen. Daher würde für die normativ vorgegebenen Schottercharakteristik ein Ansatz mit 10 Gliedern ausreichen (vgl. Abbildung 4.55). Liegt der tatsächliche Wert von u_0 jedoch deutlich unter den vorgegebenen 2,0 mm, was die

Erkenntnisse aus Kapitel 4.2 vermuten lassen, so sind mindestens 30 oder 40 Ansatzglieder notwendig um das Schubverhalten korrekt zu erfassen. Für eine EDV gestützte Auswertung stellt dies kein Problem dar. Für eine analoge Auswertung sind 40 Glieder jedoch etwas umständlich, weshalb eine andere Lösung für diese Aufgabenstellung gesucht wird.

Durch die Reihenentwicklung der e-Funktion im Schubwiderstandsverlauf kann der exakte Funktionsverlauf abgebildet werden. Um die Anzahl der Ansatzglieder zu reduzieren, wird für den Funktionsverlauf, der auch nur eine Annäherung des realen Verhaltens darstellt, eine Approximation gesucht. Dazu wird der „exakte“ Funktionsverlauf durch ein Polynom nach Gleichung (4.105) angenähert. Die Anzahl der Ansatzglieder n bestimmt auch hier die Qualität der Näherung. Ein weiteres Kriterium ist das maximale Verhältnis von u/u_0 der Grundfunktion, für die die Koeffizienten des Polynoms bestimmt werden. Wird für die gleiche Anzahl an Ansatzgliedern die Polynomkoeffizienten ein größerer u/u_0 Wert berücksichtigt, so sinkt die Qualität der Anpassung, speziell im niedrigen u/u_0 Bereich.

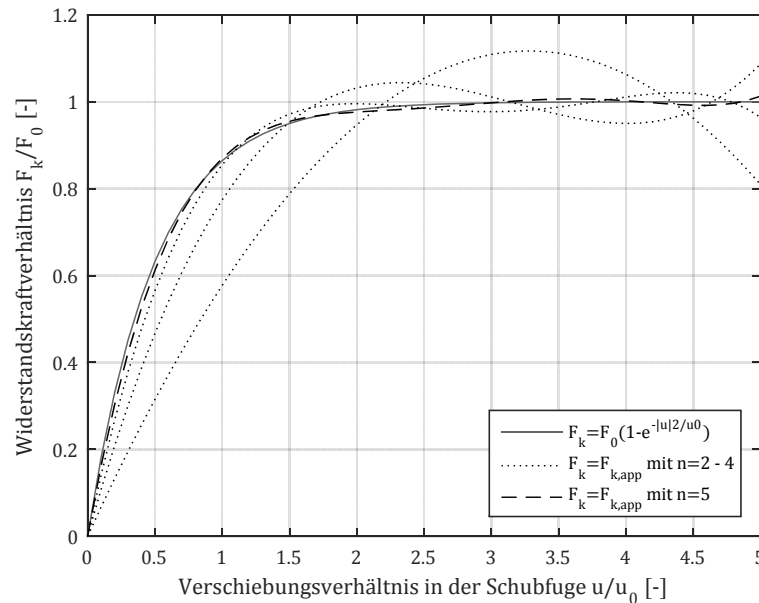


Abbildung 4.57: Angepasster Schubwiderstandsverlauf für eine unterschiedliche Anzahl an Ansatzgliedern

In Abbildung 4.57 ist die Anpassung des Widerstandskraftverlaufs für eine unterschiedliche Anzahl an Ansatzgliedern dargestellt. Wie daraus ersichtlich ist, kann bereits ab einer geringen Anzahl von Ansatzgliedern eine gute Übereinstimmung für die Widerstandskraft erzielt werden. Aus umsetzungstechnischen Gründen wird der Verlauf der Widerstandskraft und nicht direkt der Verlauf der Schubsteifigkeit angepasst. Um auch für die Schubsteifigkeit eine gute Übereinstimmung zu erhalten, ist die Anzahl der Ansatzglieder etwas zu erhöhen.

Da für $u = 0$ auch $F_k = 0$ gelten muss, wird der konstante Term a_0 Null gesetzt. Die Widerstandskraft F_k kann somit folgendermaßen angenähert werden:

$$F_{k,app} = F_0 \left[a_1 \left| \frac{u}{u_0} \right| + a_2 \left(\frac{u^2}{u_0^2} \right) + a_3 \left| \frac{u^3}{u_0^3} \right| + \dots \right] = F_0 \sum_{i=1}^n a_i \left| \frac{u^i}{u_0^i} \right| \quad (4.104)$$

Die approximierte Schubsteifigkeit $k_{s,app}$ ergibt sich dann aus der Division der angenäherten Widerstandskraft $F_{k,app}$ durch die jeweilige Relativverschiebung u :

$$k_{s,app} = F_0 \left[a_1 \frac{1}{u_0} + a_2 \left| \frac{u}{u_0^2} \right| + a_3 \left(\frac{u^2}{u_0^3} \right) + \dots \right] = F_0 \sum_{i=1}^n a_i \left| \frac{u^{i-1}}{u_0^i} \right| \quad (4.105)$$

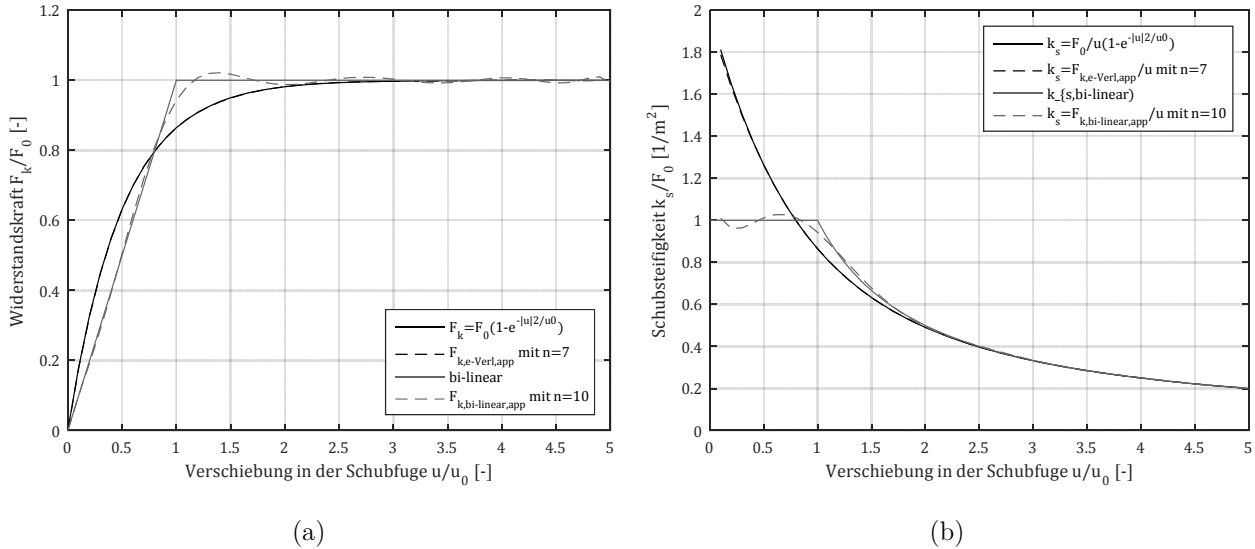


Abbildung 4.58: Approximierter Verlauf (a) der Widerstandskraft und (b) der Schubsteifigkeit für einen e-Verlauf und einen bilinearen Widerstandskraftverlauf

Durch diesen Ansatz ist es auch möglich, den bilinearen Widerstandskraftverlauf durch eine kontinuierliche Funktion zu beschreiben. In Abbildung 4.58 sind die approximierten Verläufe der Schubwiderstandskraft und der zugehörigen Schubsteifigkeit für einen bilinearen und einen e-Verlauf der Widerstandskraft dargestellt. Daraus ist gut erkennbar, dass für ein e-Verlauf Modell eine relativ geringe Anzahl an Ansatzgliedern ausreicht. Für den bilinearen Verlauf ist es speziell im Bereich des Knickes kaum möglich eine exakte Anpassung zu erhalten, zumindest nicht mit einer überschaubaren Anzahl an Gliedern. Da in der vorliegenden Arbeit ohnehin der e-Verlauf präferiert wird und der bilineare Verlauf nur zu Vergleichszwecken dient, wird auch für diesen Verlauf eine maximale Anzahl von 10 Ansatzgliedern gewählt. In Tabelle 4.5 und Tabelle 4.6 sind für beide Verlaufstypen die Koeffizienten für $u_{max} = 5 u_0$ angegeben. In Tabelle 4.7 und Tabelle 4.8 findet man die Koeffizienten für eine maximale Relativverschiebung von $u_{max} = 10 u_0$. Die vorgeschlagene Anzahl an Ansatzgliedern ist in den Tabellen durch eine Umrahmung gekennzeichnet. Mit der vorgeschlagenen Anzahl an Ansatzgliedern liegt auch bei geringen Verschiebungen noch eine gute Übereinstimmung mit den exakten Werten vor. Da der reale Schubwiderstandsverlauf, der im Schotterbett auftritt, nicht bekannt ist, würde auch nichts gegen eine wesentlich geringere Anzahl an Ansatzgliedern sprechen.

	Anzahl der Ansatzglieder				
	5	6	7	8	9
a_1	1,7431E+00	1,8908E+00	1,9599E+00	1,9871E+00	1,9963E+00
a_2	-1,2355E+00	-1,5901E+00	-1,8126E+00	-1,9260E+00	-1,9743E+00
a_3	4,3004E-01	7,3021E-01	9,9144E-01	1,1676E+00	1,2637E+00
a_4	-7,2409E-02	-1,8765E-01	-3,3477E-01	-4,7038E-01	-5,6700E-01
a_5	4,6995E-03	2,5193E-02	6,8039E-02	1,2521E-01	1,8022E-01
a_6	-	-1,3715E-03	-7,5902E-03	-2,1021E-02	-3,9527E-02
a_7	-	-	3,5576E-04	2,0050E-03	5,6483E-03
a_8	-	-	-	-8,2488E-05	-4,7037E-04
a_9	-	-	-	-	1,7240E-05

Tabelle 4.5: Koeffizienten des approximierten Widerstandskraftverlaufs (e-Verlauf) für $u_{max} = 5 u_0$

	Anzahl der Ansatzglieder				
	9	10	11	12	13
a_1	5,2056E-01	1,1536E+00	1,6603E+00	1,6571E+00	1,1245E+00
a_2	1,9493E+00	-2,0945E+00	-6,0593E+00	-6,0288E+00	-8,6318E-02
a_3	-2,1578E+00	7,7621E+00	1,9686E+01	1,9576E+01	-5,7408E+00
a_4	3,9319E-01	-1,2139E+01	-3,0726E+01	-3,0520E+01	2,5789E+01
a_5	4,5837E-01	9,6471E+00	2,6697E+01	2,6466E+01	-4,8542E+01
a_6	-3,0225E-01	-4,4325E+00	-1,4240E+01	-1,4075E+01	5,0389E+01
a_7	7,8446E-02	1,2328E+00	4,8708E+00	4,7934E+00	-3,2476E+01
a_8	-9,6855E-03	-2,0527E-01	-1,0747E+00	-1,0503E+00	1,3739E+01
a_9	4,7039E-04	1,8857E-02	1,4814E-01	1,4307E-01	-3,8947E+00
a_{10}	-	-7,3573E-04	-1,1617E-02	-1,0945E-02	7,3445E-01
a_{11}	-	-	3,9591E-04	3,4472E-04	-8,8531E-02
a_{12}	-	-	-	1,7067E-06	6,1788E-03
a_{13}	-	-	-	-	-1,9006E-04

Tabelle 4.6: Koeffizienten des approximierten Widerstandskraftverlaufs (bilinearer) für $u_{max} = 5 u_0$

	Anzahl der Ansatzglieder				
	7	8	9	10	11
a_1	1,7062E+00	1,8387E+00	1,9192E+00	1,9629E+00	1,9843E+00
a_2	-1,2004E+00	-1,4821E+00	-1,6951E+00	-1,8364E+00	-1,9196E+00
a_3	4,4202E-01	6,6217E-01	8,7335E-01	1,0466E+00	1,1704E+00
a_4	-9,1657E-02	-1,7665E-01	-2,8251E-01	-3,9165E-01	-4,8724E-01
a_5	1,0744E-02	2,8698E-02	5,8781E-02	9,8678E-02	1,4222E-01
a_6	-6,6331E-04	-2,7760E-03	-7,8325E-03	-1,6778E-02	-2,9239E-02
a_7	1,6744E-05	1,4671E-04	6,4443E-04	1,8926E-03	4,1956E-03
a_8	-	-3,2572E-06	-2,9766E-05	-1,3540E-04	-4,0993E-04
a_9	-	-	5,8968E-07	5,5527E-06	2,5933E-05
a_{10}	-	-	-	-9,9300E-08	-9,5616E-07
a_{11}	-	-	-	-	1,5581E-08

Tabelle 4.7: Koeffizienten des approximierten Widerstandskraftverlaufs (e-Verlauf) für $u_{max} = 10 u_0$

		Anzahl der Ansatzglieder				
		9	10	11	12	13
a_1	1,1914E+00	7,2560E-01	3,3124E-01	1,8830E-01	3,6403E-01	
a_2	1,3255E-01	1,6208E+00	3,1239E+00	3,7674E+00	2,8399E+00	
a_3	-7,8014E-01	-2,5852E+00	-4,7881E+00	-5,9125E+00	-4,0013E+00	
a_4	4,7429E-01	1,6015E+00	3,2853E+00	4,3190E+00	2,2349E+00	
a_5	-1,3944E-01	-5,4883E-01	-1,3101E+00	-1,8791E+00	-5,0745E-01	
a_6	2,3192E-02	1,1453E-01	3,3126E-01	5,3178E-01	-5,3221E-02	
a_7	-2,2258E-03	-1,4919E-02	-5,4817E-02	-1,0166E-01	6,6611E-02	
a_8	1,1507E-04	1,1860E-03	5,9275E-03	1,3265E-02	-2,0016E-02	
a_9	-2,4836E-06	-5,2674E-05	-4,0381E-04	-1,1657E-03	3,3676E-03	
a_{1c}	-	1,0021E-06	1,5736E-05	6,6039E-05	-3,5181E-04	
a_{11}	-	-	-2,6749E-07	-2,1792E-06	2,2710E-05	
a_{1z}	-	-	-	3,1836E-08	-8,3265E-07	
a_{1z}	-	-	-	-	1,3297E-08	

Tabelle 4.8: Koeffizienten des approximierten Widerstandskraftverlaufs (bilinerer) für $u_{max} = 10 u_0$

Durch Verwendung eines approximierten Ansatzes für den Schubsteifigkeitsverlauf ergibt sich der Schubterm (4.82) der Bewegungsgleichung (4.80) zu:

$$\begin{aligned} \int_0^L r^2 k_x \phi_{,xx} q \phi dx &= \int_0^L r^2 k_{s,app} \phi_{,xx} q \phi dx \\ &= \int_0^L r^2 F_0 \left[a_1 \frac{1}{u_0} + a_2 \left| \frac{u}{u_0^2} \right| + a_3 \left(\frac{u^2}{u_0^3} \right) + \dots \right] \phi_{,xx} q \phi dx \end{aligned} \quad (4.106)$$

Einsetzen von (4.83) führt auf:

$$\int_0^L r^2 F_0 \left[a_1 \frac{1}{u_0} + a_2 \left| \frac{r q \phi_{,x}}{u_0^2} \right| + a_3 \left(\frac{r^2 q^2 \phi_{,x}^2}{u_0^3} \right) + \dots \right] \phi_{,xx} q \phi dx = \quad (4.107)$$

$$\int_0^L r^2 F_0 \sum_{i=1}^n a_i \left| \frac{(r q \phi_{,x})^{i-1}}{u_0^i} \right| \phi_{,xx} q \phi dx \quad (4.108)$$

Durch Vertauschen der Reihenfolge zwischen der Summierung und der Integration ergibt sich:

$$r^2 F_0 \sum_{i=1}^n \left(a_i \frac{|q|^i r^{i-1}}{u_0^i} \int_0^L |\phi_{,x}^{i-1}| \phi_{,xx} \phi dx \right) \quad (4.109)$$

Ersetzen des Schubterms (Kopplungsterms) in Gleichung (4.94) durch (4.109) und Anwenden der Galerkinschen Vorschrift bei Verwendung des eingliedrigen Ritzschen Ansatzes (4.95) für die in t periodischen Schwingungen, führt (für die freie Schwingung) zu:

$$\begin{aligned} & -\mu \frac{L}{2} w_m \omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t) dt + EA_{zz} \frac{\pi^4}{2 L^3} w_m \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t) dt \\ & + \left[r^2 F_0 \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i w_m^i r^{i-1}}{u_0^i} \int_0^L |\phi_{,x}^{i-1}| \phi_{,xx} \phi dx \cdot 2 \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos^{i+1}(\omega t) dt \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Bei Verwendung der Integrale (4.92) sowie (4.98) und Gleichsetzen von $\omega = \omega_1$ lässt sich aus (4.110) die Eigenkreisfrequenz des Koppelsystems in Abhängigkeit von der maximalen Durchbiegung w_m in Feldmitte ausdrücken:

$$\omega_1(w_m) = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + r^2 F_0 \frac{2L^3}{\pi^4} \left[\sum_{i=1}^n a_i \frac{w_m^{i-1} r^{i-1}}{u_0^i} IT_i \right]}{\mu}} \quad (4.111)$$

In dieser Gleichung steht IT_i für den Integrationsterm des i -ten Koeffizienten der Approximation des Widerstandskraftverlaufs. Diese Terme sind folgendermaßen definiert:

$$IT_i = -2 \frac{\pi^{i+1}}{L^{i+1}} \int_0^{L/2} \cos^{i-1} \left(\frac{\pi x}{L} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi x}{L} \right) dx \quad 2 \int_{-\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{\pi}{2\omega}} \cos^{i+1}(\omega t) dt \quad (4.112)$$

In Tabelle 4.9 sind die Integrationsterme der ersten 15 Koeffizienten aufgelistet.

IT_1	$\pi^2 / (2 L)$	IT_9	$441 \pi^{10} / (32768 L^9)$
IT_2	$16 \pi / (9 L^2)$	IT_{10}	$262144 \pi^9 / (2401245 L^{10})$
IT_3	$3 \pi^4 / (32 L^3)$	IT_{11}	$4851 \pi^{12} / (524288 L^{11})$
IT_4	$128 \pi^3 / (225 L^4)$	IT_{12}	$2097152 \pi^{11} / (27054027 L^{12})$
IT_5	$5 \pi^6 / (128 L^5)$	IT_{13}	$14157 \pi^{14} / (2097152 L^{13})$
IT_6	$1024 \pi^5 / (3675 L^6)$	IT_{14}	$16777216 \pi^{13} / (289864575 L^{14})$
IT_7	$175 \pi^8 / (8192 L^7)$	IT_{15}	$2760615 \pi^{16} / (536870912 L^{15})$
IT_8	$16384 \pi^7 / (99225 L^8)$		

Tabelle 4.9: Integrationsterme IT_i der ersten 15 Ansatzglieder

Da im Regelfall 10 Ansatzglieder für die Widerstandskraftanpassung mehr als ausreichend sein sollten, braucht für eine praktische Anwendung keine Ermittlung weiterer Integrationsterme durchgeführt werden. Zur Bestimmung der ersten Eigenkreisfrequenz des Koppelbalkens (dehnstarres Gleis) unter Berücksichtigung des Schubwiderstands des Schotters, können bei Verwendung der Gleichung (4.111) die Integrationsterme aus Tabelle 4.9, sowie die Koeffizienten aus Tabelle 4.5 bis Tabelle 4.8 verwendet werden. Dabei sind für den Schotter nur die Kennwerte F_0 und u_0 sowie ein gewählter Widerstandskraftverlauf erforderlich. Für das Tragwerk muss dabei neben der Spannweite L , der Massenbelegung μ und der Biegesteifigkeit EA_{zz} nur der Schwerpunktabstand r zwischen Tragwerk und Schienen bekannt sein.

Zur Ermittlung der Eigenfrequenz für sehr kleine Auslenkungen w_m kann die Summenfunktion in (4.111) nach dem ersten Glied abgebrochen werden. Dadurch wird (4.111) zu (4.78), wobei der Koeffizient a_1 die konstante Schubsteifigkeit skaliert. Für den e-Verlauf der Widerstandskraft ergibt sich ab einer ausreichenden Anzahl an Ansatzgliedern die Anfangssteifigkeit von ca. $k_{Anf} \approx 2 F_0 / u_0$. In Abbildung 4.59 ist für dieselbe Brücke, die auch für Abbildung 4.55 verwendet wurde, der Verlauf der Eigenfrequenzen für unterschiedliche Schubsteifigkeiten und Schubsteifigkeitsverläufe dargestellt. Für den e-Verlauf der Widerstandskraft ist ersichtlich, dass der angepasste Verlauf nur bei geringen Relativverschiebungen geringfügig vom exakten Verlauf abweicht. Zumindest für das untersuchte Tragwerk ist somit die Anpassung vollkommen ausreichend. Bei der Anpas-

sung des bilinearen Widerstandskraftverlaufs ist für geringe Relativverschiebungen eine wesentlich größere Abweichung des Eigenfrequenzverlaufs erkennbar. Es empfiehlt sich daher, diese Anpassung nur bei Relativverschiebungen größer als u_0 zu verwenden, da bei kleineren Bewegungen für dieses Modell ja ohnehin eine konstante Federsteifigkeit von $k_x = F_0/u_0$ wirkt.

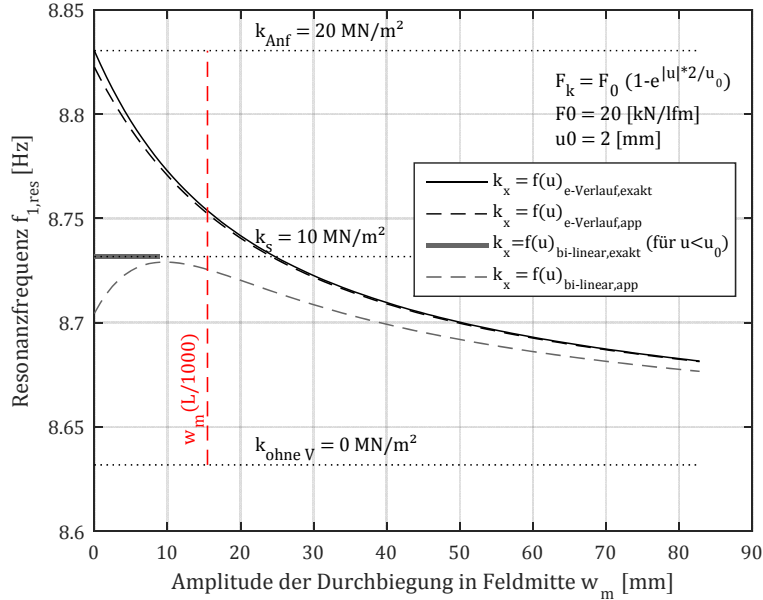


Abbildung 4.59: Eigenfrequenzen einer 15,5 m Brücke für unterschiedliche Schottersteifigkeiten und den approximierten Widerstandskraftverläufen (dehnstarres Gleis)

Die strichlierte vertikale Linie kennzeichnet die maximal zulässige Durchbiegung zur Einhaltung der Verformungsbeschränkung von $L/\delta = 1000$. Betrachtet man den Eigenfrequenzverlauf für das bilineare Modell, so könnte man für dieses Tragwerk und diese Schotterkennwerte ein linear elastisches Federmodell wohl als ausreichend genau ansehen.

Zur Vereinfachung der Abschätzung der ersten Eigenfrequenz, kann der Klammerterm in (4.111) – im Weiteren als Schubanpassungsfaktor K_{Sch} bezeichnet – durch eine polynomielle Anpassung berechnet werden. Um nicht eine Anpassung einer Anpassung vorzunehmen und den Fehler damit zu vergrößern, wird für die Basis der Anpassung die Reihenentwicklung der tatsächlichen Funktion (vgl. (4.102)) verwendet. Der Verlauf des mit $L * u_0$ multiplizierten Korrekturfaktors

$$K_{Sch} = \frac{9,8273 - 10,3573 x_S + 8,4904 x_S^2 - 4,2972 x_S^3 + 1,1548 x_S^4 - 0,1247 x_S^5}{L u_0} \quad (4.113)$$

ist in Abbildung 4.60 dargestellt. Die hier durchgeführte Anpassung (5 Ansatzglieder) wurde auf eine Reihenentwicklung mit 50 Gliedern durchgeführt und ist daher, wie in Abbildung 4.56 ersichtlich, bis ca. $u = 9 u_0$ gültig. Zur Vereinfachung wurde in Gleichung (4.113) die Laufkoordinate x_S eingeführt,

$$x_S = \frac{w_m r}{L u_0} \quad (4.114)$$

Über diese ist dabei für ein bestimmtes Tragwerk die Durchbiegung definiert. Aus dem Ansatz $u = r \varphi$ und Gleichung (4.26) ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Durchbiegung in Tragwerksmitte w_m und der Relativverschiebung zwischen Tragwerk und dehnstarrem Gleis am Auflager zu:

$$u_{LA} = \frac{w_m r \pi}{L} \quad (4.115)$$

Die Relativverschiebung des Gleises ist über dem Auflager am größten. Da Gleichung (4.113) nur bis zu einer maximalen Relativverschiebung von ca. $u = 9 u_0$ gültig ist, ergibt sich unter Verwendung von (4.115) eine maximale zulässige Laufkoordinate von $x_s \sim 2,8$.

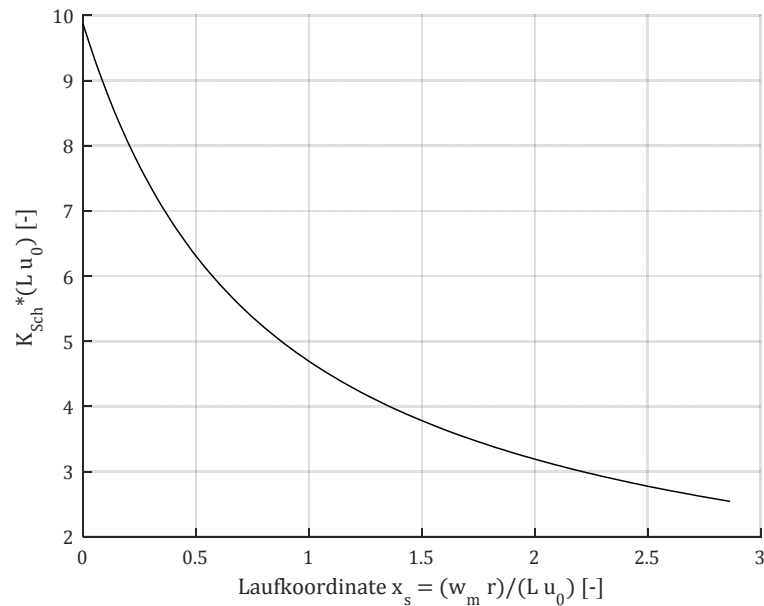


Abbildung 4.60: Verlauf des Faktors $K_{Sch} * (L * u_0)$, dehnstarres Gleis

Die Gleichung der ersten Eigenfrequenz vereinfacht sich somit zu:

$$\omega_1(w_m) = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + r^2 F_0 \frac{2 L^3}{\pi^4} K_{Sch}(w_m)}{\mu}} \quad (4.116)$$

Aus einem Vergleich von (4.78) mit (4.116) ergibt sich die von der Durchbiegung w_m abhängige äquivalente Schubsteifigkeit $k_{s,\text{äqu}}$ zu:

$$k_{s,\text{äqu}}(w_m) = \frac{2 L F_0}{\pi^2} K_{Sch}(w_m) \quad (4.117)$$

Bei Verwendung dieser variablen äquivalenten Schubsteifigkeit anstatt der konstanten Steifigkeit k_x , unterscheidet sich die Gleichung zur Bestimmung der ersten Biegeeigenfrequenz für konstante Steifigkeit nicht von der für eine variable Schubsteifigkeit. Gleichung (4.116) lässt sich auch folgendermaßen umschreiben:

$$\omega_1(w_m) = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + r^2 k_{s,\ddot{a}qu}(w_m) \frac{L^2}{\pi^2}}{\mu}} \quad (4.118)$$

Die in diesem Kapitel hergeleiteten Gleichungen zur Abschätzung der Eigenfrequenz sind streng genommen nur für ein dehnstarres Gleis (Schienen) gültig. Bei diesem Modell hat dadurch auch das Gleis im Vorland keinen Einfluss auf das Tragverhalten des Koppelbalkens. Damit dies zumindest näherungsweise wirklich zutrifft, muss die Dehnsteifigkeit der Schienen wesentlich größer sein als die Schubsteifigkeit des Schotters. Für einen Vergleich wird die halbe Brücke betrachtet, da sich die Schienenkraft ja bis zur Tragwerksmitte auf- bzw. abbaut. Setzt man nun die Dehnsteifigkeit der Schienen und die Schubsteifigkeit des Schotters für das halbe Tragwerk in Relation, so erhält man folgendes Kriterium:

$$\frac{EA_{Sch}}{L/2} \gg k_s L/2 \quad (4.119)$$

Durch Umformen und Einsetzen der Dehnsteifigkeit der Schienen (2 x Profil UIC 60) erhält man ein Kriterium für die Schubsteifigkeit:

$$k_s \ll \frac{4 EA_{Sch}}{L^2} = \frac{4 \cdot 3220 \cdot 10^6}{L^2} \approx \frac{1,3}{L^2} 10^4 [MN/m^2] \quad (4.120)$$

Wendet man dieses Kriterium auf die betrachtete 15,5 m lange Brücke an, so müsste die Schubsteifigkeit des Schotters wesentlich kleiner als 54 MN/m² sein. Für die im Eurocode angegebenen Schotterkennwerte ergibt sich für das unbelastete Gleis eine Steifigkeit von 10 MN/m². Für ein belastetes Gleis folgt diese Steifigkeit zu 30 MN/m². Beide Steifigkeiten sind nicht wesentlich kleiner als 54 MN/m². Daher ist davon auszugehen, dass dieses Kriterium für dieses Beispieltragwerk (und wohl auch für viele reale Tragwerke) nicht erfüllt ist und die Dehnsteifigkeit der Schienen nicht vernachlässigt werden kann.

4.4.4 Nachrechnung Versuche *Mähr*

Mit dem in Abschnitt 4.4.3 vorgestellten Konzept werden hier aus den in Abbildung 4.61 dargestellten, von *Mähr* [4] ermittelten, Versuchsergebnisse für das unbelastete Gleis die Schotterkennwerte F_0 und u_0 rückgerechnet.

Die Schotterkennwerte werden über eine Minimierung der Fehlerquadrate zwischen den gemessenen und berechneten Eigenfrequenzen $f_{1,res}$ in Abhängigkeit von der Durchbiegungsamplitude w_m angepasst. Die rechnerische Eigenfrequenz wird dabei gemäß Gleichung (4.111) ermittelt, worin bis auf F_0 und u_0 alle Kennwerte für das untersuchte Tragwerk bekannt sind. In Abbildung 4.62 sind die ermittelten Schotterkennwerte für eine Anpassung der Richterregger Messdaten mittels e-Verlauf und bilinearem Widerstandskraftmodell dargestellt. Wie rein optisch erkennbar ist, ist die Anpassung für das bilineare Modell deutlich schlechter als die des e-Verlauf Modells. Um den gemessenen Eigenfrequenzverlauf abzubilden, ist vor allem die hohe Anfangssteifigkeit des Schotters erforderlich. Daher ergibt sich für das bilineare Modell eine wesentlich geringere Grenzverformung

u_0 bei einem annähernd gleichen Durchschubwiderstand, um diese hohe Anfangssteifigkeit zu erreichen. Der Durchschubwiderstand F_0 , der für die beiden Modelle ermittelt wurde, liegt mit $F_0 = 7,5 \text{ kN/lfm}$ für das e-Verlauf Modell und mit $F_0 = 6,5 \text{ kN/lfm}$ in der gleichen Größenordnung. Diese Werte sind zwar wesentlich geringer als die in der Norm vorgeschlagenen 20 kN/lfm , stimmen dafür jedoch sehr gut mit den in Tabelle 4.2 aufgelisteten Abschätzungen der Durchschubwiderstände ($F_0 = 5,3 - 9,5 \text{ kN/lfm}$) anhand von geotechnischen Schotterkennwerten zusammen.

