



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN

DIPLOMARBEIT

Verallgemeinerungen des Ruinkonzeptes in der Risikotheorie

Ausgeführt am Institut für
Wirtschaftsmathematik
der Technischen Universität Wien

unter der Anleitung von
Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits

durch
Martina Lahner, B.Sc.
Quadenstraße 142/3/3
1220 Wien

Datum

Unterschrift

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Betreuer Herrn Ao.Univ.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Peter Grandits bedanken. Einerseits für die Bereitstellung dieses interessanten Themas und andererseits für die richtungsweisenden Ratschläge.

Besonderen Dank gilt auch meinen Eltern, Gabriela und Helmut Lahner, für den starken emotionalen Rückhalt und die stetige Unterstützung. Ebenfalls dafür, dass sie mir während der Zeit des Schreibens mit Geduld und Liebe zur Seite standen und mir durch schwierige und mit Zweifel belastete Phasen halfen.

Daneben gilt mein Dank meinem Freund, Markus Schrefl, der meine Launen die ganze Zeit über mit viel Geduld ertragen hat und mich immer wieder aufs neue ermutigt hat.

Ebenso gilt den oberen Personen mein Dank für die viele Zeit die sie Korrektur gelesen haben.

Zuletzt noch großen Dank an meine Arbeitskollegen und Vorgesetzten bei der Aktuar Versicherungsmathematik GmbH für die große zeitliche Flexibilität die sie mir während der Fertigstellung meiner Diplomarbeit entgegen gebracht haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die klassische Risikotheorie	2
2.1	Risikomodelle	2
	Das individuelle Risikomodell	2
	Das kollektive Risikomodell	3
2.2	Prämienkalkulationsprinzipien	6
2.3	Der Risikoprozess	9
2.3.1	Der zeitstetige Risikoprozess	9
2.3.2	Das Cramér-Lundberg Modell	15
3	Einführung der Konkurswahrscheinlichkeit	23
4	Die Wahrscheinlichkeit des Konkurses	27
4.1	Beispiele von Konkursratenfunktionen	36
	Konstante Konkursratenfunktion	36
	Lineare Konkursratenfunktion	39
	Exponentielle Konkursratenfunktion	48
	Stückweise konstante Konkursratenfunktion	52
5	Veranschaulichende Berechnung der Konkurswahrscheinlichkeit	60
5.1	Stückweise konstante Approximation der Konkursratenfunktion	63
5.2	Monte Carlo Simulation	71
6	Verwendete R-Codes	78
6.1	R-Codes zur Berechnung der expliziten Lösungen der Konkurswahrscheinlichkeit	78
6.1.1	Konstante Konkursratenfunktion	78
6.1.2	Lineare Konkursratenfunktion	79
6.1.3	Exponentielle Konkursratenfunktion	80
6.1.4	Stückweise konstante Approximation der Konkursratenfunktion	81
	Lineare Konkursratenfunktion	81

6.1.5	Monte-Carlo Simulation	86
	Lineare Konkursratenfunktion	86
	Exponentielle Konkursratenfunktion	88

Abbildungsverzeichnis

2.1	Beziehung zwischen T_n , W_n und $N(t)$	12
2.2	Ruinzeitpunkt T	15
2.3	Cramér-Lundberg Gleichung	18
3.1	Der zusammengesetzt Poissonverteilte Prozess wird nur zu bestimmten Zeitpunkten betrachtet	25
4.1	Obere- und untere Approximation der Konkursratenfunktion . .	53
5.1	Konkurswahrscheinlichkeit bei konstanter Konkursratenfunktion $\omega_1(x) = \omega_c$	61
5.2	Konkurswahrscheinlichkeit bei linearer Konkursratenfunktion $\omega_2(x) = -ax$ mit unterschiedlichen Parameterwerten a	62
5.3	Konkurswahrscheinlichkeit bei exponentieller Konkursratenfunktion $\omega_3(x) = e^{-ax}$ mit unterschiedlichen Parameterwerten a	62
5.4	Approximation der linearen Konkursratenfunktion für $x_1 = -100, a = 1, n = 30$ bzw. $n = 50$	65
5.5	Approximation der linearen Konkursratenfunktion für $x_1 = -100, a = 1$ und $n = 200$	65
5.6	Approximation der linearen Konkursratenfunktion für $x_1 = -40, a = 100$ und $n = 200$	66
5.7	Vergleich der Approximation mit der exakten Lösung für $a = 100$ und $n = 50$ bzw. $n = 200$	66
5.8	Approximation der Konkurswahrscheinlichkeit für $\omega_2(x)$ mit unterschiedlichen Parameterwerten a ($x_1 = -100$ und $n = 200$) . .	68
5.9	Approximation der exponentiellen Konkursratenfunktion für $x_1 = -70, a = 0, 1, n = 30$ bzw. $n = 50$	68
5.10	Approximation der exponentiellen Konkursratenfunktion für $x_1 = -70, a = 0, 1$ und $n = 200$	69
5.11	Vergleich der Approximation mit der exakten Lösung für $a = 0, 1$ und $n = 30$ bzw. $n = 50$	69
5.12	Vergleich der Approximation mit der exakten Lösung für $a = 0, 1$ und $n = 200$	70

5.13	Vergleich der Approximation der Konkurswahrscheinlichkeit für exponentielle Konkursratenfunktionen ($a=0,1$) und für lineare Konkursratenfunktionen ($a=1$)	71
5.14	Ermittlung von $\Psi(-ax, x)$ für einen gewissen Pfad	74
5.15	Monte Carlo Simulation der Konkurswahrscheinlichkeit für lineare Konkursratenfunktion mit Parameter $x_1 = -100, a = 100, k = 200$ und $n = 500$	75
5.16	Vergleich der Simulation mit der exakten Lösung für $x_1 = -40, a = 100, k = 200$ und $n = 500$ (lineare Konkursratenfunktion)	76
5.17	Monte Carlo Simulation der Konkurswahrscheinlichkeit für exponentielle Konkursratenfunktion mit Parameter $x_1 = -100; a = 0, 2, k = 200$ und $n = 500$	76
5.18	Vergleich der Simulation mit der exakten Lösung für $x_1 = -40, a = 0, 2, k = 200$ und $n = 500$ (exponentielle Konkursratenfunktion)	77

Tabellenverzeichnis

5.1	Einfluss von x_1 auf die obere und untere Approximation des Koeffizienten A	67
5.2	Einfluss von a auf die obere und untere Approximation des Koeffizienten A ($x_1 = -100, n = 200$)	67
5.3	Approximation des Koeffizienten A für $\omega_3(x)$ ($x_1 = -100$ und $n = 200$)	70

Kapitel 1

Einleitung

In der klassischen Risikotheorie ist ein Unternehmen bankrott, sobald die Risikoreserve unter Null fällt. Ruin und Konkurs haben in diesem Fall also die gleiche Bedeutung. In dieser Arbeit wird jedoch zwischen Ruin, dies ist der Fall, wenn die Risikoreserve negativ wird, und Bankrott, dies bedeutet, dass das Unternehmen in Konkurs geht, unterschieden.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den wichtigsten Begriffen der klassischen Risikotheorie. Zunächst werden das individuelle- und das kollektive Risikomodell vorgestellt. Da diese beiden Modelle eine rein statische Betrachtung für eine feste Versicherungsperiode vorsehen, erfolgt danach eine Erweiterung auf dynamische Betrachtungen durch die Modellierung des sogenannten Risikoprozesses. Davor werden noch kurz verschiedene Prämienkalkulationsprinzipien betrachtet.

Das dritte Kapitel beinhaltet die Einleitung zur Differenzierung zwischen den Begriffen Ruin und Bankrott. Im vierten Kapitel wird die Gleichung für die Konkurswahrscheinlichkeit, für einen zusammengesetzt Poissonverteilten Risikoreserveprozess und exponentialverteilte Schadenhöhen, hergeleitet. Diese wird anschließend für einige einfache Konkursratenfunktionen explizit gelöst. Weiters wird die stückweise konstante Approximation einer Konkursratenfunktion näher betrachtet.

Die expliziten Ergebnisse der Konkurswahrscheinlichkeit des vorigen Abschnittes werden in Kapitel fünf dargestellt. Diese Ergebnisse werden mit den Ergebnissen, die man mittels der stückweisen konstanten Approximation der jeweiligen Konkursratenfunktion erhält, verglichen. Zum Schluss wird noch eine Monte-Carlo Simulation als zusätzliches Näherungsverfahren vorgestellt. Die selbst erstellten R-Codes sind im letzten Kapitel dieser Arbeit angeführt.

Kapitel 2

Die klassische Risikotheorie

Definition 2.1 (Risiko). *Unter einem Risiko X versteht man eine Zufallsvariable, die nur nichtnegative Werte annimmt.*

2.1 Risikomodelle

Zunächst wenden wir uns zwei klassischen Modellen der Versicherungsmathematik zu.

Das individuelle Risikomodell

Das folgende Kapitel ist, wenn nicht näher gekennzeichnet, folgenden Quellen entnommen: [3] Seite 143-148 und [4]

Wir betrachten ein Portfolio mit n individuellen Verträgen (Risiken), modelliert durch unabhängige, aber nicht notwendigerweise identisch verteilte, nichtnegative Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n mit Verteilungsfunktionen F_{X_1}, \dots, F_{X_n} . Dann bezeichnet X_i die Summe aller Schäden die aus dem i -ten Vertrag entstehen. Weiters setzen wir einen festen Bestand voraus. Dies bedeutet, dass es keine Zu- bzw. Abgänge während einer Periode gibt.

Es ist hilfreich, den Fall, dass kein Schaden eintritt, also $X_i = 0$, davon zu unterscheiden, dass ein Schaden eintritt, $X_i > 0$. Es sei $p_i = \mathbb{P}(X_i = 0)$ und $q_i = \mathbb{P}(X_i > 0)$ dann gilt, $p_i + q_i = 1$ da es sich bei den X_i um nichtnegative Zufallsvariablen handelt.

Die Verteilungsfunktionen der positiven Schäden sind durch die bedingten Verteilungen $P_i(x) = \mathbb{P}(X_i \leq x \mid X_i > 0)$ gegeben. Weiters führen wir die Hilfsvariable $I(x)$ ein:

$$I(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Bei $I(x)$ handelt es sich um die Verteilungsfunktion einer degenerierten Zufallsvariable Z mit $\mathbb{P}(Z = 0) = 1$.

Somit gilt für die Verteilungsfunktion F_{X_i} :

$$F_{X_i}(x) = p_i I(x) + q_i P_i(x)$$

F_{X_i} ist also eine Mischung von I und P_i mit Gewichten p_i und q_i .

Nun kommen wir zum Gesamtschaden im individuellen Modell

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (2.1)$$

Die Verteilungsfunktion F_S von S wird durch Faltung ermittelt. Es gilt wegen (2.1) und der Unabhängigkeit:

$$F_S(x) = F_{X_1} * F_{X_2} * \dots * F_{X_n}$$

Wir haben bereits erwähnt, dass die einzelnen Schäden unabhängig voneinander sind. Falls diese zusätzlich identisch verteilt (mit Verteilungsfunktion F) sind, dann bezeichnet man S als homogenes Portfolio und die Verteilungsfunktion F_S ist gegeben durch:

$$F_S(x) = F^{(n)}(x) \quad (2.2)$$

Hier bezeichnet $F^{(n)}$ die n-fache Faltung von F .

Für den Erwartungswert und die Varianz des Gesamtschadens gilt, falls die Erwartungswerte von X_i sowie die zweiten Momente existieren:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$$

$$\mathbb{V}(S) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)$$

Das individuelle Modell ist ohne die Annahme von identisch verteilten Einzelschäden nur schwer zu benutzen und es können nur wenige Aussagen getroffen werden.

Das kollektive Risikomodell

Der folgende Abschnitt richtet sich nach folgenden Quellen: [3] Seite 148-150 und [4]

Im Gegensatz zum individuellen Modell gehen wir nun nicht von Einzelrisiken, sondern von Einzelschäden aus. Es werden alle Schäden gleich behandelt und man fasst das gesamte Portfolio als einen einzigen Vertrag auf.

Das kollektive Modell besteht aus den folgenden Komponenten:

- N bezeichnet die Schadenanzahl. Dabei handelt es sich um eine \mathbb{Z}^+ -wertige Zufallsvariable.
- X_i bezeichnet die Einzelschadenhöhe. Bei den einzelnen Schadenshöhen X_1, X_2, \dots, X_N handelt es sich um positive Zufallsvariablen. Wir setzen voraus, dass diese unabhängig voneinander und identisch verteilt sind.

Weiters gehen wir davon aus, dass die Schadenanzahl N und die Einzelschäden X_1, X_2, \dots, X_N unabhängig voneinander sind.

Für den Gesamtschaden S gilt:

$$S = \sum_{n=1}^N X_i \quad (2.3)$$

Bei (2.3) handelt es sich um eine Zufallssumme. Dies bedeutet, dass nicht nur die Summanden sondern auch der obere Summationsindex eine Zufallsvariable ist. Für den Fall, dass $N = 0$ ist (dies bedeutet, dass kein Schaden aufgetreten ist), setzen wir auch $S = 0$.

Die Verteilung von S kann folgendermaßen geschrieben werden:

Satz 2.2 (Die Verteilungsfunktion einer Zufallssumme). *Hat N die Zähldichte $(p_n)_{(n \geq 0)}$ und die Einzelschäden die Verteilungsfunktion F_X , dann hat die entsprechende Zufallssumme die Verteilungsfunktion*

$$F_S = \sum_{n \geq 0} p_n F_X^{(*n)}(x).$$

Die Schadenanzahl N ist dabei immer diskret verteilt. Häufig verwendete Schadenanzahlverteilungen sind die Poissonverteilung, die Binomialverteilung und die negative Binomialverteilung. Für die Einzelschadenhöhen können hingegen diskrete, kontinuierliche oder gemischte Verteilungen verwendet werden. Dies hat folgende Auswirkungen auf die Verteilung des Gesamtschadens:

- Ist X diskret oder gemischt verteilt \Rightarrow der Gesamtschaden S besitzt ebenfalls eine diskrete oder gemischte Verteilung.

• Ist X jedoch kontinuierlich verteilt $\Rightarrow S$ ist eine gemischte Zufallsvariable. Diese besitzt, da $\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(N = 0)$, an 0 die Punktwahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(N = 0)$.

Die Verteilung von S ist im Allgemeinen nicht einfach zu bestimmen. Oft reicht es jedoch einige Eigenschaften der Verteilung zu kennen. Wir können die folgenden Formeln für den Erwartungswert, die Varianz und die Momenterzeugende Funktion von S angeben:

- $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i \mid N]] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N \mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[N\mathbb{E}[X]] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$

- $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^N X_i)^2 \mid N]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N X_i X_j \mid N]] = \\ &= \mathbb{E}[N\mathbb{E}[X^2] + N(N-1)\mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[N](\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2) = \\ &= \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[N]\mathbb{V}(X) \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(S) &= \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[N]\mathbb{V}(X) - \mathbb{E}[N]^2\mathbb{E}[X]^2 = \\ &= \mathbb{E}[N]\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2(\mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2) = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2\mathbb{V}(N) \end{aligned}$$

- $M_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}] = \mathbb{E}[e^{t\sum_{i=1}^N X_i}] = \mathbb{E}[\prod_{i=1}^N e^{tX_i}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\prod_{i=1}^N e^{tX_i} \mid N]] =$
 $= \mathbb{E}[\prod_{i=1}^N M_X(t)] = \mathbb{E}[M_X(t)^N] = \mathbb{E}[e^{N \log(M_X(t))}] = M_N(\log(M_X(t)))$

Zusammenfassend erhalten wir die folgenden Resultate:

- $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}[X]^2\mathbb{V}(N)$
- $M_S(t) = \mathbb{E}[e^{tS}] = M_N(\log(M_X(t)))$

Oft wird bei kollektiven Modellen eine Poissonverteilte Schadenszahl $N \sim P(\lambda)$ herangezogen. Die Verteilung des Gesamtschadens S ist dann durch die zusammengesetzte Poissonverteilung gegeben.

$$S \sim ZPoi(\lambda; F_X)$$

Falls $N \sim P(\lambda)$ dann gilt, $\mathbb{E}[N] = \mathbb{V}(N) = \lambda$ und $M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$. Somit folgt für S , wenn wir die oberen Resultate berücksichtigen:

- $\mathbb{E}[S] = \lambda\mathbb{E}[X]$
- $\mathbb{V}(S) = \lambda\mathbb{E}[X^2]$
- $M_S(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$

Das zusammengesetzte Poissonmodell bietet einige Vorteile. Einer davon ist, dass falls ein Portfolio aus n unabhängigen Einzelrisiken besteht, die jeweils zusammengesetzt Poissonverteilt sind, dann hat auch deren Summe eine zusammengesetzte Poissonverteilung.

Satz 2.3 (Summe von unabhängigen ZPoi). *Sei $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ Summe unabhängiger Summanden die eine zusammengesetzte Poissonverteilung mit Parameter λ_i und Schadenhöhenverteilung F_i ($i = 1, \dots, n$) haben. Dann ist X zusammengesetzt Poissonverteilt mit Parameter λ und F , wobei $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ und $F = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i$.*

Bis jetzt haben wir den Gesamtschaden im individuellen- und kollektiven Risikomodell näher beschrieben. Nun wenden wir uns einer anderen wichtigen Aufgabe der Versicherungsmathematik zu. Diese beschäftigt sich damit, für die Versicherung eines Risikos eine gerechte Prämie zu finden. Ein naheliegender Ausgangspunkt für die Bestimmung einer Prämie ist das Nettoprämienprinzip, dieses wird oft auch Äquivalenzprinzip genannt. Bei diesem Prinzip ist die Prämie durch den Erwartungswert des Verlustes, bzw. Schadens, gegeben. Das Nettoprämienprinzip führt jedoch mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Ruin.

Im folgenden Abschnitt betrachten wir einige Prinzipien zur Bestimmung der Risikoprämie und stellen wünschenswerte Eigenschaften von Prämienprinzipien vor. Wobei wir hier Prämien ohne Berücksichtigung von ökonomischen Einflüssen, wie beispielsweise zusätzliche Rückversicherungen oder Provisionen, untersuchen.

2.2 Prämienkalkulationsprinzipien

(Vergleiche [4])

Definition 2.4. *Ein Prämienkalkulationsprinzip H ist eine Abbildung, die jeder Zufallsvariable S eine reelle Zahl P zuordnet. Dabei soll $P = H(S)$ nur von der Verteilung von S abhängen.*

Diese Definition kann man folgendermaßen interpretieren:

Ein Versicherungsunternehmen verlangt die Prämie P um den Schaden S zu versichern. Es gilt: Ist $H(S) = \infty$ dann ist der Schaden S nach Prinzip H unversicherbar.

Wir betrachten nun einige Beispiele für $P = H(S)$:

- **Nettoprämienprinzip** : $P = \mathbb{E}[S]$
- **Erwartungswertprinzip** : $P = (1 + \Lambda)\mathbb{E}[S]$

Bei $\Lambda > 0$ handelt es sich um einen positiven Sicherheitszuschlag.

- **Varianzprinzip** : $P = \mathbb{E}[S] + \alpha\mathbb{V}(S)$, $\alpha \geq 0$
- **Standardabweichungsprinzip** : $P = \mathbb{E}[S] + \beta\sqrt{\mathbb{V}(S)}$, $\beta \geq 0$
- **Das Prinzip des maximalen Verlustes** : $H[S] = \text{ess sup}(S)$

Wobei gilt, $B = \text{ess sup}(S)$ ist die kleinste Zahl B , sodass $\mathbb{P}(S \leq B) = 1$ bzw. $B = \infty$, wenn es keine solche Zahl gibt.

- **Nullnutzenprinzip** : Hier haben wir eine Nutzenfunktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, diese soll wachsend und konkav sein.

Einige Beispiele für Nutzenfunktionen sind:

- Exponentieller Nutzen : $u(x) = \frac{1-e^{-ax}}{a}$, wobei $a > 0$ der Risikoaversionsparameter ist
- Logarithmischer Nutzen :

$$u(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{wenn } x > 0 \\ -\infty, & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$$

Das Nullnutzenprinzip kann man folgenderweise motivieren:

Wir vergleichen:

- Das Versicherungsunternehmen versichert den Schaden S nicht \Rightarrow Nutzen $u(x)$
- Das Versicherungsunternehmen versichert den Schaden S und erhält dafür die Prämie $P \Rightarrow$ erwarteter Nutzen $\mathbb{E}[u(x + P - S)]$

Es gilt: Die Prämie P ist die kleinste Lösung von $u(x) = \mathbb{E}[u(x + P - S)]$

Im Allgemeinen hängt die Nullnutzenprämie vom Anfangskapital ab, jedoch nicht so im wichtigen Spezialfall der Exponentialprämie. Hier haben wir:

$$\frac{1-e^{-ax}}{a} = \mathbb{E}\left[\frac{1-e^{-a(x+P-S)}}{a}\right]$$

$$e^{-ax} = \mathbb{E}[e^{-ax} e^{-aP} e^{aS}]$$

$$1 = e^{-aP} \mathbb{E}[e^{aS}]$$

$$e^{aP} = \mathbb{E}[e^{aS}]$$

$$P = \frac{1}{a} \ln(\mathbb{E}[e^{aS}]) = \frac{1}{a} \ln(M_S(a))$$

Es folgt, dass der Schaden S versicherbar ist, wenn $\mathbb{E}[e^{aS}] < \infty$.

Sei $H(a) = \frac{1}{a} \ln(\mathbb{E}[e^{aS}])$ für eine Zufallsvariable $S \geq 0$.

- Gibt es ein $a_0 > 0$ mit $\mathbb{E}[e^{a_0 S}] < \infty \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} H(a) = \mathbb{E}[S]$

Somit folgt, dass der Grenzwert für $a \rightarrow 0$ das Nettoprämienprinzip ist.

- Existiert $\mathbb{E}[e^{aS}] \forall a > 0 \Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} H(a) = \text{ess sup}(S)$

Somit folgt, dass der Grenzwert für $a \rightarrow \infty$ das Prinzip des maximalen Verlustes ist.

Es gibt noch viele weitere Prämienkalkulationsprinzipien, die wir hier jedoch nicht näher erörtern.

Nun stellt sich die Frage nach welchen Gütekriterien man für ein gegebenes Risiko ein Prämienprinzip auswählen soll. Es gibt natürlich kein Prämienprinzip welches in allen möglichen Situationen eine optimale Lösung verspricht. Jedoch kann man für ein bestimmtes Problem die Möglichkeiten einengen indem man fordert, dass die Prämie gewisse Eigenschaften erfüllt. Wir stellen nun einige dieser wünschenswerten Eigenschaften vor:

- **Erwartungswertübersteigend** : $H[S] \geq \mathbb{E}[S]$
- **Maximalschadenbegrenzt** : $H[S] \leq \text{ess sup}(S)$
- **Translationsinvariant** : $H[S+c] = H[S]+c$ für $c \in \mathbb{R}$, c deterministisch.
- **Additivität** : S_1, S_2 unabhängig $\Rightarrow H[S_1 + S_2] = H[S_1] + H[S_2]$

• **Iterativität** : S bezeichnet einen Schaden und N eine weitere Zufallsvariable, so bezeichnen wir die für die bedingte Verteilung von $S \mid N$ berechnete Prämie mit $H[S \mid N]$. Dabei handelt es sich im Allgemeinen selbst um eine Zufallsvariable für die wir eine Prämie berechnen können.

→ Iterativität: $H[H[S \mid N]] = H[S]$

• **positive Homogenität** : $\forall a \geq 0$ gilt $H[aS] = aH[S]$

Von den betrachteten Prämienkalkulationsprinzipien erfüllt nur das Nettoprämienprinzip alle gewünschten Eigenschaften. Dabei handelt es sich, wie bereits erwähnt, um den Grenzwert $a \rightarrow 0$ des Exponentialprinzips. Das Nettoprämienprinzip ist jedoch nicht besonders nützlich, da es mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Ruin führt. Sehr oft wird daher anstelle des Nettoprämienprinzips das Exponentialprinzip verwendet. Dieses erfüllt alle Eigenschaften bis auf die positive Homogenität.

2.3 Der Risikoprozess

2.3.1 Der zeitstetige Risikoprozess

(Siehe [3] Seite 150-155 und [4])

Im ersten Abschnitt wurde der Gesamtschaden durch die Zufallsvariable

$$S = \sum_{k=1}^N X_k$$

beschrieben. Hier wurde der Schaden auf eine Periode bezogen, in der Regel auf ein Jahr. Abgesehen davon spielte der zeitliche Aspekt keine Rolle. Normalerweise sind jedoch auch die Zeitpunkte, wann die Schäden auftreten von Bedeutung. Diese sind, wie die Schadenhöhen auch, zufällig.

Daher führen wir einen Zeitparameter $t \in \mathbb{R}$ ein und bezeichnen mit $S(t)$ den Gesamtschaden im Intervall $[0, t]$. Dabei handelt es sich um einen stochastischen Prozess $(S(t), t \geq 0)$. Wir betrachten nun also den stochastischen Prozess $(S(t), t \geq 0)$ anstatt wie bisher die Zufallsvariable S .

Definition 2.5 (Stochastischer Prozess). *Ein stochastischer Prozess in stetiger Zeit ist eine Familie von Zufallsvariablen $(S(t), t \geq 0)$.*

Wir bezeichnen mit X_n wieder die Höhe des n -ten Schadens und T_n , $n = 1, 2, \dots$ bezeichnet den Zeitpunkt dessen Auftretens. Die T_n werden auch Ankunftszeiten genannt. Es gilt

$$T_n = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : N(t) = n\}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$$T_0 = 0$$

Weiters gilt

$$W_n = T_n - T_{n-1}, \quad n \geq 1$$

W_n beschreibt die Zeit zwischen dem Auftreten des $(n-1)$ -ten und des n -ten Schadens, für $n = 1, 2, \dots$. Sie werden auch als Zwischenankunftszeiten bezeichnet.

Somit folgt für die Ankunftszeiten:

$$T_n = \sum_{k=1}^n W_k$$

Wir gehen davon aus, dass $W_1, W_2, \dots, X_1, X_2, \dots$ stochastisch unabhängig sind. Dies bedeutet, dass der Zeitpunkt des Auftretens eines Schadens und dessen Höhe einander nicht beeinflussen.

Weiters fordern wir, dass die Zufallsvariablen W_1, W_2, \dots sowie X_1, X_2, \dots identisch verteilt sind mit Verteilungsfunktion G wobei $G(0) = 0$ gilt beziehungsweise mit Verteilungsfunktion F .

Somit folgt für die Verteilungsfunktion von T_n :

$$\mathbb{P}(T_n \leq t) = \mathbb{P}(W_1 + \dots + W_n \leq t) = G^{*n}(t) \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Wie auch im ersten Abschnitt beschreibt die Zufallsvariable

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(-\infty, t]} T_n \quad t \in \mathbb{R}_+$$

die Anzahl der Schäden bis zum Zeitpunkt t .

Es gilt für $t \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t) = G^{*n}(t) - G^{*(n+1)}(t) \quad (2.5)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = 0) &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t) = \\
&1 - (\mathbb{P}(T_1 \leq t) - \mathbb{P}(T_2 \leq t) + \mathbb{P}(T_2 \leq t) - \mathbb{P}(T_3 \leq t) + \dots) = \\
&\qquad\qquad\qquad -\mathbb{P}(T_1 \leq t) = \mathbb{P}(T_1 > t) = 1 - G(t)
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

Der stochastische Prozess $(N(t), t \geq 0)$ wird als Schadenanzahlprozess bezeichnet. Hierbei handelt es sich um einen Zählprozess.

