



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Optimales Investment bei Sprung- Diffusionsprozessen

ausgeführt am Institut für

Stochastik und Wirtschaftsmathematik

der Technischen Universität Wien

unter Anleitung von

Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch

Julia Domnanovits BSc

Senefeldergasse 64/2, 1100 Wien

Wien, 01.10.2018

(Unterschrift Verfasserin)

(Unterschrift Betreuer)

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit nach den anerkannten Grundsätzen für wissenschaftliche Abhandlungen von mir selbstständig verfasst worden ist. Alle verwendeten Hilfsmittel, insbesondere die zugrunde gelegte Literatur, sind in dieser Arbeit genannt und aufgelistet. Die aus den Quellen wörtlich entnommenen Stellen sind als solche kenntlich gemacht. Das Thema dieser Arbeit ist von mir bisher weder im In- noch im Ausland einer Beurteilerin/ einem Beurteiler in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt worden.

Ort, Datum und Unterschrift

Abstract

This thesis deals with the optimal investment control of the free surplus of an insurance company. The surplus process is modelled via the classical Cramér-Lundberg risk process perturbed by a Brownian Motion. The insurer has the possibility to invest the surplus in a risky asset and in a risk free asset. A distinction is made between two cases: In the constrained case there are constraints set for the investment in the risky asset, whereas in the unconstrained case the insurer is free to invest as much as it wants and short selling is permitted. In both settings the existence of a solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation is proven and it is shown that the minimal ruin probability function is such a solution. What is also of major interest is the asymptotic behaviour of the optimal investment control and the minimal ruin probability for low surplus levels, because in this model they are generally not analytically calculable. Under the specific assumption of exponential distributed claims additional statements about the asymptotic behaviour for large surplus levels can be made. Lastly, on the basis of two specific examples possible courses of the optimal control under different assumptions are presented.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der optimalen Kontrolle der freien Reserve eines Versicherungsunternehmens, welche durch das klassische Cramér-Lundberg Modell, das zusätzlich durch eine Brownsche Bewegung gestört wird, modelliert ist. Das Unternehmen hat die Möglichkeit dieses Vermögen in eine risikobehaftete Anlage und in eine risikofreie Anlage zu investieren. Dabei wird zwischen zwei Problemstellungen unterschieden. Im ersten Fall werden Grenzen für den in das risikoreiche Asset angelegten Anteil der Reserve festgelegt und im zweiten Fall soll dieser unbeschränkt sein und damit Leerverkäufe ermöglicht werden. Es wird für beide Fälle die Existenz der Lösung der entsprechenden Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung bewiesen und gezeigt, dass die Ruinwahrscheinlichkeit eine solche ist. Von großem Interesse ist auch das asymptotische Verhalten der optimalen Strategie und der Ruinwahrscheinlichkeit bei kleiner Reserve, da diese im betrachteten Modell in der Regel nicht analytisch berechenbar sind. Unter der speziellen Annahme von exponentialverteilten Schäden werden zusätzlich asymptotische Aussagen für hohe Reserven getroffen. Anhand von konkreten Beispielen wird gezeigt, wie die Entwicklung der optimalen Kontrollstrategie unter verschiedenen Annahmen aussehen kann.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	I
Abbildungsverzeichnis	II
1 Einleitung	1
2 Stochastische Analysis	3
2.1 Grundbegriffe	3
2.2 Itô-Prozesse und Itô-Formel	5
2.3 Stochastische Differentialgleichungen	7
3 Einführung in die Kontrolltheorie	9
3.1 Terminologie	9
3.2 Itô-Diffusion und ihr Generator	10
3.3 Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung	11
3.4 Ein Verifikationstheorem	12
3.5 Auffinden der Wertfunktion und der optimalen Strategie	13
4 Ruintheorie	15
4.1 Cramér-Lundberg Modell	15
4.2 Ruinwahrscheinlichkeit	16
5 Optimales Investment bei Sprung-Diffusionsprozessen	19
5.1 Das Modell	19
5.2 Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung	21
5.3 Asymptotisches Investment bei kleiner Reserve $x \rightarrow 0$	22
5.3.1 Der beschränkte Fall	22
5.3.1.1 Verifikationssatz	28
5.3.2 Der unbeschränkte Fall	32
6 Spezialfall der exponentialverteilten Claims	37
6.1 Unbeschränkter Fall	37
6.2 Beschränkter Fall	40
7 Beispiele	47
7.1 Beispiel 1	47
7.2 Beispiel 2	50
Literaturverzeichnis	53
A Differentialrechnung	57

Abbildungsverzeichnis

4.1	Realisation des Risikoprozesses $U(t)$	16
7.1	Beispiel 1: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen	48
7.2	Beispiel 1: Optimales Investment bei kleiner Reserve	49
7.3	Beispiel 1: Optimales Investment bei großer Reserve	49
7.4	Beispiel 2: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen	50
7.5	Beispiel 2: Optimales Investment bei kleiner Reserve	51
7.6	Beispiel 2: Optimales Investment bei großer Reserve	51

1 | Einleitung

Das Ziel dieser Diplomarbeit ist das Auffinden der optimalen Kontrollstrategie eines Versicherungsunternehmens, genauer einer asymptotischen Darstellung für eine solche, unter welcher die Ruinwahrscheinlichkeit minimiert wird. Die freie Reserve des Unternehmens wird durch das Cramér-Lundberg Modell beschrieben, welches in diesem Fall durch einen Störterm, der durch eine Brownsche Bewegung modelliert ist, erweitert wird. Dieser Störterm sorgt dabei für eine zusätzliche Unsicherheit. Diese Arbeit orientiert sich größtenteils am wissenschaftlichen Artikel von T. Belkina und S. Luo [3].

Im Allgemeinen ist es in diesem Modell nicht möglich, die optimale Kontrolle analytisch zu berechnen, jedoch werden asymptotische Darstellungen gefunden, welche einen Aufschluss über ihr Verhalten für $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$ liefern.

Zunächst müssen die Grundlagen wiederholt werden, die für das Verständnis dieser Arbeit von Bedeutung sind.

Kapitel 2 beschäftigt sich mit den Grundbegriffen der Stochastischen Analysis. Der Kernaussage der Stochastischen Analysis, der sogenannten Itô-Formel, wird dabei eine besondere Bedeutung zugemessen.

In Kapitel 3 wird die Einführung in die Stochastische Kontrolltheorie vorgenommen. Dabei werden die wichtigsten Definitionen, unter anderem die eines Kontrollprozesses, Zustandsprozesses, der Wertfunktion und der zulässigen Strategien vorgestellt. Besonders wichtig ist die in diesem Kapitel hergeleitete Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung, welche eine notwendige Bedingung für die Wertfunktion ist.

Kapitel 4 ist der Ruintheorie gewidmet. Es wird das klassische Risikomodell, das Cramér-Lundberg Modell, präsentiert und der Begriff der Ruinwahrscheinlichkeit definiert. Das in diesem Kapitel vorgestellte Modell liefert die Basis für den später im Fokus liegenden gestörten Risikoprozess.

In Kapitel 5 wird das Cramér-Lundberg Modell, welches die freie Reserve des Versicherungsunternehmens beschreibt, durch einen Störterm erweitert und das konkrete Optimierungsproblem dieser Diplomarbeit dargelegt. Es wird die Existenz einer klassischen Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung bewiesen und gezeigt, dass die minimale Ruinwahrscheinlichkeit diese löst. Weiters wird eine asymptotische Darstellung für die optimale Kontrollstrategie und die minimale Ruinwahrscheinlichkeit hergeleitet. Dabei werden zwei verschiedene Fälle betrachtet. Zunächst der beschränkte Fall, bei welchem Leerverkäufe verboten werden und der in die riskante Geldanlage investierte Anteil ein fix vorgegebenes Level nicht überschreiten darf. Im unbeschränkten Fall dagegen sind keine solchen Einschränkungen gegeben.

Anschließend wird in Kapitel 6 der Spezialfall von exponentialverteilt auftretenden Schäden genauer betrachtet. In diesem Fall ist es möglich, die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung analytisch zu lösen und aufzuzeigen, dass die Ruinwahrscheinlichkeit, vorausgesetzt die Reserve ist groß genug, gegen einen endlichen Wert konvergiert.

In Kapitel 7 werden numerische Ergebnisse für konkrete Beispiele präsentiert. Für die auftretenden Schäden im Cramér-Lundberg Modell werden verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet, verglichen und letztlich graphisch veranschaulicht.

Im Anhang befindet sich weiterführende Theorie aus dem Gebiet der Differentialrechnung, welche in Kapitel 6 für die Berechnung der Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung benötigt wird.

2 | Stochastische Analysis ¹

In den folgenden Kapiteln wird der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ betrachtet.

Die Stochastische Analysis beschäftigt sich mit stochastischen Prozessen, dabei ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$, eine Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Zustandsraum \mathbb{R} , bzw. \mathbb{R}^d .

2.1 Grundbegriffe

Definition 2.1 (Filtration). *Eine Filtration $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ ist eine wachsende Familie von σ -Algebren mit $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.*

Mit \mathbb{F}^X wird die von dem Prozess X_t erzeugte Filtration bezeichnet.

Einer der bedeutendsten stochastischen Prozesse ist die sogenannte Brownsche Bewegung. Diese taucht besonders häufig in der Finanz- und Versicherungsmathematik auf spielt eine wichtige Rolle bei der Simulation von Aktienkursen.

Definition 2.2 (Standard Brownsche Bewegung). *Eine Standard Brownsche Bewegung $(B_t)_{t \geq 0}$ ist ein bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptierter Prozess, der folgende Eigenschaften erfüllt:*

1. $B_0 = 0$ \mathbb{P} -fast sicher,
2. B hat \mathbb{P} -fast sicher stetige Pfade,
3. B hat normalverteilte Inkremente $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ für $0 \leq s < t$,
4. $B_t - B_s$ ist stochastisch unabhängig von \mathcal{F}_s für $0 \leq s < t$.

Definition 2.3 (Geometrische Brownsche Bewegung). *Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine Standard Brownsche Bewegung, dann ist der Prozess $(S_t)_{t \geq 0}$, beschrieben durch*

$$S_t = x \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right],$$

eine geometrische Brownsche Bewegung.

Der Parameter μ heißt Drift und der Parameter σ ist die Volatilität. S_t ist die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad t \geq 0, \quad S_0 = x.$$

¹vgl. [13]

Nun wird eine für diese Arbeit wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilung, die Poisson-Verteilung, vorgestellt.

Definition 2.4 (Poisson-Verteilung). *Eine Zufallsvariable X heißt Poisson-verteilt mit Parameter λ ($X \sim Poi(\lambda)$), falls gilt*

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n.$$

Für X gilt dann

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Ein weiterer wichtiger stochastischer Prozess ist der Poisson Prozess.

Definition 2.5 (Poisson Prozess). *Der Prozess $(N_t)_{t \geq 0}$ nennt sich Poisson Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $N_0 = 0$ \mathbb{P} -fast sicher,
2. $(N_t)_{t \geq 0}$ besitzt rechtsstetige Pfade,
3. $N_t - N_s$ ist unabhängig von der Vorgeschichte F_s für $s \leq t$,
4. $N_t - N_s \sim Poi(\lambda(t - s))$ für alle $s \leq t$.

Der Poisson Prozess N_t zählt die bis zum Zeitpunkt t aufgetretenen Sprünge.

In der Versicherungsmathematik wird das Auftreten der zu zahlenden Schäden aus dem Versicherungsbestand gerne durch einen Compound Poisson Prozess beschrieben.

Definition 2.6 (Compound Poisson Prozess). *Sei N eine mit dem Parameter λ Poisson-verteilte Zufallsvariable und $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen, so heißt*

$$S := \sum_{i=1}^N X_i, \tag{2.1}$$

Compound Poisson Prozess ($S \sim CPoi(\lambda)$).

Für die Zufallsvariable S gilt

1. $\mathbb{E}(S) = \lambda \mathbb{E}(X_1)$ und
2. $\mathbb{E}(S) = \lambda(\mathbb{E}(X_1))^2 + \lambda \mathbb{V}(X_1) = \lambda \mathbb{E}(X_1^2)$.

Definition 2.7 (Martingal). *Ein integrierbarer und $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptierter Prozess $M = (M_t)_{t \geq 0}$, der \mathbb{P} -fast sicher*

$$M_s = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \quad \text{für } s \leq t,$$

erfüllt, heißt Martingal.

Bemerkung 2.1. *Beispiele für Martingale sind*

1. die Brownsche Bewegung und
2. der kompensierte Poisson Prozess $M_t := N_t - \lambda t$ für $t \geq 0$.

2.2 Itô-Prozesse und Itô-Formel

Die Itô-Formel ist eine der Kernaussagen aus der stochastischen Analysis, welche in ihrer einfachsten Form als Integraldarstellung für stochastische Prozesse bezüglich einer Brownschen Bewegung gesehen werden kann.

Die Beweise für die hier vorgestellten Varianten der Itô Formel können in [13] nachgeschlagen werden.

Definition 2.8 (Progressive Messbarkeit). *Ein Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt progressiv messbar bzgl. der Filtration $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$, falls*

$$X : (s, \omega) \mapsto X_s(\omega),$$

eingeschränkt auf dem Intervall $[0, t]$ messbar bezüglich $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ ist.

Definition 2.9 (Eindimensionaler Itô-Prozess).

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(B_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration. Dann heißt ein Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \quad (2.2)$$

für den die Eigenschaften

1. X_0 ist \mathcal{F}_0 -messbar,
2. $\mathbb{P} \left(\int_0^T |K_s| ds < \infty \right) = 1$, wobei K_s progressiv messbar ist und
3. $\mathbb{P} \left(\int_0^T H_s^2 ds < \infty \right) = 1$, wobei H_s progressiv messbar ist

gelten, eindimensionaler Itô-Prozess.

Satz 2.1 (Eindimensionale Itô-Formel).

Sei X_t ein Itô-Prozess und f eine Funktion aus dem Raum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $(C^2(\mathbb{R}))$, so ist $f(X_t)$ wieder ein Itô-Prozess und es gilt

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds. \quad (2.3)$$

Eine vereinfachte Darstellung ist

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s,$$

was direkt aus

$$dX_t = K_t dt + H_t dB_t,$$

und

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds,$$

folgt.

Definition 2.10 (n-dimensionaler Itô-Prozess).

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)^\top$ eine n-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration \mathcal{F}_t . Dann heißt ein Prozess der Form $X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$, für den $b_s \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma_s \in \mathbb{R}^{n \times m}$ adaptiert sind und

1. $\mathbb{P} \left(\int_0^T |b_s^i| ds < \infty \right) = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$
2. $\mathbb{P} \left(\int_0^T (\sigma_s^{ij})^2 ds < \infty \right) = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$

gelten, ein n-dimensionaler Itô-Prozess.

Satz 2.2 (n-dimensionale Itô-Formel). Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein n-dimensionaler Itô-Prozess und $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^{1,2}$. Dann ist $f(t, X_t)$ wieder ein Itô-Prozess und es gilt

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial i}(s, X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial i \partial j}(s, X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s, \quad (2.4)$$

mit $\langle X^i, X^j \rangle_t = \int_0^t (\sigma \sigma^\top)_{ij} ds$.

Nun erweitert man den Itô-Prozess aus (2.2) mit einem Sprungprozess S_t (z.B. einem Compound Poisson Prozess), so erhält man einen stochastischen Prozess der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s + S_t, \quad (2.5)$$

einen sogenannten Sprung-Diffusions-Prozess.

In [14, Kapitel 11] ist folgende Version der Itô-Formel für solche Prozesse mit Beweis nachzulesen.

Satz 2.3 (Itô Formel für Sprung-Diffusions-Prozesse). Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Prozess der Form (2.5) und f eine Funktion aus dem Raum der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen ($C^2(\mathbb{R})$), so gilt

$$f(X_t) = f(x_0) + \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) H_s^2 ds + \sum_{0 \leq s \leq t} [f(X_s) - f(X_{s-})]. \quad (2.6)$$

2.3 Stochastische Differentialgleichungen ²

Definition 2.11 (Stochastische Differentialgleichung). Sei $(B_t)_{t \geq 0}$ eine n -dimensionale Brownsche Bewegung, $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ messbare Abbildungen. Eine Gleichung der Form

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \quad (2.7)$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = \xi$, heißt stochastische Differentialgleichung.