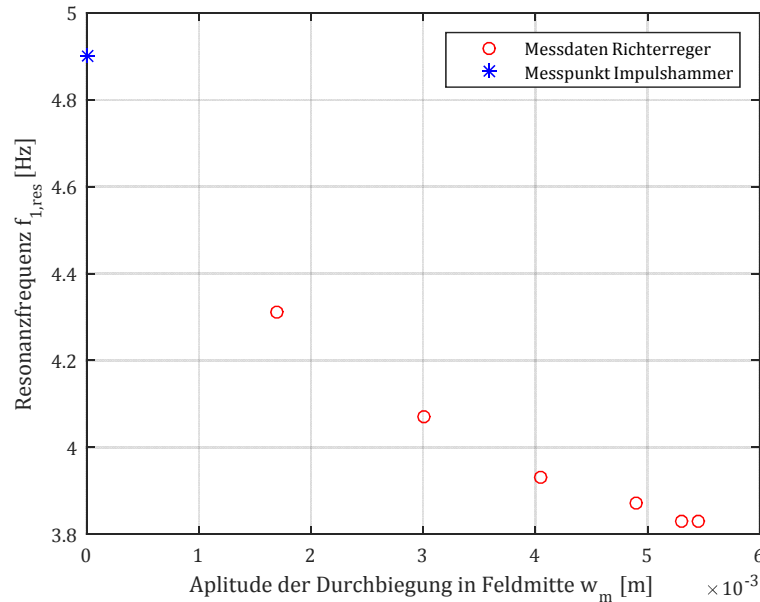


Abbildung 4.61: Gemessene Resonanzfrequenzen der 1. BEF in Abhängigkeit der Schwingungsamplituden bei Anregung mit dem Richterreger und dem Impulshammer (unbelastetes Gleis, $F_V = 0 \text{ kN/lfm}$)

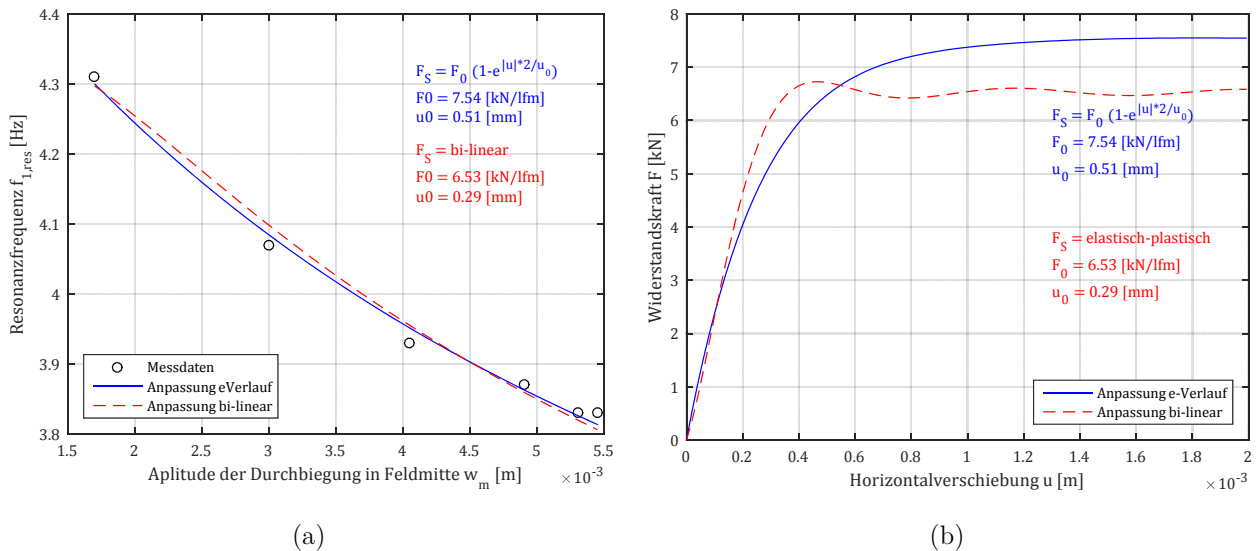


Abbildung 4.62: (a) Anpassung des Eigenfrequenzverlaufs an die Messergebnisse des unbelasteten Gleises (Auflast $F_V = 0 \text{ kN/lfm}$) (b) Ermittelte Schotterkennwerte und zugehöriger Widerstandskraftverlauf

Zur Kontrolle der Ergebnisse der Anpassung ist in Abbildung 4.63 die Summe der Fehlerquadrate der Eigenfrequenzen für unterschiedliche Wertepaare von F_0 und u_0 dargestellt. Die rote Linie in dieser Darstellung kennzeichnet den „Talverlauf“ also den Verlauf des niedrigsten Anpassungsfeh-

lers für unterschiedliche F_0 bzw. u_0 Werte. Daraus ist ersichtlich, dass sich der Durch Schubwiderstand und die Grenzverformung linear zueinander verhalten. Um eine möglichst gute Übereinstimmung mit den Messpunkten zu erzielen, muss eine Erhöhung des Durch Schubwiderstands auch mit einer Erhöhung der Grenzverformung einhergehen. Dies erscheint logisch, da dadurch die Anfangssteifigkeit des Modells annähernd gleich bleibt.

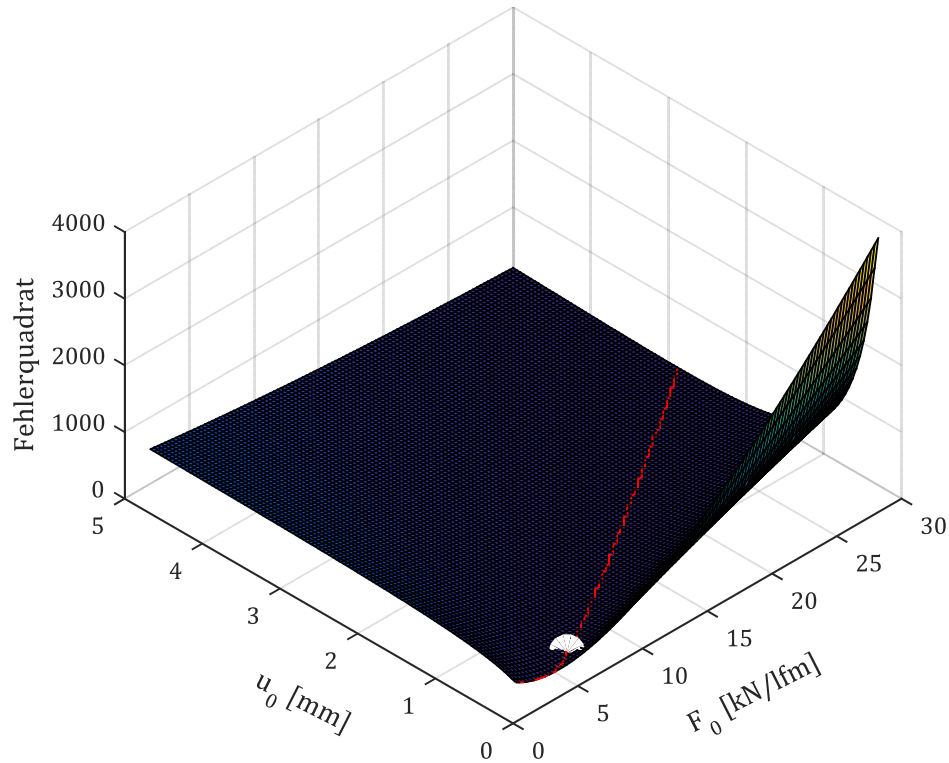


Abbildung 4.63: Anpassungsfehler für Wertepaare von F_0 und u_0 (unbelastetes Gleis, d. h. $F_V = 0$)

Berücksichtigt man auch die Ergebnisse des Impulshammerversuchs, so ergeben sich, wie in Abbildung 4.64 dargestellt, leicht abweichende Kennwerte. Die Grenzverformung und folglich auch der Durch Schubwiderstand reduzieren sich etwas gegenüber der in Abbildung 4.62 (a) dargestellten Auswertung ohne Impulshammerversuch. Für diese Auswertung wurde nur mehr das e-Verlauf Modell untersucht. Wie aus der Darstellung ersichtlich ist, kann mit diesem Modell die Änderung der Eigenfrequenz mit der Durchbiegungsamplitude, relativ gut abgebildet werden. Um sicher zu gehen, dass das verwendete Tragwerksmodell überhaupt angewendet werden darf, werden die ermittelten Schotterkennwerte in das Kriterium (4.120) eingesetzt,

$$k_s = \frac{F_0}{u_0} = \frac{6,6}{0,4} = 16,5 \ll 130 = \frac{1,3}{L^2} 10^4 \approx \frac{4 EA_{Sch}}{L^2} \quad [MN/m^2] \quad (4.121)$$

Da die Dehnsteifigkeit fast zehnmal so hoch ist wie die Schubsteifigkeit, wird dieses Kriterium als erfüllt betrachtet. Setzt man die für das e-Verlauf Modell doppelt so hohe Anfangssteifigkeit in (4.121), so reduziert sich dieses Verhältnis, das Modell wird jedoch trotzdem als zulässig angesehen. *Mähr* hat auch Versuche mit belasteten Gleisen durchgeführt. Dabei wurden in regelmäßigen Abständen an vier Stellen durch Pressen Achslasten auf das Gleis aufgebracht. Untersucht wurden zwei Laststufen (120 kN/Achse und 240 kN/Achse). Für das 10 m lange Tragwerk ergibt sich

daraus eine äquivalente Auflast von 48 kN/lfm bzw. 96 kN/lfm. In Abbildung 4.65 und Abbildung 4.66 sind die Anpassungen der Eigenfrequenz und die daraus resultierenden Schotterkennwerte dargestellt. Der Verlauf der Eigenfrequenzen wurde dabei bis zu einer Null-Durchbiegung extrapoliert.

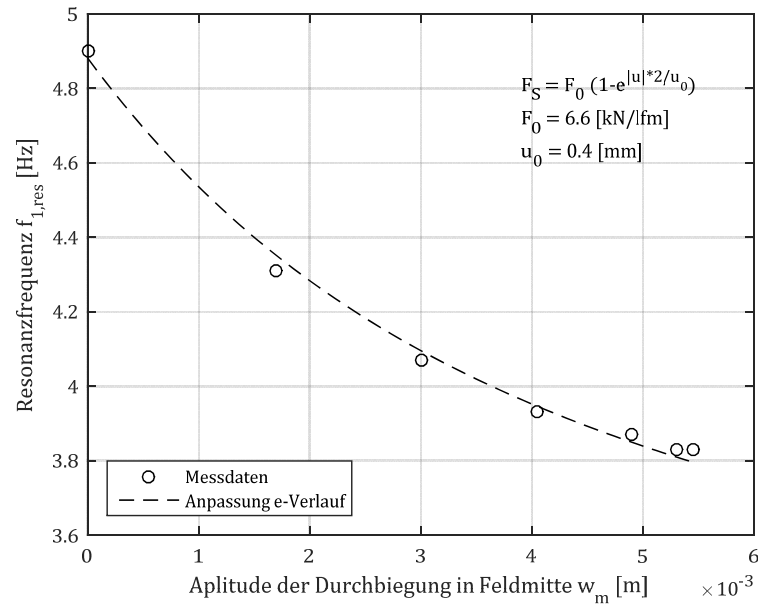


Abbildung 4.64: Bestimmung der Schotterkennwerte aus der Anpassung des Eigenfrequenzverlaufs an die Messergebnisse inklusive der Impulshammerversuche (unbelastetes Gleis, d. h. $F_V = 0$)

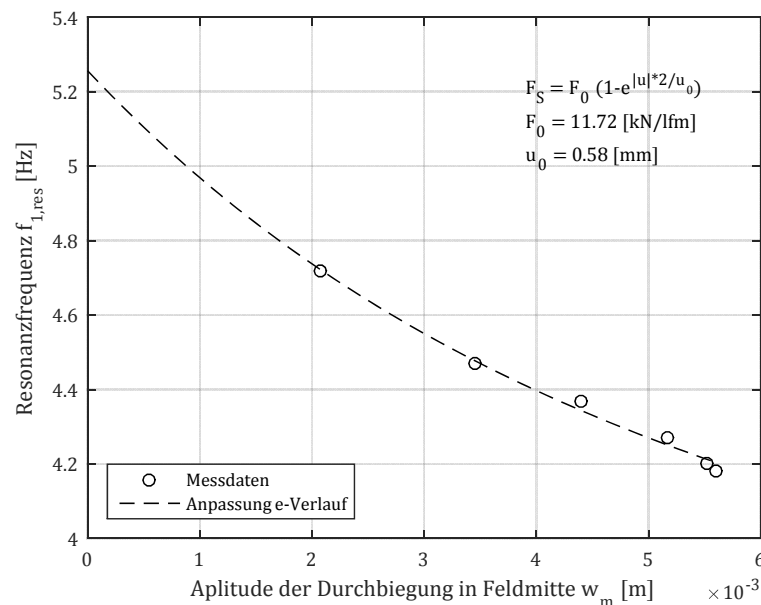


Abbildung 4.65: Bestimmung der Schotterkennwerte aus der Anpassung des Eigenfrequenzverlaufs an die Messergebnisse (belastetes Gleis, $F_V = 48$ kN/lfm)

Da in [9] keine Eigenfrequenzen aus Impulshammeranregungen für das belastete Tragwerk angegeben sind, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden, ob die ermittelten Schotterkennwerte für die belastete Situation auch wirklich für eine Null-Durchbiegung zutreffen. Die Ergebnisse der Auswertung der *Mähr*-Versuche sind in Abbildung 4.67 zusammengefasst dargestellt.

Inwiefern die so erhaltenen Schotterkennwerte auf andere Tragwerke übertragen werden können, ist noch genauer zu hinterfragen. Es ist abzuklären inwiefern der eingebaute Gleisschotter hinsichtlich Einbauzustand dem auf Eisenbahnbrücken tatsächlich vorhandenen entspricht. Des Weiteren ist zu klären, wieweit das hohe Masse/Biegesteifigkeit-Verhältnis der sehr „weichen“ Konstruktion und die Tatsache, dass das Gleis am Tragwerksende endet, Einfluss auf die ermittelten Schottersteifigkeiten haben.

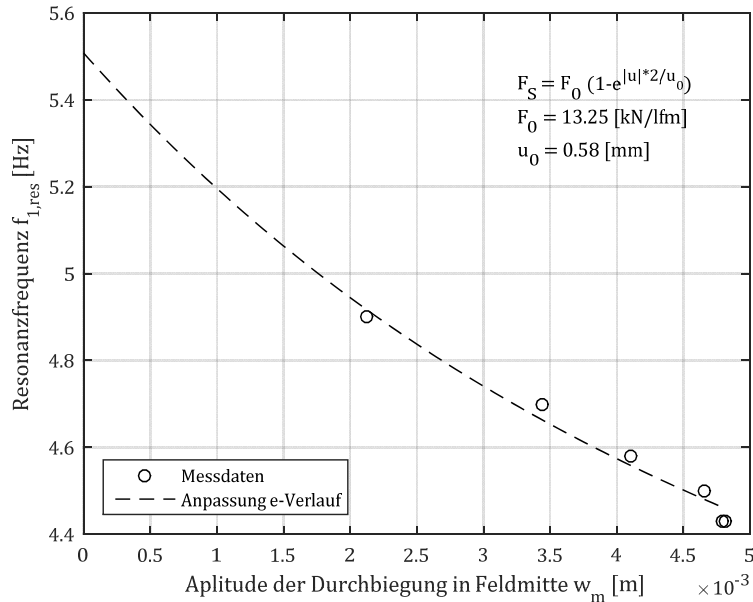


Abbildung 4.66: Bestimmung der Schotterkennwerte aus der Anpassung des Eigenfrequenzverlaufs an die Messergebnisse (belastetes Gleis, $F_V = 96 \text{ kN/lfm}$)

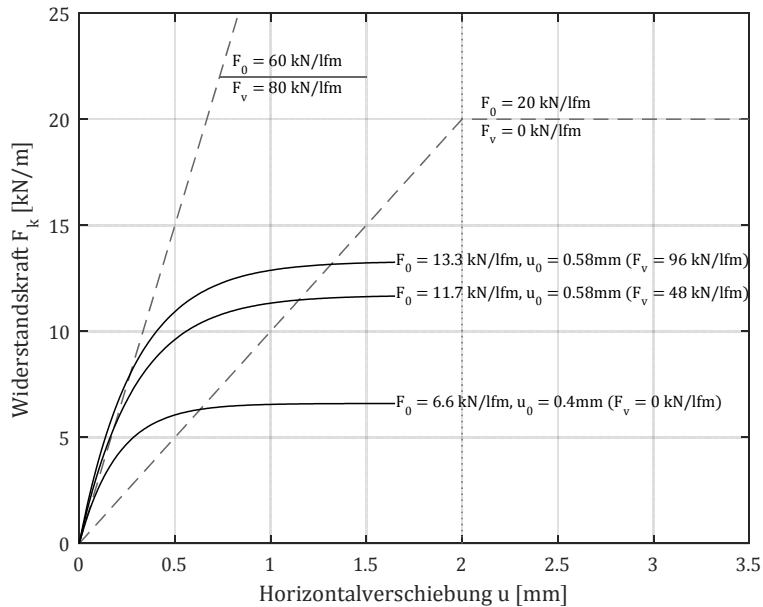


Abbildung 4.67: Aus den *Mähr*-Versuchen ermittelte Schotterkennwerte

4.4.5 Gesamtmodell für Tragwerk und Vorland

Da reale Brückentragwerke in der Regel ein durchgehendes Gleis aufweisen und gemäß dem Kriterium (4.120) meist nicht von einem dehnsteifen Gleiskörper ausgegangen werden kann, ist ein Koppelbalkenmodell mit durchgehendem Gleis (bzw. Schienen) erforderlich, welches auch die Schienendehnung sowie die Einspannwirkung des Vorlandbereichs berücksichtigt.

In diesem Abschnitt wird ein Gesamtmodell zur Abschätzung der ersten Biegeeigenfrequenz des Tragwerks mit Berücksichtigung der Wirkung des Gleiskörpers am Tragwerk und im Vorlandbereich erstellt. Wie in Abbildung 4.68 dargestellt, wird zuerst das Vorland durch wirkungsäquivalente Federn ersetzt. Das Gesamtsystem reduziert sich dadurch auf einen Koppelbalken mit Drehfedern an beiden Auflagern. Für diesen Koppelbalken wird die erste Eigenfrequenz eines äquivalenten Einfeldträgers ermittelt.

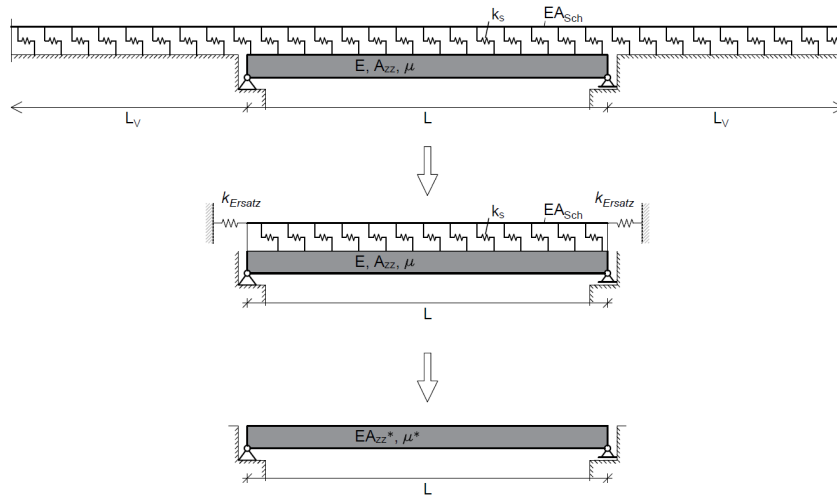


Abbildung 4.68: Modellreduktion des Gesamtsystems

In einem ersten Schritt wird das Koppelbalkenmodell aus Abschnitt 4.4.3 um die Schienendehnung erweitert. Dazu wird ein zusätzlicher Freiheitsgrad – die horizontale Verformung u_{II} in der Schiene – eingeführt.

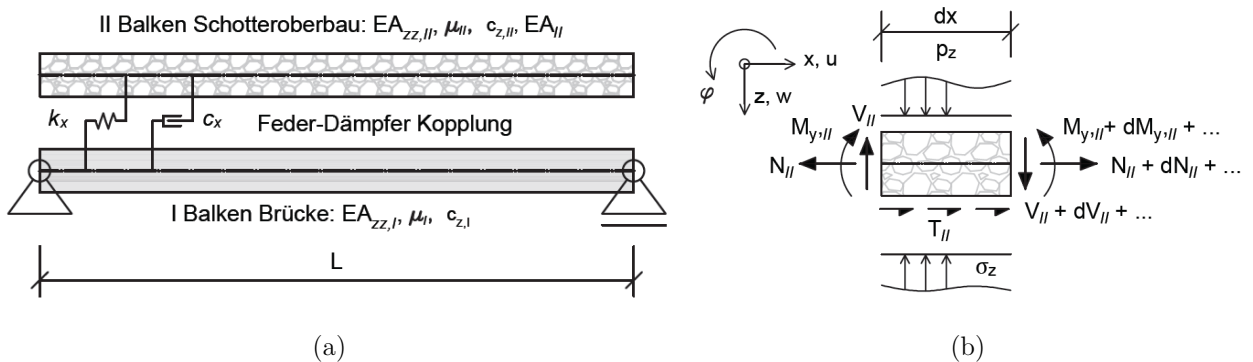


Abbildung 4.69: (a) Modell des Koppelbalkens mit Berücksichtigung der Schienendehnung (b) infinitesimales Element des Gleisbalkens (Balken II)

Wie in Abbildung 4.69 (a) dargestellt, wird dem Balken II eine Dehnsteifigkeit EA_{II} zugeordnet. Die Brücke selbst wird jedoch als dehnstarr ($EA_I = \infty$) betrachtet. Vergleicht man die Querschnittsfläche eines Brückentragwerks mit der von zwei Schienen, so wird die Legitimität dieses Ansatzes klar. In Abbildung 4.69 (b) ist ein infinitesimales Element (Länge dx) des Gleisbalkens dargestellt. Bildet man für dieses Element das dynamische Gleichgewicht in horizontaler Richtung, so erhält man:

$$\mu_{II} dx \ddot{u}_{II} = N_{II,x} dx + N_{II,xx} \frac{dx^2}{2} + \dots + T_{II} dx \quad (4.122)$$

Nach Division durch dx und Grenzübergang $dx \rightarrow 0$ folgt.

$$\mu_{II} \ddot{u}_{II} = N_{II,x} + T_{II} \quad (4.123)$$

Die horizontale Trägheitswirkung des Gleiskörpers wird vernachlässigt ($\mu_{II} = 0$), wodurch (4.123) nur mehr die Ableitung der Schienennormalkraft $N_{II,x}$ und den Schubfluss T_{II} ins Gleichgewicht setzt. Unter Verwendung der folgenden Zusammenhänge

$$u_I = 0, \quad u \equiv u_{II} \quad (4.124)$$

$$w_I = w_{II} = w \quad (4.125)$$

$$\varphi = -w_{,x} \quad (4.126)$$

$$r = r_I + r_{II} \quad (4.127)$$

$$\Delta u = u_I - u_{II} - \varphi_I r_I - \varphi_{II} r_{II} = -u + w_{,x} r \quad (4.128)$$

$$T = T_I = T_{II} = k_x \Delta u + c_x \Delta \dot{u} = k_x (-u + w_{,x} r) + c_x (-\dot{u} + \dot{w}_{,x} r) \quad (4.129)$$

$$u_{,x} = \frac{N_{II}}{EA_{II}}, \quad u_{,xx} = \frac{N_{II,x}}{EA_{II}} \quad (4.130)$$

und Vernachlässigung der Dämpfung - da diese zur Bestimmung der ungedämpften Eigenfrequenz nicht erforderlich ist - ergibt sich:

$$u_{,xx} EA_{II} = -T = k_x (u - w_{,x} r) \quad (4.131)$$

Aus dem dynamischen Gleichgewicht in vertikaler Richtung ergibt sich analog zu (4.71).

$$EA_{zz} w_{,xxxx} - r^2 (k_x w_{,xx} + c_x \dot{w}_{,xx}) + r (k_x u_{,x} + c_x \dot{u}_{,x}) + c_z \dot{w} + \mu \ddot{w} = p_z \quad (4.132)$$

Für das frei schwingende ungedämpfte System reduziert sich diese Gleichung auf:

$$EA_{zz} w_{,xxxx} - r^2 (k_x w_{,xx}) + r (k_x u_{,x}) + \mu \ddot{w} = 0 \quad (4.133)$$

In der Bewegungsgleichung (4.133) sind für jeden Punkt der Stabachse zwei Freiheitsgrade vorhanden ($w(x, t)$ und $u(x, t)$). Die beiden Freiheitsgrade sind über den Schubfluss und die Normal-

kraft gekoppelt. Um diesem Umstand Genüge zu tun, werden folgende eingliedrige *Ritzsche* Ansätze gewählt.

$$w(x, t) = \phi(x) q(t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t) \quad (4.134)$$

$$u(x, t) = C_1 w_{,x}(x, t) = C_1 \phi_{,x}(x) q(t) = C_1 \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t) \quad (4.135)$$

Der Faktor C_1 skaliert dabei die horizontale Bewegung im Verhältnis zur vertikalen. Zur Bestimmung dieses Skalierungsfaktors wird Gleichung (4.131) herangezogen. Durch Einsetzen von

$$w_{,x} = \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t), \quad w_{,xx} = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t) \quad (4.136)$$

$$u_{,x} = -C_1 \frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t), \quad u_{,xx} = -C_1 \frac{\pi^3}{L^3} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t) \quad (4.137)$$

ergibt sich aus (4.131)

$$-C_1 EA_{II} \frac{\pi^3}{L^3} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t) = k_x C_1 \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t) - k_x r \frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) q(t). \quad (4.138)$$

Für eine konstante Schubsteifigkeit $k_x = konst.$ ergibt sich daraus der Skalierungsfaktor zu:

$$C_1 = \frac{k_x r L^2}{EA_{II} \pi^2 + k_x L^2} \quad (4.139)$$

Setzt man den Ansatz (4.135) in (4.133) ein, so erhält man eine Bewegungsgleichung in $w(x, t)$.

$$EA_{zz} w_{,xxxx} + (r k_x C_1 - r^2 k_x) w_{,xx} + \mu \ddot{w} = 0 \quad (4.140)$$

Nach Anwendung der Galerkinschen Vorschrift und unter Verwendung der Integrale (4.92) erhält man die folgende gewöhnliche Differentialgleichung für q :

$$EA_{zz} \frac{\pi^4}{2 L^3} q + r^2 k_x \frac{\pi^2}{2 L} q - r k_x C_1 \frac{\pi^2}{2 L} q + \mu \frac{L}{2} \ddot{q} = 0 \quad (4.141)$$

Daraus lässt sich die ungedämpfte erste Resonanzfrequenz $\omega_{1,res}$ des Systems ermitteln.

$$\omega_{1,res} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + r^2 \frac{L^2}{\pi^2} k_x (1 - C)}{\mu}} \quad (4.142)$$

Für eine elegantere Darstellung in den Gleichungen wird aus dem Skalierungsfaktor C_1 der Hebelarm r herausgehoben und der übrig bleibende Wert C verwendet ($C_1 = C r$). C beschreibt den Einfluss der Dehnsteifigkeit der Schienen auf den Steifigkeitsbeitrag der Schubfestigkeit des Schotters an der Biegesteifigkeit des Gesamtsystems.

$$C = \frac{k_x L^2}{EA_{II} \pi^2 + k_x L^2} \quad (4.143)$$

Als nächste Erweiterung wird bei weiterhin konstanter Schubsteifigkeit k_x der Einfluss der Vorlandfedern berücksichtigt, dargestellt in Abbildung 4.70 (a). Ein zugehöriges finites Element des Gleisbalkens wird in Abbildung 4.70 (b) gezeigt und entspricht exakt dem Element in Abbildung 4.69 (b).

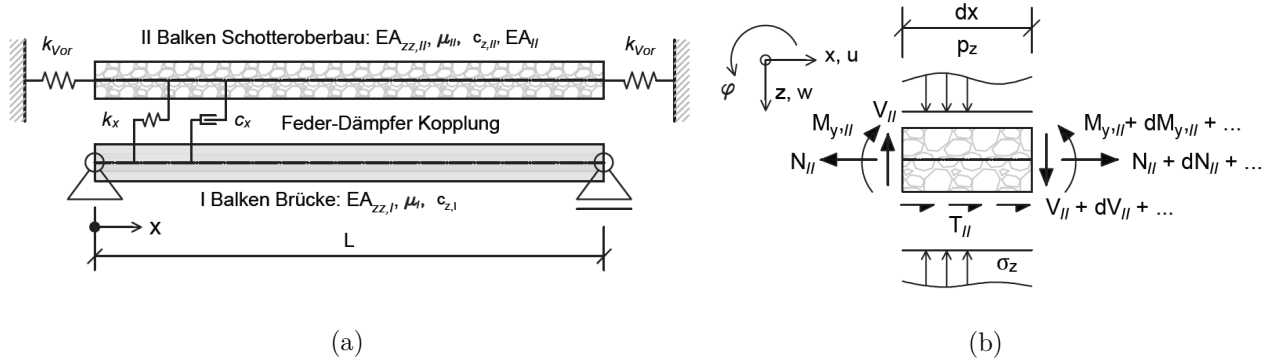


Abbildung 4.70: (a) Modell des Koppelbalkens mit Berücksichtigung der Schienendehnung (b) infinitesimales Element des Gleisbalkens (Balken II)

Für eine konstante Schubsteifigkeit kann die Steifigkeit k_{Vor} einer äquivalenten Vorlandfeder nach Gleichung (4.40) ermittelt werden. Aus dem horizontalen Gleichgewicht folgt bei Berücksichtigung der Vorlandfeder:

$$\begin{aligned} \mu_{II} \ddot{u}_{II} + k_{Vor} u(0) \delta(x) &= N_{II,x} + T_{II} + k_{Vor} u(L) \delta(x - L) \\ \delta(k) &= \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.144)$$

Durch Einsetzen von (4.129) und (4.130) sowie Vernachlässigen der Dämpfung und der horizontalen Trägheit des Gleiskörpers ergibt sich

$$k_{Vor} u(0) \delta(x) - k_{Vor} u(L) \delta(x - L) + u_{,xx} EA_{II} + k_x (u - w_{,x} r) = 0 \quad (4.145)$$

Durch Verwendung der eingliedrigen *Ritzschen* Ansätze (4.134) und (4.135) und Anwenden der *Galerkinschen* Vorschrift erhält man unter Berücksichtigung von

$$\int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \quad (4.146)$$

aus (4.145) folgenden Ausdruck

$$2 k_{Vor} C_1 q + EA_{II} C_1 \frac{\pi^2}{2L} q + k_x C_1 \frac{L}{2} q - k_x r \frac{L}{2} q = 0 \quad (4.147)$$

Daraus ergibt sich C_1 zu:

$$C_1 = \frac{k_x r L^2}{4 k_{Vor} L + EA_{II} \pi^2 + k_x L^2} \quad (4.148)$$

Zur Abschätzung der ersten Biegeeigenfrequenz kann wiederum Gleichung (4.142) verwendet werden. Einzig der C Wert ist für das erweiterte System zu bestimmen.

$$C = \frac{C_1}{r} = \frac{k_x L^2}{4 k_{Vor} L + EA_{II} \pi^2 + k_x L^2} \quad (4.149)$$

Für eine konstante Schubsteifigkeit des Schotters steht somit eine Methode zur Verfügung, um die erste Eigenfrequenz des Gesamtsystems abzuschätzen. Als letzter Schritt bleibt noch eine variable Schubsteifigkeit für das Gesamtsystem zu erfassen.

Wird eine variable Schubsteifigkeit angesetzt, so gestaltet sich die Ermittlung eines C Wertes wesentlich aufwendiger. Egal ob für die Kopplungssteifigkeit k_x die Schubsteifigkeit über die Potenzreihenentwicklung des e-Verlauf Modells oder über eine polynomielle Anpassung berücksichtigt wird, bei Verwendung des Ansatzes (4.135) in der Gleichgewichtsbedingung (4.131) ist der Skalierungswert C_1 mit mehreren unterschiedlichen Potenzen vorhanden. Die Auflösung der resultierenden Gleichung gestaltet sich somit schwierig.

Zur Ermittlung einer Näherungslösung für den C bzw. C_1 Wert wird davon ausgegangen, dass die Lösung für eine variable Schubsteifigkeit ähnlich der Lösung für konstante Schubsteifigkeit ist. Analog zum Vorgehen in (4.118) wird in Gleichung (4.142) und (4.149) die konstante Schubsteifigkeit k_x durch eine von der Durchbiegung abhängige äquivalente Steifigkeit $k_{s,\ddot{a}qu}$ nach Gleichung (4.117) ersetzt. Durch diesen Ansatz lässt sich der Skalierungswert C_{var} und die Gleichung für die erste Resonanzfrequenz $\omega_{1,res}$, bei Verwendung des e-Verlauf Modells für das Schubverhalten, durch folgende zwei Gleichungen ausdrücken:

$$C_{var} = \frac{k_{s,\ddot{a}qu} L^2}{4 k_{Vor} L + EA_{II} \pi^2 + k_{s,\ddot{a}qu} L^2} \quad (4.150)$$

$$\omega_{1,res} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + r^2 \frac{L^2}{\pi^2} k_{s,\ddot{a}qu} (1 - C_{var})}{\mu}} \quad (4.151)$$

Da zur Bestimmung der Steifigkeit der Vorlandfeder die horizontale Relativverschiebung des Gleises am Auflagerpunkt - was ja im Grunde dem C Wert entspricht - bekannt sein muss, ist zur Ermittlung von C_{var} eine Iteration durchzuführen.

Aus für unterschiedliche reale Tragwerke durchgeführten Berechnungen hat sich gezeigt, dass bei den von der Norm vorgegebenen Schubsteifigkeiten des Schotterkörpers die Vorlandfeder einen relativ geringen Einfluss auf die erste Resonanzfrequenz des Tragwerks und somit auf die Ermittlung des Skalierungswertes C_{var} hat. Dies ist aus Abbildung 4.71 eindeutig ersichtlich. Selbst bei einer über 30 m langen Brücke und einer Anfangssteifigkeit von $k_{anf} = 60 \text{ MN}/\text{m}^2$ ist kein Unterschied zwischen dem ersten und dem zweiten Iterationsschritt erkennbar. Für geringere Steifigkeiten und kürzere Tragwerke wird der Unterschied zwischen den Iterationsschritten zunehmend

geringer und auf die Iteration könnte eigentlich verzichtet werden. Können auch größere Steifigkeiten auftreten, so empfiehlt sich die Durchführung von zumindest einer Iteration.