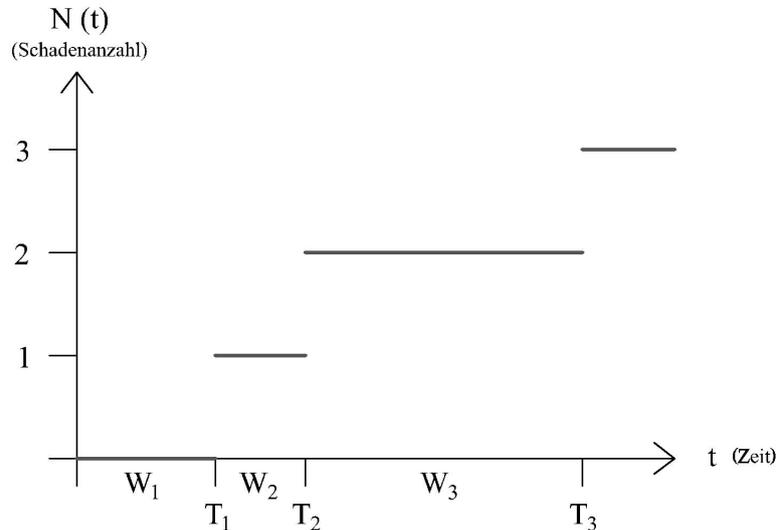
Definition 2.6 (Zählprozess). *Ein Zählprozess ist ein stochastischer Prozess (in stetiger Zeit) der bei Null startet, Werte in den ganzen Zahlen annimmt und dessen Trajektorien wachsend sind.*

Formal:

Bei $(N(t), t \geq 0)$ handelt es sich um einen Zählprozess, wenn gilt

- $N(0) = 0$ f.s.
- $N(t) \in \mathbb{Z}^+$
- $N(s) \leq N(t)$ f.s. $\quad \forall \quad 0 \leq s \leq t$

Die folgende Grafik verdeutlicht sehr gut den Zusammenhang zwischen T_n, W_n und $N(t)$.

Abbildung 2.1: Beziehung zwischen T_n , W_n und $N(t)$

Der Gesamtschaden bis zur Zeit t wird durch die Zufallsvariable

$$S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} X_n, \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

beschrieben. Wie bereits anfangs erwähnt bezeichnet $(S(t), t \geq 0)$ den Gesamtschadenprozess. Für ein festes t handelt es sich bei $S(t)$ um eine Zufallssumme, für die die Resultate aus dem vorigem Abschnitt gelten.

Nun betrachten wir einen wichtigen Spezialfall:

$$\text{Sei } (W_n)_{n \geq 0} \sim \text{Exp}(\lambda) \quad \Rightarrow \quad (T_n)_{n \geq 0} \sim \Gamma(n, \lambda)$$

$$\mathbb{P}(T_n \leq t) = G^{*n}(t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

und wegen (2.5) und (2.6) folgt für $N(t)$:

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = 1 - G(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(t) = n) &= G^{*n}(t) - G^{*(n+1)}(t) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!} \right) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

Somit folgt: $N(t) \sim Poi(\lambda t)$

Umgekehrt gilt, falls $N(t) \sim Poi(\lambda t) \Rightarrow (W_n)_{n \geq 0} \sim Exp(\lambda)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W_n \leq t) &= 1 - \mathbb{P}(W_n > t) = 1 - (1 - G(t)) = 1 - \mathbb{P}(N(t) = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \quad , t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Für den Gesamtschadenprozess gilt dann, wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, dass er zusammengesetzt Poissonverteilt ist. Nun betrachten wir noch einige Eigenschaften der zusammengesetzten Poissonverteilung.

Definition 2.7. *Ein zusammengesetzter Poissonprozess hat stationäre und unabhängige Inkremente.*

Definition 2.8 (unabhängige Inkremente). *Der Prozess $(X(t), t \geq 0)$ hat unabhängige Inkremente, wenn für alle $m \geq 1$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m$ gilt, dass $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_m) - X(t_{m-1})$ unabhängige Zufallsvariablen sind*

Definition 2.9 (stationäre Inkremente). *Der Prozess $(X(t), t \geq 0)$ hat stationäre Inkremente, wenn für alle $m \geq 1, h \geq 0$ und $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m$ gilt, dass*

$$\begin{aligned} (X(t_1 + h) - X(t_0 + h)), \dots, (X(t_m + h) - X(t_{m-1} + h)) &\stackrel{d}{=} \\ (X(t_1) - X(t_0)), \dots, (X(t_m) - X(t_{m-1})) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein Versicherungsunternehmen und nehmen an, dass dieses zum Zeitpunkt $t = 0$ über eine Anfangsreserve beziehungsweise Anfangskapital $x = R(0) \geq 0$ verfügt.

Der Risikoreserveprozess $(R(t), t \geq 0)$ ist ein Modell für die zeitliche Entwicklung der Reserven eines Unternehmens.

Es gilt:

$$R(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = x + ct - S(t) \quad (2.9)$$

wobei c die Prämie im Zeitintervall bezeichnet.

Anstatt dem Risikoreserveprozess wird oft auch der Schadenüberschussprozess $(U(t), t \geq 0)$ betrachtet, welcher durch

$$U(t) = S(t) - ct = \sum_{i=1}^{N(t)} (X_i - c) \quad (2.10)$$

gegeben ist.

Die Risikoreserve kann somit auch durch $R(t) = x - U(t)$ beschrieben werden.

Man erkennt sofort, dass die Risikoreserve negativ wird, wenn der Schadenüberschuss $U(t)$, $t = 1, 2, \dots$ das Anfangskapital übersteigt.

Für ein Versicherungsunternehmen ist es somit wichtig, dass der Risikoreserveprozess $(R(t), t \geq 0)$ nicht negativ wird, andernfalls spricht man von technischem Ruin. Technischer Ruin impliziert in der klassischen Risikotheorie, dass das Unternehmen in Konkurs geht.

Wir bezeichnen die Ruinwahrscheinlichkeit mit Anfangskapital x bei unendlichem Horizont mit $\psi(x)$. Diese ist gegeben durch:

$$\psi(x) = \mathbb{P}(\inf_{t \geq 0} R(t) < 0)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass zu keinem Zeitpunkt Ruin eintritt, ist durch $\phi(x) = 1 - \psi(x)$ gegeben. $\phi(x)$ wird Überlebenswahrscheinlichkeit genannt.

Die Wahrscheinlichkeit für Ruin mit Anfangskapital x , vor dem Zeitpunkt u bezeichnen wir mit

$$\psi(x, u) = \mathbb{P}(\inf_{0 \leq t \leq u} R(t) < 0).$$

Diese wird auch Ruinwahrscheinlichkeit bei endlichem Horizont genannt.

Weiters bezeichnen wir mit

$$T = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\} = \inf\{t \geq 0 : U(t) > x\} \quad (2.11)$$

den Ruinzeitpunkt. Es folgt somit

$$\psi(x) = \mathbb{P}(T < \infty) \quad (2.12)$$

und

$$\psi(x, u) = \mathbb{P}(T < u) \quad (2.13)$$

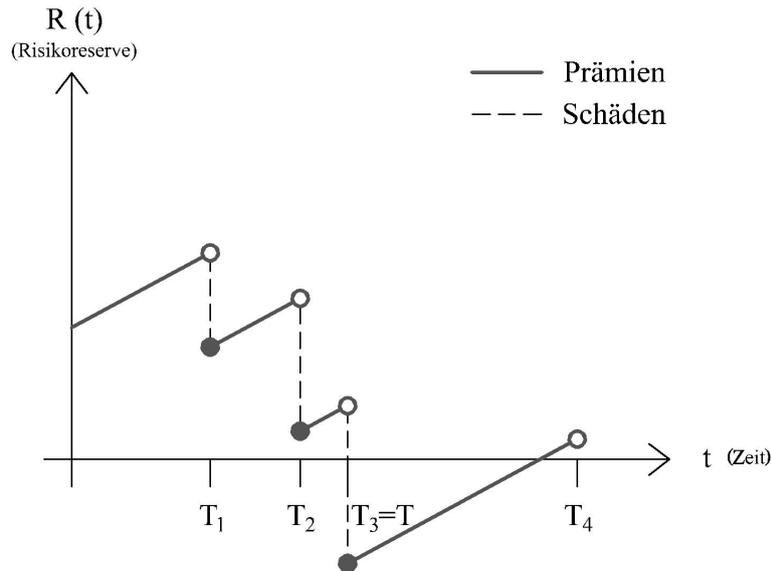


Abbildung 2.2: Ruinzeitpunkt T

Ein wichtiges Beispiel für einen zeitstetigen Risikoprozess liefert das Cramér-Lundberg Modell.

2.3.2 Das Cramér-Lundberg Modell

Das folgende Kapitel ist, wenn nicht näher gekennzeichnet, folgenden Quellen entnommen: [2] Seite 41-46 und [4]

Wir haben bereits gesehen, dass der zusammengesetzte Poissonprozess wertvolle Eigenschaften besitzt. F. Lundberg hat sich dies zu Nutzen gemacht und ein Risikomodell in stetiger Zeit aufgestellt, in dem der Gesamtschadenprozess einer zusammengesetzten Poissonverteilung unterliegt. Weiters nahm er an, dass die Prämienzahlungen stetig über die Zeit erfolgen und für jedes Zeitintervall proportional zur Intervalllänge ist. Dieses Modell wird als Cramér-Lundberg Modell oder als klassisches Risikomodell bezeichnet.

Wir verwenden die selben Notationen wie im vorigen Abschnitt:

- $x = R(0)$... Anfangskapital

- $c \geq 0$... Prämienrate
- $(N(t), t \geq 0)$... Schadenanzahlprozess, dieser ist Poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$
- $(X_k)_{k \geq 1}$... unabhängig und identisch verteilte Einzelschäden, diese sind unabhängig von $N(t)$ und meist gilt: $\mathbb{P}(X_k > 0) = 1$
- $(S(t), t \geq 0)$... Gesamtschadenprozess, dabei handelt es sich um einen zusammengesetzten Poissonprozess
 $\Rightarrow S(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$
- $(R(t), t \geq 0)$... Risikoreserveprozess, mit
 $R(t) = x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k = x + ct - S(t)$
- $T = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0\}$... Ruinzeitpunkt

Für die Ruin- und Überlebenswahrscheinlichkeit gilt:

- $\psi(x) = \mathbb{P}(T < \infty)$
- $\phi(x) = 1 - \psi(x)$

Angenommen $\mathbb{E}[X_n] < \infty$, dann setzen wir $\mathbb{E}[X_1] = p_1$.

Es gilt: $\mathbb{P}(X_1 > 0) > 0$ und $\mathbb{P}(X_1 \geq 0) = 1 \Rightarrow p_1 > 0$

Für den Erwartungswert von $R(t)$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R(t)] &= \mathbb{E}\left[x + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k\right] = \mathbb{E}[x + ct - S(t)] = x + ct - \mathbb{E}[S(t)] = x + ct - \mathbb{E}[N(t)]\mathbb{E}[X_1] \\ &= x + ct - \lambda t p_1 = x + t(c - \lambda p_1) \end{aligned}$$

Wir können die folgenden Aussagen treffen:

- $c - \lambda p_1 > 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$ f.s.
- $c - \lambda p_1 < 0 : \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = -\infty$ f.s.
- $c - \lambda p_1 = 0 : \limsup_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$ und $\liminf_{t \rightarrow \infty} R(t) = -\infty$ f.s.

In den Fällen wo wir $-\infty$ erhalten, haben wir fast sicher Ruin. Wir benötigen daher einen relativen Sicherheitszuschlag, diesen bezeichnen wir mit Λ . Wir wollen nun die Höhe des relativen Sicherheitszuschlages bestimmen.

c bezeichnet, wie Anfangs erwähnt, die Prämie im Zeitintervall $[t - 1, t]$. Da ein zusammengesetzter Poissonprozess stationäre Inkremente besitzt, gilt:

$$\mathbb{E}[S(t) - S(t - 1)] = \mathbb{E}[S(1) - S(0)] = \mathbb{E}[S(1)] = \lambda p_1$$

Es muss gelten, dass die Prämie pro Zeiteinheit größer ist als der erwartete Schaden pro Zeiteinheit. Also

$$c = H[S(1)] = (1 + \Lambda)\mathbb{E}[S(1)] = (1 + \Lambda)\lambda p_1$$

Somit folgt für den relativen Sicherheitszuschlag $\Lambda = \frac{c}{\lambda p_1} - 1$.

Wichtig ist, dass der relative Sicherheitszuschlag $\Lambda > 0$ ist. Diese Eigenschaft wird auch als die „Net profit condition“ bezeichnet. Andernfalls gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(x) = 1$.

Wir wollen nun die Ruin- und Überlebenswahrscheinlichkeit genauer betrachten.

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir für die Ruinwahrscheinlichkeit bei einem Anfangskapital x zum Zeitpunkt h folgendes:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\lambda h} \psi(x + ch) + \int_0^h \int_0^\infty \psi(x + ct - y) \lambda e^{-\lambda t} dF_X(y) dt, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Für die Überlebenswahrscheinlichkeit gilt somit:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\lambda h} \phi(x + ch) + \int_0^h \int_0^{x+ct} \phi(x + ct - y) \lambda e^{-\lambda t} dF_X(y) dt, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 1, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Oftmals hilft man sich jedoch mit Abschätzungen.

Definition 2.10. *Betrachte das klassische Cramér-Lundberg Modell. Gibt es ein $R > 0$, sodass die momenterzeugende Funktion der Einzelschäden*

$M_X(R) < \infty$ und R die Cramér-Lundberg-Gleichung

$$\lambda + cR = \lambda M_X(R) \quad (2.16)$$

erfüllt, dann heißt dieses R Cramér-Lundberg-Koeffizient oder Anpassungskoeffizient und es gilt die Cramér-Lundberg-Abschätzung

$$\psi(x) \leq e^{-Rx} \quad \forall x \geq 0 \quad (2.17)$$

Wir betrachten zunächst die folgende Gleichung:

$$\lambda + cr = \lambda M_X(r)$$

Dabei handelt es sich um eine implizite Gleichung für r . Die linke Seite ist linear und die rechte Seite ist konvex bzgl. r , somit existieren maximal 2 Lösungen.

Eine Lösung ist wegen $M(0) = 1$ durch $r = 0$ gegeben. Diese ist jedoch für uns uninteressant.

Wir suchen die Lösung $r > 0$.

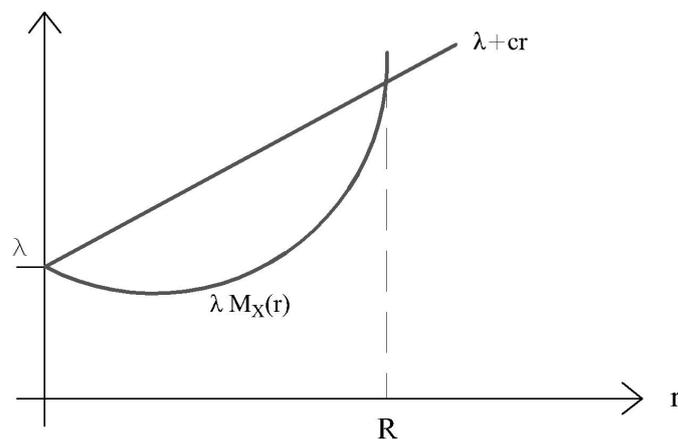


Abbildung 2.3: Cramér-Lundberg Gleichung

Wir betrachten $f(r) = \lambda + cr - \lambda M_X(r)$

Es gilt

$$f(0) = 0 \text{ und } f'(0) = c - \lambda M'_X(0) = c - \lambda \mathbb{E}[X] = c - \lambda p_1.$$

Wegen der „Net profit condition“ folgt nun, dass $f'(0) > 0$ ist und somit ist f konkav.

- Wenn $M_X(r) < \infty \quad \forall r \geq 0$, dann gilt, dass die konvexe Funktion $\lambda M_X(r)$ schneller wächst für $r \rightarrow \infty$ als die lineare Funktion $\lambda + cr \Rightarrow R$ existiert.

- Gibt es ein $r_{\max} > 0$, sodass $M_X(r) < \infty \quad \forall 0 \leq r \leq r_{\max}$ und $M_X(r) = \infty \quad \forall r > r_{\max}$

$$\lim_{r \rightarrow r_{\max}} f(r) = \lambda + cr_{\max} - \lambda M_X(r_{\max}) = f(r_{\max})$$

- Falls $f(r_{\max}) > 0 \Rightarrow$ es gibt keinen Cramér-Lundberg-Koeffizienten
- Falls $f(r_{\max}) \leq 0 \Rightarrow R$ existiert

Es gilt:

Gibt es ein $\Lambda > 0$ und finden wir $0 < r_1 < r_2$ mit $\mathbb{E}[e^{r_2 X}] < \infty$ und $f(r_1) > 0, f(r_2) < 0 \Rightarrow r_1 < R < r_2$

Im Allgemeinen ist der Cramér-Lundberg Koeffizient schwer zu bestimmen, daher wollen wir entsprechende Schranken finden um diesen einzugrenzen.

Um eine obere Schranke für R herzuleiten betrachten wir diesmal die Funktion $g(r) = -f(r) = -(\lambda + cr) + \lambda M_X(r)$.

Es gilt

- $g''(r) = \lambda M''_X(r) = \lambda \mathbb{E}[X^2 e^{rX}] > \lambda \mathbb{E}[X^2]$
- $g'(r) = -c + \lambda M'_X(r) = g'(0) + \int_0^r g''(s) ds > -(c - \lambda p_1) + \lambda \mathbb{E}[X^2] r$
- $g(r) = g(0) + \int_0^r g'(s) ds > \lambda \mathbb{E}[X^2] \frac{r^2}{2} - (c - \lambda p_1) r$

Die Ungleichung $g(r) > \lambda \mathbb{E}[X^2] \frac{r^2}{2} - (c - \lambda p_1) r$ liefert für $r = R$:

$$R < \frac{2(c - \lambda p_1)}{\lambda \mathbb{E}[X^2]} = \frac{2(c - \lambda p_1)}{\lambda \mathbb{E}[X^2]} \frac{p_1}{p_1} = 2 \frac{c - \lambda p_1}{\lambda p_1} \frac{p_1}{\mathbb{E}[X^2]} = 2\Lambda \frac{p_1}{\mathbb{E}[X^2]} \quad (2.18)$$

Hierbei ist zu beachten, dass $g(R) = 0$ gilt.

Im Allgemeinen ist es nicht möglich eine untere Schranke anzugeben. Falls wir jedoch beschränkte Schäden haben, können wir eine untere Schranke für R herleiten.

Angenommen $X_1 \leq k$ f.s. und $f_1(x) = e^x$.

Wegen der strengen Konvexität der Exponentialfunktion gilt folgende Ungleichung:

$$f_1(tx + (1-t)y) < tf_1(x) + (1-t)f_1(y)$$

In unserem Fall liefert dies, für $x = Rk$, $y = 0$ und $t = \frac{X}{k}$:

$$e^{RX} < \frac{X}{k}e^{Rk} + (1 - \frac{X}{k})e^0$$

Weiters gilt

$$M_X(R) - 1 = \mathbb{E}[e^{RX}] - 1 < \mathbb{E}[\frac{X}{k}e^{Rk} + (1 - \frac{X}{k})] - 1 < \frac{p_1}{k}e^{Rk} + 1 - \frac{p_1}{k} - 1 = \frac{p_1}{k}(e^{Rk} - 1)$$

Somit bekommen wir, wenn wir $g(R) = -f(R) = -(\lambda + cR) + \lambda M_X(R) = 0$ betrachten und die Ungleichung $\frac{1}{Rk}(e^{Rk} - 1) < e^{Rk}$ anwenden:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(M_X(R) - 1) - cR < \frac{\lambda p_1}{k}(e^{Rk} - 1) - cR = \lambda p_1 R \frac{1}{Rk}(e^{Rk} - 1) - cR \\ &< \lambda p_1 R e^{Rk} - cR = R(\lambda p_1 e^{Rk} - c) \end{aligned}$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$R > \frac{1}{k} \ln\left(\frac{c}{\lambda p_1}\right) = \frac{1}{k} \ln(1 + \Lambda)$$

Gesamt ergibt sich somit:

Satz 2.11 (Schranken von R).

- Existiert R , dann gilt $R < 2\Lambda \frac{p_1}{p_2}$ mit $p_1 = \mathbb{E}[X_1]$ und $p_2 = \mathbb{E}[X_1^2]$
- Sind die Schäden zusätzlich beschränkt, beispielsweise ist $X_k \leq k$ f.s. dann existiert R und es gilt $R > \frac{1}{k} \ln(1 + \Lambda)$

Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir nun noch die Cramér-Lundberg-Ungleichung beweisen.

Dazu betrachten wir zunächst die folgenden Martingalresultate zur

Ruintheorie:

v bezeichnet eine strikt fallende Funktion $v : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = 0$.

Wir treffen die folgenden zwei Annahmen:

• Annahme A:

Es gibt dieses, wie oben beschriebene, v , sodass $(v(R(t)), t \geq 0)$ ein Supermartingal ist

• Annahme B:

Es gibt dieses, wie oben beschriebene, v , sodass $(v(R(t)), t \geq 0)$ ein Submartingal ist

Satz 2.12. *Gilt die Annahme A, dann können wir die Kolmogorov-Doob-Ungleichung für nichtnegative Supermartingale anwenden $\Rightarrow \psi(x) \leq \frac{v(x)}{v(0)}$*

Satz 2.13. *Gilt die Annahme B, sowie die folgenden technischen Bedingungen*

- $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$ auf $\{T = \infty\}$
- $0 < \mathbb{P}(T < \infty) < 1$

dann gilt $\psi(x) = \frac{v(x)}{\mathbb{E}[v(R(t)) | T < \infty]}$

Diese Resultate verwenden wir nun um die Cramér-Lundberg-Abschätzung, $\psi(x) \leq e^{-Rx}$, zu beweisen.

Wir wissen, wenn

- $R > 0, \quad \mathbb{E}[e^{RX_1}] < \infty$
- $\lambda + cR = \lambda M_X(R)$

gilt $\Rightarrow \psi(x) \leq e^{-Rx}$

Für die Cramér-Lundberg-Ungleichung müssen wir nun zeigen, dass

$v(x) = e^{-Rx}$ gilt und dass es sich bei $(e^{-RR(t)}, t \geq 0)$ um ein Martingal handelt. Dann würde nämlich Satz 2.12 gelten und die Cramér-Lundberg-Ungleichung wäre bewiesen.

Um zu zeigen, dass es sich bei $(e^{-RR(t)}, t \geq 0)$ um ein Martingal handelt, müssen wir die folgenden Bedingungen überprüfen:

- $\mathbb{E}[|e^{-RR(t)}|] < \infty$

- $(e^{-RR(t)}, t \geq 0)$ adaptiert
- $\mathbb{E}[e^{-RR(t)} | F(s)] = e^{-RR(s)}$

Die ersten beiden Bedingungen sind trivialerweise erfüllt. Wir zeigen nun die Martingaleigenschaft:

$$\mathbb{E}[e^{-RR(t)} | F(u)] = \mathbb{E}[e^{-R(x+ct-S(t))} | F(u)] = e^{-R(x+ct)} \mathbb{E}[e^{R(S(t)-S(u))} e^{RS(u)} | F(u)] =$$

Ein zusammengesetzter Poissonprozess hat stationäre und unabhängige Inkremente und somit ist $e^{R(S(t)-S(u))}$ unabhängig von $F(u)$ und $e^{RS(u)}$ ist $F(u)$ -messbar.

$$= e^{-R(x+ct)} e^{RS(u)} \mathbb{E}[e^{R(S(t)-S(u))}] =$$

Wegen der stationären Inkremente gilt weiters, dass $S(t) - S(u) \stackrel{d}{=} S(t-u)$ ist.

$$= e^{-R(x+ct)} e^{RS(u)} \mathbb{E}[e^{RS(t-u)}] =$$

Es gilt:

$$S(t-u) \sim ZPoi(\lambda(t-u), F_X) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}[e^{RS(t-u)}] = e^{\lambda(t-u)(M_X(R)-1)}$$

$$= e^{-R(x+ct)} e^{RS(u)} e^{\lambda(t-u)(M_X(R)-1)} \stackrel{!}{=} e^{-RR(u)} = e^{-R(x+cu)} e^{RS(u)}$$

Wir vergleichen nun die Exponenten:

$$-R(x+ct) + RS(u) + \lambda(t-u)(M_X(R)-1) = -R(x+cu) + RS(u)$$

$$-Rc(t-u) + \lambda(t-u)(M_X(R)-1) = 0$$

$$-Rc - \lambda + \lambda M_X(R) = 0$$

Wenn man die letzte Gleichung umformt erhält man genau die Definition des Anpassungskoeffizienten. Man erhält nämlich, dass

$$\lambda M_X(R) = \lambda + cR$$

Wir haben also gezeigt, dass es sich bei $(e^{-RR(t)}, t \geq 0)$ um ein Martingal handelt und somit ist die Cramér-Lundberg-Ungleichung bewiesen.

Kapitel 3

Einführung der Konkurswahrscheinlichkeit

(Siehe [5] Seite 213-215, [6] Seite 1-3)

In der klassischen Risikotheorie sind die Begriffe -Ruin eines Unternehmens- und -der Konkurs eines Unternehmens- gleichbedeutend. Ein Unternehmen ist ruiniert, sobald die Risikoreserve negativ wird und geht somit in Konkurs.

Ab jetzt unterscheiden wir zwischen diesen beiden Situtaionen.

- Ruin (dies bedeutet, dass die Risikoreserve negativ wird)
- Konkurs (Das Unternehmen wird geschlossen)

Im Fall des Konkurses ist dessen Wahrscheinlichkeit durch eine Funktion, abhängig von der Höhe des negativen Überschusses, gegeben. Die Idee, dass man diese beiden Fälle unterscheidet, kommt daher, dass in manchen Branchen ein Unternehmen weiter bestehen kann obwohl es technisch ruiniert ist. Beispielsweise können Maßnahmen getroffen werden, sodass die finanziellen Probleme des Unternehmens verbessert oder sogar behoben werden können. Gewöhnlicherweise geht ein Unternehmen erst dann in Konkurs wenn diese Maßnahmen keine Wirkung zeigen. Speziell vorübergehende finanzielle Unterstützung, um beispielsweise eine Periode mit negativen Überschuss zu überstehen, könnte von einer finanziell bessergestellten Muttergesellschaft kommen.

In den nächsten Kapiteln betrachten wir den Fall näher, dass ein Unternehmen trotz negativer Risikoreserve fortbestehen kann, bis zu jenem Zeitpunkt, wo es in Konkurs geht. Hierbei gilt, umso näher die negative Reserve bei Null ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass das Unternehmen "überlebt", beziehungsweise weiterhin fortbesteht. Dies wollen wir nun präzisieren. Dazu führen wir die Konkursratenfunktion $\omega(x) \geq 0, x \leq 0$ ein. Dabei handelt es sich um eine

nicht wachsende (typischerweise fallende) Funktion. Wenn wir die negative Reserve mit x bezeichnen, dann bezeichnet $\omega(x)dt$ die Wahrscheinlichkeit für einen Konkurs innerhalb dt Zeiteinheiten.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Konkursratenfunktion positiv ist, falls $x < 0$ und Null, wenn $x \geq 0$ ist. Weiters nehmen wir an, dass $\omega(x) \geq \omega(y)$ für $|x| \geq |y|$, dies garantiert, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Konkurs nicht abnimmt wenn der negative Überschuss größer wird.

