



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Schadenreservierung bei langer Abwicklungsdauer

Ausgeführt am Institut für
Stochastik und Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch
Mona Seirlehner

Eschenweg 14
4523 Neuzeug

30. September 2015

DANKSAGUNG

Zunächst möchte ich mich an dieser Stelle bei denjenigen bedanken, die mich während des Verfassens der Diplomarbeit unterstützt haben.

Ganz besonders gilt dieser Dank Frau Mag. Michaela Maier (UNIQA Österreich Versicherungen AG, Aktuariat SV und Mitversicherung), die diese Arbeit betreut hat. Von der Entscheidung zum Thema bis hin zum Korrekturlesen war sie immer eine große Hilfe. Bei sämtlichen im Laufe der Arbeit aufgetretenen Fragen konnte ich mich auf ihr rasches und kompetentes Urteil verlassen. Auch der Fokus auf die Anwendung der vorgestellten Methoden in der Praxis wäre ohne ihre Unterstützung nicht möglich gewesen. Vielen Dank für Deine Hilfe und verlässliche Unterstützung!

Weiters gilt mein Dank auch Herrn Prof. Grandits, der mit seiner Flexibilität bezüglich der genauen Ausgestaltung des gewählten Themas die Arbeit in der vorliegenden Form erst ermöglicht hat.

Insbesondere möchte ich mich an dieser Stelle auch bei meiner Familie bedanken. Sie haben mich nicht nur während des Verfassens der Diplomarbeit, sondern auch während der gesamten Studienzeit auf jede erdenkliche Weise unterstützt. Mama, Papa & Nina, vielen Dank für Eure jahrelange Unterstützung!

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Schadenreservierung	7
1.1 Segmentierung	7
1.2 Methoden zur Reservenbestimmung	10
1.2.1 Chain-Ladder	10
1.2.2 Bornhuetter Ferguson	12
1.3 Long-tail Versicherungssparten	14
1.3.1 Auswirkungen einer Aufteilung	16
1.4 Probleme bei langer Abwicklungsdauer	23
2 Spätschäden	26
2.1 Tail-Schätzung	27
2.1.1 Verfahren zur Bestimmung von Tail-Faktoren	27
2.1.2 Funktionen zur Tail-Schätzung	29
2.1.3 Umsetzung in der Praxis	30
2.2 Getrennte IBNR - und IBNER - Reservenberechnung	34
2.2.1 Benötigte Daten	34
2.2.2 Modellannahmen	37
2.2.3 Erwartungstreue Schätzer der Faktoren	38
2.2.4 Ultimate Claims	41
2.2.5 Stochastisches Modell	44
2.2.6 Prognosefehler	46
2.2.7 Bootstrapping	53
3 Renten in der Sachversicherung	55
3.1 Reserve nach Art der Lebensversicherung	56
3.2 Best Estimate der Rentenrückstellung	59
3.2.1 Berücksichtigung von Renten als Einmalzahlung	59

3.2.2	Berücksichtigung von Renten als laufende Zahlungen und simultane Betrachtung des Aufwandes	62
3.2.3	Berücksichtigung der Renten mit Frequency-Severity-Ansatz	63
	Zusammenfassung	68
	Literaturverzeichnis	70
	Abbildungsverzeichnis	72

Einleitung

In meiner Diplomarbeit habe ich mich mit langabwickelnden Sparten und den aus der langen Abwicklungsdauer resultierenden Herausforderungen bei der Schadenreservierung befasst.

Es werden einerseits Gründe für die lange Abwicklungsdauer (und Meldeverzögerung) gesucht. Andererseits wird behandelt, wie sich die lange Abwicklungsdauer auf die Reservenbestimmung auswirkt und welche Probleme dabei hervorgerufen werden.

Dazu wird im ersten Kapitel beschrieben, wie die Geschäftszweige aufsichtsrechtlich aufzuteilen (bzw. zusammenzufassen) sind. Dann werden darunter jene Sparten bestimmt, die eine außergewöhnlich lange Abwicklungsdauer aufweisen. An dieser Stelle stellt sich die Frage, ob die lange Abwicklungsdauer die gesamte Sparte betrifft oder nur einen Teil davon, und ob dieser Anteil vom Rest getrennt betrachtet werden kann. An dieser Stelle gilt es abzuwägen, ob es angemessen ist, die Sparte als Ganzes zu betrachten, oder ob es sinnvoller ist, sie aufzuteilen und für die Anteile getrennt die Reservenbestimmung durchzuführen.

Weiters wird anhand eines Beispiels veranschaulicht, wie groß hier die Unterschiede zwischen einer gemeinsamen und einer getrennten Betrachtung sein können.

Im zweiten Kapitel wird dann auf spezielle Probleme bei Sparten mit langer Abwicklungsdauer genauer eingegangen.

In langabwickelnden Geschäftszweigen sind die zur Reservenbestimmung verwendeten Dreiecke (Zahlungs- bzw. Reservedreiecke) oft unvollständig, das heißt im letzten beobachtbaren Jahr ist ein verhältnismäßig großer Anteil an Schäden (verglichen mit Sparten mit kurzer oder mittlerer Abwicklungsdauer) noch nicht vollständig abgewickelt.

Weiters führt die benötigte Größe der betrachteten Dreiecke oft dazu, dass Teile davon (speziell das linke obere Ende des Dreieckes, das die am längsten zurückliegenden Datenpunkte beinhaltet) aufgrund von mangelnder Datenqualität nur bedingt zu gebrauchen sind.

Um diese fehlenden Informationen aufzufüllen, wird im ersten Abschnitt des zweiten Kapitels ab Seite 27 die Tail-Schätzung eingeführt, die mittels Funktionenapproximation an die vorhandenen Abwicklungsfaktoren die noch benötigten (und nicht bekannten) Abwicklungsfaktoren extrapoliert.

Im zweiten Abschnitt wird dann ein weiteres Problem der langabwickelnden Sparten behandelt. In diesen Sparten ist es wichtig, dass für die einzelnen bereits bekannten Schäden eine angemessene Einzelfallreserve gebildet wird. Aufgrund der langen Abwicklungsdauer (und den damit verbundenen Unsicherheiten bezüglich der Endschadenhöhe, wie zum Beispiel ausständige Gerichtsverfahren) ist dies aber mit Schwierigkeiten verbunden.

Bei den im ersten Kapitel vorgestellten Berechnungsmethoden (Chain-Ladder und Bornhuetter-Ferguson) ist nicht ersichtlich, inwiefern der zukünftige Kapitalbedarf bereits bekannte Schäden (und damit eine allfällige Unterreservierung), also den IBNER-Anteil (*Incurred But Not Enough Reserved*), oder gänzlich unbekannte Schäden (IBNR-Anteil, *Incurred But Not Reported*) betrifft. Damit kann eine tendenzielle Unterreservierung möglicherweise unentdeckt bleiben.

Mit der im zweiten Kapitel im zweiten Abschnitt vorgestellten Methode können der IBNER- und IBNR-Anteil getrennt berechnet werden.

Im dritten Kapitel wird auf einen Sonderfall unter den Schäden in den long-tail Versicherungssparten eingegangen. Renten nehmen schon wegen ihrer außergewöhnlich langen Abwicklungsdauer (die Auszahlungsdauer kann in einzelnen Fällen 50 Jahre und mehr betragen) eine besondere Position ein. Auch aufgrund der Tatsache, dass ihre Reserve anhand von biometrischen Daten mit Methoden der Lebensversicherungsmathematik bestimmt wird, unterscheiden sie sich von anderen Schäden.

Auch aufsichtsrechtlich ist vorgeschrieben, dass Rentenschäden vom Rest zu trennen sind bzw. zumindest markiert werden müssen. Dazu wird im dritten Kapitel zuerst die Reservenbestimmung nach Art der Lebensversicherung behandelt, bevor dann im Anschluss unterschiedliche Methoden vorgestellt werden, wie Rückstellungen für noch nicht bekannte Rentenfälle bestimmt werden können. Die Methoden werden mit Hilfe von Beispielen aus der Praxis veranschaulicht.

1 Schadenreservierung

Im folgenden Kapitel wird eine Einteilung der Risiken in möglichst homogene Versicherungssparten zum Zwecke einer sinnvollen Reservenberechnung durchgeführt.

1.1 Segmentierung

Bei der Segmentierung gilt es, die entsprechenden gesetzlichen Grundlagen zu beachten. Es wird unterschieden in Einteilung nach externer Rechnungslegung, nach interner Berichterstattung an die Finanzmarktaufsicht, nach Solvency II und nach IFRS¹. Diese Einteilungen weisen einen unterschiedlichen Detaillierungsgrad auf und sollen eine Einteilung in möglichst homogene Klassen von Versicherungsverträgen ermöglichen.

Für eine unternehmensinterne Betrachtung kann eine andere oder noch detailliertere Betrachtungsweise notwendig sein, damit man homogene Gruppen bzgl. der Schadenabwicklung erhält. Dass eine solche genauere Aufteilung große Auswirkungen auf die Reserven haben kann, wird genauer in Abschnitt 1.3.1 behandelt.

Für die Einteilung gemäß Rahmenrichtlinie Solvency II sind Risiken in der Nicht-Lebensversicherung einer der folgenden Kategorien² zuzuordnen:

H1 Krankheitskostenversicherung

H2 Erwerbsunfähigkeitsversicherung

H3 Arbeiterunfallversicherung

NL1 Kraftfahrzeug-Haftpflichtversicherung

NL2 Sonstige Kraftfahrtversicherung

¹International Financial Reporting Standards

²Österreichische Finanzmarktaufsicht, Versicherungsaufsicht und Pensionskassenaufsicht: *Segmentierung der Geschäftsbereiche der Schaden- und Unfallversicherung unter Solvency II*, 31.1.2014
EIOPA: *Technical Specification on the Long Term Guarantee Assessment (Part I)*, 28.1.2013

NL3 See-, Luftfahrt- und sonstige Transportversicherung

NL4 Feuer- und andere Sachschäden

NL5 Allgemeine Haftpflicht

NL6 Kredit- und Kautionsversicherung

NL7 Rechtsschutzversicherung

NL8 Beistand

NL9 Verschiedene finanzielle Verluste

L5, L6 Renten aus Nichtlebensversicherungsverträgen, die mit Krankenversicherungsverpflichtungen in Zusammenhang stehen (Renten aus den Unfallversicherungssparten und Kfz-Haftpflichtsparten)³

Die Sparten können auch nach ihrer entsprechenden Meldeverzögerung (im Folgenden kurz MV) und ihrer Abwicklungsdauer (kurz AD) eingeteilt werden ⁴:

AD	MV	kurz	mittel	lang
kurz		Kfz- und sonstige Kasko (Luft, See und Schiene) Wohngebäude und Hausrat Feuer Transport Assistance		
mittel		Technische Versicherung Kredit	Rechtsschutz Unfall Kautions	
lang		Kfz-Haftpflicht		Haftpflicht

Dass diese Einteilung sinnvoll ist, kann man durch Betrachten der Chain-Ladder-Faktoren (zur Bestimmung der Chain-Ladder-Faktoren siehe Abschnitt 1.2.1) der einzelnen Zweige sehen.

³Auf die Besonderheiten von Renten und ihre Behandlung bei der Reservenbestimmung wird ab Seite 55 in Kapitel 3 genauer eingegangen.

⁴ [Ges11]

Im folgenden Diagramm (Abbildung 1.1) werden die Produkte der Chain-Ladder-Faktoren φ

$$f_k := \prod_{i=1}^k \varphi_i \quad (1.1)$$

der Sparten Kfz-Kasko, Kaution, Unfall, Kfz-Haftpflicht und Haftpflicht betrachtet.

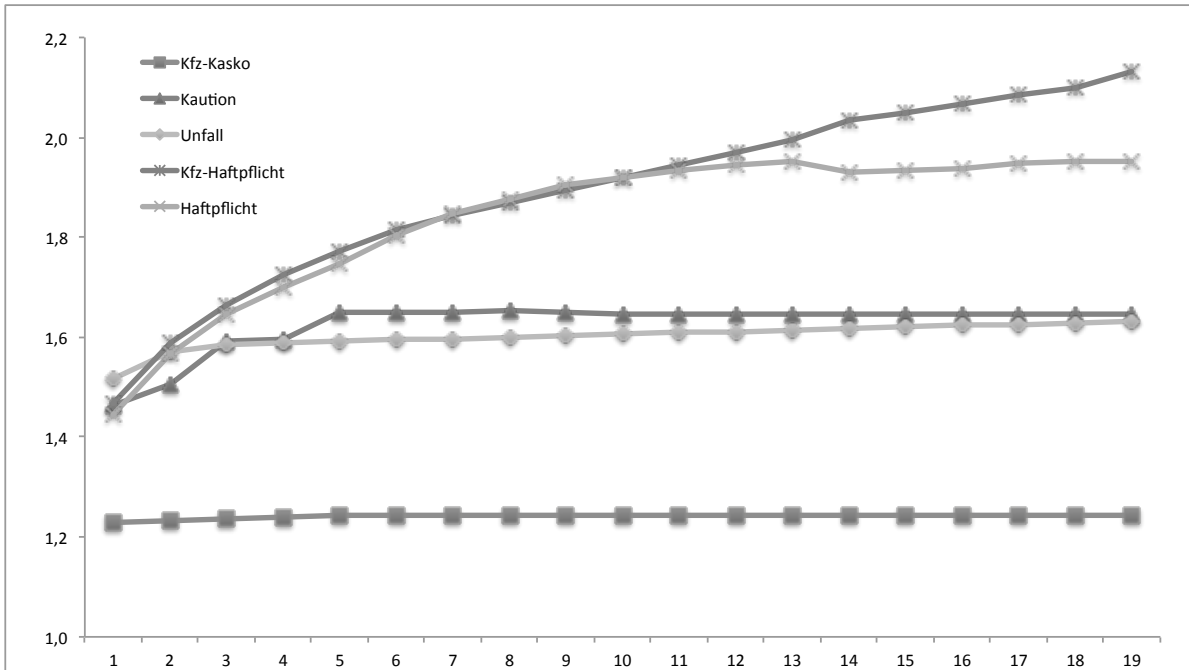


Abbildung 1.1: Abwicklungsmuster nach Sparten; Produkt der Chain-Ladder-Faktoren

Hier ist zu sehen, dass während in der Sparte Kfz-Kasko fast kein Anstieg mehr ab dem zweiten Jahr zu erkennen ist, es in den Sparten Kaution und Unfall bis zu fünf Jahren dauert, dass die Kurve flach wird. In den langabwickelnden Sparten Kfz-Haftpflicht und Haftpflicht ist ein größerer Anstieg am Anfang zu erkennen, weiters ist die Kurve auch nach mehr als 15 Jahren noch nicht abgeflacht. In diesen beiden Sparten ist zu beachten wie Rentenschäden betrachtet werden, da diese Schäden große Auswirkungen auf das Abwicklungsmuster der betroffenen Sparten haben können. Hier werden sie als laufende Zahlungen betrachtet. Die genauere Ausführung zu den unterschiedlichen Betrachtungsmöglichkeiten von Rentenschäden folgt in Kapitel 3 ab Seite 55.

1.2 Methoden zur Reservenbestimmung

Im folgenden Abschnitt werden kurz zwei der meist verwendeten Verfahren zur Reservenbestimmung⁵ erläutert, um dann in Abschnitt 1.3 auf die Auswirkungen einer genaueren Aufteilung als jener in Abschnitt 1.1 einzugehen.

1.2.1 Chain-Ladder

Man betrachtet das Abwicklungsdreieck (siehe Tabelle 1.1), wobei die Schadenstände $S_{i,k}$ für $i+k \leq n$ beobachtet werden können und für $i+k \geq n+1$ unbekannt sind, wobei SJ im folgenden für Schadenjahr und BJ für Beobachtungsjahr steht:

Tabelle 1.1: Abwicklungsdreieck

		BJ					
		0	1	n
SJ							
	0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$S_{0,n}$
	1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
	2	$S_{2,0}$	$S_{2,2}$...	$S_{2,n-2}$...	$S_{2,n}$
	\vdots	\vdots					\vdots
	n	$S_{n,0}$	$S_{n,n}$

Mit $Z_{i,k}$ wird der Zuwachs aus dem Schadenjahr i vom Beobachtungsjahr $k-1$ zum Beobachtungsjahr k bezeichnet:

$$Z_{i,k} := \begin{cases} S_{i,0} & \text{falls } k = 0, \\ S_{i,k} - S_{i,k-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.2)$$

⁵ [RS12]

Bei der Verwendung des Chain-Ladder-Verfahrens wird angenommen, dass ein Abwicklungsmuster für Faktoren vorliegt.

Annahme: Abwicklungsmuster für Faktoren

Es gibt Parameter $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ derart, so dass für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\frac{\mathbb{E}[S_{i,k}]}{\mathbb{E}[S_{i,k-1}]} = \varphi_k \tag{1.3}$$

gilt.

Für die Schätzung der zukünftigen Schadenaufwände werden für die Abwicklungsjahre $k = 1, \dots, n$ die Abwicklungsfaktoren φ_k bestimmt:

$$\varphi_k^{CL} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}}. \tag{1.4}$$

Es gilt, dass der Chain-Ladder Faktor φ_k^{CL} das an den Schadenständen des vorangehenden Beobachtungsjahres gewichtete Mittel der beobachteten individuellen Abwicklungsfaktoren $\frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}$ des Beobachtungsjahres k ist, da

$$\varphi_k^{CL} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \frac{S_{j,k}}{S_{j,k-1}}. \tag{1.5}$$

Der zukünftige Schadenstand $S_{i,k}$ wird für die Beobachtungsjahre k und Schadenjahre i mit $i, k \in \{1, \dots, n\}$ durch

$$S_{i,k}^{CL} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \varphi_l^{CL} \tag{1.6}$$

geschätzt.

Damit ergibt sich für die Schätzung des Zuwachses der Schadenaufwände:

$$Z_{i,k}^{CL} := \begin{cases} S_{i,n-i+1}^{CL} - S_{i,n-i} & \text{falls } i + k = n + 1, \\ S_{i,k}^{CL} - S_{i,k-1}^{CL} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Insgesamt erhält man dann die folgenden Schätzungen für die Schadenjahrreserven R_i für $i \in \{2, \dots, n\}$, die Kalenderjahrreserven $R_{(c)}$ für $c \in \{n+1, \dots, 2n\}$ und die Gesamtreserve R :

$$R_i^{CL} := \sum_{l=n-i+1}^n Z_{i,l}^{CL}, \quad (1.8)$$

$$R_{(c)}^{CL} := \sum_{l=c-n}^n Z_{c-l,l}^{CL}, \quad (1.9)$$

$$R^{CL} := \sum_{l=1}^n \sum_{j=n-l+1}^n Z_{j,l}^{CL}. \quad (1.10)$$

1.2.2 Bornhuetter Ferguson

Da für den Endschadenstand beim Chain-Ladder-Verfahren

$$S_{i,k}^{CL} := S_{i,n-i} \prod_{l=n-i+1}^k \varphi_l^{CL} \quad (1.11)$$

gilt, hängt der geschätzte Endschadenstand $S_{i,k}^{CL}$ stark vom derzeitigen Schadenstand $S_{i,n-i}$ ab. Das kann zu Problemen bei Ausreißern führen. Auch falls bis zum jetzigen Zeitpunkt noch keine Zahlungen geleistet bzw. noch keine Schäden gemeldet wurden (also noch keine Reserven gebildet wurden), ist die Verwendung des Chain-Ladder-Verfahrens problematisch, da man in diesen Fällen immer $R_i^{CL} = 0$ erhalten würde.

Das Bornhuetter-Ferguson-Verfahren umgeht dieses Problem, indem die Schadenjahrreserve R_i als

$$R_i^{BF} := (1 - \hat{b}_{n-i}) S_i^{BF} \quad (1.12)$$

geschätzt wird, mit

- $S_i^{BF} = \nu_i \hat{q}_i$, wobei ν_i ein Volumenmaß⁶ für das Schadenjahr i und \hat{q}_i ein a-priori Schätzer für die Endschadenquote (ULR⁷) $q_i = \frac{S_{i,n}}{\nu_i}$ ist, und
- $b_k \in [0, 1]$ angibt, welcher Anteil des Endschadens am Ende des k -ten Abwicklungsjahres bekannt ist⁸.

⁶oft Prämiensumme; aber auch Versicherungssumme etc. möglich

⁷ultimate loss ratio

⁸Es wird angenommen, dass am Ende des n -ten Jahres alle Schäden fertig abgewickelt sind, dass also $b_n = 1$ gilt.