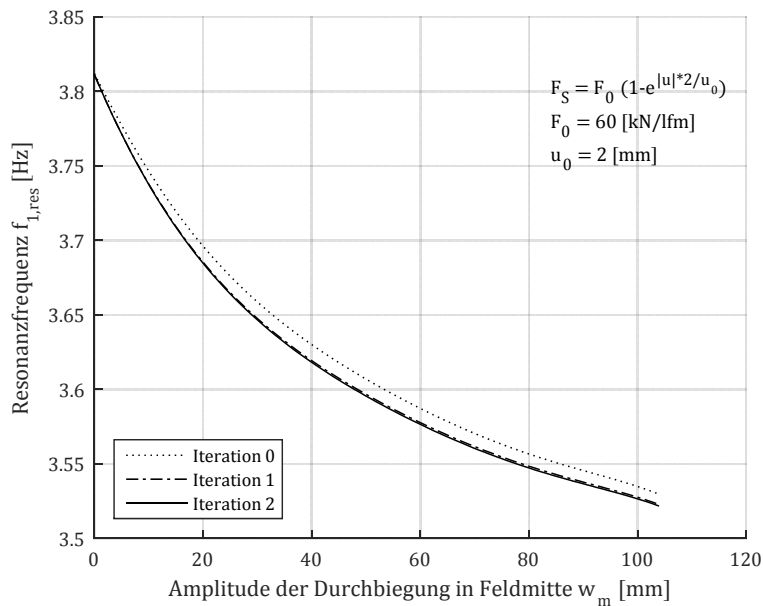


Abbildung 4.71: Beispielhafter Verlauf der ersten Resonanzfrequenzen einer 33,3 m langen Brücke für eine unterschiedliche Anzahl an Iterationsschritten für die Ermittlung der Steifigkeit der Vorlandfeder k_{Vor}

Für die Abschätzung der ersten Biegeeigenfrequenz des Gesamttragwerks unter Berücksichtigung der Wirkung des Gleiskörpers über dem Tragwerk und im Vorlandbereich kann gemäß dem in Abbildung 4.72 dargestellten Konzept vorgegangen werden. Damit lässt sich die Auswirkung des Schotteroberbaues auf die erste Resonanzfrequenz des Systems relativ einfach und schnell bestimmen.

In Abbildung 4.73 ist der Verlauf der Eigenfrequenzen des Gesamtsystems für unterschiedliche Schottersteifigkeiten und Systemeigenschaften (mit und ohne Berücksichtigung der Schienendehnung) für eine 33,3 m lange Brücke (Brücke 3 aus Tabelle 4.10) beispielhaft dargestellt. Aus dieser Abbildung sind mehrere Sachverhalte gut ersichtlich. Für hohe Schubsteifigkeiten (belastetes Gleis) hat die Wirkung des Schotteroberbaues einen großen Einfluss auf die Eigenfrequenz des Gesamtsystems. Eine Vernachlässigung der Verbundwirkung (blaue Linie) unterschätzt die Eigenfrequenz des Systems erheblich. Eine dehnstarre Modellierung des Gleises (schwarze Linien) würde die Systemsteifigkeit dagegen deutlich überschätzen. Die Ermittlung der Eigenfrequenz unter Berücksichtigung der amplitudenabhängigen Schubsteifigkeit des Schotters und der Dehnsteifigkeit der Schienen (rot durchgezogene Linie), kann relativ einfach nach dem in Abbildung 4.72 dargestellten Konzept bestimmt werden und ist für eine realistischere Einschätzung der tatsächlichen Eigenfrequenz empfehlenswert. Erforderlich dafür sind jedoch Schotterkennwerte, die dem realen Schotteroberbauverhalten entsprechen.

Abschätzung der ersten Resonanzfrequenz von Brücken mit Schotteroberbau

1. Schritt:
$$k_{anf} = \frac{2 F_0}{u_0}$$
2. Schritt:
$$k_{Vor,0} = \sqrt{EA_{II} k_{anf}}$$
3. Schritt:
$$x_S = \frac{w_m r}{L u_0}$$
4. Schritt:
$$K_{Sch} = \frac{9,8273 - 10,3573 x_S + 8,4904 x_S^2 - 4,2972 x_S^3 + 1,1548 x_S^4 - 0,1247 x_S^5}{L u_0}$$
5. Schritt:
$$k_{s,\ddot{a}qu} = \frac{2 L F_0}{\pi^2} K_{Sch}$$
6. Schritt:
$$C_{var,0} = \frac{k_{s,\ddot{a}qu} L^2}{4 k_{Vor,0} L + EA_{II} \pi^2 + k_{s,\ddot{a}qu} L^2}$$
- 6.1. Schritt:
$$u_{LA} = C_{var,0} r \frac{\pi}{L} w_m$$
- 6.2. Schritt:
$$K_{vor} = 79754 - 24486 \frac{u_{LA}}{u_0} + 6191,4 \frac{u_{LA}^2}{u_0^2} - 932,99 \frac{u_{LA}^3}{u_0^3} + 73,308 \frac{u_{LA}^4}{u_0^4} - 2,2967 \frac{u_{LA}^5}{u_0^5}$$
- 6.3. Schritt:
$$k_{Vor} = K_{vor} \sqrt{\frac{F_0}{u_0}}$$
- 6.4. Schritt:
$$C_{var} = \frac{k_{s,\ddot{a}qu} L^2}{4 k_{Vor} L + EA_{II} \pi^2 + k_{s,\ddot{a}qu} L^2}$$
7. Schritt:
$$\omega_{1,res} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + r^2 \frac{L^2}{\pi^2} k_{s,\ddot{a}qu} (1 - C_{var})}{\mu}}$$

Abbildung 4.72: Gleichungsapparat zur Abschätzung der ersten Resonanzfrequenz $\omega_{1,res}$ eines Einfeldträgers unter Berücksichtigung der Wirkung eines durchgehenden Gleiskörpers bei variabler Schubsteifigkeit des Schotters (e-Verlauf des Schubwiderstands)

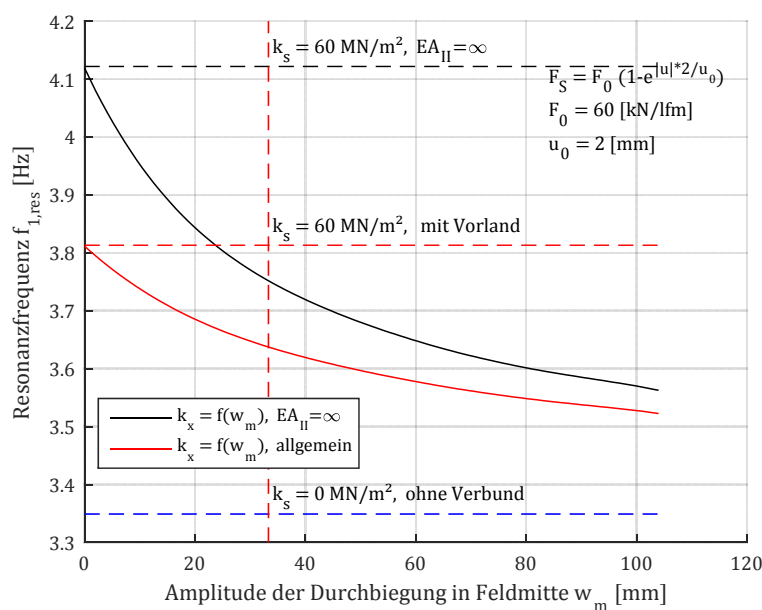


Abbildung 4.73: Systemfrequenzen einer 33,3 m langen Brücke für unterschiedliche Schottersteifigkeiten

4.4.6 Validierung des Modells durch ein FEM-Modell

Da in der Herleitung des in Abbildung 4.72 dargestellten Formelwerks einige Annahmen und Vereinfachungen eingegangen sind, scheint es zweckmäßig, die Ergebnisse dieser Überlegungen durch eine andere Lösungsmethode zu überprüfen. Hierfür wird auf die Finite Elemente Methode zurückgegriffen. Dazu wurde mit dem Programm *MATLAB* (Matlab R2015a) ein Skript zur Berechnung von ebenen Stabwerken mittels der FEM erstellt. Als Interpolationsfunktionen wurden die in Abschnitt 2.2.1.2 angeführten *Hermite*schen Polynome verwendet. Jedem Systemknoten sind drei Freiheitsgrade (zwei Verschiebungen und eine Verdrehung) zugeordnet. In Abbildung 4.74 ist das Grundschemata der verwendeten FE-Modellierung des Koppelbalkens dargestellt. Das Tragwerk wird dabei in eine Anzahl NT gleich großer Felder geteilt. Die genauere Bedeutung bzw. Funktion der einzelnen Stäbe und Gelenke wird in den folgenden Abbildungen erläutert.

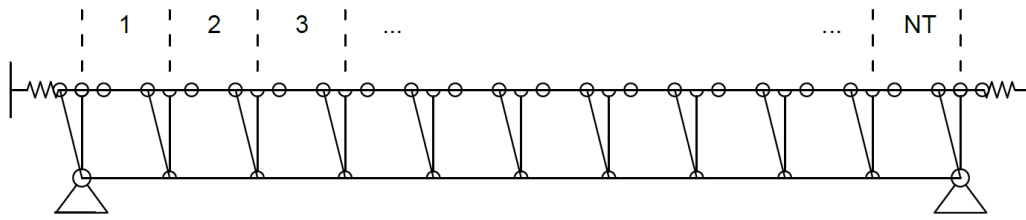


Abbildung 4.74: Schematische Darstellung des verwendeten Koppelbalkenmodells für die FE-Analyse

Die Hauptträger, sprich der Brücken-Balken und der Balken, der den Gleiskörper darstellt, sind in eine Anzahl von NT Elementen unterteilt. Wie aus Abbildung 4.75 ersichtlich ist, sind diese beiden Balken an den $NT + 1$ Knotenpunkten durch einen dehnstarr masselosen vertikalen Verbinder-Stab gekoppelt. Um keine Momentenübertragung zu ermöglichen, wird diesen Stäben keine Biegesteifigkeit zugeordnet. Der Brücken-Balken ist durch ein Festlager und ein verschiebliches Lager an beiden Enden im Raum fixiert. An beiden Enden des Gleiskörper-Balkens greift eine Dehnsfeder mit Steifigkeit k_{Vor} an, die das Verhalten des Gleiskörpers im Vorlandbereich abbildet. Die gesamte Masse wird dem Brückenträger zugeordnet, was auch dem Vorgehen in der analytischen Herleitung der Frequenzgleichung (4.151) entspricht. Ebenfalls gemäß dem analytischen Ansatz wird der Brücken-Balken als dehnstarr angenommen. Die Querschnittsfläche des Balkens wird dazu mit 10^4 m^2 angesetzt. Die Biegesteifigkeit und die Dehnsteifigkeit des Schotterbalkens werden entsprechend der Kennwerte zweier UIC60-Profile mit $EA_{zz} = 12,83 \text{ MNm}$ und $EA = 3220 \text{ MN}$ angenommen.

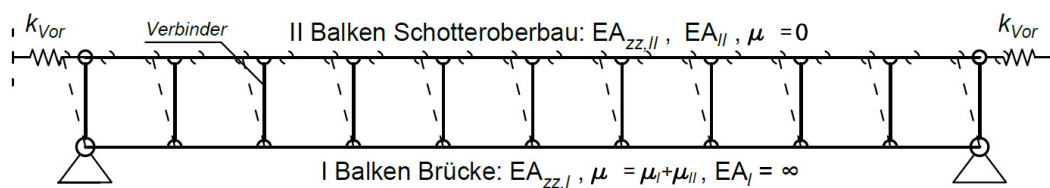


Abbildung 4.75: Schematische Darstellung der vertikalen Kopplung des Brücken- und des Schotterbalkens

Die Schubverbindung zwischen den beiden Balken wird über biegesteife masselose Exzenter-Stäbe und horizontale Dehnfedern mit der jeweiligen Steifigkeit $k_{s,i}$ hergestellt (siehe Abbildung 4.76).

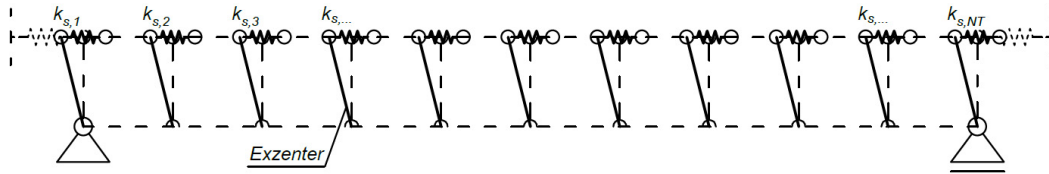


Abbildung 4.76: Schematische Darstellung der Schubkopplung zwischen Brücken- und Schotterbalken

Da die maximale Durchbiegung in Feldmitte von Interesse ist, wird eine gerade Anzahl NT der Stabteilungen gewählt, um einen Knoten in Tragwerksmitte zu erzeugen. Für konstante Steifigkeiten der Schubfedern reicht eine Eigenwertanalyse des aufgestellten FE-Modells aus, um die gesuchten Resonanzfrequenzen (entsprechen hier den Eigenfrequenzen) zu erhalten. Für die beispielhafte Kontrolle der analytischen Herleitung werden drei Tragwerke mit sehr unterschiedlichen Kennwerten untersucht. Die Kennwerte dieser realen Tragwerke sind in Tabelle 4.10 aufgelistet.

			Brücke 1	Brücke 2	Brücke 3
Spannweite	L	[m]	11,00	22,40	33,30
Biegesteifigkeit Tragwerk	$EA_{zz,I}$	[Nm ²]	4,17E+9	9,23E+9	4,41E+10
Biegesteifigkeit Schienen	$EA_{zz,II}$	[Nm ²]	1,283E+7	1,283E+7	1,283E+7
Summe der Biegesteifigkeiten	EA_{zz}	[Nm ²]	4,183E+9	9,243E+9	4,411E+10
Massenbelegung	μ	[kg/m]	8600	4200	7890
Schwerpunktastand TW-Schienen	r	[m]	0,855	0,35	1,835

Tabelle 4.10: Kennwerte der Vergleichsbrücken

Zuerst werden für konstante Schubfedersteifigkeiten ($k_s = konst$) die Eigenfrequenzen für einen Koppelbalken mit dehnstarrten Schienen ermittelt. Dies entspricht dem Tragwerksmodell nach *Mähr* [4]. Für den Schotter wird ein Durchschubwiderstand von $F_0 = 20 \text{ kN/m}$ und eine Grenzverschiebung von $u_0 = 2 \text{ mm}$ angesetzt. Um die Ergebnisse auch mit den Frequenzen des variablen Steifigkeitsmodells (e-Verlauf Modell) vergleichen zu können, wird die Schubsteifigkeit mit $k_s = 2 F_0/u_0$ angesetzt. Dies entspricht der Anfangssteifigkeit k_{Anf} des e-Verlauf Modells. In Abbildung 4.77 sind die ersten Eigenformen (aus der FE-Berechnung) der drei Vergleichsbrücken dargestellt.

		Brücke 1	Brücke 2	Brücke 3
1.EF	FEM	9,245 Hz	4,675 Hz	3,524 Hz
1.EF	Gleichung (4.78)	9,232 Hz	4,672 Hz	3,625 Hz

Tabelle 4.11: Eigenfrequenzen der Vergleichsbrücken mit dehnstarrten Schienen (Koppelbalken) und konstanter Schubsteifigkeit des Schotters, aus FE-Berechnung und Gleichung (4.78)

In Tabelle 4.11 sind die ermittelten Eigenfrequenzen aus der FE-Berechnung den Ergebnissen aus Gleichung (4.78) gegenübergestellt. Die Ergebnisse stimmen fast exakt (Abweichungen von ca.

einem Promille) überein, wodurch die Gleichung zur Bestimmung der ersten Eigenfrequenz für einen Koppelbalken mit dehnstarrten Schienen als zutreffend angesehen werden kann.

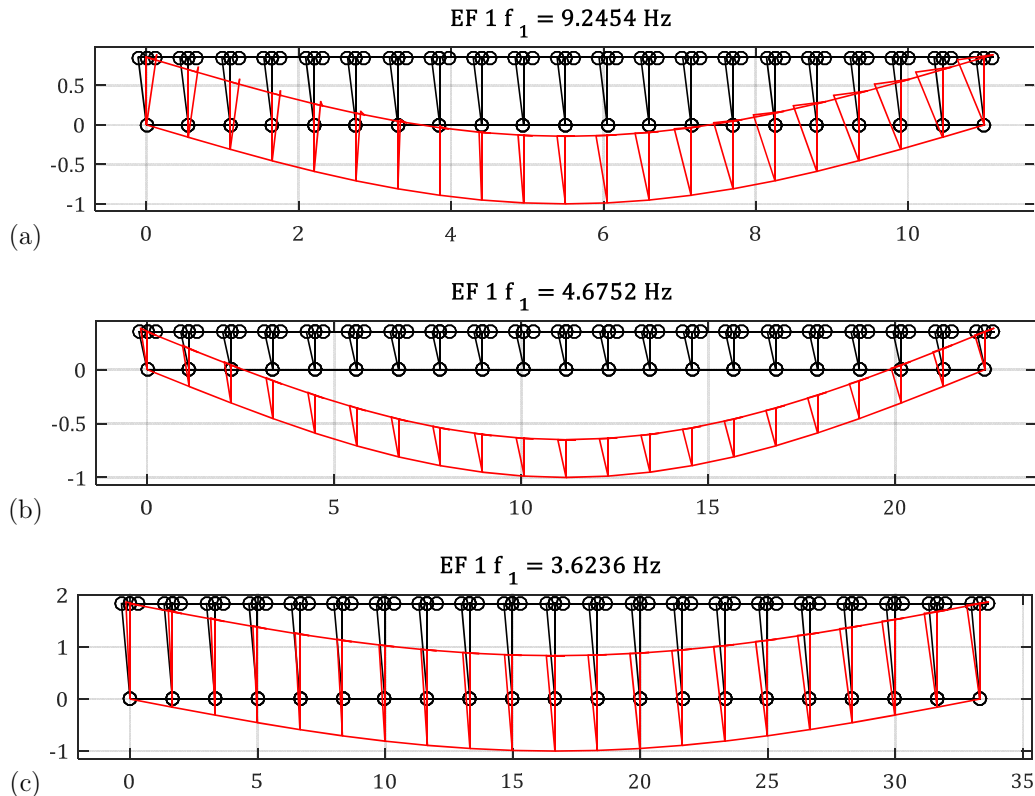


Abbildung 4.77: Erste Eigenfrequenz und Eigenform des Koppelbalkens für dehnstarre Schienen aus der FE-Berechnung (a) Brücke 1 (b) Brücke 2 (c) Brücke 3 (die Eingabegeometrie ist mit schwarzen Linien und die Eigenform mit roten Linien dargestellt)

Im nächsten Schritt wird auf die Dehnstarrheit der Schienen verzichtet. Dadurch kann Gleichung (4.142) überprüft werden. Die Ergebnisse aus dieser Gleichung und einer entsprechenden FE-Berechnung sind in Tabelle 4.12 wiedergegeben.

		Brücke 1	Brücke 2	Brücke 3
1.EF	FEM	9,235 Hz	4,670 Hz	3,551 Hz
1.EF	Gleichung (4.142)	9,222 Hz	4,667 Hz	3,557 Hz

Tabelle 4.12: Eigenfrequenzen der Vergleichsbrücken für das Gesamtmodell (Koppelbalken mit Vorland) mit konstanter Schubsteifigkeit des Schotters, aus FE-Berechnung und aus Gleichung (4.142)

Wie aus dem Vergleich der Eigenfrequenzen in Tabelle 4.12 hervorgeht, liegt die maximale Abweichung zwischen der analytischen Gleichung und der FEM Berechnung im Promillebereich. Die maximalen Abweichungen treten für die dritte Brücke auf. In Anbetracht der Genauigkeiten der Eingangswerte (Massenbelegung und Biegesteifigkeit), ist diese Abweichung vernachlässigbar und Gleichung (4.142) kann ebenfalls als anwendbar bestätigt werden.

Da die Abweichungen für das nicht dehnstarre Gleis etwas höher ausfallen als die für das dehnstarre Gleis, folgt hier eine kurze Erläuterung.

Auffällig in Tabelle 4.12 ist, dass mit zunehmender Spannweite und zunehmendem Schwerpunkt-
abstand zwischen Tragwerk und Schienen auch die Frequenzabweichungen zunehmen. Bei näherer
Betrachtung von Gleichung (4.142) wird ersichtlich, dass die Ursache für diese Frequenzabwei-
chungen wohl nur in dem Schubsteifigkeitsterm

$$r^2 \frac{L^2}{\pi^2} k_x (1 - C) \quad (4.152)$$

liegen kann. Da bis auf den Wert C alle Faktoren eindeutig definiert bzw. vorgegeben sind, muss
der Fehler im Verhältniswert C zu finden sein. Dieser Wert setzt die Verformung der Schienen
bzw. des Gleisrosts in ein Verhältnis zur Durchbiegung des Tragwerks. Als Grundlage zur Ermitt-
lung dieses Verhältnisses diene die Annahme, dass die Schienenverformung über die Brückenlänge
einen Cosinusverlauf darstellt. In Abbildung 4.78 sind für die Brücke 3 der Verlauf der Schienen-
verformung aus der FE-Berechnung und der Ansatz (4.135), welcher für die analytische Lösung
verwendet wurde, dargestellt. Wie daraus ersichtlich ist, sind die beiden Verläufe zwar ähnlich,
stimmen aber nicht vollständig überein. Die Vorlandfedern reduzieren die Horizontalverformung
der Schienen an den Auflagern. Die Abweichungen zwischen den beiden Verläufen vergrößern sich
mit zunehmender Schubsteifigkeit k_s und Tragwerkslänge L . Da der auftretende Fehler bei der
über 30 m langen Brücke 3 und der mittelgroßen Schubsteifigkeit von $k_s = 20 \text{ MN/m}$ nur etwa
ein Prozent beträgt, wird der Ansatz eines Cosinusverlaufs für die horizontale Verformung der
Schiene als ausreichend angesehen.

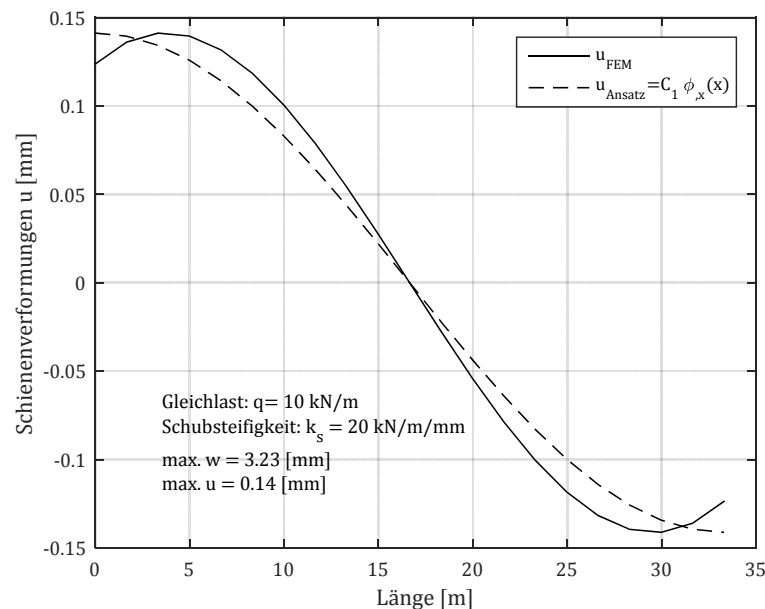


Abbildung 4.78: Verlauf der Schienenverformung u_{FEM} aus der FE-Berechnung und Ansatz der Schienen-
verformung für die analytische Lösung u_{Ansatz} (Brücke 3 unter einer Gleichlast von 10 kN/m)

Die Gültigkeit der Gleichungen für eine konstante Schubsteifigkeit ist somit bestätigt. Im nächsten
Schritt erfolgt die Betrachtung des variablen Schubsteifigkeitsverlaufs (e-Verlauf Modell).

Zur Bestimmung der Schwingungsfrequenz aus dem FE-Modell ist die Eigenwertanalyse nicht
mehr ausreichend. Daher wird hier bewusst von einer Schwingungsfrequenz (wird hier als Kehr-

wert der Schwingungsperiode ermittelt) und nicht von einer Eigenfrequenz gesprochen. Die Steifigkeiten der Schubfedern sind nun nicht mehr konstant sondern weisen, außer für die Nulllage (keine Durchbiegung), für jede Feder einen variablen Wert auf - abhängig von der Relativverschiebung zwischen Tragwerk und Schienen an der jeweiligen Position. Durch diese Nichtlinearität wird eine Erweiterung des FE-Skripts notwendig. Ein Struktogramm des Aufbaus des *MATLAB*-Skripts zur Ermittlung der Schwingungsfrequenz ist in Abbildung 4.79 gegeben.

Um diese variablen Federsteifigkeiten richtig zu erfassen, wird eine Iterationsschleife eingeführt. Zur Bestimmung der gesuchten Systemsteifigkeiten für eine Durchbiegung w_m , wird zunächst auf Basis der Biegesteifigkeit EA_{zz} eine zugehörige Gleichlast q_{Start} welche an der Schiene angreift nach folgender Gleichung abgeschätzt:

$$q_{Start} = \frac{384 EA_{zz}}{5 L^4 w_m} \quad (4.153)$$

Unter Verwendung der Anfangssteifigkeit der Schubfedern

$$k_{s,i} = k_{Anf,i} = 2 \frac{F_0}{u_0} \frac{L}{NT} \quad (4.154)$$

und des Startwerts der Steifigkeit der Vorlandfedern

$$k_{Vor} = \sqrt{2 \frac{F_0}{u_0} EA_{Sch}} \quad (4.155)$$

wird die aus der Startlast q_{Start} resultierende Verformung des Systems ermittelt. Aus dem erhaltenen Verformungszustand werden, entsprechend der unten angeführten Gleichungen, neue Schubfedersteifigkeiten $k_{s,i}$, neue Vorlandfedersteifigkeiten k_{Vor} und eine neue Gleichlast q_1 bestimmt. Für die neuen Systemsteifigkeiten und die neue Belastung werden erneut die Verformungen berechnet. Diese werden mit den Verformungen des vorigen Durchlaufs verglichen. Bei Nichteinhaltung eines gewissen Kriteriums wird ein weiterer Durchlauf (Anpassung der Steifigkeiten und der Belastung + Verformungsberechnung) durchgeführt. Als Abbruchkriterium dient der Vergleich der horizontalen Gleisverformung am linken Auflager u_{LA} (Anfangswert $u_{LA,0} = 0$). Die zulässige Fehlertoleranz wird zu 1 % gewählt. Die Anpassung der Steifigkeit der Schubfedern $k_{s,i}$ erfolgt anhand des e-Verlauf Modells (4.28) für die ermittelten Relativverschiebungen u_i .

$$k_{s,i} = \frac{F_0}{|u_i|} \left(1 - e^{-|u_i| \frac{2}{u_0}}\right) \frac{L}{NT} \quad (4.156)$$

Die Anpassung der beiden Vorlandfedern erfolgt nach Gleichung (4.63), die hier nochmals angeführt wird.

$$k_{Vor} = K_{vor} \sqrt{\frac{F_0}{u_0}}, \quad K_{vor} = \sum_{n=0}^5 a_n \left(\frac{u_{LA}}{u_0}\right)^n \quad (4.63)$$

Die Formfunktion K_{vor} wird dabei durch die polynomielle Anpassung (4.64) angenähert. Als Variable dient dabei das Verhältnis zwischen $u_{LA,I}$ und u_0 . Die im I -ten Durchlauf wirkende Gleichlast q_I wird durch eine lineare Anpassung ermittelt.

$$q_I = \frac{q_{I-1} w_m}{|w_{m,I-1}|} \quad (4.157)$$

Wird die vorgegebene Fehlertoleranz der horizontalen Schienenverformung eingehalten, so kann aus den nun bekannten Massen- und Steifigkeitsmatrizen $\mathbf{M}(w_m)$ und $\mathbf{K}(w_m)$ durch eine Eigenwertanalyse die Eigenfrequenzen und Eigenformen für den Verformungszustand mit einer Durchbiegung in Tragwerksmitte von w_m bestimmt werden. Hierbei handelt es sich jedoch noch nicht um die gesuchte Schwingungsfrequenz des Systems, da die Struktur während einer Schwingungsperiode unterschiedliche Steifigkeiten und somit unterschiedliche Eigenfrequenzen annimmt.

Um die Schwingungsfrequenz zu bestimmen, wird hier das Systemverhalten im Zeitbereich betrachtet. Ausgehend von einer Anfangsauslenkung $w_{m,max}$ mittels einer Zeitschrittintegration werden die Systemverformungen über einen gewissen Zeitraum $t = [0 \dots t_{max}]$ bestimmt. Aus dem Zeit-Verschiebungs-Verlauf der Durchbiegung in Tragwerksmitte $w_m(t)$ kann dann im Weiteren die Schwingungsfrequenz bestimmt werden. Um in einem Zeitverlauf unterschiedliche Schwingungsamplituden $w_{m,AMP}$ zu erhalten, wird eine Systemdämpfung von $\zeta = 0,5 \%$ angesetzt, um einen Ausschwingvorgang zu erzeugen.

Zur Durchführung der Zeitschrittintegration wird ein in *MATLAB* implementierter Gleichungslöser, ein so genannter ODE-Solver, verwendet. Konkret kommt der Solver *ode15s* zum Einsatz (nähere Angaben zur Zeitschrittintegration finden sich in Abschnitt 2.2.6).

Für die Diskretisierung des Systems wurde eine Teilung der Tragwerkslänge in $NT = 20$ Felder gewählt. Dieser Ansatz hat sich als ausreichend fein herausgestellt. Daraus ergeben sich etwa 250 Freiheitsgrade für ein System. Da die ODE-Solver nur Differentialgleichungen erster Ordnung lösen können, muss die zu lösende Differentialgleichung zweiter Ordnung in eine Differentialgleichung erster Ordnung mit doppelt so vielen Freiheitsgraden übergeführt werden (vgl. Abschnitt 2.2.6.8). Somit ist ein Gleichungssystem mit etwa 500 Freiheitsgraden zu lösen. Da die Genauigkeit der aus dem Zeitverlauf ermittelten Schwingungsfrequenzen von der Größe des Ausgabezeitschrittes der Integration abhängig ist, wurde ein sehr kleiner Zeitschritt von $1/20.000$ Sekunden gewählt. Um die Rechenzeit zu reduzieren, wird für die zeitabhängige Systemverformung $\mathbf{v}(t)$ ein eingliedriger *Ritzscher* Ansatz angesetzt,

$$\mathbf{v}(t) = \phi_1 q_1(t) \quad (4.158)$$

Es wird demnach nur die erste Eigenform des Systems berücksichtigt. Da nur das frei schwingende System betrachtet wird, reduziert sich die zu lösende Differentialgleichung zu:

$$\ddot{q}_1(t) + 2 \zeta \omega_1(w_m(t)) \dot{q}_1(t) + \omega_1^2(w_m(t)) q_1(t) = 0 \quad (4.159)$$

wobei anzumerken ist, dass die hier enthaltene erste Kreisfrequenz ω_1 (aus Eigenwertanalyse von $\mathbf{M}(w_m)$ und $\mathbf{K}(w_m)$) eine von der Durchbiegung in Tragwerksmitte w_m abhängige Variable ist. Diese Kreisfrequenz muss somit für jeden Zwischenschritt der Integration erneut bestimmt werden. Die zeitabhängige Variable $q_1(t)$ stellt die Schwingungsamplitude dar und skaliert somit den Eigenvektor ϕ_1 . Sie entspricht im vorliegenden Fall der Durchbiegung in Tragwerksmitte $w_m(t)$. Die Differentialgleichung (4.159) kann somit auch folgendermaßen angeschrieben werden:

$$\ddot{w}_m(t) + 2 \zeta \omega_1(w_m(t)) \dot{w}_m(t) + \omega_1^2(w_m(t)) w_m(t) = 0 \tag{4.160}$$

Um gleich den gesamten Verformungszustand zu erhalten, wird die Integration für den vollständigen Verformungsvektor $\mathbf{v}(t) = \phi_1 q_1(t)$ durchgeführt. Die tatsächlich gelöste Differentialgleichung sieht somit folgendermaßen aus:

$$\ddot{\mathbf{v}}(t) + 2 \zeta \omega_1(\mathbf{v}(t)) \dot{\mathbf{v}}(t) + \omega_1^2(\mathbf{v}(t)) \mathbf{v}(t) = \mathbf{0} \tag{4.161}$$

Aus dem berechneten Verlauf der Durchbiegung in Tragwerksmitte $w_m(t)$ wird über den zeitlichen Abstand der Schwingungsamplituden $w_{m,AMP,i}$ die Schwingungsdauer T_i ermittelt.