Es handelt sich hierbei um n gekoppelte Differentialgleichungen

$$dX_t^i = b^i(t, X_t) dt + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(t, X_t) dB_t^j.$$

Definition 2.12. Ein Prozess (X_t) heißt starke Lösung dieser Differentialgleichung, falls gilt:

1. $(X_t)_{t \geq 0}$ erfüllt (2.7) \mathbb{P} -fast sicher,
2. $\mathbb{P} \left(\int_0^T |b_s(s, X_s)| ds < \infty \right) = 1$, $\mathbb{P} \left(\int_0^T (\sigma_s^{ij}(s, X_s))^2 ds < \infty \right) = 1$ und
3. $(X_t)_{t \geq 0}$ ist \mathbb{F}^B -adaptiert.

Satz 2.4 (Existenz und Eindeutigkeit der starken Lösung). Betrachte man eine stochastische Differentialgleichung der Form (2.7), für die die lineare Wachstumsbedingung und Lipschitzbedingung

$$\begin{aligned} \|b(t, x)\| + \|\sigma(t, x)\| &\leq K\|x - y\|, \\ \|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 &\leq K^2(1 + \|x\|^2), \end{aligned}$$

und $\mathbb{E}(\xi^2)$ gelten, wobei $0 \leq t \leq T$ und $K > 0$ sind. Dann existiert eine eindeutige, starke und stetige Lösung X_t der SDE, sodass gilt:

$$\mathbb{E} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2 \right) < \infty.$$

Bemerkung 2.2. Bei der sogenannten schwachen Lösung ist diese auch von der betrachteten Brownschen Bewegung B abhängig, insbesondere muss dabei X_t nicht \mathbb{F}^B -adaptiert sein.

²vgl. [11]

3 | Einführung in die Kontrolltheorie ¹

Die stochastische Kontrolltheorie beschäftigt sich mit der Optimierung von Systemen, welche durch stochastische Prozesse dargestellt sind. Nun werden einige Begriffe aus der Kontrolltheorie vorgestellt.

3.1 Terminologie

- Der Kontrollprozess u_t ist ein progressiv messbarer Prozess mit Werten in $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}$. Die Anzahl der Aktien in einem Portfolio stellt zum Beispiel einen solchen Kontrollprozess dar.
- Der Zustandsprozess X_t wird durch die Gleichung

$$dX_t = b(t, X_t, u_t) dt + \sigma(t, X_t, u_t) dB_t, \quad (3.1)$$

beschrieben, wobei die Funktionen $b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ Borel-messbar sind. Ein Beispiel für einen Zustandsprozess ist das Vermögen des Investors unter Verwendung der Strategie u_t .

- Das Zielfunktional $J(t, x, u_t)$ ist gegeben durch

$$J(t, x, u_t) = \mathbb{E} \left(\int_t^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Psi(T, X_T) | X_t = x \right), \quad (3.2)$$

wobei die Funktion φ die laufenden Kosten beschreibt und $\Psi(T, X_T)$ die Endkosten zum Zeitpunkt T. Das Ziel ist es, $J(t, x, u_t)$ zu maximieren.

- Die Menge der zulässige Strategien $\mathcal{A}(t, x)$ soll gewisse Minimalbedingungen erfüllen:
 1. Die stochastische Differentialgleichung der Form (3.1), welche den Zustandsprozess beschreibt, soll eine eindeutige starke Lösung besitzen.
 2. Das Zielfunktional $J(t, x, u_t)$ soll wohldefiniert sein.
- Die Wertfunktion $V(t, x)$ ist durch $V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} J(t, x, u_t)$ gegeben.

Das Ziel ist es, die Wertfunktion $V(t, x)$ zu bestimmen und eine Strategie $u_t^* \in \mathcal{A}(t, x)$, die sogenannte optimale Strategie, zu finden, für die

$$V(t, x) = J(t, x, u^*)$$

erfüllt ist.

¹vgl. [9]

3.2 Itô-Diffusion und ihr Generator

Nun werden Definitionen und Sätze vorgestellt, welche zur Herleitung der sogenannten Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung benötigt werden. Mit dieser Gleichung lässt sich weiters die Wertfunktion $V(t, x)$ und die optimale Strategie $u_t^* \in \mathcal{A}(t, x)$ bestimmen.

Sei nun $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und B eine m -dimensionale Brownsche Bewegung. Besitzt die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t,$$

mit messbaren Funktionen

$$b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m},$$

und Anfangsbedingung $X_0 = x$, eine eindeutige starke Lösung, so nennt man diese Itô-Diffusion. Die Matrix $a(t, x) := (\sigma\sigma^\top)$ heißt dann Diffusionsmatrix.

Definition 3.1 (Generator). *Der Operator L , welcher definiert ist als*

$$Lf := \lim_{s \searrow t} \frac{\mathbb{E}[f(s, X_s) | X_t = x] - f(t, x)}{s - t} \quad (3.3)$$

für $x \in \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D_L := \{f(t, x) \mid \text{Limes (3.3) existiert}\}$, heißt Generator der Itô-Diffusion.

Weiters sei der Operator \mathcal{L} wie folgt definiert:

$$\mathcal{L} := \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j},$$

wobei \mathcal{L} auf dem Bereich

$$D\mathcal{L} = C^{1,2} = \left\{ f : \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ stetig } \forall i, j = 1, \dots, n \right\},$$

definiert ist.

Somit lässt sich der Operator, angewandt auf eine Funktion f aus $D\mathcal{L}$, weiters schreiben als

$$\mathcal{L}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial t} + b(t, x) D_x f(t, x) + \frac{1}{2} \text{tr}(a(t, x), D_{xx} f(t, x)),$$

wobei mit $D_x f(t, x)$ der Gradient von f , mit tr die Spur der Matrix und mit $D_{xx}(t, x)$ die Hessematrix von f bezeichnet wird.

Bemerkung 3.1.

- Mit der obigen Notation lässt sich die Itô-Formel (2.4) folgendermaßen schreiben:

$$df(t, X_t) = \mathcal{L}f(t, X_t) dt + D_x f(t, X_t) \sigma(t, X_t) dB_t.$$

- Im eindimensionalen, zeithomogenen Fall, lautet der vereinfachte Operator

$$\mathcal{L} = b(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2(x)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Nun stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen der Generator L mit dem Operator \mathcal{L} übereinstimmt.

Satz 3.1. Sei die Funktion $f \in C^{1,2}$ und gelte für alle $u \geq t$:

$$\mathbb{E} \left[\int_t^u |\mathcal{L}f(s, X_s)| ds \right] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E} \left[\int_t^u \|D_x f(s, X_s) \sigma(s, X_s)\|^2 dW_s \right] < \infty,$$

so ist $f \in D_L$ und $\mathcal{L} = L$.

3.3 Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Um die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung nun herleiten zu können, wird das sogenannte Bellman Prinzip angewandt. Dieses besagt, dass das globale Optimierungsproblem auf dem Intervall $[t, T]$ in zwei lokale Optimierungsprobleme auf den Intervallen $[t, t_1]$ und $[t_1, T]$ zerlegt werden kann.

Somit ist unter Verwendung dieses Prinzips das Ziel die Wertfunktion der Form

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \int_{t_1}^T \varphi(s, X_s, u_s) ds + \Psi(T, X_T) | X_t = x \right] \\ &= \sup_{u \in \mathcal{A}(t, x)} \mathbb{E} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + V(t_1, X_{t_1}) | X_t = x \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit $T > t_1 > t$ zu bestimmen.

Man setzt voraus, dass die Wertfunktion $V(t, x)$ glatt genug ist, sodass folgende Umformungen durchgeführt werden können. Genaueres dazu ist in [9] zu finden. Zuerst wird die Itô-Formel (2.3) für $V(t_1, X_{t_1})$ angewandt, woraus sich folgendes ergibt:

$$\begin{aligned} V(t_1, X_{t_1}) &= V(t, x) + \int_t^{t_1} \frac{\partial V(s, X_s)}{\partial s} ds + \int_t^{t_1} D_x V(s, X_s) b(s, X_s, u_s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_t^{t_1} \text{tr}(a(s, X_s, u_s) D_{xx} V(s, X_s)) ds + \int_t^{t_1} D_x V(s, X_s) \sigma(s, X_s, u_s) dB_s. \end{aligned}$$

Als nächstes kann für $V(t_1, X_{t_1})$ in die Gleichung (3.4) eingesetzt werden, wobei von $V(t, x)$ zusätzlich gefordert wird, dass das stochastische Integral bzgl. der Brownschen Bewegung ein

Martingal ist. Das hat zur Folge, dass der Erwartungswert des Integral verschwindet und nurmehr die folgenden Terme übrig bleiben.

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{A}(t,x)} \mathbb{E} \left[\int_t^{t_1} \varphi(s, X_s, u_s) ds + \int_t^{t_1} \frac{\partial V(s, X_s)}{\partial s} ds + \int_t^{t_1} D_x V(s, X_s) b(s, X_s, u_s) ds | X_t = x \right] \\ + \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \int_t^{t_1} \text{tr}(a(s, X_s, u_s) D_{xx} V(s, X_s)) ds | X_t = x \right].$$

Dividiert man jetzt durch den Faktor $(t_1 - t)$ und bildet den Grenzwert für $t_1 \rightarrow t$, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \varphi(t, X_t, u_t) + \frac{\partial V(t, X_t)}{\partial t} + D_x V(t, X_t) b(t, X_t, u_t) + \frac{1}{2} \text{tr}(a(t, X_t, u_t) D_{xx} V(t, X_t)) \right\}.$$

Setzt man nun

$$\mathcal{L}^u f(t, x) := \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + D_x f(t, x) b(t, x, u) + \frac{1}{2} \text{tr}(a(t, x, u) D_{xx} f(t, x)),$$

so ergibt sich die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (HJB-Gleichung):

$$0 = \sup_{u \in \mathcal{U}} \{ \varphi(t, x, u_t) + \mathcal{L}^u V(t, x) \}. \quad (3.5)$$

Man sieht, dass unter bestimmten Voraussetzungen das Erfüllen der HJB-Gleichung eine notwendige Bedingung an die Wertfunktion ist.

Nun stellt sich die Frage, ob eine Lösung der HJB-Gleichung automatisch auch die gesuchte Wertfunktion ist. Diese Überlegung führt zum Verifikationstheorem.

3.4 Ein Verifikationstheorem

Verifikationssätze garantieren, dass die Lösungen der HJB-Gleichung auch wirklich die Wertfunktion darstellen. Für konkrete Probleme sind oft "eigene" Verifikationssätze nötig.

Die Menge der zulässigen Strategien $\mathcal{A}(t, x)$ sei so, dass

- (A1) u_t progressiv messbar ist und $\mathbb{E}[\int_t^T \phi(s, X_s, u_s) ds | X_t = x]$ erfüllt,
- (A2) $\forall u \in \mathcal{A}(t, x)$ die stochastische Differentialgleichung (3.1) eine eindeutige starke Lösung besitzt, für die $\mathbb{E}[\sup_{t \leq s \leq T} \|X_s\|^2] < \infty$ gilt und
- (A3) das Zielfunktional $J(t, x, u)$ wohldefiniert ist.

Der Beweis des nächsten Satzes ist in [9, Kapitel 5] zu finden.

Satz 3.2 (Verifikationssatz). *Angenommen es gelte*

- $\|\sigma(t, x, u)\|^2 \leq C_\sigma(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$ mit $C_\sigma > 0$,
- $|\varphi(t, x, u)| \leq C_\varphi(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$ mit $C_\varphi > 0$ und
- $\Phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ mit $|\Phi(t, x)| \leq C_\Phi(1 + \|x\|^2)$ mit $C_\Phi > 0$.

Weiters soll $\Phi(t, x)$ die HJB-Gleichung (3.5) erfüllen. Dann folgt:

1. $\Phi(t, x) \geq V(t, x)$ und
2. Existiert \hat{u} und ist $u_t^* = \hat{u}(t, X_t^*)$, so ist u_t^* die optimale Strategie, für die $V(t, x) = J(t, x, u_t^*)$ gilt.

3.5 Auffinden der Wertfunktion und der optimalen Strategie

Zum Berechnen der gesuchten Wertfunktion und optimalen Strategie wird in der Regel folgendes Schema angewandt:

1. Zuerst wird der Maximizer $\hat{u}(t, x)$ der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung bestimmt.
2. Dann wird $\hat{u}(t, x)$ in die HJB-Gleichung eingesetzt und man erhält eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für $V(t, x)$.
3. Letztlich wird versucht, diese Differentialgleichung zu lösen (z.B. mit Hilfe bestimmter Ansätze, Numerischer Methoden, Fourrierreihen, etc.) und man erhält eine Darstellung der Wertfunktion, von der die optimale Strategie abgeleitet werden kann.

4 | Ruintheorie

In diesem Kapitel werden das Cramér-Lundberg Modell und der Begriff der Ruinwahrscheinlichkeit mit einigen dazugehörigen Resultaten vorgestellt.

4.1 Cramér-Lundberg Modell ¹

Im Jahr 1903 stellte F. Lundberg ein Risikomodell in stetiger Zeit vor, das sogenannte Cramér-Lundberg Modell. Es beschreibt die freie Reserve U_t eines Versicherungsunternehmens zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Diese setzt sich zusammen aus dem zu Beginn zur Verfügung stehenden Anfangskapital, den eingehenden Prämien sowie den eingetretenen Schäden, für die das Unternehmen aufkommen muss.

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = u + ct - S(t). \quad (4.1)$$

Die Prämienrate c wird in diesem Risikomodell als konstant angenommen. Für den Bestand sind die Beiträge über das ganze Jahr verteilt und können als stetig über die Zeit angenommen werden. Der Einfachheit halber ist die Prämie in diesem Modell für jedes Intervall proportional zu seiner Länge modelliert.

Die Anzahl der Schäden $(N_t)_{t \geq 0}$, die bis zum Zeitpunkt t aufgetreten sind, bilden einen homogenen Poisson-Prozess mit Parameter λ . Die Schäden $Y_i > 0$, oft auch Claims genannt, sind eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen, welche auch unabhängig von N_t sind. Somit ist die Summe $S(t) = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ ein Compound Poisson-Prozess, wie er in Kapitel 2 definiert ist.

Der Verlauf der durch das Cramér-Lundberg Modell beschriebenen Reserve kann sich beispielsweise darstellen wie in Abbildung 4.1. Darin ist zu erkennen, dass die freie Reserve während der schadenfreien Zeit durch die Prämieinnahmen linear steigt. Tritt ein Schaden auf, so fällt das Vermögen um den Schadenbetrag.

¹vgl.[1]

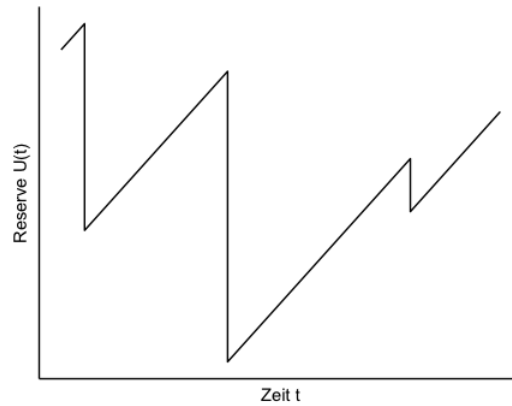


Abbildung 4.1: Realisation des Risikoprozesses $U(t)$

4.2 Ruinwahrscheinlichkeit ²

Wird der Prozess $\{U_t\}_{t \geq 0}$ zu einem Zeitpunkt $T < \infty$ negativ, so spricht man vom Ruin des Versicherungsunternehmens.

Definition 4.1 (Ruinzeitpunkt). *Der Ruinzeitpunkt T ist definiert als*

$$T := \inf \{t \geq 0 : U_t < 0\},$$

mit $\inf \emptyset = \infty$.

In diesem Zusammenhang ist der Begriff der Ruinwahrscheinlichkeit von großer Bedeutung für das Versicherungsunternehmen. Diese wird bei einem Startkapital von u mit $\Psi(u)$ bezeichnet. Es wird angenommen, dass sowohl die Prämienrate, als auch die Verteilung der Claims während des betrachteten Zeitraumes gleich bleiben.

Definition 4.2 (Ruinwahrscheinlichkeit). *Die Ruinwahrscheinlichkeit ist definiert als*

$$\Psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty).$$

Die Berechnung und Abschätzung der Ruinwahrscheinlichkeit ist eines der zentralen Probleme der aktuariellen Mathematik.

Diese dient als Indikator für die Solvenz des Versicherungsunternehmens.

Eine hohe Ruinwahrscheinlichkeit lässt auf eine Instabilität schließen. In diesem Fall können Anpassungen bezüglich der Prämienhöhe oder des Startkapitals getätigt werden, um die Wahrscheinlichkeit zu verringern.

Mit der Ruinwahrscheinlichkeit ist es möglich verschiedene Portfolios zu vergleichen, wobei darauf Bedacht zu nehmen ist, dass es sich nicht um die tatsächliche Wahrscheinlichkeit des Ruins in nächster Zeit handelt. Möglicherweise bedarf es hunderte von Jahren bis der Zustand erreicht wird.