Schätzer für die b_k können beispielsweise mit Hilfe der Chain-Ladder-Faktoren ermittelt werden:

$$b_n = 1; \hat{b}_{n-1} = (\varphi_n^{CL})^{-1}; \hat{b}_{n-2} = (\varphi_{n-1}^{CL} \varphi_n^{CL})^{-1}; \dots; \hat{b}_1 = (\varphi_2^{CL} \cdot \dots \cdot \varphi_n^{CL})^{-1}. \quad (1.13)$$

Das Verfahren selber gibt keine Anleitung, wie ein Schätzer für q_i zu bestimmen ist. In der Praxis können die Schadenquoteninformationen des Vorjahres oder Marktdaten verwendet werden.

Im Folgenden wird das 2006 von T. Mack⁹ vorgestellte Verfahren zur Schätzung der Parameter b_k und q_i beschrieben. Mit Hilfe dieses Ansatzes ist es möglich, die Bornhuetter-Ferguson-Parameter ohne Verwendung des Chain-Ladder-Verfahrens zu schätzen .

Aus (1.12) erhält man für b_k , wenn man bereits einen a-priori Schätzer für $S_{i,n}$ hat:

$$\hat{b}_{n-i} = 1 - \frac{R_i^{BF}}{S_{i,n}^{BF}} = \frac{S_{i,n}^{BF} - R_i^{BF}}{S_{i,n}^{BF}} \approx \frac{S_{i,n-i}}{S_{i,n}^{BF}}. \quad (1.14)$$

Damit ergibt sich für b_k der folgende Schätzer:

$$\hat{b}_k := \frac{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,n}^{BF}}. \quad (1.15)$$

Für diesen Schätzer ist es allerdings möglich, dass $\hat{b}_k > \hat{b}_{k+1}$ gilt. Um dies zu vermeiden, werden anstelle der kumulativen Schadenaufwände $S_{i,k}$ die inkrementellen Schadenaufwände $Z_{i,k}$ verwendet (Definition wie oben unter (1.2)).

Dafür definiert man

$$\hat{\beta}_k := \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,n}^{BF}}, \quad (1.16)$$

und erhält daraus $\hat{b}_k = \hat{\beta}_0 + \dots + \hat{\beta}_k$.

Im nächsten Schritt wird ein Schätzer für q_i ermittelt. Für diesen Zweck definiert man die mittlere inkrementelle Schadenquote (ILR¹⁰):

$$\hat{m}_k := \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i}. \quad (1.17)$$

⁹ [Mac06]

¹⁰incremental loss ratio

Die Summe $\hat{m} = \hat{m}_0 + \dots + \hat{m}_n$ ist ein a-priori Schätzer für die Endschadenquote. Die Endschadenquote q_i hängt stark von der Angemessenheit der Prämie ab, die wiederum an das Prämien- und Schadenniveau des entsprechenden Jahres gebunden ist. Daher wird nun ein Faktor gesucht, der die relative Prämienangemessenheit misst:

$$r_j := \sum_{k=0}^{n-i} \frac{\hat{m}_k}{\sum_{l=0}^{n-i} \hat{m}_l} \cdot \frac{Z_{i,k}}{\nu_i} = \frac{\sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k}}{\sum_{k=0}^{n-i} \nu_i \hat{m}_k} = \frac{S_{i,n-i}}{\sum_{k=0}^{n-i} \hat{m}_k}. \quad (1.18)$$

r_i stellt das Verhältnis der derzeitigen Schadenquote $\frac{S_{i,n-i}}{\nu_i}$ zur entsprechenden a-priori Schadenquote $\sum_{k=0}^{n-i} \hat{m}_k$ dar, daher wird r_i als *loss ratio index* bezeichnet.

Damit erhält man folgenden a-priori Schätzer für q_i

$$(\hat{m}_0 + \dots + \hat{m}_n) \cdot r_i. \quad (1.19)$$

Im letzten Schritt werden noch die mittleren inkrementellen Schadenquoten \hat{m}_k angepasst, da sie in (1.17) auf Basis des unadjustierten Prämienvolumens berechnet wurden. Sie werden durch \hat{m}_k^* ersetzt

$$\hat{m}_k^* := \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i r_i}. \quad (1.20)$$

Mit $\hat{m}^* := \hat{m}_1^* + \dots + \hat{m}_n^*$ und $\hat{q}_i := r_i \hat{m}^*$ als a-priori Schätzer für die Endschadenquote erhält man für den Endschadenstand

$$S_{i,n}^{BF} := \nu_i r_i \hat{m}^*. \quad (1.21)$$

Die Schätzer für den Abwicklungsverlauf \hat{b}_k erhält man mit Hilfe der $\hat{\beta}_k$:

$$\hat{\beta}_k := \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} S_{i,n}^{BF}} \stackrel{(1.21)}{=} \frac{\sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k}}{\sum_{i=0}^{n-k} \nu_i r_i \hat{m}^*} \stackrel{(1.20)}{=} \frac{\hat{m}_k^*}{\hat{m}^*} \quad (1.22)$$

$$\hat{b}_k := \hat{\beta}_0 + \dots + \hat{\beta}_k = \frac{\hat{m}_0^* + \dots + \hat{m}_k^*}{\hat{m}_0^* + \dots + \hat{m}_n^*}. \quad (1.23)$$

1.3 Long-tail Versicherungssparten

Die zuvor vorgenommene Segmentierung stellt eine Mindestsegmentierung dar. Innerhalb der einzelnen Versicherungszweige kann es große Unterschiede geben. Daher kann es sinnvoll sein, eine genauere Einteilung¹¹ vorzunehmen und zuvor zusammengefasste

¹¹ [Ges11]

Zweige aufzuteilen.

AD	MV	kurz	mittel	lang
kurz		Kfz-Kasko Sonstige Kasko (Luft, See, Schiene) Kfz-Haftpflicht (Sachschäden) sonst. Fahrzeug-H. (Sachschäden) Privathaftpflicht (Sachschäden) Wohngebäude Hausrat Feuer Transport Assistance	Kredit Kaution	
mittel		Technische Versicherung	Rechtsschutz Unfall	
lang		Kfz-Haftpflicht (Personenschäden) Privathaftpflicht (Pers.schäden) sonst. Fahrzeug-H. (Pers.schäden)		Berufs-Haftpflicht Vermögens-H. Produkt-H. Allgemeine H.

Wie zu erkennen ist, sind, trotz einer genaueren Aufteilung, der Großteil der zuvor in der Sparte Haftpflicht zusammengefassten Zweige immer noch bei den langabwickelnden Schäden. Innerhalb anderer Sparten kann allerdings jetzt genauer differenziert werden: Während Schäden aus der Sparte Kfz-Haftpflicht, bei denen Personen betroffen sind, weiterhin zu jenen Sparten mit langer Abwicklungsdauer zählen, sind jene Schäden, bei denen nur ein Sachschaden eingetreten ist, nun unter jenen Sparten mit kurzer Meldeverzögerung und kurzer Abwicklungsdauer zu finden.

Während in Abbildung 1.1 ein großer Unterschied zwischen dem Abwicklungsmuster der Sparte Kfz-Kasko und Kfz-Haftpflicht zu sehen ist, ist in Abbildung 1.2 bei einer getrennten Betrachtung von Personen- und Sachschäden in der Kfz-Haftpflichtversicherung zu erkennen, dass sich die Abwicklungsmuster von Kfz-Kasko-Schäden und Kfz-Haftpflicht-Sachschäden ähneln und die Unterschiede in Abbildung 1.1 aus dem stark abweichenden Abwicklungsmuster der Personenschäden in der Kfz-Haftpflichtversicherung resultieren.

Bemerkung. Im folgenden Beispiel werden Rentenschäden nicht mehr als laufende Zahlungen, sondern als Einmalzahlung betrachtet (genauere Ausführung zu den unterschiedlichen Betrachtungsmöglichkeiten folgt in Kapitel 3 ab Seite 55).

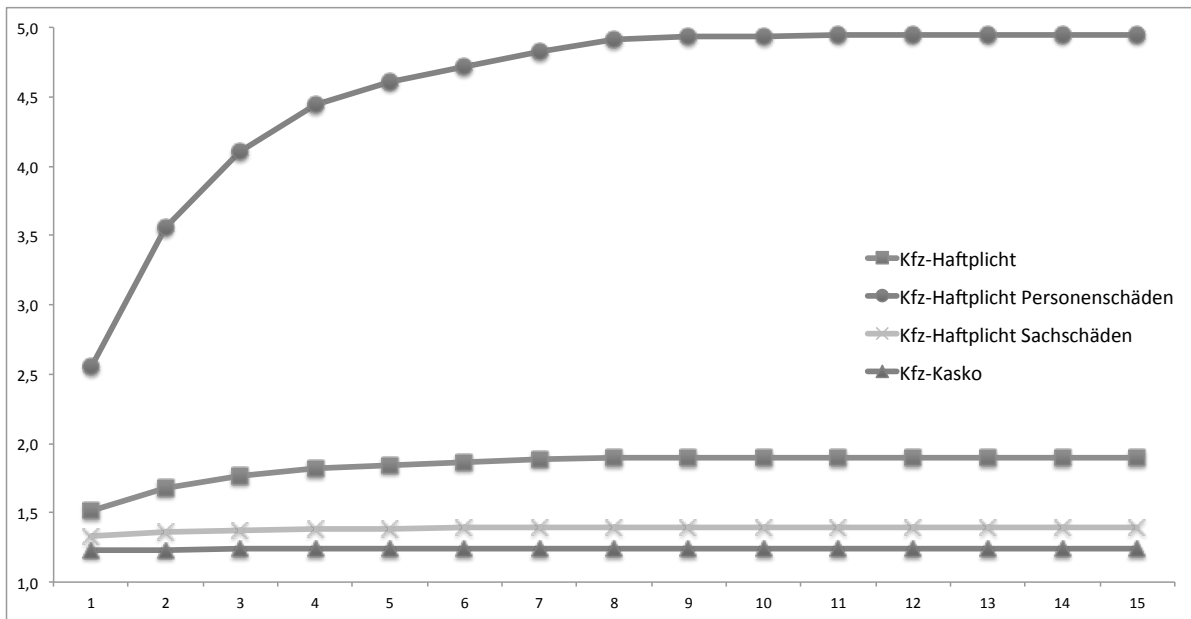


Abbildung 1.2: Abwicklungsmuster Kfz-Haftpflicht und Kfz-Kasko

Im folgenden Abschnitt wird veranschaulicht, wie sich eine Aufteilung in der Praxis gegenüber einer gemeinsamen Betrachtung auswirken kann.

1.3.1 Auswirkungen einer Aufteilung

Reservenbestimmung mit dem Chain-Ladder-Verfahren

Im ersten Schritt wird die Reservenbestimmung für das gesamte Kfz-Haftpflicht-Portfolio durchgeführt. Dafür muss ein Zahlungsdreieck¹² betrachtet werden.

Mit Hilfe der Definition der Chain-Ladder-Faktoren (1.4) wird das Abwicklungsmuster bestimmt.

Damit kann ein Schätzer für den Endschadenstand ermittelt werden und die Reserve mit (1.8) und (1.10) geschätzt werden.

¹²Die Erklärung, wieso hier Zahlungsdreiecke und nicht Aufwandsdreiecke betrachtet werden müssen, folgt auf Seite 23.

1 Schadenreservierung

KH	0	1	2	3	4	5	6	7
0	706.666	1.177.285	1.352.986	1.468.353	1.495.823	1.508.800	1.517.468	1.517.263
1	1.166.638	1.787.600	1.961.379	2.050.690	2.160.584	2.191.500	2.209.308	2.216.844
2	1.599.318	2.493.141	2.777.004	3.061.983	3.261.839	3.280.346	3.321.987	3.336.496
3	2.136.179	3.086.888	3.385.665	3.494.706	3.553.785	3.595.200	3.629.008	3.652.763
4	2.101.128	3.258.840	3.548.484	3.672.978	3.817.784	3.895.544	3.908.446	3.935.886
5	2.150.971	3.322.148	3.858.195	4.371.842	4.469.245	4.598.805	4.625.824	4.663.540
6	2.812.991	4.022.113	4.484.198	4.689.654	4.764.847	4.838.563	4.913.166	4.915.473
7	3.565.954	5.765.934	6.742.817	7.025.872	7.270.814	7.354.083	7.456.842	7.635.494
8	5.040.886	8.678.704	9.776.025	10.424.924	10.806.788	10.977.061	11.100.095	11.259.478
9	4.279.813	6.414.543	6.928.053	7.230.019	7.329.093	7.392.513	7.424.807	
10	3.611.529	5.098.264	5.549.196	5.707.402	5.855.806	5.934.052		
11	4.364.323	6.176.714	6.673.003	6.923.427	7.142.878			
12	2.971.057	4.337.840	4.739.367	4.919.656				
13	3.958.605	5.676.816	6.223.814					
14	4.116.789	6.140.981						
15	4.243.563							

KH	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1.517.397	1.517.566	1.517.612	1.518.739	1.519.274	1.519.812	1.520.347	1.520.522
1	2.218.262	2.218.065	2.218.773	2.219.266	2.219.270	2.219.406	2.219.436	
2	3.337.709	3.337.665	3.337.421	3.337.551	3.337.575	3.337.705		
3	3.658.586	3.663.260	3.666.076	3.667.837	3.669.134			
4	3.938.802	3.952.737	3.959.072	3.960.126				
5	4.665.811	4.670.235	4.672.705					
6	5.032.284	5.038.628						
7	7.699.910							
8								

KH	1	2	3	4	5	6	7	8
	1,51264	1,10936	1,05285	1,03006	1,01424	1,00956	1,01057	1,00612

KH	9	10	11	12	13	14	15
	1,00120	1,00063	1,00031	1,00017	1,00011	1,00015	1,00011

Abbildung 1.3: Kfz-Haftpflicht: Zahlungsdreieck und die daraus bestimmten Chain-Ladder-Faktoren

Kfz-Haftpflicht	Endschadenstand	Schadenjahrreserve
0	1.520.522	0
1	2.219.690	254
2	3.338.592	887
3	3.670.526	1.392
4	3.962.314	2.189
5	4.676.739	4.034
6	5.046.138	7.510
7	7.720.660	20.750
8	11.358.890	99.413
9	7.569.526	144.719
10	6.107.555	173.503
11	7.456.401	313.523
12	5.289.986	370.330
13	7.046.031	822.217
14	7.712.547	1.571.566
15	8.061.694	3.818.132
Gesamt	92.757.813	7.350.419

Abbildung 1.4: Kfz-Haftpflicht: Endschadenstand und Reserve nach SJ

Im nächsten Schritt wird für jenes Zahlungsdreieck, das nur Zahlungen von Schäden mit Personenschäden beinhaltet, ebenfalls anhand der Chain-Ladder-Methode der erwartete Endschadenstand und die Reserve bestimmt (Abbildungen 1.6 und 1.7 auf Seite 19).

Analog dazu wird ebenso für jenes Zahlungsdreieck, das nur Zahlungen jener Schäden beinhaltet, die ausschließlich zu Sachschaden geführt haben, der Endschadenstand und die Reserve geschätzt (Abbildungen 1.8 und 1.9 auf Seite 20).

Reservenbestimmung mit dem Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Zur Reservenbestimmung mittels Bornhuetter-Ferguson-Verfahren wird noch ein geeignetes Exposuremaß benötigt. Hier wird die Prämiensumme der Sparte Kfz-Haftpflicht für die jeweiligen Schadenjahre verwendet.

Prämien	0	1	2	3	4	5	6	7
	1.890.801	2.630.240	3.330.388	4.274.696	4.532.293	4.867.718	6.136.314	8.596.904
	8	9	10	11	12	13	14	15
	12.847.227	11.411.325	9.644.035	9.923.943	6.683.226	7.325.509	7.527.801	8.142.114

Abbildung 1.5: Kfz-Haftpflicht: Prämiensumme

Damit wird dann, wie in Abschnitt 1.2.2 beschrieben, eine Schätzung für den Endschadenstand und die Reserve für den gesamten Bestand, und analog dazu für den Teil der Schäden mit Personenschäden und jenen mit Sachschäden, bestimmt (Abbildung 1.10 auf Seite 21).

Zusammenfassung

Für die zwei Dreiecke der Personenschäden in Abbildung 1.6 (im Folgenden kurz Dreieck A) und der Sachschäden in Abbildung 1.8 (Dreieck B) gilt, dass sie durch komponentenweise Addition das Zahlungsdreieck in Abbildung 1.3 (Dreieck C) ergeben, also $A + B = C$. Für die daraus bestimmte Reserve gilt allerdings nicht, dass

$$\text{Res}(A) + \text{Res}(B) = \text{Res}(C). \quad (1.24)$$

Im Allgemeinen lässt sich kein Zusammenhang zwischen $\text{Res}(A) + \text{Res}(B)$ und $\text{Res}(C)$ herstellen. Es gilt

$$\text{Res}(A) + \text{Res}(B) \neq \text{Res}(C). \quad (1.25)$$

1 Schadenreservierung

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	79.425	247.390	345.779	422.562	431.636	443.666	448.099	448.265
1	141.560	444.472	573.630	637.160	741.727	772.588	789.908	791.843
2	162.491	501.231	736.636	981.091	1.165.839	1.183.019	1.216.474	1.226.424
3	197.191	471.216	707.630	784.837	818.189	841.491	857.706	880.876
4	172.891	609.656	819.685	891.325	994.570	1.057.625	1.066.079	1.090.829
5	185.972	645.522	1.128.342	1.607.339	1.694.712	1.817.907	1.842.436	1.873.308
6	344.412	828.906	1.225.276	1.393.842	1.459.496	1.530.364	1.602.551	1.606.746
7	352.654	1.390.659	2.279.987	2.536.869	2.769.094	2.854.041	2.947.376	3.124.269
8	725.939	2.504.648	3.473.292	4.061.007	4.407.434	4.558.162	4.674.424	4.789.175
9	724.795	1.622.239	2.063.661	2.325.731	2.407.593	2.454.877	2.470.218	
10	490.892	1.091.049	1.456.022	1.581.045	1.687.138	1.743.768		
11	416.885	1.106.105	1.514.431	1.738.089	1.935.689			
12	528.253	1.272.391	1.646.531	1.790.819				
13	865.575	1.765.441	2.256.048					
14	1.231.820	2.379.937						
15	1.336.683							

	8	9	10	11	12	13	14	15
0	448.439	448.594	448.594	449.722	449.865	450.368	450.845	450.918
1	793.203	792.963	793.671	794.161	794.161	794.237	794.267	
2	1.227.854	1.227.900	1.227.294	1.227.497	1.227.669	1.227.852		
3	886.711	891.560	894.434	896.408	897.756			
4	1.091.217	1.105.618	1.111.905	1.111.905				
5	1.875.450	1.878.998	1.881.398					
6	1.723.129	1.728.477						
7	3.186.225							
8								

	1	2	3	4	5	6	7	8
	2,54969	1,39487	1,15474	1,08186	1,03661	1,02293	1,02504	1,01718

	9	10	11	12	13	14	15
	1,00349	1,00184	1,00085	1,00049	1,00031	1,00041	1,00016

Abbildung 1.6: Kfz-Haftpflicht Personenschäden: Zahlungsdreieck und die daraus bestimmten Chain-Ladder-Faktoren

	Kfz-Haftpflicht Pers.schäden	Endschadenstand	Schadenjahrreserve
	0	450.918	0
	1	794.397	130
	2	1.228.553	701
	3	898.546	789
	4	1.113.433	1.528
	5	1.885.580	4.182
	6	1.735.503	7.026
	7	3.210.352	24.127
	8	4.908.321	119.146
	9	2.595.056	124.838
	10	1.873.893	130.124
	11	2.156.284	220.595
	12	2.158.216	367.397
	13	3.139.609	883.562
	14	4.619.845	2.239.908
	15	6.615.727	5.279.044
	Gesamt	39.384.232	9.403.097

Abbildung 1.7: Kfz-Haftpflicht Personenschäden: Endschadenstand und Reserve nach SJ