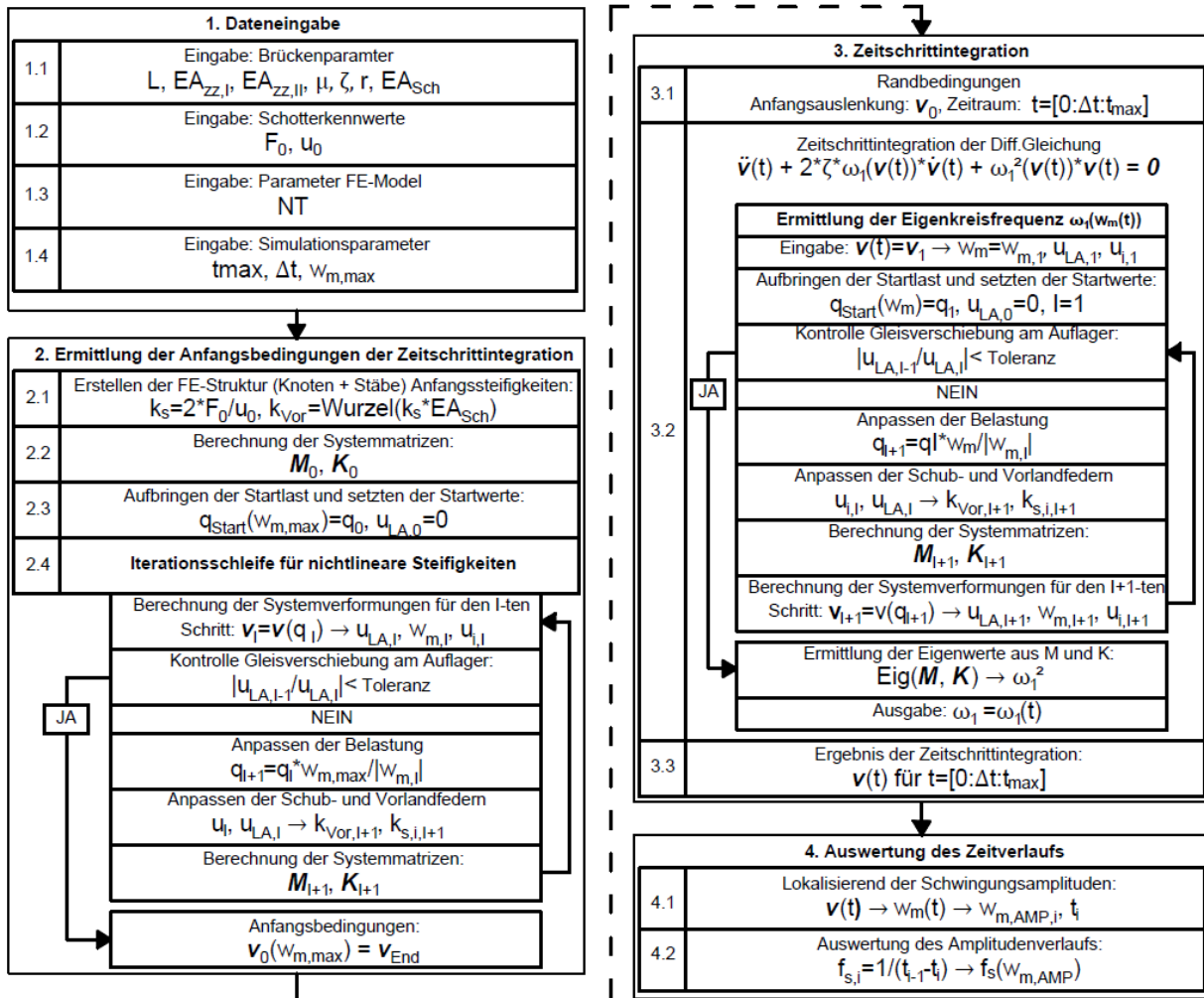


Abbildung 4.79: Struktogramm des MATLAB-Skripts zur Ermittlung der Schwingungsfrequenz bei nichtlinearer Schubsteifigkeit des Schotters

Durch Kehrwertbildung kann daraus die Schwingungsfrequenz $f_{S,i}$ bestimmt werden. Ordnet man der Durchbiegungsamplitude $w_{m,AMP,i}$ die Schwingungsfrequenz $f_{S,i}$ zu, so ergibt sich dadurch der Verlauf der Schwingungsfrequenz $f_{S,FEM}$ über die Amplitude der Tragwerksdurchbiegung $w_{m,AMP}$ (in der weiteren Arbeit mit w_m bezeichnet). Grafisch zusammengefasst ist dieser Ablauf in Abbildung 4.79 dargestellt. Für eine Zeitschrittintegration nach der Differentialgleichung (4.160) kann der Block 2 „Ermittlung der Anfangsbedingungen der Zeitschrittintegration“ entfallen.

In Abbildung 4.80 sind die Ergebnisse aus einer FE-Berechnung mittels des in Abbildung 4.79 beschriebenen *MATLAB*-Skriptes dargestellt. Die Berechnung des Zeitverlaufs erfolgte dabei mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 1/20.000$ s. Wie daraus ersichtlich wird, können mit dieser Methode durchaus brauchbare Verläufe der Schwingungsfrequenz erzeugt werden.

Für eine konstante Steifigkeit der Schubfedern konnten die analytischen Gleichungen zur Bestimmung der ersten Eigenfrequenz, sowohl für den Koppelbalken mit dehnstarrten Schienen als auch für das Gesamtmodell (Koppelbalken mit Vorland), bereits bestätigt werden. Mit dem oben beschriebenen *MATLAB*-Skript steht nun auch eine Möglichkeit zur Verfügung, nichtlineare Federsteifigkeiten zu untersuchen.

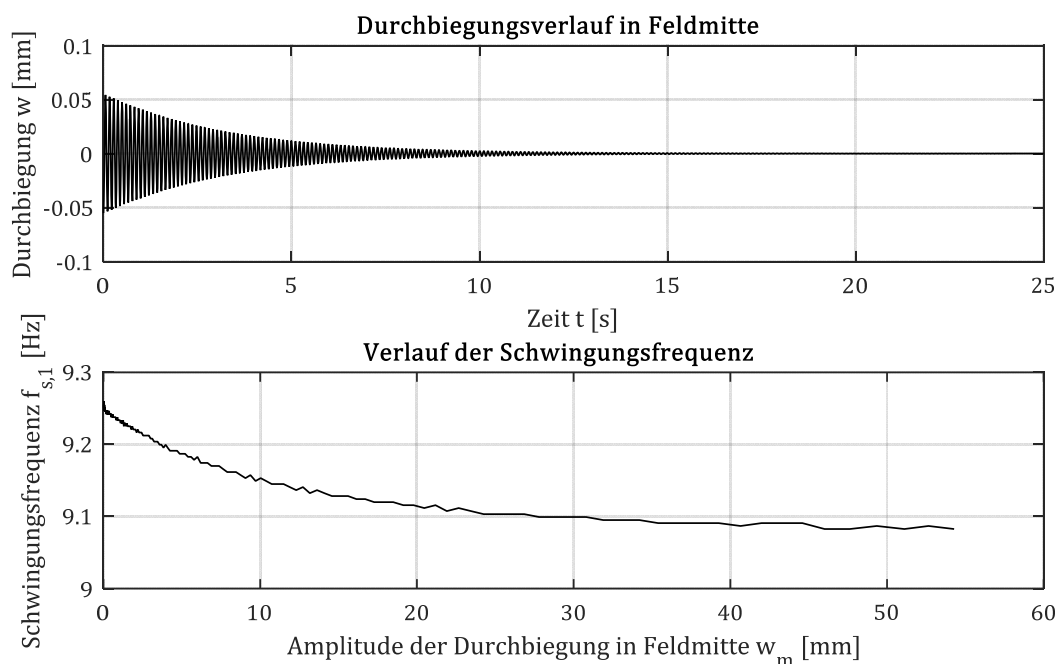


Abbildung 4.80: Aus der FE-Berechnung ermittelter Zeitverlauf der Durchbiegung in Tragwerksmitte und der daraus errechnete Verlauf der Schwingungsfrequenz $f_{s,1}$ in Abhängigkeit von der Schwingungsamplitude w_m , für Brücke 1 mit dem Modell des Koppelbalkens mit dehnstarrten Schienen

Überprüft wird zuerst das einfachere der beiden oben genannten Tragwerksmodelle, der Koppelbalken mit dehnstarrten Schienen. Hierzu werden die drei Vergleichsbrücken (siehe Tabelle 4.10) untersucht. Die ermittelten Schwingungsfrequenzen $f_{s,1,FEM}$ aus der FE-Berechnung werden dazu mit den „analytischen“ Resonanzfrequenzen $f_{1,res}$ nach Gleichung (4.118) verglichen.

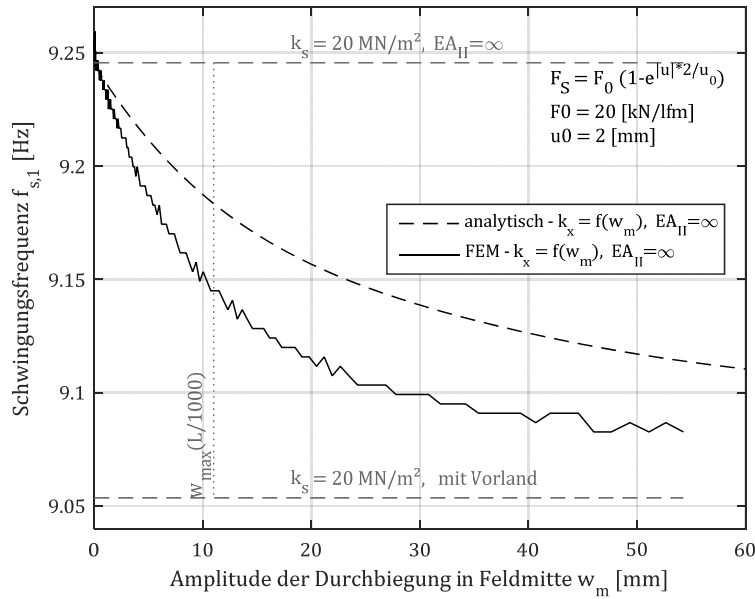


Abbildung 4.81: Änderung der Schwingungsfrequenz $f_{s,1}$ über die Durchbiegungsamplitude in Tragwerksmitte w_m ; Gegenüberstellung der Ergebnisse aus der FE-Berechnung und nach der analytisch hergeleiteten Gleichung (4.118); Brücke 1, Modell Koppelbalken mit dehnstarrten Schienen

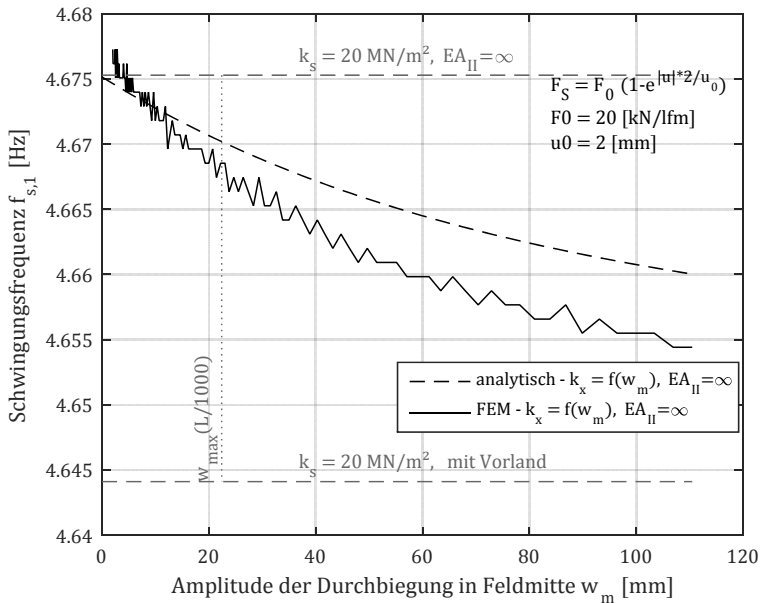


Abbildung 4.82: Änderung der Schwingungsfrequenz $f_{s,1}$ über die Durchbiegungsamplitude in Tragwerksmitte w_m ; Gegenüberstellung der Ergebnisse aus der FE-Berechnung und nach der analytisch hergeleiteten Gleichung (4.118); Brücke 2, Modell Koppelbalken mit dehnstarrten Schienen

In Abbildung 4.81, Abbildung 4.82 und Abbildung 4.83 sind die Vergleiche der Verläufe der Schwingungsfrequenzen für die drei Vergleichsbrücken dargestellt. Aus diesen Darstellungen ist ersichtlich, dass die Form des Verlaufs der Schwingungsfrequenzen aus der FE-Berechnung dem Verlauf aus der analytischen Berechnung durchaus ähnlich ist, die FE-mäßig bestimmten Frequenzen jedoch durchgehend niedriger sind (außer bei einer Nulldurchbiegung) als die aus der analytischen Herleitung ermittelten. Die „FE-Frequenz“ nimmt mit zunehmender Auslenkung deutlich stärker ab als die „analytische Frequenz“. Ab einer gewissen Durchbiegung verlaufen beide

Kurven annähernd parallel. Da die Frequenzverläufe bzw. die Differenz der Frequenzverläufe für alle drei Tragwerke ziemlich ähnlich aussehen, liegt die Vermutung nahe, dass es sich um einen systematischen Fehler handelt. Bei einer näheren Betrachtung der Herleitung von Gleichung (4.118) wird ersichtlich, dass der Ursprung für den auftretenden Unterschied im Schwingungsansatz (4.95) zu suchen ist. Die tatsächlich stattfindende Schwingung entspricht vermutlich nicht dem unterstellten Cosinusverlauf.

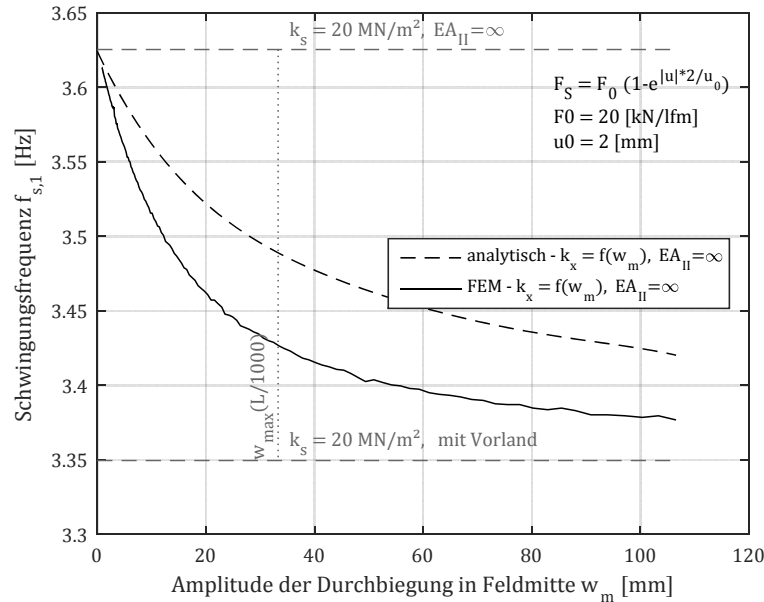


Abbildung 4.83: Änderung der Schwingungsfrequenz $f_{s,1}$ über die Durchbiegungsamplitude in Tragwerksmitte w_m ; Gegenüberstellung der Ergebnisse aus der FE-Berechnung und nach der analytisch hergeleiteten Gleichung (4.118); Brücke 3, Modell Koppelbalken mit dehnstarren Schienen

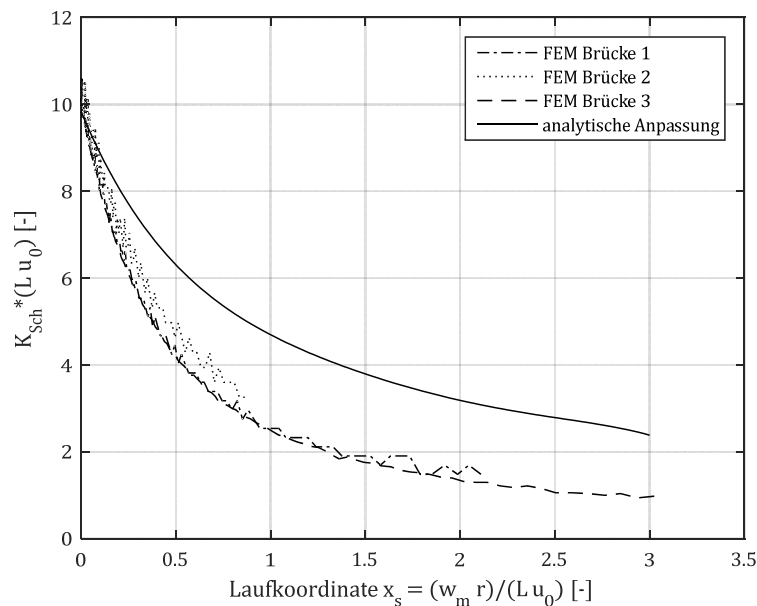


Abbildung 4.84: Vergleich der Verläufe von $K_{Sch,FEM} * (L u_0)$ aus der FE-Berechnung mit dem analytisch ermittelten Verlauf von $K_{Sch} * (L u_0)$

Der hierbei gemachte Fehler ist somit im Verlauf des Schubanpassungsfaktors K_{Sch} (4.113) und somit auch in der äquivalenten Schubsteifigkeit $k_{s,\text{äqu}}$ (4.117)) enthalten. Unter Verwendung des

Zusammenhangs zwischen Frequenz f und Kreisfrequenz ω ($\omega = 2\pi f$) kann durch Umformen von Gleichung (4.116) der äquivalente Schubanpassungsfaktor $K_{Sch,FEM}$ aus den Schwingungsfrequenzen der FE-Berechnung $f_{s,1,FEM}$ durch folgende Gleichung bestimmt werden:

$$K_{Sch,FEM} = \frac{\left(\frac{f_{s,1,FEM} 2 \pi L^2}{\pi^2}\right)^2 \mu - EA_{zz}}{r^2 F_0 \frac{2 L^3}{\pi^4}} \quad (4.162)$$

In Abbildung 4.84 werden die so ermittelten Schubanpassungsfaktoren nach Gleichung (4.162) der drei Vergleichsbrücken mit dem Schubanpassungsfaktor nach Gleichung (4.113) verglichen. Für eine bessere Vergleichbarkeit wird hier, wie in Abbildung 4.60, nicht der Verlauf von $K_{Sch,FEM}$, sondern von $K_{Sch,FEM} * (L u_0)$ dargestellt. Als Laufkoordinate wird wiederum $x_s = (w_m r) / (L u_0)$ verwendet. Aus dieser Abbildung geht eindeutig hervor, dass sich die Verläufe aus der FE-Berechnung deutlich von den analytisch ermittelten unterscheiden. Es ist jedoch auch erkennbar, dass sich die $K_{Sch,FEM} * (L u_0)$ Verläufe für die drei Beispieltragwerke kaum unterscheiden und nahezu deckungsgleich sind. Daher wird davon ausgegangen, dass es sich bei den Abweichungen zwischen den FE-Verläufen nur um Rundungsfehler bzw. Ungenauigkeiten im FE-Modell handelt und es sich im Prinzip um ein und denselben Verlauf handelt. Um den analytischen Verlauf an den FE-Verlauf anzupassen, ist eine Korrekturfunktion notwendig. Dadurch wird für das in Abbildung 4.72 dargestellte Konzept ein zusätzlicher Schritt erforderlich. Um diese Erweiterung zu vermeiden, wird auf diese Korrekturfunktion verzichtet und gleich anstelle von K_{Sch} ein an die FE-Ergebnisse angepasster Faktor $K_{Sch,app}$ eingeführt. Angepasst wird nicht direkt der Verlauf von $K_{Sch,FEM}$, sondern der Verlauf von $K_{Sch,FEM} * (L u_0)$. Diese Anpassung gemäß

$$K_{Sch,app} * (L u_0) = a_0 + a_1 x_s + a_2 x_s^2 + a_3 x_s^3 + \dots = \sum_{i=0}^n a_i x_s^i \quad (4.163)$$

ist in Abbildung 4.85 dargestellt. Da der anzupassende Verlauf stärker als in der analytischen Betrachtung gegen Null konvergiert, werden hier, um einen glatten Verlauf zu erhalten, Ansatzglieder bis zur siebten Potenz der Laufkoordinate x_s benötigt. Aus optischen Gründen wird hier der Verlauf mit sieben Ansatzgliedern weiterverwendet. Generell sollte jedoch eine handlichere Anpassung mit Ansatzgliedern bis zur fünften Potenz ausreichen. Eine vergleichende Darstellung der beiden Verläufe findet sich in Abbildung 4.86. Die Koeffizienten der beiden Anpassungen sind in Tabelle 4.13 aufgelistet.

Zur Validierung der Anpassung von $K_{Sch,app}$ sind in Abbildung 4.87 der Verlauf der Schwingungsfrequenzen $f_{s,1,FEM}$ aus der FE-Berechnung und der Verlauf der angepassten Resonanzfrequenzen $f_{1,res,app}$ nach Gleichung (4.118) unter Verwendung von $K_{Sch,app}$ für Brücke 1 dargestellt. Wie daraus ersichtlich ist, stimmen beide Verläufe gut überein. Bei Verwendung des approximierten Verlaufs des Schubanpassungsfaktors $K_{Sch,app}$ kann somit die Anwendbarkeit von Gleichung (4.118) zur Abschätzung der Schwingungsfrequenz für das Modell des dehnstarrten Gleises bestätigt werden.

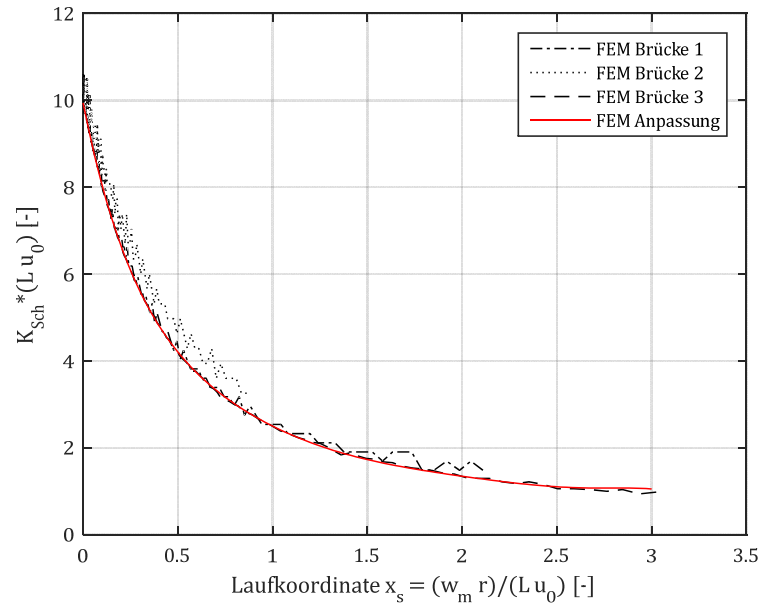


Abbildung 4.85: Verläufe von $K_{Sch,FEM} * (L u_0)$ und der daran angepasste Verlauf $K_{Sch,app} * (L u_0)$

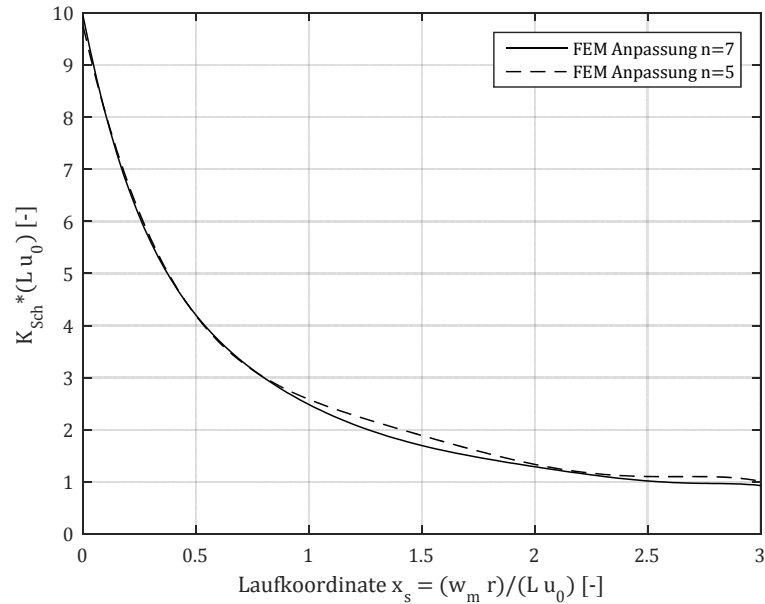


Abbildung 4.86: Angepasster Verlauf $K_{Sch,app} * (L u_0)$ mit fünf und mit sieben Ansatzglieder

	Ansatzglieder n	
	5	7
a_0	9,741	9,9380
a_1	-18,750	-21,9525
a_2	20,340	33,2369
a_3	-11,665	-33,2039
a_4	3,268	20,7899
a_5	-0,351	-7,7325
a_6	-	1,5509
a_7	-	0,1286

Tabelle 4.13: Anpassungskoeffizienten für $K_{Sch,app} * (L u_0)$

Als letzter Schritt bleibt nur mehr die Überprüfung der Gleichungen für das Gesamtsystem, sprich des Koppelbalkens mit Berücksichtigung der Schienendehnung und des Vorlandbereichs. In die Frequenzgleichung für das Gesamtsystem (4.151) geht jedoch auch die Ansatzfunktion für die Schienenverformung $u(x)$ ein, die, wie bereits in Abbildung 4.78 gezeigt wurde, bei Berücksichtigung der Vorlandfeder nicht mehr hundertprozentig zutrifft. Es ist also davon auszugehen, dass beim Frequenzvergleich (zwischen FE-Berechnungen und analytischer Gleichung) für eine variable Schubsteifigkeit zumindest geringe Abweichungen auftreten.

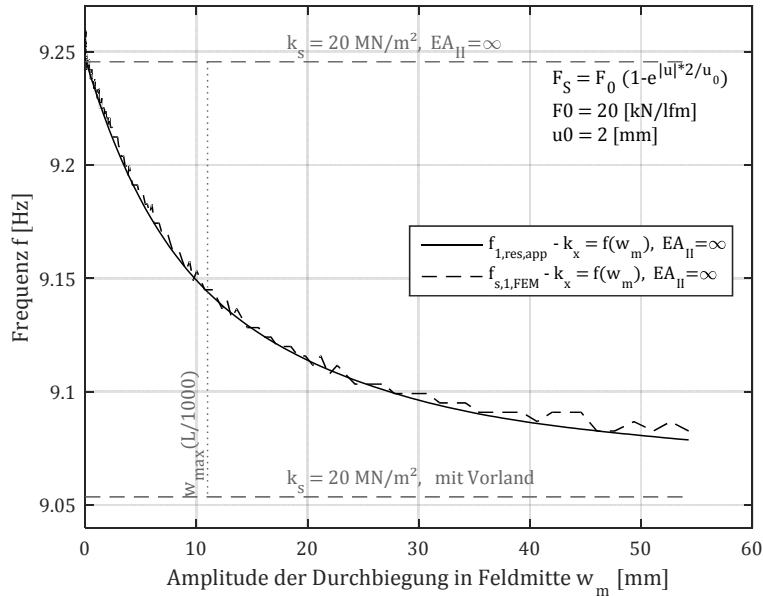


Abbildung 4.87: Änderung der Schwingungsfrequenz $f_{s,1}$ über die Durchbiegung amplituden in Tragwerksmitte w_m ; Gegenüberstellung der Ergebnisse aus der FE-Berechnung und nach der analytisch hergeleiteten Gleichung (4.118) unter Verwendung von $K_{Sch,app}$; Brücke 1, Modell Koppelbalken mit dehnstarrten Schienen

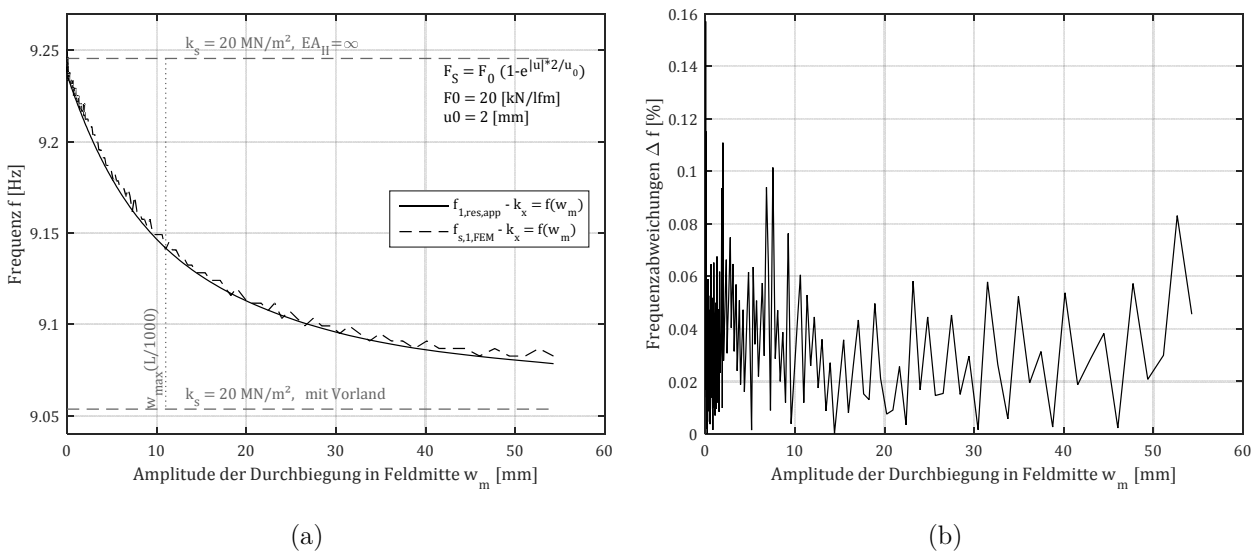


Abbildung 4.88: (a) Verlauf der Schwingungsfrequenz $f_{s,FEM}$ aus einer FE-Berechnung und der analytischen Resonanzfrequenz $f_{1,res,app}$ über die maximale Durchbiegung in Tragwerksmitte w_m (b) Abweichungen der beiden Verläufe in Prozent; für das Gesamtmodell (Brücke 1)

In Abbildung 4.88 bis Abbildung 4.90 sind die Verläufe der aus den FE-Berechnungen ermittelten Schwingungsfrequenzen $f_{s,1,FEM}$ und der analytischen hergeleiteten Resonanzfrequenz $f_{1,res,app}$ nach (4.151) sowie die jeweiligen Abweichungen dargestellt. Wie man daraus erkennen kann, bewegen sich die ermittelten Abweichungen im Promillebereich.

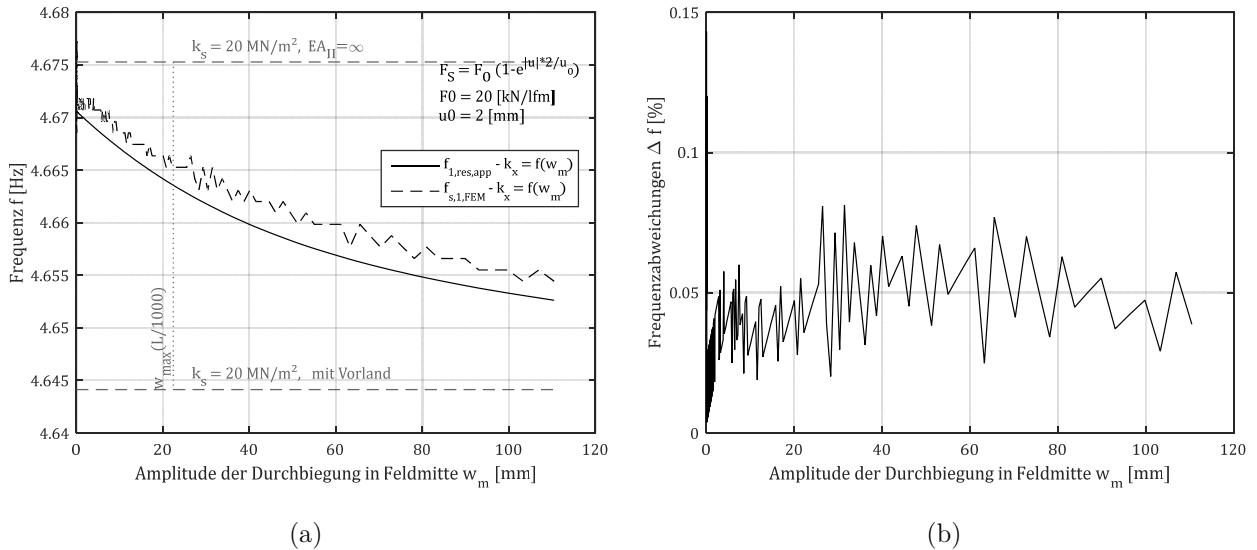


Abbildung 4.89: (a) Verlauf der Schwingungsfrequenz $f_{s,FEM}$ aus einer FE-Berechnung und der analytischen Resonanzfrequenz $f_{1,res,app}$ über die maximale Durchbiegung in Tragwerksmitte w_m (b) Abweichungen der beiden Verläufe in Prozent; für das Gesamtmodell (Brücke 2)

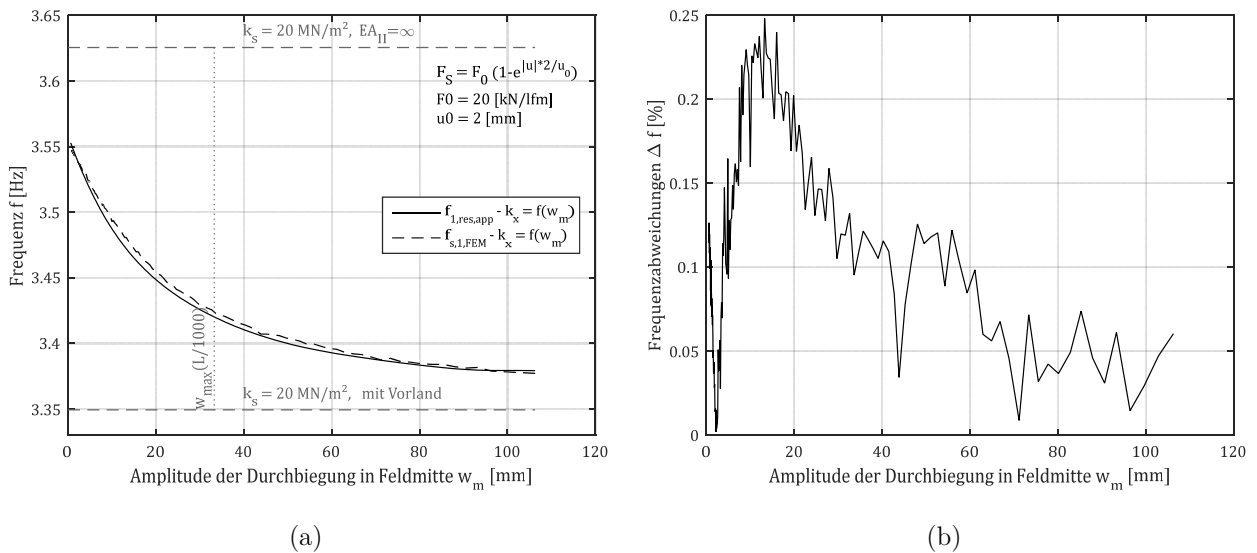


Abbildung 4.90: (a) Verlauf der Schwingungsfrequenz $f_{s,FEM}$ aus einer FE-Berechnung und der analytischen Resonanzfrequenz $f_{1,res,app}$ über die maximale Durchbiegung in Tragwerksmitte w_m (b) Abweichungen der beiden Verläufe in Prozent; für das Gesamtmodell (Brücke 3)

Selbst die maximalen Abweichungen für Brücke 3 sind in keiner relevanten Größenordnung, wodurch, zumindest für diese Tragwerke, die Richtigkeit der verwendeten Berechnungsmethode bestätigt werden kann. Der approximierte Verlauf des Schubanpassungsfaktors $K_{Sch,app}$ wurde auf Basis der FE-Berechnungen der Vergleichsbrücken 1, 2 und 3 ermittelt.