Wenn $\omega(x) = \infty$ für $x \leq x_0 < 0$ und $\omega(x) > 0$ für $x > x_0$, dann tritt der Konkurs spätestens dann auf, wenn die Reserve zu x_0 fällt. In gewisser Hinsicht ist x_0 das Level des "sicheren Konkurses". Das Konzept des Konkurses besteht also darin, dass ein Unternehmen, trotz negativer Risikoreserve, weiterhin fortbestehen kann, es jedoch ein bestimmtes Level gibt an dem es endgültig "zerstört" wird.

In den folgenden Abschnitten betrachten wir wieder die Risikoreserve zur Zeit t :

$$R(t) = x + ct - S(t) \tag{3.1}$$

Wobei, wie schon anfangs erwähnt, $R(0) = x$ das Anfangskapital, c die Prämienrate und $S(t)$ den Gesamtschaden zum Zeitpunkt t bezeichnet. $S(t)$ sei dabei ein zusammengesetzter Poissonprozess mit Parameter λ .

τ bezeichnet den Zeitpunkt des Konkurses, dann ist die Gesamtwahrscheinlichkeit des Konkurses durch

$$\psi(x) = \mathbb{E}[1_{\tau < \infty}] = \mathbb{P}(\tau < \infty) \tag{3.2}$$

gegeben. Zu beachten ist, dass die klassische Ruinwahrscheinlichkeit $\psi_{\text{Ruin}}(x)$ für den Grenzwert $\omega(y) \equiv \infty$ für alle $y < 0$ beibehalten wird.

Es gibt auch die Möglichkeit, dass die Maßnahmen um ein Unternehmen vor dem Konkurs zu bewahren bereits getroffen werden, wenn die Reserve ein bestimmtes Minimum s erreicht, also bereits bevor die Reserve negativ wird. Beispielsweise könnten Finanzdienstleistungsunternehmen eine Kapital-spritze garantieren, sobald die Reserve dieses Minimum erreicht hat. Diese Situation kann durch ein verschobenes Konkursproblem modelliert werden, mit Anfangskapital $x - s$ und einer geeigneten Konkursratenfunktion $\omega(x)$.

Um den Begriff der Konkursratenfunktion zu veranschaulichen betrachten wir hierzu zwei kleine Beispiele.

Sei $a > 0$, wir definieren $\omega(x)$ beliebig groß für $x < -a$ und $\omega(x) \equiv \omega_c$ für $-a \leq x < 0$, wobei ω_c eine konstante Konkursrate bezeichnet.

Dies kann folgendermaßen interpretiert werden:

Man kann das zugehörige Konkursmodell als eine ungedeckte finanzielle Garantie ansehen, wo der Garantieggeber im Falle der Liquidation des Unternehmens verspricht offene Forderungen bis zur Höhe a zu begleichen. Sollte der Garantieggeber sein Versprechen nicht einhalten, bedeutet dies den Konkurs für das Unternehmen sobald die Reserve negativ wird. $\omega(x)$ kann in diesem Fall als Garantieggeber Ausfallsrate gesehen werden.

Für den Fall, dass wir eine konstante Konkursratenfunktion $\omega(x) \equiv \omega_c$ haben, ist das Konkurskonzept mit anderen mathematischen Resultaten verbunden. Beispielsweise wird in [6] ein zusammengesetzt Poissonverteiltes Risikomodell nur zu zufälligen Zeitpunkten (Beobachtungszeitpunkten) ($Z_k, k \geq 0$) betrachtet. Hier kann Ruin lediglich zu diesen zufälligen Beobachtungszeitpunkten erkannt werden. Dies bedeutet, dass die Risikoreserve zwischen den Beobachtungszeitpunkten negativ sein kann. Ruin resultiert jedoch nur, wenn sie ebenso zum nächsten Beobachtungszeitpunkt negativ ist.

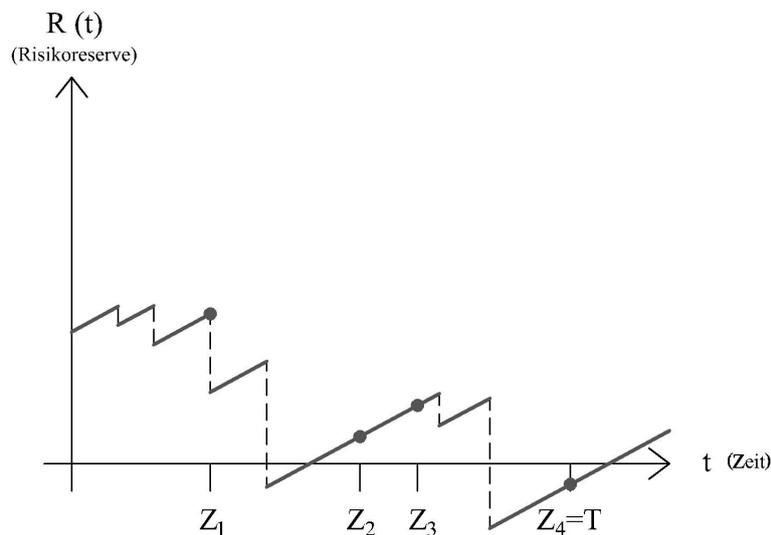


Abbildung 3.1: Der zusammengesetzt Poissonverteilte Prozess wird nur zu bestimmten Zeitpunkten betrachtet

Im nächsten Kapitel befassen wir uns nun mit der Ermittlung der Konkurswahrscheinlichkeit und bestimmen diese für verschiedene Konkursratenfunktionen.

Kapitel 4

Die Wahrscheinlichkeit des Konkurses

(Vergleiche [5])

Im vorigen Abschnitt haben wir die Konkursratenfunktion $\omega(x)$ eingeführt. Es gilt, wie bereits erwähnt, dass $\omega(x) \geq 0$ für $x < 0$ und $\omega(x) = 0$ für $x \geq 0$.

Wir betrachten nun den ersten Beobachtungszeitpunkt eines Schadens oder eines Konkursfalles bis zum Zeitpunkt $h > 0$. Mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir für $x \geq 0$:

$$\psi(x) = e^{-\lambda h} \psi(x + ch) + \int_0^h \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi(x + ct - y) dF_X(y) dt \quad (4.1)$$

Bei $e^{-\lambda h} \psi(x + ch)$ handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden bis zum Zeitpunkt h eintritt und dann Ruin folgt. $\int_0^h \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi(x + ct - y) dF_X(y) dt$ spiegelt die Wahrscheinlichkeit wieder, dass ein Schaden in $(0, h)$ eintritt und dann Ruin folgt.

Für $x < 0$ liefert uns der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgendes:

$$\begin{aligned} \psi(x) = e^{-\lambda h - \int_0^h \omega(x+cy) dy} \psi(x + ch) + \int_0^h e^{-\lambda t} \omega(x + ct) e^{-\int_0^t \omega(x+cy) dy} dt + \\ \int_0^h e^{-\int_0^t \omega(x+cy) dy} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi(x + ct - y) dF_X(y) dt \quad (4.2) \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich bei $e^{-\lambda h - \int_0^h \omega(x+cy)dy} \psi(x+ch)$ um die Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt h kein Schaden sowie kein Konkurs eintritt und dann Ruin folgt. $\int_0^h e^{-\lambda t} \omega(x+ct) e^{-\int_0^t \omega(x+cy)dy} dt$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass kein Schaden eintritt aber, dass das Unternehmen Konkurs meldet in $(0, h)$. Hier ist noch zu beachten, dass die Ruinwahrscheinlichkeit in diesem Fall 1 ist. Bei $\int_0^h e^{-\lambda t} \omega(x+cy)dy \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi(x+ct-y) dF_X(y) dt$ handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schaden eintritt jedoch kein Konkurs bis zum Zeitpunkt h und dann Ruin folgt.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Stetigkeit. Wir wissen, dass ψ in einem Punkt a rechtsseitig stetig ist, wenn der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a^+} \psi(x)$ existiert und gleich $\psi(a)$ ist. a^+ bedeutet hierbei, dass man sich a mit Werten annähert die größer als a sind.

Wählt man nun $x = 0$ und $h \rightarrow 0$ in (4.1) so erhält man:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{e^{-\lambda h}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\psi(ch)}_{\rightarrow \psi(0^+)} + \underbrace{\int_0^h \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi(ct-y) dF_X(y) dt}_{\rightarrow 0} \\ \psi(0) &= \psi(0^+) \end{aligned}$$

Und somit folgt die rechtsseitige Stetigkeit von $\psi(x)$ in $x = 0$.

Wählt man stattdessen $x = -ch$ und $h \rightarrow 0$ in (4.2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\psi(-ch)}_{\rightarrow \psi(0^-)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{e^{-\lambda h - \int_0^h \omega(-ch+cy)dy}}_{\rightarrow 1} \psi(0) + \underbrace{\int_0^h e^{-\lambda t} \omega(-ch+ct) e^{\int_0^t \omega(-ch+cy)dy} dt}_{\rightarrow 0} \\ &+ \underbrace{\int_0^h e^{-\lambda t} \omega(-ch+cy)dy \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi(-ch+ct-y) dF_X(y) dt}_{\rightarrow 0} \\ \psi(0^-) &= \psi(0) \end{aligned}$$

Und es folgt die linksseitige Stetigkeit. Hierbei ist zu beachten, dass $\omega(0^-)$ beschränkt ist. Insgesamt erhalten wir somit, dass $\psi(x)$ stetig ist in $x = 0$ und

$$\psi(0^-) = \psi(0^+). \quad (4.3)$$

Mit der gleichen Argumentation erhalten wir, dass $\psi(x)$ für alle Werte $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Nun differenzieren wir (4.1) bezüglich h und bilden den Grenzwert $h \rightarrow 0$:

$$x \geq 0: \quad 0 = -\lambda\psi(x) + \psi'_+(x)c + \lambda \int_0^\infty \psi(x-y)dF_X(y) \quad (4.4)$$

Hierbei bezeichnet $\psi'_+(x)$ die rechtsseitige Ableitung von $\psi(x)$.

Durch analoges Vorgehen in (4.2) erhalten wir:

$$x < 0: \quad 0 = -(\lambda + \omega(x))\psi(x) + c\psi'_+(x) + \omega(x) + \lambda \int_0^\infty \psi(x-y)dF_X(y) \quad (4.5)$$

Ersetzen wir in (4.1) x durch $x - ch$, für ausreichend kleine h , so erhalten wir:

$$\psi(x - ch) = e^{-\lambda h}\psi(x) + \int_0^h \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi(x - ch + ct - y)dF_X(y)dt$$

Nun differenzieren wir nach h und bilden wieder den Grenzwert $h \rightarrow 0$, dann ergibt sich für $x > 0$:

$$\psi'_-(x)(-c) = -\lambda\psi(x) + \lambda \int_0^\infty \psi(x-y)dF_X(y)$$

Durch Umformen erhält man:

$$x \geq 0: \quad 0 = -\lambda\psi(x) + \psi'_-(x)c + \lambda \int_0^\infty \psi(x-y)dF_X(y) \quad (4.6)$$

Durch analoges vorgehen in (4.2) ergibt sich:

$$x < 0: \quad 0 = -(\lambda + \omega(x))\psi(x) + c\psi'_-(x) + \omega(x) + \lambda \int_0^\infty \psi(x-y)dF_X(y) \quad (4.7)$$

Hierbei bezeichnet $\psi'_-(x)$ die linksseitige Ableitung von $\psi(x)$.

Wir wissen bereits, dass $\psi(x) \forall x \in \mathbb{R}$ stetig ist. Wenn wir (4.4) und (4.6) miteinander vergleichen erhalten wir somit, dass $\psi'(x)$ für alle $x > 0$ existiert. Analog folgt aus dem Vergleich von (4.5) und (4.7), dass $\psi'(x)$ für $x < 0$ existiert, sofern $\omega(x)$ stetig ist. Weiters erhalten wir, wenn wir (4.4) und (4.7) gleich setzen:

$$\begin{aligned}
& -\lambda\psi(x) + \psi'_+(x)c + \lambda \int_0^\infty \psi(x-y)dF_X(y) = \\
& -(\lambda + \omega(x))\psi(x) + c\psi'_-(x) + \omega(x) + \lambda \int_0^\infty \psi(x-y)dF_X(y)
\end{aligned}$$

Durch umformen ergibt sich:

$$\psi'_+(x) - \psi'_-(x) = \frac{1}{c}(\omega(x)(1 - \psi(x)))$$

Schlussendlich folgt mithilfe von (4.3), dass

$$\psi'_+(0) - \psi'_-(0^-) = \frac{1}{c}(\omega(0^-)(1 - \psi(0^-))) \quad (4.8)$$

Wir interessieren uns dafür, wann $\psi'(x)$ in $x = 0$ stetig ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt, dass $\psi'_+(0) = \psi'_-(0^-)$, also entweder wenn $\omega(0^-) = 0$ oder $\psi(0^-) = 1$ ist. Der Fall, dass $\psi(0^-) = 1$ ist, ist für uns nicht von Interesse. Dabei handelt es sich nämlich um die klassische Ruinsituation und es gilt, $\omega(0^-) = \infty$.

Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir $\psi'(x)$ für $x < 0$. Unter der Berücksichtigung, dass wir an den Unstetigkeitsstellen von $\omega(x)$ nur die einseitige Ableitung darunter verstehen.

Wir teilen nun $\psi(x)$ in eine obere („o“) und untere („u“) Funktion, abhängig von x :

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_o(x), & \text{wenn } x \geq 0 \\ \psi_u(x), & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

Das führt uns, für $x \geq 0$, zu:

$$0 = c\psi'_o(x) - \lambda\psi_o(x) + \lambda \left(\int_0^x \psi_o(x-y)dF_X(y) + \int_x^\infty \psi_u(x-y)dF_X(y) \right) \quad (4.9)$$

Und für $x < 0$ erhalten wir:

$$0 = c\psi'_u(x) - (\lambda + \omega(x))\psi_u(x) + \omega(x) + \lambda \int_0^\infty \psi_u(x-y)dF_X(y) \quad (4.10)$$

Wobei gilt $\psi_o(0^+) = \psi_u(0^-)$ und $\psi'_o(0^+) - \psi'_u(0^-) = \frac{1}{c}(\omega(0^-)(1 - \psi_u(0^-)))$.

Der Einfachheit halber nehmen wir für die restliche Arbeit an, dass die Schadenhöhen exponentialverteilt sind mit Parameter ν , also $X \sim Exp(\nu)$.

Nun wenden wir den Operator $(\frac{d}{dx} + \nu)$ auf (4.9) und (4.10) an. Wir erhalten wir für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d}{dx} + \nu\right)(c\psi'_o(x) - \lambda\psi_o(x) + \lambda\left(\int_0^x \psi_o(x-y)\nu e^{-\nu y} dy + \int_x^\infty \psi_u(x-y)\nu e^{-\nu y} dy\right)) \\
&\stackrel{1)}{=} \left(\frac{d}{dx} + \nu\right)(c\psi'_o(x) - \lambda\psi_o(x) + \lambda\left(\int_0^x \psi_o(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz + \int_{-\infty}^0 \psi_u(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz\right)) \\
&= (c\psi''_o(x) - \lambda\psi'_o(x) + \lambda\nu\psi_o(x) + \lambda\left(\int_0^x \psi_o(z)\nu(-\nu)e^{-\nu(x-z)} dz + \int_{-\infty}^0 \psi_u(z)\nu(-\nu)e^{-\nu(x-z)} dz\right)) \\
&\quad + (c\nu\psi'_o(x) - \lambda\nu\psi_o(x) + \lambda\nu\left(\int_0^x \psi_o(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz + \int_{-\infty}^0 \psi_u(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz\right)) \\
&= c\psi''_o(x) - \lambda\psi'_o(x) + c\nu\psi'_o(x)
\end{aligned}$$

- 1) Wir betrachten nun die beiden Integrale $\int_0^x \psi_o(x-y)\nu e^{-\nu y} dy$ und $\int_x^\infty \psi_u(x-y)\nu e^{-\nu y} dy$ genauer. Zunächst substituieren wir $z = x - y$
 $\Rightarrow dz = (-1)dy$ und für die Grenzen der Integrale erhalten wir:

$$\int_0^x = \int_x^0 = -\int_0^x \text{ sowie } \int_x^\infty = \int_0^{-\infty} = -\int_{-\infty}^0.$$

Somit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned}
& -\int_0^x \psi_o(z)\nu e^{-\nu(x-z)}(-1)dz - \int_{-\infty}^0 \psi_u(z)\nu e^{-\nu(x-z)}(-1)dz = \\
& \int_0^x \psi_o(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz + \int_{-\infty}^0 \psi_u(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz
\end{aligned}$$

Für $x < 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{d}{dx} + \nu\right)(c\psi'_u(x) - (\lambda + \omega(x))\psi_u(x) + \omega(x) + \lambda \int_0^\infty \psi_u(x-y)\nu e^{-\nu y} dy) \\
&\stackrel{1)}{=} \left(\frac{d}{dx} + \nu\right)(c\psi'_u(x) - (\lambda + \omega(x))\psi_u(x) + \omega(x) + \lambda \int_{-\infty}^x \psi_u(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz) \\
&= (c\psi''_u(x) - (\lambda + \omega(x))\psi'_u(x) - \omega'(x)\psi_u(x) + \omega'(x) + \lambda\nu\psi_u(x) + \lambda \int_{-\infty}^x \psi_u(z)\nu(-\nu)e^{-\nu(x-z)} dz) \\
&\quad + (c\nu\psi'_u(x) - \nu(\lambda + \omega(x))\psi_u(x) + \nu\omega(x) + \lambda\nu \int_{-\infty}^x \psi_u(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz) \\
&= c\psi''_u(x) - (\lambda + \omega(x))\psi'_u(x) - \omega'(x)\psi_u(x) + \omega'(x) + c\nu\psi'_u(x) - \nu\omega(x)\psi_u(x) + \nu\omega(x)
\end{aligned}$$

1) Wir verwenden dieselbe Substitution wie im Fall $x \geq 0$: $z = x - y$

$\Rightarrow dz = (-1)dy$ und für die Integralsgrenzen erhalten wir

$$\int_0^\infty = \int_x^{-\infty} = -\int_{-\infty}^x.$$

Insgesamt ergibt sich somit:

$$-\left(\int_{-\infty}^x \psi_u(z)\nu e^{-\nu(x-z)}(-1)dz\right) = \int_{-\infty}^x \psi_u(z)\nu e^{-\nu(x-z)} dz$$

Schlussendlich erhalten wir die folgenden linearen Differentialgleichungssysteme:

$$x \geq 0: \quad 0 = c\psi''_o(x) + (\nu c - \lambda)\psi'_o(x) \quad (4.11)$$

$$x < 0: \quad 0 = c\psi''_u(x) + (\nu c - (\lambda + \omega(x)))\psi'_u(x) - (\omega'(x) + \nu\omega(x))\psi_u(x) + \omega'(x) + \nu\omega(x) \quad (4.12)$$

Für $x \geq 0$ haben wir mit (4.11) eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir verwenden zur Lösung den folgenden Ansatz:

$$\psi_o(x) = Ce^{rx}$$

Für die erste und zweite Ableitung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\psi'_o(x) &= Cre^{rx} \\ \psi''_o(x) &= Cr^2e^{rx}\end{aligned}$$

Wenn wir diese Resultate nun in (4.11) einsetzen, ergibt sich:

$$Ce^{rx}(cr^2 + (\nu c - \lambda)r) = 0$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $r^2 + (\nu - \frac{\lambda}{c})r = 0$ ist.

Wir erhalten somit die folgenden zwei Lösungen:

$$\begin{aligned}r_{1,2} &= -\frac{(\nu - \frac{\lambda}{c})}{2} \pm \sqrt{\frac{(\nu - \frac{\lambda}{c})^2}{4}} \\ -r_1 &= -(\nu - \frac{\lambda}{c}), \quad r_2 = 0\end{aligned}$$

Für den Fall, dass es zwei reelle Lösungen $-r_1 \neq r_2$ gibt, ist die Allgemeine Lösung der Differentialgleichung durch

$$Ae^{-r_1x} + Be^{r_2x}$$

gegeben.

Insgesamt erhalten wir somit die folgende Lösung für die homogene lineare Differentialgleichung (4.11):

$$\psi_o(x) = Ae^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x} + B \quad (4.13)$$

Bei $A, B \in \mathbb{R}$ handelt es sich um zwei Konstanten.

Mit der „Net profit condition“ ($\Lambda = \frac{c\nu}{\lambda} - 1 > 0$) folgt, dass $\nu - \frac{\lambda}{c} > 0$ ist. Weiters gilt, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_o(x) = 0$ ist. Dies kann folgenderweise motiviert werden: Wenn wir ein unendlich großes Anfangskapital zur Verfügung haben, ist die Wahrscheinlichkeit eines Konkurses gleich Null.

Verwenden wir diese Tatsachen in (4.13), dann erhalten wir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_o(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} Ae^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x} + B = B = 0 \quad (4.14)$$

Somit folgt, dass $B = 0$ ist.

(4.13) kann mit diesem Resultat vereinfacht geschrieben werden als:

$$\psi_o(x) = Ae^{-(\nu-\frac{\lambda}{c})x} \quad (4.15)$$

Interessant ist, dass sich dies bis auf die Konstante A nicht von der Ruinwahrscheinlichkeit unterscheidet. Für exponentialverteilte Schadenshöhen ist die Ruinwahrscheinlichkeit nämlich durch $\psi_{\text{Ruin}}(x) = \psi_{\text{Ruin}}(0)e^{-Rx} = \frac{1}{1+\Lambda}e^{-Rx}$ gegeben. Somit gilt:

$$\psi_{\text{Ruin}}(x) = \frac{1}{1+\Lambda}e^{-Rx} = \frac{\lambda}{\nu c}e^{-(\nu-\frac{\lambda}{c})x} \quad (4.16)$$

Wobei R mithilfe der Cramér-Lundberg-Gleichung (2.16) bestimmt werden kann.

Nun betrachten wir die inhomogene lineare Differentialgleichung (4.12) genauer.

Allgemein hat eine inhomogene lineare Differentialgleichung die folgende Form:

$$\psi_u''(x) + a\psi_u'(x) + b\psi_u(x) = s$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist gegeben durch:

$$\psi_u(x) = p(x) + h(x)$$

Bei $p(x)$ handelt es sich um die partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und bei $h(x)$ um die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($s = 0$). Es gilt stets:

$$p(x) = \frac{s}{b}$$

Diese Formel verwenden wir nun um die partikuläre Lösung von (4.12) zu bestimmen. Es gilt:

$$p(x) = \frac{-(\omega'(x) + \nu\omega(x))}{-(\omega'(x) + \nu\omega(x))} = 1$$

Somit handelt es sich in unserem Fall bei $\psi_u(x) \equiv 1$ um die partikuläre Lösung von (4.12). Insgesamt erhalten wir eine Lösung der Form:

$$\psi_u(x) = 1 + A_u h(x) \quad (4.17)$$

Dabei bezeichnet A_u eine Konstante und bei $h(x)$ handelt es sich, wie bereits oben erwähnt, um die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung (in unserem Fall: $0 = ch''(x) + (\nu c - (\lambda + \omega(x)))h'(x) - (\omega'(x) + \nu\omega(x))h(x)$). Insbesondere gilt, dass $\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_u(x) = 1$ ist und somit folgt, dass $h(-\infty) = 0$ ist. Dies kann damit begründet werden, dass bei einem unendlich großen negativen Startkapital, die Wahrscheinlichkeit eines Konkurses gleich eins ist.

Die Stetigkeitsbedingungen (4.3) und (4.8) liefern die folgenden Gleichungssysteme:

- $\psi(0^+) = \psi(0^-)$
 - $\psi_o(0) = Ae^{-(\nu - \frac{\lambda}{c}) \cdot 0} = A$
 - $\psi_u(0) = 1 + A_u h(0)$
 - $\Rightarrow A = 1 + A_u h(0)$

- $\psi'_+(0) - \psi'_-(0^-) = \frac{1}{c}(\omega(0^-)(1 - \psi(0^-)))$
 - $\psi'_o(0) = Ae^{-(\nu - \frac{\lambda}{c}) \cdot 0} \cdot (-(\nu - \frac{\lambda}{c})) = -A(\nu - \frac{\lambda}{c})$
 - $\psi'_u(0) = A_u h'(0)$
 - $\Rightarrow -A(\nu - \frac{\lambda}{c}) - A_u h'(0) = \frac{1}{c}(\omega(0^-)(1 - (1 + A_u h(0))))$

Durch zusammenfassen und umformen erhalten wir:

$$-(\nu - \frac{\lambda}{c})A = A_u h'(0) + \frac{1}{c}\omega(0^-)(-A_u h(0))$$

Nun ersetzen wir in der obiger Formel A durch $A = 1 + A_u h(0)$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} -(\nu - \frac{\lambda}{c})(1 + A_u h(0)) &= A_u h'(0) + \frac{1}{c}\omega(0^-)(-A_u h(0)) \\ -(\nu - \frac{\lambda}{c}) &= A_u \left(h'(0) - \frac{1}{c}\omega(0^-)h(0) + (\nu - \frac{\lambda}{c})h(0) \right) \\ A_u &= -\frac{\nu - \frac{\lambda}{c}}{h(0)(\nu - \frac{\lambda}{c} - \frac{\omega(0^-)}{c}) + h'(0)} \end{aligned}$$

Durch einsetzen des obigen Ausdruckes für A_u in $A = 1 + A_u h(0)$ erhalten wir einen entsprechenden Ausdruck für A .

Somit können wir die Konstanten A und A_u als Funktionen von $h(0)$ und $h'(0)$ schreiben:

$$A_u = -\frac{\nu - \frac{\lambda}{c}}{h(0)(\nu - \frac{\lambda}{c} - \frac{\omega(0^-)}{c}) + h'(0)}$$

$$A = 1 - \frac{(\nu - \frac{\lambda}{c})h(0)}{h(0)(\nu - \frac{\lambda}{c} - \frac{\omega(0^-)}{c}) + h'(0)}$$

Durch einsetzen dieser Resultate in (4.15) und (4.17) erhalten wir das folgende Theorem für die Konkurswahrscheinlichkeit:

Theorem 4.1. *Gegeben ist ein zusammengesetzt Poissonverteilter Risikoreserveprozess mit Anfangskapital x , Prämienrate c , Intensität λ sowie exponentialverteilten Schadenhöhen mit Parameter $\nu > 0$. Für eine gegebene Konkursratenfunktion $\omega(x) \geq 0$ für $x < 0$ ist die Wahrscheinlichkeit des Konkurses gegeben durch:*

$$\psi(x) = \begin{cases} \left[1 - \frac{(\nu - \frac{\lambda}{c})h(0)}{h(0)(\nu - \frac{\lambda}{c} - \frac{\omega(0^-)}{c}) + h'(0)} \right] e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 1 - \left[\frac{(\nu - \frac{\lambda}{c})}{h(0)(\nu - \frac{\lambda}{c} - \frac{\omega(0^-)}{c}) + h'(0)} \right] h(x), & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Wobei $h(x)$ die homogene Lösung von (4.12) bezeichnet.

In der obigen Formel für $\psi(x)$ ist ersichtlich, dass die zwei Zweige der Funktion im Punkt $x = 0$ gleich sind. Ebenso bleiben A und A_u unverändert wenn $ch(x)$, für einen konstanten Faktor $c \neq 0$, verwendet wird, anstatt $h(x)$. Zu beachten ist, dass $h(0)$, $h'(0)$ und $\omega(0^-)$ von der Wahl der Konkursratenfunktion abhängen.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir nun einige Beispiele von Konkursratenfunktionen.