1 Schadenreservierung

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	627.241	929.896	1.007.207	1.045.791	1.064.186	1.065.134	1.069.369	1.068.999
1	1.025.078	1.343.127	1.387.749	1.413.530	1.418.858	1.418.912	1.419.401	1.425.001
2	1.436.827	1.991.910	2.040.367	2.080.893	2.096.000	2.097.328	2.105.512	2.110.072
3	1.938.988	2.615.672	2.678.035	2.709.869	2.735.596	2.753.709	2.771.302	2.771.887
4	1.928.237	2.649.184	2.728.800	2.781.653	2.823.213	2.837.918	2.842.368	2.845.057
5	1.964.999	2.676.626	2.729.853	2.764.503	2.774.533	2.780.898	2.783.389	2.790.232
6	2.468.579	3.193.208	3.258.922	3.295.812	3.305.351	3.308.199	3.310.616	3.308.726
7	3.213.300	4.375.276	4.462.830	4.489.002	4.501.721	4.500.042	4.509.465	4.511.225
8	4.314.947	6.174.056	6.302.733	6.363.917	6.399.354	6.418.899	6.425.671	6.470.303
9	3.555.017	4.792.305	4.864.392	4.904.288	4.921.500	4.937.636	4.954.589	
10	3.120.637	4.007.215	4.093.174	4.126.357	4.168.668	4.190.283		
11	3.947.438	5.070.609	5.158.572	5.185.338	5.207.189			
12	2.442.804	3.065.449	3.092.836	3.128.837				
13	3.093.031	3.911.375	3.967.766					
14	2.884.969	3.761.045						
15	2.906.880							

	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1.068.958	1.068.972	1.069.018	1.069.018	1.069.410	1.069.445	1.069.503	1.069.603
1	1.425.059	1.425.102	1.425.102	1.425.105	1.425.109	1.425.169	1.425.169	
2	2.109.855	2.109.765	2.110.127	2.110.054	2.109.905	2.109.853		
3	2.771.875	2.771.700	2.771.642	2.771.429	2.771.378			
4	2.847.585	2.847.119	2.847.167	2.848.220				
5	2.790.361	2.791.237	2.791.307					
6	3.309.156	3.310.151						
7	4.513.685							
8								

	1	2	3	4	5	6	7	8
	1,33177	1,02088	1,01106	1,00620	1,00276	1,00227	1,00236	1,00026

	9	10	11	12	13	14	15
	1,00007	1,00004	1,00008	1,00003	1,00001	1,00002	1,00009

Abbildung 1.8: Kfz-Haftpflicht Sachschäden: Zahlungsdreieck und die daraus bestimmten Chain-Ladder-Faktoren

Kfz-Haftpflicht Sachschäden	Endschadenstand	Schadenjahrreserve
0	1.069.603	0
1	1.425.303	134
2	2.110.101	247
3	2.771.729	351
4	2.848.657	436
5	2.791.945	638
6	3.311.027	876
7	4.515.210	1.525
8	6.474.146	3.843
9	4.969.255	14.667
10	4.212.240	21.957
11	5.248.928	41.738
12	3.173.472	44.635
13	4.068.863	101.097
14	3.937.425	176.380
15	4.052.860	1.145.980
Gesamt	56.980.763	1.554.504

Abbildung 1.9: Kfz-Haftpflicht Sachschäden: Endschadenstand und Reserve nach SJ

	Kfz-Haftpflicht		KH (Personenschäden)		KH (Sachschäden)	
	Endschaden	SJ-Reserve	Endschaden	SJ-Reserve	Endschaden	SJ-Reserve
0	1.520.522	0	450.918	0	1.069.603	0
1	2.219.690	254	794.397	130	1.425.303	134
2	3.338.592	887	1.228.553	701	2.110.101	247
3	3.670.526	1.392	898.546	789	2.771.729	351
4	3.962.314	2.189	1.113.433	1.527	2.848.657	436
5	4.676.740	4.034	1.885.579	4.181	2.791.945	638
6	5.046.139	7.511	1.735.501	7.023	3.311.027	876
7	7.720.663	20.753	3.210.339	24.114	4.515.210	1.525
8	11.358.937	99.459	4.908.239	119.064	6.474.146	3.844
9	7.569.674	144.867	2.595.111	124.893	4.969.258	14.670
10	6.107.737	173.685	1.873.892	130.124	4.212.246	21.962
11	7.456.594	313.716	2.155.713	220.025	5.248.938	41.748
12	5.289.796	370.140	2.154.222	363.403	3.173.483	44.646
13	7.043.968	820.154	3.116.777	860.729	4.068.881	101.115
14	7.704.508	1.563.527	4.496.143	2.116.206	3.937.461	176.416
15	8.025.672	3.782.109	6.034.695	4.698.012	4.054.000	1.147.120
Gesamt	92.712.071	7.304.677	38.652.057	8.670.921	56.981.986	1.555.727

Abbildung 1.10: Kfz-Haftpflicht: Endschadenstand und Reserve mit Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Einzig in jenem Fall, wenn die Abwicklungsfaktoren der Dreiecke A und B (und daher auch jene von C) übereinstimmen, gilt Gleichheit.

Der Unterschied zwischen $\text{Res}(A) + \text{Res}(B)$ und $\text{Res}(C)$ kann gravierend sein und die Reserve, die für das getrennt betrachtete Portfolio bestimmt wurde, kann größer oder kleiner sein als jene bei gemeinsamer Betrachtung.

Wie erheblich dieser Unterschied zwischen den beiden Betrachtungsweisen ausfallen kann, wird bei Untersuchung der im obigen Beispiel berechneten Kenngrößen Endscha- denstand und Reserve deutlich.

Für den Endscha- denstand erhält man abhängig von Betrachtungsweise und verwendeter Methode das folgende Ergebnis:

	Chain-Ladder	Bornhuetter-Ferguson
Kfz-Haftpflicht; gemeinsame Betrachtung	92.757.813	92.712.071
Kfz-Haftpflicht; getrennte Betrachtung	96.364.995	95.634.042

Sowohl bei der Berechnung mit dem Chain-Ladder-Verfahren als auch bei Bestimmung mit der Bornhuetter-Ferguson-Methode erhält man bei nach Personen- und Sachschäden getrennter Betrachtung einen höheren Schätzer für den Endscha- den als bei gemeinsamer Betrachtung. Das Ergebnis bei getrennter Berechnung ist um 3,89% (Chain-Ladder) bzw. um 3,15% (Bornhuetter-Ferguson) höher als jenes bei gemeinsamer Betrachtung. Die Auswirkung auf die Reserve bei getrennter Betrachtung ist viel deutlicher zu sehen:

	Chain-Ladder	Bornhuetter-Ferguson
Kfz-Haftpflicht; gemeinsame Betrachtung	7.350.419	7.304.677
Kfz-Haftpflicht; getrennte Betrachtung	10.957.601	10.226.649

Die Reserve bei getrennter Betrachtung ist um 49,07% (Chain-Ladder) bzw. um 40,00% (Bornhuetter-Ferguson) höher als bei gemeinsamer Betrachtung.

Bei genauerer Betrachtung der einzelnen Schadenjahre und der entsprechenden Scha- denjahresreserven sieht man allerdings, dass man trotz des großen Unterschiedes zwischen getrennter und gemeinsamer Betrachtung nicht für alle Schadenjahre bei getrennter Be- rechnung einen höheren Endscha- den (und damit eine höhere Reserve) erhält, dass also auch hier nicht immer

$$\text{Res}(A_i) + \text{Res}(B_i) > \text{Res}(C_i) \tag{1.26}$$

gilt, wobei A_i , B_i und C_i die jeweiligen Zeilen (also Schadenjahre) der Zahlungsdreiecke

bezeichnen.

Für die Schadenjahre 11 und 12 gilt beispielsweise bei Berechnung mit Chain-Ladder-Verfahren (unter (1) wird das Ergebnis bei gemeinsamer Betrachtung beschrieben und bei (2) jenes bei getrennter Betrachtung):

SJ	Reserve (1)	Reserve (2)	Unterschied in Prozent
11	313.523	262.334	-16,33%
12	370.330	412.032	+11,26%

Die Unterschiede zwischen den beschriebenen Betrachtungsmöglichkeiten bei den Schadenjahresreserven betragen zwischen -18,11% (im dritten Schadenjahr) und +68,28% (im 15. Schadenjahr) beim Chain-Ladder-Verfahren.

Auch bei Bestimmung mittels Bornhuetter-Ferguson-Methode betragen die Unterschiede zwischen -18,11% und +54,55% .

Während bei einer gemeinsamen Berechnung sowohl Zahlungs- als auch Aufwandsdreiecke betrachtet werden können, ist bei getrennter Berechnung die Betrachtung von Aufwandsdreiecken (also Zahlungen + Reserven) problematisch. Die Reserve, die für einen einzelnen Schadenfall gebildet wird, wird zumeist nicht explizit unterteilt in Reserve für Personenschaden und Reserve für Sachschaden. Weiters steht erst zum Zeitpunkt der ersten Zahlung für Behandlungskosten, Schmerzensgeld, etc. mit Sicherheit fest, dass es sich um einen Personenschaden handelt.

Daher kann eine getrennte Betrachtung von Personenschäden und Sachschäden in der Kfz-Haftpflicht nur auf der Zahlungsseite erfolgen. Dementsprechend können manche Reservebestimmungsmethoden, die auf Aufwandsdaten basieren (wie das Verfahren, das in Abschnitt 2.2 vorgestellt wird), nicht angewendet werden.

1.4 Probleme bei langer Abwicklungsdauer

Die lange Abwicklungsdauer in der Haftpflicht- und Kfz-Haftpflichtversicherung führt zu Schwierigkeiten in der Reservenberechnung. Zum einen gilt es, die unvollständige Schadeninformation zu beachten, da die Schadenabwicklung bis zum letzten im Dreieck beschriebenen Schadenjahr noch nicht abgeschlossen ist. Dieses Problem wird in Abschnitt 2.1 (mit der Tail-Schätzung) behandelt.

Zum anderen führt das große Spätschadenpotential speziell in der Haftpflichtversicherung bei der Betrachtung von Schadenexzedenten zu einer erhöhten Volatilität, wie man

anhand eines Beispiels¹³ sehen kann:

Man betrachtet Aufwandsdreiecke, die für das Bruttogeschäft, den Nettoanteil und den Rückversicherungsanteil gegeben sind.

Brutto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1992	250	230	218	215	205	200	200	200	200	200	200	200
1993	140	124	120	119	117	116	115	115	115	115		115
1994	130	114	106	101	100	96	95	97	97			97
1995	167	157	157	158	157	156	156	155				155
1996	178	147	140	137	136	134	133					133
1997	165	160	142	138	131	120						120
1998	168	160	145	135	128							124
1999	157	149	137	131								123
2000	203	180	181									166
2001	211	189										164
2002	252											199

Netto	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1992	250	230	218	210	200	185	170	165	165	177	178	178
1993	130	114	110	119	117	116	110	100	95	100		101
1994	120	103	95	90	88	83	83	85	83			89
1995	147	137	139	141	142	142	141	140				147
1996	168	137	135	132	126	119	115					117
1997	145	141	124	121	115	105						103
1998	168	155	135	125	113							106
1999	152	149	132	116								104
2000	198	170	166									144
2001	191	179										146
2002	252											187

RV	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1992	0	0	0	5	5	15	30	35	35	23	22	22
1993	10	10	10	0	0	0	5	15	20	15		14
1994	10	11	11	11	12	13	12	12	14			9
1995	20	20	18	17	15	14	15	15				11
1996	10	10	5	5	10	15	18					16
1997	20	19	18	17	16	15						19
1998	0	5	10	10	15							24
1999	5	0	5	15								27
2000	5	10	15									28
2001	20	10										20
2002	0											0

Abbildung 1.11: Aufwandsdreiecke; Bruttogeschäft, Nettoanteil und Rückversicherungsanteil davon

Für diese Daten wird mit dem Chain-Ladder-Verfahren der Endaufwand geschätzt (in Abbildung 1.11 jeweils in der letzten Spalte vermerkt).

Im nächsten Schritt werden dann die fehlenden Abwicklungsdaten mit den zuvor bestimmten Chain-Ladder-Abwicklungsfaktoren geschätzt und ergänzt. Mit diesen Daten werden Abwicklungskurven erstellt, die die zeitliche Entwicklung der Aufwandsanteile (an den geschätzten Endaufwänden) darstellen.

Während sich die Abwicklungskurven der einzelnen Schadenjahre für das Bruttogeschäft ähnlich zueinander verhalten (Abbildung 1.12), erhält man insbesondere für das Abwicklungsmuster der abgegebenen Rückversicherung (Abbildung 1.13, rechts) ein sehr volatiles Ergebnis. Auch das für den Erstversicherer ausschlaggebende Nettogeschäft (Abbildung 1.13, links) weist ein volatileres Abwicklungsmuster als das Bruttogeschäft auf.

¹³ [RS12], Seite 142

Besonders den Rückversicherer, der keine Informationen über den Verlauf des Bruttogeschäftes hat, stellt dieses volatile Ergebnis vor ein Problem. Eine Möglichkeit diese Informationsbasis zu verbessern, ist es, die Exzedentendaten von mehreren Erstversicherern zusammenzufassen. Der Erstversicherer hingegen verfügt über die Information bezüglich des gesamten Verlaufes des Bruttogeschäftes.

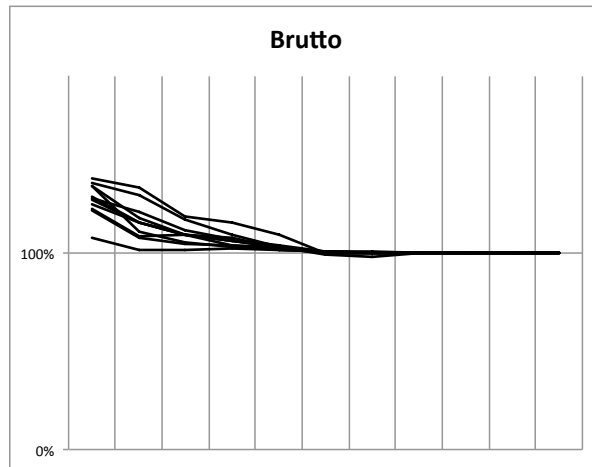


Abbildung 1.12: Abwicklungskurven; Bruttogeschäft

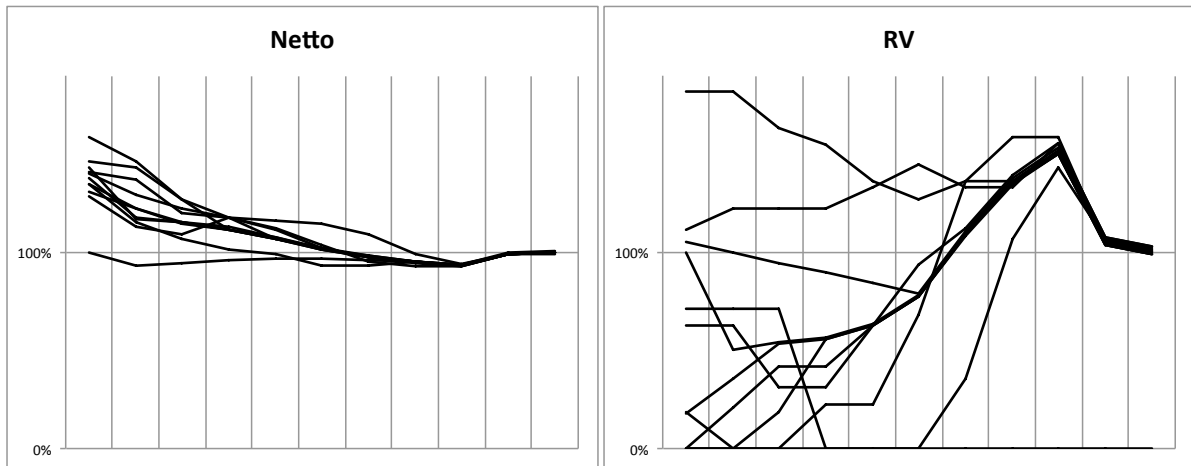


Abbildung 1.13: Abwicklungskurven; Nettogeschäft und abgegebene Rückversicherung

2 Spätschäden

Die lange Abwicklungsdauer in den behandelten Versicherungssparten resultiert hauptsächlich aus den folgenden zwei Ursachen:

1. Späte Manifestation

Besonders in der Haftpflichtversicherung kann zwischen dem Schadeneintritt, der Entdeckung und der Meldung des betroffenen Schadens eine mehrjährige Zeitspanne liegen.

Hierbei kann es sich unter anderem um Produktschäden¹ handeln. Prominentestes Beispiel dafür sind die Ansprüche für Gesundheitsschäden durch Asbest.

Aber auch in der Berufshaftpflicht liegen oft Jahre zwischen dem Eintritt und der Entdeckung des Schadens.

2. Lange Regulierungsdauer

Selbst bei bekannten und der Versicherung gemeldeten Schäden kann es Jahre dauern bis eine endgültige Schadenhöhe feststeht, wenn zum Beispiel ein Gerichtsverfahren anhängig ist oder längere ärztliche Behandlung notwendig ist.

Für Schäden, die der ersten Kategorie zuzuordnen sind, gilt es eine IBNR - Reserve zu bilden (Incurred But Not Reported): Der Schaden ist schon eingetreten, aber noch nicht bekannt bzw. gemeldet.

Für Schäden der zweiten Kategorie ist in jedem Fall eine vermutlich ausreichende Einzelfallreserve festzusetzen. Verglichen mit den dann tatsächlich auftretenden Kosten ergeben sich entweder Abwicklungsgewinne oder Abwicklungsverluste. Jene Reserven, die für ein erfahrungsgemäß negatives Abwicklungsergebnis gebildet werden, werden als IBNER - Reserven bezeichnet (Incurred [and reported] But Not Enough Reserved). Sie sollen einen Abwicklungsverlust verhindern.

Zumeist wird bei der Reservenbestimmung keine getrennte Berechnung der IBNR - und

¹als Produktschäden werden Schäden bezeichnet, die durch Produkte hervorgerufen werden oder sich nach Durchführung von Arbeiten bzw. Dienstleistungen eingestellt haben.

IBNER - Reserven durchgeführt und die gemeinsame Reserve als IBNR - Reserve bezeichnet. In Kapitel 2.2 wird eine Methode vorgestellt, welche die Reserven getrennt für IBNER und IBNR² bestimmt. Dafür sind mehr Informationen notwendig als beispielsweise für eine Reservenberechnung mit Hilfe des Chain-Ladder-Verfahrens. Bei diesen zusätzlichen Informationen handelt es sich allerdings um Daten, die für gewöhnlich in einem Versicherungsunternehmen vorhanden sind.

Die lange Abwicklungsdauer der betrachteten Versicherungssparten führt bei der Reservenbestimmung zu einem weiteren Problem. Man erhält ein unvollständiges Abwicklungsdreieck. Im letzten im Dreieck beschriebenen Abwicklungsjahr n ist die Abwicklung noch nicht beendet, für die vollständige Abwicklung ist eine Nachlaufschätzung („tail“) bis zum Abwicklungsjahr $n + d$ notwendig.

2.1 Tail-Schätzung

2.1.1 Verfahren zur Bestimmung von Tail-Faktoren

Zur Bestimmung eines Tail-Schätzers wird das Abwicklungsdreieck um die ebenfalls zu betrachteten Werte bis zum Abwicklungsjahr $n + d$ ergänzt und man erhält³:

	BJ	0	1	n	n+1	...	n+d
SJ										
0		$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$S_{0,n}$	$S_{0,n+1}$...	$S_{0,n+d}$
1		$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$	$S_{1,n+1}$...	$S_{1,n+d}$
2		$S_{2,0}$	$S_{2,2}$...	$S_{2,n-2}$...	$S_{2,n}$	$S_{2,n+1}$...	$S_{2,n+d}$
⋮		⋮					⋮		⋮	
n		$S_{n,1}$	$S_{n,n}$	$S_{n,n+1}$...	$S_{n,n+d}$

Die Schadenstände $S_{i,k}$ sind für $i + k \leq n$ beobachtbar und $S_{i,k}$ für $i + k \geq n + 1$ un-

²Oft wird um klarzustellen, dass die Reserven getrennt bestimmt worden sind, der IBNR - Anteil als 'True IBNR' bezeichnet. Im Folgenden wird mit 'IBNR' nur jener Anteil bezeichnet, der wirklich der ersten Kategorie zuzuordnen ist, der also 'True IBNR' ist.

³Im Folgenden wird mit BJ das Beobachtungsjahr bezeichnet und mit SJ das Schadenjahr.

bekannt. Die Schadenentwicklung ist aber nicht nach n Jahren bereits beendet, sondern nach weiteren d Jahren. Die Abwicklung von $n + 1$ bis $n + d$ wird als Nachlauf (Tail) bezeichnet.