Für eine Bestätigung des Konzeptes zur Abschätzung der Schwingungsfrequenz des Gesamtsystems (siehe Abbildung 4.91) werden zwei zufällig ausgewählte Tragwerke untersucht. Die Kennwerte dieser Brücke 4 und Brücke 5 benannten Tragwerke werden in Tabelle 4.14 wiedergegeben.

Abschätzung der ersten Resonanzfrequenz von Brücken mit Schotteroberbau

1. Schritt:
$$k_{anf} = \frac{2 F_0}{u_0}$$
2. Schritt:
$$k_{Vor,0} = \sqrt{EA_{II} k_{anf}}$$
3. Schritt:
$$x_S = \frac{w_m r}{L u_0}$$
4. Schritt:
$$K_{Sch,app} = \frac{9,741 - 18,75 x_S + 20,34 x_S^2 - 11,665 x_S^3 + 3,268 x_S^4 - 0,351 x_S^5}{L u_0}$$
5. Schritt:
$$k_{s,\ddot{a}qu} = \frac{2 L F_0}{\pi^2} K_{Sch,app}$$
6. Schritt:
$$C_{var,0} = \frac{k_{s,\ddot{a}qu} L^2}{4 k_{Vor,0} L + EA_{II} \pi^2 + k_{s,\ddot{a}qu} L^2}$$
- 6.1. Schritt:
$$u_{LA} = C_{var,0} r \frac{\pi}{L} w_m$$
- 6.2. Schritt:
$$K_{vor} = 79754 - 24486 \frac{u_{LA}}{u_0} + 6191,4 \frac{u_{LA}^2}{u_0^2} - 932,99 \frac{u_{LA}^3}{u_0^3} + 73,308 \frac{u_{LA}^4}{u_0^4} - 2,2967 \frac{u_{LA}^5}{u_0^5}$$
- 6.3. Schritt:
$$k_{Vor} = K_{vor} \sqrt{\frac{F_0}{u_0}}$$
- 6.4. Schritt:
$$C_{var} = \frac{k_{s,\ddot{a}qu} L^2}{4 k_{Vor} L + EA_{II} \pi^2 + k_{s,\ddot{a}qu} L^2}$$
7. Schritt:
$$\omega_{1,app} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EA_{zz} + r^2 \frac{L^2}{\pi^2} k_{s,\ddot{a}qu} (1 - C_{var})}{\mu}}$$

Abbildung 4.91: Gleichungsapparat zur Abschätzung der ersten Schwingungsfrequenz $\omega_{1,app}$ eines Einfeldträgers unter Berücksichtigung der Wirkung eines durchgehenden Gleiskörpers bei variabler Schubsteifigkeit des Schotters (e-Verlauf Modell der Schubwiderstandskraft)

			Brücke 4	Brücke 5
Spannweite	L	[m]	16,10	7,70
Biegesteifigkeit Tragwerk	$EA_{zz,I}$	[Nm ²]	7,07E+9	1,18E+9
Biegesteifigkeit Schienen	$EA_{zz,II}$	[Nm ²]	1,283E+7	1,283E+7
Summe der Biegesteifigkeiten	EA_{zz}	[Nm ²]	7,083E+9	1,193E+9
Massenbelegung	μ	[kg/m]	7620	11230
Schwerpunktastand TW-Schienen	r	[m]	1,15	0,82

Tabelle 4.14: Kennwerte der Vergleichsbrücken 4 und 5

Die entsprechenden Frequenzverläufe und deren Abweichungen sind für Brücke 4 und Brücke 5 in Abbildung 4.92 und Abbildung 4.93 dargestellt. Aus diesen Abbildungen ist ersichtlich, dass das adaptierte Gleichungskonzept aus Abbildung 4.91 in der Lage ist, die Ergebnisse der FE-

Berechnungen mit hoher Genauigkeit abzuschätzen. Somit stellt dieser Gleichungsapparat eine Möglichkeit dar, bei bekannten Schotterkennwerten (F_0 und u_0) und Tragwerksparametern (L, EA_{zz}, μ und r), die Schwingungsfrequenz $f_{1,app}$ des Tragwerks unter Berücksichtigung der Wirkung des Schotteoberbaus (über dem Tragwerk und im Vorlandbereich) abzuschätzen.

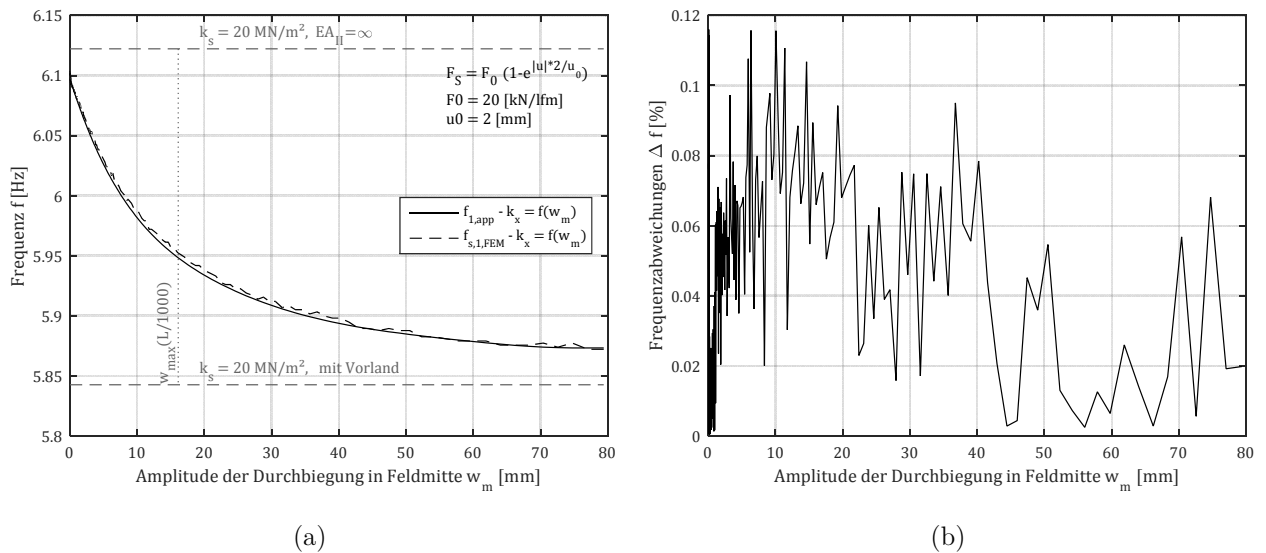


Abbildung 4.92: (a) Verlauf der Schwingungsfrequenz $f_{s,FEM}$ aus einer FE-Berechnung und der angepassten Schwingungsfrequenz $f_{1,app}$ über die maximale Durchbiegung in Tragwerksmitte w_m (b) Abweichungen der beiden Verläufe in Prozent; für das Gesamtmodell (Brücke 4)

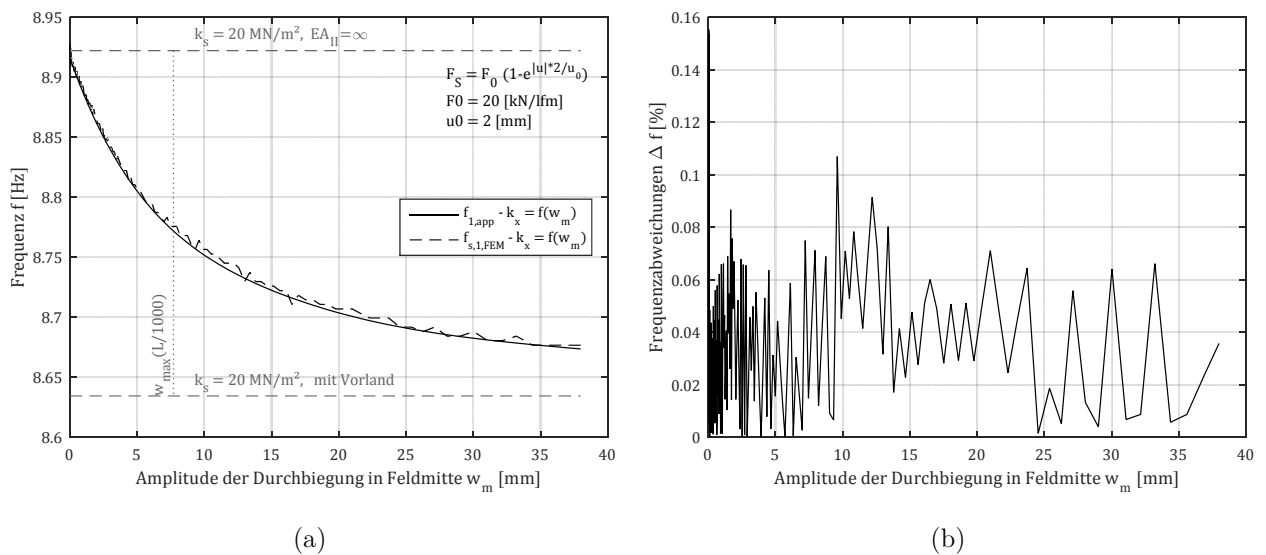


Abbildung 4.93: (a) Verlauf der Schwingungsfrequenz $f_{s,FEM}$ aus einer FE-Berechnung und der angepassten Schwingungsfrequenz $f_{1,app}$ über die maximale Durchbiegung in Tragwerksmitte w_m (b) Abweichungen der beiden Verläufe in Prozent; für das Gesamtmodell (Brücke 5)

4.4.7 Anpassung der Nachrechnung der *Mähr* Versuche

In diesem Abschnitt wird die Parameteranpassung für die von *Mähr* durchgeführten Versuche, die bereits in Abschnitt 4.4.4 erfolgt ist, erneut mit dem in Abbildung 4.91 dargestellten „Endkonzept“ (jedoch ohne Vorlandfeder) durchgeführt. Das Ergebnis der Anpassung stellen die Schotterkennwerte F_0 und u_0 dar, die für unterschiedliche Auflastsituationen ($F_V = 0 \text{ kN/lfm}$, $F_V = 48 \text{ kN/lfm}$ und $F_V = 96 \text{ kN/lfm}$) ermittelt werden. Für eine genauere Beschreibung der durchgeführten Anpassung sei auf Abschnitt 4.4.4 verwiesen. Der angepasste Verlauf für das unbelastete Gleis ist inklusive Impulshammerversuch in Abbildung 4.94 (a) und exklusive Impulshammerversuch in Abbildung 4.94 (b) dargestellt. Für das belastete Gleis sind die Anpassungen für die zwei unterschiedlichen Lastsituationen in Abbildung 4.95 (a) und (b) dargestellt.

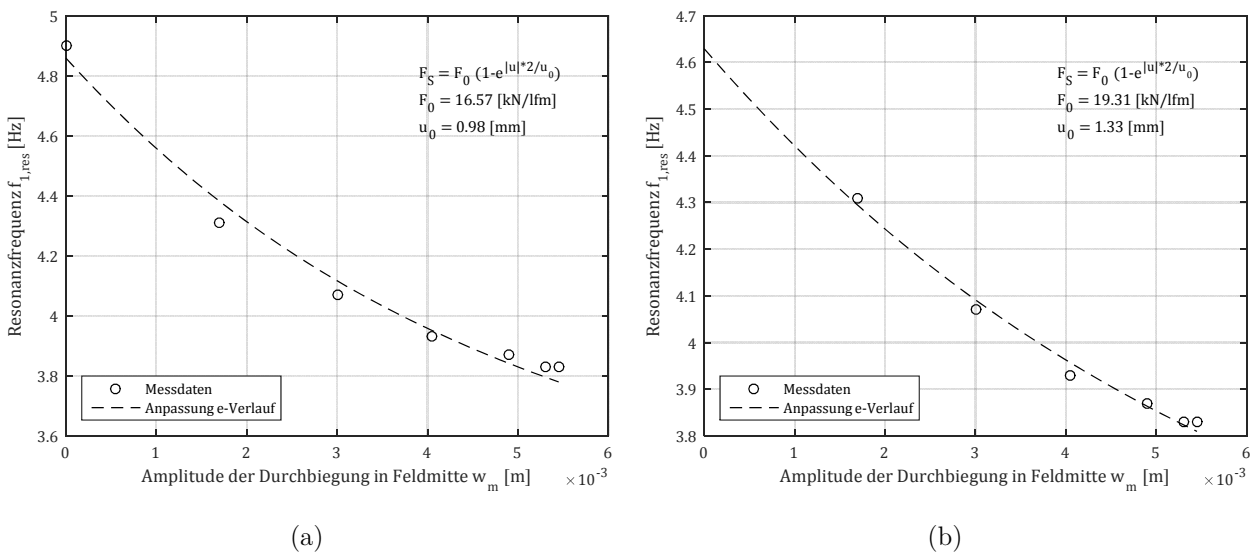


Abbildung 4.94: Anpassung des Resonanzfrequenzverlaufs an die Messergebnisse (unbelastetes Gleis, $F_V = 0 \text{ kN/lfm}$) (a) inklusive der Impulshammerversuche (b) exklusive der Impulshammerversuche

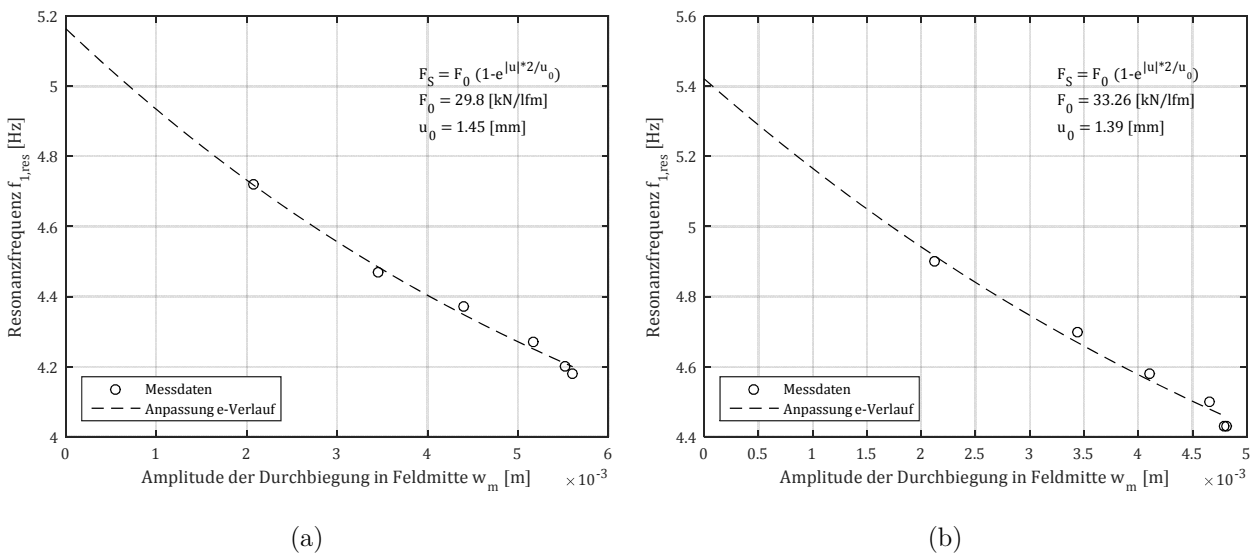


Abbildung 4.95: Anpassung des Resonanzfrequenzverlaufs an die Messergebnisse des belasteten Gleises (a) $F_V = 48 \text{ kN/lfm}$ (b) $F_V = 96 \text{ kN/lfm}$

Eine übersichtliche Darstellung der so ermittelten Schottercharakteristik ist in Abbildung 4.96 gegeben. Ein Vergleich der ermittelten Schotterkennwerte aus Abbildung 4.67 und Abbildung 4.96 zeigt, dass durch eine Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit der Schienen und durch eine bessere Abbildung des Schwingungsverhaltens, die ermittelten Durchschubwiderstände F_0 und die Grenzverschiebungen u_0 deutlich ansteigen. Die Grenzverschiebung u_0 rückt so in die Nähe des normativ vorgegebenen Wertes von $u_0 = 2,0 \text{ mm}$. Auch die Durchschubwiderstände nehmen zu. F_0 für das unbelastete Gleis beträgt mit $16,6 \text{ kN/lfm}$ bzw. $19,3 \text{ kN/lfm}$ in etwa den Wert der normativ vorgegebenen von $20,0 \text{ kN/lfm}$.

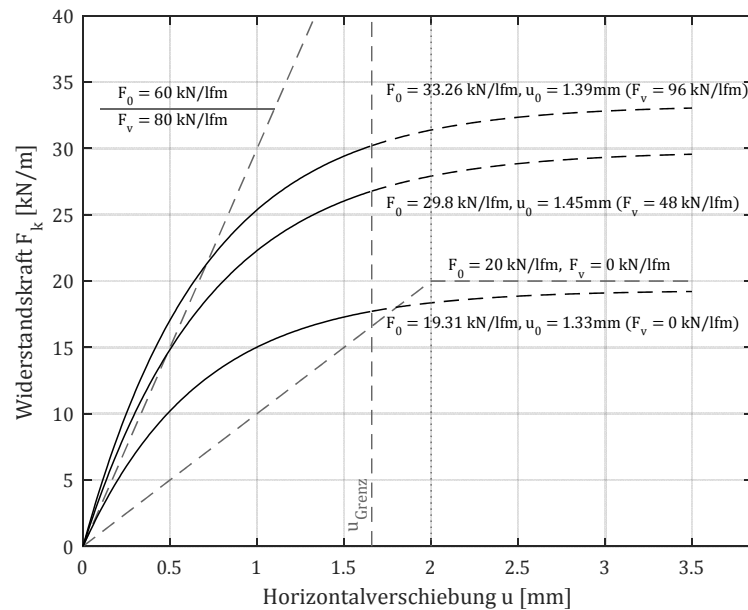


Abbildung 4.96: Mit dem Endkonzept ermittelte Schotterkennwerte aus den *Mähr*-Versuchen [4] (exkl. Impulshammerversuch)

Auffällig ist jedoch, dass sich für die beiden belasteten Zustände kaum Unterschiede in den Schotterkennwerten ergeben. Dies lässt auf ähnliche Steifigkeitsverhältnisse schließen, was sich wiederum durch eine Haftreibungsbedingung erklären lassen würde. Dabei wäre im Haftbereich für beide Laststufen die gleiche Steifigkeit (Schubsteifigkeit) vorhanden und nur in den Bereichen der Schubfuge, in denen die aufnehmbare Haftreibung überschritten wird, stellt sich die Gleitreibung ein. Diese ergibt sich aus dem *Coulombschen* Gesetz in Abhängigkeit von der Laststufe. Tritt nur in einem kleinen Bereich der Gleitzustand auf, so unterscheiden sich die Gesamtschubsteifigkeiten der beiden Laststufen nur gering. In dem hier vorgestellten Konzept würde sich das durch eine, mit der Erhöhung des Durchschubwiderstands einhergehenden, Steigerung der Grenzverformung umsetzen lassen, wodurch die Anfangssteifigkeit annähernd unbeeinflusst bleibt. Für annähernd gleiche Anfangssteifigkeiten würden sich auch Anpassungsabweichungen nur geringfügig erhöhen (vgl. Abbildung 4.63).

4.4.8 Untersuchungen zum Einfluss des Schotteroberbaus auf die Grundswingungsfrequenz des Tragwerks

In dem vorangehenden Abschnitt wurde eine Methode vorgestellt, mit der es möglich ist, die Schwingungsfrequenz eines einfeldrigen Brückenbalkens unter Berücksichtigung des Schotteroberbaus abzuschätzen. Hierbei wird neben der Masse des Schotters vor allem auch die Steifigkeitssteigerung durch die Schubsteifigkeit im Schotterbett in Rechnung gestellt. Von Interesse ist der Einfluss der Berücksichtigung des Schotteroberbaus auf die Schwingungsfrequenz des Systems. Um diesen Einfluss einschätzen zu können, werden im Folgenden die Frequenzen für die in Abschnitt 4.4 verwendeten Tragwerke bestimmt. Hierzu werden ergänzend zu den Angaben die für die Eigenfrequenzgleichung (3.11) eines *Bernoulli-Euler* Balkens erforderlich sind, noch der Schwerpunktabstand r (Abstand zwischen Schienen- und Tragwerksschwerpunkt) und zwei Kennwerte (F_0 und u_0), welche das Schubverhalten des Schotters beschreiben, benötigt.

Die Schwerpunktabstände können generell relativ einfach aus Planunterlagen ermittelt werden. Sind keine näheren Informationen vorhanden, so wird entsprechend der in Abschnitt 4.4 eingeführten oberen Grenzfunktion (4.25) der Schwerpunktabstand in Abhängigkeit von der Spannweite approximiert.

Die Wahl der Schotterkennwerte ist dagegen nicht so einfach. Es gibt hier ein sehr breites Spektrum von möglichen Werten (siehe Abschnitt 4.2). Wie in Abschnitt 4.2 bereits gezeigt wurde, scheinen die normativen Angaben bezüglich des Durchschubwiderstands F_0 zu hoch. Im Zuge einer Grenzwertbetrachtung scheint deren Verwendung jedoch zulässig. Auch für die Grenzverschiebung wird auf den normativen Vorgabewert von $u_0 = 2,0 \text{ mm}$ zurückgegriffen. Um die Bandbreite des möglichen Einflusses des Schotteroberbaus auf die Eigenfrequenz abschätzen zu können, werden hier drei unterschiedliche Kombinationen der Schotterkennwerte untersucht:

- $F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 2,0 \text{ mm}$ (unbelastetes Gleis lt. Norm)
- $F_0 = 60 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 2,0 \text{ mm}$ (belastetes Gleis lt. Norm)
- $F_0 = 16,6 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 1,0 \text{ mm}$ (unbelastetes Gleis, aus Versuchen Abbildung 4.94 (a))

Bei sehr kurzen Tragwerken kann nicht mehr so einfach von einem reinen Biegeträger ausgegangen werden, daher werden hier nur Tragwerke mit einer Spannweite von mehr als 5,0 m berücksichtigt. Da es sich hierbei um eine Grenzwertbetrachtung handelt, wird die Steifigkeit der Schubfedern für eine Nulldurchbiegung ermittelt, sprich es wird die maximale Schubsteifigkeit (=Anfangssteifigkeit) verwendet.

In Abbildung 4.97, Abbildung 4.98 und Abbildung 4.99 ist die Frequenzerhöhung durch die zusätzliche Steifigkeit bei Berücksichtigung des Schubverhaltens des Schotteroberbaus für die untersuchten Schotterkennwerte dargestellt. Als Basis für den Vergleich dient die Grundeigenfrequenz f_0 aus der Frequenzgleichung (3.11) für einen *Bernoulli-Euler*-Balken. Die potenzielle Frequenzerhöhung wird nach folgender Gleichung ermittelt.

$$\Delta f = \frac{f_{1,res}(w_m = 0) - f_0}{f_0} 100 \text{ [%]} \tag{4.164}$$

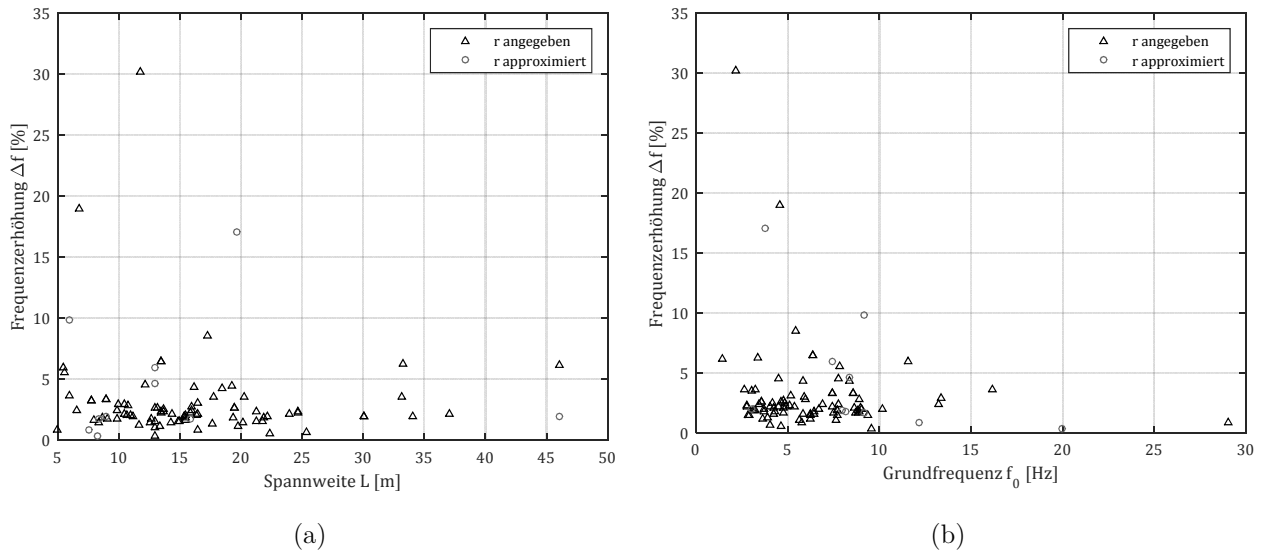


Abbildung 4.97: (a) Frequenzerhöhung Δf auf die Spannweite L bezogen (b) Frequenzerhöhung Δf auf die Grundfrequenz f_0 bezogen, für $F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 2,0 \text{ mm}$ (unbelastetes Gleis lt. Norm)

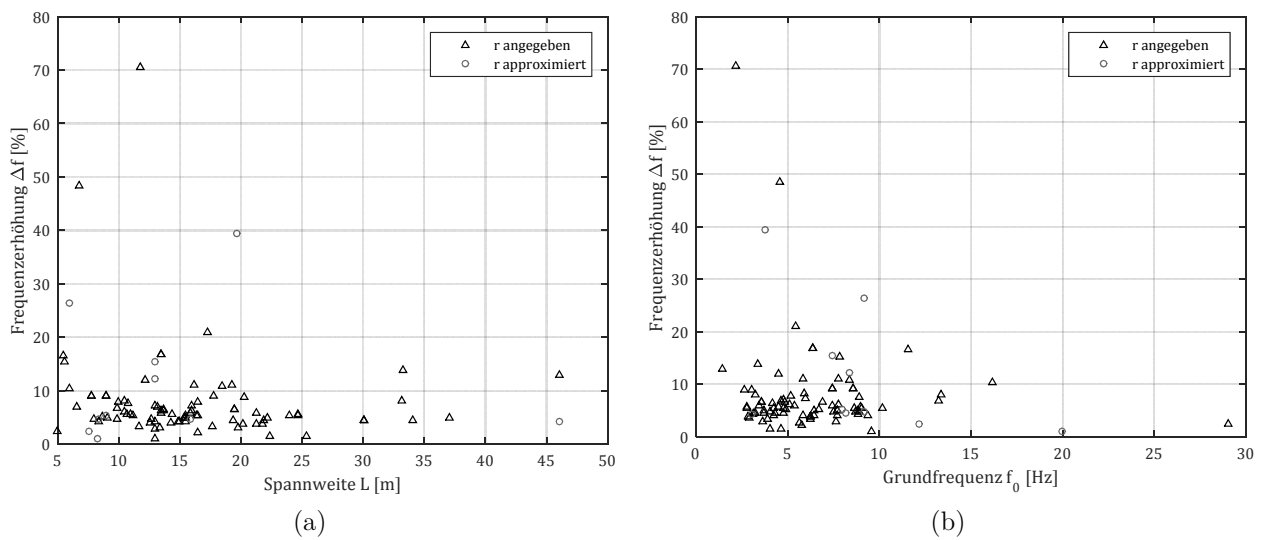


Abbildung 4.98: (a) Frequenzerhöhung Δf auf die Spannweite L bezogen (b) Frequenzerhöhung Δf auf die Grundfrequenz f_0 bezogen, für $F_0 = 60 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 2,0 \text{ mm}$ (belastetes Gleis lt. Norm)

Aus den Abbildungen ist gut ersichtlich, dass die Frequenzerhöhung für Tragwerke mit niedriger Eigenfrequenz größer ausfällt. Auffällig sind die drei Ausreißer, deren Daten allesamt dem ERRI-Report 3 [39] entnommen wurden. Hierbei handelt es sich um sehr leichte Tragwerke. Für die weitere Betrachtung werden diese drei Tragwerke ausgeklammert. Die Frequenzerhöhungen für den dritten Fall liegen zwischen den Werten des ersten und zweiten Falles. Dies war zu erwarten, da das F_0/u_0 Verhältnis zwischen den Werten der beiden anderen Fälle liegt. Für das unbelastete Gleis (Abbildung 4.97 und Abbildung 4.99) ergibt sich somit, unabhängig von der Spannweite, eine maximale Frequenzerhöhung von etwa 10 % bis 15 %. Für das belastete Gleis (Abbildung 4.98) liegt die Obergrenze des Einflusses, ebenfalls unabhängig von der Spannweite, bei ca. 20 %.

Somit ist gezeigt, dass der Einfluss des Schotteroberbaus auf die Systemsteifigkeit zwar nicht vernachlässigbar ist, sich aber je nach Schotterkennwerten auch in Grenzen hält.

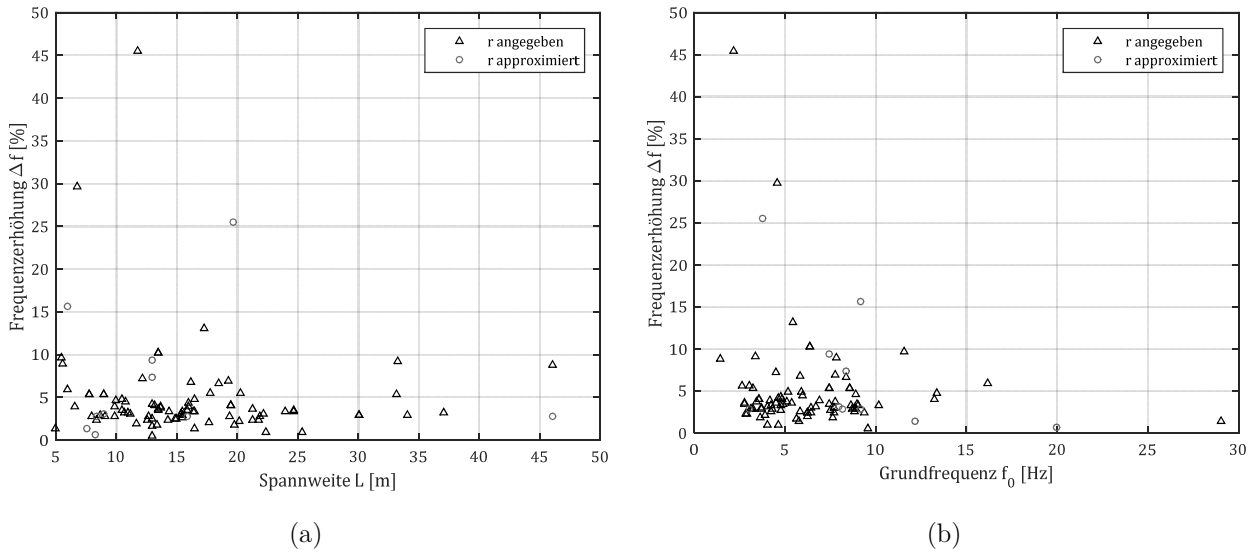


Abbildung 4.99: (a) Frequenzerhöhung Δf auf die Spannweite L bezogen (b) Frequenzerhöhung Δf auf die Grundfrequenz f_0 bezogen, für $F_0 = 16,6 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 1,0 \text{ mm}$ (unbelastetes Gleis aus Versuchen)

Anhand des Schwingungsfrequenzverlaufs über die Durchbiegung wird eine Aussage bezüglich der potenziellen Auswirkung einer variablen Schottersteifigkeit auf eine messtechnische Frequenzermittlung möglich. Um eine mögliche Bandbreite von durch unterschiedliche Messmethoden ermittelter Schwingungsfrequenzen zufolge dem hier vorgestellten Schubmodell aufzuzeigen, wird hier eine weitere Grenzwertbetrachtung durchgeführt. Verglichen wird die Frequenz bei einer Nulldurchbiegung (entspricht etwa einer ambienten Messung) mit der Frequenz bei einer Durchbiegung von einem Tausendstel der Stützweite (Grenzwert bei bzw. nach einer Zugüberfahrten).