Außerdem handelt es sich bei der hier gegebenen Definition des Ruins um eine mathematische Abstraktion. Nur weil sich das Kapital des Unternehmens im Minusbereich befindet, heißt dies lange nicht, dass es insolvent ist und andersrum muss nicht schon bei kleinstem positiven Wert auch schon eine Solvenz vorliegen.

²vgl. [10] und [1]

Bemerkung 4.1. Von der Prämie c im Cramér-Lundberg Modell (4.1) wird gefordert, dass sie einen Sicherheitszuschlag θ enthält, für den $c = (1 + \theta)\lambda\mu_1$ gilt, woraus folgt, dass θ gegeben ist durch

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1,$$

wobei $\mu_1 = \mathbb{E}[Y_1]$ ist.

Dieser Zuschlag hat den Grund, da das sogenannte Nettoprämienprinzip mit $c = \mathbb{E}(S)$, \mathbb{P} -fast sicher zum technischen Ruin des Versicherungsunternehmens führen würde. Genaueres dazu ist in [1] nachzulesen.

Definition 4.3 (Anpassungskoeffizient).

Bei einem Ruinprozess, bei dem die Claims $Y \geq 0$ unabhängig identisch verteilt sind mit $\mathbb{E} = \mu_1 > 0$, ist der Anpassungskoeffizient, oder auch "Lundbergkoeffizient" R die positive Lösung in r der Gleichung

$$1 + (1 + \theta)\mu_1 r = m_Y(r), \quad (4.2)$$

wobei mit m_Y die Momentenerzeugende Funktion der Claims Y bezeichnet wird.

Der Anpassungskoeffizient ist ein Maß für das Risiko und hängt von zwei Faktoren ab: der Gesamtschadenhöhe und der Prämienrate.

In den nächsten beiden Sätzen wird eine Abschätzung für die Ruinwahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens und eine explizite Formel bei exponentialverteilten Schäden gegeben. Die Beweise sind in [10] zu finden.

Satz 4.1 (Lundbergs Grenze für die Ruinwahrscheinlichkeit). Für einen Compound Poisson Prozess U mit Startkapital u , Prämienrate c , Claims mit Verteilungsfunktion P , Momentenerzeugendefunktion $m_Y(t)$ und Anpassungskoeffizienten R , welcher (4.2) erfüllt, gilt folgende Abschätzung für die Ruinwahrscheinlichkeit

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

Satz 4.2 (Lundbergs Grenze für die Ruinwahrscheinlichkeit mit exponentialverteilten Claims). Für einen Compound Poisson Prozess U , bei dem die Claims exponentialverteilt sind mit Erwartungswert μ_1 ist die Ruinwahrscheinlichkeit bei einem Anfangskapital u gegeben durch

$$\Psi(u) = \Psi(0)e^{-Ru},$$

wobei $R = \frac{\theta}{(1+\theta)\mu_1}$ und $\Psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$ sind.

5 | Optimales Investment bei Sprung-Diffusionsprozessen ¹

Die folgenden Kapitel orientieren sich an dem in der wissenschaftlichen Arbeit von T. Belkina und S. Luo [3] vorgestellten Modell und Optimierungsproblem.

5.1 Das Modell

Betrachtet wird ein Versicherungsunternehmen, dessen freie Reserve durch das Cramér-Lundberg Modell (siehe Kapitel 4) beschrieben wird.

Dieses Modell wird nun durch einen Störterm, welcher durch eine Standard Brownsche Bewegung $B^1 = (B_t^1)_{t \geq 0}$ beschrieben wird, erweitert:

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i + \sigma_1 B_t^1, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

wobei $\sigma_1 > 0$ eine Konstante ist, die die Volatilität dieses Störterms repräsentiert.

Somit kann in diesem Modell der Ruin entweder wegen eines Schadens oder aufgrund von Oszillation durch den Störterm eintreten.

Das Unternehmen kann nun zum Zeitpunkt t einen Anteil von a_t in ein risikobehaftetes Asset, wie zum Beispiel in eine Aktie, investieren. Die Preisentwicklung einer solchen Geldanlage wird durch eine geometrische Brownsche Bewegung $S = (S_t)_{t \geq 0}$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

mit Volatilität σ und Erwartungswert μ beschrieben.

$B = (B_t)_{t \geq 0}$ ist dabei eine weitere Standard Brownsche Bewegung, die unabhängig von der Schadenzahl $(N_t)_{t \geq 0}$ und den Schäden Y_i ist.

Die beiden Brownschen Bewegungen B^1 und B sollen in Korrelation zueinander stehen. Für den entsprechenden Korrelationskoeffizienten $\rho \in [-1, 1]$ gilt $\text{Cov}(dB_t, dB_t^1) = \mathbb{E}(dB_s dB_s^1) = \rho ds$.

Der restliche Anteil der freien Reserve $(X_t - a_t)$ zum Zeitpunkt t wird in eine risikofreie Anlage P_t , wie beispielsweise in eine Anleihe, mit fixem Zins r angelegt, sodass gilt:

$$dP_t = rP_t dt.$$

¹[3]

Mit $\pi := \{a_s\}_{s \geq 0}$ wird nun der dynamische Kontrollprozess für die Investition der freien Reserve bezeichnet.

Somit folgt unter den obigen Annahmen, dass die freie Reserve des Versicherungsunternehmens gegeben ist durch die Gleichung

$$X_t^\pi = x + \int_0^t [c + r(X_s^\pi - a_s) + \mu a_s] ds + \sigma \int_0^t a_s dB_s + \sigma_1 \int_0^t dB_s^1 - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (5.2)$$

mit Korrelationskoeffizienten $\rho \in [-1, 1]$ und Volatilität des Störterms σ_1 .

Bemerkung 5.1. *Es lässt sich eine Standard Brownsche Bewegung W finden, sodass*

$$\sqrt{\sigma^2 a_t^2 + 2\sigma\sigma_1\rho a_t + \sigma_1^2} dW_t = \sigma a_t dB_t + \sigma_1 dB_t^1, \quad (5.3)$$

gilt.

Beweis. Beide Seiten sind als Zusammensetzungen von Gauß-Prozessen wieder Gauß-Prozesse. Berechnet man den Erwartungswert beider Seiten, so sieht man sofort, dass aufgrund der Martingaleigenschaft diese gleich null sind. Für die Varianzen gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\sigma a_t dB_t + \sigma_1 dB_t^1) &= \sigma^2 a_t^2 \mathbb{V}(dB_t) + 2\sigma a_t \sigma_1 \text{Cov}(dB_t, dB_t^1) + \sigma_1^2 \mathbb{V}(dB_t^1) \\ &= \sigma^2 a_t^2 dt + 2\sigma a_t \sigma_1 \rho dt + \sigma_1^2 dt \\ &= (\sigma^2 a_t^2 + 2\sigma a_t \sigma_1 \rho + \sigma_1^2) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\left(\sqrt{\sigma^2 a^2 + 2\sigma\sigma_1\rho a + \sigma_1^2} dW_t\right) &= (\sigma^2 a^2 + 2\sigma a \sigma_1 \rho + \sigma_1^2) \mathbb{V}(dW_t) \\ &= (\sigma^2 a^2 + 2\sigma a \sigma_1 \rho + \sigma_1^2) dt. \end{aligned}$$

Somit ist die Gleichheit beider Seiten aus (5.3) gezeigt. \square

Mit dem Resultat aus (5.3) lässt sich der Prozess (5.2) vereinfachen zu

$$X_t^\pi = x + \int_0^t [c + r(X_s^\pi - a_s) + \mu a_s] ds + \int_0^t \sqrt{\sigma^2 a_s^2 + 2\sigma\sigma_1\rho a_s + \sigma_1^2} dW_s - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i. \quad (5.4)$$

In dieser Arbeit unterliegt der Prozess X_t^π den folgenden Bedingungen:

- Die Parameter $A, c, r, \mu, \sigma, \sigma_1 > 0$ sind Konstanten,
- $\rho \neq 1, -1$ und
- die Verteilungsfunktion der Schäden $Y_i \sim F$, $i \in 1, \dots, N(t)$ hat eine stetige Dichte mit Träger $(0, \infty)$ und $\mathbb{E}(Y_i) < \infty$.

In diesem Kapitel werden zwei verschiedene Fälle bezüglich des Investments der freien Reserve in das risikobehaftete Asset (z.B. Aktie) betrachtet, der beschränkte und der unbeschränkte Fall.

Im beschränkten Fall werden Grenzen gesetzt, sodass nicht mehr als ein fixer Wert $A > 0$ in die risikobehaftete Anlage investiert werden darf und keine Leerkäufe erlaubt sind. Also muss zu jedem Zeitpunkt t der in die Aktie angelegte Anteil a_t aus dem Intervall $\mathcal{A} = [0, A]$ sein.

Im unbeschränkten Fall werden dafür keine Grenzen gesetzt und es gilt somit $\mathcal{A} = (-\infty, \infty)$.

Definition 5.1 (Die Menge der zulässigen Strategien Π).

Die Menge der zulässigen Strategien für dieses Modell wird mit Π bezeichnet.

Jedes $\pi = \{a_s\}_{s \geq 0} \in \Pi$ muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

(II1) a_s ist \mathcal{F}_s - vorhersagbar,

(II2) a_s ist auf jedem endlichen Intervall \mathbb{P} - fast sicher quadratisch integrierbar und

(II3) $a_s \in \mathcal{A}$.

Mit

$$\tau^\pi = \inf \{t \geq 0 : X_t^\pi < 0\}, \quad (5.5)$$

sei der Ruinzeitpunkt des Versicherungsunternehmens unter Verwendung der Strategie $\pi \in \Pi$ bezeichnet.

Demnach ist die zugehörige Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta^\pi(x)$, d.h. die Gegenwahrscheinlichkeit zur Ruinwahrscheinlichkeit $\Psi^\pi(x)$ (siehe Kapitel 4) definiert als

$$\delta^\pi(x) = 1 - \Psi^\pi(x) = 1 - \mathbb{P}(\tau^\pi < \infty).$$

Die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta(x)$ ist gegeben als

$$\delta(x) = \sup_{\pi \in \Pi} \delta^\pi(x). \quad (5.6)$$

Per Definition ist $\delta(x)$ somit eine nicht-fallende Funktion und es gilt die Anfangsbedingung $\delta(0) = 0$ für $x = 0$.

5.2 Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung

Der Prozess (5.4) ist ein Sprung-Diffusionsprozess der Form (2.5).

Die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung für das in diesem Kapitel betrachtete Modell kann analog zu Abschnitt 3.3 hergeleitet werden, wobei die entsprechende Itô-Formel für einen solchen Prozess (Satz 2.3) verwendet werden muss. Weiters wird, damit die Voraussetzungen für die Itô-Formel erfüllt sind angenommen, dass $\delta(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist.

In [8] wurde gezeigt, dass dies für die Überlebenswahrscheinlichkeit immer der Fall ist, wenn die Schäden im Risikoprozess stetige Wahrscheinlichkeitsdichten besitzen. Aus diesem Grund wurde diese Eigenschaft oben schon als Annahme getroffen.

Insgesamt kommt man zur HJB-Gleichung

$$\sup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{L}^{(a)} \delta(x) = 0, \quad (5.7)$$

wobei der Operator \mathcal{L} gegeben ist durch

$$\mathcal{L}^{(a)} \delta(x) = \frac{1}{2}(\sigma^2 a^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a + \sigma_1^2) \delta''(x) + [c + (\mu - r)a + rx] \delta'(x) - M(\delta)(x), \quad (5.8)$$

mit

$$M(\delta)(x) = \lambda[\delta(x) - \int_0^x \delta(x-y) dF(y)] = \lambda\mathbb{E}(\delta(x) - \delta(x-Y)).$$

Da δ auf $(0, \infty)$ eine wachsende Funktion ist, folgt dass auch $M(\delta)(x)$ positiv ist.

5.3 Asymptotisches Investment bei kleiner Reserve $x \rightarrow 0$

Proposition 5.1. *Angenommen W ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die die HJB-Gleichung (5.7) löst. Sei a_W definiert als*

$$a_W(x) := -\frac{(\mu - r)W'(x)}{\sigma^2 W''(x)} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma}, \quad (5.9)$$

wobei $W''(x) \neq 0$ gelten muss.

Dann maximiert a_W die HJB-Gleichung (5.7) auf dem Intervall $\mathcal{A} = (-\infty, \infty)$, unter der Bedingung, dass $W''(x) < 0$ gilt.

Beweis. Für den Maximizer a_W muss die Gleichung

$$\mathcal{L}^{(a_W)}W(x) = \frac{1}{2}(\sigma^2 a_W^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a_W + \sigma_1^2)W''(x) + [c + (\mu - r)a_W + rx]W'(x) - M(W)(x) = 0,$$

erfüllt sein. Wird diese nach a_W abgeleitet, so muss im Falle einer Extremstelle

$$\sigma^2 a_W W''(x) + \rho\sigma\sigma_1 W''(x) + (\mu - r)W'(x) - 0 \stackrel{!}{=} 0,$$

gelten. Woraus durch umformen

$$a_W = -\frac{(\mu - r)W'(x)}{\sigma^2 W''(x)} - \frac{\rho\sigma}{\sigma},$$

erhalten wird.

Nun soll a_W ein Maximum sein, d.h. es muss $\frac{\partial^2}{\partial a_W^2} \mathcal{L}^{(a_W)}W(x) < 0$ erfüllt sein. Das ist genau der Fall, wenn $W''(x) < 0$ ist. \square

5.3.1 Der beschränkte Fall

In diesem Abschnitt wird das Kontrollproblem für den Fall eines auf den Bereich $\mathcal{A} = [0, A]$ beschränkten Investments betrachtet. Es sei zudem angenommen, dass $\mu > r$ ist. Der Fall $\mu \leq r$ kann analog betrachtet werden.

Zunächst stellt sich die Frage, wie der Maximizer (5.9) für den beschränkten Fall aussieht.

Proposition 5.2. *Der Maximizer für $\mathcal{A} = [0, A]$ ist gegeben durch*

$$a_W^*(x) = \begin{cases} a_W(x) & 0 < a_W(x) < A, W''(x) < 0, \\ 0 & a_W(x) \leq 0, W''(x) < 0; \text{ oder } a_W(x) \geq A/2, W''(x) > 0, \\ A & a_W(x) \geq A, W''(x) < 0; \text{ oder } a_W(x) < A/2, W''(x) > 0, \end{cases} \quad (5.10)$$

wenn $W''(x) \neq 0$ ist und A wenn $W''(x) = 0$.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch einfaches nachrechnen und wird hier nicht genauer ausgeführt. \square

Definition 5.2. Der Operator $T_w(x)$ ist definiert als

$$Tw(x) = \inf_{0 \leq a \leq A} T_w(a, x), \quad (5.11)$$

wobei

$$T_w(a, x) = \frac{2\{M(W)(x) - [c + rx + (\mu - r)a]w(x)\}}{\sigma^2 a^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a + \sigma_1^2} \quad (5.12)$$

ist und w eine nicht-negative, auf dem Intervall $[0, \infty)$ stetige Funktion ist. Die Funktion W ist dabei über w definiert und lautet

$$W(x) = \int_0^x w(s) ds.$$

Man bemerke, dass $W(0) = \int_0^0 w(s) ds = 0$ ist.

Folgendes Lemma besagt, dass eine klassische Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (3.5) existiert (siehe auch [3]).

Lemma 5.1. Es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $v(x)$ auf $[0, \infty)$, welche folgende Gleichung erfüllt

$$v'(x) = Tv(x), \quad v(0) = 1. \quad (5.13)$$

Beweis.

Für jedes $w \in C[0, K]$ mit $K > 0$ sind die Funktionen $M(W)(x)$ und $T_w(a, x)$ offensichtlich stetig in x . Da $T_w(a, x)$ für alle $a \in [0, A]$ stetig in x ist, folgt, dass $Tw(x)$ ebenfalls stetig ist.

Nun betrachte man zwei stetig differenzierbare Funktionen $w_1(x)$ und $w_2(x)$ in $C[0, K]$.

Sei $\|w\|$ die Supremumsnorm definiert auf $C[0, K]$ (d.h. $\|w\| := \sup\{|w(x)| : 0 \leq x \leq K\}$).