Ein Nachlauf ist, wie oben bereits angemerkt, im Fall eines unvollständigen Abwicklungsdreieckes zu ermitteln. Ein unvollständiges Dreieck liegt dann vor, wenn aus vergleichbaren Schadenfällen bekannt ist, dass deren Abwicklung länger dauert als die bisherige Beobachtung, oder im ältesten Schadenjahr der letzte Abwicklungsfaktor noch nicht nahe genug bei Eins ist (wenn der letzte Faktor oder das Mittel der letzten drei Faktoren nicht kleiner als 1,001 ist, sollte ein Nachlauf geschätzt werden).

Weiters ist auch ein Nachlauf zu ermitteln, falls der Beobachtungszeitraum wegen systematischer Brüche (wie zum Beispiel bei fehlerhaften und älteren Daten, oder bei relevanten Portfolioveränderungen wie geänderte Selbstbehalte oder Ähnlichem) auf einen Ausschnitt begrenzt werden muss.

Auch am Rand des Abwicklungsdreieckes kann eine Bestimmung von Tail-Schätzern notwendig sein, falls hier zu wenig Beobachtungspunkte vorhanden sind und daher die Bestimmung von Abwicklungsfaktoren beispielsweise mit dem Chain-Ladder-Verfahren zu volatilen Ergebnissen führt.

Zur Nachlaufbestimmung betrachtet man ein erweitertes Abwicklungsmuster für Faktoren⁴. Dafür wird die folgende Annahme getroffen.

Annahme: Erweitertes Abwicklungsmuster für Faktoren

Es gibt Parameter $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_{n+d}$ derart, so dass für alle $k \in \{1, \dots, n + d\}$ und für alle $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$\frac{\mathbb{E}[S_{i,k}]}{\mathbb{E}[S_{i,k-1}]} = \varphi_k \tag{2.1}$$

gilt.

Unter dieser Voraussetzung bilden die Abwicklungsfaktoren $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Abwicklungsmuster für Faktoren und die Nachlauffaktoren $\varphi_{n+1}, \dots, \varphi_{n+d}$ ein Nachlaufmuster für die Tail-Faktoren.

Die bisher behandelten Verfahren beruhen auf einem Abwicklungsmuster und liefern Schätzer für $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Es wird angenommen, dass solche Schätzer $\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n$ gegeben sind.

⁴ [RS12]

Für die Schätzung der Parameter wird eine parametrische Klasse Φ von Funktionen $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow (0, \infty)$ betrachtet und daraus eine Funktion φ^* bestimmt, die den quadratischen Approximationsfehler

$$\sum_{k=1}^n (\varphi(k) - \hat{\varphi}(k))^2$$

über alle $\varphi \in \Phi$ minimiert.

Damit erhält man neue Schätzer für die Abwicklungsfaktoren

$$\varphi^*(1), \dots, \varphi^*(n)$$

und Schätzer für die Nachlauffaktoren

$$\varphi^*(n+1), \dots, \varphi^*(n+d).$$

2.1.2 Funktionen zur Tail-Schätzung

Folgende Klassen von Funktionen werden unter anderem zur Bestimmung der Tail-Faktoren verwendet:

1. (Sherman Curve)

$$f(k) = 1 + a(b+k)^{-c} \quad (2.2)$$

mit $a, c > 0$ und $b \geq 0$.

2. (Exponential Curve)

$$f(k) = 1 + a \exp(-bk) \quad (2.3)$$

mit $a, b > 0$.

3. (Weibull Curve)

$$f(k) = \frac{1}{1 - \exp(-a(b+k)^c)} \quad (2.4)$$

mit $a, c > 0$ und $b \geq 0$.

4. (Modifikation der Weibull Curve)

$$f(k) = 1 + abk^{(b-1)} \exp(-ak^b) \quad (2.5)$$

mit $a, b > 0$.

5. (Power Curve)

$$f(k) = a^{(b^k)} \tag{2.6}$$

mit $a, b > 0$.

Oft ist es sinnvoll, kleinere Klassen von Funktionen zu betrachten, dass also beispielsweise für den Verschiebungsparameter b bei der Sherman Curve oder der Weibull Curve $b = 0$ festgesetzt wird. Im Fall der Sherman Curve erhält man so die sogenannte Inverse Power Curve.

2.1.3 Umsetzung in der Praxis

Im Folgenden wird ein Kfz-Haftpflicht Bestand behandelt. Es werden die Zahlungen über einen Zeitraum von 15 Jahren betrachtet (dargestellt in Tausend Geldeinheiten).

S	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	71.589	106.162	114.585	119.842	123.998	126.858	129.126	131.371	133.217	134.440	135.913	138.114	140.461	142.088	144.978
1	74.446	105.087	114.125	119.113	123.463	125.374	129.828	132.317	134.358	135.326	137.611	138.441	139.974	142.627	
2	69.382	101.476	108.667	113.686	118.076	121.435	123.292	123.965	125.412	127.569	128.686	130.757	133.310		
3	76.646	109.673	117.551	122.872	126.921	129.308	132.018	132.931	133.819	135.005	137.799	140.770			
4	75.540	107.982	115.141	122.512	127.076	129.427	132.156	134.122	137.021	139.570	143.206				
5	77.712	113.724	127.747	134.418	137.655	142.190	144.206	145.463	147.767	149.885					
6	84.000	135.212	146.900	154.318	161.517	169.772	176.271	181.257	184.160						
7	95.027	145.806	157.074	163.095	168.396	171.970	178.289	184.204							
8	106.622	163.071	174.810	183.206	192.294	200.000	206.325								
9	128.298	184.951	198.334	209.268	218.480	224.728									
10	141.032	207.591	226.990	238.054	246.200										
11	131.349	191.536	209.772	222.924											
12	127.265	178.785	194.857												
13	127.096	182.883													
14	115.877														

Abbildung 2.1: Zahlungsdreieck

Mit diesem Zahlungsdreieck erhält man folgende Chain-Ladder-Faktoren:

CL	1	2	3	4	5	6	7
	1,46748	1,08400	1,05057	1,03790	1,02883	1,02673	1,01785

CL	8	9	10	11	12	13	14
	1,01460	1,01257	1,01683	1,01495	1,01579	1,01526	1,02034

Abbildung 2.2: Chain-Ladder-Faktoren

Für diese Chain-Ladder-Faktoren wird im nächsten Schritt mit Hilfe der Funktionsklassen 1 - 5, die in Kapitel 2.1.2 beschrieben wurden, mittels Extrapolation jeweils jenes φ^* gesucht, das den quadratischen Approximationsfehler innerhalb der Funktionsklasse

minimiert.

Für die Extrapolation werden nur Faktoren $\hat{\varphi}_k$ verwendet mit $k \geq 2$, da sich der erste Chain-Ladder-Faktor zumeist anders als die folgenden verhält.

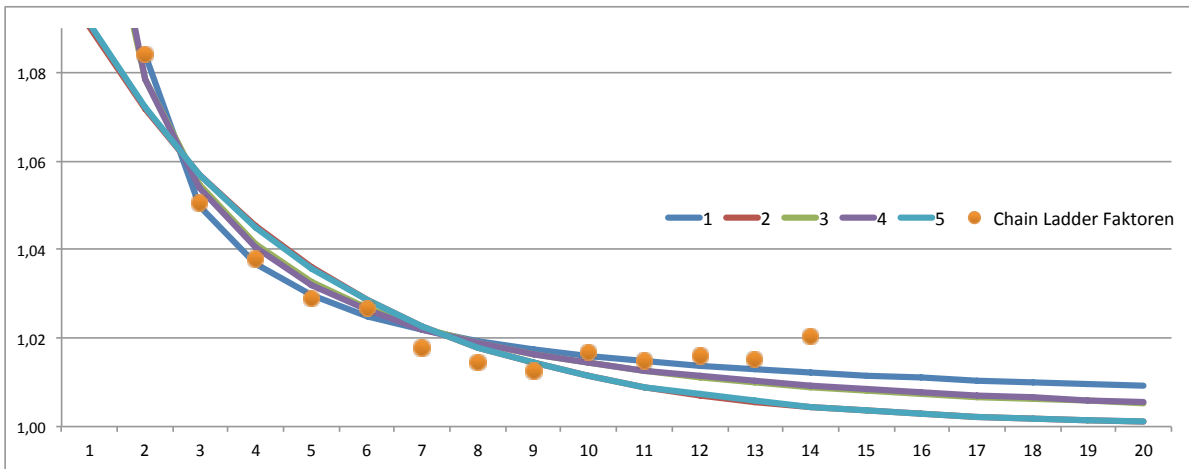


Abbildung 2.3: Chain-Ladder-Faktoren und daraus extrapolierte Funktionen

Durch Auswerten der bestimmten Funktionen für $k = 1, \dots, 20$ erhält man die neuen Schätzer für die Abwicklungsfaktoren (Abbildung 2.5 auf Seite 33).

Es ist nicht möglich eine Funktionsklasse zu bestimmen, die in jedem Fall die beste Lösung liefert. Es muss in jeder Situation entschieden werden, welche Approximation die beste ist.

Eine Möglichkeit dazu ist es, die quadratische Abweichung von den gegebenen Faktoren über die gesamte Laufzeit zu betrachten (Abbildung 2.4).

Eine weitere Möglichkeit ist es, jene Funktionsklasse zu wählen, bei welcher der quadratische Approximationsfehler am kleinsten ist.

Das Ziel ist es am Ende den Tail-Faktor zu bestimmen, der angibt, wie viel noch insgesamt an Zahlungen während der Nachlaufzeit zu erwarten ist:

$$\text{Tail-Faktor} = \prod_{i=n+1}^{n+d} \varphi(i) \tag{2.7}$$

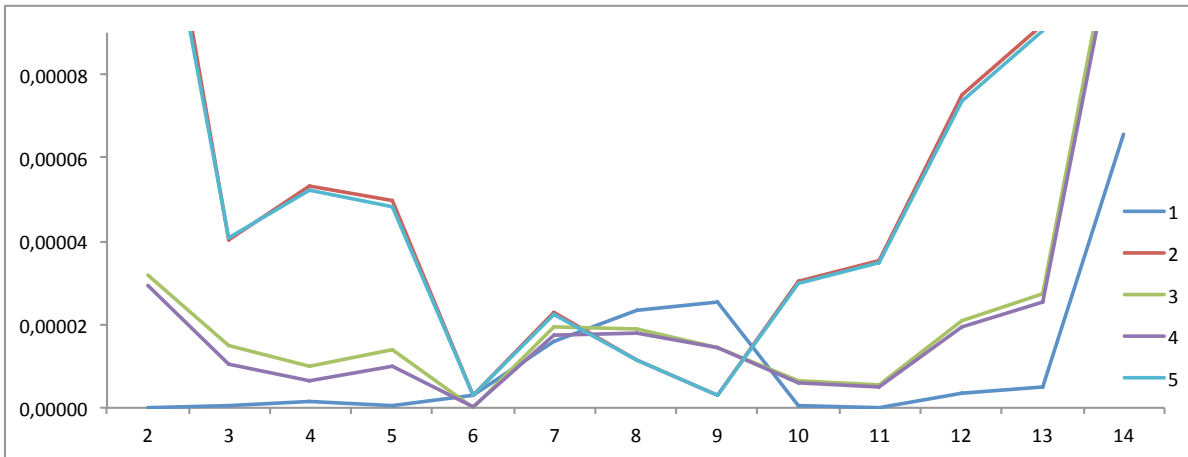


Abbildung 2.4: Quadratische Abweichung

Im obigen Beispiel erhält man für die Funktionsklassen 1-5 jeweils den quadratischen Approximationsfehler und den Tail-Faktor :

	Approximationsfehler	Tail-Faktor
1	0,00015	1,0634
2	0,00082	1,0131
3	0,00031	1,0402
4	0,00029	1,0419
5	0,00080	1,0134

Es gilt nicht, dass jene Funktionsklasse mit dem kleinsten quadratischen Approximationsfehler die beste Tail-Schätzung liefert.

Allgemein ist noch anzumerken, dass die Schätzung von Tail-Faktoren mit höheren Unsicherheiten verbunden ist. Ergebnisse sollten mit Erfahrungswerten oder Marktdaten verglichen werden und auch zusätzlich die Einzelfallreserven der ältesten Schadenjahre betrachtet werden.

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		1,08392	1,04986	1,03677	1,02963	1,02505	1,02185	1,01946	1,01760	1,01611

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1,01489	1,01386	1,01298	1,01222	1,01156	1,01098	1,01046	1,00999	1,00957	1,00919

2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,09027	1,07168	1,05691	1,04519	1,03588	1,02849	1,02262	1,01796	1,01426	1,01133

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1,00899	1,00714	1,00567	1,00450	1,00357	1,00284	1,00225	1,00179	1,00142	1,00113

3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
mit b=0	1,13530	1,07835	1,05446	1,04110	1,03254	1,02661	1,02227	1,01896	1,01638	1,01430

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1,01261	1,01120	1,01002	1,00902	1,00816	1,00742	1,00677	1,00620	1,00570	1,00526

4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,14201	1,07856	1,05381	1,04042	1,03200	1,02623	1,02202	1,01884	1,01635	1,01435

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1,01272	1,01136	1,01022	1,00925	1,00841	1,00768	1,00705	1,00649	1,00599	1,00555

5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,09112	1,07197	1,05694	1,04512	1,03579	1,02842	1,02258	1,01795	1,01428	1,01136

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1,00905	1,00720	1,00573	1,00457	1,00364	1,00290	1,00231	1,00184	1,00147	1,00117

Abbildung 2.5: Abwicklungsfaktoren der einzelnen Funktionsklassen

2.2 Getrennte IBNR - und IBNER - Reservenberechnung

Das nachfolgende Verfahren wurde 1991⁵ von R. Schnieper vorgestellt und 2009⁶ von H. Liu und R. Verrall erweitert.

Zumeist benötigt man für die Reservenbestimmung ein Schadendreieck der folgenden Form, wie es bereits in den vorausgehenden Abschnitten verwendet wurde:

		BJ							
		1	2	n	Exposure
SJ									
	1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	$X_{1,n}$	E_1
	2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,n-1}$		E_2
	3	$X_{3,1}$	$X_{3,2}$	$X_{3,n-2}$			E_3
	⋮								⋮
	n	$X_{n,1}$							E_n

Tabelle 2.1: Schadendreieck

Hier bezeichnet $X_{i,j}$ den kumulativen Schadenaufwand aus dem Schadenjahr i im Beobachtungsjahr j und E_i ein Exposuremaß für das Jahr i (beispielsweise Jahreseinheiten oder abgegrenzte Prämien).

2.2.1 Benötigte Daten

Für die getrennte Bestimmung einer IBNR - und IBNER - Reserve ist die oben angeführte Information nicht ausreichend. Man benötigt eine detailliertere Aufteilung der $X_{i,j}$. Im Folgenden bezeichnet $N_{i,j}$ den kumulativen Schadenaufwand von Schäden aus dem i -ten Schadenjahr im j -ten Beobachtungsjahr, die allerdings im Jahr $j - 1$ noch nicht bekannt waren. Hierbei handelt es sich um den IBNR - Anteil der Schäden.

Weiters wird mit $D_{i,j}$ der Rückgang des Schadenaufwandes von Beobachtungsjahr $j - 1$ bis zum Jahr j von Schäden aus dem Jahr i bezeichnet. Dieser IBNER - Anteil der

⁵ [Sch91]

⁶ [LV09]

Reserve kann negativ sein (im Falle eines Abwicklungsverlustes), D_{ij} kann aber definitionsgemäß nie größer als $X_{i,j-1}$ sein.

BJ		1	2	n
SJ							
1		$X_{1,1} = N_{1,1}$	$N_{1,2}$	$N_{1,n}$
2		$X_{2,1} = N_{2,1}$	$N_{2,2}$	$N_{2,n-1}$	
3		$X_{3,1} = N_{2,1}$	$N_{3,2}$...	$N_{3,n-2}$		
⋮							
n		$X_{n,1} = N_{n,1}$					
1		—	$D_{1,2}$	$D_{1,n}$
2		—	$D_{2,2}$	$D_{2,n-1}$	
3		—	$D_{3,2}$...	$D_{3,n-2}$		
⋮							
n-1		—	$D_{n-1,2}$				
n		—					

Tabelle 2.2: N- und D-Dreieck

Zwischen X , N und D gelten die folgenden zwei Zusammenhänge:

$$X_{i1} = N_{i1} \quad \text{für } i = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

und

$$X_{ij} = X_{i,j-1} - D_{ij} + N_{ij} \quad \text{für } i = 1, \dots, n \text{ und } j = 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Man benötigt also die beiden Dreiecke aus Tabelle (2.2) für die getrennte Reservenbestimmung.

Zusätzlich benötigt man noch ein Exposuremaß (wie zum Beispiel abgegrenzte Prämien, Jahreseinheiten, etc.) für die betrachteten Schadenjahre: $E = (E_1, E_2, \dots, E_n)$. Man kann natürlich nur jene Werte N_{ij} und D_{ij} der Dreiecke beobachten, die in der Vergangenheit liegen, das heißt jene Einträge, für welche $i + j \leq n + 1$ gilt.

Es ist leicht zu erkennen, dass man aus den N- und D-Dreiecken mit Hilfe von (2.8) und (2.9) das Dreieck aus Tabelle (2.1) erhält.

Definition. Als Jahreseinheit wird die versicherte Dauer eines Risikos/Vertrages pro Jahr bezeichnet.

Beispiel (A)

Das folgende Beispiel soll die vorgestellte Methode veranschaulichen und ist dem Artikel von R. Schnieper entnommen. Es stellt ein Kfz-Haftpflichtportfolio und das zugehörige Schadenexzedenten-Pricing dar. Das Beispiel wird im Laufe des Kapitels fortgeführt⁷ und weiter ergänzt.

X	1	2	3	4	5	6	7	Exposure
1	7,5	28,9	52,6	84,5	80,1	76,9	79,5	10.224
2	1,6	14,8	32,1	39,6	55	60		12.752
3	13,8	42,4	36,3	53,3	96,5			14.875
4	2,9	14	32,5	46,9				17.365
5	2,9	9,8	52,7					19.410
6	1,9	29,4						17.617
7	19,1							18.129

N	1	2	3	4	5	6	7
1	7,5	18,3	28,5	23,4	18,6	0,7	5,1
2	1,6	12,6	18,2	16,1	14	10,6	
3	13,8	22,7	4	12,4	12,1		
4	2,9	9,7	16,4	11,6			
5	2,9	6,9	37,1				
6	1,9	27,5					
7	19,1						

Abbildung 2.6: X- und N-Dreieck mit Exposure

Aus diesen beiden gegebenen Dreiecken berechnet man das Dreieck der Abwicklungsverluste mit Hilfe von $D_{ij} = X_{i,j-1} - X_{ij} + N_{ij}$ (Gleichung (2.9)) und erhält:

⁷Beispiel (A) - (D)

D	1	2	3	4	5	6	7
1	-	-3,1	4,8	-8,5	23	3,9	2,5
2	-	-0,6	0,9	8,6	-1,4	5,6	
3	-	-5,9	10,1	-4,6	-31,1		
4	-	-1,4	-2,1	-2,8			
5	-	0	-5,8				
6	-	0					
7	-						

Abbildung 2.7: D-Dreieck

2.2.2 Modellannahmen

Mit H_k werden jene Informationen bezeichnet, die zum Zeitpunkt k bekannt sind:

$$H_k := \{N_{ij}, D_{ij} | i + j \leq k + 1\} \quad (2.10)$$

Der Vollständigkeit halber definiert man $H_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Annahme 1: Erwartungswert

Für die Erwartungswerte von N_{ij} und D_{ij} gelten folgende Annahmen:

$$\mathbb{E}[N_{ij} | H_{i+j-2}] = E_i \lambda_j \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n \quad (A1)$$

$$\mathbb{E}[D_{ij} | H_{i+j-2}] = X_{i,j-1} \delta_j \quad \text{für } i = 1, \dots, n \text{ und } j = 2, \dots, n \quad (A2)$$

Die Annahme (A1) setzt fest, dass der erwartete IBNR - Schadenaufwand N_{ij} nicht von der Vergangenheit abhängt, sondern das Produkt von einem Faktor λ_j , der nur vom Beobachtungsjahr j abhängt, und dem gewählten Exposuremaß E_i des betrachteten Schadenjahres i ist.