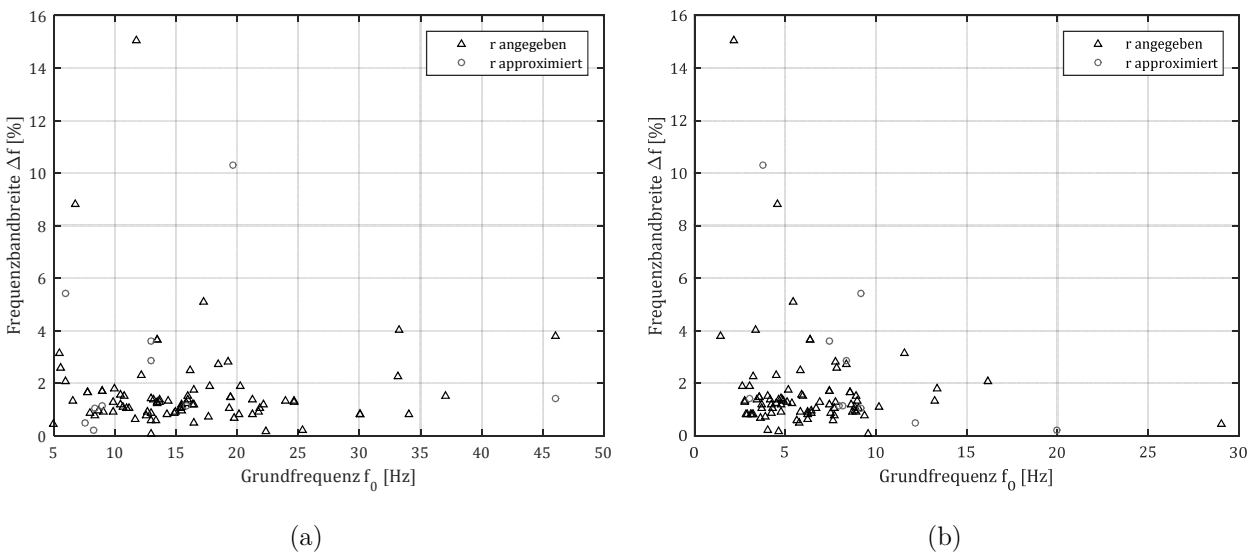


Abbildung 4.100: (a) Frequenzbandbreite Δf auf die Spannweite L bezogen (b) Frequenzbandbreite Δf auf die Grundfrequenz f_0 bezogen; aus einem Vergleich der Frequenzen für eine Nulldurchbiegung und eine Durchbiegung von $w_m = L/1000$ und Schotterkennwerten von $F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$ und $u_0 = 2,0 \text{ mm}$ (unbelastetes Gleis)

In Abbildung 4.100 sind die prozentuellen Frequenzunterschiede dieser beiden Auslenkungszustände für die normativen Schotterkennwerte des unbelasteten Gleises ($F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 2,0 \text{ mm}$) dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass unterschiedliche Messmethoden ohne weiteres Frequenzabweichungen von 5 % bzw. bei den oben angesprochenen sehr leichten Tragwerken von bis zu 10 % oder mehr aufweisen können. Es sei noch angemerkt, dass die hier durchgeführte Auswertung nur exemplarisch für die angenommenen Schotterkennwerte gilt. Tritt in der Realität beim gleichen Durchschubwiderstand eine halb so große Grenzverschiebung auf, so verdoppelt dies in etwa die möglichen Frequenzabweichungen. Um diesen Effekt zu veranschaulichen, sind in Abbildung 4.101 die Frequenzunterschiede für ein unbelastetes Gleis mit halb so großem Durchschubwiderstand ($u_0 = 1,0 \text{ mm}$) dargestellt.

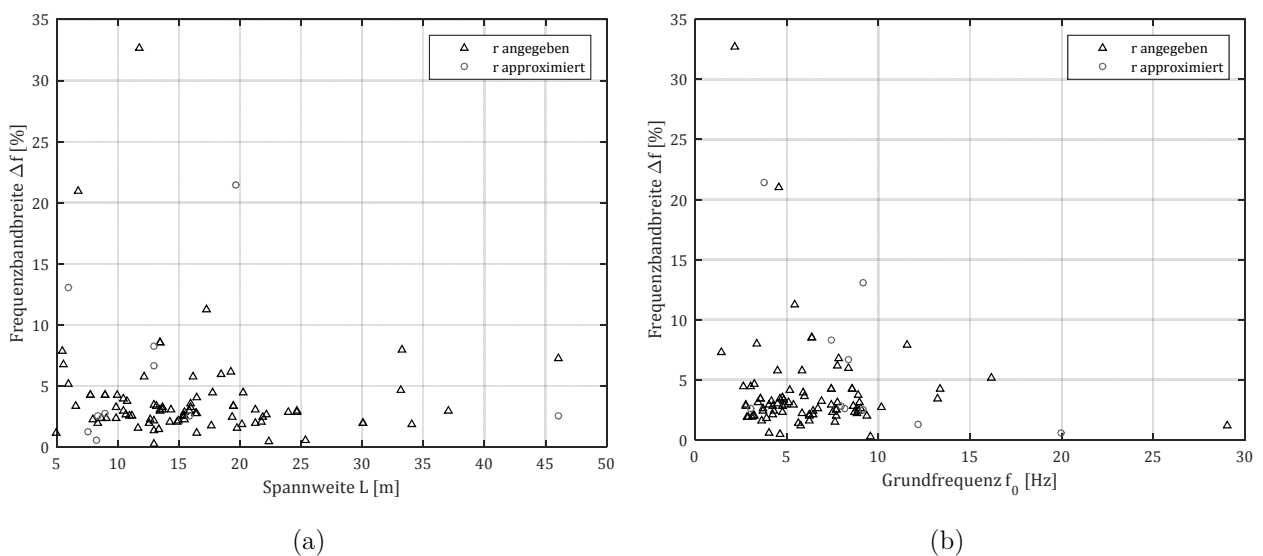


Abbildung 4.101: (a) Frequenzbandbreite Δf auf die Spannweite L bezogen (b) Frequenzbandbreite Δf auf die Grundfrequenz f_0 bezogen; aus einem Vergleich der Frequenzen für eine Nulldurchbiegung und eine Durchbiegung von $w_m = L/1000$ und Schotterkennwerten von $F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$ und $u_0 = 1,0 \text{ mm}$ (unbelastetes Gleis)

Hier wird lediglich eine Methode vorgestellt. Für eine praktische Anwendung dieser sind nähere Informationen über die tatsächlichen Schotterkennwerte unabdingbar.

4.5 Vergleich mit Messungen

Um den Auswirkungen der rechnerischen Steifigkeitserfassung durch das vorgestellte Schubmodell des Schotteroberbaus besser einordnen zu können, werden in diesem Abschnitt Vergleiche mit Messwerten durchgeführt. Dazu werden für 16 Tragwerke aus dem ÖBB-Datensatz Vergleiche zwischen der gerechneten und der gemessenen ersten Eigenfrequenz durchgeführt. Es handelt sich dabei um gerade (Lagerschiefe 90°) Tragwerke mit Spannweiten zwischen 9,05 m und 33,3 m. Von Seiten der Lagerbedingungen handelt es sich um Einfeldträger, sprich die Tragwerke besitzen jeweils eine Festlagerseite und ein längs verschiebliches Lager. Die in Tabelle 4.15 dargestellten Tragwerkskennwerte wurden dem Autor zur Verfügung gestellt und nicht selbstständig ermittelt.

Die berechnete erste Eigenfrequenz (mit $f_{0,BEB}$ bezeichnet) wurde aus Gleichung (3.11) für einen *Bernoulli-Euler* Balken (BE-Balken) ermittelt. Aus Tabelle 4.15 ist erkennbar, dass die gemessenen Eigenfrequenzen teils erheblich höher sind, als die berechneten. Noch deutlicher ersichtlich ist dies in Abbildung 4.102, in welcher die gemessenen und die berechneten ersten Eigenfrequenzen der untersuchten Tragwerke dargestellt sind. In der Abbildung wird deutlich, dass kürzere Tragwerke tendenziell höhere Eigenfrequenzen und auch höhere Differenzen zwischen den gemessenen und den berechneten Frequenzen aufweisen. Zur besseren Differenzierung der einzelnen Tragwerke und der zusammengehörigen Werte, werden in den folgenden Abbildungen die Frequenzen im Bezug zur Tragwerksnummer und nicht zur Spannweite aufgetragen.

Nr.	System	L [m]	r [m]	EA_{zz} [Nm ²]	μ [kg/m]	$f_{0,gemessen}$ [Hz]	$f_{0,BEB}$ [Hz]
1	Stahl Deckbrücke	15,47	1,13	1,330E+10	7.690	9,10	8,63
2	Stahl Deckbrücke	15,47	1,13	1,710E+10	9.490	9,10	8,81
3	Stahl Deckbrücke	15,47	1,13	1,490E+10	8.210	9,10	8,84
4	Betonplatte	9,85	0,93	4,696E+9	16.370	9,30	8,67
5	Stahl Deckbrücke	11,00	0,855	4,170E+9	8.600	9,10	9,04
6	Stahl Deckbrücke	12,57	0,93	8,650E+9	9.700	9,40	9,39
7	Stahl Deckbrücke	33,30	1,835	4,410E+10	7.890	3,44	3,35
8	Stahl Deckbrücke	16,10	1,15	7,070E+9	7.620	5,75	5,84
9	Betonplatte	9,05	0,905	3,719E+9	17.310	12,66	8,89
10	Betonplatte	19,50	1,117	2,398E+10	30.560	5,30	3,66
11	Betonplatte	10,55	1,03	7,023E+9	17.120	9,90	9,04
12	Betonplatte	10,55	1,03	7,311E+9	18.250	9,90	8,93
13	Betonplatte	11,94	0,99	6,155E+9	17.800	7,50	6,48
14	Betonplatte	13,44	1,005	1,770E+10	36.250	8,90	6,08
15	Betonplatte	11,00	1,043	6,832E+9	17.340	18,90	8,14
16	Betonplatte	10,45	0,97	6,743E+9	16.350	12,30	9,24

Tabelle 4.15: Tragwerkskennwerte für den Vergleich des Einflusses des Schotteroberbaus

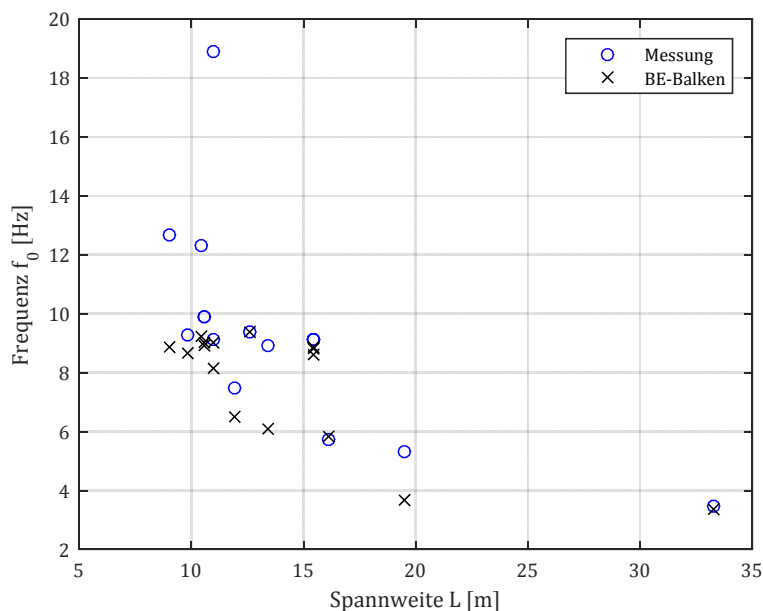


Abbildung 4.102: Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten ersten Eigenfrequenzen

Wie bereits erwähnt, werden die Eigenfrequenzen und damit die Systemsteifigkeiten generell unterschätzt. Durch die Berücksichtigung der zusätzlichen Steifigkeit aus dem Schotteroberbau erhöht sich die berechnete Systemsteifigkeit. Großen Einfluss auf diese zusätzliche Steifigkeit haben die verwendeten Schotterkennwerte. Für eine Abschätzung der Obergrenze der Schubsteifigkeit wird für die normativen Schotterkennwerte eines belasteten Gleises ($F_0 = 60 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 2,0 \text{ mm}$) die Resonanzfrequenz $f_{1,res,OG}$ für die Nulllage ermittelt. Zur Abschätzung der Untergrenze der Steifigkeit wird für die normativen Schotterkennwerte eines unbelasteten Gleises ($F_0 = 20 \text{ kN/lfm}$, $u_0 = 2,0 \text{ mm}$) die Resonanzfrequenz $f_{1,res,UG}$ für eine Durchbiegung von $w_m = L/1000$ bestimmt. Die Berechnungsergebnisse sind in Tabelle 4.16 abgebildet.

Nr.	System	$f_{0,gemessen}$	$f_{0,BEB}$	$f_{1,res,UG}$	$f_{1,res,OG}$
		[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]
1	Stahl Deckbrücke	9,10	8,63	8,71	9,10
2	Stahl Deckbrücke	9,10	8,81	8,87	9,19
3	Stahl Deckbrücke	9,10	8,84	8,91	9,27
4	Betonplatte	9,30	8,67	8,74	9,08
5	Stahl Deckbrücke	9,10	9,04	9,13	9,54
6	Stahl Deckbrücke	9,40	9,39	9,45	9,76
7	Stahl Deckbrücke	3,44	3,35	3,42	3,81
8	Stahl Deckbrücke	5,75	5,84	5,94	6,48
9	Betonplatte	12,66	8,89	8,96	9,32
10	Betonplatte	5,30	3,66	3,69	3,82
11	Betonplatte	9,90	9,04	9,10	9,44
12	Betonplatte	9,90	8,93	8,99	9,31
13	Betonplatte	7,50	6,48	6,54	6,85
14	Betonplatte	8,90	6,08	6,10	6,23
15	Betonplatte	18,90	8,14	8,20	8,55
16	Betonplatte	12,30	9,24	9,30	9,61

Tabelle 4.16: Gegenüberstellung der berechneten und der gemessenen Frequenzen

Eine übersichtliche Gegenüberstellung der Frequenzen findet sich in Abbildung 4.103. Die Bandbreite der möglichen Tragwerksfrequenzen bei unterschiedlichen Schotterkennwerten ist als roter Strich dargestellt.

Eine etwas allgemeinere Darstellung der Frequenzen ist in Abbildung 4.104 gegeben. Darin wird die prozentuelle Frequenzabweichung Δf bezogen auf die gemessenen Frequenzen f_0 , für die berechneten Resonanzfrequenzen mit und ohne Berücksichtigung der Steifigkeit des Schotteroberbaus dargestellt. Die Frequenzabweichung wird dabei gemäß Gleichung (4.164) ermittelt. Da für den Schotteroberbau eine Bandbreite der Kennwerte berücksichtigt wird, wird auch die Frequenzabweichung als Bandbreite angegeben. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, dass sich die Abweichung zur gemessenen Frequenz bei Berücksichtigung der Schubsteifigkeit des Schotteroberbaus grundsätzlich reduziert. Die Nullabweichung ist im Diagramm durch eine Linie gekennzeichnet. Für die ersten acht Tragwerke schneidet (oder schneidet zumindest fast) die Bandbreite der Frequenzen bei Berücksichtigung des Oberbaus die Nulllinie. Für diese Tragwerke ist das Schot-

teroberbaummodell somit in der Lage, die gemessene Eigenfrequenz abzubilden. Für den Rest der Brücken sind die Frequenzabweichungen auch mit Berücksichtigung der zusätzlichen Steifigkeit noch immer relativ hoch. Betrachtet man die zweite Spalte in Tabelle 4.16, so ist wird ersichtlich, dass die ersten acht Tragwerke mit Ausnahme von Tragwerk 4 Stahltragwerke sind. Für Stahltragwerke stellt das hier vorgestellte Schotteroberbaummodell somit eine Möglichkeit dar, die gemessenen Schwingungsfrequenzen zu reproduzieren.

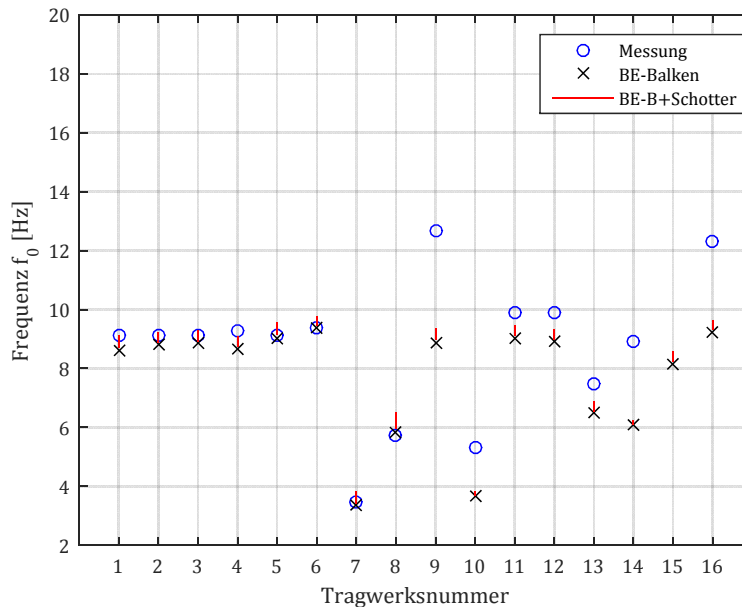


Abbildung 4.103: Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten ersten Eigenfrequenzen mit und ohne Berücksichtigung der Steifigkeitserhöhung durch den Schotteroberbau

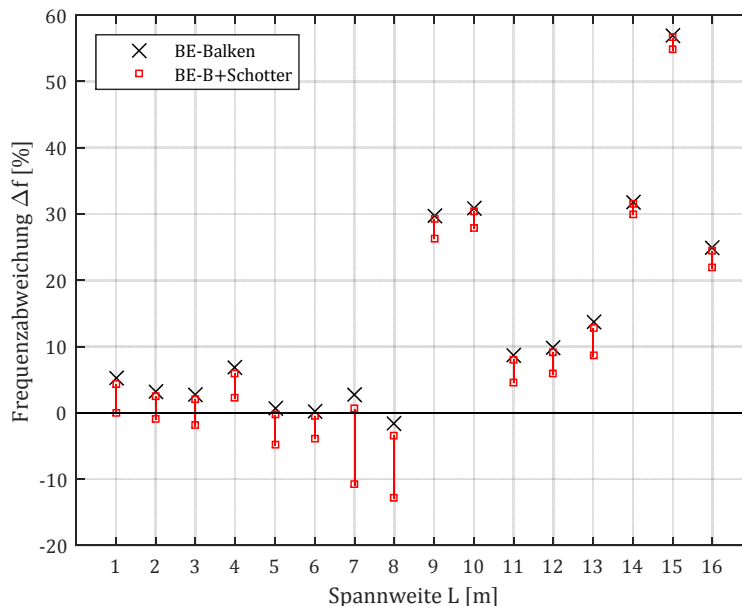


Abbildung 4.104: Frequenzabweichungen der einzelnen Tragwerke mit und ohne Berücksichtigung des Schotteroberbaus

Bei den restlichen Tragwerken handelt es sich um Betonplattenbrücken. Das Schottermodell verringert zwar die Abweichungen, da jedoch die Abweichungen des *Bernoulli-Euler*-Balkens bereits so hoch sind, reicht die zusätzliche Steifigkeit nicht aus, um die gemessenen Frequenzen zu erklä-

ren. Den Massenangaben in Tabelle 4.15 liegt eine Schotterdichte von $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$ zugrunde. Wie in Abschnitt 2.8 bereits erwähnt stellt dies eine Obergrenze dar, daher könnten für die berechneten Frequenzen eigentlich noch höhere Werte angegeben werden. Die Vermutung liegt nahe, dass für Betontragwerke generell zu niedrige Biegesteifigkeiten angegeben werden. Für diese Tragwerke wäre somit eine realistischere Abschätzung der tatsächlichen Biegesteifigkeiten essentiell.

5. Schlussfolgerungen und Ausblick

In diesem Abschnitt werden die Inhalte und wichtigsten Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst und diskutiert. Auf Basis dieser Ergebnisse werden Fragestellungen für weitergehende Forschungsarbeiten formuliert.

Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

In **Kapitel 2** wird eine Einführung in die Dynamik von Eisenbahnbrücken gegeben. Es wird gezeigt, dass es eine Vielzahl an Möglichkeiten gibt, eine Brücke und einen Zug zu modellieren. Auch für die Durchführung von dynamischen Überfahrtsberechnungen stehen etliche Verfahren zur Verfügung. Diese Methoden haben alle ihre Vor- und Nachteile bzw. ihre Anwendungsgrenzen. Um eine sinnvolle und richtige dynamische Berechnung durchzuführen, müssen die Modellierungsgenauigkeit der Belastung und des Tragwerks aufeinander abgestimmt sein. Es macht wenig Sinn, ein dreidimensionales Zugmodell über einen zweidimensionalen Balken fahren zu lassen oder auf ein detailliertes Tragwerks- und Untergrundmodell eine Folge aus Einzellasten anzusetzen. Die Wahl der Modelle und der verwendeten Lösungsverfahren müssen Hand in Hand gehen. Dies ist erforderlich, um eine in sich stimmige Berechnung zu gewährleisten.

Um eine sinnvolle Aussage über das tatsächliche Systemverhalten treffen zu können, muss die Rechnung auch auf die Genauigkeit der zur Verfügung stehenden Eingangsgrößen abgestimmt werden. Dynamische Berechnungen werden im Hochgeschwindigkeitsverkehr vor allem zur Berücksichtigung von Resonanzeffekten durchgeführt. Gerade die Dämpfungswerte, die die maximale Tragwerksantwort bei Resonanz maßgebend beeinflussen, sind nur unzureichend genau bekannt und können oft nur durch Messungen bestimmt werden, die wiederum teils eine erhebliche Streuung aufweisen. So werden in [19] etwa im Winter um teils 60 % höhere Tragwerksdämpfungen gemessen als im Sommer. Selbst die Dämpfungsermittlung aus unterschiedlichen Zugüberfahrten bei annähernd gleicher Geschwindigkeit und Jahreszeit weisen Abweichungen von bis zu 15 % auf. Daher ist für die „Richtigkeit“ der Rechenergebnisse ein guter Ansatz der vorhandenen Dämpfung wohl wichtiger als eine vollkommen exakte Abbildung des Tragsystems oder der Belastung. Auch die Masse des Schotterbetts, die oft nicht unwesentlich zur Gesamtmasse beiträgt, ist mit Schwankungen behaftet (vgl. Abschnitt 2.8). Zur Bestimmung der vorhandenen Eigenfrequenz von Betontragwerken ist wohl ein zutreffender Ansatz der Steifigkeit am wichtigsten. Darin geht neben dem Querschnittszustand (Zustand I oder Zustand II) vor allem der E-Modul des Betons ein. Die-

ser ist erstens mit Streuungen behaftet und wird zweitens als für eine statische Berechnung auf der sicheren Seite liegender Mindestwert angegeben. Aus Abbildung 4.104 ist ersichtlich, dass die Eigenfrequenzen von einfachen Betontragwerken oft um 30 % oder mehr unterschätzt werden. Rauert [19] stellt für WIB Tragwerke sogar Abweichungen um den Faktor 4,5 fest.

So macht es nach Ansicht des Autors wenig Sinn, bei einem schlechten Informationsstand über die tatsächlich vorhandenen Tragwerksparameter eine übertrieben detaillierte Modellierung der Brücke oder des Zuges vorzunehmen. Dadurch wird eine Rechengenauigkeit erzielt, welche in keiner Relation zur Genauigkeit der Eingangsdaten und somit zur „Richtigkeit“ des Ergebnisses steht.

In **Kapitel 3** werden Untersuchungen zum Einfluss unterschiedlicher Tragwerksparameter auf die erste Biegeeigenfrequenz aufgezeigt:

- Daraus ist ersichtlich, dass für den Großteil der vorhandenen Brückentragwerke die Schubnachgiebigkeit vernachlässigt werden kann, wenn ein einfaches Balkenmodell zum Einsatz kommt. Für Tragwerke unter 10,0 m Spannweite kann der Einfluss der Schubnachgiebigkeit auf die Eigenfrequenz aber auch fallweise über 2 % liegen.
- Die Tragwerksbreite bestimmt zwar maßgebend die Torsionsfrequenzen einer Plattenbrücke, hat jedoch praktisch keinen Einfluss auf die Biegeeigenfrequenzen der Tragwerke.
- Um den Einfluss einer schiefen Lagerung auf die Tragwerkseigenfrequenz erfassen zu können, wird in Abschnitt 3.5 eine Abschätzformel vorgestellt. Die Grundidee dieses Konzepts ist dem Report des ERRI Komitees D214/RP8 – Teil B [40] entnommen und beruht auf der Bestimmung einer äquivalenten Spannweite.
- Durch den Höhenversatz zwischen der Schwerachse des Tragwerks und dem Lagerdrehpunkt tritt bei einem klassischen Einfeldträger (modelliert als Stab mit einem festen und einem horizontal verschieblichen Lager) bei einer Tragwerksdurchbiegung auch eine horizontale Verschiebung des Tragwerks auf. Dadurch werden zusätzliche Trägheitseffekte aktiviert und die Eigenfrequenzen sinken etwas ab. Bei ideal gelenkiger Lagerung können diese Abweichungen bis zu 6 % oder mehr betragen. Da jedoch oft kein ideales Gelenk vorhanden ist und sich so bei einer Durchbiegung zusätzliche Versteifungseffekte einstellen ist dieser Effekt wohl nur bei Tragwerken mit einem sehr großen Lagerversatz relevant.
- Eine große Anzahl von Tragwerken mit kurzer Spannweite sind Rahmentragwerke. Daher wird in Abschnitt 3.7 ein Gleichungsapparat vorgestellt mit dem die erste Eigenfrequenz eines Rahmens abgeschätzt werden kann. Bei der Herleitung dieses Konzepts werden die versteifende Wirkung der Hinterfüllung der Lagerwand sowie die vertikale Nachgiebigkeit des Untergrunds vernachlässigt. Inwieweit sich die daraus ermittelten Eigenfrequenzen mit denen von realen Brücken decken ist daher fraglich. Das Konzept ist jedoch in der Lage, die rechnerischen Eigenfrequenzen eines FE-Modells durch relativ einfache Gleichungen gut anzunähern.

- Vor allem bei kurzen Tragwerken kann die Untergrundnachgiebigkeit einen großen Einfluss auf das dynamische Verhalten von Brücken haben. Zur Untersuchung dieses Einflusses wurden bereits viele Studien mit unterschiedlichen Untergrundmodellierungen durchgeführt. Für diese Modelle sind jedoch teilweise sehr genaue Informationen über die vorhandene Gründung und den vorhandenen Untergrund erforderlich. Da diese Informationen meist nicht so einfach zu erheben sind, werden in Abschnitt 3.8 zwei einfache Modelle (Balken mit elastischer Lagerung und das Einmassenschwinger-Analogon) zur vereinfachten Berücksichtigung der Untergrundnachgiebigkeit erläutert. Um die Größenordnung des Untergrundeinflusses abschätzen zu können, wird eine Grenzwertuntersuchung mit diesen beiden Modellen durchgeführt. Dabei stellt sich heraus, dass sich für eine erste Abschätzung der Eigenfrequenz das Modell des elastisch gelagerten Balkens ganz gut eignet. Des Weiteren konnte exemplarisch gezeigt werden, dass für eine vereinfachte Erfassung der dynamischen Tragwerksreaktion das Modell eines *Bernoulli-Euler* Balkens mit angepasster Eigenfrequenz eine sinnvolle Methode sein könnte. Um dies zu belegen sind jedoch weitere Untersuchungen notwendig.
- Durch eine Grenzwertbetrachtung, ausgehend von der Durchbiegungsbeschränkung zur Gewährleistung des Fahrgastkomforts, konnte der maximale Einfluss der Untergrundnachgiebigkeit auf die erste Eigenfrequenz des Brückentragwerks ermittelt werden. Dieser liegt in etwa bei 20 % und stellt eine Obergrenze dar. Es kann also davon ausgegangen werden, dass der tatsächliche Einfluss wesentlich kleiner ist.
- Einen wesentlichen Bestandteil einer Brücke stellt der Oberbau dar. Dieser wird heutzutage i.d.R. als Schotteroberbau ausgebildet. Doch die dynamischen Eigenschaften des Schotteroberbaus und dessen Interaktion mit dem Tragwerk werfen noch einige Fragen auf. Da der Schotterkörper granular ist, sind dessen Eigenschaften nicht so einfach zu erfassen bzw. abzubilden. In der vorliegenden Arbeit werden die Eigenschaften des Schotteroberbaus grundsätzlich in zwei Wirkungsweisen eingeteilt: (a) die vertikale Kopplung zwischen Gleiskörper und Tragwerk und (b) die horizontale Kopplung zwischen Gleis und Tragwerk.
- Ein weiterer Effekt des Schotteroberbaus tritt bei nebeneinanderliegenden Tragwerken mit gemeinsamem Schotterbett auf. Dabei bewirkt der Schotter eine geringfügige Kopplung der beiden Tragwerke. Durch diese teilweise Kopplung wird in gewissen Fällen Schwingungsenergie von einem Tragwerk auf das nächste übertragen. Dadurch kann eine scheinbar höhere Dämpfung generiert werden. Da sich diese Kopplung jedoch kaum auf die Eigenfrequenz auswirkt, wird in dieser Arbeit nicht näher darauf eingegangen.
- Die vertikale Kopplung des Gleises mit dem Tragwerk wirkt vor allem lastverteilend. In Abschnitt 3.11 wird ein kurzer Überblick über mögliche Modellierungen dieser Wirkung und bisherige Untersuchungen zu diesem Thema gegeben. Es stellt sich heraus, dass diese Wirkungsweise rein lastseitig abgebildet werden kann und somit keinen Einfluss auf die dynamischen Eigenschaften des Tragwerks selbst hat. Nichts desto trotz wirkt sich die

Lastverteilung positiv auf die dynamische Antwort einer Brücke aus. Speziell bei kurzen Tragwerken ($L < 10 \text{ m}$) kann dadurch eine erhebliche Reduktion der berechneten Tragwerksbeschleunigung erzielt werden. Da die Berücksichtigung der lastverteilenden Wirkung durch eine Aufteilung der Achslasten in mehrere Lasten rechentechnisch kaum einen Mehraufwand bedeutet, wird empfohlen, die Lastverteilung auch bei längeren Tragwerken zu berücksichtigen.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der horizontalen Kopplungswirkung des Schotters. Durch das Schotterbett wird dabei ein gewisser Schubverbund zwischen Gleis und Tragwerk hergestellt. Es wird ein kurzer Überblick über unterschiedliche Konzepte, die zur Erfassung dieses Schubverbunds verwendet wurden, gegeben. Die Grundlage dieser Konzepte stellen jedoch Kennwerte, die das Schubverhalten des Schotters beschreiben, dar. Deshalb wurde im Weiteren eine Analyse der bisherigen Erkenntnisse zu diesem Schotterverhalten durchgeführt. Es zeigt sich, dass ein bilineares Modell zur Beschreibung der Schottersteifigkeit zwar grundsätzlich geeignet ist, sich aus bisherigen Arbeiten jedoch Anpassungen dieses Modells empfehlen. So wird der Durchschubwiderstand F_0 , welcher die maximal übertragbare Schubkraft pro Laufmeter Gleis beschreibt, durchgehend geringer als der normativ vorgegebene Wert ermittelt. Des Weiteren scheint die Schubsteifigkeit bei geringen Relativverschiebungen wesentlich höher zu sein als der Vorgabewert. Diese Steifigkeit sinkt mit zunehmender Verformung ab, weshalb der Übergang zwischen dem elastischen und dem plastischen Verhalten fließend ist und die Angabe einer Grenzverschiebung u_0 schwierig ist bzw. bei unterschiedlichen Studien stark variiert.

Durch eine Voruntersuchung wird gezeigt, dass selbst bei einem bilinearen Schubsteifigkeitsmodell durch die großen Relativverschiebungen eine linearelastische Betrachtung des Schubverhaltens nicht ausreicht. Daher wird eine nichtlineare Betrachtung des Materialverhaltens notwendig. Dazu wird ein neues nichtlineares Schubmodell für die Steifigkeit des Schotteroberbaus eingeführt. Dieses bildet den variablen Steifigkeitsverlauf des Schotters ab und ist nur durch die zwei Kennwerte F_0 und u_0 definiert. Da zur Beschreibung des Verlaufs die e-Funktion notwendig ist, wird das Modell „e-Verlauf Modell“ genannt. Dieses Konzept unterstellt ein nichtlinear elastisches Materialverhalten. Mit zunehmender Relativverschiebung zwischen Tragwerk und Gleis nimmt dabei die Schubsteifigkeit des Schotters ab.

Auf Basis dieses Schubsteifigkeitsverlaufs und des mechanischen Modells eines Koppelbalkens wird, unter Berücksichtigung der versteifenden Wirkung des Oberbaukörpers vor und nach der Brücke, ein analytisches Konzept abgeleitet, um die Schwingungsfrequenz des Systems in Abhängigkeit von der maximalen Schwingungsamplitude in Tragwerksmitte zu ermitteln. Zur Überprüfung dieses Konzeptes wurde basierend auf der Finiten Elemente Methode ein *MATLAB*-Skript erstellt, welches in der Lage ist, das dynamische Verhalten des mechanischen Modells abzubilden. Aus mit diesem Skript berechneten Ausschwingvorgängen für ausgewählte Brückentragwerke wurden Korrekturfaktoren zur Anpassung der analytischen Frequenzen auf die FEM Frequenzen bestimmt. Diese Korrektur wird notwendig, da in die analytische Herleitung gewisse Vereinfachun-

gen eingegangen sind. Schlussendlich steht ein relativ einfacher Gleichungsapparat zur Verfügung, um (abhängig von den Schotterkennwerten F_0 und u_0) die erste Schwingungsfrequenz des Brückenmodells mit Schotteroberbau zu ermitteln. Dadurch wird eine Abschätzung des Einflusses des Oberbaus auf die Eigenfrequenz von Eisenbahnbrücken möglich.