$W_1(x) = \int_0^x w_1(y) dy$ und $W_2(x) = \int_0^x w_2(y) dy$ erfüllen dann

$$\begin{aligned} |W_1(x) - W_2(x)| &= \left| \int_0^x w_1(y) - w_2(y) dy \right| \leq \int_0^x |w_1(y) - w_2(y)| dy \\ &\leq x \|w_1 - w_2\| \leq K \|w_1 - w_2\|. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Genauso gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x W_1(x-y) - W_2(x-y) dF(y) \right| &= \left| \int_0^x \int_0^{x-y} w_1(s) - w_2(s) ds dF(y) \right| \\ &\leq \int_0^x \int_0^{x-y} |w_1(s) - w_2(s)| ds dF(y) \\ &\leq K \|w_1 - w_2\|. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Somit folgt mit (5.14) und (5.15) insgesamt

$$\begin{aligned} |M(W_1)(x) - M(W_2)(x)| &= \left| \lambda(W_1(x) - W_2(x)) - \lambda \int_0^x (W_1(x-y) - W_2(x-y)) dF(y) \right| \\ &\leq \lambda \left(|W_1(x) - W_2(x)| + \left| \int_0^x W_1(x-y) - W_2(x-y) dF(y) \right| \right) \\ &\leq 2\lambda K \|w_1 - w_2\|. \end{aligned}$$

Angenommen für jedes $x \in [0, K]$ gilt $Tw_1(x) \geq Tw_2(x)$, wobei $Tw_2(x) = T_{w_2}(a_2^*, x)$ ist, dann ist

$$\begin{aligned}
Tw_1(x) - Tw_2(x) &= Tw_1(x) - T_{w_2}(a_2^*, x) \\
&\leq T_{w_1}(a_2^*, x) - T_{w_2}(a_2^*, x) \\
&= \frac{2\{M(W_1)(x) - M(W_2)(x) - [c + rx + (\mu - r)a_2^*][w_1(x) - w_2(x)]\}}{\sigma^2(a_2^*)^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a_2^* + \sigma_1^2} \\
&\leq \frac{2\{2\lambda K\|w_1 - w_2\| - [c + rx + (\mu - r)a_2^*][w_1(x) - w_2(x)]\}}{\sigma^2(a_2^*)^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a_2^* + \sigma_1^2} \\
&\leq \frac{2\{2\lambda K\|w_1 - w_2\| + [c + rK + (\mu - r)A]\|w_1 - w_2\|\}}{\sigma_1^2} \\
&= C(K)\|w_1 - w_2\|,
\end{aligned}$$

mit $C(K) = \frac{2[2\lambda K + c + rK + (\mu - r)A]}{\sigma_1^2}$.

Somit ist der Operator T Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $C(K)$.

Für den Operator $\mathcal{T}w(x) := \int_0^x Tw(y)dy + 1$, $w \in C([0, K])$ gilt dann

$$\|\mathcal{T}w_1 - \mathcal{T}w_2\| \leq KC(K)\|w_1 - w_2\| < \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|,$$

für ein K mit $KC(K) < \frac{1}{2}$. Daraus folgt, dass der Operator \mathcal{T} eine Kontraktion (d.h. Lipschitz-stetig mit Konstante $\in [0, 1)$) auf $C([0, K])$ ist.

Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz (siehe [6]) folgt nun, dass in $C([0, K])$ ein Fixpunkt v von \mathcal{T} existiert, sodass

$$v = \mathcal{T}v, \tag{5.16}$$

gilt. Die Lösung kann, da K beliebig gewählt war, ohne Weiteres auf das Intervall $[0, \infty)$ erweitert werden.

Leitet man nun (5.16) ab, so erhält man

$$v' = (\mathcal{T}v)' = \left(\int_0^x Tv(y) dy + 1 \right)' = Tv(x),$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Sei nun

$$V(x) = \int_0^x v(s)ds, \tag{5.17}$$

wobei die stetig differenzierbare Funktion v , die Lösung aus Lemma 5.1 ist.

Lemma 5.2. *Die Funktion $v(x)$ ist positiv auf $[0, \infty)$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt per Widerspruch, d.h. es wird angenommen, dass $\exists \tilde{x} \in [0, \infty) : v(\tilde{x}) \leq 0$. Definiere dazu

$$x_0 := \inf\{x \geq 0 : v(x) = 0\}.$$

Nun sei angenommen, dass $x_0 < \infty$ ist. Dann gilt $v(x_0) = 0$ und $v(x)$ ist monoton fallend auf $[0, x_0]$, d.h.

$$\begin{aligned} v'(x_0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{v(x_0) - v(x_0 - \epsilon)}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-v(x_0 - \epsilon)}{\epsilon} \leq 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Wegen Lemma (5.1) gilt jedoch

$$\begin{aligned} v'(x_0) \stackrel{(5.13)}{=} Tv(x_0) &= \inf_{0 \leq a \leq A} T_v(a, x_0) = \inf_{0 \leq a \leq A} \frac{2\{M(V)(x_0) - [c + rx_0 + (\mu - r)a]v(x_0)\}}{a^2\sigma^2 + 2\rho\sigma\sigma_1a + \sigma_1^2} \\ &= \inf_{0 \leq a \leq A} \frac{2M(V)(x_0)}{a^2\sigma^2 + 2\rho\sigma\sigma_1a + \sigma_1^2}. \end{aligned}$$

Da $v(x)$ monoton fallend auf $[0, x_0]$ ist, folgt

$$M(V)(x_0) = \lambda[v(x_0) - \int_0^{x_0} v(x_0 - s)dF(s)] = -\lambda \int_0^{x_0} v(x_0 - s)dF(s) = \int_{x_0}^0 v(x_0 - s)dF(s) > 0,$$

was ein Widerspruch zu (5.18) ist. Daher muss $x_0 = \infty$ gelten und $v(x)$ ist somit positiv auf ganz $[0, \infty)$. \square

Der nächste Satz besagt, dass die Lösung der HJB-Gleichung (5.7) ein Vielfaches der maximalen Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta(x)$, wie sie in (5.6) definiert wurde, ist.

Die Aussage ist ohne Beweis in [3] zu finden. In dieser Arbeit wird der Beweis genauer ausgeführt. Dieser hält sich im Wesentlichen an den Beweis aus [4, Kapitel 4], in dem die Aussage für das Modell ohne Störterm gezeigt wurde.

Satz 5.1. *Es sei g eine positive, wachsende und zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $[0, \infty)$, welche die HJB-Gleichung (5.7) löst. Dann ist g beschränkt und die maximale Überlebenswahrscheinlichkeits-Funktion ist durch $\delta(x) = g(x)/g(\infty)$ gegeben.*

Weiters ist $\pi^ = \{a^*(t)\}_{t \geq 0}$, mit $a^*(t) = a_\delta^*(X_t^{\pi^*})$, die zugehörige optimale Investmentstrategie und $X_t^{\pi^*}$ die freie Reserve zum Zeitpunkt t unter Verwendung von π^* .*

Für den Beweis dieses Satzes werden die nächsten drei Hilfslemmata benötigt, deren Beweise in [12], [4] und [2] zu finden sind.

Folgendes Lemma besagt, dass Ruin niemals durch Investments verursacht wird, wenn bei einer geringen Reserve eine konstante Investmentstrategie zugrundegelegt wird.

Lemma 5.3. *Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine zulässige Strategie $\pi = \{a(t)\}_{t \geq 0}$, sodass im Falle einer geringen Reserve $X_t^\pi (x \rightarrow 0)$ die Strategie $a(t) \equiv c$, $c > 0$ konstant ist gilt:*

$$\mathbb{P}(\tau^\pi < \tau_{n+1} | \tau^\pi > \tau_n) = 0,$$

wobei τ^π der in (5.5) definierte Ruinzeitpunkt ist und mit $0 = \tau_0, \tau_1, \dots$ die Eintrittszeiten der Schäden bezeichnet werden.

Lemma 5.4. *Für jede zulässige Kontrollstrategie $\pi = \{a(t)\}_{t \geq 0} \in [0, A]$ gilt*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t \rightarrow \infty} X_t^\pi, \tau^\pi = \infty\right) + \mathbb{P}(\tau^\pi < \infty) = 1.$$

Lemma 5.5. *Es existiert eine zulässige Kontrollstrategie π , sodass die Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta^\pi(x)$ für alle $x \geq 0$ positiv ist.*

Beweis von Satz 5.1.

Für jedes $\epsilon > 0$ kann die Funktion g zu g_ϵ fortgesetzt werden, sodass g_ϵ wachsend und zweimal stetig differenzierbar auf $(-\infty, \infty)$ ist:

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{für } x \in (-\infty, -\epsilon) \end{cases}$$

Für jede zulässige Strategie π und Konstante $M > 0$ definiert man nun den Austrittszeitpunkt aus dem Intervall $(0, M)$ als

$$\tau_M^\pi := \inf \{t \geq 0 : X_t^\pi \notin (0, M)\}.$$

Mit $\tau_M^{\pi^*}$ wird dabei der erste Austrittszeitpunkt aus $(0, M)$ unter Verwendung der optimalen Strategie π^* bezeichnet.

Wendet man nun die Itô-Formel (2.3) an, so erhält man

$$\begin{aligned} g_\epsilon(X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}}) &= g(x) + \int_0^{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} [c + rX_s^* + (\mu - r)a_g^*(X_s^*)]g'(X_s^*) ds \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} \{\sigma^2[a_g^*(X_s^*)]^2 + 2\sigma\sigma_1\rho a_g^*(X_s^*) + \sigma_1^2\} g''(X_s^*) ds \\ &+ \int_0^{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} \sqrt{\sigma^2[a_g^*(X_s^*)]^2 + 2\sigma\sigma_1\rho a_g^*(X_s^*) + \sigma_1^2} g'(X_s^*) dW_s \\ &+ \sum_{\substack{s \leq t \wedge \tau_M^{\pi^*} \\ X_s^* < X_{s-}^*}} [g_\epsilon(X_s^*) - g(X_{s-}^*)] \end{aligned}$$

Mit dem Operator \mathcal{L} , wie er in (5.8) definiert ist, und

$$\begin{aligned} M_t^{(1)} &= \int_0^{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} \sqrt{\sigma^2[a_g^*(X_s^*)]^2 + 2\sigma\sigma_1\rho a_g^*(X_s^*) + \sigma_1^2} g'(X_s^*) dW_s, \\ M_t^{(2)} &= \lambda \int_0^{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} [g(X_s^*) - \int_0^s g(X_u^* - u) dF(u)] ds + \sum_{\substack{s \leq t \wedge \tau_M^{\pi^*} \\ X_s^* < X_{s-}^*}} [g_\epsilon(X_s^*) - g(X_{s-}^*)], \end{aligned}$$

lässt sich die Gleichung vereinfachen zu

$$g_\epsilon(X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}}) = g(x) + \int_0^{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} \mathcal{L}a_g^*(X_s^*)g(X_s^*) ds + M_t^{(1)} + M_t^{(2)}.$$

Da g laut Voraussetzung die HJB-Gleichung erfüllt, gilt $\mathcal{L}a_g^*(X_s^*)g(X_s^*) = 0$. Der Integrand in $M_t^{(1)}$ ist offensichtlich beschränkt und $M_t^{(1)}$ und $M_t^{(2)}$ sind beides Martingale. Bildet man nun auf beiden Seiten der oberen Gleichung die Erwartungswerte, so verbleibt nur mehr

$$\mathbb{E}[g_\epsilon(X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}})] = g(x). \quad (5.19)$$

Mit der gleichen Überlegung gilt für jede beliebige zulässige Strategie $\pi = \{u_t\}_{t \geq 0}$ wegen $\mathcal{L}^{(u_s)}g(X_s^\pi) \leq 0$:

$$\mathbb{E}[g_\epsilon(X_{t \wedge \tau_M^\pi})] \leq g(x).$$

Bildet man die Grenzwerte für $t \rightarrow \infty$ und danach $M \rightarrow \infty$, so erhält man mit der Anwendung des Lemmas von Fatou (siehe [13]):

$$\mathbb{E}[g_\epsilon(X_{\tau^\pi})] \leq g(x),$$

und wegen Lemma 5.4 gilt auch

$$\mathbb{E}[g_\epsilon(X_{\tau^\pi})] \geq g(\infty)\mathbb{P}(\tau^\pi = \infty).$$

Aus Lemma 5.5 folgt, dass $g(\infty) < \infty$ ist und es gilt

$$\mathbb{P}(\tau^\pi = \infty) \leq \frac{g(x)}{g(\infty)}. \quad (5.20)$$

Andererseits folgt aus (5.19):

$$\begin{aligned} g(x) &= \mathbb{E}[g_\epsilon(X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}})] \\ &= \mathbb{E}[g_\epsilon(X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}})] \mathbb{1}_{\{X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} > 0\}} + g(0) \underbrace{\mathbb{P}(X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} = 0)}_{=0, \text{ wegen Lemma 5.3}} \\ &\quad + \mathbb{E}[g_\epsilon(X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}})] \mathbb{1}_{\{-\epsilon < X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} < 0\}} \\ &\leq g(\infty)\mathbb{P}(X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} > 0) + g(0)\mathbb{P}(-\epsilon < X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} < 0). \end{aligned}$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ konvergiert die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-\epsilon < X_{t \wedge \tau_M^{\pi^*}} < 0) \rightarrow 0$, da die unabhängig, identisch verteilten Claims eine stetige Dichtefunktion besitzen.

Bildet man nun wieder die Grenzwerte für $t \rightarrow \infty$ und $M \rightarrow \infty$, so erhält man

$$g(x) \leq g(\infty)\mathbb{P}(\tau^\pi = \infty),$$

woraus mit (5.20) die Gleichheit der beiden Seiten folgt und die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit somit die Form $\mathbb{P}(\tau^\pi = \infty) = \frac{g(x)}{g(\infty)}$ besitzt. \square

Da V aus (5.17) eine positive, wachsende und zweimal stetig differenzierbare Funktion auf $[0, \infty)$ ist, welche die HJB- Gleichung löst (leicht nachzurechnen), sind die Voraussetzungen von Lemma 5.1 erfüllt. Deshalb lässt sich der nächste Satz formulieren (vgl. [3]):

Satz 5.2. *Die Funktion V ist beschränkt und wachsend auf $[0, \infty)$. Die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit ist gegeben als*

$$\delta(x) = V(x)/V(\infty).$$

Lemma 5.6. *Es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $v'(x) < 0$ für $x \in [0, \epsilon)$ gilt.*

Beweis. Die Funktion v erfüllt die Voraussetzungen aus Lemma (5.1), somit gilt

$$\begin{aligned} v'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} Tv(x) = \inf_{0 \leq a \leq A} \lim_{x \rightarrow 0^+} T_v(a, x) \\ &= \inf_{0 \leq a \leq A} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\{M(V)(x) - [c + rx + (\mu - r)a]v(x)\}}{a^2\sigma^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a + \sigma_1^2} \\ &= \inf_{0 \leq a \leq A} \frac{2\{-[c + (\mu - r)a]\}}{a^2\sigma^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a + \sigma_1^2}. \end{aligned}$$

Da $(\mu - r)a > 0$ ist und die Prämienrate c ebenfalls positiv sein muss, ist für $x \in [0, \epsilon)$ $v'(x) < 0$. \square

5.3.1.1 Verifikationssatz ²

In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Parametervoraussetzungen die optimale Strategie die Werte 0, A oder $a_V(x)$ annimmt.

Im folgenden Satz seien ρ_1 und ρ_2 definiert als

$$\rho_1 = \frac{(\mu - r)\sigma_1}{2c\sigma}, \quad \rho_2 = \rho_1 - \frac{(\mu - r)A^2 + 2cA}{\frac{2c\sigma_1}{\sigma}} = \frac{(\mu - r)\sigma_1}{2c\sigma} - \frac{\sigma[(\mu - r)A^2 + 2cA]}{2c\sigma_1}.$$

Satz 5.3. *Es existiert ein $\epsilon > 0$, sodass*

(a) *falls $\rho < \rho_2$, V die Gleichung*

$$\sup_{0 \leq a \leq A} \mathcal{L}^a V(x) = \mathcal{L}^A V(x) = 0, \quad (5.21)$$

löst, wobei $x \in (0, \epsilon)$ ist;

(b) *falls $\rho_2 < \rho < \rho_1$, V die Gleichung*

$$\sup_{0 \leq a \leq A} \mathcal{L}^a V(x) = \mathcal{L}^{a_V(x)} V(x) = 0, \quad (5.22)$$

löst, wobei $x \in (0, \epsilon)$ ist;

(c) *falls $\rho > \rho_1$, V die Gleichung*

$$\sup_{0 \leq a \leq A} \mathcal{L}^a V(x) = \mathcal{L}^0 V(x) = 0, \quad (5.23)$$

löst, wobei $x \in (0, \epsilon)$ ist.