Annahme (A2) hingegen stellt sicher, dass der erwartete Rückgang des IBNER - Aufwandes D_{ij} das Produkt von den kumulierten im Vorjahr beobachteten Gesamtaufwänden desselben Schadenjahres $X_{i,j-1}$ und einem Faktor δ_j (der wiederum vom Beobachtungsjahr abhängt) ist.

Annahme 2: Varianz

Für die Varianz sollen folgende Annahmen gelten:

$$\text{Var}[N_{ij}|H_{i+j-2}] = E_i \sigma_j^2 \quad (\text{A3})$$

$$\text{Var}[D_{ij}|H_{i+j-2}] = X_{i,j-1} \tau_j^2 \quad (\text{A4})$$

Annahme 3: Unabhängigkeit

Es wird angenommen, dass

$$\{N_{1,j}, D_{1,j}|j = 1, 2, \dots, n\}, \dots, \{N_{n,j}, D_{n,j}|j = 1, 2, \dots, n\} \quad (\text{A5})$$

unabhängige Mengen von Zufallsvariablen sind.

Bemerkung. Es ist anzumerken, dass, obwohl die obigen Annahmen (A1) bis (A5) sehr allgemein sind, sie in der Praxis oft nicht erfüllt werden. Beispielsweise führt eine während des Beobachtungszeitraumes geänderte Zeichnungspolitik oder Schadenmanagement dazu, dass die Unabhängigkeit aus Annahme (A5) nicht mehr erfüllt ist.

2.2.3 Erwartungstreue Schätzer der Faktoren

Ziel dieses Verfahrens ist es nun den erwarteten Schadenaufwand für das nächste Jahr zu schätzen, also $\mathbb{E}[X_{n+1,n}]$, oder beispielsweise die Schadenquote SQ des nächsten Jahres

$$SQ = \mathbb{E} \left[\frac{X_{n+1,n}}{E_{n+1}} \right],$$

wenn man als Exposuremaß E die abgegrenzte Prämie wählt.

Man erhält für SQ unter der Annahme, dass (A1) und (A2) für das Schadenjahr $n + 1$ erfüllt sind, folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 SQ(\theta) = \mathbb{E} \left[\frac{X_{n+1,n}}{E_{n+1}} \right] &= \lambda_1(1 - \delta_2) \cdots (1 - \delta_n) + \\
 &\lambda_2(1 - \delta_3) \cdots (1 - \delta_n) + \\
 &\vdots \\
 &\lambda_{n-1}(1 - \delta_n) + \\
 &\lambda_n
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

mit $\theta = (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \delta_2, \dots, \delta_n)$.

Für die erwartungstreuen Schätzer von λ , δ , σ^2 und τ^2 erhält man gemäß den Annahmen (A1) bis (A5):

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} N_{ij}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} E_i} \quad \text{für } j = 1, \dots, n \tag{2.12}$$

$$\hat{\delta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} X_{i,j-1}} \quad \text{für } j = 2, \dots, n \tag{2.13}$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n+1-j} \frac{1}{E_i} (N_{ij} - \hat{\lambda}_j E_i)^2 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n-1 \tag{2.14}$$

$$\hat{\tau}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n+1-j} \frac{1}{X_{i,j-1}} (D_{ij} - \hat{\delta}_j X_{i,j-1})^2 \quad \text{für } j = 2, 3, \dots, n-1 \tag{2.15}$$

Weiters ergeben sich auch die Varianzen der Schätzer $\hat{\lambda}$ und $\hat{\delta}$:

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_j) = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n+1-j} E_i} \quad \text{für } j = 1, \dots, n \tag{2.16}$$

$$\text{Var}(\hat{\delta}_j) = \frac{\tau_j^2}{n+1-j} \sum_{i=1}^{j-1} X_{i,j-1} \quad \text{für } j = 2, \dots, n \quad (2.17)$$

Als Schätzer für die Schadenquote SQ erhält man

$$SQ(\hat{\theta}) = \hat{\lambda}_1(1 - \hat{\delta}_2) \cdot \dots \cdot (1 - \hat{\delta}_n) + \hat{\lambda}_2(1 - \hat{\delta}_3) \cdot \dots \cdot (1 - \hat{\delta}_n) + \dots + \hat{\lambda}_n. \quad (2.18)$$

Fortsetzung Beispiel (B)

Im nächsten Schritt berechnet man zunächst mit (2.12) und (2.13) Werte für λ_j und δ_i für $j = 1, 2, \dots, 7$ und $i = 2, 3, \dots, 7$.

λ	1	2	3	4	5	6	7
	0,0005	0,0011	0,0014	0,0012	0,0012	0,0005	0,0005
δ		2	3	4	5	6	7
		-0,3595	0,0719	-0,0476	-0,0536	0,0703	0,0325

Abbildung 2.8: Schätzer für λ und δ

Weiters kann man noch die folgenden Parameter berechnen: $\text{Var}[\lambda_j]$, $\text{Var}[\delta_i]$, σ_m und τ_n , für $j = 1, \dots, 7$, $i = 2, \dots, 7$, $m = 1, \dots, 6$ und $n = 2, \dots, 7$, die mit (2.16), (2.17), (2.14) und (2.15) bestimmt werden.

Sie werden für die Fehlerabschätzung, die im letzten Schritt durchgeführt wird, benötigt.

Var[λ]	1	2	3	4	5	6	7
	2,62E-08	5,89E-08	1,59E-07	1,14E-07	8,27E-08	1,44E-07	0

Var[δ]	2	3	4	5	6	7
	0,0061	0,0146	0,0090	0,0675	0,0007	0

σ	1	2	3	4	5	6	7
	0,0538	0,0737	0,1089	0,0795	0,056	0,0575	

τ	2	3	4	5	6	7
	0,4331	1,2686	1,1768	3,4603	0,3034	0

Abbildung 2.9: Schätzer für $\text{Var}(\lambda)$, $\text{Var}(\delta)$, σ und τ

2.2.4 Ultimate Claims

Um das Ziel einer möglichst genauen Prognose des noch ausstehenden Schadenaufwandes zu erreichen, benötigt man eine Prognose für den Endaufwand eines jeden Schadenjahres. Dieser wird mittels eines rekursiven Verfahrens berechnet.

Sei nun $\hat{X}_{ij} := \mathbb{E}[X_{ij}|H_{i,n-i+1}]$ für $j > n - i + 1$. Bei $H_{i,n-i+1}$ handelt es sich um die aktuellsten Informationen des Schadenjahres i . Für den Gesamtaufwand des Schadenjahres i gilt

$$\hat{X}_{in} = L_i + X_{i,n-i+1}, \quad (2.19)$$

wobei L_i die Schadenreserve für das Schadenjahr i ist.

Für das Schadenjahr $i = 2$ erhält man mit einer Einschritt-Prognose einen Schätzer \hat{X}_{2n} für den Gesamtaufwand

$$\begin{aligned} \hat{X}_{2n} &= \mathbb{E}[X_{2n}|H_{2,n-1}] \stackrel{(2.9)}{=} \mathbb{E}[X_{2,n-1} - D_{2n} + N_{2n}|H_{2,n-1}] \\ &= \mathbb{E}[X_{2,n-1}|H_{2,n-1}] - \mathbb{E}[D_{2n}|H_{2,n-1}] + \mathbb{E}[N_{2n}|H_{2,n-1}] \\ &\stackrel{(A1)(A2)}{=} X_{2,n-1} - \delta_n X_{2,n-1} + \lambda_n E_2 \\ &= X_{2,n-1}(1 - \delta_n) + \lambda_n E_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Für das Schadenjahr $i = 3$ erhält man auf die selbe Weise

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_{3n} &= \mathbb{E}[X_{3n}|H_{3,n-2}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{3n}|H_{3,n-1}|H_{3,n-2}]] \stackrel{(2.20)}{=} \mathbb{E}[X_{3,n-1}(1 - \delta_n) + E_3\lambda_n|H_{3,n-2}] \\
 &= \mathbb{E}[X_{3,n-1}(1 - \delta_n)|H_{3,n-2}] + \mathbb{E}[E_3\lambda_n|H_{3,n-2}] \\
 &= (1 - \delta_n) \cdot \mathbb{E}[X_{3,n-1}|H_{3,n-2}] + E_3\lambda_n \\
 &= (1 - \delta_n) \cdot \mathbb{E}[X_{3,n-2} - D_{3,n-1} + N_{3,n-1}|H_{3,n-2}] + E_3\lambda_n \\
 &= (1 - \delta_n) \cdot (X_{3,n-2} - \delta_{n-1}X_{3,n-2} + E_3\lambda_{n-1}) + E_3\lambda_n \\
 &= X_{3,n-2}(1 - \delta_{n-1})(1 - \delta_n) + E_3(\lambda_{n-1}(1 - \delta_n) + \lambda_n). \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Allgemein erhält man dann rekursiv für das Schadenjahr i

$$\begin{aligned}
 \hat{X}_{in} &= \mathbb{E}[X_{in}|H_{i,n-i+1}] = X_{i,n-i+1}(1 - \delta_{n-i+2}) \cdot \dots \cdot (1 - \delta_n) + \\
 &\quad E_i[\lambda_{n-i+2}(1 - \delta_{n-i+3}) \cdot \dots \cdot (1 - \delta_n) + \\
 &\quad \lambda_{n-i+3}(1 - \delta_{n-i+4}) \cdot \dots \cdot (1 - \delta_n) + \dots + \lambda_n]. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Der endgültige Aufwand X_{in} hängt also sowohl vom aktuellen Schadenstand $X_{i,n-i+1}$ als auch vom Exposure des betrachteten Schadenjahres ab.

Man kann also (2.22) geeignet umformen, sodass

$$X_{in} = X_{i,n-i+1} \cdot \Delta_{n-i+1} + E_i \cdot \Lambda_{n-i+1}, \tag{2.23}$$

wobei $\Delta_{n-i+1} := (1 - \delta_{n-i+2}) \cdot \dots \cdot (1 - \delta_n)$ als IBNER-Korrekturfaktor bezeichnet wird und $\Lambda_{n-i+1} := [\lambda_{n-i+2}(1 - \delta_{n-i+3}) \cdot \dots \cdot (1 - \delta_n) + \lambda_{n-i+3}(1 - \delta_{n-i+4}) \cdot \dots \cdot (1 - \delta_n) + \dots + \lambda_n]$. Bei der Chain-Ladder-Methode erhält man für den endgültigen Schadenstand

$$X_{in} = X_{i,n-i+1} \cdot F_{n-i+1}, \tag{2.24}$$

wobei F_j ein Faktor ist, der vom Beobachtungsjahr j abhängt.

Bei der Reservenbestimmung mit der Bornhuetter-Ferguson-Methode gilt, dass

$$X_{in} = X_{n-i+1} + E_i \cdot G_{n-i+1}, \tag{2.25}$$

wobei G_j ein Faktor ist, der vom Beobachtungsjahr j abhängig ist, und welcher auf das Exposure E_i des Schadenjahres i angewendet wird.

Der Schätzer, der mit der hier vorgestellten Methode berechnet wird, ist eine Verallge-

meinerung der Schätzer nach Chain-Ladder und nach Bornhuetter-Ferguson.

Mit $\Delta_{n-i+1} = F_{n-i+1}$ und $\Lambda_{n-i+1} = 0$ erhält man den Schätzer nach Chain-Ladder und mit $\Delta_{n-i+1} = 1$ und $\Lambda_{n-i+1} = G_{n-i+1}$ jenen nach Bornhuetter-Ferguson.

Fortsetzung Beispiel (C)

Mit Hilfe der im vorigen Kapitel (auf Seite 40) berechneten Werte ist es nun möglich, Schätzer für \hat{N}_{ij} und \hat{D}_{ij} mit $i + j > 7 + 1$ zu bestimmen und so die Dreiecke zu vervollständigen.

N	1	2	3	4	5	6	7
1	7,5	18,3	28,5	23,4	18,6	0,7	5,1
2	1,6	12,6	18,2	16,1	14	10,6	6,361
3	13,8	22,7	4	12,4	12,1	7,316	7,42
4	2,9	9,7	16,4	11,6	20,51	8,54	8,662
5	2,9	6,9	37,1	22,32	22,92	9,546	9,682
6	1,9	27,5	24,6	20,26	20,8	8,664	8,788
7	19,1	19,2	25,31	20,85	21,41	8,916	9,043

D	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-3,1	4,8	-8,5	23	3,9	2,5
2	0	-0,6	0,9	8,6	-1,4	5,6	1,951
3	0	-5,9	10,1	-4,6	-31,1	6,786	3,154
4	0	-1,4	-2,1	-2,8	-2,512	4,917	2,391
5	0	0	-5,8	-2,506	-4,152	7,355	3,472
6	0	0	2,113	-2,468	-3,996	6,991	3,286
7	0	-6,866	3,247	-3,197	-4,888	8,268	3,844

Abbildung 2.10: Vervollständigtes N- und D-Dreieck

Aus diesen beiden Dreiecken erhält man wieder das Ausgangsdreieck X und die Schätzer \hat{X}_{ij} mit $i + j > 8$. Daraus kann man auch die Reserven für die einzelnen Schadenjahre und gesamt durch $L_i = X_{in} - X_{i,n-i+1}$ berechnen (Abbildung 2.11 auf Seite 44).

X	1	2	3	4	5	6	7	Reserven
1	7,5	28,9	52,6	84,5	80,1	76,9	79,5	-
2	1,6	14,8	32,1	39,6	55	60	64,41	4,41
3	13,8	42,4	36,3	53,3	96,5	97,03	101,3	4,80
4	2,9	14	32,5	46,9	69,92	73,54	79,81	32,91
5	2,9	9,8	52,7	77,53	104,6	106,8	113	60,30
6	1,9	29,4	51,89	74,61	99,41	101,1	106,6	77,19
7	19,1	45,17	67,23	91,28	117,6	118,2	123,4	104,33

Abbildung 2.11: Vervollständigtes X-Dreieck

2.2.5 Stochastisches Modell

Bis zu diesem Punkt wurden noch keine Annahmen über die Verteilung des Prozesses getroffen.

Um Prognosefehler zu betrachten, werden im Folgenden Verteilungen für den Prozess bestimmt. Hierbei wird, um möglichst nahe am verteilungsfreien Modell zu bleiben, für $N_{ij}|X_{i,j-1}$ und $D_{ij}|X_{i,j-1}$ eine Normalverteilung angenommen.

Da in Kapitel 2.2.7 (siehe Seite 53) $\frac{N_{ij}}{E_i}$ und $\frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}}$ betrachtet werden, wird im Folgenden die Verteilung nicht für N_{ij} und D_{ij} definiert, sondern für $\frac{N_{ij}}{E_i}$ und $\frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}}$:

$$\frac{N_{ij}}{E_i} \Big| X_{i,j-1} \sim \text{Normal}(\lambda_j, \frac{\sigma_j^2}{E_i}) \quad (2.26)$$

und

$$\frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}} \Big| X_{i,j-1} \sim \text{Normal}(\delta_j, \frac{\tau_j^2}{X_{i,j-1}}). \quad (2.27)$$

Unter diesen Annahmen sind die Maximum-Likelihood-Schätzer von λ_j und δ_j

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} N_{ij}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} E_i} \quad (2.28)$$

und

$$\hat{\delta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} X_{i,j-1}}. \quad (2.29)$$

Man erhält also für λ_j und δ_j unter obigen Verteilungsannahmen die gleichen Schätzer wie in Kapitel 2.2.3 in (2.12) und (2.13).

Für die Schätzer von σ_j^2 und τ_j^2 wird die asymptotische Verteilung der quadratischen Residuen verwendet.

Die Pearsonresiduen erhält man durch Division der Residuen durch die Wurzel der Varianz:

$$\frac{\frac{N_{ij}}{E_i} - \hat{\lambda}_j}{\sqrt{\frac{\sigma_j^2}{E_i}}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}} - \hat{\delta}_j}{\sqrt{\frac{\tau_j^2}{X_{i,j-1}}}}. \quad (2.30)$$

Es gilt, dass die Summe der quadratischen Pearsonresiduen asymptotisch χ_{n-r}^2 -verteilt sind, wobei r die Anzahl der geschätzten Parameter ist (in unserem Fall $r = 1$). Hier erhält man also:

$$\sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{\left(\frac{N_{ij}}{E_i} - \hat{\lambda}_j\right)^2}{\frac{\sigma_j^2}{E_i}} \sim \chi_{(n-j+1)-1}^2 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{\left(\frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}} - \hat{\delta}_j\right)^2}{\frac{\tau_j^2}{X_{i,j-1}}} \sim \chi_{(n-j+1)-1}^2 \quad (2.31)$$

Im nächsten Schritt setzt man sie mit ihrem jeweiligen Erwartungswert gleich

$$\sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{\left(\frac{N_{ij}}{E_i} - \hat{\lambda}_j\right)^2}{\frac{\hat{\sigma}_j^2}{E_i}} = n - j \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{\left(\frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}} - \hat{\delta}_j\right)^2}{\frac{\hat{\tau}_j^2}{X_{i,j-1}}} = n - j, \quad (2.32)$$

und erhält damit die folgenden Schätzer für σ_j^2 und τ_j^2 :

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n+1-j} \frac{1}{E_i} (N_{ij} - \hat{\lambda}_j E_i)^2 \quad (2.33)$$

$$\hat{\tau}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n+1-j} \frac{1}{X_{i,j-1}} (D_{ij} - \hat{\delta}_j X_{i,j-1})^2 \quad (2.34)$$

Auch hier entsprechen die Schätzer wieder jenen aus Kapitel 2.2.3.

2.2.6 Prognosefehler

Zur Bestimmung des Prognosefehlers betrachtet man den sogenannten Mean Squared Error of Prediction, kurz MSEP. Die Wurzel des MSEP wird als Prognosefehler bezeichnet. Für eine Zufallsvariable C und ihre Prognose \hat{C} gilt:

$$\text{MSEP}(\hat{C}) := \mathbb{E}[(C - \hat{C})^2] \quad (2.35)$$

Für den MSEP gilt, dass er folgendermaßen aufgeteilt werden kann

$$\text{MSEP}(\hat{C}) = \text{Var}(C) + \text{Var}(\hat{C}) + (\text{Bias}(\hat{C}))^2 \quad (2.36)$$

Beweis. ⁸ In Integralschreibweise lässt sich (2.35) folgendermaßen darstellen:

$$\text{MSEP}(\hat{C}) = \int \int (c - \hat{c})^2 f(c, \hat{c}) dc d\hat{c} \quad (2.37)$$

Da die gemeinsame Dichtefunktion $f(c, \hat{c})$ faktorisiert werden kann

$$f(c, \hat{c}) = f(c|\hat{c})f(\hat{c}), \quad (2.38)$$

ist es möglich (2.35) zu schreiben als

$$\text{MSEP}(\hat{C}) = \mathbb{E}_{\hat{C}} \left[\underbrace{\mathbb{E}_C[(\hat{C} - C)^2 | \hat{C}]}_{(A)} \right]. \quad (2.39)$$

⁸ [Mur07]

Der innere Erwartungswert (A) kann vereinfacht werden und man erhält:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_C[(\hat{C} - C)^2 | \hat{C}] &= \mathbb{E}_C[(\hat{C} - \mu_C + \mu_C - C)^2 | \hat{C}] \\
 &= \mathbb{E}_C[((\hat{C} - \mu_C) + (\mu_C - C))^2 | \hat{C}] \\
 &= \mathbb{E}_C[(\hat{C} - \mu_C)^2 + 2(\hat{C} - \mu_C)(\mu_C - C) + (\mu_C - C)^2 | \hat{C}] \\
 &= \underbrace{\mathbb{E}_C[(\hat{C} - \mu_C)^2 | \hat{C}]}_1 + 2 \underbrace{\mathbb{E}_C[(\hat{C} - \mu_C)(\mu_C - C) | \hat{C}]}_2 + \underbrace{\mathbb{E}_C[(\mu_C - C)^2 | \hat{C}]}_3. \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Für die einzelnen Terme gilt nun

$$1 : \mathbb{E}_C[(\hat{C} - \mu_C)^2 | \hat{C}] = (\hat{C} - \mu_C)^2 \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
 2 : \mathbb{E}_C[\hat{C}\mu_C - \hat{C}C - \mu_C^2 + \mu_C C | \hat{C}] \\
 &= \hat{C}\mu_C - \hat{C}\mathbb{E}_C[C | \hat{C}] - \mu_C^2 + \mu_C\mathbb{E}_C[C | \hat{C}] \\
 &= \hat{C}\mu_C - \hat{C}\mu_C - \mu_C^2 + \mu_C^2 \\
 &= 0. \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

$$3 : \mathbb{E}_C[(\mu_C - C)^2] = \text{Var}(C) \quad (2.43)$$

Durch Wiedereinsetzen in (2.39) erhält man nun

$$\begin{aligned}
 \text{MSEP}(\hat{C}) &= \mathbb{E}_{\hat{C}}[(\hat{C} - \mu_C)^2 + \text{Var}(C)] \\
 &= \underbrace{\mathbb{E}_{\hat{C}}[(\hat{C} - \mu_C)^2]}_B + \text{Var}(C). \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

(B) lässt sich wiederum wie folgt aufteilen

$$\begin{aligned}
 B : \mathbb{E}_{\hat{C}}[(\hat{C} - \mu_C)^2] &= \mathbb{E}_{\hat{C}}[(\hat{C} - \mu_{\hat{C}} + \mu_{\hat{C}} - \mu_C)^2] \\
 &= \mathbb{E}_{\hat{C}}[((\hat{C} - \mu_{\hat{C}}) + (\mu_{\hat{C}} - \mu_C))^2] \\
 &= \mathbb{E}_{\hat{C}}[(\hat{C} - \mu_{\hat{C}})^2] + 2\mathbb{E}_{\hat{C}}[(\hat{C} - \mu_{\hat{C}})(\mu_{\hat{C}} - \mu_C)] + \mathbb{E}_{\hat{C}}[(\mu_{\hat{C}} - \mu_C)^2] \\
 &= \text{Var}(\hat{C}) + 2\mathbb{E}_{\hat{C}}[\hat{C}\mu_{\hat{C}} - \hat{C}\mu_C - \mu_{\hat{C}}^2 + \mu_{\hat{C}}\mu_C] + (\mu_{\hat{C}} - \mu_C)^2 \\
 &= \text{Var}(\hat{C}) + 2(\mu_{\hat{C}}^2 - \mu_{\hat{C}}\mu_C - \mu_{\hat{C}}^2 + \mu_{\hat{C}}\mu_C) + (\mu_{\hat{C}} - \mu_C)^2 \\
 &= \text{Var}(\hat{C}) + 0 + (\text{Bias}(\hat{C}))^2. \quad (2.45)
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (B) in (2.44) erhält man das gewünschte Ergebnis

$$\text{MSEP}(\hat{C}) = \text{Var}(C) + \text{Var}(\hat{C}) + (\text{Bias}(\hat{C}))^2$$

□

Im Fall eines unverzerrten Schätzers (das heißt $\text{Bias}(\hat{C}) = 0$) ist der Mean Squared Error of Prediction also die Summe der Prozessvarianz und Prognosevarianz:

$$\text{MSEP}(\hat{C}) = \text{Var}(C) + \text{Var}(\hat{C}). \quad (2.46)$$

Prozessvarianz für das Schadenjahr i

Als ersten Schritt zur Bestimmung der Prozessvarianz wird eine rekursive Gleichung für den Prozess aufgestellt, mit dessen Hilfe dann im nächsten Schritt die Prozessvarianz rekursiv berechnet wird.