Aus einer Grenzwertbetrachtung mit angenommenen Schotterkennwerten wird gezeigt, dass die rechnerische Zunahme der Eigenfrequenz durch Berücksichtigung der Steifigkeitserhöhung durch den Schotteroberbau bei maximal 20 % liegt und wohl im Regelfall deutlich geringer ausfällt. Für eine spezifischere Aussage sind genauere Angaben bezüglich der tatsächlich vorhandenen Schotterkennwerte erforderlich. Es konnte jedoch auch gezeigt werden, dass die potenziellen Frequenzerhöhungen ausreichen, um für Stahlbrücken (für diese sind die tatsächlichen Tragwerkssteifigkeiten gut erfassbar) die gemessene erste Eigenfrequenz durch ein einfaches Modell abzubilden.

Ausblick

Auf Basis der Erfahrungen aus der vorliegenden Arbeit können für weitere Untersuchungen folgende generelle Themenvorschläge gemacht werden:

- Um die Qualität der Ergebnisse dynamischer Überfahrtsberechnungen - verglichen mit tatsächlich auftretenden Tragwerksantworten - zu verbessern, ist ein besseres Verständnis der vorhandenen Dämpfungsmechanismen unumgänglich. Da die Dämpfung die Tragwerksreaktion im Resonanzfall wesentlich bestimmt, ist eine realitätsnahe Abschätzung dieser Werte von großem Interesse.
- Wie sich gezeigt hat, werden vor allem bei Betontragwerken die tatsächlich vorhandenen Systemsteifigkeiten deutlich unterschätzt. Dadurch hat etwa ein rechnerisch ermittelter Verlauf der Tragwerksbeschleunigung nur mehr wenig mit der tatsächlichen Systemreaktion zu tun. Speziell ein realitätsnäherer Ansatz des E-Moduls von Beton scheint für eine realitätsnahe dynamische Berechnung essentiell.

Alleine durch diese beiden Punkte würde die Vorhersagegenauigkeit der Tragwerksreaktion auf einen überfahrenden Zug erheblich verbessert.

Einen weiteren wichtigen Bereich stellt, speziell bei kurzen Tragwerken, der Untergrund dar. Neben den Vergleichen von durchgeführten Schwingungsmessungen mit entsprechenden dynamischen Berechnungen wäre vor allem die Erhebung von tatsächlich vorhandenen Steifigkeiten der Gründung von Interesse. Durch eine realistische Abschätzung der vorhandenen Bettungen würde sich der Einfluss des Untergrunds besser abschätzen lassen.

Speziell in Bezug auf das Verständnis des dynamischen Oberbauverhaltens ist noch großes Forschungspotenzial vorhanden. Dieses reicht von der Ermittlung von Materialkennwerten bis zur Überprüfung der Zulässigkeit von vereinfachten Rechenmodellen. So wäre interessant, welchen

Einfluss die Torsionseffekte bei zwei nebeneinander liegenden Tragwerken mit gemeinsamem Schotterbett haben. Dadurch könnte geklärt werden, ob für eine Näherungsberechnung ein Modell aus zwei vertikal gekoppelten Balken unter Vernachlässigung der Torsionseffekte zulässig ist.

Für das horizontale Schubverhalten des Schotteroberbaus scheinen Großversuche zur Ermittlung des tatsächlichen Scherkraft/Relativverschiebungs-Verlaufs sinnvoll. Daraus könnten auch Erkenntnisse zum Dämpfungsbeitrag des Schotteroberbaus an der Systemdämpfung gewonnen werden. Durch diese Versuche kann des Weiteren untersucht werden, inwieweit die Effekte des wohl tatsächlich vorhandenen Haftreibungsverhaltens durch ein rein nichtlinear elastisches Materialgesetz abgebildet werden können.

Anhand dieser Erkenntnisse kann das nichtlinear elastische Schubmodell des Schotters um einen plastischen Teil (Gleitreibungsanteil) erweitert werden. Durch die Implementierung dieses Modells in das bestehende MATLAB-Skript kann ein neuer K_{Sch} Verlauf bestimmt werden, welcher das reale Schubverhalten des Schotters noch genauer abbildet, wodurch die Vorhersagegenauigkeit der Frequenzabschätzung zusätzlich gesteigert werden kann.

Analog zur hier durchgeführten Herleitung einer amplitudenabhängigen Schwingungsfrequenz lässt sich auch eine entsprechende amplitudenabhängige Dämpfung ermitteln. Als Grundlage würde sich dabei ein Haftreibungsgesetz anbieten, bei dem die Energiedissipation ab Erreichen einer gewissen Grenzverformung mit der weiteren Verformung pro Längeneinheit konstant bleibt.

Aus Versuchen konnte *Mähr* ein Ansteigen der Dämpfung bei zunehmender Schwingungsamplitude feststellen. Der Anstieg der Dämpfung nimmt mit der Auflast zu. Der Grund- oder Anfangswert der Dämpfung bei kleinen Auslenkungen sinkt jedoch mit zunehmender Auflast. Dies würde sich mit einem Haftreibungsgesetz erklären lassen.

Zur Überprüfung des Gesamtkonzepts des Schubverbunds zwischen Gleiskörper und Tragwerk empfiehlt sich die Durchführung eines Großversuches an einem realen Brückentragwerk. Geeignet dafür wäre ein Stahltragwerk (etwa das von *Kirchhofer* [24] untersuchte Fahrenbachviadukt), da dessen Steifigkeiten rechnerisch relativ gut abgeschätzt werden können. Für die Versuchsdurchführung würde sich ein ähnliches Vorgehen, wie *Mähr* [4] an der Versuchsbücke vorgenommen hat, eignen. Dazu sind Versuche am Gesamttragwerk und an der reinen Tragstruktur (ohne Schotteroberbau) notwendig. Daraus könnten nicht nur reale Schotterkennwerte ermittelt werden, sondern auch die Gültigkeit des in dieser Arbeit vorgestellten Berechnungskonzepts mit Berücksichtigung des durchgehenden Gleiskörpers untersucht werden.

In dieser Arbeit wird ein Überblick über unterschiedliche Techniken und Probleme in der dynamischen Berechnung von Eisenbahnbrücken gegeben. Es wird der Einfluss unterschiedlicher Tragwerkskennwerte auf die Grundfrequenz der Brücken untersucht. Vor allem aber wird hier ein Konzept vorgestellt, um die nichtlinearen Effekte des Schotteroberbaus abzubilden. Die versteifende Wirkung des Oberbaus kann damit durch einfache Gleichungen abgeschätzt werden.

Anhang A. Züge und Zugmodelle

Für die in diesem Kapitel angegebenen Kennwerte der Züge gelten die folgenden Bezeichnungen.

Symbol	Einheit	Bezeichnung
d	[m]	Länge des Wagenkastens über Puffer
r	[m]	Achsabstand der Drehgestelle
b	[m]	Radabstand innerhalb eines Drehgestells
\ddot{u}	[m]	Überstand des Zuges über das äußerste Rad
m_c	[kg]	Masse des Wagenkastens
J_c	[kgm ²]	Massenträgheitsmoment des Wagenkastens
m_b	[kg]	Masse des Drehgestells
J_b	[kgm ²]	Massenträgheitsmoment des Drehgestells
m_w	[kg]	Masse des Radsatzes
k_p	[N/m]	Federsteifigkeit der Primärstufe
c_p	[Ns/m]	Dämpfungskonstante der Primärstufe
k_s	[N/m]	Federsteifigkeit der Sekundärstufe
c_s	[Ns/m]	Dämpfungskonstante der Sekundärstufe
P_A	[kN]	Achslast für Einzelkraftmodell

Tabelle A.1: Bezeichnungen und Abkürzungen der charakteristischen Zugkennwerten.

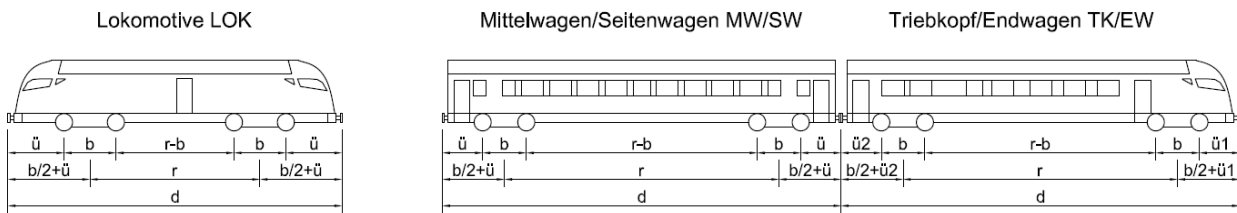


Abbildung A.1: Abmessungen für herkömmliche Züge.

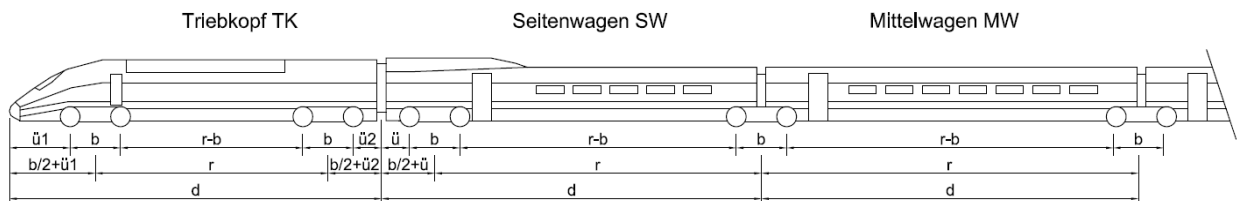


Abbildung A.2: Abmessungen für Gelenkzüge.

Die folgenden Zugkennwerte gelten für einfache Zuggarnituren. Die meisten der folgenden Züge kommen aber auch als Doppelgarnituren vor. Da verschiedene Quellen oft unterschiedliche Kennwerte angeben, werden hier die als am nachvollziehbarsten erachteten Werte angegeben.

A.1 Railjet

Zugtyp: herkömmlicher Zug		Zugkonfiguration: LOK + 7 MW			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[26], [4], [18]		230	32	204,8	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü [m]	P _A [kN]
LOK	19,28	9,90	3,00	3,19	225
MW	26,50	19,00	2,50	2,50	155
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
LOK	52.400	8,90 · 10 ⁵	13.200	7.300	2.500
MW	43.530	2,70 · 10 ⁶	2.300	1.600	1.900
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
LOK	4,00 · 10 ⁶	80.000	2,80 · 10 ⁶	2,00 · 10 ⁵	
MW	1,60 · 10 ⁶	30.000	3,20 · 10 ⁵	30.000	

Tabelle A.2: Kennwerte und Abmessungen für eine Railjet - Einfachgarnitur.

Kennwerte für ein dreidimensionales Mehrkörpermodell eines Railjets findet man z.B. [23].

A.2 ICE 2

Zugtyp: herkömmlicher Zug		Zugkonfiguration: TK + 12 MW + TK			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[20], [111], [15]			56	358,6	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü [m]	P _A [kN]
TK	20,90	11,50	3,00	4,00/2,40	195
MW	26,40	19,00	2,50	2,45	112
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TK	60.768	1,34 · 10 ⁶	5.600	21.800	2.003
MW	33.930	2,12 · 10 ⁶	2.373	1832	1.728
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TK	4,80 · 10 ⁶	1,08 · 10 ⁵	1,76 · 10 ⁶	1,52 · 10 ⁵	
MW	1,60 · 10 ⁶	20.000	3,00 · 10 ⁵	6.000	

Tabelle A.3: Kennwerte und Abmessungen für einen ICE 2.

A.3 ICE 3

Zugtyp: herkömmlicher Zug		Zugkonfiguration: TK + 6 MW + TK			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[15] [97]			32	200,0	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü [m]	P _A [kN]
TK	25,68	17,38	2,50	3,35/2,45	167*
MW	24,78	17,38	2,50	2,45	119*
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TK	50.000	1,03 · 10 ⁶	5.154	3.220	1.600
MW	35.000	2.160	2.840	2.460	1.750
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TK	4,30 · 10 ⁶	1,20 · 10 ⁵ †	1,43 · 10 ⁶	70.000	
MW	1,40 · 10 ⁶	0,24 · 10 ⁵ †	0,45 · 10 ⁶	40.000	

Tabelle A.4: Kennwerte und Abmessungen für einen ICE 3.

A.4 ICE 4

Zugtyp: herkömmlicher Zug		Zugkonfiguration: EW+TW+MW+2TW+MW+EW			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[15]			28	202,0	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü [m]	P _A [kN]
TW	28,75	19,50	2,60	3,33	<180
EW/MW	29,10/28,75	19,50	2,30	3,85/3,48	<180
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TW	-	-	-	-	-
EW/MW	-	-	-	-	-
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TW	-	-	-	-	
EW/MW	-	-	-	-	

Tabelle A.5: Kennwerte und Abmessungen für einen ICx.

* aus Massenangaben berechnet

† Daten abgeändert

A.5 ETR500Y

Zugtyp: herkömmlicher Zug		Zugkonfiguration: TK + 10 MW + TK			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[63], [20]			48		
	d [m]	r [m]	b [m]	ü [m]	P _A [kN]
TK	19,70	12,00	3,00	-	187
MW	26,10	19,00	3,00	-	120
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TK	55.976	-	3.896	-	2.059
MW	34.230	-	2.760	-	1.583
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TK	1,79 · 10 ⁶	15.300	4,72 · 10 ⁵	36.300	
MW	8,09 · 10 ⁵	7.500	1,81 · 10 ⁵	16.300	

Tabelle A.6: Kennwerte und Abmessungen für einen ETR500Y.

A.6 Alfa Pendular HST

Zugtyp: herkömmlicher Zug		Zugkonfiguration: TK+SW+2MW+SW+TK			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[134], [97]			24	158,9	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü [m]	P _A [kN]
TK	27,65	19,00	2,90	3,75/2,00	120-130*
SW/MW	25,90	19,00	2,90	2,00	120-130*
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TK	32.901/33.201	2,08 · 10 ⁶	4.932	5.150	1.538
SW	32.910/35.701	2,08 · 10 ⁶	4.823	5.090	1.538
MW	33.124/33.524	2,08 · 10 ⁶	4.712	5.000	1.538
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TK	3,42 · 10 ⁶	36.000	1,32 · 10 ⁵	36.000	
SW/MW	3,42 · 10 ⁶	36.000	1,32 · 10 ⁵	36.000	

Tabelle A.7: Kennwerte und Abmessungen für einen ETR500Y.

* aus Massenangaben berechnet

A.7 Green Train

Zugtyp: herkömmlicher Zug		Zugkonfiguration: 8TW			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[62]			32	215,2	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü [m]	P _A [kN]
TW	26,90	19,00	2,70	-	-
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TW	56.000	3,17 · 10 ⁶	5.000	5.900	2.000
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TW	2,00 · 10 ⁶	30.000	6,00 · 10 ⁵	60.000	

Tabelle A.8: Kennwerte und Abmessungen für eine Green Train Garnitur.

A.8 Shinkansen

Zugtyp: herkömmlicher Zug		Zugkonfiguration: 8TW			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[15]					
	d [m]	r [m]	b [m]	ü [m]	P _A [kN]
TW	25,00	17,50	2,50	-	-
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TW	36.000	1,89 · 10 ⁶	4.950	3.140	2.400
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TW	2,54 · 10 ⁶	19.600	8,87 · 10 ⁵	43.400	

Tabelle A.9: Kennwerte und Abmessungen für eine Shinkansen Garnitur.

A.9 TGV

Zugtyp: Gelenkzug		Zugkonfiguration: TK+SW+6 MW+SW+TK			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[57], [135]			26	200,2	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü1/ü2 [m]	P _{A1} / P _{A2} [kN]
TK	22,17	14,00	3,00	3,52/1,65	170
SW	21,85	18,70	3,00	1,65/0,0	163/170
MW	18,70	18,70	3,00	0,0	170
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TK	55.790	1,15 · 10 ⁶	2.380	1.480	2.048
SW	24.000	1.480	3.040	2.680	2.003
MW	24.000	1.480	3.040	2.680	2.003
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TK	2,45 · 10 ⁶	20.000	2,45 · 10 ⁶	40.000	
SW	1,40 · 10 ⁶	10.000	0,82 · 10 ⁶	48.000	
MW	1,40 · 10 ⁶	10.000	0,82 · 10 ⁶	48.000	

Tabelle A.10: Kennwerte und Abmessungen für einen Einzel - TGV.

A.10 Thalys

Zugtyp: Gelenkzug		Zugkonfiguration: TK+SW+6 MW+SW+TK			
Quellen	Max. v [km/h]	Achszahl N		Zuglänge L [m]	
[20], [136], [97]		26		200,2	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü1/ü2 [m]	P _{A1} / P _{A2} [kN]
TK	22,15	14,00	3,00	3,52/1,63	170
SW	21,84	18,70	3,00	1,64/0,0	163/170
MW	18,70	18,70	3,00	0,0	170
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TK	53.442	1,15 · 10 ⁶	3.261	2.870	2.009
SW	34.676	0,61 · 10 ³	1.400/8.156	1.230/7.190	2.050
MW	20.426	1,49 · 10 ³	8.156	7.190	2.009
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TK	2,09 · 10 ⁶	40.000	2,45 · 10 ⁶	40.000	
SW	1,63 · 10 ⁶	40.000	0,93 · 10 ⁶	40.000	
MW	2,09 · 10 ⁶	40.000	2,45 · 10 ⁶	40.000	

Tabelle A.11: Kennwerte und Abmessungen für eine Thalys - Einzelgarnitur.

A.11 Eurostar

Zugtyp: Gelenkzug		Zugkonfiguration: TK+SW+16MW+SW+TK			
Quellen	Max. v [km/h]	Achszahl N		Zuglänge L [m]	
[20], [136], [97]		46		387,2	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü1/ü2 [m]	P _{A1} / P _{A2} [kN]
TK	22,15	14,00	3,00	3,52/1,63	170
SW	21,84	18,70	3,00	1,64/0,0	170
MW	18,70	18,70	3,00	0,0	170
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TK	54.166	1,12 · 10 ⁶	3.075	1.920	2.046
SW	28.644	1,67 · 10 ³	2.363/9.580	2.040	2.046
MW	17.842	2,09 · 10 ³	9.580	8.160	2.046
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TK	2,63 · 10 ⁶	12.000	3,26 · 10 ⁶	90.000	
SW	2,07 · 10 ⁶	12.000	0,61 · 10 ⁶	4.000	
MW	2,20 · 10 ⁶	12.000	0,91 · 10 ⁶	2.000	

Tabelle A.12: Kennwerte und Abmessungen für eine Eurostar - Einzelgarnitur.

A.12 AVE S-100 HST

Zugtyp: Gelenkzug		Zugkonfiguration: TK+SW+SW+6MW+SW+TK			
Quellen		Max. v [km/h]	Achszahl N	Zuglänge L [m]	
[97], [137]			30	222,1	
	d [m]	r [m]	b [m]	ü1/ü2 [m]	P _{A1} / P _{A2} [kN]
TK	22,15	14,00	3,00	3,52/1,63	172
SW	21,85	18,70	3,00	1,64/0,00	115
MW	18,70	18,70	3,00	0,00	155
	m _c [kg]	J _c [kgm ²]	m _b [kg]	J _b [kgm ²]	m _w [kg]
TK	55.790	1,15 · 10 ⁶	2.380	1.480	2.048
SW	24.000	1.480	3.040	2.680	2.003
MW	24.000	1.660	3.040	2.680	2.003
	k _p [N/m]	c _p [Ns/m]	k _s [N/m]	c _s [Ns/m]	
TK	1,20 · 10 ⁶	10.000	2,45 · 10 ⁶	40.000	
SW	0,70 · 10 ⁶	5.000	0,82 · 10 ⁶	48.000	
MW	0,70 · 10 ⁶	5.000	0,82 · 10 ⁶	48.000	

Tabelle A.13: Kennwerte und Abmessungen für einen AVE S-100 HST.

A.13 Taurus 1116

Stromsystem	25 kV, 50 Hz
Spurweite	1.435 mm
Dienstmasse	Max. 86 t
Radsatzabstand im Drehgestell	3.000 mm
Drehzapfenabstand	9.900 mm
Auflast pro Radachse	215 kN
Anfahrzugkraft	300 kN
Dauerleistung	6.400 kW (8.704 PS)

Tabelle A.14: Technische Daten Taurus 1116, [69].

A.14 HSLM-A Lastmodelle

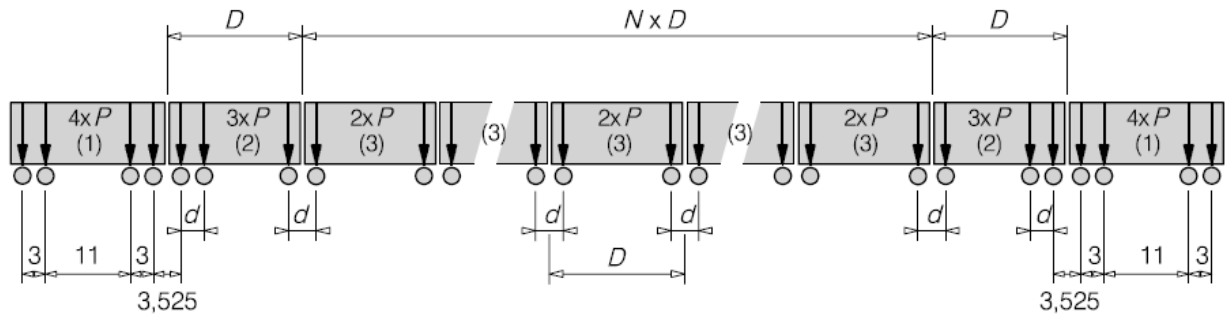


Abbildung A.3: Konfiguration der HSLM-A Lastmodelle lt. Eurocode 1-2, [3].

Modell- zug	Anzahl der Mittelwagen N	Wagenlänge D [m]	Drehgestellabstand d [m]	Einzellast P [kN]
A1	18	18	2,0	170
A2	17	19	3,5	200
A3	16	20	2,0	180
A4	15	21	3,0	190
A5	14	22	2,0	170
A6	13	23	2,0	180
A7	13	24	2,0	190
A8	12	25	2,5	190
A9	11	26	2,0	210
A10	11	27	2,0	210

Tabelle A.15: Kennwerte der HSLM-A Lastmodelle lt. Eurocode 1-2, [3].

Anhang B. Brückendaten

In diesem Abschnitt sind die gesammelten Brückenkennwerte nach Quellen differenziert abgebildet.

B.1 Frýba

In [38] gib Frýba die gemessenen ersten Eigenfrequenzen von unterschiedlichen Typen von Eisenbahnbrücken an. Er unterscheidet dabei zwischen unterschiedlichen Materialien und zwischen Tragwerken mit fester Fahrbahn und solchen mit Schotteroberbau. Die Datenpunkte wurden von Treder aus den Abbildungen von Frýba abgelesen und sind als Reproduktion des Originaldiagramms auch in [15] dargestellt. Es konnten dabei 109 der 113 von Frýba dargestellten Tragwerke identifiziert werden.

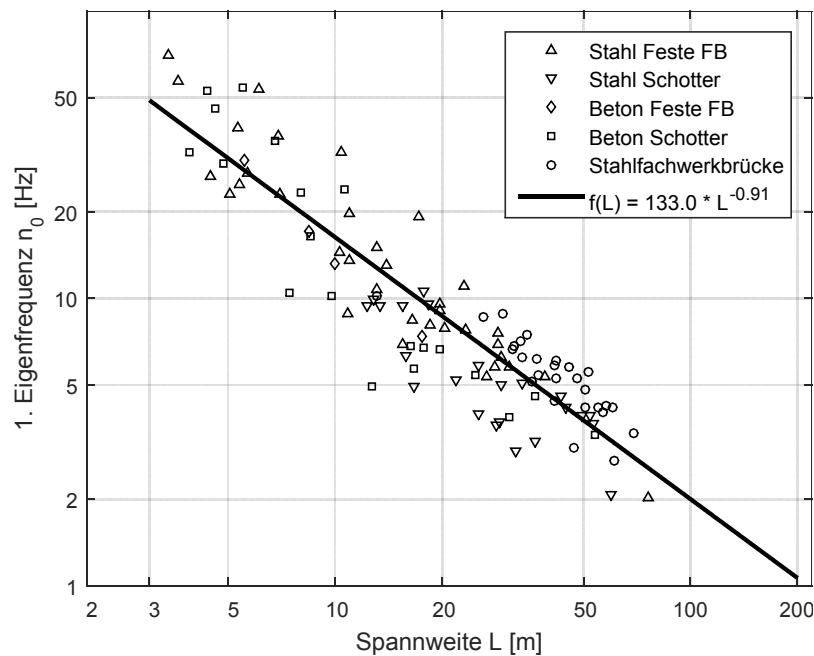


Abbildung B.1: Erste Eigenfrequenz n_0 in Abhängigkeit von der Stützweite L für die von Frýba angegebenen Brücken, (Datenquelle [38]).

B.2 ERRI Reports

Die hier dargestellten Daten von 94 Brücken sind den ERRI-Reports 3 [39] und 8 [40] entnommen. Bei der Angabe von mehreren gemessenen Dämpfungen für ein Tragwerk, wird nur der geringste Wert dargestellt.

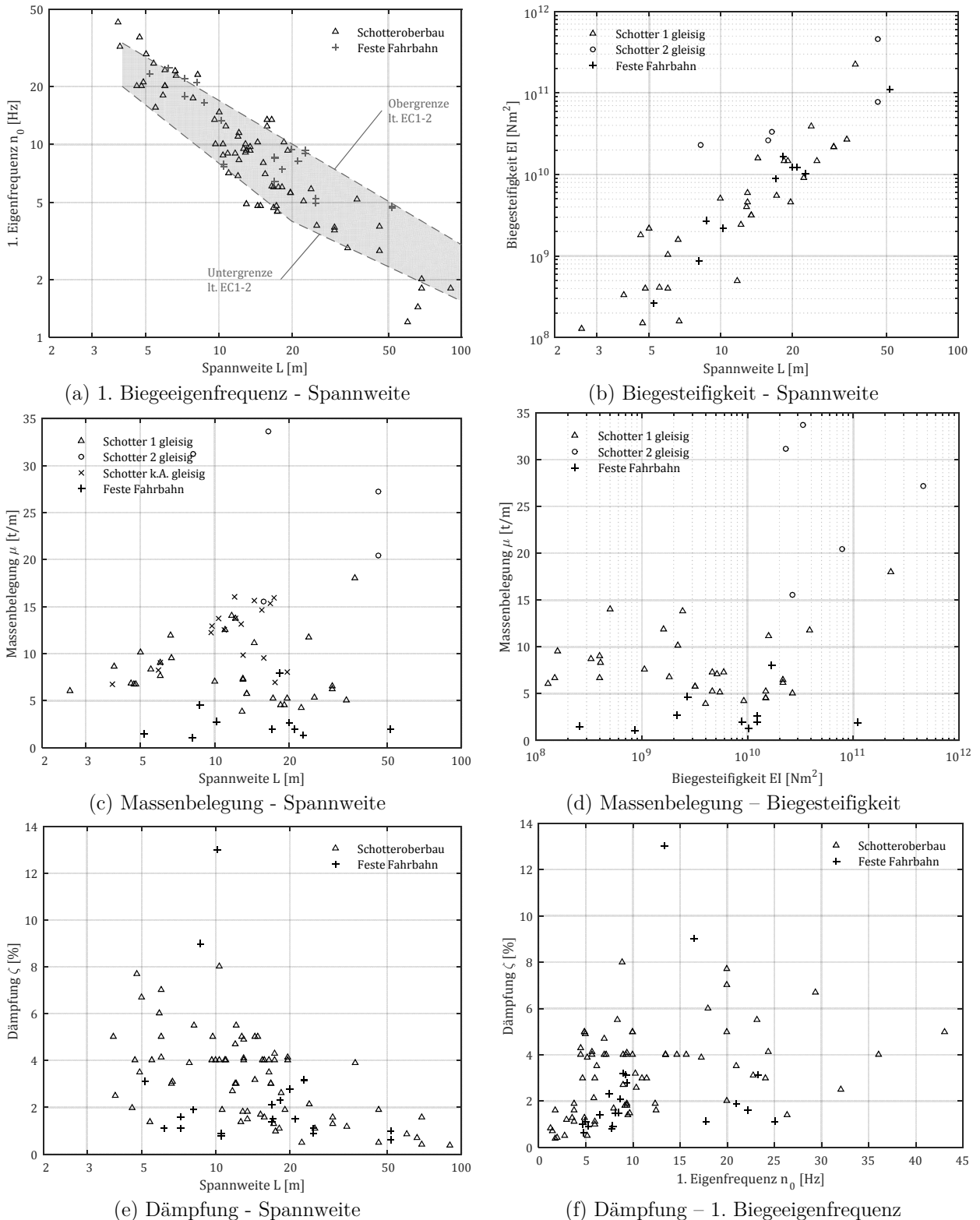
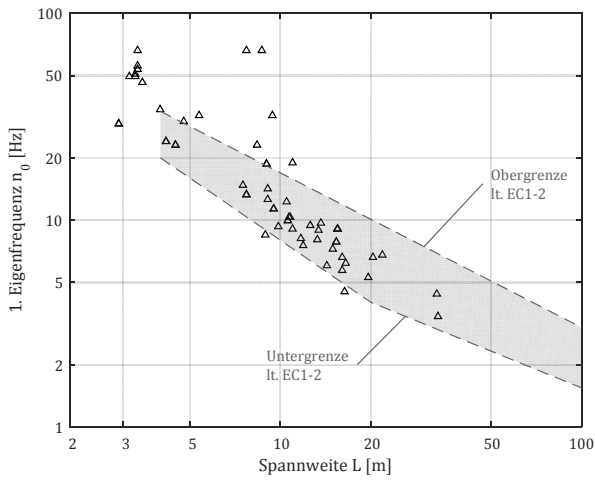


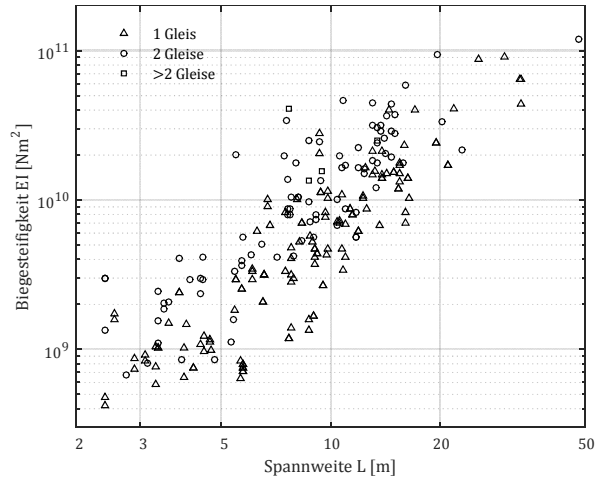
Abbildung B.2: Kennwerte der aus den ERRI Reports entnommenen Brücken (Datenquelle: [39], [40]).

B.3 Tragwerke ÖBB

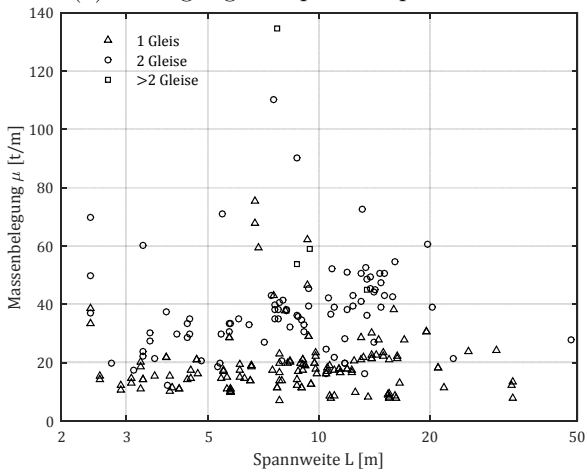
Die Daten der 235 Tragwerke wurden dem Institut von den Ingenieurbüros SCHIMETTA Ziviltechnik, REVOTEC zt gmbh und KMP ZT-GmbH übermittelt. Hier werden nur die gemessenen Eigenfrequenzen dargestellt.



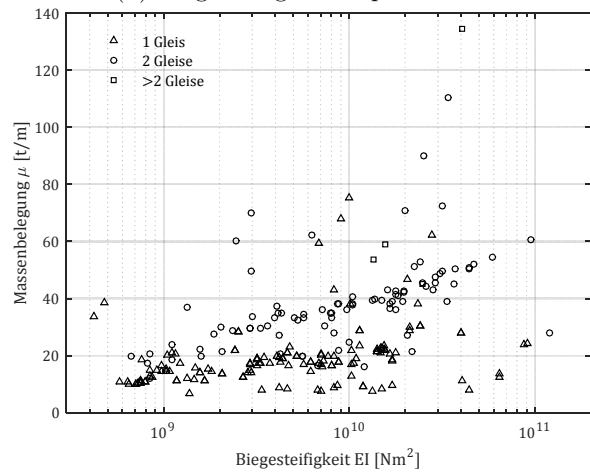
(a) 1. Biegeeigenfrequenz - Spannweite



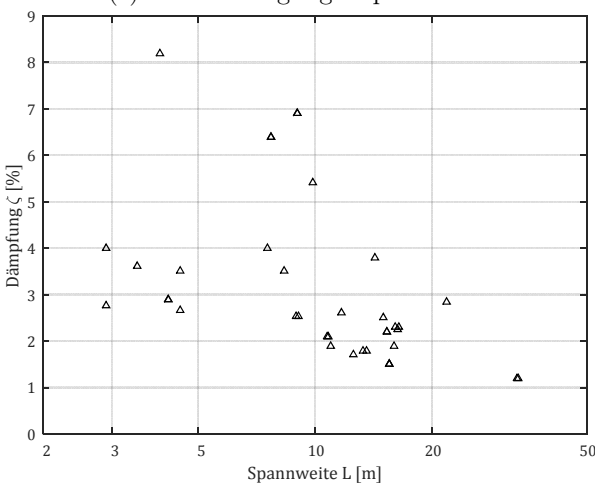
(b) Biegesteifigkeit - Spannweite



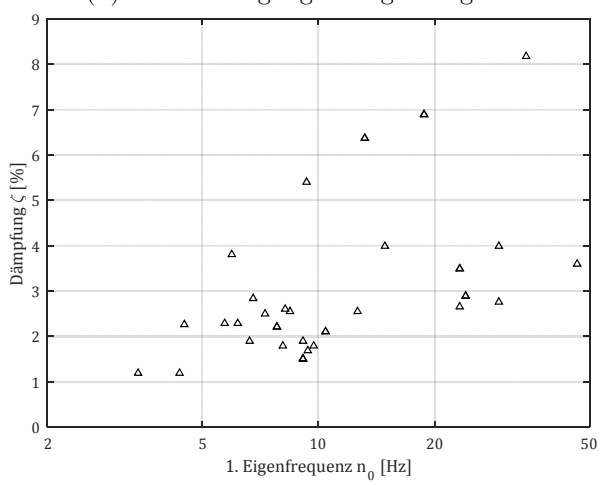
(c) Massenbelegung - Spannweite



(d) Massenbelegung - Biegesteifigkeit



(e) Dämpfung - Spannweite



(f) Dämpfung - 1. Biegeeigenfrequenz

Abbildung B.3: Kennwerte ausgewählter ÖBB Tragwerke.