4.1 Beispiele von Konkursratenfunktionen

Konstante Konkursratenfunktion

Zunächst beschäftigen wir uns mit konstanten Konkursratenfunktionen. Dabei handelt es sich um die einfachste Wahl von ω .

$$\omega_1(x) = \omega_c \cdot 1_{\{x < 0\}} \text{ mit } \omega_c > 0$$

Typischerweise ist die Konkursratenfunktion eine fallende Funktion, zum Beispiel von ∞ bis 0 für x von $-\infty$ bis 0. Konstante Konkursratenfunktionen werden verwendet, wenn das exakte Verlustlevel in der Praxis nicht transparent ist. Dies könnte beispielsweise aufgrund von mangelnden Informationen, oder wenn der Überschuss nur zu diskreten Zeitpunkten beobachtet werden kann der Fall sein. Wenn man annimmt, dass die Perioden zwischen den Beobachtungszeitpunkten unabhängig und identisch exponentialverteilt sind mit Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$, dann folgt aus der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, dass die Konkursratenfunktion ebenso die Konstante λ ist.

Wir betrachten nun nochmal die inhomogene Differentialgleichung (4.12) aus dem vorigen Abschnitt. Wenn wir die Konkursratenfunktion $\omega_1(x)$ einsetzen, erhalten wir für die homogene Differentialgleichung von $h(x)$:

$$0 = ch''(x) + (\nu c - (\lambda + \omega_1(x)))h'(x) - (\omega_1'(x) + \nu\omega_1(x))h(x), \quad x < 0$$

Da es sich bei $\omega_1(x) = \omega_c$ um eine Konstante handelt verschwinden die Ableitungen und somit erhalten wir:

$$0 = ch''(x) + (\nu c - (\lambda + \omega_c))h'(x) - \nu\omega_c h(x), \quad x < 0 \quad (4.19)$$

Um die Lösung zu finden verwenden wir wieder den folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} h(x) &= Ce^{rx} \\ h'(x) &= Cre^{rx} \\ h''(x) &= Cr^2e^{rx} \end{aligned}$$

Durch einsetzen in (4.19) erhalten wir:

$$Ce^{rx}(cr^2 + (\nu c - (\lambda + \omega_c))r - \nu\omega_c) = 0$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn

$$r^2 + \left(\nu - \frac{(\lambda + \omega_c)}{c} \right) r - \frac{\nu\omega_c}{c} = 0 \quad (4.20)$$

gilt. Weiters wissen wir, dass die Lösung einer homogenen Differentialgleichung von der folgenden Form ist:

$$h(x) = A_1 e^{-Rx} + B_1 e^{\rho x}$$

Wobei es sich bei $-R < 0$ und $\rho > 0$ um die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung (4.20) handelt.

Da $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ ist, folgt, dass $A_1 = 0$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $B_1 = 1$ setzen. Wir erhalten somit die folgende Lösung für die homogene Differentialgleichung (4.19):

$$h(x) = e^{\rho x}$$

Nun betrachten wir die Gleichung für A aus dem vorigen Abschnitt genauer:

$$A = 1 - \frac{(\nu - \frac{\lambda}{c})h(0)}{h(0)(\nu - \frac{\lambda}{c} - \frac{\omega(0^-)}{c}) + h'(0)}$$

Da $h(0) = 1$ und $h'(0) = \rho$ gilt, erhält man schließlich durch einsetzen in obere Gleichung:

$$A = 1 - \frac{\nu - \frac{\lambda}{c}}{(\nu - \frac{\lambda}{c} - \frac{\omega_c}{c}) + \rho} \stackrel{1)}{=} 1 - \frac{\nu - \frac{\lambda}{c}}{R}$$

- 1) Dies folgt, da für eine allgemeine quadratische Gleichung $x^2 + px + q$ gilt, dass $-p = x_1 + x_2$ ist. Hierbei bezeichnen x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung.

In unserem Fall haben wir daher:

$$-\nu + \frac{\lambda}{c} + \frac{\omega_c}{c} = -R + \rho$$

Durch umformen erhält man:

$$R = \nu - \frac{\lambda}{c} - \frac{\omega_c}{c} + \rho$$

Insgesamt erhalten wir für die Konkurswahrscheinlichkeit folgendes Theorem:

Theorem 4.2. *Betrachte einen zusammengesetzt Poissonverteilten Risikoreserveprozess mit Anfangskapital x , Prämienrate c , Intensität λ und exponentialverteilten Schadenhöhen mit Parameter $\nu > 0$. Für eine konstante Konkursratenfunktion $\omega(x) = \omega_c$ für $x < 0$ ist die Wahrscheinlichkeit des Konkurses gegeben durch:*

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{R - (\nu - \frac{\lambda}{c})}{R} e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{R} (\nu - \frac{\lambda}{c}) e^{\rho x}, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Im Einführungskapitel wurde bereits erwähnt, dass für $\omega(x) = \infty$ die Konkurswahrscheinlichkeit mit der Ruinwahrscheinlichkeit übereinstimmt. Lassen wir nun $\omega_c \rightarrow \infty$ gehen, dann folgt, dass $R \rightarrow \nu$ und $\rho \rightarrow \infty$. Wir erhalten, dass (4.21) für $x \geq 0$ gegen die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi_{\text{Ruin}}(x) = \frac{\lambda}{\nu c} e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x}$ konvergiert und für $x < 0$ gegen 1. Somit folgt, dass für $\omega_c \rightarrow \infty$ die Konkurswahrscheinlichkeit mit der Ruinwahrscheinlichkeit übereinstimmt.

Lineare Konkursratenfunktion

Nun betrachten wir lineare Konkursratenfunktionen.

$$\omega_2(x) = -ax \cdot 1_{\{x < 0\}}, \quad a > 0$$

Bei ω_2 handelt es sich um eine der grundlegendsten Formen einer strikt fallenden Konkursratenfunktion. Diese ist noch einfach genug, um eine explizite Lösung der Konkurswahrscheinlichkeit anzugeben. Wir erhalten diesmal für die homogene Differentialgleichung von $h(x)$:

$$0 = ch''(x) + (\nu c - (\lambda - ax))h'(x) + (a + \nu ax)h(x), \quad x < 0 \quad (4.22)$$

Nun wollen wir $h(x) = e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot g(x)$ substituieren. Dazu ermitteln wir zunächst $h'(x)$ und $h''(x)$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot \left(\frac{\lambda - ax}{c} \right) \cdot g(x) + e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} g'(x) \\ &= e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot \left(\frac{\lambda - ax}{c} \cdot g(x) + g'(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot \left(\frac{\lambda - ax}{c} \right) \cdot \left(\frac{\lambda - ax}{c} \right) \cdot g(x) + e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot \left(\frac{-a}{c} \right) \cdot g(x) \\ &\quad + e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot \left(\frac{\lambda - ax}{c} \right) \cdot g'(x) + e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot \left(\frac{\lambda - ax}{c} \right) \cdot g'(x) + e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot g''(x) \\ &= e^{\frac{x(2\lambda - ax)}{2c}} \cdot \left(\left(\frac{\lambda - ax}{c} \right)^2 \cdot g(x) - \frac{a}{c} \cdot g(x) + 2 \cdot \frac{\lambda - ax}{c} \cdot g'(x) + g''(x) \right) \end{aligned}$$

Setzen wir dies nun in die Differentialgleichung (4.22) ein und kürzen den Faktor $e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}}$, so erhalten wir:

$$0 = c \cdot \left(\left(\frac{\lambda - ax}{c} \right)^2 \cdot g(x) - \frac{a}{c} \cdot g(x) + 2 \cdot \frac{\lambda - ax}{c} \cdot g'(x) + g''(x) \right) \\ + (\nu c - (\lambda - ax)) \cdot \left(\frac{\lambda - ax}{c} \cdot g(x) + g'(x) \right) + (a + \nu ax) \cdot g(x)$$

Durch zusammenfassen der $g(x)$, $g'(x)$ und $g''(x)$ ergibt sich:

$$0 = cg''(x) + g'(x) \cdot \left(2c \cdot \frac{\lambda - ax}{c} + (\nu c - (\lambda - ax)) \right) \\ + g(x) \cdot \left(c \cdot \left(\frac{\lambda - ax}{c} \right)^2 - c \cdot \frac{a}{c} + (\nu c - (\lambda - ax)) \cdot \frac{\lambda - ax}{c} + a + \nu ax \right)$$

Schlussendlich erhalten wir die folgende lineare Differentialgleichung für $g(x)$:

$$0 = cg''(x) + (\lambda + c\nu - ax)g'(x) + \lambda\nu g(x)$$

Nun wollen wir ein zweites Mal substituieren, $z = \frac{(-\lambda - c\nu + ax)^2}{2ac}$, sodass $y(z(x)) = g(x)$ ist. Dafür betrachten wir zunächst wieder die Ableitungen von $g(x)$:

$$g(x) = y(z(x))$$

$$g'(x) = \frac{dy}{dz} z'(x) = \frac{dy}{dz} \left(\frac{-\lambda - c\nu + ax}{c} \right)$$

$$g''(x) = \frac{d^2y}{dz^2} z'(x)z'(x) + \frac{dy}{dz} z''(x) = \frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{(-\lambda - c\nu + ax)^2}{c^2} \right) + \frac{dy}{dz} \frac{a}{c}$$

Setzen wir dies nun in die obere Differentialgleichung für $g(x)$ ein, so erhalten wir:

$$0 = c \left(\frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{(-\lambda - c\nu + ax)^2}{c^2} \right) + \frac{dy}{dz} \frac{a}{c} \right) + (\lambda + c\nu - ax) \left(\frac{dy}{dz} \frac{-\lambda - c\nu + ax}{c} \right) + \lambda\nu y \\ = \frac{d^2y}{dz^2} \frac{(-\lambda - c\nu + ax)^2}{c} + \frac{dy}{dz} \left(a - \frac{(-\lambda - c\nu + ax)^2}{c} \right) + \lambda\nu y \quad | \cdot \frac{1}{2a} \\ = \frac{d^2y}{dz^2} \frac{(-\lambda - c\nu + ax)^2}{2ac} + \frac{dy}{dz} \left(\frac{1}{2} - \frac{(-\lambda - c\nu + ax)^2}{2ac} \right) + \frac{\lambda\nu}{2a} y \\ = \frac{d^2y}{dz^2} z + \frac{dy}{dz} \left(\frac{1}{2} - z \right) + \frac{\lambda\nu}{2a} y$$

Somit erhalten wir eine Differentialgleichung von der folgenden Form:

$$0 = z \frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{1}{2} - z \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\lambda \nu}{2a} y$$

Dabei handelt es sich um eine konfluente hypergeometrische Differentialgleichung. Diese haben nämlich die allgemeine Form:

$$zy'' + (\beta - z)y' - \alpha y = 0$$

In unserem Fall gilt $\beta = \frac{1}{2}$ und $\alpha = -\frac{\lambda \nu}{2a}$. Die Lösung der Differentialgleichung ist gemäß [7] durch

$$y(z) = A_2 \cdot M\left(-\frac{\lambda \nu}{2a}, \frac{1}{2}, z\right) + B_2 \cdot U\left(-\frac{\lambda \nu}{2a}, \frac{1}{2}, z\right)$$

gegeben. Mit $A_1, B_2 \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta, z) &= 1 + \frac{\alpha}{1!\beta} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\beta(\beta+1)} z^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\beta+k)} \cdot \frac{z^k}{k!} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\frac{\sin \pi \beta}{\pi} U(\alpha, \beta, z) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\beta)\Gamma(\beta)} M(\alpha, \beta, z) - \frac{z^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\beta)} M(1+\alpha-\beta, 2-\beta, z) \quad (4.24)$$

Wobei $(\alpha)_k = \alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1)$ und $(\alpha)_0 = 1$ gilt.

Weiters ist zu beachten, dass $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ ist.

Bei $M(\alpha, \beta, z)$ und $U(\alpha, \beta, z)$ handelt es sich um die hypergeometrische Funktion der ersten (Kummer Funktion der ersten Art) und zweiten Art (Kummer Funktion).

Dies führt zur folgenden allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (4.22):

$$h(x) = e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot \left[A_2 \cdot M\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right) + B_2 \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right) \right]$$

Wir wollen nun die Konstanten A_2 und B_2 bestimmen. Dafür verwenden wir wieder, dass $h(-\infty) = 0$ ist. Somit müssen wir das Verhalten von $M(\alpha, \beta, z)$ und $U(\alpha, \beta, z)$ für $z \rightarrow \infty$ genauer betrachten.

Ebenfalls aus [7] folgt, dass für $z \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} - M(\alpha, \beta, z) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^z \cdot z^{\alpha-\beta} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \\ - U(\alpha, \beta, z) &= z^{-\alpha} \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \end{aligned}$$

O bezeichnet das asymptotische Verhalten bei Annäherung an den unendlichen Grenzwert. Es wird verwendet, um eine maximale Größenordnung anzugeben. $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ bedeutet, dass der Term nicht wesentlich schneller wächst als $\frac{1}{|z|}$.

Wenn $x \rightarrow -\infty$ geht, dann haben die zwei homogenen Lösungen das folgende asymptotische Verhalten:

$$\begin{aligned} & e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot M\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right) \\ &= e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}\right)} e^{\frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}} \left(\frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right)^{-\frac{\lambda\nu}{2a}-\frac{1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\left|\frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right|}\right)\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}\right)} e^{\frac{\lambda^2+2\lambda c\nu-2c\nu ax+c^2\nu^2}{2ac}} \left(\frac{-\lambda-c\nu+ax}{\sqrt{2ac}}\right)^{-\frac{\lambda\nu}{a}-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\left|\frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right|}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

und

$$\begin{aligned} & e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right) \\ &= e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \left(\frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right)^{\frac{\lambda\nu}{2a}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\left|\frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right|}\right)\right) \\ &= e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \left(\frac{-\lambda-c\nu+ax}{\sqrt{2ac}}\right)^{\frac{\lambda\nu}{a}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\left|\frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac}\right|}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Für $x \rightarrow -\infty$ ist (4.25) unbeschränkt und (4.26) strebt gegen 0. Somit folgt, dass $A_2 = 0$ sein muss. Wir setzen wieder, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $B_2 = 1$. Insgesamt erhalten wir also:

$$h(x) = e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda - c\nu + ax)^2}{2ac}\right)$$

Nun können wir $h(0)$ und $h'(0)$ bestimmen:

$$h(0) = U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda - c\nu)^2}{2ac}\right)$$

Um $h'(x)$ zu bestimmen, betrachten wir zunächst $\frac{d}{dz}M(\alpha, \beta, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}M(\alpha, \beta, z) &= \frac{d}{dz}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \cdot \frac{kz^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \cdot \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)_{k-1}}{\beta(\beta+1)_{k-1}} \cdot \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\alpha}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_{k-1}}{(\beta+1)_{k-1}} \cdot \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} \\ &\stackrel{1)}{=} \frac{\alpha}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k}{(\beta+1)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} \stackrel{2)}{=} \frac{\alpha}{\beta} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k}{(\beta+1)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}\right) \\ &= \frac{\alpha}{\beta} M(\alpha+1, \beta+1, z) \end{aligned}$$

1) Indexverschiebung: ersetze $k = (k+1)$

2) Herausziehen von $k = 0$ aus der Summe (man beachte, dass $(\alpha)_0 = 1$)

Nun betrachten wir $\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin\pi\beta}{\pi}U(\alpha, \beta, z)\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left(\frac{\sin \pi \beta}{\pi} U(\alpha, \beta, z) \right) &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\Gamma(1 + \alpha - \beta)\Gamma(\beta)} M(\alpha, \beta, z) \right. \\
&\quad \left. - \frac{z^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2 - \beta)} M(1 + \alpha - \beta, 2 - \beta, z) \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha - \beta)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot M(\alpha + 1, \beta + 1, z) - \left[\frac{(1 - \beta)z^{-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2 - \beta)} \cdot M(1 + \alpha - \beta, 2 - \beta, z) \right. \\
&\quad \left. + \frac{z^{1-\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2 - \beta)} \cdot \frac{1 + \alpha - \beta}{2 - \beta} \cdot M(2 + \alpha - \beta, 3 - \beta, z) \right] \\
&\stackrel{1)}{=} \frac{\alpha}{\Gamma(1 + \alpha - \beta)\Gamma(\beta + 1)} \cdot M(\alpha + 1, \beta + 1, z) - \frac{\alpha z^{-\beta}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(1 - \beta)(1 - \beta)} \cdot \\
&\quad \left[(1 - \beta) \cdot M(1 + \alpha - \beta, 2 - \beta, z) + z \cdot \frac{1 + \alpha - \beta}{2 - \beta} \cdot M(2 + \alpha - \beta, 3 - \beta, z) \right] \tag{4.27}
\end{aligned}$$

- 1) Verwende, dass $\beta \cdot \Gamma(\beta) = \Gamma(\beta + 1)$ beziehungsweise, dass $\frac{\alpha}{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$ gilt.

Nun betrachten wir den Klammerausdruck genauer:

$$\begin{aligned}
(1 - \beta) \cdot M(1 + \alpha - \beta, 2 - \beta, z) &= (1 - \beta) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \alpha - \beta)_k}{(2 - \beta)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} \\
&= (1 - \beta) \cdot \left[1 + \frac{1 + \alpha - \beta}{2 - \beta} \cdot z + \frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)(3 - \beta)} \cdot \frac{z^2}{2!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)(3 - \beta)(4 - \beta)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z \cdot \frac{1 + \alpha - \beta}{2 - \beta} \cdot M(2 + \alpha - \beta, 3 - \beta, z) &= z \cdot \frac{1 + \alpha - \beta}{2 - \beta} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 + \alpha - \beta)_k}{(3 - \beta)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} \\
&= z \cdot \frac{1 + \alpha - \beta}{2 - \beta} \cdot \left[1 + \frac{2 + \alpha - \beta}{3 - \beta} \cdot z + \frac{(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)}{(3 - \beta)(4 - \beta)} \cdot \frac{z^2}{2!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)(4 + \alpha - \beta)}{(3 - \beta)(4 - \beta)(5 - \beta)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \right] \\
&= \frac{(1 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)} \cdot z + \frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)(3 - \beta)} \cdot z^2 \\
&\quad + \frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)(3 - \beta)(4 - \beta)} \cdot \frac{z^3}{2!} \\
&\quad + \frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)(4 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)(3 - \beta)(4 - \beta)(5 - \beta)} \cdot \frac{z^4}{3!} + \dots
\end{aligned}$$

Dies multiplizieren wir noch mit $\frac{1-\beta}{1-\beta}$, damit wir später die z -Terme der beiden Klammerausdrücke zusammenfassen können.

Somit erhält man:

$$\begin{aligned}
(1 - \beta) \left[\frac{(1 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)} \cdot z + \frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)(3 - \beta)} \cdot z^2 \right. \\
+ \frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)(3 - \beta)(4 - \beta)} \cdot \frac{z^3}{2!} \\
\left. + \frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)(4 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)(3 - \beta)(4 - \beta)(5 - \beta)} \cdot \frac{z^4}{3!} + \dots \right]
\end{aligned}$$

Jetzt fassen wir, wie bereits oben erwähnt, die z -Terme zusammen:

$$\begin{aligned}
& (1 - \beta) \cdot \left[1 + \left(\frac{(1 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)} + \frac{(1 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)} \right) \cdot z \right. \\
& + \left(\frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)(3 - \beta)} + \frac{2(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)(3 - \beta)} \right) \cdot \frac{z^2}{2!} \\
& + \left. \left(\frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)}{(2 - \beta)(3 - \beta)(4 - \beta)} + \frac{3(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)(3 - \beta)(4 - \beta)} \right) \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \right] \\
& = (1 - \beta) \cdot \left[1 + \left(\frac{(1 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)} \cdot \frac{(1 - \beta + 1)}{(2 - \beta)} \right) \cdot z \right. \\
& + \left(\frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)} \cdot \frac{(1 - \beta + 2)}{(3 - \beta)} \right) \cdot \frac{z^2}{2!} \\
& + \left. \left(\frac{(1 + \alpha - \beta)(2 + \alpha - \beta)(3 + \alpha - \beta)}{(1 - \beta)(2 - \beta)(3 - \beta)} \cdot \frac{(1 - \beta + 3)}{(4 - \beta)} \right) \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots \right] \\
& = (1 - \beta) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 + \alpha - \beta)_k}{(1 - \beta)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} = (1 - \beta) \cdot M(1 + \alpha - \beta, 1 - \beta, z)
\end{aligned}$$

Das erhaltene Ergebnis setzen wir nun wieder in (4.27) ein. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \left(\frac{\sin \pi \beta}{\pi} U(\alpha, \beta, z) \right) &= \frac{\alpha}{\Gamma(1 + \alpha - \beta) \Gamma(\beta + 1)} \cdot M(\alpha + 1, \beta + 1, z) \\
&- \frac{\alpha z^{-\beta}}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(1 - \beta) (1 - \beta)} \cdot (1 - \beta) \cdot M(1 + \alpha - \beta, 1 - \beta, z) \\
&= \alpha \left[\frac{1}{\Gamma(1 + \alpha - \beta) \Gamma(\beta + 1)} \cdot M(\alpha + 1, \beta + 1, z) - \frac{z^{-\beta}}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(1 - \beta)} \cdot M(1 + \alpha - \beta, 1 - \beta, z) \right] \\
&= \alpha \cdot \frac{\sin \pi(\beta + 1)}{\pi} U(\alpha + 1, \beta + 1, z)
\end{aligned}$$

Wenn wir nun durch $\frac{\sin \pi \beta}{\pi}$ dividieren, erhalten wir den Faktor $\frac{\sin(\pi(\beta+1))}{\sin(\pi\beta)}$. Dieser entspricht dem Wert -1 .

(Hierbei ist zu beachten, dass im Paper [5] ein falsches Vorzeichen angeführt ist.)

Nun fassen wir die eben gezeigten Resultate zusammen:

$$\frac{d}{dz}M(\alpha, \beta, z) = \frac{\alpha}{\beta}M(\alpha + 1, \beta + 1, z) \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dz}U(\alpha, \beta, z) = -\alpha U(\alpha + 1, \beta + 1, z) \quad (4.29)$$

Mit (4.29) können wir jetzt $h'(x)$ berechnen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{ax}{c} \right) \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac} \right) \\ &\quad + e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot \frac{d}{dx}U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac} \right) \\ &= e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{ax}{c} \right) \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac} \right) \\ &\quad + e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot \frac{-\lambda\nu(\lambda+c\nu-ax)}{2ac} \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a} + 1, \frac{3}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac} \right) \\ \Rightarrow h'(0) &= \frac{\lambda}{c} \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu)^2}{2ac} \right) - \frac{\lambda\nu(\lambda+c\nu)}{2ac} \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a} + 1, \frac{3}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu)^2}{2ac} \right) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir folgendes Theorem:

Theorem 4.3. *Betrachte einen zusammengesetzt Poissonverteilten Risikoreserveprozess mit Anfangskapital x , Prämienrate c , Intensität λ und exponentialverteilten Schadenhöhen mit Parameter $\nu > 0$. Für eine lineare Konkursratenfunktion $\omega(x) = -ax$ für $x < 0$ ist die Wahrscheinlichkeit des Konkurses gegeben durch:*

$$\psi(x) = \begin{cases} \left[\frac{\left(\nu - \frac{\lambda}{c} \right) \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu)^2}{2ac} \right)}{\nu \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu)^2}{2ac} \right) - \frac{\lambda\nu(\lambda+c\nu)}{2ac} \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a} + 1, \frac{3}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu)^2}{2ac} \right)} \right] e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 1 - \frac{\left(\nu - \frac{\lambda}{c} \right) \cdot e^{\frac{x(2\lambda-ax)}{2c}} \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu+ax)^2}{2ac} \right)}{\nu \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a}, \frac{1}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu)^2}{2ac} \right) - \frac{\lambda\nu(\lambda+c\nu)}{2ac} \cdot U\left(-\frac{\lambda\nu}{2a} + 1, \frac{3}{2}, \frac{(-\lambda-c\nu)^2}{2ac} \right)}, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

wobei $U(\cdot)$ gemäß (4.24) definiert ist.

Exponentielle Konkursratenfunktion

Nun betrachten wir exponentielle Konkursratenfunktionen.

$$\omega_3(x) = e^{-ax} \cdot 1_{[x < 0]}, \quad a > 0$$

Die Differentialgleichung von $h(x)$ ist diesmal gegeben durch:

$$0 = ch''(x) + (\nu c - (\lambda + e^{-ax}))h'(x) - e^{-ax}(\nu - a)h(x), \quad x < 0 \quad (4.31)$$

Wir gehen hier ähnlich vor wie im linearen Fall. Zunächst substituieren wir $h(x) = e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot g(x)$ und anschließend substituieren wir $z = \frac{1}{ac} \cdot e^{-ax}$ mit $y(z(x)) = g(x)$.

$$h(x) = e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot g(x)$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(-\frac{e^{-ax}}{ac} \right) \cdot (-a) \cdot g(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot g'(x) \\ &= e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot g(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot g'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot g(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot (-a) \cdot g(x) \\ &\quad + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot g'(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot g'(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot g''(x) \end{aligned}$$

Dies setzen wir nun in die Differentialgleichung (4.31) ein:

$$\begin{aligned} 0 &= c \cdot \left[e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot g(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot (-a) \cdot g(x) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot g'(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot g'(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot g''(x) \right] \\ &\quad + (\nu c - (\lambda + e^{-ax})) \cdot \left[e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-ax}}{c} \right) \cdot g(x) + e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot g'(x) \right] \\ &\quad - e^{-ax}(\nu - a) \cdot \left[e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot g(x) \right] \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt, fassen wir die $g(x)$, $g'(x)$ und $g''(x)$ zusammen:

$$\begin{aligned}
& g(x) \cdot \left[e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(\frac{e^{-2ax}}{c} + e^{-ax} \cdot (-a) + (\nu c - (\lambda + e^{-ax})) \frac{e^{-ax}}{c} - e^{-ax}(\nu - a) \right) \right] \\
&= g(x) \cdot \left[e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \frac{-\lambda e^{-ax}}{c} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& g'(x) \cdot \left[e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(2e^{-ax} + (\nu c - (\lambda + e^{-ax})) \right) \right] \\
&= g'(x) \cdot \left[e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left(e^{-ax} + \nu c - \lambda \right) \right]
\end{aligned}$$

$$g''(x) \cdot e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot c$$

Wenn wir überall den Faktor $e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}}$ kürzen, können wir die Differentialgleichung folgendermaßen schreiben:

$$0 = cg''(x) + g'(x) \left(e^{-ax} + \nu c - \lambda \right) + g(x) \left(\frac{-\lambda e^{-ax}}{c} \right)$$

Nun führen wir die Substitution $z = \frac{e^{-ax}}{ac}$, mit $y(z(x)) = g(x)$, durch.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
g(x) &= y(z(x)) \\
g'(x) &= \frac{dy}{dz} z'(x) = \frac{dy}{dz} \left(\frac{e^{-ax}}{ac} \cdot (-a) \right) = \frac{dy}{dz} \left(-\frac{e^{-ax}}{c} \right) \\
g''(x) &= \frac{d^2y}{dz^2} z'(x) z'(x) + \frac{dy}{dz} z''(x) = \frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{e^{-2ax}}{c^2} \right) + \frac{dy}{dz} \left(-\frac{e^{-ax}}{c} \cdot (-a) \right) \\
&= \frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{e^{-2ax}}{c^2} \right) + \frac{dy}{dz} \left(\frac{ae^{-ax}}{c} \right)
\end{aligned}$$

Durch einsetzen ergibt sich diesmal:

$$0 = c \cdot \left[\frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{e^{-2ax}}{c^2} \right) + \frac{dy}{dz} \left(\frac{ae^{-ax}}{c} \right) \right] + \left(e^{-ax} + \nu c - \lambda \right) \cdot \left[\frac{dy}{dz} \left(-\frac{e^{-ax}}{c} \right) \right] + \left(\frac{-\lambda e^{-ax}}{c} \right) \cdot y$$

Wenn wir nun wieder die $\frac{d^2y}{dz^2}$, $\frac{dy}{dz}$ und y zusammenfassen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{e^{-2ax}}{c} \right) + \frac{dy}{dz} \left(ae^{-ax} - \frac{e^{-2ax}}{c} - \nu e^{-ax} + \frac{\lambda e^{-ax}}{c} \right) + y \left(-\frac{\lambda e^{-ax}}{c} \right) && | \cdot \frac{1}{ae^{-ax}} \\
&= \frac{d^2y}{dz^2} \left(\frac{e^{-ax}}{ac} \right) + \frac{dy}{dz} \left(1 - \frac{e^{-ax}}{ac} - \frac{\nu}{a} + \frac{\lambda}{ac} \right) + y \left(-\frac{\lambda}{ac} \right) \\
&= \frac{d^2y}{dz^2} z + \frac{dy}{dz} \left(\frac{ac + \lambda - \nu c}{ac} - z \right) - y \frac{\lambda}{ac}
\end{aligned}$$

Schlussendlich erhalten wir eine Differentialgleichung folgender Form:

$$0 = z \frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{ac + \lambda - \nu c}{ac} - z \right) \frac{dy}{dz} - \frac{\lambda}{ac} y$$

Dabei handelt es sich wieder um eine konfluente hypergeometrische Differentialgleichung. Deren Lösung ist uns bereits aus dem vorigen Abschnitt bekannt. Es gilt:

$$y(z) = A_3 \cdot M \left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{e^{-ax}}{ac} \right) + B_3 \cdot U \left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{e^{-ax}}{ac} \right) \quad (4.32)$$

Somit erhalten wir die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
h(x) &= e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \left[A_3 \cdot M \left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{e^{-ax}}{ac} \right) \right. \\
&\quad \left. + B_3 \cdot U \left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{e^{-ax}}{ac} \right) \right] \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Mit Konstanten $A_3, B_3 \in \mathbb{R}$.