Für die t -Schritt Prognose $\hat{X}_{i,k+t}$ mit $k = n - i + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i,k+t} &= \mathbb{E}[X_{i,k+t}|X_{ik}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{i,k+t}|X_{i,k+t+1}]|X_{ik}] \\ &= (1 - \delta_{k+t})\mathbb{E}[X_{i,k+t-1}|X_{ik}] + E_i\lambda_{k+t} \\ &= (1 - \delta_{k+t})\hat{X}_{i,k+t-1} + E_i\lambda_{k+t}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Beweis. Für $t = 1$ ist das Gewünschte leicht zu erhalten:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i,k+1} &= \mathbb{E}[X_{i,k+1}|X_{ik}] = \mathbb{E}[X_{ik} - D_{i,k+1} + N_{i,k+1}|X_{ik}] \\ &= X_{ik}(1 - \delta_{k+1}) + E_i\lambda_{k+1}. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die Gleichung (2.47) für t gilt, wird gezeigt, dass es auch für $t + 1$ gilt.

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i,k+t+1} &= \mathbb{E}[X_{i,k+t+1}|X_{ik}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{i,k+t+1}|X_{i,k+t}]|X_{ik}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{i,k+t} - D_{i,k+t+1} + N_{i,k+t+1}|X_{i,k+1}]|X_{ik}] \\ &= (1 - \delta_{k+t+1})\mathbb{E}[X_{i,k+t}|X_{ik}] + E_i\lambda_{k+t+1} \\ &= (1 - \delta_{k+t+1})\hat{X}_{i,k+t} + E_i\lambda_{k+t+1} \end{aligned}$$

□

Als nächstes wird eine rekursive Gleichung für die Prozessvarianz bestimmt:

$$\text{Var}[X_{i,k+t}|X_{ik}] = (1 - \delta_{k+t})^2 \text{Var}[X_{i,k+t-1}|X_{ik}] + \tau_{k+t}^2 \mathbb{E}[X_{i,k+t-1}|X_{ik}] + E_i\sigma_{k+t}^2. \quad (2.48)$$

Beweis. Dass (2.48) für $t = 1$ erfüllt ist, ist leicht zu sehen:

$$\text{Var}[X_{i,k+1}|X_{ik}] = \text{Var}[X_{ik} - D_{i,k+1} + N_{i,k+1}|X_{ik}] = \tau_{k+1}^2 X_{ik} + E_i \sigma_{k+1}^2. \quad (2.49)$$

Unter der Annahme, dass die Gleichung (2.48) für t gilt, wird wie oben gezeigt, dass es ebenso für $t + 1$ gilt.

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_{i,k+t+1}|X_{ik}] &= \mathbb{E}[\text{Var}[X_{i,k+t+1}|X_{i,k+t}]|X_{ik}] + \text{Var}[\mathbb{E}[X_{i,k+t+1}|X_{i,k+t}]|X_{ik}] \\ &= \mathbb{E}[\text{Var}[X_{i,k+t} - D_{i,k+t+1} + N_{i,k+t+1}|X_{i,k+t}]|X_{ik}] \\ &\quad + \text{Var}[\mathbb{E}[X_{i,k+t} - D_{i,k+t+1} + N_{i,k+t+1}|X_{i,k+t}]|X_{ik}] \\ &= \mathbb{E}[\tau_{k+t+1}^2 X_{i,k+t} + E_i \sigma_{k+t+1}^2 | X_{ik}] \\ &\quad + \text{Var}[(1 - \delta_{k+t+1})X_{i,k+t} + E_i \lambda_{k+t+1} | X_{ik}] \\ &= \tau_{k+t+1}^2 \mathbb{E}[X_{i,k+t} | X_{ik}] + E_i \sigma_{k+t+1}^2 + (1 - \delta_{k+t+1})^2 \text{Var}[X_{i,k+t} | X_{ik}] \end{aligned}$$

□

Prognosevarianz für das Schadenjahr i

Um den Prognosefehler der Gesamtreserve zu erhalten, benötigt man die Prognosevarianz für die einzelnen Schadenjahre. Wie schon zuvor wird wieder eine rekursive Gleichung aufgestellt.

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{X}_{i,k+t}] &= \hat{X}_{i,k+t-1}^2 \text{Var}[\hat{\delta}_{k+t}] + (1 - \hat{\delta}_{k+t})^2 \text{Var}[\hat{X}_{i,k+t-1}] \\ &\quad + \text{Var}[\hat{\delta}_{k+t}] \text{Var}[\hat{X}_{i,k+t-1}] + E_i^2 \text{Var}[\hat{\lambda}_{k+t}] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Beweis. Für $t = 1$ erhält man:

$$\text{Var}[\hat{X}_{i,k+1}] = \text{Var}[X_{ik}(1 - \hat{\delta}_{k+1}) + E_i \hat{\lambda}_{k+1} | X_{ik}] = X_{ik}^2 \text{Var}[\hat{\delta}_{k+1}] + E_i^2 \text{Var}[\hat{\lambda}_{k+1}]. \quad (2.51)$$

Damit gilt Gleichung (2.50) für $t = 1$.

Unter der Annahme, dass (2.50) für t erfüllt ist, wird gezeigt, dass die Gleichung für

$t + 1$ ebenso gilt.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[\hat{X}_{i,k+t+1}] &= \text{Var}[\hat{X}_{i,k+t}(1 - \hat{\delta}_{k+t+1}) + E_i \hat{\lambda}_{k+t+1}] \\
 &= \text{Var}[\hat{X}_{i,k+t}(1 - \hat{\delta}_{k+t+1})] + \text{Var}[E_i \hat{\lambda}_{k+t+1}] \\
 &= \hat{X}_{i,k+t}^2 \text{Var}[\hat{\delta}_{k+t+1}] + (1 - \hat{\delta}_{k+t+1})^2 \text{Var}[\hat{X}_{i,k+t}] \\
 &\quad + \text{Var}[\hat{X}_{i,k+t}] \text{Var}[\hat{\delta}_{k+t+1}] + E_i^2 \text{Var}[\hat{\lambda}_{k+t+1}]
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

□

Prognosefehler für die Gesamtreserve

Zuletzt wird noch die Prognosevarianz für die Gesamtreserve betrachtet. R bezeichnet die Gesamtreserve und \hat{R} die Schätzung. Mit H_m werden wie in (2.10) die bis zum Kalenderjahr m beobachteten Werte der N - und D -Dreiecke bezeichnet.

Für den MSEF von R gilt:

$$\text{MSEF}(\hat{R}|H_n) \approx \text{Var}[R|H_n] + \text{Var}[\hat{R}|H_n]. \tag{2.53}$$

Mit den Unabhängigkeitsannahmen des Modells erhält man, dass die Prozessvarianz der Gesamtreserve die Summe der Prozessvarianzen der Reserven für die einzelnen Schadenjahre ist.

Für die Prognosevarianz gilt keine Unabhängigkeit der einzelnen Schadenjahre, da für die Prognose der Reserven der einzelnen Schadenjahre dieselben Spaltenparameter verwendet werden. Daher muss zusätzlich die Kovarianz der Reserven pro Schadenjahr betrachtet werden. Es gilt, dass die Kovarianz der Reserven der Zeilen (entsprechen den Schadenjahren) gleich der Kovarianz der Endschadenstände ist. Es wird also für die Schadenjahre t und s (wobei $2 \leq t \leq n$ und $t < s$) $\text{Cov}[\hat{X}_{tn}, \hat{X}_{s,n}]$ betrachtet.

$\text{Cov}[\hat{X}_{tn}, \hat{X}_{s,n}]$ wird rekursiv mit Hilfe der folgenden Gleichung berechnet.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[\hat{X}_{tj}, \hat{S}_{sj}] &= \text{Var}[\hat{\delta}_j] (\text{Cov}[\hat{X}_{t,j-1}, \hat{X}_{s,j-1}] + \hat{X}_{t,j-1} \hat{X}_{s,j-1}) \\
 &\quad + (\mathbb{E}[1 - \hat{\delta}_j])^2 \text{Cov}[\hat{X}_{t,j-1}, \hat{X}_{s,j-1}] + E_t E_s \text{Var}[\hat{\lambda}_j]
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Beweis. Der Beweis wird wie schon zuvor rekursiv geführt. Im ersten Schritt wird die

Kovarianz für die Einschrittprognose berechnet, also für den Fall $j = n - t + 2$:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[\hat{X}_{tj}, \hat{X}_{sj}] &= \text{Cov}[\hat{X}_{t,n-t+2}, \hat{X}_{s,n-t+2}] \\
 &= \text{Cov}[X_{t,n-t+1}(1 - \hat{\delta}_{n-t+2}) + \hat{N}_{t,n-t+2}, X_{s,n-t+1}(1 - \hat{\delta}_{n-t+2}) + \hat{N}_{s,n-t+2}] \\
 &= \text{Var}[\hat{\delta}_{n-t+2}]X_{t,n-t+1}\mathbb{E}[X_{s,n-t+1}|X_{s,n-s+1}] + \text{Cov}[\hat{N}_{t,n-t+2}, \hat{N}_{s,n-t+2}] \\
 &= \text{Var}[\hat{\delta}_{n-t+2}]X_{t,n-t+1}\hat{X}_{s,n-t+1} + E_t E_s \text{Var}[\hat{\lambda}_{n-t+2}]. \tag{2.55}
 \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird wieder unter der Annahme, dass (2.54) für j erfüllt ist, die Aussage für $j + 1$ gezeigt.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}[\hat{X}_{t,j+1}, \hat{X}_{s,j+1}] &= \text{Cov}[\hat{X}_{tj}(1 - \hat{\delta}_{j+1} + E_t \hat{\lambda}_{j+1}), \hat{X}_{sj}(1 - \hat{\delta}_{j+1} + E_s \hat{\lambda}_{j+1})] \\
 &= \text{Cov}[\hat{X}_{tj}(1 - \hat{\delta}_{j+1}), \hat{X}_{sj}(1 - \hat{\delta}_{j+1})] + E_t E_s \text{Var}[\hat{\lambda}_{j+1}] \\
 &= \text{Var}[\hat{\delta}_{j+1}] \text{Cov}[\hat{X}_{tj}, \hat{X}_{sj}] + \text{Var}[\hat{\delta}_{j+1}]\hat{X}_{tj}\hat{X}_{sj} \\
 &\quad + (\mathbb{E}[1 - \hat{\delta}_{j+1}])^2 \text{Cov}[\hat{X}_{tj}, \hat{X}_{sj}] + E_t E_s \text{Var}[\hat{\lambda}_{j+1}] \\
 &= \text{Var}[\hat{\delta}_{j+1}] (\text{Cov}[\hat{X}_{tj}, \hat{X}_{sj}] + \hat{X}_{tj}\hat{X}_{sj}) \\
 &\quad + (\mathbb{E}[1 - \hat{\delta}_{j+1}])^2 \text{Cov}[\hat{X}_{tj}, \hat{X}_{sj}] + E_t E_s \text{Var}[\hat{\lambda}_{j+1}] \tag{2.56}
 \end{aligned}$$

□

Um die Prognosevarianz der Gesamtreserve zu erhalten, benötigt man die Kovarianz der Endschatenstände. Man setzt $j = n$ und berechnet die Kovarianzen rekursiv. Im Fall $t = 2$ erhält man:

$$\text{Cov}[\hat{X}_{2n}, \hat{X}_{sn}] = \text{Var}[\hat{\delta}_n]X_{2,n-1}\hat{X}_{s,n-1} + E_2 E_s \text{Var}[\hat{\lambda}_n]. \tag{2.57}$$

Im Fall $t = 2$ wird die Formel also einmal ausgeführt, während sie für das Schadenjahr t insgesamt $t - 1$ -mal ausgeführt wird.

Mit diesem Ergebnis ist es nun möglich, den Fehler für die Gesamtreserve näherungsweise zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \text{MSEP}(\hat{R}|H_n) &\approx \text{Var}[R|H_n] + \text{Var}[\hat{R}|H_n] \\
 &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_{in} | X_{ik}\right] + \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n \hat{X}_{in}\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_{in}|X_{ik}] + \sum_{i=1}^n \text{Var}[\hat{X}_{in}] + 2 \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n \text{Cov}[\hat{X}_{tn}, \hat{X}_{sn}], \tag{2.58}
 \end{aligned}$$

wobei $k = n - i + 1$.

Durch Einsetzen von (2.48), (2.50) und (2.55) für die entsprechenden Terme erhält man für $\text{MSEP}(\hat{R}|H_n)$ insgesamt:

$$\begin{aligned} \text{MSEP}(\hat{R}|H_n) &= \sum_{i=1}^n \left\{ (1 - \delta_{k+t})^2 \text{Var}[X_{i,k+t-1}|X_{ik}] + \tau_{k+t}^2 \mathbb{E}[X_{i,k+t-1}|X_{ik}] + E_i \sigma_{k+t}^2 \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^n \left\{ \hat{X}_{i,n-1}^2 \text{Var}[\hat{\delta}_n] + (1 - \hat{\delta}_n)^2 \text{Var}[\hat{X}_{i,n-1}] + \text{Var}[\hat{\delta}_n] \text{Var}[\hat{X}_{i,n-1}] + E_i^2 \text{Var}[\hat{\lambda}_n] \right\} \\ &+ \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n \left\{ \text{Var}[\hat{\delta}_n] (\text{Cov}[\hat{X}_{t,n-1}, \hat{X}_{s,n-1}|X_{t,n-t+1}, X_{s,n-s+1}] + \hat{X}_{t,n-1} \hat{X}_{s,n-1}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbb{E}[1 - \hat{\delta}_n])^2 \text{Cov}[\hat{X}_{t,n-1}, \hat{X}_{s,n-1}] + E_t E_s \text{Var}[\hat{\lambda}_n] \right\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Fortsetzung Beispiel (D)

Im letzten Schritt ist es jetzt möglich, die Prozessvarianz (Gleichung (2.48)), den Schätzfehler ($\sqrt{\text{Prognosevarianz}}$, Gleichung (2.50)) und damit den Prognosefehler ($= \sqrt{\text{Prozessvarianz} + \text{Prognosevarianz}}$) zu bestimmen. Für den Schätzfehler und den Prognosefehler der Gesamtreserve muss weiters die Kovarianz bestimmt werden (Gleichung (2.59)). Insgesamt erhält man folgendes Ergebnis:

	Reserven	Prozessvarianz	Schätzfehler	Prognosefehler
2	4,41			
3	4,80	54,28	5,97	9,49
4	32,91	558,00	13,57	27,24
5	60,30	1044,79	21,82	39,00
6	77,19	1247,20	22,26	41,74
7	104,33	1552,73	26,68	47,59
Gesamt	283,94	4457,00	83,92	107,24

Abbildung 2.12: Endergebnis und Fehler

2.2.7 Bootstrapping

Aus den Annahmen in Kapitel 2.2.5 erhält man die folgenden Gleichungen für Erwartungswert und Varianz:

$$\mathbb{E}\left[\frac{N_{ij}}{E_i} \mid X_{i,j-1}\right] = \lambda_j \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\left[\frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}} \mid X_{i,j-1}\right] = \delta_j$$

$$\text{Var}\left[\frac{N_{ij}}{E_i} \mid X_{i,j-1}\right] = \frac{\sigma_j^2}{E_i} \quad \text{und} \quad \text{Var}\left[\frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}} \mid X_{i,j-1}\right] = \frac{\tau_j^2}{X_{i,j-1}}.$$

Für die Reservenbestimmung werden nicht aus den Daten selbst Bootstrap-Stichproben gezogen, sondern aus den zugehörigen Residuen. Dafür definiert man $f_{ij} = \frac{N_{ij}}{E_i}$ und $g_{ij} = \frac{D_{ij}}{X_{i,j-1}}$. Für die Pearsonresiduen gilt dann:

$$r_{ij} = r_{PS}(f_{ij}, \hat{\lambda}_j, X_{i,j-1}, \hat{\sigma}_j) = \frac{\sqrt{E_i}(f_{ij} - \hat{\lambda}_j)}{\hat{\sigma}_j} \quad (2.60)$$

$$s_{ij} = r_{PS}(g_{ij}, \hat{\delta}_j, X_{i,j-1}, \hat{\tau}_j) = \frac{\sqrt{X_{i,j-1}}(g_{ij} - \hat{\delta}_j)}{\hat{\tau}_j} \quad (2.61)$$

Diese Residuen werden dann gesampelt und man erhält Bootstrap-Stichproben r_{ij}^B und s_{ij}^B für $i = 1, 2, \dots, n$ und $j = 1, 2, \dots, n - i + 1$. Aus diesen berechnet man sich dann durch Invertierung Bootstrap-Schätzer für f_{ij} und g_{ij} :

$$f_{ij}^B = r_{ij}^B \frac{\hat{\sigma}_j}{\sqrt{E_i}} + \hat{\lambda}_j \quad (2.62)$$

und

$$g_{ij}^B = s_{ij}^B \frac{\hat{\tau}_j}{\sqrt{X_{i,j-1}}} + \hat{\delta}_j. \quad (2.63)$$

Für λ und δ erhält man damit die folgenden Schätzer:

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} f_{ij}^B N_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} E_i} \quad (2.64)$$

und

$$\tilde{\delta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} g_{ij}^B D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j-1}} \quad (2.65)$$

Bei der Bestimmung von $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\delta}$ ist zu beachten, dass die beobachteten Daten N_{ij} , D_{ij} und X_{ij} zur Berechnung verwendet werden und nicht eine Bootstrap-Stichprobe davon. Durch Einsetzen der Schätzer $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\delta}$ in (2.22) erhält man die Bootstrap-Schätzer für die Reserven.