Beweis. ad (a): Angenommen es ist $\rho < \rho_2$ und die Funktion $f(a)$ mit $a \in [0, A]$ sei folgendermaßen definiert

$$f(a) := \frac{c + (\mu - r)a}{\frac{1}{2}(\sigma^2 a^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a + \sigma_1^2)} > 0.$$

Um die Extremstellen der Funktion zu berechnen, wird zunächst die erste Ableitung betrachtet

$$f'(a) = \frac{2(\mu - r)}{\sigma^2 a^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a + \sigma_1^2} - \frac{2[2\sigma^2 a + 2\rho\sigma\sigma_1][(\mu - r)a + 2c]}{(\sigma^2 a^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a + \sigma_1^2)^2}.$$

Für $f'(a) = 0$ ergeben sich die beiden Lösungen

$$a_1, a_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_1^2 / \sigma^2 - 2(\mu - r)\rho c \sigma_1 / \sigma}}{\mu - r}.$$

Auf dem Intervall (a_1, a_2) ist die Funktion f monoton wachsend.

Ist $\rho < \rho_1$, so lässt sich herleiten, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_1^2 / \sigma^2 - 2(\mu - r)\rho c \sigma_1 / \sigma} &\geq \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_1^2 / \sigma^2 - 2(\mu - r)\rho_1 c \sigma_1 / \sigma} \\ &= \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_1^2 / \sigma^2 - 2(\mu - r)^2 \frac{\sigma_1}{2c\sigma} c \sigma_1 / \sigma} \\ &= \sqrt{c^2 + 0} = c, \end{aligned}$$

²vgl. [3]

gilt, woraus folgt, dass $a_1 < 0 < a_2$ ist.

Für $\rho < \rho_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_1^2 / \sigma^2 - 2(\mu - r) \rho c \sigma_1 / \sigma}}{\mu - r} \\
&> \frac{-c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 \sigma_1^2 / \sigma^2 - 2(\mu - r) \frac{(\mu - r) \sigma_1}{2c\sigma} - \frac{\sigma[(\mu - r)A^2 + 2cA]}{2c\sigma_1} c \sigma_1 / \sigma}}{\mu - r} \\
&= \frac{-c + \sqrt{c^2 + (\mu - r)^2 [A^2 + 2cA]}}{\mu - r} = \frac{-c + \sqrt{(c + (\mu - r)A)^2}}{\mu - r} = A,
\end{aligned}$$

Somit ist die Bedingung $\rho < \rho_2$ äquivalent zu $A < a_2$. Deshalb ist die Funktion nicht nur auf (a_1, a_2) wachsend, sondern auch auf dem eingeschränkten Intervall $(0, A)$.

Da V die HJB- Gleichung (3.5) erfüllt, lässt sich ein $a^*(x) \in [0, A]$ finden, sodass $\mathcal{L}^{a^*(x)} V(x) = 0$ ist.

Von nun an wird zur Vereinfachung mit $v(x)$ die erste Ableitung und mit $v'(x)$ die zweite Ableitung von $V(x)$ bezeichnet. Setzt man in die Gleichung (5.8) ein und formt nach $\frac{v'(x)}{v(x)}$ um, so ergibt das:

$$\begin{aligned}
\frac{v'(x)}{v(x)} &= \frac{M(V)(x)/v(x) - [c + (\mu - r)a^*(x) + rx]}{\frac{1}{2}\sigma^2(a^*(x))^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a^*(x) + \sigma_1^2} \\
&= \frac{M(V)(x)/v(x) - rx}{\frac{1}{2}\sigma^2(a^*(x))^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a^*(x) + \sigma_1^2} - f(a^*(x)) \\
&\geq \frac{M(V)(x)/v(x) - rx}{\frac{1}{2}\sigma^2(a^*(x))^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a^*(x) + \sigma_1^2} - f(A),
\end{aligned} \tag{5.24}$$

wobei im letzten Schritt die Monotonie der Funktion verwendet wurde. Mit dem Resultat aus (5.24) kann man den Maximizer $a_V(x)$, wie er in (5.9) definiert ist, abschätzen:

$$a_V(x) \geq \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{f(A) - \frac{M(V)(x)/v(x) - rx}{\frac{1}{2}\sigma^2(a^*(x))^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a^*(x) + \sigma_1^2}} - \rho\sigma_1/\sigma. \tag{5.25}$$

Für kleines x sind $\lim_{x \rightarrow 0} M(V)(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0} v(x) = 1$.

Der restliche Term aus (5.25) ist somit weiter abschätzbar:

$$\begin{aligned}
\frac{(\mu - r)}{\sigma^2 f(A)} - \frac{\sigma_1}{\sigma} \rho &= \frac{(\mu - r)[\sigma^2 A^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 A + \sigma_1^2]}{2\sigma^2[c + (\mu - r)A]} - \frac{\sigma_1}{\sigma} \rho \\
&= \frac{(\mu - r)[\sigma^2 A^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 A + \sigma_1^2]}{2\sigma^2[c + (\mu - r)A]} - \frac{2\rho\sigma\sigma_1(c + (\mu - r)A)}{2\sigma^2[c + (\mu - r)A]} \\
&= \frac{(\mu - r)[\sigma^2 A^2 + \sigma_1^2] + (\mu - r)2\rho\sigma\sigma_1 A - (\mu - r)2\rho\sigma\sigma_1 A - 2\rho\sigma\sigma_1 c}{2\sigma^2[c + (\mu - r)A]} \\
&\stackrel{(\rho < \rho_2)}{>} \frac{(\mu - r)[\sigma^2 A^2 + \sigma_1^2] - 2\sigma\sigma_1 c \frac{(\mu - r)\sigma_1^2 - [(\mu - r)A + 2c]\sigma^2 A}{2\sigma\sigma_1 c}}{2\sigma^2[c + (\mu - r)A]} \\
&= \frac{(\mu - r)\sigma^2 A^2 + (\mu - r)\sigma_1^2 - (\mu - r)\sigma_1^2 + (\mu - r)\sigma^2 A^2 + 2c\sigma^2 A}{2\sigma^2[c + (\mu - r)A]} \\
&= \frac{2A\sigma^2[c + (\mu - r)A]}{2\sigma^2[c + (\mu - r)A]} = A.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt somit:

$$a_V(x) \geq \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{f(A) - \frac{M(V)(x)/v(x) - rx}{\frac{1}{2}\sigma^2(a^*(x))^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 a^*(x) + \sigma_1^2}} - \rho\sigma_1/\sigma > A, \quad (5.26)$$

Wegen Lemma 5.6 gilt $v'(x) < 0$ für kleine x . Wegen der Relation (5.26) gilt somit

$$\sup_{0 \leq a \leq A} \mathcal{L}^a V(x) = \mathcal{L}^A V(x).$$

Weil V die HJB- Gleichung $\sup_{0 \leq a \leq A} \mathcal{L}^a V(x) = 0$ erfüllt, ist Teil (a) des Satzes bewiesen.

ad (c): Nun wird der Fall $\rho > \rho_1$ betrachtet. Wegen $\mathcal{L}^0 V(x) \leq 0$ ist

$$\frac{v'(x)}{v(x)} \leq \frac{M(V)(x)/v(x) - (c + rx)}{\frac{1}{2}\sigma_1^2}.$$

Des Weiteren ist für kleine x

$$a_V(x) \leq \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\frac{1}{2}\sigma_1^2}{c - [M(V)(x)/v(x) + rx]}.$$

Wegen der Bedingung $\rho > \rho_1$ gilt ebenfalls

$$\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\frac{1}{2}\sigma_1^2}{c - [M(V)(x)/v(x) + rx]} < 0,$$

weshalb $\sup_{0 \leq a \leq A} \mathcal{L}^a V(x) = \mathcal{L}^0 V(x)$ gilt.

ad (b): (5.22) wird per Widerspruch bewiesen. Nimmt man an, dass der Maximierer von $\mathcal{L}^a V(x)$ nicht $a_V(x)$, sondern 0 oder A ist, dann muss entweder (5.21) oder (5.23) gelten.

Fall 1: Ist $\mathcal{L}^A V(x) = 0$, so folgt, unter der Bedingung $\rho > \rho_2$, für kleines x

$$a_V(x) = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{1}{f(A) - \frac{M(V)(x)/v(x) - rx}{\frac{1}{2}(\sigma^2 A^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 A + \sigma_1^2)}} - \rho\sigma_1/\sigma < A.$$

Aus diesem Grund ist der Maximierer von $\mathcal{L}^a V(x)$ nicht A und es muss $\mathcal{L}^A V(x) < 0$ sein. (Widerspruch!)

Fall 2: $\mathcal{L}^0 V(x) = 0$. Weil $\rho < \rho_1$ ist, gilt für kleine x

$$a_V(x) = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\frac{1}{2}\sigma_1^2}{c - [M(V)(x)/v(x) + rx]} - \rho\sigma_1/\sigma > 0.$$

Deshalb ist der Maximierer von $\mathcal{L}^0 V(x) = 0$ nicht 0 und es muss $\mathcal{L}^0 V(x) < 0$ erfüllt sein. (Widerspruch!).

Somit muss im Falle der Bedingung $\rho_2 < \rho < \rho_1$ folgen, dass der Maximierer von $\mathcal{L}^a V(x) = 0$ für kleine x gleich $a_V(x)$ sein muss. □

Bemerkung 5.2.

1. Aus Satz 5.3 folgt direkt, dass bei einer geringen Reserve $x \in (0, \epsilon)$, die optimale Kontrollstrategie $a_V^* \in [0, A]$ die Form

$$a_V^*(x) = \begin{cases} A & \text{falls } \rho < \rho_2, \\ a_V(x) & \text{falls } \rho_2 < \rho < \rho_1, \\ 0 & \text{falls } \rho > \rho_1, \end{cases}$$

besitzt. Lässt man x in (5.13) gegen null streben, sieht man, dass $a_V^*(0^+)$ die Gleichung

$$\frac{v'(0^+)}{v(0^+)} = -\frac{2[c + (\mu - r)a_V^*(0^+)]}{\sigma^2 a_V^*(0^+)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma a_V^*(0^+) + \sigma_1^2}, \quad (5.27)$$

löst. Setzt man nun (5.27) in die Definition von $a_V(x)$ (5.9) ein, so gilt ebenfalls:

$$\frac{v'(0^+)}{v(0^+)} = -\frac{1}{\frac{\sigma^2}{\mu-r}(a_V^*(0^+) + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma})}. \quad (5.28)$$

Nachdem Gleichheit gelten muss, löst $a_V^*(0^+)$ die quadratische Gleichung

$$-\frac{1}{\frac{\sigma^2}{\mu-r}(a_V^*(0^+) + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma})} = -\frac{2[c + (\mu - r)a_V^*(0^+)]}{\sigma^2 a_V^*(0^+)^2 + 2\rho\sigma_1\sigma a_V^*(0^+) + \sigma_1^2},$$

welche sich in vereinfachter Form als

$$(\mu - r)a_V^*(0^+)^2\sigma^2 + 2c\sigma^2 a_V^*(0^+) + [2\rho\sigma_1\sigma c - \sigma_1^2(\mu - r)] = 0 \quad (5.29)$$

darstellen lässt.

Somit erhält man die folgende (reelle) Lösung:

$$a_V^*(0^+) = -\frac{c}{\mu - r} + \sqrt{\frac{c^2}{(\mu - r)^2} + \frac{2\sigma_1 c}{\sigma(\mu - r)}(\rho_1 - \rho)}. \quad (5.30)$$

Es gilt $0 < a_V^*(0^+) < A$.

2. Da laut Lemma 5.1 $v(0) = 1$ gilt, folgt aus Satz 5.3 und den Gleichungen (5.27), (5.28) sowie (5.30), dass $v'(0^+)$ die folgende Gestalt hat:

$$v'(0^+) = \begin{cases} -\frac{2[c+(\mu-r)A]}{\sigma^2 A^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 A + \sigma_1^2} & \text{falls } \rho < \rho_2, \\ -\frac{2c}{\sigma_1^2} & \text{falls } \rho > \rho_1, \\ -\frac{\mu-r}{\sigma^2[a_V^*(0^+) + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma}]} = -\frac{\mu-r}{\sigma^2[\rho\frac{\sigma_1}{\sigma} - \frac{c}{\mu-r} + \sqrt{\frac{c^2}{(\mu-r)^2} + \frac{2\sigma_1 c}{\sigma(\mu-r)}(\rho_1 - \rho)}} & \text{falls } \rho_2 < \rho < \rho_1. \end{cases}$$

Da davon ausgegangen wird, dass die Variablen $c, \mu, r, A, a, \rho, \sigma, \sigma_1$ alle positiv sind und o.B.d.A angenommen wurde, dass $\mu > r$ ist, folgt, dass in allen Fällen $v'(0^+) = V''(0^+) < 0$ ist, d.h. dass V nahe bei Null konkav ist. Dies stimmt mit der Aussage des Lemmas 5.6 überein.

5.3.2 Der unbeschränkte Fall

In diesem Abschnitt wird der Fall betrachtet, dass der in das risikobehaftete Asset investierte Anteil der freien Reserve aus dem ganzen Intervall $\mathcal{A} = (-\infty, \infty)$ sein darf und somit keiner Beschränkung unterliegt. Zudem wird angenommen, dass $\mu \neq r$ ist.

Sei nun $V(x)$ die Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (3.5) mit den Eigenschaften

$$V'(x) > 0, \quad V''(x) < 0, \quad V(0) = 0 \quad \text{und} \quad V'(0^+) = 1. \quad (5.31)$$

Der Maximizer $a_V(x)$ der HJB-Gleichung wurde schon in Proposition 5.1 berechnet:

$$a_V(x) := -\frac{(\mu - r)V'(x)}{\sigma^2 V''(x)} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma}, \quad (5.32)$$

mit $V''(x) < 0$. Im unbeschränkten Fall ist die optimale Kontrollstrategie gleich diesem Maximizer: $a_V^* = a_V$ und es gilt die HJB-Gleichung

$$\mathcal{L}^{a_V(x)} V(x) = 0. \quad (5.33)$$

Setzt man den Maximizer in die HJB-Gleichung ein, so erhält man:

$$\left[c + rx - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma} \right] V'(x) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(1 - \rho^2)V''(x) + \lambda \mathbb{E}[V(x - Y) - V(x)] = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{(V'(x))^2}{V''(X)}.$$

Bemerkung 5.3. Für $x \rightarrow 0$ ist die optimale Strategie $a_V^*(0^+)$ wie in (5.30) gegeben.

Als nächstes soll gezeigt werden, dass eine Funktion V mit den Eigenschaften (5.31) existiert, welche die HJB-Gleichung (3.5) löst.

Sei nun $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$. Wegen der Eigenschaft $V(0) = 0$ lässt sich die obige Gleichung schreiben als:

$$\begin{aligned} \left[c + rx - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma} \right] V'(x) + \frac{1}{2}\sigma_1^2(1 - \rho^2)V''(x) - \lambda \int_0^x \bar{F}(y)V'(x - y) dy = \\ = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{(V'(x))^2}{V''(X)}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Definiert man $L_1 V'(x)$ und $L_2 V'(x)$ als

$$\begin{aligned} L_1 V'(x) &= \left[c + rx - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma} \right] V'(x) - \lambda \int_0^x \bar{F}(y)V'(x - y) dy, \\ L_2 V'(x) &= \frac{(\mu - r)}{\sigma} V'(x), \end{aligned} \quad (5.35)$$

so erhält man die vereinfachte, quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2(1 - \rho^2)(V''(x))^2 + L_1 V'(x)V''(x) - \frac{1}{2}(L_2 V'(x))^2 = 0. \quad (5.36)$$

Unter den Bedingungen $V'(x) > 0$ und $V''(x) < 0$ lässt sich eine Lösung $L V'(x)$ von (5.36) berechnen, die

$$V'' = L V'(x), \quad (5.37)$$

erfüllt und gegeben ist als

$$LV(x) = -\frac{L_1V'(x) + \sqrt{(L_1V'(x))^2 + \sigma_1^2(1-\rho^2)(L_2V'(x))^2}}{\sigma_1^2(1-\rho^2)}. \quad (5.38)$$

Analog zu Lemma 5.1 im beschränkten Fall, lässt sich für den unbeschränkten Fall ein ähnliches Lemma formulieren. Der Beweis erfolgt analog und wird hier nicht noch einmal ausgeführt.

Lemma 5.7. *Es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $v(x)$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ mit*

$$v'(x) = Lv(x), \quad v(0) = 1. \quad (5.39)$$

Von nun an sei v eine solche Funktion, die Lemma 5.7 erfüllt und man schreibe

$$V(x) = \int_0^x v(y) dy. \quad (5.40)$$

Lemma 5.8. *Eine Funktion $v(x)$ wie aus Lemma 5.7 ist positiv auf $[0, \infty)$ und $v'(x)$ ist negativ auf $[0, \infty)$.*

Beweis. Der Beweis dieses Lemmas erfolgt analog dem von Lemma 5.2. \square

Bemerkung 5.4. *Ebenfalls analog zum beschränkten Fall lässt sich zeigen, dass die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit gegeben ist durch $\delta(x) = V(x)/V(\infty)$, wobei V wie in (5.40) dargestellt werden kann und eine Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung ist. (Vgl. Lemma 5.1)*

Im nächsten Schritt wird das asymptotische Verhalten der Lösung der HJB- Gleichung bei kleiner Ausgangsreserve x betrachtet.