Wenn wir anstatt $\omega_3(x) = e^{-ax} \cdot 1_{[x < 0]}$ die allgemeinere Konkursratenfunktion $\omega_4(x) = b \cdot e^{-ax} \cdot 1_{[x < 0]}$ gegeben haben, können wir analog vorgehen. Wir müssen nur den Term $\frac{e^{-ax}}{ac}$ in (4.33) durch $\frac{be^{-ax}}{ac}$ ersetzen um die allgemeine Lösung $h(x)$ zu erhalten. Wir nehmen in diesem Abschnitt der Einfachheit halber an, dass $b = 1$ ist.

Um die Konstanten A_3 und B_3 zu bestimmen, verwenden wir wieder, dass $h(-\infty) = 0$ ist. Dafür müssen wir zunächst, analog zum linearen Fall, das asymptotische Verhalten der beiden homogenen Lösungen von (4.33) für $x \rightarrow -\infty$ betrachten.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot M\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{e^{-ax}}{ac}\right) \\
&= e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{ac}\right)} \cdot e^{\frac{e^{-ax}}{ac}} \left(\frac{e^{-ax}}{ac}\right)^{\frac{\lambda}{ac} - \frac{\lambda - \nu c}{ac} - 1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\left|\frac{e^{-ax}}{ac}\right|}\right)\right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{ac}\right)} \left(\frac{e^{-ax}}{ac}\right)^{\frac{\nu}{a} - 1} \left(1 + O\left(\frac{1}{\left|\frac{e^{-ax}}{ac}\right|}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{e^{-ax}}{ac}\right) \\
&= e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \left(\frac{e^{-ax}}{ac}\right)^{-\frac{\lambda}{ac}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\left|\frac{e^{-ax}}{ac}\right|}\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Nun nehmen wir an, dass $\nu > a$ ist. Es gilt nämlich, dass $\mathbb{E}[\omega_3(X)] < \infty$ ist genau dann, wenn $\nu > a$ ist. Somit folgt, dass die erste homogene Lösung für $x \rightarrow -\infty$ unbeschränkt ist, während die zweite gegen 0 strebt.

Mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$ folgt nun, dass $A_3 = 0$ sein muss. Wir setzen wieder, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, $B_3 = 1$. Es folgt für $h(x)$:

$$h(x) = e^{-\frac{e^{-ax}}{ac}} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{e^{-ax}}{ac}\right) \tag{4.36}$$

An der Stelle $x = 0$ erhalten wir für $h(x)$, sowie für die erste Ableitung $h'(x)$, mithilfe der Resultate aus dem vorigen Abschnitt, folgendes:

$$h(0) = e^{-\frac{1}{ac}} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{1}{ac}\right) \tag{4.37}$$

$$h'(0) = e^{-\frac{1}{ac}} \cdot \left[\frac{1}{c} U\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{1}{ac}\right) + \frac{\lambda}{ac^2} U\left(\frac{\lambda}{ac} + 1, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 2, \frac{1}{ac}\right) \right] \tag{4.38}$$

Schlussendlich erhalten wir wieder das folgende Theorem für die Konkurswahrscheinlichkeit:

Theorem 4.4. *Betrachte einen zusammengesetzt Poissonverteilten Risikoreserveprozess mit Anfangskapital x , Prämienrate c , Intensität λ und exponentialverteilten Schadenhöhen mit Parameter $\nu > 0$. Für eine exponentielle*

Konkursratenfunktion $\omega(x) = e^{-ax}$ für $x < 0$ ist die Wahrscheinlichkeit des Konkurses gegeben durch:

$$\psi(x) = \begin{cases} \left[1 - \frac{\binom{\nu - \frac{\lambda}{c}}{\nu - \frac{\lambda}{c}} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{1}{ac}\right)}{\binom{\nu - \frac{\lambda}{c}}{\nu - \frac{\lambda}{c}} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{1}{ac}\right) + \frac{\lambda}{ac^2} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac} + 1, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 2, \frac{1}{ac}\right)} \right] e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ 1 - \frac{\binom{\nu - \frac{\lambda}{c}}{\nu - \frac{\lambda}{c}} \cdot e^{\frac{1}{ac}} \cdot e^{-\frac{ax}{ac}} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{e^{-ax}}{ac}\right)}{\binom{\nu - \frac{\lambda}{c}}{\nu - \frac{\lambda}{c}} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac}, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 1, \frac{1}{ac}\right) + \frac{\lambda}{ac^2} \cdot U\left(\frac{\lambda}{ac} + 1, \frac{\lambda - \nu c}{ac} + 2, \frac{1}{ac}\right)}, & \text{wenn } x < 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

wobei $U(\cdot)$ durch (4.24) gegeben ist.

Stückweise konstante Konkursratenfunktion

Jetzt kommen wir zu stückweisen konstanten Konkursratenfunktionen. Diese sind insoweit interessant, da sie jede gegebene Funktion beliebig nahe von oben und von unten approximieren können. Darüber hinaus reicht es in manchen Situationen aus, nur die Konkursrate gewisser Bereiche des negativen Überschusses zu bestimmen.

Wir definieren ein Gitter auf der negativen x-Achse indem wir unterschiedliche Werte x_i , $0 \leq i \leq n$, mit $-\infty = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = 0$ wählen und setzen

$$\omega(x) = \omega_k \quad \text{für } x_{k-1} < x \leq x_k. \quad (4.40)$$

Wobei wieder gilt, dass $\omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_n \geq 0$ ist.

Nun wollen wir eine Konkursratenfunktion $\omega_0(x)$ approximieren. Dazu erzeugen wir eine untere stückweise konstante Approximation, indem wir $\omega_k = \omega_0(x_k)$ wählen. Ebenso kann $\omega_0(x)$ von oben approximiert werden, indem wir $\omega_k = \omega_0(x_{k-1})$ setzen. Dieses Vorgehen wird in der nachfolgenden Grafik veranschaulicht.

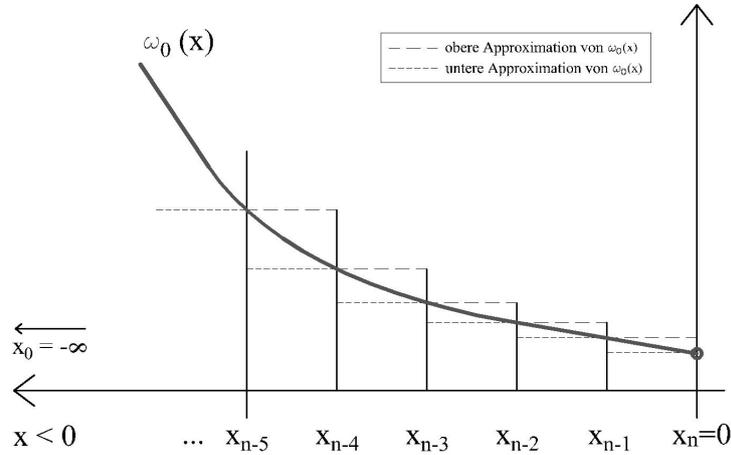


Abbildung 4.1: Obere- und untere Approximation der Konkursratenfunktion

Diese unteren und oberen Approximationen von $\omega_0(x)$ liefern untere und obere Schranken für die Konkurswahrscheinlichkeit.

Mit (4.40) können wir (4.12) in n Differentialgleichungen der Form

$$x_{k-1} < x < x_k : \quad 0 = c\psi_k''(x) + (\nu c - (\lambda + \omega_k))\psi_k'(x) - \nu\omega_k\psi_k(x) + \nu\omega_k$$

umschreiben.

Dabei handelt es sich, wie bereits erwähnt, um eine inhomogene lineare Differentialgleichung. Deren Lösung ist durch die Summe der partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (diese ist in unserem Fall 1, wie wir bereits am Anfang dieses Abschnittes gesehen haben) und der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung (diese ist, ebenfalls aus dem Abschnitt über konstante Konkursratenfunktionen bekannt, gegeben durch $A_k e^{-r_k x} + B_k e^{\rho_k x}$) gegeben.

Somit erhalten wir als Lösung für jede dieser Differentialgleichungen:

$$\psi_k(x) = A_k e^{-r_k x} + B_k e^{\rho_k x} + 1, \quad x_{k-1} < x < x_k \quad (4.41)$$

Hierbei sind $-r_k < 0$ und $\rho_k > 0$ die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$r^2 + \left(\nu - \frac{\lambda + \omega_k}{c} \right) r - \frac{\nu \omega_k}{c} = 0, \quad (4.42)$$

und A_k, B_k sind die zu bestimmenden Konstanten.

(4.41) gilt auch, falls $\omega_k = 0$ ist. Die Lösung von (4.42) ist in diesem Fall durch $-r_k = -(\nu - \frac{\lambda}{c})$ und $\rho_k = 0$ gegeben und wir erhalten für die Konkurswahrscheinlichkeit $\psi_k(x) = B_k + 1$.

Nun kommen wir zu den Bedingungen an die Koeffizienten.

Wie in den vorigen Abschnitten gelten auch hier die folgenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} - \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_0(x) &= A e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x} + B = 0 \\ - \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi_1(x) &= A_1 e^{-r_1 x} + B_1 e^{\rho_1 x} + 1 = 1 \end{aligned}$$

Aus diesen Randbedingungen können wir folgern, dass $B = 0$ und $A_1 = 0$ ist.

Die Stetigkeit der x_k 's führt zu den folgenden Bedingungen:

$$A_k e^{-r_k x_k} + B_k e^{\rho_k x_k} = A_{k+1} e^{-r_{k+1} x_k} + B_{k+1} e^{\rho_{k+1} x_k}, \quad (4.43)$$

für $1 \leq k \leq n - 1$ und

$$A_n + B_n + 1 = A. \quad (4.44)$$

Durch substituieren der allgemeinen Form (4.41) von $\psi_k(x)$ in (4.10) erhalten wir weitere n Bedingungen. Für $x_{k-1} < x < x_k$ und $1 \leq k \leq n$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= c(-r_k A_k e^{-r_k x} + \rho_k B_k e^{\rho_k x}) - (\lambda + \omega_k)(A_k e^{-r_k x} + B_k e^{\rho_k x} + 1) \\ &+ \omega_k + \lambda \int_0^{x-x_{k-1}} (A_k e^{-r_k(x-y)} + B_k e^{\rho_k(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy \\ &+ \lambda \sum_{j=1}^{k-1} \int_{x-x_{k-j}}^{x-x_{k-j-1}} (A_{k-j} e^{-r_{k-j}(x-y)} + B_{k-j} e^{\rho_{k-j}(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy \quad (4.45) \end{aligned}$$

Durch ausmultiplizieren und umformen der ersten beiden Terme ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= A_k e^{-r_k x} \left(-c r_k - (\lambda + \omega_k) + \frac{\lambda \nu}{\nu - r_k} \right) - A_k e^{-r_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu - r_k} \\
&+ B_k e^{\rho_k x} \left(c \rho_k - (\lambda + \omega_k) + \frac{\lambda \nu}{\nu + \rho_k} \right) - B_k e^{\rho_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu + \rho_k} - (\lambda + \omega_k) + \omega_k \\
&+ \lambda \int_0^{x-x_{k-1}} (A_k e^{-r_k(x-y)} + B_k e^{\rho_k(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^{k-1} \int_{x-x_{k-j}}^{x-x_{k-j-1}} (A_{k-j} e^{-r_{k-j}(x-y)} + B_{k-j} e^{\rho_{k-j}(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die folgenden beiden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
-c r_k - (\lambda + \omega_k) + \frac{\lambda \nu}{\nu - r_k} &= 0 \\
c \rho_k - (\lambda + \omega_k) + \frac{\lambda \nu}{\nu + \rho_k} &= 0
\end{aligned}$$

Diese erhalten wir, wenn wir in (4.42) die beiden Lösungen einsetzen und umformen:

$$\begin{aligned}
0 &= (-r_k)^2 + \left(\nu - \frac{\lambda + \omega_k}{c} \right) (-r_k) - \frac{\nu \omega_k}{c} \quad | \cdot c \\
&= c(-r_k)^2 + \left(c\nu - (\lambda + \omega_k) \right) (-r_k) - \nu \omega_k \\
&= -c r_k (\nu - r_k) + (\lambda + \omega_k) r_k - \nu \omega_k + \lambda \nu - \lambda \nu \\
&= -c r_k (\nu - r_k) + (\lambda + \omega_k) r_k - (\lambda + \omega_k) \nu + \lambda \nu \\
&= -c r_k (\nu - r_k) - (\lambda + \omega_k) (\nu - r_k) + \lambda \nu \quad | : (\nu - r_k) \\
&= -c r_k - (\lambda + \omega_k) + \frac{\lambda \nu}{\nu - r_k}
\end{aligned}$$

Durch analoges vorgehen mit ρ_k anstelle von $-r_k$ erhalten wir die zweite Aussage.

Wir erhalten, wenn wir diese beiden Eigenschaften verwenden:

$$\begin{aligned}
0 &= -A_k e^{-r_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu - r_k} - B_k e^{\rho_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu + \rho_k} - \lambda \\
&+ \lambda \int_0^{x-x_{k-1}} (A_k e^{-r_k(x-y)} + B_k e^{\rho_k(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy \\
&+ \lambda \sum_{j=1}^{k-1} \int_{x-x_{k-j}}^{x-x_{k-j-1}} (A_{k-j} e^{-r_{k-j}(x-y)} + B_{k-j} e^{\rho_{k-j}(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir die beiden Integrale genauer:

$$\begin{aligned}
&\lambda \int_0^{x-x_{k-1}} (A_k e^{-r_k(x-y)} + B_k e^{\rho_k(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy = \\
&\lambda \nu \left(\frac{A_k e^{-r_k x + r_k y - \nu y}}{r_k - \nu} + \frac{B_k e^{\rho_k x - \rho_k y - \nu y}}{-\rho_k - \nu} + \frac{e^{-\nu y}}{-\nu} \right) \Big|_0^{x-x_{k-1}} = \\
&\lambda \nu \left(\frac{A_k e^{-r_k x_{k-1} - \nu x + \nu x_{k-1}}}{r_k - \nu} + \frac{B_k e^{\rho_k x_{k-1} - \nu x + \nu x_{k-1}}}{-\rho_k - \nu} + \frac{e^{-\nu x + \nu x_{k-1}}}{-\nu} - \left[\frac{A_k e^{-r_k x}}{r_k - \nu} + \frac{B_k e^{\rho_k x}}{-\rho_k - \nu} + \frac{1}{-\nu} \right] \right) = \\
&\lambda \nu \left(\frac{A_k e^{-r_k x_{k-1} - \nu x + \nu x_{k-1}}}{r_k - \nu} + \frac{B_k e^{\rho_k x_{k-1} - \nu x + \nu x_{k-1}}}{-\rho_k - \nu} + \frac{e^{-\nu x + \nu x_{k-1}}}{-\nu} \right) \\
&+ A_k e^{-r_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu - r_k} + B_k e^{\rho_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu + \rho_k} + \lambda
\end{aligned}$$

Durch analoges Vorgehen bei dem zweiten Integral erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\lambda \sum_{j=1}^{k-1} \int_{x-x_{k-j}}^{x-x_{k-j-1}} (A_{k-j} e^{-r_{k-j}(x-y)} + B_{k-j} e^{\rho_{k-j}(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy = \\
&\lambda \nu \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_{k-j} e^{-r_{k-j} x_{k-j-1} - \nu x + \nu x_{k-j-1}}}{r_{k-j} - \nu} + \frac{B_{k-j} e^{\rho_{k-j} x_{k-j-1} - \nu x + \nu x_{k-j-1}}}{-\rho_{k-j} - \nu} + \frac{e^{-\nu x + \nu x_{k-j-1}}}{-\nu} \right. \\
&\left. + \frac{A_{k-j} e^{-r_{k-j} x_{k-j} - \nu x + \nu x_{k-j}}}{\nu - r_{k-j}} + \frac{B_{k-j} e^{\rho_{k-j} x_{k-j} - \nu x + \nu x_{k-j}}}{\nu + \rho_{k-j}} + \frac{e^{-\nu x + \nu x_{k-j}}}{\nu} \right)
\end{aligned}$$

Diese Resultate setzen wir nun in (4.46) ein:

$$\begin{aligned}
0 &= -A_k e^{-r_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu - r_k} - B_k e^{\rho_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu + \rho_k} - \lambda \\
&+ \lambda \nu \left(\frac{A_k e^{-r_k x_{k-1} - \nu x + \nu x_{k-1}}}{r_k - \nu} + \frac{B_k e^{\rho_k x_{k-1} - \nu x + \nu x_{k-1}}}{-\rho_k - \nu} + \frac{e^{-\nu x + \nu x_{k-1}}}{-\nu} \right) \\
&+ A_k e^{-r_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu - r_k} + B_k e^{\rho_k x} \frac{\lambda \nu}{\nu + \rho_k} + \lambda \\
&+ \lambda \nu \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_{k-j} e^{-r_{k-j} x_{k-j-1} - \nu x + \nu x_{k-j-1}}}{r_{k-j} - \nu} + \frac{B_{k-j} e^{\rho_{k-j} x_{k-j-1} - \nu x + \nu x_{k-j-1}}}{-\rho_{k-j} - \nu} + \frac{e^{-\nu x + \nu x_{k-j-1}}}{-\nu} \right. \\
&\left. + \frac{A_{k-j} e^{-r_{k-j} x_{k-j} - \nu x + \nu x_{k-j}}}{\nu - r_{k-j}} + \frac{B_{k-j} e^{\rho_{k-j} x_{k-j} - \nu x + \nu x_{k-j}}}{\nu + \rho_{k-j}} + \frac{e^{-\nu x + \nu x_{k-j}}}{\nu} \right)
\end{aligned}$$

Durch zusammenfassen und umformen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda \nu e^{-\nu x} \left[-\frac{A_k}{\nu - r_k} e^{x_{k-1}(\nu - r_k)} - \frac{B_k}{\nu + \rho_k} e^{x_{k-1}(\nu + \rho_k)} - \frac{1}{\nu} e^{x_{k-1}\nu} \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{A_j}{\nu - r_j} (-e^{x_{j-1}(\nu - r_j)} + e^{x_j(\nu - r_j)}) + \frac{B_j}{\nu + \rho_j} (-e^{x_{j-1}(\nu + \rho_j)} + e^{x_j(\nu + \rho_j)}) + \frac{1}{\nu} (-e^{x_{j-1}\nu} + e^{x_j\nu}) \right) \right]
\end{aligned}$$

Schlussendlich erhalten wir, wenn wir den Term $j = 1$ aus der Summe herausziehen, und berücksichtigen, dass $A_1 = 0$ ist:

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda \nu e^{-\nu x} \left[-\frac{A_k}{\nu - r_k} e^{x_{k-1}(\nu - r_k)} - \frac{B_k}{\nu + \rho_k} e^{x_{k-1}(\nu + \rho_k)} - \frac{1}{\nu} e^{x_{k-1}\nu} \right. \\
&+ \sum_{j=2}^{k-1} \left(\frac{A_j}{\nu - r_j} (-e^{x_{j-1}(\nu - r_j)} + e^{x_j(\nu - r_j)}) + \frac{B_j}{\nu + \rho_j} (-e^{x_{j-1}(\nu + \rho_j)} + e^{x_j(\nu + \rho_j)}) \right. \\
&\left. \left. + \frac{1}{\nu} (-e^{x_{j-1}\nu} + e^{x_j\nu}) \right) + \frac{B_1}{\nu + \rho_1} e^{x_1(\nu + \rho_1)} + \frac{1}{\nu} e^{x_1\nu} \right], \quad 2 \leq k \leq n
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Für $x \geq 0$ ist die Konkurswahrscheinlichkeit durch $\psi(x) = A e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x}$ gegeben. Wir erhalten das folgende Resultat wenn wir dies in die Differentialgleichung (4.9) für $x \geq 0$ und mit $-r = -(\nu - \frac{\lambda}{c})$ einsetzen.

$$\begin{aligned}
0 &= -c \left(\nu - \frac{\lambda}{c} \right) A e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x} - \lambda A e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x} + \lambda \left[\int_0^x A e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})(x-y)} \nu e^{-\nu y} dy \right. \\
&\quad + \int_x^{x-x_{n-1}} (A_n e^{-r_n(x-y)} + B_n e^{\rho_n(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{x-x_{n-j}}^{x-x_{n-j-1}} (A_{n-j} e^{-r_{n-j}(x-y)} + B_{n-j} e^{\rho_{n-j}(x-y)} + 1) \nu e^{-\nu y} dy \right] \\
&\stackrel{1)}{=} -c \nu A e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x} + \nu \lambda \left[\left(\frac{A e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})(x-y) - \nu y}}{\nu - \frac{\lambda}{c} - \nu} \right) \Big|_0^x \right. \\
&\quad + \left(\frac{A_n e^{-r_n(x-y) - \nu y}}{r_n - \nu} + \frac{B_n e^{\rho_n(x-y) - \nu y}}{-\rho_n - \nu} + \frac{e^{-\nu y}}{-\nu} \right) \Big|_x^{x-x_{n-1}} \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{A_{n-j} e^{-r_{n-j}(x-y) - \nu y}}{r_{n-j} - \nu} + \frac{B_{n-j} e^{\rho_{n-j}(x-y) - \nu y}}{-\rho_{n-j} - \nu} + \frac{e^{-\nu y}}{-\nu} \right) \Big|_{x-x_{n-j}}^{x-x_{n-j-1}} \right] \\
&= \lambda \nu e^{-\nu x} \left[\frac{-A}{\nu - r} + \frac{A_n}{\nu - r_n} \left(1 - e^{x_{n-1}(\nu - r_n)} \right) + \frac{B_n}{\nu + \rho_n} \left(1 - e^{x_{n-1}(\nu + \rho_n)} \right) + \frac{1}{\nu} \left(1 - e^{x_{n-1}\nu} \right) \right. \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{A_j}{\nu - r_j} \left(-e^{x_{j-1}(\nu - r_j)} + e^{x_j(\nu - r_j)} \right) + \frac{B_j}{\nu + \rho_j} \left(-e^{x_{j-1}(\nu + \rho_j)} + e^{x_j(\nu + \rho_j)} \right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{\nu} \left(-e^{x_{j-1}\nu} + e^{x_j\nu} \right) \right] \\
&= \lambda \nu e^{-\nu x} \left[-\frac{A}{\nu - r} + \frac{A_n}{\nu - r_n} \left(1 - e^{x_{n-1}(\nu - r_n)} \right) + \frac{B_n}{\nu + \rho_n} \left(1 - e^{x_{n-1}(\nu + \rho_n)} \right) + \frac{1}{\nu} \left(1 - e^{x_{n-1}\nu} \right) \right. \\
&\quad + \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{A_j}{\nu - r_j} \left(-e^{x_{j-1}(\nu - r_j)} + e^{x_j(\nu - r_j)} \right) + \frac{B_j}{\nu + \rho_j} \left(-e^{x_{j-1}(\nu + \rho_j)} + e^{x_j(\nu + \rho_j)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{\nu} \left(-e^{x_{j-1}\nu} + e^{x_j\nu} \right) \right) + \frac{B_1}{\nu + \rho_1} e^{x_1(\nu + \rho_1)} + \frac{1}{\nu} e^{x_1\nu} \right] \tag{4.48}
\end{aligned}$$

1) Hierbei ist zu beachten, dass gilt:

$$\lambda \nu e^{-\nu x} \cdot \frac{-A}{\nu - r} = \lambda \nu e^{-\nu x} \cdot \frac{-A}{\nu - (\nu - \frac{\lambda}{c})} = -\nu c A e^{-\nu x}$$

Unter Berücksichtigung, dass $\lambda e^{-\nu x} > 0$, kann man die Bedingungen (4.47) und (4.48) folgendermaßen vereinfachen:

$$A_k \frac{e^{-r_k x_k}}{\nu - r_k} + B_k \frac{e^{\rho_k x_k}}{\nu + \rho_k} - A_{k+1} \frac{e^{-r_{k+1} x_k}}{\nu - r_{k+1}} - B_{k+1} \frac{e^{\rho_{k+1} x_k}}{\nu + \rho_{k+1}} = 0 \quad (4.49)$$

und

$$A_n \frac{1}{\nu - r_n} + B_n \frac{1}{\nu + \rho_n} - A \frac{1}{\nu - r} = -\frac{1}{\nu} \quad (4.50)$$

Diese Resultate zeigt man mittels vollständiger Induktion. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass sich die $\frac{1}{\nu} e^{(\cdot)}$ sowohl in (4.47) als auch in (4.48) weg kürzen. In (4.48) bleibt lediglich der Term $\frac{1}{\nu}$ über.

Unser Ziel ist es, die Parameter B_1, A_k, B_k, A , mit $2 \leq k \leq n$, zu bestimmen. Dafür fassen wir die Bedingungen (4.43), (4.44), (4.49) und (4.50) zu einem linearen Gleichungssystem der Form

$$U \cdot z = v \quad (4.51)$$

zusammen.

Hierbei ist

$$z' = [B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n, A]$$

und die Matrix U hat die Dimension $2n \times 2n$. Sie ist dünnbesetzt um die Hauptdiagonale und gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} e^{x_1 \rho_1} & -e^{-x_1 r_2} & -e^{x_1 \rho_2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{e^{x_1 \rho_1}}{\nu + \rho_1} & -\frac{e^{-x_1 r_2}}{\nu - r_2} & -\frac{e^{x_1 \rho_2}}{\nu + \rho_2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{-x_2 r_2} & e^{x_2 \rho_2} & -e^{-x_2 r_3} & -e^{x_2 \rho_3} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{e^{-x_2 r_2}}{\nu - r_2} & \frac{e^{x_2 \rho_2}}{\nu + \rho_2} & -\frac{e^{-x_2 r_3}}{\nu - r_3} & -\frac{e^{x_2 \rho_3}}{\nu + \rho_3} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{\nu - r_n} & \frac{1}{\nu + \rho_n} & -\frac{1}{\nu - r} \end{pmatrix}$$

Weiters ist

$$v' = \left[0, 0, 0, \dots, -1, -\frac{1}{\nu} \right]$$

Für $x \geq 0$ kann die Konkurswahrscheinlichkeit geschrieben werden als:

$$\psi(x) = (U^{-1}v)_{2n} e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x} \quad (4.52)$$

Der Index bezeichnet die $2n$ -te Komponente des Vektors.