3 Renten in der Sachversicherung

Unter den langabwickelnden Schäden nehmen Renten eine Sonderstellung ein. Die Schadenrückstellung wird hier nach Art der Lebensversicherung bestimmt, allerdings muss in der Sachversicherung, im Gegensatz zu den Renten in der Lebensversicherung, ein Schadenereignis am Anfang stehen. Renten in der Sachversicherung treten in der Haftpflichtversicherung, der Unfallversicherung und der Kfz-Haftpflichtversicherung auf. Der Anteil der Rentenrückstellung an der Gesamtrückstellung ist zumeist gering. Allerdings können sie in den betroffenen Sparten einen erheblichen Anteil an der Reserve ausmachen.

Weiters ist zu beachten, dass ein Rentenschaden zu einer jahrzehntelangen Zahlungsverpflichtung (in Einzelfällen entspricht die Dauer der gesamten Lebenserwartung eines Menschen) führen kann, und diese Schäden somit ein Vielfaches der üblichen Abwicklungsdauer aufweisen.

Man unterscheidet beim Best Estimate in der Sachversicherung zwischen folgenden drei Teilen:

- Schadenrückstellung für Schäden, die bereits eingetreten sind (unabhängig davon, ob sie bekannt sind oder noch nicht)
- Prämienrückstellung für zukünftige Verpflichtungen aus bestehenden Verträgen (für noch nicht eingetretene Schäden)
- Rückstellung für Verpflichtungen nach Art der Lebensversicherung

Bei den Rückstellungen für Verpflichtungen nach Art der Lebensversicherung werden nur die bereits bekannten und auch anerkannten Renten berücksichtigt. Noch nicht betrachtet werden

- Renten, die noch aus bereits bekannten Schadenfällen zugesprochen werden,
- noch unbekannte Schadenfälle, aus welchen Rentenverpflichtungen entstehen, und

- Anpassungen (von bereits zugesprochenen Renten) in der Zukunft, die aber noch nicht bekannt sind.

Zur Schätzung der benötigten Rententrückstellungen, einschließlich der noch unbekannteren Renten(-anpassungen), werden in diesem Abschnitt drei Methoden vorgestellt.

Zuerst wird im Folgenden allerdings kurz veranschaulicht, wie die Rückstellung nach Art der Lebensversicherung zu berechnen ist, da diese Reserven immer gebildet werden müssen, und sie auch als Ausgangspunkt zur Bestimmung der Rückstellungen für die unbekannteren Rentenfälle nötig sind.

Für die Zuordnung der Rentenschäden gilt gemäß Veröffentlichung¹ der FMA:

„Rentenzahlungen, die sich nach Eintreten eines Schadenfalles aus Verträgen aus den Nicht-Lebens oder Kranken NSLT Geschäftsbereichen ergeben, sollen aus den entsprechenden Geschäftsbereichen exkludiert und den Geschäftsbereichen L5 und L6 des Risikomoduls Leben zugeordnet werden, falls diese biometrischen Risiken ausgesetzt sind und die marktübliche Methode zur Berechnung der Rückstellungen diese Risiken explizit berücksichtigt. Dies betrifft vor allem Rentenzahlungen, die aus der Kfz-Haftpflicht- und der Unfallversicherung resultieren. Im Zuge der Vorbereitung auf Solvency II ist es daher erforderlich zumindest die neuankommenden Renten zu markieren damit in Folge eine gesonderte Bewertung möglich ist.“

3.1 Reserve nach Art der Lebensversicherung

Als Barwert wird der Wert des Kapitals in einem bestimmten Moment² bezeichnet. Zur Bestimmung der Schadenhöhe und der Festsetzung der benötigten Rückstellung für den Versicherungsfall betrachten wir den Barwert der erwarteten zukünftigen Auszahlungen. Da es sich bei der auszuzahlenden Rente um eine Leibrente handelt, die vom Leben eines Menschen abhängt (im Gegensatz zu einer Zeitrente), benötigt man für die Barwertberechnung die Sterbewahrscheinlichkeit q_x . Damit wird die Wahrscheinlichkeit angegeben zwischen dem x -ten und dem $(x + 1)$ -ten Geburtstag zu versterben. Mit Hilfe der q_x , die aus einer Sterbetafel übernommen werden, berechnet man die folgenden Hilfsgrößen.

¹Österreichische Finanzmarktaufsicht, Versicherungsaufsicht und Pensionskassenaufsicht: *Segmentierung der Geschäftsbereiche der Schaden- und Unfallversicherung unter Solvency II*, 31.1.2014

²zumeist wird der Wert zum gegenwärtigen Zeitpunkt bestimmt

Zuerst benötigt man die Anzahl der Lebenden einer Grundgesamtheit im Alter von x Jahren:

$$l_x := l_{x-1} - (l_{x-1} \cdot q_{x-1}) \quad \text{für } x \geq 1;$$

mit Startwert $l_0 := 100.000$.

Mit l_x und dem Diskontierungsfaktor $v^x := \frac{1}{(1+i)^x}$, wobei i den Zinssatz bezeichnet, bestimmt man die Kommutationszahlen. In unserem Fall benötigen wir nur die folgenden diskontierten Zahlen der Lebenden:

$$D_x := v^x \cdot l_x \quad \dots \text{diskontierte Zahl der Lebenden im Alter } x$$

$$N_x := \sum_{j=x}^{\infty} D_j \quad \dots \text{diskontierte Zahl der Lebenden älter als } x$$

Zusätzlich benötigen wir die Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_t p_x$. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein x -jähriger die nächsten t Jahre überlebt. Man erhält die dafür benötigten Werte folgendermaßen aus der Sterbetafel:

$$p_x := 1 - q_x ;$$

$${}_2 p_x := (1 - q_x) \cdot (1 - q_{x+1}) = p_x \cdot p_{x+1} ;$$

$$\vdots$$

$${}_t p_x := (1 - q_x) \cdot \dots \cdot (1 - q_{x+t-1}) = \prod_{i=0}^{t-1} p_{x+i}.$$

Der Barwert einer lebenslänglichen sofortstartenden Rente \ddot{a}_x mit Rentenhöhe 1 lässt sich als Erwartungswert seiner abgezinsten zukünftigen Zahlungen darstellen, wobei K das noch unbekannte Alter in Jahren zum Todeszeitpunkt bezeichnet:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \mathbb{1}_{\{K \geq k\}} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \mathbb{P}[K \geq k] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot {}_k p_x = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} = \frac{1}{v^x l_x} \sum_{k=0}^{\infty} v^{x+k} \cdot l_{x+k} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} = \frac{N_x}{D_x}. \end{aligned}$$

Da es sich bei den Auszahlungen meist nicht um jährliche Zahlungen handelt, sondern die Renten großteils monatlich oder vierteljährlich auszuzahlen sind, berechnet man den Barwert mit folgender Näherung für unterjährige Renten mit m Auszahlungszeitpunkten

pro Jahr:

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}.$$

Einige der Renten werden allerdings nicht bis ans Lebensende bezahlt, sondern nur bis zu einem festgesetzten Zeitpunkt (beispielsweise bis zum gesetzlichen Pensionsantrittsalter). Bei diesen Fällen muss die lebenslängliche Rente gekürzt werden. Dafür zieht man vom Barwert \ddot{a}_x den Barwert einer bis zum Endalter (um k Jahre) aufgeschobenen Rente ${}_k\ddot{a}_x$ ab. Da man diese Rente nur erhält, wenn man den Zeitpunkt $x+k$ erlebt, muss der Barwert einer lebenslänglichen bei $x+k$ startenden Rente \ddot{a}_{x+k} bis zum heutigen Zeitpunkt (das heißt um k Jahre) abgezinst werden und mit der Überlebenswahrscheinlichkeit multipliziert werden:

$${}_k\ddot{a}_x = {}_kp_x v^k \ddot{a}_{x+k}.$$

Es gilt, dass ${}_kp_x v^k$ der Barwert einer Erlebensfallversicherung auf k Jahre ist (kurz: ${}_kE_x$):

$$\begin{aligned} {}_kE_x &= {}_kp_x v^k = \frac{v^{x+k}}{v^x} \cdot \frac{l_{x+k}}{l_x} \\ &= \frac{D_{x+k}}{D_x}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man somit für den gesuchten Barwert der Renten mit Rentenhöhe 1

$$\begin{aligned} BW &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_kE_x \cdot \ddot{a}_{x+k}^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - {}_kE_x \cdot \left(\ddot{a}_{x+k} - \frac{m-1}{2m} \right) \\ &= \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} - \frac{D_{x+k}}{D_x} \cdot \left(\frac{N_{x+k}}{D_{x+k}} - \frac{m-1}{2m} \right), \end{aligned}$$

wobei x das aktuelle Alter, k die Anzahl der Jahre bis zum eventuellen Rentenende und m die Anzahl der unterjährigen Auszahlungszeitpunkte bezeichnet.

3.2 Best Estimate der Rententrückstellung

Im Folgenden werden drei Methoden³ vorgestellt, mit welchen die Bestimmung der Rententrückstellungen durchgeführt werden kann.

3.2.1 Berücksichtigung von Renten als Einmalzahlung

Hier werden innerhalb eines Versicherungszweiges Renten im Zahlungsdreieck als Einmalzahlung im Moment des Rentenzuspruches betrachtet. Es wird folgendermaßen vorgegangen:

1. Die laufenden Rentenzahlungen werden aus den Zahlungsdreiecken herausgelöst. Im Gegensatz dazu verbleiben Zahlungen, die vor der Verrentung geleistet wurden (zum Beispiel Kulanzen oder Vorschüsse), und Zahlungen, die im Zeitpunkt der Verrentung erfolgen (z.B. Nachzahlungen, die bei einer Unfallrente regelmäßig bis zum Rentenbeginn geleistet werden), in den Zahlungsdreiecken.
2. An Stelle der laufenden Rentenzahlungen wird im Zeitpunkt der Verrentung der Barwert (Berechnung nach Art der Lebensversicherung, siehe Abschnitt 3.1) der zugesprochenen Rente als Einmalzahlung in das Dreieck hinzugefügt.
3. Änderungen der Rechnungsgrundlagen (Zinsen, Sterblichkeit, Kosten) werden (trotz Änderung der Deckungsrückstellung) nicht in die Dreiecke übernommen, da dieses Risiko in der SCR-Berechnung nach Art der Lebensversicherung abgedeckt ist.
4. Im Gegensatz dazu müssen Veränderungen der Deckungsrückstellung, die wegen Maßnahmen im Personenschadenmanagement entstehen (z.B. die nachträgliche Änderung der Höhe der zugesprochenen Rente), in den Zahlungsdreiecken berücksichtigt werden. Hier sind auch negative Zahlungen möglich.
5. Bei weiterer Betrachtung der Aufwandsdreiecke werden die Rückstellungen der laufenden Renten nicht mehr berücksichtigt, da sie bereits mit den Einmalzahlungen abgedeckt sind.

³ [Ges11]

Das Schadendreieck, das man dann erhält, kann mit den gängigen Verfahren zur Reservenbestimmung (zum Beispiel Chain-Ladder) analysiert werden. Es gilt allerdings einige Besonderheiten zu beachten:

- Der gesamte Schadenaufwand (bereits geleistete und erwartete zukünftige Rentenzahlungen) eines Schadens wird dem Jahr der Verrentung zugeordnet. Daher ist es möglich, Verfahren, die auf Schadenquoten basieren, zu verwenden.
- Auch alle zukünftigen Rentenzahlungen werden auf das Verrentungsjahr diskontiert und im Schadendreieck betrachtet, obwohl sie eigentlich noch nicht bezahlt wurden. Das führt zu einer zu hohen Darstellung der bereits geleisteten Zahlungen, allerdings wird die (zukünftige) Zahlungsverpflichtung, die mit der zugesprochenen Rente entstanden ist, richtig dargestellt.
- Ein Rentenschaden ist in diesem Verfahren zu vergleichen mit einem Großschaden hinsichtlich der Volatilität des Zahlungsdreieckes. Das stellt allerdings, wie bereits im vorigen Punkt angemerkt, die wirtschaftliche Realität dar.
- Wie bereits unter Punkt 4 oben behandelt, sind zukünftige Änderungen (insbesondere Erhöhungen) in den Zahlungsdreiecken zu berücksichtigen. Sehr späte Rentenerhöhungen müssen in der Tail-Schätzung abgedeckt werden.
- Dieses Verfahren basiert auf Zahlungsdreiecken, ist also vorwiegend dann geeignet, wenn man Zahlungsdaten betrachten will.

Das Verfahren muss bei größeren Veränderungen, wie zum Beispiel

- der Anzahl der Rentenfälle (Auslauf oder Neueinführung von Produkten),
- des Schadenmanagements, oder
- der Rückstellungsstruktur,

auf seine Anwendbarkeit überprüft und falls nötig dementsprechend angepasst werden.

Praxisbeispiel

Um das Verfahren zu veranschaulichen, wird das Portfolio⁴ aus dem Praxisbeispiel in Kapitel 2.1 verwendet. Es werden wieder Zahlungen in Tausend Geldeinheiten betrachtet.

⁴Im folgenden Beispiel werden nur die letzten 7 Jahre des Portfolios betrachtet

	1	2	3	4	5	6	7
1	106.622	163.071	174.810	183.206	192.294	200.000	206.325
2	128.298	184.951	198.334	209.268	218.480	224.728	
3	141.032	207.591	226.990	238.054	246.200		
4	131.349	191.536	209.772	222.924			
5	127.265	178.785	194.857				
6	127.096	182.883					
7	115.877						

Abbildung 3.1: Ausgangsdreieck

Zusätzlich dazu betrachtet man einen Rentenschaden, der im Schadenjahr zwei aufgetreten ist und im dritten Abwicklungsjahr zugesprochen wurde. Diese Rente weist eine jährliche Auszahlungssumme von 336.000 auf. Damit würde sich das Zahlungsdreieck wie in Abbildung 3.2 ändern, unter der Annahme, dass bereits im ersten Jahr des Zuespruches die volle jährliche Auszahlung zu leisten ist.

	1	2	3	4	5	6	7
1	106.622	163.071	174.810	183.206	192.294	200.000	206.325
2	128.298	184.951	198.670	209.940	219.488	226.072	
3	141.032	207.591	226.990	238.054	246.200		
4	131.349	191.536	209.772	222.924			
5	127.265	178.785	194.857				
6	127.096	182.883					
7	115.877						

Abbildung 3.2: Rente als laufende Zahlungen

Diese Betrachtungsweise kann aber leicht zu einer Unterschätzung der zukünftigen Zahlungsverpflichtungen führen: Renten haben zumeist eine längere Abwicklungsdauer als das restliche Portfolio. Daher wird, anstelle der reinen Betrachtung der Zahlungen, der Barwert der Rente betrachtet.

Der Barwert dieser Rente wird, wie in Kapitel 3.1 beschrieben, nach Art der Lebensversicherung berechnet und beträgt gerundet 8.393.000. Anstelle eines Schadens von

$$198.334.000 + 336.000 = 198.670.000$$

(ursprünglicher Gesamtschaden + Rentenauszahlung im entsprechenden Jahr), erhält man nun

$$206.727.000 = 198.334.000 + 8.393.000$$

(ursprünglicher Gesamtschaden + Barwert der Rente). Dieser Wert wird nun im entsprechenden Feld eingetragen und man erhält das neue Dreieck, in welchem der Rentenschaden als Einmalzahlung betrachtet wird:

	1	2	3	4	5	6	7
1	106.622	163.071	174.810	183.206	192.294	200.000	206.325
2	128.298	184.951	206.727	217.661	226.873	233.121	
3	141.032	207.591	226.990	238.054	246.200		
4	131.349	191.536	209.772	222.924			
5	127.265	178.785	194.857				
6	127.096	182.883					
7	115.877						

Abbildung 3.3: Rente als Einmalzahlung

Der Rentenschaden wirkt sich also nur im dritten Abwicklungsjahr auf das Zahlungsdreieck aus. In den darauf folgenden Jahren ist der Schaden zwar in der kumulativen Darstellung enthalten, allerdings werden die eigentlichen Auszahlungen, die in jedem folgenden Jahr erfolgen, nicht mehr ins Zahlungsdreieck aufgenommen. In jenem Jahr, in dem die Rente zugesprochen wird, ist dieser Schaden mit einem Großschaden vergleichbar.

3.2.2 Berücksichtigung von Renten als laufende Zahlungen und simultane Betrachtung des Aufwandes

Bei diesem Verfahren werden die Renten als laufende Zahlungen im Zahlungsdreieck betrachtet. Zusätzlich dazu werden im Aufwandsdreieck die Einzelfallreserven und der Best Estimate der Deckungsrückstellung berücksichtigt.

Auf diese beiden Dreiecke werden die gewöhnlichen Reserveschätzungsmethoden angewendet und so aus der Kombination der beiden der Best Estimate der Schadenreserve bestimmt. Hier ist der Best Estimate für anerkannte Renten bereits miteingeschlossen und muss wieder subtrahiert werden, um zum Best Estimate ohne anerkannte Renten zu gelangen.

Bei dieser Methode ist besondere Aufmerksamkeit auf die Tail-Bestimmung zu legen. Dieser Tail muss insbesondere alle bereits bestehenden Rentenverpflichtungen beinhalten, daher ist dem Aufwandsdreieck besondere Aufmerksamkeit zu widmen, da in diesem bereits die nach Art der Lebensversicherung berechnete Reserve enthalten ist.

Bei einer reinen Betrachtung des Zahlungsdreieckes würde man deshalb die Rentenzahlungen (die über das Dreieck hinausreichen) nicht ausreichend berücksichtigen. Das würde zu einer zu geringen Rückstellung führen.

3.2.3 Berücksichtigung der Renten mit Frequency-Severity-Ansatz

Die folgende Methode kann auch eingesetzt werden, wenn für die Rentenfälle nur die notwendigen Informationen zur Bestimmung der Deckungsrückstellung (Alter, Geschlecht und Rentenhöhe) gegeben sind, und das Jahr der Verrentung unbekannt ist. In diesem Fall können die beiden zuvor vorgestellten Methoden nicht eingesetzt werden. Weiters kann sie auch angewendet werden, wenn die beiden Methoden zuvor nicht oder nur schwer eingesetzt werden können, falls es beispielsweise zu größeren Veränderungen bei der Anzahl der Rentenfälle, der Entschädigungsstruktur oder der Rentenlaufzeit gekommen ist.

Bei dieser Methode wird folgendermaßen vorgegangen um einen Best Estimate für unbekannte Rentenfälle bzw. zukünftige Anpassungen zu bestimmen:

1. In einem ersten Schritt wird ein Schätzer für die Anzahl der Rentenfälle pro Schadenjahr bestimmt. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Man kann aus Jahren, die bezüglich der Anerkennung neuer Renten als abgeschlossen gelten, relative Häufigkeiten bestimmen, wie zum Beispiel das Verhältnis der Anzahl der Rentenfälle zu den Vertragszahlen des entsprechenden Schadenjahres. Mit dieser geschätzten Häufigkeit kann dann für die aktuelleren (noch nicht abgeschlossenen) Schadenjahre die Anzahl der Rentenfälle geschätzt werden. Diese erhaltenen Schätzungen sollten noch mit der aktuellen Anzahl an Rentenfällen verglichen werden um zu überprüfen, ob sie plausibel sind.
2. Im zweiten Schritt wird die durchschnittliche Rentenhöhe bestimmt. Es wird wieder bis zu jenem Jahr, das bezüglich der Anerkennung von neuen Renten als abgeschlossen gilt, der Durchschnitt bestimmt und mittels geeigneter Inflationsanpassung auf die jüngeren Jahre übertragen. Weiters muss ein Zuschlag für zukünftige Rentenanpassungen addiert werden.

Bei dieser Methode gilt es, die Möglichkeit von Schätzfehlern und etwaigen Trends zu beachten. Daher sollte dieses Verfahren nur von Unternehmen mit genügend Erfahrung eingesetzt werden.

Praxisbeispiel

Im Folgenden wird anhand eines Beispiels gezeigt, wie dieses Verfahren in der Praxis aussehen kann.

1. Rentenanzahl

Zur Bestimmung der durchschnittlichen Anzahl von Rentenfällen wird hier das Verhältnis von Rentenschäden zu den gesamten Schäden des entsprechenden Versicherungszweiges betrachtet. Die Anzahl der Rentenschäden wird mit Hilfe des Chain-Ladder-Verfahrens bestimmt (siehe Abbildung 3.4).