B.4 Tragwerke Rauert

Die Daten von 35 Tragwerke sind der Dissertation von Rauert (siehe [19]) entnommen.

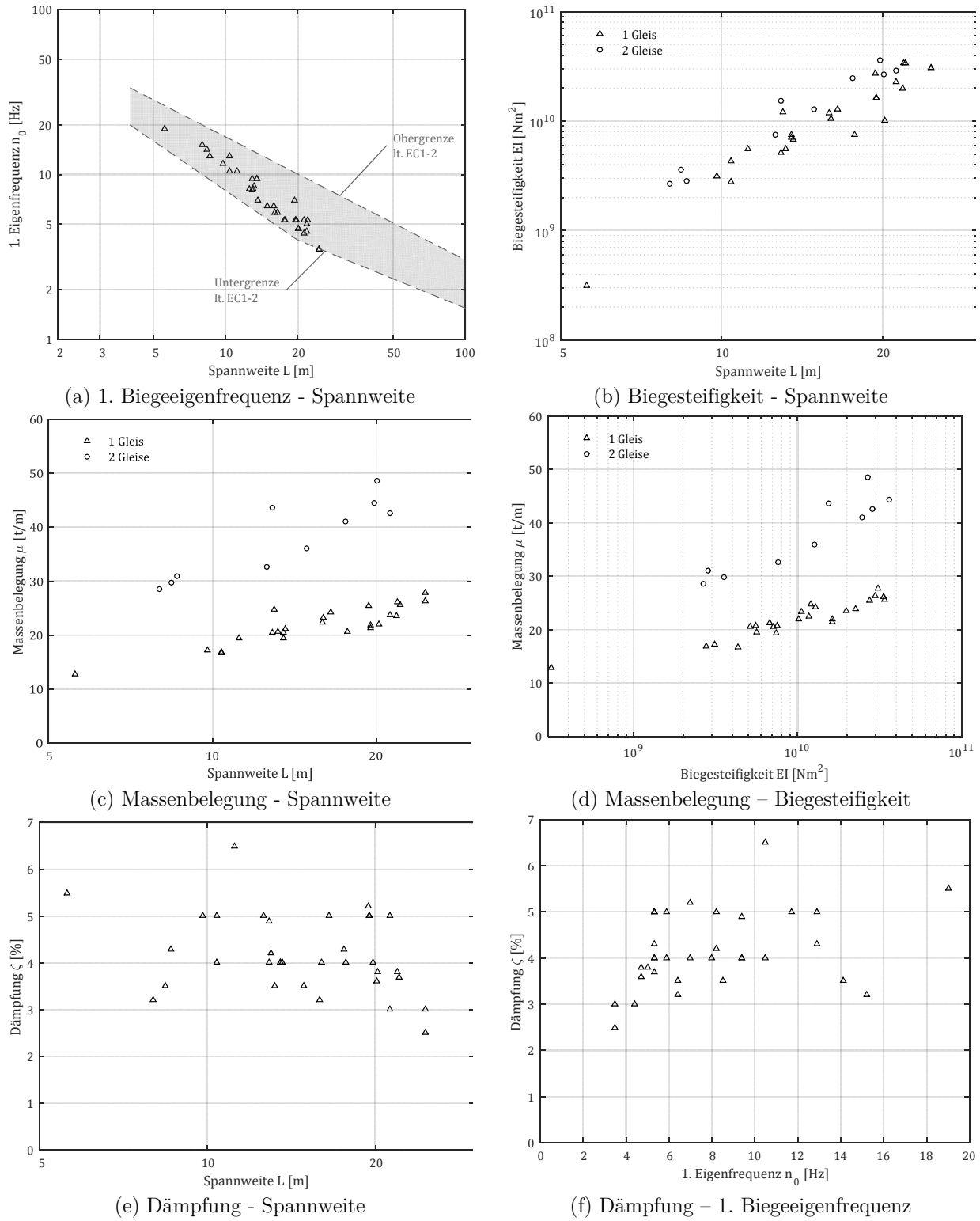


Abbildung B.4: Kennwerte WIB Tragwerke Rauert, [19].

Literaturverzeichnis

- [1] F. C. Mancel, „Analytical software for calculating dynamic effects on railway bridges,“ in *Proceedings of the 4th Conference of the European Association for Structural Dynamics*, Netherlands, A.A. Balkema, 1999.
- [2] P. Museros, M. Romero, A. Poy und E. Alarcon, „Advances in the analysis of short span railway bridges for high-speed lines,“ *Computers & Structures*, Nr. 80, p. 2121–2132, 2002.
- [3] ÖN EN 1991-2, Eurocode 1 - Einwirkung auf Tragwerke - Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken, Österreichisches Normungsinstitut, 2012-03-01.
- [4] T. C. Mähr, Theoretische und experimentelle Untersuchungen zum dynamischen Verhalten von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau unter Verkehrslast, Dissertation, TU Wien, 2008/09.
- [5] M. Spengler, Dynamik von Eisenbahnbrücken unter Hochgeschwindigkeitsverkehr, Entwicklung eines Antwortspektrums zur Erfassung der dynamischen Tragwerksreaktion, Dissertation, TU Darmstadt, 2010.
- [6] F. Ziegler, Technische Mechanik der festen und flüssigen Körper, Wien New York: Springer-Verlag, 3. Auflage, 1998.
- [7] R. Rauter, Einfluss der lastverteilenden Wirkung des Gleiskörpers auf das dynamische Verhalten von Eisenbahnbrücken, Wien: Diplomarbeit, TU Wien, 2017.
- [8] R. R. J. Craig und A. J. Kurdila, *Fundamentals of Structural Dynamics*, Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley & Sons., 2006.
- [9] F. Schobesberger, Entwicklung eines Berechnungsmodells zur simulationstechnischen Abbildung eines durchgeführten Feldversuchs einer Zugsüberfahrt bei einem Tragwerk von kurzer Spannweite, Wien: Diplomarbeit, TU Wien, 2016.
- [10] C. Adam, „Studienblätter zur Lehrveranstaltung aus Baudynamik und Erdbebeningenieurwesen 1,“ Universität Innsbruck, 2017.

-
- [11] E. Savin, „Dynamic amplification factor and response spectrum for evaluation of vibrations of beams under successive moving loads,“ *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 2, Nr. 248, pp. 267-288, 2001.
- [12] R. Rauter, Untersuchung zur lastverteilenden Wirkung des Gleiskörpers und zur Dämpfungsmodellierung bei kurzen Eisenbahnbrücken, nicht veröffentlicht, Projektarbeit, TU Wien, 2017.
- [13] A. K. Chopra, Dynamics of Structures, Prentice-Hall, 2001.
- [14] L. Frýba, „A rough assessment of railway bridges for high speed trains,“ in *Eng. Struct.*, 2001, pp. 548-56.
- [15] L. V. Treder, Vorschlag einer alternativen Formulierung der fiktiven Zusatzdämpfung für Eisenbahnbrücken, Diplomarbeit, TU Wien, 2017.
- [16] J. Leander und R. Karoumi, „Dynamic of thick bridge beams and its influence on fatigue life predictions,“ *Journal of Constructional Steel Research*, Nr. 89, pp. 262-271, 2013.
- [17] C. Bucher, „Studienblätter zur Lehrveranstaltung Baudynamik,“ TU Wien, 2016.
- [18] ÖBB, „Richtlinie für die Dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken,“ ÖBB, 2011.
- [19] T. Rauert, Zum Einfluss baulicher Randbedingungen auf das dynamische Verhalten von WIB-Eisenbahnbrücken, Dissertation, TU Aachen, 2011.
- [20] ERRI, „D-214/RP9 Rail bridges for speeds >200 km/h.,“ in *Final report*, Utrecht, European Rail Research Institute (ERRI), 1999.
- [21] T. Arvidsson, Train–Bridge Interaction: Literature Review and Parameter Screening, Stockholm: Licentiate Thesis, KTH, 2014.
- [22] A. Romero, J. Domínguez und P. Galvín, „3D numerical analysis of train-induced vibrations on short bridges considering vehicle-track-structure-soil dynamic interaction,“ in *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Dynamics, EURODYN 2011*, Leuven, Belgium, 2011.
- [23] P. Salcher und C. Adam, „Modelling of dynamic train–bridge interaction in high-speed railways,“ *Acta Mechanica*, Nr. 226, p. 2473–2495, 2015.
- [24] J. Kirchhofer, Beitrag zur vertiefenden Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Eisenbahnbrücken mit Schotteroberbau, Dissertation, TU Wien, 2012.

- [25] P. Frodl, Dynamische Untersuchung von Brückentragwerken mit Schotteroberbau, in Bezug auf Zugüberfahrten, Diplomarbeit, TU Wien, 2012.
- [26] P. Salcher und C. Adam, „Modelling strategies for bridges subjected to high-speed trains,“ in *VEESD 2013*, Vienna, 2013.
- [27] V. N. Dinh, K. D. Kim und P. Warnitchai, „10. Dynamic analysis of three-dimensional bridge-high-speed train interactions using a wheel-rail contact model,“ *Engineering Structures* 31, Nr. 31, pp. 3090-3106, 2009.
- [28] D. Gorbatjuk, Ermittlung von Anpassungsfaktoren zur vereinfachten Erfassung der Fahrzeug-Brücke-Interaktion, Diplomarbeit, TU Wien, 2015.
- [29] Y. Yang, C. Lin, J. Yau und D. Chang, „Mechanism of resonance and cancellation for train-induced vibrations on bridges with elastic bearings,“ *Journal of Sound and Vibration*, Nr. 269, pp. 345-360, 2004.
- [30] L. Jianzhong und S. Mubiao, „The resonant vibration for a simply supported girder bridge under high-speed trains,“ *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 5, Nr. 224, pp. 897-915, 1999.
- [31] P. Museros, E. Moliner und M. Martínez-Rodrigo, „Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads: Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration,“ *Journal of Sound and Vibration*, Nr. 332, pp. 326-345, 2013.
- [32] Y.-B. Yang, J.-D. Yau und L.-C. Hsu, „Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds,“ *Engineering Structures*, Bd. No. 11, Nr. Vol. 19, pp. 936-944, 1997.
- [33] C. P. S. Kumar, C. Sujatha und K. Shankar, „Vibration of simply supported beams under a single moving load: A detailed study of cancellation phenomenon,“ *International Journal of Mechanical Sciences*, Nr. 99, pp. 40-47, 2015.
- [34] H. Xia, N. Zhang und G. Weiwei, *Dynamic Interaction of Train-Bridge Systems in High-Speed Railways, Theory and Applications*, Berlin, Germany: Springer-Verlag GmbH, 2018.
- [35] H. Xia, H. Li, W. Guo und G. De Roeck, „Vibration resonance and cancellation of simply supported bridges under moving train loads,“ *Journal of Engineering Mechanics*, Nr. 140, pp. 1-15, 2014.
- [36] C. Johansson, N. Á. N. Nualláin, C. Pacoste und A. Andersson, „A methodology for the preliminary assessment of existing railway bridges for high-speed traffic,“ *Engineering Structures*, Nr. 58, pp. 25-35, 2014.

- [37] C. Johansson, Simplified dynamic analysis of railway bridges under high-speed trains, Stockholm, Sweden: Licentiate Thesis, KTH, 2013.
- [38] L. Frýba, Dynamics of Railway Bridges, London: Thomas Telford, 1996.
- [39] ERRI, „D-214/RP3 Empfehlungen für die Ermittlung der Dämpfung von Eisenbahnbrückentragwerken,“ in *Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten über 200km/h*, Utrecht, European Rail Research Institute (ERRI), 1999.
- [40] ERRI, „D-214/RP8 Bestätigung durch Versuche,“ in *Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten über 200km/h*, Utrecht, European Rail Research Institute (ERRI), 1999.
- [41] H. Unterweger, A. Tatas und A. Schörghofer, „Bestandsbrücken im Hochgeschwindigkeitsnetz - Vorgehensweise und Auswahl maßgebender Brücken bei Einfeldtragwerken,“ TU Graz, NICHT VERÖFFENTLICHT, 2015.
- [42] T. Mack, „Brückensonderprüfung, Dynamische Messungen an ÖBB-Brücken mit kleiner Stützweite, Objekt: Vorarlberg: Flussquerung Nenzing km 58.023,“ Schimetta Ziviltechnik, Wien, 2014.
- [43] I. Gonzales, M. Ülker-Kaustell und R. Karoumi, „Seasonal effects on the stiffness properties of a ballasted railway bridge,“ *Engineering Structures*, Nr. 57, pp. 63-72, 2013.
- [44] ÖN B 1991-2, Eurocode 1 - Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken - Nationales Anwendungsdokument, Österreichisches Normungsinstitut, 2012-03-01.
- [45] ERRI, „D-214/RP1 Literaturüberblick, Dynamisches Verhalten von Eisenbahnbrücken,“ in *Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten über 200km/h*, Utrecht, European Rail Research Institute (ERRI), 1999.
- [46] ÖN EN 1990/A1, Eurocode - Grundlagen der Tragwerksplanung (Änderung), Österreichisches Normungsinstitut, 2006-09-01.
- [47] UIC, UIC Code 776-2: Design requirements for rail-bridges based on interaction phenomena between train, track and bridge, Union Internationale des Chemins de Fer, 2nd edition, June 2009.
- [48] C. ERRI D-214, „Ponts rails pour vitesses >200 km/h et <350km/h. Donditions de déformation dynamicques.,“ in *Rapport Final*, Utrecht, European Rail Research Institute (ERRI), 1997.
- [49] C. ERRI D-214, „Ponts rails pour vitesses >200km/h,“ in *Raport Final*, European Rail

- Research Institute (ERRI), 2000.
- [50] ERRI, „D-214/RP4 Wechselwirkung zwischen Zug und Brücke,“ in *Eisenbahnbrücken für Geschwindigkeiten über 200km/h*, Utrecht, European Rail Research Institute (ERRI), 1999.
- [51] ONR 24008, Bewertung der Tragfähigkeit bestehender Eisenbahn- und Straßenbrücken, Österreichisches Normungsinstitut, 2014-03-01.
- [52] M. Baeßler, Lageveränderungen des Schottergleises durch zyklische und dynamische Beanspruchungen, Berlin: Dissertation, TU Berlin, 2008.
- [53] M. Baeßler und W. Rücker, „Die Wirkung vertikaler Überbaubeschleunigungen von Eisenbahnbrücken auf den Schotteroberbau,“ *EI - Eisenbahningenieur*, Bd. 1, Nr. 56, pp. 14-22, 2005.
- [54] M. Zacher und M. Baeßler, „Dynamic behaviour of ballast on railway bridges,“ in *Proceedings of dynamics of high-speed railway bridges*, London, Taylor & Francis, 2009.
- [55] W. Rücker, M. Baeßler und R. G. Rohrmann, „Experimentelle Untersuchungen zu Schotterfahrwegen auf Brücken,“ in *Entwicklungen in der Bodenmechanik, Bodendynamik und Geotechnik*, Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 2006, pp. 397-414.
- [56] M. Zacher, „Dynamik von Eisenbahnbrücken und dessen Auswirkungen auf den Oberbau,“ *EI - Eisenbahningenieur*, Bd. 2, Nr. 52, pp. 41-45, 2001.
- [57] J. Rocha, A. Henriques und R. Calçada, „Safety assessment of a short span railway bridge for high-speed traffic using simulation techniques,“ *Engineering Structures*, Nr. 40, pp. 141-154, 2012.
- [58] J. Rocha, A. Henriques und R. Calçada, „Probabilistic safety assessment of a short span high-speed railway bridge,“ *Engineering Structures*, Nr. 71, pp. 99-111, 2014.
- [59] P. Salcher, H. Pradlwarter und C. Adam, „Reliability assessment of railway bridges subjected to high-speed trains considering the effects of seasonal temperature changes,“ *Engineering Structures*, Nr. 126, pp. 712-724, 2016.
- [60] A. Doménech und P. Museros, „Influence of the vehicle model on the response of high-speed railway bridges at resonance. Analysis of the additional damping method prescribed by eurocode 1,“ in *Proceedings of the 8th international conference on structural dynamics, EURO DYN 2011*, Leuven, Belgium, 2011, p. 1273-1280.
- [61] A. Doménech, P. Museros, J. Nasarre und A. Castillo-Linares, „Behaviour of simply supported high-speed railway bridges at resonance: analysis of the influence of the vehicle

- model and simplifies methods for dynamic analyses," in *Proceedings of ISMA2012-USD2012*, Lueven, 2012.
- [62] T. Arvidsson und R. Karoumi, „Train-bridge interaction - a review and discussion of key model parameters," *International Journal of Rail Transportation*, Bd. Vol. 2, Nr. No. 3, pp. 147-186, 2014.
- [63] K. Liu, G. DeRoeck und G. Lombaert, „The effect of dynamic train-bridge interaction on the bridge response during a train passage," *Journal of Sound and Vibration*, Nr. 325, p. 240-251, 2009.
- [64] G. Brandstetter, Experimentelle Bestimmung der dynamischen Parameter von Eisenbahnbrücken aus Stahl mit Schotteroberbau mittels Output Only Analyse, Diplomarbeit, TU Wien, 2012.
- [65] J. Stephan, Entwicklung eines Programms zur Auswertung gemessener Übertragungsfunktionen und Anwendung anhand zweier Netzbogenbrücken, Diplomarbeit, TU Wien, 2016.
- [66] R. Cantieni und A. B. R. Bajric, „Experimentelle Bestimmung der Dämpfung eines Bauwerkes am Beispiel einer Fußgängerbrücke - Worauf man achten sollte," *Bauingenieur*, Bd. 91, Nr. April, pp. 2-9, 2016.
- [67] C. Handl, Richtlinien: Dynamische Messungen an Eisenbahnbrücken, Erstellt im Zuge des Projekts: ComTest, Wien: Österreichische Forschungsförderungsgesellschaft mbH, 2007.
- [68] M. Vospernig, „Technischer Bericht: Bestimmung der dynamischen Eigenschaften von Tragwerk BA2.1 bei km 117,46 - Westbahnstrecke," BERNARD Ingenieure ZT GmbH, Wien, 2013.
- [69] T. Mack, „Brückensonderprüfung, Dynamische Messungen an ÖBB-Brücken mit kleiner Stützweite, Objekt: Vorarlberg: Straßenunterführung Hard km 7.085," Schimetta Ziviltechnik, Wien, 2014.
- [70] Schimetta Consult ZT Ges.m.b.H, „Vorabzug Ergebnisbericht: ÖBB-Brücken mit kleiner Stützweite, Messungen und FE-Berechnung," Wien, nicht veröffentlicht.
- [71] L. Lorieux, Analysis of train-induced vibrations on a single-span composite bridge, Stockholm, Sweden: Master thesis, KTH, 2008.
- [72] J.-M. Battini und M. Ülker-Kaustell, „A simple finite element to consider the non-linear influence of the ballast on vibrations of railway bridges," *Engineering Structures*, Bd. 33, pp.

- 2597-2602, 2011.
- [73] H. Pircher, C. Stadler, J. Glatzl und P. Seitz, „Dynamische Berechnung von Eisenbahnbrücken im Zuge von Hochgeschwindigkeitsstrecken,“ *Bautechnik*, Bd. Heft 1, Nr. 86, pp. 1-13, 2009.
- [74] S. Höll und V. Zabel, „Sensitivitätsanalyse einer Verbundebisenbahnbrücke in Fertigteilbauweise basierend auf numerischer und experimenteller Modalanalyse,“ in *13. D-A-CH Tagung für Erdbebeningenieurwesen und Baudynamik*, Wien, 2013.
- [75] ÖN EN 1992-1-1, Eurocode 2 - Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, Österreichisches Normungsinstitut, 2015-02-15.
- [76] W. Bergmeister, F. Fingerloos und J.-D. Wörner, *Beton Kalender 2009*, Berlin: Ernst & Sohn, 2009.
- [77] P. Grübl, H. Weigler und S. Karl, *Beton; Arten, Herstellung und Eigenschaften*, Berlin: Ernst & Sohn, 2. Auflage, 2001.
- [78] S. Timoshenko und D. Young, *Vibration Problems in Engineering*. 3rd. ed., New York: Van Nostrand Reinhold, 1955.
- [79] P. Eriksson und E. Trolin, *Dynamic design of high-speed railway bridges*, Göteborg, Sweden: Master Thesis, Chalmers University of Technology, 2010.
- [80] H. Pircher, *Lösung baudynamischer Probleme mittels analytischer Zeitintegration und Modaler Analyse*, Dissertation, TU Graz, 2006.
- [81] M. F. Bauer, *Biege- und Torsionsschwingungen von Eisenbahnbrücken zufolge Hochgeschwindigkeitszügen*, Innsbruck: Masterarbeit, Universität Innsbruck, 2015.
- [82] C. Adam und P. Salcher, „Dynamic effect on high-speed trains on simple bridge structures,“ *Structural Engineering and Mechanics*, Bd. Issue 4, Nr. Volume 51, pp. 581-599, 2014.
- [83] C. Johansson, C. Pacoste und R. Karoumi, „Closed-form solution for the mode superposition analysis of the vibration in multi-span beam bridges caused by concentrated moving loads,“ *Computers and Structures*, Nr. 119, pp. 85-94, 2013.
- [84] T. Rauert, H. Bigelow, B. Hoffmeister, M. Feldmann, R. Patz und P. Lippert, „Zum Einfluss baulicher Randbedingungen auf das dynamische Verhalten von WIB-Eisenbahnbrücken, Teil 1: Einführung und Messuntersuchungen an WiB-Brücken,“ *Bautechnik*, Bd. Heft 11, Nr. 87,

- pp. 665-672, 2010.
- [85] D. Ekström und L.-L. Kieri, Dynamic analysis of railway bridges, Simplified modelling using SDOF technique, Göteborg, Sweden: Master Thesis, Chalmers University of Technology, 2007.
- [86] O. J. De Leon und K. Lasn, Dynamics of railway bridges subjected to high-speed trains, SDOF models for the approximate evaluation of resonance, Göteborg, Sweden: Master thesis, Chalmers University of Technology, 2008.
- [87] S. Timoshenko, Schwingungsprobleme der Technik, Berlin: Julius Springer, 4. Auflage, 1932.
- [88] P. Salcher, Reliability assessment of railway bridges designed for high-speed traffic: modeling strategies and stochastic simulation, Dissertation, Universität Innsbruck, 2015.
- [89] M. Eördög, Untersuchung von ausgewählten Parametern auf die Eigenfrequenzen von Eisenbahnbrücken, Projektarbeit, TU Wien, 2016.
- [90] J. M. Goicolea, J. Domínguez, F. Gabaldón und J. A. Navarro, „Resonant effects in short span high speed railway bridges: modelling and design issues,“ in *Structural Dynamics - EURO DYN 2002*, München, 2002.
- [91] B. Pichler und J. Eberhardsteiner, Skriptum zur Vorlesung Baustatik, Wien: TU Wien, Institut für Mechanik der Werkstoffe und Strukturen, 2013.
- [92] H. Irretier, Grundlagen der Schwingungstechnik 2, Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1. Auflage, 2001.
- [93] L. M. Biggs, Introduction to Structural Dynamics, Mc-Graw-Hill, 1964.
- [94] H. Bigelow, M. Feldmann, B. Hoffmeister und V. Zabel, „Zur Einspannwirkung von Eisenbahngleisen; Die Auswirkung auf die erste Biegeeigenfrequenz bei Einfeldträgerbrücken,“ *Bautechnik*, Bd. Heft 7, Nr. 93, pp. 462-469, 2016.
- [95] M. Ülker-Kaustell, Some aspects of the dynamic soil-structure interaction of a portal frame railway bridge, Stockholm, Sweden: Licentiate Thesis, KTH, 2009.
- [96] E. Axelsson, A. Syk, M. Ülker-Kaustell und J.-M. Battini, „Effect of axle load spreading and support stiffness on the dynamic response of short span railway bridges,“ *Structural Engineering International*, Nr. 4, pp. 457-465, 2014.
- [97] G. Kouroussis, D. Connolly und O. Verlinden, „Railway-induced ground vibrations - a review

- of vehicle effects," *International Journal of Rail Transportation*, pp. 69-110, 2014.
- [98] J. Kylén, 2D-model of a portal frame railway bridge for dynamic analysis, Stockholm, Sweden: Master Thesis, KTH, 2010.
- [99] A. Romero, J. Solís, J. Domínguez und P. Galvín, „Soil-structure interaction in resonant railway bridges," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Nr. 47, pp. 108-116, 2013.
- [100] A. Doménech, A. Romero, M. D. Martínez-Rodrigo und P. Galvín, „Soil-structure interaction effects on the transverse response of beam bridges under moving loads and its application to railway traffic," in *Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia 2015*, Portugal, 2015.
- [101] P. Galvín und A. Romero, „A MATLAB toolbox for soil-structure interaction analysis with finite and boundary elements," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Nr. 57, pp. 10-14, 2014.
- [102] J.-D. Yau, Y.-S. Wu und Y.-B. Yang, „Impact response of bridges with elastic bearings to moving loads," *Journal of Sound and Vibration*, Bd. (1), Nr. 248, pp. 9-30, 2001.
- [103] G. Brandstetter, F. Schobesberger und J. Fink, „Evaluation of simplified models for short span bridges, based on a measured train crossing and included substructure," in *EUROSTEEL 2017*, Copenhagen.
- [104] J. A. Studer, J. Laue und M. G. Koller, *Bodendynamik - Grundlagen, Kennziffern, Probleme und Lösungsansätze*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Auflage 2007.
- [105] G. Gazetas, „Analysis of machine foundation vibrations: state of the art," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Bd. Vol. 2, Nr. No. 1, pp. 2-42, 1983.
- [106] D. Adam, *Skriptum zu Vorlesung Grundbau und Bodenmechanik I*, Institut für Grundbau und Bodenmechanik der TU Wien, 2. Auflage, 2010.
- [107] R. A. Tavares, *Influence of the Vertical Support Stiffness on the Dynamic Behaviour of High-Speed Railway Bridges*, Stockholm: Master Thesis, KTH, 2007.
- [108] M. Vospernik und M. Reiterer, „Technischer Bericht: Dynamisches Rechenmodell von Brücken kurzer Spannweite," RED Bernard GmbH Research & Development, Nordbahnstraße 36/2.7, A-1020 Wien, 2011.
- [109] W. Zhai, K. Wang und J. Lin, „Modelling and experiment of railway ballast vibrations," *Journal of Sound and Vibration*, Bde. 1 von 24-5, Nr. 270, pp. 673-683, 2004.

- [110] C. Riguerio, C. Rebelo und L. Simões da Silva, „Influence of ballast modes in the dynamic response of railway viaducts,“ *Journal of Sound and Vibration*, Bd. 15, Nr. 329, pp. 3030-3040, 2010.
- [111] C. Rigueiro, C. Rebelo und L. S. d. Silva, „Modelling the interaction effects of the highspeed-train-track-bridge system using ADINA,“ in *5th International Conference on Mechanics and Mater*, Porto, 2006.
- [112] D. Cantero und R. Karoumi, „Numerical evaluation of the mid-span assumption in the calculation of total load effects in railway bridges,“ *Engineering Structures*, Nr. 107, pp. 1-8, 2016.
- [113] J. Bronsert, M. Baeßler, P. Cuéllar und W. Rücker, „Bewertung und Optimierung von Brückenübergangsbereichen auf der Basis eines numerischen Modells für die Fahrzeug-Fahrweg-Brücken-Wechselwirkung,“ in *5. VDI-Fachtagung Baudynamik 2015*, Düsseldorf, VDI Verlag GmbH, 2015.
- [114] R. Rehnström und D. Widén, *The influence of ballast on the vibrations of railway bridges*, Stockholm, Sweden: Master Thesis, KTH, 2012.
- [115] P. A. Costa, R. Calcada und A. S. Cardoso, „Track-ground vibrations induced by railway traffic: In-situ measurements and validation of a 2.5D FEM-BEM model,“ *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Nr. 32, pp. 111-128, 2012.
- [116] G. Kumaran, D. Menon und K. Krishnan Nair, „Dynamic studies of railtrack sleepers in a track structure system,“ *Journal of Sound and Vibration*, Nr. 268, pp. 485-501, 2003.
- [117] H. Kruse, K. Popp, H.-G. Matuttis und A. Schinner, „Behandlung des Schotters als Vielkörpersystem mit wechselnden Bindungen,“ *Eisenbahningenieur*, Bd. 2, Nr. 52, pp. 30-34, 2001.
- [118] P. Museros, G. Vivero und E. Alarcón, „Moving loads in railway bridges: The Spanish Code Approach,“ in *Proceedings of the 4th Conference of the European Association for Structural Dynamics*, Netherlands, A.A. Balkema, 1999.
- [119] H. Freystein, „Interaktion Gleis/Brücke - Stand der Technik und Beispiele,“ *Stahlbau*, Bd. Heft 3, Nr. 79, pp. 220-231, 2010.
- [120] J. Fink und T. C. Mähr, „Influence of ballast superstructure on the dynamics of slender steel railway bridges,“ NSCC, 2009.
- [121] C. Rebelo, L. Simoes da Silva, C. Rigueiro und M. Pircher, „Dynamic behaviour of twin

- single-span ballasted railway viaducts - Field measurements and modal identification,“ *Engineering Structures*, Nr. 30, p. 2460–2469, 2008.
- [122] K. Hackl und J. Fink, „Dynamic calculation of steel railway bridges - Investigation of dynamic behaviour of the ballast substructure,“ in *Eurosteel 2014 - 7th European Conference on Steel and Composite Structures*, Neapel, 2014.
- [123] E. Klotzinger, „Der Oberbauschotter Teil 1: Anforderungen und Beanspruchung,“ *ETR Eisenbahntechnische Rundschau*, Nr. Nr:01+02, pp. 34-41, 2008.
- [124] R. Dachroth, *Handbuch der Baugeologie und Geotechnik*, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
- [125] K.-J. Schneider, *Bautabellen für Ingenieure*, München: Werner Verlag, 16. Auflage, 2004.
- [126] H. Povse, *Eisenbahnschotter unter Stoßbelastung, Dynamisches Verhalten von grobkörnigen Tragschichten unter dem Einfluss der Normalspannung*, Graz: TU Graz, Dissertation, 1978.
- [127] K. Hackl, *Entwicklung und Anwendung einer Versuchsanlage zur Untersuchung der dynamischen Eigenschaften des Schotteroberbaues auf Eisenbahnbrücken*, Wien: Dissertation, TU Wien, 2017.
- [128] T. Malik, *Ermittlung der dynamischen Kennwerte von Gleisschotter*, Wien: Forschungsprojekt, TU Wien, Institut für Stahlbau, Stand 2018 (in Bearbeitung).
- [129] C. Adam, R. Heuer und A. Jeschko, „Flexural vibrations of elastic composite beams with interlayer slip,“ *Acta Mechanica*, Nr. 125, pp. 17-30, 1997.
- [130] C. Adam, R. Heuer und F. Ziegler, „Reliable dynamic analysis of an uncertain compound bridge under traffic loads,“ *Acta Mechanica*, Bd. 8, Nr. 223, pp. 1567-1581, 2008.
- [131] C. Adam, R. Heuer, A. Raue und F. Ziegler, „Thermally induced vibrations of composite beams with interlayer slip,“ *Journal of Thermal Stresses*, Nr. 23, pp. 747-772, 2000.
- [132] A. Jeschko, *Biegeschwingungen zweischichtiger elastischer Balken mit nachgiebigem Verbund – ein analytisches Lösungsverfahren*, Wien: TU Wien, 1996.
- [133] K. Klotter, *Technische Schwingungslehre; Erster Band: Einfache Schwinger. ; Teil B: Nichtlineare Schwingungen*, Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag, 3. Auflage, 1980.
- [134] P. Costa, R. Calçada und A. Cardoso, „Influence of train dynamic modelling strategy on the prediction of track-ground vibrations induced by railway traffic,“ *Journal of Rail and Rapid*

- Transit*, Nr. 226(4), p. 434–450, 2012.
- [135] P. Galvin, S. Francois, M. Schevenels, E. Bongini, G. Degrande und G. Lombaert, „A 2.5D coupled FE-BE model for the prediction of railway induced vibrations,“ *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Nr. 30, pp. 1500 - 1512, 2010.
- [136] G. Kouroussis, O. Verlinden und C. Conti, „Free field vibrations caused by high-speedlines: Measurement and time domain simulation,“ *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Nr. 31, p. 692–707, 2011.
- [137] P. Galvín, A. Romero und J. Domínguez, „Fully three-dimensional analysis of high-speed-train-track-soil-structure dynamic interaction,“ *Journal of Sound and Vibration*, Nr. 329, p. 5147–5163, 2010.