Kapitel 5

Veranschaulichende Berechnung der Konkurswahrscheinlichkeit

Das folgende Kapitel ist, wenn nicht näher gekennzeichnet, folgenden Quellen entnommen: [5] Seite 228-236 und [8]

In diesem Abschnitt wollen wir nun die Berechnung von $\psi(x)$ für konstante $\omega_1(x) = \omega_c$, lineare $\omega_2(x) = -ax$ und exponentielle Konkursratenfunktionen $\omega_3(x) = e^{-ax}$, für mehrere Parameterwerte $a > 0$, veranschaulichen. Die erhaltenen Ergebnisse werden anschließend mit den Werten der klassischen Ruinwahrscheinlichkeit $\psi_{\text{Ruin}}(x)$ verglichen.

Hierbei sei nochmal erwähnt, dass wir annehmen, dass die Schadenhöhen exponentialverteilt sind mit Parameter ν , also $X \sim \text{Exp}(\nu)$. Somit gilt für die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi_{\text{Ruin}}(x) = \frac{\lambda}{\nu c} e^{-(\nu - \frac{\lambda}{c})x}$.

Die Grafiken basieren auf den folgenden Parametern:

- $\lambda = 5.000$
- $\nu = 1$
- $c = 6.000$

Dies könnte beispielsweise einem Portfolio mit etwa 100.000 unabhängigen Polizzen entsprechen. Wobei jede eine Schadenswahrscheinlichkeit von $q = 5\%$ pro Zeiteinheit aufweist und eine erwartete Schadenhöhe von $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\nu} = 1$. Weiters gilt für den Sicherheitszuschlag $\Lambda = 20\%$. Somit erhalten wir für die Prämie c :

$$c = (1 + \Lambda) \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{N(1)} X_i \right] = 1,2 \cdot 5.000 = 6.000$$

Die erste Grafik spiegelt die Konkurswahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung konstanter Konkursratenfunktionen $\omega_c \in \{50; 100; 500\}$ wieder. Diese Grafik erhalten wir durch die explizite Auswertung der Formel (4.21) für die Konkurswahrscheinlichkeit. Zu Vergleichszwecken wurde sowohl hier, als auch im linearen und exponentiellen Fall, die Ruinwahrscheinlichkeit, dabei handelt es sich um die dicke schwarze Linie, zusätzlich dargestellt.

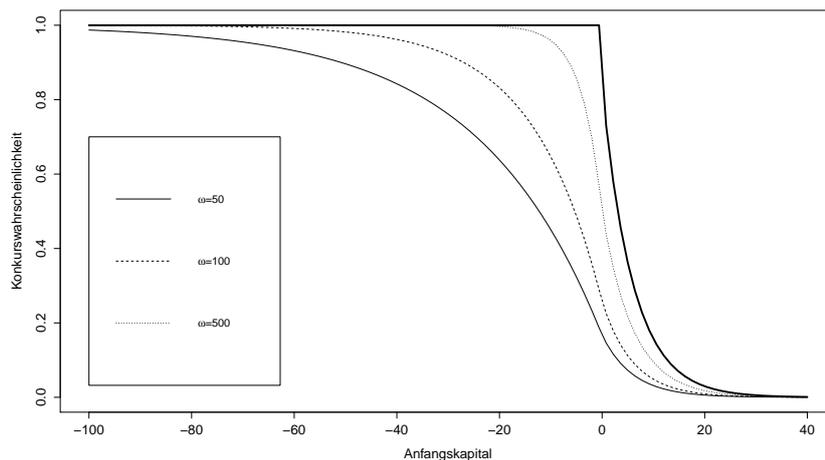


Abbildung 5.1: Konkurswahrscheinlichkeit bei konstanter Konkursratenfunktion $\omega_1(x) = \omega_c$

Bei den beiden nachfolgenden Abbildungen handelt es sich um die Konkurswahrscheinlichkeit unter Berücksichtigung linearer- beziehungsweise exponentieller Konkursratenfunktionen. Im linearen Fall betrachten wir $\psi(x)$ für $a_{\text{lin}} \in \{50, 100, 500\}$ und im exponentiellen Fall für $a_{\text{exp}} \in \{0, 2; 0, 3; 0, 4\}$. Diese Grafiken erhalten wir durch die explizite Auswertung der Formel (4.30) sowie (4.39) für die Konkurswahrscheinlichkeit.

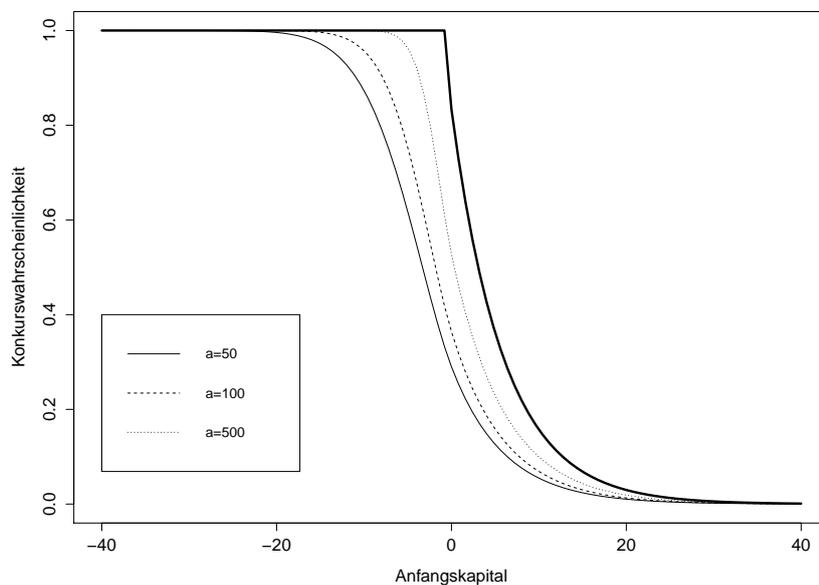


Abbildung 5.2: Konkurswahrscheinlichkeit bei linearer Konkursratenfunktion $\omega_2(x) = -ax$ mit unterschiedlichen Parameterwerten a

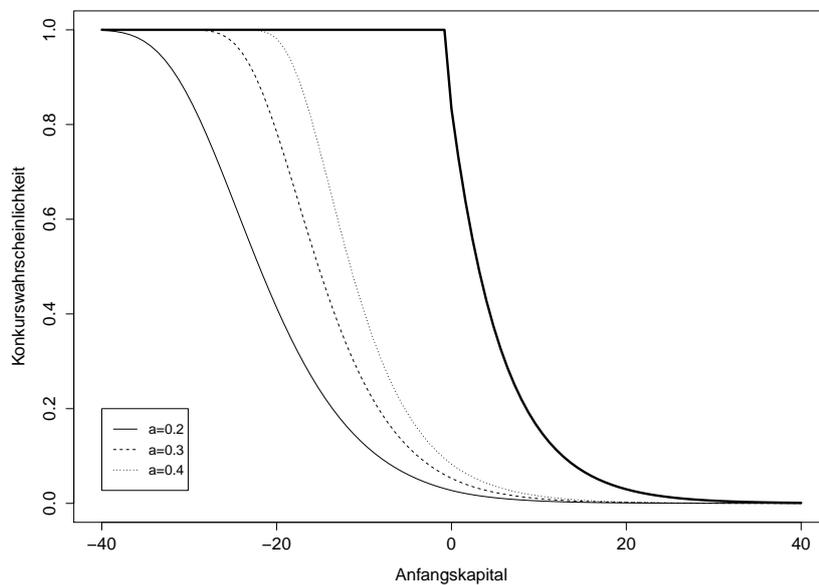


Abbildung 5.3: Konkurswahrscheinlichkeit bei exponentieller Konkursratenfunktion $\omega_3(x) = e^{-ax}$ mit unterschiedlichen Parameterwerten a

Wie erwartet zeigen die Grafiken glatte Kurven. Vergleicht man diese mit dem Graphen der klassischen Ruinwahrscheinlichkeit, erkennt man, dass die

Graphen der Konkurswahrscheinlichkeit umso mehr nach rechts “gezogen“ werden, desto größer a wird.

Die explizite Auswertung der Konkurswahrscheinlichkeit wollen wir nun mit jenen Graphen vergleichen, die wir erhalten, wenn wir die stückweise konstante Approximation der jeweiligen Konkursratenfunktion betrachten.

5.1 Stückweise konstante Approximation der Konkursratenfunktion

Die Konkurswahrscheinlichkeit für ein gegebenes Anfangskapital erhält man durch lösen des linearen Gleichungssystems (4.51).

Wie bereits im letzten Kapitel erwähnt, handelt es sich bei U um eine um die Hauptdiagonale dünnbesetzte Matrix. Wir können somit das Gauss-Seidel-Verfahren anwenden um zufriedenstellende Ergebnisse zu erhalten. Bei dem Gauss-Seidel-Verfahren handelt es sich um einen Algorithmus zur näherungsweisen Lösung von linearen Gleichungssystemen. Bei diesen Verfahren reduziert sich der Aufwand pro Iteration bei dünnbesetzten Matrizen wesentlich. Dieses Verfahren werden wir nun kurz erläutern:

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem in n Variablen mit den folgenden n Gleichungen:

$$\begin{aligned} u_{11} \cdot z_1 + \dots + u_{1n} \cdot z_n &= v_1 \\ u_{21} \cdot z_1 + \dots + u_{2n} \cdot z_n &= v_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u_{n1} \cdot z_1 + \dots + u_{nn} \cdot z_n &= v_n \end{aligned}$$

Um diese zu lösen, führen wir nun ein Iterationsverfahren durch. Hierfür sei $z^{(m)}$ ein Näherungsvektor an die exakte Lösung. Zunächst löst man die k -te Gleichung nach der k -ten Variable z_k auf. Hierbei ist zu beachten, dass die vorher berechneten Werte im aktuellen Iterationsschritt ebenfalls benötigt werden. Meistens wird als Startwert $z_k^{(0)} = 0$ verwendet. Somit erhält man für den $(m+1)$ -ten Iterationsschritt folgendes:

$$z_k^{(m+1)} = \frac{1}{u_{kk}} \left(v_k - \sum_{i=1}^{k-1} u_{ki} z_i^{(m+1)} - \sum_{i=k+1}^n u_{ki} z_i^{(m)} \right) \quad (5.1)$$

Bei $z^{(m+1)}$ handelt es sich um einen neuen Näherungsvektor für den Lösungsvektor z . Somit erhält man, wenn man diesen Vorgang wiederholt, eine Folge von Werten die sich z immer mehr annähern. Es gilt $z^{(m)} \rightarrow z$ für $m \rightarrow \infty$.

Man kann das Gauss-Seidel-Verfahren ebenfalls in Matrixschreibweise folgenderweise notieren:

Dazu sei $U = L + D + R$. Hierbei handelt es sich bei D um eine Diagonalmatrix, bei L um eine strikte untere Dreiecksmatrix und bei R um eine strikte obere Dreiecksmatrix. Für den Iterationsschritt erhält man:

$$Dz^{(\text{neu})} = v - Lz^{(\text{neu})} - Rz^{(\text{alt})}$$

Durch umformen ergibt sich:

$$(D + L)z^{(\text{neu})} = v - Rz^{(\text{alt})} \quad \Rightarrow \quad z^{(\text{neu})} = (D + L)^{-1}(v - Rz^{(\text{alt})})$$

Durch die Festlegung eines Startvektors $z^{(0)}$ erhält man für den Iterationsschritt folgendes:

$$z^{(m+1)} = -(D + L)^{-1}Rz^{(m)} + (D + L)^{-1}v \tag{5.2}$$

Interessant ist, dass das Gauss-Seidel-Verfahren konvergiert, wenn der Spektralradius $-(D + L)^{-1}R$ kleiner als 1 ist.

Der Algorithmus wird beendet, sobald für $z^{(m+1)}$ gilt, dass $\|z^{(m+1)} - z^{(m)}\|_{\max} < \epsilon$ ist.

In unserem Fall gilt $\epsilon = 10^{-10}$, um zufriedenstellende Ergebnisse zu erhalten. Das Gitter x_1, x_2, \dots, x_n ist abstandstreu, sodass die Qualität der Approximation hauptsächlich von der Wahl von x_1 und der Anzahl n der Gitter abhängt.

Wir erhalten somit für die lineare Konkursratenfunktion folgende Grafiken:

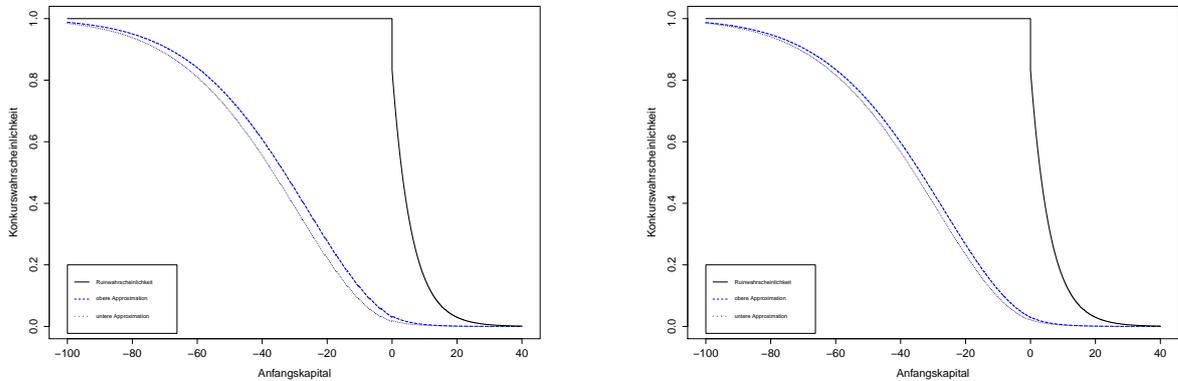


Abbildung 5.4: Approximation der linearen Konkursratenfunktion für $x_1 = -100, a = 1, n = 30$ bzw. $n = 50$

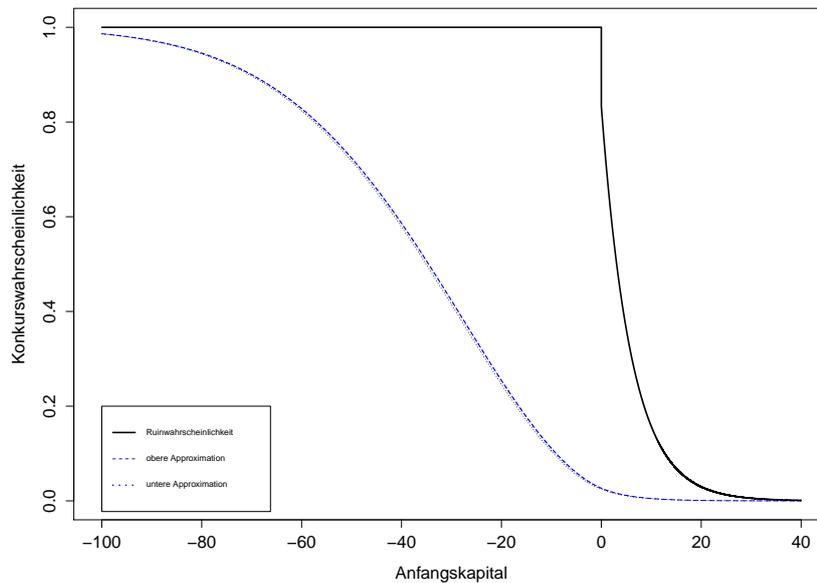


Abbildung 5.5: Approximation der linearen Konkursratenfunktion für $x_1 = -100, a = 1$ und $n = 200$

Diese Grafiken spiegeln die obere und untere Approximation der linearen Konkursratenfunktion $\omega_2(x) = -ax$ wieder. Wobei in unserem Fall $a = 1$ und $x_1 = -100$ gesetzt wurde. Die gestrichelte Linie stellt jene Konkurswahrscheinlichkeit dar, die sich mithilfe der oberen Approximation der Konkursratenfunktion $\omega_2(x)$ ergibt. Also jenen Fall, wo $\omega_2(x) = \omega_2(x_i)$ für $x_i \leq x < x_{i+1}$ gilt. Die gepunktete Linie spiegelt

hingegen die Konkurswahrscheinlichkeit wieder, die sich mithilfe der unteren Approximation der Konkursratenfunktion ergibt, also $\omega_2(x) = \omega_2(x_i)$ für $x_{i-1} \leq x < x_i$. Die durchgezogene Linie zeigt die klassische Ruinwahrscheinlichkeit und dient als Richtwert. Wie erwartet, wird die obere und untere Schranke umso genauer, je dichter die Abstände des Gitters werden.

Die nächste Grafik zeigt die Approximation für den Fall $x_1 = -40, n = 200$ und $a = 100$. Diese wird dann in den darauf folgenden Abbildungen mit der expliziten Lösung verglichen. Zur Veranschaulichung wurde hier auch der Vergleich für $n = 50$ grafisch dargestellt.

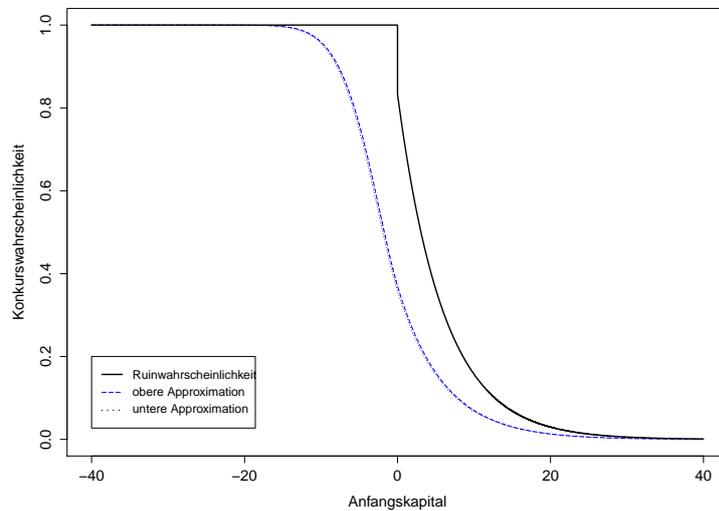


Abbildung 5.6: Approximation der linearen Konkursratenfunktion für $x_1 = -40, a = 100$ und $n = 200$

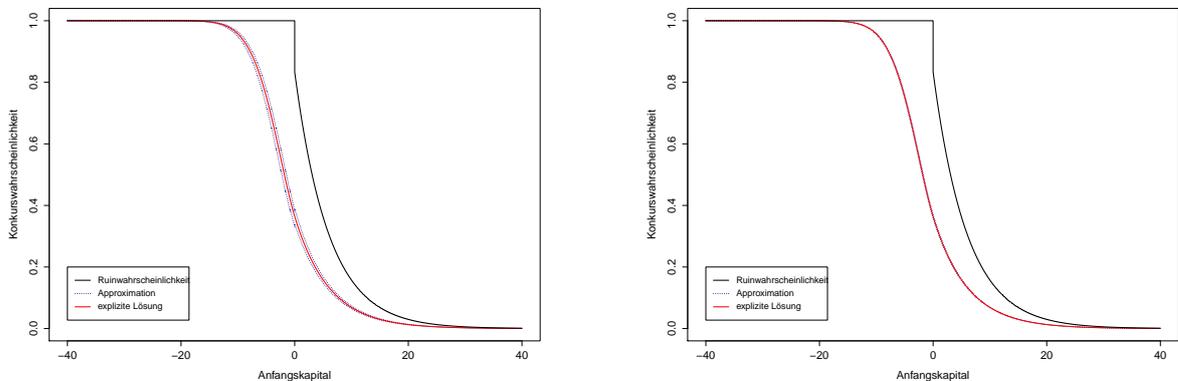


Abbildung 5.7: Vergleich der Approximation mit der exakten Lösung für $a = 100$ und $n = 50$ bzw. $n = 200$

In diesen Grafiken erkennt man sehr gut, dass die Approximation für $n = 200$ bereits mit der expliziten Lösung übereinstimmt.

Die untenstehende Tabelle beschreibt den Einfluss von x_1 auf die obere und untere Approximation des Koeffizienten A in $\psi_o(x) = Ae^{-(\nu-\frac{\lambda}{c})x}$, $x > 0$. Zu beachten ist, dass die Wahl von x_1 , für $x_1 = -40$ und kleiner, auf die obere beziehungsweise untere Approximation von A nur sehr geringe Auswirkungen hat. Die Werte in der Tabelle entsprechen der Approximation von A für $a = 1$.

x_1	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70
n	20	40	60	80	100	120	140
Obere Approx. von A	0,1189	0,03964	0,02824	0,02684	0,02669	0,02667	0,02667
Untere Approx. von A	0,02123	0,02412	0,02447	0,02451	0,02452	0,02452	0,02452

Tabelle 5.1: Einfluss von x_1 auf die obere und untere Approximation des Koeffizienten A

Die nächste Tabelle zeigt, wie sich die Approximation des Koeffizienten A durch die unterschiedliche Wahl von Parameterwerten $a > 0$ verändert. Man sieht sehr schön, dass sich der Koeffizient A immer mehr $\frac{\lambda}{\nu c} = \frac{5000}{6000} = 0,8333$ nähert, umso größer a wird. Hierbei handelt es sich bei $\frac{\lambda}{\nu c}$ um den entsprechenden Koeffizienten der klassischen Ruinwahrscheinlichkeit ($\psi_{\text{Ruin}}(x) = \frac{\lambda}{\nu c} e^{-(\nu-\frac{\lambda}{c})x}$).

a	1	5	10	20	50	100
Obere Approx. von A	0,0266	0,0930	0,1431	0,2057	0,3021	0,3795
Untere Approx. von A	0,0245	0,0855	0,1316	0,1892	0,2778	0,3490

Tabelle 5.2: Einfluss von a auf die obere und untere Approximation des Koeffizienten A ($x_1 = -100, n = 200$)

Die untere Grafik zeigt die Konkurswahrscheinlichkeit, die man mithilfe der stückweisen konstanten Approximation der linearen Konkursratenfunktion $\omega_2(x) = -ax$ für die Parameterwerte $a = 1$ und $a = 100$ erhält, im Vergleich.

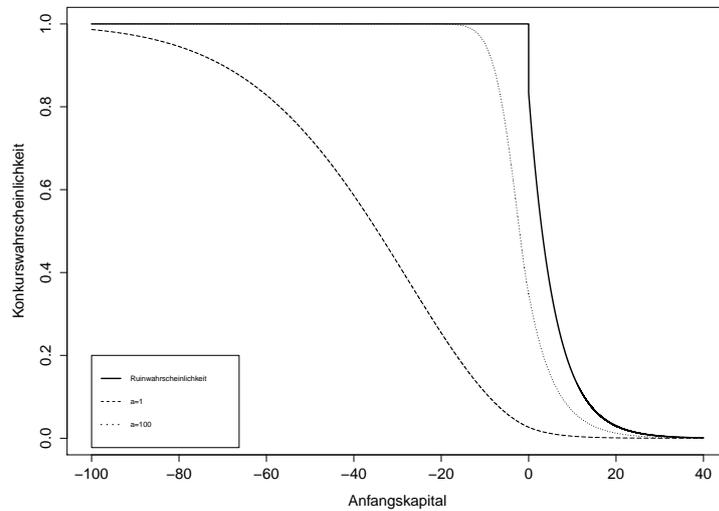


Abbildung 5.8: Approximation der Konkurswahrscheinlichkeit für $\omega_2(x)$ mit unterschiedlichen Parameterwerten a ($x_1 = -100$ und $n = 200$)

Nun führen wir dieselbe Analyse für eine exponentielle Konkursratenfunktion $\omega_3(x) = e^{-ax}$ durch.

Wir wählen diesmal $x_1 = -70$ und betrachten die Approximation der exponentiellen Konkursratenfunktion $\omega_3(x) = e^{-ax}$ für $a = 0, 1$. Die folgenden Grafiken zeigen die stückweise konstante Approximationen von $\omega_3(x)$ für die Parameter $n = 30, n = 50$ und $n = 200$, sowie den Vergleich mit der expliziten Lösung.