Definiere zunächst

$$\tilde{v} := v - 1, \quad c_\rho := c - \frac{\rho(\mu - r)\sigma_1}{\sigma} \quad \text{und} \quad \sigma_\rho^2 := \sigma_1^2(1 - \rho^2). \quad (5.41)$$

\tilde{v} erfüllt wegen (5.34) offensichtlich die Gleichung

$$(c_\rho + rx)(\tilde{v}(x) + 1) + \frac{1}{2}\sigma_\rho^2\tilde{v}'(x) - \lambda \int_0^x \bar{F}(y)(\tilde{v}(x-y) + 1) dy = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{(\tilde{v}(x) + 1)^2}{\tilde{v}'(x)},$$

mit Anfangsbedingung $\tilde{v}(0^+) = 0$.

Die Multiplikation der Gleichung mit dem Faktor $\tilde{v}'(x)$ ergibt

$$\begin{aligned} (c_\rho + rx)(\tilde{v}(x) + 1)\tilde{v}'(x) + \frac{1}{2}\sigma_\rho^2(\tilde{v}'(x))^2 - \lambda\tilde{v}'(x) \int_0^x \bar{F}(y)(\tilde{v}(x-y) + 1) dy \\ = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}(\tilde{v}(x) + 1)^2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Es lässt sich eine Lösung von (5.42) finden, sodass diese und ihre Ableitung folgende Darstellungen besitzen (vgl. [3]):

$$\tilde{v}(x) = \alpha x^\beta(1 + o(1)), \quad \tilde{v}'(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}(1 + o(1)), \quad \text{für } x \rightarrow 0,$$

wobei $\alpha, \beta > 0$ sind.

Weil $\bar{F}(x) = 1 + o(1)$ für $x \rightarrow 0$ ist, lässt sich (5.42) in dem Fall schreiben als

$$c_\rho \tilde{v}'(0^+) + \frac{1}{2} \sigma_\rho^2 (\tilde{v}'(0^+))^2 = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}.$$

Dann ist die Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$\tilde{v}'(0^+) = -\frac{c_\rho}{\sigma_{\rho^2}} - \sqrt{\frac{c_\rho^2}{\sigma_{\rho^4}} + \frac{2\gamma}{\sigma_{\rho^2}}} = -\frac{c_\rho + \sqrt{c_\rho^2 + 2\gamma\sigma_\rho^2}}{\sigma_\rho^2}.$$

Somit muss $\beta = 1$ sein. Dann gilt:

$$\left[c_\rho \alpha + \frac{1}{2} \sigma_\rho^2 \alpha^2 \right] (1 + o(1)) = \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}, \quad (5.43)$$

woraus folgt, dass $\alpha = \tilde{v}'(0^+)$ ist.

Zu Beginn wurde geklärt, dass $\tilde{v}'(0^+) = V''(0^+) < 0$ ist.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} V'(x) &= v(x) = 1 + \tilde{v}(x) = 1 + \alpha x(1 + o(1)) \quad \text{für } x \rightarrow 0, \\ V''(x) &= \alpha + o(1) \quad \text{für } x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{c_\rho + \sqrt{c_\rho^2 + 2\gamma\sigma_\rho^2}}{\sigma_\rho^2} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2 \left[\rho \frac{\sigma_1}{\sigma} - \frac{c}{\mu - r} + \sqrt{\frac{c^2}{(\mu - r)^2} + \frac{2\sigma_1 c}{\sigma(\mu - r)}(\rho_1 - \rho)} \right]} \\ &= \frac{\mu - r}{\sigma^2 [a_{V^*}^*(0^+) + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma}]}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

wobei $a_{V^*}^*(0^+)$ wie in (5.30) definiert ist.

Insgesamt hat $V(x)$ somit die asymptotische Darstellung:

$$V(x) = x + \frac{\alpha}{2} x^2 (1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0.$$

Wie in Bemerkung 5.4 bereits erwähnt wurde, kann man die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit mit der Wertfunktion V darstellen via $\delta(x) = V(x)/V(\infty)$. Somit kann man folgendes Theorem formulieren:

Satz 5.4. *Es gilt*

$$\delta(x) = C \left[x + \frac{\alpha}{2} x^2 (1 + o(1)) \right], \quad x \rightarrow 0,$$

wobei $C = \frac{1}{V(\infty)} > 0$ ist.

Somit wird die intuitive Überlegung, dass wenn die Reserve gegen Null strebt, die Überlebenswahrscheinlichkeit ebenfalls gegen Null konvergiert, bestätigt.

Um eine Formel für die optimale Strategie (5.32) geben zu können, muss noch eine asymptotische Darstellung für $V''(x)$ gefunden werden.

Dazu führt man zunächst die Substitution durch

$$\tilde{v}(x) = \alpha x(1 + z(x)), \quad x \rightarrow 0, \quad (5.46)$$

wobei α wie in (5.45) definiert ist.

Dann ist

$$\tilde{v}'(x) = \alpha(1 + z(x)) + \alpha x z'(x), \quad x \rightarrow 0. \quad (5.47)$$

Die Funktion $z(x)$ in (5.46) und (5.47) sei von der Form $z(x) = \eta x^\theta(1 + o(1))$, mit $\theta, \eta > 0$ (vgl. [3]).

Da $\tilde{v}(x)$ und $\tilde{v}'(x)$ die Gleichung (5.42) erfüllen müssen, folgt $\theta = 1$. Setzt man das in die Gleichung ein und formt nach η um, erhält man

$$\eta = \frac{\lambda - r + 2\gamma - \alpha c_\rho}{2(c_\rho + \alpha \sigma_\rho^2)}.$$

Setzt man η in (5.47) ein, so hat $V''(x)$ die Form

$$V''(x) = \tilde{v}'(x) = \alpha + 2\alpha\eta x(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0. \quad (5.48)$$

Nun sind die asymptotischen Darstellungen bei $x \rightarrow 0$ für V' und V'' bekannt und man kann (5.44) und (5.48) in die optimale Strategie (5.32) einsetzen:

$$\begin{aligned} a_V^*(x) &= -\frac{(\mu - r)V'(x)}{\sigma^2 V''(x)} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} \\ &= -\frac{(\mu - r)[1 + \alpha x(1 + o(1))]}{\sigma^2[\alpha + 2\alpha\eta x(1 + o(1))]} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} \\ &= -\frac{c}{\mu - r} + \sqrt{\frac{c^2}{(\mu - r)^2} + \frac{2\sigma_1 c}{\sigma(\mu - r)}(\rho_1 - \rho)} - \frac{\mu - r}{\sigma^2} \left(1 - \frac{2\eta}{\alpha}\right) x(1 + o(1)) \\ &= a_V^*(0^+) - \frac{\mu - r}{\sigma^2} \left(1 - \frac{2\eta}{\alpha}\right) x(1 + o(1)), \end{aligned}$$

dabei ist $a_V^*(0^+)$ wie in (5.30) definiert. Setzt man für η und α ein, so erhält man die folgende Darstellung für die gesuchte optimale Kontrollstrategie:

Satz 5.5. *Für die optimale Investmentstrategie gilt*

$$a_V^*(x) = a_V^*(0^+) - \left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} - \frac{\left[\lambda - r + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \right] \left[a_V^*(0^+) + c_\rho \frac{(\mu - r)}{\sigma^2} \right]}{\sqrt{c_\rho^2 + \frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2} \sigma_\rho^2}} \right) x(1 + o(1)), \quad (5.49)$$

wenn $x \rightarrow 0$.

Dabei ist $a_V^*(0^+)$ in (5.30) definiert und c_ρ und σ_ρ in (5.41).

Bemerkung 5.5. *Zu Beginn des Abschnittes wurde gefordert, dass $\mu \neq r$ ist. Im Fall $\mu = r$ gilt der Satz 5.4 ebenfalls. Die Variable α ist dabei gegeben durch $\alpha = -\frac{2c_\rho}{\sigma_\rho^2}$, was direkt aus der Gleichung (5.43) folgt.*

Die optimale Investmentstrategie ist für $\mu = r$ klarerweise konstant gleich $a_V^(x) = -\rho \frac{\sigma_1}{\sigma}$.*

6 | Spezialfall der exponentialverteilten Claims ¹

In diesem Kapitel wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schäden $Y_i, i = 1, \dots, N_t$ im betrachteten Ruinprozess (5.1) mit der Exponentialverteilung mit Erwartungswert $m = \frac{1}{k} > 0$ festgelegt, d.h. $Y_i \sim \text{Exp}(k)$.

Zuerst wird die optimale Investmentstrategie, genauer ihr Verhalten bei $x \rightarrow 0$ und $x \rightarrow \infty$, für den unbeschränkten Fall berechnet.

Im zweiten Schritt wird dies auch für den beschränkten Fall getan, also unter der Forderung, dass der in das risikobehaftete Asset angelegte Anteil der freien Reserve positiv und unter einer vorgegebenen Grenze A sein muss.

6.1 Unbeschränkter Fall

Zuerst wird die optimale Strategie für $x \rightarrow \infty$ bestimmt, wobei $a_V(x)$ aus ganz \mathbb{R} sein darf. Es wird angenommen, dass $\mu \neq r$ ist. Im Fall $\mu = r$ ist die optimale Strategie wegen (5.9) konstant gleich $a_V^*(x) = -\rho \frac{\sigma_1}{\sigma}$.

Da die Claims exponentialverteilt sind, ist $\bar{F}(y) = e^{-ky}$. Einsetzen in (5.34) liefert mit der Bedingung, dass $V(0) = 0$ ist

$$(c_\rho + rx)V'(x) + \frac{1}{2}\sigma_\rho^2 V''(x) - \lambda \int_0^x e^{-ky} V'(x-y) dy - \lambda V(0)e^{-kx} = \frac{(\mu - r)^2 (V'(x))^2}{2\sigma^2 V''(x)},$$

wobei c_ρ und σ_ρ wie in (5.41) definiert sind.

Setzt man nun $u(x) = V'(x)e^{kx}$, so ist $u'(x) = e^{-kx}(u'(x) - ku(x))$ und die obige Gleichung lässt sich umformen zu

$$(c_\rho + rx)u(x) + \frac{1}{2}\sigma_\rho^2 (u'(x) - ku(x)) - \lambda \int_0^x u(y) dy - \lambda V(0) = \frac{(\mu - r)^2 (u^2(x))}{2\sigma^2 (u'(x) - ku(x))}.$$

Drückt man die optimale Strategie aus (5.9) mit den Funktionen $u(x)$ und $u'(x)$ aus, so hat sie die Form

$$a_V^*(x) = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{u(x)}{u'(x) - ku(x)} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma}.$$

¹vgl. [3]

Für

$$\tilde{a}_V(x) := a_V^*(x) + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma}, \quad (6.1)$$

gilt

$$(c_\rho + rx)u(x) - \frac{1}{2}\sigma_\rho^2 \frac{\mu - r}{\tilde{a}_V(x)\sigma^2} u(x) - \lambda \int_0^x u(y) dy - \lambda V(0) = -\frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} \frac{\tilde{a}_V(x)\sigma^2}{\mu - r} u(x).$$

Leite man diese Gleichung nach x ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} ru(x) + (c_\rho + rx)u'(x) - \frac{1}{2}\sigma_\rho^2 \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{u'(x)\tilde{a}_V(x) - u(x)(\tilde{a}_V(x)')}{(\tilde{a}_V(x))^2} - \lambda u(x) \\ = -\frac{(\mu - r)}{2} [u'(x)\tilde{a}_V(x) + u(x)(\tilde{a}_V(x))']. \end{aligned}$$

Werden beide Seiten durch $u(x)$ dividiert, so ist

$$\begin{aligned} r - \lambda + (c_\rho + rx) \left(k - \frac{\mu - r}{\sigma^2 \tilde{a}_V(x)} \right) - \frac{1}{2}\sigma_\rho^2 \frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{k\tilde{a}_V(x) - \frac{\mu - r}{\sigma^2} - \tilde{a}_V'(x)}{\tilde{a}_V^2(x)} \\ = -\frac{\mu - r}{2} \left[k\tilde{a}_V(x) - \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right] + \tilde{a}_V'(x). \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann weiter vereinfacht werden zu:

$$\begin{aligned} [\sigma^2 \tilde{a}_V^2(x) + \sigma_\rho^2] \tilde{a}_V'(x) = -\frac{\sigma^2}{m} \tilde{a}_V^3(x) - 2 \left[r - \lambda + \frac{c_\rho}{m} - \frac{\mu - r}{2\sigma^2} + \frac{r}{m}x \right] \frac{\sigma^2}{\mu - r} \tilde{a}_V^2(x) \\ + 2 \left(c_\rho + rx + \frac{1}{2m}\sigma_\rho^2 \right) \tilde{a}_V(x) - \sigma_\rho^2 \frac{\mu - r}{\sigma^2}. \quad (6.2) \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, werden Ausdrücke für die optimale Strategie und die Wertfunktion bei $x \rightarrow \infty$ gesucht. Für die Gleichung (6.2) existiert eine Familie von beschränkten Lösungen, wobei jede dieser Lösungen als unendliche Reihe der folgenden Form geschrieben werden kann.

$$\tilde{a}_V(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k x^{-k} \quad x \rightarrow \infty, \quad (6.3)$$

mit den Koeffizienten

$$\tilde{a}_0 = \frac{(\mu - r)m}{\sigma^2}, \quad \tilde{a}_1 = -\left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) \frac{(\mu - r)m^2}{\sigma^2}.$$

Eine genaue Herleitung dieser Darstellung ist in [3] zu finden. Aus (6.3) und (6.1) ist die optimale Strategie für $x \rightarrow \infty$ nun herleitbar:

Satz 6.1. *Für die optimale Strategie gilt*

$$a_V^*(x) = \frac{(\mu - r)m}{\sigma^2} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} - \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right) \frac{(\mu - r)m^2}{\sigma^2} \frac{1}{x} (1 + o(1)), \quad (6.4)$$

für $x \rightarrow \infty$.

Also wurde gezeigt, dass die optimale Strategie für $x \rightarrow \infty$ gegen einen fixen Wert konvergiert.

Nachdem die Strategie nun bestimmt werden konnte, wird als Nächstes die Wertfunktion berechnet.

Man sieht, dass für die logarithmische Ableitung von $V'(x)$ aus (6.1) folgt:

$$(\ln V'(x))' = \frac{V''(x)}{V'(x)} = -\frac{\mu - r}{\sigma^2 \tilde{a}_V(x)}.$$

Integriert man diesen Ausdruck und formt etwas um, so ist $V'(x)$ für ein $K > 0$ gleich:

$$V'(x) = K \exp \left\{ -\frac{(\mu - r)m^2}{\sigma^2} \int_0^x \frac{1}{\tilde{a}_V(y)} dy \right\}. \quad (6.5)$$

Da $\tilde{a}_V(y) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \frac{1}{y}(1 + o(1))$ für $y \rightarrow \infty$ gilt, kann (6.5) weiter vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} V'(x) &= K \exp \left\{ -\int_1^x \frac{1}{m \left[1 - m \left(1 - \frac{\lambda}{r} \right) \frac{1}{y} (1 + o(1)) \right]} dy \right\} \\ &= K \exp \left\{ -\int_1^x \frac{1}{m} + \left(1 - m \left(1 - \frac{\lambda}{r} \right) \right) \frac{1}{y} (1 + o(1)) dy \right\} \\ &= K e^{-x/m} x^{\lambda/r-1} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Damit ist die Wertfunktion $V(x) = \int_0^x V'(s) ds$ gegeben durch

$$V(x) = V(\infty) - K e^{-x/m} x^{\lambda/r-1} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

Da die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta(x)$ proportional zur Wertfunktion $V(x)$ ist (siehe Bemerkung 5.4), gilt der nächste Satz:

Satz 6.2. *Es ist*

$$\delta(x) = 1 - K_1 e^{-x/m} x^{\lambda/r-1} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

für eine Konstante $K_1 > 0$.

Bemerkung 6.1. *Die entsprechende Ruinwahrscheinlichkeit $\Phi(x) = 1 - \delta(x)$ ist dann klarerweise gegeben als*

$$\Phi(x) = K_1 e^{-x/m} x^{\lambda/r-1} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.7)$$

In die Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit (6.7) fließen demnach in erster Linie die Zinsrate r , der Erwartungswert der Claims m und die Schadenintensität λ ein. Die Parameter μ, σ , die Volatilität der Störung und die Prämienrate c spielen dagegen keine Rolle.