BJ SJ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	8	40	61	68	71	73	73	74	74	75	75	77	78	78	80
2	3	32	63	80	89	95	96	101	102	104	105	105	106	106	108	111
3	4	22	41	54	66	70	74	76	78	79	80	80	80	80	81	83
4	1	18	41	47	51	57	61	62	65	66	67	67	67	67	68	70
5	3	22	32	42	51	55	56	60	61	61	61	61	62	62	62	64
6	4	22	32	55	60	63	67	68	71	72	72	72	73	73	74	76
7	0	7	36	53	58	60	61	62	67	67	68	68	68	69	69	71
8	1	41	59	68	74	81	85	86	87	88	88	89	89	90	91	93
9	25	52	63	73	91	96	99	100	103	104	105	105	106	106	107	110
10	17	39	61	80	84	89	89	91	94	94	95	96	96	97	98	100
11	14	38	69	80	85	88	91	93	96	96	97	98	98	99	100	102
12	6	47	70	77	84	89	92	94	97	98	99	99	100	100	101	104
13	13	46	65	75	84	89	92	94	97	98	98	99	100	100	101	104
14	10	40	58	73	82	87	89	92	94	95	96	96	97	97	98	101
15	10	33	56	70	78	83	86	88	90	91	92	92	93	93	94	96
16	2	8	14	17	19	20	21	22	22	22	23	23	23	23	23	24

Abbildung 3.4: Schätzung der Anzahl von Rentenschäden mit Chain-Ladder-Verfahren

Um hier die Gefahr von Schätzfehlern zu verringern, wird zusätzlich dazu noch die Anzahl aller Schäden des jeweiligen Versicherungszweiges bestimmt. Das wird analog wie oben mit Hilfe des Chain-Ladder-Verfahrens durchgeführt und man erhält folgende Schätzer für die endgültige Anzahl an Schäden (siehe Abbildung 3.5).

Damit die Anzahl der zukünftigen Renten nicht unterschätzt wird, kann man danach überprüfen, ob man mit der obigen Chain-Ladder-Methode eine sinnvolle Schätzung der Endanzahl an Renten erhalten hat oder ob es sinnvoll ist, die Anzahl der Rentenfälle

SJ \ BJ	0	1	2	3	4	5	6	7
15	26.475	28.203	28.423	28.682	29.722	27.962	29.980	34.451

SJ \ BJ	8	9	10	11	12	13	14	15
15	36.190	39.831	43.192	49.273	43.871	39.644	38.554	25.054

Abbildung 3.5: Gesamtschadenanzahl der betroffenen Sparte

(mit Hilfe einer geeigneten Schranke) nach oben zu korrigieren. Dafür betrachtet man den Anteil von Rentenschäden an der Gesamtanzahl aller Schäden (siehe Abbildung 3.6).

SJ	1	2	3	4	5	6	7	8
	0,30%	0,39%	0,29%	0,24%	0,22%	0,27%	0,24%	0,27%

SJ	9	10	11	12	13	14	15	16
	0,30%	0,25%	0,24%	0,21%	0,24%	0,25%	0,25%	0,10%

Abbildung 3.6: relative Häufigkeit von Rentenschäden

Nun kann, falls es nötig ist, eine Schranke bestimmt werden, um eine zu niedrige Anzahl an Renten zu verhindern, und man erhält eine neue Schätzung für die Rentenanzahl.

SJ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	80	111	83	70	64	76	71	93	110	100	102	104	104	101	96	24
B	80	111	83	72	74	76	75	93	110	100	108	123	110	101	96	63

Abbildung 3.7: Anzahl von Rentenschäden

Hier wird mit A der Schätzer bezeichnet, den man mit dem Chain-Ladder-Verfahren erhalten hat, und mit B jener Schätzer, der, falls nötig (in der Tabelle dunkelgrau hinterlegt), mit Hilfe einer geeigneten Schranke nach oben ausgebessert wurde.

2. Rentenhöhe

Im zweiten Schritt wird nun die durchschnittliche Rentenhöhe geschätzt. Im Folgenden wird der Verlauf über die letzten 23 Jahre beobachtet. Die durchschnittliche Schadenhöhe erhält man durch Division von Schadenaufwand und Schadenanzahl. Hier gilt es zu beachten, dass sowohl bereits erfolgte Zahlungen als auch die Reserven (die nach Art der

Lebensversicherung ermittelt wurden) betrachtet werden müssen. Die verwendete Schadenanzahl ist die Anzahl der Renten nach aktuellem Stand (nicht die geschätzte Anzahl, die im 1. Punkt ermittelt wurde).

Wenn man nun die durchschnittliche Schadenhöhe für jedes einzelne Jahr betrachtet, erhält man ein sehr inhomogenes Ergebnis. Besonders in den jüngeren Jahren sind große Schwankungen vorzufinden (Abbildung 3.8).

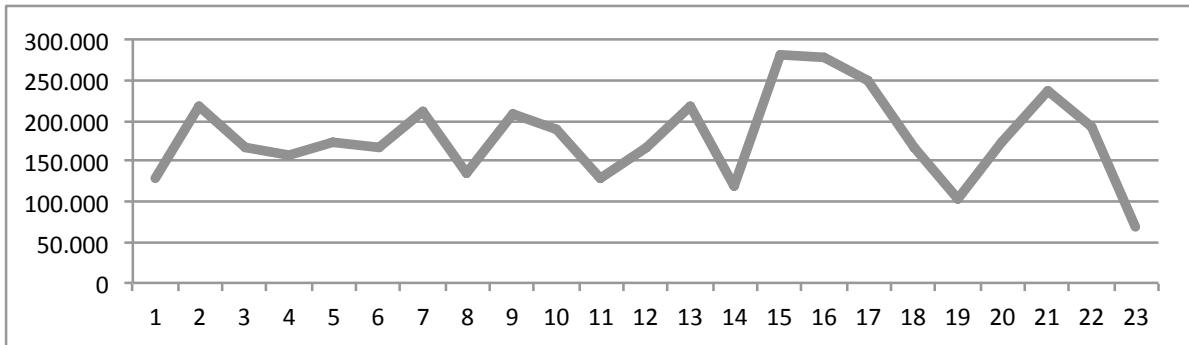


Abbildung 3.8: Durchschnittliche Schadenhöhe

Die großen Schwankungen in den aktuelleren Jahren sind auf die möglicherweise noch gänzlich unbekannt Schäden und den noch relativ unbekannt Schadenverlauf (und der damit verbundenen Unsicherheit beim Bestimmen der Reserve) zurückzuführen.

Eine Möglichkeit um für die jüngeren Jahre ein schwankungsfreieres Ergebnis zu erhalten, ist eine Ausgleichskurve zu bestimmen, und für die jüngeren Schadenjahre, die realen Daten mit jenen der Ausgleichskurve zu ersetzen.

Dafür kann man die Methode der kleinsten Quadrate (auch least squares Methode genannt) verwenden. Im obigen Fall wird angenommen, dass jene Kurve, die möglichst nahe an den Datenpunkten $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ verläuft, eine lineare Funktion ist, dass also gilt: $y = f(x) = ax + b$. Es werden nun jene Parameter a, b gesucht, welche die quadratische Abweichung $\sum_{i=1}^n r_i^2$ minimieren, wobei n die Anzahl der Datenpunkte bezeichnet und $r_i := ax_i + b - y_i$. Durch Ableiten und Nullsetzen der Ableitung erhält man für die Parameter a, b folgende Gleichungen:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n (\bar{x})^2}$$

und

$$b = \bar{y} - a\bar{x},$$

wobei mit \bar{x} und \bar{y} das arithmetische Mittel der x_i bzw. y_i bezeichnet wird.

Nach Bestimmen der Parameter a, b ist es noch nötig, jenen Zeitpunkt zu bestimmen, ab dem man die beobachteten Durchschnittshöhen der Renten durch den Wert der Ausgleichsgerade an der entsprechenden Stelle ersetzt. Sinnvollerweise wählt man jenen Zeitpunkt, von dem man überzeugt ist, dass keine neuen Renten zugesprochen werden und in Zukunft keine größeren Rentenanpassungen mehr erfolgen, bzw. dass diese Änderungen keinen relevanten Einfluss auf die Durchschnittshöhe haben werden.

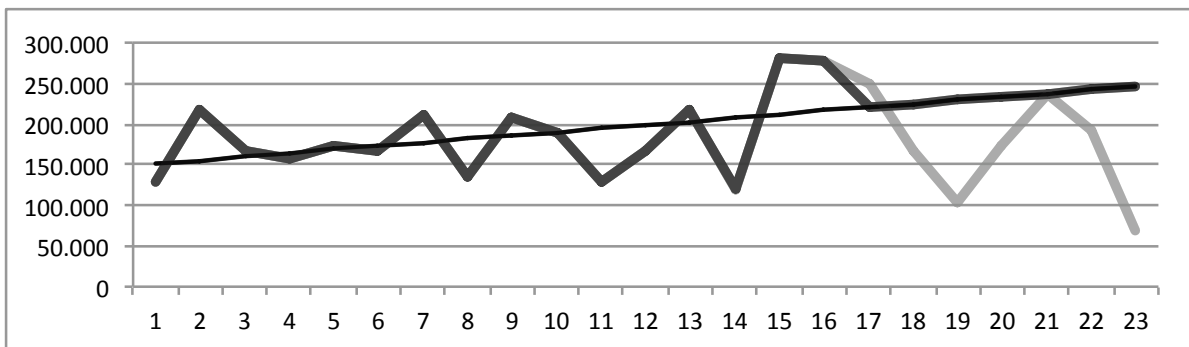


Abbildung 3.9: Geschätzte durchschnittliche Schadenhöhe

Hier werden ab dem 17. beobachteten Jahr die Werte der Regressionsgerade (in Abbildung 3.9 schwarz dargestellt) anstelle der beobachteten Werte (in Abbildung 3.9 hellgrau) verwendet.

Nun kann mit Hilfe der in Punkt 1 berechneten Anzahl an Renten und der in Punkt 2 bestimmten durchschnittlichen Höhe eines Rentenschadens ein Best Estimate Schätzer für die Rentenrückstellungen durch einfache Multiplikation berechnet werden.

Abschließend ist noch anzumerken, dass dieses Verfahren nur von Unternehmen mit hinreichender Erfahrung angewendet werden sollte, da, wie im Praxisbeispiel veranschaulicht, es bei der Betrachtung der Renten mit Frequency-Severity Ansatz oft notwendig ist, geeignete Schätzungen durchzuführen.

Zusammenfassung

Abschließend werde ich im Folgenden noch kurz die wichtigsten Ergebnisse meiner Arbeit darlegen und kurz zusammenfassen.

Im ersten Kapitel wurden durch Vergleich der Chain-Ladder-Faktoren die Sparten nach ihrer Abwicklungsdauer eingeteilt und so die long-tail Versicherungssparten bestimmt. Dabei handelt es sich um die Kfz-Haftpflichtversicherung, die eine kurze Meldeverzögerung hat, und die unterschiedlichen Haftpflichtsparten (Berufs-, Vermögens-, Private Haftpflicht etc.), die zusätzlich zur außergewöhnlich langen Abwicklungsdauer eine bedeutende Meldeverzögerung aufweisen.

Bei genauerer Betrachtung ist aber zu sehen, dass sich, speziell in der Kfz-Haftpflichtversicherung, jener Anteil der Schäden mit Personenschaden in der Abwicklung grundlegend von dem Anteil der reinen Sachschäden unterscheidet. Eine entsprechende Aufteilung dieser Sparte kann sich gravierend auf die Höhe der Reserve auswirken, ist aber nicht immer durchführbar. Zumeist wird bei der Einzelfallreserve nicht unterschieden, wieviel davon für einen Sachschaden bzw. für einen möglichen Personenschaden vorgesehen ist. Daher ist eine getrennte Betrachtung nur für Zahlungsdaten möglich, da hier bereits bekannt ist, wofür die jeweiligen Zahlungen geleistet wurden. Dadurch sind manche Reserveberechnungsmethoden nicht anwendbar.

Um das Problem der unvollständigen Informationen in den betroffenen Sparten bezüglich des Abwicklungsverlaufes zu lösen, wurde das Konzept der Tail-Schätzung präsentiert. Dabei ist zu beachten, dass die Tail-Bestimmung mit größeren Unsicherheiten verbunden ist, da auch bei großem Ausgangsportfolio nur verhältnismäßig wenige Daten zum Vergleich vorhanden sind. Auch gibt es bei der Wahl der geeignetsten Funktionenklasse nur wenige Anhaltspunkte und die Entscheidung muss für jede Sparte einzeln getroffen werden. Weiters ist bei erneuter Reservenbestimmung (im nächsten Quartal/Jahr/...) zu überprüfen, ob die gewählte Funktionenklasse immer noch die am passendsten ist. In Abschnitt 2.2 wurde eine Reservenbestimmungsmethode vorgestellt, mit deren Hilfe

es möglich ist, getrennt Schätzer für den IBNER- und den IBNR-Anteil der Reserve zu bestimmen. Die Vorteile dieser Methode liegen darin, dass eine tendenzielle Unterreservierung sofort erkannt wird. Weiters ist hier auf den ersten Blick ersichtlich, wie viel Zeit vergeht, bis dass man ein Schadenjahr bezüglich der Neumeldung von Schäden als abgeschlossen annehmen kann. Während beim Chain-Ladder-Verfahren neu gemeldete Schäden gemeinsam mit den bereits bekannten Schäden in einem Dreieck gemeinsam dargestellt werden, wird bei dieser Methode ein Dreieck betrachtet, das ausschließlich neu gemeldete Schäden beinhaltet.

Diese getrennte Darstellung wirft allerdings auch ein Problem auf: Es werden gegenüber der Chain-Ladder- und Bornhuetter-Ferguson-Methode doppelt so viele Datenpunkte benötigt um dieselbe Anzahl an Jahren abzudecken. Weiters können mit dieser Methode nur Aufwandsdaten (und keine reinen Zahlungsdaten) betrachtet werden. Daher ist eine Unterteilung in Sach- und Personenschäden im Allgemeinen nicht möglich.

Im dritten Kapitel wurde auf eine besondere Art der Schäden unter den Personenschäden eingegangen. Rentenschäden unterscheiden sich bedeutend von den gewöhnlichen Personenschäden hinsichtlich ihrer Einzelfallreserve, die nach Art der Lebensversicherung bestimmt werden muss, und ihrer Auszahlungsdauer, die abhängig vom Leben einer Person ist. Daher ist, abgesehen von der gesetzlichen Notwendigkeit, eine gesonderte Betrachtung angemessen.

Die dafür vorgestellten Methoden wirken sich auf unterschiedliche Art auf die Zahlungsdreiecke der betroffenen Sparten aus: Während sich bei einer Betrachtung der Auszahlungen, wie sie tatsächlich erfolgen, die Abwicklungsdauer der betroffenen Sparte verlängert, wirkt sich ein Rentenschaden bei Betrachtung des Barwertes als Einmalzahlung ähnlich wie ein Großschaden auf die Zahlungsdaten aus.

Zusammenfassend ist anzumerken, dass in den Haftpflichtsparten vor allem die Personenschäden zur außergewöhnlich langen Abwicklungsdauer führen und so zu großen Herausforderungen bei der Bestimmung der Reserven beitragen.

Literaturverzeichnis

- [EV06] ENGLAND, Peter ; VERRALL, Richard: Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance. In: Annals of Actuarial Science 1 (2006), Nr. 02, S. 221–270
- [Ger86] GERBER, Hans U.: Lebensversicherungsmathematik -. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 1986. – ISBN 978-3-540-16669-6
- [Ges11] GESAMTVERBAND DER DEUTSCHEN VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT E.V. (Hrsg.): Methoden zur Schätzung von Schaden- und Prämienrückstellungen in der Kompositversicherung. Überarbeitete Fassung. 2011
- [Hof99] HOFFMANN, Reiner: Spätschadenreservierung in der Allgemeinen Haftpflichtversicherung - Möglichkeiten und Grenzen objektivierender Methoden. Baden-Baden : Nomos-Verlag-Ges., 1999. – ISBN 978-3-789-05867-7
- [IM94] ISENBARTH, Fritz ; MÜNZNER, Hans: Lebensversicherungsmathematik für Praxis und Studium. 3.Aufl. 1994. Wiesbaden : Gabler, 1994. – ISBN 978-3-409-85834-2
- [LV09] LIU, Huijuan ; VERRALL, Richard: Predictive distributions for reserves which separate true IBNR and IBNER claims. In: Astin Bulletin 39 (2009), Nr. 01, S. 35–60
- [Mac02] MACK, T.: Schadenversicherungsmathematik. Verlag Versicherungswirtschaft, 2002 (Schriftenreihe angewandte Versicherungsmathematik). – ISBN 9783884879573
- [Mac06] MACK, Thomas: Parameter Estimation for Bornhuetter-Ferguson. In: Casualty Actuarial Society Forum, 2006, S. 141–157

- [Mur07] MURPHY, Daniel M.: Chain ladder reserve risk estimators. In: CAS E-Forum Summer, 2007
- [RS12] RADTKE, Michael ; SCHMIDT, Klaus D.: Handbuch zur Schadenreservierung. Verlag Versicherungswirtschaft, 2012. – ISBN 9783899526127
- [Sch91] SCHNIEPER, René: Separating true IBNR and IBNER claims. In: Astin bulletin 21 (1991), Nr. 01, S. 111–127
- [Wol86] WOLFSDORF, Kurt: Versicherungsmathematik - Teil 2: Theoretische Grundlagen, Risikotheorie, Sachversicherung. 1986. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 1986. – ISBN 3-519-02073-4
- [Wol97] WOLFSDORF, Kurt: Versicherungsmathematik - Teil 1: Personenversicherung. 2. überarbeitete und erweiterte Aufl. 1997. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 1997. – ISBN 978-3-519-12072-8

Abbildungsverzeichnis

1.1	Abwicklungsmuster nach Sparten; Produkt der Chain-Ladder-Faktoren	9
1.2	Abwicklungsmuster Kfz-Haftpflicht und Kfz-Kasko	16
1.3	Kfz-Haftpflicht: Zahlungsdreieck und die daraus bestimmten Chain-Ladder-Faktoren	17
1.4	Kfz-Haftpflicht: Endschadenstand und Reserve nach SJ	17
1.5	Kfz-Haftpflicht: Prämiensumme	18
1.6	Kfz-Haftpflicht Personenschäden: Zahlungsdreieck und die daraus bestimmten Chain-Ladder-Faktoren	19
1.7	Kfz-Haftpflicht Personenschäden: Endschadenstand und Reserve nach SJ	19
1.8	Kfz-Haftpflicht Sachschäden: Zahlungsdreieck und die daraus bestimmten Chain-Ladder-Faktoren	20
1.9	Kfz-Haftpflicht Sachschäden: Endschadenstand und Reserve nach SJ	20
1.10	Kfz-Haftpflicht: Endschadenstand und Reserve mit Bornhuetter-Ferguson-Verfahren	21
1.11	Aufwandsdreiecke; Bruttogeschäft, Nettoanteil und Rückversicherungsanteil davon	24
1.12	Abwicklungskurven; Bruttogeschäft	25
1.13	Abwicklungskurven; Nettogeschäft und abgegebene Rückversicherung	25
2.1	Zahlungsdreieck	30
2.2	Chain-Ladder-Faktoren	30
2.3	Chain-Ladder-Faktoren und daraus extrapolierte Funktionen	31
2.4	Quadratische Abweichung	32
2.5	Abwicklungsfaktoren der einzelnen Funktionsklassen	33
2.6	X- und N-Dreieck mit Exposure	36
2.7	D-Dreieck	37
2.8	Schätzer für λ und δ	40
2.9	Schätzer für $\text{Var}(\lambda)$, $\text{Var}(\delta)$, σ und τ	41

2.10	Vervollständigtes N- und D-Dreieck	43
2.11	Vervollständigtes X-Dreieck	44
2.12	Endergebnis und Fehler	52
3.1	Ausgangsdreieck	61
3.2	Rente als laufende Zahlungen	61
3.3	Rente als Einmalzahlung	62
3.4	Schätzung der Anzahl von Rentenschäden mit Chain-Ladder-Verfahren .	64
3.5	Gesamtschadenanzahl der betroffenen Sparte	65
3.6	relative Häufigkeit von Rentenschäden	65
3.7	Anzahl von Rentenschäden	65
3.8	Durchschnittliche Schadenhöhe	66
3.9	Geschätzte durchschnittliche Schadenhöhe	67