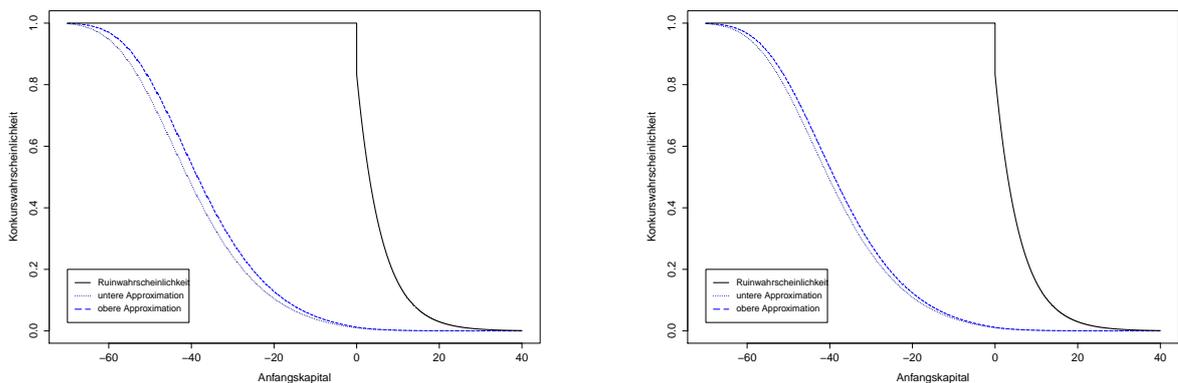


Abbildung 5.9: Approximation der exponentiellen Konkursratenfunktion für $x_1 = -70, a = 0, 1, n = 30$ bzw. $n = 50$

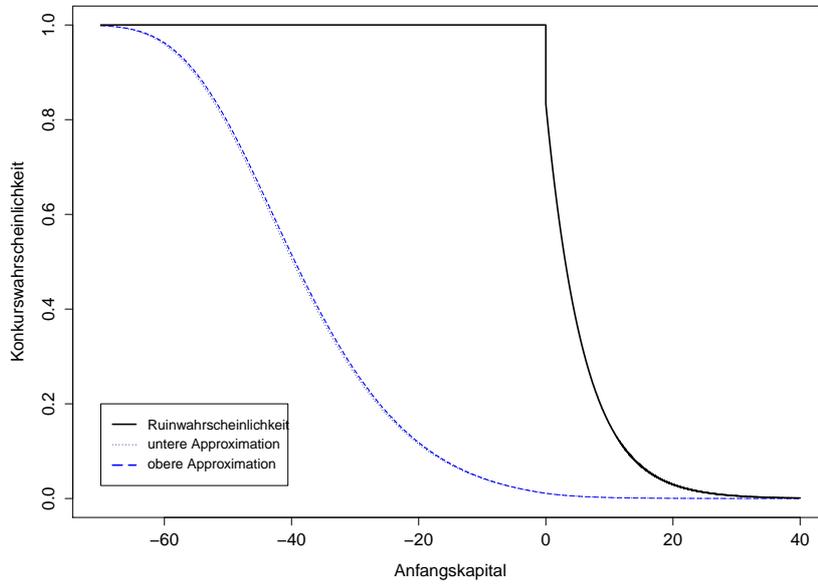


Abbildung 5.10: Approximation der exponentiellen Konkursratenfunktion für $x_1 = -70, a = 0, 1$ und $n = 200$

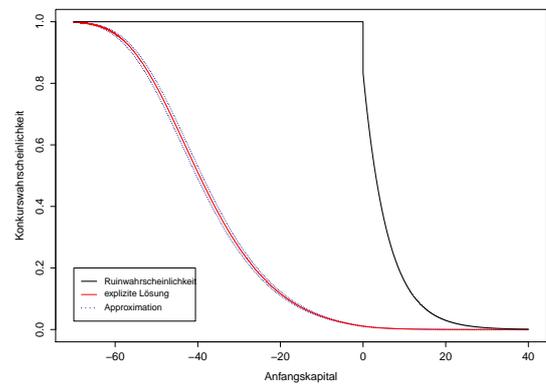
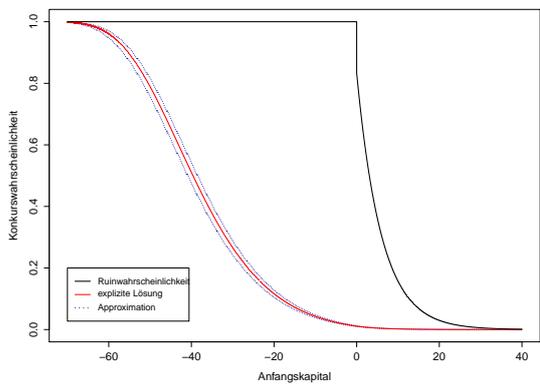


Abbildung 5.11: Vergleich der Approximation mit der exakten Lösung für $a = 0, 1$ und $n = 30$ bzw. $n = 50$

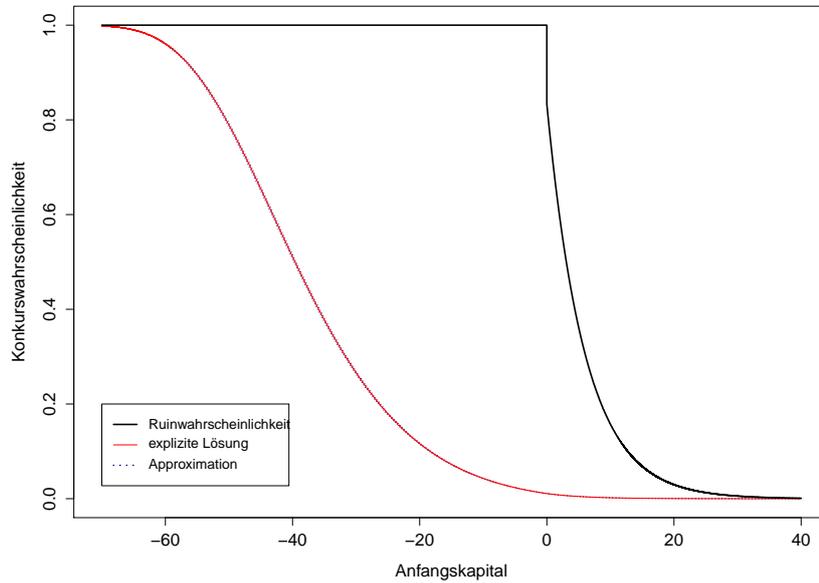


Abbildung 5.12: Vergleich der Approximation mit der exakten Lösung für $a = 0,1$ und $n = 200$

Interessant ist, dass die Konkurswahrscheinlichkeit für exponentielle Konkursratenfunktionen schneller gegen die klassische Ruinwahrscheinlichkeit konvergiert, als dies bei der linearen Konkursratenfunktionen der Fall ist. Wir haben also einen geringeren Parameterumfang a wie im linearen Fall. Wählt man nun $x_1 = -100$, so erhält man die folgende untere und obere Approximation für den Koeffizienten A :

a	untere Approx.	obere Approx.
0,1	0,01062	0,0110

Tabelle 5.3: Approximation des Koeffizienten A für $\omega_3(x)$ ($x_1 = -100$ und $n = 200$)

Die letzte Grafik zeigt noch die stückweise konstante Approximation der Konkurswahrscheinlichkeit für lineare Konkursratenfunktionen und jene für exponentielle Konkursratenfunktionen im Vergleich.

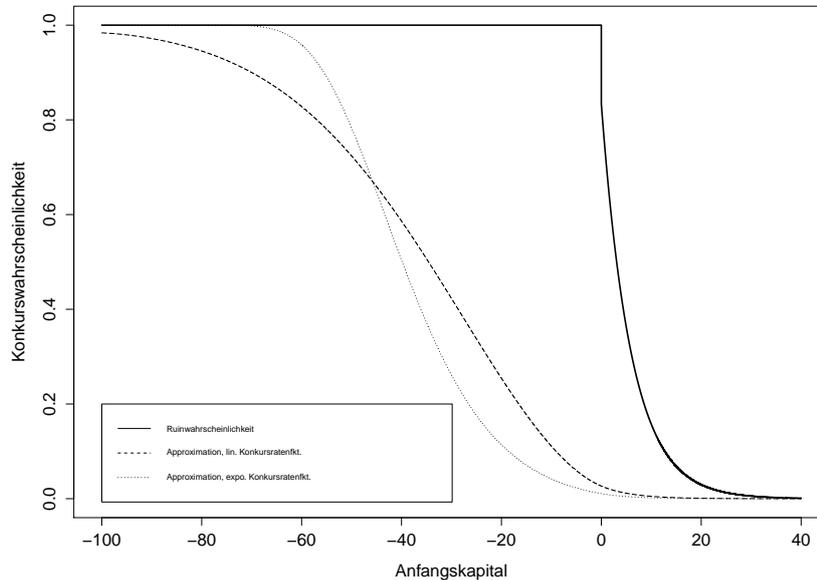


Abbildung 5.13: Vergleich der Approximation der Konkurswahrscheinlichkeit für exponentielle Konkursratenfunktionen ($a=0,1$) und für lineare Konkursratenfunktionen ($a=1$)

Zum Schluss wird ein Monte Carlo Simulationsalgorithmus als zusätzliche Alternative implementiert.

5.2 Monte Carlo Simulation

Die Monte Carlo Simulation ist eine andere Alternative um numerische Schätzungen der Konkurswahrscheinlichkeit zu erhalten. Es handelt sich dabei um einen guten Weg, in kurzer Zeit, vernünftige Resultate zu erzielen. Bevor wir nun mit der Simulation der Konkurswahrscheinlichkeit beginnen, werden wir die Monte Carlo Simulation kurz erläutern.

Oftmals lässt sich der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ einer Zufallsvariable X nicht exakt berechnen, jedoch ist es möglich diesen zu approximieren. Die Monte Carlo Methode läuft darauf hinaus, unabhängige und gleich verteilte Stichproben von X zu generieren und den $\mathbb{E}[X]$ mithilfe des arithmetischen Mittel der generierten Stichprobe zu schätzen. Man erhält:

$$\mathbb{E}[X] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}_n$$

Somit basiert die Monte Carlo Methode auf dem starken Gesetz der großen Zahlen.

Dieses besagt, dass das arithmetische Mittel der ersten n Beobachtungen gegen den Erwartungswert konvergiert.

Natürlich ist jede Schätzung mit einer gewissen Unsicherheit verbunden. Umso mehr Möglichkeiten es gibt, welchen Wert die gesuchte Größe annehmen kann, desto unwahrscheinlicher ist ein "Treffer". Dies ist besonders bei Punktschätzungen der Fall. Dabei handelt es sich um eine Schätzung deren Ergebnis ein einzelner Wert ist. Daher muss man zusätzlich zum Schätzwert immer ein Konfidenzintervall angeben. Das Konfidenzintervall gibt Auskunft darüber, wie genau beziehungsweise zuverlässig der berechnete Schätzwert ist. Von großem Interesse ist natürlich die Breite des Konfidenzintervalles. Hierbei gilt, umso schmaler, umso besser. Dies weist nämlich auf eine genaue Schätzung hin. Wie nahe die ermittelte Stichprobe im Durchschnitt am exakten Wert liegt, hängt im wesentlichen vom Standardfehler ab. Dieser beschreibt die Streuung die die Stichproben aufweisen. Somit erhalten wir mithilfe der Standardabweichung der Schätzfunktion und des gewählten Konfidenzniveaus ein geeignetes Konfidenzintervall. Durch die Erhöhung des Stichprobenumfangs kann die Breite des Konfidenzintervalles verringert werden.

Ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$, dabei handelt es sich um jenen Bereich, welcher den exakten Wert mit einer $(1 - \alpha)\%$ -Wahrscheinlichkeit einschließt, ist gegeben durch:

$$I_{1-\alpha,n}(X) = \left[\bar{X}_n - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_n}{\sqrt{n}} \right]$$

Hierbei bezeichnet $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{X}_n)^2} \approx \sqrt{\mathbb{V}(\bar{X})}$ den Schätzwert der Standardabweichung und q_α das α -Quantil.

Nun kommen wir zur Monte Carlo Simulation für die Konkurswahrscheinlichkeit. Es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi(x) = 1 - \mathbb{E}[e^{-\int_0^\infty \omega(R(t)) \mathbf{1}_{\{R(t) < 0\}} dt} \mid R(0) = x] \quad (5.3)$$

Der obere Erwartungswert kann dann mithilfe der erzeugten Zufallspfade berechnet werden.

Durch das bedingen auf die Sprungzeiten T_i , dabei handelt es sich um die Zeitpunkte wann die Schäden auftreten, sowie auf die Sprunggrößen X_i , diese spiegeln die Höhe des Schadens wieder, mittels

$$\begin{aligned}\Psi(\omega, x) \mid (T_1, X_1), (T_2, X_2), \dots &= - \int_0^\infty \omega(R(t)) \cdot \mathbf{1}_{\{R(t) < 0\}} dt \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{R(T_i) < 0\}} \int_{T_i}^{\min(T_{i+1}, T_i - \frac{R(T_i)}{c})} \omega(R(s)) ds\end{aligned}\quad (5.4)$$

und mit $T_0 = 0$, erhalten wir:

$$\psi(\omega, x) = \mathbb{E}_{(T_1, X_1), (T_2, X_2), \dots} [1 - e^{\Psi(\omega, x) \mid (T_1, X_1), (T_2, X_2), \dots}] \quad (5.5)$$

Hierbei bezeichnet $x = R(0)$ das Anfangskapital.

Insbesondere erhalten wir mit obiger Formel, wenn wir die beiden Konkursratenfunktionen $\omega_2(x) = -ax$ und $\omega_3(x) = e^{-ax}$ für $a > 0$ einsetzen, folgendes:

- Lineare Konkursratenfunktion:

$$\begin{aligned}\Psi(\omega_2, x) \mid (T_1, X_1), (T_2, X_2), \dots &= \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{R(T_i) < 0\}} \cdot a \left[(R(T_i) - cT_i) \left(\min \left(T_{i+1} - T_i, -\frac{R(T_i)}{c} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{2} \left(\left(\min \left(T_{i+1}, T_i - \frac{R(T_i)}{c} \right) \right)^2 - T_i^2 \right) \right]\end{aligned}\quad (5.6)$$

- Exponentielle Konkursratenfunktion:

$$\begin{aligned}\Psi(\omega_3, x) \mid (T_1, X_1), (T_2, X_2), \dots &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{R(T_i) < 0\}} \cdot \frac{1}{ac} e^{-a(R(T_i) - cT_i)} \\ &\quad \cdot \left(e^{-ac(\min(T_{i+1}, T_i - \frac{R(T_i)}{c}))} - e^{-acT_i} \right)\end{aligned}\quad (5.7)$$

Die untenstehende Grafik zeigt einen bestimmten Pfad, wobei der schattierte Bereich $\Psi_2(-ax, x) \mid (T_1, X_1), (T_2, X_2), \dots$ (siehe (5.6)) entspricht.

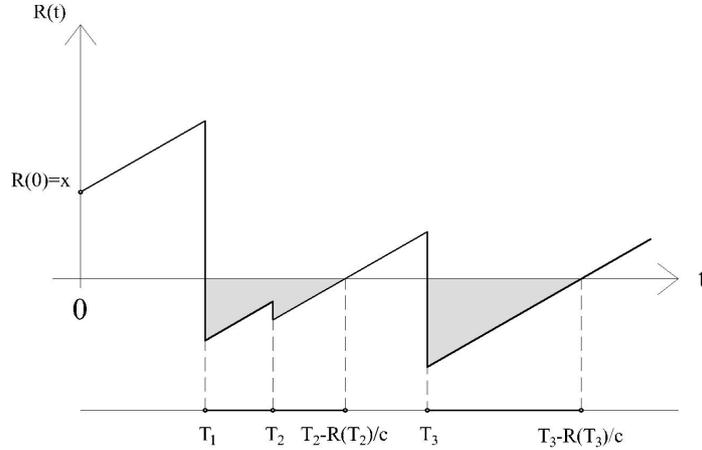


Abbildung 5.14: Ermittlung von $\Psi(-ax, x)$ für einen gewissen Pfad

Nun kommen wir zur Monte Carlo Simulation der Konkurswahrscheinlichkeit. Wir simulieren n Überschuss-Pfade, wobei der k -te solche Pfad gemäß der Funktion $\Psi(\omega, x)_k \mid (T_1, X_1), (T_2, X_2), \dots$ (siehe (5.6) und (5.7)) berechnet wird. Dazu simulieren wir entsprechende $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ sowie $X_i \sim \text{Exp}(\nu)$. Bei den W_i handelt es sich, wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, um die Zwischenankunftszeiten und es gilt für die Ankunftszeiten $T_n = \sum_{k=1}^n W_k$.

Der Schätzer der Konkurswahrscheinlichkeit ist dann durch

$$\hat{\psi}(x)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (1 - e^{\Psi(\omega, x)_k}) \quad (5.8)$$

und das zweiseitige 99,75%-tige Konfidenzintervall des Schätzers durch

$$\left(\max \left[\hat{\psi}(x)_n - \frac{2,81}{\sqrt{n}} \sigma_n, 0 \right], \min \left[\hat{\psi}(x)_n + \frac{2,81}{\sqrt{n}} \sigma_n, 1 \right] \right) \quad (5.9)$$

gegeben.

Wobei σ_n durch $\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (1 - e^{\Psi(\omega, x)_k} - \hat{\psi}(x)_n)^2}$ gegeben ist. Somit konvergieren die Schranken des Konfidenzintervalles für $n \rightarrow \infty$ gegen $\hat{\psi}(x)_n$.

Die nachstehenden Grafiken zeigen die Ergebnisse der Simulation sowie den Vergleich mit der expliziten Lösung. Für die Länge der Pfade wurde $k = 200$ gewählt. Dies bedeutet, dass k Schäden in einem Pfad vorkommen. Wir betrachten also die Parameter W_1, \dots, W_k und X_1, \dots, X_k . Der Algorithmus wurde mit 500 Pfaden ausgeführt. Dies reicht bereits aus, um eine solide Approximation der exakten Konkurswahrscheinlichkeit zu erhalten. Die Kurven zeigen den Schätzer der Konkurswahrscheinlichkeit für den Parameter $a = 100$ (lineare Konkursratenfunktion) und $a = 0,2$ (exponentielle Konkursratenfunktion). Die strichlierten Linien spiegeln das 99,75% Konfidenzintervall, welches auf den Simulationsergebnissen basiert, wieder. Wenn man die Anzahl der Pfade auf 1000 erhöht sind die Konfidenzintervalle bereits nicht mehr sichtbar.

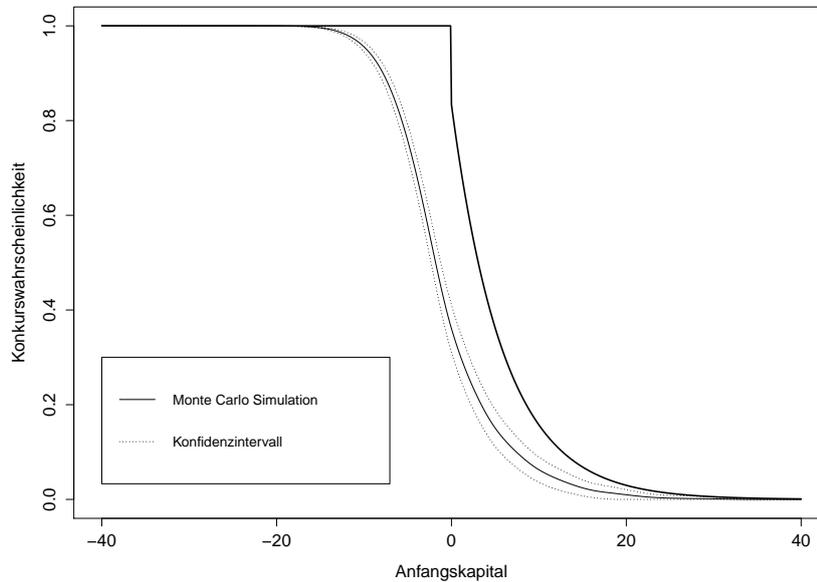


Abbildung 5.15: Monte Carlo Simulation der Konkurswahrscheinlichkeit für lineare Konkursratenfunktion mit Parameter $x_1 = -100$, $a = 100$, $k = 200$ und $n = 500$

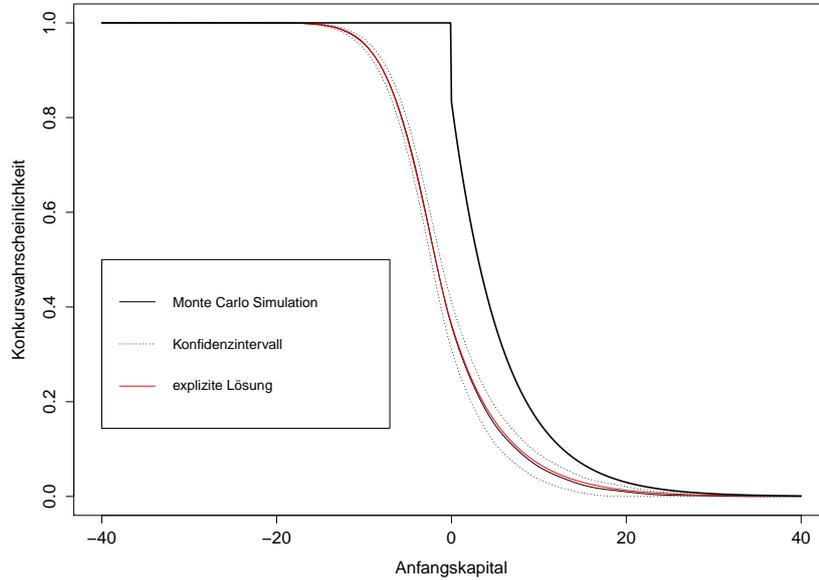


Abbildung 5.16: Vergleich der Simulation mit der exakten Lösung für $x_1 = -40, a = 100, k = 200$ und $n = 500$ (lineare Konkursratenfunktion)

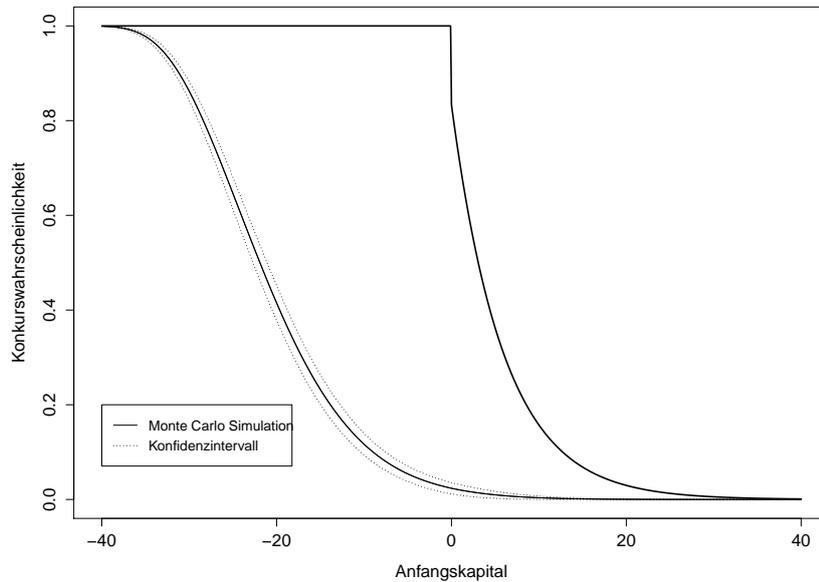


Abbildung 5.17: Monte Carlo Simulation der Konkurswahrscheinlichkeit für exponentielle Konkursratenfunktion mit Parameter $x_1 = -100; a = 0, 2, k = 200$ und $n = 500$

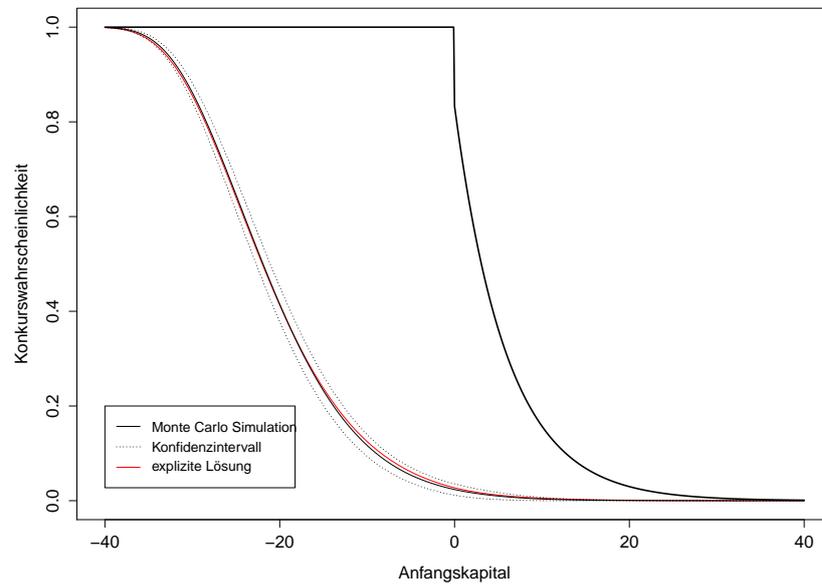


Abbildung 5.18: Vergleich der Simulation mit der exakten Lösung für $x_1 = -40$, $a = 0, 2$, $k = 200$ und $n = 500$ (exponentielle Konkursratenfunktion)

Kapitel 6

Verwendete R-Codes

6.1 R-Codes zur Berechnung der expliziten Lösungen der Konkurswahrscheinlichkeit

6.1.1 Konstante Konkursratenfunktion

```
##-----+
##| Parameter                                     |
##-----+
lambda=5000
nu=1
c1=6000
omega_1=50
omega_2=100
omega_3=500

#Ruinwahrscheinlichkeit

f=function(m) {ifelse(m>=0,lambda/(nu*c1)*exp(-(nu-lambda/c1)*m),1)}

curve(f,xlim=c(-100,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",lwd=3)

#Konkurswahrscheinlichkeit (omega_1=50)

R_1=-(-(nu-(lambda+omega_1)/c1)/2)-sqrt(((nu-(lambda+omega_1)/c1)/2)^2+nu*omega_1/c1)
rho_1=-(-(nu-(lambda+omega_1)/c1)/2)+sqrt(((nu-(lambda+omega_1)/c1)/2)^2+nu*omega_1/c1)

g_1=function(m) {ifelse(m>=0,
  (R_1-(nu-lambda/c1))/R_1*exp(-(nu-lambda/c1)*m),1-1/R_1*(nu-lambda/c1)*exp(rho_1*m))}

curve(g_1,xlim=c(-100,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
  lwd=1,lty=1,add=TRUE)

#Konkurswahrscheinlichkeit (omega_2=100)

R_2=-(-(nu-(lambda+omega_2)/c1)/2)-sqrt(((nu-(lambda+omega_2)/c1)/2)^2+nu*omega_2/c1)
rho_2=-(-(nu-(lambda+omega_2)/c1)/2)+sqrt(((nu-(lambda+omega_2)/c1)/2)^2+nu*omega_2/c1)

g_2=function(m) {ifelse(m>=0,
  (R_2-(nu-lambda/c1))/R_2*exp(-(nu-lambda/c1)*m),1-1/R_2*(nu-lambda/c1)*exp(rho_2*m))}
```

```

curve(g_2,xlim=c(-100,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
      lwd=1,lt y=2,add=TRUE)

#Konkurswahrscheinlichkeit (omega_3=500)

R_3=-(((nu-(lambda+omega_3)/c1)/2)-sqrt((nu-(lambda+omega_3)/c1)/2)^2+nu*omega_3/c1))
rho_3=-(((nu-(lambda+omega_3)/c1)/2)+sqrt((nu-(lambda+omega_3)/c1)/2)^2+nu*omega_3/c1))

g_3=function(m) { ifelse(m>=0,
  (R_3-(nu-lambda/c1))/R_3*exp(-(nu-lambda/c1)*m),1-1/R_3*(nu-lambda/c1)*exp(rho_3*m))}

curve(g_3,xlim=c(-100,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
      lwd=1,lt y=3,add=TRUE)

legend(x=-100,y=0.7,legend=c(expression(paste(omega,"=",50)),expression(paste(omega,"=",100)),
      expression(paste(omega,"=",500))),cex=0.8,lt y=1:3)

```

6.1.2 Lineare Konkursratenfunktion

```

#-----+
#| Parameter
#-----+
lambda=5000
nu=1
c1=6000
a=50
a1=100
a2=500

library(fAsianOptions)

#Ruinwahrscheinlichkeit

f=function(m) { ifelse(m>=0,lambda/(nu*c1)*exp(-(nu-lambda/c1)*m),1)}

curve(f,xlim=c(-40,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",lwd=3)

#Konkurswahrscheinlichkeit mit Parameter a=50

y1=Re(kummerU((-lambda-c1*nu)^2)/(2*a*c1),-(lambda*nu)/(2*a),1/2,ip=0))
y2=Re(kummerU((-lambda-c1*nu)^2)/(2*a*c1),-(lambda*nu)/(2*a)+1,3/2,ip=0))

print(y1)
print(y2)

g=function(m) { ifelse(m>=0,
  (1-((nu-(lambda/c1))*y1)/(nu*y1-(lambda*nu*(lambda+c1*nu))/(2*a*c1)*y2))*exp(-(nu-(lambda/c1))*m),
  1-(nu-lambda/c1)*exp((m*(2*lambda-a*m))/(2*c1))*Re(kummerU((-lambda-c1*nu+a*m)^2)/(2*a*c1),
    -(lambda*nu)/(2*a),1/2,ip=0))/(nu*y1-(lambda*nu*(lambda+c1*nu))/(2*a*c1)*y2))}

curve(g,xlim=c(-40,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
      lwd=1,lt y=1, add=TRUE)

#Konkurswahrscheinlichkeit mit Parameter a=100

x1=Re(kummerU((-lambda-c1*nu)^2)/(2*a1*c1),-(lambda*nu)/(2*a1),1/2,ip=0))
x2=Re(kummerU((-lambda-c1*nu)^2)/(2*a1*c1),-(lambda*nu)/(2*a1)+1,3/2,ip=0))

print(x1)
print(x2)

g1=function(m) { ifelse(m>=0,
  (1-((nu-(lambda/c1))*x1)/(nu*x1-(lambda*nu*(lambda+c1*nu))/(2*a1*c1)*x2))*exp(-(nu-(lambda/c1))*m)