6.2 Beschränkter Fall

Wie schon im vorigen Abschnitt wird wieder $\mu \neq r$ angenommen.

Sei $V(x)$ die Funktion, welche für große x die Gleichung (5.21) aus Satz 5.3 erfüllt, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq a \leq A} \mathcal{L}^a V(x) &= \mathcal{L}^A V(x) = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma^2 A^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 A + \sigma_1^2)V''(x) + [c + (\mu - r)A + rx]V'(x) - M(V)(x) = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Da die Schäden mit dem Parameter $k = 1/m$ exponentialverteilt sind, lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(Y_1) = ke^{-kY_1}$. Die Funktion $M(V)(x)$ lässt sich damit schreiben als

$$M(V)(x) = \lambda[V(x) - k \int_0^x V(x-s)e^{-ks} ds],$$

was schließlich zur Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma^2 A^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 A + \sigma_1^2)V''(x) + [c + (\mu - r)A + rx]V'(x) \\ - \lambda V(x) + k\lambda \int_0^x V(x-s)e^{-ks} ds = 0, \end{aligned} \quad (6.9)$$

führt. Definiert man eine Funktion $g(x)$ als

$$g(x) := \int_0^x V(x-s)e^{-ks} ds,$$

und führt anschließend die Substitution mit $z := x - s$ durch, so wird diese zu

$$g(x) := - \int_x^0 V(z)e^{-k(x-z)} dz = e^{-kx} \int_0^x V(z)e^{kz} dz.$$

Das Ableiten dieser Funktion nach x liefert

$$\begin{aligned} g'(x) &= -ke^{-kx} \int_0^x V(z)e^{kz} dz + V(x)e^{kx}e^{-kx} \\ &= -kg(x) + V(x). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Da der Prozess V per Annahme die Gleichung (6.9) erfüllt, folgt, dass auch

$$G'(x) + kG(x) = 0, \quad (6.11)$$

gelten muss, wobei $G(x)$ definiert ist als

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2}[\sigma^2 A^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 A + \sigma_1^2]V''(x) + [c + (\mu - r)A + rx]V'(x) \\ &\quad + k\lambda \int_0^x V(x-y) \exp(-ky) dy - \lambda V(x), \end{aligned}$$

was genau der linken Seite der Gleichung (6.9) entspricht.

Leitet man die Funktion $G(x)$ ab und verwendet (6.10), so ist $G'(x)$ gegeben durch

$$G'(x) = \frac{1}{2}A_\rho^2 V'''(x) + [c + (\mu - r)A + rx]V''(x) + rV'(x) + k\lambda V(x) - k^2\lambda g(x) - \lambda V'(x),$$

wobei

$$A_\rho^2 = \sigma^2 A^2 + 2\rho\sigma\sigma_1 A + \sigma_1^2,$$

ist. Der zweite Term aus (6.10) ist

$$kG(x) = \frac{1}{2}A_\rho^2 V''(x)k + kV'(x)[c + (\mu - r)A + rx] - \lambda kV(x) + k^2\lambda g(x).$$

Führt man die beiden Terme nun zusammen, so erhält man mit (6.11) die folgende gewöhnliche Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}A_\rho^2 V'''(x) + V''(x) \left[\frac{1}{2}A_\rho^2 k + c + (\mu - r)A + rx \right] + V'(x)(r - \lambda + k[c + (\mu - r)A + rx]) \\ &= V'''(x) + \left[\frac{2c}{A_\rho^2} + \frac{2(\mu - r)A}{A_\rho^2} + k + \frac{2r}{A_\rho^2}x \right] V''(x) + \left[\frac{2[(r - \lambda) + kc + kA(\mu - r)]}{A_\rho^2} + \frac{2rk}{A_\rho^2}x \right] V'(x). \end{aligned}$$

Nun werden zur Vereinfachung die folgenden Variablen eingeführt

$$\begin{aligned} a_1 &:= \frac{2c}{A_\rho^2} + \frac{2(\mu - r)A}{A_\rho^2} + k, & a_2 &:= \frac{2r}{A_\rho^2}, \\ a_3 &:= \frac{2[(r - \lambda) + kc + kA(\mu - r)]}{A_\rho^2}, & a_4 &:= \frac{2rk}{A_\rho^2}, \end{aligned}$$

und

$$\Phi := V'.$$

Die Differentialgleichung lässt sich dann schreiben als

$$\phi'' + (a_2x + a_1)\phi' + (a_4x + a_3)\phi = 0.$$

Für

$$y_1 := \phi, \quad y_2 := \phi', \tag{6.12}$$

gilt

$$y_1' = 0y_1 + y_2, \quad y_2' = -(a_4x + a_3)y_1 - (a_2x + a_1)y_2.$$

Schreibt man das System von Differentialgleichungen in Matrixform an

$$y' = Ay,$$

so hat die Matrix A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(a_4x + a_3) & -(a_2x + a_1) \end{pmatrix} = (A_1 + A_0x),$$

wobei die Matrizen A_0 und A_1 definiert sind als

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_4 & -a_2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_3 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Dies führt insgesamt zur folgenden Gleichung:

$$y' = (A_1 + A_0x)y.$$

Multiplizieren beider Seiten mit dem Inversen von x ergibt

$$x^{-1}y' = \left(A_0 + \frac{A_1}{x} \right) y. \tag{6.13}$$

Für die Lösung dieser Gleichung bei $x \rightarrow \infty$ soll der Approximationsfehler von der Ordnung $O(\frac{1}{x^3})$ sein (vgl. [3]). Bei $x \rightarrow \infty$ hat (6.13) eine irreguläre Singularität zweiter Ordnung. Genaueres dazu ist im Anhang A erklärt.

Betrachtet man nun das charakteristische Polynom der Matrix A_0

$$\chi_{A_0}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda \\ -(a_4 + \lambda) & -(a_2 + \lambda) \end{vmatrix} = \lambda(a_2 + \lambda) - \lambda(a_4 + \lambda) = \lambda(a_2 - a_4),$$

so sieht man, dass diese als einzigen Eigenwert $\lambda = 0$ hat. Somit ist A_0 singulär und besitzt keine eindeutige Inverse. Das Ziel ist es, eine asymptotische Darstellung der Lösung der Differentialgleichung für $x \rightarrow 0$ zu finden. Um dies zu tun, wird die sogenannte ‘‘Methode der asymptotischen Diagonalisierung für Systeme linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen’’ aus [5] verwendet, bei der eine Korrektur des Eigenwerts vorgenommen wird. Zunächst wird dafür eine Matrix D gesucht, sodass

$$D^{-1}A_0D = \tilde{A}_0,$$

für eine Diagonalmatrix \tilde{A}_0 gilt.

Es ist leicht zu zeigen, dass D und A_0 die folgende Gestalt haben

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_4/a_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der Matrix D lässt sich leicht berechnen und lautet

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_4/a_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes wird eine Substitution durchgeführt:

$$y = D \left(I_2 + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2} \right) z, \tag{6.14}$$

wobei $z = (z_1, z_2)^T$ ist, I_2 die 2×2 -Einheitsmatrix ist und N_1 und N_2 zwei 2×2 Matrizen sind. Die genaue Darstellung dieser beiden Matrizen wird im Folgenden bestimmt.

Im nächsten Schritt wird die Gleichung (6.14) nach der Variable x abgeleitet, wobei zu beachten ist, dass z auch von x abhängt. Dann hat y' die Form:

$$y' = D \left(I_2 + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2} \right) z' - D \left(\frac{N_1}{x^2} + \frac{2N_2}{x^3} \right) z.$$

Nun kann für y' in (6.13) eingesetzt werden:

$$x^{-1}y' = x^{-1} \left[D \left(I_2 + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2} \right) z' - D \left(\frac{N_1}{x^2} + \frac{2N_2}{x^3} \right) z \right] \tag{6.15}$$

$$= \left(A_0 + \frac{A_1}{x} \right) D \left(I_2 + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2} \right) z. \tag{6.16}$$

Umformen von (6.15) führt weiter zu:

$$x^{-1}z' = \left(I_2 + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2}\right)^{-1} \left[\left(\tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{x}\right) \left(I_2 + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] z, \quad (6.17)$$

wobei

$$\tilde{A}_1 = D^{-1}A_1D = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ -a_3 - k(k - a_1) & k - a_1 \end{pmatrix},$$

ist. Die Matrizen N_1 und N_2 sollen so gewählt werden, dass die Gleichung die folgende Form annimmt (vgl. [3]):

$$x^{-1}z' = \left(\tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{x} + \frac{\tilde{A}_2}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) z. \quad (6.18)$$

Dabei sollen \tilde{A}_1 und \tilde{A}_2 Diagonalmatrizen sein, wobei \tilde{A}_1 aus den Diagonaleinträgen von \tilde{A}_1 besteht

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k - a_1 \end{pmatrix}.$$

Somit fehlt noch die Bestimmung der Matrizen N_1, N_2 und \tilde{A}_2 . Um diese zu berechnen, werden die Gleichungen (6.17) und (6.18) gleichgesetzt.

$$\left(\tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{x}\right) \left(E + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2}\right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right) = \left(E + \frac{N_1}{x} + \frac{N_2}{x^2}\right) \left(\tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{x} + \frac{\tilde{A}_2}{x^2}\right) \quad (6.19)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich für $\frac{1}{x}$ folgt

$$\tilde{A}_0 N_1 + \tilde{A}_1 = \tilde{A}_1 + N_1 \tilde{A}_0.$$

Daraus erhält man N_1

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1/a_2 \\ -[a_3 + k(k - a_1)]/a_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Führt man nun in (6.19) den Koeffizientenvergleich für $\frac{1}{x^2}$ durch, so ergibt sich die Gleichung

$$\tilde{A}_0 N_2 + \tilde{A}_1 N_1 = \tilde{A}_2 + N_1 \tilde{A}_1 + N_2 \tilde{A}_0.$$

Daraus können die Einträge der fehlenden Matrizen leicht berechnet werden:

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -(2k - a_1)/a_2^2 \\ [a_3 + k(k - a_1)](a_1 - 2k)/a_2^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} [-a_3 - k(k - a_1)]/a_2 & 0 \\ 0 & [a_3 + k(k + a_1)]/a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda/r - 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda/r \end{pmatrix}.$$

Das Differentialgleichungssystem (6.18) ist asymptotisch äquivalent zu

$$\tilde{z}' = x \left(\tilde{A}_0 + \frac{\tilde{A}_1}{x} + \frac{\tilde{A}_2}{x^2} \right) \tilde{z}, \quad (6.20)$$

wobei $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)^T$ ist. Genauer es dazu kann in [5] gefunden werden.

Diese Gleichung kann in die folgenden zwei linearen unabhängigen Gleichungen aufgespalten werden

$$\begin{aligned}\tilde{z}'_1 &= \left(-k + \frac{\lambda/r}{x} \right) \tilde{z}_1, \\ \tilde{z}'_2 &= \left(-\frac{2r}{A_\rho^2}x - \frac{2c}{A_\rho^2} - \frac{2(\mu-r)A}{A_\rho^2} + \frac{1-\lambda/r}{x} \right) \tilde{z}_2,\end{aligned}$$

wobei diese leicht gelöst werden können und für $x \rightarrow \infty$ die allgemeine Lösungen (nach dem Schema von [15] berechnet) die Form

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1 &= C_1 e^{-kx} x^{\lambda/r-1} (1 + o(1)), \\ \tilde{z}_2 &= C_2 e^{-\frac{r}{A_\rho^2}x^2 - \frac{2(c+(\mu-r)A)}{A_\rho^2}x} x^{1-\lambda/r} (1 + o(1)),\end{aligned}$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ besitzen.

Wie in [5] von R. Bellman begründet ist, haben auch die Lösungen des Gleichungssystems (6.18) diese Form. Da jetzt die allgemeine Lösung von z bekannt ist, kann in (6.14) rückschrittweise eingesetzt werden und man erhält

$$\begin{aligned}y_1 &= z_1 + \left(-\frac{A_\rho^2}{2rx} - \frac{1}{x^2 a_2^2} (2k - a_1) \right) z_2, \\ y_2 &= \left(-k - \frac{r-\lambda}{rx} + \frac{r-\lambda}{x^2 r a_2} (a_1 - 2k) \right) z_1 + \left[1 + k \left(\frac{A_\rho^2}{2rx} + \frac{1}{x^2 a_2^2} (2k - a_1) \right) \right] z_2.\end{aligned}$$

Mit der in (6.12) festgelegten Notation sieht man, dass die ersten beiden Ableitungen der Funktion $V(x)$ aus (6.8) für $x \rightarrow \infty$ folgendermaßen aussehen müssen:

$$\begin{aligned}V'(x) &= C_1 e^{-x/m} x^{\lambda/r-1} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \\ V''(x) &= \left(-\frac{1}{m} - \frac{r-\lambda}{rx} + \frac{r-\lambda}{x^2 r a_2} (a_1 - 2k) \right) C_1 e^{-x/m} x^{\lambda/r-1} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

wobei $C_1 > 0$ ist (da V auf dem Intervall $[0, \infty)$ als wachsend angenommen wird).

Dann ist die optimale Strategie $a_V(x)$, wie sie in (5.9) gegeben ist, gleich

$$\begin{aligned}a_V(x) &= -\frac{(\mu-r)V'(x)}{\sigma^2 V''(x)} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} \\ &= \frac{(\mu-r)m}{\sigma^2} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} - \left(1 - \frac{\lambda}{r} \right) \frac{(\mu-r)m^2}{\sigma^2} \frac{1}{x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{6.21}$$

Es lässt sich folgender Satz über die Wahl der optimalen Strategie formulieren (vgl. [3]), welcher leicht nachzurechnen ist:

Satz 6.3. *Für $x \rightarrow \infty$, hat die optimale Strategie die Darstellung*

$$a_V^*(x) = \begin{cases} \left[\frac{(\mu-r)m}{\sigma^2} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} \right] (1 + O(\frac{1}{x})) & A \geq \frac{(\mu-r)m}{\sigma^2} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} \geq 0; \\ 0 & \frac{(\mu-r)m}{\sigma^2} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} < 0; \\ A & A < \frac{(\mu-r)m}{\sigma^2} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma}. \end{cases}$$

Für den Fall $A > \frac{(\mu-r)m}{\sigma^2} - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma} > 0$ ist außerdem (6.4) erfüllt und die Wertfunktion hat die bereits im unbeschränkten Fall berechnete Gestalt (6.6).

In ihrer Arbeit [3] haben Luo und Belkina eine Darstellung der Überlebenswahrscheinlichkeit für $x \rightarrow \infty$ gefunden, die identisch mit der für den Satz 6.2 hergeleiteten Formel im unbeschränkten Fall ist. Jedoch ist die Konstante diesmal von der Schranke A abhängig:

Satz 6.4. *Für die maximale Überlebenswahrscheinlichkeit des Unternehmens gilt*

$$\delta(x) = 1 - K_2 e^{-x/m} x^{\lambda/r-1} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

für eine Konstante $K_2 = K_2(A) > 0$.

7 | Beispiele ¹

In diesem Kapitel werden konkrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Schäden Y_i mit $i = 1, \dots, N_t$ gewählt und deren Auswirkung auf die optimale Strategie untersucht und verglichen.

Dabei werden keine Grenzen für den in die Aktie investierten Anteil der zur Verfügung stehenden Reserve festgelegt, d.h. es können die Resultate des unbeschränkten Falles aus Abschnitt 5.3.2 angewandt werden.

Um die optimale Strategie a_V^* bestimmen zu können, muss zuerst die Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichung (5.33) gelöst werden (vgl. Abschnitt 3.5). Der in (5.38) definierte Operator, welcher die Voraussetzungen von Lemma 5.7 erfüllt, löst die aus der HJB-Gleichung resultierende Integro-Differentialgleichung (5.37). Diese wurde durch T. Belkina und S. Luo in ihrer Arbeit ([3]) numerisch gelöst und dadurch die optimale Strategie a_V^* erhalten. Im Folgenden werden zwei konkrete Beispiele betrachtet.