```

```

,1-(nu-lambda/c1)*exp((m*(2*lambda-a1*m))/(2*c1))*Re(kummerU((-lambda-c1*nu+a1*m)^(2)/(2*a1*c1),
-(lambda*nu)/(2*a1),1/2,ip=0))/(nu*x1-(lambda*nu*(lambda+c1*nu))/(2*a1*c1)*x2))}

curve(g1,xlim=c(-40,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
      lwd=1,pty=2,add=TRUE)

#Konkurswahrscheinlichkeit mit Parameter a=500

z1=Re(kummerU((-lambda-c1*nu)^(2)/(2*a2*c1),-(lambda*nu)/(2*a2),1/2,ip=0))
z2=Re(kummerU((-lambda-c1*nu)^(2)/(2*a2*c1),-(lambda*nu)/(2*a2)+1,3/2,ip=0))

print(z1)
print(z2)

g2=function(m){ifelse(m>=0,
(1-((nu-lambda/c1)*z1)/(nu*z1-(lambda*nu*(lambda+c1*nu))/(2*a2*c1)*z2))*exp(-(nu-lambda/c1)*m),
,1-(nu-lambda/c1)*exp((m*(2*lambda-a2*m))/(2*c1))*Re(kummerU((-lambda-c1*nu+a2*m)^(2)/(2*a2*c1),
-(lambda*nu)/(2*a2),1/2,ip=0))/(nu*z1-(lambda*nu*(lambda+c1*nu))/(2*a2*c1)*z2))}

curve(g2,xlim=c(-40,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
      lwd=1,pty=3,add=TRUE)

legend(x=-40,y=0.4,legend=c(expression(paste(a,"=",50)),expression(paste(a,"=",100)),
                             expression(paste(a,"=",500))),cex=0.8,pty=1:3)

```

6.1.3 Exponentielle Konkursratenfunktion

```

#|-----+
#| Parameter                                     |
#|-----+
lambda=5000
nu=1
c1=6000
a=0.2
a1=0.3
a2=0.4

library(fAsianOptions)

#Ruinwahrscheinlichkeit

f=function(m){ifelse(m>=0,lambda/(nu*c1)*exp(-(nu-lambda/c1)*m),1)}

curve(f,xlim=c(-40,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",lwd=3)

#Konkurswahrscheinlichkeit mit Parameter a=0.2

y1=Re(kummerU(1/(a*c1),lambda/(a*c1),(lambda-nu*c1)/(a*c1)+1,ip=0))
y2=Re(kummerU(1/(a*c1),lambda/(a*c1)+1,(lambda-nu*c1)/(a*c1)+2,ip=0))

print(y1)
print(y2)

g=function(m){ifelse(m>=0,
(1-((nu-lambda/c1)*y1)/((nu-lambda/c1)*y1+lambda/(a*c1^(2))*y2))*exp(-(nu-lambda/c1)*m),
,1-((nu-lambda/c1)*exp(1/(a*c1))*exp(-exp(-a*m)/(a*c1))*Re(kummerU(exp(-a*m)/(a*c1),
lambda/(a*c1),(lambda-nu*c1)/(a*c1)+1,ip=0)))/((nu-lambda/c1)*y1+lambda/(a*c1^(2))*y2))}

curve(g,xlim=c(-40,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
      lwd=1,pty=1,add=TRUE)

#Konkurswahrscheinlichkeit mit Parameter a=0.3

```

```
x1=Re(kummerU(1/(a1*c1),lambda/(a1*c1),(lambda-nu*c1)/(a1*c1)+1,ip=0))
x2=Re(kummerU(1/(a1*c1),lambda/(a1*c1)+1,(lambda-nu*c1)/(a1*c1)+2,ip=0))

print(x1)
print(x2)

g1=function(m){ifelse(m>=0,
(1-((nu-lambda/c1)*x1)/((nu-lambda/c1)*x1+lambda/(a1*c1^(2))*x2))*exp(-(nu-lambda/c1)*m),
1-((nu-lambda/c1)*exp(1/(a1*c1))*exp(-exp(-a1*m)/(a1*c1))*Re(kummerU(exp(-a1*m)/(a1*c1),
lambda/(a1*c1),(lambda-nu*c1)/(a1*c1)+1,ip=0)))/((nu-lambda/c1)*x1+lambda/(a1*c1^(2))*x2))}

curve(g1,xlim=c(-40,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
lwd=1,lty=2,add=TRUE)

#Konkurswahrscheinlichkeit mit Parameter a=0.4

z1=Re(kummerU(1/(a2*c1),lambda/(a2*c1),(lambda-nu*c1)/(a2*c1)+1,ip=0))
z2=Re(kummerU(1/(a2*c1),lambda/(a2*c1)+1,(lambda-nu*c1)/(a2*c1)+2,ip=0))

print(z1)
print(z2)

g2=function(m){ifelse(m>=0,
(1-((nu-lambda/c1)*z1)/((nu-lambda/c1)*z1+lambda/(a2*c1^(2))*z2))*exp(-(nu-lambda/c1)*m),
1-((nu-lambda/c1)*exp(1/(a2*c1))*exp(-exp(-a2*m)/(a2*c1))*Re(kummerU(exp(-a2*m)/(a2*c1),
lambda/(a2*c1),(lambda-nu*c1)/(a2*c1)+1,ip=0)))/((nu-lambda/c1)*z1+lambda/(a2*c1^(2))*z2))}

curve(g2,xlim=c(-40,40),ylim=c(0,1),xlab="Anfangskapital",ylab="Konkurswahrscheinlichkeit",
lwd=1,lty=3,add=TRUE)

legend(x=-40,y=0.2,legend=c(expression(paste(a,"=",0.2)),expression(paste(a,"=",0.3)),
expression(paste(a,"=",0.4))),cex=0.8,lty=1:3)
```

6.1.4 Stückweise konstante Approximation der Konkursratenfunktion

Lineare Konkursratenfunktion

Der hier angeführte R-Code entspricht der stückweisen konstanten Approximation einer linearen Konkursratenfunktion. Dieser funktioniert analog für die exponentielle Konkursratenfunktion, man muss lediglich $\omega_3(x) = e^{-ax}$ anstatt $\omega_2(x) = -ax$ betrachten.

```
##-----+
## Parameter
##-----+
lambda=5000
c1=6000
nu=1
a=1
x_1=-100
n=200
r=-(-(nu-lambda/c1)) #Lösung der homogenen DGL, Aufpassen -r<0
epsilon=10^(-10)
x_k=c()
omega_unten=c()
r_unten=c()
rho_unten=c()
w=c()
omega_oben=c()
r_oben=c()
rho_oben=c()
v=c()
```

```

U=matrix()
z=c()

# Starten mit der unteren Approximation von Omega_2
x_k=seq(from=x_1, to=0, length.out=n) #Die Werte der x_k bestimmen

#-----+
#| Approximation unten
#-----+
# Bestimmen omega_unten (omega_2(x)=-a*x)

omega_unten=-a*x_k

print(omega_unten)

# Nun berechnen wir die Lösung der charakteristischen Gleichung (4.42) für omega_unten
r_unten=-(-(nu-(lambda+omega_unten)/c1)/2)-sqrt(((nu-(lambda+omega_unten)/c1)/2)^(2)
+nu*omega_unten/c1))
rho_unten=-(-(nu-(lambda+omega_unten)/c1)/2)+sqrt(((nu-(lambda+omega_unten)/c1)/2)^(2)
+nu*omega_unten/c1))

print(r_unten)
print(rho_unten)

#Wir wollen nun das Gleichungssystem U*z=v, Mithilfe des Gauss-Seidel Algorithmus, lösen
um die 2n Unbekannten z=(B_1,A_2,B_2,A_3,B_3,...A_n,B_n,A)

#Erzeuge den Vektor v
v=c(rep(0, 2*n-2), -1, -1/nu)

print(v)

#Erzeuge die Matrix U (für untere Approximation)

U=matrix("numeric", ncol=2*n, nrow=2*n, byrow=T)
for(i in 1)
{for(j in 1:(2*n))
{if(j==1){U[i,j]=exp(x_k[i]*rho_unten[i])}
else if(j==2){U[i,j]=-exp(-x_k[i]*r_unten[i+1])}
else if(j==3){U[i,j]=-exp(x_k[i]*rho_unten[i+1])}
else {U[i,j]=0}}}
for(i in 2)
{for(j in 1:(2*n))
{if(j==1){U[i,j]=exp(x_k[i-1]*rho_unten[i-1])/(nu+rho_unten[i-1])}
else if(j==2){U[i,j]=-exp(-x_k[i-1]*r_unten[i])/(nu-r_unten[i])}
else if(j==3){U[i,j]=-exp(x_k[i-1]*rho_unten[i])/(nu+rho_unten[i])}
else {U[i,j]=0}}}

for(i in 3:(2*n-2))
{for(j in 1:(2*n))
{if(i%%2==0)
{if(j<(i-2) || j>=((i-2)+4))
{U[i,j]=0}
else if(j==(i-2))
{U[i,j]=exp(-x_k[i/2]*r_unten[i/2])/(nu-r_unten[i/2])}
else if(j==((i-2)+1))
{U[i,j]=exp(x_k[i/2]*rho_unten[i/2])/(nu+rho_unten[i/2])}

```

```

else if (j==(i-2)+2)
{U[i , j]=-exp(-x_k[i/2]*r_unten[i/2+1]/(nu-r_unten[i/2+1]))}
else {U[i , j]=-exp(x_k[i/2]*rho_unten[i/2+1]/(nu+rho_unten[i/2+1]))}
}
else if (j<(i-1) || j>=((i-1)+4))
{U[i , j]=0}
else if (j==(i-1))
{U[i , j]=exp(-x_k[(i+1)/2]*r_unten[(i+1)/2])}
else if (j==((i-1)+1))
{U[i , j]=exp(x_k[(i+1)/2]*rho_unten[(i+1)/2])}
else if (j==((i-1)+2))
{U[i , j]=-exp(-x_k[(i+1)/2]*r_unten[(i+1)/2+1])}
else {U[i , j]=-exp(x_k[(i+1)/2]*rho_unten[(i+1)/2+1])}
}}
for (i in (2*n-1))
{for (j in 1:(2*n))
{if (j<(2*n-2))
{U[i , j]=0}
else if (j==(2*n-2) || j==(2*n-1)){U[i , j]=1}
else {U[i , j]=-1}}}
for (i in (2*n))
{for (j in 1:(2*n))
{if (j==(2*n-2))
{U[i , j]=1/(nu-r_unten[n])}
else if (j==(2*n-1))
{U[i , j]=1/(nu+rho_unten[n])}
else if (j==(2*n))
{U[i , j]=-1/(nu-r)}
else {U[i , j]=0}
}}
}
U=data.frame(U)
for (i in 1:ncol(U)){
U[, i]=as.numeric(as.character(U[, i]))
}
}
U=as.matrix(U)
print(U)

#Löse das Gleichungssystem U*z=v Mithilfe des Gauss-Seidel Algorithmus

library(pracma)

x0=rep(0,2*n)

z=itersolve(U,v,x0,tol=epsilon,method="Gauss-Seidel")

print(z)

#Berechnung der Konkurswahrscheinlichkeit

A_k=c(0,z$x[seq(2,2*n-2,2)])
B_k=z$x[seq(1,2*n-1,2)]

print(A_k)
print(B_k)

fun1=function(x, k, A_k, B_k, r_unten, rho_unten){
return(A_k[k]*exp(-r_unten[k]*x) + B_k[k]*exp(rho_unten[k]*x) + 1)
}

fun2=function(x, A){
return(A*exp(-(nu-(lambda/c1))*x))
}

x=seq(x_k[1], 40, by = 0.001)
k=2

```

```

y1=c()
for(x_i in x){
  if(x_i < 0){
    if(x_i > x_k[k+1]){
      k=k +1
    }
    y1=c(y1, fun1(x_i, k, A_k, B_k, r_unten, rho_unten))
  } else {
    y1=c(y1, fun2(x_i, z$x[2*n]))
  }
}

#-----+
#| Approximation oben |-----+
#-----+
# Bestimmen omega_oben (omega_2(x)=-a*x)

for(k in 1:(n-1)){
  w[k]=-a*x_k[k]}

#Eigentlich ist der erste Wert unendlich, da x_0=-unendlich, dann lässt sich jedoch das
  Gauss-Seidel Verfahren nicht lösen, daher führen wir die Annahmen weiter fort

omega_oben=c(-a*(x_1-w[n-1]),w)

print(omega_oben)

# Nun berechnen wir die Lösung der charakteristischen Gleichung (4.42) für omega_oben
r_oben=-(-(nu-(lambda+omega_oben)/c1)/2)-sqrt(((nu-(lambda+omega_oben)/c1)/2)^(2)
+nu*omega_oben/c1))
rho_oben=-(-(nu-(lambda+omega_oben)/c1)/2)+sqrt(((nu-(lambda+omega_oben)/c1)/2)^(2)
+nu*omega_oben/c1))

print(r_oben)
print(rho_oben)

#Wir wollen nun das Gleichungssystem U*z=v, Mithilfe des Gauss-Seidel Algorithmus, lösen
  um die 2n Unbekannten z=(B_1,A_2,B_2,A_3,B_3,...A_n,B_n,A)

#Erzeuge den Vektor v
v=c(rep(0, 2*n-2), -1, -1/nu)

print(v)

#Erzeuge die Matrix U (für untere Approximation)

U=matrix("numeric", ncol=2*n, nrow=2*n, byrow=T)
for(i in 1)
{for (j in 1:(2*n))
  if (j==1){U[i, j]=exp(x_k[i]*rho_oben[i])}
  else if (j==2){U[i, j]=-exp(-x_k[i]*r_oben[i+1])}
  else if (j==3){U[i, j]=-exp(x_k[i]*rho_oben[i+1])}
  else {U[i, j]=0}}
for(i in 2)
{for (j in 1:(2*n))
  if (j==1){U[i, j]=exp(x_k[i-1]*rho_oben[i-1])/(nu+rho_oben[i-1])}
  else if (j==2){U[i, j]=-exp(-x_k[i-1]*r_oben[i])/(nu-r_oben[i])}
  else if (j==3){U[i, j]=-exp(x_k[i-1]*rho_oben[i])/(nu+rho_oben[i])}
}

```

```

    else {U[i, j]=0}}
for (i in 3:(2*n-2))
{for (j in 1:(2*n))
{if (i%%2==0)
{if (j<(i-2) || j>=((i-2)+4))
{U[i, j]=0}
else if (j==(i-2))
{U[i, j]=exp(-x_k[i/2]*r_oben[i/2])/(nu-r_oben[i/2])}
else if (j==((i-2)+1))
{U[i, j]=exp(x_k[i/2]*rho_oben[i/2])/(nu+rho_oben[i/2])}
else if (j==((i-2)+2))
{U[i, j]=-exp(-x_k[i/2]*r_oben[i/2+1])/(nu-r_oben[i/2+1])}
else {U[i, j]=-exp(x_k[i/2]*rho_oben[i/2+1])/(nu+rho_oben[i/2+1])}
}
else if (j<(i-1) || j>=((i-1)+4))
{U[i, j]=0}
else if (j==(i-1))
{U[i, j]=exp(-x_k[(i+1)/2]*r_oben[(i+1)/2])}
else if (j==((i-1)+1))
{U[i, j]=exp(x_k[(i+1)/2]*rho_oben[(i+1)/2])}
else if (j==((i-1)+2))
{U[i, j]=-exp(-x_k[(i+1)/2]*r_oben[(i+1)/2+1])}
else {U[i, j]=-exp(x_k[(i+1)/2]*rho_oben[(i+1)/2+1])}
}}
for (i in (2*n-1))
{for (j in 1:(2*n))
{if (j<(2*n-2))
{U[i, j]=0}
else if (j==(2*n-2) || j==(2*n-1)){U[i, j]=1}
else {U[i, j]=-1}}}
for (i in (2*n))
{for (j in 1:(2*n))
{if (j==(2*n-2))
{U[i, j]=1/(nu-r_oben[n])}
else if (j==(2*n-1))
{U[i, j]=1/(nu+rho_oben[n])}
else if (j==(2*n))
{U[i, j]=-1/(nu-r)}
else {U[i, j]=0}
}}
}
U=data.frame(U)
for (i in 1:ncol(U)){
  U[, i]=as.numeric(as.character(U[, i]))
}

U=as.matrix(U)
print(U)

#Löse das Gleichungssystem U*z=v Mithilfe des Gauss-Seidel Algorithmus

library(pracma)

x0=rep(0, 2*n)

z=itersolve(U, v, x0, tol=epsilon, method="Gauss-Seidel")

print(z)

#Berechnung der Konkurswahrscheinlichkeit

A_k=c(0, z$x[seq(2, 2*n-2, 2)])
B_k=z$x[seq(1, 2*n-1, 2)]

print(A_k)
print(B_k)

```

```

k=1
y2=c()
for(x_i in x){
  if(x_i < 0){
    if(x_i > x_k[k+1]){
      k=k +1
    }
    y2=c(y2, fun1(x_i, k, A_k, B_k, r_oben, rho_oben))
  } else {
    y2=c(y2, fun2(x_i, z$x[2*n]))
  }
}
#|-----+
#| Plotten
#|-----+
#Ausgabe der Konkurswahrscheinlichkeit in einer Grafik
und Vergleich mit der Ruinwahrscheinlichkeit

g=function(x) {ifelse(x>=0,lambda/(nu*c1)*exp(-(nu-lambda/c1)*x),1)}

plot(x, y1, type = "l", lty = 3, ylim=c(0,1), xlab="Anfangskapital",
      ylab="Konkurswahrscheinlichkeit", col="darkblue")
lines(x, y2, type = "l", lty = 5, col="blue")
lines(x, g(x), lwd = 2)

legend(x=-100,y=0.2,legend=c(expression(paste("Ruinwahrscheinlichkeit")),
  expression(paste("obere Approximation")), expression(paste("untere Approximation"))), cex=0.5,
  lty=1:3,lwd=c(2,1), col=c("black","blue","darkblue"))

```

6.1.5 Monte-Carlo Simulation

Lineare Konkursratenfunktion

```

#|-----+
#| Parameter
#|-----+
lambda=5000
c1=6000
nu=1
a=100
k=200 #Länge der Pfade (max X_200 und T_200 in einem Pfad)
n=500 #Anzahl der Pfade
W=matrix()
X=matrix()
T_k=matrix()
R_k=matrix()
S=matrix()
psi_k=c()

#Zunächst erzeugen wir n exponentialverteilte Zufallsvariablen
#W Exp(lambda) (Zwischenankunftszeiten), X Exp(nu) (Schadenhöhen)

W=matrix(rexp(k*n, rate=lambda), nrow=n, ncol=k)
X=matrix(rexp(k*n, rate=nu), nrow=n, ncol=k)

print(W)

```

```

print(X)

#Ermittle  $T = \sum_{k=1}^n W_k$  (Zeitpunkt wann ein Schaden auftritt)
T_k=matrix("numeric",nrow=n,ncol=k,byrow=T)

for(i in 1:n){
  for(j in 1:k){
    if(j==1){T_k[i,j]=W[i,j]}
    else{T_k[i,j]=as.numeric(T_k[i,(j-1)])+W[i,j]}
  }}

T_k=data.frame(T_k)
for(i in 1:ncol(T_k)){
  T_k[,i]=as.numeric(as.character(T_k[,i]))
}

T_k=as.matrix(T_k)
print(T_k)

#+-----+
#| Monte Carlo Simulation
#+-----+

psi_i=function(x, i){
  if(x<0){
    sum=a*(x*min(T_k[i,1],-x/c1)+c1/2*(min(T_k[i,1],-x/c1))^2)}
  else{sum= 0}
  for(j in seq(1,k-1)){
    R_k = x + c1*T_k[i, j] - sum(X[i, 1:j])
    sum=sum + as.numeric( ifelse(R_k < 0, 1, 0) * a * ((R_k - c1*T_k[i, j])*min(T_k[i, j+1] - T_k[i, j],
    - R_k/c1) + c1/2 * ((min(T_k[i, j+1], T_k[i, j] - R_k/c1))^2 - T_k[i, j]^2)))
  }

  return(sum)
}

psi=function(x){
  sum=0
  for(i in 1:n){
    sum = sum + 1 - exp(psi_i(x, i))
  }

  return(sum/n)
}

x=seq(-40, 40, 0.1)
y=c()
y=sapply(x, psi)
names(y)=x

sigma=function(x){
  sum2=0
  for(i in 1:n){
    sum2 = sum2 + (1 - exp(psi_i(x, i)) - y[as.character(x)])^2
  }
  sig=sqrt(1/(n-1)*sum2)
  return(sig)
}

#Erzeugung des "Konfidenzintervalles"

conf_oben=sapply(x, function(x){min(y[as.character(x)] + 2.81/sqrt(n)*sigma(x), 1)})
conf_unten=sapply(x, function(x){max(y[as.character(x)] - 2.81/sqrt(n)*sigma(x), 0)})

```

```

g=function(x) {ifelse(x>=0,lambda/(nu*c1)*exp(-(nu-lambda/c1)*x),1)}

#Vergleich mit expliziter Lösung

#library(fAsianOptions)

#y1=Re(kummerU(((lambda-c1*nu)^(2))/(2*a*c1),-(lambda*nu)/(2*a),1/2,ip=0))
#y2=Re(kummerU(((lambda-c1*nu)^(2))/(2*a*c1),-(lambda*nu)/(2*a)+1,3/2,ip=0))

#print(y1)
#print(y2)

#g1=function(x){ifelse(x>=0,
(1-((nu-lambda/c1)*y1)/(nu*y1-(lambda*nu*(lambda+c1*nu))/(2*a*c1)*y2))*exp(-(nu-lambda/c1)*x)
,1-(nu-lambda/c1)*exp((x*(2*lambda-a*x))/(2*c1))*Re(kummerU((-lambda-c1*nu+a*x)^(2)/(2*a*c1),
-(lambda*nu)/(2*a),1/2,ip=0))/(nu*y1-(lambda*nu*(lambda+c1*nu))/(2*a*c1)*y2)}

#+-----+
#| Plotten
#+-----+

plot(x, y, type = "l",ylim=c(0,1), xlab="Anfangskapital",
      ylab="Konkurswahrscheinlichkeit")
lines(x, conf_oben, type = "l", lty = 3)
lines(x, conf_unten, type = "l", lty = 3)
#lines(x, g1(x), type="l", col="red")
lines(x, g(x), lwd = 2)

legend(x=-40,y=0.3,legend=c(expression(paste("Monte Carlo Simulation")),
expression(paste("Konfidenzintervall"))),cex=0.8,lty=c(1,3),lwd=c(1,1))

```

Exponentielle Konkursratenfunktion

```

#+-----+
#| Parameter
#+-----+
lambda=5000
c1=6000
nu=1
a=0.2
k=200 #Länge der Pfade (max X_200 und T_200 in einem Pfad)
n=500 #Anzahl der Pfade
W=matrix()
X=matrix()
T_k=matrix()
R_k=matrix()
S=matrix()
psi_k=c()

#Zunächst erzeugen wir n Exponentialverteilte Zufallsvariablen
#W Exp(lambda) (Zwischenankunftszeiten), X Exp(nu) (Schaden?hen)

W=matrix(rexp(k*n, rate=lambda),nrow=n, ncol=k)
X=matrix(rexp(k*n, rate=nu),nrow=n, ncol=k)

print(W)
print(X)

#Ermittle T=sum^(n)_k=1 W_k (Zeitpunkt wann ein Schaden auftritt)

```

```
T_k=matrix("numeric",nrow=n,ncol=k,byrow=T)

for(i in 1:n){
  for(j in 1:k){
    if(j==1){T_k[i,j]=W[i,j]}
    else{T_k[i,j]=as.numeric(T_k[i,(j-1)])+W[i,j]}
  }
}

T_k=data.frame(T_k)
for(i in 1:ncol(T_k)){
  T_k[,i]=as.numeric(as.character(T_k[,i]))
}

T_k=as.matrix(T_k)
print(T_k)

#-----+
#| Monte Carlo Simulation
#-----+

psi_i=function(x, i){
  if(x<0){
    sum=1/(a*c1)*exp(-a*x)*(exp(-a*c1*(min(T_k[i,1],-x/c1)))-1)}
  else{sum=0}
  for(j in seq(1,k-1)){
    R_k=x+c1*T_k[i,j]-sum(X[i,1:j])
    sum=sum+as.numeric(ifelse(R_k<0,1,0)*1/(a*c1)*exp(-a*(R_k-c1*T_k[i,j]))
      *(exp(-a*c1*min(T_k[i,j+1],T_k[i,j]-R_k/c1))-exp(-a*c1*T_k[i,j])))
  }

  return(sum)
}

psi=function(x){
  sum=0
  for(i in 1:n){
    sum=sum+1-exp(psi_i(x,i))
  }

  return(sum/n)
}

x=seq(-40,40,0.1)
y=c()
y=sapply(x,psi)
names(y)=x

sigma=function(x){
  sum2=0
  for(i in 1:n){
    sum2=sum2+(1-exp(psi_i(x,i))-y[as.character(x)])^2
  }
  sig=sqrt(1/(n-1)*sum2)
  return(sig)
}

#Erzeugung des "Konfidenzintervalles"

conf_oben=sapply(x,function(x){min(y[as.character(x)]+2.81/sqrt(n)*sigma(x),1)})
conf_unten=sapply(x,function(x){max(y[as.character(x)]-2.81/sqrt(n)*sigma(x),0)})

g=function(x){ifelse(x>=0,lambda/(nu*c1)*exp(-(nu-lambda/c1)*x),1)}

#-----+
#| Plotten
```

```

#-----+

library(fAsianOptions)

y1=Re(kummerU(1/(a*c1), lambda/(a*c1), (lambda-nu*c1)/(a*c1)+1, ip=0))
y2=Re(kummerU(1/(a*c1), lambda/(a*c1)+1, (lambda-nu*c1)/(a*c1)+2, ip=0))

print(y1)
print(y2)

g1=function(x){ifelse(x>=0,
(1-((nu-(lambda/c1))*y1)/((nu-lambda/c1)*y1+lambda/(a*c1^(2))*y2))*exp(-(nu-(lambda/c1))*x)
,1-((nu-lambda/c1)*exp(1/(a*c1))*exp(-exp(-a*x)/(a*c1))*Re(kummerU(exp(-a*x)/(a*c1),
lambda/(a*c1), (lambda-nu*c1)/(a*c1)+1, ip=0)))/((nu-lambda/c1)*y1+lambda/(a*c1^(2))*y2))}

plot(x, y, type = "l", ylim=c(0,1), xlab="Anfangskapital",
      ylab="Konkurswahrscheinlichkeit")
lines(x, conf_oben, type = "l", lty = 3)
lines(x, conf_unten, type = "l", lty = 3)
lines(x, g1(x), type="l", col="red")
lines(x, g(x), lwd = 2)

legend(x=-40,y=0.2, legend=c(expression(paste("Monte_Carlo_Simulation")),
expression(paste("Konfidenzintervall")), expression(paste("explizite_Loesung"))),
      cex=0.8, lty=c(1,3,1), lwd=c(1,1,1), col=c("black", "black", "red"))

```

Literaturverzeichnis

- [1] Asmussen, Soren; Albrecher, Hansjörg: Ruin probabilities
- [2] Skriptum von Hansjörg Albrecher: Finanz- und Versicherungsmathematik (Version: Februar 2006)
- [3] Prof. Dr. Wolf-Rüdiger Heilmann; Prof. Dr. Klaus Jürgen Schröter: Grundbegriffe der Risikotheorie
- [4] Vorlesungsmitschrift von Friedrich Hubalek: Risiko- und Ruintheorie (WS 2013/2014)
- [5] Hansjörg Albrecher; Volkmar Lautscharn: From ruin to bankruptcy for compound Poisson surplus processes
- [6] Hansjörg Albrecher; Eric C.K. Cheung; Stefan Thonhauser: Randomized observation times for compound Poisson risk model: Dividends
- [7] Abramowitz and Stegun: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and mathematical Tables (1972) (Section 13)
- [8] <https://de.wikipedia.org/wiki/Gauß-Seidel-Verfahren> (Stand 24.07.2015)