7.1 Beispiel 1

In diesem Beispiel sind die Parameter des Risikomodells folgendermaßen belegt:

$$\mu = 0.42, \quad r = 0.32, \quad c = 0.36, \quad \lambda = 0.3 \quad \rho = -0.2, \quad \sigma = 0.1, \quad \sigma_1 = 0.2, \quad k = 1.$$

Es werden nun für die Claims die drei verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen betrachtet:

- **Exponentialverteilung** mit Parameter k :

$$f(y) = \lambda e^{-ky}, \quad \bar{F}(y) = e^{-ky} \quad \text{für } y \geq 0, \\ \mathbb{E}(Y) = k = 1.$$

- **Halbnormalverteilung** mit Parametern v und u :

$$f(y) = \frac{\sqrt{2}}{v\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{y^2}{2v^2}\right)}, \quad \bar{F}(y) = 2 \left[1 - \Phi\left(\frac{y}{v}\right)\right] \quad \text{für } y > 0,$$

wobei v als $v = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ gegeben ist, damit der Erwartungswert der Verteilung, wie bei der Exponentialverteilung, gleich 1 ist: $\mathbb{E}(Y) = v\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 1$.

- **Log-Normal-Verteilung** mit Parametern $v > 0$ und $u \in \mathbb{R}$:

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}vy} e^{-\frac{(\ln y - u)^2}{2v^2}}, \quad \bar{F}(y) = 1 - \Phi\left(\frac{\log y - u}{v}\right), \quad \text{für } y > 0$$

Hier wird $v = 1$ und $u = 0.5$ gesetzt, damit der Erwartungswert wieder gleich $\mathbb{E}(Y) = e^{u+v^2/2} = 1$ ist.

Mit Φ ist hier die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung gemeint.

¹[3]

In Abbildung 7.1 sind die drei Verteilungen mit den oben gewählten Parametern und gleichem Erwartungswert veranschaulicht.

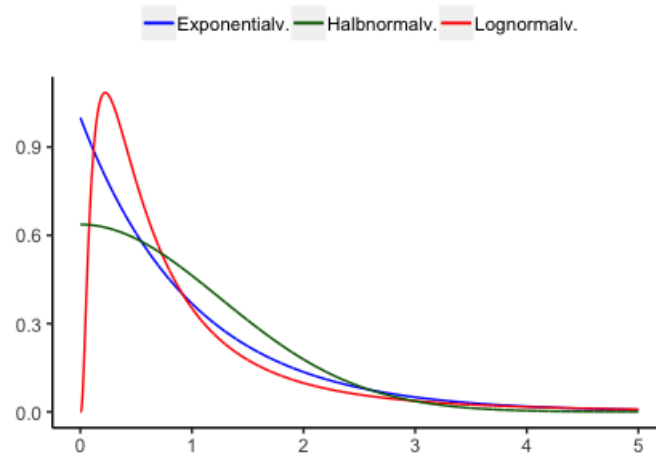


Abbildung 7.1: Vergleich der Verteilungen in Beispiel 1

Unabhängig von der betrachteten Wahrscheinlichkeitsverteilung hat die optimale Strategie für $x \rightarrow 0$ wegen (5.30) und Satz 5.5 die asymptotische Darstellung

$$a_V^*(x) \approx 0.8542115 - 0.02039470x(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0. \quad (7.1)$$

Für den Fall von exponentialverteilten Claims wurde in Kapitel 6 in (6.4) die asymptotische Darstellung der optimalen Strategie für große Reserven berechnet:

$$a_V^*(x) \approx 10.4 - 0.625 \frac{1}{x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Die optimale Strategie ist als Ergebnis der in [3] gelösten Integro-Differentialgleichung graphisch dargestellt und veranschaulicht die Auswirkungen der verschiedenen Verteilungsannahmen über die Schäden.

In Abbildung 7.2 ist die Entwicklung der optimalen Strategie für Werte der Reserve in der Nähe von Null dargestellt. Wie schon in (7.1) behauptet, ist der in das riskante Asset investierte Anteil für $x \rightarrow 0$ bei allen Verteilungen noch gleich und beträgt in etwa 0.8542115.

Jedoch lässt sich erkennen, dass diese bei wachsender Reserve immer mehr voneinander abweichen. Besonders im Fall der log-normalverteilten Schäden sieht man, dass die optimale Strategie im Vergleich zu den anderen Verteilungen schneller steigt.

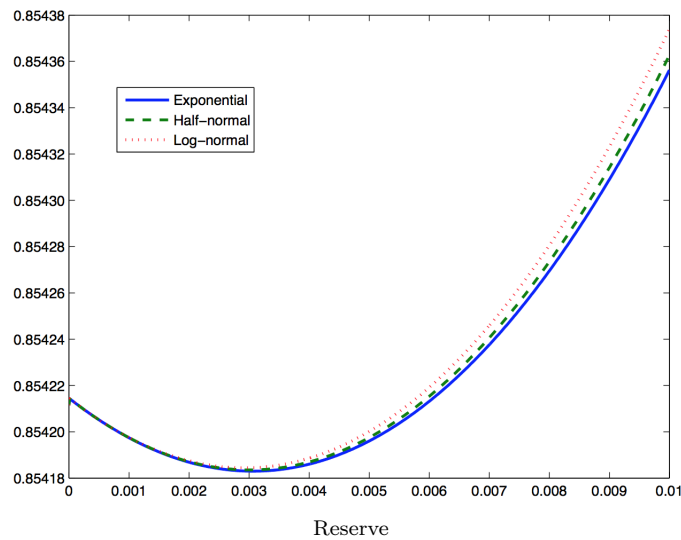


Abbildung 7.2: Optimales Investment bei kleiner Reserve

Betrachtet man nun den Verlauf der Strategie auf dem größeren Intervall $(0, 8)$ in Abbildung 7.3, so werden die Unterschiede immer deutlicher.

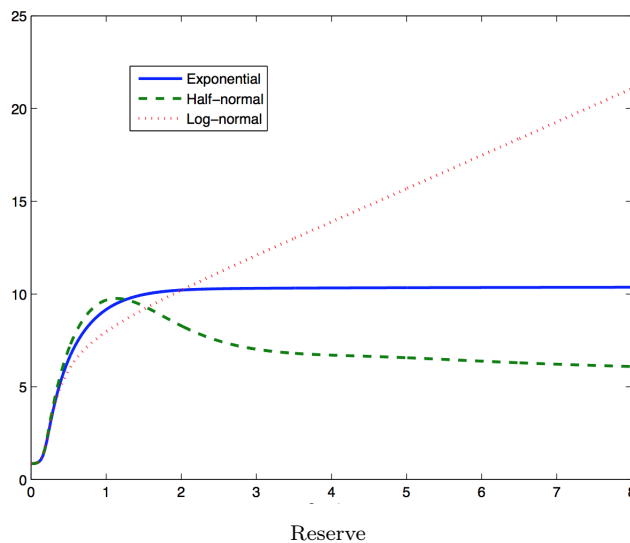


Abbildung 7.3: Optimales Investment bei großer Reserve

Für log-normalverteilte Claims verhält sich $a_V^*(x)$ bei größerer Reserve linear und weicht stark von den beiden anderen Fällen ab.

Unter der Annahme, dass die Schäden exponentialverteilt sind, bleibt der in die Aktie investierte Anteil bei steigender freier Reserve konstant, was dem Ergebnis aus Kapitel 6 entspricht.

Obwohl die optimale Strategie mit halb-normalverteilten Claims für $x \rightarrow 0$ im Vergleich noch am höchsten ist, ändert sich das bei einer steigenden Reserve deutlich. Für $x > 3$ wird diese langsam kleiner.

7.2 Beispiel 2

Im zweiten Beispiel werden neben der Exponentialverteilung die Paretoverteilung und die Weibullverteilung für die Schäden betrachtet. Die Parameter sind hierbei gegeben als:

$$\mu = 0.2, \quad r = 0.12, \quad c = 0.5, \quad \lambda = 0.3, \quad \rho = 0.15, \quad \sigma = 0.9, \quad \sigma_1 = 0.5, \quad k = 0.5.$$

- **Paretoverteilung** mit Parametern u und v :

$$f(y) = \frac{vu^v}{(u+y)^{v+1}}, \quad \bar{F}(y) = \left(\frac{u}{u+y}\right)^v, \quad x > 0 \text{ wobei } u, v \in \mathbb{R}. \text{ Man setzt } u = v = 2, \text{ damit } \mathbb{E}(Y) = u\Gamma(1 + \frac{1}{v}) = 2 \text{ ist.}$$

- **Weibullverteilung** mit Parametern u und v :

$$f(y) = \frac{v}{u} \left(\frac{y}{u}\right)^{v-1} e^{-\left(\frac{y}{u}\right)^v}, \quad \bar{F}(y) = e^{-\left(\frac{y}{u}\right)^v}, \quad y > 0, \text{ wobei } u, v \in \mathbb{R}. \text{ Man setzt } u = 1 \text{ und } v = 0.5, \text{ damit } \mathbb{E}(Y) = \frac{u}{v-1} = 2 \text{ ist.}$$

In Abbildung 7.4 sind die betrachteten Verteilungen mit den gerade bestimmten Parametern abgebildet.

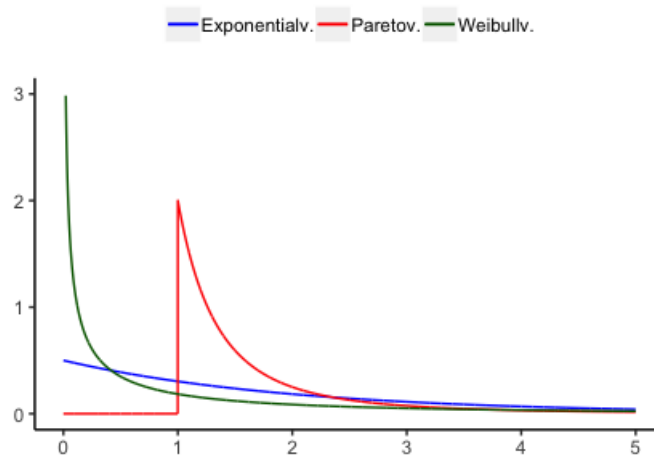


Abbildung 7.4: Vergleich der Verteilungen in Beispiel 2

Nun ist die optimale Strategie für sehr kleine Werte $x \rightarrow 0$ in den drei Fällen wieder gleich und hat wegen (5.30) den Wert

$$a_V^*(x) \approx -0.05274736 + 0.01112835x(1 + o(1)), \quad x \rightarrow 0.$$

Bei $x \rightarrow \infty$ wurde für exponentialverteilte Claims in (6.4) die Strategie

$$a_V^*(x) \approx 0.163580 + 0.740741 \frac{1}{x} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty,$$

berechnet. In [3] haben die Autoren nun auch unter den Annahmen dieses Beispiels die optimale Strategie berechnet:

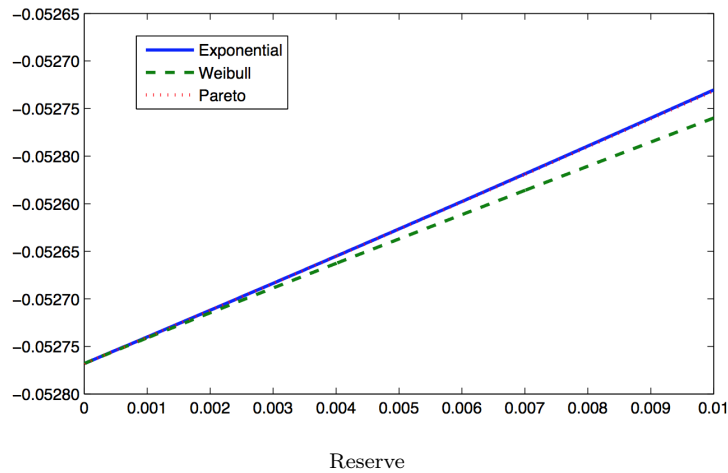


Abbildung 7.5: Optimales Investment bei kleiner Reserve

In Abbildung 7.5 sieht man, dass wie in Beispiel 1 die Unterschiede zwischen den verschiedenen Verteilungsannahmen bei $x \rightarrow 0$ noch relativ gering sind. In allen Fällen ist der in das riskante Asset investierte Anteil negativ, d.h. es handelt sich um Leerverkäufe.

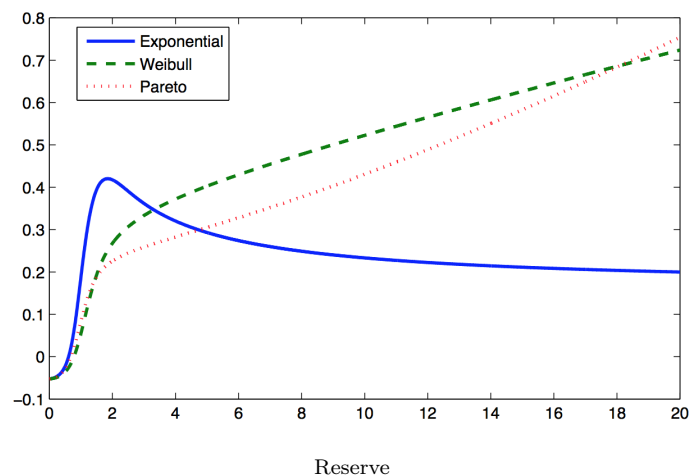


Abbildung 7.6: Optimales Investment bei großer Reserve

Ebenfalls wie im obigen Beispiel wird die unterschiedliche Entwicklung von a_V^* für die verschiedenen Annahmen bei größerer Reserve auch in Abbildung 7.6 immer deutlicher. Für exponentialverteilte Claims wird sie ab einer bestimmten Reservehöhe wieder konstant, während sie für die Pareto- und Weibullverteilung mit höherer Reserve weiter ansteigt.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Albrecher. Finanz- und versicherungsmathematik 1. Vorlesungsskript, 2006.
- [2] M. Azcue, P. und Muler. Optimal investment strategy to minimize the ruin probability of an insurance company under borrowing constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44:26–34, 2009.
- [3] S. Belkina, T. und Luo. Asymptotic investment behaviors under a jump-diffusion risk process. 02 2015.
- [4] Hipp C. Luo S. Taksar M. Belkina T. Optimal constrained investment in the cramer-lundburg model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 5:383, 2014.
- [5] R. Bellman. *Stability theory of differential equations*. Dover, New York, 2013.
- [6] M. Bluemlinger. Analysis 3. Vorlesungsskript, 2017.
- [7] A. Bobenko. Komplexe analysis. Vorlesungsskript, 2006.
- [8] H. Cai, J. und Yang. Ruin in the perturbed compound poisson risk process under interest force. *Advances in Applied Probability*, 37(3):819–835, 2005.
- [9] H. Fleming, W. und Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, volume 25. Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] Goovaerts M. Dhaene J. und Denuit M. Kaas, R. *Modern actuarial risk theory: using R*, volume 128. Springer Science & Business Media, 2008.
- [11] S. Karatzas, I. und Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] H. Schmidli. On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance. *Ann. Appl. Probab.*, 12(3):890–907, 2002.
- [13] U. Schmock. Stochastic analysis for financial and actuarial mathematics. Vorlesungsskript/Lecture Notes, 2018.
- [14] S. Shreve. *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2004.
- [15] P. Szmolyan. Differentialgleichungen 1. Vorlesungsskript, 2013.
- [16] W. Wasow. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Dover, New York, 2018.

ANHANG

A | Differentialrechnung ¹

Definition A.1 (Komplexe Differenzierbarkeit).

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset U \rightarrow \mathbb{C}$, U offen heißt komplex differenzierbar an der Stelle $z_0 \in \mathbb{C}$, genau dann wenn

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Ist f überall in U differenzierbar, so nennt man die Funktion holomorph auf U .

Bemerkung A.1.

Eine Matrix heißt holomorph, wenn jeder Eintrag eine holomorphe Funktion ist.

Definition A.2 (Singularität). Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $D := U \setminus \{z_0\}$.

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 Singularität von f .

Existiert eine offene Umgebung $B \subset U$ von z_0 so, dass f keine weitere Singularität in B hat, spricht man von einer isolierten Singularität. Eine isolierte Singularität z_0 nennt man

- hebbbar, wenn es eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : D \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}|_D = f|_D$ gibt,
- einen Pol, wenn z_0 nicht hebbbar ist und ein $m \in \mathbb{N}$ so existiert, dass $(z - z_0)^m f(z)$ eine hebbare Singularität in z_0 hat. Das kleinste solche m heißt Ordnung des Pols,
- wesentlich (oder auch irregulär), wenn z_0 weder hebbbar noch ein Pol ist.

Bemerkung A.2. Ein lineares System, welches eine Polstelle bei $x = \infty$ hat, kann in Matrixform geschrieben werden als

$$x^{-q} \frac{dY}{dx} = A(x)Y,$$

wobei die Zahl $q + 1$ mit $q \in \mathbb{N}$ als der Rang der Singularität bezeichnet wird.

Somit ist der Rang für gewöhnliche Punkte -1 , für hebbare (bzw. reguläre) Singularitäten 0 und positiv für wesentliche Singularitäten.

¹vgl. [16] und [7]